

Mémoire

Auteur : Courtin, Thibaud

Promoteur(s) : Bastin, Thierry

Faculté : Faculté des Sciences

Diplôme : Master en sciences physiques, à finalité approfondie

Année académique : 2020-2021

URI/URL : <http://hdl.handle.net/2268.2/12235>

Avertissement à l'attention des usagers :

Tous les documents placés en accès ouvert sur le site le site MatheO sont protégés par le droit d'auteur. Conformément aux principes énoncés par la "Budapest Open Access Initiative"(BOAI, 2002), l'utilisateur du site peut lire, télécharger, copier, transmettre, imprimer, chercher ou faire un lien vers le texte intégral de ces documents, les disséquer pour les indexer, s'en servir de données pour un logiciel, ou s'en servir à toute autre fin légale (ou prévue par la réglementation relative au droit d'auteur). Toute utilisation du document à des fins commerciales est strictement interdite.

Par ailleurs, l'utilisateur s'engage à respecter les droits moraux de l'auteur, principalement le droit à l'intégrité de l'oeuvre et le droit de paternité et ce dans toute utilisation que l'utilisateur entreprend. Ainsi, à titre d'exemple, lorsqu'il reproduira un document par extrait ou dans son intégralité, l'utilisateur citera de manière complète les sources telles que mentionnées ci-dessus. Toute utilisation non explicitement autorisée ci-avant (telle que par exemple, la modification du document ou son résumé) nécessite l'autorisation préalable et expresse des auteurs ou de leurs ayants droit.



FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE

**Intrication quantique dans les systèmes de particules
indiscernables**

Thibaud COURTIN
Promoteur : Prof. Thierry BASTIN

Travail de fin d'études présenté
dans le cadre de l'obtention du grade de
Master en sciences physiques

Année académique 2020-2021

Remerciements

Je tiens à remercier chaleureusement le Professeur Thierry Bastin pour son encadrement, son aide et plus particulièrement, le suivi de qualité tout au long de cette année. Je le remercie de m'avoir guidé dans la réalisation de ce mémoire.

Je souhaite également remercier les Professeurs Philippe Ghosez, Geoffroy Lumay et Peter Schlagheck d'avoir accepté de constituer le comité de lecture de ce mémoire. Je leur souhaite, d'ores et déjà, une excellente lecture.

Je remercie également ma famille et plus particulièrement mes parents pour leur soutien durant toutes ces années.

Enfin, je remercie toutes les personnes qui m'ont épaulées durant ces années d'étude et en particulier Lydia et Chloé pour leurs relectures et leur soutien non seulement durant cette période toute particulière mais également durant tout mon cursus universitaire.

Notations

$\text{card}(A)$	Cardinalité de l'ensemble A
E.C.O.C.	Ensemble complet d'observables qui commutent
$\mathcal{L}(E)$	Ensemble des endomorphismes sur l'espace vectoriel E
\mathcal{H}^+	Ensemble des états entièrement symétriques vis-à-vis de l'échange de deux particules
\mathcal{H}^-	Ensemble des états entièrement antisymétriques vis-à-vis de l'échange de deux particules
M_n	Ensemble des matrices carrées de dimension n à coefficients complexes
$M_{m,n}$	Ensemble des matrices de format $m \times n$ à coefficients complexes
S_N	Groupe symétrique d'ordre N
$U(N)$	Groupe unitaire de dimension N
$\text{Im}(\hat{T})$	Image de l'application linéaire \hat{T}
$\mathbf{0}_{m,n}$	Matrice nulle de format $m \times n$
$a \wedge b$	Minimum entre a et b
$\ker(\hat{T})$	Noyau de l'application linéaire \hat{T}
$\text{rg}(M)$	Rang de la matrice M
$\text{sgn}(\pi)$	Signature de la permutation $\pi \in S_N$
$\text{sp}(\hat{T})$	Spectre de l'opérateur \hat{T}

Table des matières

Notations	4
Introduction	7
1 L'intrication quantique : approche standard	11
1.1 L'intrication quantique : définition	12
1.1.1 Exemple de deux qubits	12
1.1.2 Exemple de trois qubits	16
1.2 L'intrication quantique vis-à-vis de l'indiscernabilité	18
1.2.1 Opérateur de permutation et postulat de symétrisation	18
1.2.2 Symétriseur et antisymétriseur	20
1.2.3 Difficultés de la notion d'intrication vis-à-vis de la problématique de l'indiscernabilité	20
2 L'intrication quantique : nouvelle approche (cas de 2 particules)	23
2.1 L'intrication quantique : nouvelle définition	24
2.2 Application aux systèmes discernables	25
2.2.1 Exemple de deux qubits	26
2.2.2 Équivalence de la nouvelle définition vis-à-vis de l'ancienne	27
2.3 Application aux systèmes indiscernables	31
2.3.1 Exemple de deux qubits	32
2.3.2 Cas des fermions	33
2.3.2.1 Premier critère d'intrication	33
2.3.2.2 Décomposition de Slater et second critère d'intrication	37
2.3.3 Cas des bosons	40
2.3.3.1 Premier critère d'intrication	40
2.3.3.2 Décomposition de Schmidt et second critère d'intrication	44
2.4 Résumé et récapitulatif du chapitre deux	48
3 L'intrication quantique : nouvelle approche (cas de $N \geq 2$ particules)	51
3.1 Ensemble complet de propriétés et définition de l'intrication	52
3.1.1 Définition d'ensemble complet de propriétés : cas discernable	52
3.1.2 Définition d'ensemble complet de propriétés : cas indiscernable	52
3.1.2.1 Particularisation aux systèmes de deux particules	53
3.1.2.2 Particularisation aux systèmes de trois particules	54
3.1.3 Définition de l'intrication	55
3.2 Critère d'intrication fermionique	56

Conclusion	61
Appendices	63
A Groupe symétrique S_N	65
B	67
B.1 Décomposition en valeurs singulières	67
B.2 Éléments de théorie de la mesure et inégalité de Hölder	67
C	69
C.1 Espace probabilisable et mesure de probabilité	69
C.2 Formule de Poincaré	69

Introduction

Marquée par des années d'histoire, l'*intrication quantique* est, probablement, l'un des concepts les plus étonnants et contre-intuitifs de toute la physique. Tout commence lorsque trois physiciens, Einstein, Podolsky et Rosen (EPR) publient, en mai 1935, un article visant à remettre en cause l'interprétation usuelle¹ de la mécanique quantique [1]. C'est ainsi que Bohr [2], en tant que l'un des pères fondateurs de l'école de Copenhague, prit part au débat en s'opposant fermement aux idées avancées par Einstein. Il s'ensuivit de longs échanges entre les deux physiciens de renom, chacun d'entre eux défendant son point de vue. À l'inverse de Bohr, Einstein tente de réfuter l'interprétation de Copenhague de la mécanique quantique allant à l'encontre de la vision intuitive du réalisme local. Bien que riche d'un point de vue historique, philosophique et physique, le débat entre Bohr et Einstein est d'ordre épistémologique et n'attire, à l'époque, pas grande attention. L'une des raisons de ce désintérêt est la suivante : l'équation de Schrödinger a été postulée en 1926, marquant le point de départ de la mécanique quantique. Cette dernière mène les physiciens à d'innombrables résultats théoriques et expérimentaux durant le courant du XX^e siècle. Ceux-ci n'ont guère trouvé judicieux de s'intéresser au débat philosophique entre Bohr et Einstein qui s'est poursuivi jusqu'à la mort des deux protagonistes.

Ce n'est qu'en 1964 que Bell publie un article dans lequel il présente une certaine inégalité que doit impérativement respecter la théorie défendue par Einstein aussi appelée *théorie locale à variables cachées* sans quoi, l'interprétation de Copenhague prônée par Bohr sortirait vainqueur du débat [3].

L'article de Bell est d'une importance particulière étant donné qu'il permet d'amener le débat Bohr-Einstein sur la scène expérimentale, débat qui, jusqu'en 1964, était de nature épistémologique. Quelques années plus tard, en 1981, Aspect *et al.* effectuent une expérience impliquant des paires de photons intriqués présentant des corrélations telles que les inégalités de Bell furent violées [4]. L'expérience d'Aspect mit à mal le réalisme local prôné par Einstein 46 ans auparavant. De ces résultats expérimentaux, il s'ensuit que certains systèmes physiques peuvent présenter des degrés de corrélation étonnants, à l'encontre d'une théorie locale à variables cachées, à l'encontre de notre conception intuitive plus classique.

En fin visionnaire, Feynmann a discuté entre autres, en 1982, de ces systèmes intriqués présentant des particularités étonnantes de violation des inégalités de Bell en publiant ce qui constitue, sans doute, le premier article dédié à la théorie quantique de l'information (Quantum Information Theory QIT, en anglais) [5]. Depuis lors et jusqu'à ce jour, le nombre d'articles contribuant à la théorie quantique de l'information ne cesse d'augmenter et la notion d'intrication quantique y joue un rôle crucial. Elle est vue comme une ressource primordiale devant permettre aux ordinateurs quantiques de surclasser nettement les ordinateurs classiques.

Un système physique S constitué d'un certain nombre de parties S_1, S_2, \dots, S_N ($N \in \mathbb{N}_0$)

1. dite de Copenhague

est dans un état intriqué si l'état global $|\Psi\rangle$ ne peut pas s'écrire sous la forme factorisée

$$|\Psi\rangle = |\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle \otimes \cdots \otimes |\phi_N\rangle.$$

Indépendamment de la notion d'intrication quantique, il existe également le concept d'*indiscernabilité*. Par définition, deux particules sont *identiques* si elles sont de même nature, c'est-à-dire que leurs caractéristiques intrinsèques telles que leur masse, charge électrique, spin, entre autres, sont identiques. Ces deux particules sont, en plus de cela, désignées d'*indiscernables* si elles sont identiques et que leur fonction d'onde spatiale est susceptible de se superposer. À l'inverse, deux particules sont qualifiées de *discernables* si elles préservent leur *individualité* i.e, si l'on peut attribuer à chacune d'elles une numérotation physique (appelée label, par la suite) [6]. En d'autres termes, des particules discernables sont soit de nature différente, soit de même nature mais dont les fonctions d'onde spatiales ne se recouvrent pas² (ex. : un système constitué d'un électron et d'un proton, un ensemble d'atomes disposés sur des sites distincts, etc). Pour un système constitué de particules indiscernables, le *postulat de symétrisation* stipule que parmi tous les états l'espace de Hilbert associé, seuls ceux qui sont entièrement symétriques et ceux qui sont entièrement antisymétriques vis-à-vis de l'échange de deux particules sont susceptibles de décrire une situation physique.

Sur base de la définition usuelle de l'intrication et à cause du postulat de symétrisation, hormis le cas particulier de N bosons occupant le même état, tous les états décrivant des systèmes de plusieurs particules indiscernables seraient intriqués ce qui est de nature à susciter quelques interrogations. Ce n'est que depuis peu que la problématique de l'intrication des systèmes indiscernables commence à faire l'objet d'études plus poussées. Ce mémoire vise à faire le point sur les dernières avancées [7, 8].

Le premier chapitre de ce mémoire est entièrement consacré à la présentation détaillée de la problématique de l'*intrication* ainsi qu'à de la problématique de l'*indiscernabilité*. Dans le deuxième chapitre, pour des systèmes bipartites, nous présenterons la notion d'*ensemble complet de propriétés*, notion qui constitue la pierre angulaire de la nouvelle approche de l'intrication présentée par Ghirardi *et al.* dans une série d'articles publiés au début des années 2000 [7, 8]. Suite à cela, nous tenterons de nous approprier la nouvelle définition de l'intrication pour des systèmes de deux particules et de l'explicitier au travers de simples exemples de théorie quantique de l'information faisant intervenir des *qubits*. Enfin, nous dresserons quelques critères d'intrication tant pour les systèmes de deux particules discernables qu'indiscernables (fermions et bosons). Nous proposerons également nos propres démonstrations à ces critères de séparabilité qui, pour certains, ne sont pas démontrés dans la littérature et pour d'autres, utilisent le formalisme de la seconde quantification qu'il est possible d'éviter.

Pour rappel, un *qubit* est une entité physique décrite par un vecteur ket $|\psi\rangle$ pouvant être dans deux états orthogonaux $|0\rangle$, $|1\rangle$ ou n'importe quelle combinaison linéaire de ces deux états. Dit autrement, $|\psi\rangle$ peut s'écrire comme

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle, \quad \text{avec } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

À titre d'exemple, une particule de spin 1/2 avec laquelle on travaille dans la base \mathcal{B} des états propres communs aux opérateurs³ \hat{S}^2 et \hat{S}_z définie comme $\mathcal{B} = \{|+\rangle, |-\rangle\}$ constitue

2. dit autrement, deux fonctions d'onde spatiales ne se recouvrent pas si elles sont toutes deux à support disjoint.

3. \hat{S}_z correspond à la composante selon une certaine direction \mathbf{e}_z de l'opérateur de moment cinétique de spin $\hat{\mathbf{S}}$ et \hat{S}^2 désigne la norme au carré de $\hat{\mathbf{S}}$.

un qubit. Dans ce cas précis, on définit

$$\begin{aligned} |0\rangle &\equiv |+\rangle \text{ et} \\ |1\rangle &\equiv |-\rangle . \end{aligned}$$

De façon plus générale, un *qudit* est un système physique pouvant être dans d états orthonormés $|0\rangle, |1\rangle, \dots, |d-1\rangle$ ou n'importe quelle combinaison linéaire de ces états.

Bien qu'en plein essor, les articles scientifiques dévoués à l'intrication des systèmes indiscernables sont restés restreints aux systèmes de deux particules. Rares sont les articles traitant des systèmes constitués d'un nombre quelconque de parties. Dans le troisième chapitre de ce mémoire, nous tenterons de généraliser les concepts du second chapitre aux systèmes plus délicats de trois particules et plus et nous tenterons de dresser des premiers critères d'intrication pour de tels systèmes.

Chapitre 1

L'intrication quantique : approche standard

“Quantum mechanics deals with a range of phenomena which is [...] outside the experience of ordinary humans for which evolution simply didn't provide you the means to visualize it.”

L. SUSSKIND [9]

La mécanique classique non relativiste est une théorie mettant en équations des phénomènes propres à la perception humaine, phénomènes faisant intervenir des corps dont la vitesse est faible par rapport à la vitesse de la lumière et possédant, en règle générale, des propriétés macroscopiques. Dans ce cadre, la description complète d'une situation donnée consiste en la détermination du vecteur position et impulsion de chacune des particules constitutives du système étudié à tout instant. Il est alors toujours possible de distinguer les constituants d'un système même si les particules possèdent les mêmes propriétés intrinsèques (masse, charge, etc). Il suffit pour ce faire de suivre la trajectoire de chacune des particules considérées.

Inversement, dans le cadre de la mécanique quantique, la notion de trajectoire est dénuée de sens et les particules deviennent décrites par des fonctions d'onde ne permettant que de calculer des probabilités de présence. Le concept même de trajectoire étant mis à mal par l'interprétation usuelle de la théorie quantique, il en résulte que la notion d'*indiscernabilité* sera importante et que l'étude d'un système quantique donné devra être différente selon la discernabilité des particules en jeu.

À la section 1.1 de ce premier chapitre, nous présenterons la définition standard de l'*intrication quantique* avant de dresser deux exemples conceptuellement différents de systèmes intriqués (sects. 1.1.1 - 1.1.2) en mettant l'accent sur l'interprétation physique des calculs théoriques réalisés. Comme nous le verrons, les prédictions théoriques sont, pour l'un de ces exemples, parfaitement explicables à l'aide de notre conception intuitive du réalisme local et pour l'autre, aussi contre-intuitives qu'étonnantes.

Ensuite, nous discuterons de la problématique de l'*indiscernabilité* (sect. 1.2). Nous y aborderons notamment les concepts d'*opérateurs de permutation*, de *postulat de symétrisation* (sect. 1.2.1) ainsi que des propriétés d'opérateurs particuliers appelés *symétriseur* et *antisymétriseur* (sect. 1.2.2). Ces propriétés s'avéreront utiles par la suite.

Finalement, nous nous intéresserons à la notion d'*intrication* lorsque celle-ci est confrontée à la problématique de l'*indiscernabilité* et nous verrons bien vite que ces deux concepts

soulèvent de nombreuses interrogations.

1.1 L'intrication quantique : définition

Considérons un système physique constitué de N particules d'espace des états à un corps \mathcal{H}_i , $i \in \{1, 2, \dots, N\}$. L'espace des états associé au système global¹ est défini comme étant le produit tensoriel de chacun des espaces \mathcal{H}_i de la façon suivante

$$\mathcal{H} = \bigotimes_{i=1}^N \mathcal{H}_i. \quad (1.1.1)$$

Parmi tous les états physiques de l'espace produit \mathcal{H} susceptibles de décrire le système composite, certains peuvent s'écrire sous la forme particulière d'un produit tensoriel de N états $|\phi_i\rangle \in \mathcal{H}_i$. Ils sont qualifiés de *factorisés* ou plus couramment, *séparés*. À l'inverse, les états ne pouvant pas s'écrire sous cette forme particulière sont appelés états *intriqués*. Dans le cas d'un système physique de deux particules, disons un électron et un proton, si l'état $|\Psi\rangle$ est séparé alors, il existe deux vecteurs kets $|\phi\rangle$ et $|\chi\rangle$ tels que $|\Psi\rangle = |\phi\rangle \otimes |\chi\rangle$. Il est courant de faire face à la notation $|\Psi\rangle = |\phi^{(1)}\rangle \otimes |\chi^{(2)}\rangle$ dans la littérature. Physiquement, cela signifie que la particule possédant le label (1), par exemple l'électron, est dans l'état $|\phi\rangle$ tandis que la particule labellisée par (2) i.e. le proton, est dans l'état $|\chi\rangle$. Nous aurions très bien pu labelliser les particules autrement. Dans ce cas précis, l'état du système serait alors $|\Psi\rangle = |\chi^{(1)}\rangle \otimes |\phi^{(2)}\rangle$ ou encore $|\Psi\rangle = |\phi^{(2)}\rangle \otimes |\chi^{(1)}\rangle$, avec (1) désignant le proton et (2), l'électron. Attribuer des labels est purement arbitraire et ne change strictement rien aux prédictions de mesure sur le système physique. Le choix a été fait dans ce mémoire de ne pas écrire explicitement les labels lorsque l'état d'un système est de la forme $|\Psi\rangle = |\phi_1^{(1)}\rangle \otimes |\phi_1^{(2)}\rangle \otimes \dots \otimes |\phi_1^{(N)}\rangle$. Ainsi, la notation $|\Psi\rangle = |\phi\rangle \otimes |\chi\rangle$ signifiera toujours que la particule labellisée par (1) est dans l'état $|\phi\rangle$ alors que la particule (2) est dans l'état $|\chi\rangle$.

En conclusion, nous avons la définition standard de l'intrication telle que présentée dans la plupart des ouvrages de référence consacrés à la mécanique quantique [10–13]. Comme nous le verrons, cette définition est motivée par des arguments physiques tout à fait fondés dans le contexte de systèmes de particules discernables.

Définition 1.1 (Séparabilité des états purs). Un système S est *séparé* s'il existe $|\phi_1\rangle \in \mathcal{H}_1$, $|\phi_2\rangle \in \mathcal{H}_2, \dots, |\phi_N\rangle \in \mathcal{H}_N$ tels que

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \bigotimes_{i=1}^N |\phi_i\rangle \\ &\equiv |\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N\rangle. \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

Dans le cas contraire, le système est *intriqué*.

1.1.1 Exemple de deux qubits

Pour illustrer les différentes notions définies à la section précédente et dans le but d'amorcer la suite de l'exposé consacrée à l'*indiscernabilité*, envisageons un système de deux qubits

1. appelé système composite, par la suite.

discernables. Au travers de cet exemple, nous nous intéressons aux corrélations et leur interprétation physique entre les résultats de mesure de spin des entités considérées lorsque le système composite est décrit par l'état intriqué

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+, -\rangle - |-, +\rangle \right), \quad (1.1.3)$$

initialement. Comme notre étude consiste à déterminer le spin de l'un des deux qubits selon une direction quelconque $\hat{\mathbf{n}}_{\theta,\varphi}$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi[$, définissons l'axe de quantification comme étant la droite de vecteur directeur $\hat{\mathbf{n}}_{\theta,\varphi}$.

De plus, notons \mathcal{H}_1 , l'espace des états du premier qubit et \mathcal{H}_2 , celui du second, et définissons la base $\mathcal{B}_1 = \{|+\rangle, |-\rangle\}$ des états propres communs aux opérateurs de moment cinétique de spin \hat{S}_1^2 et $\hat{S}_{1,z}$. De façon analogue, nous pouvons munir l'espace \mathcal{H}_2 d'une base $\mathcal{B}_2 = \{|+\rangle, |-\rangle\}$ ainsi que des opérateurs \hat{S}_2^2 et $\hat{S}_{2,z}$. Dans la base canonique de \mathbb{R}^3 , l'opérateur de moment cinétique de spin du premier qubit est

$$\begin{aligned} \hat{S}_1 &= \hat{S}_x \mathbf{e}_x + \hat{S}_y \mathbf{e}_y + \hat{S}_z \mathbf{e}_z \\ &= \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_x \mathbf{e}_x + \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_y \mathbf{e}_y + \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_z \mathbf{e}_z, \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

avec $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y$ et $\hat{\sigma}_z$, les opérateurs dont la représentation matricielle dans la base \mathcal{B}_1 ou \mathcal{B}_2 correspond aux matrices de Pauli. Remarquons que, puisque les deux qubits sont de même spin, $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ et l'image du vecteur $|+\rangle$ ou $|-\rangle$ par l'observable \hat{S}_1 est la même que pour l'observable \hat{S}_2 . Les opérateurs \hat{S}_1 et \hat{S}_2 sont donc, par définition, égaux. Pour alléger les notations, posons $\hat{S}_1 = \hat{S}_2 \equiv \hat{S}$. La projection de cet opérateur sur le vecteur unitaire $\hat{\mathbf{n}}_{\theta,\varphi}$ donne

$$\begin{aligned} \hat{S}_{\theta,\varphi} &= \hat{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\theta,\varphi} \\ &= \frac{\hbar}{2} (\sin \theta \cos \varphi \hat{\sigma}_x + \sin \theta \sin \varphi \hat{\sigma}_y + \cos \theta \hat{\sigma}_z). \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

Par conséquent, la représentation matricielle de $\hat{S}_{\theta,\varphi}$ dans la base des états de spin s'écrit

$$S_{\theta,\varphi} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \cos \varphi - i \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi + i \sin \theta \sin \varphi & -\cos \theta \end{pmatrix}. \quad (1.1.6)$$

On montre alors facilement que les différents résultats de mesure du moment cinétique de l'un des deux qubits le long de l'axe de quantification sont $+\hbar/2$ et $-\hbar/2$ (valeurs propres non dégénérées) et que des états propres normés associés sont donnés par

$$|+\theta,\varphi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |+\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |-\rangle \quad (1.1.7)$$

$$|-\theta,\varphi\rangle = -e^{-i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |+\rangle + \cos \frac{\theta}{2} |-\rangle, \quad (1.1.8)$$

respectivement.

Ces résultats préliminaires étant introduits, nous sommes en mesure de déterminer la probabilité $\mathbb{P}_1(+\hbar/2)$ de mesurer le premier qubit dans l'état de spin up². On a,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_1\left(+\frac{\hbar}{2}\right) &= |\langle +_{\theta,\varphi}, +|\Psi\rangle|^2 + |\langle +_{\theta,\varphi}, -|\Psi\rangle|^2 \\ &= \left|-\frac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{2}}\sin\frac{\theta}{2}\right|^2 + \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\theta}{2}\right|^2 \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}\tag{1.1.9}$$

Supposons à présent avoir mesuré le premier qubit dans l'état de spin up. Le postulat de réduction du paquet d'onde stipule que l'état $|\Psi\rangle$ est projeté sur le sous-espace propre $\ker(\hat{S}_{\theta,\varphi}^{(1)} \otimes \hat{\mathbb{I}}^{(2)} - \hbar/2)$ de l'opérateur prolongé $\hat{S}_{\theta,\varphi}^{(1)} \otimes \hat{\mathbb{I}}^{(2)}$ relatif à la valeur propre doublement dégénérée $+\hbar/2$. En définissant le projecteur $\hat{P}_{\hbar/2} = |+\theta,\varphi, +\rangle\langle +\theta,\varphi, +| + |+\theta,\varphi, -\rangle\langle +\theta,\varphi, -|$ sur $\ker(\hat{S}_{\theta,\varphi}^{(1)} \otimes \hat{\mathbb{I}}^{(2)} - \hbar/2)$, on obtient

$$\begin{aligned}|\Psi'\rangle &= \frac{\hat{P}_{\hbar/2}|\Psi\rangle}{\sqrt{\mathbb{P}_1(+\frac{\hbar}{2})}} \\ &= -e^{-i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|+\theta,\varphi, +\rangle + \cos\frac{\theta}{2}|+\theta,\varphi, -\rangle \\ &= |+\theta,\varphi, -\theta,\varphi\rangle.\end{aligned}\tag{1.1.10}$$

Immédiatement après avoir mesuré la valeur $+\hbar/2$, l'état $|\Psi\rangle$ du système composite devient $|\Psi'\rangle$ et, dans cet état, une mesure du moment cinétique de spin pour le second qubit dans la même direction $\hat{n}_{\theta,\varphi}$ rend le résultat $-\hbar/2$ avec une probabilité identiquement égale à un. En effet,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_2\left(-\frac{\hbar}{2}\right) &= |\langle +, -_{\theta,\varphi}|\Psi'\rangle|^2 + |\langle -, -_{\theta,\varphi}|\Psi'\rangle|^2 \\ &= \left|\cos\frac{\theta}{2}\right|^2 + \left|e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}\right|^2 \\ &= 1.\end{aligned}\tag{1.1.11}$$

Le fait d'avoir procédé à une mesure du spin du premier qubit a pour conséquence de sceller les résultats de mesure du second. L'intrication entraîne des corrélations entre les différents résultats possibles du moment cinétique de spin. Les tableaux ci-après récapitulent les différentes probabilités de mesures successives du spin des deux qubits. Si l'état initial du système était séparé alors, les résultats de mesure seraient décorrélés.

2. i.e d'obtenir $+\hbar/2$ comme résultat de mesure de la composante selon la direction $\hat{n}_{\theta,\varphi}$ du moment cinétique de spin.

(a) Initialement		
	Qubit $n^{\circ}1$	Qubit $n^{\circ}2$
$\mathbb{P} (+\frac{\hbar}{2})$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\mathbb{P} (-\frac{\hbar}{2})$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

(b) Après une mesure du spin du premier qubit		
	Qubit $n^{\circ}1$	Qubit $n^{\circ}2$
$\mathbb{P} (+\frac{\hbar}{2})$	1	0
$\mathbb{P} (-\frac{\hbar}{2})$	0	1

TABLE 1.1 – Tableaux comparatifs des différentes probabilités de mesure possibles pour le moment cinétique de spin de chacun des qubits selon $\hat{\mathbf{n}}_{\theta,\varphi}$ (1.1a) initialement, lorsque l'état du système est $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+, -\rangle - |-, +\rangle)$ et (1.1b) immédiatement après avoir mesuré et obtenu $+\hbar/2$ comme valeur du spin du premier qubit.

Terminons cet exemple en déterminant le coefficient de corrélation r_{Ψ} entre les deux spins lorsque le système est initialement préparé dans l'état intriqué $|\Psi\rangle$. On a,

$$\begin{aligned}
r_{\Psi} &= \frac{\text{cov}_{\Psi}(\hat{S}_{\theta,\varphi}^{(1)}, \hat{S}_{\theta,\varphi}^{(2)})}{\sqrt{\text{Var}_{\Psi}(\hat{S}_{\theta,\varphi}^{(1)})} \sqrt{\text{Var}_{\Psi}(\hat{S}_{\theta,\varphi}^{(2)})}} \\
&= \frac{\langle \hat{S}_{\theta,\varphi}^{(1)} \otimes \hat{S}_{\theta,\varphi}^{(2)} \rangle_{\Psi} - \langle \hat{S}_{\theta,\varphi}^{(1)} \rangle_{\Psi} \langle \hat{S}_{\theta,\varphi}^{(2)} \rangle_{\Psi}}{\sqrt{\text{Var}_{\Psi}(\hat{S}_{\theta,\varphi}^{(1)})} \sqrt{\text{Var}_{\Psi}(\hat{S}_{\theta,\varphi}^{(2)})}}.
\end{aligned} \tag{1.1.12}$$

Il est évident que $\langle \hat{S}_{\theta,\varphi}^{(1)} \rangle_{\Psi} = \langle \hat{S}_{\theta,\varphi}^{(2)} \rangle_{\Psi} = 0$ puisque les résultats de mesure possibles du spin du qubit $n^{\circ}1$ ou $n^{\circ}2$ sont opposés et équiprobables. De même, il est direct de montrer que $\text{Var}_{\Psi}(\hat{S}_{\theta,\varphi}^{(1)}) = \text{Var}_{\Psi}(\hat{S}_{\theta,\varphi}^{(2)}) = \hbar^2/4$. Enfin, $\langle \hat{S}_{\theta,\varphi}^{(1)} \otimes \hat{S}_{\theta,\varphi}^{(2)} \rangle_{\Psi} = -\hbar^2/4$. D'où,

$$r_{\Psi} = -1. \tag{1.1.13}$$

Dans la situation étudiée, l'intrication est à l'origine d'une anticorrélation forte entre les résultats de mesure. Il est important de noter que ces corrélations sont parfaitement explicables d'un point de vue classique. Si l'on devait donner une analogie, elle serait la suivante [13] : lorsqu'au fond d'une boîte est peint le chiffre -1 , qu'au fond d'une seconde boîte est inscrit le chiffre $+1$ et que les boîtes sont séparées par une certaine distance d alors, l'ouverture d'une boîte permet instantanément de connaître le contenu de la seconde boîte située en d . Mathématiquement, il est possible d'attribuer une variable aléatoire X à la première boîte. Une réalisation de cette variable donne la valeur $+1$ ou -1 avec une probabilité $1/2$. Quant à la seconde boîte, nous pouvons également décrire son contenu par une seconde variable aléatoire $Y = -X$. Il est alors facile de montrer que le coefficient de corrélation entre X et Y est égal à -1 .

L'exemple des deux qubits discuté dans les paragraphes précédents est parfaitement analogue. Nous savons avec une probabilité égale à un qu'une mesure du spin de l'un des deux qubits donne $+\hbar/2$. Aussi, avec certitude, une mesure du spin de l'un d'entre eux donne $-\hbar/2$ comme résultat. Par conséquent, dès lors qu'une mesure du spin du premier qubit est effectuée, nous connaissons automatiquement la valeur du spin du second et vice-versa.

Pour mettre en avant des corrélations surprenantes d'origine purement quantique, intéressons-nous à une mesure successive du moment cinétique de spin du premier qubit selon la direction $\hat{\mathbf{n}}_\alpha = \sin \alpha \mathbf{e}_x + \cos \alpha \mathbf{e}_z$, $\alpha \in [0, \pi]$ et du second qubit selon $\hat{\mathbf{n}}_\beta = \sin \beta \mathbf{e}_x + \cos \beta \mathbf{e}_z$, $\beta \in [0, \pi]$. On suppose également que l'état du système reste décrit par l'état (1.1.3). De cette façon, le coefficient de corrélation (1.1.12) dépend explicitement des angles α et β et est donné par

$$r_\Psi(\alpha, \beta) = -\cos(\alpha - \beta). \quad (1.1.14)$$

Introduisons alors deux nouvelles directions arbitraires de mesure : $\hat{\mathbf{n}}_{\alpha'} = \sin \alpha' \mathbf{e}_x + \cos \alpha' \mathbf{e}_z$, $\alpha' \in [0, \pi]$ et $\hat{\mathbf{n}}_{\beta'} = \sin \beta' \mathbf{e}_x + \cos \beta' \mathbf{e}_z$, $\beta' \in [0, \pi]$. Dans ce cas, en choisissant α, α', β et β' comme suit

$$\alpha - \beta = \frac{\pi}{4} \quad (1.1.15)$$

$$\alpha - \beta' = -\frac{\pi}{4} \quad (1.1.16)$$

$$\alpha' - \beta' = \frac{\pi}{4} \quad (1.1.17)$$

alors,

$$\alpha' - \beta = \frac{3\pi}{4} \quad (1.1.18)$$

et l'on aboutit à une violation des inégalités de Bell [3, 14]

$$\begin{aligned} |r_\Psi(\alpha, \beta) - r_\Psi(\alpha', \beta) + r_\Psi(\alpha, \beta') + r_\Psi(\alpha', \beta')| &= 2\sqrt{2} \\ &> 2. \end{aligned} \quad (1.1.19)$$

Dans l'exemple précédent impliquant deux qubits pour lesquels on s'intéresse à une mesure successive de spin selon la même direction $\hat{\mathbf{n}}_{\theta, \varphi}$, les corrélations entre résultats de mesure peuvent être expliqués dans le contexte d'une théorie locale à variables cachées. Pour reprendre l'analogie des deux boîtes, un observateur extérieur pourrait observer les boîtes dans lesquelles sont rangés les chiffres -1 et $+1$. Il serait alors en possession de toute l'information nécessaire afin de prédire de façon déterministe les résultats de mesure. En d'autres termes, il serait en possession d'un paramètre λ lui permettant de déterminer le contenu de chaque boîte avec certitude. Bien entendu, lorsque l'on mesure successivement le moment cinétique de spin de deux qubits indiscernables, il n'est plus possible d'avoir accès à ce genre d'information compte-tenu de l'indiscernabilité des particules. Le paramètre λ dont la connaissance nous assure des prédictions purement déterministes est, pour cette raison, appelé *variable cachée*.

Cependant, en considérant des angles de mesure particuliers, nous sommes parfois amenés à des corrélations entre résultats de mesure violant les inégalités de Bell. Toute tentative d'explication de ces corrélations particulières au moyen d'une théorie locale à variables cachées est alors vaine.

1.1.2 Exemple de trois qubits

À présent, considérons un système de trois qubits discernables. L'espace des états de chacun des qubits est $\mathcal{H}_1 \simeq \mathbb{C}^2$, $\mathcal{H}_2 \simeq \mathbb{C}^2$ et $\mathcal{H}_3 \simeq \mathbb{C}^2$ si bien que l'espace produit tensoriel est $\mathcal{H} \simeq \mathbb{C}^8$. À l'instant initial, l'état $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ est décrit par

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+, +, +\rangle - |-, -, -\rangle \right) \quad (1.1.20)$$

et est nommé état GHZ en l'honneur des physiciens Greenberger, Horne et Zeilinger [15, 16] qui furent les premiers à étudier les particularités de cet état. Intéressons-nous à une mesure successive du spin de chacun des trois qubits dans le plan formé par les vecteurs \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_y qui, avec \mathbf{e}_z constituent la base canonique de \mathbb{R}^3 .

À cet effet, plutôt que de considérer les observables $\hat{S}_x^{(i)}$, $\hat{S}_y^{(i)}$ et $\hat{S}_z^{(i)}$, où $i \in \{1, 2, 3\}$ désigne le label associé à un qubit donné, nous travaillerons avec les observables $\hat{\sigma}_j^{(i)} = \frac{2}{\hbar} \hat{S}_j^{(i)}$, avec $j = x, y$ ou z , la composante selon une des trois directions spatiales de l'opérateur $\hat{\sigma}^{(i)} = \frac{2}{\hbar} \hat{\mathbf{S}}^{(i)}$. Grâce aux calculs présentés à l'exemple précédent (sect. 1.1.1), nous pouvons affirmer que les résultats de mesure pour l'observable $\hat{\sigma}_j^{(i)}$ sont soit $+1$, soit -1 . Le produit de trois résultats de mesure ne peut ainsi valoir que $+1$ ou -1 .

Notons à présent que

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_x^{(1)} \hat{\sigma}_y^{(2)} \hat{\sigma}_y^{(3)} |\Psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{\sigma}_x^{(1)} |+\rangle \otimes \hat{\sigma}_y^{(2)} |+\rangle \otimes \hat{\sigma}_y^{(3)} |+\rangle - \hat{\sigma}_x^{(1)} |-\rangle \otimes \hat{\sigma}_y^{(2)} |-\rangle \otimes \hat{\sigma}_y^{(3)} |-\rangle \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-|-, -, -\rangle + |+, +, +\rangle \right) \\ &= |\Psi\rangle, \end{aligned} \quad (1.1.21)$$

que

$$\hat{\sigma}_y^{(1)} \hat{\sigma}_x^{(2)} \hat{\sigma}_y^{(3)} |\Psi\rangle = |\Psi\rangle, \quad (1.1.22)$$

et que

$$\hat{\sigma}_y^{(1)} \hat{\sigma}_y^{(2)} \hat{\sigma}_x^{(3)} |\Psi\rangle = |\Psi\rangle. \quad (1.1.23)$$

Cependant,

$$\hat{\sigma}_x^{(1)} \hat{\sigma}_x^{(2)} \hat{\sigma}_x^{(3)} |\Psi\rangle = -|\Psi\rangle. \quad (1.1.24)$$

Ainsi, puisque $|\Psi\rangle$ est état propre des observables $\hat{\sigma}_x^{(1)} \hat{\sigma}_y^{(2)} \hat{\sigma}_y^{(3)}$, $\hat{\sigma}_y^{(1)} \hat{\sigma}_x^{(2)} \hat{\sigma}_y^{(3)}$ et $\hat{\sigma}_y^{(1)} \hat{\sigma}_y^{(2)} \hat{\sigma}_x^{(3)}$ relativement à la valeur propre $+1$, le produit des résultats de mesure de deux des trois spins selon la direction \mathbf{e}_y et d'un spin selon la direction \mathbf{e}_x rend toujours la valeur $+1$ avec une probabilité égale à un. En revanche, le produit des résultats de mesure des trois spin selon la direction \mathbf{e}_x donne toujours -1 .

Si, à l'aide d'une théorie locale à variables cachées, l'on tente d'expliquer les corrélations discutées ci-avant alors, les différents résultats de mesure des observables $\hat{\sigma}_j^{(i)}$ devraient être contenus dans des fonctions $\sigma_j^{(i)}(\lambda)$ ne pouvant être égales qu'à 1 ou -1 et dont la valeur dépend d'un certain paramètre λ . La théorie locale prédit, entre autres, le résultat suivant

$$\begin{aligned} &\left(\sigma_x^{(1)}(\lambda) \sigma_y^{(2)}(\lambda) \sigma_y^{(3)}(\lambda) \right) \left(\sigma_y^{(1)}(\lambda) \sigma_x^{(2)}(\lambda) \sigma_y^{(3)}(\lambda) \right) \left(\sigma_y^{(1)}(\lambda) \sigma_y^{(2)}(\lambda) \sigma_x^{(3)}(\lambda) \right) \\ &= \sigma_x^{(1)}(\lambda) \sigma_x^{(2)}(\lambda) \sigma_x^{(3)}(\lambda) (\sigma_y^{(1)}(\lambda))^2 (\sigma_y^{(2)}(\lambda))^2 (\sigma_y^{(3)}(\lambda))^2 \\ &= \sigma_x^{(1)}(\lambda) \sigma_x^{(2)}(\lambda) \sigma_x^{(3)}(\lambda). \end{aligned} \quad (1.1.25)$$

Or, d'après la mécanique quantique

$$\underbrace{\left(\hat{\sigma}_x^{(1)}\hat{\sigma}_y^{(2)}\hat{\sigma}_y^{(3)}\right)\left(\hat{\sigma}_y^{(1)}\hat{\sigma}_x^{(2)}\hat{\sigma}_y^{(3)}\right)\left(\hat{\sigma}_y^{(1)}\hat{\sigma}_y^{(2)}\hat{\sigma}_x^{(3)}\right)}_{=|\Psi\rangle}|\Psi\rangle \neq \underbrace{\hat{\sigma}_x^{(1)}\hat{\sigma}_x^{(2)}\hat{\sigma}_x^{(3)}}_{=-|\Psi\rangle}|\Psi\rangle. \quad (1.1.26)$$

Les prédictions de la théorie locale à variables cachées sont parfaitement contradictoires avec celles de la mécanique quantique. En conséquence, une telle théorie locale ne peut aucunement interpréter les corrélations entre résultats de mesure.

1.2 L'intrication quantique vis-à-vis de l'indiscernabilité

Contrairement à la mécanique classique, toutes les particules en mécanique quantique ne sont pas discernables. Pour illustrer cela, supposons qu'initialement deux qubits indiscernables, chacun décrit par un vecteur d'état $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$ sur le même espace \mathcal{H}_1 , forment deux systèmes distincts et fermés. À un instant ultérieur, nous décidons de faire interagir ces entités. Quantiquement, en désignant $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, une valeur propre de l'opérateur position $\hat{\mathbf{r}}$, la fonction d'onde du premier qubit $\psi_1(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | \psi_1 \rangle$ et celle du second $\psi_2(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | \psi_2 \rangle$ vont se superposer en raison de leur interaction ; il ne sera donc plus possible de distinguer les particules lors d'une mesure expérimentale [14, 17, 18].

Ces complications quant à l'indiscernabilité des particules identiques réside dans le fait que le concept de trajectoire n'est plus défini en mécanique quantique. L'attribution de labels aux particules perd son sens physique, mais restera néanmoins toujours utile d'un point de vue mathématique.

Les prochaines sections visent à présenter la problématique de l'*indiscernabilité* au travers de notions telles que les *opérateurs de permutation*, le *postulat de symétrisation* et les opérateurs de *symétrisation* et *antisymétrisation*. Le but de ces sous-sections est de fixer les notations et conventions qui seront alors utilisées aux prochains chapitres ainsi que d'échafauder la dernière partie de ce chapitre consacrée à la réfutation de la notion usuelle de l'intrication dans le contexte indiscernable.

1.2.1 Opérateur de permutation et postulat de symétrisation

Commençons par traiter le cas particulier de deux particules indiscernables d'espace des états à un corps \mathcal{H}_p ($\dim \mathcal{H}_p = d_p$). L'opérateur de permutation \hat{P}_{21} pour un tel système est défini comme

$$\begin{aligned} \hat{P}_{21} |u_i, u_j\rangle &= |u_i^{(2)}, u_j^{(1)}\rangle \\ &= |u_j, u_i\rangle, \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

où $|u_i, u_j\rangle$ est l'élément d'une base $\mathcal{B} = \{|u_i, u_j\rangle\}_{(i,j) \in \{1,2,\dots,d_p\} \times \{1,2,\dots,d_p\}}$ de l'espace produit $\mathcal{H} = \mathcal{H}_p \otimes \mathcal{H}_p$. De la même façon, nous pouvons définir un second opérateur, \hat{P}_{12} comme étant l'identité. L'opérateur \hat{P}_{21} est hermitique et unitaire. Par conséquent, son spectre est $\text{sp}(\hat{P}_{21}) = \{-1, 1\}$. Les états propres $|\Psi^-\rangle \in \mathcal{H}$ de \hat{P}_{21} relatifs à la valeur propre -1 sont appelés états antisymétriques et définissent l'ensemble $\mathcal{H}^- \subset \mathcal{H}$ des états antisymétriques vis-à-vis de l'échange de deux particules. À l'inverse, les vecteurs $|\Psi^+\rangle \in \mathcal{H}$ vérifiant

$$\hat{P}_{21} |\Psi^+\rangle = |\Psi^+\rangle \quad (1.2.2)$$

sont appelés états symétriques et définissent l'ensemble $\mathcal{H}^+ \subset \mathcal{H}$ des états symétriques vis-à-vis de l'échange de deux particules. Ceci nous permet l'introduction du dernier postulat de la mécanique quantique nommé *postulat de symétrisation* pour des systèmes de deux particules indiscernables.

Postulat 1.2 (Symétrisation : $N = 2$ particules). Soit un système de deux particules identiques d'espace des états \mathcal{H} . Parmi tous les éléments de \mathcal{H} , seuls les vecteurs symétriques et antisymétriques vis-à-vis de l'échange de deux particules sont susceptibles de décrire une situation physique concrète. On appelle bosons, les particules représentées par des états symétriques et fermions, les particules représentés par des états antisymétriques.

À présent, considérons l'espace produit $\mathcal{H} = \mathcal{H}_p \otimes \mathcal{H}_p \otimes \mathcal{H}_p$ associé à un système de trois particules indiscernables et considérons aussi une base \mathcal{B} sur cet espace de Hilbert définie comme $\mathcal{B} = \{ |u_i, u_j, u_k\rangle \}_{(i,j,k) \in \{1,2,\dots,d_p\} \times \{1,2,\dots,d_p\} \times \{1,2,\dots,d_p\}}$. Contrairement à la situation précédente impliquant deux particules, nous avons cette fois-ci non plus deux mais bien six façons de permuer les différentes particules. On définit alors six représentations du groupe symétrique d'ordre trois S_3 (voir app. A) : \hat{P}_{123} , \hat{P}_{231} , \hat{P}_{312} , \hat{P}_{132} , \hat{P}_{321} et \hat{P}_{213} . L'action de ces opérateurs sur un élément $|u_i, u_j, u_k\rangle$ de la base \mathcal{B} est

$$\hat{P}_{abc} |u_i, u_j, u_k\rangle = |u_i^{(a)}, u_j^{(b)}, u_k^{(c)}\rangle, \quad \forall a, b, c \in \{1, 2, 3\}. \quad (1.2.3)$$

Où encore, en utilisant notre convention consistant à omettre les labels, on obtient

$$\hat{P}_{123} |u_i, u_j, u_k\rangle = |u_i, u_j, u_k\rangle \quad (1.2.4)$$

$$\hat{P}_{231} |u_i, u_j, u_k\rangle = |u_k, u_i, u_j\rangle \quad (1.2.5)$$

$$\hat{P}_{312} |u_i, u_j, u_k\rangle = |u_j, u_k, u_i\rangle \quad (1.2.6)$$

$$\hat{P}_{132} |u_i, u_j, u_k\rangle = |u_i, u_k, u_j\rangle \quad (1.2.7)$$

$$\hat{P}_{321} |u_i, u_j, u_k\rangle = |u_k, u_j, u_i\rangle \quad (1.2.8)$$

$$\hat{P}_{213} |u_i, u_j, u_k\rangle = |u_j, u_i, u_k\rangle \quad (1.2.9)$$

Comme souvent en mécanique quantique, il est pertinent de travailler dans une base d'états propres communs à un ensemble d'observables compatibles. Ainsi, lors des exemples de particules de spin 1/2 traités tout au long de ce mémoire, nous avons travaillé dans la base $\{ |+\rangle, |-\rangle \}$ des vecteurs propres communs à \hat{S}^2 , \hat{S}_z , ces derniers formant un ensemble complet d'observables qui commutent (E.C.O.C.).

Malheureusement, les opérateurs de permutation \hat{P}_π , $\pi \in S_3$ ne commutent pas nécessairement entre-eux, S_3 n'étant pas abélien. Ils ne sont donc pas susceptibles de former un E.C.O.C. avec le hamiltonien. Puisqu'il nous est impossible de définir une base de vecteurs propres communs à tous ces opérateurs et au hamiltonien, une nouvelle approche est adoptée. Celle-ci repose sur l'existence d'états $|\Psi^+\rangle$ et $|\Psi^-\rangle$ de \mathcal{H} qui, pour tout élément π du groupe symétrique d'ordre $N > 2$, S_N , satisfont à [14, 19]

$$\hat{P}_\pi |\Psi^+\rangle = |\Psi^+\rangle \quad (1.2.10)$$

$$\hat{P}_\pi |\Psi^-\rangle = \text{sgn}(\pi) |\Psi^-\rangle, \quad (1.2.11)$$

où $\text{sgn}(\pi)$ correspond à la signature de la permutation π .

Les vecteurs vérifiant (1.2.10) (resp. 1.2.11) définissent l'ensemble $\mathcal{H}^+ \subset \mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{H}^- \subset \mathcal{H}$) des états entièrement symétriques (resp. antisymétriques) vis-à-vis de l'échange de deux particules. Le postulat 1.2 peut alors aisément se généraliser aux systèmes composés d'un nombre quelconque de constituants indiscernables.

1.2.2 Symétriseur et antisymétriseur

Afin de symétriser ou d'antisymétriser un état de N particules identiques, il est d'usage de définir deux projecteurs, l'un $\hat{S} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^+$ sur \mathcal{H}^+ , l'autre $\hat{A} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^-$, sur \mathcal{H}^- . Ceux-ci sont appelés *symétriseur* et *antisymétriseur*, respectivement et sont définis de la façon suivante

$$\hat{S} = \frac{1}{N!} \sum_{\pi \in S_N} \hat{P}_\pi \quad (1.2.12)$$

$$\hat{A} = \frac{1}{N!} \sum_{\pi \in S_N} \text{sgn}(\pi) \hat{P}_\pi. \quad (1.2.13)$$

À titre d'illustration, les opérateurs \hat{S} et \hat{A} sont représentés dans les tableaux ci-après pour $N = 2$ (tab. 1.2a) et $N = 3$ particules (tab. 1.2b).

(a) $N = 2$	(b) $N = 3$
$\hat{S} = \frac{1}{2} (\hat{\mathbb{1}} + \hat{P}_{21})$	$\hat{S} = \frac{1}{6} (\hat{\mathbb{1}} + \hat{P}_{231} + \hat{P}_{312} + \hat{P}_{132} + \hat{P}_{321} + \hat{P}_{213})$
$\hat{A} = \frac{1}{2} (\hat{\mathbb{1}} - \hat{P}_{21})$	$\hat{A} = \frac{1}{6} (\hat{\mathbb{1}} + \hat{P}_{231} + \hat{P}_{312} - \hat{P}_{132} - \hat{P}_{321} - \hat{P}_{213})$

TABLE 1.2 – Opérateurs de symétrisation \hat{S} et d'antisymétrisation \hat{A} pour (1.2a) $N = 2$ et (1.2b) $N = 3$ particules.

Les opérateurs \hat{S} et \hat{A} seront fréquemment utilisés dans les chapitres suivants. Pour cette raison, nous énonçons ci-après quelques-unes de leurs propriétés. Pour tout $\pi \in S_N$ [14] et pour tout opérateur linéaire $\hat{T} : \mathcal{H}_i \rightarrow \mathcal{H}_i$,

$$\hat{A}\hat{S} = \hat{S}\hat{A} = 0 \quad (1.2.14)$$

$$\hat{P}_\pi \hat{S} = \hat{S} \hat{P}_\pi = \hat{S} \quad (1.2.15)$$

$$\hat{P}_\pi \hat{A} = \hat{A} \hat{P}_\pi = \text{sgn}(\pi) \hat{A} \quad (1.2.16)$$

$$\hat{P}_\pi^{-1} \hat{T}^{(i)} \hat{P}_\pi = \hat{T}^{(\pi^{-1}(i))} \quad (1.2.17)$$

1.2.3 Difficultés de la notion d'intrication vis-à-vis de la problématique de l'indiscernabilité

Hormis le cas particulier d'un système composite de N bosons chacun occupant le même état $|\phi\rangle$ et dont l'état global est

$$|\Psi\rangle = |\phi, \phi, \dots, \phi\rangle \in \mathcal{H}^+, \quad (1.2.18)$$

tous les états décrivant un système de particules indiscernables sont intriqués au regard de la définition 1.1, compte-tenu du postulat de symétrisation. La problématique de l'intrication et

de l'indiscernabilité semblent incompatibles. Cela nous amène à nous interroger sur la pertinence de la définition standard de l'intrication pour des systèmes de particules indiscernables

Ghirardi *et al.* [7,8] ont alors proposé une nouvelle définition de l'intrication, tant pour les systèmes de particules discernables qu'indiscernables, basée sur l'attribution d'un *ensemble complet de propriétés* (notion à définir) à chacune des parties constituant un système considéré. Notons que la définition usuelle de l'intrication ne pose aucun problème conceptuel dans le cadre discernable. Par conséquent, il est nécessaire que la nouvelle définition proposée par Ghirardi *et al.* soit équivalente à l'ancienne dans ce contexte précis.

Pour clore ce premier chapitre, nous présentons un schéma ci-après (fig. 1.3). Il constitue un *roadmap* à compléter au fur et à mesure que de nouveaux concepts seront abordés aux chapitres suivants.

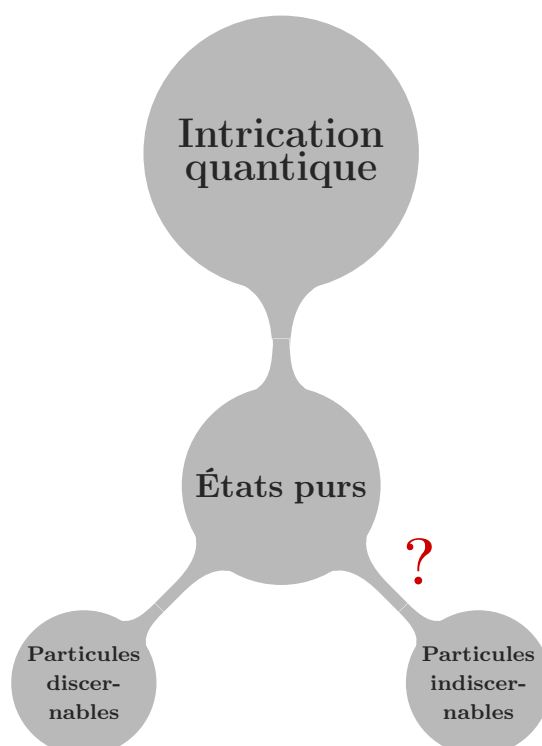


FIGURE 1.3 – Schéma sous forme de *roadmap* à compléter au fil des chapitres. Après avoir défini la notion d'intrication pour deux particules (déf. 1.1) et plus (déf. 1.1), deux exemples de mise en application ont été proposés (sects. 1.1.1, 1.1.2) avant de présenter la problématique de l'indiscernabilité (sect. 1.2). Même si la définition 1.1 est justifiée par des arguments physiques, celle-ci ne semble pas compatible avec les systèmes indiscernables. Les chapitres suivants lèveront le voile sur l'intrication des systèmes indiscernables décrits par un état pur qui, pour l'heure, reste source de mauvaises interprétations.

Chapitre 2

L'intrication quantique : nouvelle approche (cas de 2 particules)

“Quantum theory does not trouble me at all. It is just the way the world works. What [...] drives me [...] is to understand how it got that way. What is the deeper foundation underneath it? Where does it come from? So that we won't see it as something that is unwelcome [...] — it will be something that will make you say, ‘It couldn't have been otherwise.’ We haven't gotten to that stage yet, and until we do, we have not met the challenge that is right there. I continue to say that the quantum is the crack in the armor that covers the secret of existence. To me, it's a marvelous stimulus, hope, and driving force. And yet I am afraid that just the word— ‘hope’— is what does not [...] drive so many of our colleagues in the field. They're content to take the theory for granted, rather than to find out where it comes from. But you would hardly feel the drive to find out where it comes from if you don't feel that the theory is utterly right.”

J. A. WHEELER [20]

Le chapitre précédent a permis d'introduire quelques notions relatives aux systèmes constitués de plusieurs particules discernables ou non. Comme nous l'avons vu, étant donné la forme non factorisée que prennent les états soumis au postulat de symétrisation, la définition usuelle de l'intrication (déf. 1.1) suscite des interrogations dès lors que l'on prend en compte la problématique de l'indiscernabilité.

Dans ce chapitre, il est question de redéfinir le concept d'*intrication* tant pour les systèmes de particules discernables qu'indiscernables suivant l'approche de Ghirardi *et al.* [7, 8].

Nous commencerons par présenter la nouvelle définition de l'*intrication* à la section 2.1. Celle-ci repose sur une nouvelle notion appelée *ensemble complet de propriétés* que nous présenterons intuitivement et puis formellement.

À la section 2.2, après avoir présenté la notion d'*ensemble complet de propriétés* pour les systèmes discernables, notion qui intervient inévitablement dans la nouvelle approche de l'*intrication* considérée dans les références [7, 8], nous discuterons d'un premier exemple d'application (sect. 2.2.1) impliquant deux qubits. L'objectif est double : d'une part, se familiariser

avec les nouvelles notions introduites au début de ce deuxième chapitre et d'autre part, de confronter la nouvelle définition de l'*intrication* avec l'ancienne pour de tels systèmes.

La section 2.2.2 vise à dresser le lien qu'entretiennent nouvelle et ancienne définition de l'intrication cette dernière qui, comme annoncé dans le chapitre précédent, ne présente aucun problème conceptuel tant que l'on s'astreint à travailler avec des systèmes de plusieurs particules discernables.

Ensuite, après avoir étendu le concept d'*ensemble complet de propriétés* aux systèmes composés de deux constituants indiscernables (sect. 2.3), nous l'illustrerons à partir d'un exemple (sect. 2.3.1).

A posteriori, nous aurons tout en main pour dresser les premiers critères de séparabilité des états purs dans le contexte de deux particules indiscernables. Étant donné leurs particularités statistiques, les fermions (sect. 2.3.2) et les bosons (sect. 2.3.3) doivent être étudiés indépendamment. C'est pourquoi, à la section 2.3.2.1, nous commencerons par dresser un premier critère d'*intrication* basé sur le postulat de symétrisation pour les états antisymétriques. Un critère analogue sera également dressé pour les bosons en section 2.3.3.1. Cela étant, nous verrons qu'il existe une décomposition systématique d'états antisymétriques et symétriques appelée *décomposition de Slater* (sect. 2.3.2.2) et *décomposition de Schmidt* (sect. 2.3.3.2), respectivement. De telles décompositions seront à l'origine de nouveaux critères d'*intrication*.

Enfin, nous terminerons ce chapitre en effectuant un bref récapitulatif appuyé par le *road-map* établi depuis le chapitre un (sect. 2.4).

2.1 L'intrication quantique : nouvelle définition

Soit S un système composite constitué de deux parties discernables ou non notées S_1 et S_2 , d'espace des états \mathcal{H}_1 ($\dim \mathcal{H}_1 = d_1$) et \mathcal{H}_2 ($\dim \mathcal{H}_2 = d_2$), respectivement. L'espace des états du système global S est $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.

Définition 2.1 (Séparabilité des états purs [7]). Le système S est *séparé* si S_1 et S_2 possèdent un *ensemble complet de propriétés*. Dans le cas contraire, S est *intriqué*.

La nouvelle définition de l'intrication repose sur le concept d'*ensemble complet de propriétés*, ce dernier devant être défini rigoureusement. Toutefois avant de présenter sa définition formelle, nous tenterons, dans les prochains paragraphes, d'introduire intuitivement, sur base d'un exemple, ce nouveau concept tant pour les systèmes de particules indiscernables que discernables.

L'exemple est le suivant : considérons deux qubits indiscernables, d'espace à un corps \mathcal{H}_p , formant un système composite sur $\mathcal{H} = \mathcal{H}_p \otimes \mathcal{H}_p$ et supposons que l'état décrivant la situation physique étudiée est $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+, -\rangle - |-, +\rangle)$. Théoriquement, la probabilité qu'une mesure du moment cinétique de spin de l'un des deux qubits selon $\hat{n}_{\theta, \varphi}$ donne le résultat $+\hbar/2$ est égale à un (état propre normé associé à $+\hbar/2$: $|+\theta, \varphi\rangle$). Il en va de même pour le résultat $-\hbar/2$ (état propre normé associé : $|-\theta, \varphi\rangle$).

Avant d'aller plus loin, rappelons que, lorsqu'une prédiction théorique sur une grandeur physique est parfaitement déterministe i.e, lorsqu'un résultat de mesure est prédit avec une probabilité égale à un alors, on dit de ce résultat qu'il constitue une *propriété* du système étudié. De la sorte, tout système physique est caractérisé par un certain nombre de propriétés comme la charge, la masse ou encore, le spin de ses constituants.

Pour en revenir à notre exemple, puisque $|+\theta, \varphi\rangle$ (resp. $|-\theta, \varphi\rangle$) est vecteur propre de l'E.C.O.C. $\{\hat{S}^2, \hat{S}_{\theta, \varphi}\}$ relatif à $3\hbar^2/4$ et $+\hbar/2$ (resp. $3\hbar^2/4$ et $-\hbar/2$), respectivement et compte-

tenu de l'état $|\Psi\rangle$, on dit de l'un des deux qubits qu'il possède un *ensemble complet de propriétés* associé à l'état $|+\theta,\varphi\rangle$ ou, formulé autrement, qu'un qubit est caractérisé par les nombres quantiques $s = 1/2$ (spin) et $m_s = +1/2$ (moment magnétique de spin) qui, quoi qu'il adienne, restent constants. L'autre qubit, quant à lui, possède l'ensemble complet de propriétés associé à l'état $|-\theta,\varphi\rangle$. C'est-à-dire qu'il est caractérisé par les nombres quantiques $s = 1/2$ et $m_s = -1/2$. Il est important de noter qu'il n'est pas possible de préciser lequel des deux qubits possède l'ensemble complet de propriétés $\{s = 1/2, m_s = 1/2\}$ et lequel possède l'ensemble $\{s = 1/2, m_s = -1/2\}$ compte-tenu de leur indiscernabilité. L'essence même de la nouvelle approche de la séparabilité des états purs réside dans l'attribution d'un ensemble complet de propriétés à chacun des constituants d'un système composite donné.

Considérons à présent le même exemple à cela près que les deux qubits constituant le système composite sont discernables. Il s'agit là de l'exemple analysé à la section 1.1.1. De façon tout à fait analogue à l'exemple discuté aux paragraphes précédents, la probabilité que l'un des deux qubits occupe l'état $|+\theta,\varphi\rangle$ est strictement égale à l'unité, l'autre étant dans l'état $|-\theta,\varphi\rangle$. Nous pourrions alors éventuellement attribuer l'ensemble complet de propriétés $\{s = 1/2, m_s = +1/2\}$ à l'un des deux qubits et l'ensemble $\{s = 1/2, m_s = -1/2\}$ à l'autre. Toutefois, étant donné que les qubits considérés sont, cette fois-ci, discernables, en plus de pouvoir attribuer à chacun d'eux un ensemble complet de propriétés qui leur serait propre, nous devrions pouvoir spécifier le qubit jouissant de l'ensemble $\{s = 1/2, m_s = +1/2\}$, le second possédant inévitablement l'autre ensemble. Or, le tableau 1.1a de l'exemple 1.1.1 montre clairement que les probabilités de mesure individuelle ne sont pas égales à un. Dès lors, l'ensemble $\{s = 1/2, m_s = +1/2\}$ ne peut aucunement constituer un ensemble complet de propriétés pour l'un des deux qubits. Il en va de même pour le second ensemble. Le système composite S décrit par le vecteur $|\Psi\rangle$ doit alors être intriqué au regard de cette nouvelle approche.

2.2 Application aux systèmes discernables

La définition ci-après introduit rigoureusement la notion d'*ensemble complet de propriétés* sur base d'arguments physiques tels que discutés à la précédente section. Une fois cette définition présentée, nous établirons un exemple concret d'application, le but étant de comparer la nouvelle définition de l'intrication avec la définition standard.

Ici, S désigne un système composite constitué de deux parties discernables notées S_1 et S_2 , d'espace des états \mathcal{H}_1 ($\dim \mathcal{H}_1 = d_1$) et \mathcal{H}_2 ($\dim \mathcal{H}_2 = d_2$), respectivement. L'espace des états du système global S , quant à lui, est $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.

Définition 2.2 (Ensemble complet de propriétés [7]). Soit $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ le vecteur décrivant l'état du système composite S . Le sous-système S_1 possède un *ensemble complet de propriétés* si et seulement s'il existe un projecteur $\hat{P}_\phi^{(1)} = |\phi\rangle\langle\phi| \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$ sur un vecteur ket $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_1$ tel que

$$\langle\Psi|\hat{P}_\phi^{(1)}|\Psi\rangle = 1. \quad (2.2.1)$$

De même, le sous-système S_2 possède un ensemble complet de propriétés si et seulement s'il existe un projecteur $\hat{P}_\chi^{(2)} = |\chi\rangle\langle\chi| \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$ sur un vecteur ket $|\chi\rangle \in \mathcal{H}_2$ tel que

$$\langle\Psi|\hat{P}_\chi^{(2)}|\Psi\rangle = 1. \quad (2.2.2)$$

La notation $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$ (resp. $\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$) est utilisée pour désigner l'ensemble des endomorphismes de \mathcal{H}_1 (resp. \mathcal{H}_2).

Le membre de gauche de la condition (2.2.1) (resp. 2.2.2) correspond à la probabilité $\mathbb{P}_1(\phi)$ (resp. $\mathbb{P}_2(\chi)$) que la particule dotée du label (1) (resp. (2)) soit dans l'état $|\phi\rangle$ (resp. $|\chi\rangle$). En effet, si $\mathcal{B}_2 = \{|v_i\rangle\}_{i \in \{1,2,\dots,d_2\}}$ constitue une base de \mathcal{H}_2 alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_1(\phi) &= \sum_{i=1}^{d_2} |\langle \phi, v_i | \Psi \rangle|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{d_2} \langle \Psi | \phi, v_i \rangle \langle \phi, v_i | \Psi \rangle \\
&= \langle \Psi | \left(\hat{P}_\phi^{(1)} \otimes \sum_{i=1}^{d_2} |v_i\rangle\langle v_i| \right) | \Psi \rangle \\
&= \langle \Psi | \hat{P}_\phi^{(1)} | \Psi \rangle, \tag{2.2.3}
\end{aligned}$$

car $\sum_{i=1}^{d_2} |v_i\rangle\langle v_i| = \hat{\mathbf{1}}^{(2)}$.

Munis des définitions 2.1 et 2.2, nous sommes en mesure de présenter un premier exemple impliquant deux qubits et, subséquemment, de confronter ces nouvelles définitions à l'ancienne approche de l'intrication quantique des systèmes discernables.

2.2.1 Exemple de deux qubits

Dans cette section, nous présentons un court exemple d'application directe de la définition 2.1 dans le but de nous familiariser avec la nouvelle approche de l'intrication. Considérons, à cet effet, un premier système isolé constitué d'un qubit dont la décomposition de l'état initial $|\psi_1\rangle$ dans la base $\mathcal{B} = \{|+\rangle, |-\rangle\}$ des états de spin 1/2 est

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |-\rangle. \tag{2.2.4}$$

Considérons également un second système isolé, constitué d'un second qubit de nature différente du premier qubit, initialement préparé dans l'état

$$|\psi_2\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} |+\rangle + \frac{1}{2} |-\rangle. \tag{2.2.5}$$

À présent, plutôt que d'étudier le comportement des deux qubits indépendamment l'un de l'autre, supposons que ces deux entités forment un seul et même système. De cette façon, l'état du système composite est simplement donné par

$$\begin{aligned}
|\Psi\rangle &= |\psi_1, \psi_2\rangle \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} |+, +\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}} |+, -\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} |-, +\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}} |-, -\rangle. \tag{2.2.6}
\end{aligned}$$

En comparaison avec l'ancienne définition de l'intrication (déf. 1.1), l'état $|\Psi\rangle$ est séparé. Qu'en est-il de la nouvelle définition (déf. 2.1)? Il est clair que le premier qubit possède l'ensemble complet de propriétés associé à l'état $|\psi_1\rangle$ tandis que le second possède l'ensemble complet de propriétés relatif à $|\psi_2\rangle$. L'état $|\Psi\rangle$ est donc naturellement séparé d'un point de

vue de cette nouvelle définition. Effectivement, plus formellement, en définissant les opérateurs $\hat{P}_{\psi_1}^{(1)} = |\psi_1\rangle\langle\psi_1| \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$ et $\hat{P}_{\psi_2}^{(2)} = |\psi_2\rangle\langle\psi_2| \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$, on a

$$\begin{aligned}\langle\Psi|\hat{P}_{\psi_1}^{(1)}|\Psi\rangle &= \langle\psi_1, \psi_2|\psi_1, \psi_2\rangle \\ &= 1\end{aligned}\tag{2.2.7}$$

et, de la même façon,

$$\langle\Psi|\hat{P}_{\psi_2}^{(2)}|\Psi\rangle = 1.\tag{2.2.8}$$

À l'inverse, supposons cette fois-ci que l'état $|\Psi\rangle$ décrivant les deux qubits soit intriqué au regard de la définition 1.1. Par exemple,

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+, -\rangle - |-, +\rangle\right).\tag{2.2.9}$$

Du point de vue de la définition 2.1, il n'est plus possible d'attribuer un ensemble complet de propriétés, que ce soit à au premier qubit ou au second. Autrement dit, il n'est plus possible de trouver un projecteur à un corps $\hat{P}^{(1)}$ tel que

$$\langle\Psi|\hat{P}^{(1)}|\Psi\rangle = 1.\tag{2.2.10}$$

L'état $|\Psi\rangle$ est donc, intriqué au regard de la définition 2.1.

Pour clore cette remarque, notons que l'exemple présenté à l'instant permet de rendre compte des similitudes entre les définitions 1.1 et 2.1. La définition standard de l'intrication ne pose aucune difficulté conceptuelle en ce qui concerne les systèmes de particules discernables. Ce n'est que lorsqu'il est nécessaire de tenir compte de la problématique de l'indiscernabilité que l'ancienne définition de l'intrication devient obsolète. En conséquence, nous devons exiger de la nouvelle définition (déf. 2.1) qu'elle soit parfaitement équivalente à l'ancienne sans quoi, elle ne peut pas prétendre remplacer cette dernière qui, pour rappel, est basée sur le caractère non factorisé du vecteur global $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$.

2.2.2 Équivalence de la nouvelle définition vis-à-vis de l'ancienne

Comme mentionné en fin de section précédente, pour que la définition 2.1 soit valide, il est impératif qu'elle soit équivalente à la définition standard de l'intrication (déf. 1.1). Le théorème suivant dresse le lien qu'entretennent ces deux définitions.

Théorème 2.3 (Réf. [7]). *Le système S est séparé si et seulement s'il existe $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_1$ et $|\chi\rangle \in \mathcal{H}_2$ tels que l'état global $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ de S est un état produit tensoriel i.e.,*

$$|\Psi\rangle = |\phi, \chi\rangle.\tag{2.2.11}$$

Démonstration.

(Condition suffisante). Soient $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_1$ et $|\chi\rangle \in \mathcal{H}_2$ deux vecteurs kets normés tels que l'état global $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ puisse s'écrire sous la forme $|\Psi\rangle = |\phi, \chi\rangle$. Dans ce cas, les conditions (2.2.1) et (2.2.2) sont trivialement vérifiées en considérant les projecteurs $\hat{P}_{\phi}^{(1)} = |\phi\rangle\langle\phi| \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$ et $\hat{P}_{\chi}^{(2)} = |\chi\rangle\langle\chi| \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$.

(Condition nécessaire). Considérons une base $\mathcal{B} = \{|u_i, v_j\rangle\}_{(i,j) \in \{1,2,\dots,d_1\} \times \{1,2,\dots,d_2\}}$ de l'espace produit dans laquelle l'état $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ du système S se décompose de façon unique comme

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^{d_1} \sum_{j=1}^{d_2} c_{ij} |u_i, v_j\rangle. \quad (2.2.12)$$

En définissant C , la matrice des composantes c_{ij} du vecteur $|\Psi\rangle$ dans la base \mathcal{B} et en appliquant le théorème de *décomposition en valeurs singulières* à C (voir thm. B.1, app. B), il vient que

$$C = U\Sigma V^\dagger, \quad (2.2.13)$$

où U est une matrice carrée unitaire de dimension d_1 , Σ est une matrice rectangulaire de format $d_1 \times d_2$ dont les éléments diagonaux $(\Sigma)_{ii} = \sigma_i$ ($i \in \{1, 2, \dots, \min(d_1, d_2)\}$) correspondent aux valeurs singulières de C et où V est une matrice carrée unitaire de dimension d_2 . L'état $|\Psi\rangle$ devient

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \sum_{i,k=1}^{d_1} \sum_{j,l=1}^{d_2} (U)_{ik} (\Sigma)_{kl} (V^\dagger)_{lj} |u_i, v_j\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{d_1} \sum_{l=1}^{d_2} (\Sigma)_{kl} \left[\left(\sum_{i=1}^{d_1} (U)_{ik} |u_i\rangle \right) \otimes \left(\sum_{j=1}^{d_2} (V^*)_{jl} |v_j\rangle \right) \right] \\ &= \sum_{k=1}^{d_1} \sum_{l=1}^{d_2} (\Sigma)_{kl} |u'_k, v'_l\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{\min(d_1, d_2)} \sigma_k |u'_k, v'_k\rangle, \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

où $|u'_k\rangle = \sum_{i=1}^{d_1} (U)_{ik} |u_i\rangle$ et $|v'_l\rangle = \sum_{j=1}^{d_2} (V^*)_{jl} |v_j\rangle$ correspondent à de nouveaux éléments de base obtenus en appliquant la transformation unitaire U et V^* aux éléments de la famille $\mathcal{B}_1 = \{|u_i\rangle\}_{i \in \{1, 2, \dots, d_1\}}$ et $\mathcal{B}_2 = \{|v_j\rangle\}_{j \in \{1, 2, \dots, d_2\}}$, respectivement. Définissons la notation \wedge de la façon suivante

$$\min(d_1, d_2) \equiv d_1 \wedge d_2. \quad (2.2.15)$$

De la sorte, la condition de normalisation de l'état $|\Psi\rangle$ est

$$\sum_{k=1}^{d_1 \wedge d_2} \sigma_k^2 = 1. \quad (2.2.16)$$

Par hypothèse, il existe un projecteur $\hat{P}_\phi^{(1)} = |\phi\rangle\langle\phi| \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$ sur un état normé $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_1$ tel que

$$\langle\Psi| \hat{P}_\phi^{(1)} |\Psi\rangle = 1. \quad (2.2.17)$$

En reprenant la décomposition (2.2.14) du vecteur $|\Psi\rangle$ et en l'injectant dans l'expression

(2.2.17), on obtient successivement

$$\begin{aligned}
\langle \Psi | \hat{P}_\phi^{(1)} | \Psi \rangle &= \sum_{k,l=1}^{d_1 \wedge d_2} \sigma_k \sigma_l \langle u'_k, v'_k | \hat{P}_\phi^{(1)} | u'_l, v'_l \rangle \\
&= \sum_{k,l=1}^{d_1 \wedge d_2} \sigma_k \sigma_l \langle u'_k | \phi \rangle \langle \phi | u'_l \rangle \delta_{kl} \\
&= \sum_{k=1}^{d_1 \wedge d_2} \sigma_k^2 |\langle u'_k | \phi \rangle|^2.
\end{aligned} \tag{2.2.18}$$

Donc,

$$\sum_{k=1}^{d_1 \wedge d_2} \sigma_k^2 |\langle u'_k | \phi \rangle|^2 = 1. \tag{2.2.19}$$

Considérons à présent l'espace mesuré (X, \mathcal{F}, μ) , avec $X = \{1, 2, \dots, d_1 \wedge d_2\}$, \mathcal{F} une σ -algèbre sur X et μ , la mesure de dénombrement (voir déf. B.8, app. B.2) et définissons les fonctions f et g de la façon suivante :

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \sigma_x^2 \tag{2.2.20}$$

$$g : X \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto g(x) = |\langle u'_x | \phi \rangle|^2. \tag{2.2.21}$$

En vue d'appliquer l'inégalité de Hölder (voir prop. B.7, app. B.2) sur l'espace (X, \mathcal{F}, μ) , calculons les normes L^p , $p \in \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$ des fonctions f et g . On a

$$\|f\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{d_1 \wedge d_2} \sigma_i^{2p}} \tag{2.2.22}$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{i \in \{1, 2, \dots, d_1 \wedge d_2\}} \sigma_i^2 \tag{2.2.23}$$

pour f et

$$\|g\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{d_1 \wedge d_2} |\langle u'_i | \phi \rangle|^{2p}} \tag{2.2.24}$$

$$\|g\|_\infty = \sup_{i \in \{1, 2, \dots, d_1 \wedge d_2\}} |\langle u'_i | \phi \rangle|^2 \tag{2.2.25}$$

pour g .

Cela étant, en reprenant l'expression (2.2.19) et en appliquant l'inégalité de Hölder (prop. B.8) sur l'espace (X, \mathcal{F}, μ) pour les exposants conjugués $p = 1$ et $q = +\infty$, il vient que

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{k=1}^{d_1 \wedge d_2} \sigma_k^2 |\langle u'_k | \phi \rangle|^2 \\
&\leq \|f\|_1 \|g\|_\infty \\
&= \sup_{i \in \{1, \dots, d_1 \wedge d_2\}} |\langle u'_i | \phi \rangle|^2.
\end{aligned} \tag{2.2.26}$$

Or,

$$|\langle u'_i | \phi \rangle|^2 \leq 1, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, d_1 \wedge d_2\}. \quad (2.2.27)$$

Dès lors, (2.2.26) devient

$$\sup_{i \in \{1, \dots, d_1 \wedge d_2\}} |\langle u'_i | \phi \rangle|^2 = 1. \quad (2.2.28)$$

Puisque qu'il existe un coefficient $\sup_{i \in \{1, \dots, d_1 \wedge d_2\}} |\langle u'_i | \phi \rangle|^2$ (que nous noterons $|\langle u'_l | \phi \rangle|^2$) strictement égal à un, tous les autres coefficients sont nuls si bien que

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k=1}^{d_1 \wedge d_2} \sigma_k^2 |\langle u'_k | \phi \rangle|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{d_1 \wedge d_2} \sigma_k^2 \delta_{kl} \\ &= \sigma_l^2. \end{aligned} \quad (2.2.29)$$

De la même façon, puisque $\sigma_l^2 = 1$ et que $\sum_{j=1}^{d_1 \wedge d_2} \sigma_j^2 = 1$, seul le coefficient σ_k^2 pour lequel $k = l$ est non nul. La décomposition (2.2.14) du vecteur $|\Psi\rangle$ devient alors

$$|\Psi\rangle = |u'_l, v'_l\rangle, \quad (2.2.30)$$

Il ne reste plus qu'à montrer que $|u'_l\rangle = |\phi\rangle$ pour clore la démonstration. Pour ce faire, décomposons le vecteur $|\phi\rangle$ dans la base d'éléments $|u'_m\rangle$. On a

$$|\phi\rangle = \sum_{m=1}^{d_1} a_m |u'_m\rangle, \quad (2.2.31)$$

où $a_1, a_2, \dots, a_{d_1} \in \mathbb{C}$ tels que $\sum_{m=1}^{d_1} |a_m|^2 = 1$. Injectons, maintenant, les expressions (2.2.30) et (2.2.31) dans la condition (2.2.17) constituant l'hypothèse de départ. En procédant de la sorte, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} 1 &= \langle \Psi | \hat{P}_\phi^{(1)} | \Psi \rangle \\ &= \langle u'_l | \phi \rangle \langle \phi | u'_l \rangle \\ &= \sum_{m=1}^{d_1} |a_m \langle u'_l | u'_m \rangle|^2 \\ &= |a_l|^2. \end{aligned} \quad (2.2.32)$$

Par conséquent, $a_l = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$ et

$$|\phi\rangle = e^{i\theta} |u'_l\rangle. \quad (2.2.33)$$

D'où, à un facteur de phase global près,

$$|\Psi\rangle = |\phi, v'_l\rangle. \quad (2.2.34)$$

□

Avant de clore cette section consacrée aux systèmes de deux particules discernables, remarquons que si l'un des deux sous-systèmes possède un ensemble complet de propriétés alors, le second sous-système possède également son propre ensemble. Cela résulte de la condition suffisante du théorème 2.3. En effet, nous y avons montré que lorsque le sous-système S_1 possède un ensemble complet de propriétés associé à un certain vecteur $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_1$ alors, l'état global $|\Psi\rangle$ du système composite S est factorisé. C'est-à-dire qu'il existe un second vecteur normé $|\chi\rangle \in \mathcal{H}_2$ tel que

$$|\Psi\rangle = |\phi, \chi\rangle. \quad (2.2.35)$$

De là, on montre immédiatement qu'il existe un projecteur $\hat{P}_\chi^{(2)} = |\chi\rangle\langle\chi| \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$ tel que

$$\langle\Psi|\hat{P}_\chi^{(2)}|\Psi\rangle = 1. \quad (2.2.36)$$

2.3 Application aux systèmes indiscernables

Lorsque les particules sont indiscernables, l'espace produit tensoriel \mathcal{H} est formé à partir du produit tensoriel du même espace à un corps \mathcal{H}_p . Cette fois-ci, S désigne un système constitué de deux parties identiques S_1 et S_2 d'espace à un corps \mathcal{H}_p ($\dim \mathcal{H}_p = d_p$). Nous désignerons alors par $\mathcal{H} = \mathcal{H}_p \otimes \mathcal{H}_p$ l'espace produit associé au système composite S .

Définition 2.4 (Ensemble complet de propriétés [7, 8]). Soit $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ le vecteur décrivant l'état du système composite S . L'un des sous-systèmes de S possède un ensemble complet de propriétés si et seulement s'il existe un projecteur $\hat{P}_\phi = |\phi\rangle\langle\phi| \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_p)$ sur un vecteur ket $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_p$ tel que

$$\langle\Psi|\hat{P}_\phi^{(1)} + \hat{P}_\phi^{(2)} - \hat{P}_\phi^{(1)}\hat{P}_\phi^{(2)}|\Psi\rangle = 1. \quad (2.3.1)$$

La grande différence entre cette définition et la définition 2.2 est qu'à présent, si l'une des deux particules possède un ensemble complet de propriétés, il n'est bien évidemment pas possible de spécifier la particule qui possède cet ensemble. De ce fait, le membre de gauche de la condition (2.3.1) ne correspond pas à la probabilité que la particule labellisée par (1) occupe l'état $|\phi\rangle$ mais bien à la probabilité d'occupation de l'état $|\phi\rangle$ par l'une des deux particules constitutives du système. En effet, si l'on désigne par A, B, C et D les évènements suivants :

$$\begin{aligned} A &= \text{"La particule (1) occupe l'état } |\phi\rangle\text{"}, \\ B &= \text{"La particule (2) occupe l'état } |\phi\rangle\text{"}, \\ C &= A \cap B = \text{"Chacune des particules occupe l'état } |\phi\rangle\text{" et} \\ D &= A \cup B = \text{"L'une des deux particules occupe l'état } |\phi\rangle\text{"} \end{aligned}$$

alors, un calcul similaire à ce qui a été fait précédemment à la section 2.2 permet de conclure que $\mathbb{P}(A) = \langle\Psi|\hat{P}_\phi^{(1)}|\Psi\rangle$ et $\mathbb{P}(B) = \langle\Psi|\hat{P}_\phi^{(2)}|\Psi\rangle$. En ce qui concerne $\mathbb{P}(C)$ on a,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C) &= |\langle\phi, \phi|\Psi\rangle|^2 \\ &= \langle\Psi|\phi, \phi\rangle\langle\phi, \phi|\Psi\rangle \\ &= \langle\Psi|\hat{P}_\phi^{(1)}\hat{P}_\phi^{(2)}|\Psi\rangle. \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

D'où,

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(C) \quad (2.3.3)$$

$$= \langle \Psi | \hat{P}_\phi^{(1)} + \hat{P}_\phi^{(2)} - \hat{P}_\phi^{(1)} \hat{P}_\phi^{(2)} | \Psi \rangle. \quad (2.3.4)$$

Enfin, remarquons que la séparabilité des états purs devra s'étudier en distinguant deux cas selon que l'on a affaire à des fermions ou des bosons. Étant donné le principe d'exclusion de Pauli, la probabilité $\mathbb{P}(C)$ doit être nulle pour les fermions. En effet,

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \hat{P}_\phi^{(1)} \hat{P}_\phi^{(2)} | \Psi \rangle &= |\langle \phi, \phi | \Psi \rangle|^2 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

car $|\phi, \phi\rangle \in \mathcal{H}^+$ et $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}^-$ et que les sous-espaces \mathcal{H}^+ et \mathcal{H}^- sont orthogonaux. Dans la suite, nous spécifierons toujours dans quel contexte (fermionique ou bosonique) nous travaillons.

2.3.1 Exemple de deux qubits

Interprétons les nouvelles définitions (défs. 2.1 et 2.4) à partir d'un exemple et comparons-les avec l'ancienne définition (déf. 1.1). Soient un premier système d'un qubit fermionique d'espace $\mathcal{H}_p \simeq \mathbb{C}^2$, initialement préparé dans la superposition d'états de spin

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |-\rangle \quad (2.3.6)$$

et un second système constitué d'un second qubit, identique au premier, cette fois-ci dans l'état de spin

$$|\chi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} |+\rangle + \frac{1}{2} |-\rangle. \quad (2.3.7)$$

L'état global $|\Psi\rangle$ du système de deux qubits est

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \mathcal{N} \hat{A} |\phi, \chi\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+, -\rangle - |-, +\rangle \right). \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Puisqu'il n'existe pas de vecteurs kets $|\alpha\rangle, |\beta\rangle \in \mathcal{H}_p$ tels que $|\Psi\rangle$ puisse se mettre sous la forme factorisée $|\Psi\rangle = |\alpha, \beta\rangle$, on conclut que les deux qubits sont intriqués du point de vue de la définition 1.1.

Cependant, en appliquant la nouvelle définition de l'intrication (déf. 2.1), il est possible d'attribuer à l'un des deux qubits l'ensemble complet de propriétés associé à l'état $|+\rangle$ au travers de l'opérateur $\hat{P}_+ = |+\rangle\langle +|$. Effectivement,

$$\hat{P}_+^{(1)} |\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+, -\rangle \quad (2.3.9)$$

$$\hat{P}_+^{(2)} |\Psi\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} |-, +\rangle, \quad (2.3.10)$$

si bien que

$$\langle \Psi | \hat{P}_+^{(1)} + \hat{P}_+^{(2)} | \Psi \rangle = 1. \quad (2.3.11)$$

De la même façon, l'autre qubit possède l'ensemble complet de propriétés associé à $|-\rangle$. L'état $|\Psi\rangle$ est donc séparé.

Cet exemple est important dans la mesure où, contrairement à ce que l'on pourrait croire, les états de particules indiscernables ne sont pas nécessairement tous intriqués. Plus encore, si au lieu de travailler avec les états $|\phi\rangle$ et $|\chi\rangle$, nous avons envisagé les états plus généraux

$$|\phi\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle \quad (2.3.12)$$

$$|\chi\rangle = c|+\rangle + d|-\rangle, \quad (2.3.13)$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $|a|^2 + |b|^2 = 1$ et $|c|^2 + |d|^2 = 1$ alors, le processus d'antisymétrisation de $|\phi, \chi\rangle$ mènerait systématiquement au même état séparé $\frac{1}{\sqrt{2}}(|+, -\rangle - |-, +\rangle)$. Il semblerait donc qu'aucun système de deux qubits fermioniques ne puisse être préparé dans un état d'intrication. Les prochains théorèmes confirmeront cette remarque.

2.3.2 Cas des fermions

Les sections suivantes seront consacrées à l'étude de premiers critères d'intrication pour des systèmes fermioniques sur base des définitions 2.1 et 2.4. Avant de présenter le premier d'entre-eux, nous adopterons la nouvelle notation suivante :

$$\mathcal{N}\hat{A}|\phi, \chi\rangle \equiv |\phi\rangle \otimes_A |\chi\rangle, \quad \mathcal{N} = \sqrt{\frac{2}{1 - |\langle \phi | \chi \rangle|^2}} \quad (2.3.14)$$

pour tout $|\phi\rangle, |\chi\rangle \in \mathcal{H}$ normés. L'opérateur \otimes_A désigne le *produit tensoriel antisymétrique* et est défini comme [21]

$$\otimes_A : \mathcal{H}_p \times \mathcal{H}_p \rightarrow \mathcal{H}^- : (|\phi\rangle, |\chi\rangle) \mapsto |\phi\rangle \otimes_A |\chi\rangle = \frac{\mathcal{N}}{2} (|\phi, \chi\rangle - |\chi, \phi\rangle). \quad (2.3.15)$$

Dans ce qui suit, nous utiliserons la notation simplifiée $|\phi\rangle \otimes_A |\chi\rangle \equiv |\phi; \chi\rangle_A$, voire même $|\phi; \chi\rangle$ lorsque le contexte est suffisamment clair.

2.3.2.1 Premier critère d'intrication

Avant de dresser un premier critère d'intrication fermionique, nous avons besoin d'un lemme dont l'énoncé est le suivant :

Lemme 2.5. Le produit tensoriel antisymétrique de deux états normés quelconques et distincts $|\phi\rangle, |\chi\rangle \in \mathcal{H}_p$ peut toujours s'écrire sous la forme d'un produit tensoriel antisymétrique de deux états orthonormés.

Démonstration.

Soient $|\phi\rangle$ et $|\chi\rangle$ deux états normés distincts de \mathcal{H}_p . Posons $a = \langle \phi | \chi \rangle$ et définissons le vecteur normé

$$|\phi_\perp\rangle = \frac{1}{b} (|\chi\rangle - a|\phi\rangle), \quad (2.3.16)$$

avec $b \in \mathbb{C}$, un coefficient assurant la normalisation du vecteur $|\phi_\perp\rangle$ ($|a| < 1 \implies \|\chi\| \neq \|a\phi\| \implies |\chi\rangle - a|\phi\rangle \neq 0$). Ceci nous permet de décomposer le vecteur $|\chi\rangle$ en une partie transverse à $|\phi\rangle$ et une partie parallèle à $|\phi\rangle$ comme suit

$$|\chi\rangle = a|\phi\rangle + b|\phi_\perp\rangle. \quad (2.3.17)$$

En effet,

$$\begin{aligned} \langle\phi|\phi_\perp\rangle &= \frac{1}{b} \left(\langle\phi|\chi\rangle - a \langle\phi|\phi\rangle \right) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

Dans ce cas, si $\mathcal{N} \in \mathbb{C}$ est une constante de normalisation, on a

$$\begin{aligned} |\phi; \chi\rangle &= \frac{\mathcal{N}}{2} \left(|\phi, \chi\rangle - |\chi, \phi\rangle \right) \\ &= \frac{\mathcal{N}}{2} \left(|\phi, \chi\rangle - a|\phi, \phi\rangle + a|\phi, \phi\rangle - |\chi, \phi\rangle \right) \\ &= \frac{\mathcal{N}b}{2} \left(|\phi, \phi_\perp\rangle - |\phi_\perp, \phi\rangle \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\phi, \phi_\perp\rangle - |\phi_\perp, \phi\rangle \right) \\ &= |\phi; \phi_\perp\rangle. \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

D'où la conclusion. \square

Proposition 2.6 (Réf. [7]). L'un des deux sous-systèmes fermioniques du système composite S possède un ensemble complet de propriétés si et seulement si l'état global $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}^-$ de S peut s'écrire comme le produit tensoriel antisymétrique de deux états orthonormés.

Démonstration.

(Condition suffisante). Soit $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}^-$ et soient $|\phi\rangle, |\chi\rangle \in \mathcal{H}_p$ deux vecteurs orthonormés. Si

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= |\phi; \chi\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\phi, \chi\rangle - |\chi, \phi\rangle \right) \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

alors, en définissant le projecteur $\hat{P}_\phi = |\phi\rangle\langle\phi|$, on obtient

$$\hat{P}_\phi^{(1)} |\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\phi, \chi\rangle \quad (2.3.21)$$

$$\hat{P}_\phi^{(2)} |\Psi\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} |\chi, \phi\rangle. \quad (2.3.22)$$

D'où,

$$\left(\hat{P}_\phi^{(1)} + \hat{P}_\phi^{(2)} \right) |\Psi\rangle = |\Psi\rangle \quad (2.3.23)$$

et

$$\langle\Psi| \hat{P}_\phi^{(1)} + \hat{P}_\phi^{(2)} |\Psi\rangle = 1. \quad (2.3.24)$$

(Condition nécessaire). Pour commencer, rappelons un résultat intermédiaire qui nous servira pour la suite. Soient deux vecteurs normés $|\alpha\rangle, |\beta\rangle \in \mathcal{H}_p$. L'inégalité de Schwarz stipule que

$$\begin{aligned} |\langle \alpha | \beta \rangle| &\leq \|\alpha\| \|\beta\| \\ &= 1, \end{aligned} \tag{2.3.25}$$

l'égalité ayant lieu uniquement lorsque $|\alpha\rangle$ et $|\beta\rangle$ sont multiples l'un de l'autre. En particulier, si

$$\langle \alpha | \beta \rangle = 1$$

alors, $|\alpha\rangle = |\beta\rangle$.

Par hypothèse,

$$\langle \Psi | \hat{P}_\phi^{(1)} + \hat{P}_\phi^{(2)} | \Psi \rangle = 1. \tag{2.3.26}$$

Dans le but d'appliquer le résultat précédent, montrons que le vecteur $(\hat{P}_\phi^{(1)} + \hat{P}_\phi^{(2)}) | \Psi \rangle$ est normé. On a,

$$\begin{aligned} \left\| (\hat{P}_\phi^{(1)} + \hat{P}_\phi^{(2)}) | \Psi \rangle \right\|^2 &= \left\langle (\hat{P}_\phi^{(1)} + \hat{P}_\phi^{(2)}) \Psi \left| (\hat{P}_\phi^{(1)} + \hat{P}_\phi^{(2)}) \Psi \right\rangle \\ &= \langle \Psi | (\hat{P}_\phi^{(1)} + \hat{P}_\phi^{(2)})^2 | \Psi \rangle \\ &= \langle \Psi | \hat{P}_\phi^{(1)} + \hat{P}_\phi^{(2)} | \Psi \rangle + 2 \langle \Psi | \hat{P}_\phi^{(1)} \hat{P}_\phi^{(2)} | \Psi \rangle. \end{aligned} \tag{2.3.27}$$

Le premier terme de cette égalité est égal à l'unité compte-tenu de l'hypothèse initiale (éq. 2.3.26). Quant au second terme, il est évidemment nul étant donné qu'il correspond à la probabilité d'occupation de l'état $|\phi\rangle$ par chacun des fermions.

Ainsi, en vertu de l'inégalité de Schwarz¹,

$$\left(\hat{P}_\phi^{(1)} + \hat{P}_\phi^{(2)} \right) | \Psi \rangle = | \Psi \rangle. \tag{2.3.28}$$

Cela étant, pour démontrer la thèse, considérons une base $\mathcal{B}_p = \{ |u_i\rangle \}_{i \in \{1, 2, \dots, d_p\}}$ de l'espace à un corps \mathcal{H}_p et supposons que le premier élément de cette base corresponde à $|\phi\rangle$. En décomposant le vecteur $|\Psi\rangle$ dans la base $\mathcal{B} = \{ |u_i, u_j\rangle \}_{i, j \in \{1, 2, \dots, d_p\}}$ de \mathcal{H} , on obtient

$$|\Psi\rangle = \sum_{i, j=1}^{d_p} c_{ij} |u_i, u_j\rangle. \tag{2.3.29}$$

Vu que $|\Psi\rangle$ représente un état fermionique, il est nécessaire qu'il change de signe par application de l'opérateur \hat{P}_{21} . En d'autres termes,

$$\begin{aligned} \hat{P}_{21} | \Psi \rangle &= - | \Psi \rangle \\ \iff \sum_{i, j=1}^{d_p} c_{ij} \hat{P}_{21} |u_i, u_j\rangle &= - \sum_{i, j=1}^{d_p} c_{ij} |u_i, u_j\rangle \\ \iff \sum_{i, j=1}^{d_p} (c_{ij} + c_{ji}) |u_i, u_j\rangle &= 0. \end{aligned} \tag{2.3.30}$$

1. dans le cas particulier où l'égalité à lieu.

La famille \mathcal{B} étant libre, les coefficients $(c_{ij} + c_{ji})$ doivent être tous nuls. Le vecteur $|\Psi\rangle$ appartient donc à l'espace \mathcal{H}^- des états antisymétriques vis-à-vis de l'échange de deux particules si, pour tout $i, j \in \{1, 2, \dots, d_p\}$,

$$c_{ij} = -c_{ji}. \quad (2.3.31)$$

En particulier, $c_{ii} = 0$, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, d_p\}$.

Cela étant, revenons-en à la thèse et injectons la décomposition (2.3.29) de $|\Psi\rangle$ dans l'expression (2.3.28). De cette façon,

$$\hat{P}_\phi^{(1)} |\Psi\rangle = \sum_{j=1}^{d_p} c_{1j} |\phi, u_j\rangle \quad (2.3.32)$$

$$\hat{P}_\phi^{(2)} |\Psi\rangle = \sum_{i=1}^{d_p} c_{i1} |u_i, \phi\rangle. \quad (2.3.33)$$

L'état $|\Psi\rangle$ devient alors

$$|\Psi\rangle = \sum_{j=1}^{d_p} c_{1j} |\phi, u_j\rangle - \sum_{i=1}^{d_p} c_{i1} |u_i, \phi\rangle \quad (2.3.34)$$

En définissant le vecteur normé $|\chi\rangle = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{d_p} c_{1k} |u_k\rangle$, il s'ensuit que [7],

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\phi, \chi\rangle - |\chi, \phi\rangle \right) \\ &= |\phi; \chi\rangle. \end{aligned} \quad (2.3.35)$$

De plus, les vecteurs $|\phi\rangle$ et $|\chi\rangle$ sont orthogonaux car

$$\begin{aligned} \langle \phi | \chi \rangle &= \sqrt{2} \sum_{k=1}^{d_p} c_{1k} \langle \phi | u_k \rangle \\ &= \sqrt{2} c_{11} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.3.36)$$

□

Il est intéressant de noter que, dès l'instant où l'un des sous-systèmes fermioniques S_1 ou S_2 possède un ensemble complet de propriétés, l'autre sous-système possède automatiquement son propre ensemble [7]. En effet, au cours de la proposition précédente (prop. 2.12), la démonstration de la condition suffisante nous apprend que quand l'un des sous-systèmes de S possède un ensemble complet de propriétés associé à un vecteur que nous noterons $|\phi\rangle$ alors, il existe un second vecteur $|\chi\rangle$, orthogonal à $|\phi\rangle$ tel que le vecteur $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}^-$ décrivant le système S est de la forme

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= |\phi; \chi\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\phi, \chi\rangle - |\chi, \phi\rangle \right), \end{aligned} \quad (2.3.37)$$

De là, nous pouvons aisément montrer qu'il existe un second projecteur $\hat{P}_\chi = |\chi\rangle\langle\chi| \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_p)$ satisfaisant à

$$\langle\Psi|\hat{P}_\chi^{(1)} + \hat{P}_\chi^{(2)}|\Psi\rangle = 1. \quad (2.3.38)$$

En effet,

$$\hat{P}_\chi^{(1)}|\Psi\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}|\chi, \phi\rangle, \quad (2.3.39)$$

$$\hat{P}_\chi^{(2)}|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi, \chi\rangle. \quad (2.3.40)$$

D'où, la condition (2.3.38) est vérifiée.

Pour récapituler, par la définition 2.4, il est clair que l'un des deux sous-systèmes possède un ensemble complet de propriétés associé à l'état $|\phi\rangle$ et que l'un de ces sous-systèmes possède un ensemble complet de propriétés associé à $|\chi\rangle$. Mais est-ce suffisant pour affirmer que l'un de ces sous-systèmes possède un ensemble complet de propriétés associé à $|\phi\rangle$ et que l'autre sous-système possède inévitablement l'autre ensemble (associé à $|\chi\rangle$)? La réponse à cette question est positive car en calculant la probabilité

$$\mathbb{P}_{12} \equiv \mathbb{P}[(1) : |\phi\rangle \text{ et } (2) : |\chi\rangle \text{ ou } (1) : |\chi\rangle \text{ et } (2) : |\phi\rangle] \quad (2.3.41)$$

que l'un des deux constituants possède l'ensemble complet associé à l'état $|\phi\rangle$ et que l'autre possède l'ensemble associé à $|\chi\rangle$, on obtient, en vertu de l'orthogonalité des états $|\phi\rangle$ et $|\chi\rangle$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{12} &= |\langle\phi, \chi|\Psi\rangle|^2 + |\langle\chi, \phi|\Psi\rangle|^2 \\ &= \langle\Psi|\left(|\phi, \chi\rangle\langle\phi, \chi| + |\chi, \phi\rangle\langle\chi, \phi|\right)|\Psi\rangle \\ &= {}_A\langle\phi; \chi|\hat{P}_\phi^{(1)}\hat{P}_\chi^{(2)} + \hat{P}_\chi^{(1)}\hat{P}_\phi^{(2)}|\phi; \chi\rangle_A \\ &= \frac{1}{2}\left(\langle\phi, \chi| - \langle\chi, \phi|\right)\left(\hat{P}_\phi^{(1)}\hat{P}_\chi^{(2)} + \hat{P}_\chi^{(1)}\hat{P}_\phi^{(2)}\right)\left(|\phi, \chi\rangle - |\chi, \phi\rangle\right) \\ &= 1, \end{aligned} \quad (2.3.42)$$

Toutes ces précautions semblent superflues au premier abord mais s'avéreront indispensables dans le cas plus délicat de systèmes bosoniques. L'analyse et la discussion des détails précédents mène automatiquement à la démonstration du théorème suivant.

Théorème 2.7 (Réfs. [7, 8]). *Le système S est séparé si et seulement l'état global $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}^-$ le décrivant peut s'écrire sous la forme*

$$|\Psi\rangle = |\phi; \chi\rangle, \quad (2.3.43)$$

avec $|\phi\rangle, |\chi\rangle \in \mathcal{H}_p$, deux états orthonormés.

2.3.2.2 Décomposition de Slater et second critère d'intrication

Nous avons établi une nouvelle définition de l'intrication pour des systèmes indiscernables ainsi qu'un premier critère de séparabilité pour les fermions. Le prochain théorème est d'une importance particulière étant donné qu'il prédit l'existence d'une décomposition systématique d'états fermioniques dans une certaine base de l'espace produit [8, 22]. À partir d'une telle

décomposition appelée *décomposition de Slater*, nous pourrions établir un nouveau critère de séparabilité. La démonstration du théorème requiert néanmoins un résultat important de la théorie du calcul matriciel, résultat qui, via une transformation unitaire $U \in U(N)$, permet de décomposer n'importe quel état de spin $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}^-$ de deux fermions dans une nouvelle base dont la matrice des composantes (notée Σ dans la suite) prend une forme particulière [23].

Pour fixer les notations, $\mathcal{H}_p = \mathbb{C}^{2s+1}$ correspond à l'espace des états d'un fermion de spin s . En ce qui concerne l'espace produit \mathcal{H} , on a simplement $\mathcal{H} = \mathbb{C}^{2s+1} \otimes \mathbb{C}^{2s+1} = \mathbb{C}^{(2s+1)^2}$.

Lemme 2.8 (Réfs. [8, 23]). Si $C \in M_n$ est une matrice carrée antisymétrique de dimension n et de rang $\text{rg}(C) = r$ alors, r est pair et il existe une matrice unitaire $U \in M_n$ telle que $C = U\Sigma U^\top$, avec

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & z_1 \\ -z_1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & z_2 \\ -z_2 & 0 \end{pmatrix} \oplus \dots \oplus \begin{pmatrix} 0 & z_{r/2} \\ -z_{r/2} & 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbf{0}_{n-r, n-r}, \quad (2.3.44)$$

une matrice diagonale par blocs dont les éléments $z_i, i \in \{1, 2, \dots, r/2\}$ correspondent aux valeurs singulières de C .

Théorème 2.9 (Décomposition de Slater [8]). Soit $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}^- \subset \mathcal{H}$ un vecteur d'état décrivant un système de deux particules fermioniques indiscernables de spin s . Il existe une décomposition de $|\Psi\rangle$ de la forme

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^{(2s+1)/2} \frac{a_i}{\sqrt{2}} \left[|2i-1, 2i\rangle - |2i, 2i-1\rangle \right], \quad (2.3.45)$$

avec $|1\rangle, |2\rangle, \dots, |2s+1\rangle$, des vecteurs orthonormés formant une base de \mathcal{H}_p et a_i , des coefficients réels et positifs satisfaisant à la condition de normalisation $\sum_{i=1}^{(2s+1)/2} a_i^2 = 1$.

Démonstration. Soient $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}^-$ et $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ tels que $|\Psi\rangle = \mathcal{N}\hat{A}|\psi\rangle$, avec \mathcal{N} , une constante de normalisation et soit $\mathcal{B} = \{|i, j\rangle\}_{i, j \in \{1, 2, \dots, 2s+1\}}$ une base de \mathcal{H} . En décomposant le vecteur $|\psi\rangle$ dans la base \mathcal{B} , on obtient successivement

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \mathcal{N}\hat{A}|\psi\rangle \\ &= \mathcal{N} \sum_{i, j=1}^{2s+1} c_{ij} \hat{A}|i, j\rangle \\ &= \frac{\mathcal{N}}{2} \sum_{i, j=1}^{2s+1} (c_{ij} - c_{ji}) |i, j\rangle \\ &= \frac{\mathcal{N}}{2} \sum_{i, j=1}^{2s+1} (C)_{ij} |i, j\rangle, \end{aligned} \quad (2.3.46)$$

avec C , la matrice antisymétrique d'éléments $(C)_{ij} = c_{ij} - c_{ji}$. Par application du lemme 2.8,

il vient que

$$\begin{aligned}
|\Psi\rangle &= \frac{\mathcal{N}}{2} \sum_{i,j=1}^{2s+1} \sum_{k,l=1}^{2s+1} (U)_{ik} (\Sigma)_{kl} (U^\top)_{lj} |i, j\rangle \\
&= \frac{\mathcal{N}}{2} \sum_{k,l=1}^{2s+1} (\Sigma)_{kl} \left(\sum_{i=1}^{2s+1} (U)_{ik} |i\rangle \right) \otimes \left(\sum_{j=1}^{2s+1} (U)_{jl} |j\rangle \right) \\
&= \frac{\mathcal{N}}{2} \sum_{k,l=1}^{2s+1} (\Sigma)_{kl} |k', l'\rangle,
\end{aligned} \tag{2.3.47}$$

où $|k'\rangle = \sum_{i=1}^{2s+1} (U)_{ik} |i\rangle$, $k \in \{1, 2, \dots, d_1\}$ correspond à un élément d'une nouvelle base obtenue via la transformation unitaire U et où

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & z_1 & \mathbf{0}_{2,2} & \mathbf{0}_{2,2} & \cdots & \mathbf{0}_{2,2} \\ -z_1 & 0 & \mathbf{0}_{2,2} & \mathbf{0}_{2,2} & \cdots & \mathbf{0}_{2,2} \\ \mathbf{0}_{2,2} & 0 & z_2 & \mathbf{0}_{2,2} & \cdots & \mathbf{0}_{2,2} \\ \mathbf{0}_{2,2} & -z_2 & 0 & \mathbf{0}_{2,2} & \cdots & \mathbf{0}_{2,2} \\ \mathbf{0}_{2,2} & \mathbf{0}_{2,2} & 0 & z_3 & \cdots & \mathbf{0}_{2,2} \\ \mathbf{0}_{2,2} & \mathbf{0}_{2,2} & -z_3 & 0 & \cdots & \mathbf{0}_{2,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{2,2} & \mathbf{0}_{2,2} & \mathbf{0}_{2,2} & \cdots & 0 & z_{\frac{2s+1}{2}} \\ & & & & -z_{\frac{2s+1}{2}} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.3.48}$$

et les coefficients z_i , $i \in \{1, 2, \dots, \frac{2s+1}{2}\}$ sont les valeurs singulières positives ou nulles de la matrice C .

Par conséquent, la double somme se simplifie grandement au profit de

$$|\Psi\rangle = \frac{\mathcal{N}}{2} \sum_{l=1}^{(2s+1)/2} z_l \left[|(2l-1)', (2l)'\rangle - |(2l)', (2l-1)'\rangle \right] \tag{2.3.49}$$

et la condition de normalisation de l'état $|\Psi\rangle$ impose que

$$\frac{|\mathcal{N}|^2}{4} \sum_{l=1}^{(2s+1)/2} 2z_l^2 = 1. \tag{2.3.50}$$

Ainsi, à un facteur de phase global près,

$$\mathcal{N} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sum_{l=1}^{(2s+1)/2} z_l^2}}. \tag{2.3.51}$$

D'où,

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{\sum_{l=1}^{(2s+1)/2} z_l^2}} \sum_{i=1}^{(2s+1)/2} \frac{z_i}{\sqrt{2}} \left[|(2i-1)', (2i)'\rangle - |(2i)', (2i-1)'\rangle \right]. \tag{2.3.52}$$

Finalement, en posant $a_i = \frac{z_i}{\sqrt{\sum_{l=1}^{(2s+1)/2} z_l^2}}$, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, (2s+1)/2\}$, on conclut. \square

Définition 2.10 (Nombre de Slater [8]). Le nombre de coefficients a_i non nuls pour une décomposition de la forme (2.3.45) définit le *nombre de Slater* (notation : N_{Sl}).

Corollaire 2.11 (Réf. [8]). Tout état antisymétrique $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}^-$ décrivant un système de deux fermions est séparé si et seulement si le nombre de Slater est égal à un.

Démonstration.

La preuve est immédiate. Compte-tenu du théorème 2.7, un état $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}^-$ est séparé si et seulement s'il existe $|\phi\rangle, |\chi\rangle \in \mathcal{H}_p$ tels que

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= |\phi; \chi\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\phi, \chi\rangle - |\chi, \phi\rangle \right), \end{aligned} \quad (2.3.53)$$

ce qui correspond à une décomposition de Slater (thm. 2.9) avec un nombre de Slater égal à un. \square

Le corollaire 2.11 est d'une importance certaine dans la mesure ou il entraîne l'impossibilité d'intriquer les systèmes de deux qubits fermioniques. En effet, pour de tels systèmes, l'état le plus général $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}^-$ est

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+, -\rangle - |-, +\rangle \right), \quad (2.3.54)$$

ce qui, de part le théorème de Slater (thm. 2.9) et le corollaire 2.11, correspond à un état séparé.

2.3.3 Cas des bosons

De la même façon que pour les systèmes fermioniques, introduisons la notation suivante pour les bosons :

$$\mathcal{N}\hat{S}|\phi, \chi\rangle \equiv |\phi\rangle \otimes_S |\chi\rangle, \quad \mathcal{N} = \sqrt{\frac{2}{1 + |\langle\phi|\chi\rangle|^2}} \quad (2.3.55)$$

pour tout $|\phi\rangle, |\chi\rangle \in \mathcal{H}$ normés. L'application \otimes_S désigne le *produit tensoriel symétrique* et est définie comme [21]

$$\otimes_S : \mathcal{H}_p \times \mathcal{H}_p \rightarrow \mathcal{H}^+ : (|\phi\rangle, |\chi\rangle) \mapsto |\phi\rangle \otimes_S |\chi\rangle = \frac{\mathcal{N}}{2} \left(|\phi, \chi\rangle + |\chi, \phi\rangle \right). \quad (2.3.56)$$

Par la suite, nous utiliserons la notation simplifiée $|\phi\rangle \otimes_S |\chi\rangle \equiv |\phi; \chi\rangle_S$, voire même $|\phi; \chi\rangle$ lorsque le contexte est suffisamment clair.

2.3.3.1 Premier critère d'intrication

Proposition 2.12 (Réf. [7, 8]). Soit S un système composite constitué de deux particules bosoniques indiscernables. L'un de ces deux sous-systèmes possède un ensemble complet de propriétés si et seulement si l'état global $|\Psi\rangle$ de \mathcal{H}^+ peut s'écrire comme le produit tensoriel symétrique de deux états normés.

Démonstration.

(Condition suffisante). Soit $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ et soient $|\phi\rangle, |\chi\rangle \in \mathcal{H}_p$. Posons $a = \langle\phi|\chi\rangle$. Si

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= |\phi; \chi\rangle \\ &= \frac{\mathcal{N}}{2} \left(|\phi, \chi\rangle + |\chi, \phi\rangle \right) \end{aligned} \quad (2.3.57)$$

alors, en définissant le projecteur $\hat{P}_\phi = |\phi\rangle\langle\phi|$, on obtient

$$\hat{P}_\phi^{(1)} |\Psi\rangle = \frac{\mathcal{N}}{2} \left(|\phi, \chi\rangle + a |\phi, \phi\rangle \right) \quad (2.3.58)$$

$$\hat{P}_\phi^{(2)} |\Psi\rangle = \frac{\mathcal{N}}{2} \left(a |\phi, \phi\rangle + |\chi, \phi\rangle \right) \quad (2.3.59)$$

$$\hat{P}_\phi^{(1)} \hat{P}_\phi^{(2)} |\Psi\rangle = \mathcal{N} a |\phi, \phi\rangle. \quad (2.3.60)$$

De cette façon,

$$\left(\hat{P}_\phi^{(1)} + \hat{P}_\phi^{(2)} - \hat{P}_\phi^{(1)} \hat{P}_\phi^{(2)} \right) |\Psi\rangle = |\Psi\rangle \quad (2.3.61)$$

et

$$\langle\Psi| \hat{P}_\phi^{(1)} + \hat{P}_\phi^{(2)} - \hat{P}_\phi^{(1)} \hat{P}_\phi^{(2)} |\Psi\rangle = 1. \quad (2.3.62)$$

(Condition nécessaire). Comme pour la démonstration de la proposition 2.6, montrons que le vecteur

$$\left(\hat{P}_\phi^{(1)} + \hat{P}_\phi^{(2)} - \hat{P}_\phi^{(1)} \hat{P}_\phi^{(2)} \right) |\Psi\rangle \quad (2.3.63)$$

est normé. On a

$$\begin{aligned} \left\| \left(\hat{P}_\phi^{(1)} + \hat{P}_\phi^{(2)} - \hat{P}_\phi^{(1)} \hat{P}_\phi^{(2)} \right) |\Psi\rangle \right\|^2 &= \left\langle \left(\hat{P}_\phi^{(1)} + \hat{P}_\phi^{(2)} - \hat{P}_\phi^{(1)} \hat{P}_\phi^{(2)} \right) \Psi \left| \left(\hat{P}_\phi^{(1)} + \hat{P}_\phi^{(2)} - \hat{P}_\phi^{(1)} \hat{P}_\phi^{(2)} \right) \Psi \right\rangle \\ &= \langle\Psi| \left(\hat{P}_\phi^{(1)} + \hat{P}_\phi^{(2)} - \hat{P}_\phi^{(1)} \hat{P}_\phi^{(2)} \right)^2 |\Psi\rangle. \end{aligned} \quad (2.3.64)$$

Or, puisque $\hat{P}_\phi^{(1)}$ commute avec $\hat{P}_\phi^{(2)}$ et puisque $\hat{P}_\phi^{(1)}$ et $\hat{P}_\phi^{(2)}$ sont deux opérateurs de projection,

$$\begin{aligned} \left(\hat{P}_\phi^{(1)} + \hat{P}_\phi^{(2)} - \hat{P}_\phi^{(1)} \hat{P}_\phi^{(2)} \right)^2 &= \left(\hat{P}_\phi^{(1)} \right)^2 + \hat{P}_\phi^{(1)} \hat{P}_\phi^{(2)} - \hat{P}_\phi^{(1)} \left(\hat{P}_\phi^{(1)} \hat{P}_\phi^{(2)} \right) \\ &\quad + \hat{P}_\phi^{(2)} \hat{P}_\phi^{(1)} + \left(\hat{P}_\phi^{(2)} \right)^2 - \hat{P}_\phi^{(2)} \left(\hat{P}_\phi^{(1)} \hat{P}_\phi^{(2)} \right) \\ &\quad + \left(\hat{P}_\phi^{(1)} \hat{P}_\phi^{(2)} \right)^2 - \left(\hat{P}_\phi^{(1)} \hat{P}_\phi^{(2)} \right) \hat{P}_\phi^{(1)} - \left(\hat{P}_\phi^{(1)} \hat{P}_\phi^{(2)} \right) \hat{P}_\phi^{(2)} \\ &= \hat{P}_\phi^{(1)} + \hat{P}_\phi^{(1)} \hat{P}_\phi^{(2)} - \hat{P}_\phi^{(1)} \hat{P}_\phi^{(2)} \\ &\quad + \hat{P}_\phi^{(1)} \hat{P}_\phi^{(2)} + \hat{P}_\phi^{(2)} - \hat{P}_\phi^{(1)} \hat{P}_\phi^{(2)} \\ &\quad + \hat{P}_\phi^{(1)} \hat{P}_\phi^{(2)} - \hat{P}_\phi^{(1)} \hat{P}_\phi^{(2)} - \hat{P}_\phi^{(1)} \hat{P}_\phi^{(2)} \\ &= \hat{P}_\phi^{(1)} + \hat{P}_\phi^{(2)} - \hat{P}_\phi^{(1)} \hat{P}_\phi^{(2)}. \end{aligned} \quad (2.3.65)$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} \left\| \left(\hat{P}_\phi^{(1)} + \hat{P}_\phi^{(2)} - \hat{P}_\phi^{(1)} \hat{P}_\phi^{(2)} \right) |\Psi\rangle \right\|^2 &= \langle \Psi | \hat{P}_\phi^{(1)} + \hat{P}_\phi^{(2)} - \hat{P}_\phi^{(1)} \hat{P}_\phi^{(2)} | \Psi \rangle \\ &= 1, \end{aligned} \quad (2.3.66)$$

par hypothèse. D'où,

$$\left(\hat{P}_\phi^{(1)} + \hat{P}_\phi^{(2)} - \hat{P}_\phi^{(1)} \hat{P}_\phi^{(2)} \right) |\Psi\rangle = |\Psi\rangle. \quad (2.3.67)$$

Considérons, maintenant, une base $\mathcal{B}_p = \{ |u_i\rangle \}_{i \in \{1, 2, \dots, d_p\}}$ de \mathcal{H}_p et supposons que le premier élément de cette base corresponde à $|\phi\rangle$. En décomposant le vecteur $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}^+$ dans la base $\mathcal{B} = \{ |u_i, u_j\rangle \}_{i, j \in \{1, 2, \dots, d_p\}}$ de \mathcal{H} , on obtient

$$|\Psi\rangle = \sum_{i, j=1}^{d_p} c_{ij} |u_i, u_j\rangle. \quad (2.3.68)$$

Vu que $|\Psi\rangle$ représente un état bosonique, il est nécessaire que

$$\begin{aligned} \hat{P}_{21} |\Psi\rangle &= |\Psi\rangle \\ \iff \sum_{i, j=1}^{d_p} c_{ij} \hat{P}_{21} |u_i, u_j\rangle &= \sum_{i, j=1}^{d_p} c_{ij} |u_i, u_j\rangle \\ \iff \sum_{i, j=1}^{d_p} (c_{ij} - c_{ji}) |u_i, u_j\rangle &= 0. \end{aligned} \quad (2.3.69)$$

Ainsi, $|\Psi\rangle$ appartient à l'espace \mathcal{H}^+ des états symétriques vis-à-vis de l'échange de deux particules si pour tout $i, j \in \{1, 2, \dots, d_p\}$,

$$c_{ij} = c_{ji}. \quad (2.3.70)$$

Explicitons, à présent, l'expression (2.3.67), notamment en y injectant la décomposition (2.3.68) de $|\Psi\rangle$ dans la base \mathcal{B} . On a,

$$\hat{P}_\phi^{(1)} |\Psi\rangle = \sum_{j=1}^{d_p} c_{1j} |\phi, u_j\rangle, \quad (2.3.71)$$

$$\hat{P}_\phi^{(2)} |\Psi\rangle = \sum_{i=1}^{d_p} c_{i1} |u_i, \phi\rangle \text{ et} \quad (2.3.72)$$

$$\left(\hat{P}_\phi^{(1)} \hat{P}_\phi^{(2)} \right) |\Psi\rangle = c_{11} |\phi, \phi\rangle. \quad (2.3.73)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \left(\hat{P}_\phi^{(1)} + \hat{P}_\phi^{(2)} - \hat{P}_\phi^{(1)} \hat{P}_\phi^{(2)} \right) |\Psi\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{d_p} c_{1j} |\phi, u_j\rangle + \sum_{i=1}^{d_p} c_{i1} |u_i, \phi\rangle - c_{11} |\phi, \phi\rangle. \end{aligned} \quad (2.3.74)$$

En définissant le vecteur normé

$$|\chi\rangle = \sqrt{\frac{4}{2 - |c_{11}|^2}} \left(\sum_{k=1}^{d_p} c_{1k} |u_k\rangle - \frac{c_{11}}{2} |\phi\rangle \right), \quad (2.3.75)$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \sqrt{\frac{2 - |c_{11}|^2}{4}} (|\phi, \chi\rangle + |\chi, \phi\rangle) \\ &= |\phi; \chi\rangle. \end{aligned} \quad (2.3.76)$$

Terminons cette preuve en spécifiant que les états $|\phi\rangle$ et $|\chi\rangle$ ne sont pas nécessairement orthogonaux. Effectivement, le produit scalaire

$$\begin{aligned} \langle \phi | \chi \rangle &= \sqrt{\frac{4}{2 - |c_{11}|^2}} \left(\sum_{k=1}^{d_p} c_{1k} \langle \phi | k \rangle - \frac{c_{11}}{2} \langle \phi | \phi \rangle \right) \\ &= c_{11} \sqrt{\frac{2}{2 - |c_{11}|^2}} \end{aligned} \quad (2.3.77)$$

est nul uniquement lorsque $c_{11} = 0$. □

Comme pour le cas des fermions, à partir de cette proposition (prop. 2.12), sur base de l'expression (2.3.76), on aimerait pouvoir affirmer qu'il suffit à l'un des sous-systèmes de posséder un ensemble complet de propriétés associé à l'état $|\phi\rangle$ pour que l'autre sous-système possède son propre ensemble associé à l'état $|\chi\rangle$. Malheureusement, les systèmes de bosons regorgent de caractéristiques subtiles et, avant toute conclusion, il est nécessaire d'envisager les trois cas suivants [7, 8] :

(1) : $|\phi\rangle = |\chi\rangle$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \hat{P}_\phi^{(1)} \hat{P}_\phi^{(2)} | \Psi \rangle &= \langle \phi; \phi | \hat{P}_\phi^{(1)} \hat{P}_\phi^{(2)} | \phi; \phi \rangle \\ &= 1 \end{aligned} \quad (2.3.78)$$

et, d'après la définition 2.4, chacun des bosons possède un ensemble complet de propriétés associé à l'état $|\phi\rangle$. Le système est donc séparé au regard de la définition 2.1.

(2) : $|\phi\rangle \perp |\chi\rangle$. Dans ce second cas, le coefficient c_{11} dans l'expression (2.3.75) de $|\chi\rangle$ est nul et

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \hat{P}_\phi^{(1)} \hat{P}_\phi^{(2)} | \Psi \rangle &= \langle \Psi | \hat{P}_\chi^{(1)} \hat{P}_\chi^{(2)} | \Psi \rangle \\ &= \langle \phi; \chi | \hat{P}_\phi^{(1)} \hat{P}_\phi^{(2)} | \phi; \chi \rangle \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.3.79)$$

On se retrouve alors dans la même situation que celle étudiée précédemment pour les fermions. La probabilité \mathbb{P}_{12} que l'une des deux particules possède un ensemble complet

de propriétés associées à $|\phi\rangle$ et que l'autre particule possède l'autre ensemble associé à $|\chi\rangle$ est égale à un grâce à l'orthogonalité entre $|\phi\rangle$ et $|\chi\rangle$. De fait,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{12} &= |\langle\phi, \chi|\Psi\rangle|^2 + |\langle\chi, \phi|\Psi\rangle|^2 \\
&= \langle\Psi| \left(|\phi, \chi\rangle\langle\phi, \chi| + |\chi, \phi\rangle\langle\chi, \phi| \right) |\Psi\rangle \\
&= {}_S\langle\phi; \chi| \hat{P}_\phi^{(1)} \hat{P}_\chi^{(2)} + \hat{P}_\chi^{(1)} \hat{P}_\phi^{(2)} |\phi; \chi\rangle_S \\
&= \frac{1}{2} \left(\langle\phi, \chi| + \langle\chi, \phi| \right) \left(\hat{P}_\phi^{(1)} \hat{P}_\chi^{(2)} + \hat{P}_\chi^{(1)} \hat{P}_\phi^{(2)} \right) \left(|\phi, \chi\rangle + |\chi, \phi\rangle \right) \\
&= 1
\end{aligned} \tag{2.3.80}$$

et l'état $|\Psi\rangle = |\phi; \chi\rangle_S$ est séparé.

- (3) : $|\phi\rangle \not\perp |\chi\rangle$. Dans ce troisième et dernier cas de figure, la probabilité \mathbb{P}_{12} n'est pas identiquement égale à zéro ou un comme précédemment. Pour citer Ghirardi *et al.* [7] : “Même si l'on peut affirmer qu'il y a un boson possédant les propriétés associées à $|\phi\rangle$ de même qu'il y a un boson possédant les propriétés associées à $|\chi\rangle$, nous ne pouvons pas affirmer que l'état (2.3.76) décrit un système pour lequel l'un des bosons possède les propriétés associées à $|\phi\rangle$ et l'autre, celles associées à $|\chi\rangle$. En réalité, dans le cas considéré, il existe une probabilité non nulle de trouver les deux particules dans le même état.” [Traduction libre]. L'état (2.3.76) est donc intriqué.

Le théorème suivant résulte des différents cas de figure discutés ci-haut. Sa démonstration repose sur la précédente discussion.

Théorème 2.13 (Réf. [8]). *Soit S un système composite constitué de deux parties bosoniques indiscernables. L'état global $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}^+$ est séparé si et seulement si soit :*

- (1) $|\Psi\rangle$ peut s'écrire comme

$$|\Psi\rangle = |\phi, \phi\rangle, \tag{2.3.81}$$

avec $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$

- (2) $|\Psi\rangle$ peut s'écrire comme le produit tensoriel symétrique

$$|\Psi\rangle = |\phi; \chi\rangle, \tag{2.3.82}$$

avec $|\phi\rangle, |\chi\rangle \in \mathcal{H}_p$, deux états orthonormés.

2.3.3.2 Décomposition de Schmidt et second critère d'intrication

De manière similaire aux systèmes de deux fermions identiques, il existe une décomposition systématique d'états bosoniques dans une certaine base de $\mathcal{H} = \mathcal{H}_p \otimes \mathcal{H}_p$. Une telle décomposition repose sur le *lemme d'Autonne* et est appelée *décomposition de Schmidt*.

Au moyen de cette décomposition, il sera possible de dresser un nouveau critère d'intrication reposant sur la notion de *nombre de Schmidt* à définir prochainement.

Lemme 2.14 (Autonne [8, 23]). *Soit $C \in M_n$ une matrice carrée de dimension n . C est symétrique si et seulement si il existe $U \in M_n$, une matrice unitaire et $\Sigma \in M_n$, une matrice diagonale telles que $C = U\Sigma U^\top$. En particulier, les éléments diagonaux de Σ correspondent aux valeurs singulières de C .*

Théorème 2.15 (Décomposition de Schmidt [8]). *Soit $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}^+ \subset \mathcal{H} = \mathbb{C}^{(2s+1)^2}$ un vecteur d'état décrivant un système de deux particules bosoniques indiscernables de spin s . Il existe une décomposition de $|\Psi\rangle$ de la forme*

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^{2s+1} b_i |i, i\rangle \quad (2.3.83)$$

avec $|1\rangle, |2\rangle, \dots, |2s+1\rangle$, des vecteurs orthonormés formant une base de $\mathcal{H}_p = \mathbb{C}^{2s+1}$ et b_i , des coefficients réels satisfaisant à la condition de normalisation $\sum_{i=1}^{2s+1} b_i^2 = 1$.

Démonstration.

De la même façon que lors de la démonstration du théorème 2.9 consacré à la décomposition de Slater d'états fermioniques, considérons les vecteurs $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}^+$ et $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ tels que $|\Psi\rangle = \mathcal{N}\hat{S}|\psi\rangle$ ainsi qu'une base $\mathcal{B} = \{|i, j\rangle\}_{i,j \in \{1,2,\dots,2s+1\}}$ de \mathcal{H} . La décomposition de $|\psi\rangle$ dans la base \mathcal{B} donne successivement

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \mathcal{N}\hat{S}|\psi\rangle \\ &= \mathcal{N} \sum_{i,j=1}^{2s+1} c_{ij} \hat{S}|i, j\rangle \\ &= \frac{\mathcal{N}}{2} \sum_{i,j=1}^{2s+1} (c_{ij} + c_{ji}) |i, j\rangle \\ &= \frac{\mathcal{N}}{2} \sum_{i,j=1}^{2s+1} (C)_{ij} |i, j\rangle \end{aligned} \quad (2.3.84)$$

avec $C \in M_{2s+1}$, la matrice carrée symétrique d'éléments $(C)_{ij} = c_{ij} + c_{ji}$.

Par application du lemme d'Autonne (lem. 2.14), il s'ensuit que

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \sum_{i,j=1}^{2s+1} (C)_{ij} |i, j\rangle \\ &= \frac{\mathcal{N}}{2} \sum_{i,j=1}^{2s+1} \sum_{k,l=1}^{2s+1} (U)_{ik} (\Sigma)_{kl} (U^\top)_{lj} |i, j\rangle \\ &= \frac{\mathcal{N}}{2} \sum_{k=1}^{2s+1} z_k \left(\sum_{i=1}^{2s+1} (U)_{ik} |i\rangle \right) \otimes \left(\sum_{j=1}^{2s+1} (U)_{jk} |j\rangle \right) \\ &= \frac{\mathcal{N}}{2} \sum_{k=1}^{2s+1} z_k |k', k'\rangle, \end{aligned} \quad (2.3.85)$$

avec $|k'\rangle = \sum_{i=1}^{2s+1} (U)_{ik} |i\rangle$ désignant un élément d'une nouvelle base. La condition de normalisation impose que

$$\frac{|\mathcal{N}|^2}{4} \sum_{k=1}^{2s+1} b_k^2 = 1. \quad (2.3.86)$$

D'où, à un facteur de phase global près,

$$\mathcal{N} = \frac{2}{\sqrt{\sum_{k=1}^{2s+1} z_k^2}}. \quad (2.3.87)$$

La thèse est dès lors démontrée en posant

$$b_i = \frac{z_i}{\sqrt{\sum_{k=1}^{2s+1} z_k^2}}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, 2s+1\}. \quad (2.3.88)$$

□

Définition 2.16 (Nombre de Schmidt [8]). Le nombre de coefficients b_i non nuls pour une décomposition de la forme (2.3.83) est appelé le *nombre de Schmidt* (notation : N_{Sc}).

Tout comme le nombre de Slater N_{Sl} , le nombre de Schmidt N_{Sc} est utile pour déterminer si un état symétrique donné est intriqué ou non. Plusieurs cas sont à considérer selon sa valeur.

Premièrement, lorsque le nombre de Schmidt d'un vecteur d'état $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}^+$ est égal à un, il existe un vecteur $|1\rangle \in \mathcal{H}$ tel que

$$|\Psi\rangle = |1, 1\rangle. \quad (2.3.89)$$

Il s'agit du cas trivial de deux bosons occupant le même état.

À l'inverse, la décomposition de Schmidt de tout état bosonique $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}^+$ caractérisé par un nombre de Schmidt égal à deux est

$$|\Psi\rangle = b_1 |1, 1\rangle + b_2 |2, 2\rangle \quad (2.3.90)$$

où $|1\rangle, |2\rangle \in \mathcal{H}$ sont deux états orthonormés et $b_1, b_2 \in \mathbb{R}_0^+$. Comme le montre la proposition 2.17, le vecteur $|\Psi\rangle$ est séparé si et seulement si les coefficients b_1 et b_2 sont égaux.

Proposition 2.17 (Réf. [8]). Soit $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}^+$ l'état décrivant un système S de deux bosons identiques. Supposons que le nombre de Schmidt de l'état $|\Psi\rangle$ soit égal à deux. Il s'ensuit que

$$|\Psi\rangle = b_1 |1, 1\rangle + b_2 |2, 2\rangle, \quad (2.3.91)$$

où $|1\rangle$ et $|2\rangle$ sont deux états orthonormés et $b_1, b_2 \in \mathbb{R}_0^+$ tels que $b_1^2 + b_2^2 = 1$. L'état $|\Psi\rangle$ est séparé si et seulement si $b_1 = b_2$.

Démonstration.

(Condition nécessaire). Soit $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}^+$. Si la décomposition de Schmidt de cet état est

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= b_1 |1, 1\rangle + b_2 |2, 2\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1, 1\rangle + |2, 2\rangle \right), \end{aligned} \quad (2.3.92)$$

avec $|1\rangle, |2\rangle \in \mathcal{H}_p$, deux éléments de base et $b_1 = b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ par hypothèse alors, en posant

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1\rangle - i |2\rangle \right) \text{ et} \quad (2.3.93)$$

$$|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1\rangle + i |2\rangle \right), \quad (2.3.94)$$

il vient que

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi\rangle + |\chi\rangle) \text{ et} \quad (2.3.95)$$

$$|2\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(|\phi\rangle - |\chi\rangle). \quad (2.3.96)$$

Donc, le vecteur (2.3.92) devient

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{2} (|\phi, \phi\rangle + |\phi, \chi\rangle + |\chi, \phi\rangle + |\chi, \chi\rangle) - \frac{1}{2} (|\phi, \phi\rangle - |\phi, \chi\rangle - |\chi, \phi\rangle + |\chi, \chi\rangle) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\phi, \chi\rangle + |\chi, \phi\rangle) \\ &= |\phi; \chi\rangle. \end{aligned} \quad (2.3.97)$$

De plus,

$$\langle \phi | \chi \rangle = 0, \quad (2.3.98)$$

ce qui conclut la preuve, en appliquant le théorème 2.13.

(Condition suffisante). Par hypothèse, $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ est séparé, ce qui signifie qu'il existe deux vecteurs orthogonaux $|\phi\rangle$ et $|\chi\rangle$ tels que

$$|\Psi\rangle = |\phi; \chi\rangle \quad (2.3.99)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\phi, \chi\rangle + |\chi, \phi\rangle). \quad (2.3.100)$$

Considérons les vecteurs orthonormés

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\phi\rangle + |\chi\rangle) \quad (2.3.101)$$

$$|2\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} (|\phi\rangle - |\chi\rangle). \quad (2.3.102)$$

Similairement, en inversant les relations (2.3.101) et (2.3.102) afin d'isoler $|\phi\rangle$ et $|\chi\rangle$ et en injectant les relations obtenues dans (2.3.100), on conclut que

$$|\Psi\rangle = b_1 |1, 1\rangle + b_2 |2, 2\rangle, \quad (2.3.103)$$

avec $b_1 = b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. □

Enfin, il est démontré dans les deux situations précédentes que lorsque l'état $|\Psi\rangle$ du système composite est de la forme $|\Psi\rangle = |\phi; \chi\rangle$, avec $|\phi\rangle$ et $|\chi\rangle$ pouvant être orthogonaux ou égaux, cela mène à un nombre de Schmidt égal à un ou deux. Une décomposition de Schmidt caractérisée par N_{Sc} égal à trois ou plus ne peut, dès lors, en aucun cas décrire un état séparé.

2.4 Résumé et récapitulatif du chapitre deux

Riche en nouveaux concepts, le deuxième et avant dernier chapitre de ce mémoire s'est voulu, avec autant de clarté que possible, introduire une nouvelle approche de l'intrication conceptuellement différente de l'approche standard. Que ce soit pour les systèmes discernables ou indiscernables, fermioniques ou bosoniques, celle-ci se base sur l'attribution d'un ensemble complet de propriétés à chacun des deux constituants du système composite considéré.

Comme on devait s'y attendre, la nouvelle définition de l'intrication (déf. 2.1) et l'ancienne (déf. 1.1) sont strictement équivalentes dans le cas particulier de systèmes de particules discernables. Moyennant cette nouvelle approche, la définition 1.1 devient une conséquence directe de la nouvelle définition (déf. 2.1).

Ensuite, en adoptant deux nouvelles notations : \otimes_A et \otimes_S désignant le produit tensoriel antisymétrique et symétrique, respectivement, deux critères d'intrication similaires peuvent être établis à partir des propositions 2.6 (sect. 2.3.2.1) et 2.12 (sect. 2.3.3.1). Le tableau suivant (tab. 2.1) reprend ces critères et les compare entre-eux.

Discernabilité	Critère de séparabilité
Particules discernables	$ \Psi\rangle = \phi, \chi\rangle$ (thm. 2.3)
Particules indiscernables (fermions)	$ \Psi\rangle = \phi; \chi\rangle_A$ (avec $ \phi\rangle \perp \chi\rangle$) (thm. 2.7)
Particules indiscernables (bosons)	$ \Psi\rangle = \phi; \chi\rangle_S$ (avec $ \phi\rangle = \chi\rangle$ ou $ \phi\rangle \perp \chi\rangle$) (thm. 2.13)

TABLE 2.1 – Tableau récapitulatif des premiers critères d'intrication pour de systèmes discernables, indiscernables (bosons et fermions). Dans la colonne de droite, $|\phi\rangle$ et $|\chi\rangle$ désignent deux états normés à un corps et $|\Psi\rangle$, l'état du système composite S .

Un fois ces premiers critères élaborés, que ce soit pour les fermions ou les bosons, nous avons montré l'existence d'une décomposition systématique (décomposition de Slater et de Schmidt) consistant à effectuer une transformation de base dans laquelle la matrice de représentation des composantes de l'état fermionique ou bosonique considéré possède une forme particulière. Ces deux décompositions permettent de définir les notions de nombre de Slater N_{Sl} et de Schmidt N_{Sc} , lesquels servent de socle de base à de nouveaux critères d'intrication.

Là où le critère d'intrication basé sur le nombre de Slater est strict, dans la mesure où ce nombre ne peut valoir qu'un pour que le système soit séparé, il n'est pas possible d'être aussi tranché en ce qui concerne le nombre de Schmidt. En effet, lorsque celui-ci est égal à deux, cela mène à une indétermination dans ce sens qu'une décomposition de Schmidt caractérisée par $N_{Sc} = 2$ ne permet aucunement de se prononcer quant à la séparabilité de l'état $|\Psi\rangle$ considéré sur unique base de ce nombre de Schmidt. Il est alors nécessaire de faire appel aux coefficients

d'une telle décomposition. Le schéma ci-après (fig. 2.2) reprend ces différents critères.

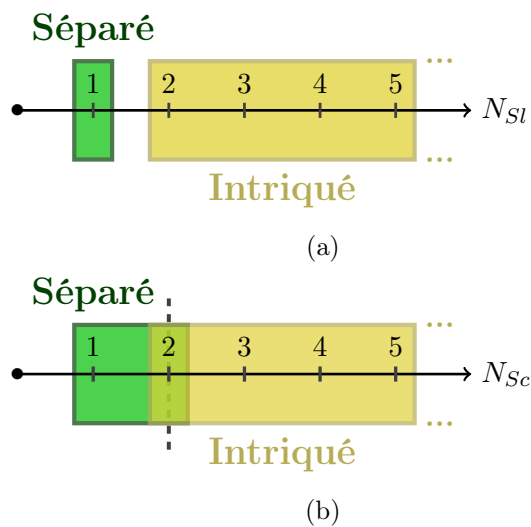


FIGURE 2.2 – Représentation schématique sur la demi-droite réelle positive des différentes valeurs que peut prendre (2.2a) le nombre Slater pour que l'état $|\Psi\rangle$ d'un système de deux fermions soit séparé et (2.2b) le nombre de Schmidt d'un système de deux bosons.

Pour clore ce chapitre, nous présentons ci-joint, le *roadmap* mis à jour (fig. 2.3).

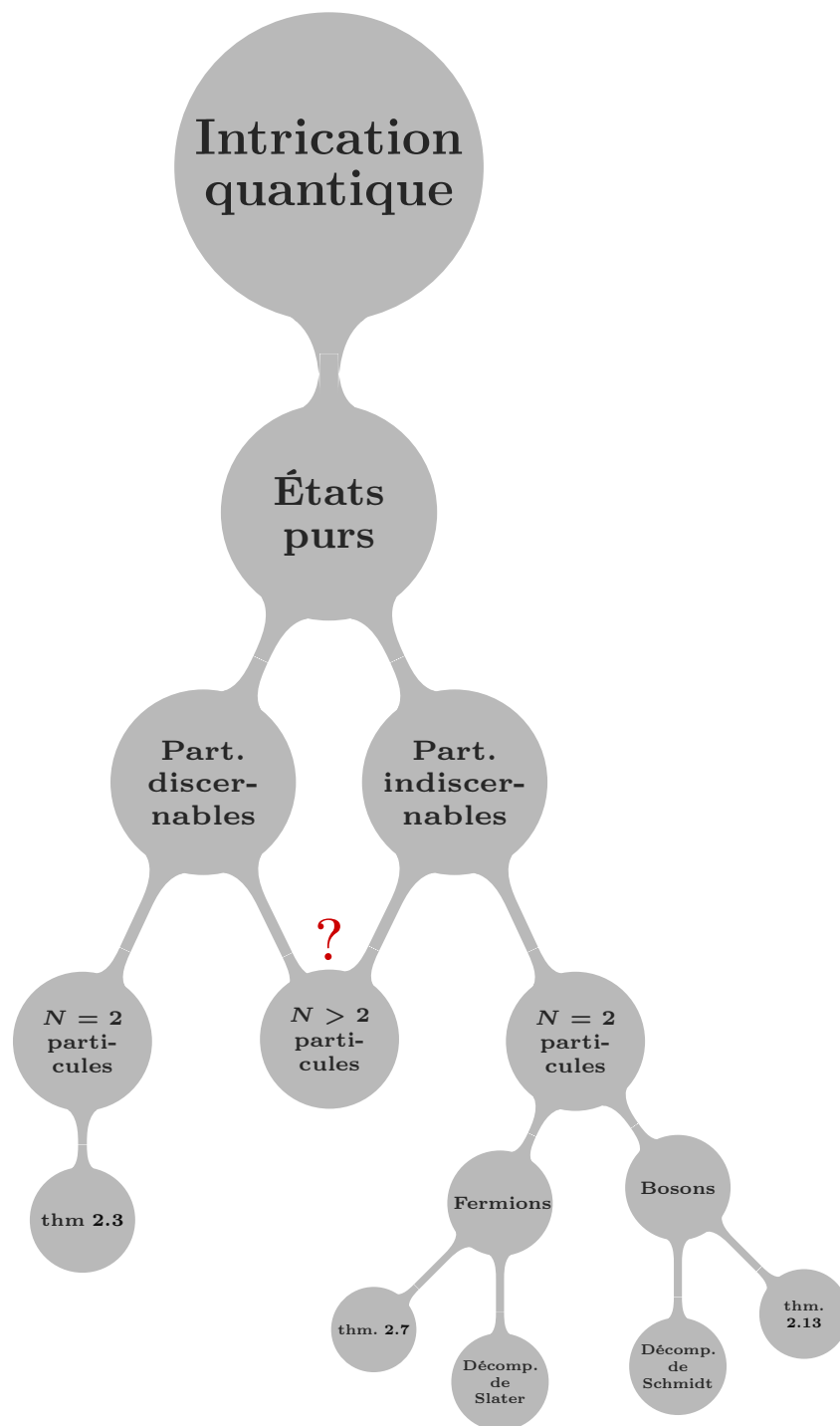


FIGURE 2.3 – Mise à jour du roadmap. Après avoir redéfini le concept d'intrication pour les systèmes discernables, le seul et unique critère de ce mémoire pour de tels système a été dressé (thm. 2.3). Ce critère liant séparabilité des états purs et factorisation du vecteur d'état correspond simplement à l'ancienne définition de l'intrication. Ensuite, ce concept d'intrication a été étendu aux systèmes de particules indiscernables en commençant par les fermions. De là, deux critères ont été établis : un premier (thm. 2.7) basé sur l'antisymétrisation de deux états normés et un second (cor. 2.11) nécessitant l'introduction de tout un arsenal mathématique dont notamment, la décomposition de Slater. En ce qui concerne les bosons, un critère analogue aux fermions basé sur la symétrisation de deux états orthonormés (thm. 2.13) a été dressé avant de présenter un second critère reposant sur la décomposition de Schmidt. Dans ce chapitre, nous nous sommes limités aux systèmes de deux particules. L'extension des différents concepts et critères établis aux systèmes de N particules ($N \geq 2$) sera étudiée au chapitre suivant.

Chapitre 3

L'intrication quantique : nouvelle approche (cas de $N \geq 2$ particules)

“The doctrine that the world is made up of objects whose existence is independent of human consciousness turns out to be in conflict with quantum mechanics and with facts established by experiment.”

B. D'ESPAGNAT [24]

Dans ce troisième et dernier chapitre, nous tentons d'étendre les concepts abordés précédemment aux systèmes de plus de deux particules.

Pour ce faire, à la section 3.1, pour les systèmes constitués de particules discernables, nous présenterons l'extension à N corps de la définition 2.2 d'*ensemble complet de propriétés* (sect. 3.1.1). Dans un second temps (sect. 3.1.2), nous nous consacrerons à la généralisation aux systèmes multipartites indiscernables de ce concept d'*ensemble complet de propriétés*. Puisque celui-ci se base sur des considérations probabilistes plus élaborées, nous proposerons une définition reposant sur une formule appelée *formule de Poincaré* (voir prop. C.2, app. C) ainsi que sur les arguments avancés par Ghirardi *et al.* [7,8] pour les systèmes de deux particules. Cette nouvelle définition devra être identique à la définition 2.4 lorsque particularisée aux systèmes bipartites. La sous-section 3.1.2.1 est consacrée à l'application de la *formule de Poincaré* à de tels systèmes alors que la sous-section 3.1.2.2 s'attelle aux systèmes tripartites. Ce n'est qu'après avoir envisagé toutes ces considérations théoriques que nous serons en mesure de présenter la définition de l'*intrication* pour ces systèmes multipartites à la section 3.1.3. Nous poursuivrons alors en nous assurant, comme au deuxième chapitre, que l'ancienne approche de l'intrication et la nouvelle approche sont, dans le cadre discernable, équivalentes au travers d'un théorème (thm. 3.4) dont la démonstration fait appel au théorème 2.3.

Finalement, nous dresserons une condition suffisante sur l'état d'un système fermionique S pour que celui-ci soit séparé en section 3.2.

3.1 Ensemble complet de propriétés et définition de l'intrication

3.1.1 Définition d'ensemble complet de propriétés : cas discernable

Considérons un système composite S constitué de $N \geq 2$ parties distinctes dénotées S_1, S_2, \dots, S_N . Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, notons \mathcal{H}_i , l'espace des états associé au sous-système S_i . De cette façon, l'espace des états global \mathcal{H} du système composite S est

$$\mathcal{H} = \bigotimes_{i=1}^N \mathcal{H}_i. \quad (3.1.1)$$

La définition suivante est une généralisation de la définition 2.2 aux systèmes constitués d'un nombre arbitraire de particules.

Définition 3.1 (Ensemble complet de propriétés). Soit $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ le vecteur décrivant l'état du système composite S et soit $i \in \{1, 2, \dots, N\}$. Le sous-système S_i possède un ensemble complet de propriétés si et seulement s'il existe un projecteur $\hat{P}_\phi^{(i)} = |\phi\rangle\langle\phi| \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_i)$ sur un vecteur ket $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_i$ tel que

$$\langle\Psi|\hat{P}_\phi^{(i)}|\Psi\rangle = 1. \quad (3.1.2)$$

Pour rappel, le produit scalaire $\langle\Psi|\hat{P}_\phi^{(i)}|\Psi\rangle$ correspond à la probabilité que la particule dotée du label (i) occupe l'état $|\phi\rangle$.

3.1.2 Définition d'ensemble complet de propriétés : cas indiscernable

Comme annoncé au chapitre deux, les systèmes de particules indiscernables requièrent une attention particulière. Dans la prochaine section, nous étendrons la définition d'*ensemble complet de propriétés* (déf. 2.4) aux systèmes de $N \geq 2$ particules indiscernables.

Avant d'aborder cette notion qui repose sur la *formule de Poincaré* il convient d'établir le cadre mathématique et physique afin de fixer les notations. Nous considérons un système de N particules indiscernables toutes labellisées arbitrairement $(1), (2), \dots, (N)$. L'espace des états global \mathcal{H} est constitué du produit tensoriel de chacun des N espaces à un corps identiques \mathcal{H}_p . Nous adopterons la notation suivante pour l'espace \mathcal{H} :

$$\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}_p^{\otimes N} = \bigotimes_{i=1}^N \mathcal{H}_p. \quad (3.1.3)$$

Ensuite, définissons les vecteurs normés $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ et $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_p$ désignant l'état global du système composite, et un état à un corps, respectivement et posons A_1, A_2, \dots, A_N , les évènements suivants

$$\begin{aligned} A_1 &= \text{"La particule (1) occupe l'état } |\phi\rangle\text{"}, \\ A_2 &= \text{"La particule (2) occupe l'état } |\phi\rangle\text{"}, \\ &\vdots \\ A_N &= \text{"La particule (N) occupe l'état } |\phi\rangle\text{"}. \end{aligned}$$

Enfin, introduisons le projecteur $\hat{P}_\phi = |\phi\rangle\langle\phi| \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_p)$. De cette manière, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, nous sommes capables de déterminer la probabilité $\mathbb{P}(A_i)$ que la particule dotée du label (i) occupe l'état $|\phi\rangle$. Cette probabilité est donnée par

$$\mathbb{P}(A_i) = \langle \Psi | \hat{P}_\phi^{(i)} | \Psi \rangle. \quad (3.1.4)$$

Il est à noter que la probabilité $\mathbb{P}(A_i)$ à elle seule n'a aucune signification physique étant donné l'indiscernabilité des particules considérées. C'est en combinant les diverses probabilités de la forme (3.1.4) que l'on peut effectuer une étude théorique du système considéré.

Ces quelques notions et notations étant introduites, nous avons tout en main pour présenter la définition suivante qui est une généralisation de la définition 2.4. On dira que l'une des particules possède un *ensemble complet de propriétés* associé à $|\phi\rangle$ si la probabilité $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^N A_i)$ que l'une des particules occupe l'état $|\phi\rangle$ est identiquement égale à un. Dans le but d'expliciter cette probabilité, nous nous servons de la *formule de Poincaré* (éq. C.2.1) aussi appelée *formule du crible de Poincaré* dans la littérature.

Définition 3.2 (Ensemble complet de propriétés). Soit $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ l'état décrivant le système composite S . L'un des sous-systèmes de S possède un ensemble complet de propriétés si et seulement s'il existe un projecteur $\hat{P}_\phi = |\phi\rangle\langle\phi| \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_p)$ sur un vecteur ket $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_p$ tel que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^N A_i\right) &= \sum_{i=1}^N \mathbb{P}(A_i) + \sum_{k=2}^N (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq N} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}\right) \\ &= 1 \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

ou, écrit autrement

$$\langle \Psi | \sum_{i=1}^N \hat{P}_\phi^{(i)} + \sum_{k=2}^N (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq N} \prod_{j=1}^k \hat{P}_\phi^{(i_j)} | \Psi \rangle = 1. \quad (3.1.6)$$

Les différents éléments de la somme $\sum_{k=2}^N (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq N} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}\right)$ de la définition ci-haut correspondent à des probabilités d'intersection ce qui signifie que tous ces termes sont nuls lorsque l'on est amené à envisager des systèmes fermioniques.

De plus, puisque la définition 3.2 se veut être une généralisation de la notion d'ensemble complet de propriétés (déf. 2.4) définie au chapitre précédent, il est nécessaire de retrouver cette dernière dans le cas particulier de systèmes bipartites. Dans la prochaine sous-section, nous tenterons de particulariser la définition 3.2 aux systèmes de deux particules et dans celle d'après, nous nous intéresserons au cas plus général de trois particules.

3.1.2.1 Particularisation aux systèmes de deux particules

En utilisant les notations définies précédemment, la probabilité $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2)$ que l'une des deux particules considérées occupe l'état normé $|\phi\rangle$ est égale à la somme des probabilités individuelles $\mathbb{P}(A_1)$ et $\mathbb{P}(A_2)$ à laquelle il est nécessaire de retrancher la probabilité de l'intersection $A_1 \cap A_2$ étant donné qu'elle a été comptée une fois de trop. En d'autres termes,

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \quad (3.1.7)$$

$$= \langle \Psi | \hat{P}_\phi^{(1)} + \hat{P}_\phi^{(2)} - \hat{P}_\phi^{(1)} \hat{P}_\phi^{(2)} | \Psi \rangle. \quad (3.1.8)$$

Dans le contexte de systèmes bipartites, les définitions 2.4 et 3.2 sont donc, comme l'on devait s'y attendre, équivalentes.

Le schéma ci-après permet de mieux visualiser la formule de Poincaré (éq. 3.1.7) pour deux évènements non disjoints.

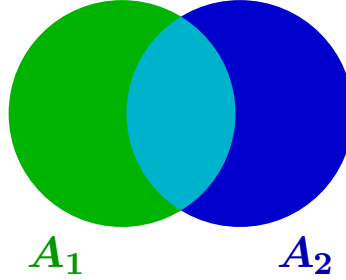


FIGURE 3.1 – Lorsque l'on calcule la probabilité de l'union $A_1 \cup A_2$ des évènements A_1 (vert) et A_2 (bleu), il est nécessaire de sommer la probabilité de ces évènements individuels. Cependant, en procédant de la sorte, la partie en cyan correspondant à l'évènement $A_1 \cap A_2$ est comptée deux fois. Il est alors impératif de la retrancher à la somme afin de rendre compte correctement de la probabilité $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2)$. On aboutit alors à la formule de Poincaré (éq. 3.1.7) dans le cas de deux évènements non nécessairement disjoints.

3.1.2.2 Particularisation aux systèmes de trois particules

La complexité de la formule de Poincaré (eq. C.2.1) est d'autant plus grande que le nombre de particules considéré est élevé. Pour un système de trois particules ($N = 3$), en utilisant les notations habituelles de ce chapitre, la probabilité $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ est intuitivement obtenue en prenant la somme des évènements individuels, en y retranchant les probabilités des diverses intersections $A_1 \cap A_2$, $A_1 \cap A_3$ et $A_2 \cap A_3$ d'évènements deux à deux et enfin, en y ajoutant la probabilité de l'évènement $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ qui n'avait alors pas encore été prise en compte. Le diagramme 3.2 permet immédiatement de justifier le raisonnement effectué et de comprendre la formule de Poincaré explicitée ci-après.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^3 A_i\right) &= \sum_{i=1}^3 \mathbb{P}(A_i) + \sum_{k=2}^3 (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq 3} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}\right) \\ &= \sum_{i=1}^3 \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i_1=1}^3 \sum_{i_2=i_1+1}^3 \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^2 A_{i_j}\right) + \sum_{i_1=1}^3 \sum_{i_2=i_1+1}^3 \sum_{i_3=i_2+1}^3 \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^3 A_{i_j}\right) \\ &= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= \langle \Psi | \hat{P}_\phi^{(1)} + \hat{P}_\phi^{(2)} + \hat{P}_\phi^{(3)} - \hat{P}_\phi^{(1)} \hat{P}_\phi^{(2)} - \hat{P}_\phi^{(1)} \hat{P}_\phi^{(3)} - \hat{P}_\phi^{(2)} \hat{P}_\phi^{(3)} + \hat{P}_\phi^{(1)} \hat{P}_\phi^{(2)} \hat{P}_\phi^{(3)} | \Psi \rangle \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

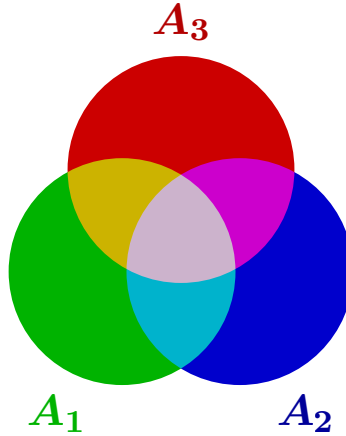


FIGURE 3.2 – Diagramme de Venn représentant trois évènements non disjoints A_1 (vert), A_2 (bleu) et A_3 (rouge). Dans le contexte de trois évènements, la probabilité $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ est légèrement plus complexe à calculer. En suivant la même ligne de conduite que précédemment, c'est-à-dire en calculant la somme des probabilités individuelles et en retranchant la probabilité des recouvrements $A_1 \cap A_2$ (cyan), $A_1 \cap A_3$ (jaune) ainsi que $A_2 \cap A_3$ (magenta), l'on omet de considérer l'évènement $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ (blanc).

Pour récapituler, la formule de Poincaré se particularise intuitivement aux systèmes de deux et trois particules à l'aide des diagrammes de Venn (figs. 3.1, 3.2). En ce qui concerne les systèmes composés d'un nombre quelconque de constituants, la procédure intuitive d'application de la formule de Poincaré reste toujours la même : sommer, en premier lieu, la probabilité des évènements individuels ; retrancher la somme des probabilités d'intersection des évènements deux à deux ; additionner la somme des probabilités d'intersection d'évènement trois à trois et ainsi de suite.

3.1.3 Définition de l'intrication

Le concept d'ensemble complet de propriétés étant défini pour des systèmes de N constituants discernables et indiscernables, la définition de la *séparabilité* des états purs peut alors être présentée pour un nombre quelconque de particules. Celle-ci est une généralisation de la définition 2.1 présentée au précédent chapitre.

Pour ce faire, considérons un système composite S constitué de $N \geq 2$ particules discernables ou non et, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, notons \mathcal{H}_i , l'espace des états à un corps associé à la particule dotée du label (i) . L'espace des états global est alors

$$\mathcal{H} = \bigotimes_{i=1}^N \mathcal{H}_i. \quad (3.1.10)$$

Définition 3.3 (Séparabilité des états purs). Le système S est *totalemment séparé* si chacun des sous-systèmes S_1, S_2, \dots, S_N possède un ensemble complet de propriétés. Dans le cas contraire, S est *intriqué*.

Le théorème 2.3 abordé au deuxième chapitre montre, entre autres, que pour un système de deux particules discernables, si l'un des deux constituants possède un ensemble complet de propriétés alors, l'autre possède également son propre ensemble. Un théorème (thm. 3.4) tout

à fait analogue peut être établi dans le contexte plus général de N particules discernables. Sa démonstration repose, d'ailleurs, sur le théorème 2.3.

D'une part, le but de ce théorème est de montrer l'équivalence entre la définition standard de l'intrication (déf. 1.1) et la nouvelle approche (déf. 3.3) pour des systèmes de N particules discernables et d'autre part, de montrer que lorsque $N - 1$ sous-systèmes possèdent leur propre ensemble complet de propriétés alors, le $N^{\text{ème}}$ sous-système possède également son propre ensemble de propriétés, comme l'ont remarqués Ghirardi *et al.* [7].

C'est pourquoi S désignera, dans le prochain théorème, un système composite constitué de N parties distinctes S_1, S_2, \dots, S_N .

Théorème 3.4 (Réf. [7]). *Le système S est totalement séparé si et seulement s'il existe $|\phi_1\rangle \in \mathcal{H}_1, |\phi_2\rangle \in \mathcal{H}_2, \dots, |\phi_N\rangle \in \mathcal{H}_N$ tels que l'état global $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ de S est un état produit tensoriel i.e*

$$|\Psi\rangle = |\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N\rangle. \quad (3.1.11)$$

Démonstration.

La démonstration est directe en appliquant le théorème 2.3. En effet, considérons les sous-systèmes S_1 et $S_{2,\dots,N}$ tels que $S_1 + S_{2,\dots,N} = S$. Ceux-ci sont séparés si et seulement s'il existe $|\phi_1\rangle \in \mathcal{H}_1$ et $|\phi_{2,\dots,N}\rangle \in \bigotimes_{i=2}^N \mathcal{H}_i$ tels que l'état global $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ du système S puisse s'écrire comme

$$|\Psi\rangle = |\phi_1, \phi_{2,\dots,N}\rangle. \quad (3.1.12)$$

Poursuivons en appliquant à nouveau le théorème 2.3 aux systèmes S_2 et $S_{3,\dots,N}$ qui sont séparés si et seulement s'il existe $|\phi_2\rangle \in \mathcal{H}_2$ et $|\phi_{3,\dots,N}\rangle \in \bigotimes_{j=3}^N \mathcal{H}_j$ tels que

$$|\phi_{2,\dots,N}\rangle = |\phi_2, \phi_{3,\dots,N}\rangle. \quad (3.1.13)$$

De cette façon,

$$|\Psi\rangle = |\phi_1, \phi_2, \phi_{3,\dots,N}\rangle. \quad (3.1.14)$$

La thèse se démontre alors en continuant cette ligne de conduite. □

3.2 Critère d'intrication fermionique

À partir des nouvelles définitions (défs. 3.2, 3.3) mises en place, essayons d'ébaucher un critère de séparabilité d'états fermioniques, ceux-ci étant plus simples à traiter dans un premier temps. En reprenant le tableau 2.1 récapitulatif de quelques critères de séparabilité des états purs dans le contexte de systèmes bipartites, il est naturel de se demander si de tels critères existent dans le cadre plus général de systèmes multipartites. Nous avons démontré à la section précédente que le critère 2.3 pouvait être généralisé, donnant lieu au théorème 3.4. Qu'en est-il du critère 2.7?

Le prochain théorème constitue une condition suffisante sur l'état $|\Psi\rangle$ d'un système composite S décrivant un système de N fermions indiscernables pour que S soit totalement séparé. Nous noterons \mathcal{H}_p , l'espace des états à un corps.

Théorème 3.5. *Soit S un système fermionique constitué de N parties indiscernables. Si l'état $|\Psi\rangle$ du système composite est de la forme*

$$|\Psi\rangle = |\phi_1; \phi_2; \dots; \phi_N\rangle_A, \quad (3.2.1)$$

avec $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, \dots, |\phi_N\rangle \in \mathcal{H}_p$ orthonormés alors S est totalement séparé.

Remarque : la notation

$$\mathcal{N}\hat{A}|\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N\rangle \equiv |\phi_1; \phi_2; \dots; \phi_N\rangle_A$$

est une simple généralisation de la notation (2.3.14) adoptée au chapitre deux. Dans le contexte précis du théorème 3.5, en vertu de l'orthogonalité des états à un corps $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, \dots, |\phi_N\rangle$, la constante de normalisation \mathcal{N} est égale à $\sqrt{N!}$.

Démonstration.

Soit $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ l'état du système composite S . Par hypothèse, il existe N vecteurs orthonormés $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, \dots, |\phi_N\rangle \in \mathcal{H}_p$ tels que

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\pi \in S_N} \text{sgn}(\pi) \hat{P}_\pi |\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N\rangle. \quad (3.2.2)$$

Montrons que S est totalement séparé, c'est-à-dire que pour tout $j \in \{1, 2, \dots, N\}$, il existe $\hat{P}_{\phi_j} = |\phi_j\rangle\langle\phi_j| \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_p)$ vérifiant la condition (3.1.6) qui, pour des fermions, se résume à

$$\langle\Psi| \sum_{i=1}^N \hat{P}_{\phi_j}^{(i)} |\Psi\rangle = \sum_{i=1}^N \langle\phi_1; \phi_2; \dots; \phi_N| \hat{P}_{\phi_j}^{(i)} |\phi_1; \phi_2; \dots; \phi_N\rangle. \quad (3.2.3)$$

Soit $i \in \{1, 2, \dots, N\}$. Pour tout $j \in \{1, 2, \dots, N\}$, on a

$$\begin{aligned} \hat{P}_{\phi_j}^{(i)} |\phi_1; \phi_2; \dots; \phi_N\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\pi \in S_N} \text{sgn}(\pi) \hat{P}_{\phi_j}^{(i)} \hat{P}_\pi |\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\pi \in S_N} \text{sgn}(\pi) \hat{P}_\pi \hat{P}_\pi^{-1} \hat{P}_{\phi_j}^{(i)} \hat{P}_\pi |\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\pi \in S_N} \text{sgn}(\pi) \hat{P}_\pi \hat{P}_{\phi_j}^{(\pi^{-1}(i))} |\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N\rangle \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

où l'on a fait appel à la propriété 1.2.17. Donc, par application de la propriété 1.2.16, il vient que

$$\begin{aligned} \langle\phi_1; \phi_2; \dots; \phi_N| \hat{P}_{\phi_j}^{(i)} |\phi_1; \phi_2; \dots; \phi_N\rangle &= \langle\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N| \sum_{\pi \in S_N} \text{sgn}(\pi) \hat{A} \hat{P}_\pi \hat{P}_{\phi_j}^{(\pi^{-1}(i))} |\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N\rangle \\ &= \langle\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N| \sum_{\pi \in S_N} \text{sgn}^2(\pi) \hat{A} \hat{P}_{\phi_j}^{(\pi^{-1}(i))} |\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N\rangle \\ &= \langle\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N| \sum_{\pi \in S_N} \hat{A} \hat{P}_{\phi_j}^{(\pi^{-1}(i))} |\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N\rangle. \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Étant donné l'orthogonalité des états $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, \dots, |\phi_N\rangle$, le vecteur $\hat{P}_{\phi_j}^{(\pi^{-1}(i))} |\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N\rangle$ est non nul uniquement lorsque $\pi^{-1}(i) = j$ ce qui arrive $(N-1)!$ fois en considérant tous les éléments du groupe symétrique S_N . Donc,

$$\sum_{\pi \in S_N} \hat{P}_{\phi_j}^{(\pi^{-1}(i))} |\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N\rangle = (N-1)! |\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N\rangle \quad (3.2.6)$$

et

$$\begin{aligned} \langle \phi_1; \phi_2; \dots; \phi_N | \hat{P}_{\phi_j}^{(i)} | \phi_1; \phi_2; \dots; \phi_N \rangle &= (N-1)! \langle \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N | \hat{A} | \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N \rangle \\ &= \frac{1}{N}. \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Finalement, pour tout $j \in \{1, 2, \dots, N\}$,

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \sum_{i=1}^N \hat{P}_{\phi_j}^{(i)} | \Psi \rangle &= \sum_{i=1}^N \langle \phi_1; \phi_2; \dots; \phi_N | \hat{P}_{\phi_j}^{(i)} | \phi_1; \phi_2; \dots; \phi_N \rangle \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \\ &= 1. \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Pour résumer, nous venons de montrer que lorsque l'état $|\Psi\rangle$ du système composite S est de la forme

$$|\Psi\rangle = |\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N\rangle, \quad (3.2.9)$$

avec $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, \dots, |\phi_N\rangle$ orthogonaux entre eux, alors, l'un des N sous-systèmes possède un ensemble complet de propriétés associé à $|\phi_1\rangle$, l'un à $|\phi_2\rangle$, et ainsi de suite jusqu'à $|\phi_N\rangle$. Plus encore, nous pouvons affirmer que chacun des sous-systèmes possède son propre ensemble complet de propriété associé à un vecteur distinct et dès lors clôturer la preuve en calculant la probabilité $\mathbb{P}_{12\dots N}$ que l'une des particules possède l'ensemble des propriétés relatif à $|\phi_1\rangle$, une autre particule possède l'ensemble associé à $|\phi_2\rangle$ etc... Cette probabilité est similaire à la probabilité \mathbb{P}_{12} (éq. 2.3.41) à laquelle nous nous sommes intéressés dans le contexte de systèmes bipartites. On a,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{12\dots N} &= \sum_{\pi \in S_N} \left| \langle \phi_1^{(\pi(1))}, \phi_2^{(\pi(2))}, \dots, \phi_N^{(\pi(N))} | \Psi \rangle \right|^2 \\ &= \sum_{\pi \in S_N} \langle \Psi | \phi_1^{(\pi(1))}, \phi_2^{(\pi(2))}, \dots, \phi_N^{(\pi(N))} \rangle \langle \phi_1^{(\pi(1))}, \phi_2^{(\pi(2))}, \dots, \phi_N^{(\pi(N))} | \Psi \rangle \\ &= \langle \Psi | \sum_{\pi \in S_N} \prod_{i=1}^N \hat{P}_{\phi_i}^{(\pi(i))} | \Psi \rangle. \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Or,

$$\begin{aligned} \sum_{\pi \in S_N} \prod_{i=1}^N \hat{P}_{\phi_i}^{(\pi(i))} |\Psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\pi \in S_N} \prod_{i=1}^N \hat{P}_{\phi_i}^{(\pi(i))} \sum_{\pi' \in S_N} \text{sgn}(\pi') \hat{P}_{\pi'} |\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N\rangle. \\ &= \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\pi, \pi' \in S_N} \text{sgn}(\pi') \prod_{i=1}^N \hat{P}_{\phi_i}^{(\pi(i))} |\phi_1^{(\pi'(1))}, \phi_2^{(\pi'(2))}, \dots, \phi_N^{(\pi'(N))}\rangle. \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

Étant donné l'orthogonalité des états $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, \dots, |\phi_N\rangle$, les termes de la double somme sont non nuls uniquement lorsque les applications π et π' sont égales. Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{\pi \in S_N} \prod_{i=1}^N \hat{P}_{\phi_i}^{(\pi(i))} |\Psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\pi \in S_N} \text{sgn}(\pi) \hat{P}_{\pi} |\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N\rangle \\ &= |\Psi\rangle. \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{12\dots N} &= \langle \Psi | \Psi \rangle \\ &= 1. \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

□

Précédemment dans ce mémoire, nous avons vu (thm. 2.7) que pour les systèmes de deux fermions indiscernables, la condition $|\Psi\rangle = |\phi_1; \phi_2\rangle$, avec $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle \in \mathcal{H}_p$ est une condition suffisante (et nécessaire) sur $|\Psi\rangle$ pour que le système bipartite soit séparé. Le théorème 2.7 est valable que les états $|\phi_1\rangle$ et $|\phi_2\rangle$ soient orthogonaux ou non. À l'inverse, lorsque l'on considère un système constitué de N particules fermioniques indiscernables, l'orthogonalité des états $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, \dots, |\phi_N\rangle$ semble indispensable à la démonstration du théorème 3.5.

Au chapitre deux, nous avons également démontré l'existence d'une décomposition systématique de n'importe quel état de deux particules fermioniques et bosoniques appelée décomposition de Slater et de Schmidt, respectivement. Malheureusement, de telles décompositions n'existent plus forcément lorsque l'on a trait aux systèmes constitués de plus de deux particules.

Effectivement, en ce qui concerne les systèmes fermioniques, la décomposition de Slater telle que présentée au chapitre précédent (thm. 2.9) ainsi que dans les références [8, 22] ne peut pas être généralisée pour de plus de deux particules comme l'ont remarqué Li *et al.* [25].

Quant à la décomposition de Schmidt, celle-ci peut éventuellement exister. Peres a remarqué qu'une décomposition de Schmidt pour des systèmes de plus de deux particules n'existe pas toujours et a présenté des critères visant à dresser l'existence d'une telle décomposition [26].

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié communément deux notions qui, jusqu'à présent, restaient trop souvent dissociées : l'intrication quantique et l'indiscernabilité. D'une part, l'intrication quantique nous amène, dans certaines situations, à bouleverser totalement notre conception intuitive du réalisme local. D'autre part, l'indiscernabilité des systèmes physiques est une caractéristique propre aux systèmes quantiques et n'existe pas en mécanique classique. Marier ces deux concepts nous a amené vers une branche de la physique jusqu'alors très peu étudiée : l'intrication quantique des systèmes indiscernables.

Dans le premier chapitre, nous avons présenté la définition standard de l'intrication quantique (déf. 1.1) telle qu'introduite dans la plupart des ouvrages et articles scientifiques. Dans cette perspective, la séparabilité des états purs est déterminée par le caractère factorisé de la fonction d'onde. Toutefois, nous avons vu que, confrontée à la problématique de l'indiscernabilité, une pareille définition semble inappropriée. En effet, celle-ci mène à la conclusion que tous les états¹ décrivant un système de plusieurs particules discernables devraient être intriqués vis-à-vis de cette définition standard.

C'est pourquoi, au deuxième chapitre, nous nous sommes intéressés à une redéfinition du concept d'intrication quantique en commençant par les systèmes bipartites (déf. 2.1). Pour ce faire, nous avons adopté le point de vue de Ghirardi *et al.* qui ont publié, entre 2001 et 2005, une série d'articles visant à présenter cette redéfinition, que ce soit pour les systèmes discernables et indiscernables [7, 8]. La nouvelle approche de l'intrication repose sur la notion d'ensemble complet de propriétés. Par la suite, nous avons tenté d'assimiler cette nouvelle approche en la confrontant à l'ancienne définition : d'abord pour les systèmes discernables et indiscernables, ensuite. Après nous être assurés que les deux approches coïncidaient pour les systèmes de deux particules discernables (thm. 2.3), nous avons démontré explicitement quelques critères de séparabilité des états purs pour les fermions et les bosons à partir des références [7, 8]. Alors que la séparabilité des états purs est équivalente au caractère factorisé de l'état physique décrivant un système de deux particules discernables (thm. 2.3), nous avons montré que pour les systèmes indiscernables, la séparabilité des états purs est aussi équivalente au caractère factorisé de l'état global au sens du produit tensoriel antisymétrique (thm. 2.7) et symétrique (thm. 2.13). Nous avons alors terminé ce deuxième chapitre en dressant une décomposition systématique d'état fermioniques (thm. 2.9) et bosoniques (thm. 2.15) menant à d'autres critères d'intrication appuyés par les notions de nombre de Slater (cor. 2.11) et de Schmidt, respectivement.

Dans cette nouvelle approche de l'intrication, hormis la brève discussion effectuée par Ghirardi *et al.* dans l'article [7], il n'existe, à ce jour, peu, voire pas d'articles consacrés à son extension aux systèmes de N constituants indiscernables. Dans le troisième chapitre de ce mémoire, après avoir proposé une définition d'un ensemble complet de propriétés pour

1. à l'exception du cas particulier de plusieurs bosons dans le même état physique.

les systèmes constitués d'un nombre quelconque de particules discernables (déf. 3.1) ou non (déf. 3.2), nous avons étendu le concept d'intrication à de tels systèmes (déf. 3.3). Comme au chapitre deux, nous nous sommes assurés de l'équivalence entre la nouvelle approche de l'intrication et l'approche usuelle (thm. 3.4). Cela étant, nous avons dressé une condition suffisante (thm. 3.5) sur l'état d'un système fermionique pour que celui-ci soit séparé au regard de la nouvelle définition de l'intrication.

Ce mémoire synthétise de nouvelles idées avancées dans quelques articles et, par voie de conséquence, ouvre la porte à de nombreuses perspectives. En effet, au moyen de cette nouvelle approche de l'intrication quantique, de nombreux autres points peuvent être abordés. Dans un premier temps, en poursuivant la discussion entamée au chapitre trois, il devrait être possible de dresser quelques critères de séparabilité supplémentaires, notamment en s'intéressant à la réciproque du théorème 3.5 ou encore, en tentant d'élaborer un critère analogue pour les systèmes bosoniques dont la formule de Poincaré devient nettement plus délicate à manipuler. Ensuite, il serait intéressant d'investiguer cette nouvelle approche à des systèmes décrits non plus par un état pur, mais par un mélange statistique d'états. Cette problématique est légèrement analysée dans [7] mais requerrait de plus profondes considérations. Dans un second temps, ce mémoire s'est limité aux systèmes physiques dans un espace de Hilbert de dimension finie. Que deviennent tous ces critères lorsque l'on considère les degrés de libertés positionnels impliquant inévitablement des espaces de Hilbert de dimension infinie? Finalement, il devrait être possible de trouver un algorithme permettant de déterminer les coefficients de la décomposition de Slater et de Schmidt pour les systèmes fermioniques ou bosoniques, respectivement. Un tel algorithme pourrait immédiatement se prononcer quant au caractère intriqué ou non d'un état physique donné et constituerait alors, une avancée à ce mémoire.

Appendices

Annexe A

Groupe symétrique S_N

La théorie des groupes occupe une place importante en physique et intervient dès lors qu'un système exhibe une symétrie particulière. Par exemple, les 32 groupes ponctuels cristallographiques à trois dimensions contiennent l'ensemble des opérations (rotation, plan miroir, inversion, etc) laissant une maille cristalline inchangée. La mécanique quantique, quant à elle, reste invariante via transformation unitaire $U \in U(1)$. Il est trivial de vérifier que les prédictions de mesure et que l'équation de Schrödinger restent invariantes via une transformation de la forme $|\Psi\rangle \rightarrow e^{i\theta} |\Psi\rangle$, avec $e^{i\theta} \in U(1)$ et $\theta \in \mathbb{R}$, un facteur de phase global. Dans notre cadre consacré à la mécanique quantique à plusieurs corps indiscernables, le groupe phare associé à l'invariance d'un système via permutation des particules est le groupe symétrique d'ordre N , noté S_N . Ce groupe à $N!$ éléments est défini comme étant l'ensemble des bijections de $\{1, 2, \dots, N\}$ dans lui-même. Le groupe symétrique non trivial le plus simple que l'on puisse considérer est le groupe S_2 à deux éléments :

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le groupe S_3 quant à lui contient six éléments :

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \pi_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} & \pi_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \pi_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} & \pi_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \pi_6 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

L'élément π_1 correspond à l'identité tandis que les éléments π_4 , π_5 et π_6 échangent deux éléments en laissant un élément inchangé et forment ce que l'on appelle la classe des transpositions de S_3 . Enfin, les éléments restants (à savoir π_2 et π_3) sont des applications qui modifient les trois éléments d'entrée. Ils forment la classe des 3-cycles de S_3 [27, 28]. Il est possible de montrer que n'importe quel élément de S_N peut s'écrire de façon non unique sous forme d'une succession de transpositions. Bien que non unique, le nombre de transpositions nécessaires pour former une permutation est soit toujours pair, soit toujours impair, ce qui nous permet de définir la signature d'un élément $\pi \in S_N$ de la façon suivante

$$\text{sgn}(\pi) = \begin{cases} +1 & \text{si le nombre de transpositions est pair} \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Annexe B

B.1 Décomposition en valeurs singulières

Théorème B.1 (Décomposition en valeurs singulières [23]). Soit A , une matrice de format $m \times n$, soit $q = m \wedge n$ et supposons que $\text{rg}(A) = r$.

(a) Il existe $U \in M_m$, $V \in M_n$ et une matrice carrée diagonale $\Sigma_q = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_q)$ telle que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0 = \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_q$ et que $A = U\Sigma V^\dagger$ pour laquelle

$$\Sigma = \Sigma_q, \text{ si } m = n, \quad (\text{B.1.1})$$

$$\Sigma = \left(\begin{array}{cccc} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n \\ \hline & & & \mathbf{0}_{m-n,n} \end{array} \right), \text{ si } m > n. \quad (\text{B.1.2})$$

$$\Sigma = \left(\begin{array}{cccc} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_m \end{array} \middle| \mathbf{0}_{m,n-m} \right), \text{ si } m < n \text{ et} \quad (\text{B.1.3})$$

(b) Les paramètres $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ correspondent aux racines carrées positives des valeurs propres de AA^\dagger rangées par ordre décroissant.

B.2 Éléments de théorie de la mesure et inégalité de Hölder

Définition B.2 (Espace mesurable [29]). Soient X un ensemble arbitraire d'éléments et \mathcal{F} une σ -algèbre sur X . Le couple (X, \mathcal{F}) définit un *espace mesurable*.

Définition B.3 (Mesure). Soit (X, \mathcal{F}) un espace mesurable. Une *mesure* sur (X, \mathcal{F}) est une application

$$\mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F \mapsto \mu(F)$$

telle que

- $\mu(\emptyset) = 0$ et
- Pour toute famille $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathcal{F} deux à deux disjoints,

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i). \quad (\text{B.2.1})$$

Définition B.4 (Espace mesuré). Soient (X, \mathcal{F}) un espace mesurable et $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ une mesure sur (X, \mathcal{F}) . Le triplet (X, \mathcal{F}, μ) définit un *espace mesuré*.

Définition B.5 (Exposants conjugués [29, 30]). Deux réels strictement positifs (éventuellement infinis) p et q constituent des *exposants conjugués* s'ils satisfont à

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad (\text{B.2.2})$$

Proposition B.6 (Mesurabilité). Soient (X, \mathcal{F}) un espace mesurable et F , un élément de \mathcal{F} . Une application $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ est \mathcal{F} -mesurable si et seulement si l'image inverse $f^{-1}(U)$ de tout ensemble ouvert $U \subset \mathbb{R}$ par f est incluse dans \mathcal{F} .

Proposition B.7 (Inégalité de Hölder [29, 30]). Soient (X, \mathcal{F}, μ) un espace mesuré ainsi que p et q , deux exposants conjugués. Si f et g sont deux fonctions mesurables et telles que $|f|^p$ et $|g|^q$ sont intégrables alors,

$$\int |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q, \quad (\text{B.2.3})$$

où

$$\|f\|_p \equiv \sqrt[p]{\int |f|^p d\mu} \quad (\text{B.2.4})$$

$$\|g\|_q \equiv \sqrt[q]{\int |g|^q d\mu} \quad (\text{B.2.5})$$

désignent la *norme* L^p et L^q de f et g , respectivement.

Définition B.8 (Mesure de dénombrement [29]). Soient $X = \{1, 2, \dots, n\}$ ($n \in \mathbb{N}_0$), (X, \mathcal{F}) un espace mesurable et $F \subseteq \mathcal{F}$ un sous-ensemble de \mathcal{F} . La *mesure de dénombrement* est une application μ définie par

$$\mu(\{b\}) = 1, \quad (\text{B.2.6})$$

pour tout $b \in F$. En particulier, on a,

$$\mu(F) = \text{card}(F) \quad (\text{B.2.7})$$

et pour toute fonction \mathcal{F} -mesurable,

$$\begin{aligned} \|f\|_p &= \sqrt[p]{\int |f|^p d\mu} \\ &= \sqrt[p]{\sum_{x \in X} |f(x)|^p}. \end{aligned} \quad (\text{B.2.8})$$

Pour une telle mesure, l'inégalité de Hölder devient

$$\begin{aligned} \sum_{x \in X} |f(x)g(x)| &\leq \|f\|_p \|g\|_q \\ &= \sqrt[p]{\sum_{x \in X} |f(x)|^p} \sqrt[q]{\sum_{x \in X} |g(x)|^q} \end{aligned} \quad (\text{B.2.9})$$

Annexe C

C.1 Espace probabilisable et mesure de probabilité

Considérons une expérience aléatoire quelconque comme le lancé d'un dé. Les divers résultats possibles définissent *l'ensemble fondamental* Ω . Une fois Ω établi, considérons une σ -algèbre \mathcal{F} sur Ω . Dans un contexte probabiliste tel que le lancé d'un dé ou encore, la mesure d'une grandeur physique en mécanique quantique, l'espace (Ω, \mathcal{F}) constitue un type d'espace mesurable particulier dénommé *espace probabilisable*.

Définition C.1 (Mesure de probabilité). Soit (Ω, \mathcal{F}) un espace probabilisable. Une mesure de probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) est une loi

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0; 1] \quad (\text{C.1.1})$$

telle que

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ et
- Pour toute famille $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathcal{F} deux à deux disjoints,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i). \quad (\text{C.1.2})$$

C.2 Formule de Poincaré

Proposition C.2 (Formule de Poincaré). Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, un espace probabilisé et soient A_1, A_2, \dots, A_n , des évènements de \mathcal{F} non nécessairement disjoints. On a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) + \sum_{k=2}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}\right) \quad (\text{C.2.1})$$

Bibliographie

- [1] A. Einstein, B. Podolsky, et N. Rosen, Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?, *Phys. Rev.* **47**, 777-780 (1935).
- [2] N. Bohr, Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?, *Phys. Rev.* **48**, 696-702 (1935).
- [3] J.S. Bell, On the Einstein Podolsky Rosen Paradox, *Physics*. **1**, 195-200 (1964).
- [4] A. Aspect, P. Grangier, et G. Roger, Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell's Theorem, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 460-463 (1981).
- [5] R.P. Feynman, Simulating physics with computers, *Int. J. Theor. Phys.* **21**, 467-488 (1982).
- [6] L. Landau et E. Lifchitz. *Physique théorique. Tome III. Mécanique quantique : théorie non relativiste*, 2^e éd. Moscou. MIR, 1967.
- [7] G. C. Ghirardi, L. Marinatto, et T. Weber, Entanglement and Properties of Composite Quantum Systems : A Conceptual and Mathematical Analysis, *J. Stat. Phys.* **108**, 49 (2002).
- [8] G. C. Ghirardi et L. Marinatto, General criterion for the entanglement of two indistinguishable particles, *Phys. Rev. A.* **70**, 012109 (2004).
- [9] L.Susskind. *Lecture 1 / Quantum Entanglements, Part 1 (Stanford)*. YouTube, 24 avr. 2008. Disponible : <https://www.youtube.com/watch?v=0Eeuqh9QfNI>. [Consulté le 07 mar. 2021].
- [10] D. J. Griffiths. *Introduction to quantum mechanics*, 2^e éd. Upper Saddle River, New Jersey. Pearson Prentice Hall, 2004.
- [11] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, et F. Laloë. *Mécanique quantique, Tome III*. Paris. Hermann, 2017.
- [12] M.Le Bellac. *Physique quantique*, 2^e éd. Paris. EDP Sciences, 2007.
- [13] J.-L. Basdevant et J.Dalibard. *Mécanique quantique, Cours de l'école polytechnique*. Palaiseau, 2002.
- [14] T. Bastin. *Physique quantique II* (notes de cours). Université de Liège. Printemps 2019.

- [15] D. M. Greenberger, M. A. Horne, A. Shimony et A. Zeilinger, Bell's theorem without inequalities, *Am. J. Phys.* **58**, 1131–43 (1990).
- [16] B.Schumacher et M.Westmoreland. *Quantum Processes Systems, and Information*. Cambridge. Cambridge University Press, 2010.
- [17] J. J. Sakurai et J. Napolitano. *Modern quantum mechanics*, 2^e éd. Cambridge. Addison-Wesley, 2011.
- [18] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, et F. Lalœ. *Mécanique quantique, Tome II*. Paris. Hermann, 2018.
- [19] B. Zwiebach. *Quantum Physics III*, 2018. Massachusetts Institute of Technology : MIT Open-CourseWare. Licence : Creative Commons BY-NC-SA. Disponible : <https://ocw.mit.edu/courses/physics/8-06-quantum-physics-iii-spring-2018/index.htm> [Consulté le 7 fév. 2021].
- [20] J. Bernstein. *Quantum profiles*. Princeton, New Jersey. Princeton University Press, 1992.
- [21] R. Lo Franco et G. Compagno, Quantum entanglement of identical particles by standard information-theoretic notions, *Sci. Rep.* **6**, 20603 (2016).
- [22] J. Schliemann, J. Ignacio Cirac, M. Kus, M. Lewenstein et D. Loss, Quantum correlations in two-fermion systems, *Phys. Rev. A.* **64**, 022303 (2001).
- [23] R. A. Horn et C. R. Johnson. *Matrix analysis*, 2^e éd. Cambridge. Cambridge University Press, 2013.
- [24] B. d'Espagnat, The Quantum Theory and Reality, *Sci. Am.* **241**, 158–181 (1979).
- [25] Y. S. Li, B. Zeng, X. S. Liu, et G. L. Long, Entanglement in a two-identical-particle system, *Phys. Rev. A.* **64**, 054302 (2001).
- [26] A. Peres, Higher order Schmidt decompositions, *Phys. Lett. A.* **202**, 16-17 (1995).
- [27] S. Hassani. *Mathematical Physics, A Modern Introduction to Its Foundations*, 2^e éd. New-York City, New York. Springer International Publishing, 2013.
- [28] J. F. Cornwell. *Group Theory in Physics : An Introduction*. San Diego, Californie. Academic Press, 1997.
- [29] W. Rudin. *Analyse complexe et réelle*, 3^e éd. Paris. Dunod, 2009.
- [30] C. Esser. *Processus stochastiques* (notes de cours). Université de Liège. Automne 2021.