

Mémoire

Auteur : Verbert, Jeanne

Promoteur(s) : Mathonet, Pierre; Zenaïdi, Naïm

Faculté : Faculté des Sciences

Diplôme : Master en sciences mathématiques, à finalité didactique

Année académique : 2020-2021

URI/URL : <http://hdl.handle.net/2268.2/12687>

Avertissement à l'attention des usagers :

Tous les documents placés en accès ouvert sur le site le site MatheO sont protégés par le droit d'auteur. Conformément aux principes énoncés par la "Budapest Open Access Initiative"(BOAI, 2002), l'utilisateur du site peut lire, télécharger, copier, transmettre, imprimer, chercher ou faire un lien vers le texte intégral de ces documents, les disséquer pour les indexer, s'en servir de données pour un logiciel, ou s'en servir à toute autre fin légale (ou prévue par la réglementation relative au droit d'auteur). Toute utilisation du document à des fins commerciales est strictement interdite.

Par ailleurs, l'utilisateur s'engage à respecter les droits moraux de l'auteur, principalement le droit à l'intégrité de l'oeuvre et le droit de paternité et ce dans toute utilisation que l'utilisateur entreprend. Ainsi, à titre d'exemple, lorsqu'il reproduira un document par extrait ou dans son intégralité, l'utilisateur citera de manière complète les sources telles que mentionnées ci-dessus. Toute utilisation non explicitement autorisée ci-avant (telle que par exemple, la modification du document ou son résumé) nécessite l'autorisation préalable et expresse des auteurs ou de leurs ayants droit.



Université de Liège
Faculté des sciences
Département de Mathématique

Des solides de Platon aux polyèdres de Goldberg

Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de Master en Sciences Mathématiques à finalité didactique.

Promoteur : Pierre Mathonet
Co-pomoteur : Naïm Zenaïdi

Jeanne Verbert

Année académique 2020–2021

Remerciements

Un tout grand merci à mon prometteur, Monsieur Mathonet, et mon co-promoteur, Monsieur Zenaïdi, de m'avoir ouvert les portes de la géométrie et plus particulièrement celles des polyèdres. Merci pour le temps consacré à ce mémoire, je garderai un merveilleux souvenir de nos réunions.

Je remercie également Madame Jacobs pour l'aide apportée concernant la partie virologie.

Ensuite, je remercie mes camarades de classe, Marc, Saja, Matteho, Julie, Maxime, Claire et Ophélie pour ces cinq années passées ensemble. Entre les rires, les joies, les incertitudes, nous sommes resté.e.s soudé.e.s et c'est avec un petit pincement au coeur que ce chapitre se termine. J'ai également une petite attention pour Thomas qui durant le confinement n'a pas hésité à nous venir en aide, encore merci !

J'ai également une pensée pour mes ami.e.s de 7ème qui m'ont donné le goût des mathématiques. Cette spirale positive que nous avons créée cette année là est sûrement une des origines de ma motivation.

Enfin, je remercie mes parents de m'avoir soutenue dans ce choix d'études, de m'avoir poussée à donner le maximum pour ne rien regretter. Merci de croire en moi et en mes rêves les plus fous.

À ma Mamy,
ma Tati,
ma Bobo.

Introduction

Le but initial de ce mémoire était d'étudier les moyens d'enseigner une famille de polyèdres, les polyèdres de Goldberg, et leurs propriétés au début du cursus universitaire dans une filière scientifique. Il s'avère en effet que de nombreux virus ont une forme symétrique et peuvent être associés à des polyèdres de cette famille.

Avant de réfléchir à comment enseigner cette matière, il fallait tout d'abord l'étudier pour elle-même, c'est-à-dire étudier les "mathématiques sous-jacentes".

Si on cherche la définition des polyèdres de Goldberg dans les références sur le sujet, on voit qu'il s'agit de polyèdres dont les faces sont des hexagones et des pentagones, qui sont trivalents (chaque sommet est de degré trois) et qui possèdent une symétrie icosaédrique. On a aussi à disposition beaucoup d'articles qui décrivent une méthode de construction de ces polyèdres, mais sans donner de preuve que les objets construits répondent à la définition, et on constate qu'une partie des sources construit plutôt des objets dont les faces sont des triangles.

Il paraît donc raisonnable, vu la définition de polyèdres de Goldberg, de s'intéresser aux solides de Platon (les polyèdres réguliers) et à leurs symétries. La première théorie qu'on connaisse sur les polyèdres réguliers se trouve dans les Éléments d'Euclide [15], mais il semblerait que ces polyèdres soient connus depuis plus longtemps, notamment en Égypte Antique. Après leur découverte il y a plus de 3000 ans, il semble qu'il faille attendre le XVe et XVIe siècles pour que l'intérêt des polyèdres s'accroisse à nouveau, notamment grâce à Johannes Kepler qui construit un modèle de l'Univers à partir de la théorie des polyèdres ou encore au peintre-mathématicien Piero Della Francesca qui écrit un recueil d'exercices d'arithmétique, d'algèbre et de géométrie [9]. Au XIXe et XXe siècles, de nouvelles générations de mathématicien.ne.s s'intéressent à ces objets et à leurs généralisations. On peut bien sûr citer Legendre, Cauchy et plus récemment Steinitz, qui s'intéressent aux preuves fournies par Euclide du fait qu'il n'existe que 5 solides de Platon. Au XXe siècle, Coxeter est l'un des initiateurs de la recherche sur les polyèdres, qui regagne de l'intérêt grâce à de nombreuses applications qui existent, notamment en cristallographie. Tous les détails sur l'histoire des polyèdres et la contribution des mathématicien.ne.s peuvent se retrouver dans le livre "Polyhedra" de P.Cromwell [8].

Pour étudier ces polyèdres d'un point de vue mathématique, il faut éviter le piège consistant à se limiter à la contemplation des représentations que nous en avons, même si celles-ci peuvent être source d'inspiration. Pour aller au delà de ces représentations, il nous faut une définition. Nous choisissons une définition classique : un polyèdre régulier

est un polyèdre dont les faces sont des polygones réguliers isométriques et tel que chaque sommet appartient à un même nombre de faces¹. Bien des références proposent alors une preuve du fait qu'il n'y a que 5 polyèdres réguliers. Nous discuterons de cette preuve au chapitre I, mais elle n'est sans doute pas tout à fait satisfaisante. Mais il y a plus grave. Avec cette définition, nous ne savons pas ce qu'est une face, une arête, un sommet...il n'y a donc aucun moyen de démontrer l'existence des solides de Platon, même si on les voit sur une représentation.

Tous ces problèmes sont discutés au chapitre I. On y établit les définitions élémentaires (convexité, faces, arêtes, sommets). A l'aide de ces définitions, on s'attaque à démontrer qu'il existe un polyèdre régulier ayant des faces carrées se rencontrant trois par trois en un sommet, bref, on démontre, sans rire, qu'il existe un cube. Tout le problème est alors d'utiliser les définitions pour déterminer les faces, arêtes et sommets du candidat cube que l'on construit par analogie au carré. On ne peut pas à ce stade, démontrer son unicité à similitude près.

On se rend vite compte que même dans ce cas qui devrait être le plus simple, on manque vite d'outils et que le travail est pénible. Il devient alors naturel d'étudier la théorie des ensembles convexes en général, et des polyèdres et polytopes en particulier, dans l'espoir d'avoir des outils plus efficaces pour mener à bien l'étude des autres polyèdres réguliers.

Dans le deuxième chapitre, nous développons une théorie générale, et certains théorèmes que nous abordons se montrent efficaces pour étudier le cube. Nous comprenons alors leur utilité en comparant avec notre première approche. D'un point de vue didactique, on comprend qu'il est parfois nécessaire d'aborder des problèmes avant de développer la théorie qui permet de les résoudre, pour faire comprendre tout l'intérêt de cette théorie. On voit ici à l'oeuvre la notion de situation fondamentale abordée au cours de didactique. Dans ce deuxième chapitre, nous étudierons également la notion de dualité, qui explique pourquoi dans la littérature, on s'intéresse de manière équivalente à des polyèdres (on devrait dire polytope, comme nous le verrons), ayant des sommets de degré 5 et 6 et des faces triangulaires, et des polyèdres ayant des faces pentagonales et hexagonales et dont les sommets sont de degré 3. La dualité nous permettra également de simplifier l'étude en réduisant le nombre de polyèdres à analyser.

Dans le chapitre 3, nous construirons des polyèdres réguliers et nous démontrerons que ce sont bien des polyèdres réguliers au sens de la définition posée dans les premiers chapitres. Afin de simplifier les calculs, nous ferons usage de transformations affines, en particulier des similitudes. Ces applications permettent d'alléger considérablement les calculs, plus spécifiquement lorsque nous devrons démontrer quel quintuple de sommets forme une face du dodécaèdre régulier.

Nous démontrerons également l'unicité à similitude près du tétraèdre, du cube, du dodécaèdre et de l'octaèdre régulier. Pour l'icosaèdre, nous nous reposerons sur le Théorème de Rigidité de Cauchy [4], une preuve élémentaire étant semble-t-il, difficile à obtenir.

1. Dans les Éléments d'Euclide, celui-ci définit chaque polyèdre régulier indépendamment des autres. De plus, il ne les définit qu'à partir de leur face ce qui implique qu'au vu de sa définition, les polyèdres réguliers ne sont pas uniques. Il faudra attendre Legendre pour qu'une discussion sur ces définitions soit approfondie [15].

Après avoir montré l'existence et l'unicité à similitude près, nous arriverons au chapitre 4 qui sera consacré aux groupes de symétries des polyèdres réguliers. Les symétries d'un polyèdre sont des isométries qui laissent le polyèdre inchangé. La description de ces groupes repose sur de belles constructions géométriques associées aux polyèdres réguliers. Nous pourrons grâce à ces groupes définir les polyèdres réguliers d'une façon équivalente à celle fournie dans le premier chapitre, de manière beaucoup moins visuelle, mais plus performante.

Nous terminerons enfin ce mémoire par le chapitre qui a été à l'origine de ce projet : les polyèdres de Goldberg. Nous définirons ces polyèdres et montrerons qu'ils sont duaux de polyèdres à faces triangulaires particuliers, les polyèdres géodésiques. Nous analyserons une construction d'une famille de tels polyèdres géodésiques et démontrerons en particulier que cette construction aboutit bien à des polyèdres avec les propriétés voulues, et donc par dualité, à une famille de polyèdres de Goldberg. Nous terminerons par une application en virologie.

Les bases théoriques sont posées. Les perspectives sont vastes : on pourrait encore étudier des familles de polyèdres avec d'autres types de symétries, analyser toutes les propriétés des polyèdres de Goldberg, leurs symétries, leur optimalité isopérimétrique conjecturée par Goldberg dans son article fondateur de 1937 [11] et pas encore établie. Je transmets le témoin à l'étudiant.e qui voudra prendre la relève.

Quant à l'enseignement, il sera sans doute difficile d'expliquer tout le contenu de ce mémoire à un.e étudiant.e en filière scientifique en première année, mais on pourra, sans utiliser les développements qui y sont faits, l'expliquer sur des exemples.

Par contre, nous avons utilisé toute une panoplie de résultats mathématiques, les retombées potentielles sont nombreuses, sous forme d'exercices ou de problèmes, de projets, de minicours pour tous les niveaux d'enseignement.

Table des matières

1	Premier pas dans la théorie polyèdres réguliers.	1
1.1	Connaissances sur les polyèdres réguliers.	1
1.2	Démarche élémentaire pour le cube.	4
2	Éléments de convexité	16
2.1	Propriétés topologiques des convexes	19
2.2	Hyperplans	28
2.3	Enveloppes convexes	35
2.4	Ensembles polyédraux	42
2.5	Polytopes	52
2.6	Dualités	54
2.6.1	Le polaire du cube	61
3	Les autres polytopes réguliers	63
3.1	Transformations affines	64
3.2	Unicité du cube et de l'octaèdre régulier	68
3.3	Le tétraèdre	73
3.4	Le dodécaèdre	78
3.4.1	Les symétries d'un polytope	88
3.4.2	Les faces du dodécaèdre régulier	89
3.5	L'icosaèdre	97
4	Les symétries des polytopes réguliers	101
4.1	La polarité préserve les symétries	102
4.2	Décomposition du groupe des symétries d'un polytope	103
4.3	Symétries du tétraèdre régulier	105
4.4	Symétries du cube/de l'octaèdre	107
4.5	Symétries du dodécaèdre/de l'icosaèdre	109
4.6	Une autre définition pour les polytopes réguliers	112
5	Les polyèdres de Goldberg	115
5.1	Du développement à l'icosaèdre	121
5.2	Rotation d'axe joignant deux sommets opposés	123

5.3	Rotation d'axe joignant deux faces opposées	124
5.4	Rotation d'axe joignant le milieu de deux arêtes opposées	126
5.5	Projection des points sur la sphère unitaire	128
5.6	Application en virologie.	130
A	Caractérisation des convexes compacts d'une droite.	133
B	Forme générale pour une réflexion par rapport à un plan	134
C	La réflexion par rapport au plan médiateur pour le tétraèdre.	135
D	Les faces du dodécaèdre régulier	137
D.1	Réflexion de la première face par rapport à un plan	137
D.2	La rotation et ses puissances.	142
D.3	Isométrie envoyant les 6 premières faces sur d'autres faces.	143
E	Éléments de la théorie des groupes	145
E.1	Groupes et sous-groupes	145
E.2	Actions de groupe	146
E.3	Classes latérales à gauche	147
E.4	Permutations	148
F	Deux rotations du cube	152
G	Les rotations du dodécaèdre	155

Chapitre 1

Premier pas dans la théorie polyèdres réguliers.

Dans ce chapitre, nous allons définir ce qu'est un polyèdre régulier et parcourir tous ceux respectant les conditions adéquates. Nous démontrerons ensuite, avec un nombre restreint de définitions et propositions, que 8 points non pris au hasard forment un cube. Pour cela, nous définirons une notion clé concernant la théorie des polyèdres (réguliers) : la convexité. Cette démarche sert de tremplin pour définir toutes les notions nécessaires à faciliter l'étude des autres polyèdres réguliers.

1.1 Connaissances sur les polyèdres réguliers.

Les polyèdres réguliers sont connus par de nombreuses personnes, même si la notion mathématique associée ne l'est certainement pas. La définition la plus connue de ces polyèdres est donnée ci-dessous :

Définition 1.1.1. *Un polyèdre est dit régulier s'il est constitué de faces toutes identiques et régulières, et que tous ses sommets sont identiques (que chaque sommet appartienne à un même nombre de face).*

Bien qu'elle soit très simple et assez claire lorsqu'on imagine certains polyèdres réguliers, cette définition peut parfois montrer ses "lacunes". La première est que peu de personnes démontrent rigoureusement les critères énoncés. En effet, nous ne remettons presque jamais en doute, lorsque nous voyons une image comme ci-dessous, que celle-ci représente bien un cube.

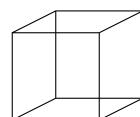


FIGURE 1.1 – Représentation d'un cube.

Visuellement, les faces ressemblent à des carrés et tous les sommets sont trivalents. Et pourtant, sans une vérification mathématique, nous ne pouvons être certain.e que ceci est un cube. Une manière de démontrer que cet ensemble est un cube serait de le placer dans un repère orthonormé et obtenir les coordonnées des sommets. Ensuite, il faudrait vérifier chaque condition de la définition.

Ici, nous montrons les 5 solides de Platon : le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre. Ces 5 solides vérifient les conditions pour être des polyèdres réguliers.

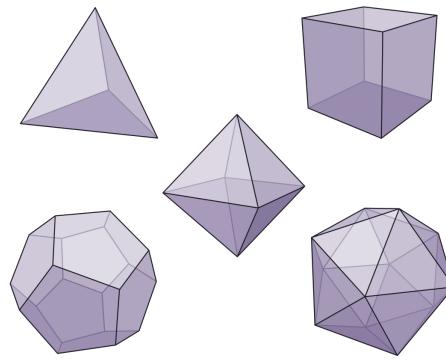


FIGURE 1.2 – Les 5 solides de Platon.

Nous avons d'ailleurs une proposition qui démontre que ce sont les 5 polyèdres réguliers. Pour cela, nous définissons un symbole qui nous sera utile pour classer ces polyèdres.

Définition 1.1.2. *Le symbole de Schläfli d'un polyèdre régulier est $\{p, q\}$ si ses faces sont des polygones réguliers à p côtés, et chaque sommet appartient à q faces.*

Proposition 1.1.3. *Il existe exactement 5 polyèdres réguliers : le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre.*

Démonstration. Nous devons poser des conditions pour que les polyèdres que nous construisons soient réguliers. Soit $\{m, n\}$ le symbole de Schläfli où m est le nombre d'arêtes d'une face et chaque sommet appartient à n faces. On sait déjà que $n, m \in \mathbb{N}$.

Un polygone possède au moins 3 arêtes, on a donc $m \geq 3$. De plus, un sommet du polyèdre doit appartenir au minimum à 3 faces : $n \geq 3$.

On sait qu'un polygone régulier ayant m côtés possède m angles égaux d'amplitude $\frac{\pi(m-2)}{m}$. La somme s des angles en un sommet doit être strictement inférieure à 2π sinon on aurait des faces coplanaires si $s = 2\pi$ ou encore un chevauchement si $s > 2\pi$.

Si nous regroupons toutes les conditions, nous avons un système de la forme,

$$\left\{ \begin{array}{l} m, n \in \mathbb{N} \\ m \geq 3 \\ n \geq 3 \\ s(m, n) = \frac{\pi n(m-2)}{m} < 2\pi \end{array} \right..$$

La fonction

$$x \mapsto \frac{x-2}{x}$$

est une fonction croissante. Cela implique que $s(m, n)$ sera plus grand que 2π à partir d'un certain couple (n, m) . En effet, lorsque $m = 5$, la condition $s(m, n) < 2\pi$ ne laisse qu'un choix pour n car $\frac{3n}{5} < 2$ ce qui implique $n < \frac{10}{3} < 4$. De plus, à partir de $m = 6$, il n'y a plus aucune solution possible car nous avons une contradiction sur le nombre de faces n .

Il y a donc un nombre fini de solutions (5) à ce système :

$$S = \{\{3, 3\}; \{3, 4\}; \{3, 5\}; \{4, 3\}; \{5, 3\}\}.$$

□

Le polyèdre $\{3, 3\}$ se rapporte au tétraèdre. Ses faces sont des triangles équilatéraux et chaque sommet appartient à 3 faces. Le polyèdre $\{3, 4\}$ se rapporte à l'octaèdre, $\{3, 5\}$ à l'icosaèdre, $\{4, 3\}$ au carré et enfin le dernier $\{5, 3\}$ au dodécaèdre.

Cette proposition et preuve se trouvent dans bon nombre de livres, cours concernant la théorie des polyèdres réguliers. Certes, elle nous permet de savoir qu'il n'y a que 5 polyèdres réguliers possibles, mais il manque un travail conséquent pour montrer l'unicité et l'existence de ces polyèdres.

Observons à présent le polyèdre qu'on prénomme icosaèdre punché.

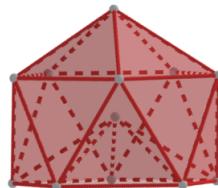


FIGURE 1.3 – L'icosaèdre punché.

Comme l'icosaèdre, il est constitué de 20 faces triangulaires équilatérales et chaque sommet appartient à 3 arêtes. Il respecte donc toutes les conditions pour être un polyèdre régulier. Pour le polyèdre $\{3, 5\}$ il y a donc au moins deux types connus : l'icosaèdre et l'icosaèdre punché.

D'autres polyèdres ont également les caractéristiques demandées pour être régulier, comme les solides de Kepler-Poinsot.

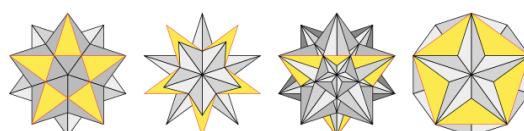


FIGURE 1.4 – Les 4 solides de Kepler-Poinsot.

Pourquoi ces polyèdres ne se retrouvent-ils pas dans la liste des 5 ? La vérité est que l'énoncé n'est pas complet. La différence entre ces deux types de polyèdres réguliers est que les solides de Platon sont convexes alors que les seconds ne le sont pas. Pour résumer en deux mots la notion de convexité, si on prend deux points d'un solide et qu'on les relie, le segment doit être inclus dans le solide. Pour les solides de Kepler-Poinsot, en prenant les points sur les pics d'un des solides (qui sont en réalité les sommets), le segment joignant deux de ces points n'est pas inclus dans le solide, il ne peut pas être convexe.

Par conséquent, nous pouvons énoncer à nouveau la proposition 1.1.3 en y ajoutant les hypothèses adéquates.

Proposition 1.1.4. *Il existe exactement 5 polyèdres réguliers convexes : le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre.*

Nous pouvons alors définir deux types de polyèdres réguliers : les convexes et les non-convexes. Dans ce mémoire, nous ne parlerons que des polyèdres convexes.

Nous pourrions naïvement penser qu'avec tout ce qu'il vient d'être énoncé, nous en savons certainement assez pour les polyèdres réguliers convexes. Et c'est un peu le problème pour ce genre de théorie où l'on peut facilement représenter les objets dans notre "monde". Cela nous pousse dans une pseudo théorie où l'on croit connaître assez de choses pour comprendre les objets mathématiques.

Si maintenant l'on creuse un peu et que l'on demande de définir mathématiquement la notion de sommet, quelle serait votre définition ? Là encore, on aurait envie de montrer le sommet d'un polyèdre sans savoir le définir rigoureusement.

Dans la prochaine section, nous essayerons de faire un premier pas dans cette théorie avec un nombre restreint de définitions. Cette démarche nous servira de tremplin pour accéder aux définitions rigoureuses telles que celle d'un sommet, une arête, une face,... Mais nous en ressentirons également les limites. Elles nous pousseront à énoncer une introduction de la théorie sur la convexité.

1.2 Démarche élémentaire pour le cube.

Dans cette section, nous nous placerons dans l'"espace" usuel, dans lequel nous fixons un repère orthonormé, pour identifier l'espace à \mathbb{R}^3 (chaque point étant associé à son triplet de coordonnées).

Nous définissons un certain type de points pour commencer.

Définition 1.2.1. *Les points $S_{i_1 i_2 i_3}$ sont définis comme suit :*

$$S_{i_1 i_2 i_3} = ((-1)^{i_1}, (-1)^{i_2}, (-1)^{i_3})$$

où $(i_1, i_2, i_3) \in \{0, 1\}^3$.

Pour cette section, nous partirons d'un ensemble restreint de définitions qui nous permettrons de démontrer que l'enveloppe convexe des points $S_{i_1 i_2 i_3}$ est un cube. Pour cela, il faut déjà définir ce qu'est l'enveloppe convexe d'un ensemble. Nous devons commencer par les définitions élémentaires, comme point de départ à cette démarche.

Définition 1.2.2. *La droite XY est définie comme l'ensemble*

$$XY = \{P | \overrightarrow{XP} = \lambda \overrightarrow{XY} : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

et le segment $[X, Y]$ comme l'ensemble

$$[X, Y] = \left\{ P | \overrightarrow{XP} = \lambda \overrightarrow{XY} : \lambda \in [0, 1] \right\}.$$

Nous donnons un nom à ces points P .

Définition 1.2.3. *Les points P tels que $\overrightarrow{XP} = \lambda \overrightarrow{XY}$ pour un λ réel sont appelés combinaisons affines de X et Y . Parmi ces combinaisons, celles qui correspondent au λ dans $[0, 1]$ sont appelées combinaisons convexes.*

Nous allègerons les écritures grâce à la remarque suivante.

Remarque 1.2.4. *Pour tout point O , la combinaison affine P définie par $\overrightarrow{XP} = \lambda \overrightarrow{XY}$ satisfait*

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{XP} = \overrightarrow{OX} + \lambda(\overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX}) = (1 - \lambda)\overrightarrow{OX} + \lambda\overrightarrow{OY}.$$

Puisque cette expression est indépendante de O , on écrit

$$P = (1 - \lambda)X + \lambda Y.$$

Ces considérations s'étendent pour des combinaisons ayant un nombre plus élevé de points.

Nous pouvons maintenant définir la notion d'ensemble convexe.

Définition 1.2.5. *Un ensemble \mathcal{C} est convexe si pour tous points X et Y appartenant à \mathcal{C} , le segment $[X, Y]$ est inclus dans \mathcal{C} .*

Définition 1.2.6. *Soit C un ensemble.*

- a) *L'enveloppe affine de C est l'ensemble de toutes les combinaisons affines de points de C . On la note $\text{Aff}(C)$ ou encore $\langle C \rangle_a$.*
- b) *L'enveloppe convexe de C est l'ensemble de toutes les combinaisons convexes de points de C . On la note $\text{Conv}(C)$.*

Nous pouvons vérifier que l'enveloppe convexe d'un ensemble est bien un ensemble convexe.

Proposition 1.2.7. *Soit C un ensemble. Alors $\text{Conv}(C)$ est un ensemble convexe.*

Démonstration. Soient X et Y appartenant à $\text{Conv}(C)$ et λ un réel appartenant à $[0, 1]$. Alors la combinaison convexe $(1 - \lambda)X + \lambda Y$ appartient à $\text{Conv}(C)$ par définition de l'enveloppe convexe. \square

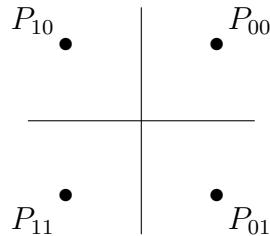
Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer correctement la proposition concernant le cube.

Proposition 1.2.8. Soient $S_{i_1 i_2 i_3} = ((-1)^{i_1}, (-1)^{i_2}, (-1)^{i_3})$ avec $(i_1, i_2, i_3) \in \{0, 1\}^3$. Alors $\mathfrak{C} = \text{Conv}(\{S_{i_1 i_2 i_3} : (i_1, i_2, i_3) \in \{0, 1\}^3\})$ est un cube.

La définition d'un cube se trouve implicitement dans la section précédente. Il doit s'agir d'un polyèdre régulier convexe ayant des faces carrés isométriques et chaque sommet doit appartenir à 3 faces. Cette définition présente certaines lacunes que nous avions déjà énumérées dans la section précédente.

Ce chapitre a pour but de montrer l'importance de certains théorèmes ; pour une meilleure compréhension.

Les points $S_{i_1 i_2 i_3}$ ne sont pas obtenus par hasard. Nous savons déjà, ou nous allons, construire un carré en définissant les points par leurs coordonnées dans un repère orthonormé. Nous savons qu'un carré centré en l'origine et de longueur de côté 2, a comme coordonnées $P_{i_1 i_2} = ((-1)^{i_1}, (-1)^{i_2})$ avec $(i_1, i_2) \in \{0, 1\}^2$.



Toute personne qui ne serait pas convaincue par le graphique peut effectuer le calcul des angles entre les côtés (on voit bien : $[P_{00}, P_{10}], [P_{10}, P_{11}], [P_{11}, P_{01}], [P_{01}, P_{00}]$) et celui de la longueur des côtés à l'aide des techniques de l'enseignement secondaire.

Nous avons alors

$$|\overrightarrow{P_{00}P_{10}}| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2, \dots$$

De même, l'angle peut être calculé facilement à partir des coordonnées en utilisant le produit scalaire :

$$\left\langle \overrightarrow{P_{00}P_{10}}, \overrightarrow{P_{10}P_{11}} \right\rangle = (-2).0 + 0.(-2) = 0.$$

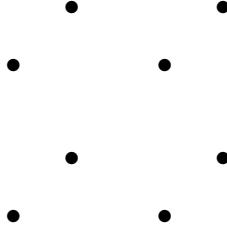
Nous avons donc quatre angles droits et des côtés de même longueur.

Ce succès nous pousse naturellement à définir le cube par 8 points dont les coordonnées sont $+1$ ou -1 . On a donc

$$S_{i_1 i_2 i_3} = ((-1)^{i_1}, (-1)^{i_2}, (-1)^{i_3}), \text{ où } (i_1, i_2, i_3) \in \{0, 1\}^3.$$

Nous pouvons nous convaincre que ces 8 points définissent 6 carrés de longueur de côté égale à 2, si nous choisissons les bons ensembles de quatre points. Mais comment savoir

quels points choisir pour déterminer les faces ? Ici encore, si nous nous basons sur la représentation graphique, il n'y a pas de problème :



Mais comment faire pour déterminer quel point est un sommet, quels couples de points définissent les arêtes, quels ensembles de points définissent les faces ? Le problème était déjà présent pour le carré, nous avons vu les sommets et arêtes mais nous n'avons pas démontré que ceux-ci en étaient et qu'il n'y en avait pas d'autres. Nous nous rendons compte qu'il nous est impossible de répondre à ces questions sans avoir posé une définition pour les sommets, les arêtes et les faces d'une figure ou d'un ensemble. Il nous faut donc des définitions, qui nous permettront d'avoir des critères univoques pour décider ce que sont les sommets, les arêtes et les faces. La notion dont nous avons besoin pour cette section est la convexité, elle a déjà été vue dans la définition 1.2.5. Voici maintenant des propositions qui nous seront utiles pour la suite de ce chapitre.

Nous allons en premier lieu montrer quelques exemples d'ensembles convexes.

Exemple 1.2.9. *La boule $\mathcal{B}(O, r)$ de centre O et de rayon r est un ensemble convexe.*

Soient $P_1, P_2 \in \mathcal{B}(O, r)$ et P un point qui est une combinaison convexe de P_1 et P_2 . On va montrer que $P = \lambda P_1 + (1 - \lambda)P_2$ pour $\lambda \in [0, 1]$ est un point de la boule. Par l'inégalité de Minkowski et les propriétés sur la norme, puisque λ et $1 - \lambda \geq 0$, on a successivement

$$\begin{aligned} |\lambda \overrightarrow{OP_1} + (1 - \lambda) \overrightarrow{OP_2}| &\leq |\lambda \overrightarrow{OP_1}| + |(1 - \lambda) \overrightarrow{OP_2}| \\ &= \lambda |\overrightarrow{OP_1}| + (1 - \lambda) |\overrightarrow{OP_2}| \\ &\leq \lambda r + (1 - \lambda) r \\ &= r. \end{aligned}$$

On vient de montrer que $|\overrightarrow{OP}| \leq r$, ce qui nous permet de conclure que P appartient à cette boule et donc $\mathcal{B}(O, r)$ est un ensemble convexe.

Un autre type d'ensemble convexe assez connu est le demi-espace. Rappelons que dans un repère orthonormé, la plan admet comme équation

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = \alpha, \tag{1.1}$$

où les coefficients a_1, a_2, a_3 sont non tous nuls.

Définition 1.2.10. *Le demi-espace fermé (respectivement ouvert) déterminé par le plan d'équation (1.1) est l'ensemble*

$$\{X : (x_1, x_2, x_3) | a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \leq \alpha\}.$$

Remarque 1.2.11. *Le demi-espace \mathcal{D} est convexe.*

Soient X et Y appartenant à \mathcal{D} , montrons que $(1 - \lambda)X + \lambda Y$ appartient à \mathcal{D} pour tout λ appartenant à $[0, 1]$. Par hypothèse nous avons $X, Y \in \mathcal{D}$, alors

$$\begin{aligned} & a_1((1 - \lambda)x_1 + \lambda y_1) + a_2((1 - \lambda)x_2 + \lambda y_2) + a_3((1 - \lambda)x_3 + \lambda y_3) \\ &= (1 - \lambda)(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) + \lambda(a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3) \\ &\leq (1 - \lambda)\alpha + \lambda\alpha \\ &\leq \alpha. \end{aligned}$$

Nous pouvons conclure que \mathcal{D} est convexe.

On peut également définir l'enveloppe convexe de C comme l'intersection des convexes contenant C .

Proposition 1.2.12. *Soit C un ensemble. Alors*

$$\text{Conv}(C) = \bigcap_{C \subset \mathcal{D}} \mathcal{D}$$

où \mathcal{D} sont des ensembles convexes contenant C .

Démonstration. Étant donné que tout convexe contenant C contient les combinaisons convexes des éléments de C , nous avons $\text{Conv}(C) \subset \mathcal{D}$ pour tous les ensembles convexes \mathcal{D} contenant C . Ainsi, l'enveloppe convexe de C est incluse dans l'intersection.

Montrons l'autre inclusion, soit $X \in \cap_{C \subset \mathcal{D}} \mathcal{D}$. Par hypothèses, les ensembles \mathcal{D} sont convexes, ils contiennent donc les combinaisons convexes de C car $C \subset \mathcal{D}$. \square

Nous avons donc une caractérisation de l'enveloppe convexe de C .

Remarque 1.2.13. *Cette proposition peut se traduire d'une autre manière. L'enveloppe convexe d'un ensemble C est le plus petit convexe contenant C et il est inclus dans n'importe quel convexe contenant C .*

Proposition 1.2.14. *Soit (\mathcal{C}_i) tel que $i \in I$ une famille (finie ou infinie, dénombrable ou non-dénombrable) de convexes, alors leur intersection $\cap_i \mathcal{C}_i$ est un convexe.*

Démonstration. Soient $X, Y \in \cap_i \mathcal{C}_i$ et $\lambda \in [0, 1]$. Montrons que $\lambda X + (1 - \lambda)Y \in \cap_i \mathcal{C}_i \forall \lambda \in [0, 1]$. Les points X et Y appartiennent à \mathcal{C}_i pour tout $i \in I$. Par hypothèse, \mathcal{C}_i est convexe ce qui implique que $\lambda X + (1 - \lambda)Y \in \mathcal{C}_i$ pour tout $i \in I$. Puisque c'est vrai pour tous les ensembles de la famille, c'est également vrai pour leur intersection. \square

Nous allons maintenant écrire \mathfrak{C} sous une autre forme. L'écriture sous forme d'une intersection de demi-espaces fermés nous sera utile pour déterminer les faces de \mathfrak{C} . Plus tard, dans la théorie sur la convexité, nous verrons que cette écriture permet également d'obtenir les sommets, arêtes.

Proposition 1.2.15. *On a*

$$\mathfrak{C} = \{X : (x_1, x_2, x_3) : -1 \leq x_i \leq 1 \ \forall i = 1, 2, 3\}.$$

Démonstration. Pour la première inclusion, nous savons que le membre de droite est convexe car c'est une intersection de demi-espaces. De plus, tous les points $S_{i_1 i_2 i_3}$ appartiennent à cet ensemble. Alors il contient leur enveloppe convexe.

Pour l'autre inclusion, nous prenons un point $X : (x_1, x_2, x_3)$ tel que $-1 \leq x_i \leq 1$ pour tout $i = 1, 2, 3$. Montrons que

$$X = \frac{1}{8} \sum_{(i_1, i_2, i_3) \in \{0,1\}^3} (1 + (-1)^{i_1} x_1)(1 + (-1)^{i_2} x_2)(1 + (-1)^{i_3} x_3) S_{i_1 i_2 i_3}.$$

En effet, le membre de droite vaut

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \sum_{(i_2, i_3) \in \{0,1\}^2} (1 + (-1)^{i_2} x_2)(1 + (-1)^{i_3} x_3) \frac{1}{2} \left((1 + x_1) \begin{pmatrix} 1 \\ (-1)^{i_2} \\ (-1)^{i_3} \end{pmatrix} + (1 - x_1) \begin{pmatrix} -1 \\ (-1)^{i_2} \\ (-1)^{i_3} \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i_3 \in \{0,1\}} (1 + (-1)^{i_3} x_3) \frac{1}{2} \left((1 + x_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \\ (-1)^{i_3} \end{pmatrix} + (1 - x_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ -1 \\ (-1)^{i_3} \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left((1 + x_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} + (1 - x_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Maintenant que nous avons l'égalité, il faut vérifier que cette combinaison est convexe. On a,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8} \sum_{a,b,c \in \{0,1\}} (1 + (-1)^a x_1)(1 + (-1)^b x_2)(1 + (-1)^c x_3) \\ &= \frac{1}{8} \sum_{a=0}^1 (1 + (-1)^a x_1) \sum_{b=0}^1 (1 + (-1)^b x_2) \sum_{c=0}^1 (1 + (-1)^c x_3) \\ &= \frac{1}{8} 2^3. \end{aligned}$$

□

Avec ces définitions, nous en savons un peu plus sur les propriétés de convexité et celle de \mathcal{C} mais toujours rien sur la notion de sommet, arête ou encore face.

Définition 1.2.16. Un plan d'appui \mathcal{H} d'un ensemble convexe \mathcal{C} est un plan tel que

$$\mathcal{H} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset \text{ et } \mathcal{C} \subset \mathcal{D},$$

où \mathcal{D} est un demi-espace fermé délimité par \mathcal{H} .

Définition 1.2.17. Soit \mathcal{C} un ensemble convexe. Un ensemble $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}$ est une face de \mathcal{C} s'il existe un plan d'appui \mathcal{H} de \mathcal{C} tel que $\mathcal{F} = \mathcal{C} \cap \mathcal{H}$ ou si $\mathcal{F} = \emptyset$ ou $\mathcal{F} = \mathcal{C}$.

Une face réduite à un point est appelée sommet, celle réduite à un segment est appelée arête et une face qui n'est pas incluse dans une droite est appelée face. Toutes les généralisations se feront dans le chapitre 2.

Maintenant, nous pouvons entamer notre étude sur l'ensemble \mathfrak{C} . Il faut arriver à déterminer les sommets, arêtes et faces de cet ensemble. La première idée qui semble naturelle est de se demander si les points dont on prend l'enveloppe convexe sont des sommets de \mathfrak{C} . Nous pouvons répondre de manière positive grâce à la proposition suivante.

Proposition 1.2.18. *Les points $S_{i_1 i_2 i_3}$ sont des sommets de \mathfrak{C} .*

Démonstration. Définissons

$$\pi_{i_1 i_2 i_3} \equiv (-1)^{i_1} x_1 + (-1)^{i_2} x_2 + (-1)^{i_3} x_3 = 3.$$

Ce plan contient $S_{i_1 i_2 i_3}$ car

$$((-1)^{i_1})^2 + ((-1)^{i_2})^2 + ((-1)^{i_3})^2 = 3.$$

Le demi-espace $\mathcal{D}_{i_1 i_2 i_3} \equiv (-1)^{i_1} x_1 + (-1)^{i_2} x_2 + (-1)^{i_3} x_3 \leq 3$ contient \mathfrak{C} . On peut le montrer en remarquant que $\mathcal{D}_{i_1 i_2 i_3}$ contient tous les sommets de \mathfrak{C} car

$$(-1)^{i_1}(-1)^{i'_1} + (-1)^{i_2}(-1)^{i'_2} + (-1)^{i_3}(-1)^{i'_3} \leq 3, \quad (i'_1, i'_2, i'_3) \in \{0, 1\}^3.$$

Enfin, on peut aussi remarquer que la fonction

$$F(x_1, x_2, x_3) = (-1)^{i_1} x_1 + (-1)^{i_2} x_2 + (-1)^{i_3} x_3$$

admet un maximum sur \mathfrak{C} quand x_j est maximal si $i_j = 0$ et quand il est minimal si $i_j = 1$. Ce maximum est donc atteint de manière unique quand $(x_1, x_2, x_3) = ((-1)^{i_1}, (-1)^{i_2}, (-1)^{i_3})$ et vaut 3. Par conséquent, le plan $\pi_{i_1 i_2 i_3}$ est un plan d'appui qui ne rencontre le cube qu'en $S_{i_1 i_2 i_3}$. \square

Il reste à montrer que les points $S_{i_1 i_2 i_3}$ sont les seuls sommets de \mathfrak{C} . Bien sûr, nous sommes influencé.e.s par notre connaissance visuelle du cube. Nous savons déjà que le cube possède 8 sommets, étant donné que nous les avons trouvés, nous savons que les autres points de \mathfrak{C} ne pourront être des sommets.

Proposition 1.2.19. *Les points $S_{i_1 i_2 i_3}$ sont exactement les sommets de \mathfrak{C} .*

Démonstration. Nous avons montré que ces points sont des sommets. Montrons qu'il n'y en a pas d'autre. Si $P_0 = (x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0})$ est un point du cube distinct des $S_{i_1 i_2 i_3}$, une de ses coordonnées n'appartient pas à $\{-1, 1\}$. Soit $\pi_{a_1 a_2 a_3}$ le plan d'équation

$$a_1(x_1 - x_{1,0}) + a_2(x_2 - x_{2,0}) + a_3(x_3 - x_{3,0}) = 0.$$

Si c'est un plan d'appui pour la face $\{P_0\}$, alors la fonction

$$F(x_1, x_2, x_3) = a_1(x_1 - x_{1,0}) + a_2(x_2 - x_{2,0}) + a_3(x_3 - x_{3,0})$$

est de signe constant sur \mathfrak{C} et s'annule en P_0 .

Si $x_{i,0} \in]-1, 1[$, alors $a_i = 0$. En effet, dans le cas contraire, on a

$$F(x_{1,0} + t\delta_{1i}, x_{2,0} + t\delta_{2i}, x_{3,0} + t\delta_{3i}) = ta_i.$$

Cette expression change de signe quand t change de signe (car a_i est fixé) et le point $P_t : (x_{1,0} + t\delta_{1i}, x_{2,0} + t\delta_{2i}, x_{3,0} + t\delta_{3i})$ appartient à \mathfrak{C} pour t assez proche de 0. Cela nous amène à une contradiction car sur \mathfrak{C} , la fonction F est de signe constant.

Mais si $a_i = 0$, alors le plan $\pi_{a_1 a_2 a_3}$ contient les points P_t pour tout $t \in \mathbb{R}$. Par conséquent, il coupe \mathfrak{C} en plus d'un point ce qui est absurde aussi. Ainsi, le point P_0 n'est pas un sommet de \mathfrak{C} . \square

Passons maintenant aux arêtes. En regardant des représentations du cube, on constate que certains sommets définissent des arêtes, mais pas tous. Cela conduit à la définition suivante :

Définition 1.2.20. *Deux sommets adjacents de \mathfrak{C} sont deux sommets qui ne diffèrent que par une coordonnée.*

En d'autres termes, deux sommets sont adjacents si la droite qu'ils déterminent est parallèle à un des axes du repère. Nous avons alors la proposition suivante.

Proposition 1.2.21. *Les segments déterminés par deux sommets adjacents sont des arêtes de \mathfrak{C} .*

Démonstration. Les paires de sommets adjacents sont

$$(S_{1i_2 i_3}, S_{0i_2 i_3}), (S_{i_1 1 i_3}, S_{i_1 0 i_3}), (S_{i_1 i_2 1}, S_{i_1 i_2 0}) \text{ pour } (i_1, i_2, i_3) \in \{0, 1\}^3.$$

Traitons le premier cas, les autres se font de la même manière. Le plan

$$\pi_{i_2 i_3} \equiv (-1)^{i_2} x_2 + (-1)^{i_3} x_3 = 2$$

contient $S_{1i_2 i_3}$ et $S_{0i_2 i_3}$, donc aussi le segment $[S_{1i_2 i_3}, S_{0i_2 i_3}]$. En effet, le plan $\pi_{i_2 i_3}$ est convexe car c'est l'intersection des deux demi-espaces fermés associés à ce plan. De plus, le demi-espace

$$D_{i_2 i_3} \equiv (-1)^{i_2} x_2 + (-1)^{i_3} x_3 \leq 2$$

contient \mathfrak{C} car il contient tous les sommets de \mathfrak{C} . On constate, comme nous l'avons fait ci-dessus, que la fonction définie par

$$F(x_1, x_2, x_3) = (-1)^{i_2} x_2 + (-1)^{i_3} x_3$$

atteint un maximum sur \mathfrak{C} égal à 2 et ce maximum est atteint quand $x_2 = (-1)^{i_2}$ et $x_3 = (-1)^{i_3}$. Le plan $\pi_{i_2 i_3}$ est donc un plan d'appui pour \mathfrak{C} et il le coupe sur l'arête considérée. \square

Montrons maintenant qu'il n'y a pas d'autre arête. En effet, nous savons grâce à la proposition précédente que nous avons 12 arêtes du cube. Grâce à notre représentation visuelle du cube, nous savons qu'il ne peut pas y en avoir plus. Démontrons le.

Proposition 1.2.22. *Les arêtes de \mathfrak{C} sont exactement les segments déterminés par les paires de sommets adjacents.*

Démonstration. Si P_0 est un point d'une arête de \mathfrak{C} , alors P_0 admet au plus une coordonnée n'appartenant pas à $\{-1, 1\}$. En effet, si $P_0 = (x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0})$ est un tel point et si $\pi \equiv a_1(x_1 - x_{1,0}) + a_2(x_2 - x_{2,0}) + a_3(x_3 - x_{3,0}) = 0$ est un plan d'appui pour l'arête contenant P_0 , alors la fonction

$$F(x_1, x_2, x_3) = a_1(x_1 - x_{1,0}) + a_2(x_2 - x_{2,0}) + a_3(x_3 - x_{3,0})$$

est de signe constant sur \mathfrak{C} et s'annule pour tous les points appartenant à l'arête contenant P_0 . Si x_{i_0} et $x_{j,0}$ appartiennent à $] -1, 1[$ pour $i \neq j$, on a $a_i = a_j = 0$.

En effet, dans le cas contraire, les fonctions $F(x_{1,0} + t\delta_{1i}, x_{2,0} + t\delta_{2i}, x_{3,0} + t\delta_{3i})$ et $F(x_{1,0} + s\delta_{1j}, x_{2,0} + s\delta_{2j}, x_{3,0} + s\delta_{3j})$ changent de signe avec le signe de t et s et les points $P_t^i : (x_{1,0} + t\delta_{1i}, x_{2,0} + t\delta_{2i}, x_{3,0} + t\delta_{3i})$ et $P_s^j : (x_{1,0} + s\delta_{1j}, x_{2,0} + s\delta_{2j}, x_{3,0} + s\delta_{3j})$ appartiennent à \mathfrak{C} pour t et s suffisamment proches de 0. Cela aboutit à une absurdité car sur \mathfrak{C} , la fonction F est de signe constant.

Par conséquent, le plan π s'écrit $\pi \equiv a_k(x_k - x_{k_0}) = 0$ pour $k \neq i$ et $k \neq j$. Ce plan rencontre \mathfrak{C} en un ensemble contenant des points non alignés. Là aussi nous aboutissons à une absurdité car le plan qui rencontre \mathfrak{C} doit être une arête.

Au final, un point qui appartient à une arête a au plus une composante appartenant à $] -1, 1[$, ou est un sommet de \mathfrak{C} . Ainsi, une arête ne peut contenir que des points de la forme $T_1^{i_2 i_3} = (x_1, (-1)^{i_2}, (-1)^{i_3})$, $T_2^{i_1 i_3} = ((-1)^{i_1}, x_2, (-1)^{i_3})$ ou $T_3^{i_1 i_2} = ((-1)^{i_1}, (-1)^{i_2}, x_3)$, $x_1, x_2, x_3 \in [-1, 1]$ et $(i_1, i_2, i_3) \in \{0, 1\}^3$. Par conséquent, une arête ne peut contenir qu'un seul type de points car deux points appartenant à une arête ne diffèrent que par une coordonnée.

Sinon, nous avons P_1 un point de type $T_1^{i_2 i_3}$ ayant pour coordonnées $(x_1, (-1)^{i_2}, (-1)^{i_3})$ où $x_1 \in [-1, 1]$ et P_2 un point de type $T_2^{i_1 i_3}$ ayant pour coordonnées $((-1)^{i_1}, x_2, (-1)^{i_3})$ où $x_1 \in [-1, 1]$. Les autres cas se font de manière similaire. Remarquons en premier que tous les types T_1 , T_2 et T_3 possèdent les sommets de \mathfrak{C} . Nous procédons par cas.

- 1) Si x_1 et x_2 appartiennent à $] -1, 1[$, alors le milieu $\frac{P_1 + P_2}{2}$ a deux coordonnées n'appartenant pas à $\{-1, 1\}$ et c'est contradictoire.
- 2) Si $x_2 \in] -1, 1[$ et $x_1 = 1$ ou -1 , alors P_1 est de type $T_2^{i_1 i_3}$ et il n'y a rien à démontrer car ce segment appartient à une des 12 arêtes définies.
- 3) Si $x_1 \in] -1, 1[$ et $x_2 = 1$ ou -1 , alors P_2 est de type $T_1^{i_1 i_3}$.
- 4) Si $x_1 = 1$ et $x_2 = 1$ et si $i_1 = i_2 = 1$, alors le milieu $\frac{P_1 + P_2}{2}$ a deux coordonnées n'appartenant pas à $\{-1, 1\}$ et c'est contradictoire. Si $i_1 = i_2 = 0$ ou $i_1 \neq i_2$, alors les points P_1 et P_2 sont de même type.
- 5) Les autres cas $x_1 = 1, x_2 = -1$ ou $x_1 = -1, x_2 = 1$ ou $x_1 = -1, x_2 = -1$ peuvent s'obtenir par le même procédé que 4).

□

Nous terminons le travail en déterminant les faces de \mathfrak{C} . Encore une fois, la représentation visuelle du cube nous aide comme point de départ pour savoir quel ensemble pourrait être ou non une face de \mathfrak{C} . Mais ce n'est pas suffisant, c'est pour ça que nous devons le démontrer.

Proposition 1.2.23. *Les enveloppes convexes de sommets ayant la même abscisse, la même ordonnée ou la même cote sont des faces de \mathfrak{C} .*

Démonstration. Nous avons 6 cas possibles, les deux premiers quadruplets sont ceux des sommets ayant une abscisse égale à $(-1)^{i_1}$ pour $i_1 \in \{0, 1\}$. Nous avons ensuite les quadruplets où les sommets ont une ordonnée égale à $(-1)^{i_2}$ pour $i_2 \in \{0, 1\}$, ou encore les quadruplets où les sommets ont une cote égale à $(-1)^{i_3}$ pour $i_3 \in \{0, 1\}$. Nous traiterons le premier cas où l'abscisse vaut $(-1)^{i_1}$ pour $i_1 \in \{0, 1\}$, les autres se faisant de la même manière. Le plan

$$\pi_{i_1} \equiv (-1)^{i_1} x_1 = 1$$

contient les sommets $S_{i_100}, S_{i_101}, S_{i_110}, S_{i_111}$ et donc leur enveloppe convexe. De plus, le demi-espace associé à π_{i_1} ,

$$\mathcal{D}_{i_1} \equiv (-1)^{i_1} x_1 \leqslant 1$$

contient \mathfrak{C} car tous les sommets de \mathfrak{C} appartiennent à \mathcal{D}_{i_1} . On définit la fonction

$$F(x_1, x_2, x_3) = (-1)^{i_1} x_1$$

qui possède un maximum sur \mathfrak{C} et ce maximum est atteint lorsque $x_1 = (-1)^{i_1}$ et vaut 1. Ainsi, le plan π_{i_1} est un plan d'appui dont l'intersection avec \mathfrak{C} donne bien l'enveloppe convexe $\text{Conv}(S_{i_100}, S_{i_101}, S_{i_110}, S_{i_111})$. □

Il faut maintenant éliminer toutes les autres possibilités de faces. C'est toujours le même argument qui est utilisé.

Proposition 1.2.24. *Les enveloppes convexes de sommets ayant la même abscisse, la même ordonnée ou la même cote sont les uniques faces de \mathfrak{C} .*

Démonstration. Si P_0 est un point d'une face différente de celles déjà observées, alors P_0 admet des coordonnées toutes comprises entre -1 et 1 strictement. En effet, si $P_0 = (x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0})$ est un tel point et si $\pi \equiv a_1(x_1 - x_{1,0}) + a_2(x_2 - x_{2,0}) + a_3(x_3 - x_{3,0}) = 0$ est un plan d'appui pour la face contenant P_0 , alors la fonction

$$F(x_1, x_2, x_3) = a_1(x_1 - x_{1,0}) + a_2(x_2 - x_{2,0}) + a_3(x_3 - x_{3,0})$$

est de signe constant sur \mathfrak{C} et s'annule pour tous les points appartenant à la face contenant P_0 . Si $x_{i,0}$ appartient à $] -1, 1 [$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, on a $a_i = 0$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$.

En effet, dans le cas contraire, les fonctions $F(x_{1,0} + t\delta_{1i}, x_{2,0} + t\delta_{2i}, x_{3,0} + t\delta_{3i})$, $F(x_{1,0} + s\delta_{1j}, x_{2,0} + s\delta_{2j}, x_{3,0} + s\delta_{3j})$ et $F(x_{1,0} + r\delta_{1k}, x_{2,0} + r\delta_{2k}, x_{3,0} + r\delta_{3k})$, où $(i, j, k) \in \{1, 2, 3\}^3$, $i \neq j \neq k$, changent de signe avec le signe de t, s et r . Comme les points $P_t^i : (x_{1,0} + t\delta_{1i}, x_{2,0} + t\delta_{2i}, x_{3,0} + t\delta_{3i})$, $P_s^j : (x_{1,0} + s\delta_{1j}, x_{2,0} + s\delta_{2j}, x_{3,0} + s\delta_{3j})$ et $P_r^k : (x_{1,0} + r\delta_{1k}, x_{2,0} + r\delta_{2k}, x_{3,0} + r\delta_{3k})$ appartiennent à \mathfrak{C} pour t, s, r assez proches de 0. Cela aboutit à une absurdité car F sur \mathfrak{C} est de signe constant.

Par conséquent, nous avons $\pi \equiv 0 = 0$ et là aussi nous aboutissons à une absurdité car π n'est plus un plan mais l'espace tout entier, il contient donc \mathfrak{C} ce qui est absurde.

Ainsi, les points appartenant aux faces ont toujours une coordonnée égale à -1 ou 1 . Ainsi, une face ne peut contenir que des points ou sommet de la forme $T_1^{i_1} = ((-1)^{i_1}, x_2, x_3)$, $T_2^{i_2} = (x_1, (-1)^{i_2}, x_3)$ ou $T_3^{i_3} = (x_1, x_2, (-1)^{i_3})$, $x_1, x_2, x_3 \in [-1, 1]$ et $(i_1, i_2, i_3) \in \{0, 1\}^3$. De fait, une face ne peut contenir qu'un seul type de points car deux points appartenant à une face ne diffèrent que par deux coordonnées. Sinon, nous avons $P_1 : (x_1, x_2, x_3)$ et $P'_1 : (x_1, x_2, x_3)$ tels que les trois coordonnées sont différentes. Alors le milieu $\frac{P_1 + P'_1}{2}$ a ses trois coordonnées n'appartenant pas à $\{-1, 1\}$ et c'est contradictoire. \square

Maintenant que nous avons tous les sommets, arêtes et faces, nous pouvons entamer la dernière proposition de ce chapitre qui est de démontrer que l'enveloppe convexe des points $S_{i_1 i_2 i_3}$ est bien un cube.

Proposition 1.2.25. *Soit $\mathfrak{C} = \text{Conv}(S_{ijk}, (i, j, k) \in \{0, 1\}^3)$, alors \mathfrak{C} est un cube.*

Démonstration. Nous savons déjà que cet ensemble est convexe. De plus, chaque sommet appartient à 3 faces. Ce qui permet de dire que tous les sommets sont de degré 3. Il faut maintenant montrer que les faces sont des carrés isométriques. En prenant par exemple la face $\mathcal{F} = \text{Conv}(S_{000}, S_{001}, S_{010}, S_{011})$, nous devons calculer la longueur des côtés $[S_{000}, S_{001}]$, $[S_{001}, S_{010}]$, $[S_{010}, S_{011}]$, $[S_{011}, S_{000}]$ et le produit scalaire des vecteurs associés. Nous aurons alors des carrés de longueur de côté égale à 2, ce qui termine la preuve. \square

Nous sommes arrivé.e.s avec un nombre restreint de définitions et propriétés, à démontrer que l'ensemble \mathfrak{C} est un cube. Il faut cependant faire attention à ce que nous venons de démontrer. Cette proposition nous permet de dire que le cube existe, elle ne nous permet pas de dire que le cube est unique à similitude près.

Le choix du cube n'est pas anodin, nous pouvons bien imaginer que les autres polyèdres réguliers auraient été plus difficiles à démontrer. Surtout que nous avons démarré avec un nombre fini de points, pour l'octaèdre, cela devient plus difficile de choisir avec quels points démarrer. Ici, nous ressentons les limites de cette démarche, il nous faut une théorie et des propriétés pour alléger ce travail et le rendre systématique. Le prochain chapitre tentera de synthétiser et alléger le travail pour les autres polyèdres réguliers. En effet, il est utile de traiter de la même façon les polygones et polyèdres. De plus, certaines propriétés auraient été efficaces pour cette étude :

- Lorsqu'un plan d'appui possède un point intérieur à un segment, alors il contient ce segment ;

- Si un ensemble convexe est l'enveloppe convexe d'un certain nombre de points, alors les sommets sont parmi ces points ;
- Dans ce cas, les arêtes sont parmi les segments déterminés par les sommets ;
- Lorsqu'un ensemble convexe est une intersection finie de demi-espaces fermés, si cette intersection est "minimale", alors les faces sont l'intersection de l'ensemble avec les plans associés aux demi-espaces.

Chapitre 2

Éléments de convexité

Dans ce chapitre, nous allons nous placer dans le cadre de la géométrie affine euclidienne telle qu'elle est développée dans l'enseignement universitaire. Cela nous permettra d'avoir un contexte où les définitions sont posées aisément, et ne reposent pas, comme c'est parfois le cas de celles d'Euclide, sur la perception visuelle. Les détails sur la théorie de la géométrie affine euclidienne se trouvent dans le cours de P.Lecomte [18]. Après ces quelques rappels sur les ensembles affines, nous fixerons certaines notations dans la section sur les propriétés topologiques. Nous y introduirons également des objets spécifiques aux ensembles convexes comme l'intérieur relatif ou encore les points extrêmes. A partir de l'intérieur relatif, nous suivrons le livre de Grünbaum [13], principalement pour la structure en ajoutant quelques propositions du livre de Bronsted [3]. Le cœur des démonstrations sera parfois totalement différent de celles de Grünbaum. En effet, il faut se rappeler que notre but principal est d'étudier les polyèdres réguliers, nous avons donc parfois laisser quelques définitions, propositions qui n'ont pas un intérêt premier pour les polyèdres. C'est principalement à cause de ce choix que certaines démonstrations n'ont pas le même corps que celles du livre de référence. Nous généraliserons la notion de plan d'appui à celle d'hyperplan d'appui, elle est primordiale pour définir les faces d'un ensemble convexe. Nous continuerons ensuite sur quelques propriétés concernant l'enveloppe convexe d'ensemble. Les trois dernières sections seront les plus intéressantes pour nous, elles vont nous permettre d'avoir des outils pour déterminer les faces d'un polyèdre, savoir si il n'y en a pas d'autres, etc.

Nous devons donc définir l'espace dans lequel nous travaillons. L'espace affine est un ensemble sur lequel un espace vectoriel agit par translation.

Définition 2.0.1. *Un espace affine \mathcal{A} modelé sur un espace vectoriel E est la donnée d'un ensemble \mathcal{A} et d'une application*

$$t : \mathcal{A} \times E \rightarrow \mathcal{A} : (A, u) \mapsto t(A, u) = A + u$$

tel que pour tout $A \in \mathcal{A}$ et $u, v \in E$,

- 1) *l'application t est associative $(A + u) + v = A + (u + v)$,*
- 2) *pour tout $A, B \in \mathcal{A}$, il existe un unique u tel que $A + u = B$.*

L'idée derrière cette définition est que les éléments de E agissent sur \mathcal{A} , par translation. Nous pouvons définir la dimension d'un espace affine à partir de l'espace vectoriel associé.

Définition 2.0.2. *La dimension d'un espace affine \mathcal{A} est la dimension de l'espace vectoriel associé.*

Remarque 2.0.3. *Si la dimension d'un espace vectoriel E est égale à $n \in \mathbb{N}$, alors il existe n vecteurs linéairement indépendants formant une base pour cet espace.*

Dans ce chapitre, nous voulons travailler dans un espace affine euclidien, il faut donc munir cet espace d'une distance. Pour définir cette distance, nous aurons besoin d'un produit scalaire. Nous le définissons par les propriétés qu'il doit avoir.

Définition 2.0.4. *Un produit scalaire sur un espace vectoriel réel E est une application*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

qui est

- 1) *Symétrique* : on a $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ pour tous $x, y \in E$;
- 2) *Bilinéaire* : on a

$$\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, \quad \langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle,$$

et

$$\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle = \langle x, \lambda y \rangle,$$

pour tous $x, y, z \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$;

- 3) *Définie positive* : On a $\langle x, x \rangle \geq 0$ pour tout $x \in E$ et $\langle x, x \rangle = 0$ (si et) seulement si $x = 0$.

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé espace euclidien. Dans ce mémoire, le contexte naturel nous amène à travailler dans un espace affine euclidien de dimension inférieure ou égale 3. En effet, pour observer le cube, nous nous sommes muni.e.s de l'espace affine euclidien le plus élémentaire, l'espace "usuel".

Définition 2.0.5. *Un espace affine euclidien est un espace affine modelé sur un espace vectoriel euclidien.*

Définition 2.0.6. *La distance euclidienne du point P au point Q de \mathcal{A} , notée $d(P, Q)$ est définie par*

$$d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ} \rangle}.$$

Remarque 2.0.7. *On appelle **le plan** un espace affine de dimension 2 et **l'espace** un espace affine de dimension 3.*

L'espace vectoriel modelé sur lui-même respecte toutes les conditions pour être un espace affine. Nous définissons la somme de deux sous-ensembles affines, dont l'un deux est un sous-ensemble de l'espace vectoriel associé.

Définition 2.0.8. Soient \mathcal{A} un espace affine, $O \in \mathcal{A}$ une origine, \mathcal{B} un sous-ensemble de \mathcal{A} et C un sous ensemble de l'espace vectoriel associé à \mathcal{A} . On définit la somme de ces deux sous-ensembles comme suit

$$\mathcal{B} + C = \{X + u : X \in \mathcal{B}, u \in C\}.$$

Ici, nous démontrons quelques propriétés sur la convexité qui n'ont pas été faites dans le chapitre 1. Nous rappelons également certaines définitions importantes déjà mentionnées.

Définition 2.0.9. Soient $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

- 1) La combinaison affine des points A_1, \dots, A_n avec les coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ est le point X tel que

$$\overrightarrow{OX} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i}.$$

pour tout O appartenant à \mathcal{A} .

- 2) Une combinaison convexe est une combinaison affine où tous les poids λ_i sont positifs.

Comme nous l'avions déjà fait remarquer dans le chapitre 1, cette combinaison affine est indépendante de O . On écrit donc

$$X = \sum_{i=1}^n \lambda_i A_i.$$

Définition 2.0.10. Un ensemble \mathcal{C} est convexe si pour tous X et Y appartenant à \mathcal{C} , le segment $[X, Y]$ est inclus dans \mathcal{C} .

Définition 2.0.11. La dimension d'un convexe est égale à la dimension de son enveloppe affine.

Proposition 2.0.12. Un ensemble \mathcal{C} est convexe si et seulement si il contient toutes les combinaisons convexes de ses éléments.

Démonstration. La condition est suffisante (\Leftarrow) car le segment $[X, Y]$ est l'ensemble des combinaisons convexes de X et Y . La condition est nécessaire (\Rightarrow) : Soient $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{C}$, montrons que les combinaisons convexes des points appartiennent à \mathcal{C} . Nous procédons par récurrence sur k . Pour $k = 1$, il n'y a rien à montrer. Pour $k = 2$, c'est la définition. Supposons la propriété vraie pour k et montrons-la pour $k + 1$. Soient $X_1, \dots, X_{k+1} \in \mathcal{B}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1} \in [0, 1]$ tels que $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1$. On a,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i X_i &= (1 - \lambda_{k+1}) \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{k+1}} X_i + \lambda_{k+1} X_{k+1} \\ &= (1 - \lambda_{k+1}) Q + \lambda_{k+1} X_{k+1}, \end{aligned}$$

où $Q \in \mathcal{C}$ par hypothèse de récurrence. Nous avons donc une combinaison convexe de deux points de \mathcal{C} , par définition d'un ensemble convexe, elle appartient à \mathcal{C} . \square

Pour la suite de ce chapitre, nous supposerons que les convexes considérés sont fermés sauf mention explicite du contraire. Dans un espace affine de dimension n , un hyperplan est une variété affine de dimension $n - 1$. Par conséquent dans l'espace, un hyperplan est un plan, dans le plan, un hyperplan est une droite et dans la droite, un hyperplan est un singleton. Soient $O \in \mathcal{A}$ et n une normale à l'hyperplan \mathcal{H} , on a

$$\mathcal{H} = \left\{ X \in \mathcal{A} : \langle \overrightarrow{OX}, n \rangle = \alpha \right\}.$$

Cet hyperplan détermine deux demi-espaces ouverts

$$\mathcal{D}_- = \left\{ X \in \mathcal{A} : \langle \overrightarrow{OX}, n \rangle < \alpha \right\} \text{ et } \mathcal{D}_+ = \left\{ X \in \mathcal{A} : \langle \overrightarrow{OX}, n \rangle > \alpha \right\}$$

et les demi-espaces fermés correspondants $\overline{\mathcal{D}_-}$ et $\overline{\mathcal{D}_+}$. Nous généralisons le proposition vue durant le chapitre 1 qui nous disait que les demi-espaces sont convexes.

Proposition 2.0.13. *Les demi-espaces fermés et ouverts sont convexes.*

Démonstration. Traitons le cas du demi-espace \mathcal{D}_- . Soient deux points X, Y appartenant à \mathcal{D}_- et λ appartenant à $[0, 1]$. Montrons que $\lambda X + (1 - \lambda)Y \in \mathcal{D}_-$. On a, par la linéarité du produit scalaire et par définition de X et Y ,

$$\begin{aligned} \langle \lambda \overrightarrow{OX} + (1 - \lambda) \overrightarrow{OY}, n \rangle &= \lambda \langle \overrightarrow{OX}, n \rangle + (1 - \lambda) \langle \overrightarrow{OY}, n \rangle \\ &< \lambda \alpha + (1 - \lambda) \alpha = \alpha. \end{aligned}$$

□

2.1 Propriétés topologiques des convexes

Nous faisons d'abord quelques rappels sur certaines notions de topologie pour fixer les notations. Nous introduirons également des éléments spécifiques à la théorie des convexes à partir de la définition 2.1.10.

Définition 2.1.1. *Un ensemble $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ est*

- 1) *ouvert si chaque point de \mathcal{C} est le centre d'une boule ouverte incluse dans \mathcal{C} ;*
- 2) *fermé si son complémentaire $\mathcal{C}^c = \mathcal{A} \setminus \mathcal{C}$ est ouvert.*

Nous donnons une caractérisation pour les ensembles fermés, elle nous sera utile pour démontrer certaines propositions. Une démonstration peut être trouvée dans le chapitre 5 du livre de J.Dixmier [10].

Définition 2.1.2. *Un ensemble $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ est fermé s'il contient les limites de ses suites convergentes.*

Et pour finir, nous définissons l'intérieur, l'adhérence et la frontière d'un ensemble.

Définition 2.1.3. Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$,

- 1) l'union de tous les ouverts inclus dans \mathcal{C} est appelée l'intérieur de \mathcal{C} . On le note $\text{int}(\mathcal{C})$.
- 2) L'intersection de tous les fermés contenant \mathcal{C} est appelé l'adhérence de \mathcal{C} . On le note $\bar{\mathcal{C}}$.
- 3) La frontière de \mathcal{C} est l'ensemble $\text{bd}(\mathcal{C}) = \bar{\mathcal{C}} \cap \bar{\mathcal{C}^c}$.

Lorsqu'on a un ensemble \mathcal{C} convexe, on peut se demander si son intérieur et son adhérence sont également des ensembles convexes. Pour démontrer cette proposition, nous aurons besoin d'avoir une caractérisation de l'adhérence d'un ensemble et quelques propriétés sur l'homothétie d'une boule.

Proposition 2.1.4. Soit \mathcal{C} un convexe, alors $\bar{\mathcal{C}} = \bigcap_{\mu > 0} (\mathcal{C} + \mu B)$ où B est la boule unitaire de l'espace vectoriel euclidien.

Démonstration. Puisque $\mathcal{C} + \mu B = \{X + \mu u : X \in \mathcal{C}, u \in B\}$, on a $\mathcal{C} + \mu B = \bigcup_{A \in \mathcal{C}} \mathcal{B}(A, \mu)$ où $\mathcal{B}(A, \mu)$ est la boule de centre A et de rayon μ .

Si $X \in \bar{\mathcal{C}}$, la boule ouverte de centre X et de rayon μ rencontre \mathcal{C} en A_0 . Par conséquent, la boule de centre A_0 et de rayon μ contient X et $X \in \mathcal{C} + \mu B$. Comme cette propriété est vraie pour tout μ , $X \in \bigcap_{\mu > 0} \mathcal{C} + \mu B$.

Réciproquement, soient un point X appartenant à $\bigcap_{\mu > 0} \mathcal{C} + \mu B$ et $\mu_0 > 0$. Montrons que la boule de centre X et de rayon μ_0 rencontre \mathcal{C} . Comme $X \in \mathcal{C} + \mu_0 B$, il existe un point $A_0 \in \mathcal{C}$ et u un vecteur de B tel que $X = A_0 + \mu_0 u$, ou $\overrightarrow{A_0 X} = \mu_0 u$. La boule de centre X et de rayon μ_0 contient A_0 . Comme on a choisi μ_0 arbitrairement, c'est vrai pour tous les ouverts contenant X . \square

Définition 2.1.5. Une homothétie est une transformation d'un espace affine déterminée par un point S appelé le centre et d'un réel non nul appelé le rapport qui envoie un point M sur un autre point $S + \lambda \overrightarrow{SM}$.

Proposition 2.1.6. L'homothétique d'une boule est une boule.

Démonstration. Soit $\mathcal{B}(C, r)$ la boule de centre C et de rayon r . Alors l'homothétie $h_{O,\lambda}$ de centre O et de rapport $\lambda > 0$ envoie $\mathcal{B}(C, r)$ sur une boule de centre $h_{O,\lambda}(C) = C' = O + \lambda \overrightarrow{OC}$ et de rayon λr . En d'autres termes,

$$h_{O,\lambda}(\mathcal{B}(C, r)) = \mathcal{B}(C', \lambda r).$$

Soit $X \in \mathcal{B}(C, r)$, en appliquant l'homothétie à ce point, nous obtenons un point $h_{O,\lambda}(X) = O + \lambda \overrightarrow{OX}$. On peut voir que

$$|\overrightarrow{h_{O,\lambda}(C)h_{O,\lambda}(X)}| = \lambda |\overrightarrow{CX}| \leq \lambda r.$$

Nous venons de montrer que l'image d'une boule de centre C et de rayon r par une homothétie de centre O et de rapport λ est incluse dans une boule de centre $h_{O,\lambda}(C)$ et de rayon égal au rapport multiplié par le rayon r .

Pour l'autre inclusion, nous utilisons ce que nous venons d'énoncer avec une homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{\lambda}$, nous obtenons

$$h_{O,\frac{1}{\lambda}}(\mathcal{B}(C', \lambda r)) \subset \mathcal{B}(C, r),$$

où $C' = O + \lambda \overrightarrow{OC}$. Donc, en appliquant $h_{O,\lambda}$, nous obtenons

$$h_{O,\lambda}(h_{O,\frac{1}{\lambda}}(\mathcal{B}(C', \lambda r))) \subset h_{O,\lambda}(\mathcal{B}(C, r)).$$

Comme l'application $h_{O,\lambda}$ est bijective d'inverse $h_{O,\frac{1}{\lambda}}$, nous avons

$$\mathcal{B}(C', \lambda r) \subset h_{O,\lambda}(\mathcal{B}(C, r)).$$

□

Lemme 2.1.7. *Soient \mathcal{C} un convexe, \mathcal{B} une boule telle que $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ et $h_{P,\lambda}$ l'homothétie de centre $P \in \mathcal{C}$ et de rapport λ . Si $\lambda \in]0, 1]$, alors l'homothétique d'une boule est une boule incluse dans \mathcal{C} . En d'autres termes,*

$$h_{P,\lambda}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}' \subset \mathcal{C},$$

où \mathcal{B}' est une boule.

Démonstration. Nous savons déjà par la proposition 2.1.6 que l'homothétique d'une boule est une boule. Il nous suffit de montrer que tout point de cette nouvelle boule est dans \mathcal{C} . Soit $X \in \mathcal{B}'$, par hypothèse, il existe $Y \in \mathcal{B}$ tel que $X = h_{P,\lambda}(Y)$. En d'autres termes,

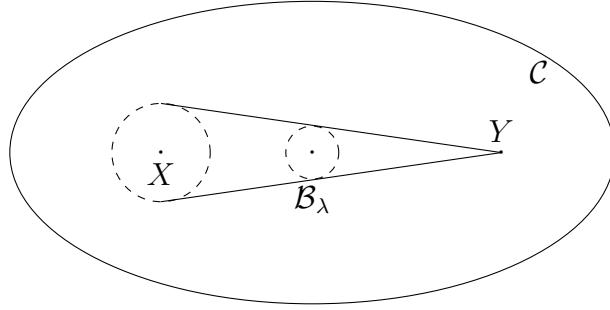
$$X = P + \lambda \overrightarrow{PY} \text{ avec } \lambda \in]0, 1].$$

Nous avons donc une combinaison convexe de points de \mathcal{C} . Comme cet ensemble est convexe, nous avons $X \in \mathcal{C}$. □

Nous avons maintenant tous les outils nécessaires pour démontrer que l'intérieur et l'adhérence d'un ensemble convexe, sont convexes.

Proposition 2.1.8. *Soit \mathcal{C} un ensemble convexe.*

- 1) *L'ensemble $\text{int}(\mathcal{C})$ est convexe.*
- 2) *L'ensemble $\bar{\mathcal{C}}$ est convexe.*


 FIGURE 2.1 – La boule \mathcal{B}_λ .

Démonstration.

- 1) Soient $X, Y \in \text{int}(\mathcal{C})$. Montrons que $Z = \lambda X + (1 - \lambda)Y \in \text{int}(\mathcal{C})$ pour $\lambda \in [0, 1]$. Par définition, il existe une boule $\mathcal{B}(X, r)$ centrée en X et de rayon r telle que $\mathcal{B}(X, r) \subset \mathcal{C}$. Par la convexité de \mathcal{C} et $Y \in \text{int}(\mathcal{C})$, on a

$$\mathcal{B}_\lambda = \lambda \mathcal{B}(X, r) + (1 - \lambda)Y \subset \mathcal{C}.$$

L'ensemble $\lambda \mathcal{B}$ est une boule obtenue en appliquant l'homothétie de centre X et de rapport λ sur $\mathcal{B}(X, r)$. La boule \mathcal{B}_λ est centrée en Z et de rayon λr . Comme $\mathcal{B}_\lambda \subset \mathcal{C}$, on a $Z \in \text{int}(\mathcal{C})$.

- 2) On sait pas la proposition 2.1.4 que $\bar{\mathcal{C}} = \bigcap_{\mu > 0} (\mathcal{C} + \mu B)$ où B est une boule unitaire de l'espace euclidien. Comme $\mathcal{C} + \mu B$ est un convexe, on peut conclure.

□

Proposition 2.1.9. *Si $X \in \mathcal{C}$ et $Y \in \text{int}(\mathcal{C})$, alors $[X, Y] \subset \text{int}(\mathcal{C})$.*

Démonstration. La preuve a été faite à la proposition 2.1.8. □

Nous allons maintenant définir une notion importante de la convexité, celle de l'intérieur relatif. En effet, lorsqu'un convexe est de dimension strictement inférieure à celle de l'espace affine dans lequel il se trouve, son intérieur est vide. Pour ne pas perdre toutes les propriétés intéressantes de l'intérieur, la notion d'intérieur relatif a été introduite.

Définition 2.1.10. *L'intérieur relatif d'un ensemble convexe \mathcal{C} est l'intérieur de \mathcal{C} dans son enveloppe affine. On a,*

$$\text{ri}(\mathcal{C}) = \{X \in \mathcal{C} \mid \exists \mathcal{B}(X, r), r > 0 : X \in \mathcal{B}(X, r) \cap \text{Aff}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}\}.$$

Prenons un exemple pour se familiariser avec la notion. Soit $[X, Y]$ un segment où $X \neq Y$, d'un espace affine de dimension 2. Ce segment est d'intérieur vide car il ne contient aucune boule. Par contre, son intérieur relatif sera le segment ouvert, $\text{ri}([X, Y]) =]X, Y[$.

Définition 2.1.11. *Soient X et $Y \in \mathcal{C}$, le segment ouvert déterminé par X et Y est*

$$]X, Y[= \{(1 - \lambda)X + \lambda Y : \lambda \in]0, 1[\}.$$

L'intérieur relatif d'un ensemble convexe \mathcal{C} est intéressant car si \mathcal{C} est non vide alors l'intérieur relatif le sera également. Ce n'est pas nécessairement le cas pour l'intérieur comme nous venons de le montrer sur l'exemple. Pour démontrer que l'intérieur relatif est non vide, nous allons d'abord montrer que tout simplexe est d'intérieur relatif non-vide.

Pour définir un simplexe, il faut développer la notion de points affinement indépendants. En deux mots, si des points sont affinement indépendants, alors aucun des points ne peut s'écrire comme une combinaison affine des autres.

Définition 2.1.12 (Indépendance affine). *Les points X_1, \dots, X_k sont affinement indépendants si quels que soient les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ vérifiant*

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i = 0,$$

si

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i X_i = 0$$

alors on a nécessairement $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$.

Définition 2.1.13. *On appelle simplexe de dimension d , l'enveloppe convexe de $d+1$ points affinement indépendants.*

Proposition 2.1.14. *Tout simplexe est d'intérieur relatif non-vide.*

Démonstration. En dimension 0, un simplexe est un point. On a alors $\text{ri}(\{P\}) = \{P\}$. En dimension k , on choisit X_0, \dots, X_k des points affinement indépendants et $\mathcal{S} = \text{Conv}(X_0, \dots, X_k)$. Par définition, $(X_0, (\overrightarrow{X_0X_1}, \dots, \overrightarrow{X_0X_k}))$ est un repère de $\text{Aff}(\mathcal{S})$. On a

$$X \in \mathcal{S} \Leftrightarrow X = \lambda_0 X_0 + \dots + \lambda_k X_k, \quad \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0.$$

On peut remarquer que cette décomposition est unique grâce à l'indépendance affine des points. On a,

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{S} \Leftrightarrow X &= (1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i) X_0 + \lambda_1 \overrightarrow{X_0X_1} + \dots + \lambda_k \overrightarrow{X_0X_k} \\ &= X_0 + \lambda_1 \overrightarrow{X_0X_1} + \dots + \lambda_k \overrightarrow{X_0X_k}. \end{aligned}$$

Si l'on définit l'application ψ comme le passage aux coordonnées dans le repère de $\text{Aff}(\mathcal{S})$, on a

$$\psi(X) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}.$$

Cette application est un homéomorphisme entre l'espace affine $\text{Aff}(\mathcal{S})$ et \mathbb{R}^k . Elle est donc affine et continue. On a alors

$$\psi(\mathcal{S}) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i \leq 1 \right\}.$$

On cherche un ouvert non vide de $\text{Aff}(\mathcal{S})$. On a,

$$\psi(\mathcal{S}) \supset \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} : \lambda_i > 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i < 1 \right\}.$$

On peut remarquer que cet ouvert est non vide. En effet, le point $(\frac{1-\epsilon}{n}, \dots, \frac{1-\epsilon}{n})$ appartient à $\psi(\mathcal{S})$ pour $\epsilon \in]0, 1[$. Comme ψ échange les intérieurs (car homéomorphisme), on a un ouvert non vide dans $\text{Aff}(\mathcal{S})$. Cela implique que $\text{ri}(\mathcal{S})$ est non vide.

□

Nous pouvons maintenant montrer que tout convexe non vide est d'intérieur relatif non vide.

Proposition 2.1.15. *Soit \mathcal{C} un convexe non vide. Alors $\text{ri}(\mathcal{C}) \neq \emptyset$.*

Démonstration. Posons $\dim(\mathcal{C}) = k$. Alors \mathcal{C} contient $k+1$ points affinement indépendants. Sinon, tout $k+1$ -uple de points de \mathcal{C} est affinement dépendant et donc aussi tout q -uple de points de \mathcal{C} pour $q \geq k+1$. Supposons que Q_0, \dots, Q_r soient un $r+1$ -uple de points de \mathcal{C} affinement indépendants et maximal par inclusion. On en déduit que $r+1 < k+1$. Montrons en premier lieu que \mathcal{C} est engendré par Q_0, \dots, Q_r . Soit $P \in \mathcal{C} \setminus \{Q_0, \dots, Q_r\}$. Il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_{r+1}$ non tous nuls tels que

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^r \lambda_i Q_i + \lambda_{r+1} P = 0 \\ \sum_{i=0}^{r+1} \lambda_i = 0. \end{cases}$$

Si $\lambda_{r+1} = 0$, alors tous les λ_i sont nuls et cela contredit l'hypothèse qu'ils sont non tous nuls. Sinon, $\lambda_{r+1} \neq 0$ et on a $P = \sum_{i=0}^r \frac{\lambda_i}{-\lambda_{r+1}} Q_i$. Donc les points Q_0, \dots, Q_r, P sont affinement dépendants. Nous avons donc que tout point de \mathcal{C} peut s'écrire comme une combinaison affine des points Q_0, \dots, Q_r . Si P est dans $\text{Aff}(\mathcal{C})$, alors P est une combinaison affine de points de \mathcal{C} ce qui implique que tout point de $\text{Aff}(\mathcal{C})$ est une combinaison affine des points Q_0, \dots, Q_r . On a alors Q_0, \dots, Q_r un repère de $\text{Aff}(\mathcal{C})$ ce qui est contradictoire car $\dim(\text{Aff}(\mathcal{C})) = k$ et $r+1 < k+1$.

Comme \mathcal{C} contient $k+1$ points affinement indépendants, nous avons un repère pour $\text{Aff}(\mathcal{C})$ à partir de ces points affinement indépendants. Par la proposition 2.1.14, nous savons que le simplexe \mathcal{S}' défini à partir de ces $k+1$ points est d'intérieur relatif non vide et que $\mathcal{S}' \subset \mathcal{C}$. Comme ces deux ensembles ont la même enveloppe affine, on a également $\text{ri}(\mathcal{S}') \subset \text{ri}(\mathcal{C})$, ce qui permet de conclure. □

Remarque 2.1.16. Pour la proposition précédente, nous utilisons une implication qui n'est pas vraie en toute généralité. En effet, si $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$, cela n'implique pas forcément que $\text{ri}(\mathcal{C}) \subset \text{ri}(\mathcal{C}')$. Notre cas permettait l'implication car les deux ensembles avaient la même enveloppe affine. Prenons par exemple le carré $\mathcal{C} = \text{Conv}(\{S_{ij}, i, j \in \{0, 1\}\})$ où $S_{ij} = ((-1)^i, (-1)^j)$ et une de ses arêtes, $\mathcal{B} = \text{Conv}(S_{00}, S_{01})$. On a bien $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ mais l'intérieur relatif de \mathcal{B} se trouve encore sur une des arêtes du carré. L'intérieur relatif du carré est égal à l'intérieur du carré car la dimension de l'enveloppe affine est égale à la dimension de \mathcal{C} , cela sera prouvé ultérieurement. On a donc $\text{ri}(\mathcal{B}) =]S_{00}, S_{01}[\not\subset \text{int}(\mathcal{C})$.

Pour que l'intérieur d'un convexe soit non vide, il faut que celui-ci soit de la même dimension que l'espace affine \mathcal{A} .

Proposition 2.1.17. Un convexe \mathcal{C} a la même dimension que \mathcal{A} si et seulement si $\text{int}(\mathcal{C}) \neq \emptyset$.

Démonstration. On suppose que $\dim(\mathcal{C}) < \dim(\mathcal{A})$. Par hypothèse, on a $\text{int}(\mathcal{C}) \neq \emptyset$, alors \mathcal{C} contient une boule ouverte et l'enveloppe affine de \mathcal{C} , qui contient aussi cette boule, ne peut pas être incluse dans un hyperplan. Or, toute variété affine distincte de \mathcal{A} est incluse dans un hyperplan. Passons à la réciproque. Si $\dim(\mathcal{C}) = \dim(\mathcal{A}) = d$, alors on sait que $\text{int}(\mathcal{C}) = \text{ri}(\mathcal{C})$ par définition de l'intérieur relatif. En effet, l'intersection de toute boule avec $\text{Aff}(\mathcal{C})$ rend cette boule car $\dim(\mathcal{C}) = \dim(\mathcal{A})$. Par la proposition 2.1.15, on sait que $\text{ri}(\mathcal{C}) \neq \emptyset$ ce qui implique que $\text{int}(\mathcal{C}) \neq \emptyset$. \square

Nous avons donc une condition pour que l'intérieur d'un convexe soit égal à l'intérieur relatif de celui-ci.

Proposition 2.1.18. Soit \mathcal{C} un ensemble convexe, si $\text{int}(\mathcal{C}) \neq \emptyset$, alors $\text{int}(\mathcal{C}) = \text{ri}(\mathcal{C})$.

Démonstration. D'après la proposition 2.1.17, si l'intérieur de \mathcal{C} n'est pas vide, alors $\text{Aff}(\mathcal{C}) = \mathcal{A}$, donc l'intérieur de \mathcal{C} dans $\text{Aff}(\mathcal{C})$ est l'intérieur de \mathcal{C} . \square

Nous supposerons souvent que l'ensemble \mathcal{C} est de même dimension que l'espace affine pour avoir cette égalité. Nous rappelons maintenant une propriété sur l'intersection d'intérieurs.

Proposition 2.1.19. Soient $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ des ensembles convexes, alors

$$\text{int}\left(\bigcap_{i=1}^n \mathcal{C}_i\right) = \bigcap_{i=1}^n \text{int}(\mathcal{C}_i).$$

Nous remarquons que cette égalité n'est pas toujours vraie pour l'intérieur relatif. En effet, si nous prenons deux segments $[0, 1]$ et $[1, 2]$, alors on a $\text{ri}([0, 1]) =]0, 1[$ et $\text{ri}([1, 2]) =]1, 2[$. Si nous comparons les deux ensembles, nous avons

$$\text{ri}([0, 1] \cap [1, 2]) = \{1\}, \quad \text{ri}([0, 1]) \cap \text{ri}([1, 2]) = \emptyset.$$

Pour que l'égalité soit vraie, il faut que l'intersection des intérieurs relatifs soit non vide. Une preuve de cette proposition se trouve dans le livre "Convex Analysis" de R.T. Rockafellar [22].

La prochaine proposition est un argument extrêmement important pour bon nombre de démonstrations. Elle traduit l'idée que lorsqu'un point X est dans l'intérieur relatif, alors en fixant un point Y quelconque du convexe, on trouvera toujours un segment contenant X et dont une des extrémités est Y .

Proposition 2.1.20. *Un point X appartient à $\text{ri}(\mathcal{C})$ si et seulement si pour tout $Y \in \mathcal{C}$ tel que $Y \neq X$, il existe $Z \in \mathcal{C}$ tel que $X \in]Y, Z[$.*

Démonstration. Soit $Y \in \mathcal{C}$ tel que $Y \neq X$. Par hypothèse, comme X est dans l'intérieur relatif, il existe une boule \mathcal{B} de $\text{Aff}(\mathcal{C})$ centrée en X et de rayon $r > 0$ telle que $X \in \mathcal{B} \subset \mathcal{C}$. On sait également que $\text{Aff}([Y, X])$ est une droite, notons la \mathcal{L} , telle que $\mathcal{L} \cap \mathcal{B} = \{Z_0, Z_1\}$ avec $Z_0, Z_1 \neq X$ car cette droite passe par le centre de la boule qui possède un rayon positif. On cherche un point Z tel que X appartient à $]Y, Z[$. On doit choisir entre les Z_i , celui qui sera le plus loin de Y . En prenant ce dernier, on sera certain que X est à l'intérieur de ce segment. Pour la condition suffisante, on sait qu'il existe un point $Y \in \text{ri}(\mathcal{C})$ car l'intérieur relatif est non-vide. Si $Y = X$, il n'y a rien à prouver. Sinon, on sait qu'il existe un point Z tel que $X \in]Y, Z[$. Par la proposition précédente, on sait que $]Y, Z[\subset \text{ri}(\mathcal{C})$ et donc X appartient à $\text{ri}(\mathcal{C})$. \square

La prochaine proposition permet d'obtenir une forme générale pour les points de l'intérieur relatif sous certaines conditions pour l'ensemble convexe.

Proposition 2.1.21. *Soit \mathcal{C} un ensemble fini. Alors $X \in \text{ri}(\text{Conv}(\mathcal{C}))$ si et seulement si X peut être représenté comme une combinaison convexe de tous les points de \mathcal{C} avec tous les coefficients positifs.*

Démonstration. On montre en premier la condition nécessaire. Comme \mathcal{C} est un ensemble fini, notons $n \in \mathbb{N}$ le nombre d'éléments de \mathcal{C} . Soit $X \in \text{ri}(\text{Conv}(\mathcal{C})) \subset \text{Conv}(\mathcal{C})$, alors

$$X = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i.$$

- 1) Si $\lambda_i > 0$ pour tout i , alors la preuve est terminée.
- 2) Sinon, il existe $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\lambda_{i_0} = 0$. Nous allons montrer qu'on peut modifier la combinaison pour obtenir un coefficient pour X_{i_0} strictement positif tout en conservant cette propriété pour les coefficients qui sont déjà strictement positifs.
 - Si $X = X_{i_0}$, alors on prend $X = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}X_{i_0}$. On a bien une combinaison convexe des éléments de \mathcal{C} avec des coefficients strictement positifs.
 - Si X est différent de X_{i_0} , comme $X \in \text{ri}(\text{Conv}(\mathcal{C}))$ et $X_{i_0} \in \text{Conv}(\mathcal{C})$, il existe $Y \in \text{Conv}(\mathcal{C})$ tel que $X \in]X_{i_0}, Y[$ par la proposition 2.1.20. On peut alors écrire X comme une combinaison convexe de X_{i_0} et Y , c'est à dire

$$X = (1 - \lambda)X_{i_0} + \lambda Y, \quad \lambda \in]0, 1[.$$

Comme $Y \in \text{Conv}(\mathcal{C})$, il est une combinaison convexe des éléments de \mathcal{C} et on a $Y = \sum_{i=1}^n \mu_i X_i$. Alors,

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}((1-\lambda)X_{i_0} + \lambda Y) \\ &= \frac{1}{2}\sum \lambda_i X_i + \frac{1}{2}((1-\lambda)X_{i_0} + \lambda Y) \\ &= \sum_{i \neq i_0} \left(\frac{\lambda_i}{2} + \frac{\lambda\mu_i}{2} \right) X_i + \left(\frac{1-\lambda}{2} + \frac{\lambda\mu_{i_0}}{2} \right) X_{i_0}. \end{aligned}$$

Si $\lambda_i > 0$, alors on sait que les coefficients $\frac{\lambda_i}{2} + \frac{\lambda\mu_i}{2}$ sont strictement positifs. On a également $\frac{1-\lambda}{2} + \frac{\lambda\mu_{i_0}}{2} > 0$ car $\lambda \in]0, 1[$ et $\frac{\lambda\mu_{i_0}}{2} \geq 0$. Par conséquent, X en une combinaison convexe de tous les éléments de \mathcal{C} avec des coefficients strictement positifs.

Passons maintenant à la condition suffisante. Soit $X = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i$ avec $\lambda_i > 0$ pour tout i et $\sum \lambda_i = 1$. Si $P \in \text{Conv}(\mathcal{C})$ et $P \neq X$, montrons que X appartient à l'intérieur d'un segment $[P, Y]$ où $Y \in \text{Conv}(\mathcal{C})$ pour ensuite appliquer la proposition 2.1.20. Pour cela, on écrit $P = \sum_{i=1}^n \mu_i X_i$ avec $\mu_i \geq 0$ et on cherche $\lambda \in]0, 1[$ tel que $X = (1-\lambda)P + \lambda Y$. On a,

$$\begin{aligned} X &= (1-\lambda)P + \lambda Y \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i &= (1-\lambda) \sum_{i=1}^n \mu_i X_i + \lambda Y \\ \Leftrightarrow Y &= \sum \frac{\lambda_i - (1-\lambda)\mu_i}{\lambda} X_i. \end{aligned}$$

Comme $\lambda_i > 0$, on peut s'assurer que tous les coefficients $\lambda_i - (1-\lambda)\mu_i$ sont positifs, pour λ suffisamment proche de 1 à savoir $0 < 1 - \lambda < \frac{\lambda_i}{\mu_i}$. On peut maintenant conclure par la proposition 2.1.20 que $X \in \text{ri}(\mathcal{C})$. \square

Nous introduisons une dernière notion spécifique aux ensembles convexes, celle de point extrême.

Définition 2.1.22. Un point X d'un convexe \mathcal{C} est extrême s'il n'est dans l'intérieur relatif d'aucun segment $[Y, Z]$ déterminé par deux points distincts Y et Z de \mathcal{C} . L'ensemble des points extrêmes de \mathcal{C} est noté $\text{Ext}(\mathcal{C})$.

Exemple 2.1.23. Prenons \mathcal{C} l'enveloppe convexe de 3 points A, B et C non alignés. Les points extrêmes seront au nombre de 3, et ce sont les 3 points A, B et C car ce sont les seuls points qui ne sont dans l'intérieur d'aucun segment de \mathcal{C} .

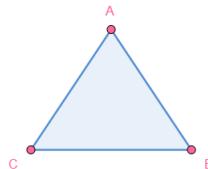


FIGURE 2.2 – Les 3 points extrêmes de \mathcal{C} .

Remarque 2.1.24. Cette propriété peut s'exprimer de deux façons différentes et équivalentes :

- 1) Si $X = (1 - \lambda)Y + \lambda Z$ où $\lambda \in]0, 1[$, avec $Y, Z \in \mathcal{C}$, alors $Y = Z$;
- 2) Si $X = (1 - \lambda)Y + \lambda Z$ où $\lambda \in [0, 1]$, avec $Y, Z \in \mathcal{C}$ et $Y \neq Z$, alors $\lambda = 0$ ou 1 .

Nous utiliserons cette notion lorsque nous aborderons les propriétés sur les faces d'un ensemble convexe.

2.2 Hyperplans

Dans cette section, nous généralisons la notion de plan d'appui vue lors du premier chapitre. Les hyperplans vont nous permettre de définir une notion qui semble naturelle dans le domaine de la convexité, celle d'hyperplan d'appui.

Définition 2.2.1. Soit \mathcal{C} un convexe. Un hyperplan \mathcal{H} est d'appui de \mathcal{C} s'il est d'intersection non vide avec \mathcal{C} et qu'un de ses demi-espaces fermés associés contient \mathcal{C} .

Définissons maintenant la notion de séparation en convexité.

Définition 2.2.2.

- Deux convexes \mathcal{C} et \mathcal{C}' sont séparés par \mathcal{H} s'il existe une normale de \mathcal{H} telle que $\mathcal{C} \subset \overline{\mathcal{D}_-}$ et $\mathcal{C}' \subset \overline{\mathcal{D}_+}$.
- Ils sont strictement séparés si $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}_-$ et $\mathcal{C}' \subset \mathcal{D}_+$.

Définition 2.2.3. Soit \mathcal{C} un ensemble convexe et $X \in \mathcal{A}$. La distance de X à \mathcal{C} est réalisée s'il existe $C \in \mathcal{C}$ tel que $d(A, C) = d(A, \mathcal{C})$.

Lemme 2.2.4. La distance d'un point à un convexe fermé est réalisée en un unique point.

Démonstration. On sait que la distance d'un point à un fermé est réalisée. Soit \mathcal{C} un convexe fermé, X un point et supposons qu'il existe deux points distincts Y_1 et Y_2 appartenant à \mathcal{C} tels que $d(X, Y_1) = d(X, Y_2) = d(X, \mathcal{C})$. Alors le triangle XY_1Y_2 est isocèle. Prenons $M = \frac{Y_1+Y_2}{2} \in \mathcal{C}$, par l'inégalité triangulaire, nous avons

$$d(X, M) \leq d(X, Y_1) + d(Y_1, M).$$

Comme $Y_1 \neq M$, la distance $d(Y_1, M)$ est strictement positive. Sinon $Y_1 = M$ et cela implique que $Y_1 = Y_2$ ce qui est absurde. Ainsi, nous avons $d(X, M) < d(X, Y_1)$ ce qui est absurde. \square

Définition 2.2.5. Le point unique en lequel la distance est réalisée est appelé la projection de X sur \mathcal{C} . On peut le noter $p_{\mathcal{C}}(X)$ ou $p(X)$ si aucune confusion n'est possible.

Nous démontrons le théorème D'Hahn-Banach qui nous permet de séparer un convexe fermé et un convexe compact si leur intersection est le vide.

Théorème 2.2.6 (Hahn-Banach). *Si \mathcal{C} est un convexe fermé et si \mathcal{C}' est un convexe compact tels que $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \emptyset$, alors ils sont strictement séparés par un hyperplan.*

Démonstration. On définit la fonction $d_{\mathcal{C}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto d_{\mathcal{C}}(x) = d(x, \mathcal{C})$. La restriction de $d_{\mathcal{C}}$ au compact \mathcal{C}' est continue¹. Elle admet donc un minimum sur \mathcal{C}' , en un point X_0 . Notons Y_0 le point $p_{\mathcal{C}}(X_0)$, il est unique par la proposition 2.2.4. Puisque $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \emptyset$, les points X_0 et Y_0 sont distincts. Montrons que les hyperplans \mathcal{H}_0 et \mathcal{H}_1 orthogonaux à $X_0 Y_0$ et passant respectivement par X_0 et Y_0 séparent \mathcal{C} et \mathcal{C}' . L'hyperplan $\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$ parallèle à \mathcal{H}_0 et \mathcal{H}_1 passant par $\frac{1}{2}X_0 + \frac{1}{2}Y_0$ sépare strictement \mathcal{C} et \mathcal{C}' . En effet, notons $n = \overrightarrow{X_0 Y_0}$ un vecteur directeur de la droite $X_0 Y_0$ et les hyperplans

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0 &= \{X : \langle n, \overrightarrow{X_0 X} \rangle = 0\}, \\ \mathcal{H}_1 &= \{X : \langle n, \overrightarrow{X_0 X} \rangle = \alpha\},\end{aligned}$$

avec $\alpha = |n| > 0$. Alors ,

$$\mathcal{C}' \subset \{X : \langle n, \overrightarrow{X_0 X} \rangle \leq 0\} \text{ et } \mathcal{C} \subset \{X : \langle n, \overrightarrow{X_0 X} \rangle \geq \alpha\}.$$

On le montre par l'absurde. Supposons qu'il existe $Z \in \mathcal{C}'$ tel que $\langle n, \overrightarrow{X_0 Z} \rangle > 0$. Alors, par la convexité de \mathcal{C}' , le segment $[X_0, Z]$ est inclus dans \mathcal{C}' . On cherche un point Z_1 du segment

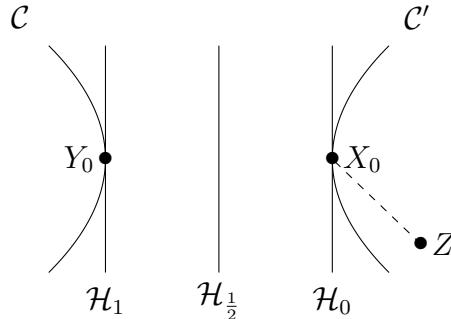


FIGURE 2.3 – Construction d'un point $Z_1 \in [X_0, Z]$.

$[X_0, Z]$ tel que $|\overrightarrow{Z_1 Y_0}|^2 < |\overrightarrow{X_0 Y_0}|^2$. Cela amènera une contradiction car $d(X_0, Y_0)$ est le minimum. Prenons $Z_1 = X_0 + \lambda \overrightarrow{X_0 Z}$, $\lambda \in]0, 1[$ et regardons la condition $|\overrightarrow{Y_0 Z_1}|^2 < |\overrightarrow{X_0 Y_0}|^2$:

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{Y_0 Z_1}|^2 &= |\overrightarrow{Y_0 X_0} + \lambda \overrightarrow{X_0 Z}|^2 \\ &= |\overrightarrow{X_0 Y_0}|^2 + 2\lambda \langle \overrightarrow{Y_0 X_0}, \overrightarrow{X_0 Z} \rangle + \lambda^2 |\overrightarrow{X_0 Z}|^2 \\ &< |\overrightarrow{X_0 Y_0}|^2.\end{aligned}$$

1. Une preuve peut être trouvée dans le chapitre 3 du livre de G.Choquer [5]

Comme on cherche un $\lambda > 0$, on obtient

$$\begin{aligned} 2\lambda \left\langle \overrightarrow{Y_0X_0}, \overrightarrow{X_0Z} \right\rangle + \lambda^2 |\overrightarrow{X_0Z}|^2 &< 0 \\ \lambda &< \frac{2\left\langle \overrightarrow{X_0Y_0}, \overrightarrow{X_0Z} \right\rangle}{|\overrightarrow{X_0Z}|^2}. \end{aligned}$$

On a $\lambda_0 = \frac{2\left\langle \overrightarrow{X_0Y_0}, \overrightarrow{X_0Z} \right\rangle}{|\overrightarrow{X_0Z}|^2} > 0$ car $\left\langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{X_0Z} \right\rangle > 0$. En prenant $\lambda < \inf(1, \lambda_0)$, on aura un point $Z_1 \in [X_0, Z]$ tel que $|\overrightarrow{Z_1Y_0}|^2 < |\overrightarrow{X_0Y_0}|^2$ ce qui est absurde. On a montré qu'aucun point de \mathcal{C}' n'est dans la zone délimitée par les deux hyperplans \mathcal{H}_0 et \mathcal{H}_1 .

Il faut maintenant montrer qu'aucun point de \mathcal{C} n'est dans cette zone. Le procédé reste le même, il nous suffit de changer quelques notations pour aboutir au même résultat. On prend $n' = \overrightarrow{Y_0X_0}$ et

$$\mathcal{H}'_0 = \{X : \left\langle n', \overrightarrow{Y_0X} \right\rangle = \alpha\} \text{ et } \mathcal{H}'_1 = \{X : \left\langle n', \overrightarrow{Y_0X} \right\rangle = 0\}.$$

□

Le corollaire suivant nous donne une autre manière de formuler un convexe, à partir de ses demi-espaces associés.

Corollaire 2.2.7. *Tout convexe fermé \mathcal{C} est l'intersection des demi-espaces ouverts (respectivement fermés) qui contiennent \mathcal{C} . On peut écrire*

$$\mathcal{C} = \bigcap_{\bar{\mathcal{D}} \supset \mathcal{C}} \bar{\mathcal{D}} \text{ ou } \mathcal{C} = \bigcap_{\mathcal{D} \supset \mathcal{C}} \mathcal{D}.$$

Démonstration. L'inclusion \subset est évidente : le convexe \mathcal{C} est inclus dans tous les demi-espaces qui le contiennent, donc aussi dans leur intersection. Pour la deuxième inclusion, on doit montrer que si un point X appartient à l'intersection des demi-espaces, il appartient à \mathcal{C} . On procède par contraposition et on démontre que si $X \notin \mathcal{C}$ alors il n'est pas dans l'intersection. Mais si $X \notin \mathcal{C}$, le convexe compact $\{X\}$ peut être strictement séparé de \mathcal{C} . Par le théorème d'Hahn-Banach, il existe un demi-espace (fermé ou ouvert) qui contient \mathcal{C} mais pas X . Par conséquent, X n'est pas dans l'intersection. □

Nous terminons cette section avec la proposition suivante : tout point de la frontière d'un convexe peut être séparé de ce convexe grâce à un hyperplan d'appui contenant ce point.

Proposition 2.2.8. *Si \mathcal{C} est un convexe et $X \in \text{bd}(\mathcal{C})$ alors il existe un hyperplan d'appui séparant \mathcal{C} et $\{X\}$. En d'autres termes, il existe un hyperplan d'appui de \mathcal{C} qui contient $\{X\}$.*

Pour la preuve de ce théorème, nous allons développer le concept de projection et démontrer quelques résultats sur cette notion. En effet, nous allons montrer que toute projection d'un point X sur un convexe \mathcal{C} se trouve sur la frontière de \mathcal{C} . Si en plus, nous montrons que cette projection est dans un hyperplan d'appui de \mathcal{C} , alors nous pourrons conclure.

Lemme 2.2.9. Soient \mathcal{C} un convexe fermé et $X \in \mathcal{A}$. On note $p(X)$ la projection de X sur \mathcal{C} . Pour tout $U \in \mathcal{C} \setminus \{p(X)\}$, on note $\pi(X)$ la projection orthogonale de X sur la droite $Up(X)$. Alors, on a

$$p(X) \in [\pi(X), U].$$

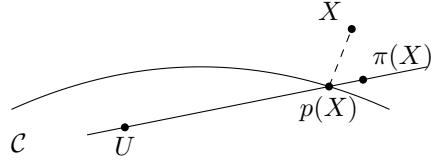


FIGURE 2.4 – Projection de X sur \mathcal{C} .

Démonstration. Si $X \in \mathcal{C}$, alors $X = p(X) = \pi(X)$ et le résultat est évident. De même si $p(X)$ est égal à $\pi(X)$ il n'y a rien à montrer.

On a, $\pi(X) \neq U$ car $d(X, \pi(X)) \leq d(X, p(X))$ et l'égalité n'ayant lieu que si $p(X) = \pi(X)$. Donc si U est égal à $\pi(X)$, alors $p(X)$ ne réalise pas la distance, ce qui est absurde. Pour la même raison, $\pi(X)$ ne peut appartenir à $\mathcal{C} \setminus \{p(X)\}$. On écrit alors $\overrightarrow{\pi(X)p(X)} = r\overrightarrow{\pi(X)U}$ et on montre que $r \in [0, 1]$.

- 1) Si $r < 0$, alors $\pi(X) \in [p(X), U]$. En effet, par la relation de Chasles, nous avons $\overrightarrow{Op(X)} - \overrightarrow{O\pi(X)} = r\overrightarrow{OU} - r\overrightarrow{O\pi(X)}$ pour tout O . Comme $r < 0$, nous pouvons le réécrire comme suit $\overrightarrow{O\pi(X)} = \frac{r\overrightarrow{OU} - \overrightarrow{Op(X)}}{r-1}$. Cette combinaison est affine et donc indépendante de O , nous avons

$$\pi(X) = \frac{rU - p(X)}{r - 1}.$$

De plus, $\pi(X) \neq p(X)$, donc $\pi(X) \in \mathcal{C} \setminus \{p(X)\}$, ce qui est impossible.

- 2) Si $r > 1$, alors puisque la droite $X\pi(X)$ est orthogonale à la droite $Up(X)$, on a

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{Xp(X)}|^2 &= |\overrightarrow{X\pi(X)}|^2 + |\overrightarrow{\pi(X)p(X)}|^2 \\ |\overrightarrow{XU}|^2 &= |\overrightarrow{X\pi(X)}|^2 + |\overrightarrow{\pi(X)U}|^2, \end{aligned}$$

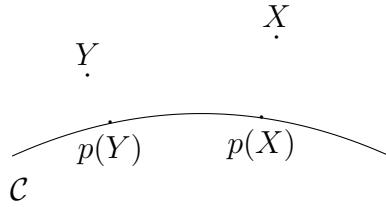
et on constate que $|\overrightarrow{\pi(X)p(X)}|^2 = r^2|\overrightarrow{\pi(X)U}|^2 > |\overrightarrow{\pi(X)U}|^2$. On obtient alors $|\overrightarrow{Xp(X)}|^2 > |\overrightarrow{XU}|^2$, ce qui est absurde car $p(X)$ est la projection de X sur \mathcal{C} .

□

Une autre propriété de la projection est que celle-ci est une application continue.

Proposition 2.2.10. La projection p sur un convexe fermé est une application continue. Plus précisément, on a

$$|p(X) - p(Y)| \leq |X - Y| \text{ pour tous } X \text{ et } Y \in \mathcal{A}.$$


 FIGURE 2.5 – Projection de X et Y sur \mathcal{C} .

Démonstration. Si X et Y sont tels que $p(X) = p(Y)$, alors l'inégalité annoncée est évidente. Sinon, on a $p(X) \neq p(Y)$ et on peut appliquer deux fois le lemme pour la droite $p(X)p(Y)$. On a alors

$$\begin{cases} p(X) \in [\pi(X), p(Y)] \\ p(Y) \in [\pi(Y), p(X)] \end{cases}$$

On peut alors écrire

$$\begin{cases} \overrightarrow{\pi(X)p(X)} = k \overrightarrow{p(X)p(Y)} & k \geq 0 \\ \overrightarrow{\pi(Y)p(Y)} = -l \overrightarrow{p(X)p(Y)} & l \geq 0 \end{cases}$$

Par la relation de Chasles, on obtient

$$\overrightarrow{\pi(X)\pi(Y)} = (1 + k + l) \overrightarrow{p(X)p(Y)}$$

avec $1 + k + l \geq 1$, ce qui permet de conclure que

$$|p(X) - p(Y)| \leq |\pi(X) - \pi(Y)| \leq |X - Y|,$$

où la dernière inégalité est une propriété des projections orthogonales. \square

Ici, nous commençons à entrer dans les propriétés qui nous intéressent. En effet, nous pouvons trouver un hyperplan contenant la projection d'un point quelconque X sur le convexe \mathcal{C} et dont le demi-espace associé contient \mathcal{C} .

Proposition 2.2.11. *Soit \mathcal{C} un convexe fermé. La projection $p(X)$ de $X \notin \mathcal{C}$ est l'unique point Z de \mathcal{C} tel que*

$$\langle \overrightarrow{ZX}, \overrightarrow{ZU} \rangle \leq 0 \quad \forall U \in \mathcal{C}.$$

Démonstration.

- 1) Montrons que si Z satisfait la condition de l'énoncé, alors Z est égal à $p(X)$. On a, pour tout U dans \mathcal{C} ,

$$|\overrightarrow{XU}|^2 = |\overrightarrow{XZ}|^2 + |\overrightarrow{ZU}|^2 - 2\langle \overrightarrow{XZ}, \overrightarrow{ZU} \rangle. \quad (2.1)$$

Par hypothèse, on a $|\overrightarrow{XU}|^2 \geq |\overrightarrow{XZ}|^2 \forall U \in \mathcal{C}$. Donc Z réalise la distance de X à \mathcal{C} , alors par la définition 2.2.5, nous avons que Z est égal à $p(X)$.

2) Supposons que l'on a pour $U_0 \in \mathcal{C}$,

$$\langle \overrightarrow{p(X)X}, \overrightarrow{p(X)U_0} \rangle > 0,$$

et montrons une contradiction. Si $\overrightarrow{p(X)U} = \lambda \overrightarrow{p(X)U_0}$ avec $\lambda \in [0, 1]$, alors $U \in \mathcal{C}$ et on doit avoir, par hypothèse, $|\overrightarrow{XU}|^2 \geq |\overrightarrow{Xp(X)}|^2$, c'est à dire

$$|\overrightarrow{p(X)U}|^2 - 2 \langle \overrightarrow{p(X)X}, \overrightarrow{p(X)U} \rangle \geq 0 \text{ par (2.1)}$$

ou encore

$$\lambda^2 |\overrightarrow{p(X)U_0}|^2 - 2\lambda \langle \overrightarrow{p(X)X}, \overrightarrow{p(X)U_0} \rangle \geq 0 \quad \forall \lambda \in [0, 1]. \quad (2.2)$$

Or, en posant $\lambda_0 = \frac{2\langle \overrightarrow{p(X)X}, \overrightarrow{p(X)U_0} \rangle}{|\overrightarrow{p(X)U_0}|} > 0$, on remarque que pour les $\lambda \in]0, \lambda_0[$, l'inéquation (2.2) est fausse. Ce qui est absurde car cette inégalité est vraie $\forall \lambda \in [0, 1]$. \square

Remarque 2.2.12. La projection de n'importe quel point $X \notin \mathcal{C}$ sur \mathcal{C} se trouve dans une face. En effet, la projection $p(X)$ de $X \notin \mathcal{C}$ appartient à un hyperplan \mathcal{H} de normale $n = \overrightarrow{p(X)X}$. Celui-ci est un hyperplan d'appui tel que $\mathcal{C} \subset \left\{ U : \langle n, \overrightarrow{p(X)U} \rangle \leq 0 \right\}$.

Corollaire 2.2.13. Soient \mathcal{C} un convexe fermé et $X, Y \notin \mathcal{C}$. Si $\overrightarrow{p(X)Y} = \lambda \overrightarrow{p(X)X}$ pour $\lambda > 0$, alors $p(X) = p(Y)$.

Démonstration. On va montrer que $\langle \overrightarrow{p(X)Y}, \overrightarrow{p(X)U} \rangle \leq 0$ pour tout $U \in \mathcal{C}$. Alors la proposition 2.2.11, l'unicité fournira $p(X) = p(Y)$. Par hypothèse, on a

$$\langle \overrightarrow{p(X)Y}, \overrightarrow{p(X)U} \rangle = \lambda \langle \overrightarrow{p(X)X}, \overrightarrow{p(X)U} \rangle.$$

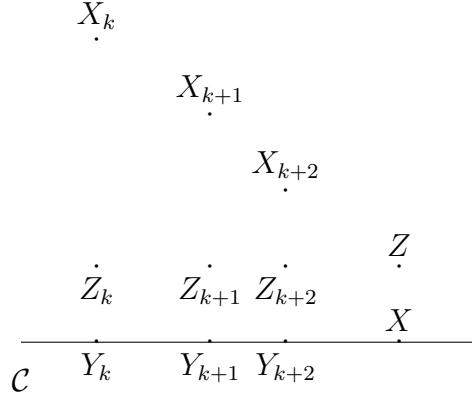
Puisque λ est strictement positif et en appliquant la proposition 2.2.11 à X , on obtient

$$\langle \overrightarrow{p(X)Y}, \overrightarrow{p(X)U} \rangle \leq 0.$$

\square

Montrons que tout point de la frontière est une projection d'un point Z n'appartenant pas au convexe. Ainsi, par la remarque 2.2.12, nous aurons que tout point de la frontière se trouve dans un face.

Théorème 2.2.14. Soit \mathcal{C} un convexe fermé, qu'on suppose d'intérieur non vide. Tout point X de $\text{bd}(\mathcal{C})$ est la projection sur \mathcal{C} d'un point $Z \notin \mathcal{C}$.



Démonstration. Puisque $X \in \text{bd}(\mathcal{C})$, il existe une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $X_k \rightarrow X$ et $X_k \notin \mathcal{C}$. Appelons Y_k le point $p(X_k)$. La suite Y_k converge vers X car $p(X) = X$ et p est une application continue. Posons

$$Z_k = Y_k + \frac{\overrightarrow{Y_k X_k}}{|\overrightarrow{Y_k X_k}|}.$$

Par les propositions précédentes, nous avons $p(Z_k) = Y_k$ et $Z_k \notin \mathcal{C}$. Le premier point résulte du corollaire 2.2.13. Ensuite pour montrer que Z_k n'appartient pas à \mathcal{C} , on procède par l'absurde. Si Z_k appartient à \mathcal{C} , alors $p(Z_k)$ est égal à Z_k mais aussi à Y_k . Par conséquent, selon la définition de Z_k , on a Y_k qui est égal à X_k . Cela implique que X_k appartient à \mathcal{C} ce qui est impossible.

De même, la suite Z_k est bornée. En effet, la suite Y_k converge, donc elle est bornée. Puisque la distance entre Y_k et Z_k est égale à 1 pour tout k , la suite Z_k est également bornée. Elle contient donc une sous-suite convergente $Z_{l(k)}$, qui converge vers Z . Alors

$$p(Z_{l(k)}) \rightarrow p(Z) \text{ et } p(Z_{l(k)}) = Y_{l(k)} \rightarrow X.$$

Par unicité de la limite, nous avons $p(Z) = X$. Puisque $d(Z_{l(k)}, \mathcal{C}) \rightarrow d(Z, \mathcal{C})$, on a $d(Z, \mathcal{C}) = 1$ car $|\overrightarrow{Z_k Y_k}| = 1$ pour tout k et $\lim_{k \rightarrow +\infty} |\overrightarrow{Z_k Y_k}| = |\overrightarrow{ZX}|$. Ainsi, Z n'appartient pas à \mathcal{C} . \square

Corollaire 2.2.15. Soit \mathcal{C} un convexe d'intérieur non vide. Tout point de $\text{bd}(\mathcal{C})$ est dans une face.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème qui nous intéresse.

Théorème 2.2.16. Si \mathcal{C} est un convexe et $X \in \text{bd}(\mathcal{C})$ alors il existe un hyperplan d'appui séparant \mathcal{C} et $\{X\}$. En d'autres termes, il existe un hyperplan d'appui de \mathcal{C} qui contient $\{X\}$.

Démonstration. On sait, par le théorème précédent, que tout point X de la frontière est la projection sur \mathcal{C} d'un point $Z \notin \mathcal{C}$. On sait également que l'hyperplan contenant $p(Z) = X$ et de normale $n = \overrightarrow{ZX}$ est un hyperplan d'appui de \mathcal{C} , ce qui termine la preuve. \square

2.3 Enveloppes convexes

L'enveloppe convexe d'un ensemble \mathcal{C} est l'ensemble des combinaisons convexes des éléments de \mathcal{C} . Elle est également un ensemble convexe. Nous allons voir que l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points est toujours fermée.

Proposition 2.3.1. *Pour tous points P_1, \dots, P_m , l'ensemble $\mathcal{C} = \text{Conv}(P_1, \dots, P_m)$ est fermé.*

Démonstration. Montrons que \mathcal{C} contient les limites de ses suites convergentes. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ une suite de points de \mathcal{C} convergeant vers X . Par définition, il existe pour tout n , des nombres $\lambda_{n,1}, \dots, \lambda_{n,m}$ tels que

$$X_n = \sum_{i=1}^m \lambda_{n,i} P_i, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_{n,i} = 1, \quad \lambda_{n,i} \geq 0.$$

Pour tout i , $(\lambda_{n,i})_{n \in \mathbb{N}_0}$ est une suite du compact $[0, 1]$ qui par conséquent contient une sous-suite convergente. Quitte à extraire m fois une sous-suite, il existe une sous-suite $k(n)$ telle que

$$(\lambda_{k(n),i}) \rightarrow \lambda_i \quad \forall i \leq m.$$

Alors $X_{k(n)} \rightarrow X_0 = \sum_{i=1}^m \lambda_i P_i \in \text{Conv}(P_1, \dots, P_m)$. Puisque toute sous-suite d'une suite convergente, converge vers la même limite, on a $X = X_0$. \square

Comme l'enveloppe convexe d'un ensemble \mathcal{C} peut être caractérisée par l'intersection de tous les convexes contenant \mathcal{C} , une définition similaire pourrait être donnée lorsque les convexes sont fermés.

Définition 2.3.2. *On définit $\text{Clconv}(\mathcal{C})$ comme l'intersection de tous les convexes fermés contenant \mathcal{C} .*

Cette notion ne sera pas utile pour le reste de notre étude des polyèdres réguliers. Nous la voyons malgré tout sans entrer dans les détails car elle se retrouve dans beaucoup de livres de convexité.

Proposition 2.3.3. *Tout convexe contenant \mathcal{C} contient $\text{Conv}(\mathcal{C})$ et tout convexe fermé contenant \mathcal{C} contient $\text{Clconv}(\mathcal{C})$.*

Démonstration. Par définition de l'enveloppe convexe d'un ensemble. \square

Proposition 2.3.4. *Si \mathcal{C} est borné, alors $\text{Conv}(\mathcal{C})$ et $\text{Clconv}(\mathcal{C})$ le sont aussi.*

Démonstration. Pour définition, \mathcal{C} est inclus dans une boule (fermée) \mathcal{B} . Donc par définition, puisque cette boule \mathcal{B} est convexe (et fermée), elle contient $\text{Conv}(\mathcal{C})$ et $\text{Clconv}(\mathcal{C})$. \square

Nous pouvons en déduire un corollaire. Pour un certain type d'ensemble \mathcal{C} , l'enveloppe convexe de \mathcal{C} sera compacte.

Corollaire 2.3.5. *Soient P_1, \dots, P_n des points, alors $\text{Conv}(P_1, \dots, P_n)$ est compact.*

Démonstration. En effet, l'ensemble $\{P_1, \dots, P_n\}$ est borné, nous pouvons appliquer la proposition 2.3.4. Nous avons alors que $\text{Conv}(P_1, \dots, P_n)$ est borné. De plus, par la proposition 2.3.1, l'ensemble $\text{Conv}(P_1, \dots, P_n)$ est fermé ce qui nous permet de conclure qu'il est compact. \square

En réalité, $\text{Clconv}(\mathcal{C})$ n'est pas un nouvel objet au vu de la proposition 2.3.4.

Proposition 2.3.6. *On a, pour tout \mathcal{C} , $\text{Clconv}(\mathcal{C}) = \overline{\text{Conv}(\mathcal{C})}$.*

Démonstration. Nous savons que $\text{Conv}(\mathcal{C})$ est convexe. Dès lors, par la proposition 2.1.8, $\text{Conv}(\mathcal{C})$ est un convexe fermé qui contient \mathcal{C} et donc contient $\text{Clconv}(\mathcal{C})$. Réciproquement, l'ensemble $\text{Clconv}(\mathcal{C})$ est fermé car c'est une intersection de fermés. C'est un convexe car c'est une intersection de convexes et il contient \mathcal{C} . Comme par définition, $\text{Conv}(\mathcal{C})$ est l'intersection de tous les convexes contenant \mathcal{C} , l'ensemble $\text{Clconv}(\mathcal{C})$ contient $\overline{\text{Conv}(\mathcal{C})}$. Puisque $\overline{\text{Conv}(\mathcal{C})}$ est le plus petit fermé contenant $\text{Conv}(\mathcal{C})$, $\text{Clconv}(\mathcal{C})$ contient $\overline{\text{Conv}(\mathcal{C})}$. \square

Comme pour l'enveloppe convexe d'un ensemble \mathcal{C} , nous pouvons caractériser $\text{Clconv}(\mathcal{C})$ comme une intersection de demi-espaces fermés.

Proposition 2.3.7. *Pour tout \mathcal{C} , l'ensemble $\text{Clconv}(\mathcal{C})$ est l'intersection des demi-espaces fermés contenant \mathcal{C} .*

Démonstration. Les demi-espaces fermés contenant \mathcal{C} sont des convexes fermés, ainsi ils contiennent $\text{Clconv}(\mathcal{C})$, leur intersection également. Montrons l'autre inclusion, par passage à la contraposée : si $X \notin \text{Clconv}(\mathcal{C})$, alors il existe un demi-espace fermé contenant $\text{Clconv}(\mathcal{C})$, qui ne contient pas X . On sait que le convexe compact $\{X\}$ ne rencontre pas $\text{Clconv}(\mathcal{C})$. Par le théorème d'Hahn-Banach 2.2.6, il existe un demi espace fermé contenant $\text{Clconv}(\mathcal{C})$ et pas $\{X\}$. \square

Passons maintenant au théorème de Carathéodory.

Lorsqu'on a une combinaison convexe obtenue à partir de l'enveloppe convexe d'un ensemble \mathcal{C} , le nombre de points qui permettent d'exprimer un point X en fonction de points de \mathcal{C} peut dépendre de X et n'est éventuellement pas borné : le théorème suivant précise que le nombre de points nécessaires est bien borné, indépendamment de X .

Théorème 2.3.8 (Théorème de Carathéodory). *Si \mathcal{C} est un convexe dans un espace affine de dimension d , tout point X appartenant à $\text{Conv}(\mathcal{C})$ peut s'exprimer comme une combinaison convexe*

$$X = \sum_{i=0}^d \lambda_i X_i, \quad X_i \in \mathcal{C}, \quad \sum_{i=0}^d \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0.$$

Démonstration. Soit $X \in \text{Conv}(\mathcal{C})$ et soit, parmi toutes les expressions possibles de X comme combinaison convexe des éléments de \mathcal{C} , une représentation contenant un nombre minimal de points de \mathcal{C} :

$$X = \sum_{i=0}^p \lambda_i X_i.$$

Supposons que $p \geq d+1$ et montrons une contradiction. Alors l'ensemble $\{X_0, \dots, X_p\}$ est affinement dépendant et il existe $\beta_i \quad 0 \leq i \leq p$, non tous nuls tels que

$$\sum_{j=0}^p \beta_j X_j = 0, \quad \sum_{j=0}^p \beta_j = 0.$$

Sans perte de généralité, supposons que $\beta_p > 0$, on écrit $X_p = -\sum_{j=0}^{p-1} \frac{\beta_j}{\beta_p} X_j$. Alors,

$$X = \sum_{i=0}^{p-1} \left(\lambda_i - \frac{\lambda_p \beta_i}{\beta_p} \right) X_i.$$

On a, $\sum_{i=0}^{p-1} \left(\lambda_i - \frac{\lambda_p \beta_i}{\beta_p} \right) = 1$ car $\sum_{i=0}^{p-1} \beta_i = -\beta_p$. Assurons nous également que $\lambda_i - \frac{\lambda_p \beta_i}{\beta_p} \geq 0$. Si $\beta_i = 0$, c'est évident. Si $\beta_i < 0$, alors $-\frac{\lambda_p \beta_i}{\beta_p} > 0$ et comme $\lambda_i \geq 0$, le coefficient $\lambda_i - \frac{\lambda_p \beta_i}{\beta_p}$ est positif. De même, si β_i est strictement positif, on a

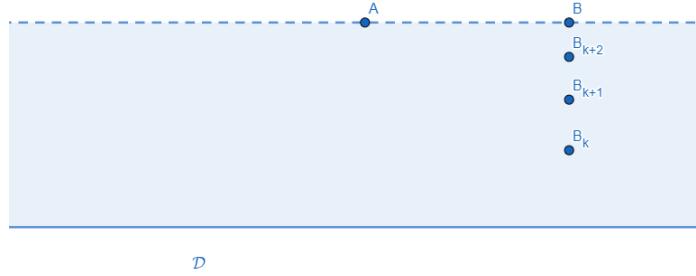
$$\lambda_i - \frac{\lambda_p \beta_i}{\beta_p} = \underbrace{\beta_i}_{>0} \left(\frac{\lambda_i}{\beta_i} - \frac{\lambda_p}{\beta_p} \right).$$

Il faut s'assurer que $\frac{\lambda_p}{\beta_p}$ soit le plus petit des nombres $\frac{\lambda_0}{\beta_0}, \dots, \frac{\lambda_p}{\beta_p}$ tels que $\beta_i \neq 0$. On peut toujours le supposer, quitte à renommer les points. On a donc exprimé X comme une combinaison convexe de $p-1$ points de \mathcal{C} , ce qui est contradictoire. \square

Nous pouvons dès à présent donner une généralisation de la proposition 2.3.1.

Proposition 2.3.9. *Si \mathcal{C} est compact, alors $\text{Conv}(\mathcal{C})$ est fermé.*

Remarque 2.3.10. *Si \mathcal{C} est l'union d'une droite et d'un point n'appartenant pas à cette droite, alors $\text{Conv}(\mathcal{C})$ n'est pas fermé. Cela montre que l'hypothèse de compacité ne peut pas être affaiblie dans cette direction.*


 FIGURE 2.6 – Enveloppe convexe de $\mathcal{D} \cup A$.

Sur cet exemple, $\text{Conv}(\mathcal{D} \cup A)$ n'est pas fermé. On peut trouver une suite $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge avec un point B se situant sur la droite en pointillée mais qui n'appartient pas à $\text{Conv}(\mathcal{D} \cup A)$.

Revenons à la démonstration de la proposition : si \mathcal{C} est compact, alors $\text{Conv}(\mathcal{C})$ est fermé.

Démonstration. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de $\text{Conv}(\mathcal{C})$ qui converge vers un point X . Montrons que $X \in \text{Conv}(\mathcal{C})$. Pour tout n , il existe $\lambda_{n,i}$ et $X_{n,i}$ ($0 \leq i \leq d$) tels que $X_n = \sum_{i=0}^d \lambda_{n,i} X_{n,i}$, où $0 \leq \lambda_{n,i} \leq 1$ et $X_{n,i} \in \mathcal{C}$. Pour tout n , l'élément $v_n = (\lambda_{n,0}, \dots, \lambda_{n,d}, X_{n,0}, \dots, X_{n,d})$ appartient à $[0, 1]^{d+1} \times \mathcal{C}^{d+1}$, qui est compact. Alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contient une sous-suite convergente $v_{k(n)} = (\lambda_{k(n),0}, \dots, \lambda_{k(n),d}, X_{k(n),0}, \dots, X_{k(n),d})$ qui converge vers $(\lambda_{(0)}, \dots, \lambda_{(d)}, X_{(0)}, \dots, X_{(d)})$. La sous-suite $X_{k(n)}$ converge vers $\sum_{i=0}^d \lambda_{(i)} X_{(i)} \in \text{Conv}(\mathcal{C})$. Comme $X_{k(n)}$ converge également vers X , on a

$$X = \sum_{i=0}^d \lambda_{(i)} X_{(i)} \in \text{Conv}(\mathcal{C}).$$

On a montré que $\text{Conv}(\mathcal{C})$ est fermé. □

Nous pouvons là aussi fournir un corollaire qui généralise le corollaire 2.3.5.

Corollaire 2.3.11. Si \mathcal{C} est un compact, alors $\text{Conv}(\mathcal{C})$ est compact.

Nous allons démontrer une propriété importante sur les hyperplans et faces de ce chapitre. D'ailleurs, nous l'avons déjà rencontrée dans la section sur le cube. En effet, lorsque nous prenions un point ayant pour coordonnées $(x_{1,0} + t\delta_{1,i}, x_{2,0} + t\delta_{2,i}, x_{3,0} + t\delta_{3,i})$, la fonction F évaluée en ce point changeait de signe lorsque t variait. Cela aboutissait à une absurdité car tout ce segment était inclus dans le plan d'appui et dans le convexe. En voici la généralisation.

Proposition 2.3.12. Soient \mathcal{C} un ensemble convexe, $P, Q, R \in \mathcal{C}$ où $Q \neq R$, tels que P appartient au segment $]Q, R[$ et \mathcal{H} un hyperplan d'appui. Si P est un point de l'hyperplan d'appui \mathcal{H} , alors le segment $[Q, R]$ est inclus dans cet hyperplan.

Démonstration. Soient $P = \lambda Q + (1 - \lambda)R$, $\lambda \in]0, 1[$. L'hyperplan d'appui \mathcal{H} de normale n est défini comme suit

$$\mathcal{H} = \{X \mid \langle n, \overrightarrow{OX} \rangle = a\}.$$

On peut, par définition d'un hyperplan d'appui, supposer que

$$\mathcal{C} \subset \{X : \langle n, \overrightarrow{OX} \rangle \leq a\}.$$

On a,

$$\lambda \langle n, \overrightarrow{OQ} \rangle + (1 - \lambda) \langle n, \overrightarrow{OR} \rangle = a.$$

Comme $Q, R \in \mathcal{C}$, on sait que $\langle n, \overrightarrow{OQ} \rangle \leq a$ et $\langle n, \overrightarrow{OR} \rangle \leq a$. Montrons que le cas $\langle n, \overrightarrow{OQ} \rangle < a$ abouti à une absurdité. Par hypothèse, λ et $1 - \lambda$ sont strictement positifs, nous pouvons en déduire que

$$\begin{aligned} \lambda \langle n, \overrightarrow{OQ} \rangle + (1 - \lambda) \langle n, \overrightarrow{OR} \rangle &< \lambda a + (1 - \lambda)a \\ &< a. \end{aligned}$$

Nous avons donc une absurdité car nous devrions avoir l'égalité. Ainsi, nous avons $\langle n, \overrightarrow{OQ} \rangle = a$, ce qui signifie que $Q \in \mathcal{H}$. Par le même raisonnement, on obtient que $R \in \mathcal{H}$. Comme \mathcal{H} est un hyperplan, on sait qu'il contient toutes les combinaisons affines de ses points, en particulier toutes les combinaisons convexes de ses points. On a alors $[Q, R] \subset \mathcal{H}$. \square

Nous aurions pu démontrer cette proposition dans la section Hyperplans, mais ici nous en verrons l'utilité pour démontrer quelques propositions concernant les faces. Cette proposition est d'ailleurs utilisée comme définition d'une face dans le livre de Bronsted [3]. Voici quelques propriétés sur les faces. Celles-ci vont nous donner des outils pour montrer l'existence et l'unicité des polyèdres réguliers.

Proposition 2.3.13. *Soit \mathcal{C} un ensemble convexe. Aucune face propre ne rencontre l'intérieur relatif de \mathcal{C} .*

Démonstration. Procédons par l'absurde. Soit \mathcal{F} une face propre telle que cette face rencontre $\text{ri}(\mathcal{C})$ en au moins un point, notons le X . Alors par la proposition 2.1.20, pour tout Y appartenant à \mathcal{C} , il existe $Z \in \mathcal{C}$ tel que $X \in]Y, Z[$. Comme \mathcal{F} est une face, il existe un hyperplan d'appui \mathcal{H} de \mathcal{C} tel que $\mathcal{F} = \mathcal{H} \cap \mathcal{C}$. Par la proposition 2.3.12, on a $[Y, Z] \subset \mathcal{H}$. Comme ceci est vrai pour tout $Y \in \mathcal{C}$, on a $\mathcal{C} \subset \mathcal{H}$. Donc \mathcal{F} est égal à \mathcal{C} car $\mathcal{F} = \mathcal{C} \cap \mathcal{H}$, ce qui est absurde car \mathcal{F} est une face propre. \square

Proposition 2.3.14. *Soient \mathcal{C} un convexe fermé et \mathcal{F} une face de \mathcal{C} . Si $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ est un convexe fermé, alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{C}'$ est une face de \mathcal{C}' .*

Démonstration. Par définition, il existe un hyperplan d'appui \mathcal{H} tel que $\mathcal{F} = \mathcal{H} \cap \mathcal{C}$. De plus, $\mathcal{F} \cap \mathcal{C}' = \mathcal{H} \cap \mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \mathcal{H} \cap \mathcal{C}'$. Comme $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$, \mathcal{H} est un hyperplan d'appui de \mathcal{C}' . Dans ce cas $\mathcal{F} \cap \mathcal{C}'$ est une face de \mathcal{C}' . Pour que la preuve soit complète, il faut regarder le cas où $\mathcal{F} \cap \mathcal{C}' = \emptyset$, on a également une face de \mathcal{C}' .

□

Pour les prochaines propositions, nous utiliserons les points extrêmes d'un convexe. Rappelons qu'un point de \mathcal{C} est extrême s'il n'est dans l'intérieur relatif d'aucun segment de \mathcal{C} .

Proposition 2.3.15. *Soient \mathcal{C} un convexe fermé, \mathcal{F} une face et $X \in \mathcal{F}$. Alors X est un point extrême de \mathcal{C} si et seulement si c'est un point extrême de \mathcal{F} . En d'autres termes, on a*

$$\text{Ext}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{F} = \text{Ext}(\mathcal{F}).$$

Démonstration. L'inclusion $\text{Ext}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{F} \subset \text{Ext}(\mathcal{F})$ découle de la définition. En effet, si $X \in \text{Ext}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{F}$, montrons que $X \in \text{Ext}(\mathcal{F})$. Si $Y, Z \in \mathcal{F}$ sont tels que $X = (1 - \lambda)Y + \lambda Z$ avec $\lambda \in]0, 1[$, alors Y et Z sont également dans \mathcal{C} car \mathcal{F} est inclus dans \mathcal{C} . Puisque X est un point extrême dans \mathcal{C} , on a nécessairement $Y = Z$.

Passons à l'autre inclusion. Soit $X \in \text{Ext}(\mathcal{F})$. Comme $\text{Ext}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$, le point X appartient à \mathcal{F} . Il reste à montrer que X est un point extrême dans \mathcal{C} . Soient $Y, Z \in \mathcal{C}$ et $\lambda \in]0, 1[$ tels que $X = (1 - \lambda)Y + \lambda Z$. On sait que $\mathcal{F} = \mathcal{H} \cap \mathcal{C}$ et donc $X \in \mathcal{H}$. Par la proposition 2.3.12, le segment $[Y, Z]$ est inclus dans \mathcal{H} . On sait que $Y, Z \in \mathcal{C}$, alors le segment $[Y, Z]$ est inclus dans $\mathcal{H} \cap \mathcal{C} = \mathcal{F}$. Comme X appartient à $\text{Ext}(\mathcal{F})$ et que Y et Z appartiennent à \mathcal{F} , on a $Y = Z$. □

Nous pouvons maintenant caractériser un ensemble convexe \mathcal{C} à partir de l'enveloppe convexe de ses points extrêmes.

Proposition 2.3.16. *Soit \mathcal{C} un convexe compact. Alors \mathcal{C} est l'enveloppe convexe de ses points extrêmes. En d'autres termes, $\mathcal{C} = \text{Conv}(\text{Ext}(\mathcal{C}))$.*

Démonstration. On montre les deux inclusions. Puisque \mathcal{C} est convexe et puisque $\text{Ext}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$ par définition, $\text{Conv}(\text{Ext}(\mathcal{C})) \subset \mathcal{C}$.

L'autre inclusion se fait par récurrence sur la dimension de \mathcal{C} (c'est à dire sur la dimension de $\text{Aff}(\mathcal{C})$). Si \mathcal{C} est vide ou s'il est réduit à un singleton, le résultat est direct. Si $\dim(\mathcal{C}) = 1$, alors \mathcal{C} est un convexe compact d'une droite. Par la proposition A.0.2, il s'écrit $[X, Y]$. Les points X et Y sont extrêmes par définition d'un segment et $\mathcal{C} = \text{Conv}(\{X, Y\})$. Supposons que la propriété soit vraie pour tout convexe compact de dimension $d - 1$ et montrons la pour un convexe de dimension d ($d \geq 2$). Soit $X \in \mathcal{C}$ et montrons qu'il est dans $\text{Conv}(\text{Ext}(\mathcal{C}))$. Si X est extrême, il n'y a rien à démontrer. Sinon, X est à l'intérieur relatif d'un segment $[U, V]$ où $U, V \in \mathcal{C}$.

En effet, comme X n'est pas extrême, il existe $U, V \in \mathcal{C}$ tels que $X = \lambda U + (1 - \lambda)V$ avec $\lambda \in]0, 1[$ et $U \neq V$. Si d est la droite définie par U et V , l'ensemble $\mathcal{C} \cap d$ est un convexe

compact dans la droite d . Par la proposition A.0.2, il s'écrit $[Y, Z]$ avec $Y, Z \in \text{bd}(\mathcal{C})$ sinon $Y \in \text{ri}(\mathcal{C})$ et par la proposition 2.1.20, il existe un point Y' de \mathcal{C} tel que $Y \in]Y', Z[$.

Comme Y et Z appartiennent à $\text{bd}(\mathcal{C})$, par la proposition 2.2.16, le point Y appartient à un hyperplan d'appui \mathcal{H} de \mathcal{C} et le point Z appartient à un hyperplan d'appui \mathcal{H}' de \mathcal{C} . Par conséquent, il existe des faces \mathcal{F}_Y et \mathcal{F}_Z de \mathcal{C} contenant Y et Z respectivement. Comme la dimension de \mathcal{F}_Y et \mathcal{F}_Z est plus petite que $\dim(\mathcal{C})$, par l'hypothèse de récurrence, il existe des points extrêmes Y_1, \dots, Y_k de \mathcal{F}_Y et Z_1, \dots, Z_l de \mathcal{F}_Z tels que Y soit une combinaison convexe de Y_1, \dots, Y_k et Z une combinaison convexe de Z_1, \dots, Z_l . Alors X est une combinaison convexe de points extrêmes de \mathcal{C} car X est une combinaison convexe de Y et Z et les points extrêmes des faces $\mathcal{F}_Y, \mathcal{F}_Z$ sont des points extrêmes de \mathcal{C} par la proposition 2.3.15. \square

Remarque 2.3.17. Ces quelques propositions sont très importantes pour chercher les faces des convexes qui s'écrivent comme une enveloppe convexe d'un nombre fini de points.

Proposition 2.3.18. Soit $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^d$ un compact convexe, si $\mathcal{C} = \text{Conv}(\mathcal{D})$ alors $\text{Ext}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{D}$.

Démonstration. Montrons que si $X \notin \mathcal{D}$, alors $X \notin \text{Ext}(\mathcal{C})$. Par définition si $X \notin \mathcal{C}$, alors $X \notin \text{Ext}(\mathcal{C})$. Si $X \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{D}$, alors on peut écrire X comme une combinaison convexe de points de \mathcal{D} :

$$X = \sum_{i=1}^n \lambda_i D_i, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1.$$

Un des coefficients doit appartenir à $]0, 1[$, sinon ils sont tous égaux à 0 ou à 1 et comme leur somme vaut 1, la combinaison est réduite à un terme : $X = D_i$ ce qui est contraire à l'hypothèse. Sans perte de généralité, on suppose que $0 < \lambda_1 < 1$, on écrit

$$X = \lambda_1 D_1 + (1 - \lambda_1) \sum_{i=2}^n \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_1} D_i.$$

En posant $B = \sum_{i=2}^n \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_1} D_i$, on a $B \neq D_1$. Sinon on aurait $X = D_1$ ce qui est absurde. On a $B \in \mathcal{C}$ et X est à l'intérieur du segment $[D_1, B]$, ce qui montre que X n'est pas un point extrême dans \mathcal{C} . \square

Passons maintenant à l'intersection de faces. Le résultat suivant est valable pour tous les convexes.

Proposition 2.3.19. Si $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r$ sont des faces d'un convexe fermé \mathcal{C} , alors $\mathcal{F} = \bigcap_{i=1}^r \mathcal{F}_i$ est une face de \mathcal{C} .

Démonstration. Si \mathcal{F} est vide, c'est une face par définition. Comme toutes les faces sont incluses dans \mathcal{C} , on peut supposer qu'elles sont propres. Soient $X_0 \in \mathcal{F}$ et pour tout $i = 1, \dots, r$, il existe un hyperplan d'appui \mathcal{H}_i tel que $\mathcal{H}_i \cap \mathcal{C} = \mathcal{F}_i$. Pour fixer les idées, on a

$$\mathcal{H}_i \equiv \left\langle n_i, \overrightarrow{X_0 X} \right\rangle = 0 \text{ et } \mathcal{C} \subset \{X : \left\langle n_i, \overrightarrow{X_0 X} \right\rangle \leq 0\}.$$

Alors si $n = \sum_{i=1}^r n_i$ et $\mathcal{H} \equiv \langle n, \overrightarrow{X_0 X} \rangle = 0$, l'ensemble \mathcal{H} est un hyperplan d'appui de \mathcal{C} tel que $\mathcal{H} \cap \mathcal{C} = \mathcal{F}$. En effet, on a pour tout $X \in \mathcal{C}$,

$$\langle n, \overrightarrow{X_0 X} \rangle = \sum_{i=1}^r \langle n_i, \overrightarrow{X_0 X} \rangle \leq 0.$$

Donc on a un demi-espace défini par \mathcal{H} qui contient \mathcal{C} . On obtient directement que $X_0 \in \mathcal{H}$, donc \mathcal{H} est un hyperplan d'appui de \mathcal{C} . Montrons que $\mathcal{F} = \mathcal{H} \cap \mathcal{C}$.

Soit $X \in \mathcal{F}$, alors $X \in \mathcal{C}$ et $\langle n_i, \overrightarrow{X_0 X} \rangle = 0$ pour tout $i = 1, \dots, r$. Par conséquent, $\langle n, \overrightarrow{X_0 X} \rangle$ est égal à 0 et $X \in \mathcal{H}$. Ainsi, \mathcal{F} est inclus dans $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}$.

Montrons l'autre inclusion. Soit X appartenant à $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}$, alors on a

$$\sum_{i=1}^r \langle n_i, \overrightarrow{X_0 X} \rangle = 0.$$

Mais puisque $X \in \mathcal{C}$, on a $\langle n_i, \overrightarrow{X_0 X} \rangle \leq 0$ pour tout i . Les deux conditions étant satisfaites simultanément, on a bien $\langle n_i, \overrightarrow{X_0 X} \rangle = 0$ pour tout i , donc $X \in \mathcal{F}$. Cela implique que $\mathcal{F} = \mathcal{H} \cap \mathcal{C}$, mais aussi que \mathcal{H} est bien un hyperplan ($\sum_{i=1}^r n_i \neq 0$) car sinon $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}$ serait égal à \mathcal{C} et on a supposé \mathcal{F} propre. \square

2.4 Ensembles polyédraux

Les solides de Platon que nous étudions ne sont pas "ronds". Il est donc naturel de tenter de restreindre la famille de convexes que nous considérons. Nous savons déjà par la proposition 2.2.7 que tout convexe fermé est l'intersection d'une famille de demi-espaces (fermés). Nous renforçons cette propriété et obtenons la définition suivante.

Définition 2.4.1. *Un ensemble \mathcal{C} est appelé ensemble polyédral si \mathcal{C} est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés.*

On notera dans cette section un point $X_0 \in \mathcal{A}$ et pour $i = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_i &= \{X \mid \langle \overrightarrow{X_0 X}, n_i \rangle = \alpha_i\}, \\ \mathcal{D}_i &= \{X \mid \langle \overrightarrow{X_0 X}, n_i \rangle \geq \alpha_i\}, \\ \mathcal{C} &= \bigcap_{i=1}^n \mathcal{D}_i.\end{aligned}$$

Quitte à remplacer \mathcal{A} par $\text{Aff}(\mathcal{C})$, on peut supposer que $\dim(\mathcal{C}) = \dim(\mathcal{A}) = d$. Alors l'intérieur de \mathcal{C} est non vide par la proposition 2.1.17. Nous allons nous intéresser aux faces d'un tel convexe, en commençant par celles qui sont en quelque sorte les plus grandes.

Définition 2.4.2. *Soit \mathcal{C} un convexe. Une facette \mathcal{F} de \mathcal{C} est une face de dimension $\dim(\mathcal{C}) - 1$.*

Bien sûr, un convexe \mathcal{C} peut s'écrire de plusieurs façons comme intersection de demi-espaces. Par exemple le carré déterminé par les inéquations

$$-1 \leq x_1 \leq 1 \text{ et } -1 \leq x_2 \leq 1$$

peut aussi être décrit avec une inéquation supplémentaire (redondante) : $x_1 + x_2 \leq 2$. Il est donc naturel de définir une représentation de \mathcal{C} comme intersection de demi-espaces qui soit minimale (sans demi-espaces redondants).

Définition 2.4.3. *L'ensemble $\mathcal{C} = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{D}_i$ est minimal (non redondant) si l'ensemble $\mathcal{C}_i = \bigcap_{j \neq i} \mathcal{D}_j$ est différent de \mathcal{C} pour tout i dans $\{1, \dots, n\}$.*

Nous allons démontrer que la forme des facettes d'un l'ensemble polyédral, si cet ensemble est minimal, est exactement l'intersection de \mathcal{C} avec un hyperplan associé à un des demi-espaces de la représentation minimale.

Proposition 2.4.4. *Si $\mathcal{C} = \bigcap_{i=j}^n \mathcal{D}_j$ est une représentation minimale de \mathcal{C} , alors $\mathcal{F}_j = \mathcal{H}_i \cap \mathcal{C}$ est une facette de \mathcal{C} pour tout $i \leq n$.*

Démonstration. On peut tout d'abord remarquer que par définition \mathcal{C} est inclus dans le demi-espace déterminé par \mathcal{H}_i . Il reste à montrer que $\mathcal{H}_i \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$, nous saurons alors que \mathcal{F}_i est une face et il faudra démontrer qu'elle est de dimension $d - 1$. La condition de minimalité est équivalente au fait qu'il existe $X_i \in \mathcal{C}_i \setminus \mathcal{C}$, c'est à dire X_i qui vérifie

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{X_0 X_i}, n_j \right\rangle &\geq \alpha_j \text{ pour } j \neq i, \\ \left\langle \overrightarrow{X_0 X_i}, n_i \right\rangle &< \alpha_i. \end{aligned}$$

Par la proposition 2.1.17, on sait que $\text{int}(\mathcal{C}) \neq \emptyset$. Il existe $Y \in \text{int}(\mathcal{C})$, c'est à dire tel que $\left\langle \overrightarrow{X_0 Y}, n_j \right\rangle > \alpha_j$ pour tout j car $\text{int}(\bigcap_j \mathcal{D}_j) = \bigcap_j \text{int}(\mathcal{D}_j)$. Alors le segment $[X_i, Y]$ est inclus dans \mathcal{C}_i . Mais on a aussi, pour tout $\lambda \in]0, 1[$,

$$\begin{aligned} \left\langle (1-\lambda) \overrightarrow{X_0 X_i} + \lambda \overrightarrow{X_0 Y}, n_j \right\rangle &= (1-\lambda) \left\langle \overrightarrow{X_0 X_i}, n_j \right\rangle + \lambda \left\langle \overrightarrow{X_0 Y}, n_j \right\rangle \\ &> \alpha_j \text{ pour } j \neq i. \end{aligned}$$

Donc l'intérieur relatif du segment $[X_i, Y]$ est inclus dans $\text{int}(\mathcal{C}_i)$. Cet intérieur relatif coupe \mathcal{H}_i en un point X'_i car en X_i , on a $\left\langle \overrightarrow{X_0 X_i}, n_i \right\rangle < \alpha_i$ et en Y , on a $\left\langle \overrightarrow{X_0 Y}, n_i \right\rangle > \alpha_i$. Par continuité du produit scalaire, il existe un point X'_i tel que $\left\langle \overrightarrow{X_0 X'_i}, n_i \right\rangle = \alpha_i$. Alors X'_i appartient à $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{D}_i = \mathcal{C}$ et donc $\mathcal{H}_i \cap \mathcal{C}$ est non vide. Par conséquent, \mathcal{H}_i est un hyperplan d'appui.

Montrons que la dimension de \mathcal{F}_i est $d - 1$. Comme $X'_i \in \text{int}(\mathcal{C}_i)$, il existe une boule $\mathcal{B}(X'_i, \epsilon)$ centrée sur X'_i et de rayon $\epsilon > 0$ telle que $\mathcal{B}(X'_i, \epsilon) \subset \text{int}(\mathcal{C}_i)$. Alors, on a

$$\mathcal{B}(X'_i, \epsilon) \cap \mathcal{H}_i \subset \mathcal{C}_i \cap \mathcal{H}_i \subset \mathcal{C} \cap \mathcal{H}_i = \mathcal{F}_i$$

et donc l'intérieur de \mathcal{F}_i est non vide dans \mathcal{H}_i (pour la topologie induite), donc $\dim(\mathcal{F}_i) = \dim(\mathcal{H}_i) = d - 1$. \square

Il nous manque certains outils pour démontrer que toutes les facettes sont de cette forme là. Nous y reviendrons plus tard. Nous avions vu dans la section précédente que tout point de la frontière était dans une face. Nous élargissons cette notion en caractérisant la frontière d'un ensemble polyédral.

Proposition 2.4.5. *Si \mathcal{C} est un ensemble polyédral et si $\cap_{i=1}^n \mathcal{D}_i$ est une représentation minimale de \mathcal{C} , alors on a*

$$\text{bd}(\mathcal{C}) = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{F}_i,$$

où $\mathcal{F}_i = \mathcal{H}_i \cap \mathcal{C}$, $i \leq n$.

Démonstration. Toutes les facettes de \mathcal{C} sont incluse dans $\text{bd}(\mathcal{C})$ car aucune face ne peut être dans l'intérieur relatif (et donc ici l'intérieur) de \mathcal{C} . Si $X \in \text{bd}(\mathcal{C}) = \mathcal{C} \setminus \text{int}(\mathcal{C})$, alors il existe un i tel que

$$\left\langle \overrightarrow{X_0 X}, n_i \right\rangle = \alpha_i,$$

sinon $X \in \bigcap_{i=1}^n \{X : \left\langle \overrightarrow{X_0 X}, n_i \right\rangle > \alpha_i\}$ et $X \in \text{int}(\mathcal{C})$. Donc $X \in \mathcal{H}_i \cap \mathcal{C} = \mathcal{F}_i$. \square

Dans la littérature, il y a une ambiguïté dans la définition des facettes : faces de dimension $d - 1$ ou faces maximales par inclusion. Nous allons élucider le lien entre ces propriétés, mais nous aurons besoin d'un résultat intermédiaire assez naturel sur les faces d'un convexe.

Proposition 2.4.6. *Si deux faces d'un ensemble \mathcal{C} convexe \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 sont telles que $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ et $\dim(\mathcal{F}_1) = \dim(\mathcal{F}_2)$ alors $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$.*

Démonstration. Si \mathcal{F}_1 est vide, alors \mathcal{F}_2 l'est également car $\dim(\mathcal{F}_1) = \dim(\mathcal{F}_2)$. Sinon, par définition, il existe des hyperplans \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 tels que $\mathcal{F}_1 = \mathcal{C} \cap \mathcal{H}_1$ et $\mathcal{F}_2 = \mathcal{C} \cap \mathcal{H}_2$. On a $\langle \mathcal{F}_1 \rangle_a \subset \langle \mathcal{F}_2 \rangle_a$, mais ces variétés affines ayant la même dimension et étant dans une relation d'inclusion, sont égales. Alors, comme l'enveloppe affine de \mathcal{F}_i est incluse dans toute variété affine contenant \mathcal{F}_i , on a

$$\langle \mathcal{F}_1 \rangle_a = \langle \mathcal{F}_2 \rangle_a \subset \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2.$$

Donc $\mathcal{F}_2 \subset \langle \mathcal{F}_2 \rangle_a \subset \mathcal{H}_1$ et finalement $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{C} = \mathcal{F}_1$. \square

Nous allons maintenant établir la correspondance entre les deux définitions d'une facette.

Corollaire 2.4.7. *Soit $\dim(\mathcal{C}) = d$, toute face \mathcal{F} de dimension $d - 1$ est maximale dans l'ensemble des faces propres de \mathcal{C} .*

Démonstration. Si \mathcal{F} est inclus dans une face propre \mathcal{F}' , nous avons deux cas possibles. Soit $\dim(\mathcal{F}) = \dim(\mathcal{F}')$ et dans ce cas, \mathcal{F} est égal à \mathcal{F}' par la proposition 2.4.6. Sinon, $\dim(\mathcal{F}') > \dim(\mathcal{F})$ et dans ce cas, $\dim(\mathcal{F}') = \dim(\mathcal{C})$, donc $\mathcal{F}' = \mathcal{C}$ toujours par la proposition 2.4.6. On obtient alors une absurdité car \mathcal{F}' est une face propre. \square

Remarque 2.4.8. En général, la réciproque est fausse. Par exemple, dans un espace de dimension 2, le disque est un convexe de dimension 2 et ces faces maximales sont des singletons.

Par contre, la réciproque est vraie dans le cas des ensembles polyédraux. Nous y reviendrons plus tard lorsque nous aurons les outils adéquats.

Proposition 2.4.9. Si \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 sont deux faces telles que $\mathcal{F}_1 \cap \text{ri}(\mathcal{F}_2) \neq \emptyset$ alors $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$.

Démonstration. Soit $X_0 \in \mathcal{F}_1 \cap \text{ri}(\mathcal{F}_2)$ et $X \in \mathcal{F}_2$. Par la proposition 2.1.20, il existe un point Z appartenant à \mathcal{F}_2 , distinct de X , tel que X_0 appartient à $]X, Z[$. Si \mathcal{H}_1 est l'hyperplan d'appui tel quel $\mathcal{F}_1 = \mathcal{C} \cap \mathcal{H}_1$, alors $X_0 \in \mathcal{H}_1$. Par la proposition 2.3.12, le segment $[X, Z]$ est inclus dans $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{C} = \mathcal{F}_1$. Étant donné que c'est vrai pour tout $X \in \mathcal{F}_2$, nous avons $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$. \square

Nous avons maintenant une forme générale pour les facettes d'un ensemble polyédral minimal.

Proposition 2.4.10. Soit \mathcal{C} un ensemble polyédral non vide où $\mathcal{C} = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{D}_i$ est une représentation minimale. Les facettes de \mathcal{C} sont exactement les ensembles $\mathcal{F}_i = \mathcal{C} \cap \mathcal{H}_i$.

Démonstration. Si \mathcal{C} est égal à \emptyset ou est de dimension 1, il n'y a rien à montrer. Nous supposons donc $\dim(\mathcal{C}) = d > 1$. Nous savons que les ensembles $\mathcal{C} \cap \mathcal{H}_i$ sont des facettes de \mathcal{C} . Il reste à montrer qu'il n'y en a pas d'autres. Soit \mathcal{F} une facette de \mathcal{C} . On sait que $\mathcal{F} \subset \text{bd}(\mathcal{C}) = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{F}_i$, sinon \mathcal{F} renconterait l'intérieur de \mathcal{C} , et c'est absurde car aucune face ne rencontre l'intérieur (relatif) de \mathcal{C} . Comme $\text{ri}(\mathcal{F})$ est non vide et est inclus dans \mathcal{F} , il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\text{ri}(\mathcal{F}) \cap \mathcal{F}_i \neq \emptyset$. Par la proposition 2.4.9, on a $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_i$. Par définition, une facette est de dimension $d - 1$, cela implique que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_i$ par la proposition 2.4.6. \square

En appliquant la même démonstration, hormis la conclusion, nous arrivons au résultat suivant.

Proposition 2.4.11. Toute face est incluse dans une facette \mathcal{F}_i .

Nous avions laissé en suspens la réciproque de la proposition suivante : Toute face de dimension $d - 1$ est maximale dans l'ensemble des faces propres de \mathcal{C} . Nous pouvons, grâce aux deux propositions précédentes, établir une correspondance entre une face de dimension $d - 1$ et la maximalité de cette face.

Proposition 2.4.12. Tout face maximale dans l'ensemble des faces propres de \mathcal{C} est de dimension $d - 1$.

Démonstration. On procède par l'absurde, on suppose que la face \mathcal{F} maximale est de dimension strictement inférieure à $d - 1$. Alors, par la proposition précédente, il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_i$. Par la définition de la maximalité, on a alors que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_i$ ce qui est absurde car les faces ont des dimensions différentes. \square

Nous avons maintenant deux manières équivalentes de voir les facettes : soit comme des faces de dimension $d - 1$, soit comme des faces maximales dans l'ensemble des faces propres de \mathcal{C} . Nous sommes maintenant en position de décrire toutes les faces des ensembles polyédraux.

Montrons maintenant que toute facette peut être caractérisée par une intersection finie de demi-espaces fermés.

Proposition 2.4.13. *Toute facette \mathcal{F}_i d'un ensemble polyédral est un ensemble polyédral.*

Cette preuve va être séparée en deux cas. Nous regarderons l'ensemble \mathcal{F}_i dans \mathcal{C} et ensuite dans \mathcal{H}_i . Dans les deux cas, cet ensemble est bien une intersection de demi-espaces de $\text{Aff}(\mathcal{C})$ ou de \mathcal{H}_i .

Démonstration. Dans $\text{Aff}(\mathcal{C})$, toute facette s'écrit $\mathcal{F}_i = \mathcal{C} \cap \mathcal{H}_i$. Étant donné que \mathcal{H}_i est une intersection de deux demi-espaces fermés de $\text{Aff}(\mathcal{C})$, nous avons bien que \mathcal{F}_i est une intersection de demi-espaces fermés.

Passons au deuxième cas. On doit montrer que \mathcal{F}_i (dans \mathcal{H}_i) est une intersection de demi-espaces fermés de \mathcal{H}_i . On a bien sûr,

$$\mathcal{F}_i = \mathcal{H}_i \bigcap \bigcap_{j \neq i} \mathcal{D}_j = \bigcap_{j \neq i} (\mathcal{H}_i \cap \mathcal{D}_j).$$

Il suffit de montrer que $\mathcal{H}_i \cap \mathcal{D}_j$ est soit \mathcal{H}_i , soit un demi-espace de \mathcal{H}_i , nous le démontrons dans le lemme suivant qui complétera alors la preuve. \square

Lemme 2.4.14. *Soient \mathcal{H} un hyperplan et \mathcal{D}' un demi-espace déterminé par un hyperplan \mathcal{H}' . Alors $\mathcal{H} \cap \mathcal{D}'$ est soit vide, soit égal à \mathcal{H} , soit un demi-espace de \mathcal{H} . Les deux premiers cas arrivent seulement si \mathcal{H} et \mathcal{H}' sont parallèles.*

Démonstration. Notons n et n' des normales à \mathcal{H} et \mathcal{H}' respectivement. Si n et n' sont linéairement indépendants alors $\mathcal{H} \cap \mathcal{H}'$ est une variété affine de dimension $n - 2$. En effet, lorsqu'on a deux vecteurs linéairement indépendants, cela entraîne un système d'équation de rang 2 et alors le sous-espace vectoriel est de dimension $n - 2$. Cette variété affine est incluse dans \mathcal{H}' et dans \mathcal{H} . En d'autres termes, c'est un hyperplan \mathcal{H}'' de \mathcal{H} .

En choisissant $X_0 \in \mathcal{H} \cap \mathcal{H}'$, nous pouvons écrire $\mathcal{H}' = \{X \in \mathcal{A} : \langle \overrightarrow{X_0 X}, n' \rangle = 0\}$ et supposer que \mathcal{D}' le demi-espace associé s'écrit

$$\mathcal{D}' = \{X \in \mathcal{A} : \langle \overrightarrow{X_0 X}, n' \rangle \geq 0\}.$$

On décompose la normale n' en $n'_1 + n'_2$ où n'_1 est multiple de n et n'_2 est un multiple d'un vecteur de \mathcal{H} . Alors, comme n'_1 est orthogonal à tout vecteur déterminé par deux points de \mathcal{H} ,

$$\mathcal{D}' \cap \mathcal{H} = \{X \in \mathcal{H} : \langle \overrightarrow{X_0 X}, n'_1 + n'_2 \rangle \geq 0\} = \{X \in \mathcal{H} : \langle \overrightarrow{X_0 X}, n'_2 \rangle \geq 0\}.$$

C'est un demi-espace de \mathcal{H} .

Si n et n' sont multiples l'un de l'autre, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \{X \in \mathcal{A} : \langle \overrightarrow{X_0 X}, n \rangle = \alpha\} \\ \mathcal{D}' &= \{X \in \mathcal{A} : \langle \overrightarrow{X_0 X}, n \rangle \geq 0\}\end{aligned}$$

avec $X_0 \in \mathcal{A}$. En fonction des valeurs pour α , on a $\mathcal{H} \subset \mathcal{D}'$ ou $\mathcal{H} \cap \mathcal{D}' = \emptyset$. \square

Les deux preuves précédentes montrent que \mathcal{F}_i est un ensemble polyédral d'intérieur non vide dans \mathcal{H}_i , et qu'il peut s'écrire $\mathcal{F}_i = \cap_{j \neq i} (\mathcal{H}_i \cap \mathcal{D}_j)$ ou sous forme minimale

$$\mathcal{F}_i = \bigcap_{j \in J} (\mathcal{H}_i \cap \mathcal{D}_j)$$

où J est un sous-ensemble de $\{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$. Dans cette forme minimale, on enlève les intersections de la forme $\mathcal{H}_i \cap \mathcal{D}_j = \mathcal{H}_i$. Ce type d'intersection existe, si nous reprenons l'exemple du cube, l'intersection du plan $\pi \equiv x_1 = 1$ avec le demi-espace $\mathcal{D} = \{X : (x_1, x_2, x_3) | x_1 \geq -1\}$ donne π .

On a alors, pour $X_0 \in \mathcal{H}_i$, une décomposition de toutes les normales n_k aux hyperplans d'appuis restants \mathcal{H}_k ($k \in J$) en une somme de vecteurs $n'_k + n''_k$ où n'_k un vecteur multiple de n_i et n''_k un vecteur orthogonal à n_i . Ceci s'écrit,

$$\mathcal{F}_i = \mathcal{H}_i \cap \mathcal{C} = \left\{ X \in \mathcal{H}_i : \langle \overrightarrow{X_0 X}, n_k \rangle \geq \alpha_k \quad \forall k \in J \right\} \quad (2.3)$$

$$= \mathcal{H}_i \cap \mathcal{C} = \left\{ X \in \mathcal{H}_i : \langle \overrightarrow{X_0 X}, n''_k \rangle \geq \alpha_k \quad \forall k \in J \right\} \quad (2.4)$$

avec $\alpha_k \geq 0$. On sait donc quelles sont les facettes de \mathcal{F}_i .

Proposition 2.4.15. *Toute facette de \mathcal{F}_i s'écrit comme l'intersection $\mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j$ de deux facettes de \mathcal{C} .*

Démonstration. On applique les résultats précédents à \mathcal{F}_i , dont une description minimale peut être obtenue à partir de (2.4). Si \mathcal{F} est une facette de \mathcal{F}_i , il existe donc $j \in J$ tel que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_i \cap \mathcal{H}'_j$ où \mathcal{H}'_j est un hyperplan qui délimite un des demi-espaces de \mathcal{F}_i ,

$$\mathcal{H}'_j = \left\{ X \in \mathcal{H}_i : \langle \overrightarrow{X_0 X}, n''_j \rangle = \alpha_j \right\}.$$

On peut alors écrire \mathcal{F} comme suit,

$$\mathcal{F} = \left\{ X \in \mathcal{H}_i : \begin{array}{lcl} \langle \overrightarrow{X_0 X}, n''_j \rangle &=& \alpha_j, \\ \langle \overrightarrow{X_0 X}, n''_k \rangle &\geq& \alpha_k \quad \forall k \in J \setminus \{j\} \end{array} \right\}$$

Vu la définition des normales n''_k et vu que l'on peut ajouter des conditions redondantes, on obtient

$$\mathcal{F} = \left\{ X \in \mathcal{C} : \begin{array}{lcl} \langle \overrightarrow{X_0 X}, n_j \rangle &=& \alpha_j, \langle \overrightarrow{X_0 X}, n_i \rangle = \alpha_i, \\ \langle \overrightarrow{X_0 X}, n''_k \rangle &\geq& \alpha_k \quad \forall k \notin \{i, j\} \end{array} \right\} = \mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j.$$

\square

On peut dès à présent remarquer que toute facette d'une facette \mathcal{F}_i de \mathcal{C} , est une face de \mathcal{C} . Nous généraliserons plus tard ce résultat.

Remarque 2.4.16. *Le théorème ne dit pas que l'intersection de 2 facettes est toujours une face de dimension $d - 2$. C'est d'ailleurs faux comme on le voit avec le cube qui possède une face incluse dans le plan $x = 1$ et une face incluse dans $x = -1$, leur intersection donne la face \emptyset .*

On généralise maintenant le théorème de Grünbaum [13] tout en l'adaptant à nos besoins. En effet, dans son livre, Grünbaum fait référence à des objets mathématiques, les poonems, qui ne nous seront pas très utiles pour l'étude des polyèdres réguliers. Nous nous éloignons donc de sa démonstration.

Proposition 2.4.17. *Soient \mathcal{C} un ensemble polyédral, \mathcal{F} une face de \mathcal{C} et \mathcal{F}' un ensemble inclus dans \mathcal{F} . Si \mathcal{F}' est une face de \mathcal{C} alors \mathcal{F}' est une face de \mathcal{F} .*

Démonstration. On sait que \mathcal{F} est un ensemble convexe fermé. Par la proposition 2.3.14, $\mathcal{F}' \cap \mathcal{F}$ est une face de \mathcal{F} . Par hypothèse, $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$, alors \mathcal{F}' est bien une face de \mathcal{F} . \square

Proposition 2.4.18. *Dans un ensemble polyédral \mathcal{C} , toute face propre est une intersection de facettes.*

Démonstration. On procède par récurrence sur $\dim(\mathcal{C})$. Si $\dim(\mathcal{C}) = 1$, il n'y a que deux faces propres au plus, qui sont des facettes. Supposons que le théorème soit vrai pour $\dim(\mathcal{C}) = k$ et montrons le pour $\dim(\mathcal{C}) = k + 1$ pour $k > 1$. Soit \mathcal{F} une face propre de \mathcal{C} . Soit c'est une facette de \mathcal{C} et alors il n'y a rien à prouver, soit \mathcal{F} est strictement incluse dans une facette \mathcal{F}_i . Car sinon, $\mathcal{F} \subset \text{int}(\mathcal{C})$ et ce n'est pas possible car aucune face ne rencontre l'intérieur (relatif) de \mathcal{C} . Alors, par la proposition 2.4.17, \mathcal{F} est une face de \mathcal{F}_i . Par hypothèse de récurrence, \mathcal{F} est l'intersection de facettes de \mathcal{F}_i , elles mêmes intersections de facettes de \mathcal{C} . \square

Nous énonçons une caractérisation pour les faces de dimension $d - 2$ d'un d -polytope. La preuve se trouve dans le chapitre 3 de Grünbaum [13].

Proposition 2.4.19. *Soit \mathcal{P} un d -polytope. Toute face \mathcal{F} de dimension $d - 2$ est incluse dans exactement deux facettes \mathcal{F}_i et \mathcal{F}_j de \mathcal{P} et $\mathcal{F} = \mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j$.*

Proposition 2.4.20. *Dans un ensemble polyédral \mathcal{C} , toute face d'une facette de \mathcal{C} est une face de \mathcal{C} .*

Démonstration. Soit \mathcal{F}_i une facette de \mathcal{C} et \mathcal{F} une face de \mathcal{F}_i . Si $\mathcal{F} = \mathcal{F}_i$, il n'y a rien à prouver. Sinon comme \mathcal{F}_i est un ensemble polyédral, par la proposition 2.4.18, \mathcal{F} est une intersection de facettes de \mathcal{F}_i qui sont elles-mêmes des faces de \mathcal{C} . Donc \mathcal{F} est une intersection de faces de \mathcal{C} . \square

Ces théorèmes nous suffisent pour déterminer les faces du cube \mathcal{C} et d'autres ensembles polyédraux mais nous pouvons généraliser cette proposition à toutes les faces.

Proposition 2.4.21. *Si \mathcal{C} est un ensemble polyédral, alors toute face d'une face de \mathcal{C} est une face de \mathcal{C} .*

Démonstration. On procède par récurrence sur la dimension de \mathcal{C} . Si $\dim(\mathcal{C}) = 0$, il n'y a pas de face propre. Si $\dim(\mathcal{C}) = 1$, les faces propres sont des singletons et ne contiennent pas de face propre. Supposons que le résultat soit vrai pour tout \mathcal{C} de dimension k et montrons le pour $k + 1$. Soient \mathcal{F} une face de \mathcal{C} et \mathcal{F}' une face de \mathcal{F} . Si $\mathcal{F} = \mathcal{C}$, il n'y a rien à prouver ou si \mathcal{F} est une facette c'est le résultat 2.4.20. Sinon, il existe une facette \mathcal{F}_i telle que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_i$. Alors, par la proposition 2.4.17, \mathcal{F} est une face de \mathcal{F}_i . Donc \mathcal{F}' est aussi une face de \mathcal{F}_i , par hypothèse de récurrence. Par la proposition 2.4.20, \mathcal{F} est une face de \mathcal{C} . \square

Comme corollaire, on obtient une information sur l'ensemble des faces.

Corollaire 2.4.22. *L'ensemble des faces d'un ensemble polyédral \mathcal{C} est fini.*

Démonstration. Il y a un nombre fini de facettes et les faces sont exactement les intersections de facettes. \square

Nous démontrons une dernière proposition que sera utile pour l'étude des 5 polyèdres réguliers.

Proposition 2.4.23.

- 1) *Pour tout convexe \mathcal{C} , les faces de dimension 0 sont formées de points extrêmes.*
- 2) *Dans tout ensemble polyédral, les points extrêmes définissent des faces de dimension 0.*

Remarque 2.4.24. *Le deuxième point de l'énoncé n'est pas vrai pour un convexe quelconque. En effet, si nous prenons le convexe \mathcal{C} obtenu en reliant deux demi-arcs de cercle par deux segments, les points A, B, C et D sont des points extrêmes, mais ce ne sont pas des faces de dimension 0.*

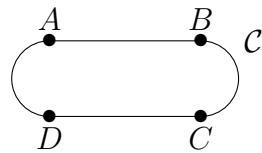


FIGURE 2.7 – L'ensemble convexe \mathcal{C} .

Démonstration.

- 1) Soit $\{X\}$ une face de dimension 0, avec $X \in \mathcal{C}$. Alors il existe un hyperplan d'appui \mathcal{H} tel que $\{X\} = \mathcal{H} \cap \mathcal{C}$. Alors X est un point extrême, sinon il existe deux points distincts Y et Z appartenant à \mathcal{C} tels que $X = \lambda Y + (1 - \lambda)Z$ où $\lambda \in]0, 1[$. Par la proposition 2.3.12, $[Y, Z]$ est inclus dans \mathcal{H} ce qui contredit $\{X\} = \mathcal{H} \cap \mathcal{C}$.

- 2) Procédons par récurrence sur la dimension de \mathcal{C} . Si $\dim(\mathcal{C}) = 0$ et si X est extrême, alors $\{X\} = \mathcal{C}$ est une face de dimension 0. Maintenant, si c'est vrai pour $\dim(\mathcal{C}) \leq k$, montrons que cela reste vrai pour $\dim(\mathcal{C}) = k + 1$ ($k \geq 0$). Si X est extrême dans \mathcal{C} , alors il ne peut être dans $\text{ri}(\mathcal{C})$, sinon pour tout $Y \in \mathcal{C} \setminus \{X\}$, il existe un point Z distinct de X tel que X appartient à $]Y, Z[$ et X n'est pas extrême. Alors X appartient à une facette propre \mathcal{F} de \mathcal{C} . Par la proposition 2.3.15, c'est un point extrême de \mathcal{F} . Par hypothèse de récurrence, $\{X\}$ est une face de dimension 0 de \mathcal{F} . Par la proposition 2.4.21, c'est aussi une face de \mathcal{C} .

□

Remarque 2.4.25. Nous pouvons en conclure que les sommets d'une face de \mathcal{C} sont également des sommets de \mathcal{C} .

En effet, si \mathcal{C} est un ensemble polyédral, alors toute face \mathcal{F} l'est également. De plus, par la proposition 2.3.15, nous savons que les points extrêmes de \mathcal{F} sont inclus dans les points extrêmes de \mathcal{C} . Par la proposition 2.4.23, nous avons que les points extrêmes d'un ensemble polyédral sont exactement les sommets de cet ensemble.

Nous pouvons dès à présent obtenir toutes les faces du cube \mathfrak{C} à partir des théorèmes ci-dessus. Pour cette partie, nous passons à nouveau dans l'espace usuel. Il nous permettra d'avoir des équations simplifiées. Nous avons, dans la section précédente, démontré que

$$\mathfrak{C} = \{X : (x_1, x_2, x_3) | -1 \leq x_i \leq 1 \forall i = 1, 2, 3\}. \quad (2.5)$$

Remarque 2.4.26. Cet ensemble peut être écrit sous une autre forme à partir du produit scalaire, elle va nous être utile lors de la section sur la dualité. Nous écrivons

$$\mathfrak{C} = \bigcap_{i=1}^3 \bigcap_{j=0}^1 \{X : \langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OG_{i,j}} \rangle \leq 1\},$$

où

$$G_{1,j} = ((-1)^j, 0, 0), \quad G_{2,j} = (0, (-1)^j, 0), \quad G_{3,j} = (0, 0, (-1)^j) \quad \forall j \in \{0, 1\}^3.$$

Les points $G_{i,j}$ sont les centres de gravité des faces de \mathfrak{C} . En appliquant le produit scalaire, nous retombons sur l'écriture (2.5).

Après cette petite digression, nous revenons à l'écriture (2.5) pour \mathfrak{C} . Pour plus de facilité, nous décidons de poser $\mathcal{D}_{i0} = \{x_i \leq 1\}$ et $\mathcal{D}_{i1} = \{x_i \geq -1\}$ avec $i \in \{1, 2, 3\}$. En premier lieu, nous devons montrer que la représentation de \mathfrak{C} est minimale. Comme chaque ensemble $\mathcal{D}_{i0} \cap \mathcal{D}_{i1}$ coince une coordonnée entre -1 et 1 , si nous enlevons une partie, une des composantes aura plus de liberté ce qui sera différent de \mathfrak{C} . Il n'y a donc aucune équation redondante. Nous savons que toute facette de \mathfrak{C} s'écrit comme l'intersection de \mathfrak{C} et d'un hyperplan d'appui obtenu à partir d'un des demi-espaces de la représentation minimale.

Étant donné qu'il y a 6 demi-espaces, le cube possède exactement 6 facettes (que nous appelons face ici) de la forme

$$\mathcal{F}_{ij} = \mathfrak{C} \cap \mathcal{H}_{ij} = \{X \in \mathfrak{C} : x_i = (-1)^j\},$$

où $i \in \{1, 2, 3\}$ et $j \in \{0, 1\}$.

Maintenant que nous avons les faces, nous pouvons obtenir les arêtes à partir de celles-ci. En effet, l'intersection de deux faces de \mathfrak{C} bien choisies, donne une arête de \mathfrak{C} . Nous l'écrivons comme suit

$$\mathcal{F}'_{ijkl} = \mathcal{F}_{ij} \cap \mathcal{F}_{kl} = \{X \in \mathfrak{C} : x_i = (-1)^j \text{ et } x_k = (-1)^l\},$$

où $(i, k) \in \{1, 2, 3\}^2$, $(j, l) \in \{0, 1\}^2$ et $i \neq k$. En prenant la condition $i \neq k$, nous enlevons les cas où l'intersection donnerait l'ensemble vide. Dans ces arêtes, certaines sont redondantes comme par exemple les arêtes \mathcal{F}'_{1020} et \mathcal{F}'_{2010} car l'ordre n'a pas d'importance. Nous avons au total $3 \times 2 \times 2 \times 2 = 24$ possibilités que nous devons diviser par 2 pour enlever les doublons, ce qui nous donne finalement 12 arêtes pour \mathfrak{C} .

Il reste à chercher les faces de dimension 0, en d'autres mots les sommets de \mathfrak{C} . Ici, nous allons appliquer la proposition qui nous dit que tout sommet est une intersection finie de face de \mathfrak{C} . Les sommets de \mathfrak{C} sont l'intersection de 3 faces de \mathfrak{C} . Pourquoi pas plus ? Chaque face nous donne une restriction sur une composante. Si nous avions l'intersection de 4 faces, nous aurions une des composantes qui aurait à la fois la condition $x_i = 1$ et la condition $x_i = -1$ ce qui amène à une face de dimension -1 qui est \emptyset . Nous avons alors,

$$\mathcal{F}''_{ijk} = \mathcal{F}_{1i} \cap \mathcal{F}_{2j} \cap \mathcal{F}_{3k},$$

avec $(i, j, k) \in \{0, 1\}^3$. Au total, nous obtenons $2^3 = 8$ sommets.

Nous pouvons maintenant les comparer avec les faces, arêtes et sommets obtenus dans la section précédente. Nous devrions trouver les mêmes faces, peut être écrits différemment.

Pour les sommets, nous retrouvons facilement tous les points du départ :

$$\mathcal{F}''_{ijk} = \mathcal{F}_{1i} \cap \mathcal{F}_{2j} \cap \mathcal{F}_{3k} = S_{ijk} \quad (i, j, k) \in \{0, 1\}^3.$$

Pour les arêtes, nous prenons par exemple

$$\mathcal{F}'_{1j2l} = \mathcal{F}_{1j} \cap \mathcal{F}_{2l} = \{X \in \mathfrak{C} : x_1 = (-1)^j, x_2 = (-1)^l\}, \quad \forall (j, l) \in \{0, 1\}^2$$

nous avons deux composantes fixées et la troisième varie entre -1 et 1 par définition de \mathfrak{C} . Ceci peut être écrit comme suit

$$\mathcal{F}'_{1j2l} = [S_{jl0}, S_{jl1}] \quad (j, l) \in \{0, 1\}.$$

Il nous reste à comparer les faces. Prenons la face

$$F_{1i} = \{X \in \mathfrak{C} : x_1 = (-1)^i\} \quad i \in \{0, 1\},$$

la première composante est fixée et les deux autres varient entre -1 et 1 . Nous avons donc

$$F_{1i} = \text{Conv}(S_{i00}, S_{i01}, S_{i10}, S_{i11}), \quad i \in \{0, 1\}.$$

Le reste des faces, arêtes peuvent être retrouvées de la même manière. Nous pouvons déjà remarquer que cette approche est nettement plus rapide, à condition d'avoir une représentation de \mathfrak{C} comme intersection finie de demi-espaces fermés.

Nous poursuivons notre parcours sur la convexité pour terminer sur cette dernière section : Les polytopes².

2.5 Polytopes

Cette section se consacre à un certain type d'ensemble convexe. Les ensembles ayant un nombre fini de points extrêmes et donc un nombre fini de sommet (face de dimension 0). Nous allons voir que ces ensembles sont des cas particuliers des ensembles polyédraux. Toutes les propriétés que nous venons d'établir pour ces ensembles resteront donc vraies pour les polytopes.

Définition 2.5.1. *Un polytope \mathcal{P} est un ensemble convexe compact tel que $\text{Ext}(\mathcal{P})$ est fini.*

Remarque 2.5.2. *Grâce à cette définition et la proposition 2.3.16, on sait que $\mathcal{P} = \text{Conv}(\text{Ext}(\mathcal{P}))$.*

Remarque 2.5.3. *On utilisera les notations suivantes d -polytope et k -face comme abréviation de polytope de dimension d et face de dimension k .*

Proposition 2.5.4. *Chaque face \mathcal{F} d'un polytope \mathcal{P} est aussi un polytope.*

Démonstration. On sait déjà que $\text{Ext}(\mathcal{P}) \cap \mathcal{F} = \text{Ext}(\mathcal{F})$. Comme $\text{Ext}(\mathcal{P})$ est fini, cela implique que $\text{Ext}(\mathcal{F})$ l'est également. De plus, comme \mathcal{F} est inclus dans \mathcal{P} , il est compact. \square

On peut facilement se convaincre qu'un polytope possède un nombre fini de faces. En effet, puisque chaque k -face d'un d -polytope \mathcal{P} contient $k + 1$ sommets de \mathcal{P} affinement indépendants, et puisque différentes k -faces de \mathcal{P} ont différentes enveloppes affines, il en suit qu'on aura un nombre fini de k -faces différentes pour tout k car l'ensemble des sommets de \mathcal{P} est fini.

Proposition 2.5.5. *Un ensemble \mathcal{P} est un d -polytope si et seulement si \mathcal{P} est un ensemble polyédral borné.*

2. Dans le langage courant, on utilise plutôt le terme polyèdre. Par contre, dans les ouvrages sur la convexité, c'est le terme polytope qui apparaît plus fréquemment.

Démonstration. Quitte à remplacer \mathcal{A} par l'enveloppe affine de \mathcal{P} , on peut supposer que \mathcal{P} est d'intérieur non vide.

Montrons la condition suffisante (\Leftarrow) : par hypothèse, \mathcal{P} est un compact. De plus, par les propositions 2.4.22 et 2.4.23, on sait que $\text{Ext}(\mathcal{P})$ est fini. Ce qui suffit pour conclure que \mathcal{P} est un polytope.

Passons maintenant à la condition nécessaire. On va montrer que \mathcal{P} est l'intersection de demi-espaces fermés contenant \mathcal{P} et déterminée par les faces de dimension $d - 1$. On sait déjà que l'intersection sera finie car on a un nombre fini de faces de dimension $d - 1$.

Le sens \subset est trivial car on prend les demi-espaces fermés contenant \mathcal{P} , donc l'intersection contient encore \mathcal{P} .

Le sens \supset se fait par contraposée. Prenons un point Y qui n'est pas dans \mathcal{P} et montrons qu'il existe une face de dimension $d - 1$ dont l'enveloppe affine (qui sera l'hyperplan délimitant le demi espace) sépare Y de \mathcal{P} . Comme $\dim(\mathcal{P}) = d$, on sait que l'intérieur de \mathcal{P} est non vide. A cet intérieur, on va retirer les enveloppes affines $\text{Aff}(\mathcal{F}, Y)$ où \mathcal{F} est une k -face avec $k < d - 1$. Alors $\text{Aff}(\mathcal{F}, Y)$ est un ensemble qui est de dimension au plus égale à $d - 1$, cet ensemble est donc inclus dans un hyperplan ce qui implique que son intérieur est vide. L'ensemble

$$E = \bigcup_{\substack{\mathcal{F} \text{ k-face} \\ k < n - 1}} \text{Aff}(Y, \mathcal{F})$$

est une union finie de variétés affines de dimension inférieure à $d - 1$, il est donc d'intérieur vide. On a alors $\text{int}(\mathcal{P}) \setminus E \neq \emptyset$, sinon cela impliquerait que $\text{int}(\mathcal{P}) \subset E$ ce qui est impossible car \mathcal{P} est d'intérieur non vide.

Soit $X \in \text{int}(\mathcal{P}) \setminus E$, on a

$$[X, Y] \cap \mathcal{P} = [X, Y_0]$$

avec $Y_0 \in \text{bd}(\mathcal{P})$ sinon $Y_0 \in \text{ri}(\mathcal{P})$ et par la proposition 2.1.20, il existe un point $Z \in \mathcal{P}$, distinct de X tel que $Y_0 \in]X, Z[$. Par la proposition 2.2.15, on sait que Y_0 appartient à une face propre \mathcal{F} . Si $\dim(\mathcal{F}) < d - 1$, alors $X \in \text{Aff}(\mathcal{F}, Y)$ ce qui n'est pas possible. Donc la dimension de \mathcal{F} est égale à $d - 1$.

Montrons maintenant que l'hyperplan d'appui \mathcal{H} qui détermine la face \mathcal{F} (c'est-à-dire son enveloppe affine) sépare Y et \mathcal{P} . On sait déjà que cet hyperplan est d'appui par la définition d'une face. Il faut maintenant s'assurer que X, Y_0, Y ne soient pas du même côté de l'hyperplan. On écrit comme d'habitude

$$\mathcal{H} = \left\{ Z : \langle \overrightarrow{OZ}, n \rangle = \alpha \right\}.$$

Alors \mathcal{P} est inclus dans un des demi-espaces correspondants, et on peut écrire

$$\mathcal{P} \subset \left\{ Z : \langle \overrightarrow{OZ}, n \rangle \leq \alpha \right\}.$$

Comme X est à l'intérieur de \mathcal{P} , il satisfait l'inégalité stricte. De même, comme Y_0 est sur la frontière, il satisfait l'égalité. On procède par l'absurde et on suppose que

$$\langle \overrightarrow{OY}, n \rangle \leq \alpha.$$

Alors, puisque Y_0 s'écrit $(1 - \lambda)X + \lambda Y$, pour un réel λ tel que $0 < \lambda < 1$, on a

$$\begin{aligned}\langle \overrightarrow{OY_0}, n \rangle &= (1 - \lambda) \langle \overrightarrow{OX}, n \rangle + \lambda \langle \overrightarrow{OY}, n \rangle \\ &< \alpha,\end{aligned}$$

ce qui est impossible car Y_0 se trouve dans la face, et donc dans l'hyperplan d'appui associé. Nous avons alors un demi-espace contenant \mathcal{P} qui ne contient pas Y et dont l'hyperplan associé intersecté avec \mathcal{P} donne bien une facette.

□

Grâce à cette proposition, nous pouvons appliquer aux polytopes tous les résultats établis pour les ensemble polyédraux. À titre d'exemple, nous obtenons les résultats suivants.

Proposition 2.5.6. *Si \mathcal{F}_1 est une face d'un polytope \mathcal{P} et si \mathcal{F}_2 est une face du polytope \mathcal{F}_1 , alors \mathcal{F}_2 est une face de \mathcal{P} .*

Proposition 2.5.7. *Si \mathcal{P} est un d -polytope, chaque $(d - 2)$ -face \mathcal{F} de \mathcal{P} est contenue dans précisément deux facettes \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 de \mathcal{P} et $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$.*

2.6 Dualités

Dans cette section, nous allons approfondir un mécanisme qui permet d'étudier certaines propriétés des faces d'un ensemble convexe à partir d'un autre convexe. Ce mécanisme est donné par la notion de dualité.

Parmi toutes les dualités possibles, nous allons étudier une en particulier, appelée polarité. Cette dualité peut être définie dans tout espace affine euclidien, dès qu'on y a fixé un point O qui va servir d'origine à la polarité. Nous nous concentrerons sur cette dualité car elle a la propriété de conserver les symétries des convexes considérés.

Définition 2.6.1. *Soient \mathcal{C} un ensemble de \mathcal{A} et $O \in \mathcal{A}$. L'ensemble polaire \mathcal{C}^* de \mathcal{C} est*

$$\mathcal{C}^* = \left\{ Y \in \mathcal{A} \mid \langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY} \rangle \leq 1 \quad \forall X \in \mathcal{C} \right\}.$$

La polarité dépend de l'origine qu'on prend. Nous devrions donc écrire \mathcal{C}_O^* pour être totalement précis.e.s. Nous conserverons la notation plus légère \mathcal{C}^* si cela n'engendre pas de confusion. La première question que nous pourrions nous poser est de savoir si la polarité préserve la convexité.

Proposition 2.6.2. *Soit \mathcal{C} un ensemble convexe, alors l'ensemble \mathcal{C}^* est convexe.*

Démonstration. Soient $C_1, C_2 \in \mathcal{C}^*$ et $\lambda \in [0, 1]$. Montrons que $(1 - \lambda)C_1 + \lambda C_2$ appartient à \mathcal{C}^* . En effet, pour tout $X \in \mathcal{C}$, comme $C_1, C_2 \in \mathcal{C}^*$ et $\lambda, (1 - \lambda)$ sont positifs, on a

$$\begin{aligned}\langle (1 - \lambda)\overrightarrow{OC_1} + \lambda\overrightarrow{OC_2}, \overrightarrow{OX} \rangle &= (1 - \lambda) \langle \overrightarrow{OC_1}, \overrightarrow{OX} \rangle + \lambda \langle \overrightarrow{OC_2}, \overrightarrow{OX} \rangle \\ &\leq (1 - \lambda) + \lambda = 1.\end{aligned}$$

Au final, nous avons $(1 - \lambda)C_1 + \lambda C_2$ qui appartient à \mathcal{C}^* .

□

Nous avons plusieurs manières d'écrire un ensemble polaire. La première est celle donnée dans la définition de la polarité, la deuxième se trouve dans la remarque suivante.

Remarque 2.6.3. *Nous pouvons réécrire \mathcal{C}^* comme suit,*

$$\mathcal{C}^* = \bigcap_{X \in \mathcal{C}} \mathcal{D}(X, 1),$$

où $\mathcal{D}(X, 1) = \{Y \in \mathcal{A} \mid \langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY} \rangle \leq 1\}$.

Nous pouvons également remarquer que $Y \in \mathcal{D}(X, 1)$ si et seulement si $X \in \mathcal{D}(Y, 1)$, il en suit que

$$Y \in \mathcal{C}_1^* \Leftrightarrow \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{D}(Y, 1).$$

Toujours dans l'optique d'en savoir un peu plus sur la polarité, nous nous demandons si celle-ci préserve l'inclusion.

Proposition 2.6.4. *Si \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 sont deux ensembles convexes tels que $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$. Alors, \mathcal{C}_2^* est inclus dans \mathcal{C}_1^* .*

Démonstration. Soit $Y \in \mathcal{C}_2^*$. Par la remarque 2.6.3, nous savons que $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{D}(Y, 1)$. Comme $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$, il en suit toujours par la remarque 2.6.3 que $Y \in \mathcal{C}_1^*$. \square

Nous avons donc que la polarité inverse l'inclusion. Le polaire d'un convexe s'écrit naturellement comme une intersection de demi-espaces fermés. Il est naturel de se demander si les duals de polytopes ou d'ensembles polyédriques ont des propriétés particulières.

Proposition 2.6.5. *Si $\mathcal{P} = \text{Conv}(P_1, \dots, P_n)$ alors \mathcal{P}^* est l'intersection des demi-espaces d'équations $\langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OP_i} \rangle \leq 1$.*

Démonstration. Montrons que la condition

$$\langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OP} \rangle \leq 1 \quad \forall P \in \mathcal{P} \tag{2.6}$$

est équivalente à la condition

$$\langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OP_i} \rangle \leq 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \tag{2.7}$$

Il est clair que quelque soit X , (2.6) implique (2.7) puisque P_1, \dots, P_n sont des points de \mathcal{P} .

Supposons donc que (2.7) soit vrai pour un X et montrons que (2.6) est vrai pour ce point X . Si $P \in \mathcal{P}$, alors P s'écrit comme une combinaison convexe $P = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i$ tel que $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$. On a alors, $\overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{OP_i}$. Par l'hypothèse (2.7) et comme $\lambda_i \geq 0$ pour tout i , on obtient

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OP} \rangle &= \langle \overrightarrow{OX}, \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{OP_i} \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OP_i} \rangle \\ &\leq \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. \square

Cette proposition indique que le polaire d'un polytope est un ensemble polyédral. Prenons un exemple dans le plan muni d'un repère orthonormé. Regardons le dual de $\mathcal{P} = \text{Conv}(P_1, P_2)$ par rapport à l'origine si $P_1 : (1, 0)$ et $P_2 : (-1, 0)$. Nous avons alors

$$\mathcal{P}^* = \{X : (x_1, x_2) | -1 \leq x_1 \leq 1\}.$$

Nous avons que le dual du polytope \mathcal{P} est un ensemble polyédral, non borné.

On peut ensuite déplacer l'origine en $O' : (0, 1)$ et voir ce qu'il se passe. Nous obtenons un nouvel ensemble polaire

$$\mathcal{P}_{O'}^* = \{X : (x_1, x_2) | x_1 - x_2 \leq 0, x_1 + x_2 \geq 0\}.$$

Cet ensemble est une intersection de deux demi-espaces fermés, non borné. En fonction de l'origine que l'on prend, l'ensemble polaire sera différent comme nous l'avons remarqué sur cet exemple. Nous verrons plus tard que le polaire d'un ensemble polyédrique est un polytope. Il nous manque quelques outils pour démontrer cette proposition. Le premier outil dont nous aurons besoin concerne l'ensemble polaire par rapport à O d'une boule centrée en O .

Exemple 2.6.6. *Le polaire (par rapport à O) de la boule de centre O et de rayon $r > 0$ est la boule de centre O et de rayon $\frac{1}{r}$.*

On a,

$$\mathcal{B}(O, r)^* = \left\{ Y \in \mathcal{A} : \left\langle \overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OX} \right\rangle \leq 1 \quad \forall X \in \mathcal{B}(O, r) \right\}.$$

On procède par double inclusion. Soit Y appartenant à $\mathcal{B}(O, \frac{1}{r})$. Montrons que Y est dans le dual de $\mathcal{B}(O, r)$. En effet, pour tout $X \in \mathcal{B}(O, r)$, on a

$$\left\langle \overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OX} \right\rangle \leq |\overrightarrow{OX}| |\overrightarrow{OY}| \leq 1,$$

vu l'inégalité de Cauchy-Schwartz. On a donc $\mathcal{B}(O, \frac{1}{r}) \subset \mathcal{B}(O, r)^*$. L'autre inclusion se fait par contraposée, si $Y \notin \mathcal{B}(O, \frac{1}{r})$, alors $|\overrightarrow{OY}| > \frac{1}{r}$. On doit trouver un point X appartenant à $\mathcal{B}(O, r)$ tel que le produit scalaire avec \overrightarrow{OY} soit plus grand que 1. En prenant

$$X = O + r \frac{\overrightarrow{OY}}{|\overrightarrow{OY}|},$$

on obtient bien que $X \in \mathcal{B}(O, r)$ et

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY} \right\rangle &= \left\langle r \frac{\overrightarrow{OY}}{|\overrightarrow{OY}|}, \overrightarrow{OY} \right\rangle \\ &= r |\overrightarrow{OY}| > 1 \end{aligned}$$

Ce qui implique que $Y \notin \mathcal{B}^*(O, r)$.

Ici, le choix de l'origine a son importance car si nous avions pris une origine différente du centre de la boule, l'ensemble polaire correspondant n'aurait pas été une boule.

Proposition 2.6.7. *Si \mathcal{C} est un ensemble convexe compact tel que $O \in \text{int}(\mathcal{C})$, alors l'ensemble polaire \mathcal{C}^* est également un compact et $O \in \text{int}(\mathcal{C}^*)$.*

Démonstration. Comme $O \in \text{int}(\mathcal{C})$, on sait que $\mathcal{B}(O, r) \subset \mathcal{C}$ pour un $r > 0$. Par la proposition 2.6.4, on a $\mathcal{B}(O, r)^* \supset \mathcal{C}^*$. Ce qui implique $\mathcal{B}(O, \frac{1}{r}) \supset \mathcal{C}^*$ par l'exemple 2.6.6. Nous avons alors l'ensemble \mathcal{C}^* qui est borné. Il est également fermé car c'est une intersection de demi-espaces fermés. \square

Dans la suite, nous allons regarder le dual du dual. Pour garder des notations légères, nous notons $(\mathcal{P}^*)^* = \mathcal{P}^{**}$.

Théorème 2.6.8. *Si \mathcal{C} est un compact convexe tel que $O \in \text{int}(\mathcal{C})$, alors $\mathcal{C}^{**} = \mathcal{C}$.*

Démonstration. L'inclusion $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}^{**}$ est assez directe : on considère $X \in \mathcal{C}$, et on montre qu'il appartient à \mathcal{C}^{**} . C'est le cas si pour tout $Y \in \mathcal{C}^*$, on a

$$\langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY} \rangle \leq 1.$$

Cette inégalité est vraie pour tout $Y \in \mathcal{C}^*$ car $X \in \mathcal{C}$ et par définition de \mathcal{C}^* .

Passons à la deuxième inclusion, que nous démontrons par contraposée : on considère $X_0 \notin \mathcal{C}$ et on montre que X_0 n'appartient pas à \mathcal{C}^{**} . Comme $\{X_0\}$ est un compact, il existe un hyperplan $\mathcal{H} = \left\{ Z \in \mathcal{A} \mid \langle \overrightarrow{OZ}, \overrightarrow{OY_0} \rangle = 1 \right\}$ qui sépare strictement X_0 et \mathcal{C} . En d'autres mots, tel que $\langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY_0} \rangle < 1$ pour tout $X \in \mathcal{C}$ et $\langle \overrightarrow{OX_0}, \overrightarrow{OY_0} \rangle > 1$. Ainsi, $Y_0 \in \mathcal{C}^*$ et comme $\langle \overrightarrow{OX_0}, \overrightarrow{OY_0} \rangle > 1$, on a $X_0 \notin \mathcal{C}^{**}$. \square

Nous avons maintenant les outils adéquats pour avoir une correspondance entre un polytope et un ensemble polyédral via la dualité. Ici, nous supposerons que l'origine associée à l'ensemble polaire est à l'intérieur de l'ensemble de départ. Il faudrait ajouter une petite discussion si ce n'est pas le cas, nous ne le ferons pas ici mais tous les détails peuvent se trouver dans les chapitres 6 et 9 de Bronsted [3].

Proposition 2.6.9. *Soient P_1, \dots, P_n des points distincts de \mathcal{A} et*

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \text{Conv}(P_1, \dots, P_n), \\ \mathcal{Q} &= \bigcap_{i=1}^n \mathcal{D}(P_i, 1), \end{aligned}$$

tels que $O \in \text{int}(\mathcal{P})$. Alors on a,

- 1) $\mathcal{P}^* = \mathcal{Q}$ et \mathcal{Q} est borné.
- 2) $\mathcal{Q}^* = \mathcal{P}$.

Démonstration.

- 1) Par la proposition 2.6.5, nous avons $\mathcal{P}^* = \mathcal{Q}$. Ensuite, comme $O \in \text{int}(\mathcal{P})$, nous avons que \mathcal{Q} est borné par la proposition 2.6.7.

- 2) Comme \mathcal{P} est compact, nous avons que $\mathcal{P}^{**} = \mathcal{P}$ par la proposition 2.6.8. De plus, nous savons par le point 1) que $\mathcal{P}^* = \mathcal{Q}$. Ainsi, nous avons $\mathcal{P}^{**} = \mathcal{Q}^*$ et donc $\mathcal{Q}^* = \mathcal{P}$.

□

Étant donné qu'un polytope est un ensemble polyédral borné, si l'origine de la polarité appartient à l'intérieur du polytope, alors son ensemble polaire sera lui aussi un polytope. Nous allons maintenant démontrer un corollaire qui va nous permettre d'obtenir une représentation minimale pour un ensemble polyédral donné à partir des sommets de son dual.

Corollaire 2.6.10. *Soient P_1, \dots, P_n des points distincts de \mathcal{A} et*

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \text{Conv}(P_1, \dots, P_n), \\ \mathcal{Q} &= \bigcap_{i=1}^n \mathcal{D}(P_i, 1),\end{aligned}$$

tels que $O \in \text{int}(\mathcal{P})$. Alors on a,

$$\text{Ext}(\mathcal{P}) = \{P_1, \dots, P_n\}$$

si et seulement si la représentation

$$\mathcal{Q} = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{D}(P_i, 1)$$

est minimale.

Démonstration. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $n \geq 2$. Pour $j = 1, \dots, n$, posons

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_j &= \text{Conv}(P_1, \dots, P_{j-1}, P_{j+1}, \dots, P_n), \\ \mathcal{Q}_j &= \bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \mathcal{D}(P_i, 1).\end{aligned}$$

En appliquant le point 1) de la proposition 2.6.9 à \mathcal{P}_j , nous obtenons $\mathcal{P}_j^* = \mathcal{Q}_j$ pour tout $j \leq n$. De plus, par la proposition 2.3.18, nous avons $\text{Ext}(\mathcal{P}) \subset \{P_1, \dots, P_n\}$.

Supposons que $\text{Ext}(\mathcal{P})$ est un sous-ensemble propre de $\{P_1, \dots, P_n\}$ et montrons que la représentation \mathcal{Q} n'est pas minimale. Alors nous avons $\mathcal{P} = \mathcal{P}_i$ pour un certain i dans $\{1, \dots, n\}$ par la proposition 2.3.16, notons cet ensemble I . Et donc, \mathcal{P}^* est égal à \mathcal{P}_i^* pour $i \in I$. Comme $\mathcal{P}^* = \mathcal{Q}$ par le point 1) de la proposition 2.6.9, cela implique que $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_i$ pour $i \in I$ et donc la représentation n'est pas minimale.

Inversement, si la représentation \mathcal{Q} n'est pas minimale, alors $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_i$ pour certain i dans $\{1, \dots, n\}$, notons cet ensemble I' et donc $\mathcal{Q}^* = \mathcal{Q}_i^*$. En appliquant le point 2) de la proposition 2.6.9, nous obtenons $\mathcal{Q}_j^* = \mathcal{P}_j$ pour tout $j \leq n$. Puisque $\mathcal{Q}^* = \mathcal{P}$ toujours par le point 2)

de la proposition 2.6.9, nous avons $\mathcal{P} = \mathcal{P}_i = \text{Conv}(P_1, \dots, P_{i-1}, P_{i+1}, \dots, P_n)$ pour $i \in I'$. Par la proposition 2.3.18, l'ensemble $\text{Ext}(\mathcal{P})$ est inclus dans $\{P_1, \dots, P_{i-1}, P_{i+1}, \dots, P_n\}$ $i \in I'$. Alors $\text{Ext}(\mathcal{P})$ est un sous-ensemble propre de $\{P_1, \dots, P_{j-1}, P_j, P_{j+1}, \dots, P_n\}$ ce qui termine la preuve. \square

Comme indiqué dans l'introduction de cette section, une dualité doit définir une correspondance entre faces. Jusqu'à présent, nous avons défini le dual d'un convexe \mathcal{C} . Il faut maintenant analyser les faces de \mathcal{C}^* .

Définition 2.6.11. Soit \mathcal{F} une face de \mathcal{C} , on écrit

$$\mathcal{F}^\Delta = \left\{ Y \in \mathcal{C}^* \mid \langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY} \rangle = 1 \text{ pour tout } X \in \mathcal{F} \right\}.$$

Nous allons en premier lieu, montrer que ces ensembles sont les faces de \mathcal{C}^* . Nous supposons ici que la dimension de \mathcal{C} est la même que celle de l'espace affine, grâce à ça, nous n'avons plus de distinction à faire entre l'intérieur et l'intérieur relatif.

Proposition 2.6.12. Soient \mathcal{C} un ensemble convexe compact avec $O \in \text{int}(\mathcal{C})$ et \mathcal{F} une face propre de \mathcal{C} . Alors \mathcal{F}^Δ est une face de \mathcal{C}^* .

Démonstration. Regardons d'abord les cas particuliers pour ensuite traiter le cas des faces propres. Si $\mathcal{F} = \emptyset$, alors on a $\mathcal{F}^\Delta = \mathcal{C}^*$. De même si $\mathcal{F} = \mathcal{C}$, comme $O \in \text{int}(\mathcal{C})$, si Y appartient à \mathcal{F}^Δ alors on doit avoir $\langle \overrightarrow{OO}, \overrightarrow{OY} \rangle = 1$ ce qui est impossible. Ainsi, \mathcal{F}^Δ est vide si $\mathcal{F} = \mathcal{C}$.

Passons au cas général, soient \mathcal{F} une face propre de \mathcal{C} et $X_0 \in \text{ri}(\mathcal{F})$. On considère l'ensemble \mathcal{F}^* de \mathcal{C}^* défini par

$$\mathcal{F}^* = \left\{ Y \in \mathcal{C}^* \mid \langle \overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OX_0} \rangle = 1 \right\}.$$

Montrons que c'est une face. On a $\mathcal{F}^* = \mathcal{C}^* \cap \mathcal{H}(X_0, 1)$. Il suffit de montrer que $\mathcal{H}(X_0, 1)$ est un hyperplan d'appui de \mathcal{C}^* . Par hypothèse, \mathcal{F} est une face de \mathcal{C} , alors il existe un hyperplan $\mathcal{H} = \{X \in \mathcal{A} \mid \langle n, \overrightarrow{OX} \rangle = 1\}$ tel que $\mathcal{F} = \mathcal{H} \cap \mathcal{C}$. Comme $O \in \text{int}(\mathcal{C})$, on sait également que

$$\mathcal{C} \subset \{X \in \mathcal{A} \mid \langle n, \overrightarrow{OX} \rangle \leq 1\}.$$

Pour que $\mathcal{H}(X_0, 1) = \left\{ Y \in \mathcal{A} \mid \langle \overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OX_0} \rangle = 1 \right\}$ soit un hyperplan de \mathcal{C}^* ,

1) on doit montrer que

$$\mathcal{C}^* \subset \mathcal{D}(X_0, 1) = \left\{ Y \in \mathcal{A} \mid \langle \overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OX_0} \rangle \leq 1 \right\}.$$

Ceci est vrai la définition de \mathcal{C}^* car $X_0 \in \mathcal{C}$.

2) On doit également montrer qu'il existe un point U de \mathcal{C}^* tel que $\langle \overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OX_0} \rangle = 1$.

Pour $U = O + n$, on a $\overrightarrow{OU} = n$ et $\langle n, \overrightarrow{OX_0} \rangle = 1$ car $X_0 \in \mathcal{H}$. On a donc U qui appartient à $\mathcal{H}(X_0, 1)$. Montrons encore que U appartient à \mathcal{C}^* . On a, $\langle \overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OX} \rangle = \langle n, \overrightarrow{OX} \rangle \leq 1 \quad \forall X \in \mathcal{C}$, ce qui montre que $U \in \mathcal{C}^*$.

Maintenant que nous savons que \mathcal{F}^* est une face de \mathcal{C}^* , montrons l'égalité $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^\Delta$. Puisque $X_0 \in \text{ri}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$, on sait par définition que $\mathcal{F}^\Delta \subset \mathcal{F}^*$. On veut montrer que $\mathcal{C}^* \setminus \mathcal{F}^\Delta \subset \mathcal{C}^* \setminus \mathcal{F}^*$, alors par le passage au complémentaire, on aura $\mathcal{F}^* \subset \mathcal{F}^\Delta$.

S'il existe Y_0 tel que ce point appartient à $\mathcal{C}^* \setminus \mathcal{F}^\Delta$, alors il existe $X_1 \in \mathcal{F}$ tel que $\langle \overrightarrow{OX_1}, \overrightarrow{OY_0} \rangle < 1$. Puisque $X_0 \in \text{ri}(\mathcal{F})$, en appliquant la proposition 2.1.20, il existe $X_2 \in \mathcal{F}$, distinct de X_1 , tel que $X_0 = \lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2$ où $\lambda \in]0, 1[$. De plus, comme $Y_0 \in \mathcal{C}^*$, on a $\langle \overrightarrow{OX_2}, \overrightarrow{OY_0} \rangle \leq 1$ et donc $\langle \overrightarrow{OX_0}, \overrightarrow{OY_0} \rangle < 1$. Ainsi, Y_0 n'appartient pas à \mathcal{F}^* .

Au final, nous obtenons $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^\Delta$. \square

La forme \mathcal{F}^* peut être plus intéressante sur des exemples car elle possède une seule égalité (en plus de la condition $X \in \mathcal{C}^*$) alors que \mathcal{F}^Δ peut en posséder plusieurs.

Nous démontrons la dernière proposition clé de cette section. Dans l'introduction de cette section, nous avions parler d'une application entre deux ensembles duals, la voici.

Proposition 2.6.13. *Si \mathcal{C} est un ensemble compact convexe avec $O \in \text{int}(\mathcal{C})$, alors l'application $\psi_{\mathcal{C}}$ définie par $\psi_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}^\Delta$ est une application injective renversant l'inclusion entre les faces de \mathcal{C} et les faces de \mathcal{C}^* . De plus, $\psi_{\mathcal{C}^*}(\psi_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})) = \mathcal{F}$ pour toute face de \mathcal{C} .*

Démonstration. On a démontré dans la preuve 2.6.12 les égalités $\emptyset^\Delta = \mathcal{C}^*$ et $\mathcal{C}^\Delta = \emptyset$. On peut donc se restreindre aux faces propres. L'application $\psi_{\mathcal{C}}$ envoie les faces de \mathcal{C} sur celles de \mathcal{C}^* . On montre que cette application inverse l'inclusion. Soient $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ des faces de \mathcal{C} telles que $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$. Montrons que $\psi_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}_1) \supset \psi_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}_2)$. En effet, soit $X \in \psi_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}_2) = \mathcal{F}_2^\Delta$ alors par définition, pour tout $Y \in \mathcal{F}_2$, $\langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY} \rangle = 1$. Comme $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$, cette égalité est vraie pour tout $Y \in \mathcal{F}_1$. Ainsi, X appartient à $\mathcal{F}_1^\Delta = \psi_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}_1)$.

Il reste à montrer que $\psi_{\mathcal{C}^*}(\psi_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})) = \mathcal{F}$. Par définition, nous avons

$$\psi_{\mathcal{C}^*}(\psi_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})) = \left\{ Z \in \mathcal{C}^{**} \mid \langle \overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OZ} \rangle = 1 \text{ pour tout } Y \in \mathcal{F}^\Delta \right\}$$

et puisque $\mathcal{C}^{**} = \mathcal{C}$, on sait que $\mathcal{F} \subset \psi_{\mathcal{C}^*}(\psi_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}))$. Procédons par passage au complémentaire pour l'autre inclusion. Soit Z_0 appartenant à $\mathcal{C} \setminus \mathcal{F}$. Comme \mathcal{F} est une face de \mathcal{C} , on obtient comme à la proposition 2.6.12 l'existence d'un point Y_0 tel que $\mathcal{H} = \{X \mid \langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY_0} \rangle = 1\}$ et $\mathcal{F} = \mathcal{C} \cap \mathcal{H}$. Cela implique que $Y_0 \in \mathcal{F}^\Delta$ et $\langle \overrightarrow{OZ_0}, \overrightarrow{OY_0} \rangle < 1$. On a donc $Z_0 \notin \psi_{\mathcal{C}^*}(\psi_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}))$ ce qui termine la preuve. \square

Nous énoncerons ici une proposition que nous avions mentionné au début de cette section. Une preuve détaillée se trouve dans le livre de Bronstred [3], dans le chapitre 2.

Proposition 2.6.14. *Soit \mathcal{P} un d -polytpe et \mathcal{F} une face de \mathcal{P} . Alors*

$$\dim(\mathcal{F}) + \dim(\mathcal{F}^\Delta) = d - 1.$$

Cette proposition nous permet d'obtenir la dimension de la face duale. En effet, si \mathcal{F} est un sommet, alors \mathcal{F}^Δ sera une facette et ainsi de suite.

2.6.1 Le polaire du cube

Pour nous familiariser un peu plus concrètement avec la polarité, nous allons étudier le polaire du cube. A nouveau, nous nous plaçons dans l'espace affine euclidien de dimension 3.

Nous savons que le cube peut s'écrire $\mathfrak{C} = \cap_{i=1}^3 \{X : -1 \leq x_i \leq 1\}$ ou encore

$$\mathfrak{C} = \bigcap_{i=1}^3 \bigcap_{j=0}^1 \{X : \langle \overrightarrow{OG_{i,j}}, \overrightarrow{OX} \rangle \leq 1\},$$

où $G_{i,j}$ sont les centres de gravité des faces de \mathfrak{C} .

Par la proposition 2.6.9, nous savons que

$$\mathfrak{C}^* = \text{Conv}(\{G_{i,j} : i \in \{1, 2, 3\}, j \in \{0, 1\}\}).$$

Étant donné que la représentation de \mathfrak{C} est minimale, nous connaissons déjà tous les sommets de \mathfrak{C}^* . En effet, par la proposition 2.6.10, nous avons

$$\text{Ext}(\mathfrak{C}^*) = \{G_{i,j} : i \in \{1, 2, 3\}, j \in \{0, 1\}\}.$$

Pour obtenir les arêtes et les faces de ce nouveau polytope, nous utiliserons la proposition 2.6.13 qui indique que l'application $\psi_{\mathfrak{C}}$ renverse l'inclusion. Nous avons également une information concernant la dimension des faces du dual. En effet, pour un sommet de \mathfrak{C} , le dual est une face de \mathfrak{C}^* . Le dual d'une arête reste une arête et le dual d'une face est un sommet.

Nous connaissons déjà les sommets de \mathfrak{C}^* , regardons pour les arêtes. Soit \mathcal{F} une arête de \mathfrak{C} , elle est l'intersection de deux 2 faces de \mathfrak{C} , \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 . Ainsi, nous avons $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_2$. L'application $\psi_{\mathfrak{C}}$ renverse l'inclusion, nous avons donc $\mathcal{F}_1^\Delta \subset \mathcal{F}^\Delta$ et $\mathcal{F}_2^\Delta \subset \mathcal{F}^\Delta$. Comme le dual d'une face est un sommet, nous avons deux sommets de \mathfrak{C}^* inclus dans l'arête \mathcal{F}^Δ de \mathfrak{C}^* . Par définition, une arête est un segment dont ses deux extrémités sont des sommets. Nous avons donc que l'arête \mathcal{F}^Δ est égale à $[\mathcal{F}_1^\Delta, \mathcal{F}_2^\Delta]$.

Le même procédé peut être fait pour les faces de \mathfrak{C}^* . Nous savons qu'un sommet de \mathfrak{C} est l'intersection de 3 faces cela implique que chaque face de \mathfrak{C}^* possède 3 sommets. En effet, si une face de \mathfrak{C}^* possède 4 sommets ou plus, alors en appliquant $\psi_{\mathfrak{C}^*}$, le sommet de $\mathfrak{C}^{**} = \mathfrak{C}$ appartiendrait à 4 faces (ou plus) différentes ce qui est impossible par définition du cube.

Nous devons avoir la forme d'une face pour savoir si celle-ci est bien un triangle équilatéral. Prenons par exemple

$$S_{000} = \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}_3,$$

dont $G_{1,0}$ est le centre de gravité de \mathcal{F}_1 , $G_{2,0}$ celui de \mathcal{F}_2 et $G_{3,0}$ celui de \mathcal{F}_3 . Étant donné que l'application $\psi_{\mathfrak{C}}$ renverse l'inclusion, nous avons que $G_{1,0}, G_{2,0}$ et $G_{3,0}$ appartiennent à S_{000}^{\triangle} et on peut écrire

$$S_{000}^{\triangle} = \text{Conv}(G_{1,0}, G_{2,0}, G_{3,0}).$$

Maintenant que nous savons comment obtenir tous les sommets, arêtes et faces de \mathfrak{C}^* , il faut s'assurer que ce polytope est un octaèdre régulier.

Proposition 2.6.15. *L'enveloppe convexe des points $G_{1,0}, G_{2,0}, G_{3,0}$ est un triangle équilatéral dont tous les côtés sont de longueur $\sqrt{2}$.*

Démonstration. Nous calculons les 3 vecteurs associés :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{G_{1,0}G_{2,0}} &= (-1, 1, 0), \\ \overrightarrow{G_{2,0}G_{3,0}} &= (0, -1, 1), \\ \overrightarrow{G_{3,0}G_{1,0}} &= (1, 0, -1).\end{aligned}$$

La longueur de tous les segments est égale à $\sqrt{2}$, ce qui suffit pour dire que cet ensemble est un triangle équilatéral. \square

Nous pouvons utiliser le même raisonnement pour démontrer que toutes les faces de \mathfrak{C}^* des triangles équilatéraux isométriques.

Proposition 2.6.16. *L'ensemble*

$$\mathfrak{C}^* = \mathfrak{O} = \text{Conv}(\{G_{i,j} : i \in \{1, 2, 3\}, j \in \{0, 1\}\})$$

est un octaèdre régulier.

Démonstration. Dans le cube, chaque face contient 4 arêtes et 4 sommets. Puisque $\psi_{\mathfrak{C}}$ renverse les inclusions, chaque sommet de \mathfrak{C}^* appartient à 4 arêtes et 4 faces. De plus, par la proposition 2.6.15, nous savons que chaque face est un triangle équilatéral. Ainsi, \mathfrak{C}^* est un octaèdre régulier. \square

Pour que le raisonnement soit complet, il est nécessaire de démontrer son unicité, à similitude près. Le chapitre suivant sera dédié à démontrer l'unicité du cube et de l'octaèdre régulier, ainsi que l'existence et l'unicité des autres polytopes réguliers que nous n'avons pas encore abordés.

Chapitre 3

Les autres polytopes réguliers

Dans ce chapitre, nous allons démontrer l'existence et l'unicité, à similitude près, des 5 polytopes réguliers. Nous revenons donc naturellement dans l'espace affine euclidien de dimension 3 et nous le munissons d'un repère orthonormé. Nous commencerons par une section concernant les transformations affines et plus précisément les isométries et similitudes. Nous obtiendrons des arguments qui nous aideront à montrer l'unicité à similitude près.

Très peu d'ouvrages donnent une démonstration complète de ces propositions. L'existence peut être réalisée de manière plus ou moins évidente en fonction du polytope que l'on cherche. Le cube a été naturellement trouvé à partir de ses faces carrées et par passage au dual, nous avons obtenu l'octaèdre. La construction du tétraèdre pourra être réalisée de manière assez directe étant donné qu'il ne possède que 4 sommets. Nous verrons d'ailleurs que l'unicité de ce polytope régulier est obtenue à partir de cette construction. Ensuite le dodécaèdre sera construit à partir des données que l'on a sur ce polytope régulier. Ici, les complications commenceront et nous ressentirons les limites de la théorie sur les convexes. Nous introduirons une nouvelle notion, les symétries d'un polytope, pour pallier ce manquement. Une fois que le dodécaèdre sera construit, l'unicité découlera également de cette construction. Une nouvelle fois grâce au passage au dual, nous montrerons l'existence de l'icosaèdre. Pour l'unicité de ce dernier polytope, nous n'aurons d'autre choix que d'appliquer le Théorème de Rigidité de Cauchy.

Comme vous le verrez dans ce chapitre, l'existence n'est pas la partie la plus difficile. Par contre, l'unicité demande un travail bien plus rigoureux, notamment pour l'octaèdre et l'icosaèdre. En effet, pour les trois autres, la construction ne laissera pas le choix, à similitude près. Mais la dualité ne permet pas de conserver l'unicité du nouveau polytope. C'est d'ailleurs à cause de cette deuxième partie que beaucoup de mathématicien.ne.s annoncent clairement la difficulté de cette tâche comme par exemple A. Cauchy [4], M. Berger [2], H.S.M Coxeter [7] ou encore R. Hartshorne [14]. Nous devrons à certains moments passer par des calculs longs, mais nécessaires car aucune démonstration ne peut être valable si elle se base sur des propriétés constatées sur le dessin, sans apporter une preuve rigoureuse.

Malgré la simplicité de leur apparence en dimension 3, il n'est pas facile de démontrer rigoureusement que les polytopes réguliers existent et sont uniques à similitude près.

3.1 Transformations affines

Toutes les propositions énoncées peuvent se retrouver dans le cours de P.Lecomte [18], donné en première année de bachelier à l'Université de Liège.

Définition 3.1.1. *Une transformation affine de \mathcal{A} est une application bijective préservant les combinaisons affines. En d'autres termes, $\mathcal{T} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ une transformation affine si et seulement si pour tous points A_1, \dots, A_n de \mathcal{A} et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des coefficients réels dont la somme vaut 1, on a*

$$\mathcal{T}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i A_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathcal{T}(A_i).$$

Nous donnons une caractérisation des applications affines dans un repère donné.

Proposition 3.1.2. *Soient une application $\mathcal{T} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ et un repère $\mathcal{R} = (0, (e_1, \dots, e_n))$ de \mathcal{A} et $A \in \mathcal{A}$. Les propositions suivantes sont équivalentes.*

- 1) *L'application \mathcal{T} est affine.*
- 2) *Il existe une unique application linéaire $\vec{\mathcal{T}} : \overrightarrow{\mathcal{A}} \rightarrow \overrightarrow{\mathcal{A}}$ telle que*

$$\mathcal{T}(X) = \mathcal{T}(A) + \vec{\mathcal{T}}(\overrightarrow{AX}),$$

pour tout $X \in \mathcal{A}$. Cette application est indépendante de A .

- 3) *L'application \mathcal{T} est représentée dans le repère \mathcal{R} par*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

où M est une matrice carrée de dimension n .

Les isométries sont des transformations affines particulières dont voici la définition.

Définition 3.1.3. *Une isométrie $I : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ est application affine qui préserve les distances. En d'autres termes, on a*

$$\forall X, Y \in \mathcal{A}, \quad d(I(X), I(Y)) = d(X, Y).$$

L'isométrie la plus connue est sans doute la translation. Cela correspond à l'idée du glissement d'un objet ou même de l'espace tout entier. Les translations ne seront cependant pas les plus utilisées pour ce mémoire car même si elles préservent les distances, lorsqu'on applique une translation I à un polytope \mathcal{P} , $I(\mathcal{P})$ ne sera jamais égal à \mathcal{P} sauf si cette translation est l'identité. Nous développerons plus tard les isométries I telles que $I(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$.

Proposition 3.1.4. *Une application affine $\mathcal{T} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ est une isométrie si et seulement si l'application linéaire $\vec{\mathcal{T}}$ est orthogonale, c'est à dire si elle conserve le produit scalaire.*

Nous obtenons une caractérisation pour les isométries.

Corollaire 3.1.5. *Une application est une isométrie si et seulement si, dans un repère orthonormé, elle est représentée sous la forme (3.1) où M est une matrice orthogonale. En particulier, si \mathcal{T} est une isométrie, alors elle est bijective et $\det(\vec{\mathcal{T}}) = \pm 1$.*

Nous pouvons classer les isométries en deux types : les isométries positives et négatives.

Remarque 3.1.6. *On parle d'isométrie positive lorsque le déterminant vaut 1 et isométrie négative lorsque le déterminant est égal à -1 .*

Les translations sont des isométries positives car elles peuvent s'écrire sous la forme $X \rightarrow X + u$ où u est le vecteur de la translation. La matrice M est alors l'identité, elle a donc son déterminant égal à 1.

Définition 3.1.7. *Une rotation \mathcal{T} est une isométrie positive qui admet un point fixe, c'est à dire un point C tel que $\mathcal{T}(C) = C$.*

Remarque 3.1.8. *En dimension 3, une rotation ne laisse pas un point fixe mais bien tout un axe. On l'appelle d'ailleurs l'axe de la rotation.*

Nous allons fixer le langage pour enlever toute ambiguïté concernant l'appellation : rotation d'angle α autour de l'axe de rotation.

Remarque 3.1.9. *Nous utiliserons par abus de langage : rotation d'angle α par rapport à l'axe de rotation. En réalité, une rotation n'a pas d'angle car il est impossible de distinguer l'angle α et l'angle $2\pi - \alpha$. Dans les propositions faisant appel à une rotation, nous ferons une remarque supplémentaire permettant de fixer la rotation.*

Définition 3.1.10. *Nous appellerons réflexion une isométrie négative.*

En dimension 3, les réflexions les plus connues sont par rapport à un point ou un plan. La forme générale d'une réflexion d'un point par rapport à un plan est détaillée dans l'annexe B.0.1. Nous utiliserons également des applications affines préservant les distances à un facteur près.

Définition 3.1.11. *Une similitude $S : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ est une application affine préservant les distances à un facteur près. En d'autres termes, pour tous points X et Y appartenant à \mathcal{A} et un réel k non nul, on a*

$$d(S(X), S(Y)) = k d(X, Y).$$

Nous caractérisons les similitudes. En effet, elles peuvent s'écrire comme la composée d'une homothétie avec une isométrie.

Proposition 3.1.12. *Toute similitude est la composée d'une homothétie avec une isométrie.*

Démonstration. Soit S une similitude de \mathcal{A} telle que pour tous points A et B appartenant à \mathcal{A} et k un réel non nul, on a

$$d(S(A), S(B)) = k d(A, B).$$

En prenant l'homothétie de centre $O \in \mathcal{A}$ et de rapport $\frac{1}{k}$, on obtient que l'application $h_{O, \frac{1}{k}} \circ S$ est affine et conserve les distances. Ainsi, c'est une isométrie que nous notons I . Au final, la similitude S se décompose en $h_{O, \frac{1}{k}}^{-1} \circ I = h_{O, k} \circ I$. \square

Toutes les transformations que nous venons d'évoquer, et en général les transformations affines, se comportent bien vis-à-vis des ensembles convexes, comme le montre le résultat suivant.

Proposition 3.1.13. *Si $\mathcal{T} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ une transformation affine et \mathcal{C} est un convexe alors $\mathcal{T}(\mathcal{C})$ est convexe.*

Démonstration. Soient $X', Y' \in \mathcal{T}(\mathcal{C})$ et $\lambda \in [0, 1]$, alors il existe $X, Y \in \mathcal{C}$ tels que $X' = \mathcal{T}(X)$ et $Y' = \mathcal{T}(Y)$. Montrons que $\lambda X' + (1 - \lambda)Y' \in \mathcal{T}(\mathcal{C})$. Comme \mathcal{T} est une transformation affine, elle préserve les combinaisons affines. On a, $\lambda\mathcal{T}(X) + (1 - \lambda)\mathcal{T}(Y) = \mathcal{T}(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \in \mathcal{T}(\mathcal{C})$. \square

Ici, nous aurions pu alléger les hypothèses car nous ne faisons nulle part appel au caractère bijectif de l'application affine. Nous pouvons compléter l'énoncé pour utiliser toutes les hypothèses.

Proposition 3.1.14. *Si $\mathcal{T} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ une transformation affine, $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{P} = \text{Conv}(P_1, \dots, P_n)$ un polytope, alors $\mathcal{T}(\mathcal{P}) = \text{Conv}(\mathcal{T}(P_1), \dots, \mathcal{T}(P_n))$ et $\text{Ext}(\mathcal{T}(\mathcal{P})) = \mathcal{T}(\text{Ext}(\mathcal{P}))$.*

Démonstration. Montrons d'abord que $\mathcal{T}(\mathcal{P}) = \text{Conv}(\mathcal{T}(P_1), \dots, \mathcal{T}(P_n))$. Par la proposition 3.1.13, $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ est un ensemble convexe. Comme il contient les points $\mathcal{T}(P_1), \dots, \mathcal{T}(P_n)$, il contient également leur enveloppe convexe.

Pour l'autre inclusion, on considère un point $X' \in \mathcal{T}(\mathcal{P})$. Alors, il existe $X \in \mathcal{P}$ tel que $X = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des coefficients appartenant à $[0, 1]$ dont la somme vaut 1 et $X' = \mathcal{T}(X)$. Comme \mathcal{T} préserve les combinaisons affines, nous obtenons que $\mathcal{T}(X) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathcal{T}(P_i)$ et donc X' appartient à $\text{Conv}(\mathcal{T}(P_1), \dots, \mathcal{T}(P_n))$.

Passons maintenant à la seconde partie de la preuve. Nous pouvons supposer sans perte de généralité que $\text{Ext}(\mathcal{P}) = \{P_1, \dots, P_n\}$. Supposons qu'il existe un i tel que $\mathcal{T}(P_i)$ ne soit pas un point extrême. Alors il est inclus dans l'intérieur relatif d'un segment de $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ ce qui signifie qu'il existe des points distincts $X', Y' \in \mathcal{T}(\mathcal{P})$ et $\lambda \in]0, 1[$ tels que

$$\mathcal{T}(P_i) = (1 - \lambda)X' + \lambda Y'.$$

Comme X' et Y' appartiennent à $\mathcal{T}(\mathcal{P})$, il existe des points distincts X, Y appartenant à \mathcal{P} tels que $X' = \mathcal{T}(X)$ et $Y' = \mathcal{T}(Y)$. L'application \mathcal{T} préserve les combinaisons affines, nous avons donc

$$\mathcal{T}(P_i) = \mathcal{T}((1 - \lambda)X + \lambda Y).$$

De plus, étant donné que \mathcal{T} est bijection, nous pouvons écrire $P_i = (1 - \lambda)X + \lambda Y$ où $\lambda \in]0, 1[$ et $X, Y \in \mathcal{P}$, ce qui est absurde car P_i est un point extrême. Nous avons montré que $\mathcal{T}(\text{Ext}(\mathcal{P})) \subset \text{Ext}(\mathcal{T}(\mathcal{P}))$.

Montrons maintenant que les points extrêmes de $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ sont exactement les points $\mathcal{T}(P_i)$. Procédons par l'absurde et supposons qu'il existe un point extrême X' de $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ qui ne soit pas de la forme $\mathcal{T}(P_i)$. Par définition, il existe $X \in \mathcal{P} \setminus \{P_1, \dots, P_n\}$ tel que $X' = \mathcal{T}(X)$. Comme X n'est pas un point extrême de \mathcal{P} , il est à l'intérieur relatif d'un segment de \mathcal{P} . Ainsi, il existe deux points distincts X_1, X_2 et $\lambda \in]0, 1[$ tels que $X' = \mathcal{T}((1 - \lambda)X_1 + \lambda X_2)$. Comme \mathcal{T} est une transformation affine, nous avons

$$X' = (1 - \lambda)\mathcal{T}(X_1) + \lambda\mathcal{T}(X_2).$$

Alors, X' est dans l'intérieur relatif d'un segment de $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ ce qui est absurde. \square

La dernière proposition de cette section est cruciale pour obtenir l'unicité à similitude près d'un polytope régulier. Elle donne une correspondance entre faces du polytope et faces de l'image d'une isométrie.

Proposition 3.1.15. *Soit τ une isométrie d'un polytope \mathcal{P} . Alors l'image d'une k -face est une k -face.*

Démonstration. Soient \mathcal{F} une k -face, τ une isométrie et $O \in \mathcal{P}$. Il existe un hyperplan d'appui \mathcal{H} tel que $\mathcal{H} \cap \mathcal{P} = \mathcal{F}$. Considérons l'hyperplan d'équation $\mathcal{H} = \left\{ X : \langle \overrightarrow{OX}, n \rangle = 0 \right\}$, cela implique que $O \in \mathcal{F}$. Sans perte de généralité, nous supposons que

$$\mathcal{P} \subset \left\{ X : \langle \overrightarrow{OX}, n \rangle \leq 0 \right\}.$$

On a $\tau(\mathcal{F}) = \tau(\mathcal{H} \cap \mathcal{P}) = \tau(\mathcal{H}) \cap \tau(\mathcal{P})$. De plus, $\tau(\mathcal{H})$ est un hyperplan que l'on peut caractériser par

$$\tau(\mathcal{H}) = \left\{ Y : \tau^{-1}(Y) \in \mathcal{H} \right\}.$$

Comme τ est une isométrie, on a

$$\begin{aligned} Y \in \tau(\mathcal{H}) &\Leftrightarrow \left\langle \overrightarrow{O\tau^{-1}(Y)}, n \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \left\langle \overrightarrow{\tau(O)Y}, \vec{\tau}(n) \right\rangle = 0. \end{aligned}$$

Donc, $\tau(\mathcal{H})$ est l'hyperplan déterminé par le point $\tau(O)$ et la normale $\vec{\tau}(n)$. Il reste à montrer que $\tau(\mathcal{P})$ est dans un demi espace déterminé par $\tau(\mathcal{H})$. Soit $X' \in \tau(\mathcal{P})$, alors il existe un point $X \in \mathcal{P}$ tel que $X' = \tau(X)$. Nous savons que $\tau(O) \in \tau(\mathcal{H})$ car $O \in \mathcal{F}$ et $\tau(O) \in \tau(\mathcal{F})$. Comme τ est une isométrie, $\vec{\tau}$ préserve le produit scalaire et on obtient

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{\tau(O)X'}, \vec{\tau}(n) \right\rangle &= \left\langle \overrightarrow{\tau(O)\tau(X)}, \vec{\tau}(n) \right\rangle \\ &= \left\langle \vec{\tau}(\overrightarrow{OX}), \vec{\tau}(n) \right\rangle \\ &= \left\langle \overrightarrow{OX}, n \right\rangle \\ &\leq 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Nous avons donc que le polytope $\tau(\mathcal{P})$ est inclus dans un des demi-espaces associés à $\tau(\mathcal{H})$. Ainsi, l'hyperplan $\tau(\mathcal{H})$ est d'appui et donc $\tau(\mathcal{F})$ est une face de $\tau(\mathcal{P})$. Enfin, on a $\dim(\tau(\mathcal{F})) = \dim(\mathcal{F})$, car d'une part $\tau(\text{Aff}(\mathcal{F})) = \text{Aff}(\tau(\mathcal{F}))$ et d'autre part, une isométrie applique toute variété affine sur une variété affine de même dimension. \square

Cette proposition s'applique également lorsque τ est une similitude, moyennant une légère modification de la preuve.

Remarque 3.1.16. Si τ est une similitude et \mathcal{P} un polytope. Alors une k -face est envoyée sur une k -face. La démonstration reste vraie car $\langle \vec{\tau}(u), \vec{\tau}(v) \rangle = k^2 \langle u, v \rangle$ et le coefficient k^2 préserve l'inégalité (3.2).

D'ailleurs, les similitudes préservent également la régularité des k -faces. Nous le démontrons pour les faces de dimension 2 car ce sont celles qui nous intéressent dans ce chapitre.

Proposition 3.1.17. L'image d'un polygone régulier à n côtés par une similitude, est un polygone régulier à n côtés.

Démonstration. Soient S une similitude de facteur k et \mathcal{P} un polygone régulier à n côtés. Alors la similitude S préserve les angles. En effet, soient u et v deux vecteurs directeurs des côtés adjacents de \mathcal{P} , formant l'angle α et soit α' l'angle formé par les vecteurs directeurs $\vec{S}(u)$ et $\vec{S}(v)$ des côtés adjacents de $S(\mathcal{P})$. Comme toute similitude est la composée d'une homothétie et d'une isométrie, on a

$$\langle \vec{S}(u), \vec{S}(v) \rangle = k^2 \langle u, v \rangle. \quad (3.3)$$

En utilisant l'équation 3.3, on obtient

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} \\ &= \frac{\langle \vec{S}(u), \vec{S}(v) \rangle}{k^2 \| \vec{S}(u) \| \| \vec{S}(v) \|} \frac{k^2}{\| \vec{S}(u) \| \| \vec{S}(v) \|} \\ &= \cos(\alpha'). \end{aligned}$$

Étant donné que les angles d'un polygone sont strictement inférieurs à π , nous obtenons que $\alpha = \alpha'$. \square

3.2 Unicité du cube et de l'octaèdre régulier

Même si l'existence du cube a été montrée durant le premier chapitre, l'unicité à similitude près n'a toujours pas été démontrée. Nous commençons cette section par quelques considérations concernant les similitudes. Nous fixons les notations en précisant que le plan d'équation $z = 0$ s'appellera le plan XY . Toutes les informations concernant les polygones réguliers seront considérées comme acquises pour ce mémoire. Le chapitre 1 du livre de

H.S.M Coxeter [7] développe des arguments pour démontrer certaines propriétés sur les polygones réguliers.

Nous allons montrer qu'en appliquant une similitude à un cube quelconque, nous obtenons le cube de référence obtenu dans la section 1.2. Pour cela, nous allons montrer qu'il existe une similitude appliquant un carré sur un autre carré. Ces deux carrés se trouvent potentiellement dans deux plans différents, nous devons donc d'abord montrer qu'il existe une isométrie appliquant le premier plan sur l'autre.

Proposition 3.2.1. *Étant donnés deux plans d'un espace de dimension 3, il existe une isométrie appliquant l'un sur l'autre.*

Démonstration. Fixons un repère orthonormé et montrons qu'il existe une isométrie qui applique le plan XY sur un plan donné quelconque π . Soient un point $O' \in \pi$ et deux vecteurs directeurs orthonormés v_1 et v_2 de $\overrightarrow{\pi}$. Alors l'application affine définie par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & a \\ v_{12} & v_{22} & b \\ v_{13} & v_{23} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o'_1 \\ o'_2 \\ o'_3 \end{pmatrix}$$

où on choisit a, b, c pour que la matrice soit orthogonale, applique l'origine du repère sur O' , le point de coordonnée $(1, 0, 0)$ sur $O' + v_1$ et le point de coordonnée $(0, 1, 0)$ sur $O' + v_2$. Le plan XY est donc envoyé sur le plan contenant ces trois images, c'est-à-dire le plan π .

Nous pouvons maintenant montrer qu'il existe une isométrie appliquant un plan π sur un autre plan π' . Grâce au début de la preuve, nous savons qu'il existe deux isométries I et I' qui appliquent le plan XY sur les plans π et π' respectivement. Ainsi, l'isométrie $I^{-1} \circ I'$ applique le plan π sur π' . \square

On peut particulariser la proposition 3.2.4 aux carrés.

Proposition 3.2.2. *L'image d'un carré par une similitude est un carré.*

On peut maintenant passer à la propriété d'intérêt pour le cube.

Proposition 3.2.3. *Dans l'espace de dimension 3, étant donnés deux carrés, il existe une similitude qui applique l'un sur l'autre.*

Démonstration. Vu les propositions 3.2.1 et 3.2.2, on peut supposer que les carrés sont dans un même plan. Fixons un repère orthonormé de ce plan et montrons qu'il existe une similitude appliquant le carré défini par $C_0 : (0, 0)$, $C_1 : (1, 0)$, $C_2 : (1, 1)$, $C_3 : (0, 1)$ sur tout carré C'_0, C'_1, C'_2, C'_3 . Il existe une unique application affine I telle que $I(C_0) = C'_0$, $I(C_1) = C'_1$, $I(C_3) = C'_3$. On a alors $I(C_2) = C'_2$, car $C_2 = C_1 + C_3 - C_0$ et $C'_2 = C'_1 + C'_3 - C'_0$.

De plus, l'application affine I est une similitude car

$$\begin{aligned} \overrightarrow{I(C_0C_1)} &= \overrightarrow{C'_0C'_1}, \\ \overrightarrow{I(C_0C_3)} &= \overrightarrow{C'_0C'_3}, \end{aligned}$$

et donc

$$\langle \overrightarrow{I}(\overrightarrow{C_0C_i}), \overrightarrow{I}(\overrightarrow{C_0C_j}) \rangle = \langle \overrightarrow{C'_0C'_i}, \overrightarrow{C'_0C'_j} \rangle = c^2 \delta_{ij},$$

où c est la longueur des côtés du carré C'_0, C'_1, C'_2, C'_3 . \square

Passons maintenant à l'unicité du cube, à similitude près. Pour commencer, nous écrivons une propriété vraie pour tous les polytopes réguliers. Dans la suite, nous allons appliquer des similitudes aux polytopes réguliers. Il faut s'assurer que la transformation n'en change pas les caractéristiques.

Proposition 3.2.4. *L'image par une similitude d'un polytope régulier de symbole $\{r, s\}$ est un polytope régulier de symbole $\{r, s\}$.*

Démonstration. Soit \mathcal{P} un polytope régulier ayant des faces régulières à r arêtes et tel que chaque sommet appartient à s faces et soit S une similitude. Alors $S(\mathcal{P})$ est un polytope dont les sommets, arêtes et faces sont les images par S des sommets, arêtes et faces de \mathcal{P} par la remarque 3.1.16.

Si P' est un sommet de $S(\mathcal{P})$, alors par la proposition 3.1.14, il existe un sommet $P \in \mathcal{P}$ tel que $S(P) = P'$. Si $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r$ sont les s faces contenant P , alors $S(\mathcal{F}_1), \dots, S(\mathcal{F}_r)$ sont s faces (distinctes) contenant $S(P)$. Donc P' appartient à au moins s faces. Il ne peut y en avoir plus, sinon le même argument pour S^{-1} donnerait plus que s faces contenant P .

Par la proposition 3.1.17, l'image d'un polygone régulier par une similitude est un polygone régulier ce qui termine la preuve. \square

Nous énonçons également le théorème d'Euler, une preuve se trouve dans le chapitre 5 du livre "Polyhedra" de P.R. Cromwell [8].

Théorème 3.2.5 (Théorème d'Euler). *Soit \mathcal{P} un 3-polytope. En notant F le nombre de faces, A le nombre d'arêtes et S le nombre de sommets de \mathcal{P} , alors on a*

$$S + F = A + 2.$$

La formule s'étend aux polytopes de dimension supérieure, une preuve se trouve dans le livre de Bronsted au chapitre 12 [3].

Nous démontrons les deux dernières propositions subsidiaires pour arriver à l'unicité du cube. A partir du symbole de Schläfli d'un polytope et grâce à la formule d'Euler, nous pouvons trouver le nombre de sommets, d'arêtes et de faces de ce polytope.

Proposition 3.2.6. *Soit un polytope \mathcal{P} ayant $\{p, q\}$ comme symbole de Schläfli. Alors, on a*

$$F = \frac{4q}{2(p+q)-pq}, \quad A = \frac{2pq}{2(p+q)-pq}, \quad S = \frac{4p}{2(p+q)-pq}.$$

Démonstration. Le symbole $\{p, q\}$ indique que les faces sont des polygones réguliers à p côtés et chaque sommet appartient à q faces. Nous savons que pF compte chaque arête deux fois, de même que qS :

$$pF = 2A = qS. \tag{3.4}$$

En regroupant la formule d'Euler et (3.4), nous retrouvons un système de 3 équations et 3 inconnues S, A et F , dont la solution unique fournit les valeurs de l'énoncé. \square

Nous allons maintenant montrer que le nombre de faces contenant un sommet P est égal au nombre d'arêtes contenant ce sommet. Nous aurions pu à partir des propositions précédentes le démontrer pour les polyèdres ayant des faces régulières et chaque sommet de même degré. Ici, nous généralisons à un polytope quelconque de dimension 3.

Proposition 3.2.7. *Soit \mathcal{P} un 3-polytope. Chaque sommet appartient à un même nombre d'arêtes et de faces.*

Démonstration. Soient P un sommet, f_P le nombre de faces contenant P et a_P le nombre d'arêtes contenant P . Dans chaque face contenant P , le sommet P appartient à 2 arêtes de cette face. De plus, chaque arête contenant P appartient à exactement deux faces contenant P par la proposition 2.4.19. On a donc

$$a_P = \frac{2f_P}{2} = f_P.$$

□

Passons maintenant à l'unicité du cube. Plus précisément, le résultat est le suivant.

Proposition 3.2.8. *Il existe, à similitude près, un unique polytope régulier dont le symbole de Schläfli est $\{4, 3\}$.*

Démonstration. Nous avons construit un polytope régulier de référence correspondant à ce symbole. C'est le cube \mathfrak{C} que nous avons étudié à la section 1.2.

Considérons maintenant un polytope régulier \mathcal{C} ayant le symbole $\{4, 3\}$. On considère une face de \mathcal{C} , c'est un carré. Par la proposition 3.2.3, il existe une similitude S de \mathcal{A} qui applique ce carré sur le carré $\mathcal{F}_0 = \text{Conv}(S_{001}, S_{011}, S_{111}, S_{101})$. Puisque \mathcal{F}_0 est l'image d'une face de \mathcal{C} , on sait que c'est une face de $S(\mathcal{C})$ et donc que $S(\mathcal{C})$ appartient à un demi-espace déterminé par \mathcal{F}_0 et contenant \mathfrak{C} . Quitte à appliquer une réflexion par rapport au plan de la face, on peut supposer que $\mathcal{D} \equiv z \geq -1$ et $S(\mathcal{C}) \subset \mathcal{D}$. Nous pouvons alors montrer que $S(\mathcal{C}) = \mathfrak{C}$.

Le sommet S_{001} de $S(\mathcal{C})$ appartient à 3 faces carrées, l'une d'elle est \mathcal{F}_0 . L'arête $[S_{001}, S_{101}]$ est l'intersection de 2 faces de $S(\mathcal{C})$, \mathcal{F}_0 et une autre face que nous notons \mathcal{F}_1 . De même, $[S_{001}, S_{011}]$ s'écrit $\mathcal{F}_0 \cap \mathcal{F}_2$ pour une face \mathcal{F}_2 .

Les faces \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 sont distinctes car si $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$, cette face a trois sommets en commun avec \mathcal{F}_0 , donc ces faces sont égales ce qui est impossible. Dans \mathcal{F}_1 , le sommet S_{001} appartient à deux arêtes $[S_{001}, S_{101}]$ et $[S_{001}, C']$ qui sont des arêtes de $S(\mathcal{C})$. Comme ci-dessus, on montre que $[S_{001}, C']$ n'est pas inclus dans \mathcal{F}_0 . Or, il est inclus dans exactement 2 faces. Comme les faces contenant S_{001} sont exactement $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$, l'arête $[S_{001}, C']$ est incluse dans la face \mathcal{F}_2 . Dès lors, cette arête est perpendiculaire à $[S_{001}, S_{101}]$ et $[S_{001}, S_{011}]$. De plus, $|S_{001}C'| = 2$ et vu l'hypothèse sur le demi-espace, on a $C' = S_{000}$. En procédant de la sorte pour les autres sommets de \mathcal{F}_0 , on trouve 4 sommets de $S(\mathcal{C})$ qui coïncident avec ceux de \mathfrak{C} . De plus, $S(\mathcal{C})$ n'admet pas d'autre sommet, comme on le voit en utilisant la proposition 3.2.6. □

Nous savons déjà que l'octaèdre existe en tant que dual du cube. Cependant, le passage au dual ne nous permet pas de prouver l'unicité de l'octaèdre à partir de celle du cube. Nous devons donc chercher une manière de prouver que lorsqu'on construit un octaèdre, les choix possibles pour les sommets sont uniques, à similitude près. Pour ce polytope, nous utiliserons la justification qui se trouve dans le livre d'Hartshorne [14]. Rappelons la forme trouvée pour l'octaèdre, nous avions l'enveloppe convexe de 6 points qui sont exactement les sommets de \mathfrak{O} :

$$\mathfrak{O} = \text{Conv} (\{G_{i,j} : i \in \{1, 2, 3\}, j \in \{0, 1\}\}),$$

où les points $G_{i,j}$ sont les centres de gravité des faces de \mathfrak{C} .

Proposition 3.2.9. *Il existe, à similitude près, un unique polyèdre régulier correspondant au symbole de Schläfli $\{3, 4\}$.*

Démonstration. Par la proposition 2.6.16, le polytope \mathfrak{O} est un octaèdre régulier et il correspond au polytope défini par le symbole de Schläfli $\{3, 4\}$.

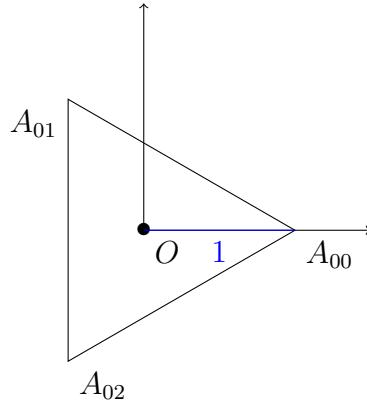
Nous allons maintenant montrer l'unicité. Soit \mathcal{O} un polytope régulier correspondant au symbole de Schläfli $\{3, 4\}$. Montrons tout d'abord que \mathcal{O} admet deux sommets opposés. Soit A un sommet. Comme il y a quatre faces triangulaires qui rencontrent A , on a quatre sommets adjacents B, C, D, E . Maintenant, en B on a déjà deux des quatre faces (ABC, ABE) et trois des quatre côtés ($[A, B], [C, B], [E, B]$), on doit donc simplement ajouter un sommet F pour que BCF et BDF soient des triangles équilatéraux. On regarde maintenant au sommet C , on a déjà trois des quatre faces (CAB, CDA, CBF). Il en suit que CDF doit être un triangle équilatéral formant la quatrième face. De manière similaire, DEF est la quatrième face en E et notre figure est complète. Ainsi, notre figure est délimitée par huit triangles équilatéraux et les sommets A et F sont opposés.

Montrons que les 4 sommets équidistants de A et F forment un carré. Par hypothèse, ils sont sur le plan médiateur du segment $[A, F]$. Comme ils sont également équidistants de A , les points se trouvent sur la sphère de centre A qui intersecte le plan médiateur en un cercle. Ainsi, B, C, D, E sont sur ce cercle. Mais ces quatre sommets sont également équidistants les uns des autres. Quatre points se situant sur un même cercle et étant équidistants les uns des autres forment un carré.

Nous savons maintenant ces sommets forment un carré. Ainsi, par la proposition 3.2.3, il existe une similitude envoyant ce carré sur le carré de l'octaèdre \mathfrak{O} ayant comme sommets G_{10}, G_{11}, G_{20} et G_{21} . Soit O le centre du carré, montrons que la droite OF est perpendiculaire au carré. En effet, comme F est équidistant des sommets, le segment $[O, F]$ est la hauteur et la médiane des triangles $FG_{10}G_{11}$ et $FG_{20}G_{21}$, ainsi il est perpendiculaire aux deux diagonales du carré et donc au plan associé. Le point F se trouve alors sur l'axe z . Par construction, il n'y a que deux sommets possibles respectant les conditions et ce sont G_{30} et G_{31} . \square

3.3 Le tétraèdre

Nous pouvons ensuite continuer avec la construction du tétraèdre régulier. Nous savons qu'un tel polytope, si il existe, a des faces triangulaires équilatérales isométriques. Nous démarrons naturellement avec un repère orthonormé et une face qui est un triangle équilatéral dans le plan XY .



Ici, nous avons la première face de notre ensemble et les 3 sommets associés.

Proposition 3.3.1. *Les coordonnées des sommets du triangle sont*

$$A_{0k} = \left(\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right), \sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right), 0 \right) \quad k \in \{0, 1, 2\}.$$

Proposition 3.3.2. *La longueur d'un côté du triangle vaut $\sqrt{3}$.*

Démonstration. Par le théorème d'Al-Kashi, on obtient

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{A_{00}A_{01}}|^2 &= |\overrightarrow{OA_{00}}|^2 + |\overrightarrow{OA_{01}}|^2 - 2|\overrightarrow{OA_{00}}||\overrightarrow{OA_{01}}| \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= 2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 3. \end{aligned}$$

□

Pour trouver le quatrième sommet, nous allons prendre l'intersection de deux plans médiateurs des côtés de la base. C'est nécessaire, car ce quatrième sommet doit être équidistant des sommets de la base. Grâce à cela, nous n'aurons plus qu'à trouver le sommet tel que la distance entre celui-ci et un sommet de la base fasse $\sqrt{3}$.

Proposition 3.3.3. *Le plan médiateur du segment $[A_{00}, A_{01}]$ a pour équation cartésienne*

$$\pi_1 \equiv -3x + \sqrt{3}y = 0.$$

Démonstration. Par définition, un plan médiateur passe par le milieu du segment et est perpendiculaire à celui-ci. Soit M_1 milieu du segment $[A_{00}, A_{01}]$ qui a pour coordonnées $(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, 0)$. Soit $\overrightarrow{A_{00}A_{01}}$ un vecteur normal au plan médiateur de $[A_{00}, A_{01}]$ dont les composantes sont $(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$.

Au final, l'équation du plan médiateur est donnée par

$$\pi_1 \equiv \frac{-3}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + k = 0.$$

Comme M_1 appartient à π , on a $k = 0$. □

Le même procédé peut être appliqué pour la proposition suivante.

Proposition 3.3.4. *Le plan médiateur du segment $[A_{01}, A_{02}]$ a pour équation cartésienne*

$$\pi_2 \equiv \sqrt{3}y = 0.$$

En intersectant ces deux plans médiateurs, nous obtenons une droite qui sera alors formée de points équidistants des 3 sommets de la base.

Proposition 3.3.5. *Le droite d d'équation*

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

est l'ensemble des points équidistants des 3 sommets de la base triangulaire.

Démonstration. On sait que l'ensemble des points du plan π_1 sont équidistants des sommets A_{00}, A_{01} et l'ensemble des points du plan π_2 sont équidistants des sommets A_{01}, A_{02} . Un point est donc équidistant des trois sommets si, et seulement si il est à l'intersection de ces deux plans. L'intersection de ces deux plans est une droite d'équation

$$\pi_1 \cap \pi_2 \equiv \begin{cases} -3x + \sqrt{3}y = 0 \\ \sqrt{3}y = 0. \end{cases}$$

□

Proposition 3.3.6. *Le dernier sommet A_{10} a pour coordonnées*

$$(0, 0, \pm\sqrt{2}).$$

Démonstration. Le sommet que nous cherchons se trouve sur la droite d définie à la proposition 3.3.5. En effet, on veut un sommet qui soit équidistant des 3 autres sommets. Il faut de plus que la distance de ce dernier sommet aux sommets de la base soit égale à $\sqrt{3}$, pour obtenir des triangles équilatéraux. Nous avons alors A_{10} qui a comme coordonnées $(0, 0, z)$ avec comme condition que $d(A_{10}, A_{00}) = \sqrt{3}$. On obtient

$$\begin{aligned} \sqrt{1^2 + z^2} &= \sqrt{3} \\ z^2 &= 2. \end{aligned}$$

□

Remarque 3.3.7. Nous avons donc deux choix possibles pour le dernier sommet du tétraèdre régulier. La réflexion par rapport au plan XY permet d'obtenir le second choix à partir du premier et inversement.

Nous décidons alors de prendre de sommet A_{10} ayant une cote positive. Pour synthétiser, les coordonnées des sommets du "tétraèdre"¹ sont

$$\begin{array}{lcl} A_{00} & = & (1, 0, 0) \\ A_{01} & = & \left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) \\ A_{02} & = & \left(\frac{-1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) \\ A_{10} & = & (0, 0, \sqrt{2}) \end{array}$$

Maintenant que la construction est terminée, il faut tout de même vérifier que l'enveloppe convexe de ces 4 points donne un tétraèdre régulier. Ici, par abus de langage, j'ai appelé ces 4 points les sommets de mon ensemble. Cependant, je n'ai toujours pas montré que ces points étaient des sommets.

Définition 3.3.8. Nous notons \mathfrak{T} le polytope $\text{Conv}(A_{00}, A_{01}, A_{02}, A_{10})$.

Proposition 3.3.9. L'ensemble \mathfrak{T} est un tétraèdre régulier.

En d'autres mots, nous devons vérifier que les points obtenus sont bien les sommets du tétraèdre, qu'ils sont de degrés 3 et que les faces sont bien des triangles équilatéraux isométriques. Pour commencer, nous allons démontrer que les points obtenus sont exactement les sommets de \mathfrak{T} .

Proposition 3.3.10. Les points $A_{00}, A_{01}, A_{02}, A_{10}$ sont les uniques sommets de \mathfrak{T} .

Démonstration. Nous savons déjà par la proposition 2.3.18 que les points extrêmes de \mathfrak{T} appartiennent à $\{A_{00}, A_{01}, A_{02}, A_{10}\}$. Comme ceux-ci sont en nombre fini, nous avons que l'ensemble \mathfrak{T} est un polytope. De plus, comme tout polytope est un ensemble polyédral borné, les points extrêmes sont exactement les sommets de \mathfrak{T} .

En prenant la boule $\mathcal{B}(G, r)$ de centre $G = (0, 0, \frac{\sqrt{2}}{4})$ et de rayon $r = |\overrightarrow{A_{00}G}|$ où G est le centre de gravité des 4 points, nous savons que $\mathfrak{T} \subset \mathcal{B}(G, r)$. En effet, cette boule contient les 4 points et est convexe, elle contient donc leur enveloppe convexe. Les plans tangents à la sphère associée en ces 4 points sont des plans d'appuis pour $\mathcal{B}(G, r)$ et donc pour \mathfrak{T} également. De plus, chacun de ces plans ne rencontre \mathfrak{T} qu'en un point. Ainsi, les 4 points sont les uniques sommets de \mathfrak{T} . \square

Ici, nous allons démontrer que toute face de \mathfrak{T} est une enveloppe convexe de 3 sommets de \mathfrak{T} .

Proposition 3.3.11. Les faces de \mathfrak{T} ne peuvent être que les enveloppes convexes de trois sommets de \mathfrak{T} .

1. Je le laisse entre guillemets car même si nous construisons à partir des propriétés du tétraèdre, il faudra encore montrer que l'enveloppe convexe de ces 4 points forment bien un tétraèdre.

Démonstration. Soit \mathcal{F} une face de \mathfrak{T} . Par la remarque 2.4.25 et comme toute face d'un polytope est un polytope, nous savons que \mathcal{F} est l'enveloppe convexe de 3 sommets de \mathfrak{T} . En effet, en prenant des paires de sommets de \mathfrak{T} , leur enveloppe convexe est incluse dans une droite et cela ne peut être une face par définition. Si nous prenons l'enveloppe convexe des 4 points, nous retrouvons le polytope \mathfrak{T} et cela ne peut être une face de \mathfrak{T} . \square

Nous ne sommes pas encore certain.es que l'enveloppe convexe de chaque triplet soit bien une face de \mathfrak{T} . Avant cette proposition, montrons d'abord qu'aucun sommet ne peut être une combinaison affine des autres sommets. Nous avons déjà rencontré cette notion, c'est l'indépendance affine de points.

Proposition 3.3.12. *Les sommets de \mathfrak{T} sont affinement indépendants.*

Démonstration. Soient $\lambda_{00}, \lambda_{01}, \lambda_{02}, \lambda_{10} \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} \lambda_{00}A_{00} + \lambda_{01}A_{01} + \lambda_{02}A_{02} + \lambda_{10}A_{10} = 0 \\ \lambda_{00} + \lambda_{01} + \lambda_{02} + \lambda_{10} = 0. \end{cases}$$

Si nous décomposons le système par rapport aux coordonnées, nous avons le système suivant

$$\begin{cases} \lambda_{00} - \frac{\lambda_{01}}{2} - \frac{\lambda_{02}}{2} = 0 \\ \frac{\sqrt{3}\lambda_{01}}{2} - \frac{\sqrt{3}\lambda_{02}}{2} = 0 \\ \lambda_{10} = 0 \\ \lambda_{00} + \lambda_{01} + \lambda_{02} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_{01} = \lambda_{02} \\ \lambda_{10} = 0 \\ \lambda_{00} - \lambda_{01} = 0 \\ \lambda_{00} + 2\lambda_{01} = 0 \end{cases}$$

La combinaison des deux dernières équations donnent $\lambda_{01} = 0$, ce qui implique que tous les coefficients sont nuls. Cette conclusion montre que les points sont affinement indépendants. \square

Nous avons 4 sommets, si nous cherchons les triplets parmi 4 points, nous avons au maximum 4 faces pour \mathfrak{T} . Montrons que toutes ces enveloppes convexes sont bien des faces.

Proposition 3.3.13. *Les faces de \mathfrak{T} sont exactement les enveloppes convexes de 3 sommets de \mathfrak{T} .*

Démonstration. Il faut trouver un hyperplan contenant trois points non alignés, et tel qu'un des demi-espaces ainsi déterminé contienne le 4ème point. La construction est évidente à partir des sommets de \mathfrak{T} . \square

Nous avons donc 4 faces reprises ci-dessous :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= \text{Conv}(A_{00}, A_{01}, A_{02}), \quad \mathcal{F}_2 = \text{Conv}(A_{00}, A_{01}, A_{10}), \\ \mathcal{F}_3 &= \text{Conv}(A_{00}, A_{02}, A_{10}), \quad \mathcal{F}_4 = \text{Conv}(A_{01}, A_{02}, A_{10}). \end{aligned}$$

Proposition 3.3.14. *Les arêtes de \mathfrak{T} sont exactement les intersections de deux faces de \mathfrak{T} .*

Au final, il y a 6 intersections possibles, elles donnent donc 6 arêtes pour \mathfrak{T} et nous savons qu'il ne peut pas y en avoir plus car elles sont toutes de cette forme là. Nous avons donc trouvé les sommets, arêtes et faces de \mathfrak{T} , cela a été nettement plus rapide que pour le cube grâce à toute la théorie que nous avons construite et heureusement ! Sinon qu'elle serait l'utilité d'une théorie ? Démontrons maintenant que cet ensemble est bien un tétraèdre régulier.

Proposition 3.3.15. *L'ensemble \mathfrak{T} est un tétraèdre régulier.*

Démonstration. Les faces étant énumérées, chaque sommet appartient à 3 faces différentes. Il faut maintenant montrer que les faces sont des triangles équilatéraux, isométriques. Par la construction de départ, nous savons que la face $F_1 = \text{Conv}(A_{00}, A_{01}, A_{02})$ est un triangle équilatéral de longueur de côté égale à $\sqrt{3}$. Montrons le pour la face F_2 , les deux dernières faces se font de manière analogue. Nous calculons la longueur des arêtes, nous obtenons

$$|\overrightarrow{A_{00}A_{01}}| = \sqrt{3} = |\overrightarrow{A_{01}A_{10}}| = |\overrightarrow{A_{00}A_{10}}|.$$

Au final, le triangle est équilatéral et nous remplissons toutes les conditions pour être un tétraèdre régulier. \square

Nous venons de montrer l'existence d'un tel polytope, la question naturelle serait de se demander si celui-ci est unique à similitude près ? Encore une fois, la construction va nous permettre de montrer que notre polytope est unique. Pour cela, nous aurons besoin d'une proposition déjà utilisée pour démontrer l'unicité du cube et que nous devons modifier pour le tétraèdre. Nous ne donnerons qu'une idée de la preuve qui est à peu de chose près semblable à celle déjà introduite à la proposition 3.2.3.

Proposition 3.3.16. *Dans l'espace de dimension 3, étant donnés deux triangles équilatéraux, il existe une similitude qui applique l'un sur l'autre.*

Idée de la preuve : Nous pouvons supposer que les deux triangles équilatéraux sont dans un même plan. Fixons un repère orthonormé de ce plan et montrons qu'il existe une similitude appliquant le triangle équilatéral défini par $A_0 : (1, 0)$, $A_1 : (-1, 0)$, $A_2 : (0, \sqrt{3})$ sur tout triangle équilatéral A'_0, A'_1, A'_2 . Si on prend l'application affine qui applique A_0 sur A'_0 , A_1 sur A'_1 et A_2 sur A'_2 , on peut montrer que c'est une similitude en montrant qu'elle conserve les longueurs et produits scalaires des vecteurs de bases, à une constante près.

Passons à la dernière proposition de cette section.

Proposition 3.3.17. *Il existe, à similitude près, un unique polyèdre régulier correspondant au symbole de Schläfli $\{3, 3\}$.*

Démonstration. Par la proposition 3.3.15, le polytope \mathfrak{T} est un tétraèdre régulier, il correspond au polytope défini par le symbole de Schläfli $\{3, 3\}$.

Montrons maintenant l'unicité. Soit \mathcal{T} un tétraèdre correspondant au symbole $\{3, 3\}$. Par les propositions 3.2.1 et 3.3.16, nous savons qu'il existe une similitude S de \mathcal{A} envoyant

une face de \mathcal{T} sur la face de référence $\mathcal{F}_0 = \text{Conv}(A_{00}, A_{01}, A_{02})$ pour \mathfrak{T} . Puisque \mathcal{F}_0 est l'image d'une face de \mathcal{T} par S , on sait que c'est une face de $S(\mathcal{T})$ et donc que $S(\mathcal{T})$ appartient à un demi-espace déterminé par \mathcal{F}_0 et contenant \mathfrak{T} . Quitte à appliquer une réflexion par rapport au plan de la face, on peut supposer que $\mathcal{D} \equiv z \geq 0$ et $S(\mathcal{T}) \subset \mathcal{D}$. Il nous suffit alors de montrer que $S(\mathcal{T}) = \mathfrak{T}$.

Nous savons que les trois sommets de la base appartiennent à 3 arêtes par la proposition 3.2.7. De plus, comme chaque sommet appartient déjà à deux arêtes de la face \mathcal{F}_0 , il existe un sommet A' qui soit équidistant des trois autres sommets tel que $|\overrightarrow{A_{00}A'}| = |\overrightarrow{A_{00}A_{01}}|$. Par construction, il n'y a qu'un seul choix possible. \square

3.4 Le dodécaèdre

Construisons maintenant le dodécaèdre régulier. Toujours en partant de ce que nous savons sur ce polytope régulier, nous démarrons avec un pentagone régulier qui se situe dans le plan XY , inscrit à un cercle centré en l'origine de rayon 1.

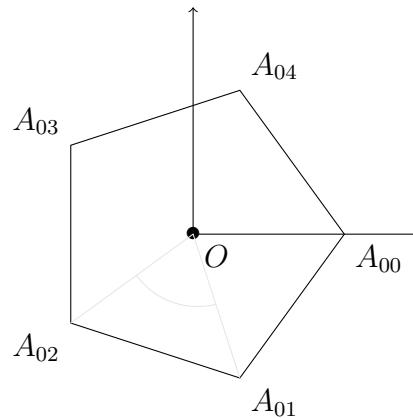


FIGURE 3.1 – Pentagone construit dans le plan XY .

Voici quelques propriétés concernant les angles d'un pentagone régulier. Comme je l'ai déjà annoncé, toutes les propriétés sur les polygones réguliers ne seront pas démontrées ici, mais vous pouvez les trouver dans l'ouvrage de H.S.M Coxeter [7].

Proposition 3.4.1. *Soient A_{01}, A_{02} et A_{03} , 3 sommets consécutifs d'un pentagone régulier². On a alors*

- 1) $|\widehat{A_{01}O A_{02}}| = \frac{2\pi}{5}$,
- 2) $|\widehat{A_{01}A_{02}O}| = \frac{3\pi}{10}$,
- 3) $|\widehat{A_{01}A_{02}A_{03}}| = 2|\widehat{A_{01}A_{02}O}|$.

Nous allons énumérer les premiers sommets du dodécaèdre régulier. Ce sont les sommets d'un pentagone régulier que nous fixons dans le plan XY .

2. Cela veut dire que $[A_{00}, A_{01}], [A_{01}, A_{02}]$ et $[A_{02}, A_{03}]$ sont des arêtes de ce pentagone.

Proposition 3.4.2. *Les coordonnées des sommets du pentagone décrit par la figure précédente et dont les sommets sont sur un cercle de rayon 1 sont*

$$A_{0j} = \left(\cos\left(\frac{2j\pi}{5}\right), \sin\left(\frac{2j\pi}{5}\right), 0 \right) \quad j \in \{0, \dots, 4\}.$$

Dans la suite de cette section, nous considérons, sauf mention explicite du contraire, ce pentagone régulier. Nous faisons un petit aparté pour montrer que le cosinus d'angle $\frac{2\pi}{5}$ est lié au nombre d'or. Nous allons nous en servir pour "alléger" les notations. La démonstration fait appel aux racines 5ème de l'unité et à l'équation associée.

Proposition 3.4.3. *On a,*

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{2\varphi} \text{ et } \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\varphi}{2},$$

où φ désigne le nombre d'or.

Démonstration. Soit $z_0 = \exp\left(\frac{2i\pi}{5}\right)$. On sait que z_0 est solution de l'équation

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$$

On a donc, en divisant par z_0^2 ,

$$\left(z_0^2 + \frac{1}{z_0^2}\right) + \left(z_0 + \frac{1}{z_0}\right) + 1 = 0. \quad (3.5)$$

Notons également que

$$z_0^2 + \frac{1}{z_0^2} = \left(z_0 + \frac{1}{z_0}\right)^2 - 2. \quad (3.6)$$

En injectant (3.6) dans l'équation (3.5), nous obtenons

$$\left(z_0 + \frac{1}{z_0}\right)^2 + \left(z_0 + \frac{1}{z_0}\right) - 1 = 0.$$

Puisque $z_0 + \frac{1}{z_0} = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, si l'on pose $X = z_0 + \frac{1}{z_0}$, on obtient

$$X^2 + X - 1 = 0.$$

Les solutions de cette équation sont $X_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Comme $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est positif, on obtient que

$$2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{1}{\varphi}.$$

Pour obtenir $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$, on utilise la formule de Carnot : $1 + \cos(2a) = 2 \cos^2(a)$ et l'équation du nombre d'or : $\varphi^2 = \varphi + 1$. On a alors,

$$\begin{aligned} 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) &= 1 + \frac{1}{2\varphi} \\ \Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) &= \frac{2\varphi+1}{4\varphi} \\ \Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) &= \frac{\varphi^2+\varphi}{4\varphi} \\ \Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) &= \frac{\varphi^2}{4} \end{aligned}$$

Étant donné que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est positif, $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est égal à $\frac{\varphi}{2}$. □

Nous pouvons maintenant exprimer la longueur d'un côté du pentagone régulier en fonction du nombre d'or.

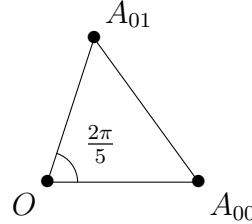


FIGURE 3.2 – Le triangle $A_{00}A_{01}O$.

Proposition 3.4.4. *La longueur d'un côté du pentagone régulier vaut $\sqrt{4 - \varphi^2}$.*

Démonstration. Par le théorème d'Al-Kashi et la relation $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$, on a

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{A_{00}A_{01}}|^2 &= |\overrightarrow{OA_{00}}|^2 + |\overrightarrow{OA_{01}}|^2 - 2|\overrightarrow{OA_{00}}||\overrightarrow{OA_{01}}| \cos(\frac{2\pi}{5}) \\ &= 2 - 2\frac{1}{2\varphi} \\ &= 2 - (\varphi^2 - 2). \end{aligned}$$

La longueur d'un côté du pentagone régulier est égale à $\sqrt{4 - \varphi^2}$. \square

Proposition 3.4.5. *La distance entre 2 sommets non consécutifs du pentagone vaut $\varphi\sqrt{4 - \varphi^2}$.*

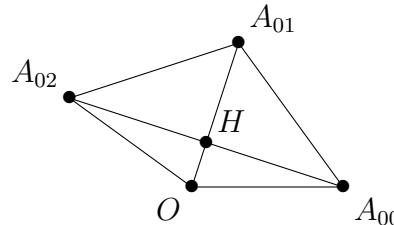


FIGURE 3.3 – Trois sommets du pentagone réguliers.

Démonstration. On sait que le triangle $A_{00}A_{01}A_{02}$ est isocèle. Si on note H le pied de la hauteur issue de A_{01} , c'est également le milieu de $[A_{00}, A_{02}]$ par les propriétés du triangle isocèle. On a donc que le triangle $A_{00}A_{01}H$ est rectangle. Grâce à la trigonométrie dans le triangle rectangle, on obtient

$$\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right) = \frac{|\overrightarrow{A_{00}H}|}{|\overrightarrow{A_{00}A_{01}}|}.$$

Comme H est le milieu du segment $[A_{00}, A_{02}]$, nous avons

$$|\overrightarrow{A_{00}A_{02}}| = 2\sqrt{4 - \varphi^2} \sin\left(\frac{3\pi}{10}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\sqrt{4 - \varphi^2} = \varphi\sqrt{4 - \varphi^2}.$$

\square

Corollaire 3.4.6. Soit un pentagone régulier, le rapport entre la longueur d'une diagonale et d'un côté vaut toujours φ .

Toujours grâce à la théorie sur les polygones réguliers, et plus particulièrement le pentagone régulier, nous pouvons énoncer la proposition suivante.

Proposition 3.4.7. On a,

$$\overrightarrow{A_{00}A_{03}} = \varphi \overrightarrow{A_{01}A_{02}}.$$

Nous allons maintenant nous intéresser aux sommets du dodécaèdre régulier qui sont adjacents à un sommet du pentagone régulier de départ. Le sommet A_{01} appartient à deux arêtes de la face que nous avons construite, à savoir $[A_{00}, A_{01}]$ et $[A_{01}, A_{02}]$. Chacune de ces arêtes est l'intersection de la face construite avec une nouvelle face pentagonale, notons ces deux faces \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 . Dans chacune de ces faces, le sommet A_{01} appartient à une arête. Ainsi, l'intersection de \mathcal{F}_1 avec \mathcal{F}_2 nous donne l'arête $[A_{01}, C']$, il faut donc chercher les coordonnées de ce nouveau point C' , nous l'appellerons A_{11} . Pour trouver les coordonnées de A_{11} , nous allons démontrer les résultats suivants en respectant les critères que nous avons pour le dodécaèdre régulier.

Proposition 3.4.8. Soit H le pied de la hauteur issue de A_{01} dans le triangle $A_{00}A_{01}A_{02}$.

- 1) Le triangle $A_{00}A_{02}A_{11}$ est équilatéral et la longueur de tous les côtés vaut $\varphi\sqrt{4 - \varphi^2}$.
- 2) La longueur du segment $[A_{01}, H]$ est égale à $\frac{4-\varphi^2}{2}$.

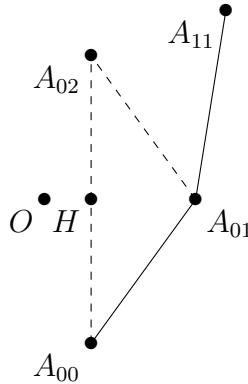


FIGURE 3.4 – Construction du sommet A_{11} .

Démonstration.

- 1) On sait que A_{11} et A_{02} sont deux sommets non consécutifs d'un pentagone régulier car ils sont tous les deux adjacents à A_{01} . L'argument reste le même pour les autres sommets du triangle $A_{00}A_{02}A_{11}$. Ainsi, par la proposition 3.4.5, on a un triangle équilatéral dont les côtés sont de longueur $\varphi\sqrt{4 - \varphi^2}$.

2) Par le théorème de Pythagore, nous avons

$$|\overrightarrow{A_{01}H}|^2 = \left(\sqrt{4-\varphi^2}\right)^2 - \left(\frac{\varphi\sqrt{4-\varphi^2}}{2}\right)^2 = (4-\varphi^2)(1-\frac{\varphi^2}{4}) = \frac{(4-\varphi^2)^2}{4}.$$

Au final, on a $|\overrightarrow{A_{01}H}| = \frac{4-\varphi^2}{2}$. □

L'objectif est de connaître l'amplitude de l'angle $\widehat{OA_{10}A_{11}}$ pour pouvoir projeter le sommet A_{11} et obtenir ses coordonnées.

Proposition 3.4.9. *On a,*

$$|\overrightarrow{A_{11}H}| = \frac{\sqrt{3}\varphi\sqrt{4-\varphi^2}}{2}.$$

Démonstration. On sait que le plan $HA_{01}A_{11}$ est inclus dans le plan médiateur du segment $[A_{00}, A_{02}]$, cela implique que $|\overrightarrow{HA_{02}}| = \frac{\varphi\sqrt{4-\varphi^2}}{2}$. On a également que le triangle $HA_{11}A_{02}$ est rectangle en H , on peut utiliser le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{A_{11}H}|^2 &= |\overrightarrow{A_{11}A_{02}}|^2 - |\overrightarrow{A_{02}H}|^2 \\ &= \left(\varphi\sqrt{4-\varphi^2}\right)^2 - \left(\frac{\varphi\sqrt{4-\varphi^2}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{3\varphi^2(4-\varphi^2)}{4}. \end{aligned}$$

□

Proposition 3.4.10. *Si on note β l'angle $\widehat{OA_{01}A_{11}}$, alors*

$$\cos(\beta) = \frac{-1}{\varphi\sqrt{4-\varphi^2}}.$$

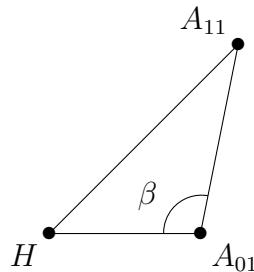


FIGURE 3.5 – L'angle β .

Démonstration. On utilise le théorème d'Al-Kashi sur le triangle $HA_{01}A_{11}$. On a,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{A_{11}H}|^2 &= |\overrightarrow{HA_{01}}|^2 + |\overrightarrow{A_{11}A_{01}}|^2 - 2|\overrightarrow{HA_{01}}||\overrightarrow{A_{11}A_{01}}|\cos(\beta) \\ \Leftrightarrow \frac{3}{4}(4-\varphi^2)\varphi^2 &= \frac{(4-\varphi^2)^2}{4} + (4-\varphi^2) - 2\frac{4-\varphi^2}{2}\sqrt{4-\varphi^2}\cos(\beta) \\ \Leftrightarrow \frac{3}{4}\varphi^2 &= \frac{4-\varphi^2}{4} + 1 - \sqrt{4-\varphi^2}\cos(\beta) \\ \Leftrightarrow 2 - \varphi^2 &= \sqrt{4-\varphi^2}\cos(\beta) \\ \Leftrightarrow \frac{-1}{\varphi} &= \sqrt{4-\varphi^2}\cos(\beta) \end{aligned}$$

□

Nous pouvons alors trouver le sinus de l'angle β .

Remarque 3.4.11. On a,

$$\sin(\beta) = \frac{1}{\sqrt{4 - \varphi^2}}.$$

Il suffit d'appliquer la relation fondamentale et successivement l'équation du nombre d'or $\varphi^2 = \varphi + 1$.

Proposition 3.4.12. Le point A_{11} a pour coordonnées

$$A_{11} = (\varphi \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right), \varphi \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right), 1).$$

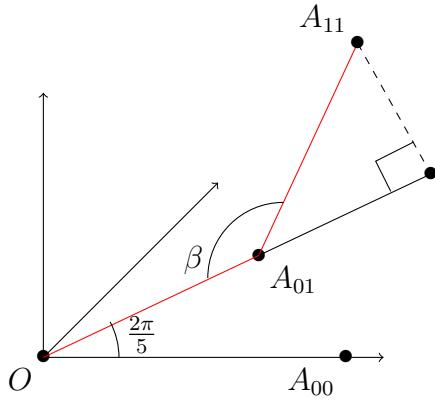


FIGURE 3.6 – Coordonnées du sommet A_{11} .

Démonstration. On a,

$$\overrightarrow{OA_{11}} = \overrightarrow{OA_{01}} + \overrightarrow{A_{01}A_{11}}.$$

On sait que $\overrightarrow{OA_{01}} = (\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right), \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right), 0)$. Il nous reste à décomposer $\overrightarrow{A_{01}A_{11}}$ dans le plan XY , on obtient

$$\overrightarrow{A_{01}A_{11}} = (\sqrt{4 - \varphi^2} \cos(\pi - \beta) \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right), \sqrt{4 - \varphi^2} \cos(\pi - \beta) \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right), \sqrt{4 - \varphi^2} \sin(\pi - \beta)).$$

En simplifiant avec les relations obtenues à la proposition 3.4.10 et la remarque 3.4.11, nous obtenons

$$\overrightarrow{A_{01}A_{11}} = \left(\frac{1}{\varphi} \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right), \frac{1}{\varphi} \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right), 1\right).$$

Pour conclure, il faut utiliser la relation du nombre d'or. □

A partir de ce procédé, on peut trouver tous les sommets A_{1i} . Il nous suffit de projeter le vecteur $\overrightarrow{A_{0i}A_{1i}}$ dans le plan XY . L'angle β sera le même pour tous les sommets de cet étage car ils respectent toutes les mêmes conditions que le sommet A_{11} . On obtient,

$$A_{1i} = O + \overrightarrow{OA_{0i}} + \overrightarrow{A_{0i}A_{1i}} \quad i \in \{0, \dots, 4\}.$$

Nous allons maintenant regarder "l'étage" supérieur pour trouver les coordonnées des points A_{2i} avec $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Ici, nous nous aidons de la représentation du dodécaèdre pour obtenir certaines relations entre les sommets que l'on cherche et ceux déjà obtenus.

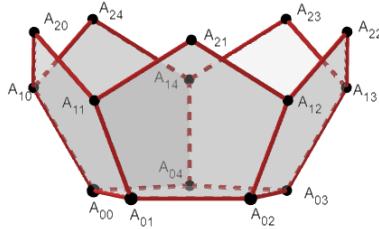


FIGURE 3.7 – Troisième étage de sommets.

Proposition 3.4.13. *On a,*

$$A_{2i} = \varphi \overrightarrow{A_{0i+1}A_{1i+1}} + A_{0i} \quad i \in \{0, 1, 2, 3\} \quad \text{et} \quad A_{24} = \overrightarrow{A_{00}A_{10}} + A_{04}.$$

Démonstration. Nous cherchons le sommet A_{21} , le même procédé pour s'appliquer aux autres sommets. On sait grâce au corollaire 3.4.7 que $\overrightarrow{A_{01}A_{21}} = \varphi \overrightarrow{A_{02}A_{12}}$.

De plus, on a

$$\overrightarrow{A_{01}A_{21}} = \overrightarrow{A_{01}A_{11}} + \overrightarrow{A_{11}A_{21}}.$$

Au final, on obtient

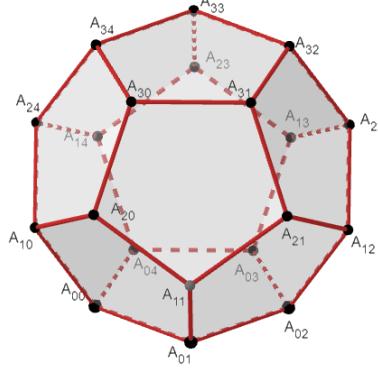
$$A_{21} = \varphi \overrightarrow{A_{02}A_{12}} - \overrightarrow{A_{01}A_{11}} + A_{11} = \varphi \overrightarrow{A_{02}A_{12}} + A_{01}.$$

□

Pour les derniers sommets, nous allons procéder comme pour les précédents moyennant une petite différence pour le premier sommet. En effet, si nous regardons le dodécaèdre régulier, nous pouvons remarquer que pour le pentagone régulier $A_{20}A_{30}A_{31}A_{21}A_{11}$, il y a deux sommets non connus A_{30} et A_{31} .

Proposition 3.4.14. *Le sommet A_{30} se décompose comme suit*

$$A_{21} + \varphi \overrightarrow{A_{11}A_{20}}.$$


 FIGURE 3.8 – Coordonnées du sommet A_{30} .

Démonstration. On utilise

$$\overrightarrow{A_{21}A_{30}} = \varphi \overrightarrow{A_{11}A_{20}}.$$

□

Proposition 3.4.15. *Les sommets A_{3i} se décomposent comme suit*

$$A_{3i} = \varphi \overrightarrow{A_{2i-1}A_{3i-1}} + A_{1i} \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Démonstration. Cela découle de la relation

$$\overrightarrow{A_{1i}A_{3i}} = \varphi \overrightarrow{A_{2i-1}A_{3i-1}}.$$

□

Maintenant que nous avons toutes les relations, nous allons chercher les coordonnées des sommets. Nous décidons de le réaliser par étage.

Pour le premier étage, c'est à dire les sommets A_{0i} , nous obtenons

$$\begin{aligned} A_{00} &= (1, 0, 0) \\ A_{01} &= (\cos(\frac{2\pi}{5}), \sin(\frac{2\pi}{5}), 0) \\ A_{02} &= (\cos(\frac{4\pi}{5}), \sin(\frac{4\pi}{5}), 0) = (-\cos(\frac{\pi}{5}), \sin(\frac{\pi}{5}), 0) \\ A_{03} &= (\cos(\frac{6\pi}{5}), \sin(\frac{6\pi}{5}), 0) = (-\cos(\frac{\pi}{5}), -\sin(\frac{\pi}{5}), 0) \\ A_{04} &= (\cos(\frac{8\pi}{5}), \sin(\frac{8\pi}{5}), 0) = (\cos(\frac{2\pi}{5}), -\sin(\frac{2\pi}{5}), 0) \end{aligned}$$

En utilisant les relations $\cos(\frac{\pi}{5}) = \frac{\varphi}{2}$ et $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{1}{2\varphi}$, nous pouvons trouver les sinus associés.

Proposition 3.4.16. *On a*

$$\sin(\frac{\pi}{5}) = \frac{\sqrt{4-\varphi^2}}{2} \text{ et } \sin(\frac{2\pi}{5}) = \frac{\varphi\sqrt{4-\varphi^2}}{2}.$$

Démonstration. Par la formule fondamentale de trigonométrie, on a

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)^2 = 1 - \frac{\varphi^2}{4}.$$

Comme le sinus de l'ange $\frac{\pi}{5}$ est positif, on obtient

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{4-\varphi^2}}{2}.$$

Pour la deuxième égalité, on peut décomposer comme suit

$$\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\varphi\sqrt{4-\varphi^2}}{2}.$$

□

Nous pouvons alors exprimer les coordonnées des premiers sommets à partir du nombre d'or :

A_{00}	$=$	$(1, 0, 0)$
A_{01}	$=$	$(\frac{1}{2\varphi}, \frac{\varphi\sqrt{4-\varphi^2}}{2}, 0)$
A_{02}	$=$	$(-\frac{\varphi}{2}, \frac{\sqrt{4-\varphi^2}}{2}, 0)$
A_{03}	$=$	$(-\frac{\varphi}{2}, -\frac{\sqrt{4-\varphi^2}}{2}, 0)$
A_{04}	$=$	$(\frac{1}{2\varphi}, -\frac{\varphi\sqrt{4-\varphi^2}}{2}, 0)$

Pour le deuxième étage, nous devons décomposer les vecteur $\overrightarrow{A_{0i}A_{1i}}$ dans le plan XY et appliquer les relations $\cos(\beta) = \frac{-1}{\varphi\sqrt{4-\varphi^2}}$ et $\sin(\beta) = \frac{1}{\sqrt{4-\varphi^2}}$, nous obtenons

A_{10}	$=$	$(\frac{1}{\varphi} + 1, 0, 1)$
A_{11}	$=$	$((1 + \frac{1}{\varphi}) \cos(\frac{2\pi}{5}), (1 + \frac{1}{\varphi}) \sin(\frac{2\pi}{5}), 1)$
A_{12}	$=$	$((-(1 + \frac{1}{\varphi}) \cos(\frac{\pi}{5}), (1 + \frac{1}{\varphi}) \sin(\frac{\pi}{5}), 1)$
A_{13}	$=$	$((-(1 + \frac{1}{\varphi}) \cos(\frac{\pi}{5}), -(1 + \frac{1}{\varphi}) \sin(\frac{\pi}{5}), 1)$
A_{14}	$=$	$((1 + \frac{1}{\varphi}) \cos(\frac{2\pi}{5}), -(1 + \frac{1}{\varphi}) \sin(\frac{2\pi}{5}), 1)$

La dernière étape consiste à utiliser la relation du nombre d'or ainsi que celles des cosinus et sinus pour obtenir :

A_{10}	$=$	$(\varphi, 0, 1)$
A_{11}	$=$	$(\frac{1}{2}, \frac{\varphi^2\sqrt{4-\varphi^2}}{2}, 1)$
A_{12}	$=$	$(-\frac{\varphi^2}{2}, \frac{\varphi\sqrt{4-\varphi^2}}{2}, 1)$
A_{13}	$=$	$(-\frac{\varphi^2}{2}, -\frac{\varphi\sqrt{4-\varphi^2}}{2}, 1)$
A_{14}	$=$	$(\frac{1}{2}, -\frac{\varphi^2\sqrt{4-\varphi^2}}{2}, 1)$

Pour le troisième étage, nous utilisons toujours les mêmes relations et simplifions :

A_{20}	$=$	$(\frac{\varphi^2}{2}, \frac{\varphi\sqrt{4-\varphi^2}}{2}, \varphi)$
A_{21}	$=$	$(-\frac{1}{2}, \frac{\varphi^2\sqrt{4-\varphi^2}}{2}, \varphi)$
A_{22}	$=$	$(-\varphi, 0, \varphi)$
A_{23}	$=$	$(-\frac{1}{2}, -\frac{\varphi^2\sqrt{4-\varphi^2}}{2}, \varphi)$
A_{24}	$=$	$(\frac{\varphi^2}{2}, -\frac{\varphi\sqrt{4-\varphi^2}}{2}, \varphi)$

Et enfin pour terminer, le dernier étage de sommets :

$$\boxed{\begin{aligned} A_{30} &= \left(\frac{\varphi}{2}, \frac{\sqrt{4-\varphi^2}}{2}, \varphi + 1\right) \\ A_{31} &= \left(-\frac{1}{2\varphi}, \frac{\varphi\sqrt{4-\varphi^2}}{2}, \varphi + 1\right) \\ A_{32} &= (-1, 0, \varphi + 1) \\ A_{33} &= \left(-\frac{1}{2\varphi}, -\frac{\varphi\sqrt{4-\varphi^2}}{2}, \varphi + 1\right) \\ A_{34} &= \left(\frac{\varphi}{2}, -\frac{\sqrt{4-\varphi^2}}{2}, \varphi + 1\right) \end{aligned}}$$

Ici, le même travail que pour le tétraèdre régulier va être fourni. À une différence près que le nombre de possibilités pour les arêtes et les faces sont si importantes qu'elles vont nous pousser à creuser d'autres outils pour nous alléger le travail. Bien que nous nous sommes aidé.e.s de la représentation du dodécaèdre régulier, il faut maintenant être certain.e que l'ensemble que nous venons de construire vérifie toutes les conditions pour être un dodécaèdre régulier.

Proposition 3.4.17. *L'enveloppe convexe*

$$\mathfrak{D} = \text{Conv}(\{A_{ij}, i \in \{0, 1, 2, 3\} \text{ et } j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}\})$$

est un dodécaèdre régulier.

Nous pouvons déjà montrer que les points trouvés sont bien les sommets du dodécaèdre. Nous allons procéder de la même manière que pour le cube ou le tétraèdre. Nous regardons la sphère centrée au centre de gravité des 20 points et montrons que les plans tangents associés aux points A_{ij} de la sphère donnent comme intersection avec l'enveloppe convexe les points en question. Étant donné que $\mathfrak{D} = \text{Conv}(\{A_{ij}, i \in \{0, 1, 2, 3\} \text{ et } j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}\})$, par la proposition 2.3.18, nous savons déjà que

$$\text{Ext}(\mathfrak{D}) \subset \{A_{ij}, i \in \{0, 1, 2, 3\} \text{ et } j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}\}.$$

En d'autres mots, les sommets du dodécaèdre se trouvent dans les points obtenus lors de la construction.

Proposition 3.4.18. *Les points obtenus sont exactement les sommets de \mathfrak{D} .*

Démonstration. Nous savons déjà que les sommets se trouvent parmi les points obtenus par la proposition 2.3.18. Soit $G = (0, 0, \frac{\varphi^2}{2})$ le centre de gravité des 20 points, alors tous les points se trouvent sur la sphère de centre G et de rayon $r = |GA_{00}| = \frac{\sqrt{4+\varphi^4}}{2}$. Par la convexité de la boule associée, on sait que $\mathfrak{D} \subset \mathcal{B}(G, r)$. Les plans tangents à la sphère aux points A_{ij} sont également des plans d'appuis pour \mathfrak{D} . Ainsi, nous obtenons que ces points sont exactement les sommets de \mathfrak{D} . \square

Comme mentionné plus haut, nous allons ressentir les limites de la théorie des convexes. En effet, pour que cette théorie nous soit utile, il faudrait connaître les faces de ce polytope. Si nous supposons déjà savoir qu'une face est obtenue à partir de 5 sommets, nous aurions $C_{20}^5 = 15504$ possibilités. Autant dire que cela nous prendrait une éternité pour discrépiter chaque enveloppe

convexe. Surtout que nous supposons déjà qu'une face est obtenue à partir de 5 sommets, ce qui doit être montré également.

Nous savons déjà que l'enveloppe convexe $\text{Conv}(A_{00}, A_{01}, A_{02}, A_{03}, A_{04})$ nous donne un pentagone car nous avons démarré notre construction comme cela. Nous devons maintenant nous assurer que c'est bien une face de ce polytope \mathcal{D} .

Proposition 3.4.19. *L'ensemble $\mathcal{F}_{00} = \text{Conv}(A_{00}, A_{01}, A_{02}, A_{03}, A_{04})$ est une face de \mathfrak{D} .*

Démonstration. Soit \mathcal{H} le plan d'équation $z = 0$. On a alors $\mathcal{H} \cap \mathfrak{D} = \mathcal{F}_{00}$ car les points $A_{00}, A_{01}, A_{02}, A_{03}, A_{04}$ sont les seuls sommets ayant une cote nulle. Soit \mathcal{D} le demi-espace associé à \mathcal{H} :

$$\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0\}.$$

On a $\mathfrak{D} \subset \mathcal{D}$, sinon on aurait au moins un point ayant une cote négative ce qui est impossible car les sommets de \mathfrak{D} ont une cote positive. Cela implique que \mathcal{F}_{00} est une face de \mathfrak{D} . \square

À partir de cette face, nous allons obtenir toutes les autres grâce aux symétries du polytope. Nous devons définir en quelques mots ce que nous utilisons.

3.4.1 Les symétries d'un polytope

Les symétries d'un polytope sont des isométries particulières. En effet, en général, si on applique une isométrie à un polytope, on obtient un autre polytope. Mais il existe parfois des isométries qui préservent (globalement) un polytope donné. On les appelle symétries du polytope. Plus précisément, voici la définition.

Définition 3.4.20. *Une symétrie τ d'un polytope \mathcal{C} est une isométrie de \mathcal{A} qui envoie le polytope sur lui-même, c'est à dire $\tau(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.*

Même si τ est une isométrie de \mathcal{A} , nous décidons la restreindre au polytope \mathcal{C} .

Remarque 3.4.21. *Si τ est une symétrie de \mathcal{C} , on appellera aussi symétrie de \mathcal{C} la restriction de τ à \mathcal{C} .*

Remarquons que cette restriction est toujours une application bijective.

Proposition 3.4.22. *Soit τ une symétrie de \mathcal{C} , alors τ est une bijection.*

Démonstration. La restriction d'une application injective est toujours une application injective. Pour la surjectivité, elle est directe également car $\tau(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ par définition d'une symétrie. \square

À partir de ces définitions, nous allons démontrer les propositions qui vont nous permettre de continuer notre parcours pour démontrer que \mathfrak{D} est un dodécaèdre. Pour qu'une isométrie soit une symétrie d'un polytope, il faut simplement que tous les sommets de celui-ci soient envoyés sur d'autres sommets.

Proposition 3.4.23. *Soient $\mathcal{P} = \text{Conv}(P_1, \dots, P_n)$ et \mathcal{T} une isométrie telle que $\mathcal{T}(\{P_1, \dots, P_n\})$ est inclus dans $\{P_1, \dots, P_n\}$. Alors l'isométrie \mathcal{T} envoie \mathcal{P} sur \mathcal{P} .*

Démonstration. Remarquons que $\mathcal{T}(\{P_1, \dots, P_n\}) = \{P_1, \dots, P_n\}$. Par définition, une isométrie est une bijection et comme l'ensemble de départ possède le même nombre d'éléments que l'ensemble d'arrivé, on a l'égalité. Montrons la première inclusion, $\mathcal{T}(P) \subset P$. Soit $X \in \mathcal{T}(P)$, alors il existe $R \in P$ tel que $R = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, $\lambda_i \in [0, 1]$ et $X = \mathcal{T}(R)$. Comme \mathcal{T} est une application affine, on a

$$\mathcal{T}(R) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathcal{T}(P_i).$$

Par hypothèse, on sait que $\mathcal{T}(P_i) \in P$ et donc $\mathcal{T}(R) \in P$. Pour l'autre inclusion, comme \mathcal{T} est une bijection, on peut écrire $\{P_1, \dots, P_n\} = \mathcal{T}^{-1}(\{P_1, \dots, P_n\})$. En appliquant la première inclusion avec l'isométrie \mathcal{T}^{-1} et comme \mathcal{T} est une bijection, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{-1}(P) &\subset P \\ \Leftrightarrow \mathcal{T}(\mathcal{T}^{-1}(P)) &\subset \mathcal{T}(P) \\ \Leftrightarrow P &\subset \mathcal{T}(P). \end{aligned}$$

□

Si on arrive à trouver une isométrie qui envoie les sommets de \mathfrak{D} sur eux-mêmes, alors on aura une symétrie du polytope. Ensuite, grâce à la proposition 3.1.15, on saura qu'une face est envoyée sur une face ce qui nous permettra de montrer que toutes les faces sont des pentagones réguliers isométriques au premier \mathcal{F}_{00} et obtenir les bons quintuples de sommets.

Puisqu'une symétrie du polytope est une isométrie de tout l'espace, qui a une propriété particulière, la proposition 3.1.15 reste vraie. Nous obtenons naturellement le corollaire associé.

Corollaire 3.4.24. *Toute symétrie d'un polytope définit une permutation de l'ensemble des sommets.*

D'ailleurs, pour chaque symétrie d'un polytope, celle-ci laisse au moins un point invariant : le centre de gravité de ce polytope.

Remarque 3.4.25. *Toute les symétries fixent le centre de gravité du polytope. Si $G = \sum_{S_i \in \mathcal{S}} \frac{1}{|\mathcal{S}|} S_i$, alors $\tau(G) = \sum_{S_i \in \mathcal{S}} \frac{1}{|\mathcal{S}|} \tau(S_i)$. Puisque τ est une permutation de l'ensemble des sommets, dans la deuxième somme, on parcourt l'ensemble des sommets \mathcal{S} avec des coefficients tous égaux.*

Cela explique qu'aucune translation non triviale n'est pas une symétrie d'un polytope.

3.4.2 Les faces du dodécaèdre régulier

Nous allons partir de la face pentagonale $\mathcal{F}_{00} = \text{Conv}(A_{00}, A_{01}, A_{02}, A_{03}, A_{04})$ et obtenir les autres faces de \mathfrak{D} . La première idée serait que la face \mathcal{F}_{00} , qui se situe en bas, se redresse pour devenir une des faces du premier "étage". Ici, on s'aide d'une représentation du dodécaèdre régulier pour l'intuition mais les calculs sont nécessaires pour être certain.e qu'on a bien une symétrie du dodécaèdre régulier. On va donc chercher une réflexion par rapport à un plan qui contient une des arêtes du pentagone régulier \mathcal{F}_{00} et qui passe par le centre de gravité G . Tous les calculs se trouvent dans l'annexe D.1.

Nous avons le plan π contenant l'arête $[A_{00}, A_{01}]$ et le point G , de normale

$$n_\pi = \frac{1}{4} \left(\varphi^3 \sqrt{4 - \varphi^2}, \varphi^2 + 1, 2\varphi \sqrt{4 - \varphi^2} \right).$$

Ici, nous allons montrer que la réflexion R_π de \mathfrak{D} par rapport à ce plan rend bien \mathfrak{D} . Il faut montrer que chaque sommet est envoyé sur un autre sommet et cela suffira grâce aux propositions précédentes pour dire que $R_\pi(\mathfrak{D}) = \mathfrak{D}$.

Proposition 3.4.26. *La réflexion par rapport au plan π est une symétrie de \mathfrak{D} .*

Démonstration. Grâce à l'annexe D.1, nous savons que R_π envoie les sommets de \mathfrak{D} sur d'autres sommets de \mathfrak{D} . Grâce à la proposition 3.4.23, nous avons que $R_\pi(\mathfrak{D}) = \mathfrak{D}$. \square

Ce qui nous intéressait dans cette proposition, c'était de savoir que cette réflexion était une symétrie de \mathfrak{D} ce qui implique, par la proposition 3.1.15, que la face \mathcal{F}_{00} est envoyée sur une autre face³

$$R_\pi(\mathcal{F}_{00}) = \text{Conv}(A_{00}, A_{01}, A_{10}, A_{11}, A_{20}) = \mathcal{F}_{10}.$$

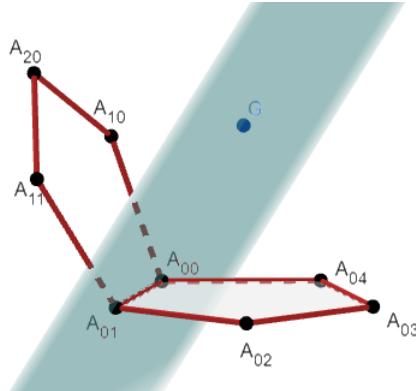


FIGURE 3.9 – Réflexion de la face \mathcal{F}_{00} par rapport au plan π .

Nous allons maintenant montrer que toutes les faces "de cet étage" sont bien des faces pentagonales à partir de cette nouvelle face \mathcal{F}_{10} . Pour cela, nous pouvons remarquer que les 20 sommets sont répartis sur 4 étages différents par rapport à la cote. Pour les 5 premiers sommets, nous avons une côté égale à 0, puis 1, φ et pour terminer $\varphi + 1$. Les enveloppes convexes de ces 5-uplets forment des pentagones réguliers qu'on peut obtenir à partir d'isométries appliquées sur le premier pentagone \mathcal{F}_{00} .

Proposition 3.4.27. *L'enveloppe convexe $\mathcal{P}_1 = \text{Conv}(A_{10}, A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14})$ est un pentagone régulier.*

Démonstration. On sait déjà que $\mathcal{F}_{00} = \text{Conv}(A_{00}, A_{01}, A_{02}, A_{03}, A_{04})$ est un pentagone régulier. Soit O le centre de gravité de \mathcal{F}_{00} . En appliquant une homothétie $h_{O,\varphi}$ d'origine O de rapport φ puis une translation $t_z : X \rightarrow X + u$, où $u = (0, 0, 1)$ aux sommets $A_{00}, A_{01}, A_{02}, A_{03}, A_{04}$, on

3. Les calculs se trouvent toujours dans l'annexe D.1 .

obtient les sommets $A_{10}, A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}$. L'homothétie et la translation préservent le rapport des longueurs et les angles, ce qui implique que $h_{O,\varphi}(t_z(\text{Conv}(A_{00}, A_{01}, A_{02}, A_{03}, A_{04})))$ est un pentagone régulier. Par la proposition 3.1.14, l'ensemble s'écrit

$$h_{O,\varphi}(t_z(\text{Conv}(A_{00}, A_{01}, A_{02}, A_{03}, A_{04}))) = \text{Conv}(A_{10}, A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}).$$

□

Remarque 3.4.28. *Ce pentagone ne peut être une face de \mathfrak{D} . La définition d'une face stipule que le demi-espace associé au plan doit contenir tout le convexe. Or ici, nous n'avons pas le choix pour le plan car le seul plan \mathcal{H} tel que $\mathcal{H} \cap \mathfrak{D} = \text{Conv}(A_{10}, A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14})$ est d'équation $z = 1$. Le demi-espace associé ne saurait contenir \mathfrak{D} car ce convexe contient des points ayant des cotés supérieures et inférieures à 1.*

Proposition 3.4.29. *L'enveloppe convexe $\mathcal{P}_2 = \text{Conv}(A_{20}, A_{21}, A_{22}, A_{23}, A_{24})$ est un pentagone régulier.*

Démonstration. L'application τ représentée par

$$\tau : X \rightarrow -X + 2G$$

où G est le centre de gravité des sommets de \mathfrak{D} est une isométrie par la proposition 3.1.5. De plus, elle envoie les sommets $A_{10}, A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}$ sur les sommets $A_{20}, A_{21}, A_{22}, A_{23}, A_{24}$. En effet, nous avons

$$\begin{aligned} \tau(A_{10}) &= 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\varphi^2}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varphi \\ 0 \\ \varphi^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varphi \\ 0 \\ \varphi \end{pmatrix} = A_{22}, \\ \tau(A_{11}) &= A_{23}, \\ \tau(A_{12}) &= A_{24}, \\ \tau(A_{13}) &= A_{20}, \\ \tau(A_{14}) &= A_{21}. \end{aligned}$$

Comme τ est une isométrie, par la proposition 3.1.14, on a

$$\tau(\mathcal{P}_1) = \text{Conv}(A_{20}, A_{21}, A_{22}, A_{23}, A_{24}).$$

Par la proposition 3.1.17, comme \mathcal{P}_1 est un pentagone régulier, cela implique que l'ensemble $\text{Conv}(A_{20}, A_{21}, A_{22}, A_{23}, A_{24})$ est un pentagone régulier. □

Pour les mêmes raisons que précédemment, ce pentagone ne peut être une face de \mathfrak{D} .

Remarque 3.4.30. *Comme $\tau(\tau(X)) = X$, on sait que*

$$\tau(\{A_{20}, A_{21}, A_{22}, A_{23}, A_{24}\}) = \{A_{10}, A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}\}.$$

Proposition 3.4.31. *L'enveloppe convexe $\text{Conv}(A_{30}, A_{31}, A_{32}, A_{33}, A_{34})$ est un pentagone régulier.*

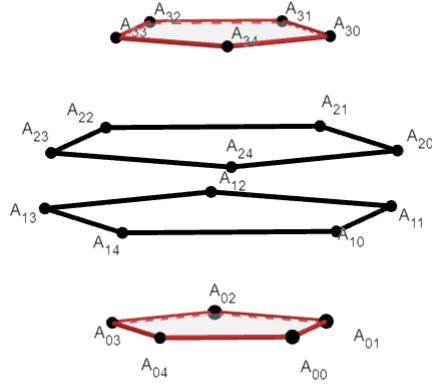


FIGURE 3.10 – Les 4 pentagones réguliers.

Démonstration. En utilisant la même isométrie que pour la proposition précédente,

$$\tau : X \rightarrow -X + 2G \quad (3.7)$$

où G est le centre de gravité des sommets de \mathfrak{D} , les sommets de notre face de départ \mathcal{F}_{00} seront envoyés sur les sommets $A_{30}, A_{31}, A_{32}, A_{33}, A_{34}$. Par le même raisonnement, on a

$$\tau(\mathcal{F}_{00}) = \text{Conv}(A_{30}, A_{31}, A_{32}, A_{33}, A_{34})$$

et par la proposition 3.1.17, c'est un pentagone régulier. \square

L'isométrie τ définie par la formule (3.7) envoie tous les sommets de \mathfrak{D} sur d'autres sommets de \mathfrak{D} . Par la proposition 3.4.23, nous avons que τ est une symétrie de \mathfrak{D} . Et toutes les faces seront envoyées sur d'autres faces par la proposition 3.1.15. Cette symétrie nous sera utile pour la fin de notre parcours sur les faces, on peut déjà noter grâce à cette remarque que $\tau(\mathcal{F}_{00}) = \text{Conv}(A_{30}, A_{31}, A_{32}, A_{33}, A_{34}) = \mathcal{F}_{30}$ est une face de \mathfrak{D} .

Après cette petite digression qui nous sera utile très rapidement, nous revenons à notre idée de base. Pour rappel, nous sommes parti.e.s de la face \mathcal{F}_{00} du bas de notre polytope \mathfrak{D} . Ensuite, grâce à une réflexion par rapport à un plan, la face \mathcal{F}_{00} s'est redressée et nous obtenions une nouvelle face $\mathcal{F}_{10} = \text{Conv}(A_{00}, A_{01}, A_{10}, A_{11}, A_{20})$.

En prenant comme axe de rotation la droite d'équation

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

nous allons faire tourner notre polytope \mathfrak{D} et en particulier \mathcal{F}_{10} . Cette rotation va nous permettre de parcourir toutes les faces du "premier" étage de \mathfrak{D} . Cet axe est parfois appelé l'axe de z .

Si nous avons démontré que l'enveloppe convexe des sommets ayant une cote égale à 0, 1, φ ou encore $\varphi + 1$ est un pentagone régulier c'est pour pouvoir utiliser une propriété de ces polygones réguliers. En effet, lorsqu'on applique une rotation d'angle $\frac{2k\pi}{5}$ ($k \in \mathbb{Z}$) par rapport au centre de gravité d'un pentagone régulier, celui-ci est stabilisé : c'est une symétrie de ce polygone.

Montrons que cet axe de rotation passe par le centre de gravité des 4 pentagones réguliers.

Proposition 3.4.32. *La droite D d'équation*

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

passe par le centre de gravité des 4 pentagones réguliers.

Démonstration. Il nous suffit de calculer le centre de gravité des 4 pentagones réguliers et de vérifier que la première et deuxième composante valent 0. On a,

$$\begin{aligned} G_0 &= \frac{A_{01}+A_{02}+A_{03}+A_{04}}{5} = \frac{1}{5}(1-\varphi+\frac{1}{\varphi}, 0, 0) = (0, 0, 0) \\ G_1 &= \frac{A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}}{5} = \frac{1}{5}(\varphi+1-\varphi^2, 0, 5) = (0, 0, 1) \\ G_2 &= \frac{A_{21}+A_{22}+A_{23}+A_{24}}{5} = \frac{1}{5}(\varphi^2-1-\varphi, 0, 5\varphi) = (0, 0, \varphi) \\ G_3 &= \frac{A_{31}+A_{32}+A_{33}+A_{34}}{5} = \frac{1}{5}(\varphi-\frac{1}{\varphi}-1, 0, 5\varphi+5) = (0, 0, \varphi^2). \end{aligned}$$

Ainsi, tous les centres de gravité appartiennent à D . \square

Nous pouvons maintenant montrer que la rotation d'angle $\frac{2\pi}{5}$ autour de la droite D laisse \mathfrak{D} stable.

Proposition 3.4.33. *La rotation $r_{\frac{2\pi}{5}}$ d'angle $\frac{2\pi}{5}$ autour de la droite D représentée par la matrice*

$$\begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{5}) & -\sin(\frac{2\pi}{5}) & 0 \\ \sin(\frac{2\pi}{5}) & \cos(\frac{2\pi}{5}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est une symétrie de \mathfrak{D} .

Démonstration. Étant donné que l'axe de rotation est perpendiculaire aux 4 pentagones réguliers $\mathcal{F}_{00}, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{F}_{30}$ et qu'il passe par leur centre de gravité, la rotation d'angle $\frac{2\pi}{5}$ envoie chaque sommet des pentagones réguliers sur un autre sommet de ces pentagones réguliers. Nous fixons le sens d'orientation des rotations en posant que $r_{\frac{2\pi}{5}}(A_{00}) = A_{01}$. Au final, les 20 sommets de \mathfrak{D} sont envoyés sur d'autres sommets de \mathfrak{D} ce qui implique que $r_{\frac{2\pi}{5}}$ est un symétrie de \mathfrak{D} par la proposition 3.4.23. \square

Grâce à cette proposition, nous savons que la face \mathcal{F}_{10} est envoyée sur une autre face dont nous allons trouver les sommets. Pour plus de faciliter, nous exprimons la matrice de rotation $r_{\frac{2\pi}{5}}$ en fonction des relations entre cosinus, sinus et le nombre d'or :

$$\begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{5}) & -\sin(\frac{2\pi}{5}) & 0 \\ \sin(\frac{2\pi}{5}) & \cos(\frac{2\pi}{5}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\varphi} & -\frac{\varphi\sqrt{4-\varphi^2}}{2} & 0 \\ \frac{\varphi\sqrt{4-\varphi^2}}{2} & \frac{1}{2\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition 3.4.34. *L'enveloppe convexe $r_{\frac{2\pi}{5}}(\mathcal{F}_{10}) = \text{Conv}(A_{01}, A_{02}, A_{11}, A_{12}, A_{21})$ est une face pentagonale de \mathfrak{D} .*

Démonstration. En appliquant $r_{\frac{2\pi}{5}}$ au sommet A_{00} , on a

$$\begin{aligned} r_{\frac{2\pi}{5}}(A_{00}) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2\varphi} & -\frac{\varphi\sqrt{4-\varphi^2}}{2} & 0 \\ \frac{\varphi\sqrt{4-\varphi^2}}{2} & \frac{1}{2\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2\varphi} \\ \frac{\varphi\sqrt{4-\varphi^2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= A_{01}. \end{aligned}$$

En appliquant cette rotation aux autres sommets de la face \mathcal{F}_{00} , nous obtenons

$$\begin{aligned} r_{\frac{2\pi}{5}}(A_{01}) &= A_{02}, \\ r_{\frac{2\pi}{5}}(A_{10}) &= A_{11}, \\ r_{\frac{2\pi}{5}}(A_{11}) &= A_{12}, \\ r_{\frac{2\pi}{5}}(A_{20}) &= A_{21}. \end{aligned}$$

Ainsi, par la proposition 3.1.14, nous avons

$$r_{\frac{2\pi}{5}}(\mathcal{F}_{10}) = \text{Conv}(A_{01}, A_{02}, A_{11}, A_{12}, A_{21})$$

et l'enveloppe convexe est bien une face isométrique à \mathcal{F}_{10} . \square

Nous nommons cette nouvelle face obtenue \mathcal{F}_{11} . Grâce à cette isométrie, nous récupérons finalement 4 rotations en prenant les puissances de la matrice associée. Cette partie est réalisée dans l'annexe D.2.

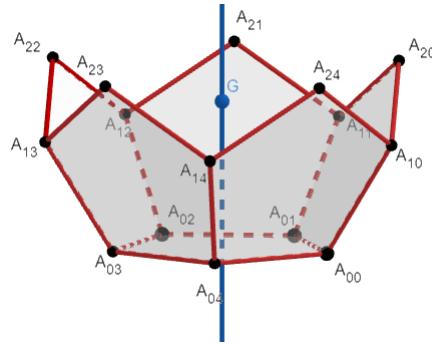


FIGURE 3.11 – Rotation de la face \mathcal{F}_{01} autour de l'axe z .

Pour le moment, nous savons que la face du bas et les faces du premier "étage" sont des pentagones réguliers isométriques. Nous allons maintenant utiliser la symétrie négative $\tau : X \mapsto -X + 2G$ déjà mentionnée précédemment. Nous avons déjà à notre disposition les 6 premières faces. Dans l'annexe D.3, nous allons obtenir le restant des faces à partir de celles obtenues jusqu'à maintenant. En effet, comme τ est une symétrie de \mathfrak{D} , elle envoie chaque face sur une face. Ces 6 nouvelles faces seront différentes des 6 premières car les sommets sont envoyés sur d'autres

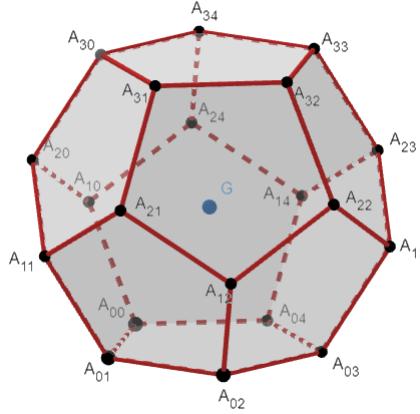


FIGURE 3.12 – L’isométrie τ appliquée aux 6 premières faces.

sommets ayant une cote plus grande ou égale à 1 alors que les premières faces sont constituées de sommets ayant une cote plus petite ou égale à 1.

Nous savons depuis toujours qu’un dodécaèdre régulier possède 12 faces, ici nous serions tenté.e.s de nous arrêter en disant que nous les avons toutes trouvées. Surtout que le dessin nous indique le même résultat. Mais il manque une partie de la preuve. Il faut maintenant montrer qu’il ne peut pas y avoir une autre face, qui soit différente des 12 déjà trouvées.

Nous avons construit 12 faces pour le “dodécaèdre régulier” \mathfrak{D} . Dans la proposition suivante, nous les notons $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{12}$. On note P_1, \dots, P_{20} les sommets également construits.

Proposition 3.4.35. *Les faces $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{12}$ sont les seules faces de \mathfrak{D} .*

Démonstration. Soit \mathcal{F} une face de \mathfrak{D} . Puisque \mathfrak{D} est un polytope, \mathcal{F} l’est également et c’est l’enveloppe convexe de certains points parmi P_1, \dots, P_{20} par la remarque 2.4.25.

Soit $P \in \mathcal{F} \cap \{P_1, \dots, P_{20}\}$. On sait par construction que P est adjacent à 3 sommets dans les faces et les arêtes déjà construites. Notons ces sommets A_1, A_2, A_3 .

Par construction toujours, les points P, A_1, A_2, A_3 sont affinement indépendants et on a donc un tétraèdre $\mathcal{T} = \text{Conv}(P, A_1, A_2, A_3)$. On note \mathcal{F}_i la face de \mathfrak{D} déterminée par $\{P, A_1, A_2, A_3\} \setminus \{A_i\}$ et \mathcal{F}_0 la face de \mathcal{T} égale à $\text{Conv}(A_1, A_2, A_3)$. Notons \mathcal{D}_i les demi-espaces associés à \mathcal{F}_i contenant \mathfrak{D} et \mathcal{D}_0 le demi-espace contenant P .

Montrons maintenant que $\mathcal{F} \cap \mathcal{T}$ est une 2-face de \mathcal{T} , contenant P .

- 1) Par la proposition 2.3.14, comme \mathcal{T} est un convexe fermé inclus dans \mathfrak{D} et que \mathcal{F} est une face de \mathfrak{D} , on a que $\mathcal{F} \cap \mathcal{T}$ est une face de \mathcal{T} . Cette face contient P car $P \in \mathcal{D}$ et $P \in \mathcal{T}$.
- 2) Montrons que cette face contient 3 points affinement indépendants, ce sera alors une 2-face. Pour cela, on considère deux points Q_1, Q_2 de \mathcal{F} tels que P, Q_1, Q_2 soient affinement indépendants. Si ces points Q_1, Q_2 sont dans \mathcal{T} , alors ils sont dans $\mathcal{F} \cap \mathcal{T}$ et il n’y a rien à démontrer.

Sinon, un des deux points est dans $\mathcal{F} \setminus \mathcal{T}$. Sans perte de généralité, supposons que ce soit Q_1 . Puisque $Q_1 \in \mathcal{F}$, Q_1 appartient aux demi-espaces $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$. Donc le segment $[P, Q_1]$ est inclus dans ces demi-espaces. Ce segment coupe le plan $\text{Aff}(\mathcal{F}_0)$ en un point qui est dans le tétraèdre. En effet, $Q_1 \notin \mathcal{D}_0$ et $P \in \mathcal{D}_0$, il existe donc un point du segment qui appartient au plan $\text{Aff}(\mathcal{F}_0)$, notons le Q'_1 . Ainsi, Q'_1 appartient à $\cap_{i=0}^3 \mathcal{D}_i$ et donc à \mathcal{T} .

Au final, on a $P, Q'_1, Q_2 \in \mathcal{F} \cap \mathcal{T}$. Ils sont affinement indépendants sinon P, Q'_1, Q_2 seraient sur une droite et donc P, Q_1, Q_2 également ce qui est absurde.

Chaque sommet du tétraèdre appartient à 3 faces. Le sommet P appartient aux faces $\text{Conv}(P, A_1, A_2)$, $\text{Conv}(P, A_1, A_3)$, $\text{Conv}(P, A_2, A_3)$. Donc $\mathcal{T} \cap \mathcal{F}$ est une de ces 3 faces. Sans perte de généralité, supposons que $\mathcal{T} \cap \mathcal{F} = \text{Conv}(P, A_1, A_2)$. Alors $P, A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ et ce sont 3 points non-alignés. Cela implique que $\text{Aff}(\mathcal{F}) = \text{Aff}(\mathcal{F}_3)$ et on obtient

$$\mathcal{F}_3 = \mathfrak{D} \cap \text{Aff}(\mathcal{F}_3) = \mathfrak{D} \cap \text{Aff}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}.$$

□

Remarque 3.4.36. Nous avons fait la preuve pour le dodécaèdre mais nous pouvons l'appliquer pour tout polytope trivalent.

Si le degré des sommets augmente, nous pourrions adapter cette preuve en utilisant la théorie sur les pyramides. Cela ne sera pas fait ici mais cette théorie est développée dans le chapitre 2, paragraphe 7 du livre de Bronsted [3].

Proposition 3.4.37. *Le polytope \mathfrak{D} peut s'écrire*

$$\mathfrak{D} = \bigcap_{i=1}^{12} \mathcal{D}_i,$$

où \mathcal{D}_i est le demi-espace associé à la face \mathcal{F}_i de \mathfrak{D} pour tout i . Cette représentation est minimale.

Démonstration. Par la proposition 3.4.35, on sait que \mathfrak{D} possède 12 faces. Par la définition 2.4.2, les faces \mathcal{F}_i sont exactement les facettes de \mathfrak{D} . Si la représentation n'était pas minimale, on pourrait écrire \mathfrak{D} comme une intersection de moins de 12 demi-espaces, et par la proposition 2.4.10, on aurait moins de 12 facettes ce qui est absurde. □

Nous terminons cette section avec le théorème clé qui va nous permettre d'affirmer que le polytope \mathfrak{D} est un dodécaèdre régulier, unique à similitude près. Pour cela, nous allons encore une fois énoncer une proposition qui a été démontrée dans la section 3.2 pour un carré, la démonstration reste plus ou moins similaire pour un pentagone régulier.

Proposition 3.4.38. *Dans l'espace de dimension 3, étant donnés deux pentagones réguliers, il existe une similitude qui applique l'un sur l'autre.*

Proposition 3.4.39. *Il existe, à similitude près, un unique polytope régulier correspondant au symbole de Schläfli $\{5, 3\}$.*

Démonstration. Montrons que le polytope \mathfrak{D} est cet unique polytope, à similitude près. Nous savons que toutes ses faces sont des pentagones réguliers isométriques et chaque sommet appartient à 3 faces⁴. Ce polytope correspond au polytope obtenu à partir du symbole de Schläfli $\{5, 3\}$.

Montrons maintenant l'unicité. Soit \mathcal{D} un dodécaèdre correspondant au symbole $\{5, 3\}$. Par les propositions 3.2.1 et 3.4.38, nous savons qu'il existe une similitude S envoyant une face de \mathcal{D} sur la face de référence $\mathcal{F}_{00} = \text{Conv}(A_{00}, A_{01}, A_{02}, A_{03}, A_{04})$ pour \mathfrak{D} . On peut supposer que $S(\mathcal{D})$

4. Il suffit de regarder la forme de chaque face pour montrer que chaque sommet appartient à 3 faces.

appartient à un demi-espace déterminé par \mathcal{F}_{00} et contenant \mathfrak{D} . Quitte à appliquer une réflexion par rapport au plan de la face, on peut supposer que $\mathcal{D}_1 \equiv z \geq 0$ et $S(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}_1$. Il nous suffit alors de montrer que $S(\mathcal{D}) = \mathfrak{D}$.

Nous savons que les sommets de la base appartiennent à 3 arêtes par la proposition 3.2.7. Prenons le sommet A_{00} , nous savons qu'il appartient à deux arêtes de la face de référence. Il existe donc une arête a qui ne soit pas dans la face \mathcal{F}_{00} tel que $a = [A_{00}, A']$. Cette arête est l'intersection de deux faces différentes de \mathcal{F}_{00} et donc A' est un sommet de ces deux faces. Par construction, il n'y a qu'un choix possible à une réflexion près et on retrouve le sommet A_{10} . Ensuite, tous les autres sommets sont fixés par construction également. \square

Des coordonnées bien plus élégantes et d'autres constructions géométriques qui permettent d'obtenir un dodécaèdre régulier à partir d'autres polytopes peuvent se trouver dans le chapitre 12 du livre de M. Berger [2]. Cependant, il aurait été plus difficile de démarrer la construction que nous avons faites, et qui nous permet d'obtenir l'unicité.

3.5 L'icosaèdre

Nous allons dans cette section montrer que l'ensemble polaire du dodécaèdre régulier \mathfrak{D} est un icosaèdre régulier. Ici, nous n'allons pas rencontrer de difficulté. Grâce à la théorie sur la dualité et plus particulièrement la polarité, l'obtention des sommets, arêtes et faces se fera de manière naturelle. Il nous restera à montrer que toutes les faces sont des triangles équilatéraux isométriques pour conclure. L'unicité, elle, n'est pas préservée par la polarité. Beaucoup d'ouvrages mentionnent la difficulté de montrer l'unicité de l'icosaèdre à partir des outils que nous avons à notre disposition. Nous devrons donc nous reposer sur le Théorème de Ridigité de Cauchy [4], pour montrer que l'icosaèdre régulier est unique, à similitude près. Avant de développer en quelques mots le Théorème de Rigidité, démontrons tout de même l'existence de ce polytope régulier. Pour cela, nous devons réécrire le dodécaèdre sous un forme nous permettant d'appliquer la théorie sur la dualité.

Nous savons que le dodécaèdre régulier \mathfrak{D} est l'intersection de 12 demi-espaces associés aux 12 faces de celui-ci. Nous allons écrire ces demi-espaces sous une forme qui nous permettra de déterminer facilement l'ensemble polaire. Dans la suite, nous notons G_1, \dots, G_{12} les centres de gravité des 12 faces de \mathfrak{D} et G le centre de gravité des sommets de \mathfrak{D} .

Grâce aux prochaines propositions, nous allons montrer que la distance $|\overrightarrow{GG_i}|$ est indépendante de i . Remarquons d'abord que les centres de gravité des faces \mathcal{F}_i sont les projections orthogonales de G sur ces faces.

Proposition 3.5.1. *Le centre de gravité G_i d'une face \mathcal{F}_i est la projection orthogonale du centre de gravité G de \mathfrak{D} sur cette face. En particulier, on a*

$$\mathfrak{D} = \bigcap_{i=1}^{12} \{X : \langle \overrightarrow{GX}, \overrightarrow{GG_i} \rangle \leq |\overrightarrow{GG_i}|^2\}.$$

Démonstration. Soit \mathcal{F}_i une face de \mathfrak{D} , nous supposons que $\mathcal{F}_i = \text{Conv}(P_1, \dots, P_5)$ où P_1, \dots, P_5 sont des sommets de \mathfrak{D} . Notons O' la projection orthogonale de G sur cette face et montrons que $O' = G_i$. Par le théorème de Pythagore, nous avons

$$|\overrightarrow{GP_i}|^2 = |\overrightarrow{GO'}|^2 + |\overrightarrow{O'P_i}|^2, \quad \forall i \in \{1, \dots, 5\}.$$

Par définition, G est le centre de gravité des sommets de \mathfrak{D} , donc toutes les distances $|\overrightarrow{GP_i}|$ sont égales, de même que $|\overrightarrow{GO'}|$ ne dépend pas de i . Ainsi, les distances $|\overrightarrow{O'P_i}|$ sont toutes égales ce qui implique que O' est équidistant des sommets P_i et donc $O' = G_i$. \square

Montrons que la distance $|\overrightarrow{GG'_i}|$ est indépendante de i .

Proposition 3.5.2. *La distance entre le centre de gravité des sommets de \mathfrak{D} et le centre de gravité d'une face de \mathfrak{D} est indépendante de la face.*

Démonstration. Comme G_i est la projection orthogonale de G sur la face F_i , nous pouvons utiliser le théorème de Pythagore. On a,

$$|\overrightarrow{GG'_i}|^2 = |\overrightarrow{GP_i}|^2 - |\overrightarrow{G_iP_i}|^2.$$

Comme toutes les faces sont isométriques, nous savons que $|\overrightarrow{G_iP_i}|$ est indépendant de i , de même que le centre de gravité des sommets est équidistant des sommets. Au final, $|\overrightarrow{GG'_i}|$ est indépendant de la face choisie. \square

Nous pouvons donc poser $\alpha = |\overrightarrow{GG_1}|^2$ et écrire

$$\mathfrak{D} = \cap_{i=1}^{12} \{X : \langle \overrightarrow{GX}, \overrightarrow{GG'_i} \rangle \leq 1\},$$

où G'_i est l'homothétique de centre G et de rapport $\frac{1}{\alpha}$ de G_i .

Proposition 3.5.3. *L'ensemble polaire de \mathfrak{D} est le polytope*

$$\mathfrak{D}^* = \text{Conv}(\{G'_i : i \in \{1, \dots, 12\}\}),$$

où les points G'_i sont obtenus en appliquant l'homothétie $h_{G, \frac{1}{\alpha}}$ de centre G et de rapport $\frac{1}{\alpha}$ aux points G_i .

En particulier, si les faces sont à une distance égale à 1 de G , alors $G'_i = G_i$.

Définition 3.5.4. Nous notons l'ensemble $\mathfrak{I} = \mathfrak{D}^*$.

Montrons que ce polytope vérifie les conditions pour être un icosaèdre régulier.

Proposition 3.5.5. *Chaque sommet de \mathfrak{I} appartient à 5 faces.*

Démonstration. Nous savons que la représentation \mathfrak{D} est minimale, ainsi tous les points G'_i sont des sommets de \mathfrak{I} par la proposition 2.6.10. De plus, l'application $\psi_{\mathfrak{D}}$ de la proposition 2.6.13 renverse les inclusions et nous savons par la proposition 2.6.14 que l'application envoie une face sur un sommet, une arête sur une arête et un sommet sur une face. Dans le dodécaèdre régulier, une face contient 5 arêtes et 5 sommets. Puisque $\psi_{\mathfrak{D}}$ renverse les inclusions, chaque sommet de \mathfrak{I} appartient à 5 arêtes et 5 faces. \square

Nous avons donc que tous les sommets de \mathfrak{I} sont de degré 5. Il reste à montrer la condition des faces régulières isométriques.

Proposition 3.5.6. *Chaque face de \mathfrak{I} est un triangle équilatéral dont la longueur des côtés vaut $\frac{4\varphi+3}{5}$.*

Démonstration. Montrons le pour une face, les autres se font de manière similaire. Nous allons calculer 3 centres de gravité des faces de \mathfrak{D} contenant un sommet commun, disons $A_{00} = (1, 0, 0)$. Si nous reprenons les notations lors de la construction des faces du dodécaèdre régulier, ce sont les faces \mathcal{F}_{00} , \mathcal{F}_{10} et \mathcal{F}_{14} qui contiennent le sommet A_{00} . Alors $G_1 = (0, 0, 0)$ est le centre de gravité de \mathcal{F}_{00} , $G_2 = (\frac{4\varphi+3}{10}, \frac{(3\varphi+1)\sqrt{4-\varphi^2}}{10}, \frac{\varphi+2}{5})$ celui de \mathcal{F}_{10} et $G_3 = (\frac{4\varphi+3}{10}, \frac{-(3\varphi+1)\sqrt{4-\varphi^2}}{10}, \frac{\varphi+2}{5})$ celui de \mathcal{F}_{14} . En reprenant les notations de la proposition 3.5.3, si nous montrons que les longueurs $|\overrightarrow{G_1G_2}|$, $|\overrightarrow{G_1G_3}|$ et $|\overrightarrow{G_2G_3}|$ sont égales, alors le rapport des longueurs sera de 1 et cela suffit. En effet, comme les homothéties préservent le rapport de longueur, en appliquant l'homothétie $h_{G, \frac{1}{\alpha}}$ de centre G et de rapport $\frac{1}{\alpha}$, les sommets G'_1 , G'_2 et G'_3 conserveront le rapport des longueurs égal à 1 ce qui est suffisant pour montrer que le triangle est équilatéral. Calculons la distance entre G_2 et G_3 . Nous simplifions à partir de la relation du nombre d'or, nous avons

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{G_2G_3}|^2 &= \frac{1}{25}((3\varphi+1)^2(4-\varphi^2)) \\ &= \frac{1}{25}((9\varphi^2+6\varphi+1)(4-\varphi^2)) \\ &= \frac{1}{25}(36\varphi^2+24\varphi+4-9\varphi^4-6\varphi^3-\varphi^2) \\ &= \frac{1}{25}(26\varphi^2-15\varphi^3+24\varphi+4) \\ &= \frac{1}{25}(20\varphi+15) \\ &= \frac{1}{5}(4\varphi+3). \end{aligned}$$

Ensuite, nous calculons la distance entre G_1 et G_2 , en simplifiant toujours avec la relation du nombre d'or, nous obtenons

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{G_1G_2}|^2 &= \frac{1}{100}((4\varphi+3)^2+(3\varphi+1)^2(4-\varphi^2)+4(\varphi+2)^2) \\ &= \frac{1}{100}(16\varphi^2+24\varphi+9+20\varphi+15+4\varphi^2+16\varphi+16) \\ &= \frac{1}{100}(20\varphi^2+60\varphi+40) \\ &= \frac{1}{5}(4\varphi+3). \end{aligned}$$

Nous savons immédiatement que $|\overrightarrow{G_1G_3}|$ est aussi égal à $\frac{4\varphi+3}{5}$ car les coordonnées de G_3 sont égales à un signe près à celle de G_2 . Ainsi, le rapport entre les longueurs des côtés vaut 1 et nous pouvons conclure que le triangle $G'_1G'_2G'_3$ obtenu à partir de l'homothétie $h_{G, \frac{1}{\alpha}}$ sur le triangle $G_1G_2G_3$ est un triangle équilatéral. \square

C'est donc ici que le bât blesse. Le problème de l'unicité de l'icosaèdre régulier vient de la manière de le construire. Il n'est pas flagrant qu'un polytope formé de 20 triangles équilatéraux isométriques assemblés cinq par cinq est nécessairement régulier. En effet, accoler 5 triangles équilatéraux en un sommet commun X ne mène pas à l'unicité, à similitude près. On obtient une figure éminemment flexible, de même qu'un polygone à n côtés de longueurs constantes est déformable dès que n est strictement plus grand que 3 [2]. Un exemple simple serait de prendre un carré et un losange, à partir du premier, nous pouvons obtenir le deuxième étant donné que cette figure est flexible. Nous pouvons remarquer que cela n'avait pas été le cas pour la construction du dodécaèdre régulier. En effet, il n'y a qu'une façon possible d'accoller trois faces en un sommet, de même pour le cube. La rigidité de l'icosaèdre n'apparaît que lorsqu'on construit la dernière face de ce polytope. Le Théorème de Rigidité de Cauchy est énoncé de la manière suivante par Cromwell [8] :

Théorème 3.5.7. *Un polytope convexe fermé est rigide.*

Il définit un polytope rigide comme ne pouvant être déformé sans être brisé. Le Théorème de Rigidité de Cauchy se trouve dans son second mémoire sur les polygones et polyèdres [4]. Bien que ce mémoire ait été validé par ses pairs, certaines justifications ne seraient plus acceptées aujourd’hui sans un développement un peu plus élaboré. C’est ce qui a poussé plusieurs mathématiciens comme H. Lebesgue [17], E. Steinitz [20] ou encore S. K. Zaremba et I. J. Schoenverg [23] à développer certains détails ou encore apporter de nouvelles démonstrations.

Nous ne rentrerons pas dans les détails de ce mémoire sur les polygones et polyèdres. Presque 200 ans nous sépare de cette rédaction et il est parfois difficile de comprendre les sous-entendus de Cauchy. Nous énonçons par envie historique le théorème tel que Cauchy l’avait écrit, il se trouve dans la seconde partie du mémoire.

Théorème 3.5.8 (Théorème de Rigidité). *Dans un polyèdre convexe dont toutes les faces sont invariables, les coins compris entre les faces ou, ce qui revient au même, les inclinaisons sur les différentes arêtes sont aussi invariables ; en sorte que, avec les mêmes faces, on ne peut construire qu’un second polyèdre convexe symétrique au premier.*

De ce théorème découle l’unicité des cinq polytopes réguliers. Nous pouvons dès à présent énoncer la proposition qui nous intéressait pour cette section.

Proposition 3.5.9. *Il existe, à similitude près, un unique polytope régulier correspondant au symbole de Schläfli $\{3, 5\}$.*

Démonstration. Montrons que le polytope \mathfrak{I} est cet unique polytope, à similitude près. Par les propositions 3.5.5 et 3.5.6, nous savons que toutes ses faces sont des triangles équilatéraux isométriques et chaque sommet appartient à 5 faces. Ce polytope correspond au polytope obtenu à partir du symbole de Schläfli $\{3, 5\}$. Le Théorème de Rigidité nous permet de conclure qu’il est unique, à similitude près. \square

Chapitre 4

Les symétries des polytopes réguliers

Nous avons déjà rencontré les symétries d'un polytope lors de notre construction du dodécaèdre. Elles ont été efficaces pour réduire le nombre de possibilités des quintuples de sommets. C'est grâce à cette régularité au niveau du degré des sommets et des faces qu'un polytope régulier, lorsqu'on le "tourne" d'une certaine façon, permet d'obtenir ce même polytope. Nous allons décrire les groupes de symétries des polytopes réguliers à partir de groupes connus comme par exemple S_4 . Pour cela, nous ferons intervenir des propositions sur la théorie des groupes qui se trouve dans l'annexe E. Avant d'entamer les groupes de symétries des polytopes réguliers, nous montrerons que la polarité préserve les symétries, ce qui nous permettra de conclure plus vite pour l'octaèdre et l'icosaèdre. Nous verrons également qu'un groupe de symétries peut être décomposé en deux sous-ensembles, l'un contenant les symétries positives d'un polytope et l'autre les symétries négatives. Nous verrons que pour le premier, celui-ci est même un sous-groupe du groupe des symétries d'un polytope.

Avant d'entamer les nouvelles propositions, nous rappelons les définitions fondamentales concernant les symétries.

Définition 4.0.1. *Une isométrie $\mathcal{I} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ est application affine qui préserve les distances. En d'autres termes, $\forall X, Y \in \mathcal{E}$, $d(I(X), I(Y)) = d(X, Y)$.*

Définition 4.0.2. *Une symétrie τ d'un polytope \mathcal{C} est une isométrie qui envoie le polytope sur lui-même, c'est à dire $S(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.*

Nous pouvons classer les isométries en deux sous-ensembles, celles qui sont positives, comme la rotation, translation et celles qui sont négatives, comme la réflexion par rapport à un plan ou un point. Ici, nous ne développerons pas toute la théorie concernant les isométries de l'espace affine euclidien, plus de détails sont donnés dans le livre de R. Lyndon [19]. L'ensemble des isométries de l'espace affine euclidien E muni de la composition est un groupe. De plus, l'ensemble des isométries positives de E , noté E^+ est un sous-groupe de celui-ci.

Les rappels concernant la théorie des groupes se trouvent dans l'annexe E. Nous démontrons que l'on peut partitionner E en deux ensembles, qui sont ses classes latérales à gauche pour l'action de E^+ sur E .

Proposition 4.0.3. *Soit E le groupe des isométries de l'espace affine euclidien. Le nombre de classes latérales à gauche pour l'action de E^+ sur E est égal à 2.*

Démonstration. L'ensemble E^+ est la classe latérale gauche obtenue en agissant par E^+ sur l'isométrie identité. On va montrer que pour les réflexions, il n'y a qu'une classe également.

Soit σ_0 une réflexion de E . On va montrer que toutes les réflexions sont dans la classe de σ_0 . Soit σ_1 une réflexion de E . Si on prend la rotation $r = \sigma_1 \circ \sigma_0^{-1}$, alors on a que $\sigma_1 \in E^+ \cdot \sigma_0$ car

$$r \circ \sigma_0 = \sigma_1 \circ \sigma_0^{-1} \circ \sigma_0 = \sigma_1.$$

Ainsi, toutes les réflexions sont dans l'ensemble $\sigma_0 E^+$ et donc le nombre de classes latérales à gauche de E vaut 2. \square

Dans cette preuve, nous avons utilisé un argument clé qui est que la composition de deux réflexions est une rotation. Vous trouverez tous les détails de cette égalité dans le chapitre 2 du livre "Regular Polytopes" de H.S.M Coxeter [6].

Corollaire 4.0.4. *Soit σ_0 une isométrie négative de E . L'ensemble des isométries de l'espace affine euclidien E est l'union de l'ensemble des isométries positives E^+ et l'ensemble $\sigma_0 E^+$.*

Nous nous concentrerons maintenant sur l'ensemble des symétries de polytopes.

Proposition 4.0.5. *Soient \mathcal{P} un polytope et G l'ensemble des symétries de ce polytope. Alors G est un sous-groupe de E .*

Démonstration. Soient \mathcal{I} et \mathcal{I}' deux symétries du polytope. Montrons que $\mathcal{I} \circ \mathcal{I}' \in G$. La composée d'isométries est une isométrie. De plus par définition d'une symétrie du polytope \mathcal{P} , on a $\mathcal{I}(\mathcal{I}'(\mathcal{P})) = \mathcal{I}(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$. L'isométrie id respecte la condition $id(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$. Enfin, l'inverse d'une symétrie est encore une symétrie du polytope. Soit $\mathcal{I} \in G$, alors par définition d'une symétrie, $\mathcal{I}^{-1}(\mathcal{P}) = \mathcal{I}^{-1}(\mathcal{I}(\mathcal{P}))$. Étant donné qu'une symétrie d'un polytope est une bijection, on a $\mathcal{I}^{-1}(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$. \square

Nous pouvons également en déduire que les symétries positives de \mathcal{P} forment un sous-groupe de G .

Proposition 4.0.6. *Soit \mathcal{P} un polytope. L'ensemble des symétries positives de \mathcal{P} forment un sous-groupe de G .*

On donne un nom particulier à ce groupe.

Définition 4.0.7. *On appelle groupe des rotations de \mathcal{P} le groupe des symétries positives de \mathcal{P} .*

Après ces quelques considérations sur les groupes de symétries d'un polytope quelconque, nous passons à la section concernant les symétries d'un ensemble polaire.

4.1 La polarité préserve les symétries

Nous allons démontrer que la dualité telle que nous l'avons définie au cours du chapitre 2, préserve les symétries. Pour cette dualité, nous devons prendre une origine. Ici, nous prendrons toujours le centre de gravité G d'un polytope \mathcal{P} , nous obtenons l'ensemble polaire de \mathcal{P} comme suit

$$\mathcal{P}_G^* = \left\{ X \in \mathcal{A} \mid \left\langle \overrightarrow{GX}, \overrightarrow{GY} \right\rangle, \leq 1 \quad \forall Y \in \mathcal{P} \right\}.$$

Remarque 4.1.1. Pour ne pas alourdir les notations, comme nous travaillerons toujours avec le centre de gravité comme origine pour cette dualité, nous nous permettons d'écrire \mathcal{P}^* .

Proposition 4.1.2. Soit \mathcal{P} un polytope. Alors τ est une symétrie de \mathcal{P} si et seulement si τ est une symétrie de \mathcal{P}^* .

Démonstration. Montrons la condition nécessaire. Soit G le centre de gravité de \mathcal{P} . On considère $X \in \mathcal{P}^*$, montrons que $\tau(X) \in \mathcal{P}^*$. Par la proposition 3.1.15, elle envoie les sommets de \mathcal{P} sur d'autres sommets de \mathcal{P} . De plus, par la remarque 3.4.25, on a $\tau(G) = G$. Soit $Y \in \mathcal{P}$, alors il existe $Y' \in \mathcal{P}$ tel que $Y = \tau(Y')$ puisque τ est une symétrie de \mathcal{P} . Par la proposition 3.1.4, l'application $\vec{\tau}$ est orthogonale et on a successivement

$$\begin{aligned}\langle \overrightarrow{G\tau(X)}, \overrightarrow{GY} \rangle &= \langle \overrightarrow{\tau(G)\tau(X)}, \overrightarrow{\tau(G)\tau(Y')} \rangle \\ &= \langle \vec{\tau}(\overrightarrow{GX}), \vec{\tau}(\overrightarrow{GY'}) \rangle \\ &= \langle \overrightarrow{GX}, \overrightarrow{GY'} \rangle \\ &\leqslant 1.\end{aligned}$$

Pour tout $X \in \mathcal{P}^*$, on a $\tau(X) \in \mathcal{P}^*$. Ce qui implique que

$$\tau(\mathcal{P}^*) \subset \mathcal{P}^*.$$

Pour l'autre inclusion, on sait que si τ est une symétrie, alors τ^{-1} l'est également. Comme τ est une bijection, on a

$$\begin{aligned}\tau^{-1}(\mathcal{P}^*) &\subset \mathcal{P}^* \\ \Leftrightarrow \tau(\tau^{-1}(\mathcal{P}^*)) &\subset \tau(\mathcal{P}^*) \\ \Leftrightarrow \mathcal{P}^* &\subset \tau(\mathcal{P}^*).\end{aligned}$$

Pour la condition suffisante, en appliquant la condition nécessaire au polytope \mathcal{P}^* , nous avons que toute symétrie de \mathcal{P}^* est une symétrie de \mathcal{P}^{**} . Comme \mathcal{P} est compact et que $G \in \text{int}(\mathcal{P})$, par la proposition 2.6.8, nous avons $\mathcal{P}^{**} = \mathcal{P}$. \square

4.2 Décomposition du groupe des symétries d'un polytope

Nous allons démontrer une proposition tirée du livre de M. Armstrong [1] dans son chapitre 10 sur les produits de groupes. Elle nous permettra d'écrire le groupe de symétries du cube et du dodécaèdre régulier sous forme d'un produit.

Théorème 4.2.1. Si H et K sont des sous-groupes de G tels que $HK = G$, si $H \cap K = \{e\}$ et si H commute avec K alors il existe un isomorphisme entre $H \times K$ et G .

Démonstration. On définit

$$\varphi : H \times K \rightarrow G : (x, y) \mapsto \varphi(x, y) = xy.$$

Alors φ est un homomorphisme. En effet, soient x et x' appartenant à K , y et y' à H , comme tous les éléments de H et K commutent, on peut écrire

$$\begin{aligned}\varphi((x,y)(x',y')) &= \varphi(xx',yy') \\ &= xx'yy' \\ &= xyx'y' \\ &= \varphi(x,y)\varphi(x',y').\end{aligned}$$

Montrons que φ est une bijection, nous aurons alors un isomorphisme entre $H \times K$ et G . Soient des couples de points $(x,y), (x',y')$ distincts appartenant à $H \times K$, comme H et K sont des groupes, on a

$$\begin{aligned}\varphi(x,y) &= \varphi(x',y') \\ \Leftrightarrow xy &= x'y' \\ \Leftrightarrow (x')^{-1}x &= y'y^{-1}.\end{aligned}$$

Étant donné que $H \cap K = \{e\}$ et comme nous avons $(x')^{-1}x$ appartenant à H et $y'y^{-1}$ à K , cela implique que $(x')^{-1}x = e$ et $y'y^{-1} = e$. Nous avons alors l'injectivité de φ . De plus, on sait que $HK = G$ ce qui veut dire que chaque élément de G peut être écrit comme un produit xy où $x \in H, y \in K$. Au final, φ est bien un isomorphisme. \square

Nous allons maintenant démontrer une proposition clé pour les symétries des polytopes réguliers. Elle va nous permettre d'obtenir un isomorphisme entre les groupes de symétries des polytopes réguliers et le produit de leur groupe de rotations avec \mathbb{Z}_2 . Cette proposition n'est pas valable pour le tétraèdre régulier. Avant de démontrer cette proposition, nous allons remarquer que la réflexion $X \rightarrow -X + 2G$ où G est le centre de gravité est une symétrie pour le cube et le dodécaèdre. Par dualité, nous obtenons que cette réflexion est également une symétrie pour l'octaèdre et l'icosaèdre.

Proposition 4.2.2. *La réflexion $\tau : X \rightarrow -X + 2G$ est une symétrie pour le cube, le dodécaèdre, l'octaèdre et l'icosaèdre.*

Démonstration. Pour le dodécaèdre, nous avons déjà démontré dans le chapitre précédent que τ est une symétrie de \mathfrak{D} . Par dualité, c'est également une symétrie de l'icosaèdre. Ensuite, pour le cube, en prenant les sommets obtenus dans le premier chapitre, le centre de gravité a pour coordonnée $(0,0,0)$. Ainsi, la réflexion est obtenue en associant à chaque point X le point dont les coordonnées sont opposées à celles de X . Comme l'ensemble des sommets de \mathfrak{C} contient exactement 4 points et leur opposé, la réflexion τ envoie chaque sommet sur son opposé qui est également un sommet. Au final, par la proposition 3.4.23, nous avons que τ est une symétrie du cube. Toujours par dualité, τ est également une symétrie pour l'octaèdre. \square

Quitte à translater les sommets, nous pouvons supposer que tous les polytopes réguliers ont comme centre de gravité $O : (0,0,0)$. Maintenant, nous pouvons démontrer le théorème principal.

Théorème 4.2.3. *Le groupe des symétries d'un polytope régulier, différent du tétraèdre, est isomorphe au produit de son groupe de rotations et \mathbb{Z}_2 . En d'autres mots,*

$$G \cong H \times \mathbb{Z}_2,$$

où G est le groupe de symétries du polytope régulier et H son groupe de rotations.

Démonstration. Si τ est la réflexion définie à la proposition 4.2.2 alors τ est une symétrie pour les polytopes réguliers différents du tétraèdre. Le sous-groupe $\langle \tau \rangle$ engendré par τ est un sous-groupe de G . De plus, il est égal à $\{id, \tau\}$ puisque $\tau^2 = id$. Nous allons montrer que les sous-groupes $\langle \tau \rangle$ et H vérifient les conditions du théorème 4.2.1 pour pouvoir l'appliquer. Ensuite, nous montrerons que $\langle \tau \rangle$ est isomorphe à \mathbb{Z}_2 , ce qui terminera la preuve.

Nous avons $\langle \tau \rangle \cap H = \{id\}$ car τ est une réflexion, elle peut être représentée par une matrice orthogonale ayant un déterminant égal à -1 alors que toutes les rotations se représentent par une matrice orthogonale de déterminant égal à 1 . Montrons maintenant que H et $\langle \tau \rangle$ commutent. Les éléments de $\langle \tau \rangle$ sont représentés par la matrice identité I et son opposée $-I$. Les matrices diagonales commutent avec toutes les autres matrices. Ainsi, tous les éléments de H commutent avec ceux de $\langle \tau \rangle$. Montrons que $\langle \tau \rangle H = G$. Puisque $\langle \tau \rangle$ et H sont des sous-groupes de G , on a directement $\langle \tau \rangle H \subset G$. Soit maintenant i un élément de G . Si i est une isométrie positive, alors $i \in H \subset \langle \tau \rangle H$. Si i est une isométrie négative, alors $i = \tau(\tau i)$ et τi est positive, donc i appartient à $\langle \tau \rangle H$.

Ainsi, par le théorème 4.2.1, nous avons $G \cong \langle \tau \rangle \times H$. Il nous reste à montrer que $\langle \tau \rangle$ est isomorphe à \mathbb{Z}_2 . Posons

$$\psi : \langle \tau \rangle \rightarrow \mathbb{Z}_2 : r \mapsto \psi(r) = \begin{cases} 0, & r = id \\ 1, & r = \tau. \end{cases}$$

En séparant chaque cas, nous pouvons montrer que ψ est bien un homomorphisme. Montrons le pour un des cas, les autres se font de la même manière. On a $\psi(\tau \circ \tau) = \psi(id) = 0$ et $\psi(\tau) + \psi(\tau) = 0 + 0$. Le caractère bijectif est évident. En effet, par définition nous avons la surjection. Comme $\langle \tau \rangle$ et \mathbb{Z}_2 ont le même nombre d'éléments, ψ est une bijection. Ainsi, nous avons $\langle \tau \rangle \cong \mathbb{Z}_2$ et donc $G \cong H \times \mathbb{Z}_2$. \square

4.3 Symétries du tétraèdre régulier

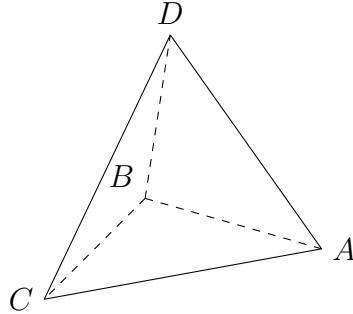
Pour commencer notre étude sur les symétries, nous pourrions nous demander le nombre maximum de symétries que le tétraèdre peut avoir.

Proposition 4.3.1. *Le groupe des symétries du tétraèdre \mathfrak{T} possède au plus 24 éléments.*

Démonstration. Si τ est une symétrie de \mathfrak{T} , alors $\tau(S_1)$ est un sommet du tétraèdre. Au total, on a 4 possibilités pour $\tau(S_1)$. Alors les 3 autres sommets S_2, S_3, S_4 , lorsqu'on leur applique τ , rendent exactement trois sommets, disons S'_2, S'_3, S'_4 . Ainsi, τ induit une bijection de $\{S_2, S_3, S_4\}$ dans $\{S'_2, S'_3, S'_4\}$. Il y a exactement 6 telles bijections. Le nombre maximal de choix possibles est donc $6 \times 4 = 24$. \square

Une autre manière de le démontrer est de regarder la proposition 3.4.24, on sait que toute symétrie définit une permutation de l'ensemble des sommets. Ce qui implique qu'on peut associer une symétrie à un élément de S_4 (car le tétraèdre possède 4 sommets). On a donc au maximum $|S_4| = 24$ symétries possibles.

Proposition 4.3.2. *Le groupe des symétries du tétraèdre régulier est isomorphe à S_4 .*


 FIGURE 4.1 – Le tétraèdre \mathfrak{T} .

Démonstration. Nommons les sommets du tétraèdre régulier A, B, C et D comme sur la figure ci-dessus.

Soit G le groupe de symétries du tétraèdre régulier. Par la proposition 3.4.24, toute symétrie définit une permutation de l'ensemble des sommets. Nous avons donc pour chaque symétrie une unique permutation des sommets. On définit l'application φ de la manière suivante :

$$\varphi : G \rightarrow S_4 : \mu \mapsto \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ \mu(A) & \mu(B) & \mu(C) & \mu(D) \end{pmatrix}.$$

Montrons que φ est une bijection. Soient ν et μ deux éléments de G tels que $\varphi(\mu) = \varphi(\nu)$. Cette égalité se traduit comme suit : les symétries μ et ν envoient chaque sommet sur un même sommet. Procédons par l'absurde et supposons que $\mu \neq \nu$. Ainsi, il existe un point X de \mathfrak{T} tel que $\mu(X) \neq \nu(X)$. Par définition, X s'écrit comme une combinaison convexe des sommets de \mathfrak{T} ,

$$X = \lambda_A A + \lambda_B B + \lambda_C C + \lambda_D D.$$

Comme μ est une application affine, nous avons $\mu(X) = \lambda_A \mu(A) + \lambda_B \mu(B) + \lambda_C \mu(C) + \lambda_D \mu(D)$. Par hypothèse, nous avons $\varphi(\mu) = \varphi(\nu)$ ce qui implique que

$$\mu(X) = \lambda_A \nu(A) + \lambda_B \nu(B) + \lambda_C \nu(C) + \lambda_D \nu(D) = \nu(X).$$

Cela est absurde vu ce que nous avions supposé. Ainsi, $\mu = \nu$ et l'application φ est injective.

Pour montrer que φ est surjectif, il faut revenir à la proposition E.4.9 qui nous dit que les transpositions $(AB), (AC)$ et (AD) génèrent S_4 . Il faut donc trouver des symétries qui permutent deux sommets du tétraèdre. Les réflexions par rapport aux 3 plans médiateurs des arêtes ne contenant pas le sommet A sont les symétries qui conviendront. Comme nous savons que le tétraèdre est unique à similitude près, nous décidons de prendre les sommets obtenus lors du précédent chapitre. Soient $A = (1, 0, 0)$, $B = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, $C = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ et $D = (0, 0, \sqrt{2})$. La partie de cette preuve pour le plan médiateur du segment $[A, C]$ se trouve dans l'annexe C, les autres se font de la même manière. On a donc une réflexion τ qui envoie les sommets du tétraèdre sur d'autres sommets, cela implique que la réflexion est une symétrie par la proposition 3.4.23. Au total, nous obtenons 3 symétries qui permettent de générer S_4 , ainsi φ est surjectif.

□

4.4 Symétries du cube/de l'octaèdre

Nous allons procéder de la même manière que pour le tétraèdre. On pourrait se poser comme première question quel serait le nombre maximum de symétries possibles pour le cube et l'octaèdre. En effet, nous savons que le cube et l'octaèdre ont le même groupe de symétries car la polarité préserve celles-ci. On sait que toute symétrie peut être vue comme une permutation des sommets par la proposition 3.4.24. On sait également qu'une symétrie préserve les distances, et donc on ne peut pas retrouver toutes les permutations possibles de 8 sommets car certaines ne respecteront pas cette condition.

Proposition 4.4.1. *Le groupe des symétries du cube \mathfrak{C} possède au plus 48 éléments.*

Démonstration. On considère un sommet du cube O et les trois sommets adjacents S_1, S_2, S_3 . Si τ est une symétrie de \mathfrak{C} , alors $\tau(O)$ est un sommet du cube par la proposition 3.1.15. Il y a au total 8 possibilités pour $\tau(O)$. Alors $\tau(E_1), \tau(E_2), \tau(E_3)$ sont des sommets adjacents à $\tau(O)$. Il y a exactement 3 tels sommets, disons S_1, S_2, S_3 . La symétrie τ induit une bijection de $\{E_1, E_2, E_3\}$ dans $\{S_1, S_2, S_3\}$. Il y a exactement 6 telles bijections. Le nombre maximal de choix possibles est donc $6 \times 8 = 48$. \square

Avant de regarder le groupe des symétries du cube, nous allons montrer que le groupe des rotations est isomorphe à un groupe bien connu en théorie des groupes : S_4 . Il faut numérotter les diagonales du cube et montrer que les symétries positives permutent les 4 diagonales. Pour arriver à démontrer cette proposition, nous devons parcourir quelques propositions subsidiaires concernant les diagonales du cube.

Définition 4.4.2. *Appelons diagonale du cube un segment déterminé par 2 sommets S_i, S_j tels que $G = \frac{1}{2}S_i + \frac{1}{2}S_j$, où G est le centre de gravité du cube.*

Par construction, le cube possède 4 diagonales.

Proposition 4.4.3. *Toute symétrie I du cube applique chaque diagonale sur une diagonale. Cela définit une bijection D_I de l'ensemble des diagonales dans lui-même.*

Démonstration. Si $[S_i, S_j]$ est une diagonale, alors par la proposition 3.1.14,

$$I([S_i, S_j]) = [I(S_i), I(S_j)]. \quad (4.1)$$

De plus, par la proposition 3.1.15, $I(S_i)$ et $I(S_j)$ sont des sommets du cube. Par la remarque 3.4.25, toute symétrie fixe le centre de gravité du polytope, nous avons $I(G) = G$ et

$$G = \frac{1}{2}I(S_i) + \frac{1}{2}I(S_j).$$

Ainsi $I(S_i)$ et $I(S_j)$ définissent une diagonale. L'application D_I est définie par la relation (4.1). Montrons qu'elle est injective. Si les diagonales $[S_i, S_j]$ et $[S'_i, S'_j]$ ont la même image, alors les sommets S_i, S_j, S'_i et S'_j ont une image par I incluse dans une droite. Alors l'image de leur enveloppe affine (de dimension 2) est incluse dans cette droite. C'est impossible car l'image d'un plan par une transformation affine est un plan. \square

Proposition 4.4.4. *L’application D de l’ensemble des symétries positives du cube dans l’ensemble des permutations des diagonales qui à I associe D_I est un homomorphisme de groupes, injectif.*

Pour cette preuve, nous devons faire quelques petits rappels sur les valeurs propres d’une isométrie (linéaire).

Remarque 4.4.5. *Les valeurs propres d’une isométrie linéaire sont égales à ± 1 .*

Si $\vec{\tau}(u) = \lambda u$ ($u \neq 0$) alors $|\vec{\tau}(u)| = |\lambda||u| = |u|$ car τ est une isométrie. Nous avons donc $|\lambda| = 1$.

Remarque 4.4.6. *Les vecteurs propres d’une isométrie linéaire, de valeurs propres différentes sont orthogonaux.*

En effet, si u, v sont de valeurs propres λ et μ , on a

$$\langle u, v \rangle = \langle \vec{\tau}(u), \vec{\tau}(v) \rangle = \lambda \mu \langle u, v \rangle.$$

Si $\lambda \mu \neq 1$, alors $\langle u, v \rangle = 0$.

Nous pouvons maintenant entamer la démonstration.

Démonstration. On calcule, pour toute arête $[S_i, S_j]$,

$$\begin{aligned} D_{I'} \circ D_I ([S_i, S_j]) &= D_{I'} ([I(S_i), I(S_j)]) \\ &= [I'(I(S_i)), I'(I(S_j))] \\ &= D_{I' \circ I} ([S_i, S_j]). \end{aligned}$$

De plus, $D_{id} = id$. On a donc un homomorphisme de groupes.

Montrons qu’il est injectif. Supposons que $D_I = D_{I'}$. On a donc $D_{I'} \circ D_I^{-1} = id$, ou encore

$$D_{I' \circ I^{-1}} = id,$$

l’identité étant celle du groupe des permutations des diagonales.

Montrons que si une isométrie positive préserve les diagonales du cube, alors c’est l’identité. Chaque diagonale définit un vecteur propre : si $[S_i, S_j]$ est une diagonale, alors $D_I ([S_i, S_j]) = [S_i, S_j]$. On a donc soit $\begin{cases} I(S_i) = S_i \\ I(S_j) = S_j \end{cases}$, soit $\begin{cases} I(S_i) = S_j \\ I(S_j) = S_i \end{cases}$. Dans le premier cas, on a

$$\vec{I}(\overrightarrow{GS_i}) = \overrightarrow{I(G)I(S_i)} = \overrightarrow{GS_i}.$$

Dans le second cas, on a

$$\vec{I}(\overrightarrow{GS_i}) = \overrightarrow{I(G)I(S_j)} = \overrightarrow{GS_j} = -\overrightarrow{GS_i}.$$

Il nous suffit de montrer que le deuxième cas n’arrive pas.

Mais si une diagonale définit un vecteur propre de valeur propre -1 , alors pour toute autre diagonale, on a soit un vecteur de valeur propre -1 , soit cette diagonale est orthogonale à la première. Comme les diagonales du cube ne sont pas orthogonales, les vecteurs propres qu’elles définissent sont toutes de valeur propre égale à -1 . Donc $\vec{I} = -id$ et I est négative, ce qui est contraire à l’hypothèse.

Ainsi, nous pouvons conclure que si $D_{I' \circ I^{-1}} = id$ alors $I' \circ I^{-1} = id$ ce qui implique que $I' = I$ et l’homomorphisme D est injectif. \square

Nous terminons la preuve en montrant que l'homomorphisme est bien un isomorphisme. Ici, nous avons démontré l'injectivité, il nous reste donc le caractère surjectif.

Théorème 4.4.7. *Le groupe de symétries positives du cube H est isomorphe à S_4 .*

Démonstration. En prenant l'application D de l'ensemble des symétries positives du cube H dans l'ensemble des permutations des diagonales qui à I associe D_I . Par la proposition 4.4.4, nous savons déjà que cette application est un homomorphisme injectif.

De plus, par construction, le cube possède 4 diagonales. Nommons ces diagonales,

$$[S_{000}, S_{111}] := 1, [S_{100}, S_{011}] := 2, [S_{001}, S_{110}] := 3, [S_{010}, S_{101}] := 4.$$

Montrons que $D : H \rightarrow S_4$ est surjectif. Pour cela, nous allons d'abord utiliser la proposition E.4.10 qui nous permet de regarder simplement les permutations (12) et (1234) car ce sont les générateurs de S_4 .

La permutation (1234) est obtenue par la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ ayant comme axe de rotation le centre de gravité de deux faces opposées. Cette rotation permute les diagonales de la même manière que la permutation (1234). Cette partie se trouve dans l'annexe F.

Nous montrons également dans l'annexe F que la permutation (12) correspond bien à une rotation du cube. Ainsi, comme les générateurs de S_4 sont (1234) et (12) et qu'on a trouvé deux rotations du cube permutant les diagonales de ces deux manières là, l'application D est surjective. \square

Nous pouvons maintenant obtenir une nouvelle forme pour le groupe des symétries du cube.

Proposition 4.4.8. *Le groupe des symétries du cube \mathfrak{C} est isomorphe à $S_4 \times \mathbb{Z}_2$.*

Démonstration. Cela découle de la proposition 4.2.3. \square

Pour terminer, nous savons l'octaèdre est le dual du cube : $\mathfrak{O} = \mathfrak{C}^*$. Ainsi, il possède le même groupe de symétries et symétries positives.

4.5 Symétries du dodécaèdre/de l'icosaèdre

Nous procédons comme pour les premiers polytopes réguliers. Toujours par le même raisonnement, nous pouvons trouver un nombre maximal de symétries du dodécaèdre régulier, et donc également un nombre maximal de symétries positives.

Proposition 4.5.1. *Le groupe des symétries du dodécaèdre régulier \mathfrak{D} possède au plus 120 éléments.*

Démonstration. On considère un sommet du dodécaèdre O et les trois sommets adjacents E_1, E_2, E_3 . Si τ est une symétrie de \mathfrak{D} , alors $\tau(O)$ est un sommet du dodécaèdre par la proposition 3.1.15. Il y a au total 20 possibilités pour $\tau(O)$. Alors $\tau(E_1), \tau(E_2), \tau(E_3)$ sont des sommets adjacents à $\tau(O)$. Il y a exactement 3 tels sommets, disons S_1, S_2, S_3 . Donc τ induit une bijection de $\{E_1, E_2, E_3\}$ dans $\{S_1, S_2, S_3\}$. Il y a exactement 6 telles bijections. Au final, le nombre maximal de choix possibles est 120. \square

Corollaire 4.5.2. *Le groupe des symétries positives du dodécaèdre \mathfrak{D} possède au plus 60 éléments.*

Démonstration. En effet, les symétries du dodécaèdre sont dans exactement deux classes latérales gauches 4.0.3. Étant donné que ces classes possèdent le même nombre d'éléments, par le théorème de Lagrange E.3.4, la classe des symétries positives contient au plus 60 éléments. \square

Nous allons maintenant montrer que le groupe des symétries positives de \mathfrak{D} est isomorphe à A_5 (voir annexe E). Pour cela, nous allons d'abord remarquer que l'enveloppe convexe de certains octuples de sommets de \mathfrak{D} forment des cubes.

Proposition 4.5.3. *Il existe exactement 5 cubes dont les arêtes sont des diagonales des faces (pentagonales).*

Démonstration. Supposons qu'on a un tel cube et tentons de le caractériser. Deux arêtes du cube sont dans des faces différentes. Sinon, on aurait deux diagonales d'un pentagone qui seraient soit parallèles, soit perpendiculaires ce qui est impossible par les propriétés du pentagone et ses diagonales. De plus, il y a 12 arêtes pour le cube et 12 faces pour le dodécaèdre. Ainsi, par comptage, il y a exactement une arête du cube par face du dodécaèdre.

Ce cube a donc une arête dans la face de référence $\mathcal{F}_{00} = \text{Conv}(\{A_{0i} : i \in \{0, \dots, 4\}\})$ et c'est une des diagonales de cette face, par hypothèse. Il suffit de montrer qu'une diagonale ne peut être l'arête que d'un seul cube. Quitte à faire tourner la face \mathcal{F}_{00} , on peut supposer que cette arête du cube soit la diagonale D_1 . Montrons alors que les arêtes du cube parallèles à D_1 (ou les sommets correspondants) sont complètement déterminées par D_1 . Dans une face, une diagonale est parallèle

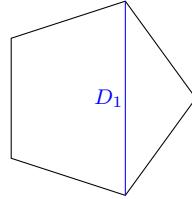


FIGURE 4.2 – La face \mathcal{F}_{00} du dodécaèdre.

à une arête a par le corollaire 3.4.7. On considère l'autre face contenant a , elle contient une seule diagonale parallèle à a et aucune qui soit perpendiculaire à a . Or, les arêtes du cube sont soit

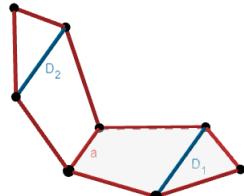


FIGURE 4.3 – Les arêtes D_1 et D_2 .

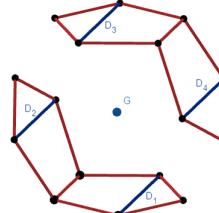


FIGURE 4.4 – Les 8 sommets du cube.

parallèles soit perpendiculaires entre elles. Donc chaque diagonale est exactement dans un cube car elle n'est parallèle qu'à une seule arête du pentagone et n'est perpendiculaire à aucune arête de

celui-ci. Ainsi, nous avons obtenu les 4 premiers sommets qui sont distincts les uns des autres car ils sont dans deux faces différentes ayant seulement en commun l'arête a . Dans la face opposée à \mathcal{F}_{00} , c'est à dire la face obtenue par la réflexion $\tau : X \mapsto -X + 2G$, il y a une diagonale qui est parallèle à D_1 . C'est la seule diagonale qui peut être l'arête du cube par le même raisonnement. De même que pour la face opposée à \mathcal{F}_{10} , il y a une seule diagonale qui soit parallèle à D_2 .

Donc les 4 sommets sont envoyés sur 4 sommets différents. Nous n'avons pas le choix, les 8 sommets du cube sont ces 8 trouvés.

Montrons maintenant l'existence de ce cube à partir des sommets que nous venons d'obtenir. Nous avons deux arêtes parallèles et de même longueur $D_1 = [A_{02}, A_{04}]$ et $D_2 = [A_{10}, A_{11}]$, la face est donc un parallélogramme. Ainsi, les arêtes $[A_{10}, A_{04}]$ et $[A_{11}, A_{02}]$ sont parallèles mais elles sont également de même longueur car les diagonales des faces pentagonales ont toutes une longueur égale à $\varphi\sqrt{4 - \varphi^2}$ par la proposition 3.4.5. Nous avons donc un losange. Il faut maintenant montrer que l'angle entre deux côtés du losange vaut $\frac{\pi}{2}$. En faisant le produit scalaire du vecteur $\overrightarrow{A_{02}A_{04}}$ avec le vecteur $\overrightarrow{A_{02}A_{11}}$, nous obtenons grâce à la relation du nombre d'or,

$$\langle \overrightarrow{A_{02}A_{04}}, \overrightarrow{A_{02}A_{11}} \rangle = 0.$$

Ainsi, nous avons une face carrée. Le même type d'argument peut être effectué pour les autres faces et nous obtenons que l'ensemble

$$\begin{aligned} & \text{Conv}(A_{02}, A_{04}, A_{10}, A_{11}, \tau(A_{02}), \tau(A_{04}), \tau(A_{10}), \tau(A_{11})) \\ &= \text{Conv}(A_{02}, A_{04}, A_{10}, A_{11}, A_{34}, A_{32}, A_{22}, A_{23}) \end{aligned}$$

est un cube dont toutes ses arêtes sont des diagonales des faces pentagonales de \mathfrak{D} . Étant donné que dans une face pentagonale il y a exactement 5 diagonales et que celles-ci déterminent toutes des cubes différents, nous avons exactement 5 cubes vérifiant les conditions. \square

Nous pouvons dès à présent noter $\mathcal{C} = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_5\}$ l'ensemble des cubes du dodécaèdre ayant comme arêtes les diagonales des faces pentagonales. Montrons maintenant que chaque symétrie positive du dodécaèdre envoie un cube \mathcal{C}_i sur un cube \mathcal{C}_j .

Proposition 4.5.4. *Soient I une symétrie positive du dodécaèdre et $\mathcal{C}_i \in \mathcal{C}$. Alors $I(\mathcal{C}_j)$ est également un cube de l'ensemble \mathcal{C} .*

Démonstration. Montrons qu'une symétrie envoie une diagonale d'une face pentagonale sur une autre diagonale d'une face pentagonale. Notons $[P_i, P_j]$ une diagonale de la face \mathcal{F}_k de \mathfrak{D} . Alors par la proposition 3.1.15, $I(\mathcal{F}_k)$ est une face et les points $I(P_i)$ et $I(P_j)$ sont des sommets de \mathfrak{D} . De plus, par la proposition 3.1.14, nous avons

$$[I(P_i), I(P_j)] \subset I(\mathcal{F}_k).$$

Par définition d'une isométrie, nous savons que $[I(P_i), I(P_j)]$ n'est pas une arête de \mathfrak{D} car sinon $[P_i, P_j]$ serait une arête ce qui est absurde. Ainsi, toute isométrie positive du dodécaèdre préserve les diagonales des faces.

Montrons maintenant qu'une symétrie de \mathfrak{D} envoie un cube de \mathcal{C} sur un autre cube. Si \mathcal{C}_i est un cube appartenant à \mathcal{C} , alors ses arêtes sont des diagonales des faces. Par la proposition 3.2.4, nous avons que $I(\mathcal{C}_i)$ est un cube. Nous savons également par le début de la preuve qu'une diagonale est envoyée sur une autre diagonale de \mathfrak{D} , ainsi $I(\mathcal{C}_i)$ est un cube appartenant à \mathcal{C} . \square

Théorème 4.5.5. *Le groupe des symétries positives du dodécaèdre régulier est isomorphe à A_5 .*

Démonstration. Si on note $S(\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_5)$ le groupe des permutations de $\{\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_5\}$ et H l'ensemble des symétries positives du dodécaèdre. On définit l'application

$$\psi : H \rightarrow S(\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_5) : I \mapsto \mathcal{C}_i \mapsto I(\mathcal{C}_i).$$

Cette application est un homomorphisme car nous avons $I \circ I'(\mathcal{C}_i) = I(I'(\mathcal{C}_i))$. Montrons que $Im(\psi)$ contient le groupe alterné A_5 . Nous savons par la proposition E.4.13 que ce groupe est génération par les 3-cycles.

Dans l'annexe G, nous montrons qu'une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ ayant comme axe de rotation le segment joignant deux sommets opposés est une symétrie de \mathfrak{D} et qu'elle permute les cubes de \mathfrak{D} de manière à former un 3-cycle. Ainsi, en utilisant les 10 axes de rotation et les deux angles, nous pouvons trouver 20 3-cycles, ce qui correspond à tous les 3-cycles de S_5 . Nous avons obtenus tous les générateurs de A_5 à partir des symétries de \mathfrak{D} .

Nous venons de montrer que $Im(\psi) \supset A_5$. De plus, par la proposition E.4.12, nous savons que le groupe A_5 possède 60 éléments et donc $|Im(\psi)| \geq 60$. Mais nous avons aussi $|Im(\psi)| \leq |H| \leq 60$, par la proposition 4.5.2. Donc $|Im(\psi)| = |H| = 60$, puis $Im(\psi) = A_5$ et l'application ψ est un isomorphisme

$$\psi : H \rightarrow A_5$$

ce qui nous permet de conclure. □

Pour finir, nous pouvons caractériser le groupe des symétries du dodécaèdre comme suit.

Proposition 4.5.6. *Le groupe des symétries du dodécaèdre régulier \mathfrak{D} est isomorphe à $A_5 \times \mathbb{Z}_2$.*

Démonstration. Cela découle des propositions 4.2.3 et 4.5.5. □

Toujours grâce au passage au dual, nous savons que le groupe des symétries et symétries positives de \mathfrak{I} sont isomorphes aux mêmes groupes que ceux associés au dodécaèdre régulier \mathfrak{D} .

4.6 Une autre définition pour les polytopes réguliers

Lors du premier chapitre, nous avions défini les polytopes réguliers convexes comme des ensembles convexes ayant des faces régulières et tels que chaque sommet appartient à un même nombre de face. C'est une définition abordable pour tout le monde mais qui ne permet pas de voir à quel point la régularité est présente dans ces polytopes. Nous décidons ici de caractériser les polytopes réguliers à partir d'une définition que certains livres prennent d'ailleurs comme point de départ [2]. Pour cela, nous devons définir la notion de drapeau que nous définissons en dimension 3.

Définition 4.6.1. *Soit \mathcal{P} un polytope de dimension 3, on appelle drapeau de \mathcal{P} un triplet (s, a, f) où s est un sommet, a une arête et f une face de \mathcal{P} et tel que $s \in a \subset f$.*

Nous pouvons dès à présent caractériser les polytopes réguliers.

Proposition 4.6.2. *Soit \mathcal{P} un polytope. Ce polytope est régulier si et seulement si l'ensemble des symétries de \mathcal{P} agit transitivement sur les drapeaux de \mathcal{P} .*

La notion d'"agir transitivement" se trouve dans l'annexe E mais nous allons l'interpréter avec les éléments que nous avons ici. Notons D l'ensemble des drapeaux d'un polytope \mathcal{P} et G le groupe des symétries de \mathcal{P} . Le groupe G agit transitivement sur D se traduit par : pour tous drapeaux d et d' appartenant à D , il existe une symétrie τ appartenant à G telle que $d' = \tau(d)$. Avant d'entamer la démonstration de cette caractérisation, nous allons d'abord démontrer que la dualité préserve également l'action transitive sur les drapeaux.

Proposition 4.6.3. *Soient \mathcal{P} un 3-polytope et G le centre de gravité d'un polytope. L'ensemble des symétries de \mathcal{P} agit transitivement sur les drapeaux \mathcal{P} si et seulement si il agit transitivement sur les drapeaux de \mathcal{P}_G^* .*

Démonstration. Soient (s_1, a_1, f_1) et (s_2, a_2, f_2) deux drapeaux de \mathcal{P}^* , alors $(f_1^\Delta, a_1^\Delta, s_1^\Delta)$ et $(f_2^\Delta, a_2^\Delta, s_2^\Delta)$ sont des drapeaux de \mathcal{P} par la proposition 2.6.13. Par hypothèse, il existe une symétrie I de \mathcal{P} telle que $I(f_1^\Delta) = f_2^\Delta$, $I(a_1^\Delta) = a_2^\Delta$ et $I(s_1^\Delta) = s_2^\Delta$. Montrons que $I(f_1) = f_2$. Soit X appartenant à f_1 . Par la proposition 2.6.13, nous avons que $f_i = (f_i^\Delta)^\Delta$ où $i = 1, 2$. Ainsi, X appartient à f_1 si et seulement si $\langle \overrightarrow{GX}, \overrightarrow{GY} \rangle = 1 \forall Y \in f_1^\Delta$. Par définition d'une isométrie et comme $I(f_1^\Delta) = f_2^\Delta$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\langle \overrightarrow{GX}, \overrightarrow{GY} \rangle &= 1 \quad \forall Y \in f_1^\Delta \\ \langle \overrightarrow{GI(X)}, \overrightarrow{GI(Y)} \rangle &= 1 \quad \forall Y \in f_1^\Delta \\ \langle \overrightarrow{GI(X)}, \overrightarrow{GY'} \rangle &= 1 \quad \forall Y' \in f_2^\Delta\end{aligned}$$

Comme toute symétrie de \mathcal{P} est une symétrie de \mathcal{P}^* par la proposition 4.1.2, nous avons $I(X) \in \mathcal{P}^*$ et donc $I(X) \in f_2$. Nous n'avons utilisé nulle part la dimension des faces, ainsi l'argument s'applique pour les arêtes et sommets. \square

Cette proposition est vraie pour des polytopes de dimension supérieure. Nous revenons à la caractérisation des 3-polytopes réguliers.

Proposition 4.6.4. *Soit \mathcal{P} un polytope. Ce polytope est régulier si et seulement si l'ensemble des symétries de \mathcal{P} agit transitivement sur les drapeaux de \mathcal{P} .*

Démonstration. Montrons la condition suffisante. Nous avons que les arêtes de ce polytope sont de même longueur. Sinon, il existe deux arêtes a et a' de longueurs différentes et τ une symétrie du polytope tels que $\tau(a) = a'$. C'est absurde car une symétrie est une application affine préservant les distances. De même, toutes les faces sont des polygones réguliers isométriques. Sinon, il existe f et f' deux faces ayant au moins un angle différent et τ une symétrie de \mathcal{P} , alors $\tau(f) = f'$. Nous obtenons une absurdité car toute symétrie préserve les angles. Pour finir, montrons que chaque sommet possède le même degré. Procédons par l'absurde et supposons qu'il existe un sommet s_0 de \mathcal{P} appartenant à n faces et un sommet s_1 appartenant à m faces où $m \neq n$. Par la proposition 3.2.7, s_0 appartient à n arêtes également que l'on note a_1, \dots, a_n . Par hypothèse, il existe une isométrie I telle que $I(s_0) = s_1$ et chaque arête adjacente au sommet s_0 est envoyée sur une arête adjacente à s_1 par la proposition 3.1.14. Si l'on restreint cette isométrie à l'ensemble des arêtes adjacentes à s_0 , nous obtenons toujours une application injective. En effet, si $I(a_i) = I(a_j)$ où

$i \neq j$, ces deux arêtes ont alors deux sommets en commun, et a_i et a_j aussi, ce qui implique que $a_i = a_j$. Ainsi, par injectivité, nous avons $n \leq m$. Par le même raisonnement en utilisant l'isométrie I^{-1} , nous obtenons que $m \leq n$ et donc $m = n$ ce qui est absurde. Au final, nous avons que toutes les faces sont des polygones réguliers isométriques et chaque sommet possède le même degré, ainsi \mathcal{P} est un polytope régulier.

Montrons la condition nécessaire. Remarquons tout d'abord que le groupe des symétries d'un polytope régulier possède le même nombre d'éléments que l'ensemble des drapeaux de celui-ci. Montrons le pour le tétraèdre régulier, les autres se font de manière similaire. Nous savons que le nombre de symétries de \mathfrak{T} est égal à 24 par la proposition 4.3.2. De plus, pour chaque sommet de \mathfrak{T} , il y a exactement 3 faces contenant ce sommet et par la proposition 3.2.7, 3 arêtes contenant également ce sommet. Au final, comme une arête est l'intersection de deux faces et pour respecter la définition d'un drapeau, lorsque nous avons fixé le sommet, il y a trois choix pour l'arête et deux choix pour la face. Ainsi, par sommet nous avons 6 drapeaux possibles. Étant donné qu'il y a 4 sommets, nous avons 24 drapeaux différents.

Par la proposition 4.6.3, nous pouvons nous restreindre au cas des polytopes réguliers trivalents. Soient $d_0 = (s_0, a_0, f_0)$ un drapeau et I une symétrie de \mathcal{P} qui fixe le drapeau. Montrons que I est l'identité. Par définition, si l'on fixe le drapeau, les deux arêtes adjacentes à s_0 dans la face f_0 sont également fixées et donc les deux autres extrémités de ces arêtes également. Par conséquent, nous avons 3 sommets fixés et par définition, le quatrième l'est également. Ainsi, la symétrie envoie trois vecteurs formant une base sur eux-mêmes ce qui correspond à l'identité. Nous pouvons conclure que $\text{Stab}(d_0) = id$. Soit H l'orbite du drapeau d_0 , alors l'application

$$f : G \rightarrow H : I \mapsto (I(s_0), I(a_0), I(f_0))$$

est injective. En effet, si $f(I) = f(I')$, alors $(I^{-1}(I'(s_0)), I^{-1}(I'(a_0)), I^{-1}(I'(f_0))) = (s_0, a_0, f_0)$ et donc $I^{-1} \circ I' \in \text{Stab}(d_0)$ ce qui implique que $I = I'$. Par définition d'une orbite, celle-ci est un sous-ensemble de D . Comme f est injectif, nous avons $|G| = 24 \leq |H| \leq |D| = 24$. Ainsi, $|H|$ est égal à 24 et $H = D$. \square

Chapitre 5

Les polyèdres de Goldberg

Nous développons un type de polytopes que nous nommerons ici polyèdres pour être en adéquation avec la littérature actuelle. Ces polyèdres prirent le nom de Goldberg car le mathématicien Michael Goldberg fût un des premiers à s'intéresser à leurs propriétés en 1937 dans l'article [11]. Cette section sera de type exploratoire, il y aura très peu de démonstrations et nous utiliserons parfois des principes qui devraient être approfondis et démontrés.

Définition 5.0.1. *Un polyèdre de Goldberg est un polytope dont les sommets sont trivalents, les faces sont des pentagones et hexagones et dont le groupe de rotations est égal à celui de l'icosaèdre régulier.*

Certains polyèdres de Goldberg étaient déjà connus depuis plus longtemps que 1937 comme par exemple un des solides d'Archimède, l'icosaèdre tronqué¹.

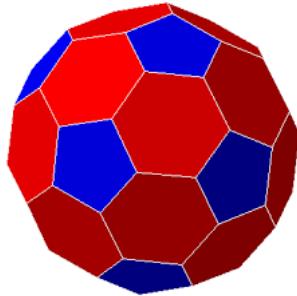


FIGURE 5.1 – L'icosaèdre tronqué.

Voici quelques autres exemples de polyèdres de Goldberg. Il faut néanmoins faire attention à l'aspect des faces, elles ne sont pas nécessairement régulières malgré la représentation qui nous pousserait à le croire. Nous verrons pourquoi elles ne le sont pas, du moins pas toutes, lors de la construction de ces polyèdres.

1. Les images des polyèdres de Goldberg sont tirés de la page Wikipédia consacrée à ceux-ci.



FIGURE 5.2 – Deux polyèdres de Goldberg.

Nous pouvons grâce à la formule d'Euler, obtenir le nombre de faces pentagonales.

Proposition 5.0.2. *Tout polyèdre de Goldberg possède exactement 12 faces pentagonales.*

Démonstration. Soient F_5 le nombre de faces pentagonales et F_6 le nombre de faces hexagonales d'un polyèdre de Goldberg. Puisque chaque arête est l'intersection de deux faces, et puisque chaque sommet appartient à trois arêtes, nous obtenons

$$\begin{aligned} S &= \frac{5F_5 + 6F_6}{3}, \\ A &= \frac{5F_5 + 6F_6}{2}, \\ F &= F_5 + F_6. \end{aligned} \tag{5.1}$$

En injectant les égalités de (5.1) dans la formule d'Euler $F+S = A+2$, nous obtenons $F_5 = 12$. \square

Pour cette partie, nous nous inspirons du chapitre 9 du livre "Shaping space" [24]. Ce chapitre a été écrit par George Hart. Nous allons construire une méthode pour obtenir ces polyèdres. Pour cela, nous partirons d'un autre type de polyèdre qui est en réalité le dual d'un polyèdre de Goldberg. On les appelle les polyèdres géodésiques.

Définition 5.0.3. *Un polyèdre géodésique est un polytope convexe ayant 12 sommets de degré 5, le reste des sommets est de degré 6. Il a des faces triangulaires et son groupe de rotations est égal à celui de l'icosaèdre régulier.*

Avant de construire ces polyèdres géodésiques, montrons que le dual d'un tel polyèdre est un polyèdre de Goldberg. Nous prenons comme origine le centre de gravité du polyèdre.

Proposition 5.0.4. *Si \mathcal{P} un polyèdre géodésique, alors \mathcal{P}^* est un polyèdre de Goldberg.*

Démonstration. Soit \mathcal{P} un polyèdre géodésique tel que S est un sommet de degré 5 de \mathcal{P} et S' un sommet de degré 6 de \mathcal{P} . Par la proposition 2.6.13, l'application $\psi_{\mathcal{P}}$ renverse les inclusions. Si le sommet S appartient à 5 faces et donc 5 arêtes par la proposition 3.2.7, la face S^* du polytope \mathcal{P}^* contient 5 sommets et 5 arêtes. La même analogie peut être faite pour le sommet S' . De plus, si \mathcal{F} est une face de \mathcal{P} , elle contient trois arêtes et trois sommets. En appliquant l'application $\psi_{\mathcal{P}}$, nous avons \mathcal{F}^* un sommet de \mathcal{P}^* qui appartient à 3 arêtes et 3 faces. Étant donné que $\psi_{\mathcal{P}}$ est une application injective et que $\mathcal{P}^{**} = \mathcal{P}$ car le centre de gravité appartient à l'intérieur du polytope, nous savons que toutes les faces de \mathcal{P}^* sont déterminées à partir des faces de \mathcal{P} . Ainsi, nous avons un polytope \mathcal{P}^* tel que chaque sommet appartient à 3 faces et celles-ci sont des pentagones et hexagones. De plus, par la proposition 4.1.2, le groupe des symétries de \mathcal{P}^* est égal à celui de l'icosaèdre régulier. \square

Nous allons essayer de construire les polyèdres géodésiques à partir de l'icosaèdre régulier, ou du moins à partir du développement de l'icosaèdre régulier. Cette construction nous permettra de garantir que le groupe des symétries de ce polyèdre est égal à celui de l'icosaèdre régulier.

Plaçons nous sur une grille de triangles équilatéraux, c'est un pavage du plan. Tous les détails concernant la notion de pavage peuvent se retrouver dans le livre "Regular Polytopes" de H.S.M Coxeter, au chapitre IV [7]. Nous munissons ce plan d'un repère où l'origine O est un sommet d'un triangle équilatéral et où u et v sont déterminés par les autres sommets de ce triangle.

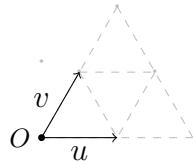


FIGURE 5.3 – Repère du plan.

Un point du pavage est un sommet de plusieurs triangles équilatéraux formant ce pavage. Nous pouvons dès à présent démontrer qu'une rotation centrée en l'origine et d'angle $\frac{\pi}{3}$ préserve le pavage.

Proposition 5.0.5. *Toute rotation τ centrée en l'origine et d'angle $\frac{\pi}{3}$ envoie un point du pavage sur un autre point du pavage.*

Démonstration. Soient O l'origine et $X : (x_1, x_2)$ un point du plan. Alors $\tau(X) : (y_1, y_2)$ est égal à $O + \vec{\tau}(\overrightarrow{OX})$. Regardons l'image des vecteurs de base lorsqu'on applique cette rotation. Le vecteur u est envoyé sur v et le vecteur v sur $-u + v$.

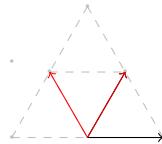


FIGURE 5.4 – Rotation du repère.

Ainsi, nous avons la matrice de rotation $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, et nous obtenons

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

Si X est un point du pavage, alors $X : (a, b)$ où $a, b \in \mathbb{Z}$. Ainsi, $\tau(X) : (-b, a + b)$ et est donc également un point du pavage car $-b$ et $a + b$ sont des entiers. \square

Nous pouvons remarquer que peu importe le centre de rotation, si celui-ci est un point du pavage, alors le pavage est stable par rapport à la rotation de ce centre et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Nous allons maintenant générer un grand triangle équilatéral ABC où les sommets A, B, C sont également des points du pavage.

Proposition 5.0.6. *Tout triangle équilatéral ABC dont A est l'origine et dont B est un point du pavage a un troisième sommet qui est un point du pavage, et on peut écrire $A : (0, 0)$, $B : (a, b)$ et $C : (-b, a + b)$ où $a, b \in \mathbb{Z}$.*

Démonstration. Pour la construction du sommet C , nous allons appliquer une rotation τ de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ sur le sommet B , on l'écrit $C = \tau(B) = \tau(A) + \vec{\tau}(\overrightarrow{AB})$. Par la proposition 5.0.5, nous savons que ce sommet sera un point du pavage et nous avons même sa forme générale $C = \tau(B) : (-b, a + b)$. \square

Une dernière remarque peut être faite sur la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ autour du centre de gravité du triangle ABC . Nous savons par les propriétés du triangle équilatéral que ce polygone, lorsqu'on applique cette rotation, reste stable. Qu'en est-t-il du pavage ?

Proposition 5.0.7. *Soit ABC un triangle équilatéral où A, B et C sont des sommets du pavage. La rotation τ de centre G et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ où G est le centre de gravité de ABC laisse le pavage dans le triangle stable.*

Démonstration. Notons $A : (a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ et $C : (c_1, c_2)$. Par la proposition 5.0.5, nous savons déjà que la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ peut être représentée par la matrice

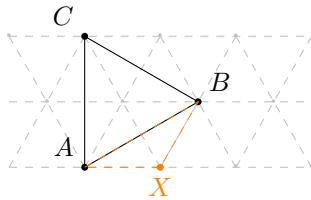
$$M' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $X = (x_1, x_2)$ un point du triangle ABC . Par les propriétés du triangle équilatéral, nous savons que $\tau(A) = B$ et nous avons

$$\begin{aligned} \tau(X) &= \tau(A) + \vec{\tau}(\overrightarrow{AX}) \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b_1 + a_1 + a_2 - (x_1 + x_2) \\ b_2 - a_1 + x_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, si X est un point du pavage, alors x_1 et x_2 sont entiers et $\tau(X)$ possède des coordonnées entières. De plus, toujours par les propriétés du triangle équilatéral, $\tau(X)$ est un point de ABC . \square

Avant d'entamer la construction du développement des 20 triangles équilatéraux pour obtenir un développement de l'icosaèdre, donnons quelques propriétés sur le triangle équilatéral ABC déjà construit.


 FIGURE 5.5 – Triangle ABC .

Proposition 5.0.8. Soit ABC un triangle équilatéral dans le pavage où $A : (0,0)$, $B : (a;b)$ et $C : (-b,a+b)$. Alors la longueur des côtés du triangle vaut $\sqrt{a^2 + b^2 + ab}$ et l'aire du triangle vaut $\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2 + ab)$.

Démonstration. Appliquons le théorème d'Al-Kashi au triangle ABX , nous obtenons

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB}|^2 &= |\overrightarrow{AX}|^2 + |\overrightarrow{XB}|^2 - 2|\overrightarrow{AX}||\overrightarrow{XB}| \cos(\frac{2\pi}{3}) \\ &= a^2 + b^2 + ab. \end{aligned}$$

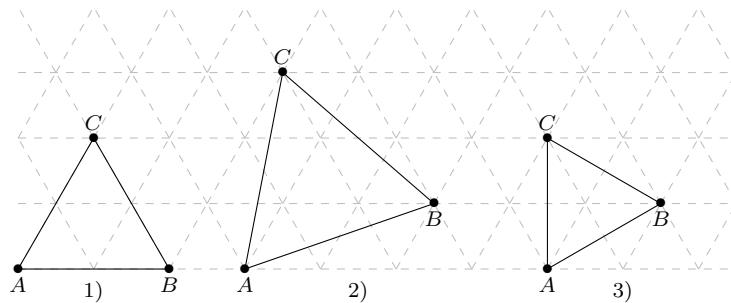
Nous savons par les propriétés d'un triangle équilatéral que la hauteur du triangle ABC vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + ab}$. Ainsi, l'aire du triangle ABC vaut $\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2 + ab)$. \square

Définition 5.0.9. On appelle $T = a^2 + b^2 + ab$, le nombre de triangulation de l'icosaèdre.

Ce nombre T est intéressant pour la classification d'un certain type de virus que nous développerons dans une section ultérieure.

En fonction des coordonnées du point B que nous supposerons positives, sans perte de généralité, le pavage se trouvant à l'intérieur du triangle ABC peut varier. Nous avons 3 cas possibles que nous développons ici.

- 1) Si $b = 0$, c'est la subdivision la plus simple. En effet, le côté AB sur triangle est parallèle à l'axe u .
- 2) Si $0 < b < a$, ce pavage est un motif chiral. L'ensemble des sommets du pavage appartenant au triangle ABC n'est pas fixe par les symétries orthogonales dont l'axe contient un des sommets et est perpendiculaire au côté opposé.
- 3) Si $a = b$, les côtés du triangles ABC sont perpendiculaires aux côtés des petites triangles. Les cas $a = 0$ ou $0 < a < b$ sont repris dans 1) et 2) par symétrie.



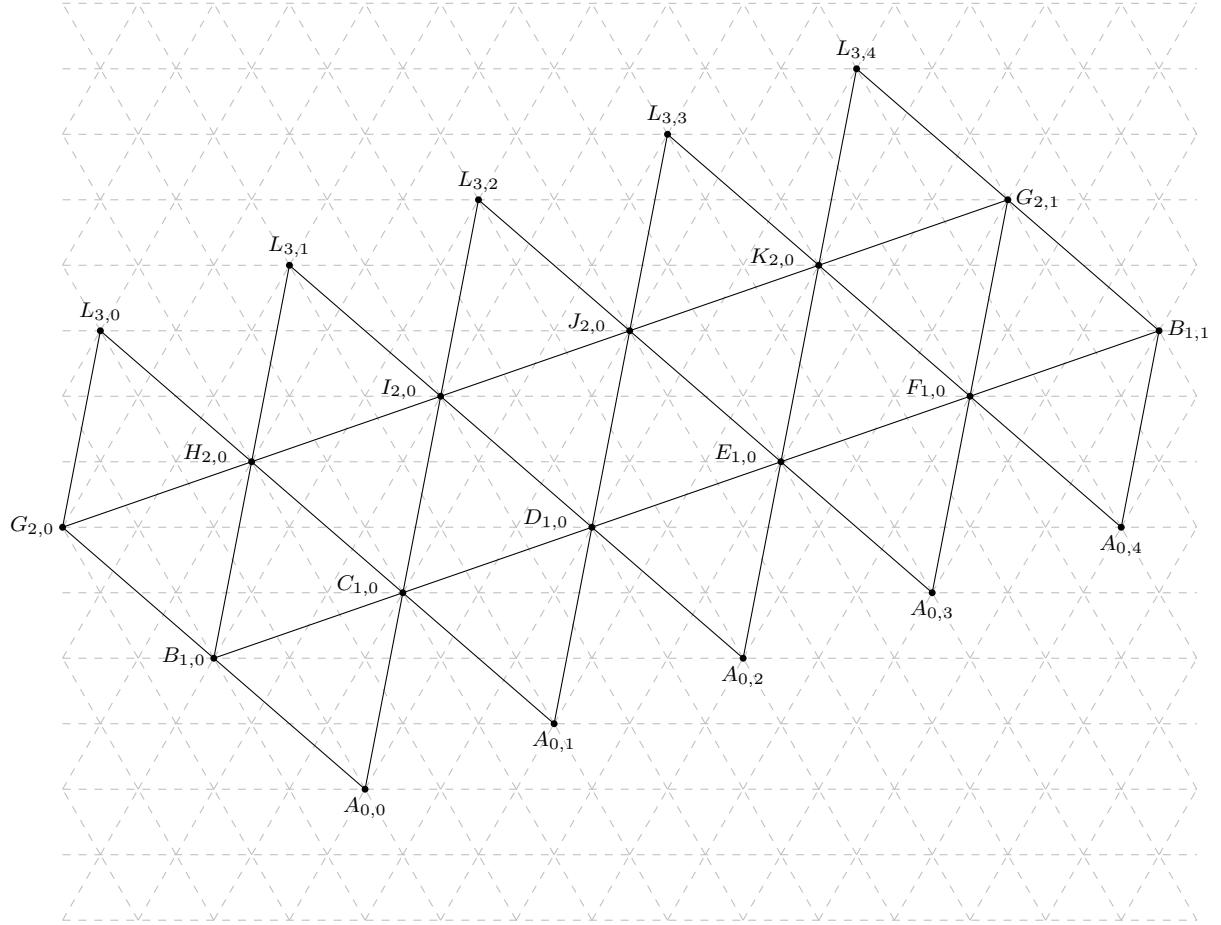


FIGURE 5.6 – Développement de l'icosaèdre dans le pavage.

Nous allons maintenant construire le développement de l'icosaèdre à partir du pavage du plan et du triangle équilatéral ABC que nous nommons $G_{2,0}H_{2,0}L_{3,0}$, ces points changent de label mais les coordonnées associées restent les mêmes.

Montrons qu'à partir du triangle $L_{3,0}G_{2,0}H_{2,0}$, nous pouvons obtenir un développement de l'icosaèdre dont chaque triangle possède le même pavage. Rappelons que $G_{2,0} : (0,0)$, $H_{2,0} : (a,b)$ et $L_{3,0} : (-b, a+b)$ où $a, b \in \mathbb{Z}$.

Proposition 5.0.10. *Le rotation τ de centre $H_{2,0}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$ envoie le triangle $G_{2,0}H_{2,0}L_{3,0}$ sur un triangle équilatéral isométrique dont les sommets sont des points du pavage. Cette rotation préserve également le pavage.*

Démonstration. Par hypothèse, $H_{2,0}$ est un sommet du pavage et donc grâce à la proposition 5.0.5, nous savons que le pavage reste stable par rotation de centre $H_{2,0}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Dans cette même proposition 5.0.5, nous avions calculé la matrice de rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$, cela nous donne

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par la proposition 3.1.17 et comme τ est une isométrie, nous savons que $\tau(L_{3,0})\tau(G_{2,0})\tau(H_{2,0})$ est un triangle équilatéral isométrique.

Montrons que les nouveaux sommets sont des points du pavage, pour ça nous calculons les sommets $\tau(L_{3,0})$ et $\tau(G_{2,0})$. Nous obtenons

$$\begin{aligned}\tau(L_{3,0}) &= \tau(H_{2,0}) + \vec{\tau}(\overrightarrow{H_{2,0}L_{3,0}}) \\ &= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a - b \\ a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = G_{2,0}.\end{aligned}$$

De même, nous obtenons $\tau(G_{2,0}) : (a + b, -a)$. \square

Nous notons ce nouveau triangle $G_{2,0}H_{2,0}B_{1,0}$. En appliquant une rotation de centre $H_{2,0}$ de d'angle $\frac{k\pi}{3}$, $k \in \{2, 3, 4, 5\}$ sur le triangle $G_{2,0}H_{2,0}L_{3,0}$, nous obtenons 4 nouveaux triangles équilatéraux isométriques dont les sommets sont sur le pavage et tel que le pavage soit stable.

En appliquant ce même raisonnement sur un des nouveaux triangles et en modifiant le centre de rotation, nous pouvons obtenir les 20 triangles équilatéraux isométriques et où le pavage est le même pour chaque triangle.

Cette notation pour les sommets n'est pas anodine même si elle paraît farfelue sans une petite explication. Nous allons à partir du développement, retrouver l'icosaèdre. Pour cela, les sommets ayant la même lettre vont se confondre. De même, le premier indice de chaque sommet indique l'"étage" sur lequel se trouve ce sommet. Ainsi, il n'y a qu'un seul sommet à l'"étage" 0, nommé A_0 , 5 sommets à l'"étage" 1 notés B_1, C_1, D_1, E_1, F_1 et ainsi de suite.

5.1 Du développement à l'icosaèdre

Nous allons chercher une application affine envoyant le premier triangle équilatéral du développement sur une face de l'icosaèdre. Pour plus de facilité, nous renommons les sommets de l'icosaèdre obtenu dans la section 3.5.

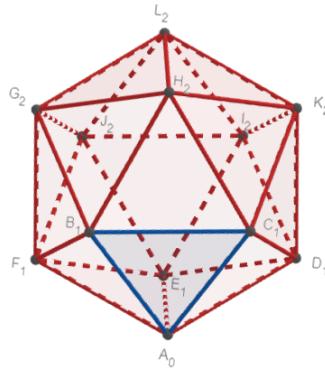


FIGURE 5.7 – L'icosaèdre \mathfrak{I} .

Nous souhaitons reporter les points du pavage sur l'icosaèdre. Pour une seule face de l'icosaèdre, il suffit de choisir une numérotation des sommets de cette face $A_0B_1C_1$, et d'appliquer le triangle

$A_{0,0}B_{1,0}C_{1,0}$ du plan sur $A_0B_1C_1$. La forme explicite de l'application affine résultante est donnée par la proposition suivante.

Proposition 5.1.1. *L'unique application affine qui applique $A_{0,0}$ sur A_0 , $B_{1,0}$ sur B_1 et $C_{1,0}$ sur C_1 est donnée par*

$$\varphi : P = A_{0,0} + x\overrightarrow{A_{0,0}B_{1,0}} + y\overrightarrow{A_{0,0}C_{1,0}} \mapsto P' = A_0x\overrightarrow{A_0B_1} + y\overrightarrow{A_0C_1},$$

C'est une isométrie.

Démonstration. Si on exprime l'application proposée dans les repères déterminés par les sommets des triangles $A_{0,0}B_{1,0}C_{1,0}$ du plan sur $A_0B_1C_1$, elle se représente par l'identité. C'est donc une application affine. En prenant successivement $(x, y) = (0, 0), (1, 0)$ et $(0, 1)$, on constate qu'elle applique les sommets du triangle $A_{0,0}B_{1,0}C_{1,0}$ sur ceux de $A_0B_1C_1$. C'est donc une isométrie. \square

Remarque 5.1.2. *Le pavage du triangle $A_{0,0}B_{1,0}C_{1,0}$ est préservé car φ est une application affine.*

Remarquons que nous avions en fait 6 choix pour numérotter les sommets de la face de l'icosaèdre (correspondant aux six permutations des trois sommets). Nous avions donc potentiellement 6 applications comme celle décrite par la proposition 5.1. Étant donné un choix de numérotation, on en obtient deux autres en faisant une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$ à partir du premier, ce qui ne change rien pour le report des points du pavage sur la face par la proposition 5.0.7. Les autres choix sont obtenus en appliquant une symétrie orthogonale par rapport à une médiane du triangle équilatéral, ce qui change éventuellement la construction (en fonction du type de pavage que nous avons).

Pour continuer avec les autres faces, on a deux possibilités :

- 1) Soit on reporte le développement de l'icosaèdre décrit ci-dessus, en tenant compte des arêtes adjacentes, et on n'a plus de choix à poser. En effet, le segment $[A_{0,0}, C_{1,0}]$ se confondra avec le segment $[A_{0,1}, C_{1,0}]$. Ainsi, le triangle adjacent au triangle $A_{0,0}B_{1,0}C_{1,0}$ par rapport au segment $[A_{0,0}, C_{1,0}]$ sera $A_{0,0}C_{1,0}D_{1,0}$. Si on regarde sur l'icosaèdre le triangle adjacent au triangle $A_0B_1C_1$ par rapport au côté $[A_0, C_1]$, on a le triangle $A_0C_1D_1$. Donc il n'y a qu'un choix possible, le sommet $D_{1,0}$ doit aller sur le sommet D_1 . Le même procédé peut être appliqué pour les autres sommets.
- 2) Soit on se donne une façon de numérotter les sommets de manière cohérente. On peut demander, l'espace étant orienté, que la numérotation ABC d'une face \mathcal{F}_i de l'icosaèdre soit telle que le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ soit un multiple positif de la normale $\overrightarrow{GG_i}$ déterminée par le centre de gravité G de l'icosaèdre et le centre de gravité G_i de la face \mathcal{F}_i . Ayant cette numérotation des sommets de chaque face, on peut reporter les points du pavage sur chaque face.

Nous allons maintenant montrer que chaque rotation de l'icosaèdre se lit sur le développement de l'icosaèdre dans le plan. Pour cela, nous allons d'abord regarder le comportement des faces de l'icosaèdre lorsqu'on lui applique une rotation. En fait, on sait que chaque symétrie de l'icosaèdre applique une face sur une face et un sommet sur un sommet. Il faut juste s'assurer, pour que le pavage des faces est stable par ces symétries. Grâce à la sous-section 4.1.2, nous connaissons les axes de rotations de l'icosaèdre à partir de ceux du dodécaèdre.

5.2 Rotation d'axe joignant deux sommets opposés

Partons du dodécaèdre et prenons la rotation d'angle $\frac{2\pi}{5}$ dont l'axe de rotation est la droite passant le centre de gravité de deux faces opposées. Par la proposition 4.1.2, c'est une symétrie de l'icosaèdre et par le passage au dual, l'axe de rotation devient la droite reliant deux sommets opposés de l'icosaèdre.

Dans la section 3.4.2, nous avions démontré qu'il y avait 4 pentagones réguliers formés de sommets ayant tous une cote égale à 0, 1, φ ou $\varphi + 1$. De plus, l'axe $z = 0$ passe par le centre de gravité de ces 4 pentagones. Ainsi, la rotation d'axe $z = 0$ et d'angle $\frac{2\pi}{5}$ préserve ces 4 pentagones et donc chaque quintuple de sommets reste au même "étage". Par le passage au dual, les faces associées de l'icosaèdre restent sur un même étage.

Ainsi, les faces ayant des sommets indicés par 0 et 1 sont envoyées sur d'autres faces de ce type. De même, les faces ayant un somme indicé en 1 et deux sommets indicés en 2 sont envoyées sur d'autres faces de ce type, etc. Du fait que les centres de gravité des faces du dodécaèdre étant sur un même "étage" forment un pentagone régulier, le passage au dual envoie une face du dodécaèdre sur son centre de gravité, à une homothétie près et donc nous savons que les sommets d'un même "étage" de l'icosaèdre forment un pentagone régulier.

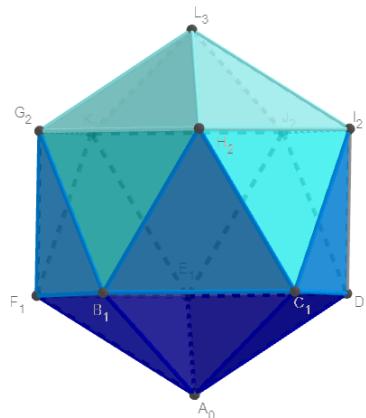


FIGURE 5.8 – L'icosaèdre \mathfrak{I} .

Regardons l'axe joignant les sommets opposés A_0 et L_3 . Grâce au passage du développement à l'icosaèdre, nous savons exactement les sommets opposés lorsqu'on est sur le développement. Les sommets $A_{0,0}, A_{0,1}, A_{0,2}, A_{0,3}, A_{0,4}$ sont opposés aux sommets $L_{3,0}, L_{3,1}, L_{3,2}, L_{3,3}, L_{3,4}$ dans le développement, et sur l'icosaèdre ils sont regroupés en deux sommets A_0 et L_3 .

Étant donné que nous connaissons le comportement des faces sur l'icosaèdre lorsqu'on applique une rotation d'angle $\frac{2\pi}{5}$ et d'axe A_0L_3 , nous pouvons en déduire le comportement sur le développement. Les triangles ayant un sommet $L_{3,i}$ sont translatés les uns sur les autres par la translation de vecteur (a, b) . Pour le dernier triangle $L_{3,4}K_{2,0}G_{2,1}$, il sera envoyé sur le triangle $L_{3,0}G_{2,0}H_{2,0}$ car les sommets $G_{2,0}$ et $G_{2,1}$ sont "confondus" si nous nous plaçons dans le quotient adéquat.

Il en va de même pour les trois autres "lignées" de triangle. En d'autres termes, les triangles ayant deux sommets sur le deuxième étage et un sommet sur le premier seront translatés sur les triangles du même type. De même, les triangles ayant un sommet sur le deuxième étage et deux

sommets sur le premier seront translatés sur les triangles du même type. Et enfin, les triangles ayant un sommet $A_{0,i}$ sont translatés sur les triangles du même type.

Si nous passons par le développement de l'icosaèdre dans le plan, c'est pour montrer que le pavage des triangles, lorsqu'on leur applique la translation de vecteur $u = (a, b)$ préserve le pavage des petits triangles équilatéraux. Comme cette translation correspond à la rotation précédemment énoncée, la rotation préservera également le pavage des faces de l'icosaèdre.

Proposition 5.2.1. *La translation τ de vecteur $u = (a, b)$ préserve le pavage du triangle $L_{3,0}G_{2,0}H_{2,0}$.*

Démonstration. Par définition, les points du pavage sont à coordonnées entières. Soit X un point du pavage tel que $X \in L_{3,0}G_{2,0}H_{2,0}$. Alors $\tau(X) : (x_1 + a, x_2 + b)$ et comme $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, c'est encore un point du pavage. \square

Ainsi, la translation de vecteur $u = (a, b)$ préserve le pavage de chaque triangle équilatéral ce qui suffit pour dire que les rotations associées stabilisent le pavage des faces. Nous avons 6 axes de ce type et 4 angles possibles. Au final, il y a 24 rotations de ce type.

5.3 Rotation d'axe joignant deux faces opposées

Nous allons appliquer le même raisonnement que pour la section 5.2. Pour le dodécaèdre régulier, la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ ayant comme axe de rotation la droite joignant deux sommets opposés est une symétrie de ce polytope. Par le passage au dual, c'est une symétrie de l'icosaèdre dont l'axe de rotation est le centre de gravité de deux faces opposées.

Analysons le comportement des sommets du dodécaèdre, par le passage au dual nous aurons le comportement des faces de l'icosaèdre. Notons A et B deux sommets opposés de \mathfrak{D} . Dans l'appendice G, nous avons montré qu'il y avait deux cubes C_1, C_2 invariants par cette rotation et que ceux-ci ont 2 sommets en commun : A et B . Les 6 sommets restant du dodécaèdre forment deux triangles équilatéraux qui restent eux aussi invariants, par la proposition G.0.3.

On peut montrer que la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et dont l'axe de rotation joint deux sommets opposés du cube laisse invariant deux triangles équilatéraux formés à partir des 6 sommets restants. Étant donné que l'axe de rotation du dodécaèdre joint les sommets opposés des deux cubes C_1, C_2 , nous avons 4 triangles équilatéraux invariants à partir des sommets de ces cubes. En y ajoutant les deux triangles préalablement construits, nous obtenons 6 triangles équilatéraux invariants par cette rotation.

Nous pouvons maintenant analyser le comportement des faces de l'icosaèdre par le passage au dual. En effet, chaque sommet d'un des 6 triangles deviendra une face de \mathfrak{I} . Ainsi, on a 6 triplets de faces qui permutent entre elles. Nous ne les énumérerons pas ici, mais à partir d'une des faces où passe l'axe de rotation, comme chaque arête de cette face appartient à une autre face, on peut obtenir le premier triplet de faces et continuer le procédé pour les autres.

Cette rotation ne nous permet pas à premier abord de savoir si le pavage des faces est stable. Nous passons donc au développement de l'icosaèdre dans le pavage du plan, pour obtenir cette propriété. Nous avions obtenu un développement de l'icosaèdre, ici nous allons modifier un peu ce développement pour avoir une meilleure vision de ce qui se passe.

Le passage d'un développement à un autre peut être réalisé à partir de translations et rotations adéquates qui préservent le pavage des "grands" triangles équilatéraux².

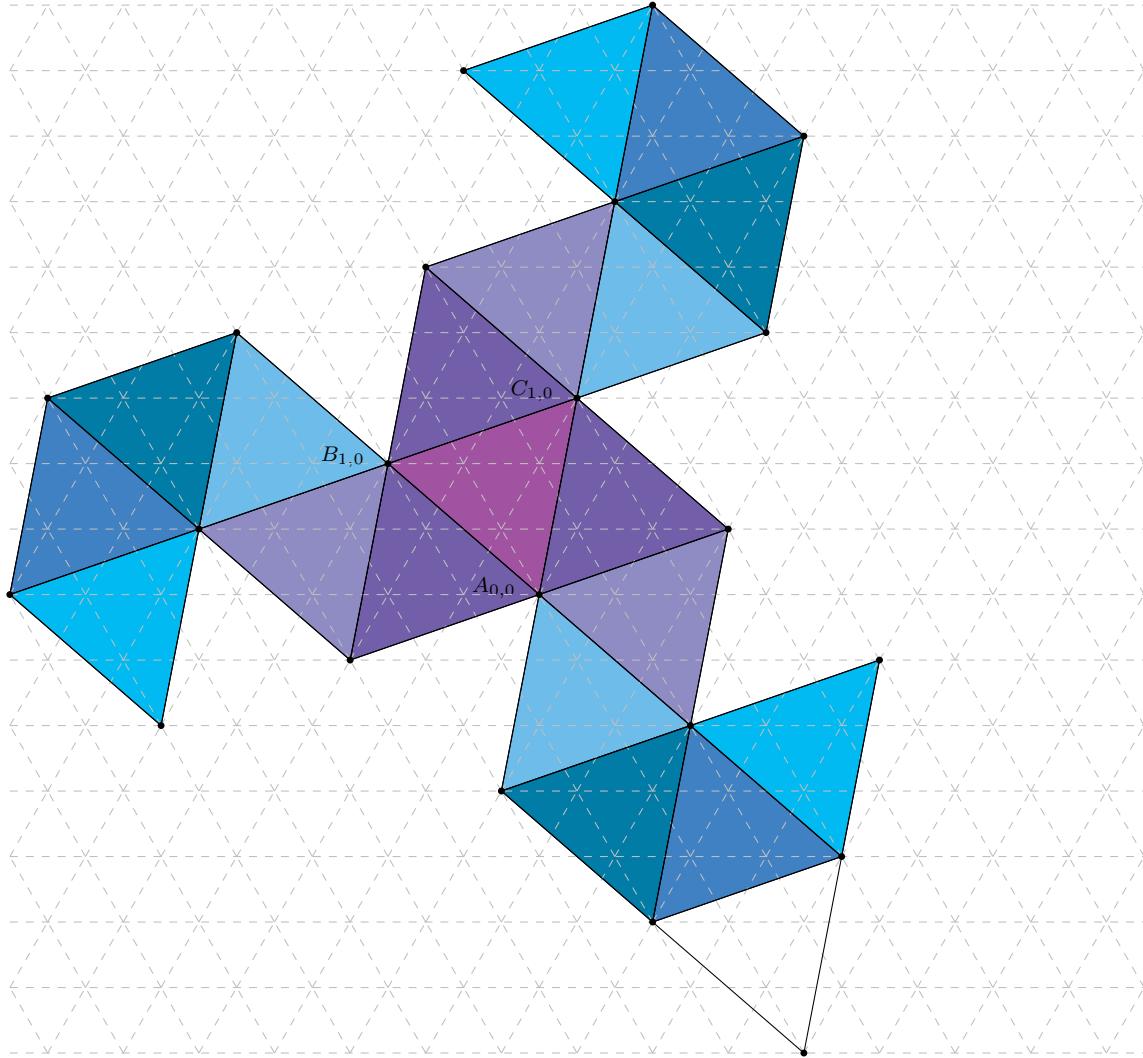


FIGURE 5.9 – Développement de l'icosaèdre \mathfrak{I} .

Nous pouvons maintenant analyser le comportement sur le développement. Prenons le triangle $A_{0,0}B_{1,0}C_{1,0}$ qui correspond à la face $A_0B_1C_1$ dans l'icosaèdre. La face opposée dans l'icosaèdre est alors $L_3J_2K_2$ et dans le développement, cela correspond au triangle équilatéral $L_{3,3}, J_{2,0}, K_{2,0}$ qui est le triangle non-coloré sur la figure ci-dessus. Étant donné que l'axe de la rotation passe par leur centre de gravité, ces deux triangles resteront stables dans le développement.

Regardons maintenant les trois triangles adjacents au triangle $A_{0,0}B_{1,0}C_{1,0}$. Si nous appliquons la même rotation de centre G et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ où G est le centre de gravité du triangle équilatéral $A_{0,0}B_{1,0}C_{1,0}$, alors cette rotation permute circulairement ces trois triangles. Nous avons là le

2. Le passage d'un hexagone plat au pentagone "chapeau" pour l'icosaèdre se trouve dans l'article de Goldberg [12].

premier triplet de triangles dont nous avons parlé au début de cette section. En appliquant le même procédé aux trois triangles adjacents à ces trois triangles, nous obtenons que la rotations permuent circulairement ces trois nouveaux triangles et nous obtenons le second triplet de triangles. Toujours en appliquant ce procédé, nous pouvons retrouver tous les triplets possibles à partir de la rotation de centre G et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Nous devons maintenant montrer que cette rotation préserve le pavage pour chaque triplet et les deux faces opposées.

Proposition 5.3.1. *La rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ autour du centre de gravité du triangle $L_{3,3}J_{2,0}K_{2,0}$ laisse ce triangle et le pavage associé invariant.*

Démonstration. Cela découle de la proposition 5.0.7. \square

Proposition 5.3.2. *La rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ autour du centre de gravité G du triangle $A_{0,0}B_{1,0}C_{1,0}$ préserve tout le développement de l'icosaèdre, en retirant le triangle $L_{3,3}J_{2,0}K_{2,0}$.*

Démonstration. Posons $A_{0,0} : (a_1, a_2)$, $B_{1,0} : (b_1, b_2)$ et $C_{1,0} : (c_1, c_2)$ où toutes les coordonnées sont entières par définition du triangle équilatéral associé. Par les propositions 3.1.15 et 3.2.4, nous savons que les triangles du développement sont envoyés sur des triangles équilatéraux isométriques. Montrons que le pavage reste invariant. Nous savons déjà par la proposition 5.0.7 que le pavage du triangle $A_{0,0}B_{1,0}C_{1,0}$ est stable par cette rotation. Montrons que le pavage en dehors de ce triangle reste stable. Soit $X : (x_1, x_2)$ un point du pavage en dehors du triangle $A_{0,0}B_{1,0}C_{1,0}$. Nous obtenons un point $\tau(X) : (y_1, y_2)$ comme suit $\tau(X) = \tau(A_{0,0}) + \vec{\tau}(A_{0,0}\overrightarrow{X})$ où $\tau(A_{0,0}) = B_{1,0}$. Par la proposition 5.0.7, nous connaissons la matrice de rotation et nous obtenons

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_1 + (a_1 + a_2) - (x_1 + x_2) \\ b_2 - a_1 + x_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Comme toutes les coordonnées sont entières, celles de $\tau(X)$ le sont également.

Il faut maintenant s'assurer que les sommets du développement sont envoyés sur d'autres sommets du développement. Montrons le pour les trois triangles adjacents au triangle $A_{0,0}B_{1,0}C_{1,0}$ dans le développement, les autres se font de la même manière. Soient X, Y et Z les trois sommets des trois triangles adjacents à $A_{0,0}B_{1,0}C_{1,0}$ différents de $A_{0,0}, B_{1,0}, C_{1,0}$. Il nous suffit de montrer que ces trois sommets forment un triangle équilatéral dont le centre de gravité est celui de $A_{0,0}B_{1,0}C_{1,0}$. Ce nouveau triangle est équilatéral car tous les côtés sont de même longueur. Avec un artifice de calcul, nous pouvons montrer que G est également le centre de gravité de ce triangle. \square

Pour cette rotation, nous avons 10 axes et 2 angles possibles. Au total, nous obtenons 20 rotations pour ce cas-ci. Nous en sommes à 44, si nous ajoutons l'identité, nous sommes à 45. Le nombre de rotations de l'icosaèdre est de 60, il nous reste un type à regarder.

5.4 Rotation d'axe joignant le milieu de deux arêtes opposées

Nous terminons par la rotation d'angle π et dont l'axe de rotation joint le milieu de deux arêtes opposées. C'est une symétrie du dodécaèdre donc de l'icosaèdre par le passage au dual.

Nous ne partirons pas du dodécaèdre ni des faces de l'icosaèdre. A partir des coordonnées des sommets de l'icosaèdre, nous pouvons remarquer que l'axe de rotation passe perpendiculairement sur des plans contenant des segments dont les extrémités sont des sommets de l'icosaèdre. Il y a 5 plans différents, un qui contient 4 sommets et les autres contiennent exactement 2 sommets. De plus, cet axe passe par le milieu de chacun des segments. Ainsi, chaque extrémité d'un segment est envoyée sur l'autre extrémité et inversement.

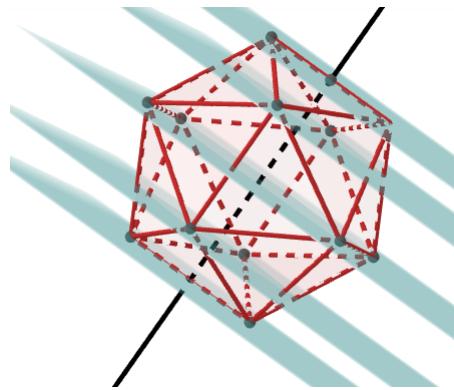


FIGURE 5.10 – Plans perpendiculaires à l'axe de rotation.

Nous passons maintenant au développement dans le pavage du plan.

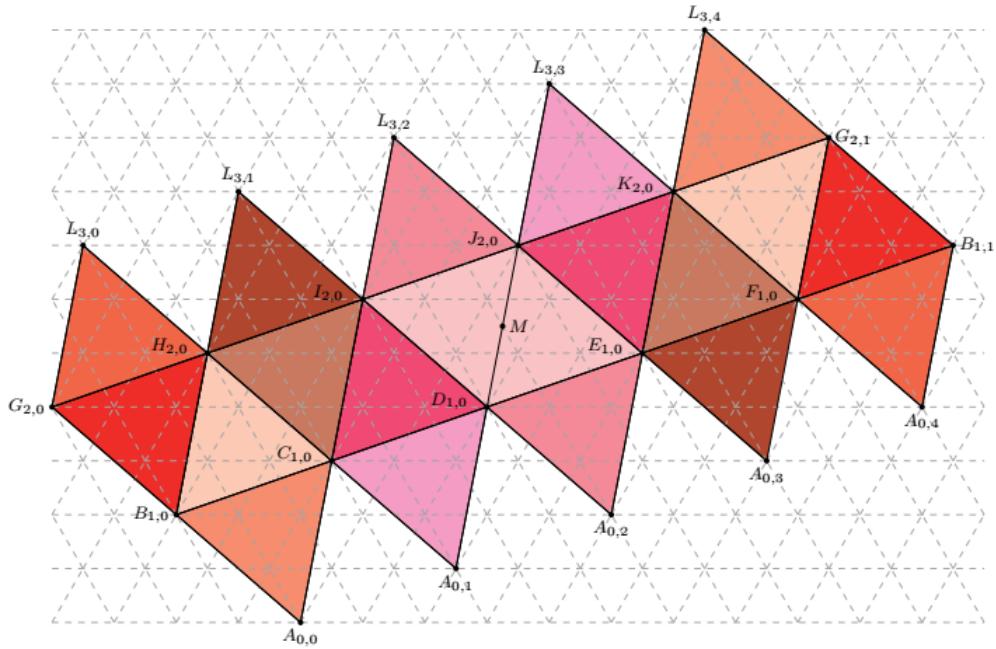


FIGURE 5.11 – Développement de l'icosaèdre dans le pavage.

Regardons l'axe de rotation passant par le milieu des arêtes $[D_1, J_2]$ et $[B_1, G_2]$. Dans le développement, cela correspond à trois arêtes (dont deux qui sont égales si l'on prend le quotient) :

$[D_{1,0}, J_{2,0}]$, $[B_{1,0}, G_{2,0}]$ et $[B_{1,1}, G_{2,1}]$. Regardons ce que la rotation de l'icosaèdre provoque sur le développement, par rapport au milieu de l'arête $[D_{1,0}, J_{2,0}]$ que nous notons M . Les deux triangles contenant l'arête $[D_{1,0}, J_{2,0}]$ permutent entre eux car le sommet $D_{1,0}$ est envoyé sur le sommet $J_{2,0}$ et inversement (c'est le premier plan de vu sur l'icosaèdre) alors que le sommet $I_{2,0}$ est envoyé sur le sommet $E_{1,0}$ et inversement (cela correspond au deuxième plan de la figure). Cela correspond à une rotation de centre M et d'angle π .

Ensuite, nous savons que l'arête $[I_{2,0}, J_{2,0}]$ est envoyée sur l'arête $[D_{1,0}, E_{1,0}]$, alors le dernier sommet du triangle $I_{2,0}J_{2,0}L_{3,2}$ est envoyé sur troisième sommet du triangle correspondant ce qui revient à dire que le sommet $L_{3,2}$ est envoyé sur le sommet $A_{0,2}$ et inversement car la rotation préserve les distances. On peut procéder de la sorte pour tous les triangles, on se rend compte que les triangles sont par paires et la rotation de centre M et d'angle π permute les triangles d'une même paire.

Montrons que cette rotation laisse le pavage des triangles invariants.

Proposition 5.4.1. *Soit M le milieu du segment $[D_{1,0}, J_{2,0}]$. La rotation τ de centre M et d'angle π laisse le pavage des triangles du développement invariant.*

Démonstration. Soient $D_{1,0} : (d_1, d_2)$ et $J_{2,0} : (j_1, j_2)$ où les coordonnées sont entières par définition des sommets du développement. Regardons le comportement des vecteurs de base lorsqu'on applique une rotation d'angle π . On a, $\tau(u) = -u$ et $\tau(v) = -v$. Ainsi, la matrice de rotation est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

De plus, M est le milieu du segment $[D_{1,0}, J_{2,0}]$, nous savons donc que $\tau(D_{1,0}) = J_{2,0}$ et inversement. Montrons que le pavage est conservé. Soit $X : (x_1, x_2)$ un point du pavage du triangle $I_{2,0}J_{2,0}D_{1,0}$. On a alors, $\tau(X) = \tau(D_{1,0}) + \vec{\tau}(\overrightarrow{D_{1,0}X})$ et on peut regarder cette égalité en fonction des coordonnées. On obtient

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - d_1 \\ x_2 - d_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} j_1 + d_1 - x_1 \\ j_2 + d_2 - x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Comme les coordonnées des points $X, D_{1,0}$ et $J_{2,0}$ sont entières, les coordonnées de $\tau(X)$ le sont également et par la proposition 3.1.14, $\tau(X)$ appartient au triangle $J_{2,0}D_{1,0}E_{1,0}$. \square

Pour ce type de rotation, nous avons 15 axes et un angle. Au total, en regroupant tous les axes, nous obtenons les 60 rotations de l'icosaèdre. Ainsi, toutes les rotations de l'icosaèdre préservent le pavage des faces triangulaires. Grâce aux trois sections précédentes, nous allons conserver les symétries positives de l'icosaèdre lorsque nous projetterons les sommets sur la sphère et que nous relierais ces nouveaux sommets entre eux pour former le polyèdre géodésique associé.

5.5 Projection des points sur la sphère unitaire

Soit G le centre de gravité des sommets de l'icosaèdre. Nous pouvons supposer que la distance entre G et un sommet S_i vaut 1, quitte à appliquer une homothétie de centre G et de rapport $\frac{1}{|GS_i|}$ sur l'icosaèdre.

Pour obtenir le polyèdre géodésique, nous allons projeter les points du pavage sur la sphère.

Proposition 5.5.1. *Soit \mathfrak{I} l'icosaèdre inscrit dans une sphère \mathcal{S} de rayon 1. L'enveloppe convexe des projections des points du pavage des faces triangulaires sur la sphère \mathcal{S} forme un polyèdre géodésique \mathcal{P} .*

Démonstration. Notons X_i les points du pavage que nous avons reporté sur l'icosaèdre. Calculons les projections de ces points sur la sphère \mathcal{S} , que nous notons X'_i . Projeter sur la sphère revient à normer les vecteurs $\overrightarrow{GX_i}$. On a donc

$$X'_i = G + \frac{\overrightarrow{GX_i}}{|\overrightarrow{GX_i}|}.$$

Nous savons que les sommets de \mathcal{P} sont parmi X'_1, \dots, X'_m par la proposition 2.3.18. Montrons que tous ces points sont des sommets de \mathcal{P} . Ceux-ci se trouvent sur la sphère et donc la boule \mathcal{B} associée qui est convexe. Nous obtenons alors $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}$. En prenant le plan d'appui en chaque point X'_i de la sphère, nous obtenons un plan d'appui pour le polyèdre \mathcal{P} . Ainsi, tous ces points sont des sommets de \mathcal{P} .

Chaque sommet du grand réseau (qui est le développement de l'icosaèdre dans le plan) appartient à 5 sommets du petit pavage. Alors que les points du pavage qui sont à l'intérieur d'une face de l'icosaèdre ont un degré égal à 6. En projetant les points et en les reliant, on crée des faces triangulaires et des sommets de degré 5 et 6.

Montrons que le groupe des rotations de \mathcal{P} est égal à celui de l'icosaèdre régulier. Soit τ une rotation de l'icosaèdre et X_i un point du pavage. Alors X'_i est un sommet de \mathcal{P} . Toutes les symétries de l'icosaèdre préservent son centre de gravité G et par la linéarité de $\vec{\tau}$, on a

$$\begin{aligned}\tau(X'_i) &= \tau(G) + \vec{\tau}\left(\frac{\overrightarrow{GX_i}}{|\overrightarrow{GX_i}|}\right) \\ &= G + \frac{1}{|\overrightarrow{GX_i}|} \vec{\tau}(\overrightarrow{GX_i})\end{aligned}$$

Comme τ est une rotation de l'icosaèdre, nous obtenons $\tau(X_i) = X_j$ où X_j est un point du pavage d'une face de l'icosaèdre. Ainsi, nous avons $\vec{\tau}(\overrightarrow{GX_i}) = \overrightarrow{GX_j}$ et ces deux vecteurs possèdent la même norme par définition d'une isométrie. Au final, nous obtenons

$$\begin{aligned}\tau(X'_i) &= G + \frac{1}{|\overrightarrow{GX_i}|} \vec{\tau}(\overrightarrow{GX_i}) \\ &= G + \frac{1}{|\overrightarrow{GX_j}|} \overrightarrow{GX_j} \\ &= X'_j\end{aligned}.$$

Par définition, X'_j est un sommet de \mathcal{P} et donc τ est une rotation de \mathcal{P} . Donc toute rotation de l'icosaèdre définit une rotation de \mathcal{P} . Réciproquement, toute rotation de \mathcal{P} définit une bijection sur l'ensemble des sommets, et leur degré. Elle définit donc une bijection de l'ensemble des sommets de degré 5 dans lui-même. Ainsi, elle préserve l'icosaèdre et est donc une symétrie de \mathfrak{I} . \square

Nous pouvons dès à présent connaître le nombre de face triangulaire d'un polyèdre géodésique à partir de la construction d'un grand triangle déterminé par l'origine et un sommet A ayant pour coordonnées (a, b) où $a, b \in \mathbb{Z}$ et du nombre $T = a^2 + b^2 + ab$ défini au point 5.0.9.

Proposition 5.5.2. *Le nombre de faces triangulaires du polyèdre géodésique construit à partir d'un grand triangle déterminé par l'origine et un point A de coordonnées (a, b) est égal à $20T$.*

Démonstration. On peut montrer qu'il suffit de calculer le nombre de triangles déterminés par le pavage sur les faces de l'icosaèdre, la projection sur la sphère ne changeant pas le nombre de faces triangulaires.

Pour calculer ce nombre de triangles, on calcule l'aire totale de la surface de l'icosaèdre. Comme toutes les faces de l'icosaèdre sont isométriques et ont une arête dont la longueur vaut \sqrt{T} , l'aire totale vaut $\frac{20T\sqrt{3}}{4}$. Les petits triangles du pavage ont chacun une aire égale à $\frac{\sqrt{3}}{4}$ et ils pavent la surface latérale de l'icosaèdre régulier. Le nombre de triangles est donc égal à $20T$. \square

Nous pouvons alors obtenir le nombre d'arêtes et de sommets.

Proposition 5.5.3. *Le nombre d'arêtes du polyèdre géodésique construit à partir d'un grand triangle déterminé par l'origine et un point A de coordonnées (a, b) est égal à $30T$.*

Démonstration. Chaque face contient 3 arêtes, cela fait un total de $60T$ arêtes. Mais en comptant de la sorte, on compte deux fois chaque arête, puisque chaque arête appartient à deux faces. \square

Proposition 5.5.4. *Le nombre de sommets du polyèdre géodésique construit à partir d'un grand triangle déterminé par l'origine et un point A de coordonnées (a, b) est égal à $10T + 2$.*

Démonstration. On utilise la relation d'Euler. \square

Par dualité, on obtient le nombre de faces, sommets et d'arêtes du polyèdre de Goldberg associé à (a, b) ³.

Proposition 5.5.5. *Les nombres de sommets, arêtes et faces du polyèdre de Goldberg associé à un grand triangle déterminé par l'origine et un point A de coordonnées (a, b) sont respectivement $20T$, $30T$ et $10T + 2$.*

5.6 Application en virologie.

Les virus peuvent être classés à partir de plusieurs caractéristiques. L'une d'elles est la forme de la capsid et en particulier la symétrie associée. En effet, on compte 3 types de symétries différentes : la symétrie icosaédrique, la symétrie hélicoïdale et enfin la symétrie mixte. Nous nous intéresserons dans cette section aux virus ayant une capsid à symétrie icosaédrique. Cette capsid sert à protéger le génome et est constituée de protéines. Ces protéines s'associent en deux types de capsomères : les pentamères et les hexamères. Les pentamères sont constitués de 5 protéines alors que les hexamères sont constitués de 6 protéines. Voici quelques exemples de virus à capsid icosaédrique⁴ :

3. Les polyèdres de Goldberg sont classés en trois catégories, en fonction du type de pavage obtenu pour une face de l'icosaèdre.

4. Toutes les images sauf mention explicite du contraire sont tirées de l'article [16].

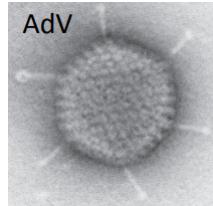


FIGURE 5.12 – Adenorivirus

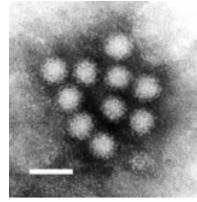


FIGURE 5.13 – Norovirus

Il est clair qu'à partir de ces images, il nous est impossible de déterminer les pentamères et les hexamères. La cristallographie va permettre d'obtenir à partir de rayons X, une image nettement plus précise des virus et qui nous permet de déterminer les protéines qui composent la capside. Bien que ces capsides n'aient pas des faces planes comme les polyèdres de Goldberg, une classification de ses virus peut être faite à partir du nombre de triangulation T . Le plus difficile dans cette recherche du nombre T , c'est de repérer correctement les pentamères et hexamères. Ensuite, c'est à peu près la même chose que pour les polyèdres de Goldberg. On démarre d'un pentamère et on cherche à aller au pentamère suivant en passant par le "centre" des hexamères (qui sont des sommets du polyèdre géodésique associé). Prenons par exemple le cas de l'Adénovirus [21] : Ici,

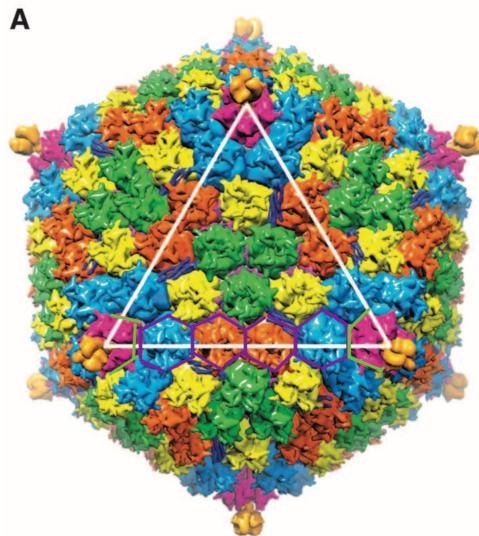


FIGURE 5.14 – Adenovirus obtenu par cristallographie.

les pentamères sont en roses alors que les hexamères sont de toutes les couleurs. Pour passer d'un pentamère à un autre, nous devons poser un repère. Ce repère est obtenu en prenant le centre d'un pentamère comme origine et les deux vecteurs sont obtenus en reliant l'origine au deux centres des hexamères les plus proches. Cela correspond au repère que nous avons défini au tout début de ce chapitre. Ensuite, nous cherchons à nous déplacer selon ces deux axes pour arriver à un second pentamère. Dans cet exemple-ci, nous pouvons nous déplacer le long d'un seul axe, en nous déplaçant de 5 unités vers la droite. Nous avons donc un déplacement de 5 unités sur un axe, et 0 sur l'autre axe, ce qui correspond à $h = 5$ et $k = 0$. Ainsi, le nombre T est égal à 25.

Prenons un second exemple. Ici, la deuxième image montre quels sont les hexamères et penta-

mères du virus. Il faut tracer le réseau de face allant d'un pentamère à un autre. Le repère est représenté en mauve, il est toujours obtenu en reliant le centre d'un pentamère et le centre de deux hexamères. En partant du pentamère, nous nous déplaçons de trois unités vers le "haut à droite". Ensuite, il faut changer de direction pour arriver au pentamère. Au final, nous avons 3 unités sur un axe et 1 unité sur l'autre et donc $h = 3$, $k = 1$ et $T = 13$.

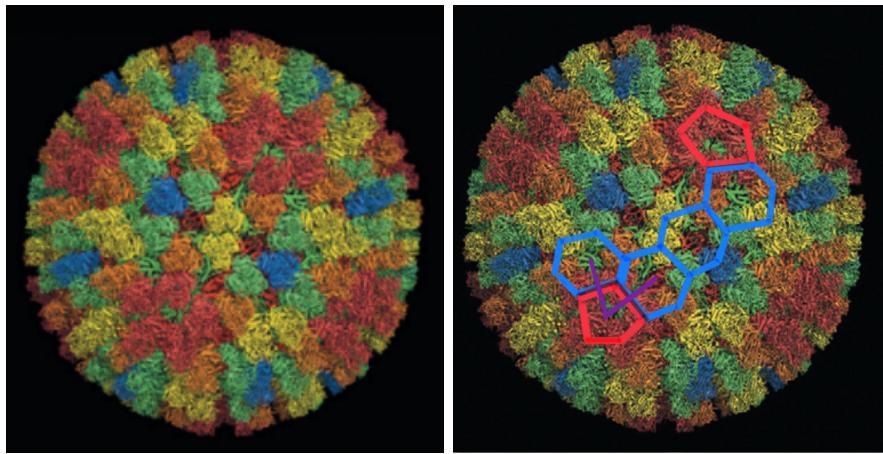


FIGURE 5.15 – Rotavirus, $T = 13$.

Annexe A

Caractérisation des convexes compacts d'une droite.

Nous allons caractériser les convexes compacts d'une droite \mathcal{D} .

Proposition A.0.1. *L'intersection d'une droite et d'un convexe compact est un convexe compact de la droite.*

Proposition A.0.2. *Les convexes compacts d'une droite sont exactement les segments fermés inclus dans cette droite.*

Démonstration. Soient \mathcal{C} un convexe compact et \mathcal{D} une droite, on note $\mathcal{C}_{\mathcal{D}} = \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ le convexe compact inclus dans la droite. On munit \mathcal{D} d'un repère (A, B distincts de \mathcal{D}). Soit X un point de $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$, alors $X = A + \lambda \overrightarrow{AB}$. Définissons

$$\mathcal{C}_{\mathbb{R}} = \{\lambda \in \mathbb{R} : X = A + \lambda \overrightarrow{AB} \in \mathcal{C}_{\mathcal{D}}\}.$$

Cet ensemble est fermé et borné. Donc $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}$ admet un maximum s et un minimum i . On cherche à montrer que les segments sont les compacts convexes d'une droite. La première inclusion, $\mathcal{C}_{\mathcal{D}} \subset [A + i \overrightarrow{AB}, A + s \overrightarrow{AB}]$, est obtenue par définition. L'autre inclusion utilise la définition de convexité de $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$. On sait que $A + i \overrightarrow{AB}$ et $A + s \overrightarrow{AB}$ appartiennent à $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$, alors par la convexité, le segment est entièrement inclus dans $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$. On a que tout compact convexe inclus dans une droite \mathcal{D} est de la forme

$$\mathcal{C}_{\mathcal{D}} = [A + i \overrightarrow{AB}, A + s \overrightarrow{AB}].$$

□

Annexe B

Forme générale pour une réflexion par rapport à un plan

On cherche ici une formule générale donnant l'image d'un point P par la réflexion par rapport à un plan. Par définition de la réflexion, P' est l'image de P si, et seulement si \mathcal{H} est le plan médiateur de $[P, P']$.

Proposition B.0.1. *Soit $P \in \mathcal{A}$, \mathcal{H} un plan de normale n et $O \in \mathcal{H}$. La réflexion de P par rapport à \mathcal{H} est le point $P' = P - 2 \frac{\langle \overrightarrow{OP}, n \rangle}{|n|^2} n$.*

Démonstration. Soit α l'angle non orienté entre \overrightarrow{OP} et n . On a donc $\cos(\alpha) = \frac{\langle \overrightarrow{OP}, n \rangle}{|\overrightarrow{OP}| |n|}$. En premier lieu, on va projeter le point P orthogonalement au plan \mathcal{H} .

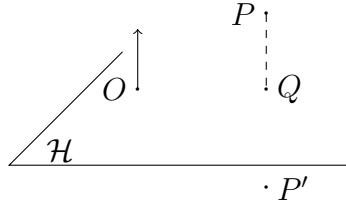


FIGURE B.1 – Projection de P sur \mathcal{H} .

On a alors un triangle rectangle PQO et Q est égal à $P - \cos(\alpha) |\overrightarrow{OP}| \frac{n}{|n|}$, ce qui peut s'écrire

$$Q = P - \frac{\langle \overrightarrow{OP}, n \rangle}{|n|^2} n.$$

Étant donné la définition d'une réflexion, Q doit être le milieu du segment $[P, P']$ où P' est le point obtenu à partir de la réflexion de P par rapport au plan \mathcal{H} . On a alors,

$$P' = P - 2 \frac{\langle \overrightarrow{OP}, n \rangle}{|n|^2} n.$$

□

Annexe C

La réflexion par rapport au plan médiateur pour le tétraèdre.

Rappelons les coordonnées de chaque sommet : $A = (1, 0, 0)$, $B = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, $C = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ et $D = (0, 0, \sqrt{2})$. Pour démontrer que la réflexion par rapport au plan médiateur de $[A, C]$ envoie les sommets de \mathfrak{T} sur eux même, nous utiliserons la forme générale obtenue dans l'annexe B. Un vecteur normal au plan médiateur peut être trouvé en prenant le produit vectoriel de \overrightarrow{BD} et \overrightarrow{BM} où M est le milieu du segment $[A, C]$, par définition du plan médiateur il doit contenir ce point.

Proposition C.0.1. *La réflexion τ par rapport au plan médiateur de $[A, C]$ envoie les sommets de \mathfrak{T} sur les sommets de \mathfrak{T} .*

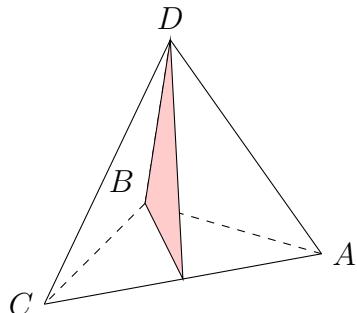


FIGURE C.1 – Le plan médiateur de $[A, C]$.

Démonstration. Soit n la normale au plan médiateur, alors la forme générale de la réflexion par rapport à un plan d'un point P , est donnée par

$$P' = P - 2 \frac{\langle \overrightarrow{BP}, n \rangle}{|n|^2} n.$$

Le milieu M du segment $[A, C]$ a pour coordonnées $(\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}, 0)$. Ainsi, le produit vectoriel nous donne une normale au plan médiateur

$$n = \overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BM} = (\frac{3\sqrt{6}}{4}, -\frac{3\sqrt{2}}{4}, 0).$$

La norme de cette normale vaut $\frac{3}{\sqrt{2}}$ et nous pouvons calculer la réflexion de chaque sommet. Étant donné que B et D appartiennent au plan médiateur, la réflexion par rapport à ce plan les laisse fixes. Regardons pour le sommet A , nous avons $\langle \overrightarrow{BA}, n \rangle = \frac{3\sqrt{6}}{4}$ et

$$\begin{aligned} P' &= A - 2 \frac{\frac{3\sqrt{6}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} n \\ &= (1, 0, 0) - \frac{\sqrt{6}}{3} \left(\frac{3\sqrt{6}}{4}, -\frac{3\sqrt{2}}{4}, 0 \right) \\ &= \left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right) \\ &= C. \end{aligned}$$

Nous avons que la réflexion par rapport au plan médiateur envoie A sur C . De plus, comme une réflexion est son propre inverse, le sommet C sera envoyé sur le sommet A . \square

Le même procédé peut être réalisé pour les réflexions par rapport aux plans médiateurs de $[A, B]$ et $[A, D]$.

Annexe D

Les faces du dodécaèdre régulier

Nous avons déterminé les sommets d'un ensemble déterminé par 20 points donnés à la proposition 3.4.17. Nous n'avons pas d'informations sur les faces et les arêtes de cet ensemble, à part que $\mathcal{F}_{00} = \text{Conv}(A_{00}, A_{01}, A_{02}, A_{03}, A_{04})$ en est une face. Nous allons utiliser des symétries du polytope en question pour déterminer d'autres faces.

D.1 Réflexion de la première face par rapport à un plan

Nous allons d'abord chercher la normale du plan associé à la réflexion. Nos conditions sont que l'arête $[A_{00}, A_{01}]$ et le point $G = (0, 0, \frac{\varphi^2}{2})$ sont dans ce plan. Nous allons calculer le produit vectoriel de deux vecteurs directeurs du plan π pour obtenir une normale à ce plan.

Proposition D.1.1. *Le plan π contenant $[A_{00}, A_{01}]$ et G a comme normale*

$$n = \frac{1}{4} \left(\varphi^3 \sqrt{4 - \varphi^2}, \varphi^2 + 1, 2\varphi \sqrt{4 - \varphi^2} \right).$$

Démonstration. Soient $\overrightarrow{GA_{00}}$ et $\overrightarrow{GA_{01}}$ deux vecteurs directeurs de π . Nous obtenons,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GA_{00}} &= (1, 0, \frac{-\varphi^2}{2}), \\ \overrightarrow{GA_{01}} &= (\frac{1}{2\varphi}, \frac{\varphi\sqrt{4-\varphi^2}}{2}, \frac{-\varphi^2}{2}). \end{aligned}$$

Le produit vectoriel $n = \overrightarrow{GA_{00}} \wedge \overrightarrow{GA_{01}}$ donne

$$\begin{aligned} n &= \left(\frac{\varphi^3 \sqrt{4 - \varphi^2}}{4}, \frac{-\varphi}{4} + \frac{\varphi^2}{2}, \frac{\varphi \sqrt{4 - \varphi^2}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\varphi^3 \sqrt{4 - \varphi^2}, -\varphi + 2\varphi^2, 2\varphi \sqrt{4 - \varphi^2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\varphi^3 \sqrt{4 - \varphi^2}, \varphi^2 + 1, 2\varphi \sqrt{4 - \varphi^2} \right). \end{aligned}$$

Ainsi, n est une normale au plan π . □

Nous pouvons maintenant montrer que la réflexion par rapport au plan π envoie les sommets de \mathfrak{D} sur d'autres sommets de \mathfrak{D} . On note cette réflexion R_π .

Grâce à la proposition B.0.1, nous pouvons calculer la forme générale d'un point P' obtenu à partir de P en lui appliquant la réflexion R_π . Elle est égale à

$$P' = P - 2 \frac{\langle \overrightarrow{GP}, n \rangle}{|n|^2} n.$$

Nous allons déjà calculer la norme du vecteur n qui nous sera utile tout le long de cette annexe.

Proposition D.1.2. *On a*

$$|n|^2 = \frac{5}{4}\varphi^2.$$

Démonstration. La relation du nombre d'or peut être écrite comme suit

$$\varphi^n = \varphi^{n-1} + \varphi^{n-2} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Alors, on obtient

$$\begin{aligned} |n|^2 &= \frac{1}{16} (\varphi^6(4 - \varphi^2) + (\varphi^2 + 1)^2 + 4\varphi^2(4 - \varphi^2)) \\ &= \frac{1}{16} (-\varphi^8 + 4\varphi^6 - 3\varphi^4 + 18\varphi^2 + 1) \\ &= \frac{1}{16} (2\varphi^6 - \varphi^5 - 3\varphi^4 + 18\varphi^2 + 1) \\ &= \frac{1}{16} (\varphi^5 - \varphi^4 + 19\varphi^2 - \varphi) \\ &= \frac{1}{16} (\varphi^3 + 19\varphi^2 - \varphi) \\ &= \frac{5}{4}\varphi^2. \end{aligned}$$

□

Proposition D.1.3. *Les sommets A_{00} et A_{01} sont envoyés sur eux-mêmes par la réflexion R_π .*

Démonstration. La réflexion par rapport à un plan laisse ce plan invariant, donc tous les points du plan sont envoyés sur eux-mêmes. □

Ici, nous développerons les calculs pour un sommet, à savoir A_{02} . Pour les autres, seules les réponses seront affichées. L'idée reste la même : utiliser la relation du nombre d'or et ses variantes.

Proposition D.1.4. *Le sommet $A_{02} = (\frac{-\varphi}{2}, \frac{\sqrt{4-\varphi^2}}{2}, 0)$ est envoyé sur A_{11} par la réflexion R_π .*

Démonstration. Calculons en premier le produit scalaire entre $\overrightarrow{GA_{02}} = (\frac{-\varphi}{2}, \frac{\sqrt{4-\varphi^2}}{2}, \frac{-\varphi^2}{2})$ et n , on a

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{GA_{02}}, n \rangle &= \frac{1}{8} \left(-\varphi^4 \sqrt{4 - \varphi^2} + \varphi^2 \sqrt{4 - \varphi^2} + \sqrt{4 - \varphi^2} - 2\varphi^3 \sqrt{4 - \varphi^2} \right) \\ &= \frac{1}{8} \left(-3\varphi^3 \sqrt{4 - \varphi^2} + \sqrt{4 - \varphi^2} \right) \\ &= \frac{1}{8} \left(-3\varphi^2 \sqrt{4 - \varphi^2} - 3\varphi \sqrt{4 - \varphi^2} + \sqrt{4 - \varphi^2} \right) \\ &= \frac{1}{8} \left(-6\varphi^2 \sqrt{4 - \varphi^2} + 4\sqrt{4 - \varphi^2} \right) \\ &= \frac{-3}{4}\varphi^2 \sqrt{4 - \varphi^2} + \frac{1}{2}\sqrt{4 - \varphi^2}. \end{aligned}$$

Ensuite, nous calculons $\alpha = \frac{\langle \overrightarrow{GA_{02}}, n \rangle}{|n|^2}$, ce qui nous donne

$$\alpha = \frac{1}{5} \left(-3\sqrt{4 - \varphi^2} + \frac{2}{\varphi^2} \sqrt{4 - \varphi^2} \right).$$

On a alors

$$2\alpha n = \frac{1}{10} \left(-3\varphi^3(4 - \varphi^2) + 2\varphi(4 - \varphi^2), (\varphi^2 + 1)\sqrt{4 - \varphi^2}(-3 + \frac{2}{\varphi^2}), -6\varphi(4 - \varphi^2) + \frac{4}{\varphi}(4 - \varphi^2) \right).$$

Pour plus de facilité, nous allons développer coordonnée par coordonnée. La première nous donne

$$\begin{aligned} -3\varphi^3(4 - \varphi^2) + 2\varphi(4 - \varphi^2) &= (4 - \varphi^2)(-3\varphi^2 - 3\varphi + 2\varphi) \\ &= (4 - \varphi^2)(-3\varphi^2 - \varphi) \\ &= -12\varphi^2 - 4\varphi + 3\varphi^4 + \varphi^3 \\ &= -9\varphi^2 - 4\varphi + 4\varphi^3 \\ &= -5\varphi^2. \end{aligned}$$

Pour la seconde, en utilisant la relation $\frac{1}{\varphi^2} = 2 - \varphi$, on obtient

$$\begin{aligned} (\varphi^2 + 1)\sqrt{4 - \varphi^2}(-3 + \frac{2}{\varphi^2}) &= \sqrt{4 - \varphi^2}(\varphi^2 + 1)(1 - 2\varphi) \\ &= \sqrt{4 - \varphi^2}(\varphi^2 - 2\varphi^3 + 1 - 2\varphi) \\ &= \sqrt{4 - \varphi^2}(-\varphi^2 - 4\varphi + 1) \\ &= -5\varphi\sqrt{4 - \varphi^2}. \end{aligned}$$

Et enfin la dernière, en utilisant $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$, on a

$$\begin{aligned} -6\varphi(4 - \varphi^2) + \frac{4}{\varphi}(4 - \varphi^2) &= -24\varphi + 6\varphi^3 + 4(\varphi - 1)(4 - \varphi^2) \\ &= -18\varphi + 6\varphi^2 + 16\varphi - 4\varphi^3 - 16 + 4\varphi^2 \\ &= -2\varphi + 10\varphi^2 - 4\varphi^3 - 16 \\ &= -6\varphi + 6\varphi^2 - 16 \\ &= -10. \end{aligned}$$

En regroupant ce qui vient d'être calculé, on obtient

$$2\alpha n = \frac{1}{2} \left(-\varphi^2, -\varphi\sqrt{4 - \varphi^2}, -2 \right).$$

Pour terminer, on calcule la réflexion R_π du point A_{02} , ce qui donne

$$\begin{aligned} R_\pi(A_{02}) &= A_{02} - 2\alpha n \\ &= \left(\frac{-\varphi + \varphi^2}{2}, \frac{\sqrt{4 - \varphi^2} + \varphi\sqrt{4 - \varphi^2}}{2}, 1 \right) \\ &= \left(\frac{1}{2}, \frac{\varphi^2}{2}\sqrt{4 - \varphi^2}, 1 \right) \\ &= A_{11}. \end{aligned}$$

□

Comme mentionné plus haut, seules les réponses seront données pour les sommets suivants.

Proposition D.1.5. *Le sommet $A_{03} = (\frac{-\varphi}{2}, \frac{-\sqrt{4 - \varphi^2}}{2}, 0)$ est envoyé sur A_{20} par la réflexion R_π .*

Démonstration. On obtient

$$\begin{aligned} 1) \quad \langle \overrightarrow{GA_{03}}, n \rangle &= -\varphi^2 \sqrt{4-\varphi^2} + \frac{1}{4} \sqrt{4-\varphi^2}, \\ 2) \quad 2 \frac{\langle \overrightarrow{GA_{03}}, n \rangle}{|n|^2} n &= \frac{1}{10} (-5(\varphi^2 + \varphi), -5\varphi^2 \sqrt{4-\varphi^2}, -10\varphi). \end{aligned}$$

Au final,

$$\begin{aligned} R_\pi(A_{03}) &= A_{03} - 2 \frac{\langle \overrightarrow{GA_{03}}, n \rangle}{|n|^2} n \\ &= \left(\frac{-\varphi + \varphi^2 + \varphi}{2}, \frac{-\sqrt{4-\varphi^2} + \varphi^2 \sqrt{4-\varphi^2}}{2}, \varphi \right) \\ &= \left(\frac{\varphi^2}{2}, \frac{\varphi \sqrt{4-\varphi^2}}{2}, \varphi \right) \\ &= A_{20}. \end{aligned}$$

□

Nous terminons la face \mathcal{F}_{00} avec le sommet A_{04} .

Proposition D.1.6. *Le sommet $A_{04} = (\frac{1}{2\varphi}, \frac{-\varphi \sqrt{4-\varphi^2}}{2}, 0)$ est envoyé sur A_{10} par la réflexion R_π .*

Démonstration. On obtient

$$\begin{aligned} 1) \quad \langle \overrightarrow{GA_{04}}, n \rangle &= -\frac{1}{2}\varphi \sqrt{4-\varphi^2} - \frac{1}{4}\varphi^2 \sqrt{4-\varphi^2}, \\ 2) \quad 2 \frac{\langle \overrightarrow{GA_{04}}, n \rangle}{|n|^2} n &= \frac{1}{10} (-5\varphi^2, -5\varphi \sqrt{4-\varphi^2}, -10). \end{aligned}$$

Au final,

$$\begin{aligned} R_\pi(A_{04}) &= A_{04} - 2 \frac{\langle \overrightarrow{GA_{04}}, n \rangle}{|n|^2} n \\ &= \left(\frac{1}{2\varphi} + \frac{\varphi^2}{2}, 0, 1 \right) \\ &= \left(\frac{1}{2}(\varphi - 1 + \varphi^2), 0, 1 \right) \\ &= (\varphi, 0, 1) \\ &= A_{10}. \end{aligned}$$

□

Remarque D.1.7. *Par définition d'une réflexion, si le point P est envoyé sur le point P' , alors P' est envoyé sur P .*

Cette remarque nous permet de conclure que les sommets trouvés à partir de la réflexion R_π des sommets de \mathcal{F}_{00} : $A_{00}, A_{01}, A_{10}, A_{11}, A_{20}$, lorsqu'on applique cette même réflexion donne les sommets de \mathcal{F}_{00} .

On a donc déjà 10 sommets, de \mathfrak{D} qui sont envoyés sur d'autres sommets de \mathfrak{D} . Pour être totalement exact.e, il faudrait faire le travail pour le restant des sommets. Nous allons nous convaincre pour un, le reste se fait toujours avec la même méthode.

Proposition D.1.8. *Le sommet $A_{14} = (\frac{1}{2}, \frac{-\varphi^2 \sqrt{4-\varphi^2}}{2}, 1)$ est envoyé sur A_{24} par la réflexion R_π .*

Démonstration. On calcule en premier le produit scalaire entre le vecteur $\overrightarrow{GA_{14}}$ dont ses composantes sont $(\frac{1}{2}, \frac{-\varphi^2\sqrt{4-\varphi^2}}{2}, 1 - \frac{\varphi^2}{2})$ et n , on a

$$\begin{aligned}\langle \overrightarrow{GA_{14}}, n \rangle &= \frac{1}{8} \left(\varphi^3 \sqrt{4-\varphi^2} - \varphi^4 \sqrt{4-\varphi^2} - \varphi^2 \sqrt{4-\varphi^2} - 2\sqrt{4-\varphi^2} \right) \\ &= \frac{1}{8} \left(-2\varphi^2 \sqrt{4-\varphi^2} - 2\sqrt{4-\varphi^2} \right) \\ &= \frac{-1}{4} \varphi^2 \sqrt{4-\varphi^2} - \frac{1}{4} \sqrt{4-\varphi^2}.\end{aligned}$$

Ensuite, on calcule $\alpha = \frac{\langle \overrightarrow{GA_{14}}, n \rangle}{|n|^2}$, ce qui nous donne

$$\alpha = \frac{1}{5} \left(-\sqrt{4-\varphi^2} - \frac{1}{\varphi^2} \sqrt{4-\varphi^2} \right).$$

On a alors

$$2\alpha n = \frac{1}{10} \left(-\varphi^3(4-\varphi^2) - \varphi(4-\varphi^2), (\varphi^2+1)\sqrt{4-\varphi^2}(-1 - \frac{1}{\varphi^2}), -2\varphi(4-\varphi^2) - \frac{2}{\varphi}(4-\varphi^2) \right).$$

Calculons coordonnée par coordonnée. La première nous donne

$$\begin{aligned}-\varphi^3(4-\varphi^2) - \varphi(4-\varphi^2) &= -4\varphi^3 + \varphi^5 - 4\varphi + \varphi^3 \\ &= -2\varphi^3 + \varphi^4 - 4\varphi \\ &= -\varphi^3 + \varphi^2 - 4\varphi \\ &= -5\varphi.\end{aligned}$$

Pour la seconde, en utilisant la relation $\frac{1}{\varphi^2} = 2 - \varphi$, on obtient

$$\begin{aligned}(\varphi^2+1)\sqrt{4-\varphi^2}(-1 - \frac{1}{\varphi^2}) &= \sqrt{4-\varphi^2}(\varphi^2+1)(\varphi-3) \\ &= \sqrt{4-\varphi^2}(\varphi^3 - 3\varphi^2 + \varphi - 3) \\ &= \sqrt{4-\varphi^2}(-2\varphi^2 + 2\varphi - 3) \\ &= -5\sqrt{4-\varphi^2}\end{aligned}$$

Et enfin la dernière, en utilisant $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$, on a

$$\begin{aligned}-2\varphi(4-\varphi^2) - \frac{2}{\varphi}(4-\varphi^2) &= (4-\varphi^2)(-2\varphi - \frac{2}{\varphi}) \\ &= (4-\varphi^2)(-4\varphi + 2) \\ &= -16\varphi + 8 + 4\varphi^3 - 2\varphi^2 \\ &= -12\varphi + 8 + 2\varphi^2 \\ &= -10\varphi + 10 \\ &= \frac{-10}{\varphi}.\end{aligned}$$

En regroupant ce qui vient d'être calculé, on obtient

$$2\alpha n = \frac{1}{2} \left(-\varphi, -\sqrt{4-\varphi^2}, \frac{-2}{\varphi} \right).$$

1. $1 - \frac{\varphi^2}{2} = \frac{2-\varphi^2}{2} = \frac{1-\varphi}{2} = \frac{-1}{2\varphi}$.

Pour terminer, on calcule la réflexion R_π du point A_{14} , ce qui donne

$$\begin{aligned} R_\pi(A_{14}) &= A_{14} - 2\alpha n \\ &= \left(\frac{1+\varphi}{2}, \frac{(-\varphi^2+1)\sqrt{4-\varphi^2}}{2}, 1 + \frac{1}{\varphi} \right) \\ &= \left(\frac{\varphi^2}{2}, \frac{-\varphi\sqrt{4-\varphi^2}}{2}, \varphi \right) \\ &= A_{24}. \end{aligned}$$

□

Les derniers sommets peuvent se démontrer de la même manière. Nous obtenons au final une isométrie envoyant les sommets de \mathfrak{D} sur d'autres sommets de \mathfrak{D} .

D.2 La rotation et ses puissances.

Nous avons la matrice de rotation d'angle $\frac{2\pi}{5}$ autour de l'axe z :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\varphi} & -\frac{\varphi\sqrt{4-\varphi^2}}{2} & 0 \\ \frac{\varphi\sqrt{4-\varphi^2}}{2} & \frac{1}{2\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si nous décidons d'appliquer deux fois la rotation $r_{\frac{2\pi}{5}}$ au polytope \mathfrak{D} , on aura une rotation d'angle $\frac{4\pi}{5}$. Étant donné que $r_{\frac{2\pi}{5}}$ envoie \mathfrak{D} sur \mathfrak{D} , en appliquant une seconde fois cette rotation, \mathfrak{D} sera encore envoyé sur lui-même. On peut raisonner de la même manière en appliquant trois et quatre fois cette rotation.

Proposition D.2.1. *Les rotations d'angle $\frac{4\pi}{5}$, $\frac{6\pi}{5}$ et $\frac{8\pi}{5}$ autour de l'axe z envoie \mathfrak{D} sur lui-même.*

Nous savons déjà que la face $\mathcal{F}_{10} = \text{Conv}(A_{00}, A_{01}, A_{10}, A_{11}, A_{20})$ est envoyée sur $\mathcal{F}_{11} = \text{Conv}(A_{01}, A_{02}, A_{11}, A_{12}, A_{21})$ par la rotation $r_{\frac{2\pi}{5}}$. Si nous appliquons une rotation d'angle $\frac{4\pi}{5}$, notre face \mathcal{F}_{10} sera envoyée sur une autre face dont nous allons trouver les sommets. Cette face sera elle aussi un pentagone régulier isométrique.

Proposition D.2.2. *L'enveloppe convexe*

$$r_{\frac{4\pi}{5}}(\mathcal{F}_{10}) = \text{Conv}(A_{02}, A_{03}, A_{12}, A_{13}, A_{22})$$

est une face de \mathfrak{D} .

Démonstration. Étant donné que l'ensemble des symétries positives de \mathfrak{D} forment un groupe. La rotation d'angle $\frac{4\pi}{5}$ peut être décomposée en deux rotations d'angle $\frac{2\pi}{5}$. Ainsi, $r_{\frac{4\pi}{5}}(\mathcal{F}_{10})$ est égal à $r_{\frac{2\pi}{5}}(\mathcal{F}_{11})$. On a alors

$$r_{\frac{2\pi}{5}}(A_{01}) = MA_{01} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4\varphi^2} - \frac{\varphi^2(4-\varphi^2)}{4} \\ \frac{1}{4}\sqrt{4-\varphi^2} + \frac{1}{4}\sqrt{4-\varphi^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour la première coordonnée, on a

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4\varphi^2} - \frac{\varphi^2(4-\varphi^2)}{4} &= \frac{1-4\varphi^4+\varphi^6}{4\varphi^2} \\
 &= \frac{\varphi^2-\varphi-3\varphi^4+\varphi^5}{4\varphi^2} \\
 &= \frac{\varphi-1-3\varphi^3+\varphi^4}{4\varphi} \\
 &= \frac{2\varphi-2\varphi^3}{4\varphi} \\
 &= \frac{1-\varphi^2}{2} \\
 &= \frac{-\varphi}{2}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, on a $r_{\frac{2\pi}{5}}(A_{01}) = A_{02}$. Par le même type de calcul, on retrouve

$$\begin{aligned}
 r_{\frac{2\pi}{5}}(A_{02}) &= A_{03} \\
 r_{\frac{2\pi}{5}}(A_{11}) &= A_{12} \\
 r_{\frac{2\pi}{5}}(A_{12}) &= A_{13} \\
 r_{\frac{2\pi}{5}}(A_{21}) &= A_{22}.
 \end{aligned}$$

□

Nous notons cette nouvelle face \mathcal{F}_{12} . Nous pouvons remarquer que ces rotations permutent les indices des sommets de manière cyclique. Avec cette déduction, nous pouvons facilement trouver les deux dernières faces de cet "étage". En combinant toujours avec les mêmes arguments, nous savons dire qu'une rotation d'angle $\frac{6\pi}{5}$ et $\frac{8\pi}{5}$ autour de l'axe z envoie la face \mathcal{F}_{10} de \mathfrak{D} sur une autre face de \mathfrak{D} qui sera elle aussi un pentagone régulier isométrique.

Nous avons alors

$$\begin{aligned}
 r_{\frac{6\pi}{5}}(\mathcal{F}_{10}) &= r_{\frac{2\pi}{5}}(\mathcal{F}_{12}) \\
 &= \text{Conv}(A_{03}, A_{04}, A_{13}, A_{14}, A_{23}) \\
 &= \mathcal{F}_{13}
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 r_{\frac{8\pi}{5}}(\mathcal{F}_{10}) &= r_{\frac{2\pi}{5}}(\mathcal{F}_{14}) \\
 &= \text{Conv}(A_{04}, A_{00}, A_{14}, A_{10}, A_{24}) \\
 &= \mathcal{F}_{14}.
 \end{aligned}$$

D.3 Isométrie envoyant les 6 premières faces sur d'autres faces.

L'isométrie dont nous avons parlé est $\tau : X \mapsto -X + 2G$. On a montré que cette isométrie est en réalité une symétrie de \mathfrak{D} , ce qui nous permet de dire qu'en appliquant τ à une face déjà obtenue, nous aurons une nouvelle face de \mathfrak{D} .

Nous développons ici les calculs pour l'obtention d'une des faces, le reste se fait de manière similaire.

Proposition D.3.1. *L'enveloppe convexe $\tau(\mathcal{F}_{10}) = \text{Conv}(A_{32}, A_{33}, A_{22}, A_{23}, A_{13})$ est une face de \mathfrak{D} .*

Démonstration. En appliquant la symétrie τ aux sommets de \mathcal{F}_{10} , on obtient

$$\begin{aligned}\tau(A_{00}) &= -A_{00} + 2G = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \varphi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \varphi + 1 \end{pmatrix} = A_{32}, \\ \tau(A_{01}) &= A_{33}, \\ \tau(A_{10}) &= A_{22}, \\ \tau(A_{11}) &= A_{23}, \\ \tau(A_{20}) &= A_{13}.\end{aligned}$$

Ainsi, l'enveloppe convexe

$$\text{Conv}(A_{32}, A_{33}, A_{22}, A_{23}, A_{13})$$

est bien une face, on la note \mathcal{F}_{20} . \square

Proposition D.3.2. *L'enveloppe convexe $\text{Conv}(A_{33}, A_{34}, A_{23}, A_{24}, A_{14})$ est une face de \mathfrak{D} . On la note \mathcal{F}_{21} .*

Proposition D.3.3. *L'enveloppe convexe $\text{Conv}(A_{34}, A_{30}, A_{24}, A_{20}, A_{10})$ est une face de \mathfrak{D} . On la note \mathcal{F}_{22} .*

Proposition D.3.4. *L'enveloppe convexe $\text{Conv}(A_{30}, A_{31}, A_{20}, A_{21}, A_{11})$ est une face de \mathfrak{D} . On la note \mathcal{F}_{23} .*

Proposition D.3.5. *L'enveloppe convexe $\text{Conv}(A_{31}, A_{32}, A_{21}, A_{22}, A_{12})$ est une face de \mathfrak{D} . On la note \mathcal{F}_{24} .*

Proposition D.3.6. *L'enveloppe convexe $\text{Conv}(A_{30}, A_{31}, A_{32}, A_{33}, A_{34})$ est une face de \mathfrak{D} . On la note \mathcal{F}_{30} .*

Annexe E

Éléments de la théorie des groupes

Nous faisons quelques rappels qui nous seront utiles pour la compréhension de ce mémoire, ces rappels ont été principalement repris dans le livre de R. Lyndon [19] et M. Armstrong [1].

E.1 Groupes et sous-groupes

Définition E.1.1. *Un groupe est un ensemble G doté d'une opération*

$$\circ : G \times G \rightarrow G : (g, h) \mapsto g \circ h$$

tel que pour tous g, h et $k \in G$, on a

- 1) $(g \circ h) \circ k = g \circ (h \circ k)$
- 2) *Il existe un élément e de G , appelé neutre, tel que $e \circ g = g = g \circ e$ pour tout $g \in G$.*
- 3) *Pour tout $g \in G$, il existe un élément g' de G tel que $g \circ g' = e = g' \circ g$.*

Remarque E.1.2. *Le neutre e et l'élément g' de la définition E.1.1 sont uniques. L'élément g' est appelé inverse de g et on le note g^{-1} .*

Pour alléger les notations, on notera $g \circ h = gh$. Prenons un exemple pour nous familiariser avec la définition.

Exemple E.1.3. *Soit G le groupe des rotations de centre O et d'angle $\frac{k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$. L'opération de ce groupe est la composition. On a $G = \{id, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$ où r est la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ par rapport à O .*

Définition E.1.4. *Soit $H \subseteq G$, on dit que H est un sous-groupe de G (ce qu'on note $H \leq G$) si*

- 1) $H \ni e$
- 2) *H est fermé pour la multiplication*
- 3) *Si $x \in H$ alors $x^{-1} \in H$.*

Remarque E.1.5. *On écrit parfois $H \neq \emptyset$ au lieu de $H \ni e$.*

Si nous reprenons le groupe des rotations de centre O et d'angle $\frac{k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$, nous pouvons remarquer que les rotation $r^2, r^4, r^6 = id$ forment un sous-groupe. Ce sous-groupe contient toutes les rotations de centre O et d'angle $\frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

E.2 Actions de groupe

Définition E.2.1. Un groupe G agit sur un ensemble X s'il est doté d'une application

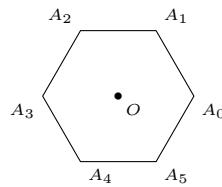
$$\cdot : G \times X \rightarrow X : (g, x) \mapsto g \cdot x$$

telle que pour tous $h, g \in G$ et $x \in X$, on a

- 1) $e \cdot x = x$
- 2) $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$

On nommera cette application l'action de G sur X .

Exemple E.2.2. Continuons notre exemple où G' est le groupe engendré par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Et prenons comme ensemble X les sommets de l'hexagone régulier.



L'action d'un élément g de G sur X est alors la restriction de la rotation définissant cet élément à X . Il faut juste vérifier que pour tout g et tout sommet A_i de l'hexagone, $g(A_i)$ est encore un sommet. Les conditions pour avoir une action sont satisfaites : l'identité du groupe fixe tous les sommets, et on a par définition $(g \circ h)(A_i) = g(h(A_i))$.

Remarque E.2.3. Si un groupe G agit sur un ensemble X , on dira que X est un G -ensemble.

Définition E.2.4. Pour $x \in X$, la G -orbite de x est l'ensemble

$$G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\}.$$

L'orbite d'un élément x est l'ensemble des éléments de X associés à x sous l'action de G .

Exemple E.2.5. Considérons encore l'ensemble X des sommets de l'hexagone régulier sur lequel on fait agir le groupe $G' = \{\text{id}, r', r'^2\}$ où r' est la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. L'orbite du sommet A_1 est alors

$$G' \cdot A_1 = \{\text{id}(A_1), r'(A_1), r'^2(A_1)\} = \{A_1, A_3, A_5\}$$

Théorème E.2.6. Soit X un G -ensemble. Alors X est partitionné en ses G -orbites. L'ensemble des G -orbites est noté X/G .

Démonstration. Montrons que la relation ci-dessous est une relation d'équivalence.

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G : y = g \cdot x.$$

- 1) La relation \sim est réflexive : $x \sim x$. On cherche un élément g de G tel que $x = g \cdot x$. En prenant $g = e$, on obtient $e \cdot x = x$.

- 2) La relation \sim est symétrique : si $x \sim y$ alors $y \sim x$. Si $x \sim y$, on sait qu'il existe $g \in G$ tel que $y = g \cdot x$. On a alors $g^{-1} \cdot y = x$. Comme G est un groupe, on sait que $g^{-1} \in G$.
- 3) La relation \sim est transitive : si $x \sim y$ et $y \sim z$ alors $x \sim z$. On sait qu'il existe g et $g' \in G$ tels que $y = g \cdot x$ et $z = g' \cdot y$. En remplaçant y dans la deuxième égalité, on obtient $z = g' \cdot (g \cdot x) = g'g \cdot x$. Comme G est un groupe, on sait que $g'g \in G$. Par conséquent, $x \sim z$.

□

Définition E.2.7. On dit que G agit transitivement sur X si X n'a qu'une seule orbite. En d'autres termes,

$$\forall x, x' \in X, \exists g \in G : g \cdot x = x'.$$

Exemple E.2.8. Pour continuer avec l'exemple E.2.5, on sait que G' n'agit pas transitivement sur X car si on prend A_1 et A_2 , on a $\forall g \in G, g \cdot A_1 \neq A_2$. Il y a 2 orbites,

$$G \cdot A_1 = \{A_1, A_3, A_5\} \text{ et } G \cdot A_2 = \{A_2, A_4, A_0\}.$$

Par contre, si on prend comme groupe $G = \{\text{id}, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$ où r est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On a que G agit transitivement sur X car

$$G \cdot A_1 = X.$$

Définition E.2.9. Soit X un G -ensemble, le stabilisateur de $x \in X$ est l'ensemble

$$\text{Stab}(x) = \{g \in G | g \cdot x = x\}.$$

E.3 Classes latérales à gauche

Définition E.3.1. Soit $H \leq G$. On définit l'action $h \cdot k = kh^{-1}$ où $h \in H$ et $k \in G$. On regarde la H -orbite d'un élément de G

$$H \cdot k = \{kh^{-1} | h \in H\} = \{kh | h \in H\} = kH.$$

On nommera cet ensemble la classe latérale à gauche de k selon H .

Définition E.3.2. On désigne par $(G/H)_g$ l'ensemble des classes latérales à gauche de G . On note $[G : H]$ son cardinal.

Proposition E.3.3. $\forall g \in G, |gH| = |H|$.

Démonstration. Soit $g \in G$, montrons que l'application

$$\phi_g : H \rightarrow gH : h \mapsto gh,$$

est une bijection. En effet, elle possède un inverse donné par

$$\phi_g^{-1} : gH \rightarrow H : gh \mapsto g^{-1}gh = h,$$

ce qui termine la preuve. □

Théorème E.3.4 (Lagrange). *Soit G un groupe fini. Si $G \leq H$, alors*

$$|G| = |H|[G : H].$$

Démonstration. On partitionne G en classes. On sait que chaque classe contient le même nombre d'éléments que H par la proposition E.3.3. Ainsi, on a

$$|H|[G : H] = |G|.$$

□

E.4 Permutations

Cette section est inspirée du chapitre 6 du livre : "Groups and symmetry" [1].

Définition E.4.1. *Une permutation de l'ensemble X est une bijection de X dans lui-même.*

Proposition E.4.2. *L'ensemble des permutations de X , muni de la composition, forme un groupe*

Définition E.4.3. *Le groupe des permutations d'un ensemble X est noté S_X .*

Remarque E.4.4. *Ici, on va s'intéresser à des ensembles X finis. Si X a n éléments, on peut considérer que $X = \{1, \dots, n\}$. On note alors S_n l'ensemble des permutations de X dans lui-même qu'on nomme le groupe symétrique de degré n . On note la permutation*

$$\nu : X \rightarrow X : 1 \mapsto \nu(1), \dots, n \mapsto \nu(n)$$

par

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \nu(1) & \nu(2) & \cdots & \nu(n) \end{pmatrix}.$$

Le groupe S_n possède $n!$ éléments.

Définition E.4.5. *Soient $X = \{1, \dots, n\}$ et $0 < p \leq n$. Si on note par t_i les éléments de X $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, le cycle associé à t_1, \dots, t_p est donné par*

$$\begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \cdots & t_p & t_{p+1} & \cdots & t_n \\ t_2 & t_3 & \cdots & t_1 & t_{p+1} & \cdots & t_n \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, les éléments t_{p+1}, \dots, t_n restent inchangés alors que les p premiers éléments forment un cycle. On notera ce cycle $(t_1 t_2 \cdots t_{p-1} t_p)$ et on dira que c'est un p -cycle.

Définition E.4.6. *Un cycle de longueur 2 est appelé une transposition.*

Proposition E.4.7. *Toute permutation (différente de l'identité) est un produit de cycles disjoints.*

Nous allons maintenant démontrer que S_n peut être obtenu à partir de plusieurs types de générateurs. Les premiers générateurs possibles sont les transpositions.

Proposition E.4.8. *Les transpositions dans S_n génèrent S_n .*

Démonstration. Chaque permutation peut être écrite comme un produit de cycles disjoints et chaque cycle peut être écrit comme un produit de transpositions car

$$(a_1 a_2 \dots a_k) = (a_1 a_2)(a_1 a_3) \dots (a_1 a_k).$$

Ainsi, chaque élément de S_n peut être écrit comme un produit de transpositions. Ici, les transpositions n'ont pas besoin d'être disjointes, la décomposition en produit n'est donc pas unique. \square

Nous pouvons également réduire le nombre de transpositions pouvant générer S_n .

Théorème E.4.9.

- 1) Les transpositions $(12), (13), \dots, (1n)$ génèrent S_n .
- 2) Les transpositions $(12), (23), \dots, (n-1n)$ génèrent S_n .

Démonstration.

- 1) En utilisant la relation $(ab) = (1a)(1b)(1a)$ et le théorème E.4.8, on peut conclure.
- 2) On va montrer par récurrence que

$$(1k) = (k-1\ k)(k-2\ k-1) \dots (34)(23)(12)(23)(34) \dots (k-1\ k) \quad \forall k \leq 2$$

Cas de base : Lorsque $k = 2$, c'est évident.

Induction : On sait que k est vrai et on regarde pour $k+1$. On peut facilement montrer que

$$(1k+1) = (k\ k+1)(1k)(k\ k+1).$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence qui donne la relation

$$(1k) = (k-1\ k)(k-2\ k-1) \dots (34)(23)(12)(23)(34) \dots (k-1\ k),$$

on peut conclure que

$$(1k+1) = (k\ k+1)(k-1\ k)(k-2\ k-1) \dots (34)(23)(12)(23)(34) \dots (k-1\ k)(k\ k+1).$$

Grâce à cette décomposition et au point 1), les transpositions $(12), (23), \dots, (n-1n)$ génèrent S_n .

\square

Ici, nous allons montrer qu'avec deux permutations particulières de S_n , nous pouvons générer ce groupe.

Théorème E.4.10. *La transposition (12) et le n -cycle $(12\dots n)$ génèrent S_n .*

Démonstration. On va montrer que chaque transposition $(kk+1)$ peut être écrite comme un produit de (12) et $(12\dots n)$. L'idée est de ramener k sur 1 et $k+1$ sur 2 pour ensuite permute ces deux places grâce à la transposition (12) . Ensuite, nous appliquerons la permutation inverse nous permettant de renvoyer tous les éléments à leur place initiale, exceptée pour k et $k+1$ qui ont été permuté. On a pour la première transposition :

$$(23) = \sigma^{-1}(12)\sigma \text{ où } \sigma = (12\dots n).$$

On discute de chaque partie, σ^{-1} va nous permettre d'envoyer 2 sur 1 et 3 sur 2. La transposition (12) va ensuite permute 2 et 3. Et pour finir, en appliquant σ , nous revenons aux places initiales sauf pour la deuxième et troisième car elles ont été permutées. On généralise en utilisant le même raisonnement, on obtient :

$$(kk+1) = \sigma^{1-k}(12)\sigma^{k-1} \text{ pour } 2 \geq k < n.$$

On conclut alors par la proposition E.4.9. \square

Nous pouvons classer les permutations en deux catégories.

Définition E.4.11. Une permutation est dite paire lorsqu'elle peut être décomposée en un produit d'un nombre pair de transpositions. Les autres sont appelées des permutations impaires.

Théorème E.4.12. Les permutations paires de S_n forment un sous-groupe d'ordre $\frac{n!}{2}$ appelé le groupe alterné A_n de degré n .

Démonstration. Ici, on va d'abord montrer que le nombre de permutations paires est égal au nombre de permutations impaires de $\{1, \dots, n\}$ et vaut $\frac{n!}{2}$. Soient μ_1, \dots, μ_k les permutations paires distinctes de $\{1, \dots, n\}$. Puisque $n > 1$, il existe au moins une permutation impaire τ . On sait que les permutations $\tau\mu_1, \dots, \tau\mu_k$ sont impaires. De plus, ces permutations sont deux à deux distinctes. On procède par l'absurde, on va supposer que $\tau\mu_i = \tau\mu_j$ avec $i \neq j$. Si on multiplie par τ^{-1} , on trouve $\mu_i = \mu_j$ ce qui est impossible car les permutations paires sont distinctes. Enfin, il n'y a pas d'autre permutation impaire que $\tau\mu_1, \dots, \tau\mu_k$. En effet, supposons que ν soit une permutation impaire distincte de $\tau\mu_i \forall i \in \{1, \dots, k\}$. Dès lors, $\tau^{-1}\nu$ est une permutation paire. Donc il existe $j \in \{1, \dots, k\}$ tel que $\tau^{-1}\nu = \mu_j$ et

$$\nu = \tau\tau^{-1}\nu = \tau\mu_j.$$

On a donc la décomposition suivante, $S_n = A_n \cup \tau A_n$. On va maintenant démontrer que A_n est un groupe.

- 1) L'identité qui est le produit de 0 transposition est paire.
- 2) Si μ et ν sont deux permutations paires, respectivement produits de $2p$ et $2q$ transpositions alors le produit $\mu\nu$ est une permutation paire car elle est le produit de $2(p+q)$ transpositions.
- 3) L'inverse conserve la parité d'une permutation.

\square

Théorème E.4.13. Pour $n \geq 3$, les 3-cycles génèrent A_n .

Démonstration. Notons H le sous-groupe engendré par les 3-cycles. Comme les 3-cycles sont des permutations paires, on a $H \subset A_n$.

Par la proposition E.4.8, les transpositions engendent S_n donc pour tout $\sigma \in A_n$, il existe des transpositions τ_i, \dots, τ_j tels que $\tau_i \dots \tau_j = \sigma$. Le nombre de transpositions est pair puisque σ est une permutation paire. On décide de grouper les transpositions par deux et on note K le sous-groupe de S_n engendré par les permutations qui sont le produit de deux transpositions. On a donc $A_n \subset K$.

On va maintenant montrer que le produit de deux transpositions peut être vu comme un produit de 3-cycles. Ainsi, on aura $A_n \subset H$ ce qui nous permettra de conclure.

Soient (ij) et (kl) deux transpositions avec $i \neq j$ et $k \neq l$.

— Cas où i, j, k, l sont tous différents :

$$(ij)(kl) = (ij)(jk)(jk)(kl) = (ijk)(jkl).$$

— Cas où les paires $\{i, j\}$ et $\{k, l\}$ ont une seule valeur en commun. Prenons $j = k$. On a,

$$(ij)(kl) = (ij)(jl) = (ijl).$$

□

Annexe F

Deux rotations du cube

Nous souhaitons montrer que la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dont l'axe passe par le centre de gravité de deux faces opposées, est une rotation du cube et envoie chaque diagonale sur la suivante. Prenons le centre de gravité de la face $\text{Conv}(S_{000}, S_{100}, S_{110}, S_{010})$ et celui de la face opposée. Nous obtenons $M_1 = (0, 0, 1)$ et $M_2 = (0, 0, -1)$. Ainsi, l'axe de rotation est en réalité l'axe des cotes.

Proposition F.0.1. *La rotation σ d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de l'axe des cotes est une symétrie du cube.*

Démonstration. Nous savons que l'axe des cotes est perpendiculaire aux faces composées des sommets ayant une cote égale à 1 et à -1. De plus, cet axe passe par le centre de gravité de ces deux carrés. Par les propriétés des polygones réguliers, la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre M_1 et M_2 permute les sommets de chaque face de manière circulaire. Nous fixons l'angle en posant $\sigma(S_{000}) = S_{100}$. Ainsi, chaque sommet du cube est envoyé sur un autre sommet du cube (possédant la même cote). Par la proposition 3.4.23, la rotation σ est une symétrie du cube. \square

Il faut maintenant vérifier que les diagonales sont bien envoyées sur celles souhaitées. Nous rappelons les notations utilisées pour les diagonales :

$$[S_{000}, S_{111}] := 1, [S_{100}, S_{011}] := 2, [S_{001}, S_{110}] := 3, [S_{010}, S_{101}] := 4.$$

Proposition F.0.2. *La rotation σ permute circulairement les diagonales. En d'autres mots,*

$$\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 4, \sigma(4) = 1.$$

Démonstration. Par la proposition F.0.1, nous obtenons $\sigma(S_{000}) = S_{100}$ et $\sigma(S_{111}) = S_{011}$. Comme σ est une transformation affine, elle préserve les combinaisons affines et plus particulièrement les combinaisons convexes. Ainsi, nous obtenons $\sigma(1) = 2$. Le même procédé peut être réalisé pour les autres diagonales. \square

Pour la seconde rotation, nous allons prendre comme axe le milieu de deux côtés opposés. Pour obtenir la bonne permutation des diagonales, l'axe sera le segment $[M'_1, M'_2]$ où $M'_1 = \frac{1}{2}(S_{100} + S_{000})$ et $M'_2 = \frac{1}{2}(S_{011} + S_{111})$.

Nous allons énumérer quelques propositions classiques qui vont nous permettre de démontrer que cette rotation permute les diagonales 1 et 2 et laisse les autres invariantes.

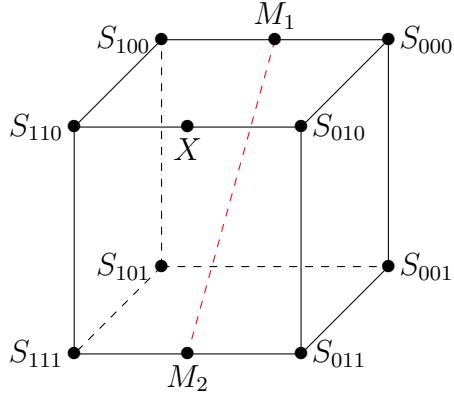


FIGURE F.1 – Le cube et un axe de rotation.

Proposition F.0.3. *Le segment $[M_1, M_2]$ est perpendiculaire à $\text{Conv}(S_{101}, S_{001}, S_{010}, S_{110})$ et passe par son centre de gravité.*

Démonstration. Montrons que les vecteurs directeurs $\overrightarrow{S_{110}S_{010}}$ et $\overrightarrow{S_{010}S_{001}}$ de $\text{Aff}(S_{101}, S_{001}, S_{010}, S_{110})$ sont orthogonaux au vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$. Pour le premier vecteur directeur, on a $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1X} + \overrightarrow{XM_2}$ où X est le milieu de l'arête $[S_{110}, S_{010}]$. Il est évident que le vecteur directeur de cette arête est perpendiculaire aux vecteurs $\overrightarrow{M_1X}$ et $\overrightarrow{XM_2}$. En effet, le vecteur $\overrightarrow{M_1X}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{S_{100}S_{110}}$ qui lui est perpendiculaire au vecteur directeur choisi par définition du cube. Le même raisonnement peut être effectué pour le vecteur $\overrightarrow{XM_2}$.

Pour le second vecteur directeur $\overrightarrow{S_{010}S_{001}}$, on a $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1S_{000}} + \overrightarrow{S_{000}S_{011}} + \overrightarrow{S_{011}M_2}$. Ces trois vecteurs sont perpendiculaires au vecteur directeur car par définition, les arêtes sont perpendiculaires aux faces et les diagonales d'un carré sont elles aussi perpendiculaires.

Passons maintenant à la deuxième partie de cette preuve. Nous avons $G : (0, 0, 0)$ le centre de gravité de l'ensemble $\text{Conv}(S_{101}, S_{001}, S_{010}, S_{110})$ et

$$G = \frac{1}{2}(M_1 + M_2),$$

où M_1 et M_2 ont pour coordonnées $(0, 1, 1)$ et $(0, -1, -1)$ respectivement. Ainsi, $G \in [M_1, M_2]$. □

Grâce aux propriétés du cube, nous pouvons en déduire la proposition suivante.

Proposition F.0.4. *L'ensemble $\text{Conv}(S_{101}, S_{001}, S_{010}, S_{110})$ est un rectangle.*

Il nous manque une dernière petite propriété pour être prêt.e à démontrer notre proposition principale.

Proposition F.0.5. *Le centre de gravité du rectangle $\text{Conv}(S_{101}, S_{001}, S_{010}, S_{110})$ est le milieu de ses deux diagonales.*

Proposition F.0.6. *La rotation r_π d'angle π autour de l'axe $[M_1, M_2]$ est une symétrie du cube, qui permute les diagonales selon la transposition (12) .*

Démonstration. Nous savons que toute rotation stabilise n’importe quel plan perpendiculaire à l’axe de rotation. Ici, l’axe de rotation passe par le centre de gravité de $\text{Conv}(S_{101}, S_{001}, S_{010}, S_{110})$ et est perpendiculaire à celui-ci par la proposition F.0.3. Lorsqu’un axe de rotation passe par le milieu d’un segment et effectue une rotation d’angle π , il permute les extrémités de ce segment. Par définition, le segment $[M_1, M_2]$ passe par le milieu des arêtes $[S_{100}, S_{011}]$ et $[S_{100}, S_{011}]$. Par la proposition F.0.5, il passe également par le milieu des segments $[S_{101}, S_{010}]$ et $[S_{110}, S_{001}]$.

Au final, nous avons une permutation des sommets de \mathfrak{C} . Par la proposition 3.4.23, r_π est une symétrie du cube. Nous terminons en concluant que les diagonales 1 et 2 permutent entre elles alors que les diagonales 3 et 4 restent invariantes. \square

Annexe G

Les rotations du dodécaèdre

Nous allons montrer que les rotations d'angle $\frac{2\pi}{3}$ autour de l'axe joignant deux sommets opposés¹ sont des symétries pour le dodécaèdre \mathfrak{D} . Ensuite, nous montrerons que ces rotations permutent les 5 cubes construits à la proposition 4.5.3 et forment les 3-cycles de S_5 .

Supposons que l'axe de rotation soit le segment $[A_{00}, A_{32}]$, les autres cas se font de manière analogue. Étant donné que par un sommet il y a exactement deux diagonales de la face de référence \mathcal{F}_{00} contenant ce sommet, nous pouvons construire exactement 2 cubes contenant ce sommet. Lors de la construction, nous avons construit les arêtes du cube à partir de celle incluse dans la face de référence. Nous avons montré que chaque cube est stabilisé par la symétrie centrale de centre G . Les deux cubes contenant A_{00} contiennent donc aussi A_{32} . Notons ces deux cubes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$.

Montrons que cet axe de rotation laisse \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 invariants. Nous généralisons la proposition à tout cube.

Proposition G.0.1. *La rotation $r_{\frac{2\pi}{3}}$ d'angle $\frac{2\pi}{3}$ autour de l'axe joignant deux sommets opposés du cube envoie le cube sur lui-même.*

Démonstration. Par la proposition 4.4.7, nous savons que si $r_{\frac{2\pi}{3}}$ est une rotation, elle permute les diagonales du cube. Nommons l'axe de la rotation, qui est également une diagonale, D_1 . Toujours par la proposition 4.4.7, nous savons qu'il existe une rotation r' qui laisse invariant la diagonale D_1 et permute circulairement les diagonales D_2, D_3 et D_4 , cette permutation est représentée par (234). Nous savons déjà que les rotations r' et $r_{\frac{2\pi}{3}}$ ont le même axe de rotation. Montrons que r' est une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et dans ce cas, elle sera égale à $r_{\frac{2\pi}{3}}$.

Nous savons que $r'^3 = id$ et que la rotation id peut être vue comme une rotation d'angle 2π . Ainsi, comme il a fallu appliquer trois fois la rotation d'angle α pour obtenir l'angle 2π , la rotation r' est d'angle $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. Nous avons donc que la rotation $r' = r_{\frac{2\pi}{3}}$ laisse invariant le cube. \square

Grâce à cette proposition, nous savons que les deux cubes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 sont envoyés sur eux-mêmes par la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ autour de l'axe $[A_{00}, A_{32}]$.

Proposition G.0.2. *Les cubes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 n'ont que A_{00} et A_{32} comme sommets en commun.*

1. Lorsqu'on parle de sommets opposées, on considère le sommet A et le sommet obtenu à partir de la réflexion $-A + 2G$ où G est le centre de gravité.

Démonstration. Le cube \mathcal{C}_1 possède la face carrée $\text{Conv}(A_{00}, A_{02}, A_{20}, A_{21})$, par construction, nous connaissons le reste des sommets en prenant les sommets opposés à cette face. Nous obtenons

$$\mathcal{C}_1 = \text{Conv}(A_{00}, A_{02}, A_{20}, A_{21}, A_{32}, A_{34}, A_{13}, A_{14}).$$

Comme \mathcal{C}_2 est construit à partir de l'autre diagonale de la face contenant A_{00} , nous obtenons la face carrée $\text{Conv}(A_{00}, A_{03}, A_{23}, A_{24})$ et par le même raisonnement nous obtenons

$$\mathcal{C}_2 = \text{Conv}(A_{00}, A_{03}, A_{23}, A_{24}, A_{32}, A_{30}, A_{11}, A_{12}).$$

□

Nous savons maintenant que cette rotation envoie 14 sommets de \mathfrak{D} sur 14 autres sommets de ces deux cubes. Il nous reste à regarder les 6 sommets restants. Ce sont les sommets adjacents à A_{00} et par réflexion, les sommets adjacents à A_{32} . Pour cette preuve, nous n'avons pas trouvé d'argument théorique permettant d'éviter certains calculs, nous le faisons donc avec les moyens à notre disposition. Il se peut qu'une preuve moins calculatoire existe.

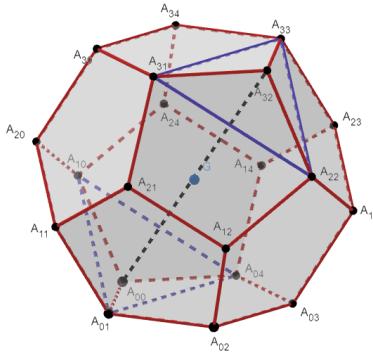


FIGURE G.1 – Deux triangles équilatéraux.

Proposition G.0.3. *La rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ ayant comme axe de rotation le segment $[A_{00}, A_{32}]$ permute les sommets adjacents à A_{00} entre eux et les sommets adjacents à A_{32} entre eux également.*

Démonstration. Les sommets adjacents à A_{00} sont A_{01}, A_{04} et A_{10} . Alors l'enveloppe convexe de ces 3 points forme un triangle équilatéral car les arêtes sont des diagonales des faces pentagonales de \mathfrak{D} . Montrons que l'axe de rotation passe par le centre de gravité de ce triangle équilatéral et est perpendiculaire à celui-ci. L'axe de rotation a comme vecteur directeur $\overrightarrow{A_{00}A_{32}} = (-2, 0, \varphi + 1)$ et a pour équation

$$A_{00}A_{32} \equiv \begin{cases} \varphi^2 x + 2z = \varphi^2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Calculons maintenant le centre de gravité, notons le G' , du triangle et deux vecteurs directeurs de celui-ci en utilisant la relation du nombre d'or :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{G'} &= \left(\frac{2\varphi-1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right), \\ \overrightarrow{A_{01}A_{04}} &= (0, -\varphi\sqrt{4-\varphi^2}, 0), \\ \overrightarrow{A_{01}A_{10}} &= \left(\frac{\varphi^2}{2}, \frac{-\varphi\sqrt{4-\varphi^2}}{2}, 1\right). \end{aligned}$$

Ainsi, toujours en utilisant la relation du nombre d'or, nous obtenons que $G' \in A_{00}A_{32}$ et les vecteurs $\overrightarrow{A_{01}A_{04}}$, $\overrightarrow{A_{01}A_{10}}$ sont orthogonaux au vecteur directeur de l'axe de rotation. Comme les plans perpendiculaires à l'axe de rotation sont stabilisés par cette rotation, et comme cet axe passe par le centre de gravité du triangle équilatéral, par les propriétés des polygones réguliers nous avons que la rotation envoie le triangle sur lui-même. Nous fixons l'orientation en envoyant A_{01} sur A_{04} . Étant donné que A_{32} est obtenu par la réflexion du sommet A_{00} , nous obtenons les mêmes conclusions. \square

Ainsi, nous connaissons le comportement de chaque sommet du dodécaèdre \mathfrak{D} lorsqu'on applique cette rotation.

Proposition G.0.4. *La rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ ayant $[A_{00}, A_{32}]$ comme axe de rotation, est une symétrie du dodécaèdre régulier \mathfrak{D} .*

Nous allons maintenant montrer que les arêtes du triangle $\text{Conv}(A_{01}, A_{04}, A_{10})$ sont des arêtes de 3 cubes distincts, tous différents de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 .

Proposition G.0.5. *Les 3 derniers cubes sont déterminés à partir des arêtes $[A_{01}, A_{04}]$, $[A_{04}, A_{10}]$ et $[A_{10}, A_{01}]$ respectivement. Ils sont différents de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 .*

Démonstration. Les cubes $\mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_5$ sont tous différents car $\text{Conv}(A_{01}, A_{04}, A_{10})$ est un triangle équilatéral. De plus, par construction, chaque face du dodécaèdre contient exactement une arête du cube. Ainsi, le cube \mathcal{C}_3 est différent de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 car dans la face de référence \mathcal{F}_{00} , le cube \mathcal{C}_1 contient la diagonale $[A_{00}, A_{02}]$, le cube \mathcal{C}_2 contient $[A_{00}, A_{03}]$ alors que le cube \mathcal{C}_3 la diagonale $[A_{01}, A_{04}]$. En cherchant également les arêtes de \mathcal{C}_4 et \mathcal{C}_5 dans la face de référence, nous remarquons que ce sont des diagonales distinctes de celles-déjà énumérées. En effet, regardons le cas du cube \mathcal{C}_4 , l'autre se fait de manière analogue. Nous avons A_{04} qui appartient au cube \mathcal{C}_4 et qui est dans la face de référence. Il y a alors deux choix pour la diagonale, soit $[A_{04}, A_{01}]$, soit $[A_{04}, A_{02}]$. Le premier choix est impossible car deux arêtes adjacentes doivent être perpendiculaires. Ainsi, la diagonale restante est différente des 3 diagonales déjà énumérées pour $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ et \mathcal{C}_3 dans la face de référence. \square

Nous pouvons dès à présent montrer que la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ autour de l'axe de rotation $A_{00}A_{32}$ permute les cubes d'une certaine façon.

Proposition G.0.6. *La rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ autour de l'axe de rotation $A_{00}A_{32}$ permute les cubes $\mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4$ et \mathcal{C}_5 circulairement et laisse invariants \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2*

Démonstration. Étant donné que l'axe de rotation passe par deux sommets opposés de deux cubes distincts \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 , par la proposition G.0.1, les cubes sont envoyés sur eux-même. Remarquons que l'orientation a été fixée dans la démonstration de la proposition G.0.3. De plus, cette rotation est une symétrie du dodécaèdre, nommons-la I , nous savons alors par la proposition 4.5.4 que $I(\mathcal{C}_3), I(\mathcal{C}_4), I(\mathcal{C}_5)$ sont des cubes de \mathcal{C} . Nous savons par les propositions G.0.3 et 3.1.15 que l'arête $[A_{01}, A_{04}]$ du triangle $\text{Conv}(A_{01}, A_{04}, A_{10})$ est envoyée sur l'arête $[A_{04}, A_{10}]$ et ainsi de suite. Comme les cubes sont déterminés à partir d'une diagonale, nous savons que $I(\mathcal{C}_3) = \mathcal{C}_4, I(\mathcal{C}_4) = \mathcal{C}_5$ et $I(\mathcal{C}_5) = \mathcal{C}_3$. \square

Bibliographie

- [1] Mark Armstrong, *Groups and symmetry*, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [2] Marcel Berger, *Convexes et polytopes, polyédres réguliers, aires et volumes*, CEDIC/Fernand Nathan, 1979.
- [3] Arne Brondsted, *An introduction to convex polytopes*. Vol. 90, Springer-Verlag, 1983.
- [4] Augustin Louis Cauchy, *Sur les polygones et les polyédres, seconde mémoire*, Journal Ecole Polytechnique **16** (1813), n° 9.
- [5] Gustave Choquet, *Cours de topologie*. 2^e éd., Dunod, 2000.
- [6] Harold Scott Macdonald Coxeter, *Regular polytopes*, 2^e éd., Macmillan, 1963.
- [7] Harold Scott Macdonald Coxeter, *Regular polytopes*, 3^e éd., Dover Publications, New York, 1973.
- [8] Peter Cromwell, *Polyhedra*, Cambridge University Press, 1997.
- [9] Piero Della Francesca, *Trattato d'abaco*, Domus galilaeana, 1970.
- [10] Jacques Dixmier, *Topologie générale*, Presses Universitaires de France-PUF, 1981.
- [11] Michael Goldberg, *A class of multi-symmetric polyhedra*, Tohoku Mathematical Journal, First Series **43** (1937), p. 104-108.
- [12] Michael Goldberg, *Unstable polyhedral structures*, Mathematics Magazine **51** (1978), n° 3, p. 165-170.
- [13] Branko Grünbaum, *Convex polytopes*. Vol. 221, Springer Science & Business Media, 2003.
- [14] Robin Hartshorne, *Geometry : euclid and beyond*, Springer, 2000.
- [15] Thomas Little Heath, *The thirteen books of euclid's elements*, 2^e éd. Vol. 3, Dover Publications, 1965.
- [16] Andrew MQ King *et al.*, *Virus taxonomy : ninth report of the international committee on taxonomy of viruses*. Vol. 9, Elsevier, 2011.
- [17] Henri Lebesgue, *Sur l'égalité des polyèdres convexes*, L'Intermédiaire des mathématiciens **16** (1909), p. 113-120.

- [18] Pierre Lecomte, *Géométrie élémentaire*, Centrale des cours de la FSA asbl, 2000, disponible via l'URL <http://www.geothalg.ulg.ac.be/source.php?menu_item=geothalg_etudiants.html>.
- [19] Roger Conant Lyndon, *Groups and geometry*. Vol. 101, Cambridge University Press, 1989.
- [20] Hans Rademacher et Ernst Steinitz, *Vorlesungen über die theorie der polyeder : unter einschluß der elemente der topologie*. Vol. 41, Springer-Verlag, 1934.
- [21] Vijay S Reddy *et al.*, *Crystal structure of human adenovirus at 3.5 Å resolution*, Science **329** (2010), n° 5995, p. 1071-1075.
- [22] Ralph Tyrrell Rockafellar, *Convex analysis*. Vol. 28, Princeton Mathematical Series, 1972, Second Printing.
- [23] Isaac Jacob Schoenberg et Stanislaw Krystyn Zaremba, *On cauchy's lemma concerning convex polygons*, Canadian Journal of Mathematics **19** (1967), p. 1062-1071.
- [24] Marjorie Senechal (éd.), *Shaping space : exploring polyhedra in nature, art, and the geometrical imagination*, Springer Science & Business Media, 2013.