Mémoire

Auteur : Neuttiens, Guillaume
Promoteur(s) : 16855
Faculté : Faculté des Sciences
Diplôme : Master en sciences mathématiques, à finalité approfondie
Année académique : 2021-2022
URI/URL : http://hdl.handle.net/2268.2/15192

Faculté des Sciences
Département de Mathématique

États de Gibbs d'une action hamiltonienne

Mémoire de fin d'études présenté en vue de l'obtention du titre de

Master en Sciences Mathématiques,
à finalité approfondie

Année académique 2021-2022

Auteur :
Guillaume Neuttiens

Promoteur :
Pierre Bieliavsky

Co-Promoteur :
Pierre Mathonet

Table des matières

Introduction

> “Peut-être cette thermodynamique des groupes de Lie a-t-elle un intérêt mathématique”
>
> *Jean-Marie Souriau*

La notion d’équilibre joue un rôle fondamental dans bon nombre de théories physiques. Dans le cadre de la mécanique classique, un système est à l’équilibre lorsque la somme des moments cinétiques et de rotation qui s’exercent sur lui est nulle. Du côté de la thermodynamique, l’équilibre est lié aux notions de température et d’entropie. Dès 1902, le physicien J.W. Gibbs décrit la notion d’*équilibre statistique* en la représentant par des densités de probabilités particulières invariantes au cours de temps, densités de probabilité auxquelles son nom sera attribué.

Dans la seconde moitié du vingtième siècle, le mathématicien et physicien Jean-Marie Souriau propose une reformulation de la mécanique statistique dans le cadre de la géométrie symplectique. Ce faisant, il développe dans son ouvrage "Structure des systèmes dynamiques" [SC97] une généralisation de la notion d’état d’équilibre proposée par Gibbs : les concepts d’entropie, d’énergie et de valeur moyenne y sont reformulés pour une action hamiltonienne d’un groupe de Lie sur une variété symplectique. Ce nouveau formalisme, parfois appelé *thermodynamique des groupes de Lie* donne naissance à bon nombre d’objets géométriques aux propriétés des plus intéressantes.

Cette théorie connait un regain d’intérêt récent via les travaux de Frédéric Barbaresco ([Bar14], [Bar16], [BN+21]) et de Charles-Michel Marle ([Mar20], [Mar21]), avec en ligne de mire de potentielles applications à la géométrie symplectique et à la théorie de l’information. Ce mémoire se base en particulier sur l’article [Mar20] de Marle, qui se propose de reformuler les travaux de Souriau dans le formalisme mathématique moderne de la géométrie symplectique.

L’objectif principal de ce travail est de proposer une vue d’ensemble des aspects géométriques liés la thermodynamique des groupes de Lie. Aux résultats fondamentaux issus des références précédemment citées, on ajoutera quelques résultats concernant les états de Gibbs d'une extension centrale et la géométrie riemannienne des températures généralisées. Une attention particulière sera apportée au traitement détaillé d'exemples en basse dimension.

Le chapitre 1 propose une brève introduction à la mécanique statistique telle qu'envisagée par Souriau. Les objets étudiés dans ce cadre sont des mesures définies sur une variété symplectique (M, ω), dont l'évolution temporelle suit le flot d'un hamiltonien. À chacune de ces mesures est associée une quantité appelée *entropie*, que l'on cherche à maximiser. On mettra en évidence des mesures particulières, appelées *états de Gibbs*, qui représentent des maxima locaux de l'entropie.

Dans le second chapitre, on entre dans le vif du sujet en construisant les principaux objets liés à la thermodynamique des groupes de Lie. On y considère l'action Φ d'un groupe de Lie G sur une variété M. Dans ce cadre, on définit les états de Gibbs comme un ensemble de mesures de probabilité sur (M, ω), indicé par un ouvert Ω inclus dans l'algèbre de Lie de G. L'étude de l'ensemble Ω et de sa géométrie sera l'objet principal du reste de ce mémoire. Entre autres faits remarquables, on peut y définir une métrique G-invariante, canoniquement associée à l'action considérée : la *métrique de Souriau*. On clôturera le chapitre en traitant quelques exemples d'actions sur le plan symplectique.

Le troisième chapitre s'intéresse au comportement du moment vis-à-vis de l'action de G. On y verra que le moment ne commute pas nécessairement avec les actions adjointes et coadjointes, mais que l'on peut "corriger" ce défaut de symétrie en introduisant la notion de cocycle de non-équivariance. De cette étude se déduiront une série de résultats relatifs aux symétries des températures généralisées par rapport aux orbites des actions de G. En particulier, on définira une structure symplectique sur les orbites coadjointes et affines coadjointes, et on s'emploiera à calculer plusieurs exemples d'états de Gibbs sur de telles orbites. Finalement, on présentera la notion d'extension centrale équivariante d'un groupe de Lie et on l'appliquera à l'étude des états de Gibbs.

Le quatrième et dernier chapitre propose quelques compléments concernant la métrique de Souriau. Après avoir étudié en détail l'expression de celle-ci le long des orbites adjointes de G, on délaissera quelque peu la géométrie symplectique pour étudier sa connexion de Levi-Civita et sa courbure de Riemann. On montrera que la géométrie riemannienne associée à la métrique de Souriau est déterminée par des tenseurs représentant un "moment d'ordre 3" associé à l'action hamiltonienne. On donnera une interprétation de ce fait en considérant l'ensemble des températures généralisées comme un modèle statistique lisse, pour lequel la métrique de Souriau coïncide avec la métrique de Fisher-Rao, pierre angulaire de la géométrie statistique et de la géométrie de l'information.

Prérequis et références

Ce travail empruntant bon nombre de notions à diverses branches des mathématiques, il ne serait pas raisonnable d'y inclure tous les prérequis à sa lecture. Aussi, on supposera connues les notions de variété lisse et relatives au calcul des formes différentielles (flot, dérivée de Lie et extérieure, produit intérieur et extérieur,...), ainsi que les notions liées aux groupes et algèbres de Lie (exponentielle, application adjointe, forme de Killing,...). Parmi la diversité de la littérature disponible dans ce domaine, on pourra consulter par exemple [Pau06], [Hel79] ou [Che18]. Les rappels nécessaires concernant la géométrie symplectique seront détaillés directement dans ce texte. Pour la géométrie riemannienne et la théorie de la mesure, on renvoie aux annexes D et A de ce travail.

Remerciements

Ce travail n'aurait bien entendu pas vu le jour sans Pierre Bieliavsky, qui a accepté d'encadrer mon mémoire sans même m'avoir rencontré, malgré que j'étudiais dans une autre université et ignorais tout de la théorie de Lie. Les nombreuses heures de visioconférence consacrées à ce travail, entre discussion informelle et cours particulier, furent un apport inestimable à ce texte et à ma formation. Je remercie également Pierre Mathonet, tant pour son aide à la relecture que pour les précieux conseils et dicussions qui ont guidé mon parcours étudiant depuis la cinquième secondaire jusqu'à la remise de ce mémoire. Enfin, mon intérêt pour la géométrie et la mécanique n'aurait peut-être pas été le même sans les cours à projet de Naïm Zenaïdi.

Au cours d'un master quelque peu atypique, malmené par la pandémie et dispersé sur trois universités différentes, de nombreuses autres personnes ont contribué à l'écriture de ce mémoire, parfois même sans s'en rendre compte et au-delà du cadre académique. Je pense en particulier à ma mère, à Boris, à Benjamin et à JB mais bien d'autres mériteraient mention.

Chapitre 1

Notions de mécanique statistique

Ce chapitre introduit la notion d'état de Gibbs comme réponse à un problème issu de la mécanique statistique. Sans être indispensable d'un point de vue purement mathématique, il a l'avantage de fournir une intuition et une motivation physique aux notions plus générales qui seront détaillées à partir du chapitre 2. C'est en particulier l'approche, proposée par Souriau dans [SC97] et Marle dans [Mar20] . L'objectif de ce travail n'étant pas de présenter de manière exhaustive la mécanique statistique, nous nous limiterons au strict nécessaire à la construction des états de Gibbs, quitte à être parfois succints sur certains concepts dont l'étude en profondeur nous éloignerait trop de notre sujet principal. Au passage, on rappellera quelques notions fondamentales de géométrie symplectique, parmi lesquels le théorème de Darboux et la mesure de Liouville.

1.1 Rappels de mécanique hamiltonienne

Les notions relatives à la géométrie symplectique présentées ici sont majoritairement issues de [KZ19] et [Mar06]. Pour la mécanique hamiltonienne, on pourra consulter [AM08].

Définition 1.1.1. Une *variété symplectique* est une variété lisse munie d'une 2-forme ω antisymétrique, non-dégénérée et fermée, i.e. telle que

$$d\omega = 0.$$

En tout point $x \in M$, la forme ω_x est une application bilinéaire, antisymétrique et non-dégénérée sur T_xM. Comme une telle forme ne peut exister que sur un espace vectoriel de dimension paire, toute variété symplectique (M, ω) est de dimension paire.

Exemple 1.1.1. L'espace $\mathbb{R}^2$ muni de coordonnées euclidiennes (x_1, x_2) est une variété symplectique pour la forme

$$\omega = dx_1 \wedge dx_2 \ .$$

En effet, pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^2$, $dx_1 \wedge dx_2(X, Y) = \det(X, Y)$. La forme est donc bien bilinéaire, antisymétrique et non-dégénérée. De plus,

$$d(dx_1 \wedge dx_2) = d^2 x_1 \wedge dx_2 + (-1) dx_1 \wedge d^2 x_2 = 0$$

et la forme est donc fermée.
De manière similaire, on peut montrer que la forme

$$\sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dx_{n+i}$$

est une forme symplectique sur $\mathbb{R}^{2n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition 1.1.2. Soient (M_1, ω_1) et (M_2, ω_2) des variétés symplectiques de même dimension et $f : M_1 \to M_2$ une application lisse. L'application f est un *symplectomorphisme local* si $f^*\omega_2 = \omega_1$. Si de plus f est un difféomorphisme, alors on dit que f est un *symplectomorphisme*.

La structure locale d'une variété symplectique est complètement déterminée par le théorème de Darboux (voir [KZ19] pour une preuve détaillée).

Théorème 1.1.1 (Darboux)**.** *Soit M une variété symplectique de dimension $2n$. Pour tout point $x \in M$, il existe une carte (U, ϕ) de M telle que $x \in U$ et*

$$\phi_*(\omega_{|U}) = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dx_{n+i} \ .$$

Une telle carte sera appelée *carte canonique* de la variété symplectique M. De même, on appellera *atlas canonique* de M tout atlas de M dont les cartes sont des cartes canoniques. Le théorème de Darboux garantit évidemment l'existence de tels atlas.

Remarque 1.1.1. Ce théorème implique en particulier que la géométrie symplectique, au contraire de la géométrie riemannienne, ne présente d'intérêt que pour l'étude globale de M : en effet, les variétés symplectiques de dimension $2n$ sont toutes *localement* les mêmes.

Proposition 1.1.1. *Toute variété symplectique est orientable. En particulier, si (M, ω) est une variété symplectique de dimension $2n$, alors ω^n est une forme volume sur M (où ω^n désigne le produit extérieur de n copies de ω).*

Remarque 1.1.2. En procédant par induction et en utilisant le théorème de Darboux, on montre que

$$\frac{1}{n!}\omega^n = \phi^*(dx_1 \wedge ... \wedge dx_{2n})$$

pour toute carte canonique (U, ϕ).

On considère à présent une variété symplectique (M, ω) de dimension $2n$ et une fonction lisse $H : M \to \mathbb{R}$ appelée *hamiltonien.*

Définition 1.1.3. Le *champ hamiltonien* associé à H est le champ de vecteurs X_H défini sur (M, ω) par

$$i_{X_H}\omega = -dH \ . \tag{1.1}$$

Par extension, on dira qu'un champ de vecteurs X sur M est *hamiltonien* si il existe un hamiltonien $H : M \to \mathbb{R}$ tel que X est le champ de vecteurs hamiltonien associé à H.

Il est clair que le champ hamiltonien X_H est univoquement défini par H, ω étant non-dégénérée.

En mécanique hamiltonienne, l'*état* d'un système physique est un point $x_0 \in M$. Son évolution temporelle, ou *trajectoire*, est décrite par le flot de X_H en x_0. Plus précisément, la trajectoire de x_0 est la courbe $t \mapsto \Phi^t_{X_H}(x_0)$ définie comme l'unique solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d\Phi^t_{X_H}(x_0)}{dt} = X_H(\Phi^t_{X_H}(x_0)) \\ \Phi^0_{X_H}(x_0) = x_0 \ . \end{cases} \tag{1.2}$$

On notera parfois $\Phi^t_{X_H}(x) = \Phi_{X_H}(x, t)$ lorsque l'on souhaite insister sur la dépendance du flot en $x \in M$. L'équation (1.1) est appelée *équation d'Hamilton.* Notons en particulier que le hamiltonien H est une intégrale première de cette équation, i.e. l'application $t \mapsto H(\Phi^t_{X_H}(x))$ est constante sur son domaine de définition, pour tout $x \in M$.

1.2 États statistiques lisses

Dans le cadre de la mécanique hamiltonienne telle que décrite ci-dessus, le nombre de dimensions de la variété M décrivant l'évolution du système dépend du nombre de particules considérées. Typiquement, pour un système de N particules, la variété M sera de dimension supérieure à $6N$ (3 composantes pour la position d'une particule et 3 pour sa vitesse). Lorsque l'on considère les problèmes issus de la thermodynamique ou de la physique statistique, tels que le comportement d'un gaz ou d'un liquide, le nombre important de particules entrant en considération rend ce formalisme peu pratique.

La notion d'état statistique a été introduite pour résoudre ce problème. Dans ce formalisme, plutôt que de représenter le système physique par un point évoluant sur une variété symplectique, on considère une densité de probabilité définie sur cette variété. Cette densité décrit la probabilité que le système se trouve dans un état donné à un instant donné.

1.2.1 Mesures sur une variété symplectique

Afin d'introduire la notion de densité de probabilité sur une variété symplectique (M, ω), il nous faut définir une mesure de référence qui reflète autant que possible les propriétés de la variété considérée. On va utiliser le théorème de Darboux pour définir une mesure canonique sur (M, ω), appelée mesure de Liouville. Les résultats de théorie de la mesure utilisés dans cette section sont rappelés dans l'annexe A.

On considère la σ-algèbre borélienne sur M, que l'on note σ_M. C'est la plus petite σ-algèbre sur M qui contient tous les ouverts de M. Pour (U, ϕ) une carte canonique de M et A un ensemble mesurable tel que $A \subseteq U$, $\phi(A)$ est mesurable (car ϕ est continue). Supposons que $\lambda(\phi(A))$ est fini. On aimerait définir une mesure μ sur (M, σ_M) telle que

$$\mu(A) = \lambda(\phi(A)) \;, \tag{1.3}$$

avec λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{2n}$. La mesure de Lebesgue étant la mesure associée à la forme volume $dx_1 \wedge ... \wedge dx_{2n}$, en utilisant la remarque 1.1.2, l'équation se réécrit

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \int_{\phi(A)} dx_1 ... dx_{2n} \\ &= \int_A \phi^* dx_1 \wedge ... \wedge dx_{2n} \\ &= \frac{1}{n!} \int_A \omega^n \;. \end{aligned}$$

C'est donc tout naturellement que l'on définit la mesure μ sur σ_M via

$$\mu(A) = \frac{1}{n!} \int_A \omega^n \;.$$

C'est la *mesure de Liouville* sur (M, ω). Au vu de ce qui précède, la mesure de Liouville coïncide avec la mesure de Lebesgue lorsqu'on l'exprime en coordonnées canoniques. On va montrer qu'elle est l'unique mesure borélienne vérifiant cette propriété.

Lemme 1.2.1. *Soit* (M, ω) *une variété symplectique de dimension* $2n$ *munie de sa* σ*-algèbre de Borel* σ_M*. Si* ν *est une mesure borélienne sur* M *telle que, pour toute carte canonique* (U, ϕ) *et tout ensemble mesurable* $A \subseteq U$ *tel que* $\lambda(\phi(A)) < \infty$*, on a*

$$\nu(A) = \int_{\phi(A)} dx_1 ... dx_{2n} \ ,$$

alors ν *est* σ*-finie. En particulier, la mesure de Liouville est* σ*-finie.*

Démonstration. Soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ un atlas canonique dénombrable de M. La mesure de Lebesgue étant σ-finie, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\phi(U_i)$ peut être recouvert par une famille dénombrable d'ensembles de mesure finie $(A_{i,j})_{j \in \mathbb{N}}$. Pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, on pose $U_{ij} = \phi_i^{-1}(A_{ij})$. Il est clair que $(U_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ est un recouvrement dénombrable de M et que les U_{ij} sont de mesure finie. En effet,

$$\nu(U_{ij}) = \lambda(\phi_i(U_{ij})) = \lambda(A_{ij}) < \infty \ .$$

$\square$

Proposition 1.2.1. *Soit* (M, ω) *une variété symplectique de dimension* $2n$ *munie de sa* σ*-algèbre de Borel* σ_M*. La mesure de Liouville est l'unique mesure borélienne* μ *telle que, pour toute carte canonique* (U, ϕ) *et tout mesurable* A *tel que* $A \subseteq U$ *et* $\lambda(\phi(A)) < \infty$*,*

$$\mu(A) = \int_{\phi(A)} dx_1 ... dx_{2n} \ .$$

Démonstration. Supposons que les mesures boréliennes μ_1 et μ_2 vérifient la propriété de l'énoncé. Soit $\mathcal{U}$ un atlas canonique dénombrable de M. Notons $\mathcal{C}$ l'ensemble des boréliens A pour lesquels il existe une carte (U, ϕ) de $\mathcal{U}$ telle que $A \subseteq U$ et $\phi(A)$ est borné dans $\mathbb{R}^{2n}$. Il est clair que $\mathcal{C}$ est fermé pour les intersections finies et que la σ-algèbre σ_M est engendrée par $\mathcal{C}$. Il s'agit donc d'un π-système pour σ_M. Comme les mesures μ_1 et μ_2 coïncident sur $\mathcal{C}$, par le théorème d'unicité de Dynkin (voir annexe A.1.1), elles coïncident sur σ_M. $\square$

Remarque 1.2.1. Les énoncés et preuves du lemme 1.2.1 et de la proposition 1.2.1 restent valables si on remplace "tout mesurable A tel que $A \subseteq U$ et $\lambda(\phi(A)) < \infty$" par "tout compact $A \subseteq U$".

Au vu du lien entre la mesure de Liouville et la mesure de Lebesgue λ, on notera λ_ω la mesure de Liouville associée à (M, ω).

Proposition 1.2.2. *La mesure de Liouville est invariante par symplectomorphismes.*

Démonstration. Soient (M_1, ω_1) et (M_2, ω_2) des variétés symplectiques et ϕ : $M_1 \to M_2$ un symplectomorphisme, i.e. $\phi^*\omega_2 = \omega_1$. Soit A un compact de M_1 et montrons que $(\phi^*\lambda_{\omega_2})(A) = \lambda_{\omega_1}(A)$. En notant χ_A la fonction caractéristique de A, la forme $\chi_{\phi(A)}\omega_2^n$ est à support compact sur M_2. On peut donc appliquer le théorème de changement de variable des formes différentielles (voir annexe, théorème A.3.2). On a

$$\begin{aligned}
(\phi^*\lambda_{\omega_2})(A) &= \lambda_{\omega_2}(\phi(A)) \\
&= \int_{M_2} \chi_{\phi(A)}\, \omega_2^n \\
&= \int_{\phi^{-1}(M_2)} \chi_{\phi(A)} \circ \phi\, \phi^*(\omega_2^n) \\
&= \int_{M_1} \chi_A\, (\phi^*\omega_2)^n \\
&= \int_{M_1} \chi_A\, \omega_1^n \\
&= \lambda_{\omega_1}(A)\ .
\end{aligned}$$

□

La mesure de Liouville est donc un objet canonique associé à la structure symplectique : deux variétés symplectomorphes auront la même mesure de Liouville. On en déduit le théorème de changement de variables suivant.

Théorème 1.2.1. *Soient (M_1, ω_1) et (M_2, ω_2) des variétés symplectiques et ϕ : $M_1 \to M_2$ un symplectomorphisme. Soit $f : M_1 \to \mathbb{R}$ une application λ_{ω_1}-mesurable. L'application f est λ_{ω_1}-intégrable sur M_1 si et seulement si l'application $f \circ \phi^{-1}$ est λ_{ω_2}-intégrable sur M_2. Dans ce cas,*

$$\int_{M_1} f d\lambda_{\omega_1} = \int_{M_2} f \circ \phi^{-1} d\lambda_{\omega_2}.$$

Ayant fixé notre mesure de référence, on peut définir la notion de densité sur une variété symplectique.

Définition 1.2.1. Soit (M, ω) une variété symplectique. Une mesure borélienne μ sur M est dite *lisse* par rapport à la mesure de Liouville si il existe une fonction lisse $\rho : M \to \mathbb{R}$ intégrable sur M par rapport à la mesure de Liouville et telle que pour tout borélien A avec $\lambda_\omega(A) < \infty$,

$$\mu(A) = \int_A \rho d\lambda_\omega\ .$$

La fonction ρ est appelée *densité* de μ.

1.2.2 Évolution d'un état statistique

Soit (M, ω) une variété symplectique, $H : M \to \mathbb{R}$ un hamiltonien et X_H le champ de vecteurs hamiltonien associé. L'*état statistique* du système est représenté par une mesure de probabilité p_0 sur M, lisse par rapport à la mesure de Liouville. Notons $\rho_0 \in C^\infty(M)$ la densité de probabilité associée à p_0. Par analogie avec les équations de la mécanique hamiltonienne classique, on décrit l'évolution temporelle de p_0 en faisant évoluer la densité le long du flot.

Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in M$, le flot $\Phi_{X_H}(x,t)$ existe pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. La *trajectoire* de p_0 est la courbe définie au voisinage de 0 par $t \mapsto p_0(t)$, avec $p_0(t)$ la mesure lisse de densité

$$\rho_0(t) := \rho_0 \circ \Phi_{X_H}^{-t} .$$

Remarque 1.2.2. Afin de simplifier les notations et énoncés, on supposera dans cette section l'existence d'un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in M$, le flot $\Phi_{X_H}(x,t)$ existe pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. Cela revient à demander que $\Phi^t_{X_H}$ soit un difféomorphisme global de M pour t suffisament petit.

Si l'on souhaite se passer de cette hypothèse, on doit considérer des ouverts U, V de M tels que $\Phi^t_{X_H} : U \to V$ est un difféomorphisme et imposer que le support de la densité ρ_0 soit inclus dans U, faute de quoi l'expression $\rho_0 \circ \Phi^{-t}_{X_H}$ pourrait ne pas être bien définie.

On aimerait pouvoir envisager le hamiltonien comme intégrale première du mouvement, comme dans le cas classique. Cependant, la trajectoire d'un état statistique donné n'est plus une courbe de M, mais bien une courbe à valeurs dans l'ensemble des mesures lisses sur M : on ne peut donc pas directement évaluer H sur un état statistique donné. En revanche, on peut considérer sa *valeur moyenne* sur M.

Définition 1.2.2. Soit (M, ω) une variété symplectique, $H : M \to \mathbb{R}$ un hamiltonien et p un état statistique sur M de densité ρ par rapport à la mesure de Liouville. Si H est intégrable sur M par rapport à p, la *valeur moyenne* de H dans l'état statistique p est

$$\mathcal{E}_p(H) = \int_M H dp = \int_M H \rho d\lambda_\omega .$$

L'état statistique p étant entièrement déterminé par sa densité ρ, on s'autorisera parfois à noter $\mathcal{E}_\rho := \mathcal{E}_p$. On peut à présent vérifier que la valeur moyenne du hamiltonien est conservée le long de la trajectoire.

Lemme 1.2.2. *Soit $H : M \to \mathbb{R}$ un hamiltonien et X_H le champ de vecteurs hamiltonien associé. Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que le flot $\Phi_{X_H}(t,x)$ est défini pour tout $x \in M$ et $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. Alors $\Phi^t_{X_H} : x \mapsto \Phi_{X_H}(t,x)$ est un symplectomorphisme.*

Démonstration. Rappelons que (cfr. [AM08] Corollaire 2.2.21) pour tout champ de vecteurs X et toute k-forme différentielle α, on a pour tout $t_0 \in]-\varepsilon, \varepsilon[$

$$\frac{d}{dt}|_{t=t_0} {\Phi^t_X}^* \alpha = {\Phi^{t_0}_X}^* (\mathcal{L}_X \alpha) \ ,$$

où $\mathcal{L}_X$ désigne la dérivée de Lie dans la direction du champ X. Dès lors, en utilisant la formule de Cartan $\mathcal{L}_X = i_X d + d i_X$, on trouve

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|_{t=t_0} {\Phi^t_{X_H}}^* \omega &= {\Phi^{t_0}_{X_H}}^* (\mathcal{L}_{X_H} \omega) \\ &= {\Phi^{t_0}_{X_H}}^* (d i_{X_H} \omega + i_{X_H} d\omega) \\ &= 0\end{aligned}$$

puisque ω est fermé et $i_{X_H}\omega = -dH$. Comme $\Phi^0_{X_H}$ est l'identité, la conclusion suit. □

Proposition 1.2.3. *Soit (M, ω) une variété symplectique, $H : M \to \mathbb{R}$ un hamiltonien et supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que le flot $\Phi_{X_H}(t, x)$ est défini pour tout $x \in M$ et $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. Soit p un état statistique lisse de densité ρ. La valeur moyenne du hamiltonien est conservée le long de la trajectoire de p, i.e. pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$,*

$$\mathcal{E}_p(H) = \mathcal{E}_{p(t)}(H) \ .$$

Démonstration. Le flot $\Phi^t_{X_H} : M \to M$ étant un symplectomorphisme, il préserve la mesure de Liouville. On a donc

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{p(t)}(H) &= \int_M H(x)\rho(\Phi^{-t}_{X_H}(x)) d\lambda_\omega \\ &= \int_M H(\Phi^t_{X_H}(x))\rho(x) d({\Phi^{-t}_{X_H}}^* \lambda_\omega) \\ &= \int_M H(x)\rho(x) d\lambda_\omega \\ &= \mathcal{E}_p(H) \ .\end{aligned}$$

□

1.3 Maximisation de l'entropie et états de Gibbs

La notion d'entropie intervient dans bon nombre de domaines physiques et mathématiques et possède diverses interprétations selon le contexte que l'on souhaite envisager. Dans le cadre de la physique statistique, cette grandeur est liée au célèbre "second principe de la thermodynamique", formulé par R. Clausius en

1865. Un système physique isolé est à l'équilibre si son entropie est maximale. On renverra à [Owe12], [SC97] et [LY00] pour une exposition détaillée de ce principe. Pour une introduction au rôle de l'entropie dans la théorie de l'information, on pourra consulter [Mar20] ou [Bar14].

Dans ce travail, on se contentera de donner la définition formelle de l'entropie comme quantité associée à un état statistique. On en étudiera les éventuels maxima et on montrera que ceux-ci constituent bien des états d'équilibre, i.e. qu'ils sont invariants par le flot du hamiltonien.

Définition 1.3.1. Soit p un état statistique de densité ρ sur M. Si on prend la convention $x\log(x) = 0$ pour $x = 0$, alors la fonction

$$h : M \to \mathbb{R} : x \mapsto -\rho(x)\log(\rho(x))$$

est continue sur M. Lorsqu'elle est intégrable sur M par rapport à la mesure de Liouville, l'*entropie* du système dans l'état p est

$$s(\rho) := -\int_M \rho\log(\rho)d\lambda_\omega \ .$$

Tout comme la valeur moyenne du hamiltonien, l'entropie est constante le long des trajectoires.

Proposition 1.3.1. *Soit p un état statistique lisse sur M de densité ρ dont l'entropie $s(\rho)$ existe. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $p(t)$ existe, l'entropie $s(\rho(t))$ existe et*

$$s(\rho(t)) = s(\rho) \ .$$

Démonstration. La preuve est similaire à celle de la proposition 1.2.3. □

Fixons $E \in \mathbb{R}$. On considère l'ensemble des états statistiques p tels que $\mathcal{E}_\rho(H) = E$. Parmi ceux-ci, on aimerait déterminer lesquels présentent la plus grande entropie. En d'autres termes, on cherche les états statistiques qui maximisent l'entropie pour un niveau d'énergie fixé.

En utilisant la concavité de la fonction

$$h : [0, +\infty[\to \mathbb{R} : z \mapsto -z\log(z)$$

intervenant dans la définition de l'entropie, on peut se faire une première intuition d'à quoi pourraient ressembler de tels états. Le raisonnement qui suit est purement heuristique et vise à donner une première intuition quant à la construction des états de Gibbs. On donnera une preuve rigoureuse dans un cas plus général au début du chapitre 2.

Soient deux états statistiques p_0 et p de densité respective ρ_0, ρ telles que les quantités $s(\rho_0), s(\rho), \mathcal{E}_{\rho_0}(H)$ et $\mathcal{E}_\rho(H)$ sont finies, avec

$$\mathcal{E}_{\rho_0}(H) = \mathcal{E}_\rho(H).$$

On vérifie aisément que la fonction $h : -z \mapsto z\log(z)$ est concave sur $[0, +\infty[$ (sa dérivée seconde est partout négative). En particulier, elle est sous-linéaire : pour tout $z_0 > 0$, $h(z)$ se trouve sous la droite tangente au graphe de h en z_0. En d'autres termes, en écrivant l'équation de la tangente à h en z_0, on trouve

$$h(z) \leq z_0 - z - z\log(z_0)$$

pour tous $z, z_0 > 0$. En prenant $z_0 = \rho_0(x)$ et $z = \rho(x)$, l'inégalité devient

$$h(\rho(x)) \leq \rho_0(x) - \rho(x) - \rho(x)\log(\rho_0(x)) \ .$$

En supposant les deux membres intégrables sur M, on trouve

$$s(\rho) \leq \int_M -\rho(x)\log(\rho_0(x))d\lambda_\omega \ , \tag{1.4}$$

ρ et ρ_0 étant des densités de probabilité, donc d'intégrale 1 sur M. On peut réécrire le membre de droite de manière à faire apparaitre l'entropie de ρ_0 :

$$\begin{aligned} s(\rho) &\leq \int_M -\rho(x)\log(\rho_0(x))d\lambda_\omega \\ &= \int_M -(\rho(x) - \rho_0(x))\log(\rho_0(x)) - \rho_0(x)\log(\rho_0(x))d\lambda_\omega \\ &= -\int_M (\rho(x) - \rho_0(x))\log(\rho_0(x))d\lambda_\omega + s(\rho_0) \ . \end{aligned}$$

On aimerait choisir judicieusement $\rho_0(x)$ de manière à avoir

$$\int_M (\rho(x) - \rho_0(x))\log(\rho_0(x))d\lambda_\omega = 0 \ ,$$

auquel cas l'inégalité se réécrirait $s(\rho) \leq s(\rho_0)$ et ρ_0 aurait bien une entropie maximale. Au vu de la présence du logarithme, on peut postuler que $\rho_0(x)$ est de la forme $\exp(f(x))$ pour $f : M \to \mathbb{R}$. Dans ce cas, l'expression à annuler devient

$$\begin{aligned} \int_M (\rho(x) - \rho_0(x))\log(\rho_0(x))d\lambda_\omega &= \int_M (\rho(x) - \rho_0(x)f(x)d\lambda_\omega \\ &= \int_M \rho(x)f(x)d\lambda_\omega - \int_M \rho_0(x)f(x)d\lambda_\omega \\ &= \mathcal{E}_{\rho_0}(f) - \mathcal{E}_\rho(f) \ . \end{aligned}$$

Comme on a imposé que ρ_0 et ρ donnent la même valeur moyenne au hamiltonien H, on peut prendre $f = \beta H$ avec $\beta \in \mathbb{R}$ une constante. Au final, notre densité s'écrit

$$\rho_0(x) = \frac{1}{P}\exp(H(x)\beta)$$

avec $\beta \in \mathbb{R}$ une constante et $P > 0$ une constante de normalisation telle que ρ_0 est d'intégrale 1 sur M.

On a donc un ensemble de candidats potentiels à la maximalisation de l'entropie. On les appellera *états de Gibbs*.

Définition 1.3.2. Soit (M, ω) une variété symplectique et $H : M \to \mathbb{R}$ un hamiltonien. Notons Ω l'ensemble des $\beta \in \mathbb{R}$ tels que la fonction

$$M \to \mathbb{R} : x \mapsto \exp(H(x)\beta)$$

est intégrable sur M par rapport à la mesure de Liouville. Pour tout $\beta \in \Omega$, l'*état de Gibbs* associé à β est l'état statistique p_β de densité

$$\rho_\beta(x) = \frac{1}{P(\beta)} \exp(H(x)\beta) \ ,$$

avec $P(\beta)$ une constante de normalisation déterminée par

$$P(\beta) = \int_M \exp(\beta H(x)) d\lambda_\omega \ .$$

L'ensemble Ω sera appelé *ensemble des températures* associé au hamiltonien H.

Il est clair que les états p_β définissent bien des mesures de probabilité lisses sur M.

Proposition 1.3.2. *Soit (M, ω) une variété symplectique, $H : M \to \mathbb{R}$ un hamiltonien et Ω l'ensemble des températures associé. Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que le flot hamiltonien $\Phi^t_{X_H}(x)$ est défini pour tout $x \in M$ et $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. Alors pour tout $\beta \in \Omega$, l'état de Gibbs p_β est invariant par rapport au flot hamiltonien :*

$$\rho_\beta(\Phi^{-t}_{X_H}(x)) = \rho_\beta(x)$$

pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$.

Démonstration. Cela découle directement de la définition de ρ_β, le hamiltonien H étant invariant le long du flot. □

Remarque 1.3.1. Les états de Gibbs tels que présentés dans cette section trouvent une application en physique statistique : faisant écho à la propriété de stabilité décrite Proposition 1.3.2, ils sont utilisés pour modéliser les états d'équilibre thermodynamique d'un système isolé. Expérimentalement, le paramètre $\beta \in \Omega$ ne dépend que de la température T du système : on a

$$\beta = \frac{1}{kT}$$

où k est une constante appelée *constante de Boltzmann* qui dépend du choix des unités. Á toute température physique T correspond donc une température généralisée β et un état d'équilibre p_β. Nous ne nous aventurerons pas plus loin dans la thermodynamique au cours de ce mémoire, le lecteur intéressé pourra consulter [SC97].

Chapitre 2

États de Gibbs d'une action hamiltonienne

Dans cette section, on considère un groupe de Lie G agissant sur une variété symplectique (M, ω) par une action lisse $\Phi : G \times M \to M$. On commence par introduire la notion d'action hamiltonienne et d'application moment, généralisant l'équation de Hamilton (1.1) présentée chapitre 1. On définit ensuite les états de Gibbs pour une telle action. Ceux-ci se présentent comme un ensemble de mesures de probabilités sur M, indicées par un ouvert Ω inclus dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G. Par analogie avec le cas classique exposé chapitre 1, cet ouvert sera appelé *ouvert des températures généralisées*. On peut y définir des fonctions particulières dites *fonctions thermodynamiques* qui généralisent les notions de valeur moyenne du hamiltonien et d'entropie, ainsi qu'une métrique riemannienne que l'on appellera *métrique de Souriau* et qui sera un des sujets de discussion principaux dans les chapitres 3 et 4.

Enfin, on étudiera quelques exemples simples d'actions hamiltoniennes sur le plan symplectique $(\mathbb{R}^2, dx \wedge dy)$: translations, rotations et groupes de matrices. On verra que même pour ces exemples à priori triviaux, l'existence d'états de Gibbs n'est pas garantie.

2.1 Actions hamiltoniennes et moments

Cette section est principalement issue de [Mar06] et [OR13].
À toute action lisse de groupe de Lie G sur une variété M, on peut associer des champs de vecteurs dits *fondamentaux* comme suit.

Définition 2.1.1. Soit G un groupe de Lie, M une variété lisse et une action lisse de G sur M, $\Phi : G \times M \to M$. Pour tout $X \in \mathfrak{g}$, le *champ fondamental* associé à

X est le champ de vecteurs X^*_Φ défini sur M par

$$X^*_\Phi(x) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\Phi(\exp_G(-tX), x), \qquad \forall x \in M \ .$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté quant à l'action Φ considérée, on se permettra de noter $X^*_\Phi := X^*$.

Remarque 2.1.1. La convention de signe choisie ici pour la définition des champs de vecteurs fondamentaux fait de l'application $X \mapsto X^*$ un morphisme d'algèbres de Lie : on a pour tous $X, Y \in \mathfrak{g}$

$$[X, Y]^* = [X^*, Y^*] \ .$$

Certains auteurs préfèrent toutefois définir X^* avec la convention

$$X^*_\Phi(x) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\Phi(\exp_G(tX), x) \ .$$

Dans ce cas, l'application $X \mapsto X^*$ est un anti automorphisme d'algèbres de Lie.

Définition 2.1.2. Soit G un groupe de Lie, (M, ω) une variété symplectique et $\Phi : G \times M \to M$ une action lisse de G sur M. L'action Φ est dite *symplectique* ou *canonique* si pour tout $g \in G$, l'application

$$\Phi_g : M \to M : x \mapsto \Phi(g, x)$$

est un symplectomorphisme.

On aimerait écrire une équation similaire à l'équation de Hamilton (1.1), mais qui refléterait les propriétés de l'action Φ.

Définition 2.1.3. Soit $\Phi : G \times M \to M$ une action symplectique. L'action Φ est dite *hamiltonienne* si pour tout $X \in \mathfrak{g}$, le champ fondamental X^*_Φ est hamiltonien.

Si Φ est une action hamiltonienne alors pour tout vecteur $X \in \mathfrak{g}$ on peut trouver un hamiltonien $J_X : M \to \mathbb{R}$ associé à X. On aimerait considérer l'application $\mu : X \mapsto J_X$ associant à chaque vecteur de $\mathfrak{g}$ son hamiltonien.

Proposition 2.1.1. *Soit $\Phi : G \times M \to M$ une action hamiltonienne. Il existe une application linéaire $\mu : \mathfrak{g} \to C^\infty(M)$ telle que pour tout $X \in \mathfrak{g}$, $\mu(X)$ est un hamiltonien du champ fondamental X^*_Φ.*

Démonstration. Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de $\mathfrak{g}$. Pour tout $i \in \{1, .., n\}$, le champ fondamental e_i^* admet un hamiltonien $J_{e_i} \in C^\infty(M)$. On définit alors $\mu(e_i) = J_{e_i}$ et on étend μ à $\mathfrak{g}$ par linéarité. $\square$

L'application μ ci-dessus est appelée *hamiltonien généralisé* associé à Φ.

Remarque 2.1.2. La preuve de la proposition précédente montre que le hamiltonien généralisé est entièrement déterminé par le choix d'un hamiltonien J_{e_i} pour chaque élément e_i d'une base de $\mathfrak{g}$. Sur une variété connexe M, un tel hamiltonien est unique à une constante près, le hamiltonien généralisé est donc unique à une application linéaire $\mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ près.

Notons que, au contraire du hamiltonien classique, le hamiltonien généralisé n'est pas défini sur M, mais sur $\mathfrak{g}$. On introduit donc une autre application, l'application moment.

Définition 2.1.4. Soit G un groupe de Lie, (M, ω) une variété symplectique et $\Phi : G \times M \to M$ une action hamiltonienne. Soit $\mu : \mathfrak{g} \to C^\infty(M, \mathbb{R})$ un hamiltonien généralisé de Φ. L'*application moment* associée à μ est l'application $J_\mu : M \to \mathfrak{g}^*$, définie par

$$\langle J_\mu(x), X \rangle = \mu(X)(x) \ .$$

Par définition, l'application J_μ vérifie pour tout $X \in \mathfrak{g}$

$$i_{X^*_\Phi} \omega = -d\langle J_\mu, X \rangle \ . \tag{2.1}$$

C'est l'équivalent de l'équation de Hamilton (1.1) pour une action hamiltonienne.

Proposition 2.1.2. *Soit G un groupe de Lie, (M, ω) une variété symplectique connexe et $\Phi : G \times M \to M$ une action hamiltonienne.*

- *Si $J : M \to \mathfrak{g}^*$ est une application lisse qui vérifie l'équation (2.1), alors il existe un hamiltonien généralisé μ pour Φ tel que J est le moment associé à μ, i.e. $J = J_\mu$.*
- *Soit $J_1 : M \to \mathfrak{g}^*$ un moment de Φ. Un application lisse $J_2 : M \to \mathfrak{g}^*$ est également un moment de Φ si et seulement si $J_2 = J_1 + c$ avec $c \in \mathfrak{g}^*$ une constante.*

Démonstration. Le premier point est évident : il suffit de prendre $\mu(X)(x) = \langle J(x), X \rangle$. Le second point découle du premier et de la remarque 2.1.2 □

Par abus de langage, on appellera moment toute application $J : M \to \mathfrak{g}^*$ vérifiant (2.1). Dans la suite de se travail, on supposera travailler avec M connexe, sauf mention explicite du contraire.

Exemple 2.1.1. Revenons un bref instant au hamiltonien classique. Soit (M, ω) une variété symplectique, $H \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ un hamiltonien et X_H le champ de vecteurs hamiltonien associé. Supposons que X_H est complet, i.e. que le flot $\Phi_{X_H}(x, t)$ de X_H est défini pour tout $t \in \mathbb{R}$. On peut alors définir une action du groupe de Lie $G = (\mathbb{R}, +, 0)$ sur (M, ω) en posant

$$\Phi : \mathbb{R} \times M \to M : (t, x) \mapsto \Phi_{X_H}(x, -t) \ ,$$

où on considère "$-t$" pour respecter la convention de signe des champs fondamentaux. Sous cette convention, on vérifie aisément que pour tout $s \in \mathfrak{g} \simeq \mathbb{R}$, le champ de vecteurs fondamental associé à s est $s^* = sX_H$.

Dès lors, le hamiltonien généralisé J associé à l'action Φ n'est autre que le hamiltonien classique H. On a

$$\langle J(x), \beta \rangle = H(x)\beta$$

pour tout $x \in M$ et $\beta \in \mathfrak{g}$.

Remarque 2.1.3. Dans le cas où le champ X_H n'est pas complet, l'action Φ n'est pas bien définie. On ne peut donc pas, à priori, considérer le hamiltonien classique H comme le moment d'une action. Une solution à ce problème a été proposée par J. Souriau sous l'appellation "variété des mouvements", voir [Mar20] et [SC97].

2.1.1 États de Gibbs et fonctions thermodynamiques

On reprend notre analogie avec la mécanique hamiltonienne pour généraliser la définition des états de Gibbs. On a vu que dans le cas d'un champ hamiltonien complet, on pouvait considérer l'action du groupe de Lie $(\mathbb{R}, +, 0)$ comme une action hamiltonienne, avec un moment défini par $\langle J(x), \beta \rangle = H(x)\beta$. En reprenant la définition initiale des états de Gibbs

$$\rho_\beta(x) = \frac{1}{P(\beta)} \mathrm{e}^{-H(x)\beta} ,$$

on peut proposer une généralisation relativement intuitive en remplaçant le hamiltonien classique $H(x)$ par le moment $J(x)$ (voir exemple 2.1.1). Pour tout $\beta \in \mathfrak{g}$, on aimerait donc définir

$$\rho_\beta(x) = \frac{1}{P(\beta)} \mathrm{e}^{-\langle J(x), \beta \rangle}, \qquad x \in M$$

avec

$$P(\beta) = \int_M \mathrm{e}^{-\langle J(x), \beta \rangle} d\lambda_\omega . \tag{2.2}$$

Une telle définition est toutefois à envisager avec précaution : il n'est pas certain que la fonction $x \mapsto \exp(-\langle J(x), \beta \rangle)$ définissant $P(\beta)$ est intégrable pour tout $\beta \in \mathfrak{g}$. On commence par rappeler la définition d'intégrabilité normale.

Définition 2.1.5. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : X \times U \to \mathbb{R}$ une application mesurable. Pour tout $\xi \in U$, la fonction $x \mapsto f(x, \xi)$ est dite *normalement intégrable* en ξ si il existe un voisinage V_ξ de ξ dans U et une fonction $F : X \to \mathbb{R}$ intégrable telle que

$$|f(x, \xi')| \leq F(x) \qquad \forall x \in X, \xi' \in V_\xi .$$

Dans ce cas, on dira que l'intégrale

$$\int_X f(x,\xi)d\mu(x)$$

est normalement convergente en ξ.

Dans la suite de ce travail, on va demander non seulement que l'intégrale définissant (2.2) existe, mais également qu'elle soit normalement convergente.

Définition 2.1.6. On note Ω l'ensemble des $\beta \in \mathfrak{g}$ tels que la fonction

$$(x,\beta) \mapsto \mathrm{e}^{-\langle J(x),\beta\rangle}$$

est normalement intégrable en β par rapport à la mesure de Liouville.

Par analogie avec le cas classique, les éléments de Ω seront appelés *températures généralisées*. Ce sont les seuls éléments de $\mathfrak{g}$ pour lesquels on s'autorise à définir les états de Gibbs.

Définition 2.1.7. Soit $\Omega \subseteq \mathfrak{g}$ l'ensemble des températures généralisées. La *fonction de partition* est l'application

$$P : \Omega \to \mathbb{R} : \beta \mapsto \int_M \mathrm{e}^{-\langle J(x),\beta\rangle} d\lambda_\omega \ .$$

Pour tout $\beta \in \Omega$, l'*état de Gibbs* p_β associé à β est l'état statistique de densité

$$\rho_\beta(x) = \frac{1}{P(\beta)}\mathrm{e}^{-\langle J(x),\beta\rangle}, \qquad x \in M \ .$$

Remarque 2.1.4. Il est clair que Ω ne dépend pas du choix du moment. En effet, celui-ci est défini à une constante $c \in \mathfrak{g}^*$ près et, pour tout $\beta \in \mathfrak{g}$,

$$\mathrm{e}^{-\langle J(x)+c,\beta\rangle} = C\mathrm{e}^{-\langle J(x),\beta\rangle} \ ,$$

avec $C = \mathrm{e}^{-\langle c,\beta\rangle} > 0$ une constante ne dépendant pas de x.

Dans la suite de ce travail, on notera $L_p(\lambda_\omega)$ l'ensemble des fonctions $f : M \to \mathbb{R}$ telles que f^p est intégrable sur M par rapport à la mesure de Liouville λ_ω.

Proposition 2.1.3. *Lorsqu'il est non vide, l'ensemble Ω des températures généralisées est un ouvert convexe de $\mathfrak{g}$.*

Démonstration. Soit $\beta \in \Omega$. Par définition, l'intégrale (2.2) est normalement convergente, donc il existe un voisinage ouvert V de β dans $\mathfrak{g}$ et une fonction $F : M \to \mathbb{R}$ intégrable par rapport à la mesure de Liouville telle que

$$\mathrm{e}^{-\langle J,\beta'\rangle} \leq F \qquad \forall \beta' \in V. \tag{2.3}$$

Dans ce cas, pour tout élément $\beta' \in V$, V est un voisinage de β' sur lequel l'équation (2.3) est vérifiée, donc $\beta' \in \Omega$. Dès lors, $V \subseteq \Omega$ et Ω est ouvert de $\mathfrak{g}$.

Montrons à présent que Ω est convexe. Soient $\beta_1, \beta_2 \in \Omega$ et considérons

$$\beta(t) = t\beta_1 + (1-t)\beta_2$$

avec $t \in [0,1]$. On doit montrer $\beta(t) \in \Omega$. Par définition, il existe des voisinages V_1 de β_1 et V_2 de β_2 ainsi que des fonctions intégrables $F_1 : M \to \mathbb{R}$ et $F_2 : M \to \mathbb{R}$ telles que

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-\langle J,\beta_1'\rangle} &\leq F_1 \qquad \forall \beta_1' \in V_1, \\ \mathrm{e}^{-\langle J,\beta_2'\rangle} &\leq F_2 \qquad \forall \beta_2' \in V_2. \end{aligned}$$

Pour tout $t \in [0,1]$,

$$V_t := tV_1 + (1-t)V_2$$

est un voisinage de $\beta(t)$. Pour tout $\beta' \in V_t$, on peut écrire $\beta' = t\beta_1' + (1-t)\beta_2'$ avec $\beta_1' \in V_1$ et $\beta_2' \in V_2$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-\langle J,\beta'\rangle} &= \mathrm{e}^{-\langle J,\beta_1' t\rangle}\mathrm{e}^{-\langle J,\beta_2'(1-t)\rangle} \\ &\leq \mathrm{e}^{-\langle J,\beta_1'\rangle}\mathrm{e}^{-\langle J,\beta_1'\rangle} \\ &\leq F_1^t F_2^{1-t} \end{aligned}$$

pour tout $\beta' \in V_t$. Pour conclure, il reste à montrer que la fonction $x \mapsto F_1^t(x)F_2^{1-t}(x)$ est intégrable sur M. On utilise l'inégalité de Hölder. Comme $F_1, F_2 \in L_1(\lambda_\omega)$, on a $F_1^t \in L_{\frac{1}{t}}(\lambda_\omega)$ et $F_2^{1-t} \in L_{\frac{1}{1-t}}(\lambda_\omega)$. En notant que

$$\frac{1}{\frac{1}{t}} + \frac{1}{\frac{1}{1-t}} = 1\ ,$$

l'inégalité de Hölder donne bien $F_1^t F_2^{1-t} \in L_1(\lambda_\omega)$, ce qui achève la preuve. □

Remarque 2.1.5. Dans le cas où la variété M est de mesure finie pour la mesure de Liouville, i.e. $\lambda_\omega(M) < \infty$, il est clair que l'ouvert des températures généralisées est $\Omega = \mathfrak{g}$. C'est en particulier le cas pour M compacte. De plus, si $0 \in \Omega$, alors $\lambda_\omega(M) < \infty$.

Avant d'aller plus loin, on doit vérifier que la fonction de partition P est de classe C^∞ et que l'on peut la dériver sous le signe d'intégration. Précisons tout d'abord quelques notations. Dans ce qui suit, on note D la différentielle sur $C^1(\mathfrak{g})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, $J^{\otimes k}$ est le k-ème produit tensoriel de J, défini sur M par

$$J(x)^{\otimes k}(X_1, ..., X_k) := \langle J(x), X_1\rangle ... \langle J(x), X_k\rangle$$

pour tout $x \in M$ et $X_1, ..., X_k \in \mathfrak{g}$.

Enfin, dans un léger abus de notation, pour $f : M \times \Omega \to (\mathfrak{g}^*)^{\otimes k}$, on dira que F est intégrable en $\beta \in \Omega$ (resp. normalement intégrable) si pour tous $X_1, ..., X_k \in \mathfrak{g}$ l'application

$$M \times \Omega \to \mathbb{R} : (x, \beta) \mapsto f(x, \beta)(X_1, ..., X_k)$$

est intégrable (resp. normalement intégrable) sur M en β. Dans ce cas, on notera $\int_M f(x, \beta) d\lambda_\omega$ l'élément de $(\mathfrak{g}^*)^{\otimes k}$ défini par

$$\int_M f(x, \beta) d\lambda_\omega(X_1, ..., X_k) := \int_M f(x, \beta)(X_1, ...X_k) d\lambda_\omega$$

pour tous $X_1, ..., X_k \in \mathfrak{g}$.

Lemme 2.1.1. *La fonction de partition P est de classe C^∞ sur Ω. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$,*

$$D^k_\beta P = \int_M D^k \mathrm{e}^{-\langle J(x), \beta \rangle} d\lambda_\omega = (-1)^k \int_M J(x)^{\otimes k} \mathrm{e}^{-\langle J(x), \beta \rangle} d\lambda_\omega \, .$$

Démonstration. On munit $\mathfrak{g}$ d'une norme $|| \cdot ||$ quelconque. Pour tout $\beta \in \mathfrak{g}$ et $\varepsilon > 0$, on note $b_\beta(\varepsilon)$ la boule ouverte de centre β et de rayon ε associée.

— Il est clair que pour tout $x \in M$ fixé, la fonction $\beta \mapsto \mathrm{e}^{-\langle J(x), \beta \rangle}$ est lisse sur Ω, puisque $J(x)$ est linéaire. Pour tout $X \in \mathfrak{g}$, on a

$$\begin{aligned} D_\beta(\mathrm{e}^{-\langle J(x), \beta \rangle})(X) &= \frac{d}{dt}|_{t=0} \mathrm{e}^{-\langle J(x), \beta + tX \rangle} \\ &= -\langle J(x), X \rangle \mathrm{e}^{-\langle J(x), \beta \rangle} \, . \end{aligned}$$

En procédant par induction, via un calcul similaire, on trouve

$$D^k_\beta(\mathrm{e}^{-\langle J(x), \beta \rangle})(X_1, ..., X_k) = (-1)^k \langle J(x), X_1 \rangle \, ... \, \langle J(x), X_k \rangle \mathrm{e}^{-\langle J(x), \beta \rangle}$$

pour tous $X_1, ..., X_k \in \mathfrak{g}$.

— Pour conclure, on doit montrer que pour tous $X_1, ..., X_k \in \mathfrak{g}$, la fonction

$$M \times \Omega \to \mathbb{R} : (x, \beta) \mapsto J^{\otimes k}(x)(X_1, \, ... \, , X_k) \mathrm{e}^{-\langle J(x), \beta \rangle}$$

est normalement intégrable en β, pour tout $\beta \in \Omega$. Sans perte de généralité, on peut supposer $|| \, X_i \, || \leq 1$ pour tout $i \in \{1, ..., k\}$. En effet, en posant $C = \sup || \, X_i \, ||$, on a par linéarité

$$J^{\otimes k}(X_1, ..., X_k) \mathrm{e}^{-\langle J(x), \beta \rangle} = C^k J^{\otimes k} \left(\frac{X_1}{C}, ..., \frac{X_k}{C} \right) \mathrm{e}^{-\langle J(x), \beta \rangle}$$

et le terme de droite est intégrable si et seulement si le terme de gauche l'est, $C \geq 0$ ne dépendant ni de x ni de β.

— Soit à présent $\beta \in \Omega$. Par définition de Ω, il existe $\varepsilon > 0$ et $f : M \to \mathbb{R}$ intégrable telle que

$$\mathrm{e}^{-\langle J(x),\beta'\rangle} \leq f(x)$$

pour tout $\beta' \in b_\beta(\varepsilon)$. Fixons à présent $\beta'' \in b_\beta(\frac{\varepsilon}{2})$. Notons que pour tous $y \geq 0$ et $c > 0$, on a toujours

$$y \leq \frac{1}{c}\exp(cy) \ .$$

En prenant $y = |\langle J(x), X_i\rangle|$ et $c = \frac{\varepsilon}{2k}$, on a

$$|\langle J(x), X_i\rangle| \leq \frac{2k}{\varepsilon}\exp\left(\frac{\varepsilon}{2k}|\langle J(x), X_i\rangle|\right) \ , \tag{2.4}$$

pour tout $i \in \{1, ..., k\}$.

— Pour tout $i \in \{1, ..., k\}$, soit $\eta_i \in \{-1, 1\}$ tel que

$$|\langle J(x), X_i\rangle| = -\langle J(x), \eta_i X_i\rangle \ .$$

On a

$$J^{\otimes k}(X_1, ..., X_k)\mathrm{e}^{-\langle J(x),\beta''\rangle} \leq \left(\frac{2k}{\varepsilon}\right)^k \exp\left(-\langle J(x), \beta'' + \frac{\varepsilon}{2k}(\eta_1 X_1 + ... + \eta_k X_k))\rangle\right) \ .$$

Il suffit dès lors de remarquer que, comme $|| X_i || \leq 1$,

$$|| \beta - (\beta'' + \frac{\varepsilon}{2k}(\eta_1 X_1 + ... + \eta_k X_k)) || \leq || \beta - \beta'' || + \frac{\varepsilon k}{2k} < \varepsilon$$

et donc

$$|J^{\otimes k}(x)(X_1, ..., X_k)\mathrm{e}^{-\langle J(x),\beta''\rangle}| \leq f(x)$$

pour tout $\beta'' \in b_\beta(\frac{\varepsilon}{2})$. Ceci achève la preuve.

□

Ayant généralisé la définition des états de Gibbs et étudié la régularité de la fonction de partition, la prochaine étape est d'adapter les définitions de la valeur moyenne et de l'entropie, afin de vérifier si les états de Gibbs vérifient une propriété de maximalisation de l'entropie similaire à celle étudiée au chapitre 1.

Définition 2.1.8. Soit $f : M \to \mathfrak{g}^*$ une application lisse et p un état statistique lisse sur M de densité ρ. Si f est intégrable sur M par rapport à p, la *valeur moyenne* de f dans l'état ρ est l'élément $\mathcal{E}_\rho(f) \in \mathfrak{g}^*$ défini par

$$\langle \mathcal{E}_\rho(f), X\rangle = \int_M \langle f(x), X\rangle \rho(x) d\lambda_\omega \ .$$

Remarque 2.1.6. Tout comme on s'intéressait à la valeur moyenne du hamiltonien au cours du chapitre 1, on portera ici une attention particulière à la valeur moyenne du moment J. La valeur moyenne de J dans l'état de Gibbs p_β est bien définie pour tout $\beta \in \Omega$. En effet, au vu du lemme 2.1.1, l'intégrale

$$\mathcal{E}_{p_\beta}(J) = \frac{1}{P(\beta)} \int_M J(x) \mathrm{e}^{-\langle J(x), \beta \rangle} d\lambda_\omega = \frac{1}{P(\beta)} D_\beta P$$

est normalement convergente en β.

Proposition 2.1.4. *Soit $\beta \in \Omega$ et p_1 un état statistique de densité ρ_1 tel que $\mathcal{E}_{\rho_1}(J)$ existe. Si $\mathcal{E}_{\rho_1}(J) = \mathcal{E}_{\rho_\beta}(J)$ alors l'entropie s vérifie*

$$s(\rho_1) \leq s(\rho_\beta) \ .$$

De plus, l'égalité a lieu si et seulement si $\rho_1 = \rho_\beta$.

Démonstration. Considérons la fonction

$$h(z) : z \mapsto \begin{cases} -z \log(z) & \text{si } z > 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \ . \end{cases}$$

Il s'agit d'une fonction continue et concave. Soit $(z_0, h(z_0))$ un point du graphe de h, avec $z_0 > 0$. Par concavité, la droite tangente à h en le point $(z_0, h(z_0))$ est au-dessus du graphe de h. Cette droite est de pente $-(1 + \log(z_0))$. On a donc pour tout $z > 0$

$$h(z) \leq h(z_0) - (1 + \log(z_0))(z - z_0) = z_0 - z(1 + \log(z_0)) \ .$$

Notons que l'inégalité est également vérifiée en $z = 0$. En particulier, pour tout $x \in M$, on peut prendre $z = \rho_1(x)$ et $z_0 = \rho_\beta(x) > 0$. L'inégalité devient :

$$h(\rho_1(x)) \leq \rho_\beta(x) - \rho_1(x)(1 + \log(\rho_\beta(x))) \ . \tag{2.5}$$

En intégrant sur M les deux membres de l'équation, on a

$$\begin{aligned} s(\rho_1) &\leq 1 - 1 - \int_M \rho_1(x) \log(\rho_\beta(x)) d\lambda_\omega \\ &= \int_M (\rho_1(x) - \rho_\beta(x) + \rho_\beta(x)) \log(\rho_\beta(x))) d\lambda_\omega \\ &= \int_M (\rho_1(x) - \rho_\beta(x))(-P(\beta) - \langle J(x), \beta \rangle) d\lambda_\omega + s(\rho_\beta) \\ &= -P(\beta)(1-1) - \langle \mathcal{E}_{\rho_1}(J), \beta \rangle + \langle \mathcal{E}_{\rho_\beta}(J), \beta \rangle + s(\rho_\beta) \\ &= s(\rho_\beta) \ . \end{aligned}$$

Il reste à montrer que si $s(\rho_1) = s(\rho_\beta)$ alors $\rho_1 = \rho_\beta$. Posons

$$\phi(x) := h(\rho_1(x)) \ , \qquad \psi(x) := \rho_\beta(x) - \rho_1(x)(1 + \log(\rho_\beta(x)))$$

pour tout $x \in M$. Notons que les fonctions ϕ et ψ correspondent respectivement au membre de gauche et au membre de droite de l'inégalité (2.5). Au vu de ce qui précède, on a donc $\psi - \phi \geq 0$ sur M. De plus, comme $s(\rho_\beta) = s(\rho_1)$ et au vu des calculs ci-dessus, la fonction $\psi - \phi$ est d'intégrale nulle sur M. Elle est donc nulle presque partout, et même partout sur M puisqu'elle est continue. En conclusion, pour tout $x \in M$, on a

$$-\rho_1(x) \log(\rho_1(x)) = \rho_\beta(x) - (1 + \log(\rho_\beta(x)))\rho_1(x) \ .$$

Si $\rho_1(x) = 0$, alors il est clair que $\rho_\beta(x) = 0$ et on a bien l'égalité annoncée. Si $\rho_1(x) \neq 0$, alors on peut diviser les deux membres par $\rho_1(x)$ et on obtient

$$\frac{\rho_\beta(x)}{\rho_1(x)} - \log\left(\frac{\rho_\beta(x)}{\rho_1(x)}\right) = 1 \ .$$

Pour conclure, on remarque que la fonction $z \mapsto z - \log(z)$ atteint son minimum en un l'unique point $z = 1$, et que ce minimum vaut 1. Dès lors, on doit avoir

$$\frac{\rho_\beta(x)}{\rho_1(x)} = 1$$

et la conclusion suit. □

Remarque 2.1.7. Dans la proposition précédente, on peut se contenter de demander en hypothèse que $\langle \mathcal{E}_{\rho_1}(J), \beta \rangle$ existe et que $\langle \mathcal{E}_{\rho_1}(J), \beta \rangle = \langle \mathcal{E}_{\rho_\beta}(J), \beta \rangle$.

Dans ce qui suit, on considère l'entropie et la valeur moyenne du moment comme fonctions définies sur Ω. Plus précisément, on considère

$$P : \Omega \to \mathbb{R} : \beta \mapsto P(\beta)$$

$$E_J : \Omega \to \mathfrak{g}^* : \beta \mapsto \mathcal{E}_{p_\beta}(J) \ .$$

$$S : \Omega \to \mathbb{R} : \beta \mapsto s(\rho_\beta)$$

Ces fonctions sont parfois appelées *fonctions thermodynamiques généralisées*. On commence par étudier leurs premières dérivées.

Lemme 2.1.2. *Les fonctions E_J et S sont de classe C^∞ sur Ω. De plus :*

1. $E_J(\beta) = D_\beta(-\log P)$
2. $S(\beta) = \log(P(\beta)) + \langle E_J(\beta), \beta \rangle$

3. *La différentielle de E_J en β est l'application définie sur $\mathfrak{g}$ et à valeurs dans $\mathfrak{g}^*$ définie par*

$$\langle D_\beta E_J(X), Y\rangle = -\frac{1}{P(\beta)}\int_M \langle J(x)-E_J(\beta), X\rangle\langle J(x)-E_J(\beta), Y\rangle \mathrm{e}^{-\langle J(x),\beta\rangle} d\lambda_\omega \ .$$

4. *La différentielle de S en $\beta \in \Omega$ est l'élément de $\mathfrak{g}^*$ défini par*

$$\langle D_\beta S, X\rangle = \langle D_\beta E_J(X), \beta\rangle \ .$$

Démonstration. Le premier point découle directement du Lemme 2.1.1. Le second est une simple réécriture de la définition.

— Soient $\beta \in \Omega$, $X \in T_\beta\Omega$ et calculons $D_\beta E_J : T_\beta\Omega \to T_{E_J(\beta)}\mathfrak{g}^*$. Sous les identifications $T_\beta\Omega \simeq \mathfrak{g}$ et $T_{E_J(\beta)}\mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g}^*$, on peut considérer $D_\beta E_J$ comme une application définie sur $\mathfrak{g}$ à valeurs dans $\mathfrak{g}^*$. Pour tous $X, Y \in \mathfrak{g}$, en utilisant le lemme 2.1.1,

$$\begin{aligned}
\langle D_\beta E_J(X), Y\rangle =& \frac{d}{dt}|_{t=0}\langle E_J(\beta+tX), Y\rangle \\
=& \frac{d}{dt}|_{t=0}\frac{1}{P(\beta+tX)}\int_M \langle J(x), Y\rangle \mathrm{e}^{-\langle J(x),\beta\rangle} d\lambda_\omega \\
&+ \frac{1}{P(\beta)}\int_M \frac{d}{dt}|_{t=0}\left(\langle J(x), Y\rangle \mathrm{e}^{-\langle J(x),\beta+tX\rangle}\right) d\lambda_\omega \\
=& \langle E_J(\beta), X\rangle\langle E_J(\beta), Y\rangle - \frac{1}{P(\beta)}\int_M \langle J(x), X\rangle\langle J(x), Y\rangle \mathrm{e}^{-\langle J(x),\beta\rangle} d\lambda_\omega \\
=& -\frac{1}{P(\beta)}\int_M \langle J(x)-E_J(\beta), X\rangle\langle J(x)-E_J(\beta), Y\rangle \mathrm{e}^{-\langle J(x),\beta\rangle} d\lambda_\omega \ .
\end{aligned}$$

La dernière égalité est obtenue en remarquant que, $\rho_\beta(x) = \frac{1}{P(\beta)}\exp(-\langle J(x),\beta\rangle)$ étant une densité de probabilité,

$$\langle E_J(\beta), X\rangle\langle E_J(\beta), Y\rangle = \frac{1}{P(\beta)}\int_M \langle E_J(\beta), X\rangle\langle E_J(\beta), Y\rangle \mathrm{e}^{-\langle J(x),\beta\rangle} d\lambda_\omega \ .$$

— Au vu des points précédents, pour tous $\beta \in \Omega$ et $X \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned}
\langle D_\beta S, X\rangle &= D_\beta(\log P)(X) + \langle D_\beta E_J(X), \beta\rangle + \langle E_J(\beta), X\rangle \\
&= \langle D_\beta E_J(X), \beta\rangle \ .
\end{aligned}$$

□

L'expression de la différentielle de E_J présentée ci-dessus est des plus intéressantes. En effet, si on note

$$\begin{aligned}\Gamma_\beta(X,Y) &:= -\langle D_\beta E_J(X), Y\rangle &\quad (2.6)\\ &= \frac{1}{P(\beta)}\int_M \langle J(x)-E_J(\beta), X\rangle\langle J(x)-E_J(\beta), Y\rangle \mathrm{e}^{-\langle J(x),\beta\rangle} d\lambda_\omega\ , &\quad (2.7)\end{aligned}$$

on remarque que Γ définit une 2-forme linéaire et symétrique sur Ω. De plus,

$$\Gamma_\beta(X,X) \geq 0 \tag{2.8}$$

pour tout $X \in T_\beta\Omega \simeq \mathfrak{g}$. Si l'inégalité (2.8) était stricte pour tout $X \neq 0$, on pourrait alors considérer Γ comme une métrique riemannienne sur l'ouvert des températures généralisées Ω. On va voir que c'est le cas lorsque l'action est effective.

Définition 2.1.9. Soit G un groupe de Lie, (M,ω) une variété symplectique et $\Phi : G\times M \to M$ une action hamiltonienne de moment J. L'action est dite *effective* si pour tout $X \in \mathfrak{g}\setminus\{0\}$, la fonction

$$M \to \mathbb{R} : x \mapsto \langle J(x), X\rangle$$

n'est pas constante.

Proposition 2.1.5. *Si l'action hamiltonienne $\Phi : G\times M \to M$ de moment J est effective, alors pour tout $\beta \in \Omega$, Γ_β est définie positive, i.e. pour tout $X \in \mathfrak{g}\setminus\{0\}$, $\Gamma_\beta(X,X) > 0$.*

Démonstration. L'intégrand de l'expression (2.6) définissant $\Gamma_\beta(X,X)$,

$$x \mapsto \langle J(x)-E_J(\beta), X\rangle^2 \mathrm{e}^{-\langle J(x),\beta\rangle}\ ,$$

est positif sur M. Comme l'action est effective, il n'est pas nul partout sur M et, puisqu'il est continu, son intégrale sur M est strictement positive, d'où la conclusion. $\square$

Dans ce qui suit, on supposera toujours travailler avec une action hamiltonienne effective. Dans ce cas, Γ est une métrique riemannienne sur Ω. On l'appellera *métrique de Souriau*, associée au moment J.

Remarque 2.1.8. Si l'ouvert des températures généralisées Ω ne dépend pas du choix du moment J, il n'en est pas de même pour les fonctions P et E_J. En effet, soient J_1 et J_2 deux moments d'une même action hamiltonienne. Il existe $c \in \mathfrak{g}^*$ tel que $J_2 = J_1 + c$. En notant P_1, P_2 les fonctions de partition correspondant à J_1, J_2, on trouve pour tout $\beta \in \Omega$

$$P_2(\beta) = \int_M \exp(-\langle J_2(x),\beta\rangle d\lambda_\omega(x) = \exp(-\langle c,\beta\rangle)P_1(\beta)\ .$$

De plus, utilisant les formules présentées au lemme 2.1.2,

$$E_{J_2}(\beta) = E_{J_1}(\beta) + c \ .$$

En revanche, toujours en utilisant le lemme 2.1.2, on a que la métrique de Souriau ne dépend *pas* du choix de J.

Corollaire 2.1.1. *Si l'action hamiltonienne $\Phi : G \times M \to M$ de moment J est effective, alors l'application $E_J : \Omega \to \mathfrak{g}^*$ est ouverte et injective.*

Démonstration. Au vu de la proposition 2.1.5, l'application DE_J est inversible sur Ω. L'application E_J est donc ouverte. Supposons qu'il existe $\beta_1, \beta_2 \in \Omega$ tels que $E_J(\beta_1) = E_J(\beta_2)$. En particulier,

$$\langle E_J(\beta_1), \beta_2 - \beta_1 \rangle = \langle E_J(\beta_2), \beta_2 - \beta_1 \rangle.$$

En vertu de la proposition 2.1.3, l'ouvert Ω est convexe. La courbe

$$\gamma : [0, 1] \to \Omega : t \mapsto t\beta_1 + (1 - t)\beta_2$$

est donc bien définie. L'application

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R} : t \mapsto \langle E_J(\gamma(t)), \beta_2 - \beta_1 \rangle$$

est lisse sur $]0, 1[$ et prend la même valeur en $t = 0$ et $t = 1$. Par le théorème de Rolle, il existe donc $t_0 \in]0, 1[$ tel que la dérivée de f s'annule en t_0. On a

$$\begin{aligned} 0 &= D_t f(t_0) \\ &= \langle D_{\gamma(t_0)} E_J(\beta_1 - \beta_2), \beta_2 - \beta_1 \rangle \\ &= \Gamma_{\gamma(t_0)}(\beta_2 - \beta_1, \beta_2 - \beta_1) \ . \end{aligned}$$

Comme $\Gamma_{\gamma(t_0)}$ est définie positive, on doit avoir $\beta_2 - \beta_1 = 0$, d'où la conclusion. □

2.2 Premiers exemples : translations et rotations sur $\mathbb{R}^2$

On considère l'espace $\mathbb{R}^2$ muni de la structure symplectique usuelle (cfr Exemple 1.1.1), que l'on note ω. On munit $\mathbb{R}^2$ d'une base orthonormée (e_1, e_2). Dans les coordonnées associées (x_1, x_2), $\omega = dx_1 \wedge dx_2$. Il est clair que la mesure de Liouville associée est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$.

2.2.1 Translations sur $\mathbb{R}^2$

On considère l'action du groupe de Lie $G = (\mathbb{R}^2, +, 0)$ par translations sur lui-même,

$$\tau : G \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (V, X) \mapsto V + X \ .$$

La forme symplectique $dx_1 \wedge dx_2$ étant invariante par translations, il est clair que l'action τ est symplectique. On s'intéresse à l'existence d'un moment. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G est l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^2, +, 0)$ muni du crochet nul, le groupe étant commutatif. On vérifie aisément que l'exponentielle de G est l'identité sur $(\mathbb{R}^2, +, 0)$. Pour tout $X \in \mathfrak{g}$, le champ de vecteurs fondamental associé à τ est

$$X^*_\tau(p) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\tau(\exp(-tX), p) = -X \ ,$$

en tout point $p \in \mathbb{R}^2$. L'équation déterminant un éventuel moment J est donc

$$\begin{aligned} d\langle J, X\rangle(Y) &= -dx_1 \wedge dx_2(X^*_\tau, Y) \\ &= \det(X, Y) \ , \end{aligned}$$

pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^2$. Remarquons que l'équation est linéaire en X et Y, donc il suffit de la vérifier sur les éléments de base e_1, e_2. Notons $(J^1(x), J^2(x))$ les composantes du moment dans la base duale de (e_1, e_2). En prenant $X = e_1$ et $Y = e_1$, on trouve

$$\frac{\partial J^1}{\partial x_1}(x) = 0 \ .$$

Pour $X = e_1$ et $Y = e_2$, on a

$$\frac{\partial J^2}{\partial x_2}(x) = 1 \ .$$

Dès lors, $J^1(x) = x_2 + c_1$ avec $c_1 \in \mathbb{R}$ une constante. En procédant de même avec $X = e_2$, on trouve $J_2(x) = -x_1 + c_2$, $c_2 \in \mathbb{R}$. En conclusion, τ est une action hamiltonienne de moment

$$J(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} + C \qquad \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

avec $C \in \mathbb{R}^2$ une constante. On a vu que le choix du moment n'influait pas sur l'ensemble des températures généralisées Ω. On peut donc prendre $C = 0$.

Soit maintenant $\beta \in \mathfrak{g} \simeq \mathbb{R}^2$. On a

$$\mathrm{e}^{-\langle J(x), \beta\rangle} = \mathrm{e}^{-x_2\beta_1 + x_1\beta_2}$$

La fonction n'est jamais intégrable sur $\mathbb{R}^2$, peu importe la valeur de β. L'ensemble des températures généralisées pour l'action de τ est donc vide : il n'existe pas d'états de Gibbs pour cette action.

2.2.2 Groupes de matrices

On s'intéresse à présent aux actions des groupes de matrices réelles 2×2 sur $\mathbb{R}^2$. Un tel groupe $G \subseteq \mathbb{R}^2_2$ agit par

$$G \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (A, x) \mapsto Ax \ .$$

Bien entendu, il est impératif que l'action soit symplectique : G doit donc être un sous-groupe de Lie du groupe symplectique de dimension 2, $Sp(\mathbb{R}^2, \omega)$. On commence par considérer le cas $G = Sp(\mathbb{R}^2, \omega)$ agissant sur le plan euclidien par

$$\Phi : Sp(\mathbb{R}^2, \omega) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (A, x) \mapsto Ax \ .$$

On sait que $Sp(\mathbb{R}^2, \omega)$ est un groupe de Lie de dimension 3, isomorphe à $SL_2(\mathbb{R})$, le groupe des matrices carrées de dimension 2 et de déterminant 1. Son algèbre de Lie est $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, isomorphe à l'ensemble des matrices carrées de dimension 2 et de trace nulle. On choisit une base (f_1, f_2, f_3) de $\mathfrak{g}$ avec

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad f_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad f_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

L'exponentielle de G est donnée par l'exponentielle matricielle $\exp_G(A) = \mathrm{e}^A$, pour tout $A \in \mathfrak{g}$. Dès lors, le champ de vecteur fondamental associé à A est

$$\begin{aligned} A^*_\Phi(x) &= \frac{d}{dt}|_{t=0} \Phi(\exp(-tA), x) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0} \mathrm{e}^{-tA} x \\ &= -Ax \ . \end{aligned}$$

L'équation définissant le moment est alors

$$d(\langle J(x), A \rangle)(Y) = -\det(-Ax, Y) = \det(Ax, Y) \ ,$$

pour tous $A \in \mathfrak{g}$ et $Y \in \mathbb{R}^2$. En prenant $A = f_1$ et $Y = e_1$, l'équation se réécrit

$$\frac{\partial J^1(x)}{\partial x_1} = \det \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ -x_2 & 0 \end{pmatrix} = x_2 \ .$$

En prenant $A = f_1$ et $Y = e_2$, on a

$$\frac{\partial J^1(x)}{\partial x_2} = \det \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ -x_2 & 1 \end{pmatrix} = x_1 \ .$$

d'où $J^1(x) = x_1 x_2 + c_1$ avec $c_1 \in \mathbb{R}$ une constante. En procédant de la même manière pour les autres composantes du moment, on trouve

$$J(x) = \left(x_1 x_2, \frac{x_2^2}{2}, \frac{-x_1^2}{2} \right) + C \ .$$

avec $C \in \mathbb{R}^3$ une constante. Comme dans l'exemple précédent, on peut prendre $C = 0$. On recherche les $\beta \in \mathfrak{g}$ pour lesquels la fonction

$$f : (x_1, x_2) \mapsto \exp(-x_1 x_2 \beta_1 - \frac{x_2^2}{2}\beta_2 + \frac{x_1^2}{2}\beta_3) \tag{2.9}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}^2$, où $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ sont les composantes de β dans (f_1, f_2, f_3). Fixons $x_2 \in \mathbb{R}$ et notons f_{x_2} la fonction

$$f_{x_2} : x_1 \mapsto \exp(-x_1 x_2 \beta_1 - \frac{x_2^2}{2}\beta_2 + \frac{x_1^2}{2}\beta_3).$$

Il est clair que $\beta_3 \leq 0$ est une condition nécessaire à l'intégrabilité de f_{x_2} sur $\mathbb{R}$. Supposons d'abord $\beta_3 < 0$. Dans ce cas, on a

$$f_{x_2}(x_1) = \exp(-\left(x_1\sqrt{\frac{-\beta_3}{2}} + x_2\frac{\beta_1}{2}\sqrt{\frac{2}{-\beta_3}}\right)^2)\exp(x_2^2\frac{\beta_1^2}{-2\beta_3} - \frac{x_2^2}{2}\beta_2)\ .$$

La fonction f_{x_2} est donc intégrable sur $\mathbb{R}$ et son intégrale est donnée par

$$\int_{\mathbb{R}} f_{x_2}(x_1)dx_1 = \sqrt{\frac{2\pi}{-\beta_3}}\exp(-x_2^2\left(\frac{\beta_1^2}{2\beta_3} + \frac{\beta_2}{2}\right))\ .$$

La fonction $x_2 \mapsto \int_{\mathbb{R}} f_{x_2} dx_1$ est intégrable si et seulement si

$$\frac{\beta_1^2}{2\beta_3} + \frac{\beta_2}{2} > 0\ .$$

Comme $\beta_3 < 0$, la condition se réécrit $\beta_1^2 + \beta_2\beta_3 < 0$. Par le théorème de Fubini-Tonelli, pour $\beta_3 < 0$, la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\beta_1^2 + \beta_2\beta_3 < 0$, et son intégrale est donnée par

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2)dx_1dx_2 &= \int_{\mathbb{R}} f_{x_2}(x_1)dx_1 \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{-1}{\beta_1^2 + \beta_2\beta_3}}\ .\end{aligned}$$

Un calcul similaire montre que le résultat est également vrai pour $\beta_3 = 0$. En conclusion, la fonction f est intégrable si et seulement si

$$\beta_3 \leq 0\ , \qquad \beta_2\beta_3 + \beta_1^2 < 0\ .$$

Elle est donc normalement intégrable sur l'intérieur de cet ensemble. L'ouvert des températures généralisées est donc

$$\Omega = \left\{\beta \in \mathfrak{g} : \beta_3 < 0\ , \beta_1^2 + \beta_2\beta_3 < 0\right\}\ .$$

La fonction de partition et la valeur moyenne du moment sont données par

$$P(\beta) = 2\pi\sqrt{\frac{-1}{\beta_1^2 + \beta_2\beta_3}}$$

$$\langle E_J(\beta), X\rangle = -D_\beta \log(P)(X) = -\frac{2X_1\beta_1 + \beta_3 X_2 + \beta_2 X_3}{\beta_1^2 + \beta_2\beta_3} \ .$$

Ces expressions ont le désavantage de faire intervenir le choix de la base (e_1, e_2, e_3). On peut les reformuler en utilisant la forme de Killing sur $\mathfrak{g}$ et ainsi obtenir formules dépendant uniquement de la géométrie de $\mathfrak{g}$. Rappelons que la forme de Killing est la forme bilinéaire symétrique définie sur $\mathfrak{g}$ par

$$\mathcal{K}(X, Y) = tr(ad_X \circ ad_Y) = 4Tr(XY) \ . \tag{2.10}$$

Dans la base (f_1, f_2, f_3), on vérifie aisément que

$$\mathcal{K}(\beta, \beta) = 8\beta_1^2 + 8\beta_2\beta_3 \ .$$

On peut donc réécrire

$$P(\beta) = 4\sqrt{2}\pi\sqrt{\frac{-1}{\mathcal{K}(\beta, \beta)}}$$

et

$$E_J(\beta) = -\frac{\beta^\flat}{\mathcal{K}(\beta, \beta)} \ .$$

Finalement, la métrique de Souriau s'exprime comme

$$\Gamma_\beta(X, Y) = \frac{2\mathcal{K}(\beta, X)\mathcal{K}(\beta, Y) - \mathcal{K}(\beta, \beta)\mathcal{K}(X, Y)}{\mathcal{K}(\beta, \beta)^2} \ .$$

L'importance de la forme de Killing dans l'étude des états de Gibbs d'un groupe semisimple apparaitra évidente dans les exemples traités à la section 3.

Remarque 2.2.1. L'exemple ci-dessus est traité dans l'article [Mar20]. Cependant, ledit article présente une conclusion différente de la nôtre : selon l'auteur, l'action du groupe symplectique sur le plan n'admet aucun état de Gibbs. Il semblerait que l'auteur base son raisonnement sur l'affirmation qu'il n'existe pas d'états de Gibbs sur les orbites lumières de $SU(1, 1)$. Cependant, en traitant cet exemple au chapitre 3, nous trouvons également des états de Gibbs sur de telles orbites. Voir également la remarque 3.4.6 à ce sujet.

2.3 États de Gibbs associés à l'action d'un sous-groupe

Comme on l'a vu à l'exemple précédent, l'action du groupe symplectique sur $\mathbb{R}^2$ admet des états de Gibbs. Il est légitime de se demander si l'on peut en déduire des informations quant à l'existence d'états de Gibbs pour un sous-groupe de $Sp(\mathbb{R}^2)$ donné. On commence par traiter la question d'un point de vue plus général.

Soit (M, ω) une variété symplectique et G un groupe de Lie agissant sur M par une action hamiltonienne Φ_G de moment J_G. Soit H un sous-groupe de Lie de G. Le groupe H agit sur M par restriction de Φ_G :

$$\Phi_H : H \times M \to M : (h, x) \mapsto \Phi_G(h, x) \ .$$

Il est clair que l'action Φ_H est symplectique puisque Φ_G l'est. On va montrer qu'elle est également hamiltonienne.

Notons $i : H \hookrightarrow G$ l'inclusion de H dans G. L'application i induit un morphisme d'algèbres de Lie

$$\mathcal{I} = T_e i : \mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g} \ .$$

Notons $\mathcal{I}^* : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{h}^*$ l'application duale, définie par

$$\langle \mathcal{I}^*(\xi), X \rangle = \langle \xi, \mathcal{I}(X) \rangle$$

pour tout $\xi \in \mathfrak{g}^*$ et $X \in \mathfrak{h}$.

Lemme 2.3.1. *L'action Φ_H est hamiltonienne et admet pour moment $J_H = \mathcal{I}^* \circ J_G$.*

Démonstration. Pour tout $x \in M$,

$$\begin{aligned} d\langle J_H, X \rangle &= d\langle J_G, \mathcal{I}(X) \rangle \\ &= -i_{(\mathcal{I}(X))^*_{\Phi_G}} \omega \ . \end{aligned}$$

Comme $(\mathcal{I}(X))^*_{\Phi_G} = X^*_{\Phi_H}$, la conclusion suit. □

Notons que l'on a alors

$$\mathrm{e}^{-\langle J_H(x), \beta \rangle} = \mathrm{e}^{-\langle \mathcal{I}^* \circ J_G(x), \beta \rangle} = \mathrm{e}^{-\langle J_G(x), \mathcal{I}(\beta) \rangle} .$$

On en déduit trivialement le corollaire suivant.

Corollaire 2.3.1. *Si $\beta \in \mathfrak{h}$ est une température généralisée pour l'action Φ_G alors c'est une température généralisée pour l'action Φ_H. Si on note P_G, P_H les fonctions de partition associées respectivement à Φ_G, Φ_H, on a $P_G(\beta) = P_H(\beta)$.*

Notons que la réciproque est fausse en général.

2.3.1 Rotations sur $\mathbb{R}^2$

On considère l'action du groupe $G := Sp(\mathbb{R}^2)$ sur le plan symplectique et $H := SO_2(\mathbb{R})$ comme sous-groupe de G. Son algèbre de Lie $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}_2(\mathbb{R})$ s'identifie à l'espace des matrices carrées antisymétriques de dimension 2. Elle est de dimension 1 et on peut prendre pour base

$$h_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons que en reprenant la notation des vecteurs de base de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ fixée section 2.2.2, on a $h_1 = f_2 - f_3$. Soit $\beta \in \mathfrak{h}$, $\beta = th_1$ pour un $t \in \mathbb{R}$. L'inclusion $\mathcal{I} : \mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ est déterminée par $\mathcal{I}(th_1) = tf_2 - tf_3$. Au vu du lemme 2.3.1 et des calculs effectués section 2.2.2, $\beta = th_1$ est une température généralisée pour Φ_H si et seulement si $t > 0$. L'ensemble des températures généralisées associé à l'action de $\mathfrak{so}_2(\mathbb{R})$ est donc

$$\Omega_H = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix} : t > 0 \right\}.$$

La fonction de partition P_H est donnée par

$$P_H(th_1) = \frac{2\pi}{t}.$$

Notons que la densité de l'état de Gibbs associé à $\beta = th_1$ est une gaussienne,

$$\rho_\beta(x) = \frac{2\pi}{t} \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}|x|^2}.$$

En utilisant les formules développées au Lemme 2.1.2, on trouve pour valeur moyenne du moment

$$E_J(\beta) = -D_\beta \log(P) = \frac{1}{t}.$$

La métrique de Souriau au point β est

$$\Gamma_\beta(x, y) = -\langle D_\beta E_J(X), Y \rangle = \frac{1}{t^2} xy$$

pour tous $x, y \in T_\beta \Omega_H$.

Chapitre 3

Équivariance du moment

Le moment J d'une action hamiltonienne Φ encode toutes les informations relatives aux champs de vecteurs fondamentaux associés à l'action, et détermine donc le comportement de l'action au niveau infinitésimal. De par leur définition, les propriétés des états de Gibbs associés à une telle action dépendent fortement des propriétés du moment. Dans cette section, on va s'intéresser au comportement de J par rapport à l'action de Φ, et en déduire des résultats de G-invariance et équivariance pour les températures généralisées et les fonctions thermodynamiques définies chapitre 2.

3.1 Actions adjointes et coadjointes

Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On note Ad^G l'action adjointe de G sur $\mathfrak{g}$, ou simplement Ad lorsqu'il n'y a pas de confusion possible.

Le moment J d'une action hamiltonienne est à valeurs non pas dans $\mathfrak{g}$ mais dans $\mathfrak{g}^*$. Afin d'étudier le comportement de J par rapport à l'action de G, on va donc considérer l'action duale de Ad, dite *action coadjointe*.

Définition 3.1.1. L'*action coadjointe* de G sur $\mathfrak{g}^*$ est l'action $Ad^* : G \times \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ définie par

$$\langle Ad_g^* \xi, X \rangle = \langle \xi, Ad_{g^{-1}} X \rangle \ .$$

On vérifie directement qu'il s'agit d'une action lisse (à gauche) de groupe de Lie.

Remarque 3.1.1. La définition de Ad_g^* choisie dans ce travail fait de l'action coadjointe une action à gauche. Certains auteurs préfèrent toutefois définir Ad^* par :

$$\langle Ad_g^* \xi, X \rangle = \langle \xi, Ad_g X \rangle \ .$$

Dans ce cas, il convient de considérer Ad^* comme une action à droite.

On souhaite savoir si le moment J se comporte "convenablement" par rapport à l'action de G : on aimerait avoir un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\Phi_g"] \arrow[d, "J"] & M \arrow[d, "J"] \\ \mathfrak{g}^* \arrow[r, "Ad_g^*"] & \mathfrak{g}^* . \end{tikzcd}$$

Ceci nous conduit à la définition d'une action fortement hamiltonienne.

Définition 3.1.2. Un moment J d'une action hamiltonienne Φ est dit *équivariant* si

$$Ad_g^* \circ J = J \circ \Phi_g$$

pour tout $g \in G$. Dans ce cas, l'action Φ est dite *fortement hamiltonienne.*

L'équivariance du moment est particulièrement intéressante pour l'étude des états de Gibbs : pour une action fortement hamiltonienne, l'ouvert Ω des températures généralisées est stable pour l'action adjointe Ad^G et les fonctions P, E_J, S ainsi que la métrique de Souriau sont toutes invariantes sous l'action de G. Dans ce qui suit, on note

$$Orb_{Ad}(X) = \{Ad_g X : g \in G\}$$

l'orbite de $X \in \mathfrak{g}$ sous l'action adjointe.

Proposition 3.1.1. *Soit Φ une action fortement hamiltonienne de moment équivariant J. Pour toute température généralisée $\beta \in \Omega$ et $g \in G$,*

- *$Ad_g\beta$ est une température généralisée. En d'autres termes, $Orb_{Ad}(\beta) \subseteq \Omega$.*
- *$P(Ad_g\beta) = P(\beta)$*
- *$E_J(Ad_g\beta) = Ad_g^* E_J(\beta)$*
- *$S(Ad_g\beta) = S(\beta)$*
- *$(Ad_g)^*\Gamma = \Gamma$, où $(Ad_g)^*$ désigne le pull-back par l'application $Ad_g : \Omega \to \Omega$. En d'autres termes, Ad_g est une isométrie pour Γ.*

Démonstration. Soit $g \in G$ et $\beta \in \Omega$. Pour tout $x \in M$,

$$\mathrm{e}^{-\langle J(x), Ad_g\beta\rangle} = \mathrm{e}^{-\langle Ad^*_{g^{-1}} J(x), \beta\rangle} = \mathrm{e}^{-\langle J(\Phi_{g^{-1}}(x)), \beta\rangle} .$$

L'application $\Phi_{g^{-1}} : M \to M$ est un symplectomorphisme. On peut donc appliquer le théorème 1.2.1 pour conclure $Ad_g\beta \in \Omega$ avec

$$\begin{aligned} P(Ad_g\beta) &= \int_M \mathrm{e}^{-\langle J(x), Ad_g\beta\rangle} d\lambda_\omega \\ &= \int_M \mathrm{e}^{-\langle J(\Phi_{g^{-1}}(x)),\beta\rangle} d\lambda_\omega \\ &= \int_M \mathrm{e}^{-\langle J(x),\beta\rangle} d\Phi^*_{g^{-1}}\lambda_\omega \\ &= \int_M \mathrm{e}^{-\langle J(x),\beta\rangle} d\lambda_\omega \\ &= P(\beta)\ . \end{aligned}$$

Les autres relations se montrent de manière similaire. □

Exemple 3.1.1. Le moment associé à l'action du groupe des rotations $SO_2(\mathbb{R})$ sur le plan symplectique $\mathbb{R}^2$ est équivariant. En effet, dans les coordonnées choisies en 2.3.1, soient $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et

$$Y = th_1 = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix},$$

avec $t \in \mathbb{R}$. Le moment J est donné par

$$\langle J(x_1, x_2), Y\rangle = -\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\, t.$$

Soit $g \in SO_2(\mathbb{R})$ une rotation, représentée en coordonnées par la matrice de rotation

$$g = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

avec $\theta \in \mathbb{R}$. On a

$$\Phi_g(x) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)x_1 - \sin(\theta)x_2 \\ \sin(\theta)x_1 + \cos(\theta)x_2 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\begin{aligned} \langle J(\Phi_g(x)), Y\rangle &= -\frac{1}{2}\left((\cos(\theta)x_1 - \sin(\theta)x_2)^2 + (\sin(\theta)x_1 + \cos(\theta)x_2)^2\right) t \\ &= -\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} t\ . \end{aligned}$$

D'autre part,

$$Ad_{g^{-1}}Y = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\langle Ad_g^* J(x), Y\rangle = \langle J(x), Ad_{g^{-1}} Y\rangle = -\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} t\ .$$

Le moment est donc bien équivariant.

Exemple 3.1.2. Le moment associé à l'action du groupe des translations sur $\mathbb{R}^2$ n'est pas équivariant. En effet, en coordonnées euclidiennes, le moment J est défini par

$$\langle J(x), y\rangle = x_2 y_1 - x_1 y_2\ .$$

Soit une translation de vecteur $V \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\langle J(x+V), y\rangle = (x_2 + V_2) y_1 - (x_1 + V_1) y_2\ .$$

Mais comme le groupe des translations est commutatif, l'action adjointe est l'identité, et

$$\langle Ad_V^* J(x), y\rangle = \langle J(x), y\rangle\ .$$

Le moment n'est donc pas équivariant.

L'équivariance du moment d'une action hamiltonienne n'est donc pas garantie, même pour les exemples les plus simples. Il est intéressant d'étudier l'obstruction à l'équivariance de J. Pour ce faire, on considère l'application

$$\theta : G \times M \to \mathfrak{g}^* : (g, x) \mapsto J(\Phi_g(x)) - Ad_g^* J(x)\ .$$

On va montrer que $\theta(g, x)$ ne dépend en réalité que de $g \in G$.

Proposition 3.1.2. *Soit $\Phi : G \times M \to M$ une action hamiltonienne de moment J. Si M est connexe alors pour tout $g \in G$ l'expression*

$$\theta(x, g) = J(\Phi_g(x)) - Ad_g^* J(x)$$

est constante sur M.

Démonstration. Soit $X \in \mathfrak{g}$ et considérons le champ fondamental X_Φ^* associé. Ce champ admet pour hamiltonien $x \mapsto \langle J(x), X\rangle$.

On considère le champ de vecteurs $(\Phi_g)^* X_\Phi^*$, où $(\Phi_g)^*$ désigne le pull-back par l'application Φ_g. On va montrer que les fonctions $x \mapsto \langle J(\Phi_g(x)), X\rangle$ et $x \mapsto \langle Ad_g^* J(x), X\rangle$ sont toutes les deux des hamiltoniens de $(\Phi_g)^* X_\Phi^*$.

• D'une part, soit Y un champ de vecteurs sur M et $x \in M$. On a

$$\begin{aligned}
d_x \langle J \circ \Phi_g, X\rangle(Y) &= d_{\Phi_g(x)} \langle J, X\rangle((T_x \Phi_{g^{-1}})(Y)) \\
&= -\omega_{\Phi_g(x)}(X_\Phi^*, (T_x \Phi_g)(Y)) \\
&= -\omega_x((T_{\Phi_g(x)} \Phi_{g^{-1}}) X_\Phi^*, Y) \\
&= -\omega_x((\Phi_g)^* X_\Phi^*, Y)\ .
\end{aligned}$$

Comme l'égalité est vraie pour tout champ de vecteurs Y sur M, $\langle J \circ \Phi_g, X\rangle$ est bien hamiltonien du champ $(\Phi_g)^* X^*_\Phi$.

- D'autre part, pour tout $x \in M$,

$$\begin{aligned}(\Phi_g)^* X^*_\Phi(x) &= (T_x \Phi_{g^{-1}}) \left(\frac{d}{dt}|_{t=0} \Phi_{\exp(-tX)}(\Phi_g(x)) \right) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0} \Phi_{g^{-1}\exp(-tX)g}(x) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0} \Phi_{\exp(-tAd_{g^{-1}}X)}(x) \\ &= (Ad_{g^{-1}}X)^*_\Phi(x)\ .\end{aligned}$$

Dès lors, le champ $(\Phi_g)^* X^*_\Phi$ est le champ de vecteurs fondamental associé à $Ad_{g^{-1}}X$ et admet donc $\langle J, Ad_{g^{-1}}X\rangle = \langle Ad^*_g J, X\rangle$ comme hamiltonien.

Les deux fonctions considérées étant hamiltoniens d'un même champ de vecteurs, elles sont égales sur M à une constante près, et la conclusion suit. □

Remarque 3.1.2. Dans le cas où M n'est pas connexe, il est clair que l'application $(g, x) \mapsto \theta(g, x)$ est constante sur chaque composante connexe de M.

Définition 3.1.3. Le *1-cocycle de non-équivariance* associé à une action hamiltonienne $\Phi : G \times M \to M$ de moment J est l'application

$$\theta : G \to \mathfrak{g}^* : g \mapsto J(\Phi_g(x)) - Ad^*_g J(x)$$

pour un $x \in M$.

Au vu de la proposition 3.1.2, le 1-cocycle de non-équivariance est bien défini et ne dépend pas du choix de $x \in M$. Bien entendu, l'action est fortement hamiltonienne si $\theta = 0$. Le 1-cocycle de non-équivariance vérifie les relations suivantes, dites "relations de 1-cocycle".

Proposition 3.1.3. *Notons e le neutre de G. Pour tous $g_1, g_2 \in G$:*

- $\theta(g_1 g_2) = Ad^*_{g_1}\theta(g_2) + \theta(g_1)$
- $\theta(e) = 0$
- $\theta(g_1^{-1}) = -Ad^*_{g_1^{-1}}\theta(g_1)$.

Démonstration. Soit $x \in M$ quelconque. On a

$$\begin{aligned}\theta(g_1 g_2) &= J(\Phi(g_1 g_2)(x)) - Ad^*_{g_1 g_2} J(x) \\ &= J(\Phi_{g_1}(\Phi_{g_2}(x))) - Ad^*_{g_1} Ad^*_{g_2} J(x) \\ &= \theta(g_1) + Ad^*_{g_1} J(\Phi_{g_2}(x)) - Ad^*_{g_1} Ad^*_{g_2} J(x) \\ &= \theta(g_1) + Ad^*_{g_1}(J(\Phi_{g_2}(x) - Ad^*_{g_2} J(x)) \\ &= \theta(g_1) + Ad^*_{g_1}\theta(g_2)\ .\end{aligned}$$

Il est clair que $\theta(e) = 0$. Pour la troisième relation on a, en utilisant le premier point :

$$0 = \theta(g_1^{-1}g_1) = Ad^*_{g_1^{-1}}\theta(g_1) + \theta(g_1^{-1}) \ .$$

□

Remarque 3.1.3. Le 1-cocycle de non-équivariance utilisé dans ce travail est un cas particulier de 1-cocycle symplectique : de manière générale, on appelle *1-cocycle symplectique* toute application $\theta : G \to \mathfrak{g}^*$ qui vérifie les propriétés de 1-cocycle énoncées à la proposition précédente.

En utilisant le 1-cocycle de non-équivariance, on peut "corriger" l'action coadjointe pour rendre le moment équivariant.

Définition 3.1.4. L'*action coadjointe affine* ou *action affine* est l'action a de G sur $\mathfrak{g}^*$ définie par

$$a : G \times \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^* : (g, \xi) \mapsto Ad^*_g\xi + \theta(g) \ .$$

On vérifie aisément qu'il s'agit d'une action de groupe en utilisant les propriétés du 1-cocycle θ. Par définition, il est clair que le moment est équivariant pour l'action affine : on a

$$J \circ \Phi_g = a_g \circ J$$

pour tout $g \in G$.

3.2 G-invariance des fonctions thermodynamiques et grandeurs associées

Dans cette section, on reprend la proposition 3.1.1 dans le cas d'une action non fortement hamiltonienne, en corrigeant les relations obtenues à l'aide du cocycle de non-équivariance.

Théorème 3.2.1 (Souriau)**.** *Soit $\Phi : G \times M \to M$ une action hamiltonienne de moment J et θ le 1-cocycle de non-équivariance associé. Pour tout $\beta \in \Omega$ et $g \in G$,*

- *$Ad_g\beta$ est une température généralisée. En d'autres termes, $Orb_{Ad}(\beta) \subseteq \Omega$*
- *$P(Ad_g\beta) = \exp(\langle\theta(g^{-1}), \beta\rangle)P(\beta)$*
- *$E_J(Ad_g\beta) = Ad^*_gE_J(\beta) + \theta(g)$*
- *$S(Ad_g\beta) = S(\beta)$.*

Démonstration. Soit $g \in G$ et $\beta \in \Omega$. Pour tout $x \in M$, on a

$$\exp(-\langle J(x), Ad_g\beta\rangle) = \exp(-\langle Ad^*_{g^{-1}}J(x), \beta\rangle) = \exp(-\langle J(\Phi_{g^{-1}}(x)), \beta\rangle)\exp(\langle\theta(g^{-1}), \beta\rangle) \ .$$

D'une part, le 1-cocycle θ ne dépend pas de $x \in M$ et n'influe donc pas sur l'intégrabilité de notre expression. D'autre part, comme $\Phi_{g^{-1}} : M \to M$ est un symplectomorphisme, on peut appliquer le théorème 1.2.1. En conclusion, $Ad_g\beta \in \Omega$, avec

$$\begin{aligned}
P(Ad_g\beta) &= \int_M \exp(-\langle J(x), Ad_g\beta\rangle)d\lambda_\omega \\
&= \int_M \exp(-\langle Ad^*_{g^{-1}}J(x), \beta\rangle)d\lambda_\omega \\
&= \int_M \exp(-\langle J(\Phi_{g^{-1}}(x)) + \theta(g^{-1}), \beta\rangle)d\lambda_\omega \\
&= \exp(\langle\theta(g^{-1}), \beta\rangle) \int_M \exp(\langle J(\Phi_{g^{-1}}(x)), \beta\rangle)d\lambda_\omega \\
&= \exp(\langle\theta(g^{-1}), \beta\rangle) \int_M \exp(\langle J(x), \beta\rangle)d\Phi^*_{g^{-1}}\lambda_\omega \\
&= \exp(\langle\theta(g^{-1}), \beta\rangle) \int_M \exp(\langle J(x), \beta\rangle)d\lambda_\omega \\
&= \exp(\langle\theta(g^{-1}), \beta\rangle)P(\beta)\ .
\end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned}
\langle E_J(Ad_g\beta), X\rangle &= \frac{1}{P(Ad_g\beta)} \int_M \langle J(x), X\rangle \exp(-\langle J(x), Ad_g\beta\rangle)d\lambda_\omega \\
&= \frac{\exp(\langle\theta(g^{-1}), \beta\rangle)}{\exp(\langle\theta(g^{-1}), \beta\rangle)P(\beta)} \int_M \langle J(x), X\rangle \exp(\langle J(\Phi_{g^{-1}}(x)), \beta\rangle)d\lambda_\omega \\
&= \frac{1}{P(\beta)} \int_M \langle J(\Phi_g(x)), X\rangle \exp(-\langle J(x), \beta\rangle)d\lambda_\omega \\
&= \frac{1}{P(\beta)} \int_M \langle Ad^*_g J + \theta(g), X\rangle \exp(-\langle J(x), \beta\rangle)d\lambda_\omega \\
&= \frac{1}{P(\beta)} \int_M \langle J(x), Ad_{g^{-1}}X\rangle \exp(-\langle J(x), \beta\rangle)d\lambda_\omega \\
&\qquad + \langle\theta(g), X\rangle \frac{1}{P(\beta)} \int_M \exp(-\langle J(x), \beta\rangle)d\lambda_\omega \\
&= \langle E_J(\beta), Ad_{g^{-1}}X\rangle + \langle\theta(g), X\rangle \\
&= \langle Ad^*_g E_J(\beta) + \theta(g), X\rangle\ .
\end{aligned}$$

On montre $S(Ad_g\beta) = S(\beta)$ de manière similaire. $\square$

Remarque 3.2.1. Remarquons que, au vu du troisième point du théorème précédent, l'application E_J est équivariante pour les actions adjointes et affines, i.e.

$$E_J(Ad_g(\beta)) = aE_J(\beta)$$

pour tous $\beta \in \Omega$ et $g \in G$.

On s'intéresse enfin à l'invariance de la métrique de Souriau. On va voir que Ad_g reste une isométrie même si le moment n'est pas équivariant.

Théorème 3.2.2. *Pour tout $g \in G$, l'application $Ad_g : \Omega \to \Omega$ est une isométrie pour la métrique de Souriau Γ, i.e. pour tout $\beta \in \Omega$ et $X, Y \in T_\beta\Omega$,*

$$\Gamma_{Ad_g\beta}((T_\beta Ad_g)X, (T_\beta Ad_g)Y) = \Gamma_\beta(X, Y)\ .$$

Démonstration. Rappelons que $T_\beta\Omega \simeq \mathfrak{g}$. Comme l'application Ad_g est linéaire, on a $(T_\beta Ad_g)X = Ad_gX$ sous cette identification. Notons également que, au vu des résultats de la proposition précédente,

$$\begin{aligned}
\langle J(x) - E_J(Ad_g\beta), Ad_gX\rangle &= \langle J(x), Ad_gX\rangle - \langle Ad_g^* E_J(\beta), Ad_gX\rangle + \langle \theta(g), Ad_gX\rangle \\
&= \langle J(\Phi_{g^{-1}}(x)), X\rangle - \langle \theta(g^{-1}), X\rangle - \langle E_J(\beta), X\rangle + \langle \theta(g), Ad_gX\rangle \\
&= \langle J(\Phi_{g^{-1}}(x)) - E_J(\beta), X\rangle\ ,
\end{aligned}$$

où la dernière égalité découle de $\theta(g^{-1}) = -Ad^*_{g^{-1}}\theta(g)$.
Dans ce cas,

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{Ad_g\beta}((T_\beta Ad_g)X, (T_\beta Ad_g)Y) = \Gamma_{Ad_g\beta}(Ad_gX, Ad_gY) \\
&\quad = \frac{1}{P(Ad_g\beta)} \int_M \langle J(x) - E_J(Ad_g\beta), Ad_gX\rangle\langle J(x) - E_J(Ad_g\beta), Ad_gY\rangle \exp(-\langle J(x), Ad_g\beta\rangle) d\lambda_\omega \\
&\quad = \frac{1}{\exp(\langle \theta(g^{-1}), \beta\rangle)P(\beta)} \int_M \langle J(\Phi_g(x)) - E_J(\beta), X\rangle\langle J(\Phi_g(x)) - E_J(\beta), Y\rangle \exp(-\langle J(x), Ad_g\beta\rangle) d\lambda_\omega \\
&\quad = \frac{1}{P(\beta)} \int_M \langle J(\Phi_g(x)) - E_J(\beta), X\rangle\langle J(\Phi_g(x)) - E_J(\beta), Y\rangle \exp(-\langle J(\Phi_g(x)), \beta\rangle) d\lambda_\omega \\
&\quad = \Gamma_\beta(X, Y)\ .
\end{aligned}$$

□

3.3 Action du groupe des déplacements et cocycle

On étudie à présent les états de Gibbs de l'action du groupe des déplacements du plan et le cocycle de non-équivariance associé. Le groupe des déplacements du plan, noté $E_2(\mathbb{R})$ est le groupe des applications affines $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui préservent la métrique euclidienne. Il est isomorphe au produit semidirect $SO(2) \ltimes \mathbb{R}^2$. Quelques compléments sur la notion de produit semidirect de groupes de Lie sont présentés dans l'annexe B. On se contentera ici de le décrire comme l'ensemble $SO(2) \times \mathbb{R}^2$ muni du produit

$$(A, v)(B, w) = (AB, Aw + v) \tag{3.1}$$

pour tous $(A, v), (B, w) \in SO(2) \times \mathbb{R}^2$. On vérifie aisément que le neutre est donné par $(I_2, 0)$ et l'inverse par

$$(A, v)^{-1} = (A^{-1}, -A^{-1}v) \ .$$

Si on considère $SO(2) \times \mathbb{R}^2$ comme une variété lisse (munie de la structure produit cartésien), alors le produit (3.1) donne à $E_2(\mathbb{R}) = SO(2) \ltimes \mathbb{R}^2$ une structure de groupe de Lie. Ce groupe agit sur le plan symplectique par

$$\Phi : E_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : ((A, v), x) \mapsto Ax + v \ .$$

Il est clair que Φ est une action lisse. Elle est également symplectique : en effet, $\Phi_{(A,v)}$ n'est autre que la composition d'une rotation A et d'une translation v, et on a vu que tant l'action des rotations que celle des translations étaient symplectiques. Afin de déterminer si l'action admet un moment, on doit étudier plus en détail la structure de Lie sur $E_2(\mathbb{R})$.

Structure de Lie sur $E_2(\mathbb{R})$

Notons $G := E_2(\mathbb{R})$ et $\mathfrak{g} := T_{(I,0)}G \simeq \mathfrak{so}(2) \times \mathbb{R}^2$. On commence par déterminer l'exponentielle de G. Soit $(X, \alpha) \in \mathfrak{g}$. Le champ de vecteurs invariant à gauche associé à (X, α), noté $\overline{(X, \alpha)}^L$, est défini par

$$\overline{(X, \alpha)}^L(A, v) = T_{(I,0)}L_{(A,v)}(X, \alpha) = (AX, A\alpha).$$

Pour $t \in \mathbb{R}$, l'exponentielle de G en $t(X, \alpha)$ est la courbe intégrale de $\overline{(X, \alpha)}^L$. C'est l'unique courbe $(C(t), c(t))$ de G qui vérifie $(C(0), c(0)) = (I, 0)$ et $(C'(t), c'(t)) = (C(t)X, C(t)\alpha)$. Après calcul, on trouve

$$\exp(t(X, \alpha)) = (\mathrm{e}^{tX}, X^{-1}(\mathrm{e}^{tX} - I)\alpha) \text{ si } X \neq 0$$

et

$$\exp(t(0, \alpha)) = (I, t\alpha).$$

Calculons à présent la représentation adjointe de G. Soit $(A, v) \in G$ et notons $i_{(A,v)}$ l'automorphisme intérieur de G,

$$i_{(A,v)}(B, w) = (A, v)(B, w)(A, v)^{-1} = (ABA^{-1}, -ABA^{-1}v + Aw + w)$$

pour tout $(B, w) \in G$. La représentation adjointe de G est donnée par

$$\begin{aligned} Ad_{(A,v)}(X, \alpha) &= T_{(I,0)} i_{(A,v)}(X, \alpha) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0} i_{(A,v)} \exp(t(X, \alpha)) \\ &= (AXA^{-1}, -AXA^{-1}v + A\alpha) \end{aligned}$$

si $X \neq 0$ et par

$$Ad_{(A,v)}(0, \alpha) = (0, A\alpha + \alpha)$$

sinon. Finalement, le crochet de Lie de (X, α), $(Y, \gamma) \in \mathfrak{g}$ est

$$\begin{aligned} [(X, \alpha), (Y, \gamma)] &= \frac{d}{dt}|_{t=0} Ad_{t(X,\alpha)}(Y, \gamma) \\ &= (XY - YX, -Y\alpha + X\gamma) \ . \end{aligned}$$

Moment de l'action

Soit $(X, \alpha) \in \mathfrak{g}$. Le champ fondamental de Φ associé à (X, α) est

$$\begin{aligned} (X, \alpha)^*(x) &= \frac{d}{dt}|_{t=0} \Phi(\exp(-t(X, \alpha)), x) \\ &= -(Xx + \alpha) \ . \end{aligned}$$

Choisissons une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathfrak{g}$ en posant

$$e_1 := (\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, (0, 0)) \qquad e_2 := (0, (1, 0)) \qquad e_3 := (0, (0, 1)) \ .$$

Dans ces coordonnées, en procédant comme pour les exemples du chapitre 1, on montre que l'action Φ est hamiltonienne et admet pour moment

$$\langle J(x), \beta \rangle = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \beta_1 - x_2 \beta_2 + x_1 \beta_3 \ ,$$

où $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ sont les composantes de $\beta \in \mathfrak{g}$ dans la base (e_1, e_2, e_3).

Températures généralisées et états de Gibbs

Il est clair que la fonction

$$(x_1, x_2) \mapsto \exp(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \beta_1 + x_2 \beta_2 - x_1 \beta_3)$$

est intégrable si et seulement si $\beta_1 > 0$, d'où

$$\Omega = \{\beta \in \mathfrak{g} : \beta_1 > 0\} \ .$$

On a alors pour tout $\beta \in \Omega$

$$\begin{aligned} P(\beta) &= \int_{\mathbb{R}}^{2} \exp(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\beta_1 + x_2\beta_2 - x_1\beta_3)dx_1dx_2 \\ &= \frac{2\pi}{\beta_1}\exp(\frac{\beta_2^2 + \beta_3^2}{2\beta_1})\ . \end{aligned}$$

Dans la base duale de (e_1, e_2, e_3), la valeur moyenne du moment est donnée par

$$E_J(\beta) = -D_\beta \log(P) = \left(-\frac{1}{\beta_1} - \frac{\beta_2^2 + \beta_3^2}{2\beta_1^2}, -\frac{\beta_2}{\beta_1}, -\frac{\beta_3}{\beta_1}\right)\ .$$

Enfin, la matrice représentant la métrique de Souriau $\Gamma = -D_\beta E_J$ dans les coordonnées associées à la base (e_1, e_2, e_3) est

$$\Gamma_\beta = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\beta_1^2} - \frac{\beta_2^2+\beta_3^2}{\beta_1^3} & \frac{\beta_2}{\beta_1^2} & \frac{\beta_3}{\beta_1^2} \\ \frac{\beta_2}{\beta_1^2} & \frac{1}{\beta_1} & 0 \\ \frac{\beta_3}{\beta_1^2} & 0 & \frac{1}{\beta_1} \end{pmatrix}\ .$$

Cocycle de non-équivariance

Au vu de la proposition 3.1.2, l'expression $Ad_g^* J(x) - J(\Phi_g(x))$ ne dépend pas du choix de $x \in \mathbb{R}^2$. Fixons alors $x = 0$. Pour tout $(A, v) \in G$, le 1-cocycle de non-équivariance θ est donné par

$$\theta((A, v)) = J(\Phi_{(A,v)}(0)) - Ad^*_{(A,v)}J(0) = J(v).$$

3.4 États de Gibbs sur les orbites adjointes et coadjointes

Dans cette section, on munit les orbites coadjointes d'un groupe de Lie G d'une structure symplectique canonique, appelée *structure de Kostant-Kirillov-Souriau.* On montre qu'elle est G-invariante, et que l'action coadjointe est fortement hamiltonienne. On adapte ensuite cette structure aux orbites affines. Enfin, s'intéresse au cas où G est semisimple. Dans ce cas, la forme de Killing $\mathcal{K}$ permet d'obtenir une structure symplectique sur les orbites adjointes. On étudiera en particulier l'existence d'états de Gibbs sur les orbites adjointes des groupes semisimples $SU(2)$ et $SU(1, 1)$.

3.4.1 Orbites coadjointes comme variétés symplectiques

Soit $\xi_0 \in \mathfrak{g}^*$ et notons $\mathcal{O} = Orb_{Ad^*}(\xi_0)$ l'orbite de ξ_0 pour l'action coadjointe. Rappelons que $\mathcal{O}$ est une sous-variété lisse initiale de $\mathfrak{g}^*$ et que tout champ de vecteurs sur $\mathcal{O}$ s'exprime comme combinaison linéaire (fonctionnelle) de champs fondamentaux (voir annexe C). On suppose que $\mathcal{O}$ est une orbite non triviale, i.e. de dimension non nulle.

Soit $X \in \mathfrak{g}$. On définit l'application $ad_X^* : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ par

$$\langle ad_X^* \xi, Y \rangle = \langle \xi, [X, Y] \rangle$$

pour tout $\xi \in \mathfrak{g}^*$ et $Y \in \mathfrak{g}$. Le champ de vecteurs fondamental associé à X pour l'action coadjointe est

$$X_{Ad^*}^*(\xi) = \frac{d}{dt}|_{t=0} Ad_{\exp(-tX)}^* \xi = ad_X^* \xi$$

pour tout $\xi \in \mathfrak{g}^*$. Dès lors,

$$T_\xi \mathcal{O} = \{ad_X^* \xi : X \in \mathfrak{g}\}$$

pour tout $\xi \in \mathcal{O}$. En vue de démontrer le théorème principal de cette section, on aura besoin du lemme suivant. On note $\bigwedge^k(M)$ l'espace des k-formes différentielles sur M

Lemme 3.4.1. *Soient M, N deux variétés lisses et $f : M \to N$ une submersion surjective. Alors l'application pullback $f^* : \bigwedge^k(N) \to \bigwedge^k(M)$, définie par*

$$f^*\alpha(X_1, ..., X_k) = \alpha(f_* X_1, ..., f_* X_k)$$

pour toute k-forme α sur N et tous champs de vecteurs $X_1, .., X_k$ sur M, est injective.

Démonstration. Soient $\alpha, \beta \in \bigwedge^k N$ tels que $f^*\alpha = f^*\beta$. Soit $y \in N$ et $Y_1, ..., Y_k \in T_y N$. Par hypothèses, il existe $x \in M$ tel que $f(x) = Y$ et $X_1, ..., X_k \in T_x M$ tels que $T_x f X_i = Y_i$ pour tout $i \in \{1, ..., k\}$. Alors

$$\begin{aligned} \alpha_y(Y_1, ..., Y_k) &= (f^*\alpha)_x(X_1, ..., X_k) \\ &= (f * \beta)_x(X_1, ..., X_k) \\ &= \beta_y(Y_1, ..., Y_k), \end{aligned}$$

d'où $\alpha = \beta$. □

Proposition 3.4.1. *La 2-forme $\omega_{\mathcal{O}}$ définie sur $\mathcal{O}$ par*

$$\omega_{\mathcal{O}}(X^*, Y^*)(\xi) = \langle \xi, [X, Y] \rangle$$

pour tous $X, Y \in \mathfrak{g}$ est bien définie et est une forme symplectique sur $\mathcal{O}$.

Démonstration.

- Montrons qu'elle est bien définie. Si $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}$ sont tels que $X_1^* = X_2^*$ alors $ad^*_{X_1}\xi = ad^*_{X_2}\xi$ pour tout $\xi \in \mathfrak{g}^*$ et on a

$$\begin{aligned}\omega_{\mathcal{O}}(X_1^*, Y^*)(\xi) &= \langle \xi, [X_1, Y] \rangle \\ &= \langle ad^*_{X_1}\xi, Y \rangle \\ &= \langle ad^*_{X_2}\xi, Y \rangle \\ &= \langle \xi, [X_2, Y] \rangle \\ &= \omega_{\mathcal{O}}(X_2^*, Y^*)(\xi)\end{aligned}$$

  pour tout $Y \in \mathfrak{g}$. Comme l'égalité est vraie sur les champs fondamentaux, par linéarité, elle l'est sur tout champ de vecteurs. La bonne définition suit.

- On montre que $\omega_{\mathcal{O}}$ est non dégénérée. Soit $\xi \in \mathfrak{g}^*$ et supposons qu'il existe $X \in \mathfrak{g}$ tel que pour tout $Y \in \mathfrak{g}$, $\omega_{\mathcal{O}}(X^*, Y^*)(\xi) = 0$. Alors

$$0 = \omega_{\mathcal{O}}(X^*, Y^*)(\xi) = \langle ad^*_X\xi, Y \rangle$$

  pour tout $Y \in \mathfrak{g}$. Dès lors, $ad^*_X\xi = X^*(\xi) = 0$.

- Montrons que $\omega_{\mathcal{O}}$ est invariante pour l'action coadjointe. Notons que pour tout $X \in \mathfrak{g}$ et $\xi \in \mathfrak{g}^*$, $(T_\xi Ad^*_{g^{-1}})X^*(\xi) = (Ad_g X)^*(\xi)$. Dès lors, pour tous $X, Y \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned}(Ad^*_{g^{-1}})^*\omega_{\mathcal{O}}(X^*, Y^*)(\xi) &= \omega_{\mathcal{O}}((Ad_g X)^*, (Ad_g Y)^*)(Ad^*_{g^{-1}}\xi) \\ &= \langle Ad^*_{g^{-1}}\xi, [Ad_g X, Ad_g Y] \rangle \\ &= \langle Ad^*_{g^{-1}}\xi, Ad_g[X, Y] \rangle \\ &= \langle \xi, [X, Y] \rangle \\ &= \omega_{\mathcal{O}}(X^*, Y^*)(\xi)\ .\end{aligned}$$

- On montre que $\omega_{\mathcal{O}}$ est fermée.
  — Considérons $\tau : G \to \mathcal{O} : g \mapsto Ad^*_{g^{-1}}\xi_0$ la translation du point ξ_0 le long de son orbite. Il est clair que τ est surjective et lisse. Montrons qu'il s'agit d'une submersion. D'une part, sa dérivée en l'identité est donnée par

$$T_e\tau(X) = \frac{d}{dt}|_{t=0} Ad^*_{\exp(tX)}\xi_0 = X^*(\xi_0) \tag{3.2}$$

  pour tout $X \in \mathfrak{g}$. Elle est donc surjective. D'autre part, notons que par définition, $\tau \circ L_g = Ad^*_{g^{-1}} \circ \tau$. En dérivant les deux membres de l'égalité au neutre et en utilisant (3.2), on trouve

$$(T_g\tau) \circ (T_e L_g)(X) = X^*(\tau(g))$$

  pour tout $X \in \mathfrak{g}$. L'application $T_g\tau \circ T_e L_g : \mathfrak{g} \to T_{\tau(g)}\mathcal{O}$ est donc surjective. Comme $T_e L_g$ est une bijection dans $\mathfrak{g}$, $T_g\tau : \mathfrak{g} \to T_{\tau(g)}\mathcal{O}$ est surjective, et τ est une submersion.

— Soient $X \in \mathfrak{g}$ et $v \in \mathfrak{g}^*$. On définit un champ de vecteur X_L et une 1-forme v_L sur G en posant

$$X_L(g) := (T_e L_g)(X) \qquad \text{et} \qquad \langle v_L, Y\rangle(g) := \langle v, T_g L_{g^{-1}} Y(g)\rangle$$

pour tout $g \in G$ et tout champ de vecteurs Y sur G. Il est clair que X_L et v_L sont invariants à gauche.
Notons finalement λ le pullback de la forme $\omega_{\mathcal{O}}$ par τ, i.e. $\lambda = \tau^*\omega_{\mathcal{O}}$. Il s'agit d'une 2-forme antisymétrique sur G.

— On va montrer que pour tous $X, Y \in \mathfrak{g}$,

$$\lambda(X_L, Y_L) = \xi_{0L}([X_L, Y_L]) \ .$$

D'une part, l'égalité est vraie en le neutre : on a

$$\begin{aligned} \lambda(X_L, X_L)(e) &= \lambda(X, Y) \\ &= \omega_{\mathcal{O}}(X^*, Y^*)(\xi_0) \\ &= \langle \xi_0, [X, Y]\rangle \\ &= \xi_{0L}([X_L, Y_L])(e) \ . \end{aligned}$$

D'autre part, λ est G-invariante. En effet, pour tout $g \in G$,

$$\begin{aligned} L_g^*\lambda &= (\tau \circ L_g)^*\lambda \\ &= (Ad^*_{g^{-1}} \circ \tau)^*\omega_{\mathcal{O}} \\ &= \tau^*\omega_{\mathcal{O}} \\ &= \lambda \ , \end{aligned}$$

où on a utilisé l'invariance de $\omega_{\mathcal{O}}$ par l'action coadjointe Ad^* à l'avant-dernière égalité. Comme les X_L, Y_L sont également G-invariants, l'égalité annoncée est vraie en tout point de G.

— Montrons que

$$\lambda = -d\xi_{0L} \ .$$

Soient U, V des champs de vecteurs sur G. On fixe $g \in G$ et on pose

$$X := (T_g L_{g^{-1}})U(g) \qquad \text{et} \qquad Y := (T_g L_{g^{-1}})V(g) \ .$$

Notons que les fonctions $\xi_{0L}(X_L)$ et $\xi_{0L}(Y_L)$ sont constantes sur l'orbite $\mathcal{O}$,X_L, Y_L et ξ_{0L} étant G-invariants. En particulier, $\mathcal{L}_{Y_L}\xi_{0L}(X_L) = 0$ et $\mathcal{L}_{X_L}\xi_{0L}(Y_L) = 0$, où $\mathcal{L}$ désigne la dérivée de Lie. Dès lors, en utilisant la

G-invariance de λ et de ξ_{0L},

$$\begin{aligned}\lambda(U,V)(g) &= (L^*_{g^{-1}}\lambda)(U,V)(g)\\ &= \lambda(X_L,Y_L)(e)\\ &= \xi_{0L}([X_L,Y_L])(e)\\ &= -d\xi_{0L}(X_L,Y_L)(e)\\ &= -(L^*_g d\xi_{0L})(X_L,Y_L)(e)\\ &= -d\xi_{0L}(U,V)(g)\ .\end{aligned}$$

— On a finalement

$$\tau^* d\omega_{\mathcal{O}} = d\tau^*\omega_{\mathcal{O}} = d\lambda = -d^2\xi_{0L} = 0\ .$$

Comme on a montré que τ était une submersion, par le lemme 3.4.1, τ^* est injective sur $\bigwedge^3(\mathcal{O})$, d'où $d\omega_{\mathcal{O}} = 0$, ce qui achève la preuve.

□

Proposition 3.4.2. *L'action coadjointe d'un groupe de Lie G sur une orbite coadjointe non triviale $\mathcal{O}$ munie de la structure KKS $\omega_{\mathcal{O}}$ est fortement hamiltonienne. L'application $J_{Ad^*} : \mathcal{O} \to \mathfrak{g}^* : \xi \mapsto \xi$ en est un moment équivariant.*

Démonstration. Il est clair que pour tout $g \in G$, l'application $Ad^*_g : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ est un difféomorphisme. Comme on a montré qu'elle préserve la forme symplectique $\omega_{\mathcal{O}}$, il s'agit d'un symplectomorphisme et l'action coadjointe est symplectique. Pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned}d_\xi\langle J_{Ad^*}, X\rangle(Y^*) &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\langle J_{Ad^*}(Ad^*_{\exp(-tY)}\xi), X\rangle\\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\langle Ad^*_{\exp(-tY)}\xi, X\rangle\\ &= \langle ad^*_Y\xi, X\rangle\\ &= \langle \xi, [X,Y]\rangle\\ &= \omega_{\mathcal{O}}(X^*, Y^*)\ .\end{aligned}$$

□

3.4.2 Orbites affines comme variétés symplectiques

Considérons à présent le cas des orbites affines. Soit $\xi_0 \in \mathfrak{g}^*$ et notons $\mathcal{A} := Orb_a(\xi_0)$ l'orbite de ξ_0 sous l'action affine a associée au cocycle θ. On suppose à nouveau que $\mathcal{A}$ est de dimension non nulle. Pour tout $X \in \mathfrak{g}$, le champ de vecteurs fondamental associé à X pour l'action a est donné par

$$\begin{aligned} X^*(\xi) &= \frac{d}{dt}|_{t=0} a_{\exp(-tX)}\xi \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0} Ad^*_{\exp(-tX)}\xi + \theta(\exp(-tX)) \\ &= -ad^*_X\xi - T_e\theta(X) \end{aligned}$$

pour tout $\xi \in \mathfrak{g}^*$.

Définition 3.4.1. Soit $\Phi : G \times M \to M$ une action hamiltonienne de moment J et θ le 1-cocycle de non-équivariance associé. Le *2-cocycle de non-équivariance* associé à J est l'application $\Theta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ définie par

$$\Theta(X) = T_e\theta(X)$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}$.

L'espace tangent en $\xi \in \mathcal{A}$ est donc

$$T_\xi\mathcal{A} = \{-ad^*_X\xi - \Theta(X) : X \in \mathfrak{g}\} \ .$$

L'application Θ vérifie les propriétés suivantes, dites "propriétés de 2-cocycle" :

Proposition 3.4.3. *Pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$,*

1.

$$\langle\Theta(X), Y\rangle = -\langle\Theta(Y), X\rangle$$

2.

$$\langle\Theta(X), [Y, Z]\rangle + \langle\Theta(Y), [Z, X]\rangle + \langle\Theta(Z), [X, Y]\rangle = 0$$

Démonstration. Soient $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. On a

$$\begin{aligned} \langle\Theta(X), Y\rangle &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\langle\theta(\exp(tX)), Y\rangle \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\langle J(\Phi_{\exp(tX)}), Y\rangle - \langle J, Ad_{\exp(-tX)}Y\rangle \\ &= \omega(Y^*_\Phi, X^*_\Phi) - \langle J, [Y, X]\rangle \ . \end{aligned}$$

L'antisymétrie suit. Pour la deuxième identité, notons que, en vertu de la propriété de 1-cocycle,

$$\theta(g_1g_2g_1^{-1}) = -Ad^*_{g_1g_2g_1^{-1}}\theta(g_1) + Ad^*_{g_1}\theta(g_2) + \theta(g_1) \ .$$

En prenant $g_2 = \exp(tY)$ et en dérivant selon t,

$$\begin{aligned}\langle \Theta(Ad_{g_1} Y), Z\rangle &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\langle \theta(g_1 \exp(tY) g_1^{-1}), Y\rangle \\ &= \langle \theta(g_1), [Ad_{g_1} Y, Z]\rangle + \langle \Theta(Y), Ad_{g_1^{-1}} Z\rangle \ .\end{aligned}$$

En prenant $g_1 = \exp(sX)$ et en dérivant selon s,

$$\begin{aligned}\langle \Theta([X,Y]), Z\rangle &= \frac{d}{ds}|_{s=0}\langle \Theta(Ad_{\exp(sX)} Y), Z\rangle \\ &= \langle \Theta(X), [Y,Z]\rangle + \langle \theta(e), [[X,Y],Z]\rangle + \langle \Theta(Y), [Z,X]\rangle \ .\end{aligned}$$

Comme $\theta(e) = 0$ et $\langle \Theta([X,Y]), Z\rangle = -\langle \Theta(Z), [X,Y]\rangle$ au vu du premier point, on a la conclusion. □

Remarque 3.4.1. Le 2-cocycle de non-équivariance utilisé dans ce travail est un exemple particulier de 2-cocycle symplectique. De manière générale, on appelle *2-cocycle symplectique* toute application $\Theta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ vérifiant les propriétés de 2-cocycle énoncées à la proposition précédente. La preuve ci-dessus montre également que si θ est un 1-cocycle symplectique (voir remarque 3.1.3), alors $T_e\theta$ est un 2-cocycle symplectique

La forme symplectique de Kostant-Kirillov-Souriau sur les orbites coadjointes peut être "corrigée" à l'aide du cocycle Θ pour obtenir une forme symplectique G-invariante sur $\mathcal{A}$.

Lemme 3.4.2. *Pour tout $g \in G$ et $X, Y \in \mathfrak{g}$,*

$$\langle \theta(g), [X,Y]\rangle = \langle \Theta(X), Y\rangle - \langle \Theta(Ad_g X), Ad_g Y\rangle \ .$$

Démonstration. On a, en utilisant la propriété de 1-cocycle à deux reprises,

$$\begin{aligned}\langle \theta(g), [X,Y]\rangle &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\langle \theta(g), Ad_{\exp(tX)} Y\rangle \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\langle Ad^*_{\exp(-tX)}\theta(g), Y\rangle \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\langle \theta(\exp(-tX)g), Y\rangle - \langle \theta(\exp(-tX)), Y\rangle \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\langle \theta(g\exp(-tAd_{g^{-1}}X), Y\rangle - \langle \theta(\exp(-tX)), Y\rangle \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\langle Ad^*_g\theta(\exp(-tAd_{g^{-1}}X)), Y\rangle + \langle \theta(g), Y\rangle - \langle \theta(\exp(-tX)), Y\rangle \\ &= -\langle \Theta(Ad_{g^{-1}}X), Ad_{g^{-1}}Y\rangle + 0 + \langle \Theta(X), Y\rangle \ .\end{aligned}$$

□

Proposition 3.4.4. *La 2-forme $\omega_{\mathcal{A}}$ définie sur $\mathcal{A}$ par*

$$\omega_{\mathcal{A}}(X^*, Y^*)(\xi) = \langle \xi, [X, Y] \rangle - \langle \Theta(X), Y \rangle$$

pour tous $X, Y \in \mathfrak{g}$ est bien définie et est une forme symplectique sur $\mathcal{A}$. De plus, elle est invariante pour l'action affine a.

Démonstration. La preuve de la bonne définition ainsi que de la non-dégénérescence est en tout point semblable à celle de la proposition 3.4.1.
Pour l'invariance par l'action affine, notons que pour tous $g \in G$ et $X \in \mathfrak{g}$,

$$(T_\xi a_g)(X^*(\xi)) = (Ad_g X)^*(a_g \xi).$$

En utilisant le lemme 3.4.2, on a alors

$$\begin{aligned}
((a_g)^*\omega_{\mathcal{A}})(X^*, Y^*)(\xi) &= \omega_{\mathcal{A}}((Ad_g X)^*, (Ad_g Y)^*)(a_g \xi) \\
&= \langle a_g \xi, [Ad_g X, Ad_g Y] \rangle - \langle \Theta(Ad_g X), Ad_g Y \rangle \\
&= \langle Ad_g^* \xi, Ad_g [X, Y] \rangle + \langle \theta(g), [Ad_g X, Ad_g Y] \rangle - \langle \Theta(Ad_g X), Ad_g Y \rangle \\
&= \langle \xi, [X, Y] \rangle + \langle \Theta(Ad_g X), Ad_g Y \rangle + \langle \Theta(X), Y \rangle - \langle \Theta(Ad_g X), Ad_g Y \rangle \\
&= \omega_{\mathcal{A}}(X^*, Y^*)(\xi) \ .
\end{aligned}$$

La preuve de la fermeture de $\omega_{\mathcal{A}}$ est également similaire à celle donnée pour $\omega_{\mathcal{O}}$ à la proposition 3.4.1. □

Corollaire 3.4.1. *Soit $\Phi : G \times M \to M$ une action hamiltonienne et Ω son ouvert des températures généralisées. Si $\beta \in \Omega$, alors l'orbite adjointe de β, $Orb_{Ad}(\beta)$ est symplectique. En particulier, elle est de dimension paire.*

Démonstration. On a montré que l'application $E_J : \Omega \to \mathfrak{g}^*$ était injective. Comme on a une relation d'équivariance $E_j(Ad_g \beta) = a_g E_J(\beta)$, E_J est un difféomorphisme entre $Orb_{Ad}(\beta)$ et $Orb_a(E_J(\beta))$. Si on note $\omega_{\mathcal{A}}$ la forme KKS sur l'orbite affine de $E_J(\beta)$, alors le pull-back $E_J^* \omega_{\mathcal{A}}$ définit une forme symplectique sur l'orbite adjointe de β. □

Remarque 3.4.2. La forme symplectique $E_J^* \omega_{\mathcal{A}}$ définie ci-dessus s'exprime sur les champs fondamentaux par :

$$(E_J^* \omega_{\mathcal{A}})(X^*, Y^*)(\beta) = \langle E_J(\beta), [X, Y] \rangle - \langle \Theta(X), Y \rangle \ .$$

On vérifie aisément qu'elle est invariante pour l'action adjointe Ad.

Proposition 3.4.5. *L'action de a sur une orbite affine $\mathcal{A}$ munie de la structure KKS est fortement hamiltonienne. L'application $J_a : \mathcal{A} \to \mathfrak{g}^* : \xi \mapsto \xi$ est un moment équivariant de l'action a.*

Démonstration. Il est clair que a est symplectique, puisqu'elle préserve la forme symplectique $\omega_{\mathcal{A}}$. Pour tous $X, Y \in \mathfrak{g}$ et $\xi \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned} d\langle J_a, X\rangle(Y^*)(\xi) &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\langle J_a(a_{\exp(-tY)}\xi), X\rangle \\ &= -\frac{d}{dt}|_{t=0}\langle Ad^*_{\exp(-tY)}\xi + \theta(\exp(-tY)), X\rangle \\ &= -\langle \xi, [Y, X]\rangle - \langle \Theta(-Y), X\rangle \\ &= -\omega_{\mathcal{A}}(X^*, Y^*) \ . \end{aligned}$$

L'application J_a est donc un moment de l'action a. L'équivariance de J_a est triviale. □

3.4.3 Cas des groupes de Lie semisimples

Rappelons que pour tout groupe de Lie G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, la forme de Killing est l'application bilinéaire

$$\mathcal{K} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R} : (X, Y) \mapsto \mathcal{K}(X, Y) = tr(ad_X \circ ad_Y) \ .$$

Elle est symétrique et invariante pour l'action adjointe :

$$\mathcal{K}(Ad_g X, Ad_g Y) = \mathcal{K}(X, Y).$$

Notons également que

$$\mathcal{K}([X, Y], Z) = -\mathcal{K}(X, [Z, Y]).$$

Un groupe de Lie G est semisimple si et seulement si la forme de Killing $\mathcal{K}$ est non dégénérée. Dans ce cas, elle induit un isomorphisme (dit *musical*) $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$. Notons k cet isomorphisme :

$$k : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^* : X \mapsto k(X) = X^\flat$$

où $X^\flat$ est l'élément de $\mathfrak{g}^*$ défini par

$$\langle X^\flat, Y\rangle = \mathcal{K}(X, Y) \ .$$

Proposition 3.4.6. *L'application $k : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$ est équivariante par rapport à l'action coadjointe, i.e.*

$$Ad^*_g \circ k = k \circ Ad_g \ .$$

En particulier, $k : Orb_{Ad}(X) \to Orb_{Ad^*}(X^\flat)$ est un difféomorphisme pour tout $X \in \mathfrak{g}$. De plus, pour tout $Y \in \mathfrak{g}$,

$$(T_\beta k)Y^*_{Ad}(\beta) = Y^*_{Ad^*}(k(\beta)) \ .$$

Démonstration. Pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned}\langle Ad_g^* k(X), Y\rangle &= \langle k(X), Ad_{g^{-1}} Y\rangle \\ &= \mathcal{K}(X, Ad_{g^{-1}} Y) \\ &= \mathcal{K}(Ad_g X, Y) \\ &= \langle k(Ad_g X), Y\rangle \ .\end{aligned}$$

Le dernier point découle immédiatement de l'équivariance de k. $\square$

En particulier, les orbites adjointes d'un groupe de Lie semi-simple sont des variétés symplectiques, pour la forme canonique $k^*\omega_{\mathcal{O}}$. Notons que, au vu de la proposition précédente, pour tous $Y, Z \in \mathfrak{g}$,

$$k^*\omega_{\mathcal{O}}(X^*_{Ad}, Y^*_{Ad})(\beta) = \mathcal{K}(\beta, [X, Y]) \ .$$

Cette forme fait de l'action $Ad : G \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ une action fortement hamiltonienne, admettant pour moment équivariant

$$J_{Ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^* : X \mapsto X^\flat \ .$$

3.4.4 États de Gibbs de l'action coadjointe de $SU(2)$

On étudie à présent les fonctions thermodynamiques sur les orbites coadjointes de $SU(2)$. Commençons par rappeler quelques faits élémentaires concernant $SU(2)$. Dans ce qui suit, on note

$$G := SU(2) = \left\{ A \in \mathbb{C}_2^2 : A^*A = I_2 \qquad \text{et} \qquad \det(A) = 1 \right\} \ . \tag{3.3}$$

Il s'agit d'un groupe de Lie réel connexe de dimension 3. Parmi les paramétrages possibles, on peut par exemple considérer

$$\Psi :]0, \pi[\times]0, 4\pi[\times]0; 2\pi[\to G : \tag{3.4}$$

$$(\theta, \psi, \phi) \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) \exp(\frac{i}{2}(\psi + \phi)) & \sin(\frac{\theta}{2}) \exp(\frac{i}{2}(\psi - \phi)) \\ -\sin(\frac{\theta}{2}) \exp(-\frac{i}{2}(\psi - \phi)) & \cos(\frac{\theta}{2}) \exp(-\frac{i}{2}(\psi + \phi)) \end{pmatrix} \ . \tag{3.5}$$

Son algèbre de Lie est donnée par

$$\mathfrak{g} := \mathfrak{su}(2) = \left\{ X \in \mathbb{C}_2^2 : X^* + X = 0 \qquad \& \qquad Tr(X) = 0 \right\} \ .$$

On fixe une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathfrak{g}$ en posant

$$e_1 := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \qquad e_2 := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad e_3 := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Orbites adjointes de $SU(2)$

On va utiliser la forme de Killing pour déterminer les orbites adjointes et coadjointes de $SU(2)$. Le groupe de Lie $G = SU(2)$ est semi-simple, la forme de Killing $\mathcal{K}$ est donc non-dégénérée sur $\mathfrak{g}$. Dans la base choisie ci-dessus, on a

$$\mathcal{K} : tr(ad_X \circ ad_X) = 4Tr(X^2) = -2X_1^2 - 2X_2^2 - 2X_3^2$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}$. L'application $-\frac{1}{2}\mathcal{K}$ est donc un produit scalaire sur $\mathfrak{g}$.

Remarque 3.4.3. On a un isomosphisme d'algèbres de Lie

$$(\mathbb{R}^3, \times) \to (\mathfrak{su}(2), [,]) : (X_1, X_2, X_3) \mapsto X_1e_1 + X_2e_2 + X_3e_3$$

où $\times$ désigne le produit vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Sous cet isomorphisme, la forme $-\frac{1}{2}\mathcal{K}$ correspond au produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^3$.

Au vu de la proposition 3.4.6, les orbites adjointes et coadjointes munies de la structure KKS canonique sont symplectomorphes. Soit $X_0 \in \mathfrak{g}$ non nul et posons $R = \sqrt{-\mathcal{K}(X_0, X_0)} > 0$. Considérons la sphère de rayon R dans $\mathfrak{g}$ pour la norme induite par $-\mathcal{K}$:

$$S_2(R) := \left\{Y \in \mathfrak{g} : -\mathcal{K}(Y, Y) = R^2\right\} .$$

Pour tout $g \in G$, $-\mathcal{K}(Ad_gX_0, Ad_gX_0) = -\mathcal{K}(X_0, X_0) = R$. En conclusion,

$$Orb_{Ad}(X_0) \subseteq S_2(R) .$$

En utilisant le paramétrage (3.4) on montre aisément que l'autre inclusion est également vérifiée, d'où la proposition suivante.

Proposition 3.4.7. *Soit $X_0 \in \mathfrak{g}$ tel que $X_0 \neq 0$. Notons $R = \sqrt{-\mathcal{K}(X_0, X_0)}$ et $S_2(R)$ la sphère de rayon R dans $\mathfrak{g}$. Alors*

$$Orb_{Ad}(X_0) = S_2(R) .$$

Remarque 3.4.4. La proposition précédente peut également être démontrée en mentionnant que $SU(2)$ est un revêtement double de $SO(3)$, l'action de $SO(3)$ sur la sphère étant transitive.

Forme KKS en coordonnées

Soit $R > 0$ et notons ω_S la forme KKS sur l'orbite adjointe $S_2(R)$. Afin d'expliciter la forme ω_S, on aura besoin du lemme technique suivant.

Lemme 3.4.3. *Soit $R > 0$ et $\beta \in S_2(R)$. Pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$,*

$$\mathcal{K}(\beta, [Y, Z]) = \frac{2}{R^2}\mathcal{K}(\beta, [Y^*(\beta), Z^*(\beta)])$$

Démonstration. En identifiant $\mathfrak{g}$ à $\mathbb{R}^3$ par l'isomorphisme mentionné à la Remarque 3.4.3, la forme $-\frac{1}{2}\mathcal{K}$ correspond au produit scalaire euclidien$\langle\cdot,\cdot\rangle$ sur $\mathbb{R}^3$. On doit donc montrer

$$\langle b, y \times z\rangle = \frac{1}{\langle b, b\rangle}\langle b, (y \times b) \times (z \times b)\rangle$$

pour tous $x, y, z, b \in \mathbb{R}^3$. Les deux membres étant linéaires sur les arguments y et z, il suffit de vérifier l'identité pour y, z des vecteurs de base de $\mathbb{R}^3$. Les vérifications sont alors immédiates. □

On peut finalement calculer la forme ω_S sur $S_2(R)$. Soit $\beta \in S_2(R)$ et $U, V \in T_\beta S_2(R)$. Il existe $X, Y \in \mathfrak{g}$ tels que $X^*_{Ad}(\beta) = U$ et $Y^*_{Ad}(\beta) = V$. En utilisant le lemme précédent et la proposition 3.4.6, on obtient

$$\begin{aligned}\omega_S(U, V) &= k^*\omega_{\mathcal{O}}(X^*_{Ad}(\beta), Y^*_{Ad}(\beta)) \\ &= \mathcal{K}(\beta, [X, Y]) \\ &= \frac{2}{R^2}\mathcal{K}(\beta, [U, V]) \ .\end{aligned}$$

États de Gibbs et fonctions thermodynamiques

On calcule les états de Gibbs de l'action adjointe de G sur $S_2(R)$, pour $R > 0$. Au vu du raisonnement précédent, l'orbite $\mathcal{O}$ est isomorphe à une sphère et donc compacte. L'ouvert des températures généralisées sera donc $\Omega = \mathfrak{g}$. Fixons à présent $\beta \in \mathfrak{g}$ non nul et choisissons une base (e_x, e_y, e_z) de $\mathfrak{g}$, orthonormée pour $-\mathcal{K}$ et telle que

$$e_z := \frac{\beta}{\sqrt{-\mathcal{K}(\beta, \beta)}} \ .$$

Dans cette base, on considère les coordonnées cylindriques

$$\begin{aligned}&\Psi :]-R, R[\times]0, 2\pi[\to Orb_{Ad}(X_0) : \\ &(r, \theta) \mapsto \left(\sqrt{R^2 - r^2}\cos(\theta)\,, \sqrt{R^2 - r^2}\sin(\theta)\,, r\right) \ .\end{aligned}$$

Dans ces coordonnées, on a $\beta = \beta_z e_z$ avec $\beta_z = \sqrt{-\mathcal{K}(\beta, \beta)} > 0$. Les champs de vecteurs de base associés sont

$$\begin{aligned}\partial_r(r, \theta) &= \left(\frac{-r}{\sqrt{R^2 - r^2}}\cos(\theta)\,, \frac{-r}{\sqrt{R^2 - r^2}}\sin(\theta)\,, 1\right) \\ \partial_\theta(r, \theta) &= \left(-\sqrt{R^2 - r^2}\sin(\theta)\,, \sqrt{R^2 - r^2}\cos(\theta)\,, 0\right) .\end{aligned}$$

En utilisant la Remarque 3.4.3, on trouve

$$\begin{aligned}
\omega_S(\partial_r, \partial_\theta)(r,\theta) &= \frac{2}{R^2}\mathcal{K}(\Psi(r,\theta), \partial_r(r,\theta) \times \partial_\theta(r\theta)) \\
&= -\frac{2}{R^2}\mathcal{K}(\Psi(r,\theta), \sqrt{R^2-r^2}\cos(\theta)e_x + \sqrt{R^2-r^2}\sin(\theta)e_y + re_z) \\
&= -\frac{2}{R^2}\mathcal{K}(\Psi(r,\theta), \Psi(r,\theta)) \\
&= 2\ .
\end{aligned}$$

Dès lors, en coordonnées, la forme ω_S est donnée par

$$\omega_S = 2d_r \wedge d_\theta\ .$$

Les orbites $S_2(R)$ avec $R > 0$ étant compactes, l'ouvert des températures généralisées est $\Omega = \mathfrak{g}$. On a

$$\begin{aligned}
P(\beta) &= \int_{S_2(R)} \exp(-\mathcal{K}(X,\beta) d\lambda_{\omega_S}(X) \\
&= 2\int_{-R}^{R}\int_0^{2\pi} \exp(-r\beta_z) d\theta\, dr \\
&= 8\pi\frac{\sinh(R\beta_z)}{\beta_z}
\end{aligned}$$

pour tout $\beta \neq 0$. De plus, comme on sait que $0 \in \Omega$ et que la fonction de partition est lisse, on a

$$P(0) = \lim_{\beta\to 0} P(\beta) = 8\pi R\ .$$

Posons $||\beta|| = \sqrt{-\mathcal{K}(\beta,\beta)}$. Il est clair que $\beta_z = ||\beta||$. La fonction de partition s'exprime alors de manière indépendante du choix de la base :

$$P(\beta) = \begin{cases} 8\pi\frac{\sinh(R||\beta||)}{||\beta||} & \text{si } \beta \neq 0 \\ 8\pi R & \text{si } \beta = 0\ . \end{cases}$$

La valeur moyenne du moment et la métrique de Souriau se calculent via les formules détaillées au Lemme 2.1.2. POur la valeur moyene, on a :

$$\begin{aligned}
&E_J(\beta) = -D\log(P(\beta)) = \frac{R||\beta||\coth(R||\beta||) - 1}{||\beta||^2}\beta^\flat \qquad \beta \neq 0 \\
&E_J(0) = 0\ .
\end{aligned}$$

Pour la métrique de Souriau,

$$
\begin{aligned}
\Gamma_\beta(X,Y) =& \frac{-R^2||\beta||^2\coth^2(R||\beta||) - R||\beta||\coth(R||\beta||) + R^2||\beta||^2 + 2}{||\beta||^4}\mathcal{K}(\beta,X)\mathcal{K}(\beta,Y) \\
&+ \frac{1 - R||\beta||\coth(R||\beta||)}{||\beta||^2}\mathcal{K}(X,Y), \qquad \beta \neq 0 \\
\Gamma_0(X,Y) =& -\frac{R^2}{3}\mathcal{K}(X,Y)\ .
\end{aligned}
$$

3.4.5 États de Gibbs de l'action coadjointe de $SU(1,1)$

On étudie à présent le cas des orbites coadjointes de $SU(1,1)$. On va voir que, contrairement au cas $SU(2)$, l'existence des états de Gibbs dépend de l'orbite considérée. Notons

$$
G := SU(1,1) = \{A \in \mathbb{C}_2^2 : A^* I_{1,1} A = I_{1,1} \qquad \text{et} \qquad \det(A) = 1\}
$$

avec

$$
I_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.
$$

Il s'agit d'un groupe de Lie réel de dimension 3, admettant pour paramétrage

$$
\psi :]0,+\infty[\times]0,2\pi[\times]0,2\pi[\to G : \tag{3.6}
$$

$$
(\theta,\phi,\psi) \mapsto \begin{pmatrix} \cosh(\theta)\exp(i\phi) & \sinh(\theta)\exp(-i\psi) \\ \sinh(\theta)\exp(i\psi) & \cosh(\theta)\exp(-i\phi) \end{pmatrix}. \tag{3.7}
$$

Son algèbre de Lie est

$$
\mathfrak{g} := \mathfrak{su}(1,1) = \left\{X \in \mathbb{C}_2^2 : X^* I_{1,1} + I_{1,1} X = 0 \qquad \text{et} \qquad tr(X) = 0\right\}\ .
$$

On considère une base (f_1, f_2, f_3) de $\mathfrak{g}$ avec

$$
f_1 := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \qquad f_2 := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad f_3 := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\ .
$$

Orbites adjointes de $SU(1,1)$

Comme pour $SU(2)$, on va utiliser la forme de Killing pour déterminer les orbites adjointes de $SU(1,1)$. Dans la base (f_1, f_2, f_3) fixée ci-dessus, la forme de Killing a pour expression

$$
\mathcal{K}(X,X) = tr(ad_X \circ ad_X) = 4Tr(X^2) = -2X_1^2 + 2X_2^2 + 2X_3^2\ . \tag{3.8}
$$

Il s'agit d'une forme bilinéaire non dégénérée de signature $(-,+,+)$. Le groupe G étant semisimple, les orbites adjointes et coadjointes sont symplectomorphes. Dans ce qui suit, on appellera *base orthonormée positive* toute base (e_1, e_2, e_3) de $\mathfrak{g}$ telle que la forme de Killing a pour expression (3.8) et telle que (e_1, e_2, e_3) a même orientation que (f_1, f_2, f_3).

Lemme 3.4.4. *Pour toute base orthonormée positive* (e_1, e_2, e_3)*, on a*

$$[e_1, e_2] = e_3 \qquad [e_2, e_3] = -e_1 \qquad [e_3, e_1] = e_2 \ .$$

Démonstration. On vérifie aisément les relations sur les éléments de la base (f_1, f_2, f_3). Soit à présent (e_1, e_2, e_3) une base orthonormée positive et A la matrice de changement de base telle que $e_i = Af_iA^{-1}$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$. On a

$$[e_i, e_j] = [Af_iA^{-1}, Af_jA^{-1}] = A[f_i, f_j]A^{-1} \ ,$$

d'où la conclusion. □

Soit $X_0 \in \mathfrak{g}$ et notons $R = \mathcal{K}(X_0, X_0)$. Attention que, au contraire de ce qui avait été fait pour les orbites de $SU(2)$, R n'est pas nécessairement positif. Le signe de R a une influence importante sur la géométrie de l'orbite considérée. Distinguons les différents cas.

— Si $R > 0$, en utilisant l'invariance de la forme de Killing pour l'action adjointe et le paramétrage de G donné par (3.6), on a

$$Orb_{Ad}(X_0) = \left\{ X \in \mathfrak{g} : X_2^2 + X_3^2 = X_1^2 + \frac{R}{2} \right\} \ .$$

Il s'agit d'un hyperboloïde à une nappe, avec e_1 pour axe de révolution. Une telle orbite sera appelée *orbite spatiale* et notée H_R.

— Si $R = 0$ et $X_0 = 0$ alors l'orbite est réduite au singleton 0. Si $X_0 \neq 0$, en utilisant l'invariance de la forme de Killing, on a

$$Orb_{Ad}(X_0) \subseteq \{X \in \mathfrak{g} : X_2^2 + X_3^2 = X_1^2\} \setminus \{0\} \ .$$

L'ensemble de droite possède deux composantes connexes selon que $X_1 > 0$ ou $X_1 < 0$. Comme $SU(1, 1)$ est connexe, l'orbite de X_0 ne peut être contenue que dans une seule de ces composantes. En utilisant le paramétrage (3.6), on montre que :

- Si $X_{0,1} > 0$,

$$Orb_{Ad}(X_0) = \{X \in \mathfrak{g} : X_1 = \sqrt{X_2^2 + X_3^2}\} \ .$$

On notera C^+ une telle orbite.

- Si $X_{0,1} < 0$,

$$Orb_{Ad}(X_0) = \{X \in \mathfrak{g} : X_1 = -\sqrt{X_2^2 + X_3^2}\} .$$

On notera C^- une telle orbite.

Les orbites C^+ et C^- seront appelées *orbites lumières.*

— Si $R < 0$. En raisonnant comme pour le cas $R = 0$, on trouve deux orbites possibles suivant le signe de $X_{0,1}$.

— Si $X_{0,1} > 0$,

$$Orb_{Ad}(X_0) = \left\{X \in \mathfrak{g} : X_1 = \sqrt{X_2^2 + X_3^2 - \frac{R}{2}}\right\} .$$

Une telle orbite sera notée P_R^+

— Si $X_{0,1} > 0$,

$$Orb_{Ad}(X_0) = \left\{X \in \mathfrak{g} : X_1 = -\sqrt{X_2^2 + X_3^2 - \frac{R}{2}}\right\} .$$

Une telle orbite sera notée P_R^-.

Les orbites P_R^+ et P_R^- seront appelées *orbites temporelles.*

Notons que les équations cartésiennes des orbites données ci-dessus sont valables dans n'importe quelle base orthonormée positive.

Forme KKS

Pour déterminer la forme de KKS sur les orbites temporelles et spatiales de $SU(1,1)$ on a l'équivalent du lemme 3.4.3 pour $SU(1,1)$.

Lemme 3.4.5. *Soit $X_0 \in \mathfrak{g}$ tel que $R = \mathcal{K}(X_0, X_0) \neq 0$. Pour tous $Y, Z \in \mathfrak{g}$ et $\beta \in Orb_{Ad}(X_0)$,*

$$\mathcal{K}(\beta, [Y,Z]) = \frac{-2}{R}\mathcal{K}(\beta, [[Y,\beta],[Z,\beta]]) .$$

Démonstration. Les deux membres sont linéaires sur Y et Z. Il suffit donc de vérifier l'égalité pour Y, Z des vecteurs de base, en utilisant les relations du lemme 3.4.4. Les vérifications sont alors immédiates. □

Soit $\beta \in Orb_{Ad}(X_0)$ et $U, V \in T_\beta Orb_{Ad}(X_0)$. Lorsque $\mathcal{K}(X_0, X_0) \neq 0$, on peut utiliser le lemme précédent comme pour le cas $SU(2)$. La forme KKS s'écrit

$$\omega_S(U,V) = -\frac{2}{\mathcal{K}(X_0,X_0)}\mathcal{K}(\beta, [U,V]) .$$

États de Gibbs et fonctions thermodynamiques sur les pseudosphères

Commençons par étudier des orbites P_R^+, pour lesquelles $R = \mathcal{K}(X_0, X_0) < 0$ et $X_{0,1} > 0$. Dans une base orthonormée positive (e_1, e_2, e_3) quelconque, on considère les coordonnées

$$\begin{aligned}\Psi : &\,]\sqrt{-R/2}\,, +\infty[\, \times\,]0, 2\pi[\, \to \mathfrak{g}\\ &: (r, \theta) \mapsto \left(r\,, \cos(\theta)\sqrt{r^2 + R/2}\,, \sin(\theta)\sqrt{r^2 + R/2}\right)\ .\end{aligned}$$

Les champs de vecteurs de base associés sont

$$\begin{aligned}\partial_r(r, \theta) &= \left(1, \cos(\theta)\frac{r}{\sqrt{r^2 + R/2}}, \sin(\theta)\frac{r}{\sqrt{r^2 + R/2}}\right)\\ \partial_\theta(r, \theta) &= \left(0, -\sin(\theta)\sqrt{r^2 + R/2}, \cos(\theta)\sqrt{r^2 + R/2}\right).\end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 3.4.4, on trouve

$$[\partial_r(r, \theta), \partial_\theta(r, \theta)] = -\Psi(r, \theta)$$

pour tout $r \in\,]\sqrt{-R/2}, +\infty[$ et $\theta \in\,]0, 2\pi[$. Dès lors,

$$\begin{aligned}\omega_{R^+}(\partial_r, \partial_\theta)(r, \theta) &= -\frac{2}{R}\mathcal{K}(\Psi(r, \theta), [\partial_r(r, \theta), \partial_\theta(r, \theta)])\\ &= \frac{2}{R}\mathcal{K}(\Psi(r, \theta), \Psi(r, \theta))\\ &= 2\,,\end{aligned}$$

où la dernière égalité a lieu car $\Psi(r, \theta) \in P_R^+$, donc $\mathcal{K}(\Psi(r, \theta), \Psi(r, \theta)) = R$. Dès lors,

$$\omega_{P_R^+} = 2dr \wedge d\theta\ .$$

On recherche les valeurs de $\beta \in \mathfrak{g}$ pour lesquelles l'intégrale

$$\int_{P_R^+} \exp(-\mathcal{K}(X, \beta))d\lambda_{\omega_{P_R^+}}(X) \tag{3.9}$$

est normalement convergente. Fixons $\beta \in \mathfrak{g}$.

— Si $\mathcal{K}(\beta, \beta) < 0$, soit une base orthonormée positive (e_1, e_2, e_3) de $\mathfrak{g}$ telle que e_1 est parallèle à β, i.e. $\beta = \beta_1 e_1$ avec $\beta_1 \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, dans les coordonnées associées,

$$\mathcal{K}(\Psi(r, \theta), \beta) = -2r\beta_1\ .$$

L'intégrale (3.9) devient alors

$$\int_{P_R^+} \exp(-\mathcal{K}(X,\beta)) d\lambda_{\omega_{P_R^+}}(X) = \int_0^{2\pi} \int_{-R/2}^{\infty} \mathrm{e}^{2r\beta_1} 2 dr d\theta \ .$$

Elle converge si et seulement si $\beta_1 < 0$.

— Si $\mathcal{K}(\beta,\beta) > 0$, on choisit une base orthonormée positive (e_1, e_2, e_3) telle que e_2 est parallèle à β. Dans ce cas,

$$\mathcal{K}(\Psi(r,\theta),\beta) = 2\cos(\theta)\sqrt{r^2 + R/2}\beta_2 \ .$$

L'intégrale (3.9) devient alors

$$\int_{P_R^+} \exp(-\mathcal{K}(X,\beta)) d\lambda_{\omega_{P_R^+}}(X) = \int_0^{2\pi} \int_{-R/2}^{\infty} \exp(-2\cos(\theta)\sqrt{r^2 + R/2}\beta_2) 2 dr d\theta \ .$$

Il est clair que l'intégrale n'est jamais convergente.

L'ensemble des températures généralisées $\Omega_{P_R^+}$ contient donc l'ensemble des $\beta \in \mathfrak{g}$ tels que $\mathcal{K}(\beta,\beta) < 0$ et $\beta_1 < 0$, mais aucun $\beta \in \mathfrak{g}$ tel que $\mathcal{K}(\beta,\beta) > 0$. Comme il est ouvert, on conclut

$$\Omega_{P_R^+} = \{\beta \in \mathfrak{g} : \mathcal{K}(\beta,\beta) < 0 \qquad \text{et} \qquad \beta_1 < 0\} \ .$$

Pour tout $\beta \in \Omega_{P_R^+}$, posons

$$||\beta|| := \sqrt{-\frac{1}{2}\mathcal{K}(\beta,\beta)} > 0$$

et notons que $\beta_1 = -||\beta||$. Les fonctions thermodynamiques associées s'expriment alors de manière indépendante de la base choisie. La fonction de partition est

$$\begin{aligned} P(\beta) &= \int_0^{2\pi} \int_{-R/2}^{\infty} \mathrm{e}^{2r\beta_1} 2 dr d\theta \\ &= \frac{-2\pi}{\beta_1} \exp(-R\beta_1) \\ &= \frac{2\pi}{||\beta||} \exp(R||\beta||). \end{aligned}$$

La valeur moyenne du moment s'exprime comme

$$E_J(\beta) = \frac{R||\beta|| - 1}{2||\beta||^2} \beta^\flat \ .$$

De manière similaire, on montre que l'ensemble des températures généralisées pour les orbites $\Omega_{P_R^-}$ est

$$\Omega_{P_R^-} = \{\beta \in \mathfrak{g} : \mathcal{K}(\beta,\beta) < 0 \qquad \text{et} \qquad \beta_1 > 0\} \ .$$

Enfin, la métrique de Souriau est donnée par

$$\Gamma_\beta(X,Y) = \frac{2 - R||\beta||}{4||\beta||^4}\mathcal{K}(\beta,X)\mathcal{K}(\beta,Y) + \frac{1 - R||\beta||}{2||\beta||^2}\mathcal{K}(X,Y)$$

Les fonctions thermodynamiques sur P_R^- ont la même expression que sur P_R^+.

États de Gibbs et fonctions thermodynamiques sur les orbites H_R

Un paramétrage de H_R est donné par

$$\begin{aligned} &\Psi : \mathbb{R}\times]0,2\pi[: \\ &(r,\theta) \mapsto (r, \cos(\theta)\sqrt{r^2+R}, \sin(\theta)\sqrt{r^2+R}) \ . \end{aligned}$$

Par des calculs similaires à ceux effectués pour les orbites P_R^+, on trouve que la forme KKS sur H_R s'exprime dans ces coordonnées comme

$$\omega_{H_R} = 2dr \wedge d\theta \ .$$

On recherche les $\beta \in \mathfrak{g}$ tels que l'intégrale

$$\int_{H_R} \exp(-\mathcal{K}(X,\beta)) d\lambda_{\omega_{H_R}}(X)$$

est convergente. Si $\mathcal{K}(\beta,\beta) < 0$, on choisit une base orthonormée positive (e_1,e_2,e_3) telle que e_1 est parallèle à β. En coordonnées, l'intégrale devient

$$\int_{H_R} \exp(-\mathcal{K}(X,\beta)) d\lambda_{\omega_{H_R}}(X) = \int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-r\beta_1} 2drd\theta \ .$$

Elle n'est donc jamais convergente. De même, pour $\mathcal{K}(\beta,\beta) < 0$, on choisit une base orthonormée positive (e_1,e_2,e_3) telle que e_2 est parallèle à β et on montre que l'intégrale n'est jamais convergente. En conclusion,

$$\Omega_{H_R} = \varnothing \ .$$

États de Gibbs et fonctions thermodynamiques sur les orbites lumières

Considérons en premier lieu l'orbite C^+. Dans une base orthonormée positive quelquonque, un paramétrage est donné par

$$\Psi :]0,+\infty[\times]0,2\pi[\to \mathfrak{g} : (r,\theta) \mapsto (r, r\cos(\theta), r\sin(\theta)) .$$

Les champs de vecteurs de base associés sont

$$\partial_r(r,\theta) = (1, \cos(\theta), \sin(\theta))$$
$$\partial_\theta(r,\theta) = (0, -\sin(\theta), \cos(\theta)) .$$

Notons que, comme $R = \mathcal{K}(X_0, X_0) = 0$, on ne peut pas appliquer le lemme 3.4.5 pour déterminer la forme KKS comme pour les exemples précédents. En revanche, pour tous $r \in]0,+\infty[$ et $\theta \in]0,2\pi[$, si on pose

$$X_{(r,\theta)} := \frac{1}{r}(0, -\sin(\theta), \cos(\theta)) ,$$

on remarque que $[X_{(r,\theta)}, \Psi(r,\theta)] = \partial_r(r,\theta)$. Dès lors, $\partial_r(r,\theta)$ est le champ de vecteurs fondamental associé à $X_{(r,\theta)}$ évalué en le point $\Psi(r,\theta)$. Pareillement, pour

$$Y_{(r,\theta)} := (1, 0, 0) ,$$

on a $[Y_{(r,\theta)}, \Psi(r,\theta)] = \partial_\theta(r,\theta)$. Finalement,

$$\omega_{C^+}(\partial_r, \partial_\theta) = \mathcal{K}(\Psi(r,\theta), [X_{(r,\theta)}, Y_{(r,\theta)}]) = 2$$

et

$$\omega_{C^+} = 2dr \wedge d\theta .$$

En raisonnant comme pour le cas H_R^+, l'ouvert des températures généralisées est

$$\Omega_{C^+} = \{\beta \in \mathfrak{g} : \mathcal{K}(\beta,\beta) < 0 \qquad \text{et} \qquad \beta_1 < 0\} .$$

Les fonctions thermodynamiques sur Ω_{C^+} ont pour expression

$$P(\beta) = \frac{2\pi}{||\beta||}$$
$$E_J(\beta) = \frac{-1}{2||\beta||^2}\beta^\flat$$

La métrique de Souriau est

$$\Gamma_\beta(X,Y) = \frac{\mathcal{K}(X,Y)}{2||\beta||^2} + \frac{\mathcal{K}(\beta,X)\mathcal{K}(\beta,Y)}{2||\beta||^4}$$

Le cas de l'orbite C^- se traite de manière similaire, avec

$$\Omega_{C^-} = \{\beta \in \mathfrak{g} : \mathcal{K}(\beta,\beta) > 0 \qquad \text{et} \qquad \beta_1 > 0\} .$$

Remarque 3.4.5. Remarquons que l'expression des fonctions thermodynamiques sur C^+ correspond formellement à l'expression des fonctions thermodynamiques sur P_R^+ avec $R = 0$. Il est également intéressant de noter qu'en développant $||\beta|| = \sqrt{-\frac{1}{2}\mathcal{K}(\beta\beta)}$, on retrouve les mêmes expressions que pour l'action de $Sp(\mathbb{R}^2)$ sur le plan symplectique étudiée au chapitre 2.

Remarque 3.4.6. L'exemple des orbites coadjointes de $SU(1,1)$ est traité dans [Mar20]. Cependant, nous obtenons une conclusion différente dans le cas des orbites lumières C^+ et C^-. Les détails du raisonnement n'étant pas présentés dans le papier d'origine, il nous est difficile de pointer la raison de cette différence. Voir également la remarque 2.2.1.

3.5 Extension centrale et états de Gibbs

On a vu aux sections précédentes que la non-équivariance du moment pouvait être "corrigée" via le cocycle de non-équivariance θ. Dans le même ordre d'idée, on présente ici une méthode d'extension de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ rendant le moment équivariant. Cette extension est parfois appelée *extension centrale de Kostant*, d'après le mathématicien Bertram Kostant, qui a introduit ces extensions dans ses travaux sur la quantification géométrique.

Afin de ne pas s'écarter trop longtemps de notre sujet principal, on se contentera de présenter brièvement les notions et résultats nécessaires. Le lecteur intéressé pourra consulter [BF22] pour le détail des preuves et autres compléments généraux. On appliquera ensuite ces résultats à l'étude des états de Gibbs. En particulier, on verra que les relations du Théorème 3.2.1, valables pour un moment J quelconque, se déduisent aisément du cas où J est équivariant en considérant l'extension centrale.

3.5.1 Extensions centrales de groupes et algèbres de Lie

Définition 3.5.1. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie. Une *extension centrale unidimensionnelle* de $\mathfrak{g}$ est une suite exacte d'algèbres de Lie

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \hat{\mathfrak{g}} \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow 0\,.$$

Par abus de langage, on dira que $\hat{\mathfrak{g}}$ est une extension centrale de $\mathfrak{g}$ sans préciser le choix de la suite exacte.

On peut construire une extension centrale particulière à l'aide du cocycle de non-équivariance.

Proposition 3.5.1. *Soit $\Phi : G \times M \to M$ une action hamiltonienne de moment J et Θ le 2-cocycle de non-équivariance associé. Alors l'espace vectoriel $\hat{\mathfrak{g}} := \mathfrak{g} \oplus \mathbb{R}$*

muni du crochet

$$[(X,t),(Y,u)]_{\mathfrak{g}} = ([X,Y]_{\mathfrak{g}}, \langle \Theta(X), Y \rangle)$$

est une extension centrale de $\mathfrak{g}$.

Démonstration. Il est clair que le crochet défini sur $\hat{\mathfrak{g}}$ est antisymétrique, puisque le crochet de Lie sur $\mathfrak{g}$ et le cocycle Θ le sont. L'identité de Jacobi découle de l'identité de Jacobi pour le crochet de Lie sur $\mathfrak{g}$ et de la propriété de 2-cocycle 3.4.3 . Le crochet défini sur $\hat{\mathfrak{g}}$ est donc bien un crochet de Lie.
Pour montrer que $\hat{\mathfrak{g}}$ est une extension centrale de $\mathfrak{g}$, on considère les morphismes

$$i : \mathbb{R} \to \hat{\mathfrak{g}} : t \mapsto (0,t)$$
$$j : \hat{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g} : (X,t) \mapsto X$$

et on vérifie que la suite

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\quad i \quad} \hat{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\quad j \quad} \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

est exacte. □

On aimerait à présent considérer l'extension $\hat{\mathfrak{g}}$ comme l'algèbre de Lie associée à un groupe de Lie $\hat{G}$, de sorte que $\hat{G}$ étende le groupe G.

Définition 3.5.2. Soit G un groupe de Lie. Une *extension centrale unidimensionnelle* de G est une suite exacte de groupes de Lie

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\quad i \quad} \hat{G} \xrightarrow{\quad \pi \quad} G \longrightarrow 0\ ,$$

où K est un groupe de Lie commutatif de dimension 1 dont l'image est un sous-groupe du centre de $\hat{G}$. Lorsque que le choix de K n'a pas d'importance, on dira simplement que $\hat{G}$ est une extension centrale unidimensionnelle de G.

Remarque 3.5.1. Notons que, vu l'exactitude,

$$\frac{\hat{G}}{K} \simeq G\ ,$$

la projection sur le quotient étant donnée par $\pi : \hat{G} \to G$.

Le théorème suivant affirme que l'extension centrale $\hat{\mathfrak{g}}$ construite à l'aide du cocycle de non-équivalence est intégrable lorsque G est connexe : il existe une extension centrale $\hat{G}$ de G tele que l'algèbre de Lie de $\hat{G}$ est $\hat{\mathfrak{g}}$. Un preuve complète nous écarterait trop longtemps du sujet principal de notre mémoire : on tiendra ce résultat pour admis et on référera à [BF22] pour la démonstration.

Théorème 3.5.1. *Soit $\Phi : G \times M \to M$ une action hamiltonienne de moment J et $\hat{\mathfrak{g}}$ l'extension centrale de $\mathfrak{g}$ par le 2-cocycle de non-équivariance Θ. Si G est connexe, alors il existe une extension centrale unidimensionnelle $\hat{G}$ de G telle que $Lie(\hat{G}) = \hat{\mathfrak{g}}$.*
L'action adjointe de $\hat{G}$ sur $\hat{\mathfrak{g}}$ est donnée par

$$\hat{Ad}_g(X,t) = (Ad_g X, t + \langle \theta(g^{-1}), X\rangle) \ . \tag{3.10}$$

Le dual de $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus \mathbb{R}$ s'identifie à $\hat{\mathfrak{g}}^* \simeq \mathfrak{g}^* \oplus \mathbb{R}$, le couplage par dualité étant donné par

$$\langle (\alpha, \xi), (X,t)\rangle = \langle \alpha, X\rangle + \xi t \ ,$$

pour tout $(\alpha,\xi) \in \hat{\mathfrak{g}}^*$ et $(X,t) \in \hat{\mathfrak{g}}$. Au vu de l'expression (3.10) de l'action $\hat{Ad}$, on vérifie aisément que l'action coadjointe de $\hat{G}$ sur $\hat{\mathfrak{g}}^*$ est donnée par

$$\hat{Ad}^*_g(\alpha,\xi) = (Ad^*_g \alpha + \xi\theta(g), \xi) \ .$$

Remarque 3.5.2. Les résultats précédent restent valide si on remplace le 2-cocycle de non-équivariance par un 2-cocycle symplectique Θ quelquonque (voir 3.4.1). Dans ce cas, on peut montrer (voir [BF22]) qu'il existe un 1-cocycle symplectique θ tel que $\Theta = T_e\theta$ et que l'action $\hat{Ad}$ s'exprime comme (3.10).

On étend naturellement notre action $\Phi : G \times M \to M$ par

$$\hat{\Phi} : \hat{G} \times M \to M : (g,x) \mapsto \Phi(\pi(g), x) \ ,$$

avec $\pi : \hat{G} \to G$ la projection (voir remarque 3.5.1). Pour montrer que l'action étendue $\hat{\Phi}$ est fortement hamiltonienne, on aura besoin du lemme technique suivant.

Lemme 3.5.1. *Soit G un groupe de Lie et $\hat{G}$ une extension centrale unidimensionnelle de G. Notons $\pi : \hat{G} \to G$ la projection. Pour tout $(X,t) \in \hat{\mathfrak{g}}$,*

$$\pi(\exp_{\hat{G}}((X,t))) = \exp_G(X) \ .$$

Démonstration. Par définition de l'exponentielle, $s \mapsto \exp_{\hat{G}}(s(X,t))$ est le flot du champ de vecteurs invariant à gauche associé à (X,t), i.e.

$$\frac{d}{ds}\exp_{\hat{G}}(s(X,t)) = T_e L_{\exp_{\hat{G}}(s(X,t))}(X,t) \ .$$

Dès lors,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\pi(\exp_{\hat{G}}(s(X,t))) &= T_{\exp_{\hat{G}}(s(X,t))}\pi \frac{d}{ds}\exp_{\hat{G}}(s(X,t)) \\
&= T_{\exp_{\hat{G}}(s(X,t))}\pi \, T_e L_{\exp_{\hat{G}}(s(X,t))}(X,t) \\
&= T_e(\pi \circ L_{\exp_{\hat{G}}(s(X,t))})(X,t) \\
&= T_e L_{\pi(\exp_{\hat{G}}(s(X,t)))} T_e\pi(X,t) \\
&= T_e L_{\pi(\exp_{\hat{G}}(s(X,t)))} X
\end{aligned}$$

La courbe $s \mapsto \pi(\exp_{\hat{G}}(s(X,t)))$ est donc le flot du champ de vecteurs invariant à gauche sur G associé à X. Comme $\pi(\exp_{\hat{G}}(0(X,t))) = e$, par unicité du flot, on conclut

$$\pi(\exp_{\hat{G}}(s(X,t))) = \exp_G(sX)\ .$$

□

Proposition 3.5.2. *Soit G un groupe de Lie connexe $\Phi : G \times M \to M$ une action hamiltonienne de moment J, $\hat{G}$ l'extension centrale de G construite via le cocycle de non-équivariance θ et $\hat{\Phi} : \hat{G} \times M \to M$ l'extension de Φ à $\hat{G}$. L'application $\hat{J} : M \to \hat{\mathfrak{g}}^*$ définie par*

$$\langle \hat{J}(x), (X,t) \rangle = \langle J(x), X \rangle + t$$

est un moment de l'action $\hat{\Phi}$. De plus, il est équivariant par rapport aux actions $\hat{\Phi}$ et $\hat{A}d$.

Démonstration. Fixons $(X,t) \in \hat{\mathfrak{g}}$ et déterminons le champ de vecteurs fondamental $(X,t)^*_{\hat{\Phi}}$ associé. Au vu du lemme 3.5.1,

$$\begin{aligned}
(X,t)^*_{\hat{\Phi}}(x) &= \frac{d}{ds}|_{s=0}\hat{\Phi}(\exp_{\hat{G}}(-s(X,t)),x) \\
&= \frac{d}{ds}|_{s=0}\Phi(\pi(\exp_{\hat{G}}(-s(X,t))),x) \\
&= \frac{d}{ds}|_{s=0}\Phi(\exp_G(-sX),x) \\
&= X^*_{\Phi}(x)\ .
\end{aligned}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned}
D_x\langle \hat{J}, (X,t) \rangle &= D_x(\langle J, X \rangle + t) \\
&= D_x\langle J, X \rangle \\
&= i_{X^*_{\Phi}}\omega \\
&= i_{X^*_{\hat{\Phi}}}\omega\ .
\end{aligned}$$

L'application $\hat{J}$ est donc un moment de l'action $\hat{\Phi}$. Montrons qu'il est équivariant. Soient $g \in \hat{G}$ et $(X,t) \in \hat{\mathfrak{g}}$. D'une part,

$$\begin{aligned}
\langle \hat{J}(\hat{\Phi}_g(x)), (X,t) \rangle &= \langle \hat{J}(\Phi_{\pi(g)}(x)), (X,t) \rangle \\
&= \langle J(\Phi_{\pi(g)}(x)), X \rangle + t \\
&= \langle Ad^*_{\pi(g)} J(x), X \rangle + \langle \theta(\pi(g)), X \rangle + t.
\end{aligned}$$

D'autre part, en vertu du théorème 3.5.1,

$$\begin{aligned}\langle \hat{Ad}^*_g \hat{J}(x), (X,t)\rangle &= \langle \hat{J}(x), \hat{Ad}_{g^{-1}}(X,t)\rangle \\ &= \langle \hat{J}(X), (Ad_{\pi(g)^{-1}}, t + \langle \theta(g), X\rangle)\rangle \\ &= \langle J(x), Ad_{\pi(g)^{-1}} X\rangle + t + \langle \theta(\pi(g)), X\rangle \ .\end{aligned}$$

Ceci achève la preuve. □

3.5.2 Extension centrale et fonctions thermodynamiques

On étudie le comportement des températures généralisées et des fonctions thermodynamiques lorsque l'on considère une extension centrale par le cocycle de non-équivariance.

Proposition 3.5.3. *Soit G un groupe de Lie connexe, $\Phi : G \times M \to M$ une action hamiltonienne de moment J et Ω l'ouvert des températures généralisées associées. Considérons $\hat{\Phi} : \hat{G} \times M \to M$ l'action étendue par le cocycle de non équivariance. On note $\hat{\Omega} \subseteq \hat{\mathfrak{g}}$ l'ouvert des températures généralisées associées à $\hat{\Phi}$ et $\hat{P}$, $E_{\hat{J}}$ et $\hat{\Gamma}$ les fonctions thermodynamiques définies sur $\hat{\Omega}$.*

1. $\hat{\Omega} = \Omega \times \mathbb{R}$.

2. Pour tout $(\beta, b) \in \hat{\Omega}$,

$$\hat{P}(\beta, b) = e^{-b} P(\beta) \ .$$

3. Pour tous $(\beta, b) \in \hat{\Omega}$ et $(X, t) \in \hat{\mathfrak{g}}$,

$$\langle E_{\hat{J}}(\beta, b), (X,t)\rangle = \langle E_J(\beta), X\rangle + t \ .$$

4. Pour tous $(\beta, b) \in \hat{\Omega}$ et $(X,t), (Y,s) \in \hat{\mathfrak{g}}$,

$$\hat{\Gamma}_{(\beta,b)}((X,t),(Y,s)) = \Gamma_\beta(X,Y) \ .$$

Démonstration. Soit $(\beta, b) \in \hat{\mathfrak{g}}$. Pour tout $x \in M$, on a

$$\exp(-\langle \hat{J}(x), (\beta, b)\rangle) = \mathrm{e}^{-b} \exp(-\langle J(x), \beta\rangle) \ .$$

Les points 1. et 2. suivent aisément. Pour le point 3. , on a pour tout $(X,t) \in \hat{\mathfrak{g}}$

$$\begin{aligned}\langle E_{\hat{J}}(\beta, b), (X,t)\rangle &= -D_{(\beta,b)} \log(\hat{P})(X,t) \\ &= -D_\beta \log(P)(X) + t \\ &= \langle E_J(\beta), X\rangle + t \ .\end{aligned}$$

Enfin, pour tous $(X,t),(Y,s) \in \hat{\mathfrak{g}}$,

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}_{(\beta,b)}((X,t),(Y,s)) &= -\langle D_{(\beta,b)} E_{\hat{J}}(X,t),(Y,s)\rangle \\ &= -\langle D_\beta E_J(X), Y\rangle \\ &= \Gamma_\beta(X,Y)\ .\end{aligned}$$

□

Remarque 3.5.3. Il est important de remarquer que la 2-forme $\hat{\Gamma}$ est dégénérée : il ne s'agit donc pas d'une métrique riemannienne sur $\hat{\Omega}$. Ceci est dû au fait que l'action étendue $\hat{\Phi}$ n'est pas effective : pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application

$$M \to \mathbb{R} : x \mapsto \langle \hat{J}, (0,t)\rangle = t$$

est constante sur M. Ce fait met en défaut les hypothèses de la proposition 2.1.5 et donc le caractère défini positif de $\hat{\Gamma}$.

Le passage à l'extension centrale par le cocycle de non-équivariance permet de démontrer le théorème 3.2.1 à partir du cas équivariant. En effet, soit $\Phi : G \times M \to M$ une action hamiltonienne de moment J avec G connexe, et considérons son extension $\hat{\Phi}$, de moment $\hat{J}$.

On a montré proposition 3.1.1 que pour un moment équivariant la fonction de partition P est invariante sous l'action adjointe. Le moment $\hat{J}$ étant équivariant, $\hat{P}$ est invariante pour $\hat{Ad}$. Ceci se réécrit

$$P(\beta) = \hat{P}(\beta,0) = \hat{P}(Ad_g\beta, \langle\theta(g^{-1}),\beta\rangle) = \mathrm{e}^{-\langle\theta(g^{-1}),\beta\rangle} P(Ad_g\beta)$$

pour tout $(\beta,b) \in \hat{\Omega}$. Les relations pour E_J et Γ se déduisent de la proposition 3.5.3 de manière similaire.

Chapitre 4

Étude de la métrique de Souriau

Dans cette section, on présente quelques compléments concernant la métrique de Souriau. On a montré au chapitre 3 que cette métrique était invariante par l'action adjointe. Dans un premier temps, on s'intéressera à la restriction de la métrique de Souriau aux orbites adjointes, vues comme sous-variétés de Ω. On verra qu'elle prend une forme particulièrement simple dans le cas équivariant.

Dans un second temps, on oubliera quelque peu l'origine symplectique de Γ pour s'intéresser à la géométrie riemanienne de (Ω, Γ). On montrera que la connexion de Levi-Civita et la courbure de Riemann peuvent s'exprimer à l'aide de tenseurs particuliers exprimant une covariance des composantes du moment. On donnera une interprétation de ce phénomène en considérant la métrique de Souriau comme un cas particulier de la métrique de Fisher-Rao, un concept fondamental en géométrie statistique et de l'information.

4.1 Orbites adjointes et métrique de Souriau

Soit $\beta_0 \in \Omega$ tel que l'orbite adjointe de β_0, notée $\mathcal{O} = Orb_{Ad}(\beta_0)$, est de dimension non nulle. Pour tout $\beta \in \mathcal{O}$, l'espace tangent à $\mathcal{O}$ en β est donné par

$$T_\beta \mathcal{O} = \{[X, \beta] : X \in \mathfrak{g}\}.$$

On commence par calculer la valeur moyenne du moment et la métrique de Souriau sur de tels vecteurs.

Lemme 4.1.1. *Soit une action hamiltonienne $\Phi : G \times M \to M$ de moment J et θ, Θ le 1-cocycle et le 2-cocycle de non-équivariance associés à J. Pour tout $\beta \in \Omega$ et $X \in \mathfrak{g}$, on a*

$$\begin{aligned}
\langle E_J(\beta), [X, \beta] \rangle &= \langle \Theta(X), \beta \rangle \\
DE_J(\beta)([X, \beta]) &= -ad_X^* E_J(\beta) + \Theta(X)\ .
\end{aligned}$$

Démonstration. En utilisant le théorème 3.2.1 et en rappelant que

$$[X,\beta] = \frac{d}{dt}|_{t=0} Ad_{\exp(tX)}\beta \ ,$$

on trouve

$$\begin{aligned} D_\beta P\left(\frac{d}{dt}|_{t=0} Ad_{\exp(tX)}\beta\right) &= \frac{d}{dt}|_{t=0} P(Ad_{\exp(tX)}\beta) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0} \exp\left(\langle \theta(\exp(-tX)), \beta\rangle\right) P(\beta) \\ &= -\langle \Theta(X), \beta\rangle P(\beta) \ . \end{aligned}$$

Comme $E_J(\beta) = -P(\beta)^{-1} D_\beta P$, la première assertion suit.
Pour la seconde, on a

$$\begin{aligned} D_\beta E_J([X,\beta]) &= \frac{d}{dt}|_{t=0} E_J(Ad_{\exp(tX)}\beta) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0} Ad^*_{\exp(tX)} E_J(\beta) + \theta(\exp(tX)) \\ &= -ad^*_X E_J(\beta) + \Theta(X) \ . \end{aligned}$$

□

Rappelons que la métrique de Souriau ne dépend pas du choix du moment J. Pour $\beta \in \mathcal{O}$ fixé, on peut donc prendre pour moment $J_\beta := J - E_J(\beta)$. Notons θ_β et Θ_β le 1-cocycle et le 2-cocycle de non-équivariance associés à J_β.

Lemme 4.1.2. *On a, pour $g \in G$ et $X \in \mathfrak{g}$,*

$$\begin{aligned} &\theta_\beta(g) = \theta(g) - E_J(\beta) + Ad^*_g E_J(\beta) = E_J(Ad_g\beta) - E_J(\beta) \\ &\Theta_\beta(X) = \Theta(X) - ad^*_X E_J(\beta) \ . \end{aligned}$$

Démonstration. Par définition,

$$\begin{aligned} \theta_\beta(g) &= J_\beta \circ \Phi_g - Ad^*_g J_\beta \\ &= J \circ \Phi - E_J(\beta) - Ad^*_g J + Ad^*_g E_J(\beta) \\ &= \theta(g) - E_J(\beta) + Ad^*_g E_J(\beta) \end{aligned}$$

et la première égalité suit. Pour la seconde,

$$\begin{aligned} \Theta_\beta(X) &= \frac{d}{dt}|_{t=0} \theta_\beta(\exp(tX)) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0} \theta(\exp(tX)) + Ad^*_{\exp(tX)} E_J(\beta) \\ &= \Theta(X) - ad^*_X E_J(\beta) \ . \end{aligned}$$

□

En joignant les deux lemmes précédents, on peut donner une expression de la métrique de Souriau sur les orbites adjointes en fonction du cocycle Θ_β.

Théorème 4.1.1. *Pour tous $X, Y \in \mathfrak{g}$ et $\beta \in \mathcal{O}$,*

$$\Gamma(X^*, Y^*)(\beta) = -\langle \Theta_\beta(X), Y^*(\beta) \rangle \ .$$

Démonstration. En utilisant successivement les lemmes 4.1.1 et 4.1.2,

$$\begin{aligned} \Gamma(X^*, Y^*)(\beta) &= -\langle D_\beta E_J([X, \beta]), Y^* \rangle \\ &= \langle ad^*_X E_J(\beta) - \Theta(X), Y^* \rangle \\ &= -\langle \Theta_\beta(X), Y^* \rangle \ . \end{aligned}$$

□

4.2 Courbure riemannienne de la métrique de Souriau

Dans cette section, on étudie la géométrie de la variété riemannienne (Ω, Γ). Les notions et conventions utilisées sont rappelés dans l'annexe D.

Rappelons que, Ω étant un ouvert de $\mathfrak{g}$, l'espace tangent à Ω en $\beta \in \Omega$ s'identifie à $\mathfrak{g}$: on a $T_\beta\Omega \simeq \mathfrak{g}$.

Définition 4.2.1. Sous cet identification, pour tout $X \in \mathfrak{g}$, on appellera *champ constant* associé à X le champ de vecteurs sur Ω défini par $X(\beta) = X \in T_\beta\Omega$ pour tout $\beta \in \Omega$.

Afin d'éviter toute confusion, on notera $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$ le crochet de Lie dans $\mathfrak{g}$ et $[\cdot,\cdot]_{\mathcal{L}}$ le crochet de Lie des champs de vecteurs sur Ω. Il est clair que pour tous $X, Y \in \mathfrak{g}$, le crochet des champs de vecteurs constants associés est nul :

$$[X, Y]_{\mathcal{L}} = 0 \ .$$

Les champs de vecteurs constants engendrent l'espace des champs de vecteurs sur Ω (vu comme $C^\infty(\Omega)$-module) : si $(e_1, ..., e_n)$ est une base de $\mathfrak{g}$ alors tout champ de vecteurs sur Ω s'écrit comme combinaison linéaire fonctionnelle $\sum_{i=1}^n f_i e_i$ des champs de vecteurs constants associés aux e_i, avec $f_i \in C^\infty(\Omega)$. En particulier, n'importe quel tenseur sur Ω est univoquement déterminé par sa valeur sur les champs constants.

Définition 4.2.2. Soit $\Phi : G \times M \to M$ une action hamiltonienne de moment J. Pour tout naturel $n \in \mathbb{N}_0$, le tenseur *moment d'ordre* n, noté $\mathbb{E}_n$ est le tenseur de type $(n, 0)$ sur Ω défini sur les champs constants par

$$\mathbb{E}_n(X_1, ..., X_n)(\beta) = \int_M \langle E_J(\beta) - J(x), X_1 \rangle ... \langle E_J(\beta) - J(x), X_n \rangle \rho_\beta(x) d\lambda_\omega(x) \ ,$$

pour tous $X_1, ..., X_n \in \mathfrak{g}$ et $\beta \in \Omega$.

Il est clair que les tenseurs $\mathbb{E}_n$ sont complètement symétriques. Remarquons également que $\mathbb{E}_1 = 0$ et $\mathbb{E}_2 = \Gamma$.

Fixons $X_1, ..., X_n$ des champs de vecteurs sur Ω. Pour tout champ de vecteurs X sur Ω, on note $\mathcal{L}_X \mathbb{E}_n(X_1, ..., X_n)$ la dérivée de Lie dans la direction de X de la fonction

$$\Omega \to \mathbb{R} : \beta \mapsto \mathbb{E}_n(X_1, ..., X_n)(\beta) \ .$$

Lemme 4.2.1. *Pour tout naturel $n \geq 2$ et $X_1, ..., X_n, X$ des champs de vecteurs sur Ω, on a*

$$\mathcal{L}_X \mathbb{E}_n(X_1, ..., X_n) = \mathbb{E}_{n+1}(X_1, ..., X_n, X) - \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}_2(X_i, X) \mathbb{E}_{n-1}(X_1, ..., \hat{X}_i, .., X_n) \ ,$$

où $\hat{X}_i$ indique que le i-ème argument est omis.

Démonstration. Les deux membres de l'égalité étant linéaires, on peut se contenter de la montrer pour des champs de vecteurs constants. En vertu du lemme 2.1.1, on peut dériver sous l'intégrale définissant $\mathbb{E}_n$. On a

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_X \mathbb{E}_n(X_1, ..., X_n)(\beta) \\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0} \frac{1}{P(\beta + tX)} \int_M \langle E_J(\beta + tX) - J(x), X_1 \rangle \dots \langle E_J(\beta + tX) - J(x), X_n \rangle \exp(-\langle J(x), \beta + tX \rangle) d\lambda_\omega(x \\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0} \frac{1}{P(\beta + tX)} P(\beta) \mathbb{E}_n(X_1, ..., X_n)(\beta) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} \int_M \langle E_J(\beta) - J(x), X_1 \rangle \dots \frac{d}{dt}|_{t=0} \langle E_J(\beta + tX) - J(x), X_i \rangle \dots \langle E_J(\beta) - J(x), X_n \rangle \rho_\beta(x) d\lambda_\omega(x) \\
&\quad + \frac{1}{P(\beta)} \int_M \langle E_J(\beta) - J(x), X_1 \rangle \dots \langle E_J(\beta) - J(x), X_n \rangle \frac{d}{dt}|_{t=0} \exp(-\langle J(x), \beta + tX \rangle d\lambda_\omega
\end{aligned}$$

Comme on a

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} \frac{1}{P(\beta + tX)} = \frac{\langle E_J(\beta), X \rangle}{P(\beta)}$$

et

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} \langle E_J(\beta + tX) - J(x), X_i \rangle = -\Gamma(X, X_i)(\beta) = -\mathbb{E}_2(X, X_i)(\beta) \ ,$$

la conclusion suit. □

On calcule à présent la connexion de Levi-Civita ∇ associée à la variété riemannienne (Ω, Γ). Comme on sait que $\nabla_X Y$ est linéaire sur X et une dérivation sur Y, il est suffisant de déterminer la connexion sur les champs de vecteurs constants.

Rappelons que si α est une 1-forme différentielle sur Ω, $\alpha^\flat$ est l'unique champ de vecteurs vérifiant

$$\Gamma(\alpha^\flat, Y) = \alpha(Y) .$$

Comme Γ est non-dégénéré, l'application $\alpha \mapsto \alpha^\flat$ est une bijection entre les 1-formes et les champs de vecteurs sur Ω. On notera $X \mapsto X^\sharp$ son inverse. Dans un léger abus de notation, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on notera $\mathbb{E}_n^\sharp$ le tenseur $(n-1,1)$ défini par

$$\Gamma(\mathbb{E}_n^\sharp(X_1, ..., X_{n-1}), X) = \mathbb{E}_n(X_1, ..., X_{n-1}, X)$$

pour tous champs de vecteurs constants $X_1, ..., X_{n-1}, X$.

Proposition 4.2.1. *Soient X, Y des champs de vecteurs constants sur Ω. La connexion de Levi-Civita associée à la métrique de Souriau est définie par*

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}\mathbb{E}_3^\sharp(X, Y)$$

Démonstration. Soient X, Y, Z des champs constants sur Ω. On utilise la formule (D.1) de l'annexe D. Le crochet de deux champs de vecteurs constants étant nul, la connexion de Levi-Civita associée à Γ est déterminée par

$$\Gamma(\nabla_X Y, Z) = \mathcal{L}_X \Gamma(Y, Z) + \mathcal{L}_Y \Gamma(Z, X) - \mathcal{L}_Z \Gamma(X, Y) .$$

En utilisant le lemme 4.2.1, et le fait que $\mathbb{E}_1 = 0$, le membre de droite se réécrit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X \Gamma(Y, Z) + \mathcal{L}_Y \Gamma(Z, X) - \mathcal{L}_Z \Gamma(X, Y) &= -\mathcal{L}_X \mathbb{E}_2(Y, Z) - \mathcal{L}_Y \mathbb{E}_2(Z, X) + \mathcal{L}_Z \mathbb{E}_2(X, Y) \\ &= \mathbb{E}_3(Y, Z, X) + \mathbb{E}_3(Z, X, Y) - \mathbb{E}_3(X, Y, Z) \\ &= \mathbb{E}_3(X, Y, Z) , \end{aligned}$$

et la conclusion suit. $\square$

Remarque 4.2.1. Remarquons que la formule ci-dessus n'est valide pour des champs constants. En particulier, l'égalité

$$\nabla_X \nabla_Y Z = \frac{1}{4}\mathbb{E}_3^\sharp(X, \mathbb{E}_3^\sharp(Y, Z))$$

est généralement fausse même si X, Y, Z sont des champs constants, puisque $\nabla_X Y$ n'est pas un champ constant.

Proposition 4.2.2. *L'endomorphisme de courbure de Riemann associé à la métrique de Souriau sur Ω est le tenseur (3,1) défini par*

$$R(X, Y, Z) = \frac{1}{4}\left(\mathbb{E}_3^\sharp(X, \mathbb{E}_3^\sharp(Y, Z)) - \mathbb{E}_3^\sharp(Y, \mathbb{E}_3^\sharp(X, Z))\right) ,$$

pour tous champs de vecteurs X, Y, Z sur Ω.

Démonstration. À nouveau, on peut se contenter de montrer l'égalité pour des champs de vecteurs constants, les deux membres étant linéaires. Dans ce cas, $[X,Y]_{\mathcal{L}} = 0$ et donc

$$R(X,Y,Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z \ .$$

Rappelons que pour toute 1-forme α, on a $\nabla_X(\alpha^\sharp) = (\nabla_X \alpha)^\sharp$. Dès lors, pour tout champ constant W sur Ω,

$$\begin{aligned} 2\Gamma(\nabla_X \nabla_Y Z, W) &= \Gamma(\nabla_X \mathbb{E}_3^\sharp(Y,Z), W) \\ &= \Gamma((\nabla_X \mathbb{E}_3(Y,Z,\cdot))^\sharp, W) \\ &= \langle \nabla_X \mathbb{E}_3(Y,Z,\cdot), W\rangle \\ &= \mathcal{L}_X \mathbb{E}_3(Y,Z,W) - \mathbb{E}_3(Y,Z,\nabla_X W) \ . \end{aligned}$$

D'une part, en utilisant le lemme 4.2.1, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X \mathbb{E}_3(Y,Z,W) = &-\mathbb{E}_4(X,Y,Z,W) \\ &-\mathbb{E}_2(X,Y)\mathbb{E}_2(Y,W) - \mathbb{E}_2(X,Z)\mathbb{E}_2(Y,W) - \mathbb{E}_2(X,W)\mathbb{E}_2(Y,Z) \ . \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_3(Y,Z,\nabla_X W) &= \frac{1}{2}\mathbb{E}_3(Y,Z,\mathbb{E}_3^\sharp(X,W)) \\ &= \frac{1}{2}\Gamma(\mathbb{E}_3^\sharp(Y,Z),\mathbb{E}_3^\sharp(X,W)) \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{E}_3(\mathbb{E}_3^\sharp(Y,Z),X,W) \ . \end{aligned}$$

En remettant tout ensemble et en éliminant les termes symétriques en X, Y, on trouve

$$\Gamma(R(X,Y,Z),W) = \frac{1}{4}(\mathbb{E}_3(X,\mathbb{E}_3^\sharp(Y,Z),W) - \mathbb{E}_3(Y,\mathbb{E}_3^\sharp(X,Z),W))$$

pour tout champ constant W, et la conclusion suit. □

4.3 La métrique de Souriau comme métrique de Fisher-Rao

Les tenseurs $\mathbb{E}_n$ qui déterminent la géométrie riemannienne de Ω font intervenir des expressions de la forme

$$\langle J(x) - E_J(\beta), X\rangle \ ,$$

que l'on intègre selon la densité de probabilité ρ_β relative à l'état de Gibbs p_β,

$$\rho_\beta = \frac{1}{P(\beta)} \exp(-\langle J(x), \beta \rangle) .$$

Il est tentant d'établir un parallèle avec certains concepts de statistique. Par exemple, si on interprète $E_J(\beta)$ comme la moyenne du moment J, l'expression de

$$\mathbb{E}_2(X, Y) = \int_M \langle J(x) - E_J(\beta), X \rangle \langle J(x) - E_J(\beta), Y \rangle dp_\beta$$

laisse penser à la covariance du moment J. La dernière section de ce mémoire a pour but d'expliciter ce lien en considérant l'ensemble des états de Gibbs comme un modèle statistique lisse. Dans ce cadre, la métrique de Souriau apparait comme un cas particulier de la métrique de Fisher-Rao, pierre angulaire de la géométrie statistique et de l'information.

4.3.1 Notions de géométrie statistique

On introduit ici la notion de modèle statistique lisse. Notons qu'il existe de nombreuses définitions, plus ou moins générales, selon les auteurs. Dans ce travail, on reprendra la définition donnée par S. Amari dans l'ouvrage [Ama12] . Une des raisons de ce choix est qu'il est particulièrement adapté à l'étude des modèles exponentiels.

Fixons tout d'abord quelques notations

Définition 4.3.1. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

— On note $L_1(\mu)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles μ-intégrables sur X, modulo égalité μ-presque partout : les fonctions f, g sont dites *égales dans* $L_1(\mu)$ si elles sont μ-intégrables et égales μ-presque partout sur X.

— Pour tout $p \geq 1$, on note $L_p(\mu)$ l'ensemble des fonctions $f : X \to \mathbb{R}$ μ-mesurables telles que $f^p \in L_1(\mu)$.

— Soit $\rho : X \to \mathbb{R}$ une densité de probabilités. On notera $L_p(\rho\mu)$ l'ensemble des fonctions $f : X \to \mathbb{R}$ mesurables telles que $f^p \rho \in L_1(\mu)$.

Définition 4.3.2. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Une *modèle statistique* sur $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un couple (S, U) où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et S est un ensemble de densités de probabilité sur X indicé par U :

$$S = \{\rho_\theta : \theta \in U\}.$$

Un *modèle statistique lisse* est un modèle statistique (S, U) qui vérifie les conditions suivantes.

1. Pour tout $\theta \in \Omega$ et $x \in X$, $\rho_\theta(x) > 0$.

2. Pour tout $x \in X$ fixé, l'application

$$U \to \mathbb{R} : \theta \mapsto \rho_\theta(x)$$

est de classe C^∞.

3. Pour tout $\theta \in U$, l'application

$$X \times U \to \mathbb{R} : x \mapsto \rho_\theta(x)$$

est normalement intégrable en θ.

4. Pour tout $\theta \in U$ fixé, les fonctions

$$X \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\partial}{\partial \theta_i} \log(\rho_\theta(x))$$

avec $i \in \{1, ..., n\}$ sont dans $L_1(\rho_\theta \mu) \cap L_2(\rho_\theta \mu)$.

5. Pour tout $\theta \in U$ fixé, les fonctions

$$X \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\partial}{\partial \theta_i} \log(\rho_\theta(x))$$

sont linéairement indépendantes .

L'entier n sera appelé *dimension* de (S, U).

Remarque 4.3.1. Les hypothèses de régularité 3. et 4. de la définition précédente sont arbitraires et peuvent être modifiées selon l'usage que l'on souhaite faire du modèle statistique. Dans notre cas, la condition 3. nous permet de dériver l'intégrale de ρ_θ sous le signe d'intégration, tandis que la condition 4. vise à pouvoir considérer l'espérance mathématique et la covariance.

Définition 4.3.3. Soit (S, U) un modèle statistique lisse. Pour tout $\theta \in U$, on note $T_\theta^{(1)} S$ le sous espace vectoriel de $L_1(\mu)$ engendré par les fonctions

$$x \mapsto \frac{\partial}{\partial \theta_i} \log(\rho_\theta(x)) \ .$$

L'espace $T_\theta^{(1)} S$ est un sous-espace vectoriel de dimension n de $L_1(\mu)$. Il s'identifie canoniquement à l'espace $T_\theta U$ tangent à U en θ par

$$i_\theta^{(1)} : T_\theta U \to T_\theta^{(1)} S : X \mapsto i_\theta^{(1)}(X)$$

où

$$i_\theta^{(1)}(X) : x \mapsto D_\theta \log(\rho_\theta(x))(X) \ . \tag{4.1}$$

On montre à présent que l'on peut considérer l'ensemble des états de Gibbs d'une action hamiltonienne sur (M, ω) comme un modèle statistique lisse sur l'espace mesuré $(M, \sigma_M, \lambda_\omega)$.

Proposition 4.3.1. *Soit $\Phi : G \times M \to M$ une action hamiltonienne effective et Ω l'ouvert des températures généralisées associé. Si Ω est non vide, soit*

$$\mathcal{S}_\Phi = \{\rho_\beta : \beta \in \Omega\} \ .$$

Alors $(\mathcal{S}_\Phi, \Omega)$ est un modèle statistique lisse sur $(M, \sigma_M, \lambda_\omega)$.

Démonstration. Il est clair que $\rho_\beta(x) = \frac{1}{P(\beta)} \exp(-\langle J(x), \beta\rangle) > 0$ sur M, pour tout $\beta \in \Omega$. On a montré au lemme 2.1.1 que $\beta \mapsto \rho_\beta(x)$ était de classe C^∞ sur Ω. Fixons une base $(e_1, ...e_n)$ de $\mathfrak{g}$. On doit montrer que les fonctions

$$M \mapsto \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\partial}{\partial \beta_i} \log(p_\beta(x))$$

sont linéairement indépendantes dans $L_1(\lambda_\omega)$. On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \beta_i} \log(p_\beta(x)) &= \frac{\partial}{\partial \beta_i}(-\log(P(\beta)) - \langle J(x), \beta\rangle) \\ &= \langle E_J(\beta), e_i\rangle - \langle J(x), e_i\rangle \ .\end{aligned}$$

Soient $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$0 = \sum_{i=1}^{n} c_i \left(\langle E_J(\beta), e_i\rangle - \langle J(x), e_i\rangle\right)$$

pour tout $x \in M$. Par linéarité, on trouve

$$\langle E_J(\beta), \sum_{i=1}^{n} c_i e_i\rangle = \langle J(x), \sum_{i=1}^{n} c_i e_i\rangle \ .$$

Comme le membre de gauche ne dépend pas de $x \in M$, la fonction

$$x \mapsto \langle J(x), \sum_{i=1}^{n} c_i e_i\rangle$$

est constante sur M. Comme l'action est effective, on doit avoir $\sum_{i=1}^{n} c_i e_i = 0$, d'où $c_1 = ... = c_n = 0$. □

Remarque 4.3.2. Notons que, dans le cas de $(\mathcal{S}_\Phi, \Omega)$, l'isomorphisme $i^{(1)}$ décrit en (4.1) est donné par

$$i^{(1)}_\beta(X) : M \to \mathbb{R} : x \mapsto \langle E_J(\beta) - J(x), X\rangle.$$

4.3.2 Métrique de Fisher-Rao

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $\rho : X \to \mathbb{R}$ une densité de probabilité. Si $f : X \to \mathbb{R}$ est mesurable et telle que $f \in L_1(\rho\mu)$, alors on note

$$\mathbb{E}_\rho[f] = \int_X f\rho d\mu .$$

C'est l'*espérance mathématique* de f par rapport à la densité ρ.

Lemme 4.3.1. *Soit (S, U) un modèle statistique lisse et $\theta \in U$. Pour tout $f \in T_\theta^{(1)} S$,*

$$\mathbb{E}_{\rho_\theta}[f] = 0 .$$

Démonstration. Par linéarité, il suffit de le montrer pour les fonctions $x \mapsto \frac{\partial}{\partial\theta_i} \log(\rho_\theta(x))$ qui engendrent $T_\theta^{(1)} S$. Vu l'intégrabilité normale imposée par la définition 4.3.2, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\rho_\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta_i}\log(\rho_\theta(x))\right] &= \int_X \frac{\partial}{\partial\theta_i}\log(\rho_\theta(x))\rho_\theta(x)d\mu(x) \\ &= \int_X \frac{\partial}{\partial\theta_i}\rho_\theta d\mu(x) \\ &= \frac{\partial}{\partial\theta_i}\int_X \rho_\theta d\mu(x) \\ &= \frac{\partial}{\partial\theta_i}1 \\ &= 0 .\end{aligned}$$

□

Lemme 4.3.2. *Soit (S, U) un modèle statistique lisse et $\theta \in U$. L'application*

$$T_\theta^{(1)} S \times T_\theta^{(1)} S \to \mathbb{R} : (f, g) \mapsto \mathbb{E}_{\rho_\theta}[fg]$$

est bien définie, bilinéaire, symétrique et définie positive.

Démonstration. Au vu de la définition 4.3.2, les fonctions de $T_\theta^{(1)} S$ sont dans $L_2(\rho_\theta\mu)$, et l'application est donc bien définie. La linéarité et la symétrie sont claires. Soit $f \in T_\theta^{(1)} S$ telle que

$$0 = \mathbb{E}_{\rho_\theta}[f^2] = \int_X f^2 \rho_\theta d\mu .$$

Comme l'intégrand est positif et $\rho_\theta > 0$ sur X, on doit avoir $f(x) = 0$ pour μ-presque tout $x \in X$ et donc $f = 0$ dans $L_1(\mu)$, d'où la conclusion. □

Définition 4.3.4. Soit (S, U) un modèle statistique lisse. La *métrique de Fisher-Rao* associée au modèle (S, U) est la métrique $\mathcal{F}$ sur U définie par

$$\mathcal{F}(X, Y)(\theta) = \mathbb{E}_{\rho_\theta}[i_\theta^{(1)}(X) i_\theta^{(1)}(Y)]$$

avec $i_\theta^{(1)} : T_\theta S \to T_\theta^{(1)} S$ l'application définie par (4.1).

Proposition 4.3.2. *Soit $\Phi : G \times M \to M$ une action hamiltonienne effective de moment J et $(\mathcal{S}_\Phi, \Omega)$ le modèle statistique lisse associé. La métrique de Fisher-Rao associée à $(\mathcal{S}_\Phi, \Omega)$ coïncide avec la métrique de Souriau.*

Démonstration. Soit $\beta \in \Omega$ et $X, Y \in T_\beta \Omega \simeq \mathfrak{g}$. Au vu de la remarque 4.3.2, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_\beta(X, Y) &= \mathbb{E}_{\rho_\beta}[i_\beta^{(1)}(X) i_\beta^{(1)}(Y)] \\
&= \int_M \langle E_J(\beta) - J(x), X \rangle \langle E_J(\beta) - J(x), Y \rangle \rho_\beta(x) d\lambda_\omega \\
&= \frac{1}{P(\beta)} \int_M \langle E_J(\beta) - J(x), X \rangle \langle E_J(\beta) - J(x), Y \rangle \exp(-\langle J(x), \beta \rangle) d\lambda_\omega \\
&= \Gamma_\beta(X, Y) \ .
\end{aligned}$$

$\square$

Remarque 4.3.3. Le fait que la métrique de Souriau coïncide avec la métrique de Fisher a été remarqué par F. Barbaresco dans [Bar16]. L'auteur y désigne par ailleurs la métrique sous le nom de "métrique de Fisher-Souriau".

Annexe A

Résultats relatifs à la mesure et à l'intégration

Les résultats de cette section sont principalement issus de [Nic11].

A.1 Mesures σ-finies et théorème d'unicité

Définition A.1.1. Soit X un ensemble et $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ un ensemble de parties de X. On dit que $\mathcal{A}$ est une *σ-algèbre* sur X si

— $X \in \mathcal{A}$,

— pour tout $A \in \mathcal{A}$, $X \setminus A \in \mathcal{A}$,

— pour toute suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$,

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}.$$

Le couple $(X, \mathcal{A})$ est appelé *espace mesuré*. Tout élément de $\mathcal{A}$ est appelée *partie mesurable* de X.

On peut montrer que toute intersection de σ-algèbres est encore une σ-algèbre.

Définition A.1.2. Soit X un ensemble et $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ un ensemble de parties de X. La *σ-algèbre engendrée* par $\mathcal{C}$ est l'intersection de toutes les σ-algèbres $\mathcal{A}$ sur X telles que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$. On la note $\sigma(\mathcal{C})$.

Définition A.1.3. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. La *σ-algèbre borélienne* associée à $\mathcal{T}$ est la σ-algèbre $\sigma(\mathcal{T})$ engendrée par les ouverts de $(X, \mathcal{T})$.

Définition A.1.4. Soit X un ensemble et $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ un ensemble de parties de X. On dit que $\mathcal{C}$ est un *π-système* si il est stable par intersection finie, i.e. pour tous $A, B \in \mathcal{C}$, $A \cap B \in \mathcal{C}$.

Définition A.1.5. Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Une *mesure* sur $(X, \mathcal{A})$ est une application

$$\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty] : A \mapsto \mu(A)$$

telle que $\mu(\varnothing) = 0$ et pour toute suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'ensembles 2 à 2 disjoints de $\mathcal{A}$,

$$\mu(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k).$$

On dira que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un *espace mesuré*.

Définition A.1.6. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. La mesure μ est dite *σ-finie* si il existe une suite d'ensembles mesurables $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\mu(X_k) < \infty$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k = X.$$

Théorème A.1.1 (Dynkin)**.** *Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $\mathcal{C}$ un π-système sur X tel que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}$. Si μ et ν sont des mesures σ-finies sur $(X, \mathcal{A})$ telles que $\mu(C) = \nu(C)$ pour tout $C \in \mathcal{C}$, alors $\mu = \nu$.*

A.2 Intégration et dérivation des intégrales paramétriques

Définition A.2.1. Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesuré. Une *fonction simple* est une application $f : X \to \mathbb{R}$ de la forme

$$f = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}$$

avec $a_k \in [0, +\infty]$ et $A_k \in \mathcal{A}$. L'*intégrale* d'une telle fonction simple f est

$$\int_X f d\mu := \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \in [0, +\infty].$$

On note $\mathcal{S}^+(X, \mathcal{A})$ l'ensemble des fonctions simples sur $(X, \mathcal{A})$.

Lemme A.2.1. *Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesuré. Toute fonction $f : X \to [0, +\infty]$ est limite ponctuelle d'une suite croissante de fonctions simples $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}^+(X, \mathcal{A})$. De plus,*

$$\lim_{k\to+\infty} \int_X f_k d\mu$$

ne dépend pas du choix de la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Définition A.2.2. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to [0, +\infty]$ une application mesurable. Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions simples croissante convergeant ponctuellement vers f. L'*intégrale* de f est

$$\int_X f d\mu = \lim_{k\to+\infty} \int_X f_k d\mu.$$

Dans ce qui suit, pour toute application f à valeurs dans $\mathbb{R}$, on note f^+ (resp. f^-) la partie positive (resp. négative) de f.

Définition A.2.3. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to \mathbb{R}$ une application mesurable. Si les expressions $\int_X f^+ d\mu$ et $\int_X f^- d\mu$ sont finies, alors f est dite *μ-intégrable.* L'*intégrale* de f par rapport à μ est

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

Théorème A.2.1 (dérivation des intégrales paramétriques)**.** *Soient un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si l'application $f : X \times \Omega \to \mathbb{R}$ est telle que :*

— *pour μ-presque tout $x \in X$, la fonction $w \mapsto f(x, w)$ est de classe C^1 sur Ω,*

— *pour tout $w \in \Omega$, les fonctions $x \mapsto f(x, w)$ et $x \mapsto D_{w_k} f(x, w)$ sout μ-intégrables ($k \in \{1, ..., n\}$),*

— *pour tout compact $K \subseteq \Omega$, il existe une application $g_K : X \to \mathbb{R}$ μ-intégrable et telle que pour μ-presque tout $x \in X$ et tout $w \in K$,*

$$|D_{w_k} f(x, w)| \leq g_K(x),$$

alors $w \to \int_X f(x, w)d\mu(x)$ est de classe C^1 sur ω et

$$D_{w_k} \int_X f(x, w)d\mu(x) = \int_X D_{w_k} f(x, w)d\mu(x)$$

pour tout $w \in \Omega$, $k \in \{1, ..., n\}$.

On notera en particulier que l'intégrabilité normale de $D_{w_k} f$ implique la troisième hypothèse du théorème précédent.

Théorème A.2.2 (Inégalité de Hölder)**.** *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $p, q, r \in]1, +\infty[$ tels que*

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

Si $f \in L_p(\mu)$ et $g \in L_q(\mu)$ alors $fg \in L_r(\mu)$ et

$$\left(\int_X |fg|^r d\mu\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

A.3 Intégration des formes différentielles et changement de variables

Cette section est issue de [Pau06]. Soit M une variété orientée de dimension $n \geq 1$. On note $\Omega_c^k(M)$ l'ensemble des k-formes différentielles à support compact dans M, $k \in \mathbb{N}_0$. Rappelons que si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et ω une n-forme différentielle sur U, il existe une unique fonction $f \in C^\infty(U)$ telle que

$$\omega = f dx_1 \wedge ... \wedge dx_n.$$

Définition A.3.1. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\omega \in \Omega_c^n(U)$ une n-forme différentielle sur U, avec $\omega = f dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$. On pose

$$\int_U \omega := \int_U f(x) dx_1 ... dx_n.$$

Théorème A.3.1. *Soit M une variété orientée de dimension $n \geq 1$. Il existe une unique application linéaire $\int_M : \Omega_c^n(M) \to \mathbb{R}$ telle que pour toute carte orientée (U, ϕ) de M et $\omega \in \Omega_c^n(U)$*

$$\int_M \omega = \int_{\phi(U)} \phi^{-1*} \omega.$$

*C'est l'*intégrale *de la forms ω sur M.*

Théorème A.3.2 (changement de variables)**.** *Soient M, N des variétés orientées de dimension n, $\phi : M \to N$ un difféomorphisme préservant l'orientation. Pour tout $\omega \in \Omega_c^n(N)$,*

$$\int_M \phi^* \omega = \int_N \omega.$$

Annexe B

Produit semi-direct de groupes de Lie

Cette section est principalement issue de [OVM93] et [Ara20].

Définition B.0.1. Soient G_1 et G_2 des groupes de Lie et un morphisme de groupes

$$\phi : G_1 \to Aut(G_2),$$

où $Aut(G_2)$ désigne le groupe des automorphismes lisses de G_2. Le *produit semi-direct* de G_1 et G_2 par ϕ, noté $G_1 \ltimes_\phi G_2$, est l'ensemble $G_1 \times G_2$ muni du produit

$$(g_1, g_2)(h_1, h_2) = (g_1 h_1, g_2 \phi(h_1)(h_2)).$$

Lorsque l'on munit l'ensemble $G_1 \times G_2$ de la structure de variété produit héritée de G_1 et G_2, le produit semi-direct $G_1 \ltimes_\phi G_2$ est un groupe de Lie.

Exemple B.0.1. Si on prend $G_1 = SO(2)$, $G_2 = (\mathbb{R}^2, +, 0)$, on peut définir $\phi : G_1 \to Aut(G_2)$ via l'action de $SO(2)$ sur le plan :

$$\phi(A)(x) = Ax$$

pour tout $A \in SO(2)$ et $x \in \mathbb{R}^2$. Dans ce cas, la produit semi-direct $G_1 \ltimes_\phi G_2$ est donné par

$$(A, x)(B, y) = (AB, Ax + y)$$

et $SO(2) \ltimes_\phi \mathbb{R}^2 \simeq E_2(\mathbb{R})$.

Définition B.0.2. Soient $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$ des algèbres de Lie et un morphisme d'algèbres de Lie

$$\psi : \mathfrak{g}_1 \to Der(\mathfrak{g}_2)$$

où $Der(\mathfrak{g}_2)$ désigne l'algèbre de Lie des dérivations de $\mathfrak{g}_2$. Le *produit semi-direct* de $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$ par ψ est l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_1 \ltimes_\psi \mathfrak{g}_2$ modelée sur $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ munie du crochet de Lie

$$[(A_1, A_2), (B_1, B_2)] = ([A_1, B_1]_{\mathfrak{g}_1}, [A_2, B_2]_{\mathfrak{g}_2} + \psi(A_1)(B_2) - \psi(B_1)(A_2)).$$

Notons que, pour toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, $Aut(\mathfrak{g})$ est un sous-groupe fermé de $GL(\mathfrak{g})$ et donc un sous-groupe de Lie. On peut montrer que son algèbre de Lie est l'algèbre de Lie $Der(\mathfrak{g})$ des dérivations de $\mathfrak{g}$. Dès lors, pour G_1, G_2 des groupes de Lie, si $\phi : G_1 \to Aut(G_2)$ est un morphisme de groupes, alors on a un morphisme de groupes

$$\tilde{\psi} : G_1 \to Aut(\mathfrak{g}_2) : g_1 \mapsto T_e\psi(g_1).$$

Dans ce cas, sa dérivée en le neutre est un morphisme d'algèbres de Lie

$$T_e\tilde{\psi} : \mathfrak{g}_1 \to Der(\mathfrak{g}_2).$$

Proposition B.0.1. *Soient G_1 et G_2 des groupes de Lie d'algèbre de Lie respective $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$. Soit $\phi : G_1 \to Aut(G_2)$ un morphisme de groupes. L'algèbre de Lie du produit semi-direct $G_1 \ltimes_\phi G_2$ est*

$$Lie(G_1 \ltimes_\phi G_2) = \mathfrak{g}_1 \ltimes_{T_e\tilde{\phi}} \mathfrak{g}_2.$$

Annexe C

Orbites de l'action d'un groupe de Lie

Les résultats de cette section sont principalement issus de [OR13]. Soit M une variété lisse, G un groupe de Lie et $\Phi : G \times M \to M$ une action lisse. Pour tout $x \in M$, notons

$$Orb_\Phi(x) = G \cdot x := \{\Phi(g, x) : x \in M\}$$

et

$$Stab_\Phi(x) = G_x := \{g \in G : \Phi(g, x) = x\}.$$

Il est clair que G_x est un sous-groupe fermé de G. C'est donc un sous-groupe de Lie. Le premier théorème d'isomorphie donne une bijection

$$\frac{G}{G_x} \to G \cdot x : gG_x \mapsto \Phi(g, x).$$

On munit $G \cdot x$ de l'unique structure de variété différentielle qui fait de cette bijection un difféomorphisme. En toute généralité, l'orbite $G \cdot x$ n'est pas une sous-variété de M.

Définition C.0.1. Soit M, N des variétés lisses. Une application lisse $f : N \to M$ est une *immersion régulière* si c'est une immersion injective et, pour toute variété lisse P, et toutee application $h : P \to N$, h est lisse si et seulement si $f \circ h$ est lisse. Dans ce cas, on dit que N est une *sous-variété initiale* de M.

Théorème C.0.1. *Soit $\Phi : G \times M \to M$ une action lisse de groupes de Lie. Pour tout $x \in M$, l'orbite $G \cdot x$ est une sous-variété lisse initiale de M de dimension $dim(G) - dim(G_x)$. Son espace tangent en $z \in G \cdot x$ est*

$$T_z(G \cdot x) = \{X^*_\Phi(z) : X \in \mathfrak{g}\}.$$

Annexe D

Notions de géométrie riemannienne

Les résultats de cette section sont principalement issus de [Lee06].

Définition D.0.1. Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, E^* l'espace dual et $k, l \in \mathbb{N}$. Un *tenseur de type* (k, l) sur E est une application multilinéaire

$$T : E^k \times E^{*l} \to \mathbb{R}.$$

On note $T^k_l(E)$ l'espace vectoriel des tenseurs de type (k, l) sur E.

Définition D.0.2. Soit M une variété lisse et $k, l \in \mathbb{N}$. On note

$$T^k_l(M) := \bigsqcup_{x \in M} T^k_l(T_x M)$$

le fibré des tenseurs (k, l) sur M. Un *champ de tenseurs* (k, l) sur M est une section lisse de $T^k_l(M)$.

Pour M une variété lisse, on note $\mathcal{T}(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs sur M.

Définition D.0.3. Soit M une variété lisse. Une *métrique riemannienne sur* M est un champ de tenseurs $(2, 0)$ g symétrique et défini positif, i.e. $g_x : T_x M \times T_x M \to \mathbb{R}$ est symétrique et défini positif pour tout $x \in M$. On dira que (M, g) est une *variété riemannienne* lisse.

Définition D.0.4. Soit M une variété lisse. Une *connexion* sur M est une application

$$\nabla : \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(M)$$

telle que :

— $\nabla_X Y$ est linéaire sur $C^\infty(M)$ en X et sur $\mathbb{R}$ en Y,
— pour tous $X, Y \in \mathcal{T}(M)$ et $f \in C^\infty(M)$,

$$\nabla_X fY = f\nabla_X Y + \mathcal{L}_X fY.$$

On dira que $\nabla_X Y$ est la *dérivée covariante* de Y dans la direction de X.

Définition D.0.5. Soit M une variété lisse et ∇ une connexion sur M. Pour toute 1-forme α sur M et tout champ de vecteur X sur M, la *dérivée covariante* de α dans la direction de X est la 1-forme sur M définie par

$$\langle \nabla_X \alpha, Y\rangle = \mathcal{L}_X\langle \alpha, Y\rangle - \langle \alpha, \nabla_X Y\rangle.$$

Notons que l'on peut définir la dérivée covariante sur des champs de tenseurs (k, l), voir [Lee06] .

Lemme D.0.1. *Soit (M, g) une variété riemanienne lisse. Il existe une unique connexion ∇ sur M telle que pour tous $X, Y, Z \in \mathcal{T}(M)$*

$$\nabla_X g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

et

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

Cette connexion sera appelée connexion de Levi-Civita *associée à (M, g). Elle est entièrement déterminée par*

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2}(&\mathcal{L}_X g(Y, Z) + \mathcal{L}_Y g(Z, X) - \mathcal{L}_Z g(X, Y) \\ &- g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y])). \end{aligned} \tag{D.1}$$

Définition D.0.6. Soit (M, g) une variété riemannienne lisse et ∇ la connexion de Levi-Civita associée. L' *endomorphisme de courbure de Riemann* est le tenseur $(3, 1)$ sur M défini par

$$R(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

pour tous $X, Y, Z \in \mathcal{T}(M)$.

Bibliographie

[AM08] Ralph Abraham et Jerrold E Marsden. *Foundations of mechanics.* 364. American Mathematical Soc., 2008.

[Ama12] Shun-ichi Amari. *Differential-geometrical methods in statistics.* T. 28. Springer Science & Business Media, 2012.

[Ara20] Philip Arathoon. « Semidirect Products and Applications to Geometric Mechanics ». Thèse de doct. University of Manchester, 2020.

[Bar14] Frédéric Barbaresco. « Koszul information geometry and Souriau geometric temperature/capacity of Lie group thermodynamics ». In : *Entropy* 16.8 (2014), p. 4521-4565.

[Bar16] Frédéric Barbaresco. « Geometric theory of heat from Souriau Lie groups thermodynamics and Koszul Hessian geometry : Applications in information geometry for exponential families ». In : *Entropy* 18.11 (2016), p. 386.

[BN+21] Frédéric Barbaresco, Frank Nielsen et al. *Geometric Structures of Statistical Physics, Information Geometry, and Learning.* Springer, 2021.

[BF22] Andrew Beckett et José Figueroa-O'Farrill. « Symplectic Actions and Central Extensions ». In : *arXiv preprint arXiv :2203.07405* (2022).

[Che18] Claude Chevalley. *Theory of Lie groups.* Courier Dover Publications, 2018.

[Hel79] Sigurdur Helgason. *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces.* Academic press, 1979.

[KZ19] Jean Louis Koszul et Yi Ming Zou. *Introduction to symplectic geometry.* Springer, 2019.

[Lee06] John M Lee. *Riemannian manifolds : an introduction to curvature.* T. 176. Springer Science & Business Media, 2006.

[LY00] Elliott H Lieb et Jakob Yngvason. « A fresh look at entropy and the second law of thermodynamics ». In : *Statistical Mechanics*. Springer, 2000, p. 365-370.

[Mar06] Charles-Michel Marle. « Variétés symplectiques et variétés de Poisson ». In : *Université Pierre et Marie Curie DEA* (2006).

[Mar20] Charles-Michel Marle. « On Gibbs states of mechanical systems with symmetries ». In : *Journal of Geometry and Symmetry in Physics* 57 (2020), p. 45-85.

[Mar21] Charles-Michel Marle. « Gibbs States on Symplectic Manifolds with Symmetries ». In : *International Conference on Geometric Science of Information*. Springer. 2021, p. 237-244.

[Nic11] Samuel Nicolay. « Théorie de la mesure ». In : *Université de Liège* 2012 (2011).

[OVM93] Arkadij L Onishchik, Ernest B Vinberg et V Minachin. *Lie groups and Lie algebras*. Springer, 1993.

[OR13] Juan-Pablo Ortega et Tudor S Ratiu. *Momentum maps and Hamiltonian reduction*. T. 222. Springer Science & Business Media, 2013.

[Owe12] David R Owen. *A first course in the mathematical foundations of thermodynamics*. Springer Science & Business Media, 2012.

[Pau06] Frédéric Paulin. « Géométrie différentielle élémentaire ». In : *Cours de première année de mastère, École Normale Supérieure* 2007 (2006).

[SC97] Jean-Marie Souriau et Ch Cushman. *Structure of dynamical systems : a symplectic view of physics*. T. 149. Springer Science & Business Media, 1997.