

Mémoire

Auteur : Nguyen Dai, Thinh

Promoteur(s) : Zenaïdi, Naïm; Mathonet, Pierre

Faculté : Faculté des Sciences

Diplôme : Master en sciences mathématiques, à finalité approfondie

Année académique : 2021-2022

URI/URL : <http://hdl.handle.net/2268.2/14698>

Avertissement à l'attention des usagers :

Tous les documents placés en accès ouvert sur le site le site MatheO sont protégés par le droit d'auteur. Conformément aux principes énoncés par la "Budapest Open Access Initiative"(BOAI, 2002), l'utilisateur du site peut lire, télécharger, copier, transmettre, imprimer, chercher ou faire un lien vers le texte intégral de ces documents, les disséquer pour les indexer, s'en servir de données pour un logiciel, ou s'en servir à toute autre fin légale (ou prévue par la réglementation relative au droit d'auteur). Toute utilisation du document à des fins commerciales est strictement interdite.

Par ailleurs, l'utilisateur s'engage à respecter les droits moraux de l'auteur, principalement le droit à l'intégrité de l'oeuvre et le droit de paternité et ce dans toute utilisation que l'utilisateur entreprend. Ainsi, à titre d'exemple, lorsqu'il reproduira un document par extrait ou dans son intégralité, l'utilisateur citera de manière complète les sources telles que mentionnées ci-dessus. Toute utilisation non explicitement autorisée ci-avant (telle que par exemple, la modification du document ou son résumé) nécessite l'autorisation préalable et expresse des auteurs ou de leurs ayants droit.



FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE

Un parallèle entre la géométrie euclidienne, sphérique et hyperbolique de dimension 2

Mémoire de fin d'études présenté en vue de l'obtention du titre de
Master en Sciences Mathématiques, à finalité approfondie

Année académique 2021-2022

Auteur :
Thinh NGUYEN-DAI

Promoteur :
Naïm ZENAÏDI

Co-Promoteur :
Pierre MATHONET

Remerciements

Je tiens à remercier mon promoteur Naïm pour les discussions enrichissantes en mathématiques mais également dans d'autres domaines.

Je tiens à remercier les personnes que j'ai pu rencontrer durant mes études. Je pense notamment à Savinien, Guillaume, Antoine, Benjamin, Sélim, Lucas, Pierre, Delphine et Pauline.

Je tiens à remercier les membres de la Dérivée et du CSM qui font leur maximum pour faire du B37 plus qu'un simple bâtiment où sont donnés des cours.

Et je tiens à remercier mes parents qui m'ont donné l'occasion de suivre mes études dans de bonnes conditions.

Introduction

L'objectif de ce travail est de donner un aperçu des concepts généraux de géométrie différentielle et de topologie, tels que la courbure, les groupes d'isométries et les revêtements, en nous familiarisant avec la géométrie euclidienne, sphérique et hyperbolique de dimension 2. L'avantage de travailler en basse dimension est de pouvoir visualiser les différentes notions et constructions, et d'obtenir des exemples simples qui illustrent des notions générales.

Le travail peut se diviser en deux parties. La première porte sur l'introduction de la géométrie euclidienne, sphérique et hyperbolique en dimension 2, en particulier les similarités que nous pouvons dégager quand nous nous intéressons aux groupes d'isométries. Ce point de vue de la géométrie comme étant l'étude d'actions de groupes est dû à Félix Klein dans son programme d'Erlangen. Ainsi, nous verrons dans le cas euclidien comment les notions de *droites*, *symétries axiales* et *isométries euclidiennes* sont liées par le théorème des 3 réflexions présenté dans le chapitre (2), et comment ce même théorème se généralise en géométrie sphérique et en géométrie hyperbolique.

La deuxième partie concerne le théorème de Killing-Hopf, qui est un théorème qui met en évidence une autre similarité entre les 3 géométries que nous étudions et l'importance de celles-ci dans le cadre des surfaces à courbure constante.

Détaillons maintenant le contenu de chaque chapitre. Le premier (1) porte sur les généralités, et a pour objectif d'avoir à notre disposition tous les outils nécessaires pour pouvoir travailler en géométrie euclidienne, sphérique et hyperbolique. Nous définissons ainsi les notions d'isométries, de longueurs de courbe et d'aires de portion. Ces concepts se généralisent via le cadre de la géométrie riemannienne, qui ne sera cependant pas le centre de notre travail. Une référence qui se concentre sur ce sujet est donnée par (Lee (2019a)).

L'objectif principal du deuxième chapitre (2) sur la géométrie euclidienne est de présenter une suite de résultats que nous suivrons pour la géométrie sphérique et hyperbolique pour mettre en avant leurs similarités. Nous souhaitons également souligner les concepts qui sont spécifiques à la géométrie euclidienne, comme le fait que nous pouvons construire des triangles semblables mais non isométriques. Ce fait peut nous sembler évident, mais en géométrie sphérique et hyperbolique, deux triangles semblables sont forcément isométriques.

Les chapitres (3) et (4) sur la géométrie sphérique et hyperbolique respectivement auront pour but principal d'établir des analogues avec les résultats de géométrie euclidienne. Citons par exemple le théorème des 3 réflexions, dont l'énoncé est identique dans les 3 géométries tant que nous adaptons les termes *droite* et *réflexions*. Nous aurons également l'occasion de souligner des différences majeures avec la géométrie euclidienne, avec notamment le calcul de l'aire d'un triangle sphérique et hyperbolique.

Cela nous permettra enfin d'aboutir vers le théorème de Killing-Hopf dans le chapitre (5), où nous présentons toutes les notions nécessaires tels que les actions discontinues de groupe, les quotients de surface et les revêtements riemanniens, et nous souhaitons montrer que les surfaces localement isométriques aux géométries que nous avons étudiées s'obtiennent comme des quotients de celles-ci par des groupes d'isométries.

Table des matières

1	Généralités	5
1.1	Rappels de géométrie affine	5
1.1.1	Variétés affines	7
1.1.2	Positions relatives de deux variétés affines	7
1.2	Espace affine euclidien	9
1.2.1	Orientation	11
1.3	Variétés plongées riemanniennes	11
1.3.1	Angles et applications conformes	16
1.3.2	Le calcul d'aire pour les surfaces	17
1.4	Applications complexes et transformations de Möbius	17
2	Géométrie euclidienne de dimension 2	24
2.1	Le plan euclidien et les isométries de base	24
2.2	Changement de coordonnées et conjugaison	26
2.3	Droites euclidiennes et longueurs	28
2.4	Théorème des 3 réflexions	31
2.5	Translations et rotations comme composées de réflexions	33
2.6	Réflexions glissées et produits de 3 réflexions	36
2.7	Spécificités de la géométrie euclidienne	39
2.7.1	Le 5ème postulat d'Euclide	40
2.7.2	Somme des angles d'un triangle	40
2.7.3	Dilatations et triangles semblables non isométrique	41
3	Géométrie sphérique de dimension 2	43
3.1	Géométrie euclidienne de dimension 3	43
3.2	La sphère S^2 comme surface plongée dans \mathbb{R}^3	45
3.3	Grands cercles de la sphère et théorème des 3 réflexions	47
3.4	Rotations sphériques	51
3.5	Projection stéréographique et inversions par un cercle	52
3.5.1	Inversions par rapport à un cercle	53
3.5.2	Inversion par rapport à un cercle généralisé	55
3.6	Images des isométries sphériques par projection stéréographique	57
3.6.1	Images des isométries sphériques par projection stéréographique	57
3.6.2	Isométries sphériques en tant que fonctions complexes	61
3.7	L'aire d'un triangle sphérique	63
3.8	Projections de la sphère sur le plan et courbure de Gauss	65
4	Géométrie hyperbolique de dimension 2	67
4.1	La pseudosphère	67
4.1.1	Métrique	69
4.2	Le demi-plan hyperbolique	72

4.3	Le disque de Poincaré	74
4.4	Droites et segments	79
4.4.1	Longueur de segment	81
4.5	Théorème des 3 réflexions	84
4.6	Les isométries de \mathbb{H}^2 en tant que fonctions complexes	86
4.7	Classification des isométries hyperboliques	90
4.7.1	Cercle à l'infini	90
4.7.2	Description des isométries	93
4.7.3	Classification des isométries hyperboliques	99
4.8	Aire d'un triangle hyperbolique	101
5	Le théorème de Killing-Hopf	105
5.1	Surfaces euclidiennes	105
5.1.1	Le cylindre en tant que surface euclidienne	105
5.2	Propriétés partagées par la géométrie euclidienne, sphérique et hyperbolique de dimension 2	108
5.3	Surfaces quotients	110
5.3.1	Surfaces complètes	113
5.4	Revêtement et théorème de Killing-Hopf	114
5.4.1	Groupe de morphismes de revêtement	120
5.4.2	Surfaces localement sphériques et l'application antipodale	121

Chapitre 1

Généralités

L'objectif de ce chapitre est d'avoir tous les outils nécessaires pour travailler en géométrie euclidienne, sphérique et hyperbolique en dimension 2.

Nous rappelons ainsi le cadre de la géométrie affine, qui permet de définir les droites, les plans et de manière générale les variétés affines. Les droites sont centrales à la géométrie euclidienne de dimension 2, car elles permettent entre autre de définir les réflexions axiales, qui comme nous le montrerons dans le théorème des 3 réflexions génèrent toutes les autres isométries euclidiennes. Les plans quant à eux nous permettront de définir les grands cercles de la sphère, qui sont l'équivalent des droites euclidiennes en géométrie sphérique (3).

La notion d'isométrie est traitée dans la section (1.3), qui décrit de manière générale comment nous pouvons définir les notions telles que les angles, longueurs de courbe et distance en nous donnant un produit scalaire en chaque plan tangent d'une variété. Cela nous permettra entre autre de traiter la géométrie hyperbolique (4) au travers de ses modèles, qui sont le demi-plan hyperbolique (4.2) et le disque de Poincaré (4.3).

1.1 Rappels de géométrie affine

Cette section traite des rappels du cours de géométrie affine, donné par Mr. Lecomte Lecomte (2003e). Nous nous focalisons essentiellement sur les droites et les plans, car ce sont les objets que nous allons manipuler dans la suite. Les résultats ne seront pas tous démontrés dans ce travail, et les détails peuvent se trouver dans la référence de Mr. Lecomte Lecomte (2003e).

Définition 1. Un *espace affine* \mathcal{E} modelé sur un espace vectoriel $\vec{\mathcal{E}}$ de champ \mathbb{R} est un ensemble de points muni d'une action de groupe

$$t : \vec{\mathcal{E}} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \\ (u, X) \mapsto t_u(X) := X + u,$$

c'est à dire une application qui vérifie les propriétés suivantes :

1. (Action par 0 est l'identité) Nous avons $X + 0 = X$ pour tout $X \in \mathcal{E}$,
2. (Associativité) Pour tous $X \in \mathcal{E}$ et $u, v \in \vec{\mathcal{E}}$, nous avons $(X + u) + v = X + (u + v)$,

et cette action de groupe est de plus transitive et libre :

3. (Transitive) Pour tous $X, Y \in \mathcal{E}$, il existe un élément $X\vec{Y} \in \vec{\mathcal{E}}$ tel que $X + X\vec{Y} = Y$,
4. (Libre) Si $X + u = X + v$ pour un $X \in \mathcal{E}$, alors $u = v$.

La *dimension* d'un espace affine est la dimension de l'espace vectoriel sur lequel il est modelé.

Exemple 1. L'ensemble \mathbb{R}^n modelé sur l'espace vectoriel \mathbb{R}^n est un espace affine de dimension n .

À partir de cette définition, nous pouvons définir les notions de *combinaisons affines* et ainsi de droite.

Proposition 1 (Combinaison affine). *Soit $P \in \mathcal{E}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ et $A_1 \dots A_m$ des points de \mathcal{E} .*

1. *Si $\alpha_1 + \dots + \alpha_m = 0$, alors $\alpha_1 \vec{S\bar{A}}_1 + \dots + \alpha_m \vec{S\bar{A}}_m$ est un élément de $\vec{\mathcal{E}}$ et ne dépend pas de S*
2. *Si $\alpha_1 + \dots + \alpha_m = 1$, alors $\alpha_1 \vec{S\bar{A}}_1 + \dots + \alpha_m \vec{S\bar{A}}_m$ est un élément de \mathcal{E} et ne dépend pas de S*

Démonstration. La preuve est donnée dans Lecomte (2003f). □

Au vu de la proposition, nous pouvons ainsi donner du sens à la notation

$$\alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_m A_m,$$

quand $\alpha_1 + \dots + \alpha_m = 0$ ou $\alpha_1 + \dots + \alpha_m = 1$.

Les droites ne sont rien d'autre que des ensembles de combinaisons affines.

Définition 2. Soient A et B deux points distincts de \mathcal{E} une variété affine. La *droite* AB qui passe par A et B est définie comme l'ensemble des combinaisons affines de A et B , c'est à dire

$$AB = \{\lambda A + (1 - \lambda)B : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Le *segment* $[AB]$ est l'ensemble des combinaisons convexes de A et B , c'est à dire

$$[AB] = \{\lambda A + (1 - \lambda)B : \lambda \in [0, 1]\}.$$

Nous allons utiliser le résultat suivant qui donne deux propriétés importantes des droites.

Proposition 2.

1. *Le point X appartient à AB si et seulement si \vec{AX} est un multiple de \vec{AB} .*
2. *Si P, Q sont deux points distincts de la droite AB , alors $PQ = AB$.*

Démonstration. La preuve est donnée dans Lecomte (2003g). □

Remarque 1. Nous pouvons tirer du deuxième point que si deux droites sont distinctes, elles s'intersectent en au plus un point.

Corollaire 1. *Soient deux points distincts A et B , il existe une et une seule droite qui passe par A et B*

Démonstration. L'existence est évidemment donnée par la droite AB . L'unicité vient directement du deuxième point de la proposition précédente (2). En effet, si nous avons une droite PQ qui contient les points A et B , alors $AB = PQ$. □

Les droites et les plans qui nous sont familiers peuvent être généralisés via la notion de variété affine.

1.1.1 Variétés affines

Définition 3. Une variété affine \mathcal{V} d'un espace affine \mathcal{E} est une partie de \mathcal{E} telle que si A et B sont 2 points distincts de \mathcal{V} , la droite AB est incluse dans \mathcal{V} .

Exemple 2. L'ensemble vide et tout singleton sont des variétés affines, simplement parce que ces ensembles ne contiennent pas 2 points distincts.

Exemple 3. Grâce à la proposition (2), les droites sont également des variétés affines.

De manière générale, les variétés affines (non vides) admettent une décomposition donnée par la proposition suivante, démontrée en Lecomte (2003h).

Proposition 3. Soient A un point de \mathcal{V} une variété affine, définissons l'ensemble de vecteurs suivant :

$$\vec{\mathcal{V}} = \{A\vec{X} | X \in \mathcal{V}\}.$$

Alors l'ensemble $\vec{\mathcal{V}}$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{\mathcal{E}}$ qui ne dépend pas de A . De plus,

$$\mathcal{V} = A + \vec{\mathcal{V}}.$$

Comme cet ensemble $\vec{\mathcal{V}}$ ne dépend pas du point A choisi, cela nous pousse à définir les notions suivantes.

Définition 4. Reprenons les notations de la proposition précédente (3),

- Le sous-espace $\vec{\mathcal{V}}$ est appelé le *sous-espace vectoriel directeur*, ou la *direction* de \mathcal{V} si nous avons une droite.
- Les éléments de $\vec{\mathcal{V}} \setminus \{0\}$ sont appelés les *vecteurs directeurs*.
- La *dimension* de \mathcal{V} est la dimension de $\vec{\mathcal{V}}$ en tant qu'espace vectoriel.

Les plans sont définis comme étant les variétés affines de dimension 2.

Exemple 4. Les droites sont des variétés affines de dimension 1, ainsi la droite AB peut également se réécrire sous la forme suivante :

$$AB = A + \{\lambda\vec{AB} | \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

1.1.2 Positions relatives de deux variétés affines

En géométrie euclidienne et sphérique, nous serons amenés à considérer deux droites ou deux plans et à examiner leur éventuelle intersection. Les résultats sont donnés dans la sous-section (1.1.2). Cette section traite de l'intersection entre deux variétés affines ainsi que de la notion de parallélisme.

Proposition 4. L'intersection de deux variétés affines est une variété affine.

Démonstration. Notons \mathcal{V} et \mathcal{V}' deux variétés affines. Leur intersection peut être vide ou un singleton, et ces deux cas correspondent à des variétés affines.

Supposons alors que $\mathcal{V} \cap \mathcal{V}'$ contienne au moins 2 points. Soient A et B deux points distincts de $\mathcal{V} \cap \mathcal{V}'$. Comme \mathcal{V} et \mathcal{V}' sont des variétés affines, la droite AB est incluse dans \mathcal{V} ainsi que dans \mathcal{V}' . Ainsi, la droite AB est incluse dans $\mathcal{V} \cap \mathcal{V}'$, ce qui montre que l'intersection de deux variétés affines est une variété affine. \square

Quand l'intersection de deux variétés affines est vide, il est possible que l'une s'obtienne par translation de l'autre, et nous disons ainsi qu'elles sont parallèles. Nous souhaitons définir une notion de parallélisme plus générale.

Définition 5. Deux variétés affines \mathcal{V} et \mathcal{V}' sont *parallèles* si $\vec{\mathcal{V}} \subseteq \vec{\mathcal{V}}'$ ou $\vec{\mathcal{V}}' \subseteq \vec{\mathcal{V}}$.

Remarquons que dans le cas de deux variétés affines de même dimension finie n , l'assertion $\vec{\mathcal{V}} \subseteq \vec{\mathcal{V}}'$ est équivalente à $\vec{\mathcal{V}} = \vec{\mathcal{V}}'$. Comme toute variété affine \mathcal{V} peut s'écrire sous la forme $A + \vec{\mathcal{V}}$, deux variétés affines parallèles et de même dimension sont translations l'une de l'autre.

L'avantage de la définition (5) est qu'elle permet de parler de parallélisme entre deux variétés affines de dimension différente. Ainsi, nous pouvons dire qu'une droite est parallèle à un plan.

Proposition 5. Soient deux variétés affines \mathcal{V} et \mathcal{V}' parallèles. Alors les variétés sont soit disjointes, soit telles que l'une est incluse dans l'autre.

Démonstration. Supposons que les variétés affines \mathcal{V} et \mathcal{V}' s'intersectent en un point A et montrons que l'une est incluse dans l'autre. Par les discussions précédentes, nous pouvons réécrire \mathcal{V} et \mathcal{V}' via leur sous-espace vectoriel directeur :

$$\begin{cases} \mathcal{V} &= A + \vec{\mathcal{V}} \\ \mathcal{V}' &= A + \vec{\mathcal{V}}' \end{cases}$$

Au vu de notre définition de la notion de parallélisme, nous avons soit $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}'$, soit $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$, ce qui suffit. \square

Nous pouvons en tirer que deux variétés affines parallèles et de même dimension sont soit disjointes, soit confondues.

Intéresserons-nous à quelques cas particuliers d'intersections de variétés affines, quand nous travaillons dans un espace affine de dimension 2 ou 3.

Intersections de droites et plans

Dans le chapitre qui porte sur la géométrie euclidienne, nous montrerons que toute isométrie euclidienne est le produit d'au plus 3 réflexions, ou symétries axiales. Comme l'ensemble des points fixes d'une réflexion est une droite, la composée de réflexions peut se comprendre à partir de l'intersection des droites associées. Un résultat analogue existe en géométrie sphérique, où l'équivalent des symétries axiales sont les réflexions autour d'un plan. Ainsi nous avons besoin de comprendre l'intersection entre deux droites et entre deux plans, quand nous nous restreignons à un espace affine de dimension 2 ou 3 respectivement.

Proposition 6. Dans un espace affine de dimension 2, deux droites distinctes sont soit parallèles, soit sécantes, c'est à dire qu'elles s'intersectent en un point.

Démonstration. Soient \mathcal{D} et \mathcal{D}' deux droites distinctes incluses à un même plan et qui ne sont pas parallèles. Notons u (respectivement u') un vecteur directeur de \mathcal{D} (resp. \mathcal{D}'). Du fait que ces droites ne sont pas parallèles, les vecteurs u et u' sont linéairement indépendants. Un point d'intersection de \mathcal{D} et \mathcal{D}' vérifierait

$$A + \lambda u = B + \lambda' u',$$

avec $A \in \mathcal{D}$, $B \in \mathcal{D}'$ et $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$. Nous avons les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} A + \lambda u &= B + \lambda' u' \\ \Leftrightarrow A + \vec{AB} + \lambda u &= B + \vec{AB} + \lambda' u' \\ \Leftrightarrow \lambda u &= \vec{AB} + \lambda' u' \\ \Leftrightarrow \lambda u - \lambda' u' &= \vec{AB}. \end{aligned}$$

Comme u et u' sont linéairement indépendants, ils forment une base de l'espace vectoriel directeur du plan, ainsi λ et λ' existent toujours et donc les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' s'intersectent en un point. \square

Proposition 7. *Dans un espace affine de dimension 3, deux plans distincts sont parallèles ou se coupent selon une droite.*

Démonstration. Si deux plans ont le même sous-espace vectoriel directeur, alors ils sont parallèles par définition.

Supposons maintenant avoir deux plans \mathcal{V} et \mathcal{V}' , respectivement de sous-espaces vectoriels $\vec{\mathcal{V}}$, $\vec{\mathcal{V}'}$ différents. Notons v_1, v_2 (respectivement v'_1, v'_2) une base de $\vec{\mathcal{V}}$ (resp. $\vec{\mathcal{V}'}$). Comme $\vec{\mathcal{V}} \neq \vec{\mathcal{V}'}$, au moins un des v'_i est linéairement indépendant de v_1 et v_2 , que nous pouvons supposer être v'_1 . Nous savons que v'_2 ne peut pas être linéairement indépendant de v_1 et v_2 , car nous aurions ainsi une base composée de 4 éléments pour un espace vectoriel de dimension 3, ce qui est absurde. Ainsi, $v'_2 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ pour $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$ et donc l'intersection $\vec{\mathcal{V}} \cap \vec{\mathcal{V}'}$ est de dimension 1.

L'existence d'un point d'intersection se traite de manière similaire à la proposition précédente. Soit A (respectivement B) un point de \mathcal{V} (resp. \mathcal{V}'). Nous avons

$$\begin{aligned} A + \alpha v_1 + \beta v_2 &= B + \alpha' v'_1 + \beta' v'_2 \\ \alpha v_1 + \beta v_2 - \alpha' v'_1 - \beta'(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) &= \vec{AB} \\ (\alpha - \beta' \lambda_1) v_1 + (\beta - \beta' \lambda_2) v_2 - \alpha' v'_1 &= \vec{AB}. \end{aligned}$$

Comme v_1, v_2 et v'_1 forment une partie génératrice d'un espace vectoriel de dimension 3, une solution existe toujours, en prenant $\beta' = 0$ par exemple. \square

1.2 Espace affine euclidien

Les espaces affines permettent de modéliser les notions de droites, plans et de parallélisme. Pour pouvoir parler de longueurs et d'angles, nous avons besoin de définir un produit scalaire, qui nous permettra de définir les notions de longueurs et d'angles de manière générale.

Définition 6.

- Un *produit scalaire* $g : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ sur un espace vectoriel réel E est une application bilinéaire, symétrique et définie positive.
- Un *espace vectoriel euclidien* (E, g) est un espace vectoriel E réel de dimension fini et muni d'un produit scalaire g .
- Un *espace affine euclidien* est un espace affine \mathcal{E} modélé sur un espace vectoriel euclidien.

Exemple 5. Sur l'espace vectoriel \mathbb{R}^n , nous avons le produit scalaire canonique

$$(x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Commençons par définir la notion d'angle à partir de notre produit scalaire.

Définition 7. Soit (E, g) un espace vectoriel euclidien.

- Soit $u \in E$, la *longueur* du vecteur u est défini comme étant

$$|u| = \sqrt{g(u, u)}.$$

- Soient $u, v \in E$ non nuls, L'*angle non orienté* entre les vecteurs u et v est défini comme étant l'unique $\theta \in [0, \pi]$ tel que ^a

$$\cos(\theta) = \frac{g(u, v)}{|u||v|}.$$

^a. L'existence provient de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, qui permet que nous avons toujours l'inégalité $|u||v| \geq |g(u, v)|$. La démonstration est donnée dans Lecomte (2003i)

Notons que la définition d'angle entre deux vecteurs ne dépend pas de la longueur des vecteurs. Comme les droites sont uniquement déterminées par un point de la droite et un vecteur unité, nous pouvons également définir des angles entre deux droites.

Définition 8. L'angle entre deux droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 est le plus petit des angles non orientés que font un vecteur directeur u de l'une et un vecteur directeur u' de l'autre.

Nous souhaitons maintenant définir les angles entre les plans de \mathbb{R}^3 , pour obtenir un analogue des rotations en géométrie sphérique (3.4). Nous pouvons de manière générale définir la notion d'angle entre hyperplans, c'est à dire les variétés affines de dimension $n - 1$ si nous travaillons dans un espace affine de dimension n .

Définition 9. • Deux vecteurs $u, v \in E$ sont dits *orthogonaux* si $g(u, v) = 0$.

- Soit V un sous-espace vectoriel de (E, g) , un espace vectoriel euclidien. Le complément orthogonal V^\perp de V est défini comme l'ensemble des éléments orthogonaux à V , c'est à dire l'ensemble des $v^\perp \in E$ qui vérifient

$$g(v^\perp, v) = 0$$

pour tous $v \in V$.

Remarque 2. Le complément orthogonal est un sous-espace vectoriel de dimension $\dim(E) - \dim(V)$. Cela est montré en Lecomte (2003j).

Ainsi, le complément orthogonal du sous-espace directeur d'un hyperplan est de dimension 1, donc une droite vectorielle. Cela nous pousse à définir l'angle entre deux hyperplans via l'angle entre leur complément orthogonal.

Définition 10. • Soit Π un hyperplan. Une droite \mathcal{D} est normale à Π si \mathcal{D} intersecte Π et si le sous-espace directeur de \mathcal{D} est donné par le complément orthogonal du sous-espace directeur de Π .

- L'angle entre deux hyperplans est l'angle formé par deux droites respectivement normales à l'un et à l'autre.

1.2.1 Orientation

En dimension 2, la notion intuitive d'orientation est de définir un sens de rotation d'un cercle fixé. Une autre façon de définir l'orientation pour un espace vectoriel E est de se fixer une base B_1 et dire qu'une autre base B_2 est de même orientation si nous pouvons passer de l'une à l'autre de manière continue. Dans ce cas, le déterminant de la matrice de passage de B_1 à B_2 est de déterminant strictement positif. En effet, le déterminant d'une matrice de passage est toujours non nul, et comme il vaut 1 quand B_2 est proche de B_1 , il reste strictement positif. Cela nous pousse à définir la notion suivante.

Définition 11. Deux bases B_1 et B_2 d'un espace vectoriel E de dimension n sont de *même orientation* si la matrice de passage de B_1 à B_2 est de déterminant strictement positif.

Comme l'espace vectoriel \mathbb{R}^n est muni d'une base canonique, nous dirons que les bases de même orientation que la base canonique sont positives, et que les autres sont négatives.

Au vu de la définition selon laquelle deux bases ont même orientation si la matrice de passage est de déterminant positif, nous définissons de manière générale une application qui préserve l'orientation comme suit.

Définition 12. Une application $C^1 f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ *préserve l'orientation* si pour tout $P \in U$, un ouvert connexe de \mathbb{R}^n , nous avons

$$\det \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P) \right) > 0.$$

Autre contraire, une application f *renverse l'orientation* si

$$\det \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P) \right) < 0.$$

1.3 Variétés plongées riemanniennes

Dans cette section, nous souhaitons généraliser les notions habituelles de longueurs, angles et distances à partir de la donnée d'un produit scalaire en chaque point tangent de notre variété. Par exemple, les surfaces plongées dans \mathbb{R}^3 euclidien héritent d'un produit scalaire naturel, qui est la restriction du produit scalaire de \mathbb{R}^3 aux plans tangents de la surface. Cela définit la première forme fondamentale des surfaces et sera le point de vue que nous prendrons pour la sphère. De manière générale, nous n'allons pas imposer au produit scalaire d'être celui hérité par le produit scalaire canonique.

Définition 13. Une *variété plongée riemannienne* (V, g) est une variété V de classe C^1 , incluse dans \mathbb{R}^n pour un certain n , et munie d'un produit scalaire g_P en chaque point plan tangent en P de V telle que l'application

$$\begin{aligned} g : V &\rightarrow \{T_P V \times T_P V \rightarrow [0, +\infty[\} \\ P &\mapsto g_P \end{aligned}$$

soit continue.

Pour définir la notion de distance entre deux points, nous avons besoin de définir la longueur d'une courbe qui joint ces deux points. La distance sera ainsi définie comme étant la borne inférieure des longueurs des courbes qui joignent ces deux points. Définissons tout d'abord les courbes.

Définition 14. Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite C^1 *par morceaux* s'il existe une subdivision finie $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ telle que :

1. La fonction f est de classe C^1 sur chaque intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$, pour $i \in \{0, \dots, n-1\}$.
2. Les limites et les dérivées à gauche et à droite (quand elles ont du sens) des points a_i sont finies, pour $i \in \{0, \dots, n\}$.

L'intérêt de prendre des courbes C^1 par morceaux est que nous pouvons par exemple calculer la longueur de courbes qui s'obtiennent comme concaténation de segments euclidiens.

Définition 15. Une *courbe paramétrée* d'une variété V de classe C^1 est une application $\gamma : I \rightarrow V$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. I est un intervalle réel compact,
2. La fonction γ est continue et C^1 par morceaux sur I .

La *trace* de γ est l'ensemble Γ où

$$\Gamma = \gamma(I) = \{\gamma(t) : t \in I\}.$$

Nous sommes maintenant prêts à définir la longueur d'une courbe paramétrée.

Définition 16. Soit $\gamma : I \rightarrow V$ une courbe paramétrée d'une variété Riemannienne plongée (V, g) . La *longueur* de γ est définie par

$$\mathcal{L}_V(\gamma) = \int_I \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt. \text{ }^a$$

^a Remarquons que nous ne demandons à la fonction γ de n'être que C^1 par morceaux, mais que cela n'est pas un problème pour la définition de la longueur d'arc, car il n'existe qu'un nombre fini de points qui posent problème pour la dérivée, ce qui ne change pas le résultat de l'intégrale de Lebesgue.

Remarque 3. Une interprétation de la définition de la longueur d'arc dans le cas du produit scalaire euclidien est donné dans (Lecomte (2003a)), avec l'idée d'approximer une courbe par des segments de droite.

À partir de la notion de la longueur de courbes, nous pouvons définir une notion de distance. Celle-ci généralise la notion habituelle que nous avons dans le cas d'un espace euclidien, qui est la longueur du segment joignant les deux points, et qui est en fait la borne inférieure des longueurs des courbes joignant ces deux points.

Remarquons que cette notion n'est pas toujours définie si nous prenons une variété plongée V qui n'est pas connexe par arcs. Comme nous pouvons toujours travailler sur les composantes connexes par arcs d'une variété, nous supposerons dans la suite travailler sur une variété connexe par arcs.¹

Définition 17. • Une *pseudo-distance* d sur un ensemble E est une application $d : E \times E \rightarrow [0, +\infty[$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. (Pseudo-Séparation) Pour tous $x, y \in E$, nous avons $d(x, y) = 0$.
2. (Symétrie) Pour tous $x, y \in E$, nous avons l'égalité $d(x, y) = d(y, x)$.
3. (Inégalité triangulaire) Pour tous $x, y, z \in E$, nous avons l'inégalité

$$d(x, y) + d(y, z) \leq d(x, z).$$

- Une *distance* d sur un ensemble E est une pseudo-distance, où la première propriété est renforcée par celle de séparation :

- 1.5 (Séparation) Pour tous $x, y \in E$, nous avons $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$

Définissons une notion de distance sur les variétés plongées riemanniennes.

Définition 18. Soit une courbe $\gamma : [0, 1] \rightarrow V$ d'une variété plongée riemannienne (V, g) . Les *extrémités* de γ sont les deux points $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$ de V .

Si V est de plus connexe, la *distance* entre deux points P_1 et P_2 de V est définie comme étant

$$d_V(P_1, P_2) = \inf\{\mathcal{L}_V(\gamma) : \gamma \text{ est une courbe de } V \text{ d'extrémités } P_1 \text{ et } P_2\}.$$

Vérifions que notre définition vérifie les propriétés d'une distance.

Proposition 8. La fonction d_V définie sur une variété plongée riemannienne connexe (V, g) est une pseudo-distance.

Démonstration. 1. La distance d'un point P à lui-même est nulle, étant donné que nous pouvons prendre la courbe constante $\gamma : t \in [0, 1] \mapsto P \in V$.

2. La distance est symétrique car une courbe Γ d'extrémités P_1 et P_2 est également d'extrémités P_2 et P_1 .

3. Pour l'inégalité triangulaire, soient trois points P_1, P_2 et P_3 de V . Nous souhaitons montrer que

$$\begin{aligned} d_V(P_1, P_3) &\leq d_V(P_1, P_2) + d_V(P_2, P_3) \\ \Leftrightarrow \inf(A_{13}) &\leq \inf(A_{12}) + \inf(A_{23}) = \inf(A_{12} + A_{23}), \end{aligned}$$

1. Pour les espaces localement connexes par arcs, c'est à dire tels que chaque voisinage contient un voisinage connexe par arcs, les notions de connexité et connexité par arcs sont équivalentes, via (11). Les variétés sont localement connexes par arcs, car les disques ouverts dans \mathbb{R}^n sont connexes par arcs, ainsi imposer à une variété d'être connexe par arcs est équivalent à lui imposer d'être connexe.

où A_{ij} est l'ensemble des longueurs des courbes de V d'extrémités P_i et P_j . Montrons que

$$A_{12} + A_{23} \subseteq A_{13},$$

ce qui suffira. Soient $\gamma_{1,2}$ et $\gamma_{2,3}$ des courbes de V définies sur $[0, 1]$ telles que $\gamma_{1,2}(0) = P_1$, $\gamma_{1,2}(1) = P_2 = \gamma_{2,3}(0)$ et $\gamma_{2,3}(1) = P_3$. Définissons $\gamma_{1,3}$ comme étant la concaténation de $\gamma_{1,2}$ et $\gamma_{2,3}$, c'est à dire :

$$\begin{aligned} \gamma_{1,3} : [0, 1] &\rightarrow V \\ t &\mapsto \begin{cases} \gamma_{1,2}(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ \gamma_{2,3}(2t - 1) & \text{si } t \in [1/2, 1]. \end{cases} \end{aligned}$$

La courbe $\gamma_{1,3}$ est une courbe car l'application $\gamma_{1,3}$ est continue et C^1 par morceaux, et est d'extrémités P_1 et P_3 . Enfin,

$$\mathcal{L}_V(\gamma_{1,2}) + \mathcal{L}_V(\gamma_{2,3}) = \mathcal{L}_V(\gamma_{1,3}),$$

ce qui montre l'inclusion voulue et conclut la démonstration. □

Remarque 4. La fonction d_V que nous avons définie est en fait une distance. Il faudrait montrer que si $d_V(x, y) = 0$, alors $x = y$. Nous n'allons pas le démontrer dans ce cas général, mais cela sera vrai en géométrie euclidienne, sphérique et hyperbolique. Une preuve du cas général est donnée dans Lee (2019b).

Comme nous avons muni une variété plongée d'un produit scalaire, il est naturel de se demander à quelle condition une application préserve ce produit scalaire. Cela nous mène vers la notion d'isométrie. Comme les longueurs de courbe sont définies à partir du produit scalaire, nous nous attendons à ce qu'une isométrie préserve également ces notions.

Le groupe d'isométries en géométrie euclidienne, sphérique et hyperbolique sera l'objet principal de notre étude. Ce point de vue est dû à Félix Klein et généralise l'idée d'Euclide de pouvoir déplacer une figure sur une autre, telle qu'une droite ou un triangle.

Définition 19. Soient (V_1, g_1) et (V_2, g_2) deux variétés plongées riemanniennes et $f : V_1 \rightarrow V_2$ un difféomorphisme de classe C^1 . Nous dirons que f est une *isométrie* de (V_1, g_1) dans (V_2, g_2) si f préserve le produit scalaire, c'est à dire si

$$g_{1,P}(u, v) = g_{2,f(P)}(f_*Pu, f_*Pv),$$

pour tous points P de V_1 et tous $u, v \in T_PV_1$.

Une isométrie de (V, g) est définie comme étant une isométrie de (V, g) dans (V, g) .

Montrons désormais que les isométries sur une même variété plongée riemannienne (V, g) permettent de définir un groupe pour la composition de fonctions.

Proposition 9. Soient (V_1, g_1) , (V_2, g_2) et (V_3, g_3) trois variétés plongées riemanniennes. Soit f une isométrie de (V_1, g_1) dans (V_2, g_2) , et soit h une isométrie de (V_2, g_2) dans (V_3, g_3) . Alors

1. f^{-1} est une isométrie de (V_2, g_2) dans (V_1, g_1) .
2. $h \circ f$ est une isométrie de (V_1, g_1) dans (V_3, g_3) .

En particulier, l'ensemble des isométries sur une même variété plongée riemannienne

(V, g) forme un groupe pour la composition de fonctions.

Démonstration. Dans les deux cas, la fonction considérée est bien un difféomorphisme C^1 entre les variétés demandées. Montrons que f^{-1} préserve le produit scalaire. Il est clair que id_{V_2} est une isométrie de la variété Riemannienne (V_2, g_2) , et nous avons $f \circ f^{-1} = id_{V_2}$. Ainsi nous avons, grâce à la formule de la différentielle de fonctions composées,

$$\begin{aligned} g_{2,P}(u, v) &= g_{2, f \circ f^{-1}(P)}((f \circ f^{-1})_{*P}(u), (f \circ f^{-1})_{*P}(v)) \\ &= g_{2, f^{-1}(P)}(f_{*f^{-1}(P)}(f^{-1})_{*P}(u), f_{*f^{-1}(P)}(f^{-1})_{*P}(v)) \\ &= g_{1, f^{-1}(P)}((f^{-1})_{*P}(u), (f^{-1})_{*P}(v)), \end{aligned}$$

ce qui montre que f^{-1} est une isométrie. Montrons maintenant que l'application $h \circ f$ préserve le produit scalaire. Nous utilisons de nouveau la formule de la différentielle de fonctions composées et trouvons ainsi

$$\begin{aligned} g_P(u, v) &= g_{2, f(P)}(f_{*P}(u), f_{*P}(v)) \\ &= g_{3, h(f(P))}(h_{*f(P)}(f_{*P}(u)), (h_{*f(P)}(f_{*P}(v)))) \\ &= g_{3, h \circ f(P)}((h \circ f)_{*P}(u), (h \circ f)_{*P}(v)). \end{aligned}$$

Au vu de ce que nous venons de montrer, l'ensemble des isométries sur (V, g) forme un groupe pour la composition de fonctions, car cette opération est associative et l'identité sur V est une isométrie. □

Dans le contexte des espaces métriques, c'est à dire les ensembles munis d'une distance, une isométrie est définie comme étant une application bijective qui préserve la distance. Nous venons de voir que nous pouvons définir une distance sur une variété plongée riemannienne à partir des longueurs de courbe, ainsi ceux-ci sont des espaces métriques. Montrons tout d'abord que les isométries préservent les longueurs de courbe, et montrons ensuite qu'elles préservent la distance.

Proposition 10. Soient (V_1, g_1) et (V_2, g_2) deux variétés plongées riemannienne, $\gamma : I \rightarrow V$ une courbe de V et f une isométrie de (V_1, g_1) dans (V_2, g_2) . Alors $f \circ \gamma$ est une courbe de V_2 et la longueur de γ est préservée par isométrie, c'est à dire que

$$\mathcal{L}_{V_2}(f \circ \gamma) = \mathcal{L}_{V_1}(\gamma).$$

Démonstration. L'application f est un difféomorphisme, ainsi $f \circ \gamma$ est bien une courbe. Sa longueur est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{V_2}(f \circ \gamma) &= \int_I \sqrt{g_{2, f \circ \gamma(t)}((f \circ \gamma)'(t), (f \circ \gamma)'(t))} dt \\ &= \int_I \sqrt{g_{2, f \circ \gamma(t)}(f_{*\gamma(t)}(\gamma'(t)), f_{*\gamma(t)}(\gamma'(t)))} dt \\ &= \int_I \sqrt{g_{1, \gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt = \mathcal{L}_{V_1}(\gamma). \end{aligned}$$

□

Nous en tirons le résultat annoncé.

Corollaire 2. Soit deux variétés plongées Riemanniennes (V_1, g_1) et (V_2, g_2) et deux points P_1 et P_2 de V . Soit f une isométrie de (V, g) dans (V', g') . Alors f préserve les distances, c'est à dire que

$$d_{V_1}(P_1, P_2) = d_{V_2}(f(P_1), f(P_2)).$$

Démonstration. Toute courbe γ_2 de V_2 et d'extrémités $f(P_1)$ et $f(P_2)$ peut s'écrire sous la forme $f \circ \gamma$, où γ est une courbe de V_1 d'extrémités P_1 et P_2 . En effet, nous avons

$$\gamma_2 = f \circ (f^{-1} \circ \gamma_2).$$

De plus, si γ est une courbe de V_1 d'extrémités P_1 et P_2 , alors $f \circ \gamma$ est une courbe d'extrémités $f(P_1)$ et $f(P_2)$. Ainsi, nous avons l'égalité d'ensembles suivante :

$$\begin{aligned} & \{\gamma_2 : \gamma_2 \text{ est une courbe de } V' \text{ d'extrémités } f(P_1) \text{ et } f(P_2)\} \\ &= \{f \circ \gamma : \gamma \text{ est une courbe de } V \text{ d'extrémités } P_1 \text{ et } P_2\}. \end{aligned}$$

Via la proposition précédente, nous savons que f préserve les longueurs de courbe, ainsi

$$\begin{aligned} d_{V_2}(f(P_1), f(P_2)) &= \inf\{\mathcal{L}_{V_2}(f \circ \gamma) : \gamma \text{ est une courbe de } V \text{ d'extrémités } P_1 \text{ et } P_2\} \\ &= \inf\{\mathcal{L}_{V_1}(\gamma) : \gamma \text{ est une courbe de } V \text{ d'extrémités } P_1 \text{ et } P_2\} \\ &= d_{V_1}(P_1, P_2). \end{aligned}$$

□

1.3.1 Angles et applications conformes

Nous allons également nous intéresser aux applications qui conservent les angles, dites conformes. Par exemple, en géométrie euclidienne, les dilatations euclidiennes préservent les angles mais ne sont pas des isométries, car elles ne préservent pas les distances (2.7.3). Un autre exemple est donné par la projection stéréographique de la sphère, qui préserve les angles (40) mais pas les distances sur la sphère.

Définition 20. Soit (V, g) une variété riemannienne plongée, soit $P \in V$ et soient $u, v \in T_P V$.

- La *longueur* du vecteur u est défini comme étant

$$|u| = \sqrt{g_P(u, u)}.$$

- Si u et v sont non nuls, l'angle non orienté entre u et v est défini par l'unique $\theta \in [0, \pi]$ tel que

$$\cos \theta = \frac{g_P(u, v)}{|u||v|}.$$

Remarque 5. Comme les angles sont définis au moyen du produit scalaire, il est clair que les isométries préservent les angles.

Définissons maintenant les applications conformes.

Définition 21. Soient (V_1, g_1) et (V_2, g_2) des variétés plongées riemanniennes. Une fonction C^1 $f : V_1 \rightarrow V_2$ est une *application conforme* si nous avons

$$\frac{g_{1,P}(u, v)}{|u||v|} = \frac{g_{2,f(P)}(f_*Pu, f_*Pv)}{|f_*Pu||f_*Pv|},$$

pour tout $P \in V_1$ et $u, v \in T_PV_1$. En d'autres termes, l'application f préserve les angles.

1.3.2 Le calcul d'aire pour les surfaces

Introduisons une notion que nous allons utiliser dans la suite, comme nous nous restreignons au cas de la dimension 2.

Pour une surface S , c'est à dire une variété de dimension 2 plongée, considérons un paramétrage $\varphi : U \rightarrow V$, où U est un ouvert de \mathbb{R}^2 , V un ouvert de S et φ un difféomorphisme C^1 . Notons $\partial_u\varphi$ et $\partial_v\varphi$ les dérivées partielles de φ .

Définition 22. Dans ces notations, l'aire d'une partie $\omega \subset V$ de S est définie par

$$A(\omega) = \int_{\varphi^{-1}(\omega)} \|\partial_u\varphi \wedge \partial_v\varphi\|.$$

Le cours sur les courbes et surfaces par Mr. Lecomte Lecomte (2003b) justifie cette définition et montre que l'aire est indépendante par paramétrages équivalents.

1.4 Applications complexes et transformations de Möbius

Comme nous allons nous concentrer sur la dimension 2, le plan complexe sera l'espace privilégié pour exprimer en coordonnées les isométries de la géométrie euclidienne, sphérique et hyperbolique. En effet, en géométrie euclidienne, les applications telles que les rotations et translation s'expriment de manière plus simple en notations complexes. Remarquons par exemple que la matrice de rotation

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

peut se réécrire en coordonnées complexes comme $e^{i\theta}$. Cela est dû à l'identité d'Euler $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, et à l'isomorphisme entre les nombres complexes et les matrices réelles 2×2 de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Proposition 11. L'application h , définie par

$$h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_2^2 \\ a + ib \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

définit un isomorphisme de champs entre \mathbb{C} et $h(\mathbb{C})$.

Démonstration. Remarquons que les matrices considérées peuvent se réécrire sous la forme

$$aI + bJ, \text{ avec } J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme I joue le rôle du neutre multiplicatif et commute avec toute matrice, et que $J^2 = -I$, nous en tirons que nous avons un isomorphisme de champs entre \mathbb{C} et $h(\mathbb{C})$. En effet, l'addition et la multiplication de complexes ne dépendent que du fait que l'addition se fait composante par composante, que 1 est le neutre de la multiplication et que $i^2 = -1$. \square

L'utilisation des applications complexes se révélera particulièrement utile pour exprimer en coordonnées les isométries sphériques et isométries hyperboliques. Si nous projetons la sphère via une projection stéréographique (3.5), alors les réflexions sphériques s'expriment comme des transformations de Möbius, que nous sommes sur le point de présenter. Les isométries du modèle du demi-plan hyperbolique s'expriment également comme des transformations de Möbius (8), et nous souhaitons maintenant les définir et expliciter quelques unes de leurs propriétés.

Transformation de Möbius

Définition 23. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$. Si $c \neq 0$, la transformation de Möbius associée est définie comme

$$f : \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{-d}{c} \right\} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

Dans le cas où $c = 0$, la fonction f est définie sur \mathbb{C} et nous avons

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto \frac{az + b}{d}.$$

Remarque 6. Si nous avons $ad - bc = 0$, la transformée de Möbius associée f est constante. En effet, si $c \neq 0$, nous pouvons toujours écrire

$$\begin{aligned} \frac{az + b}{cz + d} &= \frac{acz + bc + ad - ad}{c(cz + d)} = \frac{a(cz + d)}{c(cz + d)} - \frac{ad - bc}{c(cz + d)} \\ &= \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c(cz + d)}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

ainsi f est constante et vaut a/c .

Si maintenant $ad - bc = 0$ et $c = 0$, alors cela implique $ad = 0$, d'où $a = 0$ et ainsi l'application est également constante et vaut b/d .

Remarque 7. Au vu de la réécriture donnée en (1.1), les transformations de Möbius peuvent s'exprimer comme la composition de l'application

$$\bar{I} : z \mapsto \frac{1}{z},$$

avec les applications qui consistent à multiplier ou additionner par un complexe. Au vu de la définition de \bar{I} , nous disons que c'est une *inversion*, et nous étudierons plus en détails les inversions dans la section sur les inversions par un cercle (3.5.1).

Si nous souhaitons montrer que les isométries sphériques et hyperboliques peuvent se représenter par des transformations de Möbius, nous aurons besoin de calculer la composée et l'inverse de telles transformations. Cela est le sujet de la proposition qui suit.

Proposition 12.

1. La composition de deux transformations de Möbius est une transformation de Möbius.

2. L'inverse d'une transformation de Möbius est une transformation de Möbius.

En particulier, les transformations de Möbius forment un groupe.

Démonstration. Notons f et f' deux transformations de Möbius. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$.

1. Nous obtenons pour le calcul de la composée

$$\begin{aligned} f' \circ f(z) &= f' \left(\frac{az + b}{cz + d} \right) = \frac{a' \left(\frac{az + b}{cz + d} \right) + b'}{c' \left(\frac{az + b}{cz + d} \right) + d'} \\ &= \frac{a'(az + b) + b'(cz + d)}{c'(az + b) + d'(cz + d)} \\ &= \frac{(a'a + b'c)z + (a'b + b'd)}{(c'a + d'c)z + (c'b + d'd)}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Cette fonction vérifie la condition des transformations des Möbius, car nous avons

$$\begin{aligned} &(a'a + b'c)(c'b + d'd) - (a'b + b'd)(c'a + d'c) \\ &= a'c'ab + a'd'ad + b'c'bd + b'd'cd - a'c'ab - a'd'bc - b'c'ad - b'd'cd \\ &= a'd'(ad - bc) + b'c'(bd - ad) \\ &= (a'd' - b'c')(ad - bc) \neq 0. \end{aligned}$$

2. Pour ce qui est de l'inverse, nous avons

$$\begin{aligned} w &= \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c(cz + d)} \\ \Leftrightarrow cw - a &= \frac{bc - ad}{cz + d} \\ \Leftrightarrow cz + d &= \frac{bc - ad}{cw - a} \end{aligned}$$

L'inverse est ainsi donné par

$$\begin{aligned} f^{-1}(w) = z &= \frac{1}{c} \left(\frac{bc - ad}{cw - a} - d \right) \\ &= \frac{1}{c} \frac{bc - ad - dcw + ad}{cw - a} \\ &= \frac{-dw + b}{cw - a}. \end{aligned}$$

La condition des transformations de Möbius est également vérifiée, car

$$(-d)(-a) - bc = ad - bc \neq 0.$$

Le cas où $c = 0$ ou $c' = 0$ se traite de manière identique.

□

Remarque 8. Les coefficients du produit $f' \circ f$ dans l'égalité (1.2) sont les mêmes que ceux obtenus durant la multiplication de deux matrices 2×2 .

Cette remarque nous pousse à établir le morphisme de groupes suivant.

Proposition 13. *Nous avons un homomorphisme de groupes*

$$h : (GL_2(\mathbb{C}), \cdot) \rightarrow (\mathcal{M}, \circ)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \quad (1.3)$$

où \mathcal{M} est l'ensemble des transformations de Möbius et $GL_2(\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices 2×2 à coefficients complexes et de déterminant non nul.

Démonstration. Il suffit de montrer que

$$h \left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = h \left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right) \circ h \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right),$$

ce qui est montré par l'égalité (1.2) de la proposition précédente. □

Corollaire 3. *Nous avons un isomorphisme de groupes*

$$(PGL_2(\mathbb{C}), \cdot) := \left(GL_2(\mathbb{C}) / \mathbb{C}_0 I_2, \cdot \right) \cong (\mathcal{M}, \circ)$$

où $\mathbb{C}_0 I_2$ est l'ensemble des multiples non nuls de la matrice identité 2×2 .

Démonstration. Il s'agit du 1er théorème d'isomorphisme des groupes appliqué au morphisme h donné par (1.3).

L'application h est surjective, car à $z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$ nous pouvons évidemment associer $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

En revanche, l'application h n'est pas injective car tout multiple non nul de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est envoyé sur la même transformation de Möbius. Le 1er théorème d'isomorphisme nous permet d'affirmer que

$$GL_2(\mathbb{C}) / \ker(h) \cong \mathcal{M}.$$

Nous trouvons que

$$\ker(h) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\},$$

ce qui suffit. □

Quelques propriétés des applications holomorphes

Les définitions des isométries et applications conformes nous demandera de calculer des différentielles de fonctions à 2 variables. Dans beaucoup de cas, nous aurons en fait affaire à des fonctions complexes usuelles, telles que les dilatations, rotations et réflexions, qui sont des fonctions holomorphes.

Les fonctions holomorphes généralisent au plan complexe la notion de dérivabilité au sens réel, et présentent plusieurs propriétés qui nous seront utiles.

Définition 24. Une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est *holomorphe* sur un ouvert U de \mathbb{C} si f est dérivable au sens complexe en tout $z_0 \in U$, c'est à dire si la limite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe et est finie en tout $z_0 \in U$.

L'étude des fonctions holomorphes relève du domaine de l'analyse complexe, donné dans le cours (Schneiders (2010a)) par exemple. Vérifier qu'une fonction est holomorphe avec cette définition n'est pas aisé, et nous pouvons nous demander quel est le rapport entre la notion de dérivabilité au sens complexe et au sens réel, sur \mathbb{R}^2 . Nous obtenons la proposition suivante.

Proposition 14. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, avec U un ouvert de \mathbb{C} . Notons u (respectivement v) la partie réelle (resp. partie imaginaire), en tant que fonctions définies sur \mathbb{R}^2 .

1. Si f est holomorphe sur U , alors les fonctions u et v sont de classe C^1 et vérifient les équations de Cauchy-Riemann sur U :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases},$$

2. Si u et v sont C^1 sur U et vérifient les équations de Cauchy-Riemann sur U , alors f est holomorphe sur U .

Démonstration. Ce résultat est prouvé dans (Schneiders (2010b)). □

Remarque 9. Donnons une interprétation des équations de Cauchy-Riemann. Si nous voyons f comme une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 et que nous écrivons sa matrice jacobienne, alors les équations de Cauchy-Riemann donnent

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix},$$

qui est la forme des nombres complexes en tant que matrices réelles 2×2 , donnée par l'isomorphisme de la proposition (11). Ainsi, les équations de Cauchy-Riemann imposent à la matrice jacobienne de f , en tant que fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 , d'être représentée par un nombre complexe pour l'isomorphisme h de la proposition (11).

Remarque 10. Au vu de la remarque précédente et de l'isomorphisme de la proposition (11) entre les nombres complexes et les matrices 2×2 , nous écrivons que la différentielle d'une fonction holomorphe peut se calculer par

$$f_{*P} = \frac{\partial f}{\partial(x, y)}(P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(P) & -\frac{\partial v}{\partial x}(P) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(P) & \frac{\partial u}{\partial x}(P) \end{pmatrix} = f'(P),$$

où $f'(\cdot)$ est la dérivée au sens complexe.

L'utilité de parler d'applications holomorphes est que les extensions des applications usuelles, comme les polynomes ou la fonction inverse $z \mapsto 1/z$ sont des fonctions holomorphes. Cela est du aux résultats de génération des fonctions holomorphes trouvés et prouvés dans (Schneiders (2010b)).

Nous souhaitons de plus établir que les fonctions holomorphes préservent les angles et l'orientation, pour \mathbb{C} muni du produit scalaire euclidien.

Proposition 15. *Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur U un ouvert de \mathbb{C} . Si la dérivée de f ne s'annule pas sur U , alors*

1. *L'application f est conforme pour \mathbb{C} muni du produit scalaire euclidien.*
2. *L'application f préserve l'orientation.*

Démonstration. Notons de nouveau u et v la partie réelle et la partie imaginaire de f . Comme f est holomorphe, f vérifie les équations de Cauchy-Riemann (14), ainsi

$$\frac{\partial f}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix}.$$

1. Montrons maintenant que f est conforme pour le produit scalaire euclidien, que nous notons par un point " \cdot ". Nous avons, pour $P \in U$ et $u, v \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} (f_{*P}u \cdot f_{*P}v) &= (u_1 \quad u_2) \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(P) & -\frac{\partial v}{\partial x}(P) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(P) & \frac{\partial u}{\partial x}(P) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(P) & -\frac{\partial v}{\partial x}(P) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(P) & \frac{\partial u}{\partial x}(P) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ &= (u_1 \quad u_2) \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(P)\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}(P)\right)^2 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\partial u}{\partial x}(P)\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}(P)\right)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ &= \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}(P)\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}(P)\right)^2 \right] (u \cdot v). \end{aligned}$$

Par hypothèse, la fonction $h := \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \right]$ ne s'annule pas sur U , et est donc strictement positive. Ainsi, la fonction f préserve les angles, car nous avons

$$\frac{(f_{*P}u \cdot f_{*P}v)}{(f_{*P}u \cdot f_{*P}u)(f_{*P}v \cdot f_{*P}v)} = \frac{h(P)}{\sqrt{h(P)}\sqrt{h(P)}} \frac{(u \cdot v)}{(u \cdot u)(u \cdot v)} = \frac{(u \cdot v)}{(u \cdot u)(u \cdot v)}.$$

2. Montrons maintenant que f préserve l'orientation sur U . Il suffit de calculer le déterminant de sa matrice jacobienne, qui est de nouveau donné par

$$h = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \right],$$

qui est strictement positif sur U , ce qui suffit.

□

Remarque 11. La fonction h de la proposition précédente est en fait donnée par

$$h(P) = |f'(P)|^2,$$

au vu de la remarque (10) et le fait que la transposée de la matrice représentant le nombre complexe $z = a + ib$ est la matrice représentant $a - ib$, le conjugué de z .

Exemple 6. Montrons que l'inversion $I : z \mapsto 1/\bar{z}$ préserve les angles et renverse l'orientation. Comme nous avons

$$I = \bar{\tau} \circ \bar{I},$$

où $\bar{\tau}$ est le conjugué complexe, et $\bar{I} : z \mapsto 1/z$. L'application \bar{I} est holomorphe et de dérivée $z \mapsto -1/z^2$ qui ne s'annule pas en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ainsi grâce à la proposition (15), l'application \bar{I} préserve les angles et l'orientation. Il reste donc à montrer que $\bar{\tau}$ préserve les angles et renverse l'orientation.

La matrice jacobienne de $\bar{\tau}$ en tant que fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 est donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est de déterminant -1 ainsi $\bar{\tau}$ renverse l'orientation. De plus, pour le produit scalaire euclidien, nous avons

$$\begin{aligned} (f_{*P}u \cdot f_{*P}v) &= (u_1 \quad u_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ &= (u \cdot v). \end{aligned}$$

Cela montre que $\bar{\tau}$ est une isométrie euclidienne, donc qu'elle est conforme.

Chapitre 2

Géométrie euclidienne de dimension 2

L'objectif de ce chapitre est de mettre en évidence le groupe des isométries euclidiennes et leur lien avec les droites, dans le but de généraliser cette approche à la géométrie sphérique et hyperbolique.

Le principal résultat qui permet d'unifier la géométrie euclidienne, sphérique et hyperbolique est le théorème des 3 réflexions (1), qui permet d'exprimer chaque isométrie euclidienne comme le produit d'au plus 3 réflexions via des droites. Le théorème des 3 réflexions est également vérifié en géométrie sphérique et hyperbolique si la notion de droite est adaptée. Une autre propriété vérifiée par les droites euclidiennes est que le segment entre deux points est la courbe de longueur minimum pour la distance euclidienne (2.3), qui est également vérifiée en géométrie sphérique et hyperbolique.

Enfin, nous concluons ce chapitre avec quelques résultats qui ne sont pas vérifiés en géométrie sphérique et hyperbolique, comme l'énoncé du 5ème postulat d'Euclide (2.7.1), et le fait que nous pouvons construire des triangles semblables, c'est à dire de mêmes angles, et non isométriques (2.7.3). Ce chapitre est basé sur la référence Stillwell (1992a).

2.1 Le plan euclidien et les isométries de base

Définition 25. Le plan euclidien \mathbb{R}^2 est l'espace affine \mathbb{R}^2 modelé sur l'espace vectoriel euclidien \mathbb{R}^2 pour le produit scalaire euclidien canonique \cdot :

$$(u \cdot v) = u_1v_1 + u_2v_2,$$

pour tous $u, v \in \mathbb{R}^2$.

Par abus de notation, il nous arrivera parfois d'utiliser \mathbb{R}^2 pour référer au plan euclidien, ce qui ne devrait pas poser de problème s'il n'y a pas d'ambiguïté. De plus, nous noterons également le produit scalaire euclidien de u et v par $u^T v$.

Nous souhaitons maintenant établir quelles sont les isométries de \mathbb{R}^2 , que nous appellerons *isométries euclidiennes*. La condition d'isométrie nous demande de calculer la différentielle d'une fonction, qui dans le cas d'une fonction f de classe C^1 définie sur \mathbb{R}^n peut être calculée via la formule suivante :

$$f_{*P}(u) = \frac{\partial f}{\partial x}(P)u,$$

où $\frac{\partial f}{\partial x}(P)$ est la matrice jacobienne de f évaluée en P . Soient P un point de \mathbb{R}^2 , u et v des éléments de \mathbb{R}^2 et f un difféomorphisme de \mathbb{R}^2 de classe C^1 . La condition d'isométrie peut ainsi

se réécrire :

$$\begin{aligned} (u \cdot v) &= (f_{*P}(u) \cdot f_{*P}(v)) \\ \Leftrightarrow (u^T v) &= u^T \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P) \right)^T \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P) \right) v. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Exemple 7. Donnons des exemples d'isométries euclidiennes à partir de la condition (2.1). Si la fonction f est telle que sa matrice jacobienne est constante sur \mathbb{R}^2 et est une matrice orthogonale, f est une isométrie de \mathbb{R}^2 . C'est le cas des applications de la forme suivante :

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b, \quad (2.2)$$

où R est une matrice orthogonale et b est un élément quelconque de \mathbb{R}^2 . Ce sont en effet des difféomorphismes de classe C^1 , car ce sont des applications de classe C^∞ et d'inverse

$$f^{-1} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto R^{-1} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - b \right) = R^T \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - b \right),$$

qui sont également de classe C^∞ . De plus, par un calcul direct, la matrice jacobienne de telles applications est donnée par R et ce sont ainsi des isométries du plan euclidien. Parmi ces applications, nous pouvons définir 3 familles :

1. Les translations qui envoient $O = (0, 0)$ sur $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$:

$$t_{x_0, y_0} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

2. Les rotations centrées en O et d'angle θ :

$$r_\theta : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

3. La réflexion d'axe OX :

$$\bar{r} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}.$$

Il se trouve que toutes les isométries euclidiennes sont de la forme (2.2). Cela découlera du théorème des 3 réflexions à la section (2.4), qui permettra d'affirmer que toute isométrie euclidienne est le produit d'au plus 3 réflexions. Nous n'avons pas défini les réflexions autour d'une droite quelconque, et cela sera le sujet de la section suivante (2.2). L'inverse de ces isométries est donnée de manière directe.

1. L'inverse d'une translation t_{x_0, y_0} est donné par la translation $t_{-x_0, -y_0}$.
2. L'inverse d'une rotation r_θ est donné par $r_{-\theta}$.
3. la réflexion \bar{r} est son propre inverse.

Enfin, notons que nous pouvons paramétrer le plan euclidien avec une variable complexe au lieu de deux variables réelles. Ainsi, les 3 familles d'isométrie décrites ci-dessus se réécrivent, en coordonnées complexes :

- 1) $t_{z_0} : z \mapsto z + z_0,$
- 2) $r_\theta : z \mapsto e^{i\theta} z,$
- 3) $\bar{r} : z \mapsto \bar{z}.$

Introduisons les notations habituelles. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. Nous notons par $\bar{z} = x - iy$ le conjugué de z , $\Re(z) = x$ la partie réelle de z et $\Im(z) = y$ la partie imaginaire de z .

2.2 Changement de coordonnées et conjugaison

Un aspect des isométries qui va nous intéresser dans la suite est l'ensemble de ses points fixes. Dans le cas euclidien, les rotations ont un unique point fixe, les réflexions ont un axe de points fixes, et les translations non triviales n'ont pas de point fixe.

Proposition 16.

1. Pour une translation t_{z_0} non triviale, l'ensemble des points fixes est vide.
2. Pour une rotation r_θ non triviale, le seul point fixe est l'origine O .
3. Pour la réflexion \bar{r} , l'ensemble des points fixes est la droite $OX = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$.

Démonstration.

1. Si $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, alors il est évident qu'aucun point (x, y) de \mathbb{R}^2 ne peut vérifier

$$\begin{cases} x = x + x_0 \\ y = y + y_0, \end{cases}$$

car $x_0 \neq 0$ ou $y_0 \neq 0$.

2. Soit $\theta \in]0, 2\pi[$. Comme $\cos(\theta) \neq 1$, les points fixes de r_θ vérifient

$$\begin{cases} x = \cos(\theta)x - \sin(\theta)y \\ y = \sin(\theta)x + \cos(\theta)y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - \cos(\theta))x = -\sin(\theta)y \\ (1 - \cos(\theta))y = \sin(\theta)x. \end{cases}$$

En substituant la deuxième égalité dans la première, nous avons

$$\begin{aligned} (1 - \cos(\theta))x &= -\frac{\sin^2(\theta)}{1 - \cos(\theta)}x \\ \Leftrightarrow (1 - \cos(\theta))^2 x &= -\sin^2(\theta)x \\ \Leftrightarrow (1 + \cos^2(\theta) - 2\cos(\theta) + \sin^2(\theta))x &= 0 \\ \Leftrightarrow 2(1 - \cos(\theta))x &= 0, \end{aligned}$$

qui a l'unique solution $x = 0$, ce qui implique $y = 0$.

3. Les points fixes de la réflexion \bar{r} vérifient

$$\begin{cases} x = x \\ y = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = 0, \end{cases}$$

ce qui est la définition de la droite OX .

□

Si nous souhaitons définir de manière générale les rotations et réflexions, dans l'optique de démontrer le théorème des 3 réflexions, nous utilisons l'idée de conjugaison.

Définition 26. Soient deux isométries euclidiennes f et g . Alors le *conjugué* de g par f est défini comme étant

$$f \circ g \circ f^{-1}.$$

Remarque 12. Le conjugué de deux isométries reste une isométrie.

Proposition 17. Soient g et f des isométries euclidiennes et notons par Fixe_g l'ensemble de ses points fixes. Alors les points fixes du conjugué de g par f vérifient

$$\text{Fixe}_{f \circ g \circ f^{-1}} = f(\text{Fixe}_g).$$

Démonstration. Cela est simplement du à l'équivalence

$$f \circ g \circ f^{-1}(P) = P \Leftrightarrow g \circ f^{-1}(P) = f^{-1}(P).$$

□

Ainsi, il est naturel de définir les isométries euclidiennes qui ont un unique point fixe comme étant des rotations, car elles peuvent s'obtenir par conjugaisons des rotations centrées en O .

Définition 27. Parmi les isométries euclidiennes, celles qui ont un unique point fixe $z_0 \in \mathbb{R}^2$ sont appelées les *rotations* de centre z_0 .

Les isométries euclidiennes dont l'ensemble des points fixes est une droite \mathcal{D} sont les *réflexions d'axe \mathcal{D}* .

Exemple 8. Une rotation centrée en $z_0 \in \mathbb{R}^2$ est donnée par la conjugaison de r_θ par t_{z_0} :

$$t_{z_0} \circ r_\theta \circ t_{z_0}^{-1}.$$

Même si le résultat est évident, énonçons le fait que nous pouvons définir une rotation centrée en n'importe quel $z_0 \in \mathbb{R}^2$ grâce à la proposition suivante, car en géométrie hyperbolique, ce résultat n'est pas aussi évident.

Proposition 18. Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^2$. Il existe une isométrie euclidienne qui envoie z_1 sur z_2 .

Démonstration. Cette isométrie est donnée par la translation $t_{z_2 - z_1}$. □

L'idée de conjugaison est ainsi associée à l'idée de changements de coordonnées. Dans ce cas-ci, conjuguer par une translation revient à translater l'origine du repère.

Nous souhaitons maintenant définir les réflexions d'axe quelconque, avec la même idée de conjugaison. Nous avons par conséquent besoin de trouver une isométrie qui permettrait d'envoyer l'axe OX sur n'importe quelle droite.

Lemme 1. Soit \mathcal{D} une droite de \mathbb{R}^2 dont un des vecteurs directeurs est u .

1. Toute translation de \mathcal{D} est une droite parallèle à \mathcal{D} .
2. La rotation d'angle θ centrée en O de \mathcal{D} est une droite dont un des vecteurs directeurs est $r_\theta u$.

En particulier, les translations et rotations préservent les droites.

Démonstration. 1. Soit $z_0 \in \mathbb{R}^2$ et soit z_D un point de \mathcal{D} . Nous savons que $\mathcal{D} = \{z_D + \lambda u \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. De plus, pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$, nous avons

$$t_{z_0}(z_D + \lambda u) = z_D + \lambda u + z_0 = t_{z_0}(z_D) + \lambda u.$$

Ainsi, la translation de \mathcal{D} par z_0 est donnée par la droite qui contient $t_{z_0}(z_D)$ et dont un des vecteurs directeurs est u . Les deux droites ont un vecteur directeur en commun, et sont ainsi parallèles.

2. Pour le cas des rotations, nous avons, pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$r_\theta(z_D + \lambda u) = r_\theta(z_D) + \lambda r_\theta u.$$

La rotation de la droite \mathcal{D} est donc la droite qui contient le point $r_\theta(z_D)$ et dont un des vecteurs directeurs est $r_\theta u$. □

Nous sommes maintenant capables d'envoyer n'importe l'axe OX sur n'importe quelle droite grâce au résultat suivant.

Proposition 19. *Pour toute droite \mathcal{D} de \mathbb{R}^2 , il existe une isométrie $f_{\mathcal{D}}$ qui envoie l'axe OX sur la droite \mathcal{D} .*

En particulier, si nous avons deux droites $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$, il existe une isométrie qui envoie \mathcal{D} sur \mathcal{D}' , donnée par $f_{\mathcal{D}'} \circ f_{\mathcal{D}}^{-1}$.

Démonstration. Soit u un vecteur directeur de \mathcal{D} , que l'on peut supposer de longueur 1. Alors il existe θ tel que la rotation r_θ envoie le vecteur $e_1 = 1 + 0.i$ sur u . Cet angle n'est rien d'autre que l'angle orienté compté dans le sens trigonométrique à partir de e_1 . En effet, définissons l'angle θ comme étant l'unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \Re u \\ \sin(\theta) = \Im u. \end{cases}$$

L'existence provient du fait que u est de longueur 1, ainsi $(\Re u)^2 + (\Im u)^2 = 1$, et l'unicité du fait que nous imposons à θ d'appartenir à $[0, 2\pi[$.

Le vecteur e_1 est un vecteur directeur de la droite OX , ainsi via le lemme précédent (1), $r_\theta(OX)$ est une droite de vecteur directeur $r_\theta(e_1) = u$. De plus, $r_\theta(OX)$ contient le point O . Finalement, en appliquant la translation t_{z_D} sur $r_\theta(OX)$, pour un point quelconque z_D de la droite \mathcal{D} , nous retrouvons la droite \mathcal{D} , de nouveau via le lemme (1). L'isométrie $f_{\mathcal{D}}$ recherchée est donc donnée par

$$f_{\mathcal{D}} = t_{z_D} \circ r_\theta.$$

□

Remarque 13. Avec les notations de la proposition précédente, une réflexion d'axe \mathcal{D} est donnée par

$$f_{\mathcal{D}} \circ \bar{r} \circ f_{\mathcal{D}}^{-1}.$$

2.3 Droites euclidiennes et longueurs

Les droites euclidiennes vérifient plusieurs propriétés importantes vis à vis des isométries du plan euclidien. Nous souhaitons établir le fait que le segment de droite entre deux points z_1 et z_2 est la courbe de longueur minimale entre ces deux points, que le lieu des points équidistants à deux points distincts donnés est une droite et que l'image d'une droite par une isométrie reste une droite. Ces propriétés sont également vérifiées en géométrie sphérique et hyperbolique, où les notions de droite doivent être adaptées.

Le fait que toute droite euclidienne est le lieu des points équidistants à deux points distincts nous permettra d'obtenir une réflexion qui échange ces deux points, qui sera un fait crucial pour démontrer le théorème des 3 réflexions dans la section (2.4).

Proposition 20. Soient z_1 et z_2 deux points de \mathbb{R}^2 . Le segment de droite entre z_1 et z_2 est la courbe de longueur minimale entre ces deux points.

Démonstration. Commençons par calculer la longueur de ce segment. Via les résultats précédents sur la conjugaison d'isométries et le fait qu'une isométrie conserve les longueurs de courbes, nous pouvons supposer via un choix approprié des axes que $z_1 = (0, 0)$ et $z_2 = (0, p)$ où $p > 0$. Ainsi, un paramétrage est donné par

$$\begin{aligned}\gamma_p : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto t(0, p)\end{aligned}$$

Nous avons $\gamma'(t) = ip$, ainsi la longueur du segment $[z_1, z_2]$ est donnée par :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathbb{R}^2}([z_1, z_2]) &= \int_0^1 \sqrt{((0, p) \cdot (0, p))} dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{0 + p^2} dt = p.\end{aligned}$$

Considérons désormais une courbe $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ d'extrémités

$$\begin{aligned}\gamma(0) &= z_1 = (0, 0), \\ \gamma(1) &= z_2 = (0, p).\end{aligned}$$

Notons $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. La longueur de γ est donnée par

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathbb{R}^2}(\gamma) &= \int_0^1 \sqrt{((x'(t), y'(t)) \cdot (x'(t), y'(t)))} dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt \\ &\geq \int_0^1 \sqrt{y'^2(t)} dt = \int_0^1 |y'(t)| dt \\ &\geq \int_0^1 y'(t) dt = y(1) - y(0) = p \\ &= \mathcal{L}_{\mathbb{R}^2}([z_1, z_2]).\end{aligned}$$

□

Nous pouvons en tirer une expression explicite de la distance euclidienne.

Corollaire 4. • La pseudo-distance $d_{\mathbb{R}^2}$ sur le plan euclidien entre deux points $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ est donnée par

$$d_{\mathbb{R}^2}(z_1, z_2) = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}. \quad (2.3)$$

• En particulier, $d_{\mathbb{R}^2}$ est une distance.

Démonstration. • Vérifions cela en calculant la longueur du segment entre z_1 et z_2 . Un paramétrage de ce segment est donnée par $([0, 1], \gamma)$ où

$$\begin{aligned}\gamma : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (1 - t)z_1 + tz_2\end{aligned}$$

Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbb{R}^2}([z_1, z_2]) &= \int_0^1 \sqrt{(z_2 - z_1) \cdot (z_2 - z_1)} dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2} dt = (y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2. \end{aligned}$$

- Nous devons montrer que si $d_{\mathbb{R}}^2(z_1, z_2) = 0$, alors $z_1 = z_2$. Cela est direct au vu de la formule (2.3), car les termes $(x_1 - x_2)^2$ et $(y_1 - y_2)^2$ sont toujours positifs, et nuls si et seulement si $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$. □

Les segments de droite sont ainsi des courbes de longueur minimum en géométrie euclidienne.

Un concept qui sera important dans les 3 géométries étudiées dans ce travail est le lieu des points équidistants à deux points distincts. En géométrie euclidienne, nous savons que c'est une droite, appelée la *médiatrice* du segment liant les deux points. Il est évident, et nous allons le montrer, que la réflexion par la médiatrice échange les deux extrémités du segment. Ce fait nous permettra d'établir le théorème des 3 réflexions, qui énonce que toute isométrie euclidienne peut s'exprimer comme le produit d'au plus 3 réflexions. Ces idées se généralisent en géométrie sphérique et hyperbolique, où les notions de "droite" et "distance" doivent être traduites dans le cadre considéré.

Proposition 21. *Toute droite est le lieu des points équidistants à deux points distincts.*

De manière réciproque, le lieu des points équidistants à deux points distincts est une droite.

Démonstration. 1. Avec un choix convenable des axes, nous pouvons supposer que la droite \mathcal{D} est l'axe OX . Soit $p > 0$, alors \mathcal{D} est le lieu des points équidistants à ip et $-ip$. En effet, les points $x + iy$ qui appartiennent à ce lieu vérifient

$$\begin{aligned} x^2 + (y - p)^2 &= x^2 + (y + p)^2 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2py + p^2 &= x^2 + y^2 + 2py + p^2 \\ \Leftrightarrow -2py &= 2py, \end{aligned}$$

ce qui est le cas si et seulement si $y = 0$ car p est non nul, et nous obtenons ainsi l'axe OX .

2. De manière réciproque, nous pouvons supposer que les deux points distincts sont de la forme ip et $-ip$ avec $p > 0$, de nouveau par un choix convenable des axes. Nous pouvons par exemple choisir l'axe OY comme étant la droite qui passe par ces deux points et l'origine O comme étant le milieu de ces points. L'équivalence ci-dessus montre que le lieu des points équidistants à ip et $-ip$ est donné par l'axe OX , qui est une droite. □

Corollaire 5. *Si une droite \mathcal{D} est le lieu des points équidistants à z_1 et z_2 , alors une réflexion d'axe \mathcal{D} échange z_1 et z_2 .*

Démonstration. En reprenant de nouveau le choix de coordonnées de la proposition précédente, les points z_1 et z_2 sont respectivement donnés par ip et $-ip$ et la droite \mathcal{D} est l'axe OX . La réflexion associée est la réflexion \bar{r} d'axe OX . Il est évident que

$$\bar{r}(ip) = -ip,$$

qui échange les deux points demandés. □

La proposition qui suit montre le rôle important des droites euclidiennes vis à vis du groupe des isométries euclidiennes. un résultat analogue existe en géométrie sphérique et hyperbolique.

Corollaire 6. *L'image d'une droite euclidienne par une isométrie est encore une droite euclidienne*

Démonstration. Soit une droite \mathcal{D} et une isométrie f . Par la proposition précédente, \mathcal{D} est le lieu des points équidistants de deux points distants z_1 et z_2 . Considérons les points $f(z_1)$ et $f(z_2)$, qui sont distincts par bijectivité de f , et montrons que $f(\mathcal{D})$ est le lieu des points équidistants à $f(z_1)$ et $f(z_2)$. Nous avons :

$$\begin{aligned} f(\mathcal{D}) &= f(\{z \in \mathbb{R}^2 : d_{\mathbb{R}^2}(z, z_1) = d_{\mathbb{R}^2}(z, z_2)\}) \\ &= \{f(z) \in \mathbb{R}^2 : d_{\mathbb{R}^2}(z, z_1) = d_{\mathbb{R}^2}(z, z_2)\} \\ &= \{f(z) \in \mathbb{R}^2 : d_{\mathbb{R}^2}(f(z), f(z_1)) = d_{\mathbb{R}^2}(f(z), f(z_2))\} \\ &= \{z' \in \mathbb{R}^2 : d_{\mathbb{R}^2}(z', f(z_1)) = d_{\mathbb{R}^2}(z', f(z_2))\}, \end{aligned}$$

comme conséquence du fait que f préserve les distances et est bijectif. Par conséquent, $f(\mathcal{D})$ est le lieu des points équidistants à $f(z_1)$ et $f(z_2)$ et est donc une droite via la proposition précédente. \square

2.4 Théorème des 3 réflexions

Nous souhaitons montrer que toute isométrie euclidienne est le produit d'au plus 3 réflexions. Un analogue existe en géométrie sphérique et hyperbolique, et nous permettra d'expliciter le groupe d'isométries. Une généralisation du théorème des 3 réflexions en dimension n est donné par le théorème de Cartan-Dieudonné, dont une preuve est disponible dans Gallier (2011a), mais qui n'est pas dans le cadre de ce travail.

Démontrons tout d'abord deux résultats avant d'entamer la preuve du théorème.

Lemme 2. *Tout point du plan euclidien est entièrement déterminé par ses distances à 3 points fixes non alignés.*

Démonstration. Soient A, B et C trois points non alignés. Supposons avoir P et P' deux points différents tels que $d(P, Q) = d(P', Q)$ pour tout $Q \in \{A, B, C\}$. Ainsi, A, B et C appartiennent au lieu des points équidistants à P et P' . Mais nous savons que ce lieu est donné par une droite, or nous avons supposé que A, B et C étaient non alignés, d'où une absurdité. \square

Corollaire 7. *Soient A, B et C trois points non alignés. Alors une isométrie euclidienne f est entièrement déterminée par les images $f(A), f(B)$ et $f(C)$.*

Démonstration. Supposons avoir une isométrie f telle que nous connaissons $f(A), f(B)$ et $f(C)$ pour A, B, C trois points non alignés. Soit P un point de \mathbb{R}^2 , alors $f(P)$ vérifie $d(f(P), f(Q)) = d(P, Q)$ pour $Q \in \{A, B, C\}$. Par le lemme précédent (2), $f(P)$ est ainsi uniquement déterminé, car les points $f(A), f(B)$ et $f(C)$ ne sont pas non plus alignés, vu que les isométries euclidiennes préservent les droites (résultat 6). \square

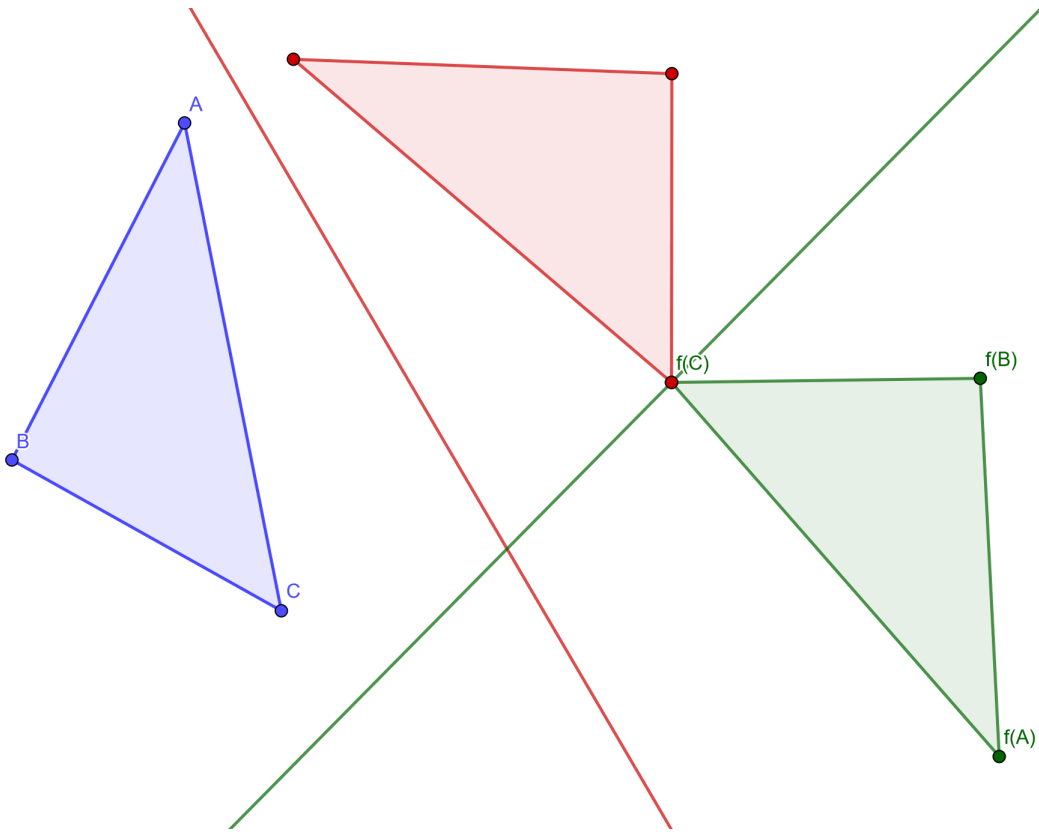


FIGURE 2.1 – Construction de 2 symétries axiales qui envoient $\triangle ABC$ sur $\triangle f(A)f(B)f(C)$.

Théorème 1 (Théorème des 3 réflexions, géométrie euclidienne). *Chaque isométrie du plan euclidien est le produit d'au plus trois réflexions.*

Démonstration. Fixons A, B et C des points non alignés, et soit f une isométrie. Nous cherchons une isométrie qui est la composée d'au plus 3 réflexions et qui est égale à f en A, B et C . Cette isométrie sera égale à f , via le résultat précédent (7).

Pour construire les réflexions, il suffit d'appliquer tour à tour les réflexions qui ramènent un point à son image via f . Une telle réflexion existe toujours via les résultats précédents, car nous pouvons toujours construire la médiatrice de deux points distincts (proposition 21), et ces deux points sont échangés via la réflexion par leur médiatrice (corollaire 5). Montrons maintenant que cette construction envoie les points A, B , et C sur leurs images respectives. Supposons qu'aucun des points A, B et C ne soit égal à son image par f .

1. Commençons par appliquer la symétrie axiale \bar{r}_1 , dont l'axe est la médiatrice de A et $f(A)$. L'application \bar{r}_1 envoie A sur $f(A)$, et supposons qu'elle n'envoie pas B (resp. C) sur $f(B)$ ($f(C)$).
2. Considérons \bar{r}_2 la symétrie axiale dont l'axe est la médiatrice de $\bar{r}_1(B)$ et $f(B)$. Alors $\bar{r}_1(B)$ est envoyé sur $f(B)$ par \bar{r}_2 . De plus, \bar{r}_2 laisse $f(A)$ fixe. En effet, montrons que $f(A)$ est à même distance de $\bar{r}_1(B)$ et de $f(B)$, ce qui suffira car \bar{r}_2 laisse invariant la médiatrice de $\bar{r}_1(B)$ et $f(B)$. Comme $\bar{r}_1(A) = f(A)$ par définition, nous avons

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{R}^2}(A, B) &= d_{\mathbb{R}^2}(\bar{r}_1(A), \bar{r}_1(B)) = d_{\mathbb{R}^2}(f(A), \bar{r}_1(B)), \\ d_{\mathbb{R}^2}(A, B) &= d_{\mathbb{R}^2}(f(A), f(B)), \end{aligned}$$

du fait que \bar{r}_1 et f sont des isométries.

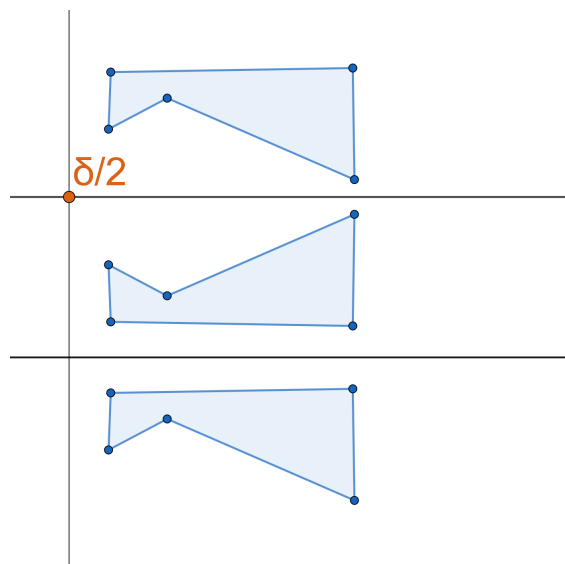


FIGURE 2.2 – Translation comme composée de deux réflexions

3. Si nous supposons que $\bar{r}_1(C)$ n'est pas envoyé sur $f(C)$ par \bar{r}_2 , alors la dernière réflexion à considérer est celle dont l'axe est la médiatrice de $\bar{r}_2(\bar{r}_1(C))$ et $f(C)$. De même, \bar{r}_3 laisse $f(A)$ et $f(B)$ fixes, par les mêmes raisonnements.

Il nous aura fallu ainsi au plus 3 réflexions pour envoyer les points A , B et C sur leur image respective, d'où le résultat. \square

2.5 Translations et rotations comme composées de réflexions

Le théorème des 3 réflexions nous permet de garantir que toute isométrie euclidienne est le produit d'au plus 3 réflexions, mais pour l'instant nous ne savons pas décrire les isométries rencontrées jusqu'à présent, telles que les translations et les rotations, comme produit de réflexions. Cela est le sujet des propositions de cette section.

Proposition 22. *Toute translation ou rotation est le produit de 2 réflexions. De manière réciproque, tout produit de 2 réflexions est soit une translation, soit une rotation.*

Démonstration. 1. Par un choix convenable des axes, nous pouvons supposer que la translation est de la forme $t_{i\delta}$ où $\delta \geq 0$. Ainsi, un calcul direct nous montre que cette translation est le produit de la réflexion \bar{r} autour de OX et de la réflexion $t_{i\delta/2} \circ \bar{r} \circ t_{i\delta/2}^{-1}$ autour de l'axe $y = \delta/2$. Nous avons

$$\begin{aligned} t_{i\delta/2} \circ \bar{r} \circ t_{i\delta/2}^{-1} \circ \bar{r}(x + iy) &= t_{i\delta/2} \circ \bar{r} \circ t_{i\delta/2}^{-1}(x - iy) \\ &= t_{i\delta/2} \circ \bar{r}(x - iy - i\delta/2) \\ &= t_{i\delta/2}(x + iy + i\delta/2) \\ &= (x + iy + i\delta) = t_{i\delta}(x + iy). \end{aligned}$$

Dans le cas des rotations, nous pouvons de nouveau supposer par un choix des axes convenable que la rotation est de la forme r_θ . Alors cette rotation est le produit de la réflexion \bar{r} et de la réflexion $r_{\theta/2} \circ \bar{r} \circ r_{\theta/2}^{-1}$, dont l'axe est donné par une rotation de OX par un angle $\theta/2$. En effet,

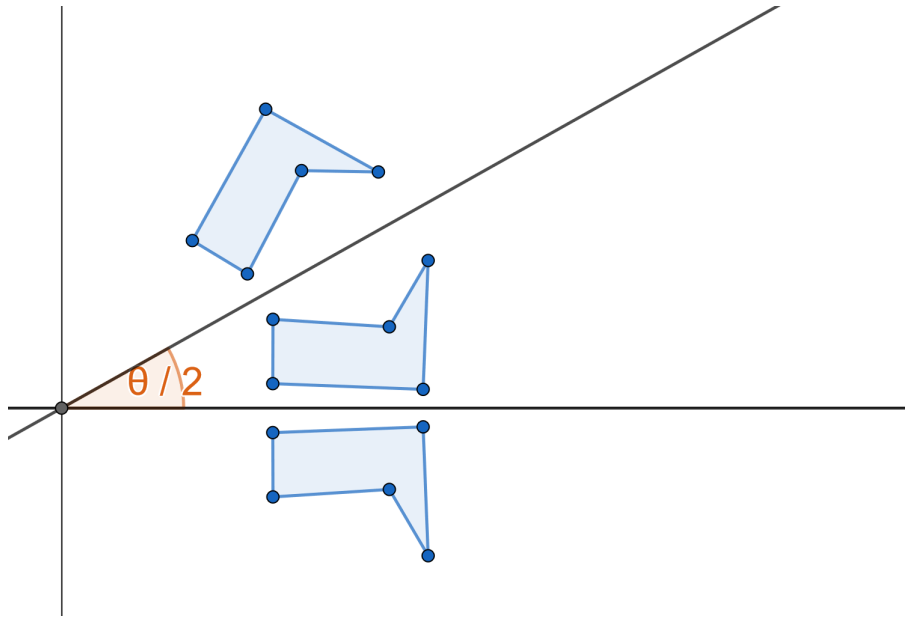


FIGURE 2.3 – rotation comme composée de deux réflexions

$$\begin{aligned}
 r_{\theta/2} \circ \bar{r} \circ r_{\theta/2}^{-1} \circ \bar{r}(x + iy) &= r_{\theta/2} \circ \bar{r} \circ r_{\theta/2}^{-1}(x - iy) \\
 &= r_{\theta/2} \circ \bar{r}(e^{-i\theta/2}(x - iy)) \\
 &= r_{\theta/2}(e^{i\theta/2}(x + iy)) \\
 &= e^{i\theta}(x + iy) = r_{\theta}(x + iy).
 \end{aligned}$$

2. Supposons maintenant avoir deux droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' . Nous pouvons supposer que \mathcal{D} est l'axe OX de notre repère. Si \mathcal{D} et \mathcal{D}' s'intersectent, nous pouvons supposer que l'intersection se fait en O . Dans ce cas, notons l'angle entre \mathcal{D} et \mathcal{D}' comme étant $\theta/2$. Par conséquent, l'isométrie $\bar{r}'_{\mathcal{D}} \circ \bar{r}_{\mathcal{D}}$ est une rotation d'angle θ et de centre O , via le calcul précédent.

Si \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont parallèles et séparés d'une distance $\delta/2$, alors l'autre calcul nous informe que $\bar{r}'_{\mathcal{D}} \circ \bar{r}_{\mathcal{D}}$ est une translation par $i\delta$.

□

Corollaire 8. 1. Si le produit $\bar{r}'_{\mathcal{D}'} \circ \bar{r}_{\mathcal{D}}$ est une rotation d'angle θ , alors pour toutes droites \mathcal{D}'' , \mathcal{D}''' qui s'intersectent en le même point et qui forment un angle signé égal à θ , nous avons

$$\bar{r}'_{\mathcal{D}'} \circ \bar{r}_{\mathcal{D}} = \bar{r}'_{\mathcal{D}''} \circ \bar{r}_{\mathcal{D}'''}$$

2. Si le produit $\bar{r}'_{\mathcal{D}'} \circ \bar{r}_{\mathcal{D}}$ est une translation, alors pour toutes droites \mathcal{D}'' , \mathcal{D}''' qui sont parallèles à \mathcal{D} et qui sont séparées par la même distance signée que \mathcal{D} et \mathcal{D}' , nous avons

$$\bar{r}'_{\mathcal{D}'} \circ \bar{r}_{\mathcal{D}} = \bar{r}'_{\mathcal{D}''} \circ \bar{r}_{\mathcal{D}'''}$$

Démonstration. 1. Nous pouvons supposer que \mathcal{D} est l'axe OX et \mathcal{D}' est la droite qui forme un angle de $\theta/2$ et qui passe par O via la proposition précédente. Supposons que \mathcal{D}'' (respectivement \mathcal{D}''') est une droite qui forme un angle de ϕ (respectivement $\phi + \theta/2$) avec OX .

En utilisant le fait que la composée de deux rotations centrées en O revient à ajouter les

angles, et l'égalité $r_{-\theta/2} \circ \bar{r} = \bar{r} \circ r_{\theta/2}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \bar{r}_{\mathcal{D}'''} \circ \bar{r}_{\mathcal{D}''} &= r_{\phi+\theta/2} \circ \bar{r} \circ r_{\phi+\theta/2}^{-1} \circ r_{\phi} \circ \bar{r} \circ r_{\phi}^{-1} \\
 &= r_{\phi+\theta/2} \circ \bar{r} \circ r_{\theta/2}^{-1} \circ r_{\phi}^{-1} \circ r_{\phi} \circ \bar{r} \circ r_{\phi}^{-1} \\
 &= r_{\phi+\theta/2} \circ \bar{r} \circ \bar{r} \circ r_{\theta/2} \circ r_{\phi}^{-1} \\
 &= r_{\phi+\theta/2} \circ r_{\theta/2} \circ r_{\phi}^{-1} \\
 &= r_{\theta} = \bar{r}'_{\mathcal{D}} \circ \bar{r}_{\mathcal{D}}.
 \end{aligned}$$

2. Le deuxième cas se traite de manière similaire. Nous pouvons supposer que \mathcal{D} est l'axe OX et \mathcal{D}' la droite d'équation $y = \delta/2$ avec $d > 0$. Supposons que \mathcal{D}'' est d'équation $y = c$ pour $c \in \mathbb{R}$, ainsi \mathcal{D}''' est d'équation $y = c + \delta/2$.

En utilisant l'égalité $t_{-i\delta/2} \circ \bar{r} = \bar{r} \circ t_{i\delta/2}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \bar{r}_{\mathcal{D}'''} \circ \bar{r}_{\mathcal{D}''} &= t_{c+i\delta/2} \circ \bar{r} \circ t_{c+i\delta/2}^{-1} \circ t_c \circ \bar{r} \circ t_c^{-1} \\
 &= t_{c+i\delta/2} \circ \bar{r} \circ \bar{r} \circ t_{i\delta/2} \circ t_c^{-1} \\
 &= t_{c+i\delta/2} \circ t_{i\delta/2} \circ t_c^{-1} \\
 &= t_{i\delta} = \bar{r}'_{\mathcal{D}} \circ \bar{r}_{\mathcal{D}}.
 \end{aligned}$$

□

Corollaire 9. *L'ensemble formé des translations et rotations est fermé pour la composition de fonctions.*

- Démonstration.* 1. La composition de deux translations est de manière directe une translation.
2. Considérons le cas de deux rotations, la première centrée en P et d'angle θ , et la deuxième centrée en Q et d'angle ϕ . Si $P = Q$, le résultat est trivial, supposons ainsi $P \neq Q$. Par la proposition et le lemme précédents, nous pouvons trouver $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ et \mathcal{D}'' trois droites telles que $\bar{r}'_{\mathcal{D}} \circ \bar{r}_{\mathcal{D}} = r_{Q,\phi}$ et $\bar{r}'_{\mathcal{D}'} \circ \bar{r}_{\mathcal{D}'} = r_{P,\theta}$. En effet, prenons par exemple \mathcal{D}' la droite joignant P et Q . Ainsi, le produit des deux rotations vaut

$$r_{Q,\phi} \circ r_{P,\theta} = \bar{r}''_{\mathcal{D}} \circ \bar{r}'_{\mathcal{D}'} \circ \bar{r}'_{\mathcal{D}} \circ \bar{r}_{\mathcal{D}} = \bar{r}''_{\mathcal{D}} \circ \bar{r}_{\mathcal{D}},$$

qui est une rotation si \mathcal{D} et \mathcal{D}'' s'intersectent, et une translation si \mathcal{D} et \mathcal{D}'' sont parallèles.

3. Le produit d'une translation et d'une rotation se traite de manière similaire et rend toujours une rotation.

□

Corollaire 10. *L'ensemble des isométries qui sont formées par la composition d'un nombre pair de réflexions, noté $\text{Iso}^+(\mathbb{R}^2)$, forme un sous-groupe de $\text{Iso}(\mathbb{R}^2)$, celui des isométries qui préservent l'orientation. De plus, ce sous-groupe est d'indice 2.*

- Démonstration.* 1. Nous savons que le produit de deux réflexions est soit une translation, soit une rotation, et que l'ensemble formé des translations et rotations est fermé pour la composition de fonctions, ce qui justifie que $\text{Iso}^+(\mathbb{R}^2)$ est un sous-groupe de $\text{Iso}(\mathbb{R}^2)$.

2. Pour montrer que son indice vaut 2, remarquons que la réflexion \bar{r} d'axe OX n'appartient pas à $\text{Iso}^+(\mathbb{R}^2)$. En effet, les translations non triviales n'ont pas de points fixes, et les rotations non triviales n'ont qu'un seul point fixe, alors que l'application \bar{r} possède un axe de points fixes donné par la droite $y = 0$. Ainsi,

$$\text{Iso}^+(\mathbb{R}^2) \cup \bar{r}.\text{Iso}^+(\mathbb{R}^2) \subseteq \text{Iso}(\mathbb{R}^2),$$

et l'union est disjointe. L'autre inclusion vient du théorème des 3 réflexions. Soit une isométrie f . Si f s'écrit comme le produit de 2 réflexions, alors f appartient à $\text{Iso}^+(\mathbb{R}^2)$. Si f est le produit d'une ou de trois réflexions, alors nous pouvons écrire f comme étant

$$f = \bar{r} \circ \bar{r} \circ f = \bar{r} \circ g,$$

où g est le produit d'un nombre pair d'isométries, donc un élément de $\text{Iso}^+(\mathbb{R}^2)$, ce qui suffit. □

2.6 Réflexions glissées et produits de 3 réflexions

Nous savons par le théorème des 3 réflexions que toute isométrie euclidienne est le produit d'une, de deux ou de trois réflexions. Le cas de deux réflexions étant traité, nous nous intéressons maintenant aux produits de 3 réflexions. Commençons par chercher un exemple d'une isométrie euclidienne qui ne peut pas s'exprimer comme le produit d'une ou de deux réflexions.

Exemple 9. Considérons l'isométrie suivante :

$$\bar{r} \circ t_1.$$

Cette isométrie ne présente aucun point fixe, donc elle ne peut être une réflexion. De plus, cette isométrie ne peut s'exprimer comme le produit de 2 réflexions car, grâce aux résultats de la section précédente, l'isométrie $\bar{r} \circ t_1$ appartient à $\bar{r}.\text{Iso}^+(\mathbb{R}^2)$, qui est disjoint du groupe $\text{Iso}^+(\mathbb{R}^2)$. Comme $\text{Iso}^+(\mathbb{R}^2)$ est également le groupe formé des translations et rotations, nous en concluons que l'isométrie $\bar{r} \circ t_1$ ne peut s'exprimer que par le produit de 3 réflexions.

Définition 28. La composition d'une translation et une réflexion de même axe est une *réflexion glissée*.

Remarquons que les réflexions sont des cas particuliers de réflexions glissées, où la translation est triviale. Un exemple de réflexion glissée qui agit sur un polygone est montré dans la figure (2.4).

Dans l'exemple présenté, nous aurions pu considérer l'isométrie $t_1 \circ \bar{r}$, qui est en fait égale à $\bar{r} \circ t_1$. De manière générale, nous avons le résultat suivant.

Proposition 23. Le produit d'une réflexion d'axe \mathcal{D} et d'une translation par un vecteur parallèle à \mathcal{D} commute.

Démonstration. En effet, cela est le cas quand l'axe est Ox par un simple calcul :

$$\bar{r} \circ t_{x_0}(z) = \overline{(z + x_0)} = \bar{z} + x_0 = t_{x_0} \circ \bar{r}(z).$$

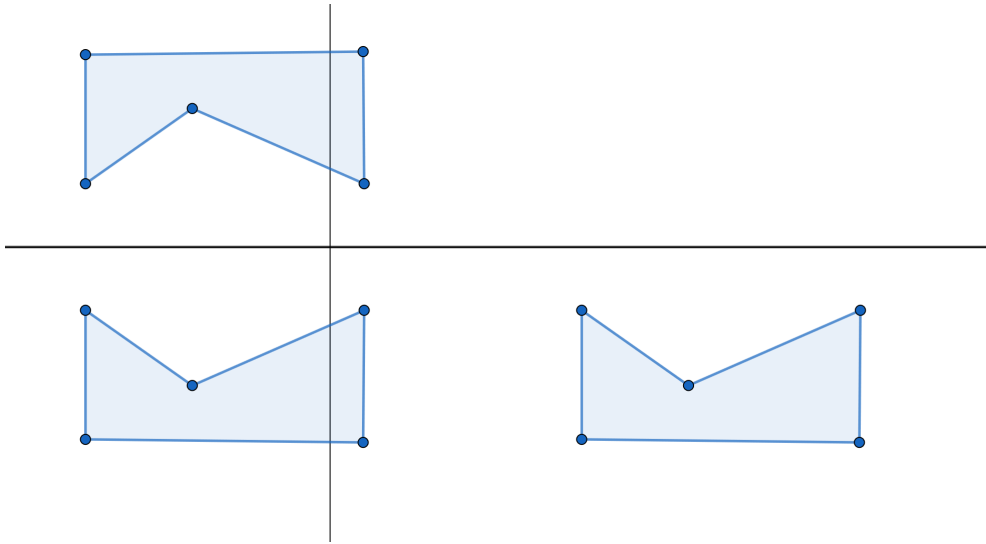


FIGURE 2.4 – Exemple de réflexion glissée

Si l'axe n'est pas Ox mais \mathcal{D} , alors nous savons qu'il existe une isométrie $f_{\mathcal{D}}$ qui envoie Ox sur \mathcal{D} . Ainsi si nous notons une translation par $t_{\lambda, \mathcal{D}}$ où le sous-espace directeur de \mathcal{D} donne la direction de la translation et $\lambda \in \mathbb{R}$ donne le facteur de multiplication de cette direction, nous vérifions que les deux isométries commutent :

$$\begin{aligned} \overline{r}_{\mathcal{D}} \circ t_{\lambda, \mathcal{D}} &= f_{\mathcal{D}} \circ \overline{r} \circ f_{\mathcal{D}}^{-1} \circ f_{\mathcal{D}} \circ t_{\lambda} \circ f_{\mathcal{D}}^{-1} \\ &= f_{\mathcal{D}} \circ \overline{r} \circ t_{\lambda} \circ f_{\mathcal{D}}^{-1} \\ &= f_{\mathcal{D}} \circ t_{\lambda} \circ \overline{r} \circ f_{\mathcal{D}}^{-1} \\ &= t_{\lambda, \mathcal{D}} \circ \overline{r}_{\mathcal{D}}. \end{aligned}$$

□

Proposition 24. *Tout produit de 3 réflexions est une réflexion glissée.*

Démonstration. Soient trois droites \mathcal{D} , \mathcal{D}' et \mathcal{D}'' . Nous souhaitons montrer que le produit $\overline{r}_{\mathcal{D}''} \circ \overline{r}_{\mathcal{D}'} \circ \overline{r}_{\mathcal{D}}$ est une réflexion glissée.

1. a) Supposons que les trois droites s'intersectent en un point P . Nous savons que le produit $\overline{r}_{\mathcal{D}'} \circ \overline{r}_{\mathcal{D}}$ est une rotation en P , et qu'il existe donc une droite \mathcal{D}'_2 telle que

$$\overline{r}_{\mathcal{D}'} \circ \overline{r}_{\mathcal{D}} = \overline{r}_{\mathcal{D}''} \circ \overline{r}_{\mathcal{D}'_2}.$$

Par exemple, en prenant \mathcal{D}'_2 comme étant une droite qui passe par P et dont l'angle signé avec \mathcal{D}'' est le même que celui entre \mathcal{D} et \mathcal{D}' . Ainsi, le produit des 3 réflexions se réécrit :

$$\overline{r}_{\mathcal{D}''} \circ \overline{r}_{\mathcal{D}'} \circ \overline{r}_{\mathcal{D}} = \overline{r}_{\mathcal{D}''} \circ \overline{r}_{\mathcal{D}''} \circ \overline{r}_{\mathcal{D}'_2} = \overline{r}_{\mathcal{D}'_2},$$

qui est une réflexion, donc une réflexion glissée.

- b) Si les trois droites sont parallèles deux à deux, nous pouvons appliquer le même raisonnement. La seule différence est que la droite \mathcal{D}'_2 doit avoir la même distance signée à \mathcal{D}'' que celle entre \mathcal{D} et \mathcal{D}' .
2. Ainsi, les cas qu'il nous reste à traiter sont les cas où au moins deux droites s'intersectent en un point P , sinon elles seraient parallèles 2 à 2, et la troisième droite ne passe pas par P , sinon nous serions dans le cas 1.a).

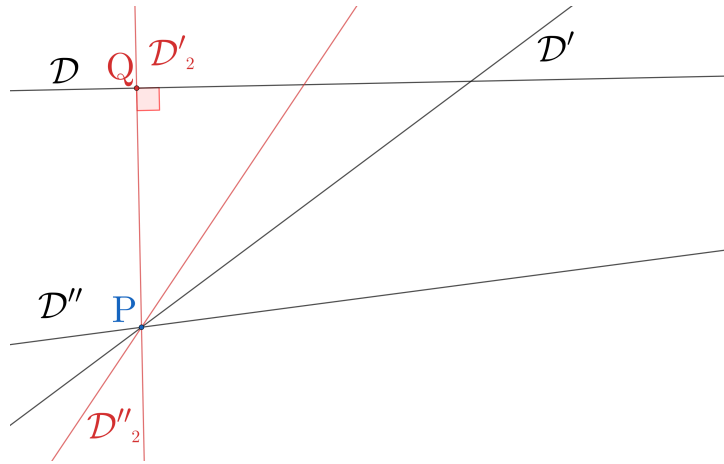


FIGURE 2.5 – Les droites \mathcal{D}' et \mathcal{D}'' sont tournées autour de P de manière à obtenir une perpendiculaire

a) Supposons que \mathcal{D}' et \mathcal{D}'' s'intersectent en un point P et que la droite \mathcal{D} ne passe pas par P . Alors $\bar{r}_{\mathcal{D}''} \circ \bar{r}_{\mathcal{D}'}$ est une rotation en P et il existe deux droites \mathcal{D}'_2 et \mathcal{D}''_2 séparées par le même angle et passant par P telles que

$$\bar{r}_{\mathcal{D}''} \circ \bar{r}_{\mathcal{D}'} = \bar{r}_{\mathcal{D}''_2} \circ \bar{r}_{\mathcal{D}'_2}.$$

Nous choisissons \mathcal{D}'_2 perpendiculaire à \mathcal{D} , d'intersection Q , comme montré dans la figure (2.5).

De nouveau, nous pouvons choisir deux droites \mathcal{D}'_3 et \mathcal{D}_2 perpendiculaires en Q telles que

$$\bar{r}_{\mathcal{D}'_2} \circ \bar{r}_{\mathcal{D}} = \bar{r}_{\mathcal{D}'_3} \circ \bar{r}_{\mathcal{D}_2}.$$

Nous choisissons \mathcal{D}_2 telle que cette droite est perpendiculaire à \mathcal{D}''_2 , comme montré dans la figure (2.6). Finalement, nous avons

$$\bar{r}_{\mathcal{D}''} \circ \bar{r}_{\mathcal{D}'} \circ \bar{r}_{\mathcal{D}} = \bar{r}_{\mathcal{D}''_2} \circ \bar{r}_{\mathcal{D}'_2} \circ \bar{r}_{\mathcal{D}} = \bar{r}_{\mathcal{D}''_2} \circ \bar{r}_{\mathcal{D}'_3} \circ \bar{r}_{\mathcal{D}_2},$$

et où \mathcal{D}_2 est perpendiculaire à \mathcal{D}''_2 et à \mathcal{D}'_3 . Ainsi, la composée $\bar{r}_{\mathcal{D}''_2} \circ \bar{r}_{\mathcal{D}'_3}$ est une translation d'axe parallèle à \mathcal{D}_2 , ce qui veut dire que nous avons une réflexion glissée.

b) L'argument est identique si la droite qui ne passe pas par l'intersection des deux autres est \mathcal{D}'' ou \mathcal{D}' . L'idée consiste à faire pivoter les paires de droites qui s'intersectent jusqu'à ce que la première (ou la dernière) droite dans l'ordre de la composition de réflexions soit perpendiculaire aux deux autres.

□

Nous obtenons finalement un résultat de classification des isométries, qui a un analogue en géométrie sphérique et hyperbolique.

Corollaire 11. *Toute isométrie euclidienne est soit une rotation, soit une translation, soit une réflexion glissée.*

Démonstration. Cela découle du théorème des 3 réflexions, du résultat précédent pour les cas d'un produit d'une ou de 3 réflexions, et de la section sur le produit de 2 réflexions. □

Intéressons maintenant à la forme que prennent les isométries euclidiennes en tant que fonctions complexes. Le résultat analogue en géométrie hyperbolique nous permettra d'avoir une forme plus explicite du groupe d'isométries.

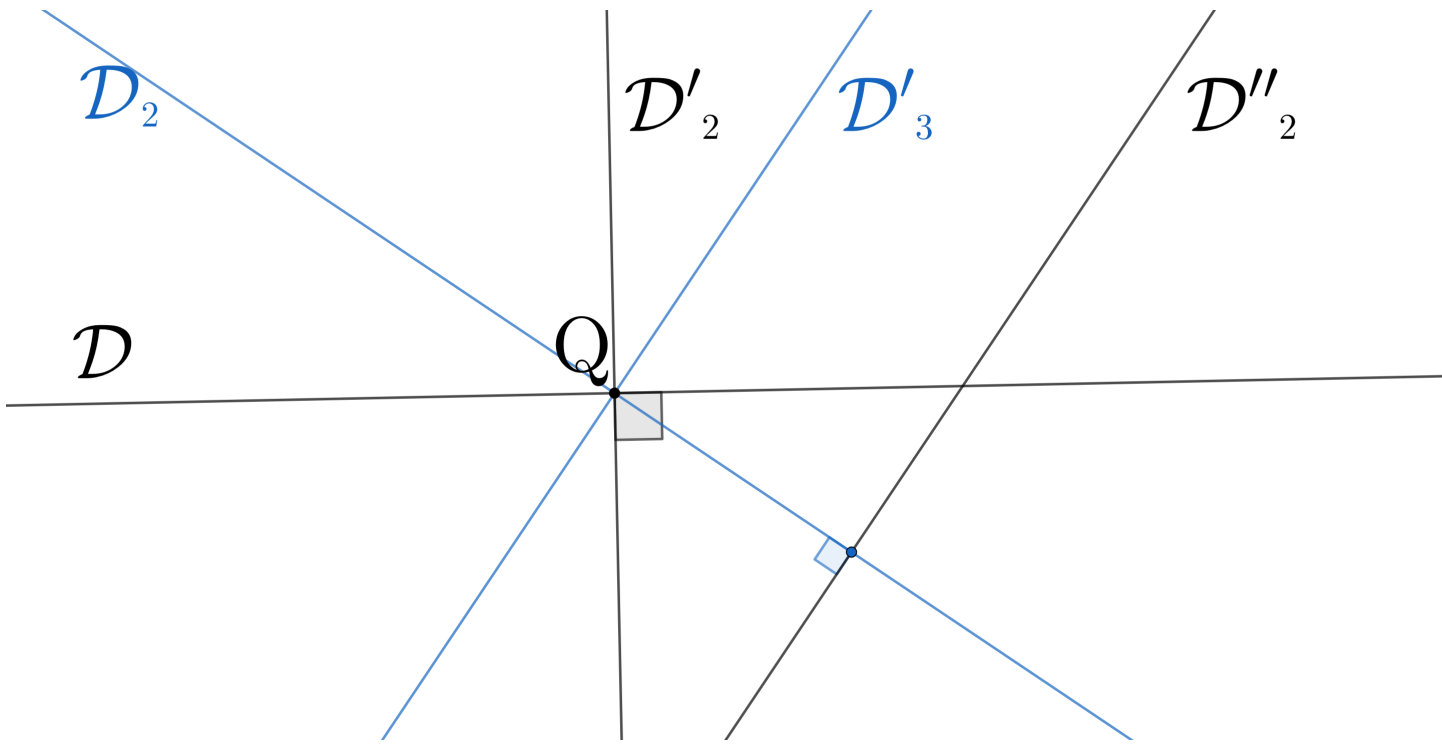


FIGURE 2.6 – Les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}'_2 sont tournées autour de Q de manière à obtenir une perpendiculaire à \mathcal{D}''_2

Proposition 25. 1. Toute isométrie euclidienne qui préserve l'orientation est de la forme

$$f(z) = az + b,$$

où $a, b \in \mathbb{R}^2$ et $|a| = 1$.

2. Toute isométrie euclidienne qui renverse l'orientation est de la forme

$$f(z) = a\bar{z} + b,$$

où $a, b \in \mathbb{R}^2$ et $|a| = 1$.

Démonstration. 1. Nous savons que les isométries euclidiennes qui préservent l'orientation sont soit des rotations, soit des translations. Toutes les translations sont de la forme $f(z) = z + b$, où $b \in \mathbb{R}^2$. Les rotations quant à elles peuvent être centrées en $z_0 \in \mathbb{R}^2$, et dans ce cas elles sont de la forme :

$$f(z) = (e^{i\theta}(z - z_0)) + z_0 = e^{i\theta}z + z_0 - e^{i\theta}z_0,$$

ce qui est en accord avec l'énoncé.

2. Les isométries qui renversent l'orientation peuvent s'écrire comme la composition de $\bar{\cdot}$ et d'une isométrie qui préserve l'orientation, d'où la conclusion. □

2.7 Spécificités de la géométrie euclidienne

Le théorème des 3 réflexions a son analogue en géométrie sphérique et hyperbolique et nous montrerons que la démonstration est identique si nous adaptons les termes *réflexion* et *droites*.

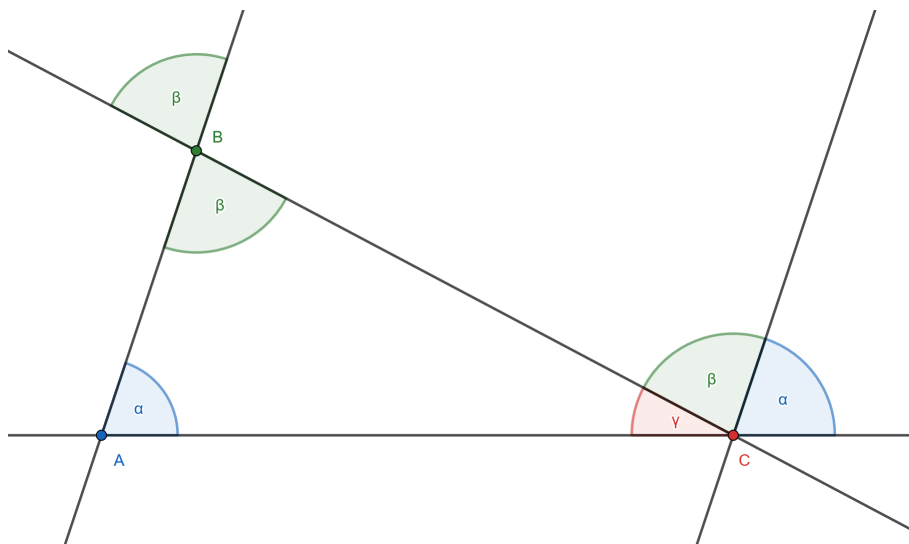


FIGURE 2.7 – Somme des angles intérieurs d'un triangle euclidien

Ce résultat nous permettra d'apercevoir une forte similarité entre les 3 géométries que nous étudions.

Dans cette section nous souhaitons mettre en avant des caractéristiques du plan euclidien que nous ne rencontrerons pas en géométrie sphérique et hyperbolique.

2.7.1 Le 5ème postulat d'Euclide

Énonçons le 5ème postulat d'Euclide.

Dans un plan, soient une droite et un point P qui n'appartient pas à cette droite. Alors il existe une et une seule droite parallèle qui passe par P .

Ce postulat a été le sujet de nombreuses tentatives de démonstrations, car son énoncé n'est pas aussi élémentaire que ceux des autres postulats d'Euclide. L'histoire du 5ème postulat et des tentatives de sa démonstration est riche, et nous n'allons pas pouvoir la résumer en quelques lignes. Citons tout de même le nom de quelques mathématiciens associés à l'histoire de la géométrie hyperbolique, une géométrie dans laquelle le 5ème postulat d'Euclide n'est pas vérifié. Ces mathématiciens sont Carl Friedrich Gauss, Nikolaï Lobachevski, Janos Bolyai et Eugenio Beltrami.

Nous verrons dans la suite que deux droites distinctes en géométrie sphérique s'intersectent toujours, tandis qu'en géométrie hyperbolique, il existe une infinité de droites qui sont parallèles à une même droite et qui passent par un point distinct à cette droite.

La démonstration dans le plan euclidien est directe. Une droite est uniquement déterminée par un point et un vecteur directeur, ainsi l'existence et l'unicité sont immédiats.

2.7.2 Somme des angles d'un triangle

En géométrie euclidienne, la somme des angles intérieurs d'un triangle vaut π . Cela peut se voir sur la figure (2.7), en considérant la droite \mathcal{D} parallèle à AB qui passe par C , et en utilisant les propriétés des angles de droites parallèles ou des angles opposés.

En géométrie sphérique, cela n'est pas le cas car la somme des angles intérieurs d'un triangle est strictement supérieure à π (3.7), tandis qu'en géométrie hyperbolique, cette somme est strictement inférieure à π (63).

2.7.3 Dilatations et triangles semblables non isométrique

Définition 29. Deux triangles qui ont les mêmes angles 2 à 2 sont dits *semblables*.

Deux triangles isométriques, c'est à dire tels qu'il existe une isométrie euclidienne qui envoie l'un sur l'autre, sont évidemment semblables car les isométries préservent les angles. En géométrie euclidienne, nous sommes habitués au fait que la réciproque n'est pas vraie. Nous pouvons obtenir des triangles semblables mais non isométriques, en considérant des dilatations d'un même triangle par exemple. Cela n'est pas vrai en géométrie sphérique (39) et en géométrie hyperbolique (64), où deux triangles semblables sont forcément hyperboliques. De plus, dans ces deux cas, l'aire d'un triangle ne dépend donc que de la somme de leurs angles, démontrés en (5) et en (63).

Définition 30. La dilatation centrée en O et de facteur $\rho > 0$ est définie par

$$d_\rho : z \mapsto \rho z.$$

Les dilatations de centre z_0 sont de nouveau définies avec l'idée de conjugaison par une translation t_{z_0} .

Remarque 14. Les dilatations préservent les angles et l'orientation, au vu des résultats sur les fonctions holomorphes dont la dérivée ne s'annule pas (15).

Les dilatations sont de plus des difféomorphismes de \mathbb{R}^2 d'inverse $d_{1/\rho}$, mais ce ne sont pas des isométries car elles ne préservent pas les distances. En effet, si nous considérons la dilatation d_ρ non triviale, nous avons

$$d_{\mathbb{R}^2}(d_\rho(z_1), d_\rho(z_2)) = \rho d_{\mathbb{R}^2}(z_1, z_2),$$

pour tous points $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^2$. Comme les dilatations sont conformes, nous pouvons construire deux triangles semblables et non isométriques.

Concluons par montre que les dilatations préservent les droites et les cercles. Ce fait sera important pour le modèle du demi-plan \mathbb{H}^2 en géométrie hyperbolique (4.2), car les dilatations euclidiennes sont des isométries hyperboliques, et les droites hyperboliques sont données par des demi-droites euclidiennes ou des demi-cercles.

Proposition 26. • *L'image d'une droite euclidienne par une dilatation reste une droite.*

• *L'image d'un cercle par une dilatation reste un cercle*

Démonstration. Vérifions ces faits pour les dilatations centrées en O , par un calcul direct.

• Pour une droite \mathcal{D} de vecteur directeur u et qui contient un point $z_{\mathcal{D}}$, nous avons

$$\begin{aligned} d_\rho(\mathcal{D}) &= d_\rho(\{z_{\mathcal{D}} + \lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\}) \\ &= \{d_\rho(z_{\mathcal{D}}) + \rho\lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &= \{d_\rho(z_{\mathcal{D}}) + \lambda' u : \lambda' \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

qui est une droite parallèle à \mathcal{D} et qui passe par $d_\rho(z_{\mathcal{D}})$.

- Pour un cercle $\mathcal{C}_{z_0, r}$ centré en z_0 et de rayon r , nous avons

$$\begin{aligned}d_\rho(\mathcal{C}_{z_0, r}) &= d_\rho(\{z : d_{\mathbb{R}^2}(z, z_0) = r\}) \\ &= \{d_\rho(z) : \rho d_{\mathbb{R}^2}(z, z_0) = \rho r\} \\ &= \{d_\rho(z) : d_{\mathbb{R}^2}(d_\rho(z), d_\rho(z_0)) = \rho r\} \\ &= \{z' : d_{\mathbb{R}^2}(z', d_\rho(z_0)) = \rho r\},\end{aligned}$$

qui est un cercle de centre $d_\rho(z_0)$ et de rayon ρr .

□

Chapitre 3

Géométrie sphérique de dimension 2

L'objectif de ce chapitre est de présenter la géométrie sphérique et en particulier comment nous pouvons adapter les notions d'isométries et de droites pour aboutir au théorème des 3 réflexions, présenté dans la section (3.3). Nous aurons l'occasion d'observer des différences avec la géométrie euclidienne quand nous inspecterons le produit de deux réflexions dans la section (3.4) ainsi que la somme des angles intérieurs d'un triangle dans la section (3.7). Enfin, ce chapitre sera pour nous l'occasion de voir comment les transformations de Möbius peuvent apparaître en géométrie sphérique quand nous projetons la sphère sur le plan via la projection stéréographique et considérons les applications induites par les isométries sphériques sur le plan. Les transformations de Möbius jouent également un rôle central pour décrire les isométries hyperboliques. Ce chapitre est basé sur la référence Stillwell (1992b).

3.1 Géométrie euclidienne de dimension 3

Notre point de vue de la sphère est celui d'une surface plongée dans \mathbb{R}^3 et qui hérite ainsi du produit scalaire euclidien. Établissons ainsi quelques résultats de la géométrie euclidienne en dimension 3.

Remarquons tout d'abord que notre argument pour établir une condition suffisante pour être une isométrie du plan euclidien se généralise à toute dimension. Ainsi, les applications qui prennent la forme

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + b, \quad (3.1)$$

où R est une matrice orthogonale et b un élément de \mathbb{R}^3 sont des isométries de \mathbb{R}^3 .

Il se trouve que toutes les isométries euclidiennes prennent cette forme, ce que nous n'allons pas démontrer. Toutefois, le schéma que nous avons établi dans le cas de la dimension 2 peut se généraliser.

1. Il consiste tout d'abord à trouver assez d'isométries euclidiennes que pour pouvoir envoyer n'importe quel hyperplan sur n'importe quel autre via une isométrie, ce qui nous permet de définir les réflexions selon un hyperplan quelconque.
2. Ensuite, nous avons besoin de pouvoir envoyer n'importe quelle droite sur n'importe quelle autre via une isométrie, ce qui nous permet de trouver une formule explicite pour la distance.
3. Avec cette forme explicite de la distance, nous pouvons établir que le lieu des points équidistants à deux points distincts est un hyperplan, et qu'une réflexion via cet hyperplan échange les deux points en question.

4. Enfin, le théorème des 3 réflexions se généralise au théorème des $n + 1$ réflexions dans le cas de \mathbb{R}^n , en remplaçant les réflexions selon les médiatrices par les réflexions selon les hyperplans.

Pour notre application à la géométrie sphérique de dimension 2, nous n'avons pas besoin de démontrer le théorème des $n + 1$ réflexions, et pouvons nous contenter des 3 premiers points dans le cas de \mathbb{R}^3 , ce qui nous permettra d'obtenir assez d'isométries sur la sphère que pour démontrer le théorème des 3 réflexions, version sphérique.

À partir de la forme des isométries de (3.1), nous pouvons dégager des familles, de manière similaire au plan euclidien.

Exemple 10. Les translations qui envoient l'origine O sur le point (x_0, y_0, z_0)

$$t_{x_0, y_0, z_0} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

Exemple 11. La rotation $r_{Oz, \theta}$ d'angle θ autour de l'axe $Oz := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, y = 0\}$, donnée par

$$r_{Oz, \theta} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

De manière similaire, nous définissons les rotations d'axe Ox et Oy .

Exemple 12. La réflexion r_E autour du plan $z = 0$ (que nous appelons *équateur*).

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$$

De manière similaire, nous avons la réflexion autour du plan $x = 0$ et celle autour du plan $y = 0$.

Montrons que les isométries de \mathbb{R}^3 de la forme (3.1) permettent d'envoyer n'importe quelle droite (ou plan) sur une autre droite (ou plan).

Proposition 27.

1. Soient deux droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 de \mathbb{R}^3 , alors il existe une isométrie f de \mathbb{R}^3 telle que $f(\mathcal{D}_1) = \mathcal{D}_2$.
2. Soient deux plans π_1 et π_2 de \mathbb{R}^3 , alors il existe une isométrie f de \mathbb{R}^3 telle que $f(\pi_1) = \pi_2$.

Démonstration. Notons \mathcal{V}_1 et \mathcal{V}_2 les deux variétés affines de \mathbb{R}^3 considérées, qui sont deux droites si nous sommes dans le premier cas, ou deux plans si nous sommes dans le deuxième.

Soit une base B_1 (respectivement B_2) de $\vec{\mathcal{V}}_1$ (resp. $\vec{\mathcal{V}}_2$), le sous-espace directeur de \mathcal{V}_1 (\mathcal{V}_2). Nous pouvons supposer que B_1 et B_2 sont des bases orthonormées, quitte à appliquer le procédé de Gram-Schmidt. Complétons B_1 et B_2 pour obtenir deux bases B'_1 et B'_2 de \mathbb{R}^3 , que nous pouvons de nouveau supposer orthonormées. Par le résultat du cours de géométrie affine Lecomte (2003k), la matrice de passage entre deux bases orthonormées est une matrice orthogonale. Notons R la matrice de passe de B'_1 à B'_2 , qui est donc orthogonale. Notons P_1 (respectivement P_2) un point de \mathcal{V}_1 (resp. \mathcal{V}_2). Alors une isométrie de \mathbb{R}^3 qui envoie \mathcal{V}_1 sur \mathcal{V}_2 est donnée par

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (P_2 - P_1).$$

En effet, la matrice R envoie B_1 sur B_2 et définit ainsi une application linéaire qui envoie $\vec{\mathcal{V}}_1$ sur $\vec{\mathcal{V}}_2$. Comme $\mathcal{V}_1 = P_1 + \vec{\mathcal{V}}_1$ et $\mathcal{V}_2 = P_2 + \vec{\mathcal{V}}_2$, nous pouvons conclure. \square

De même que dans le cas de la dimension 2, le segment qui relie deux points est la courbe de longueur minimale entre deux points. Cela nous donne ainsi une formule explicite de la distance euclidienne dans \mathbb{R}^3 .

Proposition 28. Dans \mathbb{R}^3 euclidien, la courbe de longueur minimale entre deux points A et B est le segment qui les relie.

Démonstration. L'argument est exactement le même que dans le plan euclidien (4), car nous pouvons de nouveau, quitte à utiliser une isométrie donnée par 27, supposer que $A = (0, 0, 0)$ et $B = (0, 0, b)$ où $b > 0$, ce qui simplifie les calculs. Ainsi sans surprise, la distance euclidienne dans \mathbb{R}^3 est donnée par

$$d_{\mathbb{R}^3}(A, B) = \sqrt{(B_x - A_x)^2 + (B_y - A_y)^2 + (B_z - A_z)^2},$$

où $A = (A_x, A_y, A_z)$ et $B = (B_x, B_y, B_z)$. \square

3.2 La sphère \mathbb{S}^2 comme surface plongée dans \mathbb{R}^3 .

Définition 31. La sphère \mathbb{S}^2 est définie comme étant la sphère unité de dimension 2 plongée dans \mathbb{R}^3 , c'est à dire l'ensemble des points à distance 1 de $O := (0, 0, 0)$:

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Les surfaces plongées dans \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire euclidien ont un produit scalaire induit naturel, appelé la *première forme fondamentale* des surfaces. Ce produit scalaire est défini en chaque point de la surface comme étant la restriction du produit scalaire euclidien au plan tangent du point considéré. Plus de détails peuvent être trouvés dans les références suivantes : Lecomte (2003c), Pressley (2009a) ou bien Gallier (2011b).

Exemple 13. Considérons le paramétrage de la sphère privée d'un méridien par les coordonnées sphériques

$$\begin{aligned} \varphi :]0, \pi[\times]0, 2\pi[&\rightarrow \mathbb{S}^2 \\ (\lambda, \mu) &\mapsto (\sin \lambda \cos \mu, \sin \lambda \sin \mu, \cos \lambda), \end{aligned} \quad (3.2)$$

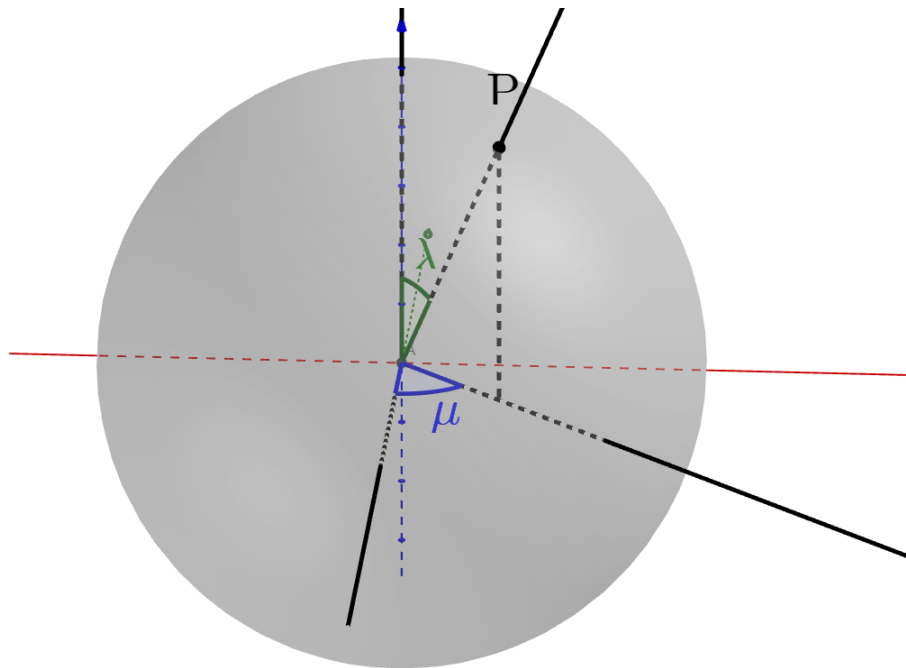
où nous pouvons voir λ comme étant l'angle qui balaye un méridien privé de ses extrémités, et μ l'angle qui balaye tous les méridiens sauf un de la sphère. Les dérivées partielles de φ sont données par

$$\begin{cases} \partial_\lambda \varphi = (\cos \lambda \cos \mu, \cos \lambda \sin \mu, -\sin \lambda) \\ \partial_\mu \varphi = \sin \lambda (-\sin \mu, \cos \mu, 0). \end{cases}$$

Ainsi, la première forme fondamentale est donnée par

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_\lambda \varphi \cdot \partial_\lambda \varphi & \partial_\lambda \varphi \cdot \partial_\mu \varphi \\ \partial_\mu \varphi \cdot \partial_\lambda \varphi & \partial_\mu \varphi \cdot \partial_\mu \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \lambda \end{pmatrix}$$

La sphère est ainsi une variété plongée Riemannienne, et la restriction des isométries de \mathbb{R}^3 qui préservent la sphère sont des isométries de \mathbb{S}^2 . Nous pouvons même en dire plus.

FIGURE 3.1 – Paramétrage de la sphère par φ , via les coordonnées sphériques

Proposition 29. *Les restrictions à \mathbb{S}^2 des isométries de \mathbb{R}^3 qui laissent invariant le point O sont des isométries de \mathbb{S}^2*

Démonstration. Les isométries de \mathbb{R}^3 qui laissent invariant le point O préservent la sphère, car les points de distance euclidienne 1 de O sont envoyés sur des points de distance 1 de O , en d'autres termes, les points de \mathbb{S}^2 sont envoyés sur des points de \mathbb{S}^2 . \square

Exemple 14. Nous pouvons ainsi dégager des exemples d'isométries de \mathbb{S}^2 .

1. Il est évident que la seule translation qui préserve le point O est l'identité, ainsi les translations euclidiennes ne nous donnent pas d'isométries de \mathbb{S}^2 .
2. Les rotations d'axe Oz préservent le point O , et leur restriction à \mathbb{S}^2 nous donne ainsi une isométrie de \mathbb{S}^2 . De manière générale, cela est le cas de toute rotation dont l'axe passe par O , qui peuvent de nouveau être définies avec l'idée de conjugaison.
3. La réflexion selon le plan $z = 0$ nous donne également une isométrie de \mathbb{S}^2 , ainsi que toute réflexion autour d'un plan qui passe par O .

Définition 32.

1. Les rotations sphériques sont définies comme étant la restriction à \mathbb{S}^2 des rotations de \mathbb{R}^3 autour d'un axe passant par O .
2. Les réflexions sphériques sont définies comme étant la restriction à \mathbb{S}^2 des réflexions de \mathbb{R}^3 selon un plan passant par O .

De manière générale, nous avons le résultat suivant pour décrire les isométries de la sphère.

Corollaire 12. *Toutes les fonctions de la forme*

$$f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

où R est une matrice orthogonale sont des isométries de \mathbb{S}^2 .

Démonstration. Cela découle de la proposition (29) et du fait que les matrices orthogonales nous donnent des isométries de \mathbb{R}^3 . \square

3.3 Grands cercles de la sphère et théorème des 3 réflexions

Dans le cas euclidien, la preuve du théorème des 3 réflexions repose sur la caractérisation d'une droite comme étant le lieu des points équidistants à deux points distincts (21). L'analogie de ce lieu sur la sphère nous donne des grands cercles, c'est à dire des cercles sur la sphère et de même rayon que celle-ci. Cela nous permet de définir les réflexions sphériques et de finalement aboutir au théorème des 3 réflexions.

Proposition 30. *L'ensemble des points de \mathbb{R}^3 équidistants à deux points P et P' de \mathbb{S}^2 est un plan qui passe par O , et la réflexion par ce plan échange P et P' .*

Démonstration. 1. Notons $P = (\alpha, \beta, \gamma)$ et $P' = (\alpha', \beta', \gamma')$ les coordonnées de nos deux points distincts de \mathbb{S}^2 . L'ensemble des points équidistants de P et P' dans \mathbb{R}^3 satisfait l'équation cartésienne suivante :

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = (x - \alpha')^2 + (y - \beta')^2 + (z - \gamma')^2$$

Les points P et P' sont des points de la sphère, ainsi $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 = \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2$. L'équation cartésienne peut ainsi se simplifier,

$$\begin{aligned} -2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z &= -2\alpha'x - 2\beta'y - 2\gamma'z \\ \Leftrightarrow (\alpha - \alpha')x + (\beta - \beta')y + (\gamma - \gamma')z &= 0, \end{aligned} \tag{3.3}$$

qui est l'équation d'un plan qui passe par O .

2. Nous pouvons supposer, quitte à effectuer un changement de coordonnées par isométrie, que les points P et P' sont sur le plan $z = 0$ et que l'un s'obtient par réflexion par l'axe Ox de l'autre. Ainsi, P est de la forme $(\alpha, \beta, 0)$ et $P' = (\alpha, -\beta, 0)$. L'équation cartésienne dans ce cas nous donne $y = 0$, et la réflexion de plan $y = 0$ permet bien de passer d'échanger P et P' . \square

Définition 33. Un *grand cercle* de \mathbb{S}^2 est l'intersection de \mathbb{S}^2 avec un plan de \mathbb{R}^3 qui passe par O .

Nous utiliserons également le terme \mathbb{S}^2 -droite.

Nous souhaitons maintenant montrer que les grands cercles vérifient d'autres propriétés similaires aux droites euclidiennes dans le plan. Nous savons par la propriété (1) que par deux points distincts de \mathbb{R}^2 , il ne passe qu'une et une seule droite. De plus, par la proposition (20), le segment reliant deux points est la courbe de longueur minimale dans le plan euclidien. La première propriété n'est pas tout à fait vraie sur la sphère, car par deux points diamétralement opposés passent une infinité de grands cercles.

Définition 34. Deux points distincts P_1 et P_2 de \mathbb{S}^2 sont dits *antipodaux* ou *diamétralement opposés* si la droite de \mathbb{R}^3 qui passe par P_1 et P_2 contient le centre de la sphère O .

Proposition 31. Par deux points distincts et non antipodaux de \mathbb{S}^2 passent un unique grand cercle.

Démonstration. Soient P_1 et P_2 deux points distincts et non antipodaux de \mathbb{S}^2 . Alors les vecteurs $O\vec{P}_1$ et $O\vec{P}_2$ sont linéairement indépendants, ainsi il existe un plan π qui passe par O, P_1 et P_2 , par exemple le plan

$$\pi = O + \{\lambda_1 O\vec{P}_1 + \lambda_2 O\vec{P}_2 : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}. \quad (3.4)$$

Ce plan π est unique, car si nous avons un plan π' qui passe par O, P_1 et P_2 , il contiendrait les droites OP_1 et OP_2 car π' est une variété affine. Ainsi, le sous-espace directeur de π' contient $O\vec{P}_1$ et $O\vec{P}_2$, et π' peut ainsi se réécrire sous la forme de l'équation 3.4.

Un grand cercle qui passe par P_1 et P_2 est donné par l'intersection de π avec la sphère. \square

En géométrie sphérique, le grand cercle qui passe par deux points distincts P et Q et non antipodaux ne détermine pas un unique segment, car nous avons évidemment deux parties de grand cercle qui relient P et Q . Toutefois, la courbe de longueur minimum entre deux points est toujours une partie d'un grand cercle.

Proposition 32. La courbe de \mathbb{S}^2 de longueur minimale entre deux points de \mathbb{S}^2 est une partie d'un grand cercle.

Démonstration. Soient deux points P_1 et P_2 de la sphère. Commençons par calculer la longueur de l'arc de grand cercle qui joint P_1 et P_2 . Nous allons de nouveau travailler via les coordonnées sphériques via le paramétrage

$$\begin{aligned} \varphi :]0, \pi[\times]0, 2\pi[&\rightarrow \mathbb{S}^2 \\ (\lambda, \mu) &\mapsto (\sin \lambda \cos \mu, \sin \lambda \sin \mu, \cos \lambda), \end{aligned}$$

qui exclut le méridien de \mathbb{S}^2 qui passe par $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 0)$ et $(0, 0, -1)$. De nouveau, nous pouvons supposer grâce à un choix convenable d'axes que $P_1 = N$ et que P_2 s'écrive en coordonnées sphériques (λ_2, π) , avec $\lambda_2 \in]0, \pi[$. Ainsi, un paramétrage du grand cercle via les coordonnées sphériques est donné par :

$$\begin{aligned} \gamma_p :]0, 1[\rightarrow]0, \pi[\times]0, 2\pi[\\ t &\mapsto (t\lambda_2, \pi) \end{aligned}$$

La longueur de l'arc de grand cercle est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbb{S}^2}([P_1, P_2]) &= \int_0^1 \sqrt{(\lambda_2 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2(t\lambda_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix}} dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{\lambda_2^2 + 0} dt = \lambda_2. \end{aligned}$$

Soit une courbe $\gamma :]0, 1[\rightarrow \mathbb{S}^2$ qui ne passe pas par le méridien principal telle que $\gamma(0) = P_1 = N$, $\gamma(1) = P_2 = (\lambda_2, \pi)$. Notons $(\lambda(t), \mu(t))$ le paramétrage de $\gamma(t)$ en coordonnées sphériques. La longueur de γ est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbb{S}^2}(\gamma) &= \int_0^1 \sqrt{(\lambda'(t) \ \mu'(t)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2(\lambda(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda'(t) \\ \mu'(t) \end{pmatrix}} dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{\lambda'^2(t) + \sin^2(\lambda(t))\mu'^2(t)} dt \\ &\geq \int_0^1 \sqrt{\lambda'^2(t)} dt = \int_0^1 |\lambda'(t)| dt \\ &\geq \int_0^1 \lambda'(t) dt = \lambda(1) - \lambda(0) = \lambda_2 \\ &= \mathcal{L}_{\mathbb{S}^2}([P_1, P_2]). \end{aligned}$$

□

Remarque 15. Une manière de ne pas devoir exclure les courbes passant par le méridien principal serait via la notion de géodésiques, intuitivement des courbes dont l'accélération tangentielle est nulle, et de montrer que celles-ci minimisent localement la distance. Cette approche générale est présentée dans Lee (2019c) et Lee (2019d).

Nous pouvons établir une formule explicite de la distance dans \mathbb{S}^2 .

Corollaire 13. • La pseudo-distance dans \mathbb{S}^2 entre deux points P_1 et P_2 est donnée par

$$d_{\mathbb{S}^2}(P_1, P_2) = 2 \sin^{-1} \left(\frac{1}{2} d_{\mathbb{R}^3}(P_1, P_2) \right).$$

• En particulier, $d_{\mathbb{S}^2}$ est une distance.

Démonstration. • Nous avons montré dans la proposition (32) que la distance sur \mathbb{S}^2 entre $P_1 = N$ et un point P_2 paramétré par les coordonnées sphériques par (λ_2, π) est donnée par λ_2 . En d'autres termes, la distance est égale à l'angle $\lambda \in [0, \pi]$ entre les deux droites de \mathbb{R}^3 issues de O et passant respectivement par P_1 et P_2 .

Via la figure (3.2), nous voyons que cet angle vaut 2θ , et que nous avons

$$2\theta = 2 \sin^{-1} \left(\frac{1}{2} d_{\mathbb{R}^3}(P_1, P_2) \right),$$

du fait que nous travaillons sur une sphère de rayon 1.

• Nous avons $\sin^{-1}(x)$ si et seulement si $x = 0$. Comme nous savons que la distance euclidienne a la propriété de séparation, cela est également le cas pour $d_{\mathbb{S}^2}$, ainsi cette dernière est une distance.

□

Grâce à la caractérisation donnée par la proposition (30) d'un grand cercle comme étant le lieu des points équidistants à deux points distincts de \mathbb{S}^2 , nous pouvons établir le théorème des 3 réflexions en géométrie sphérique, de la même manière que dans le cas euclidien (2.4).

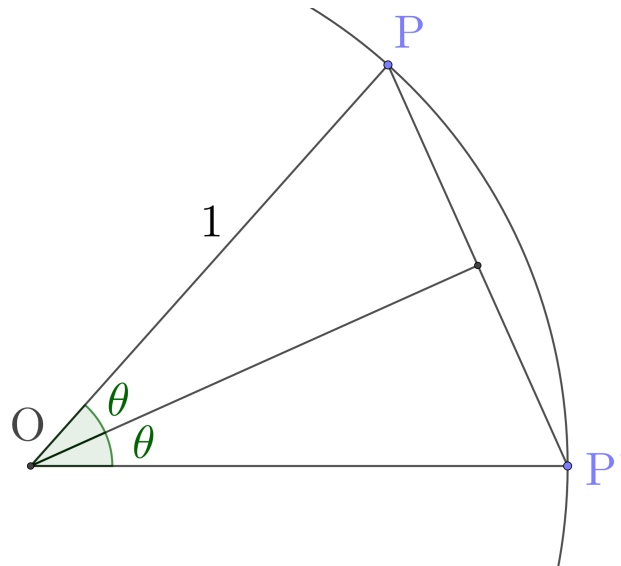


FIGURE 3.2 – Calcul de la distance sur grand cercle par rapport à la distance euclidienne

Théorème 2. *Toute isométrie de \mathbb{S}^2 est le produit d'une, de deux ou de trois réflexions sphériques.*

Démonstration. Comme dans le cas euclidien, la preuve repose sur le fait que nous pouvons toujours construire le lieu des points équidistants à deux points distincts donnés, qui dans \mathbb{S}^2 est un grand-cercle, comme établi à la proposition (30), et que la réflexion via cette \mathbb{S}^2 -droite échange les deux points donnés.

Une isométrie sphérique est de nouveau déterminée par l'image de 3 points qui n'appartiennent pas à un même grand cercle, par le même argument que dans le cas euclidien (7). Finalement, la construction des 3 réflexions nécessaires est identique que dans le cas euclidien. \square

Même si le théorème des 3 réflexions nous permet d'établir un analogue entre les isométries sphériques et les isométries euclidiennes, et que les grands cercles vérifient plusieurs propriétés des droites dans le plan, une différence majeure survient en géométrie sphérique quand nous nous intéressons à la notion de parallélisme.

Proposition 33. *Deux \mathbb{S}^2 -droites distinctes s'intersectent toujours en deux points antipodaux.*

Démonstration. Les deux \mathbb{S}^2 -droites distinctes sont associées à des plans distincts de \mathbb{R}^3 qui s'intersectent en O . Grâce la proposition (7), nous savons que dans \mathbb{R}^3 , deux plans distincts sont parallèles ou s'intersectent en une droite. Ainsi les deux plans considérés s'intersectent en une droite qui passe par O . L'intersection de la sphère avec cette droite donne deux points antipodaux. \square

Ainsi, il n'y a pas de notion de droites parallèles distinctes en géométrie sphérique, contrairement à la géométrie euclidienne. Le 5ème postulat d'Euclide n'est donc pas vérifié en géométrie sphérique. Il n'est également pas vérifié en géométrie hyperbolique mais pour une autre raison, car nous montrerons que pour une droite hyperbolique donnée et un point qui n'appartient pas à cette droite passent une infinité de droites parallèles à la droite donnée (56)

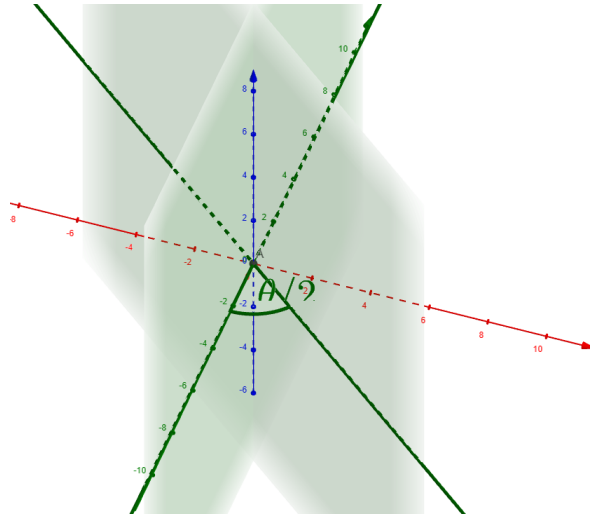


FIGURE 3.3 – Les réflexions par deux plans s’intersectant en une droite donnent l’équivalent des rotations euclidiennes.

3.4 Rotations sphériques

Nous avons défini les rotations sphériques en (32) comme étant la restriction à \mathbb{S}^2 des rotations autour d’un axe passant par O . Remarquons par ailleurs que ces rotations de \mathbb{S}^2 ont deux points fixes antipodaux.

Nous souhaitons poursuivre notre analogie entre la géométrie euclidienne et la géométrie sphérique dans le cas des rotations. Nous savons que dans le plan euclidien, le produit de deux réflexions dont les axes s’intersectent est une rotation, et que toute rotation s’exprime de cette manière (22). Cela est également le cas pour les rotations sphériques.

Proposition 34.

1. Toute rotation de \mathbb{S}^2 est le produit de deux \mathbb{S}^2 -réflexions.
2. Le produit de 2 \mathbb{S}^2 -réflexions est toujours une rotation.

Démonstration. 1. Supposons avoir une rotation d’axe Oz , quitte à effectuer un changement de coordonnées. La rotation d’angle θ selon l’axe Oz est le produit de deux réflexions dont les plans s’intersectent en Oz et séparés d’un angle $\theta/2$, comme dans la figure (3.3). La vérification est la même que dans le plan euclidien (22), car ces réflexions et la rotation d’axe Oz laissent la troisième composante inchangée, et que leurs restrictions aux deux premières composantes correspondent à des réflexions et rotations dans le plan.

2. Le deuxième point découle de la démonstration de la proposition (33). Les deux \mathbb{S}^2 -droites distinctes sont la trace sur la sphère de deux plans de \mathbb{R}^3 qui passent par O . Ces deux plans s’intersectent en un axe qui passe par O , ainsi le produit des 2 réflexions par ces plans induit une rotation sphérique. □

La géométrie sphérique n’a ainsi pas l’équivalent des translations euclidiennes, qui s’obtenaient comme produit de deux réflexions d’axes parallèles.

Proposition 35. *Le produit de deux \mathbb{S}^2 -rotations est encore une rotation. Ainsi les rotations de \mathbb{S}^2 forment un groupe.*

Démonstration. Soient deux rotations sphériques $r_{P,\theta}$ et $r_{Q,\phi}$ autour de P et Q respectivement. Nous pouvons trouver trois \mathbb{S}^2 -droites L , N et M telles que

$$r_{Q,\phi} = \bar{r}_N \circ \bar{r}_M, \quad r_{P,\theta} = \bar{r}_M \circ \bar{r}_L.$$

Ainsi, le produit des deux rotations vaut

$$\begin{aligned} r_{Q,\phi} \circ r_{P,\theta} &= \bar{r}_N \circ \bar{r}_M \circ \bar{r}_M \circ \bar{r}_L \\ &= \bar{r}_N \circ \bar{r}_L, \end{aligned}$$

qui est une rotation car N et L s'intersectent forcément en deux points antipodaux. \square

3.5 Projection stéréographique et inversions par un cercle

L'objectif des sections qui vont suivre est de trouver un résultat analogue à la proposition (25) qui établissait la forme des isométries euclidiennes en tant qu'applications complexes.

Exprimer les isométries sphériques en tant qu'applications complexes nécessiterait de projeter la sphère sur le plan \mathbb{C} . Remarquons toutefois qu'il n'existe pas d'homéomorphisme entre la sphère \mathbb{S}^2 et le plan. En effet, la sphère vue comme un sous-ensemble de \mathbb{R}^3 est un ensemble fermé et borné, donc un compact. Être compact est une propriété topologique, c'est à dire préservée par homéomorphisme, donc le plan et la sphère ne peuvent pas être homéomorphes.

Nous pouvons cependant construire un homéomorphisme entre la sphère privée d'un point et le plan entier grâce à la projection stéréographique. Fixons un point de la sphère, dans notre cas $N = (0, 0, 1)$ le pôle nord, et un plan de \mathbb{R}^3 , dans notre cas $z = 0$. La projection stéréographique consiste à envoyer un point $P = (x, y, z)$ de $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$, en considérant la droite joignant P et N et en prenant l'intersection avec le plan $z = 0$. La droite NP est l'ensemble

$$\{(\lambda x, \lambda y, 1 + \lambda(z - 1)) : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

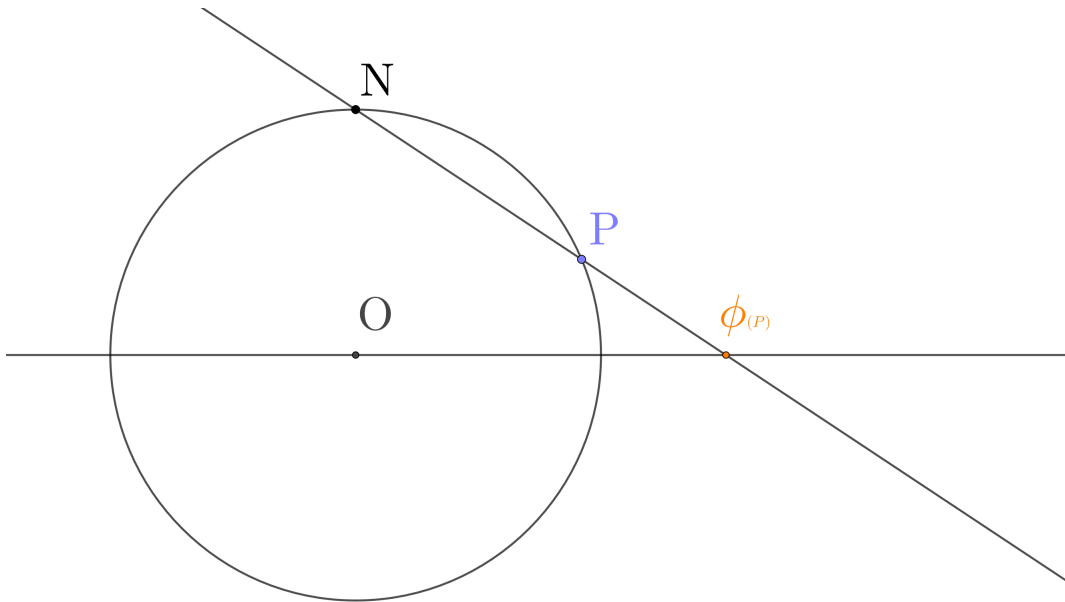
Ainsi l'intersection avec le plan $z = 0$ donne $\lambda = 1/(1 - z)$. Cela nous permet de définir explicitement la projection stéréographique.

Définition 35. La projection stéréographique centrée en $N = (0, 0, 1)$ est définie par

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto \left(\frac{x}{1 - z}, \frac{y}{1 - z} \right). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Proposition 36. *La projection stéréographique ϕ est un difféomorphisme de classe C^∞ entre $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ et \mathbb{R}^2 .*

Démonstration. 1. L'application ϕ définie à l'équation (3.5) est de classe C^∞ car $z \neq 1$ sur $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$.


 FIGURE 3.4 – Projection stéréographique ϕ du cercle sur la droite $y = 0$.

2. Calculons l'inverse de ϕ et montrons que cette application est également de classe C^∞ . Soit un point $Q = (u, v)$ de \mathbb{R}^2 , où \mathbb{R}^2 est vu comme le plan $z = 0$ de \mathbb{R}^3 . L'application inverse ϕ^{-1} consiste à considérer l'intersection de la droite NQ avec la sphère. La droite NQ est l'ensemble

$$\{(\lambda u, \lambda v, 0 - (1 - \lambda)) : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

En prenant l'intersection avec \mathbb{S}^2 , nous avons

$$\begin{aligned} \lambda^2 u^2 + \lambda^2 v^2 + (1 - \lambda)^2 &= 1 \\ \lambda^2(u^2 + v^2 + 1) + 1 - 2\lambda &= 1 \\ \lambda(\lambda(u^2 + v^2 + 1) - 2) &= 0. \end{aligned}$$

Le point de NQ avec $\lambda = 0$ correspond à N qui n'appartient pas au domaine de ϕ . Ainsi, l'intersection de NQ avec \mathbb{S}^2 nous donne

$$\lambda = \frac{2}{u^2 + v^2 + 1}.$$

Au final, l'inverse de ϕ est donné par

$$\begin{aligned} \phi^{-1} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \\ (u, v) &\mapsto \left(\frac{2u}{1 + u^2 + v^2}, \frac{2v}{1 + u^2 + v^2}, \frac{-1 + u^2 + v^2}{1 + u^2 + v^2} \right), \end{aligned}$$

qui est bien de classe C^∞ .

□

3.5.1 Inversions par rapport à un cercle

La forme des isométries de \mathbb{S}^2 projetées sur le plan complexe via la projection stéréographique nécessite de comprendre les inversions. Nous verrons dans la section (3.6) que les réflexions sphériques s'expriment comme des inversions par rapport à un cercle quand nous projetons la sphère sur \mathbb{C} via la projection stéréographique.

De plus, ces inversions joueront également un rôle important dans géométrie hyperbolique, car les inversions par rapport à un cercle sont des isométries dans le modèle du demi-plan hyperbolique (4.2), et sont l'équivalent hyperbolique des réflexions.

Définition 36. *L'inversion par rapport à un cercle de centre P et de rayon $R > 0$ est définie comme l'application*

$$I_{P,R} : \mathbb{C} \setminus \{P\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{P\}$$

$$z \mapsto \frac{R^2}{\overline{z - P}} + P,$$

En coordonnées polaires, nous avons $I_{P,R} : P + re^{i\theta} \mapsto P + \frac{R^2}{r}e^{i\theta}$. pour $r > 0$ et θ réel.

Remarque 16. Une deuxième manière de définir l'inversion par un cercle est la suivante : l'inverse d'un point P_2 par un cercle $\mathcal{C}_{P,R}$ est un point que nous notons P'_2 qui vérifie les deux conditions suivantes :

1. Le point P'_2 appartient à la demi droite $[PP_2)$.
2. Les longueurs des segments vérifient $|PP_2| \cdot |PP'_2| = R^2$.

Grâce à la réécriture en coordonnées polaires, nous voyons que l'application envoie les points à l'intérieur du cercle, qui correspondent à $r < R$ à l'extérieur de celui-ci ($r > R$), et vice-versa. De plus, les points du cercle unité sont les points fixes de l'inversion.

Lemme 3. *L'inversion $I_{P,R}$ est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{P\}$ dans $\mathbb{C} \setminus \{P\}$, et est sa propre fonction réciproque.*

Démonstration. 1. Le caractère bijectif de l'inversion résulte du fait que l'application

$$f :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$$

$$r \mapsto \frac{R^2}{r},$$

est une bijection si $R > 0$.

2. Vérifions qu'une inversion est son propre inverse. Notons I l'inversion par rapport au cercle unité, de centre O et de rayon 1. Plus explicitement, I est donné par

$$I : \mathbb{C} \setminus \{O\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{O\}$$

$$z \mapsto \frac{1}{\overline{z}},$$

et il est direct que I est sa propre fonction réciproque. De manière générale, remarquons que toute inversion s'obtient comme conjugaison de I . En effet, $I_{P,R}$ peut se réécrire¹

$$I_{P,R} = t_P \circ d_R \circ I \circ d_R^{-1} \circ t_P^{-1},$$

où l'application $d_R : z \mapsto Rz$ est une dilatation et t_P est la translation qui envoie O sur P . Ainsi, $I_{P,R}$ est son propre inverse. □

1. Cette réécriture sera utilisée dans la section (4.3) pour établir le fait que les inversions par un cercle sont des isométries hyperboliques. Nous aurions pu évidemment vérifier que $I_{P,R}$ est sa propre fonction réciproque par un calcul direct.

3.5.2 Inversion par rapport à un cercle généralisé

Dans cette section, nous souhaitons étudier l'image d'une droite ou d'un cercle par inversion par rapport à un cercle. Ce résultat nous permettra par exemple d'établir que la projection stéréographique envoie les cercles de la sphère sur des cercles, dans la proposition (40). De plus, cela nous permettra de montrer en géométrie hyperbolique (50) que les isométries hyperboliques préservent les droites hyperboliques, qui sont des droites ou des cercles euclidiens.

Au lieu de distinguer entre les droites et les cercles, nous allons rassembler ces deux notions sous un même terme.

Définition 37. Un cercle généralisé est une droite ou un cercle.

Remarque 17. De manière intuitive, nous pouvons voir les droites comme des cercles dont le centre et le rayon tendent à l'infini.

Nous pouvons de même généraliser la notion d'inversion par rapport à un cercle.

Définition 38. Une *inversion par rapport à un cercle généralisé* est une inversion par rapport à un cercle, ou une réflexion euclidienne.

Nous souhaitons maintenant établir le fait que l'inversion d'un cercle généralisé par un autre cercle généralisé reste un cercle généralisé.

Lemme 4. Soient un cercle $C_{O,R}$, deux points A et B distincts du centre O , et A' et B' les inverses respectifs de A et B par $I_{O,R}$. Alors les triangles $\triangle AOB$ et $\triangle B'O'A'$ sont semblables.

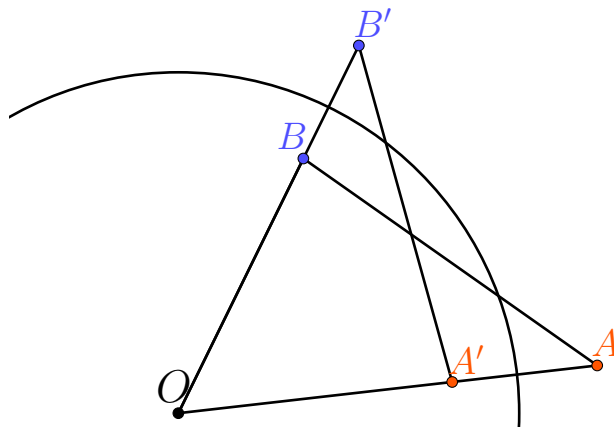


FIGURE 3.5 – Les triangles $\triangle AOB$ et $\triangle B'O'A'$ sont semblables.

Démonstration. Nous savons que $|OA||OA'| = R^2 = |OB||OB'|$, d'où

$$\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OB'|}{|OA'|}.$$

De plus, les angles \widehat{AOB} et $\widehat{B'O'A'}$ sont égaux car l'inverse d'un point P se trouve sur la demi-droite OP . Deux triangles qui ont un angle égal et les deux côtés adjacents à cet angle de rapports de longueur égaux sont semblables, ce qui suffit. \square

Théorème 3. *L'image d'un cercle généralisé par une inversion du cercle $\mathcal{C}_{O,R}$ est un cercle généralisé, éventuellement privé du point O . Plus précisément,*

1. *Une droite passant par O est son propre inverse.*
2. *L'inverse d'une droite qui ne passe pas par O est un cercle qui passe par O . Réciproquement, l'inverse d'un cercle qui passe par O est une droite qui ne passe pas par O .*
3. *L'inverse d'un cercle qui ne passe pas par O est un cercle qui ne passe pas par O*

Démonstration. Fixons-nous un cercle $\mathcal{C}_{O,R}$ et considérons l'inversion $I_{O,R}$ par ce même cercle.

1. Pour le premier cas, soit \mathcal{D} une droite qui passe par O . Alors l'image de $\mathcal{D} \setminus \{O\}$ par inversion est $\mathcal{D} \setminus \{O\}$. En effet, nous savons que l'inverse z' d'un point z appartient à la demi-droite $[Oz]$. De plus, nous avons

$$|Oz'| = \frac{R^2}{|Oz|}.$$

Comme l'application $r \mapsto \frac{R^2}{r}$ est une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dans lui-même, nous pouvons conclure.

2. Pour le deuxième cas, soit une droite \mathcal{D} qui ne passe pas par O . Soit A le point qui réalise la distance de O à la droite \mathcal{D} , et soit A' l'inverse de A . L'image de \mathcal{D} par inversion contient le point A' . Si nous considérons les points de \mathcal{D} qui sont proches de l'infini, nous savons que leur image respective est proche du point O . Considérons maintenant un point B de la droite \mathcal{D} , différent de A , et soit B' son inverse.

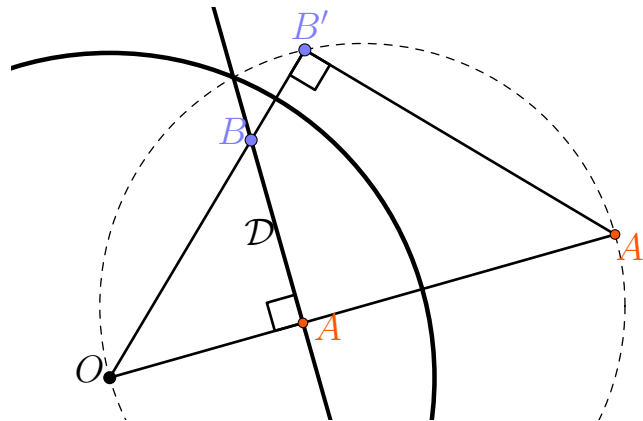


FIGURE 3.6 – Inversion d'une droite qui ne passe pas par P

Nous savons par le lemme (4) que les triangles AOB et $B'OA'$ sont semblables, donc que ce dernier est rectangle en B' . Comme cela est vrai pour n'importe quel point B différent de A , nous en tirons que l'image de la droite \mathcal{D} est un cercle. Ce cercle contient A' et contient O comme étant un point limite. Le centre de ce cercle est le milieu de $[OA']$. Par le résultat (3) sur les inversions, nous savons qu'une inversion par un cercle est son propre inverse, et nous obtenons ainsi la réciproque du deuxième cas.

3. Pour le troisième cas, soit \mathcal{C} un cercle qui ne passe pas par O . Si O est le centre de \mathcal{C} , le résultat est immédiat, car l'inverse de \mathcal{C} est de nouveau un cercle centré en O , au vu de l'expression d'une inversion par coordonnées polaires.

Sinon, soit \mathcal{D} la droite qui passe par O et le centre de \mathcal{C} . Notons A et B les intersections de \mathcal{D} et de \mathcal{C} , avec A le point le plus proche de O et B le plus éloigné. Soit C un point

quelconque de \mathcal{C} , différent de A et B , et soient A' , B' et C' , les inverses des points correspondants.

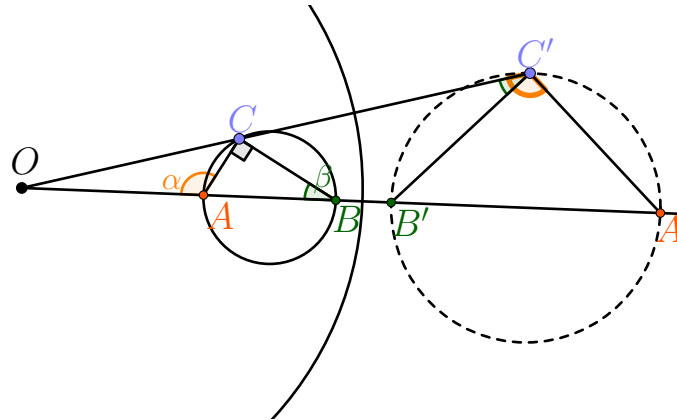


FIGURE 3.7 – Inversion d’un cercle qui ne passe pas par O et de centre différent de O .

Par le lemme (4), nous savons que $\alpha := \widehat{OAC} = \widehat{OC'A'}$ et que $\beta := \widehat{OBC} = \widehat{OC'B'}$. Le triangle $\triangle ACB$ étant rectangle en C , nous avons

$$\begin{aligned} (\pi - \alpha) + \beta + \frac{\pi}{2} &= \pi \\ \alpha - \beta &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, le triangle $\triangle B'C'A'$ est rectangle en C' , car $\widehat{B'C'A'} = \alpha - \beta$. Comme cela est vrai pour n’importe quel point C de \mathcal{C} , l’image d’un cercle par inversion est encore un cercle. Ce dernier ne passe pas par O car le cercle de départ n’a pas de point à l’infini. □

Corollaire 14. *L’inversion d’un cercle généralisé par un cercle généralisé est encore un cercle généralisé*

Démonstration. Grâce au théorème précédent (3), nous savons que l’inverse d’un cercle généralisé par un cercle reste un cercle généralisé. Il reste à montrer que la réflexion par une droite d’un cercle généralisé reste un cercle généralisé. Cela est direct car les réflexions axiales sont des isométries euclidiennes, et préservent ainsi les droites et les cercles euclidiens. □

3.6 Images des isométries sphériques par projection stéréographique

Nous avons enfin tous les outils pour examiner les images des isométries de \mathbb{S}^2 par la projection stéréographique. Comme toutes les isométries sphériques s’expriment comme le produit d’au plus 3 réflexions sphériques, explicitons le cas d’une réflexion sphérique.

3.6.1 Images des isométries sphériques par projection stéréographique

Théorème 4. *Soit une réflexion sphérique \bar{r}_s . Alors l'application $\phi \circ \bar{r}_s \circ \phi^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est une inversion par rapport à un cercle, où $\phi : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$ est la projection stéréographique.*

Démonstration. Soient $P = (\alpha, \beta, \gamma)$ et $P' = (\alpha', \beta', \gamma')$ les deux points de \mathbb{S}^2 échangés par la réflexion \bar{r}_s . Nous souhaitons montrer dans un premier temps que l'axe de réflexion de \bar{r}_s est envoyé sur un cercle généralisé par la projection stéréographique, et dans un second temps que $\phi \circ \bar{r}_s \circ \phi^{-1}$ est une inversion par rapport à ce même cercle généralisé.

1. Montrons que l'axe de réflexion de \bar{r}_s est envoyé sur un cercle généralisé par la projection stéréographique. Le plan de la réflexion dans \mathbb{R}^3 est d'équation cartésienne

$$(\alpha - \alpha')x + (\beta - \beta')y + (\gamma - \gamma')z = 0, \quad (3.6)$$

comme montré via l'équation (3.3). La projection stéréographique inverse ϕ^{-1} envoie le point (u, v) du plan sur

$$\left(\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{-1+u^2+v^2}{1+u^2+v^2} \right). \quad (3.7)$$

Nous souhaitons expliciter l'ensemble des points (u, v) du plan dont l'image par ϕ^{-1} est sur l'axe de réflexion de \bar{r}_s .

- a Si $\gamma \neq \gamma'$, nous allons montrer qu'il s'agit d'un cercle de centre Q et de rayon ρ , où

$$Q = \left(\frac{\alpha - \alpha'}{\gamma - \gamma'}, \frac{\beta - \beta'}{\gamma - \gamma'} \right)$$

$$\rho^2 = \frac{2(1 - \alpha\alpha' - \beta\beta' - \gamma\gamma')}{(\gamma - \gamma')^2}.$$

Vérifions cela en remplaçant dans l'équation (3.6) la forme des points donnés par (3.7).

$$\begin{aligned} & (\alpha - \alpha') \frac{2u}{1+u^2+v^2} + (\beta - \beta') \frac{2v}{1+u^2+v^2} + (\gamma - \gamma') \frac{-1+u^2+v^2}{1+u^2+v^2} = 0 \\ & \Leftrightarrow (\alpha - \alpha')2u + (\beta - \beta')2v + (\gamma - \gamma')(-1+u^2+v^2) = 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{\alpha - \alpha'}{\gamma - \gamma'}2u + \frac{\beta - \beta'}{\gamma - \gamma'}2v + u^2 + v^2 - 1 = 0 \\ & \Leftrightarrow \left(u + \frac{\alpha - \alpha'}{\gamma - \gamma'} \right)^2 + \left(v + \frac{\beta - \beta'}{\gamma - \gamma'} \right)^2 - \left(\frac{\alpha - \alpha'}{\gamma - \gamma'} \right)^2 - \left(\frac{\beta - \beta'}{\gamma - \gamma'} \right)^2 - 1 = 0 \\ & \Leftrightarrow \left(u + \frac{\alpha - \alpha'}{\gamma - \gamma'} \right)^2 + \left(v + \frac{\beta - \beta'}{\gamma - \gamma'} \right)^2 = r^2. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Le terme r^2 peut se réécrire

$$\begin{aligned} r^2 & := 1 + \left(\frac{\alpha - \alpha'}{\gamma - \gamma'} \right)^2 + \left(\frac{\beta - \beta'}{\gamma - \gamma'} \right)^2 = \frac{(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2 + (\gamma - \gamma')^2}{(\gamma - \gamma')^2} \\ & = \frac{2 - 2\alpha\alpha' - 2\beta\beta' - 2\gamma\gamma'}{(\gamma - \gamma')^2} \\ & = \rho^2, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que P et P' sont des points de la sphère, ainsi $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1$.

b Dans le cas où $\gamma = \gamma'$, l'équation du cercle généralisé se réduit à

$$(\alpha - \alpha')u + (\beta - \beta')v = 0. \quad (3.9)$$

2. Nous souhaitons maintenant montrer que les points $\phi(P)$ et $\phi(P')$ sont images l'un de l'autre par l'inversion de cercle généralisé défini par l'équation (3.8) si $\gamma \neq \gamma'$, ou l'équation (3.9) si $\gamma = \gamma'$. Les calculs sont directs mais les expressions obtenues peuvent être relativement longues.

a Dans le cas où $\gamma \neq \gamma'$, les images par ϕ de P et P' sont respectivement

$$\left(\frac{\alpha}{1-\gamma}, \frac{\beta}{1-\gamma} \right), \quad \left(\frac{\alpha'}{1-\gamma'}, \frac{\beta'}{1-\gamma'} \right).$$

Montrons que les points $\phi(P)$ et $\phi(P')$ sont sur un même demi-droite issue de Q , le centre du cercle, et que le produit de leur distance à Q est ρ^2 , le carré du rayon du cercle.

Les vecteur qui relie $\phi(P)$ et $\phi(P')$ au centre Q du cercle d'équation (3.8) sont respectivement donnés par

$$\left(\frac{\alpha}{1-\gamma} + \frac{\alpha - \alpha'}{\gamma - \gamma'}, \frac{\beta}{1-\gamma} + \frac{\beta - \beta'}{\gamma - \gamma'} \right) = \frac{1}{(1-\gamma)(\gamma - \gamma')} \begin{pmatrix} \alpha - \alpha' + \alpha'\gamma - \alpha\gamma' \\ \beta - \beta' + \beta'\gamma - \beta\gamma' \end{pmatrix}$$

et

$$\left(\frac{\alpha'}{1-\gamma'} + \frac{\alpha - \alpha'}{\gamma - \gamma'}, \frac{\beta'}{1-\gamma'} + \frac{\beta - \beta'}{\gamma - \gamma'} \right) = \frac{1}{(1-\gamma')(\gamma - \gamma')} \begin{pmatrix} \alpha - \alpha' + \alpha'\gamma - \alpha\gamma' \\ \beta - \beta' + \beta'\gamma - \beta\gamma' \end{pmatrix}.$$

Ces vecteurs sont proportionnels par une constante positive, et sont ainsi de même direction. Le produit de leur longueur vaut

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\gamma - \gamma')^2(1-\gamma)(1-\gamma')} \left((\alpha - \alpha' + \alpha'\gamma - \alpha\gamma')^2 + (\beta - \beta' + \beta'\gamma - \beta\gamma')^2 \right) \\ &= \frac{1}{(\gamma - \gamma')^2(1-\gamma)(1-\gamma')} \left((\alpha(1-\gamma') - \alpha'(1-\gamma))^2 + (\beta(1-\gamma') - \beta'(1-\gamma))^2 \right) \\ &= \frac{1}{(\gamma - \gamma')^2} \left((\alpha^2 + \beta^2) \frac{1-\gamma'}{1-\gamma} - 2\alpha\alpha' - 2\beta\beta' + (\alpha'^2 + \beta'^2) \frac{1-\gamma}{1-\gamma'} \right) \\ &= \frac{1}{(\gamma - \gamma')^2} \left((1-\gamma^2) \frac{1-\gamma'}{1-\gamma} - 2\alpha\alpha' - 2\beta\beta' + (1-\gamma'^2) \frac{1-\gamma}{1-\gamma'} \right) \\ &= \frac{1}{(\gamma - \gamma')^2} \left((1+\gamma)(1-\gamma') - 2\alpha\alpha' - 2\beta\beta' + (1+\gamma')(1-\gamma) \right) \\ &= \frac{2 - 2\alpha\alpha' - 2\beta\beta' - 2\gamma\gamma'}{(\gamma - \gamma')^2} \\ &= \rho^2, \end{aligned}$$

ainsi $\phi(P)$ et $\phi(P')$ sont effectivement images l'un de l'autre par l'inversion du cercle d'équation (3.8).

b Dans le cas où $\gamma = \gamma'$, nous souhaitons montrer que le point $\phi(P')$ s'obtient par une symétrie axiale de $\phi(P)$, dont l'axe est donné par la droite d'équation (3.9). Pour

cela, il suffit de montrer que le lieu des points équidistants à $\phi(P)$ et $\phi(P')$ est donné par cette même droite, au vu du résultat (5) en géométrie euclidienne. Les images par ϕ de P et P' sont respectivement

$$\left(\frac{\alpha}{1-\gamma}, \frac{\beta}{1-\gamma} \right), \quad \left(\frac{\alpha'}{1-\gamma}, \frac{\beta'}{1-\gamma} \right).$$

La médiatrice de ces deux points a un vecteur normal égal à

$$\frac{1}{1-\gamma} (\alpha - \alpha', \beta - \beta'),$$

ainsi l'équation de la médiatrice est de la forme

$$(\alpha - \alpha')u + (\beta - \beta')v + \lambda = 0,$$

où λ est à déterminer. Le milieu de $\phi(P)$ et $\phi(P')$ appartient à la médiatrice, ainsi

$$\begin{aligned} (\alpha - \alpha') \frac{\alpha + \alpha'}{2(1-\gamma)} + (\beta - \beta') \frac{\beta + \beta'}{2(1-\gamma)} + \lambda &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha'^2 + \beta^2 - \beta'^2 + 2\lambda(1-\gamma) &= 0 \\ \Leftrightarrow 1 - \gamma^2 - (1 - \gamma^2) + 2\lambda(1-\gamma) &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda &= 0, \end{aligned}$$

du fait que $\alpha^2 + \beta^2 = 1 - \gamma^2 = \alpha'^2 + \beta'^2$. Ainsi, nous retrouvons bien l'équation de la droite établie en (3.9), ce qui suffit. □

Remarque 18. Avec les notations du théorème (4), le cas $\gamma = \gamma'$ correspond à une réflexion autour du plan

$$(\alpha - \alpha')x + (\beta - \beta')y = 0,$$

qui est un plan qui passe par $N = (0, 0, 1)$. Nous voyons ainsi que la distinction de cas dans la preuve résulte du fait que la réflexion sphérique peut se faire selon un grand cercle qui passe par N , qui est le point par rapport auquel nous définissons la projection stéréographique ϕ .

Si nous souhaitons maintenant exprimer en coordonnées complexes les inversions obtenues dans le théorème (4) par projection stéréographique des réflexions sphériques, nous avons le résultat suivant.

Proposition 37. *La réflexion de \mathbb{S}^2 selon le plan d'équation $\lambda x + \mu y + \nu z = 0$ induit via la projection stéréographique l'application*

$$\bar{g}(z) = \frac{(\lambda + i\mu)\bar{z} - \nu}{-\nu\bar{z} - (\lambda - i\mu)},$$

si $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$.

Démonstration. Au vu des notations du théorème (4), définissons les termes suivants :

$$\lambda = \alpha - \alpha', \quad \mu = \beta - \beta', \quad \nu = \gamma - \gamma'.$$

Nous pouvons normaliser λ, μ et ν tels que $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$ et échanger γ et γ' tel que $\nu \geq 0$. Ainsi, nous pouvons reformuler le théorème (4) de la manière suivante. La réflexion de \mathbb{S}^2 selon le plan d'équation

$$\lambda x + \mu y + \nu z = 0$$

induit via la projection stéréographique une inversion par rapport au cercle $\mathcal{C}_{Q,\rho}$, où

$$Q = -\frac{\lambda}{\nu} - i\frac{\mu}{\nu}$$

$$\rho^2 = \frac{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}{|\nu|} = \frac{1}{\nu},$$

et où nous interprétons le cas $\gamma = \gamma' \Leftrightarrow \nu = 0$ comme étant un cercle à l'infini, qui est une droite.

Explicitons maintenant l'inversion de cercle $I_{Q,\rho}$ quand $\nu \neq 0$. Nous avons

$$\begin{aligned} \bar{g}(z) = I_{Q,\rho}(z) &= \frac{\rho^2}{z - Q} + Q \\ &= \frac{\nu^2 Q \bar{z} + \rho^2 - Q \bar{Q}}{\nu^2 \bar{z} - \bar{Q}} \\ &= \frac{\nu(-\lambda - i\mu)\bar{z} + 1 - (\lambda^2 + \mu^2)}{\nu^2 \bar{z} + \nu(\lambda - i\mu)} \end{aligned}$$

Nous avons supposé que $1 - \lambda^2 - \mu^2 = \nu^2$, ainsi nous obtenons

$$\begin{aligned} \bar{g}(z) &= \frac{\nu(-\lambda - i\mu)\bar{z} + \nu^2}{\nu^2 \bar{z} + \nu(\lambda - i\mu)} \\ &= \frac{(\lambda + i\mu)\bar{z} - \nu}{-\nu\bar{z} - (\lambda - i\mu)}, \end{aligned}$$

comme annoncé. □

Remarque 19. Nous pouvons remplacer les paramètres réels λ et μ par un seul paramètre complexe l . Ainsi, dans les notations de la proposition (37), \bar{g} se réécrit

$$\bar{g}(z) = \frac{l\bar{z} - \nu}{-\nu\bar{z} - \bar{l}},$$

avec la contrainte $|l|^2 + \nu^2 = 1$.

3.6.2 Isométries sphériques en tant que fonctions complexes

Par la proposition (37), l'image d'une réflexion sphérique par projection stéréographique est une transformation de Möbius. Par le théorème des 3 réflexions et ce que nous avons sur le produit de transformations de Möbius (12), nous sommes prêts à exprimer l'image de toute isométrie sphérique par la projection stéréographique.

Proposition 38. *Les rotations de \mathbb{S}^2 induisent précisément les applications de la forme*

$$f(z) = \frac{az + b}{-\bar{b}z + \bar{a}}, \tag{3.10}$$

via la projection stéréographique, où $a, b \in \mathbb{C}$ et $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

Démonstration. 1. Montrons tout d'abord que l'image par projection stéréographique de toute rotation sphérique peut s'écrire sous la forme (3.10). Toute rotation sphérique est le produit de deux réflexions sphériques, ainsi il s'agit simplement de calcul matriciel, vu les remarques sur les transformations de Möbius.

Supposons que les deux réflexions induisent des applications

$$\overline{g}_1(z) = \frac{l_1 \bar{z} - \nu_1}{-\nu_1 \bar{z} - \bar{l}_1}, \quad \overline{g}_2(z) = \frac{l_2 \bar{z} - \nu_2}{-\nu_2 \bar{z} - \bar{l}_2},$$

tels que $|l_1|^2 + \nu_1 = 1 = |l_2|^2 + \nu_2$. Nous souhaitons calculer leur produit $f := \overline{g}_1 \circ \overline{g}_2$.

Notons que $\overline{g}_1 = g_1 \circ \bar{r}$, où g_1 est transformation de Möbius de mêmes coefficients que \overline{g}_1 et \bar{r} est l'application conjugué complexe. La composition $\bar{r} \circ g_1$ est égale à $g'_1 \circ \bar{r}$, où g'_1 est la transformation de Möbius dont les coefficients sont les conjugués des coefficients de g_1 . L'application f est donnée par

$$\begin{aligned} f &= \overline{g}_1 \circ \overline{g}_2 \\ &= g_1 \circ \bar{r} \circ g_2 \circ \bar{r} \\ &= g_1 \circ g'_2 \circ \bar{r} \circ \bar{r} = g_1 \circ g'_2, \end{aligned}$$

Le produit $g_1 \circ g'_2$ revient à un calcul matriciel. Comme les coefficients ν sont réels, nous avons

$$\begin{pmatrix} l_1 & -\nu_1 \\ -\nu_1 & -\bar{l}_1 \end{pmatrix} \overline{\begin{pmatrix} l_2 & -\nu_2 \\ -\nu_2 & -\bar{l}_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} l_1 \bar{l}_2 + \nu_1 \nu_2 & -l_1 \nu_2 + l_2 \nu_1 \\ -\bar{l}_2 \nu_1 + \bar{l}_1 \nu_2 & \nu_1 \nu_2 + \bar{l}_1 \bar{l}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \bar{l}_2 + \nu_1 \nu_2 & -l_1 \nu_2 + l_2 \nu_1 \\ -(-l_1 \nu_2 + l_2 \nu_1) & (l_1 \bar{l}_2 + \nu_1 \nu_2) \end{pmatrix},$$

qui est bien de la forme requise. De plus, le déterminant de cette matrice vaut 1, car le déterminant des deux matrices de \overline{g}_1 et \overline{g}_2 valent -1 .

2. Montrons maintenant que toute application de la forme (3.10) peut s'obtenir comme l'image par projection stéréographique d'une rotation sphérique. Au vu du calcul matriciel, notons

$$a = l_1 \bar{l}_2 + \nu_1 \nu_2, \quad b = -l_1 \nu_2 + l_2 \nu_1.$$

Nous souhaitons montrer que tous $a, b \in \mathbb{C}$ peuvent s'exprimer de cette manière, avec des choix convenables pour $l_1, l_2 \in \mathbb{C}$ et $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R}$. Par exemple, si nous prenons $\nu_2 = 0$, nous avons $|l_2| = 1$, ainsi $l_2 = e^{i\theta}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. Si nous notons de plus $l_1 = \lambda_1 e^{i\phi}$, les coefficients a et b se simplifient en

$$a = \lambda_1 e^{i(\phi-\theta)}, \quad b = \nu_1 e^{i\theta}.$$

Comme λ_1 et ν_1 sont des coefficients réels arbitraires et ϕ et θ sont des angles arbitraires, nous obtenons des coefficients complexes arbitraires pour a et b . □

De même, les autres isométries sphériques s'expriment de manière similaire en tant que transformations de Möbius. Pour garder l'analogie avec la géométrie euclidienne, définissons les isométries de \mathbb{S}^2 qui préservent l'orientation comme étant celles qui s'expriment par un nombre pair de réflexions sphériques, et celles qui renversent l'orientation sont les isométries obtenues par un nombre impair de réflexions sphériques,

Corollaire 15. *Les isométries de \mathbb{S}^2 qui renversent l'orientation induisent précisément les applications de la forme*

$$\bar{f}(z) = \frac{a\bar{z} + b}{-\bar{b}z + \bar{a}},$$

via la projection stéréographique, où $a, b \in \mathbb{C}$ et $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

Démonstration. Toute isométrie de \mathbb{S}^2 qui renverse l'orientation s'écrit $r \circ \bar{r}$ où r est une rotation sphérique et \bar{r} une réflexion fixée. Prenons comme \bar{r} la réflexion par le plan $y = 0$. Dans les notations de la proposition (37), $(\lambda, \mu, \nu) = (0, 1, 0)$, ainsi \bar{r} induit l'application

$$\bar{g}(z) = \frac{(\lambda + i\mu)\bar{z} - \nu}{-\nu\bar{z} - (\lambda - i\mu)} = \frac{i\bar{z}}{i} = \bar{z}.$$

Ainsi, l'isométrie $r \circ \bar{r}$ induit l'application

$$f \circ \bar{g}(z) = \frac{a\bar{z} + b}{-\bar{b}z + \bar{a}},$$

où $|a|^2 + |b|^2 = 1$, au vu de la proposition précédente. □

3.7 L'aire d'un triangle sphérique

Nous souhaitons démontrer que l'aire d'un triangle sphérique ne dépend que de ses 3 angles intérieurs. Ce résultat témoigne d'une différence fondamentale avec les triangles de la géométrie euclidienne, car deux triangles euclidiens semblables ne sont pas forcément isométriques (2.7.3), et n'ont donc pas forcément la même aire.

Le raisonnement de la preuve qui donne l'aire d'un triangle sphérique repose sur la notion de fuseau sphérique.

Définition 39. Soient deux points P et Q antipodaux de \mathbb{S}^2 . Un *fuseau sphérique* F_α d'extrémités P et Q et d'angle α est une région de \mathbb{S}^2 déterminée par deux demi-grands cercles d'extrémités P et Q formant un angle α .

Remarque 20. Vu la symétrie circulaire selon l'axe PQ , l'aire d'un fuseau sphérique vaut

$$\mathcal{A}(F_\alpha) = \frac{\alpha}{2\pi} \mathcal{A}(\mathbb{S}^2) = \frac{\alpha}{2}.$$

Théorème 5. Soient A, B et C trois points de \mathbb{S}^2 non alignés. Si nous désignons par α, β, γ les angles de ce triangle sphérique, alors l'aire de $\triangle ABC$ est donné par

$$\mathcal{A}(\triangle ABC) = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Démonstration. Considérons un triangle sphérique de sommets A, B et C et d'angles α, β et γ . Si nous prolongeons les 3 côtés du triangle par des grands cercles, nous obtenons une partition de la sphère en 8 régions. Les 4 régions $\triangle ABC, \triangle\alpha, \triangle\beta$ et $\triangle\gamma$ ont chacun leur équivalent antipodal, du fait que deux grands cercles s'intersectent en deux points antipodaux. Notons A' (respectivement B' et C') le point antipodal à A (resp. B et C).

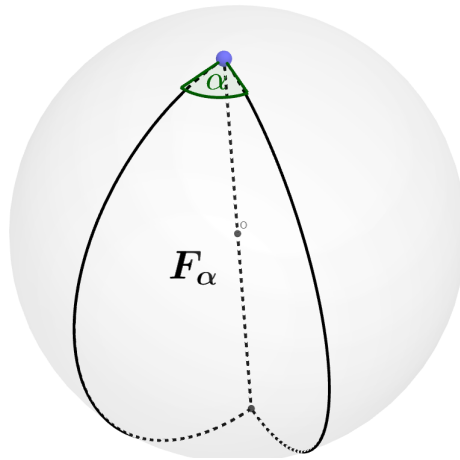


FIGURE 3.8 – Un fuseau sphérique d'angle α .

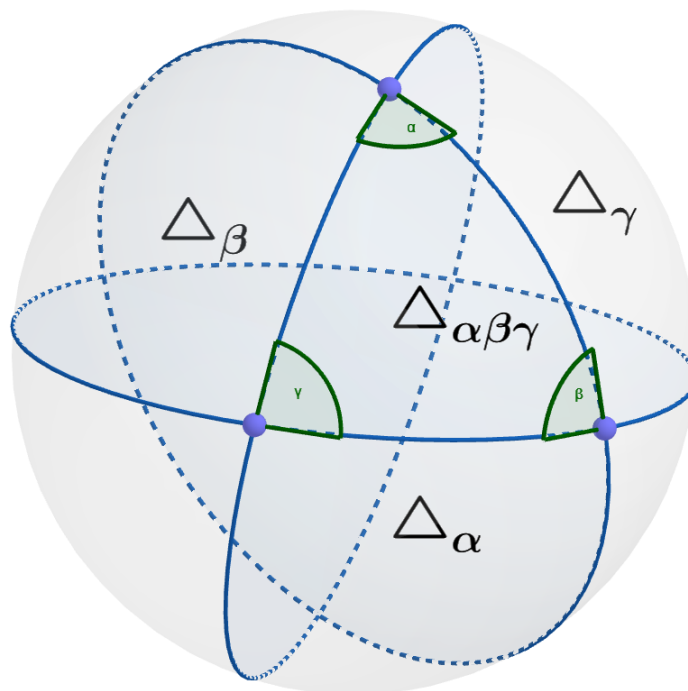


FIGURE 3.9 – Triangle sphérique d'angles α, β et γ et les 8 régions qu'il détermine.

L'union $\triangle ABC \cup \triangle \alpha$ constitue un fuseau sphérique d'extrémités A et A' et d'angle α . Ainsi nous avons

$$\mathcal{A}(\triangle ABC) + \mathcal{A}(\triangle \alpha) = \frac{\alpha}{2\pi} \mathcal{A}(\mathbb{S}^2),$$

et de même pour $\triangle \beta$ et $\triangle \gamma$. En sommant les 3 égalités établies, nous obtenons

$$3\mathcal{A}(\triangle ABC) + \mathcal{A}(\triangle \alpha) + \mathcal{A}(\triangle \beta) + \mathcal{A}(\triangle \gamma) = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2\pi} \mathcal{A}(\mathbb{S}^2). \quad (3.11)$$

De plus, l'aire de $\triangle ABC \cup \triangle \alpha \cup \triangle \beta \cup \triangle \gamma$ est la moitié de l'aire de \mathbb{S}^2 , vu que chacune de ces 4 régions a son équivalent antipodal et que l'application antipodale est une isométrie sphérique. Ainsi nous avons

$$\mathcal{A}(\triangle ABC) + \mathcal{A}(\triangle \alpha) + \mathcal{A}(\triangle \beta) + \mathcal{A}(\triangle \gamma) = \frac{1}{2} \mathcal{A}(\mathbb{S}^2), \quad (3.12)$$

et en soustrayant l'équation (3.12) de l'équation (3.11), nous obtenons

$$\begin{aligned} 2\mathcal{A}(\triangle ABC) &= \frac{\alpha + \beta + \gamma - \pi}{2\pi} \mathcal{A}(\mathbb{S}^2) \\ \mathcal{A}(\triangle ABC) &= \alpha + \beta + \gamma - \pi, \end{aligned}$$

dans le cas de la sphère unité. □

Démontrons un dernier résultat de géométrie sphérique qui met en évidence une autre différence avec la géométrie euclidienne. Nous souhaitons montrer que deux triangles semblables en géométrie sphérique sont isométriques.

Proposition 39. *Sur \mathbb{S}^2 , deux triangles semblables sont isométriques.*

Démonstration. Nous savons qu'à chaque côté d'un triangle sphérique est associé un unique plan de \mathbb{R}^3 qui passe par O . L'angle entre deux côtés est défini comme étant l'angle entre ces deux plans, qui est égal à l'angle entre des vecteurs normaux respectivement à ces deux plans. Nous pouvons ainsi associer à un triangle sphérique d'angles α, β et γ trois vecteurs unitaires a, b, c d'origine O formant entre eux des angles α, β et γ .

Considérons ainsi deux tels triplets a, b, c et a', b', c' de vecteurs unitaires d'angles 2 à 2 égaux et montrons que nous pouvons ramener l'un sur l'autre via des isométries de \mathbb{R}^3 qui préservent O , ce qui suffira. Nous pouvons ramener a' sur a et ramener b' sur b via une rotation d'axe a appropriée, car l'angle entre a et b est égal à l'angle entre a' et b' . Le vecteur c (respectivement c') appartient à l'intersection du cône d'axe $b = b'$, d'angle β et de base O , et le cône d'axe $a = a'$ d'angle α et de base O également. Ces cônes s'intersectent en au plus 2 vecteurs unitaires, ainsi si c' n'est pas égal à c , par symétrie la réflexion selon le plan qui contient O et de vecteurs directeurs a et b envoie c' sur c , ce qui suffit. □

3.8 Projections de la sphère sur le plan et courbure de Gauss

La sphère est localement difféomorphe au plan, comme le montre la projection stéréographique. Mais cette dernière ne préserve pas les distances, car les points sur le plan obtenus par la projection stéréographique peuvent être arbitrairement éloignés, donc la projection stéréographique n'est pas une isométrie. Toutefois, la projection stéréographique préserve les angles

Proposition 40. *La projection stéréographique préserve les cercles et les angles*

Démonstration. 1. Montrons que la projection stéréographique préserve les cercles.

- a Le premier cas est celui d'un cercle \mathcal{C} de \mathbb{S}^2 dont le centre est le pôle sud S . Ainsi la projection stéréographique de ce cercle est un cercle, car nous avons l'intersection d'un cône d'origine N avec un plan perpendiculaire à celui-ci, qui contient \mathcal{C} .
 - b Le deuxième cas est celui d'un cercle \mathcal{C} de centre P différent de S . Considérons la réflexion sphérique qui envoie P sur S . Cette réflexion envoie le cercle \mathcal{C} sur un cercle \mathcal{C}_ϵ de centre S et de même rayon. Par le théorème (4), nous savons que $\phi(\mathcal{C})$ est envoyé sur $\phi(\mathcal{C}_\epsilon)$ par une inversion. Comme les inversions préservent les cercles, $\phi(\mathcal{C}_\epsilon)$ est un cercle du plan, ce qui montre le résultat souhaité.
2. Un argument similaire en deux cas permet de montrer que la projection stéréographique préserve les angles. Le cas d'un angle en S est évident, du fait de la symétrie circulaire de la projection stéréographique. De même, nous utilisons une réflexion pour le cas général d'un angle sur P différent de S . Comme les réflexions et les inversions préservent les angles, nous en tirons la conclusion. □

Nous pouvons nous demander s'il existe une isométrie locale de la sphère sur le plan. Il se trouve qu'une telle isométrie n'existe pas, car nous pouvons associer un invariant par isométrie en chaque point d'une surface, qui est la courbure de Gauss, définie comme suit.

Soit un point P d'une surface S plongée dans \mathbb{R}^3 et soit N un vecteur normal à S en P . Soit un plan π contenant la droite normale passant par P et de direction N , qu'on appelle *plan normal* à S en P . Il existe une courbe γ_π passant par P et dont la trace est contenue dans $S \cap \pi$. La courbure de γ_π en P est définie comme étant la courbure normale de S en P , associée à π et est notée κ_π .²

Définition 40. Pour une surface S , la *courbure de Gauss* en P est définie comme le produit des courbures normales maximum et minimum.

Le théorème qui permet de montrer que la courbure de Gauss est invariante par isométrie est démontré en Pressley (2009b). Comme les plans normaux à un point P d'une sphère de rayon $R > 0$ intersectent tous celle-ci en des cercles de rayon R , la courbure normale en P ne dépend pas du plan et vaut toujours $1/R$. Ainsi la courbure de Gauss d'une sphère de rayon R vaut en tout point $1/R^2$. L'argument de symétrie est également valide pour le plan \mathbb{R}^2 , et la courbure de Gauss est constante et vaut 0.

Corollaire 16. *Il n'existe pas d'isométrie locale entre la sphère \mathbb{S}^2 et le plan euclidien \mathbb{R}^2 .*

Nous avons ainsi des exemples de surface de courbure constante positive et nulle. Il est ainsi naturel de chercher un exemple de surface de courbure constante négative. Une telle surface est donnée par la pseudosphère, et sera notre point de départ dans l'étude de la géométrie hyperbolique.

2. Plus de détails peuvent être trouvés dans Lecomte (2003d).

Chapitre 4

Géométrie hyperbolique de dimension 2

L'objectif de ce chapitre est d'établir les résultats analogues à la géométrie euclidienne en géométrie hyperbolique ainsi que d'examiner des propriétés spécifiques à la géométrie hyperbolique. Nous commençons par nous intéresser à une surface de courbure de Gauss constante et négative, qui est la pseudosphère. Ce chapitre est basé sur la référence Stillwell (1992c).

4.1 La pseudosphère

La pseudosphère est définie comme la surface de révolution d'une tractrice. Celle-ci peut être définie comme étant une courbe parcourue par un point M lié à un point T par les conditions suivantes :

- Le point T parcourt une droite à vitesse constante.
- Le segment $[MT]$ est de longueur constante.
- la droite (MT) est tangente à la tractrice.

Le résultat qui nous intéresse dans cette section est de montrer que la pseudosphère possède une courbure de Gauss constante et strictement négative.

Définition 41. Soit $a > 0$. La tractrice correspondante est une courbe de \mathbb{R}^2 paramétrée par

$$\begin{aligned} \varphi_T :]0, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto a \left(t - \tanh t, \frac{1}{\cosh t} \right). \end{aligned}$$

Définition 42. La pseudosphère est la surface de révolution de la tractrice, paramétrée par

$$\begin{aligned} \varphi :]0, +\infty[\times [0, 2\pi[&\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t, \alpha) &\mapsto a \left(t - \tanh t, \frac{\cos \alpha}{\cosh t}, \frac{\sin \alpha}{\cosh t} \right). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Les surfaces de révolution obtenues à partir d'une courbe paramétrée de \mathbb{R}^2 ont une courbure de Gauss qui peut être calculée explicitement.

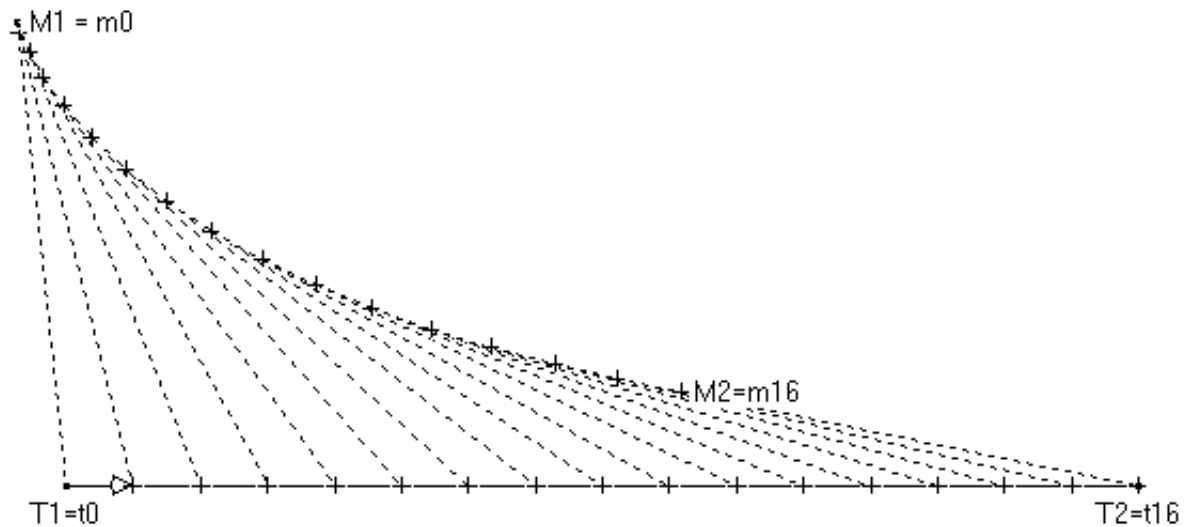


FIGURE 4.1 – Trace de la tractrice

Lemme 5. Soit une surface de révolution paramétrée par

$$\begin{aligned} \varphi : I \times [0, 2\pi[&\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t, \alpha) &\mapsto \phi(t, \alpha) = (f(t), g(t) \cos \alpha, g(t) \sin \alpha), \end{aligned}$$

telle que

1. I est un intervalle ouvert
2. Les fonctions f et g sont de classe C^2 sur I
3. La fonction g est strictement positive sur I
4. Nous avons $f'^2(t) + g'^2(t) > 0$ pour tout $t \in I$.

Alors pour tous $t \in I$, la courbure de Gauss de la surface paramétrée par φ est donnée par

$$\kappa(t) = \frac{f'(t)[f''(t)g'(t) - f'(t)g''(t)]}{g(t)(f'^2(t) + g'^2(t))^2}, \quad (4.2)$$

Démonstration. Ce calcul est détaillé dans l'appendice (5.4.2) □

Théorème 6. La courbure de Gauss de la pseudosphère est constante et vaut $\frac{-1}{a^2}$.

Démonstration. Appliquons le lemme (5) au cas de la pseudosphère. Nous avons

$$\begin{aligned} f(t) &= a(t - \tanh(t)), \\ g(t) &= \frac{a}{\cosh(t)}. \end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons pour les dérivées les termes suivants

$$\begin{cases} f'(t) = a \left(1 - \frac{1}{\cosh^2(t)} \right) = \frac{a \sinh^2(t)}{\cosh^2(t)} & \begin{cases} g'(t) = \frac{-a \sinh(t)}{\cosh^2(t)} \\ g''(t) = \frac{-a(\cosh^2(t) - 2 \sinh^2(t))}{\cosh^3(t)}, \end{cases} \\ f''(t) = \frac{2a \sinh(t)}{\cosh^3(t)} \end{cases}$$

En remplaçant ces termes dans la formule donnée en (4.2), nous trouvons pour les deux facteurs entre parenthèses

$$\begin{aligned} f''(t)g'(t) - f'(t)g''(t) &= \frac{-2a^2 \sinh^2(t)}{\cosh^5(t)} - \frac{-a^2 \sinh^2(t)(\cosh^2(t) - 2 \sinh^2(t))}{\cosh^5(t)} \\ &= \frac{-2a^2 \sinh^2(t)(1 + \sinh^2(t)) + a^2 \sinh^2(t) \cosh^2(t)}{\cosh^5(t)} = \frac{-a^2 \sinh^2(t)}{\cosh^3(t)}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} f'^2(t) + g'^2(t) &= \frac{a^2 \sinh^4(t)}{\cosh^4(t)} + \frac{a^2 \sinh^2(t)}{\cosh^4(t)} \\ &= \frac{a^2 \sinh^2(t) \cosh^2(t)}{\cosh^4(t)} = \frac{a^2 \sinh^2(t)}{\cosh^2(t)}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Finalement, en rassemblant les égalités trouvées en (4.3) et en (4.3) dans la formule (4.2), la courbure de Gauss de la pseudosphère est donnée par

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{\frac{a \sinh^2(t)}{\cosh^2(t)} \cdot \left(\frac{-a^2 \sinh^2(t)}{\cosh^3(t)} \right)}{\frac{a}{\cosh(t)} \left(\frac{a^2 \sinh^2(t)}{\cosh^2(t)} \right)^2} = \frac{\frac{-a^3 \sinh^4(t)}{\cosh^5(t)}}{\frac{a^5 \sinh^4(t)}{\cosh^5(t)}} \\ &= \frac{-1}{a^2}. \end{aligned}$$

Ainsi, quand la courbure de la pseudosphère est définie, elle est constante et est négative. Les points où la courbure n'est pas définie correspondent au bord de la pseudosphère, c'est à dire quand t vaut 0. \square

4.1.1 Métrique

Le paramétrage de la pseudosphère que nous avons obtenu n'est pas idéal si nous voulons établir un modèle du plan hyperbolique, car il n'est pas conforme, donc il ne préserve pas les angles. En effet, il est montré en (Pressley (2009c)) que les paramétrages dont la première forme fondamentale est égale à une fonction multiplicative de l'identité sont des paramétrages conformes. Calculons la première forme fondamentale du paramétrage donné en (4.1).

Proposition 41. *La première forme fondamentale du paramétrage (4.1) de la pseudosphère*

est donné par

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a^2 \sinh^2(t)}{\cosh^2(t)} & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{\cosh^2(t)} \end{pmatrix}, \quad t \in]0, +\infty[.$$

Démonstration. Nous devons calculer

$$\begin{aligned} E &= \partial_t \varphi \cdot \partial_t \varphi \\ F &= \partial_t \varphi \cdot \partial_\alpha \varphi \\ G &= \partial_\alpha \varphi \cdot \partial_\alpha \varphi. \end{aligned}$$

Au vu des notations du théorème (6), notre paramétrage φ s'écrit

$$\varphi(t, \alpha) = (f(t), g(t) \cos \alpha, g(t) \sin \alpha).$$

(6). Les dérivées partielles de φ sont données par

$$\begin{aligned} \partial_t \varphi(t, \alpha) &= (f'(t), g'(t) \cos \alpha, g'(t) \sin \alpha), \\ \partial_\alpha \varphi(t, \alpha) &= (0, -g(t) \sin \alpha, g(t) \cos \alpha). \end{aligned}$$

Finalement, nous obtenons la première forme fondamentale

$$\begin{aligned} E &= f'^2(t) + g'^2(t) = \frac{a^2 \sinh^2(t)}{\cosh^2(t)} \\ F &= 0 \\ G &= g^2(t) = \frac{a^2}{\cosh^2(t)}, \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. □

Nous souhaitons ainsi trouver un changement de paramètres pour obtenir un paramétrage conforme de la pseudosphère, donc une première forme fondamentale qui est égale à l'identité à une fonction multiplicative près.

Proposition 42. *Le paramétrage*

$$\begin{aligned} \psi :]1, +\infty[\times]0, 2\pi[&\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (T, \alpha) &\mapsto \varphi(\cosh^{-1}(T), \alpha), \end{aligned} \tag{4.5}$$

de la pseudosphère a une première forme fondamentale donnée par

$$\begin{pmatrix} E_\psi & F_\psi \\ F_\psi & G_\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{T^2} & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{T^2} \end{pmatrix}.$$

Démonstration. 1. Établissons tout d'abord comment nous pouvons trouver un changement de variables qui permet de rendre le paramétrage φ conforme. Grâce à la proposition précédente (41), nous savons que la première forme fondamentale du paramétrage φ est donnée par

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'^2(t) + g'^2(t) & 0 \\ 0 & g^2(t) \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

Étant donné que nous avons déjà une matrice diagonale qui ne dépend que de t , il paraît raisonnable de supposer que nous pouvons trouver un paramétrage conforme $\psi(T, \alpha) = \phi(t, \alpha)$, avec $T = h(t)$ où h est un changement de variable de classe C^1 . Nous avons par définition de ψ ,

$$\psi(h(t), \alpha) = \phi(t, \alpha) \quad \Leftrightarrow \quad \psi(T, \alpha) = \phi(h^{-1}(T), \alpha).$$

Nous n'allons pas établir des conditions suffisantes pour garantir l'existence de cette fonction h , car notre travail ne se limite qu'à un cas particulier que nous souhaitons traiter. Supposons donc qu'une telle fonction h existe et qu'elle soit telle que

$$\begin{pmatrix} E_\psi & F_\psi \\ F_\psi & G_\psi \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} D_T\psi \cdot D_T\psi & D_T\psi \cdot D_\alpha\psi \\ D_\alpha\psi \cdot D_T\psi & D_\alpha\psi \cdot D_\alpha\psi \end{pmatrix},$$

vérifie les conditions pour un paramétrage conforme, qui sont

$$\begin{cases} E_\psi = G_\psi \\ F_\psi = 0. \end{cases}$$

Nous souhaitons trouver la fonction h qui convient. Par le théorème de dérivation des fonctions composées, nous avons

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_\psi & F_\psi \\ F_\psi & G_\psi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} D_T h^{-1}(T) & D_\alpha h^{-1}(T) \\ D_T \alpha & D_\alpha \alpha \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \Big|_{(h^{-1}(T), \alpha)} \begin{pmatrix} D_T h^{-1}(T) & D_\alpha h^{-1}(T) \\ D_T \alpha & D_\alpha \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (h^{-1})'(T) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \Big|_{(h^{-1}(T), \alpha)} \begin{pmatrix} (h^{-1})'(T) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En utilisant $E_\psi = G_\psi$, et les valeurs de E et G établies en (4.6), nous avons pour tout T

$$\begin{aligned} (f'^2(h^{-1}(T)) + g'^2(h^{-1}(T))) (h^{-1})'^2(T) &= g^2(h^{-1}(T)) \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{f'^2(h^{-1}(T)) + g'^2(h^{-1}(T))}}{g(h^{-1}(T))} &= \frac{1}{(h^{-1})'(T)} = h'(h^{-1}(T)) \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}}{g(t)} &= h'(t) \\ \Leftrightarrow \int \frac{\sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}}{g(t)} &= h(t), \end{aligned} \tag{4.7}$$

où nous avons supposé que $(h^{-1})'(T) > 0$ pour tout T .

2. Calculons la fonction h trouvée dans l'égalité (4.7) dans le cas de la pseudosphère. Nous obtenons

$$\begin{aligned} h(t) &= \int \frac{\sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}}{g(t)} dt = \int \frac{\sqrt{\frac{a^2 \sinh^2(t)}{\cosh^2(t)}}}{\frac{a}{\cosh(t)}} dt \\ &= \int \sinh(t) dt \\ &= \cosh(t) + C, \end{aligned}$$

pour une constante C réelle et $t > 0$. Prenons $C = 0$ et posons $T = h(t) = \cosh(t)$ au vu de ce que nous avons obtenu. La fonction h est bien inversible sur $]0, +\infty[$, et la dérivée de h^{-1} vaut

$$(h^{-1})'(T) = \frac{1}{h'(h^{-1}(T))} = \frac{1}{\sinh(\cosh^{-1}(T))},$$

qui est effectivement strictement positive pour $T > 1$. Nous avons ainsi un paramétrage $\psi(T, \alpha)$ donné par

$$\begin{aligned} \psi :]1, +\infty[\times]0, 2\pi[&\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (T, \alpha) &\mapsto \varphi(\cosh^{-1}(T), \alpha), \end{aligned}$$

et dont la première forme fondamentale vaut

$$\begin{pmatrix} E_\psi & F_\psi \\ F_\psi & G_\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^2(h^{-1}(T)) & 0 \\ 0 & g^2(h^{-1}(T)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{T^2} & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{T^2} \end{pmatrix}.$$

□

4.2 Le demi-plan hyperbolique

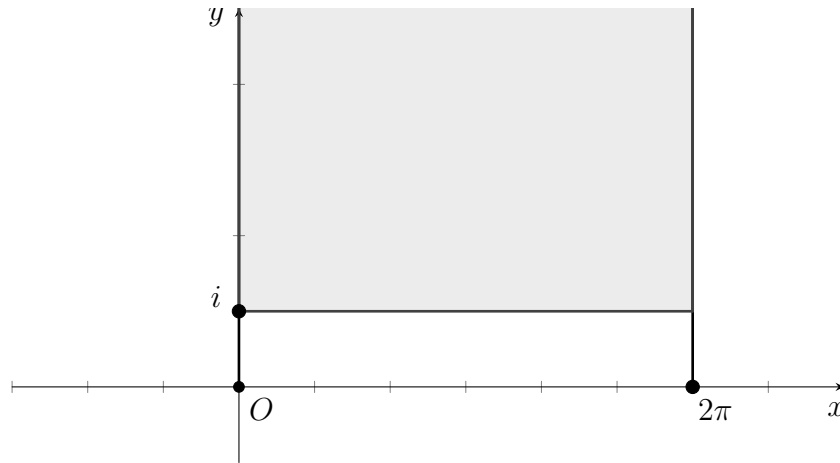
La proposition (42) nous donne ainsi un paramétrage conforme de la pseudosphère. Néanmoins, travailler avec la pseudosphère n'est pas aisé, car par exemple, les courbes qui joignent deux points quelconques de la pseudosphère ne peuvent pas facilement être paramétrées. Toutefois, cela nous donne un exemple concret de surface de courbure constante et strictement négative.

Cela motive la définition suivante du demi-plan hyperbolique, qui est une partie de \mathbb{R}^2 munie de la même métrique que celle calculée en (42).

Définition 43. Le demi-plan hyperbolique \mathbb{H}^2 est défini comme la surface $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$ munie de la métrique

$$g_{\mathbb{H}^2, z} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Im(z)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Im(z)^2} \end{pmatrix}.$$

Remarque 21. La portion $]1, +\infty[\times]0, 2\pi[$ associé au paramétrage conforme ψ de la pseudosphère défini en (42) correspond à la partie grise du plan complexe représenté ci-dessous. Notons que nous avons décidé de prendre $a = 1$ et de poser $T = y$, $\alpha = x$. Ainsi, les droites verticales $x = x_0$ correspondent à des génératrices de la pseudosphère, et les droites horizontales $y = y_0$ correspondent à des sections circulaires de cette dernière.


 FIGURE 4.2 – Portion de \mathbb{H}^2 qui paramètre la pseudosphère

Nous souhaitons maintenant trouver des isométries de \mathbb{H}^2 de telle sorte à pouvoir définir les notions de réflexions et de droites, dans le but d'aboutir au théorème des 3 réflexions.

Proposition 43 (Isométries de base de \mathbb{H}^2). *Les fonctions suivantes sont des isométries de \mathbb{H}^2 ,*

1. $t_{x_0}(z) = z + x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ (Translations euclidiennes par un réel),
2. $d_\rho(z) = \rho z$, $\rho > 0$ (Dilatations centrées en $O = 0$),
3. $\bar{r}_{OY}(z) = -\bar{z}$ (Symétrie d'axe OY).

Remarque 22. Avant de commencer la preuve qui consistera en des vérifications, voici comment nous pouvons visualiser ces isométries sur la pseudosphère. L'abscisse du demi-plan hyperbolique correspond à l'angle qui paramètre la pseudosphère, qui est une surface de révolution. Ainsi, l'application t_{x_0} revient à tourner la pseudosphère autour de son axe de symétrie, d'un angle x_0 . Il est clair ainsi que les distances entre deux points resteraient inchangées. Un raisonnement similaire justifie que \bar{r}_{OY} est une isométrie, car sur la pseudosphère, cette application correspond à une symétrie autour du plan horizontal $z = 0$. Malheureusement, ces raisonnements n'aident pas à comprendre pourquoi d_ρ est une isométrie, même si cela est clair par un court calcul.

Démonstration. Les trois fonctions sont évidemment des bijections de \mathbb{H}^2 . Les deux premières fonctions sont holomorphes, ce qui rend le calcul de la différentielle aisé, via la remarque (10). Nous avons

$$\begin{aligned} (t_{x_0})_{*z}(u) &= (t'_{x_0}(z))u = u \\ (d_\rho)_{*z}(u) &= (d'_\rho(z))u = \rho u. \end{aligned}$$

Vérifions qu'elles préservent la métrique de \mathbb{H}^2 . Nous avons

$$\begin{aligned} g_{\mathbb{H}^2, t_{x_0}(z)}((t_{x_0})_{*z}(u), (t_{x_0})_{*z}(v)) &= \frac{1}{(\Im(z + x_0))^2}(u \cdot v) = \frac{u \cdot v}{(\Im(z))^2} = g_{\mathbb{H}^2, z}(u, v), \\ g_{\mathbb{H}^2, d_\rho(z)}((d_\rho)_{*z}(u), (d_\rho)_{*z}(v)) &= \frac{1}{(\Im(\rho z))^2}((\rho u) \cdot (\rho v)) = \frac{\rho^2(u \cdot v)}{\rho^2(\Im(z))^2} = g_{\mathbb{H}^2, z}(u, v). \end{aligned}$$

Calculons la différentielle de la troisième fonction. Nous obtenons

$$(\bar{r}_{OY})_{*z}(u) = D_t \bar{r}_{OY}(z + tu) \Big|_{t=0} = -D_t(\bar{z} + t\bar{u}) \Big|_{t=0} = -\bar{u}.$$

Montrons finalement que \bar{r}_{OY} préserve la métrique de \mathbb{H}^2 ,

$$\begin{aligned} g_{\mathbb{H}^2, \bar{r}_{OY}(z)}((\bar{r}_{OY})_{*z}(u), (\bar{r}_{OY})_{*z}(v)) &= \frac{1}{(\Im(-\bar{z}))^2} ((-\bar{u}) \cdot (-\bar{v})) \\ &= \frac{u \cdot v}{(\Im(z))^2} = g_{\mathbb{H}^2, z}(u, v). \end{aligned}$$

Ainsi, \bar{r}_{OY} est également une isométrie de \mathbb{H}^2 . □

Il existe d'autres isométries du demi-plan hyperbolique, mais ces dernières n'apparaissent naturellement que si nous utilisons une autre représentation de la géométrie hyperbolique. Celle-ci est le disque de Poincaré, appelée également la représentation conforme.

4.3 Le disque de Poincaré

Nous nous tournons vers le modèle du disque de Poincaré pour trouver d'avantages d'isométries hyperboliques. Tout comme il existe plusieurs projections d'une partie de la sphère sur le plan, qui ont chacune leurs avantages et leurs inconvénients, il existe plusieurs modèles de la géométrie hyperbolique. Il sera donc nécessaire d'en étudier plusieurs et de pouvoir passer d'un modèle à l'autre aisément.

Définissons une application qui permettra de passer du modèle \mathbb{H}^2 au modèle du disque de Poincaré

Définition 44. L'application J est définie à partir d'une inversion par un cercle comme étant

$$\begin{aligned} J : \mathbb{C} \setminus \{-i\} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \overline{I_{-i, \sqrt{2}}(z)} \end{aligned}$$

Proposition 44.

1. L'application J est explicitement donnée par

$$J(z) = \frac{iz + 1}{z + i}.$$

2. L'inverse de J est donné par

$$J^{-1}(z) = \frac{-iz + 1}{z - i}.$$

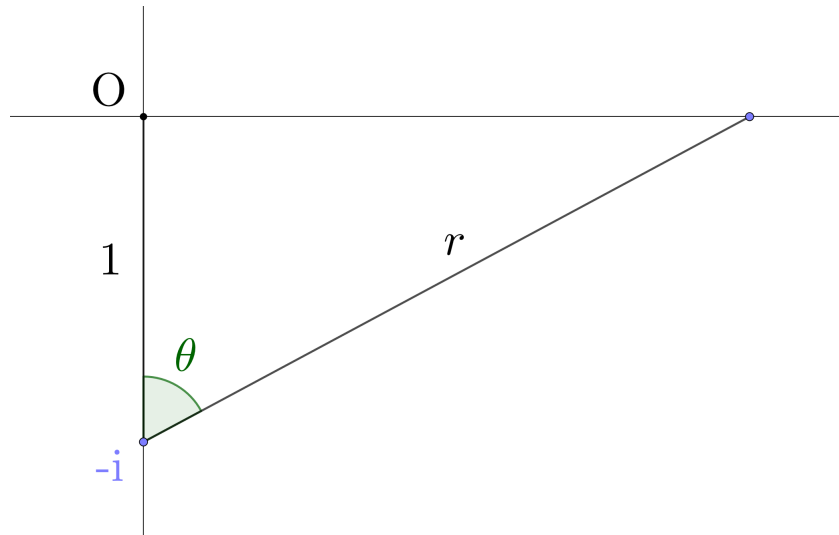
3. L'application $J : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{i\}$ est un difféomorphisme de classe C^∞ .

Démonstration. 1. Pour rappel, l'application $I_{-i, \sqrt{2}}$ est l'inversion par le cercle de centre $-i$ et de rayon $\sqrt{2}$, où les inversions ont été définies en (3.5.1). Nous avons donc

$$J(z) = \overline{\frac{2}{z+i}} - i = \frac{2}{z+i} + i = \frac{iz + 1}{z + i}.$$

2. Nous avons $J = \bar{r} \circ I_{-i, \sqrt{2}}$. L'application J est donc le produit de deux applications qui sont égales à leur inverse. Ainsi l'inverse de J est donné par

$$J^{-1}(z) = (I_{-i, \sqrt{2}} \circ \bar{r})(z) = \frac{2}{\bar{z} + i - i} = \frac{2}{z - i} - i = \frac{-iz + 1}{z - i}.$$


 FIGURE 4.3 – Paramétrage de \mathbb{H}^2 par coordonnées polaires

3. L'application $I_{-i, \sqrt{2}}$ est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ dans $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ vu que nous avons une inversion de cercle (proposition 3). L'application $\bar{\cdot} : z \mapsto \bar{z}$ est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ dans $\mathbb{C} \setminus \{i\}$, ce qui montre que $J : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{i\}$ est bijective. C'est un difféomorphisme de classe C^∞ car J et J^{-1} sont de classe C^∞ sur $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ et $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ respectivement. □

Remarque 23. Appliquer la fonction conjuguée à $I_{-i, \sqrt{2}}$ assure que J préserve l'orientation et que l'axe OY ne soit pas renversé. En effet, les points $0, i$ et ∞ de \mathbb{H}^2 sont respectivement envoyés par J sur $-i, 0$ et i .

Proposition 45. L'application J est une bijection de \mathbb{H}^2 dans $\mathbb{D}^2 := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Démonstration. Montrons que $J(\mathbb{H}^2) = \mathbb{D}^2$, ce qui suffit car J est injectif. En paramétrant \mathbb{H}^2 par les coordonnées polaires centrées en i , nous avons

$$\mathbb{H}^2 = \left\{ -i + re^{i\theta} : \theta \in]0, \pi[, r > \frac{1}{\sin \theta} \right\},$$

En effet, vu la figure (4.3), si nous paramétrons l'axe réel OX par les coordonnées polaires centrées en i , nous avons

$$OX = \{-i + re^{i\theta} : r \sin(\theta) = 1, \theta \in]0, \pi[\}.$$

Ainsi, l'image de \mathbb{H}^2 par J est donné par

$$J(\mathbb{H}^2) = \left\{ -i + \frac{2}{r}e^{i\theta} : \theta \in]0, \pi[, 0 < \frac{2}{r} < 2 \sin(\theta) \right\}.$$

Montrons que le disque unité \mathbb{D}^2 est paramétré par $-i + Re^{i\theta}$ avec $\theta \in]0, \pi[$ et $R \in]0, 2 \sin(\theta)[$. Nous allons montrer que le cercle unité est paramétré par $-i + 2 \sin(\theta)e^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$, ce qui suffira.

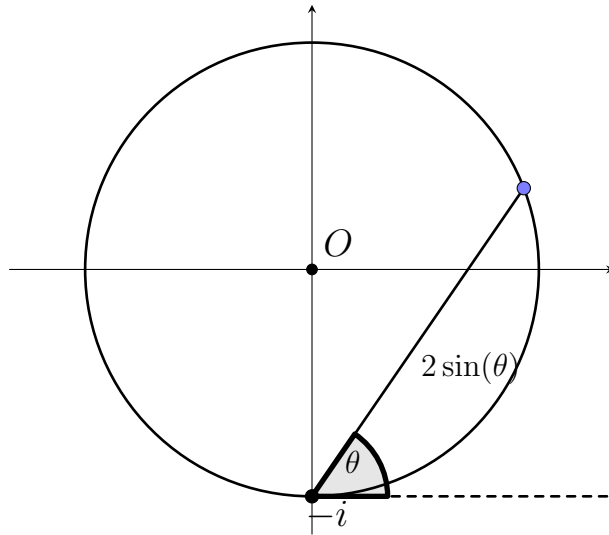


FIGURE 4.4 – Paramétrage du cercle unité

Montrons que le module de tels points vaut toujours 1. Nous avons

$$\begin{aligned}
 |-i + 2 \sin(\theta)e^{i\theta}|^2 &= |2 \sin(\theta) \cos(\theta) + i(2 \sin^2(\theta) - 1)|^2 \\
 &= 4 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + 4 \sin^4(\theta) - 4 \sin^2(\theta) + 1 \\
 &= 4 \sin^2(\theta) [\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)] - 4 \sin^2(\theta) + 1 \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

Nous voyons ainsi que le cercle unité est paramétré par $-i + 2 \sin(\theta)e^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$, ce qui permet de conclure que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{D}^2 &= \{-i + Re^{i\theta} | R \in]0, 2 \sin(\theta)[, \theta \in]0, \pi[\} \\
 &= J(\mathbb{H}^2).
 \end{aligned}$$

□

L'application J définit un difféomorphisme de \mathbb{H}^2 dans \mathbb{D}^2 , et nous allons définir la métrique de \mathbb{D}^2 telle que J^{-1} soit une isométrie de \mathbb{D}^2 dans \mathbb{H}^2 .

Définition 45. La métrique de \mathbb{D}^2 est définie comme

$$g_{\mathbb{D}^2, w}(a, b) = g_{\mathbb{H}^2, J^{-1}(w)}((J^{-1})_{*w}(a), (J^{-1})_{*w}(b)),$$

pour tous $a, b \in T_w \mathbb{D}^2$, $w \in \mathbb{D}^2$.

Remarque 24. Cela est équivalent à imposer à ce que J soit une isométrie, donc que

$$g_{\mathbb{H}^2, z}(u, v) = g_{\mathbb{D}^2, J(z)}(J_{*z}(u), J_{*z}(v)),$$

pour tous $u, v \in T_z \mathbb{H}^2$, $z \in \mathbb{H}^2$.

Calculons maintenant une forme plus explicite de la métrique de \mathbb{D}^2 .

Proposition 46 (Métrique de \mathbb{D}^2). *La métrique ainsi définie de \mathbb{D}^2 est donnée par*

$$g_{\mathbb{D}^2, w}(a, b) = \frac{4}{(1 - |w|^2)^2} (a \cdot b)$$

pour tous $a, b \in T_w\mathbb{D}^2$, $w \in \mathbb{D}^2$.

Démonstration. Au vu de notre définition, nous devons calculer

$$g_{\mathbb{D}^2, w}(a, b) = g_{\mathbb{H}^2, J^{-1}(w)}((J^{-1})_{*w}(a), (J^{-1})_{*w}(b)).$$

Calculons ainsi le membre de droite. Premièrement, nous avons

$$\begin{aligned} (J^{-1})_{*w}(a) &= D_t \frac{-i(w+ta)+1}{(w+ta)-i} \Big|_{t=0} = \frac{-ia(w+ta-i) - (-iw-ita+1)a}{(w+ta-i)^2} \Big|_{t=0} \\ &= \frac{-ia(w-i) - (-iw+1)a}{(w-i)^2} \\ &= \frac{-2a}{(w-i)^2}. \end{aligned}$$

Deuxièmement, nous avons

$$\begin{aligned} \Im(J^{-1}(w)) &= \Im\left(\frac{-iw+1}{w-i}\right) = \Im\left(\frac{(-iw+1)(\bar{w}+i)}{|w-i|^2}\right) \\ &= \Im\left(\frac{-iw\bar{w}+w+\bar{w}+i}{|w-i|^2}\right) \\ &= \frac{1-|w|^2}{|w-i|^2}. \end{aligned}$$

Calculons finalement $g_{\mathbb{D}^2, w}(a, b)$ grâce à nos deux termes calculés,

$$\begin{aligned} g_{\mathbb{D}^2, w}(a, b) &= g_{\mathbb{H}^2, J^{-1}(w)}((J^{-1})_{*w}(a), (J^{-1})_{*w}(b)) \\ &= \frac{1}{(\Im(J^{-1}(w)))^2} |(J^{-1})_{*w}|^2 (a \cdot b) \\ &= \frac{|w-i|^4}{(1-|w|^2)^2} \left| \frac{-2}{(w-i)^2} \right|^2 (a \cdot b) \\ &= \frac{4}{(1-|w|^2)^2} (a \cdot b). \end{aligned}$$

□

Définition 46. Le disque de Poincaré est défini comme la surface $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ munie de la métrique

$$g_{\mathbb{D}^2, w}(a, b) = \frac{4}{(1-|w|^2)^2} (a \cdot b).$$

Intuitivement, ce modèle possède une symétrie circulaire centrée en O , le centre du cercle, ce qui implique que les rotations centrées en O et symétries axiales dont l'axe passe par O sont de bons candidats d'isométries. Vérifions que cela est le cas.

Proposition 47 (Isométries de base de \mathbb{D}^2). *Les fonctions suivantes sont des isométries de \mathbb{D}^2 ,*

4. $r_\theta(w) = w.e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$ (Rotations euclidiennes centrées en $O = 0$,
5. $\bar{r}(w) = \bar{w}$ (Symétrie axiale euclidienne d'axe OX).

Démonstration. Nous n'allons traiter que le cas de \bar{r} , le cas de la rotation n'est qu'une simple vérification. Sa différentielle est donnée par

$$(\bar{r})_{*w}(a) = D_t \overline{(w + ta)} \Big|_{t=0} = \bar{a}.$$

Montrons que \bar{r} préserve la métrique de \mathbb{D}^2 ,

$$\begin{aligned} g_{\mathbb{D}^2, \bar{r}(z)}((\bar{r})_{*w}(a), (\bar{r})_{*w}(b)) &= \frac{4}{(1 - |\bar{w}|^2)^2} ((\bar{a}) \cdot \bar{b}) \\ &= \frac{4}{(1 - |w|^2)^2} (a \cdot b) = g_{\mathbb{D}^2, w}(a, b), \end{aligned}$$

Donc \bar{r} est une isométrie. □

Nous pouvons en déduire de nouvelles isométries du demi-plan hyperbolique \mathbb{H}^2 .

Corollaire 17. *Dans \mathbb{H}^2 , les inversions $I_{x_0, r}$ par rapport un cercle centré en un point de l'axe réel $x_0 \in \mathbb{R}$, $r > 0$ sont des isométries.*

Démonstration. Puisque J et J^{-1} sont des isométries, nous pouvons obtenir de nouvelles isométries de \mathbb{H}^2 via conjugaison. En effet, l'application $J^{-1} \circ \bar{r} \circ J$ est une isométrie de \mathbb{H}^2 , et se réécrit

$$J^{-1} \circ \bar{r} \circ J = J^{-1} \circ \bar{J} \circ \bar{r},$$

où \bar{J} est la transformation de Möbius dont les coefficients sont les conjugués de ceux de J . Par calcul matriciel, le produit de J^{-1} et \bar{J} est donné par

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2i \\ -2i & 0 \end{pmatrix},$$

ainsi nous obtenons au final

$$J^{-1} \circ \bar{r} \circ J(z) = \frac{-2i}{-2i\bar{z}} = \frac{1}{\bar{z}} = I(z).$$

L'inversion de cercle unité I est ainsi une isométrie de \mathbb{H}^2 . Nous pouvons également en déduire que de manière générale, les inversions de cercle $I_{x_0, R}$, pour $x_0 \in \mathbb{R}$ et $R > 0$, sont des isométries de \mathbb{H}^2 , en utilisant l'égalité suivante :

$$I_{x_0, R} = t_{x_0} \circ d_R \circ I \circ d_R^{-1} t_{x_0}^{-1},$$

et en utilisant le fait que les applications t_{x_0} et d_R sont des isométries de \mathbb{H}^2 . □

Il se trouve que les isométries de \mathbb{H}^2 que nous avons établies, qui sont les applications définies dans la proposition (43), et les conjugués par J des applications de la proposition (47), engendrent toutes les isométries de \mathbb{H}^2 , qui sera établi dans la proposition (19).

Nous souhaitons nous diriger vers le théorème des 3 réflexions, qui nécessite ainsi de définir les notions de droites hyperboliques et de réflexions selon ces droites.

4.4 Droites et segments

Introduisons tout d'abord les notions de droites et réflexions hyperboliques. Le but du reste de cette section est de justifier la définition que nous allons donner aux droites hyperboliques. Nous savons que les droites euclidiennes vérifient plusieurs propriétés

1. Il existe une et une seule droite passant par deux points distincts (1)
2. L'image d'une droite par une isométrie euclidienne reste une droite (6)
3. Les segments de droite minimisent la longueur de courbe entre deux points (20)

Nous souhaitons ainsi vérifier que les droites hyperboliques que nous allons définir vérifient également ces propriétés.

Définition 47. 1. Les droites hyperboliques, ou \mathbb{H}^2 -droites, sont définies comme étant les droites verticales $\mathcal{D}_{x_0}^+$ et les demi-cercles $\mathcal{C}_{x_0,r}^+$, avec $x_0 \in \mathbb{R}$ et $r > 0$, où

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{x_0}^+ &= \{x_0 + iy : y > 0\}, \\ \mathcal{C}_{x_0,r}^+ &= \{x_0 + re^{i\theta} : \theta \in]0, \pi[\}. \end{aligned}$$

2. Les symétries axiales d'axe $x = x_0$ et les inversions $I_{x_0,r}$, avec $x_0 \in \mathbb{R}$ et $r > 0$ sont appelées les réflexions du demi plan hyperbolique, ou \mathbb{H}^2 -réflexions.

Remarque 25. Une manière plus concise de définir les droites de \mathbb{H}^2 est de dire que ce sont les intersections avec \mathbb{H}^2 de cercles généralisés perpendiculaires à l'axe réel.

Remarque 26. Remarquons que l'ensemble des points fixes des \mathbb{H}^2 -réflexions définies sont des \mathbb{H}^2 -droites. Ainsi, nous pouvons parler de réflexion hyperbolique d'axe L , que nous notons \bar{r}_L .

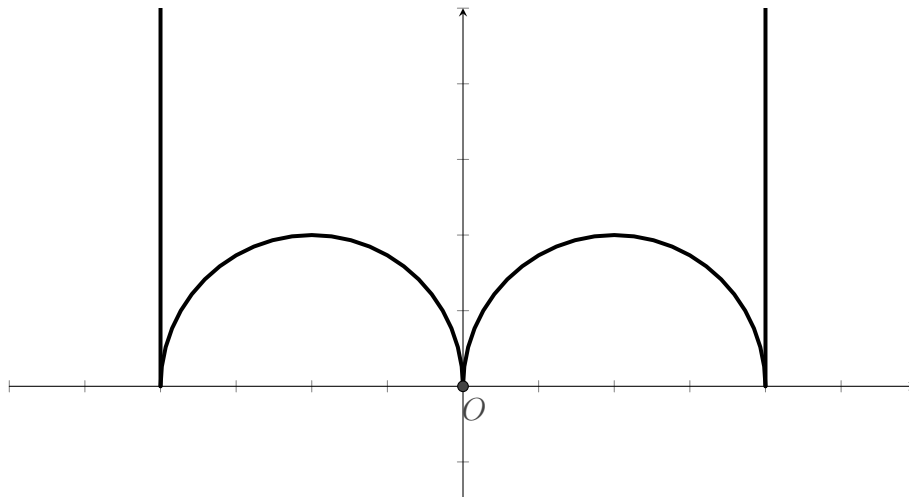


FIGURE 4.5 – Exemples de droites hyperboliques.

La fonction J définit une isométrie de \mathbb{H}^2 dans \mathbb{D}^2 , il est ainsi naturel de définir les \mathbb{D}^2 -droites comme étant l'image par J des \mathbb{H}^2 -droites.

Proposition 48. Les \mathbb{D}^2 -droites sont l'intersection par \mathbb{D}^2 de cercles généralisés perpendiculaires au cercle unité.

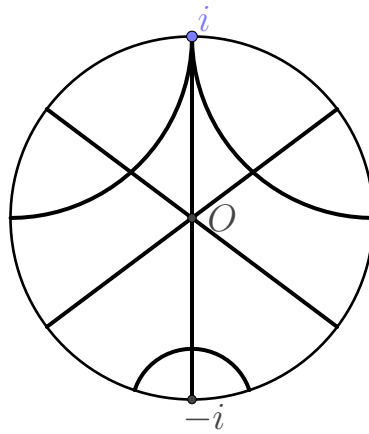


FIGURE 4.6 – Exemples de droites du disque de Poincaré

Démonstration. Selon la remarque (25), toute \mathbb{H}^2 -droite est l'intersection par \mathbb{H}^2 d'un cercle généralisé perpendiculaire à l'axe réel. Le théorème (3) nous permet d'affirmer que l'image d'un cercle généralisé par inversion par rapport à un cercle reste un cercle généralisé, ainsi les \mathbb{D}^2 -droites sont l'intersection par \mathbb{D}^2 de cercles généralisés. De plus, les \mathbb{D}^2 -droites sont perpendiculaires au cercle unité car les inversions préservent les angles. □

Remarque 27. Remarquons que si une \mathbb{D}^2 -droite contient le centre O , alors cette droite est forcément un diamètre du cercle unité.

Nous souhaitons établir les propriétés analogues au cas euclidien pour les droites hyperboliques. Commençons par montrer que par deux points distincts de \mathbb{H}^2 , il existe une et une unique \mathbb{H}^2 -droite passant par ces points.

Proposition 49. Soient P et Q deux points distincts de \mathbb{H}^2 . Alors il existe une unique \mathbb{H}^2 -droite qui passe par ces deux points.

Démonstration. 1. Si $Re(P) = Re(Q)$, alors une \mathbb{H}^2 -droite qui passe par ces deux points est donnée par la droite verticale $x = Re(P)$. Pour l'unicité, il est évident que la droite verticale que nous avons considérée est la seule droite verticale qui passe par P et Q , au vu de ce que nous savons sur les droites euclidiennes (proposition 1). Il ne peut y avoir de demi-cercle qui contienne P et Q car un tel cercle devrait avoir son centre sur l'axe OX . Comme l'ensemble des points à même distance euclidienne de P et Q est une droite parallèle et distincte de OX , cela est impossible.

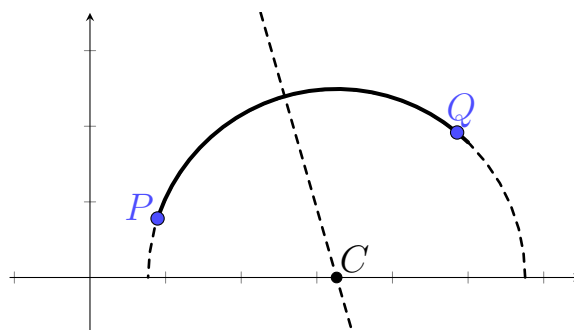


FIGURE 4.7 – Construction du segment hyperbolique $[PQ]$

2. Si $Re(P) \neq Re(Q)$, la médiatrice euclidienne de P et Q intersecte l'axe OX en C . Par conséquent, le demi cercle de centre C et qui contient P contient également Q . Pour l'unicité, il est évident qu'aucune demi-droite verticale ne peut contenir P et Q . Comme la médiatrice est le lieu des points à même distance de P et Q et que celle-ci ne peut rencontrer l'axe OX qu'en un seul point, nous obtenons l'unicité. \square

Montrons ensuite que les \mathbb{H}^2 -droites sont stables par les isométries de \mathbb{H}^2 rencontrées jusqu'à présent. Nous verrons dans la suite (proposition 19) que ces isométries génèrent toutes les isométries de \mathbb{H}^2 (19).

Proposition 50. *L'ensemble des \mathbb{H}^2 -droites est stable par les isométries décrites jusqu'à présent :*

1. Translation par un réel t_{x_0} ,
2. Homothétie de centre O d_ρ ,
3. Symétrie axiale d'axe OY \bar{r}_{OY} ,

ainsi que les isométries de \mathbb{D}^2 via conjugaison par J :

4. Rotation d'angle θ r_θ ,
5. Symétrie axiale d'axe OX \bar{r} .

Démonstration. 1. et 3. Il est clair que les demi-droites verticales et les demi-cercles sont stables par translation par un réel, et par symétrie axiale d'axe OY .

2. Cela est également le cas pour les homothéties, via le simple calcul :

$$d_\rho(\mathcal{D}_{x_0}^+) = \mathcal{D}_{\rho x_0}^+.$$

$$d_\rho(\mathcal{C}_{x_0,r}) = \mathcal{C}_{\rho x_0, \rho r}.$$

4. et 5. Pour ce qui est des isométries de \mathbb{D}^2 , par la proposition (48), l'image des \mathbb{H}^2 -droites par J est l'ensemble formé des diamètres du cercle unité et des arcs de cercle perpendiculaires au cercle unité. Il est évident que cet ensemble est stable par rotations centrées en O et par symétrie axiale d'axe OX . Ainsi l'image par J^{-1} de ces \mathbb{D}^2 -droites nous rend les \mathbb{H}^2 -droites. \square

4.4.1 Longueur de segment

Nous souhaitons montrer la troisième propriété analogue au cas euclidien pour les droites hyperboliques, qui est que le segment hyperbolique entre deux points de \mathbb{H}^2 est la courbe de longueur minimale entre ces deux points, où la notion de longueur est calculée pour la métrique de \mathbb{H}^2 . La longueur d'un tel segment se calcule facilement quand celui-ci est une droite euclidienne verticale, et nous avons donc besoin d'un lemme pour traiter le cas général.

Lemme 6.

1. Soit P un point de \mathbb{H}^2 . Il existe une isométrie f_P de \mathbb{H}^2 telle que

$$f_P(P) = i.$$

En particulier, pour deux points P et Q distincts, il existe une isométrie f de \mathbb{H}^2 telle que $f(P) = Q$.

2. Soit L une \mathbb{H}^2 -droite. Il existe une isométrie f_L de \mathbb{H}^2 telle que

$$f_L(L) = OY.$$

Démonstration. 1. Soit $P \in \mathbb{H}^2$. Notons p_1 et p_2 les coordonnées de P . Définissons l'isométrie de \mathbb{H}^2 suivante

$$f_P := d_{\frac{1}{p_2}} \circ t_{-p_1}.$$

. Nous avons

$$f_P(P) = d_{\frac{1}{p_2}} \circ t_{-p_1}(p_1 + ip_2) = \frac{1}{p_2}(ip_2) = i.$$

Si nous avons maintenant deux points distincts P et Q , dans les mêmes notations, l'isométrie $f_Q^{-1} \circ f_P$ est une isométrie de \mathbb{H}^2 qui envoie P sur Q .

2. Soit deux points distincts P et Q d'une \mathbb{H}^2 -droite L . Si nous envoyons P et Q sur OY via les isométries décrites dans la proposition (50), alors l'image de L reste une \mathbb{H}^2 -droite, qui est l'axe OY par unicité. Nous savons par le premier point qu'il existe f_P une \mathbb{H}^2 -isométrie telle que $f_P(P) = Q$ et que celle-ci s'exprime au moyen des isométries de la proposition (50).

Notons $Q' = f_P(Q)$. Nous savons que dans le modèle \mathbb{D}^2 , les rotations autour du centre 0 sont des \mathbb{D}^2 -isométries. Ainsi, il existe une rotation r_θ qui ramène $J(Q')$ sur l'axe des ordonnées de \mathbb{D}^2 . Comme l'application J est une bijection de $i]0, +\infty[$ dans $i] - 1, 1[$, l'axe des ordonnées de \mathbb{D}^2 correspond à celui de \mathbb{H}^2 . Par conséquent, $J^{-1} \circ r_\theta \circ J$ laisse $i = f_P(P)$ inchangé et déplace Q' sur l'axe des ordonnées. L'isométrie que nous cherchions est donnée par

$$J^{-1} \circ r_\theta \circ J \circ d_{\frac{1}{p_2}} \circ t_{-p_1},$$

ce qui suffit. □

Proposition 51. • *Le \mathbb{H}^2 -segment déterminé par deux points P et Q est la courbe de \mathbb{H}^2 -longueur minimale.*

• *En particulier, la pseudo-distance $d_{\mathbb{H}^2}$ est une distance.*

Démonstration. • Soient P et Q deux points distincts de \mathbb{H}^2 , que nous pouvons supposer sur l'axe des ordonnées grâce au lemme (6). Supposons sans perte de généralité que $p < q$, où p (respectivement q) est la partie imaginaire de P (resp. Q). Calculons la \mathbb{H}^2 -longueur du segment $[PQ]_{\mathbb{H}^2}$. Celui-ci est paramétré par

$$\begin{aligned} \gamma_0 : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{H}^2 \\ t &\mapsto i(p + t(q - p)). \end{aligned}$$

La \mathbb{H}^2 -longueur du segment $[PQ]$ est ainsi donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbb{H}^2}([PQ]_{\mathbb{H}^2}) &= \int_0^1 \sqrt{g_{\mathbb{H}^2, i(p+t(q-p))}(i(q-p), i(q-p))} dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{\frac{(q-p)^2}{(p+t(q-p))^2}} dt = \int_0^1 \frac{q-p}{p+t(q-p)} dt \\ &= \ln(p+t(q-p)) \Big|_0^1 = \ln(q) - \ln(p). \end{aligned}$$

Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ une courbe d'extrémités P et Q , où $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$. Nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbb{H}^2}(\gamma) &= \int_0^1 \sqrt{\frac{x'^2(t) + y'^2(t)}{y^2(t)}} dt \geq \int_0^1 \frac{\sqrt{y'^2(t)}}{y(t)} dt \\ &\geq \int_0^1 \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \ln(y(t)) \Big|_0^1 = \ln(q) - \ln(p) \\ &= \mathcal{L}_{\mathbb{H}^2}([PQ]_{\mathbb{H}^2}). \end{aligned}$$

- Nous devons montrer que $d_{\mathbb{H}^2}$ a la propriété de séparation. Au vu du premier point, la longueur dans \mathbb{H}^2 du segment hyperbolique joignant P et Q nous donne $d_{\mathbb{H}^2}(P, Q)$, qui vaut $d_{\mathbb{H}^2}(P, Q) = \ln(\Im Q) - \ln(\Im P)$ quitte à utiliser une isométrie pour envoyer P et Q sur une même demi-droite verticale, comme nous venons de le faire. Dans ce cas, si $d_{\mathbb{H}^2}(P, Q) = 0$, alors $\Im Q = \Im P$, ce qui implique $Q = P$ car Q et P sont sur une même demi-droite verticale. □

Remarque 28. Nous obtenons le même résultat dans \mathbb{D}^2 , au vu de notre définition des \mathbb{D}^2 -droites.

Nous souhaitons maintenant établir l'équivalence entre les \mathbb{H}^2 -droites et le lieu des points équidistants à deux points distincts, comme nous l'avons fait dans le cas euclidien (proposition 21) et dans le cas sphérique. Dans le cas euclidien et sphérique, ces résultats ont été établis grâce à la formule explicite de la distance euclidienne dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 . La référence Pressley (2009d) démontre que la distance dans \mathbb{H}^2 entre deux points $A, B \in \mathbb{H}^2$ est donnée par

$$d_{\mathbb{H}^2}(A, B) = 2 \tanh^{-1} \frac{|B - A|}{|B - \bar{A}|}.$$

Nous n'allons toutefois pas expliciter cette formule de la distance hyperbolique pour montrer le résultat qui nous intéresse, et nous allons démontrer l'inégalité triangulaire stricte, qui sera utilisée dans la proposition (53) pour établir l'équivalence entre les droites hyperboliques et le lieu des points équidistants à deux points.

Proposition 52 (Inégalité triangulaire stricte). *Soient P, Q, R des points de \mathbb{H}^2 . Si R n'appartient pas au segment hyperbolique joignant P et Q , alors nous avons*

$$d_{\mathbb{H}^2}(P, R) + d_{\mathbb{H}^2}(R, Q) > d_{\mathbb{H}^2}(P, Q).$$

Démonstration. Pour cela, reprenons les inégalités utilisées dans la preuve précédente avec une courbe $\gamma : t \mapsto \gamma(t) = x(t) + iy(t)$ de trace $\Gamma = [PR]_{\mathbb{H}^2} \cup [RQ]_{\mathbb{H}^2}$. Nous pouvons supposer que P et Q sont sur l'axe OY , quitte à appliquer le lemme (6). Regardons maintenant à quelles conditions nous avons l'égalité $\mathcal{L}_{\mathbb{H}^2}(\gamma) = d_{\mathbb{H}^2}(P, Q)$. Nous avons

$$\mathcal{L}_{\mathbb{H}^2}(\gamma) = \int_0^1 \frac{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}{y(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{\sqrt{y'^2(t)}}{y(t)} dt \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned} &\geq \int_0^1 \frac{y'(t)}{y(t)} dt \tag{4.9} \\ &= d_{\mathbb{H}^2}(P, Q). \end{aligned}$$

Supposons que R n'appartient pas au segment hyperbolique $[PQ]_{\mathbb{H}^2}$. L'union des deux segments hyperboliques $[PR]_{\mathbb{H}^2} \cup [RQ]_{\mathbb{H}^2}$ peut être paramétrée par l'union de deux arcs de cercle, donc par une courbe γ continue sur $]0, 1[$ et C^1 sur $]0, t_0[\cup]t_0, 1[$ avec $0 < t_0 < 1 \in \mathbb{R}$, où $\gamma(t_0) = R$. Distinguons entre deux cas pour la position de R .

1. Le premier cas est quand R n'appartient pas à la droite hyperbolique passant par P et Q , que nous avons supposé être l'axe OY . Nous pouvons paramétrer γ à vitesse constante sur $]0, t_0[$ et $]t_0, 1[$, de telle sorte que $\gamma' > 0$ sur $]0, t_0[$, ainsi l'inégalité (4.8) est stricte.
2. Le deuxième cas est que R appartient à OY mais pas au segment $[PQ]_{\mathbb{H}^2}$. Dans ce cas, nous pouvons de nouveau paramétrer γ à vitesse constante sur $]0, t_0[$ et $]t_0, 1[$, ainsi $y' < 0$ sur $]0, t_0[$ ou $]t_0, 1[$, ce qui implique que l'inégalité (4.9) est stricte.

Dans les deux cas, nous ne remplissons pas les deux égalités nécessaires pour avoir $\mathcal{L}_{\mathbb{H}^2}(\gamma) = d_{\mathbb{H}^2}(P, Q)$, et nous tirons ainsi que l'inégalité suivante

$$d_{\mathbb{H}^2}(P, R) + d_{\mathbb{H}^2}(R, Q) = \mathcal{L}_{\mathbb{H}^2} \geq d_{\mathbb{H}^2}(P, Q),$$

est stricte. □

4.5 Théorème des 3 réflexions

Pour démontrer le cas de la géométrie hyperbolique, il nous reste à montrer que le lieu des points \mathbb{H}^2 -équidistants à deux points fixés P et Q est une \mathbb{H}^2 -droite. Malheureusement, la construction d'une médiatrice hyperbolique n'est pas aussi simple que son analogue en géométrie euclidienne, et nous n'allons pas détailler une telle construction. Un exemple de construction de la médiatrice dans \mathbb{H}^2 est donné dans la référence suivante Bochaca. Celle-ci ne sera pas nécessaire pour établir le théorème des 3 réflexions, car nous n'avons besoin que de l'existence d'une telle médiatrice.

Le lemme qui suit nous ramène au cas le plus simple de la construction d'une médiatrice hyperbolique.

Lemme 7. *Soient P et Q deux points de \mathbb{H}^2 . Alors il existe une \mathbb{H}^2 -isométrie telle que P' et Q' soient image d'une symétrie axiale d'axe OY , en d'autres termes tels que $\Im(P') = \Im(Q')$ et $\Re(P') = -\Re(Q')$.*

Démonstration. De même que pour le lemme (6), nous pouvons, à l'aide d'une translation et d'une dilatation, déplacer P sur i . Nous savons qu'avec une rotation appropriée dans \mathbb{D}^2 , le point Q peut être amenée sur l'axe des ordonnées, en haut ou en bas du centre O . Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une rotation telle que, dans \mathbb{H}^2 , Q soit amené sur un point de même ordonnée que i . Finalement, nous utilisons une translation par un réel pour obtenir la situation désirée. □

Proposition 53. *L'ensemble des points \mathbb{H}^2 -équidistants de P et P' est une \mathbb{H}^2 -droite L , et la \mathbb{H}^2 -réflexion en L échange P et P' .*

Démonstration. Par notre lemme précédent (7), nous pouvons supposer que P et P' sont images par une symétrie axiale d'axe OY , que nous notons \bar{r}_{OY} . Comme cette réflexion est une \mathbb{H}^2 -isométrie, les points de l'axe OY appartenant à \mathbb{H}^2 sont à même \mathbb{H}^2 -distance de P et de P' . En effet, pour $Q \in \mathbb{H}^2$ et sur l'axe OY , nous avons

$$d_{\mathbb{H}^2}(P, Q) = d_{\mathbb{H}^2}(\bar{r}_{OY}(P), \bar{r}_{OY}(Q)) = d_{\mathbb{H}^2}(P', Q). \quad (4.10)$$

Maintenant, supposons par l'absurde avoir un point R de \mathbb{H}^2 qui n'appartient pas à l'axe OY , que nous pouvons supposer du même côté que P , et qui est équidistant à P et à P' . Alors

l'image de R par \bar{r}_{OY} , que nous notons R' , est également à même distance de P et de P' , par le même raisonnement qui justifie les égalités précédentes (4.10). Notons S l'intersection du segment $[PR']_{\mathbb{H}^2}$ avec l'axe OY .

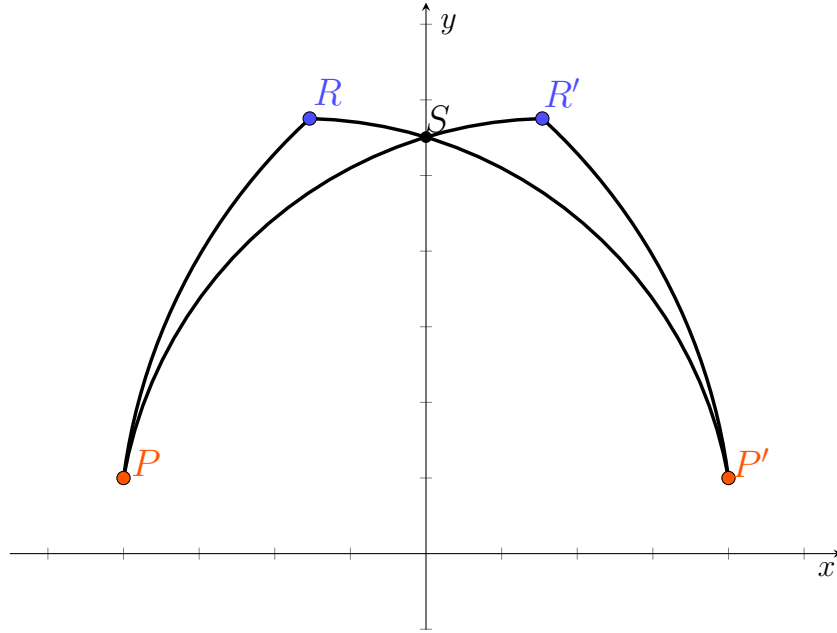


FIGURE 4.8

Nous avons par conséquent

$$\begin{aligned}
 d_{\mathbb{H}^2}(P, R) &= d_{\mathbb{H}^2}(P', R') && \text{(Par isométrie)} \\
 &= d_{\mathbb{H}^2}(P, R') && \text{(R' équidistant à P et P')} \\
 &= d_{\mathbb{H}^2}(P, S) + d_{\mathbb{H}^2}(S, R') \\
 &= d_{\mathbb{H}^2}(P, S) + d_{\mathbb{H}^2}(S, R).
 \end{aligned}$$

Or, par l'inégalité triangulaire stricte (52), nous savons que $d_{\mathbb{H}^2}(P, R) < d_{\mathbb{H}^2}(P, S) + d_{\mathbb{H}^2}(S, R)$, car S n'appartient pas au segment $[PR]_{\mathbb{H}^2}$. Cela est absurde et cela montre que l'ensemble des points équidistants de P et P' est donné par les points de \mathbb{H}^2 sur l'axe OY . \square

Il ne nous reste plus qu'à démontrer l'analogie en géométrie hyperbolique des lemmes (2) et (7) pour aboutir au théorème des 3 réflexions. Les démonstrations sont les mêmes que dans le cas euclidien si nous adaptons les termes *droites* et *non aligné*. Si le contexte est clair, nous dirons que 3 points de \mathbb{H}^2 qui n'appartiennent pas à une même droite hyperbolique sont non alignés.

Lemme 8. *Tout point de \mathbb{H}^2 est entièrement déterminé par ses distances à 3 points fixes non alignés.*

Démonstration. Soient A, B et C trois points non alignés de \mathbb{H}^2 . Supposons avoir P et P' deux points différents tels que $d_{\mathbb{H}^2}(P, Q) = d_{\mathbb{H}^2}(P', Q)$ pour tout $Q \in \{A, B, C\}$. Ainsi, A, B et C appartiennent au lieu des points équidistants à P et P' . Mais nous savons par la proposition (53) que ce lieu est donné par une droite hyperbolique, or nous avons supposé que A, B et C étaient non alignés, d'où une absurdité. \square

Corollaire 18. *Soient A, B et C trois points de \mathbb{H}^2 non alignés. Alors une \mathbb{H}^2 -isométrie f est entièrement déterminée par les images $f(A), f(B)$ et $f(C)$.*

Démonstration. Supposons avoir une isométrie f telle que nous connaissons $f(A), f(B)$ et $f(C)$ pour A, B, C trois points non alignés. Soit P un point de \mathbb{H}^2 , alors $f(P)$ vérifie $d_{\mathbb{H}^2}(f(P), f(Q)) = d_{\mathbb{H}^2}(P, Q)$ pour $Q \in \{A, B, C\}$. Par le lemme précédent (8), $f(P)$ est ainsi uniquement déterminée. \square

Nous avons enfin tous les résultats pour démontrer le théorème des 3 réflexions dans \mathbb{H}^2 . La démonstration est semblable au cas euclidien, au vu des propriétés analogues entre les droites hyperboliques et les droites euclidiennes.

Théorème 7. *Chaque \mathbb{H}^2 -isométrie est le produit d'au plus trois \mathbb{H}^2 -réflexions.*

Démonstration. Fixons A, B et C des points de \mathbb{H}^2 non alignés, et soit f une isométrie. Nous cherchons une isométrie qui est la composée d'au plus 3 \mathbb{H}^2 -réflexions et qui est égale à f en A, B et C . Cette isométrie sera égale à f , via le résultat précédent (18).

La construction de ces réflexions est identique qu'au cas euclidien (1). Elle consiste à appliquer tour à tour les réflexions qui ramènent un point à son image via f . Une telle réflexion existe toujours, via la proposition (53). Les vérifications que cette construction nous permet d'envoyer A, B et C sur $f(A), f(B)$ et $f(C)$ avec au plus 3 réflexions sont identiques que dans le théorème des 3 réflexions, version euclidienne (1). \square

4.6 Les isométries de \mathbb{H}^2 en tant que fonctions complexes

Le théorème des 3 réflexions nous garantit que toute isométrie de \mathbb{H}^2 peut s'exprimer comme le produit d'au plus 3 réflexions hyperboliques, mais ne nous donne pas d'information sur le groupe des \mathbb{H}^2 -isométries et comment elles sont représentées en tant qu'applications complexes. Le théorème qui suit nous permet d'établir que les isométries de \mathbb{H}^2 sont exactement les transformations de Möbius (définies en 1.4) à coefficients réels.

Théorème 8 (Poincaré). *Les isométries de \mathbb{H}^2 sont exactement les applications de la forme*

$$f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad (\text{Isométries qui préservent l'orientation})$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ et $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, ou bien les applications de la forme

$$\bar{f}(z) = \frac{\alpha'\bar{z} + \beta'}{\gamma'\bar{z} + \delta'}, \quad (\text{Isométries qui renversent l'orientation})$$

où $\alpha', \beta', \gamma', \delta' \in \mathbb{R}$ et $\alpha'\delta' - \beta'\gamma' = -1$.

Démonstration. Il nous faut montrer deux choses : que toute isométrie de \mathbb{H}^2 peut s'écrire comme les applications de l'énoncé, et que ces applications sont des isométries de \mathbb{H}^2 .

a Pour montrer que toute \mathbb{H}^2 -isométrie peut s'écrire de la sorte, nous allons utiliser le théorème des 3 réflexions.

1. Commençons par le cas où l'isométrie est le produit d'une seule \mathbb{H}^2 -réflexion. Soit l'inversion de cercle $I_{x_0, r}$, avec $x_0 \in \mathbb{R}$ et $r > 0$, celle-ci se réécrit

$$I_{x_0, r}(z) = \frac{r^2}{z - x_0} + x_0 = \frac{x_0 \bar{z} + (r^2 - x_0^2)}{\bar{z} - x_0}.$$

Écrit comme cela, le déterminant de cette transformation de Möbius ne vaut pas -1 , mais nous pouvons toujours diviser le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{|\alpha\delta - \beta\gamma|}$, qui dans ce cas-ci vaut $r \neq 0$. L'inversion $I_{x_0, r}$ appartient donc à la deuxième famille d'isométries de l'énoncé.

Pour ce qui est de la symétrie axiale d'axe $x = x_0$, celle-ci peut se réécrire

$$t_{x_0} \circ \bar{r}_{OY} \circ t_{-x_0}(z) = x_0 - \overline{(z - x_0)} = \frac{-\bar{z} + 2x_0}{0\bar{z} + 1},$$

qui a un déterminant égal à -1 . Les réflexions appartiennent ainsi également à la deuxième famille.

2. Pour la composée de deux réflexions, nous utilisons comme dans le cas sphérique (38) le fait que la composée de transformations de Möbius revient à effectuer un calcul matriciel pour trouver les coefficients, et que nous pouvons permuter une transformation de Möbius g avec \bar{r} en conjuguant les coefficients de g . Si g_1 et g_2 sont deux transformations de Möbius à coefficients réels, nous avons

$$g_1 \circ \bar{r} \circ g_2 \circ \bar{r} = g_1 \circ g_2 \circ \bar{r} \circ \bar{r} = g_1 \circ g_2.$$

La fonction $g_1 \circ g_2$ est encore une transformation de Möbius à coefficients réels, de déterminant égal à 1, ce qui correspond à la première famille de transformations de l'énoncé.

3. Le cas de trois réflexions se traite exactement de la même manière que le cas de deux réflexions, et correspond comme nous pouvons nous y attendre aux isométries qui renversent l'orientation.

b Montrons maintenant que ces transformations sont effectivement des isométries de \mathbb{H}^2 .

Pour $f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, avec $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, si $\gamma \neq 0$, nous pouvons décomposer f en

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma(\gamma z + \delta)} \\ &= \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{1}{\gamma(\gamma z + \delta)}. \end{aligned}$$

1. Supposons tout d'abord que $\gamma > 0$. Alors f se réécrit comme la composée de \mathbb{H}^2 -isométries qui préservent l'orientation : celles-ci sont la dilatation $z \mapsto \gamma z$, les translations $z \mapsto z + \delta$ et $z \mapsto \frac{\alpha}{\gamma}$, et $z \mapsto \frac{-1}{z}$. Cette dernière est effectivement une isométrie qui préserve l'orientation, car elle est la composée de $z \mapsto I(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ et $z \mapsto \bar{r}_{OY}(z) = -\bar{z}$, deux \mathbb{H}^2 -isométries qui renversent l'orientation.

2. Dans le cas où $\gamma < 0$, nous obtenons le même argument, en utilisant à la place

$$f(z) = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{1}{-\gamma(-\gamma z - \delta)}.$$

La dilatation à considérer est maintenant $z \mapsto -\gamma z$, qui est effectivement une \mathbb{H}^2 -isométrie car $-\gamma > 0$.

3. Si $\gamma = 0$, nous avons $f(z) = \frac{\alpha}{\delta}z + \frac{\beta}{\delta}$. Comme $\alpha\delta = 1$, nous avons $\delta \neq 0$ et $\frac{\alpha}{\delta} > 0$, donc nous avons la composée d'une dilatation et d'une translation.

4. Finalement, pour $\bar{f}(z) = \frac{\alpha'\bar{z} + \beta'}{\gamma'\bar{z} + \delta'}$, où $\alpha'\delta' - \beta'\gamma' = -1$, nous avons $\bar{f} = f \circ \bar{r}_{OY}$, où

$$f(z) = \frac{-\alpha'z + \beta'}{-\gamma' + \delta'}.$$

Le déterminant de f vaut 1, ainsi f est une \mathbb{H}^2 -isométrie qui préserve l'orientation, ce qui implique que \bar{f} est une isométrie qui renverse l'orientation. □

Une conséquence de ce que nous venons de montrer est que toute \mathbb{H}^2 -isométrie est la composée des isométries élémentaires que nous dégagées dans les sections (43) et (17).

Corollaire 19. *Le groupe des \mathbb{H}^2 -isométries est engendré par les isométries suivantes*

1. les translations euclidiennes t_{x_0} ,
2. les dilatations euclidiennes centrées en O d_ρ ,
3. l'inversion du cercle unité I ,
4. la réflexion euclidienne d'axe OY \bar{r}_{OY} .

Démonstration. C'est en fait la manière dont nous avons montré la deuxième partie du théorème précédent. Nous avons montré que toute isométrie qui préserve l'orientation est produit de translation, dilatation et de l'application $z \mapsto \frac{-1}{z} = I \circ \bar{r}_{OY}(z)$. Les isométries qui renversent l'orientation sont quant à elles le produit d'une isométrie qui préserve l'orientation et de \bar{r}_{OY} . □

Et nous dégageons la propriété des \mathbb{H}^2 -droites selon laquelle elles sont préservées par \mathbb{H}^2 -isométries.

Corollaire 20. *L'image d'une \mathbb{H}^2 -droite par une \mathbb{H}^2 -isométrie reste une \mathbb{H}^2 -droite.*

Démonstration. Nous avons montré dans la proposition (50) que les translations euclidiennes t_{x_0} , dilatations euclidiennes centrées en O d_ρ , la réflexion d'axe OY \bar{r}_{OY} et l'inversion du cercle unité I préservent les \mathbb{H}^2 -droites. Via le corollaire (19), toute \mathbb{H}^2 -isométrie est le produit des isométries de base que nous venons d'énoncer, ce qui suffit. □

Démontrons un résultat analogue à (8).

Proposition 54. *Les isométries de \mathbb{D}^2 sont exactement les*

$$f(w) = \frac{aw + b}{\bar{b}w + \bar{a}}, \quad (\text{Isométries qui préservent l'orientation})$$

où $a, b \in \mathbb{C}$ et $|a|^2 - |b|^2 = 1$, ou bien les

$$\bar{f}(w) = \frac{a\bar{w} + b}{\bar{b}w + \bar{a}}, \quad (\text{Isométries qui renversent l'orientation})$$

où $a, b \in \mathbb{C}$ et $|a|^2 - |b|^2 = 1$.

Démonstration. Nous allons montrer que toute isométrie de \mathbb{D}^2 qui préserve l'orientation peut s'écrire sous la forme prescrite par l'énoncé, et que ces applications sont des isométries de \mathbb{D}^2 qui préservent l'orientation. Enfin, il nous faudra traiter le cas des isométries qui renversent l'orientation.

a Toute \mathbb{D}^2 -isométrie qui préserve l'orientation peut s'écrire comme $J \circ h \circ J^{-1}$, où h est une \mathbb{H}^2 -isométrie qui préserve l'orientation. Ainsi, par le théorème précédent (8), $h(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, et $J \circ h \circ J^{-1}$ a une matrice associée égale à

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + i\beta - i\gamma + \delta & i\alpha + \beta + \gamma - i\delta \\ -i\alpha + \beta + \gamma + i\delta & \alpha - i\beta + i\gamma + \delta \end{pmatrix}.$$

Le déterminant vaut

$$\det \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} = (-2)(1)(-2) = 4.$$

La matrice de $J \circ h \circ J^{-1}$ peut s'écrire

$$\begin{pmatrix} c & d \\ \bar{d} & \bar{c} \end{pmatrix},$$

avec $c = \alpha + i\beta - i\gamma + \delta$ et $d = i\alpha + \beta + \gamma - i\delta$, et où $|c|^2 - |d|^2 = 4$, le déterminant. Ainsi, en prenant $a = c/2$ et $b = d/2$, nous avons

$$f(w) = J \circ h \circ J^{-1}(w) = \frac{aw + b}{\bar{b}w + \bar{a}}, \quad |a|^2 - |b|^2 = 1. \quad (4.11)$$

b Montrons maintenant que toute fonction f de la forme (4.11) est une \mathbb{D}^2 -isométrie. Nous allons montrer qu'il existe une \mathbb{H}^2 -isométrie h de coefficients α, β, γ et δ tels que $J \circ h \circ J^{-1} = f$ en parcourant les calculs effectués en (a.) en arrière. Soient $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $|a|^2 - |b|^2 = 1$, résolvons le système

$$\begin{cases} 2a = \alpha + \delta + i\beta - i\gamma \\ 2b = \beta + \gamma + i\alpha - i\delta \end{cases}$$

pour $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Nous trouvons

$$\begin{aligned} \alpha &= \Re a + \Im b, & \beta &= \Re b + \Im a, \\ \gamma &= \Re b - \Im a, & \delta &= \Re a - \Im b, \end{aligned}$$

et $\alpha\delta - \beta\gamma = |a|^2 - |b|^2 = 1$. Ainsi, pour les coefficients que nous venons de trouver, l'application $h(z) := \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ est telle que $J \circ h \circ J^{-1} = f$, au vu des calculs du point (a.).

c Notons que toute isométrie \bar{f} de \mathbb{D}^2 qui renverse l'orientation peut s'écrire sous la forme

$$\bar{f} = f \circ \bar{r},$$

où f est une \mathbb{D}^2 -isométrie qui préserve l'orientation et \bar{r} est une \mathbb{D}^2 -réflexion. En effet, il suffit de remarquer que $\bar{f} = (\bar{f} \circ \bar{r}) \circ \bar{r}$. De manière réciproque, les applications de la forme

$$f \circ \bar{r},$$

sont des \mathbb{D}^2 -isométries qui renversent l'orientation, si f une \mathbb{D}^2 -isométrie qui préserve l'orientation.

Ainsi les isométries de \mathbb{D}^2 -isométries qui renversent l'orientation sont exactement les applications de la forme

$$\bar{f}(w) = \frac{a\bar{w} + b}{\bar{b}w + \bar{a}},$$

au vu de ce que nous avons montré aux points (a) et (b).

□

4.7 Classification des isométries hyperboliques

L'objectif de cette section est de prouver un résultat analogue à la classification des isométries euclidiennes (proposition 11), qui permet d'affirmer que toute isométrie euclidienne est une translation, une rotation, ou une réflexion glissée.

En géométrie euclidienne, les réflexions glissées correspondent aux isométries qui s'expriment comme le produit d'une ou de 3 réflexions (proposition 24), tandis que les translations et rotations s'expriment comme le produit de 2 réflexions (proposition 22). Pour rappel, la position relative des deux axes de réflexion détermine si nous obtenons une translation ou une rotation. Si les deux axes sont parallèles, nous obtenons une rotation, s'ils s'intersectent en un point P , nous obtenons une rotation centrée en P .

Le résultat est similaire en géométrie hyperbolique, sauf qu'il existe une quatrième famille d'isométries, qui sont les *rotations limites*. En effet, des droites hyperboliques peuvent se rencontrer à l'infini, ce que nous décrivons dans la section (4.7.1). Dans la section (4.7.2), nous définissons les 4 familles d'isométries hyperboliques, quelques caractéristiques de celles-ci et comment nous pouvons les visualiser dans les modèles de \mathbb{H}^2 et \mathbb{D}^2 . Enfin, dans la section (4.7.3), nous établissons le résultat de classification des isométries hyperboliques.

4.7.1 Cercle à l'infini

Avant d'expliquer comment deux droites hyperboliques peuvent se rencontrer à l'infini, commençons par définir la notion cercle à l'infini.

Proposition 55. Dans \mathbb{D}^2 , les points du cercle unité sont à \mathbb{D}^2 -distance infinie du centre O .

Remarque 29. Rappelons que les points du cercle unité n'appartiennent pas à \mathbb{D}^2 , mais nous pourrions parler de *points asymptotiques*.

Démonstration. Calculons la \mathbb{D}^2 -distance du centre O du cercle à un point $w = re^{i\theta}$ de \mathbb{D}^2 , avec $0 < r < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Nous savons que les diamètres du cercle unité sont des \mathbb{D}^2 -droites, ainsi la courbe de longueur minimale est paramétrée par

$$\begin{aligned} \gamma : [0, r] &\rightarrow \mathbb{D}^2 \\ t &\mapsto te^{i\theta}. \end{aligned}$$

La distance entre O et w est donnée par

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{D}^2}(O, w) &= \int_0^r \sqrt{\frac{4}{(1 - |te^{i\theta}|^2)^2} ((e^{i\theta})^T e^{i\theta})} dt \\ &= \int_0^r \sqrt{\frac{4}{(1 - t^2)^2} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} dt \\ &= \int_0^r \frac{2}{1 - t^2} dt \\ &= 2 \tanh^{-1}(r), \end{aligned}$$

qui tend vers l'infini quand r tend vers 1. □

Définition 48. • Dans \mathbb{D}^2 , le *cercle à l'infini* $\partial\mathbb{D}^2$ est le cercle unité centré en O . Dans \mathbb{H}^2 , le cercle à l'infini est défini comme étant

$$\partial\mathbb{H}^2 = J^{-1}(\partial\mathbb{D}^2).$$

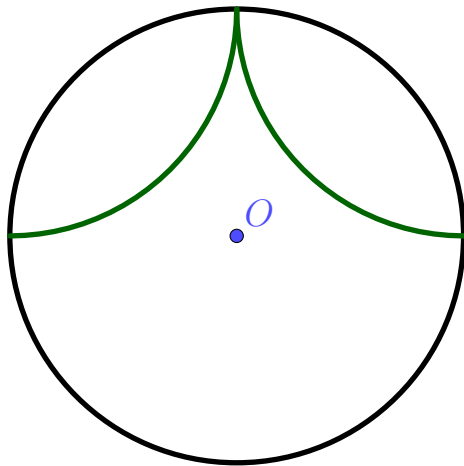
- Un point du cercle à l'infini est dit *idéel*.

Remarque 30. Nous avons $\partial\mathbb{H}^2 = J^{-1}(\partial\mathbb{D}^2) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

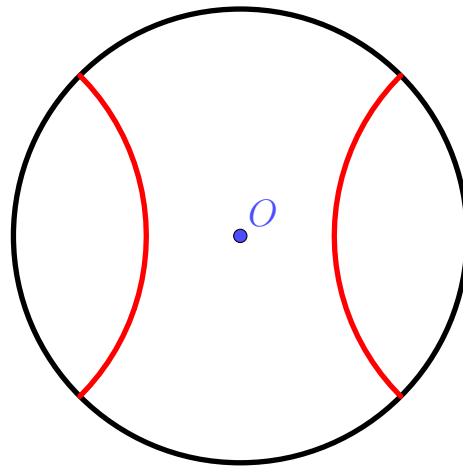
Nous pouvons ainsi définir la notion de droites qui se rencontrent à l'infini.

Définition 49. • Les points idéaux d'une droite L dans \mathbb{H}^2 ou dans \mathbb{D}^2 sont les points limites de la droite L sur le cercle à l'infini.

- Dans \mathbb{H}^2 (ou dans \mathbb{D}^2), deux droites qui ne s'intersectent pas dans \mathbb{H}^2 (ou \mathbb{D}^2) sont dites *asymptotiques* si elles ont un point limite en commun sur le cercle à l'infini.
- Deux droites qui ne s'intersectent pas, ni dans \mathbb{H}^2 (ou \mathbb{D}^2), ni sur le cercle à l'infini, sont dites *ultra-parallèles*.



(a) Deux droites asymptotiques dans \mathbb{D}^2 .



(b) Deux droites ultra-parallèles dans \mathbb{D}^2 .

Des droites asymptotiques n'ont donc pas un point en commun, mais un point limite en commun. Dans \mathbb{H}^2 , il peut sembler étrange de parler d'un point limite en commun à l'infini pour deux demi-droites verticales, mais si nous nous rappelons qu'une partie du demi-plan hyperbolique peut être vue comme le paramétrage de la pseudosphère, ces demi-droites correspondent à des tractrices génératrices de la pseudosphère, et ces dernières finissent effectivement par se rejoindre à l'infini.

Nous verrons dans la section (4.7.3) que le produit de 2 réflexions hyperboliques peut donner lieu à trois types d'isométrie, selon le fait que les axes s'intersectent en \mathbb{H}^2 , sont asymptotiques ou sont ultra-parallèles. En géométrie euclidienne, nous n'avons que deux cas possibles, comme rappelé dans l'introduction de cette section, qui sont les translations et rotations. En géométrie sphérique, nous n'avons que des rotations, comme nous l'avons montré dans la proposition (34), car deux grands cercles s'intersectent toujours.

Avant cela, intéressons-nous à ce qu'il advient du 5ème postulat d'Euclide (2.7.1) en géométrie hyperbolique.

Lemme 9. *Deux points distincts de $\mathbb{H}^2 \cup \partial\mathbb{H}^2$ déterminent une unique droite hyperbolique.*

Démonstration. Nous avons déjà montré que par deux points de \mathbb{H}^2 passe une unique droite hyperbolique dans la proposition (49).

1. Nous souhaitons montrer que si nous nous donnons deux points P', Q' sur le cercle limite $\partial\mathbb{H}^2$, alors il n'existe qu'une droite hyperbolique ayant comme points limites P' et Q' . Si $Q' = \infty$, il s'agit de la demi-droite verticale issue de P' . Si Q' et P' sont sur \mathbb{R} , il s'agit du demi-cercle euclidien dont le centre est le milieu de P' et Q' . L'unicité se justifie de la même manière qu'à la proposition (49).
2. Soit $P \in \mathbb{H}^2$ et soit $Q \in \partial\mathbb{H}^2$. Si $Q = \infty$ ou $Q = \mathfrak{R}P$, alors la demi-droite verticale passant par P a un point limite égal à Q . Si $Q \in \mathbb{R} \setminus \{\mathfrak{R}P\}$, alors l'argument de la médiatrice euclidienne de la proposition (49) nous donne l'existence et l'unicité du demi-cercle passant par P et ayant Q comme un point limite.

□

Le 5ème postulat d'Euclide nous dit que si nous nous donnons une droite PQ et un point R ne passant pas par PQ , alors il n'existe qu'une et une seule parallèle à PQ passant par R . En géométrie sphérique, deux grands cercles s'intersectent forcément, via la proposition (33), ainsi une telle parallèle ne peut pas exister. En géométrie hyperbolique, nous avons une infinité d'ultra-parallèles à PQ et passant par R , et nous souhaitons maintenant le montrer.

Proposition 56. *Soit PQ une droite de \mathbb{H}^2 et R un point de \mathbb{H}^2 ne passant pas par PQ .*

Alors

1. *Il existe exactement deux droites asymptotiques à PQ et passant par R*
2. *Il existe une infinité de droites ultra-parallèles à PQ et passant par R .*

Démonstration. Comme d'habitude, nous pouvons supposer que PQ est l'axe OY et nous pouvons de plus supposer que $\mathfrak{R}R > 0$. Considérons les points $[O, \mathfrak{R}R]$ du cercle à l'infini.

1. Il existe une unique droite hyperbolique passant par R et de point limite O (respectivement $\mathfrak{R}R$), grâce au lemme (9). De plus, cette droite est asymptotique à PQ en le point O (respectivement ∞).

Une droite passant par R et asymptotique à PQ en O et ∞ ne peut exister, car la seule droite de \mathbb{H}^2 dont les points limites sont O et ∞ est l'axe OY , que nous avons supposé être PQ et qui ne passe donc pas par R .

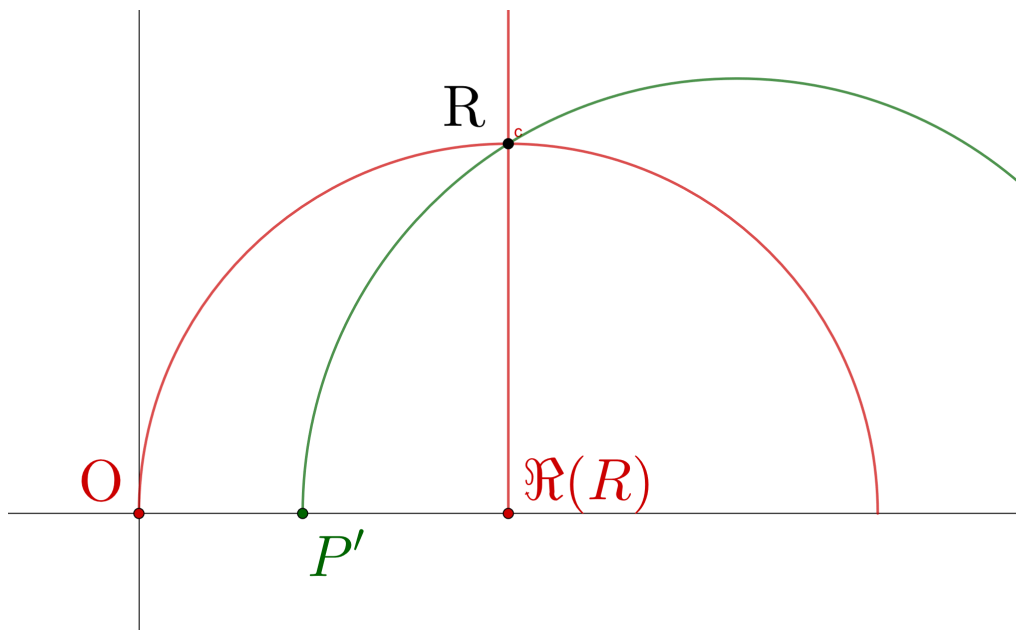


FIGURE 4.9 – Les deux droites asymptotiques à l’axe OY passant par R en rouge. Tous les demi-cercles de point idéal dans $]0, \Re(R)[$ et passant par R sont ultra-parallèles à l’axe OY .

2. Soit P' un point de $]O, \Re R[$. Il existe un unique demi-cercle passant par R et de point limite P' , via le lemme (9) précédent. Ce demi-cercle est complètement inclus dans le quart de plan

$$\{z \in \mathbb{C} : \Re z \geq P', \Im z > 0\},$$

qui est disjoint de PQ , ainsi le demi-cercle passant par R et de point limite P' est ultra-parallèle à PQ , et cela est vrai pour tout $P' \in]O, \Re R[$.

□

4.7.2 Description des isométries

Décrivons maintenant les 4 familles d’isométries hyperboliques, qui seront le sujet du théorème de classification dans la section (4.7.3). Nous allons amplement utiliser le résultat (6), qui nous permet d’envoyer n’importe quel point (respectivement n’importe quelle droite) sur un autre point (une droite) via une isométrie hyperbolique. Ainsi, nous pouvons par exemple nous concentrer sur les rotations centrées en un point donné O , et les autres s’obtiennent par conjugaison, comme nous l’avons fait dans le cas euclidien (section 2.2).

Rotations hyperboliques

Définition 50. Dans \mathbb{H}^2 (ou \mathbb{D}^2), les rotations hyperboliques centrées en P sont les isométries qui s’obtiennent comme le produit de deux réflexions dont les axes s’intersectent en P .

Exemple 15. Dans \mathbb{D}^2 , les rotations euclidiennes autour de O sont des \mathbb{D}^2 -rotations centrées en O , au vu de la proposition (22) sur les rotations euclidiennes vu comme le produit de deux symétries axiales, et le fait que les droites de \mathbb{D}^2 passant par O sont des diamètres du cercle unité.

Avant de détailler des caractéristiques des rotations hyperboliques, intéressons-nous aux cercles hyperboliques. Les rotations euclidiennes centrées en un point P préservent les cercles centrés en P , c'est à dire que le cercle en tant qu'ensemble est préservé par la rotation, même si aucun point du cercle n'est un point fixe de la rotation. Nous souhaitons ainsi vérifier que notre définition des rotations hyperboliques a une propriété analogue.

Définition 51. Un cercle hyperbolique de centre P et de rayon hyperbolique $R > 0$ est le lieu des points à distance hyperbolique R de P .

La proposition suivante facilite la visualisation des cercles hyperboliques dans \mathbb{H}^2 et \mathbb{D}^2 .

Proposition 57. Dans \mathbb{H}^2 et dans \mathbb{D}^2 , les cercles hyperboliques sont représentés par des cercles euclidiens.

Démonstration. 1. Commençons par remarquer que les \mathbb{D}^2 -cercles centrés en O sont représentés par des cercles euclidiens. En effet, nous avons montré dans la proposition (55) que pour un point $w = re^{i\theta}$, sa distance à O dans \mathbb{D}^2 est donnée par

$$d_{\mathbb{D}^2}(O, w) = 2 \tanh^{-1}(r),$$

où $0 < r < 1$, qui ne dépend pas de θ . Ainsi, les \mathbb{D}^2 -cercles centrés en O sont représentés par des cercles euclidiens, et comme la fonction $\tanh^{-1}(\cdot)$ tend vers l'infini quand r tend vers 1, le rayon hyperbolique peut être arbitrairement grand.

2. L'application J^{-1} définie en (44) est une isométrie de \mathbb{D}^2 dans \mathbb{H}^2 , ainsi les \mathbb{H}^2 -cercles centrés en $J^{-1}(O) = i$ s'obtiennent par l'image par J^{-1} des \mathbb{D}^2 -cercles centrés en O . Nous avons $J^{-1} = I_{-i, \sqrt{2}} \circ \bar{r}$. Comme les inversions par un cercle préservent les cercles euclidiens (théorème 3), l'application J^{-1} préserve les cercles euclidiens, ainsi les \mathbb{H}^2 -cercles centrés en i sont représentés par des cercles euclidiens.
3. Un \mathbb{H}^2 -cercle centré en $P = p_1 + ip_2 \in \mathbb{H}^2$ et de rayon hyperbolique $R > 0$ peut s'obtenir à partir d'un \mathbb{H}^2 -cercle centré en i et de rayon hyperbolique $R > 0$, en appliquant l'isométrie

$$t_{p_1} \circ d_{p_2}.$$

Cette isométrie préserve les cercles euclidiens, ainsi les \mathbb{H}^2 -cercles se représentent par des cercles euclidiens.

4. Enfin, un \mathbb{D}^2 -cercle centré en $Q \in \mathbb{D}^2$ et de rayon hyperbolique $R > 0$ peut s'obtenir à partir d'un \mathbb{H}^2 -cercle centré en $J^{-1}(Q)$ et de rayon hyperbolique $R > 0$ et en appliquant J , qui est une isométrie de \mathbb{H}^2 dans \mathbb{D}^2 et qui préserve les cercles euclidiens. Par conséquent les \mathbb{D}^2 -cercles se représentent également par des cercles euclidiens. □

Remarque 31. Même si tout \mathbb{H}^2 -cercle \mathcal{C} se représente par un cercle euclidien, le centre hyperbolique et le centre du cercle euclidien qui représente \mathcal{C} ne sont, de manière générale, pas égaux. En effet, considérons les \mathbb{H}^2 -cercles $\mathcal{C}_{i,R}^{\mathbb{H}^2}$ centrés en i et de rayon hyperbolique $R > 0$. Nous savons par la propriété (51) que la distance hyperbolique entre deux points $P, Q \in \mathbb{H}^2$ sur l'axe OY est donnée par

$$d_{\mathbb{H}^2}(P, Q) = |\ln(\Im Q) - \ln(\Im P)|.$$

Ainsi, les 2 points à distance hyperbolique R de i sont donnés par ie^R et ie^{-R} . Le centre du cercle euclidien qui représente $\mathcal{C}_{i,R}^{\mathbb{H}^2}$ est donné par

$$i \frac{e^R + e^{-R}}{2} = i \cosh R,$$

qui est différent de i pour $R > 0$.

Etablissons maintenant quelques propriétés des rotations hyperboliques.

Proposition 58. *Soit r_P une rotation hyperbolique centrée en P non triviale.*

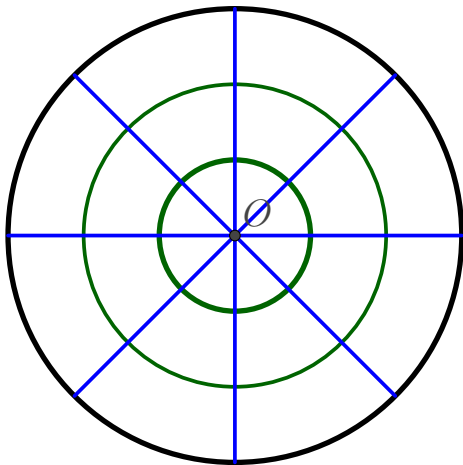
1. *L'unique point fixe dans \mathbb{H}^2 (ou \mathbb{D}^2) de r_P est P , et aucun point du cercle à l'infini n'est un point fixe de r_P .*
2. *L'application r_P échange les droites hyperboliques passant en P , c'est à dire que l'image par r_P d'une droite hyperbolique passant par P reste une droite hyperbolique passant par P .*
3. *L'application r_P laisse fixe les cercles hyperboliques centrés en P .*

Démonstration. Plaçons-nous dans le modèle de \mathbb{D}^2 . Nous pouvons nous restreindre aux rotations centrées en O , qui sont des rotations euclidiennes centrées en O , quitte à appliquer le lemme (6) pour envoyer P sur O .

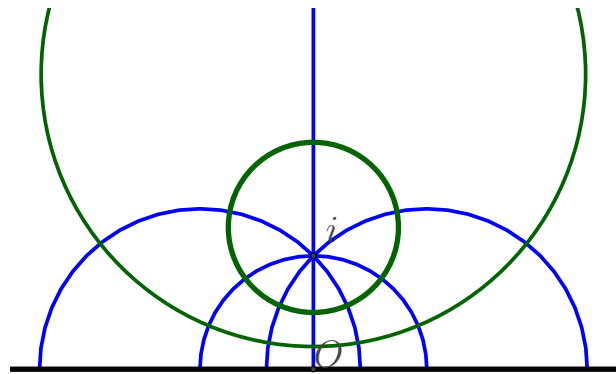
1. Les rotations euclidiennes centrées en O et non triviales ont un unique point fixe O .
2. Les rotations centrées en O et non triviales ont comme unique point fixe O . De plus, il n'y a pas de point fixe sur le cercle à l'infini.
3. Les droites hyperboliques passant par O sont les diamètres du cercle unité, qui sont échangés par les rotations centrés en O , qui sont des rotations euclidiennes.
4. Les cercles hyperboliques centrés en O sont représentés par des cercles euclidiens, qui sont laissés fixes par les rotations centrées en O .

□

Sur les figures qui suivent, les courbes en vert sont les courbes que l'isométrie laisse inchangées, et les courbes en bleu sont celles qui sont échangées.



(a) Rotation centrée en O dans \mathbb{D}^2



(b) Rotation centrée en i dans \mathbb{H}^2

Rotations limites

Définition 52. Une *rotation limite* (aussi appelée rotation autour d'un point idéal) est une isométrie hyperbolique qui peut s'exprimer comme le produit de deux réflexions dont les axes sont asymptotiques.

Exemple 16. Les translations euclidiennes t_{x_0} sont des \mathbb{H}^2 -rotations limites en ∞ . Ces isométries peuvent être obtenues comme le produit de deux réflexions dont les axes sont des demi-droites verticales, qui dans \mathbb{H}^2 sont des droites asymptotiques en ∞ .

Avant de présenter les propriétés des rotations limites centrées en ∞ , nous avons besoin d'introduire la notion d'horocycles, qui comme nous le montrerons, sont des courbes préservées par rotation limite. Tout comme la notion de droites asymptotiques n'a pas d'équivalent en géométrie euclidienne ou sphérique, la notion d'horocycle est propre à la géométrie hyperbolique.

Définition 53. En géométrie hyperbolique, un *horocycle* de centre P' , avec P' un point du cercle à l'infini, est une courbe telle que l'ensemble des droites perpendiculaires à celle-ci sont asymptotiques en P' .

Exemple 17. Dans \mathbb{H}^2 , toutes les droites euclidiennes d'équation $y = y_0$ sont des horocycles de centre ∞ . En effet, les demi-droites verticales sont des \mathbb{H}^2 -droites et sont perpendiculaires aux droites d'équation $y = y_0$ car le modèle \mathbb{H}^2 préserve les angles. De plus, les demi-droites verticales sont toutes asymptotiques en ∞ . Remarquons que ces horocycles d'équation $y = y_0$ ne sont pas des droites hyperbolique.

Les horocycles de \mathbb{H}^2 d'équation $y = y_0$ se représentent dans \mathbb{D}^2 par des cercles tangents en $i = J(\infty)$. En effet, l'application J envoie l'axe OY de \mathbb{H}^2 sur l'axe OY de \mathbb{D}^2 . Les droites euclidiennes $y = y_0$ sont envoyés sur des cercles passant par $J(\infty) = i$, au vu du théorème sur l'inversion par un cercle d'une droite (3). Ainsi, les horocycles $y = y_0$ sont envoyés par J sur des cercles passant par i et perpendiculaires à l'axe OY , ainsi ces cercles sont tangents en i .

Etablissons des propriétés des rotations limites.

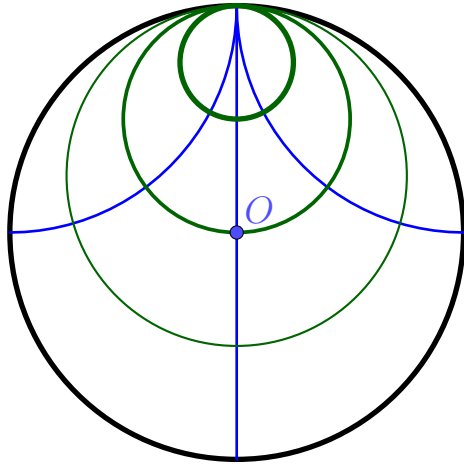
Proposition 59. Soit $r_{P'}$ une rotation limite non triviale autour d'un point P' du cercle à l'infini.

1. L'application $r_{P'}$ a un unique point fixe P' , qui est sur le cercle à l'infini.
2. L'application $r_{P'}$ échange les droites hyperboliques dont un point limite est P' .
3. L'application $r_{P'}$ préserve les horocycles centrés en P' .

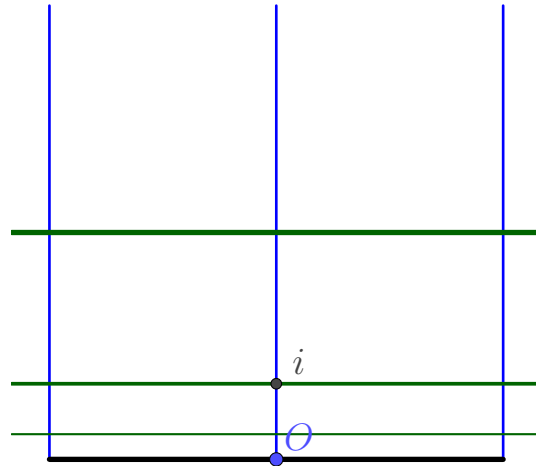
Démonstration. Quitte à utiliser une rotation centrée en O dans \mathbb{D}^2 , nous pouvons supposer que le point P' est i dans \mathbb{D}^2 , ou ∞ dans \mathbb{D}^2 . Ainsi dans \mathbb{H}^2 , la rotation limite est de la forme t_{x_0} avec $x_0 \in \mathbb{R}$, car les seules droites qui ont un point limite en ∞ dans \mathbb{H}^2 sont les demi-droites verticales.

1. Si la rotation limite est non triviale, alors $x_0 \neq 0$ pour l'isométrie t_{x_0} . Ces translations euclidiennes n'ont pas de point fixe, hormis ∞ qui est sur le cercle à l'infini.
2. L'application t_{x_0} échange les demi-droites verticales, qui sont les seules droites qui ont un point limite en ∞ dans \mathbb{H}^2 .
3. Les droites euclidiennes d'équation $y = y_0$ sont préservées par les translations euclidiennes t_{x_0} . Au vu de notre exemple (17), les droites d'équation $y = y_0$ sont des horocycles centrés en ∞ .

□



(c) Rotation limite en i dans \mathbb{D}^2 .



(d) Rotation limite en ∞ dans \mathbb{H}^2 .

Translations hyperboliques

Définition 54. Une *translation hyperbolique* est une isométrie hyperbolique qui peut s'exprimer comme le produit de deux réflexions dont les axes sont perpendiculaires à une même droite L , qui est l'axe de la translation.

Exemple 18. Les dilatation euclidiennes d_ρ sont des \mathbb{H}^2 -translations d'axe OY . En effet, nous pouvons les obtenir comme produit de deux inversions par des cercles centrés en O . Soient $r, R > 0$, le produit de deux telles inversions est donné par

$$I_{O,R} \circ I_{O,r}(z) = I_{O,R} \left(\frac{r^2}{\bar{z}} \right) = \frac{R^2}{r^2} z.$$

Ainsi, si $\frac{R^2}{r^2} = \rho > 0$, l'isométrie d_ρ peut s'exprimer comme le produit de deux réflexions hyperboliques dont les axes sont perpendiculaires à l'axe OY .

L'analogie avec la géométrie euclidienne est le suivant. Nous savons que chaque translation euclidienne selon un vecteur u est le produit de deux réflexions via des droites parallèles, vu la proposition (22), qui sont en fait deux droites perpendiculaires à la direction donnée par u . La droite vectorielle L de direction u est ainsi l'axe de la translation euclidienne.

Remarquons que demander à deux droites hyperboliques à être perpendiculaires à une même droite L est équivalent à demander à ce que les deux droites sont ultra-parallèles. Ainsi, nous aurions pu définir les translations comme étant le produit de deux réflexions dont les axes sont ultra-parallèles, mais la notion d'axe n'aurait pas été aussi claire. Démontrons maintenant le résultat que nous venons d'énoncer.

Proposition 60. Deux droites hyperboliques M et N distinctes sont perpendiculaires à une même droite L si et seulement si M et N sont ultra-parallèles.

Démonstration. Plaçons-nous dans \mathbb{H}^2 .

- Supposons que M et N sont perpendiculaires à une même droite L . Nous savons que nous pouvons ramener la droite L sur l'axe OY , via le lemme (6). Les seules droites perpendiculaires à L sont les demi-cercles centrés en O . Ainsi, comme M et N sont distincts, ce sont deux demi-cercles centrés en O distincts, donc deux droites hyperboliques ultra-parallèles.

2. Avec un choix approprié d'isométries, nous pouvons supposer que M est une demi-droite verticale, et N est un demi-cercle disjoint de M . En effet, si nous avons deux demi-cercles disjoints, nous pouvons effectuer une inversion centrée en un point limite d'un des demi-cercles.

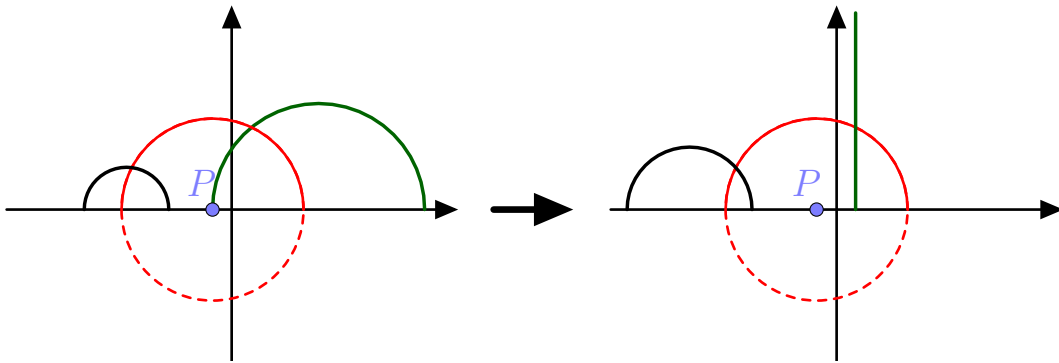


FIGURE 4.10 – Isométrie pour transformer M en une demi-droite verticale

Considérons maintenant les \mathbb{H}^2 -droites perpendiculaires à M et qui intersectent N . Ces dernières forment un angle avec N compris entre 0 et π . Ainsi, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une \mathbb{H}^2 -droite L perpendiculaire à N qui est également perpendiculaire à M .

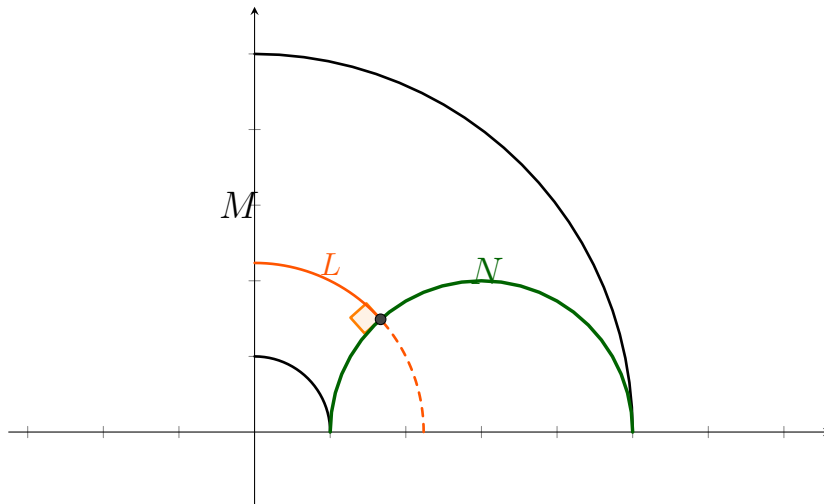


FIGURE 4.11 – Existence de la \mathbb{H}^2 -droite L perpendiculaire à M et N .

□

Intéressons-nous maintenant aux propriétés de ces translations hyperboliques.

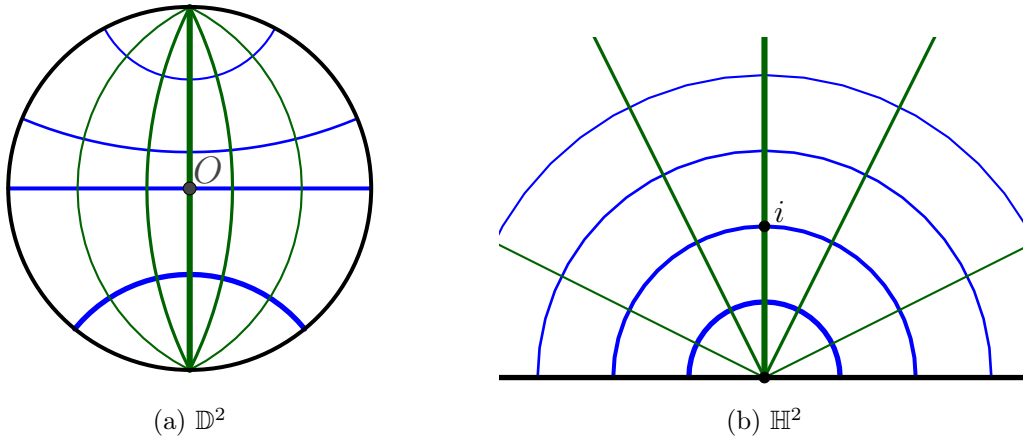
Proposition 61. Soit t_L une translation hyperbolique non triviale d'axe L .

1. L'application t_L n'a que deux points fixes, qui sont les deux extrémités sur le cercle à l'infini de la droite L .
2. L'application t_L échange les droites hyperbolique perpendiculaires à l'axe L .
3. L'application t_L préserve la droite L

Démonstration. Nous pouvons supposer que dans \mathbb{H}^2 , la droite L est l'axe OY , quitte à appliquer le lemme (6). Grâce à l'exemple (18), l'isométrie est de la forme d_ρ avec $\rho > 0$. car les seules droites perpendiculaires à l'axe OY sont les demi-cercles centrés en O .

1. L'isométrie d_ρ est non triviale, ainsi $\rho \neq 1$. Aucun point de \mathbb{H}^2 n'est un point fixe pour d_ρ , et les points O et ∞ , les extrémités de l'axe OY sur le cercle à l'infini, sont des points fixes de d_ρ .
2. Les droites perpendiculaires à l'axe OY sont les demi-cercles centrés en O , qui sont échangés par d_ρ .
3. L'axe OY est évidemment préservé par l'isométrie d_ρ .

□



Réflexions glissées

Exemple 19. Une réflexion glissée dans \mathbb{H}^2 est la composée d'une \mathbb{H}^2 -réflexion et d'une \mathbb{H}^2 -translation, les deux isométries ayant le même axe.

L'axe de la réflexion glissée est laissé invariant, et nous avons deux points fixes sur le cercle à l'infini, qui sont les extrémités à l'infini de l'axe.

Par un même argument que dans le cas euclidien (23), nous pouvons remarquer qu'une réflexion et une translation hyperbolique commutent si elles ont le même axe.

4.7.3 Classification des isométries hyperboliques

Comme décrit précédemment, nous utiliserons le fait que chaque \mathbb{H}^2 -isométrie qui préserve l'orientation est le produit de deux \mathbb{H}^2 -réflexions, et traiterons les différents cas en fonction de la relation entre les deux \mathbb{H}^2 -droites qui définissent ces réflexions. Pour le cas des isométries qui renversent l'orientation, nous aurons besoin d'un lemme.

Lemme 10. Une \mathbb{H}^2 -isométrie \bar{f} qui renverse l'orientation a deux points fixes sur le cercle à l'infini.

Démonstration. Par le théorème (8), nous savons que \bar{f} est de la forme

$$\bar{f}(z) = \frac{\alpha' \bar{z} + \beta'}{\gamma' \bar{z} + \delta'},$$

où $\alpha', \beta', \gamma', \delta' \in \mathbb{R}$ et $\alpha'\delta' - \beta'\gamma' = -1$. Nous cherchons ainsi les solutions réelles (éventuellement ∞) de

$$x = \frac{\alpha'x + \beta'}{\gamma'x + \delta'}.$$

1. Si $\gamma' = 0$, les solutions sont données par

$$x = \frac{\beta'}{\delta' - \alpha'} \quad x = \infty.$$

La première solution existe bien, car $\alpha'\delta' = -1$, ainsi $\alpha' \neq \delta'$ et ∞ est bien une solution car $\alpha' \neq 0$.

2. Dans le cas où $\gamma' \neq 0$, nous sommes amenés à résoudre l'équation $\gamma'x^2 + (\delta' - \alpha')x - \beta' = 0$, dont les solutions sont

$$\begin{aligned} x &= \frac{(\alpha' - \delta') \pm \sqrt{(\delta' - \alpha')^2 + 4\gamma'\beta'}}{2\gamma'} \\ &= \frac{(\alpha' - \delta') \pm \sqrt{(\delta' - \alpha')^2 + 4\alpha'\delta' + 4\gamma'\beta' - 4\alpha'\delta'}}{2\gamma'} \\ &= \frac{(\alpha' - \delta') \pm \sqrt{(\delta'^2 - 2\delta'\alpha' + \alpha'^2 + 4\delta'\alpha') + 4(\beta'\gamma' - \alpha'\delta')}}{2\gamma'} \\ &= \frac{(\alpha' - \delta') \pm \sqrt{(\delta' + \alpha')^2 + 4}}{2\gamma'}. \end{aligned}$$

Comme $(\delta' + \alpha')^2 + 4 > 0$, nous avons deux solutions réelles, donc deux points fixes sur le cercle à l'infini de \mathbb{H}^2 .

□

Nous sommes enfin prêts à démontrer l'analogie en géométrie hyperbolique du théorème de classification des isométries euclidiennes (11).

Théorème 9 (Classification des isométries hyperboliques). *Une isométrie hyperbolique de \mathbb{H}^2 est soit*

1. *Une \mathbb{H}^2 -rotation,*
2. *Une \mathbb{H}^2 -rotation limite,*
3. *Une \mathbb{H}^2 -translation,*
4. *Une \mathbb{H}^2 -réflexion glissée.*

Démonstration. Commençons par traiter les isométries de \mathbb{H}^2 qui préservent l'orientation. Par le théorème des 3 réflexions, une isométrie qui préserve l'orientation est le produit de 2 réflexions. Supposons que cette isométrie n'est pas l'identité, ainsi les deux réflexions sont différentes. Notons L et M les \mathbb{H}^2 -droites associées aux réflexions que nous considérons. Traitons les 3 cas possibles :

1. L et M s'intersectent dans \mathbb{H}^2 ,
2. L et M sont asymptotiques,
3. L et M sont ultra-parallèles.

Cas (1). Par des translations et dilatations euclidiennes, nous pouvons ramener l'intersection de L et M sur i (comme cela a été fait au lemme (6)). Dans \mathbb{D}^2 , l'intersection est ainsi le point O . Nous savons que deux \mathbb{D}^2 -droites qui passent par O sont forcément des diamètres du cercle unité. Ainsi, si nous notons L' et M' les \mathbb{D}^2 -droites associées à L et M , l'application $\bar{r}_{M'} \circ \bar{r}_{L'}$ est la composée de deux symétries axiales qui s'intersectent en O , ce qui rend une rotation centrée en O , comme dans le cas euclidien (22).

Cas (2). Avec un choix approprié d'isométries, nous pouvons supposer que L et M sont des demi-droites verticales, ainsi le point asymptotique commun est ∞ . En effet, si le point asymptotique est sur la droite réelle, alors une inversion du cercle, centré en ce point, permet d'obtenir deux demi-droites verticales, grâce au résultat sur l'inversion d'un cercle généralisé (théorème 3).

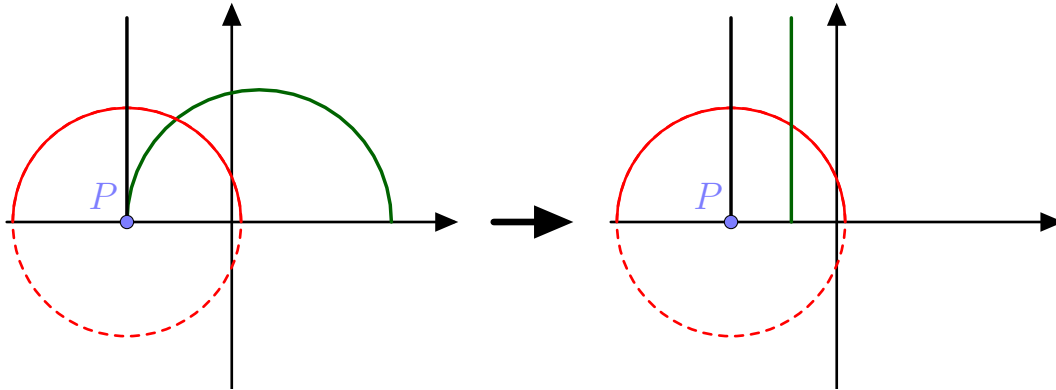


FIGURE 4.12 – Comment obtenir deux droites verticales via inversion du cercle.

Ainsi, L et M sont deux droites verticales, et la composition de deux symétries axiales d'axes parallèles est une translation euclidienne, ou une \mathbb{H}^2 -rotation limite.

Cas (3). Grâce la proposition (60), nous savons que si L et M sont ultra-parallèles, alors il existe une droite N telle que L et M sont perpendiculaires à N . Considérons maintenant une isométrie qui envoie N sur l'axe OY . Par exemple, nous pouvons considérer une inversion centrée en un point limite de N sur l'axe réel, puis une translation pour ramener N sur l'axe OY . Ainsi, L et M sont des demi-cercles centrés en O . Nous avons, pour $r, R > 0$,

$$r_M \circ r_L(z) = I_{O,R} \circ I_{O,r}(z) = I_{O,R} \left(\frac{r^2}{\bar{z}} \right) = \frac{R^2}{r^2} z,$$

donc l'isométrie est une \mathbb{H}^2 -translation.

Cas (4). Si maintenant nous prenons une isométrie \bar{f} qui renverse l'orientation, nous savons par le lemme (10) que \bar{f} possède deux points fixes sur le cercle à l'infini. Soit L la \mathbb{H}^2 -droite qui relie ces deux points à l'infini, et posons $f := \bar{f} \circ \bar{r}_L$. L'application \bar{r}_L est une isométrie qui fixe les deux points à l'infini de L , ainsi f est une isométrie qui préserve l'orientation et qui fixe également les deux points à l'infini de L .

Si nous passons en revue les 3 cas possibles que nous venons de détailler pour une isométrie qui préserve l'orientation, nous nous apercevons que la seule qui préserve les extrémités à l'infini d'une \mathbb{H}^2 -droite est la dilatation d_ρ , ou de manière générale les \mathbb{H}^2 -translations. Ainsi, f est une \mathbb{H}^2 -translation d'axe L , donc $\bar{f} = f \circ \bar{r}_L$ est une réflexion glissée d'axe L par définition. \square

4.8 Aire d'un triangle hyperbolique

De manière similaire à l'aire d'un triangle sphérique (5), l'aire d'un triangle hyperbolique ne dépend que de ses 3 angles. Nous savons que la somme des angles intérieurs d'un triangle euclidien vaut π (2.7.2), tandis qu'en géométrie sphérique, cette somme est strictement supérieure à π . En géométrie hyperbolique, nous verrons que cette somme est strictement inférieure à π et qu'elle peut même valoir 0.

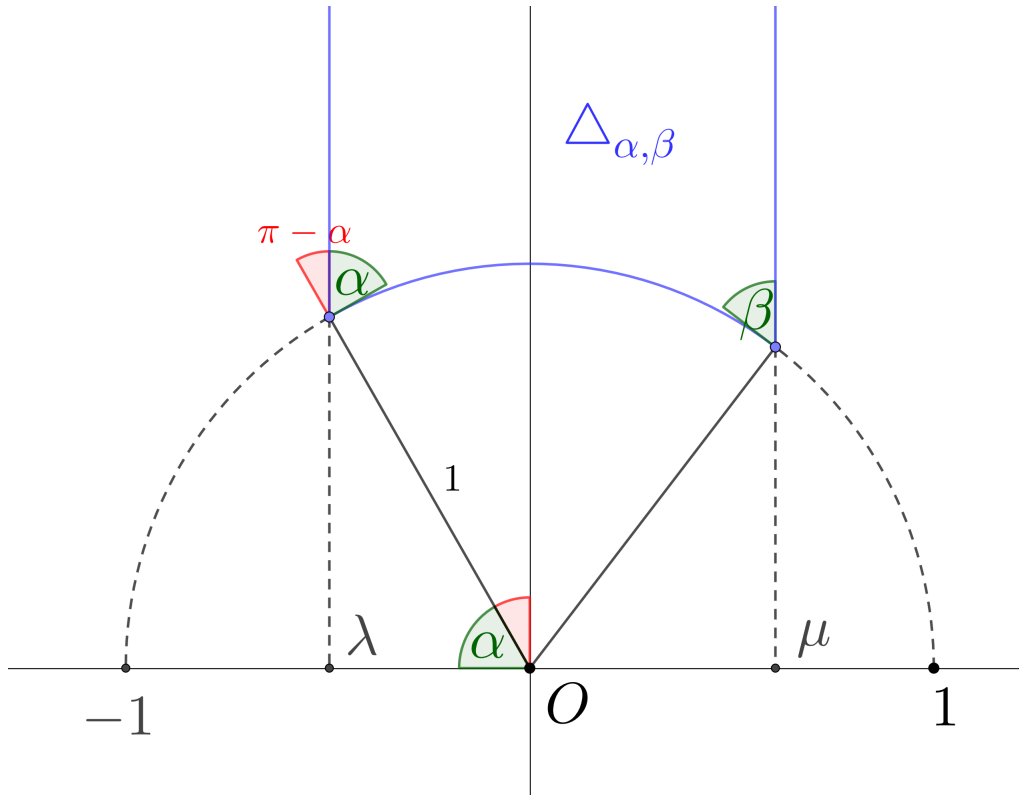


FIGURE 4.13 – Région délimitée par un segment hyperbolique et deux segments de droites asymptotiques en ∞ .

Nous souhaitons calculer l'aire d'un triangle hyperbolique. Nous allons procéder par décomposition, en exprimant l'aire d'un triangle comme la différence d'aires de deux régions délimitées par deux demi-droites verticales et un segment hyperbolique.

Proposition 62. Soient A et B deux points distincts de \mathbb{H}^2 , qui n'appartiennent pas à une même demi-droite verticale. Notons $\Delta_{\alpha\beta}$ la région supérieure de \mathbb{H}^2 délimitée par le segment hyperbolique $[AB]_{\mathbb{H}^2}$ et les deux demi-droites verticales passant par A et B , montré à la figure (4.13). Notons α (respectivement β) l'angle en A et intérieur à la région $\Delta_{\alpha\beta}$. Alors l'aire de la région $\Delta_{\alpha\beta}$ est donnée par

$$\mathcal{A}_{\mathbb{H}^2}(\Delta_{\alpha\beta}) = \pi - \alpha - \beta.$$

Démonstration. Le segment hyperbolique $[AB]_{\mathbb{H}^2}$ est un arc de cercle centré en $x_0 \in \mathbb{R}$, ainsi nous pouvons supposer que les points A et B de \mathbb{H}^2 de ce triangle se trouvent sur le cercle unité, quitte à utiliser une translation et dilatation euclidiennes. Notons λ (respectivement μ) la projection de A (resp. B) sur l'axe réel. L'aire de la région est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mathbb{H}^2}(\Delta_{\alpha\beta}) &= \int \int_{\Delta_{\alpha\beta}} \frac{1}{y^2} dx dy \\ &= \int_{\lambda}^{\mu} dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{+\infty} \frac{1}{y^2} dy \\ &= \int_{\lambda}^{\mu} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx. \end{aligned}$$

Nous avons au vu de la figure (4.13),

$$\lambda = \cos(\pi - \alpha), \quad \mu = \cos(\beta),$$

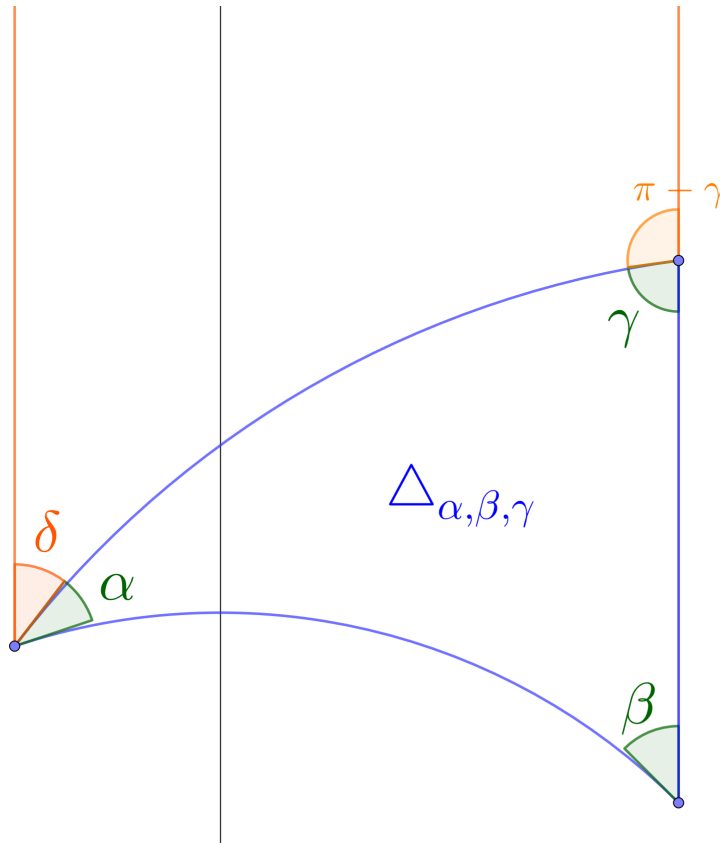


FIGURE 4.14 – Décomposition d'un triangle hyperbolique en deux triangles asymptotiques en ∞ .

ainsi via le changement de variables $x = \cos \theta$, nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mathbb{H}^2}(\Delta_{\alpha\beta}) &= \int_{\lambda}^{\mu} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{\pi-\alpha}^{\beta} \frac{-\sin \theta}{\sin \theta} d\theta \\ &= \pi - \alpha - \beta. \end{aligned}$$

□

Nous pouvons ainsi calculer l'aire d'un triangle hyperbolique, avec la décomposition montrée dans la figure (4.14).

Proposition 63. *L'aire d'un triangle hyperbolique d'angles α, β et γ est donné par*

$$\mathcal{A}_{\mathbb{H}^2}(\Delta_{\alpha\beta\gamma}) = \pi - \alpha - \beta - \gamma.$$

Démonstration. Nous pouvons envoyer n'importe quelle \mathbb{H}^2 -droite sur l'axe OY via une isométrie hyperbolique (lemme 6), ainsi nous pouvons supposer que les sommets associés à α et γ sont sur une même droite verticale, comme montré à la figure (4.14). L'aire du triangle $\Delta_{\alpha\beta\gamma}$ peut ainsi être calculée via la différence d'aire de deux régions dont nous avons calculé l'aire dans la proposition (62). Nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mathbb{H}^2}(\Delta_{\alpha\beta\gamma}) &= \mathcal{A}(\Delta_{\alpha,\beta+\delta}) - \mathcal{A}(\Delta_{\pi-\gamma,\delta}) \\ &= (\pi - \alpha - (\beta + \delta)) - (\pi - (\pi - \gamma) - \delta) \\ &= \pi - \alpha - \beta - \gamma. \end{aligned}$$

□

Remarque 32. Remarquons que nous pouvons donner du sens à l'angle non-orienté entre deux droites hyperboliques asymptotiques. En effet, dans \mathbb{D}^2 , deux droites asymptotiques sont simplement deux arcs de cercle généralisé perpendiculaires au cercle unité en un même point. Du point de vue euclidien, ces arcs de cercle généralisé forment donc un angle nul. Ainsi nous dirons que l'angle entre deux droites asymptotiques est nul.

Cette remarque nous permet de voir le résultat (62) comme un cas particulier de la formule de l'aire d'un triangle, où deux des côtés de $\Delta_{\alpha,\beta}$ sont asymptotiques en ∞ et forment donc un angle nul.

Notons de plus que le calcul de l'aire effectué à la proposition (62) a du sens si les angles α et β sont nuls, c'est à dire si les points du triangle sont -1 , 1 et ∞ , qui sont des points idéaux. Un tel triangle a ainsi trois angles nuls et une aire égale à π . Cela nous permet donc de conclure que la formule donnée par (63) a du sens si les angles α, β et γ sont nuls.

Des triangles semblables, donc de mêmes angles, en géométrie euclidienne ne sont pas forcément isométriques, comme discuté dans la section (2.7.3). Toutefois, en géométrie hyperbolique cela est vrai.

Proposition 64. *Soient deux triangles hyperboliques ΔABC et $\Delta A'B'C'$, d'angles respectivement égaux. Alors ces deux triangles sont isométriques.*

Démonstration. Travaillons dans le modèle \mathbb{H}^2 . Comme nous pouvons déplacer n'importe quelle droite sur l'axe OY via le lemme (6), nous pouvons supposer que les droites hyperboliques AB et $A'B'$ sont égales et sont données par l'axe OY . Nous pouvons de plus supposer que $A = A' = i$.

Comme l'angle en A est égal à l'angle en A' , la droite AC est égale à la droite $A'C'$, quitte à effectuer une réflexion selon AB . En effet, pour une droite donnée L passant par un point P , il n'existe que deux droites hyperboliques qui passent par P et formant un angle α avec L . Cela est clair quand nous nous plaçons dans \mathbb{D}^2 et prenons $P = O$.

Nous allons montrer que les triangles ont des longueurs de côté égales 2 à 2. Supposons par l'absurde que $d_{\mathbb{H}^2}(A, B) < d_{\mathbb{H}^2}(A, B')$. Notons d_ρ la dilatation euclidienne centrée en O et qui envoie B sur B' , nous avons $\rho > 1$ vu ce que nous avons supposé sur B' et B . Comme les angles en B et B' sont égaux et valent β , l'isométrie d_ρ envoie la droite BC sur la droite $B'C'$, de nouveau car une droite hyperbolique est déterminée par un point et un angle, et que les isométries conservent les angles.

Comme $\rho > 1$, le triangle ΔABC est strictement inclus dans le triangle $\Delta A'B'C'$, dans le sens où $\Delta A'B'C' \setminus \Delta ABC$ contient un ouvert non vide. Ainsi, l'aire de $\Delta A'B'C'$ est strictement supérieure à celle de ΔABC , ce qui est en contradiction avec la formule d'aire des triangles qui ne dépend que des 3 angles (63).

Par conséquent, les triangles ΔABC et $\Delta A'B'C'$ ont des longueurs de côté égales 2 à 2. Cela implique que dans notre situation initiale, $A' = A$, $B' = B$ et $C' = C$, donc que les triangles sont isométriques. \square

Chapitre 5

Le théorème de Killing-Hopf

Le théorème de Killing-Hopf est un théorème qui met en évidence l'importance des modèles que nous avons étudiés jusqu'à présent. Notre démonstration reposera sur des propriétés qui sont vérifiées en géométrie euclidienne, sphérique et hyperbolique en dimension 2. Le théorème met en lien les surfaces qui sont localement isométriques à \mathbb{R}^2 , \mathbb{S}^2 ou \mathbb{H}^2 et les surfaces qui s'obtiennent comme un quotient de \mathbb{R}^2 , \mathbb{S}^2 ou \mathbb{H}^2 par un groupe d'isométries. D'autres hypothèses et notions sont nécessaires à donner l'énoncé complet, et seront le sujet des sections suivantes.

5.1 Surfaces euclidiennes

Avant de nous intéresser au théorème de Killing-Hopf, nous souhaitons introduire les notions nécessaires pour formuler son énoncé. Définissons tout d'abord la notion de surface euclidienne. Il sera question dans la sous-section qui suit d'étudier un exemple pour nous familiariser avec les notions de quotients par un groupe d'isométries.

Définition 55. Une surface riemannienne (S, g) est *euclidienne* si chaque point de S possède un voisinage ouvert V_p qui est isométrique à un disque ouvert de \mathbb{R}^2 .

Remarque 33. Le théorème de Killing-Hopf est généralement énoncé en terme de courbure de Gauss constante. Ainsi une surface euclidienne serait défini comme étant une surface de courbure de Gauss nulle. Le fait qu'être de courbure de Gauss nulle implique que chaque point admet un voisinage ouvert isométrique à un disque ouvert de \mathbb{R}^2 est démontré dans le corollaire 10.15 de la référence Lee (2019e), qui démontre le résultat beaucoup plus général en dimension n , et pour une courbure négative, nulle ou positive.

Un exemple trivial est évidemment donné par \mathbb{R}^2 euclidien, mais nous souhaitons maintenant nous intéresser au cylindre en tant que surface euclidienne.

5.1.1 Le cylindre en tant que surface euclidienne

Définissons tout d'abord le cylindre en tant que surface plongée dans \mathbb{R}^3 et montrons que cette surface est euclidienne.

Exemple 20. Définissons le cylindre comme la surface définie par

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Un paramétrage local du cylindre est donné par

$$\begin{aligned} \phi :]0, 2\pi[\times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, z) &\mapsto (\cos \theta, \sin \theta, z), \end{aligned}$$

qui est un difféomorphisme entre $]0, 2\pi[$ et le cylindre privé de la droite verticale passant par $(1, 0, 0)$. C'est également une isométrie, car le produit scalaire euclidien est préservé. En effet, calculons la première forme fondamentale, qui est la métrique induite par \mathbb{R}^3 sur le cylindre. Nous avons pour les dérivées partielles

$$\begin{aligned}\partial_\theta\phi &= (-\sin\theta, \cos\theta, 0) \\ \partial_z\phi &= (0, 0, 1),\end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned}E &= \partial_\theta\phi \cdot \partial_\theta\phi = 1 \\ F &= \partial_\theta\phi \cdot \partial_z\phi = 0 \\ F &= \partial_z\phi \cdot \partial_z\phi = 1,\end{aligned}$$

qui est exactement le produit scalaire euclidien.

Nous souhaitons maintenant traiter l'exemple du cylindre en tant que quotient de \mathbb{R}^2 . Nous pourrions définir le cylindre (en tant qu'ensemble) comme étant le sous-ensemble $[0, 1] \times \mathbb{R}$ de \mathbb{R}^2 , où nous identifions les bords $x = 0$ et $x = 1$. Cette construction a le désavantage d'assigner des rôles différents aux bords. Ainsi il semble naturel de munir \mathbb{R}^2 de la relation d'équivalence \mathcal{R}_C , définie par

$$(x_P, y_P)\mathcal{R}_C(x_Q, y_Q) \Leftrightarrow y_P = y_Q \text{ et } x_Q - x_P \in \mathbb{Z}.$$

Au lieu de donner explicitement une relation d'équivalence, nous allons considérer un groupe d'isométries Γ de \mathbb{R}^2 qui est tel que les éléments d'une même classe d'équivalence pour \mathcal{R}_C appartiennent à une même orbite pour Γ .

Définition 56. 1. Notons $\Gamma = \langle t_{(1,0)} \rangle$, le groupe agissant sur \mathbb{R}^2 , engendré par la translation euclidienne $t_{(1,0)}$.

2. Le cylindre C est défini comme l'ensemble des Γ -orbites de \mathbb{R}^2 ,

$$C = \{\Gamma(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Nous notons $C = \mathbb{R}^2 / \Gamma$.

3. La distance d_C sur le cylindre C est définie comme étant la distance usuelle entre ensembles

$$d_C(\Gamma P, \Gamma Q) = \inf\{d_{\mathbb{R}^2}(P', Q') : P' \in \Gamma P, Q' \in \Gamma Q\}$$

Nous souhaitons maintenant montrer que d_C définit une distance qui est localement euclidienne, c'est à dire que tout point admet un voisinage qui est en bijection avec un disque ouvert de \mathbb{R}^2 , et tel que cette bijection préserve la distance.

Proposition 65. 1. La fonction d_C peut se réécrire

$$d_C(\Gamma P, \Gamma Q) = \inf\{d_{\mathbb{R}^2}(P, Q') : Q' \in \Gamma Q\} \tag{5.1}$$

2. La borne inférieure de la définition de d_C est réalisée, ainsi

$$d_C(\Gamma P, \Gamma Q) = \min\{d_{\mathbb{R}^2}(P, Q') : Q' \in \Gamma Q\}.$$

3. La fonction d_C vérifie les conditions pour être une distance.

Démonstration. 1. Les éléments de Γ sont des isométries de \mathbb{R}^2 et préservent ainsi la distance euclidienne. Nous avons donc

$$\begin{aligned} d_C(\Gamma P, \Gamma Q) &= \inf\{d_{\mathbb{R}^2}(P', Q') : P' \in \Gamma P, Q' \in \Gamma Q\} \\ &= \inf\{d_{\mathbb{R}^2}(g(P), g'(Q)) : g, g' \in \Gamma\} \\ &= \inf\{d_{\mathbb{R}^2}(g(P), g \circ g^{-1} \circ g'(Q)) : g, g' \in \Gamma\} \\ &= \inf\{d_{\mathbb{R}^2}(P, g''(Q)) : g'' \in \Gamma\} \\ &= \inf\{d_{\mathbb{R}^2}(P, Q') : Q' \in \Gamma Q\}. \end{aligned}$$

2. Grâce à l'égalité (5.1), nous devons calculer la distance sur \mathbb{R}^2 entre un point P et l'orbite par Γ de Q . L'orbite de $Q := (x_Q, y_Q)$ est en fait donnée par

$$\text{orb}(Q) = \{(x_Q + k, y_Q) : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Chaque point $Q' \in \text{orb}(Q)$ appartient au disque $D(Q') := D(Q', 1/3)$ pour la distance de \mathbb{R}^2 , et $D(Q')$ ne contient aucun autre point de $\text{orb}(Q)$. Ainsi $\text{orb}(Q)$ contient les limites de ses suites convergentes et est donc fermé. La distance de $\text{orb}(Q)$ à P est la distance d'un fermé à un compact, donc est réalisée.

3. Les propriétés de distance pour d_C découlent essentiellement du fait que la distance euclidienne vérifie les propriétés de distance (4).

— Pour la propriété de séparation, il est direct que $d_C(\Gamma P, \Gamma P) = 0$. Si maintenant nous avons $d_C(\Gamma P, \Gamma Q) = 0$, alors par l'égalité (5.1), nous avons

$$d_C(\Gamma P, \Gamma Q) = \min\{d_{\mathbb{R}^2}(P, Q') : Q' \in \Gamma Q\} = 0,$$

ce qui implique que $P \in \Gamma Q$ par le fait que $d_{\mathbb{R}^2}$ a la propriété de séparation. Ainsi, $\Gamma P = \Gamma Q$.

— Pour la propriété de symétrie, nous avons immédiatement

$$\begin{aligned} d_C(\Gamma P, \Gamma Q) &= \min\{d_{\mathbb{R}^2}(P', Q') : P' \in \Gamma P, Q' \in \Gamma Q\} \\ &= \min\{d_{\mathbb{R}^2}(Q', P') : P' \in \Gamma P, Q' \in \Gamma Q\} \\ &= d_C(\Gamma Q, \Gamma P). \end{aligned}$$

— Pour l'inégalité triangulaire, nous avons, en utilisant de nouveau l'égalité (5.1),

$$\begin{aligned} d_C(\Gamma P, \Gamma Q) + d_C(\Gamma Q, \Gamma R) &= \min\{d_{\mathbb{R}^2}(P', Q) : P' \in \Gamma P\} + \min\{d_{\mathbb{R}^2}(Q, R') : R' \in \Gamma R\} \\ &= \min\{d_{\mathbb{R}^2}(P', Q) + d_{\mathbb{R}^2}(Q, R') : P' \in \Gamma P, R' \in \Gamma R\} \\ &\geq \min\{d_{\mathbb{R}^2}(P', R') : P' \in \Gamma P, R' \in \Gamma R\} \\ &= d_C(\Gamma P, \Gamma R). \end{aligned}$$

□

Nous en tirons le résultat suivant.

Corollaire 21. *Le cylindre C muni de la distance d_C définie en (56) est localement isométrique, au sens des espaces métriques, à \mathbb{R}^2 .*

Démonstration. Le cylindre C en tant qu'ensemble d'orbites pour Γ muni de la distance d_C est un espace métrique vu la proposition (65).

De plus, chaque point admet un voisinage isométrique, au sens des espaces métriques, à un disque ouvert de \mathbb{R}^2 . Nous avons $d_C(\Gamma P, \Gamma Q) < 1/3$ si et seulement si il existe $Q' \in \Gamma Q$ tel que $d_{\mathbb{R}^2}(P, Q') < 1/3$. Si un tel Q' existe, il est unique car tout élément g de Γ différent de l'identité envoie chaque point sur un autre point à distance plus grande ou égale à 1. Nous avons donc une bijection f entre

$$D_C(\Gamma P, 1/3) := \{\Gamma Q : d_C(\Gamma P, \Gamma Q) < 1/3\}, \quad \text{et} \quad D_{\mathbb{R}^2}(P, 1/3) := \{Q' : d_{\mathbb{R}^2}(P, Q') < 1/3\}.$$

Cette bijection entre $D_C(\Gamma P, 1/3)$ et $D_{\mathbb{R}^2}(P, 1/3)$ préserve les distances au vu de la définition de d_C . En effet, pour calculer $d_C(\Gamma A, \Gamma B)$ avec $\Gamma A, \Gamma B \in D_C(\Gamma P, 1/3)$, nous devons trouver B' dans l'orbite de B qui est le plus proche (pour $d_{\mathbb{R}^2}$) de A . Ce B' est donné par l'unique point qui appartient à l'orbite de B et au disque $D_{\mathbb{R}^2}(P, 1/3)$, qui est $f(\Gamma B)$, ainsi f préserve les distances. □

Remarque 34. Nous n'allons pas développer la notion de variété riemannienne quotient dans ce travail. Celle-ci est traitée dans Lee (2019f) et nous permettrait d'associer une métrique au quotient \mathbb{R}^2/Γ , et de montrer que l'isométrie est une isométrie au sens riemannien, ce qui montrerait que le cylindre est une surface euclidienne. Toutefois, l'isométrie au sens espaces métriques est directe vu ce que nous avons montré.

Quand nous nous donnons un quotient d'un ensemble E , il est pratique de se concentrer sur un sous-ensemble qui ne contient qu'un représentant de chaque classe.

Définition 57. Une région fondamentale F pour un quotient \mathbb{R}^2/Γ est une partie F qui intersecte chaque Γ -orbite et telle que l'intérieur de F contient au plus un représentant de chaque Γ -orbite.

Nous voyons ainsi qu'une région fondamentale du cylindre est donnée par $[0, 1[\times \mathbb{R}$, mais que tout ensemble de la forme $[x_0, x_0 + 1[\times \mathbb{R}$ avec $x_0 \in \mathbb{R}$ est également une région fondamentale.

5.2 Propriétés partagées par la géométrie euclidienne, sphérique et hyperbolique de dimension 2

Comme nous souhaitons démontrer le théorème de Killing-Hopf non pas seulement pour les surfaces qui sont localement isométriques à \mathbb{R}^2 , mais également celles qui sont localement isométriques à \mathbb{S}^2 ou \mathbb{H}^2 , nous souhaitons unifier les terminologies et rassembler les résultats que nous avons démontré dans la géométrie euclidienne, sphérique et hyperbolique de dimension 2.

Définition 58.

- Nous nous fixons Σ , qui est égal à \mathbb{R}^2 euclidien, \mathbb{S}^2 ou \mathbb{H}^2 .
- Une droite de Σ est une droite dans le modèle correspondant. Des points sont alignés s'il existe une droite de Σ passant par eux.
- Une surface est *géométrique*^a si elle est localement isométrique à Σ .

a. Nous empruntons la terminologie de John Stillwell

Énonçons donc les résultats communs aux 3 géométries que nous avons rencontrés jusqu'à présent, dans un langage unifié.

Proposition 66. 1. Par deux points différents de Σ (et non antipodaux pour \mathbb{S}^2) passe une unique droite.
 2. Une droite de Σ est le lieu des points équidistants à deux points distincts. De manière réciproque, le lieu des points équidistants à deux points distincts est une droite.
 3. Les isométries de Σ préservent les droites

Démonstration. 1. Il s'agit des résultats (1), (31) et (49) respectivement pour la géométrie euclidienne, sphérique et hyperbolique.
 2. Ces caractérisations sont établies dans les propositions (21), (30) et (53) respectivement pour la géométrie euclidienne, sphérique et hyperbolique.
 3. Il s'agit des résultats (6) et (20) respectivement pour la géométrie euclidienne et hyperbolique. Pour la géométrie sphérique, cela est du fait que les isométries de \mathbb{R}^3 préservent les plans, et que les grands cercles sont les intersections des plans passant par O avec la sphère. □

Remarque 35. Pour éviter le problème des points antipodaux de \mathbb{S}^2 , certains auteurs préfèrent travailler sur le plan elliptique, c'est à dire le quotient de \mathbb{S}^2 par l'application antipodale. Cela permet ainsi d'unifier d'autres résultats, comme le fait que l'intersection de deux droites est soit vide, soit donne un unique point.

Intéressons-nous aux propriétés des disques de Σ , qui sont définies à partir de la distance $d_{\mathbb{R}^2}$, $d_{\mathbb{S}^2}$ ou $d_{\mathbb{H}^2}$ que nous avons établies dans les sections précédentes.

Proposition 67. 1. Σ est un espace métrique pour d_{Σ} .
 2. Tout disque ouvert de Σ contient trois points non alignés

Démonstration. 1. Il s'agit des résultats (4), (13) et (51) respectivement pour la géométrie euclidienne, sphérique et hyperbolique.
 2. Pour \mathbb{R}^2 , il suffit de considérer le centre P_1 du disque, un autre point P_2 du disque et un point P_3 à même distance de P_1 que P_2 , et telle que la droite P_1P_2 forme un angle droit avec P_1P_3 . Dans \mathbb{S}^2 , le raisonnement est identique.
 Dans \mathbb{H}^2 , le raisonnement considéré marche également, quitte à travailler dans le modèle \mathbb{D}^2 et prendre $P_1 = O$, car les \mathbb{D}^2 -droites passant par O sont des diamètres du cercle unité. □

Enfin, établissons les propriétés spécifiques aux isométries de Σ .

Proposition 68. 1. Une isométrie de Σ est entièrement déterminée par l'image de trois points non alignés
 2. Deux isométries sur un disque ouvert D de Σ égales en 3 points non alignés sont égales sur D
 3. Toute isométrie définie sur un disque ouvert de Σ peut être étendue de manière unique en une isométrie de Σ .

Démonstration. 1. Il s'agit du résultat (7) qui se généralise en géométrie sphérique et hyperbolique au vu de la caractérisation des droites comme lieu des points équidistants à deux points distincts.

2. Il s'agit de répliquer l'argument utilisé pour montrer (7), mais sur un disque ouvert. Soient f_1, f_2 deux isométries sur un disque ouvert de Σ , égales en A, B, C des points non alignés de D . Supposons par l'absurde qu'il existe $P \in D$ tel que $f_1(P) \neq f_2(P)$. Dans ce cas, le lieu des points équidistants à $f_1(P)$ et $f_2(P)$ est une droite, par (66), donc un segment de droite quand nous la recoupons avec le disque D . Cela implique que $f_1(A) = f_2(A)$ est à même distance de $f_1(P)$ et $f_2(P)$, car

$$\begin{aligned} d_\Sigma(f_1(A), f_1(P)) &= d_\Sigma(A, P) \\ d_\Sigma(f_1(A), f_2(P)) &= d_\Sigma(f_2(A), f_2(P)) = d_\Sigma(A, P), \end{aligned}$$

ainsi les points $f_1(A), f_1(B)$ et $f_1(C)$ sont sur une même droite. Or, ces points sont non alignés, car nous avons supposé que A, B et C ne l'étaient pas et les isométries préservent les droites, d'où une absurdité.

3. Soit f une isométrie définie sur un disque ouvert D de Σ . Prenons trois points non alignés A, B et C de D et considérons l'unique isométrie f_{ABC} de Σ telle que

$$f_{ABC}(A) = f(A), \quad f_{ABC}(B) = f(B), \quad f_{ABC}(C) = f(C).$$

L'existence vient du théorème des 3 réflexions, qui est valide dans \mathbb{R}^2 (1), \mathbb{S}^2 (2) et \mathbb{H}^2 (7), et l'unicité vient du point précédent.

Cette extension ne dépend pas des 3 points choisis dans D . En effet, supposons avoir A', B', C' d'autres points non alignés de D , et montrons que $f_{ABC} = f_{A'B'C'}$. Par ce que nous venons de montrer, les isométries f_{ABC} et $f_{A'B'C'}$ sont égales à f sur D , donc $f_{ABC} = f_{A'B'C'}$ sur D .

Supposons par l'absurde qu'il existe $P \in \Sigma$ tel que $f_{ABC}(P) \neq f_{A'B'C'}(P)$, alors il existe $Q \in \{A, B, C\}$ tel que $f_{ABC}(Q) \neq f_{A'B'C'}(Q)$. Si ce n'était pas le cas, $f_{A'B'C'}$ serait égale à f_{ABC} sur Σ car de nouveau, une isométrie de Σ est déterminée de manière unique par l'image de 3 points non alignés. Donc f_{ABC} et $f_{A'B'C'}$ sont différents en A, B ou C , ce qui n'est pas possible, car sur D , f_{ABC} et $f_{A'B'C'}$ sont égaux. □

5.3 Surfaces quotients

Nous nous intéressons maintenant à généraliser l'exemple du cylindre vu comme un quotient de \mathbb{R}^2 par un groupe d'isométries. Nous avons dans cet exemple défini une distance d_Γ à partir de ce groupe et montré qu'elle est localement euclidienne, c'est à dire que chaque point sur le quotient admet un disque ouvert pour la distance d qui est isométrique, au sens des espaces métriques, à un disque ouvert de \mathbb{R}^2 .

De manière générale, pour un groupe Γ d'isométrie de Σ , nous définissons la distance entre deux orbites via la distance de Σ de la manière habituelle, comme étant

$$d_\Gamma(\Gamma P, \Gamma Q) = \inf\{d_\Sigma(P', Q') : P' \in \Gamma P, Q' \in \Gamma Q\}. \quad (5.2)$$

Évidemment, nous pouvons toujours considérer l'ensemble des orbites par Γ , mais rien ne nous garantit que l'application d_Γ définie en (5.2) ait sa borne inférieure réalisée comme dans le cas du cylindre, et que la distance soit localement euclidienne, sphérique ou hyperbolique.

Tout d'abord, remarquons que si nous avons deux Γ -orbites différentes mais qui ont même point limite, alors la borne inférieure qui définit la distance n'est pas réalisée, et que la fonction d_Γ n'est plus une distance, car elle ne vérifie plus la propriété de séparation.

De plus, si nous essayons de prendre le quotient de \mathbb{R}^2 par le groupe G généré par la rotation d'angle π et centrée en O , alors le disque centré en O de \mathbb{R}^2/G et de rayon ϵ ne peut jamais être isométrique à un disque de rayon ϵ dans \mathbb{R}^2 , car la circonférence du premier est de $\pi\epsilon$ et non de $2\pi\epsilon$.

Ces deux remarques motivent les définitions qui suivent pour les actions de groupe. La première condition nous permet d'exclure le cas d'orbite avec un point limite.

Définition 59. Soit Γ une action de groupe agissant sur Σ .

1. Un point Q est un *point limite* pour ΓP si tout voisinage de Q contient un nombre infini de points de ΓP .
2. Une action de groupe est *proprement discontinue* sur Σ si pour tout point P de Σ , l'orbite ΓP ne possède pas de point limite.

La deuxième condition exclut le cas des isométries possédant un point fixe.

Définition 60. Une action de groupe Γ est dite *libre* si le stabilisateur de P est réduit au neutre de Γ , pour tout P de Σ .

Remarque 36. Notons qu'imposer à un groupe Γ d'isométries d'agir de manière libre sur Σ impose que chaque isométrie de Γ ne possède pas de points fixes. Ainsi, ce groupe ne peut pas contenir de rotations ni de réflexions.

Les groupes d'isométries qui vont nous intéresser seront ceux qui agissent de manière libre et proprement discontinue sur Σ . La proposition qui suit justifie cela.

Proposition 69. • Si Γ est un groupe d'isométries de Σ , alors l'action de Γ sur Σ est proprement discontinue et libre si et seulement si chaque point P de Σ possède un voisinage V_P dans lequel chaque point appartient à une Γ -orbite différente.

- Si Γ est un groupe d'isométries de Σ qui agit de manière proprement discontinue, alors la borne inférieure

$$\inf\{d_\Sigma(P', Q') : P' \in \Gamma P, Q' \in \Gamma Q\}$$

est réalisée.

Démonstration. • 1. Soit Γ un groupe qui agit de manière proprement discontinue et libre et soit P dans Σ . Comme Γ agit de manière proprement discontinue, P n'est pas un point limite de ΓP , ainsi il existe $\delta > 0$ tel que tous les points dans $\Gamma P \setminus \{P\}$ sont à une distance supérieure ou égale à δ de P . Comme Γ agit de manière libre, $g(P)$ est à une distance supérieure ou égale à δ de P pour $g \in \Gamma \setminus \{1\}$. Ainsi, si nous définissons V_P comme étant le disque ouvert centré en P et de rayon $\delta/3$ dans \mathbb{R}^2 , alors l'image de V_P par g est un disque disjoint de V_P . En effet, un point Q qui appartient à V_P et $g(V_P)$ vérifie

$$\begin{cases} d_\Sigma(P, Q) < \frac{\delta}{3} \\ d_\Sigma(g(P), Q) < \frac{\delta}{3} \end{cases} \Rightarrow d_\Sigma(P, g(P)) \leq d_\Sigma(P, Q) + d_\Sigma(g(P), Q) < \frac{2\delta}{3},$$

ce qui est absurde car $d_\Sigma(P, g(P)) = \delta$. Comme les points de V_P sont envoyés par g sur un disque disjoint de V_P , et ce pour tout g différent de l'identité, V_P ne peut contenir deux

points appartenant à la même Γ -orbite.

2. De manière réciproque, supposons que chaque point de Σ possède un voisinage où chaque point de ce voisinage appartient à une Γ -orbite différente. Supposons par l'absurde que l'action de Γ ne soit pas proprement discontinue. Alors il existe P dans Σ tel que $\text{orb}(P)$ ait un point limite Q associé. Ce point limite Q contredit l'hypothèse fixée, car tout voisinage de Q possède une infinité de points de la même orbite, qui est l'orbite de P .

Supposons maintenant par l'absurde que l'action de Γ ne soit pas libre. Alors il existe Q un point de Σ et $g \in \Gamma \setminus \{1\}$ tel que $g(Q) = Q$. Comme l'isométrie g est différente de l'identité, g est également différent de l'identité sur n'importe quel voisinage de Q . En effet, un voisinage contient trois points non alignés et une isométrie de Σ est entièrement déterminée par l'image de 3 points non alignés. Par conséquent nous pouvons trouver un point non fixé par g dans tout voisinage de Q . Fixons-nous un voisinage V_Q de Q et considérons R un point de V_Q tel que $g(R) \neq R$. Le point Q étant un point fixe de g , nous avons les égalités suivantes :

$$d_\Sigma(R, Q) = d_\Sigma(g(R), g(Q)) = d_\Sigma(g(R), Q),$$

du fait que g est une isométrie. Au vu de ces égalités, si nous prenons R suffisamment proche de Q , alors $g(R)$ appartient également à V_Q , et comme $g(R) \neq R$, nous avons deux points R et $g(R)$ de la même orbite et qui appartiennent à un voisinage de Q , ce qui contredit notre hypothèse.

- Supposons que le groupe d'isométries Γ agisse de manière proprement discontinue et supposons aussi que la borne $I_0 = \inf\{d_\Sigma(P', Q') : P' \in \Gamma P, Q' \in \Gamma Q\}$ ne soit pas atteinte. Il existe deux suites $(P')_n, (Q')_n$ respectivement de ΓP et ΓQ telles que $d_\Sigma(P'_n, Q'_n) \rightarrow I_0$ si $n \rightarrow \infty$. Nous pouvons supposer que la suite P'_n est constante et égale à P'_0 , quitte à faire agir des isométries de Γ sur P'_n .

Nous disposons donc d'une suite $(Q')_n$ satisfaisant $d(P'_0, Q'_n) \rightarrow I_0$ si $n \rightarrow \infty$. Il existe donc un disque fermé centré en P'_0 , qui est un compact, qui contient tous les Q'_n . Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, la suite $(Q')_n$ admet donc une sous-suite convergente. Ainsi, l'orbite de Q admet un point limite, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de l'action Γ d'être proprement discontinue. □

Nous pouvons en tirer que les surfaces quotients sont munies d'une distance localement euclidienne, sphérique ou hyperbolique. Plus précisément, nous avons le résultat suivant.

Corollaire 22. *Les surfaces S obtenues par quotient de Σ par un groupe Γ d'isométries agissant de manière proprement discontinue et libre, et munies de la distance définie en (5.2) sont localement isométriques, au sens des espaces métriques, à Σ .*

Démonstration. • Nous munissons S de la fonction d_Γ définie en (5.2) par

$$d_\Gamma(\Gamma P, \Gamma Q) = \min\{d_\Sigma(P', Q') : P' \in \Gamma P, Q' \in \Gamma Q\},$$

où le fait que nous avons un minimum vient du deuxième point de la proposition (69). Comme Γ est de nouveau un groupe d'isométries, nous avons comme pour le cylindre

$$d_\Gamma(\Gamma P, \Gamma Q) = \min\{d_\Sigma(P, Q') : Q' \in \Gamma Q\}. \tag{5.3}$$

Nous devons vérifier qu'il s'agit d'une distance. Les vérifications sont exactement les mêmes que pour la distance du cylindre dans le résultat (65), en utilisant le fait que d_Σ est une distance et le fait que la borne inférieure de l'égalité (5.2) est réalisée.

- Montrons que la distance d_Γ est localement isométrique à d_Σ . Soit $P \in \Sigma$, nous devons montrer qu'il existe un disque ouvert D pour la distance d_Γ et centré en ΓP tel que D est isométrique à un disque ouvert de Σ . Par la proposition précédente (69), P possède un voisinage, que nous pouvons supposer être un disque ouvert $D_\Sigma(P, r)$ de rayon $r > 0$ pour d_Σ , tel que chaque point de $D(P, r)$ appartient à une Γ -orbite différente.

Ainsi, le disque $D_\Sigma(P, r)$ est en bijection par f avec le disque $D_\Gamma(\Gamma P, r)$. L'application f associe à $Q \in D_\Sigma(P, r)$ l'orbite ΓQ , et l'inverse f^{-1} associe à $\Gamma Q \in D_\Gamma(\Gamma P, r)$ l'unique point Q' de l'orbite Q à distance inférieure à r de P . L'unicité provient du fait que chaque point de $D_\Sigma(P, r)$ appartient à une Γ -orbite différente, et l'existence de la définition équivalente de d_Γ sous la forme (5.3). Ainsi f préserve les distances, car pour $A, B \in D_\Sigma(P, r)$, nous avons

$$d_\Gamma(\Gamma A, \Gamma B) = \min\{d_\Sigma(A, B') : B' \in \Gamma B\} = d_\Sigma(A, B),$$

ce qui suffit. □

Au vu de ce résultat, nous pouvons nous demander si toute surface localement euclidienne, sphérique ou hyperbolique (que nous référons sous le terme géométrique pour rappel) est une surface obtenue par quotient de Σ par un groupe qui agit de manière proprement discontinue et libre. Cela nous amène au théorème de Killing-Hopf, qui exige des conditions plus fortes sur la surface S que de n'être simplement géométrique.

5.3.1 Surfaces complètes

Si nous n'imposons pas de conditions supplémentaires à une surface S géométrique, alors plusieurs cas non désirables peuvent apparaître. Tout d'abord, notre surface pourrait ne pas être connexe, mais comme nous pouvons toujours décomposer une variété en ses composantes connexes, nous allons supposer dans la suite travailler sur une surface connexe.

Une autre situation indésirable est si nous avons à faire à des géodésiques qui ne peuvent pas être continuées indéfiniment. Pensons par exemple à \mathbb{R}^2 auquel nous avons enlevé le point $(0, 0)$. Deux points du cercle unité et antipodaux n'ont alors pas de géodésique incluse dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ qui les relie. Formalisons ce que nous venons d'énoncer.

Définition 61. Soit S une surface géométrique et connexe.

- Un segment de S est une courbe $\gamma_s : I_s \rightarrow S$ telle que $\gamma_s(I_s)$ est inclus dans un ouvert V_s qui est isométrique par f à un disque ouvert de Σ , et telle que $f \circ \gamma_s : I_s \rightarrow \Sigma$ est un segment de droite de Σ .
- Une *géodésique* de S est une courbe $\gamma : I \rightarrow S$ telle que
 1. I est un intervalle ouvert de \mathbb{R} .
 2. L'application γ est de classe C^1 .
 3. La courbe γ est paramétrée par longueur d'arc, c'est à dire qu'elle vérifie

$$\int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt = b - a,$$

pour tout $]a, b[\subset I$.

4. Pour tout $t \in I$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\gamma :]t - \epsilon, t + \epsilon[$ est un segment de S .

Remarque 37. Les géodésiques sur une variété riemannienne sont traditionnellement définies comme des courbes γ paramétrées par longueur d'arc, et telle que leur accélération tangentielle soit nulle. Sur les surfaces plongées dans \mathbb{R}^3 , nous pouvons expliciter cela en demandant que le vecteur $\gamma''(t)$ soit normal au plan tangent en $\gamma(t)$, pour tout t . Pour les variétés riemanniennes en général, nous avons besoin de notions telle que la dérivée covariante, qui est présentée dans la référence Lee (2019g), qui présente également la notion de géodésique en Lee (2019c).

Une propriété importante des géodésiques est qu'elles minimisent localement la distance Lee (2019d). Comme nous savons que les segments de droites dans les 3 modèles que nous avons étudiés, \mathbb{R}^2 , \mathbb{S}^2 et \mathbb{H}^2 , réalisent la courbe de longueur minimum, nous avons ainsi une justification de l'utilisation du terme géodésique pour le cas des surfaces qui nous intéressent. En effet, notre définition demande à la courbe d'être localement isométrique à un segment de droite.

Les surfaces qui nous intéressent sont celles sur lesquelles nous pouvons étendre les segments indéfiniment. Plus précisément, nous avons la définition suivante.

Définition 62. Une surface S géométrique et connexe est *géodésiquement complète* si chaque segment $\gamma_s : I_s \rightarrow S$ de S peut être étendu en une unique géodésique $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow S$.

Le théorème suivant donne une équivalence entre la notion de géodésiquement complet (définie de manière générale suivant la remarque 37) et la notion d'espace métrique complet, c'est à dire un espace où les suites de Cauchy convergent.

Théorème 10 (Hopf-Rinow). *Soit (V, g) une variété riemannienne connexe. Alors les deux assertions sont équivalentes*

1. *L'espace métrique (V, d_V) , où d_V est la distance riemannienne définie à partir des longueurs de courbe, est complet.*
2. *(V, g) est géodésiquement complet, c'est à dire que les géodésiques maximales sont définies sur \mathbb{R} .*

Démonstration. Une preuve est donnée dans Lee (2019h). □

Nous nous permettrons ainsi d'utiliser le terme *complet*, même si dans la suite nous allons surtout utiliser le fait que nous pouvons étendre les segments de S indéfiniment.

Exemple 21. Un exemple simple de surface euclidienne mais non complète est donné par le plan épointé $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Toute suite qui convergerait vers $(0, 0)$ dans \mathbb{R}^2 reste une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, mais ne converge pas dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. De plus, si nous considérons la demi-droite issue de $(0, 0)$ et qui contient $(1, 0)$, alors cette demi-droite privée du point $(0, 0)$ est la trace d'une géodésique maximale, mais cette dernière n'est pas définie sur \mathbb{R} , seulement sur $]0, +\infty[$. Comme nous imposons à une géodésique d'être paramétrée par longueur d'arc, il n'est pas possible de passer du domaine de définition $]0, +\infty[$ en \mathbb{R} par un changement de variables.

5.4 Revêtement et théorème de Killing-Hopf

Le théorème de Killing-Hopf nous permettra d'affirmer que toute surface géométrique complète et connexe est isométrique à un quotient de Σ par un groupe d'isométries qui agit de manière libre et proprement discontinue.

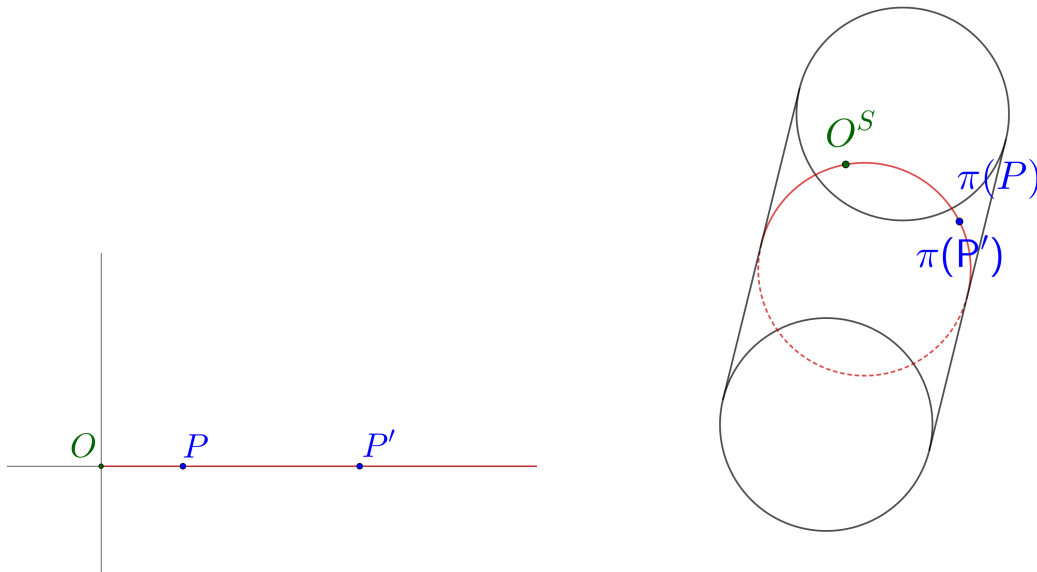


FIGURE 5.1 – Exemple de la construction du revêtement π sur le cylindre. Les points P et P' sont envoyés sur le même point du cylindre.

Notre preuve repose sur la définition d'un revêtement d'une surface. Si nous prenons le cylindre en tant que surface plongée, l'idée d'un revêtement consiste à enrouler le plan \mathbb{R}^2 autour du cylindre, via l'application

$$\begin{aligned} \pi_C : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x), y), \end{aligned}$$

par exemple. De manière générale, les revêtements qui nous intéressent sont définis comme suit.

Définition 63. Soit S une surface géométrique et connexe. Un *revêtement riemannien universel* de S est une application de Σ dans S qui est surjective et qui est localement isométrique.

Remarque 38. La notion de revêtement universel est beaucoup plus générale et peut être définie en termes purement topologiques. La spécificité de Σ pour les revêtements de surfaces euclidiennes est que Σ est une surface simplement connexe. Plus de détails peuvent être trouvés dans Stillwell (1992d).

La première étape pour démontrer le théorème de Killing-Hopf est de construire un revêtement universel π pour notre surface S géométrique, complète et connexe. Cette construction se base sur la remarque suivante : si nous nous fixons un point O , tout point P de Σ est uniquement déterminé par la demi-droite issue de O et passant par P et par la distance $d_\Sigma(O, P)$. L'idée de notre revêtement consiste à projeter les demi-droites issues de O sur des géodésiques de S .

Définissons maintenant l'application $\pi : \Sigma \rightarrow S$.

1. Fixons-nous un point O de Σ . Soit $P \in \Sigma$ différent de O , alors nous savons qu'il existe une et une seule droite de Σ passant par O et P . Ainsi, tout point P de Σ est uniquement déterminé par une demi-droite issue de O et la distance $d_\Sigma(O, P)$.
2. Fixons-nous un point O^S de S . Alors ce point a un voisinage V^S isométrique à un voisinage V de O dans Σ , du au fait que S est une surface géométrique, et quitte à considérer une translation. Nous pouvons supposer, quitte à restreindre V^S , que V est un disque ouvert de Σ . Nous avons ainsi une isométrie $\pi : V \rightarrow V^S$.

3. Prenons P' un point qui appartient à $V \cap]OP]$. Un tel point existe forcément car la droite OP passe par O , donc passe par des points arbitrairement proches de O et distincts de O . Considérons $\pi(P')$, qui appartient à V^S .
4. Comme la surface S est complète, les segments contenus dans V^S peuvent être étendus indéfiniment. Ainsi, nous avons une géodésique γ_P définie à partir du segment $[O^S, \pi(P')]$.
5. Nous définissons $\pi(P)$ comme étant le point de S qui est à longueur d'arc $d_\Sigma(O, P)$ sur la géodésique maximale γ_P , en partant de O^S et en se dirigeant vers $\pi(P')$.

Définition 64. Soit S une surface géométrique, connexe et complète. L'application $\pi : \Sigma \rightarrow S$ est définie par la construction établie ci-dessus.

L'application π n'est pas injective, comme nous pouvons le voir dans l'exemple du cylindre (5.1). Ainsi elle ne peut pas être isométrique sur \mathbb{R}^2 , mais nous allons montrer qu'elle est néanmoins localement isométrique.

Etablissons un lemme qui sera utilisé pour montrer que l'application $\pi : \Sigma \rightarrow S$ est surjective.

Lemme 11. 1. Un espace topologique X connexe et localement connexe par arcs, c'est à dire où tout voisinage contient un voisinage connexe par arcs, est connexe par arcs.
 2. Par conséquent, une surface S géométrique et connexe est connexe par arc polygonal, c'est à dire que pour tous points A et B de S , il existe un chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$ tel que $\gamma(0) = A, \gamma(1) = B$ et tel que γ est la concaténation d'un nombre fini de segments de S .

Démonstration. 1. Montrons tout d'abord que de manière générale, un espace topologique X connexe et localement connexe par arcs est connexe par arcs. Soit $x \in X$, considérons P_x l'ensemble des points atteints par un arc issu de x .

- Cet ensemble contient x .
- P_x est ouvert. En effet, si y appartient à P_x , alors il existe un voisinage V_y de y , que nous pouvons supposer connexe par arcs vu la définition d'être localement connexe par arcs. Ainsi, les points de V_y appartiennent également à P_x , en considérant les concaténations d'arcs de x à y avec les arcs de y aux points de V_y .
- Le complémentaire de P_x est ouvert. Soit z un point du complémentaire de P_x , ainsi il n'existe pas d'arc d'extrémités x et z . Soit V_z un voisinage connexe par arcs de z , alors les points de V_z n'appartiennent pas à P_x . Sinon, il existerait $z' \in V_z$ relié à x par un arc. Nous pourrions ainsi créer un arc qui relie x et z du fait que V_z est connexe par arcs, ce qui est absurde vu l'hypothèse sur z .

Comme X est un espace connexe, $P_x = X$, ce qui veut dire que X est connexe par arcs.

2. Une surface géométrique est localement connexe par arcs, car chaque point admet un voisinage isométrique à un disque ouvert de Σ , qui est connexe par arcs. Comme nous avons supposé que S est de plus connexe, S est connexe par arcs.

Ainsi, via la connexité par arcs, si nous avons deux points A et B de S , nous avons un chemin continu γ qui va de A vers B . La trace $\gamma([0, 1])$ étant compacte, nous pouvons la recouvrir par un nombre fini d'ouverts, chacun isométrique à un disque de Σ . Sur ces disques, nous pouvons remplacer le chemin γ par le segment qui relie les deux extrémités incluses dans le disque. \square

Théorème 11. *Soit une surface S euclidienne, complète et connexe. L'application π définie en (64) a les propriétés suivantes :*

1. *Chaque point P de Σ a un voisinage sur lequel π est une isométrie*
2. *L'application $\pi : \Sigma \rightarrow S$ est surjective.*

En d'autres termes, π est un revêtement universel de S .

Démonstration. 1. Démontrons le premier point en supposant par l'absurde qu'il existe $P \in \Sigma$ tel que sur tout voisinage de P , l'application π n'est pas une isométrie. Nous dirons qu'un tel point est un point où π n'est pas une isométrie locale. Nous souhaitons montrer que nous pouvons supposer que π est localement isométrique sur $[O, P[$.

Les points où π n'est pas une isométrie locale forment un ensemble fermé car ce dernier est de complémentaire ouvert. En effet, si un point Q a un voisinage sur lequel π est une isométrie, alors cela est également le cas pour les points du voisinage de Q . Par conséquent, le sous-ensemble E du segment $[O, P]$ des points pour lesquels π n'est pas une isométrie locale forme un ensemble fermé et non vide. Par conséquent, E possède un élément qui est le plus proche de O . Nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que cet élément est P lui-même, ainsi π est localement isométrique sur $[O, P[$.

Comme le point $\pi(P)$ appartient à S , une surface géométrique, ce point possède un disque $D^S(P) := D_\epsilon(\pi(P))$ qui est isométrique par f à un disque de Σ , que l'on peut prendre comme étant $D(P) := D_\epsilon(P)$ quitte à effectuer une translation. Ainsi $f(P) = \pi(P)$. Soit Q un point de $[O, P[$ et soit un disque $D(Q)$ centré en Q et suffisamment petit pour que π soit une isométrie locale sur $D(Q)$ et $D(Q) \subset D(P)$. Notre but est de transformer f via des isométries de manière à ce que π et f soient égales sur $D(Q)$.

- Nous savons que $f : D(P) \rightarrow D^S(P)$ est une isométrie, ainsi

$$d_S(f(Q), f(P)) = d_\Sigma(Q, P)$$

L'application π n'est pas une isométrie mais au vu de sa définition, elle conserve les distances parcourues sur les géodésiques de Σ passant par O .¹ Ainsi, la distance sur géodésique entre $\pi(P)$ et $\pi(Q)$ vaut $d_\Sigma(P, Q)$. Or, les disques $D(P)$ et $D^S(P)$ sont isométriques via f , ce qui veut dire que les distances parcourues sur les portions de géodésiques incluses dans D^S sont égales aux distances pour S entre les points concernés. Ainsi, nous avons

$$d_S(\pi(Q), \pi(P)) = d_\Sigma(Q, P).$$

- Par conséquent, quitte à composer f par une rotation dans Σ , $f(Q) = \pi(Q)$. Soit Q' un point de $[O, P[\cap D_Q$, nous souhaitons montrer que $f(Q') = \pi(Q')$, en d'autres termes que la rotation que nous venons d'effectuer permet à f et π d'être égaux sur les autres points de $[O, P[\cap D_Q$. Cela est le cas car f préserve les segments inclus dans $D(P)$ par isométrie et π envoie la demi-droite $[OP$ sur la demi-géodésique issue de O^S et passant par $\pi(P)$ par définition. Comme f et π sont égaux en les deux points P et Q et préservent les distances selon les droites issues de O et incluses dans $D(P)$, ils sont égaux sur $OP \cap D(P)$ et donc en particulier sur $[O, P[\cap D(Q)$.

1. Insistons sur la différence entre la distance sur S et la distance parcourue sur une géodésique de S . Si nous prenons un point x d'un cylindre, alors le point y obtenu en effectuant un tour du cylindre est à distance nulle sur le cylindre, mais à distance 2π selon la géodésique. Toutefois, sur $\mathbb{R}^2, \mathbb{S}^2$ et \mathbb{H}^2 (donc Σ) la distance sur géodésique est égale à la véritable distance.

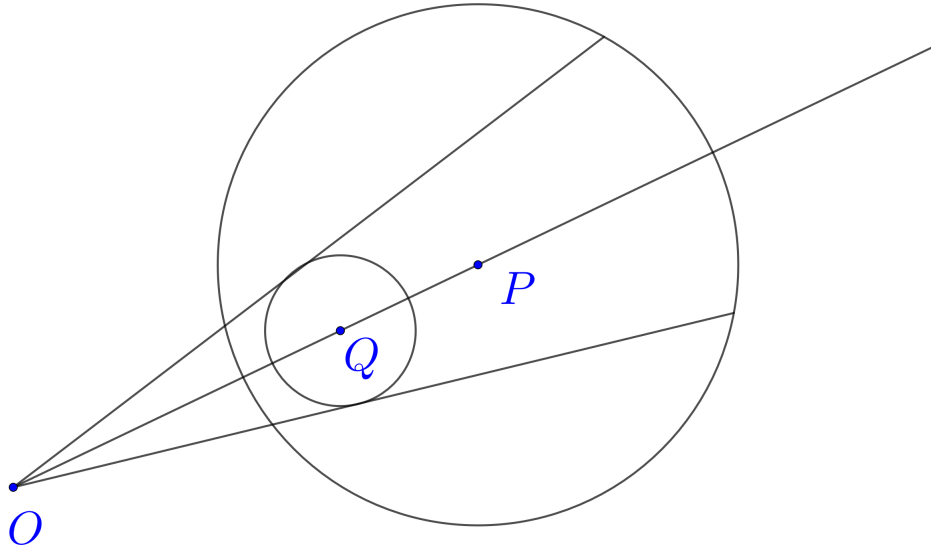


FIGURE 5.2 – Si f et π sont égaux sur $D(Q)$, alors ils sont égaux sur les prolongations des segments de O vers un point de $D(Q)$, donc sur un voisinage qui contient P .

- Finalement, soit Q'' un point de $D(Q)$ qui n'appartient pas à la droite QQ' . Les applications π et f étant des isométries sur D_Q qui sont égales en deux points, il n'y a que deux possibilités quant à où peut se situer $f(Q'')$, données par les intersections de deux cercles. Si $f(Q'') \neq \pi(Q'')$, alors nous pouvons composer f par une réflexion d'axe QQ' pour que f et π soient égaux en Q'' .

Nous avons ainsi trois points Q, Q' et Q'' de $D(Q)$ non alignés tels que f et π sont égaux. Sur le disque $D(Q)$, π et f sont des isométries. Ainsi, $f = \pi$ sur $D(Q)$ via le deuxième point de la proposition (68).

Ainsi, quitte à composer f par des isométries de Σ , $f = \pi$ sur $D(Q)$. Cela implique que les applications f et π sont égales sur les prolongations des segments partant de O et passant par un point de $D(Q)$. De nouveau, cela est parce que l'isométrie f préserve les droites et longueurs quand nous nous restreignons à $D(P)$ et π préserve les droites issues de O et les distances sur ces droites. Par conséquent, f et π sont égaux sur l'union de ces demi-droites, et nous souhaitons maintenant montrer qu'il s'agit d'un voisinage qui contient P .

- En effet, le cas dans \mathbb{R}^2 est direct au vu de la figure (5.2). Dans le cas de \mathbb{H}^2 , plaçons-nous dans \mathbb{D}^2 où O est le centre du modèle de Poincaré. Le disque $D(Q)$ est représenté par un disque euclidien et les droites issues de O se représentent par des droites euclidiennes, ainsi cela est également vrai pour \mathbb{H}^2 . Dans le cas de \mathbb{S}^2 , considérons la projection stéréographique centrée en le point antipodal de O . Un disque de \mathbb{S}^2 centré en Q est envoyé sur un disque du plan euclidien, et de nouveau le raisonnement est valide tant que P est envoyé sur un point du plan euclidien, c'est à dire tant que P n'est pas antipodal à O dans \mathbb{S}^2 .

Par conséquent, P est un point où π est localement une isométrie, ce qui est absurde. Ainsi nous avons montré que π est localement isométrique.

2. Nous souhaitons maintenant montrer la surjectivité de l'application π . Nous savons que π est localement isométrique, par conséquent nous pouvons montrer que l'image de tout segment fermé de droite L de \mathbb{R}^2 par π est une partie de géodésique de S . En effet, par compacité, le segment L peut être divisé en un nombre fini de sous-segments tel que chaque sous-segment

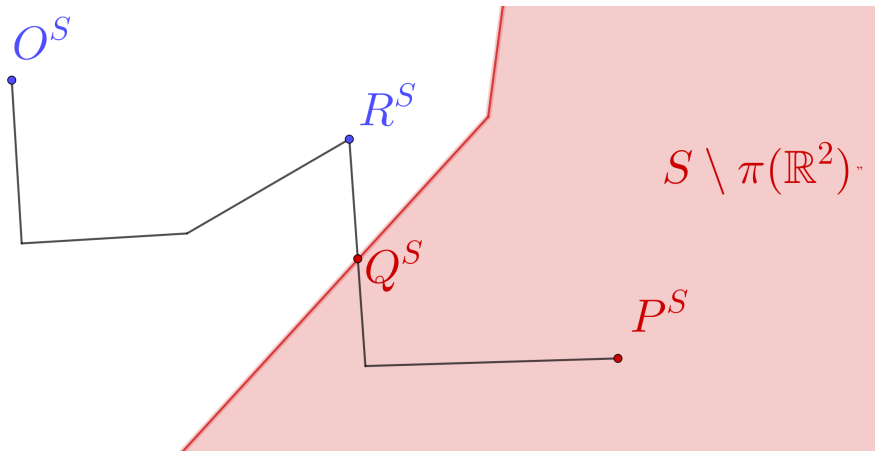


FIGURE 5.3 – Chemin polygonal de O^S à P^S et définition de Q^S et R^S .

appartient à un disque ouvert sur lequel π est une isométrie. Ainsi, $\pi(L)$ est localement isométrique à des segments de droite de Σ , ainsi c'est une partie de géodésique de S .

Supposons maintenant par l'absurde que π n'est pas surjective, et considérons l'ensemble non vide $S \setminus \pi(\mathbb{R}^2)$. Montrons que cet ensemble est fermé, en montrant que $\pi(\mathbb{R}^2)$ est ouvert. Soit $P^S = \pi(P) \in \pi(\mathbb{R}^2)$. L'application π est localement isométrique, ainsi il existe un voisinage ouvert U de $\pi(P) = P^S$ qui est isométrique par π à un disque ouvert D de \mathbb{R}^2 . Les points de U appartiennent à $\pi(\mathbb{R}^2)$ car $\pi : D \rightarrow U$ est isométrique, donc bijective, ce qui montre que $\pi(\mathbb{R}^2)$ est ouvert.

Soit P^S un point de $S \setminus \pi(\mathbb{R}^2)$. Par connexité et le lemme (11), nous pouvons trouver un chemin polygonal c allant de O^S à P^S et il existe Q^S le premier point de ce chemin qui appartient à $S \setminus \pi(\mathbb{R}^2)$, au vu du fait que $S \setminus \pi(\mathbb{R}^2)$ est fermé. Parmi les points sur le chemin polygonal c qui précèdent Q^S , notons R^S le dernier point qui est extrémité d'un segment de c . Le point R^S appartient à $\pi(\mathbb{R}^2)$ vu la définition de Q^S , et R^S et Q^S appartiennent à un même segment de S .

Soit $R \in \mathbb{R}^2$ tel que $\pi(R) = R^S$. Considérons maintenant un segment L issu de R qui est envoyé par π sur un sous-segment de $[R^S Q^S]$. Nous pouvons prolonger L en une droite de sorte que $\pi(L)$ contienne une géodésique passant par R^S et Q^S . Ainsi, $\pi(L)$ contient aussi Q^S , donc Q^S est dans l'image de π , ce qui est absurde. \square

Nous avons ainsi construit un revêtement riemannien universel $\pi : \Sigma \rightarrow S$, mais nous ne disposons pas encore d'un groupe Γ par lequel quotienter Σ pour établir le théorème de Killing-Hopf. Cela est le sujet de la section suivante. Notons que comme π est une isométrie locale, nous pouvons en tirer quelques propriétés qui nous seront utiles dans la suite.

Lemme 12. *Considérons $\pi : \Sigma \rightarrow S$ le revêtement universel que nous avons construit en (64). Alors*

1. *L'application π préserve la longueur des arcs paramétrés de courbes*
2. *L'application π envoie des droites de Σ sur des géodésiques de S .*

Démonstration. 1. Un arc paramétré de courbe est un compact, que l'on peut recouvrir avec un nombre fini d'ouverts sur lesquels l'application π est une isométrie. Ainsi π préserve les longueurs sur chaque ouvert et donc préserve la longueur de l'arc paramétré.

2. Cela vient de notre définition des géodésiques de S , car les géodésiques sont localement des segments de droite, et π est une isométrie locale. \square

5.4.1 Groupe de morphismes de revêtement

Nous pouvons maintenant construire un revêtement pour toute surface géométrique, complète et connexe. Si nous souhaitons exprimer une telle surface comme étant un quotient de Σ par un groupe, nous avons besoin de lui associer un groupe. Cela motive la notion de groupe de morphismes de revêtement de π .

Définition 65. Un morphisme de revêtement g pour un revêtement universel $f : \Sigma \rightarrow S$ est une isométrie de Σ telle que $f \circ g(P) = f(P)$ pour tout $P \in \Sigma$.

Remarque 39. Comme les isométries de Σ forment un groupe pour la composition de fonctions, les morphismes de revêtement forment également un groupe.

Comme nous avons construit un revêtement associé aux surfaces S qui nous intéressent, nous pouvons leur associer un groupe de morphismes de revêtement.

Définition 66. Soit une surface S géométrique, complète et connexe. Soit π le revêtement riemannien construit dans la proposition (11). Notons Γ_π le groupe des morphismes du revêtement π , c'est à dire l'ensemble des isométries g de Σ qui vérifient

$$\pi \circ g = \pi$$

sur Σ , muni de la composition de fonctions.

Vu cette définition, tous les points de l'orbite de $P \in \Sigma$ pour Γ sont envoyés par π sur le même point de S . La réciproque est également vraie, si deux points sont envoyés sur le même point dans S par π , alors ils appartiennent à la même Γ -orbite. Cela est l'énoncé du théorème suivant.

Théorème 12. Soient $P, Q \in \Sigma$. Si $\pi(P) = \pi(Q)$, alors il existe $g \in \Gamma_\pi$ tel que $Q = g(P)$. En d'autres termes, P et Q appartiennent à la même Γ_π -orbite.

Démonstration. Soit $P, Q \in \Sigma$ tels que $\pi(P) = \pi(Q)$. L'application π étant une isométrie locale, il existe des disques ouverts $D(P)$ et $D(Q)$ qui sont envoyés par isométrie sur un même disque $\pi(D(P)) = \pi(D(Q))$, du fait que $\pi(P) = \pi(Q)$. Les 3 disques suivants sont isométriques,

$$D(P) \xrightarrow{\pi|_{D(P)}} \pi(D(P)) = \pi(D(Q)) \xrightarrow{\pi^{-1}|_{D(Q)}} D(Q)$$

ainsi nous avons une isométrie $g_2 : D(P) \rightarrow D(Q)$. L'isométrie g_2 peut être étendue de manière unique en une isométrie g de Σ , via le troisième point de (68). Nous souhaitons désormais montrer que g est un morphisme du revêtement π , c'est à dire que $\pi(R) = \pi(g(R))$ pour tout $R \in \Sigma$. Nous savons déjà par la définition de g_2 que

$$\pi = \pi \circ g, \text{ sur } D(P).$$

Soit $R \in \Sigma$. Considérons les droites L_1 joignant P à R , et L_2 joignant $g(P) = Q$ à $g(R)$. Par unicité des droites dans Σ , nous savons que $g(L_1) = L_2$. De plus, par le deuxième point du lemme (12), $\pi(L_1)$ et $\pi(L_2)$ sont des géodésiques de S .

Comme nous avons $\pi \circ g = \pi$ sur $D(P)$, alors $\pi(L_1) \cap \pi(D(P)) = \pi(L_2) \cap \pi(D(P))$. Nous en tirons que $\pi(L_1) = \pi(L_2)$ par unicité de l'extension des géodésiques.

Nous sommes maintenant prêts à montrer que $\pi(R) = \pi(g(R))$.

- Par définition de π , le point $\pi(R)$ est le point de la demi-géodésique $\pi(L_1)$ issue de $\pi(P)$ atteint après avoir parcouru une longueur d'arc égale à $d_\Sigma(P, R)$.
- Le point $g(R)$ quant à lui est l'unique point de la droite $L_2 = g(L_1)$ de Σ , atteint après avoir parcouru une longueur d'arc égale à $d_\Sigma(g(P), g(R)) = d(P, R)$ à partir de $g(P)$ et en direction de $g(R)$.

Par conséquent, $\pi(g(R))$ est le point obtenu après avoir suivi la demi-géodésique $\pi(L_2)$ issue de $\pi(g(P))$ sur une longueur d'arc égale à $d(P, R)$. Cela est du aux deux points du lemme (12), car π préserve les longueurs d'arcs et les droites. Ainsi, comme $\pi(g(P)) = \pi(Q) = \pi(P)$ et que $\pi(L_2) = \pi(L_1)$, nous en tirons que $\pi(R) = \pi(g(R))$.

□

Nous pouvons finalement en déduire une version plus faible du théorème de Killing-Hopf

Théorème 13. *Tout surface géométrique, complète et connexe est localement isométrique, au sens des espaces métriques, à un quotient Σ/Γ , où Γ est un groupe d'isométries de Σ qui agit de manière proprement discontinue et libre.*

Démonstration. Grâce au théorème (11), nous savons que pour une surface S géométrique, complète et connexe, nous pouvons lui associer un revêtement universel π , et qu'à partir d'un revêtement nous pouvons définir le groupe Γ_π des morphismes du revêtement π . Par le théorème (12), deux points P et Q sont sur la même Γ -orbite si et seulement si ils sont envoyés sur le même point de S par π . Nous avons ainsi une bijection π entre les Γ -orbites des points de Σ et S .

Le groupe Γ_π des morphismes du revêtement π agit de manière proprement discontinue et libre au vu de la proposition (69). En effet, soit P un point de Σ et soit un disque ouvert $D(P)$ centré en P , sur lequel π est une isométrie. Supposons par l'absurde avoir Q, R deux points distincts de $D(P)$ tels que $R = g(Q)$, avec g un morphisme du revêtement π , donc un élément de Γ_π . Par définition de g , $\pi(g(Q)) = \pi(Q)$, donc $\pi(R) = \pi(Q)$. Or, sur $D(P)$, π est une isométrie, donc injective, ce qui est absurde. Cela montre que tout point P de Σ admet un voisinage V_P tel que chaque point de V_P appartient à une Γ_π -orbite différente, et donc Γ_π agit de manière proprement discontinue et libre au vu de la proposition (69).

Ainsi, Σ/Γ est une surface quotient, qui a donc une distance localement isométrique par π à d_Σ , au sens des espaces métriques, au vu de la proposition (22). Comme S est localement isométrique à Σ par π , S est localement isométrique, au sens des espaces métriques, à Σ/Γ , par π . □

Remarque 40. L'énoncé du théorème de Killing-Hopf en dimension 2 est que toute surface S de courbure de Gauss constante est isométrique, au sens riemannien cette fois-ci, à un quotient Σ/Γ , où Γ est un groupe d'isométries de Σ qui agit de manière proprement discontinue et libre. Cela nous nécessiterait donc de définir une structure riemannienne sur Σ/Γ et de montrer que nous avons une isométrie globale entre S et Σ/Γ . Le théorème de Killing-Hopf est démontré dans la référence Lee (2019i).

5.4.2 Surfaces localement sphériques et l'application antipodale

Nous avons pu démontrer le théorème de Killing-Hopf en géométrie euclidienne, sphérique et hyperbolique en dimension 2, mais le cas de la sphère crée toujours quelques problèmes techniques liés aux points antipodaux, comme le fait qu'il n'existe pas un unique grand cercle passant par deux points antipodaux.

Intéressons-nous donc de plus près aux surfaces localement sphériques, complètes et connexes. Par le théorème de Killing-Hopf (13), celles-ci peuvent s'exprimer sous la forme \mathbb{S}^2/Γ , avec Γ un groupe d'isométries de \mathbb{S}^2 agissant de manière libre et proprement discontinue. Établissons quelques propriétés nécessaires d'un tel groupe Γ .

Lemme 13. • Si Γ est un groupe d'isométries de \mathbb{S}^2 agissant de manière libre, alors les éléments de Γ qui préservent l'orientation doivent être égaux à l'identité.

• De plus, si Γ n'est pas le groupe trivial, alors Γ est de la forme

$$\{id, f\},$$

où f est une isométrie de \mathbb{S}^2 sans point fixe, qui renverse l'orientation, et telle que $f \circ f = id_{\mathbb{S}^2}$.

Démonstration. • Le résultat découle du fait que Γ agit de manière libre, ainsi les isométries différentes de l'identité ne peuvent pas avoir de point fixe. Un aspect important des isométries sphériques est que toutes les isométries qui préservent l'orientation sont des rotations (34), qui possèdent deux points fixes. Nous en tirons ainsi le premier point.

• Si Γ n'est pas trivial, il contient f une isométrie de \mathbb{S}^2 différente de l'identité et sans point fixe. Au vu du premier point, f est une isométrie qui renverse l'orientation. Nous savons que $f \circ f$ appartient à Γ et est une isométrie qui préserve l'orientation, ainsi $f \circ f = id_{\mathbb{S}^2}$. Supposons maintenant que Γ contient une autre isométrie $f_2 \neq f$, différente de l'identité et sans point fixe. Alors par les mêmes raisonnements, f_2 renverse l'orientation et donc

$$f \circ f_2 = id_{\mathbb{S}^2} \Leftrightarrow f_2 = f^{-1} = f,$$

ce qui est absurde. Ainsi Γ ne contient que f , qui vérifie les propriétés annoncées. □

Il se trouve qu'il n'existe qu'une seule application qui vérifie les propriétés du lemme, qui est l'application antipodale, que nous allons noter \bar{m} . La surface $\mathbb{S}^2/\{\text{id}, \bar{m}\}$ est la surface obtenue en identifiant les points antipodaux. C'est en fait le plan projectif réel de dimension 2 : l'ensemble des droites passant par O dans \mathbb{R}^3 .

Proposition 70. • La seule isométrie f de \mathbb{S}^2 qui renverse l'orientation, qui ne possède pas de point fixe et qui est telle que $f \circ f = id_{\mathbb{S}^2}$ est l'application antipodale $\bar{m} : (x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$.

• En particulier, il n'existe que deux surfaces localement sphériques, complètes et connexes.

Démonstration. • Soit f une isométrie qui vérifie ces propriétés. Alors $f = \bar{m} \circ \bar{m} \circ f$. Les isométries f et \bar{m} renversent l'orientation, ainsi leur produit préserve l'orientation et est ainsi une rotation sphérique r , et $f = \bar{m} \circ r$. Quitte à utiliser un changement de coordonnées, nous pouvons supposer que la rotation r se fait selon l'axe Oz .

Soit P un point de l'équateur, c'est à dire l'intersection de la sphère et du plan $z = 0$, et supposons que r est une rotation d'angle $\theta \in [0, 2\pi[$. Alors le point $\bar{m}(r(P))$ est également sur l'équateur et se situe à un angle $\theta + \pi$ de P , compté dans le même sens. De même, le point $\bar{m} \circ r \circ \bar{m} \circ r(P)$ est à un angle 2θ de P . Par hypothèse, $\bar{m} \circ r \circ \bar{m} \circ r = f \circ f = id$, ainsi l'angle θ vaut 0 ou π . Si θ vaut π , alors $\bar{m}(r(P)) = f(P) = P$, ce qui contredit l'hypothèse sur le fait que f n'ait pas de point fixe. Ainsi $\theta = 0$ et $f = \bar{m}$, ce qui démontre l'unicité d'une telle application.

- Par le théorème de Killing-Hopf (13), toute surface localement sphérique, complète est connexe est de la forme \mathbb{S}^2/Γ où Γ est un groupe d'isométries de \mathbb{S}^2 agissant de manière libre et proprement discontinue. Par le lemme (13) et la proposition que nous venons de démontrer, les deux seuls groupes possibles sont le groupe trivial, et le groupe engendré par l'application antipodale \bar{m} , qui donnent respectivement la sphère \mathbb{S}^2 et le plan projectif réel de dimension 2.

□

Une note sur les pavages

Cette dernière section a pour but de rajouter une courte discussion sur les pavages et les liens avec notre travail. La notion de pavage est intimement liée à celle de groupe d'isométries agissant de manière proprement discontinue. Si nous avons en tête les pavages habituels du plan euclidien, tel que celui par triangles équilatéraux ou par carrés, nous pouvons nous demander quelles isométries de \mathbb{R}^2 préservent le pavage, c'est à dire les isométries qui envoient les carreaux sur d'autres carreaux. Nous pouvons nous convaincre qu'un tel groupe est un groupe d'isométrie de \mathbb{R}^2 agissant de manière proprement discontinue, en remarquant par exemple qu'un sommet d'un polygone est envoyé sur un autre sommet du pavage. Ce groupe n'agit tout de fois pas de manière libre, car pour l'exemple du pavage de \mathbb{R}^2 par carrés, les rotations en un sommet et d'angle $\pi/2$ préservent le pavage mais possèdent un point fixe.

Un pavage régulier peut ainsi être vu comme la donnée d'un groupe d'isométries agissant de manière proprement discontinue et d'un polygone, la région fondamentale du pavage. Le théorème de Poincaré est un théorème qui donne des conditions nécessaires et suffisantes sur un polygone de \mathbb{R}^2 , \mathbb{S}^2 ou \mathbb{H}^2 pour qu'il soit région fondamentale pour un groupe d'isométries agissant de manière proprement discontinue. Plus de détails peuvent être trouvés dans les références suivantes : Stillwell (1992e) et Magnus (1974). Concluons ce travail par une oeuvre d'Escher basée sur un pavage du disque de Poincaré \mathbb{D}^2 .



FIGURE 5.4 – Circle Limit III par Maurits Cornelis Escher

Appendice

Généralités sur les formes fondamentales

La première forme fondamentale en un point a d'une surface V , que nous allons également appeler métrique, est la restriction du produit scalaire euclidien au plan tangent $T_a V$. En pratique, si (U, ϕ) est un paramétrage de V et si $u \in U$ tel que $\phi(u) = a$, alors nous avons

$$\text{im}(\phi_{*u}) = T_a V.$$

Comme $\text{im}(\phi_{*u})$ est un espace vectoriel de dimension 2, dont une base est donnée par $(D_1\phi, D_2\phi)$, connaître g_a revient à connaître

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1\phi \cdot D_1\phi & D_1\phi \cdot D_2\phi \\ D_2\phi \cdot D_1\phi & D_2\phi \cdot D_2\phi \end{pmatrix}$$

par bilinéarité du produit scalaire. Nous référerons fréquemment à cette matrice comme étant la première forme fondamentale. Notons que nous sommes en train de définir une structure Riemannienne sur la surface considérée.

Pour la deuxième forme fondamentale, nous avons besoin de définir l'application de Weingarten, qui est intuitivement la dérivée de la normale unitaire N selon la direction $h \in T_a V$. Formellement, cette application est définie comme étant

$$W_a(h) = D_t N \circ \gamma(t) \Big|_{t=0}$$

pour n'importe quelle courbe (I, γ) de V , tangente à h en 0, c'est à dire telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = h$. Cette définition ne dépend pas de la courbe γ . La deuxième forme fondamentale quant à elle est définie comme

$$\varpi(h, k) = -g_a(W_a(h), k)$$

pour $h, k \in T_a V$. Dans la base $(D_1\phi, D_2\phi)$ de $T_a V$, connaître la deuxième forme fondamentale revient à connaître

$$\begin{pmatrix} K & L \\ L & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11}\phi \cdot N & D_{12}\phi \cdot N \\ D_{21}\phi \cdot N & D_{22}\phi \cdot N \end{pmatrix}.$$

Finalement, nous pouvons montrer que la courbure de Gauss est donnée par

$$\kappa = \frac{KM - L^2}{EF - G^2}.$$

Surface de révolution

Courbure d'une surface de révolution

Soit une surface de révolution paramétrée par

$$\phi(t, \alpha) = (f(t), g(t) \cos \alpha, g(t) \sin \alpha), \quad t \in \bar{I}, \alpha \in [0, 2\pi[.$$

où f et g sont des fonctions C^2 sur I , un intervalle ouvert, $g > 0$ et $f'^2 + g'^2 > 0$. Nous allons procéder au calcul de la courbure via les deux formes fondamentales. Pour la première, nous commençons par calculer les dérivées du paramétrage,

$$\begin{aligned} D_t\phi &= (f'(t), g'(t) \cos \alpha, g'(t) \sin \alpha), \\ D_\alpha\phi &= (0, -g(t) \sin \alpha, g(t) \cos \alpha). \end{aligned}$$

La première forme fondamentale est ainsi donnée par

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_t\phi \cdot D_t\phi & D_t\phi \cdot D_\alpha\phi \\ D_\alpha\phi \cdot D_t\phi & D_\alpha\phi \cdot D_\alpha\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'^2(t) + g'^2(t) & 0 \\ 0 & g^2(t) \end{pmatrix}.$$

Pour la deuxième forme fondamentale, nous avons besoin des dérivées d'ordre 2 et de la normale. Nous obtenons

$$\begin{aligned} D_{tt}\phi &= (f''(t), g''(t) \cos \alpha, g''(t) \sin \alpha), \\ D_{t\alpha}\phi &= (0, -g'(t) \sin \alpha, g'(t) \cos \alpha), \\ D_{\alpha\alpha}\phi &= (0, -g(t) \cos \alpha, -g(t) \sin \alpha), \end{aligned}$$

$$N = \frac{D_t\phi \wedge D_\alpha\phi}{\|D_t\phi \wedge D_\alpha\phi\|} = \frac{(g'(t)g(t), -f'(t)g(t) \cos \alpha, -f'(t)g(t) \sin \alpha)}{\sqrt{g^2(t)[f'^2(t) + g'^2(t)]}},$$

$$\begin{pmatrix} K & L \\ L & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{tt}\phi \cdot N & D_{t\alpha}\phi \cdot N \\ D_{t\alpha}\phi \cdot N & D_{\alpha\alpha}\phi \cdot N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{f''(t)g'(t) - f'(t)g''(t)}{\sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}} & 0 \\ 0 & \frac{f'(t)g(t)}{\sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}} \end{pmatrix}.$$

Finalement, on trouve que la courbure vaut

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{KM - L^2}{EF - G^2} = \frac{\frac{f''(t)g'(t) - f'(t)g''(t)}{\sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}} \frac{f'(t)g(t)}{\sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}}}{g^2(t)(f'^2(t) + g'^2(t))} \\ &= \frac{g(t)f'(t)[f''(t)g'(t) - f'(t)g''(t)]}{g^2(t)(f'^2(t) + g'^2(t))^2} \\ &= \frac{f'(t)[f''(t)g'(t) - f'(t)g''(t)]}{g(t)(f'^2(t) + g'^2(t))^2}. \end{aligned}$$

Bibliographie

- Bochaca, J. A. «Perpendicular bisector and midpoint», URL <https://mat.uab.cat/~juditab/mediatriuA.htm>.
- Gallier, J. 2011a, *Geometric methods and applications*, chap. 8, 2^e éd., Springer New York, p. 231–280.
- Gallier, J. 2011b, *Geometric methods and applications*, chap. 20, 2^e éd., Springer New York, p. 231–280.
- Lecomte, P. 2003a, *Courbes et surfaces*, chap. 1.4, p. 23–26. URL http://www.geothalg.ulg.ac.be/Courbes_Surfaces.pdf.
- Lecomte, P. 2003b, *Courbes et surfaces*, chap. 5, p. 113–115. URL http://www.geothalg.ulg.ac.be/Courbes_Surfaces.pdf.
- Lecomte, P. 2003c, *Courbes et surfaces*, chap. 6, p. 105–118. URL http://www.geothalg.ulg.ac.be/Courbes_Surfaces.pdf.
- Lecomte, P. 2003d, *Courbes et surfaces*, chap. 7.2, p. 122–128. URL http://www.geothalg.ulg.ac.be/Courbes_Surfaces.pdf.
- Lecomte, P. 2003e, «Géométrie 1», URL <http://www.geothalg.ulg.ac.be/cours1C/node23.html>.
- Lecomte, P. 2003f, «Géométrie 1», URL <http://www.geothalg.ulg.ac.be/cours1C/node31.html>.
- Lecomte, P. 2003g, «Géométrie 1», URL <http://www.geothalg.ulg.ac.be/cours1C/node32.html>.
- Lecomte, P. 2003h, «Géométrie 1», URL <http://www.geothalg.ulg.ac.be/cours1C/node39.html>.
- Lecomte, P. 2003i, «Géométrie 1», URL <http://www.geothalg.ulg.ac.be/cours1C/node61.html>.
- Lecomte, P. 2003j, «Géométrie 1», URL <http://www.geothalg.ulg.ac.be/cours1C/node66.html>.
- Lecomte, P. 2003k, «Géométrie 1», URL <http://www.geothalg.ulg.ac.be/cours1C/node65.html>.
- Lee, J. M. 2019a, *Introduction to Riemannian Manifolds*, 2^e éd., Graduate texts in mathematics, Springer International Publishing.

- Lee, J. M. 2019b, *Introduction to Riemannian Manifolds*, chap. 2.4, 2^e éd., Graduate texts in mathematics, Springer International Publishing, Cham, Switzerland, p. 38–39.
- Lee, J. M. 2019c, *Introduction to Riemannian Manifolds*, chap. 4.5, 2^e éd., Graduate texts in mathematics, Springer International Publishing, Cham, Switzerland, p. 103–105.
- Lee, J. M. 2019d, *Introduction to Riemannian Manifolds*, chap. 6.1, 2^e éd., Graduate texts in mathematics, Springer International Publishing, Cham, Switzerland, p. 151–162.
- Lee, J. M. 2019e, *Introduction to Riemannian Manifolds*, chap. 10, 2^e éd., Graduate texts in mathematics, Springer International Publishing, Cham, Switzerland, p. 294.
- Lee, J. M. 2019f, *Introduction to Riemannian Manifolds*, chap. 2.2, 2^e éd., Graduate texts in mathematics, Springer International Publishing, Cham, Switzerland, p. 21.
- Lee, J. M. 2019g, *Introduction to Riemannian Manifolds*, chap. 4.3, 2^e éd., Graduate texts in mathematics, Springer International Publishing, Cham, Switzerland, p. 95–99.
- Lee, J. M. 2019h, *Introduction to Riemannian Manifolds*, chap. 6.3, 2^e éd., Graduate texts in mathematics, Springer International Publishing, Cham, Switzerland, p. 166–173.
- Lee, J. M. 2019i, *Introduction to Riemannian Manifolds*, chap. 12.1, 2^e éd., Graduate texts in mathematics, Springer International Publishing, Cham, Switzerland, p. 345–351.
- Magnus, W. 1974, *Noneuclidean Tessellations and Their Groups*, chap. II.4, Academi Press, p. 68–80.
- Pressley, A. 2009a, *Elementary Differential Geometry*, chap. 6, 2^e éd., Springer undergraduate mathematics series, Springer, London, England, p. 121–158.
- Pressley, A. 2009b, *Elementary Differential Geometry*, chap. 10.2, 2^e éd., Springer undergraduate mathematics series, Springer, London, England, p. 252–256.
- Pressley, A. 2009c, *Elementary Differential Geometry*, chap. 6.3, 2^e éd., Springer undergraduate mathematics series, Springer, London, England, p. 136.
- Pressley, A. 2009d, *Elementary Differential Geometry*, chap. 11.1, 2^e éd., Springer undergraduate mathematics series, Springer, London, England, p. 272–273.
- Schneiders, J.-P. 2010a, «Fonctions de variables complexes», URL <http://www.analg.ulg.ac.be/jps/ens/2017-2018/fvc/index.html>.
- Schneiders, J.-P. 2010b, *Fonctions de variables complexes*, chap. 2.1, p. 2–3.
- Stillwell, J. 1992a, *Geometry of Surfaces*, chap. 1, Springer-Verlag New York, p. 1–20.
- Stillwell, J. 1992b, *Geometry of Surfaces*, chap. 3, Springer-Verlag New York, p. 45–74.
- Stillwell, J. 1992c, *Geometry of Surfaces*, chap. 4, Springer-Verlag New York, p. 75–110.
- Stillwell, J. 1992d, *Geometry of Surfaces*, chap. 6.3, Springer-Verlag New York, p. 140–142.
- Stillwell, J. 1992e, *Geometry of Surfaces*, chap. 7, Springer-Verlag New York, p. 163–184.