Aspects mathématique et métaphysique du continu chez le jeune Leibniz (1671-1676)

Auteur : Claude, Olivier
Promoteur(s) : Bouquiaux, Laurence
Faculté : Faculté de Philosophie et Lettres
Diplôme : Master en philosophie, à finalité approfondie
Année académique : 2020-2021
URI/URL : http://hdl.handle.net/2268.2/12117

Faculté de Philosophie et Lettres

Département de Philosophie

Aspects mathématique et métaphysique du continu chez le jeune Leibniz (1671-1676)

Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de Master en philosophie à finalité approfondie

Jury

Travail réalisé sous la direction de Laurence Bouquiaux

Lecteurs : Denis Seron et Julien Pieron

Olivier Claude

Mai 2021

Remerciements

Nous voudrions tout d'abord adresser toute notre reconnaissance à Madame Laurence Bouquiaux pour la confiance qu'elle nous a témoignée en acceptant de nous accompagner dans le labyrinthe du continu. Nous la remercions pour ses conseils, pour sa disponibilité et sa bienveillance tout au long de cette année.

Nous tenons à remercier également Monsieur Samuel Nicolay et Monsieur Laurent Loosveldt pour leur soutien et leurs encouragements.

Nous remercions également notre Maman qui nous a donné très tôt la curiosité pour les Mathématiques et l'abstraction.

Finalement, nous remercions Amaury, notre petit frère, pour sa bienveillance et sa présence réconfortante.

Introduction

> Il y a deux labyrinthes fameux où notre raison s'égare bien souvent: l'un regarde la grande question du libre et du nécessaire, surtout dans la production et dans l'origine du mal; l'autre consiste dans la discussion de la continuité et des indivisibles qui en paraissent les éléments... Le premier embarrasse presque tout le genre humain, l'autre n'exerce que les philosophes[1]

Lorsque ces lignes paraissent en 1710 dans ses *Essais de théodicée*, Leibniz a déjà parcouru durant de nombreuses années les dédales du deuxième labyrinthe qu'il décrit dans cet extrait. Si Leibniz pénètre le labyrinthe du continu en tant que philosophe en 1672, il en ressort en 1676 autant mathématicien que philosophe. Ce labyrinthe concerne des problèmes mathématiques, physiques et métaphysiques ; l'originalité et la force de Leibniz seront de jouer de la diversité des domaines du continu de manière à articuler ces trois disciplines les unes avec les autres. Il s'agit d'une articulation entre trois domaines perméables les uns aux les autres.

Au cours de ce travail, il s'agira de se frayer un chemin à travers le labyrinthe du continu en étudiant l'évolution du point de vue de Leibniz concernant la composition du continu pendant une période centrée sur le séjour à Paris. Chez Leibniz, le problème de la composition de la matière et celui de la composition du mouvement se présentent comme des cas particuliers du problème de la composition du continu. Nous aborderons l'enquête sur le continu par ces deux points.

Nous pensons qu'il serait possible de déplier toute la pensée de Leibniz à propos de la question du continu par l'étude de la composition de la matière et du mouvement. Sur cette question comme sur tant d'autres, il fera en sorte que son point de vue soit une synthèse originale des solutions de ses contemporains et de ses prédécesseurs. Nous nous intéresserons davantage à l'évolution des concepts convoqués par Leibniz au sein de sa propre pensée qu'à l'étude généalogique de ces concepts.

[1] Leibniz, *Essais de théodicée,* Préface, GF Flammarion, Paris, 1969, p.29-30.

Avec la période parisienne (1672-1676), Leibniz devient réellement un mathématicien d'exception, celui-là même qui établit les bases du calcul différentiel et invente un formalisme redoutablement efficace. D'un point de vue formel, il est particulièrement intéressant de s'attarder sur la façon dont la connaissance mathématique s'insinuera de manière infiniment profonde au sein de la réflexion leibnizienne sur la composition de la matière et du mouvement en particulier et sur la composition d'un continu en général. Le problème de la composition du continu permet sinon d'étudier de manière exhaustive au moins de pressentir l'influence des mathématiques sur les thèses métaphysiques d'un philosophe comme Leibniz.

Plus concrètement, nous nous frotterons aux concepts de point, d'instant, de limite, de droite, d'infiniment grand et d'infiniment petit, de continuité, de contiguïté, d'indivisible, d'extremum, d'atome, de plenum et de vacuum, de mouvement et de repos, de rapport, d'erreur, de perspective, d'agrégat, de substance, d'actuel et de potentiel, de permanence et de changement, d'unité et de multiplicité, etc. Ces mots, dans la pensée de Leibniz, revêtent une signification qui fluctue en fonction de l'époque et du domaine considérés. Les trois domaines que nous considérons dans ce travail sont les mathématiques (géométrie et analyse), la physique et la métaphysique. Plus précisément, nous tenterons de dégager un enrichissement réciproque entre les mathématiques et la métaphysique chez Leibniz ; cet enrichissement n'étant pas sans influence sur sa physique, nous en traiterons, certes dans une moindre mesure, dans ce travail.

Concernant les périodes, nous considérons la période parisienne comme charnière. Nous étudierons la période qui précède le séjour à Paris à l'aide de deux textes. Le premier est destiné à l'Académie des Sciences de Paris tandis que l'autre est rédigé à l'attention de la Royal Society de Londres. Il s'agit respectivement de la *Theoria motus abstracti* et de la *Theoria motus concreti*. Lorsque nous traiterons la période parisienne, nous nous plongerons dans l'intimité de notes de travail et de brouillons d'une pensée en pleine ébullition. Notre itinéraire leibnizien se clôturera par le *Pacidius Philalethi*, un des rares textes de cette période que Leibniz aurait pu rédiger dans l'optique d'une publication.
Grâce à l'examen de ces deux temps leibniziens, nous espérons dégager un certain contraste dans la pensée de Leibniz. Ce contraste permettrait d'une part de montrer l'évolution des

concepts se rapportant à l'étude du continu et d'autre part de mettre en évidence l'influence sur la philosophie de Leibniz de son apprentissage des mathématiques pendant son passage à Paris.

Il nous semble que l'étude des connaissances de Leibniz avant son passage à Paris est d'une importance cruciale pour mesurer l'influence des mathématiques sur sa philosophie en général et sur le continu en particulier. Nous allons découvrir par le biais de deux textes de jeunesse annoncés plus haut les germes d'une pensée originale dans une mécanique encore inexacte appelée par la suite à changer au gré de progrès mathématiques.

Le projet d'étudier l'influence des mathématiques sur d'autres domaines de la pensée pourrait paraître quelque peu incongru. Cependant, une particularité de Leibniz en tant que philosophe est son désir presque maladif de complétude et d'adéquation : sa mécanique, sa physique ou encore sa métaphysique sont certes d'une part nettement séparées au sein de différents « Royaumes », mais entretiennent néanmoins des rapports entre eux. Cela fait dire, par exemple, à Hannequin que « le degré de perfection de sa métaphysique a toujours dépendu d'une manière étroite du degré de perfection de ses notions mécaniques »[2], nous voudrions tenter de montrer que ce degré de perfection dépend également de ses connaissances en mathématiques, en particulier lorsque les problèmes métaphysiques traités concernent le continu.

D'Arthur Hannequin, à Marc Parmentier en passant par Michel Serres, de nombreux commentateurs du philosophe d'Hanovre n'ont eu de cesse de mettre en avant l'attrait typiquement leibnizien pour la méthode qui permet d'acquérir de nouvelles connaissances. Parmentier, dans sa traduction des textes sur la naissance du calcul différentiel, s'étend longuement sur l'*ars inveniendi* leibnizien pour nous faire découvrir un Leibniz qui ne cesse d'ouvrir de nouvelles voies pour la pensée humaine[3]. Une des inventions majeures que l'histoire des mathématiques doit à Leibniz est certainement son *formalisme* concernant le calcul différentiel.

Formalisme et méthode sont peut-être deux préoccupations sur lesquelles la pensée de

---

[2] Hannequin, Etudes d'histoire des sciences et d'histoire de la philosophie, Félix Alcan, 1908, Paris, p. 21.

[3] Voir au sujet de l'*ars inveniendi* : M. Parmentier, *Naissance du calcul différentiel*, Vrin, Paris, 1995 p 18-30.

Leibniz revient sans cesse. Il est des domaines hors de notre portée d'être humain fini qui peuvent être mis à notre portée par un formalisme bien construit. Cette attitude leibnizienne par rapport à la forme et au modèle mathématique, Michel Serres l'a fort bien cernée dans son ouvrage magistral sur Leibniz. De toutes les formes de la pensée, il en existe peut-être une qui aurait pour projet de subsumer les autres : les mathématiques. À ce sujet, Michel Serres se demandait déjà :

> À quoi bon distinguer sur le général, l'initial et le formel, si on ne doit pas, ce faisant, forger des armes puissantes pour des rencontres surprenantes ? À travers des régions fort éloignées circule souvent un rapport souterrain, que l'intuition n'atteint pas, mais que parfois saisit un formalisme pur et affiné. L'histoire des mathématiques est pleine de ces rencontres : il faut parfois aller très loin dans le raffinement formel pour voir tout à coup s'assembler des discordances initiales. Leur langage ouvre sans cesse des harmonies, fait correspondre et réunit. Cela était vrai aux temps où Leibniz s'émerveillait de voir ordonnées les diverses coupes de cônes, ou s'arithmétiser l'analyse ; et il anticipait le temps actuel où la mathématique réunit mille modèles en une structure convenablement préparée et affinée. C'est que plus on raffine sur le général ou le pur, plus on ouvre de chemins coordonnés à la méditation qui suit. L'aptitude au divers est proportionnelle à la pureté initiale. Plus on formalise, plus on comprend. Leibniz a composé ainsi le modèle mathématique et, en cela, il n'est pas l'initiateur de l'esprit moderne, il en est l'inventeur. Il a ainsi construit son système philosophique. Et cette composition, il ne l'a point rêvée, mais réalisée.[4]

Leibniz et Paris en 1672, c'est une « rencontre surprenante » qui n'en a pas fini de nous surprendre. Dans ce travail, très humblement, nous souhaitons explorer avec quel raffinement Leibniz étudie le continu, en mathématique et en métaphysique.

[4] Michel Serres, Le système de Leibniz et ses modèles mathématiques, PUF coll. Épiméthée, Paris, 1968, p. 41.

Insistons une dernière fois, avec Serres, sur le lien de complémentarité entre mathématiques et métaphysique :

> Il y a toujours philosophie, même en mathématiques, il y a toujours mathématiques, même en philosophie. Leur lien ne s'établit pas sur une coupure. De même qu'il existe des *Initia rerum mathematicarum metaphysica*, de même il est une mathématique sublime de la métaphysique. Le rapport de ces deux domaines obéit au principe de continuité le plus général, et c'est pourquoi, de nouveau, l'une peut être un excellent modèle de l'autre, dans la mesure où l'ordonnance systématique du premier se reflète continûment dans la législation cohérente du second. […] Le commentaire ne doit donc pas expliquer l'une par l'autre, mais les deux ensemble et d'un même mouvement.[5]

À travers ce travail, nous tenterons de capter le prélude de ce mouvement qui unit *continûment* mathématiques et métaphysique. Ce mouvement continuera à caractériser les textes leibniziens bien après le voyage à Paris. Pour arriver à nos fins, nous descendrons dans l'intimité des pensées de la période parisienne que Leibniz jette dans des notes de travail, véritable signe d'une pensée en construction.

Concernant l'état de ses mathématiques avant son passage à Paris, nous savons que Leibniz n'a ajouté à ses connaissances mathématiques acquises à l'université de Iéna sous la tutelle de Ehrard Weigel que la géométrie des indivisibles de Cavalieri et l'algèbre de Léotaud[6]. Ajoutons encore que les universités allemandes que Leibniz a fréquentées n'enseignaient pas l'analyse cartésienne. Il semble que Leibniz n'a pu mesurer la puissance de l'analyse cartésienne qu'à partir de son arrivée à Paris, en 1672.

---

[5] *Id.* p.65.

[6] Voir M. Parmentier, *La naissance du calcul différentiel*, Vrin, Paris, 1995, p.11.

Leibniz et le continu entre 1669 et 1671

Dès 1669, nous lisons chez Leibniz un souci de rapprocher les Modernes et Aristote[7]. Dans une lettre à Thomasius, son ancien maître, on peut découvrir un jeune Leibniz séduit par la clarté de la mécanique moderne qui résout le monde en grandeur, figure et mouvement[8]. L'extrait de la lettre qui nous intéresse ici se place dans une tentative leibnizienne de résolution de la controverse de l'origine des formes par, comme nous allons le montrer, la relation entre la matière première et le mouvement.

Pour arriver à ses fins, Leibniz reprend à son compte une partie de la philosophie d'Aristote. En particulier, il conserve la notion de matière première que, dans un effort de conciliation avec les Modernes, il définit comme étendue et antitypie[9]. De cette définition, Leibniz déduit le corollaire suivant : « La nature même de la matière réside en ceci qu'il y a une certaine chose dense, impénétrable et, par conséquent, mobile, quand se présente une autre chose à laquelle il lui faut céder »[10]. Cette lettre à Thomasius du 30 avril 1669 nous semble particulièrement intéressante, car elle introduit déjà le thème de la division de la matière en fonction des mouvements. Nous verrons que ce thème interviendra jusqu'au bout dans l'étude de la composition de la matière.

Dans cette lettre, lorsque la matière première est au repos, elle est dite continue et homogène. Pour Leibniz, la matière première est « pure homogénéité, sans la moindre diversité, si ce n'est par le mouvement »[11]. La matière première ne reçoit de limites que par le biais des mouvements qui la pénètrent. La diversité au sein d'une portion de matière première ne voit le jour que par l'entremise de choc avec une autre portion de matière première.

Leibniz associe continuité et potentialité même si le potentiel de formes que peut prendre une

[7] À cette époque, Leibniz rejette explicitement la présence des formes substantielles dans les corps. Le rapprochement entre Aristote et les Modernes doit se faire en épurant le premier de tout ce qui n'est pas grandeur, figure et mouvement. Pour une description de l'attitude de Leibniz par rapport aux Modernes et à l'héritage de la tradition, nous renvoyons aux pages 80 et 81 de l'ouvrage de Michel Serres précédemment cité dans ce travail.

[8] A,11 ; G, 6 ; 18.

[9] *id* ; 19.

[10] *Ibid.*

[11] *Ibid.*

portion de la matière première est déterminé par sa rencontre avec une autre portion de matière première en mouvement.

De la matière première en mouvement possède donc des limites, elle est dans une relation de discontinuité avec le reste de la matière première dont est composé l'univers. Les limites de la discontinuité peuvent être introduites de deux manières selon la vision leibnizienne d'Aristote : soit les parties sont séparées d'un tout en laissant un vide entre les deux parties (ce qui a pour conséquence de détruire la contiguïté) soit la contiguïté est conservée en considérant deux parties séparées l'une de l'autre par un mouvement différent sans pour autant postuler l'existence d'un vide entre ces deux parties. Pour illustrer son propos, Leibniz a recours à un exemple : « deux sphères, dont l'une inclut l'autre, peuvent se mouvoir en sens divers et, néanmoins, restent contiguës, bien que cesse leur continuité »[12]. Cet exemple illustre le fait qu'il est possible de mouvoir deux sphères, l'une contenue dans l'autre, tout en ayant un contact parfait entre les deux sphères à chaque instant. Les deux sphères sont contiguës entre elles lorsqu'elles bougent, mais continues lorsqu'elles sont en repos l'une par rapport à l'autre.
Leibniz conserve dès cette époque la différence aristotélicienne entre contiguïté et continuité : deux parties sont dites contiguës si leurs limites se touchent sans être les mêmes tandis que deux parties sont dites continues si leurs limites ne font qu'un.

Mettons à contribution une dernière fois cette lettre. Le paragraphe 24 contient une forme de raisonnement que Leibniz conservera par la suite. Il s'agit du rapport de la chaîne de causalité qui existe entre le mouvement et l'individuation, ici l'individuation est pensée en termes de forme imprimée sur une matière première : « du mouvement, en effet naît la division, de la division les limites des parties, des limites des parties leurs figures, de la figure les formes, donc les formes viennent du mouvement. D'où l'on voit que toute disposition à la forme est mouvement »[13].

Gardons à l'esprit que le mouvement qui, pour l'instant, n'a un rôle majeur que dans la composition de la matière verra ce rôle étendu à d'autres continus. Il serait intéressant

[12] *id.* ; 23.

[13] *id.* ; 24.

d'étudier brièvement un extrait d'un texte portant directement sur le mouvement, datant de la même époque, mais qui se situe cette fois dans un contexte physique. Cette étude permettra d'une part de faire intervenir une autre suite de concepts qui nous seront indispensables pour la suite de notre travail et d'autre part de montrer une première ébauche de la structure des rapports entre ces concepts autour de la question du continu et de la composition de la matière et du mouvement.

La Theoria motus abstracti de 1670-71

La TMA[14] proprement dite est précédée d'un petit mot à l'adresse de ses lecteurs, ce mot est intéressant pour nous, car il contient un petit fragment où Leibniz mentionne l'intérêt de l'étude du continu ainsi que les enseignements que nous pouvons en tirer:

> Avoir débrouillé le labyrinthe qui embarrasse les esprits dans les premiers arrangements du continu et du mouvement a beaucoup d'importance pour instituer les bases des sciences, pour mettre à mal les succès des sceptiques, pour établir sur un terrain solide la géométrie des indivisibles et l'arithmétique des infinis, sources de tant de théorèmes remarquables ; pour constituer une hypothèse physique s'accordant en toutes ses parties et, ce qui est le plus important, obtenir des démonstrations parfaitement géométriques, jusqu'ici hors d'atteinte, au sujet de la nature intime de la pensée, de l'immortalité de l'esprit et de la Cause Première[15].

Pour nous, ce texte est de première importance, car Leibniz y tente, entre autres, de clarifier le statut des indivisibles et d'approcher l'étude des lignes courbes par des lignes droites. Les indivisibles sont une thématique majeure de l'étude du continu en général. De plus, comme son nom l'indique, la TMA est une théorie du mouvement et le mouvement a ceci d'élégant pour notre étude qu'il se décline en deux continus différents. En effet, le mouvement est un

---

[14] Nous utilisons l'abréviation « TMA » pour *Theoria motus abstracti* dans le reste du texte.

[15] Gottfried Wilhelm Leibniz, Physique et métaphysique Opuscules de jeunesse, Trad. René Violette, Éditions Lambert-Lucas, Limoges, 2012, p. 134-5.

certain rapport entre une distance parcourue et une certaine durée. La distance et la durée sont toutes deux composées d'indivisibles[16], nous verrons que pour Leibniz il s'agit bien de deux types d'invisibles différents.

Rendons-nous sans plus tarder dans la section des « Principes fondamentaux » de la TMA qui sont autant de présupposés admis à l'époque par Leibniz. Ces présupposés portent sur le continu, la composition de la matière, la définition d'un continu ou encore le mouvement. Certains présupposés sont des axiomes ou des définitions pour lesquels Leibniz ne s'embarrasse pas d'une démonstration tandis que d'autres sont pourvus de justifications. Il est intéressant d'étudier la forme des démonstrations proposées par Leibniz dans cet extrait, nous aurons ainsi obtenu un point de comparaison pour les démonstrations et justifications de la période parisienne. Ce texte est d'autant plus important qu'il est souvent considéré comme « le point culminant des théories mécaniques et mathématiques de Leibniz avant son voyage à Paris »[17], nous pourrons donc étudier la période parisienne par contraste avec les premières théories et les premières manières de démontrer présentes dans ce texte.

Dans la *Theoria motus abstracti*, en ce qui concerne la manière d'étudier le mouvement, Leibniz adopte des principes complètement différents de ceux de ses contemporains. Selon Leibniz, les Modernes étudient les mouvements qui nous sont accessibles par les sens, ils étudient empiriquement le mouvement à l'aide d'observations, d'expériences ou encore de calculs ; les Modernes déduisent de l'expérience des lois générales concernant le mouvement. Le projet de la TMA, à l'inverse, est d'établir des règles et des lois abstraites qui permettent de rendre compte des mouvements accessibles dans l'expérience. Pour un Moderne, il faut dériver les lois générales qui régissent le mouvement par observation et expérience tandis que pour Leibniz on ne peut expliquer le mouvement dans l'expérience qu'en étudiant au préalable des lois abstraites. En définitive, pour Leibniz, le mouvement doit être fondé sur de la géométrie et non sur de la mécanique, car la

---

[16] *id.* p. 137.

[17] Arthur Hannequin, Etudes d'histoire des sciences et d'histoire de la philosophie, Félix Alcan, 1908, Paris, p. 61.

mécanique bien que réelle se révèle être inexacte[18] tandis que la géométrie est exacte, mais imaginaire. Il ne faut donc pas s'étonner que la TMA soit d'abord l'esquisse d'une science mathématique et géométrique du mouvement ; cette science trouve ses fondements dans la construction géométrique[19]. Par le biais de la TMA nous pouvons prendre une première fois la mesure de l'adéquation et de la complétude de la philosophie de Leibniz en ce qui concerne les relations entre géométrie, mécanique et mathématique.

Dans cette étude des principes abstraits du mouvement, Leibniz allait très rapidement être confronté à l'étude du continu. En effet, le mouvement se caractérisant par une durée et une distance, il est nécessaire de définir ces deux quantités afin d'étudier le mouvement. Or ces deux quantités seront considérées comme deux quantités continues par Leibniz et nous verrons comment il définira ces continus et ce que ces définitions impliquent. Si Leibniz veut mener à bien son projet de fondation du mouvement sur des principes abstraits, il doit étudier le continu, il doit se frayer un passage dans le labyrinthe du continu. Une première étape dans l'étude de tout continu est bien sûr de se demander de quoi il peut être composé, c'est l'objet des 5 premiers points de la TMA.

Les principes fondamentaux de la TMA

Avant de nous plonger dans le texte de la TMA, il me semble opportun et nécessaire d'introduire brièvement la manière dont Leibniz comprend la distinction d'origine aristotélicienne entre un continu actuel et un continu potentiel, car il me semble que cette distinction fait partie des concepts qui ont certainement informé les idées de Leibniz concernant le continu.

---

[18] Nous pourrions imaginer que Leibniz pense devoir, à cette époque, distinguer très fermement le domaine de la mécanique avec ses raisonnements basés sur l'induction et le domaine de la géométrie basé sur la construction imaginaire et parfaite de figures, car pour lui il ne peut exister un rapport entre l'exactitude des idées et le caractère toujours inexact des données des sens qui sont le matériau pour n'importe quelle induction.

[19] Cette position évoluera, voir à ce sujet l'article de Michel Fichant, *Les étapes de la dynamique leibnizienne : de la réforme à la fondation,in* Wenchao Li (éd.), „*Für unser Glück oder das Glück anderer*", vol. 6 (Hildesheim : Olms, 2017), 109-128.

Leibniz définit un continu comme

> a whole between any of whose parts other parts of the same thing are interjected. Something is interjected between two things if the sum of its distances from each of them is the distance apart of the two things.[20]

La distinction entre un continu actuel et potentiel découle de la distinction entre une division actuelle ou potentielle d'un continu en ses parties. Pour Leibniz, comme nous le verrons plus tard dans d'autres textes, dans le cas d'une division potentielle, la seule caractéristique attribuable au tout, est sa divisibilité[21]. Dans ce cas, le tout est antérieur, d'un point de vue logique, à ses parties ; l'inverse est vrai dans le cas d'une division actuelle du tout en parties. Si nous ajoutons que le tout est divisé une infinité de fois (cas d'un tout divisé actuellement) ou divisible une infinité de fois (cas d'un tout divisible potentiellement), nous soulevons une infinité de questions et nous rentrons de plain-pied dans le labyrinthe du continu et de sa composition. La question de la composition d'un continu est, dans le cas de Leibniz, inséparable des propriétés de l'infini comme nous le montrerons par la suite. Pour l'instant, retenons simplement qu'un continu en acte est divisé par un nombre actuellement infiniment grand de parties tandis qu'un continu potentiel est divisible en un nombre infiniment grand de parties.

Débutons à présent l'examen de la TMA par son premier principe fondamental : « Il y a des parties données en acte dans le continu […] celles-ci sont infinies en acte »[22]. Leibniz est assez explicite : le continu est divisé actuellement en une infinité actuelle de parties. Cependant, il ne précise pas (encore) de quel type de continu il traite. Par la suite, nous verrons qu'il distingue le continu propre à un objet mathématique comme une droite, du continu physique d'un corps ou de matière étendue par exemple. Il n'en reste pas moins que deux raisons nous poussent à penser qu'il s'agit ici d'un continu physique ; premièrement, la

---

[20] A VI.ii N45. Dans le reste de ce travail nous citons les textes de l'Académie comme suit : A = *Gottfried Wilhelm Leibniz : Sämtliche Schriften und Briefe,* ed. Deutsche Akademie der Wissenschaften (Darmstadt and Berlin : Akademie-Verlag, 1923—). Nous citons par séries, volume, et page ou bien par séries, volume et numéro de pièce.

[21] Nous reviendrons longuement sur ces différentes notions de l'infini lorsque nous aborderons l'approche fractale de Samuel Levey dans notre section sur le *Pacidius Philalethi.* Voir troisième partie du présent travail.

[22] Gottfried Wilhelm Leibniz, Physique et métaphysique Opuscules de jeunesse, Trad. René Violette, Éditions Lambert-Lucas, Limoges, 2012, p. 137.

définition suivante traite principalement de corps ou d'objets étendus et deuxièmement, Leibniz traite l'actualité comme une caractéristique d'un continu physique dont les parties sont antérieures au tout.

Ajoutons encore que l'infini en acte tel que le définit Leibniz n'est pas identifiable avec l'indéfini cartésien. Pour Descartes, une quantité est dite indéfinie pour un sujet, lorsqu'elle lui apparaît tellement grande qu'elle semble inépuisable[23]. Cet indéfini est certainement moins fort que l'infini en acte, car l'indéfini n'existe réellement que du point de vue du sujet et donc nous pouvons postuler l'existence d'une quantité indéfiniment grande pour un sujet sans pour autant se prononcer sur l'objet dont nous tentons de quantifier la grandeur. Nous retrouvons cette critique leibnizienne envers l'indéfini cartésien dans des notes rédigées par Leibniz sur les principes de la philosophie cartésienne[24]. Dans ce texte, Leibniz reproche à Descartes l'usage du terme « indéfini » pour exprimer l'idée que la matière serait « réellement divisée, par le mouvement, en parties qui sont plus petites que n'importe quelles parties assignables »[25]. Comme nous le verrons dans la suite de ce travail, le caractère *divisé* du continu ira de pair avec le caractère en acte de l'infini. En bref, pour Leibniz, si l'on traite d'un continu divisé alors ce dernier n'est pas indéfini ; les divisions, bien qu'en nombre infini, sont définies.

La proposition suivante affirme qu'« *il n'y a pas de minimum dans l'espace ou le corps* »[26]. Cette proposition introduit le concept de minimum qui fera l'objet d'une série de réflexions qui occupera Leibniz tout au long de la période parisienne. La proposition pose qu'on ne peut pas trouver au sein de l'espace ou de la matière une quantité ou une grandeur qui soit toujours plus petite que n'importe quelle autre grandeur ou quantité. Autrement dit, au sein d'un continu, il n'existe pas un élément plus petit que tous les autres.

---

[23] AT VIII.1 59-60 Principes de la philosophie partie 2

[24] Voir Aiii15 ; 215-216.

[25] *Ibid.*

[26] Gottfried Wilhelm Leibniz, Physique et métaphysique Opuscules de jeunesse, Trad. René Violette, Éditions Lambert-Lucas, Limoges, 2012, p. 137.

Dans la *Theoria motus abstracti*, le minimum est associé à tout ce qui ne possède ni grandeur ni parties, donc ici Leibniz considère le point euclidien[27] et l'atome comme deux concepts qui peuvent revêtir la notion de minimum. Dans la TMA, un continu ne peut dès lors être composé ni de points euclidiens ni d'atomes.

La proposition suivante nous apprend que « des indivisibles ou des inétendus sont donnés, sans quoi ni le commencement ni la fin du mouvement ou du corps ne sont concevables »[28]. Le contenu de cette proposition est intéressant, car Leibniz s'interrogera à plusieurs reprises sur la possibilité que le continu contienne des éléments inétendus.
Cependant, la distinction entre un indivisible et un minimum semble assez subtile, en quoi un indivisible ne se rapprocherait-il pas fortement d'un atome et par conséquent d'un minimum ? Nous pensons que la différence entre un indivisible et un minimum réside, pour Leibniz, en ce que le premier est inétendu et que le second soit étendu. Cela serait, à notre sens, certainement la raison pour laquelle Leibniz refuse à n'importe quel minimum le statut de partie d'un continu, mais qu'il accepte, provisoirement, la présence d'indivisibles ou d'inétendus au sein d'un continu. La démonstration qui suit la proposition permettra de mieux comprendre le rôle des indivisibles au sein d'un continu.

Cependant, juste avant d'entrer dans la démonstration en elle-même, nous aimerions insister sur une manière de définir certaines figures géométriques au 17e siècle et sur leur lien implicite avec le mouvement. Lorsque Leibniz écrit dans une démonstration, par exemple, « prenons la droite *ab* », nous aurons l'occasion de voir qu'il est très souvent sous-entendu qu'un point ou un corps se déplace le long de la droite *ab*. La droite est très souvent associée, dans les démonstrations concernant le continu ou la composition du continu, à une trajectoire. Cette association peut paraître contre-intuitive à un lecteur ou à une lectrice de notre temps, car il nous semble que les mathématiques modernes sont arrivées à un tel niveau d'abstraction que lorsque nous représentons une droite dans la réalité à l'aide d'une feuille, d'un crayon et d'une latte, nous étudions la droite pour elle-même. Chez Leibniz, cet enchevêtrement géométrico-physique revêt une importance capitale. En effet, comme nous le verrons plus tard dans ce travail, le mouvement remplira, pour Leibniz, le double rôle de déterminer la figure

[27] Euclide dans ses *Éléments* définit le point comme « ce qui ne possède ni parties ni grandeur ».

[28] *Ibid.*

dans l'espace pur de la géométrie et de déterminer les corps dans la matière première.
Le mouvement est le concept qui assure le passage du potentiel à l'actuel. Les figures géométriques, de la même manière que les formes que nous rencontrons dans l'expérience, doivent pouvoir être tracées dans l'espace idéal des mathématiques et cette trace ne peut déroger à des lois du mouvement que ce dernier soit dans un espace géométrique imaginaire ou dans un espace empirique bien réel[29]. Leibniz choisira de déduire, dans un premier temps, les lois du mouvement réel dans la nature des lois du mouvement qui permettent de tracer des figures géométriques.

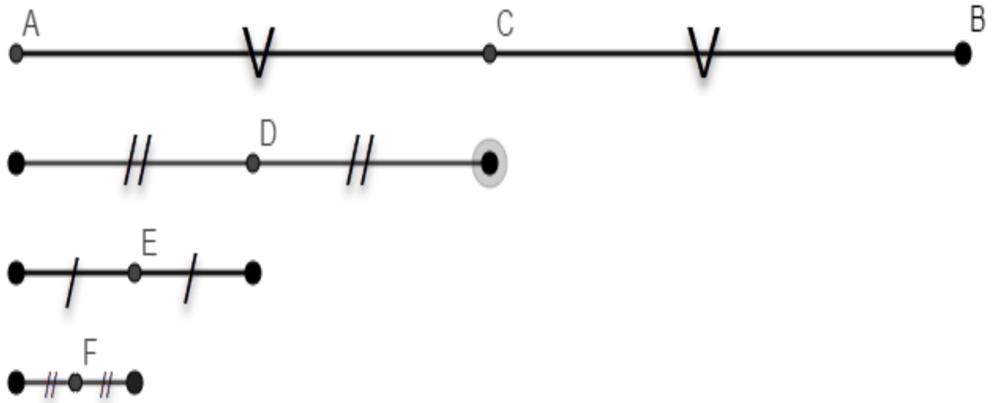


Figure 1—Dichotomie du segment ab

À présent, penchons-nous sur la démonstration en question qui est, en quelque sorte, un retournement de l'argument de Zénon[30]. Il s'agit pour Leibniz de démontrer que si le mouvement existe[31], il doit nécessairement posséder un commencement. La démonstration conclura que le commencement doit nécessairement être un inétendu. Prenons une ligne AB, voir figure 1 ci-dessus, comme trajectoire d'un corps en mouvement et considérons que le mouvement débute au point *A*. Si nous divisons la ligne en deux moitiés égales, nous pouvons affirmer que le début du mouvement est contenu dans la moitié de gauche, nous pouvons réitérer cette opération de division en deux parties égales puis de rejet de la partie de droite un

[29] Voir plus bas dans le travail quand nous aborderons l'idée qu'un cercle ne peut être un polygone, et ce peu importe le nombre de côtés que ce dernier posséderait, car cela reviendrait à considérer que le mouvement rectiligne et le mouvement circulaire soient un seul et même mouvement. Voir *Id.* p. 141.

[30] Concernant le retournement de l'argument de Zénon, voir Arthur in *Monads, composition and force,* Oxford University Press, 2018, p. 180-1.

[31] Cette démonstration fonctionne pour toutes quantités continues comme le temps ou la matière.

grand nombre de fois avant d'avoir isolé la partie de AB qui contient le début et seulement le début du mouvement. Il est même possible de réitérer l'opération un nombre infini de fois. Que va-t-il rester du début du mouvement après l'itération infinie de l'opération ?
Leibniz n'entrevoit que deux possibilités. Première possibilité, il ne reste qu'« un rien », quelque chose dénuée de grandeur, mais étendu, sauf que nous avons vu plus haut que Leibniz rejetait les minima de la composition d'un continu. Seconde possibilité, le reste de la division infinie est quelque chose d'inétendu. Le premier cas nous mène à une contradiction, car alors nous aurions un mouvement qui ne commencerait jamais donc nous devrions conclure à l'absurdité du mouvement lui-même, ce que Leibniz précisément ne fait jamais. Il nous semble que Leibniz restera très cohérent avec lui-même dans le temps concernant la non-remise en question des données des sens et de l'expérience. Le mouvement fait partie des hypothèses de la démonstration, le mouvement est perçu par un observateur ou sujet percevant et il s'agira de faire-avec ce donné.

L'autre possibilité, pour ne pas nier l'existence du mouvement, est de considérer le début du mouvement comme un inétendu. Notons d'ores et déjà que l'utilisation d'une entité inétendue est un excellent outil pour enrayer la régression à l'infini du découpage de la trajectoire d'un corps dans le but de définir le commencement de son mouvement.

Tentons de résumer le problème et sa démonstration : nous sommes face à un continu donc composé d'une infinité d'éléments, ces éléments peuvent être infiniment petits, mais il ne peut exister parmi eux un élément plus petit que tous les autres sous peine de se voir considérer comme un minimum à rejeter. Pourtant, le mouvement existe, c'est indéniable pour Leibniz. Si le mouvement existe, il doit bien commencer. Ici, Leibniz est à la recherche de quelque chose que nous pourrions peut-être désigner comme les dernières parties d'un continu sans que ces dernières ne s'évanouissent en minima. Il est donc nécessaire que ces dernières parties ne soient pas elles-mêmes étendues afin d'échapper au statut de minimum. Le commencement du mouvement est considéré comme du mouvement, mais inétendu.

Nous le disions plus haut, ce raisonnement peut s'appliquer en toute généralité à n'importe quel continu. De la même manière, les dernières parties du temps ou encore les dernières parties de la matière peuvent être considérées respectivement comme intemporelles et inétendues. En clair, pour Leibniz, pour fonder un continu, il est nécessaire de recourir à des indivisibles qui ne peuvent être des minima. Ces indivisibles doivent être inétendus pour que l'on puisse dériver, à partir d'eux, toutes les autres parties étendues du continu.

Cependant, Leibniz reviendra sur cette notion d'indivisible inétendu lors de son passage à Paris entre 1672 et 1676. Notamment dans son « De *minimo et maximo. De corporibus et mentibus* »[32], un texte sur lequel nous reviendrons en détails par la suite, il concevra une démonstration plus mathématique afin d'exclure les minima, mais aussi les indivisibles de tout continu en ce compris le continu mathématique qu'est la droite. L'inétendu sera alors considéré comme un minimum et sera donc banni de la composition de l'espace, du temps ou encore du mouvement. En anticipant quelque peu, nous pourrions déjà donner la conception leibnizienne de la différentielle qui remplira, entre autre, le rôle de la notion d'indivisible inétendu : une différentielle, pour Leibniz, est une quantité *étendue* plus petite que toute quantité étendue *donnée*.

Comme écrit plus haut, cette démonstration ne se limite pas à prouver l'existence d'inétendu remplissant le rôle du début d'un mouvement, Leibniz l'applique également à la durée, à l'espace, ou encore aux corps. Précisons que pour Leibniz les commencements respectifs d'un corps ou d'un espace, d'un mouvement et du temps sont un point, un conatus et un instant.

Nous n'avons pas encore défini ce que Leibniz entend par le concept « point ». Voici ce que nous pouvons apprendre à ce sujet avec le cinquième principe fondamental du texte :

> Le *point* n'est pas *ce dont* il n'y a nulle partie ni ce dont on ne considère pas la partie ; mais ce dont l'*extension est nulle*, c'est-à-dire ce dont les parties sont indistantes, dont la grandeur ne peut se considérer, est inassignable, plus petite que celle qui peut être représentée par un rapport à une autre grandeur sensible si ce rapport n'est pas infini, plus petite qu'une grandeur qui peut être donnée [33]

Leibniz donne sa propre définition du point en rejetant au préalable celle d'Euclide, pour qui

[32] Aiii5

[33] Gottfried Wilhelm Leibniz, Physique et métaphysique Opuscules de jeunesse, Trad. René Violette, Éditions Lambert-Lucas, Limoges, 2012, p. 138.

un point est ce qui n'a pas de parties, puis celle de Hobbes[34], pour qui un point ne possède pas de grandeur. La différence entre la définition de Leibniz et ses deux prédécesseurs bien qu'assez fine ne s'en révélera pas moins lourde de conséquences pour la suite. À cette époque, Leibniz considère que le point possède des parties « indistantes »[35] et une grandeur « inassignable ».

Cette idée de grandeur inassignable se révélera être très féconde chez Leibniz. Dans la suite du texte, Leibniz cherchera à conceptualiser les rapports qui peuvent exister entre différents ordres de grandeur. La notion de grandeur inassignable, comme nous allons le voir, pourra être mise en rapport avec une grandeur sensible si ce rapport est infini. L'inassignable se situe entre le « rien » et la grandeur sensible étendue.

Le cinquième principe fondamental indique en effet qu'une quantité inassignable n'est pas inassignable dans l'absolu, mais par *rapport* à toute autre quantité *sensible*. Nous ne pouvons comparer, pour Leibniz, une quantité inassignable avec une quantité sensible sans poser une condition sur le rapport qui permet de passer de l'une à l'autre ; le rapport doit être infini. Ce cinquième point fait fortement écho au quatrième point qui nous donnait le commencement du mouvement comme quelque chose d'infiniment petit donc dépourvu d'étendue. Il est, dès lors, parfaitement cohérent de ne pouvoir penser la relation entre le mouvement et le conatus infiniment petit qui lui donne naissance qu'en considérant un rapport infini.

C'est le caractère inétendu et dénué d'extension du point qui permettra de mettre en rapport, dans le dix-huitième principe fondamental de la TMA, le cercle et le polygone composé d'une infinité de côtés. En effet, comme nous allons le voir, ces deux objets mathématiques sont pourvus de la même extension, nous pourrions dire qu'ils possèdent la même quantité sensible, sans pour autant être de grandeur égale. Bien que nous ne puissions différencier par le biais de quantités sensibles un cercle d'un polygone infiniment composé de côtés, il n'en demeure pas moins, pour Leibniz, que la différence de grandeur entre ces deux objets doit être prise considération sous peine d'aboutir à un paradoxe. Nous étudierons plus loin la nature de ce paradoxe.

---

[34] Nous reprenons ici les indications laissées par Richard Arthur dans sa traduction de la TMA. Voir *G. W. Leibniz, The Labyrinth of the Continuum: Writings on the Continuum Problem, 1672-1686*, édition et traduction de Richard T.W. Arthur, New Haven : Yale University Press, 2001, p. 429

[35] Nous pourrions dire que les parties d'un point, à cette époque, sont contigües dans le sens vu plus haut.

Dans le sixième principe, Leibniz évoque un tel rapport infini pour rendre compte de la relation entre le repos et le mouvement, et il insiste sur le fait que « le rapport du repos au mouvement n'est pas celui du point à l'espace, mais celui de zéro à un »[36]. Il est crucial de noter que dans le cinquième principe fondamental, Leibniz définit un rapport infini comme un rapport qui serait plus petit que tout rapport donné ou plus grand que tout rapport donné. Avec cette définition, Leibniz distingue nettement un rapport entre une quantité sensible et une quantité inassignable d'un rapport entre quelque chose et rien. Une infinité de zéros n'atteint jamais l'unité ; *a contrario,* une infinité d'inassignables peut donner lieu à quelque chose de sensible. Ce geste philosophique se révélera extrêmement fécond en mathématique. Nous le retrouverons lorsque nous aborderons les notions d'infini syncatégorématique dans la philosophie et dans les mathématiques de Leibniz. Nous voulions simplement pointer que Leibniz possède déjà en germe cet outil pendant l'hiver 1671.

Pour tenter de mieux comprendre cette notion de rapport infini, comparons les principes fondamentaux 6 et 10. Le dixième principe fondamental se formule comme suit : « L'effort (*conatus*)[37] est au mouvement ce que le point est à l'espace, soit comme l'unité à l'infini ; il est, en effet, le commencement et la fin du mouvement »[38]. Cette fois, Leibniz ne compare plus le repos avec le mouvement, mais bien le début du mouvement avec le mouvement lui-même. Tentons de clarifier la comparaison en reprenant la figure de la droite *ab*. Nous pourrions dire que Leibniz compare la situation au voisinage du point *a* avec la situation sur le reste de la droite avec *b* non compris, c'est-à-dire qu'il compare le début et la fin du mouvement, donc deux phases particulières du phénomène mouvement, avec ce qui se passe entre ces deux phases c'est-à-dire le mouvement en lui-même. Ici la comparaison a lieu entre un sensible et un infiniment petit.

Notons en passant, qu'à l'occasion du onzième principe fondamental, Leibniz précise que pour lui le monde est plein.

---

[36] Gottfried Wilhelm Leibniz, Physique et métaphysique Opuscules de jeunesse, Trad. René Violette, Éditions Lambert-Lucas, Limoges, 2012, p. 138.

[37] Dans la traduction que nous utilisons, le mot « *conatus* » est systématiquement rendu en français par le mot « effort ».

[38] *Ibid.*

Le dix-huitième principe débute par une définition du continu temporel. Il était impossible pour Leibniz d'étudier le mouvement de manière exhaustive sans étudier le temps et sa composition. Pour Leibniz, il est nécessaire d'étudier les deux continus qui permettent l'expression complète du mouvement : le continu étendu et le continu temporel. Cependant, Leibniz conserve l'appareillage conceptuel que nous venons de définir en ce qui concerne l'étendue, en le modifiant quelque peu, pour l'appliquer au temps.

La différence fondamentale pour Leibniz entre le temps et l'étendue est la suivante : « *Un point est plus grand qu'un point, un effort qu'un effort, mais un instant est égal à un instant,* c'est pourquoi le temps est représenté par un mouvement uniforme sur une même ligne »[39]. Pour Leibniz, le temps coule de manière uniforme et ses parties ultimes possèdent toutes la même grandeur. Précisons très rapidement qu'à cette époque Leibniz considérait qu'un corps doté d'une plus grande vitesse occupait une plus grande place que lorsque ce dernier possède une vitesse moindre[40], d'où vient qu'il soit possible qu'un point puisse être plus grand qu'un autre.

Nous terminerons notre bref voyage dans la TMA par la fin du dix-huitième principe fondamental. Nous commençons à sentir que derrière la question du continu et de sa composition se cache la notion de passage à la limite qui est inséparable du concept d'infini. Une des applications insignes de ce champ de recherche philosophico-mathématique est la quadrature du cercle. Nous n'allons pas revenir ici sur les liens entre la méthode dite d'exhaustion dont Leibniz hérite de la tradition qui permettait par exemple d'approximer l'aire d'un cercle en calculant l'aire d'un polygone inscrit et l'aire d'un polygone circonscrit.

Nous souhaitons souligner dès maintenant la possibilité de rapprocher la définition de cercle de celle d'un polygone d'une infinité de côtés, car ce rapprochement sera raffiné à plusieurs reprises par Leibniz en fonction des outils qu'il aura à sa disposition. Le meilleur

---

[39] *id.* p. 140.

40 *Id.* p. 139 : « Un point unique d'un corps mû dans le temps d'un effort, c'est-à-dire dans un temps plus petit que ce qui peut être donné, est dans plusieurs lieux ou points de l'espace. C'est-à-dire qu'il emplira une partie de l'espace plus grande que lui, ou, si l'on veut, plus grande que celle qu'il emplit soit au repos, soit mû plus lentement,… »

outil mathématique qu'il utilisera pour calculer l'erreur commise lors de l'approximation du cercle par le polygone, il le forgera lui-même, il porte le nom de calcul différentiel.

Venons au texte :

> Un arc plus petit que celui qu'on peut se donner est, quoi qu'il arrive, plus grand que sa corde, quoique celle-ci aussi soit plus petite que l'on peut se représenter, ou consiste en un point. Mais ainsi, dira-t-on, un polygone d'un nombre infini d'angles ne sera pas égal à un cercle : je réponds qu'il n'est pas d'une grandeur égale, bien qu'il soit d'une extension égale[41] ; la différence est, en effet, trop petite pour pouvoir être exprimée par aucun nombre.[42]

Cet extrait est extrêmement intéressant, car il s'agit ici d'une autre utilisation de la conservation d'un rapport entre deux quantités infiniment petites : même si une corde est infiniment petite, nous pouvons la comparer avec l'arc de cercle correspondant qui sera également infiniment petit. Cependant, le rapport entre les deux pourra quand même se conserver à savoir que la corde sera toujours plus petite que l'arc correspondant. Autrement dit, les infiniment petits peuvent avoir des grandeurs différentes, et il est possible de les comparer entre eux.

Notons que le rejet du point euclidien au profit d'une définition d'un point inétendu garantit la possibilité de comparaison entre deux quantités inétendues et c'est précisément pour cela que nous pouvons, conceptuellement, concevoir qu'un cercle n'est pas un polygone même si ce dernier possède une infinité de côtés, car l'erreur, même infiniment petite, demeure.

Pour rester dans notre exemple de cercle et de polygone, si nous dessinions un cercle et un dodécagone inscrit, nous pourrions percevoir que l'aire du cercle est supérieure à celle du dodécagone ou encore que le périmètre du cercle est supérieur à celui du dodécagone.

[41] Au premier abord, la distinction entre « grandeur » et « extension » paraît énigmatique. Nous pourrions émettre l'hypothèse que le polygone et le cercle sont d'extension égales en tant que deux quantités étendues et que l'erreur entre ces deux quantités peut être réduite à une quantité inétendue (car l'erreur peut être tellement petite de sorte à ne pas pouvoir être exprimée par un nombre). Tandis que ces deux objets ne pourraient pas être de grandeur égale sinon, comme Leibniz l'écrit plus bas dans la TMA, cela reviendrait à considérer un mouvement rectiligne comme un mouvement circulaire. Le concept d' « extension » couvrirait des rapports entre des quantités étendues tandis que la « grandeur » irait jusqu'à prendre en compte des différences inétendues.

[42] *id.* p. 141.

Leibniz nous garantit simplement que ces relations sont maintenues dans le cas d'un polygone avec une infinité de cotés et ce même si dans ce cas la sensibilité ne nous est plus d'aucune aide pour distinguer le vrai du faux concernant la différence entre un cercle et un polygone infini. En effet, personne ne serait capable de distinguer un cercle d'un polygone infini à l'œil nu.

La suite du dix-huitième principe est caractéristique de la manière leibnizienne d'intriquer des passages portant sur les mathématiques avec une étude du mouvement. En effet, Leibniz approche le problème de la quadrature du cercle par des notions géométriques. Il donne ses définitions du point, de l'angle ou encore de la corde, et utilise ensuite la distinction entre grandeur et extension afin de distinguer du cercle le fameux polygone possédant un nombre infini de côtés. Finalement, Leibniz a recours au concept de conatus pour montrer qu'il est contradictoire, du point de vue de l'étude du mouvement, de considérer un cercle comme étant de même grandeur qu'un polygone. Notons encore une fois que Leibniz ne remet pas en cause l'existence du mouvement et c'est cela même qui lui permet de conclure que cercle et polygone ne partagent pas la même grandeur. Si c'était le cas, voici à quelle paradoxe cela nous mènerait :

> En tout cas, si un arc et une corde inassignables coïncident, il y aura le même effort dans la droite que dans l'arc : il y a, en effet, un effort dans un arc ou une droite inassignable. Or, si l'effort est le même, le mouvement le sera aussi dans la droite et dans l'arc, c'est-à-dire le mouvement circulaire et le mouvement rectiligne seront identiques (parce que le mouvement poursuit sa course comme il l'a commencée, autrement dit : tel effort, tel mouvement), ce qui est absurde.[43]

L'erreur d'approximation infiniment petite entre le polygone et le cercle mène en fait à une absurdité infiniment grande lorsque l'on étudie le mouvement, car si le polygone et le cercle ont même grandeur, il n'y a plus de différence possible entre un mouvement rectiligne et un mouvement circulaire. De là, de nouveau, deux possibilités s'offrent à Leibniz : refuser l'existence de la différence entre ces mouvements ou bien les considérer comme des données et réfuter que d'un point de vue géométrique un polygone d'une infinité de côtés puisse prétendre au rang de cercle.

---

[43] *Id.* p. 141.

Nous terminons notre étude du TMA par ce court extrait qui appuie notre propos concernant le rapport entre une erreur infiniment petite et notre sensibilité :

> La sensation, en effet, ne peut discerner si le même corps est continu ou contigu, ou bien s'il est un monceau de nombreux corps que sépare une béante discontiguïté ; si des parties sont tout à fait au repos ou si elles reviennent sur elles-mêmes par un mouvement insensible ; si un angle de concours est un peu oblique ou parfaitement droit, si un contact se fait en un point ou bien en une ligne ou une surface ; s'il y a une certaine vitesse, s'il y a une vraie courbure ou une illusoire à partir d'une droite morcelée : si toutes ces choses changent, il est évident que le mouvement change aussi, d'après notre théorie.[44]

Nos organes des sens ne nous permettent pas d'entreprendre le voyage dans l'infini, ils nous laissent à son seuil. L'infini est une affaire inétendue ; rien d'étendu, comme nos organes des sens, ne peut avoir du pouvoir sur lui ; l'infini ne se laisse découvrir que par le biais d'idées. Le lien entre ce que nous pouvons sentir et ce que nous pouvons calculer à l'aide des mathématiques et de la physique nous semble présent dans la question de la composition du continu et même s'il semble impossible pour Leibniz que nos sens « passent à la limite », il n'éloigne absolument pas la possibilité que des observations physiques et sensibles soient à même d'alimenter le raisonnement sur l'infini et ce même si, comme nous l'avons mentionné, pour Leibniz, il faut asseoir la mécanique sur la géométrie. Nous tenterons de montrer dans la suite de ce travail que le modèle mathématique et son formalisme permettent d'aller plus loin que nos sens dans l'étude de l'infini.

Les acquis de la TMA

Après ce bref tour d'horizon de la TMA, tentons de résumer rapidement les enjeux du texte ainsi que les points théoriques que Leibniz conservera tout au long du parcours philosophico-mathématique exposé dans ce travail.

Les principales caractéristiques du continu dans la TMA sont les suivantes : il est actuellement divisé à l'infini sans pour autant que des minima ou des parties sans parties

[44] *Id.* p. 149.

n'existent en son sein. Pourtant, à l'époque de la TMA, cela n'empêche pas Leibniz d'affirmer l'existence d'indivisibles. Cette position sur les indivisibles sera rapidement abandonnée par Leibniz, comme nous allons le voir, lorsqu'il aura perfectionné ses connaissances des mathématiques.

Cependant certaines thèses de la TMA persisteront comme la division à l'infini de la matière, ou encore le refus des minima dans le continu. La possibilité de comparer deux quantités infiniment petites est également un des aspects qui survivra à l'apprentissage des mathématiques de la période parisienne. En anticipant quelque peu sur la suite de ce travail, nous pouvons dire que vers 1672-73, Leibniz considérera la notion d'indivisible non plus comme un infiniment petit, mais comme un minimum qu'il rejettera. L'argument contre le minimum dans le continu se retrouve dans plusieurs textes différents de la période parisienne[45], nous pourrions résumer l'argument comme suit : s'il existe un minimum alors le tout aura autant de minima que sa partie, ce qui implique une contradiction. La contradiction tient en ce qu'il y aurait autant de minima dans une partie que dans le tout. Il démontre cela à l'aide de la comparaison entre la diagonale et le côté d'un carré en montrant que tous deux contiennent autant de minima, vu qu'il y en a un nombre infini, mais que *visiblement*, le côté d'un carré sera toujours plus petit que sa diagonale. Nous aurons l'occasion de revenir abondamment sur cette démonstration, car Leibniz lui-même la modifiera et la travaillera à de multiples reprises.

Les différentes moutures de la solution par laquelle Leibniz tentera d'apporter une réponse aux contradictions liées à la composition d'un continu par des entités infiniment petites constitueront le contexte dans lequel Leibniz forgera ses différentielles et son Calcul. Nous achevons cette première partie en donnant, avec les concepts que nous venons de définir, une approche de la solution élaborée par Leibniz durant la période parisienne.

Reprenons notre carré avec sa diagonale et son côté ; il suffit de supposer que deux points tracent respectivement la diagonale et le côté dans le même temps, ce qui sous-entend que les deux points ne tracent pas avec la même vitesse, la diagonale va plus vite que le côté. L'intérêt de Leibniz sera fortement suscité par ce rapport de vitesse qui se traduit par une

[45] Voir à ce sujet la section de ce travail consacrée au « *De minima et maxima* ».

différence finie de longueur et qui se retrouve dans n'importe quel intervalle, aussi petit que l'on désire, de la diagonale et du côté. Les segments générés, aussi petits que l'on veut, par le déplacement des points seront toujours dans la même proportion, à savoir la même proportion que la diagonale et le côté. Tout ce matériau conceptuel pour envisager la conservation de rapports entre infiniment petits, mais aussi entre de l'infiniment petit avec des grandeurs sensibles, se trouve déjà dans le TMA avant que Leibniz ne parte pour Paris.

Il nous reste à envisager le texte frère de la TMA, à savoir la *Theoria motus concreti*

.

Theoria motus concreti

Dans ce texte, Leibniz s'efforce de concilier les phénomènes (ou les observations) avec les lois abstraites formulées dans la TMA. À ce stade de la réflexion leibnizienne, il est nécessaire de déterminer une sorte d'agent qui permet l'application des principes abstraits et rationnels de la TMA dans la totalité de l'univers. La solution qu'il va proposer l'amènera à postuler l'existence d'une substance plus subtile que ce dont nous pouvons avoir l'expérience, l'éther.

Nous ne nous attarderons pas ici sur les propriétés de cet éther, qui rend notamment compte, selon Leibniz de l'élasticité et de la gravité des corps. Ce texte est tout aussi dense et ardu que la TMA, nous ne l'invoquons que pour en extirper un tout petit passage concernant le microscope, car cet outil génial est une manière tout humaine d'étendre les rapports que nous pouvons entretenir avec le monde qui nous entoure. Le microscope fait toujours rêver de nos jours, il faut croire que Leibniz faisait également partie de ces rêveurs admiratifs à la vue et à l'idée du microscope.

Ce texte contient un cas concret d'influence de la perception d'un œil humain sur le raisonnement physique et métaphysique de Leibniz. Nous allons présenter un extrait du texte où Leibniz tire des conclusions métaphysiques à partir des observations de Kircher et Hooke, deux « maîtres du microscope » :

> Il faut savoir en effet, comme ces maîtres du microscope, Kircher et Hooke, l'ont observé, que la plupart des choses que nous sentons dans le grand, un être à la vue perçante le percevrait proportionnellement dans le petit. Et si cela continuait à l'infini, ce qui est certes possible, puisque le continu est divisible à l'infini, n'importe quel atome sera comme un certain monde d'innombrables espèces, et il y aura des mondes dans les mondes à l'infini. Et celui qui réfléchit plus profondément sur ces questions ne pourra manquer d'être ravi d'une extase d'admiration, qui doit être reportée sur l'Auteur des choses.[46]

L'être humain qui place son œil derrière les lentilles d'un microscope voit se déployer devant lui les premiers termes d'une régression à l'infini dans la matière, il peut sentir un continu sous ses yeux. Pour Leibniz, il nous semble que le rôle du microscope est de rendre sensibles certaines qualités qui seraient, à l'échelle d'un œil nu, pour reprendre le terme de la TMA, inassignables. Nous aimerions mettre en exergue l'importance que prend l'observateur dans ce texte que ce soit un être humain ou bien un être à la vue plus perçante. Il nous semble que Leibniz est très conscient que les questions liées au continu ou à l'appréhension humaine de l'infini ne peuvent se départir de notre condition d'être humain. Les concepts du continu et de l'infini demandent un long périple dans l'abstraction avant de se laisser apprivoiser par l'esprit humain, nous pensons également que les mathématiques peuvent être, à cet égard, un excellent guide dans l'abstraction et dans la généralité.

Ce voyage, Leibniz l'entreprend lorsqu'il se rend à Paris, courant de l'année 1672, ce sont ces 4 années que nous allons parcourir à présent.

[46] *Id. p.* 111.

La période parisienne, l'avènement des mathématiques

En guise de préambule, nous souhaitons attirer l'attention sur la nature des textes de la période parisienne publiés de nos jours. Contrairement à la TMA et à la TMC, il ne s'agit pas de textes rédigés par Leibniz en vue de leur offrir une présentation publique. Les textes parisiens s'apparentent davantage à des notes d'un mathématicien en construction, d'une pensée en quête de stabilisation. Ces textes épars sont autant de fulgurances mathématico-philosophiques que Leibniz rédige au gré de ses discussions et rencontres avec d'autres érudits parisiens. Le philosophe d'Hanovre décrit ses écrits parisiens comme « a few sheets of paper and some poorly expressed vestiges of hasty reflections, which were only ever saved for the sake of my memory »[47].

Les textes de la période parisienne relatifs à la question du continu ont été rassemblés et traduits par R. Arthur dans son *The Labyrinth of the Continuum Writings on the Continuum Problem, 1672-1686*[48]. C'est dans cet ouvrage que nous avons trouvé l'essentiel de notre corpus pour l'ensemble de ce chapitre.

Cet état de fait nous oblige à préciser, d'une part notre manière d'aborder ces textes et d'autre part les critères qui ont présidé à la décision d'inclure un texte plutôt qu'un autre dans notre travail. Nous avons tenté d'extraire les éléments qui pouvaient être les témoins de la manière dont la réflexion mathématique leibnizienne s'enracine dans sa compréhension métaphysique du monde par rapport à la thématique du continu. Nous élargirons les thèmes liés au continu dans le but de montrer que le continu, chez Leibniz, se trouve là où nous ne l'attendrions pas. Nous verrons comment l'apprentissage mathématique débouche sur de nouvelles manières de penser le mouvement, thème privilégié de l'étude du continu. En parallèle, nous nous efforcerons de montrer que Leibniz améliore sensiblement sa compréhension des rapports entre différents infinis entre eux, mais aussi entre le fini et

---

[47] *Aiii78 ;* 533. Cette citation provient du *Pacidius Philalethi.* Au cours de ce dialogue, un des protagonistes, *Gallatus,* somme *Pacidius*, le personnage du dialogue qui représenterait Leibniz, de répondre à ses questions sous peine de pénétrer à l'intérieur d'un coffre où *Pacidius* renfermerait ses secrets. Il nous a semblé que cette description des textes correspond bien au corpus parisien que nous parcourons dans ce travail.

[48] *G. W. Leibniz, The Labyrinth of the Continuum: Writings on the Continuum Problem, 1672-1686*, édition et traduction de Richard T.W. Arthur, New Haven : Yale University Press, 2001.

l'infini. Tout au long de ces textes parisiens, nous suivrons également les différentes moutures de la notion de minimum.

Les textes de la période parisienne sont aussi denses que riches. Notre approche est loin d'épuiser les mouvements de la pensée de Leibniz ; en nous bornant à respecter le programme que nous venons d'annoncer, nous avons dû, à dessein, passer sous silence les prémisses de la réhabilitation des formes substantielles. En effet, bien que cette réhabilitation soit capitale dans la pensée de Leibniz, elle n'a, selon nous, que peu d'influence, à l'époque parisienne, sur les questions que nous souhaitons aborder.

Comme nous venons de le préciser, les textes de la période parisienne sont autant d'occasions pour Leibniz de mettre sa pensée, en pleine effervescence mathématique, à l'épreuve. Il n'est pas rare que Leibniz, au sein d'un même texte, écrive qu'il se trompe avant de se corriger lui-même. Enfin, durant cette période, Leibniz met à l'épreuve beaucoup de conceptions de l'univers ; de l'existence des atomes en passant par l'existence du vide pour finalement conclure que le monde est un plenum. La pensée de Leibniz explore un nombre important d'hypothèses métaphysiques sur notre univers.

Dans notre travail, nous avons décidé de garder exclusivement les arêtes des transitions de la pensée de Leibniz qui concernaient directement les aspects du continu que nous avons énumérés plus haut. Ce choix ne rend justice ni au ton des textes ni à l'ébullition de la pensée leibnizienne de l'époque.

Nous avons décidé de prendre la période parisienne texte après texte, et ce par ordre chronologique, car nous pensons que cette méthode permet plus aisément de mettre en exergue l'intrication des mathématiques et de la philosophie chez Leibniz. Nous pensons être en mesure de dégager, au sein de plusieurs textes, des temps dans la manière leibnizienne d'aborder les problèmes qui sont les siens. Dans un premier temps, la réflexion est provoquée par un problème ou une thématique mathématique, s'en suit un temps de démonstration mathématique qui débouche sur des considérations métaphysiques. Nous pensons que cet enchaînement se laisse mieux appréhender si nous approchons un texte après l'autre.

Nous terminerons notre voyage parisien par un texte de 1676 qui fait figure d'exception dans le sens où ce dernier ne rentre absolument pas dans le portrait que nous avons tenté de dresser pour les autres textes. Il s'agit du *Pacidius Philalethi* que Leibniz rédigea sur les eaux anglaises lors de son trajet de retour à Hanovre. Ce texte, rédigé sous la forme d'un dialogue, est une sorte de résumé de Leibniz lui-même sur les errements de sa propre pensée durant le séjour parisien. Le *Pacidius Philalethi* a pour objectif d'étudier le changement en général et le mouvement en particulier. Dans ce texte, les mathématiques ont certainement une présence moins explicite. Cependant, comme nous le verrons, il est possible d'une part d'en débusquer des traces implicites et d'autre part de montrer que la dernière théorie du mouvement du *Pacidius Philalethi* peut se rattacher au concept mathématique de fractal. Nous terminerons l'étude de ce texte par l'exposition de l'interprétation de ce dernier par Samuel Levey qui anime, de nos jours, de nombreux débats.

Nous avons insisté sur l'importance et l'utilisation des indivisibles dans la TMA. Nous proposons d'entamer notre parcours de la période parisienne par le texte dans lequel Leibniz assimile explicitement les indivisibles à des minima.

De minimo et maximo - De corporibus et mentibus — Le glissement des indivisibles en dehors de la composition du continu

Ce texte aurait été écrit par Leibniz entre décembre et novembre 1672 soit approximativement un an après la publication de la TMA. À la manière de cette dernière, le DMM[49] contient également des fulgurances qui rappellent la forme des principes fondamentaux de la TMA.

Dès la toute première ligne du DMM, la rupture avec la TMA est consommée : « *Il n'y a pas de minimum, ou d'indivisible, dans l'espace et le corps»*[50]. Désormais, un indivisible est considéré comme un minimum et, à ce titre, ne peut plus prendre part à la composition d'un continu. Leibniz adjoint une démonstration à ce propos. Cette dernière repose sur l'intervention de quantités infinies d'indivisibles et tend à prouver que si nous acceptons les indivisibles dans la composition d'un continu alors nous serions également obligé d'accepter qu'une partie d'un continu composé d'indivisibles contienne autant d'indivisibles que le tout.

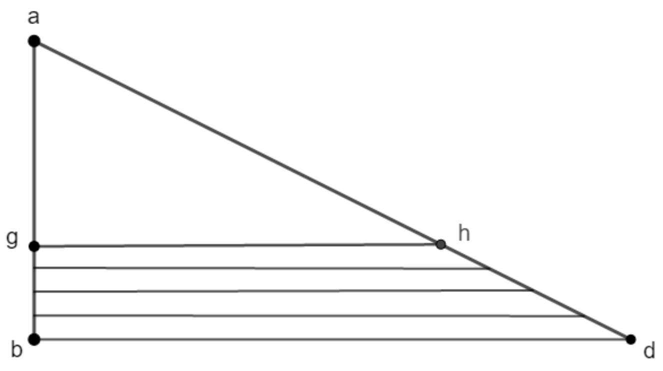


Figure 1 - *ab* et ses perpendiculaires dans *ad*

En nous inspirant de Leibniz, nous allons présenter la démonstration à l'aide d'un schéma[51]. Prenons une ligne *ab* et considérons qu'elle soit composée d'une collection infinie d'indivisibles. Dès lors, il est possible de construire une perpendiculaire à *ab* à partir de chacun des indivisibles qui composent cette ligne. Cette construction nous donne une infinité de parallèles toutes perpendiculaires à *ab*.

[49] C'est de cette manière que nous abrégerons « *De minimo et maximo - De corporibus et mentibus* » dans la suite du texte.

[50] *Aiii5 : 97.*

[51] Afin de faciliter la lecture de notre texte, nous avons choisi de présenter le plus fidèlement possible le contenu des démonstrations leibniziennes tout en actualisant les notations. Les démonstrations s'accompagnent généralement d'un ou plusieurs schémas, nous avons également tenté de les reproduire le plus fidèlement possible tout en les rendant plus agréable à consulter pour un lecteur ou une lectrice de notre époque.

Ensuite, construisons *ad* une ligne transversale au champ des perpendiculaires de *ab*. Soit *g*, un indivisible sur *ab.* Projetons *g* sur *ad* en *h*[52].

Il ne peut y avoir d'indivisible dans *ad* qui ne soit pas traversé par une perpendiculaire à *ab*. Nous pouvons donc affirmer qu'il y a autant d'invisibles compris dans *ad* que dans *ab*[53]. Insistons sur le fait que, jusqu'à présent, nous n'avons posé que l'existence d'une relation relativement simple entre deux ensembles. L'ensemble des indivisibles de *ab* est en relation de correspondance un à un avec l'ensemble des indivisibles *ad.* En soi, ce type de relation n'est pas problématique. Les problèmes surviennent lorsque les ensembles considérés comportent une infinité d'éléments, comme c'est le cas chaque fois que Leibniz considérera les quantités d'éléments qui habitent un continu.

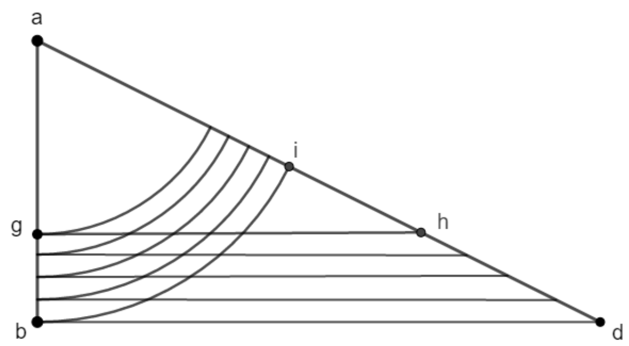


Figure 2 - Rotation de *ab* sur *ad*

Voyons comment faire jaillir la contradiction du caractère infiniment grand des collections d'indivisibles dans *ab* et *ad.* Faisons apparaître, une nouvelle fois par construction, un nouveau point. Nommons *i* la rotation de *b* autour de *a*[54]. Nous venons de montrer qu'il y a autant d'indivisibles dans *ab* que dans *ad* donc nous devons conclure également que *ai* en contient autant que *ab*. Donc il faudrait conclure qu'il y a autant de points dans *ai* que dans *ad*, ce qui, pour Leibniz, serait absurde, car alors il n'y aurait pas de points dans *id*.

Une collection absolument infiniment grande d'indivisibles serait vulnérable à ce genre de raisonnement absurde. À Leibniz de conclure qu'un indivisible absolument infiniment petit ne peut prendre part à la composition d'un continu et ce peu importe qu'il s'agisse de l'espace ou d'un corps.

---

52 Voir figure 1.

53 De manière anachronique, nous pourrions dire que l'ensemble des points de *ab* est en bijection avec l'ensemble des points de *ad*.

54 Voir figure 2.

Leibniz étend l'interdit au temps et par conséquent au mouvement qui n'est rien d'autre que le rapport entre le corps, l'espace et le temps[55]. Ce passage fait de nouveau écho à la TMA, car nous y retrouvons les thématiques concernant les enchevêtrements de différents types de rapports entre les infinis entre eux ainsi qu'une forme de démonstration qui n'est pas sans rappeler l'inversion de l'argument de Zénon[56].

En effet, Leibniz reprend un déplacement uniforme le long d'une ligne *ad* pendant une certaine durée *ab*[57]. Ensuite, il considère que la moitié de la distance est parcourue lorsque la moitié du temps est écoulée. Il pousse la division jusqu'à la considération d'un parcours d'une distance indivisible en un temps indivisible. Si cette régression est valide alors Leibniz est en droit de supposer

> that in a minimum of time the amount of space traversed is not a minimum : then in a time however small, provided it is not a minimum, infinite divisible spaces would be traversed, and in some perceptible time, an infinite space would be traversed.[58]

Une certaine combinatoire des rapports est en jeu dans cette partie du texte. La conjugaison de deux quantités infiniment petites peut s'exprimer dans un rapport fini, tout comme une vitesse instantanée finie s'exprime dans le déplacement entre deux endroits infiniment proches pendant une durée infiniment courte. Cependant, si l'on considère une quantité infinie avec une quantité finie, nous prenons le risque d'aboutir à une absurdité. Si, avec Leibniz, nous considérons un déplacement entre une distance finie en un temps minimum alors nous devons conclure qu'en un instant il est possible de parcourir une distance infinie. Autrement dit, si une quantité finie d'espace est parcourue en un minimum de temps, en inversant la dichotomie, nous pouvons conclure que toujours plus d'espace est parcouru durant un minimum de temps, car « le rapport d'un indivisible — si une telle chose devait exister— au divisible, ou le rapport d'un minimum dans le continu à tout ce qui n'est pas un minimum, est

[55] « *Il n'y a pas de minimum ou d'indivisible dans le temps et le mouvement» Aiii5 ; 98-99.*

[56] Voir page 16 du présent travail.

[57] Contrairement à la régression de la TMA, Leibniz fait cette fois intervenir le temps. Il a désormais recours à deux dimensions pour traiter le problème.

[58] Aiii5 ; 98.

comme le fini par rapport au fini »[59]. Nous retrouvons, comme dans la TMA, une classification des rapports entre différentes quantités. Ici, l'indivisible est au divisible ce que le fini est à l'infini.

Pour les mêmes raisons, Leibniz évince également le maximum de la composition du continu. Il rassemble ses pensées autour de la composition d'un continu par des maxima et des minima dans un scolie :

> We therefore hold that two things are excluded from the realm of the intelligibles : minimum, and maximum; the indivisible, or what is entirely *one,* and *everything;* what lacks parts, and what cannot be part of another[60]

La scolie se termine et laisse place à une proposition : « *Il y a dans le continu des choses infiniment petites, i.e., des choses infiniment plus petites que n'importe quelle chose sensible donnée* »[61].

L'enchaînement entre le scolie et la proposition qui le suit immédiatement est, à notre sens, d'une importance cruciale et mérite que nous nous y arrêtions. En effet, il s'agit d'un fin glissement conceptuel autour des choses qui ont le droit, selon Leibniz, de composer un continu. Il nous semble que Leibniz réalise un double glissement. D'abord, il écrit simplement *qu'il y a* des choses infiniment petites dans un continu et non pas que ce dernier en soit *composé* comme il pouvait l'écrire dans la TMA. Ensuite, il se donne une nouvelle définition des choses infiniment petites, il les qualifie désormais comme des choses *plus petites que n'importe quelle chose sensible donnée*. Il introduit l'idée même de rapport comme critère pour définir un infiniment petit.
Désormais, l'infiniment petit n'advient que dans un certain rapport au sensible. Une chose est dite infiniment petite si et seulement si elle est plus petite que toute chose sensible, comme nous allons le voir dans notre prochain paragraphe, par rapport à une main qui trace et un esprit qui pense.

Pour appuyer ses propos concernant la présence de choses infiniment petites au sein d'un continu, Leibniz a recours à une dichotomie fort semblable à celle utilisée dans la

---

[59] *Ibid.*

[60] *Ibid.*

[61] *Ibid.*

TMA[62]. Mettons en exergue les points qui séparent les deux démonstrations. De nouveau, il s'agit de couper une infinité de fois un mouvement représenté par une ligne *ab* pour en isoler son commencement. Dans la TMA, le commencement d'un mouvement « n'est rien dont on peut retrancher quelque chose vers la droite »[63], souvenons-nous que cela correspondait à la définition d'un indivisible dans ce même texte. Il n'était nullement question de qualifier ce commencement infiniment petit autrement qu'en le considérant comme une quantité inétendue.

Dans le DDM, nous venons de constater qu'une certaine relativité de l'infiniment petit était introduite par rapport au sensible. Cela transparaît, à notre sens, dans le texte lorsque Leibniz fait intervenir sa main et son esprit dans le procédé de découpe dichotomique :

> For even if my hand is unable and my soul unwilling to pursue the division to infinity, it can nevertheless in general be understood at once that everything that can be cut off without cutting off the beginning does not involve the beginning [64]

Il est possible de diviser un certain nombre de fois le trajet pour s'approcher, autant que l'esprit et la main le peuvent et le veulent, du début du mouvement, mais il nous est interdit d'aller jusqu'au bout de la dichotomie. Au-delà de ce que peut la main et de ce que veut l'esprit, nous nous trouvons, à notre sens, en dehors de la sensibilité. Cependant, par un raisonnement inductif, il est de tout de même possible de *comprendre* que le début du mouvement se trouve à chaque fois dans la « partie gauche » de chaque division dichotomique[65].

Étant donné que Leibniz considère que la dichotomie a lieu jusqu'à l'infini, il s'en suit que le début du mouvement ou de la ligne ne peut être qu'infiniment petit. Par conséquent, Leibniz arrive à la conclusion qu'il y a des infiniment petits dans le continu[66]. Le commencement du mouvement n'est donc plus un indivisible inétendu, mais un infiniment

---

[62] Voir le quatrième principe fondamental de la TMA.

[63] Gottfried Wilhelm Leibniz, Physique et métaphysique Opuscules de jeunesse, Trad. René Violette, Éditions Lambert-Lucas, Limoges, 2012, p. 137.

[64] Aiii5 ; 99.

[65] Nous verrons que Leibniz raffine cette manière de penser par le biais de la « raison » d'une série mathématique. La « raison » d'une série est le coeur de l'algorithme qui permet de déplier la série d'un terme à l'autre.

[66] De la même manière que pour la démonstration soeur de la TMA, la démonstration du DDM est applicable avec n'importe quel continu.

petit lié à la main et l'esprit du mathématicien ou du géomètre qui trace d'un mouvement du poignet le trajet allant de *a* à *b* avec de l'encre sur une feuille.

Fort de cette nouvelle exclusion des indivisibles du continu, Leibniz, dans la suite du texte, va proposer trois définitions d'objets géométriques :

> A *point* is of a length, breadth, and depth infinitely smaller than any that can be sensed; a *line* is of a breadth and depth infinitely smaller than any that can be sensed; a *surface* is of a depth infinitely smaller than any can be sensed. [67]

Leibniz mobilise la formule « plus petit que n'importe quoi qui peut être senti » pour définir le point, la ligne et la surface sans avoir recours aux indivisibles pour les composer. Un point n'est plus un indivisible, mais bien ce dont les dimensions sont infiniment plus petites que tout ce qui peut être senti. Cette manière de traiter les dimensions d'un point permet néanmoins de mettre en rapport des points de tailles différentes.

Avec le DDM, nous apprenons que Leibniz exclut les indivisibles de la composition du continu et qu'il maintient que les notions de minimum et de maximum ne sont pas intelligibles. Nous avons pu étudier dans le détail le geste philosophico-mathématique destiné à fournir un critère pour définir l'infiniment petit, à savoir le « plus petit que n'importe quelle quantité sensible donnée ». Cette manière de procéder a ceci d'avantageux qu'elle permet le maintien de rapports entre ces quantités trop petites pour être senties ; ce geste se révélera essentiel pour le calcul différentiel. D'ailleurs, Leibniz a mis au point avec son formalisme « dx » une manière de traiter des rapports entre des quantités aussi petites que l'on veut par rapport à une quantité donnée[68]. Le formalisme mathématique leibnizien facilite les

---

[67] *Ibid.*

[68] Dans cette dernière phrase, nous avons pris en compte le glissement suivant dans l'appréhension leibnizienne de l'infiniment petit. Dans le DDM, le critère pour passer d'un ordre de grandeur à un autre est toujours soumis à l'infini : une quantité doit être infiniment plus petite qu'une quantité sensible. Plus tard, le critère changera une nouvelle fois et se rapprochera de quelque chose comme : une quantité doit être plus petite que n'importe quelle quantité donnée.
D'un point de vue mathématique, les rapports entre différents ordres de différentielles se transcrivent par la possibilité de répéter le « d ». Par exemple « ddx » est infiniment plus petite que n'importe quel « dx », « ddx » et « dx » sont deux différentielles d'ordre différent. Nous pourrions dire qu'une différentielle d'ordre *n,* bien qu'infiniment plus grande qu'une différentielle d'ordre $n+1$, peut tout de même s'écrire comme une somme infinie de différentielles d'ordre $n+1$. Selon Parmentier : « La supériorité de la notation leibnizienne […] est de l'emporter sur les deux plans, c'est-à-dire de visualiser par linéarisation, aussi bien la liaison entre la différentielle dx et la quantité x dont elle émane, que la présence d'un opérateur d séparable d'une quantité particulière mais aussi de toute quantité » in M.Parmentier, *Naissance du calcul différentiel*, Vrin, Paris, 1995, p. 40.

opérations entre différentielles de différents ordres. Nous pensons avoir montré que le glissement des indivisibles vers de « l'infiniment petit par rapport à toute quantité sensible » pourrait être une étape dans l'évolution de la pensée leibnizienne qui débouchera, entre autres, sur les différentielles.

Nous avons également tenté de mettre en exergue la place de l'esprit et des mains du mathématicien-philosophe dans la quête de connaissance au-delà de la limite du fini et du sensible.

Enfin, insistons sur la persistance avec laquelle Leibniz revient sur la dichotomie qui permet d'isoler le début d'un continu en général et du mouvement en particulier. Nous reviendrons dans la suite de ce travail sur l'étude du mouvement chez Leibniz pour montrer que les indivisibles ne glissent pas en dehors du champ conceptuel leibnizien.

De materia, de motu, de minimis, de continuo — L'intrication du mouvement et de la matière par le cube de l'univers

Jusqu'à présent, nous avons examiné la matière et le mouvement en tant que deux continus séparés l'un de l'autre. Cependant, pour Leibniz, matière et mouvement sont intrinsèquement liés[69]. Nous proposons, par l'entremise du *De materia, de motu, de minimus, de continuo* de rendre compte des rapports que matière et mouvement entretiennent entre eux chez Leibniz pendant la période parisienne.

Ce texte est également un précieux témoin de l'importance de la question du mouvement au sein de la problématique générale de l'étude du continu. Il est rédigé en décembre 1675, rappelons que c'est à ce moment que Leibniz met en place les fondations mathématiques pour son calcul différentiel.

Ce texte a ceci de commode qu'il traite du changement en général. La problématique du traitement du changement au sein d'un continu est assez vaste et peut prendre des tournures différentes en fonction du contexte d'utilisation de ces notions. Le mouvement est

[69] Nous avons eu l'occasion de montrer plus haut que cette intrication entre matière et mouvement était déjà présente dans la Lettre à Thomasius du 30 avril 1669 et dans la TMA.

un changement, le déplacement le long d'une courbe mathématique est également un changement, s'agit-il pour autant du même type de changement ?

Ce texte sera également l'occasion pour nous d'essayer de montrer que ses connaissances en mathématiques ont évolué par rapport à son arrivée à Paris en 1672.

Plus tôt dans l'année 1675, Leibniz déclarait à Malebranche qu' « il est nécessaire de maintenir que les parties d'un continu n'existe qu'en ce qu'elles sont effectivement déterminées par la matière et le mouvement »[70]. Tentons d'expliciter le lien de causalité entre les parties d'un continu et la matière ainsi que l'égalité entre la matière et le mouvement.

Le texte débute par un appel au Principe de la Non-existence des Imperceptibles[71] qui s'énonce dans ce texte comme suit : « Être n'est rien d'autre qu'être capable d'être perçu»[72]. Leibniz fait usage de ce principe, dans ce texte, afin de mettre en évidence l'identité de deux situations. Par exemple, un univers au repos serait identique à un univers en mouvement uniforme, car la différence entre les deux univers serait imperceptible[73].

La première démonstration de ce texte traite de la conservation de la quantité de mouvement. Le point de départ de sa démonstration est la présupposition que la conservation de la quantité de mouvement « est un résultat découlant nécessairement de la matière et du plenum »[74]. Avant d'entrer dans la démonstration qui traite de la quantité de mouvement, Leibniz pose un contexte tout à fait intéressant pour nous. En effet, en définissant la notion de plenum il va articuler des thématiques de l'étude du continu :

> I conceive everything to be a plenum, i.e. to be matter with various motions, for if some whole infinite mass were understood to be moving with a certain universal motion, this motion could be considered nonexistent[75]. Therefore, supposing the

---

[70] Lettre à Malebranche G.i.322 dans Malebranche oeuvres complètes tome XVIII : Correspondance et actes 1638-1689 éd 1961 pp 96-104.

[71] C'est comme cela qu'Arthur appelle ce que Leibniz nomme son « argument herculéen » que l'on peut retrouver dans Aiv316 et qui se formule comme suit : « all those things which are such that it is impossible for anyone to perceive whether they exist or not, are nonexistent ».

[72] Aiii58 ; 466.

[73] « if I say that everything is moving in some specific direction, this is the same as saying that everything is at rest » *ibid.*

[74] *id.* ; 467.

[75] En vertu du Principe de la Non-existence des Imperceptibles comme vu plus haut.

> plenitude of things —in other words, supposing there is no part of space that does not contain matter moving with a motion different from an infinity of others— I show that the same quantity of motion is conserved as follows.[76]

Leibniz annonce qu'il suffit de considérer « la plénitude des choses » pour démontrer la conservation du mouvement, nous verrons, un peu plus bas, comment il exécute sa démonstration. Avant cela, étirons quelque peu la notion de plenum au sein du continu. Nous avons vu que, pour Leibniz, un mouvement qui animerait de la même manière la totalité de l'univers serait considéré comme du repos. Le mouvement qui agite la matière doit donc être varié, les variations peuvent s'exprimer par des différences de direction ou d'intensité. En dernière analyse, l'univers est plenum, le plenum étant, par définition, matière, il n'existe pas une partie de l'univers qui ne contient pas de la matière animée d'un mouvement différent de tous les autres mouvements existants. Nous pouvons dire avec Leibniz que la diversité de l'univers dérive du mouvement de chacune de ses parties. Cette manière de considérer la plénitude des choses transpose le problème du continu à chaque mouvement de la définition en cascade qui part de l'identité entre univers et plenum et qui se termine par l'identité de la matière avec le mouvement.

Pour le dire rapidement, il faudrait se demander de quoi est composé l'univers, ensuite de quoi est composée la matière et finalement de quoi est composé le mouvement. Ces questions, en quelque sorte, se redoublent ou se déplient dans d'autres questions : comment se composent deux parties de l'univers entre elles, comment se composent deux parties de la matière entre elles et, finalement, comment se composent deux mouvements entre eux ? Nous aurons l'occasion de constater que cette manière de concevoir la matière et le mouvement aura des répercussions sur la composition du mouvement jusque dans le *Pacidius Philalethi*[77].

---

[76] *Id. ;* 467.

[77] Voir troisième partie de ce travail.

Présentons la démonstration. Leibniz va représenter au moyen d'une figure géométrique[78] l'univers contenant une infinité de parties qui ont chacune un mouvement différent. Comme nous allons le voir avec un schéma, Leibniz utilise deux côtés d'un carré pour représenter d'une part, un certain temps pendant lequel le mouvement a lieu et d'autre part la matière en mouvement. Ensuite, Leibniz interprète métaphysiquement les résultats mathématiques de la démonstration.

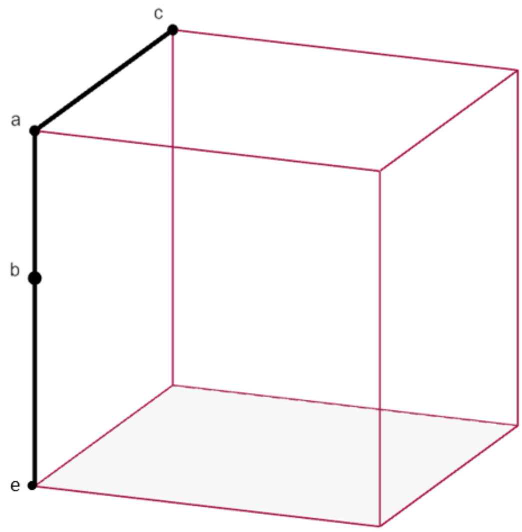


Figure 1 — Le temps coule le long de *AE* et une portion de matière est représentée par *AC*

Considérons une face *ace* d'un cube. Considérons que l'arête *ae* représente le temps pendant lequel un mouvement a lieu et que l'arête *ac* représente la matière en mouvement[79]. Prenons un laps de temps *ab* de *ae*. Dans cette construction, Leibniz représente la vitesse de la matière par une perpendiculaire à la face *ace* en chaque partie de *ac*. L'aire sous-tendu par l'arc *ac* représente « les vitesses de chaque partie de matière, i.e les espaces infinitésimaux qui seront traversés par chacune en un temps déterminé »[80]. Par le biais de cette construction, Leibniz parvient à isoler le mouvement de chacune des parties de la matière en mouvement représenté par *ac*. Il montre très clairement que chacune de ces parties possède un mouvement différent par rapport à chacune des autres parties de la matière considérée. En considérant uniquement le cas particulier de *DF*[81], Leibniz ne tient compte que d'une seule contribution

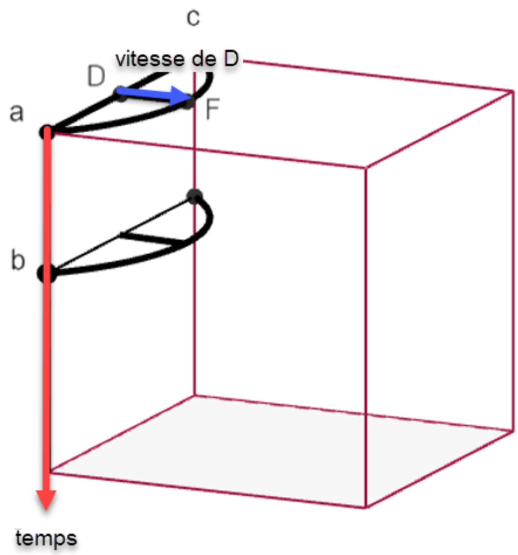


Figure 2 — Représentation de *DF*, la vitesse au moment *a* de *D*.

[78] Nous avons tenté d'éclater la construction du dessin en suivant les étapes du raisonnement. Leibniz n'a quant à lui produit qu'un seul schéma contenant toutes les étapes de la construction.

[79] Voir figure 1.

[80] *ibid.*

[81] Voir figure 2.

au mouvement total dans *ac*. Autrement dit, il n'a isolé qu'un terme de la somme de toutes les contributions infinitésimales de chaque partie de la matière en mouvement. Pour connaître la quantité de mouvement totale, il s'agira d'intégrer toutes les contributions. Nous avons représenté par la portion de cylindre *acFbiO*[82] « la quantité totale d'espace parcouru»[83]. Nous pouvons voir que le mouvement d'un point *d* durant *ab* donne lieu à une surface. Cette surface représente l'espace parcouru par *d.*

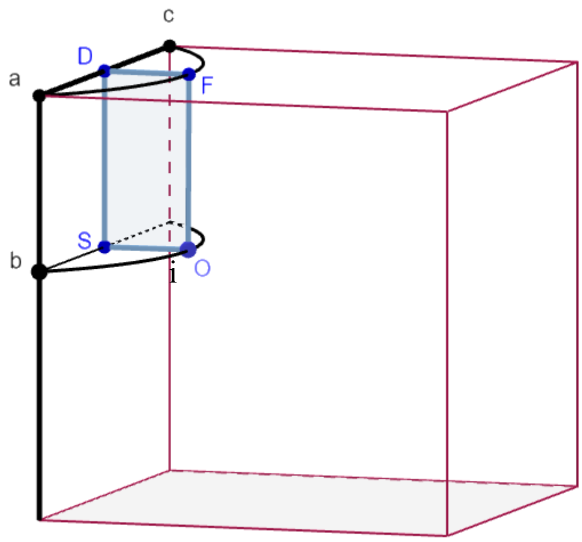


Figure 3 — Représentation de l'espace parcouru par *D* par le biais de la surface *DFOS*

Jusqu'ici, Leibniz ne fait que représenter au sein d'une construction géométrique les relations entre espace, durée et mouvement. Dans la suite du texte, Leibniz ajoute une dimension métaphysique en considérant l'univers comme un plenum. Pour procéder à ce basculement, Leibniz imagine qu'une partie de la matière accélère ce qui implique, toujours en restant dans le cadre du cube de la démonstration, que cette partie devrait occuper, le cas échéant de plus en plus de place au cours de l'écoulement du temps *ab.* Or étant donné la plénitude des choses, cette accélération a pour conséquence la décélération d'une autre partie de la matière dans l'univers. Leibniz ajoute que «la quantité d'espace dans le monde est définie, c'est-à-dire, certaine et déterminée, même si elle est considérée comme étant infinie »[84] . Dès lors il est impossible que quelque chose occupe plus de place sans qu'une autre chose, dans le même temps, occupe moins de place. Se mouvoir plus rapidement implique de prendre plus de place, or l'univers, bien qu'infini, n'en reste pas moins un plenum, donc quelque chose d'autre doit prendre moins de place donc doit, par conséquent, se mouvoir moins rapidement. La quantité d'espace dans l'univers doit rester constante bien que ce dernier soit considéré comme étant infini.

---

[82] Voir figure 3.

[83] *Ibid.*

[84] *Ibid.* Encore une preuve que Leibniz pense que l'on peut traiter de quelque chose d'infini en acte sans pour autant conclure, comme Descartes le fait, qu'on a affaire à de l'indéfini. Leibniz semble tenir à cette distinction depuis la TMA, comme nous l'avons vu.

Finalement, Leibniz conclut que « la même quantité de mouvement sera conservée dans le tout, car la quantité totale de mouvement est la même que la quantité d'espace successivement occupée par une quantité déterminée de matière en un temps déterminé »[85].

Afin que le raisonnement puisse tenir, Leibniz doit accepter une définition du mouvement à laquelle il renoncera plus tard[86], à savoir que « la nature du mouvement consiste certainement en ce qu'il n'y a pas de partie du temps si petite qu'en son sein un corps ne serait pas à plusieurs endroits successivement »[87]. Cet abandon n'enlève rien à l'intérêt des mathématiques dans cette démonstration.

Tentons de circonscrire la place du raisonnement mathématique dans cette démonstration. Leibniz désire montrer qu'au sein d'un plenum une modification de la vitesse d'une portion de matière engendre une compensation de la vitesse d'une autre portion de matière. Pour atteindre ce niveau de généralité, il isole le plus petit acteur du changement de vitesse au sein de la matière. Dans le cadre de cette démonstration, c'est le segment *DF* qui jouera le rôle d'infinitésimal. Les mathématiques, selon nous, permettent une meilleure appréhension du problème de la conservation de la quantité de mouvement tout en garantissant le caractère général de la connaissance ainsi récoltée. Si l'on accepte le raisonnement concernant un infinitésimal quelconque, si l'on accepte que ces infinitésimaux doivent pouvoir être additionnés ou intégrés au sein d'une addition, alors nous pouvons également accepter que cela se réverbère sur toute la matière qui compose l'univers. Rappelons que ce texte a été rédigé pendant la même période où Leibniz jetait les bases mathématiques et formelles du calcul différentiel qui allait se révéler d'une redoutable efficacité pour calculer des sommes d'infinitésimaux.

Tout ce développement permet à Leibniz de faire la somme de ces infinitésimaux au sein d'une conclusion qui porte sur la nature de l'univers :

> In fact it is not possible that the sum of the spaces occupied in equal times should turn out to be greater or smaller; because then, when the distribution was made it

[85] *Ibid.*

[86] Leibniz abandonne cette manière de définir le mouvement dans le *Pacidius Philalethi* comme nous aurons l'occasion de le montrer. [86]. Cependant nous avons vu que cette manière de traiter le mouvement était déjà présente dans des écrits précédant la période parisienne comme la TMA.

[87] *ibid.*

> would have been necessary either for more matter to have been added to fill the space that remains, or for some matter to have been ejected, both of which we have supposed to be impossible.[88]

Le texte recèle un dernier raisonnement concernant cette fois la place problématique des minima au sein du continu. Après avoir remartelé qu'il ne peut exister de minima dans un continu, Leibniz semble montrer que l'exclusion des minima de la composition d'un continu semble également mener à une autre contradiction.

Nous nous bornerons au développement du raisonnement concernant un minimum au sein de l'espace, Leibniz considère que ce raisonnement est tout autant valide en ce qui concerne le temps.

Commençons d'abord par considérer la contradiction liée à la composition d'un continu par des minima.

Leibniz part du principe que si quelque chose est un minimum, il doit forcément exister , par définition, quelque chose plus grand que ce dernier : « Un minimum de temps (minimum d'espace) est une partie d'un temps (espace) plus grand qui repose entre ses limites — par la notion que nous avons du tout et de la partie»[89]. Le minimum de temps est une partie d'un temps plus grand considéré comme un tout, car selon « la notion que nous avons du tout et de la partie » une partie est toujours plus petite que le tout dans lequel elle est contenu. Or, ce raisonnement conduit à une absurdité si l'on considère un minimum comme une partie d'un tout. Leibniz nous rappelle que la composition d'un tout par des minima mène à au raisonnement absurde qui égale la diagonale et le côté d'un carré[90].

Un tout peut être composé de parties ; ces parties sont par définition plus petites que le tout, mais cela n'implique pas que ces parties soient des minima. Hélas, ce raisonnement ne permet pas d'exclure les minima de la composition d'un tout, car un minimum est tout de même plus petit que n'importe quoi d'autre. Or pour Leibniz, la notion qu'il a d'un tout et de ses parties semble lui faire écrire que « tout ce qui est plus grand est composé de quelque chose de plus petit »[91], les minima semblent être éligibles pour la composition de quelque chose de plus

[88] *Ibid.*

[89] *Id. ;* 469.

[90] *Ibid.*

[91] *Ibid.*

grand vu que par définition ils seraient plus petits.

Par la suite, Leibniz explore la possibilité qu'au moins une partie d'un tout continu ne soit pas composé par des minima. Cette possibilité mène également à un paradoxe :

> If the continuum is something other than the sum of supposed minima (if there are minima in it), it follows that there is a part that is left over when the sum of the minima has been taken away ; therefore this part is greater than a minimum, since it is neither smaller nor equal, therefore there are also minima in it. But this is absurd, since we have already taken away all the minima. Therefore if there are minimum parts in the continuum, it follows that the continuum is composed of them. But this is absurd for the continuum to be composed out of minima […].[92]

Le raisonnement semble tourner en rond. Postuler que le continu serait composé d'autre chose que de minima revient finalement à conclure qu'il soit composé de minima. La situation semble insoluble. Leibniz semble être contraint d'aménager une place pour les minima au sein du continu. Un nouveau concept mathématique, présent dans le texte, pourrait aider Leibniz à sortir de l'aporie. Il s'agit du concept de « boundaries » que nous traduisons par « limites ». Il s'agit peut-être ici d'une indication quant au nouveau rôle que joueront les minima ou les indivisibles dans le continu ; ils seront bientôt relégués, comme nous le verrons, au rôle de limites entre quantités sensibles ou étendues.

Nous retrouvons ce concept de limite à la fin du texte lorsque Leibniz précise longuement ce que l'expression « *Esse in aliquo* » implique dans le contexte de la composition d'un continu :« Être dans quelque chose (i.e. être au sein de ses limites) et être quelque chose qui ne peut être compris sans quelque chose d'autre, est être une partie. Dès lors il n'y a pas une chose comme un minimum dans un continu »[93].

Cette proposition ne laisse pas beaucoup de place pour le concept de minimum au sein d'un continu. Cependant, il existe un cas-limite. Leibniz est très rigoureux dans sa proposition. Précisément, il n'interdit au minimum que de se trouver *entre* les limites d'un continu, il ne se prononce pas quant à la possibilité de constituer les limites d'un continu par des minima.

---

[92] *Id.* 470.

[93] *Ibid.*

Nous aurons l'occasion de montrer que dans le *Pacidius Philalethi*, le minima endossera le rôle de limite dans le continu.

De arcanis sublimium vel De summa rerum — 11 février 1676

Jusqu'à présent nous nous sommes essentiellement borné à rester dans les parages du problème de la composition du continu. Avec le *De summa rerum*, nous faisons entrer un acteur majeur dans la philosophie de Leibniz, Dieu. Leibniz tente, à de nombreuses reprises durant sa vie, de transcrire au mieux dans le monde, qui est la création de Dieu, ce que seraient les marques de la perfection divine. Pour le formuler dans le contexte du continu, nous pourrions nous demander si le discret l'emporte sur le continu quand il s'agit de la perfection du monde ? Ou encore si un monde parfait devrait être borné ou infini ?
Il semble clair que Leibniz penche plutôt pour un monde que nous pourrions, en grossissant le trait, caractériser de plenum sans bornes. Cependant, un plenum infini peut accueillir des infinités de configurations possibles, quelle serait la meilleure ? Certainement, Dieu seul le sait ; ce calcul est hors de notre portée humaine. Néanmoins, il est possible, selon Leibniz, de dégager certains principes et certaines réflexions qui détermineraient ce calcul divin. À l'occasion du *De summa rerum,* nous allons envisager certains de ces principes. Notre monde est le meilleur monde possible, ce critère ne peut se passer d'une certaine recherche d'un maximum.

Le texte commence par l'énonciation d'un principe de l'harmonie des choses : « Il existe la plus grande quantité d'essence »[94]. L'enjeu du texte sera donc de maximiser la quantité d'essence, au sein de la thématique du continu et de la composition d'un continu, dans l'univers afin d'atteindre l'harmonie la plus parfaite.

Le problème de recherche du maximum n'en serait pas un si tout ce qui était possible pouvait être admis dans l'existence. En effet, chaque chose possible pour Leibniz contient une certaine quantité d'essence, mais occupe également une certaine quantité d'espace et de temps. Leibniz aurait pu considérer que dans un monde infini, existe actuellement tout ce qui peut exister ; en d'autres termes, il aurait pu écrire que l'actualité épuise le possible. Dans ce

[94]*Aiii60* ; 472.

texte, il défend tout l'inverse. C'est d'ailleurs ce qui lui fait écrire qu' « un être parfait doit être préféré à beaucoup d'êtres imparfaits qui lui seraient équivalents, car ces derniers, tandis qu'ils occupent espace et temps, empêchent l'existence d'autres êtres ». Chaque être occupe une place dans l'espace-temps, il s'agira pour Leibniz de déterminer quelle conception de l'univers maximise le mieux l'occupation de l'espace-temps. Autrement dit, comment est composé l'espace-temps pour que ce dernier puisse accueillir le plus d'essence, le plus de perfection.

Les réflexions leibniziennes dans ce texte prendront comme point de départ le monde comme plenum :

> There is no vacuum in forms; likewise that there is no vacuum in place and time, *so far as this is possible*. Whence it follows that there is no *assignable* time at which something will not have existed, nor any place which is not full, *so far as this is possible*. It must be seen, therefore, what follows from the plenitude of the world [95]

Dans la suite du texte, Leibniz sera amené à pousser le plus loin possible la perfection du monde. Ce faisant, l'univers gagnera en profondeur dans le sens où Leibniz écrira que l'on peut dire qu'une « partie de la matière, aussi petite soit-elle, contient une infinité de créatures, i.e. est un monde, il s'ensuit également que la matière est actuellement divisée en une infinité de points »[96].

Soulignons deux éléments de cet extrait. Premièrement, il n'existe pas une partie de la matière tellement petite qu'elle ne contienne pas une infinité de créatures, qu'elle ne soit pas un monde à elle seule. Deuxièmement, il semblerait que la division infinie actuelle de la matière ait pour conséquence de résoudre cette dernière en une infinité de points. Il s'agirait pourtant des mêmes points que Leibniz considérait, dans le DDM, comme des minima.

Dans ce texte, Leibniz hésite. D'un côté il est tenté de résoudre le monde en points, car il en suivrait que « cela augmente la multiplicité des existants et l'harmonie des choses, ou l'admiration de la sagesse divine »[97], mais d'un autre coté il souhaiterait tout de même que

[95] *Id. 473,* les italiques sont de nous.

[96] *Ibid.*

[97] *Id.* ; 474.

« n'importe quelle partie de la matière soit commensurable avec n'importe quelle autre »[98]. Nous pourrions nous interroger quant à la possibilité de maintenir un rapport de commensurabilité entre un point infiniment petit et une portion de matière sensible. Il nous semble qu'ici, dans cette tension entre le fini et l'infini, Leibniz serait à la recherche d'une manière d'accommoder des rapports entre le sensible et l'infini tout en maximisant la perfection de l'univers. La perfection de l'univers, selon Leibniz, semble devoir prendre en compte trois exigences : il faut que le plus d'essences possibles existent, il faut que les essences les plus parfaites existent et il faut une harmonie dans les rapports entre ces essences. Autrement dit, Dieu doit amener à l'existence le plus de matière possible qui doit actualiser le plus de perfection possible tout en maintenant des rapports de commensurabilité entre chacune des parties de la matière qui forment l'univers.

Pour assurer une certaine continuité entre tous les éléments de l'univers, il est nécessaire, en quelque sorte, de rendre l'infini relatif et borné. Dans la suite du texte, un passage semble aller dans ce sens :

> If we imagine creatures of another world that is infinitely small, we will be infinite in comparison with them whence it is clear in turn that we could be imagined as being infinitely small in comparison with another world that is of infinite magnitude, and yet bounded. [99]

Ces considérations ouvrent la possibilité de distinguer différents ordres de grandeur entre des infinis. Cette d'idée d'infini par comparaison[100] fera son chemin dans la pensée de Leibniz. Par ailleurs, ce chemin sera poursuivi par d'autres penseurs comme Cantor qui introduira lui aussi différents ordres d'infini.

Ainsi il arrive à Leibniz d'envisager différentes manières de concevoir une vie infinie. Dans le passage suivant, Leibniz emploie cette manière de penser pour classer des durées infiniment grandes entre elles : « quelqu'un qui a vécu pendant une infinité d'années peut avoir commencé à vivre, et quelqu'un qui vit durant un nombre d'années supérieur que

---

[98] *Ibid.*

[99] *Id.* ; 475.

[100] Leibniz, au sein même du texte, distingue explicitement les infinis « bornés » d'un infini sans borne qu'il nomme *Immensum.* Voir *Ibid 475.*

n'importe quel nombre fini peut mourir à un certain temps »[101]. Nous pouvons retrouver une occurrence d'un raisonnement similaire par rapport à l'éternité dans un commentaire de Leibniz, écrit seulement quelques mois plus tard, sur l'Éthique de Spinoza[102].

La thématique de commensurabilité entre différents infinis sera refondée dans le texte *Numeri infiniti* écrit quelque mois plus tard. Dans ce texte, comme nous le verrons, Leibniz sera beaucoup moins hésitant et démontrera, une fois pour toutes, qu'un nombre infini ne peut exister. C'est également à l'occasion de ce texte, comme nous allons le voir dans la section suivante, qu'il tentera de clarifier le rôle fictionnel des infinitésimaux dans son Calcul.

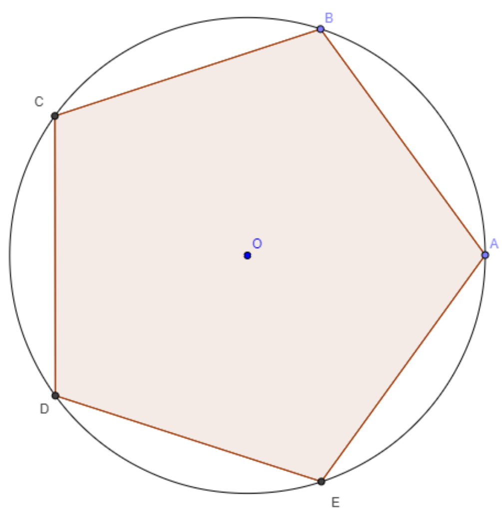
101 *ibid*

102 Voir Aiii19 ; 276-78.

De infiniti Parvis à Numeri infiniti — le caractère fictionnel de l'infiniment petit dans le raisonnement mathématique

Nous souhaiterions à présent retourner sur le terrain des mathématiques. Dans ces deux textes, Leibniz reprend le problème de la quadrature du cercle dont il avait, comme nous l'avons vu, esquissé les contours dans la TMA. Pour rappel, dans la TMA, un cercle et un polygone d'une infinité de côtés possédaient la même extension, mais pas la même grandeur. Ici, il s'agira de se prononcer sur le caractère fictif de ce qui porte la responsabilité de cette différence de grandeur. Nous devrons mobiliser les notions et gestes philosophico-mathématiques que nous avons parcourus jusqu'ici tout en découvrant un nouveau domaine de l'étude du continu, à savoir le rôle de l'esprit dans la distinction « sensible » du cercle et du polygone. Nous envisagerons également le rôle de l'erreur dans ce contexte où il est à la fois question de calcul différentiel et de perception sensible.

Le *De infiniti parvis*[103], écrit courant du mois de mars 1676, précède *Numeri infiniti* de quelques semaines. Les deux textes, ne serait-ce que par la problématique qui les occupe, sont intimement liés ; nous allons donc les traiter en même temps.



Pentagone inscrit dans un cercle

Le DIP doit nous amener à considérer les infinitésimaux, compris jusque-là comme des infiniment petits[104], comme des « rien du tout ». Le texte laisse entrevoir comment ces « rien du tout » seront assimilés par le formalisme mathématique qui s'occupera de préparer le terrain pour les applications du Calcul.

Leibniz remet donc une fois de plus son polygone sur le métier et imagine que ce dernier soit toujours « plié vers l'intérieur jusqu'un degré tel que même lorsque la différentielle est considérée comme étant infiniment petite, l'erreur sera encore plus petite »[105]. Nous représentons quelques opérations de courbure d'un polygone

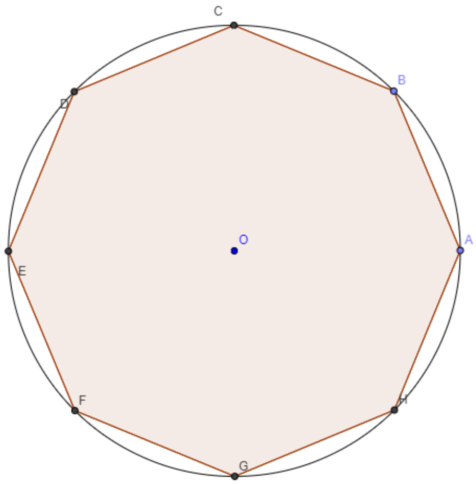
---

[103] Nous noterons *De infiniti parvis* avec l'abréviation DIP dans la suite de ce travail.

[104] *Cfr.* notre section sur le DMM.

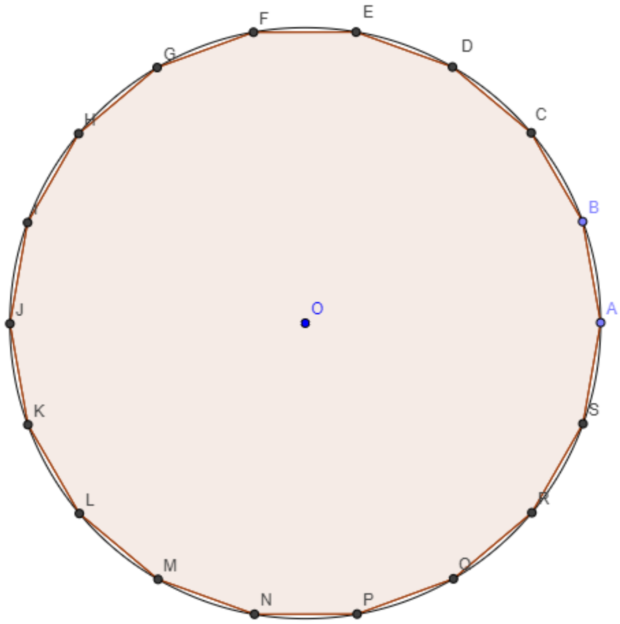
[105] Aiii 52 ; 434.

pour montrer d'une part où se situe l'erreur dont Leibniz parle et d'autre pour montrer le caractère évanouissant de l'erreur. En rouge, nous avons représenté l'aire du polygone et en blanc la différence avec l'aire du cercle circonscrivant le polygone. À ce stade, contentons-nous de remarquer qu'il est de plus en plus difficile de percevoir l'erreur à mesure que le polygone tend à se fondre dans le cercle. Nous calculerons plus bas l'erreur d'approximation dans ce cas précis à l'aide du concept de série.



Octogone inscrit dans un cercle

Le cœur du Calcul réside en ce qu'il est, dans certaines conditions, possible de rendre l'erreur entre le cercle et le polygone toujours plus petite que n'importe quelle quantité ou degré de précision donné. Nous sommes ici à la croisée des chemins entre les concepts de limite, de convergence, d'infiniment grand ou d'infiniment petit.



Polygone avec 18 côtés inscrit dans un cercle

Tout comme le polygone se déplie, sous nos yeux, en un cercle, il est également possible de déplier, dans notre esprit, des séries tout en restant dans la même veine mathématique. D'ailleurs, Leibniz est connu pour avoir déplié une fameuse série. Cette série a traversé le temps pour arriver jusqu'à nos jours dans nos livres de mathématiques, il s'agit de l'approximation de $\frac{\pi}{4}$ par une série alternée :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$$

Nous avons affaire à une série comportant une infinité de termes, pourtant cette série converge. De plus, nous pouvons calculer précisément l'erreur à chaque étape. En effet, le reste est toujours majoré par le terme négligé[106].

À ce stade, il est intéressant de mettre en parallèle ce texte avec un texte mathématique majeur de la période parisienne, à savoir le *De quadratura arithmetica*[107]. Nous retrouvons les infinitésimaux considérés comme des fictions, Leibniz leur assigne un rôle particulier au sein de la pratique des mathématiques :

> Peu importe que de telles quantités soient ou non naturelles, on peut se contenter de les introduire par le biais d'une fiction dans la mesure où elles offrent bien des commodités dans les formulations, dans la pensée, et finalement dans l'invention aussi bien que dans la démonstration […] toute figure curviligne n'est rien d'autre qu'un polygone comportant une infinité de côtés, de longueurs infiniment petites[108].

Les infinitésimaux deviennent des commodités ou des abréviations pour la pensée lorsque cette dernière tente de démontrer et de découvrir, des commodités pour la main quand il s'agit de compter des collections infiniment grandes d'infiniment petits ou de dessiner des polygones avec toujours plus de côtés. Nous retrouvons la main et l'esprit de notre mathématicien. Un infinitésimal, comme fiction, représente une quantité indésignable dans sa totalité et se laisse coucher sur le papier. D'ailleurs, Leibniz nomme quantité indésignable toute quantité « dont la grandeur ne peut être exprimée par n'importe quel caractère détectable par les sens »[109], voici de nouveau le sensible.

Un critère pour désigner une quantité indésignable serait l'impossibilité de la détecter par les sens ; dans le cas d'un infinitésimal, son indésignabilité s'exprime en ce qu'il est impossible de le sentir. Impossibilité d'établir un rapport entre l'indésignable et le sensible sans avoir recours à la fiction *et* aux mathématiques. Avec l'aide d'un formalisme

---

106 Nous montrons cette propriété un peu plus bas dans ce travail.

107 Nous aurons l'occasion de présenter la propriété 7 de ce texte à la fin de cette partie de notre travail. Voir page 60.

108 G.W. Leibniz, *Quadrature arithmétique du cercle, de l'ellipse et de l'hyperbole*, traduction par Marc Parmentier, Vrin, 2004, p. 187.

109 Aiii52 ; 434.

mathématique adapté, un infinitésimal peut être considéré comme désignable qui peut donc dès lors être « écrit dans un livre suffisamment petit avec l'aide d'abréviations et de représentations»[110]. La série alternée, que nous trouvons plus haut dans ce travail, typiquement, résiste à l'épreuve de l'écriture dans un « livre suffisamment petit » ; elle ne se laisse pas déployer toute entière jusqu'à son dernier terme, elle est infinie. Cependant, l'erreur d'approximation de cette série se laisse glisser des abréviations de l'esprit jusque sur le papier vélin par l'entremise de l'alliance de mouvements de poignet et de l'encre de la plume. L'erreur peut être rendue arbitrairement petite en fonction du besoin. Il est possible d'écrire la série en déduisant sa « raison », mais il est impossible d'écrire tous les termes de cette même série. Une série infinie et son erreur d'approximation permettent de montrer la relation d'un infiniment grand, le nombre de termes de la série, et d'un infiniment petit, l'erreur d'approximation de la série.

Illustrons, par le biais d'une monstration, une manière de réduire l'erreur de la série alternée de Leibniz en dessous d'une quantité arbitrairement petite :

Commençons par écrire notre série, $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19} + \frac{1}{21} \quad \ldots$

À chaque pas supplémentaire dans la somme, nous nous approchons un peu plus près de la valeur de $\frac{\pi}{4}$. L'erreur que nous commettons en nous arrêtant dans cette somme est inférieure au premier terme que nous négligeons.

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \boxed{\frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19} + \frac{1}{21} \quad \ldots}$$

erreur
<1/13

Si 1/13 est le premier terme négligé alors l'erreur sera inférieure à 1/13

Considérons la valeur de $\frac{\pi}{4}$ calculée jusqu'à 15 décimales : 0,785398163397448

[110] *Id.* ; 435.

Observons à présent le comportement de notre suite arrêtée à deux termes : $1-\frac{1}{3}=0,666666666$

L'erreur commise vaut 0,1187315 et est bien inférieure au premier terme négligé : $\frac{1}{5}=0,2$

Si nous allons un peu plus loin dans la suite, nous minimisons toujours plus l'erreur :

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}+\frac{1}{21}-\frac{1}{23} \quad = 0{,}764600691482$$

L'erreur commise vaut 0,02079747 et est bien inférieure au premier terme négligé : $\frac{1}{25}=0,04$

Si nous désirons nous assurer une erreur inférieure à un centième 1/100, il faudra calculer la somme des 50 premiers termes de la suite car l'erreur sera alors inférieure à 1/101

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{97}-\frac{1}{99} \quad = 0{,}780398663148$$

L'erreur commise vaut 0,004999500250 et est bien inférieure au premier terme négligé : $\frac{1}{101}=$ 0,00990099

Nous pouvons procéder de la même manière afin de réduire l'erreur autant que nous le désirons. Notre raisonnement s'apparente à une monstration, nous pensons que cela est suffisant pour montrer que l'erreur tend bien vers zéro[111].

Pour nous, êtres finis, nous ne pouvons approcher l'infini que par notre erreur d'approximation.

Dans *Numeri Infiniti*, Leibniz insiste encore plus fermement sur le caractère fictionnel des infinitésimaux en ayant recours à des démonstrations, des raisonnements et un certain regard critique sur son propre parcours intellectuel eu égard à ces notions. Nous retrouverons également la conception d'un rapport spécifique entre des quantités infinies ainsi qu'une interrogation sur l'existence d'un hypothétique dernier terme de la série alternée que nous présentions plus haut. À l'occasion de ce texte, nous verrons comment Leibniz se sert du concept de « petites perceptions » pour réaffirmer le caractère fictif des infinitésimaux. Nous montrerons également que Leibniz tente de composer le continu par les conatus.

---

[111] Cependant, nous avons écrit une démonstration dans l'appendice mathématique que nous joignons à ce travail. La démonstration montre que le reste tend effectivement vers 0.

Le texte débute par 4 paragraphes dont le contenu sera jugé erroné par Leibniz. En effet, ces paragraphes sont annotés par Leibniz lui-même de la mention « Error ». Ces paragraphes sont autant de tentatives pour montrer que des quantités infinies peuvent être commensurables entre elles de la même manière que peuvent l'être deux quantités finies.

Prenons un raisonnement parmi ceux proposés par Leibniz. Nous avons deux lignes infinies *AB* et *CD*[112] toutes deux divisibles exactement par la même unité de mesure. Autrement dit, les deux lignes contiennent exactement un certain nombre entier de cette unité de mesure. De ces prémisses, Leibniz conclut que « ces deux lignes, bien qu'infinies, sont commensurables, i.e. ont une mesure commune, à savoir le pied *AI* »[113]. Nous pourrions rapprocher cette conclusion de la notion contemporaine de corps archimédiens qui garantit, d'une certaine manière, que tout membre d'un ensemble est commensurable avec n'importe quel autre. Leibniz poursuit le raisonnement en écrivant que « ces deux lignes, bien qu'infinies, ont un rapport fini l'une avec l'autre, i.e. sont comme les lignes finies *LM* et *NP »*[114]*.* Leibniz ramène le rapport entre deux objets infinis à un rapport entre deux objets finis, ce qui lui permet la transposition de propriété du fini dans l'infini.

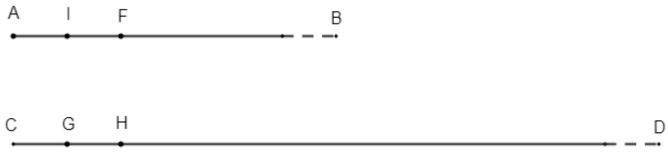


Figure 1 — Représentation des deux droites infinies AB et CD

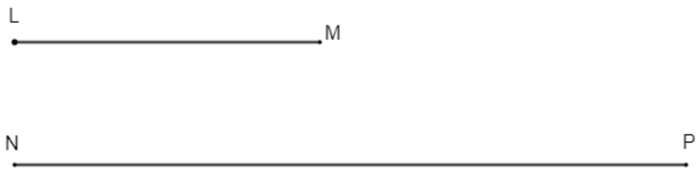


Figure 2 — LM et NP, deux segments.

Résumons, *AB* et *CD* se comportent entre elles comme *LM* et *NP*, or ces dernières sont des lignes finies donc à Leibniz de conclure que « deux lignes finies commensurables sont comme un nombre fini par rapport à un nombre fini»[115]. Leibniz termine le raisonnement en transposant cette propriété de deux lignes finies à deux lignes infinies. L'élément déterminant

112 Voir Figure 1.

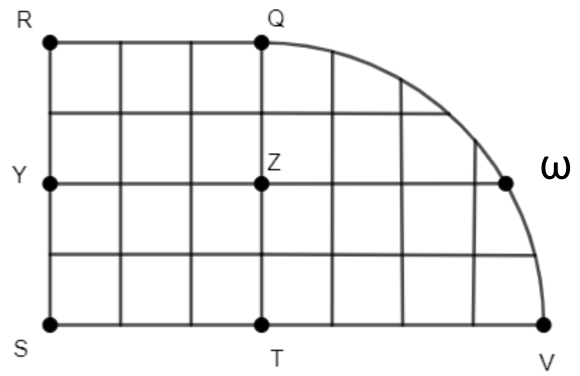
113 Aiii69 ; 496

114 *Ibid.* Voir Figure 2

115 *Ibid.*

de la démonstration est la construction des deux lignes infinies partageant une *mesure commune*, cela garantit, pour l'instant, la commensurabilité de ces quantités infinies.

Dans le raisonnement suivant, Leibniz va s'appuyer sur la démonstration précédente. En effet, il reprend la supposition que deux lignes finies sont dans le même rapport que deux nombres finis *si et seulement si* deux lignes infinies sont dans le même rapport que deux nombres finis. Le sens « suffisant » conduira, comme nous allons le voir, à une absurdité.



Rectangle RQTS et quart de cercle QTV

Leibniz imagine une figure composée d'un rectangle RQTS accolé à un quart de cercle comme dans les schémas que nous avons reproduits. Il considère le quart de cercle QTV comme un polygone. Le rectangle et le quart de cercle peuvent être décomposés en une infinité de carrés aussi que petits que l'on désire[116], nous avons représenté ces carrés par le quadrillage de notre deuxième schéma. Leibniz s'intéresse à la ligne QT qui est la limite entre les deux figures, il considère que cette ligne est divisée en une infinité de parties. Il est donc possible de tracer autant de perpendiculaires à QT dans les deux figures. Nous avons représenté sur notre deuxième schéma les segments ZY et Zω comme une paire de segments qui ont un point en commun sur QT. Leibniz écrit que si Zω est tel qu'il est « en une proportion rationnelle à l'ordonnée rectiligne correspondante ZY, [...] alors le nombre de carrés infinitésimaux de l'une sera aussi commensurable avec le nombre de carrés de l'autre, et si l'une est épuisée par la répétition de

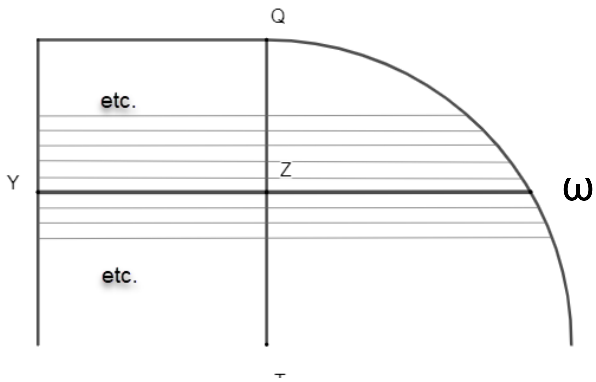


Schéma mettant en exergue une infinité de parallèles

[116] Le schéma de Leibniz est fort similaire au nôtre. Lui aussi représente des carrés infiniment petits par des carrés que nous pouvons distinguer à l'oeil nu sur du papier.

carrés, alors il en sera de même pour l'autre»[117]. Autrement dit, il serait possible d'avoir une relation du type : la distance YZ multipliée par un rationnel serait la même que Zω. Étant donné que QT contient une infinité de points comme Z, il existe donc pour chacun d'entre eux un rapport rationnel entre deux segments comme nous venons de le montrer pour YZ et Zω. Dès lors si :

> all these ordinates[118] are extended in a straight line, i.e. the squares are taken directly, the number of them in the rectilinear figure will be to the number in the curvilinear one as one commensurable infinite line to another, […], as finite number to finite number.[119]

Cette comparaison entre des ordonnées est possible, car chaque ordonnée partage avec toutes les autres les mêmes carrés infiniment petits qui les composent. Les carrés infinitésimaux font office de mesure commune pour toutes les ordonnées. Les ordonnées des deux figures sont donc mises respectivement les unes à la suite des autres de sorte à former deux lignes infinies. Or Leibniz vient de montrer que deux lignes infinies sont dans le même rapport que deux nombres finis donc les deux figures —RQTS et QTV, peuvent être exprimées dans un rapport rationnel.

Autrement dit, ce raisonnement a pour conséquence logique que le carré est dans le même rapport au cercle qu'un nombre fini à un autre, ce qui est inacceptable pour Leibniz. Une erreur s'est glissée dans le raisonnement de Leibniz, il va s'atteler dans le paragraphe suivant à en circonscrire la nature.

Leibniz va rejeter la possibilité que deux lignes commensurables finies soient comme un nombre fini par rapport à un nombre fini dans le cas précis de la comparaison du diamètre d'un cercle avec le côté d'un carré. La comparaison entre des lignes infinies s'effondre quand il s'agit de sommer une infinité de contributions infiniment petites comme dans le cas d'une quadrature. Dans la suite du texte, Leibniz s'efforce de montrer qu'il n'existe pas une mesure commune rationnelle entre le diamètre du cercle et le côté du carré. Pour Leibniz, il est impossible, par le biais d'une quadrature, de mettre rationnellement en rapport le cercle et le

117 *Id.* ; 498.

118 Il faut comprendre par « ordonnée » un segment du type YZ ou Zω.

119 *Ibid.*

carré. Cela contraint Leibniz à repenser le problème autour de l'approximation étant donné que la quadrature parfaitement précise est impossible. Dès lors, il est nécessaire de faire porter la responsabilité de l'inexactitude de la quadrature sur les infinitésimaux qui doivent donc être considérés comme des fictions.

Pour Leibniz, le diamètre et le côté n'ont même pas une mesure commune qui serait un nombre algébrique. Il suppose que « la grandeur du cercle ne peut être exprimée par une équation de n'importe quel degré »[120]. Leibniz sous-entend implicitement que la mesure commune serait un nombre transcendant, dans ce cas il s'agirait de π.

Dans la suite du texte, Leibniz va explorer une autre méthode pour approximer l'aire d'un cercle. Il repart du « cercle—comme un polygone plus grand que n'importe quel assignable, comme si cela était possible» et déclare qu'un tel cercle serait une « entité fictive »[121]. La possibilité d'un rapport entre le cercle et le polygone disposant d'une infinité de côtés permet de transposer ce que l'on peut dire du polygone au cercle, car un cercle est, à une erreur aussi petite que l'on désire, la même chose que le polygone.
Si nous suivions une certaine loi de construction pour augmenter le nombre de côtés d'un polygone et que « quelque chose est vrai d'eux au plus ils augmentent, notre esprit imagine un polygone ultime ; et ce qu'il voit devenir de plus en plus comme cela dans les polygones individuels, il le déclare être parfait dans l'ultime »[122].

Ce raisonnement est valide même si, avec Leibniz, nous estimons qu'un tel polygone ultime n'existe pas. Tout comme les infinitésimaux, le polygone est utile « pour le bien d'abréviations d'expressions »[123].
Plus loin dans le texte, Leibniz insiste :

> even though these entities are fictions, geometry nevertheless exhibits real truths which can also be expressed in other ways without them. But these fictitious

[120] *Id.* ; 498.

[121] *Ibid.*

[122] *Ibid.*

[123] *Ibid.*

> entities are excellent abbreviations for expressions, and for this reason extremely useful.[124]

Nous arrivons à une bifurcation du texte. En effet, après avoir longuement navigué dans des considérations mathématiques afin d'en retirer une manière de mettre en rapport des quantités infinies entre elles, Leibniz considère l'ultime polygone à l'aune des « petites perceptions ».

Nous venons de voir que « l'ultime polygone » rendait possible des abréviations d'expressions, ne pourrions-nous pas entrevoir ici, de nouveau, la main et l'esprit du mathématicien ? La main, endolorie par de trop nombreux dessins de polygones qui ne se différencient les uns des autres que par une incrémentation d'un côté, et l'esprit, fatigué par les comparaisons entre l'aire de chaque polygone et le cercle dans lequel ils sont tous inscrits, trouvent repos dans cette fiction de polygone ultime. C'est ce travail de la main et de l'esprit que le polygone ultime abrège.
Leibniz se demande d'où peut bien venir cette idée de polygone ultime, pour répondre à cette interrogation il aura recours à la thématique des petites perceptions.
Les entités fictives comme le polygone « dont les côtés n'apparaissent pas distinctement, nous sont rendus apparentes par l'imagination, d'où il surgit en nous, après coup, la suspicion d'une entité dénuée de côtés »[125]. Par-delà cette infinité de côtés qui ne nous apparaît pas distinctement, notre imagination surajoute l'ultime polygone qui engendre la suspicion de l'existence du cercle. Leibniz poursuit son raisonnement par l'introduction d'une « pensée de l'uniformité » qui ferait en sorte que l'imagination passe à la limite, qu'elle passe du polygone ultime au cercle parfait. Il n'y a donc pas, dans l'esprit, une image d'un cercle parfait, mais seulement l'approximation d'un polygone ultime en cercle parfait. Le souvenir de désir d'uniformité ne survit pas au passage à la limite, car nous oublions l'uniformité « que nous avons appliquée après avoir senti les irrégularités. Étions-nous donc conscient à un certain moment que nous les avions senties ? Car la conscience est nécessaire à l'oubli »[126]. Ce que nous ne pouvons nous empêcher d'oublier immédiatement, ce sont ces approximations infinitésimales. En dernière instance, tout se passe comme si nous n'en avions jamais eu

---

[124] *Id.* ; 499.

[125] *Ibid.*

[126] *Ibid.*

conscience. À notre sens, Leibniz transpose le caractère fictionnel des infinitésimaux du cadre mathématique dans le cadre de la perception.

Leibniz poursuit en se demandant si :

> we might not be conscious for very small intervals of time of many things we do not remember, or about which we are unable to speak or write, which cannot express in characters on account of their extremely small size, since they would have little relation to such things. But they are not on this account any less sensed by our consciousness. Rather, we forget about these things just as we forget about the things we dream about[127]

Les « intervalles très petits de temps » où nous ne serions conscient de l'infinité de détails du réel ne sont pas sans rappeler la thématique du continu. Derrière ce texte, nous pouvons voir à l'oeuvre les réflexions qui animent Leibniz sur le continu. Il s'agit pour Leibniz d'agencer un univers d'une richesse infinie dont nous sentirions la totalité dans ses moindres détails avec la finitude de notre esprit. Les choses dont nous aurions conscience proviendraient donc d'un rapport entre des quantités infinies : la complexité infinie de l'univers que nous percevons intégralement, mais seulement pendant des « intervalles très petits de temps » ce qui nous empêche, en quelque sorte, d'atteindre une conscience divine.

Pour prendre un autre exemple, nous pourrions convoquer une image bien connue chez Leibniz. Le philosophie d'Hanovre revient à plusieurs reprises sur la perception du bruit d'une vague. La vague est constituée d'une infinité de gouttes d'eau, ces gouttes se déplacent toutes en émettant un son. Le son de la vague est donc constitué d'une infinité de contributions infinitésimales. Pour Leibniz, nous entendons le son de chaque gouttelette, mais nous n'avons conscience que du son de la vague. Nous percevons les infinitésimaux, mais nous n'avons conscience que de leur intégration. Le son dont nous avons conscience serait notre rapport fini avec les sons que la vague émet, nous sommes dans un certain rapport fini avec la vague qui est, en elle-même, composée d'une infinité de gouttelettes.

---

[127] *Ibid.*

Proposition 7 du DQA

Nous terminerons notre périple au sein des textes de la période parisienne par une démonstration du *De quadratura arithmetica circule ellipseoset hyperbolae*[128]. Le DQA est un texte mathématique écrit par Leibniz en 1676 qui traite de quadrature sans l'intervention du calcul différentiel. Les 7 premières propositions de ce texte forment un ensemble ; elles sont agencées de telle sorte à ce que les six premières servent de lemmes pour la septième proposition. Nous nous contenterons d'exposer la septième proposition en nous appuyant sur les résultats des six premières.

Cette proposition et sa démonstration revêtent de nombreux intérêts pour notre propos. Tout d'abord, il nous semblait difficile d'écrire sur la période parisienne sans exposer un texte à proprement parler mathématique. Ensuite, cet ensemble de propositions témoigne de la finesse mathématique, de l'invention et de l'originalité dont Leibniz était capable en 1676. Nous évoquions plus haut l'hypothèse selon laquelle Leibniz a dû noircir un nombre considérable de papier pour mettre au point ses quadratures par l'approximation de l'aire d'un cercle par un « ultime polygone » ; cette démonstration témoigne d'une part de l'esprit de généralisation des mathématiques et d'autre part d'une certaine paresse du mathématicien qui se permet de ne plus démontrer une propriété pour chaque cas particulier lorsqu'il tient une démonstration qui les englobe dans sa généralité. De plus, cette démonstration permet de voir sous un nouveau jour certains gestes philosophiques que nous avons mis en exergue dans ce travail. Finalement, cette démonstration permet de mesurer l'écart qui sépare les raisonnements par l'absurde de Leibniz lors de la rédaction de sa TMA avec le raisonnement *ad absurdum* de la propriété 7 de la DQA.

Avant d'entrer dans la démonstration, précisons les enjeux mathématiques. Leibniz cherche à démontrer la possibilité de trouver un rapport entre l'aire d'une certaine classe de courbes avec des triangles et des rectangles sous-tendus à cette courbe. Comme à notre habitude, nous avons éclaté l'unique dessin que Leibniz donne dans son texte en fonction des étapes de construction données dans le texte de la démonstration. Nous avons également utilisé des notations contemporaines pour permettre une compréhension plus aisée de la démonstration.

---

128 Nous utilisons désormais l'abréviation DQA pour *De quadratura arithmetica circule ellipseoset hyperbolae*.

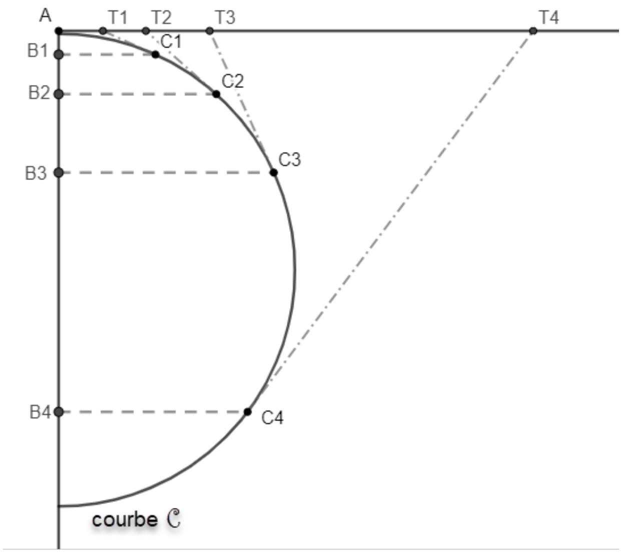
Hypothèses :

Soit $\mathcal{C}$ une courbe différentiable quelconque et A, un point déterminé de celle-ci. Construisons une suite de points quelconques $C_1, C_2, C_3, \ldots$ pris sur cette courbe après A.

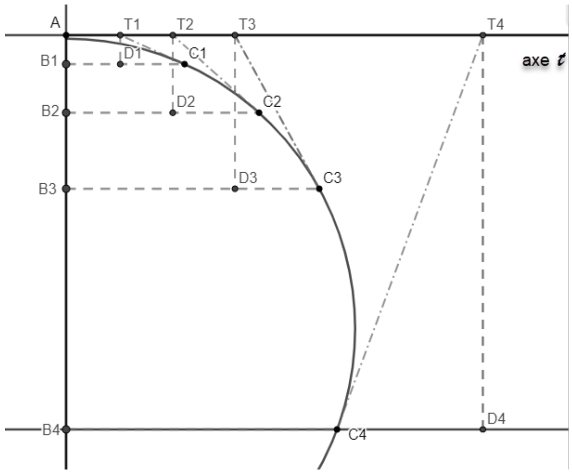
Soit $\mathcal{b}$ un axe passant par A, formant un angle droit avec un deuxième axe $\mathcal{t}$.

Construisons la courbe $\mathcal{D}$:

- Projetons les points C_i sur l'axe b, nous obtenons les points B_i
- Menons par les points C_i des tangentes à la courbe $\mathcal{C}$, qui rencontrent l'axe t aux points T_i
- Abaissons des droites perpendiculaires à $\mathcal{t}$, partant de chaque point T_i et qui rencontrent les droites B_iC_i aux points D_i

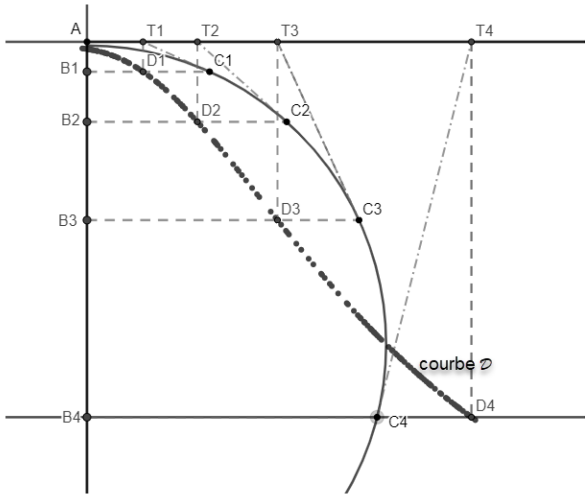


Les deux premières étapes de la construction



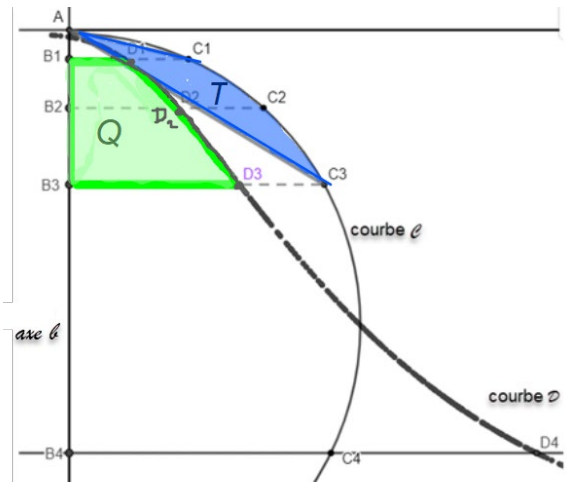
Troisième étape de la construction

La courbe $\mathcal{D}$ relie tous les points D_i ainsi construits



Thèse :

Nous allons montrer que l'aire Q du quadriligne $D_1B_1B_3\widehat{D_3D_1}$ sous-tendue par la courbe $\mathcal{D}$ jusqu'à la droite verticale b, entre les horizontales B_1D_1 et B_3D_3 vaut le double de l'aire T du triligne $C_1A\widehat{C_3C_1}$.

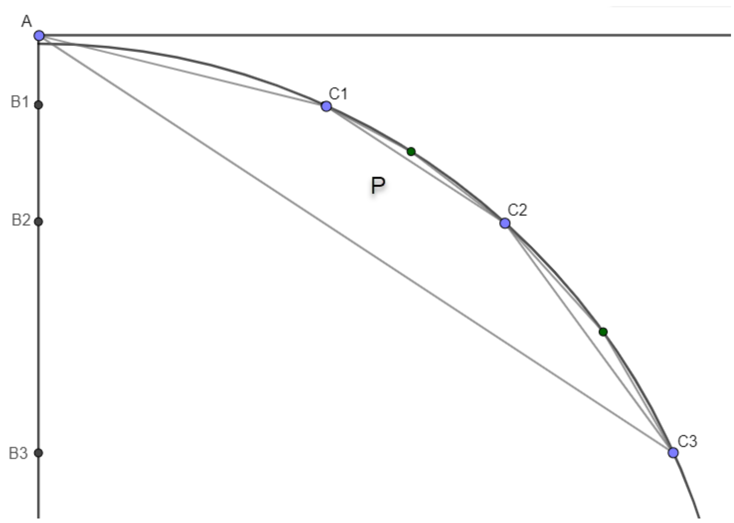


Q=2.T

Démonstration par déduction *ad absurdum* :

Si $Q \neq 2T$ alors appelons Z la quantité non nulle telle que $|Q - 2T| = Z$ *(1).*

- Construisons une suite de polygones passant par C_1, A, C_3 et une successions de côtés de plus en plus grands inscrits dans la courbe $\widehat{C_1 C_3}$.

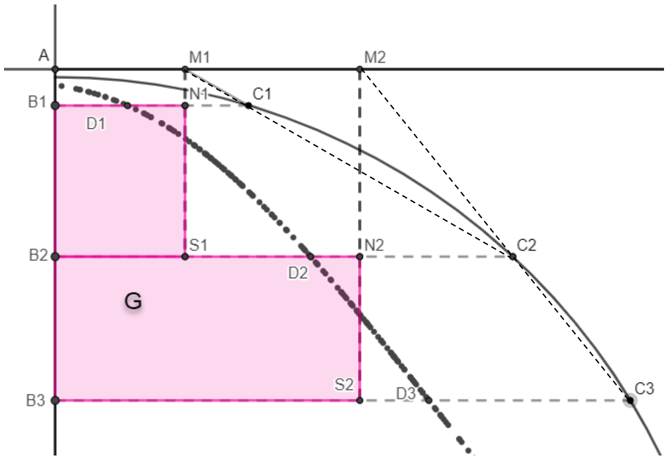


L'écart entre l'aire T du triligne $C_1 A\widehat{C_3 C_1}$ et l'aire P du polygone $C_1 A C_3 C_4 ... C_n C_1$ peut être rendu arbitrairement petit, pour autant qu'on choisisse un polygone inscrit qui convient.

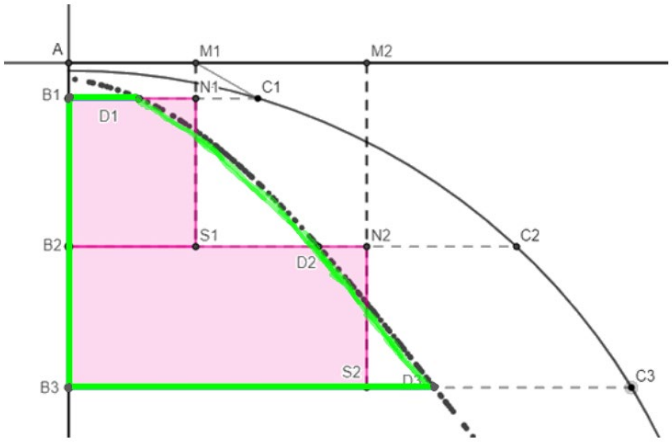
Supposons que $|T - P| < \dfrac{Z}{4}$ *(2)*

- Construisons les droites $C_1 C_2$ et $C_2 C_3$. Elles rencontrent l'axe t aux points M_1 et M_2 Abaissons des droites perpendiculaires à t, partant de chaque point M_i et qui rencontrent les droites $B_i C_i$ aux points N_i et les droites $B_{i+1} C_{i+1}$ aux points S_i.

Faisons apparaître l'aire G de l'espace rectiligne gradiforme $B_1B_3S_2N_2S_1N_1$



Construction de l'espace gradiforme G



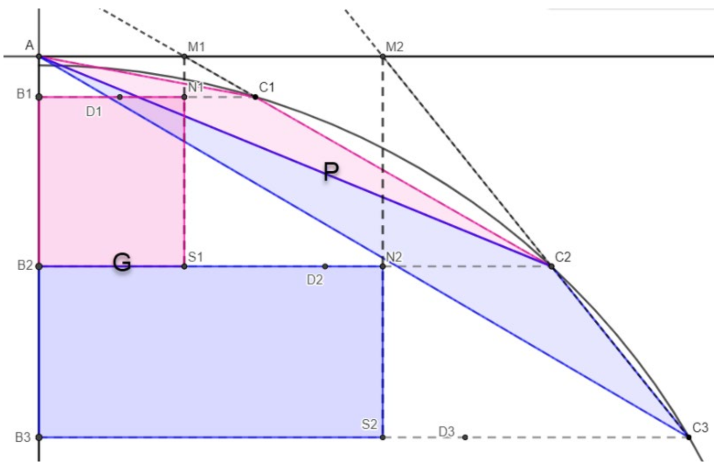
En vert, le quadriligne Q

De la même manière que précédemment, on peut trouver un polygone inscrit tel que la différence des aires Q et G est rendue aussi petite que l'on veut.

Supposons que $|Q-G|<\dfrac{Z}{4}$ *(3)*

- Par la propriété 1, nous savons que l'aire G et l'aire P sont dans un rapport 2 :

$G = 2P$ *(4)*



Revenons à notre différence de départ :

$$\left|Q-2T\right| \overset{*}{\leq} \left|Q-G\right|+\left|G-2T\right| \overset{**}{\leq} \frac{Z}{4}+\frac{2Z}{4} \leq \frac{3Z}{4} \qquad \textit{(5)}$$

Or par hypothèse de départ *(1)* : $\left|Q-2T\right| = Z$, ce qui est absurde.

* inégalité triangulaire

** par les relations (2), (3) et (4) : $\begin{cases} \left|Q-G\right| \leq \dfrac{Z}{4} \\ \left|G-2T\right| = \left|2P-2T\right| = 2\left|P-T\right| \leq 2.\dfrac{Z}{4} \end{cases}$

La relation *(5)* mène à une absurdité, une quantité ne peut être inférieure à elle-même, elle contredit notre hypothèse de départ qui doit donc être rejetée. Il est donc impossible de supposer une quelconque différence entre l'aire du quadriligne et le double de celle du triligne.

C.Q.F.D.

Cette proposition illustre l'efficacité de la combinaison d'un raisonnement par l'absurde couplé au geste mathématique qui permet de rendre « aussi petit que l'on désire » une différence entre deux quantités déterminées

Le Pacidius Philalethi

Durant les mois d'octobre et de novembre de l'année 1676, Leibniz rédige un fameux dialogue qu'il intitulera *Pacidius Philalethi Prima de motu philosophia*. Nous sommes à la fin de son second voyage en Angleterre, Leibniz retourne à Hanovre en passant par la Hollande afin d'y rencontrer des intellectuels comme Leeuwenhoek, Hudde ou encore Spinoza. Le texte revêt la forme d'un dialogue entre différents personnages. Les deux principaux protagonistes sont *Pacidius* et *Charinus*, le premier se fait le porte-parole de Leibniz tandis que le second serait peut-être, selon Richard Arthur[129], Ehrenfried Walther von Tschirnaus, ami de Leibniz qu'il rencontra à Paris quelques années plus tôt.

Dans ce long texte[130], Leibniz dresse une sorte d'historique des plis de sa pensée durant la période parisienne. Entrons dans le texte par la note de bas de page du sous-titre de l'ouvrage :

> Here are considered the nature of change and the continuum, insofar as they are involved in motion. Still to be treated are, first, the subject of motion, to make it clear which of two things changing their mutual situation motion should be ascribed to; and second, the cause of motion, i.e. motive force.[131]

Il sera donc question d'une étude de la nature du changement et du continu à l'aune du mouvement. Nous resterons fidèle au principe thématique qui a déterminé notre choix des textes leibniziens à prendre en compte[132], nous ne nous occuperons ni de « force motrice » ni de la recherche du « sujet du mouvement ». Ces sujets deviendront par la suite d'une importance capitale pour Leibniz, mais ils ne nous semblent pas nécessaires pour explorer le continu et le changement. D'ailleurs, Leibniz prend le soin de faire intervenir les sujets dans

[129] *G. W. Leibniz, The Labyrinth of the Continuum: Writings on the Continuum Problem, 1672-1686*, édition et traduction de Richard T.W. Arthur, New Haven : Yale University Press, 2001, p. 129.

[130] Le *Pacidius Philalethi* s'étale sur une cinquantaine de pages dans la traduction d'Arthur. Cela mérite d'être mentionné car, à notre connaissance, Leibniz n'écrira que deux textes de cette envergure durant la période parisienne. L'autre texte étant sa fameuse *De quadratura arithmetica.*

[131] *Aiii78, 529*

[132] Voir l'introduction de la deuxième partie de notre travail.

le texte en suivant le même ordre que dans sa note de bas de page : d'abord le changement et le continu, ensuite la cause du mouvement.

Il aura fallu quatre années à Leibniz pour parvenir à formuler de manière synthétique et ordonnée ses pensées sur le continu, le changement ou encore le mouvement. Nous serons donc fidèle à l'ordre que Leibniz jugea bon de donner à son texte.

Nous diviserons notre étude du texte en trois parties qui respectent l'ordre d'apparition des thématiques au sein du *Pacidius Philalethi.* Il sera d'abord question du changement en général. Nous passerons ensuite à l'étude du mouvement comme changement particulier. Après cela, nous examinerons la notion de non-uniformité du mouvement et nous cernerons son importance dans l'étude du mouvement. Dans cette troisième partie, nous examinerons également l'hypothèse cosmologique sur laquelle Leibniz fait reposer la non-uniformité du mouvement. Nous tenterons, tout au long de ces parties, de montrer l'agencement entre les thématiques du continu et du mouvement tout en indiquant l'importance de la notion d'infini dans cet agencement.

Le statut de l'usage des mathématiques dans ce texte est particulier. Comme nous le savons, la période parisienne fut d'une richesse mathématique extrême pour Leibniz tant au niveau de son apprentissage que de ses découvertes. Un seul coup d'oeil à son *De Quadratura Arithmetica* suffit pour apercevoir la finesse de ses raisonnements mathématiques et l'aisance avec laquelle il se meut dans le formalisme de l'époque. Cependant, ce n'est pas sur ce plan mathématique que Leibniz s'illustre dans le *Pacidius Philalethi ;* tout au plus pourrait-on dire que les mathématiques agiront en coulisses en alimentant la réflexion du philosophe d'Hanovre, le poussant à explorer de nouveaux raisonnements. À notre sens, et comme nous allons essayer de le montrer, les mathématiques sont d'une importance cruciale en ce qui concerne l'appréhension de l'infini et des composants d'un continu.

Dans ce travail, nous avons eu l'occasion de déplier et d'expliciter une certaine quantité de raisonnements mathématiques qui avaient pour vocation d'étudier les contradictions et les problématiques inhérentes aux points de jonction entre les composants du continu et l'infini. Fort de cette base, dont nous espérons avoir démontré sa solidité, nous aimerions sortir du *Pacidius Philalethi* en entamant, à notre tour, un dialogue avec Leibniz. En effet, la dernière acception leibnizienne du mouvement dans ce texte se prête fort bien à une interprétation par une théorie mathématique fort en vogue de nos jours, le modèle fractal. Nous convoquerons un commentateur du 21e siècle pour alimenter notre dialogue avec Leibniz autour des fractales[133].

Le changement et les arguments du Sorite dans le *Pacidius Philalethi.*

La maïeutique à l'oeuvre dans la discussion entre *Pacidius* et *Charinus* s'amorce par la demande que *Pacidius* adresse à *Charinus* de partager sa définition du mouvement. Ce dernier s'exécute en révélant que pour lui, « *le mouvement* est *un changement de lieu*, et je dis qu'il y a mouvement dans le corps qui change de lieu »[134]. C'est à l'occasion de cette définition que la discussion philosophique à proprement parler débute dans le *Pacidius Philalethi*. Selon la première partie de cette définition préliminaire, le mouvement serait donc un changement qui a lieu, qui prend place dans le temps et dans l'espace. Comme annoncé plus haut, nous ne nous occuperons pas ici de la problématique soulevée par la deuxième partie de la définition à savoir ce qui agit dans le mouvement, car cela dépasserait notre propos.

Pacidius oriente la discussion vers la question de l'existence d'un moment du changement, le moment où l'on passe d'un état à un autre. Dans le texte, la thématique du passage de la vie à la mort est la première manière d'aborder le changement comme passage entre deux états contradictoires. L'épineuse question du passage de la vie à la mort se cristallise autour de la problématique suivante : « PA.: Est-ce que le moment de la mort ne serait pas le moment à partir duquel quelqu'un commence à être privé de vie […] Ou bien est-ce le moment à partir duquel il cesse d'avoir la vie »[135]. La mort commence-t-elle lorsque la vie s'achève ou bien commençons-nous à mourir lorsque la vie nous quitte ?[136] Nous pouvons d'ores et déjà voir se profiler devant nous la problématique du continu et la question de l'assignation du commencement.

---

133 Nous avons présenté cette hypothèse à l'occasion d'un colloque organisé par la *Société des études leibniziennes de langue française.* Nous exposons une seconde fois ici notre hypothèse interprétative en tentant de tenir compte des remarques qui nous ont été adressées lors de ce colloque.

134 *Id.* ; 534.

135 *Id.* ; 535.

136 Sous l'impérieuse vérification du principe du tiers-exclu, il est impossible, pour Leibniz, que quelqu'un puisse être à la fois en vie et mort.

Maintenant que Leibniz a mis en place le vocabulaire permettant l'interprétation du passage de la vie à la mort comme une suite d'instants correspondants ou non à un état de vie, il peut poser le problème de la présence, au sein d'un même instant, de la vie et de la mort. La question qu'il s'agit de résoudre est désormais de savoir si le dernier moment de la vie est le même que le premier moment dénué de vie[137]. La réponse est évidemment négative sinon il serait possible d'être à la fois mort et en vie. *Pacidius* se sort de ce mauvais pas en pénétrant de plain-pied dans le labyrinthe du continu. En effet, si le dernier moment de la vie et le premier moment de la mort ne peuvent se chevaucher « dès lors il est possible pour deux moments, un de vie et l'autre de non-vie, de se suivre immédiatement l'un après l'autre »[138].

Il s'avère que la seule possibilité pour que ce changement puisse s'opérer serait que le premier instant de la mort succède immédiatement au dernier instant de la vie : l'état d'être en vie et l'état d'être mort sont simplement contigus et non continus. Selon la définition d'Aristote que Leibniz place dans la bouche de *Theophillius*[139], il y aurait eu continuité entre les deux états s'ils avaient partagé le même extremum, ce qui semble absurde pour Leibniz puisque cela impliquerait dans ce cas qu'une personne peut être à la fois vivante et morte.

Insistons dès à présent sur ce cheminement qui peut, au premier abord, paraître anodin ; il n'empêche que Leibniz en retire une exigence qui n'est pas sans conséquence pour la suite des développements sur la composition d'un continu. Pour Leibniz, il est possible de considérer deux états tellement proches l'un de l'autre que nous ne pourrions en trouver un troisième entre les deux premiers. Ces états, que nous pourrions qualifier d'états indistants, deviendront des points indistants dans la suite du texte quand il sera cette fois question du mouvement.

À ce stade, nous pouvons conclure que Leibniz juge impossible l'existence d'un état qui serait celui du changement[140], i.e. d'un état intermédiaire entre deux états contradictoires. Nous vivons, nous mourons, ni demi-vie ni demi-mort — il n'y a pas d'instant du passage de

---

[137] *Ibid.*

[138] *Id. ;* 537.

[139] « TH. : I remember that Aristotle, too, distinguishes the contiguous from the continuous in such a way that those things are *continuous* whose extrema are one, and *contiguous* whose extrema are together ». Nous pouvons retrouver cette définition aristotélicienne dans la *Physique ,V, 3, 227a 10-b2*

[140] « PA.: We concluded that a state of change is impossible » *in Aiii78* ; *528.*

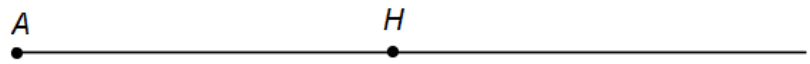
la vie à la mort. Par ce passage de la vie à la mort, Leibniz ne met en scène que le passage d'un état contradictoire à un autre, il n'est pas encore question de quantité. Il reste à vérifier si cette définition du changement, comme succession de deux états contradictoires, résisterait si le passage d'un état à un autre avait lieu par incrémentation de petites quantités discrètes ou par variation continue.

Leibniz, dans la suite du texte, s'attaque d'abord au changement par variation d'une quantité discrète en se demandant quand un pauvre devient riche si l'on incrémente ses possessions d'une unité monétaire à la fois. Dans ce cadre d'ajout d'une quantité discrète de richesse sous forme de monnaie, le basculement de la pauvreté vers la richesse se fait par l'ajout de la plus petite unité monétaire. Nous pouvons dire que la plus petite pièce de monnaie est l'incrément minimum par lequel on passe d'un état à un autre, le minimum ici étant une quantité finie[141]. D'un penny à l'autre, le pauvre bondit discrètement vers la richesse ; nous verrons que cette manière de se déplacer de la pauvreté vers la richesse partagera certains traits avec la manière de concevoir le déplacement dans l'espace et dans le temps. Lorsque nous considérerons la dernière approche du mouvement dans le *Pacidius,* nous verrons que les pennies finis seront remplacés au profit de sauts que l'on peut rendre aussi petits que l'on veut. Le passage de la pauvreté à la richesse par l'ajout d'un penny ne semble pas mettre en péril l'hypothèse du changement comme passage d'un état contradictoire à un autre.

[141] L'argument du passage de la pauvreté à la richesse force *Charinus* à admettre que « for either he never ceases to be poor, or he does so by the gain of one penny » (*Aiii78 ;* 539). Si nous acceptons que nous pouvons cesser d'être pauvre, il faut également accepter qu'en dernière instance un seul penny sépare la pauvreté de la richesse.

Le mouvement, un cas de changement continu ?

Le *Pacidius Philalethi* se poursuit en basculant de l'exemple des quantités discrètes telles que les pièces de monnaie à la quantité continue de la trajectoire d'un point mobile se déplaçant entre deux extrémités. En effet, *Pacidius* propose de « transposer l'argument de quantité discrète à continue : par exemple, si un point *A* approche un point *H*, alors à un certain temps il passera de ne pas être proche à être proche […] »[142]. Nous avons déjà eu l'occasion de montrer que la thématique du mouvement est un terrain que Leibniz juge fort propice pour étudier la question du continu, car le mouvement fait intervenir l'espace, le temps et la matière, i.e., trois continus différents. Dans le *Pacidius Philalethi*, l'étude du changement continu passe par l'étude du mouvement ; cette étude débute en se demandant comment il est possible de se rapprocher d'un lieu dans l'espace.



Déplacement de A à H

Leibniz imagine une nouvelle régression à l'infini pour poser le problème du déplacement d'un endroit à un autre. Reprenons notre déplacement de A à H. Il est possible de se rapprocher de H par le biais d'un pas toujours plus petit. En effet, contrairement au passage de la pauvreté à la richesse, dans le cas d'un déplacement il est toujours possible de diviser la trajectoire plus finement. Rapidement, *Charinus* est obligé de déclarer que le plus petit pas possible doit être un minimum sinon « quelque chose pourrait en être retiré, laissant intact ce qui produit la proximité »[143] or nous avons montré que Leibniz refusait la composition d'un continu par des minima. Leibniz est dès lors obligé de donner un rôle au minima dans le déplacement sous peine de conclure que le mouvement est impossible, car il vient de montrer que le rapprochement de A vers H a lieu, en dernière analyse, par le biais d'un minimum d'espace. Il faut donc transposer le minimum d'espace parcouru dans un minimum de temps et C*harinus* de s'exclamer que le mouvement est composé du dernier moment de l'état précédent et du premier moment de l'état suivant « tout comme un lieu du contact, qui est dit être en un point, contient un extremum de chacun des corps qui se touchent »[144]. La définition

[142] *Id. ;* 540.

[143] *Ibid.*

[144] *Id. ;* 541.

du changement comme passage d'un état contradictoire à un autre semble pouvoir être maintenue dans le cadre des quantités continues du mouvement.

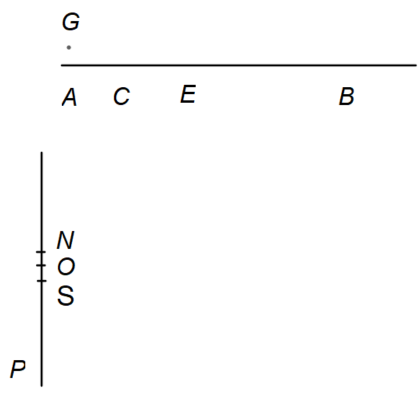
Charinus, pensant être sorti d'affaire, résume l'acception temporaire du mouvement comme :

> A state composed of the last moment of existing in some place and the first moment of existing, not in the same place, but in the next different place. Therefore the present motion will be nothing but the aggregate of two momentaneous existences in two neighboring places. So it cannot be sait that : something is moving now, unless this now is interpreted as the sum of two neighboring moments or the point of contact of two times characterizing different states.[145]

D'un instant à l'autre, un déplacement a lieu entre deux places voisines ; le mouvement n'est rien d'autre qu'une suite d'existences momentanées d'un corps entre deux lieux voisins.
Pacidius va mettre en péril le mouvement tout juste défini en introduisant dans le dialogue les notions de continuité et d'uniformité du mouvement. Il tente de démontrer que si le mouvement est uniforme *et* continu alors « l'espace est exclusivement composé de points et le temps exclusivement de moments »[146], ce qui est inacceptable pour Leibniz.
Par continuité du mouvement, Leibniz entend qu'un mouvement ne peut pas être coupé par des repos. Nous reviendrons plus tard sur le concept d'uniformité du mouvement.

Afin d'asseoir et éclaircir son propos, *Pacidius,* à la demande de *Charinus,* a recours à un schéma qui permet l'exposition des liens entre sa définition du mouvement et les conséquences sur les continus dont ce dernier est composé.

Considérons un point G en mouvement entre deux points voisins, A et C, durant deux instants successifs, N et O. Au moment N, le corps se trouve en A ; au moment O, le corps



Mouvement de G le long d'AB

---

[145] *Id. ;* 545.

[146] *Id. ;* 546.

se trouve en C. Leibniz imagine le mouvement suivant qui serait l'expression de l'existence d'un point E succédant à C dans l'espace et d'un instant S succédant à O dans le temps[147]. Nous pouvons trouver ici toutes les conditions pour qu'un raisonnement par induction implique la résolution du temps, de l'espace et du mouvement en des suites de minima. À *Pacidius* de tirer profit de cette induction :

> Therefore, since motion is nothing but an aggregate of different existences through moments and points, and is just as continuous as space and time, it also follows that points immediately succeed one another everywhere in space, and moments everywhere in time, these being the points and moments in which motion occurs by continuous succession. Therefore time will be an aggregate of nothing but moments, and space an aggregate of nothing but points[148]

À ce stade du texte, Leibniz n'a pas encore précisé les raisons qui le poussent à refuser qu'un continu puisse se résoudre en une poussière de points. *Charinus* manifeste son étonnement par rapport au danger qui pourrait survenir si l'on admettait des minima dans la composition d'un continu, *Pacidius* lui répond qu'il serait « swamped by the whole stream of difficulties that stem from the composition of the continuum, and that are dignified by the famous name of the labyrinth »[149].

Nous nous trouvons à présent à la lisière du problème du continu dans le *Pacidius Philalethi*. Constatons que, dans ce dialogue, le problème du continu apparaît comme un obstacle à une fondation correcte du mouvement compris comme un changement continu.

Abordons maintenant la discussion entre *Pacidius et Charinus* concernant la composition d'un continu. Leibniz démontre, toujours par le truchement de *Pacidius*, qu'une ligne est divisible à l'infini, i.e. qu'elle est composée d'une infinité de points[150]. Ensuite, Leibniz utilise une nouvelle fois la démonstration faisant intervenir le côté et la diagonale d'un rectangle pour montrer l'absurdité de la composition d'une ligne par une infinité de

---

[147] *Id.* ; 547.

[148] *Id.* ; 548.

[149] *Id.* ; 549.

[150] *Id.* ; 549.

points[151]. Dans ces conditions, une ligne ne peut être composée ni d'un nombre fini, ni d'un nombre infini de points ; dès lors, nous sommes forcé de conclure qu'une ligne n'est pas composée de points[152].

Leibniz est forcé d'effectuer un dernier détour avant de donner son modèle original de composition du continu. Il reste en effet à examiner la composition de la matière, qui se trouve sous un autre régime d'infini et de division que les objets mathématiques idéaux tels que la ligne qui ont été examinés jusque-là. Nous reviendrons plus loin sur ce qui sépare les notions d'infini actuel régissant le continu de la matière et l'infini syncatégorématique régissant quant à lui le continu idéal ou mathématique.

Pour Leibniz, la matière est actuellement infiniment divisée ; de nouveau il s'agit de montrer en quoi cette dernière est composée. Leibniz se positionne entre les atomes de Gassendi et le liquide parfait de Descartes[153] qu'il considère comme l'archétype d'une matière tombant sous le coup d'une « division la plus fine, i.e. une division en minima […]»[154].

Le modèle de la composition du continu retenu par Leibniz est la fameuse image de la tunique pliée :

> […] the division of the continuum must not be considered to be like the division of sand into grains, but like that of a sheet of paper or tunic into folds. And so although there occurs some folds smaller than others infinite in number, a body is never thereby dissolved into points or minima. […] It is just as if we suppose a tunic to be scored with folds multiplied to infinity in such a way that there is no fold so small that it is not subdivided by a new fold : and yet in this way no point in the tunic will be assignable without its being moved in different directions by its neighbors, although it will not be torn apart by them. And the tunic cannot be said to be resolved all the way down into points ; instead, although some folds are

151 Il s'agit du même geste que dans le texte Aiii5. Voir page 29-30 du présent travail.

152 « whence it is established that lines are not composed of points », *Ibid.*

153 *Id. ;* 553-555.

154 *Id. ;* 555.

> smaller than others to infinity, bodies are always extended and points never become parts, but always remain mere extrema.[155]

Cette image de la tunique est une tentative de capture de l'infini par un esprit fini. Il y a des plis en nombre infini. Cependant, il n'existe pas de pli tellement petit qu'il ne pourrait pas lui-même être plié. De la sorte, Leibniz espère illustrer le fait que nous ne parviendrons jamais à un élément ultime. Nous faisons face à des plis intriqués dans toujours plus de plis.

Cette analogie a ceci d'élégant qu'elle semble permettre à un continu d'être composé, à l'infini, de parties toujours étendues et de reléguer les points ou les minima aux extrémités de chaque partie.

Par le biais de cette analogie, Leibniz parvient à réconcilier plusieurs de ses exigences par rapport à la composition d'un continu. D'abord, la tunique permet une division à l'infini par le biais de l'infinité de plis. Toutefois, il n'existe pas pour autant des plis infiniment petits qui, si tel était le cas, s'apparenteraient à des minima et qui réduiraient dès lors la tunique à une poussière de points. Leibniz fait usage de ses découvertes, acquises durement durant la période parisienne sur les infiniment petits pour concevoir des plis que l'on peut rendre aussi petits que l'on désire.

Vient se greffer à la tunique la dernière mouture de la conception du mouvement selon Leibniz[156], chaque pli de la tunique est déterminé par les mouvements des plis voisins.

Finalement, relevons l'aspect « textile » d'une tunique. Imaginons une tunique posée sur une chaise et approchons pas à pas. À mesure que nous nous approchons de la tunique, nous distinguons un plus grand nombre de plis. Lorsque nous sommes suffisamment proches, nous apercevons que la tunique est composée de fils ; fils qui sont à leur tour composés de fibres…

Leibniz nous invite à imaginer que ces fils et ces fibres sont également pliés. L'analogie de la tunique suscite une certaine pensée de complexité et d'échelle. L'emboîtement des différentes échelles et la complexité de structure de la tunique sont autant d'invitations à reprendre l'analogie à l'aune de la théorie de la géométrie fractale. Il est important de noter que cette caractéristique de la tunique induit une différence de nature entre elle et un objet géométrique tel qu'une droite. Premièrement, la tunique est *divisée actuellement* en une infinité de *plis* ;

[155] *Ibid.*

[156] Nous avons vu l'élaboration, par le biais du schéma du cube page 38 du présent travail, d'un plenum dont chaque partie était animé d'un mouvement absolument unique par rapport à toutes les autres.

tandis qu'une droite est *divisible potentiellement* en une infinité de points. D'un côté il y a d'abord les plis et ensuite la tunique, de l'autre il y a la droite et ensuite ses parties. Deuxièmement, cette différence entre *divisé* et *divisible* est le point de bascule entre le régime actuel et potentiel de l'infini ; la tunique contient une infinité de plis, mais ne contient pas actuellement tous les plis possibles tandis que la droite peut recevoir toutes les divisions possibles. Nous ne saurions trop insister sur l'importance du caractère toujours-déjà divisé de la tunique pour la suite du texte. Finalement, la tunique est composée de plis, eux-mêmes toujours composés d'autres plis contrairement à une droite idéale qui pourrait ultimement se réduire à une poussière de points. C'est bien le sens de la remarque de Leibniz : « c'est tout comme si nous supposons une tunique marquée avec des plis multipliés à l'infini de telle façon q*u'il n'y ait pas de pli si petit qu'il ne soit pas sous-divisé par un nouveau pli* ».

Les modèles de la géométrie fractale, que nous verrons par la suite, permettent d'interpréter l'aspect continu de la matière de la tunique, mais sont également d'un grand secours pour appréhender le mouvement tel que le conçoit Leibniz. Comme nous avons pu le constater, le philosophe d'Hanovre ne ménage pas ses efforts pour intriquer mouvement et continu l'un avec l'autre. Ses efforts semblent être récompensés dans le sens où une unique solution pourrait résoudre le problème du continu et le problème du mouvement. Une propriété du mouvement, sa non-uniformité, permet de lier la conception du mouvement défendue par Leibniz dans le *Pacidius Philalethi* à la structure du continu déployée par l'analogie de la tunique. C'est par le biais de cette propriété qu'une ébauche de solution peut voir le jour. Nous proposons un détour par le concept de non-uniformité avant d'exposer pleinement l'interprétation fractale que la tunique nous invite à explorer.

La non-uniformité du mouvement dans le *Pacidius Philalethi*

Dans le *Pacidius Philalethi*, Leibniz explique que le mouvement contient des irrégularités. Ces irrégularités sont à imputer au fait que le mouvement de chaque corps est affecté par la présence et les mouvements de tous les autres corps. Comme nous le savons maintenant, pour Leibniz, tout mouvement a lieu au sein d'un plenum et les corps rencontrent sans cesse d'autres corps. Ces rencontres influent sur le mouvement des corps, ce sont elles qui confèrent à n'importe quel mouvement de n'importe quel corps ses irrégularités[157]. Pour rendre compte de cette réalité, Leibniz estime nécessaire d'abandonner l'uniformité du mouvement pour une conception non-uniforme.

Nous allons voir que la notion d'infini actuel est pleinement mise à contribution ici par Leibniz. Nous aurons l'occasion de voir, concrètement, ce qu'impliquent les différentes notions d'infinis ; nous distinguerons le catégorématique et le syncatégorématique, l'actuel et le potentiel.

Avant d'aborder la non-uniformité dans le texte, laissons *Charinus* résumer la situation et les acquis du *Pacidius Philalethi* :

> Whatever moves changes place, i.e. changes with respect to place. Whatever changes is in two opposite states at two neighboring moments. If anything changes continuously, then any moment of its existence in one state is followed by a moment of existence in an opposite state. Thus in particular :
> If any body moves continuously, then any moment of its existence at one point of space is followed by a moment of existence at another point of space.

[157] Afin de faciliter la compréhension du reste du développement de cette section, précisons le modèle physique sous-tendu à ces irrégularités du mouvement. L'infinité des contributions au mouvement que chaque corps reçoit de tous les autres corps peut être considérée comme une infinité d'impulsions qui viendraient modifier la vitesse du corps considéré. Cette approche, selon Levey dans son « *The Interval of Motion in Leibniz's Pacidius Philalethi* », semble être une manière standard d'approcher la notion de variation de vitesse d'un mouvement d'un corps. Selon Levey, nous pourrions considérer que l'accélération d'un corps en mouvement se réduirait à une série d'impulsions finies instantanées ponctuant de minuscules sous-intervalles de mouvements uniformes de sorte que chaque sous-intervalle successif du corps en mouvement est caractérisé par une vitesse supérieure ou inférieure à celle qui caractérise le sous-intervalle suivant. Si nous devions dessiner, selon ce paradigme des impulsions, une courbe mathématique qui représenterait l'évolution de la vitesse au cours du temps, elle serait polygonale. Avec Leibniz, le noeud du problème se situe dans la quantité d'impulsions enregistrée à chaque instant dans le mouvement d'un corps. En effet, nous allons voir qu'il y a une infinité d'impulsions différentes qui s'exercent sur n'importe quel corps de l'univers. Les impulsions finies semblent ramener le problème de la composition du mouvement dans le discret tandis que le fait que nous puissions trouver ces impulsions en nombre infini semble tirer la composition du mouvement vers le continu. Cet entre-deux entre le discret et le continu mènera, comme nous allons le voir par la suite, à l'interprétation fractale du mouvement dans le *Pacidius Philalethi.*

> These two points of space are either immediately next to each other, or mediately.
> If immediately, it follows that a line is composed of points, for the whole line will be traversed by this passage from the one point to the other immediately next to it.
> But for a line to be composed of points is absurd.
> If the two points are mediately next to each other, then a body passing from one to the other in a moment will either be simultaneously at the intermediate points and at the endpoints, which is absurd; or it will make a leap, and will pass from one endpoint to the other by omitting the ones in between. Which is also absurd.
> Therefore the body does not move continuously, but rests and motions are mutually interspersed.
> But the interspersed motion is again either continuous, or interspersed with another rest; and so on to infinity.
> Therefore either somewhere we will come across a pure continuous motion, which we have already shown to be absurd, or we must admit that no motion is left at all except momentaneous motion, and that everything is resolved into rests. So again we come across momentaneous motion, i.e. a leap which we wanted to avoid.[158]

Ce résumé met en exergue la rencontre de deux exigences leibniziennes qui ne peuvent qu'engendrer des tensions. La trajectoire d'un corps semble pouvoir être résolue en plis de plus en plus petits ; se déplacer le long d'une trajectoire semble impliquer de passer par toutes les positions intermédiaires, mais ce faisant il semblerait que l'espace et le temps se confondent avec une poussière de points et d'instants ; ne pas passer par toutes les positions intermédiaires revient à penser soit que le corps s'étend durant un même instant sur plusieurs positions, ce qui est absurde pour Leibniz, soit que le corps bondit d'un endroit à un autre, ce qui est tout autant absurde pour Leibniz. Comment faire tenir ensemble ces exigences ? Leibniz répondra qu'il s'avère nécessaire de réfuter l'uniformité du mouvement ; pour arriver à ses fins, il convoquera une partie de sa cosmologie et les acquis de la période parisienne.

À ce résumé est adjoint un schéma[159] qui met en lumière les exigences dans le cadre d'un mobile E qui se déplace le long d'AC dans l'espace durant MR dans le temps. Ce

[158] *Id.* ; 562.

[159] Voir figure 1.

schéma est important, car Leibniz s'en sert dans la suite du texte pour illustrer la notion d'infini actuel qui jouera un rôle de première importance dans la justification de la réfutation de l'uniformité du mouvement.

Avant de nous plonger dans le raisonnement, annonçons les étapes clefs qui devraient permettre, selon Leibniz, de résoudre le problème du mouvement : un mouvement continu et uniforme est absurde, comme le résumé de *Charinus* ici plus haut en atteste ; la continuité du mouvement doit être maintenue ; dès lors c'est bien l'uniformité du mouvement qui doit être réfutée ; Leibniz démontre, par l'absurde, que la non-uniformité permet au mouvement d'échapper à ses apories ; finalement, il est nécessaire de trouver les raisons pour lesquelles le mouvement serait non-uniforme ou, autrement dit, il est nécessaire de concevoir une organisation de l'univers qui pourrait accueillir un mouvement non uniforme. D'abord nous exposons la démonstration par l'absurde, ensuite nous en viendrons à sa justification par le recours à l'infini actuel.

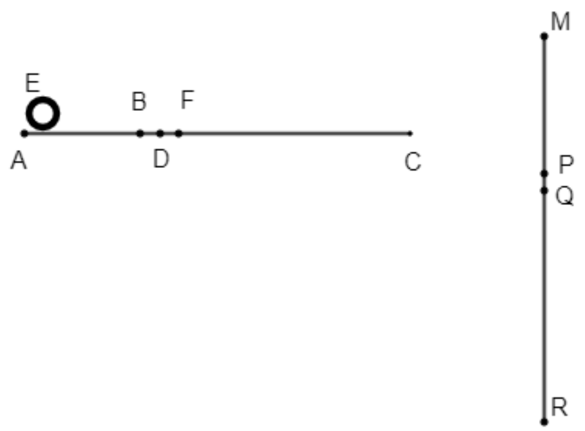


Figure 1 — Déplacement de E sur AC pendant MR

Voyons le raisonnement par l'absurde chargé de démontrer que l'uniformité du mouvement doit être rejetée. Considérons un mobile E se déplaçant le long d'AC. Représentons le temps qui s'écoule pendant ce mouvement par une droite perpendiculaire à AC. Le mobile E est en A au moment M, en B au moment P, etc. Intéressons-nous au passage entre les points BDF dans le cas d'un mouvement uniforme. Le mobile E se déplace de B à D en un seul instant symbolisé par PQ sur notre droite du temps : « Si au moment P ce point mobile (E) est au lieu B, et qu'un changement doit avoir lieu dans n'importe quel cas, alors tout ce qui peut être dit est qu'au prochain moment Q le point mobile sera au point suivant D, […] »[160]. Si l'uniformité de l'espace, du temps et du mouvement est maintenue alors, selon Leibniz, ce que l'on peut affirmer des passages BD et PQ est également vrai pour le point de l'espace qui succède immédiatement à

[160] *Id.* ; 563.

D l’instant suivant. Par récurrence, on montre de cette manière qu'une ligne est composée de points, car « le point traverse la ligne en passant par chacun de ces points qui sont continûment immédiatement les uns à côté des autres »[161].

La solution entrevue par Leibniz s’annonce comme suit :

> […]uniformity cannot be denied in place and time considered in themselves, it therefore remains for it to be denied in motion itself; and in particular it must be denied that another point can be assumed immediately next to the point D, in the same way that the point D was assumed immediately next to point B.

Le temps et l’espace en soi peuvent garder, pour Leibniz, leur uniformité —le temps et l’espace, considérés comme des continus idéaux, peuvent être divisés d'une infinité de manières différentes sans que l'on doive fournir une *raison* qui ferait qu’une division doive être privilégiée sur les autres. Le rapport entre le temps et l’espace, i.e. le mouvement, ne peut quant à lui être uniforme pour garantir qu’une droite ne soit jamais réductible à une poussière de points ; il doit être possible de trouver une raison selon laquelle une division du mouvement prévaut sur toutes les autres divisions possibles. La ligne AC sera considérée comme déjà découpée en parties aussi petites que l'on désire. Cette position est tout à fait cohérente avec la position de Leibniz de la période parisienne sur la détermination du mouvement de n’importe quel corps. En effet, souvenons-nous du cylindre de l’espace parcouru dans le cube-univers du DMM[162]. Dans ce texte, nous avions vu que chaque corps était animé d’un mouvement unique, c’est cette hypothèse qui agit en trame de fond dans cette partie du *Pacidius Philalethi*.

Dans le dialogue, *Charinus* réfute l’hypothèse de l’uniformité du mouvement et en tire les conséquences sur sa composition. D’une part, un mouvement non uniforme est composé d’intervalles et d’autre part, il n'existe pas plus de deux points l’un à la suite de l’autre[163]. Pour *Charinus*, un mouvement non uniforme, représenté sur le schéma par des sous-intervalles de AC les uns à côté des autres, est déterminé par les mouvements de l’infinité en

---

[161] *Ibid.*

[162] Voir page 40 du présent travail.

[163] Dans notre schéma, cela revient à interdire l’existence du point *F* après le couple de points indistants *BD.*

acte des corps de l'univers[164]. Le mouvement de ces corps a déjà divisé infiniment le mouvement du mobile E*,* comme le précise *Charinus* :

> Our discussion is not about a continuous uniform line, in which two such points B and D immediately next to each other could not even be assumed, but about the line AC which has already been actually cut into parts by nature. […] I deny, therefore, that another point could be assumed in the line DC immediately next to D, for I believe that no point should be admitted in the nature of things unless it is the endpoint of something extended.[165]

Dès lors, il est *donné* par la découpe de fait de l'univers qui existe actuellement que les points BD ne sont pas en contact avec d'autres points. L'intervalle AC a déjà été divisé à l'infini par la nature. À *Charinus* de préciser que « les points ne préexistent pas à la division actuelle, mais sont apportés par la division. Donc si la division est faite d'une certaine manière, les points d'une autre division n'existeront pas dans la nature des choses»[166]. L'existence d'un point qui ne serait pas une extrémité entre deux choses étendues est donc rejetée par l'utilisation de l'infini actuel pour caractériser le mouvement. Autrement dit, le plenum est actuellement infiniment *divisé* contrairement à un objet géométrique comme une droite qui serait quant à elle infiniment *divisible*. C'est ce caractère actuel qui permet d'affirmer qu'il n'y a jamais plus de deux points indistants l'un à la suite de l'autre.

---

[164] Ce sont les contributions de toutes les parties de la matière qui composent le plenum qui impriment une infinité de mouvements sur le mobile E. Ces contributions, à une certaine échelle, expriment le mouvement de E en deux intervalles étendus AB et DC. Risquons-nous à une analogie et imaginons un service au tennis. Considérons la séquence suivante : le joueur de tennis propulse la balle en l'air en s'aidant de sa main, la balle monte et redescend pour finalement rencontrer la raquette de notre joueur. Nous pourrons simplifier le parcours de la balle en trois mouvements : ascension verticale, chute verticale et finalement projection horizontale. La main envoie la balle en l'air, la gravité s'occupe de la ramener sur terre, la raquette envoie la balle de l'autre côté du terrain. Ces trois mouvements correspondraient à trois intervalles de mouvements différents. Il y a une infinité de manières d'envoyer la balle en l'air : la gravité terrestre aurait pu être différente de 9,81 N/Kg et notre joueur aurait pu frapper la balle avec une intensité différente ; notre scénario pourrait se passer d'une infinité manières différentes qui seraient toutes autant possibles les unes que les autres. Cette diversité est garantie par l'uniformité du temps et de l'espace qui sont, pour Leibniz, divisibles à l'infini. Cependant, si nous considérons un scénario parmi tous les possibles, alors, selon Leibniz, les intervalles découpent l'espace et le temps d'une certaine manière ; un seul possible advient à l'existence même si ce possible contient un raffinement infiniment grand. En regardant de plus près le mouvement, nous pourrions distinguer un plus grand nombre d'intervalles de mouvements. En poussant l'observation à la limite, nous ne trouverions que toujours plus d'intervalles de mouvements toujours de plus en plus petits sans jamais observer des intervalles devenus si petits qu'ils seraient considérés comme des points. Dans notre exemple, la main, la gravité et la raquette sont trois contributions au mouvement de la balle que nous avons privilégiées, mais Leibniz nous garantit qu'il en existe une infinité. Par exemple, nous pourrions prendre en compte l'agencement des « poils » de la surface de la balle de tennis, car ces ils frottent dans l'air d'une certaine manière et ce faisant déterminent en partie les mouvements de la balle.

[165] *Id. ;* 564.

[166] *Ibid.*

Cependant, *Pacidius* émet une dernière objection qui forcera *Charinus* à aménager la notion de « saut » au sein des exigences leibniziennes :

> PA.: That's very acute, but it does not yet completely dispose of the difficulty. For this nonuniformity which you have established in motion must be explained, since it is from this that the nonuniformity in the division of the line is to be derived. We have certainly rejected the leaps discussed above. Consequently temporary rests cannot be inserted in any motion, otherwise we will necessarily end up with leaps.[167]

La non-uniformité de la division de la trajectoire dérive de la non-uniformité du mouvement. Cependant, il semble que cette dernière impliquerait le retour des « sauts » dans le mouvement. Or nous avions vu que les sauts étaient en contradiction avec l'exigence qu'un mobile passe par tous les espaces intermédiaires entre deux points de l'espace.
La réponse de *Charinus* ne se fait pas attendre :

> Then what if we say that the motion of a moving thing is actually divided into an infinity of other motions, each different from the other, and that it does not persist the same and uniform for any stretch of time ? [168]

Nous savons maintenant justifier la non-uniformité du mouvement qui elle-même permet d'expliquer la non-uniformité de la trajectoire. Il reste à *Charinus* à résumer la situation du mouvement comme un changement au sein de continus :

> At any moment which is actually assigned we will say that the moving thing is at a new point. And although the moments and points that are assigned are indeed infinite, there are never more than two immediately next to each other in the same line, since indivisibles are nothing but bounds.[169]

Ici, Leibniz assume pleinement le caractère de limite des « indivisibles ».
Dans un dernier effort de synthèse, Leibniz donne la parole à *Pacidius* afin que ce dernier

---

[167] *Ibid.*

[168] *Id.* ; 565.

[169] *Ibid.*

dresse le tableau de l'harmonie qui existe entre la matière, le temps et le mouvement. De nouveau, nous pensons que ce fragment est trop important que pour ne pas le citer *in extenso* :

> PA.: […] there is no portion of matter that is not actually divided into further parts, so that there is no body so small that there is no body so small that there is not a world of infinitary creatures in it. Similarly there is no part of time in which some change or motion does not happen to any part or point of a body. *And so no motion stays the same through any space or time however small*[170]; thus both space and time will be actually subdivided to infinity, just as a body is. Nor is there any moment of time that is not actually assigned, or at which change does not occur, that is, which is not the end of an old or beginning of a new state in some body. This does not mean, however, neither that a body or space is divided into points, or time into moments, because indivisibles are not parts, but the extrema of parts. And this is why, even though all things are subdivided, they are still not resolved all the way down into minima.[171]

Nous aimerions supposer que toutes les notions, toutes les idées et tous les concepts mobilisés ici par *Pacidius* prennent racine dans l'effervescence mathématique de la période parisienne. Derrière ce texte travaille en sous-main l'idée d'un infiniment petit qui se différencie d'un minimum ; nous retrouvons l'idée que quelque chose serait infiniment petit si l'on peut montrer que cette chose est plus petite que toute autre chose donnée. Ces réflexions sur l'infini amènent, à notre sens, la discussion sur le continu et le discret à un autre niveau de raffinement. Leibniz se forge une position à mi-chemin entre le discret et le continu. Le philosophe d'Hanovre nous invite à considérer le mouvement comme étant composé d'intervalles et de sous-intervalles toujours de plus en plus fins. Aux intervalles de mouvement correspondent des intervalles d'espace et de temps.

Il est question ici d'un mouvement d'une complexité sans fin ; de l'oeil nu, au microscope en passant par le télescope, nous finissons toujours par constater un mouvement et Leibniz nous garantit qu'il n'existera jamais de télescope ou de microscope assez puissant

---

[170] Il s'agit de nos italiques. Cette phrase est peut-être le point central de l'intérêt de la non-uniformité du mouvement. Cette notion permet la génération d'une diversité infinie dans l'univers que ce soit à une échelle infiniment grande ou petite.

[171] *Id.* ; 566.

pour ne pas constater du mouvement. Leibniz garantit qu'il n'existe pas un ordre de grandeur qui ne soit pas animé par du changement. La géométrie fractale est une manière d'intriquer des échelles à l'infini qui se révèle être d'une redoutable efficacité pour exprimer cette pensée leibnizienne.

Le modèle fractal offre également , comme nous allons tenter de le montrer en repartant de la tunique du *Pacidius Philalethi*, la possibilité de rendre compte des exigences leibniziennes en ce qui concerne le mouvement : affirmer la continuité du mouvement, mais aussi sa non-uniformité et permettre au mouvement d'être considéré comme un continu actuellement divisé à l'infini. Le modèle fractal met également en lumière la tension entre un continu actuellement divisé à l'infini et la résolution leibnizienne de ne jamais laisser un continu se résoudre en une poussière de points. Le modèle fractal permet également de mettre en lumière l'utilisation leibnizienne des indivisibles comme « les extrema des parties ».

Le modèle fractal de Samuel Levey

Une manière d'exploiter l'analogie de la tunique et le mouvement tel que présenté par *Pacidius* dans la section précédente serait d'affirmer que le mouvement au sein d'un intervalle se résout toujours en intervalles plus fins divisés *ad infinitum*. Il s'agit maintenant de vérifier si une fractale est le bon objet géométrique pour illustrer cette idée.

Dans son article *The Interval of Motion in Leibniz's Pacidius Philalethi*[172], Levey caractérise les fractales à partir de leur propriété d'autosimilarité. Pour Levey, la courbe de Koch « offers a clear match or the structure of the interval of motion as *Charinus* describes it and as it is elaborated in the image of the folded tunic »[173] et fait partie du sous-ensemble des fractales autosimilaires. Nous dirons qu'une structure possède la propriété d'autosimilarité si elle peut être cassée en des morceaux arbitrairement petits qui sont chacun une réplique à une échelle inférieure de la structure entière. Une fractale contient des fractales à l'intérieur de chaque fractale, comme les plis de la tunique de Leibniz. Une fractale autosimilaire exprimera la même structure et la même complexité à toutes les échelles.

Figure 1 — Première génératrice

La courbe de Koch obéit à des règles de construction assez simple : nous prenons une ligne que nous considérons comme notre première génératrice, nous divisons cette ligne en trois parties égales, nous remplaçons la partie du milieu par un triangle équilatéral, nous recommençons l'opération en considérant les 4 segments comme 4 nouvelles génératrices[174]. Ce procédé est répété à l'infini. La structure de Koch est donc une structure fractale qui donne finalement lieu à une courbe qui

Figure 2 — Première itération de la construction, 4 génératrices

[172] Samuel Levey, *The Interval of Motion in Leibniz's Pacidius Philalethi,* Noûs*,* 37 : 3, 371-416.

[173] *Ibid.* p.393.

[174] Nous avons représenté les trois premières itérations de la construction de la fractale.

ne possède aucun intervalle qui ne soit brisé en deux autres intervalles. Pour le dire en termes mathématique, elle est continue partout, mais dérivable nulle part.

Figure 3 — Deuxième itération de la construction, 16 génératrices

Pour Levey, chaque pli de la tunique correspond, à une échelle donnée, à une génératrice de la fractale[175]. Levey constate que chaque partie apparaît relativement plate ou lisse à une certaine échelle de grossissement, mais qu'une échelle plus fine révèle que cette partie n'en finit pas de se résoudre en petits triangles équilatéraux[176]. Ici, chaque génératrice correspond à un intervalle étendu de mouvement[177]. Gardons à l'esprit qu'à partir de chaque génératrice peut naître une infinité d'autres génératrices.

La structure fractale répond à l'exigence de non-uniformité du mouvement dans le sens où l'on peut prendre n'importe laquelle de ses parties et zoomer à une échelle plus fine pour retomber sur la structure composée de triangles équilatéraux. Ce qui semble être uniforme ne l'est que depuis un certain point de vue, une certaine échelle.

Chaque couple d'extrémités d'intervalles voisins forme une singularité du mouvement, une singularité représente l'influence des autres corps sur le mouvement du corps considéré. Pour Levey, le mobile procéderait à un saut pour passer d'un intervalle à un autre par le biais de chaque singularité considérée comme une paire agrégée de points indistants[178]. Levey poursuit en disant que chaque saut marque un changement dans le mouvement du mobile qui a lieu à la limite entre différents sous-mouvements[179]. La fractale rend plus aisée pour un esprit fini, la tâche de se représenter l'intrication à l'infini d'intervalles dans des intervalles, mais elle rend également d'autant plus palpable la tension entre cette intrication infinie et l'exigence leibnizienne de non-résolution du mouvement en poussière de points. En effet,

175 *Id.* p. 396.

176 *Id.* p. 397.

177 Sur le schéma du *Pacidius Philalethi*, que nous reprenons page 73, AD DC seraient deux génératrices.

178 *Id.* p. 401.

179 *Ibid.*

menée jusqu'à son terme, la construction d'une fractale semble aboutir à la réduction du continu à une poussière de points.

Selon Levey, la fractale rend visible la problématique du mouvement dans le *Pacidius Philalethi.* Si le mouvement doit se faire selon le modèle de la tunique fractale, alors le mouvement, en dernière analyse, se résoudrait en une infinité de passages d'un extremum à un autre, de bonds entre points indistants. Si nous poursuivons le mouvement jusqu'à une échelle infinie, il n'y aurait même plus que des extrema[180].

Nous retrouvons nos deux exigences inconciliables. D'une part, chaque intervalle de mouvement doit être divisé à l'infini. D'autre part, un intervalle de mouvement ne peut pas se réduire à une poussière de points.

Dans son article, Levey tente de réconcilier les deux exigences leibniziennes par le biais de la différence entre l'infini syncatégorématique et catégorématique. Nous verrons dans la dernière section de ce travail, une autre interprétation du problème en reprenant à nouveaux frais ces notions de l'infini. Il semble dès lors opportun de définir dès maintenant la différence entre ces deux infinis par le biais de quantificateurs logiques, cela permet un gain de clarté qui n'est somme toute pas négligeable.
Dans le cas de l'infini syncatégorématique, il est assuré que pour chaque nombre x il existe un nombre y plus grand que x : $\forall x \exists y : (y > x)$. Contrairement à l'infini catégorématique, on ne suppose pas l'existence du nombre qui serait plus grand que tous les autres. Nous pouvons transcrire cette idée du plus grand nombre de cette manière et ainsi définir l'infini catégorématique : $\exists y \forall x : (x \neq y \Rightarrow y > x)$

Revenons à nos fractales. Levey distingue, ce qu'il appelle le point de vue intérieur des échelles fractales du point de vue extérieur. De l'intérieur, certaines échelles paraissent infiniment petites et d'autres infiniment grandes, mais on n'atteint jamais une échelle assez petite pour que le mouvement puisse se résoudre en points. On aurait là, à notre sens, un point de vue syncatégorématique de l'infini, car, tout ce que l'on peut dire c'est que depuis notre point de vue et peu importe l'échelle considérée il en existe toujours une plus fine.

---

180 *Ibid.*

A contrario, de l'extérieur, il s'agit de considérer toutes les échelles, toutes les divisions en même temps, donc de considérer toutes les échelles comme formant un ensemble actuellement infiniment grand. Levey affirme que du point de vue extérieur « where *all* scelles and *all* the divisions in the structure are given at once, a resolution of motion into a power of points (or leaps) seems to be inevitable —for having cut back every finite interval into finer and finer parts without end, what extended intervals could now remain ».[181]

Cet ensemble actuellement infiniment grand de divisions dans la structure fractale rappelle l'infini catégorématique. Ce type d'infini est, à notre sens, inséparable de l'existence d'un élément infiniment grand ou infiniment petit selon que l'on considère l'infiniment grand ou petit. Dans le cas présent, cela revient à dire qu'il existerait une échelle fractale plus petite que toutes les autres. Effectivement, cette échelle ne pourrait que se résoudre en points vu qu'elle serait infiniment fine. Ce dernier point de vue, que nous pourrions donc qualifier de « catégorématique », pose manifestement problème dans la mesure où il semble exclure l'existence de parties étendues. On retomberait dès lors dans une conception qui réduirait le continu à une poussière de points.

La solution de Levey

Pour sortir de ces difficultés, Levey propose de distinguer le mouvement apparent du mouvement en soi. Il entreprend de préciser les propriétés de chacun de ces mouvements.

Selon Levey, nous avons d'une part, le mouvement qui se donne dans l'expérience perceptive comme une structure fractale que l'on peut considérer à différentes échelles et dont la complexité et la non-uniformité ne cessent de se révéler au fur et à mesure qu'on le déplie[182]. D'autre part, le mouvement se révèle être ultimement une série infinie et discrète de sauts inétendus entre deux points indistants.

Levey résume sa position comme suit : « Motion is metaphysically founded in an infinity of discrete leaps between *Loci Proximi* (= points indistants) and cognized constructively as a divided continuum with limitless scaling complexity in which a complete resolution into minima is never reached »[183].

---

[181] *Id.* p. 402.

[182] *Id.* p. 403.

[183] *Id.* p. 405.

L’approche de la solution de Levey considère qu’il est impossible de satisfaire en même temps les « demandes contradictoires » de la théorie leibnizienne du mouvement. En effet pour Levey, une ontologie du mouvement fondée sur des sous-intervalles de mouvements actuellement infiniment divisés n’est pas compatible avec des extrema qui seraient ontologiquement dépendants d’intervalles étendus. Autrement dit, si l'on considère que l'infini actuel à l’oeuvre dans la division du mouvement en sous-intervalles est catégorématique, cela implique l’existence de la plus fine échelle, qui ne serait alors plus que des points ; or une échelle qui ne serait plus que des points poserait problème, car Leibniz considère que les points n’existent qu’en tant que limites de quantités étendues.

Nous souhaiterions conclure ce travail en considérant, brièvement, une autre approche. Nous émettons l’hypothèse que l’incompatibilité des exigences leibniziennes provient du concept d’infini actuel qui est habituellement considéré comme un synonyme de l’infini catégorématique. Nous proposons, en suivant Adam Harmer, de penser la structure fractale du mouvement comme répondant de l’exigence d’un infini actuel syncatégorématique.

L’approche de Harmer concernant l’infini actuel syncatégorématique

Harmer propose de considérer un type d’infini particulier, il s’agit de l’infini actuel syncatégorématique. Ce type d’infini se distingue des autres en ce qu’il représente actuellement une infinité d’entités sans pour autant attribuer une cardinalité infinie à cette infinité. Cela revient à concevoir l’existence d’une multiplicité infinie tout en excluant, comme le fait Leibniz à de nombreuses reprises, l’existence d’un plus grand nombre, d’un nombre doté d’une cardinalité infinie.

Harmer introduit une distinction entre l’infini actuel et l’infini catégorématique. Pour Harmer, le catégorématique implique l’actuel, mais pas l’inverse[184] : qu’un intervalle de mouvement soit actuellement infiniment divisé n’implique pas que les divisions actuellement données forment un tout et donc se terminent par un nombre infiniment grand. C’est une chose de dire que toutes les divisions sont actuelles, cela en est une autre que de dire qu’elles

[184] Adam Harmer, *The Actual Infinite : A Leibnizian Perspective on Cantor’s Paradise,* M.A. Thesis, McMaster University, 2006, p. 27.

forment une collection ou un ensemble dont nous pourrions déterminer la multiplicité. La position de Leibniz selon Harmer est la suivante : étant donné n'importe quel nombre de divisions, il y en a, en fait ou actuellement, toujours déjà plus, sans pour autant qu'il n'existe de nombre qui capture toutes les divisions[185].

Pour en revenir à notre fractale, l'infini actuel syncatégorématique permet l'existence d'une infinité d'échelles qui contiennent chacune des singularités et des intervalles étendus sans pour autant postuler l'existence de la plus grande des échelles qui ne serait que singularités. Il me semble que l'infini actuel syncatégorématique permet d'échapper à la contradiction qui émane de ce que Levey appelait le point de vue de l'extérieur de la fractale, i.e. le point de vue où l'on considère en un instant la totalité de la fractale dans toute sa complexité, tout infinie que soit cette complexité. Cette manière de définir l'infini actuel syncatégorématique n'enlève rien à la complexité infinie de la conception du monde que nous retrouvons chez Leibniz dans n'importe quel pli.

[185] *Id.* p. 28.

Conclusion

Notre ambition était d'explorer l'évolution de la notion leibnizienne de continu depuis les premiers écrits de physique, en 1670-1671, jusqu'à la fin de la période parisienne et la rédaction du *Pacidius Philalethi*. Le caractère concret de cette exploration réside, à notre sens, dans la présentation, que nous avons tenté de rendre la plus claire possible, de textes émanants d'une pensée luxuriante qui cherche à se frayer un chemin au travers du labyrinthe du continu tel que Leibniz le conçoit très tôt dans sa vie de philosophe.

Nous avons tenté de nous faufiler dans les plis et replis de ce labyrinthe avec pour fil d'Ariane un certain nombre de notions et de concepts mathématico-philosophiques que Leibniz ne cesse de remettre sur le métier durant les périodes considérées dans ce travail; l'infini et le minimum sont certainement les deux principales notions qui ont retenu notre attention. La rencontre entre l'infiniment grand et l'infiniment petit engendre de multiples problèmes et de nombreux paradoxes qui sont autant de défis pour la pensée. Leibniz s'est efforcé de déplier ces problématiques en métaphysique et en mathématique. Cependant, c'est dans tous les domaines de sa pensée qu'elles sont fécondes.

L'un des grands débats qui agitent aujourd'hui les études leibniziennes est celui de savoir s'il faut adopter une interprétation réaliste ou une interprétation idéaliste de la métaphysique de Leibniz. Ce débat porte aussi sur le statut qu'il convient de reconnaître aux substances corporelles, les considérations sur ces dernières sont étroitement liées aux questions que nous avons envisagées dans ce travail. Ce point, que nous n'avons pu qu'effleurer mais qui ferait à lui seul l'objet d'une autre mémoire, est approché par Pauline Phemister dans son *Leibniz and the Natural World*[186].

Par la présentation des textes de la période parisienne, nous avons tenté de mettre en scène un contraste et des glissements conceptuels par rapport à la TMA. Nous sommes parti de l'hypothèse que ce contraste pouvait être mis sur le compte de l'apprentissage des mathématiques durant le séjour parisien. En effet, dans les textes parisiens nous avons constaté que Leibniz réalisait des schémas qui articulaient dimension spatiale et dimension temporelle ; ce qui, à notre connaissance n'était pas le cas avant cette période. Nous avons senti une élaboration toujours plus raffinée des rapports entre le temps et l'espace avec le

[186] Phemister P., *Leibniz and the natural world,* The New Synthese Historical Library, Vol. 58, Springer, Dordrecht, 2005.

calcul différentiel qui permettait une formalisation de ces rapports. La période parisienne est peut-être le début de l'avénement des modèles mathématiques au sein de ce que Serres appelait le « système de Leibniz ». De nos jours, contrairement à Serres, nous avons accès à de nombreux textes de la période parisienne ; cela nous a permis de regarder de près la pensée de Leibniz en pleine élaboration au contact des mathématiques.

Si la pensée de Leibniz était une Ville, nous pourrions dire que nous avons trouvé refuge quelque temps sur la Place du Mouvement qui se trouve à l'intersection de l'Avenue Métaphysique et du Boulevard des Mathématiques. Très rapidement, nous nous sommes rendu compte de l'élégance qui préside à l'agencement des différents quartiers qui abritent chacun une richesse inépuisable. Dans cette ville harmonieuse, rien n'est insignifiant : toute perception est la somme infinie de « petites perceptions » infinitésimales, tout corps est l'agrégat de corps eux-mêmes constitués de corps plus petits, emboîtés à l'infini, tout intervalle de mouvement est composé d'intervalles de mouvements toujours plus petits.

Grâce à l'élégance de son formalisme, Leibniz parvient en quelque sorte à mettre l'infini à notre portée d'êtres finis. Pour ce faire, nous avons vu les nombreux chemins que sa pensée emprunta. Le problème semblait insurmontable, infiniment insurmontable :

> Cependant, ce que nous pouvons faire ici, c'est de marcher de concert et avec ordre, de partager les routes, de faire reconnaître les chemins, et de les raccommoder ; enfin d'aller lentement, mais d'un pas sûr et ferme, le long de ce ruisseau d'eau vive et pure des connaissances simples et claires, qui prend sa source parmi nous, qui nous peut servir de soulagement de cette marche pénible, et de fil dans le labyrinthe… et qui nous mène enfin quoique par des détours.[187]

---

[187] *Préceptes pour avancer les sciences* (*phil, VII, A57)*

Appendice mathématique

Nous aimerions rajouter une touche plus personnelle à ce mémoire en laissant libre cours à des rapprochements entre les mathématiques ou les idées mathématiques de Leibniz, surtout en ce qui concerne l'analyse et la géométrie, et nos mathématiques modernes. Ces rapprochements seront peut-être parfois contestables, cependant nous ne pouvons résister à ce plaisir de fin gourmet que sont les mathématiques pour nous.

Bien que le formalisme du 17e siècle soit vraiment éloigné de celui enseigné et pratiqué de nos jours ; il n'empêche que les idées, les concepts et les problématiques de hier rejoignent celles d'aujourd'hui. Dans cet appendice, nous tenterons de retrouver des idées leibniziennes qui sont passées à la postérité mathématique. Nous essayerons également de montrer ce que permet un formalisme mathématique simple vis-à-vis du traitement de concepts abstraits comme l'infiniment grand ou petit, le continu ou encore la limite[188].

[188] La plupart des outils mathématiques que nous utilisons ici ont été acquis lors d'un cours d'analyse mathématique dispensé en première année universitaire en sciences mathématiques à l'Uliège.

Le lemme du théorème de Bolzano-Weierstrass

Ce théorème est utilisé pour caractériser un ensemble de réels comme un ensemble compact si et seulement si de toute suite de cet ensemble on peut extraire une sous-suite qui converge vers un point de cet ensemble. Pour démontrer cette caractérisation, il est nécessaire de passer par la démonstration d'un lemme, c'est ce lemme qui va retenir notre intérêt.

Explicitons tout d'abord les notions qui vont être utilisées dans notre développement.

a) Une *suite numérique réelle* est une loi qui, à tout nombre naturel non nul n, associe un réel x_n appelé *n-ème élément* de la suite. Cette suite de nombres réels est notée $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

b) Une *sous-suite* de la suite $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ est une suite $\left(x_{k(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ où $k(n)$ est une suite telle que $k(1)\geq 1$ *et* $k(n+1)\geq k(n)$ pour tout naturel non nul *n.*

   Par exemple, écrivons les premiers éléments de la suite $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, \ldots$$

   Lorsque nous gardons les éléments qui correspondent avec un des nombres k(n) , il reste par exemple la sous-suite $x_2, x_4, x_7, x_8, x_9, \ldots$

c) Une suite $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *converge* vers le réel a si nous pouvons trouver un élément x_N de la suite, à partir duquel on restera aussi proche de a qu'on le désire.

d) Une suite réelle est *bornée* si l'ensemble de ses éléments accepte un maximum et un minimum.

Lemme : De toute suite réelle et bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

Nous n'allons nous plonger entièrement ni dans le lemme ni dans le formalisme de ce dernier, notre seul objectif sera de mettre en lumière le traitement de l'infini dans son aspect régressif.

Considérons d'une part une suite réelle et bornée $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ dont les éléments se situent tous dans l'intervalle $\left[-C,C\right]$ et d'autre part des intervalles $I_{n,m}=\left]m.10^{-n},(m+1).10^{-n}\right]$ (avec *m* un nombre entier et *n* un naturel non nul). Lorsque *n* est fixé et que *m* varie, on obtient un réseau de mailles de largeur 10^{-n} qui recouvrent l'ensemble des réels.

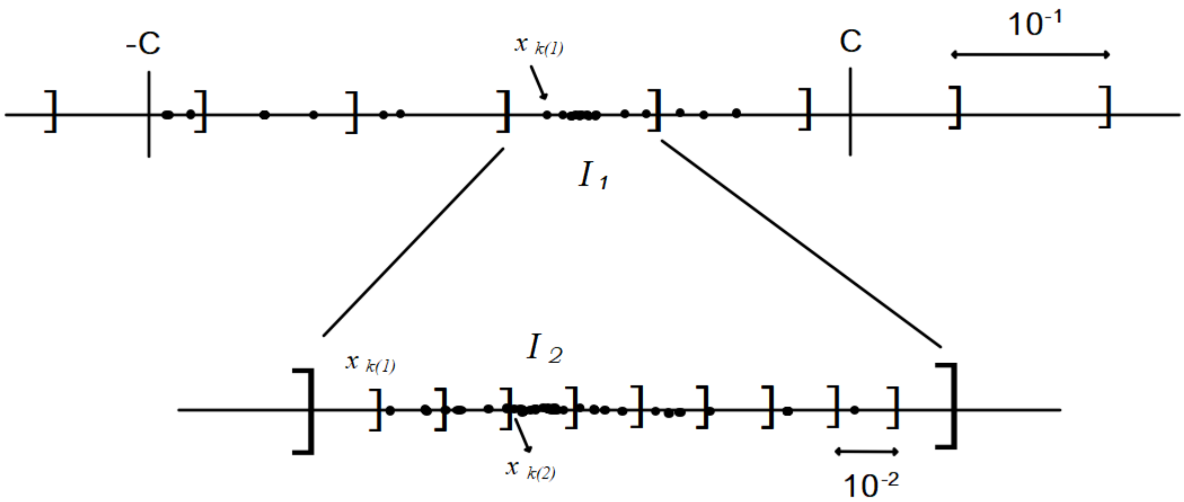
Illustrons :

Si $n=1$:

$\ldots$; $I_{1,-2}=\left]-2.10^{-1},-1.10^{-1}\right]$; $I_{1,-1}=\left]-1.10^{-1},0\right]$; $I_{1,0}=\left]0\ ,\ 1.10^{-1}\right]$; $I_{1,1}=\left]1.10^{-1},2.10^{-1}\right]$; $\ldots$

Les mailles recouvrent l'ensemble des réels et ont une largeur de 10^{-1}.

Puisqu'il y a un nombre infini d'éléments dans la suite et qu'il n'existe qu'un nombre fini d'intervalles de type $I_{1,m}$ qui recouvrent $[-C,C]$, alors il existe au moins un intervalle qui contient un nombre infini d'éléments de la suite, nous le désignons par I_1. Prenons le premier élément de la suite contenu dans cet intervalle, nous le notons $x_{k(1)}$.



Il nous semble que nous sommes assez proches ici de la manière dont Leibniz isolait le commencement d'un mouvement par la fameuse dichotomie dans la TMA. Il s'agit du même geste bien que l'encadrement formel de ce geste ne soit absolument pas le même. Il est également intéressant de remarquer que la construction géométrique que Leibniz appelait de ses vœux pour penser le mouvement, se retrouve dans notre analyse moderne d'une manière certes plus abstraite. Leibniz traçait des droites en imaginant un mouvement d'une extrémité à l'autre, nous imaginons des intervalles qui se déplacent et grandissent au gré de nos besoins sur la « droite réelle ».

Démonstration que le reste de la série alternée de Leibniz tend vers 0

Afin de démontrer la proposition qui nous intéresse, nous présentons deux outils indispensables.

La définition de deux suites adjacentes et leur propriété de convergence:

On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si :

(1) (u_n) est croissante ;   (2) (v_n) est décroissante ;   (3) $(u_n - v_n)$ converge vers 0.

Nous pouvons également dire qu'elles convergent vers la même limite réelle l et

que $u_n \le l \le v_k$, pour tous j,k naturels.

Proposition :

Soit (a_n) une suite décroissante, positive et qui converge vers 0.

Alors la série alternée $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ *converge et le reste* $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k$ *est du signe de son premier terme et lui est inférieur en valeur absolue.*

Démonstration :

1) Les suites extraites $(S_{2n}) = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k a_k$ et $(S_{2n+1}) = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k a_k$ sont adjacentes :

- (S_{2n}) est décroissante :

$$S_{2n+2} - S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k a_k - \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k a_k = (-1)^{2n+2} a_{2n+2} + (-1)^{2n+1} a_{2n+1} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \le 0$$

- (S_{2n+1}) est croissante :

$$S_{2n+1} - S_{2n-1} = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k a_k - \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^k a_k = (-1)^{2n+1} a_{2n+1} + (-1)^{2n} a_{2n} = -a_{2n+1} + a_{2n} \ge 0$$

car (a_n) est décroissante vers zéro.

- La différence de ces deux suites converge vers zéro :

$$S_{2n} - S_{2n-1} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k a_k - \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^k a_k = (-1)^{2n} a_{2n} = a_{2n}$$ et la suite (a_n) converge vers zéro.

Par la propriété précédente, nous savons donc que ces deux suites convergent vers la même limite

$S = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k a_k$ et que $S_{2n+1} \le S \le S_{2n}$ pour tous naturels *n*.

2) Regardons à présent le reste,

On a $R_{2n} = S - S_{2n} \le 0$, le reste est bien du même signe que son premier terme

De plus, $|R_{2n}| = |S - S_{2n}| = S_{2n} - S \underset{*}{\le} S_{2n} - S_{2n+1} = -(-1)^{2n+1} a_{2n+1} = a_{2n+1} = |(-1)^{2n+1} a_{2n+1}|$

Nous pouvons démontrer de la même manière que $|R_{2n+1}| \le |(-1)^{2n+2} a_{2n+2}|$ et que R_{2n+1} a le même signe que $(-1)^{2n+2} a_{2n+2}$.

Conclusion, puisque la suite *(a_n)* décroit vers zéro, il suffit d'aller suffisamment loin dans la somme pour obtenir une erreur aussi petite qu'on le désire.

Table des matières

Bibliographie

Arthur R., *Monads, Composition and Force,* Oxford University Press, 2018.

Hannequin A., *Études d'histoire des sciences et d'histoire de la philosophie*, Paris, Félix Alcan, 1908

Adam Harmer, *The Actual Infinite : A Leibnizian Perspective on Cantor's Paradise,* M.A. Thesis, McMaster University, 2006

Leibniz G.W., *The Labyrinth of the Continuum: Writings on the Continuum Problem, 1672-1686*, éd et trad. de Richard T.W. Arthur, New Haven : Yale University Press, 2001.

—*La naissance du calcul différentiel: 26 articles des Acta Eruditorum*, éd. et trad. par Marc Parmentier, Paris, Vrin, 1995.

—*Quadrature arithmétique du cercle, de l'ellipse et de l'hyperbole et la trigonométrie sans tables trigonométriques qui en est le corollaire*, trad. par Parmentier M., éd. Knobloch E, Paris, Vrin, 2004

—*Physique et métaphysique Opuscules de jeunesse*, Trad. René Violette, Éditions Lambert-Lucas, Limoges, 2012.

— *Essais de théodicée,* Préface, GF Flammarion, Paris, 1969.

—*Lettre à Malebranche G.i.322 dans Malebranche oeuvres complètes tome XVIII : Correspondance et actes 1638-1689, 1961*

—*Leibniz-Thomasius: Correspondance, 1663–1672*. Éd. et trad par Bodeüs R., Paris, Vrin, 1993.

Levey L., *The Interval of Motion in Leibniz's Pacidius Philalethi, in* Noûs*,* 37 : 3, 371-416

Michel Fichant, *Les étapes de la dynamique leibnizienne : de la réforme à la fondation, in* Wenchao Li (éd.), „*Für unser Glück oder das Glück anderer*", vol. 6 (Hildesheim : Olms, 2017), 109-128.

Parmentier, M. "*L'optimisme mathématique*." In Leibniz, *Naissance du Calcul Différentiel*, 11–52.

Phemister P., *Leibniz and the natural world,* The New Synthese Historical Library, Vol. 58, Springer, Dordrecht, 2005.

Serres, M. *Système de Leibniz et ses modèles mathématiques*. 2 vols. Paris: Presses Universitaire de France, 1968.