Introduction à l'étude des spectres de nombres et quelques applications

Auteur : Sportelli, Matteo
Promoteur(s) : Charlier, Emilie; Stipulanti, Manon
Faculté : Faculté des Sciences
Diplôme : Master en sciences mathématiques, à finalité approfondie
Année académique : 2020-2021
URI/URL : http://hdl.handle.net/2268.2/12137

Faculté des sciences

Département de mathématique

Introduction à l'étude des spectres de nombres et quelques applications

Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de
Master en Sciences Mathématiques à finalité approfondie

Auteur :
Matteo Sportelli

Promotrices :
Émilie Charlier
Manon Stipulanti

Année 2020–2021

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Émilie Charlier de m'avoir donné l'opportunité de découvrir un sujet intéressant qui m'a permis d'approfondir mes connaissances en mathématiques. Ses conseils et relectures ont été une aide précieuse dans la réalisation de ce travail.

Je suis également profondément reconnaissant envers Manon Stipulanti pour avoir pris le temps et le soin de me guider et de m'encadrer avec bienveillance, rigueur et beaucoup de patience dans la rédaction de ce mémoire.

Enfin, merci à tous mes proches qui m'ont soutenu dans mes études et qui ont fait de cette période de ma vie une expérience enrichissante et joyeuse dont je me souviendrai toujours avec nostalgie.

Table des matières

1 Notions utiles **1**
1.1 Langages formels 1
1.2 Automates 4
1.3 Théorie des groupes 9
1.4 Nombres de Pisot 11
1.5 Systèmes de numération 14

2 Les spectres de nombres **24**
2.1 Introduction 24
2.2 Points d'accumulation des spectres de nombres 27
2.3 Densité 51
2.4 Distance entre les éléments consécutifs d'un spectre 55
2.4.1 Étude de $\ell_M(\beta)$ 56
2.4.2 Étude de $L_M(\beta)$ 59

3 Les applications des spectres de nombres **71**
3.1 Développements universels 71
3.2 Applications basées sur le concept de rigidité 75
3.2.1 Théorie des automates 79
3.2.2 Division en ligne dans une base complexe 90
3.3 Cristallographie 95
3.3.1 Les spectres comme ensembles de Meyer 97
3.3.2 Les spectres comme ensembles de coupe et projection 99
3.3.3 Les spectres et les β-entiers 114
3.4 Les convolutions infinies de Bernoulli 120

Annexe A Les systèmes de fonctions itérées homogènes (IFS) **124**

Annexe B Le β-shift **131**

Annexe C Les β-représentations de 0 **136**

Annexe D Erratum **141**

References **143**

Introduction

L'étude des spectres ne s'est développée que très récemment lorsqu'elle a été initiée par Erdös et al. en 1990. Cependant, on trouve des traces qui remontent jusqu'aux années 1960 et 1970 comme dans [46], où Garsia donne un argument qui est aujourd'hui considéré « classique » dans la littérature et dans [26], où Drobot étudie les sommes des puissances de nombres réels. Les spectres ont aussitôt gagné en importance et les travaux d'Erdös et al. ont été complémentés par de nombreux auteurs, dont Akiyama, Komornik, Pelantová, Frougny et Feng pour n'en nommer que quelques-uns. Les spectres se sont rapidement avérés utiles dans d'autres domaines des mathématiques et on présente dans ce travail quelques-unes de ces applications. À cet égard, on peut considérer l'étude des spectres comme une véritable matière multidisciplinaire mêlant les systèmes de numération, la combinatoire des mots, la théorie de la mesure et la cristallographie [1]. Dans ce mémoire, on se propose d'étudier les spectres ainsi que d'explorer quelques-unes de leurs nombreuses facettes.

Ce travail est organisé comme suit : Pour des raisons de complétude et pour que le lecteur ait tous les outils nécessaires pour la compréhension des sujets abordés dans la suite, la première partie rappelle quelques notions, propriétés et arguments qui seront utilisés tout au long de ce mémoire. Ces rappels concernent les langages formels, les automates (de Büchi) et les transducteurs, les nombres de Pisot et les systèmes de numération. Le lecteur familier avec ces sujets peut passer directement à la suite.

La deuxième partie traite des spectres et de leur étude. Un spectre est un ensemble de la forme $S_A(\beta) = \{\sum_{i=0}^{n} a_i\beta^i \mid a_i \in A, n \in \mathbb{N}\}$ où $\beta > 1$ et A est un ensemble fini de nombres. Signalons également qu'on se restreint essentiellement à l'étude des spectres réels, c'est-à-dire qu'on suppose $\beta \in \mathbb{R}$ et $A \subset \mathbb{R}$. Des généralisations seront données en cas de nécessité, comme par exemple dans le chapitre « Applications ». On étudie ici trois propriétés des spectres de nombres qui ont été étudiées au cours des 50 dernières années. On s'intéresse d'abord à l'existence de *points d'accumulation* d'un spectre. Un point d'accumulation x d'un ensemble E est un point dont tout voisinage contient un point différent de x. Le but est d'identifier les conditions sous lesquelles un spectre admet un point d'accumulation. Plus précisément, comme le spectre ne dépend que de la base β et de l'alphabet A choisis, on cherche les couples (β, A) tels que le spectre $S_A(\beta)$ admet un point d'accumulation. On

1. Akiyama et Komornik ont exposé quelques applications parmi les susmentionnées dans [9] et elles seront présentées dans le chapitre 3.

considère ensuite la *densité* des spectres. Ici aussi, on souhaite identifier les couples (β, A) pour lesquels le spectre $S_A(\beta)$ est dense dans $\mathbb{R}$. Drobot et Garsia ont donné des réponses partielles dans les années 1962 et 1973. La dernière propriété discutée dans ce mémoire est la *distance entre deux éléments consécutifs* d'un spectre. De façon assez surprenante, il s'avère que ces trois propriétés sont toutes liées et dépendent du même critère. Akiyama et Komornik ont déterminé les conditions d'existence des points d'accumulation et ont ainsi également répondu aux autres questions.

La dernière section est consacrée aux applications et apparitions des spectres dans différentes branches des mathématiques. On commence avec l'application considérée par Erdös et al. en 1990 dans [33] qui a donné lieu à l'introduction formelle des spectres : les développements universels. On étudie ensuite le lien entre les spectres de nombres et les automates de Büchi. Ceci est la première application donnée par Frougny et Pelantová dans [42]. La seconde application concerne l'algorithme de division de Trivedi et Ergovac généralisé aux systèmes de numération complexes. Ensuite, on passe à la cristallographie, domaine qui étudie la structure de cristaux et dans lequel on retrouve les spectres sous forme de cas particuliers de modèles représentant des cristaux et on termine avec une discussion sur les convolutions infinies de Bernoulli.

À certains endroits, des résultats provenant de l'étude des systèmes de fonctions itérées homogènes (IFS), des β-shifts et des représentations de 0 dans une base β seront utilisés. Ces sujets n'intervenant que ponctuellement dans ce travail, les notions et résultats nécessaires seront brièvement présentés dans l'annexe.

Chapitre 1

Notions utiles

L'étude des spectres nécessitant un certain nombre de prérequis, on commence avec des rappels sur quelques domaines des mathématiques qui seront utiles non seulement pour fixer les notations, mais aussi pour faciliter la compréhension des sujets abordés ci-après. Ces rappels portent notamment sur les concepts de base de la théorie des langages formels, des automates, de la théorie des groupes, des nombres de Pisot et des systèmes de numération. L'étude des spectres et leurs applications commencera dans le chapitre 2 respectivement 3.

1.1 Langages formels

Dans cette section, on rappelle les définitions classiques des langages formels en reprenant parfois les notations et définitions de [16, 42]. La théorie des langages formels est l'étude des mots et de leurs propriétés. Ces notions sont utiles pour la suite parce que les nombres seront représentés par des mots. Les mots sont des suites de lettres, les lettres elles-mêmes étant regroupées dans les alphabets. Les définitions suivantes formaliseront ces notions.

Définition 1.1.1. Un *alphabet* est un ensemble fini [1] A non vide. Ses éléments sont appelés les *lettres*.

Un alphabet est donc un ensemble de symboles, comme par exemple $\{a, b, c\}$. Dans le chapitre 2 on considère uniquement des alphabets contenant des nombres.

Exemple 1.1.2. Un premier exemple d'un alphabet est celui contenant les premiers naturels plus petits ou égaux à k : $B_k = \{0, 1, \ldots, k\}$.

Il existe deux sortes de mots sur un alphabet donné : les mots finis et les mots infinis.

1. On trouve également des alphabets infinis dans la littérature. Ici, on utilise le plus souvent des alphabets finis, sauf mention explicite du contraire.

Définition 1.1.3. Soit A un alphabet. Un *mot* fini w de longueur $n \in \mathbb{N}$ sur A est une suite finie de lettres de A. On écrit $w = w_1 w_2 \cdots w_n$ avec $w_i \in A$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. On note $|w|$ la longueur du mot w. On note A^* l'ensemble de tous les mots finis sur l'alphabet A.

Définition 1.1.4. On note ε le mot vide. Il s'agit de l'unique mot de longueur 0.

L'ensemble des mots finis sur un alphabet peut être muni d'une opération de concaténation.

Définition 1.1.5. Soit A un alphabet. On définit

$$\cdot : A^* \times A^* \to A^* : (u, v) \mapsto w = uv$$

où $w_i = u_i$ si $i \leq |u|$ et $w_i = v_{i-|u|}$ si $i > |u|$, pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, |u| + |v|\}$.

Exemple 1.1.6. Considérons les mots *ordi* et *nateur*. Alors $ordi \cdot nateur = ordinateur$. Le mot *ordinateur* est également la concaténation de toutes ses lettres : $ordinateur = o \cdot r \cdot d \cdot i \cdot n \cdot a \cdot t \cdot e \cdot u \cdot r$.

Définition 1.1.7. Soient M un ensemble, $\cdot : A \times A \to A$ une opération associative et $e \in M$ un élément neutre pour l'opération $\cdot$. Alors on dit que $(M, \cdot, e)$ est un *monoïde*.

Si A est un alphabet, alors $(A^*, \cdot, \varepsilon)$ est un monoïde. Les mots peuvent aussi être découpés arbitrairement. Cela fait intervenir les notions de préfixe et de suffixe.

Définition 1.1.8. Soient A un alphabet et u, v, w des mots sur A. Si $w = uv$, on dit que u est un *préfixe* de w et que v est un *suffixe* de w.

Exemple 1.1.9. Le mot *ordi* est un préfixe de longueur 4 du mot *ordinateur*. Le mot *teur* en est un suffixe.

Définition 1.1.10. Considérons un mot w sur un alphabet A. On dit que $y \in A^*$ est un facteur de w s'il existe $x, z \in A^*$ tels que $w = xyz$. On note $\mathrm{Fac}(w)$ l'ensemble de tous les facteurs de w.

Exemple 1.1.11. Le mot *dina* est un facteur du mot *ordinateur*.

Définition 1.1.12. Un *langage* sur l'alphabet A est un ensemble $L \subset A^*$.

Exemple 1.1.13. Soit l'alphabet $A = \{a, b\}$. Alors $L = \{a, b, ab, ba\}$ est un langage. Un exemple de langage infini est $L = \{(ab)^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{\varepsilon, ab, abab, ababab, abababab, \ldots\}$.

Définition 1.1.14. Un *mot infini* sur l'alphabet A est une suite infinie de lettres de A. On le note $w = w_1 w_2 \cdots$ avec $w_i \in A$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. L'ensemble de tous les mots infinis sur A est noté $A^{\mathbb{N}}$.

Définition 1.1.15. Le mot infini $uu \cdots$ est noté u^ω.

Définition 1.1.16. Si A est un alphabet et $u, v \in A^{\mathbb{N}}$, alors la distance entre u et v est

$$d(u, v) = 2^{-|u \wedge v|},$$

où $u \wedge v$ est le plus long préfixe commun de u et de v.

Exemple 1.1.17. Considérons les mots $u = (ab)^\omega = ababab\cdots$ et $v = a^\omega = aaa\cdots$. Alors les mots u et v diffèrent à la deuxième lettre. Le plus long préfixe commun de ces deux mots et donc de longueur 1 et on en tire que $d(u, v) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$.

Définition 1.1.18. Soit $(w^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mots infinis. Alors cette suite converge vers un mot infini w si $d(w^{(n)}, w)$ converge vers 0 si $n \to \infty$.

Cette définition de convergence s'avère très intuitive. Une suite de mots infinis $(w^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un mot infini w si le préfixe commun de $w^{(n)}$ et w devient de plus en plus long lorsque $n \to \infty$. Si $(w^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de mots finis, on peut considérer la suite $(w^{(n)}0^\omega)_{n\in\mathbb{N}}$. On dit que $(w^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers w si $(w^{(n)}0^\omega)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers w.

Les morphismes de mots sont un outil pratique pour construire des mots infinis. Commençons donc avec la définition d'un morphisme.

Définition 1.1.19. Soient $(A^*, \cdot_A, e_A)$ et $(B^*, \cdot_B, e_B)$ deux monoïdes. Alors $f : A^* \to B^*$ est un *morphisme de monoïdes* si

— $\forall x, y \in A : \ f(x \cdot_A y) = f(x) \cdot_B f(y)$

— $f(e_A) = e_B$.

Si A et B sont deux alphabets munis de l'opération de concaténation et si $f : A^* \to B^*$ est un morphisme, alors pour tout mot $w = w_1 w_2 \cdots w_n \in A^*$, on a

$$f(w) = f(w_1)f(w_2)\cdots f(w_n).$$

On en tire que le morphisme f est déterminé par les images des lettres dans l'alphabet A.

Exemple 1.1.20. Soient $A = \{a, b\}$ et $B = \{0, 1\}$. Alors un exemple trivial de morphisme est l'identité :

$$id : A^* \to B^* : w \mapsto w.$$

Un deuxième exemple est le morphisme f défini par

$$f(a) = 0, \ \ f(b) = 1.$$

On a alors $f(ababaab) = 0101001$. Les images des lettres de l'alphabet A ne doivent pas nécessairement être des lettres. Si $A = B = \{0, 1\}$, on peut considérer le morphisme φ défini par

$$\varphi(0) = 01, \ \ \varphi(1) = 0.$$

Alors on a

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 01 \\ \varphi(01) = \varphi^2(0) &= 010 \\ \varphi(010) = \varphi^3(0) &= 01001 \\ &\cdots \end{aligned}$$

Exemple 1.1.21. Considérons l'alphabet $A = \{0, 1\}$. Considérons le morphisme $\varphi(1) = 0$ et $\varphi(1) = 01$ de l'exemple précédent. Alors le mot de Fibonacci F est la limite $\lim_{n\to\infty} \varphi^n(0)$. Il s'agit du mot dont tous les $\varphi^n(0)$ sont préfixes. On a

$$F = 0100101001001010010100100101001001 \cdots .$$

1.2 Automates

Les automates sont un outil pratique pour étudier les langages dits réguliers. Cette section (empruntant les définitions de [16]) introduit les automates, les automates de Büchi et les transducteurs qui seront utiles [2] pour étudier la fonction de normalisation (cf. section 3.2.1). Le lecteur familier avec ces concepts peut directement passer à la section suivante. Commençons avec les automates classiques.

Définition 1.2.1. Un *automate* est un quintuple (Q, A, E, I, T), où A est un alphabet, Q est l'ensemble des états de l'automate, $I \subseteq Q$ est l'ensemble des états initiaux, $T \subseteq Q$ est l'ensemble des états finaux et $E \subset Q \times A \times Q$ est l'ensemble des transitions.

Dans un automate déterministe, I se réduit à un seul état et pour tout $p \in Q$ et $a \in A$, il existe au plus un état $q \in Q$ tel que $(p, a, q) \in E$. Dans ce cas, l'ensemble E est le graphe d'une fonction (éventuellement partielle) σ appelée la fonction de transition. Si l'automate est non-déterministe, alors il existe potentiellement plusieurs choix de transitions à partir d'un état et pour une lettre donnés.

Définition 1.2.2. On dit que l'automate est fini si l'ensemble Q de ses états est fini.

On peut représenter les automates par des graphes orientés où les états sont représentés par des noeuds et les transitions par des arcs. Concrètement, un état initial est représenté par un cercle avec une flèche entrante et un état final est représenté par deux cercles concentriques. Ceci est illustré à la figure 1.1 ci-dessous.

FIGURE 1.1 – Un état initial à gauche et un état final à droite.

Définition 1.2.3. Le mot $w = w_1 w_2 \cdots w_n \in A^*$ de longueur $n \in \mathbb{N}$ est *accepté* par l'automate $M = (Q, A, E, I, T)$ s'il existe une suite $(x_i)_{i=0}^n$ d'états tels que $x_0 \in I$, $x_n \in T$ et que $(x_i, w_{i+1}, x_{i+1}) \in E$ pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. On dit aussi que w est l'étiquette d'un chemin dans M et on le note $x_0 \xrightarrow{w_1} x_1 \xrightarrow{w_2} x_2 \xrightarrow{w_3} \cdots \xrightarrow{w_n} x_n$.

Définition 1.2.4. Le *langage* $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ de l'automate M est l'ensemble de tous les mots acceptés par M.

2. Ils seront également utilisés dans l'annexe B.

Définition 1.2.5. Soit Σ un alphabet. Alors un langage L sur Σ est régulier s'il est accepté par un automate fini déterministe.

Exemple 1.2.6. Considérons l'automate

$$\mathcal{M} = \{\{A, B\}, \{a, b\}, \{(A, a, B), (B, b, A)\}, \{A\}, \{B\}\}$$

représenté à la figure (1.2). Cet automate est composé de deux états, où A est l'état initial et B l'état final. Il y a une transition d'étiquette a de l'état A à l'état B et une transition d'étiquette b de l'état B à l'état A. Le mot aba est accepté par l'automate M. En effet, le chemin $A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} A \xrightarrow{a} B$ est un chemin d'acceptation car il commence à l'état initial A et finit à l'état final B. La langage accepté par $\mathcal{M}$ (qui est donc régulier) est

$$\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \{a(ba)^n \mid n \in N\}.$$

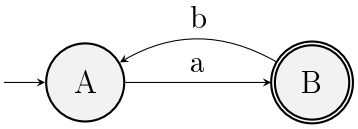

FIGURE 1.2 – Un automate acceptant le langage $\{a(ba)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Les automates de Büchi

Les définitions du reste de cette section ont été empruntées de [23] et [16]. Les automates peuvent être étendus aux mots infinis de la façon suivante.

Définition 1.2.7.
- Comme pour les automates classiques, un automate de Büchi (cf. 1.2.9 pour un exemple) est un quintuple $\mathcal{M} = (Q, A, E, I, T)$ où A est un alphabet, Q est l'ensemble des états de l'automate, $I \subseteq Q$ est l'ensemble des états initiaux, $T \subseteq Q$ est l'ensemble des états finaux et $E \subset Q \times A \times Q$ est l'ensemble des transitions.
- Considérons l'ensemble des transitions E. Un chemin infini c de $\mathcal{M}$ est une suite infinie $(p_0, a_1, p_1), (p_1, a_2, p_2), \ldots$ où $(p_i, a_{i+1}, p_{i+1}) \in E$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Son étiquette est alors le mot infini $a = a_1 a_2 \cdots$ et on le note $p_0 \xrightarrow{a_1} p_1 \xrightarrow{a_2} p_2 \cdots$.
- Un chemin infini c est dit *initial* s'il commence dans I.
- Un chemin infini $p_0 \xrightarrow{a_1} p_1 \xrightarrow{a_2} p_2 \cdots$ est dit final s'il existe une infinité d'indices $i \in \mathbb{N}$ tels que $p_i \in T$.
- Un chemin infini est un chemin d'acceptation s'il est à la fois initial et final. L'automate $\mathcal{M}$ accepte les mots qui sont l'étiquette d'un chemin d'acceptation.

Définition 1.2.8. Pour un automate de Büchi, un état q est dit *accessible* s'il existe un chemin commençant dans un état initial menant à q. L'état q est dit *co-accessible* s'il existe un chemin infini final commençant dans q. On dit qu'un automate de Büchi est *réduit* si tous ses états sont accessibles et co-accessibles.

Exemple 1.2.9. Considérons l'automate de Büchi représenté à la figure 1.3.
- Le chemin d'étiquette $aabb(ab)^\omega$ et commençant dans l'état A est un chemin initial mais pas final. En effet, il ne passe qu'une seule fois par l'état final C.
- Le chemin d'étiquette $a(ab)^\omega$ est un chemin d'acceptation.
- L'état G n'est pas accessible, car il n'existe aucun chemin qui mène de A à G.
- Les états E et F ne sont pas co-accessibles, car aucun chemin (infini) ne mène de E ou F à C.

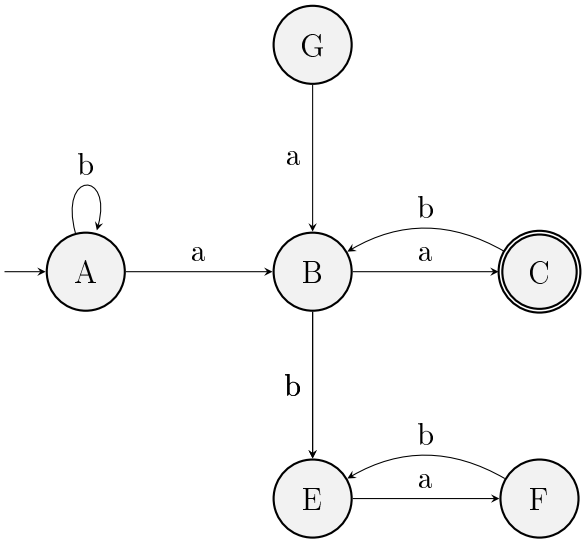

FIGURE 1.3 – Un automate de Büchi non réduit.

Définition 1.2.10. Soit $\mathcal{M} = (Q, A, E, I, T)$ un automate de Büchi réduit. Alors on dit que
- $\mathcal{M}$ est (globalement) *déterministe* s'il n'a qu'un seul état initial et si chaque mot sur A est l'étiquette d'au plus un chemin initial dans M.
- $\mathcal{M}$ est (globalement) *co-déterministe* si chaque mot sur A est l'étiquette d'au plus un chemin final dans $\mathcal{M}$.

Exemple 1.2.11. Considérons l'automate de la figure 1.4. Cet automate n'est pas déterministe car le mot infini $(ba)^\omega$ peut être l'étiquette du chemin initial $A \xrightarrow{b} B \xrightarrow{a} A \xrightarrow{b} B \xrightarrow{a} \cdots$ et du chemin $A \xrightarrow{b} B \xrightarrow{a} C \xrightarrow{b} B \to \cdots$. Cet automate n'est pas non plus co-déterministe car le mot $(ba)^\omega$ est l'étiquette du chemin final $C \xrightarrow{b} B \xrightarrow{a} C \xrightarrow{b} B \xrightarrow{a} \cdots$ et du chemin final $A \xrightarrow{b} B \xrightarrow{a} A \xrightarrow{b} B \xrightarrow{a} \cdots$.

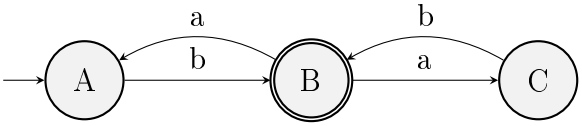

FIGURE 1.4 – Un automate de Büchi non déterministe et non co-déterministe.

La figure 1.5 montre un automate de Büchi qui est à la fois déterministe et co-déterministe. Cet automate accepte les mots infinis obtenus en concaténant un nombre infini de fois les mots *aba* et *abb*.

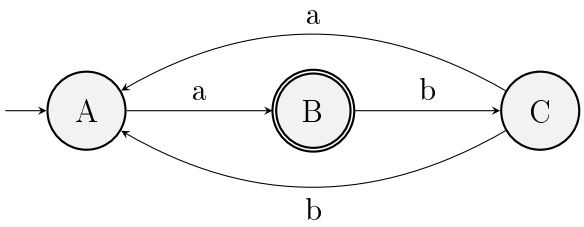

FIGURE 1.5 – Un automate de Büchi déterministe et co-déterministe.

Les transducteurs

Les transducteurs généralisent les automates et permettent de transformer des mots en d'autres mots, c'est-à-dire qu'à un mot u donné, ils peuvent associer un mot v. La forme de v dépend alors du transducteur (cf. définition 1.2.15). Un exemple d'une telle transformation de mots réalisable par des transducteurs est la conversion d'une représentation d'un nombre dans une base p en la représentation de ce nombre dans la base q ou encore la division par q d'un nombre représenté dans la base p (cf. exemple 1.5.28). On peut donc les voir comme des « traducteurs ». Plus formellement, ils permettent de représenter certaines fonctions ou des morphismes.

Définition 1.2.12. Un *transducteur* sur les alphabets A et B est un 6-uplet

$$\mathcal{T} = (Q, A, B, E, I, T)$$

où Q, I, T sont définis comme dans le cas des automates, A et B sont des alphabets et où $E \subset Q \times A^* \times B^* \times Q$ (cf. exemple 1.2.16).

Dans un transducteur, chaque transition est de la forme (p, u, v, q) où $u \in A^*$ est le mot d'entrée et $v \in B^*$ est le mot de sortie. On note cette transition $p \xrightarrow{u|v} q$. On peut construire deux automates à partir d'un transducteur, appelés les projections ou automates sous-jacents. L'automate d'entrée est l'automate obtenu en considérant uniquement les mots d'entrée des transitions. L'automate de sortie est l'automate obtenu en considérant uniquement les mots de sortie des transitions. La définition d'un chemin dans un automate s'étend de façon naturelle au cas des transducteurs.

Définition 1.2.13. Un chemin est étiqueté par un couple (u, v) où u est un mot d'entrée et v est le mot de sortie correspondant. Si ce chemin commence à l'état p et arrive à l'état q on note $p \xrightarrow{u|v} q$.

Remarquons qu'on n'a pas imposé de contraintes sur les couples $(u, v) \in A^* \times B^*$ dans la définition de la fonction de transition. Si ces couples sont composés de mots de longueurs

différentes, alors le transducteur lit le mot d'entrée et écrit le mot de sortie à deux « vitesses » différentes. En particulier, les couples de mots acceptés par un transducteur peuvent être formés de deux mots qui sont de longueurs différentes, comme illustré à la figure (1.6).

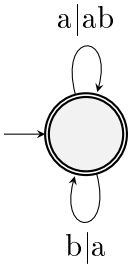

FIGURE 1.6 – Un transducteur réalisant (cf. définition 1.2.15) le morphisme $\Phi : a \mapsto ab, b \mapsto a$. Ce transducteur accepte en particulier le couple $(aba, abaab)$ qui est formé des deux mots de longueurs différentes.

Dans ce travail, on écarte cette possibilité en considérant uniquement les transducteurs lettre-à-lettre.

Définition 1.2.14. Un transducteur est dit *lettre-à-lettre* si chacune de ses transitions est étiquetée par une paire de lettres.

Définition 1.2.15. Si $\mathcal{T} = (Q, A, B, E, I, T)$ est un transducteur, alors son *langage*, noté $\mathcal{L}(\mathcal{T})$, est l'ensemble des étiquettes des chemins d'acceptation dans $\mathcal{T}$. De plus, on a $\mathcal{L}(\mathcal{T}) \subset A^* \times B^*$. Le langage de $\mathcal{T}$ est donc le graphe d'une relation ϕ de A^* dans B^*. On dit alors que $\mathcal{T}$ *réalise* la relation ϕ. Si, de plus, $\mathcal{T}$ est fini, alors on dit que ϕ est une relation *rationnelle*.

La relation réalisée par un transducteur lettre-à-lettre préserve donc les longueurs des mots d'entrée.

Exemple 1.2.16. Soit ϕ le morphisme identité sur $A = \{a, b\}$. Alors pour tout $w \in A^*$, $\phi(w) = w$. Le premier transducteur dans la figure ci-dessous réalise ce morphisme. Le deuxième transducteur réalise l'identité restreinte au langage $\{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$. Enfin, le troisième transducteur réalise le morphisme $\phi : a \mapsto b, b \mapsto a$.

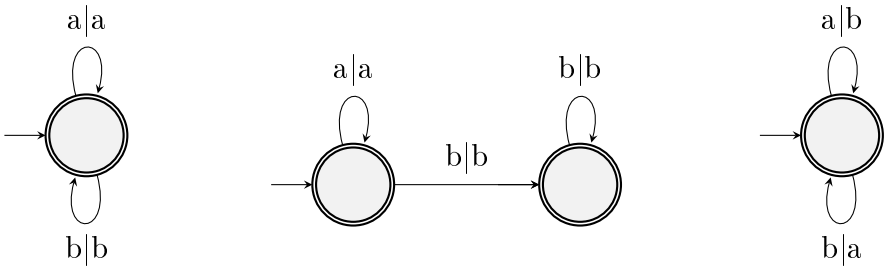

FIGURE 1.7 – Trois premiers transducteurs.

Dans la section 1.5 se trouve un exemple plus avancé d'un transducteur (cf. exemple 1.5.28).

1.3 Théorie des groupes

Dans cette section (empruntant les définitions de [1, 2, 6]) seront définis des concepts ayant un lien avec la théorie des groupes, tels que les extensions de champs et les entiers algébriques. Comme précédemment, le lecteur familier avec ces concepts peut passer à la section suivante.

Nombres algébriques

Les entiers algébriques forment une classe de nombres complexes dont sont présentés ci-dessous les principales propriétés. Ils forment aussi un sous-ensemble des nombres algébriques, définis comme suit :

Définition 1.3.1. Un *nombre algébrique* est une racine d'un polynôme non nul à coefficients dans $\mathbb{Q}$.

Pour qu'un nombre algébrique soit un entier algébrique, il suffit d'imposer que tous les coefficients soient des entiers et que le coefficient du terme dominant du polynôme soit 1, c'est-à-dire que le polynôme soit unitaire. Dans ce cas, on dit aussi que le polynôme est monique.

Définition 1.3.2. Un *entier algébrique* est une racine d'un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Exemple 1.3.3. Le nombre d'or et le réel $\sqrt{2}$ sont des entiers algébriques, car ils annulent les polynômes $P(x) = x^2 - x - 1$ et $Q(x) = x^2 - 2$ respectivement.

Définition 1.3.4. Pour un nombre α, le polynôme minimal de α sur un champ $\mathbb{K}$ est le polynôme unitaire de degré minimal à coefficients dans $\mathbb{K}$ s'annulant en α. En particulier, le polynôme minimal d'un entier algébrique est toujours à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Définition 1.3.5. Le *degré* d'un nombre algébrique est le degré de son polynôme minimal sur $\mathbb{Z}$ (Err : $\mathbb{Q}$).

Exemple 1.3.6. Le nombre d'or et $\sqrt{2}$ sont des nombres algébriques de degré 2, car leur polynômes minimaux sont $P(x) = x^2 - x - 1$ et $Q(x) = x^2 - 2$ respectivement.

Les entiers algébriques peuvent être liés par leur polynôme minimal.

Définition 1.3.7. Deux nombres algébriques α et β sont *conjugués* s'ils ont le même polynôme minimal.

Exemple 1.3.8. Considérons encore l'exemple du nombre d'or et de $\sqrt{2}$. Comme ils sont de degré deux, ils ont chacun un unique conjugué qui est $-\frac{1}{\phi}$, respectivement $-\sqrt{2}$. En effet ces deux nombres annulent également les polynômes $P(x) = x^2 - x - 1$ et $Q(x) = x^2 - 2$ respectivement.

L'ensemble des entiers algébriques est un anneau. Si on considère un champ $\mathbb{K}$ quelconque, on peut se restreindre aux entiers algébriques qui appartiennent à $\mathbb{K}$. Ces éléments forment également un anneau.

Définition 1.3.9. *L'anneau des entiers* d'un champ $\mathbb{K}$ est l'intersection de l'anneau des entiers algébriques avec le champ $\mathbb{K}$.

Extensions de champs

La notion de sous-champ est définie comme suit.

Définition 1.3.10. Considérons un champ L. Un *sous-champ* de L est un sous-ensemble $K \subseteq L$ tel que K, muni des restrictions à K des opérations définies sur L, est un champ.

Si L est une extension du champ K, alors on peut montrer que L est un K-espace vectoriel. On peut donc définir le degré d'une extension de champ.

Définition 1.3.11. Le *degré* de l'extension L/K, noté $[L : K]$, est la dimension du K-espace vectoriel L.

Remarque 1.3.12. Si $[L : K] = 1$, alors $L = K$.

Si S est un sous-ensemble de L, il existe un plus petit sous-champ de L contenant K et S. Il s'agit de l'intersection de tous les sous-champ contenant K et S. Ce champ est appelé le champ engendré par S sur K et on le note $K(S)$. Si S est fini, on peut écrire $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et on s'autorise alors à noter $K(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ le champ engendré par S sur K.

Exemple 1.3.13. Un exemple classique d'une extension de champ est $\mathbb{C}$. En effet, $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i) = \{a + b \cdot i \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ où i est une racine du polynôme $x^2 + 1$.

Définition 1.3.14. Soit x un nombre algébrique de degré n et notons $x_2, x_3, \dots x_n$ ses conjugués. Considérons l'extension $\mathbb{Q}(x)$ de $\mathbb{Q}$ de dimension n. Alors on définit sur $\mathbb{Q}(x)$ la norme

$$N(\alpha) = \Pi_{i=1}^{n} \sigma_i(\alpha),$$

où les homomorphismes σ_i sont définis par $\sigma_i(x) = x_i$ pour tout $i \in \{2, 3, \dots, n\}$.

Alors on a le théorème suivant (cf. [18] ou [53]).

Théorème 1.3.15. *Si α est un entier algébrique de $Q(x)$ alors $N(\alpha)$ est un entier.*

1.4 Nombres de Pisot

Les nombres de Pisot jouent un rôle important dans l'étude des propriétés des spectres de nombres. Ils permettent de caractériser des spectres ayant des propriétés topologiques particulières. Cette section (empruntant les définitions et formules de [6] et [5]) est donc consacrée aux nombres de Pisot. Ils portent le nom de Charles Pisot, qui a contribué à leur notoriété en publiant sa thèse « La répartition modulo 1 et les nombres algébriques » en 1938.

Définition 1.4.1. Un *nombre de Pisot* est un entier algébrique strictement supérieur à 1 dont tous les conjugués sont de module strictement inférieur à 1.

Exemple 1.4.2. Un exemple bien connu d'un nombre de Pisot est le nombre d'or ϕ. En effet, ce nombre est une racine du polynôme irréductible $x^2 - x - 1$, $\phi > 1$ et son (unique) conjugué $\frac{1}{\phi} \approx 0.618\dots$ est de module strictement inférieur à 1.

En 1944, Salem a prouvé que l'ensemble des nombres de Pisot est fermé (cf. [88]) et Siegel a prouvé dans [90] qu'il a un minimum, appelé le nombre plastique $\psi \approx 1.324\dots$ qui annule le polynôme irréductible $\psi^3 - \psi - 1$. Dufresnoy et Pisot ont prouvé en 1955 que le nombre d'or est le plus petit point limite de l'ensemble des nombres de Pisot (cf. [27]). Le tableau représenté à la figure 1.8 suivant donne les 10 plus petits nombres de Pisot.

Afin de pouvoir se familiariser plus avec les nombres de Pisot, la liste ci-dessous [6] résume quelques propriétés desdits nombres (cf. également [100] pour un résumé sur la littérature).

- Comme les nombres de Pisot sont en particulier des nombres algébriques, l'ensemble des nombres de Pisot est dénombrable.
- Tous les nombres entiers strictement plus grands que 1 sont des nombres de Pisot. En effet tout entier $p > 1$ annule le polynôme $x - p$. Ces nombres n'ont donc pas de conjugué et satisfont ainsi à la définition d'un nombre de Pisot.
- Tous les nombres de Pisot rationnels sont des entiers strictement plus grands que 1. Autrement dit, aucun nombre de l'ensemble $\mathbb{Q}\backslash\mathbb{N}$ n'est un nombre de Pisot. En effet, un nombre rationnel $\frac{p}{q}$ a comme polynôme minimal sur $\mathbb{Z}$ le polynôme $qx - p$ qui est unitaire uniquement si $q = 1$.

	valeur approchée	polynôme minimal
1	1.3247179572447460260	$x^3 - x - 1$
2	1.3802775690976141157	$x^4 - x^3 - 1$
3	1.4432687912703731076	$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 1$
4	1.4655712318767680267	$x^3 - x^2 - 1$
5	1.5015948035390873664	$x^6 - x^5 - x^4 + x^2 - 1$
6	1.5341577449142669154	$x^5 - x^3 - x^2 - x - 1$
7	1.5452156497327552432	$x^7 - x^6 - x^5 + x^2 - 1$
8	1.5617520677202972947	$x^6 - 2x^5 + x^4 - x^2 + x - 1$
9	1.5701473121960543629	$x^5 - x^4 - x^2 - 1$
10	1.5736789683935169887	$x^8 - x^7 - x^6 + x^2 - 1$

FIGURE 1.8 – Les 10 premiers nombres de Pisot dans l'ordre croissant à gauche et leurs polynômes minimaux respectifs à droite [6].

— Si α est un nombre de Pisot et k est le terme constant de son polynôme minimal, alors $\alpha > |k|$. En effet, notons $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les racines du polynôme minimal de α. Le terme constant de ce polynôme est le produit de toutes ses racines (cf. (1.2). On a $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_n = k$ ce qui implique $\alpha = \frac{k}{\alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_n} > k$, car α est la seule racine strictement supérieure à 1.
— L'ensemble des nombres de Pisot est stable pour l'opération puissance. Autrement dit, si α est un nombre de Pisot, alors $\alpha^k \in S$ pour tout naturel k (cf. [102]).
— Toute extension de champ de degré n contient un nombre de Pisot de degré n. De plus ce nombre est un générateur du champs (cf. [102]).

Les nombres de Pisot ont une propriété remarquable. Les puissances d'un nombre de Pisot approximent toujours un entier (cf. proposition 1.4.8). Pour démontrer cette propriété, on rappelle brièvement les formules de Newton [5].

Définition 1.4.3. Pour des éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ et un entier $k \geq 1$, notons $p_k(x_1, \ldots, x_n)$ la *somme des puissances k-ièmes* des éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$p_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^k.$$

Définition 1.4.4. Pour des éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ et un entier $k \geq 0$, notons $e_k(x_1, \ldots, x_n)$ la *somme de tous les produits de longueur k* des éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
e_0(x_1,\dots,x_n) &= 1,\\
e_1(x_1,\dots,x_n) &= x_1+x_2+\cdots+x_n,\\
e_2(x_1,\dots,x_n) &= \sum_{1\le i<j\le n} x_ix_j,\\
e_j(x_1,\dots,x_n) &= \sum_{1\le i_i<\cdots<i_j\le n} x_{i_1}\cdot x_{i_2}\cdots x_{i_j} \text{ si } 2\le j\le n-1,\\
e_n(x_1,\dots,x_n) &= x_1x_2\cdots x_n,\\
e_k(x_1,\dots,x_n) &= 0 \text{ pour k}> \text{ n.}
\end{aligned}$$

Les formules de Newton sont les suivantes :

$$ke_k(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}e_{k-i}(x_1,\dots,x_n)p_i(x_1,\dots,x_n).$$

Pour $k=1,2,3$ elles s'écrivent

$$\begin{aligned}
e_1(x_1,\dots,x_n) &= p_1(x_1,\dots,x_n),\\
2e_2(x_1,\dots,x_n) &= e_1(x_1,\dots,x_n)p_1(x_1,\dots,x_n)-p_2(x_1,\dots,x_n),\\
3e_3(x_1,\dots,x_n) &= e_2(x_1,\dots,x_n)p_1(x_1,\dots,x_n)-e_1(x_1,\dots,x_n)p_2(x_1,\dots,x_n)+p_3(x_1,\dots,x_n).
\end{aligned}$$

Ces relations nous permettent d'exprimer les $p_k(x_1,\dots,x_n)$ en fonction des

$$e_k(x_1,\dots,x_n),\dots,e_1(x_1,\dots,x_n) \text{ et } p_{k-1}(x_1,\dots,x_n),\dots,p_1(x_1,\dots,x_n).$$

Pour $n\ge 1$ et $n\ge k\ge 1$, on a

$$\begin{aligned}
p_k(x_1,\dots,x_n) =&(-1)^{k-1}ke_k(x_1,\dots,x_n)\\
&+\sum_{i=1}^{k-1}(-1^{k-1+i})e_{k-i}(x_1,\dots,x_n)p_i(x_1,\dots,x_n). \qquad (1.1)
\end{aligned}$$

De plus, si $x_1,x_2,\dots,x_n\in\mathbb{R}$, alors un polynôme qui a comme racines $x_1,x_2,\dots,x_n$ peut s'écrire sous la forme

$$\Pi_{i=1}^{k}(x-x_i)=\Sigma_{k=0}^{n}(-1)^ke_k(x_1,\dots,x_n)x^{n-k}. \qquad (1.2)$$

Remarque 1.4.5. Comme un nombre de Pisot x_1 est une racine d'un polynôme unitaire à coefficients entiers, les $e_i(x_1,\dots,x_n)$ correspondants sont tous des nombres entiers. En itérant (1.1), on voit que les $p_k(x_1,\dots,x_n)$ sont des entiers.

Définition 1.4.6. On note $d(x)$ la distance du réel x au plus proche entier.

Exemple 1.4.7. Si $\phi \approx 1,618$ est le nombre d'or, alors le plus proche entier de ϕ est 2, donc $d(\phi) = 2 - \phi \approx 0,382$.

De la remarque (1.4.5) on peut déduire la propriété d'approximation des entiers des nombres de Pisot.

Proposition 1.4.8. *Si α est un nombre de Pisot, alors* $\lim_{n\to\infty} d(\alpha^n) = 0$.

Démonstration. Soient $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_d$ les conjugués de α. Comme $|\alpha_i| < 1$ pour tout $i \in \{2, 3, \ldots, d\}$, on a $\lim_{n\to\infty} \alpha_i^n = 0$ pour tout i. On en tire que $\lim_{n\to\infty} \alpha_2^n + \alpha_3^n \cdots + \alpha_d^n = 0$. Or vu la remarque (1.4.5), il existe un entier b_n tel que $\alpha^n + \alpha_2^n + \cdots + \alpha_d^n = b_n$. On a donc

$$\begin{aligned} b_n - \alpha^n &= \alpha_2^n + \cdots + \alpha_d^n \\ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (b_n - \alpha^n) &= (\alpha_2^n + \cdots + \alpha_d^n) = 0 \end{aligned}$$

Ceci permet de conclure. □

Cette proposition montre en particulier que les puissances d'un nombre de Pisot approximent des entiers avec une vitesse de convergence exponentielle.

1.5 Systèmes de numération

Les nombres peuvent être représentés de plusieurs façons différentes. Dans cette section (basée sur [43]), on considère des bases et des alphabets distincts et on étudie les propriétés des représentations des nombres dans ces systèmes de numération dans le cas d'une base entière p et dans le cas d'une base réelle β. Dans le dernier cas, on parle de β-représentations. On peut donc assimiler des nombres à des mots sur un alphabet dans un système de numération donné. Ces notions de base seront utilisées dans certaines démonstrations le chapitre 2 et 3 (Err : dans les chapitres 2 et 3). Elles sont également indispensables pour étudier les liens entre les différents systèmes de numérations : il s'agit des conversions d'une représentation en une autre. Si on fixe un alphabet privilégié, appelé l'alphabet canonique, et une base réelle $\beta > 1$, on appelle « normalisation » la conversion d'une représentation d'un nombre en sa représentation sur l'alphabet canonique, appelée la représentation gloutonne (ou normale). En 2010, Frougny a démontré un théorème duquel on peut déduire des conditions suffisantes et nécessaires pour que la fonction de normalisation soit réalisable par un transducteur fini lettre-à-lettre. Les spectres ont permis d'améliorer ce résultat. Il s'agit de la première application de spectres de nombres donnée par Frougny et Pelantová et cette section donne les notions et résultats intervenant dans l'étude de la fonction de normalisation dans la section 3.2.1.

Représentation d'entiers On donne d'abord une brève introduction à la représentation de nombres entiers dans des bases entières. Les définitions et résultats seront par la suite généralisés au cas des représentations d'entiers dans une base réelle et de nombres réels dans une base réelle.

Définition 1.5.1. Soit p un entier strictement supérieur à 1. Ce nombre est appelé la *base*. *L'alphabet canonique* des chiffres associé à p est l'ensemble $B_{p-1} = \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Le couple (p, B_{p-1}) définit un *système de numération* dans la base p.

Dans ce qui suit, on montre chaque nombre entier peut être représenté par un mot sur l'alphabet B_{p-1} (cf. théorème 1.5.7). Il existe plusieurs façons de déterminer une représentation d'un nombre donné dans la base p. On donne ici l'exemple de l'algorithme glouton et de l'algorithme de division. Réciproquement, chaque mot sur B_{p-1} représente un nombre.

Définition 1.5.2. La fonction

$$\pi_p : B_{p-1}^* \to \mathbb{N} : w = a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0 \mapsto \pi_p(w) = \sum_{i=0}^{k} a_i p^i$$

est appelé la fonction d'évaluation.

Remarque 1.5.3. On numérote ici les lettres du mot w en commençant à k et en descendant jusque 0. On commence donc avec les chiffres de poids fort comme on a l'habitude de le faire dans la base 10.

Le lemme suivant montre l'unicité de la représentation des entiers dans la base p sur l'alphabet B_{p-1}^k. Autrement dit, deux mots distincts sur B_{p-1} de même longueur représentent des entiers différents.

Lemme 1.5.4. *La fonction d'évaluation est injective sur B_{p-1}^k pour tout k.*

Démonstration. Soient $u = a_{k-1}a_{k-2}\cdots a_0$ et $v = b_{k-1}b_{k-2}\cdots b_0$ deux mots distincts de B_{p-1}^* de longueur k tels que $\pi_p(u) = \pi_p(v)$. Alors $\sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i - \sum_{i=0}^{k-1} b_i p^i = 0$. Donc le polynôme $P(x) = \sum_{i=0}^{k-1}(a_i - b_i)x^i \in \mathbb{Z}[x]$ s'annule en p. Soit j le plus petit indice tel que $a_j - b_j \neq 0$. Alors on a $P(x) = (a_j - b_j)x^j + (a_{j+1} - b_{j+1})x^{j+1} + \cdots + (a_k - b_k)x^k = x^j(a_j - b_j + (a_{j+1} - b_{j+1})x + \cdots + (a_k - b_k)x^{k-j})$. On en déduit que le polynôme $Q(x) = a_j - b_j + (a_{j+1} - b_{j+1})x + \cdots + (a_k - b_k)x^{k-j}$ s'annule également en p. Ce polynôme est donc divisible par $(x - p)$. En particulier, $a_j - b_j$ est divisible par p ce qui est impossible car $0 < |a_j - b_j| < p$. □

Remarque 1.5.5. La fonction d'évaluation n'est pas injective sur B_{p-1}^*. En effet, pour tout mot $w \in B_{p-1}^*$ et pour tout k, on a $\pi_p(w) = \pi_p(0^k w)$.

Dans ce qui suit, on montre que chaque nombre peut être représenté dans la base p en calculant sa représentation à l'aide de l'algorithme glouton.

L'algorithme glouton Soit n un entier strictement positif. Alors il existe un unique entier k tel que $p^k \leq n < p^{k+1}$. Posons $N_k = n$ et pour tout [3] $i \in \{k, k-1, \ldots, 0\}$

$$a_i = \left\lfloor \frac{N_i}{p^i} \right\rfloor \text{ et } N_{i-1} = N_i - a_i p^i.$$

Dans ce cas, pour tout $i \in \{k, k-1, \ldots, 0\}$, on a $a_i \in B_{p-1}$ et $a_k \neq 0$, car n est strictement positif. Il en résulte

$$n = \sum_{i=0}^{k} a_i p^i = \pi_p(a_k \cdots a_0).$$

Exemple 1.5.6. Considérons le nombre 42 et appliquons l'algorithme glouton dans la base $p = 2$. On a $2^6 = 32 \leq 42 < 64 = 2^7$. On a donc $k = 6$ et $N_6 = 42$. On obtient successivement

$$\begin{aligned}
42 &= \overbrace{1}^{a_6} \cdot 32 + \overbrace{10}^{N_5}, \\
10 &= 0 \cdot 16 + 10, \\
10 &= 1 \cdot 8 + 2, \\
2 &= 0 \cdot 4 + 2, \\
2 &= 1 \cdot 2 + 0, \\
0 &= 0 \cdot 0.
\end{aligned}$$

La représentation gloutonne de 42 en base 2 est donc le mot 101010.

On peut résumer les discussions précédentes par le théorème suivant :

Théorème 1.5.7. *Tout entier $n \geq 0$ a une unique représentation en base p qui ne commence pas par 0.*

Pour chaque naturel n il existe alors une unique représentation dans la base p ne commençant pas par 0. On appelle cette représentation la p-représentation d'un nombre et on la note $\langle n \rangle_p$.

Remarque 1.5.8. La représentation du nombre 0 est le mot vide ε.

Définition 1.5.9. On note l'ensemble des p-représentations

$$L_p = \{\langle n \rangle_p | n \in \mathbb{N}\} = B_{p-1}^* \setminus 0B_{p-1}^*.$$

Remarque 1.5.10. On déduit de ce qui précède que π_p est une bijection entre L_p et $\mathbb{N}$.

L'ensemble B_{p-1}^* peut être muni de l'ordre radiciel, défini ci-dessous.

3. On note ici $\{k, k-1, \ldots, 0\}$ pour mettre en évidence le fait qu'on commence par calculer N_k, puis N_{k-1} et ainsi de suite.

Définition 1.5.11. Soient A un alphabet totalement ordonné et $x, y \in A^*$. Alors on dit que x est radiciellement inférieur à y et on note $x <_{rad} y$ si soit $|x| < |y|$, soit $|x| = |y|$ et il existe un entier $i \leq |x|$ tel que $x_1x_2\cdots x_{i-1} = y_1y_2\cdots y_{i-1}$ et $x_i < y_i$.

Dans ce cas, on a le résultat suivant, dont la preuve sera omise.

Proposition 1.5.12. *Pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, on a $\langle n\rangle_p < \langle m\rangle_p \Leftrightarrow n < m$.*

Beta-représentations

Dans le cas général on étudie les représentations de réels dans une base réelle $\beta > 1$ quelconque et on ne se restreint donc plus à la représentation d'entiers. Considérons alors un réel $\beta > 1$ et $A \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble fini. L'ensemble A est appelé l'alphabet des chiffres. Le couple (β, A) est appelé un système de numération. Une (β, A)-représentation d'un nombre $z \in [0, 1[$ est un mot infini $z_1z_2\cdots$ tel que $z = \sum_{k=1}^{\infty} z_k\beta^{-k}$.

Définition 1.5.13. Soit $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\beta > 1$. Alors *l'alphabet canonique* en base β est l'ensemble $B_{\lceil\beta\rceil-1} = \{0, \ldots, \lceil\beta\rceil - 1\}$.

Les suites infinies seront indicées en commençant par 1 et on munit l'ensemble $B^{\mathbb{N}}_{\lceil\beta\rceil-1}$ de l'ordre lexicographique, défini comme suit :

Définition 1.5.14. Soient A un alphabet totalement ordonné et $x, y \in A^{\mathbb{N}}$. Alors on dit que x est lexicographiquement inférieur à y, et on note $x <_{lex} y$ s'il existe un indice i tel que $x_1x_2\cdots x_{i-1} = y_1y_2\cdots y_{i-1}$ et $x_i < y_i$.

Définition 1.5.15. La *fonction d'évaluation* est définie par

$$\pi_\beta : B^{\mathbb{N}}_{\lceil\beta\rceil-1} \to \mathbb{R} : u = u_1u_2\cdots \mapsto \pi_\beta(u) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i\beta^{-i}.$$

Si on travaille avec des mots finis et infinis, on peut les distinguer en faisant précéder les mots infinis par un point décimal à l'intérieur de la fonction d'évaluation.

Définition 1.5.16. On définit les notations suivantes :

$$\forall u = (u_i)_{i\geq 1} \in B^{\mathbb{N}}_{\lceil\beta\rceil-1}, \quad \pi_\beta(.u) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\beta^n}\pi_\beta(u_1u_2\cdots u_n), \tag{1.3}$$

$$\forall u \in B^{\mathbb{N}}_{\lceil\beta\rceil-1}, \forall w \in B^*_{\lceil\beta\rceil-1}, \quad \pi_\beta(.wu) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\beta^{|w|}}(\pi_\beta(w) + \pi_\beta(.u)).$$

Cependant, un nombre peut avoir plusieurs représentations en base β.

Exemple 1.5.17. Si $\beta = 1$, alors on peut représenter le nombre par 1.0^ω ou par 0.9^ω.

Formellement, on a le résultat suivant :

Proposition 1.5.18. *Si $\beta > 1$ est un entier, alors la fonction d'évaluation*

$$\pi_\beta : B^{\mathbb{N}}_{\lceil\beta\rceil-1} \to [0,1]$$

est continue. De plus, pour tous les mots infinis $u, v \in B^{\mathbb{N}}_{\lceil\beta\rceil-1}$ tels que $u <_{lex} v$, si w est le plus long préfixe commun de u et de v, alors on a pour un certain $a < \beta - 1$

$$\pi_\beta(u) = \pi_\beta(v) \Leftrightarrow u = wa(\beta-1)^\omega \text{ et } v = w(a+1)0^\omega.$$

Démonstration. Remarquons d'abord que si $u_i \leq v_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}_0$ et s'il existe au moins un j tel que $u_j \neq v_j$, alors

$$\pi_\beta(u) = \sum_{i\geq 1} u_i\beta^{-i} < \sum_{i\geq 1} v_i\beta^{-i} = \pi_\beta(v). \tag{1.4}$$

De plus, on a

$$\sum_{i\geq 1}(\beta-1)\beta^{-i} = (\beta-1)\left(\frac{\frac{1}{\beta}}{1-\frac{1}{\beta}}\right) = 1. \tag{1.5}$$

On en déduit que $\pi_\beta\left(B^{\mathbb{N}}_{\lceil\beta\rceil-1}\right) \subset [0,1]$ et que pour naturel k, on a

$$\beta^{-k} = \beta^{-k}\sum_{i\geq 1}(\beta-1)\beta^{-i} = \sum_{i\geq 1}(\beta-1)\beta^{-k-i} = \sum_{i\geq k-1}(\beta-1)\beta^{-i}. \tag{1.6}$$

Montrons maintenant que l'application π_β est continue. Supposons que $d(u,v) = 2^{-d}$. On a

$$\begin{aligned}
\pi_\beta(u) - \pi_\beta(v) &= \sum_{i\geq 1} u_i\beta^{-i} - \sum_{i\geq 1} v_i\beta^{-i} \\
&= \sum_{i\geq d+1} u_i\beta^{-i} - \sum_{i\geq d+1} v_i\beta^{-i} \\
&\leq \sum_{i\geq d+1}(u_i - v_i)\beta^{-i} \\
&\leq 2\sum_{i\geq d+1}(\beta-1)\beta^{-i} \\
&= 2\left(1 - \sum_{i=1}^{d}(\beta-1)\beta^{-i}\right) && \text{(vu (1.5))} \\
&= 2\left(1 - (\beta-1)\frac{1-\beta^{-d-1}}{1-\beta^{-1}}\right) \\
&= 2(1-\beta+\beta^{-d}) \\
&\leq 2\beta^{-d} \\
&\leq 2\beta^{-(d-1)}.
\end{aligned}$$

On en déduit que si $d(u,v) = 2^{-d}$, alors $|\pi_\beta(u) - \pi_\beta(v)| \leq 2\beta^{-(d-1)}$, donc π_β est donc continue. Considérons maintenant $u, v \in B^{\mathbb{N}}_{\lceil\beta\rceil-1}$ avec $u <_{lex} v$ et soit k le plus petit indice tel que $u_k \neq v_k$. On a alors $u_k \leq v_{k-1}$. Posons

$$u' = u_1u_2\cdots u_k\beta - 1\ \beta - 1\cdots \text{ et } v' = v_1v_2\cdots v_{k-1}(u_k+1)00\cdots .$$

Vu (1.6), on a $\pi_\beta(u') = \pi_\beta(v')$ et si $u \neq 0'$, alors $\pi_\beta(u) < \pi_\beta(u')$, car $u_i \leq u'_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et vu (1.4). De même, si $v \neq v'$, alors $\pi_\beta(v) < \pi_\beta(v')$. On en tire que, si $u \neq u'$ ou $v \neq v'$, alors $\pi_\beta(u) < \pi_\beta(v)$. □

L'algorithme glouton Tous les nombres admettent une β-représentation gloutonne. Cet algorithme a été donné par Rényi en 1957. Soit $x \in [0,1[$. Posons $r_0 = x$ et pour tout entier $j \geq 1$ $x_j = \lfloor \beta r_{j-1} \rfloor$ et $r_j = \{\beta r_{j-1}\}$. Alors $x_j \in B_{\lceil\beta\rceil-1}$. En effet, pour $j = 1$, on a $\beta r_0 = \beta x < \beta$, car $x \in [0,1[$. Pour $j > 1$, on a $r_{j-1} < 1$, donc comme précédemment, $\beta r_{i-1} < \beta$. Dans tous les cas on a $x_j = \lfloor \beta r_{j-1} \rfloor \in B_{\lceil\beta\rceil-1}$. On a finalement

$$r_0 = x = x_1\beta^{-1} + r_1\beta^{-1} = x_1\beta^{-1} + x_2\beta^{-2} + r_2\beta^{-2} = \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} x_j\beta^{-j}. \tag{1.7}$$

La *β-représentation gloutonne* d'un nombre $x \in [0,1[$ est le mot $(x_i)_{i\geq 1}$ obtenu par l'algorithme glouton et noté $d_\beta(x)$. Cet algorithme prouve donc l'existence d'une β-représentation d'un nombre pour tout alphabet A contenant l'alphabet canonique.

Remarque 1.5.19. On peut définir l'application

$$T_\beta(x) : [0,1[\to [0,1[\ :\ \ x \mapsto T_\beta(x) = \beta \cdot x - \lfloor \beta \cdot x \rfloor.$$

On a alors $x_j = \lfloor \beta T_\beta^{j-1}(x) \rfloor$.

Définition 1.5.20. La β-représentation de $x \in [0,1]$ est dite finie si elle se termine avec le mot infini 0^ω. Dans ce cas elle s'écrit $x = w0^\omega$, avec $w \in B^*_{\lceil\beta\rceil-1}$.

Remarque 1.5.21. Remarquons que le mot w donné dans la définition 1.5.20 suffit alors pour calculer $\pi_\beta(x_1x_2\cdots) = \pi_\beta(w)$.

Remarque 1.5.22. On peut appliquer l'algorithme glouton à 1. On détermine donc $d_\beta(1)$, qui peut jouer un rôle particulier dans les β-shifts (cf annexe B). De plus, si β est un entier, alors $d_\beta(1) = .\beta 0^\omega$.

Exemple 1.5.23. Considérons le nombre d'or ϕ, et calculons $d_\phi(1)$. On a $x_1 = \lfloor \phi \rfloor = 1$ et $r_1 = \phi - 1 = \frac{1}{\phi}$. On en tire que $x_2 = \left\lfloor \phi\frac{1}{\phi} \right\rfloor = 1$ et $r_2 = 0$. Comme $r_2 = 0$, on a $x_i = 0$ pour tout entier $i \geq 3$, et $d_\phi(1) = 11$.

Définition 1.5.24 ([43])**.** On définit la représentation *quasi-gloutonne* $d^*_\beta(1)$ de 1 comme suit.

— Si $d_\beta(1) = t_1 \cdots t_m$ est fini, alors $d^*_\beta(1) = (t_1 \cdots (t_m - 1))^\omega$.
— $d^*_\beta(1) = d_\beta(1)$ sinon.

Exemple 1.5.25. Considérons encore le nombre d'or ϕ. Vu l'exemple 1.5.23, on a $d_\phi(1) = 11$. On en tire que $d^*_\phi(1) = (10)^\omega$.

Définition 1.5.26. Un nombre réel $\beta > 1$ est appelé un *nombre de Parry* si $d_\beta(1)$ est ultimement périodique. Si $d_\beta(1)$ est fini, alors on dit que β est un *nombre de Parry simple*.

Remarque 1.5.27. Si β est un entier, alors il existe plusieurs façons d'obtenir une représentation d'un réel $x \geq 1$. On pourrait traiter la partie entière $\lfloor x \rfloor$ et la partie fractionnaire $\{x\}$ de x séparément. La représentation deviendrait dans ce cas $\langle x \rangle_\beta = \langle \lfloor x \rfloor \rangle . \langle \{x\} \rangle$.

On peut également étendre l'algorithme glouton à des nombres $x > 1$ en trouvant l'unique entier k tel que $\beta^{k-1} \leq x < \beta^k$. On considère alors le réel $y = \frac{x}{\beta^k} \in [0, 1[$. Pour terminer, il suffit de remarquer qu'on peut retrouver la représentation de x à partir de celle de y, en plaçant le point décimal au bon endroit. Donc si $d_\beta\left(\frac{x}{\beta^k}\right) = .x_1 x_2 \cdots$, alors la représentation de x devient $x = x_1 x_2 \cdots x_k . x_{k+1} \cdots$ et on la note $\langle x \rangle_\beta$. Dans ce qui suit, quitte à appliquer ce raisonnement, on considère uniquement des réels $x \in [0, 1[$.

Pour mieux familiariser le lecteur avec le fonctionnement des transducteurs, on donne encore un exemple plus complexe d'un transducteur réalisant une opération bien connue. Il s'agit de la division par un entier q dans une base entière p, donné dans [43].

Exemple 1.5.28. Le diviseur par q dans le cas de représentations finies
Dans la base p, les entiers sont représentés par des mots sur l'alphabet $B_{p-1} = \{0, \ldots, p-1\}$. Soit $q \in \mathbb{N}_0$ et considérons l'ensemble $B_{q-1} = \{0, 1, \ldots, q-1\}$ des restes modulo q. Pour tous $s, a \in \mathbb{N}$, considérons le nombre $ps + a$. La division euclidienne de ce nombre par q donne

$$ps + a = qb + r \tag{1.8}$$

avec $r \in B_{q-1}$ et $b \in \mathbb{N}$. Si $s \in B_{q-1}$ et $a \in B_{p-1}$, alors $b \in B_{p-1}$. En effet, dans ce cas, comme $s < q$ et $a < p$, on a $ps + a < ps + p = p(s+1) \leq pq$ et si $b \geq p$, alors $qb + r \geq pq$, d'où la contradiction. L'équation (1.8) définit donc un transducteur

$$Q_{p,q} = (B_{q-1}, B_{p-1} \times B_{p-1}, 0, E, B_{q-1}) \text{ où } E = \{(s, a, b, r) \mid ps + a = qb + r\}.$$

Considérons le cas où $p = 2$ et $q = 3$ car alors le transducteur ne contient pas trop d'états. Le transducteur $Q_{2,3}$ est représenté à la figure 1.9.

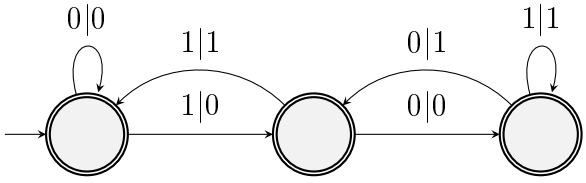

FIGURE 1.9 – L'automate $Q_{2,3}$.

Remarquons tout d'abord que ce transducteur est déterministe et rappelons qu'on note $\langle n\rangle_2$ la représentation dans la base 2 d'un entier n. Posons $k = |\langle n\rangle_2|$ et $l = |\langle \lfloor \frac{n}{3} \rfloor \rangle_2|$. Le transducteur $Q_{2,3}$ accepte les couples $(\langle n\rangle_2, 0^{k-l}\langle \lfloor \frac{n}{3} \rfloor \rangle_2)$. En d'autres mots, il prend en entrée la représentation dans la base 2 d'un entier n et sort la représentation de $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ dans la base 2, éventuellement précédée d'un certain nombre de 0 pour que les deux mots soient de même longueur. Pour trouver la représentation dans la base 2 du nombre obtenu par la division n par 3, il suffit alors de suivre le chemin donné par la représentation de n sur la première composante de chaque étiquette. Considérons l'exemple $n = 6$. Alors $\langle 6\rangle_2 = 110$. Alors le couple $(110, 010)$ est un chemin d'acceptation de $Q_{2,3}$ et le mot 010 est la représentation de 2 dans la base 2, précédée d'un 0.

Le diviseur par q dans le cas de représentations infinies

Considérons encore le transducteur $Q_{p,q}$ comme dans le paragraphe précédant. On étudie ici le cas où on a représenté un irrationnel dans la base p. Les irrationnels sont représentés par des mots infinis dans une base entière.

Soit u la p-représentation d'un réel $x \in [0, 1[$ et soit c l'unique chemin dont le mot d'entrée est u dans $Q_{p,q}$ et v le mot de sortie correspondant dans $B_{p-1}^{\mathbb{N}}$. Définissons une suite $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ par $z_0 = 0$ et $i \geq 1$, on a

$$pz_{i-1} + u_i = qv_i + z_i.$$

L'équation (1.7) devient donc

$$x = u_1p^{-1} + r_1p^{-1} = qv_1p^{-1} + p^{-1}(r_1 + z_1) = \cdots = q\sum_{i=1}^{\infty} v_ip^{-i}. \tag{1.9}$$

On a alors $\pi_p(u) = q\pi_p(v)$. Le transducteur $Q_{p,q}$ « calcule » donc la division par q des p-représentations de réels de l'intervalle $[0, 1[$.

Pour illustrer l'utilité des transducteurs, et en particulier des diviseurs de p par q, on énonce le résultat suivant :

Proposition 1.5.29. *La p-représentation d'un nombre rationnel est ultimement périodique dans toute base entière p.*

Démonstration. Comme un nombre rationnel est le quotient d'un entier par un autre le mot d'entré se termine par 0^ω. Or, une telle entrée engendre un chemin dans $Q_{p,q}$ qui entre dans une boucle. En effet, considérons un chemin $q_{i_1} \xrightarrow{0|a_1} q_{i2} \xrightarrow{0|a_2} q_{i_3} \xrightarrow{0|a_3} \cdots$. Alors comme $Q_{p,q}$ est fini, il existe $k, l \in \mathbb{N}$ tels que $q_{i_k} = q_{i_l}$ donc $a_k = a_l$. On en tire que la représentation du quotient $\frac{p}{q}$ est ultimement périodique. □

La β-représentation d'un nombre $x \in [0, 1[$ n'est pas nécessairement unique. Cependant, la représentation gloutonne d'un nombre est caractérisée par la propriété suivante :

Proposition 1.5.30. *La β-représentation gloutonne d'un nombre $x \in [0, 1[$ est la plus grande β-représentation de x dans l'ordre lexicographique.*

Remarque 1.5.31. Cette proposition a été énoncée sans démonstration dans [43]. On propose alors la preuve suivante.

Démonstration de la proposition 1.5.30. Cela découle directement de la définition de l'algorithme glouton. En effet, soit $j \in \mathbb{N}$. Alors, en reprenant les notations de la définition de l'algorithme glouton, on a $r_0 = x$ et pour tout entier $j \geq 1$, $x_j = \lfloor \beta r_{j-1} \rfloor$ et $r_j = \{\beta r_{j-1}\}$. Si on remplaçait, pour un certain indice $j \geq 1$, le nombre x_j par un nombre plus grand $x'_j > x_j$, alors on aurait $x'_j \geq x_j + 1$ et donc

$$\begin{aligned} x_1\beta^{-1} + \cdots + x_{j-1}\beta^{-j+1} + x'_j\beta^{-j} &\geq x_1\beta^{-1} + \cdots + x_{j-1}\beta^{-j+1} + x_j\beta^{-j} + 1 \cdot \beta^{-j} \\ &> x_1\beta^{-1} + \cdots + x_{j-1}\beta^{-j+1} + x_j\beta^{-j} + r_j\beta^{-j} \\ &= x, \end{aligned}$$

vu que $r_j < 1$. Le mot $x_1x_2\cdots x_{j-1}x'_j$ ne peut donc pas être un préfixe d'une représentation de x. □

La propriété de maximalité de la β-représentation gloutonne d'un nombre nous permet d'énoncer la propriété suivante, qui découle de la définition de l'algorithme glouton.

Lemme 1.5.32. *Une suite infinie d'entiers positifs $(x_i)_{i\geq 1}$ est la β-représentation gloutonne d'un réel $x \in [0, 1[$ si et seulement si pour tout $i \in \mathbb{N}_0$, on a*

$$x_i\beta^{-i} + x_{i+1}\beta^{-i-1} + \cdots < \beta^{-i+1}$$

.

Remarque 1.5.33. Ici aussi, la preuve a été omise dans [43]. On propose la démonstration suivante.

Démonstration du lemme 1.5.32. La condition est nécessaire : Pour tout $i \in \mathbb{N}_0$, on a $x = \sum_{j=1}^{i-1} x_j\beta^{-j} + r_{i-1}\beta^{-i+1}$, où $r_{i-1} = \{\beta r_{i-2}\} < 1$ vu (1.7). Procédons par l'absurde et supposons que

$$r_{i-1}\beta^{-i+1} = x_i\beta^{-i} + x_{i+1}\beta^{-i-1} + \cdots \geq \beta^{-i+1}.$$

Dans ce cas, on a $r_{i-1} \geq 1$ ce qui est absurde.
La condition est suffisante : Soit $y_1y_2\cdots$ la représentation gloutonne de x et montrons que $y_1y_2\cdots = x_1x_2\cdots$. Comme la représentation gloutonne est lexicographiquement maximale, on a $y_1y_2\cdots \geq_{lex} x_1x_2\cdots$. Procédons par l'absurde et supposons que $y_1y_2\cdots >_{lex} x_1x_2\cdots$. Alors il existe $j \in \mathbb{N}$ minimal tel que $y_j > x_j$, et comme, par hypothèse, $x_{j+1}\beta^{-j-1} + x_{j+2}\beta^{-j-2} + \cdots < \beta^{-j}$, on a

$$\begin{aligned} x &= y_1\beta^{-1} + y_2\beta^{-2} + \cdots \\ &\geq y_1\beta^{-1} + y_2\beta^{-2} + \cdots + y_{j-1}\beta^{-j+1} + y_j\beta^{-j} \\ &> y_1\beta^{-1} + y_2\beta^{-2} + \cdots + y_{j-1}\beta^{-j+1} + (y_j - 1)\beta^{-j} + x_{j+1}\beta^{-j-1} + x_{j+2}\beta^{-j-2} + \cdots \\ &\geq x, \end{aligned}$$

car pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, j\}$, on a $y_i \geq x_i$. D'où l'absurdité. □

Comme dans le cas d'une base entière, la β-représentation préserve l'ordre.

Proposition 1.5.34. *Soient $x, y \in [0,1[$. Alors $x < y$ si et seulement si $d_\beta(x) < d_\beta(y)$.*

Démonstration. La condition est suffisante : Soient $d_\beta(x) = (x_i)_{i\geq 1}$ et $d_\beta(y) = (y_i)_{i\geq 1}$ et supposons que $d_\beta(x) < d_\beta(y)$. Alors il existe un entier minimal $k \geq 1$ tel que $x_k < y_k$ et $x_1 x_2 \cdots x_{k-1} = y_1 y_2 \cdots y_{k-1}$. Donc $x \leq y_1\beta^{-1} + y_2\beta^{-2} + \cdots + y_{k-1}\beta^{-k+1} + (y_k - 1)\beta^{-k} + x_{k+1}\beta^{-k-1} + x_{k+2}\beta^{-k-2} + \cdots < y$, car $x_{k+1}\beta^{-k-1} + x_{k+2}\beta^{-k-2} + \cdots < \beta^{-k}$ par le lemme 1.5.32.
La condition est nécessaire : Supposons que $x < y$ et procédons par l'absurde en supposant que $d_\beta(x) \geq d_\beta(y)$. Alors $x = x_1\beta^{-1} + x_2\beta^{-2} + \cdots \geq y_1\beta^{-1} + y_2\beta^{-2} + \cdots = y$ ce qui est absurde. □

Chapitre 2

Les spectres de nombres

2.1 Introduction

On présente ici la notion de spectre d'un nombre. Les spectres de nombres ont initialement été étudiés implicitement pour démontrer des résultats dans d'autres domaines comme par exemple dans l'étude des convolutions de Bernoulli (par exemple dans [46]), pour démontrer qu'un certain type de marche aléatoire est dense dans $\mathbb{R}$, comme cherchait à le faire Drobot dans [26] (cf. section 2.3 pour plus de détails), ou pour démontrer l'existence de développements universels comme l'ont fait Erdös et Komornik (cf. section 3.1 pour plus de détails). Les spectres étaient donc toujours vus comme des outils mathématiques. Au début, ils étaient souvent restreints à des alphabets petits (comme $\{0,1\}$ ou $\{-1,0,1\}$). Ce n'est que depuis l'étude plus profonde dûe à Erdös et al. au début des années 1990 que la théorie des spectres s'est développée et dans laquelle plusieurs propriétés des spectres de nombres ont été étudiées pour des spectres plus généraux.

Définition 2.1.1 ([42])**.** Soient $\beta \in \mathbb{C}, |\beta| > 1$ et $A \subset \mathbb{C}$ un alphabet fini. On appelle le A-spectre de β l'ensemble

$$S_A(\beta) = \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k \beta^k \mid n \in \mathbb{N}, a_k \in A \right\}.$$

Par définition, les spectres sont des ensembles dénombrables. À priori ces spectres peuvent êtres complexes ce qui sera utile pour certains arguments dans le chapitre 3, mais dans ce travail une importance particulière sera attachée aux spectres réels, c'est-à-dire qu'on suppose que β est un réel strictement supérieur à 1 et que $A \subset \mathbb{R}$. On peut considérer les A-spectres réels comme l'ensemble des nombres qui peuvent être exprimés dans la base β en utilisant uniquement des chiffres dans l'ensemble A, c'est-à-dire des nombres qui peuvent s'écrire comme une combinaison linéaire des puissances (positives) de β à coefficients dans A. Les spectres ont donc naturellement un lien avec la β-numération et leur étude permet de déduire des propriétés dans ce domaine [1]. De façon équivalente, on

1. Baker a lié les spectres à l'étude des systèmes de numération dans [12]. On répète également l'exemple des développements universels cf. [35]. Les travaux d'Erdös et al. ont été complémentés par Sidorov dans [89].

peut voir $S_A(\beta)$ comme l'ensemble de tous les polynômes à coefficients dans A, évalués en β. On distingue plusieurs types de spectres réels. Ici, on se concentre sur les deux suivants : les M-spectres et les spectres ayant des alphabets symétriques. Soient alors un réel $\beta > 1$ et un entier $M \geq 1$. Rappelons qu'on note $B_M = \{0, 1, \ldots, M\}$ et $A_M = \{-M, -M+1, \ldots, M\}$.

— On appelle *M-spectre* de β l'ensemble $S_{B_M}(\beta)$.

— On dénote les M-spectres à alphabet symétrique de β par $S_{A_M}(\beta)$.

Exemple 2.1.2. Fixons $M = 1$ et $\beta = 2$. On considère alors le spectre $S_{B_1}(2) = S_{\{0,1\}}(2)$, dont les éléments sont de la forme

$$\sum_{k=0}^{n} b_k 2^k \text{ où } n \in \mathbb{N} \text{ et } b_k \in \{0, 1\}.$$

Si on énumère les premiers polynômes à coefficients dans B_M évalués en 2 on obtient les premiers éléments (cf. remarque (2.1.4)) suivants :

$$0 \cdot 2^0, 1 \cdot 2^0, 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0, 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0, 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0, 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1, 1 \cdot 2^2, 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0,$$

$$1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1, 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2, \ldots$$

En calculant, on trouve alors les premiers éléments suivants :

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots \tag{2.1}$$

Dans la suite, on considérera souvent des spectres basés sur un nombre de Pisot.

Exemple 2.1.3. En guise d'exemple, on présente ici le spectre $S_{A_{\lfloor\phi\rfloor}}(\phi) = S_{\{-1,0,1\}}(\phi)$ représenté à la figure 2.1, où $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$ est le nombre d'or. Comme précédemment, les premiers éléments sont de la forme

$$0 \cdot \phi^0, 1 \cdot \phi^0, -1 \cdot \phi^0, 0 \cdot \phi^1, 1 \cdot \phi^1, -1 \cdot \phi^1, 1 \cdot \phi^0 + 1 \cdot \phi^1, -1 \cdot \phi^0 - 1 \cdot \phi^1, -1 \cdot \phi^0 + 1 \cdot \phi^1,$$

$$1 \cdot \phi^0 - 1 \cdot \phi^1, 1 \cdot \phi^2, 1 \cdot \phi^0 + 1 \cdot \phi^1 + 1 \cdot \phi^2, -1 \cdot \phi^0 - 1 \cdot \phi^1 - 1 \cdot \phi^2, -1 \cdot \phi^0 + 1 \cdot \phi^1 + 1 \cdot \phi^2,$$

$$1 \cdot \phi^0 - 1 \cdot \phi^1 + 1 \cdot \phi^2, 1 \cdot \phi^0 + 1 \cdot \phi^1 - 1 \cdot \phi^2, -1 \cdot \phi^0 - 1 \cdot \phi^1 + 1 \cdot \phi^2, 1 \cdot \phi^0 - 1 \cdot \phi^1 - 1 \cdot \phi^2,$$

$$-1 \cdot \phi^0 + 1 \cdot \phi^1 - 1 \cdot \phi^2, 1 \cdot \phi^0 + 1 \cdot \phi^2, 1 \cdot \phi^1 + 1 \cdot \phi^2, 1 \cdot \phi^0 - 1 \cdot \phi^2, -1 \cdot \phi^0 + 1 \cdot \phi^2, 1 \cdot \phi^1 - 1 \cdot \phi^2,$$

$$-1 \cdot \phi^1 + 1 \cdot \phi^2, -1 \cdot \phi^0 - 1 \cdot \phi^2, -1 \cdot \phi^1 - 1 \cdot \phi^2, \ldots$$

Remarquons tout d'abord que les mêmes valeurs se répètent plusieurs fois. Pour mieux les visualiser, on donne ci-dessous des valeurs approchées des nombres énumérés ci-dessus, dans l'ordre croissant et sans répéter les valeurs :

$$-5.236, -4.236, -3.618, -3.236, -2.618, -2, -1.618, -1, -0.618, 0, 0.618, 1, 1.618, 2, 2.618,$$

$$3.236, 3.618, 4.326, 5.236.$$

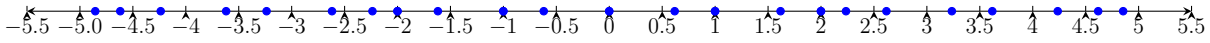

FIGURE 2.1 – Les premiers éléments du spectre $S_{\{-1,0,1\}}(\phi)$.

Remarque 2.1.4. Dans les deux exemples 2.1.2 et 2.1.3 ci-dessus, les premiers éléments ne sont pas (forcément) énumérés dans un ordre croissant, comme on peut le voir dans (2.1). Il s'agit juste d'une énumération de tous les polynômes à coefficients dans $\{0,1\}$ respectivement $\{-1,0,1\}$, de degré au plus 2 et évalués en 2 et en ϕ respectivement. Ce choix s'explique par le fait que la définition 2.1.1 des spectres ne permet en général pas de donner les éléments dans un ordre croissant si l'alphabet contient des nombres négatifs. À priori, pour l'exemple 2.1.3, on ne sait donc pas si on a énuméré tous les éléments du spectre de l'intervalle $[-5.3, 5.3]$. Dans la section 2.4, les éléments des spectres seront ordonnés dans l'ordre croissant (sous certaines conditions) et la distance entre deux éléments consécutifs sera étudiée.

On montre maintenant que le spectre $S_{A_M}(\beta)$ peut être exprimé en fonction de $S_{B_M}(\beta)$.

Lemme 2.1.5. *Soient un réel $\beta > 1$ et un entier $M \geq 1$. Le spectre $S_{A_M}(\beta)$ est la différence entre le M-spectre $S_M(\beta)$ et lui-même, c'est-à-dire*

$$S_{A_M}(\beta) = S_{B_M}(\beta) - S_{B_M}(\beta).$$

Démonstration. Montrons d'abord l'inclusion $S_{B_M}(\beta) - S_{B_M}(\beta) \subset S_{A_M}(\beta)$. Si $x \in S_{B_M}(\beta) - S_{B_M}(\beta)$, alors il existe des entiers

$$b_m, \ldots, b_0, b'_n, \ldots, b'_0 \in B_M,$$

avec $m, n \in \mathbb{N}$ tels que

$$x = \sum_{i=0}^{m} b_i \beta^i - \sum_{i=0}^{n} b'_i \beta^i.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que $m \geq n$. On a donc

$$x = \sum_{i=0}^{m} b_i \beta^i - \sum_{i=0}^{n} b'_i \beta^i = \sum_{i=n+1}^{m} b_i \beta^i + \sum_{i=0}^{n} (b_i - b'_i) \beta^i.$$

Or $|b_i - b'_i| \leq M$, donc $b_i - b'_i \in A_M$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$. De plus, on a clairement $b_{n+1}, \ldots, b_m \in A_M$. On en tire que $x \in S_{A_M}(\beta)$.

Montrons maintenant l'inclusion $S_{A_M}(\beta) \subset S_{B_M}(\beta) - S_{B_M}(\beta)$. Si $x \in S_{A_M}(\beta)$, alors il existe des entiers $a_0, \ldots, a_k \in A_M$ avec $k \in \mathbb{N}$ tels que

$$x = \sum_{i=0}^{k} a_i \beta^i.$$

En posant

$$b_i = \begin{cases} a_i \text{ si } a_i \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

et

$$b'_i = \begin{cases} -a_i \text{ si } a_i \leq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

pour tout $i \in \{0, \ldots, k\}$, on obtient

$$x = \sum_{i=0}^{k} b_i \beta^i - \sum_{i=0}^{k} b'_i \beta^i \in S_{B_M}(\beta) - S_{B_M}(\beta),$$

ce qui permet de conclure. □

Dans ce qui suit, on discute des propriétés des spectres. On considère en particulier les points d'accumulation des spectres de nombres et leur densité dans $\mathbb{R}$. À la fin de ce chapitre, on établit un lien entre les distances entre deux éléments consécutifs d'un spectre et les autres propriétés mentionnées ci-dessus.

2.2 Points d'accumulation des spectres de nombres

On s'intéresse maintenant aux points d'accumulation (cf. définition 2.2.1) de certains spectres de nombres. Cette section est organisée comme suit : on présente d'abord quelques résultats partiels qui donnent des conditions nécessaires ou suffisantes pour qu'un spectre ait un point d'accumulation, afin d'illustrer d'un point de vue historique comment des progrès ont été faits. Les preuves étant courtes, on les inclut également. Ensuite le théorème principal de cette section sera démontré (cf. théorème 2.2.18, caractérisant les couples (β, M) pour lesquels $S_{A_M}(\beta)$ admet un point d'accumulation). Il repose sur les résultats 2.2.7 et 2.2.17. Ce dernier requiert les lemmes 2.2.9, 2.2.10, 2.2.12 et 2.2.16. On termine cette section avec un résultat illustrant le statut particulier de 0 comme éventuel point d'accumulation et quelques exemples d'application des principaux théorèmes de cette section (cf. exemple 2.2.23).

Définition 2.2.1 ([3])**.** Un *point d'accumulation* x d'un ensemble E est un point tel que tout voisinage V de x contient au moins un point de E différent de x.

Un point d'accumulation d'un ensemble E peut également être défini comme un point dont tout voisinage contient une infinité de points de E ([3]). La propriété suivante montre que ces définitions sont équivalentes.

Proposition 2.2.2. *Le point x est un point d'accumulation d'un ensemble E si et seulement si tout voisinage V de x contient une infinité de points (Err : de points de E).*

Démonstration. La condition est nécessaire :
Soit V_1 un voisinage de x. Alors par hypothèse, V contient un point x_1 de E différent de x. Alors l'ensemble $V_2 = V_1 \setminus \{x_1\}$ est également un voisinage de x inclus dans V_1. Il contient donc un point $x_2 \neq x_1 \neq x$. On peut répéter cette construction une infinité de fois et on en déduit que tout voisinage de x contient une infinité de points.
La condition est suffisante : Cette implication est évidente. □

Le but est de caractériser les couples (β, M) pour lesquels les spectres S_{A_M} ont un point d'accumulation. Erdös et Komornik ont fait des progrès considérables dans [35] et ont rapidement découvert que les nombres de Pisot jouent un rôle important, comme en témoigne le lemme 2.2.4, faisant usage des propriétés suivantes de la distance au plus proche entier d'un réel.

Lemme 2.2.3. *Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors la distance $d(x)$ de x au plus proche entier vérifie les propriétés suivantes :*
(i) $d(x+y) \leq d(x) + d(y)$,
(ii) $d(nx) \leq nd(x)$ *pour tout entier* n,
(iii) $d(-x) = d(x)$.

Démonstration. Montrons le point (i). On a $d(x+y) \leq d(x) + d(y)$. En effet, si c est le plus proche entier de $x+y$, a le plus proche entier de x et b celui de y, alors on a

$$d(x+y) = |x+y-c| \leq |x+y-(a+b)| \leq |x-a| + |y-b| = d(x) + d(y).$$

Montrons maintenant le point (ii). Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Soit a est le plus proche entier de x et b le plus proche entier de nx. Alors on a

$$d(nx) = |nx - b| \leq |nx - na| = n|x-a| = nd(x).$$

Passons au point (iii). Si a est le plus entier de x alors $-a$ est le plus proche entier de x. On a donc

$$d(x) = |x-a| = |-x+a| = d(-x).$$

Ceci permet de conclure. □

Lemme 2.2.4 ([35])**.** *Si β est un nombre de Pisot, alors pour tout entier $M \geq 1$, le nombre 0 n'est pas un point d'accumulation de $S_{A_M}(\beta)$.*

Démonstration. Soit β un nombre de Pisot. Notons $d(x)$ la distance du réel x au plus proche entier. Vu la proposition 1.4.8, on a $d(\beta^n) \to 0$, si $n \to \infty$ et ce de façon exponentielle. On en déduit que la série $\sum_{n=0}^{\infty} d(\beta^n)$ converge. Soit un entier N tel que

$$\sigma = \sum_{n=N}^{\infty} d(\beta^n) < \frac{1}{M(\beta+1)}. \tag{2.2}$$

Pour démontrer le théorème, on montre que pour tout élément non nul $y \in S_{A_M}(\beta)$, $|y| > \frac{1}{(\beta+1)\beta^{N-1}}$, ce qui implique que 0 ne peut être un point d'accumulation de $S_{A_M}(\beta)$, vu la

proposition 2.2.2. Or si $y \in S_{A_M}(\beta)$, alors $\beta^N y \in S_{A_M}(\beta)$. De plus si $y \in S_{A_M}(\beta)$, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \ldots, a_k \in A_M$, tels que $y = \sum_{i=0}^{k} a_i \beta^i$. On a

$$\begin{aligned} d(\beta^N y) &= d\left(\beta^N \sum_{i=0}^{k} a_i \beta^i\right) \\ &= d\left(\sum_{i=0}^{k} a_i \beta^{i+N}\right) \\ &\leq \sum_{i=0}^{k} |a_i| d(\beta^{i+N}) \qquad \text{(vu le lemme 2.2.3)} \\ &\leq M \sum_{i=0}^{\infty} d(\beta^{i+N}) \\ &= M \sum_{i=N}^{\infty} d(\beta^i) = M\sigma. \end{aligned}$$

On distingue maintenant les deux cas suivants :
(i) Si 0 est l'entier le plus proche de $\beta^N y$, alors $0 < |\beta^N y| \leq M\sigma$.
(ii) Sinon, soit $k \neq 0$ l'entier le plus proche de $\beta^N y$. On a alors

$$M\sigma \geq |\beta^N y - k| \geq |k| - |\beta^N y| \geq 1 - |\beta^N y|.$$

Dans tous les cas, on a pour tout élément non nul y de $S_{A_M}(\beta)$

$$\text{soit } |\beta^N y| \leq M\sigma \text{ soit } M\sigma \geq 1 - |\beta^N y|. \tag{2.3}$$

Montrons que le cas (i) est impossible. On procède par l'absurde et on suppose que

$$0 < |\beta^N y| \leq M\sigma$$

pour un $y \in S_{A_M}(\beta)$. Montrons maintenant qu'il existe un entier $i \geq 0$ tel que

$$M\sigma < \beta^i |\beta^N y| \leq M\beta\sigma. \tag{2.4}$$

Il existe un entier j tel que $\beta^j |\beta^N y| > M\sigma$. Si i et le plus petit tel j, alors on a $\beta^{i-1}|\beta^N y| \leq M\sigma$. On peut en déduire les inégalités souhaitées car $\beta^{i-1}|\beta^N y| \leq M\sigma$ implique que $\beta^i |\beta^N y| \leq M\beta\sigma$. Considérons maintenant l'élément $y' = \beta^i y$. Comme précédemment, $y' \in S_{A_M}(\beta)$. Or, vu notre choix de N dans (2.2), on a

$$M\beta\sigma < M\beta \frac{1}{M(\beta+1)} = \frac{\beta}{\beta+1} = 1 - \frac{1}{\beta+1} < 1 - M\sigma.$$

On en déduit avec (2.4) que

$$M\sigma < |\beta^N y'| < 1 - M\sigma. \tag{2.5}$$

L'inégalité $|\beta^N y'| < 1 - M\sigma$ a un sens car $M\sigma < 1$ vu que $\beta > 1$. Or les inégalités (2.5) contredisent (2.3). Le cas (i) est donc impossible. On en tire qu'on a donc nécessairement le cas (ii), ce qui implique $|\beta^N y| \geq 1 - M\sigma$. Ceci permet de conclure. □

Le lemme suivant relie les spectres $S_{A_M}(\beta)$ et $S_{A_{2M}}(\beta)$ pour des β et M fixés. Ce résultat a permis à Erdös et Komornik de fournir une première réponse partielle qui démontre l'incompatibilité des nombres de Pisot avec l'existence de points d'accumulation dans le spectre $S_{A_M}(\beta)$, indépendemment de M (cf. proposition 2.2.6).

Lemme 2.2.5 ([35]). *Si $S_{A_M}(\beta)$ a un point d'accumulation pour certains β et M, alors 0 est un point d'accumulation de $S_{A_{2M}}(\beta)$.*

Démonstration. Soient α un point d'accumulation de $S_{A_M}(\beta)$ et $\sigma > 0$. Vu la définition d'un point d'accumulation, il existe un élément $y \in S_{A_M}(\beta) \cap]\alpha - \sigma, \alpha + \sigma[$ et un élément $y' \in S_{A_M}(\beta) \cap]\alpha - \sigma, \alpha + \sigma[\setminus \{y\}$. On a donc deux éléments distincts $y, y' \in S_{A_M}(\beta)$ dans l'intervalle $]\alpha - \sigma, \alpha + \sigma[$ ce qui implique $0 < |y - y'| < 2\sigma$. Or, $y - y' \in S_{A_{2M}}(\beta)$ et σ peut être arbitrairement petit. On en déduit que chaque voisinage de 0 contient un point de $S_{A_{2M}}(\beta)$ différent de 0. Le point 0 est donc un point d'accumulation de $S_{A_{2M}}(\beta)$. □

La proposition suivante donne une première condition suffisante pour qu'un spectre ait un point d'accumulation.

Proposition 2.2.6 ([35]). *Si β est un nombre de Pisot, alors pour tout entier M non nul, le spectre $S_{A_M}(\beta)$ n'a pas de point d'accumulation.*

Démonstration. Procédons par l'absurde. Si $S_{A_M}(\beta)$ avait un point d'accumulation pour un certain M, alors 0 serait un point d'accumulation de $S_{A_{2M}}(\beta)$, vu le lemme 2.2.5. Or ceci contredit le lemme 2.2.4 affirmant que si β est un nombre de Pisot, alors pour tout entier $M \geq 1$, le point 0 n'est pas un point daccumulation de $S_{A_M}(\beta)$. □

Les propriétés suivantes ont également été démontrées dans [35] et sont à la base de la caractérisation des spectres ayant un point d'accumulation. Erdös et Komornik eux-mêmes n'ont cependant pas su complètement caractériser ces-derniers, mais ils savaient qu'ils n'étaient pas loin d'un théorème optimal. Akiyama et Komornik ont repris et amélioré certains résultats de [35] ce qui leur a enfin permis de formuler le théorème 2.2.18 qui clôture cette section.

Lemme 2.2.7 ([35]). *Soient un réel $\beta > 1$ et un entier M vérifiant $M < \beta < M + 1$. Supposons que $S_{A_M}(\beta)$ n'a pas de point d'accumulation. On a les deux propriétés suivantes :*

(i) β est un entier algébrique.

(ii) Soit $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite d'entiers bornée par M telle que $\sum_{i=0}^{\infty} s_i \beta^{-i} = 0$ et soit γ un conjugué algébrique de β tel que $|\gamma| \geq 1$. Dans ce cas, on a

- *si $|\gamma| > 1$, alors $\sum_{i=0}^{\infty} s_i \gamma^{-i} = 0$,*
- *si $|\gamma| = 1$, alors les sommes partielles $\sum_{i=0}^{n} s_i \gamma^{-i}$, où $n \in \mathbb{N}$, appartiennent à un nombre fini de cercles centrés sur 0.*

Démonstration. Commençons par démontrer le point (i). Montrons que β est un entier algébrique en dérivant d'une β-représentation de 1 un polynôme qui s'annule en β. Comme $M > \beta - 1$, il existe une suite d'entiers $(s_i)_{i \geq 1}$ telle que $0 \leq s_i \leq M$ pour tout $i \geq 1$ et que $1 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i}{\beta^i}$. En effet, dans ce cas, il existe au moins la β-représentation gloutonne de 1.

Si on pose $s_0 = -1$, on a $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{s_i}{\beta^i} = 0$. Pour tout $n \geq 0$, on trouve, en multipliant par β^n, que

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{s_i}{\beta^i} \right) \beta^n = 0.$$

On en déduit que pour tout entier $n \geq 0$

$$\left| \sum_{i=0}^{n} s_i \beta^{n-i} \right| = \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} s_i \beta^{n-i} \right| \leq M \left| \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \right| = \frac{M}{1 - \frac{1}{\beta}} = \frac{M\beta}{\beta - 1} \leq \frac{M}{\beta - 1}$$

car $\beta > 1$ et $|s_i| \leq M$ pour tout entier i. Comme toutes les sommes $\sum_{i=0}^{n} s_i \beta^{n-i}$ sont dans $S_{A_M}(\beta)$ qui n'a pas de point d'accumulation fini, la suite des sommes partielles $\sum_{i=0}^{n} s_i \beta^{n-i}$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs. En effet, sinon la suite des sommes partielle prendrait un nombre infini de valeurs différentes et elle tendrait vers $\sum_{i=0}^{\infty} s_i \beta^{n-i}$. Pour tout voisinage de cette limite, il devrait alors exister un élément de la suite des sommes partielles dans ce voisinage, ce qui impliquerait que le point $\sum_{i=0}^{\infty} s_i \beta^{n-i}$ serait un point d'accumulation de $S_{A_M}(\beta)$. On a maintenant tous les outils pour construire un polynôme unitaire et à coefficients entiers s'annulant en β. Considérons deux entiers $n < n'$ tels que $\sum_{i=0}^{n} s_i \beta^{n-i} = \sum_{i=0}^{n'} s_i \beta^{n'-i}$. Alors on a

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n} s_i \beta^{n-i} - \sum_{i=0}^{n'} s_i \beta^{n'-i} = 0 \\
\Leftrightarrow &\sum_{i=0}^{n} s_i \beta^{n-i} - \sum_{i=n'-n}^{n'} s_i \beta^{n'-i} - \sum_{i=0}^{n'-n-1} s_i \beta^{n'-i} = 0 \\
\Leftrightarrow &\sum_{i=0}^{n} s_{n-i} \beta^i - \sum_{i=0}^{n} s_{n'-i} \beta^i - \sum_{i=n+1}^{n'} (-s_{n'-i}) \beta^i = 0.
\end{aligned}$$

On en déduit que β annule le polynôme

$$P(x) = \sum_{i=n+1}^{n'} (-s_{n'-i}) x^i + \sum_{i=0}^{n} (s_{n-i} - s_{n'-i}) x^i = 0$$

dont les coefficients sont tous des entiers. Comme le coefficient de plus haut degré de ce polynôme vaut $-s_0 = 1$, β est nécessairement un entier algébrique.

Passons au point (ii). Vu le point (a), on sait que la suite des sommes partielles $\left(\sum_{i=0}^{n} s_i \beta^{n-i}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs. Montrons maintenant que si γ est un conjugué de β, alors la suite

$$\left(\sum_{i=0}^{n} s_i \gamma^{n-i} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

prend également un nombre fini de valeurs. Notons $P_n = \sum_{i=0}^{n} s_i x^{n-i}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Si deux polynômes P_{i_1} et P_{i_2} de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prennent la même valeur en $x = \beta$, alors leur différence $P_{i_1} - P_{i_2}$ est divisible par $(x - \beta)$, ce qui implique qu'elle est également divisible par le polynôme minimal de β. Vu que γ est le conjugué de β, il annule aussi le polynôme minimal de β. On en déduit que $(P_{i_1} - P_{i_2})(\gamma) = 0$. Donc P_{i_1} et P_{i_2} prennent aussi la même valeur en $x = \gamma$. La suite

$$\left(\sum_{i=0}^{n} s_i \gamma^{n-i}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

prend donc également un nombre fini de valeurs $z_1, z_2, \ldots, z_N$ et est donc bornée par une constante c. On a maintenant tous les outils pour conclure la preuve. On distingue deux cas en fonction de la valeur du module de γ.

— Si $|\gamma| > 1$, alors

$$\left|\sum_{i=0}^{n} s_i \gamma^{-i}\right| \leq \frac{c}{|\gamma|^n} \to 0$$

si $n \to \infty$, donc $\sum_{i=0}^{\infty} s_i \gamma^{-i} = 0$.

— Si $|\gamma| = 1$, alors pour tout $n \geq 0$,

$$\left|\sum_{i=0}^{n} s_i \gamma^{-i}\right| = \left|\gamma^{-n} \sum_{i=0}^{n} s_i \gamma^{n-i}\right| = |\gamma^{-n}| \left|\sum_{i=0}^{n} s_i \gamma^{n-i}\right| = \left|\sum_{i=0}^{n} s_i \gamma^{n-i}\right|$$

est égal à un des $|z_1|, \ldots, |z_N|$, donc les sommes partielles sont bornées. Ceci qui permet de conclure.

□

Remarque 2.2.8. Remarquons que le seul endroit où on a utilisé l'hypothèse que $S_{A_M}(\beta)$ n'a pas de point d'accumulation fini était au point (i), pour montrer que la suite des sommes partielles ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

Le lemme suivant montre que si on a une série convergente de nombres strictement positifs et un nombre x inférieur ou égal à la valeur de cette série, alors on peut en extraire une unique sous-série minimale dont la valeur reste plus grande ou égale à x.

Lemme 2.2.9 ([35]). *Soit $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres strictement positifs telle que $\sum_{i=0}^{\infty} p_i$ soit une série convergente et soit $0 \leq x \leq \sum_{i=0}^{\infty} p_i$. Alors il existe une unique suite $(t_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) On a $x \leq \sum_{i=0}^{\infty} t_i p_i$.

(ii) Si $(t'_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est une autre suite telle que pour un certain indice j, on a $t'_i = t_i$ pour tout $i < j$ mais que $t'_j = 0$ et $t_j = 1$ (en particulier $t_i < t_j$), alors $x > \sum_{i=0}^{\infty} t'_i p_i$.

De plus, si $t_j = 1$ pour une infinité d'indices j, alors on a $x = \sum_{i=0}^{\infty} t_i p_i$.

Démonstration. On définit la suite $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante.

$$t_0 = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq \sum_{i>0} p_i \\ 1 \text{ si } x > \sum_{i>0} p_i. \end{cases}$$

Si $j > 0$ et si t_i est déjà défini pour $0 \leq i < j$, alors on pose

$$t_j = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq \sum_{i<j} t_i p_i + \sum_{i>j} p_i \\ 1 \text{ si } x > \sum_{i<j} t_i p_i + \sum_{i>j} p_i. \end{cases} \tag{2.6}$$

Cela revient à omettre les p_i de la série qui ne sont pas nécessaires pour avoir $x \leq \sum_{i=0}^{\infty} p_i$. Comme par hypothèse, on a $x \leq \sum_{i=0}^{\infty} p_i$, on trouve que $x \leq \sum_{i\leq j} t_i p_i + \sum_{i>j} p_i$ pour tout $j \geq 0$. Cela reste donc vrai si $j \to \infty$. On en déduit la propriété (i).

Montrons le point (ii). Comme

$$t_j = 1, t'_j = 0 \tag{2.7}$$

et

$$t'_i = t_i \text{ pour tout } i < j, \tag{2.8}$$

on a

$$x > \sum_{i<j} t_i p_i + \sum_{i>j} p_i \overset{(2.8)}{=} \sum_{i<j} t'_i p_i + 0 \cdot p_j + \sum_{i>j} p_i \overset{(2.7)}{=} \sum_{i\leq j} t'_i p_i + \sum_{i>j} p_i \geq \sum_{i=0}^{\infty} t'_i p_i$$

ce qui permet de conclure.

Montrons que la suite $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ainsi construite est unique. Soit $(t'_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une autre suite vérifiant (i) et (ii). En particulier,

$$x \leq \sum_{i=0}^{\infty} t'_i p_i. \tag{2.9}$$

Comme ces deux suites sont supposées différentes, il existe un indice j tel que on a $t'_i = t_i$ pour tout $i < j$ et $t_j \neq t'_j$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $t'_j = 0$ et $t_j = 1$. Or vu le point (b), on a alors $x > \sum_{i=0}^{\infty} t'_i p_i$, ce qui contredit (2.9).

Montrons maintenant que si $t_j = 1$ pour une infinité d'indices j, alors $x = \sum_{i=0}^{\infty} t_i p_i$. Si $t_j = 1$, alors

$$x > \sum_{i<j} t_i p_i + \sum_{i>j} p_i.$$

S'il existe une infinité de tels indices, alors $j \to \infty$ implique que $x \geq \sum_{i<j} t_i p_i$ et vu la propriété (a), on a effectivement $x = \sum_{i<j} t_i p_i$. □

Les trois lemmes qui suivent servent à construire une suite $(s_i)_{i\in\mathbb{N}} \in A_M^{\mathbb{N}}$ telle que sous certaines conditions, $\sum_{i=0}^{\infty} s_i \beta^{-i} = 0$. Cette suite permettra de démontrer la proposition 2.2.17 qui, avec la proposition 2.2.7, joue un rôle crucial dans la caractérisation des spectres ayant un point d'accumulation à la fin de cette section.

Lemme 2.2.10 ([35]). *Soit $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres strictement positifs telle que la série $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ converge et supposons que*

$$a_j \leq \sum_{i>j} a_i \quad \forall j \geq 0. \tag{2.10}$$

Soit $\mathbb{N} = P \cup N$ une partition telle que

$$a_{n_0} \leq \sum_{i>n_0,\ i\in P} a_i \quad \text{pour un certain } n_0 \in N. \tag{2.11}$$

Alors il existe une suite $(s_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \{-1,0,1\}^{\mathbb{N}}$ vérifiant les conditions suivantes :
(i) $s_i \in \{0,1\}$ si $i \in P$,
(ii) $s_i \in \{-1,0\}$ si $i \in N$,
(iii) $\sum_{i=0}^{\infty} s_i a_i = 0$.

Démonstration. Pour alléger les notations, notons S_n les sommes partielles $\sum_{i=0}^{n} s_i a_i$ pour tout entier n et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles. L'idée de la preuve est de construire la suite $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de proche en proche en appliquant plusieurs fois le lemme 2.2.9. Posons $s_i = 0$ pour $0 \leq i < n_0$ et $s_{n_0} = -1$. Alors $S_{n_0} = -a_{n_0}$ et vu (2.11), on a donc

$$n_0 \in N \text{ et } 0 < -S_{n_0} \leq \sum_{i>n_0,\ i\in P} a_i. \tag{2.12}$$

Appliquons le lemme 2.2.9 avec $x = -S_{n_0}$ à la suite $(a_i)_{i>n_0, i\in P}$. On obtient alors une suite minimale (dans le sens du lemme 2.2.9) $(t_i)_{i>n_0,i\in P}$ telle que $-S_{n_0} \leq \sum_{i>n_0,\ i\in P} t_i a_i$. Si une infinité des éléments de la suite $(t_i)_{i>n_0,i\in P}$ valent 1, alors on a

$$-S_{n_0} = \sum_{i>n_0,\ i\in P} t_i a_i. \tag{2.13}$$

On pose alors

$$s_i = \begin{cases} t_i \text{ si } i > n_0 \text{ et } i \in P \\ 0 \text{ si } i > n_0 \text{ et } i \in N. \end{cases} \tag{2.14}$$

Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} s_i a_i &= \sum_{i=0}^{n_0} s_i a_i + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} s_i a_i \\ &= S_{n_0} + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} s_i a_i && \text{(vu la définition de } S_{n_0}) \\ &= S_{n_0} - S_{n_0} = 0 && \text{(vu (2.14))} \end{aligned}$$

et on peut conclure.

Si la suite $(t_i)_{i>n_0, i\in P}$ a un dernier élément non nul $t_{n_1} = 1$ pour un indice $n_1 \in P$, alors on pose

$$s_i = \begin{cases} t_i \text{ si } n_0 < i \leq n_1 \text{ et } i \in P \\ 0 \text{ si } n_0 < i \leq n_1 \text{ et } i \in N. \end{cases} \tag{2.15}$$

Alors on a

$$\begin{aligned} -S_{n_0} &\leq \sum_{n_0<i\leq n_1,\ i\in P} t_i a_i = \sum_{n_0<i\leq n_1} s_i a_i \\ &\Leftrightarrow 0 \leq S_{n_0} + \sum_{n_0<i\leq n_1} s_i a_i \\ &\Leftrightarrow 0 \leq S_{n_1}. \end{aligned}$$

Donc $S_{n_1} \geq 0$. De plus, par la définition de $t_{n_1} = 1$, on a

$$-S_{n_0} \overset{(2.6)}{>} \sum_{n_0<i<n_1,\ i\in P} t_i a_i + \sum_{i>n_1,\ i\in P} a_i = \sum_{n_0<i<n_1} s_i a_i + \sum_{i>n_1,\ i\in P} a_i. \tag{2.16}$$

En appliquant l'hypothèse (2.10) avec $j = n_1$, on a

$$\sum_{i>n_1,\ i\in P} a_i \geq a_{n_1} - \sum_{i>n_1,\ i\in N} a_i.$$

En remplaçant dans (2.16) et comme $s_{n_1} = 1$ vu (2.15), on obtient que

$$\begin{aligned} -S_{n_0} &> \sum_{n_0<i\leq n_1} s_i a_i - \sum_{i>n_1,\ i\in N} a_i \\ \Leftrightarrow \sum_{i>n_1,\ i\in N} a_i &> S_{n_0} + \sum_{n_0<i\leq n_1} s_i a_i \\ \Leftrightarrow \sum_{i>n_1,\ i\in N} a_i &> S_{n_1}. \end{aligned}$$

On vient donc de montrer que

$$n_1 \in P \text{ et } 0 \leq S_{n_1} \leq \sum_{i>n_1,\ i\in N} a_i. \tag{2.17}$$

On fait maintenant une construction similaire à la précédente en tenant compte de (2.17). Appliquons le lemme 2.2.9 avec $x = S_{n_1}$ à la suite $(a_i)_{i>n_1, i\in N}$. Si la suite correspondante $(t'_i)_{i>n_1,\ i\in N}$ a une infinité d'éléments $t'_i = 1$, on pose

$$s_i = \begin{cases} -t'_i \text{ si } i > n_1 \text{ et } i \in N \\ 0 \text{ si } i > n_1 \text{ et } i \in P. \end{cases}$$

Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\infty} s_i a_i &= \sum_{i=0}^{n_1} s_i a_i + \sum_{i=n_1+1}^{\infty} s_i a_i \\ &= S_{n_1} + \sum_{i=n_1+1}^{\infty} s_i a_i && \text{(vu la définition de } S_{n_1}) \\ &= S_{n_1} - S_{n_1} = 0 && \text{(vu (2.14))}\end{aligned}$$

et on peut conclure.

Si la suite $(t'_i)_{i>n_1, i\in N}$ a un dernier élément non nul $t'_{n_2} = 1$ pour un $n_2 \in \mathbb{N}$, alors on pose

$$s_i = \begin{cases} -t'_i \text{ si } n_1 < i \leq n_2 \text{ et } i \in N \\ 0 \text{ si } n_1 < i \leq n_2 \text{ et } i \in P. \end{cases}$$

On a alors $S_{n_1} \leq \sum_{n_1<i\leq n_2, i\in N} t'_i a_i = -\sum_{n_1<i\leq n_2} s_i a_i$, donc $S_{n_2} \leq 0$. De plus, par définition de $t'_{n_2} = 1$, on a

$$S_{n_1} \overset{(2.6)}{>} \sum_{n_1<i<n_2,\ i\in N} t_i a_i + \sum_{i>n_2,\ i\in N} a_i = -\sum_{n_1<i<n_2} s_i a_i + \sum_{i>n_2,\ i\in N} a_i. \tag{2.18}$$

En appliquant l'hypothèse (2.10) avec $j = n_2$, on trouve que

$$\sum_{i>n_2,\ i\in N} a_i \geq a_{n_2} - \sum_{i>n_2,\ i\in P} a_i.$$

En remplaçant dans (2.18), on obtient que

$$\begin{aligned} & S_{n_1} > -\sum_{n_1<i\leq n_2} s_i a_i - \sum_{i>n_2,\ i\in P} a_i \\ \Leftrightarrow & \sum_{i>n_2,\ i\in P} a_i > -S_{n_1} - \sum_{n_1<i\leq n_2} s_i a_i \\ \Leftrightarrow & \sum_{i>n_2,\ i\in P} a_i > -S_{n_2}. \end{aligned}$$

On vient donc de montrer que

$$n_2 \in N \text{ et que } 0 \leq -S_{n_2} \leq \sum_{i>n_2,\ i\in P} a_i. \tag{2.19}$$

Remarquons qu'on a retrouvé (2.12) où n_0 est remplacé par $n_2 > n_1$. En continuant cette construction, deux cas de se présentent (Err : deux cas se présentent). Soit on s'arrête après un nombre fini d'étapes et on trouve une suite $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ qui vérifie $(i) - (iii)$, soit on ne s'arrête pas et on trouve une suite $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ qui vérifie (i) et (ii), et telle que la série $\sum_{i=0}^{\infty} s_i a_i$ a une infinité de sommes partielles positives et négatives. Comme la série $\sum_{i=0}^{\infty} s_i a_i$ est convergente, on conclut que la condition (iii) doit être vérifiée dans ce cas également. □

Lemme 2.2.11 ([35]). *Soient un nombre réel $\beta > 1$ et un entier $M > \beta - 1$. Soit $\mathbb{N} = P \cup N$ une partition telle que*

$$\text{soit } \beta^{-j} \leq M \sum_{i>j,\ i\in P} \beta^{-i} \text{ pour un certain } j \in N, \tag{2.20}$$

$$\text{soit } \beta^{-j} \leq M \sum_{i>j,\ i\in N} \beta^{-i} \text{ pour un certain } j \in P. \tag{2.21}$$

Alors il existe une suite d'entiers $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ vérifiant les conditions suivantes :
(i) $s_i \in \{0, 1, \ldots, M\}$ *si* $i \in P$,
(ii) $s_i \in \{-M, \ldots, -1, 0\}$ *si* $i \in N$,
(iii) $\sum_{i=0}^{\infty} s_i \beta^{-i} = 0$,
(iv) $s_i \neq 0$ *pour une infinité d'indices* i.

Démonstration. Quitte à intervertir P et N, on peut supposer que $j \in N$. Soit $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$a_i = \beta^{-\lfloor \frac{i}{M} \rfloor}, \ \forall i \geq 0$$

et considérons la partition $P' \cup N' = \mathbb{N}$ définie par

$$i \in P' \Leftrightarrow \left\lfloor \frac{i}{M} \right\rfloor \in P \text{ et } i \in N' \Leftrightarrow \left\lfloor \frac{i}{M} \right\rfloor \in N.$$

Remarquons alors que pour tout entier n, on a

$$\left\lfloor \frac{i}{M} \right\rfloor = n \text{ si } i \in \{nM, nM+1, \ldots, nM+M-1\}. \tag{2.22}$$

On conclut en appliquant le lemme 2.2.10. On peut en effet appliquer ce lemme car d'une part, on a

$$\sum_{i>j} a_i = \sum_{i>j}^{\infty} \beta^{-\lfloor \frac{i}{M} \rfloor} = \sum_{i=1}^{\infty} \beta^{-\lfloor \frac{i+j}{M} \rfloor} \overset{(2.22)}{\geq} M \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{-\lfloor \frac{j}{M} \rfloor - k} = \beta^{-\lfloor \frac{j}{M} \rfloor} \frac{M}{\beta - 1} > a_j$$

car $M > \beta - 1$, et d'autre part, l'hypothèse (2.20) implique l'hypothèse (2.11) du lemme à appliquer si on pose $n_0 = jM + M - 1$, car on a dans ce cas

$$a_{n_0} = \beta^{-\lfloor \frac{jM+M-1}{M} \rfloor} = \beta^{-j} \leq M \sum_{i>j, i\in P} \beta^{-i} = \sum_{i>jM+M-1,\ i\in P'} \beta^{-\lfloor \frac{i}{M} \rfloor}.$$

On déduit alors du lemme 2.2.10 qu'il existe une suite $(s'_i)_{i\in\mathbb{N}}$ vérifiant
(a) $s'_i \in \{0, 1\}$ si $i \in P'$,
(b) $s'_i \in \{-1, 0\}$ si $i \in N'$,
(c) $\sum_{i=0}^{\infty} s'_i a_i = 0$.

Vu (2.22), le point (c) implique que

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=0}^{\infty} s'_i a_i \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} s'_i \beta^{\lfloor \frac{i}{M} \rfloor} \\
&= \sum_{i=0}^{M-1} s'_i \beta^{\lfloor \frac{i}{M} \rfloor} + \sum_{i=0}^{2M-1} s'_i \beta^{\lfloor \frac{i}{M} \rfloor} + \sum_{i=0}^{3M-1} s'_i \beta^{\lfloor \frac{i}{M} \rfloor} + \cdots \\
&= (s'_0 + s'_1 + \cdots + s'_{M-1})\beta^0 + (s'_M + s'_{M+1} + \cdots + s'_{2M-1})\beta^1 + \cdots \\
&= s_0\beta^0 + s_1\beta^1 + \cdots = \sum_{i=0} s_i \beta^i,
\end{aligned}$$

si on pose $s_i = s'_{iM} + s'_{iM+1} + \cdots + s'_{(i+1)M-1}$ pour tout entier $i \in \mathbb{N}$. Vu (a) et (b), on a $s_i \leq M$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. La suite $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ainsi construite convient. □

De ce lemme, on déduit le résultat suivant en posant $j = 0$. Akiyama et Komornik [9] se sont servi de ce lemme pour caractériser les spectres ayant un point d'accumulation.

Lemme 2.2.12. *Soient un nombre réel $\beta > 1$ et un entier $M > \beta - 1$. Soit P un ensemble d'entiers positifs tels que $1 \leq M \sum_{i\in P} \beta^{-i}$. Alors il existe une suite d'entiers $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ vérifiant les conditions suivantes :*

(i) $s_0 = -1$,
(ii) $s_i \in \{0, 1, \ldots, M\}$ *si* $i \in P$,
(iii) $s_i \in \{-M, \ldots, -1, 0\}$ *si* $i \notin P$,
(iv) $\sum_{i=0}^{\infty} s_i \beta^{-i} = 0$.

Démonstration. Il s'agit du cas particulier du lemme 2.2.11 ou $j = 0$. Le point (i) découle du fait que dans la démonstration du lemme 2.2.10, on pose $s_0, s_1, \ldots, s_{n_0-1} = 0$ et que $s_{n_0} = -1$. Or dans la démonstration du lemme 2.2.11, on applique le lemme 2.2.10 avec $n_0 = jM + M - 1 = M - 1$. On en déduit que dans ce cas (en reprenant les mêmes notations) $s_0 = s'_0 + s'_1 + \cdots + s'_{M-1} = -1$. □

En se servant de ces lemmes, Erdös et Komornik ont démontré la proposition suivante, dont la preuve sera omise pour des raisons qui deviendront apparentes dans la suite.

Proposition 2.2.13 ([35])**.** *Soient un réel $\beta > 1$, un entier M tel que $M \geq \beta - \frac{1}{\beta}$ et $\gamma \neq \beta$ un nombre complexe. Alors*

(i) Si $|\gamma| > 1$, alors il existe une suite d'entiers $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ bornée par M telle que

$$\sum_{i=0}^{\infty} s_i \beta^{-i} = 0 \text{ et } \sum_{i=0}^{\infty} s_i \gamma^{-i} \neq 0.$$

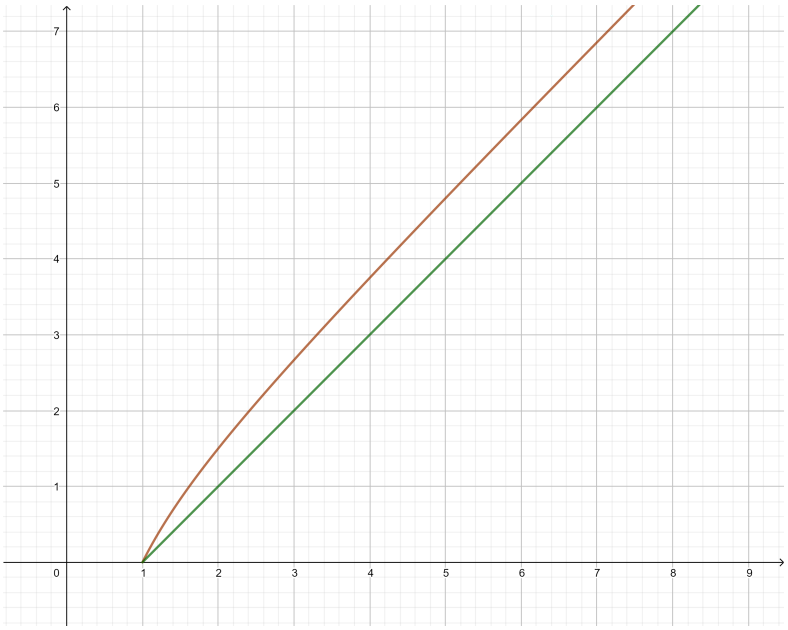

FIGURE 2.2 – Illustration du fait que $\beta-1$ améliore la borne $\beta-\frac{1}{\beta}$. Le graphe de la fonction $x \mapsto x - \frac{1}{x}$ est en rouge et celui de la fonction $x \mapsto x - 1$ en vert, toutes les deux étant restreintes à $]1, +\infty[$.

(ii) Si $|\gamma| = 1$, alors il existe une suite d'entiers $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ bornée par M telle que $\sum_{i=0}^{\infty} s_i\beta^{-i} = 0$ et que les sommes partielles $\sum_{i=0}^{n} s_i\gamma^{-i}$, où $n \in \mathbb{N}$, ne sont pas bornées.

Dans ce résultat, l'hypothèse $M \geq \beta - \frac{1}{\beta}$ n'est pas optimale car on peut remplacer la borne $\beta-\frac{1}{\beta}$ pour M par une valeur plus petite. En 2013, Akiyama et Komornik ont amélioré (cf. figure 2.2) cette hypothèse en supposant que $\beta \leq M + 1$. La preuve est donc omise. Cependant, avec leurs résultats plus faibles de la proposition 2.2.13, Erdös et Komornik ont déjà pu démontrer le résultat suivant, qui donne une réponse partielle à la question de caractériser les spectres ayant un point d'accumulation.

Proposition 2.2.14 ([35]). *Soient un réel $\beta > 1$. Si β n'est pas un nombre de Pisot, alors $S_{A_M}(\beta)$ a des points d'accumulation dans $\mathbb{R}$ pour tout $M \geq \beta - \frac{1}{\beta}$.*

Démonstration. Procédons par l'absurde et supposons que $S_{A_M}(\beta)$ n'a pas de point d'accumulation. Dans ce qui suit, on montre que dans ce cas, le réel β est nécessairement un nombre de Pisot, ce qui est absurde. Remarquons que $M > \beta-1$. Vu le point (i) du lemme 2.2.7, on sait que β est un entier algébrique. Du point (ii) du même lemme et du lemme 2.2.13, on déduit qu'aucun conjugué de β ne peut être de module au moins 1 en procédant par l'absurde. En effet, supposons que γ est un conjugué de β vérifiant $|\gamma| \geq 1$. Distinguons le cas où $|\gamma| = 1$ et le cas où $|\gamma| > 1$.

Cas 1 : Si $|\gamma| = 1$, alors vu le lemme 2.2.7, pour toute suite $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $\sum_{i=0}^{\infty} \beta^{-i} = 0$, on a $\sum_{i=0}^{\infty} \gamma^{-i} = 0$. Or ceci contredit le point (i) de la proposition 2.2.13.

Cas 2 : Si $|\gamma| > 1$, alors vu le point (ii) du lemme 2.2.7, pour tout entier n les sommes partielles $\sum_{i=0}^{n} \gamma^{-i}$ sont bornées, ce qui contredit le point (ii) de la proposition 2.2.13. Le réel β est donc effectivement un nombre de Pisot, ce qui est absurde. □

Erdös et Komornik suspectaient fortement que cette borne $\beta - \frac{1}{\beta}$ n'était pas minimale. En effet, dans les années qui suivaient, cette borne a été améliorée. Néanmoins, ils savaient que la borne optimale ne pouvait pas être beaucoup plus petite, car ils ont démontré la proposition suivante.

Proposition 2.2.15 ([35]). *Soient $\beta > 1$ un réel quelconque et un entier $M \leq \frac{\beta-1}{2}$. Alors le spectre $S_{A_M}(\beta)$ n'a pas de point d'accumulation fini.*

En 2013, Akiyama et Komornik ont complété les recherches d'Erdös et de Komornik en caractérisant complètement les spectres ayant un point d'accumulation. Cette caractérisation a donné lieu au théorème 2.2.18. Sa preuve est basé sur les résultats ci-dessus et la propriété 2.2.17 qui améliore la proposition 2.2.13 d'Erdös et Komornik. Pour la démontrer, on a besoin du lemme technique suivant :

Lemme 2.2.16 ([9]). *Soit $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^+$.*

(i) Si $|\gamma| \geq 1$ alors il existe un nombre complexe w vérifiant $\mathcal{R}w > 0$ et $\sum_{i=1}^{k} \mathcal{R}(w\gamma^{-i}) \leq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(ii) Si $|\gamma| = 1$, alors pour tout entier positif M, il existe un nombre complexe w vérifiant $\mathcal{R}w > 0$ et $M\sum_{i=1}^{k} \mathcal{R}(w\gamma^{-i}) < \mathcal{R}(w)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{R}(w\gamma^{-i}) = 0$ pour au plus un i.

On peut supposer dans les deux cas que w est de module 1.

Démonstration. Pour démontrer le premier point, on distingue le cas où $\mathcal{R}(\gamma) < 1$ et le cas où $\mathcal{R}(\gamma) \geq 1$.

Cas 1 : Si $|\gamma| \geq 1$ et $\mathcal{R}(\gamma) < 1$, alors posons $w = 1 - \gamma$. Vérifions que w ainsi défini convient. On a $\mathcal{R}(w) > 0$ et

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} \mathcal{R}(w\gamma^{-i}) = \mathcal{R}\left(w\frac{1-\gamma^{-k}}{\gamma-1}\right) = \mathcal{R}(\gamma^{-k}) - 1 \leq |\gamma^{-k}| - 1 \leq 0$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$, ce qui permet de conclure dans ce cas.

Cas 2 : Si $\mathcal{R}(\gamma) \geq 1$, comme $\gamma \notin \mathbb{R}_0^+$, on doit avoir $|\gamma| > 1$. Posons $z = \pm(1-\gamma^{-1})i$ en choisissant le signe de façon à ce que $\mathcal{R}(z) > 0$. Alors on a

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{R}(z\gamma^{-i}) = \mathcal{R}(z\sum_{i=0}^{\infty} \gamma^{-i}) = \mathcal{R}(\pm i) = 0$$

et la première somme partielle de $\sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{R}(z\gamma^{-i})$ est positive car elle vaut $\mathcal{R}(z) > 0$. Il existe donc une première somme partielle positive maximale. Notons-la $\sum_{i=0}^{n} \mathcal{R}(z\gamma^{-i})$ où

n est minimal. Alors on a $\sum_{i=n+1}^{k} \mathcal{R}(z\gamma^{-i}) \leq 0$ pour tout $k \geq n$, car sinon $\sum_{i=0}^{k} \mathcal{R}(z\gamma^{-i}) \geq \sum_{i=0}^{n} \mathcal{R}(z\gamma^{-i})$, ce qui est absurde vu la maximalité de $\sum_{i=0}^{n} \mathcal{R}(z\gamma^{-i})$. De plus $\mathcal{R}(z\gamma^{-n}) > 0$. En effet, si $n = 0$ cela découle du choix de z et si $n > 0$, cela découle de la minimalité de n, car si on avait $\mathcal{R}(z\gamma^{-n}) \leq 0$, on aurait $\sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{R}(z\gamma^{-i}) \geq \sum_{i=0}^{n} \mathcal{R}(z\gamma^{-i})$, ce qui est absurde. Finalement, le nombre $w = z\gamma^{-n}$ convient.

Passons au deuxième point. On distingue ici le cas où $\frac{\arg\gamma}{\pi}$ est rationnel et celui où ce nombre est irrationnel.

Cas 1 : Si $\frac{\arg\gamma}{\pi}$ est irrationnel, alors $w = 1 - \gamma$ convient. Cela découle du point (i) et du fait que si z est un nombre complexe, alors on a $\arg(z\gamma^{-i}) = \frac{\pi}{2} \mod \pi$ pour au plus un indice i. En effet, s'il existe deux indices $i > j$ tels que $\frac{\arg(z\gamma^{-i})}{\pi} = \frac{\arg(z\gamma^{-j})}{\pi} = \frac{1}{2} \mod 1$, alors

$$\frac{\arg(z) - i\arg(\gamma)}{\pi} = \frac{\arg(z) - j\arg(\gamma)}{\pi} = \frac{1}{2} \mod 1,$$

c'est-à-dire

$$(i-j)\frac{\arg(\gamma)}{\pi} = k + \frac{1}{2}$$

pour un certain $k \in \mathbb{Z}$, donc $\frac{\arg(\gamma)}{\pi} \in \mathbb{Q}$, d'où la contradiction.

Cas 2 : Si $\frac{\arg\gamma}{\pi}$ est rationnel, alors $\gamma^n = 1$ pour un certain entier $n \geq 2$. Alors vu le point (i), on a toujours

$$M\sum_{i=1}^{k} \mathcal{R}(w\gamma^{-i}) \leq 0, \quad \forall k, M \in \mathbb{N}, \text{ et } \mathcal{R}w > 0, \tag{2.23}$$

mais on ne sait pas si $\mathcal{R}(w\gamma^{-i}) = 0$ pour au plus un i. Remarquons tout d'abord qu'il suffit de montrer que

$$M\sum_{i=1}^{k} \mathcal{R}(w\gamma^{-i}) < \mathcal{R}w, \ \ \forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}, \ \ \forall M \in \mathbb{N}. \tag{2.24}$$

En effet, pour $k \in \mathbb{N}$ on peut écrire $k = an + b$ avec pour deux entiers a, b avec $b < n$. Comme $\gamma^n = 1$, on a $M\sum_{i=1}^{an+b} \mathcal{R}(w\gamma^{-i}) = aM\sum_{i=1}^{n} \mathcal{R}(w\gamma^{-i}) + M\sum_{i=1}^{b} \mathcal{R}(w\gamma^{-i})$. Or si on a (2.24), alors

$$\begin{aligned}
&aM\sum_{i=1}^{n} \mathcal{R}(w\gamma^{-i}) + M\sum_{i=1}^{b} \mathcal{R}(w\gamma^{-i}) \\
&\leq aM\sum_{i=1}^{n} \mathcal{R}(w\gamma^{-i}) + M\sum_{i=1}^{n} \mathcal{R}(w\gamma^{-i}) \\
&= (a+1)M\sum_{i=1}^{n} \mathcal{R}(w\gamma^{-i}) \\
&< \mathcal{R}w.
\end{aligned}$$

Pour conclure, montrons que les inéquations

$$M\sum_{i=1}^{k}\mathcal{R}(w\gamma^{-i}) < \mathcal{R}(w), \quad \forall k \in \{1,2,\ldots,n\}$$

restent vraies pour tout $M \geq 0$ en modifiant légèrement la partie réelle de w. Considérons un réel $\epsilon > 0$. Alors on a

$$\begin{aligned} M\sum_{i=1}^{k}\mathcal{R}((w+\epsilon)\gamma^{-i}) &= M\sum_{i=1}^{k}\mathcal{R}((1-\gamma+\epsilon)\gamma^{-i}) \\ &= M\mathcal{R}\left((1-\gamma+\epsilon)\frac{1-\gamma^{-k}}{\gamma-1}\right) \\ &= M\mathcal{R}((\gamma^{-k})-1) + \epsilon M\mathcal{R}\left(\frac{1-\gamma^{-k}}{\gamma-1}\right). \end{aligned}$$

Or on a vu au point (a) que $\mathcal{R}((\gamma^{-k})-1) \leq 0$, donc $M\mathcal{R}((\gamma^{-k})-1) \leq 0$. De plus pour tout $M \in \mathbb{N}$ et $k \in \{1,\ldots,n\}$, il existe $\epsilon_{k,M}$ tel que

$$\epsilon_{k,M} M\mathcal{R}\left(\frac{1-\gamma^{-k}}{\gamma-1}\right) \leq \mathcal{R}w \leq \mathcal{R}(w+\epsilon_{k,M}) \text{ et } \mathcal{R}((w+\epsilon_{k,M})\gamma^{-i}) \neq 0.$$

Posons maintenant $\epsilon_M = \inf_k\{\epsilon_{k,M} \mid k \in \{1,\ldots,n\}\}$. Alors ϵ_M convient. On termine la preuve en remarquant que toutes les inégalités restent vraies si on remplace w par $\frac{w}{|w|}$. □

Proposition 2.2.17 ([9]). *Soient un réel $\beta > 1$ et $M \in \mathbb{N}_0$ tels que $M < \beta < M+1$ et $\gamma \neq \beta$ un nombre complexe.*

(i) Si $|\gamma| > 1$, alors il existe une suite d'entiers $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ bornée par M telle que $s_0 = -1$, $\sum_{i=0}^{\infty} s_i\beta^{-i} = 0$ et $\sum_{i=0}^{\infty} s_i\gamma^{-i} \neq 0$.

(ii) Si $|\gamma| = 1$, alors il existe une suite d'entiers $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ bornée par M telle que $s_0 = -1$ et $\sum_{i=0}^{\infty} s_i\beta^{-i} = 0$ et que les sommes partielles $\sum_{i=0}^{n} s_i\gamma^{-i}$, où $n \in \mathbb{N}$, ne sont pas bornées.

Démonstration. On distingue quatre cas en fonction de l'appartenance de γ à l'ensemble des réels positifs et du module de γ.

Cas 1 : Si $\gamma \in]1,\infty[$, alors considérons une (β, B_M)-représentation $1 = \sum_{i=1}^{\infty} s_i\beta^{-i}$. En particulier on a $s_i \in B_M = \{0,1,\ldots,M\}$ pour tout $i \in \{1,2,\ldots\}$. Ceci est possible car $M < \beta \leq M+1$, donc il existe au moins la représentation gloutonne de 1. Si on pose $s_0 = -1$, on a trouvé la suite cherchée. En effet, la fonction $p \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s_i}{p^i}$ est strictement monotone sur $]1,\infty[$, car si $p < p'$, alors $\frac{1}{p} > \frac{1}{p'}$, donc $\frac{1}{p^i} > \frac{1}{p'^i}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. On en tire que $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{s_i}{p^i} > \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s_i}{p'^i}$. Comme cette fonction est strictement monotone, elle est injective, donc $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{s_i}{p^i} \neq 0$ si $p \neq \beta$.

Cas 2 : Si $\gamma = 1$, on considère la même suite $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ que dans le cas 1. Rappelons que $s_i \geq 0$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots\}$. On distingue maintenant le cas où la suite $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est fini ou infinie.

Si cette suite est infinie, alors on a $s_i > 0$ pour une infinité d'indices i. On en déduit que

$$\sum_{i=0}^{\infty} s_i \gamma^{-i} = \sum_{i=0}^{\infty} s_i = \infty,$$

c'est-à-dire qu'elle ne converge pas et la suite de sommes partielles n'est donc pas bornée.

Si la suite $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ a un dernier élément non nul s_n, alors comme $M < \beta$, on a

$$\frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{M} > \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{\beta^i} = 1.$$

On en déduit que $s_0 + s_1 + \cdots + s_n > M - 1 \geq 0$, donc en remplaçant la suite finie $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ par la suite infinie $(s_0, \ldots, s_n)^{\infty}$, on a

$$\sum_{i=0}^{\infty} s_i \beta^{-i} = 0 \text{ et } \sum_{i=0}^{\infty} s_i \gamma^{-i} = \sum_{i=0}^{\infty} s_i = \infty.$$

Cas 3 : Si $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^+$ et $|\gamma| > 1$, alors soit w un nombre complexe de module 1, donné par le lemme 2.2.16. Posons $P = \{i \in \mathbb{N} \mid \mathcal{R}(w\gamma^{-i}) \leq 0\}$. Soit k le plus petit entier vérifiant la relation

$$\sum_{i=1}^{k} M\beta^{-i} + \sum_{i>k,\ i\in P} M\beta^{-i} \geq 1.$$

Un tel k que existe car

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{M}{\beta^i} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{M}{\beta^i} - M = \frac{M}{1 - \frac{1}{\beta}} - M = \frac{M\beta}{\beta - 1} - M = \frac{M}{\beta - 1}, \tag{2.25}$$

et $\frac{M}{\beta-1} > 1$ car $M > \beta - 1$ par hypothèse. Cela prouve l'existence de k. Remarquons que $\mathcal{R}(w\gamma^{-k}) > 0$, car sinon $k \in P$ et donc

$$\sum_{i=1}^{k-1} M\beta^{-i} + \sum_{i>k-1,\ i\in P} M\beta^{-i} \geq 1,$$

ce qui est absurde vu la minimalité de k. Donc $k \notin P'$. Soit $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la suite obtenue en appliquant le lemme 2.2.12 avec $P' = P \cup \{1, \ldots, k\}$. Analysons les éléments de la suite $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ainsi obtenue avant de conclure. Remarquons tout d'abord que

$$s_i \leq 0 \text{ pour tout } i \notin P \text{ et que } |s_i| \leq M \text{ pour tout entier } i. \tag{2.26}$$

De plus, on a d'une part $s_j = M$ si $0 < j < k$, car sinon

$$\sum_{i=1}^{k-1} M\beta^{-i} \geq \sum_{i=1}^{k-1} s_i\beta^{-i} + \beta^{-j} = \sum_{i=1}^{k-1} s_i\beta^{-i} + \beta^{k-j}\beta^{-k} \overset{(2.27)}{>} \sum_{i=1}^{k} s_i\beta^{-i},$$

vu que

$$\beta^{k-j} \geq \beta > M \geq s_k, \tag{2.27}$$

et d'autre part $1 \leq s_k \leq M$ si $k > 0$, car sinon $-M \leq s_k \leq 0$ et

$$\sum_{i=1}^{k-1} M\beta^{-i} \geq \sum_{i=1}^{k-1} s_i\beta^{-i} = \sum_{i=1}^{k} s_i\beta^{-i}.$$

En effet, comme $k \in P' = P \cup \{1, \ldots, k\}$ et $-M \leq s_k \leq 0$, on a $s_k = 0$. Dans tous les cas, comme

$$k \notin P, \tag{2.28}$$

on a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k-1} M\beta^{-i} + \sum_{i>k-1,\ i\in P} M\beta^{-i} &\geq \sum_{i=1}^{k} M\beta^{-i} + \sum_{i>k-1,\ i\in P} M\beta^{-i} \\
&= \sum_{i=1}^{k} M\beta^{-i} + \sum_{i>k,\ i\in P} M\beta^{-i} && \text{(vu (2.28))} \\
&\geq \sum_{i=1}^{\infty} s_i\beta^{-i} && \text{(vu (2.26))} \\
&= -s_0 \\
&= 1,
\end{aligned}$$

où la dernière inégalité découle du fait que $s_i \geq 0$ si $i \in P'$ et $s_i \leq 0$ sinon. Or ceci contredit la minimalité de k. Rappelons qu'on a $\mathcal{R}(w\gamma^{-k}) > 0$ et $1 \leq s_k \leq M$. Considérons maintenant un entier $i > k$.

— Si $i \in P'$, alors $\mathcal{R}(w\gamma^{-i}) < 0$ et $s_i \geq 0$, donc $s_i\mathcal{R}(w\gamma^{-i}) \leq 0$.

— Si $i \notin P'$, alors $\mathcal{R}(w\gamma^{-i}) \geq 0$ et $s_i \leq 0$, donc $s_i\mathcal{R}(w\gamma^{-i}) \leq 0$.

Ces propriétés permettent enfin de conclure. En effet, on trouve en appliquant le lemme 2.2.16 un complexe w vérifiant

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(w\sum_{i=0}^{\infty} s_i\gamma^{-i}) &= -\mathcal{R}(w) + M\left(\sum_{i=1}^{k-1} \mathcal{R}(w\gamma^{-i})\right) + \left(\sum_{i=k}^{\infty} s_i\mathcal{R}(w\gamma^{-i})\right) \\
&\leq -\mathcal{R}(w) + M\left(\sum_{i=1}^{k} \mathcal{R}(w\gamma^{-i})\right) \\
&< 0.
\end{aligned}$$

On en tire que $\sum_{i=0}^{\infty} s_i\gamma^{-i} \neq 0$.

Cas 4 : Si $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^+$ et $|\gamma| = 1$, soit w un nombre complexe avec $|w| = 1$ tel que dans le lemme 2.2.16 au point (b) et construisons la suite $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de la même façon que dans le cas (3). Distinguons deux cas en fonction du caractère fini ou infini de la suite $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Si la suite $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est finie, c'est-à-dire si elle a un dernier élément non nul s_n, alors

— $n \geq \max\{k, 1\}$ car on a montré que $1 \leq s_k \leq M$,
— $\sum_{i=0}^{n} s_i\beta^{-i} = 0$,
— si on pose $c = \sum_{i=0}^{n} s_i\mathcal{R}(w\gamma^{-i})$, on a $c \leq -\mathcal{R}(w) + M\sum_{i=1}^{n}\mathcal{R}(w\gamma^{-i}) < 0$.

De plus, il existe une suite $0 = r_0 < r_1 < \cdots$ telle que $r_{j+1} - r_j > n$ pour tout j et que pour tout j, γ^{-r_j} est assez proche de 1 pour que $\sum_{i=0}^{n} s_i\mathcal{R}(w\gamma^{-r_j-i}) \leq \frac{c}{2}$. En remplaçant la suite $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ par

$$s_0 \cdots s_n 0^{r_1-n-1} s_0 \cdots s_n 0^{r_2-r_1-n-1} s_0 \cdots s_n 0^{r_3-r_2-r_1-n-1} \cdots,$$

on a

$$\sum_{i=0}^{\infty} s_i\beta^{-i} = 0 \text{ et } \sum_{i=0}^{\infty} s_i\mathcal{R}(w\gamma^{-i}) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{c}{2} = -\infty.$$

Donc les sommes partielles $\sum_{i=0}^{\ell} s_i\gamma^{-i}$ ne sont pas bornées.

Si la suite $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est infinie, on procède par l'absurde et on suppose que les sommes partielles $S_r = \sum_{i=0}^{r} s_i w\gamma^{-i}$ appartiennent à un nombre fini de cercles centrés sur 0. Dans ce cas, la suite des sommes partielles est bornée. Remarquons également que $\mathcal{R}(S_k) = -\mathcal{R}(w)+M\sum_{i=1}^{k}\mathcal{R}(w\gamma^{-i}) < 0$ et que $\mathcal{R}(S_k) \geq \mathcal{R}(S_{k+1}) \geq \mathcal{R}(S_{k+2}) \geq \cdots$ car $s_i\mathcal{R}(w\gamma^{-i}) \leq 0$ pour tout $i > k$ par la construction donnée dans le cas 3. De plus, comme la suite $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est infinie et vu le point (ii) du lemme 2.2.16, on a $s_i\mathcal{R}(w\gamma^{-i}) < 0$ pour une infinité d'indices $i > k$ et donc on a $\mathcal{R}(S_i) > \mathcal{R}(S_{i+1})$ pour ces indices. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass il existe une sous-suite convergente S_{r_j} de S_r avec $r_1 \geq k$ telle que

— $0 > \mathcal{R}(S_{r_1}) > \mathcal{R}(S_{r_2}) > \cdots$,
— $\mathcal{R}(S_{r_j}) \to a < 0$,
— $\mathcal{I}(S_{r_j}) \to b$,
— $|S_{r_j}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ pour tout j.

En particulier, comme la suite $\mathcal{R}(S_{r_j})$ converge, on a

$$\mathcal{R}(s_i w\gamma^{-i}) \to 0. \tag{2.29}$$

En utilisant la définition de la tangente à un cercle (cf. figure 2.3), on déduit de ces propriétés que

$$\left|\frac{\mathcal{I}(S_{r_{j+1}} - S_{r_j})}{\mathcal{R}(S_{r_{j+1}} - S_{r_j})}\right| \to \begin{cases} \left|\frac{a}{b}\right| > 0 \text{ si } b \neq 0 \\ \infty \qquad \text{sinon} \end{cases} \tag{2.30}$$

quand $j \to \infty$. On obtient une absurdité dans la suite en montrant que

$$\left|\frac{\mathcal{I}(S_{r_{j+1}} - S_{r_j})}{\mathcal{R}(S_{r_{j+1}} - S_{r_j})}\right| \to 0.$$

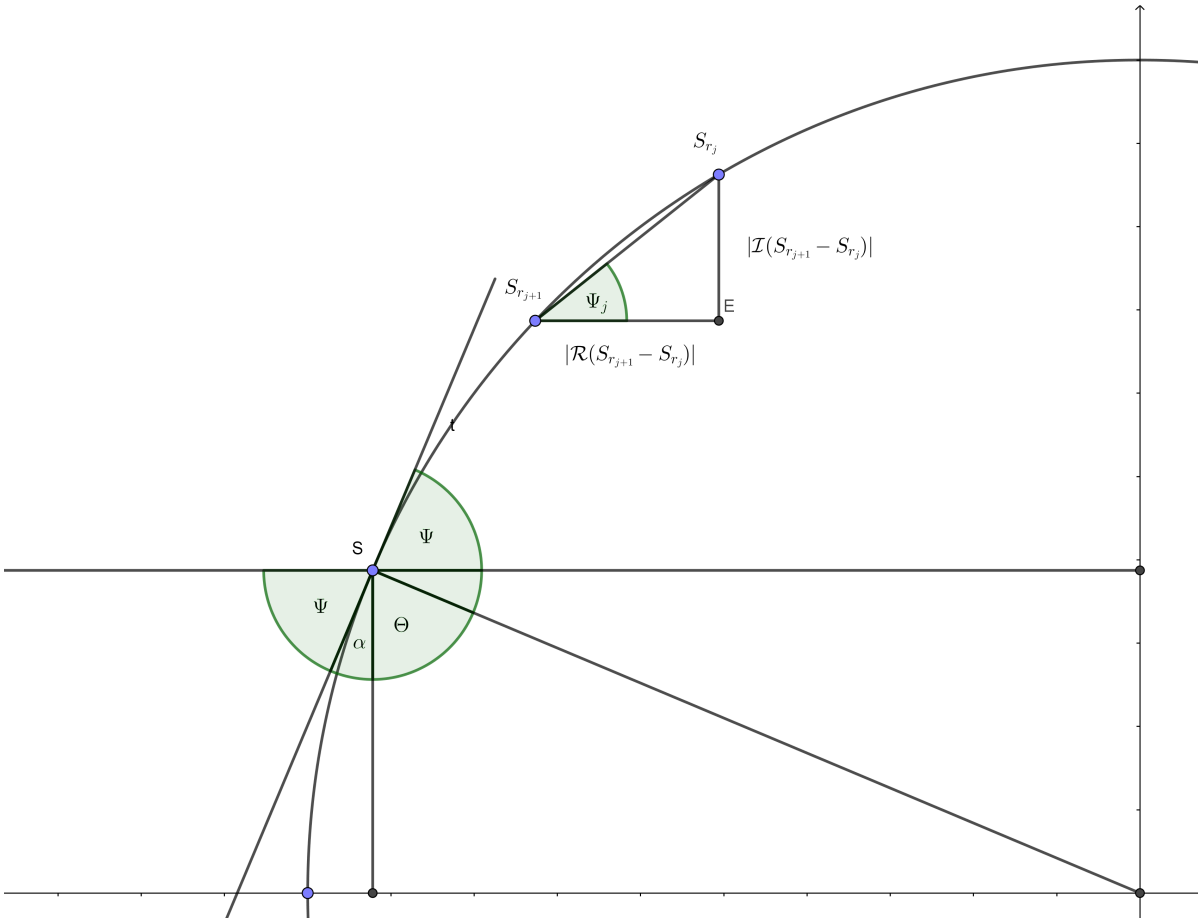

FIGURE 2.3 – Illustration de la convergence (2.30). Si $S_{R_j} \to S$, alors l'angle Ψ_j de la figure converge vers un angle limite Ψ. De plus, pour l'angle α sur la figure, on a $\alpha = \frac{\pi}{2} - \Psi$. Or, comme $\frac{\pi}{2} - \Psi + \Theta = \frac{\pi}{2}$, on a $\Psi = \Theta$. On en déduit que $\tan(\Psi_j) \to \tan(\Psi) = \tan(\Theta) = \left|\frac{a}{b}\right|$.

Pour tout i, on a

$$\begin{aligned} 0 \leq |s_i w\gamma^{-i}| - |\mathcal{I}(s_i w\gamma^{-i})| &= |s_i| \left(1 - \sqrt{1 - |\mathcal{R}(w\gamma^{-i})|^2}\right) \\ &\leq |s_i||\mathcal{R}(w\gamma^{-i})|^2 \qquad \text{(vu (2.31))} \\ &\leq |s_i|^2 |\mathcal{R}(w\gamma^{-i})|^2 \\ &= |\mathcal{R}(s_i w\gamma^{-i})|^2, \end{aligned}$$

car

$$1 - \sqrt{1-x} \leq x \text{ pour tout } 0 \leq x \leq 1. \tag{2.31}$$

Comme $\mathcal{R}(s_i w\gamma^{-i}) \to 0$ (cf. (2.29)), on a pour tout $\varepsilon > 0$

$$0 \leq |s_i| - |\mathcal{I}(s_i w\gamma^{-i})| \leq |s_i w\gamma^{-i}| - |\mathcal{I}(s_i w\gamma^{-i})| \leq \varepsilon |\mathcal{R}(s_i w\gamma^{-i})|,$$

pour tout i assez grand. Donc pour tout j assez grand, la distance $d(\mathcal{I}(S_{r_{j+1}} - S_{r_j}))$ de $\mathcal{I}(S_{r_{j+1}} - S_{r_j}) = \sum_{r_j+1}^{r_{j+1}} \mathcal{I}(s_i w\gamma^{-i})$ au plus proche entier vaut au plus $\varepsilon \sum_{i=r_j+1}^{r_{j+1}} |\mathcal{R}(s_i w\gamma^{-i})|$. Or $\varepsilon \sum_{i=r_j+1}^{r_{j+1}} |\mathcal{R}(s_i w\gamma^{-i})| = \varepsilon |\mathcal{R}(S_{r_{j+1}} - S_{r_j})|$, car la suite $\mathcal{R}(S_{r_j})$ est décroissante. Ccomme (Err : Comme) $\mathcal{I}(S_{r_{j+1}} - S_{r_j}) \to 0$, on en déduit que $|\mathcal{I}(S_{r_{j+1}} - S_{r_j})| \leq \varepsilon |\mathcal{R}(S_{r_{j+1}} - S_{r_j})|$, pour tout j assez grand. Comme ε peut être arbitrairement petit, on a, si $j \to \infty$

$$\frac{|\mathcal{I}(S_{r_{j+1}} - S_{r_j})|}{|\mathcal{R}(S_{r_{j+1}} - S_{r_j})|} \to 0,$$

ce qui contredit (2.30). □

Caractérisation des spectres de nombres ayant un point d'accumulation

En se basant sur les travaux d'Erdös et de Komornik, exposés ci-dessus, et en améliorant certains résultats, Akiyama et Komornik ont donné la réponse complète à la question de cette section sous forme du théorème suivant, caractérisant les spectres ayant un point d'accumulation.

Théorème 2.2.18 ([9]). *Soient $\beta > 1$ et un entier $M \geq 1$. Le spectre $S_{A_M}(\beta)$ n'admet pas de point d'accumulation dans $\mathbb{R}$ si et seulement si β est un nombre de Pisot ou si $\beta \geq M + 1$.*

Démonstration. La condition est suffisante : Vu le théorème 2.2.6, si β est un nombre de Pisot, alors l'implication est vraie. Dans le cas où $\beta \geq M + 1$ on procède de la façon suivante. Soit $y = s_0 + s_1\beta + \cdots + s_n\beta^n \in S_{A_M}(\beta)$ avec $s_n \neq 0$. Montrons que $y \to \infty$ si $n \to \infty$. On a

$$\begin{aligned} |y| &= |s_0 + s_1\beta + \cdots + s_n\beta^n| \\ &\geq |s_n\beta^n| - |s_0 + s_1\beta + \cdots + s_{n-1}\beta^{n-1}| \\ &\geq |\beta^n| - M(1 + \beta + \cdots + \beta^{n-1}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \beta^n \left(1 - M\left(\frac{1}{\beta^n} + \cdots + \frac{1}{\beta}\right)\right) \\
&= \beta^n \left(1 - M \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\beta^k}\right) \\
&= \beta^n \left(1 - \frac{M}{\beta} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\beta^k}\right) \\
&> \beta^n \left(1 - \frac{M}{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\beta^k}\right) \\
&= \beta^n \left(1 - \frac{M}{\beta} \frac{1}{1 - \frac{1}{\beta}}\right) \\
&= \beta^n \left(1 - \frac{M}{\beta} \frac{\beta}{\beta - 1}\right) \\
&= \beta^n \left(1 - \frac{M}{\beta - 1}\right).
\end{aligned}
$$

Or, $\beta > M + 1 \Leftrightarrow \frac{M}{\beta-1} < 1$. Donc $\beta^n(1 - \frac{M}{\beta-1})$ tend vers l'infini si $n \to \infty$. Il en découle qu'aucun intervalle borné ne peut contenir une infinité d'éléments de $S_{A_M}(\beta)$. Vu la proposition 2.2.2, l'ensemble $S_{A_M}(\beta)$ ne peut donc pas avoir un point d'accumulation.

La condition est nécessaire : Supposons que $S_{A_M}(\beta)$ n'a pas de point d'accumulation et que $1 < \beta < M + 1$. On montre que dans ce cas, β est nécessairement un nombre de Pisot, ce qui permet de conclure. Soit alors un entier M' tel que $M' < \beta < M' + 1$ et considérons désormais le spectre $S_{A_{M'}}(\beta) \subset S_{A_M}(\beta)$. Ce spectre ne peut donc pas avoir un point d'accumulation. Par le lemme 2.2.7, le réel β est un entier algébrique. Montrons que tous ses conjugués sont de module strictement inférieur à 1.

Procédons par l'absurde et supposons dans un premier temps qu'il existe un conjugué $\gamma > 1$ de β. Alors en appliquant le point (i) de la proposition 2.2.17, on trouve une suite $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ bornée par M' telle que $s_0 = -1$, $\sum_{i=0}^{\infty} s_i\beta^{-i} = 0$ et $\sum_{i=0}^{\infty} s_i\gamma^{-i} \neq 0$. Or ceci contredit directement le point (i) de lemme 2.2.7.

Supposons maintenant que $|\gamma| = 1$. Alors par le point (ii) de la proposition 2.2.17, il existe une suite d'entiers $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ bornée par M' telle que $s_0 = -1$ et $\sum_{i=0}^{\infty} s_i\beta^{-i} = 0$ et que les sommes partielles $\sum_{i=0}^{n} s_i\gamma^{-i}$, où $n \in \mathbb{N}$, ne sont pas bornées. Donc aucun cercle centré sur 0 ne peut contenir tous les éléments de la suite des sommes partielles. Ceci contredit le point (ii) du lemme 2.2.7. Ainsi, on a démontré que β est un entier algébrique et qu'il n'existe aucun conjugué de β de module supérieur ou égal à 1. Il s'agit donc d'un nombre de Pisot, ce qui permet de conclure. □

Ce résultat peut être reformulé de la façon suivante :

Théorème 2.2.19. *Soit $\beta > 1$. Alors le spectre $S_{A_M}(\beta)$ a un point d'accumulation si et seulement si $\beta < M + 1$ et si β n'est pas un nombre de Pisot.*

Une partie de ce théorème peut être généralisée au cas de nombres complexes ce qui sera utile dans la section 3.2.1. On introduit alors la définition suivante :

Définition 2.2.20 ([42])**.** Un *nombre de Pisot complexe* est un entier algébrique β tel que $|\beta| > 1$ et que tous ces conjugués différents de $\overline{\beta}$ sont de module strictement inférieur à 1.

Théorème 2.2.21 ([42])**.** *Soit β un nombre complexe tel que $|\beta| > 1$, et soit $A \subseteq \mathbb{Q}(\beta)$ un alphabet fini contenant 0. Si une des deux conditions suivantes est vérifiée,*

(i) le nombre β est un réel et β ou $-\beta$ est un nombre de Pisot,

(ii) on a $\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et β est un nombre de Pisot complexe,

alors le spectre $S_A(\beta)$ n'a pas de point d'accumulation.

Démonstration. Soit $\beta = \beta_1$ un nombre de Pisot complexe de degré r (i.e. le degré de son polynôme minimale vaut r, cf. définition 1.3.5) et de conjugués $\beta_2 = \overline{\beta_1}, \beta_3, ..., \beta_r$. Alors on a $|\beta_k| < 1 \ \forall k \in \{3, 4, \ldots, r\}$. Considérons le morphisme

$$\sigma_k : \mathbb{Q}(\beta_1) \mapsto \mathbb{Q}(\beta_k) : m + n\beta \mapsto m + n\beta_k$$

induit par $\beta_1 \mapsto \beta_k$. Comme A est fini, il existe un entier q tel que qA est inclus dans l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\beta_1)$. Vu le théorème 1.3.15, la norme $N(qa) = q^r \Pi_{k=1}^r |\sigma_k(a)|$ est un entier pour tout a dans A. On montre maintenant qu'on peut de minorer la distance entre deux éléments du spectre. Soient $x, y \in S_A(\beta)$, avec $x \neq y$. Alors, on a la β-représentation suivante pour la différence :

$$x - y = v = \sum_{j=0}^{n} b_j \beta^j \text{ où } n \in \mathbb{N} \text{ et } b_j \in A - A.$$

Posons $c_k = \max\{|\sigma_k(a)| : a \in A\}$. On a, pour tout $k \in \{3, 4, \ldots, n\}$

$$|\sigma_k(v)| \leq \sum_{j=0}^{n} |b_j||\beta_k|^j \leq 2c_k \sum_{j=0}^{\infty} |\beta_k|^j \leq 2c_k \frac{|\beta_k|}{1 - |\beta_k|}.$$

Comme précédemment, les qb_j appartiennent à l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\beta_1)$, car $b_j \in A - A$ et vu la définition de q. De plus, β est un entier algébrique, donc les β^j le sont également (cf. section 1.3). On en tire que $qv = \sum_{j=0}^{n} qb_j\beta^j$ est aussi un entier algébrique. Comme précédemment, vu le théorème 1.3.15 sa norme $N(qv)$ est un entier non nul. On a donc

$$1 \leq N(qv) = q^r \Pi_{k=1}^r |\sigma_k(v)| \leq q^r v\,\overline{v}\,\Pi_{k=3}^r |\sigma_k(v)| \leq (2q)^r v\,\overline{v}\,\Pi_{k=3}^r c_k \frac{|\beta_k|}{1 - |\beta_k|}.$$

Ceci permet de minorer la distance au carré $v\overline{v}$ entre deux points distincts par $v\,\overline{v} \geq \left((2q)^r \Pi_{k=3}^r c_k \frac{|\beta_k|}{1-|\beta_k|}\right)^{-1}$. Vu la proposition 2.2.2, ceci implique que $S_A(\beta)$ ne peut avoir un point d'accumulation. □

Pour conclure cette section, donnons le résultat suivant qui met en évidence la particularité de 0 comme point d'accumulation des spectres. C'est à l'aide de cette proposition qu'on peut caractériser les spectres qui sont denses. Signalons à ce moment que ce résultat repose sur l'étude des systèmes de fonctions itérées homogènes (IFS) qui se trouve dans l'annexe A.

Proposition 2.2.22 ([36]). *Soient $M \in \mathbb{N}$ et $1 < \beta < M+1$. Alors $S_{A_M}(\beta)$ n'a pas de point d'accumulation si et seulement si 0 n'est pas un point d'accumulation de $S_{A_M}(\beta)$.*

Démonstration. Posons $\Phi = \{\rho x + b_i\}_{i=0}^{M}$ où $\rho = \beta^{-1}$ et $b_i = i\frac{1-\beta^{-1}}{M}$ pour $0 \leq i \leq M$. Alors Φ est un IFS qui vérifie les conditions du théorème A.10. Or, vu le lemme A.8, Φ vérifie la propriété de séparation simple si et seulement si 0 n'est pas un point d'accumulation de $S_{A_M}(\beta)$, et Φ vérifie la propriété de type fini si et seulement si $S_{A_M}(\beta)$ n'a pas de points d'accumulation dans $\mathbb{R}$. Vu le théorème A.10, si Φ vérifie la propriété de séparation simple, alors Φ vérifie la propriété de type fini, ce qui permet de conclure. □

Exemple 2.2.23.
— Considérons d'abord le spectre $S_{\{-1,0,1\}}(\phi)$ de l'exemple 2.1.2. La figure 2.1 suggère que 0 n'est pas un point d'accumulation de ce spectre [2], car le point 0 est isolé. Le théorème 2.2.19 peut désormais nous le confirmer, car le nombre d'or est un nombre de Pisot.
— Considérons le spectre $S_{\{-1,0,1\}}(\frac{3}{2})$. On a $\frac{3}{2} < M+1$ avec $M = 1$ et $\frac{3}{2}$ n'est pas un nombre de Pisot [3]. Selon le théorème 2.2.19 et la proposition 2.2.22, l'élément 0 est un point d'accumulation de ce spectre. Ce fait est illustré aux figures 2.4 et 2.5. En effet, considérons par exemple l'intervalle $[-0.1, 0.1]$ contenant 0. Dans la figure 2.5 on calcule plus de points de ce spectre que dans la figure 2.4, résultant en plus de points dans l'intervalle $[-0.1, 0.1]$. Ce phénomène peut être répété en calculant encore plus de points du spectre et même en prenant des intervalles contenant 0 et plus courts strictement inclus que $[-0.1, 0.1]$.

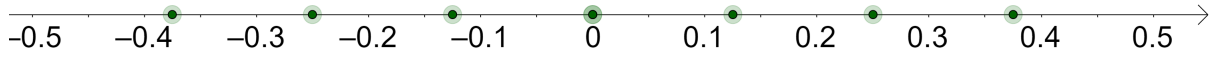

FIGURE 2.4 – Les premiers éléments du spectre $S_{\{-1,0,1\}}(\frac{3}{2})$ appartenant à l'intervalle ouvert $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, obtenus en évaluant tous les polynômes de degré au plus 3 et à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$ en $\frac{3}{2}$.

2. Cette figure n'en est cependant pas une preuve ! Rappelons qu'il existe éventuellement des éléments du spectre encore plus proches de 0 qui n'ont pas encore été énumérés, cf. remarque 2.1.4.
3. En effet, le (Err : un multiple du) polynôme minimal de $\frac{3}{2}$ est $3x - 2$.

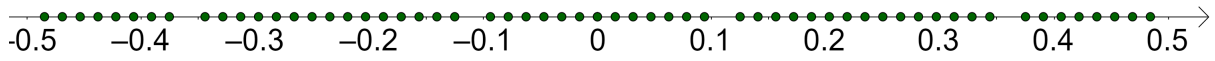

FIGURE 2.5 – Les premiers éléments du spectre $S_{\{-1,0,1\}}(\frac{3}{2})$ appartenant à l'intervalle ouvert $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$, obtenus en évaluant tous les polynômes de degré au plus 6 et à coefficients dans $\{-1,0,1\}$ en $\frac{3}{2}$.

2.3 Densité

Dans cette section, on s'intéresse aux conditions pour lesquelles le spectre d'un nombre est dense dans $\mathbb{R}$. Soient un entier M et un réel $\beta > 1$. Rappelons qu'on note $A_M = \{-M, -M-1, \ldots, M\}$ (Err : $\{-M, -M+1, \ldots, M\}$). La question est donc de déterminer pour quels M et β le spectre $S_{A_M}(\beta)$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exemple 2.3.1. Reprenons les spectres $S_{\{-1,0,1\}}(\phi)$ et $S_{\{-1,0,1\}}(\frac{3}{2})$ de l'exemple 2.2.23. On a vu que 0 n'est pas un point d'accumulation de $S_{\{-1,0,1\}}(\phi)$. Ce spectre ne peut donc pas être dense dans $\mathbb{R}$. En revanche, les figures 2.4 et 2.5 suggèrent que le spectre $S_{\{-1,0,1\}}(\frac{3}{2})$ l'est. En effet, considérons par exemple le point -0.2 et l'intervalle $[-0.3, 0.3]$ le contenant. Le passage de la figure 2.4 à la figure 2.5 montre qu'en calculant plus d'éléments du spectre, des points s'ajoutent à l'intervalle $[-0.3, 0.3]$, et ces nouveau points se rapprochent de 0.2. On verra dans cette section que cela reste vrai pour tout intervalle arbitrairement petit contenant le point -0.2. Quitte à calculer un nombre suffisamment grand d'éléments du spectre, on trouvera toujours un élément du spectre différent de -0.2 appartenant à l'intervalle contenant -0.2 qu'on a fixé. Si le spectre est dense dans $\mathbb{R}$, alors ce raisonnement s'applique à tout autre nombre réel différent de -0.2.

Dans la littérature, les auteurs se sont intéressés à la densité des spectres depuis les années 1960. En guise d'exemple on donne deux lemmes dont les preuves ont été reproduites dans [36] et qui fournissent des réponses partielles (i.e. des conditions suffisantes ou nécessaires pour qu'un spectre soit dense dans $\mathbb{R}$) à la question de densité. Le premier a été prouvé par Garsia et exhibe les nombres de Pisot comme critère.

Lemme 2.3.2. *Soient un réel $\beta > 1$ et un entier $M \geq 1$. Si β est un nombre de Pisot, alors le spectre $S_{A_M}(\beta)$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Montrons qu'on peut minorer les modules des éléments non nuls du spectre. Soient $\beta_2, \ldots, \beta_d$ les conjugués de β et posons $\rho = \max_{2\leq j\leq d} |\beta_j|$. Alors $\rho < 1$. Soit $P(x) = \sum_{i=0}^{n} \epsilon_i x^i$ un polynôme où $\epsilon_i \in A_M$. Supposons que $P(\beta) \neq 0$. Alors $P(\beta_i) \neq 0$ pour tout $2 \leq i \leq d$. Donc $P(\beta)\Pi_{j=2}^{d} P(\beta_j)$ est un entier non nul. En effet, vu la remarque 1.4.5, la somme des puissances d'un nombre de Pisot et de ses conjugués et les sommes des différents produits des conjugués sont des entiers. On a donc

$$P(\beta)\Pi_{j=2}^{d} P(\beta_j) \geq 1$$

et on en tire que

$$\begin{aligned}|P(\beta)| \geq \left|\frac{1}{\Pi_{j=2}^{d} P(\beta_j)}\right| &= \Pi_{j=2}^{d} \frac{1}{|P(\beta_j)|} \\ &\geq \left(\frac{1}{\sum_{i=0}^{n} M\rho^i}\right)^{d-1} \\ &> M^{-(d-1)} \frac{(1-\rho)^{d-1}}{(1-\rho^{n+1})^{d-1}} \\ &> M^{-(d-1)}(1-\rho)^{d-1}.\end{aligned}$$

On en déduit que 0 est un point isolé de $S_A(\beta)$. Ce spectre ne peut donc pas être dense dans $\mathbb{R}$. □

On constate donc que les nombres de Pisot jouent ici aussi un rôle important. Mais le lemme suivant montre que ce n'est pas le seul critère.

Lemme 2.3.3. *Soient un réel $\beta > 1$ et un entier $M \geq 1$. Si $\beta \geq M + 1$, alors le spectre $S_{A_M}(\beta)$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Montrons qu'on peut minorer les modules des éléments non nuls du spectre par une constante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout polynôme P de degré n et à coefficients dans A_M, on a

$$\begin{aligned}|P(\beta)| &\geq \beta^n - \sum_{i=0}^{n-1} M\beta^i \\ &= \beta^n - M\frac{1-\beta^n}{1-\beta} \\ &= \frac{\beta^n(\beta-1)}{\beta-1} + M\frac{1-\beta^n}{\beta-1} \\ &= \frac{\beta^n(\beta-1-M)+M}{\beta-1} \\ &\geq \frac{(\beta-1-M)+M}{\beta-1} = 1.\end{aligned}$$

On en déduit que $S_{A_M}(\beta) \cap (-1,1) = \{0\}$, donc $S_{A_M}(\beta)$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$. □

Passons au théorème 2.3.8 caractérisant les spectres qui sont denses dans $\mathbb{R}$. Il est basé sur un résultat représentant un progrès considérable dans l'étude de la densité des spectres et démontré par Drobot [26]. Donnons alors un peu de contexte concernant ce résultat. Tout d'abord, il fait intervenir la notion de termes en commun de deux polynômes, définie ci-dessous.

Définition 2.3.4. On dit que deux polynômes $P_1(x)$ et $P_2(x)$ ont un terme en commun s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que les coefficients de x^n dans $P_1(x)$ et $P_2(x)$ ne sont pas nuls.

Exemple 2.3.5. Les polynômes $P(x) = x^2 + 1$ et $Q(x) = x^3 + 2x^2$ ont un terme en commun, à savoir x^2, tandis que les polynômes P et $Q'(x) = x^3 - x$ n'en ont pas.

En 1973, Drobot [26] était préoccupé par la question suivante, posée par Parnes. Supposons qu'on effectue une marche dans $\mathbb{R}$ commençant à 0 et où le n-ième pas est de la forme $-\beta^n, 0, \beta^n$ pour un réel β fixé. On commence alors sur l'origine (le point 0) et à l'étape 0, on choisit de faire un pas de $-\beta^0$, de 0, ou de β^0. En d'autres mots, si $\mathbb{R}$ est représenté sur un axe, on peut se déplacer d'une distance de 1 vers la gauche, vers la droite, ou ne pas se déplacer. À la prochaine étape, on peut effectuer les pas $-\beta$, 0 ou β et ainsi de suite. Une telle marche est illustrée à la figure 2.6

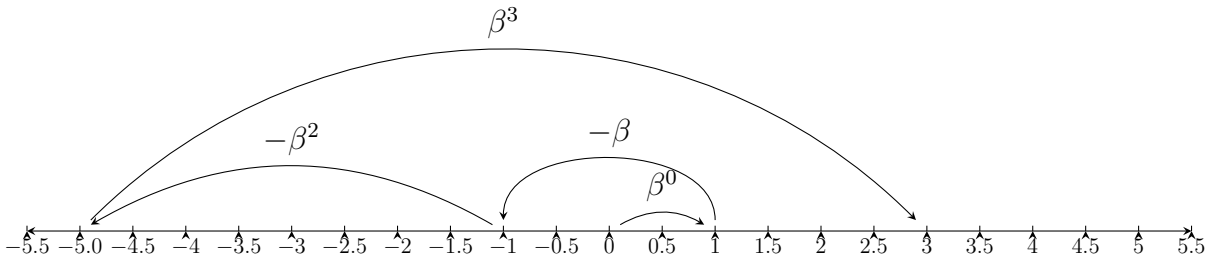

FIGURE 2.6 – Un exemple d'une marche dans $\mathbb{R}$ ou $\beta = 2$. On commence à l'origine et on fait un premier pas $\beta^0 = 1$ vers la droite. Cela est suivi des deux pas vers la gauche de $-\beta = -2$ et $-\beta^2 = -4$ respectivement. On termine avec un pas de $\beta^3 = 8$ vers la droite.

La question est alors de savoir quels sont les points desquels on peut s'approcher avec une précision arbitrairement grande. Une marche à n pas ($n \in \mathbb{N}$) est de la forme

$$a_0 + a_1\beta + a_2\beta^2 + \cdots + a_{n-1}\beta^{n-1} \quad a_i \in \{-1, 0, +1\} \ \forall i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}. \tag{2.32}$$

Il s'agit en toute évidence des éléments d'un spectre de la forme $S_{A_1}(\beta)$ si on impose $\beta > 1$. La question peut donc être reformulée comme la recherche de points d'accumulation d'un spectre. Drobot a alors montré que dans certains cas, tous les nombres réels peuvent être approchés de cette façon. En d'autres mots, Drobot cherchait des critères suffisants pour que le spectre $S_{A_1}(\beta)$ soit dense dans $\mathbb{R}$. Dans son raisonnement, il a montré que la question de densité est liée au point 0 d'un spectre de nombres en formulant une version plus faible du résultat suivant [26].

Proposition 2.3.6. *Soient un réel $\beta > 1$ et un entier $M \geq 1$. Le spectre $S_{A_M}(\beta)$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si 0 est un point d'accumulation de $S_{A_M}(\beta)$.*

Remarque 2.3.7. Drobot [26] avait démontré cette proposition dans le cas où $M = 1$. On a adapté la preuve pour le cas général.

Démonstration. Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes dont les coefficients sont bornés en module par M et soit $\mathcal{P}(t) = \{P(t) \mid P \in \mathcal{P}\}$. La condition est trivialement nécessaire. Montrons alors qu'elle est suffisante. Supposons que 0 est un point d'accumulation de

$S_{A_M}(\beta)$. Montrons que pour tous $n, k \in \mathbb{N}$, il existe un entier $m \geq n$ et un polynôme $P \in \mathcal{P}$ tel que

$$\beta^{-k-1} \leq \beta^m P(\beta) < \beta^{-k}. \tag{2.33}$$

Comme 0 est un point d'accumulation de $S_{A_M}(\beta)$, il existe un polynôme $P \in \mathcal{P}$ tel que $0 < P(\beta) < \beta^{-k-n}$. Il suffit alors de choisir $m \geq n$ tel que $\beta^{-k-m-1} \leq P(\beta) < \beta^{-k-m}$. Remarquons que si $P \in \mathcal{P}$, alors $\pm x^m P(x)$ est aussi dans $\mathcal{P}$.

Fixons maintenant $k \in \mathbb{N}$ et construisons de façon récursive une suite de polynômes $(P_n)_{n\geq 1}$ dans $\mathcal{P}$ qui n'ont pas de termes en commun et dont chaque polynôme vérifie

$$\beta^{-k-1} \leq P_N(\beta) < \beta^{-k}. \tag{2.34}$$

Soit $P_1 \in \mathcal{P}$ vérifiant (2.34). Si $P_1, \ldots, P_N$ ont été définis, n'ont pas de termes en commun et vérifient (2.34), soit n un entier tel que $n > \max\{\deg(P_1), \ldots, \deg(P_N)\}$, $m \geq n$ et P un polynôme vérifiant (2.33). Alors on pose $P_{N+1}(x) = x^m P(x)$. Vu la construction, pour tout $N \in \mathbb{N}$, les polynômes ainsi définis n'ont pas de termes en commun et vérifient donc $P_1 + \cdots + P_N \in \mathcal{P}$ et

$$N\beta^{-k-1} \leq P_1(\beta) + \cdots + P_N(\beta) \leq N\beta^{-k}.$$

Comme N et k sont quelconques, on en déduit que tout nombre réel peut être approché par des éléments de $\mathcal{P}(\beta)$.

□

Cette propriété suggère qu'il y a une façon plus directe de déterminer si un spectre est dense dans $\mathbb{R}$. Une réponse complète à la question de densité a finalement été donnée dans [36] par Feng en 2016 en utilisant le résultat de Drobot et la caractérisation des spectres ayant des points d'accumulation.

Théorème 2.3.8 ([36]). *Soient un réel $\beta > 1$ et un entier $M \geq 1$. Le spectre $S_{A_M}(\beta)$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\beta < M + 1$ et si β n'est pas un nombre de Pisot.*

Démonstration. Vu la proposition 2.3.6, on sait que l'ensemble $S_{A_M}(\beta)$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si 0 est un point d'accumulation de $S_{A_M}(\beta)$. Vu la proposition 2.2.22, le spectre $S_{A_M}(\beta)$ n'a pas de point d'accumulation fini si et seulement si 0 n'est pas un point d'accumulation de $S_{A_M}(\beta)$. De plus, vu le théorème 2.2.19, $S_{A_M}(\beta)$ a un point d'accumulation si et seulement si $\beta < M + 1$ et si β n'est pas un nombre de Pisot. On en déduit l'équivalence souhaitée. □

2.4 Distance entre les éléments consécutifs d'un spectre

Rappelons qu'on a fixé les alphabets

$$A_M = \{-M, -M+1, \ldots, M\} \text{ et } B_M = \{0, 1, \ldots, M\}$$

pour tout $M \in \mathbb{N}$. Considérons le M-spectre $S_{B_M}(\beta)$. Remarquons que dans un intervalle de la forme $[0, \beta^n[$, il existe au plus M^n éléments de $S_{B_M}(\beta)$ (cf. [82]). Tout intervalle borné ne peut donc contenir qu'un nombre fini d'éléments du M-spectre de β. Autrement dit, l'ensemble $S_{B_M}(\beta)$ est discret. Comme cet ensemble est en plus dénombrable, on peut ordonner ses éléments et les énumérer dans un ordre croissant :

$$0 = y_0^{\beta,M} < y_1^{\beta,M} < y_2^{\beta,M} < \cdots .$$

Si le contexte est clair, on s'autorise à écrire

$$0 = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots .$$

On s'intéresse maintenant à la distance entre deux éléments consécutifs de ce spectre.

Exemple 2.4.1. Considérons le nombre d'or ϕ et le spectre $S_{B_1}(\phi)$. En énumérant les polynômes de degré au plus 2 et en les évaluant en ϕ, on trouve comme premiers éléments de ce spectre :

$$0, 1, \phi, \phi+1, \phi^2, \phi^2+1, \phi^2+\phi+1, \ldots$$

Cela est illustré à la figure 2.7.

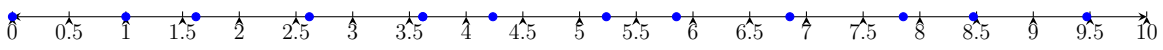

FIGURE 2.7 – Les premiers éléments du spectre $S_{\{0,1\}}(\phi)$.

Définition 2.4.2. On définit

$$\ell_M(\beta) = \liminf_{k\to\infty}(y_{k+1} - y_k)$$

$$L_M(\beta) = \limsup_{k\to\infty}(y_{k+1} - y_k).$$

Ces valeurs ont été étudiées depuis le début des années 1990 pour déterminer sous quelles conditions $y_{k+1} - y_k \to 0$. L'intérêt de la valeur limite 0 sera expliqué dans la section 3.1 : « Développements universels » où on présente comment Erdös et Komornik appliquaient leurs résultats sur la suite $(y_{k+1} - y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à un problème en numération. La présente section est organisée comme suit. Dans un premier temps, on étudie les cas où $\ell_M(\beta) = 0$. Ensuite on traite le cas $L_M(\beta) = 0$ et on discute d'autres bornes ou des valeurs exactes de $\ell_M(\beta)$ et $L_M(\beta)$.

2.4.1 Étude de $\ell_M(\beta)$

La première question traitée ici est de savoir quand $\ell_M(\beta) = 0$. Erdös et al ont remarqué qu'on a l'égalité suivante.

Lemme 2.4.3 ([34]). *On a $\ell_M(\beta) = \inf_k(y_{k+1} - y_k)$ pour tout $M \in \mathbb{N}_0$ et $\beta \in \mathbb{R}$ avec $\beta > 1$, où la suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est la suite des éléments du spectre $S_{B_M}(\beta)$ comme définie au début de cette section.*

Démonstration. Par définition de la borne inférieure, on a $\ell_M(\beta) \geq \inf_k(y_{k+1} - y_k)$. Pour montrer l'autre inégalité, il suffit de démontrer que pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe des entiers arbitrairement grands i et j avec $i < j$ vérifiant $y_j - y_i < \inf_k(y_{k+1} - y_k) + \epsilon$ car alors en particulier, on a $y_{i+1} - y_i \leq y_j - y_i < \inf_k(y_{k+1} - y_k) + \epsilon$. Soient donc $\epsilon > 0$ et k un entier tel que $y_{k+1} - y_k < \inf_k(y_{k+1} - y_k) + \epsilon$. Alors pour tout entier n, les nombres $\beta^n + y_{k+1}$ et $\beta^n + y_k$ sont des éléments du spectre $S_{B_M}(\beta)$. Il existe donc des entiers i, j vérifiant $y_j = \beta^n + y_{k+1}$ et $y_i = \beta^n + y_k$. On a donc $y_j - y_i = y_{k+1} - y_k < \inf_k(y_{k+1} - y_k) + \epsilon$. Comme $i, j \to \infty$ si $n \to \infty$, on peut conclure. □

Feng [36, p. 182] et Akiyama et Komornik [9] ont constaté qu'on a l'équivalence suivante.

Proposition 2.4.4. *Soient $M \in \mathbb{N}_0$ et $\beta \in \mathbb{R}$ avec $\beta > 1$. Alors $\ell_M(\beta) = 0$ si et seulement si 0 est un point d'accumulation de $S_{A_M}(\beta)$.*

Démonstration. Vu le lemme 2.1.5, on a

$$S_{A_M}(\beta) = S_{B_M}(\beta) - S_B(\beta). \tag{2.35}$$

Par définition, le point 0 est un point d'accumulation de $S_{A_M}(\beta)$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $S_{A_M}(\beta) \cap]-\varepsilon, \varepsilon[$ n'est pas vide. Vu (2.35), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe dans ce cas deux éléments de $S_{B_M}(\beta)$ dont le module de la différence est inférieur à ε. En particulier, il existe un indice $j \in \mathbb{N}$ tel que $y_{j+1} - y_j < \varepsilon$. On en déduit que $\inf_k(y_{k+1} - y_k) \leq \varepsilon$. Comme ε peut être choisi arbitrairement, on a $\inf_k(y_{k+1} - y_k) = 0$. On peut alors conclure on appliquant le lemme 2.4.3. □

Ceci établit directement un lien avec les sections précédentes. Vu les résultats démontrés dans ces sections, on peut directement lier $\ell_M(\beta)$ aux points d'accumulation de $S_{A_M}(\beta)$ et à sa densité. La proposition 2.4.4 donne alors une réponse à la première partie de la question de cette section qui était de caractériser les paires (β, M) pour lesquelles $\ell_M(\beta) = 0$. On a donc le résutat suivant :

Proposition 2.4.5 ([36]). *On a $\ell_M(\beta) = 0$ si et seulement si $\beta < M + 1$ et si β n'est pas un nombre de Pisot.*

Démonstration. La proposition 2.4.4 implique que $\ell_M(\beta) = 0$ si et seulement si 0 est un point d'accumulation de $S_{A_M}(\beta)$. Vu la proposition 2.3.6, le nombre 0 est un point d'accumulation du spectre $S_{A_M}(\beta)$ si et seulement si ce spectre est dense dans $\mathbb{R}$. Or le théorème 2.3.8 affirme que $S_{A_M}(\beta)$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si β n'est pas un nombre de Pisot et $\beta < M + 1$. Ceci permet de conclure. □

Parcourons néanmoins une partie de la littérature sur ce sujet et présentons les résultats partiels les plus marquants. Les preuves de ces résultats étant courtes, elles seront également incluses. La propriété suivante est une généralisation d'un résultat de Drobot qu'il a publié dans [26] en 1973.

Proposition 2.4.6. *Soit M un entier non nul. Si $\beta \in]1, M+1[$ n'annule pas de polynôme à coefficients dans A_M, alors $\ell_M(\beta) = 0$.*

Remarque 2.4.7. Les premiers résultats concernant $\ell_M(\beta) = 0$ traitaient souvent le cas où $\beta \in]1, 2[$. Drobot [26] a ainsi démontré la propriété 2.4.6 pour le cas où $M = 1$. La preuve pour le cas général, présentée ci-dessous, est basée sur le même raisonnement.

Démonstration de la proposition 2.4.6. On reprend ici les notations de la proposition 2.3.6. Rappelons alors qu'on note $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes dont les coefficients sont bornés en module par M. Vu la proposition 2.4.4, il suffit de montrer que 0 est un point d'accumulation de $S_{A_M}(\beta)$. Soit alors $\varepsilon > 0$, $\mathcal{P}_n$ le sous-ensemble des polynômes de $\mathcal{P}$ de degré au plus n et $\mathcal{P}_n^+$ l'ensemble des polynômes de $\mathcal{P}_n$ ayant des coefficients dans B_M. Alors il existe $(M+1)^{n+1}$ polynômes dans $\mathcal{P}_n^+$. Soit $P \in \mathcal{P}_n^+$. Alors

$$0 \leq P(\beta) \leq M(1 + \cdots + \beta^n) = M\frac{\beta^{n+1} - 1}{\beta - 1}.$$

Si $P, Q \in \mathcal{P}_n^+$ et $P \neq Q$, alors $P - Q \in \mathcal{P}_n$ et $P(\beta) \neq Q(\beta)$ car par hypothèse, β n'annule pas un polynôme à coefficients dans A_M. Comme il existe $(M+1)^{n+1}$ tels polynômes, le principe des tiroirs implique qu'il existe deux polynômes $P_n \neq Q_n \in \mathcal{P}_n^+$ tels que

$$0 < |P_n(\beta) - Q_n(\beta)| \leq \frac{\beta^{n+1} - 1}{(M+1)^n(\beta - 1)}.$$

Comme $1 < \beta < M + 1$, on a

$$\frac{\beta^{n+1} - 1}{(M+1)^n(\beta - 1)} < \varepsilon$$

pour n suffisamment grand. Cela montre que 0 est un point d'accumulation de $S_{A_M}(\beta)$ et peut conclure. □

Une autre réponse partielle a été donnée par Bugeaud. Cette proposition est basée sur les techniques utilisées par Frougny en 1992 (cf. [40]) qui sont présentées dans l'annexe C.

Proposition 2.4.8 ([21])**.** *Si β n'est pas un nombre de Pisot, alors il existe un entier M tel que $\ell_M(\beta) = 0$.*

Démonstration. Vu la remarque 2.4.4, il suffit de trouver un entier M tel que que 0 est un point d'accumulation de $S_{A_M}(\beta)$. Supposons que β n'est pas un nombre de Pisot. Vu la proposition C.13, il existe un entier $c \geq 1$ tel que le nombre de restes de la division euclidienne par $x - \beta$ des polynômes associés aux mots de $LF(Z(\beta, c))$ est infini. Or dans ce cas, ces restes sont majorés en module par $\frac{c}{\beta - 1}$. Fixons $\varepsilon > 0$. On peut découper

l'intervalle $\left[0, \frac{c}{\beta-1}\right]$ en un nombre fini d'intervalles de longueur au plus ε. Comme on a un nombre infini de restes bornés, le principe des tiroirs implique qu'il existe deux restes se trouvant dans le même intervalle du découpage de $\left[0, \frac{c}{\beta-1}\right]$. En d'autres mots, il existe deux polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ à coefficients dans $\{-c, \ldots, c\}$ et de degré borné par un entier D satisfaisant

$$0 \neq |P(\beta) - Q(\beta)| < \varepsilon,$$

c'est-à-dire

$$0 \neq \left| \sum_{i=0}^{D} \epsilon_i \beta^i - \sum_{j=0}^{D} \epsilon'_j \beta^j \right| < \varepsilon,$$

où $\epsilon_i, \epsilon'_j \in \{0, 1, \ldots, 2c\}$. Vu le lemmme 2.1.5, cela montre que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément du spectre $S_{A_{2c}}(\beta)$ inférieur à ε. Vu la proposition 2.4.4, on en tire que $\ell_{2c}(\beta) = 0$. En posant $M = 2c$, on peut conclure. □

Ces deux derniers résultats se ressemblent. Ils utilisent tous les deux le principe des tiroirs pour montrer que 0 est un point d'accumulation du spectre $S_{A_M}(\beta)$ pour un certain entier M, ce qui implique $\ell_M(\beta) = 0$. Ces faits mettent encore en évidence l'importance du point 0 d'un spectre. En 1998, Erdös et Komornik ont démontré dans [35] les propriétés suivantes, qui améliorent les résultats de Bugeaud (cf. [21]).

Proposition 2.4.9 ([35]). *Si β est un nombre de Pisot, alors $L_M(\beta) \geq \ell_M(\beta) > 0$, pour tout entier $M \geq 1$.*

Démonstration. Supposons que β est un nombre de Pisot. Alors vu la proposition 2.2.6, le spectre $S_{A_M}(\beta)$ n'a pas de point d'accumulation. En particulier, le nombre 0 n'en est pas un. La proposition 2.4.4 implique alors que $\ell_M(\beta) > 0$. □

Bugeaud [21] a formulé une caractérisation des nombres de Pisot de l'intervalle $]1, 2[$. La proposition 2.4.9 permet d'en donner une démonstration alternative, valant pour tous les nombres de Pisot.

Proposition 2.4.10. *Le réel β est un nombre de Pisot si et seulement si $\ell_M(\beta) > 0$ pour tout entier M.*

Démonstration. La condition est nécessaire : Si β est un nombre de Pisot, alors vu la proposition 2.4.9, on a $\ell_M(\beta) > 0$.
La condition est suffisante : Il découle de la contraposée de la proposition 2.4.8 que si $\ell_M(\beta) > 0$ pour tout $M \in \mathbb{N}$, alors β est un nombre de Pisot. □

Le résultat suivant montre encore à quel point Erdös et Komornik ont fait des progrès dans l'étude des spectres. Comme la proposition 2.4.5 améliore l'énoncé suivant, la démonstration sera omise.

Proposition 2.4.11 ([35]). *Si β n'est pas un nombre de Pisot, alors $\ell_M(\beta) = 0$, pour tout entier $M \geq \left\lceil \beta - \frac{1}{\beta} \right\rceil + \lceil \beta - 1 \rceil$.*

Ici aussi, Erdös et Komornik croyaient que cette borne n'était pas optimale. Leur doute était basé sur le point (b) du lemme 2.4.12.

2.4.2 Étude de $L_M(\beta)$

En ce qui concerne $L_M(\beta)$, il n'existe que des résultats partiels jusqu'à présent. Commençons avec ceux d'Erdös et Komornik, démontrés en 1998.

Lemme 2.4.12 ([35]). *(i) Si $M \geq \beta - 1$, alors $y_{k+1} - y_k \leq 1$ pour tout k. En particulier, $L_M(\beta) \leq 1$.*
(ii) Si $M \leq \beta - 1$, alors $y_{k+1} - y_k \geq 1$ pour tout k. De plus, $y_{k+1} - y_k = 1$ pour une infinité d'indices k donc $\ell_M(\beta) = 1$. En particulier, $L_M(\beta) \geq 1$.

Démonstration. Pour tout réel $\beta > 1$ et pour tout entier $M \geq 1$, définissons la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ comme suit. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit

$$k = \epsilon_0 + \epsilon_1(M+1) + \epsilon_2(M+1)^2 + \cdots + \epsilon_p(M+1)^p \tag{2.36}$$

sa représentation dans la base $(M+1)$, avec $p \in \mathbb{N}$. On a alors $\epsilon_i \in \{0, 1, \ldots, M\}$ pour tout $i \in \{0, 1, \cdots, p\}$ (Err : $\{0, 1, \ldots, p\}$). Posons

$$x_k^{\beta,M} = \epsilon_0 + \epsilon_1\beta + \epsilon_2\beta^2 + \cdots + \epsilon_p(M+1)^p$$

Alors $x_0 = 0$, $x_k \to \infty$ si $k \to \infty$ et les suites $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartiennent au même spectre $S_{A_M}(\beta)$.

Remarquons également que chaque y_ℓ correspond à un x_k pour un certain k, car k parcourt tout $\mathbb{N}$ et engendre donc tous les mots de B^*_{M+1}. Cependant, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ n'est pas forcément strictement croissante et peut avoir des éléments qui se répètent. En effet, considérons l'exemple suivant. Si $\beta = \phi$ est le nombre d'or, considérons les mots 011 et 100. Notons $m = \pi_{M+1}(011)$ et $n = \pi_{M+1}(100)$. Remarquons que $n > m$ car les systèmes de numération à base entière préservent l'ordre. Cependant, $x_n = \phi^2 = \phi + 1 = x_m$, ce qui montre que la suite n'est pas strictement croissante et que des éléments se répètent.

Pour démontrer le premier point, il suffit de montrer que $x_{k+1} - x_k \leq 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En effet, si cela est vrai, alors comme $x_0 = 0$ et comme $x_k \to \infty$, tout intervalle $[a, a+1]$ de longueur 1 où $a \geq 0$, contient au moins un des x_k et donc aussi un des y_k. En particulier, pour chaque k, l'intervalle $[y_k, y_k + 1]$ contient au moins un y_ℓ pour un entier $\ell > k$. Ceci implique $y_{k+1} - y_k \leq 1$. Soit alors

$$x_{k+1} = \epsilon'_0 + \epsilon'_1\beta + \epsilon'_2\beta^2 + \cdots + \epsilon_q(M+1)^q$$

et soit j le plus petit entier tel que $\epsilon'_j > \epsilon_j$. Si $p < q$, où p est donné par (2.36), alors on étend la représentation de k avec des 0 à gauche pour qu'ils soient de la même longueur. Remarquons qu'en ajoutant 1 à k, on crée potentiellement un report. Alors j marque la position de l'epsilon qui absorbe ce report. Autrement dit, pour tout $i < j$, on a $\epsilon_i = M$ et

$\epsilon_j < M$. On en déduit que pour tout $i < j$, on a $\epsilon'_i = 0$ et $\epsilon'_j = \epsilon_j + 1$. De plus, pour tout $i > j$, on a $\epsilon'_i = \epsilon_i$. Alors

$$x_{k+1} - x_k = \beta^j - M(\beta^{j-1} + \cdots + \beta + 1) = \frac{\beta^j(\beta - 1 - M) + M}{\beta - 1}.$$

Or le maximum de $\dfrac{\beta^j(\beta - 1 - M) + M}{\beta - 1}$ est en $j = 0$, on trouve donc que

$$\frac{\beta^j(\beta - 1 - M) + M}{\beta - 1} \leq 1,$$

ce qui permet de conclure.

Passons au deuxième point et supposons que $M \leq \beta - 1$. En procédant de la même façon que pour le point (i), on a encore

$$x_{k+1} - x_k = \beta^j - M(\beta^{j-1} + \cdots + \beta + 1) = \frac{\beta^j(\beta - 1 - M) + M}{\beta - 1}.$$

Or comme le minimum de $\dfrac{\beta^j(\beta - 1 - M) + M}{\beta - 1}$ est en $j = 0$, on trouve que

$$\frac{\beta^j(\beta - 1 - M) + M}{\beta - 1} \geq 1.$$

Les éléments de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ne peuvent donc pas se répéter et on en déduit que $y_k = x_k$ pour tout entier k. On a donc

$$y_{k+1} - y_k \geq 1 \tag{2.37}$$

pour tout entier k. Il reste à montrer que $y_{k+1} - y_k = 1$ pour une infinité de d'indices k. Pour tout entier $n \geq 1$, soit k tel que $y_k = \beta^n$. Alors $y_{k+1} \geq \beta^n + 1$, vu (2.37). Comme $\beta^n + 1$ est un élément du spectre $S_{B_M}(\beta)$, il appartient à la suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$. On peut conclure que $y_{k+1} = \beta^n + 1$, c'est-à-dire $y_{k+1} - y_k = 1$. □

Ce lemme donne déjà des informations importantes sur la structure d'un spectre. Le point (i) donne une condition suffisante pour que la distance entre deux éléments d'un spectre soit bornée. Deux points consécutifs ne peuvent donc pas être arbitrairement éloignés. On dit alors que le spectre est relativement dense. Ce concept sera appliqué dans la section 3.3.

Lemmes techniques

Les trois lemmes techniques qui suivent seront utiles pour démontrer la proposition 2.4.18 fournissant une condition suffisante sur le couple (β, M) pour que $L_M(\beta) = 0$.

Lemme 2.4.13 ([35]). *Soient $u_0 < u_1 < \cdots, v_0 < v_1 < \cdots$ et $z_0 < z_1 < \cdots$ trois suites réelles croissantes telles que chaque somme $u_k + v_\ell$ apparait dans la suite $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Supposons que l'ensemble $\{u_k - u_\ell | k, l = 0, 1, \in \mathbb{N}\}$ a un point d'accumulation fini a, que $v_k \to +\infty$ et que la suite $(v_{k+1} - v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée par une constante b. Alors* $\liminf_{k\to\infty}(z_{k+1} - z_k) = 0$.

Démonstration. Soit $(u'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que les différences $u'_{2n+1} - u'_{2n}$ sont toutes différentes et appartiennent à l'intervalle $]a-1, a+1[$. Fixons un entier N suffisamment grand et soit γ un réel tel que $\gamma \geq u'_{2n} + v_0$ pour tout $n \in \{1, 2, \ldots, N^2\}$. Le but est de trouver des éléments de la suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dont la distance est inférieure à $\frac{C}{N}$ pour une certaine constante C. Vu la définition de b, pour tout $n \in \{1, 2, \ldots, N^2\}$, il existe un élément v'_n de la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tel que pour tout $n \in \{1, 2, \ldots, N^2\}$,

$$\gamma \leq u'_{2n} + v'_n \leq \gamma + b. \tag{2.38}$$

Vu le choix de la sous-suite $(u'_k)_{k\in\mathbb{N}}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$a - 1 \leq u'_{2n+1} - u'_{2n} \leq a + 1. \tag{2.39}$$

Vu (2.38), on a pour tout $n \in \{1, 2, \ldots, N^2\}$

$$a + \gamma - 1 \leq u'_{2n+1} + v'_n \leq a + \gamma + b + 1. \tag{2.40}$$

Remarquons que les nombres $u'_{2n} + v'_n, u'_{2n+1} + v'_n$ appartiennent tous à la suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Distinguons maintenant le cas où il existe au moins N éléments différents $u'_{2n} + v'_n$ vérifiant (2.38) et le cas où il existe au moins N termes égaux.
Cas 1 : S'il existe au moins N nombres différents $u'_{2n} + v'_n$ vérifiant (2.38), alors la différence entre ces éléments est bornée par b. Par le principe des tiroirs, il existe alors deux éléments dont la différence est majorée par $\frac{b}{N}$. On a donc

$$\inf_k (z_{k+1} - z_k) \leq \frac{b}{N}. \tag{2.41}$$

Cas 2 : S'il existe au moins N termes égaux, alors vu le choix de la suite $(u'_k)_{k\in\mathbb{N}}$, les sommes correspondantes $u'_{2n+1} + v'_n$ dans (2.40) sont toutes différentes et leurs différences sont bornées par $b + 2$. Par le principe des tiroirs il existe alors deux éléments dont la différence est majorée par $\frac{b+2}{N}$ et on a donc

$$\inf_k (z_{k+1} - z_k) \leq \frac{b+2}{N}.$$

De plus, cette dernière inégalité est aussi vérifiée dans le premier cas. Comme cela est vrai pour tout entier N, on trouve, en laissant tendre N vers l'infini que

$$\inf_k (z_{k+1} - z_k) = 0.$$

Or vu le lemme 2.4.3, on a $\ell_M(\beta) = \inf_k (z_{k+1} - z_k)$ ce qui permet de conclure. □

Pour continuer leur étude de $L_M(\beta)$, Erdös et Komornik ont généralisé les suites $(y_k^{\beta,m})_{k\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

Définition 2.4.14 ([35]). Si $\beta > 1$ est un réel et si $T = (T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers, soit $(y_k^{\beta,T})_{k\in\mathbb{N}}$ la suite strictement croissante de tous les réels y qui ont au moins une représentation de la forme

$$y = \epsilon_0 + \epsilon_1\beta + \cdots + \epsilon_n\beta^n$$

pour un $n \geq 0$ et des coefficients $\epsilon_i \in \{0, 1, \ldots, T_i\}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. On a alors

$$0 = y_0^{\beta,T} < y_1^{\beta,T} < y_2^{\beta,T} < \cdots .$$

Remarque 2.4.15. Si T est la suite constante dont tous les éléments sont égaux à un entier non nul M, alors on retrouve la suite $(y_k^{\beta,M})_{k\in\mathbb{N}}$.

Dans ce qui suit, on suppose que $T_i \geq 1$ pour une infinité d'indices i. Dans ce cas, $y_k^{\beta,T} \to \infty$ si $k \to \infty$.

Lemme 2.4.16 ([35]). *Si $U = (U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite périodique de période d et si $\beta^d \leq U_a + 1$ pour un certain a, alors $y_{k+1}^{\beta,U} - y_k^{\beta,U} \leq \beta^a$ pour tout k.*

Démonstration. Notons m l'élément U_a de la suite U. La preuve de ce résultat est analogue à celle du lemme 2.4.12. Posons pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$x_k = \epsilon_0\beta^a + \epsilon_i\beta^{a+d} + \epsilon_2\beta^{a+2d} + \cdots + \epsilon_p\beta^{a+pd},$$

où $k = \epsilon_0 + \epsilon_1(m+1) + \epsilon_2(m+1)^2 + \cdots + \epsilon_p(m+1)^p$ est la représentation de k dans la base $m+1$. Cette construction a un sens car la suite B est périodique de période d et pour tout n, $\epsilon_n \in \{0, 1, \ldots, U_{a+nd}\} = \{0, 1, \ldots, m\}$. Alors tous les éléments x_k apparaissent dans la suite $(y_k^{\beta,U})_{k\in\mathbb{N}}$ et $x_k \to \infty$ si $k \to \infty$. Il suffit alors de prouver que $x_{k+1} - x_k \leq \beta^a$ pour tout $k \geq 0$. Pour un k donné, notons n le plus petit entier tel que $\epsilon_n < m = U_a$. Comme dans la preuve du lemme 2.4.12, si on ajoute 1 à k, alors l'entier n représente la position où le report sera absorbé dans la base $m+1$. Alors

$$x_{k+1} - x_k = \beta^{a+nd} - m\sum_{i=0}^{n-1}\beta^{a+id} = \beta^{a+nd} - m\frac{\beta^{a+nd} + \beta^a}{\beta^d - 1} = \frac{(\beta^d - 1 - m)\beta^{a+nd} + m\beta^a}{\beta^d - 1} \leq \beta^a,$$

car $\frac{(\beta^d-1-m)\beta^{a+nd}+m\beta^a}{\beta^d-1}$ atteint sont maximum β^a en $n = 0$. □

Lemme 2.4.17 ([35]). *Soient T, U, V et W des suites périodiques vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) L'ensemble $Y^{\beta,T} = \{y_\ell^{\beta,T} - y_k^{\beta,T} | k, \ell \in \mathbb{N}\}$ a un point d'accumulation.

(ii) La suite $(y_{k+1}^{\beta,U} - y_k^{\beta,U})_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée.

(iii) La suite $(y_{k+1}^{\beta,V} - y_k^{\beta,V})_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée.

(iv) On a $T + U + V \leq W$.

Alors

$$y_{k+1}^{\beta,W} - y_k^{\beta,W} \to 0 \text{ si } k \to \infty. \tag{2.42}$$

Démonstration. Ce lemme est démontré en trois étapes. Les deux premières consistent à extraire des sous-suites de $(y_k^{\beta,T+U})_{k\in\mathbb{N}}$, qui permettent de conclure dans l'étape 3. Soit M une période commune des trois suites T, U, V. Alors $T+U$ et $T+U+V$ ont aussi la période M.

Etape 1 : Soit $\sigma' > 0$. Alors il existe une sous-suite $(z_k)_{k\geq 1}$ de $(y_k^{\beta,T+U})_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant

(a) Si $i \neq j$, alors z_i et z_j n'ont pas de terme en commun,

(b) $\sigma' \leq z_{2i} - z_{2i-1} < \beta^M \sigma' \quad \forall i \in \mathbb{N}_0$.

On construit la suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de proche en proche en appliquant plusieurs fois le lemme 2.4.13. Si on l'applique un première fois avec $u_k = y_k^{\beta,T}$, $v_k = y_k^{\beta,U}$ et $z_k = y_k^{\beta,T+U}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on trouve deux entiers $\ell < k \leq 0$ tels que $0 < y_\ell^{\beta,T+U} - y_k^{\beta,T+U} < \sigma'$. On peut supposer que ces deux éléments n'ont pas de termes β^i en commun (il suffit de les remplacer par 0 s'il y en a). Soit j un entier strictement positif tel que $\sigma' \leq \beta^{jM}\left(y_\ell^{\beta,T+U} - y_k^{\beta,T+U}\right) < \beta^M\sigma'$ et posons $z_1 = \beta^{jM} y_k^{\beta,T+U}, z_2 = \beta^{jM} y_\ell^{\beta,T+U}$. Ces deux éléments appartiennent à la suite $\left(y_i^{\beta,T+U}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ par la définition de M et satisfont (a) et (b). On définit les termes suivants de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par induction.

Soit alors $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $z_1 < \cdots < z_{2n}$ ont été définis et satisfont (a) et (b). Fixons un entier positif N tel que $\beta^{NM} > z_{2n}$. Alors aucun des nombres $z_1 < \cdots < z_{2n}$ contient un terme de la forme β^i avec $i \geq NM$. En appliquant encore une fois le lemme 2.4.13, on trouve des indices $\ell > k \geq 0$ tels que

$$0 < y_\ell^{\beta,T+U} - y_k^{\beta,T+U} < \beta^{-NM}\sigma'.$$

On peut également supposer qu'ils n'ont pas de terme en commun. Soit j un entier positif tel que $\beta^{-NM}\sigma' \leq \beta^{jM}(y_\ell^{\beta,T+U} - y_k^{\beta,T+U}) < \beta^M\beta^{-NM}\sigma'$. On pose alors

$$z_{2n+1} = \beta^{(N+j)M} y_k^{\beta,T+U}, \quad z_{2n+2} = \beta^{(N+j)M} y_\ell^{\beta,T+U}.$$

Alors z_{2n+1} et z_{2n+2} appartiennent à la suite $(y_i^{\beta,T+U})_{i\in\mathbb{N}}$ par la définition de M, ils n'ont pas de terme commun et ils n'ont pas de terme β^i avec $i < NM$. De plus,

$$\sigma' \leq z_{2n+2} - z_{2n+1} < \beta^M\sigma'.$$

Les propriétés (a) et (b) sont donc vérifiées.

Etape 2 : Montrons que si (i) est vrai, alors pour tous $\sigma > 0$ et $\Sigma > 0$, il existe une sous-suite $w_0, w_1, \ldots, w_j$ de $\left(y_k^{\beta,T+U}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

(c) $0 < w_i - w_{i-1} < \sigma$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, j\}$,

(d) $w_j - w_0 > \Sigma$.

Soient $\sigma > 0$ et $\Sigma > 0$. Construisons d'abord une suite $(z_k)_{k\geq 1}$ comme dans l'étape 1 avec $\sigma' = \beta^{-M}\sigma$. Soit maintenant un entier $j > \frac{\Sigma}{\sigma'}$ et définissons $w_0, w_1, \ldots, w_j$ de la façon

suivante :

$$\begin{aligned}
w_0 &= z_1 + z_3 + z_5 + \cdots + z_{2j-3} + z_{2j-1},\\
w_1 &= z_2 + z_3 + z_5 + \cdots + z_{2j-3} + z_{2j-1},\\
w_2 &= z_2 + z_4 + z_5 + \cdots + z_{2j-3} + z_{2j-1},\\
&\vdots\\
w_{j-1} &= z_2 + z_4 + z_6 + \cdots + z_{2j-2} + z_{2j-1},\\
w_j &= z_2 + z_4 + z_6 + \cdots + z_{2j-2} + z_{2j}.
\end{aligned}$$

Vu (a), les nombres w_i appartiennent tous à la suite $\left(y_k^{\beta,T+U}\right)_{k\in\mathbb{N}}$. Les propriétés (c) et (d) découlent de (b). En effet, $w_i - w_{i-1} = z_{2i} - z_{2i-1}$ et donc

$$0 < \sigma' \leq w_i - w_{i-1} < \beta^M \sigma' = \sigma,$$

pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, j\}$. On a également $w_j - w_0 \geq j\sigma' > \Sigma$, ce qui permet de conclure pour l'étape 2.

Etape 3 : Vu l'hypothèse (iii), la suite $\left(y_{k+1}^{\beta,V} - y_k^{\beta,V}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ a une borne supérieure finie Σ. Fixons $\sigma > 0$. Vu l'étape 2, il existe une sous-suite finie $w_0, w_1, \ldots, w_j$ de la suite $\left(y_k^{\beta,T+U}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant (c) et (d). Comme $y_0^{\beta,V} = 0$ et $\left(y_{k+1}^{\beta,V} - y_k^{\beta,V}\right) \leq \Sigma$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, tout intervalle fermé $I \subset [w_0, \infty[$ de longueur σ contient au moins un nombre de la forme $y_k^{\beta,V} + w_i$. Tous ces nombres appartiennent à la suite $(y_k^{\beta,T+U+V})_{k\in\mathbb{N}}$ et donc, vu l'hypothèse (iv), aussi à la suite $\left(y_k^{\beta,W}\right)_{k\in\mathbb{N}}$. On a alors

$$\limsup_{k\to\infty} y_{k+1}^{\beta,W} - y_k^{\beta,W} \leq \sigma.$$

Comme σ peut être arbitrairement petit, on peut conclure. □

Cas dans lesquels $L_M(\beta) = 0$

On a maintenant les outils nécessaires pour étudier $L_M(\beta)$. Le premier résultat ci-dessous donne des conditions suffisantes pour que $L_M(\beta) = 0$.

Proposition 2.4.18 ([35]). *Si β n'est pas un nombre de Pisot, alors $\ell_M(\beta) = L_M(\beta) = 0$ pour tout $M \geq \left\lceil \beta - \frac{1}{\beta} \right\rceil + 2\lceil \beta - 1 \rceil$.*

Démonstration. Appliquons le lemme 2.4.17 avec les suites constantes

$$T = \left\lceil \beta - \frac{1}{\beta} \right\rceil, U = V = \lceil \beta - 1 \rceil, W = M.$$

Pour pouvoir appliquer ce lemme, il faut vérifier que

(*i*) L'ensemble $Y^{\beta,T} = \{y_\ell^{\beta,T} - y_k^{\beta,T} \mid k, \ell \in \mathbb{N}\}$ a un point d'accumulation.
(*ii*) La suite $(y_{k+1}^{\beta,U} - y_k^{\beta,U})_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée.
(*iii*) La suite $(y_{k+1}^{\beta,V} - y_k^{\beta,V})_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée.
(*iv*) On a $T + U + V \leq W$.

Vu le théorème[4] 2.4.5, on a $\ell_T(\beta) = 0$ si et seulement si β n'est pas un nombre de Pisot et $\beta < T + 1$. La condition (*i*) du lemme 2.4.17 est donc vérifiée. Les conditions (*ii*) et (*iii*) sont vérifiées vu le point (*i*) du lemme 2.4.12 (si $U > \beta - 1$, alors $y_{k+1}^{\beta,U} - y_k^{\beta,U} \leq 1$) et la condition (*iv*) découle de la définition de M. On peut alors appliquer le lemme 2.4.17 et on en déduit que

$$y_{k+1}^{\beta,M} - y_k^{\beta,M} = y_{k+1}^{\beta,W} - y_k^{\beta,W} \to 0 \text{ si } k \to \infty.$$

En d'autres mots, $\ell_M(\beta) = L_M(\beta) = 0$. □

Remarquons que dans les conditions de la propositions 2.4.18, on a toujours $M \geq 3$. En effet, comme $\beta > 1$, on a $\beta^{-1} < 1$ et donc $\beta - \beta^{-1} > 0$ ce qui implique que $\lceil \beta - \beta^{-1} \rceil \geq 1$. De plus $\beta > 1$ implique que $\beta - 1 > 0$, donc $\lceil \beta - 1 \rceil \geq 1$. On en tire que $M \geq \lceil \beta - \beta^{-1} \rceil + 2\lceil \beta - 1 \rceil \geq 3$. Ceci est illustré à la figure 2.8.

Si on restreint les valeurs possibles de β, alors on peut améliorer la borne sur M.

Proposition 2.4.19 ([35]). *Si* $1 < \beta < 2^{\frac{1}{4}}$ *et si* β *est différent du deuxième nombre de Pisot*[5] $p_2 \approx 1.380$, *alors* $\ell_M(\beta) = L_M(\beta) = 0$ *pour tout* $M \geq 1$.

Remarque 2.4.20. Erdös et Komornik ont démontré ce résultat pour le cas où $M = 1$. On adapte légèrement la preuve donnée dans [35] pour le cas général.

Démonstration. Considérons d'abord le cas où $\beta < 2^{\frac{1}{4}}$ et β n'est pas un nombre de Pisot. Ce cas exclut uniquement deux nombres de Pisot. En effet, le troisième nombre de Pisot est $p_3 \approx 1,443$ qui est plus grand que $2^{\frac{1}{4}}$.

Appliquons le lemme 2.4.17 pour les suites T, U, V définies par

$$T_i = \begin{cases} M \text{ si i est pair} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad U_i = \begin{cases} M \text{ si } 4|i-1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad V_i = \begin{cases} M \text{ si } 4|i+1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

pour tout $i \in \mathbb{N}$ et W par la suite constante $W = M$. Vérifions qu'on peut effectivement appliquer ce lemme. Remarquons tout d'abord que $\beta - \frac{1}{\beta} = 1$ si et seulement si $\beta = \phi$, le nombre d'or. Comme $\beta^2 < \sqrt{2} < \phi$, on a

$$\beta^2 - \frac{1}{\beta^2} < 1 \leq M,$$

donc la proposition 2.2.14 (le spectre $S_{A_M}(\beta^2)$ a un point d'accumulation pour tout $M \geq \beta^2 - \frac{1}{\beta^2}$ si β^2 n'est pas un nombre de Pisot) implique que $S_{A_M}(\beta^2)$ a un point d'accumulation.

4. Dans [35], Erdös et Komornik ont appliqué la proposition 2.2.14.

5. Erdös et Komornik suspectaient que la propriété reste vraie pour le deuxième nombre de Pisot également, mais selon Komornik, ils ne sont pas parvenus à le démontrer car la mort d'Erdös a interrompu leurs travaux (cf. [35]).

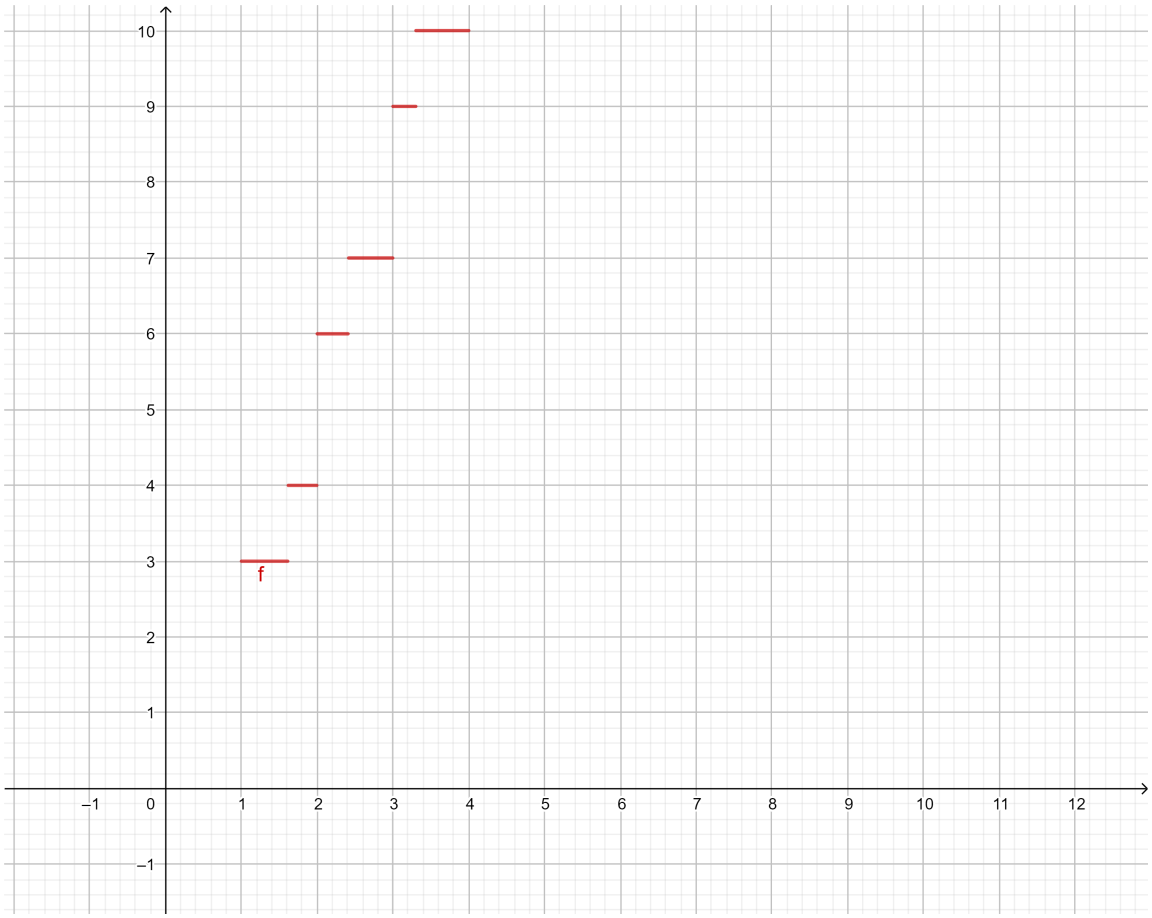

FIGURE 2.8 – Le graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \lceil x - \frac{1}{x} \rceil + 2\lceil x - 1 \rceil$ restreinte à $]1, +\infty[$.

Rappelons que $T_{2i+1} = 0$ et $T_{2i} = M$ pour tout i, donc $Y^{\beta,T} = S_{A_M}(\beta^2)$. Ainsi T vérifie la condition (i) du lemme 2.4.17. Les suites U et V sont de période 4 et $\beta^4 < 2 \leq M + 1 = U_1 + 1 = V_3 + 1$. En appliquant le lemme 2.4.16 avec $d = 4$ et $a = 1$ ou $a = 3$, on trouve que $y_{k+1}^{\beta,U} - y_k^{\beta,U} \leq \beta^1$ et $y_{k+1}^{\beta,V} - y_k^{\beta,V} \leq \beta^3$ pour tout k. Les suites U et V vérifient donc les conditions (ii) et (iii) du lemme 2.4.17. De plus, $T + U + V = W$, donc la condition (iv) est également vérifiée. En appliquant le lemme 2.4.17, on trouve que

$$y_{k+1}^{\beta,M} - y_k^{\beta,M} = y_{k+1}^{\beta,W} - y_k^{\beta,W} \to 0 \text{ si } k \to \infty.$$

En d'autres mots, $\ell_M(\beta) = L_M(\beta) = 0$ ce qui permet de conclure.

Il reste à prouver que $y_{k+1}^{\beta,M} - y_k^{\beta,M} \to 0$ si β est la racine carrée du premier nombre de Pisot $p_1 \approx 1,325$. Dans ce cas, $\beta^3 \approx 1,525$ donc $\sqrt{2} < \beta^3 < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. De plus β^3 n'est pas un nombre de Pisot car $p_5 \approx 1,502 < \beta^3 < p_6 \approx 1,534$. Appliquons le lemme 2.4.17 avec

$$T_i = \begin{cases} M \text{ si } 3|i \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad U_i = \begin{cases} M \text{ si } 3|i-1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad V_i = \begin{cases} M \text{ si } 3|i+1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

pour tout $i \in \mathbb{N}$ et où W est la suite constante $W = M$. Par le théorème 2.2.14, le spectre $S_{A_M}(\beta^3)$ a un point d'accumulation fini. Comme précédemment, la suite T vérifie alors la condition (i) du lemme 2.4.17. On a à nouveau $T + U + V = W$ donc la condition (iv) de ce lemme est également vérifiée. En appliquant le lemme 2.4.16 avec $d = 3$ et $a = 1$ ou $a = 2$, on voit que les conditions (ii) et (iii) sont également vérifiées parce que $\beta^3 < 2 \leq M + 1 = U_1 + 1 = V_2 + 1$. On peut donc appliquer le lemme 2.4.17 ce qui permet de conclure comme dans le cas précédent. □

Pour un alphabet trop petit, la valeur de $L_M(\beta)$ vaut au moins 1, comme en témoigne la proposition suivante.

Proposition 2.4.21 ([35]). *Si $M \leq \beta - \frac{1}{\beta}$, alors $y_{k+1} - y_k = 1$ pour une infinité d'indices k. En particulier, $L_M(\beta) \geq 1 > 0$.*

Démonstration. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, considérons l'intervalle

$$I_j =]M(1 + \beta^2 + \beta^4 + \cdots + \beta^{2j}) - 1, M(1 + \beta^2 + \beta^4 + \cdots + \beta^{2j})[.$$

Remarquons que ces intervalles sont deux à deux disjoints. Pour démontrer le résultat, il suffit de montrer que si $M \leq \beta - \frac{1}{\beta}$, alors aucun des ces intervalles contient un élément de la suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$. En effet, les bornes de ces intervalles de longueur 1 sont des éléments du spectre. Si ces intervalles ne contiennent aucun élément du spectre, alors les bornes des I_j sont deux éléments consécutifs de $S_{A_M}(\beta)$.

On procède par l'absurde et on suppose qu'il existe un intervalle I_j contenant un élément y_k, où j est minimal. Alors $j \geq 1$. En effet, comme $M \leq \beta - \frac{1}{\beta}$, on a $\beta > M$, donc les $M + 1$ premiers éléments de la suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont ceux qui ne contiennent aucune puissance de β :

$$y_0 = 0, y_1 = 1, \ldots, y_M = M.$$

On en déduit que $I_0 = (M - 1, M) =]y_{M-1}, y_M[$, qui ne contient aucun y_k. Supposons que $y_k = \epsilon_0 + \epsilon_1\beta + \cdots + \epsilon_n\beta^n$. Comme $0 \notin I_j$, on peut supposer que $\epsilon_n \geq 1$. Montrons que $n \leq 2j$. Sinon, $y_k \geq \beta^{2j+1} \geq M(1 + \beta^2 + \beta^4 + \cdots + \beta^{2j})$. En effet, comme $M < \beta - \frac{1}{\beta}$, on a $\beta^2 - M\beta - 1 \geq 0$ donc $\beta^{2j+1}(\beta^2 - M\beta - 1) \geq -M$. On a alors

$$\begin{aligned} &\beta^{2j+1} \geq M(1 + \beta^2 + \beta^4 + \cdots + \beta^{2j}) \\ \Leftrightarrow &\beta^{2j+1} \geq M\frac{1 - \beta^{2j+2}}{1 - \beta^2} \\ \Leftrightarrow &\beta^{2j+1}(\beta^2 - M\beta - 1) \geq -M. \end{aligned}$$

Or ceci contredit $y_k \in I_j$. Montrons maintenant que $n = 2j$ et que $\epsilon_{2j} = M$. Sinon, comme $M < \beta$, on a

$$\begin{aligned} y_k &\leq M(1 + \beta^2 + \beta^4 + \cdots + \beta^{2j-1}) + (M - 1)\beta^{2j} \\ &\leq (M - 1) + M(\beta^2 + \beta^4 + \cdots + \beta^{2j}). \end{aligned}$$

En effet, $M(1+\beta^2+\beta^4+\cdots+\beta^{2j-1})+(M-1)\beta^{2j} \leq (M-1)+M(\beta^2+\beta^4+\cdots+\beta^{2j})$ est équivalent à $\beta^{2j}-M\beta-1 \geq 0$. De plus, on a

$$\begin{aligned}(\beta^{2j}-1)(\beta^2-M\beta-1) \geq 0 &\Leftrightarrow \beta^{2j+2}-M\beta^{2j+1}-\beta^{2j}-\beta^2+M\beta+1 \geq 0\\ &\Leftrightarrow \beta^2(\beta^{2j}-M\beta-1) \geq \beta^{2j}-M\beta-1\\ &\Leftrightarrow (\beta^2-1)(\beta^{2j}-M\beta-1) \geq 0.\end{aligned}$$

On en tire que $\beta^{2j}-M\beta-1 \geq 0 \Leftrightarrow \beta^2-M\beta-1 \geq 0$. Or $\beta^2-M\beta-1 \geq 0$ car $M < \beta-\frac{1}{\beta}$. Ceci contredit à nouveau $y_k \in I_j$.

Montrons maintenant que $\epsilon_{2j-1}=0$. Sinon,

$$y_k \geq M\beta^{2j}+\beta^{2j-1} \geq M(1+\beta^2+\beta^4+\cdots+\beta^{2j}).$$

En effet,

$$\begin{aligned}M\beta^{2j}+\beta^{2j-1} \geq M(1+\beta^2+\beta^4+\cdots+\beta^{2j}) &\Leftrightarrow M\beta^{2j}+\beta^{2j-1} \geq M\frac{1-\beta^{2j+2}}{1-\beta^2}\\ &\Leftrightarrow (1-\beta^2)(M\beta^{2j}+\beta^{2j-1}) \geq M-M\beta^{2j+2}\\ &\Leftrightarrow M\beta^{2j}+\beta^{2j-1}-\beta^{2j+1} \geq M\\ &\Leftrightarrow \beta^{2j-1}(\beta^2-M\beta-1) \geq -M.\end{aligned}$$

Or $\beta^{2j-1}(\beta^2-M\beta-1) \geq -M$ car $M < \beta-\frac{1}{\beta}$, donc le membre de gauche est positif. Ceci contredit encore $y_k \in I_j$. On en déduit que $y_k - M\beta^{2j}$ appartient à la suite $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$, donc $y_k - M\beta^{2j} = y_\ell$ pour un certain indice ℓ. Alors $y_\ell \in I_{j-1}$, vu la définition des intervalles I_{j-1} et I_j, ce qui contredit la minimalité de j. □

Akiyama et Komornik ont continué l'étude de $L_M(\beta)$ et ont démontré le lemme 2.4.24 [9], établissant un lien entre ℓ_M et L_M. Pour le démontrer, ils se sont servis des lemmes suivants rappellant et généralisant respectivement les étapes 2 et 3 dans la preuve du lemme 2.4.17.

Lemme 2.4.22. *Soient un réel $\beta > 1$ et un entier $M \geq 1$. Considérons la suite $(y_k^{\beta,M})_{k\in\mathbb{N}}$. Si $\ell_M(\beta)=0$, alors pour tous $\sigma > 0$ et $\Sigma > 0$, il existe des indices n et N avec $n < N$ tels que*

(i) $0 < y_{k+1}^{\beta,M} - y_k^{\beta,M} < \sigma$ pour tout $k \in \{n, n+1, \ldots, N-1\}$,

(ii) $y_N^{\beta,M} - y_n^{\beta,M} > \Sigma$.

Démonstration. L'étape 2 du lemme 2.4.17 implique qu'il existe une sous-suite

$$w_0, w_1, \ldots, w_j$$

de la suite $\left(y_k^{\beta,M}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $0 < w_i - w_{i-1} < \delta$ pour tout $i \in \{1,2,\ldots,j\}$, $w_j - w_0 > \Sigma$. Supposons que $w_0 = y_n^{\beta,M}$ et que $w_j = y_N^{\beta,M}$. Montrons maintenant que, pour tous $i \in \{n, n+1, \ldots, N\}$, on a

$$y_{i+1}^{\beta,M} - y_i^{\beta,M} < \delta.$$

Soit alors $i \in \{n, n+1, \ldots, N\}$. Comme la suite $(w_\ell)_{\ell=0}^{j}$ est une sous-suite de la suite $(y_k^{\beta,M})_{k\in\mathbb{N}}$, il existe un entier ℓ tel que $y_{i+1}^{\beta,M}, y_i^{\beta,M} \in [w_\ell, w_{\ell+1}]$. On en tire que $y_{i+1}^{\beta,M} - y_i^{\beta,M} < \delta$ ce qui permet de conclure. □

Lemme 2.4.23. *Soient $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ trois suites de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ strictement croissantes telles que $u_m + v_l$ est un élément de la suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ pour tous $m, l \in \mathbb{N}$. Faisons également les deux hypothèses suivantes :*

(i) Pour tous réels δ et Δ fixés vérifiant $\delta < \Delta$, il existe des entiers n et N tels que $n < N$ et que $u_{k+1} - u_k < \delta$ pour tout $k \in \{n, n+1, \ldots N-1\}$ et $u_N - u_n > \Delta$,

(ii) On a $v_k \to \infty$ et la suite $(v_{k+1} - v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est majorée par une constante.

Alors on a $z_{k+1} - z_k \to 0$.

Démonstration. Soit Δ une constante majorant la suite $(v_{k+1} - v_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Vu l'hypothèse (i), pour tout $\delta < \Delta$ il existe des entiers n et N avec $n < N$ tels que tous les intervalles $]a, a+\delta[$, avec $a > v_0 + u_n$ contiennent au moins un élément de la forme $v_l + u_m$, donc un élément de la suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Comme δ peut être arbitrairement petit, on en déduit que $z_{k+1} - z_k \to 0$. □

Lemme 2.4.24 ([9])**.** *Soient un réel $\beta > 1$ et un entier $M \geq 1$. Si $\ell_M(\beta^r) = 0$, avec $r \geq 2$, alors $L_M(\beta) = 0$.*

Démonstration. On ne peut pas avoir $\beta^r \geq M+1$ car sinon, vu le point (b) du lemme 2.4.12, on devrait avoir $\ell_M(\beta^r) \geq 1$. Or cela contredit l'hypothèse $\ell_M(\beta^r) = 0$. On a donc $\beta^r < M+1$. Notons $y_k^{\beta^r,M}$ les éléments consécutifs du spectre $S_{B_M}(\beta^r)$. Le résultat se démontre en appliquant le lemme 2.4.23 aux suites

$$(u_k)_{k\in\mathbb{N}} = (y_k^{\beta^r,M}), \quad (v_k)_{k\in\mathbb{N}} = (\beta u_k) \text{ et } (z_k)_{k\in\mathbb{N}} = (y_k^{\beta,M}).$$

Montrons qu'on peut effectivement appliquer ce lemme. Comme, par hypothèse, $\ell_M(\beta^r) = 0$, on peut appliquer le lemme 2.4.22, affirmant que la condition (i) du lemme 2.4.23 est vérifiée. De plus, comme $\beta^r < M+1$, on peut appliquer le point (i) du lemme 2.4.12 à la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$. On trouve alors que $u_{k+1} - u_k \leq 1$ pour tout entier $k \geq 1$. En particulier, $v_{k+1} - v_k = \beta u_{k+1} - \beta u_k \leq \beta$. On en déduit que toutes les conditions nécessaires pour appliquer l'étape 3 du lemme 2.4.17 sont vérifiées et on trouve alors que $z_{k+1} - z_k \to 0$. En particulier, $L_M(\beta) = 0$, ce qui permet de conclure. □

Feng a déduit la propriété suivante de ce lemme.

Théorème 2.4.25 ([36])**.** *Si $1 < \beta < \sqrt{m+1}$ et β^2 n'est pas un nombre de Pisot, alors $L_M(\beta) = 0$.*

Démonstration. Cela découle directement la propriété 2.4.5 et le lemme 2.4.24 avec $r = 2$. □

Dans ce travail, on se restreint uniquement aux cas dans lesquels $\ell_M(\beta) = 0$ ou $L_M(\beta) = 0$. Plusieurs auteurs ont cherché d'autres bornes ou valeurs précises pour des couples (β, M) donnés. On présente ici quelques résultats à titre indicatif. Les preuves seront donc omises.

Théorème 2.4.26 ([30]). *Considérons un entier $r > 1$ et soit β l'unique racine positive du polynôme $P(x) = x^r - x^{r-1} - \cdots - \beta - 1$. Alors $\ell_1(\beta) = \frac{1}{\beta}$.*

Théorème 2.4.27 ([65]). *(i) Soit $\beta \approx 1.466$ la racine positive du polynôme $P(x) = x^3 - \beta^2 - 1$. Alors $\ell_1(\beta) = \beta^2 - 2$.*

(ii) Soit $\beta = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or et soit un entier $M > 0$. Soit ℓ l'entier défini par $\beta^{\ell-2} < M \leq \beta^{\ell-1}$. Alors $\ell_M(\beta) = |F_\ell \beta - F_{\ell+1}|$, où $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de Fibonacci.

Chapitre 3

Les applications des spectres de nombres

Dans le chapitre précédent, certaines applications des spectres ont déjà été mentionnées. Depuis les années 1990, plusieurs autres applications des spectres ont été trouvées. Dans ce travail, on en étudie 5 plus en détail. On commence en revisitant l'application ayant provoqué l'essor que les spectres ont connu par la suite : les développements universels. La seconde et troisième application ont été données par Frougny et Pelantová [42] et concernent la fonction de normalisation et la division en ligne. Ces applications sont basées sur le concept de la rigidité d'une représentation du nombre 0. La quatrième application invite à explorer le monde de la cristallographie et à découvrir différentes facettes des spectres. On termine ce chapitre avec une courte discussion sur l'analogie entre les spectres et les convolutions infinies de Bernoulli.

3.1 Développements universels

Soit $\beta \in]1,2[$ et considérons la β-représentation gloutonne de $1 = \sum_{j=1}^{\infty} t_j \beta^{-j}$. Rappelons qu'on note alors $d_\beta(1) = (t_n)_{n\geq 1}$. Remarquons aussi que $d_\beta(1) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Joó [59] a formulé la question suivante :

« Que peut-on dire sur la longueur des blocs de 0 dans $d_\beta(1)$? » (3.1)

Bogmér et al. ont généralisé cette question dans [19] en ne se restreignant plus à la représentation gloutonne de 1 mais en considérant toutes les représentations possibles de la forme

$$1 = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \beta^{-j}. \tag{3.2}$$

Pour un β fixé, on cherche alors une représentation de 1 contenant des blocs de 0 arbitrairement longs. Plusieurs auteurs se sont intéressés à cette question, cf. [30, 32]. En 1990, Erdös et al. ont lié cette question à l'étude des spectres en démontrant la proposition 3.1.1,

donnant une condition nécessaire pour que 1 possède une telle représentation. Fixons un réel β vérifiant $1 < \beta < 2$. Rappelons qu'on peut écrire $S_{B_1}(\beta) = \{y_0^{\beta,1}, y_1^{\beta,1}, \ldots\}$ où les éléments sont ordonnés dans l'ordre croissant.

Proposition 3.1.1 ([33]). *Si $y_{n+1}^{\beta,1} - y_n^{\beta,1} \to 0$, alors 1 possède une représentation contenant des blocs de 0 arbitrairement longs.*

Démonstration. Il suffit de construire deux suites d'entiers $(i_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ et $(j_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant
(i) $i_0 = j_0 = 0$,
(ii) $0 < 1 - \sum_{\ell=1}^{j_k} \beta^{i_\ell} \leq \beta^{-k-i_{j_k}}$ pour tout $k \geq 0$.
En effet, dans ce cas on a $\Sigma_{\ell=1}^{\infty}\beta^{i_\ell} = 1$ et $i_{1+j_k} \geq i_{j_k} + k$ pour tout $k \geq 1$.

Construisons ces deux suites par récurrence. Posons $i_0 = j_0 = 0$. Soit k un entier positif et supposons que (ii) est vrai pour k. Soit maintenant un entier $m \geq i_{j_k}$ dont la valeur sera précisée ultérieurement et considérons le nombre

$$\beta^m \left(1 - \sum_{\ell=1}^{j_k} \beta^{-i_\ell}\right).$$

Comme $m \geq i_{j_k}$, on a $i \leq m$ pour tout $\ell \in \{1, \ldots, j_k\}$, donc ce nombre est un élément du spectre. Il existe alors un entier n tel que $y_n^{\beta,1} = \beta^m(1 - \sum_{\ell=1}^{j_k} \beta^{-i_\ell})$. Soient maintenant $i_{1+j_k} < \cdots < i_{j_{k+1}}$ tels que

$$y_{n-1}^{\beta,1} = \beta^m \sum_{\ell=1+j_k}^{j_{k+1}} \beta^{-i_\ell}.$$

Alors vu (ii), on a $y_{n-1}^{\beta,1} < y_n^{\beta,1} \leq \beta^{m-k-i_{j_k}}$ et donc $\sum_{\ell=1+\ell_k}^{j_{k+1}} \beta^{-i_\ell} < \beta^{-k-i_{j_k}}$ ce qui implique $i_{1+j_k} > k + i_{j_k} \geq i_{j_k}$. Or si $m \to \infty$, alors $n \to \infty$, donc $y_{n+1}^{\beta,1} - y_n^{\beta,1} \to 0$. On peut donc choisir m de façon à ce que

$$0 < y_n^{\beta,1} - y_{n-1}^{\beta,1} \leq \beta^{-k-1}.$$

On a donc

$$0 < 1 - \sum_{\ell=1}^{j_{k+1}} \beta^{-i_\ell} \leq \beta^{-m-k-1}.$$

Par construction on a $m \geq i_{j_{k+1}}$. En effet, $y_{n-1}^{\beta,1}$ est un élément du spectre, donc tous les exposants de β dans la somme $\beta^m \sum_{\ell=1+j_k}^{j_{k+1}} \beta^{-i_\ell}$ doivent être positifs. On a donc nécessairement $m \geq i_{j_{k+1}}$. La condition (ii) est donc vérifié pour $k+1$. □

Depuis la publication de ce résultat, les spectres ont gagné en importance et plusieurs auteurs se sont impliqués dans la résolution du problème posé par Joò, qui désormais était traduit dans le langage des spectres [1]. Erdös et Komornik [35] ont généralisé le problème de l'existence de blocs de 0 arbitrairement longs en introduisant le concept de développement

1. Remarquons que les spectres ne fournissent qu'une condition suffisante pour la présence de blocs de 0 arbitrairement longs dans un représentation de 1 dans une base β donnée.

universel. Leur étude des spectres leur a alors permis de formuler le théorème 3.1.4 donnant des conditions suffisantes pour qu'un nombre ait un développement universel. On définit ci-dessous alors ce concept et on démontre ensuite un lemme nécessaire pour prouver le théorème 3.1.4.

Définition 3.1.2 ([35]). Soit $\beta > 1$ et $M \in \mathbb{N}_0$. Alors on dit que

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \beta^{-j} \text{ avec } x_j \in B_M \text{ pour tout } j \in \mathbb{N}_0$$

est un *développement universel* de α si pour mot $u \in B_M^*$, u est un facteur du mot infini $x_1 x_2 x_3 \cdots$.

Le lemme suivant montre que sous certaines conditions, pour tout $\alpha \in]0,1]$ et pour tout mot $u \in B_M^*$ avec $M \geq 1$ il existe un mot $v \in B_M^*$ qui est une représentation d'un nombre qui approxime α de avec une précision d'au moins $\beta^{-|u|-|v|}$. En d'autres mots, pour tout mot $u \in B_M^*$ il existe une représentation de α dont u est un facteur. Cette propriété permettra de démontrer le théorème 3.1.4.

Lemme 3.1.3 ([35]). *Considérons le spectre $S_{B_M}(\beta) = \{y_0, y_1, \ldots\}$ avec $\beta > 1$ et $M \in \mathbb{N}$ tels que $y_{k+1} - y_k \to 0$ si $k \to \infty$ et soit $\alpha \in]0,1]$. Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$ et pour tout mot $u \in B_M^N$, il existe un entier n et un mot $x \in B_M^{n+N}$ tel que*
(i) $x_{n+i} = u_i$ pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, N\}$,
(ii) $0 < \alpha - \sum_{i=1}^{n+N} x_i \beta^{-i} < \beta^{-n-N}$.

Démonstration. Posons $A = u_1\beta^{-1} + u_2\beta^{-2} + \cdots + u_N\beta^{-N}$. Pour un entier n assez grand on a $\beta^n\alpha > A$. Dans ce cas, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$y_k < \beta^n\alpha - A \leq y_{k+1}, \tag{3.3}$$

où y_k est le $(k+1)$-ième élément du spectre $S_{B_M}(\beta)$. Si $n \to \infty$ alors $k \to \infty$ et comme par hypothèse $y_{k+1} - y_k \to 0$, on a pour n assez grand

$$0 < y_{k+1} - y_k < \beta^{-N}. \tag{3.4}$$

Des relations (3.3) et (3.4) on déduit alors que

$$\begin{aligned} & y_k < \beta^n\alpha - A \leq y_{k+1} \\ \Rightarrow & y_k\beta^{-n} < \alpha - A\beta^{-n} \leq y_{k+1}\beta^{-n} \\ \Rightarrow & 0 < \alpha - y_k\beta^{-n} - A\beta^{-n} \leq y_{k+1}\beta^{-n} - y_k\beta^{-n} \\ \Rightarrow & 0 < \alpha - y_k\beta^{-n} - A\beta^{-n} \leq \beta^{-n-N}. \end{aligned}$$

Vu que $\alpha \leq 1$, la relation (3.3) implique $y_k < \beta^n$ et comme $y_k \in S_{B_M}(\beta)$, il existe $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ tels que $y_k = \sum_{i=0}^{n-1} b_i\beta^i$. On a finalement

$$y_k\beta^{-n} + A\beta^{-n} = b_{n-1}\beta^{-1} + b_{n-2}\beta^{-2} + \cdots + b_0\beta^{-n} + u_1\beta^{-n-1} + \cdots + u_N\beta^{-n-N}. \tag{3.5}$$

En posant $x_1x_2\cdots x_{n+N} = b_{n-1}b_{n-2}\cdots b_0 \cdot u_1 \cdots u_N$, on peut conclure. □

On a maintenant tous les outils pour démontrer le théorème principal de cette section. On termine en expliquant comment Erdös et Komornik l'ont appliqué pour répondre à la question de Joó (3.1).

Théorème 3.1.4 ([35]). *Considérons le spectre $S_{B_M}(\beta) = \{y_0, y_1, \ldots\}$ avec $\beta > 1$ et $M \in \mathbb{N}_0$ et où la suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. Si $y_{k+1} - y_k \to 0$ lorsque $k \to \infty$, alors pour tout $\alpha \in \left]0, \frac{M}{\beta-1}\right[$, α admet un développement universel.*

Démonstration. Soit $\alpha \in \left]0, \frac{M}{\beta-1}\right[$. On construit le développement universel de α de proche en proche en appliquant plusieurs fois le lemme 3.1.3. Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B_M^*$ une suite de mots telle que $\{B_n \mid n \in \mathbb{N}_0\} = B_M^*$ c'est-à-dire qu'elle contient tous les mots finis sur l'alphabet B_M. Fixons α dans $\left]0, \frac{M}{\beta-1}\right[$. Soit $(x_n)_{n=0}^{i_0}$ une suite finie d'entiers dans B_M telle que

$$0 < \alpha - \sum_{i=0}^{i_0} x_i \beta^{-i} < \beta^{-i_0}. \tag{3.6}$$

Posons

$$\alpha_1 = \beta^{i_0}\left(\alpha - \sum_{i=0}^{i_0} x_i \beta^{-i}\right). \tag{3.7}$$

Alors on a $0 < \alpha_1 < 1$. En appliquant le lemme 3.1.3 à α_1 et B_1, on obtient $n \in \mathbb{N}$ et un mot $x_1' x_2' \cdots x_{n+|B_1|}' \in (B_M)^*$ dont B_1 est un suffixe et vérifiant

$$0 < \alpha_1 - \sum_{i=1}^{n+|B_1|} x_i \beta^{-i} < \beta^{-n-|B_1|}. \tag{3.8}$$

Posons $x_{i_0+1} x_{i_0+2} \cdots x_{i_1} = x_1' x_2' \cdots x_{n+|B_1|}'$. On a alors $i_1 - i_0 = n + |B_1|$ et

$$0 < \alpha_1 - \sum_{i=i_0+1}^{i_1} x_i \beta^{i_0-i} < \beta^{i_0-i_1}. \tag{3.9}$$

Vu la définition de α_1, on a donc

$$\begin{aligned}
&0 < \alpha_1 - \sum_{i=i_0+1}^{i_1} x_i \beta^{i_0-i} < \beta^{i_0-i_1} \\
\Leftrightarrow &0 < \beta^{i_0}(\alpha - \sum_{i=0}^{i_0} x_i \beta^{-i}) - \sum_{i=i_0+1}^{i_1} x_i \beta^{i_0-i} < \beta^{i_0-i_1} \\
\Leftrightarrow &0 < \alpha - \sum_{i=0}^{i_0} x_i \beta^{-i} - \sum_{i=i_0+1}^{i_1} x_i \beta^{-i} < \beta^{-i_1} \\
\Leftrightarrow &\, 0 < \alpha - \sum_{i=0}^{i_1} x_i \beta^{-i} < \beta^{-i_1}.
\end{aligned}$$

On répète maintenant cette construction. Posons

$$a_2 = \beta^{i_1}\left(\alpha - \sum_{i=0}^{i_1} x_i\beta^{-i}\right). \tag{3.10}$$

Alors $0 < \alpha_2 < 1$. En appliquant encore une fois le lemme 3.1.3 à α_2 et B_2, on obtient un mot $x_{i_1+1}x_{i_1+2}\cdots x_{i_2} \in (B_M)^*$ dont B_2 est un suffixe et tel que

$$0 < \alpha - \sum_{i=0}^{i_2} x_i\beta^{-i} < \beta^{-i_2}. \tag{3.11}$$

De proche en proche, on obtient un mot infini $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in (B_M)^{\mathbb{N}}$ tel que tous les B_i sont des facteurs de x et que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$0 < \alpha - \sum_{i=0}^{i_k} x_i\beta^{-i} < \beta^{-i_k}. \tag{3.12}$$

Si $k \to \infty$, on obtient alors

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i\beta^{-i} = \alpha,$$

ce qui permet de conclure. □

La proposition 2.4.19 et le théorème 3.1.4 montrent donc que pour tout β avec $1 < \beta < 2^{\frac{1}{4}}$, sauf le deuxième nombre de Pisot, et pour tout $M \geq 1$, chaque nombre α vérifiant $0 < \alpha < \frac{M}{\beta-1}$ admet un développement universel. En particulier, si on fixe $M = 1$ et un réel β différent du deuxième nombre de Pisot et vérifiant $1 < \beta < 2^{\frac{1}{4}}$, alors tout réel α avec $1 < \alpha < 2^{\frac{1}{4}}$ admet une représentation dans la base β dont tout mot fini $u \in \{0,1\}^*$, u est un facteur. Remarquons que $\beta - 1 < 1$, donc $\frac{1}{\beta-1} > 1$. En particulier, 1 admet un développement universel. Ainsi Erdös et Komornik [35] ont fourni donc une réponse partielle à la question de Joó.

3.2 Applications basées sur le concept de rigidité

Frougny et Pelantová ont considéré dans [42] la propriété de rigidité des représentations de 0 dans une base β (cf. définition 3.2.2) et ont fait le lien entre la rigidité d'une représentation de 0 et les points d'accumulation des spectres. Leurs considérations ont mené à deux applications des spectres de nombres et seront présentées dans cette section.

Fixons pour le reste de cette section un alphabet fini $A \subset \mathbb{C}$ et un nombre complexe β avec $|\beta| > 1$.

Définition 3.2.1. Un mot infini $z_1z_2\cdots$ sur A est une (β, A)-*représentation de* 0 si $\sum_{i\geq 0} z_i\beta^{-i} = 0$ où $z_i \in A$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

On introduit maintenant la propriété de rigidité, définie dans [42]. Comme annoncé précédemment, la propriété de rigidité permet de caractériser les spectres qui ont un point d'accumulation.

Définition 3.2.2. Une (β, A)-représentation $z_1 z_2 \cdots$ de 0 est *rigide* si

$$\pi_\beta(0.z_1 z_2 \cdots z_j) \neq \pi_\beta(0.0 z_2' z_3' \cdots z_j')$$

pour tout $j \geq 2$ et pour tous $z_2', z_3' \ldots, z_j' \in A$.

En d'autres mots, une (β, A)-représentation de 0 est rigide si on ne peut pas remplacer un préfixe de cette représentation par un mot de même longueur et commençant par 0.

Définition 3.2.3. Soit $z_1 z_2 \cdots$ une (β, A)-représentation de 0 et $n \in \mathbb{N}$. Son *n-ième* reste est $r_n = \pi_\beta(0.z_{n+1} z_{n+2} \cdots) = \sum_{i=1}^{\infty} z_{n+i} \beta^{-i}$.

Dans ce qui suit, les représentations rigides de 0 seront liées aux points d'accumulation d'un spectre. Ce lien est à l'origine des applications présentées de cette section.

Lemme 3.2.4 ([42])**.** *Soit $z_1 z_2 \cdots$ une (β, A)-représentation de 0.*
(i) Si la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est injective, alors le spectre $S_A(\beta)$ possède un point d'accumulation.
(ii) Si la représentation de 0 est rigide, alors la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est injective.

Démonstration. Montrons d'abord les éléments de la suite $(-r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent au spectre $S_{A_M}(\beta)$. Par hypothèse, on sait que

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k \beta^{-k} = \pi_\beta(0.z_1 z_2 \cdots) = 0 = 0 \cdot \beta^n = \pi_\beta(z_1 z_2 \cdots z_n . z_{n+1} z_{n+2} \cdots).$$

Or,

$$\pi_\beta(z_1 z_2 \cdots z_n . z_{n+1} z_{n+2}) = \sum_{k=0}^{n-1} z_{n-k} \beta^k + \sum_{k=1}^{\infty} z_{n+k} \beta^{-k} = 0.$$

On en tire que

$$r_n = \sum_{k=1}^{\infty} z_{n+k} \beta^{-k} = -\sum_{k=0}^{n-1} z_{n-k} \beta^k. \tag{3.13}$$

Donc $-r_n$ appartient au spectre $S_A(\beta)$. De plus,

$$\begin{aligned} |r_n| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} z_{n+k} \beta^{-k} \right| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |z_{n+k}||\beta^{-k}| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \alpha |\beta^{-k}| \\ &= -\alpha + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha |\beta^{-k}| \end{aligned}$$

On a donc

$$|r_n| \leq -\alpha + \alpha \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\beta|^{-k} \right) = -\alpha + \frac{\alpha|\beta|}{|\beta|-1} = \frac{\alpha}{|\beta|-1},$$

où $\alpha = \max\{|a| : a \in A\}$.

(i) Si $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est injective, alors la boule fermée de centre 0 et de rayon $\frac{\alpha}{|\beta|-1}$ contient une infinité de points $-r_n$ du spectre. La boule fermée étant compacte, on peut déduire du théorème de Bolzano-Weierstrass que la suite admet un point d'accumulation ce qui permet de conclure.

(ii) Supposons que la représentation de 0 est rigide et procédons par l'absurde pour montrer que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est injective. Supposons donc que $r_i = r_j$ pour certains entiers $i < j$. Vu l'équation (3.13), cela implique que $\sum_{k=0}^{i-1} z_{i-k}\beta^k = \sum_{k=0}^{j-1} z_{j-k}\beta^k$ c'est-à-dire $\pi_\beta(z_1 z_2 \cdots z_i) = \pi_\beta(z_1 z_2 \cdots z_j)$ ce qui est équivalent à

$$\pi_\beta(0.\underbrace{0\cdots 0}_{(j-i) \text{ fois}} z_1 z_2 \cdots z_i) = \pi_\beta(0.z_1 z_2 \cdots z_j)$$

ce qui est en contradiction avec la rigidité de la représentation de 0. □

Définition 3.2.5. Si $x \in S_A(\beta)$ on définit

$$\rho(x) = \min \left\{ n \in \mathbb{N} \mid x = \sum_{k=0}^{n} a_k \beta^k, a_k \in A \right\}.$$

Théorème 3.2.6 ([42]). *Si β est un nombre complexe tel que $|\beta| > 1$, alors le spectre $S_A(\beta)$ admet un point d'accumulation si et seulement si 0 admet une (β, A)-représentation rigide.*

Démonstration. La condition est nécessaire :
Soit s un point d'accumulation de $S_A(\beta)$. On déduit de la définition d'un point d'accumulation qu'il existe une suite injective $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de points dans $S_A(\beta)$ telle que $\lim_{n\to\infty}(x^{(n)}) = s$ (cf. proposition 2.2.2). Notons $\rho_n = \rho(x^{(n)})$. On a alors $x^{(n)} = \sum_{k=0}^{\rho_n} x_k^{(n)} \beta^k$ pour une certaine suite [2]

$$x_{\rho_n}^{(n)} \cdots x_2^{(n)} x_1^{(n)} x_0^{(n)}$$

dans A^*. Constatons tout d'abord que la suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée. En effet, si elle l'était, alors il existerait un entier $M \in \mathbb{N}$ tel que $\rho_n < M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, il n'existe qu'un nombre fini de mots de taille inférieure à M sur un alphabet fini et donc un nombre fini d'éléments du spectre $S_A(\beta)$. Or la suite $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est injective, ce qui implique qu'il existe une infinité d'éléments différents de la forme $x^{(n)}$, d'où la contradiction. Sans

2. Dans ce cas, on adopte cette notation pour les coefficients pour souligner leur dépendance de x et de n.

perte de généralité, on peut donc supposer que la suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. Constatons aussi que

$$\pi_\beta\left(0.x_{\rho_n}^{(n)}\cdots x_2^{(n)}x_1^{(n)}x_0^{(n)}000\cdots\right)=\frac{x^{(n)}}{\beta^{1+\rho_n}}\to 0, \tag{3.14}$$

vu que le numérateur converge vers s et que le dénominateur converge vers l'infini, car $|\beta|>1$. L'ensemble $A^{\mathbb{N}}$ muni de la topologie produit est un espace compact. De ce fait, on déduit qu'il existe un mot $x_1x_2x_3\cdots$ qui est la limite d'une sous-suite de $\left(x_{\rho_n}^{(n)}\cdots x_2^{(n)}x_1^{(n)}x_0^{(n)}0^\omega\right)_{n\in\mathbb{N}}$ Ainsi, par définition de la convergence d'une suite de mots (cf. définition 1.1.18), pour tout entier $N\in\mathbb{N}$, il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $\rho_n>N$ et que $x_{\rho_n}^{(n)}\cdots x_2^{(n)}x_1^{(n)}x_0^{(n)}$ est un préfixe de $x_1x_2\cdots$. On déduit maintenant de (3.14) et de la définition de ρ_n que $0.x_1x_2\cdots$ est une représentation rigide de 0. En effet, si ce n'était pas le cas, il existerait $\rho_n\in\mathbb{N}$ et $x_1x_2\cdots x_j, x_2'x_3'\cdots x_j'\in A^*$ tels que

$$\pi_\beta\left(0.x_1x_2\cdots x_{\rho_n}\right)=\pi_\beta\left(0.0x_2'x_3'\cdots x_{\rho_n}'\right),$$

ce qui est équivalent à

$$\pi_\beta\left(x_1x_2\cdots x_{\rho_n}\right)=\pi_\beta\left(x_2'x_3'\cdots x_{\rho_n}'\right).$$

Or ceci est impossible vu la définition de ρ_n.
La condition est suffisante :
Soit $0.z_1z_2\cdots$ une représentation rigide de 0. Du point (ii) du lemme 3.2.4, on déduit que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est injective et vu (i) de ce même lemme, on a le résultat annoncé. □

Définition 3.2.7. Lorsqu'un alphabet contient un nombre négatif t, on note $\bar{t}$ son opposé si t est considéré comme lettre.

Exemple 3.2.8. Au lieu d'écrire le mot $(-1)11(-1)$, on écrit $\bar{1}11\bar{1}$.

Définition 3.2.9. Soient un réel $\beta>$ et $A\subset\mathbb{Z}$ un alphabet fini. Alors on dit qu'une représentation $x_1x_2\cdots$ de 0 est *non triviale* si elle est différente de 0^ω.

Proposition 3.2.10 ([42]). *Soit $\beta>1$ et $\{-1,0,1\}\subset A_{m,M}=\{m,m+1\ldots,M\}\subset\mathbb{Z}$. Alors on a les deux propriétés suivantes.*

(i) Le nombre 0 a une représentation non-triviale si et seulement si $\beta\leq\max\{M+1,-m+1\}$.

(ii) Si $\beta\leq\max\{M+1,-m+1\}$ et si β n'est pas un nombre de Parry (cf. définition 1.5.26), alors 0 admet une (β,A)-représentation rigide.

Démonstration. Montrons le point (i).
La condition est suffisante : Supposons que $\beta\leq\max\{M+1,-m+1\}$. Soit $d_\beta(1)=t_1t_2\cdots$ la représentation gloutonne de 1. Alors vu la définition de l'algorithme glouton, on a $\beta-1\leq t_1<\beta$, $t_i\leq t_1$ pour tout $i\geq 2$. De plus, vu que

$$0=\pi_\beta(0.\bar{1}t_1t_2\cdots)=\pi_\beta(0.1\overline{t_1t_2}\cdots),$$

il existe des représentations non triviales de 0 sur les alphabets $\{-\lceil\beta\rceil+1,\dots,\overline{1},0,1\}$ et $\{\overline{1},0,1,\dots,\lceil\beta\rceil-1\}$ respectivement. Donc si $A_{m,M}$ contient $\{-\lceil\beta\rceil+1,\dots,\overline{1},0,1\}$ ou $\{\overline{1},0,1,\dots,\lceil\beta\rceil-1\}$, il existe une (β,A)-représentation non triviale de 0. On conclut en remarquant que cela est le cas si $\beta\leq\max\{M+1,-m+1\}$. En effet, $t_1\in A$, est équivalent à $M\geq t_1\geq\beta-1$. De même, $-t_1\in A_{m,M}$, est équivalent à $m\leq -t_1\leq -\beta+1$. Donc $\beta\leq\max\{M+1,-m+1\}$.

La condition est nécessaire : Montrons la contraposée. Supposons alors que $\beta>\max\{M+1,-m+1\}$, c'-est-à-dire $M<\beta-1$ et $m>-\beta+1$. Alors pour $z=\sum_{k\geq1}z_i\beta^{-i}$, où $z_i\in A_{m,M}$ et $z_1\geq1$, on a

$$z\geq\frac{1}{\beta}+\sum_{i\geq2}\frac{m}{\beta}=\frac{1}{\beta}+\frac{m\beta}{\beta-1}-m-\frac{m}{\beta}=\frac{1}{\beta}+\frac{m}{\beta(\beta-1)}=\frac{\beta-1+m}{\beta(\beta-1)}>0.$$

De même, si $z_1\leq-1$, alors $z<0$. On en déduit que 0 ne peut qu'avoir la représentation triviale.

Passons au point (ii). Si β n'est pas un nombre de Parry, alors la suite $(r_n)_{n\geq1}=\pi_\beta(t_{n+1}t_{n+2}\cdots)$ des n-ièmes restes de la β-représentation de 1 n'est pas ultimement périodique et donc injective. Vu le lemme 3.2.4 et le théorème 3.2.6, le nombre 0 a une (β,A)-représentation rigide. □

3.2.1 Théorie des automates

Normalisation

Commençons par une mise en contexte pour situer cette application. On emprunte ici les définitions et on suit la structure de [43]. Dans la section « β-numération » de ce mémoire, les représentations de nombres dans une base donnée ont été discutées. Dans cette section, on s'intéresse au passage d'une représentation à une autre. On peut changer cette représentation en fixant une nouvelle base, ou en recherchant une représentation différente dans la même base. Dans ce mémoire on s'intéresse plus aux conversions qui transforment une représentation dans une base en une représentation de ce nombre dans cette même base, en utilisant éventuellement un alphabet différent (par exemple plus petit). Plus précisément, on considère la fonction de normalisation qui transforme une représentation d'un nombre en sa représentation normale, i.e. la représentation obtenue par l'algorithme glouton. La fonction de normalisation étant l'objet de la première application des spectres, on inclut une présentation des notions de base et résultats nécessaires pour la bonne compréhension du sujet. Dans la section suivante, l'application-même sera discutée (cf théorème 3.2.34).

Définition 3.2.11. Soit C un alphabet quelconque. Alors la *fonction de normalisation* $\nu_{\beta,C}$ dans la base β et sur l'alphabet C est la fonction partielle qui associe à toute β-représentation sur C d'un nombre $x\in[0,1[$ sa β-représentation gloutonne :

$$\nu_{\beta,c}:C^{\mathbb{N}}\to B_{\lceil\beta\rceil-1}^{\mathbb{N}}\quad(c_i)_{i\geq1}\mapsto d_\beta\left(\sum_{i\geq1}c_i\beta^{-i}\right).$$

Calculabilité de l'opération d'addition

La normalisation est liée à l'opération d'addition de deux entiers.

Définition 3.2.12. Etant donné deux alphabets A et C, on définit

$$A + C = \{z \mid \exists a \in A, \exists c \in C : z = a + c\}$$

et

$$A - C = \{z \mid \exists a \in A, \exists c \in C : z = a - c\}.$$

Sur ces nouveaux alphabets, on peut définir des opérations telles que l'addition et la soustraction chiffre par chiffre.

Définition 3.2.13. Soient $a = a_{k-1}a_{k-2}\cdots a_0 \in A^*$ et $c = c_{k-1}c_{k-2}\cdots c_0 \in C^*$ deux mots de longueur k. *L'addition chiffre par chiffre* est définie par

$$a \oplus b = s_{k-1}s_{k-2}\cdots s_0 \in (A + C)^*,$$

où s_i est tel que $s_i = a_i + c_i, \forall i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$. On définit de la même manière la soustraction chiffre par chiffre :

$$a \ominus b = s_{k-1}s_{k-2}\cdots s_0 \in (A - C)^*,$$

où s_i est tel que $s_i = a_i - c_i, \forall i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$.

Remarque 3.2.14. Si a et c de la définition 3.2.13 n'ont pas la même longueur, on ajoute des zéros à gauche au mot plus court jusqu'à ce que les deux mots soient de la même longueur.

Les sommes et soustractions chiffre par chiffre sont ainsi définies pour toute paire de mots. De plus on a la relation suivante :

$$\pi_p(a \oplus c) = \pi_p(a) + \pi_p(c) \text{ et } \pi_p(a \ominus c) = \pi_p(a) - \pi_p(c).$$

La question traitée dans la suite est de savoir quand la fonction de normalisation est calculable, c'est-à-dire réalisable par un transducteur fini. Ceci a une conséquence directe sur les applications définies ci-dessus car si la fonction de normalisation est calculable, alors les opérations addition et soustraction le sont également. En effet, l'addition est un cas particulier de la normalisation sur l'alphabet $A + C$.

Le transducteur réalisant la fonction de normalisation est basé sur l'automate des zéros défini ci-dessous. On distingue le cas des représentations finies, c'est-à-dire des nombres entiers dans une base entière et celui des représentations infinies. Fixons donc d'abord une base entière $p \in \mathbb{N}$. Ici, on ne se limite pas à l'alphabet canonique. L'alphabet est dans un premier temps $\mathbb{Z}$ tout entier.

L'automate des zéros dans le cas fini Considérons l'automate $\mathcal{Z}_p$ dont les états sont les nombres entiers et qui lit les chiffres du nombre d'entrée de gauche à droite. Les transitions sont telles que, à chaque étape, l'état dans lequel l'automate se trouve indique la valeur de la partie du nombre lue jusque là. L'état initial est donc 0 et les transitions sont de la forme

$$\forall s, t, a \in \mathbb{Z} \quad s \xrightarrow[\mathcal{Z}_p]{a} t \text{ si et seulement si } t = ps + a.$$

On peut munir cet automate d'une fonction $t : T \to N : n \mapsto n$, appelée la fonction de sortie. Pour un mot $w \in B_p$ donné, on dit alors que l'automate défini ci-dessus sort n si $0 \xrightarrow{w} n$. Cet automate sort alors la valeur du mot d'entrée dans la base p, i.e.

$$\forall w \in \mathbb{Z}^* \quad 0 \xrightarrow[\mathcal{Z}_p]{w} \pi_p(w).$$

C'est pour cette raison qu'on appelle cet automate un évaluateur. Cet automate est la base pour ce qui suit dans cette section. Cependant, on ne considérera que des parties finies de $\mathcal{Z}_p$ et on restreint l'alphabet à un alphabet fini et symétrique de la forme $A_M = \{-M, -M+1 \ldots, M\}$, où $M \in \mathbb{N}$ vérifie $M \geq p-1$. On a donc $B_{p-1} \subset A_M$. Maintenant, fixons 0 comme l'unique état final de l'automate.

On vient de construire un automate $\mathcal{Z}_{p,M} = (\mathbb{Z}, A_M, E, \{0\}, \{0\})$ qui accepte les représentations de 0. On appelle cet automate l'automate des zéros. L'automate $\mathcal{Z}_{p,M}$ est toujours infini.

Remarque 3.2.15. La partie réduite de l'automate $\mathcal{Z}_{p,M}$, est la composante fortement connexe de $\mathcal{Z}_{p,M}$ contenant 0.

On a alors la propriété suivante.

Proposition 3.2.16 ([43]). *La partie réduite de $\mathcal{Z}_{p,M}$ est finie. De plus, l'ensemble de ses états est $H = \{-h, -h+1, \ldots, h\}$ où $h = \left\lceil \frac{M}{p-1} \right\rceil - 1$.*

Démonstration. Comme $B_{p-1} \subset A_M$ et comme A_M est symétrique, on peut atteindre tout $z \in \mathbb{Z}$.

Si on a un entier $m \geq \frac{M}{p-1}$, le plus petit état qui peut être atteint à partir de m est $mp - M \geq \frac{M}{p-1}$. On en tire qu'il n'existe pas de chemin qui relie m à 0 et il en va de même pour tout $m \leq -\frac{M}{p-1}$.

Si, d'autre part, on a $m < \frac{M}{p-1}$, alors l'entier $k = m(p-1)+1$ vérifie $k \leq M$ et il existe une transition $m \xrightarrow{\overline{k}} (m-1)$ dans $\mathcal{Z}_{p,M}$, où $\overline{k} = -k$. Il existe donc un chemin qui relie m à 0 dans $\mathcal{Z}_{p,M}$ et il en va de même si $m > -\frac{M}{p-1}$. □

Exemple 3.2.17. A la figure 3.1 est représenté la partie de l'automate $\mathcal{Z}_{2,2}$ contenant les états $-5, -4, \ldots, 4, 5$.

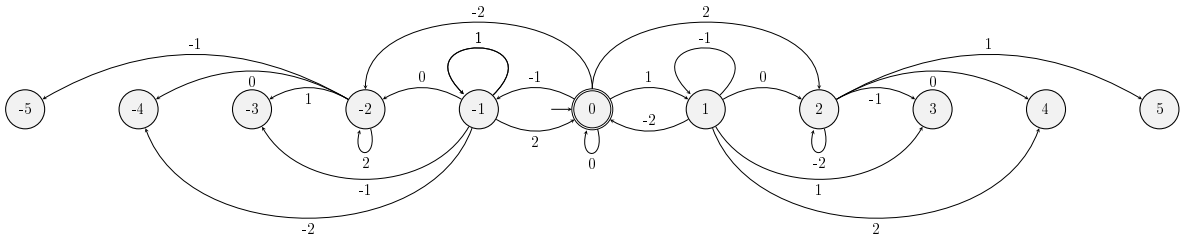

FIGURE 3.1 – Une partie finie de $\mathcal{Z}_{2,2}$ contenant l'état 0.

La partie réduite de cet automate est donnée à la figure 3.2.

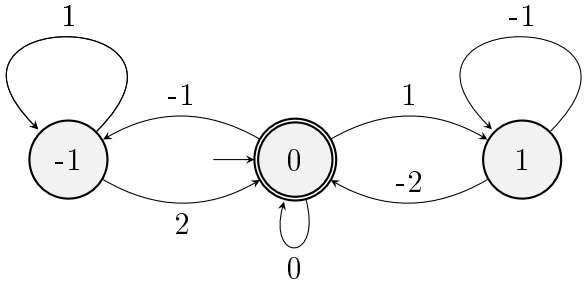

FIGURE 3.2 – La partie réduite de $\mathcal{Z}_{2,2}$.

L'automate des zéros dans le cas d'une base réelle

L'automate des zéros dans le cas d'une base réelle est quasiment le même que dans le cas d'une base entière ; il est toujours basé sur l'évaluateur. Fixons donc en toute généralité une base réelle $\beta > 1$ et un alphabet A_M qui est une partie symétrique de $\mathbb{Z}$ tel que $M \geq \beta - 1$. L'évaluateur $\mathcal{Z}_\beta$ dans la base β est défini comme dans le cas d'une base entière sauf que l'ensemble des états est $\mathbb{Z}[\beta]$ et qu'il s'agit d'un automate de Büchi dans ce cas. L'état initial est 0 et les transitions sont définies par

$$\forall s, t \in \mathbb{Z}[\beta], \quad \forall a \in \mathbb{Z} \quad s \xrightarrow[\mathcal{Z}_\beta]{a} t \text{ si et seulement si } t = \beta s + a. \tag{3.15}$$

Proposition 3.2.18 ([43])**.** *Un mot infini $z \in A_M^{\mathbb{N}}$ a la valeur 0 dans la base β si et seulement s'il est accepté par l'automate de Büchi $\mathcal{Z}_{\beta,M} = (Q_M, A_M, E, \{0\}, Q_M)$, où les transitions dans E sont définies par (3.15) et $Q_M = \mathbb{Z}[\beta] \cap \left[-\dfrac{M}{\beta-1}, \dfrac{M}{\beta-1}\right]$.*

Remarque 3.2.19. Si la base β est un entier, on retrouve les représentations des réels dans une base entière. Dans ce cas, $Q_M = H = \{-h, \ldots, h\}$ où $h = \left\lceil \frac{M}{\beta-1} \right\rceil - 1$.

Démonstration. La condition est suffisante : Par définition de $\mathcal{Z}_{\beta,M}$, tout mot infini z qui est l'étiquette d'un chemin infini dans $\mathcal{Z}_{\beta,M}$ est accepté par $\mathcal{Z}_{\beta,M}$. En effet, l'ensemble des états finaux de $\mathcal{Z}_{\beta,M}$ est Q_M qui est aussi l'ensemble de ses états. Par définition de Q_M, pour tout $n \geq 1$, on a $|\pi_\beta(z_1 \cdots z_n)| \leq \frac{M}{\beta-1}$ et donc, vu la définition 1.5.16,

$$\pi_\beta(.z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\beta^n} \pi_\beta(z_1 \cdots z_n) = 0.$$

La condition est nécessaire : On montre la contraposée. Soit $z \in A_M^{\mathbb{N}}$ un mot qui n'est pas l'étiquette d'un chemin dans $\mathcal{Z}_{\beta,M}$. Il existe alors un préfixe w de z tel que

$$0 \xrightarrow[\mathcal{Z}_\beta]{w} t \quad \text{où } t > \frac{M}{\beta-1}.$$

On a donc

$$\pi_\beta(.z) \geq \pi_\beta(.w\overline{M}^\omega) = \frac{1}{\beta^{|w|}} \left(t - \frac{M}{\beta-1} \right) > 0,$$

et il en va de même pour le cas $t < -\dfrac{M}{\beta-1}$. On en tire que $\pi_\beta(z) \neq 0$ ce qui permet de conclure. □

Cet automate est appelé l'automate des zéros dans la base β sur l'alphabet A_M. Il n'est en général pas fini.

Exemple 3.2.20. Considérons l'automate de Büchi $\mathcal{Z}_{\phi,1}$, représenté ci-dessous. Construisons les transitions partant de l'état $\phi - 1$. On a $\phi(\phi-1) = \phi^2 - \phi = \phi + 1 - \phi = 1$, donc $\phi(\phi-1) - 1 = 0$ et $\phi(\phi-1) + 0 = 1$. On a donc une transition d'étiquette -1 de $\phi-1$ vers 0 et une transition d'étiquette 0 de $\phi - 1$ vers 1. Les transitions restantes se construisent de la même façon.

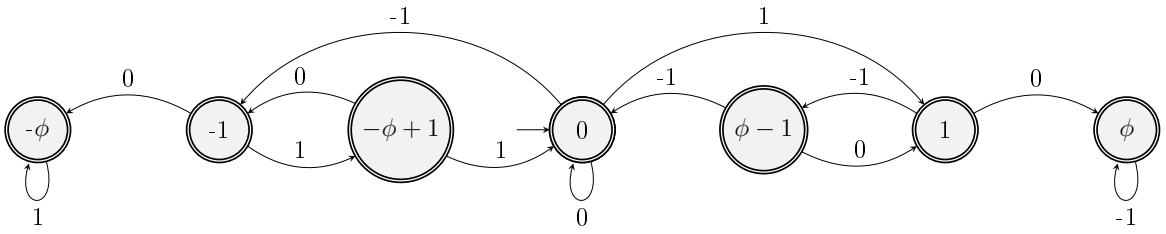

FIGURE 3.3 – L'automate de Büchi $\mathcal{Z}_{\phi,1}$.

Le convertisseur dans le cas entier

En partant de l'automate $\mathcal{Z}_{p,M}$ on définit l'automate $\mathcal{C}_p$ comme suit :

Définition 3.2.21. Le *transducteur chiffre par chiffre* $\mathcal{C}_p$ est défini par

$$\mathcal{C}_p = (H, C, A, F, \{0\}, \{0\}),$$

où les transitions sont définies par

$$s \xrightarrow[\mathcal{C}_p(C\times A)]{c|a} t \text{ si et seulement si } s \xrightarrow[\mathcal{Z}_{p,M}]{c-a} t$$

pour tous $s, t \in H$, tout $c \in C$ et tout $a \in A$.

Il y a donc une transition si $ps + c = t + a$. Une même transition dans $\mathcal{Z}_{p,M}$ peut alors engendrer plusieurs transitions dans $\mathcal{C}_p(C \times A)$. Le résultat suivant montre que cet automate relie un mot donné $u \in C^*$ avec tous les mots $v \in A^*$ qui ont la même longueur et valeur dans la base p.

Proposition 3.2.22 ([43]). *Soit $\mathcal{C}_p(C \times A)$ un transducteur chiffre par chiffre en base p pour les alphabets C et A. On a pour tout $u \in C^*$ et pour tout $v \in A^*$*

$$(u, v) \in L(C_p(C \times A)) \text{ si et seulement si } \pi_p(u) = \pi_p(v) \text{ et } |u| = |v|.$$

Démonstration. La condition est nécessaire : Si $(u, v) \in L(\mathcal{C}_p(C \times A))$, alors $|u| = |v|$ car le transducteur est lettre-à-lettre, c'est-à-dire que toutes les transitions sont étiquetées par une lettre de u et v. De plus, le chemin d'acceptation étiqueté par (u, v) dans $C_p(C \times A)$ correspond à un chemin d'acceptation de $u \ominus v$ dans $\mathcal{Z}_{p,M}$. On en tire que $\pi_p(u \ominus v) = 0$, c'est-à-dire $\pi_p(u) = \pi_p(v)$.
La condition est suffisante : Si $u = u_1u_2 \cdots u_k \in C^*$ et $v = v_1v_2 \cdots v_k \in A^*$ sont tels que $u \ominus v \in A_M^*$ et que $\pi_p(u) = \pi_p(v)$, alors $u \ominus v$ est un chemin d'acceptation dans $\mathcal{Z}_{p,M}$ dont chaque transition (s, d_i, t) provient d'une transition (s, u_i, v_i, t) dans $C_p(C \times A)$. Alors ces transitions forment un chemin d'acceptation dans $C_p(C \times A)$. □

Si $A = B_{p-1}$, alors l'automate $\mathcal{C}_p(C \times A)$ est co-déterministe. En effet, si $ps + c = t + a$ et $ps' + a = t + a'$, alors $p(s - s') = a - a'$ Or $a, a' \in B_{p-1}$, donc $|a - a'| < p$ et le seul multiple de p plus petit que p est 0. On a donc $p(s - s') = a - a' = 0$ ce qui implique que $s = s'$. Chaque mot dans $u \in C^*$ précédé par assez de zéros pour qu'il soit de même longueur que $\langle \pi_p(u) \rangle$ est donc l'entrée d'un unique calcul qui sort l'unique p-représentation de $\pi_p(u)$. On peut alors démontrer le résultat suivant :

Théorème 3.2.23 ([43]). *La normalisation en base p et pour un alphabet donné p est réalisable par un transducteur lettre-à-lettre fini et déterministe.*

Le convertisseur dans le cas réel

Soient deux alphabets C et A. Posons

$$M = \max_{c\in C, a\in A}(|c-a|).$$

Comme dans le cas des entiers, on construit le convertisseur $\mathcal{C}_\beta(C\times A)$ à partir de l'automate des zéros $\mathcal{Z}_{\beta,M}$. Les transitions sont données par

$$s \xrightarrow[\mathcal{C}_\beta(C\times A)]{c|a} t \text{ si et seulement si } s \xrightarrow[\mathcal{Z}_{\beta,M}]{c-a} t. \tag{3.16}$$

On en déduit le résultat suivant :

Proposition 3.2.24 ([43]). *Le langage du convertisseur $\mathcal{C}_\beta(C\times A)$ est*

$$\{(x,y)\in C^{\mathbb{N}}\times A^{\mathbb{N}} \mid \pi_\beta(x)=\pi_\beta(y)\}.$$

Exemple 3.2.25. Considérons le transducteur $\mathcal{C}_\phi(B_1\times B_1)$ représenté ci-dessous. Alors $M=1$. Ce transducteur est basé sur l'automate des zéros $\mathcal{Z}_{\phi,1}$ qui est représenté à la figure 3.2.20. Il accepte les paires de mots $(x|y)$ avec $x,y\in B_M^{\mathbb{N}}$ si $\pi_\beta(x)=\pi_\beta(y)$. En effet, considérons les mots 10^ω et 0110^ω. Le chemin $0\xrightarrow{1|0}1\xrightarrow{0|1}\phi-1\xrightarrow{0|1}0\xrightarrow{0|0}0\xrightarrow{0|0}0\xrightarrow{0|0}\cdots$ est un chemin d'acceptation. Cela découle du fait que le nombre d'or vérifie l'équation $\phi^2=\phi+1\Leftrightarrow 1=\frac{1}{\phi}+\frac{1}{\phi^2}$. On en tire que $\pi_\phi(10^\omega)=\pi_\phi(0110^\omega)$.

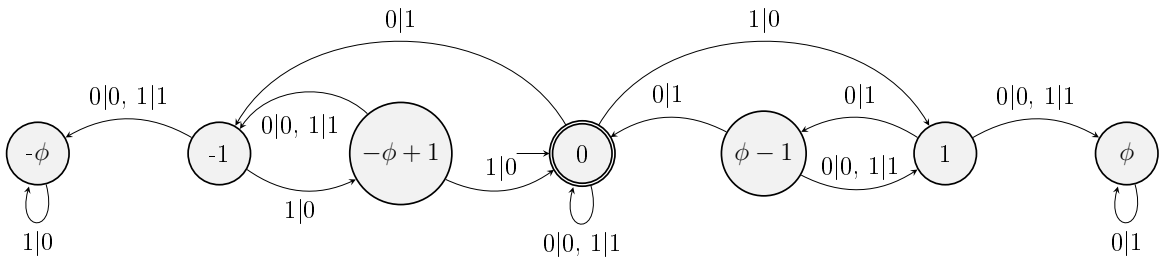

FIGURE 3.4 – Le transducteur $\mathcal{C}_\phi(B_1\times B_1)$.

Calculabilité de la fonction de normalisation

On étudie dans quels cas la fonction de normalisation est calculable. Comme l'automate $\mathcal{C}_\beta(C\times A)$ est construit en fonction de l'automate des zéros $\mathcal{Z}_{\beta,M}$, il suffit d'étudier ce-dernier. Dans [43], Frougny et Sakarovitch ont formulé le résultat suivant, déjà très proche de la réponse complète.

Théorème 3.2.26. *Les conditions suivantes sont équivalentes.*
(i) L'automate des zéros $\mathcal{Z}_{\beta,M}$ est fini pour tout $M\geq\lfloor\beta\rfloor$.

(ii) L'automate des zéros $\mathcal{Z}_{\beta,M}$ est fini pour un $M \geq \lfloor \beta \rfloor + 1$.
(iii) Le réel β est un nombre de Pisot.

Définition 3.2.27. L'ensemble des *β-représentations infinies de* 0 sur l'alphabet A_M est noté

$$Z_{\beta,M} = \left\{ z_1 z_2 \cdots | \pi_\beta(z_1 z_2 \cdots) = \sum_{i \geq 0} z_i \beta^{-i} = 0, z_i \in A_M \right\}.$$

Remarque 3.2.28. La condition (i) du théorème 3.2.26 peut être remplacé par la condition suivante :
L'ensemble $Z_{\beta,M}$ est accepté par un automate de Büchi fini pour tout entier $M \geq 1$. Frougny et Berend ont démontré l'équivalence de cette condition avec (iii) dans [15].

Frougny et Sakarovitch supposaient déjà que ce résultat n'est pas optimal et que la condition (ii) pourrait être améliorée. En effet, dans [43], ils ont énoncé la conjecture suivante.

Conjecture 3.2.29. Si l'automate des zéros $\mathcal{Z}_{\beta,M}$ est fini pour $M = \lfloor \beta \rfloor$, alors β est un nombre de Pisot.

Cette conjecture aurait donc pour conséquence l'implication suivante. Si L'automate des zéros $\mathcal{Z}_{\beta,M}$ est fini pour un $M \geq \lfloor \beta \rfloor$, alors β est un nombre de Pisot. Ainsi, la borne $\lfloor \beta \rfloor + 1$ pourrait être optimisée et remplacée par $\lfloor \beta \rfloor$.

Le théorème 3.2.26 n'étant pas optimal, la preuve sera omise. La preuve de la version amélioré constitue la première application des spectres donnée par Frougny et Pelantová dans [42] et sera démontré ci-dessous (cf. théorème 3.2.34).

Les spectres et l'automate des zéros

Soit $\beta > 1$ un nombre réel. L'objet d'étude est $Z_{\beta,M}$, c'est-à-dire l'ensemble des β-représentations de 0 sur un alphabet de la forme $A_M = \{-M, -M+1, \ldots, M\}$, où $M > 1$. Vu le théorème 3.2.10, le nombre 0 a une représentation non triviale si $M \geq \lceil \beta \rceil - 1$. Considérons alors un M qui vérifie cette propriété. On a vu dans la section 3.2.1, que l'ensemble $Z_{\beta,M}$ peut être accepté par un automate de Büchi appelé l'automate des zéros.

Remarque 3.2.30. Si $Z_{\beta,M}$ est accepté par un automate de Büchi fini, pour tout entier $c < M$, $Z_{\beta,M} \cap \{-c, -c+1, \ldots, c\}^{\mathbb{N}}$ l'est aussi.

Le théorème suivant permet enfin de démontrer le théorème 3.2.26 donnant un critère pour que l'automate des zéros soit fini. C'est ici qu'on utilise le lien entre les représentations rigides de 0 présentées au début de cette section et les points d'accumulation des spectres. Ceci est donc la première application des spectres donnée par Frougny et Pelantová dans [42].

Théorème 3.2.31. *Soit $\beta > 1$ et considérons l'alphabet A_M où $M \geq 1$ est un entier. Alors l'ensemble $Z_{\beta,M}$ est accepté par un automate de Büchi fini si et seulement si le spectre $S_{A_M}(\beta)$ n'a pas de point d'accumulation.*

Démonstration. Pour prouver ce théorème, on utilise la construction de l'annexe C. A chaque $z = z_1 z_2 \cdots \in Z_{\beta,M}$, on associe la suite de polynômes

$$P_n^{(z)}(x) = z_1 x^{n-1} + z_2 x^{n-2} + \cdots + z_n.$$

Notons $R_n^{(z)}$ le reste de la division euclidienne de $P_n^{(z)}$ par $(x-\beta)$. Il existe alors un polynôme $Q_n^{(z)}$ tel que $P_n^{(z)}(x) = (x-\beta)Q_n^{(z)} + R_n^{(z)}$. On en déduit que $P_n^{(z)}(\beta) = R_n^{(z)}$. Posons $R = \left\{ R_n^{(z)} | z \in Z_{\beta,M}, n \in \mathbb{N} \right\}$. Comme $z = z_1 z_2 \cdots$ est une (β, A)-représentation de 0, on a

$$\begin{aligned} & z_1\beta^{-1} + z_2\beta^{-2} + \cdots = 0 \\ \Leftrightarrow & z_1\beta^{n-1} + z_2\beta^{n-2} + \cdots + z_n\beta^0 + z_{n+1}\beta^{-1} + \cdots = 0 \\ \Leftrightarrow & P_n^{(z)}(\beta) + z_{n+1}\beta^{-1} + z_{n+2}\beta^{-2} + \cdots = 0. \end{aligned}$$

On en tire que

$$P_n^{(z)}(\beta) = -(z_{n+1}\beta^{-1} + z_{n+2}\beta^{-2} + \cdots) \in S_{A_M}(\beta).$$

Donc $R_n^{(z)} = P_n^{(z)}(\beta) \in S_{A_M}(\beta)$ et $-P_n^{(z)}(\beta)$ est le n-ième suffixe r_n de la (β, A)-représentation de 0. Or $\sum_{i\geq 1} z_i\beta^{-i} = \sum_{i=1}^{n} z_i\beta^{-i} + r_n = 0$. Donc $r_n \to 0$ ce qui implique que la suite r_n est bornée. Au final, on a donc

$$R \subset S_A(\beta) \text{ et } R \text{ est borné.} \tag{3.17}$$

Pour démontrer le théorème, on se sert de la proposition C.9 de l'annexe C, énonçant que $Z_{\beta,M}$ est accepté par un automate de Büchi fini si et seulement si R est fini.

La condition est suffisante : Si $Z_{\beta,M}$ n'est pas accepté par un automate de Büchi fini, alors vu la proposition C.9, l'ensemble R est infini. Alors, vu (3.17), le spectre $S_A(\beta)$ a un point d'accumulation.

La condition est nécessaire : Si $S_{A_M}(\beta)$ a un point d'accumulation, alors par la proposition 3.2.6, le nombre 0 a une représentation rigide $z_1 z_2 \cdots \in Z_{\beta,M}$. Vu le point (ii) du lemme 3.2.4, la suite de ses suffixes $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est injective. Or $-r_n = P_n^{(z)}(\beta) = R_n^{(z)} \in R$. Il en découle que l'ensemble R est infini, donc $Z_{\beta,M}$ ne peut être accepté par un automate fini. □

Remarque 3.2.32. Pour le résultat qui suit, on suppose que β est un entier algébrique de polynôme minimal M_β de degré d. On note $\beta_1 = \beta, \ldots, \beta_d$ les racines de M_β.
Sur le groupe discret $\mathbb{Z}[x]/(M_\beta) \simeq \mathbb{Z}[\beta]$ de rang d (cf. [43]), une norme est donnée par

$$\| P(x) \| = \max_{1\leq i\leq d} |P(\beta_i)|.$$

Les théorèmes 3.2.31 et 2.2.19 permettent donc d'améliorer le théorème 3.2.26 de Frougny et Sakarovitch, dont on avait omis la preuve. On a donc le théorème suivant :

Remarque 3.2.33. Une partie de l'équivalence $(i) \Leftrightarrow (iii)$ du théorème suivant a été démontrée dans [43]. L'implication $(ii) \Rightarrow (iii)$ constitue l'application des spectres de cette section et est démontrée dans [42].

Théorème 3.2.34. *Soit $\beta > 1$. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) L'ensemble $Z_{\beta,M}$ est accepté par un automate de Büchi fini pour tout entier $M \geq \lceil \beta \rceil - 1$.

(ii) L'ensemble $Z_{\beta,M}$ est accepté par un automate de Büchi fini pour un entier $M \geq \lceil \beta \rceil - 1$.

(iii) Le nombre β est un nombre de Pisot.

Preuve du théorème 3.2.34. Montrons l'implication $(i) \Rightarrow (iii)$. Montrons d'abord que β est un entier algébrique. Soit $d_\beta(1) = (t_i)_{i\geq 1}$. Alors $(-1)t_1t_2\cdots$ est l'étiquette d'un chemin dans $\mathcal{Z}_{\beta,M}$ et comme $\mathcal{Z}_{\beta,M}$ est fini, il existe n et p tels que les états $\pi_\beta((-1)t_1t_2\cdots t_n)$ et $\pi_\beta((-1)t_1t_2\cdots t_n\cdots t_{n+p})$ sont égaux, c'est-à-dire

$$(-1)z_1\beta_i^{n-1} + \cdots + z_n = (-1)z_1\beta_i^{n+p-1} + \cdots + z_{n+p}.$$

Ceci montre que β annule un polynôme à coefficients entiers et de coefficient dominant égal à 1.

Montrons maintenant que β est un nombre de Pisot. Le reste de la preuve de cette implication est analogue à celle du théorème 2.2.18. Procédons par l'absurde et supposons que β a un conjugué γ de module au moins 1. Soit M' tel que $M' < \beta < M' + 1$. Par hypothèse, l'automate des zéros acceptant $Z_{\beta,M'}$ est alors fini. On distingue deux cas en fonction du module de γ.

— Si $|\gamma| > 1$, alors vu le corollaire C.11, pour tout mot infini $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ accepté par $\mathcal{Z}_{\beta,M'}$, on a $\sum_{i=0}^{\infty} s_i\gamma^{-i} = 0$. Or ceci contredit la proposition 2.2.17.

— Si $|\gamma| = 1$, alors vu le point (ii) du corollaire C.11, pour tout mot infini $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ accepté par $\mathcal{Z}_{\beta,M'}$, les sommes partielles $\sum_{i=0}^{n} s_i\gamma^{-i}$ sont bornées. Or ceci contredit le point (ii) de la proposition 2.2.17.

Passons à l'implication $(iii) \Rightarrow (i)$. Montrons que l'automate des zéros $\mathcal{Z}_{\beta,M}$ acceptant le langage $Z_{\beta,M}$ est fini. Pour chaque état s dans Q_M, il existe un chemin minimal $z_1z_2\cdots z_n$ menant de 0 à s dans l'automate. Donc $s = s(\beta) = z_1\beta^{n-1} + z_2\beta^{n-2}\cdots + z_n$, où $s(x) \in \mathbb{Z}[x]/(M_\beta)$ et vu la proposition 3.2.18,

$$|s| = |s(\beta)| \leq \frac{M}{|\beta| - 1}.$$

Pour chaque conjugué β_i de β, comme $|\beta_i| < 1$, on a

$$|s(\beta_i)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} M\beta^k = M\frac{1 - |\beta_i|^n}{1 - |\beta_i|} \leq \frac{M}{1 - |\beta_i|}.$$

Comme β est un nombre de Pisot, ceci est vrai pour $2 \leq i \leq d$. Donc tous les états s de Q_M sont bornés en norme sur $\mathbb{Z}[x]/(M_\beta)$. On en tire qu'il n'en existe donc qu'un nombre fini.

L'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ est évidente.

Montrons enfin l'implication $(ii) \Rightarrow (iii)$. Vu le théorème 3.2.31, le langage $Z_{\beta,M}$ est accepté par un automate de Büchi fini si et seulement si le spectre $S_{A_M}(\beta)$ n'a pas de point

d'accumulation. Or vu le théorème 2.2.19, le spectre $S_{A_M}(\beta)$ n'a pas de point d'accumulation si et seulement si β est un nombre de Pisot et $\beta < M + 1$. Cela montre l'implication souhaitée. □

On sait alors qu'il suffit de vérifier si $Z_{\beta,M}$ est accepté par un automate de Büchi fini dans le cas limite $M = \lceil \beta \rceil - 1$ pour montrer qu'il l'est pour tout $M \geq 1$. Cela optimise la borne $M = \lceil \beta \rceil$ de Frougny.

Ce théorème a des conséquences sur la fonction de normalisation. En effet, pour $M = \lceil \beta \rceil - 1$, considérons le convertisseur $C_\beta(B_M \times B_M)$, comme dans la section 3.2.1. Cet automate est fini si et seulement si $Z_{\beta,M}$ est fini. De plus, l'ensemble des β-représentations gloutonnes est accepté par un automate de Büchi si β est un nombre de Pisot (cf. annexe B). Alors l'ensemble $B_M^* \cap D_\beta$, qui est l'intersection de l'ensemble des mots de la deuxième composante du langage du convertisseur avec l'ensemble des β-représentations gloutonnes de nombres $x \in [0, 1]$ est donc également accepté par un automate de Büchi fini (cf. [103]). Le transducteur réalisant la fonction de normalisation est alors obtenu en composant le convertisseur $C_\beta(B_M \times B_M)$ avec le transducteur réalisant l'intersection $B_M^* \cap D_\beta$ (cf. [43]). On a donc le corollaire suivant :

Corollaire 3.2.35 ([43]). *La fonction de normalisation dans la base β est calculable sur l'alphabet $B_M \times B_M$ ou $M = \lceil \beta \rceil - 1$ si et seulement si β est un nombre de Pisot.*

Exemple 3.2.36. Reprenons l'exemple du système de numération (ϕ, B_1). Le nombre d'or ϕ est un nombre de Pisot. Selon le corollaire 3.2.35, le fonction de normalisation dans la base ϕ sur l'alphabet $B_1 \times B_1$ est calculable. En effet, un transducteur réalisant cette fonction de normalisation est représenté à la figure 3.2.1. Ce transducteur est basé sur le convertisseur de l'exemple 3.2.25 et peut être obtenu en composant $C_\beta(B_M \times B_M)$ avec le transducteur réalisant l'intersection avec D_ϕ. La construction du transducteur réalisant la normalisation est détaillée dans [40] et l'automate acceptant le langage D_ϕ a été donné dans [43].

Ce transducteur remplace les toutes les occurrences du facteur (Err : remplace toutes les occurences du facteur) 011 par 100 dans une représentation. L'équivalence entre ces deux facteurs découle du fait que le nombre d'or vérifie la relation $\frac{1}{\phi} = \frac{1}{\phi^2} + \frac{1}{\phi^3}$.

En guise d'exemple considérons la paire de mots $x = 0110^\omega$ et $y = 10^\omega$. Alors le chemine d'étiquette $x|y$ est un chemin d'acceptation de ce transducteur. Le mot 10^ω est donc le représentation gloutonne du nombre représenté par 0110^ω.

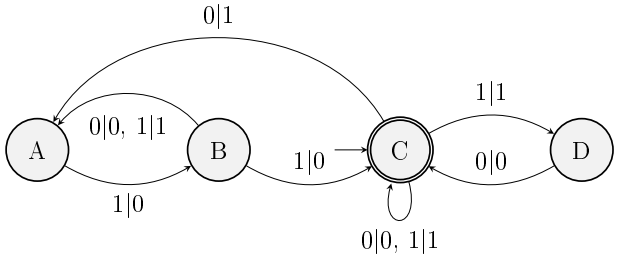

FIGURE 3.5 – Le transducteur réalisant la fonction de normalisation dans la base ϕ et sur l'alphabet B_1.

3.2.2 Division en ligne dans une base complexe

Introduction

Cette section expose les travaux de Frougny et Pelantová [42]. Fixons pour cette section un nombre complexe β avec $|\beta| > 1$ et un alphabet $A \subset \mathbb{C}$. L'application des spectres présentée dans cette section concerne un procédé appelé « prétraitement » pour un algorithme de division en ligne. On donne donc ici d'abord une courte introduction décrivant cet algorithme. La division en ligne dans une base complexe est un algorithme de division pour une base entière trouvé par Trivedi et Ercegovac [98] et généralisé par Frougny et al. au cas des nombres complexes (cf. [42, 80] pour un résumé et plus de détails). On calcule le résultat de l'opération de division en considérant les représentations des nombres en question dans une base donnée et en les manipulant en commençant par le premier chiffre de la représentation. Pour calculer le premier chiffre du résultat, on a besoin des σ premiers chiffres des opérandes. On appelle σ le décalage de l'algorithme. Cet algorithme s'appelle l'algorithme de Trivedi-Ercegovac et peut être étendu aux nombres complexes. Il a comme paramètres deux nombres, le décalage $\sigma \in \mathbb{N}$ et un réel $D > 0$, qui représente la valeur minimale en module du diviseur. Soient

— $n = \sum_{n\geq 1} n_i \beta^{-i}$ la dividende,
— $d = \sum_{n\geq 1} d_i \beta^{-i}$ le diviseur ,
— $q = \sum_{n\geq 1} q_i \beta^{-i}$ le quotient $\frac{n}{d}$,

et leur sommes partielles correspondantes

— $N_k = \sum_{n=1}^{k} n_i \beta^{-i}$,
— $D_k = \sum_{n=1}^{k} d_i \beta^{-i}$,
— $Q_k = \sum_{n=1}^{k} q_i \beta^{-i}$.

L'algorithme prend en entrée deux mots infinis $0.n_1 n_2 \cdots n_\sigma n_{\sigma+1} \cdots$ et $0.d_1 d_2 \cdots$ tels que

— $n_i \in A$,
— $n_1 = n_2 = \cdots = n_\sigma = 0$,
— $d_i \in A$,
— $|D_j| \geq D, \quad \forall j \in \mathbb{N}_0$,

et il sort un mot infini $q_1 q_2 \cdots$ qui est la (β, A)-représentation du quotient $q = \frac{n}{d} = \pi_\beta(0.q_1 q_2 \cdots)$. L'algorithme est défini d'une façon qui assure que la représentation de q commence derrière la virgule. L'algorithme est construit comme suit.

Posons $W_0 = q_0 = Q_0 = 0$ et pour tout $k \geq 1$

$$W_k = \beta(W_{k-1} - q_{k-1} D_{k-1+\sigma}) + (n_{k+\sigma} - Q_{k-1} d_{k+\sigma})\beta^{-\sigma}.$$

Le k-ième chiffre q_k de la représentation du quotient est donné par une fonction « select » qui prend en entrée les valeurs de la variable auxiliaire W_k et de $D_{k+\sigma}$, i.e. $q_k = \text{select}(W_k, D_{k+\sigma}) \in A$. Il n'existe pas de façon universelle de déterminer les paramètres pour cet algorithme de division car ils dépendent du système de numération choisi. Les notions présentées ci-dessus suffisent pour les considérations qui suivent et ne seront pas approfondies car cela sortirait du cadre de ce mémoire. Le lecteur intéressé est invité à

consulter [80] et [98] pour plus de détails sur cet algorithme de division et la fonction select ainsi que des exemples.

Prétraitement

Lors du calcul d'une division, il faut que le diviseur ne soit pas trop proche de 0. En d'autres mots, pour l'algorithme en ligne, il faut que les valeurs de tous les préfixes du diviseur $d_1 d_2 \cdots$ soient plus grandes qu'un certain paramètre réel $D > 0$.

Définition 3.2.37. On dit qu'un système de numération complexe (β, A) permet le *prétraitement* s'il existe $D > 0$ et une liste finie $\mathcal{L}$ d'égalités de la forme $\pi_\beta(0.w_k \cdots w_0) = \pi_\beta(0.0u_{k-1} \cdots u_0)$, avec des chiffres appartenant à A, tels que tout mot infini $d_1 d_2 \cdots$ sur A n'ayant pas un préfixe de la forme $w_k \cdots w_0 \in \mathcal{L}$ vérifie $|0.d_1 d_2 \cdots d_j| > D$ pour tout $j \in \mathbb{N}$.

Après le prétraitement, on souhaiterait que $d_1 \neq 0$. La première étape consiste donc à déplacer la virgule devant le premier chiffre non-nul de la (β, A)-représentation du diviseur. Ce déplacement de la virgule provoque un changement de la valeur du diviseur original w. On aura donc un nouveau diviseur d donné par $d = w\beta^k$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$.

Un premier cas particulier est le cas où 0 n'admet que la représentation triviale. Ceci est équivalent à $\inf \mathcal{R} > 0$, où $\mathcal{R} = \{|\sum_{i\geq 1} z_i \beta^{-i}| : z_1 \neq 0, \ \ z_i \in A\}$. Dans ce cas, le système permet le prétraitement car on peut poser $D = \inf \mathcal{R}$ et la liste $\mathcal{L}$ est vide.

Dans cette section, on présente la troisième application des spectre de traitée dans ce mémoire. Les spectres permettent de caractériser les systèmes de numérations qui permettent le prétraitement. Dans la suite démontrera qu'un système de numération complexe (β, A) permet le prétraitement si et seulement si le spectre $S_A(\beta)$ n'a pas de point d'accumulation (cf. théorème 3.2.42). On aura besoin des trois lemmes suivants.

Définition 3.2.38. Pour les trois lemmes qui suivent, fixons la notation

$$H = \max\left\{\left|\sum_{i\geq 1} d_i \beta^{-i}\right| : d_i \in A \ \ \forall i \in \mathbb{N}\right\}.$$

Le premier lemme établit un lien entre les représentations rigides de 0 et le prétraitement. Cela permettra de montrer que l'absence de points d'accumulation du spectre $S_A(\beta)$ constitue une condition nécessaire pour que le système de numération (β, A) permette le prétraitement.

Lemme 3.2.39. *Si 0 a une (β, A)-représentation rigide alors le système de numération (β, A) ne permet pas le prétraitement.*

Démonstration. Soit $0.z_1 z_2 \cdots$ une représentation rigide de 0. Supposons que le prétraitement soit possible avec $D > 0$. Soit j un entier tel que $\frac{H}{|\beta|^j} < D$ et considérons le nombre $0.z_1 z_2 \cdots z_j 000 \cdots$. Comme on a supposé que la représentation de 0 est rigide, aucun préfixe

de $z_1z_2\cdots z_j$ n'est dans la liste $\mathcal{L}$ des règles de réécriture. Or $0 = \pi_\beta(0.z_1z_2\cdots z_jz_{j+1}\cdots) = \pi_\beta(0.z_1z_2\cdots z_j) + \pi_\beta(0.0\cdots 0z_{j+1}z_{j+2}\cdots)$, donc

$$|\pi_\beta(0.z_1z_2\cdots z_j)| = |\pi_\beta(0.0\cdots 0z_{j+1}z_{j+2}\cdots)| < \frac{H}{|\beta|^j} < D.$$

Or ceci contredit l'hypothèse que le prétraitement est possible avec D. □

Les deux lemmes qui suivent montrent que l'absence des points d'accumulation dans le spectre $S_A(\beta)$ est une condition suffisante pour qu'un système de numération (β, A) permette le prétraitement

Lemme 3.2.40. *Si $S_A(\beta)$ n'a pas de point d'accumulation, alors pour tout $K > 0$ il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que tout mot $x_{m-1}x_{m-2}\cdots x_1x_0$ de longueur m sur A vérifie*

Soit $|x_{m-1}\beta^{m-1} + x_{m-2}\beta^{m-2} + \cdots + x_1\beta + x_0| \geq K$.

Soit Il (Err : il) existe un mot $y_{k-1}y_{k-2}\cdots y_1y_0$ sur A de longueur $k < m$ tel que

$$x_{m-1}\beta^{m-1} + x_{m-2}\beta^{m-2} + \cdots + x_1\beta + x_0 = y_{k-1}\beta^{k-1} + y_{k-2}\beta^{k-2} + \cdots + y_1\beta + y_0.$$

Démonstration. Comme $S_A(\beta)$ n'a pas de point d'accumulation, l'ensemble $P = \{z \in S_A(\beta) : |z| < K\}$ est fini. En effet, sinon, vu le théorème de Bolzano-Weierstrass, on pourrait extraire une suite convergente de P et la limite de cette suite serait un point d'accumulation de $S_A(\beta)$. Posons $m = 1 + \max\{\rho(z) : z \in P\}$ et $x = x_{m-1}\beta^{m-1} + x_{m-2}\beta^{m-2} + \cdots + x_1\beta + x_0 \in S_A(\beta)$. Maintenant, deux cas se présentent. Soit $x \geq K$, soit $x \in P$. Dans le deuxième cas, $m > \rho(x)$, c'est-à-dire la représentation $x_{m-1}x_{m-2}\cdots x_0$ est plus longue que la plus longue représentation minimale d'un $z \in P$. Alors, si on considère la représentation de x de longueur $\rho(x)$, on a $x = y_{k-1}\beta^{k-1} + \cdots + y_1\beta + y_0$ pour certains $y_i \in A$, où $k \leq \max\{\rho(z) \mid z \in P\} \leq m - 1$, ce qui permet de conclure. □

Lemme 3.2.41. *Si $S_A(\beta)$ n'a pas de point d'accumulation, alors il existe un réel $D > 0$ et un entier $m \in \mathbb{N}$ tels que pour tous les mots infinis $d_1d_2\cdots$ sur A, on a*

(i) Soit $|0.d_1d_2\cdots d_j| \geq D$ pour tout $j \in \mathbb{N}$

(ii) Soit $\pi_\beta(0.d_1d_2\cdots d_m) = \pi_\beta(0.0d'_2d'_3\cdots d'_m)$ pour un certain mot $d'_2d'_3\cdots d'_m$ sur A.

Démonstration. Soit $\mu > 0$ et appliquons le lemme 3.2.40 à $K = H + \mu$ pour obtenir $m \in \mathbb{N}$. Posons $\mathcal{D} = \{|\pi_\beta(0.d_1d_2\cdots d_j)| : j < m,\ \pi_\beta(0.d_1d_2\cdots d_j) \neq \pi_\beta(0.0d'_2d'_3\cdots d'_j)\}$. Alors l'ensemble $\mathcal{D}$ est fini parce qu'il n'existe qu'un nombre fini de mots de longueur $j < m$ et, vu la proposition 3.2.6, le nombre 0 n'admet pas une représentation rigide et ne peut donc pas appartenir à $\mathcal{D}$. Posons $D' = \min \mathcal{D}$. On a alors $D' > 0$.

Pour démontrer ce lemme, on suppose que (ii) est faux et on montre alors que (i) doit être vrai. Considérons alors un mot $d_1d_2\cdots$ et supposons que $\pi_\beta(0.d_1d_2\cdots d_m) \neq \pi_\beta(0.0d'_2d'_3\cdots d'_m)$ pour tous les mots $d'_2d'_3\cdots d'_m \in A^*$. Soit $j \in \mathbb{N}$. On distingue le cas où $j < m$ et où $j \geq m$.

Si $j < m$ et $j \in \mathbb{N}$, alors $\pi_\beta(0.d_1d_2\cdots d_j) \neq \pi_\beta(0.0d'_2d'_3\cdots d'_j)$. En effet, sinon

$$\pi_\beta(0.d_1d_2\cdots d_m) = \pi_\beta(0.0d'_2d'_3\cdots d'_j\cdots d_m),$$

d'où la contradiction. Donc $|\pi_\beta(0.d_1d_2\cdots d_j)| \geq D'$ car il s'agit d'un élément de $\mathcal{D}$.

Si $j \geq m$ et $j \in \mathbb{N}$, alors comme on a supposé que $0.d_1d_2\cdots d_m \neq 0.0d'_2d'_2\cdots d'_m$ pour tous les mots $d'_2d'_2\cdots d'_m \in A^*$, on ne peut pas être dans le cas (ii) de la proposition 3.2.40. En effet, sinon $|d_1d_2\cdots d_m| = |d'_1d'_2\cdots d'_k|$ pour un $k < m$, ce qui implique $|\pi_\beta(0.d_1d_2\cdots d_m)| = |\pi_\beta(0.0^{m-k}d'_1d'_3\cdots d'_k)|$, d'où la contradiction. On a donc

$$|\pi_\beta(0.d_1\cdots d_m)| \geq \frac{1}{|\beta|^m}K \tag{3.18}$$

et on trouve que

$$\begin{aligned}|\pi_\beta(0.d_1d_2\cdots d_j)| &\geq |\pi_\beta(0.d_1d_2\cdots d_m)| - \frac{1}{|\beta|^m}|\pi_\beta(0.d_{m+1}d_{m+2}\cdots d_j)| \\ &\geq \frac{1}{|\beta|^m}K - \frac{1}{|\beta|^m}H \qquad \text{(vu (3.18) et la définition de } H\text{)} \\ &= \frac{\mu}{|\beta|^m}.\end{aligned}$$

Dans tous les cas, on peut poser $D = \min\left\{D', \frac{\mu}{|\beta|^m}\right\}$, ce qui permet de conclure. □

Ces trois lemmes permettent enfin de lier les spectres au prétraitement. Ils se résument par le théorème suivant :

Théorème 3.2.42. *Un système de numération complexe (β, A) permet le prétraitement si et seulement si le spectre $S_A(\beta)$ n'a pas de point d'accumulation.*

Démonstration. Montrons que la condition est nécessaire. Vu la contraposée du lemme 3.2.39, si (β, A) permet le prétraitement, alors 0 n'a pas de représentation rigide. Or vu le théorème 3.2.6, cela implique que $S_A(\beta)$ n'a pas de point d'accumulation. La condition est suffisante vu le lemme 3.2.41. □

Remarque 3.2.43. Le lemme 3.2.41 suggère une façon de trouver les identités de la liste $\mathcal{L}$. Étant donné l'entier m donné par ce lemme, on vérifie si parmi tous les mots $d_1d_2\cdots d_m \in A^*$, il y en a qui vérifient $\pi_\beta(0.d_1\cdots d_m) = \pi_\beta(0.0d'_2d'_3\cdots d'_m)$ pour un certain mot $d'_2d'_3\cdots d'_m \in A^*$ et le cas échéant, on les ajoute à la liste $\mathcal{L}$.

Exemple 3.2.44. Considérons le nombre d'or ϕ et l'alphabet A_1. Comme le nombre d'or vérifie $\phi^2 = \phi + 1$, on a les égalités

$$\frac{1}{\phi} - \frac{1}{\phi^3} = \frac{1}{\phi^2}, \quad \frac{1}{\phi} - \frac{1}{\phi^2} = \frac{1}{\phi^3} \text{ et } \frac{1}{\phi} - \frac{1}{\phi^2} - \frac{1}{\phi^3} = 0. \tag{3.19}$$

On peut réécrire ses égalités en termes de la fonction d'évaluation.

$$\pi_\phi(10\overline{1}) = \pi_\phi(010), \quad \pi_\phi(1\overline{1}0) = \pi_\phi(001) \text{ et } \pi_\phi(1\overline{11}) = \pi_\phi(000).$$

Remarquons aussi que l'alphabet est symétrique, donc chacune des égalités correspond à une autre qu'on obtient en la multipliant par -1. Pour la première égalité ci-dessous on a par exemple

$$\frac{1}{\phi} - \frac{1}{\phi^3} = \frac{1}{\phi^2} \Leftrightarrow -\frac{1}{\phi} + \frac{1}{\phi^3} = -\frac{1}{\phi^2}.$$

Pour alléger les notations, on considère uniquement une égalité pour chaque paire, notamment celles de (3.19). Définissons maintenant la liste $\mathcal{L}_0$ contenant les règles de réécriture suivantes :

$$\pi_\phi(10\overline{1}) = \pi_\phi(010), \;\; \pi_\phi(1\overline{1}0) = \pi_\phi(001) \text{ et } \pi_\phi(1\overline{11}) = \pi_\phi(000).$$

Lemme 3.2.45 ([42]). *Considérons un mot $d_1 d_2 \cdots \in A_1^*$, soit $d = \pi_\phi(0.d_1 d_2 \cdots)$ et posons $D = \frac{1}{\phi^5}$. Si aucune des règles de réécriture de la liste $\mathcal{L}$ définie ci-dessus ne peut être appliquée à $d_1 d_2 \cdots$, alors $|d| \geq D$.*

Démonstration. Remarquons tout d'abord que

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} \phi^{-k} &= \frac{1}{\phi^2} + \frac{1}{\phi^3} + \frac{1}{\phi^4} + \cdots \\ &= \frac{1}{\phi} + \frac{1}{\phi^3} + \cdots && \text{(vu la définition de } \phi) \\ &= 1 \end{aligned}$$

car $d_\phi(1) = (10)^\omega$ (cf. exemple 1.5.25). Comme annoncé précédemment, sans perte de généralité, on peut supposer que $d_1 = 1$. On distingue trois cas en fonction de d_2.

Si $d_2 = 0$, alors $d_3 \geq 0$, car sinon on pourrait appliquer la première règles de réécriture de la liste $\mathcal{L}_0$. Dans ce cas, on a alors

$$|d| \geq \frac{1}{\phi} - \sum_{k\geq 4} \phi^{-k} = \frac{1}{\phi} - \frac{1}{\phi^2} \sum_{k\geq 2} \phi^{-k} = \frac{1}{\phi} - \frac{1}{\phi^2} = \frac{1}{\phi^3} \geq D.$$

Si $d_2 = 1$, alors

$$|d| \geq \frac{1}{\phi} + \frac{1}{\phi^2} - \sum_{k=3}^{\infty} \phi^{-k} = 1 - \frac{1}{\phi} \sum_{k\geq 2}^{\infty} \phi^{-k} = 1 - \frac{1}{\phi} = \frac{1}{\phi^2} \geq D.$$

Si $d_2 = \overline{1}$, alors nécessairement, $d_3 = 1$, car sinon on pourrait appliquer une des règles de réécriture de la liste $\mathcal{L}$. Dans ce cas, on appliquant plusieurs fois la définition de ϕ, on obtient successivement

$$|d| \geq \frac{1}{\phi} - \frac{1}{\phi^2} + \frac{1}{\phi^3} - \sum_{k\geq 4}^{\infty} \phi^{-k}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\phi} - \frac{1}{\phi^2} + \frac{1}{\phi^3} - \frac{1}{\phi^2} \sum_{k \geq 2}^{\infty} \phi^{-k} \\
&= \frac{1}{\phi} - \frac{1}{\phi^2} + \frac{1}{\phi^3} - \frac{1}{\phi^2} \\
&= \frac{1}{\phi^2} + \frac{1}{\phi^3} - \frac{1}{\phi^2} + \frac{1}{\phi^3} - \frac{1}{\phi^2} \\
&= \frac{1}{\phi^3} + \frac{1}{\phi^3} - \frac{1}{\phi^2} \\
&= \frac{1}{\phi^3} + \frac{1}{\phi^3} - (\frac{1}{\phi^3} + \frac{1}{\phi^4}) \\
&= \frac{1}{\phi^3} - \frac{1}{\phi^4} \\
&= \frac{1}{\phi^4} + \frac{1}{\phi^5} - \frac{1}{\phi^4} \\
&= \frac{1}{\phi^5} \\
&\geq D
\end{aligned}
$$

Ceci permet de conclure. □

Ainsi le système de numération (ϕ, A_1) permet le prétraitement.

3.3 Cristallographie

Les spectres ont un lien avec la cristallographie, domaine de la physique qui étudie la structure de solides appelés « cristaux ». L'origine de ce lien est la nature discrète des spectres et se manifeste par l'égalité des spectres avec d'autres ensembles fréquemment utilisés dans la cristallographie pour modéliser la structure atomique des cristaux. On considère dans cette section particulièrement l'ensemble des β-entiers et des ensembles dits de « coupe et projection ». La cristallographie est un domaine extrêmement vaste et riche, et mériterait un mémoire à part. On donnera néanmoins des résumés des éléments les plus essentiels pour permettre au lecteur de comprendre les applications des spectres présentées dans cette section. Le cas échéant, le lecteur intéressé pourra alors consulter les travaux référencés pour plus de détails. Commençons avec une note historique pour mettre cette section en contexte.

En 1982, le scientifique israélien Shechtman a découvert un alliage métallique ayant des propriétés qui contredisaient le consensus scientifique sur la structure des cristaux. On peut étudier la structure des cristaux à l'aide d'une technique appelée la « diffraction des électrons », où l'on bombarde la surface d'un solide d'électrons et on observe la diffraction ainsi produite. Dans des cristaux classiques, du fait que leur structure est régulière et même périodique, les figures résultantes de la diffraction des électrons sont composées de points

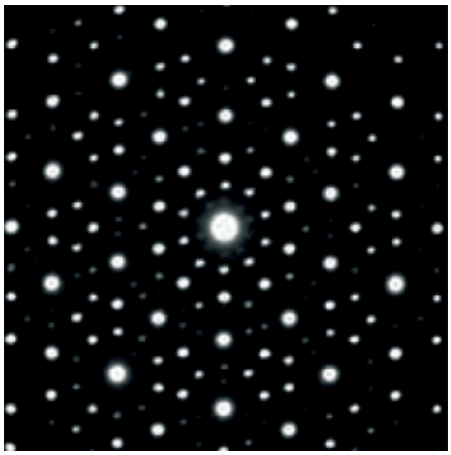

FIGURE 3.6 – La figure de diffraction obtenue par Shechtman. Cette image est constituée des points lumineux, appelés pics de Bragg. Elle présente également une symétrie de rotation d'ordre 10. En effet, en appliquant une rotation de 36 degrés à cette figure, l'image ne change pas. Cette image est à l'origine du développement du domaine de la quasi-cristallographie. [11].

appelés « pics de Bragg » et présentent des symétries de rotation d'ordre 1,2,3,4 ou 6. Cela signifie que si l'on effectue une rotation de la figure de diffraction d'un demi-cercle par exemple (c'est-à-dire de 180 degrés), on obtient la même figure. Une symétrie d'ordre 5 par exemple, était interdite parce que cela impliquerait que la structure du cristal ne serait pas périodique, ce qui était contraire aux connaissances d'alors [13, 50, 67]. Cependant, le solide produit par Shechtman présentait une figure de diffraction autosimilaire avec des pics de Bragg avec une symétrie d'ordre 5 (et même 10, cf. figure 3.6). Ce solide semble donc avoir une structure régulière [3] mais pas périodique. Pour plus d'informations d'ordre physique, le lecteur intéressé est invité à consulter [11, 24, 50, 71, 91, 95]. Selon Gazeau et Verger-Gaugry [49], cette découverte et le chamboulement de la cristallographie qu'elle entraînait donnaient lieu au besoin de développer de nouveaux modèles mathématiques pour représenter les cristaux. Les modèles les plus utilisés sont aujourd'hui des ensembles de points convenables [4] et des pavages [5] (cf. figure 3.7). Dans la cristallographie classique, des structures appelées « réseaux » servent à représenter la structure d'un cristal. En particulier, il mettent en évidence leurs différentes symétries.

Définition 3.3.1 ([101])**.** L'ensemble $L \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ est un *réseau* s'il est un $\mathbb{Z}$-module de rang n.

Un réseau [6] dans $\mathbb{R}^n$ est donc un sous-ensemble infini de points parfaitement ordonnés,

3. C'est-à-dire non aléatoire

4. En particulier les ensembles de coupe et projection, cf. définition 3.3.8.

5. Ces modèles sont équivalents dans le sens où chaque pavage engendre des ensembles de points et vice-versa.

6. Pour une introduction à la notion de réseau, le lecteur est invité a consulter [75].

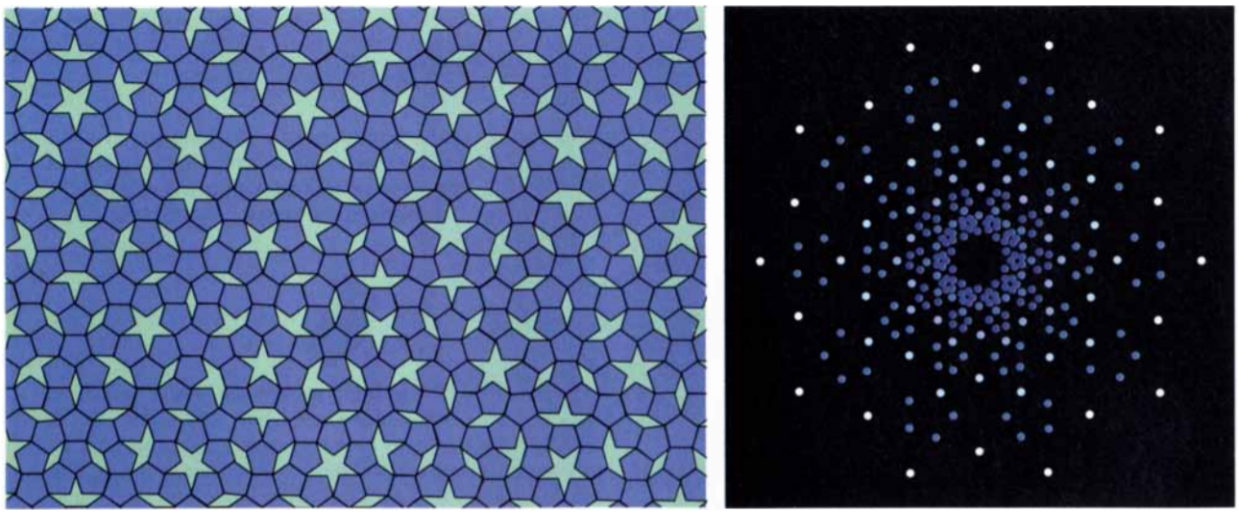

FIGURE 3.7 – Cette image tirée de [95] montre à gauche un pavage dit de Penrose. On peut calculer la figure de diffraction que ce pavage engendre et on obtient la figure à droite. À la fin de la section 3.3.2, la méthode de calcul de la diffraction d'un ensemble de points sera brièvement discutée. On constate que cette figure de diffraction ressemble à celle que Shechtman a découverte, représentée à la figure 3.6.

c'est-à-dire qu'ils sont dispersés dans l'espace de façon périodique. En particulier, pour un réseau L donné, on a $L - L = L$. Les points d'un réseau représentent les lieux où se trouvent les atomes dans un cristal. Vu la nature apériodique des quasi-cristaux, on cherche à représenter la structure d'un quasi-cristal à l'aide de *quasi-réseaux*. Selon Burdík et al. [22], plusieurs définitions de quasi-réseaux ont été proposées.

3.3.1 Les spectres comme ensembles de Meyer

Les premières tentations de définir des quasi-réseaux donnaient lieu aux ensembles de Meyer et de Delone. Lagarias explique dans [68] le rôle de ces ensembles dans la cristallographie.

Définition 3.3.2 ([66])**.** Un ensemble $\Lambda \in \mathbb{R}^n$ est un *ensemble de Delone*[7] s'il satisfait aux deux conditions suivantes :

(i) (Uniformément discret) Il existe un réel $r > 0$ tel que toute boule de rayon r contient au plus un élément de Λ.

(ii) (Relativement dense) Il existe un réel $R > 0$ tel que toute boule de rayon R contient au moins un élément de Λ.

Un ensemble de Delone est alors un ensemble de points séparés d'au moins une certaine distance minimale r mais pas trop espacés. En d'autres mots la distance entre deux points

7. Dans la litérature on trouve également l'orthographe « Delaunay».

consécutifs est donc également bornée par une distance maximale R[8]. Ceci réflète donc la nature d'un solide constitué d'atomes qui sont dispersés d'une certaine façon dans l'espace. Cependant un ensemble de Delone ne détermine pas complètement une structure et vu la découverte des quasi-cristaux, on ne pouvait plus supposer que les atomes étaient dispersés de façon périodique. Un ensemble qui représente un quasi-cristal, ne peut donc plus être stable pour l'opération de soustraction. Inspiré par ses travaux en analyse harmonique, Meyer propose des ensembles qu'il appelle en anglais « model sets » et qui sont aujourd'hui appelés ensembles de Meyer.

Définition 3.3.3 (Ensemble de Meyer)**.** Un ensemble Λ est *de Meyer* s'il vérifie les deux conditions suivantes :

(i) Λ est un ensemble de Delone.

(ii) (Propriété de Meyer) $\Lambda - \Lambda = \Lambda + F$ où F est un ensemble fini.

L'ensemble des distances entre les points d'un ensemble de Meyer Λ est donc donné par Λ même, avec éventuellement un nombre fini d'éléments supplémentaires, regroupés dans F. Un ensemble de Meyer est donc « presque » stable pour l'opération de soustraction.

Dans la litérature, on trouve souvent une autre définition des ensembles de Meyer. Ces ensembles étaient initialement appelés « ensembles quasi-réguliers ».

Définition 3.3.4 ([67])**.** L'ensemble Λ est *quasi-régulier* s'il satisfait aux deux conditions suivantes :

(i) Λ est un ensemble de Delone.

(ii) $\Lambda - \Lambda$ est un ensemble de Delone.

Lagarias [67, Théorème 1.1] a observé que ces deux définitions décrivent le même objet.

Proposition 3.3.5. *L'ensemble Λ est un ensemble de Meyer si et seulement si Λ est quasi-régulier.*

Les ensembles de Meyer forment un premier lien entre les spectres de nombres et la cristallographie. Akiyama et Komornik [9] en déduisent même une explication possible du nom « spectre » pour ces ensembles, en faisant l'observation suivante.

Proposition 3.3.6. *Soient $M \in \mathbb{N}$ et β un nombre de Pisot. Alors $S_{B_M}(\beta)$ et $S_{A_M}(\beta)$ sont uniformément discrets*[9]*.*

Démonstration. Si $\sum_{i=0}^{n} b_i\beta^i$ et $\sum_{i=0}^{n'} b'_i\beta^i$ sont des éléments de $S_{B_M}(\beta)$, alors $\sum_{i=0}^{n} b_i\beta^i - \sum_{i=0}^{n'} b'_i\beta^i$ est un élément de $S_{A_M}(\beta)$. Alors vu la proposition 2.3.2, le nombre 0 est un point isolé de $S_{A_M}(\beta)$. On en déduit que la distance entre deux points de $S_{B_M}(\beta)$ est minorée par une constante. On peut appliquer le même raisonnement à $S_{A_M}(\beta)$ et on en tire que ces deux ensembles sont uniformément discrets. □

8. Pour cette raison, on trouve également le nom « (r, R)-ensemble » pour désigner un ensemble de Delone.

9. cf. définition 3.3.2.

Il en découle que l'ensemble $S_{A_{2M}}(\beta) = S_{A_M}(\beta) - S_{A_M}(\beta)$ est également uniformément discret. De plus, vu le point (i) du lemme 2.4.12, si $\beta < M+1$, alors le spectre $S_{A_M}(\beta)$ est relativement dense et donc un ensemble de Meyer admettant comme autosimilarité β : $\beta S_{A_M}(\beta) \subseteq S_{A_M}(\beta)$. Akiyama et Komornik [9] ont alors remarqué que ce fait donne une construction d'ensembles de Meyer issue de la théorie des nombres. Pour un ensemble de Meyer Λ, il existe un ensemble fini F tel que $\Lambda - \Lambda = \Lambda + F$. Il s'agit donc « presque » d'un réseau, d'où l'intérêt des ensembles de Meyer.

Comme il existe plusieurs définitions de quasi-réseau, Hare et al. [52] ont résumé les propriétés désirables qu'un un ensemble $\Lambda \subset \mathbb{C}$ devrait avoir pour être qualifié de quasi-réseau dans le plan comme suit :

(i) (Delone) Λ est un ensemble de Delone.
(ii) (Symétrie de rotation) Il existe une racine de l'unité $w \in \mathbb{C}$ telle que $w\Lambda \subset \Lambda$.
(iii) (Autosimilarité) Il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $|\beta| \neq 1$ et vérifiant $\beta\Lambda \subset \Lambda$.
(iv) (Complexité locale finie) Λ est un ensemble de Delone tel que $(\Lambda - \Lambda) \cap B(0, \varepsilon)$ est fini pour tout $\varepsilon > 0$.

En toute généralité, on trouve souvent la définition suivante de quasi-réseau.

Définition 3.3.7 (Quasi-réseau, [96])**.** Un *quasi-réseau* est un sous-groupe $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ finiment engendré dont le sous-espace engendré est $\mathbb{R}^n$.

3.3.2 Les spectres comme ensembles de coupe et projection

Une des manières les plus courantes d'obtenir des quasi-réseaux a été introduite par Meyer en 1972 et s'appelle la méthode de « coupe et projection ». La définition d'un ensemble de coupe et projection ci-dessous n'est pas la plus générale, mais elle courante dans la littérature et suffit pour les considérations de cette section [10].

Définition 3.3.8 (Coupe et projection, [67])**.** Considérons un espace $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ et un réseau $L \subset \mathbb{R}^n$, avec $n \geq 1$ et $k \geq 0$. Soient

$$p_{\parallel} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$$

et

$$p_{\perp} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$$

les projections de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R} = k$ respectivement. Supposons que

(i) $p_{\parallel}$ est injective.
(ii) $p_{\perp}(L)$ est dense dans $\mathbb{R}^k$.

Soit un ouvert borné non-vide $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ appelé le domaine d'acceptation. Alors l'ensemble de *coupe et projection* $\Sigma(L, \Omega)$ est défini par

$$\Sigma(L, \Omega) = \{p_{\parallel}(x) \mid x \in L \text{ et } p_{\perp}(x) \in \Omega\}.$$

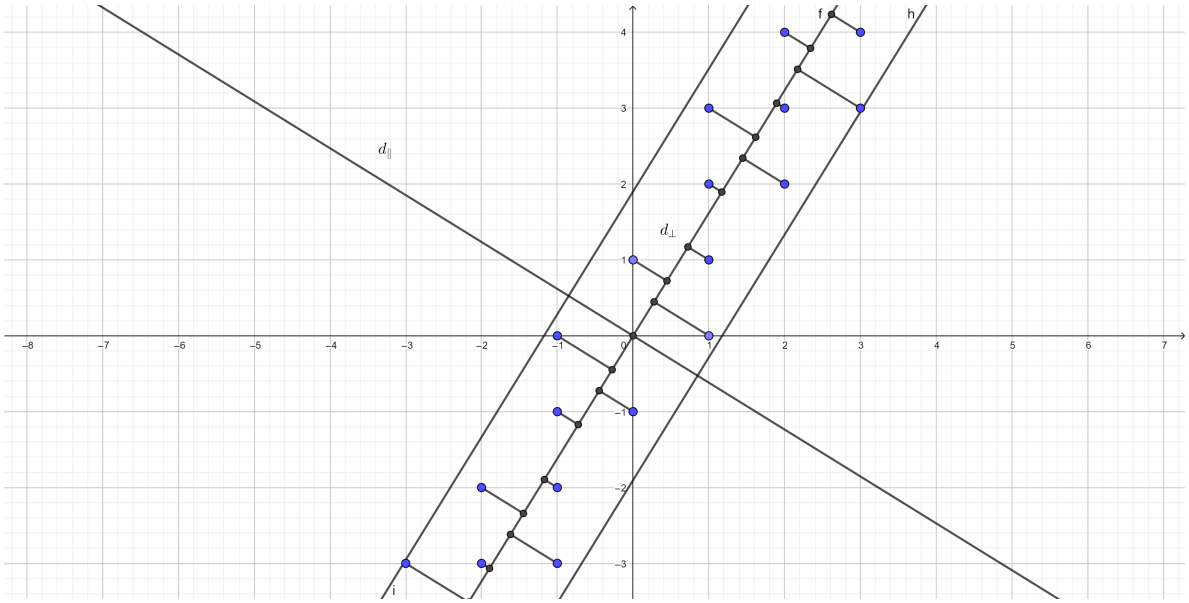

FIGURE 3.8 – Une illustration de la construction d'un ensemble de coupe et projection. La droite $d_\perp$ a une pente de ϕ, le nombre d'or. Les points $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (donc les coins des carrés) forment le réseau L et sont projetés sur la droite $d_\perp$ si leur distance à cette droite est inférieure à 1. En d'autres mots, $\Omega = [-1, 1]$.

On s'autorise parfois à noter un ensemble de coupe et projection simplement par Σ si le contexte est clair, où si l'on considère un ensemble de coupe et projection quelconque.

Les ensembles de coupe et projection forment le deuxième lien entre les spectres et la cristallographie. Dans certains cas, les spectres sont des ensembles de coupe et projection. Ce résultat a été démontré par Masáková et al. dans [72] et repose sur la propriété suivante.

Proposition 3.3.9 ([72])**.** *Soit β un nombre de Pisot quadratique, notons β' son conjugué et soit $M \in N$. Alors*

$$S_{B_M}(\beta) \subset \{x \in \mathbb{Z}[\beta] : \sigma(x) \in \Omega\}$$

où

$$\sigma : \mathbb{Q}(\beta) \to \mathbb{Q}(\beta') : m + n\beta \mapsto \sigma(m + n\beta) = m + n\beta'$$

et où

$$\begin{cases} \Omega = \left]-\frac{M\beta}{\beta-1}, \frac{M\beta^2}{\beta^2-1}\right[& si\ \beta^2 = p\beta + 1\ avec\ p \geq 1 \\ \Omega = \left]0, \frac{M\beta}{\beta-1}\right[& si\ \beta^2 = p\beta - 1\ avec\ p \geq 3. \end{cases}$$

Démonstration. Soit $x = \sum_{i=0}^{n} a_i\beta^i \in S_{B_M}(\beta)$. Pour démontrer l'inclusion souhaitée, on doit prouver que $x \in \mathbb{Z}[\beta]$ et que $\sigma(x) \in \Omega$. Comme β est un nombre de Pisot quadratique, on a $x \in \mathbb{Z}[\beta] = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\,\beta$. On a également $\sigma(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\beta'^i$. On distingue maintenant deux cas en fonction du polynôme minimal de β.

10. Balkova et al. réfèrent à [74, 76].

Cas 1 : $\beta^2 = p\beta + 1$ avec $p \geq 1$. Dans ce cas $\beta' = -\frac{1}{\beta}$ et on a

$$-\frac{M\beta}{\beta^2-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{M}{-\beta^{2i+1}} < \sigma(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{(-\beta)^i} < \sum_{i=0}^{\infty} \frac{M}{\beta^{2i}} = \frac{M\beta^2}{\beta^2-1}.$$

Cas 2 : $\beta^2 = p\beta - 1$ avec $p \geq 3$. Dans ce cas, $\beta' = \frac{1}{\beta}$ et on a

$$0 \leq \sigma(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{\beta^i} < \sum_{i=0}^{\infty} \frac{M}{\beta^i} = \frac{M\beta}{\beta-1}.$$

Dans les deux cas, on a $x \in \Omega$ (Err : $\sigma(x) \in \Omega$), ce qui permet de conclure. □

Au vu de ce résultat, Masáková et al. ont considéré les ensembles de coupe et projection suivants.

Définition 3.3.10 ([72]). Considérons un irrationnel quadratique β et un intervalle borné Ω. Alors l'ensemble de *coupe et projection* basé sur β et de domaine d'acceptation Ω est

$$\Sigma_\beta(\Omega) = \{x \in \mathbb{Z}[\beta] \mid x' \in \Omega \text{ (Err : } \sigma(x) \in \Omega)\}.$$

Le lien entre les spectres et les ensembles de coupe et projection est basé sur le système de numération suivant. Considérons une base réelle γ vérifiant $|\gamma| > 1$. L'alphabet sera du type $A_{m,M}$, défini ci-dessous.

Définition 3.3.11 ([72]). Soient deux entiers $m < 0$ et $M > 0$. Alors on définit

$$A_{m,M} = \{m, m+1, \ldots, 0, 1, \ldots M\}.$$

Considérons les $(\gamma, A_{m,M})$-représentations des nombres.

Définition 3.3.12. On note $I_{\gamma,A_{m,M}}$ l'ensemble des nombres x ayant une $(\gamma, A_{m,M})$-représentation.

L'ensemble $I_{\gamma,A_{m,M}}$ est un intervalle si l'alphabet $A_{m,M}$ est assez grand comme le montre la proposition suivante [11].

Proposition 3.3.13 ([72]). *Si $M - m > \gamma - 1$, alors on a*

$$I_{\gamma,A_{m,M}} = \begin{cases} \left[\frac{m\gamma}{\gamma-1}, \frac{M\gamma}{\gamma-1}\right] \text{ si } \gamma > 1 \\ \left[(M+m\gamma)\frac{\gamma}{\gamma^2-1}, (m+M\gamma)\frac{\gamma}{\gamma^2-1}\right] \text{ si } \gamma < -1. \end{cases}$$

11. Une partie de cette proposition est démontrée dans [81] (proposition 2.1).

Masáková et al. [72] ont considéré l'application $D : I_{\gamma,A_{m,M}} \to A_{m,M}$ définie à l'aide des intervalles suivants. Notons l, r les bornes de l'intervalle $I_{\gamma,A_{m,M}}$, i.e. $l = \frac{m\gamma}{\gamma-1}$ et $r = \frac{M\gamma}{\gamma-1}$ si $\gamma > 1$ et $l = (M+m\gamma)\frac{\gamma}{\gamma^2-1}$, $r = (m+M\gamma)\frac{\gamma}{\gamma^2-1}$ si $\gamma < -1$. Pour L vérifiant $l < L+m+1 \leq L+M < r$, on définit

$$\begin{aligned} I_m &= [l, L+m+1[, \\ I_k &= [L+k, L+k+1[\text{ si } m < k < M, \\ I_M &= [L+M, r]. \end{aligned}$$

Alors $I_{\gamma,A_{m,M}} = \cup_{k\in A_{m,M}} I_k$. On définit

$$D : I_{\gamma,A_{m,M}} \to A_{m,M} : w \mapsto D(w) = k \text{ si } x \in I_k,$$

et on pose $T(x) = \gamma(x - D(x))$. Considérons maintenant un intervalle $A_{n,N}$ où

$$m \leq n \leq 0 \leq N \leq M \text{ et } N - n = \lfloor|\gamma|\rfloor \tag{3.20}$$

. Un tel intervalle a la taille minimale nécessaire pour que $I_{\gamma,A_{n,N}}$ est un intervalle. On a alors

$$A_{n,N} \subset A_{m,M} \text{ et } I_{\gamma,A_{n,N}} \subset I_{\gamma,A_{m,M}}.$$

Le lemme suivant spécifie les valeurs de L pour un réel γ et des alphabets $A_{m,M}$, $A_{n,N}$ donnés.

Lemme 3.3.14 ([72]). *Posons $L = \frac{n}{\gamma-1}$ si $\gamma > 1$ et $L = \frac{n-\gamma}{\gamma-1}$ si $\gamma < -1$. Notons $I = \gamma[L, L+1[$. Alors*

(i) $T(I_{\gamma,A_{m,M}}) \subset I_{\gamma,A_{m,M}}$.
(ii) $T(I_k) \subset I$ pour tout $m < k < M$.
(iii) $I \subset \cup_{k\in A_{n,N}} I_k$.
(iv) $T(I) \subset I$.
(v) Pour tout $x \in I^{\circ}_{\gamma,A_{m,M}}$, il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $T^\ell(x) \in I$.

Remarque 3.3.15. La preuve a été omise dans [72]. On propose donc la démonstration suivante.

Démonstration. Montrons (ii). Si $x \in I_k = [L+k, L+k+1[$, alors $x - D(x) \in [L, L+1[$, donc $T(x) = \gamma(x - D(x)) \in \gamma[L, L+1[= I$.

Passons au point (iii). Commençons par étudier les valeurs de γL et $\gamma(L+1)$. Si $\gamma > 1$, on a tout d'abord

$$\gamma L = \gamma\frac{n}{\gamma-1} \geq \gamma\frac{m}{\gamma-1},$$

et

$$\gamma(L+1) = \gamma\frac{n}{\gamma-1} + \gamma = \frac{n\gamma+\gamma(\gamma-1)}{\gamma-1} < \frac{n\gamma+\gamma(N-n)}{\gamma-1} \leq \frac{n\gamma+\gamma(M-n)}{\gamma-1} = \frac{M\gamma}{\gamma-1}$$

car $N - n > \gamma - 1$ vu (3.20). De plus, on a d'une part

$$\gamma \cdot L = \frac{n\gamma}{\gamma - 1} = \frac{n + n\gamma - n}{\gamma - 1} = \frac{n}{\gamma - 1} + n = L + n, \tag{3.21}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} \gamma \cdot (L+1) < L + N + 1 &\Leftrightarrow \gamma L + \gamma < L + N + 1 \\ &\Leftrightarrow \gamma L + \gamma - L < N + 1 \\ &\Leftrightarrow L(\gamma - 1) + \gamma < N + 1 \\ &\Leftrightarrow n + \gamma < N + 1 \\ &\Leftrightarrow \gamma - 1 < N - n. \end{aligned}$$

ce qui est vrai vu (3.20). On a donc montré que si $\gamma > 1$, alors

$$l \leq \frac{m\gamma}{\gamma - 1} \leq \frac{n\gamma}{\gamma - 1} = \gamma L < \gamma(L+1) < \gamma \frac{N}{\gamma - 1} \leq \gamma \frac{M}{\gamma - 1} = r. \tag{3.22}$$

et

$$L + n = \gamma L < \gamma(L+1) < L + N + 1. \tag{3.23}$$

Si $\gamma < -1$, remarquons d'abord que $L = \frac{n-\gamma}{\gamma-1} < 0$ et que $L + 1 = \frac{n-1}{\gamma-1} > 0$, car $n - \gamma > 0$ et $\gamma - 1 < 0$ vu (3.20). On a donc $\gamma L > 0 > \gamma(L+1)$. On en tire que $I = \gamma[L, L+1[=]\gamma(L+1), \gamma L]$. On a

$$\begin{aligned} \gamma(L+1) &= \gamma \frac{n-1}{\gamma - 1} \\ &= (n-1)(\gamma+1)\frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} \\ &= (n\gamma + n - \gamma - 1)\frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} \\ &\geq (n\gamma + M)\frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} && (\text{car } M - n \geq -\gamma - 1) \\ &\geq (m\gamma + M)\frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} = l && (\text{car } m \leq n) \end{aligned}$$

et $\gamma L = \gamma \frac{n-\gamma}{\gamma-1} = \frac{\gamma}{\gamma^2-1}(n-\gamma)(\gamma+1)$. Remarquons qu'on a

$$\begin{aligned} (n-\gamma)(\gamma+1) &= n\gamma + n - \gamma(\gamma+1) \\ &> n\gamma + n - \gamma(n-N) && (\text{car } \gamma + 1 > n - N) \\ &= n\gamma + n - n\gamma + N\gamma \\ &= n + N\gamma \\ &\geq m + M\gamma. \end{aligned}$$

On en tire que $\gamma L = \frac{\gamma}{\gamma^2-1}(n-\gamma)(\gamma+1) < \frac{\beta}{\gamma^2-1}(m + M\gamma) = r$.

De plus on a

$$\begin{aligned} L+n &= \frac{n-\gamma}{\gamma-1}+n \\ &= \frac{n-\gamma+n\gamma-n}{\gamma-1} \\ &= \frac{\gamma(n-1)}{\gamma-1} \\ &= \gamma(L+1) \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} L+N+1 &= \frac{n-\gamma}{\gamma-1}+1+N \\ &= \frac{n-1+N\gamma-N}{\gamma-1} \\ &> \frac{\gamma+N\gamma}{\gamma-1} && (\text{car } -N+n-1<\gamma) \\ &= \frac{\gamma}{\gamma-1}(N+1) \\ &> \frac{\gamma(n-\gamma)}{\gamma-1} && (\text{car } N+1>n-\gamma) \\ &= \gamma L. \end{aligned}$$

On a donc montré que

$$l \leq \gamma(L+1) < \gamma L < r. \tag{3.24}$$

et que

$$L+n \leq \gamma(L+1) < \gamma L < L+N+1 \tag{3.25}$$

Pour démontrer le point (iii), on distingue plusieurs cas en fonction du signe de γ et de la relation entre m (respectivement M) et n (respectivement N) et on compare les bornes de I avec celles de $\cup_{k\in A_{n,N}} I_k$. Notons p (respectivement q) la borne inférieure (respectivement supérieure) de $\cup_{k\in A_{n,N}} I_k$. Remarquons que si $n=m$, alors $I_n = I_m$ et donc $p=l$. De même, si $N=M$, alors $I_N = I_M$ et donc $q=r$. Sinon, si $m<n$, alors $p = L+n$ et si $N<M$, alors $q = L+N+1$. Traitons d'abord le cas où $\gamma > 1$. Si $m=n$ et $M=N$, alors on a, vu (3.22), $l \leq \gamma L$ et $\gamma(L+1) < r$. Si $m<n$ et $N<M$, on a, vu (3.23), $L+n < \gamma L$ et $\gamma(L+1) < L+N+1$. Si $m=n$ et $N<M$, alors vu (3.22) et (3.23), on a $l \leq \gamma L$ et $\gamma(L+1) < L+N+1$. Le cas où $m<n$ et $N=M$ est similaire.

Si $\gamma < -1$, alors l'inclusion découle de (3.24) et (3.24) en appliquant le même raisonnement que ci-dessus. Cela permet de conclure pour le point (iii).

Montrons le point (i). On distingue deux cas :

Cas 1 : Si $x \in I_k$ avec $m<k<M$, alors on peut conclure en appliquant (ii) et (iii).

Cas 2 : Si $x \in I_m$ ou $x \in I_M$ avec $\gamma > 1$, alors on a

$$T(l) = \gamma(l - m) = \gamma\left(\frac{m\gamma}{\gamma - 1} - m\right) = \gamma\left(\frac{m}{\gamma - 1}\right) = l \tag{3.26}$$

$$T(r) = \gamma(r - M) = \gamma\left(\frac{M\gamma}{\gamma - 1} - M\right) = \gamma\left(\frac{M}{\gamma - 1}\right) = r \tag{3.27}$$

Montrons maintenant que si $x \in I_m$ et $x > l = \frac{m\gamma}{\gamma-1}$, alors $l < T(x) < r$. En effet, on a

$$T(x) = \gamma(x - m) > \gamma(l - m) = T(l) \overset{(3.26)}{=} l$$

De plus, comme $x < L + m + 1$, on a

$$T(x) = \gamma(x - m) < \gamma(L + m + 1 - m) = \gamma(L + 1) < \frac{M\gamma}{\gamma - 1} = r, \tag{3.28}$$

ce qui permet de conclure si $x \in I_m$ et $x > l$.

Si $x \in I_M$ et $x < r$, alors $l < T(x) < r$, car d'une part,

$$T(x) = \gamma(x - M) < \gamma(r - M) = T(r) \overset{(3.27)}{=} r,$$

et d'autre part, comme $x \geq L + M$, on a

$$T(x) = \gamma(x - M) \geq \gamma(L + M - M) = \gamma L = \frac{m\gamma}{\gamma - 1} = l. \tag{3.29}$$

Donc on a $l < T(x) < r$ également.

Si $\gamma < -1$, alors on a

$$T(l) = \gamma((M + m\gamma)\frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} - m) = \gamma(\frac{M\gamma + m\gamma^2 - m\gamma^2 + m}{\gamma^2 - 1}) = \gamma\frac{M\gamma + m}{\gamma^2 - 1} = r.$$

De même,

$$T(r) = \gamma((M\gamma + m)\frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} - M)) = \gamma\left(\frac{M\gamma^2 + m\gamma - M\gamma^2 + M}{\gamma^2 - 1}\right) = \gamma\frac{M + m\gamma}{\gamma^2 - 1} = l.$$

De plus, si $x \in I_m$, alors $x < L + m + 1$ donc $\gamma x > \gamma(L + m + 1)$. On en tire que

$$T(x) = \gamma(x - m) > \gamma(L + m + 1 - m) = \gamma(L + 1). \tag{3.30}$$

Remarquons que l'application T est strictement décroissante sur I_m et I_M, car $\gamma < -1$. On en tire finalement que si $x \in I_m$, alors $l \leq \gamma(L + 1) < T(x) < r$ où la première inégalité découle du point (iii). De même, si $x \in I_M$, alors $x \geq L + M$ donc $\gamma x \leq \gamma(L + M)$. On en déduit que

$$T(x) = \gamma(x - M) \leq \gamma(L + M - M) = \gamma L. \tag{3.31}$$

Comme précédemment, on trouve $l < T(x) < \gamma L \leq r$, ce qui permet de conclure.

Montrons le point (iv). Supposons d'abord que $n > m$ et $N < M$. Si $x \in I = \gamma[L, L+1]$, alors vu le point (ii), il existe un entier $k \in A_{n,N}$ tel que $x \in I_k$. Or comme on suppose que $n > m$ et $N < N$, on a $I_k = [L+k, L+k+1[$. On en tire que $x - D(x) \in [L, L+1[$ et donc $\gamma(x - D(x)) \in \gamma[L, L+1[= I$. Il reste à démontrer le résultat dans le cas où $n = m$ et $x \in I_m$ et dans le cas où $N = M$ et $x \in I_M$. Cela découle des considérations de la preuve pour les points (i) et (iii). Traitons d'abord le premier cas. On a démontré au point (iii) (cf. (3.22)) que si $\gamma > 1$, alors $\gamma L = \gamma \frac{m}{\gamma - 1}$ et que $\gamma(L+1) < \frac{M\gamma}{\gamma - 1}$. Remarquons également que

$$L + m = \frac{m + m\gamma - m}{\gamma - 1} = \frac{m\gamma}{\gamma - 1}$$

Si $m = n$ et $x \in I \cap I_m$, alors $x > \gamma L \geq \frac{m\gamma}{\gamma - 1} = L + m$. On en tire que

$$T(x) = \gamma(x - m) > \gamma(L + m - m) = \gamma L.$$

On a également montré au point (i) (cf. (3.28)) que si $x \in I \cap I_m$, alors $T(x) < \gamma(L+1)$. On a donc montré que si $x \in I_m$ et $m = n$, alors $T(x) \in I$.

Si $M = N$ et $x \in I \cap I_M$, alors $x \geq L + M$. On a donc

$$T(x) = \gamma(x - M) \geq \gamma(L + M - M) = \gamma L.$$

Remarquons également que

$$L + M + 1 = \frac{n + M\gamma - M + \gamma - 1}{\gamma - 1} > \frac{M\gamma}{\gamma - 1}$$

car $\gamma - 1 < 0$ et $M - n > \gamma - 1$, donc $0 > n - M + \gamma - 1$. Comme $x \in I_M$, on a $x \leq \frac{M\gamma}{\gamma - 1} < L + M + 1$ et donc

$$T(x) = \gamma(x - M) < \gamma(L + M + 1 - M) = \gamma(L + 1).$$

Cela permet de conclure si $\gamma > 1$.

Traitons maintenant le cas où $\gamma < -1$. On a démontré au point (iii) (cf. (3.25)) que si $\gamma < -1$, alors $L + N + 1 > \gamma L$ et $L + n = \gamma(L+1)$. Si $m = n$ et $x \in I \cap I_m$, alors $x > \gamma(L+1) = L + n$. On a alors

$$T(x) = \gamma(x - n) < \gamma(L + n - n) = \gamma L.$$

On a également montré dans le preuve du point (i) que si $x \in I_m$, alors $T(x) > \gamma(L+1)$. Cela permet de conclure pour le premier cas.

Dans le deuxième cas, on a $M = N$ et $x \in I \cap I_M$. On a vu au point (iii) que $\gamma L < L + N + 1 = L + M + 1$. Comme $x \in I$, on a $x \leq \gamma L < L + M + 1$ et donc

$$T(x) = \gamma(x - M) > \gamma(L + M + 1 - M) = \gamma(L + 1).$$

On a également vu au point (i) (cf. (3.31)) que si $x \in I_M$, alors $T(x) \leq \gamma L$. Cela permet de conclure.

Montrons finalement le point (v). Supposons dans un premier temps que $\gamma > 1$ et montrons que si $x \in I_m$ et $x > l$, alors $x < T(x) < \gamma(L+1)$. En effet, on a

$$\begin{aligned} x < T(x) &\Leftrightarrow \gamma(x-m) > x \\ &\Leftrightarrow \gamma x - m\gamma > x \\ &\Leftrightarrow \gamma x - x > m\gamma \\ &\Leftrightarrow x(\gamma - 1) > m\gamma \\ &\Leftrightarrow x > \frac{m\gamma}{\gamma - 1} \end{aligned}$$

et

$$T(x) = \gamma(x-m) < \gamma(L+m+1-m) = \gamma(L+1).$$

De plus si $x \in I_M$ et $x < r$, alors $\gamma L \leq T(x) < x$. En effet,

$$\begin{aligned} &T(x) < x \\ \Leftrightarrow &\gamma(x-M) < x \\ \Leftrightarrow &\gamma x - M\gamma < x \\ \Leftrightarrow &\gamma x - x < M\gamma \\ \Leftrightarrow &x < \frac{M\gamma}{\gamma - 1} \end{aligned}$$

et

$$T(x) = \gamma(x-M) \geq \gamma(L+M-M) = \gamma L.$$

Cela permet de conclure dans le cas où $\gamma > 1$. Si $\gamma < -1$, alors comme l'application T est strictement décroissante sur I_m et I_M, on a

$$l < x < L+m+1 \Rightarrow T(l) = r > T(x) > \gamma(L+1)$$

Si $T(x) \in I$, alors on a terminé. Sinon, si $T(x) < L+M$, on peut conclure vu le point (ii) car dans ce cas $T(x) \in I_k$ avec $m < k < M$ et donc $T^2(x) \in I$. Sinon, si $T(x) > L+M$, alors $T(x) \in I_M$. Considérons alors $T(T(x))$. Comme précédemment, si $T(T(x)) \in I$, on a terminé. Il en va de même si $T(T(x)) > L+m+1$, car alors $T^3(x) \in I$ vu le point (ii). Si $T(T(x)) < L+m+1$, remarquons que $T(T(x)) > x$. En effet, on a

$$\begin{aligned} T(T(x)) > x &\Leftrightarrow \gamma(\gamma(x-m) - M) > x \\ &\Leftrightarrow \gamma^2 x - \gamma^2 m - \gamma M > x \\ &\Leftrightarrow (\gamma^2 - 1)x > \gamma(m\gamma + M) \\ &\Leftrightarrow x > \frac{\gamma(m\gamma + M)}{\gamma^2 - 1}. \end{aligned}$$

ce qui est vrai car $x > l = \frac{\gamma(m\gamma+M)}{\gamma^2-1}$. Cela permet de conclure, car en répétant cette construction, on trouve un $k \in \mathbb{N}$ tel que $T^k(x) > L+m+1$. Il en découle que si $\gamma > 1$ ou si $\gamma < -1$ et si $x \in I_m^{\circ}$ (respectivement I_M°), alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $T^k(x) \in I$. $\square$

Corollaire 3.3.16 ([72]). *Soit $x \in I_{\gamma,A_{m,M}}$.*

(i) Si $T(x)$ a une $(\gamma, A_{m,M})$-représentation finie, alors x a une $(\gamma, A_{m,M})$-représentation finie.

(ii) Si γ vérifie $\gamma\,\mathbb{Z}[\gamma] = \mathbb{Z}[\gamma]$, alors $x \in \mathbb{Z}[\gamma]$ si et seulement si $T(x) \in \mathbb{Z}[\gamma]$.

(iii) Soit γ vérifiant $\gamma\,\mathbb{Z}[\gamma] = \mathbb{Z}[\gamma]$. Si tout $x \in I \cap \mathbb{Z}[\gamma]$ a une $(\gamma, A_{m,M})$-représentation finie, alors tout $x \in I^{\mathrm{o}}_{\gamma,A_{m,M}} \cap \mathbb{Z}[\gamma]$ a un $(\gamma, A_{m,M})$-représentation finie.

En se servant des constructions présentées ci-dessus, Masáková et al. ont montré dans quels cas les spectres sont des ensembles de coupe et projection.

Théorème 3.3.17 ([72]). *Soit $\beta > 1$ un entier quadratique et notons $\beta' = \sigma(\beta)$ son conjugué. Soit $A_{m,M}$ un alphabet avec $M \geq 1$, $m \leq -1$ et $M - m \geq \beta - 1$. Posons*

$$\Omega = I^{\mathrm{o}}_{\frac{1}{\beta'},A_{m,M}} \cup \{0\}.$$

Alors $S_{A_{m,M}}(\beta) = \Sigma_\beta(\Omega)$.

Démonstration. Posons $\gamma = \frac{1}{\beta'}$ et considérons les $(\gamma, A_{m,M})$-représentations des nombres dans Ω. Remarquons d'abord qu'on a $\mathbb{Z}[\beta] = \mathbb{Z}[\gamma]$ car on a $\gamma = \beta$ ou $\gamma = -\beta$ vu que β est un entier algébrique quadratique. De plus,

$$\beta^2 + p\beta \pm 1 = 0 \Rightarrow \beta + p = \mp\frac{1}{\beta} = \pm\beta' \in \mathbb{Z}[\beta], \tag{3.32}$$

donc le morphisme σ sur $\mathbb{Q}(\beta)$ induit [12] par $\beta \mapsto \beta'$ est une bijection sur $\mathbb{Z}[\beta] = \mathbb{Z}[\gamma] = \mathbb{Z}[\beta']$. On en déduit que l'égalité $S_{A_{m,M}}(\beta) = \Sigma_\beta(\Omega)$ est équivalente à l'égalité entre les deux ensembles

$$\sigma(S_{A_{m,M}}(\beta)) = \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k \beta'^k \mid n \in \mathbb{N}, a_k \in A_{m,M} \right\} = \left\{ \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{\gamma^k} \mid n \in \mathbb{N}, a_k \in A_{m,M} \right\}$$

et

$$\sigma\left(\Sigma_\beta(\Omega)\right) = \{z' \in \mathbb{Z}[\gamma] \mid z' \in \Omega\} = \mathbb{Z}[\gamma] \cap \left(I^{\mathrm{o}}_{\gamma,A_{m,M}} \cup \{0\} \right).$$

Montrons alors qu'on a l'égalité entre ces deux ensembles. Vu (3.32), on a $\frac{1}{\gamma} \in \mathbb{Z}[\gamma]$. Alors pour tout $\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{\gamma^k} \in \sigma(S_{A_{m,M}}(\beta))$, on a $\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{\gamma^k} \in \sigma(\Sigma_\beta(\Omega))$.

Montrons alors l'inclusion $\sigma(\Sigma_\beta(\Omega)) \subset \sigma(S_{A_{m,M}}(\beta))$. Pour ce faire, il faut montrer que tout $x \in \mathbb{Z}[\gamma] \cap I^{\mathrm{o}}_{\gamma,A_{m,M}}$ admet une $(\gamma, A_{m,M})$-représentation finie. Vu le corollaire 3.3.16, il suffit de montrer que pour tout $x \in I$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $T^n(x)$ a une $(\gamma, A_{m,M})$-représentation finie, où I est défini comme dans le lemme 3.3.14.

Soit $x \in \mathbb{Z}[\gamma] \cap I$. On pose

$$\begin{aligned} x_0 &= x, \\ x_k &= T(x_{k-1}) \text{ pour } k \in \mathbb{N}_0\,. \end{aligned}$$

12. cf. énoncé de la proposition 3.3.9.

Alors vu le lemme 3.3.14, $x_k \in \mathbb{Z}[\gamma] \cap I$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Définissons la suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par

$$z_k = \sigma(x_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}\,.$$

Comme pour $k \geq 1$, on a $x_{k-1} \in I$, le lemme 3.3.14 implique

$$x_k = \gamma(x_{k-1} - D(w_{k-1})) \text{ où } D(x_{k-1}) \in A_{n,N} \subset A_{m,M}.$$

Comme $\gamma = \frac{1}{\beta'}$, on a

$$z_k = \sigma(\gamma)(\sigma(x_{k-1}) - D(x_{k-1})) = \frac{z_{k-1} - D}{\beta}, \text{ où } D \in A_{n,N}. \tag{3.33}$$

Considérons maintenant deux nombres y et $y^* = \frac{1}{\beta}(y - D)$ où $D \in A_{n,N}$. Alors on a

(a) Si $y \in [-\frac{N}{\beta-1}, -\frac{n}{\beta-1}]$, alors $y^* \in [-\frac{N}{\beta-1}, -\frac{n}{\beta-1}]$.

(b) Si $y > -\frac{n}{\beta-1}$, alors $-\frac{N}{\beta-1} < y^* < y$.

(c) Si $y < -\frac{N}{\beta-1}$, alors $-\frac{n}{\beta-1} > y^* > y$.

Montrons le point (a). Si $y > \frac{-N}{\beta-1}$, alors

$$\frac{1}{\beta}(y - D) > \frac{1}{\beta}(\frac{-N}{\beta-1} - D) > \frac{1}{\beta}(\frac{-N}{\beta-1} - N) = \frac{1}{\beta}(\frac{-N - N\beta + N}{\beta-1}) = \frac{-N}{\beta-1}.$$

Si $y < \frac{-n}{\beta-1}$, on a

$$\frac{1}{\beta}(y - D) < \frac{1}{\beta}(\frac{-n}{\beta-1} - D) < \frac{1}{\beta}(\frac{-n}{\beta-1} - n) = \frac{1}{\beta}(\frac{-n - n\beta + n}{\beta-1}) = \frac{-n}{\beta-1}.$$

Cela montre le point (a). Passons au point (b). Si $y > -\frac{n}{\beta-1}$, alors $y > -\frac{N}{\beta-1}$, donc $y^* > -\frac{N}{\beta-1}$ vu le point (a). De plus, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{\beta}(y - D) < y \Leftrightarrow & y < \beta y + D \\ & \Leftrightarrow y(1-\beta) < D \\ & \Leftrightarrow y > \frac{-D}{\beta - 1}\end{aligned}$$

ce qui est la cas vu que $y > -\frac{n}{\beta-1}$ et $D \in A_{n,N}$. La preuve du point (c) est similaire On déduit des propriétés $(a), (b), (c)$ et (3.33) qu'il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tel que

$$z_\ell \in \left[-\frac{N}{\beta-1}, -\frac{n}{\beta-1}\right]. \tag{3.34}$$

Comme $x_\ell, z_\ell \in \mathbb{Z}[\beta] = \mathbb{Z}[\gamma]$, il existe $c, d \in \mathbb{Z}$ tels que

$$x_\ell = c + d\beta \in I \text{ et } z_\ell = c + d\beta' \in \left[-\frac{N}{\beta-1}, -\frac{n}{\beta-1}\right]. \tag{3.35}$$

Le but est de montrer que nécessairement, on a $c = d = 0$. On distingue deux cas en fonction du polynôme minimal de β.

Cas 1 : $\beta^2 = p\beta + 1$, avec $p \in \mathbb{N}_0$. Dans ce cas, $\gamma = \frac{1}{\beta'} = -\beta < -1$ et vu le lemme 3.3.14, on a $I \subset [H, H+\beta]$ où $H = \beta\frac{n-1}{\beta+1}$. En effet, $\gamma(L+1) = H$ car

$$\gamma(L+1) = \gamma L + \gamma = \beta\frac{n+\beta}{\beta+1} - \beta = \frac{\beta n + \beta^2 - \beta^2 - \beta}{\beta+1} = \beta\frac{n-1}{\beta+1} = H$$

et

$$H + \beta = \gamma(L+1) + \beta = \gamma L + \gamma + \beta = \gamma L$$

Vu (3.35), on a

$$H \leq c + d\beta \leq H + \beta, \tag{3.36}$$

$$-\frac{N}{\beta-1} \leq c + d\beta' \leq -\frac{n}{\beta-1}. \tag{3.37}$$

On distingue maintenant encore deux cas en fonction de p. Si $\lfloor\beta\rfloor = p \geq 2$, alors on choisit $n \leq -1$ et $N \geq 1$ tels que $N - n = \lfloor\beta\rfloor$ et vu la définition de H, on a $H < 0$ et

$$\begin{aligned} H + \beta &= \frac{\beta(n-1) + \beta(\beta+1)}{\beta+1} \\ &= \frac{\beta(n+\beta)}{\beta+1} \\ &= \frac{\beta(N - \lfloor\beta\rfloor + \beta)}{\beta+1} \\ &> \frac{\beta N}{\beta+1} \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

On a également

$$\begin{aligned} &\frac{N}{\beta-1} < 1 \\ \Leftrightarrow &N < \beta - 1 \\ \Leftrightarrow &n + \lfloor\beta\rfloor < \beta - 1 \\ \Leftrightarrow &n < \beta - \lfloor\beta\rfloor - 1 \\ \Leftrightarrow &n \leq -1, \end{aligned}$$

car $0 \leq \beta - \lfloor\beta\rfloor < 1$ et n est un entier. On a donc $-1 < -\frac{N}{\beta-1}$. On montre de façon similaire que $0 < -\frac{n}{\beta-1} < 1$. On a donc en résumé :

$$H < 0, \;\; H + \beta > 0, \;\; -1 < -\frac{N}{\beta-1} < 0, \text{ et } 0 < -\frac{n}{\beta-1} < 1. \tag{3.38}$$

Si $d \geq 1$, alors vu (3.36), $c \leq -1$. En effet si $c > -1$, alors $H + \beta \geq c + d\beta \geq c + \beta$, donc $-1 < c \leq (n-1)\frac{\beta}{\beta+1}$, ce qui implique que $-1 < \beta n$ et donc $1 > -n\beta \geq \beta$,

car $n \leq -1$. Or cela est impossible. De façon similaire, on montre que si $d \leq -1$, alors $c \geq 1$. On en tire que si $d \geq 1$, alors $c + d\beta' = c - d\frac{1}{\beta} \leq -1 - \frac{1}{\beta} < -1$, ce qui contredit (3.37) et (3.38). De même, si $d \leq -1$, alors $c+d\beta' = c-d\frac{1}{\beta} \geq 1+\frac{1}{\beta} > 1$, ce qui contredit aussi (3.37) et (3.38). On a donc $d = 0$. Vu (3.38), on doit également avoir $c = 0$. La seule paire (c, d) satisfaisant (3.36) et (3.37) est donc $(0, 0)$. On en tire que $x_\ell = 0$, ce qui implique que x a une $(\gamma, A_{m,M})$-représentation finie.
Si $p = 1$, alors $N - n = \lfloor \beta \rfloor = 1$, car dans ce cas, $\beta = \phi$, le nombre d'or. On ne peut donc pas avoir $n \leq -1$ et $N \geq 1$. Posons alors $n = 0$ et $N = 1$. Dans ce cas, les équations (3.36) et (3.37) ont deux solutions, soit $c = d = 0$, soit $c = -1 = -d$. Dans le premier cas, on a $x_\ell = 0$. Dans le deuxième, on a $x_\ell = c+d\beta = -1+\beta = \frac{1}{\beta}$. Or comme l'alphabet $A_{m,M}$ contient -1, 0 et 1 et comme $\gamma = -\beta$, le mot $0.\overline{1}0^\omega$ est une $(\gamma, A_{m,M})$-représentation finie de x_ℓ.

Cas 2 : $\beta^2 = p\beta - 1$, avec $p \in \mathbb{N}$ et $p \geq 3$. Dans ce cas, $\gamma = \frac{1}{\beta'} = \beta > 1$. Vu le lemme 3.3.14, on a $I \subset [H, H + \beta]$, où $H = \frac{n\beta}{\beta-1}$. De l'équation (3.35) on déduit encore une fois (3.36) et (3.37), qui sont uniquement valables pour $(c, d) = (0, 0)$.

□

Exemple 3.3.18. Considérons à nouveau le spectre $S_{\{-1,0,1\}}(\phi)$. Alors $1 - (-1) > \phi$. Alors vu le théorème 3.3.17, on a $S_{\{-1,0,1\}}(\phi) = \sum_\phi(\Omega)$ où $\Omega = I^{\circ}_{\frac{1}{\beta'}, A_{m,M}} \cup \{0\}$. Calculons les bornes de cet intervalle. Tout d'abord, $\phi' = 1 - \phi$. Notons $\gamma = \frac{1}{\sigma(\phi)} = \frac{1}{1-\phi}$. De plus, la borne inférieure de Ω vaut

$$\begin{aligned}
(1-\gamma)\frac{\gamma}{\gamma^2-1} &= -(1-\gamma)\frac{(1-\gamma)\gamma}{(\gamma-1)(\gamma+1)} \\
&= -\frac{\gamma}{\gamma+1} \\
&= -\frac{\frac{1}{1-\phi}}{\frac{1}{1-\phi}+1} \\
&= -\frac{1}{1+1-\phi} \\
&= -\frac{1}{2-\phi} \approx -2,618.
\end{aligned}$$

De façon similaire, on trouve que la borne supérieure de Ω vaut $\frac{1}{2-\phi} \approx 2,618$. On a donc $\Omega = [-\frac{1}{2-\phi}, \frac{1}{2-\phi}]$. L'ensemble $\sum_\phi(\Omega)$ est représenté à la figure 3.3.2. Les points de $\mathbb{Z}[\phi]$ étant représentés sur l'axe des abscisses et ceux de $\mathbb{Z}[\phi']$ sur l'axe des ordonnées. Les projections des points qui se trouvent dans le domaine d'acception sont rouges.

En termes mathématiques, la diffraction est représentée par des mesures. On réfère à [45] pour les définitions de base de la théorie de la mesure. Dans la suite on suppose une certaine familiarité du lecteur avec ces concepts.

Vu que les quasi-cristaux présentent des pics de Bragg dans leur spectre de diffraction, un modèle mathématique convenable représentant le spectre de diffraction de tels solides

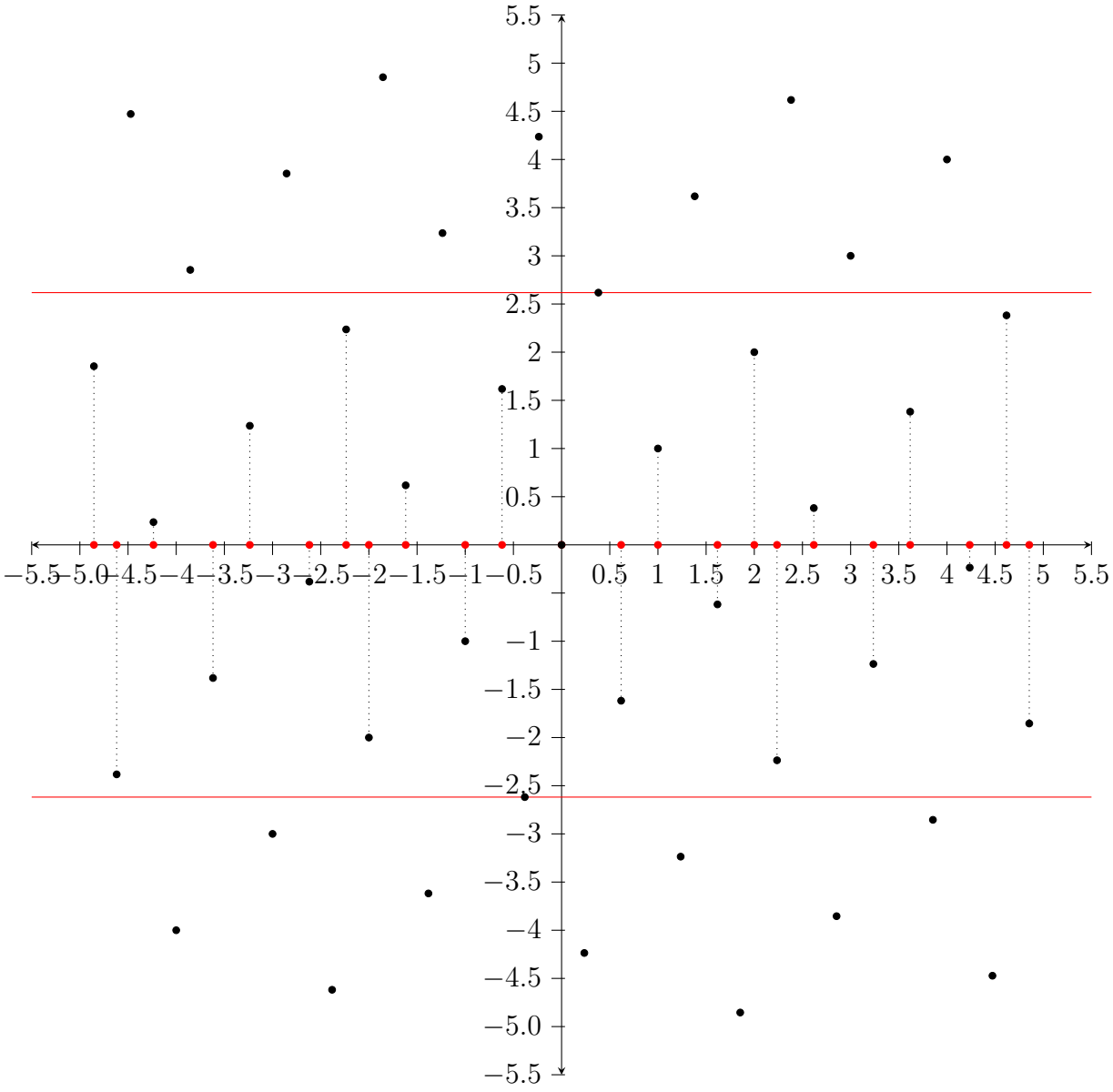

FIGURE 3.9 – La spectre $S_{\{-1,0,1\}}(\phi)$ (en rouge), vu comme ensemble de coupe et projection.

doit avoir une composante atomique, ce qui correspond à la mesure de Dirac centrée sur différents points représentant les lieux où se trouvent ces pics. On représente l'intensité des pics de Bragg en multipliant ces mesures de Dirac par des constantes. En d'autres mots, les pics de Bragg d'un spectre de diffraction seront représentés par une combinaison linéaire de mesures de Dirac.

Définition 3.3.19 ([55])**.** La *transformée de Fourier* d'une fonction intégrable $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ est donnée par

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle} dx,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^d$.

Selon Balková et al. [14] le lien entre les ensembles de Meyer et la diffraction n'est pas évident. La pertinence des ensembles de coupe et projection s'explique alors par le fait suivant. Soit X un ensemble de points obtenu par le méthode de coupe et projection de dimension d. Selon Hof [55], le spectre de diffraction d'un ensemble de points est déterminé par la transformée de Fourier de

$$\gamma = \lim_{L\to\infty} (2L)^{-d} \sum_{x,y\in X\cap[-L,L]^d} \delta_{x-y},$$

appelé l'autocorrélation de cet ensemble. Hof a démontré que, pour certains ensembles de coupe et projection, le spectre de diffraction contient une composante purement atomique (cf. [45, définition 2.23]). À titre indicatif, la formulation de la méthode standard (selon Hof [55]) pour calculer la diffraction d'un ensemble de points X obtenu par le méthode de coupe et projection est présentée ci-dessous. Considérons

$$\mu = \sum_{x\in X} \delta_x,$$

où δ_x est la mesure de Dirac centrée sur x. Alors on peut en calculer la transformée de Fourier qui est de la forme

$$\hat{\mu} = \sum_{y\in X^*} c_y \delta_y,$$

où $c_y \in \mathbb{C}$ et X^* est un ensemble dénombrable dense dans l'espace. Hof affirme alors que pour certains ensembles de coupe et projection X et pour un $\alpha \in \mathbb{R}$ convenable,

$$\sum_{y\in X^*:\ |c_y|>\alpha} |c_y|^2 \delta_y \tag{3.39}$$

fournit une bonne approximation du spectre de diffraction de certains quasi-cristaux [13]. De plus, la mesure (3.39) est la partie purement atomique de $\hat{\gamma}$, ce qui justifie la méthode standard présentée ci-dessus. Par ce fait, les ensembles de coupe et projection sont donc susceptibles de servir de modèle pour les quasi-cristaux.

13. Le choix de α correspond à ne considérer que les points dont l'intensité de la diffraction est supérieure à α.

3.3.3 Les spectres et les β-entiers

Un nouvelle approche à la génération de quasi-réseaux a été proposé par Burdík et al. dans [22] et sera présentée dans cette section. Cette définition repose sur l'autosimilarité desdits ensembles. Étant donné un ensemble admettant une autosimilarité $\beta > 1$, on considère l'ensemble des β-entiers, noté $\mathbb{Z}_\beta$ et défini ci-dessous.

Définition 3.3.20 ([22,49])**.** Soit $x \in \mathbb{R}$ et $d_\beta(x) = x_j x_{j-1} \cdots x_0 . x_{-1} x_{-2} \cdots$ sa β-représentation. Alors on note la *partie entière* de x

$$\lfloor x \rfloor = x_j \beta^j + \cdots + x_0$$

et la *partie fractionnaire* de x

$$\{x\} = \frac{x_{-1}}{\beta} + \frac{x_{-2}}{\beta^2} + \cdots .$$

Alors on définit l'ensemble des β-*entiers* par

$$\mathbb{Z}_\beta = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| = \lfloor x \rfloor\}$$

et

$$\mathbb{Z}_\beta^+ = \mathbb{Z}_\beta \cap \mathbb{R}^+ .$$

Remarque 3.3.21. Pour $\beta > 1$, l'ensemble $\mathbb{Z}_\beta$ vérifie les deux propriétés suivantes :

$$\beta\, \mathbb{Z}_\beta \subset \mathbb{Z}_\beta \ \text{ et } \ \mathbb{Z}_\beta = -\, \mathbb{Z}_\beta .$$

Burdík et al. cherchaient les réels β pour lesquels $\mathbb{Z}_\beta$ est un ensemble de Meyer et concluent leurs travaux en identifiant les nombres de Pisot. Les arguments nécessaires pour le démontrer reposent sur le résultat 3.3.23, qui donne la forme des distances entre deux β-entiers successifs. Une version plus forte de ce résultat caractérisant entièrement les distance entre deux β-entiers est attribuée à Thurston [97], mais on reprend ici l'énoncé de [7], qui suffit pour les considérations qui suivent. Rappelons d'abord la définition de la représentation quasi-gloutonne de 1.

Définition 3.3.22 ([43])**.** On définit la représentation *quasi-gloutonne* $d^*_\beta(1)$ de 1 comme suit.

— Si $d_\beta(1) = t_1 \cdots t_m$ est fini, alors $d^*_\beta(1) = (t_1 \cdots (t_m - 1))^\omega$.
— $d^*_\beta(1) = d_\beta(1)$ sinon.

Proposition 3.3.23 ([7])**.** *Si $x, y \in \mathbb{Z}_\beta$ sont deux β-entiers successifs, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|x - y| = \pi_\beta(\sigma^n(d^*_\beta(1)))$.*

Démonstration. Pour prouver ce résultat, on utilise la caractérisation de Rényi des β-représentations. Soit $d^*_\beta(1) = c_1 c_2 \cdots$ la β-représentation de 1. Supposons que $x > y$ et que

$$d_\beta(x) = a_m a_{m-1} \cdots a_0, \quad d_\beta(y) = b_m b_{m-1} \cdots b_0$$

où on a éventuellement $b_m b_{m-1} \cdots b_\ell = 0^{\ell+1}$ pour un certain $\ell \in \mathbb{N}$. Comme on étudie la valeur de $x - y$ on peut supposer que $b_m = 0$. En effet, si ce n'est pas le cas, on peut remplacer x par $x' = \pi_\beta((a_m - b_m)a_{m-1} \cdots a_0)$ et y par $y' = \pi_\beta(0b_{m-1}b_{m-2} \cdots b_0)$ sans changer la valeur de $x - y$. De plus, x' et y' sont encore des β-entiers par le théorème de Parry B.10 [14]. Comme x et y sont successifs, on a nécessairement $a_m = 1$. En effet, si $a_m \geq 2$, alors $a_m - 1 \geq 1$. De plus, on a

$$a_m a_{m-1} \cdots a_0 >_{lex} (a_m - 1)a_{m-1} \cdots a_0 >_{lex} b_m b_{m-1} \cdots b_0.$$

Or ce système de numération préserve l'ordre (cf. proposition 1.5.34), donc $x > \pi_\beta((a_m - 1)a_{m-1} \cdots a_0) > y$ ce qui est absurde. De la même façon, on peut montrer que $a_{m-1} = 0$. En effet, sinon on a $x > \pi_\beta(a_m(a_{m-1} - 1)a_{m-2} \cdots a_0) > y$ ce qui est absurde. En continuant de la sorte, on montre que $d_\beta(x) = 10^m$.

Montrons maintenant que $b_{m-1}b_{m-2} \cdots b_0 \geq_{lex} c_1 c_2 \cdots c_m$. Sinon, on aurait

$$b_{m-1}b_{m-2} \cdots b_0 <_{lex} c_1 c_2 \cdots c_m.$$

Or $a_m a_{m-1} \cdots a_0 >_{lex} c_1 c_2 \cdots c_m$, donc $x > \pi_\beta(c_1 c_2 \cdots c_m) > y$, ce qui est absurde, car x et y sont successifs.

Or, vu la proposition (B.10), on a $b_{m-1}b_{m-2} \cdots b_0 \leq_{lex} c_1 c_2 \cdots c_m$. On en tire que

$$d_\beta(x) = 10^m.00\cdots \text{ et } d_\beta(y) = 0c_1 c_2 \cdots c_m.00\cdots$$

et on en déduit que

$$\begin{aligned} x - y &= (\pi_\beta(10^m) - \pi_\beta(0c_1 c_2 \cdots c_m))\beta^{m+1} \\ &= (\frac{1}{\beta} - \frac{c_1}{\beta^2} - \cdots - \frac{c_m}{\beta^{m+1}})\beta^{m+1} \\ &= (1 - \frac{c_1}{\beta} - \frac{c_2}{\beta^2} - \cdots - \frac{c_m}{\beta^m})\beta^m \\ &= (\frac{c_{m+1}}{\beta^{m+1}} + \frac{c_{m+2}}{\beta^{m+2}} + \cdots)\beta^m \\ &= (\frac{c_{m+1}}{\beta^1} + \frac{c_{m+2}}{\beta^2} + \cdots) \\ &= \pi_\beta(\sigma^m(d^*_\beta(1))). \end{aligned}$$

Ceci permet de conclure. □

Exemple 3.3.24. Considérons le nombre d'or ϕ. Alors on a $d_\phi(1) = 11$. On en tire que $d^*_\phi(1) = (10)^\omega$. Ce mot est de période deux, donc il existe deux distances possibles entre deux ϕ-entiers. Vu la proposition 3.3.23, ces deux distances sont

$$\pi_\beta(\sigma^0(d^*_\beta(1))) = \pi_\phi((10)^\omega) = 1$$

et

$$\pi_\beta(\sigma^1(d^*_\beta(1))) = \pi_\phi(0(10)^\omega) = \frac{1}{\phi}\pi_\phi((10)^\omega) = \frac{1}{\phi}.$$

14. En effet, si $a_m \cdots a_0 < d^*_\beta(1)$, alors $(a_m - b_m) \cdots a_0 < d^*_\beta(1)$.

Considérons maintenant, pour $\beta > 1$, l'extension des entiers relatifs

$$\mathbb{Z}[\beta] = \{m + n\beta \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

et l'ensemble

$$F_M = \{\{z\} \mid z \in S_{A_M}(\beta)\}.$$

Lemme 3.3.25 ([22]). *Soit $M \geq 0$ et considérons l'ensemble F_M. Si β est un nombre de Pisot, alors F_M est un sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}[\beta]$.*

Démonstration. Soit $z_j z_{j-1} \cdots z_0.z_{-1}z_{-2}\cdots$ la β-représentation d'un nombre z vérifiant $\{z\} \in F_M$. Pour conclure, on montre que F_M est borné et inclus dans un spectre discret. Par définition de F_M, on a $z \in S_{A_M}(\beta)$. Donc il existe $k \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_k$ tels que $z = \sum_{i=0}^{k} a_k \beta^i$. On a alors

$$\begin{aligned}\{z\} &= \sum_{i\geq 1} z_i \beta^{-i} \\ &= z - \lfloor z \rfloor \\ &= \sum_{i=0}^{k} a_k \beta^i - \sum_{i=0}^{j} z_i \beta^i.\end{aligned}$$

Or comme $0 \leq z_i \leq \lfloor \beta \rfloor$ et $|a_i| \leq M$, $\{z\}$ est un polynôme de $\mathbb{Z}[\beta]$ dont les coefficients sont bornés par $M + \lfloor \beta \rfloor$. On a donc montré $F_M \subset S_{A_{M+\lfloor\beta\rfloor}}(\beta)$ qui est discret si β est un nombre de Pisot, vu la proposition (2.4.5). Remarquons également que $\{z\} \in [0, 1[$. Comme un ensemble discret et borné est nécessairement fini, on peut conclure. □

Théorème 3.3.26 ([22]). *Si β est un nombre de Pisot, alors l'ensemble des β-entiers $\mathbb{Z}_\beta$ est un ensemble de Meyer.*

Démonstration. Montrons d'abord que $\mathbb{Z}_\beta$ est un ensemble de Delone. Vu la proposition (3.3.23), les distances entre deux β-entiers successifs appartiennent à l'ensemble

$$D = \{\pi_\beta(\sigma^n(d^*_\beta(1))) \mid i \geq 0\}.$$

Or si β est un nombre de Pisot, alors il est en particulier un nombre de Parry. Donc l'ensemble D est fini. Il existe alors une distance minimale et une distance maximale entre deux β-entiers successifs, ce qui implique que $\mathbb{Z}_\beta$ est un ensemble de Delone.

Montrons maintenant que $\mathbb{Z}_\beta$ a la propriété de Meyer [15]. Considérons d'abord la somme de deux éléments

$$x = x_k\beta^k + x_{k-1}\beta^{k-1} + \cdots + x_0 \text{ et } y = y_\ell\beta^\ell + y_{\ell-1}\beta^{\ell-1} + \cdots + y_0$$

dans $\mathbb{Z}^+_\beta$. Alors $z = x + y$ est de la forme

$$z = a_j\beta^j + a_{j-1}\beta^{j-1} + \cdots + a_0, \quad 0 \leq a_i \leq 2\lfloor\beta\rfloor.$$

15. cf. définition 3.3.3.

Posons $F'_{2\lfloor\beta\rfloor} = \{\{z\} \mid z \in \mathbb{Z}_\beta^+ + \mathbb{Z}_\beta^+\}$. Alors on a, $F'_{2\lfloor\beta\rfloor} \subset F_{2\lfloor\beta\rfloor}$. Vu le lemme 3.3.25, $F_{2\lfloor\beta\rfloor}$ est fini. Comme

$$\mathbb{Z}_\beta^+ + \mathbb{Z}_\beta^+ \subset \mathbb{Z}_\beta^+ + F'_{2\lfloor\beta\rfloor},$$

on peut conclure. Supposons maintenant que $x \geq y$ et soit $z = x - y = a_m\beta^m + \cdots + a_0$ avec $-\lfloor\beta\rfloor \leq a_i \leq \lfloor\beta\rfloor$. Comme précédemment, si on pose $F'_{2\lfloor\beta\rfloor} = \{\{z\} \mid z \in \mathbb{Z}_\beta^+ - \mathbb{Z}_\beta^+\}$, on a $F'_{2\lfloor\beta\rfloor} \subset F_{2\lfloor\beta\rfloor}$ où $F_{2\lfloor\beta\rfloor}$ est un ensemble fini. Comme

$$\mathbb{Z}_\beta^+ - \mathbb{Z}_\beta^+ \subset \mathbb{Z}_\beta^+ + F'_{2\lfloor\beta\rfloor},$$

on peut conclure. □

Au vu de ces résultats et le fait que $\mathbb{Z}_\beta$ admet l'autosimilarité β, Burdík et al. ont proposé les ensembles de la forme

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{d} \mathbb{Z}_\beta\, e_i, \text{ où } \{e_1, e_2, \ldots, e_d\} \text{ est une base de } \mathbb{R}^d \text{ et } d \in \{1, 2, 3\}$$

comme quasi-réseaux pour étudier les quasi-cristaux. Ils justifiaient ce choix [22] par le fait que la plupart des ensembles obtenus par la méthode de coupe et projection[16] sont supportés par des ensembles du type Λ proposé. Ils ont appelé ce type de quasi-réseau un « β-réseau ».

Plus d'informations sur les β-réseaux sont données dans [13,22,28,41,49,54]. Dans [22], Burdík et al. remarquent que les β-réseaux ne sont pas invariants par rotation ou par translation, même s'ils contiennent des sous-ensembles obtenus par la méthode de coupe et projection qui possèdent ces propriétés de stabilité. Ils construisent alors une structure de quasi-anneau sur les β-réseaux et présentent le cas particulier où β est le nombre d'or. Dans [49], Gazeau et Verger-Gaugry étudient les spectres de diffraction produits par les β-entiers et les β-réseaux. Dans [13], Balková et al. s'intéressent aux propriétés asymptotiques des β-entiers et cherchent à déterminer à quel point les β-entiers diffèrent des entiers relatifs $\mathbb{Z}$.

Le rôle des β-entiers dans la cristallographie étant éclairé, on dispose du contexte nécessaire pour comprendre le troisième lien des spectres avec la cristallographie ; il s'agit des β-entiers, comme le prouve la proposition suivante[17].

Théorème 3.3.27 ([25]). *Soient un réel $\beta > 1$ et $M = \lfloor\beta\rfloor$. Alors $S_{B_M}(\beta) = \mathbb{Z}_\beta^+$ si et seulement si β est la racine d'un polynome de la forme*

$$x^d - mx^{d-1} - mx^{d-2} - \cdots - mx - n \tag{3.40}$$

avec $d \geq 1$ et $m \geq n \geq 1$.

16. Ils mentionnent également d'autres méthodes, cf. [22]
17. Ce résultat est attribué à Frougny [39]. Ici, on reprend la preuve donnée par Dombek et al. dans [25].

Démonstration. L'inclusion $\mathbb{Z}_\beta^+ \subset S_{B_M}(\beta)$ est évidente. Montrons alors que $S_{B_M}(\beta) \subset \mathbb{Z}_\beta^+$. Remarquons d'abord que β annule un polynôme de la forme (3.40) si et seulement si

$$d_\beta(1) = m^{d-1}n0^\omega. \tag{3.41}$$

On rappelle que dans ce cas, $d_\beta^*(1) = (m^{d-1}(n-1))^\omega$. En effet on a

$$\begin{aligned}
&\beta^d - m\beta^{d-1} - \cdots - m\beta - n = 0\\
\Leftrightarrow\ &1 - \frac{m}{\beta} - \cdots - \frac{m}{\beta^{d-1}} - \frac{n}{\beta^d} = 0\\
\Leftrightarrow\ &1 = \frac{m}{\beta} + \cdots + \frac{m}{\beta^{d-1}} + \frac{n}{\beta^d}.
\end{aligned}$$

Montrons alors que (3.41) implique $S_{B_M}(\beta) \subset \mathbb{Z}_\beta^+$. Soit $x = \sum_{i=0}^N b_i\beta^i \in S_{B_M}(\beta)$. Si $d_\beta(x) = b_Nb_{N-1}\cdots b_0$, alors $x \in \mathbb{Z}_\beta^+$. Sinon, vu le théorème de Parry B.10, le mot $b_Nb_{N-1}\cdots b_0$ doit contenir un facteur qui est lexicographiquement supérieur au mot $m^{d-1}n$. On en tire que le mot $0b_Nb_{N-1}\cdots b_0$ contient un facteur $ym^{d-1}z$ vérifiant $0 \le y < m$ et $n \le z \le m$. Comme β annule le polynôme (3.40), en remplaçant le facteur $ym^{d-1}z$ dans $0b_Nb_{N-1}\cdots b_0$ par $(y+1)0^{d-1}(z-n)$, on trouve une autre représentation de x dont la somme des chiffre est strictement inférieure à celle de $0b_Nb_{N-1}\cdots a_0$. En répétant cette procédure un nombre fini de fois, on obtient un mot $a_Ka_{K-1}\cdots a_1a_0$ représentant x vérifiant $\sigma^i(a_Ka_{K-1}\cdots a_1a_0.0^\omega) < d_\beta^*(1)$ pour tout entier $i \ge 0$. On a donc $x \in \mathbb{Z}_\beta^+$.

Montrons maintenant que $S_{B_M}(\beta) \subset \mathbb{Z}_\beta^+$ implique (3.41). Supposons que $d_\beta(1) = t_1t_2\cdots$. Soit $i \ge 2$ le plus petit indice vérifiant $d_i < d_1$. On a alors $d_\beta(1) = d_1d_1\cdots d_1d_id_{i+1}\cdots$. Supposons que $d_{i+1}d_{i+2}\cdots \neq 0^\omega$. On montre qu'alors il existe un élément dans $S_{B_M}(\beta)$ qui n'est pas un β-entier, ce qui est absurde. Considérons le nombre

$$z = d_i + 1 + \sum_{j=1}^{i-1} d_1\beta^j = \pi_\beta(d_1d_1\cdots d_1(d_i+1)).$$

Vu le théorème de Parry (B.10), on a $d_\beta(\frac{1}{\beta^i}) = d_{i+1}d_{i+2}\cdots <_{lex} d_1d_2\cdots$. Remarquons également que $d_\beta(1) = d_1d_2\cdots$ implique

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} d_i\beta^{-k} \Leftrightarrow \beta^i = \sum_{k=0}^{i} d_i\beta^k + \sum_{k=1}^{\infty} d_{i+k}\beta^{-k}. \tag{3.42}$$

Comme les β-représentations préservent l'ordre (cf. proposition 1.5.34), on a, vu (3.42)

$$z - \beta^i = d_i + 1 + \sum_{j=1}^{i-1} d_1\beta^j - d_1\sum_{k=0}^{i-1}\beta^k - \sum_{k=-1}^{\infty} d_{i+k}\beta^{-k} = 1 - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{d_{i+k}}{\beta^k} \in]0,1[. \tag{3.43}$$

On distingue maintenant deux cas en fonction de la relation entre z et β^{i+1}.

Cas 1 : $\beta^i < z < \beta^{i+1}$. Dans ce cas, la β-représentation de z est de la forme

$$d_\beta(z) = 10^i.z_1z_2\cdots$$

où $d_\beta(z-\beta^i) = 0.z_1z_2\cdots \neq 0^\omega$ vu (3.43). On en tire que $z \in S_{B_M}(\beta)$ mais $z \notin \mathbb{Z}_\beta^+$.

Cas 2 : $z \geq \beta^{i+1}$. De l'équation (3.43), on déduit que $\beta^{i+1} \leq z < \beta^i + 1$. Or, cela implique $d_1 = \lfloor \beta \rfloor = 1$ et $\beta^k(\beta-1) = T^k(\beta-1) < 1$ pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, i\}$. Donc la définition de $d_\beta(1)$ implique $d_{k+1} = \lfloor \beta T^{k-1}(\beta-1) \rfloor = 0$ pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, i\}$. On a donc $d_\beta(1) = 10^j 1 d_{j+3}d_{j+4}\cdots$ pour un certain j vérifiant $j \geq i \geq 2$. On en déduit

$$1 = \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^{j+2}} + \sum_{k=j+3}^{\infty} \frac{d_k}{\beta^k} \Leftrightarrow \beta^{j+1} = \beta^j + \frac{1}{\beta} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{d_{j+1+k}}{\beta^k}.$$

Soit $w = \beta^j + 1 = \pi_\beta(10^{j-1}1)$. On a alors

$$w - \beta^{j+1} = = 1 - \frac{1}{\beta} - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{d_{j+1+k}}{\beta^k} \in]0, 1[. \tag{3.44}$$

Comme $d_{j+2} = \lfloor \beta^{j+1}(\beta-1) \rfloor = 1$, on a

$$1 \leq \beta^{j+1}(\beta-1) = \beta^{j+2} - \beta^{j+1} < \beta^{j+2} - \beta^j = \beta^{j+2} - w + 1.$$

On en déduit que $\beta^{j+1} < w < \beta^{j+2}$. Cela implique que la β-représentation de w est de la forme

$$d_\beta(w) = 10^{j+1}.w_1w_2\cdots$$

où $d_\beta(w - \beta^{j+1}) = 0.w_1w_2\cdots$. Comme $w - \beta^{j+1} \in]0, 1[$, on a $d_\beta(w - \beta^{j+1}) \neq 0^\omega$, c'est-à-dire $\{w\} \neq 0$. On a donc $w \in S_{B_M}(\beta)$ mais $w \notin Z_\beta^+$.

□

Pour certains $\beta > 1$, les spectres $S_{B_{\lfloor \beta \rfloor}}(\beta)$ sont donc exactement les β-entiers positifs $\mathbb{Z}_\beta^+$, qui interviennent dans la construction des β-réseaux.

Exemple 3.3.28. Considérons le nombre d'or ϕ. Ce nombre annule le polynôme x^2-x-1. On peut donc appliquer le théorème 3.3.27, affirmant que $S_{B_1}(\phi) = \mathbb{Z}_\phi^+$. On a vu dans l'exemple 3.3.24 que la distance entre deux ϕ-entiers successifs (donc entre deux éléments du spectre $S_{B_1}(\phi)$) vaut soit 1 soit $\frac{1}{\phi}$. Cela est illustré à la figure 3.10 ci-dessous.

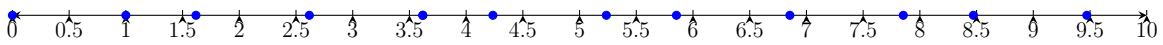

FIGURE 3.10 – Les premiers éléments du spectre $S_{\{0,1\}}(\phi)$.

3.4 Les convolutions infinies de Bernoulli

Dans cette section, on met en évidence les analogies existant entre les spectres et les produits de convolution infinis. Comme on s'intéresse ici uniquement à la comparaison de deux objets, on ne donne pas les preuves des résultats qui seront énoncés dans la suite. On réfère également à [58] et [45] pour les définitions des objets utilisés ci-dessous.

Introduisons d'abord l'objet de cette section. Considérons la variable aléatoire $Y_\beta = \sum_{n=0}^{\infty}(\pm 1)\beta^n$ où le signe est choisi aléatoirement et de façon indépendante avec la probabilité $\frac{1}{2}$. On note ν_β la loi de probabilité de cette variable aléatoire. Alors ν_β est le produit de convolution infini de la suite $\frac{1}{2}(\delta_{-\beta^n} + \delta_{\beta^n})$ où δ est la mesure de Dirac [18]. Ceci explique également le nom « produit de convolution de Bernoulli infini » (cf. [46] ou [83]). Les convolutions infinies de Bernoulli ont été étudiées depuis les années 1930. En 1935, Jessen et Wintner [58] ont défini les propriétés suivantes d'une loi de probabilité.

Définition 3.4.1. Soit ν une mesure de probabilité.

- On dit que ν est *continue* si pour tout point $x \in \mathbb{R}$ on a $\nu(\{x\}) = 0$.
- On dit que ν est *absolument continue* (par rapport à la mesure de Lebesgue $\mathcal{L}$) si $\nu(E) = 0$ dès que $\mathcal{L}(E) = 0$.
- On dit que ν est *singulière* si elle est continue et s'il existe un ensemble borélien E vérifiant $\mathcal{L}(E) = 0$ et $\nu(E) = 1$.

Jessen et Wintner [58] ont démontré que ν_β est soit absolument continue, soit singulière [19]. Depuis lors, plusieurs auteurs ont étudié dans quels cas (i.e. pour quels β) ν_β est singulière respectivement absolument continue.

On sait aujourd'hui que si $\beta < \frac{1}{2}$, alors ν_β est singulière [83]. Cependant, il n'existe à ce jour pas de caractérisation des nombres β pour lesquels ν_β est absolument continue. Garsia [46] a déterminé un ensemble [20] de nombres β pour lesquels ν_β est absolument continue. Il s'agit de l'ensemble des β qui sont les inverses d'entiers algébriques ayant des conjugués de module strictement supérieur à 1 et dont le polynôme minimal est de coefficient constant ± 2. Il a également montré que dans ce cas, toutes les sommes partielles $\sum_{k=0}^{n-1} \pm\beta^k$ sont distinctes et que deux telles sommes partielles ont une distance d'au moins $\frac{C}{2^n}$ pour une constante $C > 0$.

Un deuxième critère d'absolue continuité de ν_β requiert la notion de « propriété F ».

Définition 3.4.2 ([70])**.** Un nombre $1 < \alpha < 2$ a la *propriété* F si l'ensemble $S_{\{-1,0,1\}}(\alpha) \cap [\frac{-1}{\alpha-1}, \frac{1}{\alpha-1}]$ est fini. En particulier, tous les nombres de Pisot sont des nombres ayant la propriété F.

Lau [70] a amélioré le résultat de Garsia en démontrant que si $\frac{1}{2} < \beta < 1$ est l'inverse d'un nombre ayant la propriété F, alors ν_β est singulière.

18. Garsia a démontré ce fait dans [46] en se basant sur la fonction de répartition F_β de la variable aléatoire Y_β.

19. Dans [83] une démonstration alternative de ce résultat est donnée.

20. Cet ensemble est considéré comme le plus grand ensemble explicitement donné de nombres β pour lesquels ν_β était absolument continue.

Peres et Solomyak [84], préoccupés par l'étude de la densité du spectre $S_{\{-1,1\}}(\beta)$ pour un β vérifiant $1 < \beta < 2$, ont constaté des ressemblances avec les convolutions infinies de Bernoulli et ont mis en parallèle l'étude de ces deux domaines. En particulier, Peres a démontré le résultat suivant :

Théorème 3.4.3 ([84]). *Le spectre $S_{\{-1,1\}}(\beta)$ dense dans $\mathbb{R}$ pour presque tout $\beta \in]1,2[$.*

Solomyak a formulé un résultat analogue pour les convolutions infinies de Bernoulli.

Proposition 3.4.4 ([92]). *Pour presque tout $\beta \in \left]\frac{1}{2},1\right[$, la convolution de Bernoulli infinie ν_β est absolument continue.*

Il existe d'autres résultats analogues. Le suivant se démontre de la même façon que le lemme 2.3.2.

Proposition 3.4.5 ([46]). *Si β est un nombre de Pisot, alors $S_{\{-1,1\}}(\beta)$ est uniformément discret.*

Le résultat analogue a été prouvé par Erdös.

Proposition 3.4.6 ([31]). *Si β est un nombre de Pisot, alors $\nu_{\frac{1}{\beta}}$ est singulière.*

Résumons la situation. La mesure $\nu_{\frac{1}{\beta}}$ est absolument continue et le spectre $A_{\{-1,1\}}(\beta)$ est dense pour presque tout $\beta \in (1,2)$. De plus, dans les deux cas, les seules exceptions connues sont des entiers algébriques [21]. Cependant, Peres et Solomyak ont affirmé qu'aucun lien direct entre ces deux objets est connu et ont exposé des questions ouvertes concernant d'autres potentielles propriétés analogues entre ces deux problèmes dans [84].

Des contributions très récentes (et partiellement encore en cours de développement au moment de la rédaction de ce mémoire) ont été réalisées par Batsis et Kempton dans [63]. Ils ont défini une mesure en se basant sur les spectres $S_{A_1}(\beta)$.

Définition 3.4.7 ([63]). Pour $x \in S_{A_1}(\beta)$ et $n \in \mathbb{N}$ soit μ_n la mesure définie par

$$\mu_n(x) = \frac{1}{4^n}\mathcal{N}_n(x),$$

où

$$\mathcal{N}_n(x) = \sharp\left\{a_1\cdots a_n, b_1\cdots b_n \in \{0,1\}^n \mid \sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)\beta^{n-i} = x\right\}.$$

Batsis et Kempton s'intéressent alors la convergence de ces mesures lorsque n tend vers l'infini.

Définition 3.4.8 ([63]). Le nombre β est *hyperbolique* s'il est un entier algébrique de polynôme minimal à coefficients dans A_1 et n'a pas de conjugué de module égal à 1.

21. Même des nombres de Pisot.

Théorème 3.4.9 ([63]). *Soit β un nombre hyperbolique. Alors il existe un nombre réel $\lambda > 1$ tel que pour tout $x \in S_{A_1}(\beta)$, la mesure limite*

$$\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda^n} \mathcal{N}_n(x)$$

existe et on a $\mu(x) \in]0, \infty[$ pour tout $x \in S_{A_1}(\beta)$.

Dans [63], les auteurs appliquent leurs résultats sur μ uniquement dans le cadre de l'étude de la dimension de la convolution de Bernoulli ν_β pour certains β. Ils annoncent cependant une suite à leur article promettant la donnée d'une condition impliquant l'absolue continuité de ν_β pour des nombres hyperboliques β qui ne sont pas de Pisot.

Annexes

Annexe A

Les systèmes de fonctions itérées homogènes (IFS)

Certains résultats sur les spectres de nombres reposent sur une étude préliminaire des systèmes de fonctions homogènes itérées. Feng a démontré des propriétés dans [36] qui lui ont permis de mettre en évidence le nombre 0 comme un point d'accumulation particulier des spectres. On présente donc dans cette annexe les bases des IFS et on reproduit démonstrations des propriétés en question, provenant de [36] .

Définition A.1. Soit M un entier non nul et $\Phi = \{\phi_i\}_{i=0}^{M}$ une famille d'applications contractantes de la forme

$$\phi_i(x) = \rho_i x + b_i \quad \forall i \in \{0, \ldots, M\}.$$

On appelle Φ un *système de fonctions itérées.*

Si pour tout $\phi_i \in \Phi$, la constante de contraction est la même, $\rho_i = \rho$, et si on ajoute des conditions sur les b_i, on dit que ce système est un système de fonctions itérées homogène.

Définition A.2. Soit M un entier non nul et $\Phi = \{\phi_i\}_{i=0}^{M}$ une famille d'applications contractantes de la forme

$$\phi_i(x) = \rho x + b_i \quad \forall i \in \{0, 1, \ldots, M\}$$

où

$$0 < \rho < 1 \text{ et } 0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_M = 1 - \rho. \tag{A.1}$$

On appelle Φ un *système de fonctions itérées homogène.*

Le résultat suivant a été démontré par Hutchinson dans [56] et sera énoncé sans démonstration.

Théorème A.3. *Soit Φ un IFS. Alors il existe un unique ensemble compact $K \subset \mathbb{R}$ tel que*

$$K = \cup_{i=0}^{M} \phi_i(K).$$

On appelle cet ensemble K l'attracteur de Φ.

Selon Feng, on a

$$K = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} b_{i_n} \rho^n \mid i_n \in \{0, 1, \ldots, M\} \ \forall n \in \mathbb{N} \right\}.$$

La condition (A.1) implique alors que l'enveloppe convexe de K est $[0, 1]$. On le voit en remarquant que l'élément minimal de K est 0 et que son élément maximal est

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 - \rho)\rho^n = 1.$$

Si on a un mot fini $I = i_1 \cdots i_n$, on écrit $\phi_I = \phi_{i_1} \circ \cdots \circ \phi_{i_n}$. De plus, on a

$$\phi_I(0) = b_{i_1} + \rho b_{i_2} + \cdots + \rho^{n-1} b_{i_n}. \tag{A.2}$$

Remarque A.4. Remarquons que $\phi_i([0, 1]) = [b_i, \rho + b_i]$. On en tire que si $b_{i+1} - b_i \leq \rho$ pour tout $i \in \{0, \ldots, M - 1\}$, alors $[0, 1] = \cup_{i=0}^{M} \phi_i([0, 1])$. En d'autres mots, $[0, 1]$ est l'attracteur de Φ.

Remarque A.5. Considérons un IFS et $c \in \mathbb{R}$. Alors les applications ϕ_i transforment un intervalle de longueur c en un intervalle de longueur ρc. En effet, si $x \in \mathbb{R}$ et $[x, x + c]$ est un intervalle de longueur c, alors $\phi_i([x, x + c]) = [\rho x + b_i, \rho x + \rho c + b_i]$, dont la longueur est ρc. En itérant, on constate que ϕ_I transforme un intervalle de longueur c en un intervalle de longueur $\rho^n c$ pour tout $I \in \{0, \ldots, M\}^n$.

Définition A.6. Un IFS Φ vérifie la *propriété de séparation simple* s'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $I, J \in \{0, \ldots, M\}^n$, on a

— soit $\rho^{-n} |\phi_I(0) - \phi_J(0)| = 0$,
— soit $\rho^{-n} |\phi_I(0) - \phi_J(0)| \geq c$.

Définition A.7. Un IFS Φ vérifie la *propriété de type fini* s'il existe un ensemble fini $\Gamma \subset [0, 1)$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $I, J \in \{0, \ldots, M\}^n$, on a

— soit $\rho^{-n} |\phi_I(0) - \phi_J(0)| \geq 1$,
— soit $\rho^{-n} |\phi_I(0) - \phi_J(0)| \in \Gamma$.

Lemme A.8. *Soit* $\Phi = \{\phi_i = \rho x + b_i\}_{i=0}^{M}$ *un IFS sur* $\mathbb{R}$ *avec*

$$0 < \rho < 1 \text{ et } 0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_m = 1 - \rho.$$

Posons $Y = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \rho^{-i} : \ \epsilon_i \in \{b_s - b_t : 0 \leq s, t \leq M\}, n \geq 1 \right\}$. *Alors*

(*i*) *Le IFS* Φ *vérifie la propriété de séparation simple si et seulement si* 0 *n'est pas un point d'accumulation de* Y.

(*ii*) *Le IFS* Φ *vérifie la propriété de type fini si et seulement si* Y *n'a pas de point d'accumulation fini.*

Démonstration. Pour $n \geq 1$, $I = i_1 \cdots i_n$, $J = j_1 \cdots j_n \in \{0, 1, \ldots, M\}^n$, on a, vu (A.2),

$$\rho^{-n}(\phi_I(0) - \phi_J(0)) = \sum_{s=1}^{n}(b_{i_s} - b_{j_s})\rho^{-(n+1-s)} = \sum_{s=1}^{n}(b_{i_{n+1-s}} - b_{j_{n+1-s}})\rho^{-s}. \tag{A.3}$$

Montrons le point (i). Si Φ vérifie la propriété de séparation simple, alors, vu (A.3), le nombre 0 ne peut être un point d'accumulation de Y. Inversement, si 0 n'est pas un point d'accumulation de Y, il existe un voisinage de 0 qui ne contient aucun point de ce spectre. Dans ce cas Φ vérifie la propriété de séparation simple.

Passons au point (ii). Pour démontrer l'équivalence, vu (A.3) et la définition A.7, il suffit de montrer que Φ vérifie la propriété de type fini si et seulement si $Y \cap [-1, 1]$ ne contient qu'un nombre fini de points. En effet, si Φ vérifie la propriété de type fini et si Y a un point d'accumulation, il doit nécessairement être un point d'accumulation de $Y \cap [-1, 1]$. En montrant que cet ensemble n'a qu'un nombre fini de points, on prouve que cet ensemble ne peut pas avoir de point d'accumulation.

On voit facilement que si Y n'a pas de points d'accumulation, alors $Y \cap [-1, 1]$ ne contient qu'un nombre fini de points. Il suffit donc de montrer l'autre implication.

Supposons alors que $A = Y \cap [-1, 1]$ ne contient qu'un nombre fini de points. Posons $B = \{b_i - b_j : 0 \leq i, j \leq M\}$. Comme A et B sont des ensembles finis, il existe $\mu > 1$ tel que $]1, u[\cap \rho^{-1}(A + B) = \emptyset$, où $\rho^{-1}(A + B) = \{\rho^{-1}(a + b) : a \in A,\ b \in B\}$. Comme $0 \in A$, on doit avoir $]1, u[\cap \rho^{-1}(B) = \emptyset$.

Montrons d'abord que $Y \cap]1, \mu[= \emptyset$. Pour $y \in Y$ notons

$$\deg(y) = \min\left\{ n \mid \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \rho^{-i} = y,\ \ \epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in B \right\}.$$

On procède par l'absurde et on suppose $Y \cap]1, \mu[\neq \emptyset$. Posons $N = \min\{\deg(y) \mid y \in Y \cap]1, \mu[\}$. Alors $N \in \mathbb{N}$. Soit $z \in Y \cap]1, \mu[$ tel que $\deg(z) = N$. Il existe alors $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_N \in B$ tels que

$$z = \sum_{i=1}^{N} \epsilon_i \rho^{-i}.$$

Comme $]1, \mu[\cap \rho^{-1}B = \emptyset$, on a $z \notin \rho^{-1}B$, donc $\deg(z) \geq 2$. On peut donc considérer l'élément $w = \sum_{i=1}^{N-1} \epsilon_{i+1}\rho^{-i}$. Alors $w \in Y$ et $z = \rho^{-1}w + \rho^{-1}\epsilon_1$. Remarquons aussi que $w \notin A$. En effet, sinon $z = \rho^{-1}(w + \epsilon_1) \in \rho^{-1}(A + B)$, ce qui contredit $]1, \mu[\cap \rho^{-1}(A + B) = \emptyset$ et $z \in]1, \mu[$. Comme $w \notin A = Y \cap [-1, 1]$, on a $|w| > 1$. De plus, $|w| < z$, car sinon

$$|\rho^{-1}\epsilon_1| = |\rho^{-1}w - z| \geq \rho^{-1}|w| - z \geq (\rho^{-1} - 1)z > \rho^{-1} - 1 = \rho^{-1} \max B,$$

ce qui est contradictoire. On a alors $1 < |w| < z < \mu$, donc $|w| \in Y \cap]1, \mu[$. Or $\deg(|w|) \leq N - 1 < \deg(z)$, ce qui contredit la minimalité de $\deg(z)$. On a finalement $Y \cap]1, \mu[= \emptyset$. Comme $Y = -Y$, on a également $Y \cap]-1, -\mu[= \emptyset$. Donc $Y \cap]-\mu, \mu[$ ne contient qu'un nombre fini de points. Montrons finalement que Y n'a pas de point d'accumulation fini.

On procède par l'absurde et on suppose que v est un point d'accumulation de Y. Comme $Y \cap]-\mu, \mu[$ ne contient qu'un nombre fini de points, on a nécessairement $|v| \geq \mu$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$Y = \rho^{-n} Y + D_n \tag{A.4}$$

où $D_n = \{\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \rho^{-i} \mid \epsilon_i \in B \ \forall i\}$. Soit n tel que $\rho^n |v| + 1 < \mu$. Vu (A.4), il existe un point d'accumulation w de Y (qui n'appartient pas forcément à Y) et il existe $z \in D_n$ tel que $v = \rho^{-n} w + z$. On a donc

$$|w| = |\rho^n (v - z)| \leq \rho^n |v| + \rho^n \sum_{i=1}^{n} (1-\rho)\rho^{-i} < \rho^n |v| + 1 < \mu.$$

Or ceci contredit que le fait que $Y \cap]-\mu, \mu[$ n'a pas de point d'accumulation. □

Lemme A.9. *Soit $\Phi = \{\phi_i = \rho x + b_i\}_{i=0}^{M}$ un IFS sur $\mathbb{R}$ avec*

$$0 < \rho < 1, \ \ 0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_M = 1 - \rho \ \text{ et } \ b_{i+1} - b_i \leq \rho \ \text{ pour tout } 0 \leq i \leq M-1.$$

Alors

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $[0,1] = \cup_{I \in \{0,1,\ldots,M\}^n} \phi_I([0,1])$.

(ii) Pour $n, k \in K$ et $J \in \{0,1,\ldots,M\}^n$, si $[c,d] \subset \Phi_J([0,1])$ est de longueur supérieure ou égale à ρ^{n+k}, alors il existe $J' \in \{0,1,\ldots,M\}^k$ tel que $\phi_{JJ'}(0) \in [c,d]$.

Démonstration. Montrons le point (i). Vu la remarque (A.4), on a $[0,1] = \cup_{i=0}^{M} \phi_i([0,1])$. En itérant n fois, on en tire que $[0,1] = \cup_{I \in \{0,1,\ldots,M\}^n} \phi_I([0,1])$. Passons au point (ii). Par hypothèse, l'intervalle $\phi_J^{-1}([c,d]) \subset [0,1]$ et est de longueur au moins ρ^k. Par le point (i), il existe $J' \in \{0,1,\ldots,M\}^k$ tel que $\phi_{J'}(0) \in \phi_J^{-1}([c,d])$, donc $\phi_{JJ'}(0) \in [c,d]$. □

Théorème A.10. *Soit $\Phi = \{\phi_i = \rho x + b_i\}_{i=0}^{M}$ un IFS sur $\mathbb{R}$ avec*

$$0 < \rho < 1 \ \text{ et } \ 0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_M = 1 - \rho.$$

Supposons également que

$$b_{i+1} - b_i \leq \rho \ \text{ pour tout } 0 \leq i \leq M-1. \tag{A.5}$$

Si Φ vérifie la propriété de séparation simple, alors Φ vérifie la propriété de type fini.

Démonstration. Etape 1 : Montrons d'abord que pour tout $0 < \sigma < 1$, il existe un ensemble fini $\Gamma_\sigma \subset [0, 1-\sigma]$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $I, J \in \{0,1,\ldots,M\}^n$ on a

$$\text{soit } \rho^{-n} |\phi_I(0) - \phi_J(0)| > 1 - \sigma, \ \text{ soit } \rho^{-n} |\phi_I(0) - \phi_J(0)| \in \Gamma_\sigma. \tag{A.6}$$

Comme, par hypothèse, Φ vérifie la propriété de séparation simple, on a, par le principe des tiroirs,

$$\sup_{x \in [0,1], \ k \in \mathbb{N}} \sharp\{\phi_I(0) : \phi_I(0) \in [x, x+\rho^k], I \in \{0,1,\ldots,M\}^k\} = \ell < \infty. \tag{A.7}$$

En effet, $\ell \leq \frac{1}{c} + 1$, où c est la constante donnée dans la définition A.6 .
Soient $x \in [0,1]$ et $k \in \mathbb{N}$ telle que le supremum dans (A.7) soit atteint en (x,k). Alors ce supremum est aussi atteint en $(\phi_I(x), n+k)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $I \in \{0,1,\ldots,M\}^n$. En effet, si $\phi_J(0) \in [x, x+\rho^k]$ pour un $J \in \{0,1,\ldots,M\}^k$, alors $\phi_{IJ}(0) \in \phi_I([x, x+\rho^k])$ pour tout $I \in \{0,1,\ldots,M\}^n$. Vu la remarque (A.5), cet intervalle est $[\phi_I(0), \phi_I(0)+\rho^{n+k}]$. Soit maintenant $k' \in \mathbb{N}$ tel que $\rho^{k'} + \rho^{k'+k} < 1$ et posons

$$x_0 = \phi_{0^{k'}}(x), \quad k_0 = k' + k.$$

Alors, comme $x \leq 1$, on a $x_0 \leq \rho^{k'}$ et donc $[x_0, x_0+\rho^{k_0}] \subset [0,1]$. De plus, le supremum (A.7) est atteint en (x_0, k_0).

Soient $W_1, \ldots, W_\ell \in \{0,1,\ldots,M\}^{k_0}$ tels que $\phi_{W_1}(0), \ldots, \phi_{W_\ell}(0)$ sont des points deux à deux différents de $[x_0, x_0+\rho^{k_0}]$ et fixons $0 < \sigma < 1$. Le but est de montrer que l'ensemble $\{\rho^{-n}|\phi_I(0) - \phi_J(0)| \leq 1-\sigma \mid I, J \in \{0,\ldots,M\}^n\}$ est fini. Soit alors $k_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\rho\sigma \leq \rho^{k_1} < \sigma. \tag{A.8}$$

Supposons maintenant que $I, J \in \{0,1,\ldots,M\}^n$ vérifient

$$|\phi_I(0) - \phi_J(0)| \leq (1-\sigma)\rho^n.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que $\phi_I(0) \leq \phi_J(0)$. Posons

$$\Delta = [\phi_J(0), \phi_I(0) + \rho^n].$$

Alors $\Delta \subset \phi_I([0,1]) \cap \phi_J([0,1])$ et $|\Delta| \geq \sigma\rho^n$. Comme $\phi_I(0) + \rho^n = \phi_I(1)$, on a $\phi_I^{-1}(\Delta) = [u,1]$ pour un certain $u \in]0,1[$ tel que $1-u \geq \sigma > \rho^{k_1}$.

Soit $I' = M \cdots M$ un mot de longueur k_1. Comme $\phi_M(1) = 1$, on a $\phi_{I'}(1) = 1$. De plus $\phi_{I'}([0,1])$ est de longueur ρ^{k_1}, donc $\phi_{I'}([0,1]) = [1-\rho^{k_1}, 1] \subset [u,1]$ et donc $\phi_{II'}([0,1]) \subset \phi_I([u,1]) = \Delta$. En particulier,

$$\phi_{II'}([x_0, x_0+\rho^{k_0}]) \subset \Delta \subset \phi_J([0,1]).$$

Remarquons que $\phi_{II'}([x_0, x_0+\rho^{k_0}])$ est un sous-intervalle de $\phi_J([0,1])$ de longueur $\rho^{n+k_0+k_1}$. Par le point (ii) du lemme A.9, il existe alors $J' \in \{0,1,\cdots,M\}^{k_0+k_1}$ tel que $\phi_{JJ'}(0) \in \phi_{II'}([x_0, x_0+\rho^{k_0}])$. Posons $x_1 = \phi_{II'}(x_0)$. Alors

$$\phi_{II'}([x_0, x_0+\rho^{k_0}]) = [x_1, x_1+\rho^{n+k_0+k_1}].$$

Comme $\phi_{W_1}(0), \ldots, \phi_{W_\ell}(0)$ sont des points deux à deux distincts de $[x_0, x_0+\rho^{k_0}]$, les points $\phi_{II'W_1}(0), \ldots, \phi_{II'W_\ell}(0)$ sont ℓ points deux à deux distincts de $[x_1, x_1+\rho^{n+k_0+k_1}]$. De plus, comme $\phi_{JJ'}(0) \in [x_1, x_1+\rho^{n+k_0+k_1}]$, la maximalité de ℓ (cf. A.7) implique

$$\phi_{JJ'}(0) \in \{\phi_{II'W_j}(0) : 1 \leq j \leq \ell\},$$

c'est-à-dire

$$\phi_J(0) + \rho^n \phi_{J'}(0) \in \{\phi_I(0) + \rho^n \phi_{I'W_j}(0) : 1 \leq j \leq \ell\}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\rho^{-n}(\phi_J(0) - \phi_I(0)) &\in \{\phi_{I'W_j}(0) - \phi_{J'}(0) : 1 \leq j \leq \ell\} \\ &\subset \{\phi_{\tilde{I}}(0) - \phi_{\tilde{J}}(0) : \tilde{I}, \tilde{J} \in \{0, 1, \ldots, M\}^{k_0+k_1}\},\end{aligned}$$

où $\{\phi_{\tilde{I}}(0) - \phi_{\tilde{J}}(0) : \tilde{I}, \tilde{J} \in \{0, 1, \ldots, M\}^{k_0+k_1}\}$ est un ensemble fini. En posant

$$\Gamma_\sigma = \{\phi_{\tilde{I}}(0) - \phi_{\tilde{J}}(0) : \tilde{I}, \tilde{J} \in \{0, 1, \ldots, M\}^{k_0+k_1}\} \cap [0, 1 - \sigma], \tag{A.9}$$

on peut conclure pour l'étape 1.

Etape 2 : Posons $\gamma = \min\{b_1, b_M - b_{M-1}\}$ et $B = \{b_i - b_j : 0 \leq i, j \leq M\}$. Par (A.1) et (A.5), on a

$$0 < \gamma \leq \rho < 1. \tag{A.10}$$

Soit Γ_γ défini par (A.9) (avec $\sigma = \gamma$) et posons

$$\eta = \max(\rho^{-1}(\pm\Gamma_\gamma + B) \cap [0, 1[).$$

Alors $0 \leq \eta < 1$. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tous $I, J \in \{0, 1, \ldots, M\}^n$, on a

$$\text{soit } \rho^{-n}|\phi_I(0) - \phi_J(0)| \geq 1, \text{ soit } \rho^{-n}|\phi_I(0) - \phi_J(0)| \leq \eta. \tag{A.11}$$

Procédons par l'absurde et supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $I, J \in \{0, 1, \ldots, M\}^n$ tels que

$$\eta < \rho^{-n}(\phi_J(0) - \phi_I(0)) < 1. \tag{A.12}$$

Supposons également que ce n est minimal. Montrons d'abord que $n \geq 2$. Sinon, $n = 1$ et par (A.12), on a alors $0 < \rho^{-1}(\phi_J(0) - \phi_I(0)) < 1$, donc $\rho^{-1}(\phi_J(0) - \phi_I(0)) \in \rho^{-1}B \cap [0, 1[$. Or, par définition de η et le fait que $0 \in \Gamma_\gamma$, on a $\rho^{-1}(\phi_J(0) - \phi_I(0)) \leq \eta$ ce qui contredit (A.12). On en déduit que $\eta \geq 2$. On a alors

$$I = I'i, \quad J = J'j,$$

où $I', J' \in \{0, 1, \ldots, M\}^{n-1}$ et $i, j \in \{0, 1, \ldots, M\}$. Dans ce cas, on a

$$\phi_I(0) = \phi_{I'}(0) + \rho^{n-1} b_i, \quad \phi_J(0) = \phi_{J'}(0) + \rho^{n-1} b_j.$$

Donc

$$\phi_{J'}(0) - \phi_{I'}(0) = \phi_J(0) - \phi_I(0) + \rho^{n-1}(b_i - b_j). \tag{A.13}$$

Par (A.13) et (A.12), on a alors

$$|\phi_{J'}(0) - \phi_{I'}(0)| < \rho^n + \rho^{n-1}(1 - \rho) = \rho^{n-1}. \tag{A.14}$$

Montrons que

$$|\phi_{J'}(0) - \phi_{I'}(0)| \leq (1 - \gamma)\rho^{n-1}. \tag{A.15}$$

Par (A.13), le fait que $\phi_J(0) > \phi_I(0)$, et (A.10), on a

$$\phi_{J'}(0) - \phi_{I'}(0) > \rho^{n-1}(b_i - b_j) \geq -\rho^{n-1}(1 - \rho) \geq -\rho^{n-1}(1 - \gamma). \tag{A.16}$$

Pour majorer $\phi_{J'}(0) - \phi_{I'}(0)$, on distingue deux cas :

Cas 1 : On a $(i,j) = (m,0)$. Dans ce cas, par (A.13), on a

$$\phi_{J'}(0) - \phi_{I'}(0) = \phi_J(0) - \phi_I(0) + \rho^{n-1}(1-\rho).$$

Alors par (A.12) on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\phi_{J'}(0) - \phi_{I'}(0)}{\rho^{n-1}} &= \frac{\phi_J(0) - \phi_I(0)}{\rho^{n-1}} + (1-\rho) \\ &= \frac{\phi_J(0) - \phi_I(0)}{\rho^n} + (1-\rho)(1 - \frac{\phi_J(0) - \phi_I(0)}{\rho^n}) \\ &> \frac{\phi_J(0) - \phi_I(0)}{\rho^n} > \eta.\end{aligned}$$

En appliquant (A.14), on trouve que $1 > \rho^{-(n-1)}(\phi_{J'}(0) - \phi_{I'}(0)) > \eta$, ce qui contredit la minimalité de n. Ce cas est donc impossible.

Cas 2 : On a $(i,j) \neq (m,0)$. Dans ce cas, on a

$$b_j - b_i \geq \min\{b_1 - b_M, b_0 - b_{M-1}\} = \min\{b_1 - (1-\rho), -b_{M-1}\}.$$

Vu (A.13), on a alors

$$\begin{aligned}\phi_{J'}(0) - \phi_{I'}(0) &\leq \rho^n - \rho^{n-1}\min\{b_1 - (1-\rho), -b_{M-1}\} \\ &= \rho^{n-1}(\rho + \max\{1 - \rho - b_1, b_{M-1}\}) \\ &= \rho^{n-1}\max\{1 - b_1, \rho + b_{M-1}\} \\ &= \rho^{n-1}\max\{1 - b_1, 1 - 1 + \rho + b_{M-1}\} \\ &= \rho^{n-1}\max\{1 - b_1, 1 - (b_M - b_{M-1})\} \\ &= \rho^{n-1}(1-\gamma).\end{aligned}$$

Vu (A.16) et le cas 2, on a nécessairement (A.15).

Alors de (A.15) et l'étape 1, on déduit que $\rho^{-(n-1)}|\phi_{J'}(0) - \phi_{I'}(0)| \in \Gamma_\gamma$. Donc par (A.13), on a

$$\begin{aligned}\rho^{-n}(\phi_J(0) - \phi_I(0)) &= \rho^{-n}(\phi_{J'}(0) - \phi_{I'}(0)) + \rho^{-1}(b_j - b_i) \\ &\in \rho^{-1}(\pm\Gamma_\gamma + B).\end{aligned}$$

En appliquant (A.12), on trouve que

$$\rho^{-n}(\phi_J(0) - \phi_I(0)) \in \rho^{-1}(\pm\Gamma_\gamma + B) \cap [0,1[.$$

Par définition de η, on a $\rho^{-n}(\phi_J(0) - \phi_I(0)) \leq \eta$, ce qui contredit (A.12). Ceci permet de conclure.

Etape 3 : Soit $\eta \in [0,1[$ défini comme dans l'étape (2). Vu l'étape (1) et (A.11), pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tous $I, J \in \{0,1,\ldots,M\}^n$, on a

$$\text{soit } \rho^{-n}|(\phi_J(0) - \phi_I(0))| \geq 1 \text{ soit } \rho^{-n}|(\phi_J(0) - \phi_I(0))| \in \Gamma_{1-\eta},$$

où $\Gamma_1 = \{0\}$. On en tire que Φ vérifie la propriété de type fini, ce qui permet de conclure. □

Annexe B

Le β-shift

Dans cette annexe on démontre que l'ensemble des β-représentations gloutonnes est accepté par un automate de Büchi si β est un nombre de Pisot. Définissons d'abord les systèmes dynamiques symboliques et donnons quelques propriétés importantes qui seront utiles pour la suite. Fixons un alphabet A. On emprunte ici les définitions et les raisonnements de [43].

Définition B.1. On note σ le *décalage* sur $A^{\mathbb{N}}$ défini par $\sigma((x_n)_n) = (x_{n+1})_n$.

Définition B.2. L'ensemble $A^{\mathbb{N}}$ muni du décalage σ est un *système dynamique symbolique*.

Définition B.3. Un mot $v \in A^{\mathbb{N}}$ est un mot *lexicographiquement maximal du décalage* si pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\sigma^k(v) \leq_{lex} v$. On dit alors que v est un mot lsm (lexicographically shift maximal).

Définition B.4. On définit
- $v_{[n]} = v_1 v_2 \cdots v_n$,
- $D_v = \{u \in A^{\mathbb{N}} \mid \forall k \geq 0, \sigma^k(u) < v\}$.

La proposition suivante donne des conditions suffisantes et nécessaires sur un mot $v \in A^{\mathbb{N}}$ pour que D_v soit accepté par un automate de Büchi fini. On donne ici juste l'idée de la preuve. Le lecteur intéressé est invité à consulter [43].

Proposition B.5 ([43])**.** *Soit $v \in A^{\mathbb{N}}$ un mot lsm. Alors l'ensemble D_v est accepté par un automate de Büchi fini si et seulement si le mot v est ultimement périodique.*

Idée de la preuve. Soit $\mathcal{D}_v$ l'automate (infini) dont les états sont les $v_{[n]}$ pour tout n et dont les transitions sont définies par $v_{[n]} \xrightarrow{v_{n+1}} v_{[n+1]}$ et $v_{[n]} \xrightarrow{a} v_{[0]}$ pour tout $a < v_{n+1}$. L'état $v_{[0]}$ est l'unique état final et initial. Alors on peut montrer que l'automate de Büchi $\mathcal{D}_v$ accepte D_v.
L'automate $\mathcal{D}_v$ a un quotient minimal fini $\mathcal{D}'_v$ si et seulement si v est ultimement périodique. Le langage de l'automate $\mathcal{D}'_v$ est le même que celui de $\mathcal{D}_v$, ce qui permet de conclure. □

Définition B.6. Soit D_β l'ensemble des β-représentations gloutonnes de tous les nombres appartenant à l'intervalle $[0,1[$. On appelle cet ensemble le *β-shift*.

Définition B.7. On définit la représentation quasi-gloutonne $d^*_\beta(1)$ de 1 comme suit.
- Si $d_\beta(1) = t_1 \cdots t_m$ est fini, alors $d^*_\beta(1) = (t_1 \cdots (t_m - 1))^\omega$.
- $d^*_\beta(1) = d_\beta(1)$ sinon.

Dans ce qui suit, on démontre le théorème de Parry caractérisant les représentations gloutonnes. Rappelons à ce moment que pour un réel $\beta > 1$ et un mot $b_0 b_1 \cdots \in B_{\lfloor\beta\rfloor}$, on a $\pi_\beta(b_0.b_1\cdots) = b_0 + \frac{b_1}{\beta} + \frac{b_2}{\beta^2} + \cdots$. Dans le lemme ci-dessous on représente également un nombre réel positif x par un $b_0.b_1\cdots$ où $b_0 = \lfloor x \rfloor$ et où le mot infini $b_1 b_2 \cdots$ est obtenu par l'algorithme glouton.

Lemme B.8 ([79])**.** *Supposons que $\beta = a_0 + \frac{a_1}{\beta} + \frac{a_2}{\beta^2} + \cdots$ où $a = a_0 a_1 a_2 \cdots \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}_0}$. Si $b = b_0 b_1 b_2 \cdots \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}_0}$ vérifie $b_n b_{n+1} \cdots <_{lex} a$ pour tout $n \geq 1$, alors pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, on a*

$$b_n b_{n+1} \cdots <_{lex} a_m a_{m+1} \cdots \Rightarrow \pi_\beta(b_n.b_{n+1}\cdots) < \pi_\beta(a_m.a_{m+1}\cdots), \tag{B.1}$$

sauf si $\beta = a_0 + \frac{a_1}{\beta} + \frac{a_2}{\beta^2} + \cdots + \frac{a_q}{\beta^q}$ pour un $q \in \mathbb{N}$ et si $b_n b_{n+1} \cdots = c_m c_{m+1} \cdots$ pour certains $m, n \in \mathbb{N}$, où $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par

$$\begin{aligned} c_i &= a_i \text{ si } i \neq 0 \mod q, \\ c_i &= a_q - 1 \text{ si } i = 0 \mod q. \end{aligned}$$

Démonstration. On prouve d'abord l'implication

$$(b_n b_{n+1} \cdots < a_m a_{m+1} \cdots \Rightarrow \pi_\beta(b_n.b_{n+1}\cdots) \leq \pi_\beta(a_m.a_{m+1}\cdots)) \, \forall m, n \in \mathbb{N}. \tag{B.2}$$

Pour ce faire, on montre que pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, si $b_n \cdots b_{n+r} <_{lex} a_m \cdots a_{m+r}$, alors pour tout $r \in \mathbb{N}$,

$$\pi_\beta(b_n.b_{n+1}\cdots b_{n+r}) < \pi_\beta(a_m.a_{m+1}\cdots a_{m+r}). \tag{B.3}$$

On le montre par récurrence sur r. Si $r = 0$, alors $b_n < a_m$ implique $\pi_\beta(b_n.) = b_n < a_m = \pi_\beta(a_m.)$. Le cas de base est donc prouvé.

Supposons alors que (B.3) est vrai pour tous $m, n \in \mathbb{N}$ si $r < k$ et montrons que (B.2) reste vrai pour k. Si $b_n \cdots b_{n+k} < a_m \cdots a_{m+k}$, alors soit $b_n = a_m$ et $b_{n+1} \cdots b_{n+k} < a_{m+1} \cdots a_{m+k}$, soit $b_n < a_m$. Dans le premier cas, $\pi_\beta(b_{n+1} \cdots b_{n+k}) < \pi_\beta(a_{m+1} \cdots a_{m+k})$ par hypothèse de récurrence et on peut conclure. Dans le deuxième cas, l'hypothèse $b_n b_{n+1} \cdots < a$ pour tout $n \geq 1$ implique $b_{n+1} \cdots b_{n+k} \leq_{lex} a_0 a_1 \cdots a_{k-1}$. Remarquons également qu'on a, vu la définition de $a_0 a_1 \cdots$,

$$\frac{a_0}{\beta} + \frac{a_1}{\beta^2} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{\beta^k} \leq 1 \leq a_m - b_n. \tag{B.4}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \pi_\beta(b_n.b_{n+1}\cdots b_{n+k}) &\leq \pi_\beta(b_n.a_0 a_1 \cdots a_{k-1}) \\ &\leq \pi_\beta(a_m.) \qquad \text{(vu (B.4))} \\ &\leq \pi_\beta(a_m.a_{m+1}\cdots a_{m+k}), \end{aligned}$$

et on a l'égalité si et seulement si

$$\beta = a_0 + \frac{a_1}{\beta} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{\beta^k} \text{ et } b_{n+1}b_{n+2}\cdots b_{n+k} = a_0a_1\cdots a_{k-1} \tag{B.5}$$

car on a

$$\frac{a_0}{\beta} + \frac{a_1}{\beta^2} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{\beta^k} \leq 1 \leq a_m - b_n$$

si et seulement si on a

$$a_0 + \frac{a_1}{\beta} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{\beta^{k-1}} \leq \beta(a_m - b_n).$$

Or $a_0 + \frac{a_1}{\beta} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{\beta^{k-1}} \leq a_0 + \frac{a_1}{\beta} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{\beta^{k-1}} + \frac{a_k}{\beta^k} + \cdots = \beta$ et donc $0 < a_m - b_n \leq 1$ ce qui montre l'équivalence avec (B.5). Cependant, cela n'est pas possible vu l'hypothèse $b_nb_{n+1}\ldots <_{lex} a$ pour tout $n \geq 1$. Ceci termine la récurrence et on en déduit (B.2).

Supposons maintenant que $b_nb_{n+1}\cdots <_{lex} a_ma_{m+1}\cdots$. Alors il existe des entiers p et q vérifiant $p - n = q - m$, tels que

$$\pi_\beta(b_p.b_{p+1}\cdots) \leq \pi_\beta(b_p.a_0a_1\cdots) \leq \pi_\beta(a_q.0^\omega) \leq \pi_\beta(a_q.a_{q+1}\cdots) \tag{B.6}$$

et si on a l'égalité, alors nécessairement $a_{q+1} = a_{q+2} = \cdots = 0$. Dans ce cas, $\beta = \pi_\beta(a_0.a_1a_2\cdots a_q) = \pi_\beta(c_0.c_1\cdots)$ où

$$\begin{cases} c_i = a_i \text{ si } i \neq 0 \mod q, \\ c_i = a_q - 1 \text{ si } i = 0 \mod q, \end{cases}$$

En remplaçant le mot $a_ma_{m+1}\cdots$ par $c_mc_{m+1}\cdots$ on garde donc la même valeur mais on ne peut plus avoir l'égalité dans (B.6). On a donc $\pi_\beta(b_nb_{n+1}\cdots) < \pi_\beta(c_mc_{m+1}\cdots) = \pi_\beta(a_ma_{m+1}\cdots)$ si $b_nb_{n+1}\cdots < c_mc_{m+1}\cdots$.

Or si $b_nb_{n+1}\cdots < a_ma_{m+1}\cdots$, alors soit $b_nb_{n+1}\cdots = c_mc_{m+1}\cdots$, soit $b_nb_{n+1}\cdots < c_mc_{m+1}\cdots$, ce qui permet de conclure. □

Le théorème suivant justifie le nom β-shift qu'on a donné à D_β.

Théorème B.9 ([79]). *Soient $\beta > 1$ un réel dont la représentation gloutonne est $a = a_0.a_1\cdots$, c'est-à-dire*

$$\beta = a_0 + \frac{a_1}{\beta} + \cdots$$

et $b = b_0.b_1\cdots$ une suite infinie d'entiers positifs telle que $b_1b_2\cdots \neq c$, où c est défini comme dans le lemme B.8 si la représentation gloutonne de β est finie. Alors b est la représentation gloutonne d'un nombre réel positif x si et seulement si pour tout entier $k \geq 1$, $\sigma^k(b) < a$. En particulier, pour tout $k \geq 1$, on a $\sigma^k(a) < a$.

Démonstration. La condition est nécessaire : S'il existe un réel positif dont la β-représentation est $x = \frac{b_1}{\beta} + \frac{b_2}{\beta^2} + \cdots$, alors pour tout $n \geq 2$, on a, vu le lemme 1.5.32

$$\frac{b_n}{\beta} + \frac{b_{n+1}}{\beta^2} + \cdots < 1 = \frac{a_0}{\beta} + \frac{a_1}{\beta^2} + \cdots .$$

On en tire que $b_n b_{n+1} \cdots \neq a_1 a_2 \cdots$. Soit k le plus petit entier tel que $b_{n+k} \neq a_k$. Alors

$$b_{n+k} + \frac{b_{n+k+1}}{\beta} + \cdots < a_k + \frac{a_{k+1}}{\beta} + \cdots .$$

Or, encore par le lemme 1.5.32, $\frac{a_{k+1}}{\beta} + \frac{a_{k+2}}{\beta^2} + \cdots < 1$, donc $b_{n+k} < a_k + 1$. Comme on ne peut pas avoir l'égalité, on a nécessairement $b_{n+k} < a_k$ On en tire que $\sigma^n(b) <_{lex} a$.
La condition est suffisante :
Par le lemme B.8, pour tout $n \geq 1$, si $b_n b_{n+1} \cdots <_{lex} a_1 a_2 \cdots$, alors

$$\frac{b_n}{\beta} + \frac{b_{n+1}}{\beta^2} \cdots < \frac{a_0}{\beta} + \frac{a_1}{\beta} + \cdots = 1$$

et vu le lemme 1.5.32, il existe x dont la β-représentation est $x = b_0 + \frac{b_1}{\beta} + \frac{b_2}{\beta^2} + \cdots$. □

Le théorème suivant est le cas particulier du précédant où on considère uniquement des nombres $x \in [0, 1[$. Cela est la cas si et seulement si la suite b de ce théorème vérifie $b_0 = 0$. De plus, Si la représentation gloutonne de β est $\beta = a_0 + \frac{a_1}{\beta} + \cdots$, alors $1 = \frac{a_0}{\beta} + \frac{a_1}{\beta^2} + \cdots$ est la représentation gloutonne de 1 et on peut en extraire la représentation quasi-gloutonne $d^*_\beta(1)$ de 1, qui correspond à la suite c du lemme B.8 et qui est donc un mot lsm. On en déduit en particulier que $D_\beta = D_{d^*_\beta(1)}$.

Théorème B.10. *Soient $\beta > 1$ un réel et $b = b_1 b_2 \cdots$ une suite infinie d'entiers positifs. Alors $b \in D_\beta$ si et seulement si pour tout entier $k \geq 0, \sigma^k(b) < d^*_\beta(1)$.*

Au vu de la proposition B.5 et du théorème B.10, on peut énoncer la proposition suivante :

Proposition B.11. *L'ensemble D_β est accepté par un automate de Büchi fini si et seulement si $d_\beta(1)$ est ultimement périodique.*

Dans le cas des nombres de Pisot on a la propriété suivante, dont la preuve a été reproduite dans [7].

Théorème B.12. *[Si β est un nombre de Pisot, alors tous les nombres appartenant à $\mathbb{Q}(\beta) \cap [0, 1]$ ont une β-représentation gloutonne ultimement périodique.*

Démonstration. Soient $\beta_2, \ldots, \beta_d$ les conjugués de β et posons $\beta = \beta_1$. Pour tout entier $j \in \{2, \ldots, d\}$, soit

$$\sigma_j = \mathbb{Q}(\beta) \to \mathbb{Q}(\beta_j) : \quad a + b\beta \mapsto a + b\beta_j.$$

Montrons que $\sigma_j(T^n_\beta(x))$ est borné pour tout j. Pour $j = 1$, on a $T^n_\beta(x) < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$. Pour tout entier $j \in \{2, 3, \ldots, d\}$, on a

$$T^n_\beta(x) = \beta^n x - \sum_{i=1}^{n} x_i \beta^{n-i},$$

pour des $x_i \in B_{\lfloor\beta\rfloor}$. Or $|\sigma_j(\beta)| < 1$ pour tout $j \in \{2, 3, \ldots, d\}$. On en déduit

$$|\sigma_j(T_\beta^n(x))| < |x| + \left|\sum_{i=1}^{n} x_i(\sigma_j(\beta))^{n-j}\right| < |x| + \lfloor\beta\rfloor \sum_{i=1}^{n} |\sigma_j(\beta)|^{n-j} < |x| + \frac{\lfloor\beta\rfloor}{1 - |\sigma_j(\beta)|}.$$

Or les points $(\sigma_1((T_\beta^n(x)), \ldots, \sigma_1((T_\beta^n(x)))$ appartiennent à un réseau (cf [102][lemme 4.3.2]). Comme le nombre de points d'un réseau dans un intervalle borné est fini, il doit exister deux entiers n et m tels que $T_\beta^n(x) = T_\beta^m(x)$ ce qui permet de conclure. □

Ce théorème a donc pour conséquence que si β est un nombre de Pisot, alors $d_\beta(1)$ est ultimement périodique. En appliquant la proposition B.11, on en déduit que si β est un nombre de Pisot, alors l'ensemble des β-représentations gloutonnes D_β est accepté par un automate de Büchi fini.

Annexe C

Les β-représentations de 0

On peut étudier les β-représentations de 0 à l'aide des automates. Dans un système de numération donné, on considère en particulier l'ensemble des β-représentations $Z(\beta, M)$ de 0 sur l'alphabet $A_M = \{-M, \ldots, M\}$.

Frougny s'est intéressé dans [40] aux préfixes finis (ou les facteurs finis à gauche) des éléments de cet ensemble. À chaque préfixe d'une β-représentation on peut associer un polynôme qui est alors divisible par $(x - \beta)$. L'ensemble des restes de cette division détermine alors si $Z(\beta, M)$ est accepté par un automate de Büchi fini. Bugeaud s'est servi de ces résultats dans [21] pour étudier la distance entre les éléments consécutifs d'un spectre (cf section 2.4).

Considérons l'ensemble des représentations de 0 dans une base réelle $\beta > 1$ défini ci-dessous.

Définition C.1 ([40])**.** Soit M un entier positif et posons $A_M = \{-M, \ldots, M\}$. Alors on définit *l'ensemble des représentations de* 0 dans la base β et sur l'alphabet A_M par

$$Z(\beta, M) = \left\{ s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A_M^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n\in\mathbb{N}} s_n \beta^{-n} = 0 \right\}.$$

On peut alors définir la congruence modulo $Z(\beta, M)$ dans A_M.

Définition C.2 ([40])**.** Soient $f, g \in A_M^*$. On dit que f et g sont *congrus à droite modulo* $Z(\beta, M)$ et on note $f \sim_{Z(\beta,M)} g$ si pour tout $s \in A_M^{\mathbb{N}}$, on a $fs \in Z(\beta, M) \Leftrightarrow gs \in Z(\beta, M)$.

Cette congruence donne lieu au quotient $Z(\beta, M)/\sim_{Z(\beta,M)}$.

Définition C.3 ([40])**.** On appelle le nombre de classes dans ce quotient *l'indice de la congruence* $\sim_{Z(\beta,M)}$.

Définition C.4 ([40])**.** Soit $LF(Z(\beta, M))$ *l'ensemble des préfixes finis* des mots de $Z(\beta, M)$, c'est-à-dire $LF(Z(\beta, M)) = \{w \in A_M^* \mid \exists s \in A_M^{\mathbb{N}}, ws \in LF(Z(\beta, M))\}$.

A chaque élément $f = f_0 f_1 \cdots f_n$ de $LF(Z(\beta, M))$ on associe le polynôme $F(x) = f_0 x^n + \cdots + f_n$. A un tel polynôme F donné, on associe le reste de la division euclidienne de F par $x - \beta$ qu'on note $r_\beta(f)$. Plus précisément, la division euclidienne de F donne $F(x) = Q(x)(x - \beta) + r_\beta(f)$ pour un polynôme Q. On trouve donc

$$F(\beta) = f_0\beta^n + f_1\beta^{n-1} + \cdots + f_n = r_\beta(f). \tag{C.1}$$

Définition C.5 ([40]). Soit R l'ensemble des restes de la division euclidienne des polynômes associés aux mots de $LF(Z(\beta, M))$ par $x - \beta$, c'est-à-dire

$$R = \{r_\beta(f) \mid f \in LF(Z(\beta, M))\}.$$

Définition C.6 ([40]). Si $P(x) = p_0 + p_1 x + \cdots + p_n x^n$, alors le *polynôme inverse* de P est $\overline{P}(x) = p_0 x^n + \cdots + p_n = x^n P(x^{-1})$. On en déduit que $P(x) = x^{-n}\overline{P}(x^{-1})$.

Lemme C.7 ([40]). *Soient f et g dans $LF(Z(\beta, M))$. Alors*

$$f \sim_{Z(\beta,M)} g \Leftrightarrow r_\beta(f) = r_\beta(g).$$

Démonstration. Soit $f = f_0 \cdots f_n$ et $g = g_0 \cdots g_k$ deux mots sur A_M tels que $n \geq k$. Notons F et G leurs polynômes associés. Alors on a

$$\begin{aligned}(F - G)(\beta) = 0 &\Leftrightarrow F(\beta) = G(\beta)\\ &\Leftrightarrow \beta^{-n}\overline{F}(\beta^{-1}) = \beta^{-k}\overline{G}(\beta^{-1})\\ &\Leftrightarrow \overline{F}(\beta^{-1}) - x^{n-k}\overline{G}(\beta^{-1}) = 0.\end{aligned}$$

La condition est suffisante :
Si $r_\beta(f) = r_\beta(g)$, alors $\overline{F}(\beta^{-1}) - x^{n-k}\overline{G}(\beta^{-1}) = 0$. On en déduit qu'il existe un polynôme H tel que $\overline{F} = x^{n-k}\overline{G} + (1 - \beta x)\overline{H}$. Alors pour tout mot infini $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur A_M, on a

$$\begin{aligned}f_0 + \cdots + \frac{f_n}{\beta^n} + \frac{s_0}{\beta^{n+1}} + \frac{s_1}{\beta^{n+2}} + \cdots &= \frac{1}{\beta^{n-k}}\left(g_0 + \cdots + \frac{g_k}{\beta^k}\right) + \frac{s_0}{\beta^{n+1}} + \frac{s_1}{\beta^{n+2}} + \cdots\\ &= \frac{1}{\beta^{n-k}}\left(g_0 + \cdots + \frac{g_k}{\beta^k} + \frac{s_0}{\beta^{k+1}} + \frac{s_1}{\beta^{k+2}} + \cdots\right).\end{aligned}$$

Ceci montre que $fs \in Z(\beta, M)$ si et seulement si $gs \in Z(\beta, M)$.
La condition est nécessaire :
Soit s un mot infini sur A_M tel que fs et gs appartiennent à $Z(\beta, M)$. Alors

$$f_0 + \cdots + \frac{f_n}{\beta^n} + \frac{s_0}{\beta^{n+1}} + \frac{s_1}{\beta^{n+2}} + \cdots = g_0 + \cdots + \frac{g_k}{\beta^k} + \frac{s_0}{\beta^{k+1}} + \frac{s_1}{\beta^{k+2}} + \cdots = 0.$$

Donc $\overline{F}(\beta^{-1}) - x^{n-k}\overline{G}(\beta^{-1}) = 0$. On a donc $r_\beta(f) = r_\beta(g)$. □

Lemme C.8. *Soit $S \subset A^{\mathbb{N}}$ le langage d'un automate de Büchi fini. La congruence à droite modulo S a un index fini.*

Démonstration. Soit $\mathcal{A} = (Q, A, E, I, T)$ un automate de Büchi fini acceptant S. Soit $f \in A^*$ et $I(f) = \{q \in Q \mid \exists i \in I : i \xrightarrow{f} q\}$ l'ensemble des états qui peuvent être atteints en suivant f à partir de I.

Alors la relation $\equiv$ définie par $f \equiv g \Leftrightarrow I(f) = I(g)$ est une relation d'équivalence. Pour tout $s \in A^{\mathbb{N}}$, $fs \in S$ si et seulement s'il existe $i \in I$ et $q \in I(f)$ tel que $i \xrightarrow{f} q \xrightarrow{s} \cdots$ est un chemin d'acceptation de $\mathcal{A}$. Si $f \equiv g$, alors $q \in I(g)$ et donc il existe $j \in I$ tel que $j \xrightarrow{g} q \xrightarrow{s} \cdots$ est un chemin d'acceptation de $\mathcal{A}$ si et seulement si $i \xrightarrow{f} q \xrightarrow{s} \cdots$ en est un. En d'autres mots, si $f \equiv g$, alors $f \sim_{Z(\beta,c)} g$. On vient de montrer que la relation $\equiv$ est plus fine que $\sim_{Z(\beta,M)}$. De plus la relation $\equiv$ a un indice fini car Q est fini. On en déduit que $\sim_{Z(\beta,M)}$ a également un indice fini. □

Proposition C.9 ([40]). *L'ensemble $Z(\beta, M)$ est accepté par un automate de Büchi fini si et seulement si R est fini.*

Démonstration. Vu le lemme C.8, si $Z(\beta, M)$ est accepté par un automate de Büchi fini, alors la relation d'équivalence $\sim_{Z(\beta,M)}$ a un indexe fini.

D'autre part, si le nombre de restes dans R est fini, alors le nombre de classes modulo $Z(\beta, M)$ est fini. Définissons l'automate $\mathcal{B} = \{Q, A_M, E, i, Q\}$ par

(i) L'ensemble fini des états Q est $\{[f]_{Z(\beta,M)} = r_\beta(f) \mid f \in LF(Z(\beta, M))\}$.

(ii) L'état initial i est $\{[\varepsilon]_{Z(\beta,M)}\} = 0$.

(iii) Chaque état est final.

(iv) Les transitions sont de la forme $[f]_{Z(\beta,M)} \xrightarrow{a} [fa]_{Z(\beta,M)}$, où $a \in A_M$.

Alors $\mathcal{B}$ accepte $Z(\beta, M)$. En effet,

(a) soit $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Z(\beta, M)$. Alors pour tout $n \geq 0$, $0 \xrightarrow{s_0\cdots s_n} [s_0 \cdots s_n]_{Z(\beta,M)}$ est un chemin dans $\mathcal{B}$ donc s est un chemin d'acceptation.

(b) Si $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un chemin d'acceptation partant de 0, alors pour tout $n \geq 0$, on a

$$s_0 + s_1 x + \cdots + s_n x^n = (1 - \beta x)(q_0 + q_1 x + \cdots + q_{n-1} x^{n-1}) + e_n x^n, \qquad \text{(C.2)}$$

où e_n est le reste. En remplaçant x par β^{-1} dans (C.2),on trouve que $e_n = \beta^n s_0 + \cdots + s_n$. Comme le reste e_n est borné, on trouve, en évaluant encore (C.2) en $x = \beta^{-1}$: $\lim_{n\to\infty} |s_0 + \cdots + s_n \beta^{-n}| = 0$, donc $S(\beta^{-1}) = 0$.

□

Remarque C.10. Remarquons que l'automate construit dans la preuve précédente est l'automate des zéros $\mathcal{Z}_{\beta,M}$ de la section 3.2.1. En effet, les éléments de R sont les valeurs des polynômes associés aux mots de $LF(Z(\beta, M))$ lorsqu'on les évalue en β. Ils sont donc de la forme $f_0\beta^n + f_1\beta^{n-1} + \cdots f_n$ pour $f \in LF(Z(\beta, M))$. De plus, $r_\beta(fa) = \beta r_\beta(f) + a$. Alors il existe un transition $[f]_{Z(\beta,M)} \xrightarrow{a} [fa]_{Z(\beta,M)} \Leftrightarrow r_\beta(fa) = \beta r_\beta(f) + a$. Ces transitions sont donc définies de la même façon que dans le cas de l'automate des zéros. Un mot représente donc 0 si et seulement s'il est accepté par l'automate $\mathcal{Z}_{\beta,M}$ et cet automate est fini si et seulement si tous les polynômes à coefficients dans A_M et évalués en β ne prennent

qu'un nombre fini de valeurs. L'ensemble des ces valeurs est donc l'ensemble des états de cet automate. On a donc une façon de déterminer dans quels cas l'automate des zéros est fini.

On peut alors énoncer le corollaire suivant :

Corollaire C.11. *Soient $\beta > 1$ et M un entier vérifiant $\beta - 1 < M$. Si l'automate des zéros $\mathcal{Z}_{\beta,M}$ est fini alors pour tout mot infini $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ accepté par $\mathcal{Z}_{\beta,M}$ et pour tout conjugué algébrique γ de β, on a*

- *Si $|\gamma| > 1$, alors $\sum_{i=0}^{\infty} s_i\gamma^{-i} = 0$.*
- *Si $|\gamma| = 1$, alors les sommes partielles $\sum_{i=0}^{n} s_i\gamma^{-i}$, où $n \in \mathbb{N}$, appartiennent à un nombre fini de cercles centrés sur 0.*

Démonstration. Si l'automate des zéros est fini, alors vu le résultat C.9, l'ensemble R est fini. Or vu la remarqe C.10 et la relation (C.1), pour tout mot infini $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ accepté par l'automate des zéros $\mathcal{Z}_{\beta,M}$, les sommes partielles $\sum_{i=0}^{n} s_i\beta^{n-i}$ sont des éléments de R et donc des états de l'automate des zéros défini dans la proposition C.9. Comme cet automate est fini, ces sommes partielles ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs. Vu la remarque 2.2.8, le reste de la démonstration est exactement la même que celle du point (ii) du lemme 2.2.7. Pour faciliter la lecture, on reproduit la preuve ici.

On a constaté que la suite des sommes partielles $\left(\sum_{i=0}^{n} s_i\beta^{n-i}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs. Montrons maintenant que si γ est un conjugué de β, alors la suite

$$\left(\sum_{i=0}^{n} s_i\gamma^{n-i}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

prend également un nombre fini de valeurs. Notons $P_n = \sum_{i=0}^{n} s_i x^{n-i}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Si deux polynômes P_{i_1} et P_{i_2} de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prennent la même valeur en $x = \beta$, alors leur différence $P_{i_1} - P_{i_2}$ est divisible par $(x - \beta)$, ce qui implique qu'elle est également divisible par le polynôme minimal de β. Vu que γ est le conjugué de β, il annule aussi le polynôme minimal de β. On en déduit que $(P_{i_1} - P_{i_2})(\gamma) = 0$. Donc P_{i_1} et P_{i_2} prennent aussi la même valeur en $x = \gamma$. La suite

$$\left(\sum_{i=0}^{n} s_i\gamma^{n-i}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

prend donc également un nombre fini de valeurs $z_1, z_2, \ldots, z_N$ et est donc bornée par une constante c. On a maintenant tous les outils pour conclure la preuve. On distingue deux cas en fonction du module de γ.

— Si $|\gamma| > 1$, alors

$$\left|\sum_{i=0}^{n} s_i\gamma^{-i}\right| \leq \frac{c}{|\gamma|^n} \to 0$$

si $n \to \infty$, donc $\sum_{i=0}^{\infty} s_i\gamma^{-i} = 0$.

— Si $|\gamma| = 1$, alors pour tout $n \geq 0$,

$$\left|\sum_{i=0}^{n} s_i \gamma^{-i}\right| = \left|\gamma^{-n} \sum_{i=0}^{n} s_i \gamma^{n-i}\right| = |\gamma^{-n}| \left|\sum_{i=0}^{n} s_i \gamma^{n-i}\right| = \left|\sum_{i=0}^{n} s_i \gamma^{n-i}\right|$$

est égal à un des $|z_1|, \ldots, |z_N|$, donc les sommes partielles sont bornées. Ceci qui permet de conclure.

□

La proposition suivante découle directement du théorème 3.2.26 et a été démontrée par Berend et Frougny.

Proposition C.12 ([15]). *L'ensemble $Z(\beta, M)$ est accepté par un automate de Büchi fini pour tout entier positif $M \geq 1$ si et seulement si β est un nombre de Pisot.*

Les résultats C.9 et C.12 permettent de caractériser les nombres de Pisot.

Proposition C.13 ([21]). *Le réel β est un nombre de Pisot si et seulement si pour tout entier positif $M \geq 1$, le nombre de restes de la division euclidienne par $x - \beta$ des polynômes associés aux mots de $LF(Z(\beta, M))$ est fini.*

Annexe D

Erratum

La liste (non exhaustive) suivante reprend un certain nombre de fautes et d'imprécisions que j'ai constatées jusqu'à ce jour. On fait ici la distinction entre les fautes d'orthographe et des imprécisions mathématiques. Les fautes sont corrigées dans le texte à l'endroit précis en rouge.

Fautes d'orthographe :

— À la page 11 en dessous de l'exemple 1.4.2 « Le tableau représenté à la figure 1.8 suivant donne les 10 plus petits nombres de Pisot. », le « suivant » est en trop.
— À la page 14 dans l'introduction de la section 1.5, « Ces notions de base seront utilisées dans certaines démonstrations le chapitre 2 et 3 » devrait être « dans certaines démonstrations dans les chapitres 2 et 3 ».
— À la page 28 lemme 2.2.3 dans la démonstration du point (i) il manque une (barre de) valeur absolue dans la première équation.
— À la page 36 en bas, dans la phrase « deux cas de se présentent », on peut soit supprimer le « de » soit dire « deux cas de figure se présentent ».
— À la page 47 à la fin de la démonstration, « Ccomme ».
— À la page 51 au début de la section 2.3, « $A_M = \{-M, -M-1, \ldots, M\}$ » devrait être « $A_M = \{-M, -M+1, \ldots, M\}$ ».
— À la page 56 à la deuxième ligne de la démonstration du lemme 2.4.3 j'ai mis un espace devant un virgule « 0 , il existe... ».
— À la page 59 en dessous de l'équation (2.36) il y a « $\cdots$ » au lieu de « ... ».
— À la page 89 dans l'exemple 3.2.36, il y a un « les » en trop dans « remplace les toutes les occurrences ».
— À la page 92 dans l'énoncé du lemme 3.2.40 « Soit Il », devrait être « Soit il ».

Imprécisions :

— Le titre « théorie des groupes » ne correspond pas tout à fait au contenu de la section 1.3. Il s'agit plutôt de rappels d'algèbre.
— À la page 10 dans la définition 1.3.5, $\mathbb{Z}$ devrait être $\mathbb{Q}$.
— À la page 15 au dessus de la définition 1.5.2 je dis que je donne l'algorithme de division, ce qui n'est pas le cas.
— À la page 27 dans la proposition 2.2.2, après la phrase « Le point x est un point

d'accumulation d'un ensemble E si et seulement si tout voisinage V de x contient une infinité de points » on pourrait préciser « une infinité de points de E ».

— À la page 50 dans la note en base de page 3, le polynôme $3x - 2$ n'est pas le polynôme minimal car le polynôme minimal est défini comme étant unitaire. Le polynôme $3x - 2$ en est un multiple.

— À la page 81 pour l'automate des zéros dans le cas fini, j'aurai pu mentionner que T est l'ensemble des états finaux et « $t : T \to N$ » devrait être » $t : T \to \mathbb{N}$ ».

— À la page 101 dans la proposition 3.3.9, $x \in \Omega$ devrait être $\sigma(x) \in \Omega$.

— À la page 101 dans la définition 3.3.10, $x' \in \Omega$ devrait être $\sigma(x) \in \Omega$.

— À la page 119 dans l'exemple 3.3.28, $S_{B_1}(\phi) = \mathbb{Z}_\beta$ devrait être $S_{B_1}(\phi) = \mathbb{Z}_\beta^+$.

Bibliographie

[1] Algebraic integer. Consulté le 05/30/2021. Disponible via l'URL <https://en.wikipedia.org/wiki/Algebraic_integer>.

[2] Field extension. Consulté le 04/12/2021. Disponible via l'URL <https://en.wikipedia.org/wiki/Field_extension>.

[3] Limit point. Consulté le 04/30/2021. Disponible via l'URL <https://en.wikipedia.org/wiki/Limit_point>.

[4] Monoïde. Consulté le 05/18/2021. Disponible via l'URL <https://fr.wikipedia.org/wiki/Mono%C3%AFde#Morphisme_de_mono%C3%AFdes>.

[5] Newton's identities. Consulté le 13/04/2021. Disponible via l'URL <https://en.wikipedia.org/wiki/Newton%27s_identities>.

[6] Pisot-vijayaraghavan number. Consulté le 04/12/2021. Disponible via l'URL <https://en.wikipedia.org/wiki/Pisot%E2%80%93Vijayaraghavan_number>.

[7] AKIYAMA, Shigeki. Pisot number system and its dual tiling. In : Physics and theoretical computer science, vol.7, 2007, (NATO Secur. Sci. Ser. D Inf. Commun. Secur), pages 133–154.

[8] AKIYAMA, Shigeki, Marcy BARGE, Valérie BERTHÉ, Jeong-Yup LEE et Anne SIEGEL. On the Pisot substitution conjecture. In : Mathematics of aperiodic order, Basel : Birkhäuser/Springer, Basel, 2015, (Progr. Math.), pages 33–72.

[9] AKIYAMA, Shigeki et Vilmos KOMORNIK. Discrete spectra and Pisot numbers. Journal of Number Theory. 2011, 133.

[10] AMBROZ, Petr, Daniel DOMBEK, Zuzana MASÁKOVÁ et Edita PELANTOVÁ. Numbers with integer expansion in the numeration system with negative base. Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu. WydziałMatematyki i Informatyki. Functiones et Approximatio Commentarii Mathematici. 2012, 47, p. 241–266. Disponible via l'URL <https://doi.org/10.7169/facm/2012.47.2.8>.

[11] ANN, Fernholm. The nobel prize in chemistry 2011 : Crystals of golden proportions, 2011. Disponible via l'URL <https://www.nobelprize.org/uploads/2018/06/popular-chemistryprize2011.pdf>.

[12] BAKER, Simon. On universal and periodic β-expansions, and the Hausdorff dimension of the set of all expansions, 2014. Disponible via l'URL <https://doi.org/10.1007/s10474-013-0366-0>.

[13] BALKOVÁ, L'ubomíra, Jean-Pierre GAZEAU et Edita PELANTOVÁ. Asymptotic behavior of beta-integers. Letters in Mathematical Physics. 2008, 84(2-3), p. 179 – 198. Disponible via l'URL <http://dx.doi.org/10.1007/s11005-008-0241-z>.

[14] BALKOVÁ, L'ubomíra, Zuzana MASÁKOVÁ et Edita PELANTOVÁ. The Meyer property of cut-and-project sets. Journal of Physics. A. Mathematical and General. 09 2004, 37, p. 8853. Disponible via l'URL <https://doi.org/10.1088/0305-4470/37/37/007>.

[15] BEREND, Daniel et Christiane FROUGNY. Computability by finite automata and Pisot bases. Mathematical Systems Theory. An International Journal on Mathematical Computing Theory. 1994, 27(3), p. 275–282. Disponible via l'URL <https://doi.org/10.1007/BF01578846>.

[16] BERTHé, Valérie et Michel RIGO, éds. Combinatorics, automata and number theory. Vol. 135. Cambridge University Press, Cambridge, 2010. xx+615 p. (Encyclopedia of Mathematics and its Applications). Disponible via l'URL <https://doi.org/10.1017/CBO9780511777653>. ISBN 978-0-521-51597-9.

[17] BERTRAND-MATHIS, Anne. Développement en base θ, répartition modulo un de la suite $(x\theta^n)_{n\geq 0}$, langages codés et θ-shift. Bulletin de la Société Mathématique de France. 1986, 114, p. 271–323. Disponible via l'URL <www.numdam.org/item/BSMF_1986__114__271_0/>.

[18] BEUKERS, F. Algebraic number theory, 2011. Disponible via l'URL <http://www.math.leidenuniv.nl/~evertse/dio2011-algnumbers.pdf>.

[19] BOGMÉR, Antal, Márton HORVÁTH et András SÖVEGJÁRTÓ. On some problems of I. Joó. Acta Mathematica Hungarica. 1991, 58(1), p. 153–155. Disponible via l'URL <https://doi.org/10.1007/BF01903557>.

[20] BOMBIERI, Enrico et Jean E. TAYLOR. Quasicrystals, tilings, and algebraic number theory : some preliminary connections. In : The legacy of Sonya Kovalevskaya (Cambridge, Mass., and Amherst, Mass., 1985), vol.64, 1987, (Contemp. Math.), pages 241–264.

[21] BUGEAUD, Yann. On a property of Pisot numbers and related questions. Acta Mathematica Hungarica. 1996, 73(1), p. 33–39. Disponible via l'URL <https://doi.org/10.1007/BF00058941>.

[22] BURDÍK, Čestmír, Christiane FROUGNY, Jean-Pierre GAZEAU et Rudolf KREJCA. Beta-integers as natural counting systems for quasicrystals. Journal of Physics. A. Mathematical and General. 1998, 31(30), p. 6449–6472. Disponible via l'URL <https://doi.org/10.1088/0305-4470/31/30/011>.

[23] CARTON, Olivier, Dominique PERRIN et Jean-Eric PIN. Automata and semigroups recognizing infinite words. In : Logic and Automata, History and perspectives, Amsterdam University Press, 2008, (Texts Log. Games), pages 585–596.

[24] DE BOISSIEU, Marc. Atomic structure of quasicrystals. Structural Chemistry. août 2012, 23(4), p. 965–976. Disponible via l'URL <https://doi.org/10.1007/s11224-012-0004-4>.

[25] DOMBEK, Daniel, Zuzana MASÁKOVÁ et Tomáš VÁVRA. Confluent Parry numbers, their spectra, and integers in positive- and negative-base number systems. Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux. 2015, 27(3), p. 745–768. Disponible via l'URL <www.numdam.org/item/JTNB_2015__27_3_745_0/>.

[26] DROBOT, Vladimir. On sums of powers of a number. American Mathematical Monthly. 1973, 80(1), p. 42–44. Disponible via l'URL <https://doi.org/10.1080/00029890.1973.11993226>.

[27] DUFRESNOY, Jacques et Charles PISOT. Étude de certaines fonctions méromorphes bornées sur le cercle unité. Application à un ensemble fermé d'entiers algébriques. Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Troisième Série. 1955, 72, p. 69–92. Disponible via l'URL <http://www.numdam.org/item/ASENS_1955_3_72_1_69_0>.

[28] ELKHARRAT, Avi, Christiane FROUGNY, Jean-Pierre GAZEAU et Jean-Louis VERGER-GAUGRY. Symmetry groups for beta-lattices. Theoretical Computer Science. 2004, 319(1), p. 281–305. Disponible via l'URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304397504001057>.

[29] ELSER, Veit. The diffraction pattern of projected structures. Acta Crystallographica. Section A. Crystal Physics, Diffraction, Theoretical and General Crystallography. mars 1986, 42(1), p. 36–43. Disponible via l'URL <https://doi.org/10.1107/S0108767386099932>.

[30] ERDÖS, Pál, Miklós I. JOÓ et István JOÓ. On a problem of Tamás Varga. Bulletin de la Société Mathématique de France. 1992, 120(4), p. 507–521. Disponible via l'URL <www.numdam.org/item/BSMF_1992__120_4_507_0/>.

[31] ERDÖS, Paul. On a family of symmetric Bernoulli convolutions. American Journal of Mathematics. 1939, 61(4), p. 974–976. Disponible via l'URL <http://www.jstor.org/stable/2371641>.

[32] ERDÖS, Paul. et István JOÓ. On the expansion $1 = \sum q^{-n_i}$. Periodica Mathematica Hungarica. 1991, 23(1), p. 25–28. Disponible via l'URL <https://doi.org/10.1007/BF02260391>.

[33] ERDÖS, Paul, István JOÓ et Vilmos KOMORNIK. Characterization of the unique expansions $1 = \sum_{i=1}^{\infty} q^{-n_i}$ and related problems. Bulletin de la Société Mathématique de France. 1990, 118(3), p. 377–390. Disponible via l'URL <www.numdam.org/item/BSMF_1990__118_3_377_0/>.

[34] ERDÖS, Paul, István JOÓ et Vilmos KOMORNIK. On the sequence of numbers of the form $\epsilon_0 + \epsilon_1 q + \cdots + \epsilon_n q^n$, $\epsilon_i \in \{0, 1\}$. Acta Arithmetica. 1998, 83(3), p. 201–210. Disponible via l'URL <http://eudml.org/doc/207118>.

[35] ERDÖS, Paul et Vilmos KOMORNIK. Developments in non-integer bases. Acta Mathematica Hungarica. 1998, 79(1), p. 57–83. Disponible via l'URL <https://doi.org/10.1023/A:1006557705401>.

[36] FENG, De-Jun. On the topology of polynomials with bounded integer coefficients. Journal of the European Mathematical Society (JEMS). 2016, 18.

[37] FENG, De-jun et Yang WANG. Bernoulli convolutions associated with certain non-Pisot numbers. Analysis in Theory and Applications. 2003, 19(4), p. 312–331. Disponible via l'URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0001870803002639>.

[38] FENG, De-Jun et Zhi-Ying WEN. A property of Pisot numbers. Journal of Number Theory. 2002, 97(2), p. 305 – 316. Disponible via l'URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022314X02000136>.

[39] FROUGNY, Christiane. Confluent linear numeration systems. Theoretical Computer Science. 1992, 106(2), p. 183–219. Disponible via l'URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/030439759290249F>.

[40] FROUGNY, Christiane. Representations of numbers and finite automata. Mathematical Systems Theory. An International Journal on Mathematical Computing Theory. 1992, 25(1), p. 37–60. Disponible via l'URL <https://doi.org/10.1007/BF01368783>.

[41] FROUGNY, Christiane, Jean-Pierre GAZEAU et Rudolf KREJCAR. Additive and multiplicative properties of point sets based on beta-integers. Theoretical Computer Science. 2003, 303(2), p. 491–516. Tilings of the Plane. Disponible via l'URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304397502005030>.

[42] FROUGNY, Christiane et Edita PELANTOVÁ. Two applications of the spectrum of numbers. Acta Mathematica Hungarica. 2018, 156(2), p. 391–407. Disponible via l'URL <https://doi.org/10.1007/s10474-018-0856-1>.

[43] FROUGNY, Christiane et Jacques SAKAROVITCH. Number representation and finite automata. In : Combinatorics, automata and number theory, vol.135, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010, (Encyclopedia Math. Appl.), pages 34–107.

[44] FROUGNY, Christiane et Boris SOLOMYAK. Finite beta-expansions. Ergodic Theory and Dynamical Systems. 1992, 12(4), p. 713 – 723. Disponible via l'URL <https://www.irif.fr/~cf/cours/graz/FrouSolo92.pdf>.

[45] GALLOUËT, Thierry et Raphaele HERBIN. MESURE, INTEGRATION, PROBABILITES. Ellipses Edition Marketing, 2013. 678 pages p. Disponible via l'URL <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01283567>.

[46] GARSIA, Adriano M. Arithmetic properties of Bernoulli convolutions. Transactions of the American Mathematical Society. 1962, 102, p. 409–432. Disponible via l'URL <https://doi.org/10.2307/1993615>.

[47] GARSIA, Adriano M. Entropy and singularity of infinite convolutions. Pacific Journal of Mathematics. janvier 1963, 13(4), p. 1159–1169. Disponible via l'URL <https://doi.org/>.

[48] GAZEAU, Jean-Pierre et Jean-Louis VERGER-GAUGRY. Geometric study of the beta-integers for a Perron number and mathematical quasicrystals. Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux. 2004, 16(1), p. 125–149. Disponible via l'URL <www.numdam.org/item/JTNB_2004__16_1_125_0/>.

[49] GAZEAU, Jean-Pierre et Jean-Louis VERGER-GAUGRY. Diffraction spectra of weighted Delone sets on beta-lattices with beta a quadratic unitary Pisot number. Université de Grenoble. Annales de l'Institut Fourier. 2006, 56(7), p. 2437–2461. Disponible via l'URL <www.numdam.org/item/AIF_2006__56_7_2437_0/>.

[50] GRATIAS, Denis et Marianne QUIQUANDON. Discovery of quasicrystals : The early days. Comptes Rendus Physique. 2019, 20(7), p. 803–816. Disponible via l'URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1631070519300386>.

[51] HARE, Kevin. Pisot numbers and the Spectra of Real numbers. Thèse de doctorat, Simon Fraser University, 2002.

[52] HARE, Kevin G., Zuzana MASÁKOVÁ et Tomáš VÁVRA. On the spectra of Pisot-cyclotomic numbers. Letters in Mathematical Physics. 2018, 108(7), p. 1729–1756. Disponible via l'URL <https://doi.org/10.1007/s11005-018-1053-4>.

[53] HART, William B. Algebraic number theory. Disponible via l'URL <https://homepages.warwick.ac.uk/~masfaw/AlgebraicNTH.pdf>.

[54] HEJDA, Tomáš et Edita PELANTOVÁ. Spectral properties of cubic complex Pisot units. Math. Comp. 2016, 85, p. 401–421.

[55] HOF, Albertus. On diffraction by aperiodic structures. Communications in Mathematical Physics. 1995, 169(1), p. 25–43. Disponible via l'URL <https://doi.org/10.1007/BF02101595>.

[56] HUTCHINSON, John E. Fractals and self similarity. Indiana University Mathematics Journal. 1981, 30(5), p. 713–747. Disponible via l'URL <https://doi.org/10.1512/iumj.1981.30.30055>.

[57] JANOT, Christian. The crystallography of quasicrystals. Proceedings : Mathematical and Physical Sciences. 1993, 442(1914), p. 113–127. Disponible via l'URL <http://www.jstor.org/stable/52351>.

[58] JESSEN, Børge et Aurel WINTNER. Distribution functions and the Riemann zeta function. Transactions of the American Mathematical Society. 1935, 38, p. 48–88. Disponible via l'URL <https://doi.org/10.2307/1989728>.

[59] JOÓ, István. On Riesz bases. Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae. Sectio Mathematica. 1988, 31, p. 143–153.

[60] JOÓ, István. On the distribution of the set $\left\{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i q^i : \varepsilon_i \in \{0,1\}, n \in N\right\}$. Acta Mathematica Hungarica. mars 1991, 58(1), p. 199–202. Disponible via l'URL <https://doi.org/10.1007/BF01903560>.

[61] KATZ, André et COLLECTIF. Introduction aux quasicristaux. In : Séminaire Bourbaki : volume 1997/98, exposés 835-849, Société mathématique de France, 1998, (Astérisque ; 252). talk :838.

[62] KEMPTON, Tom. Counting β-expansions and the absolute continuity of Bernoulli convolutions. Monatshefte für Mathematik. août 2013, 171(2), p. 189–203. Disponible via l'URL <https://doi.org/10.1007/s00605-013-0512-3>.

[63] KEMPTON, Tom et Alex BATSIS. Measures on the spectra of algebraic integers, 2021.

[64] KESTEN, Harry. On a conjecture of Erdös and Szüsz related to uniform distribution mod 1. Polska Akademia Nauk. Instytut Matematyczny. Acta Arithmetica. 1966, 12(2), p. 193–212. Disponible via l'URL <http://eudml.org/doc/204796>.

[65] KOMORNIK, Vilmos, Paola LORETI et Marco PEDICINI. An approximation property of Pisot numbers. Journal of Number Theory. février 2000, 80(2), p. 218–237. Disponible via l'URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022314X99924563>.

[66] LAGARIAS, J. C. Geometric models for quasicrystals I. Delone sets of finite type. Discrete & Computational Geometry. 1999, 21(2), p. 161–191. Disponible via l'URL <https://doi.org/10.1007/PL00009413>.

[67] LAGARIAS, Jeffrey C. Meyer's concept of quasicrystal and quasiregular sets. Communications in Mathematical Physics. août 1996, 179(2), p. 365–376. Disponible via l'URL <https://doi.org/10.1007/BF02102593>.

[68] LAGARIAS, Jeffrey C. Mathematical quasicrystals and the problem of diffraction. 2000, 13, p. 61–93. Disponible via l'URL <https://dept.math.lsa.umich.edu/~lagarias//doc/diffraction.pdf>.

[69] LAGARIAS, Jeffrey C. The impact of aperiodic order on mathematics. Materials Science and Engineering : A. 2000, 294-296, p. 186–191. Disponible via l'URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S092150930001193X>.

[70] LAU, Ka-Sing. Dimension of a family of singular Bernoulli convolutions. Journal of Functional Analysis. 1993, 116(2), p. 335 – 358. Disponible via l'URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002212368371116X>.

[71] LEVINE, Dov et Paul Joseph STEINHARDT. Quasicrystals : A new class of ordered structures. Physical Review Letters. Dec 1984, 53, p. 2477–2480. Disponible via l'URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.53.2477>.

[72] MASÁKOVÁ, Zuzana, Kateřina PASTIRČÁKOVÁ et Edita PELANTOVÁ. Description of spectra of quadratic Pisot units. Journal of Number Theory. 2015, 150, p. 168–190. Disponible via l'URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022314X14003862>.

[73] MERCAT, Paul et Shigeki AKIYAMA. Yet another characterization of the Pisot substitution conjecture. In : AKIYAMA, Shigeki et Pierre ARNOUX, éds, Substitution and Tiling Dynamics : Introduction to Self-inducing Structures : CIRM Jean-Morlet Chair, Fall 2017, Springer International Publishing, 2017, pages 397–448.

[74] MEYER, Yves. Quasicrystals, Diophantine approximation and algebraic numbers. In : AXEL, Françoise et Denis GRATIAS, éds, Beyond quasicrystals, Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1995, pages 3–16.

[75] MICCIANCIO, Daniele. Lattice algorithms and applications. 2010.

[76] MOODY, Robert V. Meyer sets and their duals.

[77] MOODY, Robert V. Model sets : A survey. In : AXEL, Françoise, Françoise DÉNOYER et Jean-Pierre GAZEAU, éds, From Quasicrystals to More Complex Systems, Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2000, p. 145–166.

[78] PANJU, Maysum. A systematic construction of almost integers. The Waterloo Mathematics Review. 2011, 1(2), p. 35–43.

[79] PARRY, William. On the β-expansions of real numbers. Acta Mathematica. Academiae Scientiarum Hungaricae. septembre 1960, 11(3), p. 401–416. Disponible via l'URL <https://doi.org/10.1007/BF02020954>.

[80] PAVELKA, Marta, Christiane FROUGNY, Edita PELANTOVÁ et Milena SVOBODOVÁ. On-line algorithms for multiplication and division in real and complex numeration systems. Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science. DMTCS. Disponible via l'URL <https://arxiv.org/abs/1610.08309>.

[81] PEDICINI, Marco. Greedy expansions and sets with deleted digits. Theoretical Computer Science. 2005, 332(1), p. 313–336. Disponible via l'URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304397504007571>.

[82] PELANTOVÁ, Edita. On the spectra of numbers, 2018. Disponible via l'URL <https://numeration2018.sciencesconf.org/data/pages/pelantova.pdf>.

[83] PERES, Yuval, Wilhelm SCHLAG et Boris SOLOMYAK. Sixty years of Bernoulli convolutions. In : Fractal geometry and stochastics, II (Greifswald/Koserow, 1998), Basel : Birkhäuser Basel, 2000, (Progr. Probab.), pages 39–65.

[84] PERES, Yuval et Boris SOLOMYAK. Approximation by polynomials with coefficients ± 1. Journal of Number Theory. 2000, 84(2), p. 185 – 198. Disponible via l'URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022314X00925149>.

[85] PERRIN, Dominique. Words and automata, lecture 3 : Transducers, 2015. Disponible via l'URL <http://www-igm.univ-mlv.fr/~perrin/Enseignement/Master2015-16/Cours3/lecture3.pdf>.

[86] RÉNYI, Alfréd. Representations for real numbers and their ergodic properties. Acta Mathematica. Academiae Scientiarum Hungaricae. septembre 1957, 8(3), p. 477–493. Disponible via l'URL <https://doi.org/10.1007/BF02020331>.

[87] RIGO, Michel. Théorie des automates et langages formels, 2009-2010. Disponible via l'URL <http://www.discmath.ulg.ac.be/cours/main_autom.pdf>.

[88] SALEM, Refaat M. A remarkable class of algebraic integers. Proof of a conjecture of Vijayaraghavan. Duke Mathematical Journal. 1944, 11, p. 103–108. Disponible via l'URL <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-44-01111-7>.

[89] SIDOROV, Nikita. Universal β-expansions. Periodica Mathematica Hungarica. Journal of the János Bolyai Mathematical Society. 09 2003, 47, p. 221–231. Disponible via l'URL <https://doi.org/10.1023/B:MAHU.0000010823.98226.4e>.

[90] SIEGEL, Carl Ludwig. Algebraic integers whose conjugates lie in the unit circle. Duke Mathematical Journal. 1944, 11, p. 597–602. Disponible via l'URL <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-44-01152-X>.

[91] SINGH, Alok, Srinivasa RANGANATHAN et Leonid A. BENDERSKY. Quasicrystalline phases and their approximants in Al-Mn-Zn alloys. Acta Materialia. décembre 1997, 45(12), p. 5327–5336. Disponible via l'URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359645497001031>.

[92] SOLOMYAK, Boris. On the random series $\sum \pm\lambda n$ (an Erdös problem). Annals of Mathematics. Second Series. 1995, 142(3), p. 611–625. Disponible via l'URL <http://www.jstor.org/stable/2118556>.

[93] SOLOMYAK, Boris. Dynamics of self-similar tilings. Ergodic Theory and Dynamical Systems. 1997, 17(3), p. 695–738. Disponible via l'URL <https://www.cambridge.org/core/article/dynamics-of-selfsimilar-tilings/B7C18B3D8CF8F602EE19B0F65D7AAAB4>.

[94] SOLOMYAK, Boris. Notes on Bernoulli convolutions. In : Fractal geometry and applications : a jubilee of Benoît Mandelbrot, vol.72, 2004, (Proc. Sympos. Pure Math.), pages 207–230.

[95] STEPHENS, Peter W. et Alan I. GOLDMAN. The structure of quasicrystals. Scientific American. février 1991, 264(4), p. 44–53. Disponible via l'URL <http://www.jstor.org/stable/24936867>.

[96] THANG, Le Tu Q., Serguei A. PIUNIKHIN et Vladimir A. SADOV. The geometry of quasicrystals. Russian Mathematical Surveys. février 1993, 48(1), p. 37–100. Disponible via l'URL <http://dx.doi.org/10.1070/RM1993v048n01ABEH000985>.

[97] THURSTON, William P. Groups, tilings and finite state automata. In : Geometry, groups, and self-similar tilings, 1989, (AMS colloquium lectures).

[98] TRIVEDI, Kishor S. et Miloš D. ERCEGOVAC. On-line algorithms for division and multiplication. Institute of Electrical and Electronics Engineers. Transactions on Computers. 1977, C-26, p. 681–687.

[99] VARJÚ, Péter P. Recent progress on Bernoulli convolutions. In : European Congress of Mathematics, 2018, p. 847–867.

[100] VÁVRA, T. et F. VENEZIANO. Pisot unit generators in number fields. Journal of Symbolic Computation. 2018, 89, p. 94–108. Disponible via l'URL <https://doi.org/10.1016/j.jsc.2017.11.005>.

[101] VERGER-GAUGRY, Jean-Louis. On self-similar finitely generated uniformly discrete (SFU-) sets and sphere packings. In : Physics and number theory, vol.10, 2006, (IRMA Lect. Math. Theor. Phys.), pages 39–78. 40 pages.

[102] VINÇOTTE, Adrien. Nombres de pisot-vijayaraghavan et de salem, et application aux systèmes de numération, 2016. Disponible via l'URL <http://perso.eleves.ens-rennes.fr/people/Gwendal.Soisnard/Rapports_2016/Adrien_Vicotte_36768.pdf>.

[103] WOLFGANG, Thomas. Automata on infinite objects. 1988. Aachener Informatik Berichte 88-17. Disponible via l'URL <https://www.automata.rwth-aachen.de/download/papers/thomas/thomas88.pdf>.