Mémoire

Auteur : Bennabi, Safia
Promoteur(s) : Bastin, Francoise
Faculté : Faculté des Sciences
Diplôme : Master en sciences mathématiques, à finalité didactique
Année académique : 2020-2021
URI/URL : http://hdl.handle.net/2268.2/12872

Université de Liège

Faculté des Sciences
Département de Mathématique

Quelques exemples d'espaces de Fréchet-Montel qui ne sont pas des espaces de Schwartz

Mémoire de fin d'études
Promoteur : Françoise Bastin

réalisé par
Safia Bennabi

en vue de l'obtention du diplôme de Master en sciences mathématiques

Année académique 2020–2021

Université de Liège

Faculté des Sciences
Département de Mathématique

Quelques exemples d'espaces de Fréchet-Montel qui ne sont pas des espaces de Schwartz

Mémoire de fin d'études
Promoteur : Françoise Bastin

réalisé par
Safia Bennabi

en vue de l'obtention du diplôme de Master en sciences mathématiques

Année académique 2020–2021

Remerciements

Un travail tel que celui-ci, qui conclut cette longue aventure que sont les études, n'aurait aucun sens s'il ne donnait pas l'occasion de mettre à l'honneur les personnes qui ont contribué à l'aboutissement de celle-ci.

Je remercie tout d'abord chaleureusement mon promoteur, Françoise Bastin, pour le temps qu'elle a consacré à la bonne réalisation de ce mémoire, notamment via ses nombreuses relectures et conseils pertinents et avisés.

Je veux également remercier Samuel Nicolay pour notre complicité. Je lui suis extrêmement reconnaissante de m'avoir soutenue durant ces années, d'avoir cru en moi et de m'avoir réconfortée dans les moments faibles.

Mes remerciements vont aussi vers l'ensemble des professeurs et assistants que j'ai eu la chance de croiser à l'Université de Liège. Chacun d'entre eux, avec leurs particularités et spécialités rendent ces études agréables et passionnantes. Je me dois de remercier en particulier Céline Esser, Julien Leroy et Jean-Pierre Schneiders pour avoir accepté d'être membre du jury de ce mémoire.

Enfin, je remercie Thomas Kleyntssens, Laurent Loosveldt, et Arman Molla pour leur support sans faille et leur relecture.

Introduction

Un invariant topologique T est une application définie sur une classe d'espaces vectoriels topologiques tel que, pour tous X et Y appartenant au domaine de T, X isomorphe à Y implique $T(X) = T(Y)$. Un invariant topologique est dit complet si l'implication inverse est également vérifiée. Ces invariants sont souvent utilisés pour montrer la non-isomorphie. Dans ce contexte, la dimension diamétrale a été introduite comme invariant topologique sur la classe des espaces vectoriels topologiques. Il se trouve entre autres que la dimension diamétrale permet de caractériser les espaces de Schwartz et facilite l'étude de l'espace des suites de Köthe (nous présentons ces derniers dans ce travail).

Soit X un espace vectoriel et U, V deux parties de X pour lesquelles il existe $\lambda > 0$ tel que $U \subset \lambda V$. Le $n^{\text{ième}}$ diamètre de Kolmogorov de U par rapport à V est la quantité

$$\delta_n(U, V) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid \exists L \subset X,\ \dim(L) < n \text{ et } V \subset \varepsilon U + L\}.$$

La dimension diamétrale de X peut alors être définie comme suit :

$$\Delta(X) = \{x \in \omega \mid \forall U \in \mathcal{B}_0, \exists V \in \mathcal{B}_0 \text{ pour lequel } x_n \delta_n(U, V) \to 0\},$$

où $\mathcal{B}_0$ est une base de voisinages de 0 dans X (on peut facilement montrer que cette définition est indépendante de la base de voisinages choisie). Cela étant, il peut être montré que pour un espace de Fréchet X,

- $\Delta(X) = c_0$ si X n'est pas un espace de Schwartz,
- $\Delta(X) \supset l^\infty$ si X est un espace de Schwartz.

Une notion de dimension diamétrale alternative est l'ensemble

$$\Delta_b(X) = \{x \in \omega \mid \forall U \in \mathcal{B}_0,\ \forall B \text{ borné},\ x_n \delta_n(U, B) \to 0\}.$$

Dans ce cas, on a

- $\Delta_b(X) = c_0$ si X n'est pas un espace de Montel,
- $\Delta(X)_b \supset l^\infty$ si X est un espace de Montel.

En conséquence, si X n'est pas un espace de Montel, on a $\Delta(X) = \Delta_b(X)$ et si X est un espace de Montel qui n'est pas un espace de Schwartz, alors $\Delta(X) \subsetneq \Delta_b(X)$. Nous nous étendons brièvement sur ces notions en annexe. Ces thèmes sont abordés plus en profondeur dans la thèse de L. Demeulenaere [4], à laquelle nous renvoyons le lecteur pour plus de détails.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à la construction d'espaces de Fréchet-Montel qui ne sont pas un espace de Schwartz. Comme nous venons de le voir, une motivation pour une telle attention réside dans l'étude de la dimension diamétrale.

Le premier exemple d'espace de Fréchet-Montel qui n'est pas un espace de Schwartz est dû à G. Köthe en 1948 [12], utilisant un espace de suites avec une sommation de type l^1. A. Grothendieck généralisera cette construction pour des sommations de type l^p [8]. Le fait que ces espaces soient de Montel repose sur une caractérisation des espaces de Fréchet-Montel relativement délicate à obtenir, également obtenue par Köthe. D'autres constructions plus simples (au moins du point de vue de leurs auteurs) ont depuis été proposées [6, 17].

Le premier chapitre propose les notions de bases nécessaires pour construire les exemples abordés dans la suite. Le second chapitre présente un premier exemple d'espaces de Fréchet-Montel qui ne sont pas de Schwartz basé sur les espaces de Köthe [14]. Le second exemple dû à K. Floret, abordé au chapitre suivant, repose sur des espaces de Fréchet-Montel quelconques (éventuellement de Schwartz) [6]. Enfin, le troisième exemple, dû à V. Wrobel, est construit à partir d'un opérateur fermé [17].

Notations

Dans ce mémoire, nous avons tenté de nous en tenir aux conventions les plus utilisées. Nous les énumérons ici pour éviter toute confusion. Il ne s'agit en rien de définitions ; celles-ci seront données en temps opportuns ou supposées connues.

Ensembles

$\emptyset$	l'ensemble vide.
$\mathbb{N}$	l'ensemble des naturels
$\mathbb{N}_0$	l'ensemble des naturels non nuls
$\mathbb{K}$	désigne un champs ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
$A \setminus B$	l'ensemble des points de A n'appartenant pas à B.
$B_p(e, r)$	la semi-boule ouverte pour la semi-norme p centrée en e et de rayon r.
$B_p[e, r]$	la semi-boule fermée pour la semi-norme p centrée en e et de rayon r.
$B_p(r)$	la semi-boule ouverte pour la semi-norme p centrée en 0 et de rayon r.
$B_p[r]$	la semi-boule fermée pour la semi-norme p centrée en 0 et de rayon r.
B_p	la semi-boule $B_p(1)$.
$\mathcal{V}_0$	l'ensemble des voisinages de 0.
$\mathcal{B}_0$	une base de voisinages de 0.
$\mathcal{P}$	un ensemble de semi-normes.
$E^{\mathbb{N}_0}$	l'ensemble des suites $X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ telles que $x_n \in E$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$.
$\cdot^\circ$	l'intérieur.
$\bar{\cdot}$	l'adhérence.
$\rangle E \langle$	l'enveloppe linéaire de E.
$\langle E \rangle_{ac}$	l'enveloppe absolument convexe de E.
$\mathrm{dom}(\cdot)$	le domaine de définition.
$\mathrm{Im}(\cdot)$	l'image.
$L(X, Y)$	l'ensemble des applications linéaires continues de X dans Y.
$L(X)$	$L(X, X)$.
$\mathcal{K}(X, Y)$	l'ensemble des applications linéaires continues compactes de X dans Y.
$\mathcal{K}(X)$	$\mathcal{K}(X, X)$.
$\mathcal{L}_n(X)$	l'ensemble des sous-espaces vectoriels de X de dimension au plus n.

Espaces fonctionnels

ω	l'espace des suites $\mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$.
φ	l'espace des suites finies.
l^p	l'espace des suites de Lebesgue.
c_0	l'espace des suites bornées qui convergent vers 0.

Distance et dimension

$\dim(X)$	la dimension de X.
$d(A,B)$	la distance de A à B.
$\Delta(E)$	dimension diamétrale de E.
$\delta_n(U,V)$	le $n^{\text{ème}}$ diamètre de Kolmogorov de U par rapport à V.

Symboles

$\delta_{i,j}$	le symbole de Kronecker.

Table des matières

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Espaces à semi-normes

Dans l'ensemble de ce travail, nous nous plaçons dans le cadre des *espaces à semi-normes* ou encore *espaces localement convexes*. L'étude de ces espaces peut se trouver dans tout référentiel classique de l'analyse fonctionnelle. Néanmoins, nous rappelons dans ce chapitre un ensemble de concepts qui nous seront utiles aux chapitres suivants.

De façon générale, l'ensemble $\mathcal{P} = \{p_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ désignera un ensemble de semi-normes. Toute semi-norme p sur un ensemble X induit naturellement une semi-métrique

$$(x, y) \mapsto p(x - y),$$

et dès lors les notions de semi-boules. On adopte les notations suivantes

Notation 1.1.1. Soient X un ensemble et $p \in \mathcal{P}$, on pose

$$\begin{aligned} B_p(x,r) &:= \{y \in X | p(x-y) < r\}, \\ B_p[x,r] &:= \{y \in X | p(x-y) \leq r\}, \\ B_p(r) &:= B_p(0,r), \\ B_p[r] &:= B_p[0,r], \\ B_p &:= B_p(1). \end{aligned}$$

On définit les espaces localement convexes de la façon suivante.

Définition 1.1.2. Un *espace localement convexe* $(X, \mathcal{P})$ est un espace vectoriel X muni d'un système filtrant $\mathcal{P}$ de semi-normes.

La topologie naturelle associée à un espace localement convexe $(X, \mathcal{P})$ est la topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$. Il s'agit de la topologie dont une base est définie par les semi-boules engendrées par le système de semi-normes $\mathcal{P}$; i.e. la topologie pour laquelle $\mathcal{V}_x$ forme l'ensemble des voisinages de x pour tout $x \in X$ avec

$$\mathcal{V}_x = \{V \subseteq X \mid \exists r > 0,\ \exists p \in \mathcal{P} \text{ tels que } B_p(x, r) \subseteq V\}.$$

La comparaison des topologies des espaces localement convexes s'exprime simplement via un semi-ordre sur les systèmes de semi-normes.

Définition 1.1.3. Soient $p, q \in \mathcal{P}$ sur un ensemble X. On dit que p est *plus faible* que q, noté $p \preceq q$, s'il existe $c > 0$ tel que $p \leq cq$. De manière symétrique, on dit que q est *plus fort* que p dans les mêmes conditions. De plus, si $p \preceq q$ et $q \preceq p$, on dit que p et q sont *équivalents* et on note $p \approx q$.

Par extension, si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ désignent des ensembles de semi-normes sur X, on dit que $\mathcal{P}$ est *plus faible que* $\mathcal{Q}$, ce que l'on note $\mathcal{P} \preceq \mathcal{Q}$, si pour tout $p \in \mathcal{P}$, il existe $q \in \mathcal{Q}$ tel que $p \preceq q$. Si $\mathcal{P} \preceq \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \preceq \mathcal{P}$, les ensembles de semi-normes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont dit *équivalents* et on note $\mathcal{P} \approx \mathcal{Q}$.

Proposition 1.1.4. *Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont deux ensembles filtrants de semi-normes sur X, alors $\mathcal{P} \preceq Q$ si, et seulement si $\mathcal{T}_{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{Q}}$.*

Démonstration. La démonstration est bien connue. On peut par exemple consulter [2] ou [5]. □

1.2 Espaces fonctionnels usuels

Dans la suite, nous travaillons exclusivement avec des espaces séparés. On commence donc par établir un critère de séparation.

Proposition 1.2.1. *Soit $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe ; $(X, \mathcal{P})$ est séparé si, et seulement si pour tout $e \in X \setminus \{0\}$, il existe $p \in \mathcal{P}$ tel que $p(x) \neq 0$. Autrement dit, $(X, \mathcal{P})$ est séparé si, et seulement si $p(x) = 0$ quel que soit $p \in \mathcal{P}$ implique que $x = 0$.*

Démonstration. La condition est nécessaire. Si $x \neq 0$, on peut trouver $p, q \in \mathcal{P}$ et $r_1, r_2 > 0$ de sorte que

$$B_p(x, r_1) \cap B_q(r_2) = \emptyset.$$

Il est donc clair que $x \notin B_q(r_2)$. Autrement dit, $q(x) \geq r_2$, ce qui suffit.

La condition est suffisante. Considérons x_1, x_2 des points distincts de X, i.e. $x_1 - x_2 \neq 0$. Par hypothèse, il existe alors $p \in \mathcal{P}$ tel que $p(x_1 - x_2) = r > 0$. On en déduit que

$$B_p(x_1, \frac{r}{4}) \cap B_p(x_2, \frac{r}{4}) = \emptyset.$$

En effet, si x est un élément de cette intersection, alors

$$p(x_1 - x_2) \leq p(x_1 - x) + p(x - x_2) \leq \frac{r}{4} + \frac{r}{4} = \frac{r}{2}.$$

□

Définition 1.2.2. Un espace vectoriel F munit d'un système de semi-normes $\mathcal{P} = \{p_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ est un *espace de Fréchet* $(F, \mathcal{P})$ si les conditions suivantes sont satisfaites :

(1) $(F, \mathcal{P})$ est séparé i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}_0,\ (p_n(f) = 0) \Rightarrow f = 0,$$

en vertu de la Proposition 1.2.1.

(2) La suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ est croissante i.e $p_k \leq p_{k+1}$ quel que soit $k \in \mathbb{N}_0$. De plus,

$$\mathcal{V}_0 = \{V \subseteq F \mid \exists r > 0, \exists p_n \in \mathcal{P} \text{ tels que } B_{p_n}(r) \subseteq V\}$$

est l'ensemble des voisinages de 0.

(3) $(F, \mathcal{P})$ est complet i.e. si $(f_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ est une suite d'éléments de F telle que

$$p_n(f_r - f_s) \to 0 \text{ lorsque } r, s \to +\infty$$

quel que soit $n \in \mathbb{N}_0$, alors il existe $f \in F$ tel que

$$p_n(f - f_k) \to 0 \text{ lorsque } k \to +\infty$$

quel que soit $n \in \mathbb{N}_0$.

Remarque 1.2.3. Un espace de Fréchet est aussi un espace localement convexe qui satisfait le premier axiome de dénombrabilité et qui est séparé et complet. L'équivalence entre cette définition et la Définition 1.2.2 est bien connue et se trouve, par exemple, dans [16].

Introduisons à présent la notion d'*espace de Schwartz*.

Définition 1.2.4. Une partie K d'un espace localement convexe $(X, \mathcal{P})$ est *précompacte pour la semi-norme* $p \in \mathcal{P}$ si pour tout $\varepsilon > 0$, K peut être recouvert par un nombre fini de translatés de la semi-boule $B_p(\varepsilon)$. Autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, x_1, ..., x_N \in X \text{ tels que } K \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B_p(x_i, \varepsilon).$$

On écrit encore $K \subseteq \{x_1, ..., x_N\} + B_p(\varepsilon)$.

Un ensemble est dit *précompact* dans $(X, \mathcal{P})$ s'il est précompact pour chacune des semi-normes $p \in \mathcal{P}$.

Remarque 1.2.5. Si $(X, \mathcal{P})$ est un espace localement convexe, alors $K \subseteq X$ est précompact si pour tout voisinage $V \in \mathcal{V}_0$, il existe un ensemble fini $M \subseteq X$ tel que $K \subseteq M + V$.

Théorème 1.2.6 (Théorème de Riesz)**.** *Soit $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe séparé. Alors X est de dimension finie si, et seulement si une semi-boule de X est précompacte.*

Démonstration. Si $\dim X = n < +\infty$ alors X est homéomorphe à $\mathbb{K}^n$ dont toute boule est précompacte.

Réciproquement, supposons qu'il existe une semi-boule $B_p(x, \varepsilon)$ précompacte de X où $p \in \mathcal{P}$. Par translation et dilatation, il est clair que la semi-boule unité B_p est également précompacte. On en tire que B_p est borné et $\mathcal{P} \approx \{p\}$. Puisque l'espace est séparé, on obtient que p est une norme. Soit $\varepsilon < 1$. Par précompacité, il existe une partie finie $\{x_1, \ldots, x_N\}$ de X telle que

$$B_p \subseteq \{x_1, \ldots, x_N\} + B_p(\varepsilon).$$

Montrons que $\{x_1, \ldots, x_N\}$ engendre X. Puisque B_p est absorbant, il suffit de montrer que tout élément de B_p peut s'écrire comme une combinaison linéaire des éléments de $\{x_1, \ldots, x_N\}$. Soit $x \in B_p$, il existe $j_1 \in \{1, \ldots, N\}$ tel que

$$x = x_{j_1} + \varepsilon h_1$$

où $p(h_1) < 1$. De même, il existe $j_2 \in \{1, \ldots, N\}$ tel que

$$h_1 = x_{j_2} + \varepsilon h_2$$

où $p(h_2) < 1$. Donc

$$x = x_{j_1} + \varepsilon x_{j_2} + \varepsilon^2 h_2.$$

En itérant le procédé, on construit une suite $(j_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de $\{1,\ldots,N\}$ et une suite $(h_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ de B_p telles que

$$x = \sum_{n=1}^{m} x_{j_n}\varepsilon^{n-1} + \varepsilon^m h_m$$

pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. Or,

$$p(x - \sum_{n=1}^{m} x_{j_n}\varepsilon^{n-1}) = \varepsilon^m p(h_m) \leq \varepsilon^m \to 0$$

lorsque $m \to +\infty$. Vu que $\mathcal{P} \approx \{p\}$ et que l'espace est séparé, on en déduit que $x = \sum_{n=1}^{+\infty} x_{j_n}\varepsilon^{n-1}$.

Enfin, par unicité de la limite, on a également

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} x_{j_n}\varepsilon^{n-1} = \sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{m:j_m=j}\varepsilon^{m-1}\right)x_j.$$

□

Définition 1.2.7. Soit $(X,\mathcal{P})$ un espace localement convexe ; $(X,\mathcal{P})$ est un espace de *Schwartz* si pour tout $U \in \mathcal{V}_0$ de X, il existe $V \in \mathcal{V}_0$ tel que $V \subseteq U$ où V est précompact par rapport à U, i.e. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M \subseteq X$ fini tel que

$$V \subseteq M + \varepsilon U.$$

Terminons cette section avec les notions d'*espace de Baire*, de *tonneau* et d'*espace de Montel*.

Définition 1.2.8. Soit $(X,\mathcal{T})$ un espace topologique ; $(X,\mathcal{T})$ est un espace de *Baire* si toute intersection dénombrable d'ouverts denses dans X est dense dans X.

Remarque 1.2.9. Par passage au complémentaire, cette définition peut se réécrire : un espace est dit de Baire si toute union dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.

Théorème 1.2.10 (Théorème de Baire)**.** *Si $(X,\mathcal{T}_d)$ est un espace métrique complet, alors $(X,\mathcal{T}_d)$ est de Baire.*

Démonstration. La démonstration est bien connue ; on peut par exemple consulter [13]. □

Remarque 1.2.11. Remarquons que tout espace de Fréchet $(F, \mathcal{P})$ est métrisable au moyen de la distance

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)} \quad \forall x,y \in F, \tag{1.1}$$

où $\mathcal{P} = \{p_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$.

De plus, lorsque l'on travaille dans un espace à semi-normes dénombrable puisque l'on dispose d'une distance, on dispose également de la notion usuelle des suites de Cauchy. Or, la propriété « être de Cauchy » dépend de la distance choisie. La complétude n'est donc pas une notion topologique. Cependant, les suites de Cauchy d'un espace à semi-normes dénombrables sont exactement les mêmes que celles définies à partir de la distance (1.1) comme on le montre à la proposition suivante.

Proposition 1.2.12. *Soit $(X, \mathcal{P})$ un espace séparé à semi-normes dénombrables avec $\mathcal{P} = \{p_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ où $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ est croissant. Si d est la distance définie sur X par* (1.1) *alors une suite de X est de Cauchy pour d si, et seulement si elle l'est pour $\mathcal{P}$. En particulier, (X, d) est complet si, et seulement si $(X, \mathcal{P})$ l'est.*

Démonstration. Soit $(x_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ une suite de Cauchy de $(X, \mathcal{P})$. Soit $\varepsilon > 0$; par définition, pour tout $p_n \in \mathcal{P}$, il existe $J_n \in \mathbb{N}_0$ tel que pour tous $r, s \geq J_n$,

$$p_n(x_r - x_q) < \varepsilon/2.$$

Soit $N \in \mathbb{N}_0$ tel que $\sum_{n=N+1}^{+\infty} 2^{-n} < \varepsilon/2$ et posons alors $J = \sup_{1\leq n\leq N} J_n$. Pour tous $r, s \geq J$, on a

$$d(x_r, x_s) < \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} \underbrace{\frac{p_n(x_r - x_s)}{1+p_n(x_r - x_s)}}_{<1} + \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Inversement, montrons que si $(x_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ est une suite de Cauchy de (X, d) alors c'est une suite de Cauchy dans $(X, \mathcal{P})$. Soient $n \in \mathbb{N}_0$ et $\varepsilon \in]0,1[$. Pour tous r, s suffisamment grands, on a

$$d(x_r, x_s) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Il s'ensuit que

$$2^{-n} \frac{p_n(x_r - x_s)}{1+p_n(x_r - x_s)} < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Et donc $p_n(x_r - x_s) < \varepsilon$. Puisque n est arbitraire, la suite $(x_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ est donc de Cauchy dans $(X, \mathcal{P})$.

□

Remarque 1.2.13. Le théorème de Baire implique donc que tout espace de Fréchet est un espace de Baire.

Définition 1.2.14. Soit $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe. Un *tonneau* de X est une partie de X fermée absolument convexe et absorbante.

Définition 1.2.15. Soit $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe ; X est qualifié de *tonnelé* si tout tonneau de X est voisinage de 0.

Lemme 1.2.16. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique et $\lambda \in]0,1]$. Si $A \subset X$ est convexe, alors*

$$\lambda A^\circ + (1-\lambda)\overline{A} \subseteq A^\circ.$$

Démonstration. Considérons $x \in A^\circ$ et $y \in \overline{A}$. Si $\lambda = 1$, il n'y a rien à montrer. Supposons $\lambda \neq 1$. On pose

$$\mu = (1-\lambda) \quad \text{et} \quad u = \lambda x + \mu y.$$

Il vient alors que

$$y = \frac{1}{\mu}u - \frac{1}{\mu}x \in \overline{A} \cap (\frac{1}{\mu}u - \frac{\lambda}{\mu})A^\circ.$$

On peut alors trouver $z \in A^\circ$ tel que $\frac{1}{\mu}u - \frac{\lambda}{\mu}z \in A$. On définit $U = u - \lambda z + \lambda A$. Puisque $z \in A^\circ$, U est un voisinage de u. Par convexité de A, il vient alors

$$U \subset \mu A + \lambda A \subset A$$

d'où $u \in A^\circ$. □

Proposition 1.2.17. *Tout espace localement convexe de Baire X est tonnelé.*

Démonstration. Soit T un tonneau de X. Par définition, on a

$$X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} nT.$$

De plus, X est de Baire donc la Remarque 1.2.9 implique que l'on peut trouver un nT d'intérieur non-vide. On en déduit que T est d'intérieur non vide. Soit $x \in T^\circ$, le Lemme 1.2.16 permet d'écrire $0 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x \in T^\circ$, ce qui montre que T est un voisinage de 0. □

Corollaire 1.2.18. *Tout espace de Fréchet est tonnelé.*

Démonstration. C'est immédiat puisque tout espace de Fréchet est de Baire. □

Définition 1.2.19. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, $K \subseteq X$ est *relativement compact* dans X s'il est inclus dans une partie compacte de X.

Remarque 1.2.20. Dans un espace topologique séparé $(X, \mathcal{T})$, $K \subseteq X$ est relativement compact dans X si $\overline{K}$ est compact dans X.

Définition 1.2.21. Soit $(M, \mathcal{P})$ un espace localement convexe ; $(M, \mathcal{P})$ est un *espace de Montel* s'il est tonnelé et si toutes ses parties bornées sont relativement compactes.

Remarque 1.2.22. Un espace localement convexe $(X, \mathcal{P})$ tel que tout borné est relativement compact est appelé *espace semi-Montel*.

Définition 1.2.23. Un espace localement convexe $(X, \mathcal{P})$ est *pseudo-Montel* si tout sous-ensemble borné est précompact.

Remarque 1.2.24. Si $(X, \mathcal{P})$ est un espace localement convexe complet alors les notions de pseudo-Montel et semi-Montel coïncident. De plus, si $(X, \mathcal{P})$ est un espace de Fréchet alors ces notions sont équivalentes à celle de Montel.

La notion de pseudo-Montel est liée à celle de Schwartz par la *quasi-normabilité*.

Définition 1.2.25. Soit $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe ; $(X, \mathcal{P})$ est *quasi-normable*, si pour tout $U \in \mathcal{V}_0$, il existe $V \subseteq U$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $B \subseteq X$ borné tel que $U \subseteq \varepsilon V + B$.

On obtient la caractérisation suivante des espaces de Schwartz, bien connue dans le cadre des espaces de Fréchet.

Proposition 1.2.26. *Soit $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe ; $(X, \mathcal{P})$ est de Schwartz si, et seulement s'il est pseudo-Montel et quasi-normable.*

Démonstration. Cela découle directement des définitions. □

1.3 Produits d'espaces localement convexes

Notation 1.3.1. Dans la suite, on considère une famille non-vide $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ d'espaces topologiques. On note $(X, \mathcal{T})$ l'espace topologique produit où $\mathcal{T}$ est la topologie la moins fine rendant les projections canoniques

$$\pi_j : \prod_{i\in I} X_i \to X_j : (x_i)_{i\in I} \mapsto x_j$$

continues pour tout $j \in I$. Il s'agit de la topologie produit dont une base est donnée par les produits d'ouverts qui n'ont qu'un nombre fini de termes propres.

Proposition 1.3.2. *Le produit cartésien d'une famille d'espace vectoriels topologiques est un espace vectoriel topologique.*

Démonstration. C'est direct, vu la définition. □

Proposition 1.3.3. *Soient $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces vectoriels topologiques, X le produit cartésien et les projections canoniques π_i. Une partie B de X est bornée si, et seulement si $\pi_i(B)$ est borné dans X_i quel que soit $i \in I$.*

Démonstration. C'est évident. □

Définition 1.3.4. Soit $(X_i, \mathcal{P}_i)_{i\in I}$, une famille d'espaces localement convexes. On considère

$$\mathcal{P} = \{\sup_{j\in J} p_j \circ \pi_j \mid J \subseteq I,\ \#J < +\infty,\ p_j \in \mathcal{P}_j\}.$$

Il est clair qu'il s'agit d'un ensemble filtrant de semi-normes sur $\prod_{i\in I} X_i$. L'espace localement convexe $(\prod_{i\in I} X_i, \mathcal{P})$ est appelé le *produit (localement convexe)* des espaces $(X_i, \mathcal{P}_i)_{i\in I}$.

Le choix de $\mathcal{P}$ dans la Définition 1.3.4 est justifié par le fait que la topologie engendrée par $\mathcal{P}$ correspond à la topologie produit.

On termine cette section en présentant quelques résultats relatifs aux produits d'espaces de Fréchet et de Montel qui nous seront utiles dans la suite.

Proposition 1.3.5. *Tout produit dénombrable d'espaces de Fréchet est un espace de Fréchet.*

Démonstration. Le résultat est classique. On peut consulter par exemple [16]. □

Proposition 1.3.6. *Tout produit dénombrable d'espaces de Fréchet-Montel est encore (Fréchet-)Montel.*

Démonstration. Soit $(M_i, \mathcal{P}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces de Fréchet-Montel. Le produit $(\prod_{i\in I} M_i, \mathcal{P})$ étant de Fréchet il est tonnelé.

Montrons que toute partie bornée de $\prod_{i\in I} M_i$ est relativement compacte. Soit $B \subset \prod_{i\in I} M_i$ une partie bornée. Par la Proposition 1.3.3, la projection $\pi_i(B)$ est bornée dans M_i pour tout $i \in I$. Puisque M_i est de Montel, $\pi_i(B)$ est relativement compact quel que soit $i \in I$. Pour tout $i \in I$, on peut donc trouver K_i compact tel que $\pi_i(B) \subset K_i$. Il en découle que $B \subset \Pi_{i\in I} K_i$, qui est compact par le théorème de Tychonoff. $\square$

1.4 Limite projective

Dans cette section, on considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ une suite de sous-espaces vectoriel d'un même espace vectoriel. Il est clair que $X = \cap_{n\in\mathbb{N}_0} X_n$ est un espace vectoriel. De plus, on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, X_n est muni d'un système filtrant de semi-norme $\mathcal{P}_n$. L'objectif de cette section est de munir X d'une structure d'espace localement convexe. On considère la famille de semi-normes obtenues en « fitlrant » l'ensemble de semi-normes $\cup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{P}_n$ [7].

Définition 1.4.1. On considère l'ensemble filtrant de semi-normes

$$\mathcal{P} = \{\sup_{j\in J} p_j \mid J \subseteq \mathbb{N},\ \#J < +\infty,\ p_j \in \mathcal{P}_j\}$$

sur X. L'espace localement convexe $(X, \mathcal{P})$ est la *limite projective* de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ et est noté

$$\varprojlim_n X_n.$$

Les résultats suivants sont bien connus.

Proposition 1.4.2. *Soit $(X_n, \mathcal{P}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ une suite d'espaces localement convexes.*

(1) Si pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, $(X_n, \mathcal{P}_n)$ est séparé alors $\varprojlim_n X_n$ est séparé.

(2) Une suite converge dans $\varprojlim_n X_n$ si, et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ elle converge dans $(X_n, \mathcal{P}_n)$.

Démonstration. C'est évident. $\square$

Le corollaire suivant découle directement de la Proposition 1.4.2

Corollaire 1.4.3. *Tout limite projective d'espace de Fréchet est un espace de Fréchet. En particulier, toute limite projective d'espaces de Banach est un espace de Fréchet.*

1.5 Opérateurs sur les espaces localement convexes

Les opérateurs naturellement étudiés entre espaces vectoriels topologiques sont les opérateurs linéaires continus. Dans le résultat qui suit, on montre que la continuité peut se traduire en termes de semi-normes.

Proposition 1.5.1. *Soient* $(X, \mathcal{P})$ *et* $(Y, \mathcal{Q})$ *des espaces localement convexes. L'opérateur linéaire* $T : X \to Y$ *est continu si, et seulement si pour tout* $q \in \mathcal{Q}$*, il existe* $p \in \mathcal{P}$ *et* $C > 0$ *tels que*

$$q \circ T \leq Cp. \tag{1.2}$$

Démonstration. On peut consulter [2]. □

Notation 1.5.2. Soient $(X, \mathcal{P})$ et $(Y, \mathcal{Q})$ des espaces localement convexes. On note $L(X, Y)$ l'ensemble des opérateurs linéaires continus définis sur X et à image dans Y. On note simplement $L(X)$ pour désigner $L(X, X)$.

La Proposition 1.5.1 conduit à définir la *norme opérateur*. Il s'agit de la plus petite constante $C > 0$ telle que la majoration de continuité (1.2) est satisfaite quel que soit $x \in X$. Dans le cadre d'espace de Banach, la définition de la norme opérateur prend la forme suivante.

Définition 1.5.3. Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_X)$ des espaces de Banach. Si $T \in L(X, Y)$, on définit la *norme opérateur* de T par

$$\|T\| = \inf\{C > 0 \mid \|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X, \ \forall x \in X\}.$$

Proposition 1.5.4. *Soient* $(X, \|\cdot\|_X)$ *et* $(Y, \|\cdot\|_X)$ *des espaces de Banach. Si* $T \in L(X, Y)$ *alors*

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|T(x)\|_Y. \tag{1.3}$$

Démonstration. En effet, soit $C > 0$ tel que $\|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X$ pour tout $x \in X$. Si $\|x\|_X \leq 1$, on a $\|T(x)\|_Y \leq C$ et donc

$$\sup_{\|x\|_X \leq 1} \|T(x)\|_Y \leq \|T\|.$$

De plus, si $x \neq 0$ alors $\|\frac{x}{\|x\|_X}\|_X = 1$ et

$$\|T(x)\|_Y = \|x\|_X \|T(\frac{x}{\|x\|_X})\|_Y \leq \|x\|_X \sup_{\|y\|_X = 1} \|T(y)\|_Y.$$

Par définition de la norme opérateur, on a

$$\|T\| \leq \sup_{\|x\|_X=1} \|T(x)\|_Y.$$

Au total, on a

$$\sup_{\|y\|_X=1} \|T(y)\|_Y \leq \sup_{\|x\|_X\leq 1} \|T(x)\|_Y \leq \|T\| \leq \sup_{\|y\|_X=1} \|T(y)\|_Y.$$

Toutes les inégalités sont donc des égalités et on a démontré (1.3). □

Dans les chapitres 2 et 4 nous serons amenés à travailler avec une classe particulière d'opérateurs : les *opérateurs compacts*. Nous présentons ici les premières définitions et propriétés de tels opérateurs.

Définition 1.5.5. Soient $(X, \mathcal{P})$ et $(Y, \mathcal{Q})$ des espaces localement convexes. Un opérateur linéaire $T : X \to Y$ est *compact* s'il existe une semi-boule B de X tel que $T(B)$ est relativement compact dans Y. L'ensemble des opérateurs compact de $(X, \mathcal{P})$ dans $(Y, \mathcal{Q})$ est noté $\mathcal{K}(X, Y)$. On note simplement $\mathcal{K}(X)$ pour désigner $\mathcal{K}(X, X)$.

Proposition 1.5.6. *Soient $(X, \mathcal{P})$, $(Y, \mathcal{Q})$, $(Z, \mathcal{R})$ des espaces localement convexes séparés et $S \in L(X, Y)$, $T \in L(Y, Z)$. Si S ou T est compact alors $T \circ S$ est compact.*

Démonstration. Soit B une semi-boule de $(X, \mathcal{P})$. Premièrement, supposons que S est compact. Par définition $\overline{S(B)}$ est compact dans $(Y, \mathcal{Q})$. Par continuité de T, $T(\overline{S(B)})$ est compact dans $(Z, \mathcal{R})$. Donc $T \circ S$ est compact.

Pour l'autre cas, remarquons que $S(B)$ est contenu dans la semi-boule $B_q(r)$ de $(Y, \mathcal{Q})$ où $r \geq \sup_{x\in B} q(S(x))$ avec $q \in \mathcal{Q}$. Par compacité de T, $\overline{T(S(B))}$ est compact dans $(Z, \mathcal{R})$. □

Remarque 1.5.7. En particulier, si (X, P) est un espace localement convexe, $\mathcal{K}(X)$ est un idéal bilatère de l'algèbre $L(X)$.

Proposition 1.5.8. *Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ des espaces de Banach. L'ensemble $\mathcal{K}(X, Y)$ est un sous-espace fermé de $(L(X, Y), \|\cdot\|)$ où $\|\cdot\|$ est la norme opérateur.*

Démonstration. Montrons que $\mathcal{K}(X, Y) \subseteq L(X, Y)$. Soit $T \in \mathcal{K}(X, Y)$, on a

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_X\leq 1} \|T(x)\|_Y = \sup\{\|y\|_Y \mid y \in T(B_{\|\cdot\|_X})\} < +\infty.$$

Donc $\mathcal{K}(X,Y) \subseteq L(X,Y)$.

De plus, par continuité de la somme et de la multiplication par uns scalaire, l'ensemble $\mathcal{K}$ des compacts d'un espace localement convexe est un espace vectoriel. Donc $\mathcal{K}(X,Y)$ est un sous-espace vectoriel de $L(X,Y)$.

Il reste à montrer que $\mathcal{K}(X,Y)$ est fermé. Soit $T \in \overline{\mathcal{K}(X,Y)}$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $S \in \mathcal{K}(X,Y)$ tel que $\|T - S\| \leq \varepsilon$. Comme $S(B_{\|\cdot\|_X})$ est relativement compact, il existe $y_1, \ldots, y_N \in S(B_{\|\cdot\|_X})$ tels que

$$S(B_{\|\cdot\|_X}) \subseteq \{y_1, \ldots, y_N\} + \frac{\varepsilon}{2} B_{\|\cdot\|_Y}.$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} T(B_{\|\cdot\|_X}) &\subseteq S(B_{\|\cdot\|_X}) + (T-S)(B_{\|\cdot\|_X}) \\ &\subseteq \bigcup_{j=1}^{N} \{y_1, \ldots, y_N\} + B_{\|\cdot\|_Y}(y_j, \frac{\varepsilon}{2}) + \frac{\varepsilon}{2} B_{\|\cdot\|_Y} \\ &\subseteq \bigcup_{j=1}^{N} B_{\|\cdot\|_Y}(y_j, \varepsilon). \end{aligned}$$

Ainsi, puisque $(Y, \|\cdot\|_Y)$ est complet, $T(B_{\|\cdot\|_X})$ est relativement compact. On en déduit que $\overline{\mathcal{K}(X,Y)} \subseteq \mathcal{K}(X,Y)$. Autrement dit, $\mathcal{K}(X,Y)$ est fermé. □

Proposition 1.5.9. *Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace normé de dimension infinie. Alors, l'opérateur identité* id *de X n'est pas compact. Plus généralement, tout isomorphisme $T : E \to E$ n'est pas compact.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que si id était compact, $\mathrm{id}(B_{\|\cdot\|}) = B_{\|\cdot\|}$ serait relativement compact et donc précompact dans $(X, \|\cdot\|)$. Le Théorème de Riesz 1.2.6 impliquerait alors que $\dim(X) < +\infty$. D'où une contradiction.

De plus, si un isomorphisme $T : X \to X$ est compact alors l'opérateur identité $\mathrm{id} = T^{-1} \circ T$ serait compact en vertu de la Proposition 1.5.6. Ce qui impossible vu la première partie de la démonstration. □

Corollaire 1.5.10. *Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ une suite d'opérateurs compacts de $(X, \|\cdot\|_X)$. Si $T_n \to T$ dans $L(X, \|\cdot\|)$ alors T est un opérateur compact.*

Démonstration. En effet, on a montré à la Proposition 1.5.8 que $\mathcal{K}(X)$ est un sous-espace fermé de $L(X)$ donc $T \in \mathcal{K}(X)$. □

Proposition 1.5.11. *Soit* $(X, \|\cdot\|)$ *un espace normé ;* $\dim(X) < +\infty$ *si, et seulement si* $B_{\|\cdot\|}[1]$ *est compact.*

Démonstration. Si X est de dimension finie, il est homéomorphe à $\mathbb{K}^n$ dont toute boule ouverte est précompacte. Le Théorème de Heine-Borel permet alors de conclure.

Réciproquement, supposons que $B_{\|\cdot\|}[1]$ est compact. Puisque que l'ensemble $\{B_{\|\cdot\|}(x, \frac{1}{2}) \mid x \in B_{\|\cdot\|}[1]\}$ est un recouvrement par des ouverts de $B_{\|\cdot\|}[1]$, par définition, il existe $x_1, \ldots, x_N \in B_{\|\cdot\|}[1]$ tels que

$$B_{\|\cdot\|}[1] \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} B_{\|\cdot\|}(x_n, \frac{1}{2}).$$

Puisque $B_{\|\cdot\|}(x_i, \frac{1}{2}) = x_i + \frac{1}{2} B_{\|\cdot\|}$, il s'ensuit que

$$B_{\|\cdot\|} \subset B_{\|\cdot\|}[1] \subseteq \rangle x_1, \ldots, x_N \langle + \frac{1}{2} B_{\|\cdot\|}.$$

Donc

$$\begin{aligned} B_{\|\cdot\|} &\subseteq \rangle x_1, \ldots, x_N \langle + \frac{1}{2} \left(\rangle x_1, \ldots, x_N \langle + \frac{1}{2} B_{\|\cdot\|} \right) \\ &\subseteq \rangle x_1, \ldots, x_N \langle + \frac{1}{2^2} B_{\|\cdot\|} \end{aligned}$$

En itérant le procédé, on trouve pour tout $n \in \mathbb{N}_0$,

$$B_{\|\cdot\|} \subseteq \rangle x_1, \ldots, x_N \langle + \frac{1}{2^n} B_{\|\cdot\|}.$$

Ainsi, pour tout $y \in B_{\|\cdot\|}$, étant donné $n \in \mathbb{N}_0$, il existe $y_n \in \rangle x_1, \ldots, x_N \langle$ et $z_n \in B_{\|\cdot\|}(\frac{1}{2^n})$ tels que $y = y_n + z_n$. Par construction, on a $\lim_{n \to +\infty} z_n = 0$. Il s'ensuit alors que $y_n \to y$, lorsque $n \to +\infty$, ce qui implique $y \in \overline{\rangle x_1, \ldots, x_N \langle} = \rangle x_1, \ldots, x_N \langle$. La boule unité ouverte de X est donc incluse dans $\rangle x_1, \ldots, x_N \langle$, ce qui implique que $X \subseteq \rangle x_1, \ldots, x_N \langle$ et donc

$$\dim(X) \leq \dim(\rangle x_1, \ldots, x_N \langle) = N < +\infty.$$

□

Définition 1.5.12. Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ des espaces normés. Un opérateur $T : X \to Y$ est dit de *rang fini* si $\mathrm{Im}(T)$ est un sous-espace de Y de dimension finie.

Corollaire 1.5.13. *Tout opérateur de rang fini entre espaces normés est compact.*

Démonstration. Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ des espaces normés et $T : X \to Y$ un opérateur de rang fini. Alors $\overline{T(B_{\|\cdot\|_X})}$ est fermé et borné. Puisque $\mathrm{Im}(T)$ est de dimension finie, $T(B_{\|\cdot\|_X})$ est relativement compact et donc T est compact. □

Corollaire 1.5.14. *Soient $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $T \in \mathcal{K}(E)$. Alors* $\dim(\ker(\mathrm{id} - T)) < +\infty$.

Démonstration. Soit B la boule unité fermée de $\ker(\mathrm{id} - T)$, on a $T(B) = B$. Puisque T est un opérateur compact, on en tire que B est relativement compact dans $(X, \|\cdot\|)$ et donc compact puisque B est fermé. La Proposition 1.5.11 permet alors de conclure. □

Terminons ce chapitre avec un lemme qui nous sera fort utile dans la suite. Ce dernier met en évidence le lien existant entre les espaces de Schwartz et les opérateurs compacts.

Lemme 1.5.15. *Soit $(X, \mathcal{P})$ un espace de Fréchet ; $(X, \mathcal{P})$ est de Schwartz alors pour tout espace de Banach $(Y, \|\cdot\|)$ et tout $T \in L(X, Y)$, T est compact.*

Démonstration. Fixons $(Y, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $T \in L(X, Y)$. Soit $U := T^{-1}(B_{\|\cdot\|}(1))$; puisque T est continu, U est un voisinage de 0 dans $(X, \mathcal{P})$. Ainsi, puisque $(X, \mathcal{P})$ est de Schwartz, il existe $V \in \mathcal{V}_0$ inclus dans U et tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\{x_1, \ldots, x_N\} \in X$ tels que

$$V \subseteq \{x_1, \ldots, x_N\} + \varepsilon U.$$

Il s'ensuit que

$$T(V) \subseteq \{T(x_1), \ldots, T(x_N)\} + \varepsilon B_{\|\cdot\|}(1).$$

Donc $T(V)$ est précompact dans $(Y, \|\cdot\|)$. Ce qui suffit vu que dans un espace de Fréchet les parties relativement compactes et précompactes coïncident. □

Remarque 1.5.16. La réciproque est également vraie dans le résultat précédent. La compacité des opérateurs de $L(X, Y)$ est d'ailleurs l'une des définitions originales pour être de Schwartz présentées par A. Grothendieck [9]. Il montre indirectement l'équivalence avec la Définition 1.2.7 grâce à des considérations sur les duaux [9, 10]. On peut aussi procéder plus directement en considérant le complété X_U de $(X/\ker p_U, p_U)$, avec $U \in \mathcal{V}_0$ et où p_U est la jauge de Minkowski. On peut aisément montrer que tout élément T de $L(X,Y)$ est compact si et seulement si l'application canonique $X_U \to X_V$ est compacte pour $U \subset V$ (pour la nécessité, il suffit de prendre $F = X_V$ et pour la suffisance, $U = T^{-1}(V)$ [9, 3]). On peut alors montrer que X est un espace de Schwartz en utilisant la limite projective des espaces X_U. On peut aussi directement considérer l'application canonique $\tau_U : X \to X_U$, qui est compacte par hypothèse. On obtient alors le résultat grâce à la densité de $(X/\ker p_U, p_U)$ dans X_U et le fait que si $y = \tau_U(x)$, alors $y = x + k$ pour un élément k de X tel que $p_U(k) = 0$, ce qui implique $k \in \delta U$ pour tout $\delta > 0$. Vu que nous n'avons pas approfondi les notions utiles pour cette démonstration, nous ne rentrons pas dans les détails dans ce travail.

Chapitre 2

Construction à partir des suites de Köthe

Les suites de Köthe sont d'une grande importance en analyse fonctionnelle. Elles permettent notamment de fournir de nombreux exemples et contre-exemples dans divers contextes [10, 14]. On peut par exemple construire des exemples d'espaces pour lesquels la dimension diamétrale est un invariant topologique complet : les espaces de séries de puissances [10]. Les espaces de Köthe donnent aussi lieu aux suites rapidement décroissantes, qui sont fondamentales dans la théorie des espaces nucléaires [1]. Nous allons ici et comme annoncé utiliser ce puissant outil pour fournir un exemple d'espace de Fréchet-Montel qui n'est pas de Schwartz.

2.1 Espaces de suites

Définition 2.1.1. Une *matrice de Köthe* est une matrice $A = (a_{j,k})_{j,k \in \mathbb{N}_0}$ où $a_{j,k} \geq 0$ pour tout $j, k \in \mathbb{N}_0$ qui satisfait les conditions suivantes :

(1) pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, il existe $k \in \mathbb{N}_0$ tel que $a_{j,k} > 0$,

(2) pour tout $j, k \in \mathbb{N}_0$, $a_{j,k} \leq a_{j,k+1}$.

Définition 2.1.2. Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, on définit

$$\lambda^p(A) = \{x \in \omega \mid \|x\|_k < +\infty,\ \forall k \in \mathbb{N}_0\}.$$

1. Sans rentrer dans les détails, disons qu'un espace nucléaire est un espace vectoriel topologique possédant certaines propriétés analogues à celles des espaces de dimension finie. Citons comme exemple (outre les espaces vectoriels normés de dimension finie), la classe des fonctions C^∞ sur une variété compacte ou l'espace des fonctions entières sur le plan complexe.

où pour tout $1 \leq p < \infty$ et tout $k \in \mathbb{N}_0$,

$$\|x\|_k = \left(\sum_{j=1}^{+\infty} |x_j a_{j,k}|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dans le cas $p = \infty$, on pose

$$\|x\|_k = \sup_{j \in \mathbb{N}_0} |x_j| a_{j,k}.$$

De plus, on note $c_0(A)$ l'ensemble

$$c_0(A) = \{x \in \lambda^\infty(A) \mid \lim_{j \to +\infty} |x_j| a_{j,k} = 0, \ \forall k \in \mathbb{N}_0\}.$$

Les semi-normes $\| \cdot \|_k$ sont appelées *semi-normes canoniques* et les espaces $\lambda^p(A)$ et $c_0(A)$ sont appelés *espaces de suites de Köthe*.

Notation 2.1.3. Soient $1 \leq p \leq \infty$ et A une matrice de Köthe. Afin de ne pas alourdir les notations, dans la suite, les espaces $\lambda^p(A)$ et $c_0(A)$ seront toujours supposés munis de leurs systèmes de semi-normes canoniques associés.

Proposition 2.1.4. *Soit A une matrice de Köthe. Les topologies de $\lambda^p(A)$, avec $1 \leq p \leq \infty$, et $c_0(A)$ sont plus fortes que celle induite par ω. De plus, pour tout $1 \leq p \leq \infty$, on a*

$$\lambda^1(A) \subseteq \lambda^p(A) \subseteq \lambda^\infty(A)$$

et les injections $\lambda^1(A) \hookrightarrow \lambda^p(A)$ et $\lambda^p(A) \hookrightarrow \lambda^\infty(A)$ sont continues.

Démonstration. Soit $1 \leq p \leq \infty$. Par définition de A, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, il existe $k \in \mathbb{N}_0$ tel que $a_{j,k} > 0$. Fixons $j \in \mathbb{N}_0$ et soit $x \in \lambda^p(A)$. Alors $|x_j a_{j,k}| \leq \|(x_j a_{j,k})_{j \in \mathbb{N}_0}\|_{l^p}$. Autrement dit,

$$|x_j| \leq a_{j,k}^{-1} \|(x_l a_{l,k})_{l \in \mathbb{N}_0}\|_{l^p} = a_{j,k}^{-1} \underbrace{\|x\|_k}_{\substack{<+\infty \\ \text{car } x \in \lambda^p(A)}}$$

Ce qui suffit à montrer que la topologie de $\lambda^p(A)$ est plus forte que celle que lui induit ω. $\square$

Proposition 2.1.5. *Soit A une matrice de Köthe. Les espaces $\lambda^p(A)$, avec $1 \leq p \leq \infty$, et $c_0(A)$ sont des sous-espaces vectoriels de ω.*

Démonstration. C'est immédiat. $\square$

Proposition 2.1.6. *Soit A une matrice de Köthe. Les espaces $\lambda^p(A)$, avec $1 \leq p \leq \infty$, et $c_0(A)$ sont séparés.*

Démonstration. C'est évident puisque les topologies de $\lambda^p(A)$ et $c_0(A)$ sont plus fortes que la topologie séparée induite par ω . □

Proposition 2.1.7. *Soit A une matrice de Köthe. Les espaces $\lambda^p(A)$, avec $1 \leq p \leq \infty$, et $c_0(A)$ sont complets.*

Démonstration. Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ une suite de Cauchy de $\lambda^p(A)$. Puisque la topologie de $\lambda^p(A)$ est plus forte que celle induite par ω, la suite $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ est de Cauchy dans ω qui est complet. Elle converge donc vers une suite $x^{(0)}$ dans ω. Il reste à montrer que cet élément appartient à $\lambda^p(A)$ et que cette convergence a lieu au sens de $\lambda^p(A)$.

Montrons que $x^{(0)} \in \lambda^p(A)$. Si $(a_{j,k})_{j\in\mathbb{N}_0}$ est une colonne de A alors il faut montrer que $(x_j^{(n)}a_{j,k})_{j\in\mathbb{N}_0}$ converge dans l^p vers $(x_j^{(0)}a_{j,k})_{j\in\mathbb{N}_0}$ et que cette limite est dans l^p. Or, si $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ est de Cauchy dans $\lambda^p(A)$ alors la suite $(x_j^{(n)}a_{j,k})_{n\in\mathbb{N}_0}$ est de Cauchy dans l^p. Comme l^p est complet, cette suite converge vers un élément $y \in l^p$. Comme la topologie de l^p est plus forte que la topologie de ω, cette convergence a aussi lieu dans ω. Enfin, comme ω est séparé et que $x^{(n)}$ converge vers $x^{(0)}$, on a forcément $y = (x_j^{(0)}a_{j,k})_{j\in\mathbb{N}_0}$.

Pour le cas de $c_0(A)$, il suffit de montrer $c_0(A)$ est un sous-espaces fermé de $\lambda^\infty(A)$. Soit $x = (x^{(j)})_{j\in\mathbb{N}_0}$ une suite convergente de $c_0(A)$; il existe donc $x^{(0)} \in \lambda^\infty(A)$ tel que $x^{(j)} \to x^{(0)}$, si $j \to +\infty$. Pour tout $j \in \mathbb{N}_0$ et $k \in \mathbb{N}_0$, on a

$$|x_j^{(0)}a_{j,k}| \leq |x_j^{(0)} - x_j^{(n)}|a_{j,k} + |x_j^{(n)}a_{j,k}| \leq \|x^{(0)} - x^{(n)}\|_k + |x_j^{(n)}a_{j,k}|.$$

Pour $k \in \mathbb{N}_0$ fixé, soit $\varepsilon > 0$; puisque la suite $(x^{(n)})$ appartient à $c_0(A)$, on obtient

$$\lim_{j\to+\infty} |x_j^{(0)}a_{j,k}| \leq \|x^{(0)} - x^{(n)}\|_k < \varepsilon,$$

pour n suffisamment grand, par convergence dans $\lambda^\infty(A)$. Ceci implique $\lim_{j\to+\infty} x_j^{(0)}a_{j,k} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}_0$. Donc $x^{(0)} \in c_0(A)$ et $c_0(A)$ est un sous-espace fermé de $\lambda^\infty(A)$. □

Ces trois derniers résultats combinés au fait que les semi-normes canoniques dont sont munis les espaces $\lambda^p(A)$ ($1 \leq p \leq \infty$) et $c_0(A)$ sont dénombrables amènent au corollaire suivant.

Corollaire 2.1.8. *Soient $1 \leq p \leq \infty$ et A une matrice de Köthe. Les espaces $\lambda^p(A)$ et $c_0(A)$ sont des espaces de Fréchet.*

Définition 2.1.9. On définit l'*espace des suites finies* par

$$\varphi = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \omega \mid \#\{i \in \mathbb{N}_0 \mid x_i \neq 0\} < +\infty\}.$$

Proposition 2.1.10. *Soit A une matrice de Köthe et $1 \leq p < \infty$. L'ensemble des suites finies φ est dense dans $\lambda^p(A)$.*

Démonstration. En effet, pour toute suite $x \in \lambda^p(A)$, on peut trouver $x^{(n)} = (x_j^{(n)})_{j\in\mathbb{N}_0} \in \varphi$ tel que $\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = x$. Il suffit de poser

$$x^{(n)} = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots).$$

Dans ce cas, pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, on a

$$\begin{aligned} \|x - x^{(n)}\|_k^p &= \sum_{j=1}^{n} (\underbrace{|(x_j - x_j^{(n)}|}_{=0} |a_{j,k}|)^p + \sum_{j=n+1}^{+\infty} (\underbrace{|(x_j - x_j^{(n)}|}_{=|x_j|} |a_{j,k}|)^p \\ &\leq \sum_{j=J+1}^{+\infty} |x_j| a_{j,k} < +\infty. \end{aligned}$$

□

Faisons quelques remarques et introduisons quelques notations qui nous seront utiles dans la démonstration du Théorème de Dieudonné-Gomes 2.1.20 et dans le Théorème 2.1.21.

Remarque 2.1.11. Soit A une matrice de Köthe et $E = \lambda^p(A)$ si $1 \leq p \leq \infty$ ou $E = c_0(A)$ respectivement. Pour déterminer l'espace de Banach local E_k correspondant aux semi-normes canoniques $\|\cdot\|_k$, soit

$$N_k = \{j \in \mathbb{N}_0 \mid a_{j,k} > 0\}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Comme A est une matrice de Köthe, on a $N_k \subseteq N_{k+1}$ et $\mathbb{N}_0 = \bigcup_{k\in\mathbb{N}_0} N_k$. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}_0$,

$$\ker \|\cdot\|_k = \{x \in E \mid x_j = 0,\ \forall j \in N_k\}.$$

Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, on définit

$$l^p(N_k, a_k) = \{x \in \mathbb{K}^{N_k} \mid \|x\| = \|(x_j a_{j,k})_{j\in N_k}\|_{l^p} < +\infty\}.$$

De plus, on pose

$$c_0(N_k, a_k) = \{x \in l_\infty(N_k, a_k) \mid \lim_{\substack{j\to+\infty \\ j\in N_k}} |x_j a_{j,k}| = 0\}.$$

Alors,
$$\mathrm{id}_k : \lambda^p(A) \to l^p(N_k, a_k) : x \mapsto (x_j)_{j\in N_k}$$
est une application linéaire telle que
$$\ker \mathrm{id}_k = \ker \|\cdot\|_k \quad \text{et} \quad \|\mathrm{id}_k\| = \|x\|_k.$$
Il en est de même pour $\mathrm{id}_0 : c_0(A) \to c_0(N_k, a_k)$.

Lorsque $1 \leq p < \infty$, par la Proposition 2.1.10, on sait que φ est dense dans $\lambda^p(A)$. De plus, φ est clairement dense dans $c_0(A)$. On obtient alors
$$(\lambda^p(A))_k = l^p(N_k, a_k) \quad \text{et} \quad (c_0(A))_k = c_0(N_k, a_k).$$
Enfin, remarquons que $(\lambda^\infty(A))_k$ est un sous-espace fermé de $l^\infty(N_k, a_k)$. De plus, $c_0(N_k, a_k) \subseteq (\lambda^\infty(A))_k$. Pour tous $n, k \in \mathbb{N}_0$ tels que $n \geq k$, on pose
$$i_n^k : (\lambda^p(A))_n \to (\lambda^p(A))_k : ((x_j)_{j\in N_n}) \mapsto (x_j)_{j\in N_k}.$$

Afin de simplifier les notations dans ce chapitre, nous rappelons les conventions usitées au cours de Théorie de la Mesure [15] concernant la demi-droite complétée $[0, +\infty]$.

Convention 2.1.12. Pour tout $x \in [0, +\infty]$, on pose
$$\begin{aligned} x + \infty = +\infty + x &= +\infty; \\ 0 \cdot +\infty = +\infty \cdot 0 &= 0; \\ \frac{0}{0} &= 0. \end{aligned}$$
Pour tout $x \in]0, +\infty]$,
$$x \cdot +\infty = +\infty \cdot x = +\infty.$$
Et pour tout $x \in]0, +\infty[$,
$$\frac{x}{0} = +\infty.$$

Nous allons à présent caractériser les bornés des espaces de suites de Köthe.

Lemme 2.1.13. *Soit $A = (a_{j,k})_{j,k\in\mathbb{N}_0}$ une matrice de Köthe.*

(1) Soit $b \in \omega$; $b \in \lambda^\infty(A)$ si, et seulement s'il existe une suite $(C_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ de réels strictement positifs telle que pour tout $j \in \mathbb{N}_0$
$$|b_j| \leq \inf_{k\in\mathbb{N}_0} C_k a_{j,k}^{-1}.$$

(2) Il existe $b \in \lambda^\infty(A)$ tel que pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, $b_j > 0$.

Démonstration. Premièrement, supposons que $b \in \lambda^\infty(A)$. On pose alors

$$C_k = \begin{cases} \|b\|_k & \text{si } \|b\|_k \neq 0, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $a_{j,k} \neq 0$, alors $|b_j| = |b_j| a_{j,k} a_{j,k}^{-1} \leq C_k a_{j,k}^{-1}$. Dans le cas où $a_{j,k} = 0$, on a $C_k a_{j,k}^{-1} = +\infty$. Donc $|b_j| \leq C_k a_{j,k}^{-1}$. Au total, pour tout $k \in \mathbb{N}_0$,

$$|b_j| \leq C_k a_{j,k}^{-1}$$

et donc

$$|b_j| \leq \inf_{k \in \mathbb{N}_0} C_k a_{j,k}^{-1}.$$

Pour la réciproque, remarquons que $\inf_{k\in\mathbb{N}_0} C_k a_{j,k}^{-1} < +\infty$. En effet, sinon on aurait $a_{j,k} = 0$ quel que soit $k \in \mathbb{N}_0$, ce qui est impossible puisque A est une matrice de Köthe. Ensuite, si $a_{j,k} \neq 0$ alors

$$\begin{aligned} |b_j| a_{j,k_0} &\leq \inf_{k \in \mathbb{N}_0} (C_k a_{j,k}^{-1}) a_{j,k_0} \\ &\leq C_{k_0} a_{j,k_0}^{-1} a_{j,k_0} \\ &\leq C_{k_0} < +\infty. \end{aligned}$$

Si $a_{j,k_0} = 0$ alors, trivialement, $|b_j| a_{j,k_0} = 0 \leq C_{k_0}$. Au total, pour tout $k_0 \in \mathbb{N}_0$, $\|b\|_{k_0} < +\infty$ et donc $b \in \lambda^\infty(A)$.

Pour le second point, considérons une suite $(C_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}_0$

$$C_k \geq k \sup_{1 \leq j \leq k} \{a_{j,k}, 1\}.$$

Puisque A est une matrice de Köthe, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, il existe $k(j) \in \mathbb{N}_0$ tel que $a_{j,k(j)} > 0$. Il s'ensuit que pour tout $k \geq \sup\{j, k(j)\}$, $C_k a_{j,k}^{-1} \geq k$. On pose alors

$$b_j = \inf_{k \in \mathbb{N}_0} C_k a_{j,k}^{-1} > 0, \quad \forall j \in \mathbb{N}_0.$$

Du premier point, la suite $b = (b_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ appartient à $\lambda^\infty(A)$. □

Définition 2.1.14. Soit $\mathcal{B}$ une famille de bornés d'un espace localement convexe $(X, \mathcal{P})$; $\mathcal{B}$ est un *système fondamental de bornés* de $(X, \mathcal{P})$ si pour tout $D \subseteq X$ borné il existe $\varepsilon > 0$ et $B \in \mathcal{B}$ tel que $D \subseteq \varepsilon B$.

Proposition 2.1.15. *Soient* $1 \leq p \leq \infty$ *et* $A = (a_{j,k})_{j,k\in\mathbb{N}_0}$ *une matrice de Köthe. La suite* $(N_b^p)_{b\in\lambda^\infty(A)}$ *où*

$$N_b^p = \{x \in \omega \mid \|(x_j b_j^{-1})_{j\in\mathbb{N}_0}\|_{l^p} \leq 1\},$$

est un système fondamental de bornés de $\lambda^p(A)$*.*

Démonstration. Soit $b \in \lambda^\infty(A)$, remarquons que pour tout $x \in N_b^p$ et tout $k \in \mathbb{N}_0$, on a

$$\begin{aligned}\|x\|_k &= \|(x_j a_{j,k})_{j\in\mathbb{N}_0}\|_{l^p}\\ &= \|(x_j b_j^{-1} b_j a_{j,k})_{j\in\mathbb{N}_0}\|_{l^p}\\ &\leq \underbrace{\|(x_j b_j^{-1})_{j\in\mathbb{N}_0}\|_{l^p}}_{\leq 1 \text{ car } x\in N_b^p} \|(b_j a_{j,k})_{j\in\mathbb{N}_0}\|_{l^\infty}\\ &\leq \|(b_j a_{j,k})_{j\in\mathbb{N}_0}\|_{l^\infty}.\end{aligned}$$

Si D est un sous-ensemble borné de $\lambda^p(A)$, alors il existe une suite de réels strictement positifs $(C_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, $\sup_{x\in D} \|x\|_k \leq C_k$. Par le Lemme 2.1.13, $b = (\inf_{k\in\mathbb{N}_0} 2^k C_k a_{j,k}^{-1})_{j\in\mathbb{N}_0} \in \lambda^\infty(A)$. De plus, pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, on a

$$b_j^{-1} = \sup_{k\in\mathbb{N}_0} 2^{-k} C_k^{-1} a_{j,k} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k} C_k^{-1} a_{j,k}.$$

Donc pour tout $x \in D$, on a

$$\begin{aligned}\|(x_j b_j^{-1})_{j\in\mathbb{N}_0}\|_{l^p} &\leq \| \left(\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k} C_k^{-1} x_j a_{j,k}\right)_{j\in\mathbb{N}_0} \|_{l^p}\\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k} C_k^{-1} \underbrace{\|(x_j a_{j,k})_{j\in\mathbb{N}_0}\|_{l^p}}_{=\|x\|_k}\\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k} C_k^{-1} \underbrace{\|x_j\|_k}_{\leq C_k}\\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k} = 1.\end{aligned}$$

Ce qui montre que $x \in N_b^p$ et donc $D \subseteq N_b^p$. □

Les corollaires suivants se déduisent aisément de la Proposition 2.1.15.

Corollaire 2.1.16. *Soient* A *une matrice de Köthe.*

(1) La suite $(N_b^\infty)_{b\in\lambda^\infty(A)}$ *où*

$$N_b^\infty = \{x \in \lambda^\infty(A) \mid |x_j| \le |b_j|,\ \forall j \in \mathbb{N}_0\}$$

est un système fondamental de bornés de $\lambda^\infty(A)$.

(2) De même, la suite $(N_b^0)_{b\in\lambda^\infty(A)}$ *où*

$$N_b^0 = N_b^\infty \cap c_0(A)$$

forme un système fondamental de bornés de $c_0(A)$.

Définition 2.1.17. Soit $1 \le p \le \infty$. Un *opérateur diagonal* est un opérateur $T : l^p \to l^p$ défini par

$$T((x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}) = (\lambda_n x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$$

où $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ est une suite de scalaires bornée.

Le lemme qui suit est fondamental. Il permet de caractériser les matrices de Köthe pour lesquelles les espaces $\lambda^p(A)$ $(1 \le p \le \infty)$ et $c_0(A)$ sont de Schwartz ou Montel.

Lemme 2.1.18. *Soit* $1 \le p < \infty$, *si* $d \in l^\infty$, *on définit l'opérateur diagonal* D *de la façon suivante :*

$$D : l^p \to l^p : x \mapsto (\lambda_n x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}.$$

Si L *est un sous-espace de* l^∞ *tel que* $c_0 \subseteq L$ *et tel que pour tout* $l \in l^\infty$ *et* $x \in L$, *la suite* lx *appartient à* L. *Alors on pose*

$$\tilde{D} : L \to l^\infty : x \mapsto (\lambda_n x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}.$$

Les opérateurs D *et* $\tilde{D}$ *sont linéaire et continu. Ils sont de plus compact si, et seulement si* $d \in c_0$.

Démonstration. La linéarité de D et $\tilde{D}$ est évidente. De plus, soient $1 \le p < \infty$ et $x \in l^p$, alors

$$\|D(x)\|_{l^p} = \|\lambda x\|_{l^p} \le \underbrace{\|\lambda\|_{l^\infty}}_{<+\infty} \|x\|_{l^p},$$

donc D est continu. Il en est de même pour $\tilde{D}$ puisque

$$\|\tilde{D}(x)\|_{l^\infty} = \|\lambda x\|_{l^\infty} \le \underbrace{\|\lambda\|_{l^\infty}}_{<+\infty} \|x\|_{l^\infty}.$$

À présent, supposons que D est compact et montrons que cela implique que $\lambda \in c_0$. Fixons $1 \leq p \leq \infty$ et $\varepsilon > 0$. On définit $I_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid |\lambda_n| \geq \varepsilon\}$ et

$$T_\varepsilon : l^p \to l^p : x_n \mapsto \begin{cases} x_n \lambda_n^{-1} & \text{si } n \in I_\varepsilon \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On va montrer que I_ε est fini. Commençons par remarquer que T_ε est continu. En effet, on a

$$\|T_\varepsilon(x)\|_{l^p} = \|(x_n\lambda_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}_0}\|_{l^p} \leq \sup_{n\in I_\varepsilon} \underbrace{|\lambda_n^{-1}|}_{<\varepsilon\ \forall n\in I_\varepsilon} \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}\|_{l^p} < \varepsilon\|x\|_{l^p}.$$

Puisque la linéarité de T_ε est évidente, on en déduit que $T_\varepsilon \in L(l^p)$.

On définit alors P_ε et $\tilde{P}_\varepsilon$ respectivement par $P_\varepsilon = D \circ T_\varepsilon$ et $P_\varepsilon = \tilde{D} \circ T_\varepsilon$; $T_\varepsilon \in L(l^p)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ et D et $\tilde{D}$ sont compacts par hypothèses. Par la Proposition 1.5.6, P_ε et $\tilde{P}_\varepsilon$ sont des projections compactes dans l^p avec $1 \leq p < \infty$ et $p = \infty$ respectivement.

Par le Corollaire 1.5.14, il s'ensuit que $\dim(\ker(\mathrm{id} - P_\varepsilon)) < +\infty$. Or, $\ker(\mathrm{id} - P_\varepsilon) = \mathrm{Im}(P_\varepsilon)$, donc l'ensemble

$$\mathrm{Im}(P_\varepsilon) = \{x \in l^p \mid x_n = 0,\ \forall n \notin I_\varepsilon\}$$

est de dimension finie. Si I_ε n'est pas fini, soit $\phi : \mathbb{N}_0 \to I_\varepsilon$ la bijection croissante entre $\mathbb{N}_0$ et I_ε définie par $\phi(1) = \inf I_\varepsilon$ et

$$\phi(n+1) = \inf\{k \in I_\varepsilon : k > \phi(n)\},$$

pour tout $n > 1$. Soit alors l'isomorphisme $\psi : l^p(\mathbb{N}_0) \to l^p(I_\varepsilon)$ qui à x associe la suite y telle que $y_n = x_{\phi(n)}$. Enfin, considérons l'isomorphisme $\gamma : l^p(I_\varepsilon) \to \mathrm{Im}(P_\varepsilon)$ qui à x associe la suite y telle que

$$y_n = \begin{cases} x_n & \text{si } n \in I_\varepsilon \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par construction $\gamma \circ \psi$ est un isomorphisme entre $l^p(\mathbb{N}_0)$ et $\mathrm{Im}(P_\varepsilon)$, ce qui est absurde, ce dernier étant de dimension finie. Donc I_ε est fini et $\lambda \in c_0$.

En procédant de la même manière avec

$$\mathrm{Im}(\tilde{P}_\varepsilon) = \{x \in L \mid x_n = 0,\ \forall n \notin I_\varepsilon\},$$

on montre à nouveau que I_ε est fini et que $\lambda \in c_0$.

Réciproquement, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$\begin{aligned} D_n &: l^p \to l^p : (x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \mapsto ((\lambda_j x_j)_{j\leq n}, 0, \ldots) \\ \tilde{D}_n &: L \to L : (x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \mapsto ((\lambda_j x_j)_{j\leq n}, 0, \ldots), \end{aligned}$$

respectivement si $1 \leq p < \infty$ ou $p = \infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, D_n est un opérateur linéaire de rang fini, il est donc compact. De plus,

$$\|D - D_n\| = \sup_{\|x\|_{l^p}\leq 1} \|(\lambda_j x_j)_{j>n}\| \leq \sup_{j>n} |\lambda_j|.$$

Puisque $\lambda \in c_0$, en vertu du Corollaire 1.5.10, il s'ensuit que D est compact. On procède de manière analogue pour montrer que $\tilde{D}$ est compact.

□

Notation 2.1.19. Soit $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe. Si B est un ensemble borné et absolument convexe alors la jauge de Minkowski de p_B est une norme sur $\rangle B\langle$. On note $\rangle X\langle_B = (\rangle B\langle, p_B)$. Comme B est borné, l'injection canonique $j_B : \rangle X\langle_B \to X$ est continue.

Théorème 2.1.20 (Théorème de Dieudonné-Gomes)**.** *Soit A une matrice de Köthe. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) Il existe $1 \leq p \leq \infty$ tel que $\lambda^p(A)$ est un espace de Montel.

(2) Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, l'espace $\lambda^p(A)$ est un espace de Montel.

(3) Les espaces $\lambda^\infty(A)$ et $c_0(A)$ sont égaux.

(4) Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, $\lambda^p(A)$ n'admet aucun sous espace de dimension infinie.

(5) Pour tout sous-ensemble infini d'indices $I \subset \mathbb{N}_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, il existe $k \in \mathbb{N}_0$, tel que $\inf_{j\in I} a_{j,n} a_{j,k}^{-1} = 0$.

Démonstration. Évidement, (2) implique (1).

Montrons que (1) implique (3). Il suffit de montrer qu'il existe un point de $\lambda^\infty(A)$ qui appartient à $c_0(A)$. Soit $b \in \lambda^\infty(A)$, par le Lemme 2.1.13, on peut supposer que $|b_j| > 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$. Puisque $\lambda^p(A)$ est Montel, l'ensemble

$$B = \{x \in \lambda^p(A) \mid \|(x_j b_j^{-1})_{j\in\mathbb{N}_0}\|_{l^p} \leq 1\}$$

qui est borné (Proposition 2.1.15) est relativement compact dans $\lambda^p(A)$. Il s'ensuit que pour $k \in \mathbb{N}_0$, l'application $\mathrm{id}_k \circ j_B : \rangle\lambda^p(A))\langle_B \to (\lambda^p(A))_k$

est compacte. De plus, comme vu à la Remarque 2.1.11, on a $(\lambda^p(A))_k \subseteq l^p(N_k, a_k)$ où, sans perte de généralité, on peut supposer que $N_k = \mathbb{N}_0$. On pose alors

$$D_k : l^p \to l^p : x \mapsto (b_j a_{j,k} x_j)_{j\in\mathbb{N}_0} \tag{2.1}$$

$$A_k : l^p \to (\lambda^p(A))_B : x \mapsto (b_j x_j)_{j\in\mathbb{N}_0} \tag{2.2}$$

$$B_k : (\lambda^p(A))_k \to l^p : x \mapsto (a_{j,k} x_j)_{j\in\mathbb{N}_0} \tag{2.3}$$

Remarquons que $D_k = B_k \circ \mathrm{id}_k \circ j_B \circ A_k$ est compact en vertu de la Proposition 1.5.6. Par le Lemme 2.1.18, il s'ensuit que

$$\lim_{j\to+\infty} b_j a_{j,k} = 0.$$

Puisque $k \in \mathbb{N}_0$ est arbitraire, on en tire que $b \in c_0(A)$.

Passons à l'implication (3) $\Rightarrow$ (2). Puisque les espaces de suites $\lambda^p(A)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ sont des espaces de Fréchet, il suffit de montrer que tout borné de $\lambda^p(A)$ est relativement compact. Puisque les ensembles $(N_b^p)_{b\in\lambda^\infty(A)}$ définis à la Proposition 2.1.15 forment un système fondamental de borné de $\lambda^p(A)$, il suffit de le montrer pour $B = N_b^p$ avec $b \in \lambda^\infty(A)$. Pour un tel ensemble, puisque par hypothèse $c_0(A) = \lambda^\infty(A)$, le Lemme 2.1.18 implique que, pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, l'application (2.1) est compacte. Les applications (2.2) et (2.3) étant une bijection isométrique et une injection isométrique respectivement, la compacité de D_k implique que $\mathrm{id}_k \circ j_B$ est compact, quel que soit $k \in \mathbb{N}_0$. Et donc B est relativement compact dans $\lambda^p(A)$.

Ensuite, pour tout $1 \leq p \leq \infty$, si $\lambda^p(A)$ est de Montel, ses boules fermées sont précompactes. En vertu de la Proposition 1.5.11, $\lambda^p(A)$ n'admet pas de sous-espace de dimension finie. On a donc montré que (2) implique (4).

Montrons que (4) implique (5). Si $I \subsetneq \mathbb{N}_0$ et s'il existe $n \in \mathbb{N}_0$ tel que pour tout $m \geq n$, on a $\inf_{j\in I} a_{j,n} a_{j,m}^{-1} > 0$. Montrons que la topologie de $\lambda^p(A)$ et celle induite par la semi-norme $\|\cdot\|_n$ coïncident sur

$$E = \{x \in \lambda^p(A) \mid x_j = 0,\ \forall j \notin I\}.$$

Si $x \in E$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, $\|x\|_k = \|(x_j a_{j,k})_{j\in I}\|_{l^p(I)}$. Puisqu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $a_{j,n} > \varepsilon a_{j,m}$ quel que soit $j \in \mathbb{N}_0$ pour tout $m \geq n$, on a, pour un tel m,

$$\|x\|_n \leq \|x\|_m = \|(x_j a_{j,m})_{j\in I}\|_{l^p(I)} \leq \varepsilon \|(x_j a_{j,n})_{j\in I}\|_{l^p(I)} = \varepsilon \|x\|_n.$$

$$\begin{tikzcd}
(1) \arrow[r, Rightarrow] & (3) \arrow[dl, Rightarrow] & (5) \arrow[l, Rightarrow] \\
(2) \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & (4) \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

FIGURE 2.1 – Implications obtenues dans la démonstration du Théorème 2.1.20 (de Dieudonné-Gomes).

Cela étant, par hypothèse, $\dim(E) < +\infty$ et donc I est fini, ce qui implique (5).

Enfin montrons que (5) implique (3). On procède par l'absurde et on suppose qu'il existe $b \in \lambda^\infty(A) \setminus c_0(A)$. Il existe alors $n \in \mathbb{N}_0$, un ensemble d'indices $I \subseteq \mathbb{N}_0$ infini et $\varepsilon > 0$ tels que $|b_j| a_{j,n} \geq \varepsilon$, quel que soit $j \in I$. Puisque $b \in \lambda^\infty(A)$, par le Lemme 2.1.13, pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, il existe $C_k > 0$ tel que pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, on a $|b_j| a_{j,k} \leq C_k$. Il s'ensuit que pour tout $k \geq n$ et tout $j \in I$, on a

$$a_{j,k} \leq \frac{C_k}{|b_j|} \leq \frac{C_k}{\varepsilon} a_{j,n}.$$

Autrement dit, $\frac{\varepsilon}{C_k} \leq a_{j,n} a_{j,k}^{-1}$. Ce qui contredit (5). □

Théorème 2.1.21. *Soit A une matrice de Köthe. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) Il existe $p \in [0, \infty]$ tel que $\lambda^p(A)$ est un espace de Schwartz.

(2) Pour tout $p \in [0, \infty]$, l'espace $\lambda^p(A)$ est un espace de Schwartz.

(3) Pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, il existe $m \geq k$ tel que $\lim_{j \to +\infty} a_{j,k} a_{j,m}^{-1} = 0$.

Démonstration. Par la Remarque 2.1.11, pour tout $k \in \mathbb{N}_0$ et tout $1 \leq p < \infty$, on a que $(\lambda^p(A))_k = l^p(N_k, a_k)$. Sans perte de généralité, on peut supposer $N_k = \mathbb{N}_0$. Pour tout $m \geq k$, on définit les applications

$$D : l^p \to l^p : x \mapsto (x_j a_{j,k} a_{j,m}^{-1})_{j \in \mathbb{N}_0}$$

et

$$A_m : (\lambda^p(A))_m \to l^p : x \mapsto (x_j a_{j,m})_{j \in \mathbb{N}_0}.$$

Alors A_m est un isomorphisme isométrique entre $(\lambda^p(A))_m$ et l^p. De plus, $D = A_k \circ i_m^k \circ A_m^{-1}$. Si $p = \infty$, on considère $D : L \to l^p$ où $L := A_m((\lambda^p(A))_m)$.

Bien sûr, l'implication (2) $\Rightarrow$ (1) est triviale.

Montrons que (1) implique (3). Par le Lemme 1.5.15, on sait que pour tout $k \in \mathbb{N}_0$,
$$i_k : \lambda^p(A) \to (\lambda^p(A))_k$$
est compact. Il s'ensuit alors que pour tout $m \geq k$,
$$i_m^k : (\lambda^p(A))_m \to (\lambda^p(A))_k$$
est compact. En vertu de la Proposition 1.5.6, $D = A_k \circ i_m^k \circ A_m^{-1}$ est alors compact. Du Lemme 2.1.18, il vient que $\lim_{j\to+\infty} a_{j,k}a_{j,m}^{-1} = 0$.

On montre à présent que (3) implique (2). Soient $1 \leq p \leq \infty$ et des naturels k et m satisfaisant la condition de l'énoncé. Alors, par le Lemme 2.1.18, $D = A_k \circ i_m^k \circ A_m^{-1}$ est compact et donc $i_m^k : (\lambda^p(A))_m \to (\lambda^p(A))_k$ l'est aussi. Il s'ensuit que $\lambda^p(A)$ est de Schwartz. $\square$

2.2 Construction de l'exemple

Dans cette section, on présente un exemple de matrice de Köthe telle que pour tout $1 \leq p \leq \infty$, $\lambda^p(A)$ est Montel mais pas Schwartz. Pour rappel, au Lemme 2.1.8, nous avons montré que les $\lambda^p(A)$ où A est une matrice de Köthe forment des espaces de Fréchet.

Exemple 2.2.1. On définit la matrice $A = (a_{i,j;k})_{(i,j\in\mathbb{N}_0),k\in\mathbb{N}_0}$ comme suit
$$a_{i,j;k} = \begin{cases} (ki)^k & j < k, i \in \mathbb{N}_0, \\ k^j & j \geq k, i \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

Puisque $\mathbb{N}_0$ est en bijection avec $\mathbb{N}_0^2$, étant donné une suite triple (i.e. triplement indicée) $(a_{i,j,k})_{(i,j\in\mathbb{N}_0),k\in\mathbb{N}_0}$, on peut lui associer de manière univoque une suite double $(a'_{j,k})_{j,k\in\mathbb{N}_0}$. On peut par exemple utiliser la bijection relative à l'énumération de Cantor définie comme suit :
$$\phi : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0 \quad (i,j) \mapsto \frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + i$$
On peut alors poser
$$a'_{j,k} = a_{\phi^{-1}(j),k} \quad \forall j,k \in \mathbb{N}_0.$$

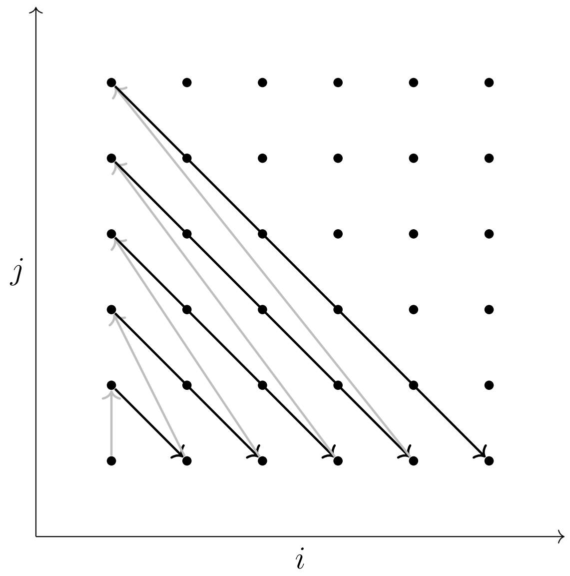

Figure 2.2 – Illustration de l'énumération de Cantor.

Il est évident que A est une matrice de Köthe. De plus, pour tous indices $i, j, k, m \in \mathbb{N}_0$ tels que $m > k$,

$$\frac{a_{i,j;k}}{a_{i,j;m}} = \left(\frac{k}{m}\right)^j$$

quel que soit $j > m$. Ce rapport ne dépendant pas de $i \in \mathbb{N}_0$, pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, il existe une infinité de couples $(i,j) \in \mathbb{N}_0^2$ tels que

$$\frac{a_{i,j;k}}{a_{i,j;m}} > \varepsilon.$$

$$\begin{pmatrix}
a_{1,1;1} & a_{1,1;2} & a_{1,1;3} & a_{1,1;4} & a_{1,1;5} & a_{1,1;6} & a_{1,1;7} & a_{1,1;8} & a_{1,1;9} & a_{1,1;10} & \cdots \\
a_{1,2;1} & a_{1,2;2} & a_{1,2;3} & a_{1,2;4} & a_{1,2;5} & a_{1,2;6} & a_{1,2;7} & a_{1,2;8} & a_{1,2;9} & a_{1,2;10} & \cdots \\
a_{2,1;1} & a_{2,1;2} & a_{2,1;3} & a_{2,1;4} & a_{2,1;5} & a_{2,1;6} & a_{2,1;7} & a_{2,1;8} & a_{2,1;9} & a_{2,1;10} & \cdots \\
a_{1,3;1} & a_{1,3;2} & a_{1,3;3} & a_{1,3;4} & a_{1,3;5} & a_{1,3;6} & a_{1,3;7} & a_{1,3;8} & a_{1,3;9} & a_{1,3;10} & \cdots \\
a_{2,2;1} & a_{2,2;2} & a_{2,2;3} & a_{2,2;4} & a_{2,2;5} & a_{2,2;6} & a_{2,2;7} & a_{2,2;8} & a_{2,2;9} & a_{2,2;10} & \cdots \\
a_{3,1;1} & a_{3,1;2} & a_{3,1;3} & a_{3,1;4} & a_{3,1;5} & a_{3,1;6} & a_{3,1;7} & a_{3,1;8} & a_{3,1;9} & a_{3,1;10} & \cdots \\
a_{1,4;1} & a_{1,4;2} & a_{1,4;3} & a_{1,4;4} & a_{1,4;5} & a_{1,4;6} & a_{1,4;7} & a_{1,4;8} & a_{1,4;9} & a_{1,4;10} & \cdots \\
a_{2,3;1} & a_{2,3;2} & a_{2,3;3} & a_{2,3;4} & a_{2,3;5} & a_{2,3;6} & a_{2,3;7} & a_{2,3;8} & a_{2,3;9} & a_{2,3;10} & \cdots \\
a_{3,2;1} & a_{3,2;2} & a_{3,2;3} & a_{3,2;4} & a_{3,2;5} & a_{3,2;6} & a_{3,2;7} & a_{3,2;8} & a_{3,2;9} & a_{3,2;10} & \cdots \\
a_{4,1;1} & a_{4,1;2} & a_{4,1;3} & a_{4,1;4} & a_{4,1;5} & a_{4,1;6} & a_{4,1;7} & a_{4,1;8} & a_{4,1;9} & a_{4,1;10} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix}$$

Figure 2.3 – Une matrice de Köthe à trois indices (100 premiers éléments) dont les éléments ont été ordonnés grâce à l'énumération de Cantor.

$$\begin{pmatrix}
1^1 & (2\cdot 1)^2 & (3\cdot 1)^3 & (4\cdot 1)^4 & (5\cdot 1)^5 & (6\cdot 1)^6 & (7\cdot 1)^7 & (8\cdot 1)^8 & (9\cdot 1)^9 & (10\cdot 1)^{10} & \cdots \\
1^2 & 2^2 & (3\cdot 1)^3 & (4\cdot 1)^4 & (5\cdot 1)^5 & (6\cdot 1)^6 & (7\cdot 1)^7 & (8\cdot 1)^8 & (9\cdot 1)^9 & (10\cdot 1)^{10} & \cdots \\
1^1 & (2\cdot 2)^2 & (3\cdot 2)^3 & (4\cdot 2)^4 & (5\cdot 2)^5 & (6\cdot 2)^6 & (7\cdot 2)^7 & (8\cdot 2)^8 & (9\cdot 2)^9 & (10\cdot 2)^{10} & \cdots \\
1^3 & 2^3 & 3^3 & (4\cdot 1)^4 & (5\cdot 1)^5 & (6\cdot 1)^6 & (7\cdot 1)^7 & (8\cdot 1)^8 & (9\cdot 1)^9 & (10\cdot 1)^{10} & \cdots \\
1^2 & 2^2 & (3\cdot 2)^3 & (4\cdot 2)^4 & (5\cdot 2)^5 & (6\cdot 2)^6 & (7\cdot 2)^7 & (8\cdot 2)^8 & (9\cdot 2)^9 & (10\cdot 2)^{10} & \cdots \\
1^1 & (2\cdot 3)^2 & (3\cdot 3)^3 & (4\cdot 3)^4 & (5\cdot 3)^5 & (6\cdot 3)^6 & (7\cdot 3)^7 & (8\cdot 3)^8 & (9\cdot 3)^9 & (10\cdot 3)^{10} & \cdots \\
1^4 & 2^4 & 3^4 & 4^4 & (5\cdot 1)^5 & (6\cdot 1)^6 & (7\cdot 1)^7 & (8\cdot 1)^8 & (9\cdot 1)^9 & (10\cdot 1)^{10} & \cdots \\
1^3 & 2^3 & 3^3 & (4\cdot 2)^4 & (5\cdot 2)^5 & (6\cdot 2)^6 & (7\cdot 2)^7 & (8\cdot 2)^8 & (9\cdot 2)^9 & (10\cdot 2)^{10} & \cdots \\
1^2 & 2^2 & (3\cdot 3)^3 & (4\cdot 3)^4 & (5\cdot 3)^5 & (6\cdot 3)^6 & (7\cdot 3)^7 & (8\cdot 3)^8 & (9\cdot 3)^9 & (10\cdot 3)^{10} & \cdots \\
1^1 & (2\cdot 4)^2 & (3\cdot 4)^3 & (4\cdot 4)^4 & (5\cdot 4)^5 & (6\cdot 4)^6 & (7\cdot 4)^7 & (8\cdot 4)^8 & (9\cdot 4)^9 & (10\cdot 4)^{10} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix}$$

FIGURE 2.4 – Matrice de Köthe (100 premiers éléments) de l'Exemple 2.2.1. Les éléments ont été ordonnés grâce à l'énumération de Cantor.

Il s'ensuit que la condition (3) du Théorème 2.1.21 n'est pas satisfaite et donc $\lambda^p(A)$ n'est pas un espace de Schwartz.

Montrons à présent que $\lambda^p(A)$ est un espace de Montel. Étant donné $n \in \mathbb{N}_0$, soit $I \subseteq \mathbb{N}_0^2$, tel que pour tout $k \geq n$,

$$\inf_{(i,j)\in I} a_{i,j;n}a_{i,j;k}^{-1} > 0.$$

Vu la condition (5) du Théorème de Dieudonné-Gomes 2.1.20, il nous faut montrer qu'un tel I est nécessairement fini. Posons $\varepsilon_k = \inf_{(i,j)\in I} a_{i,j;n}a_{i,j;k}^{-1}$.

Montrons que I est fini ; on peut dès lors le supposer non vide. Si $k = n+1$ alors pour tout $(i,j) \in I$ tel que $j \geq n+1$, on a

$$\varepsilon_{n+1} \leq a_{i,j;n}a_{i,j;n+1}^{-1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^j.$$

Puisque $(\frac{n}{n+1})^j \to 0$ lorsque $j \to +\infty$ et que $\varepsilon_{n+1} > 0$, il existe $j_0 \in \mathbb{N}_0$ tel que $I \subseteq \mathbb{N}_0 \times \{1, \ldots, j_0\}$.

Soit j tel que $1 \leq j \leq j_0$ et $k > \sup\{j,n\}$. Pour $(i,j) \in I$, on doit avoir

$$\varepsilon_k \leq \begin{cases} a_{i,j;n}a_{i,j;k}^{-1} = \frac{(ni)^n}{(ki)^k} = \frac{n^n}{k} i^{n-k}, & \forall j < n, \\ a_{i,j;n}a_{i,j;k}^{-1} = \frac{n^j}{(ki)^k}, & \forall j \geq n. \end{cases}$$

Puique $n-k<0$, $n^n i^{n-k}/k$ et $n^j/(ki)^k$ tendent tous les deux vers 0 lorsque i tend vers l'infini, l'ensemble des nombres i tels que $(i,j) \in I$ est fini ; il existe donc $i_j \in \mathbb{N}_0$ tels qu'un tel i appartient à $\{1, \ldots, i_j\}$. Au total, on a

$$I \subset \bigcup_{\substack{1 \leq j \leq j_0 \\ 1 \leq i \leq i_j}} (i, j).$$

Ainsi, I comporte au plus $j_0 i_0$ éléments, avec $i_0 = \sup_{1 \leq j \leq j_0} i_j$. Ceci implique que I est fini.

Chapitre 3

Construction à partir d'un espace de Fréchet-Montel

Dans ce chapitre, nous abordons la construction d'espaces de Fréchet-Montel qui ne sont pas des espaces de Schwartz via un article de K. Floret [6]. Le résultat étudié ici a permis à J. Kakol et S. A. Saxon d'affiner des résultats concernant les espaces de suites [11]. Une application plus pratique réside dans l'étude [1].

3.1 Une famille de contre-exemples

Dans ce chapitre, nous travaillerons exclusivement avec une espace de Fréchet-Montel $(F, \mathcal{P})$ tel que

$$\dim(F/\ker p_1) = +\infty.$$

Bien que cette condition puisse sembler artificielle, elle est en réalité satisfaite pour la plupart des espaces fonctionnels usuels [6]. On peut citer à titre d'exemple tout espace de dimension infinie où p_1 est une norme.

Notation 3.1.1. Pour tout $n, k \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$p_{n,k} = \begin{cases} p_k \text{ si } k \geq n, \\ p_n \text{ sinon,} \end{cases}$$

Proposition 3.1.2. *L'application définie à la Notation 3.1.1 est une semi-norme. De plus, pour tous $k, n \in \mathbb{N}_0$, on a*

$$p_{n,k} \leq p_{n,k+1}.$$

Démonstration. La première partie est immédiate. Ensuite, fixons $n \in \mathbb{N}_0$. Par croissance des semi-normes $p_j \in \mathcal{P}$ et par définition, on a

$$p_{n,k} = \begin{cases} p_k \text{ si } k \geq n \\ p_n \text{ sinon} \end{cases} \leq \begin{cases} p_{k+1} \text{ si } k+1 \geq n \\ p_n \text{ sinon} \end{cases} = p_{n,k+1}. \tag{3.1}$$

□

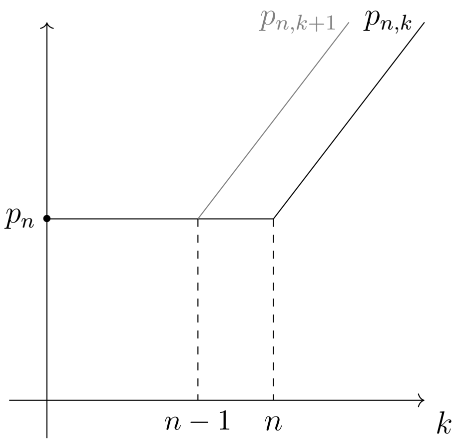

FIGURE 3.1 – Illustration figurée de la majoration (3.1) en fonction de k pour un certain n fixé : en gris est représenté $p_{n,k+1}$ et en noir $p_{n,k}$.

On définit alors l'application suivante.

Définition 3.1.3. Pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, on définit

$$q_k : F^{\mathbb{N}_0} \to [0, +\infty] : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n^k p_{n,k}(x_n).$$

De plus, on note $\mathcal{Q} = \{q_k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$.

Proposition 3.1.4. *Soient $q_k \in \mathcal{Q}$ et $p_k \in \mathcal{P}$. Soit $x \in F^{\mathbb{N}_0}$; pour toute composante $j \in \mathbb{N}_0$, on a*

$$q_k(x) \geq p_k(x_j).$$

Démonstration. Fixons $k \in \mathbb{N}_0$ et soit $x \in F^{\mathbb{N}_0}$. On trouve successivement

$$\begin{aligned} q_k(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n^k p_{n,k}(x_n) \\ &= \sum_{n=1}^{k} n^k p_k(x_n) + \sum_{n=k+1}^{+\infty} n^k p_n(x_n) \\ &\geq \begin{cases} j^k p_k(x_j) \geq p_k(x_j) & \text{si } j \leq k, \\ j^k p_j(x_j) \geq p_k(x_j) & \text{si } j > k. \end{cases} \end{aligned}$$

Et donc

$$q_k(x) \geq p_k(x_j),$$

quelle que soit la composante j considérée. □

On définit ensuite l'ensemble E comme suit.

Définition 3.1.5. Étant donné $(F, \mathcal{P})$, l'espace E associé est l'espace

$$E = \{x \in F^{\mathbb{N}_0} \mid q_k(x) < +\infty, \ \forall k \in \mathbb{N}_0\}.$$

où $q_k \in \mathcal{Q}$ pour tout $k \in \mathbb{N}_0$.

Proposition 3.1.6. *L'espace* $(E, \mathcal{Q})$ *est un espace vectoriel.*

Démonstration. Fixons $k \in \mathbb{N}_0$. Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, il vient naturellement

$$q_k(\lambda x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^k p_{n,k}(\lambda x_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^k |\lambda| p_{n,k}(x_n) = |\lambda| q_k(x) < +\infty.$$

De plus,

$$\begin{aligned} q_k(x+y) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n^k p_{n,k}(x_n + y_n) \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} n^k \left(p_{n,k}(x_n) + p_{n,k}(y_n)\right) \\ &= q_k(x) + q_k(y) \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

Où on a utilisé le fait que $p_{n,k}$ est une semi-norme. Au total, E est de type vectoriel et q_k y définit une semi-norme quel que soit $k \in \mathbb{N}_0$. □

Proposition 3.1.7. *L'espace* $(E, \mathcal{Q})$ *est un espace de Fréchet.*

Démonstration. Tout d'abord, montrons que $(E, \mathcal{Q})$ est séparé. Soit $x \in E$ et supposons que $q_k(x) = 0$ quel que soit $q_k \in \mathcal{Q}$. Montrons alors que x est la suite nulle. Fixons $n \in \mathbb{N}_0$; par la Proposition 3.1.4, on sait que

$$q_l(x) \geq p_l(x_n), \quad \forall l \in \mathbb{N}_0.$$

Vu que $q_l(x)$ est nul, on en tire que $p_l(x_n) = 0$ quel que soit $l \in \mathbb{N}_0$. Or, $(F, \mathcal{P})$ est séparé puisqu'il est de Fréchet. La Proposition 1.2.1 implique alors que $x_n = 0$. Au total, x est la suite nulle.

Ensuite, la suite des semi-normes $(q_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ est croissante. En effet, considérons $x \in E$; on a

$$\begin{aligned} q_{k+1}(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n^{k+1} p_{n,k+1}(x_n) \\ &= \sum_{n=1}^{k+1} n^{k+1} p_{n,k+1}(x_n) + \sum_{n=k+2}^{+\infty} n^{k+1} p_{n,k+1}(x_n) \\ &= \sum_{n=1}^{k} n^{k+1} p_{k+1}(x_n) + (k+1)^{k+1} p_{k+1}(x_{k+1}) + \sum_{n=k+2}^{+\infty} n^{k+1} p_n(x_n) \end{aligned}$$

Or, par hypothèse $p_j \leq p_{j+1}$ quel que soit $j \in \mathbb{N}_0$. Il vient alors

$$\begin{aligned} q_{k+1}(x) &\geq \sum_{n=1}^{k} n^k p_k(x_n) + \sum_{n=k+1}^{+\infty} n^k p_n(x_n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n^k p_{n,k}(x_n) = q_k(x). \end{aligned}$$

La croissance est ainsi démontrée.

Enfin, montrons que $(E, \mathcal{Q})$ est complet. Soit $\xi = (\xi^{(n)})_{n \in \mathbb{N}_0}$ une suite de Cauchy d'éléments de E. Tout d'abord, montrons que, pour toute composante $j \in \mathbb{N}_0$, la suite $(\xi_j^{(n)})_{n \in \mathbb{N}_0}$ d'éléments de F est de Cauchy dans F. Dans ce cas, puisque par hypothèse $(F, \mathcal{P})$ est de Fréchet, il existe $\xi_j^{(0)} \in F$ tel que $\xi_j^{(n)} \to \xi_j^{(0)}$ dans F lorsque $n \to +\infty$.

Fixons $k \in \mathbb{N}_0$. Par la Proposition 3.1.4, on a

$$q_k(\xi^{(n)} - \xi^{(n')}) \geq p_k(\xi_j^{(n)} - \xi_j^{(n')}).$$

Ce qui montre que la suite $(\xi_j^{(n)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ est de Cauchy dans F puisque $(\xi^{(n)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ est de Cauchy dans E.

Il reste alors à montrer que $(\xi^{(n)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ converge vers $(\xi_j^{(0)})_{j\in\mathbb{N}_0} := \xi^{(0)}$ dans E. Soient $k \in \mathbb{N}_0$ et $\varepsilon > 0$; puisque $(\xi^{(n)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ est de Cauchy dans E, il existe $N \in \mathbb{N}_0$ tels que pour tous $r, s \geq N$, on a

$$q_k(\xi^{(r)} - \xi^{(s)}) \leq \varepsilon.$$

De plus,

$$\begin{aligned} q_k(\xi^{(r)} - \xi^{(s)}) &= \sum_{j=1}^{k} j^k p_k(\xi_j^{(r)} - \xi_j^{(s)}) + \sum_{j=k+1}^{+\infty} j^k p_n(\xi_j^{(r)} - \xi_j^{(s)}) \\ &\geq \sum_{j=1}^{k} j^k p_k(\xi_j^{(r)} - \xi_j^{(s)}) + \sum_{j=k+1}^{J} j^k p_n(\xi_j^{(r)} - \xi_j^{(s)}) \end{aligned}$$

quels que soient $r, s \geq N$ et $J \geq k+1$. En passant à la limite sur s, on trouve alors

$$\sum_{j=1}^{k} j^k p_k(\xi_j^{(r)} - \xi_j^{(0)}) + \sum_{j=k+1}^{J} j^k p_n(\xi_j^{(r)} - \xi_j^{(0)}) \leq \varepsilon, \quad \forall r \geq N \text{ et } J \geq k+1.$$

La limite sur J donne enfin

$$q_k(\xi^{(r)} - \xi^{(0)}) \leq \varepsilon, \quad \forall r \geq N.$$

Et donc ξ converge dans $(E, \mathcal{Q})$. □

Nous abordons à présent le résultat principal de cette section : $(E, \mathcal{Q})$ n'est pas de Schwartz. Dans [6], K. Floret donne une définition alternative de tels espaces. Commençons par démontrer que celle-ci est équivalente à celle proposée à la Définition 1.2.7.

Définition 3.1.8. Soient X, Y des espaces localement convexes séparés. Un opérateur linéaire $T : X \to Y$ est dit *précompact* s'il existe une semi-boule B de X telle que $T(B)$ est un précompact de Y.

Proposition 3.1.9. *Soit $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexes ; $(X, \mathcal{P})$ est de Schwartz si, et seulement si pour tout $p \in \mathcal{P}$, il existe $q \in \mathcal{P}$ distinct de p tel que l'application*

$$\mathrm{id}_X : (X, q) \to (X, p) \tag{3.2}$$

est précompacte.

Démonstration. Supposons que $(X, \mathcal{P})$ est un espace de Schwartz et considérons $p \in \mathcal{P}$. Par définition, il existe $q \in \mathcal{P}$ tel que la semi-boule B_q est précompacte par rapport à la semi-boule B_p. Autrement dit, B_q est précompact par rapport à p, ce qui signifie que (3.2) est précompact.

Inversement, soit $p \in \mathcal{P}$ et (3.2) précompact. Alors, il existe $q \in \mathcal{P}$ tel que la semi-boule B_q est précompacte par rapport à p i.e. B_q est précompact par rapport à B_p. □

Notation 3.1.10. Soit $(F, \mathcal{P})$. Il est clair que $\ker p_m = \{x \in F \mid p_m(x) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel fermé de F quel que soit $m \in \mathbb{N}_0$. Considérons alors $F/\ker p_m$ (toujours pour $m \in \mathbb{N}_0$) et définissons l'application

$$\tilde{p}_m : F/\ker p_m \to [0, +\infty[: [x] \mapsto p_m(x), \tag{3.3}$$

où $[x]$ désigne la classe associée à $x \in F$. Par construction, $(F/\ker p_m, \tilde{p}_m)$ est un espace normé ($\tilde{p}_m$ est appelée la *norme induite*). Appelons τ la surjection linéaire

$$\tau : (F, p_m) \to (F/\ker p_m, \tilde{p}_m) : x \to [x].$$

Si E est une partie de F, nous noterons $\tilde{E}$ l'ensemble $\tau(E)$. On vérifie trivialement que si B_{p_m} est une boule unité de F alors $\tilde{B}_{p_m}$ est une boule unité de $F/\ker p_m$, puisque

$$\tilde{B}_{p_m} = \{[x] \in F/\ker p_m \mid \tilde{p}_m([x]) < 1\}.$$

Proposition 3.1.11. *L'espace $(E, \mathcal{Q})$ n'est pas de Schwartz.*

Démonstration. Procédons par l'absurde et supposons que $(E, \mathcal{Q})$ est de Schwartz. La caractérisation 3.1.9 implique pour tout $l \in \mathbb{N}_0$, il existe $m \in \mathbb{N}_0$ de sorte que

$$id_E : (E, q_m) \to (E, q_l) \tag{3.4}$$

est précompact. Remarquons que, lorsque $m > l$, la projection π_m de (3.4) est l'identité

$$\underline{\mathrm{id}_F} : (F, m^m p_m) \to (F, m^l p_m). \tag{3.5}$$

En effet, le $m^{\text{ème}}$ terme général de la série

$$q_m = \sum_{n=1}^{+\infty} m^n p_{n,m}$$

est donné par $m^m p_m$ tandis que son $l^{\text{ème}}$ terme général vaut $m^l p_m$ pour $m > l$.

Montrons que si (3.5) est précompact alors l'identité entre les espaces quotients $(F/\ker p_m, m^m\tilde{p}_m)$ et $(F/\ker p_m, m^l\tilde{p}_m)$ l'est aussi. Soit B_{p_m} une semi-boule unité de de F. Par précompacité de $\underline{\mathrm{id}_F}$, B_{p_m} est précompact par rapport à p_m. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $B_{p_m} \subseteq B_{p_m}(\varepsilon) + M_\varepsilon$, avec $M_\varepsilon \subseteq F$ fini. En appliquant la surjection linéaire τ, on obtient

$$\tilde{B}_{p_m} \subseteq \tilde{B}_{p_m}(\varepsilon) + \tilde{M}_\varepsilon.$$

Autrement dit, $\tilde{B}_{p_m}$ est précompact pour $\tilde{p}_m$ dans $F/\ker p_m$.

Puisque $\tilde{p}_m$ est une norme sur $F/\ker p_m$, le théorème de Riesz implique que $\dim F/\ker p_m$ est de dimension finie. Or, par hypothèse sur $(F, \mathcal{P})$,

$$\dim F/\ker p_m \geq \dim F/\ker p_1 = +\infty.$$

Ainsi, l'identité entre $(F/\ker p_m, m^m\tilde{p}_m)$ et $(F/\ker p_m, m^l\tilde{p}_m)$ ne peut être précompacte. Cette contradiction montre que $(E, \mathcal{Q})$ n'est pas de Schwartz. $\square$

Enfin, on montre que $(E, \mathcal{Q})$ est un espace de Montel.

Lemme 3.1.12. *Pour tout $J \in \mathbb{N}_0$, soit*

$$\phi_J : E \to E : x \mapsto (x_1, \ldots, x_J, 0, \ldots)\ ;$$

alors, pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, on a

$$q_k(x - \phi_J(x)) \leq \frac{1}{J} q_{k+1}(x),$$

quel que soit $x \in E$.

Démonstration. En effet, on a

$$\begin{aligned}
q_k(x - \phi_J(x)) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n^k p_{n,k}(x_n - \phi_J(x_n)) \\
&= \sum_{n=J+1}^{+\infty} n^k p_{n,k}(x_n) \\
&\leq \sum_{n=J+1}^{+\infty} n^k p_{n,k+1}(x_n) \qquad (3.6) \\
&= \sum_{n=J+1}^{+\infty} \frac{n^{k+1}}{n} p_{n,k+1}(x_n) \\
&\leq \frac{1}{J} \sum_{n=J+1}^{+\infty} n^{k+1} p_{n,k+1}(x_n) \\
&\leq \frac{1}{J} q_{k+1}(x),
\end{aligned}$$

où (3.6) est justifié par la Proposition 3.1.2. □

Proposition 3.1.13. *L'espace* $(E, \mathcal{Q})$ *est un espace de Montel.*

Démonstration. Il faut montrer que E est tonnelé et que tous ses bornés sont relativement compacts. La première condition est satisfaite par le Corollaire 1.2.18 puisqu'il a été démontré que $(E, \mathcal{Q})$ est un espace de Fréchet (Proposition 3.1.7).

De plus, $(E, \mathcal{Q})$ étant un espace de Fréchet, ses bornés sont relativement compacts si, et seulement s'ils sont précompacts. Soit $D \subseteq E$ borné ; montrons qu'il est précompact. Soient $k \in \mathbb{N}_0$ et $\varepsilon > 0$. Par définition, D est borné dans E ; il existe donc $C > 0$ tel que

$$\sup_{x \in D} q_{k+1}(x) < C.$$

Soit alors $n_0 \in \mathbb{N}_0$ tel que

$$\sup_{x \in D} q_{k+1}(x) < n_0 \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par le Lemme 3.1.12, pour tout $x \in D$, on a

$$q_k(x - \phi_{n_0}(x)) \leq \frac{1}{n_0} q_{k+1}(x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc

$$D \subseteq \phi_{n_0}(D) + (\mathrm{id} - \phi_{n_0})(D) \subseteq \phi_{n_0}(D) + \{x \in D \mid q_k(x) \leq \frac{\varepsilon}{2}\}.$$

Pour conclure, il suffit de montrer que $\phi_{n_0}(D)$ est précompact. Soit la projection

$$\pi_{n_0} : \phi_{n_0}(E) \to F^{n_0} : (x_1, \ldots, x_{n_0}, 0, \ldots) \mapsto (x_1, \ldots, x_{n_0}).$$

C'est un isomorphisme entre $\phi_{n_0}(E)$ et F^{n_0}. En effet, l'injectivité de π_{n_0} est directe, puisqu'on a

$$\pi_{n_0}(x_1, \ldots, x_{n_0}, 0, \ldots) = \pi_{n_0}(x'_1, \ldots, x'_{n_0}, 0, \ldots) \Leftrightarrow x_1 = x'_1, ..., x_{n_0} = x'_{n_0}.$$

Pour la surjectivité, remarquons que pour tout $(x_1, ..., x_{n_0}) \in F^{n_0}$, il suffit de prendre $(x_1, \ldots, x_{n_0}, 0, \ldots) \in \phi_{n_0}(E)$ comme élément du domaine. Montrons la continuité de π_{n_0}. Soit $(x^{(j)})_{j \in \mathbb{N}_0}$ une suite d'éléments de $\phi_{n_0}(E)$ qui converge vers $x^{(0)}$ dans E. Pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, on a $\lim_{j \to +\infty} q_k(x^{(j)} - x^{(0)}) = 0$

et donc $\lim_{j\to+\infty} p_k(x_n^{(j)} - x_n^{(0)}) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, ce qui montre que $x^{(0)}$ appartient à $\phi_{n_0}(E)$ et que $(\pi_{n_0}(x^{(j)}))_{j\in\mathbb{N}_0}$ converge vers $\pi_{n_0}(x^{(0)})$ dans F^{n_0}. Inversement, si $(y^{(j)})_{j\in\mathbb{N}_0}$ converge vers $y^{(0)}$ dans F^{n_0}, posons $x^{(j)} = \pi_{n_0}^{-1}(y^{(j)})$ et $x^{(0)} = \pi_{n_0}^{-1}(y^{(0)})$. Pour $k \geq n_0$, on a

$$q_k(x^{(j)} - x^{(0)}) = \sum_{n=1}^{n_0} n^k p_k(x_n^{(j)} - x_n^{(0)}) \leq n_0^{n_0+1} \sup_{1\leq n\leq n_0} p_k(x_n^{(j)} - x_n^{(0)}),$$

ce qui implique $\lim_{j\to+\infty} q_k(x^{(j)} - x^{(0)}) = 0$. Pour $k < n_0$, on a

$$q_k(x^{(j)} - x^{(0)}) = \sum_{n=1}^{k} n^k p_k(x_n^{(j)} - x_n^{(0)}) + \sum_{n=k+1}^{n_0} n^k p_n(x_n^{(j)} - x_n^{(0)}),$$

avec

$$\begin{aligned}\sum_{n=k+1}^{n_0} n^k p_n(x_n^{(j)} - x_n^{(0)}) &\leq n_0^{n_0+1} \sup_{1\leq n\leq n_0} p_n(x_n^{(j)} - x_n^{(0)})\\ &\leq n_0^{n_0+1} \sup_{1\leq n\leq n_0} p_{n_0}(x_n^{(j)} - x_n^{(0)}),\end{aligned}$$

ce qui implique également $\lim_{j\to+\infty} q_k(x^{(j)} - x^{(0)}) = 0$ dans ce cas. La suite $(x^{(j)})_{j\in\mathbb{N}_0}$ converge donc vers $x^{(0)}$ dans $\phi_{n_0}(E)$. Nous venons de montrer que $(\phi_{n_0}(E), \mathcal{Q})$ est isomorphe à $(F^{n_0}, \mathcal{P}')$ où $\mathcal{P}'$ est le système de semi-normes du produit.

Puisque $(F^{n_0}, \mathcal{P}')$ est un espace de Montel, en vertu de la Proposition 1.3.6, il s'ensuit que le borné $\pi_{n_0}(\phi_{n_0}(D))$ est précompact dans F^{n_0}. Par isomorphisme, $\phi_{n_0}(D)$ est précompact dans $\phi_{n_0}(E)$. Ce qui termine la démonstration. $\square$

Chapitre 4

Construction à partir d'un opérateur linéaire fermé

Au premier chapitre, nous avons vu qu'une méthode classique permettant de générer des espaces de Fréchet consiste à considérer la limite projective d'espaces de Banach. C'est sur base de ce résultat que l'on présente ici une nouvelle méthode systématique permettant de construire des espaces de Fréchet-Montel qui ne sont pas Schwartz. On s'appuie sur le travail de V. Wrobel dans [17].

4.1 Opérateurs fermés et densément définis

Définition 4.1.1. Soient $(X, \mathcal{P})$ et $(Y, \mathcal{Q})$ des espaces localement convexes ; $T : X \to Y$ est *relativement ouvert* si l'image de tout ouvert de X est un ouvert de $\mathrm{Im}(T)$. Il est *ouvert* s'il est relativement ouvert et surjectif.

Théorème 4.1.2 (Théorème de l'opérateur ouvert)**.** *Soient $(X, \mathcal{P})$ et $(Y, \mathcal{Q})$ deux espaces de Fréchet et $T \in L(X, Y)$. Si T est surjectif, alors T est ouvert.*

Démonstration. Le lecteur peut consulter [2]. □

Corollaire 4.1.3. *Soient $(X, \mathcal{P}), (Y, \mathcal{Q})$ des espaces de Fréchet et $T : X \to Y$ une application linéaire continue. Alors*

(1) si T est surjectif alors T est ouvert,

(2) si T est bijectif alors T est un homéomorphisme.

Démonstration. Le premier résultat est évident puisque $T(X) = Y$ qui est fermé dans $(Y, \mathcal{Q})$. La seconde découle de la première et du fait qu'une application est un homéomorphisme si, et seulement si elle est bijective et ouverte. □

Définition 4.1.4. Soient $(X, \mathcal{P})$ et $(Y, \mathcal{Q})$ des espaces localement convexes ; $T : X \to Y$ est *fermé* si son graphe $G_T = \{(x, T(x)) \mid x \in X\}$ est fermé dans $(X \times Y, \mathcal{P}_{X \times Y})$.

Théorème 4.1.5 (Théorème du graphe fermé)**.** *Soient $(X, \mathcal{P}), (Y, \mathcal{Q})$ des espaces de Fréchet et $T : X \to Y$ une application linéaire ; T est continu si, et seulement si G_T est fermé.*

Démonstration. Montrons que la condition est nécessaire et considérons une suite $(x_n, T(x_n))_{n \in \mathbb{N}_0}$ qui converge vers (x, y) dans $X \times Y$. Puisque les projections canoniques sont continues, les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ et $(T(x_n))_{n \in \mathbb{N}_0}$ convergent vers x dans X et y dans Y respectivement. Or, par continuité de T, on a $(T(x_n))_n \to T(x)$ dans Y. Puisque $(Y, \mathcal{Q})$ est séparé, l'unicité de la limite implique que $T(x) = y$. Ainsi G_T contient la limite de ses suites convergentes. Il est donc fermé.

La condition est suffisante. On sait déjà que $X \times Y$ muni de la topologie produit est un espace de Fréchet. De plus, par définition de la topologie produit, les projections canoniques

$$\pi_X : X \times Y \to X : (x, y) \mapsto x$$

et

$$\pi_Y : X \times Y \to X : (x, y) \mapsto y.$$

sont continues. La restriction $\pi_{X|G_T}$ à G_T est un injective et donne une bijection continue de G_T dans X. Comme G_T est un sous-espace fermé du produit $X \times Y$, c'est un espace de Fréchet. Ainsi par le Corollaire 4.1.3, $\pi_{X|G_T}$ un homéomorphisme et donc $(\pi_{X|G_T})^{-1}$ est continu. Pour conclure, il suffit de remarquer que T est la composée d'applications continues. En effet, $T = \pi_Y \circ i \circ (\pi_{X|G_T})^{-1}$ où

$$i : G_T \to X \times Y : (x, y) \mapsto (x, y)$$

est l'injection canonique de G_T dans $X \times Y$. □

Définition 4.1.6. Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{T}')$ des espaces vectoriel topologiques. L'opérateur linéaire $T : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ est *densément défini* si $\mathrm{dom}(T) \subseteq X$ est dense dans $(X, \mathcal{T})$.

Proposition 4.1.7. *Soit T un opérateur linéaire densément défini entre espaces de Banach. Si T est injectif et fermé alors T^{-1} est fermé.*

$$\begin{tikzcd}
G_T \arrow[r, "i"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X \times Y \arrow[d, "\pi_Y"] \\
X \arrow[u, "\pi^{-1}_{X|G_T}"] \arrow[r, "T"'] & Y
\end{tikzcd}$$

FIGURE 4.1 – Illustration de la construction obtenue dans la démonstration du Théorème 4.1.5 (graphe fermé).

Démonstration. Soient $(X, \|\cdot\|_1)$, $(Y, \|\cdot\|_2)$ des espaces de Banach et $T : X \to Y$ satisfaisant les conditions de l'énoncé. Définissons

$$h : X \times Y \to Y \times X : (x, y) \mapsto (y, x).$$

Il s'agit d'un homomorphisme tel que $h(G_T) = G_{T^{-1}}$. On en déduit donc que $G_{T^{-1}}$ est fermé puisque G_T est fermé. $\square$

4.2 La construction abstraite

En analyse fonctionnelle, une manière classique de construire des espaces de Fréchet est de considérer la limite projective d'espaces Banach. De nombreux exemples sont générés de cette façon.

Définition 4.2.1. Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et

$$T : \mathrm{dom}(T) \subseteq X \to X$$

un opérateur densément défini. Pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, la $k^{\text{ième}}$ *puissance de* T est définie récursivement par

$$T^k(x) = T(T^{k-1}(x)),$$

où le domaine de T^k lorsque $k > 1$ est naturellement donné par

$$\mathrm{dom}(T^k) = \{x \in \mathrm{dom}(T^{k-1}) \mid T^{k-1}(x) \in \mathrm{dom}(T)\}.$$

De plus, si $k = 0$, on considère que T^k est l'identité.

Proposition 4.2.2. *Soient* $(X, \|\cdot\|)$ *un espace de Banach et*

$$T : \mathrm{dom}(T) \subseteq X \to X$$

un opérateur linéaire fermé densément défini. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$*, l'espace* $(\mathrm{dom}(T^n), \|\cdot\|_n)$ *où pour tout* $x \in \mathrm{dom}(T^n)$*,*

$$\|x\|_n = \sum_{k=0}^{n} \|T^k(x)\|,$$

est un espace de Banach.

Démonstration. Évidemment $\|\cdot\|_n$ est une semi-norme. De plus,

$$\begin{aligned}\|x\|_n = 0 &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \|T^k(x)\| = 0 \\ &\Leftrightarrow \|T^k(x)\| = 0, \quad \forall k \in \{0, \ldots, n\} \\ &\Leftrightarrow x = 0,\end{aligned}$$

la dernière équivalence résultant du fait que $\|\cdot\|$ est une norme (on considère $k = 0$).

À présent, montrons que $(\mathrm{dom}(T^n), \|\cdot\|_n)$ est complet. Soit $(x_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ une suite de Cauchy de $\mathrm{dom}(T^n)$. Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $J \in \mathbb{N}_0$ tel que pour tous $p, q \geq J$, $\|x_p - x_q\|_n < \varepsilon$. Par définition de $\|\cdot\|_n$, cela signifie que

$$\sum_{k=0}^{n} \|T^k(x_p - x_q)\| < \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$,

$$\|T^k(x_p - x_q)\| < \varepsilon.$$

Pour $k \in \mathbb{N}_0$, la suite $(T^k(x_j))_j$ est donc de Cauchy dans $(X, \|\cdot\|)$ qui est complet ; soit y_k la limite de cette suite (dans cet espace). Pour $k = 0$, on obtient que la suite $(x_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ est de Cauchy ; notons x_0 la limite de $(x_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ dans $(X, \|\cdot\|)$.

Montrons que $T^k(x_0) = y_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}_0$ par récurrence. Puisque T est fermé, on a $T(x_0) = y_1$. Supposons la propriété satisfaite pour tout k et montrons-là pour $k + 1$. Par définition, on a $T^{k+1}(x_j) = T(T^k(x_j))$, donc

$$y_{k+1} = \lim_{j\to+\infty} T(T^k(x_j)) = T(y_k) = T(T^k(x_0)) = T^{k+1}(x_0).$$

où la deuxième égalité est justifiée par le fait que T est fermé et où on a utilisé l'hypothèse de récurrence pour la troisième.

Ainsi, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, la suite $(T(x_j))_{j\in\mathbb{N}_0}$ converge vers $T^k(x_0)$ dans $(X, \|\cdot\|)$.

Pour conclure, on a

$$\|x_j - x_0\|_n = \sum_{k=0}^{n} \|T^k(x_j - x_0)\| = \sum_{k=0}^{n} \|T^k(x_j) - T^k(x_0)\| \to 0$$

lorsque $j \to +\infty$. □

On note

$$\mathrm{dom}_\infty(T) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} (\mathrm{dom}(T^n), \|\cdot\|_n)$$

la limite projective de ces espaces. Il s'agit bien sûr d'un espace de Fréchet en vertu de la Proposition 1.4.3.

Naturellement, on peut se demander si un choix particulier de T génère un espace de Fréchet du type que nous étudions. La réponse est affirmative. Dans [17], V. Wrobel met en évidence un opérateur T ayant de « bonnes propriétés » de sorte que $\mathrm{dom}_\infty(T)$ est un espace de Fréchet-Montel qui n'est pas Schwartz.

Définition 4.2.3. Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $(X_n, \|\cdot\|_n)$ une famille d'espaces de Banach. On définit $l^p((X_n)_{n\in\mathbb{N}_0})$ par

$$l^p((X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}) = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \prod_{n\in\mathbb{N}_0} X_n \mid \|x\|_{l^p} < +\infty\}$$

où, pour tout $x \in \prod_{n\in\mathbb{N}_0} X_n$,

$$\|x\|_{l^p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_n^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{4.1}$$

lorsque $1 \leq p < \infty$; dans le cas infini, on pose

$$\|x\|_{l^\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \|x_n\|_n. \tag{4.2}$$

Proposition 4.2.4. *Soit $1 \leq p \leq \infty$. Si $(X_n, \|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ est une famille d'espaces de Banach alors $l^p((X_n)_{n\in\mathbb{N}_0})$ est un espace de Banach.*

Démonstration. Vu les propriétés des expressions (4.1) et (4.2) (voir, par exemple, [15]), celles-ci munissent l'espace $l^p((X_n)_{n\in\mathbb{N}_0})$ d'une structure d'espace vectoriel normé.

Montrons qu'il est complet. Soit $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ une suite de Cauchy de l'espace $l^p((X_n)_{n\in\mathbb{N}_0})$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}_0$ tel que pour tous $r, s \geq N$, $\|x^{(r)} - x^{(s)}\|_{l^p} < \varepsilon$. Autrement dit, si $1 \leq p < \infty$,

$$\left(\sum_{l=1}^{+\infty} \|x_l^{(r)} - x_l^{(s)}\|_l^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Donc, pour tout $l \in \mathbb{N}_0$,

$$\|x_l^{(r)} - x_l^{(s)}\|_l < \varepsilon.$$

Ce qui montre que, pour tout $l \in \mathbb{N}_0$, $(x_l^{(n)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ est de Cauchy dans $(X_l, \|\cdot\|_l)$. Cet espace étant complet, on en tire que $(x_l^{(n)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ converge. Notons $x_l^{(0)}$ sa limite. Montrons que $(x_l^{(0)})_{l\in\mathbb{N}_0} \in l^p((X_n)_{n\in\mathbb{N}_0})$. Étant donné $\varepsilon > 0$, pour r et s suffisamment grands, on a $\|x^{(r)} - x^{(s)}\|_{l^p} < \varepsilon$ et donc

$$\left(\sum_{l=1}^{M} \|x_l^{(r)} - x_l^{(s)}\|_l^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon, \tag{4.3}$$

pour tout M, puisque le membre de gauche de (4.3) converge en croissant vers $\|x^{(r)} - x^{(s)}\|_p$ avec M. Ceci implique

$$\left(\sum_{l=1}^{M} \|x_l^{(r)} - x_l^{(0)}\|_l^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon$$

et donc lorsque $M \to +\infty$, $\|x^{(r)} - x^{(0)}\|_{l^p} \leq \varepsilon$. En particulier, $x^{(0)}$ appartient à $l^p((X_n)_{n\in\mathbb{N}_0})$ et est la limite de la suite $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ dans $l^p((X_n)_{n\in\mathbb{N}_0})$.

Pour le cas infini, on a

$$\sup_{l\in\mathbb{N}_0} \|x_l^{(r)} - x_l^{(s)}\|_l < \varepsilon.$$

Donc, pour tout $l \in \mathbb{N}_0$, $(x^{(n)})_l)_{n\in\mathbb{N}_0}$ est de Cauchy dans $(X_l, \|\cdot\|_l)$. Cette suite converge donc dans $(X_l, \|\cdot\|_l)$ vers une limite $x_l^{(0)}$. À nouveau, montrons que $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ converge vers $x^{(0)} = (x_l^{(0)})_{l\in\mathbb{N}_0}$. Étant donné $\varepsilon > 0$, pour r et s suffisamment grands, on a $\|x_l^{(r)} - x_l^{(s)}\|_l < \varepsilon$ pour tout l et donc $\|x_l^{(r)} - x_l^{(0)}\|_l \leq \varepsilon$. On en conclut que $\|x^{(r)} - x^{(0)}\|_{l^\infty} \leq \varepsilon$. En particulier $x^{(0)}$ appartient à $l^\infty((X_n)_{n\in\mathbb{N}_0})$ et est limite de la suite $(x^{(n)})_n$ dans $l^\infty((X_n)_{n\in\mathbb{N}_0})$. □

Définition 4.2.5. Soit $(X_n, \|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ une famille d'espaces de Banach. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, soit $K_n \in L(X_n)$ tel que

(1) K_n est injectif ;

(2) $\mathrm{Im}(K_n)$ est dense dans X_n ;

(3) La norme opérateur de K_n vaut 1

(4) K_n^n est compact mais K_n^{n-1} ne l'est pas.

Remarque 4.2.6. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, puisque $\|K_n\| = 1$, on a

$$\|K_n^l(x)\|_n = \|K_n(K_n^{l-1}(x))\|_n \leq \|K_n^{l-1}(x)\|_n \leq \ldots \leq \|x\|_n$$

quel que soient $l \in \mathbb{N}_0$ et $x \in X_n$.

Définition 4.2.7. Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $(X_n, \|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ une famille d'espaces de Banach. On pose

$$S : l^p((X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}) \to l^p((X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}) : (x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \mapsto (n^{-1}K_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}_0} \tag{4.4}$$

Proposition 4.2.8. *Soient* $1 \leq p \leq \infty$ *et* $(X_n, \|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *une famille d'espaces de Banach. L'opérateur* S *de la Définition 4.2.7 est bien défini.*

Démonstration. Il suffit de montrer que si $x \in l^p((X_n)_{n\in\mathbb{N}_0})$ alors $S(x) \in l^p((X_n)_{n\in\mathbb{N}_0})$. Si $1 \leq p < +\infty$, on a

$$\begin{aligned}
\|S(x)\|_{l^p}^p &= \sum_{n=1}^{+\infty} \|n^{-1}K_n(x_n)\|_n^p \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-p}(\underbrace{\|K_n(x_n)\|_n}_{\leq \|x_n\|_n \text{ car } \|K_n\|=1})^p \\
&\leq \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-p}\|x_n\|_n^p \\
&\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|_n^p \\
&\leq \|x\|_p^p < +\infty
\end{aligned}$$

Dans le cas infini, pour les mêmes raisons, on obtient

$$\|S(x)\|_{l^\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \|n^{-1}K_n(x_n)\|_n \leq \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \|x_n\|_n = \|x\|_\infty < +\infty.$$

□

Lemme 4.2.9. *Soient* $(X, \mathcal{T})$ *et* $(Y, \mathcal{T}')$ *des espaces topologiques et* A *une partie dense de* X*. Si* $f : X \to Y$ *est continu et surjectif alors* $f(A)$ *est dense dans* Y*.*

Démonstration. Soit A une partie dense de X ; il suffit de montrer que $Y \subseteq \overline{f(A)}$. Puisque f est surjectif, on sait que $f(X) = Y$. Or, A est dense dans X donc $X = \overline{A}$. De plus, f est continu, on a donc

$$Y = f(X) = f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}.$$

□

Lemme 4.2.10. *Soient $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille d'espaces topologiques. Pour tout $\alpha \in A$, D_α est dense dans X_α si, et seulement si $\prod_{\alpha\in A} D_\alpha$ est dense dans $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$.*

Démonstration. Supposons que pour tout $\alpha \in A$, D_α est dense dans X_α. Soit Ω un ouvert de base non-vide de $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$. Par définition,

$$\Omega = \prod_{\alpha\in A} \Omega_\alpha \text{ où } \Omega_\alpha = \begin{cases} \omega_\alpha \text{ ouvert (non-vide) de } X_\alpha \text{ si } \alpha \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}, \\ X_\alpha \text{ sinon.} \end{cases}$$

Puisque D_α est dense dans X_α, pour tout $\alpha \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, on sait que $\omega_\alpha \cap D_\alpha \neq \emptyset$. De plus, pour tout $\alpha \in A \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, il est évident que $\Omega_\alpha \cap D_\alpha \neq \emptyset$. Il s'ensuit que tout ouvert de base du produit rencontre $\prod_{\alpha\in A} D_\alpha$. Ce dernier est donc dense dans le produit.

Réciproquement, fixons $\alpha_0 \in A$ et soit ω un ouvert non-vide de X_{α_0}. Alors $\pi_{\alpha_0}^{-1}(\omega)$ est ouvert dans le produit. Par densité de $\prod_{\alpha\in A} D_\alpha$, il existe $(x_\alpha)_\alpha$ tel que $(x_\alpha)_\alpha \in \pi_{\alpha_0}^{-1}(\omega) \cap \prod_{\alpha\in A} D_\alpha$. Il s'ensuit que $x_{\alpha_0} \in \omega \cap D_{\alpha_0}$ et donc D_{α_0} est dense dans X_{α_0}. □

Proposition 4.2.11. *L'application S définie en (4.4) a les propriétés suivantes*

(1) $S \in L(l^p((X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}))$ *;*

(2) S *est injectif ;*

(3) $\mathrm{Im}(S)$ *est dense dans* $l^p((X_n)_{n\in\mathbb{N}_0})$ *;*

(4) Aucune puissance de S n'est compacte.

Démonstration. La linéarité et l'injectivité de S découlent directement du fait que pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, K_n est linéaire et injectif. Quant à la continuité de S, elle résulte des mêmes majorations qu'à la Proposition 4.2.8.

De plus, la multiplication par un scalaire non-nul est continue et surjective. Ainsi, par le Lemme 4.2.9, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, $n^{-1}(\mathrm{Im}(K_n))$ est dense dans X_n puisque $\mathrm{Im}(K_n)$ l'est. Le Lemme 4.2.10 implique alors que $(n^{-1}(\mathrm{Im}(K_n)))_{n\in\mathbb{N}_0}$ est dense dans $l^p((X_n)_{n\in\mathbb{N}_0})$. Ce qui montre que $\mathrm{Im}(S)$ est dense dans $l^p((X_n)_{n\in\mathbb{N}_0})$.

Enfin, procédons par l'absurde et supposons que S^m est compact pour un certain $m \in \mathbb{N}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, $(S^m(\cdot))_n = n^{-m}K_n^m(\cdot)$ est compact Or, par hypothèse, K_{m+1}^m n'est pas compact. La contradiction en résulte aussitôt étant donné la continuité de la multiplication par un scalaire. □

Proposition 4.2.12. *Soit* $1 \leq p \leq \infty$. *L'opérateur*

$$T := S^{-1} : \mathrm{Im}(S) \subseteq l^p((X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}) \to l^p((X_n)_{n\in\mathbb{N}_0})$$

est linéaire fermé et densément défini.

Démonstration. Premièrement, on sait que l'inverse d'un opérateur linéaire est linéaire.

Ensuite, puisque S est continu, son graphe G_S est fermé. De plus, puisque S est injectif et densément défini, par la Proposition 4.1.7, on en tire que G_T est fermé.

Enfin, T est densément défini puisque $\mathrm{dom}(T) = \mathrm{Im}(S)$ qui est dense dans $l^p((X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}))$ par la Proposition 4.2.8. □

On sait déjà que la limite projective $\mathrm{dom}_\infty(T)$, où T est l'opérateur défini à la Proposition 4.2.12, est un espace de Fréchet. Montrons qu'il est de plus Montel mais non-Schwartz.

Proposition 4.2.13. *La limite projective* $\mathrm{dom}_\infty(T)$ *n'est pas un espace de Schwartz.*

Démonstration. Tout d'abord, remarquons que les normes

$$\|T^n(\cdot)\|_{l^p} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \|T^k(\cdot)\|_{l^p}, \tag{4.5}$$

où $1 \leq p \leq \infty$, sont équivalentes sur $\mathrm{dom}(T^n)$. En effet, pour tout

$x \in \mathrm{dom}(T^n)$, si $1 \leq p < \infty$, on a

$$\begin{aligned}
\|T^n(x)\|_{l^p} &\leq \sum_{k=0}^{n} \|T^k(x)\|_{l^p} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \| \underbrace{T^{k-n}}_{=S^{n-k}(\cdot)} (T^n(x))\|_{l^p} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{l=1}^{+\infty} \| \underbrace{l^{k-n}}_{\leq 1} K_l^{n-k}(l^n K_l^{-n}(x_l))\|_l^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{l=1}^{+\infty} \underbrace{\|K_l^{n-k}\|}_{\leq 1 \text{ car } \|K_l\|=1}{}^p \|l^n K_l^{-n}(x_l)\|_l^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{l=1}^{+\infty} \|l^n K_l^{-n}(x_l)\|_l^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \|T^n(x)\|_{l^p} \\
&\leq (n+1)\|T^n(x)\|_{l^p}.
\end{aligned}$$

Pour le cas infini, le même raisonnement conduit aux majorations

$$\|T^n(x)\|_{l^\infty} \leq \sum_{k=0}^{n} \|T^k(x)\|_{l^\infty} \leq (n+1)\|T^n(x)\|_{l^\infty}.$$

Ensuite, procédons par l'absurde et supposons que $\mathrm{dom}_\infty(T)$ est un espace de Schwartz. Dans ce cas, l'inclusion

$$i : \mathrm{dom}_\infty(T) \to l^p((X_n)_{n\in\mathbb{N}_0})$$

est compacte en vertu du Lemme 1.5.15. La compacité de i implique l'existence d'un nombre $n \in \mathbb{N}_0$ tel que

$$i_n : (\mathrm{dom}(T^n), \|T^n(\cdot)\|_{l^p}) \to l^p((X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}),$$

vu la définition de la topologie de $\mathrm{dom}_\infty(T)$ et l'équivalence entre les topologies obtenues en début de démonstration (cf. (4.5)).

Montrons ensuite que la compacité de i_n implique que T^{-n} est compact. Soit

$$B = \{x \in \mathrm{dom}(T^n) \mid \|T^n(x)\|_{l^p} < 1\}$$

la boule unité de $(\mathrm{dom}(T^n), \|T^n(\cdot)\|_{l^p})$. Par hypothèse sur i_n, on a que $\overline{i_n(B)} = \overline{B}$ est compact dans $l^p((X_n)_{n\in\mathbb{N}_0})$. Soit $B' = \{y \in \mathrm{Im}(T^n) \mid \|y\|_{l^p} < 1\}$ la boule unité de $l^p((X_n)_{n\in\mathbb{N}_0})$; il faut montrer que $T^{-n}(B')$ est relativement compact. Pour tout $y \in B'$, on a

$$\|T^n(T^{-n}(y))\|_{l^p} = \|y\|_{l^p} < 1.$$

Donc $T^{-n}(B') \subseteq B$, d'où $T^{-n}(B')$ est précompact, i.e. relativement compact vu que l'espace $(\mathrm{dom}(T^n), \|T^n(\cdot)\|_{l^p})$ est complet. Ainsi, T^{-n} est compact, ce qui entraîne une contradiction puisque $T^{-1} = S$ et qu'aucune puissance de S n'est compacte. □

Définition 4.2.14. Pour tout $J \in \mathbb{N}_0$, ϕ_J désigne la projection

$$\phi_J : \prod_{n=1}^{+\infty} \mathrm{dom}_\infty(K_n^{-1}) \to \prod_{n=1}^{+\infty} \mathrm{dom}_\infty(K_n^{-1}) : (x_j)_{j\in\mathbb{N}_0} \mapsto (x_1, \ldots, x_J, 0, \ldots).$$

Proposition 4.2.15. *La limite projective* $\mathrm{dom}_\infty(T)$ *est un espace de Montel.*

Démonstration. Le fait que $\mathrm{dom}_\infty(T)$ est tonnelé est direct puisque c'est un espace de Fréchet.

Il reste à montrer que toute partie bornée de $\mathrm{dom}_\infty(T)$ est précompacte. Soient $k \in \mathbb{N}_0$, $\varepsilon > 0$ et $D \subseteq \mathrm{dom}_\infty(T)$ borné. Par hypothèse, il existe $C > 0$ tel que

$$\sup_{x\in D} \|T^{k+1}(x)\|_{l^p} < C.$$

On peut donc trouver $n_0 \in \mathbb{N}_0$ de sorte que

$$\frac{1}{\varepsilon} \sup_{x\in D} \|T^{k+1}(x)\|_{l^p} < n_0.$$

De plus, $\prod_{n=1}^{+\infty} \mathrm{dom}(K_n^{-1})$ et $\mathrm{dom}_\infty(T)$ induisent la même topologie sur $\phi_{n_0}(\prod_{n=1}^{+\infty} \mathrm{dom}_\infty(K_n^{-1}))$. De fait, pour $j \in \mathbb{N}_0$ et $x \in \mathrm{dom}_\infty(T)$, on a

$$\|K_n^{-j}(x_n)\|_n \leq \|n^j K_n^{-j}(x_n)\|_n \leq \|T^j(x)\|_{l^p},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}_0$. En particulier, on a l'inclusion

$$\mathrm{dom}_\infty(T) \hookrightarrow \prod_{n=1}^{+\infty} \mathrm{dom}_\infty(K_n^{-1}).$$

Inversement, pour $x \in \phi_{n_0}(\prod_{n=1}^{+\infty} \mathrm{dom}_\infty(K_n^{-1}))$,

$$\|T^j(x)\|_{l^p} \leq n_0 \sup_{1\leq n\leq n_0} \|n^j K_n^{-j}(x_n)\|_n \leq n_0^{j+1} \sup_{1\leq n\leq n_0} \|K_n^{-j}(x_n)\|_n.$$

Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, $\mathrm{dom}_\infty(K_n^{-1})$ est de Schwartz. Soit B un voisinage borné de l'origine dans $\mathrm{dom}(K_n^{-n})$. On a que $B = K_n^n(K_n^{-n}(B))$ est relativement compact puisque par hypothèse K_n^n est compact : soit $\varepsilon > 0$; puisqu'on a

$$\overline{B} \subset \bigcup_{x \in B} x + \varepsilon B,$$

il existe $x_1, \ldots, x_N \in B$ tels que

$$B \subseteq \{x_1, \ldots, x_N\} + \varepsilon B.$$

Ceci implique que $\mathrm{dom}(K_n^{-n})$ est de Schwartz [1]. Par définition de $\mathrm{dom}_\infty(K_n^{-1})$, ses semi-boules sont incluses dans les boules de $\mathrm{dom}(K_n^{-n})$. On en conclut que $\mathrm{dom}_\infty(K_n^{-1})$ est de Schwartz. En particulier, il est de Montel.

Le produit d'espaces de Montel étant de Montel, on conclut de ce qui précède que $\phi_{n_0}(\prod_{n=1}^{+\infty} \mathrm{dom}_\infty(K_n^{-1}))$ est de Montel. Il s'ensuit que $\phi_{n_0}(D)$ est relativement compact dans $\prod_{n=1}^{+\infty} \mathrm{dom}_\infty(K_n^{-1}))$ et donc dans $\mathrm{dom}_\infty(T)$, étant donné l'équivalence des topologies engendrées.

1. Le lecteur familier avec les opérateurs compacts aura directement conclus : puisque $\mathrm{dom}(K_n^{-n}) = \mathrm{Im}(K_n^n)$ où K_n^n est compact, toute partie bornée de $\mathrm{dom}(K_n^{-n})$ est relativement compacte.

De plus, d'une part, si $1 \leq p < \infty$,

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in D} \|T^k(x-\phi_{n_0}(x))\|_{l^p} &= \sup_{x\in D} \|ST^{k+1}(x-\phi_{n_0}(x))\|_{l^p} \\
&= \sup_{x\in D} \left(\sum_{l=1}^{+\infty} \|l^{-1}K_l((lK_l^{-1})^{k+1} \underbrace{(x_l-(\phi_{n_0}(x))_l))}_{=0 \text{ si } l\leq n_0} \|_l^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{x\in D} \left(\sum_{l=n_0+1}^{+\infty} \|l^{-1}K_l((lK_l^{-1})^{k+1}(x_l))\|_l^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{x\in D} \left(\sum_{l=n_0+1}^{+\infty} \underbrace{(l^{-1})^p}_{\leq \frac{1}{n_0+1}} \underbrace{\|K_l\|^p}_{\leq 1} \|(lK_l^{-1})^{k+1}(x_l)\|_l^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{1}{n_0+1} \sup_{x\in D} \left(\sum_{l=n_0+1}^{+\infty} \|(lK_l^{-1})^{k+1}(x_l)\|_l^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{1}{n_0+1} \sup_{x\in D} \left(\sum_{l=1}^{+\infty} \|(lK_l^{-1})^{k+1}(x_l)\|_l^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{1}{n_0+1} \underbrace{\sup_{x\in D} \|T^{k+1}(x)\|_{l^p}}_{<\varepsilon n_0} \\
&< \frac{\varepsilon n_0}{n_0+1} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

D'autre part, dans le cas infini, par un raisonnement entièrement similaire, on trouve

$$\sup_{x\in D} \|T^k(x-\phi_{n_0}(x))\|_{l^\infty} = \sup_{x\in D} \|T^{k+1}(x)\|_{l^\infty} \leq \frac{\varepsilon n_0}{n_0+1}.$$

Donc D est précompact dans $\mathrm{dom}_\infty(T)$ puisque

$$D \subseteq \phi_{n_0}(D) + (\mathrm{id} - \phi_{n_0})(D) \subseteq \phi_{n_0}(D) + \{x \in \mathrm{dom}_\infty(T) \mid \|T^k(x)\|_{l^p} < \varepsilon\}.$$

□

4.3 Des exemples concrets

Dans cette section, on fournit des exemples d'espaces de Banach $(X_n, \|\cdot\|_n)$ et d'opérateurs K_n satisfaisant les conditions (1) à (4) de la

Définition 4.2.5. En conservant les notations introduites à la section précédente, on a aura alors généré des espaces $\mathrm{dom}_\infty(T)$ qui sont Fréchet-Montel mais pas Schwartz.

Exemple 4.3.1. Soit $\tilde{C^0}([0,1]) = \{f \in C^0([0,1]) \mid f(0) = 0\}$ muni de la norme $\|f\|_{\tilde{C^0}([0,1])} = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

Définition 4.3.2. L'*opérateur de Volterra* est l'opérateur $V : \tilde{C^0}([0,1]) \to \tilde{C^0}([0,1])$ définit par

$$V(f)(x) = \int_0^x f(t)\ dt.$$

Définition 4.3.3. Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'applications définies sur un espace métrique X et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit que $(f_i)_{i\in I}$ est *équicontinu* si pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $x \in X$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$d(x,y) < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

quel que soit $f \in (f_i)_{i\in I}$.

Théorème 4.3.4 (Théorème d'Arzelà-Ascoli)**.** *Soit X un espace métrique compact. Une partie $\mathcal{K}$ de $C^0(X)$ est précompacte dans $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ si et seulement si elle est simplement bornée et équicontinue.*

Démonstration. Voir [5]. □

Proposition 4.3.5. *L'opérateur de Volterra est un opérateur compact.*

Démonstration. Soit $B = \{f \in \tilde{C^0}([0,1]) \mid \|f\|_{\tilde{C^0}([0,1])} < 1\}$. Montrons que $V(B)$ est relativement compact dans $(\mathbb{K}, |\cdot|)$. Par le Théorème de Arzelà-Ascoli 4.3.4, il suffit de montrer que $V(B)$ est simplement borné et équicontinu.

Soient $f \in B$ et $x \in [0,1]$. Alors

$$|V(f)(x)| \leq \int_0^x |f(t)|\ dt \leq x\|f\|_{\tilde{C^0}([0,1])} < 1.$$

Donc $V(B)$ est simplement borné.

De plus, pour $f \in B$ et $0 \leq x < y \leq 1$, on a

$$|V(f)(x) - V(f)(y)| \leq \int_x^y |f(t)|\ dt \leq (y-x)\|f\|_{\tilde{C^0}([0,1])} < (y-x).$$

Ce qui termine la démonstration. □

Proposition 4.3.6. *L'opérateur de Volterra et injectif et image dense dans* $\tilde{C}^0([0,1])$.

Démonstration. L'opérateur de Volterra est injectif sur $\tilde{C}^0([0,1])$ puisque si $V(f) = V(g)$ sur $[0,1]$, par le Théorème fondamental de l'Analyse, les fonctions f et g sont égales presque partout ; ces fonctions étant continues, elles sont donc égales partout.

De plus, pour tout $f \in \tilde{C}^0([0,1])$, par le théorème de Weiertrass, il existe $(P_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ une suite de polynômes telle que $P_n \to f$ uniformément. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, soit P'_n le polynôme de $\tilde{C}^0([0,1])$ tel que $P_n = V(P'_n)$. On a donc $V(P'_n) \to f$ uniformément, ce qui suffit à montrer que $\mathrm{Im}(V)$ est dense dans $\tilde{C}^0([0,1])$. □

Fixons $n \in \mathbb{N}_0$, soient

$$L_n : \tilde{C}^0([0,1])^n \to \tilde{C}^0([0,1])^n : (x_j)_{1\leq j\leq n} \mapsto (x_2, \ldots, x_n, 0) \tag{4.6}$$

et

$$A_n : \tilde{C}^0([0,1])^n \to \tilde{C}^0([0,1])^n : (x_j)_{1\leq j\leq n} \mapsto (V(x_j))_{1\leq j\leq n} + L_n((x_j)_{1\leq j\leq n}). \tag{4.7}$$

Proposition 4.3.7. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}_0$*, on pose* $K_n = (\|A_n\|^{-1})A_n$ *où* A_n *est l'opérateur définit en* (4.7)*. Alors* K_n *satisfait les conditions suivantes :*

(1) K_n *est injectif ;*

(2) $\mathrm{Im}(K_n)$ *est dense dans* $\tilde{C}^0([0,1])^n$ *;*

(3) $\|K_n\| = 1$ *;*

(4) K_n^n *est compact mais* K_n^{n-1} *ne l'est pas.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}_0$. Montrons que A_n est injectif. Supposons avoir $x, y \in \tilde{C}^0([0,1])^n$ tels que $A_n(x) = A_n(y)$. Par définition de A_n, on a le système suivant :

$$\begin{cases} V(x_1) + x_2 & = V(y_1) + y_2 \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ V(x_{n-1}) + x_n & = V(y_{n-1}) + y_n \\ V(x_n) & = V(y_n). \end{cases} \tag{4.8}$$

Par injectivité de l'opérateur de Volterra, de la dernière ligne de (4.8) on déduit que $x_n = y_n$. En injectant ce résultat dans la précédente ligne, on obtient $V(x_{n-1}) = V(y_{n-1})$. À nouveau, l'injectivité de V permet d'en déduire que $x_{n-1} = y_{n-1}$. En continuant de la sorte, on obtient $x_j = y_j$ quel que soit $j \in \{1, \ldots, n\}$ et donc A_n est injectif. La multiplication par un scalaire non-nul étant continue, il s'ensuit que K_n est injectif.

Ensuite, puisque l'opérateur de Volterra est à image dense dans $\tilde{C}^0([0,1])$, par le Lemme 4.2.10, $(V(x_j))_{1\leq j\leq n}$ est dense dans $\tilde{C}^0([0,1])^n$.

Trivialement, on a $\|K_n\| = 1$.

Par définition, pour tout $x \in \tilde{C}^0([0,1])^n$, $A_n^n(x) = (V^n(x_j))_{1\leq j\leq n}$. Soit B la boule unité de $\tilde{C}^0([0,1])^n$. Par définition, $B = B'^n$ où B' est la boule unité de $\tilde{C}^0([0,1])$. Puisque l'opérateur de Volterra est compact, toutes ses puissances le sont. De plus, puisque $V^n(B')$ est relativement compact dans $\tilde{C}^0([0,1])$, le Théorème de Tychonoff implique que $(V^n(B'))^n$ est relativement compact dans $\tilde{C}^0([0,1])^n$. La multiplication par un scalaire non-nul étant continue et surjective, le Lemme 4.2.9 permet alors de conclure que K_n^n est compact.

Montrons à présent que A_n^{n-1} n'est pas compact. À nouveau par continuité de la multiplication par un scalaire non-nul, la conclusion s'ensuivra. Remarquons que puisque $\tilde{C}^0([0,1])$ est de dimension infinie, L_n^{n-1} n'est pas compact. Par continuité des translations, on en tire que A_n^{n-1} n'est pas compact. □

Exemple 4.3.8. Soient $1 \leq p < \infty$ et $(l^p, \|\cdot\|_{l^p})$ l'espace des suites de Lebesgue muni de la norme usuelle.

Proposition 4.3.9. *Soit $1 \leq p < \infty$. L'opérateur diagonal*

$$\Delta : l^p \to l^p : (x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \mapsto (n^{-1}x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$$

est injectif, à image dense et compact.

Démonstration. Il est évident que Δ est injectif. Ensuite puisque l^p est dense dans lui-même et que la multiplication par un scalaire non-nul est continue et surjective, Δ est à image dense dans l^p. Il est de plus compact en vertu du Lemme 2.1.18 puisque $(n^{-1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ converge vers zéro. □

À nouveau, on définit les opérateurs L_n et A_n de manière similaire à l'Exemple 4.3.1. Soient $1 \leq p < \infty$ et $n \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$L_n : (l^p)^n \to (l^p)^n : (x_j)_{1\leq j\leq n} \mapsto (x_2, \ldots, x_n, 0) \tag{4.9}$$

et

$$A_n : (l^p)^n \to (l^p)^n : (x_j)_{1 \leq j \leq n} \mapsto (\Delta(x_j))_{1 \leq j \leq n} + L_n((x_j)_{1 \leq j \leq n}). \qquad (4.10)$$

Proposition 4.3.10. *Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on pose $K_n = (\|A_n\|^{-1})A_n$ où A_n est l'opérateur défini en* (4.10)*. Alors K_n satisfait les conditions suivantes :*

(1) K_n est injectif ;

(2) $\mathrm{Im}(K_n)$ *est dense dans $(l^p)^n$;*

(3) $\|K_n\| = 1$ *;*

(4) K_n^n est compact mais K_n^{n-1} ne l'est pas.

Démonstration. Les points (1), (2) et la première partie du point (4) découlent de la Proposition 4.3.9. Le troisième point est trivial.

L'espace l^p étant de dimension infinie, L_n^{n-1} n'est pas compact. Par la continuité des translations, on en tire que A_n^{n-1} n'est pas compact. La continuité de la multiplication par un scalaire non-nul permet alors de conclure. □

Exemple 4.3.11. Soit $(c_0, \|\cdot\|_{l^\infty})$ l'ensemble des suites bornées qui convergent vers 0 muni de la norme uniforme.

Soit $n \in \mathbb{N}_0$. Dans cet exemple, on considère à nouveau les applications

$$L_n : (c_0)^n \to (c_0)^n : (x_j)_{1 \leq j \leq n} \mapsto (x_2, \ldots, x_n, 0) \qquad (4.11)$$

et

$$A_n : (c_0)^n \to (c_0)^n : (x_j)_{1 \leq j \leq n} \mapsto (\Delta(x_j))_{1 \leq j \leq n} + L_n((x_j)_{1 \leq j \leq n}). \qquad (4.12)$$

où Δ est l'opérateur diagonal

$$\Delta : c_0 \to c_0 : (x_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \mapsto (n^{-1}x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}.$$

Les mêmes raisonnements qu'à l'Exemple 4.3.8 permettent de conclure que L_n^{n-1} n'est pas compact et donc que A_n^{n-1} ne l'est pas non plus tandis que A_n^n l'est. On en tire que l'opérateur $K_n = (\|A_n\|^{-1})A_n$ satisfait les conditions (1) à (4) de la Définition 4.2.5.

Annexe A

Sur la dimension diamétrale

A.1 Diamètre de Kolomogorov

Dans cette annexe, nous désignons par X un $\mathbb{K}$-vectoriel et $A, B \subset X$ des ensembles pour lesquels il existe $\mu > 0$ tel que $A \subseteq \mu B$.

Notation A.1.1. On note

$$\mathcal{L}_n(X) = \{A \subseteq X \mid \dim(A) \leq n\}.$$

Définition A.1.2. Le *n-ième diamètre de Kolmogorov de A par rapport à B* est le nombre

$$\delta_n(A, B) = \inf\{\delta > 0 \mid \exists L \in \mathcal{L}_n(X) \text{ tel que } A \subseteq \delta B + L\}.$$

Remarque A.1.3. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, le singleton $\{0\} \in \mathcal{L}_N(X)$ et $A \subseteq \mu B + \{0\}$. L'ensemble

$$\{\delta > 0 \mid \exists L \in \mathcal{L}_n(X) \text{ tel que } A \subseteq \delta B + L\}$$

est alors non vide. La définition proposée est donc licite. De plus, cela implique que $\delta_n(A, B) \geq 0$, quel que soit $n \in \mathbb{N}_0$.

Proposition A.1.4. *Soit $n \in \mathbb{N}_0$, on a*

(1) $\delta_{n+1}(B, A) \leq \delta_n(B, A)$ *;*

(2) $\delta_n(B, A) \in [0, \mu]$.

De plus, la suite $(\delta_n(B, A))_{n \in \mathbb{N}_0}$ converge vers $\delta \leq \mu$.

Démonstration. Le premier point découle de la définition, tandis que le second provient de la remarque A.1.3.

De plus, la suite $(\delta_n(B,A))_{n\in\mathbb{N}_0}$ étant décroissante et minorée par 0, elle converge. □

Proposition A.1.5. *Soient $A_0, B_0 \subseteq X$ tels que $A_0 \subset A$ et $B \subset B_0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on a*

$$\delta_n(A_0, B_0) \leq \delta_n(A, B).$$

On a même $\delta_n(A_0, B) \leq \delta_n(A, B)$ et $\delta_n(A, B_0) \leq \delta_n(A, B)$.

Démonstration. C'est direct. □

Proposition A.1.6. *Soient $C \subseteq X$ et $\nu > 0$ tel que $B \subset \nu C$. Pour tout $n, m \in \mathbb{N}_0$, on a*

$$\delta_{n+m}(A, C) \leq \delta_n(A, B)\delta_m(B, C).$$

Démonstration. Remarquons que, puisque $A \subseteq \nu\mu C$, l'expression $\delta_{n+m}(A, C)$ a du sens. Soient alors $\delta_1, \delta_2 > 0$, $L_1 \in \mathcal{L}_n(X)$, $L_2 \in \mathcal{L}_m(X)$ tels que

$$A \subseteq \delta_1 B + L_1 \text{ et } B \subseteq \delta_2 C + L_2.$$

Il vient $A \subseteq \delta_1(\delta_2 C + L_2) + L_1$. Autrement dit,

$$A \subseteq \delta_1\delta_2 C + L_2 + L_1.$$

Puisque $L_1 + L_2 \in \mathcal{L}_{n+m}$, il s'ensuit que

$$\delta_{n+m}(A, C) \leq \delta_n(A, B)\delta_m(B, C).$$

□

Proposition A.1.7. *Soient $n \in \mathbb{N}_0$ et $\lambda, \nu > 0$. Alors*

$$\frac{\lambda}{\nu}\delta_n(A, B) = \delta_n(\lambda A, \nu B).$$

Démonstration. Soient $\delta > 0$ et $L \in \mathcal{L}_n(X)$ tels que $\lambda A \subseteq \delta(\nu B) + L$. On a alors que $A \subseteq \frac{\nu\delta}{\lambda} B + L$ et donc $\delta_n(A, B) \leq \frac{\nu}{\lambda}\delta$. On en conclut que

$$\frac{\lambda}{\nu}\delta_n(A, B) \leq \delta_n(\lambda A, \nu B).$$

Ensuite,

$$\frac{\nu}{\lambda}\delta_n(\lambda A, \nu B) = \frac{\lambda^{-1}}{\nu^{-1}}\delta_n(\lambda A, \nu B) \leq \delta_n(A, B).$$

Autrement dit, $\frac{\lambda}{\nu}\delta_n(A, B) \geq \delta_n(\lambda A, \nu B)$. Et la conclusion s'ensuit aussitôt. □

Proposition A.1.8. *Soit* $A_0 \subseteq X$ *tel que, pour* $\mu_0, \nu > 0$, $A_0 \subseteq \mu_0 B$ *et* $A \subseteq \nu A_0$. *Alors,*

$$\delta_n(A, B) = \nu \delta_n(A_0, B).$$

Démonstration. Cela découle successivement des Propositions A.1.5 et A.1.7. □

Proposition A.1.9. *Si* X *de dimension finie alors pour tout* $n \geq \dim(X)$,

$$\delta_n(A, B) = 0.$$

Démonstration. C'est trivial. □

Notation A.1.10. Si A est un ensemble absolument convexe de X, on note $\langle A \rangle_{ac}$ sont enveloppe absolument convexe.

Proposition A.1.11. *Si* B *est absolument convexe alors*

$$\delta_n(A, B) = \delta_n(\langle A \rangle_{ac}, B),$$

quel que soit $n \in \mathbb{N}_0$.

Démonstration. Puisque que $A \subseteq \langle A \rangle_{ac}$, par la Proposition A.1.5, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$,

$$\delta_n(A, B) \leq \delta_n(\langle A \rangle_{ac}, B).$$

Ensuite, soient $\delta > 0$ et $L \in \mathcal{L}_n(X)$ tels que $A \subset \delta B + L$. Alors, puisque A et L sont absolument convexes, on a

$$\langle A \rangle_{ac} \subseteq \delta B + L.$$

□

Proposition A.1.12. *Soient* Y *un* $\mathbb{K}$*-vectoriel et* $T : X \to Y$ *une application linéaire. Alors, pour tout* $n \in \mathbb{N}_0$,

$$\delta_n(T(A), T(B)) \leq \delta_n(A, B).$$

Démonstration. L'expression $\delta_n(T(A), T(B))$ a effectivement du sens puisque T est linéaire et donc $T(A) \subseteq \mu T(B)$.

Soient $\delta > 0$ et $L \in \mathcal{L}_n(E)$ tels que $A \subseteq \delta B + L$. Par définition de T, on en tire que $T(A) \subseteq \delta T(B) + T(L)$, avec $T(L) \in \mathcal{L}_n(F)$. Par définition du diamètre de Kolomogorov, il s'ensuit que

$$\delta_n(T(A), T(B)) \leq \delta.$$

□

Remarque A.1.13. En particulier si $T : X \to Y$ est un isomorphisme alors pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, $\delta_n(T(A), T(B)) = \delta_n(A, B)$.

Les résultats qui suivent mettent en évidence les liens la précompacité et les diamètres de Kolmogorov.

Théorème A.1.14. *Soient $A \subseteq X$ absolument convexe et absorbant et $K \subseteq X$ absorbé par A ; K est précompact par rapport à A si, et seulement si*

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n(K, A) = 0.$$

Démonstration. La condition est nécessaire : fixons $\varepsilon > 0$. Puisque K est précompact par rapport à A, on sait qu'il existe $x_1, ..., x_N \in X$ tels que $K \subseteq \{x_1, ..., x_n\} + \varepsilon A$. Bien sûr, pour tout $n \geq N$, $\rangle x_1, ..., x_N \langle \in \mathcal{L}_n(X)$. Donc

$$\delta_n(K, A) \leq \varepsilon.$$

puisque $K \subseteq \varepsilon A + \rangle x_1, ..., x_N\langle$. Autrement dit, $\delta_n(K, A) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, vu que ε est arbitraire.

Pour la réciproque, fixons à nouveau $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $M \in \mathbb{N}_0$ tel que, pour tout $n \geq M$, $\delta_n(K, A) \leq \frac{\varepsilon}{4}$. Soient alors $\delta \in]0\frac{\varepsilon}{4}[$ et $L \in \mathcal{L}_M(E)$ tels que $K \subseteq \delta A + L$. En particulier, vu que A est équilibré, on $K \subseteq \frac{\varepsilon}{4}A + L$. Soit p_A la jauge de Minkowski de A et posons $L_1 = L \cap \ker p_A$. Il est clair que L_1 est un sous-espace vectoriel de L. Soit L_2 un supplémentaire de L_1 dans L. On a

$$\begin{aligned} K &\subseteq \frac{\varepsilon}{4}A + L \\ &= \frac{\varepsilon}{4}A + (L_1 \oplus L_2) \\ &= \frac{\varepsilon}{4}A + (L \cap \ker p_A \oplus L_2) \\ &\subseteq \frac{\varepsilon}{4}A + \frac{\varepsilon}{4}A + L_2 \\ &= \frac{\varepsilon}{2}A + L_2 \end{aligned}$$

puisque $L_1 \subseteq \ker p_A \subseteq \frac{\varepsilon}{4}A$. De plus puisque, par hypothèse, K est absorbé par A, il existe $\mu > 0$ tel que $K \subseteq \mu A$. Ainsi, pour tout $x \in K$, il existe $a \in A$ et $l \in L_2$ de sorte que $x = \frac{\varepsilon}{2}a + l$. D'où, $l = x - \frac{\varepsilon}{2}a \in K - \frac{\varepsilon}{2}A$. Or, $K - \frac{\varepsilon}{2}A \subseteq (\mu + \frac{\varepsilon}{2})A$. Par convexité de A, on a que $l \in (\mu - \frac{\varepsilon}{2})A$. Il vient alors

$$K \subseteq (\frac{\varepsilon}{2}A + L_2) \cap (\mu - \frac{\varepsilon}{2})A.$$

L'espace (L_2, p_A) étant fini et normé, il est isomorphe à $(\mathbb{K}^m, |\cdot|)$ où m est la dimension de L_2. L'ensemble $L_2 \cap (\mu + \frac{\varepsilon}{2})A$ étant borné, l'isomorphisme entre (L_2, p_A) et $(\mathbb{K}^m, |\cdot|)$ nous permet d'affirmer qu'il est précompact. Il existe donc $x_1, ..., x_N \in L_2$, pour $N \in \mathbb{N}$ de sorte que $L_2 \cap (\mu + \frac{\varepsilon}{2})A \subseteq \{x_1, ..., x_N\} + \frac{\varepsilon}{2}A$. On a donc, $K \subseteq \{x_1, ..., x_N\} + \frac{\varepsilon}{2}A$. Ce qui suffit. $\square$

Corollaire A.1.15. *Soient X un espace localement convexe et $K \subseteq X$; K est un précompact de X si, et seulement si K est borné et pour tout voisinage absolument convexe $V \in \mathcal{V}_0$ dans X,*

$$\lim_{n \to +\infty} \delta_n(K, V) = 0.$$

Démonstration. Cela découle directement du Théorème A.1.14. $\square$

Proposition A.1.16. *Soient $B \subseteq X$ absolument convexe absorbant et $A \subseteq X$ un ensemble absorbé par B. Alors, pour $n \in \mathbb{N}_0$, on a*

$$\begin{aligned}\delta_n(A, B) = \inf\{\delta > 0 \mid \exists N \in \mathbb{N}_0, x_1 \ldots, x_N \in X \textit{ avec } N \leq n \\ \textit{et } A \subseteq \delta B + \langle\{x_1, \ldots, x_N\}\rangle_{ac}\}.\end{aligned} \tag{A.1}$$

Démonstration. On note $\gamma_n(A, B)$ le membre de droite de (A.1). Vu que $\langle X\rangle_{ac} \subseteq\rangle X\langle$, quel que soit l'ensemble X, il est clair que $\delta_n(A, B) \leq \gamma_n(A, B)$.

Pour l'autre inégalité, soient $\delta > 0$ et $L \in \mathcal{L}_n(X)$ tels que $A \subseteq \delta B + L$. Posons $L_1 = L \cap \ker p_B$ et soit L_2 son supplémentaire dans L. Pour tout $\varepsilon > 0$, $L_1 \subseteq \frac{\varepsilon}{2}B$ et $A \subseteq (\delta + \frac{\varepsilon}{2})B + L_2$. De plus, si $\mu > 0$ est tel que $A \subseteq \mu B$, alors

$$A \subset (\delta + \frac{\varepsilon}{2})B + L_2 \cap (\delta + \frac{\varepsilon}{2} + \mu)B.$$

On remarque alors que l'ensemble $L_2 \cap (\delta + \frac{\varepsilon}{2} + \mu)B$ est borné dans (L_2, p_B). En utilisant les mêmes arguments qu'à la démonstration du Théorème A.1.14, on montre que $L_2 \cap (\delta + \frac{\varepsilon}{2} + \mu)B$ est précompact. On trouve alors une partie finie M de L_2 de sorte que $L_2 \cap (\delta + \frac{\varepsilon}{2} + \mu)B \subseteq M + \frac{\varepsilon}{2}B$. Il existe alors $x_{\varepsilon,1}, ..., x_{\varepsilon,N} \in L_2$ avec $N \leq n$ tels que

$$L_2 \cap (\delta + \frac{\varepsilon}{2} + \mu)B \subseteq \frac{\varepsilon}{2}B + \langle\{x_{\varepsilon,1}, ..., x_{\varepsilon,N}\}\rangle_{ac}.$$

On en déduit que $A \subseteq (\delta + \varepsilon)B + \langle\{x_{\varepsilon,1}, ..., x_{\varepsilon,N}\}\rangle_{ac}$. D'où $(\delta + \varepsilon) \geq \gamma_n(A, B)$, quel que soit $\varepsilon > 0$. La conclusion s'ensuit aussitôt. $\square$

Corollaire A.1.17. *Soient $B \subseteq X$ absolument convexe, fermé et absorbant et $A \subseteq X$ absorbé par B. Si $n \in \mathbb{N}$, on a $\delta_n(A, B) = \delta_n(\overline{A}, B)$.*

Démonstration. Remarquons que l'expression $\delta_n(A, B)$ a du sens puisque B est fermé. De plus, puisque $A \subseteq \overline{A}$, en vertu de la Proposition A.1.8, on a $\delta_n(A, B) \leq \delta_n(\overline{A}, B)$.

Montrons la seconde inégalité. Premièrement si n et nul, le résultat est vérifié puisque, pour $\delta > 0$, $A \subseteq \delta B$ équivaut à avoir $\overline{A} \subseteq \delta B$. Ensuite, si $n \neq 0$ alors, vu que B est absolument convexe et absorbant, par la Proposition A.1.16, il existe $\delta > 0$, $N \leq n$ et $\{x_1, ..., x_N\}$ une partie finie de E tels que $A \subseteq \delta B + \langle x_1, ..., x_N \rangle_{ac}$. Remarquons que $\langle \{x_1, ..., x_N\} \rangle_{ac}$ est compact. En effet, c'est l'image du sous-compact

$$\{\Lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_N) \in \mathbb{K}^N \mid \sum_{k=1}^{N} |\lambda_k| \leq 1\}$$

par l'application

$$\phi : \mathbb{K}^N \to X : \Lambda \mapsto \sum_{k=1}^{N} \lambda_k x_k.$$

On en déduit donc que $\delta B + \langle \{x_1, ..., x_N\} \rangle_{ac}$ est fermé dans X. D'où,

$$\overline{A} \subseteq \delta B + \langle \{x_1, ..., x_N\} \rangle_{ac}.$$

Ce qui montre que $\delta_n(\overline{A}, B) \leq \delta$ et donc $\delta_n(\overline{A}, B) \leq \delta_n(A, B)$.

Au total, on a $\delta_n(A, B) = \delta_n(\overline{A}, B)$. $\square$

A.2 Dimension diamétrale

Notation A.2.1. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. On désigne par $\mathcal{B}_0$ une base de voisinage de 0 dans $(X, \mathcal{T})$.

Définition A.2.2. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique vectoriel de $\mathbb{K}$; la *dimension diamétrale* de X est

$$\Delta(X) = \{x \in \omega \mid \forall B \in \mathcal{B}_0,\ \exists B' \in \mathcal{B}_0 \text{ tel que } B' \subseteq B \text{ et } (x_n \delta_n(B', B))_{n \in \mathbb{N}_0} \in c_0\}$$

Remarque A.2.3. La Proposition A.1.5 assure que la définition ci-dessus est indépendante de la base de voisinage de 0 choisie.

Définition A.2.4. Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{T}')$ des espaces vectoriels topologiques ; une application $T : X \to Y$; T est *presqu'ouverte* si, pour tout $V \in \mathcal{V}_0$ dans $(X, \mathcal{T})$ on a $\overline{T(V)} \in \mathcal{V}_0$ dans $(Y, \mathcal{T}')$.

Remarque A.2.5. Il est clair que toute application ouverte est presqu'ouverte.

Proposition A.2.6. *Soit* $(X, \mathcal{T})$*,*

(1) si $(Y, \mathcal{T}')$ *est un espace vectoriel topologique et* $T : X \to Y$ *est linéaire, continu et ouvert, alors* $\Delta(X) \subseteq \Delta(Y)$*.*

(2) Si $(Y, \mathcal{T}')$ *est localement convexe et* $T : X \to Y$ *est linéaire, continu et presqu'ouvert, alors* $\Delta(E) \subseteq \Delta(F)$*.*

Démonstration. Soit $T : X \to Y$ une application linéaire, continue entre deux espaces vectoriels topologiques. On note $\mathcal{B}_{0,Y}$ une base de voisinage de 0 dans Y. On considère $x \in \Delta(X)$ et $B \in \mathcal{B}_{0,Y}$. Vu que T est continu, on peut trouver $A \in \mathcal{B}_{0,X}$ tel que $T(A) \subseteq B$. Par définition de $\Delta(E)$, il existe $A_0 \in \mathcal{B}_{0,X}$ tel que $A_0 \subseteq A$ et $x_n\delta_n(A_0, A) \to 0$, lorsque $n \to +\infty$.

Puisque T est ouvert, il existe $B' \in \mathcal{B}_{0,Y}$ tel que $B' \subseteq T(A_0)$. On trouve alors

$$\delta_n(B', B) \leq \delta_n(T(A_0), T(A)) \leq \delta_n(A_0, A),$$

en combinant les Propositions A.1.5 et A.1.12. On en tire que $x_n\delta_n(B', B) \in c_0$. On a donc $x \in \Delta(Y)$.

Ensuite, puisque F est absolument convexe, on peut considérer une base $\mathcal{B}_{0,Y}$ constituées de voisinages absolument convexes fermés de 0 dans $(Y, \mathcal{T}')$. Dans ce cas, il existe $B' \in \mathcal{B}_{0,Y}$ tel que $B' \subseteq \overline{T(A)}$. Du Corollaire A.1.17, on déduit que

$$\delta_n(B', B) \leq \delta_n(\overline{T(A)}, B) = \delta_n(T(A), B) \leq \delta_n(T(A), T(A_0)) \leq \delta(A_0, A).$$

On conclut comme au paragraphe précédent. □

Remarque A.2.7. Si $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{T}')$ sont isomorphe alors $\Delta(X) = \Delta(Y)$.

Remarque A.2.8. La dimension diamétrale est donc un invariant linéaire topologique sur la classes de espaces vectoriels topologique de $\mathbb{K}$.

Proposition A.2.9. *Soit* $(X, \mathcal{T})$ *un espace vectoriel topologique. On a* $c_0 \subseteq \Delta(X)$*.*

Démonstration. De la Proposition A.1.4, il vient $\delta_n(U, U) \leq 1$ quel que soit $U \in \mathcal{V}_0$ de $(X, \mathcal{T})$. □

Théorème A.2.10. *Soit* $(X, \mathcal{P})$ *un espace localement convexe. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) $(X, \mathcal{P})$ *est un espace de Schwartz,*

(2) $l_\infty \subseteq \Delta(X)$*,*

(3) $c_0 \subsetneq \Delta(X)$*.*

Démonstration. Il est clair que (1) implique (2) et (3) est un corollaire de (2). Il reste donc à montrer que (3) implique (1). Soit $x \in \Delta(X) \setminus c_0$, il existe donc $C > 0$ tel que $(x_{k_n})_n \geq C$ quel que soit $n \in \mathbb{N}_0$, avec $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}_0}$ une sous-suite de x. Soit $V \in \mathcal{B}_X$; par hypothèse, il existe $U \in \mathcal{B}_X$ absolument convexe tel que $U \subseteq V$ et $(x_n \delta_n(U, V)_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c_0$. Or, puisque

$$\delta_{k_n}(U, V) \leq \frac{1}{C} |x_{k_n} \delta_{k_n}(U, V)|,$$

quel que soit $n \in \mathbb{N}_0$, on déduit de la Proposition A.1.4 que $(\delta_{k_n}(U, V))_{n \in \mathbb{N}_0} \in c_0$. Ainsi $(\delta_n(U, V))_{n \in \mathbb{N}_0}$ converge vers la même limite. □

Remarque A.2.11. Ce dernier résultat implique, en particulier, que si $\Delta(X) = c_0$ alors $(X, \mathcal{P})$ n'est pas de Schwartz et inversement.

Définition A.2.12. Soit $(X, \mathcal{P})$ un espace localement convexe ; on pose

$$\Delta_b(X) = \{x \in \omega \mid \forall V \in \mathcal{B}_0, \forall B \text{ borné de } X, (x_n \delta_n(B, V))_{n \in \mathbb{N}_0} \in c_0\}.$$

Proposition A.2.13. *Soit* $(X, \mathcal{P})$ *un espace localement convexe, on a*

$$\Delta(X) \subseteq \Delta_b(X).$$

Démonstration. Cela découle des Propositions A.1.5 et A.1.7. □

Théorème A.2.14. *Soit* $(X, \mathcal{P})$ *un espace localement convexe. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) $(X, \mathcal{P})$ *est pseudo-Montel,*

(2) $l_\infty \subseteq \Delta_b(X)$*,*

(3) $c_0 \subsetneq \Delta_b(X)$*.*

Démonstration. Il suffit de procéder de la même manière que pour le Théorème A.2.10. □

Proposition A.2.15. *Soit* $(X, \mathcal{P})$ *un espace localement convexe,*

(1) si $(X, \mathcal{P})$ *n'est pas pseudo-Montel alors* $\Delta(X) = \Delta_b(X) = c_0$*.*

(2) Si $(X, \mathcal{P})$ *est pseudo-Montel mais non Schwartz, alors* $\Delta(X) = c_0 \subsetneq \Delta_b(X)$

Démonstration. Cela découle des théorèmes A.2.10 et A.2.14. □

Bibliographie

[1] D. Alpay, H. Attia, and D. Levanony. White noise based stochastic calculus associated with a class of gaussian processes. 2010.

[2] S. Bennabi. Une Introduction aux Espaces Localement Convexes, Préparation au Mémoire. Master's thesis, Université de Liège, 2020.

[3] H. Bourles. *Fundamentals of Advanced Mathematics V2 : Field extensions, topology and topological vector spaces, functional spaces, and sheaves.* ISTE Press, 2018.

[4] L. Demeulenaere. *Diametral dimensions and some applications to spaces S^{ν}.* PhD thesis, Université de Liège, 2018.

[5] C. Esser. *Analyse Fonctionnelle, Note de cours.* 2021.

[6] K. Floret. Fréchet-Montel-spaces which are not Schwartz-spaces. *Portuguliae Mathematica*, 1983.

[7] H-G. Garnir. *Espaces linéaires à semi-normes I et II.* Université de Liège. Institut de mathématique, Liège, éd. provisoire 1966 edition, 1966.

[8] A. Grothendieck. Sur les espaces (F) et (DF). *Summa Brasiliensis Mathematicae, vol. 3, no 6.*, 1954.

[9] A. Grothendieck. *Topological vector spaces.* Gordon and Breach, 1973.

[10] H. Jarchow. *Locally Convex Spaces.* Mathematische Leitfäden, 1981.

[11] J. Kakol and S. A. Saxon. Montel (DF)-spaces, sequential (LM)-spaces and the strongest locally convex topology. *J. London Math. Soc.*, 2002.

[12] G. Köthe. Die Stufenräume, eine einfache Klasse linearer vollkommener Räume. *Mathematische Zeitschrift*, 51 :317–345, 1949.

[13] P. Mathonet. *Topologie Générale, Notes de cours.* 2014.

[14] R. Meise and D. Vogt. *Introduction to functional analysis.* Oxford graduate texts in mathematics, 2. Clarendon Press, Oxford, 1997.

[15] S. Nicolay. *Théorie de la Mesure, Note de cours.* 2012.

[16] J-P. Schneiders. *Analyse Fonctionnelle, Notes de cours.* 2018.

[17] V. Wrobel. Generating Fréchet-Montel spaces that are not Schwartz by closed linear operators. *Arch. Math., Vol. 46, 257-260*, 1986.

Index