Espaces de Calderón-Zygmund et régularité de fonctions non localement bornées

Auteur : Lamby, Thomas
Promoteur(s) : Nicolay, Samuel
Faculté : Faculté des Sciences
Diplôme : Master en sciences mathématiques, à finalité approfondie
Année académique : 2020-2021
URI/URL : http://hdl.handle.net/2268.2/12444

Faculté des sciences
Département de Mathématique

Espaces de Calderón-Zygmund et régularité de fonctions non localement bornées

Promoteur : Samuel Nicolay

Thomas Lamby

Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master en Sciences Mathématiques

Année 2020-2021

Remerciements

Je tiens à remercier mon promoteur Samuel Nicolay pour ses relectures et conseils pertinents et pour sa confiance en me laissant aller dans les directions que je souhaitais.

Je remercie ma maman pour sa relecture courageuse ainsi que pour tout le soutien qu'elle m'a apporté durant mes études. Merci également à ma soeur Fanny et à mes grands-parents Odie et Pops qui ont également contribué à leur manière à la réussite de mon parcours.

Mes remerciements vont également à tous les professeurs et assistants du département de Mathématiques de l'Université de Liège, qui rendent ces études agréables et passionnantes.
Je remercie Françoise Bastin, Julien Leroy, Céline Esser et Laurent Loosveldt pour avoir pris part au jury de ce mémoire. Je tiens à remercier en particulier Laurent Loosveldt pour sa disponibilité et ses conseils avisés et Céline Esser pour m'avoir laissé prendre son cours d'analyse fonctionnelle en pleine autonomie.
J'aimerais également mettre à l'honneur Jean-Pierre Schneiders, Naïm Zenaïdi et Yves de Rop pour la passion qu'ils ont pu me transmettre dans leur domaine respectif.
Enfin, je remercie vivement Samuel Nicolay et Pierre Mathonet de m'avoir offert la possibilité de donner des remédiations dans leur cours de première année.

Pour finir, j'aimerais remercier toutes les personnes que j'ai pu rencontrer durant mon cursus, je pense notamment à Laurent, Axel, Sélim, Nicolas, Momo, Vincent, Lucas et Pierre, qui ont contribué au bon déroulement de ces cinq dernières années.

Introduction

Dans ce travail, on s'intéresse à caractériser la régularité locale de fonctions dans $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, $p \in [1, +\infty]$.
Une manière de procéder est d'utiliser les espaces de Calderón et Zygmund, introduits par ces derniers dans [16] dans le contexte de la théorie des équations aux dérivées partielles.
Soient $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $p \in [1, +\infty]$ et $u \in \mathbb{R}$ tels que $u \geq -\frac{d}{p}$; on appelle $T^p_u(x_0)$ la classe des fonctions $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ pour lesquelles il existe un polynôme P de degré strictement plus petit que u vérifiant

$$r^{-d/p}\|f - P\|_{L^p(B(x_0,r))} \leq Cr^u \quad \forall r > 0, \tag{1}$$

où C est une constante indépendante de r.
Si, de plus, $f \in T^p_u(x_0)$ vérifie

$$r^{-d/p}\|f - P\|_{L^p(B(x_0,r))} = o(r^u) \text{ quand } r \to 0^+,$$

où P est un polynôme de degré plus petit ou égal à u, alors on dit que $f \in t^p_u(x_0)$.

Remarquons que pour $p \in [1, +\infty[$, $f \in T^p_u(x_0)$ signifie que

$$\left(\fint_{B(x_0,r)} |f - P|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C' r^u.$$

Les fonctions $f \in T^p_u(x_0)$ forment un espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|_{T^p_u(x_0)}$ définie par la somme de $\|\cdot\|_{L^p}$, des valeurs absolues des coefficients de P et de la borne inférieure des constantes C qui vérifient la relation (1).

On appelle *espaces de Hölder* les espaces $T^\infty_u(x_0)$ et on les note en général $\Lambda^u(x_0)$. La version uniforme $\Lambda^u(\mathbb{R}^d)$ s'obtient en demandant l'inégalité pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$ (la constante étant uniforme).
La régularité de Hölder peut être vue comme étant une notion qui comble les trous entre les espaces $C^n(\mathbb{R}^d)$ et $C^{n+1}(\mathbb{R}^d)$.

Pour des fonctions localement bornées, une manière de caractériser leur régularité est de calculer leur *exposant de Hölder* en chaque point x_0, défini par

$$h_\infty(x_0) = \sup\{u \geq 0 : f \in \Lambda^u(x_0)\}.$$

Comme la fonction $x_0 \mapsto h_\infty(x_0)$ est souvent très irrégulière, on peut ensuite, en utilisant la dimension de Hausdorff $\dim_{\mathcal{H}}$, calculer le *spectre de Hölder* défini par

$$d_\infty : [0, +\infty] \to [0, d] \cup \{-\infty\} : h \mapsto \dim_{\mathcal{H}}(\{x_0 \in \mathbb{R}^d : h_\infty(x_0) = h\}),$$

où par convention $\dim_{\mathcal{H}}(\emptyset) = -\infty$.
Néanmoins, cela ne marche pas pour les fonctions qui ne sont pas localement bornées. Les espaces $T_u^p(x_0)$ permettent alors de caractériser la régularité de fonctions dans $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, avec $p \in [1, +\infty[$. En effet, on définit le *p-exposant* de f en x_0 par

$$h_p(x_0) = \sup\{u \geq -d/p : f \in T_u^p(x_0)\}.$$

On calcule alors le *p-spectre* de f par

$$d_p : \left[-\frac{d}{p}, +\infty\right] \to [0, d] \cup \{-\infty\} : h \mapsto \dim_{\mathcal{H}}(\{x_0 \in \mathbb{R}^d : h_p(x_0) = h\}).$$

Dans ce travail, on commence par une introduction sur la théorie des ondelettes, ce qui nous permettera de développer des outils utiles pour la suite.

Dans le deuxième chapitre, on précise les notions d'exposants et de spectres de Hölder et on présente différents formalismes, dits multifractals, permettant d'estimer le spectre de Hölder de fonctions localement bornées. On précise également les notions de p-exposants et de p-spectres pour des fonctions localement dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.
On donne alors plusieurs propriétés de la fonction $p \mapsto h_p(x_0)$ et on calcule les p-exposants de quelques fonctions.

Dans le troisième chapitre, on calcule les p-spectres de trois fonctions non localement bornées, pour lesquelles la notion de régularité de Hölder n'est donc pas adaptée, qui appartiennent localement à un espace de Lebesgue.
La première fonction est un exemple théorique faisant directement le lien avec les ondelettes.
La deuxième est la fonction de Brjuno qu'on analyse en profondeur car cette fonction n'a pas été créée pour être nulle part localement bornée et a donc son intérêt propre, notamment en analyse complexe, approximation diophantienne ou encore en théorie ergodique. Elle est définie, pour tout irrationnel x de $[0, 1]$, par

$$B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x\, A(x) \ldots A^{n-1}(x) \, \log\left(\frac{1}{A^n(x)}\right),$$

où A est l'application de Gauss qui à un irrationnel x de $[0, 1]$ lui associe la partie fractionnaire de $1/x$.
La dernière fonction qu'on étudie est une généralisation de la fonction de Riemann.

Ensuite, on introduit les fonctions de Boyd ϕ afin de généraliser les espaces $T_u^p(x_0)$ d'un point de vue fonctionnel. On définit pour cela les espaces $T_\phi^p(x_0)$ pour lesquels on établira un certain nombre de résultats (complétude, densité, certaines inclusions, etc.).
On généralise ensuite aux espaces $T_\phi^p(x_0)$ le théorème de Rademacher qui affirme qu'une fonction lipschitzienne sur $\mathbb{R}^d$ possède une différentielle totale presque partout. Pour cela, on généralise également aux espaces $T_\phi^p(x_0)$ le théorème d'extension de Whitney.
On veut par la suite caractériser ces espaces par les ondelettes.

Dans le dernier chapitre, on introduit dès lors la notion de suite admissible et l'on remarque que cette notion est intimement liée à celle des fonctions de Boyd. On donne alors une caractérisation en ondelettes d'espaces liées aux suites admissibles, les espaces $T^p_\sigma(x_0)$. On présente, pour finir, un formalisme multifractal lié à ces espaces.

Notations

Pour éviter toute confusion, on donne ici les notations utilisées pouvant être source d'ambiguïté.

$\mathbb{N}$	l'ensemble des naturels,
$\mathbb{N}_0$	l'ensemble des naturels non nuls,
$\mathbb{R}_0$	l'ensemble des réels non nuls,
$\|X\|$	le cardinal de l'ensemble X,
Δ_X	diagonale du carré cartésien $X \times X$ de l'ensemble X, i.e. l'ensemble des couples (x, x), $x \in X$,
$A^\bullet$	la frontière de l'ensemble $A \subseteq \mathbb{R}^d$ pour la topologie euclidienne,
Γ_d^j	nombre de j-combinaisons avec répétitions d'un ensemble à d éléments, i.e. $\Gamma_d^j = \binom{d+j-1}{j}$,
$[f]$	le support de la fonction f,
sgn x	le signe de $x \in \mathbb{R}$, i.e. $x/\|x\|$ si $x \neq 0$ et 0 sinon,
mes	la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$,
$\dim_{\mathcal{H}}$	la dimension de Hausdorff,
log	le logarithme népérien,
$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$	la classe des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ à support compact,
$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$	la classe des distributions sur $\mathbb{R}^d$,
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$	la classe de Schwartz sur $\mathbb{R}^d$,
$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$	la classe des distributions tempérées sur $\mathbb{R}^d$,
$\|\alpha\|$	si $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ est un multi-indice, on pose $\|\alpha\| = \alpha_1 + ... + \alpha_d$,
C_d	la constante dépendant de d telle que la mesure de la boule de centre $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et de rayon $r > 0$ soit égale à $C_d\, r^d$,
$D_j f$	la dérivée partielle d'ordre 1 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^d$ selon la j-ème composante,
$D^\alpha f$	la dérivée partielle $D_d^{\alpha_d}...D_1^{\alpha_1}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^d$, où $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$,
$\mathrm{Lip}(f)$	la constante de Lipschitz d'une fonction f lipschitzienne,
$f * g$	le produit de convolution de f et g,
o	$f(r) = o(g(r))$ quand $r \to \gamma$ si $\lim_{r\to\gamma} \|f(r)\|/\|g(r)\| = 0$,
O	$f(r) = O(g(r))$ quand $r \to \gamma$ s'il existe une constante $C > 0$ telle que $\lim_{r\to\gamma} \|f(r)\|/\|g(r)\| \leq C$ et $f(r) = O(g(r))$ sur l'ensemble A s'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|f(r)\| \leq C\, \|g(r)\|$ pour tout $r \in A$.

Table des matières

Chapitre 1

Ondelettes

En traitement du signal, la théorie des ondelettes est considérée comme une alternative à l'analyse de Fourier. Un des atouts des ondelettes réside dans le fait qu'elles procurent une analyse temps-échelle, en utilisant à la fois un facteur de translation et un facteur de dilatation.
On considère que la première ondelette connue a été introduite par Alfréd Haar (voir exemple 1.4.1) en 1909. Le terme « ondelette » a été introduit par Alex Grossmann et Jean Morlet en 1984 ([28]). Les travaux de Yves Meyer ([60]), Stéphane Mallat ([56]) et Ingrid Daubechies ([19]) ont notamment contribué à la popularisation de la notion d'ondelettes.

1.1 Ondelette mère

On travaille dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ équipé du produit scalaire habituel $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme $\|.\|_{L^2(\mathbb{R})}$ associée.
On considère, par souci de facilité et en suivant la référence [19], la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ définie par

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} f(t)\, dt,\ \ f \in L^1(\mathbb{R}).$$

Définition 1.1.1. Une fonction $\psi \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ vérifie la *condition d'admissibilité* si la fonction

$$\xi \mapsto \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}_0$.
On dit alors que ψ est une *ondelette mère*.
Dans ce cas, on dit que

$$C_\psi = 2\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi$$

est la *constante d'admissibilité* de ψ. On la supposera non nulle dans la suite puisque sinon ψ est nulle presque partout, ce qui a peu d'intérêt.

Remarque 1.1.1. La condition d'admissibilité revient à vérifier l'intégrabilité en 0 de

$$\xi \mapsto \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|}$$

puisque $\widehat{\psi}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et que

$$\frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{\xi} \leq |\widehat{\psi}(\xi)|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \setminus]-1,1[$$

avec

$$\xi \mapsto |\widehat{\psi}(\xi)|^2 \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$$

puisque $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

Proposition 1.1.1. *Si ψ est une ondelette mère, on a $\widehat{\psi}(0) = 0$.*

Démonstration. Supposons que $\widehat{\psi}(0) \neq 0$, par continuité de $\widehat{\psi}$, il existe un voisinage V de 0 et une constante $C > 0$ tels que

$$|\widehat{\psi}(\xi)| > C \quad \forall \xi \in V.$$

On en tire que pour tout $\xi \in V \setminus \{0\}$,

$$\frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} > \frac{C^2}{\xi}.$$

Comme on a la majoration presque partout et vu que $\xi \mapsto \frac{C^2}{\xi}$ est positive et non intégrable, on a une absurdité car on a supposé que ψ est une ondelette mère. $\square$

Remarque 1.1.2. On comprend mieux la dénomination d'ondelettes car une fonction non nulle d'intégrale nulle doit forcément osciller.

Remarque 1.1.3. Avec une hypothèse en plus, qui implique $\psi \in L^1(\mathbb{R})$, on a la réciproque de la proposition précédente.

Proposition 1.1.2. *Supposons que $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ et qu'il existe $h > 0$ tel que*

$$x \mapsto (1 + |x|)^h |\psi(x)|$$

soit intégrable sur $\mathbb{R}$. Si $\widehat{\psi}(0) = 0$, alors ψ vérifie la condition d'admissibilité.

Démonstration. On peut supposer que $h \in]0, 1]$ car si $h > 1$, alors il est clair que $h' = 1$ vérifie également l'hypothèse.
On a par hypothèse

$$\widehat{\psi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}\, \psi(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (e^{-ix\xi} - 1)\, \psi(x)\, dx.$$

Pour $\xi \neq 0$, on a donc

$$\frac{|\widehat{\psi}(\xi)|}{|\xi|^h} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|e^{-ix\xi} - 1|}{|\xi|^h}\, |\psi(x)|\, dx.$$

On distingue alors 2 cas :

- Si $\frac{1}{|\xi|} \leq |x|$, alors
$$\frac{|e^{-ix\xi} - 1|}{|\xi|^h} \leq \frac{2}{|\xi|^h} \leq 2|x|^h.$$
- Si $\frac{1}{|\xi|} > |x|$, alors puisque $h \in]0, 1]$, on a
$$|e^{-ix\xi} - 1| = \left| -2i\, e^{\frac{-ix\xi}{2}} \sin(\frac{x\xi}{2}) \right| = 2 \left| \sin(\frac{x\xi}{2}) \right| \leq |x\xi| \leq |x\xi|^h.$$
et donc
$$\frac{|e^{-ix\xi} - 1|}{|\xi|^h} \leq \frac{|x\xi|^h}{|\xi|^h} = |x|^h \leq 2|x|^h.$$

On en tire que

$$\begin{aligned}
\frac{|\widehat{\psi}(\xi)|}{|\xi|^h} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} 2|x|^h\, |\psi(x)|\, dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(2 \int_{\mathbb{R}} (1 + |x|^h)\, |\psi(x)|\, dx + 2 \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|\, dx \right) \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(2 \int_{\mathbb{R}} (1 + |x|)^h\, |\psi(x)|\, dx + 2 \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|\, dx \right) \\
&< +\infty.
\end{aligned}$$

Ainsi il existe une constante $C > 0$ telle que $|\widehat{\psi}(\xi)| \leq C|\xi|^h$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.
Dès lors, on obtient

$$\frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} \leq C^2 |\xi|^{2h-1},$$

avec $2h - 1 > -1$, d'où l'intégrabilité en 0 de $\xi \mapsto \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|}$. On en tire la conclusion au vu de la remarque 1.1.1. □

Définition 1.1.2. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $x \mapsto x^k f$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Le *moment d'ordre* k de f est défini par

$$M_f(k) = \int_{\mathbb{R}} x^k\, f(x)\, dx.$$

On dit que f *possède* m *moments nuls* si

$$M_f(k) = 0 \quad \forall k < m.$$

Remarque 1.1.4. On sait donc qu'une ondelette mère ψ possède toujours un premier moment nul.

1.2 Transformée en ondelettes

La transformée en ondelettes d'une fonction est définie par des convolutions avec l'ondelette mère translatée et dilatée. On l'appelle également par extention *ondelette*.

Définition 1.2.1. La *transformée en ondelettes* d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ par une ondelette mère ψ à l'*échelle* $a > 0$ et à la *position* (ou *temps*) $b \in \mathbb{R}$ est définie par

$$W_\psi f(b,a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(f \star \overline{\psi} \left(-\frac{\cdot}{a} \right) \right)(b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \, \overline{\psi} \left(\frac{x-b}{a} \right) dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \left\langle f, \psi \left(\frac{\cdot - b}{a} \right) \right\rangle.$$

La *transformée en ondelettes continue* de f en ψ est l'application

$$W_\psi f : \mathbb{R} \times]0, +\infty[\to \mathbb{C} : (b,a) \mapsto W_\psi f(b,a).$$

On note parfois $Wf(b,a)$ au lieu de $W_\psi f(b,a)$ si le choix de l'ondelette ψ est explicite ou sans conséquence.

Remarque 1.2.1. Il est clair que si l'ondelette mère ψ possède m moments nuls, alors

$$W_\psi P = 0$$

pour tout polynôme P tel que $\deg P < m$.

Remarque 1.2.2. On peut étendre la définition pour $a \in \mathbb{R}_0$ en posant

$$W_\psi f(b,a) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \left(f \star \overline{\psi} \left(-\frac{\cdot}{a} \right) \right)(b).$$

Lemme 1.2.1. *Si ψ est une ondelette mère et f_1, f_2 deux fonctions de $L^2(\mathbb{R})$, alors*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{a^2} \, W_\psi f_1(b,a) \, \overline{W_\psi f_2}(b,a) \, db \, da = C_\psi \langle f_1, f_2 \rangle. \tag{1.1}$$

En particulier, en prenant $f = f_1 = f_2 \in L^2(\mathbb{R})$, on en déduit que

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{a^2} \|W_\psi f(\cdot, a)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \, da.$$

Démonstration. Notons, pour la preuve, $(*)$ le membre de gauche de l'égalité (1.1).
Les fonctions ψ, f_1, f_2 étant dans $L^2(\mathbb{R})$, elles admettent une transformée de Fourier (dans $L^2(\mathbb{R})$), qui coïncide avec celle de $L^1(\mathbb{R})$ pour ψ.

On a donc

$$\left\langle f_{\frac{1}{2}}, \psi\left(\frac{\cdot - b}{a}\right)\right\rangle = \left\langle \widehat{f_{\frac{1}{2}}}, \widehat{\psi(\frac{\cdot - b}{a})}\right\rangle,$$

et ainsi, au vu des propriétés des transformées de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$, on a

$$W_\psi f_{\frac{1}{2}}(b,a) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f_{\frac{1}{2}}}(\xi)\, \sqrt{|a|}\, e^{-ib\xi}\, \overline{\widehat{\psi}(a\xi)}\, d\xi.$$

On en tire que

$$(*) = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{a^2} \left(\int_{\mathbb{R}} \hat{f}_1(\xi) \sqrt{|a|}\, e^{-ib\xi}\, \overline{\widehat{\psi}(a\xi)}\, d\xi\right) \left(\int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{f}_2}(\xi) \sqrt{|a|}\, e^{ib\xi}\, \widehat{\psi}(a\xi)\, d\xi\right) db\, da.$$

On définit alors les fonctions

$$g_{\frac{1}{2},a} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \xi \mapsto \sqrt{|a|}\, \widehat{f_{\frac{1}{2}}}(\xi)\, \overline{\widehat{\psi}(a\xi)}$$

qui sont intégrables puisqu'elles s'écrivent comme un produit de fonction de $L^2(\mathbb{R})$. On peut donc calculer leur transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$: si $b \in \mathbb{R}$, on a

$$\widehat{g_{\frac{1}{2},a}}(b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \sqrt{|a|}\, e^{-ib\xi}\, \widehat{f_{\frac{1}{2}}}(\xi)\, \overline{\widehat{\psi}(a\xi)}\, d\xi.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
(*) = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{a^2} \sqrt{2\pi}\, \widehat{g_{1,a}}(b)\, \sqrt{2\pi}\, \overline{\widehat{g_{2,a}}(b)}\, db\, da &= 2\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{a^2} \langle \widehat{g_{1,a}}, \widehat{g_{2,a}}\rangle\, da \\
&= 2\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{a^2} \langle g_{1,a}, g_{2,a}\rangle\, da \\
&= 2\pi \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{|a|} \hat{f}_1(\xi)\, \overline{\hat{f}_2(\xi)} \left|\hat{\psi}(a\xi)\right|^2 d\xi\, da.
\end{aligned}$$

En utilisant, grâce au fait que ψ vérifie la condition d'admissibilité, le théorème de Fubini-Tonelli, puis en utilisant le changement de variable $u = a\xi$ à $\xi \in \mathbb{R}$ fixé, on obtient que

$$\begin{aligned}
(*) = 2\pi \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_1(\xi)\, \overline{\hat{f}_2(\xi)} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|a|} \left|\hat{\psi}(a\xi)\right|^2 da\right) d\xi &= 2\pi \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_1(\xi)\, \overline{\hat{f}_2(\xi)} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|u|} \left|\widehat{\psi}(u)\right|^2 du\right) d\xi \\
&= C_\psi \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_1(\xi)\, \overline{\hat{f}_2(\xi)}\, d\xi \\
&= C_\psi \langle \hat{f}_1, \hat{f}_2\rangle = C_\psi \langle f_1, f_2\rangle.
\end{aligned}$$

□

Grâce au lemme précédent, on peut obtenir un résultat de convergence :

Proposition 1.2.1. *Si ψ est une ondelette mère, alors pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$, on a*

$$\lim_{A_1,A_2\to+\infty} \left\| f - \frac{1}{C_\psi} \int_{1/A_1\leq|a|\leq A_2} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{a^2} W_\psi f(b,a) \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{\cdot - b}{a}\right) db\, da \right\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0.$$

Démonstration. Cela se démontre en utilisant par exemple le théorème de représentation de Riesz des espaces de Hilbert (voir [19]).

□

Définition 1.2.2. Une fonction $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ vérifie la *condition d'admissibilité restreinte* si

$$\int_{\mathbb{R}^-} \frac{|\widehat{\psi}(-\xi)|^2}{\xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{\xi} d\xi = \frac{C_\psi}{2\pi} < +\infty.$$

On a alors un équivalent du lemme précédent.

Lemme 1.2.2. *Si $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ vérifie la condition d'admissibilité restreinte et f_1, f_2 sont deux fonctions de $L^2(\mathbb{R})$, alors*

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{a^2} W_\psi f_1(b,a)\, \overline{W_\psi f_2}(b,a)\, db\, da = C_\psi \langle f_1, f_2 \rangle.$$

En particulier, en prenant $f = f_1 = f_2 \in L^2(\mathbb{R})$, on en déduit que

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{a^2} \|W_\psi f(\cdot, a)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\, da.$$

On obtient aussi un résultat de convergence : si $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ vérifie la condition d'admissibilité restreinte, alors pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$, on a

$$\lim_{A\to+\infty} \left\| f - \frac{1}{C_\psi} \int_{1/A}^{A} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{a^2} W_\psi f(b,a) \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{\cdot - b}{a}\right) db\, da \right\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0.$$

1.3 Analyse multirésolution

Calculer tous les coefficients de la transformée en ondelettes continue peut s'avérer trop long. De plus, cette transformée peut donner « trop » d'informations (voir par exemple [56]) et on aimerait dès lors se ramener à un cas discret. Pour cela, on peut développer la notion d'analyse multirésolution.

Définition 1.3.1. Une *analyse multirésolution* de $L^2(\mathbb{R}^d)$ est la donnée d'une suite de sous-espaces vectoriels fermés $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R}^d)$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on a $V_j \subset V_{j+1}$,

(ii) pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $f \in V_j$ si et seulement si $f(2\,\cdot) \in V_{j+1}$,

(iii) pour tous $j \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{Z}^d$, $f \in V_j$ si et seulement si $f(\cdot - 2^{-j}k) \in V_j$,
(iv) il existe une fonction $\varphi \in V_0$ telle que la famille $\{\varphi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ forme une base orthonormée de V_0,
(v) on a $\cap_j V_j = \{0\}$ et $\cup_j V_j$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.

La fonction φ est appelée *fonction d'échelle.*

On considère d'abord le cas $d = 1$. Soit $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$, alors pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on note $\varphi_{j,k}$ la fonction définie par

$$\varphi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\varphi(2^j x - k).$$

Proposition 1.3.1. *Soit $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$, alors pour tout $j \in \mathbb{Z}$,*

$$\{\varphi_{j,k} \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

forme une base orthonormée de V_j.

Démonstration. Fixons $j \in \mathbb{Z}$.
Comme $\varphi(\cdot - k) \in V_0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on sait grâce au point (ii) que $\varphi_{j,k} \in V_j$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
Montrons d'abord le caractère générateur.
Soit $f \in V_j$, alors $f(2^{-j}\cdot) \in V_0$ et en utilisant le point (iv), il existe donc une suite de complexes $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ telle que

$$f(2^{-j}\cdot) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \, \varphi(\cdot - k).$$

On trouve alors directement que

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \, \varphi(2^j \cdot -k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \, \varphi_{j,k},$$

où $b_k := a_k 2^{-j/2}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
On montre le caractère indépendant, orthogonal et normé en même temps.
Pour tous $k, l \in \mathbb{Z}$, par changement de variable et en utilisant le point (iv), on a

$$\begin{aligned}
\langle \varphi_{j,k}, \varphi_{j,l} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi_{j,k}(x) \, \overline{\varphi_{j,l}}(x) \, dx &= \int_{\mathbb{R}} 2^j \varphi(2^j x - k) \, \overline{\varphi}(2^j x - l) \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \varphi(t - k) \, \varphi(t - l) \, dt \\
&= \langle \varphi(\cdot - k), \varphi(\cdot - l) \rangle \\
&= \delta_{k,l}.
\end{aligned}$$

□

Proposition 1.3.2. *Soit $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$. Si $f \in L^2(\mathbb{R})$, alors la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, définie par $a_k = \langle f, \varphi_{j,k}\rangle$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, minimise*

$$\left\| f - \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k \varphi_{j,k} \right\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

pour une suite $(b_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ quelconque de complexes.

Démonstration. On note
$$P_{V_j} f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j,k}\rangle \varphi_{j,k}.$$

Soit $g \in V_j$, comme V_j est un sous-espace vectoriel de $L^2(\mathbb{R})$, on a $P_{V_j} f - g \in V_j$.
Or, pour $l \in \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned}\langle f - P_{V_j} f, \varphi_{j,l}\rangle = \langle f, \varphi_{j,l}\rangle - \langle P_{V_j} f, \varphi_{j,l}\rangle &= \langle f, \varphi_{j,l}\rangle - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j,k}\rangle \langle \varphi_{j,k}\varphi_{j,l}\rangle \\ &= \langle f, \varphi_{j,l}\rangle - \langle f, \varphi_{j,l}\rangle \\ &= 0,\end{aligned}$$

et donc $f - P_{V_j} f \in V_j^{\perp}$.
On en déduit que les fonctions $f - P_{V_j} f$ et $P_{V_j} f - g$ sont orthogonales (puisque $P_{V_j} f - g \in V_j$ se décompose dans la base de la proposition précédente) et en utilisant le théorème de Pythagore dans $L^2(\mathbb{R})$, on en tire que

$$\|f - g\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \|f - P_{V_j} f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \|P_{V_j} f - g\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.$$

La conclusion en découle puisqu'on a montré que pour tout $g \in V_j$, on a

$$\|f - P_{V_j} f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|f - g\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.$$

□

Remarque 1.3.1. La proposition précédente montre l'utilité des analyses multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$, à savoir approximer successivement une fonction en la projetant sur les espaces $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$. En effet, on sait grâce au résultat ci-dessus que la projection orthogonale de f sur V_j, donnée par
$$P_{V_j} f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j,k}\rangle \varphi_{j,k},$$
est la meilleure approximation dans V_j de f.

Exemple 1.3.1. On définit l'analyse multirésolution de Haar $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ en posant, pour tout $j \in \mathbb{Z}$,
$$V_j = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \forall k \in \mathbb{Z}\,,\; f \text{ constante sur } \left[k2^{-j}, (k+1)2^{-j}\right[\right\}.$$

Vérifions que cela définit une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$.
Il est clair que V_j est un sous-espace vectoriel de $L^2(\mathbb{R})$ et il est fermé en montrant trivialement par exemple qu'il contient les limites de ses suites convergentes.
Les points (i), (ii) et (iii) sont évidents à établir.
Pour le point (iv), on remarque que la fonction $\varphi := \chi_{[0,1[}$ convient car $\varphi \in V_0$ et

$$\{\varphi(\cdot - k)\}_{k\in\mathbb{Z}} = \{\chi_{[k,k+1[}\}_{k\in\mathbb{Z}}$$

forme bien une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.
Enfin, l'intersection des V_j fait $\{0\}$ puisque seule la fonction nulle est constante sur $\mathbb{R}$ et dans $L^2(\mathbb{R})$ et pour la densité de l'union des V_j dans $L^2(\mathbb{R})$, cela résulte du fait que l'ensemble des fonctions étagées à support compact dans $\mathbb{R}^d$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ ([12]).

1.4 Lien avec les ondelettes ($d = 1$)

Définition 1.4.1. Soit $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$. Pour $j \in \mathbb{Z}$, on note W_j le complément orthogonal de V_j dans V_{j+1}.

Remarque 1.4.1. On sait alors que, pour tout $j \in \mathbb{Z}$,

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j.$$

Proposition 1.4.1. *Pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $f \in W_j$ si et seulement si $f(2\cdot) \in W_{j+1}$.*

Démonstration. C'est direct en utilisant le point (ii) :

$$f \in W_j \Leftrightarrow f \in V_{j+1}\backslash V_j \Leftrightarrow f(2\cdot) \in V_{j+2}\backslash V_{j+1} \Leftrightarrow f(2\cdot) \in W_{j+1}.$$

□

Proposition 1.4.2. *Les espaces W_j sont orthogonaux deux à deux.*

Démonstration. Si $j_1, j_2 \in \mathbb{Z}$, $j_1 < j_2$, alors on sait que $W_{j_1} \subset V_{j_1+1} \subseteq V_{j_2}$.
On en tire directement la conclusion puisque W_{j_2} est le complément orthogonal de V_{j_2} dans V_{j_2+1}. □

Lemme 1.4.1. *Pour tout $m, n \in \mathbb{Z}$, avec $m < n$, on a*

$$V_n = V_m \oplus \bigoplus_{j=m}^{n-1} W_j.$$

Démonstration. Soit $j \in \{m, ..., n-1\}$, comme $V_j \perp W_j$ et $V_m \subseteq V_j$, on a

$$V_m \perp W_j.$$

Ainsi, on trouve

$$V_n = V_{n-1} \oplus W_{n-1} = V_{n-2} \oplus W_{n-2} \oplus W_{n-1} = ... = V_m \oplus \bigoplus_{j=m}^{n-1} W_j.$$

□

Proposition 1.4.3. *L'espace $\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} W_j$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.*

Démonstration. En utilisant le lemme 1.4.1 et le point (v), on obtient

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} V_n = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} W_j,$$

d'où la conclusion en appliquant à nouveau le point (v). □

Proposition 1.4.4. *L'espace $V_0 \oplus \bigoplus_{j\in\mathbb{N}} W_j$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.*

Démonstration. En prenant $m = 0$ dans le lemme 1.4.1, on obtient

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} V_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n = V_0 \oplus \bigoplus_{j\in\mathbb{N}} W_j,$$

d'où la conclusion en appliquant le point (v). □

Donnons l'idée pour se ramener aux ondelettes.
On sait que $\varphi \in V_0 \subset V_1$. Ainsi, au vu de la proposition 1.3.1, on a

$$\varphi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle \varphi, \varphi_{1,k}\rangle \, \varphi_{1,k} \text{ et } \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle \varphi, \varphi_{1,k}\rangle|^2 = 1.$$

On peut alors montrer que

$$\psi := \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k \overline{\langle \varphi, \varphi_{1,-k+1}\rangle} \, \varphi_{1,k} \tag{1.2}$$

est une ondelette mère et que $\{\psi(\cdot - k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormée de W_0.
On sait alors grâce à la proposition 1.4.1 et en procédant comme pour les $\varphi_{j,k}$ que

$$\{\psi_{j,k} := 2^{j/2}\psi(2^j \cdot -k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

est une base orthonormée de W_j.
Vu ce qui précède, on en tire donc que

$$\{\psi_{j,k} \mid j, k \in \mathbb{Z}\}$$

et

$$\{\psi_{j,k} \mid j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\varphi(\cdot - k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

forment des bases orthonormées de $L^2(\mathbb{R})$.
Au final, si $f \in L^2(\mathbb{R})$, on a la décomposition

$$f = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k}\rangle\, \psi_{j,k} = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} W_\psi f(2^{-j}k, 2^{-}j)\, \psi_{j,k},$$

ou encore

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{0,k}\rangle\, \varphi_{0,k} + \sum_{\substack{j\in\mathbb{N}\\ k\in\mathbb{Z}}} \langle f, \psi_{j,k}\rangle\, \psi_{j,k}.$$

On parle alors de *transformée en ondelettes discrète.*

Exemple 1.4.1. Reprenons l'analyse multirésolution de Haar et cherchons à quoi ressemble ψ.
Soit $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\varphi_{1,k} = \sqrt{2}\,\varphi(2\cdot -k) = \sqrt{2}\,\chi_{[\frac{k}{2},\frac{k+1}{2}[},$$

et donc

$$\overline{\langle \varphi, \varphi_{1,-k+1}\rangle} = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\overline{\varphi_{1,k}(x)}\,dx = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{si } n=0 \text{ ou } n=1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi,

$$\psi := \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k \overline{\langle \varphi, \varphi_{1,-k+1}\rangle}\, \varphi_{1,k} = \frac{\sqrt{2}}{2}\varphi_{1,0} - \frac{\sqrt{2}}{2}\varphi_{1,1} = \chi_{[0,\frac{1}{2}[} - \chi_{[\frac{1}{2},1[}.$$

Cette ondelette est appelée *ondelette de Haar* ; on considère que c'est la première ondelette connue ([29]).

1.5 Passage au cas multidimensionnel

Une manière de passer au cas multidimensionnel est de se ramener au cas $d = 1$.

Définition 1.5.1. Soient $f_1, ..., f_d \in L^2(\mathbb{R})$, la fonction $f_1 \otimes ... \otimes f_d$ est définie par

$$f_1 \otimes ... \otimes f_d : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} : (x_1, ..., x_d) \mapsto f_1(x_1)...f_d(x_d).$$

Proposition 1.5.1. *Soit $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$, alors la suite $\left(V_j^{(d)}\right)_{j\in\mathbb{Z}}$, définie par*

$$V_j^{(d)} = \underbrace{V_j \otimes ... \otimes V_j}_{d \text{ termes}} = \overline{\rangle\{f_1 \otimes ... \otimes f_d \mid f_l \in V_j\ \forall l \in \{1, ..., d\}\langle}$$

pour tout $j \in \mathbb{Z}$, forme une analyse multirésolution de $\mathbb{R}^d$.

Démonstration. Tout d'abord il est clair que si $f_1, ..., f_d \in L^2(\mathbb{R})$, alors $f_1 \otimes ... \otimes f_d \in L^2(\mathbb{R}^d)$ au vu du théorème de Fubini-Tonelli.
Il est également évident par définition que $V_j^{(d)}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(\mathbb{R})$.
Vérifions à présent les cinq points.
Les points (i), (ii) et (iii) découlent du fait que les points (i), (ii) et (iii) sont vrais pour les espaces V_j.
Pour le point (iv), il suffit de prendre comme fonction d'échelle la fonction Φ définie par

$$\Phi = \underbrace{\varphi \otimes ... \otimes \varphi}_{d \text{ termes}},$$

où φ est la fonction d'échelle de $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$. On vérifie directement que $\{\Phi(\cdot - k)\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ est une base orthonormée de $V_j^{(d)}$.
Pour l'intersection, c'est direct également. Il reste à montrer que l'union est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, ce qui est plus long à établir.
Comme on sait que l'ensemble des fonction étagées à support compact sur $\mathbb{R}^d$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour toute fonction étagée ξ à support compact dans $\mathbb{R}^d$, il existe une fonction $f \in \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j^{(d)}$ telle que

$$\|f - \xi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon.$$

On peut même supposer, par linéarité, que $\xi = \chi_I$, où I est un semi-intervalle borné de $\mathbb{R}^d$, i.e. $I = I_1 \times ... \times I_d$ avec I_l un semi-intervalle borné de $\mathbb{R}$ pour tout $l \in \{1, ..., d\}$. Il est clair que $\chi_I = \chi_{I_1} \otimes ... \otimes \chi_{I_d}$.
On peut évidemment supposer que $\operatorname{mes}(I_l) > 0$ pour tout $l \in \{1, ..., d\}$ car sinon $\xi \in V_j^{(d)}$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$, ce qui suffit.
Soit $\varepsilon > 0$.
On sait par le point (v) qu'il existe $j_1 \in \mathbb{Z}$ et $f_1 \in V_{j_1}$ tels que

$$\|f_1 - \chi_{I_1}\|_{L^2(\mathbb{R})} < \frac{\varepsilon}{d\sqrt{\operatorname{mes}(I_2) ... \operatorname{mes}(I_d)}}.$$

On distingue alors deux cas :
Si $\|f_1\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0$, on pose $f_l = f_1$ et $j_l = j_1$ pour tout $l \in \{2, ..., d\}$.
Si $\|f_1\|_{L^2(\mathbb{R})} \neq 0$, il existe $j_2 \in \mathbb{Z}$ et $f_2 \in V_{j_2}$ tels que

$$\|f_2 - \chi_{I_2}\|_{L^2(\mathbb{R})} < \frac{\varepsilon}{d\|f_1\|_{L^2(\mathbb{R})}\sqrt{\operatorname{mes}(I_3) ... \operatorname{mes}(I_d)}}.$$

On procède de même pour tout $l \in \{2, ..., d-1\}$:
Si $\|f_l\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0$, on pose $f_{l+1} = ... = f_d = f_l$ et $j_{l+1} = ... = j_d = j_l$.
Si $\|f_1\|_{L^2(\mathbb{R})} \neq 0$, il existe $j_{l+1} \in \mathbb{Z}$ et $f_{l+1} \in V_{j_{l+1}}$ tels que

$$\|f_{l+1} - \chi_{I_{l+1}}\|_{L^2(\mathbb{R})} < \frac{\varepsilon}{d\|f_1\|_{L^2(\mathbb{R})} ... \|f_l\|_{L^2(\mathbb{R})}\sqrt{\operatorname{mes}(I_{l+2}) ... \operatorname{mes}(I_d)}}.$$

Ainsi en posant $J = \sup\{j_l \mid l \in \{1, ..., d\}\}$, on obtient que

$$F := f_1 \otimes ... \otimes f_d \in V_J^{(d)}.$$

On en tire alors que

$$\begin{aligned}
\|F - \chi_I\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} &\leq \|f_1 \otimes ... \otimes f_d - f_1 \otimes \chi_{I_2} \otimes ... \otimes \chi_{I_d}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
&\quad + \|f_1 \otimes \chi_{I_2} \otimes ... \otimes \chi_{I_d} - \chi_{I_1} \otimes ... \otimes \chi_{I_d}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
&= \|f_1\|_{L^2(\mathbb{R})}\|f_2 \otimes ... \otimes f_d - \chi_{I_2} \otimes ... \otimes \chi_{I_d}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
&\quad + \|f_1 - \chi_{I_1}\|_{L^2(\mathbb{R})}\sqrt{\text{mes}\,(I_2) ... \text{mes}\,(I_d)} \\
&< \|f_1\|_{L^2(\mathbb{R})}\|f_2 \otimes ... \otimes f_d - \chi_{I_2} \otimes ... \otimes \chi_{I_d}\|_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})} + \frac{\varepsilon}{d}.
\end{aligned}$$

La conclusion en découle puisque si $\|f_1\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0$, alors $\|F - \chi_I\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon$ et sinon il suffit d'itérer le processus et on aura la même conclusion par construction des f_l. $\square$

Remarque 1.5.1. Soit $j \in \mathbb{Z}$; remarquons que

$$V_{j+1}^{(d)} = \overbrace{V_{j+1} \otimes ... \otimes V_{j+1}}^{d \text{ termes}} = (V_j \oplus W_j) \otimes ... \otimes (V_j \oplus W_j) = V_j^{(d)} \oplus \overbrace{\left(A_1^{(j)} \oplus ... \oplus A_{2^d-1}^{(j)}\right)}^{=:W_j^{(d)}},$$

où chaque $A_n^{(j)}$, $n \in \{1, ..., 2^d-1\}$, s'écrit comme le produit tensoriel de d termes $B_1^{(j,n)}, ..., B_d^{(j,n)}$ qui sont égaux à V_j ou W_j.

Pour trouver une base orthonormée de $W_j^{(d)}$, il suffit comme précédemment de trouver une base orthonormée de $W_0^{(d)}$.
Soient $n \in \{1, ..., 2^d - 1\}$ et $l \in \{1, ..., d\}$, on définit $\phi_l^{(n)}$ par la fonction d'échelle φ de $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ si $B_l^{(0,n)} = V_0$ et par la fonction ψ si $B_l^{(0,n)} = W_0$.
Il est donc clair, par construction, que $\Psi^{(n)} := \phi_1^{(n)} \otimes ... \otimes \phi_d^{(n)}$ est tel que

$$\{\Psi^{(n)}(\cdot - k) \mid k \in \mathbb{Z}^d\}$$

forme une base orthonormée de $A_n^{(0)}$ et ainsi

$$\left\{\Psi^{(n)}(\cdot - k) \mid k \in \mathbb{Z}^d, n \in \{1, ..., 2^d - 1\}\right\}$$

forme une base orthonormée de $W_0^{(d)}$.
En procédant comme pour le cas $d = 1$, on en tire donc que

$$\left\{2^{jd/2}\Psi^{(n)}(2^j \cdot -k) \mid k \in \mathbb{Z}^d, n \in \{1, ..., 2^d - 1\}\right\}$$

forme une base orthonormée de $W_j^{(d)}$.
On en déduit également comme précédemment que $\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} W_j^{(d)}$ et $V_0^{(d)} \oplus \bigoplus_{j\in\mathbb{N}} W_j^{(d)}$ sont denses dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ et que

$$\left\{2^{jd/2}\,\Psi^{(n)}(2^j \cdot -k) \mid k \in \mathbb{Z}^d, n \in \{1, ..., 2^d - 1\}, j \in \mathbb{Z}\right\}$$

et

$$\left\{2^{jd/2}\,\Psi^{(n)}(2^j\cdot-k)\mid k\in\mathbb{Z}^d, n\in\{1,...,2^d-1\}, j\in\mathbb{N}\right\}\cup\{\Phi(\cdot-k)\mid k\in\mathbb{Z}^d\}$$

forment des base orthonormées de $L^2(\mathbb{R}^d)$.
On en conclut que tout $f\in L^2(\mathbb{R}^d)$ peut s'écrire sous la forme

$$f=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\sum_{n=1}^{2^d-1}\left\langle f,2^{jd/2}\Psi^{(n)}(2^j\cdot-k)\right\rangle 2^{jd/2}\Psi^{(n)}(2^j\cdot-k)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\sum_{n=1}^{2^d-1}c_{j,k}^{(n)}\Psi^{(n)}(2^j\cdot-k),$$

ou encore

$$f=\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}C^{(k)}\Phi(\cdot-k)+\sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\sum_{n=1}^{2^d-1}c_{j,k}^{(n)}\,\Psi^{(n)}(2^j\cdot-k),$$

dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ avec les $c_{j,k}^{(n)}$ et $C^{(k)}$, appelés *coefficients en ondelettes de* f, définis par

$$c_{j,k}^{(n)}=2^{jd}\int_{\mathbb{R}^d}f(x)\,\overline{\Psi^{(n)}(2^jx-k)}\,dx,$$

et

$$C^{(k)}=\int_{\mathbb{R}^d}f(x)\,\overline{\Phi(x-k)}\,dx.$$

Remarque 1.5.2. Si $d=1$, n ne peut valoir que 1 et on laisse donc tomber les dépendances en n.

Comme n peut prendre 2^d-1 valeurs possibles, cela revient au même de supposer que $n\in\{0,1\}^d\setminus\{0\}^d$ puisque n n'apparait pas explicitement, il sert juste à sommer sur 2^d-1 éléments et $\left|\{0,1\}^d\setminus\{0\}^d\right|=2^d-1$.
On considère les cubes dyadiques déterminés, pour tous $j\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{Z}^d, n\in\{0,1\}^d$, par

$$\lambda_{j,k}^{(n)}=\frac{k}{2^j}+\frac{n}{2^{j+1}}+\left]0,\frac{1}{2^{j+1}}\right]^d.$$

Par souci de clarté, on notera λ un élement $\lambda_{j,k}^{(n)}$, c_λ le coefficient $c_{j,k}^{(n)}$ et enfin Ψ_λ l'ondelette $\Psi^{(n)}(2^j\cdot-k)$.
On note alors Λ l'ensemble de ces cubes dyadiques ainsi que Λ_j l'ensemble des cubes dyadiques de côtés de longueur 2^{-j}.

Remarque 1.5.3. On considère également dans la suite les « gros » cubes dyadiques définis, pour tous $j\in\mathbb{Z}$ et $k\in\mathbb{Z}^d$, par

$$\lambda_{j,k}=\frac{k}{2^j}+\left]0,\frac{1}{2^j}\right]^d.$$

Ces cubes contiennent évidemment les 2^d cubes dyadiques $\lambda_{j,k}^{(n)}$, $n\in\{0,1\}^d$ et il est également clair que

$$\lambda_{j-1,k}^{(n)}=\lambda_{j,2k+n}.$$

Définition 1.5.2. Étant donné $\lambda \in \Lambda$, le *coefficient dominant* (« *wavelet leader* » en anglais) de λ est défini par

$$d_\lambda = \sup_{\substack{\kappa \in \Lambda \\ \kappa \subseteq \lambda}} |c_\kappa|.$$

Définition 1.5.3. Soient $\lambda, \kappa \in \Lambda$, λ et κ sont dits *adjacents* s'ils sont à la même échelle, i.e. s'ils ont le même $j \in \mathbb{Z}$, et si

$$\mathrm{dist}(\lambda, \kappa) = 0.$$

On note alors

$$A(\lambda) = \{\kappa \in \Lambda \mid \kappa \text{ et } \lambda \text{ sont adjacents}\}.$$

Il est clair que $A(\lambda)$ est composé de 3^d cubes dyadiques.

Définition 1.5.4. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$, on pose

$$d_j(x_0) = \sup_{\kappa \in A(\lambda_j(x_0))} d_\kappa,$$

où $\lambda_j(x_0)$ désigne l'unique cube dyadique de Λ_j contenant x_0.

Définition 1.5.5. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$, le *cône d'influence* de x_0 est l'ensemble des cubes dyadiques $\lambda \in \Lambda$ tels qu'il existe $j \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\lambda \in A(\lambda_j(x_0)).$$

Remarque 1.5.4. Parmi les familles de bases d'ondelettes, il y en a deux particulièrement utiles.

• Celles de Lemarié-Meyer ([49]), où l'on suppose que les fonctions $\Psi^{(n)}$ sont de Schwartz pour tout $n \in \{0,1\}^d \backslash \{0\}^d$. En particulier, cela a comme conséquence que pour tout $n \in \{0,1\}^d \backslash \{0\}^d$, les moments de $\Psi^{(n)}$ sont nuls.

• Celles de Daubechies ([18]), où l'on suppose que les fonctions $\Psi^{(n)}$ sont choisies suffisamment régulières et à support compact.

On oscillera en fonction du contexte entre les notations $n \in \{1, ..., 2^d - 1\}$ et $n \in \{0,1\}^d \backslash \{0\}^d$.

Remarque 1.5.5. Les coefficients en ondelettes, et donc les coefficients dominants également, peuvent être calculés pour toute fonction f telle que les intégrales définissant les coefficients ont un sens.

Chapitre 2

Régularité des fonctions

Dans ce chapitre et le chapitre suivant, on considère les espaces $T_u^p(x_0)$ en laissant la condition (1) n'être vérifiée que localement, i.e. pour des r suffisamment petits. Cela se justifie par le fait qu'on ne s'intéresse ici qu'à la régularité locale et non aux espaces $T_u^p(x_0)$ d'un point de vue fonctionnel.
De plus, il est clair que si $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ vérifie la condition (1) pour tout r suffisamment petit, alors cette même fonction multipliée par une fonction caractéristique adéquate vérifiera la condition (1) pour tout $r > 0$.

2.1 Espaces de Hölder et formalisme multifractal

Soient $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $\alpha \geq 0$, une fonction $f \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ appartient à l'*espace de Hölder ponctuel* $\Lambda^\alpha(x_0)$ s'il existe $J \in \mathbb{N}$, $C > 0$ et un polynôme P de degré au plus α tels que

$$\|f - P\|_{L^\infty(B(x_0,2^{-j})} \leq C\,2^{-\alpha j} \quad \forall j \geq J.$$

Si cette condition est vérifiée pour tous les $x_0 \in \mathbb{R}^d$, avec la constante C uniforme, alors on dit que f appartient à l'*espace de Hölder* $\Lambda^\alpha(\mathbb{R}^d)$.
Si $0 \leq \alpha \leq \beta$, on vérifie facilement que $\Lambda^\beta(x_0) \subseteq \Lambda^\alpha(x_0)$. On peut alors espérer caractériser la régularité d'une fonction f en x_0 en calculant son *exposant de Hölder* en x_0 défini par

$$h_\infty(x_0) = \sup\{\alpha \geq 0 : f \in \Lambda^\alpha(x_0)\}.$$

Si la fonction $x_0 \mapsto h_\infty(x_0)$ est constante, alors la fonction f est dite *mono-Hölder*. Par exemple, la fonction de Weierstrass $\mathcal{W}_{a,b}$, définie pour $a \in\,]0,1[$ et $b > 1$ tels que $ab > 1$, par

$$\mathcal{W}_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{j=0}^{+\infty} a^j \cos(b^j \pi x),$$

est mono-Hölder avec un exposant de Hölder égal à $-\log a / \log b$ (voir [30] par exemple).
En général, la fonction $x_0 \mapsto h_\infty(x_0)$ est cependant souvent très irrégulière et on calcule

alors la dimension de Hausdorff des points $x_0 \in \mathbb{R}^d$ qui ont le même exposant de Hölder. On définit ainsi le *spectre de Hölder* (ou *spectre des singularités*) par

$$d_\infty : [0, +\infty] \to [0, d] \cup \{-\infty\} : h \mapsto \dim_{\mathcal{H}}(\{x_0 \in \mathbb{R}^d : h_\infty(x_0) = h\}),$$

où par convention $\dim_{\mathcal{H}}(\emptyset) = -\infty$.

On appelle *monofractale* toute fonction f n'admettant qu'un seul exposant de Hölder fini, i.e. pour laquelle il n'existe qu'une seule valeur finie h telle que $d_\infty(h) \neq -\infty$. Une fonction monofractale peut donc présenter des exposants de Hölder $h = +\infty$.

C'est le cas par exemple de l'escalier du diable : soit K l'ensemble triadique de Cantor. Pour $t = \sum_{j \geq 1} a_j/3^j \notin K$ avec $a_j \in \{0, 1, 2\}$ et j_0 le plus petit indice tel que $a_{j_0} = 1$, l'escalier du diable D est défini par

$$D : [0, 1] \setminus K \to [0, 1] : t = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{a_j}{3^j} \mapsto \sum_{j=1}^{j_0 - 1} \frac{a_j}{2^{j+1}} + \frac{1}{2^{j_0}}.$$

On étend par continuité cette fonction à $[0, 1]$. L'exposant de Hölder de D vaut $\log 2/\log 3$ sur K et $+\infty$ ailleurs (voir par exemple [22]). La fonction D est donc monofractale et comme la dimension de Hausdorff de K est $\log 2/\log 3$ ([24]) et la dimension de Hausdorff de $[0, 1] \setminus K$ est 1, on a donc

$$d_\infty(h) = \begin{cases} \log 2/\log 3 & \text{si } h = \log 2/\log 3, \\ 1 & \text{si } h = +\infty, \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Une fonction f est dite *multifractale* si son spectre admet des valeurs finies h différentes pour lesquelles $d_\infty(h) \neq -\infty$. Un exemple classique de telle fonction est la fonction de Riemann (voir section 3.3).

Une formule permettant de déterminer le spectre de fonctions est appelée *formalisme multifractal*. Pour qu'une formule soit intéressante, on veut qu'elle soit valide pour la plupart des fonctions.

Pour formaliser ce « plupart », on peut utiliser la notion de prévalence ([32] par exemple) qui généralise la notion de « presque partout » de la mesure de Lebesgue à des espaces vectoriels de dimension infinie comme les espaces L^p ou C^k.

On peut utiliser aussi la notion d'ensembles maigres et comaigres dans un espace de Baire.

On présente ici les principaux formalismes multifractals.

2.1.1 Méthode des fonctions de structure

Cette méthode a été proposée initialement par Parisi et Frisch dans le contexte des « turbulences pleinement développées » ([67]). Elle se base sur les arguments heuristiques suivants. Pour des points d'exposants h donnés, on estime que pour l assez petit, la quantité

$$|f(t + l) - f(t)|^q$$

se comporte comme $|l|^{hq}$. De plus, les points d'exposants h sont au nombre de $|l|^{-d_\infty(h)}$ et contribuent chacun pour un volume $|l|^d$. En posant

$$\zeta(q) = \inf_h \{hq - d_\infty(h)\} + d,$$

on espère retrouver le spectre de Hölder de la fonction en calculant la transformée de Legendre inverse

$$d_\infty(h) = \inf_q \{hq - \zeta(q)\} + d.$$

On introduit dès lors les définitions suivantes.

Définition 2.1.1. Soit $f \in L^q(\mathbb{R}^d)$ à valeurs réelles, sa *fonction de partition* est définie par

$$S(l, q) = \int_{\mathbb{R}^d} |f(t + l) - f(t)|^q \, dt$$

et on pose

$$\zeta(q) = \liminf_{l \to 0} \frac{\log S(l, q)}{\log |l|}.$$

2.1.2 Méthode transformée en ondelettes intégrale

On peut remplacer la fonction de structure par une intégrale sur la transformée en ondelettes. On se base sur le résultat classique suivant (voir [60] par exemple).

Proposition 2.1.1. *Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $\alpha \geq 0$ et $f \in \Lambda^\alpha(x_0)$, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$|Wf(b, a)| \leq C\, a^\alpha \left(1 + \frac{|x_0 - x|}{a}\right)^\alpha$$

dans un voisinage de $(x_0, 0^+)$.

Ainsi, pour un point x d'exposant h, on peut imaginer que $|W_f(b, a)|$ peut se comporter comme $|a|^{hq}$ pour des petites échelles a et des positions b proches de x_0. On pose alors

$$\widetilde{Z}(a, q) = \int_{\mathbb{R}^d} |W_f(b, a)|^q \, db,$$

et

$$\widetilde{\eta}(q) = \liminf_{a \to 0} \frac{\log \widetilde{Z}(a, q)}{\log a}.$$

On estime alors le spectre par

$$d_\infty(h) = \inf_q \{hq - \widetilde{\eta}(q)\} + d.$$

2.1.3 Méthode des maxima du module de la transformée en ondelettes

Pour $q > 0$, les deux précédentes méthodes ne fournissent qu'une majoration du spectre. Dans certains cas, comme par exemple pour les fonctions auto-similaires, elles donnent la partie croissante du spectre ([36]).
La méthode des maxima du module de la transformée en ondelettes ([4]) permet d'estimer la partie décroissante du spectre, i.e. pour la partie relative aux $q < 0$.

Une *fonction de maxima de module* l associée à la transformée en ondelettes Wf est une fonction continue, définie sur un intervalle $[a_m, a_M]$,

$$l : [a_m, a_M] \to \mathbb{R} : a \mapsto b,$$

telle que $b = l(a)$ soit un maximum local de $|Wf(\cdot, a)|$ pour toute échelle a du domaine de définition. L'extremum doit être strict à gauche ou à droite. Si γ est l'application donnée par l'égalité $\gamma(a) = (l(a), a)$, alors la courbe définie par le chemin $(\gamma, [a_m, a_M])$ est appelée *ligne de maxima du module*.

On pose alors

$$Z(a, q) = \sum_l \sup_{a' \leq a} |Wf(l(a'), a')|^q,$$

où la somme est prise sur les lignes de maxima définies sur un intervalle du type $[a_0, a]$ et on pose

$$\eta(q) = \liminf_{a \to 0} \frac{\log Z(a, q)}{\log a}.$$

On estime alors le spectre en calculant

$$d_\infty(h) = \inf_q \{qh - \eta(q)\}.$$

Cette dernière méthode nous permet donc d'estimer le spectre sur ses parties croissantes et décroissantes.

2.1.4 WLM

La méthode précédente n'est pas associée à un espace fonctionnel. La méthode que l'on développe ici permet d'estimer l'entièreté du spectre et est associée à des espaces fonctionnels dits d'oscillation.
On se base sur le résultat suivant, que l'on démontrera plus tard dans un cadre plus général.

Proposition 2.1.2. ([41])
Soient $\alpha \geq 0$ et $f \in \Lambda^\alpha(x_0)$. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$d_j(x_0) \leq C\, 2^{-\alpha j}.$$

Suivant la méthode des maxima du module de la transformée en ondelettes, il est naturel de poser

$$S(q,j) = 2^{-dj} \sum_{\lambda \in \Lambda_j} d_\lambda^q.$$

On pose alors

$$\omega(q) = \liminf_{j \to +\infty} \frac{\log S(q,j)}{\log 2^{-j}},$$

et on espère trouver le spectre de f en calculant

$$d_\infty(h) = \inf_q \{qh - \omega(q)\} + d.$$

Cette méthode relative aux coefficients dominants est souvent appelée « WLM » pour « wavelet leaders method » ([40]).
Comme annoncé, on peut définir ω avec un espace fonctionnel.

Définition 2.1.2. Soient $s \in \mathbb{R}$ et $q > 0$, on définit l'*espace d'oscillation* $\mathcal{O}_q^s(\mathbb{R}^d)$ par

$$\mathcal{O}_q^s(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) : \|f\|_{\mathcal{O}_q^s} := \|\{C^{(k)}\}_k\|_{l^q} + \|\{2^{(sq-d)j}\|\{d_\lambda\}_k\|_{l^q}\|_{l^\infty} < +\infty \right\}.$$

On vérifie alors que si $q > 0$,

$$\omega(q) = \sup\{s : f \in \mathcal{O}_{q,\text{loc}}^{s/q}(\mathbb{R}^d)\},$$

où $\mathcal{O}_{q,\text{loc}}^{s/q}(\mathbb{R}^d)$ désigne l'espace des fonctions définies sur $\mathbb{R}^d$ dont la restriction à tout compact est dans $\mathcal{O}_q^{s/q}(\mathbb{R}^d)$.
Cette méthode donne une majoration du spectre ([39]).

Remarque 2.1.1. Du fait qu'elles proviennent d'une transformée de Legendre, ces quatre dernières méthodes ne permettent de considérer que des spectres concaves ou alors d'estimer l'enveloppe concave des spectres. Pour pallier ce problème, les espaces S^ν ont été introduits (voir [5] par exemple).
On peut alors combiner la WLM et la méthode liée aux espaces S^ν pour former la méthode « WLP » (pour « wavelet leaders profils »). Cette méthode permet d'estimer des spectres non-concaves (voir [9]).

2.2 p-exposants et p-spectres

Les espaces $T_u^p(x_0)$ permettent de caractériser la régularité de fonctions dans $L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^d)$, avec $p \in [1, +\infty[$ qui ne sont pas localement bornées, ce qui n'est pas possible avec les espaces de Hölder classiques.
Pour la détermination des p-exposants, il suffit de n'avoir (1) que localement et le polynôme peut avoir un degré égal à u. On note toujours ces espaces de la même façon, le contexte étant suffisamment clair à chaque fois.

Définition 2.2.1. Soient $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $p \in [1, +\infty]$ et $u \geq -d/p$, on dit qu'une fonction $f \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ appartient à l'espace $T^p_u(x_0)$ s'il existe un polynôme P de degré strictement plus petit que u et une constante $C > 0$ tels que pour r suffisamment petit,

$$r^{-d/p} \|f - P\|_{L^p(B(x_0,r))} \leq C\, r^u, \tag{2.1}$$

où, par convention, un polynôme de degré négatif est un polynôme de degré 0.

Définition 2.2.2. Le *p-exposant* de f en x_0 est défini par

$$h_p(x_0) = \sup\{u \geq -d/p : f \in T^p_u(x_0)\}.$$

Définition 2.2.3. Le *p-spectre* de f est défini par

$$d_p : \left[-\frac{d}{p}, +\infty\right] \to [0, d] \cup \{-\infty\} : h \mapsto \dim_{\mathcal{H}}(\{x_0 \in \mathbb{R}^d : h_p(x_0) = h\}).$$

Remarque 2.2.1. Le polynôme apparaissant dans (2.1) est unique pour un u et x_0 donné, et indépendant de p. En faisant varier u, si α passe par un naturel n, alors le polynôme peut être modifié avec l'ajout d'un terme de degré n.
Cependant, pour des u_1 et u_2 différents, le polynôme P est le même jusqu'au degré $\min\{u_1, u_2\}$.
Ainsi, en prenant la partie entière de $h_p(x_0)$, on obtient un polynôme qui correspond aux plus grandes valeurs de u.
Grâce au point (ii) de la proposition 2.2.1, on peut fixer un unique polynôme pour f en x_0, dont les coefficients sont indépendants de P et qui réfèrent aux dérivées de Peano de f en x_0 (voir proposition 5.3.4 dans un cadre plus général).

Remarque 2.2.2. Dans cette section et dans la suite, on utilisera régulièrement et sans le rappeler les inclusions suivantes, découlant directement des inégalités de Hölder :

$$1 \leq q < p \leq +\infty \Rightarrow L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d) \subset L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d),$$

au voisinage de chaque point x_0 de $\mathbb{R}^d$.

Définition 2.2.4. Soit $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ dans un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}^d$. L'*indice de Lebesgue* de f en x_0 est défini par

$$p_0(f, x_0) = \sup\left\{p \geq 1 : f \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d) \text{ dans un voisinage de } x_0\right\}.$$

Si $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, l'*indice de Lebesgue* de f est défini par

$$p_0(f) = \sup\left\{p \geq 1 : f \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)\right\}.$$

Grâce à cette notion, on peut donner des propriétés concernant la fonction $p \mapsto h_p(x_0)$ ([44]).

Proposition 2.2.1. *Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ dans un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Alors la fonction $p \mapsto h_p(x_0)$ est définie sur $[1, p_0(f,x_0)[$ (et éventuellement en $p_0(f,x_0)$ également) et vérifie les propriétés suivantes :*

(i) la fonction $p \mapsto h_p(x_0)$ est à valeurs dans $[-d/p_0(f,x_0), +\infty]$,

(ii) la fonction $p \mapsto h_p(x_0)$ est décroissante,

(iii) la fonction $q \mapsto h_{1/q}(x_0)$ définie sur $[1/p_0(f,x_0), 1]$ est concave.

Démonstration. Il est clair que $p \mapsto h_p(x_0)$ est définie sur $[1, p_0(f,x_0)[$.
Vérifions les trois points.
(i) Si $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ dans un voisinage de x_0, alors on a

$$\|f\|_{B(x_0,r)} \leq C,$$

et donc

$$r^{-d/p}\|f\|_{B(x_0,r)} \leq C\, r^{-d/p}.$$

Ainsi, $f \in T^p_{-d/p}(x_0)$ et donc

$$h_p(x_0) \geq -1/p \geq -1/p_0(f,x_0).$$

(ii) Soient $1 \leq q < p$, $\alpha \geq -d/p$ et s l'exposant conjugué de p/q, i.e. $1 = q/p + 1/s$. Si $f \in T^p_\alpha(x_0)$, il existe donc un polynôme P de degré strictement plus petit que α et une constante $C > 0$ tels que pour r suffisamment petit,

$$r^{-d/p}\|f - P\|_{L^p(B(x_0,r))} \leq C\, r^\alpha.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}\int_{B(x_0,r)} |f(x) - P(x)|^q\, dx &\leq \left(\int_{B(x_0,r)} |f(x) - P(x)|^p\, dx\right)^{q/p} \left(\int_{B(x_0,r)} dx\right)^{1/s}\\ &\leq C'\, (r^{\alpha + d/p})^q\, r^{d/s}\\ &= C'\, r^{\alpha q + d}.\end{aligned}$$

On a donc montré que $T^p_\alpha(x_0) \subseteq T^p_\alpha(x_0)$ car $\alpha \geq -d/p > -d/q$. Ainsi,

$$\{\alpha \geq -d/p : f \in T^p_\alpha(x_0)\} \subseteq \{\alpha \geq -d/q : f \in T^q_\alpha(x_0)\},$$

d'où $h_p(x_0) \leq h_q(x_0)$.
(iii) Soit $\rho : s \in [1/p_0(f,x_0), 1] \mapsto h_{1/s}(x_0)$. On veut montrer que pour tous $s_1, s_2 \in [1/p_0(f,x_0)), 1]$ et pour tout $\gamma \in]0,1[$,

$$\rho(\gamma s_1 + (1-\gamma)s_2) \geq \gamma\rho(s_1) + (1-\gamma)\rho(s_2),$$

c'est-à-dire

$$h_{1/(\gamma s_1 + (1-\gamma)s_2)} \geq \gamma h_{1/s_1} + (1-\gamma) h_{1/s_2}.$$

Soient $p = 1/s_1, q = 1/s_2$, $\delta = \gamma\alpha + (1-\gamma)\beta$ et

$$s = \frac{1}{\gamma s_1 + (1-\gamma)s_2}.$$

On veut montrer que

$$f \in T^p_\alpha(x_0) \cap T^q_\beta(x_0) \Rightarrow f \in T^s_\delta(x_0).$$

Soit donc $f \in T^p_\alpha(x_0) \cap T^q_\beta(x_0)$, on prend le polynôme relatif à f et x_0 de plus grand degré (cf remarque 2.2.1). Il existe donc une constante $C > 0$ telle que

$$\|f - P\|_{L^p(B(x_0,r))} \leq C\, r^{\alpha + d/p} \quad \text{et} \quad \|f - P\|_{L^q(B(x_0,r))} \leq C\, r^{\beta + d/q}.$$

Or, on a

$$1 = \frac{s}{p}\gamma + \frac{s}{q}(1-\gamma).$$

Donc $p/s\gamma$ et $q/s(1-\gamma)$ sont conjugués et en utilisant l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}
\int_{B(x_0,r)} |f(x) - P(x)|^s \,dx &= \int_{B(x_0,r)} |f(x) - P(x)|^{s\gamma}\, |f(x) - P(x)|^{s(1-\gamma)}\, dx \\
&\leq \big\| |f - P|^{s\gamma} \big\|_{L^{p/s\gamma}(B(x_0,r))} \big\| |f - P|^{s(1-\gamma)} \big\|_{L^{q/s(1-\gamma)}(B(x_0,r))} \\
&= \|f - P\|^{s\gamma}_{L^p(B(x_0,r))} \|f - P\|^{s(1-\gamma)}_{L^q(B(x_0,r))}.
\end{aligned}$$

Ainsi, on trouve

$$\begin{aligned}
\|f - P\|_{L^s(B(x_0,r))} &\leq \|f - P\|^{\gamma}_{L^p(B(x_0,r))} \|f - P\|^{1-\gamma}_{L^q(B(x_0,r))} \\
&\leq C^\gamma\, r^{\alpha\gamma + d\gamma/p}\, C^{1-\gamma}\, r^{\beta(1-\gamma) + d(1-\gamma)/q} \\
&= C^\gamma\, r^{\delta + d/s},
\end{aligned}$$

d'où $f \in T^s_\delta(x_0)$. □

Remarque 2.2.3. Grâce au résultat précédent, on sait que pour des fonctions localement bornées,

$$h_p(x_0) \geq h_\infty(x_0) \quad \forall p \geq 1.$$

On peut facilement construire (voir exemple 2.2.3) des fonctions localement bornées pour lesquelles

$$h_\infty(x_0) < h_p(x_0) < h_q(x_0) < h_1(x_0) \quad \forall\, 1 < q < p < \infty.$$

Remarque 2.2.4. Au vu du point (iii), la fonction $p \mapsto h_p(x_0)$ est continue sauf peut-être aux extrémités 1 et $p_0(f, x_0)$ du domaine.

Remarque 2.2.5. Pour le point (iii), on a en réalité démontré en cours de route l'inégalité d'interpolation des espaces de Lebesgue, qui est un corollaire direct de l'inégalité de Hölder.

La démonstration de la proposition suivante consiste à calculer le p-spectre d'un exemple constructif, approche réalisée dans [44].

Proposition 2.2.2. *Les conditions (i), (ii) et (iii) de la proposition précédente sont optimales : si $p_0 \in]1, +\infty[$ et si ξ est une fonction définie sur $[1, p_0]$ qui est à valeurs dans $[-d/p_0, +\infty]$, décroissante et telle que la fonction $q \mapsto \xi(1/q)$ est concave sur $[1/p_0, 1]$, alors il existe $f \in L^{p_0}(\mathbb{R}^d)$ telle que*

$$\forall p \in [1, p_0]\,, \quad h_p(x_0) = \xi(p).$$

Démonstration. On fait la preuve pour $d = 1$ et $x_0 = 0$, les constructions étant similaires pour $d \geq 2$ et $x_0 \in \mathbb{R}_0^d$.
Soit ρ la fonction définie par

$$\rho : s \in \left[\frac{1}{p_0}, 1\right] \mapsto \xi\left(\frac{1}{s}\right).$$

Par hypothèse, ρ est concave, croissante et à valeurs dans $[-1/p_0, +\infty]$.
Par concavité et croissance de ρ, celle-ci peut être obtenue comme la borne inférieure d'une famille dénombrable de droites

$$\rho_n(s) = a_n s + b_n, \quad a_n \geq 0,\, n \in \mathbb{N},$$

telles que

$$\rho_n(s) \geq \rho(s) \quad \forall s \in \left[\frac{1}{p_0}, 1\right], \forall n \in \mathbb{N},$$

et telles qu'il existe une suite dense $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $[1/p_0, 1]$ telle que $\rho_n(s_n) = \rho(s_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, il existe des $n_j, k_j \in \mathbb{N}$ uniques tels que

$$j = 2^{n_j}(2k_j + 1).$$

On définit alors les suites $\omega = (\omega_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ et $\theta = (\theta_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ par

$$\begin{cases} \omega_j = (a_{n_j} + 1)j, \\ \theta_j = b_{n_j}\, j. \end{cases}$$

On définit alors la fonction $F_{\theta,\omega}$ définie par

$$F_{\theta,\omega}(x) = \begin{cases} j^{-2}\, 2^{-\theta_j} & \text{s'il existe } j \in \mathbb{N}_0 \text{ tel que } x \in [2^{-j}, 2^{-j} + 2^{-\omega_j}]\,, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On remarque directement que $F_{\theta,\omega} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ au voisinage de 0.
Soit $r > 0$, on s'intéresse à la quantité

$$r^{-1} \int_{-r}^{r} |F_{\theta,\omega}(x)|^p\, dx = r^{-1} \int_0^r |F_{\theta,\omega}(x)|^p\, dx.$$

• Supposons qu'il existe $j_0 \in \mathbb{N}_0$ tel que $2^{-j_0} + 2^{-\omega_{j_0}} \leq r \leq 2^{-j_0+1}$: on trouve alors

$$r^{-1} \int_{-r}^{r} |F_{\theta,\omega}(x)|^p \, dx = r^{-1} \sum_{j=j_0}^{+\infty} \frac{1}{j^{2p}} \, 2^{-\omega_j} \, 2^{-p\,\theta_j} = r^{-1} \sum_{j=j_0}^{+\infty} \frac{1}{j^{2p}} \, 2^{-(a_{n_j}+1+p\,b_{n_j})j}. \tag{2.2}$$

Comme $p \geq 1$, on a donc

$$r^{-1} \int_{-r}^{r} |F_{\theta,\omega}(x)|^p \, dx \leq C \, 2^{j_0} \sum_{j=j_0}^{+\infty} \frac{1}{j^2} \, 2^{-(p\,\rho(1/p)+1)j} \leq C' \, 2^{j_0} \, 2^{-(p\,\rho(1/p)+1)j_0} \leq C' \, r^{p\,\rho(1/p)},$$

d'où

$$r^{-1/p} \|F_{\theta,\omega}\|_{L^p(B(0,r))} \leq C' \, r^{\xi(p)}.$$

• Supposons qu'il existe $j_0 \in \mathbb{N}_0$ tel que $2^{-j_0} \leq r \leq 2^{-j_0} + 2^{-\omega_{j_0}}$: on procède de même en ayant une majoration dans (2.2) à la place d'une égalité.

Pour avoir la minoration du p-exposant de $F_{\theta,\omega}$ en 0 par $\xi(p)$, il faut encore établir que le choix du polynôme $P = 0$ est le plus judicieux parmi les polynômes de degré au plus $\xi(p)$. Il suffit de procéder par induction en remarquant que $F_{\theta,\omega}$ est nulle sur les intervalles $]2^j \, 2^{-\omega_j}, 2^{-j+1}[$ qui représentent une proportion de plus en plus grande de points à mesure que j croît, et donc l'ordre de magnitude de

$$\int_{B(0,r)} |F_{\theta,\omega}(x) - P(x)|^p \, dx$$

sur ces intervalles est donné par l'intégrale, sur ces intervalles, du premier terme non nul de P.

Ainsi, on a donc montré que pour tout $p \in [1, p_0]$,

$$h_p(0) \geq \xi(p).$$

Pour avoir l'inégalité dans l'autre sens, on remarque que

$$r^{-1} \sum_{j=j_0}^{+\infty} \frac{1}{j^{2p}} \, 2^{-(a_{n_j}+1+p\,b_{n_j})j} \geq r^{-1} \, \frac{1}{{j_0}^{2p}} \, 2^{-(a_{n_{j_0}}+1+p\,b_{n_{j_0}})j_0}.$$

En prenant $p = p_n := 1/s_n$ et $r = 2^{-j_0} + 2^{-\omega_{j_0}}$, où $j_0 \in \mathbb{N}_0$ est tel que $n_{j_0} = n$, on a donc

$$\begin{aligned}
(2^{-j_0} + 2^{-\omega_{j_0}})^{-1} \sum_{j=j_0}^{+\infty} \frac{1}{j^{2p_n}} \, 2^{-(a_{n_j}+1+p_n\,b_{n_j})j} &\geq \frac{2^{-j_0}}{2^{-j_0} + 2^{-\omega_{j_0}}} \frac{1}{j_0^{2p_n}} 2^{-p_n\,\rho(1/p_n)\,j_0} \\
&\geq \frac{1}{2} \frac{1}{j_0^{2p_n}} 2^{-p_n\,\rho(1/p_n)\,j_0}.
\end{aligned}$$

Par densité des p_n et continuité de ρ, on a donc bien

$$h_p(0) \leq \xi(p),$$

d'où la conclusion. □

Remarque 2.2.6. Un problème ouvert est de comprendre les propriétés que vérifie la fonction

$$(x_0, p) \mapsto h_p(x_0).$$

Déterminons les p-exposants de quelques fonctions.

Exemple 2.2.1. On considère les fonctions $\mathcal{C}_\alpha$ définies, pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus 2\,\mathbb{N}$, $\alpha > -d$, par

$$\mathcal{C}_\alpha(x) = |x - x_0|^\alpha.$$

On remarque directement que

$$p_0(\mathcal{C}_\alpha, x_0) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0, \\ -d/\alpha & \text{si } -d < \alpha < 0, \end{cases}$$

et que pour tout $p < p_0(\mathcal{C}_\alpha, x_0)$, le p-exposant de $\mathcal{C}_\alpha$ en x_0 est donné par

$$h_p(x_0) = \alpha.$$

L'irrégularité de C_α en x_0 est appelée « cusp » (voir [72] par exemple).

Exemple 2.2.2. On considère les fonctions $\mathcal{C}_{\alpha,\beta}$ définies, pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus 2\,\mathbb{N}$, $\alpha > -d$, par

$$\mathcal{C}_{\alpha,\beta}(x) = |x - x_0|^\alpha \sin\left(\frac{1}{|x - x_0|^\beta}\right).$$

On vérifie directement que

$$p_0(\mathcal{C}_{\alpha,\beta}, x_0) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha \geq 0, \\ -d/\alpha & \text{si } -d < \alpha < 0, \end{cases}$$

et que pour tout $p < p_0(\mathcal{C}_{\alpha,\beta}, x_0)$, le p-exposant de $\mathcal{C}_{\alpha,\beta}$ en x_0 est donné par

$$h_p(x_0) = \alpha.$$

L'irrégularité de $C_{\alpha,\beta}$ en x_0 est appelée « chirp » ou singularité oscillante (voir [72] par exemple).

Exemple 2.2.3. On construit ici un exemple de fonction où la fonction $p \mapsto h_p(x_0)$ est strictement décroissante. Soit $\alpha < 1$, on définit la fonction f_α par

$$f_\alpha : x \in \mathbb{R} \mapsto x^\alpha \sum_{j=1}^{+\infty} \chi_{[2^{-j}-2^{-2j}, 2^{-j}]}(x).$$

Soit $r \in \,]0, 1/2]$, on a

$$\int_{B(0,r)} |f_\alpha(x)|^p \, dx = \int_0^r x^{\alpha p} \sum_{j=1}^{+\infty} \chi_{[2^{-j}-2^{-2j}, 2^{-j}]}(x) \, dx.$$

Il existe $j_r \geq 2$ tel que soit $r \in \left[2^{-(j_r-1)} - 2^{-2(j_r-1)}, 2^{-(j_r-1)}\right]$ et dans ce cas on pose

$$B_r = \int_{2^{-(j_r-1)}-2^{-2(j_r-1)}}^{r} x^{\alpha p}\, dx,$$

ou soit $r \in \left[2^{-j_r}, 2^{-(j_r-1)} - 2^{-2(j_r-1)}\right]$ et dans ce cas on pose $B_r = 0$.
En posant

$$A_r = \sum_{j=j_r}^{+\infty} \int_{2^{-j}-2^{-2j}}^{2^{-j}} x^{\alpha p}\, dx,$$

on a donc

$$\int_{B(0,r)} |f_\alpha(x)|^p\, dx = A_r + B_r.$$

En calculant A_r, on trouve

$$A_r = C \sum_{j=j_r}^{+\infty} 2^{-j(\alpha p+1)} - (2^{-j} - 2^{-2j})^{\alpha p+1} = C \sum_{j=j_r}^{+\infty} 2^{-j(\alpha p+1)} \left(1 - (1-2^{-j})^{\alpha p+1}\right).$$

Or, il existe une constante $C_1 > 0$ telle que

$$C_1\, 2^{-j} \leq 1 - (1-2^{-j})^{\alpha p+1} \leq 2^{-j}.$$

Ainsi, il existe une constante $C_2 > 0$ telle que

$$C\, C_1\, 2^{-j_r(\alpha p+2)} \leq A_r \leq C\, C_2\, 2^{-j_r(\alpha p+2)}.$$

Or, par définition de j_r, on a directement

$$2^{-j_r} \leq r \leq 2^{-(j_r-1)}.$$

Il existe donc des constantes $C_3, C_4 > 0$ telles que

$$C_3\, r^{\alpha p+2} \leq A_r \leq C_4\, r^{\alpha p+2}.$$

En calculant B_r dans le premier cas, on trouve

$$B_r = C' \left(r^{\alpha p+1} - (2^{-(j_r-1)} - 2^{-2(j_r-1)})^{\alpha p+1}\right).$$

En procédant comme ci dessus, on obtient

$$0 \leq B_r \leq C_1' 2^{-(j_r-1)(\alpha p+2)} \leq C_2'\, r^{\alpha p+2}.$$

Au final, on trouve pour tous les cas des constantes $C, C' > 0$ telles que

$$C\, r^{\alpha p+2} \leq A_r + B_r \leq C'\, r^{\alpha p+2},$$

d'où
$$C\,r^{\alpha+1/p}\,r^{1/p} \leq \|f_\alpha\|_{L^p(B(0,r))} \leq C'\,r^{\alpha+1/p}\,r^{1/p}.$$
Ainsi, pour tout $p \geq 1$, le p-exposant de f_α en 0 est donné par
$$h_p(0) = \alpha + \frac{1}{p}.$$
La fonction $p \mapsto h_p(0)$ est donc strictement décroissante et comme on remarque directement que $h_\infty(0) = \alpha$, on a aussi
$$h_\infty(0) < h_p(0) \quad \forall p \geq 1.$$
Le p-exposant peut donc donner une information supplémentaire concernant la régularité ponctuelle de la fonction, même dans le cas où la fonction est α-holdérienne au point considéré.

Remarque 2.2.7. Les p-exposants ne sont pas utiles que pour caractériser la régularité de fonctions non localement bornées. Par exemple, si on considère un domaine Ω avec une frontière possédant des propriétés fractales, la fonction caractéristique χ_ω possède un exposant de Hölder égal à 0 en tout point x_0 de la frontière alors que le 1-exposant peut prendre n'importe quelle valeur de $[0,+\infty]$, qui dépend du comportement de la frontière de Ω au voisinage de x_0. Le 1-spectre est dès-lors un outil puissant pour classifier les frontières fractales (voir [43]).

Remarque 2.2.8. La notion de p-exposants n'est pas la seule notion de régularité locale qui existe pour les fonctions non localement bornées. Par exemple, si on s'intéresse à la régularité d'une fonction f positive, et si la mesure ν, définie pour tout borélien C de $\mathbb{R}^d$ par
$$\nu(C) = \int_C f(x)\,dx,$$
est une mesure de Radon, alors on peut calculer la *dimension locale* de ν, définie pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ par
$$\dim(\nu, x) = \liminf_{r\to 0^+} \frac{\log \nu(B(x,r))}{\log r},$$
pour espérer caractériser la régularité locale de f ([39]).

2.3 p-leaders

On va généraliser la notion de coefficient dominant.

Définition 2.3.1. Soit $\lambda \in \Lambda_j$, $p \in [1,+\infty]$, le *p-coefficient dominant* (« *p-leader* » en anglais) de λ est défini par
$$d_\lambda^p = \sup_{l\geq j}\left(\sum_{\substack{\kappa\in\Lambda_l\\ \kappa\subseteq\lambda}} \left(2^{(j-l)\,d/p}\,|c_\kappa|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Comme précédemment, on peut alors poser, pour $x_0 \in \mathbb{R}^d$,

$$d_j^p(x_0) = \sup_{\kappa \in A(\lambda_j(x_0))} d_\kappa^p.$$

Remarque 2.3.1. La définition précédente est bien une généralisation de la précédente au sens où

$$d_\lambda^\infty = d_\lambda.$$

On développera un formalisme multifractal se basant sur la WLM dans un cadre plus général dans le dernier chapitre.

Remarque 2.3.2. On trouve dans la littérature ([50]) une autre définition des p-leaders qu'on n'utilisera pas ici.

Chapitre 3

p-spectre de fonctions non localement bornées

Dans ce chapitre, on donne le p-spectre de plusieurs fonctions.

On commence par un exemple théorique où la fonction est définie via ses coefficients en ondelettes. On peut créer dès lors artificiellement une fonction non localement bornée et déterminer son p-spectre.

Ensuite, on calcule le p-spectre ($p \in [1, +\infty[$ quelconque) de la fonction de Brjuno qui est nulle part localement bornée, fonction apparaissant initialement en analyse complexe et approximation diophantienne.

On finit par donner le 2-spectre d'une version généralisée de la fonction de Riemann qui est également nulle part localement bornée.

3.1 Séries d'ondelettes lacunaires

Les séries d'ondelettes lacunaires ont été introduites par Stéphane Jaffard ([38]). Elles sont définies au travers de leur coefficient en ondelettes et dépendent de deux paramètres : un paramètre *lacunaire* $\eta \in]0, 1[$ et un paramètre *de régularité* $\alpha > 0$. On suppose dans cette section que $\alpha > \eta - 1$, ce qui justifiera la nécessité des p-exposants (voir la proposition 3.1.1). On ne fait pas les détails, on peut consulter les références [1, 38].

On prend ici une ondelette Ψ dans la classe de Schwartz ($d = 1$). Soit $(Z_{j,k})_{j\in\mathbb{N},k\in\{0,...,2^j-1\}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ suivant des lois de Bernouilli de paramètres $2^{-(1-\eta)j}$, i.e.

$$Z_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{avec probabilité } 2^{-(1-\eta)j}, \\ 0 & \text{avec probabilité } 1 - 2^{-(1-\eta)j}. \end{cases}$$

Les coefficients en ondelettes de la série d'ondelettes lacunaire $X_{\alpha,\eta}$ sont donnés par

$$c_{j,k} := Z_{j,k}\, 2^{-\alpha j} \quad \forall j \in \mathbb{N}, k \in \{0, ..., 2^j - 1\}.$$

Proposition 3.1.1. ([1])
Presque sûrement, les trajectoires de $X_{\alpha,\eta}$ sont localement bornées si et seulement si $\alpha > 0$.

Pour $\alpha > 0$, on peut donc calculer le spectre de Hölder de $X_{\alpha,\eta}$ ([38]). Presque sûrement, le spectre d'une trajectoire de la série d'ondelettes lacunaire $X_{\alpha,\eta}$ est donné par

$$d_\infty(h) = \begin{cases} \frac{h\eta}{\alpha} & \text{si } h \in \left[\alpha, \frac{\alpha}{\eta}\right], \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.1}$$

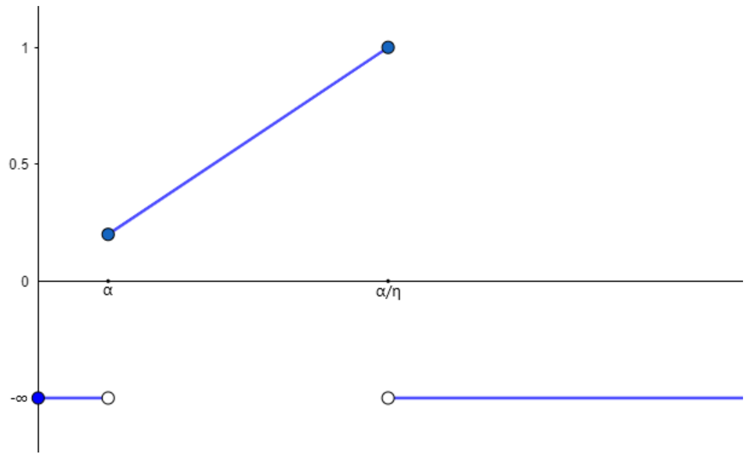

FIGURE 3.1 – spectre de $X_{\alpha,\eta}$, $\alpha > 0$.

Proposition 3.1.2. ([1])
Soient $\eta \in]0,1[$, $\alpha > \eta - 1$ et $X_{\alpha,\eta}$ une série d'ondelettes lacunaire de paramètres (α, β), on a presque sûrement

$$p_0(X_{\alpha,\eta}) = \begin{cases} \frac{\eta-1}{\alpha} & \textit{si } \alpha < 0, \\ +\infty & \textit{si } \alpha > 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Remarque 3.1.1. La raison pour laquelle on prend $\alpha > \eta - 1$ est justifiée par ce dernier résultat. En effet, grâce à cette hypothèse, on a $p_0 > 1$ et donc il existe des $p \geq 1$ tels que $X_{\alpha,\eta} \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ au voisinage de chacun de ses points.

3.1.1 p-spectre de $X_{\alpha,\eta}$

Proposition 3.1.3. ([1])
Soient $\eta \in]0,1[$, $\alpha > \eta - 1$, et $X_{\alpha,\eta}$ une série d'ondelettes lacunaire de paramètres (α, β). Presque sûrement, pour tout $p < p_0(X_{\alpha,\eta})$, le p-spectre de $X_{\alpha,\eta}$ est donné par

$$d_p(h) = \begin{cases} \eta \, \frac{h+1/p}{\alpha+1/p} & \textit{si } h \in \left[\alpha, \frac{\alpha}{\eta} + \left(\frac{1}{\eta} - 1\right)\frac{1}{p}\right], \\ -\infty & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Remarquons que grâce à (3.2), on a $\alpha > -1/p$ pour tout $p < p_0(X_{\alpha,\eta})$ et donc le p-spectre ci-dessus a un sens et est bien défini sur $[-1/p, +\infty]$.

Remarque 3.1.2. La partie intéressante du p-spectre (i.e. où le p-spectre n'est pas $-\infty$) est un segment de droite joignant (α, η) à $\left(\frac{\alpha}{\eta} + \left(\frac{1}{\eta} - 1\right)\frac{1}{p}, 1\right)$.

Remarque 3.1.3. On remarque que pour $\alpha > 0$ et $p = +\infty$, on retrouve (3.1).

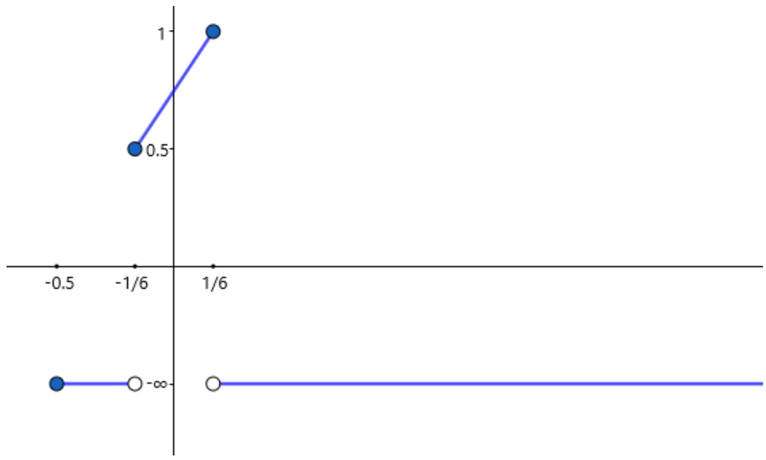

FIGURE 3.2 – 2-spectre de $X_{-1/6,1/2}$. Cela a un sens car $p = 2 < p_0 = 3$.

Remarque 3.1.4. On peut définir les séries d'ondelettes lacunaires pour $\alpha \in \mathbb{R}$ de la même façon. La proposition 3.1.2 est toujours valable ([1]) et il faut donc pouvoir recourir à des $p \in]0,1[$. On utilise alors les espaces de Hardy réels $H^p(\mathbb{R}^d)$ ([60]), $p \in]0,1[$. On montre alors que le spectre reste plus grand que $-1/p$ et que le résultat 3.1.3 reste valable ([1]).

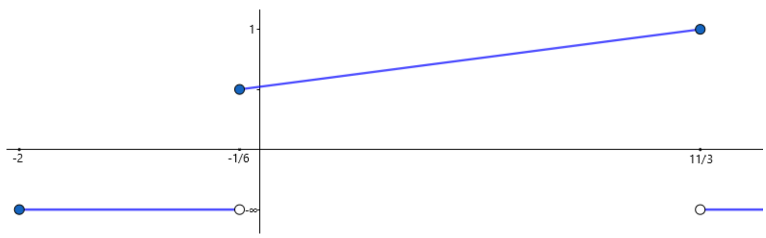

FIGURE 3.3 – 1/2-spectre de $X_{-1/6,1/2}$. Cela a un sens car $p = 1/2 < p_0 = 3$.

3.2 Fonction de Brjuno

La fonction de Brujno est définie pour tout irrationnel x de $[0,1]$, par

$$B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x\, A(x)...A^{n-1}(x)\, \log\left(\frac{1}{A^n(x)}\right),$$

où A est l'application de Gauss qui à un irrationnel x de $[0,1]$ lui associe la partie fractionnaire de $1/x$. L'appellation fonction de « Brjuno » vient du mathématicien Alexander Brjuno qui l'a introduite en 1971 ([14]) pour donner une condition pour que des fonctions holomorphes soient linéarisables en 0. Plus précisément, soit f une fonction holomorphe qui, dans un voisinage de 0, s'écrit

$$f(z) = e^{2i\pi\alpha} z + O(z^2). \tag{3.3}$$

Par exemple, la fonction P_α, définie pour tout $\alpha \in [0,1]$ par

$$P_\alpha(z) = e^{2i\pi\alpha} z(1+z),$$

est une fonction vérifiant la relation (3.3).
La fonction f est alors dite *linéarisable* au voisinage de 0 si elle est conjuguée à sa partie linéaire $R_\alpha(z) = e^{2i\pi\alpha} z$, i.e. s'il existe une fonction φ telle que

$$\varphi \circ R_\alpha = f \circ \varphi.$$

Alexander Brjuno montra que si $B(\alpha) < +\infty$, alors P_α est linéarisable. En 1995, Jean-Christophe Yoccoz montra que cette dernière implication était en réalité une équivalence ([75]).
La régularité globale et locale de la fonction de Brjuno ainsi que son appartenance à certains espaces fonctionnels ont fait l'objet de plusieurs articles ([58, 57, 6, 42, 7]).
Dans cette section, on suit majoritairement les papiers [42] et [6]. Dans [42], on fait beaucoup de références aux résultats de [6] ; on a donc ici essayé de faire un texte rassemblant tous les résultats en une fois. De plus, dans [42], les résultats sont établis pour le 1-spectre et seulement énoncés, car les preuves sont similaires, pour le p-spectre, $p \in [1, +\infty[$. On présente ici le calcul du p-spectre, $p \in [1, +\infty[$ quelconque.

3.2.1 Rappels et définitions

Faisons quelques rappels concernant les fractions continues (voir par exemple [65]).
Soit p/q un rationnel. Grâce à l'algorithme d'Euclide, il existe $a_0, ..., a_n \in \mathbb{N}$ tels que

$$\frac{p}{q} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}} =: [a_0; a_1, ..., a_n].$$

On aimerait étendre cette méthode aux réels en faisant tendre n vers $+\infty$.
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de naturels telle que $a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$. On pose $p_{-1} = 1$, $q_{-1} = 0$, $p_0 = a_0$, $q_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on définit $p_n, q_n \in \mathbb{N}$ par

$$\frac{p_n}{q_n} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}} =: [a_0; a_1, ..., a_n]$$

et $\text{pgcd}(p_n, q_n) = 1$. On vérifie directement que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$p_{n+1} = a_{n+1}\, p_n + p_{n-1} \quad \text{et} \quad q_{n+1} = a_{n+1}\, q_n + q_{n-1}.$$

En particulier, on a $1 = q_0 \leq q_1 < q_2 < q_3 < ...$ et la croissance est au moins exponentielle puisque pour tout $n \geq 1$,

$$q_n = a_n\, q_{n-1} + q_{n-2} \geq q_{n-1} + q_{n-2} \geq 2q_{n-2}.$$

Ainsi, si on note $(F_j)_{j\in\mathbb{N}}$ la suite de Fibonnaci, définie par

$$\begin{cases} F_0 = F_1 = 1, \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \end{cases}$$

on a $q_n \geq F_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On montre alors que la suite $(p_n/q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un irrationnel x que l'on note

$$x = [a_0; a_1, a_2, ...].$$

Les éléments p_n/q_n sont appelés les *convergents* et les éléments a_n sont appelés les *quotients partiels*.

Pour la suite, on pose $X =]0,1[\setminus \mathbb{Q}$ (on aura donc $a_0 = 0$).
L'*application de Gauss* est définie par

$$A : X \to X : x \mapsto \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = \left\{ \frac{1}{x} \right\},$$

où $\{\cdot\}$ désigne la partie fractionnaire. Cette application préserve la mesure de Gauss μ ([70]) définie pour tout borélien C de $[0,1]$ par

$$\mu(C) = \frac{1}{\log 2} \int_C \frac{1}{1+t}\, dt.$$

On vérifie que si $x = [0; a_1, ..., a_n, ...]$, alors on a

$$a_1 = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \quad \text{et} \quad a_n = \left\lfloor \frac{1}{A^{n-1}(x)} \right\rfloor \quad \forall n \in \mathbb{N}_0\,.$$

On fait de cette propriété une définition.

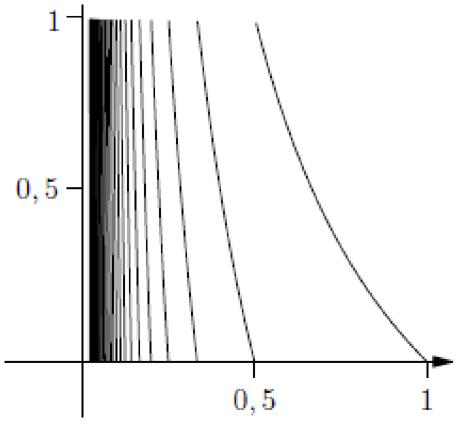

FIGURE 3.4 – Graphe de l'application de Gauss restreint au carré unité.

Définition 3.2.1. Soit $x \in X$, on définit la suite $(a_n(x))_{n \in \mathbb{N}_0}$ par

$$a_n(x) = \left\lfloor \frac{1}{A^{n-1}(x)} \right\rfloor .$$

On vérifie alors que pour tout $x \in X$,

$$x = [0, a_1(x), a_2(x), ...].$$

On parle du *développement en fraction continue* de x, ce qui a sens car on montre facilement que celui-ci est unique.
On a dès lors les outils pour définir la fonction de Brjuno en utilisant les convergents.

Définition 3.2.2. La *fonction de Brjuno* est la fonction définie, pour tout $x \in X$, par

$$\begin{aligned} B(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} |p_{n-1} - q_{n-1}\, x| \, \log \left(\frac{p_{n-1} - x\, q_{n-1}}{q_n x - p_n} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} x\, A(x) ... A^{n-1}(x) \, \log \left(\frac{1}{A^n(x)} \right). \end{aligned}$$

On étend la fonction de Brjuno par périodicité à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Remarque 3.2.1. On peut définir naturellement une fonction $\widetilde{B}$ sur les rationnels : si $x \in \mathbb{Q}$ s'écrit $[a_0, a_1, ..., a_N]$, on pose

$$\widetilde{B}(x) = \sum_{n=0}^{N-1} |p_{n-1} - q_{n-1}\, x| \, \log \left(\frac{p_{n-1} - x\, q_{n-1}}{q_n x - p_n} \right),$$

où les éléments p_n, q_n sont relatifs aux a_n, $n \leq N$.

Donnons quelques notations qui sont liées à cette fonction.
Soit $x \in X$, on pose $\alpha_0(x) = x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_n(x) = A^n(x)$. On note également $\beta_{-1} = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\beta_n(x) = \alpha_0(x)...\alpha_n(x)$. Enfin, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\gamma_n(x) = \beta_{n-1}(x) \log\left(\frac{1}{\alpha_n(x)}\right).$$

Avec ces notations, on a clairement

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n(x).$$

On trouve facilement les identités suivantes :

$$\alpha_k(x) = \frac{q_k(x)x - p_k(x)}{-q_{k-1}(x)x + p_{k-1}(x)}, \quad \beta_k(x) = (-1)^{k-1}\,(p_k(x) - x\,q_k(x)),$$

ou encore

$$\beta_k(x) = \frac{1}{q_{k+1}(x) + \alpha_{k+1}(x)q_k(x)}.$$

Définition 3.2.3. Un nombre irrationnel x est un *nombre de Brjuno* si la série $B(x)$ est convergente, c'est un *nombre de Cremer* sinon.

On vérifie aisément que la fonction de Brjuno vérifie l'équation fonctionnelle

$$B(x) = \log(1/x) + x\,B(A(x)), \quad x \in X. \tag{3.4}$$

La fonction de Brjuno n'est clairement pas localement bornée en raison des singularités logarithmiques centrées en les rationnels et puisqu'elle est à termes positifs. On peut le vérifier explicitement.

Proposition 3.2.1. *Si p/q est un rationnel de $[0,1]$, alors*

$$\lim_{\substack{x\to p/q\\ x\in\mathscr{B}}} B(x) = +\infty,$$

où $\mathscr{B}$ désigne l'ensemble des nombres de Brjuno.

Démonstration.
• Comme $B(x) \geq \log(1/x)$ pour tout $x \in \mathscr{B}$, le résultat est vrai pour $p/q = 0$.
• Le résultat est également vrai pour $p/q = 1$ puisque pour tout $x \in]0,1/2[$, on a

$$B(x) = \log 1/x + x\,B(A(x)) \geq \frac{1}{2}\,B\left(\frac{1}{x} - 1\right).$$

On se ramène donc au cas $p/q = 0$.

• Si p/q est un rationnel de $]0,1[$, alors il s'écrit

$$p/q = [0; a_1, ..., a_n].$$

On vérifie alors que

$$\eta : s \in]-1,1[\mapsto [0; a_1, ..., a_{n-1}, a_n + s]$$

est un homéomorphisme de $]-1,1[$ sur un voisinage de p/q dans $]0,1[$.
Si $t \in X$, on a $\eta(\pm t) \in X$ et

$$A^n(\eta(t)) = t \quad \text{et} \quad A^n(\eta(-t)) = 1 - t.$$

De plus, pour tout $t \in X$, on a

$$\beta_{k-1}(\pm t) \geq \frac{1}{q_k + q_{k-1}},$$

où les q_k sont tels que $p_k/q_k = [0, a_1, ..., a_k]$, avec $k \in \{1, ..., n\}$.
Comme en itérant l'équation fonctionnelle (3.4), on a

$$B(\eta(s)) \geq \beta_{n-1}(\eta(s))\, B(A^n(\eta(s))) \quad \forall s \in]-1,1[\setminus \mathbb{Q},$$

on en déduit la conclusion en utilisant les cas $p/q = 0$ et $p/q = 1$. □

Étudier la régularité de la fonction de Brjuno au travers des p-exposants, comme annoncé, semble donc judicieux.
Du fait de son caractère non localement borné, il est évidemment impossible de représenter cette fonction de manière traditionnelle. Néanmoins, on peut essayer de la représenter en prenant un certain nombre de points au hasard (voir figure 3.5).

Remarque 3.2.2. La fonction de Brjuno est clairement positive, on peut en réalité calculer explicitement sa borne inférieure ([7]). Si $I = \inf_{x \in \mathscr{B}} B(x)$, alors $I = B(\theta)$ avec

$$\theta = \varphi - 1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2},$$

où φ est le nombre d'or. De plus,

$$B(x) > B(\theta) \quad \forall x \in \mathscr{B}.$$

On obtient facilement un premier résultat.

Proposition 3.2.2. *Pour $k \in \mathbb{N}$, on a*

$$-\frac{\log(2q_k)}{q_k} \leq \gamma_k - \frac{\log q_{k+1}}{q_k} \leq \chi_{\{0\}}(k) \frac{\log 2}{q_k}.$$

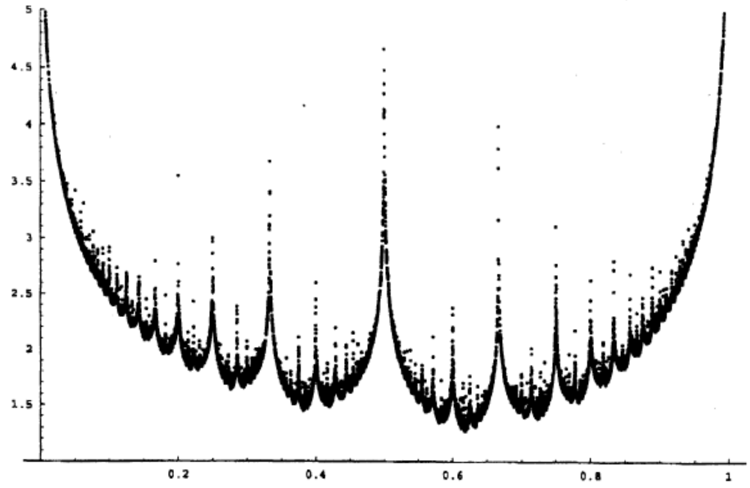

FIGURE 3.5 – Représentation de la fonction de Brjuno en 10000 valeurs entre 0 et 1 tirées selon une loi uniforme par STEFANO MARMI ([57]).

Démonstration. La deuxième inégalité pour $k = 0$ est directe puisqu'on a

$$\gamma_0 - \frac{\log q_1}{q_0} = \log(1/x) - \log a_1 = \log\left(\frac{a_1 + \alpha_1}{a_1}\right) \leq \log\left(\frac{a_1 + 1}{a_1}\right) \leq \log 2.$$

Pour $k > 0$, on remarque que

$$\frac{\log q_{k+1}}{q_k} - \gamma_k = \frac{q_k \log(q_{k+1}\alpha_k) + \alpha_k\, q_{k-1} \log(q_{k+1})}{q_k(q_k + \alpha_k q_{k-1})} \geq \frac{q_k \log(q_{k+1}\alpha_k)}{q_k(q_k + \alpha_k q_{k-1})}.$$

Comme $q_{k-1} \geq 1$ pour $k > 0$, on a

$$q_{k+1}\alpha_k = \frac{a_{k+1}q_k + q_{k-1}}{a_{k+1} + \alpha_{k+1}} \geq 1.$$

On a donc la deuxième inégalité pour $k > 0$.
Il reste à traiter la première inégalité. On remarque que

$$\alpha_k \mapsto \gamma_k = \frac{\log(1/\alpha_k)}{q_k + \alpha_k\, q_{k-1}}$$

est une fonction décroissante. Puisque $\alpha_k \leq 1/a_{k+1}$, on en tire que

$$\gamma_k \geq \frac{\log a_{k+1}}{q_k + q_{k-1}/a_{k+1}} = \frac{a_{k+1} \log a_{k+1}}{q_{k+1}}.$$

Pour montrer la première inégalité, il suffit donc de montrer que

$$a_{k+1} \log a_{k+1} \geq \frac{q_{k+1}}{q_k} \log \frac{q_{k+1}}{2q_k}.$$

On vérifie cette dernière relation en séparant en deux cas :
• Si $a_{k+1} = 1$, c'est direct car on a $q_{k+1} = q_k + q_{k-1} \leq 2q_k$.
• Si $a_{k+1} \geq 2$, on a $q_{k+1}/q_k \geq 2$ et

$$a_{k+1} = \frac{q_{k+1} - q_{k-1}}{q_k} \geq \frac{q_{k+1}}{q_k} - 1.$$

On en tire la conclusion en étudiant le signe de la fonction

$$x \mapsto (x-1)\log(x-1) - x\log(x/2)$$

sur $[2, +\infty[$. □

Remarque 3.2.3. En plus d'être utile dans les prochaines démonstrations, ce résultat nous donne une caractérisation des nombres de Brjuno : étant donné $x \in X$, x est un nombre de Brjuno si et seulement si la série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\log q_{k+1}(x)}{q_k(x)}$$

est convergente.

On peut démontrer une autre caractérisation de ces nombres.

Définition 3.2.4. Soit $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, $x \in \mathbb{R}^d$ est un *point de Lebesgue* de f si

$$\lim_{r \to 0^+} r^{-d} \|f - f(x)\|_{L^1(B(x,r))} = 0.$$

Cela revient à dire que

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{1}{\text{mes}\,(B(x,r))} \|f - f(x)\|_{L^1(B(x,r))} = 0.$$

Remarque 3.2.4. Le théorème de différenciation de Lebesgue (voir en annexe) affirme que pour une fonction $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ est un point de Lebesgue de f.

Proposition 3.2.3. ([6])
Les points de Lebesgue de B sont exactement les nombres de Brjuno.

Démonstration. Comme on va de toute façon développer tous les outils nécessaires à cette preuve, elle réside en annexe. □

Ce résultat nous motive à étudier les 1-exposants de B.
Rappelons également la notion suivante, classique en analyse harmonique et théorie des EDP.

Définition 3.2.5. Une fonction $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ est *à oscillations moyennes bornées* (noté BMO pour « bounded mean oscillation ») si

$$\|f\|_{BMO} := \sup_{Q \text{ cube de } \mathbb{R}^d} \frac{1}{\operatorname{mes} Q} \int_Q |f(x) - f_Q| \, dx < +\infty,$$

où f_Q désigne la moyenne de f sur Q :

$$f_Q = \frac{1}{\operatorname{mes} Q} \int_Q f(y) dy.$$

On peut montrer ([58]) que la fonction de Brjuno appartient à l'espace BMO. En particulier, cela implique que $B \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ pour tout $p \geq 1$ (voir [17] par exemple).
Pour établir le spectre multifractal de B, on a besoin de rappeler encore une notion.

Définition 3.2.6. Soit $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et soit p_n/q_n sa suite de convergents. On définit $\tau_n(x_0)$ par

$$\left| x_0 - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n^{\tau_n(x_0)}}.$$

On définit alors l'*exposant d'irrationnalité* de x_0 par

$$\tau(x_0) = \limsup_{n \to +\infty} \tau_n(x_0).$$

On dit que x_0 est *diophantien* si $\tau(x_0) < +\infty$.

Remarque 3.2.5. Pour tout irrationnel x_0, on a $\tau(x_0) \in [2, +\infty]$. En effet, comme on montre facilement que

$$\left| x_0 - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_{n+1} q_n} \leq \frac{1}{q_n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

on a donc $\tau_n(x_0) > 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 3.2.6. On peut définir, de manière équivalente, l'exposant d'irrationnalité de x_0 comme la borne supérieure des $\tau \in \mathbb{R}$ pour lesquels il existe une infinité de couples $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0$ tels que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^\tau}.$$

Donnons quelques résultats qui nous serviront pour établir la régularité de B.

Proposition 3.2.4. *Soit $p \geq 1$ et soit I un intervalle de longueur $h \leq e^{-2/p}$ inclus dans $[0, 1]$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a*

$$\int_I \log(1/\alpha_k(t))^p \, dt \leq e \, p^p \, h \log^p(1/h).$$

Démonstration. Pour $q \geq 2$ et $r = q/(q-1)$, l'inégalité de Hölder donne

$$\int_I \log(1/\alpha_k(t))^p \, dt \leq h^{1/r} \left(\int_0^1 \log(1/\alpha_k(t))^{qp} \, dt \right)^{1/q}.$$

Comme A laisse invariante la mesure de Gauss, on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 \log(1/\alpha_k(t))^{qp} \, dt \leq 2 \int_0^1 \log(1/\alpha_k(t))^{qp} \, \frac{dt}{1+t} &= 2 \int_0^1 \log(1/t)^{qp} \, \frac{dt}{1+t} \\ &\leq 2 \int_0^1 \log(1/t)^{qp} dt \\ &= 2\Gamma(qp+1). \end{aligned}$$

Or, on sait que pour $s \in [2, \infty[$, on a

$$2\,\Gamma(s+1) \leq s^s.$$

Ainsi, on a

$$\int_I \log(1/\alpha_k(t))^p \, dt \leq h^{1/r} \, (qp)^{(qp)/q} = h^{1-1/q} \, q^p \, p^p.$$

Si on prend $q = \log(1/h)$, on sait que $qp \geq 2$ par hypothèse et on a dès lors

$$\int_I \log(1/\alpha_k(t))^p \, dt \leq h \, e \, \log(1/h)^p \, p^p.$$

□

Pour $t \in [0, 1]$, on pose

$$\Psi(t) = \int_0^t B(s) \, ds.$$

On note également ω le module de continuité de Ψ, i.e.

$$\omega(h) = \sup\{|\Psi(t) - \Psi(s)| : 0 \leq t, s \leq 1, |t-s| \leq h\}.$$

Proposition 3.2.5. *Soit* $h \in \,]0, e^{-2}]$, *on a*

$$\omega(h) \leq 10h \, \log(1/h).$$

Démonstration. Étant donné $h \in \,]0, e^{-2}]$, vu la proposition précédente et comme (voir [27])

$$\sum_{k \geq 0} \frac{1}{F_{k+1}} \geq 3,36,$$

on a

$$\begin{aligned}
\Psi(t+h)-\Psi(t) = \int_t^{t+h} B(s)\,ds &= \sum_{k\geq 0}\int_t^{t+h}\gamma_k(s)\,ds \\
&\leq \sum_{k\geq 0}\frac{1}{F_{k+1}}\int_t^{t+h}\log(1/\alpha_k(s))\,ds \\
&\leq 3,36\,e\,h\,\log(1/h).
\end{aligned}$$

□

Ainsi, pour tous x et h suffisamment petits, pour toute constante D, on a

$$\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h}|B(t)-D|\,dt \leq C\,\log(1/h). \tag{3.5}$$

On en tire donc que pour tout x, le 1-exposant de B en x vérifie

$$h_1(x)\geq 0. \tag{3.6}$$

La régularité de B aux points rationnels est facile à établir : au vu de la proposition B.3, si $x=p/q$ est un rationnel de $]0,1[$ sous sa forme irréductible, alors pour toute constante D et h suffisamment petit, on a

$$\frac{1}{h}\int_{x-h/2}^{x+h/2}|B(t)-D|\;dt \geq C\log(1/h),$$

d'où

$$h_1(x)=0. \tag{3.7}$$

Comme on sait que les nombres de Brjuno sont exactement les points de Lebesgue de B, on en tire que les nombres de Cremer ont un 1-exposant nul. Pour être plus précis, cela résulte directement de la proposition B.4.

Il reste donc à trouver la régularité de B en les points de Brjuno.

3.2.2 Irrégularité de B

Par irrégularité, on entend pouvoir trouver une majoration des p-exposants de B. Grâce à la proposition 2.2.1, il suffit de trouver une majoration pour les 1-exposants de B. Pour cela, on va utiliser des résultats faisant intervenir des ondelettes.

Soit ψ une ondelette de $\mathbb{R}^d$ majorée en module par 1 et à support compact. Une telle ondelette sera appelée *admissible*. On pose pour $a>0$ et $b\in\mathbb{R}^d$,

$$\psi_{a,b}(x)=\psi\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Définition 3.2.7. Une fonction θ qui satisfait l'hypothèse $\mathcal{H}$ est une fonction $\theta :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ continue qu'on prolonge en 0 par $\theta(0) = 0$ et qui est non décroissante sur un voisinage de 0.

Définition 3.2.8. Soient θ une fonction satisfaisant l'hypothèse $\mathcal{H}$ et $f \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$. On dit que θ est un *p-module de continuité* de f en x_0 s'il existe un polynôme P tel que, pour tout $r > 0$ suffisamment petit,

$$\|f - P(\cdot - x_0)\|_{L^p(B(x_0,r))} \leq \theta(r).$$

On remarque directement que la régularité $T^p_u(x_0)$ se traduit en un choix de θ défini par

$$\theta(r) = C\, r^{u+d/p}.$$

Lemme 3.2.1. *Soit ψ une ondelette admissible, $p \in [1, +\infty]$ et $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Si θ un p-module de continuité de f en x_0 qui vérifie*

$$\exists C > 0,\, \forall r \leq 1, \quad \theta(r) \geq C\, r^{1+d/p},$$

alors

$$[\psi_{a,b}] \subset B(x_0, r) \Rightarrow |W_f(b,a)| \leq C_d^{1-1/p}\, \theta(r) \frac{r^{d-d/p}}{a^d},$$

où pour rappel C_d désigne la mesure de la boule unité de $\mathbb{R}^d$.

Démonstration. Soit P le polynôme relatif à θ intervenant dans la définition du p-module de continuité de f.
Grâce à l'hypothèse sur θ, on peut remplacer le polynôme P par une constante D.
De plus, comme ψ a un premier moment nul, on a

$$W_f(b,a) = \frac{1}{a^d} \int_{\mathbb{R}^d} (f(x) - D)\, \psi_{a,b}\, dx.$$

En utilisant les hypothèses faites sur ψ et l'inégalité de Hölder, on trouve directement

$$\begin{aligned} |W_f(b,a)| \leq \frac{1}{a^d} \int_{B(x_0,r)} |f(x) - D|\, dx &\leq \frac{1}{a^d} \|f - D\|_{L^p(B(x_0,r))} \|1\|_{L^{p/(p-1)}(B(x_0,r))} \\ &\leq C_d^{1-1/p}\, \theta(r) \frac{r^{d-d/p}}{a^d}. \end{aligned}$$

□

Lemme 3.2.2. *Soit $x = p/q$ un rationnel sous sa forme irréductible et $|h| < 2/3q^2$, alors*

$$\left| W_B\left(\frac{p}{q}, h\right) - \frac{\log 2}{q} \right| \leq C\, q\, h\, \log\left(\frac{1}{q^2|h|}\right),$$

où l'on a utilisé l'ondelette de Haar et où la constante C est indépendante de q et h.

Démonstration. En utilisant la proposition B.3 en h et $h/2$, on a

$$\frac{2}{h}\int_x^{x+h/2} B(t)\,dt - \frac{1}{h}\int_x^{x+h} B(t)\,dt = \frac{\log(2e/q^2|h|)}{q} - \frac{\log(e/q^2|h|)}{q} + O\left(qh\,\log(1/q^2|h|)\right).$$

Or, on a

$$\begin{aligned}\frac{2}{h}\int_x^{x+h/2} B(t)\,dt - \frac{1}{h}\int_x^{x+h} B(t)\,dt &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h/2} B(t)\,dt - \frac{1}{h}\int_{x+h/2}^{x+h} B(t)\,dt\\ &= \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}} B(t)\,\psi\left(\frac{t-x}{h}\right)\,dt,\end{aligned}$$

où $\psi = \chi_{[0,\frac{1}{2}[} - \chi_{[\frac{1}{2},1[}$ est l'ondelette de Haar. On en tire directement la conclusion. □

Proposition 3.2.6. *Soit $x \in X$, soit C_0 la constante du lemme précédent et soit $\varepsilon \in]0,1/2]$ tel que*

$$C_0\,\varepsilon\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \leq 10^{-2}.$$

Si θ est défini, pour tout $r>0$, par

$$\theta(r) = \frac{\varepsilon}{16}\,r^{3/2},$$

alors θ n'est pas un 1-module de continuité de B en x.

Démonstration. On note $c_n = p_n/q_n$ la suite de convergents de x. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$h_n = \frac{\varepsilon}{q_n^2}.$$

Au vu du lemme précédent, on a donc

$$W_B(c_n,h_n) \geq \left(-10^{-2} + \log(2)\right)\frac{1}{q_n} \geq \frac{1}{4\,q_n}.$$

Procédons par l'absurde et supposons que θ soit un 1-module de continuité de B. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$r_n = |x - c_n| + h_n.$$

Par le lemme 3.2.1, on a

$$|W_B(c_n,h_n)| \leq C_1^0\,\theta(r_n)\,\frac{r_n^0}{h_n^1} = \frac{\theta(r_n)}{h_n}.$$

Ainsi, on obtient

$$\frac{1}{4\,q_n} \leq \frac{\theta(r_n)}{h_n}.$$

Comme on a $r_n \leq 2/q_n^2$, on a donc

$$\frac{1}{4\,q_n} \leq \frac{\theta(2/q_n^2)}{h_n} = \frac{\varepsilon}{16}\,\frac{2\sqrt{2}}{q_n^3}\,\frac{q_n^2}{\varepsilon},$$

d'où une absurdité. □

Au vu de la proposition précédente et comme la régularité $T_u^1(x)$ correspond à un $\theta(r) = C\, r^{u+1}$, on a directement que pour tout $x \in \mathbb{R}$, le 1-exposant de B en x vérifie

$$h_1(x) \leq \frac{1}{2}. \tag{3.8}$$

Les polynômes apparaissant dans la définition des espaces $T_u^1(x)$ seront donc toujours des constantes pour B.

Définition 3.2.9. Un irrationnel x est τ-*bien approximable* si

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n^\tau},$$

pour une infinité de $n \in \mathbb{N}$.

Pour démontrer le résultat suivant, on procède comme pour la proposition précédente.

Proposition 3.2.7. *Soit $\tau > 2$, si x est τ-bien approximable, alors le 1-exposant de B en x vérifie*

$$h_1(x) \leq \frac{1}{\tau}. \tag{3.9}$$

Démonstration. On note $c_n = p_n/q_n$ la suite de convergents de x. Soit C_0 la constante du lemme précédent. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$h_n = \frac{\varepsilon}{q_n^\tau}.$$

Comme $\tau > 2$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$q_n^2\, h_n \log\left(q_n^{-2} h_n^{-1}\right) \leq \frac{10^{-2}}{C_0}.$$

Grâce au lemme précédent, on a donc pour $n \geq N$,

$$\left| W_B(c_n, h_n) - \frac{\log 2}{q_n} \right| \leq C_0\, q_n\, h_n \log\left(q_n^{-2} h_n^{-1}\right) \leq \frac{10^{-2}}{q_n},$$

et donc

$$W_B(c_n, h_n) \geq \frac{1}{4\, q_n}.$$

Procédons par l'absurde et supposons que $\theta(r) = \frac{1}{16} r^{1+1/\tau}$ soit un module de continuité de B en x. On pose $r_n = |x - c_n| + q_n^{-\tau}$. Grâce au lemme 3.2.1, on a

$$|W_B(c_n, h_n)| \leq \frac{\theta(r_n)}{h_n}.$$

Comme on a $r_n \leq 2/q_n^\tau$, on a

$$\frac{\theta(r_n)}{h_n} \leq \frac{2^{1+1/\tau} q_n^{-\tau(1+1/\tau)}}{q_n^{-\tau}} = \frac{2^{1+1/\tau}}{q_n}.$$

On en tire donc que

$$\frac{1}{4} \leq \frac{2^{1+1/\tau}}{16},$$

une absurdité. □

Proposition 3.2.8. *Pour tout irrationnel x, le 1-exposant de B en x vérifie*

$$h_1(x) \leq \frac{1}{\tau(x)}.$$

Démonstration. En effet, on distingue trois cas :

- Si $\tau(x) = 2$, cela résulte directement de (3.8).
- Si $\tau(x) \in]2, +\infty[$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, x est $(\tau(x) - \varepsilon)$-bien approximable et donc on a la conclusion au vu de (3.9).
- Si $\tau(x) = +\infty$, alors x est τ-bien approximable pour tout $\tau > 2$ et donc on a

$$h_1(x) \leq 0$$

au vu de (3.9).

□

Remarque 3.2.7. Le 1-exposant de la fonction de Brjuno vaut 0 en les nombres de Liouville puisque comme ces derniers sont exactement les irrationnels non-diophantiens, il suffit d'utiliser (3.6) et la proposition précédente.
Ainsi, on a par exemple

$$h_1(l_C) = 0,$$

où l_C est la constante de Liouville, i.e.

$$l_C = \sum_{k=1}^{+\infty} 10^{-k!}.$$

3.2.3 Régularité locale de B

Avant d'aller plus, il faut aborder la notion de cellules ([11, 46]).

Définition 3.2.10. Soit $b_0 = 0, b_1, ..., b_k \in \mathbb{N}_0$, la *cellule* ou *intervalle fondamental* (*de profondeur k*) $\mathfrak{c}(b_1, ..., b_k)$ est l'intervalle ouvert d'extrémités $[b_0; b_1, ..., b_k]$ et $[b_0; b_1, ..., b_{k-1}, b_k + 1]$.
Par convention, la seule cellule de profondeur 0 est $]0, 1[$.

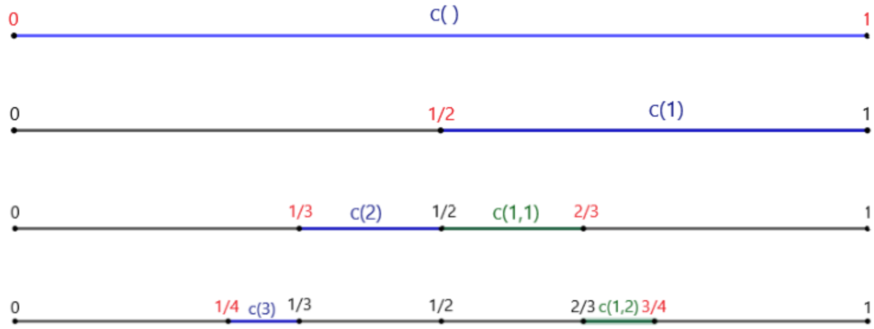

FIGURE 3.6 – Les cellules apparaissant sur les 4 découpages de $[0,1]$ donnés par les suites de Farey d'ordre 1 à 4.

Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, la suite de Farey d'ordre n est la suite des fractions irréductibles comprises entre 0 et 1, ordonnées en croissant et dont le dénominateur est inférieur ou égal à n. On remarque que chaque cellule apparait comme sous-intervalle ouvert dans un découpage de $[0,1]$ formé par une suite de Farey.
Donnons quelques propriétés directes de cette notion.

- Dans la cellule $\mathfrak{c}(b_1,...,b_k)$, les fonctions a_j, p_j, q_j sont constantes pour $j \leq k$:

$$a_j(x) = b_j, \quad \frac{p_j(x)}{q_j(x)} = [b_0; b_1, ..., b_j], \quad x \in \mathfrak{c}(b_1, ..., b_k).$$

- La cellule $\mathfrak{c}(b_1,...,b_k)$ est l'intervalle ouvert d'extrémités

$$\frac{p_k}{q_k} \text{ et } \frac{p_k + p_{k-1}}{q_k + q_{k-1}},$$

dans cet ordre si k est pair et dans l'ordre opposé s'il est impair. Sa longueur est donnée par

$$\frac{1}{q_k\,(q_k + q_{k+1})}.$$

- Si $x \in X$ et $k \in \mathbb{N}$, il existe une unique cellule de profondeur k qui contient x :

$$\mathfrak{c} = \begin{cases} \left]\frac{p_k}{q_k}, \frac{p_k+p_{k-1}}{q_k+q_{k-1}}\right[& \text{si } k \in 2\,\mathbb{N}, \\ \left]\frac{p_k+p_{k-1}}{q_k+q_{k-1}}, \frac{p_k}{q_k}\right[& \text{si } k \in 2\,\mathbb{N}+1. \end{cases}$$

On note $\delta_k(x)$ la distance de x au bord de $\mathfrak{c}$. On peut exprimer facilement cette distance en termes des fonctions précédemment définies. En effet, on a

$$x - \frac{p_k}{q_k} = (-1)^k \frac{\beta_k(x)}{q_k}.$$

On a aussi

$$\begin{aligned} x - \frac{p_k + p_{k-1}}{q_k + q_{k-1}} &= (-1)^{k-1} \frac{\beta_{k+1}(x)}{q_{k+1}} + \left(\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_k + p_{k-1}}{q_k + q_{k-1}} \right) \\ &= (-1)^{k-1} \left(\frac{\beta_{k+1}(x)}{q_{k+1}} + \frac{a_{k+1} - 1}{q_{k+1}(q_k + q_{k-1})} \right). \end{aligned}$$

On en tire donc la relation

$$\delta_k = \min \left(\frac{\beta_k}{q_k}, \frac{\beta_{k+1}}{q_{k+1}} + \frac{a_{k+1} - 1}{q_{k+1}(q_k + q_{k-1})} \right).$$

Montrons également le résultat suivant, qui nous sera utile pour la suite.

Proposition 3.2.9. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a*

$$\delta_k \leq \frac{1}{q_k\, q_{k+1}} \qquad \textit{et} \qquad \delta_k \geq \begin{cases} \frac{1}{2q_{k+1}\, q_{k+2}} & \textit{si } a_{k+1} = 1, \\ \frac{1}{2q_k\, q_{k+1}} & \textit{si } a_{k+1} \geq 2. \end{cases}$$

Démonstration. Comme on remarque facilement que

$$\frac{1}{q_{k+1} + q_k} \leq \beta_k \leq \frac{1}{q_{k+1}},$$

on a directement

$$\delta_k \leq \frac{\beta_k}{q_k} \leq \frac{1}{q_k\, q_{k+1}}$$

et si $a_{k+1} = 1$, on trouve

$$\delta_k = \frac{\beta_{k+1}}{q_{k+1}} \geq \frac{1}{2q_{k+1}\, q_{k+2}}.$$

De plus, si $a_{k+2} \geq 2$, on a

$$\delta_k \geq \min \left(\frac{1}{q_k(q_k + q_{k+1})}, \frac{1}{q_{k+1}(q_k + q_{k-1})} \right) \geq \frac{1}{2q_k\, q_{k+1}}.$$

□

Dans la suite, en prolongeant par continuité, on pose pour $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}(b_1, .., b_k)$ et $x \in \mathfrak{c}$,

$$a_k(x) = b_k, \quad \frac{p_k(x)}{q_k(x)} = \frac{p_k}{q_k} = [0; b_1, ..., b_k],$$

et

$$\alpha_k(x) = \frac{q_k x - p_k}{-q_{k-1}x + p_{k-1}}, \quad \beta_k(x) = (-1)^{k-1} (p_k - x\, q_k).$$

On remarque que α_k est dérivable sur $\mathfrak{c}$ et y vérifie

$$\alpha_k' = (-1)^k \beta_{k-1}^{-2} = (-1)^k (q_k + \alpha_k\, q_{k-1})^2. \tag{3.10}$$

Lemme 3.2.3. *Soient $p \geq 1$, $x \in X$, $h \in \,]0, e^{-2}[$ tels que $x - h/2, x + h/2 \in X$. On note*

$$I = \,]x - h/2, x + h/2[$$

et $K = K(I)$ le plus grand entier tel que $I \subseteq \mathfrak{c}(a_1, ..., a_K)$. Il existe une constante $C > 0$ indépendante de K telle que

$$\|\gamma_k - \gamma_k(x)\|_{L^p(I)} \leq C\, q_{k+1}\, h^{1+1/p} \quad \forall k < K, \tag{3.11}$$

$$\|\gamma_K - \gamma_K(x)\|_{L^p(I)} \leq C\, q_{K+1}\, h^{1+1/p}\, \log(q_{K+1}), \tag{3.12}$$

$$\|\gamma_k\|_{L^p(I)} \leq C\, \frac{h^{1/p}}{F_{k-K}} \left(\frac{\log(1/h)}{q_{K+1}} + h^{1/2} \right) \quad \forall k > K. \tag{3.13}$$

Démonstration. Montrons en premier lieu (3.11). On sait que la fonction γ_k est dérivable sur $\mathfrak{c}$ pour $k \leq K$ et on a

$$\begin{aligned} \gamma_k' = \beta_{k-1}' \log(1/\alpha_k) + \beta_{k-1}\, \alpha_k\, \frac{(-1)}{\alpha_k^2}\, \alpha_k' &= (-1)^{k-1} q_{k-1} \log(1/\alpha_k) + \frac{(-1)^{k-1}}{\beta_{k-1}\, \alpha_k} \\ &= (-1)^{k-1} q_{k-1} \log(1/\alpha_k) + \frac{(-1)^{k-1}}{\beta_k}. \end{aligned}$$

Or, pour $k < K$, on a $1/\alpha_k \leq a_{k+1} + 1$ et donc pour $k < K$, on a

$$|\gamma_k'(t)| \leq q_{k-1} \log(a_{k+1} + 1) + q_{k+1} + q_k \leq q_k\, a_{k+1} + q_{k-1} + 2q_{k+1} = 3q_{k+1}.$$

Comme on a

$$\left(\int_I |t - x|^p\, dt \right)^{1/p} \leq \frac{h^{1+1/p}}{2},$$

on conclut directement grâce au théorème des accroissements finis, en prenant $C = 3/2$.

Avant de passer aux autres inégalités, posons $u, v \in \,]0, +\infty[$ tels que

$$x + (-1)^K h/2 = \frac{u p_K + p_{K-1}}{u q_K + q_{K-1}} \quad \text{et} \quad x + (-1)^{K-1} h/2 = \frac{v p_K + p_{K-1}}{v q_K + q_{K-1}}.$$

Cela est évidemment toujours possible au vu des extrémités de $\mathfrak{c}$. On pose alors $m = \lfloor u \rfloor$ et $n = \lfloor v \rfloor$. On a alors (il suffit de traiter le cas K pair et le cas K impair séparément)

$$1 \leq m \leq a_{k+1}(x) \leq n.$$

Par maximalité de K, on trouve $n > m$. De plus, on a

$$\begin{aligned} h = \left| \frac{u p_K + p_{K-1}}{u q_K + q_{K-1}} - \frac{v p_K + p_{K-1}}{v q_K + q_{K-1}} \right| &= \frac{v - u}{(u q_K + q_{k-1})(v q_k + q_{K-1})} \\ &\geq \frac{v - u}{q_K^2 (u + 1)(v + 1)} \\ &\geq \frac{v - u}{6 q_K^2\, mn}, \end{aligned}$$

où la dernière inégalité résulte du fait que $u+1 \leq 3m$ et $v+1 \leq 2n$ (2 suffit pour n puisque $n > m$).

On peut maintenant montrer l'inégalité (3.12). On distingue deux cas :

• $\underline{n \geq 2m+1}$: On a alors
$$v - u \geq \frac{n-m}{2},$$
et donc comme
$$\frac{n-m}{mn} \geq \frac{1}{2m},$$
on a
$$h \geq \frac{1}{24\, m\, q_K^2} \geq \frac{1}{24\, a_{K+1}(x)\, q_K^2} \geq \frac{1}{24\, q_K\, q_{K+1}}. \tag{3.14}$$
Grâce aux propositions B.1 et 3.2.2, il existe une constante $C_1 > 0$ telle que
$$\left(\int_I \gamma_K(t)^p\, dt\right)^{1/p} \leq 8h^{1/p}\, p\, \gamma_K(x) + \frac{h^{1/p}\, p}{q_K}(6 \log q_K + 4) \leq C_1\, h^{1/p}\, \frac{\log q_{K+1}}{q_K}.$$
Par Minkowski, en utilisant à nouveau la proposition 3.2.2 et en utilisant la relation (3.14), on a donc
$$\begin{aligned}\left(\int_I |\gamma_K(t) - \gamma_K(x)|^p\, dt\right)^{1/p} &\leq \left(\int_I \gamma_K(t)^p\, dt\right)^{1/p} + h^{1/p}\, \gamma_K(x)\\ &\leq C_2\, \frac{h^{1/p}}{q_K} \log q_{K+1}\\ &\leq C_3\, h^{1+1/p}\, q_{K+1} \log q_{K+1}.\end{aligned}$$

• $\underline{m < n \leq 2m}$: Pour $t \in I$, on vérifie que
$$\gamma_K'(t) = (-1)^{K-1}\left(q_{K-1}(t) \log\left(\frac{1}{A^K(t)}\right) + \beta_K(t)^{-2}\right),$$
et donc
$$|\gamma_K'(t)| \leq C_4\, q_{K+1}(t).$$
De plus, pour $t \in I$, il existe $l \in [m,n]$ tel que $t \in \mathfrak{c}(a_1, ..., a_K, l)$ et donc tel que
$$q_{K+1}(t) = l q_K + q_{K-1} \leq n q_K + q_{K-1} \leq 2m q_K + q_{K-1} \leq 2a_{K+1} q_K + q_{K-1} \leq 2q_{K+1}.$$
Par le théorème des accroissements finis, on a donc
$$\begin{aligned}\left(\int_I |\gamma_K(t) - \gamma_K(x)|^p\, dt\right)^{1/p} &\leq 2\, C_4\, q_{K+1} \left(\int_I |x-t|^p dt\right)^{1/p}\\ &\leq C_4\, q_{K+1}\, h^{1+1/p}\\ &\leq C_5\, q_{K+1}\, h^{1+1/p}\, \log q_{K+1}.\end{aligned}$$

Il nous reste à démontrer l'inégalité (3.13). Supposons donc $k > K$; on distingue deux cas.

• $\underline{n-m=1}$: En utilisant la proposition B.2, on a

$$\left(\int_I \gamma_k(t)^p \, dt\right)^{1/p} \leq \frac{C}{q_{K+1}F_{k-K}} h^{1/p} \log(1/h).$$

• $\underline{n-m \geq 2}$: Comme précédemment, on a

$$v-u \geq \frac{n-m}{2},$$

et donc

$$h \geq \frac{n-m}{12\, q_K^2\, mn}.$$

En utilisant la proposition B.2, il vient

$$\left(\int_I \gamma_k(t)^p \, dt\right)^{1/p} \leq C \, \frac{(n-m)^{1/p}}{F_{k-K}\, m^{1+1/p}\, n^{1/p}} \frac{1}{q_K^{1+2/p}}.$$

Dès lors, on obtient

$$\begin{aligned}\left(\int_I \gamma_k(t)^p \, dt\right)^{1/p} &\leq C' \, \frac{(n-m)^{1/p}}{F_{k-K}\, m^{1+1/p}\, n^{1/p}} \frac{h^{1/2+1/p}\,(mn)^{1/2+1/p}}{(n-m)^{1/2+1/p}} \\ &= C' \, \frac{h^{1/2+1/p}}{F_{k-K}} \left(\frac{n}{(n-m)m}\right)^{1/2},\end{aligned}$$

d'où la conclusion puisque pour $1 \leq m \leq n$, on a

$$\frac{n}{(n-m)m} \leq 1.$$

□

Proposition 3.2.10. *Soient $p \geq 1$, $x \in X$ diophantien et $\varepsilon > 0$. Il existe $h_0 = h_0(x_0, \varepsilon) > 0$ tel que, si $h \in \,]0, h_0[$, alors*

$$\left(\frac{1}{h}\int_{x-h/2}^{x+h/2} |B(x) - B(t)|^p \, dt\right)^{1/p} \leq C' \, h^{1/(\tau(x)+\varepsilon)} \log(1/h),$$

où la constante C' peut dépendre de x. En particulier, le p-exposant de B en x vérifie

$$h_p(x) \geq \frac{1}{\tau(x)}.$$

Démonstration. Soient donc $x \in X$ diophantien et $\varepsilon > 0$.
Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on peut supposer que $x_0 \pm h/2$ sont irrationnels. De plus, comme x est diophantien, il existe un entier K_0 tel que pour tout $l \geq K_0$,

$$\tau_l(x_0) \leq \tau(x_0) + \varepsilon.$$

Soit $K = K(h)$ le plus grand entier tel que

$$I =]x - h/2, x + h/2[$$

soit inclus dans $\mathfrak{c}(a_1, ..., a_K)$. On a

$$\frac{1}{2q_{K+2}q_{K+3}} \leq \delta_{K+1} < h/2,$$

et donc $K \to +\infty$ si $h \to 0$.
Soit $h_0 \in]0, e^{-2}[$ tel que pour tout $h \in]0, h_0[$, $K \geq \max(K_0, 1)$. Pour $h < h_0$, on a

$$\begin{aligned}\|B(x) - B\|_{L^p(I)} &\leq \sum_{k \leq K} \|\gamma_k(x) - \gamma_k\|_{L^p(I)} + \sum_{k>K} \|\gamma_k(x) - \gamma_k\|_{L^p(I)} \\ &\leq \sum_{k \leq K} \|\gamma_k(x) - \gamma_k\|_{L^p(I)} + \sum_{k>K} \|\gamma_k\|_{L^p(I)} + h^{1/p} \sum_{k>K} \gamma_k(x).\end{aligned}$$

Comme la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à croissance au moins exponentielle et en utilisant (3.11) et (3.12), on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{k \leq K} \left(\int_I |\gamma_k(x) - \gamma_k(t)|^p \, dt \right)^{1/p} &\leq C\, h^{1+1/p} \left(\sum_{k<K} q_{k+1} + q_{K+1} \log(q_{K+1}) \right) \\ &\leq C'\, h^{1+1/p}\, q_{K+1} \log(q_{K+1}).\end{aligned}$$

En utilisant (3.13) et par croissance exponentielle de la suite de Fibonnaci, on a aussi

$$\begin{aligned}\sum_{k>K} \left(\int_I \gamma_k(t)^p \, dt \right)^{1/p} &\leq C\, h^{1/p} \left(\frac{\log(1/h)}{q_{K+1}} + h^{1/2} \right) \sum_{k>K} \frac{1}{F_{k-K}} \\ &\leq C'\, h^{1/p} \left(\frac{\log(1/h)}{q_{K+1}} + h^{1/2} \right).\end{aligned}$$

Comme $\tau(x) < +\infty$, la suite $(\tau_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. En utilisant la proposition 3.2.2, on a donc pour $k > K$,

$$\gamma_k(x) \leq \frac{\log(q_{k+1})}{q_k} \leq \frac{\log(q_k^{\tau_k(x)-1})}{q_k} \leq C_1 \frac{\log(q_k)}{q_k},$$

où $C_1 > 0$ est une constante qui dépend de x. Comme x est diophantien, on en tire que

$$\sum_{k>K} \gamma_k(x) \leq C_2 \frac{\log q_{K+1}}{q_{K+1}}.$$

De plus, comme

$$q_{K+1} \leq q_K^{\tau_K(x)-1} = \left| x - \frac{p_K}{q_K} \right|^{(1-\tau_K(x))/\tau_K(x)} \leq h^{-1+1/\tau_K(x)},$$

d'où

$$\log(q_{K+1}) \leq C_3 \log(1/h).$$

Pour majorer les q_{K+1}^{-1}, on distingue deux cas.

• Si $a_{K+2} \geq 2$, en utilisant la proposition 3.2.9, on a

$$\frac{1}{q_{K+1}^{\tau_{K+1}(x)}} = \left| x - \frac{p_{K+1}}{q_{K+1}} \right| \leq \frac{1}{q_{K+1}q_{K+2}} \leq 2\delta_{K+1} < h,$$

et donc

$$\frac{1}{q_{K+1}} \leq h^{1/\tau_{K+1}(x)}.$$

• Si $a_{K+2} = 1$, on a

$$\frac{1}{q_{K+1}} \leq \frac{2}{q_{K+1} + q_K} = \frac{2}{q_{K+2}}.$$

Or, en utilisant à nouveau la proposition 3.2.9, on sait que

$$\frac{1}{q_{K+2}^{\tau_{K+2}(x)}} = \left| x - \frac{p_{K+2}}{q_{K+2}} \right| \leq \frac{1}{q_{K+2}q_{K+3}} \leq 2\delta_{K+1} < h,$$

d'où

$$\frac{1}{q_{K+1}} \leq 2\, h^{1/\tau_{K+2}(x)}.$$

Au final, en utilisant le fait que pour tout $l \geq K_0$, $2 \leq \tau_l(x) \leq \tau(x) + \varepsilon$, on obtient

$$\begin{aligned}
\left(\int_I |B(x) - B(t)|^p \, dt \right)^{1/p} &\leq C\, h^{1/p} \left(h q_{K+1} \log(q_{K+1}) + \frac{\log(1/h)}{q_{K+1}} + h^{1/2} + \frac{\log q_{K+1}}{q_{K+1}} \right) \\
&\leq C'\, h^{1/p} \left(h^{1/\tau_K(x)} + h^{1/\tau_{K+1}(x)} + h^{1/\tau_{K+2}(x)} \right) \log(1/h) \\
&\leq C''\, h^{1/p}\, h^{1/(\tau(x)+\varepsilon)} \log(1/h).
\end{aligned}$$

□

On peut enfin décrire la régularité locale de B. L'idée est de se ramener au 1-exposant pour les majorations des p-exposants.

Théorème 3.2.1. *Soit $p \geq 1$, alors les p-exposants de B sont donnés par*

$$h_p(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \in \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{\tau(x)} & sinon\ . \end{cases}$$

Démonstration. On remarque dans un premier temps que grâce à la proposition 3.2.4 et en procédant comme à la proposition 3.2.5, pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$h_p(x) \geq 0.$$

De plus, grâce à la proposition 2.2.1, on a

$$h_p(x) \leq h_1(x).$$

• Si $x \in \mathbb{Q}$, en utilisant (3.7), on a donc

$$0 \leq h_p(x) \leq h_1(x) = 0,$$

d'où $h_p(x) = 0$.
• Si x est un nombre de Liouville, en utilisant la remarque 3.2.7, on a

$$0 \leq h_p(x) \leq h_1(x) = 0,$$

d'où $h_p(x) = 0$.
• Si x est diophantien, en utilisant les propositions 3.2.8 et 3.2.10, on a

$$\frac{1}{\tau(x)} \leq h_p(x) \leq h_1(x) \leq \frac{1}{\tau(x)},$$

d'où $h_p(x) = \frac{1}{\tau(x)}$. □

Remarque 3.2.8. On peut interpréter ce résultat en disant que plus la suite q_n relative à un x croît lentement, plus la fonction B est régulière en x.

3.2.4 p-spectre de B

Pour calculer la dimension de Hausdorff d'un ensemble, plusieurs techniques sont possibles (principe de distribution de masse, théorie des potentiels,... voir [24]). Dans notre cas, on utilisera le théorème de Jarnik. Pour l'établir, on modifie la mesure de Hausdorff de la manière suivante.

Définition 3.2.11. Soit $A \subset \mathbb{R}$, si $\varepsilon > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$ et $\delta \in [0,1]$, on pose

$$\mathcal{H}_\varepsilon^{\delta,\gamma} = \inf_R \left(\sum_i \operatorname{diam}(A_i)^\delta \left|\log(\operatorname{diam}(A_i))\right|^\gamma \right),$$

où la borne inférieure est prise sur les recouvrements R de A par des bornés $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ dont le diamètre est inférieur à ε.
Pour tout $\delta \in [0,1]$ et $\gamma \in \mathbb{R}$, on définit la (δ,γ)-*mesure extérieure de Hausdorff* de A par

$$\mathcal{H}^{\delta,\gamma}(A) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \mathcal{H}_\varepsilon^{\delta,\gamma}.$$

Théorème 3.2.2. (Théorème de Jarnik, [24])
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Pour tout $\tau \geq 2$, on pose

$$E_\tau = \left\{ x \in [a,b] : \left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^\tau} \text{ pour une infinité de couples } (p,q) \right\}.$$

Alors on a

$$\dim_{\mathcal{H}}(E_\tau) = \frac{2}{\tau}.$$

On montre de plus ([37]) que

$$\mathcal{H}^{2/\tau,2}(E_\tau) > 0.$$

Proposition 3.2.11. *Soit $p \geq 1$, le p-spectre de la fonction de Brjuno B est donné par*

$$d_p(h) = \begin{cases} 2h & \text{si } h \in [0, 1/2]\,, \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.15}$$

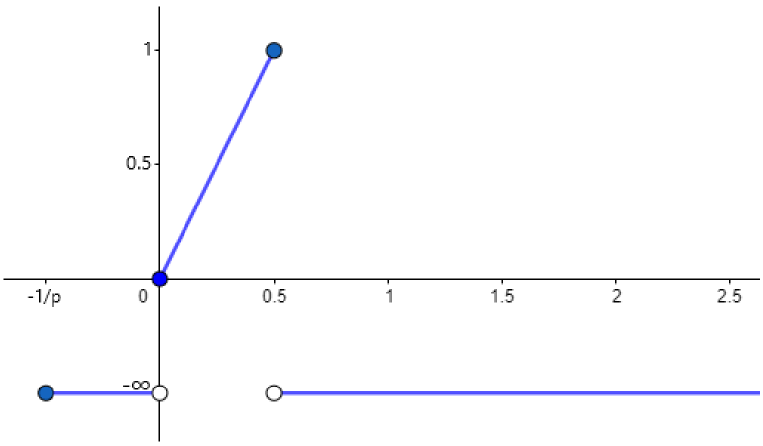

FIGURE 3.7 – p-spectre de B.

On va montrer quelque chose de plus fort : on montre que le p-spectre de B restreint à n'importe quel intervalle $[a, b]$ est aussi donné par (3.15).

Démonstration. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, on pose pour tout $\tau \geq 2$,

$$F_\tau = \{x \in [a,b] : \tau(x) = t\}\,.$$

Par le théorème 3.2.1, il suffit de montrer que

$$\dim_{\mathcal{H}}(F_t) = \frac{2}{t} \quad \forall t \in [2, +\infty]\,.$$

Soit donc $t \in [2, +\infty]$. Par définition de l'exposant d'irrationnalité, on a directement

$$F_t = \bigcap_{\tau < t} E_\tau \Big\backslash \bigcup_{\tau > t} E_\tau.$$

Par le théorème 3.2.2, on a donc pour tout $\tau < t$,

$$\dim_{\mathcal{H}}(F_\tau) \leq \dim_{\mathcal{H}}(E_\tau) = \frac{2}{\tau}.$$

De plus, F_t contient l'ensemble

$$G_t = E_t \Big\backslash \bigcup_{\tau > t} E_\tau.$$

Comme les espaces E_τ sont emboîtés en décroissant, on peut réécrire $\bigcup_{\tau>t} E_\tau$ comme une union dénombrable. Par le théorème 3.2.2, cette union est composée d'ensembles de mesure $\mathcal{H}^{2/t,2}$ nulle. Ainsi, on a

$$\mathcal{H}^{2/t,2}(F_t) \geq \mathcal{H}^{2/t,2}(G_t) = \mathcal{H}^{2/t,2}(E_t) > 0.$$

On en tire donc que

$$\dim_{\mathcal{H}}(F_t) = \frac{2}{t}.$$

□

Grâce à ce résultat, on sait que la fonction de Brjuno est *multifractale* car son spectre n'est pas constant en dehors de $-\infty$.

Remarque 3.2.9. Comme $B(x) \in [0, +\infty]$ pour tout $x \in \mathscr{B}$, on peut considérer la mesure ν définie pour tout borélien C de $\mathbb{R}$ par

$$\nu(C) = \int_C B(x)\, dx.$$

En vérifiant que cela donne une mesure de Radon, on peut montrer ([42]) que la dimension locale de ν est donnée par 1 pour tout $x \in \mathbb{R}$. Cela ne permet donc pas de capturer d'éventuels changements dans la régularité ponctuelle de B.

3.3 Généralisation de la fonction de Riemann

Hormis la fonction de Brjuno, il y a très peu de fonctions non localement bornées qui apparaissent dans la littérature et non créées pour cela. On peut néanmoins en construire « artificiellement ». Cette idée est développée dans cette section.

La fonction de Riemann qu'on veut généraliser est la série de Fourier

$$\mathcal{R}(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{e^{2i\pi j^2 x}}{j^2}.$$

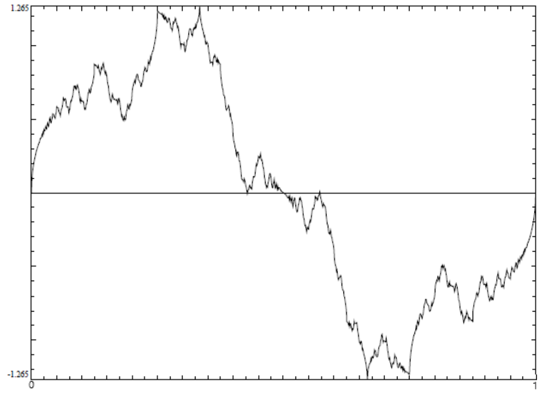

FIGURE 3.8 – Graphe de la partie imaginaire de la fonction de Riemann $\mathcal{R}$ restreint à $[0,1] \times \mathbb{R}$ ([68]).

Cette fonction a été introduite par BERNHARD RIEMANN en 1853 comme potentielle fonction nulle part dérivable mais il a été montré ([26]) que cette fonction est dérivable en les points $p\pi/q$ avec p et q impairs.

En 1872, KARL WEIERSTRASS fut le premier à donner non seulement une, mais toute une famille de fonctions continues et nulle part dérivables : les fonctions $\mathcal{W}_{a,b}$ définies à la section 2.1.

Même si la fonction de Riemann ne vérifie pas son rôle initial, elle a été étudiée dans différents contextes et théories : théorie ergodique, analyse complexe, approximation diophantienne ([26],[34],[68]).

L'idée de cette section est de généraliser la fonction $\mathcal{R}$ pour en faire une fonction non localement bornée et d'utiliser dès lors les p-exposants pour caractériser sa régularité. À nouveau, on ne fait pas les preuves ici du fait de leur longueur et puisque cela a été fait en détail dans [71].

3.3.1 Définition et convergence

On généralise la fonction de Riemann $\mathcal{R}$ de la manière suivante pour tout $s \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$:

$$\mathcal{R}_s(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{e^{2i\pi j^2 x}}{j^s}.$$

On vérifie directement que $\mathcal{R}_s$ est 1-périodique. De plus, $\mathcal{R}_s \in L^2([0,1])$. En effet, on vérifie facilement que $(e^{2i\pi j^2 x}/j^s)_{j\in\mathbb{N}_0}$ forme une suite orthogonale de $L^2([0,1])$. Ainsi il suffit de vérifier que

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \left\| \frac{e^{2i\pi j^2 x}}{j^s} \right\|_{L^2([0,1])}$$

converge dans $\mathbb{R}$. C'est effectivement le cas puisque

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \left\| \frac{e^{2i\pi j^2 x}}{j^s} \right\|_{L^2([0,1])} = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^{2s}},$$

avec $s \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$.

Remarque 3.3.1. Pour $s > 1$, la série $\mathcal{R}_s$ converge partout et est localement bornée. Son spectre a été calculé ([34]). Par exemple, le spectre de $\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}$ est donné par

$$d_\infty(h) = \begin{cases} 4h-2 & \text{si } h \in [1/2, 3/4]\,, \\ 0 & \text{si } h = 3/2, \\ -\infty & \text{sinon .} \end{cases}$$

On ne s'intéresse donc pas au cas $s > 1$ ici puisque le spectre multifractal classique convient.

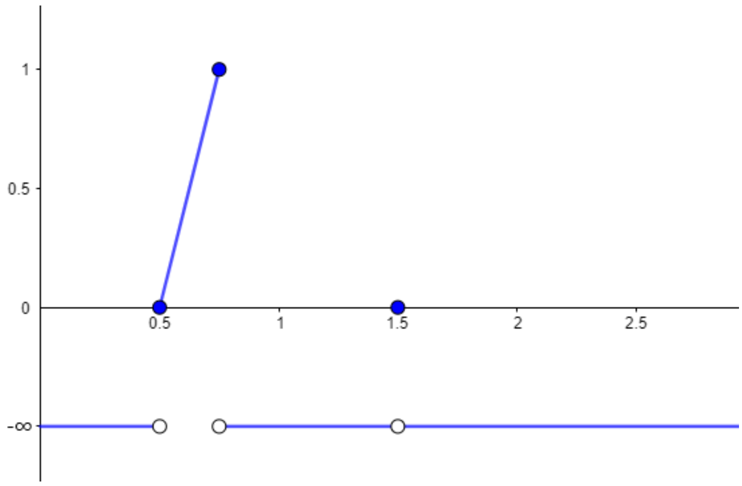

FIGURE 3.9 – spectre de $\mathcal{R}$.

On utilise la même notation $X =]0,1[\setminus \mathbb{Q}$ que dans la section sur la fonction de Brjuno. On introduit pour x irrationnel le taux

$$\widetilde{\tau}(x) = \limsup_{n \to +\infty} \{\tau_n(x) : q_n \not\equiv 2 \bmod 4\}.$$

Cette définition fait sens car si $q_n(x)$ est pair, $q_{n+1}(x)$ et $q_{n-1}(x)$ sont impairs. Comme pour $\tau(x)$, on a donc $\widetilde{\tau}(x) \in [2, +\infty]$.

Théorème 3.3.1. ([71])
Soient $s \in]1/2, 1]$ et $x \in X$. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\delta_n = \begin{cases} \log(q_{n+1}(x)/q_n(x)) & si\ s = 1, \\ 1 & si\ s \in]0, 1/2[\,, \end{cases}$$

et

$$\Sigma_s(x) = \sum_{\substack{n \geq 1 \\ q_n \not\equiv 2 \bmod 4}} \delta_n \sqrt{\frac{q_{n+1}(x)}{(q_n(x)\, q_{n+1}(x))^s}}.$$

Alors

(i) $\mathcal{R}_s(x)$ *converge si*

$$\frac{s - 1 + 1/\widetilde{\tau}(x)}{2} > 0.$$

(ii) $\mathcal{R}_s(x)$ *converge si* $\Sigma_s(x) < +\infty$.

(iii) $\mathcal{R}_s(x)$ *ne converge pas si*

$$\frac{s - 1 + 1/\widetilde{\tau}(x)}{2} < 0.$$

(iv) $\mathcal{R}_s(x)$ *ne converge pas si*

$$\limsup_{\substack{n \geq 1 \\ q_n \not\equiv 2 \bmod 4}} \delta_n \sqrt{\frac{q_{n+1}(x)}{(q_n(x)\, q_{n+1}(x))^s}} > 0.$$

De plus, si $x = p/q$ *est un rationnel, alors* $\mathcal{R}_s$ *converge pour* $q \equiv 2 \bmod 4$ *et diverge pour* $q \not\equiv 2 \bmod 4$. *En particulier, la fonction* $\mathcal{R}_s$ *n'est nulle part localement bornée.*

3.3.2 2-exposant et 2-spectre de $\mathcal{R}_s$

Pour $r > 0$, on pose $C(r) = [-2r, -r] \cup [r, 2r]$. Pour calculer le 2-exposant de $\mathcal{R}_s$, la caractérisation suivante est utilisée dans [71].

Lemme 3.3.1. *Soient* $f \in L^2(\mathbb{R})$ *une fonction réelle et* $x \in \mathbb{R}$. *Si* $h_2(x) < 1$, *alors*

$$h_2(x) = \sup \left\{ \beta \in [0,1[\, : \exists C > 0, c_x \in \mathbb{R} \,:\, (2r)^{-1/2} \left\| f(x+\cdot) - c_x \right\|_{L^2(C(r))} \leq C\, r^{\beta} \right\},$$

où l'inégalité dans la borne supérieure ne doit être valable que pour les $r > 0$ *suffisamment petits.*

Démonstration. Comme $h_2(x) < 1$, il existe $C > 0$ et $c_x \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout r suffisamment petit,

$$r^{-1/2} \left\| f - c_x \right\|_{L^2(B(x,r))} \leq C\, r^{h_2(x) - \varepsilon}.$$

Comme $C(r) \subset B(0, 2r)$, on a

$$(2r)^{-1/2} \left\| f(x+\cdot) - c_x \right\|_{L^2(C(r))} \leq C\,(2r)^{h_2(x)-\varepsilon} \leq C' r^{h_2(x)-\varepsilon}. \tag{3.16}$$

Réciproquement, si (3.16) est vérifiée pour des $r > 0$ suffisamment petits, alors il suffit d'utiliser la relation

$$B(x, r) = x + \bigcup_{k \geq 1} C(r\, 2^{-k}).$$

□

Proposition 3.3.1. ([71]) *Soit $s \in]1/2, 1]$, pour tout $x \in X$ tel que $\Sigma_s(x) < +\infty$, le 2-exposant de $\mathcal{R}_s$ en x vérifie*

$$h_2(x) = \frac{s - 1 + 1/\widetilde{\tau}(x)}{2}.$$

On peut à présent calculer le 2-spectre de $\mathcal{R}_s$.

Théorème 3.3.2. *Soit $s \in]1/2, 1]$, pour tout $h \in \left[0, \frac{s}{2} - \frac{1}{4}\right]$, le 2-spectre de $\mathcal{R}_s$ est donné par*

$$d_2(h) = 4h + 2 - 2s.$$

Démonstration. En utilisant la proposition précédente et le théorème de Jarnik en procédant exactement comme dans la démonstration de la proposition 3.2.11, on trouve

$$\begin{aligned} d_2(h) = \dim_{\mathcal{H}} \left\{ x : \frac{s - 1 + 1/\widetilde{\tau}(x)}{2} = h \right\} &= \dim_{\mathcal{H}} \left\{ x : \widetilde{\tau}(x) = \frac{1}{2h + 1 - s} \right\} \\ &= 4h + 2 - 2s. \end{aligned}$$

$\square$

Remarque 3.3.2. Dans [71], on suppose que pour $h \in [s/2 - 1, 0[$, le spectre suit la même droite $d_2(h) = 4h + 2 - 2s$.

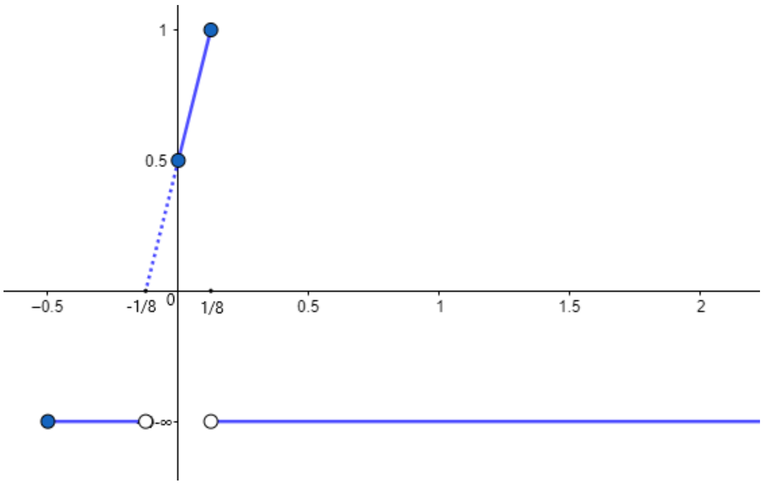

FIGURE 3.10 – 2-spectre de $\mathcal{R}_{3/4}$.

Chapitre 4

Espaces $T^p_\phi(x_0)$

Dans ce chapitre, on généralise les espaces de $T^p_u(x_0)$ avec les fonctions de Boyd. L'idée est remplacer la fonction $r \mapsto r^u$ de la relation (1) par ces fonctions. Cette démarche est utilisée dans [54] pour généraliser les résultats sur les équations aux dérivées partielles établis par Calderón et Zygmund dans [16].
Utiliser les fonctions de Boyd pour généraliser les espaces de Calderón-Zygmund est naturel puisque c'est une approche réalisée dans d'autres espaces fonctionnels généralisés (voir par exemple [66] pour la détection de corrections logarithmiques où l'on prend la fonction $r \mapsto r^u\,|\log r|$).
On s'intéresse ici à généraliser le théorème de Rademacher dans le contexte de ces nouveaux espaces. Pour cela, on généralisera le théorème d'extension de Whitney.

4.1 Fonctions de Boyd

Définition 4.1.1. Une fonction $\phi :]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ est une *fonction de Boyd* (ou encore *fonction à variation régulière uniforme*) si
(i) $\phi(1) = 1$,
(ii) ϕ est continue,
(iii) pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$\overline{\phi}(x) := \sup_{y>0} \frac{\phi(xy)}{\phi(y)} < +\infty.$$

L'ensemble des fonctions de Boyd est noté $\mathcal{B}$.

Exemple 4.1.1. Soient $u \in \mathbb{R}$ et $\psi :]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ une fonction continue telle que $\psi(1) = 1$ et qui est à *variation lente*, i.e. telle que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\psi(rt)}{\psi(t)} = 1 \quad \forall r > 0,$$

alors la fonction
$$\phi :]0,+\infty[\to]0,+\infty[: r \mapsto r^u\, \psi(r)$$
est dans $\mathcal{B}$.
Comme fonction ψ, on peut par exemple prendre la fonction $r \mapsto 1 + |\log r|$.

Remarque 4.1.1. Pour $x > 0$ fixé et $\phi \in \mathcal{B}$, on utilisera souvent dans la suite la relation
$$\phi(xy) \le \overline{\phi}(x)\, \phi(y) \quad \forall y > 0.$$

Proposition 4.1.1. *Soit $\phi \in \mathcal{B}$, alors $\overline{\phi}$ est sous-multiplicative, i.e.*
$$\overline{\phi}(xy) \le \overline{\phi}(x)\overline{\phi}(y) \quad \forall x, y > 0,$$
$\overline{\phi}$ est Lebesgue-mesurable et pour tout $x > 0$, $\overline{\phi}(x) \ge \phi(x)$ et $\overline{\phi}(1/x) \ge 1/\phi(x)$.

Démonstration. Soient $x, y > 0$, pour tout $z > 0$, on a
$$\frac{\phi(xyz)}{\phi(z)} = \frac{\phi(xz)}{\phi(z)}\frac{\phi(xyz)}{\phi(xz)} \le \overline{\phi}(x)\overline{\phi}(y),$$
d'où
$$\overline{\phi}(xy) \le \overline{\phi}(x)\overline{\phi}(y).$$
$\overline{\phi}$ est clairement Lebesgue-mesurable puisque ϕ est continue.
Les deux dernières inégalités résultent du fait que $\phi(1) = 1$. □

Définition 4.1.2. On définit l'*indice de Boyd inférieur* d'une fonction $\phi \in \mathcal{B}$ par
$$\underline{b}(\phi) = \sup_{x\in]0,1[} \frac{\log \overline{\phi}(x)}{\log x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log \overline{\phi}(x)}{\log x}.$$
De même, on définit l'*indice de Boyd supérieur* d'une fonction $\phi \in \mathcal{B}$ par
$$\overline{b}(\phi) = \inf_{x\in]1,+\infty[} \frac{\log \overline{\phi}(x)}{\log x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\log \overline{\phi}(x)}{\log x}.$$

Remarque 4.1.2. On peut trouver une preuve de l'égalité des limites avec la borne supérieure et la borne inférieure dans [31], cela résulte du fait que comme $\overline{\phi}$ est sous-multiplicative, $\log \overline{\phi}$ est sous-additive.

Remarque 4.1.3. Remarquons que l'on a $\underline{b}(\phi) \le \overline{b}(\phi)$ puisque
$$\frac{\log \overline{\phi}(x)}{\log x} \ge \frac{\log \overline{\phi}(1/x)}{\log 1/x} \text{ pour tout } x > 1. \tag{4.1}$$
En effet, pour tout $x > 0$, on sait que
$$\overline{\phi}(x) \ge \phi(x) \ge \frac{1}{\overline{\phi}(1/x)}.$$

Or, pour tout $x > 1$, on a

$$\frac{\log \overline{\phi}(x)}{\log x} \geq \frac{\log \overline{\phi}(1/x)}{\log 1/x} \Leftrightarrow \frac{\log \overline{\phi}(x)}{\log x} \geq \frac{\log \overline{\phi}(1/x)}{-\log x} \Leftrightarrow \log \overline{\phi}(x) \geq \log \frac{1}{\overline{\phi}(1/x)} \Leftrightarrow \overline{\phi}(x) \geq \frac{1}{\overline{\phi}(1/x)},$$

d'où la conclusion.
On en déduit également que $\underline{b}(\phi)$ et $\overline{b}(\phi)$ sont réels, puisqu'on a par exemple

$$\frac{\log \overline{\phi}(1/2)}{\log 1/2} \leq \underline{b}(\phi) \leq \overline{b}(\phi) \leq \frac{\log \overline{\phi}(2)}{\log 2}.$$

Exemple 4.1.2. Si $\gamma \geq 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ et

$$\phi(x) = x^\theta (1 + |\log x|)^\gamma \quad \forall x > 0,$$

alors on vérifie que $\phi \in \mathcal{B}$ et que

$$\underline{b}(\phi) = \overline{b}(\phi) = \theta.$$

En effet, pour tout $x > 0$, on a

$$\overline{\phi}(x) = x^\theta \sup_{y>0} \frac{1 + |\log x + \log y|}{1 + |\log y|} = \phi(x),$$

et ainsi

$$\underline{b}(\phi) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\log \left(x^\theta (1 + |\log x|)^\gamma\right)}{\log x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\log x^\theta}{\log x} + \lim_{x \to 0^+} \frac{\log \left((1 + |\log x|)^\gamma\right)}{\log x} = \theta.$$

On procède de même pour remarquer que $\overline{b}(\phi) = \theta$.

Proposition 4.1.2. *Soient $\phi \in \mathcal{B}$, $\varepsilon > 0$ et $R > 0$. Il existe des constantes $C_1, C_2, C_3, C_4 > 0$ telles que*

(i) Pour tout $r \in \,]0, R]$,

$$C_1\, r^{\overline{b}(\phi)+\varepsilon} \leq \phi(r) \leq C_2\, r^{\underline{b}(\phi)-\varepsilon}.$$

(ii) Pour tout $r \in [R, +\infty[$,

$$C_3\, r^{\underline{b}(\phi)-\varepsilon} \leq \phi(r) \leq C_4\, r^{\overline{b}(\phi)+\varepsilon}.$$

Démonstration. Montrons le point (i) ; il suffit de procéder de même pour démontrer le point (ii).
On sait qu'il existe $R_1 \in \,]0, 1[$ tel que

$$\underline{b}(\phi) - \frac{\log \overline{\phi}(r)}{\log r} \leq \varepsilon \quad \forall r \in \,]0, R_1[\,.$$

Ainsi,

$$\overline{\phi}(r) \leq r^{\underline{b}(\phi)-\varepsilon} \quad \forall r \in \left]0, R_1\right[. \tag{4.2}$$

Évidemment, on a la même chose pour $\overline{b}(\phi)$, i.e. il existe $R_2 > 1$ tel que

$$\overline{\phi}(r) \leq r^{\overline{b}(\phi)+\varepsilon} \quad \forall r \in \left]R_2, +\infty\right[. \tag{4.3}$$

Or, on sait que pour tout $r > 0$, on a $\overline{\phi}(1/r)^{-1} \leq \phi(r) \leq \overline{\phi}(r)$.
Ainsi, pour tout $r \in \left]0, \min\{R_1, \frac{1}{R_2}\}\right[$, on a

$$r^{\overline{b}(\phi)+\varepsilon} \leq \overline{\phi}\left(\frac{1}{r}\right)^{-1} \leq \phi(r) \leq \overline{\phi}(r) \leq r^{\underline{b}(\phi)-\varepsilon}.$$

On distingue alors deux cas.

- Si $R \leq \min\{R_1, \frac{1}{R_2}\}$, alors il suffit de prendre $C_1 = C_2 = 1$.
- Si $R > \min\{R_1, \frac{1}{R_2}\}$, alors les fonctions

$$r \mapsto \frac{\phi(r)}{r^{\overline{b}(\phi)+\varepsilon}} \text{ et } r \mapsto \frac{\phi(r)}{r^{\underline{b}(\phi)-\varepsilon}}$$

  sont continues sur le compact $\left[\min\{R_1, \frac{1}{R_2}\}, R\right]$ et donc on peut trouver des constantes C_1 et C_2 telles que le point (i) soit vérifié dans ce compact, et même pour tout $r \in \left]0, R\right]$ en prenant les constantes supérieures à 1.

□

Remarque 4.1.4. On peut étendre l'inégalité (4.2) de la manière suivante : pour tous $\varepsilon > 0$ et $R > 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\overline{\phi}(r) \leq C r^{\underline{b}(\phi)-\varepsilon} \quad \forall r \in \left]0, R\right].$$

En effet, si $R \leq R_1$, où R_1 est le nombre de la preuve précédente, on le sait déjà et si $R > R_1$, il suffit d'utiliser la sous-multiplicativité de ϕ : pour tout $r \in \left]0, R\right]$, on a

$$\overline{\phi}(r) \leq \overline{\phi}\left(\frac{R}{R_1}\right)\overline{\phi}\left(\frac{R_1}{R}r\right) \leq \overline{\phi}\left(\frac{R}{R_1}\right)\left(\frac{R_1}{R}\right)^{\underline{b}(\phi)-\varepsilon} r^{\underline{b}(\phi)-\varepsilon}.$$

De même, on peut étendre l'inégalité (4.3) : pour tous $\varepsilon > 0$ et $R > 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\overline{\phi}(r) \leq C r^{\overline{b}(\phi)+\varepsilon} \quad \forall r \in \left[R, +\infty\right[.$$

Comme corollaire de la précédente remarque, on a la proposition suivante ([13]).

Proposition 4.1.3. *Soit $\phi \in \mathcal{B}$,* *(i) Si* $\underline{b}(\phi) > 0$*, alors* $\int_0^1 \frac{\overline{\phi}(x)}{x} dx < +\infty$.

(ii) Si $\overline{b}(\phi) < 0$*, alors* $\int_1^{+\infty} \frac{\overline{\phi}(x)}{x} dx < +\infty$.

Démonstration. (i) On sait déjà que $x \mapsto \frac{\overline{\phi}(x)}{x}$ est continue sur $]0,1]$.
Vu la première partie de la remarque précédente, en prenant $R = 1$ et $\varepsilon > 0$ tel que $\gamma := \underline{b}(\phi) - \varepsilon > 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\overline{\phi}(r) \leq C r^{\gamma} \quad \forall r \in]0,1]\,.$$

En particulier, on a

$$0 \leq \lim_{x \to 0^+} x^{1-\frac{\gamma}{2}} \frac{\overline{\phi}(x)}{x} \leq \lim_{x \to 0^+} C\, r^{\frac{\gamma}{2}} = 0,$$

ce qui prouve l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{\overline{\phi}(x)}{x}$ en 0^+ puisque $1 - \frac{\gamma}{2} < 1$.
(ii) On sait déjà que $x \mapsto \frac{\overline{\phi}(x)}{x}$ est continue sur $[1, +\infty[$.
Vu la deuxième partie de la remarque précédente, en prenant $R = 1$ et $\varepsilon > 0$ tel que $\delta := \overline{b}(\phi) + \varepsilon < 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\overline{\phi}(r) \leq C r^{\delta} \quad \forall r \in [1, +\infty[\,.$$

En particulier,

$$0 \leq \lim_{x \to +\infty} x^{1-\frac{\delta}{2}} \frac{\overline{\phi}(x)}{x} \leq \lim_{x \to +\infty} C\, r^{\frac{\delta}{2}} = 0,$$

ce qui prouve l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{\overline{\phi}(x)}{x}$ en $+\infty$ puisque $1 - \frac{\delta}{2} > 1$. □

Donnons quelques propriétés utiles. Pour une fonction f définie sur $]0, +\infty[$, on adopte la notation $f(1/\cdot)$ pour désigner la fonction

$$x \in]0, +\infty[\mapsto f(1/x).$$

Proposition 4.1.4. *Soit* $\phi \in \mathcal{B}$*, alors les fonctions* $1/\phi$ *et* $\phi(1/\cdot)$ *sont dans* $\mathcal{B}$ *et on a*

$$\overline{\frac{1}{\phi}}(x) = \overline{\phi\left(\frac{1}{\cdot}\right)}(x) = \overline{\phi}\left(\frac{1}{x}\right) \quad \forall x > 0.$$

De plus, on a

$$\underline{b}(1/\phi) = -\overline{b}(\phi) \quad \textit{et} \quad \overline{b}(1/\phi) = -\underline{b}(\phi).$$

Démonstration.

(i) $1/\phi(1) = 1$ et $\phi(1/1) = 1$.
(ii) $1/\phi$ et $\phi(1/\cdot)$ sont continues puisque ϕ l'est.

(iii) Soit $x > 0$, montrons par double inclusion que

$$\left\{ \frac{\phi(y)}{\phi(xy)} : y > 0 \right\} = \left\{ \frac{\phi(y'/x)}{\phi(y')} : y' > 0 \right\}.$$

Si $y > 0$, alors

$$\frac{\phi(y)}{\phi(xy)} = \frac{\phi((xy)/x)}{\phi(xy)},$$

donc il suffit de prendre $y' = xy$. Dans l'autre sens, si $y' > 0$, alors

$$\frac{\phi(y'/x)}{\phi(y')} = \frac{\phi(y'/x)}{\phi(xy'/x)},$$

donc il suffit de prendre $y = y'/x$.

Ainsi, on a

$$\overline{\frac{1}{\phi}}(x) = \sup_{y>0} \frac{\phi(y)}{\phi(xy)} = \sup_{y'>0} \frac{\phi(y'/x)}{\phi(y')} = \overline{\phi}\left(\frac{1}{x}\right) < +\infty.$$

De même, on a

$$\overline{\phi\left(\frac{1}{\cdot}\right)}(x) = \sup_{y>0} \frac{\phi(1/(xy))}{\phi(1/y)} = \sup_{y'>0} \frac{\phi(y'/x)}{\phi(y')} = \overline{\phi}\left(\frac{1}{x}\right) < +\infty.$$

On en déduit que

$$\underline{b}(1/\phi) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log \overline{\phi}(1/x)}{\log x} = \lim_{y\to+\infty} \frac{\log \overline{\phi}(y)}{-\log(y)} = -\overline{b}(\phi),$$

et, de la même façon, que $\overline{b}(1/\phi) = -\underline{b}(\phi)$.

□

Proposition 4.1.5. *Soient $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{B}$, alors les fonctions $\phi_1\phi_2$ et ϕ_1/ϕ_2 sont dans $\mathcal{B}$ et on a*

$$\overline{\phi_1\phi_2}(x) \leq \overline{\phi_1}(x)\,\overline{\phi_2}(x) \quad \text{et} \quad \overline{\phi_1/\phi_2}(x) \leq \overline{\phi_1}(x)\,\overline{\phi_2}(1/x) \quad \forall x > 0.$$

De plus, on a

$$\underline{b}(\phi_1\phi_2) \leq \underline{b}(\phi_1) + \underline{b}(\phi_2) \quad \text{et} \quad \overline{b}(\phi_1\phi_2) \leq \overline{b}(\phi_1) + \overline{b}(\phi_2).$$

Démonstration. On vérifie directement que $\phi_1\phi_2(1) = 1$ et $\phi_1\phi_2$ est continue. De plus, si $x > 0$, on a

$$\overline{\phi_1\phi_2} = \sup_{y>0} \frac{\phi_1\phi_2(xy)}{\phi_1\phi_2(y)} \leq \sup_{y>0} \frac{\phi_1(xy)}{\phi_1(y)} \sup_{y>0} \frac{\phi_2(xy)}{\phi_2(y)} = \overline{\phi_1}\,\overline{\phi_2} < +\infty.$$

En utilisant la proposition précédente, on a donc aussi $\phi_1/\phi_2 \in \mathcal{B}$ et

$$\overline{\phi_1/\phi_2}(x) \leq \overline{\phi_1}(x)\,\overline{\frac{1}{\phi_2}}(x) = \overline{\phi_1}(x)\,\overline{\phi_2}(1/x) \quad \forall x > 0.$$

De plus, on a directement

$$\underline{b}(\phi_1\phi_2) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log \overline{\phi_1\phi_2}(x)}{\log x} \leq \lim_{x\to 0^+} \frac{\log \overline{\phi_1}(x)}{\log x} + \lim_{x\to 0^+} \frac{\log \overline{\phi_2}(x)}{\log x} = \underline{b}(\phi_1) + \underline{b}(\phi_2).$$

On procède de même pour l'indice de Boyd supérieur. □

On peut généraliser la proposition 4.1.4.

Proposition 4.1.6. *Si $a \in \mathbb{R}$ et $\phi \in \mathcal{B}$, alors $\phi^a \in \mathcal{B}$ et pour tout $x > 0$,*

$$\overline{\phi^a}(x) = \begin{cases} \overline{\phi}^{\,a}(x) & \text{si } a \geq 0, \\ \overline{\phi}^{\,|a|}(1/x) & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

De plus, si $a > 0$, on a

$$\underline{b}(\phi^a) = a\,\underline{b}(\phi) \quad \text{et} \quad \overline{b}(\phi^a) = a\,\overline{b}(\phi),$$

et si $a < 0$, on a

$$\underline{b}(\phi^a) = a\,\overline{b}(\phi) \quad \text{et} \quad \overline{b}(\phi^a) = a\,\underline{b}(\phi).$$

Démonstration. Montrons d'abord que $\phi^a \in \mathcal{B}$.

(i) $\phi^a(1) = 1$.

(ii) ϕ^a est continue car ϕ l'est.

(iii) Si $a \geq 0$, on a

$$\overline{\phi^a}(x) = \sup_{y>0} \frac{\phi^a(xy)}{\phi^a(y)} = \sup_{y>0} \left(\frac{\phi(xy)}{\phi(y)}\right)^a = \left(\overline{\phi}(x)\right)^a < +\infty.$$

De plus, si $a < 0$, alors

$$\overline{\phi^a}(x) = \sup_{y>0} \frac{\phi^a(xy)}{\phi^a(y)} = \sup_{y>0} \left(\frac{1/\phi(xy)}{1/\phi(y)}\right)^{|a|} = \left(\overline{1/\phi}(x)\right)^{|a|} < +\infty.$$

Ensuite, si $a > 0$, on a

$$\underline{b}(\phi^a) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log \overline{\phi^a}(x)}{\log x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log\left(\left(\overline{\phi}(x)\right)^a\right)}{\log x} = a \lim_{x\to 0^+} \frac{\log \overline{\phi}(x)}{\log x} = a\,\overline{b}(\phi),$$

et on procède de même pour $\overline{b}(\phi)$.
Enfin, si $a < 0$, on a

$$\underline{b}(\phi^a) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log \overline{\phi}^{\,|a|}(1/x)}{\log x} = -|a| \lim_{y\to +\infty} \frac{\log \overline{\phi}(y)}{\log y} = a\,\overline{b}(\phi),$$

et on procède de même pour $\overline{b}(\phi)$. □

4.2 Espaces $T^p_\phi(x_0)$ et $t^p_\phi(x_0)$

Comme annoncé, l'idée pour définir ces espaces est la suivante : remplacer la fonction de Boyd $r \mapsto r^u$ de la relation (1) par la fonction $r \mapsto \phi(r)$, où $r > 0$ et $\phi \in \mathcal{B}$.

Définition 4.2.1. Soient $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $p \in [1, +\infty]$ et $\phi \in \mathcal{B}$ tels que $\underline{b}(\phi) > -\frac{d}{p}$.
Une fonction $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ appartient à l'espace $T^p_\phi(x_0)$ s'il existe un polynôme P de degré strictement plus petit que $\underline{b}(\phi)$ et une constante $C > 0$ tels que

$$r^{-d/p}\|f - P\|_{L^p(B(x_0,r))} \leq C\,\phi(r) \quad \forall r > 0. \tag{4.4}$$

Si on a de plus

$$r^{-d/p}\|f - P\|_{L^p(B(x_0,r))} = o(\phi(r)) \text{ quand } r \to 0^+,$$

alors on dit que $f \in t^p_\phi(x_0)$.

Remarque 4.2.1. Si $u > -d/p$ et $\phi(r) = r^u$ pour tout $r > 0$, alors $\underline{b}(\phi) = u$ et on a donc

$$T^p_u(x_0) = T^p_\phi(x_0).$$

Remarque 4.2.2. La condition $\underline{b}(\phi) > -\frac{d}{p}$ est là pour assurer que les espaces $T^p_\phi(x_0)$ ne sont pas dégénérés. En effet, si la relation

$$r^{-d/p} < C\,\phi(r) \tag{4.5}$$

est vérifiée pour r suffisamment petit, alors pour toute fonction $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$r^{-d/p}\|f - 0\|_{L^p(B(x_0,r))} \leq r^{-d/p}\,C' \leq C\,C'\,\phi(r)$$

pour tout r suffisamment petit. La condition $\underline{b}(\phi) > -\frac{d}{p}$ assure que la relation (4.5) n'est jamais vérifiée. Pour le montrer, on procède par l'absurde et on obtient une contradiction grâce à la proposition 4.1.2.

Remarque 4.2.3. Soient $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $p \in [1, +\infty]$ et $\phi \in \mathcal{B}$ tels que $\underline{b}(\phi) > -\frac{d}{p}$. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ est telle qu'il existe un polynôme P de degré strictement plus petit que $\underline{b}(\phi)$ tel que

$$\phi(r)^{-1}r^{-d/p}\|f - P\|_{L^p(B(x_0,r)} \to 0 \text{ quand } r \to 0^+,$$

alors il existe $R > 0$ tel que

$$r^{-d/p}\|f - P\|_{L^p(B(x_0,r))} \leq \phi(r) \quad \forall r \leq R.$$

De plus, pour tout $r \geq R$, on a

$$r^{-d/p}\|f - P\|_{L^p(B(x_0,r))} \leq r^{-d/p}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + C_R\,(1 + r^n)$$

pour un certain n et vu la proposition 4.1.2, on en conclut que le membre de droite peut être majoré par une constante que multiplie $\phi(r)$, ce qui permet de dire que $f \in T^p_\phi(x_0)$.
À ce sens, $t^p_\phi(x_0)$ est un « vrai sous-espace » de $T^p_\phi(x_0)$.

Remarque 4.2.4. Pour rappel (voir [12] par exemple), si $(X,\mathscr{A},\mu)$ est un espace mesuré et p et q sont tels que $1\le p<q\le+\infty$, alors $\mathscr{L}^q(X,\mathscr{A},\mu)\subset\mathscr{L}^p(X,\mathscr{A},\mu)$ et $\|f\|_p\le\|f\|_q\,\mu(X)^{1/p-1/q}$.
Dans notre cas, on utilisera souvent que

$$r^{-d}\,\|f-P\|_{L^1(B(x_0,r))}\le C_d^{1-1/p}\,r^{-d+d}r^{-d/p}\|f-P||_{L^p(B(x_0,r))},$$

quand cela a un sens ($f\in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, P polynôme de $\mathbb{R}^d$).

Proposition 4.2.1. *Si $f\in T^p_\phi(x_0)$, alors le polynôme P de la définition est unique.*

Démonstration. On peut supposer que $\underline{b}(\phi)>0$ puisque sinon le polynôme doit forcément être 0 et est donc unique.
Procédons pas l'absurde et supposons qu'il existe deux polynômes distincts P_1 et P_2 de degrés strictement plus petits que $\underline{b}(\phi)$ et des constantes $C_1,C_2>0$ tels que pour tout $r>0$,

$$r^{-d/p}\|f-P_1\|_{L^p(B(x_0,r))}\le C_1\,\phi(r)\ \text{ et }\ r^{-d/p}\|f-P_2\|_{L^p(B(x_0,r))}\le C_2\,\phi(r).$$

Posons $Q=P_1-P_2$, Q est un polynôme de degré $n<\underline{b}(\phi)$.
On peut donc trouver $\varepsilon>0$ tel que $n<\underline{b}(\phi)-\varepsilon$.
Au vu de la proposition 4.1.2, il existe $C>0$ tel que pour tout $r\in\,]0,1]$,

$$r^{-d}\,\|Q\|_{L^1(B(x_0,r))}\le C_d^{1-1/p}\,r^{-d/p}\|Q\|_{L^p(B(x_0,r))}\le C_d^{1-1/p}\,(C_1+C_2)\,\phi(r)\le C\,r^{\underline{b}(\phi)-\varepsilon}.$$

On trouve alors une contradiction car Q n'est pas le polynôme nul par hypothèse et $n<\underline{b}(\phi)-\varepsilon$ donc

$$\lim_{r\to0^+}r^{-d}\,\|Q\|_{L^1(B(x_0,r))}\,r^{-(\underline{b}(\phi)-\varepsilon)}=+\infty.$$

□

On peut donc parler à présent, par unicité, du polynôme relatif à $f\in T^p_\phi(x_0)$.

Remarque 4.2.5. Grâce à la proposition précédente, on comprend mieux pourquoi l'on demande que le polynôme soit de degré strictement plus petit que $\underline{b}(\phi)$. En effet, on a besoin de cette hypothèse pour utiliser la proposition 4.1.2 de manière adéquate.

Remarque 4.2.6. Soient $\phi\in\mathcal{B}$ et $f\in L^p(\mathbb{R}^d)$ avec $p\in[1,+\infty]$. En particulier, $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ et supposons que $f\in T^p_\phi(x_0)$ où x_0 est un point de Lebesgue de f (c'est le cas pour presque tout $x\in\mathbb{R}^d$ vu le théorème de différenciation de Lebesgue qui, pour rappel, est en annexe). Supposons également que $\underline{b}(\phi)>0$.
Alors si P est le polynôme relatif à f, on a $f(x_0)=P(x_0)$.
En effet, on a

$$r^{-d/p}\|f-P\|_{L^p(B(x_0,r))}\le C\,\phi(r)\quad\forall r>0.$$

On trouve donc

$$r^{-d}\|f-P\|_{L^1(B(x_0,r))} \leq C_d^{1-1/p}\, r^{-d+d} r^{-d/p}\|f-P||_{L^p(B(x_0,r))} \leq C'\phi(r),$$

pour tout $r>0$ et où $C' = CC_d^{1-1/p}$.
Il en découle, en développant le polynôme en sa somme de Taylor, que

$$\begin{aligned}
|f(x_0)-P(x_0)| &= \frac{1}{C_d r^d}\|f(x_0)-P(x_0)\|_{L^1(B(x_0,r))}\\
&= \frac{1}{C_d r^d}\|f(x_0)-f+f-P+P-P(x_0)\|_{L^1(B(x_0,r))}\\
&\leq \frac{1}{C_d}\left(r^{-d}\|f(x_0)-f\|_{L^1(B(x_0,r))} + C'\phi(r) + \sum_{1\leq|\alpha|<\underline{b}(\phi)}\left|\frac{D^\alpha P(x_0)}{|\alpha|!}\right| r^{|\alpha|}\right).
\end{aligned}$$

Le premier terme du membre de droite tend vers 0 quand r tend vers 0^+ puisque x_0 est un point de Lebesgue de f. Comme $\underline{b}(\phi)>0$, on sait que $\phi(r)$ tend vers 0 quand r tend vers 0^+ et donc il en va de même pour le deuxième terme.
Le troisième terme tend évidemment vers 0 quand r tend vers 0^+.
On en déduit donc que $f(x_0)=P(x_0)$.

Définition 4.2.2. Soient $f\in T^p_\phi(x_0)$ et P le polynôme relatif à f, alors P se développe en sa somme de Taylor et s'écrit

$$P(x) = \sum_{|\alpha|<\underline{b}(\phi)} \frac{D^\alpha P(x_0)}{|\alpha|!}(x-x_0)^\alpha.$$

On pose alors

$$|f|_{T^p_\phi(x_0)} = \sup_{r>0} \phi(r)^{-1} r^{-d/p}\|f-P\|_{L^p(B(x_0,r))},$$

et

$$\|f\|_{T^p_\phi(x_0)} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \sum_{|\alpha|<\underline{b}(\phi)} \frac{|D^\alpha P(x_0)|}{|\alpha|!} + |f|_{T^p_\phi(x_0)}.$$

Proposition 4.2.2. *$\|\cdot\|_{T^p_\phi(x_0)}$ définit une norme sur $T^p_\phi(x_0)$.*

Démonstration. Elle est bien définie car si $f\in T^p_\phi(x_0)$, alors f appartient à $L^p(\mathbb{R}^d)$, on a unicité du polynôme P et la borne supérieure est finie car on a une majoration par une constante par définition.
Soient $f_1, f_2 \in T^p_\phi(x_0)$, $\lambda\in\mathbb{C}$; on vérifie directement les conditions pour avoir une norme.

- Si $\|f_1\|_{T^p_\phi(x_0)} = 0$, alors $\|f_1\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = 0$ et donc $f_1 = 0$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ et donc dans $T^p_\phi(x_0)$ également.

- $\|\lambda f_1\|_{T^p_\phi(x_0)} = |\lambda| \|f_1\|_{T^p_\phi(x_0)}$ puisque $\|.\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$ est une norme et puisque le polynôme relatif à λf_1 est clairement λP_1 (où P_1 est le polynôme relatif à f_1).
- $\|f_1 + f_2\|_{T^p_\phi(x_0)} \leq \|f_1\|_{T^p_\phi(x_0)} + \|f_2\|_{T^p_\phi(x_0)}$ puisque $\|.\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$ est une norme et puisque le polynôme relatif à $f_1 + f_2$ est clairement $P_1 + P_2$ (où P_1 et P_2 sont les polynômes relatifs à f_1 et f_2).

$\square$

Remarque 4.2.7. À l'instar de la généralisation aux normes l^q d'espaces semblables utilisant les suites admissibles (voir remarque 5.3.1), on peut généraliser les espaces $T^p_\phi(x_0)$ à des espaces $T^{p,q}_\phi(x_0)$, $q \in [1, +\infty]$ en remplaçant, pour $q \in [1, +\infty[$, (4.4) par

$$\int_0^{+\infty} \left|\phi(r)^{-1}\, r^{-d/p}\, \|f - P\|_{L^p(B(x_0,r))}\right|^q dr \leq C.$$

On suit alors le même chemin pour définir une norme sur cet espace : Si P est le polynôme relatif à $f \in T^{p,q}_\phi(x_0)$, on pose

$$|f|_{T^{p,q}_\phi(x_0)} = \left\|\phi(\cdot)^{-1}\ \cdot^{-d/p}\ \|f - P\|_{L^p(B(x_0,r))}\right\|_{L^q(]0,+\infty[)},$$

et

$$\|f\|_{T^{p,q}_\phi(x_0)} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \sum_{|\alpha| < \underline{b}(\phi)} \frac{|D^\alpha P(x_0)|}{|\alpha|!} + |f|_{T^{p,q}_\phi(x_0)}.$$

Proposition 4.2.3. *L'espace $(T^p_\phi(x_0), \|\cdot\|_{T^p_\phi(x_0)})$ est un espace de Banach.*

Démonstration. Soit $(f_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ une suite de Cauchy de $(T^p_\phi(x_0), \|\cdot\|_{T^p_\phi(x_0)})$ et montrons que cette suite converge dans $(T^p_\phi(x_0), \|\cdot\|_{T^p_\phi(x_0)})$.
Pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, on note P_j le polynôme relatif à f_j. En particulier, $(f_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ est une suite de Cauchy dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ et donc converge vers un $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et de même la suite $\left(\frac{D^\alpha P_j(x_0)}{|\alpha|!}\right)_{j\in\mathbb{N}_0}$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$ donc converge vers un $c_\alpha \in \mathbb{C}$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| < \underline{b}(\phi)$.
On définit alors le polynôme P de la manière suivante :

$$P = \sum_{|\alpha| < \underline{b}(\phi)} c_\alpha (x - x_0)^\alpha.$$

On a alors, pour tout $q \in \mathbb{N}_0$,

$$\|f - f_q - (P - P_q)\|_{L^p(B(x_0,r))} = \lim_{s\to+\infty} \|f_s - f_q - (P_s - P_q)\|_{L^p(B(x_0,r))},$$

et donc

$$\phi(r)^{-1} r^{-d/p} \|f - f_q - (P - P_q)\|_{L^p(B(x_0,r))} \leq \limsup_{s\to+\infty} \|f_s - f_q\|_{T^p_\phi(x_0)} < +\infty.$$

En prenant la borne supérieure sur les $r > 0$, on obtient, pour tout $q \in \mathbb{N}_0$,

$$|f - f_q|_{T^p_\phi(x_0)} \leq \limsup_{s\to+\infty} \|f_s - f_q\|_{T^p_\phi(x_0)} < +\infty.$$

En prenant la limite pour $q \to +\infty$, on en déduit donc par hypothèse que

$$\lim_{q\to+\infty} |f - f_q|_{T^p_\phi(x_0)} = 0.$$

On vérifie alors que $f \in T^p_\phi(x_0)$ puisque $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, P est un polynôme de degré strictement plus petit que $\underline{b}(\phi)$ et pour un $q \in \mathbb{N}_0$

$$|f|_{T^p_\phi(x_0)} \leq |f - f_q|_{T^p_\phi(x_0)} + |f_q|_{T^p_\phi(x_0)} < +\infty.$$

De plus, on a la convergence de $(f_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ dans $(T^p_\phi(x_0), \|\cdot\|_{T^p_\phi(x_0)})$ puisque les trois termes définissant $\|f - f_q\|_{T^p_\phi(x_0)}$ tendent vers 0 quand $q \to +\infty$. □

Proposition 4.2.4. *$t^p_\phi(x_0)$ est un sous-espace fermé de $T^p_\phi(x_0)$ pour la topologie issue de la norme $\|\cdot\|_{T^p_\phi(x_0)}$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $t^p_\phi(x_0)$ contient la limite de ses suites convergentes. Soit $(f_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ une suite de fonctions de $t^p_\phi(x_0)$ qui converge vers $f \in T^p_\phi(x_0)$.
On veut donc montrer que $f \in t^p_\phi(x_0)$.
Pour $j \in \mathbb{N}_0$, si P_j est le polynôme relatif à f_j, alors on pose

$$R_j = f_j - P_j.$$

On pose aussi

$$R = f - P,$$

où P est le polynôme relatif à f.
On sait que

$$|f_j - f|_{T^p_\phi(x_0)} \leq \|f_j - f\|_{T^p_\phi(x_0)} \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On sait aussi par hypothèse que

$$\phi(r)^{-1} r^{-d/p} \|R_j\|_{L^p(B(x_0,r))} \underset{r\to0^+}{\longrightarrow} 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe donc $J \in \mathbb{N}_0$ tel que

$$|f_j - f|_{T^p_\phi(x_0)} = \sup_{r>0} \phi(r)^{-1} r^{-d/p} \|R_j - R\|_{L^p(B(x_0,r))} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall j \geq J.$$

On sait alors qu'il existe η_J tel que

$$\phi(r)^{-1} r^{-d/p} \|R_J\|_{L^p(B(x_0,r))} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall r \in \left]0, \eta_J\right].$$

Ainsi, pour tout r suffisamment petit, i.e. $r \in \left]0, \eta_J\right]$, on a

$$\phi(r)^{-1} r^{-d/p} \|R\|_{L^p(B(x_0,r))} < \varepsilon,$$

d'où la conclusion. □

Remarque 4.2.8. Soient $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $p \in [1,+\infty]$ et $\phi \in \mathcal{B}$ telle que $\underline{b}(\phi) > -d/p$.

• Si $\overline{b}(\phi) < 0$ et $f \in C^0(V)$ où V est un voisinage ouvert de x_0, alors $f \in t^p_\phi(x_0)$.
En effet, il existe $R > 0$ tel que $\overline{B(x_0,R)} \subseteq V$. Comme f est continue sur V, il existe une constante $C > 0$ telle que $|f| \le C$ sur $B(x_0,R)$. Pour tout $r \in]0,R]$, on a donc

$$r^{-d/p}\|f\|_{L^p(B(x_0,r))} \le C'.$$

Par hypothèse, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{b}(\phi) + \varepsilon < 0$.
Ainsi, grâce à la proposition 4.1.4, on en tire que

$$\phi(r)^{-1}r^{-d/p}\|f\|_{L^p(B(x_0,r))} \le \phi(r)^{-1}C' \le \frac{C'}{C_1}r^{-(\overline{b}(\phi)+\varepsilon)} \underset{r\to 0^+}{\longrightarrow} 0,$$

et donc que $f \in t^p_\phi(x_0)$.

• S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\overline{b}(\phi) < n+1$ et $f \in C^{n+1}(V)$ où V est un voisinage ouvert de x_0, alors $f \in t^p_\phi(x_0)$. En effet, à nouveau il existe $R > 0$ tel que $\overline{B(x_0,R)} \subseteq V$. Si P est le polynôme de Taylor de f à l'ordre n en x_0, comme f est C^{n+1} sur V, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|f(x) - P(x)| \le C|x - x_0|^{n+1} \quad \forall x \in B(x_0,R).$$

Ainsi, pour tout $r \in]0,R]$, on a donc

$$r^{-d/p}\|f - P\|_{L^p(B(x_0,r))} \le C''r^{n+1}.$$

Par hypothèse, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{b}(\phi) + \varepsilon < n+1$.
Par la proposition 4.1.4, on a alors

$$\phi(r)^{-1}r^{-d/p}\|f\|_{L^p(B(x_0,r))} \le \phi(r)^{-1}C''r^{n+1} \le \frac{C''}{C_1}r^{n+1-(\overline{b}(\phi)+\varepsilon)} \underset{r\to 0^+}{\longrightarrow} 0,$$

et donc $f \in t^p_\phi(x_0)$.

• En particulier, si $\phi \in \mathcal{B}$ est telle que $\underline{b}(\phi) > -\frac{d}{p}$ et si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\overline{b}(\phi) < n+1$ ou si $\overline{b}(\phi) < 0$, alors $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subseteq t^p_\phi(x_0) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^d$.

Proposition 4.2.5. *Soient φ une fonction réelle non négative dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\,dx = 1$$

et telle que $[\varphi] \subset \overline{B(0,1)}$, $p \in [1,+\infty[$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, et posons pour tout $\lambda > 0$,

$$f_\lambda = \lambda^d\,\varphi(\lambda\cdot) * f.$$

Soient $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $\phi \in \mathcal{B}$ tels que $\underline{b}(\phi) > -\frac{d}{p}$ et supposons que soit il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n < \underline{b}(\phi) \le \overline{b}(\phi) < n+1$ ou soit que $\underline{b}(\phi) \le 0$. Alors, si $f \in t^p_\phi(x_0)$, on a

$$\|f_\lambda - f\|_{T^p_\phi(x_0)} \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Démonstration. La preuve étant relativement longue, elle se trouve en annexe. □

Remarque 4.2.9. Rappelons que l'on sait (voir [12] par exemple) que les f_λ définis ci-dessus sont dans $L^p(\mathbb{R}^d) \cap C^\infty(\mathbb{R}^d)$ et que

$$\|f_\lambda - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \underset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

La proposition précédente nous permet donc de voir que ce résultat reste vrai dans les espaces $T^p_\phi(x_0)$ sous certaines hypothèses supplémentaires.

Corollaire 4.2.1. *Soient $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $\phi \in \mathcal{B}$ tel que $\underline{b}(\phi) > -\frac{d}{p}$ et supposons que soit il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n < \underline{b}(\phi) \leq \overline{b}(\phi) < n+1$ ou soit que $\overline{b}(\phi) \leq 0$. L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $t^p_\phi(x_0)$.*

Démonstration. On sait déjà que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subseteq t^p_\phi(x_0)$.
Soit $f \in t^p_\phi(x_0)$, on veut montrer qu'il existe une suite de fonctions $(g_l)_{l\in\mathbb{N}_0}$ de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que g_l converge vers f dans $T^p_\phi(x_0)$.
Soit $j \in \mathbb{N}_0$, posons

$$f_j = f\chi_{\overline{B(0,2^j)}}.$$

On sait que $(f_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ en utilisant le théorème de la convergence dominée.
On veut montrer que $(f_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ converge vers f dans $T^p_\phi(x_0)$. Soit P le polynôme de degré strictement plus petit que $\underline{b}(\phi)$ tel que

$$\phi(r)^{-1}\, r^{-d/p}\, \|f - P\|_{L^p(B(x_0,r))} \underset{r\to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

Comme $f = f_j$ sur $B(x_0,1)$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, on a

$$\phi(r)^{-1}\, r^{-d/p}\, \|f_j - P\|_{L^p(B(x_0,r))} \underset{r\to 0^+}{\longrightarrow} 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}_0\,.$$

Soit $j \in \mathbb{N}_0$, on sait donc que $f_j \in t^p_\phi(x_0)$ et que

$$\|f - f_j\|_{T^p_\phi(x_0)} = \|f - f_j\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \sup_{r>0} \phi(r)^{-1}\, r^{-d/p}\, \|f - f_j\|_{L^p(B(x_0,r))}.$$

On distingue alors deux cas.
• Si $r \in]0, 2^j]$, on a

$$\phi(r)^{-1}\, r^{-d/p}\, \|f - f_j\|_{L^p(B(x_0,r))} = 0.$$

• Si $r > 2^j$, grâce à la proposition 4.1.2, on peut choisir $\varepsilon > 0$ tel que $\underline{b}(\phi) - \varepsilon + d/p \geq 0$ et une constante $C > 0$ indépendante de j telle que $r^{\underline{b}(\phi)-\varepsilon} \leq C\phi(r)$ pour tout $r \geq 1$. Ainsi, on trouve que

$$\begin{aligned}\phi(r)^{-1}\, r^{-d/p}\, \|f - f_j\|_{L^p(B(x_0,r))} &\leq C r^{-(\underline{b}(\phi)-\varepsilon+d/p)}\, \|f - f_j\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq C 2^{-j(\underline{b}(\phi)-\varepsilon+d/p)}\, \|f - f_j\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

Ainsi, on en déduit que

$$\|f - f_j\|_{T^p_\phi(x_0)} \leq \left(\|f - f_j\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + C2^{-j(\underline{b}(\phi)-\varepsilon+d/p)} \|f - f_j\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\right) \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On conclut grâce à la proposition 4.2.5.
En effet, soit $j \in \mathbb{N}_0$, comme $f_j \in t^p_\phi(x_0)$, on sait que si φ est comme dans la proposition précédente, alors la suite $(f_{j,k} := k^d\varphi(k\cdot) * f_j)_{k\in\mathbb{N}_0}$ est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et converge vers f_j dans $T^p_\phi(x_0)$.
Soit $l \in \mathbb{N}_0$, il existe $J_l \in \mathbb{N}_0$ tel que pour tout $j \geq J_l$,

$$\|f - f_j\|_{T^p_\phi(x_0)} < \frac{1}{2l}.$$

Il existe aussi $K_l \in \mathbb{N}_0$ tel que pour tout $k \geq K_l$,

$$\|f_{J_l} - f_{J_l,k}\|_{T^p_\phi(x_0)} < \frac{1}{2l}.$$

En posant $g_l = f_{J_l,K_l}$ pour tout $l \in \mathbb{N}_0$, on obtient la conclusion. □

Donnons quelques autres propriétés. On cherche des éventuelles inclusions entre les espaces $T^p_\phi(x_0)$. Pour cela, on peut changer le p ou le ϕ comme on le verra ci-dessous.

Définition 4.2.3. Soient $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{B}$, on écrit $\phi_1 \preccurlyeq \phi_2$ pour signifier qu'il existe des constantes $R, C > 0$ telles que pour tout $r \in]0, R[$, on a $\phi_1(r) \leq C\,\phi_2(r)$.

Remarque 4.2.10. Si $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{B}$, alors $\phi_1 \preccurlyeq \phi_2$ si et seulement si pour tout $R > 0$, il existe $C_R > 0$ tel que $\phi_1(r) \leq C_R\,\phi_2(r)$ pour tout $r \in]0, R[$.
En effet, la condition est évidemment suffisante et elle est nécéssaire par continuité des fonctions de Boyd (sur tout compact de $]0, +\infty[$, on peut évidemment trouver une constante C pour avoir la majoration et il n'y a pas de problème en 0 quand on prend l'intervalle ouvert puisque la majoration est vérifiée sur $]0, R[$ pour des constantes $R, C > 0$).

Proposition 4.2.6. *Soient $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{B}$, alors on a*

(i) $\overline{b}(\phi_2) < \underline{b}(\phi_1) \Rightarrow \phi_1 \preccurlyeq \phi_2$,

(ii) $\phi_1 \preccurlyeq \phi_2 \Rightarrow \underline{b}(\phi_2) \leq \overline{b}(\phi_1)$.

Démonstration. (i) Supposons que $\overline{b}(\phi_2) < \underline{b}(\phi_1)$, on peut donc trouver $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{b}(\phi_2) + \varepsilon < \underline{b}(\phi_1) - \varepsilon$.
Soit $R \in]0, 1[$, grâce à la proposition 4.1.2, il existe des constantes $C, C' > 0$ telles que pour tout $r \in]0, R[$,

$$\phi_1(r) \leq Cr^{\underline{b}(\phi_1)-\varepsilon} \leq Cr^{\overline{b}(\phi_2)+\varepsilon} \leq CC'\phi_2(r),$$

et donc $\phi_1 \preccurlyeq \phi_2$.

(ii) Supposons que $\phi_1 \preccurlyeq \phi_2$, alors en utilisant la remarque précédente et en prenant $R = 1$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $r \in]0,1[$,

$$\left(\overline{\phi_1}\left(\frac{1}{r}\right)\right)^{-1} \leq \phi_1(r) \leq C\,\phi_2(r) \leq C\overline{\phi_2}(r).$$

Ainsi, pour tout $r \in]0,1[$,

$$\frac{\log \overline{\phi_1}\,(1/r)}{\log 1/r} = -\frac{\log \overline{\phi_1}\,(1/r)}{\log r} \geq \frac{\log C}{\log r} + \frac{\log \overline{\phi_2}(r)}{\log r},$$

d'où la conclusion en passant à la limite pour $r \to 0^+$. □

Proposition 4.2.7. *Soient $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $p \in [1,+\infty]$ et $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{B}$ tels que $\underline{b}(\phi_1) > -d/p$ et $\underline{b}(\phi_2) > -d/p$.*
Supposons que soit $\overline{b}(\phi_2) \leq 0$, soit il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n < \underline{b}(\phi_2) \leq \overline{b}(\phi_2) < n+1$.
Si $\phi_1 \preccurlyeq \phi_2$, alors $T^p_{\phi_1}(x_0) \subseteq T^p_{\phi_2}(x_0)$.
De plus, si $\phi_1(r) = o(\phi_2(r))$ quand $r \to 0^+$, alors $T^p_{\phi_1}(x_0) \subseteq t^p_{\phi_2}(x_0)$.

Démonstration. Soit $f \in T^p_{\phi_1}(x_0)$, il existe un polynôme P de degré strictement plus petit que $\underline{b}(\phi_1)$ tel que

$$r^{-d/p}\|f-P\|_{L^p(B(x_0,r))} \leq |f|_{T^p_{\phi_1}(x_0)}\,\phi_1(r) \quad \forall r > 0.$$

- Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n < \underline{b}(\phi_2) \leq \overline{b}(\phi_2) < n+1$, on pose

$$Q = \sum_{|\alpha| \leq n} \frac{D^\alpha P(x_0)}{|\alpha|!}(\cdot - x_0)^\alpha.$$

On distingue alors 2 cas :

- Si $r \in]0,1]$, grâce à la proposition 4.1.2 ($R = 1$, $\varepsilon = n+1-\overline{b}(\phi_2)$), on a

$$\begin{aligned} r^{-d/p}\|f-Q\|_{L^p(B(x_0,r))} &\leq r^{-d/p}\|f-P\|_{L^p(B(x_0,r))} + r^{-d/p}\|P-Q\|_{L^p(B(x_0,r))} \\ &\leq |f|_{T^p_{\phi_1}(x_0)}\,\phi_1(r) + C_d^{1/p}\,r^{n+1}\,\|f\|_{T^p_{\phi_1}(x_0)} \\ &\leq C_{\phi_1,\phi_2}\,\|f\|_{T^p_{\phi_1}(x_0)}\,\phi_2(r). \end{aligned}$$

- Si $r > 1$, grâce à la proposition 4.1.2 ($R = 1$, $\varepsilon = \underline{b}(\phi_2) - n$), on a

$$\begin{aligned} r^{-d/p}\|f-Q\|_{L^p(B(x_0,r))} &\leq r^{-d/p}\|f\|_{L^p(B(x_0,r))} + r^{-d/p}\|Q\|_{L^p(B(x_0,r))} \\ &\leq r^{-d/p}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + C_d^{1/p}\,r^n\,\|f\|_{T^p_{\phi_1}(x_0)} \\ &\leq C_{\phi_1}\,\|f\|_{T^p_{\phi_1}(x_0)}\,\phi_2(r). \end{aligned}$$

On en déduit donc que $f \in T^p_{\phi_2}(x_0)$.

Pour la deuxième inclusion, cela résulte du fait que pour tout $r \in]0,1]$,

$$r^{-d/p}\|f-Q\|_{L^p(B(x_0,r))} \leq |f|_{T^p_{\phi_1}(x_0)}\,\phi_1(r) + C_d^{1/p}\,r^{n+1}\,\|f\|_{T^p_{\phi_1}(x_0)},$$

d'où la conclusion puisque $\phi_1(r), r^{n+1} = o(\phi_2(r))$ quand $r \to 0^+$.

- Si $\overline{b}(\phi_2) \leq 0$, on pose $Q=0$ et c'est direct :

• Si $r \in]0,1]$, grâce à la proposition 4.1.2 ($R=1$, $\varepsilon = -\overline{b}(\phi_2)$), on a

$$\begin{aligned} r^{-d/p}\|f-0\|_{L^p(B(x_0,r))} &\leq r^{-d/p}\|f-P\|_{L^p(B(x_0,r))} + r^{-d/p}\|P\|_{L^p(B(x_0,r))} \\ &\leq |f|_{T^p_{\phi_1}(x_0)}\,\phi_1(r) + C_d^{1/p}\,\|f\|_{T^p_{\phi_1}(x_0)} \\ &\leq C_{\phi_1,\phi_2}\,\|f\|_{T^p_{\phi_1}(x_0)}\,\phi_2(r). \end{aligned}$$

• Si $r > 1$, comme $\underline{b}(\phi_2) > -d/p$, grâce à la proposition 4.1.2, on obtient que

$$r^{-d/p}\|f-0\|_{L^p(B(x_0,r))} \leq r^{-d/p}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C\,\|f\|_{T^p_{\phi_1}(x_0)}\,\phi_2(r).$$

Ainsi, $f \in T^p_{\phi_2}(x_0)$ et pour la deuxième inclusion, cela résulte du fait que pour tout $r \in]0,1]$,

$$r^{-d/p}\|f-0\|_{L^p(B(x_0,r))} \leq |f|_{T^p_{\phi_1}(x_0)}\,\phi_1(r),$$

avec $\phi_1(r) = o(\phi_2(r))$ quand $r \to 0^+$. $\square$

Pour les propositions suivantes, on utilisera souvent l'inégalité de Hölder dite *généralisée* qui correspond simplement au résultat bien connu (voir [12] par exemple) : si $r,p,q \in [1,+\infty]$ vérifient

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q},$$

et si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ alors $fg \in L^r(\mathbb{R}^d)$ et

$$\|fg\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\,\|g\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}. \tag{4.6}$$

Proposition 4.2.8. *Soient $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $p_1, p_2 \in [1,+\infty]$ et p_3 tels que*

$$\frac{1}{p_3} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \in [0,1]\,.$$

Soit $\phi \in \mathcal{B}$ telle qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n < \underline{b}(\phi) \leq \overline{b}(\phi) < n+1$. Si $f_1 \in T^{p_1}_\phi(x_0)$ et $f_2 \in T^{p_2}_\phi(x_0)$, alors $f_1 f_2 \in T^{p_3}_\phi(x_0)$ et on a

$$\|f_1f_2\|_{T^{p_3}_\phi(x_0)} \leq C_{d,p_1,p_2,\phi}\|f_1\|_{T^{p_1}_\phi(x_0)}\|f_2\|_{T^{p_2}_\phi(x_0)}.$$

De plus, si $f_1 \in t^{p_1}_\phi(x_0)$ et $f_2 \in t^{p_2}_\phi(x_0)$, alors $f_1f_2 \in t^{p_3}_\phi(x_0)$.

Démonstration. Par hypothèse, pour $k \in \{1,2\}$, il existe un polynôme P_k de degré plus petit ou égal à n tel que $R_k := f_k - P_k$ vérifie

$$r^{-d/p_k}\|R_k\|_{L^p(B(x_0,r))} \leq |f_k|_{T^{p_k}_\phi(x_0)}\,\phi(r) \quad \forall r > 0.$$

On définit alors P comme étant la somme des termes de degrés plus petits ou égaux à n dans P_1P_2. On a alors

$$f_1f_2 = f_1R_2 + f_1P_2 = f_1R_2 + R_1P_2 + P_1P_2 = P + P_1P_2 - P + R_1P_2 + f_1R_2.$$

Il est clair que

$$\sum_{|\alpha|\leq n} \frac{|D^\alpha P(x_0)|}{|\alpha|!} \leq \|f_1\|_{T^{p_1}_\phi(x_0)}\,\|f_2\|_{T^{p_2}_\phi(x_0)}. \tag{4.7}$$

Pour la suite, on pose, pour éviter d'alourdir le texte, $R = P_1P_2 - P + R_1P_2 + f_1R_2$.

• Si $r \in]0,1]$, il est clair que pour tout $x \in B(x_0,r)$,

$$|P_1P_2(x) - P(x)| \leq (x-x_0)^{n+1}\|f_1\|_{T^{p_1}_\phi(x_0)}\,\|f_2\|_{T^{p_2}_\phi(x_0)}.$$

Ainsi, vu la proposition 4.1.2, on a

$$r^{-d/p_3}\|P_1P_2\|_{L^{p_3}(B(x_0,r))} \leq C_d^{1/p_3}\,r^{n+1}\,\|f_1\|_{T^{p_1}_\phi(x_0)}\,\|f_2\|_{T^{p_2}_\phi(x_0)} \leq C\,\phi(r)\,\|f_1\|_{T^{p_1}_\phi(x_0)}\,\|f_2\|_{T^{p_2}_\phi(x_0)}.$$

Grâce à l'inégalité de Hölder (généralisée), on obtient également que

$$\begin{aligned} r^{-d/p_3}\|R_1P_2\|_{L^{p_3}(B(x_0,r))} &\leq r^{-d/p_1}\|R_1\|_{L^{p_1}(B(x_0,r))}\,r^{-d/p_2}\|P_2\|_{L^{p_2}(B(x_0,r))} \\ &\leq C'\,\phi(r)\,|f_1|_{T^{p_1}_\phi(x_0)}\,\|f_2\|_{T^{p_2}_\phi(x_0)}. \end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant à nouveau la proposition 4.1.2, on a aussi

$$\begin{aligned} r^{-d/p_1}\|f_1\|_{L^{p_1}(B(x_0,r))} &\leq r^{-d/p_1}\|f_1 - P_1\|_{L^{p_1}(B(x_0,r))} + r^{-d/p_1}\|P_1\|_{L^{p_1}(B(x_0,r))} \\ &\leq |f_1|_{T^{p_1}_\phi(x_0)}\,\phi(r) + C_d^{1/p_1}\,\|f_1\|_{T^{p_1}_\phi(x_0)} \\ &\leq C''\,\|f_1\|_{T^{p_1}_\phi(x_0)}, \end{aligned}$$

et donc, au vu de l'inégalité de Hölder (généralisée),

$$\begin{aligned} r^{-d/p_3}\|f_1R_2\|_{L^{p_3}(B(x_0,r))} &\leq r^{-d/p_1}\|f_1\|_{L^{p_1}(B(x_0,r))}\,r^{-d/p_2}\|R_2\|_{L^{p_2}(B(x_0,r))} \\ &\leq C''\,\|f_1\|_{T^{p_1}_\phi(x_0)}\,|f_2|_{T^{p_2}_\phi(x_0)}\,\phi(r). \end{aligned}$$

Au final, on peut donc écrire, pour tout $r \in]0,1]$,

$$r^{-d/p_3}\|R\|_{L^{p_3}(B(x_0,r))} \leq C'''\,\phi(r)\,\|f_1\|_{T^{p_1}_\phi(x_0)}\,\|f_2\|_{T^{p_2}_\phi(x_0)}.$$

• Si $r > 1$, on a

$$\begin{aligned} r^{-d/p_3}\|R\|_{L^{p_3}(B(x_0,r))} &\leq r^{-d/p_3}\|f_1f_2\|_{L^{p_3}(B(x_0,r))} + r^{-d/p_3}\|P\|_{L^{p_3}(B(x_0,r))} \\ &\leq r^{-d/p_3}\|f_1\|_{L^{p_1}(B(x_0,r))}\|f_2\|_{L^{p_2}(B(x_0,r))} + C_d^{1/p_3}\, r^n\, \|f_1\|_{T^{p_1}_\phi(x_0)}\, \|f_2\|_{T^{p_2}_\phi(x_0)}, \end{aligned}$$

et il suffit alors d'appliquer la proposition 4.1.2 pour obtenir qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $r > 0$,

$$r^{-d/p_3}\|f_1f_2 - P\|_{L^{p_3}(B(x_0,r))} r^{-d/p_3}\|R\|_{L^{p_3}(B(x_0,r))} \leq C\,\phi(r)\,\|f_1\|_{T^{p_1}_\phi(x_0)}\,\|f_2\|_{T^{p_2}_\phi(x_0)}. \tag{4.8}$$

Il est alors clair que $f_1f_2 \in T^{p_3}_\phi(x_0)$ en prenant le polynôme P, ce dernier étant bien de degré strictement plus petit que $\underline{b}(\phi)$.
On a également l'inégalité annoncée grâce à l'inégalité de Hölder généralisée et grâce aux relations (4.7) et (4.8).

On considère à présent le cas où $f_1 \in t^{p_1}_\phi(x_0)$ et $f_2 \in t^{p_2}_\phi(x_0)$.
Pour $k \in \{1,2\}$, il existe alors des fonctions $\varepsilon^{(k)}$ strictement positives qui tendent vers 0 quand r tend vers 0^+ qui vérifient

$$r^{-d/p_k}\|R_k\|_{L^{p_k}(B(x_0,r))} \leq \varepsilon^{(k)}(r)\,\phi(r).$$

Il suffit alors de remplacer les éléments $|f_k|_{T^{p_k}_\phi(x_0)}$ par $\varepsilon^{(k)}(r)$ dans les relations précédentes (dans le cas où $r \in]0,1]$) pour obtenir que $f_1f_2 \in t^{p_3}_\phi(x_0)$. □

Corollaire 4.2.2. *Soient $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $p_1, p_2 \in [1,+\infty]$ et p_3 tels que*

$$\frac{1}{p_3} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \in [0,1]\,.$$

Soient $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{B}$ telles que $\underline{b}(\phi_1) > 0$, $\underline{b}(\phi_2) \geq -d/p_2$, $\phi_1 \preccurlyeq \phi_2$ et supposons que soit $\underline{b}(\phi_2) \leq 0$ ou que soit il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n < \underline{b}(\phi_2) \leq \overline{b}(\phi_2) < n+1$. Si $f_1 \in T^{p_1}_{\phi_1}(x_0)$ et $f_2 \in T^{p_2}_{\phi_2}(x_0)$, alors $f_1f_2 \in T^{p_3}_{\phi_2}(x_0)$ et on a

$$\|f_1f_2\|_{T^{p_3}_{\phi_2}(x_0)} \leq C_{d,p_1,p_2,\phi_1,\phi_2}\|f_1\|_{T^{p_1}_{\phi_1}(x_0)}\|f_2\|_{T^{p_2}_{\phi_2}(x_0)}.$$

De plus, si $f_1 \in t^{p_1}_{\phi_1}(x_0)$ et $f_2 \in t^{p_2}_{\phi_2}(x_0)$, alors $f_1f_2 \in t^{p_3}_{\phi_2}(x_0)$.

Démonstration. On distingue deux cas :

• Si $\underline{b}(\phi_2) \leq 0$, alors le polynôme relatif à f_1f_2 doit forcément être le polynôme nul.
De plus, si $r \in]0,1]$ alors $\phi_1(r) \leq C_1\phi_2(r)$ et si $r > 1$, alors $r^{-d/p_1} \leq 1$.
Ainsi, pour tout $r > 0$,

$$\begin{aligned} r^{-d/p_3}\|f_1f_2 - 0\|_{L^{p_3}(B(x_0,r))} &\leq r^{-d/p_1}\|f_1\|_{L^{p_1}(B(x_0,r))}\, r^{-d/p_2}\|f_2\|_{L^{p_2}(B(x_0,r))} \\ &\leq C\,\|f_1\|_{T^{p_1}_{\phi_1}(x_0)}\,|f_2|_{T^{p_2}_{\phi_2}(x_0)}\,\phi_2(r), \end{aligned}$$

et donc $f_1 f_2 \in T^{p_3}_{\phi_2}(x_0)$ et on a directement l'inégalité recherchée grâce à l'inégalité ci-dessus et à l'inégalité de Hölder généralisée.

• Si $\underline{b}(\phi_2) > 0$, alors on a l'autre hypothèse et les deux résultats précédents permettent d'affirmer que $f_1 f_2 \in T^{p_3}_{\phi_2}(x_0)$. Pour l'inégalité, on sait déjà que

$$\|f_1 f_2\|_{T^{p_3}_{\phi_2}(x_0)} \leq C_{d,p_1,p_2,\phi_2} \|f_1\|_{T^{p_1}_{\phi_2}(x_0)} \| f_2\|_{T^{p_2}_{\phi_2}(x_0)}.$$

Or, en procédant comme pour la démonstration de la proposition 4.2.7, il est clair que

$$\|f_1\|_{T^{p_1}_{\phi_2}(x_0)} \leq C' \|f_2\|_{T^{p_1}_{\phi_1(x_0)}},$$

d'où la conclusion.

Pour la deuxième assertion, il suffit de remplacer les éléments $|f_k|_{T^{p_k}_{\phi_k}(x_0)}$ par une fonction de $r > 0$ qui tend vers 0 quand r tend vers 0^+ comme on l'a fait dans la démonstration du résultat précédent. □

4.3 Généralisation du théorème d'extension de Whitney

Pour généraliser le théorème de Rademacher aux espaces $T^p_\phi(x_0)$, on généralise le théorème d'extension de Whitney. Cette dernière généralisation a été énoncée et démontrée dans [54]. On commence par rappeler le théorème d'extension de Whitney classique ([74]).

Définition 4.3.1. Si $k \in \mathbb{N}$ et $(f_\alpha)_{|\alpha| \leq k}$ est un k-jet défini sur un fermé F de $\mathbb{R}^d$, alors $(f_\alpha)_{|\alpha| \leq k}$ satisfait la *condition de chaîne de Taylor d'ordre k* si les fonctions

$$(x, y) \mapsto \frac{\left| f_\alpha(x) - \sum_{|\beta| \leq k-\alpha} f_{\alpha+\beta}(y)(x-y)^\beta / |\beta|! \right|}{|x-y|^{k-|\alpha|}}$$

sont continues sur $F \times F \backslash \Delta_F$ et peuvent être étendues par 0 sur $F \times F$.

Théorème 4.3.1. (Théorème d'extension de Whitney)
Soient $k \in \mathbb{N}$ et F un fermé de $\mathbb{R}^d$. Un k-jet est obtenu par restriction d'une fonction dans $C^k(\mathbb{R}^d)$ et de ses dérivées jusqu'à l'ordre k si et seulement si ce k-jet satisfait la condition de chaîne de Taylor à l'ordre k.

Remarque 4.3.1. Le résultat précédent est surtout connu pour la condition suffisante, la condition nécessaire étant triviale.

Pour généraliser les conditions de chaîne de Taylor aux espaces $T^p_\phi(x_0)$, on introduit les espaces $B_\phi(E)$ et $b_\phi(E)$ des fonctions qui admettent une extension de Taylor sur un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^d$ qui peut être caractérisée par une condition de type « Lipschitz » donnée par une fonction $\phi \in \mathcal{B}$.

Définition 4.3.2. Soient $E \subseteq \mathbb{R}^d$ et $\phi \in \mathcal{B}$ tel que $\underline{b}(\phi) > 0$.
On désigne par $B_\phi(E)$ l'espace des fonctions bornées f définies sur E telles qu'il existe des constantes $C, M > 0$ telles que pour tout $x_0 \in E$, il existe un polynôme P_{x_0} de degré strictement plus petit que $\underline{b}(\phi)$ tel que

$$P_{x_0} = \sum_{|\alpha| < \underline{b}(\phi)} \frac{f_\alpha(x_0)}{|\alpha|!} (\cdot - x_0)^\alpha,$$

où

- $f_0(x_0) = f(x_0)$,
- $|f_\alpha(x_0)| \leq M$ pour tout $|\alpha| < \underline{b}(\phi)$,
- $|D^\alpha P_x(x) - D^\alpha P_{x_0}(x)| \leq C\phi(|x - x_0|)|x - x_0|^{-|\alpha|}$ pour tout $x \in E \backslash \{x_0\}$ et pour tout $|\alpha| < \underline{b}(\phi)$.

Définition 4.3.3. Soient $E \subseteq \mathbb{R}^d$ et $\phi \in \mathcal{B}$ tel que $\underline{b}(\phi) > 0$.
On désigne par $b_\phi(E)$ l'espace des fonctions f définies sur E telles que pour tout $x_0 \in E$, il existe un polynôme P_{x_0} de degré strictement plus petit que $\underline{b}(\phi)$ tel que

$$P_{x_0} = \sum_{|\alpha| < \underline{b}(\phi)} \frac{f_\alpha(x_0)}{|\alpha|!} (\cdot - x_0)^\alpha,$$

où $f_0(x_0) = f(x_0)$ et

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} \phi\left(|x - x_0|\right)^{-1} |x - x_0|^{|\alpha|} \left|D^\alpha P_x(x) - D^\alpha P_{x_0}(x)\right| = 0$$

uniformément en $x_0 \in E$.

Remarque 4.3.2. On ne distinguera pas deux fonctions dans $B_\phi(E)$ (resp. $b_\phi(E)$) qui sont égales presque partout.

Lemme 4.3.1. *Soit $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ dont le support est inclus dans $\overline{B(0,1)}$ telle que pour tout polynôme P de degré plus petit ou égal à n et pour tout $\varepsilon > 0$, $\varphi_\varepsilon * P = P$, où $\varphi_\varepsilon = \varepsilon^{-d}\varphi(\frac{\cdot}{\varepsilon})$.*

Démonstration. La preuve provient de [76]. Posons

$$V = \left\{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \mid [\varphi] \subset \overline{B(0,1)}\right\}$$

et

$$W = \mathbb{R}^m,$$

où m désigne le nombre de possibilités pour $\alpha_1, ..., \alpha_d \in \mathbb{N}$ de vérifier $0 \leq \alpha_1 + ... + \alpha_d \leq n$. Plus précisément, on a

$$m = \sum_{j=0}^{n} \Gamma_d^j.$$

Il est clair que V et W sont des espaces vectoriels. En notant $(y_\alpha)_{|\alpha|\leq n}$ les élements de W, on considère l'application

$$T : V \to W : \varphi \mapsto \left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\, x^\alpha \, dx\right)_{|\alpha|\leq n} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\, x_1^{\alpha_1}...x_d^{\alpha_d} \, dx\right)_{|\alpha|\leq n}$$

qui est clairement linéaire. Remarquons que $\mathrm{Im}(T) = W$ en procédant par l'absurde. Supposons donc que $\mathrm{Im}(T) \subsetneq W$.
Il existe donc un élément $(a_\alpha)_{|\alpha|\leq n} \in W$ non nul et orthogonal à $\mathrm{Im}(T)$, i.e.

$$\sum_{0\leq|\alpha|\leq n} a_\alpha y_\alpha = 0 \quad \forall (y_\alpha)_{|\alpha|\leq n} \in \mathrm{Im}(T).$$

On en déduit donc que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \sum_{0\leq|\alpha|\leq n} a_\alpha x^\alpha \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in V.$$

Soit $\eta \in V$ tel que η est strictement positive sur $B(0,1)$, on remarque directement que

$$\sum_{0\leq|\alpha|\leq n} a_\alpha x^\alpha \eta \in V.$$

Par conséquent, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq n} a_\alpha x^\alpha\right)^2 \eta(x)\, dx = 0,$$

ce qui nous permet de conclure que

$$\sum_{0\leq|\alpha|\leq n} a_\alpha x^\alpha = 0$$

pour tout $x \in B(0,1)$.
Mais cela implique que les m réels a_α sont nuls, i.e. une contradiction.
Ainsi, comme T est surjectif, il existe $\varphi \in V$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\, dx = 1 \text{ et } \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\, x^\alpha \, dx = 0 \quad \forall\, 0 < |\alpha| \leq n.$$

Soit Q un polynôme de degré plus petit ou égal à n, alors Q est de la forme $Q(x) = \sum_{0\leq|\alpha|\leq n} b_\alpha x^\alpha$, et donc

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\, Q(x)\, dx = b_{(0,\dots,0)} = Q(0).$$

Soient P un polynôme de degré plus petit ou égal à n et $\varepsilon > 0$. On veut montrer que

$$\varphi_\varepsilon * P = P.$$

Pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\varphi_\varepsilon * P(y) = \varepsilon^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right) P(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(z) P(y - z\varepsilon)\, dz = P(y),$$

d'où la conclusion.

□

Proposition 4.3.1. *Soient E un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^d$ et $\phi \in \mathcal{B}$ tel que $\underline{b}(\phi) > 0$. S'il existe $M > 0$ tel que $f \in T^p_\phi(x_0)$ avec $\|f\|_{T^p_\phi(x_0)} \leq M$ pour tout $x_0 \in E$, alors $f \in B_\phi(E)$.*

Démonstration. On sait, par hypothèse, que pour tout $x_0 \in E$, il existe un polynôme P_{x_0} de degré strictement plus petit que $\underline{b}(\phi)$ tel que $R_{x_0} := f - P_{x_0}$ vérifie

$$r^{-d/p} \|R_{x_0}\|_{L^p(B(x_0,r))} \leq |f|_{T^p_\phi(x_0)} \phi(r) \leq \|f\|_{T^p_\phi(x_0)} \phi(r) \leq M\phi(r)$$

pour tout $r > 0$.
Par définition de la norme $\|\cdot\|_{T^p_\phi(x_0)}$, on sait aussi que

$$\frac{|D^\alpha P_{x_0}(x_0)|}{|\alpha|!} \leq M \quad \forall |\alpha| < \underline{b}(\phi).$$

De plus, grâce à la remarque 4.2.6, on sait que $f(x_0) = P_{x_0}(x_0)$ pour presque tout $x_0 \in E$. En modifiant f sur un ensemble négligeable pour avoir $f(x_0) = P_{x_0}(x_0)$ pour tout $x_0 \in E$, on en déduit que $|f(x_0)| \leq M$ pour tout $x_0 \in E$ et donc que f est bornée sur E.
Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ la fonction du lemme 4.3.1 où $n = \lfloor \underline{b}(\phi) \rfloor$; on a donc $\varphi_\varepsilon * P = P$ pour tout $\varepsilon > 0$ et tout polynôme P de degré plus petit ou égal à $\underline{b}(\phi)$.
Soient $x, x_0 \in E$ tels que $\varepsilon := |x - x_0| > 0$; pour tout $|\alpha| < \underline{b}(\phi)$, on pose

$$I_\alpha = D^\alpha(\varphi_\varepsilon * f)(x).$$

Remarquons d'une part que l'on a

$$\begin{aligned} I_\alpha = D^\alpha(\varphi_\varepsilon * (P_{x_0} + R_{x_0}))(x) &= (\varphi_\varepsilon * D^\alpha P_{x_0})(x) + (D^\alpha \varphi_\varepsilon * R_{x_0})(x) \\ &= D^\alpha P_{x_0}(x) + (D^\alpha \varphi_\varepsilon * R_{x_0})(x). \end{aligned}$$

D'autre part, on a de la même manière

$$I_\alpha = D^\alpha P_x(x) + (D^\alpha \varphi_\varepsilon * R_x)(x).$$

Ainsi, pour tout $|\alpha| < \underline{b}(\phi)$, on obtient que

$$\begin{aligned} D^\alpha P_x(x) &= D^\alpha P_{x_0}(x) + (D^\alpha \varphi_\varepsilon * (R_{x_0} - R_x)(x)) \\ &= D^\alpha P_{x_0}(x) + \int_{B(x,\varepsilon)} \varepsilon^{-d-|\alpha|} D^\alpha \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) (R_{x_0}(y) - R_x(y))\, dy, \end{aligned}$$

puisque $\frac{x-y}{\varepsilon} \in B(0,1) \Leftrightarrow y \in B(x,\varepsilon)$.
En posant $C_\varphi = \sup_{|\alpha|<\underline{b}(\phi)} \|D^\alpha\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$, on obtient ainsi, pour tout $|\alpha| < \underline{b}(\phi)$,

$$\begin{aligned}
|D^\alpha P_x(x) - D^\alpha P_{x_0}(x)| &\leq C_\varphi\, \varepsilon^{-|\alpha|} \left(\varepsilon^{-d}\|R_{x_0}\|_{L^1(B(x,\varepsilon))} + \varepsilon^{-d}\|R_x\|_{L^1(B(x,\varepsilon))}\right)\\
&\leq C_\varphi\, \varepsilon^{-|\alpha|} \left(\varepsilon^{-d}\|R_{x_0}\|_{L^1(B(x_0,2\varepsilon))} + \varepsilon^{-d}\|R_x\|_{L^1(B(x,\varepsilon))}\right)\\
&\leq C_{\varphi,d}\, \varepsilon^{-|\alpha|} \left((2\varepsilon)^{-d/p}\, 2^d\|R_{x_0}\|_{L^p(B(x_0,2\varepsilon))} + \varepsilon^{-d/p}\|R_x\|_{L^p(B(x,\varepsilon))}\right)\\
&\leq C\phi(|x-x_0|)|x-x_0|^{-|\alpha|},
\end{aligned}$$

où la constante C ne dépend que de C_φ, M, d et ϕ.
On en déduit donc, par définition, que $f \in B_\phi(E)$. □

Proposition 4.3.2. *Soient E un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^d$ et $\phi \in \mathcal{B}$ tel que $\underline{b}(\phi) > 0$. Si pour tout $x_0 \in E$, $f \in t^p_\phi(x_0)$ et*

$$r^{-d/p}\|f - P_{x_0}\|_{L^p(B(x_0,r))} = o(\phi(r)) \text{ quand } r \to 0^+$$

est vérifié uniformément en x_0, où P_{x_0} est le polynôme relatif à f, alors $f \in b_\phi(E)$.

Démonstration. On sait, par hypothèse, que pour tout $x_0 \in E$, il existe un polynôme P_{x_0} de degré strictement plus petit que $\underline{b}(\phi)$ tel que $R_{x_0} := f - P_{x_0}$ vérifie

$$r^{-d/p}\|f - P_{x_0}\|_{L^p(B(x_0,r))} = o(\phi(r)) \textit{ quand } r \to 0^+,$$

uniformément en x_0.
En procédant comme dans la preuve précédente, on peut supposer que $f(x_0) = P_{x_0}(x_0)$ pour tout $x_0 \in E$ et que pour tous $x, x_0 \in E$ tels que $\varepsilon := |x - x_0| > 0$,

$$|D^\alpha P_x(x) - D^\alpha P_{x_0}(x)| \leq C_{\varphi,d}\, \varepsilon^{-|\alpha|} \left((2\varepsilon)^{-d/p}\, 2^d\|R_{x_0}\|_{L^p(B(x_0,2\varepsilon))} + \varepsilon^{-d/p}\|R_x\|_{L^p(B(x,\varepsilon))}\right).$$

Montrons alors que

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0\\ x\in E}} \phi\left(|x-x_0|\right)^{-1} |x-x_0|^{|\alpha|} \left|D^\alpha P_x(x) - D^\alpha P_{x_0}(x)\right| = 0$$

uniformément en $x_0 \in E$.
Soit $\widetilde{\varepsilon} > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tous $x, x_0 \in E$ vérifiant $0 < |x - x_0| < \eta$, on a

$$|D^\alpha P_x(x) - D^\alpha P_{x_0}(x)| \leq \widetilde{\varepsilon}\phi(|x-x_0|)|x-x_0|^{-|\alpha|}.$$

On en déduit donc, par définition, que $f \in b_\phi(E)$. □

Le lemme qui suit est démontré en annexe pour ne pas alourdir cette section.

Lemme 4.3.2. *Soient $E \subseteq \mathbb{R}^d$ fermé et $U = \{x \in \mathbb{R}^d \mid d(x,E) < 1\}$, il existe $\delta \in C^\infty(U \backslash E)$ et $C > 0$ tels que*

$$C^{-1} d(x,E) \leq \delta(x) \leq C d(x,E) \quad \forall x \in U\backslash E$$

et

$$|D^\alpha \delta(x)| \leq C(\alpha)\, d(x,E)^{1-|\alpha|} \quad \forall x \in U\backslash E,\ |\alpha| \geq 0.$$

Il nous reste à définir une notion avant de pouvoir énoncer et démontrer la généralisation du théorème d'extension de Whitney.

Définition 4.3.4. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^d$, la *différence finie d'ordre* $m \in \mathbb{N}_0$ de *pas* $h \in \mathbb{R}^d$, notée $\Delta_h^m f(x)$, est définie par induction par

$$\begin{cases} \Delta_h^1 f(x) = f(x+h) - f(x), \\ \Delta_h^{n+1} f(x) = \Delta_h^1 \Delta_h^n f(x),\ n \in \mathbb{N}_0\,. \end{cases}$$

Proposition 4.3.3. *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^d$, $x, h \in \mathbb{R}^d$ et $m \in \mathbb{N}_0$, on a*

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (-1)^{m-j}\, f(x+jh).$$

Démonstration. On procède par récurrence sur $m \in \mathbb{N}_0$.
<u>Cas de base</u> : c'est direct par définition de $\Delta_h^1 f(x)$.
<u>Induction</u> : supposons que c'est vrai pour m et montrons que ça l'est encore pour $m+1$. Par changement d'indices et en utilisant la relation de Pascal, on obtient que

$$\begin{aligned}
\Delta_h^{m+1} f(x) &= \Delta_h^1 \Delta_h^m f(x) \\
&= \Delta_h^1 \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} f(x+jh) \\
&= \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} f(x+(j+1)h) - \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} f(x+jh) \\
&= \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{m+1-j} \binom{m}{k-1} f(x+kh) - \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} f(x+jh) \\
&= f(x+(m+1)h) - (-1)^m f(x) + \sum_{j=1}^{m} (-1)^{m+1-j} \binom{m+1}{j} f(x+jh) \\
&= \sum_{j=0}^{m+1} \binom{m+1}{j} (-1)^{m+1-j}\, f(x+jh).
\end{aligned}$$

□

Lemme 4.3.3. *Pour tout $l \in \mathbb{N}_0$, on a*

$$\sum_{j=0}^{l}(-1)^j \binom{l}{j} = 0.$$

Démonstration. Grâce à la formule du binôme de Newton, on a

$$\sum_{j=0}^{l}(-1)^j \binom{l}{j} = \sum_{j=0}^{l} 1^{l-j}(-1)^j \binom{l}{j} = (1-1)^l = 0.$$

□

On peut à présent passer au théorème.

Théorème 4.3.2. (Généralisation du théorème d'extension de Whitney)
Soient $E \subseteq \mathbb{R}^d$ fermé, $U = \{x \in \mathbb{R}^d \mid d(x,E) < 1\}$, $p \in [1,+\infty]$, $n \in \mathbb{N}$ et $\phi \in \mathcal{B}$ tels que $n < \underline{b}(\phi)$.
Si $f \in T^p_\phi(x_0)$ vérifie $\|f\|_{T^p_\phi(x_0)} \leq M$ pour un $M > 0$ et pour tout $x_0 \in E$, alors il existe $F \in C^n(U)$ telle que $F = f$ presque partout sur E.
De plus, si $m \in \mathbb{N}_0$ est tel que $n < \underline{b}(\phi) \leq \overline{b}(\phi) < m$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $x \in U$ et $h \in \mathbb{R}^d_0$ qui vérifient $[x, x+(m-n)h] \subseteq U$, on a

$$|\Delta_h^{m-n} D^\alpha F(x)| \leq C\phi(|h|)|h|^{-n}$$

pour tout $|\alpha| = n$.

Démonstration. On prend comme $n \in \mathbb{N}$ le plus grand $n' \in \mathbb{N}$ tel que $n' < \underline{b}(\phi)$, ce qui a un sens puisqu'il en existe au moins un.
Soient φ et δ les fonctions des lemmes 4.3.1 et 4.3.2.
Grâce à la proposition 4.3.1, on sait par hypothèse que la fonction f est égale presque partout à une fonction de $B_\phi(E)$.
On définit alors la fonction F sur U par

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in E \\ \delta(x)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi((x-y)\delta(x)^{-1}) f(y)\, dy & \text{si } x \in U \backslash E. \end{cases}$$

Il est clair que $F \in C^\infty(U\backslash E)$.
Soit $x' \in U\backslash E$, comme E est fermé, il existe $x_0 \in E$ tel que $|x' - x_0| = d(x', E)$.
Comme $x_0 \in E$, il existe un polynôme P_{x_0} de degré plus petit ou égal à n tel que $R_{x_0} := f - P_{x_0}$ vérifie pour tout $r > 0$

$$r^{-d/p}\|R_{x_0}\|_{L^p(B(x_0,r))} \leq M\,\phi(r).$$

Pour $\alpha \in \mathbb{N}^d$ et $x \in U\backslash E$, on pose

$$\Phi_\alpha(x,\cdot) = D^\alpha_x \left(\delta(x)^{-d}\,\varphi((x-\cdot)\,\delta(x)^{-1})\right),$$

et donc grâce au lemme 4.3.1, on en tire que

$$
\begin{aligned}
D^\alpha F(x) &= D^\alpha \left(\int_{\mathbb{R}^d} \delta(x)^{-d} \varphi((x-y)\delta(x)^{-1})(P_{x_0}(y) + R_{x_0}(y))\, dy \right) \\
&= D^\alpha \left(\varphi_{\delta(x)} * P_{x_0}(x) \right) + D^\alpha \left(\varphi_{\delta(x)} * R_{x_0}(x) \right) \\
&= D^\alpha \left(P_{x_0}(x) \right) + \int_{\mathbb{R}^d} \Phi_\alpha(x,y)\, R_{x_0}(y)\, dy.
\end{aligned}
$$

Grâce aux propriétés de δ, pour tous $\alpha \in \mathbb{N}^d$ et $x \in U \backslash E$, on a donc

$$
\left| \int_{\mathbb{R}^d} \Phi_\alpha(x,y)\, R_{x_0}(y)\, dy \right| \leq C_1\, d(x,E)^{-d-|\alpha|} \| R_{x_0} \|_{B(x,\delta(x))}.
$$

Comme il existe une constante $C_2 > 0$ telle que $\delta(x) \leq C_2\, d(x,E)$ pour tout $x \in U \backslash E$, on a

$$
\begin{aligned}
|D^\alpha F(x') - D^\alpha P_{x_0}(x')| &\leq C_1\, d(x',E)^{-d-|\alpha|} \| R_{x_0} \|_{B(x', C_2\, d(x',E))} \\
&\leq C_1\, d(x',E)^{-d-|\alpha|} \| R_{x_0} \|_{B(x_0, (C_2+1)\, d(x',E))} \\
&\leq C_3\, M\, \phi\left(d(x',E) \right)\, d(x',E)^{-|\alpha|} \\
&= C_3\, M\, \phi\left(|x' - x_0| \right)\, |x' - x_0|^{-|\alpha|},
\end{aligned}
$$

où C_3 est une constante qui dépend de ϕ, C_1, C_2 et d.
Comme $f \in B_\phi(E)$, on sait que $P_{x_0}(x_0) = f(x_0)$ et si on pose

$$
R_\alpha(x_0, x_1) = D^\alpha P_{x_0}(x_0) - D^\alpha P_{x_1}(x_0)
$$

pour tous $x_1 \in E \backslash \{x_0\}$ et $|\alpha| \leq n$, on a

$$
|R_\alpha(x_0, x_1)| \leq C \phi\left(|x_0 - x_1| \right)\, |x_0 - x_1|^{-|\alpha|}. \tag{4.9}
$$

Par la formule de Taylor, pour tous $x \in \mathbb{R}^d$ et $|\alpha| \leq n$, on a

$$
\begin{aligned}
D^\alpha P_{x_0}(x) &= \sum_{|\beta| \leq n - |\alpha|} \frac{1}{|\beta|!} D^{\alpha+\beta} P_{x_0}(x_0)\, (x - x_0)^\beta \\
&= \sum_{|\beta| \leq n - |\alpha|} \frac{1}{|\beta|!} \left(D^{\alpha+\beta} P_{x_1}(x_0) + R_{\alpha+\beta}(x_0, x_1) \right)\, (x - x_0)^\beta \\
&= \xi_\alpha(x, x_0, x_1) + \sum_{|\beta| \leq n - |\alpha|} \frac{1}{|\beta|!} R_{\alpha+\beta}(x_0, x_1)(x - x_0)^\beta,
\end{aligned}
$$

où l'on a posé

$$
\xi_\alpha(x, x_0, x_1) = \sum_{|\beta| \leq n - |\alpha|} \frac{1}{|\beta|!} \sum_{|\gamma| \leq n - |\alpha| - |\beta|} \frac{1}{|\gamma|!} D^{\alpha+\beta+\gamma} P_{x_1}(x_1)\, (x_0 - x_1)^\gamma (x - x_0)^\beta.
$$

Il est cependant clair que

$$\xi_\alpha(x, x_0, x_1) = \sum_{|\gamma| \le n-\alpha} \frac{1}{|\gamma|!} D^{\alpha+\gamma} P_{x_1}(x - x_0 + x_1)(x_0 - x_1)^\gamma = D^\alpha P_{x_1}(x).$$

On en déduit ainsi que

$$D^\alpha P_{x_0}(x) = D^\alpha P_{x_1}(x) + \sum_{|\beta| \le n-|\alpha|} \frac{1}{|\beta|!} R_{\alpha+\beta}(x_0, x_1)(x - x_0)^\beta,$$

pour tous $x \in \mathbb{R}^d$, $x_0, x_1 \in E$ (le cas où $x_0 = x_1$ est direct) et $|\alpha| \le n$.
En particulier, pour $|\alpha| \le n$, on trouve que

$$|D^\alpha P_{x_0}(x') - D^\alpha P_{x_1}(x')| \le C \sum_{|\beta| \le n-|\alpha|} \phi\left(|x_0 - x_1|\right) |x_0 - x_1|^{-|\alpha|-|\beta|} |x' - x_0|^{|\beta|}.$$

Comme $|x_0 - x_1| \le |x_0 - x'| + |x' - x_1| \le 2|x' - x_1|$, on a

$$\lambda := \frac{|x_0 - x_1|}{|x' - x_1|} \le 2.$$

Comme $|\alpha| + |\beta| \le n < \underline{b}(\phi)$, on peut utiliser la remarque 4.1.4 et on en déduit que

$$\begin{aligned}
\phi\left(|x_0 - x_1|\right) |x_0 - x_1|^{-|\alpha|-|\beta|} &= \phi(\lambda |x' - x_1|) \, |x_0 - x_1|^{-|\alpha|-|\beta|} \\
&\le \phi\left(|x' - x_1|\right) |x' - x_1|^{-|\alpha|-|\beta|} \, \overline{\phi}(\lambda) \lambda^{-|\alpha|-|\beta|} \\
&\le C' \phi\left(|x' - x_1|\right) |x' - x_1|^{-|\alpha|-|\beta|},
\end{aligned}$$

et donc

$$|D^\alpha P_{x_0}(x') - D^\alpha P_{x_1}(x')| \le C'' \phi\left(|x' - x_1|\right) |x' - x_1|^{-|\alpha|}.$$

Il en découle que pour tout $x_1 \in E$,

$$\begin{aligned}
|D^\alpha F(x') - D^\alpha P_{x_1}(x')| &\le |D^\alpha F(x') - D^\alpha P_{x_0}(x')| + |D^\alpha P_{x_0}(x') - D^\alpha P_{x_1}(x')| \\
&\le \widetilde{C} \left(\phi\left(|x' - x_0|\right) |x' - x_0|^{-|\alpha|} + \phi\left(|x' - x_1|\right) |x' - x_1|^{-|\alpha|} \right).
\end{aligned}$$

Comme $|x' - x_0| \le |x' - x_1|$, on en déduit qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|D^\alpha F(x') - D^\alpha P_{x_1}(x')| \le C \phi\left(|x' - x_1|\right) |x' - x_1|^{-|\alpha|}. \tag{4.10}$$

On définit alors

$$F_\alpha : x \in U \mapsto \begin{cases} D^\alpha P_x(x) & \text{si } x \in E, \\ D^\alpha F(x) & \text{si } x \in U \backslash E. \end{cases}$$

On sait que $F_\alpha \in C^\infty(U \backslash E)$ et que pour $|\alpha| \le n$, $x \in E$ et $h \ne 0$ tels que $x + h \in U$, on a

$$F_\alpha(x + h) = D^\alpha P_x(x + h) + \widetilde{R}_\alpha(x, x + h), \tag{4.11}$$

avec

$$|\widetilde{R}_\alpha(x,x+h)| \leq C\,\phi(|h|)\,|h|^{-|\alpha|}.$$

En effet,

• si $x+h \in E$, c'est direct puisque $f \in B_\phi(E)$ et

$$\widetilde{R}_\alpha(x,x+h) = D^\alpha P_{x+h}(x+h) - D^\alpha P_x(x+h),$$

• si $x+h \in U \backslash E$, cela résulte de (4.10) puisque

$$\widetilde{R}_\alpha(x,x+h) = D^\alpha F(x+h) - D^\alpha P_x(x+h).$$

On peut à présent montrer que $F \in C^n(U)$ et $D^\alpha F = F_\alpha$ pour tout $|\alpha| \leq n$.
La relation (4.11) nous assure que F_α est continue sur E et donc sur U pour tout $|\alpha| \leq n$.

Si $n = 0$, il est clair que $F = F_0 \in C^0(U)$.

Si $n \geq 1$, on procède par récurrence sur $|\alpha| \leq n$ pour montrer que $D^\alpha F = F_\alpha$.

<u>Cas de base</u> : Soient $x \in E$ et $h \in \mathbb{R}_0$ suffisamment petit, pour $j \in \{1,...,d\}$, on a

$$F(x+he_j) - F(x) = \sum_{|\beta|=1}^{n} \frac{1}{|\beta|!} D^\beta P_x(x)(he_j)^\beta + \widetilde{R}_0(x,x+h),$$

et donc

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x+he_j)-F(x)}{h} - F_{e_j}(x)\right| &= \left|\frac{F(x+he_j)-F(x)}{h} - D^{e_j}P_x(x)\right| \\ &\leq \sum_{|\beta|=2}^{n} |D^\beta P_x(x)||h|^{|\beta|-1} + \frac{|\widetilde{R_0}(x,x+he_j)|}{|h|} \\ &\leq \sum_{|\beta|=2}^{n} |D^\beta P_x(x)||h|^{|\beta|-1} + C\frac{\phi(|h|)}{|h|}.\end{aligned}$$

Comme le membre de droite tend vers 0 quand h tend vers 0 (en utilisant la proposition 4.1.2 comme $\underline{b}(\phi) > n \geq 1$), on en déduit que $D_j F(x)$ existe et vaut $F_{e_j}(x)$.

<u>Induction</u> : Supposons que $D^\alpha F = F_\alpha$ pour tout $|\alpha| \leq k$ avec $k \leq n-1$, et montrons que pour tout $j \in \{1,...,d\}$ et $|\alpha| = k$, $D_j F_\alpha$ existe et vaut $F_{\alpha+e_j}$.

Soient $x \in E, h \in \mathbb{R}_0$ suffisamment petit et $j \in \{1, ..., d\}$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F_\alpha(x+he_j)-F_\alpha(x)}{h} - F_{\alpha+e_j}(x)\right| &= \left|\frac{F_\alpha(x+he_j)-F_\alpha(x)}{h} - D^{\alpha+e_j}P_x(x)\right| \\
&\leq \sum_{|\beta|=2}^{n-k} |D^{\alpha+\beta}P_x(x)||h|^{|\beta|-1} + \frac{|\widetilde{R_\alpha}(x,x+he_j)|}{|h|} \\
&\leq \sum_{|\beta|=2}^{n-k} |D^{\alpha+\beta}P_x(x)||h|^{|\beta|-1} + C\frac{\phi(|h|)\,|h|^{-|\alpha|}}{|h|} \\
&\leq \sum_{|\beta|=2}^{n-k} |D^{\alpha+\beta}P_x(x)||h|^{|\beta|-1} + C\frac{\phi(|h|)}{|h|^n},
\end{aligned}$$

d'où la conclusion comme précédemment.

Passons maintenant à la seconde partie du théorème et supposons donc qu'il existe $m \in \mathbb{N}_0$ tel que $n < \underline{b}(\phi) \leq \overline{b}(\phi) < m$.
On sait, grâce à la relation (4.11), que pour tous $|\alpha| = n$, $x \in U$ et $y \in E\backslash\{x\}$,

$$|F_\alpha(x) - F_\alpha(y)| = |F_\alpha(x) - D^\alpha P_y(y)| = |F_\alpha(x) - D^\alpha P_y(x)| \leq C\phi\left(|x-y|\right)|x-y|^{-n}.$$

Soient $x \in U, h \in \mathbb{R}_0^d$ tels que $[x, x+lh] \subseteq U$, avec $l := m-n \in \mathbb{N}_0$. On distingue trois cas :

• Si $x \in U$, $h \in \mathbb{R}_0^d$ sont tels qu'il existe $k \in \{0, ..., l\}$ tel que $x+kh \in E$, en utilisant le lemme 4.3.3, on a

$$\begin{aligned}
\left|\Delta_h^l D^\alpha F(x)\right| &= \left|\sum_{j=0}^{l}(-1)^{l-j}\binom{l}{j}D^\alpha F(x+jh)\right| \\
&= \left|(-1)^{l-2j}\sum_{j=0}^{l}(-1)^{j}\binom{l}{j}D^\alpha F(x+jh)\right| \\
&= \left|\sum_{j=0}^{l}(-1)^{j}\binom{l}{j}D^\alpha F(x+jh) - \sum_{j=0}^{l}(-1)^{j}\binom{l}{j}D^\alpha F(x+kh)\right| \\
&\leq \sum_{j=0}^{l}\binom{l}{j}C\,\phi\left(|(j-k)h|\right)\,|(j-k)h|^{-n} \\
&\leq C'\phi(|h|)|h|^{-n}.
\end{aligned}$$

• Supposons maintenant que pour tout $k \in \{0, ..., l\}$, $x + kh \in U\backslash E$ et que

$$d(x, E) \leq (l+1)|h|.$$

Soit $x_0 \in E$ tel que $|x-x_0| = d(x,E)$. Il est clair que pour tout $j \in \{0,...,l\}$,

$$|x+jh-x_0| \leq (l+1)|h| + l|h| = (2l+1)|h|.$$

Ainsi, pour tout $j \in \{0,...,l\}$, en utilisant la remarque 4.1.4 (vu que $n < \underline{b}(\phi)$ et que $|x+jh-x_0|/|h| \leq 2l+1$), on a

$$\begin{aligned}\phi(|x+jh-x_0|)|x+jh-x_0|^{-n} &\leq \phi(|h|)|h|^{-n}\,\overline{\phi}\left(\frac{|x+jh-x_0|}{|h|}\right)\left(\frac{|x+jh-x_0|}{|h|}\right)^{-n}\\ &\leq C\phi(|h|)|h|^{-n},\end{aligned}$$

et donc en utilisant le lemme 4.3.3 comme précédemment, on a

$$\begin{aligned}\left|\Delta_h^l D^\alpha F(x)\right| &\leq \sum_{j=0}^{l}\binom{l}{j}|D^\alpha F(x+jh) - D^\alpha F(x_0)|\\ &\leq \sum_{j=0}^{l}\binom{l}{j} C\,\phi\left(|x+jh-x_0|\right)\,|x+jh-x_0|^{-n}\\ &\leq C'\phi(|h|)|h|^{-n}.\end{aligned}$$

• Il reste à considérer le cas où pour tout $k \in \{0,...,l\}$, $x+kh \in U\backslash E$ et

$$d(x,E) > (l+1)|h|.$$

À nouveau, soit $x_0 \in E$ tel que $|x-x_0| = d(x,E)$.
On sait que pour tout $y \in U\backslash E$,

$$D^\alpha F(y) = D^\alpha P_{x_0}(y) + \int_{\mathbb{R}^d}\Phi_\alpha(y,\xi)\,R_{x_0}(\xi)\,d\xi,$$

où $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^d}\Phi_\alpha(y,\xi)\,R_{x_0}(\xi)\,d\xi$ est dans $C^\infty(U\backslash E)$ et vérifie

$$D^\beta\int_{\mathbb{R}^d}\Phi_\alpha(y,\xi)\,R_{x_0}(\xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^d}\Phi_{\alpha+\beta}(y,\xi)\,R_{x_0}(\xi)\,d\xi \quad \forall\beta\in\mathbb{N}^d.$$

Puisque $d(x,E) > (l+1)|h|$, on a $[x,x+lh] \subset U\backslash E$ et donc la formule de Taylor nous assure qu'il existe des points $x_\beta \in [x,x+lh]$ avec $|\beta| = l$ tels que

$$\begin{aligned}\Delta_h^l D^\alpha F(x) &= \Delta_h^l\int_{\mathbb{R}^d}\Phi_\alpha(x,\xi)\,R_{x_0}(\xi)\,d\xi + \Delta_h^l D^n P_{x_0}(x)\\ &= \sum_{|\beta|=l} h^\beta\int_{\mathbb{R}^d}\Phi_{\alpha+\beta}(x_\beta,\xi)\,R_{x_0}(\xi)\,d\xi + 0\\ &= \sum_{|\beta|=l} h^\beta\int_{B(x_\beta,Cd(x_\beta,E))}\Phi_{\alpha+\beta}(x_\beta,\xi)\,R_{x_0}(\xi)\,d\xi + 0,\end{aligned}$$

où C est une constante telle que $\delta(y) \leq Cd(y,E)$ pour tout $y \in U\backslash E$.
On sait que pour tout $y \in U\backslash E$, on a

$$|\Phi_{\alpha+\beta}(y)| \leq C'd(y,E)^{-d-|\alpha|-|\beta|} = C'\,d(y,E)^{-d-n-l} = C'\,d(y,E)^{-d-m}.$$

Remarquons que l'on a, par le caractère 1-lipschitzienne de $x \mapsto d(x,E)$, que

$$d(x_\beta,E) \geq d(x,E) - |x - x_\beta| \geq (l+1)|h| - l|h| = |h|.$$

Ainsi, pour tout $\xi \in B(x_\beta, Cd(x_\beta,E))$, on a

$$\begin{aligned} |\xi - x_0| \leq |\xi - x_\beta| + |x_\beta - x| + |x - x_0| &\leq C\,d(x_\beta,E) + l|h| + d(x,E) \\ &\leq C\,d(x_\beta,E) + ld(x_\beta,E) + d(x_\beta,E) + |x - x_\beta| \\ &\leq C''d(x_\beta,E). \end{aligned}$$

Au final, en utilisant la remarque 4.1.4 (vu que $\overline{b}(\phi) < m$ et que $d(x_\beta,E)/|h| \geq 1$), on a donc

$$\begin{aligned} \left|\Delta_h^l D^\alpha F(x)\right| &\leq \sum_{|\beta|=l} |h|^{|\beta|} \left| \int_{B(x_\beta,Cd(x_\beta,E))} \Phi_{\alpha+\beta}(x_\beta,\xi)\, R_{x_0}(\xi)\, d\xi \right| \\ &\leq \sum_{|\beta|=l} |h|^l C'\, d(x_\beta,E)^{-d-m}\, \|R_{x_0}\|_{B(x_0,C''d(x_\beta,E))} \\ &\leq \sum_{|\beta|=l} |h|^l C' M\, d(x_\beta,E)^{-m}\, \phi(d(x_\beta,E)) \\ &\leq \sum_{|\beta|=l} |h|^l C''' M \phi(|h|)|h|^{-m}\, \phi\left(\frac{d(x_\beta,E)}{|h|}\right) \left(\frac{d(x_\beta,E)}{|h|}\right)^{-m} \\ &\leq \sum_{|\beta|=l} |h|^l\, C_1\, M\, \phi(|h|)\, |h|^{-m} \\ &\leq C_2\, \phi(|h|)\, |h|^{-n}, \end{aligned}$$

d'où la conclusion. □

Ce théorème a évidemment son analogue dans les espaces $t^p_\phi(x_0)$, $x_0 \in E$ et se démontre de manière similaire.

Théorème 4.3.3. *Soient $E \subseteq \mathbb{R}^d$ fermé, $U = \{x \in \mathbb{R}^d \mid d(x,E) < 1\}$, $p \in [1,+\infty]$, $n \in \mathbb{N}$ et $\phi \in \mathcal{B}$ tels que $n < \underline{b}(\phi)$.*
Si pour tout $x_0 \in E$, $f \in t^p_\phi(x_0)$ et

$$r^{-d/p}\|f - P_{x_0}\|_{L^p(B(x_0,r))} = o(\phi(r)) \text{ quand } r \to 0^+$$

est vérifié uniformément en x_0, où P_{x_0} est le polynôme relatif à f, alors il existe $F \in C^n(U)$ telle que $F = f$ presque partout sur E.
De plus, si $m \in \mathbb{N}_0$ est tel que $n < \underline{b}(\phi) \leq \overline{b}(\phi) < m$, alors pour tous $|\alpha| = n$, $x \in E$ et $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $0 < |h| \leq \eta$ qui vérifie $[x, x+(m-n)h] \subseteq E$,

$$|\Delta_h^{m-n} D^\alpha F(x)| \leq \varepsilon \phi(|h|)|h|^{-n}.$$

4.4 Généralisation du théorème de Rademacher

Le théorème de Rademacher est un théorème classique qui affirme qu'une fonction lipschitzienne sur $\mathbb{R}^d$ possède une différentielle totale presque partout. Cela implique que si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^d$ qui appartient à l'espace $T_1^\infty(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, alors $f \in t_1^p(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, où le polynôme relatif à la définition des espaces $t_1^p(x)$ possède un degré plus petit ou égal à 1.
L'idée est de remplacer la condition d'être de Lipschtiz par la condition d'appartenir à $T_\phi^p(x_0)$ pour des $x \in E$ où E est un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^d$ et de montrer que la fonction appartient alors à $t_\phi^p(x_0)$.
On généralise ici aux espaces $T_\phi^p(x_0)$ la démarche réalisée pour les espaces $T_u^p(x_0)$ dans [76].

Remarque 4.4.1. Dans les espaces généralisés $t_\phi^p(x)$, on demande que le polynôme soit de degré strictement plus petit que $\underline{b}(\phi)$. On aura alors une généralisation valable pour des $\underline{b}(\phi)$ non naturels. Si l'on voulait généraliser le résultat pour des $\underline{b}(\phi)$ naturels (c'est le cas pour les espaces $t_u^p(x)$ avec $u \in \mathbb{N}$), il faudrait définir ces espaces en laissant le polynôme être de degré plus petit ou égal à $\underline{b}(\phi)$.

Lemme 4.4.1. *Soient $E \subseteq \mathbb{R}^d$ mesurable, $p \in [1, +\infty]$ et $\phi \in \mathcal{B}$ tels que $\underline{b}(\phi) > -d/p$. Si $f \in T_\phi^p(x_0)$, alors la fonction*

$$\xi_f : E \to [0, +\infty[\, : x \mapsto \|f\|_{T_\phi^p(x)}$$

est mesurable.

Démonstration. Soit $x \in E$, on note P_x le polynôme relatif à f de degré strictement plus petit que $\underline{b}(\phi)$. Pour rappel,

$$\|f\|_{T_\phi^p(x)} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \sum_{|\alpha| < \underline{b}(\phi)} \frac{|D^\alpha P_x(x)|}{|\alpha|!} + \sup_{r>0} \phi(r)^{-1} r^{-d/p} \|f - P\|_{L^p(B(x,r))}.$$

Il suffit donc de montrer que pour tout $|\alpha| < \underline{b}(\phi)$,

$$x \in E \mapsto D^\alpha P_x(x)$$

est mesurable. Si $\underline{b}(\phi) \leq 0$, alors c'est évident puisque P_x est le polynôme nul pour tout $x \in E$. On peut donc supposer que $\underline{b}(\phi) > 0$.
Soit alors φ la fonction du lemme 4.3.1 pour $n = \lfloor \underline{b}(\phi) \rfloor$.
On pose, pour tout $x \in E$,

$$R_x = f - P_x.$$

Pour $\varepsilon > 0$ et $x \in E$ fixé, on a

$$\begin{aligned} D^\alpha (\varphi_\varepsilon * f(x)) &= D^\alpha (\varphi_\varepsilon * P_x(x)) + D^\alpha (\varphi_\varepsilon * R_x(x)) \\ &= D^\alpha P_x(x) + \int_{\mathbb{R}^d} \varepsilon^{-d-|\alpha|} (D^\alpha \varphi) \left(\frac{y}{\varepsilon}\right) R_x(x-y)\, dy. \end{aligned}$$

Or, comme $|\alpha| < \underline{b}(\phi)$, en utilisant la proposition 4.1.2, on a pour tout $r \in]0,1]$,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^d} \varepsilon^{-d-|\alpha|} \, (D^\alpha \varphi) \left(\frac{y}{\varepsilon}\right) \, R_x(x-y) \, dy\right| &\leq C_\varphi \, \varepsilon^{-d-|\alpha|} \int_{B(0,\varepsilon)} |R_x(x-y)| \, dy \\ &= C_\varphi \, \varepsilon^{-|\alpha|} \, \varepsilon^{-d} \, \|f - P_x\|_{L^1(B(x,\varepsilon))} \\ &\leq C_\varphi \, \varepsilon^{-|\alpha|} \, C_d^{1-1/p} \, \varepsilon^{-d/p} \, \|f - P_x\|_{L^p(B(x,\varepsilon))} \\ &\leq C' \, \varepsilon^{-|\alpha|} \, \phi(\varepsilon) \\ &\leq C'' \, \varepsilon^{-|\alpha|} \, \varepsilon^{\underline{b}(\phi)-((\underline{b}(\phi)-|\alpha|)/2)} \\ &= C'' \varepsilon^{(\underline{b}(\phi)-|\alpha|)/2} \underset{\varepsilon \to 0^+}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $x \in E$, $D^\alpha \left(\varphi_\varepsilon * f(x)\right)$ converge vers $D^\alpha P_x(x)$, d'où la conclusion puisque les fonctions $D^\alpha \left(\varphi_\varepsilon * f\right)$ sont évidemment mesurables sur E. $\square$

Lemme 4.4.2. *Soient $p \in [1, +\infty[$, $\phi \in \mathcal{B}$ tel que $\underline{b}(\phi) > 0$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, si*

$$r^{-d/p} \, \|f\|_{L^p(B(x,r))} \leq C \, \phi(r) \quad \forall r > 0$$

et pour tout x dans un sous-ensemble mesurable E de $\mathbb{R}^d$, alors pour presque tout $x \in E$,

$$r^{-d/p} \|f\|_{L^p(B(x,r))} = o(\phi(r)) \text{ quand } r \to 0^+.$$

Démonstration. Sans perdre de généralité, on peut supposer que E est borné et que f est à support compact.
Grâce à la remarque 4.1.4, il existe une constante $C_\star > 0$ telle que

$$\overline{\phi}(r) \leq C_\star \, r^{\underline{b}(\phi)-\underline{b}(\phi)/2} \leq C_\star \quad \forall r \in]0,1] \, .$$

Soit $\varepsilon > 0$, on veut montrer que pour presque tout $x \in E$,

$$r^{-d/p} \|f\|_{L^p(B(x,r))} < \varepsilon \, \phi(r) \tag{4.12}$$

pour tout r suffisamment petit.
Soient $\delta > 0$ et A un sous-ensemble fermé de E tel que

$$\text{mes}\,(E \backslash A) < \delta.$$

Il suffit alors d'établir la conclusion pour presque tout $x \in A$.
Comme $\underline{b}(\phi) > 0$, on peut utiliser la proposition 4.1.2 pour obtenir que, pour $x \in A$,

$$\lim_{r \to 0^+} r^{-d} \, \|f\|_{L^1(B(x,r))} \leq C_d^{1-1/p} \lim_{r \to 0^+} r^{-d/p} \, \|f\|_{L^p(B(x,r))} \leq C' \lim_{r \to 0^+} \phi(r) = 0.$$

On en tire que $f = 0$ presque partout sur A (en tous les points de Lebesgue de f sur A).
On définit l'ouvert U par

$$U = \{x \in \mathbb{R}^d : d(x, A) < 1\}$$

et on pose pour tout $x \in U \backslash A$,

$$h(x) = \frac{1}{10}\, d(x, A).$$

On montre comme dans le lemme D.3 qu'il existe un ensemble dénombrable $S \subseteq U \backslash A$ tel que la famille

$$\left\{ \overline{B(s, h(s))} : s \in S \right\}$$

est constituée d'éléments disjoints deux à deux et tel que

$$\bigcup_{s \in S} \overline{B(s, 5h(s))} \supseteq U \backslash A.$$

Ainsi, comme $f = 0$ presque partout sur A, on a

$$\begin{aligned}
\int_A \int_U \frac{|f(y)|}{|x-y|^d\, \phi(|x-y|)} dy\, dx &\leq \int_A \int_{U \backslash A} \frac{|f(y)|}{|x-y|^d\, \phi(|x-y|)} dy\, dx \\
&\leq \int_A \sum_{s \in S} \int_{B(s,5h(s))} \frac{|f(y)|}{|x-y|^d\, \phi(|x-y|)} dy\, dx \\
&= \sum_{s \in S} \int_{B(s,5h(s))} |f(y)| \int_A \frac{dx}{|x-y|^d\, \phi(|x-y|)} dy.
\end{aligned}$$

Comme A est fermé, on peut trouver pour tout $s \in S$ un élément $x_s \in A$ tel que

$$|s - x_s| = d(s, A) = 10h(s),$$

et donc tel que

$$B(s, 5h(s)) \subseteq B(x_s, |s - x_s| + 5h(s)) = B(x_s, 15h(s)).$$

On en déduit, par hypothèse, que

$$\begin{aligned}
(5h(s))^{-d}\, \|f\|_{L^1(B(s,5h(s)))} &\leq C_d^{1-1/p}\, (5h(s))^{-d/p}\, \|f\|_{L^p(B(s,5h(s)))} \\
&\leq C_d^{1-1/p}\, (5h(s))^{-d/p}\, \|f\|_{L^p(B(x_s,15h(s)))} \\
&\leq C' \phi(15h(s)) \\
&\leq C'' \phi(5h(s)).
\end{aligned}$$

On remarque que si $x \in A$ et $y \in B(s, 5h(s))$, alors

$$|x - y| \geq |x - s| - |s - y| \geq d(s, A) - 5h(s) = 10h(s) - 5h(s) = 5h(s).$$

Ainsi, pour $y \in B(s, 5h(s))$, on a

$$\begin{aligned}
\int_A \frac{dx}{|x-y|^d\, \phi(|x-y|)} &\leq C_1 \int_{|5h(s)|}^{+\infty} \frac{r^{-1}}{\phi(r)} dr \\
&\leq C_1\, C_\star\, (5h(s))^{\underline{b}(\phi)/2} \int_{|5h(s)|}^{+\infty} \frac{r^{-1}}{r^{\underline{b}(\phi)/2}\, \phi(5h(s))}\, dr \\
&\leq C_2\, \phi(5h(s))^{-1}.
\end{aligned}$$

Au vu de ce qui précède, on a

$$\begin{aligned}\int_A \int_{B(s,5h(s))} \frac{|f(y)|}{|x-y|^d\,\phi(|x-y|)} dy\,dx &\le C_2\,(\phi(5h(s))^{-1} \int_{B(s,5h(s))} |f(y)|\,dy \\ &\le C_2\,(\phi(5h(s))^{-1}\,(5(h(s))^d\,C''\,\phi(5h(s)) \\ &\le C_3\,h(s)^d.\end{aligned}$$

Ainsi, comme la famille $\left\{\overline{B(s,h(s))} : s \in S\right\}$ est constituée d'éléments disjoints deux à deux, on a

$$\int_A \int_U \frac{|f(y)|}{|x-y|^d\,\phi(|x-y|)} dy\,dx \le C_3 \sum_{s\in S} h(s)^d \le C_3 \sum_{s\in S} h(s) < +\infty.$$

On en déduit donc que

$$\int_U \frac{|f(y)|}{|x-y|^d\,\phi(|x-y|)} dy < +\infty$$

pour presque tout $x \in A$.
Or, comme f est à support compact, il est clair que pour tout $x \in A$,

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus U} \frac{|f(y)|}{|x-y|^d\,\phi(|x-y|)} dy < +\infty,$$

et donc on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f(y)|}{|x-y|^d\,\phi(|x-y|)} dy < +\infty$$

pour presque tout $x \in A$.
On remarque que pour établir le dernier résultat ci-dessus, on a simplement utilisé le fait que

$$r^{-d}\,\|f\|_{L^1(B(x,r))} \le C_d^{1-1/p}\,r^{-d/p}\,\|f\|_{L^p(B(x,r))} \le C\phi(r).$$

Ainsi, si $g = |f|^p$, l'hypothèse devient

$$r^{-d}\,\|g\|_{L^1(B(x,r))} \le C\phi(r)^p$$

pour tout $x \in E$.
Or, on sait que si $\phi \in \mathcal{B}$, alors $\phi^p \in \mathcal{B}$ et $\underline{b}(\phi^p) = p\,\underline{b}(\phi) > 0$.
Ainsi, en réappliquant ce qu'on a fait ci-dessus, on obtient que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f(y)|^p}{|x-y|^d\,\phi^p(|x-y|)}\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|g(y)|}{|x-y|^d\,\phi^p(|x-y|)}\,dy < +\infty$$

pour presque tout $x \in E$.
Pour ces x et pour tout r suffisamment petit, on a

$$\int_{B(x,r)} \frac{|f(y)|^p}{|x-y|^d\,\phi^p(|x-y|)} < \varepsilon^p\,C_\star^{-p},$$

et donc pour tout r suffisamment petit, on a

$$\begin{aligned}
r^{-d/p}\|f\|_{L^p(B(x,r))} &= \phi(r)\left(\int_{B(x,r)} \frac{|f(y)|^p}{r^d\,\phi^p(r)}\,dy\right)^{1/p}\\
&\leq \phi(r)\left(\int_{B(x,r)} \frac{|f(y)|^p}{r^d\,\phi^p(|x-y|)}\,dy\,C_\star^p\right)^{1/p}\\
&< \varepsilon\,\phi(r).
\end{aligned}$$

□

Pour généraliser le théorème de Rademacher, on va également utiliser le théorème de Lusin qui fait le lien entre les notions de mesurabilité et de continuité pour des fonctions définies sur des espaces localement compacts séparés munis d'une mesure de Radon ([55, 12, 69]). On démontre ce résultat pour des espaces E inclus dans un espace euclidien $\mathbb{R}^d$, en demandant que E soit borné (cette hypothèse est trop forte, il suffit en réalité de demander qu'il existe $A \subseteq E$ de mesure finie tel que le support de f est dans $\overline{A}$).

Avant d'énoncer et démontrer le théorème de Lusin, on rappelle la théorème d'Egoroff (voir [64, 12] par exemple).

Théorème 4.4.1. (Théorème d'Egoroff)
Soient $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré, f une application réelle $\mathscr{A}$-mesurable et $(f_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ une suite d'applications réelles $\mathscr{A}$-mesurables sur X. Si la mesure μ est finie et si la suite $(f_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ converge vers f presque partout, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble A_ε de X appartenant à $\mathscr{A}$ vérifiant $\mu(A_\varepsilon^c) < \varepsilon$ tel que la suite $(f_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ converge vers f uniformément sur A_ε.

Remarque 4.4.2. (Théorème d'Egoroff avec la mesure de Lebesgue)
En particulier, si l'on prend $X = E$ avec $E \subseteq \mathbb{R}^d$ de mesure de Lebesgue finie, alors en utilisant la régularité de la mesure de Lebesgue, on sait que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un fermé $F_\varepsilon \subseteq A_{\varepsilon/2}$ tel que

$$\operatorname{mes}(A_{\varepsilon/2}) < \operatorname{mes}(F_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2},$$

et donc

$$\operatorname{mes}(E\backslash F_\varepsilon) = \operatorname{mes}(E) - \operatorname{mes}(F_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

avec $(f_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ qui converge vers f uniformément sur F_ε.

Théorème 4.4.2. (Théorème de Lusin)
Une fonction f réelle définie sur un ensemble mesurable borné E de $\mathbb{R}^d$ est mesurable si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un fermé $E_\varepsilon \subseteq E$ tel que

$$\operatorname{mes}(E\backslash E_\varepsilon) \leq \varepsilon$$

et tel que f est continue sur E_ε.

Démonstration.
• La condition est nécessaire. Montrons d'abord que c'est le cas pour les fonctions simples. Soient donc $\varepsilon > 0$ et f une fonction mesurable qui s'écrit

$$f = \sum_{k=1}^{n} a_k \, \chi_{A_k},$$

avec les A_k mesurables disjoints deux à deux. Par régularité de la mesure de Lebesgue, pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, il existe un fermé $F_{k,\varepsilon} \subseteq A_k$ tel que

$$\mathrm{mes}(A_k \backslash F_{k,\varepsilon}) \leq \frac{\varepsilon}{n}.$$

En posant $E_\varepsilon = \cup_{k=1}^{n} F_{k,\varepsilon}$, on a directement

$$\mathrm{mes}\,(E \backslash E_\varepsilon) \leq \varepsilon.$$

De plus, comme les ensembles $F_{k,\varepsilon}$ sont compacts et disjoints, la distance entre F_k et $F_{k'}$ est strictement positive pour tous $k, k' \in \{1, ..., n\}$, $k \neq k'$. Comme f est constante sur chacun des compacts F_k, elle est continue sur E_ε.
Supposons maintenant que f est positive et mesurable sur E. Alors il existe une suite $(f_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ de fonctions simples qui converge simplement vers f (résultat classique en théorie de la mesure, voir [64] par exemple). Soit $\varepsilon > 0$, on sait donc que pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, il existe un fermé $E_{j,\varepsilon} \subseteq E$ tel que

$$\mathrm{mes}\,(E \backslash E_{j,\varepsilon}) \leq \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$$

et tel que f_j est continue sur $E_{j,\varepsilon}$.
En utilisant la remarque 4.4.2, on peut trouver un fermé $E_{0,\varepsilon} \subseteq E$ tel que

$$\mathrm{mes}\,(E \backslash E_{0,\varepsilon}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

et tel que $(f_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ converge uniformément vers f dans sur $E_{0,\varepsilon}$.
On pose alors

$$E_\varepsilon = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} E_{j,\varepsilon}.$$

C'est un ensemble fermé qui vérifie

$$\mathrm{mes}(E \backslash E_\varepsilon) = \mathrm{mes}\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} E \backslash E_{j,\varepsilon} \right) \leq \sum_{j=0}^{+\infty} \mathrm{mes}(E \backslash E_{j,\varepsilon}) \leq \varepsilon.$$

De plus, la suite $(f_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ est une suite de fonctions continues sur E_ε qui converge uniformément vers f sur E_ε. On en tire donc que f est continue sur E_ε.

Enfin, si f est une fonction mesurable réelle sur E, il suffit de séparer f en sa partie positive et en sa partie négative, de procéder comme ci-dessus et de prendre comme fermé l'intersection des deux fermés trouvés.

• La condition est suffisante. Supposons donc que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un fermé $E_\varepsilon \subseteq E$ tel que

$$\text{mes}\,(E \backslash E_\varepsilon) \leq \varepsilon$$

et tel que f est continue sur E_ε. Soit $y \in \mathbb{R}$, on veut montrer que l'ensemble

$$A = \{x \in E : f(x) < y\}$$

est mesurable. C'est évident puisque A est égal, à un ensemble négligeable près (qui est donc mesurable puisque la mesure de Lebesgue est complète), à l'ensemble

$$\bigcup_{m \in \mathbb{N}_0} \{x \in E_{1/m} : f(x) < y\}$$

qui est mesurable car c'est une union dénombrable d'ensembles ouverts.

□

On peut à présent généraliser le théorème de Rademacher.

Théorème 4.4.3. (Généralisation du théorème de Rademacher)
Soient $E \subseteq \mathbb{R}^d$ mesurable, $p \in \,]1, +\infty[$, $\phi \in \mathcal{B}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $n < \underline{b}(\phi) \leq \overline{b}(\phi) < n + 1$. Si $f \in T^p_\phi(x)$ pour tout $x \in E$, alors $f \in t^p_\phi(x)$ pour presque tout $x \in E$.

Démonstration.

• Supposons d'abord que E soit borné. Grâce au lemme 4.4.1 et au théorème de Lusin, il existe des compacts $E_{1/m} \subseteq E$, $m \in \mathbb{N}_0$, tels que

$$\text{mes}\left(E \backslash E_{1/m}\right) \leq \frac{1}{m}$$

et tels que

$$\xi_f : E_{1/m} \to [0, +\infty[\, : x \mapsto \|f\|_{T^p_\phi(x)}$$

est continue.

Si on fixe $m \in \mathbb{N}_0$, alors il existe une constante $M = M(m) > 0$ telle que

$$\|f\|_{T^p_\phi(x)} \leq M \quad \forall x \in E_{1/m}.$$

Soit $x \in E_{1/m}$, on note P_x le polynôme de degré strictement plus petit ou égal à n relatif à f. Grâce au théorème 4.3.2, on sait qu'il existe un ouvert U contenant $E_{1/m}$ et une fonction $F \in C^n(U)$ telle que $F = f$ presque partout sur $E_{1/m}$ et telle que pour tout $|\beta| \leq n$ et pour presque tout $x \in E_{1/m}$, on a

$$D^\beta F(x) = D^\beta P_x(x).$$

Par le théorème E.1, on en déduit que $F \in W^p_{n+1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.
Ainsi, grâce au théorème E.2 en prenant $m_1 = m_2 = n+1$, on en tire que pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, il existe un polynôme Q_x de degré au plus n tel que

$$r^{-d/p} \|F - Q_x\|_{L^p(B(x,r))} = o(r^{n+1}) \quad \text{quand } r \to 0^+.$$

Aussi, pour presque tout $x \in E_{1/m}$, on a

$$r^{-d/p} \|f - F\|_{L^p(B(x,r))} \leq C\,\phi(r).$$

Au vu du lemme 4.4.2, on a donc

$$r^{-d/p}\|f - F\|_{L^p(B(x,r))} = o(\phi(r)) \text{ quand } r \to 0^+,$$

Ainsi, pour presque tout $x \in E_{1/m}$, on a

$$\begin{aligned} r^{-d/p} \|f - Q_x\|_{L^p(B(x,r))} &\leq r^{-d/p} \|f - F\|_{L^p(B(x,r))} + r^{-d/p} \|F - Q_x\|_{L^p(B(x,r))} \\ &= o(\phi(r)) + o(r^{n+1}) \\ &= o(\phi(r)) \text{ quand } r \to 0^+. \end{aligned}$$

où la dernière égalité résulte de la proposition 4.1.2.
On a donc démontré le résultat pour les ensembles $E_{1/m}$, $m \in \mathbb{N}_0$. Comme une union dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable, on en tire la conclusion pour E.
• Si E n'est pas borné, alors il suffit d'appliquer le cas précédent aux espaces

$$E^{(j)} = E \cap B(0,j), \quad j \in \mathbb{N}_0,$$

et de conclure à nouveau en utilisant le fait qu'une union dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable. □

4.5 Exemple d'applications en théorie des EDP

Avant de faire le lien avec la théorie des ondelettes, il peut être intéressant de comprendre l'importance des outils développés dans les sections précédentes. Une application importante se situe dans la théorie des opérateurs différentiels et en particulier pour les opérateurs de Bessel ainsi que pour les équations elliptiques aux dérivées partielles. Explicitons le résultat pour ces dernières équations. Une *équation elliptique aux dérivées partielles* en $x_0 \in \mathbb{R}^d$ d'ordre $m \in \mathbb{N}$ est de la forme

$$\mathcal{E} f = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha f = g,$$

où pour tout $|\alpha| \leq m$, a_α est une matrice $s \times r$ de fonctions, $f = (f_1, ..., f_r)^\sim$, $g = (g_1, ..., g_s)^\sim$ sont des vecteurs de fonctions avec $f_j \in W^p_m(\mathbb{R}^d)$ pour tout $j \in \{1, ..., r\}$, où les dérivées sont à prendre au sens faible et où

$$\mu(x_0) := \inf_{|\xi|=1} \det \left(\left(\sum_{|\alpha|=m} a^*_\alpha(x_0)\, \xi^\alpha \right) \left(\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x_0)\, \xi^\alpha \right) \right) > 0$$

est la *constante elliptique* de $\mathcal{E}$ en x_0, avec $a^*_\alpha(x_0)$ qui est la matrice adjointe de $a_\alpha(x_0)$.
Un des résultats principaux de [16] affirme que si les coefficients de l'opérateur $\mathcal{E}$ sont dans $T^\infty_u(x_0)$, si les composantes f_j et g_k sont dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ et si les composantes h_k sont dans $T^p_v(x_0)$ avec $p \in]1,\infty[$, $-d/p \leq v \leq u$, $v \notin \mathbb{Z}$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|D^\alpha f_j\|_{T^q_{v+m-|\alpha|}(x_0)} \leq C \left(\sum_{k=1}^{s} \|g_k\|_{T^p_v(x_0)} + \sum_{j=1}^{r} \|f_j\|_{W^p_m(\mathbb{R}^d)} \right)$$

pour tout $j \in \{1,...,r\}$, $|\alpha| \leq m$ et où q vérifie

- $p \leq q \leq \infty$ si $1/p < (m - |\alpha|)/d$,
- $p \leq q < \infty$ si $1/p = (m - |\alpha|)/d$,
- $1/p \leq 1/q \leq 1/p - (m - |\alpha|)/d$ sinon.

De plus, si $g \in t^p_v(x_0)$, alors $D^\alpha f$ est dans $t^q_{v+m-|\alpha|}(x_0)$.
On généralise ce genre de résultats avec les espaces $T^p_\phi(x_0)$ dans [54].

4.6 Lien avec les ondelettes

On reprend dans cette section les notations de la section 1.5.
On suppose ici qu'il existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que le support de toutes les ondelettes $\Psi^{(n)}$ est inclus dans $B(0, 2^{j_0})$ et que ces ondelettes ont une régularité au moins $\lfloor \underline{b}(\phi) \rfloor + 1$.

Théorème 4.6.1. *Si $f \in T^p_\phi(x_0)$, alors il existe $C > 0$ et $j_1 \in \mathbb{N}_0$ tels que*

$$d^p_j(x_0) \leq C\,\phi(2^{-j}) \quad \forall j \geq j_1.$$

Démonstration. Il existe un polynôme P de degré strictement plus petit que $\underline{b}(\phi)$ et une constante $C_1 > 0$ tels que

$$r^{-d/p}\|f - P\|_{L^p(B(x_0,r))} \leq C_1\,\phi(r) \quad \forall r > 0.$$

Soit $j_1 \in \mathbb{N}_0$ tel que

$$2\sqrt{d} + 2^{j_0} \leq 2^{j_1}.$$

On fixe $m \geq j_1$; pour $\lambda = \lambda^{(n)}_{j,k} \subset A(\lambda_m(x_0))$, comme la diagonale d'un cube dyadique de Λ_m est de longueur $2^{-m}\sqrt{d}$, il est clair que

$$\left| \frac{k}{2^j} - x_0 \right| \leq 2\sqrt{d}\,2^{-m}.$$

On pose

$$\Lambda_{j,m} = \left\{ \lambda^{(n)}_{j,k} \in \Lambda_j : |k - 2^j\,x_0| \leq 2\sqrt{d}\,2^{j-m} \right\}.$$

• Si $p \in [1, +\infty[$, on a pour tout $\lambda = \lambda_{j,k}^{(n)} \subset A(\lambda_m(x_0))$,

$$\sum_{\substack{\lambda' \in \Lambda_j \\ \lambda' \subset \lambda}} 2^{(m-j)d} \, |c_{\lambda'}|^p \leq \sum_{\lambda' \in \Lambda_{j,m}} 2^{(m-j)d} \, |c_{\lambda'}|^p.$$

On pose alors

$$s_{j,m} = \sum_{\lambda' \in \Lambda_{j,m}} |c_{\lambda'}|^p \quad \text{ et } \; g_{j,m} = \sum_{\lambda' \in \Lambda_{j,m}} |c_{\lambda'}|^{p-1} \operatorname{sgn}(c_{\lambda'}) \, \Psi_{\lambda'}.$$

Au vu des hypothèses faites sur les ondelettes, on remarque que le support des fonctions $g_{j,m}$ est inclus dans $B(x_0, 2^{j_1-m})$ et que

$$s_{j,m} = 2^{jd} \, \langle f, g_{j,m} \rangle = 2^{jd} \int_{B(x_0, 2^{j_1-m})} (f(x) - P(x)) \, \overline{g_{j,m}(x)} \, dx.$$

Soit q l'exposant conjugué de p, en utilisant l'inégalité de Hölder, on a donc

$$s_{j,m} \leq 2^{jd} \, \|f - P\|_{L^p(B(x_0, 2^{j_1-m}))} \, \|g_{j,m}\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}.$$

On remarque qu'il existe une constante $C_2 > 0$ indépendante de λ et de j telle que

$$|\{\lambda' \in \Lambda_j : [\psi_\lambda] \cap [\psi_{\lambda'}] \neq \emptyset\}| \leq C_2.$$

Ainsi, pour $j \in \mathbb{N}$ fixé, on peut trouver une partition $E_1, ..., E_{C_2}$ de Λ_j telle que si $l \in \{1, ..., C_2\}$,

$$(\lambda', \lambda'' \in E_l \;\; \& \;\; [\psi_{\lambda'}] \cap [\psi_{\lambda''}] \neq \emptyset) \Rightarrow \lambda' = \lambda''.$$

Dès lors, si $p = 1$, on a $q = +\infty$ et

$$\|g_{j,m}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C_2 \max_{n=1}^{2^d-1} \|\Psi^{(n)}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

Si $p \in \,]1, +\infty[$, on a

$$|g_{j,m}|^q \leq C_2^q \sum_{\lambda' \in \Lambda_{j,m}} |c_{\lambda'}|^p \, |\Psi_{\lambda'}|^q,$$

et donc

$$\|g_{j,m}\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq C_2 \, 2^{-jd/q} \, s_{j,m}^{1/q} \max_{n=1}^{2^d-1} \|\Psi^{(n)}\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} s_{j,m} &\leq 2^{jd} \, \|f - P\|_{L^p(B(x_0, 2^{j_1-m}))} \, \|g_{j,m}\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq 2^{jd} \, C_1 \, \phi(2^{j_1-m}) \, 2^{(j_1-m)d/p} \, C_2 \, 2^{-jd/q} \, s_{j,m}^{1/q} \max_{n=1}^{2^d-1} \|\Psi^{(n)}\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}, \end{aligned}$$

et donc il existe une constante $C > 0$ telle que

$$s_{j,m}^{1/p} \leq C\, 2^{(j-m)d/p}\, \phi\left(2^{-m}\right).$$

Ainsi, on a

$$\sum_{\substack{\lambda' \in \Lambda_j \\ \lambda' \subset \lambda}} 2^{(m-j)d}\, |c_{\lambda'}|^p \leq 2^{(m-j)d}\, s_{j,m} \leq C\, \phi\left(2^{-m}\right)^p.$$

On a donc montré que pour $\lambda = \lambda_{j,k}^{(n)} \in A(\lambda_m(x_0))$,

$$\left(\sum_{\substack{\lambda' \in \Lambda_j \\ \lambda' \subset \lambda}} 2^{(m-j)d}\, |c_{\lambda'}|^p \right)^{1/p} \leq C\, \phi\left(2^{-m}\right).$$

On a donc

$$d_m^p(x_0) \leq C\, \phi\left(2^{-m}\right).$$

• Si $p = +\infty$, en raisonnant de même, on obtient l'existence d'une constante $C > 0$ telle que pour tout $\lambda \in A(\lambda_m(x_0))$,

$$|c_\lambda| \leq C\, \phi\left(2^{-m}\right).$$

□

Remarque 4.6.1. Dans la proposition précédente, l'hypothèse $f \in T_\phi^p(x_0)$ est trop forte. En effet, supposer que $f \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ et que

$$2^{jd/p}\, \|f - P\|_{L^p(B(x_0, 2^{-j}))} \leq C\, \phi\left(2^{-j}\right) \quad \forall j \in \mathbb{N}_0$$

suffit.

Pour avoir la quasi-caractérisation en ondelettes, on développe dans le prochain chapitre la notion de suites admissibles qui est plus adaptée pour les notations discrètes, bien qu'équivalente comme on le montrera.

Chapitre 5

Lien avec les suites admissibles

Comme on s'intéresse dans ce chapitre à la régularité locale, on peut demander que (1) ne soit vérifié que localement, cela peut donc s'écrire

$$2^{jd/p}\|f-P\|_{L^p(B(x_0,2^{-j}))} \leq C\,2^{-ju} \quad \forall j \in \mathbb{N}\,. \tag{5.1}$$

Cette condition peut ne pas convenir pour décrire précisément la régularité de certaines fonctions. Par exemple, si $\mathfrak{B}$ est un mouvement Brownien sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, alors presque sûrement et pour presque tout $t_0 \in \mathbb{R}$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|\mathfrak{B}(t) - \mathfrak{B}(t_0)| \leq C\,\sqrt{|t-t_0|}\,\sqrt{\log\log|t-t_0|^{-1}},$$

alors que pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, l'exposant de Hölder de $\mathfrak{B}$ en t_0 vaut $h(t) = 1/2$ (voir [62] par exemple).

Pour pallier ce problème, on peut remplacer la suite $(2^{-j})_{j\in\mathbb{N}}$ apparaissant dans (5.1) par une suite de nombres strictement positifs $\sigma = (\sigma_j)_{j\in\mathbb{N}}$ qui est telle que la suite $(\sigma_{j+1}/\sigma_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est bornée. Cette approche a été initialement proposée dans [48] pour les espaces de Hölder ($p = +\infty$).

5.1 Suites admissibles

Définition 5.1.1. Une suite $\sigma = (\sigma_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ de nombres réels positifs est une *suite admissible* s'il existe deux constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que

$$C_1\,\sigma_j \leq \sigma_{j+1} \leq C_2\,\sigma_j \quad \forall j \in \mathbb{N}_0\,. \tag{5.2}$$

Remarque 5.1.1. Il est direct de voir que si σ est une suite admissible et qu'un de ses éléments σ_j est nul alors la suite σ est nulle. On en déduit donc que les éléments des suites admissibles non nulles sont tous non nuls.

On supposera dans la suite que les suites admissibles sont non nulles, i.e., vu ci-dessus, les suites dont tous les éléments sont non nuls.

Remarque 5.1.2. Remarquons que l'équation (5.2) peut donner des informations sur le comportement asymptotique de la suite. En effet,

(i) Si $C_1 > 1$, alors $C_1^j \to +\infty$ quand $j \to +\infty$.
Or, il est clair que $C_1^j \sigma_1 \leq \sigma_{j+1}$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$ et donc on en déduit que σ converge vers l'infini.

(ii) Si $C_2 < 1$, alors $C_2^j \to 0$ quand $j \to +\infty$.
Or, il est clair que $0 \leq \sigma_{j+1} \leq C_2^j \sigma_1$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$ et donc on en déduit que σ converge vers 0.

Définition 5.1.2. Soit σ une suite admissible, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, on définit

$$\underline{\sigma_j} = \inf_{k>0} \frac{\sigma_{j+k}}{\sigma_k} \quad \text{et} \quad \overline{\sigma_j} = \sup_{k>0} \frac{\sigma_{j+k}}{\sigma_k}.$$

Remarque 5.1.3. Il est évident que $0 < \underline{\sigma_j} \leq \overline{\sigma_j} < +\infty$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$. En effet, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, on a

$$0 < C_1^j = \inf_k \frac{C_1^j \sigma_k}{\sigma_k} \leq \inf_k \frac{\sigma_{j+k}}{\sigma_k} \leq \sup_{k>0} \frac{\sigma_{j+k}}{\sigma_k} \leq \sup_{k>0} \frac{C_2^j \sigma_k}{\sigma_k} = C_2^j < +\infty.$$

Définition 5.1.3. Une suite réelle $(a_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ est dite *sous-additive* si $a_{j+k} \leq a_j + a_k$ pour tous $j, k \in \mathbb{N}_0$.

Proposition 5.1.1. *(Fekete) Si $(a_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ est une suite sous-additive, alors*

$$\lim_{j \to +\infty} \frac{a_j}{j} = \inf_{j \in \mathbb{N}_0} \frac{a_j}{j} \in [-\infty, +\infty[\,.$$

Démonstration. Posons $\gamma = \inf_{j \in \mathbb{N}_0} \frac{a_j}{j}$; il est clair que $\gamma \in [-\infty, +\infty[$.
Supposons d'abord que $\gamma \in \mathbb{R}$ et fixons $\varepsilon > 0$. Par caractérisation de la borne inférieure, il existe $l \in \mathbb{N}_0$ tel que

$$\frac{a_l}{l} \leq \gamma + \varepsilon.$$

On sait, par hypothèse, que pour tous $j, k \in \mathbb{N}_0$,

$$a_{jk} \leq j a_k,$$

et donc

$$\frac{a_{jk}}{jk} \leq \frac{a_k}{k} \quad \forall j, k \in \mathbb{N}_0\,.$$

En fixant $j \in \mathbb{N}_0$ puis $k \in \mathbb{N}_0$ tel que $j < kl$, on a

$$\inf_{m \geq j} \frac{a_m}{m} \leq \frac{a_{kl}}{kl} \leq \frac{a_l}{l} \leq \gamma + \varepsilon.$$

Comme ε est arbitraire, on en déduit que

$$\liminf_j \frac{a_j}{j} \leq \gamma.$$

L'autre inégalité étant directe par définition de γ, il en découle que

$$\liminf_j \frac{a_j}{j} = \gamma.$$

En outre, on sait que tout $m \in \mathbb{N}_0$ peut s'écrire $m = ln_m + r_m$, avec $n_m, r_m \in \mathbb{N}$ et $0 \leq r_m < l$. En posant $a_0 = 0$, on a donc pour tout $m \in \mathbb{N}_0$

$$a_m = a_{ln_m + r_m} \leq a_{ln_m} + a_{r_m} \leq n_m a_l + a_{r_m} \leq n_m l(\gamma + \varepsilon) + a_{r_m},$$

et ainsi,

$$\frac{a_m}{m} \leq (\gamma + \varepsilon)\frac{ln_m}{m} + \max_{0 \leq k < l} \frac{a_k}{m}.$$

On en déduit que pour tout $j \in \mathbb{N}_0$,

$$\sup_{m \geq j} \frac{a_m}{m} \leq \sup_{m \geq j}(\gamma + \varepsilon)\frac{ln_m}{m} + \sup_{m \geq j} \max_{0 \leq k < l} \frac{a_k}{m} \leq \sup_{m \geq j}(\gamma + \varepsilon)\frac{ln_m}{m} + \sup_{m \geq j} \max_{0 \leq k < l} \frac{ka_1}{m}.$$

Montrons que

$$\lim_j \sup_{m \geq j} \max_{0 \leq k < l} \frac{ka_1}{m} \leq 0.$$

Supposons que $a_1 > 0$ (car sinon c'est évident), on a

$$\max_{0 \leq k < l} \frac{ka_1}{m} \leq \frac{la_1}{m} \leq \frac{la_1}{n_m l} = \frac{a_1}{n_m},$$

ce qui suffit puisque si j tend vers $+\infty$, alors m et donc n_m tendent vers $+\infty$ également.
Montrons aussi que

$$\lim_j \sup_{m \geq j} \left((\gamma + \varepsilon)\frac{ln_m}{m} \right) \leq \gamma + \varepsilon.$$

C'est direct si $\gamma + \varepsilon > 0$ puisque $\frac{ln_m}{m} \leq 1$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$.
Si $\gamma + \varepsilon \leq 0$, cela résulte du fait que

$$(\gamma + \varepsilon)\frac{ln_m}{m} \leq (\gamma + \varepsilon)\frac{ln_m}{l(n_m + 1)} = (\gamma + \varepsilon)\frac{n_m}{n_m + 1},$$

où la dernière expression tend vers $\gamma + \varepsilon$ quand j tend vers $+\infty$ puisqu'alors n_m tend vers $+\infty$ également.
Au vu des deux derniers points établis, on a donc montré que

$$\lim_j \sup_{m \geq j} \frac{a_m}{m} \leq \gamma + \varepsilon.$$

Au final, on obtient ainsi

$$\limsup_j \frac{a_j}{j} \leq \gamma + \varepsilon = \liminf_j \frac{a_j}{j} + \varepsilon,$$

et donc puisque ε est arbitraire,

$$\lim_j \frac{a_j}{j} = \gamma = \inf_{j\in\mathbb{N}_0} \frac{a_j}{j}.$$

Il reste à considérer le cas $\gamma = -\infty$, il suffit donc juste de montrer que

$$\limsup_j \frac{a_j}{j} = -\infty$$

Comme $\gamma = -\infty$, pour tout $N > 0$, il existe $l \in \mathbb{N}_0$ tel que $\frac{a_l}{l} \leq -N$.
Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, on a

$$\frac{a_{kl}}{kl} \leq \frac{a_l}{l} \leq -N.$$

Comme précédemment, tout $m \in \mathbb{N}_0$ peut s'écrire $m = ln_m + r_m$, avec $n_m, r_m \in \mathbb{N}$ et $0 \leq r_m < l$. En posant $a_0 = 0$, on en déduit que

$$\sup_{m\geq j} \frac{a_m}{m} \leq \sup_{m\geq j} \frac{a_{ln_m}}{m} + \sup_{m\geq j} \frac{a_{r_m}}{m} \leq \sup_{m\geq j} \frac{-Nln_m}{m} + \sup_{m\geq j} \frac{r_m a_1}{m} \leq \sup_{m\geq j} \frac{-Nln_m}{l(n_m+1)} + \sup_{m\geq j} \frac{r_m a_1}{m}.$$

Il en découle, en procédant comme ci-dessus, que

$$\lim_j \sup_{m\geq j} \frac{a_m}{m} \leq -N \quad \forall N > 0,$$

d'où la conclusion. $\square$

Proposition 5.1.2. *Si la suite σ est admissible alors la suite $(\log_2(\overline{\sigma_j}))_{j\in\mathbb{N}_0}$ est sous-additive.*

Démonstration. Soient $j, k \in \mathbb{N}_0$, on a

$$\begin{aligned}\overline{\sigma_{j+k}} = \sup_{l>0} \frac{\sigma_{j+k+l}}{\sigma_l} = \sup_{m>k} \frac{\sigma_{j+m}}{\sigma_{m-k}} = \sup_{m>k} \left(\frac{\sigma_{j+m}}{\sigma_{m-k}} \frac{\sigma_m}{\sigma_m}\right) &\leq \sup_{m>k} \frac{\sigma_{j+m}}{\sigma_m} \sup_{m>k} \frac{\sigma_m}{\sigma_{m-k}} \\ &\leq \sup_{m>0} \frac{\sigma_{j+m}}{\sigma_m} \sup_{n>0} \frac{\sigma_{n+k}}{\sigma_n} \\ &= \overline{\sigma_j}\,\overline{\sigma_k}.\end{aligned}$$

On en déduit, au vu des propriétés classiques du $\log_2$, que

$$\log_2(\overline{\sigma_{j+k}}) \leq \log_2(\overline{\sigma_j}\,\overline{\sigma_k}) = \log_2(\overline{\sigma_j}) + \log_2(\overline{\sigma_k}),$$

d'où la conclusion. $\square$

Définition 5.1.4. Une suite réelle $(a_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ est dite *sur-additive* si $a_{j+k} \geq a_j + a_k$ pour tous $j, k \in \mathbb{N}_0$.

Proposition 5.1.3. *Si $(a_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ est une suite sur-additive, alors*

$$\lim_{j\to+\infty}\frac{a_j}{j}=\sup_{j\in\mathbb{N}_0}\frac{a_j}{j}\in\,]-\infty,+\infty]\,.$$

Démonstration. La preuve est similaire à celle réalisée pour le lemme de Fekete. □

Proposition 5.1.4. *Si la suite σ est admissible alors la suite $(\log_2(\underline{\sigma_j}))_{j\in\mathbb{N}_0}$ est sur-additive.*

Démonstration. Soient $j,k\in\mathbb{N}_0$, on a

$$\begin{aligned}\underline{\sigma_{j+k}}=\inf_{l>0}\frac{\sigma_{j+k+l}}{\sigma_l}=\inf_{m>k}\frac{\sigma_{j+m}}{\sigma_{m-k}}=\inf_{m>k}\left(\frac{\sigma_{j+m}}{\sigma_{m-k}}\frac{\sigma_m}{\sigma_m}\right)&\geq\inf_{m>k}\frac{\sigma_{j+m}}{\sigma_m}\ \inf_{m>k}\frac{\sigma_m}{\sigma_{m-k}}\\&\geq\inf_{m>0}\frac{\sigma_{j+m}}{\sigma_m}\ \inf_{n>0}\frac{\sigma_{n+k}}{\sigma_n}\\&=\underline{\sigma_j}\,\underline{\sigma_k}.\end{aligned}$$

On en déduit, au vu des propriétés classiques du $\log_2$, que

$$\log_2(\underline{\sigma_{j+k}})\geq\log_2(\underline{\sigma_j}\,\underline{\sigma_k})=\log_2(\underline{\sigma_j})+\log_2(\underline{\sigma_k}),$$

d'où la conclusion. □

Au vu des propositions 5.1.1 et 5.1.3, la définition suivante fait sens.

Définition 5.1.5. Soit σ une suite admissible.
On définit l'*indice de Boyd inférieur* de σ par

$$\underline{s}(\sigma)=\sup_{j\in\mathbb{N}_0}\frac{\log_2\underline{\sigma_j}}{j}=\lim_{j\to+\infty}\frac{\log_2\underline{\sigma_j}}{j}.$$

De même, on définit l'*indice de Boyd supérieur* de σ par

$$\overline{s}(\sigma)=\inf_{j\in\mathbb{N}_0}\frac{\log_2\overline{\sigma_j}}{j}=\lim_{j\to+\infty}\frac{\log_2\overline{\sigma_j}}{j}.$$

Remarque 5.1.4. Il est évident que $-\infty<\underline{s}(\sigma)\leq\overline{s}(\sigma)<+\infty$. En effet, on a par exemple

$$\log_2(\underline{\sigma_1})\leq\underline{s}(\sigma)=\lim_{j\to+\infty}\frac{\log_2\underline{\sigma_j}}{j}\leq\lim_{j\to+\infty}\frac{\log_2\overline{\sigma_j}}{j}=\overline{s}(\sigma)\leq\log_2(\overline{\sigma_1}).$$

Remarque 5.1.5. Cette définition n'est pas sans rappeler la définition 4.1.2. En effet, pour tout $j\in\mathbb{N}_0$, on a

$$\frac{\log_2\overline{\sigma_j}}{j}=\frac{\log\overline{\sigma_j}}{\log 2^j}.$$

Proposition 5.1.5. *Si σ est une suite admissible et $\varepsilon > 0$, alors il existe des constantes $c_\varepsilon, d_\varepsilon > 0$ telles que*

$$c_\varepsilon\, 2^{(\underline{s}(\sigma)-\varepsilon)j} \leq \underline{\sigma_j} \leq \frac{\sigma_{j+k}}{\sigma_k} \leq \overline{\sigma_j} \leq d_\varepsilon\, 2^{(\overline{s}(\sigma)+\varepsilon)j} \quad \forall j,k \in \mathbb{N}_0\,.$$

Démonstration. On sait déjà que $\underline{\sigma_j} \leq \frac{\sigma_{j+k}}{\sigma_k} \leq \overline{\sigma_j} \quad \forall j,k \in \mathbb{N}_0$.
Par définition de $\underline{s}(\sigma)$, il existe $J \in \mathbb{N}_0$ tel que pour tout $j \geq J$,

$$0 \leq \underline{s}(\sigma) - \frac{\log_2 \underline{\sigma_j}}{j} \leq \varepsilon,$$

et donc pour tout $j \geq J$,

$$2^{(\underline{s}(\sigma)-\varepsilon)j} \leq \underline{\sigma_j}.$$

Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, pour tout $j < J$, il existe $a_j > 0$ tel que

$$a_j\, 2^{(\underline{s}(\sigma)-\varepsilon)j} \leq \underline{\sigma_j}.$$

En posant $c_\varepsilon = \min\{a_1, ..., a_{J-1}, 1\}$, on obtient donc la première inégalité.
En procédant de même pour $\overline{s}(\sigma)$, il existe $J' \in \mathbb{N}_0$ tel que pour tout $j \geq J'$,

$$0 \leq \frac{\log_2 \overline{\sigma_j}}{j} - \overline{s}(\sigma) \leq \varepsilon,$$

et donc pour tout $j \geq J'$,

$$\overline{\sigma_j} \leq 2^{(\overline{s}(\sigma)+\varepsilon)j}.$$

Pour tout $j < J'$, il existe $a'_j > 0$ tel que

$$\overline{\sigma_j} \leq a'_j\, 2^{(\overline{s}(\sigma)+\varepsilon)j}.$$

En posant $d_\varepsilon = \max\{a'_1, ..., a'_{J'-1}, 1\}$, on obtient donc la dernière inégalité. □

Corollaire 5.1.1. *Soit σ une suite admissible,*
(i) Si $\overline{s}(\sigma) < 0$, alors σ converge vers 0.
(ii) Si $\underline{s}(\sigma) > 0$, alors σ converge vers l'infini.

Démonstration. (i) Fixons $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < -\overline{s}(\sigma)$. Il existe une constante $d_\varepsilon > 0$ telle que, en prenant $k = 1$ dans la proposition précédente,

$$0 \leq \sigma_{j+1} \leq d_\varepsilon 2^{(\overline{s}(\sigma)+\varepsilon)j} \sigma_1 \quad \forall j \in \mathbb{N}_0,$$

et la conclusion en découle vu que le membre de droite tend vers 0 quand $j \to +\infty$.
(ii) Fixons $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < \underline{s}(\sigma)$. Il existe une constante $c_\varepsilon > 0$ telle que, en prenant $k = 1$ dans la proposition précédente,

$$c_\varepsilon 2^{(\underline{s}(\sigma)-\varepsilon)j} \sigma_1 \leq \sigma_{j+1} \quad \forall j \in \mathbb{N}_0,$$

et la conclusion en découle vu que le membre de gauche tend vers l'infini quand $j \to +\infty$. □

Les suites admissibles vérifient un certain nombre de propriétés intéressantes.

Proposition 5.1.6. *La somme de deux suites admissibles est une suite admissible.*

Démonstration. Si σ et δ sont deux suites admissibles, alors il existe des constantes $C_1^{(\sigma)}, C_2^{(\sigma)}, C_1^{(\delta)}, C_2^{(\delta)} > 0$ telles que, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$,

$$C_1^{(\sigma)}\sigma_j \leq \sigma_{j+1} \leq C_2^{(\sigma)}\sigma_j \ \text{ et } \ C_1^{(\delta)}\sigma_j \leq \delta_{j+1} \leq C_2^{(\delta)}\delta_j.$$

Posons $C_1^{(\sigma+\delta)} = \min\{C_1^{(\sigma)}, C_1^{(\delta)}\}$ et $C_2^{(\sigma+\delta)} = \max\{C_2^{(\sigma)}, C_2^{(\delta)}\}$. Si $j \in \mathbb{N}_0$, on a alors

$$C_1^{(\sigma+\delta)}(\sigma_j + \delta_j) \leq \sigma_{j+1} + \delta_{j+1} \leq C_2^{(\sigma+\delta)}(\sigma_j + \delta_j),$$

c'est-à-dire,

$$C_1^{(\sigma+\delta)}(\sigma+\delta)_j \leq (\sigma+\delta)_{j+1} \leq C_2^{(\sigma+\delta)}(\sigma+\delta)_j,$$

d'où la conclusion. □

Proposition 5.1.7. *Soient σ une suite admissible et $r > 0$, la suite $r\sigma = (r\sigma_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ est également admissible.*

Démonstration. Il existe, par hypothèse, des constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$,

$$C_1\sigma_j \leq \sigma_{j+1} \leq C_2\sigma_j.$$

Il est alors clair que $r\sigma$ est admissible en prenant les constantes rC_1 et rC_2. □

Proposition 5.1.8. *Soient σ, δ des suites admissibles, la suite $\sigma\delta = (\sigma_j\delta_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ est également admissible. De plus, les inégalités suivantes sont vérifiées :*

$$\underline{s}(\sigma\delta) \geq \underline{s}(\sigma) + \underline{s}(\delta) \ \text{ et } \ \overline{s}(\sigma\delta) \leq \overline{s}(\sigma) + \overline{s}(\delta).$$

Démonstration. Il existe, par hypothèse, des constantes $C_1^{(\sigma)}, C_2^{(\sigma)}, C_1^{(\delta)}, C_2^{(\delta)} > 0$ telles que, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$,

$$C_1^{(\sigma)}\sigma_j \leq \sigma_{j+1} \leq C_2^{(\sigma)}\sigma_j \text{ et } C_1^{(\delta)}\sigma_j \leq \delta_{j+1} \leq C_2^{(\delta)}\delta_j.$$

La suite $\sigma\delta$ est alors admissible en prenant les constantes $C_1^{(\sigma\delta)} := C_1^{(\sigma)}C_1^{(\delta)}$ et $C_2^{(\sigma\delta)} := C_2^{(\sigma)}C_2^{(\delta)}$.

Montrons la première inégalité. Pour tout $j \in \mathbb{N}_0$,

$$\underline{(\sigma\delta)_j} = \inf_{k>0} \frac{\sigma_{j+k}\delta_{j+k}}{\sigma_k\delta_k} \geq \inf_{k>0} \frac{\sigma_{j+k}}{\sigma_k} \inf_{k>0} \frac{\delta_{j+k}}{\delta_k} = \underline{\sigma_j}\underline{\delta_j},$$

et donc

$$\frac{\log_2 \underline{(\sigma\delta)_j}}{j} \geq \frac{\log_2 \underline{\sigma_j}}{j} + \frac{\log_2 \underline{\delta_j}}{j} \quad \forall j \in \mathbb{N}_0,$$

d'où la conclusion.
Pour la deuxième inégalité, on procède de même. Pour tout $j \in \mathbb{N}_0$,

$$\overline{(\sigma\delta)}_j = \sup_{k>0} \frac{\sigma_{j+k}\delta_{j+k}}{\sigma_k\delta_k} \leq \sup_{k>0} \frac{\sigma_{j+k}}{\sigma_k} \sup_{k>0} \frac{\delta_{j+k}}{\delta_k} = \overline{\sigma_j}\overline{\delta_j},$$

et donc

$$\frac{\log_2 \overline{(\sigma\delta)}_j}{j} \leq \frac{\log_2 \overline{\sigma_j}}{j} + \frac{\log_2 \overline{\delta_j}}{j} \quad \forall j \in \mathbb{N}_0,$$

d'où la conclusion. □

Lemme 5.1.1. *Soit σ une suite admissible. Si $x, y \in \mathbb{R}$ sont tels que*

$$c_\varepsilon\, 2^{(x-\varepsilon)j} \leq \underline{\sigma_j} \leq \frac{\sigma_{j+k}}{\sigma_k} \leq \overline{\sigma_j} \leq d_\varepsilon\, 2^{(y+\varepsilon)j} \quad \forall j, k \in \mathbb{N}_0,\ \forall \varepsilon > 0,$$

où c_ε, d_ε sont des constantes strictement positives pour chaque $\varepsilon > 0$, alors $x \leq \underline{s}(\sigma)$ et $y \geq \overline{s}(\sigma)$.

Démonstration. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des constantes $c_\varepsilon, d_\varepsilon > 0$ telles que, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$,

$$x \leq \frac{\log_2 \underline{\sigma_j}}{j} - \frac{\log_2 c_\varepsilon}{j} + \varepsilon \ \text{ et } \ y \geq \frac{\log_2 \overline{\sigma_j}}{j} - \frac{\log_2 d_\varepsilon}{j} - \varepsilon.$$

En faisant tendre j vers $+\infty$, on obtient

$$x \leq \underline{s}(\sigma) + \varepsilon \ \text{ et } \ y \geq \overline{s}(\sigma) - \varepsilon,$$

d'où la conclusion puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire. □

Proposition 5.1.9. *La suite $\sigma^a = (\sigma_j^a)_{j\in\mathbb{N}_0}$, où $a \in \mathbb{R}$, est admissible. De plus on a les égalités suivantes :*
(i) Si $a \geq 0$, $\underline{s}(\sigma^a) = a\underline{s}(\sigma)$ et $\overline{s}(\sigma^a) = a\overline{s}(\sigma)$.
(ii) Si $a \leq 0$, $\underline{s}(\sigma^a) = a\overline{s}(\sigma)$ et $\overline{s}(\sigma^a) = a\underline{s}(\sigma)$.

Démonstration. Il existe par hypothèse des constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$,

$$C_1\sigma_j \leq \sigma_{j+1} \leq C_2\sigma_j.$$

Trois cas sont possibles.
• Si $a = 0$, alors $\sigma^a = (1)_{j\in\mathbb{N}_0}$ et $\underline{s}(\sigma^a) = \overline{s}(\sigma^a) = 0$ et toutes les affirmations sont évidentes.
• Si $a > 0$, on a

$$C_1^a\sigma_j^a \leq \sigma_{j+1}^a \leq C_2^a\sigma_j^a \quad \forall j \in \mathbb{N}_0,$$

et donc σ^a est admissible. On doit de plus vérifier le point (i).
Grâce à la proposition 5.1.5, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des constantes $c_\varepsilon, d_\varepsilon, c_\varepsilon^{(a)}, d_\varepsilon^{(a)} > 0$ telles que

$$c_\varepsilon 2^{(\underline{s}(\sigma)-\varepsilon)j} \leq \underline{\sigma_j} \leq \frac{\sigma_{j+k}}{\sigma_k} \leq \overline{\sigma_j} \leq d_\varepsilon 2^{(\overline{s}(\sigma)+\varepsilon)j} \quad \forall j, k \in \mathbb{N}_0,$$

et
$$c_\varepsilon^{(a)} 2^{(\underline{s}(\sigma^a)-\varepsilon)j} \leq \underline{\sigma_j^a} \leq \frac{\sigma_{j+k}^a}{\sigma_k^a} \leq \overline{\sigma_j^a} \leq d_\varepsilon^{(a)} 2^{(\overline{s}(\sigma^a)+\varepsilon)j} \quad \forall j,k \in \mathbb{N}_0 \,.$$
En élevant la première série d'inégalités à la puissance a et la deuxième à la puissance $\frac{1}{a}$, on obtient
$$c_\varepsilon^a 2^{(a\underline{s}(\sigma)-a\varepsilon)j} \leq \underline{\sigma_j^a} \leq \frac{\sigma_{j+k}^a}{\sigma_k^a} \leq \overline{\sigma_j^a} \leq d_\varepsilon^a 2^{(a\overline{s}(\sigma)+a\varepsilon)j} \quad \forall j,k \in \mathbb{N}_0,$$
et
$$(c_\varepsilon^{(a)})^{1/a} 2^{(\underline{s}(\sigma^a)/a-\varepsilon/a)j} \leq \underline{\sigma_j} \leq \frac{\sigma_{j+k}}{\sigma_k} \leq \overline{\sigma_j} \leq (d_\varepsilon^{(a)})^{1/a} 2^{(\overline{s}(\sigma^a)/a+\varepsilon/a)j} \quad \forall j,k \in \mathbb{N}_0 \,.$$
Grâce au lemme précédent, on en déduit que
$$a\underline{s}(\sigma) \leq \underline{s}(\sigma^a) \text{ et } a\overline{s}(\sigma) \geq \overline{s}(\sigma^a),$$
et
$$\frac{\underline{s}(\sigma^a)}{a} \leq \underline{s}(\sigma) \text{ et } \frac{\overline{s}(\sigma^a)}{a} \geq \overline{s}(\sigma),$$
d'où le point (i).

• Si $a < 0$, on a
$$C_2^a \sigma_j^a \leq \sigma_{j+1}^a \leq C_1^a \sigma_j^a \quad \forall j \in \mathbb{N}_0,$$
et donc σ^a est admissible. On vérifie le point (ii) de la même manière que pour le point (i). □

Donnons deux résultats qui nous serviront pour les espaces $T_\sigma^p(x_0)$.

Proposition 5.1.10. *Soit σ une suite admissible et soit $m \in \mathbb{Z}$. Si $\underline{s}\,(\sigma^{-1}) > m$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que*
$$\sum_{j=J}^{+\infty} 2^{jm}\, \sigma_j \leq C\, 2^{Jm}\, \sigma_J \quad \forall J \in \mathbb{N}_0 \,.$$

Démonstration. Soit $J \in \mathbb{N}_0$ et $\varepsilon > 0$ tel que
$$\underline{s}(\sigma^{-1}) - \varepsilon > m.$$
Au vu de la proposition 5.1.5, on sait qu'il existe une constante d_ε telle que
$$\frac{\sigma_{J+k}}{\sigma_J} \leq d_\varepsilon\, 2^{(\overline{s}(\sigma)+\varepsilon)k}.$$
De plus, on sait que $\overline{s}(\sigma) = -\underline{s}\,(\sigma^{-1})$. En prenant $C = \max\{1, d_\varepsilon\}$, on a donc pour tous $k \in \mathbb{N}$, $J \in \mathbb{N}_0$,
$$\frac{\sigma_{J+k}}{\sigma_J} \leq C\, 2^{-(\underline{s}(\sigma^{-1})-\varepsilon)k}.$$

Dès lors, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, on a

$$2^{-Jm}\,\sigma_J^{-1}\sum_{j=J}^{+\infty} 2^{jm}\,\sigma_j = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{km}\,\frac{\sigma_{J+k}}{\sigma_J} \leq C\sum_{k=0}^{+\infty} 2^{(m-(\underline{s}(\sigma^{-1})-\varepsilon))k} \leq C'.$$

□

On procède de même pour démontrer le résultat suivant.

Proposition 5.1.11. *Soit σ une suite admissible et soit $m \in \mathbb{Z}$. Si $\overline{s}\left(\sigma^{-1}\right) < m$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\sum_{j=1}^{J} 2^{jm}\,\sigma_j \leq C\,2^{Jm}\,\sigma_J \quad \forall J \in \mathbb{N}_0\,.$$

5.2 Lien aves les fonctions de Boyd

Nous allons voir dans cette section que les fonctions de Boyd et les suites admissibles sont intimement liées.

Proposition 5.2.1. *Soit $\phi \in \mathcal{B}$, les suites $\delta = (\phi(2^j))_{j\in\mathbb{N}_0}$ et $\sigma = (\phi(2^{-j}))_{j\in\mathbb{N}_0}$ sont admissibles.*

Démonstration. On pose $C_1 = \left(\overline{\phi}\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{-1}$ et $C_2 = \overline{\phi}(2)$. On sait alors que $C_1, C_2 > 0$ et si $j \in \mathbb{N}_0$, on a

$$\frac{\phi(2^j)}{\phi(2^{j+1})} = \frac{\phi(2^{-1}2^{j+1})}{\phi(2^{j+1})} \leq \sup_{y>0}\frac{\phi(2^{-1}y)}{\phi(y)} = C_1^{-1}$$

et

$$\frac{\phi(2^{j+1})}{\phi(2^j)} = \frac{\phi(2\,2^j)}{\phi(2^j)} \leq \sup_{y>0}\frac{\phi(2y)}{\phi(y)} = C_2.$$

On en déduit donc que

$$C_1\phi(2^j) \leq \phi(2^{j+1}) \leq C_2\phi(2^j) \quad \forall j \in \mathbb{N}_0,$$

et donc la suite $(\phi(2^j))_{j\in\mathbb{N}_0}$ est admissible.
On procède de même pour montrer que la suite $(\phi(2^{-j}))_{j\in\mathbb{N}_0}$ est admissible. □

La proposition suivante est classique ([51],[47]) et se prouve en démontrant d'abord le corollaire 5.2.1 ([51]).
On fait ici le chemin inverse en adaptant la preuve puisque c'est la caractérisation $\sigma_j = \phi\left(2^{-j}\right)$ qui nous servira.

Proposition 5.2.2. *Soit σ une suite admissible, il existe $\phi \in \mathcal{B}$ telle que $\phi\left(2^{-j}\right) = \sigma_j$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$.*

Démonstration. Comme σ est admissible, on sait qu'il existe $C_1, C_2 > 0$ telles que

$$C_1\,\sigma_j \leq \sigma_{j+1} \leq C_2\,\sigma_j \quad \forall j \in \mathbb{N}_0\,.$$

En posant $\sigma_0 = 1$, on définit

$$\phi :]0,+\infty[\, \to\,]0,+\infty[\, : x \mapsto \begin{cases} \frac{(\sigma_{j+1}-\sigma_j)(1-2^j x)}{2^j x} + \sigma_j & \text{si } x \in \left]2^{-(j+1)}, 2^{-j}\right],\ j \in \mathbb{N}, \\ 1 & \text{si } x \in]1,+\infty[\,. \end{cases}$$

Il est clair que $\phi(2^{-j}) = \sigma_j$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$.

Pour montrer que $\phi \in \mathcal{B}$, il faut vérifier trois points.

(i) On a $\phi(1) = \phi(2^{-0}) = \sigma_0 = 1$.

(ii) Il est clair que pour montrer que ϕ est continue, il suffit de montrer que ϕ est continue en les points $2^{-(j+1)}$, $j \in \mathbb{N}$ et 1. Cela est direct car si $j \in \mathbb{N}$, on a

$$\lim_{x \to \left(2^{-(j+1)}\right)^+} \phi(x) = \frac{(\sigma_{j+1}-\sigma_j)(1-2^j 2^{-j-1})}{2^j 2^{-j-1}} + \sigma_j = \sigma_{j+1} = \phi\left(2^{-(j+1)}\right),$$

et

$$\lim_{x \to 1^+} \phi(x) = 1 = \phi(1).$$

(iii) Remarquons que si $x \in \left]2^{-(j+1)}, 2^{-j}\right]$ avec $j \in \mathbb{N}$, alors $\phi(x)$ est compris entre σ_j et σ_{j+1} : en effet, c'est direct vu la forme de ϕ, il suffit de séparer en 2 cas : $\sigma_j \leq \sigma_{j+1}$ et $\sigma_j \geq \sigma_{j+1}$.

Soit $x \in]0,+\infty[$, on distingue alors deux cas.

- Si $x \in]0,1]$, il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $x \in \left]2^{-(j+1)}, 2^{-j}\right]$. On distingue à nouveau deux cas.
  - Si $y \in]0,1]$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $y \in \left]2^{-(k+1)}, 2^{-k}\right]$. Dans ce cas, $\phi(y) \geq \sigma_l$, où l vaut k ou $k+1$ et on a aussi

$$xy \in \left]2^{-(j+k+2)}, 2^{-(j+k)}\right].$$

On en tire que

$$\phi(xy) \in [\min\{\sigma_{j+k}, \sigma_{j+k+1}, \sigma_{j+k+2}\}, \max\{\sigma_{j+k}, \sigma_{j+k+1}, \sigma_{j+k+2}\}]\,.$$

Ainsi,

$$\frac{\phi(xy)}{\phi(y)} \leq \frac{\max\{\sigma_{j+k}, \sigma_{j+k+1}, \sigma_{j+k+2}\}}{\min\{\sigma_k, \sigma_{k+1}\}} =: \beta,$$

où

$$\beta \in \left\{\frac{\sigma_{j+k}}{\sigma_k}, \frac{\sigma_{j+k}}{\sigma_{k+1}}, \frac{\sigma_{j+k+1}}{\sigma_k}, \frac{\sigma_{j+k+1}}{\sigma_{k+1}}, \frac{\sigma_{j+k+2}}{\sigma_k}, \frac{\sigma_{j+k+2}}{\sigma_{k+1}}\right\}.$$

Séparons en plusieurs cas :

- si $(j,k) = (0,0)$, alors $\beta \leq \max\left\{1, \sigma_1^{-1}, \sigma_1, \sigma_2, C_2\right\}$,
- si $(j,k) \in \{0\} \times \mathbb{N}_0$, alors $\beta \leq \max\left\{1, C_1^{-1}, C_2, C_2^2\right\}$,
- si $(j,k) \in \mathbb{N}_0 \times \{0\}$, alors $\beta \leq \max\left\{\sigma_j, C_2^{j-1}, \sigma_{j+1}, C_2^j, \sigma_{j+2}, C_2^{j+1}\right\}$,
- si $(j,k) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, alors $\beta \leq \max\left\{C_2^j, C_2^{j-1}, C_2^{j+1}, C_2^{j+2}\right\}$.

On note alors C_1' la constante dépendant de j (et donc de x) suivante :

$$C_1' = \begin{cases} \max\left\{1, \sigma_1^{-1}, \sigma_1, \sigma_2, C_2, C_1^{-1}, C_2^2\right\} & \text{si } j = 0, \\ \max\left\{\sigma_j, C_2^{j-1}, \sigma_{j+1}, C_2^j, \sigma_{j+2}, C_2^{j+1}, C_2^{j+2}\right\} & \text{si } j \geq 1. \end{cases}$$

· Si $y \in]1, +\infty[$, alors $\phi(y) = 1$ et $xy > 2^{-(j+1)}$.
On note alors C_2' la constante dépendant de j (et donc de x) suivante :

$$C_2' = \max\{1, \sigma_1, ..., \sigma_{j+1}\},$$

et on a ainsi

$$\frac{\phi(xy)}{\phi(y)} = \phi(xy) \leq C_2'.$$

• Si $x \in]1, +\infty[$, il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $x \in]2^j, 2^{j+1}]$. On distingue à nouveau deux cas.

· Si $y \in]0, 1]$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $y \in \left]2^{-(k+1)}, 2^{-k}\right]$. Dans ce cas, $\phi(y) \geq \sigma_l$, où l vaut k ou $k+1$ et on a aussi

$$xy \in \left]2^{j-(k+1)}, 2^{j+1-k}\right] = \left]2^{-(k+1-j)}, 2^{-(k-j-1)}\right].$$

⋆ Si $j - (k+1) \geq 0$, alors $\phi(xy) = 1$ et on a $y \in]2^{-j}, 1]$. On en tire que

$$\frac{\phi(xy)}{\phi(y)} = \frac{1}{\phi(y)} \leq \max\left\{1, \sigma_1^{-1}, ..., \sigma_j^{-1}\right\} =: \alpha_1.$$

⋆ Si $j \leq k$, en posant $\sigma_{-1} = 1$, on a

$$\phi(xy) \in \left[\min\left\{\sigma_{k-j-1}, \sigma_{k-j}, \sigma_{k-j+1}\right\}, \max\left\{\sigma_{k-j-1}, \sigma_{k-j}, \sigma_{k-j+1}\right\}\right].$$

Ainsi,

$$\frac{\phi(xy)}{\phi(y)} \leq \frac{\max\left\{\sigma_{k-j-1}, \sigma_{k-j}, \sigma_{k-j+1}\right\}}{\min\left\{\sigma_k, \sigma_{k+1}\right\}} =: \beta,$$

où

$$\beta \in \left\{\frac{\sigma_{k-j-1}}{\sigma_k}, \frac{\sigma_{k-j-1}}{\sigma_{k+1}}, \frac{\sigma_{k-j}}{\sigma_k}, \frac{\sigma_{k-j}}{\sigma_{k+1}}, \frac{\sigma_{k-j+1}}{\sigma_k}, \frac{\sigma_{k-j+1}}{\sigma_{k+1}}\right\}.$$

Séparons en plusieurs cas :

- si $(j,k) = (0,0)$, alors $\beta \leq \max\left\{1, \sigma_1, \sigma_1^{-1}\right\} =: \alpha_2$,
- si $(j,k) \in \Delta_{\mathbb{N}_0}$, alors $\beta \leq \max\left\{\sigma_j^{-1}, \sigma_{j+1}^{-1}, C_1^{-(j-1)}, C_1^{-j}\right\} =: \alpha_3$,

- si $(j,k)=(0,1)$, alors $\beta \leq \max\left\{\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, 1, C_1^{-1}, C_2\right\} =: \alpha_4$,
- si $(j,k-1)\in\Delta_{\mathbb{N}_0}$, alors $\beta \leq \max\left\{\sigma_{j+1}^{-1}, \sigma_{j+2}^{-1}, C_1^{-(j-1)}, C_1^{-j}, C_1^{-(j+1)}\right\} =: \alpha_5$,
- si $(j,k)\in\{0\}\times\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, alors $\beta \leq \max\left\{C_1^{-1}, C_1^{-2}, 1, C_2\right\} =: \alpha_6$,
- si $j\geq 1$ et $j+2\leq k$, alors $\beta \leq \max\left\{C_1^{-(j-1)}, C_1^{-j}, C_1^{-(j+1)}, C_1^{-(j+2)}\right\} =: \alpha_7$.

On note alors C_3' la constante dépendant de j (et donc de x) suivante :

$$C_3' = \max_{m=1}^{7} \alpha_m.$$

· Si $y\in\,]1,+\infty[$, alors

$$\frac{\phi(xy)}{\phi(y)} = \frac{1}{1} = 1.$$

Au final, on a

$$\overline{\phi}(x) = \sup_{y>0} \frac{\phi(xy)}{\phi(y)} \leq \max\{C_1', C_2', C_3', 1\} < +\infty,$$

d'où la conclusion. □

Corollaire 5.2.1. *Soit σ une suite admissible, il existe $\phi\in\mathcal{B}$ telle que $\phi(2^j)=\sigma_j$ pour tout $j\in\mathbb{N}_0$.*

Démonstration. Cela résulte du fait que si $\phi\in\mathcal{B}$, alors

$$x\in\,]0,+\infty[\,\mapsto \phi\left(\frac{1}{x}\right)$$

est dans $\mathcal{B}$ également. □

5.3 Espaces $T^p_\sigma(x_0)$

On adapte la définition des espaces $T^p_\phi(x_0)$. Les fonctions considérées ne nécessiteront que d'être dans $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ puisqu'on ne s'intéressera pas à établir une norme sur ces espaces (si l'on supposait avoir des fonctions de $L^p(\mathbb{R}^d)$, on pourrait définir une norme de la même façon que pour les espaces $T^p_\phi(x_0)$ pour en faire des espaces de Banach).
On considère les suites admissibles indicées sur $\mathbb{N}$ et non plus $\mathbb{N}_0$ pour faire directement les liens avec les échelles des coefficients en ondelettes.

Définition 5.3.1. Soient $r>0$, $x_0, h\in\mathbb{R}^d$ et σ une suite admissible, on pose

$$B_{h,\sigma}(x_0,r) = \left\{x\in\mathbb{R}^d \mid [x, x+(\lfloor\overline{s}(\sigma)\rfloor+1)h] \subseteq B(x_0,r)\right\}.$$

Définition 5.3.2. Soient $p\in[1,+\infty]$, $f\in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, $x_0\in\mathbb{R}^d$ et σ une suite admissible tels que $\underline{s}(\sigma) > -d/p$. On dit que $f\in T^p_\sigma(x_0)$ s'il existe une constante $C>0$ telle que

$$\sigma_j\, 2^{jd/p} \sup_{|h|\leq 2^{-j}} \|\Delta_h^{\lfloor\overline{s}(\sigma)\rfloor+1} f\|_{L^p(B_{h,\sigma}(x_0,2^{-j}))} \leq C \quad \forall j\in\mathbb{N}.$$

Remarque 5.3.1. On peut facilement généraliser ces espaces en demandant que la suite

$$\left(\sigma_j\, 2^{jd/p} \sup_{|h|\leq 2^{-j}} \|\Delta_h^{\lfloor \overline{s}(\sigma)\rfloor+1} f\|_{L^p(B_{h,\sigma}(x_0,2^{-j}))}\right)_j$$

soit dans l^q, pour un $q \in [1,+\infty]$. Les preuves sont similaires, en remplaçant la plupart des constantes apparaissant dans les preuves par des éléments de suites de l^q. On peut consulter [53]).

On a une autre caractérisation de ces espaces. On utilise pour cela le théorème de Whitney (car Whitney l'avait établi en dimension 1 pour $p = +\infty$), on peut par exemple consulter [15].

Proposition 5.3.1. *Soient $p \in [1,+\infty]$, $n \in \mathbb{N}_0$ et $f \in L^p(\Omega)$, où Ω est un convexe de $\mathbb{R}^d$. Alors*

$$\inf_{P\in\mathbb{P}^d_{n-1}} \|f-P\|_{L^p(\Omega)} \leq C \sup_h \|\Delta^n_h f\|_{L^p(E_{n,h})},$$

où $E_{n,h}$ est l'ensemble sur lequel $\Delta^n_h f$ est défini, $C > 0$ est une constante qui ne dépend que de n et d et $\mathbb{P}^d_{n-1}$ désigne l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}^d$ de degré au plus $n-1$.

Proposition 5.3.2. *Soient $p \in [1,+\infty]$, $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^d)$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et σ une suite admissible telle que $\overline{s}(\sigma) > 0$. Alors $f \in T^p_\sigma(x_0)$ si et seulement s'il existe une suite de polynômes $(P_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de degrés plus petits ou égaux à $\lfloor \overline{s}(\sigma)\rfloor$ et une constante $C' > 0$ tels que*

$$\sigma_j\, 2^{jd/p}\, \|f-P_j\|_{L^p(B(x_0,2^{-j}))} \leq C' \quad \forall j \in \mathbb{N}\,. \tag{5.3}$$

Démonstration.

Pour la condition nécessaire, il suffit d'utiliser le théorème de Whitney ci-dessus.

Pour la condition suffisante, fixons $j \in \mathbb{N}$ et P un polynôme de degré plus petit ou égal à $n := \lfloor \overline{s}(\sigma)\rfloor$. Pour $x, h \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\left|\Delta^{n+1}_h f(x)\right| \leq \left|\Delta^{n+1}_h (f(x)-P(x))\right| \leq C_n \sum_{k=0}^{n+1} |f(x+kh)-P(x+kh)|\,,$$

pour une constante $C_n > 0$. Pour $|h| \leq 2^{-j}$ et $x \in B_h(x_0, 2^{-j})$, on a donc

$$\left\|\Delta^{n+1}_h f\right\|_{L^p(B_{h,\sigma}(x_0,2^{-j}))} \leq C_n\,(n+2)\,\|f-P\|_{L^p(B(x_0,2^{-j}))}.$$

□

Avec des hypothèses supplémentaires, on peut avoir un unique polynôme à la place de la suite de polynômes apparaissant dans la relation (5.3). Pour établir cela, il nous faut des résultats intermédiaires.

Pour le résultat suivant, on peut consulter ([21]).

Proposition 5.3.3. (Inégalité de Markov)
Soient $p \in [1, +\infty]$, $n \in \mathbb{N}$ et $B \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble borné et convexe d'intérieur non vide ; il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à n et pout tout $k \in \{1, ..., d\}$,

$$\|D_k P\|_{L^p(B)} \leq C\,(n+1)^2\,\|P\|_{L^p(B)}.$$

Lemme 5.3.1. *Soient $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $r > 0$, $p \in [1, +\infty]$ et $n \in \mathbb{N}$; il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$, qui dépendent de p et n, telles que pour tout polynôme de degré plus petit ou égal à n,*

$$\|D^\alpha P\|_{L^p(B(x_0,r))} \leq C_1\, r^{-|\alpha|}\, \|P\|_{L^p(B(x_0,r))}$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ et

$$\sup_{x \in B(x_0,r)} |P(x)| \leq C_2\, r^{-d/p}\, \|P\|_{L^p(B(x_0,r))}.$$

Démonstration. Soit P un polynôme de degré plus petit ou égal à n, pour $r > 0$, on pose

$$P_r(y) = P(x_0 + ry).$$

Par changement de variable et en appliquant l'inégalité de Markov au polynôme P_r, on trouve que

$$\begin{aligned}
\|D_k P\|_{L^p(B(x_0,r))} = r^{d/p} \|(D_k P)(x_0 + r\cdot)\|_{L^p(B(0,1))} &= r^{d/p}\, r^{-1}\, \|D_k P_r\|_{L^p(B(0,1))} \\
&\leq C\, r^{d/p}\, r^{-1}\, \|P_r\|_{L^p(B(0,1))} \\
&= C\, r^{-1}\, \|P\|_{L^p(B(x_0,r))}\,.
\end{aligned}$$

Si $\alpha \in \mathbb{N}^d$, il existe donc une constante $C_1 > 0$ telle que

$$\|D^\alpha P\|_{L^p(B(x_0,r))} \leq C_1\, r^{-|\alpha|}\, \|P\|_{L^p(B(x_0,r))}.$$

La deuxième assertion résulte de la première en utilisant la classique inégalité de Sobolev (voir [2] par exemple) :

$$\begin{aligned}
\sup_{x \in B(x_0,r)} |P(x)| &= \sup_{y \in B(0,1)} |P_r(y)| \\
&\leq C' \sum_{|\alpha| \leq n} \|D^\alpha P_r\|_{L^p(B(0,1))} \\
&= C' \sum_{|\alpha| \leq n} r^{|\alpha|} \|(D^\alpha P)(x_0 + r\cdot)\|_{L^p(B(0,1))} \\
&= C' \sum_{|\alpha| \leq n} r^{|\alpha| - d/p} \|D^\alpha P\|_{L^p(B(x_0,r))} \\
&\leq C_2\, r^{-d/p}\, \|P\|_{L^p(B(x_0,r))}.
\end{aligned}$$

□

Lemme 5.3.2. *Soient $p \in [1, +\infty]$, $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^d)$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et σ une suite admissible telle que $0 \leq n := \lfloor \overline{s}(\sigma) \rfloor < \underline{s}(\sigma)$. Si $f \in T^p_\sigma(x_0)$, la suite de polynômes $(P_j)_{j\in\mathbb{N}}$ qui vérifie* (5.3) *est telle que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leq n$, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$2^{-|\alpha|j}\,\sigma_j\,\left|D^\alpha\left(P_j - P_k\right)(x_0)\right| \leq C \quad \forall k > j.$$

En particulier, la suite $(D^\alpha P_j(x_0))_{j\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
De plus, la limite de la suite $(D^\alpha P_j(x_0))_{j\in\mathbb{N}}$ est indépendante de la suite de polynômes choisie satisfaisant (5.3).

Démonstration. Soient donc $(P_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de degrés plus petits ou égaux à n et une constante $C' > 0$ tels que

$$\sigma_j\, 2^{jd/p}\, \|f - P_j\|_{L^p(B(x_0,2^{-j}))} \leq C' \quad \forall j \in \mathbb{N}\,.$$

Soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leq n$, au vu du lemme précédent, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\begin{aligned}\left\|D^\alpha\left(P_j - P_{j+1}\right)\right\|_{L^p(B(x_0,2^{-(j+1)}))} &\leq C\,2^{|\alpha|(j+1)}\;\|P_j - P_{j+1}\|_{L^p(B(x_0,2^{-(j+1)}))}\\ &= C\,2^{|\alpha|(j+1)}\;\|P_j - f + f - P_{j+1}\|_{L^p(B(x_0,2^{-(j+1)}))}\\ &\leq C''\,2^{|\alpha|j}\,\sigma_j^{-1}\,2^{-jd/p}.\end{aligned}$$

Soit $k > j$, en utilisant le lemme précédent et le lemme 5.1.10 ($\underline{s}((\sigma^{-1})^{-1}) = \underline{s}(\sigma) > n \geq |\alpha|$), on obtient alors

$$\begin{aligned}\left|D^\alpha\left(P_j - P_k\right)(x_0)\right| &\leq C_1\,2^{jd/p}\,\left\|D^\alpha\left(P_j - P_k\right)\right\|_{L^p(B(x_0,2^{-(j+1)}))}\\ &\leq C_1\,2^{jd/p}\sum_{l=j}^{k-1}\left\|D^\alpha\left(P_l - P_{l+1}\right)\right\|_{L^p(B(x_0,2^{-(l+1)}))}\\ &\leq C_2\sum_{l=j}^{k-1} 2^{(j-l)d/p}\,2^{|\alpha|l}\,\sigma_l^{-1}\\ &\leq C_3\,2^{|\alpha|j}\sigma_j^{-1}.\end{aligned}$$

Il reste à montrer que la limite $\mathscr{D}^\alpha f(x_0)$ de la suite de polynômes $(D^\alpha P_j(x_0))_{j\in\mathbb{N}}$ est indépendante du choix de la suite $(D^\alpha P_j(x_0))_{j\in\mathbb{N}}$. Pour le montrer, soit $(Q_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une autre suite de polynômes vérifiant la relation (5.3).
En procédant comme ci-dessus, il existe une constante $C_4 > 0$ telle que

$$\left|D^\alpha\left(P_j - Q_j\right)(x_0)\right| \leq C_4\,2^{|\alpha|j}\,\sigma_j^{-1}.$$

On a donc bien

$$\lim_j \left|\mathscr{D}^\alpha f(x_0) - D^\alpha Q_j(x_0)\right| = 0.$$

□

On peut à présent démontrer l'équivalence avec l'unique polynôme sous des hypothèses supplémentaires.

Proposition 5.3.4. *Soient $p \in [1,+\infty]$, $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^d)$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et σ une suite admissible telle que $0 \leq n := \lfloor \overline{s}(\sigma) \rfloor < \underline{s}(\sigma)$. Alors $f \in T_\sigma^p(x_0)$ si et seulement s'il existe un unique polynôme P de degré plus petit ou égal à n et une constante $C > 0$ telle que*

$$\sigma_j \, 2^{jd/p} \, \|f - P\|_{L^p(B(x_0,2^{-j}))} \leq C \quad \forall j \in \mathbb{N}\,. \tag{5.4}$$

Démonstration. La condition est suffisante au vu de la proposition 5.3.2.
Montrons que la condition est nécessaire. Par la proposition 5.3.2, il existe une suite de polynômes $(P_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de degrés plus petits ou égaux à $n = \lfloor \overline{s}(\sigma) \rfloor$ et une constante $C' > 0$ tels que

$$\sigma_j \, 2^{jd/p} \, \|f - P_j\|_{L^p(B(x_0,2^{-j}))} \leq C' \quad \forall j \in \mathbb{N}\,.$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leq n$, on pose

$$\mathscr{D}^\alpha f(x_0) = \lim_j D^\alpha P_j(x_0)$$

et

$$P(x) = \sum_{|\alpha| \leq n} \mathscr{D}^\alpha f(x_0) \, \frac{(x - x_0)^\alpha}{|\alpha|!}.$$

En utilisant la formule de Taylor pour les polynômes, on a

$$\begin{aligned}
\|P_j - P\|_{L^p(B(x_0,2^{-j}))} &= \left\| \sum_{|\alpha| \leq n} \left(\mathscr{D}^\alpha f(x_0) - D^\beta P_j(x_0) \right) \frac{(\cdot - x_0)^\alpha}{|\alpha|!} \right\|_{L^p(B(x_0,2^{-j}))} \\
&\leq \sum_{|\alpha| \leq n} \left| \mathscr{D}^\alpha f(x_0) - D^\beta P_j(x_0) \right| \, \|(\cdot - x_0)^\alpha\|_{L^p(B(x_0,2^{-j}))} \\
&\leq C \sum_{|\alpha| \leq n} \left| \mathscr{D}^\alpha f(x_0) - D^\beta P_j(x_0) \right| \, 2^{-j(|\alpha| + d/p)}.
\end{aligned}$$

En utilisant le lemme précédent, on trouve directement une constante $C'' > 0$ telle que

$$\sigma_j \, 2^{jd/p} \, \|P_j - P\|_{L^p(B(x_0,2^{-j}))} \leq C''.$$

On en tire la conclusion par l'inégalité de Minkowski.
On peut aussi établir l'unicité de polynôme P.
Soient P et Q deux polynômes vérifiant (5.4). On a directement $P(x_0) = Q(x_0)$.
Soit m le plus petit degré de $P - Q$, on pose

$$L(x) = \sum_{|\alpha| = m} \frac{D^\alpha (P - Q)(x_0)}{|\alpha|!} \, (x - x_0)^\alpha.$$

En procédant comme ci-dessus, on trouve $L = 0$ et donc $P = Q$.

□

5.4 Caractérisation en ondelettes

Théorème 5.4.1. *Si $f \in T^p_\sigma(x_0)$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\sigma_j \, d^p_j(x_0) \leq C \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Démonstration. On procède exactement comme au théorème 4.6.1 en remplaçant P par P_j à chaque $r = 2^{-j}$, où $(P_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est la suite de polynômes apparaissant dans la relation (5.3). □

Pour la condition suffisante, on a besoin de deux définitions.

Définition 5.4.1. Soient $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $p \in [1, +\infty]$, $s \in \mathbb{R}$. Une fonction f définie sur $\mathbb{R}^d$ appartient à l'espace $\dot{X}^p_s(x_0)$ s'il existe des constantes $C, C' > 0$ telles que

$$\left(\sum_{|k-2^j x_0| \leq C\, 2^j} \left(2^{(s-d/p)j} \left| c^{(n)}_{j,k} \right| \right)^p \right)^{1/p} \leq C'.$$

Définition 5.4.2. Soient $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $p \in [1, +\infty]$ et f une fonction de $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Si σ est une suite admissible telle que $2^{-jd/p}\, \sigma_j^{-1}$ tend vers 0 quand j tend vers $+\infty$, on dit que f appartient à l'espace $T^p_{\sigma,\log}(x_0)$ s'il existe une constante $C > 0$ et $J \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $j \geq J$,

$$\frac{2^{jd/p}\sigma_j}{|\log_2(2^{-jd/p}\, \sigma_j^{-1}|} \sup_{|h| \leq 2^{-j}} \left\| \Delta_h^{\lfloor \underline{s}(\sigma) \rfloor + 1} f \right\|_{L^p(B_{h,\sigma}(x_0, 2^{-j}))} \leq C.$$

Théorème 5.4.2. *Soient $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $p \in [1, +\infty]$ et f une fonction de $L^p_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Supposons que σ soit une suite admissible telle que $2^{-jd/p}\, \sigma_j^{-1}$ tend vers 0 quand j tend vers $+\infty$ et telle que $\underline{\sigma}_1 > 2^{-d/p}$. Supposons également qu'il existe $s > 0$ tel que $f \in \dot{X}_p(x_0)$. Alors*

$$\left(\exists C > 0 : \sigma_j \, d^p_j(x_0) \leq C \; \forall j \in \mathbb{N} \right) \Rightarrow f \in T^p_{\sigma,\log}(x_0).$$

Démonstration.
• On suppose d'abord que $\overline{s}(\sigma) \geq 0$. Soit $n_0 = \lfloor \overline{s}(\sigma) \rfloor$. On choisit $m \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^d, k \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{N}$ et $r \geq 2^{-j}$,

$$\frac{k}{2^j} \in B(x, r) \Rightarrow \lambda^{(n)}_{j,k} \subset B(x, 2^m\, r).$$

On choisit également $m' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et $j \in \mathbb{N}$, $B(x, 2^{-j})$ est inclus dans un cube dyadique de côté de longueur $2^{m'-j}$.
Enfin, on pose $J_0 = j_0 + m + m'$.
Comme $f \in \dot{X}^p_s(x_0)$, il existe des constantes $C_1, C_1' > 0$ telles que

$$\left(\sum_{|k-2^j x_0| \leq C_1\, 2^j} \left(2^{(s-d/p)j} \left| c^{(n)}_{j,k} \right| \right)^p \right)^{1/p} \leq C_1'.$$

Soit $J_1 \in \mathbb{N}$ tel que
$$1 + 2^{j_0} \leq C_1\, 2^{J_1}.$$
Pour $J \geq \max\{J_0, J_1\}$, on définit
$$P_J = \sum_{|\alpha| \leq n} \frac{(\cdot - x_0)^\alpha}{|\alpha|!} \sum_{j=-1}^{J} D^\alpha f_j(x_0),$$
où pour tout $j \in \mathbb{N}$,
$$f_{-1} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} C^{(k)}\, \Phi_k \quad \text{et} \quad f_j = \sum_{\lambda \in \Lambda_j} c_\lambda\, \Psi_\lambda,$$
avec $\Phi_k := \Phi(\cdot - k)$.
On a
$$2^{Jd/p}\, \|f - P_J\|_{L^p(B(x_0, 2^{-J}))} \leq A + B,$$
où
$$A = \sum_{j=1}^{J} 2^{Jd/p} \left\| f_j - \sum_{|\alpha| \leq n} \frac{(\cdot - x_0)^\alpha}{|\alpha|!} D^\alpha f_j(x_0) \right\|_{L^p(B(x_0, 2^{-J}))}$$
et
$$B = \sum_{j=J+1}^{+\infty} 2^{Jd/p}\, \|f_j\|_{L^p(B(x_0, 2^{-J}))}.$$
<u>Majoration de A</u> : Soient $y \in B(x_0, 2^{-J})$ et $|\alpha| = n_0 + 1$. Considérons le cas $p \neq +\infty$. Au vu des différentes suppositions faites, on a
$$D^\alpha \Psi_{\lambda_{j,k}^{(n)}} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{k}{2^j} \in B(y, 2^{j_0 - j}).$$
Pour $J_0 \leq j \leq J$, on a
$$\lambda_{j,k}^{(n)} \subset B(y, 2^{m-j-j_0}) \subset \lambda_{j-J_0}(x_0),$$
où, pour rappel, $\lambda_{j-J_0}(x_0)$ désigne l'unique cube dyadique de Λ_{j-J_0} contenant x_0.
En procédant comme dans la démonstration de la condition nécessaire, on a
$$\begin{aligned} |D^\alpha f_j(y)|^p &\leq C_2\, 2^{jp(n_0+1)} \sum_{\lambda \in \Lambda_j} |c_\lambda|^p\, |D^\alpha \Psi_\lambda(y)|^p \\ &\leq C_2\, 2^{jp(n_0+1)} \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda_j \\ \lambda \subset \lambda_{j-J_0(x_0)}}} |c_\lambda|^p\, |D^\alpha \Psi_\lambda(y)|^p \\ &\leq C_3\, 2^{jp(n_0+1)}\, \sigma_j^{-p}. \end{aligned}$$

Pour $-1 \leq j \leq J_0 - 1$, comme il existe une constante $C_4 > 0$ telle que

$$\left|\left\{k \in \mathbb{Z}^d : k/2^j \in B(y, 2^{j_0-j})\right\}\right| \leq C_4,$$

on a aussi

$$|D^\alpha f_j(y)|^p \leq C_5\, 2^{jp(n_0+1)}\, \sigma_j^{-p}.$$

Ainsi il existe une constante $C_6 > 0$ telle que pour tout $j \in \{-1, ..., J\}$, on a

$$\left\| f_j - \sum_{|\alpha| \leq n_0} \frac{(\cdot - x_0)^\alpha}{|\alpha|!} D^\alpha f_j(x_0) \right\|_{L^p(B(x_0, 2^{-J}))} \leq C_6\, 2^{-J(n_0+1-d/p)}\, 2^{j(n_0+1)}\, \sigma_j^{-1}.$$

On procède de même si $p = +\infty$.
Comme $\overline{s}(\sigma) < n+1$, grâce à la proposition 5.1.11, on a donc

$$A \leq C'\, 2^{-J(n_0+1)} \sum_{j=-1}^{J} 2^{j(n_0+1)}\, \sigma_j^{-1} \leq C''\, \sigma_J^{-1}.$$

<u>Majoration de B</u> : Soit $j \geq J+1$ et $p \neq +\infty$, on pose

$$\Lambda_{j,J} = \left\{ \lambda_{j,k}^{(n)} \in \Lambda_j : B\left(\frac{k}{2^j}, 2^{j_0-j}\right) \cap B(x_0, 2^{-J}) \neq \emptyset \right\}.$$

En procédant comme ci-dessus, on a

$$\|f_j\|^p_{L^p(B(x_0,2^{-J}))} \leq C_7 \sum_{\lambda \in \Lambda_{j,J}} 2^{-dj}\, |c_\lambda|^p.$$

Ainsi,

$$2^{Jd/p}\, \|f_j\|_{L^p(B(x_0,2^{-J}))} \leq C_8\, \sigma_J^{-1}.$$

De plus, comme les coefficients c_λ, $\lambda = \lambda_{j,k}^{(n)} \in \Lambda_{j,J}$, sont nuls sauf si

$$|k - 2^j\, x_0| \leq C_1\, 2^j,$$

on a donc

$$\|f_j\|^p_{L^p(B(x_0,2^{-J}))} \leq C_1^{1/p}\, 2^{-spj}.$$

Si $p = +\infty$, pour $x \in B(x_0, 2^{-J})$, on vérifie que

$$\frac{k}{2^j} \in B(x, 2^{j_0-j}) \Rightarrow \lambda_{j,k}^{(n)} \subset \lambda_{J-j_0}(x_0).$$

On a donc

$$|c_{\lambda_{j,l}^{(k)}}| \leq C_9\, \sigma_J^{-1}.$$

De plus, on procédant comme pour le cas $p \neq +\infty$, on a

$$\|f_j\|_{L^\infty(B(x_0,2^{-J}))} \leq C_{10}\, 2^{-sj}.$$

On pose

$$j^{(J)} = \left\lceil \frac{\log_2(2^{-Jd/p}\,\sigma_J^{-1})}{s} \right\rceil.$$

On peut choisir aussi $s > 0$ suffisamment petit tel que

$$\frac{\log_2(2^{dp}\,\underline{\sigma}_1)}{s} > 1.$$

On remarque que $j^{(J)} = j^{(J')}$ si et seulement si $J = J'$. On obtient alors que

$$\begin{aligned} B &= \sum_{j=J+1}^{j^{(J)}} 2^{Jd/p}\,\|f_j\|_{L^p(B(x_0,2^{-J}))} + \sum_{j=j^{(J)}}^{+\infty} 2^{Jd/p}\,\|f_j\|_{L^p(B(x_0,2^{-J}))} \\ &\leq \widetilde{C} \left(\sum_{j=J+1}^{j^{(J)}} \sigma_J^{-1} + 2^{Jd/p} \sum_{j=j^{(J)}}^{+\infty} 2^{-sj} \right) \\ &\leq \widetilde{C}'|\log_2(2^{-Jd/p}\sigma_J^{-1})|\,\sigma_J^{-1} \end{aligned}$$

pour tout $J \in \mathbb{N}$ suffisamment grand.

• Il reste à considérer le cas $\underline{s}(\sigma) < 0$. On pose alors $P_J = 0$ pour tout $J \geq \max\{J_0, J_1\}$. Il existe une constante $C_{11} > 0$ telle que pour $y \in B(x_0, 2^{-J})$, $J \geq \max\{J_0, J_1\}$ et $j \in \{-1, ..., J\}$,

$$|f_j(y)| \leq C_{11}\,\sigma_J^{-1}.$$

En procédent comme précédemment en séparant la somme en $j \in \{-1, ..., J\}$ et $j \geq J+1$, on trouve, pour J suffisamment grand,

$$2^{Jd/p}\,\|f - P_J\|_{L^p(B(x_0,r))} \leq C_11\,|\log_2(2^{-Jd/p}\sigma_J^{-1})|\,\sigma_J^{-1}.$$

□

5.5 Formalisme multifractal

On va se baser sur la WLM qui estime le spectre de Hölder des fonctions localement bornées pour donner une méthode qui estime le p-spectre des fonctions localement dans $L^p(\mathbb{R}^d)$. On donne cette méthode ici dans un cadre plus général qui utilise les suites admissibles ([53]).

On généralise tout d'abord naturellement les espaces d'oscillation de la manière suivante.

Définition 5.5.1. Soient σ une suite admissible et $p, q \in [1, +\infty]$. Une fonction f appartient à l'*espace d'oscillation généralisé* $\mathcal{O}^{\sigma}_{p,q}(\mathbb{R}^d)$ si la suite $(C_k)_k$ est dans l^q et s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \left(\sum_{\lambda\in\Lambda_j} (\sigma_j \, 2^{-dj/q} \, d^p_\lambda)^q \right)^{1/q} \leq C.$$

En prenant la suite $\sigma_j = 2^{sj}$ et $p = +\infty$, on a directement

$$\mathcal{O}^s_q(\mathbb{R}^d) = \mathcal{O}^{\sigma}_{\infty,q}(\mathbb{R}^d).$$

Définition 5.5.2. Soient $p \in [1, +\infty]$ et pour tout $u > -d/p$, $\gamma^{(u)}$ une suite admissible. On dit que la famille $\{\gamma^{(u)}\}_{u>-d/p}$ est p-décroissante si $\underline{s}(\gamma^{(u)}) > -d/p$ et $\underline{\gamma}^{(u)}_1 > 2^{-d/p}$ pour tout $u > -d/p$ et si

$$-\frac{d}{p} < u < u' \Rightarrow T^p_{\gamma^{(u')}}(x_0) \subseteq T^p_{\gamma^{(u)}}(x_0).$$

On note $\gamma^{(\cdot)}$ la famille $\{\gamma^{(u)}\}_{u>-d/p}$.

Définition 5.5.3. Soient $p \in [1, +\infty]$, $\gamma^{(\cdot)}$ une famille p-décroissante et $f \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ au voisinage de x_0. On définit le *p-exposant généralisé* de f associé à $\gamma^{(\cdot)}$ en x_0 par

$$h^{\gamma^{(\cdot)}}_p = \sup \left\{ u > -d/p : f \in T^p_{\gamma^{(u)}}(x_0) \right\}.$$

En prenant $\gamma^{(u)} = 2^{ju}$ pour tout $u > -d/p$, on vérifie directement que $\gamma^{(\cdot)}$ est p-décroissante pour tout $p \in [1, +\infty]$ puisque l'on retrouve les espaces $T^p_u(x_0)$ et on a

$$h_p(x_0) = h^{\gamma^{(\cdot)}}_p(x_0).$$

On généralise aussi naturellement le p-spectre.

Définition 5.5.4. Soient $p \in [1, +\infty]$, $\gamma^{(\cdot)}$ une famille p-décroissante et $f \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ au voisinage de x_0. On définit le *p-spectre généralisé* de f associé à $\gamma^{(\cdot)}$ par

$$d^{\gamma^{(\cdot)}}_p(h) = \dim_{\mathcal{H}} \left(\left\{ x_0 \in \mathbb{R}^d : h^{\gamma^{(\cdot)}}_p(x_0) = h \right\} \right).$$

Pour développer cette méthode, on généralise les espaces de Besov avec les suites admissibles.

Définition 5.5.5. On note $\Phi(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des suites de fonctions $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ telle que

- $[\varphi_0] \subseteq \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leq 2\}$,
- pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, $[\varphi_j] \subseteq \{x \in \mathbb{R}^d : 2^{j-1} \leq |x| \leq 2^{j+1}\}$,

- pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, il existe une constante $C_\alpha > 0$ telle que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |D^\alpha \varphi_j(x)| \leq C_\alpha\, 2^{-j|\alpha|},$$

- $\sum_{j=0}^{+\infty} \varphi_j = 1$.

Définition 5.5.6. Pour $p, q \in [1, +\infty]$ et $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \Phi(\mathbb{R}^d)$, on définit l'*espace de Besov généralisé* $B^\sigma_{p,q}(\mathbb{R}^d)$ par

$$B^\sigma_{p,q}(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) : \left\| \left(\sigma_j\, \mathcal{F}^{-1}(\varphi_j \mathcal{F} f)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \right)_{j\in\mathbb{N}} \right\|_{l^q} < +\infty \right\},$$

où $\mathcal{F}$ désigne la transformée de Fourier des distributions tempérées.

Ces espaces sont indépendants de la suite $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \Phi(\mathbb{R}^d)$ choisie. ([3]).

Remarque 5.5.1.
- Si $\sigma = (2^{js})_{j\in\mathbb{N}}$, on retrouve les espaces de Besov classiques $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^d)$ introduits par Oleg Vladimirovich Besov ([10]) puis Hans Triebel ([73]).
- Si $\sigma_j = \phi(2^j)$ avec $\phi \in \mathcal{B}$, on note $B^\sigma_{p,q}(\mathbb{R}^d) = B^\phi_{p,q}(\mathbb{R}^d)$.

On utilisera ici seulement les espaces $B^\sigma_{p,\infty}(\mathbb{R}^d)$, les espaces $B^\sigma_{p,q}(\mathbb{R}^d)$ étant utiles pour déterminer les (p,q)-exposants généralisés de $T^{p,q}_\sigma$ qui utilisent une norme l^q quelconque au lieu d'une norme l^∞ (voir [53]).
Ces espaces de Besov généralisés sont directement liés aux espaces d'oscillation ([53]) : si σ est une suite admissible telle que $\underline{s}(\sigma) > 0$ et $\underline{s}(\sigma) - d/q > -d/p$, alors

$$\mathcal{O}^\sigma_{p,q}(\mathbb{R}^d) = B^\sigma_{q,\infty}(\mathbb{R}^d).$$

Définition 5.5.7. Une suite admissible σ et une famille de suites admissibles $\gamma^{(\cdot)}$ sont *compatibles* pour p et q dans $[1, +\infty]$ si
- $\underline{s}(\sigma) > 0$,
- $\underline{s}(\sigma) - d/q > -d/p$,
- la fonction ζ, dite de *ratio*, définie par

$$\zeta : u \in \left] -\frac{d}{p}, \infty \right[\mapsto \underline{s}\left(\frac{\gamma^{(u)}}{\sigma}\right)$$

  est non-décroissante, continue et telle que

$$\{u > -d/p : \zeta(u) < -d/q\} \neq \emptyset.$$

On pose

$$u_{min}(q) = \sup\{u > -d/p : \zeta(u) < -d/q\}.$$

Théorème 5.5.1. ([53])
Soient $p, q \in [1, +\infty]$, σ *une suite admissible et* $\gamma^{(\cdot)}$ *une famille de suites admissibles p-décroissante tels que* σ *et* $\gamma^{(\cdot)}$ *sont compatibles pour* p *et* q, *alors pour presque toute fonction* $f \in B^{\sigma}_{q,\infty}$, $d_p^{\gamma^{(\cdot)}}$ *est défini sur* $I = [\zeta^{-1}(-d/q), \zeta^{-1}(0)]$ *et*

$$d_p^{\gamma^{(\cdot)}}(h) = d + q\,\zeta(h) \quad \forall h \in I,$$

où le « presque tout » est à prendre au sens de la prévalence ([32]).
De plus, pour presque tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$, *on a*

$$h_p(x_0) = \zeta^{-1}(0).$$

Annexe A

Démonstrations annexes

A Théorème de différenciation de Lebesgue

Définition A.1. Soit $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, la *fonction maximale de Hardy-Littlewood* de f est la fonction Mf définie par

$$Mf : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty] : x \mapsto \sup_{r>0} \frac{1}{\text{mes}\,(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(t)|\, dt.$$

Lemme A.1. (Lemme de recouvrement de Vitali, cas fini)
Tout ensemble fini S de boules d'un espace métrique contient une partie T de boules disjointes telle que

$$\bigcup_{B \in S} B \subset \bigcup_{B \in T} 3B,$$

où $3B$ désigne la boule ouverte (resp. fermée) de centre x_0 et de rayon $3r$ si B est une boule ouverte (resp. fermée) de centre x_0 et de rayon r.

Démonstration. On définit par récurrence une suite finie $B_0, ..., B_m$ de boules de S en choisissant une boule B_0 puis pour $n \geq 1$, en prenant pour B_n une boule de rayon maximum parmi celles disjointes des B_k avec $k \in \{0, ..., n-1\}$.
Toute boule de S de rayon r rencontre donc une boule B_n avec $r_n \geq r$. De plus, on remarque que $B \subset 3B_n$ au vu de l'inégalité triangulaire. □

Proposition A.1. (Inégalité maximale de Hardy-Littlewood)
Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et tout $c > 0$,

$$\text{mes}\,(\{x : Mf(x) > c\}) \leq 3^d \, \frac{\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}}{c}.$$

Démonstration. Par régularité intérieure de la mesure de Lebesgue, il suffit de montrer que pour tout compact K inclus dans $\{x : Mf(x) > c\}$,

$$\text{mes}(K) \leq 3^d \, \frac{\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}}{c}.$$

Soit $x \in K$, il est donc clair qu'il existe un rayon $r_x > 0$ tel que

$$\frac{1}{\text{mes}\,(B(x,r_x))}\int_{B(x,r_x)} |f(t)|\,dt > c.$$

Par compacité, comme $K \subset \cup_{x\in K} B(x,r_x)$, il existe $L \subset K$ fini tel que $K \subset \cup_{x\in L} B(x,r_x)$. Vu le lemme de recouvrement de Vitali dans le cas fini, il existe donc N fini tel que

$$K \subset \bigcup_{x\in N} B(x,3r_x).$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}\text{mes}\,(K) \le \text{mes}\left(\bigcup_{x\in N} B(x,3r_x)\right) \le \sum_{x\in N}\text{mes}\,(B(x,3r_x)) &= 3^d \sum_{x\in N}\text{mes}(B(x,r_x))\\ &\le \frac{3^d}{c}\sum_{x\in N}\int_{B(x,r_x)}|f(t)|dt\\ &\le 3^d\,\frac{\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}}{c}.\end{aligned}$$

□

Théorème A.1. (Théorème de différenciation de Lebesgue)
Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ est un point de Lebesgue.

Démonstration. (tirée de [69])
Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et $r > 0$, on pose

$$T_r(f)(x) = \frac{1}{\text{mes}\,(B(x,r))}\int_{B(x,r)} |f(t) - f(x)|\,dt,$$

puis

$$T(f)(x) = \limsup_{r\to 0^+} T_r(f)(x).$$

Soit $k \in \mathbb{N}_0$, on sait que les fonctions continues sont denses dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ donc il existe une fonction continue g_k telle que $\|f - g_k\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} < \frac{1}{k}$.
Posons $h_k = f - g_k$, on a alors

$$T_r(h_k)(x) \le \frac{1}{\text{mes}\,(B(x,r))}\int_{B(x,r)} |h_k(t)|\,dt + |h_k(x)|$$

et

$$T(h_k)(x) \le Mh_k(x) + |h_k(x)|.$$

Comme $f = g_k + h_k$, on a $T_r(f) \le T_r(g_k) + T_r(h_k)$. En passant à la limite supérieure et en tenant compte du fait que $T(g_k) = 0$ par continuité de g_k, on obtient que

$$T(f) \le T(h_k) \le Mh_k + |h_k|.$$

Soit $c > 0$ et posons $c' = \frac{c}{2}$. On a

$$\{x : T(f)(x) > 2c'\} \subset \{x : Mh_k(x) > c'\} \cup \{x : |h_k|(x) > c'\}.$$

Au vu de l'inégalité maximale de Hardy-Littlewood, on sait que

$$\text{mes}\,(\{x : Mh_k(x) > c'\}) \leq \frac{3^d \|h_k\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}}{c'} \leq \frac{3^d}{c'k}.$$

D'autre part, on sait que

$$\text{mes}\,(\{x : |h_k|(x) > c'\}) \leq \frac{\|h_k\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}}{c'} \leq \frac{1}{c'k}.$$

On en déduit donc que pour tout $k \in \mathbb{N}_0$,

$$\text{mes}\,(\{x : T(f)(x) > 2c'\}) \leq \frac{3^d + 1}{c'k},$$

d'où

$$\begin{aligned} \text{mes}\,(\{x : T(f)(x) > 2c'\}) &\leq \text{mes}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} (\{x : Mh_k(x) > c'\} \cup \{x : |h_k|(x) > c'\})\right) \\ &\leq \frac{3^d + 1}{c'k} \end{aligned}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}_0$. Ainsi

$$\text{mes}\,(\{x : T(f)(x) > c\}) = \text{mes}\,(\{x : T(f)(x) > 2c'\} = 0.$$

On a donc montré que pour tout $c > 0$, $\{x : T(f)(x) > c\}$ est négligeable, ce qui suffit car

$$\{x : T(f)(x) \neq 0\} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}_0} \{x : T(f)(x) > \frac{1}{m}\}.$$

□

Remarque A.1. On remarque facilement que le résultat précédent reste valable pour $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

B Résultats annexes pour la fonction de Brjuno

Proposition B.1. *Avec les notations du lemme 3.2.3, on a*

$$\left(\int_I \gamma_K(t)^p\,dt\right)^{1/p} \leq 8p\,h^{1/p}\,\gamma_K(x) + p\frac{h^{1/p}}{q_K}(6\log q_K + 4).$$

Démonstration. Comme on a

$$\beta_K \leq \frac{1}{q_{K+1}},$$

on en tire que

$$\begin{aligned}\left(\int_I \gamma_K(t)^p \, dt\right)^{1/p} &= \left(\int_I \left(\beta_{K-1}(t)^3 \, \beta_{K-1}(t)^{-2} \, \log(1/\alpha_K(t))\right)^p \, dt\right)^{1/p} \\ &\leq q_K^{-3} \left(\int_I \left(\beta_{K-1}(t)^{-2} \log(1/\alpha_K(t))\right)^p \, dt\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

Or, on sait que $\alpha'_K(t) = (-1)^K \beta_{K-1}^{-2}(t)$. Ainsi, on a

$$\left(\int_I \gamma_K(t)^p \, dt\right)^{1/p} \leq q_K^{-3} \left(\int_{\alpha_K(I)} \log(1/u)^p \, du\right)^{1/p}.$$

De plus, on sait que l'intervalle $\alpha_K(I)$ a pour extrémités $\alpha_K(x - h/2)$ et $\alpha_K(x + h/2)$. Grâce au théorème des accroissements finis et comme

$$\beta_{K-1} \geq \frac{1}{q_K + q_{K-1}},$$

on en tire que

$$|\alpha_K(x \pm h/2) - \alpha_K(x)| \leq \frac{h}{2} \sup_{\xi \in I} \beta_{K-1}(\xi)^{-2} \leq \frac{h}{2}(q_K + Q_{K-1})^2 \leq 2 \, q_K^2 \, h.$$

On distingue deux cas :

- $\underline{4 \, q_K^2 \, h \leq \alpha_K(x)}$: on a alors pour tout $u \in \alpha_K(I)$,

$$\frac{1}{u} \leq \frac{2}{\alpha_K(x)},$$

et donc

$$\begin{aligned}\left(\int_I \gamma_k(t) \, dt\right)^{1/p} &\leq q_K^{-3} \, \log(2/\alpha_k(x)) \left(\int_{\alpha_K(I)} du\right)^{1/p} \\ &\leq q_K^{-3} \, \log(2/\alpha_k(x)) \, 4q_K^2 \, h^{1/p} \\ &\leq 4 \log(1/\alpha_K(x)) \, h^{1/p} \, 2\beta_{K-1}(x) + \frac{4h^{1/p}}{q_K} \log(2) \\ &\leq 8h^{1/p} \, \gamma_K(x) + \frac{3h^{1/p}}{q_K}.\end{aligned}$$

• $\underline{4\, q_K^2\, h \geq \alpha_K(x)}$: En utilisant la proposition 3.2.4, on a

$$\begin{aligned}
\left(\int_I \gamma_K(t)^p\, dt\right)^{1/p} &\leq \sup_{t\in I} \beta_{K-1}(t)\, e^{1/p}\, p\, h^{1/p}\, \log(1/h)\\
&\leq \frac{e}{q_K}\, p\, h^{1/p} \log(4q_K^2/\alpha_K(x))\\
&= \frac{e}{q_K}\, p\, h^{1/p} \log(1/\alpha_K(x)) + \frac{p\, h^{1/p}}{q_K}(2e\log 2 + 2e\log q_K)\\
&\leq 6\, p\, h^{1/p}\, \gamma_K(x) + \frac{p\, h^{1/p}}{q_K}(6\log q_K + 4).
\end{aligned}$$

□

Lemme B.1. *Soient $p \geq 1$ et $m, n \in \mathbb{N}_0$ tels que $1 \leq m < n$. On vérifie que*

$$\sum_{l=m}^{n} \frac{1}{l^{p+2}} \leq 3\, \frac{n-m}{m^{p+1}\, n}.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{l=m}^{n} \frac{1}{l^{p+2}} \leq \frac{1}{m^{p+2}} + \int_m^n \frac{dt}{t^{p+2}} &= \frac{1}{m^{p+2}} + \frac{1}{p+1}\left(\frac{1}{m^{p+1}} - \frac{1}{n^{p+1}}\right)\\
&= \frac{1}{m^{p+2}} + \frac{n^{p+1} - m^{p+1}}{(p+1)\, m^{p+1}\, n^{p+1}}\\
&= \frac{1}{m^{p+2}} + \frac{(n-m)\sum_{j=0}^{p} n^{p-j}\, m^j}{(p+1)\, m^{p+1}\, n^{p+1}}\\
&\leq \frac{1}{m^{p+2}} + \frac{n-m}{m^{p+1}\, n}.
\end{aligned}$$

Or, comme $1 \leq m \leq n-1$, on a $m(n-m) \geq n-1 \geq n/2$. Ainsi, on en tire que

$$\frac{1}{m^{p+2}} \leq 2\, \frac{n-m}{m^{p+1} n},$$

d'où la conclusion. □

Proposition B.2. *Avec les notations du lemme 3.2.3, si $k > K$, alors*

• *$\underline{\text{si } n-m = 1}$:*

$$\left(\int_I \gamma_k(t)^p\, dt\right)^{1/p} \leq \frac{C}{q_{K+1} F_{k-K}} h^{1/p}\, \log(1/h),$$

• *$\underline{\text{si } n-m \geq 2}$:*

$$\left(\int_I \gamma_k(t)^p\, dt\right)^{1/p} \leq C\, \frac{(n-m)^{1/p}}{q_K^{1+2/p}\, F_{k-K}\, m^{1+1/p}\, n^{1/p}}.$$

Démonstration. Les cellules de profondeur $K+1$ incluses dans $\mathfrak{c}$ sont les intervalles

$$\mathfrak{c}_l = \left\{ \frac{sp_K + p_{K-1}}{sq_K + q_{K-1}} : l < s < l+1 \right\}, \quad l \geq 1.$$

Par définition de m et n, on a clairement

$$x + (-1)^K\, h/2 \in \overline{\mathfrak{c}_m} \quad \text{ et } x + (-1)^{K-1}\, h/2 \in \overline{\mathfrak{c}_n}.$$

De plus, I est inclus dans l'union des $\overline{\mathfrak{c}_l}$, $m \leq l \leq n$. Ainsi, on obtient que

$$\left(\int_I \gamma_k(t)^p \, dt \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{l=m}^{n} \int_{\mathfrak{c}_l} \beta_{k-1}(t)^p \, \log(1/\alpha_k(t))^p \, dt \right)^{1/p}. \tag{1}$$

On utilisera dans cette démonstration la relation

$$\beta_{j_1+j_2} \leq \frac{1}{q_{j_1+1}\, F_{j_2+1}}, \tag{2}$$

valable pour tous $j_1 \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$, $j_2 \in \mathbb{N}$ et résultant du fait que pour tout $j \geq -1$,

$$\beta_j \leq \frac{1}{q_{j+1}}.$$

• <u>Si $n - m = 1$</u> : Comme $I \subset \overline{\mathfrak{c}_m} \cup \overline{\mathfrak{c}_{m+1}}$, pour $t \in I \backslash \mathfrak{c}_m^{\bullet}$, on trouve que

$$q_{K+1}(t) \in \{mq_K + q_{K-1}, (m+1)q_K + q_{K-1}\}.$$

En particulier, pour $t \in I \backslash \mathfrak{c}_m^{\bullet}$, on a

$$\frac{q_{K+1}(t)}{q_{K+1}(x)} \geq \frac{mq_K + q_{K-1}}{(m+1)q_K + q_{K-1}} \geq \frac{1}{2}.$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
\left(\int_I \gamma_k(t)^p \, dt \right)^{1/p} &= 2 \left(\int_I \left(\frac{1}{2} \beta_{k-1}(t) \, \log(1/\alpha_k(t)) \right)^p \, dt \right)^{1/p} \\
&\leq 2 \left(\int_I \left(\frac{q_{K+1}(t)}{q_{K+1}(x)} \beta_{k-1}(t) \, \log(1/\alpha_k(t)) \right)^p \, dt \right)^{1/p} \\
&\leq 2 \left(\int_I \left(\frac{q_{K+1}(t)}{q_{K+1}(x)} \, \frac{1}{q_{K+1}(t)\, F_{k-K}} \, \log(1/\alpha_k(t)) \right)^p \, dt \right)^{1/p} \\
&\leq \frac{2}{q_{K+1}(x)\, F_{k-K}} \, e^{1/p} \, p \, h^{1/p} \, \log(1/h),
\end{aligned}$$

où la dernière inégalité résulte de la proposition 3.2.4.

• Si $n - m \geq 2$: En utilisant (1) et (2), on a

$$\left(\int_I \gamma_k(t)^p\, dt\right)^{1/p} \leq \frac{1}{F_{k-K}} \left(\sum_{l=m}^{n} \int_{\mathfrak{c}_l} \frac{\log(1/\alpha_k(t))^p}{q_{K+1}(t)^p}\, dt\right)^{1/p}$$
$$\leq \frac{1}{F_{k-K}\, q_K} \left(\sum_{l=m}^{n} \int_{\mathfrak{c}_l} \frac{1}{l^p} \log(1/\alpha_k(t))^p\, dt\right)^{1/p},$$

où la deuxième inégalité résulte du fait que pour tout $t \in \mathfrak{c}_l$, $q_{k+1}(t) = lq_K + q_{K-1} \geq lq_K$. En appliquant le changement de variable $w = \alpha_{K+1}(t)$ et en se rappelant que

$$\alpha'_{K+1} = (-1)^{K+1}\,(q_{K+1} + \alpha_{K+1}\, q_K)^2,$$

on obtient que

$$\left(\int_I \gamma_k(t)^p\, dt\right)^{1/p} \leq \frac{1}{q_K\, F_{k-K}} \left(\sum_{l=m}^{n} \frac{1}{l^p} \int_0^1 \frac{\log(1/\alpha_{k-K-1}(w))^p}{(q_{K+1} + w\, q_K)^2}\, dw\right)^{1/p}$$
$$\leq \frac{1}{q_K^{1+2/p}\, F_{k-K}} \left(\int_0^1 \log(1/\alpha_{k-K-1}(w))^p\, dw \sum_{l=m}^{n} \frac{1}{l^{p+2}}\right)^{1/p}$$
$$\leq \frac{2^{1/p}}{q_K^{1+2/p}\, F_{k-K}} \left(\int_0^1 \log(1/\alpha_{k-K-1}(w))^p\, \frac{dw}{1+\omega} \sum_{l=m}^{n} \frac{1}{l^{p+2}}\right)^{1/p}.$$

En utilisant le lemme précédent et l'invariance de la mesure de Gauss par α_{k-K-1}, on a alors

$$\left(\int_I \gamma_k(t)^p\, dt\right)^{1/p} \leq \frac{6^{1/p}(n-m)^{1/p}}{q_K^{1+2/p}\, F_{K-k}\, m^{1+1/p}\, n^{1/p}} \left(\int_0^1 \log(1/w)^p\, \frac{dw}{1+w}\right)^{1/p}$$
$$\leq C \frac{(n-m)^{1/p}}{q_K^{1+2/p}\, F_{K-k}\, m^{1+1/p}\, n^{1/p}}.$$

□

Lemme B.2. *Pour tout $x \in [0,1]$, on a*

$$\int_0^x B(A(t))\, dt = O(x).$$

Démonstration. Pour $x \in\,]0,1[$, on a

$$x \leq \frac{1}{\lfloor 1/x \rfloor} = \frac{1}{a_1(x)},$$

et donc

$$\begin{aligned}
\int_0^x B(A(t))\,dt \le \int_0^{1/a_1(x)} B(A(t))\,dt &= \sum_{n\ge a_1(x)} \int_{1/(n+1)}^{1/n} B\left(\frac{1}{t}-n\right)\,dt \\
&= \sum_{n\ge a_1(x)} \int_0^1 \frac{B(u)}{(n+u)^2}\,du \\
&= \int_0^1 B(u) \sum_{n\ge a_1(x)} \frac{1}{(n+u)^2}\,du \\
&\le \frac{2}{a_1(x)} \int_0^1 B(u)\,du = O(x),
\end{aligned}$$

puisque l'on vérifie que $x\,a_1(x) = x\lfloor 1/x\rfloor \ge 2$. □

Lemme B.3. *Pour tout $x \in]0,1]$, on a*

$$\Psi(x) = x\log(1/x) + x + O(x^2)$$

et

$$\Psi(1) - \Psi(1-x) = x\log(1/x) + x + O(x^2\log(2/x)).$$

Démonstration. En utilisant l'équation fonctionnelle (3.4) et le lemme B.2, on a

$$\begin{aligned}
\Psi(x) = \int_0^x \left(\log(1/t) + t\,B(A(t))\right)\,dt &= \int_0^x \log(1/t)\,dt + O\left(x\int_0^x B(A(t))\,dt\right) \\
&= x\log(1/x) + x + O(x^2).
\end{aligned}$$

Pour établir la deuxième inégalité, il suffit de traiter le cas $x \in]0,1/2[$. En utilisant à nouveau (3.4), on a

$$\Psi(1) - \Psi(1-x) = \int_{1-x}^1 t\,B(A(t)) + \log(1/t)\,dt = \int_{1-x}^1 t\,B\left(\frac{1}{t}-1\right) + \log(1/t)\,dt.$$

Par changement de variable $u = (1-t)/t$ et en utilisant la première égalité de ce lemme, on obtient

$$\begin{aligned}
\Psi(1) - \Psi(1-x) &= \int_0^{x/(1-x)} \left(\frac{B(u)}{1+u} + \log(1+u)\right)\frac{du}{(1+u)^2} \\
&= \int_0^{x/(1-x)} (B(u) + O(u\,B(u)) + O(u))\,du \\
&= \frac{x}{1-x}\log\left(\frac{1-x}{x}\right) + \frac{x}{1-x} + O(x^2\,\log(1/x)) \\
&= x\log(1/x) + x + O(x^2\log(2/x)).
\end{aligned}$$

□

Proposition B.3. *Soit $x = p/q$ un rationnel de $]0, 1[$ sous sa forme irréductible, si $|h| < 2/(3q^2)$, alors*

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} B(t)\,dt = \frac{\log(e/q^2|h|)}{q} + \widetilde{B}(x) + O\left(qh\log\left(\frac{1}{q^2|h|}\right)\right),$$

où le O est uniforme en q et h.

Démonstration. On sait que x peut s'écrire d'une et une seule façon sous la forme

$$x = [0; b_1, ..., b_K]$$

avec $K \in \mathbb{N}_0$, $b_i \in \mathbb{N}_0$ $\forall i \in \{1, ..., K\}$ et $b_K \geq 2$ (on dit que x est de *profondeur* K). On remarque que x est une extrémité de deux cellules de profondeur K :

- $\mathfrak{c}$ d'extrémités $[0; b_1, ..., b_{K-1}, b_K - 1] = \frac{p-p_K}{q-q_{K-1}}$ et x,
- $\mathfrak{c}'$ d'extrémités x et $[0; b_1, ..., b_{K-1}, b_K + 1] = \frac{p+p_{K-1}}{q+q_{K-1}}$.

Comme $b_K \geq 2$, on a $q_{K-1} \leq q/2$. Ainsi, la longueur de $\mathfrak{c}$ est

$$\frac{1}{(q - q_{K-1})q} > \frac{1}{q^2},$$

et la longueur de $\mathfrak{c}'$ est

$$\frac{1}{q(q + q_{K-1})} \geq \frac{2}{3q^2}.$$

Ainsi, en utilisant l'hypothèse sur h, on a

$$]x, x + h[\subset \left]x - \frac{2}{3q^2}, x + \frac{2}{3q^2}\right[\setminus \{x\} \subset \mathfrak{c} \cup \mathfrak{c}'.$$

Si K est pair, les éléments $\frac{p-p_K}{q-q_{K-1}}$, r et $\frac{p+p_{K-1}}{q+q_{K-1}}$ se suivent et si K est impair, ces mêmes éléments se suivent dans l'ordre inverse. On a donc

$$(-1)^K h > 0 \Leftrightarrow x + h \in \mathfrak{c}'.$$

On a

$$\Psi(x + h) - \Psi(x) = \int_x^{x+h} B(t)\,dt = \sum_{k<K}\int_x^{x+h} \gamma_k(t)\,dt + \int_x^{x+h} \beta_{K-1}(t)\,B(\alpha_K(t))\,dt.$$

Or, en utilisant (3.11) du lemme 3.2.3 (en remarquant que x peut être rationnel dans I), on a

$$\begin{aligned}\left|\int_x^{x+h}\sum_{k<K}\gamma_k(t)\,dt - h\,\widetilde{B}(x)\right| &= \left|\int_x^{x+h}\sum_{k<K}(\gamma_k(t)-\gamma_k(x))\,dt\right|\\ &\leq \frac{3}{2}\,h^2\sum_{k<K}q_{k+1}\\ &\leq \frac{3}{2}\,h^2\left(\sum_{k=2}^{K}(q_k-q_{k-1})+q_{K-1}+q_K\right)\\ &\leq \frac{3}{2}\,h^2\,3q_K\\ &= \frac{9}{2}\,h^2\,q.\end{aligned}$$

Il reste donc à montrer que

$$\int_x^{x+h}\beta_{K-1}(t)\,B(\alpha_K(t))\,dt = h\,\frac{\log(e/q^2|h|)}{q} + O(q\,h^2\,\log(1/q^2|h|)). \tag{3}$$

La fonction α_K est définie sur chacune des cellules $\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{c}'$. Si $x+h$ appartient à $\mathfrak{c}$ (resp. $\mathfrak{c}'$), on prolonge α_K (par continuité à droite ou à gauche en fonction de la parité de K) à $\mathfrak{c}\cup\{x\}$ (resp. $\mathfrak{c}'\cup\{x\}$).
On effectue le changement de variable $u=\alpha_K(t)$ dans l'intégrale de (3). On distingue deux cas :
- $\underline{(-1)^K\,h>0}$: l'intervalle d'extrémités x et $x+h$ est alors inclus dans $\overline{\mathfrak{c}'}$. Comme on a

$$\alpha_K(t) = \frac{qt-p}{-q_{K-1}t+p_{K-1}},$$

et en utilisant (3.10), on en tire que

$$\int_x^{x+h}\beta_{K-1}(t)\,B(\alpha_K(t))\,dt = (-1)^K\int_{\alpha_K(x)}^{\alpha_K(x+h)} B(u)\,\frac{du}{(q+q_{K-1})^3}.$$

On peut calculer les bornes de cette dernière intégrale. On a directement $\alpha_K(x)=0$ et

$$\begin{aligned}\alpha_K(x+h) = \frac{q(p/q+h)-p}{-q_{K-1}(p/q+h)-p_{K-1}} &= \frac{q^2\,h}{-q_{K-1}p-q_{K-1}q\,h+p_{K-1}\,q}\\ &= \frac{q^2\,|h|}{1-|h|q\,q_{K-1}} := y.\end{aligned}$$

Ainsi, $y\in\,]0,1[$ puisque $q_{K-1}\leq q/2$ et, en utilisant les lemmes B.2 et B.3, on en déduit que

$$\begin{aligned}\int_x^{x+h} \beta_{K-1}(t)\, B(\alpha_K(t))\, dt &= \frac{(-1)^K}{q^3} \int_0^y B(u)\, \frac{du}{(1+u\, q_{K-1}/q)^3} \\ &= \frac{(-1)^K}{q^3} \int_0^y B(u)\, (1+O(u))\, du \\ &= \frac{(-1)^K}{q^3} y\, \log(1/y) + \frac{(-1)^K}{q^3}\, y + \frac{(-1)^K}{q^3}\, O(y^2) \\ &\quad + \frac{(-1)^K}{q^3} O(\log(1/y) y^2).\end{aligned}$$

• $\underline{(-1)^K\, h < 0}$: l'intervalle d'extrémités x et $x+h$ est alors inclus dans $\bar{\mathfrak{c}}$. On a

$$\alpha_K(t) = \frac{(q-q_{K-1})t - p + p_{K-1}}{-q_{K-1}t + p_{K-1}}.$$

On trouve donc $\alpha_K(x) = 1$ et

$$\begin{aligned}\alpha_K(x+h) = \frac{(q-q_{K-1})p/q - (p-p_{K-1}) + h\,(q-q_{K-1})}{-q_{K-1}\, p/q + p_{K-1} - q_{K-1}h} &= 1 + \frac{hq^2}{(-1)^K - q\, q_{K-1}h} \\ &=: 1 - y',\end{aligned}$$

avec

$$y' = \frac{|h|q^2}{1+|h|q\, q_{K-1}} \leq \frac{2}{3}.$$

En utilisant le lemme B.3, on en tire que

$$\begin{aligned}\int_x^{x+h} \beta_{K-1}(t)\, B(\alpha_K(t))\, dt &= (-1)^{K-1} \int_{1-y'}^1 B(u) \frac{du}{(q+(u-1)\, q_{K-1})^3} \\ &= \frac{(-1)^{K-1}}{q^3} \int_{1-y'}^1 B(u)\, du + O\left(q^{-3} \int_{1-y'}^1 B(u)\, (1-u)\, du\right) \\ &= \frac{(-1)^{K-1}}{q^3} \int_{1-y'}^1 B(u)\, du + O(q^{-3}\, y'^2\, \log(1/y')) \\ &= \frac{(-1)^K}{q^3} y'\, \log(1/y') + \frac{(-1)^K}{q^3}\, y' + \frac{(-1)^K}{q^3}\, O(y'^2) \\ &\quad + O(q^{-3}\, y'^2\, \log(1/y')).\end{aligned}$$

Ainsi, dans les deux cas, pour $\theta = y$ ou y', on a

$$\int_x^{x+h} \beta_{K-1}(t)\, B(\alpha_K(t))\, dt = \frac{\operatorname{sgn} h}{q^3}\, \theta\, \log(1/\theta) + \frac{\operatorname{sgn} h}{q^3}\, \theta + O(q^{-3}\, \theta^2\, \log(2/\theta)).$$

Comme $q_{K-1} < q/2$ et $|h| < 2/3\, q^2$, on sait que

$$\log(1/\theta) = \log(1/q^2|h|) + O(q^2\, h),$$

et

$$\theta = q^2\, |h| + O(h^2\, q^4).$$

On en déduit alors (3), d'où la conclusion. □

Les résultats précédents sont nécessaires pour déterminer les p-exposants de la fonction de Brjuno. Ils sont également utilisés ([6]) pour démontrer la caractérisation des nombres de Brjuno annoncée à la proposition 3.2.3 . Il faut établir un résultat intermédiaire.
Pour rappel, pour $t \in [0, 1]$, on pose

$$\Psi(t) = \int_0^t B(s)\, ds.$$

Proposition B.4. *Soit $x \in X$ un nombre de Cremer. On a*

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\Psi(x+h) - \Psi(x)}{h} = +\infty.$$

Démonstration. Pour tout $h > 0$ et pour tout $K \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{\Psi(x+h) - \Psi(x)}{h} \geq h^{-1} \int_x^{x+h} \sum_{k \leq K} \gamma_k(t)\, dt = \sum_{k \leq K} h^{-1} \int_x^{x+h} \gamma_k(t)\, dt.$$

Comme x est irrationnel, les fonctions γ_k sont continues en x et on a donc, pour tout $K \in \mathbb{N}$,

$$\liminf_{h \to 0^+} \frac{\Psi(x+h) - \Psi(x)}{h} \geq \sum_{k \leq K} \gamma_k(x).$$

On en tire la conclusion car le membre de droite tend vers l'infini quand K tend vers l'infini puisque x est un nombre de Cremer. □

Proposition B.5. *Les points de Lebesgue de B sont exactement les nombres de Brjuno.*

Démonstration.
- La condition est nécessaire : cela résulte des propositions B.3 et B.4.
- La condition est suffisante : soit $x \in \mathscr{B}$, on veut montrer que

$$\lim_{h \to 0^+} h^{-1} \int_{x-h/2}^{x+h/2} |B(t) - B(x)|\, dt = 0.$$

Par densité des irrationnels dans $\mathbb{R}$, on peut supposer que les nombres $x \pm h/2$ sont irrationnels. On pose $I = [x - h/2, x + h/2]$ et soit $K(h)$ le plus grand entier tel que I est inclus dans $\mathfrak{c}(a_1, ..., a_K)$. Comme on l'a fait déjà plusieurs fois, on va séparer la somme apparaissant dans la définition de B en fonction de K :

$$\|B - B(x)\|_{L^1(I)} \leq \sum_{k<K} \|\gamma_k - \gamma_k(x)\|_{L^1(I)} + \|\gamma_K\|_{L^1(I)} + \sum_{k>K} \|\gamma_k\|_{L^1(I)} + h \sum_{k\geq K} \gamma_k(x).$$

En utilisant (3.11) avec $p = 1$, on trouve

$$h^{-1} \sum_{k<K} \|\gamma_k - \gamma_k(x)\|_{L^1(I)} \leq C\, h \sum_{k<K} q_{k+1} \leq 3C\, h\, q_K \leq \frac{6C}{q_{K+1}},$$

où la dernière inégalité résulte de la proposition 3.2.9.
Ensuite, en utilisant la proposition B.1 avec $p = 1$ puis la proposition 3.2.2, on obtient

$$h^{-1}\|\gamma_K\|_{L^1(I)} \leq C_1 \frac{\log q_{K+1}}{q_K}.$$

On remarque que pour tout $l \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{\log((2\,\delta_l)^{-1})}{q_l} \leq 2\, \frac{\log q_{l+1}}{q_l} + 2 \frac{\log q_{l+2}}{q_{l+1}}. \tag{4}$$

En effet, si $a_{l+1} \geq 2$, alors grâce à la proposition 3.2.9, on a

$$\frac{\log((2\,\delta_l)^{-1})}{q_l} \leq \frac{\log(q_l q_{l+1})}{q_l} \leq 2\, \frac{\log q_{l+1}}{q_l},$$

et si $a_{l+1} = 1$, alors $q_{l+1} \leq 2\, q_l$ et grâce à la proposition 3.2.9, on a

$$\frac{\log((2\,\delta_l)^{-1})}{q_l} \leq \frac{\log(q_{l+1} q_{l+2})}{q_l} \leq \frac{\log q_{l+1}}{q_l} + 2 \frac{\log q_{l+2}}{q_{l+1}}.$$

En utilisant la proposition B.2, en procédant comme pour le lemme 3.2.3 et en appliquant (4), on a aussi

$$\begin{aligned}
h^{-1} \sum_{k>K} \|\gamma_k\|_{L^p(I)} &\leq C_2 \sum_{k>K} \left(\frac{\log(1/h)}{q_{K+1}\, F_{k-K}} + \frac{1}{q_K\, F_{k-K}} \right) \\
&\leq C_2 \sum_{k>K} \left(\frac{\log((2\delta_{K+1})^{-1})}{q_{K+1}\, F_{k-K}} + \frac{1}{q_K\, F_{k-K}} \right) \\
&\leq 2\, C_2 \left(\frac{1}{q_K} + \frac{\log q_{K+2}}{q_{K+1}} + \frac{\log q_{K+3}}{q_{K+2}} \right) \sum_{k>K} \frac{1}{F_{k-K}} \\
&\leq C_3 \left(\frac{1}{q_K} + \frac{\log q_{K+2}}{q_{K+1}} + \frac{\log q_{K+3}}{q_{K+2}} \right).
\end{aligned}$$

Enfin, la proposition 3.2.2 assure que

$$\sum_{k\geq K}\gamma_k(x)\leq\sum_{k\geq K}\frac{\log(2\,q_{k+1})}{q_k}.$$

Au final, on en tire que

$$h^{-1}\|B-B(x)\|_{L^1(I)}\leq C_4\sum_{k\geq K}\frac{q_{k+1}+1}{q_k}.$$

Or, comme $x\in\mathscr{B}$, on sait grâce à la remarque 3.2.3 que le membre de droite de cette dernière inégalité tend vers 0 quand K tend vers l'infini (et donc quand h tend vers 0). $\square$

C Lemme pour un résultat de densité

Avant de démontrer le résultat, rappelons le résultat classique suivant (on peut trouver la démonstration dans [12] par exemple).

Proposition C.1. *(Inégalité de Young) Soient $p,q,r\in[1,+\infty]$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1+\frac{1}{r}$. Pour toutes fonctions $f\in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g\in L^q(\mathbb{R}^d)$, la fonction $f*g$ est définie presque partout sur $\mathbb{R}^d$ et appartient à $L^r(\mathbb{R}^d)$. De plus, on a*

$$\|f*g\|_{L^r(\mathbb{R}^d)}\leq\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\|g\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}.$$

On peut à présent démontrer le résultat. Remarquons que dans la démonstration, les constantes $C,C',...$ apparaissent plusieurs fois, elles ne sont évidemment pas spécialement égales, le contexte étant suffisamment clair à chaque fois.

Proposition C.2. *Soient φ une fonction réelle non négative dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que*

$$\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)\,dx=1$$

et telle que $[\varphi]\subset\overline{B(0,1)}$, $p\in[1,+\infty[$, $f\in L^p(\mathbb{R}^d)$, et posons pour tout $\lambda>0$,

$$f_\lambda=\lambda^d\,\varphi(\lambda\cdot)*f.$$

Soient $x_0\in\mathbb{R}^d$ et $\phi\in\mathcal{B}$ tels que $\underline{b}(\phi)>-\frac{d}{p}$ et supposons que soit il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $n<\underline{b}(\phi)\leq\overline{b}(\phi)<n+1$ ou soit que $\underline{b}(\phi)\leq 0$. Alors, si $f\in t^p_\phi(x_0)$, on a

$$\|f_\lambda-f\|_{T^p_\phi(x_0)}\underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

Démonstration. On peut évidemment supposer, sans perdre de généralités, que $x_0=0$.

Comme rappelé précédemment, on sait que les fonctions f_λ sont dans $L^p(\mathbb{R}^d)\cap C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

• Montrons en premier lieu le cas où il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n < \underline{b}(\phi) \leq \overline{b}(\phi) < n+1$.

Pour tout $\lambda > 0$, on pose $R_\lambda = f_\lambda - P_\lambda$, où P_λ désigne le polynôme de Taylor de f_λ en 0 à l'ordre n.
Soit P un polynôme de degré au plus n tel que

$$r^{-d/p}\|f-P\|_{L^p(B(0,r))} \in o(\phi(r)) \text{ quand } r \to 0^+,$$

et posons $R = f - P$.
Soit $r > 0$, on sait que

$$r^{-d}\|R\|_{L^1(B(0,r))} \leq C_d^{1-1/p} r^{-d/p}\|R\|_{L^p(B(0,r))} \leq \varepsilon(r)\phi(r),$$

où $\varepsilon(r) \searrow 0$ quand $r \to 0^+$.
Soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leq n$, remarquons que

$$D^\alpha P_\lambda(0) \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} D^\alpha P(0). \tag{5}$$

En effet, par définition de P_λ puis de f_λ, on a

$$\begin{aligned} D^\alpha P_\lambda(0) = D^\alpha f_\lambda(0) &= D^\alpha \left(\lambda^d \varphi(\lambda\cdot) * (P+R)\right)(0) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \lambda^d \varphi(-\lambda y)\, D^\alpha P(y)\, dy + \int_{\mathbb{R}^d} (-1)^{|\alpha|}\lambda^{d+|\alpha|} D^\alpha\varphi(-\lambda y)\, R(y)\, dy. \end{aligned}$$

Par changement de variable $u = -\lambda y$ et vu nos hypothèses sur φ, il est clair que le premier terme tend vers $D^\alpha P(0)$ quand λ tend vers l'infini.
En ce qui concerne le deuxième terme, on a

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d} (-1)^{|\alpha|}\lambda^{d+|\alpha|} D^\alpha\varphi(-\lambda y)\, R(y)\, dy\right| \leq C_\varphi \lambda^{d+|\alpha|} \int_{B\left(0,\frac{1}{\lambda}\right)} |R(y)|\, dy \leq \varepsilon\left(\frac{1}{\lambda}\right)\, \lambda^{|\alpha|}\, \phi\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

ce qui montre que le deuxième terme tend vers 0 quand λ tend vers l'infini vu le point (i) de la proposition 4.1.2 puisque

$$|\alpha| \leq n < \underline{b}(\phi),$$

et on obtient donc bien (5).

Soit $\lambda > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\begin{aligned} R_\lambda(x) &= f_\lambda(x) - P_\lambda(x) \\ &= (\lambda^d\varphi(\lambda\cdot) * (P+R))(x) - \sum_{|\alpha|\leq n} \frac{D^\alpha(\lambda^d\varphi(\lambda\cdot) * (P+R))(0)}{|\alpha|!}\, x^\alpha \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\lambda^d\, \varphi(\lambda(x-y)) - \sum_{|\alpha|\leq n} (-1)^{|\alpha|}\lambda^{d+|\alpha|} \frac{D^\alpha\varphi(-\lambda y)}{|\alpha|!}\, x^\alpha\right) (P(y)+R(y))\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\lambda^d\, \varphi(\lambda(x-y)) - \sum_{|\alpha|\leq n} (-1)^{|\alpha|}\lambda^{d+|\alpha|} \frac{D^\alpha\varphi(-\lambda y)}{|\alpha|!}\, x^\alpha\right) R(y)\, dy, \end{aligned}$$

où la dernière égalité est justifiée par le fait que comme P est un polynôme de degré au plus n, on a

$$\begin{aligned}
(\lambda^d\varphi(\lambda\cdot) * P)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \lambda^d\varphi(-\lambda y)\, P(x+y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \lambda^d\varphi(-\lambda y) \sum_{|\alpha|\le n} \frac{D^\alpha P(y)}{|\alpha|!}\, x^\alpha\, dy \\
&= \sum_{|\alpha|\le n} \frac{\lambda^d\, x^\alpha}{|\alpha|!}(\varphi(\lambda\cdot) * D^\alpha P)(0) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{|\alpha|\le n} (-1)^{|\alpha|}\lambda^{d+|\alpha|}\frac{D^\alpha\varphi(-\lambda y)}{|\alpha|!}\, x^\alpha\, P(y)\, dy.
\end{aligned}$$

Or, grâce à l'inégalité de Young (pour $p=p, q=1, r=p$), pour tout $r>0$, on a

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{\mathbb{R}^d} \lambda^d\, \varphi(\lambda(\cdot - y)) R(y)\, dy \right\|_{L^p(B(0,r))} &= \|\lambda^d\varphi(\lambda\cdot) * R\|_{L^p(B(0,r))} \\
&\le \|\lambda^d\varphi(\lambda\cdot)\|_{L^1(B(0,r))}\, \|R\|_{L^p(B(0,r))} \\
&\le \|R\|_{L^p(B(0,2r))} \\
&= (2r)^{d/p}\, (2r)^{-d/p}\, \|R\|_{L^p(B(0,2r))} \\
&\le C_d^{1/p-1}\, (2r)^{d/p}\, \varepsilon(2r)\, \phi(2r) \\
&\le C_d^{1/p-1}\, 2^{d/p}\, r^{d/p}\, \varepsilon(2r)\, \overline{\phi}(2)\, \phi(r) \\
&= C\, r^{d/p}\, \varepsilon(2r)\, \phi(r)
\end{aligned}$$

et en posant

$$A(\cdot) = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{|\alpha|\le n} (-1)^{|\alpha|}\lambda^{d+|\alpha|}\frac{D^\alpha\varphi(-\lambda y)}{|\alpha|!}\ \cdot^\alpha\ R(y)\, dy,$$

on a également

$$\begin{aligned}
\|A\|_{L^p(B(0,r))} &= \sum_{|\alpha|\le n} \frac{\lambda^{d+|\alpha|}}{|\alpha|!} \left\| \int_{\mathbb{R}^d} D^\alpha\varphi(-\lambda y)\ \cdot^\alpha\ R(y)\, dy \right\|_{L^p(B(0,r))} \\
&\le \sum_{|\alpha|\le n} \lambda^{d+|\alpha|} \|R D^\alpha\varphi(-\lambda\cdot)\|_{L^1(B(0,1/\lambda))}\, \|\cdot^\alpha\|_{L^p(B(0,r))} \\
&\le C_\varphi \sum_{|\alpha|\le n} \lambda^{|\alpha|} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{-d} \|R\|_{L^1(B(0,1/\lambda))}\, \|\cdot^\alpha\|_{L^p(B(0,r))} \\
&\le C_\varphi \sum_{|\alpha|\le n} \lambda^{|\alpha|}\, \varepsilon\left(\frac{1}{\lambda}\right) \phi\left(\frac{1}{\lambda}\right)\ \|\cdot^\alpha\|_{L^p([-r,r]^d)} \\
&\le C' \sum_{|\alpha|\le n} \lambda^{|\alpha|}\, \varepsilon\left(\frac{1}{\lambda}\right) \phi\left(\frac{1}{\lambda}\right)\ r^{|\alpha|+d/p}.
\end{aligned}$$

Si on suppose que $r \geq 1/\lambda$, comme

$$\phi\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \phi\left(\frac{r}{r\lambda}\right) \leq \phi(r)\,\overline{\phi}\left(\frac{1}{r\lambda}\right),$$

on en déduit, grâce à la remarque 4.1.4 (première partie, $R = 1$) et en choisissant $\delta > 0$ tel que $\underline{b}(\phi) - \delta - n \geq 0$, que

$$\begin{aligned}
\|A\|_{L^p(B(0,r))} &\leq C' \sum_{|\alpha|\leq n} \lambda^{|\alpha|}\,\varepsilon\left(\frac{1}{\lambda}\right)\phi(r)\,\overline{\phi}\left(\frac{1}{r\lambda}\right) r^{|\alpha|+d/p} \\
&\leq C'' \sum_{|\alpha|\leq n} \lambda^{|\alpha|}\,\varepsilon\left(\frac{1}{\lambda}\right)\phi(r)\,\left(\frac{1}{r\lambda}\right)^{\underline{b}(\phi)-\delta} r^{|\alpha|+d/p} \\
&= r^{d/p}\,C'' \sum_{|\alpha|\leq n} \varepsilon\left(\frac{1}{\lambda}\right)\phi(r)(r\lambda)^{-(\underline{b}(\phi)-\delta-|\alpha|)} \\
&\leq r^{d/p}\,C''\phi(r) \sum_{|\alpha|\leq n} \varepsilon\left(\frac{1}{\lambda}\right) \\
&\leq r^{d/p}\,C'''\,\varepsilon(2r)\,\phi(r).
\end{aligned}$$

Au final, pour tout $r \geq 1/\lambda$, on obtient

$$\|R_\lambda\|_{L^p(B(0,r))} \leq C\,r^{d/p}\,\varepsilon(2r)\,\phi(r), \tag{6}$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de r et λ.
On s'intéresse à présent au cas où $r < 1/\lambda$. Grâce à la formule de Taylor, on a

$$\left|\lambda^d\,\varphi(\lambda(x-y)) - \sum_{|\alpha|\leq n} \lambda^{d+|\alpha|}\frac{D^\alpha\varphi(-\lambda y)}{|\alpha|!}\,x^\alpha\right| \leq C_\varphi\,\lambda^d\,(\lambda\,|x|)^{n+1},$$

et donc pour tout $x \in B(0,r)$,

$$\begin{aligned}
|R_\lambda(x)| \leq C_\varphi\,\lambda^d\,(\lambda\,|x|)^{n+1}\int_{B(0,1/\lambda)} |R(y)|\,dy &\leq C_\varphi\,2^d\,(\lambda\,|x|)^{n+1}\left(\frac{2}{\lambda}\right)^{-d}\|R\|_{L^1(B(0,2/\lambda))} \\
&\leq C_{\varphi,d}\,(\lambda\,|x|)^{n+1}\varepsilon\left(\frac{2}{\lambda}\right)\phi\left(\frac{2}{\lambda}\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a comme précédemment

$$\begin{aligned}
\|R_\lambda\|_{L^p(B(0,r))} \leq C\,\varepsilon\left(\frac{2}{\lambda}\right)\phi\left(\frac{2}{\lambda}\right)\lambda^{n+1}\|\,\cdot^{n+1}\,\|_{L^p(B(0,r))} &\leq C'\varepsilon\left(\frac{2}{\lambda}\right)\phi\left(\frac{2}{\lambda}\right)\lambda^{n+1}\,r^{n+1+d/p} \\
&\leq C''\varepsilon\left(\frac{2}{\lambda}\right)\phi\left(\frac{1}{\lambda}\right)\lambda^{n+1}\,r^{n+1+d/p}.
\end{aligned}$$

On en déduit, grâce à la remarque 4.1.4 (deuxième partie, $R = 1$) et en choisissant $\delta' > 0$ tel que $n + 1 - \overline{b}(\phi) - \delta' \geq 0$, que

$$\begin{aligned} \|R_\lambda\|_{L^p(B(0,r))} \leq C''\varepsilon\left(\frac{2}{\lambda}\right) r^{d/p}\,(\lambda r)^{n+1}\phi\left(\frac{r}{r\lambda}\right) &\leq C''\varepsilon\left(\frac{2}{\lambda}\right) r^{d/p}\,(\lambda r)^{n+1}\phi(r)\,\overline{\phi}\left(\frac{1}{r\lambda}\right) \\ &\leq C'''\varepsilon\left(\frac{2}{\lambda}\right) r^{d/p}\,\phi(r)\,(\lambda r)^{n+1-\overline{b}(\phi)-\delta'} \\ &\leq C'''\varepsilon\left(\frac{2}{\lambda}\right) r^{d/p}\,\phi(r). \end{aligned}$$

Cette relation et la relation (6) permettent donc d'affirmer que pour tout $r > 0$,

$$\phi(r)^{-1}\,r^{-d/p}\|R_\lambda\|_{L^p(B(0,r))} \leq C\left(\varepsilon(2r) + \varepsilon\left(\frac{2}{\lambda}\right)\right),$$

et donc

$$\star := \phi(r)^{-1}\,r^{-d/p}\|R - R_\lambda\|_{L^p(B(0,r))} \leq D\left(\varepsilon(2r) + \varepsilon\left(\frac{2}{\lambda}\right)\right) \quad \forall r > 0, \tag{7}$$

où $D > 0$ est une constante indépendante de r et λ.
Soient $\rho > 0$ fixé et $\eta > 0$ tel que $\underline{b}(\phi) - \eta > n$, grâce à la proposition 4.1.2, pour tout $r \geq \rho$, on a

$$\begin{aligned} \star &\leq \phi(r)^{-1}\,r^{-d/p}\|f - f_\lambda\|_{L^p(B(0,r))} + C_d \sum_{|\alpha|\leq n} \frac{|D^\alpha P(x_0) - D^\alpha P_\lambda(x_0)|}{|\alpha|!}\phi(r)^{-1}\,r^{|\alpha|} \\ &\leq C_\rho\, r^{-\underline{b}(\phi)+\eta-d/p}\|f - f_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + C_{d,\rho} \sum_{|\alpha|\leq n} \frac{|D^\alpha P(x_0) - D^\alpha P_\lambda(x_0)|}{|\alpha|!}\phi(r)^{-1}\,r^{-\underline{b}(\phi)+\eta+|\alpha|} \\ &\leq C_\rho\, \rho^{-\underline{b}(\phi)+\eta-d/p}\|f - f_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + C_{d,\rho} \sum_{|\alpha|\leq n} \frac{|D^\alpha P(x_0) - D^\alpha P_\lambda(x_0)|}{|\alpha|!}\phi(r)^{-1}\,\rho^{-\underline{b}(\phi)+\eta+|\alpha|}. \end{aligned}$$

Comme on sait que $\|f - f_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \to 0$ quand $\lambda \to +\infty$ et que $D^\alpha P_\lambda(0) \to D^\alpha P(0)$ pour tout $|\alpha| \leq n$ (cf la relation (5)), on en déduit que

$$\sup_{r>\rho} \phi(r)^{-1}\,r^{-d/p}\,\|R - R_\lambda\|_{L^p(B(0,r))} \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{8}$$

Montrons alors que

$$\sup_{r>0} \phi(r)^{-1}\,r^{-d/p}\,\|R - R_\lambda\|_{L^p(B(0,r))} \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui suffira car on aura alors clairement la thèse par définition de la norme $\|.\|_{T^p_\phi(x_0)}$.
Procédons par l'absurde et supposons donc qu'il existe $\kappa > 0$ tel que pour tout $\Lambda > 0$, il existe $\lambda_\Lambda > \Lambda$ pour lequel

$$\sup_{r>0} \phi(r)^{-1}\,r^{-d/p}\,\|R - R_{\lambda_\Lambda}\|_{L^p(B(0,r))} \geq \kappa.$$

Cela permet de construire une suite $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ qui converge vers l'infini et telle que pour tout $j \in \mathbb{N}_0$,

$$\sup_{r>0} \phi(r)^{-1}\, r^{-d/p}\, \|R - R_{\lambda_j}\|_{L^p(B(0,r))} \geq \kappa.$$

En particulier, si on fixe $j \in \mathbb{N}_0$, il existe $r_j > 0$ tel que

$$\phi(r_j)^{-1}\, r_j^{-d/p}\, \|R - R_{\lambda_j}\|_{L^p(B(0,r_j))} \geq \frac{\kappa}{2}. \tag{9}$$

Comme la suite $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ converge vers l'infini, il existe $J \in \mathbb{N}_0$ tel que pour tout $j \geq J$,

$$\varepsilon\left(\frac{2}{\lambda_j}\right) < \frac{\kappa}{4D},$$

où D désigne la constante apparaissant dans la relation (7).
Il existe aussi $\rho > 0$ tel que

$$\varepsilon(2r) < \frac{\kappa}{4D} \quad \forall r \in \left]0, \rho\right].$$

Ainsi, grâce à la relation (8), il existe $J' \in \mathbb{N}_0$ tel que pour tout $j \geq J'$,

$$\sup_{r>\rho} \phi(r)^{-1}\, r^{-d/p}\, \|R - R_{\lambda_j}\|_{L^p(B(0,r))} < \frac{\kappa}{2}.$$

On en déduit que, pour tout $j \geq \max\{J, J'\}$, $r_j \leq \rho$ au vu de l'inégalité précédente et de l'inégalité (9).
Cependant, grâce à la relation (7), pour tout $j \geq \max\{J, J'\}$, comme $r_j \in \left]0, \rho\right]$, on a

$$\phi(r_j)^{-1}\, r_j^{-d/p} \|R - R_{\lambda_j}\|_{L^p(B(0,r_j))} \leq D\left(\varepsilon(2\, r_j) + \varepsilon\left(\frac{2}{\lambda_j}\right)\right) < \frac{\kappa}{2},$$

ce qui mène donc à une contradiction au vu de l'inégalité (9).

• Passons maintenant au cas où $\underline{b}(\phi) \leq 0$.

Il est alors clair que $R = f$ et $R_\lambda = f_\lambda$ pour tout $\lambda > 0$. Grâce à l'inégalité de Young, pour tous $r, \lambda > 0$, on a

$$\begin{aligned} \|R_\lambda\|_{L^p(B(0,r))} = \|\lambda^d\, \varphi(\lambda\cdot) * f\|_{L^p(B(0,r))} &\leq \|\lambda^d\, \varphi(\lambda\cdot)\|_{L^1(B(0,r))}\, \|f\|_{L^p(B(0,r))} \\ &\leq \|R\|_{L^p(B(0,2r))} \\ &\leq C\, r^{d/p}\, \varepsilon(2r)\, \phi(2r) \\ &\leq C'\, r^{d/p}\, \varepsilon(2r)\, \phi(r). \end{aligned}$$

On a donc l'inégalité (6) et si $r \leq 1/\lambda$, alors on a $\varepsilon(2r) \leq \varepsilon(2/\lambda)$ et on obtient donc comme précédemment la relation (7).
On conclut alors, comme on l'a fait pour le premier cas, en utilisant l'égalité

$$\phi(r)^{-1}\|R - R_\lambda\|_{L^p(B(0,r))} = \phi(r)^{-1}\|f - f_\lambda\|_{L^p(B(0,r))},$$

valable pour tout $r > 0$, et en employant l'inégalité $\underline{b}(\phi) > -d/p$.

□

D Lemmes pour la généralisation du théorème d'extension de Whitney

Le résultat suivant est un équivalent de l'axiome du choix sur ZF. On peut trouver la démonstration de cette équivalence dans [45].

Rappel D.1. (Principe de maximalité de Hausdorff **(AC)**)
Dans tout ensemble partiellement ordonné, tout sous-ensemble totalement ordonné est contenu dans un sous-ensemble maximal totalement ordonné.

Notation 1. Si B désigne une boule fermée de $\mathbb{R}^d$ de centre x_0 et de rayon r, on note

$$\widehat{B} = B(x_0, 5r).$$

Lemme D.1. *Soit $\mathcal{G}$ une famille de boules fermées avec*

$$R := \sup\{\operatorname{diam} B : B \in \mathcal{G}\} < +\infty.$$

Alors il existe une sous-famille $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ d'éléments disjoints deux à deux telle que

$$\bigcup_{B\in\mathcal{G}} B \subseteq \bigcup_{B\in\mathcal{F}} \widehat{B}.$$

De plus, pour tout $B \in \mathcal{G}$, il existe $B_1 \in \mathcal{F}$ telle que $B \cap B_1 \neq \emptyset$ et $B \subseteq \widehat{B_1}$.

Démonstration. Pour $j \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$\mathcal{G}_j = \mathcal{G} \cap \left\{ B \subset \mathbb{R}^d : \frac{R}{2^j} < \operatorname{diam} B \leq \frac{R}{2^{j-1}} \right\}.$$

Il est clair que $\mathcal{G} = \cup_{j\in\mathbb{N}_0}\mathcal{G}_j$.
Construisons $\mathcal{F}_j \subseteq \mathcal{G}_j$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, et ce par induction.
Par le principe de maximalité de Hausdorff, on peut trouver $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{G}_1$ une sous-collection maximale d'éléments disjoints deux à deux.
Soit $j \in \mathbb{N}_0$ et supposons que $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_{j-1}$ ont été choisis, on choisit $\mathcal{F}_j$ comme étant une sous-collection maximale d'éléments disjoints deux à deux de

$$\mathcal{H}_j := \mathcal{G}_j \cap \left\{ B : B \cap B' = \emptyset \text{ si } B' \in \bigcup_{k=1}^{j-1} \mathcal{F}_k \right\}.$$

Ainsi, pour tout $B \in \mathcal{G}_j$, il existe $B_1 \in \cup_{k=1}^{j}\mathcal{F}_k$ tel que $B \cap B_1 \neq \emptyset$.
Pour le voir, on procède par l'absurde. Supposons que la famille $\mathcal{F}_j^\star$ qui rassemble B et tous les éléments de $\mathcal{F}_j$ soit une collection d'éléments disjoints deux à deux de $\mathcal{H}_j$, cela contredit la maximalité de $\mathcal{F}_j$. De plus,

$$\operatorname{diam} B \leq \frac{R}{2^{j-1}} \leq 2\,\frac{R}{2^j} \leq 2 \operatorname{diam} B_1$$

et donc $B \subseteq \widehat{B_1}$.
Par conséquent, on a

$$\bigcup_{B \in \mathcal{G}_j} B \subseteq \bigcup_{B \in \cup_{k=1}^{j} \mathcal{F}_k} \widehat{B},$$

d'où la conclusion en prenant

$$\mathcal{F} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_k.$$

□

Lemme D.2. *Soit $S \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^d$ et supposons que $h : U \to]0, +\infty[$ est lipschitzienne avec* $\mathrm{Lip}(h) \leq \lambda$. *Soient $a, b > 0$ tels que $\lambda a, \lambda b < 1$ et supposons que la collection des boules fermées*

$$\left\{\overline{B(s, h(s))},\ s \in S\right\}$$

est constituée d'éléments disjoints deux à deux. Pour tout $x \in U$, on pose

$$S_x = \left\{s \in S : \overline{B(x, a\, h(x))} \cap \overline{B(s, b\, h(s))} \neq \emptyset\right\}.$$

Alors, pour tout $s \in S_x$, on a

$$\frac{1 - \lambda b}{1 + \lambda a} \leq \frac{h(x)}{h(s)} \leq \frac{1 + \lambda b}{1 - \lambda a} \tag{10}$$

et

$$|S_x| \leq \left(a + \frac{(b+1)(1+\lambda a)}{1 - \lambda b}\right)^d \left(\frac{1 + \lambda b}{1 - \lambda a}\right)^d. \tag{11}$$

Démonstration. Soient $x \in U$ et $s \in S_x$, il est clair que $|x - s| \leq ah(x) + bh(s)$.
On en déduit donc que

$$|h(x) - h(s)| \leq \lambda |x - s| \leq \lambda a h(x) + \lambda b h(s),$$

et donc on a

$$(1 - \lambda b) h(s) \leq (1 + \lambda a) h(x) \text{ et } (1 - \lambda a) h(x) \leq (1 + \lambda b) h(s),$$

d'où la relation (10).
Pour l'inégalité (11), on remarque que pour $x \in U$ fixé, si $s \in S_x$, alors

$$|x - s| + h(s) \leq ah(x) + (b+1) h(s) \leq ah(x)(b+1) \frac{1 + \lambda a}{1 - \lambda b} h(x) \leq \gamma\, h(x),$$

où $\gamma := a + (b+1)\frac{1+\lambda a}{1-\lambda b}$.
Par conséquent, pour tout $s \in S_x$, on a

$$\overline{B(s, h(s))} \subseteq \overline{B(x, \gamma h(x))}.$$

En effet, si $s' \in \overline{B(s,h(s))}$, alors

$$|x-s'| \leq |x-s| + |s-s'| \leq |x-s| + h(s) \leq \gamma\, h(x).$$

Comme on sait que $\left\{\overline{B(s,h(s))},\ s \in S_x\right\}$ est une famille constituée d'éléments disjoints deux à deux, on a

$$\sum_{s\in S_x} \operatorname{mes}\left(\overline{B(s,h(s))}\right) \leq \operatorname{mes}\left(\overline{B(s,\gamma h(x))}\right).$$

Grâce à la relation (10), comme les constantes C_d se simplifient, on a donc

$$|S_x|\, a\left(\frac{1-\lambda a}{1+\lambda b} h(x)\right)^d \leq \sum_{s\in S_x} a h(s)^d \leq a(\gamma h(x))^d,$$

d'où l'inégalité (11) par définition de γ. □

Lemme D.3. *Soient $E \subseteq \mathbb{R}^d$ fermé et $U = \{x \in \mathbb{R}^d \mid d(x,E) < 1\}$, il existe $\delta \in C^\infty(U\backslash E)$ et $C > 0$ tels que*

$$C^{-1} d(x,E) \leq \delta(x) \leq C d(x,E) \quad \forall x \in U\backslash E$$

et

$$|D^\alpha \delta(x)| \leq C(\alpha)\, d(x,E)^{1-|\alpha|} \quad \forall x \in U\backslash E,\ |\alpha| \geq 0.$$

Démonstration. Pour tout $x \in U\backslash E$, on pose $h(x) = \frac{1}{20}\, d(x,E)$. On considère le recouvrement de $U\backslash E$ par les boules fermées

$$\left\{\overline{B(x,h(x))},\ x \in U\backslash E\right\}.$$

Par le lemme D.1, il existe un ensemble dénombrable $S \subseteq U\backslash E$ tel que la famille

$$\left\{\overline{B(s,h(s))},\ s \in S\right\}$$

est constituée d'éléments disjoints deux à deux et tel que

$$\mathbb{R}^d\backslash E \supseteq \left\{\cup\overline{B(s,5h(s))} : s \in S\right\} \supseteq U\backslash E.$$

En posant $\lambda = \frac{1}{20}$, il est clair que h est lipschitzienne sur $U\backslash E$ avec $\operatorname{Lip}(h) \leq \lambda$. Soit $x \in U\backslash E$, en prenant $a = b = 10$ dans le lemme D.2, pour tout $s \in S_x$, on a

$$\frac{1}{3} \leq \frac{h(x)}{h(s)} \leq 3. \tag{12}$$

On a $\theta(x) := |S_x| \leq C'$ et soit $\eta : \mathbb{R} \to [0,1]$ une fonction de $C^\infty(\mathbb{R})$ qui vaut 1 sur $]-\infty,1]$ et 0 sur $[2,+\infty[$.
Il est clair que la fonction

$$\psi : \mathbb{R}^d \to [0,1] : x \mapsto \eta(|x|)$$

est dans $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ puisque η est constante au voisinage de 0.
Pour $s \in S$, on définit la fonction

$$v_s : U \to \mathbb{R} : x \mapsto h(s)\, \psi\left(\frac{x-s}{5h(s)}\right)$$

qui est évidemment dans $C^\infty(U)$. On remarque que

$$[v_s] \subseteq \overline{B(s, 10h(s))}.$$

En effet,

$$\left|\frac{x-s}{5h(s)}\right| > 2 \Rightarrow \psi\left(\frac{x-s}{5h(s)}\right) = 0.$$

On remarque également que $v_s = h(s)$ sur $\overline{B(s, 5h(s))}$.
En utilisant la relation (12), pour $s \in S_x$, on a

$$|D^\alpha v_s(x)| \leq C''\, h(s)\, \left(\frac{1}{5h(s)}\right)^{|\alpha|} \leq C''\, 5^{-|\alpha|} 3^{1-|\alpha|}\, h(x)^{1-|\alpha|}.$$

On pose alors pour tout $x \in U$,

$$\delta(x) = \sum_{s \in S} v_s(x) = \sum_{s \in S_x} v_s(x).$$

Pour $x \in U \backslash E$, on a alors

$$\frac{d(x,E)}{60} = \frac{h(x)}{3} \leq \delta(x) \leq 3\, \theta(x)\, h(x) = \frac{3}{20} \theta(x)\, d(x,E).$$

On en déduit le premier point en prenant $C = \max\{60, \frac{3}{20} C'\} > 0$.
Pour le deuxième point, pour tout $x \in U \backslash E$, on a

$$|D^\alpha \delta(x)| \leq C''\, 5^{-|\alpha|} 3^{1-|\alpha|}\, h(x)^{1-|\alpha|}\, \theta(x) \leq C' C''\, 5^{-|\alpha|} 3^{1-|\alpha|}\, d(x,E)^{1-|\alpha|},$$

d'où la conclusion. □

E Espaces de Sobolev

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $p \geq 1$.

Définition E.1. Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit l'*espace de Sobolev*

$$W_n^p(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : D^\alpha f \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq n\},$$

où les dérivées sont à prendre au sens faible (i.e. au sens des distributions).

On équipe en général cet espace de la norme donnée par

$$\|f\|_{W_n^p(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\le n} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)},$$

ce qui en fait un espace de Banach.
Le résultat suivant est démontré dans [76] (voir théorème 2.1.4 de [76]).

Théorème E.1. *Si $f \in L^p(\Omega)$, alors $f \in W_1^p(\Omega)$ si et seulement s'il existe une fonction F égale à f presque partout sur Ω, qui est absolument continue sur presque tous les segments de Ω parallèles aux axes et dont les dérivées partielles d'ordre 1 appartiennent à $L^p(\Omega)$.*

Le résultat suivant est également prouvé dans [76] (voir théorèmes 3.4.1 et 3.4.2 de [76]) dans un cadre un peu plus général où l'ensemble de mesure nulle en question est en fait de capacité de Bessel nulle.

Théorème E.2. *Si $p > 1$ et $1 \le m_1 \le m_2$ vérifient $(m_2 - m_1)p < d$ et $f \in W_{m_2}^p(\mathbb{R}^d)$, alors il existe un polynôme Q de degré au plus $m_1 - 1$ tel que*

$$r^{-m_1}\, r^{-d/p}\, \|f - Q\|_{L^p(B(x,r))} \underset{r\to 0^+}{\longrightarrow} 0$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$.

Bibliographie

[1] ABRY, Patrice, Stéphane JAFFARD, Roberto LEONARDUZZI, Clothilde MÉLOT et Herwig WENDT. Multifractal analysis based on p-exponents and lacunarity exponents. *Fractal Geometry and Stochastics V*. 2016, 70, p. 279–313.

[2] ADAMS, Robert Alexander et John James Francis FOURNIER. *Sobolev spaces*. 2e éd. Elsevier, 2003. (Pure and Applied Mathematics).

[3] ALMEIDA, Alexandre. Wavelet bases in generalized Besov spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2005, 304, p. 198–211.

[4] ARNEODO, Alain, Emmanuel BACRY et Jean-François MUZY. The thermodynamics of fractals revisited with wavelets. *Physica A*. 1995, 213, p. 232–275.

[5] AUBRY, Jean-Marie, Françoise BASTIN, Sophie DISPA et Stéphane JAFFARD. Topological properties of the sequences spaces S^ν. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2006, 321, p. 364–387.

[6] BALAZARD, Michel et Bruno MARTIN. Comportement local moyen de la fonction de Brjuno. *Fundamenta Mathematicae*. 2012, 218, p. 193–224.

[7] BALAZARD, Michel et Bruno MARTIN. Sur le minimum de la fonction de Brjuno. *Mathematische Zeitschrift*. 2020, 296, p. 1819–1824.

[8] BASTIN, Françoise. *Analyse III, 2ème partie*. Université de Liège, 2006.

[9] BASTIN, Françoise, Céline ESSER et Stéphane JAFFARD. Large deviation spectra based on wavelet leaders. *Revista Matematica Iberoamericana*. 2016, 32(3), p. 859–890.

[10] BESOV, Oleg Vladimirovich. On a certain family of functional spaces. Embedding and extension theorems. *Doklady Akademii Nauk SSSR*. 1959, 126, p. 1163–1165.

[11] BILLINGSLEY, Patrick. *Ergodic Theory and Information*. John Wiley and Sons, Inc, 1965.

[12] BOGACHEV, Vladimir Igorevich. *Measure Theory*. Springer, 2007.

[13] BOYD, David William. The Hilbert transform on rearrangement-invariant spaces. *Canadian Journal of Mathematics*. 1967, (19), p. 599–616.

[14] BRJUNO, Alexander Dmitrijewitsch. Analytic form of differential equations. I,II. *Trudy Moskovskogo Matematiceskogo Obscestva*. 1971, 25, p. 119–262.

[15] BRUDNYI, Yuri et Alexander BRUDNYI. A multidimensional analog of a theorem of Whitney. *Mathematics of the USSR-Sbornik*. 1970, 11(2), p. 157–170.

[16] CALDERÓN, Alberto Pedro et Antoni ZYGMUND. Local properties of solutions of elliptic partial differential equations. *Studia Mathematica*. 1961, 20(2), p. 181–225.

[17] CHANG, Der-Chen et Cora SADOSKY. Functions of bounded mean oscillation. *Taiwanese Journal of Mathematics*. 2006, 10(3), p. 573–601.

[18] DAUBECHIES, Ingrid. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 1988, (41), p. 909–996.

[19] DAUBECHIES, Ingrid. *Ten Lectures on Wavelets*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992. (CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics ; 61).

[20] DELIÈGE, Adrien. Analyse de la régularité höldérienne : De la théorie à l'application à des séries temporelles de températures. Master's thesis, Université de Liège, 2013.

[21] DITZIAN, Zeev. Multivariate Bernstein and Markov inequalities. *Journal of Approximation Theory*. 1992, 70(3), p. 273–283.

[22] DOVGOSHEY, Oleksiy, Olli MARTIO, Vladimir RYAZANOV et Matti VUORINEN. The Cantor function. *Expositiones Mathematicae*. 2006, 24(1), p. 1–37.

[23] ESSER, Céline. *Regularity of functions : Genericity and multifractal analysis*. Thèse de doctorat, Université de Liège, 2014.

[24] FALCONER, Kenneth. *Fractal Geometry : Mathematical Foundations and Applications*. 3e éd. 2014.

[25] FARKAS, Walter et Hans-Gerd LEOPOLD. Characterisations of function spaces of generalised smoothness. *Annali di Matematica*. 2006, 185, p. 1–62.

[26] GERVER, Joseph. The Differentiability of the Riemann Function at Certain Rational Multiples of π. *American Journal of Mathematics*. 1970, 92(1), p. 33–55.

[27] GOSPER, Ralph William. Acceleration of series. *AI Memos*. 1974, 304, p. 1–90.

[28] GROSSMANN, Alex et Jean MORLET. Decomposition of Hardy Functions into Square Integrable Wavelets of Constant Shape. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*. 1984, 15(4), p. 723–736.

[29] HAAR, Alfréd. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme. *Mathematische Annalen*. 1910, 69(3), p. 331–371.

[30] HARDY, Godfrey Harold. Weierstrass's non-differentiable function. *Transactions of the American Mathematical Society*. 1916, 17(3), p. 301–325.

[31] HILLE, Einar et Ralph S. PHILLIPS. *Functional Analysis and Semigroups*. American Mathematical Society, 1996. (Colloquium Publications ; 31).

[32] HUNT, Brian, Tim SAUER et James Alan YORKE. Prevalence : A translation-invariant "almost every" on infinite-dimensional spaces. *Bulletin of the American Mathematical Society*. 1992, 27(2), p. 217–238.

[33] IRELAND, Kenneth et Michael ROSEN. *A Classical Introduction to Modern Number Theory*. 2e éd. Springer-Verlag, 1990. (Graduate Texts in Mathematics ; 84).

[34] JAFFARD, Stéphane. The spectrum of singularities of Riemann's function. *Revista Matematica Iberoamericana*. 1996, 12(2), p. 441–460.

[35] JAFFARD, Stéphane. Multifractal formalism for functions part I : Results valid for all functions. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*. 1997, 28(4), p. 944–970.

[36] JAFFARD, Stéphane. Multifractal formalism for functions part II : self-similar functions. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*. 1997, 28(4), p. 971–998.

[37] JAFFARD, Stéphane. Construction of functions with prescribed Hölder and chirp exponents. *Revista Matematica Iberoamericana*. 2000, 16(2), p. 331–349.

[38] JAFFARD, Stéphane. On lacunary wavelet series. *The annals of Applied Probability*. 2000, 10(1), p. 313–329.

[39] JAFFARD, Stéphane. Wavelet techniques in multifractal analysis, fractal geometry and applications : A jubilee of Benoit Mandelbrot. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*. 2004, 72, p. 91–151.

[40] JAFFARD, Stéphane. Beyond Besov spaces Part 2 : Oscillation spaces. *Constructive Approximation*. 2005, 21, p. 29–61.

[41] JAFFARD, Stéphane, Bruno LASHERMES et Patrice ABRY. Wavelet Leaders in Multifactral Analysis. *In :* TAO, Qian, Vai MANG I et Xu YUESHENG, éds, *Wavelet Analysis and Applications*, Birkhäuser Verlag, 2007, (Applied and Numerical Harmonic Analysis), p. 201–246.

[42] JAFFARD, Stéphane et Bruno MARTIN. Multifractal analysis of the Brjuno function. *Inventiones mathematicae*. 2018, 212, p. 109–132.

[43] JAFFARD, Stéphane et Clothilde MÉLOT. Wavelet Analysis of Fractal Boundaries. Part 1 : Local Exponents. *Communications in Mathematical Physics*. 2005, 258, p. 513–539.

[44] JAFFARD, Stéphane, Clothilde MÉLOT, Roberto LEONARDUZZI, Herwig WENDT, Patrice ABRY, Stéphane ROUX et Maria TORRES. p-exponent and p-leaders, Part I : Negative pointwise regularity. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*. 2016, 448, p. 300–318.

[45] KELLEY, John. *General Topology*. Springer, 1991. (Graduate Texts in Mathematics ; 27).

[46] KHINCHIN, Aleksandr Yakovlevich. *Continued Fractions*. Dover Publications, 1997.

[47] KREIT, Damien. *On Generalized Hölder-Zygmund Spaces*. Thèse de doctorat, Université de Liège, 2016.

[48] KREIT, Damien et Samuel NICOLAY. Some characterizations of generalized Hölder spaces. *Mathematische Nachrichten*. 2012, 285(17), p. 2157–2172.

[49] LEMARIÉ-RIEUSSET, Pierre Gilles et Yves MEYER. Ondelettes et bases hilbertiennes. *Revista Matematica Iberoamericana 2*. 1986, p. 1–18.

[50] LEONARDUZZI, Roberto, Herwig WENDT, Stéphane JAFFARD, Stéphane ROUX, Maria TORRES et Patrice ABRY. Extending multifractal analysis to negative regularity : p-exponents and p-leaders. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*. 2014, p. 305–309.

[51] LOOSVELDT, Laurent. Sur quelques généralisations des espaces de Hölder en vue de raffiner la notion de régularité d'une fonction. Master's thesis, Université de Liège, 2017.

[52] LOOSVELDT, Laurent. *About some notions of regularity for functions.* Thèse de doctorat, Université de Liège, 2021.

[53] LOOSVELDT, Laurent et Samuel NICOLAY. Generalized spaces of pointwise regularity : To a general framework for the WLM. 2020. Submitted for publication.

[54] LOOSVELDT, Laurent et Samuel NICOLAY. Generalized T_u^p spaces : On the trail of Calderón and Zygmund. *Dissertationes Mathematicae*. 2020, 554.

[55] LUZIN, Nikolai Nikolaevich. Sur les propriétés des fonctions mesurables. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*. 1912, 154, p. 1688–1690.

[56] MALLAT, Stéphane. *A wavelet tour of signal processing.* 3e éd. Academic Press, 2009.

[57] MARMI, Stefano. From small divisors to Brjuno functions. 2006.

[58] MARMI, Stefano, Pierre MOUSSA et Jean-Christophe YOCCOZ. The Brjuno Functions and Their Regularity Properties. *Communications in Mathematical Physics*. 1997, 186, p. 265–293.

[59] MERUCCI, Claude. Applications of interpolation with a function parameter to Lorentz, Sobolev and Besov spaces. *In : Interpolation Spaces and Allied Topics in Analysis*, Springer, 1984, (Lectures Notes in Mathematics ; 1070), p. 183–201.

[60] MEYER, Yves. *Ondelettes et opérateurs.* Hermann, 1990.

[61] MÉLOT, Clothilde. *Sur les singularités oscillantes et le formalisme multifractal.* Thèse de doctorat, Université Paris XII, 2002.

[62] MÖRTERS, Peter et Yuval PERES. *Brownian Motion.* Cambridge University Press, 2010. (Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics ; 30).

[63] NICOLAY, Samuel. *Analyse de séquences ADN par la transformée en ondelettes : extraction d'informations structurelles, dynamiques et fonctionnelles.* Thèse de doctorat, Université de Liège, 2006.

[64] NICOLAY, Samuel. *Théorie de la mesure. Notes de cours.* 2019.

[65] NIVEN, Ivan, Herbert Samuel ZUCKERMAN et Hugh Lowell MONTGOMERY. *An Introduction to the Theory of Numbers.* 5e éd. Wiley, 1991.

[66] OPIC, Bohumir et Walter TREBELS. Bessel Potentials with Logarithmic Components and Sobolev-Type Embeddings. *Analysis Mathematica*. 2000, 26, p. 299–319.

[67] PARISI, Giorgio et Uriel FRISCH. On the singularity structure of fully developed turbulence. *In :* BENZI, Roberto, Giorgio PARISI et Michael GHIL, éds, *Turbulence and predictability in geophysical fluid dynamics and climate dynamics*, North Holland, 1985, p. 84–87.

[68] RIVOAL, Tanguy et Stéphane SEURET. Hardy-Littlewood series and even continued fractions. *Journal d'analyse mathématique*. 2015, 125, p. 175–225.

[69] RUDIN, Walter. *Analyse réelle et complexe*. McGraw-Hill, 1987.

[70] RYLL-NARDZEWSKI, Czeslaw. On the ergodic theorems II. Ergodic theory of continued fractions. *Studia Mathematica*. 1951, 12, p. 74–79.

[71] SEURET, Stéphane et Adrian UBIS. Local L^2-regularity of Riemann's Fourier series. *Annales de l'Institut Fourier*. 2017, 67(5), p. 2237–2264.

[72] TORRÉSANI, Bruno. *Analyse continue par ondelettes*. InterÉditions, 1995.

[73] TRIEBEL, Hans. *Theory of Functions Spaces*. Birkhäuser Verlag, 1983. (Monographs in Mathematics ; 78).

[74] WHITNEY, Hassler. Analytic extensions of functions defined in closed sets. *Transactions of the American Mathematical Society*. 1934, 36, p. 63–89.

[75] YOCCOZ, Jean-Christophe. Théorème de Siegel, nombres de Bruno et polynômes quadratiques. *Astérisque*. 1995, 231, p. 3–88.

[76] ZIEMER, William P. *Weakly Differentiable Functions*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1989.