

---

## Évaluation de la qualité de formulations élément fini classiques par la technique FE2

**Auteur** : Morch, Hélène

**Promoteur(s)** : Duchene, Laurent

**Faculté** : Faculté des Sciences appliquées

**Diplôme** : Master en ingénieur civil des constructions, à finalité approfondie

**Année académique** : 2015-2016

**URI/URL** : <http://hdl.handle.net/2268.2/1522>

---

### *Avertissement à l'attention des usagers :*

*Tous les documents placés en accès ouvert sur le site le site MatheO sont protégés par le droit d'auteur. Conformément aux principes énoncés par la "Budapest Open Access Initiative"(BOAI, 2002), l'utilisateur du site peut lire, télécharger, copier, transmettre, imprimer, chercher ou faire un lien vers le texte intégral de ces documents, les disséquer pour les indexer, s'en servir de données pour un logiciel, ou s'en servir à toute autre fin légale (ou prévue par la réglementation relative au droit d'auteur). Toute utilisation du document à des fins commerciales est strictement interdite.*

*Par ailleurs, l'utilisateur s'engage à respecter les droits moraux de l'auteur, principalement le droit à l'intégrité de l'oeuvre et le droit de paternité et ce dans toute utilisation que l'utilisateur entreprend. Ainsi, à titre d'exemple, lorsqu'il reproduira un document par extrait ou dans son intégralité, l'utilisateur citera de manière complète les sources telles que mentionnées ci-dessus. Toute utilisation non explicitement autorisée ci-avant (telle que par exemple, la modification du document ou son résumé) nécessite l'autorisation préalable et expresse des auteurs ou de leurs ayants droit.*

---

# 1 Appendix 1: READ\_MESH.m

```
fID=fopen(mesh_file);
A1 = textscan(fID, '%s', 1);
A1_str = A1{1,1};
nodes_str = '$Nodes';

while strcmp(A1_str, nodes_str) == 0 % Reads until it finds the string '$Nodes'
    if strcmp(A1_str, nodes_str) == 1
        break
    end
    A1 = textscan(fID, '%s', 1); % $Nodes
    A1_str = A1{1,1};
end

A2 = textscan(fID, '%n', 1); % Number of nodes
Nnode_tot = A2{1,1};

B = textscan(fID, '%n%n%n%n', Nnode_tot); % Nodes number and coordinates
nodes = [B{:,1} B{:,2} B{:,3}];

textscan(fID, '%s', 2); % '$EndNodes', '$Elements'
C1 = textscan(fID, '%n', 1);
Nel = C1{1,1};
D = textscan(fID, '%n %n%n%n%n %n%n%n%n %n%n%n%n', Nel);
D_nan = isfinite(D{1,9});
index = find(D_nan, 1, 'first');

%% Definition of the element type (4 node quadrangle or 8 node quadrangle)
if D{1,2}(index,1) == 3
    Nnode = 4;
elseif D{1,2}(index,1) == 16
    Nnode = 8;
end

%% Boundary conditions
fixed_DOF = [];
paroi_int = [];
for i = 1:index-1
    if D{1,4}(i) == 11
        fixed_DOF(i,:) = [D{1,6}(i) 1 0];
    elseif D{1,4}(i) == 12
        fixed_DOF(i,:) = [D{1,6}(i) 0 1];
    elseif D{1,4}(i) == 13
        fixed_DOF(i,:) = [D{1,6}(i) 1 1];
    elseif D{1,4}(i) == 21
        for k = 6:7
            if isempty(fixed_DOF)
                fixed_DOF = [fixed_DOF; [D{1,k}(i) 1 0]];
            else
                Find = find(fixed_DOF(:,1) == D{1,k}(i));
                if isempty(Find)
                    fixed_DOF = [fixed_DOF; [D{1,k}(i) 1 0]];
                end
            end
        end
    end
end
```

```

end
elseif D{1,4}(i)==22
for k=6:7
if isempty(fixed_DOF)
fixed_DOF=[fixed_DOF;[D{1,k}(i) 0 1]];
else
Find=find(fixed_DOF(:,1)==D{1,k}(i));
if isempty(Find)
fixed_DOF=[fixed_DOF;[D{1,k}(i) 0 1]];
end
end
end
elseif D{1,4}(i)==23
for k=6:7
if isempty(fixed_DOF)
fixed_DOF=[fixed_DOF;[D{1,k}(i) 1 1]];
else
Find=find(fixed_DOF(:,1)==D{1,k}(i));
if isempty(Find)
fixed_DOF=[fixed_DOF;[D{1,k}(i) 1 1]];
end
end
end
elseif D{1,4}(i)==6
paroi_int=[paroi_int ; D{1,6}(i) D{1,7}(i)];
end
end
%%
elem=zeros(Nel-index,Nnode);
for i=index:Nel
if Nnode==4
%D = textscan(fID,'%n %n%n%n%n %n%n%n%n', Nel);
elem(i-index+1,:)= [D{1,7}(i),D{1,6}(i),D{1,9}(i),D{1,8}(i)];
elseif Nnode==8
%D = textscan(fID,'%n %n%n%n%n %n%n%n%n%n%n%n%n', Nel);
elem(i-
index+1,:)= [D{1,6}(i),D{1,10}(i),D{1,7}(i),D{1,11}(i),D{1,8}(i),D{1,12}(i),D{1
,9}(i),D{1,13}(i) ]; %Réorganisation de la numérotation
end
end
Nel=Nel-index+1;

```

## 2 Appendix 2: FE<sup>2</sup> stiffness matrices for the patch test

Element 1	88936	21369	-76414	18703	-40663	-22903	28142	-17169
	21369	73724	-1183	21612	-19765	-31230	-421	-64106
	-76414	-1183	105535	-32925	26220	-2317	-55340	36425
	18703	21612	-32925	105976	-21727	-58799	35949	-68789
	-40664	-19765	26220	-21727	72944	26521	-58500	14971
	-22903	-31230	-2317	-58799	26521	60216	-1300	29813
	28142	-421	-55341	35949	-58500	-1300	85699	-34227
	-17169	-64106	36425	-68789	14971	29813	-34227	103082
Element 2	72944	26521	-58500	14971	-40664	-19765	26220	-21727
	26521	60216	-1300	29813	-22903	-31230	-2317	-58799
	-58500	-1300	85699	-34227	28142	-421	-55341	35949
	14971	29813	-34227	103082	-17169	-64106	36425	-68789
	-40663	-22903	28142	-17169	88936	21369	-76414	18703
	-19765	-31230	-421	-64106	21369	73724	-1183	21612
	26220	-2317	-55340	36425	-76414	-1183	105535	-32925
	-21727	-58799	35949	-68789	18703	21612	-32925	105976
Element 3	105535	32925	-76414	1183	-55340	-36425	26220	2317
	32925	105976	-18703	21612	-35949	-68789	21727	-58799
	-76414	-18703	88936	-21369	28142	17169	-40663	22903
	1183	21612	-21369	73724	421	-64106	19765	-31230
	-55340	-35949	28142	421	85699	34227	-58500	1300
	-36425	-68789	17169	-64106	34227	103082	-14971	29813
	26220	21727	-40663	19765	-58500	-14971	72944	-26521
	2317	-58799	22903	-31230	1300	29813	-26521	60216
Element 4	85699	34227	-58500	1300	-55340	-35949	28142	421
	34227	103082	-14971	29813	-36425	-68789	17169	-64106
	-58500	-14971	72944	-26521	26220	21727	-40663	19765
	1300	29813	-26521	60216	2317	-58799	22903	-31230
	-55340	-36425	26220	2317	105535	32925	-76414	1183
	-35949	-68789	21727	-58799	32925	105976	-18703	21612
	28142	17169	-40663	22903	-76414	-18703	88936	-21369
	421	-64106	19765	-31230	1183	21612	-21369	73724

### 3 Appendix 3: FE<sup>2</sup> stiffness matrices of the rectangular elements

#### 3.1 Matrices for the cantilever beam with unitary tip displacement

$E = 210000 \text{ MPa}; \nu = 0.3$

$N_{el}$ 562	43486	20937	-14426	13678	-14421	-20943	-14640	-13672
	20937	301846	-13679	159692	-20936	-161507	13678	-300031
$h_x$ 5	-14426	-13679	43441	-20936	-14595	13683	-14421	20933
	13678	159692	-20936	301846	-13679	-300031	20937	-161507
$h_y$ 1.25	-14421	-20936	-14595	-13679	43441	20933	-14426	13683
	-20943	-161507	13683	-300031	20933	301847	-13672	159692
	-14640	13678	-14421	20937	-14426	-13672	43486	-20943
	-13672	-300031	20933	-161507	13683	159692	-20943	301847
$N_{el}$ 585	51986	23054	-23263	11561	-22891	-23051	-5833	-11565
	23054	190657	-11561	97804	-23055	-102402	11561	-186060
$h_x$ 5	-23263	-11561	51962	-23055	-5808	11575	-22891	23041
	11561	97804	-23055	190657	-11561	-186060	23054	-102402
$h_y$ 2	-22891	-23055	-5809	-11561	51962	23041	-23263	11575
	-23051	-102402	11575	-186060	23041	190650	-11565	97811
	-5833	11561	-22891	23054	-23263	-11565	51986	-23051
	-11565	-186060	23041	-102402	11575	97811	-23051	190650
$N_{el}$ 575	57660	24330	-29582	10286	-28110	-24325	33	-10291
	24330	154459	-10290	76310	-24326	-83330	10286	-147439
$h_x$ 5	-29582	-10290	57652	-24326	40	10291	-28110	24325
	10286	76310	-24326	154459	-10290	-147439	24330	-83330
$h_y$ 2.5	-28110	-24326	40	-10290	57652	24325	-29582	10291
	-24325	-83330	10291	-147439	24325	154456	-10291	76313
	33	10286	-28110	24330	-29582	-10291	57660	-24325
	-10291	-147439	24325	-83330	10291	76313	-24325	154456
$N_{el}$ 593	119537	25973	-107979	8642	-65098	-25979	53540	-8636
	25973	67236	-8645	9687	-25971	-35679	8642	-41244
$h_x$ 5	-107979	-8645	119529	-25971	53548	8646	-65098	25970
	8642	9687	-25971	67236	-8645	-41244	25973	-35679
$h_y$ 7.5	-65098	-25971	53548	-8645	119529	25970	-107979	8646
	-25979	-35679	8646	-41244	25970	67244	-8636	9679
	53540	8642	-65098	25973	-107979	-8636	119537	-25979
	-8636	-41244	25970	-35679	8646	9679	-25979	67244

$N_{el}$ 576	154458	24326	-147438	10289	-83331	-24328	76311	-10287
	24326	57660	-10287	32	-24328	-28111	10289	-29582
$h_x$ 5	-147438	-10287	154458	-24328	76311	10289	-83331	24326
	10289	32	-24328	57660	-10287	-29582	24326	-28111
$h_y$ 10	-83331	-24328	76311	-10287	154458	24326	-147438	10289
	-24328	-28111	10289	-29582	24326	57659	-10287	33
	76311	10289	-83331	24326	-147438	-10287	154458	-24328
	-10287	-29582	24326	-28111	10289	33	-24328	57659

### 3.2 Matrices for the cantilever beam with sinusoidal moment loading

$$E = 10000 \text{ MPa}; \nu = 0$$

$N_{el}$ 562	1983	170	-625	-170	-625	-170	-733	170
	170	13381	169	6619	-169	-6703	-170	-13297
$h_x$ 5	-625	169	1978	-169	-728	-169	-625	169
	-170	6619	-169	13381	169	-13297	170	-6703
$h_y$ 1.25	-625	-169	-728	169	1978	169	-625	-169
	-170	-6703	-169	-13297	169	13382	170	6618
	-733	-170	-625	170	-625	170	1983	-170
	170	-13297	169	-6703	-169	6618	-170	13382
$N_{el}$ 585	2357	270	-1009	-270	-991	-270	-357	270
	270	8457	270	4043	-270	-4259	-270	-8241
$h_x$ 5	-1009	270	2354	-270	-354	-268	-991	268
	-270	4043	-270	8457	270	-8241	270	-4259
$h_y$ 2	-991	-270	-354	270	2354	268	-1009	-268
	-270	-4259	-268	-8241	268	8456	270	4044
	-357	-270	-991	270	-1009	270	2357	-270
	270	-8241	268	-4259	-268	4044	-270	8456
$N_{el}$ 575	2607	331	-1285	-331	-1215	-330	-107	330
	331	6856	331	3144	-331	-3475	-331	-6525
$h_x$ 5	-1285	331	2607	-331	-107	-330	-1215	330
	-331	3144	-331	6856	331	-6525	331	-3475
$h_y$ 2.5	-1215	-331	-107	331	2607	330	-1285	-330
	-330	-3475	-330	-6525	330	6856	330	3144
	-107	-331	-1215	331	-1285	330	2607	-330
	330	-6525	330	-3475	-330	3144	-330	6856

$N_{el}$ 562	3892	464	-2964	-464	-2036	-464	1108	464
	464	3892	464	1108	-464	-2036	-464	-2964
$h_x$ 5	-2964	464	3891	-464	1109	-464	-2036	464
	-464	1108	-464	3892	464	-2964	464	-2036
$h_y$ 5	-2036	-464	1109	464	3891	464	-2964	-464
	-464	-2036	-464	-2964	464	3892	464	1108
	1108	-464	-2036	464	-2964	464	3892	-464
	464	-2964	464	-2036	-464	1108	-464	3892
$N_{el}$ 585	5315	409	-4770	-409	-2730	-409	2185	409
	409	3025	408	309	-408	-1534	-409	-1799
$h_x$ 5	-4770	408	5315	-408	2185	-408	-2730	408
	-409	309	-408	3025	408	-1799	409	-1534
$h_y$ 7.5	-2730	-408	2185	408	5315	408	-4770	-408
	-409	-1534	-408	-1799	408	3025	409	309
	2185	-409	-2730	409	-4770	409	5315	-409
	409	-1799	408	-1534	-408	309	-409	3025
$N_{el}$ 575	6855	330	-6525	-330	-3475	-331	3145	331
	330	2606	331	-106	-331	-1215	-330	-1285
$h_x$ 5	-6525	331	6856	-331	3144	-330	-3475	330
	-330	-106	-331	2606	331	-1285	330	-1215
$h_y$ 10	-3475	-331	3144	331	6856	330	-6525	-330
	-331	-1215	-330	-1285	330	2607	331	-107
	3145	-330	-3475	330	-6525	331	6855	-331
	331	-1285	330	-1215	-330	-107	-331	2607