Mémoire: ""

Auteur : Reynaerts, Laura
Promoteur(s) : Nicolay, Samuel
Faculté : Faculté des Sciences
Diplôme : Master en sciences mathématiques, à finalité approfondie
Année académique : 2015-2016
URI/URL : http://hdl.handle.net/2268.2/1564

Université de Liège
Faculté des Sciences
Département de Mathématique

Ensembles paradoxaux et paradoxe de Von Neumann

Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de Master en Sciences Mathématiques

Auteur
Laura Reynaerts

Promoteur
Samuel Nicolay

Année académique 2015 – 2016

Remerciements

Avant toutes choses, je souhaite remercier les personnes qui ont participé de près ou de loin à l'élaboration de ce travail. Mes remerciements s'adressent à :

Samuel Nicolay, mon promoteur, pour m'avoir proposé ce sujet et avoir accepté de m'encadrer tout au long de l'année. Je tiens à le remercier pour cet encadrement et l'attention qu'il m'a portée ainsi que pour ses nombreuses relectures et nombreux conseils avisés.

Thomas Kleynstenss, que je remercie vivement pour son implication, ses suggestions et sa disponibilité, et ce même dans les dernières heures.

Ma grand-mère, mon grand-père et mon père qui, en plus, de m'avoir permis de réaliser des études, ont toujours fait en sorte qu'elles se déroulent dans les meilleures conditions possibles et m'ont toujours soutenue et encouragée.

Melissa pour ses encouragements permanents et sa présence.

Enfin, je remercie toutes les personnes rencontrées au B37 (ou ailleurs) qui m'ont beaucoup apporté tant sur le plan scolaire que personnel.

Table des matières

Introduction

« *Tout borné d'intérieur non vide de l'espace euclidien de dimension trois peut être découpé en un nombre fini de morceaux de sorte que, en réarrangeant ceux-ci via des isométries, on peut le dédoubler.* » Il s'agit là d'un des résultats les plus troublants en mathématiques, découvert en 1924 par Stefan Banach et Alfred Tarski [1], connu sous le nom de *paradoxe de Banach-Tarski*. Un ensemble ayant la propriété énoncée est dit paradoxal sous l'action du groupe des isométries ; l'objet principal de ce travail est l'étude des ensembles paradoxaux d'une manière générale. Nous pouvons d'ores et déjà mentionner que le caractère paradoxal d'un ensemble ne dépend pas de la nature de l'ensemble mais des propriétés du groupe agissant sur lui. Par exemple, si un *groupe libre* possède deux *éléments indépendants* et *agit librement* sur un ensemble alors l'ensemble est paradoxal.

L'existence de ces ensembles est contre-intuitive (d'où leur nom), puisque nous avons tous en tête l'idée de conservation de l'aire qui entraine que la mesure d'un ensemble est égal à la somme des mesures de ses sous-parties. De là, la seule explication possible à l'existence de tel ensemble est qu'on ne sait pas associer une mesure à certains ensembles intervenant dans la décomposition. Autrement dit, certains de ces sous-ensembles sont non-mesurables. Il est donc évident que l'étude des ensembles paradoxaux est étroitement liée à la théorie de la mesure.

C'est en 1914, par le biais des travaux de Félix Hausdorff, que la notion d'ensemble paradoxal apparaît pour la première fois dans la littérature. Ces travaux ont été publiés dans un livre [7] consacré à la théorie des ensembles mais contenant un chapitre sur la théorie de la mesure. Ces écrits ont largement été repris et approfondis par de nombreux mathématiciens [1] et ont donné lieu à de nouvelles idées, aussi bien en théorie des groupes (concernant par exemple les groupes moyennables) qu'en théorie de la mesure (notamment pour prouver l'existence de mesure exhaustive).

Dans le premier chapitre de ce travail, après avoir donné les premières définitions relatives à la théorie des ensembles paradoxaux, nous exposerons le cheminement de la démonstration du paradoxe de Banach-Tarski ainsi que sa généralisation aux autres dimensions. Par là, nous verrons que les ensembles du plan qui sont paradoxaux sous l'action du groupe des isométries sont tous d'intérieur vide. Pour le montrer nous construirons une mesure définie sur tout le plan réel qui normalise la mesure du carré unité. De plus, nous démontrerons que cette mesure est issue de la mesure de Lebesgue et cela permettra de corriger

1. On peut notamment citer Wacław Sierpiński et Stefan Mazurkiewicz.

la proposition 2.4.11 de [10].

Que se passerait-il si, au lieu de travailler avec le groupe des isométries, nous travaillions avec un autre groupe de transformations affines préservant les aires ? C'est exactement à cette question que nous répondrons, via le *paradoxe de Von Neumann*, dans le deuxième chapitre. Nous considérerons alors le groupe

$$\mathrm{SA}(2,\mathbb{Z}) = \{\sigma \circ \tau \in A(2) \mid \sigma \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \text{ et } \tau \text{ une translation}\}$$

où $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ représente le groupe special linéaire des matrices entières en dimension deux et $A(2)$ le groupe des bijections affines en dimensions deux. Le fait de changer de groupe, nous permettra d'obtenir les mêmes résultats que le paradoxe de Banach-Tarski mais, cette fois-ci, dans le plan (et dans toutes les dimensions supérieures). Nous montrerons ainsi que tout ensemble borné et d'intérieur non vide du plan est paradoxal sous l'action du groupe $\mathrm{SA}(2,\mathbb{Z})$. Ce résultat renforce le fait que le caractère paradoxal d'un ensemble ne dépend pas de la structure même de l'ensemble mais bien du groupe agissant sur celui-ci.

Dans le troisième chapitre, nous verrons que la donnée d'un ensemble de $\mathbb{R}^n$ paradoxal sous l'action d'un groupe G est équivalente à la non-existence d'une mesure définie sur $\mathbb{R}^n$ tout entier, finiment additive, *invariante sous l'action de* G et normalisant cet ensemble. Ce résultat est plus connu sous le nom de *théorème de Tarski*. On peut déjà se convaincre facilement que la condition est nécessaire. En effet, si une telle mesure existe alors un ensemble paradoxal a soit une mesure nulle, soit une mesure infinie. On montrera alors que si on retire les translations du groupe $\mathrm{SA}(2,\mathbb{Z})$, c'est-à-dire si on considère uniquement le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, alors un résultat similaire au paradoxe de Banach-Tarski n'est plus possible. En effet, on prouvera que le carré unité n'est pas paradoxal sous l'action du groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. Pour finir ce chapitre, nous commencerons à étudier les ensembles paradoxaux du plan sous l'action du groupe spécial linéaire [2]. Nous montrerons notamment que le plan privé de l'origine est paradoxal sous l'action de ce groupe.

Enfin, le quatrième et dernier chapitre repose sur l'article [13] et étudie les ensembles paradoxaux du plan sous l'action du groupe spécial linéaire. Par exemple, nous montrerons que tout ensemble borné, d'intérieur non vide et dont la distance à l'origine est strictement positive est paradoxal sous l'action de ce groupe. Précisons que tous les résultats principaux obtenus dans ce chapitre ont, dans un premier temps, été prouvés dans [15] sous l'hypothèse d'une certaine conjecture (qui est toujours un problème ouvert à l'heure actuelle). Dans ce travail, tout comme dans l'article [13], nous nous passerons complètement de cette conjecture, ce qui renforce évidemment l'idée qu'elle est vraie.

2. Le groupe spécial linéaire conserve également les aires et contient $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ mais ne contient aucune translation.

Chapitre 1

Rappels et notions de base

L'objectif de ce premier chapitre est double. Dans un premier temps, il vise à introduire certaines notions essentielles, comme par exemple celle de *groupe libre*, d'*équidécomposabilité* et d'*ensemble paradoxal* ; ainsi qu'à présenter les grandes étapes qui mènent au *paradoxe de Banach-Tarski*. Dans un deuxième temps, il a pour but de prouver l'existence d'une modification de la mesure de Lebesgue définie sur $\mathbb{R}^2$ tout entier ; c'est-à-dire une application finiment additive qui étend la mesure de Lebesgue tout en perdant son caractère dénombrablement additif. Pour ce faire, nous avons besoin de la définition d'une *algèbre de Boole* ainsi que certaines de leur propriétés élémentaires. En outre, l'existence d'une telle application permettra de corriger la proposition 2.4.11 de [10].

Sauf mention explicite du contraire, les ensembles considérés dans ce chapitre sont supposés non vides.

1.1 Les groupes libres

Dans cette section, nous introduisons la notion de groupe libre ainsi que quelques propriétés s'y rapportant. Pour le lecteur avide d'en savoir plus, nous conseillons [2].

Pour commencer, rappelons quelques généralités sur les groupes.

Définition 1.1.1. Soient G un ensemble et $\circ : G \times G \to G$ une opération binaire et interne sur G. Le couple $(G, \circ)$ est un *groupe* si

(i) $\forall\ x, y, z \in G,\ (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ (i.e. l'opération $\circ$ est associative) ;

(ii) $\exists\ e \in G,\ \forall\ x \in G$ tel que $x \circ e = x = e \circ x$ (i.e. il existe un unique neutre pour $\circ$ noté e) ;

(iii) $\forall\ x \in G,\ \exists\ y \in G$ tel que $x \circ y = e = y \circ x$ (i.e. chaque élément $x \in G$ possède un unique inverse que l'on note x^{-1}).

De plus, si pour tous $x, y \in G$ on a $x \circ y = y \circ x$, on dit que le groupe $(G, \circ)$ est commutatif. Par abus de langage, on notera G le groupe $(G, \circ)$.

Pour fixer les notations, donnons quelques exemples de groupe qu'on utilisera tout au long de ce mémoire. Les vérifications sont immédiates.

Exemples 1.1.2.

1. Une *isométrie* de $\mathbb{R}^n$ est une bijection $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ qui préserve les distances, c'est-à-dire telle que $|f(x) - f(y)| = |x - y|$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$. L'ensemble des isométries sur $\mathbb{R}^n$ muni de la composition de fonction est un groupe. On le note $G(n)$.
2. L'ensemble des matrices réelles orthogonales (i.e. $AA^\top = I = A^\top A$) de dimension n ($n \in \mathbb{N}_0$) et muni du produit matriciel forment également un groupe appelé le *groupe orthogonal* et noté $O(n)$.
3. L'ensemble des matrices réelles orthogonales de dimension n ($n \in \mathbb{N}_0$), dont le déterminant vaut 1 et muni du produit matriciel est un groupe. On l'appelle le *groupe spécial orthogonal* et on le note $SO(n)$.
4. L'ensemble des matrices réelles de dimension n ($n \in \mathbb{N}_0$), dont le déterminant vaut 1 et muni du produit matriciel forme le *groupe spécial linéaire*. On le note $SL(n)$.
5. L'ensemble des translations de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire les applications définies sur $\mathbb{R}^n$ telles que $x \mapsto x + k$ ($k \in \mathbb{R}^n$), forme un groupe noté $T(n)$.

Définition 1.1.3. Soient $(G, \circ)$ un groupe et $H \subseteq G$. Si H est stable pour $\circ$ et pour le passage à l'inverse alors H est un *sous-groupe* de G.

Remarque 1.1.4. Il est clair que l'intersection de sous-groupes est encore un sous-groupe. Dès lors, si $X \subseteq G$ alors le plus petit sous-groupe de G contenant X est l'intersection de tous les sous-groupes de G contenant X. On dit que c'est le *sous-groupe engendré* par X et on le note $\langle X \rangle$. On vérifie facilement qu'on a

$$\langle X \rangle = \{x_1^{\varepsilon_1} \circ \cdots \circ x_n^{\varepsilon_n} \mid n \in \mathbb{N}_0,\ x_i \in X \text{ et } \varepsilon_i = \pm 1\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Si $G = \langle X \rangle$ alors on dit que X *engendre* G ou de façon équivalente que X est une *partie génératrice* de G.

Exemples 1.1.5. On sait que si $A \in O(n)$ alors l'endomorphisme associé est lui-même orthogonal, c'est-à-dire qu'il conserve le produit scalaire et est donc une isométrie. Donc $O(n)$ est un sous-groupe de $G(n)$. Il est clair que $SO(n)$ est un sous-groupe de $O(n)$ et par conséquent de $G(n)$.

A présent, nous allons rappeler la notion d'action de groupe qui sera constamment utilisée dans la suite.

Définition 1.1.6. Soit X un ensemble. Une *action* du groupe G sur l'ensemble X est la donnée d'une application

$$\cdot \;:\; G \times X \to X \quad (g, x) \mapsto g \cdot x$$

satisfaisant les conditions suivantes :

(i) $e \cdot x = x$

(ii) $(g \circ h) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$

pour tout $x \in X$ et pour tous $g, h \in G$. S'il existe une telle application on dit que le groupe G *agit* sur l'ensemble X. On pose

$$g : X \to X \quad x \mapsto g(x) = g \cdot x,$$

pour tout $g \in G$. On vérifie facilement que l'application $g : X \to X$ est une bijection dont l'inverse est donné par g^{-1}.

Il est important de bien garder en mémoire l'exemple suivant car il réapparaitra très fréquemment dans ce travail. Il permettra par exemple de définir la notion de *groupe paradoxal.*

Exemple 1.1.7. Un groupe G agit toujours sur lui-même par l'action de *translation à gauche* définie par

$$G \times G \to G \quad (g, h) \mapsto g \cdot h = g \circ h.$$

Exemples 1.1.8.

1. Les groupes $O(n)$, $SO(n)$ et $SL(n)$ agissent sur $\mathbb{R}^n$ par l'action

$$(A, x) \mapsto A \cdot x = Ax^\top.$$

2. Le groupe des isométries $G(n)$ agit aussi sur $\mathbb{R}^n$ par l'action

$$(f, x) \mapsto f \cdot x = f(x).$$

Définition 1.1.9. Soit G un groupe agissant sur un ensemble X. Pour tout $x \in X$ on définit l'*orbite* de x de la manière suivante :

$$\text{orb}(x) = \{g \cdot x \mid g \in G\}.$$

Remarque 1.1.10. Si nous définissons la relation d'équivalence[1] $\mathcal{R}$ sur X comme suit

$$x\mathcal{R}y \;\Leftrightarrow\; \exists\, g \in G \;:\; g \cdot x = y,$$

alors il est clair que $\text{orb}(x) = [x]_{\mathcal{R}} = \{y \in X \mid x\mathcal{R}y\}$. Ainsi, les orbites partitionnent l'ensemble X.

1. Rappelons qu'une relation est une *relation d'équivalence* si elle est réflexive, symétrique et transitive.

Définition 1.1.11. Soit G un groupe agissant sur un ensemble X. Pour tout $x \in X$ on définit le *stabilisateur* de x de la manière suivante :

$$\mathrm{stab}(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$$

(i.e. l'ensemble des éléments de G qui fixent x). On vérifie aisément que $\mathrm{stab}(x)$ est un sous-groupe de G pour tout $x \in X$.

A présent, nous allons introduire briévement la notion de *groupe libre*. Pour plus d'informations, nous conseillons au lecteur [2].

Définition 1.1.12. Soient G un groupe et X un sous-ensemble non vide de G. Si tout élément de $G \setminus \{e\}$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$x_1^{\varepsilon_1} \circ \cdots \circ x_n^{\varepsilon_n} \tag{1.1}$$

où $n \in \mathbb{N}_0$, $x_i \in X$, $\varepsilon_i = \pm 1 \; \forall i \in \{1, \ldots, n\}$ et $x_i^{\varepsilon_i} \circ x_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}} \neq e \; \forall i \in \{1, \ldots, n-1\}$, alors X est une *famille génératrice libre* de G. De plus, si un élément de $G \setminus \{e\}$ est écrit sous la forme (1.1), on dit qu'il est écrit sous *forme réduite*.

Définition 1.1.13. Si un groupe G possède une famille génératrice libre X alors G est *un groupe libre*. Dans ce cas, on dit que G est *engendré librement* par X.

Exemple 1.1.14. Si $X = \{x\}$ engendre librement G alors tout élément de $G \setminus \{e\}$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$x^{\varepsilon} \circ \cdots \circ x^{\varepsilon}$$

où $\varepsilon = \pm 1$. Donc $G = \{x^k \mid k \in \mathbb{Z}_0\} \cup \{e\}$ et ainsi

$$(G, \circ) \simeq (\mathbb{Z}, +)$$

où l'isomorphisme est donné par

$$f : \mathbb{Z} \to G \quad k \mapsto f(k) = x^k$$

avec $f(0) = e$.

Le théorème suivant nous permettra de définir le *rang* d'un groupe libre. Pour une démonstration nous renvoyons le lecteur à [2].

Théorème 1.1.15. *Soit G un groupe libre. Toutes les familles génératrices libres de G ont le même cardinal.*

Définition 1.1.16. Soit G un groupe libre. Le cardinal d'une famille génératrice libre de G est appelé le *rang* de G.

Remarque 1.1.17. Si le rang de G vaut au moins 2 alors G n'est pas commutatif. En effet, si X est une famille génératrice libre de G et si $x, y \in X$ tels que $x \neq y$ alors $x \circ y \neq y \circ x$ par définition d'une famille génératrice libre.

Définition 1.1.18. Soit G un groupe. Un sous-ensemble S de G est un *ensemble d'éléments indépendants* si le sous-groupe de G engendré par S est libre. Autrement dit, S est un ensemble d'éléments indépendants si $\langle S \rangle$ est un sous-groupe libre de G et dans ce cas, son rang est le cardinal de S.

La proposition suivante donne une caractérisation des ensembles d'éléments indépendants d'un groupe.

Proposition 1.1.19. *Soit G un groupe. Un sous-ensemble S de G est un ensemble d'éléments indépendants si e ne peut pas s'écrire sous forme réduite en utilisant uniquement des éléments de S, i.e. si pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ et tous $x_1, \dots, x_n \in S$ tels que $x_i^{\varepsilon_i} \circ x_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}} \neq e$ pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, on a*

$$e \neq x_1^{\varepsilon_1} \circ \cdots \circ x_n^{\varepsilon_n}$$

avec $\varepsilon_i = \pm 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Démonstration. Dans un premier temps, remarquons qu'une façon équivalente d'exprimer que S est un ensemble d'éléments indépendants est de dire que tout élément de

$$\langle S \rangle \setminus \{e\} = \{x_1^{\varepsilon_1} \circ \cdots \circ x_n^{\varepsilon_n} \mid n \in \mathbb{N}_0,\ x_i \in S \text{ et } \varepsilon_i = \pm 1\ \forall i \in \{1, \dots, n\}\} \setminus \{e\}$$

possède une unique forme réduite. Procédons par l'absurde et supposons que S n'est pas un ensemble d'éléments indépendants. Autrement dit, supposons qu'il existe un élément de $\langle S \rangle \setminus \{e\}$ possédant deux formes réduites distinctes. Dans ce cas, il existe $n, m \in \mathbb{N}_0$ et $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \in S$ tels que

$$x_1^{\varepsilon_1} \circ \cdots \circ x_n^{\varepsilon_n} = y_1^{\varepsilon_1'} \circ \cdots \circ y_m^{\varepsilon_m'} \tag{1.2}$$

où $\varepsilon_i = \pm 1\ \forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\varepsilon_i' = \pm 1\ \forall i \in \{1, \dots, m\}$, $x_i^{\varepsilon_i} \circ x_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}} \neq e\ \forall i \in \{1, \dots, n-1\}$ et $y_i^{\varepsilon_i'} \circ y_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}'} \neq e\ \forall i \in \{1, \dots, m-1\}$. Scindons le problème en deux cas.

Si $\boldsymbol{m = n}$ alors l'égalité (1.2) s'écrit

$$x_1^{\varepsilon_1} \circ \cdots \circ x_n^{\varepsilon_n} = y_1^{\varepsilon_1'} \circ \cdots \circ y_n^{\varepsilon_n'}.$$

Simplifions, tant que cela est possible, les premiers termes. Dans ce cas, il existe un indice $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $x_{i_0}^{\varepsilon_{i_0}} \neq y_{i_0}^{\varepsilon_{i_0}'}$ car sinon les deux formes réduites de départ sont les mêmes. On obtient ainsi,

$$e = x_n^{-\varepsilon_n} \circ \cdots \circ x_{i_0}^{-\varepsilon_{i_0}} \circ y_{i_0}^{\varepsilon_{i_0}'} \circ \cdots \circ y_n^{\varepsilon_n'},$$

ce qui n'est pas possible par hypothèse.

Si $\boldsymbol{m \neq n}$ alors supposons avoir $m < n$. Comme dans le cas précédent, simplifions au maximum les premiers termes. Soit on a

$$x_{m+1}^{\varepsilon_{m+1}} \circ \cdots \circ x_n^{\varepsilon_n} = e,$$

ce qui n'est pas possible par hypothèse. Soit il existe $i_0 \in \{1, \dots, m\}$ tel que $x_{i_0}^{\varepsilon_{i_0}} \neq y_{i_0}^{\varepsilon'_{i_0}}$ et on conclut comme dans le cas précédent.

Dans tous les cas on obtient une absurdité, d'où la conclusion. □

Le résultat précédent est très utile en pratique. En effet, pour montrer qu'un ensemble est un ensemble d'éléments indépendants, il est courant de supposer que l'identité peut s'écrire sous forme réduite et d'en déduire une absurdité.

1.2 Le paradoxe de Banach-Tarski

Dans cette section, nous donnons les idées principales qui permettent d'obtenir le paradoxe de Banach-Tarski. Celui-ci affirme qu'il est possible de découper une boule en un nombre fini de morceaux, de réarranger ceux-ci via des isométries et d'obtenir deux boules identiques à la première. Pour qu'une telle chose soit possible, il faut forcément que cette décomposition fasse intervenir des ensembles non mesurables. De plus, il est important de noter que ce paradoxe est certainement un des exemples les plus frappants de « bizarreries mathématiques » auquel conduit l'axiome du choix.

Nous n'allons pas effectuer toutes les démonstrations en détail car cela mériterait un mémoire. Cependant, le lecteur pourra consulter [10] pour plus d'informations.

Avant d'arriver au paradoxe de Banach-Tarski proprement dit, nous commençons par définir des notions primordiales telles que celles d'*ensembles équidécomposables*, d'*ensemble paradoxal*, de *groupe paradoxal*, etc.

Définition 1.2.1. Soient X un ensemble et G un groupe agissant sur cet ensemble. Si A et B sont deux sous-ensembles de X et s'il existe $g \in G$ tel que $g \cdot A = B$ alors A et B sont dits *congruents*.

Définition 1.2.2. Soient X un ensemble et G un groupe agissant sur cet ensemble. Si A et B sont deux sous-ensembles de X et s'il existe $n \in \mathbb{N}_0$ et une partition $(A_i)_{i=1}^n$ de A ainsi qu'une partition $(B_i)_{i=1}^n$ de B telles que A_i et B_i soient congruents pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ alors A et B sont dits *équidécomposables*, ce qui se note $A \sim^n B$ ou tout simplement $A \sim B$.

Par exemple, si X représente l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ et G le groupe de ses isométries alors, deux sous-ensembles A et B de $\mathbb{R}^n$ sont équidécomposables si nous pouvons les « découper » en le même nombre fini de morceaux, de sorte que chaque morceau de l'ensemble A soit « superposables » à un morceau de l'ensemble B.

Remarques 1.2.3.

1. Si A et B sont deux sous-ensembles congruents de X alors ils sont équidécomposables (il suffit de prendre $n = 1$ dans la définition 1.2.2).
2. On vérifie facilement que la relation d'équidécomposabilité définie sur l'ensemble des parties de X est une relation d'équivalence.

A présent donnons deux résultats, élémentaires mais très utiles, sur les ensembles équidécomposables.

Lemme 1.2.4. *Soit G un groupe agissant sur un ensemble X. Si A et B sont deux sous-ensembles de X tels que $A \sim B$ alors il existe une bijection $g : A \to B$ telle que $C \sim g(C)$ pour tout $C \subseteq A$.*

Démonstration. Soient $A, B \subseteq X$ tels que $A \sim B$. On sait qu'il existe $(A_i)_{i=1}^n$ et $(B_i)_{i=1}^n$ des partitions de A et B respectivement pour lesquelles il existe $g_1, \dots, g_n \in G$ tels que

$$g_i \cdot A_i = g_i(A_i) = B_i$$

pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Pour tout $x \in A$, posons $g(x) = g_i(x)$ si $x \in A_i$. L'application $g : A \to B$ est bien définie et est bijective car $(A_i)_{i=1}^n$ est une partition de A, $(B_i)_{i=1}^n$ est une partition de B et $g_i : A_i \to B_i$ est une bijection pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. En outre, cette bijection vérifie l'énoncé. En effet, si $C \subseteq A$, la collection d'ensembles $(C \cap A_i)_{i=1}^n$ forme une partition de C et on a

$$g(C) = \bigcup_{i=1}^n (g(C) \cap g(A_i)) = \bigcup_{i=1}^n (g(C) \cap B_i)$$

car $g_{|A_i} = g_i$ et $g_i(A_i) = B_i$. Ainsi, $(g(C) \cap B_i)_{i=1}^n$ forme une partition de $g(C)$ et on a

$$g_i \cdot (C \cap A_i) = g_i(C \cap A_i) = g(C \cap A_i) = g(C) \cap B_i,$$

ce qui montre que $C \sim g(C)$. □

Lemme 1.2.5. *Soit G un groupe agissant sur un ensemble X. Si A_1, A_2, B_1 et B_2 sont des sous-ensembles de X tels que $A_1 \sim B_1$, $A_2 \sim B_2$ et tels que $A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2 = \emptyset$ alors $A_1 \cup A_2 \sim B_1 \cup B_2$.*

Démonstration. C'est une simple vérification. □

Théorème 1.2.6. *Soit G un groupe agissant sur un ensemble X. Soient A, B deux sous-ensembles de X. Si A est équidécomposable à une partie de B et si B est équidécomposable à une partie de A alors A et B sont équidécomposables.*

Démonstration. Soient $A, B \subseteq X$, $A_0 \subseteq A$ et $B_0 \subseteq B$ tels que $A \sim B_0$ et $B \sim A_0$. On peut même supposer avoir $A_0 \neq A$, sinon le résultat est évident. Vu le lemme 1.2.4, il existe des bijections $f : A \to B_0$ et $g : A_0 \to B$ telles que pour tout $C \subseteq A$, on a $C \sim f(C)$ et pour tout $D \subseteq A_0$, on a $D \sim g(D)$. Posons

$$\begin{cases} C_0 & = & A \setminus A_0 \\ C_{k+1} & = & (g^{-1} \circ f)(C_k) \qquad \text{si } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

et remarquons que $g(C_{k+1}) = f(C_k)$ si $k \in \mathbb{N}$. On note

$$C = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_k.$$

Il est clair que $C \subseteq A$; ainsi, on a $C \sim f(C)$. Montrons que $A \setminus C \sim B \setminus f(C)$. Dans ce cas, par le lemme 1.2.5, on aura $A \sim B$. Or, on sait déjà que

$$A \setminus C \sim g(A \setminus C),$$

puisque $A \setminus C \subseteq A_0$. Il reste donc à montrer que

$$g(A \setminus C) = B \setminus f(C).$$

Soit $x \in g(A \setminus C) \subseteq B$. Procédons par l'absurde et supposons que $x \in f(C)$. Alors il existe $y \in C$ tel que $f(y) = x$. Or, $C = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k$ donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $y \in C_k$, ce qui implique

$$x = f(y) \in f(C_k) = g(C_{k+1}).$$

Ainsi, il existe $z \in C_{k+1} \subseteq C$ tel que $g(z) = x$, ce qui est absurde.

Soit $x \in B \setminus f(C)$. Procédons également par l'absurde et supposons que $x \notin g(A \setminus C)$. Vu la surjectivité de g, il existe $y \in A_0$ tel que $g(y) = x$ mais, par hypothèse, $y \notin A \setminus C$. Ainsi, $y \in A_0 \setminus (A \setminus C) = A_0 \cap C$. En particulier, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $y \in C_{k+1}$ donc

$$x = g(y) \in g(C_{k+1}) = f(C_k) \subseteq f(C),$$

ce qui est absurde. □

Ce résultat est fondamental pour la démonstration du paradoxe de Banach-Tarski. En effet, l'idée est de montrer que si A et B sont deux sous-ensembles bornés et d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^3$ alors, A est équidécomposable à une partie de B et réciproquement. Remarquons aussi que la philosophie de ce théorème, ainsi que la démonstration, ne sont pas sans rappeler le théorème de Cantor-Bernstein [2].

Nous allons à présent introduire les notions d'*ensemble paradoxal* et de *groupe paradoxal*.

Définition 1.2.7. Soit G un groupe agissant sur un ensemble X. Le sous-ensemble non vide A de X est *paradoxal* pour le groupe G s'il existe deux sous-ensembles, A_1 et A_2, de A tels que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A_1 \sim A$ et $A_2 \sim A$.

En d'autres termes, un ensemble paradoxal A contient deux sous-ensembles disjoints qui, sous l'action de G, rendent chacun l'ensemble A.

Remarque 1.2.8. Dans la définition précédente, on peut supposer avoir $A_1 \cup A_2 = A$, c'est-à-dire que (A_1, A_2) forme une partition de A. En effet, posons $B = A \setminus A_1$. Il est clair que $A_1 \cup B = A$, $A_1 \cap B = \emptyset$ et que $A_1 \sim A$. De plus,

$$B \sim B \subseteq A \quad \text{et} \quad A \sim A_2 \subseteq B$$

ainsi, par le théorème 1.2.6 on a $B \sim A$.

2. « *Si A et B sont deux ensembles tels qu'il existe une injection f de A dans B et une injection g de B dans A alors il existe une bijection de A dans B* ». Pour obtenir une démonstration ou pour plus de détails, nous conseillons [8] au lecteur.

Définition 1.2.9. On dit que le groupe G est un *groupe paradoxal* s'il est paradoxal pour G agissant sur lui-même par l'action de translation à gauche.

Le théorème suivant est très pratique et par conséquent, très souvent utilisé pour montrer qu'un ensemble est paradoxal. En particulier, il nous permettra de montrer que la sphère S^2 est paradoxale pour le groupe $SO(3)$.

Théorème 1.2.10. *Soit G un groupe agissant sur un ensemble X. Soient A et B deux sous-ensembles de X tels que $A \sim B$. Si A est paradoxal alors B l'est aussi.*

Démonstration. Le lemme 1.2.4 nous apprend qu'il existe une bijection

$$g : A \to B$$

telle que pour tout $C \subseteq A$ on a $C \sim g(C)$. Si A est paradoxal, il existe A_1 et A_2 deux sous-ensembles de A tels que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A_1 \sim A$ et $A_2 \sim A$. On a aussi par transitivité

$$A_1 \sim B \quad \text{et} \quad A_2 \sim B,$$

et puisque $A_1 \subseteq A$ et $A_2 \subseteq A$, on a

$$A_1 \sim g(A_1) \quad \text{et} \quad A_2 \sim g(A_2).$$

On en tire que

$$B \sim g(A_1) \quad \text{et} \quad B \sim g(A_2).$$

De plus $g(A_1) \cap g(A_2) = \emptyset$ car g est bijectif. Ceci prouve que B est paradoxal. □

Il est assez naturel de se demander ce qu'il advient du caractère paradoxal d'un ensemble lorsqu'on le dilate ou lorsqu'on le translate. La réponse à ces questions fait l'objet des deux propositions suivantes.

Proposition 1.2.11. *Soient E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ et G un groupe d'isomorphismes agissant sur E. Dans ces conditions, si un sous-ensemble A de E est paradoxal pour G alors pour tout $r \in \mathbb{K}_0$,*

$$rA = \{ra \mid a \in A\}$$

est paradoxal pour G, autrement dit, un dilaté d'un ensemble paradoxal est paradoxal. De plus, le résultat reste vrai si nous supposons que G contient toutes les translations de E.

Démonstration. Par hypothèse, il existe A_1, A_2 deux sous-ensembles disjoints de A tels que

$$A_1 \sim A \quad \text{et} \quad A_2 \sim A.$$

Soit $r \in \mathbb{K}_0$, il est clair que rA_1 et rA_2 sont des sous-ensembles disjoints de rA. Montrons que $rA_1 \sim rA$ pour le groupe G. Il existe $(A_{1,i})_{i=1}^n$ une partition de A_1 et $(B_i)_{i=1}^n$ une partition de A pour lesquelles il existe $g_1, \ldots, g_n \in G$ tels que

$$g_i \cdot A_{1,i} = B_i$$

pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Soit $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$. Si g_{i_0} est un isomorphisme alors par linéarité, $g_{i_0} \cdot (rA_{1,i_0}) = r(g_{i_0} \cdot A_{1,i_0}) = rB_{i_0}$ et ainsi, rA_{1,i_0} est congruent à rB_{i_0}. Si g_{i_0} est une translation alors il existe $x_0 \in E$ tel que

$$A_{1,i_0} + x_0 = B_{i_0},$$

d'où

$$rA_{1,i_0} + rx_0 = rB_{i_0}.$$

Il existe donc une translation $h_0 \in G$ ($h_0 : x \mapsto x + rx_0$) telle que

$$h_0 \cdot (rA_{1,i_0}) = rB_{i_0}$$

et donc rA_{1,i_0} est congruent à rB_{i_0}. Finalement,

$$(rA_{1,i})_{i=1}^n \quad \text{et} \quad (rB_i)_{i=1}^n$$

sont des partitions de rA_1 et rA respectivement telles que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $rA_{1,i}$ est congruent à rB_i, ce qui implique $rA_1 \sim rA$. Par un raisonnement similaire, on obtient $rA_2 \sim rA$, ce qui prouve que rA est paradoxal pour G. □

Proposition 1.2.12. *Soient E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ et G un groupe agissant sur E qui contient toutes les translations de E. Si un sous-ensemble A de E est paradoxal pour G alors pour tout $r \in \mathbb{K}$,*

$$A + r = \{a + r \mid a \in A\}$$

est paradoxal pour G. Autrement dit, tout translaté d'un ensemble paradoxal est paradoxal.

Démonstration. C'est évident car

$$A \sim A + r$$

pour G et il suffit alors d'utiliser le théorème 1.2.10 pour conclure. □

Le théorème suivant est le *paradoxe de Hausdorff*, qui dit qu'à un ensemble dénombrable près, la sphère S^2 est paradoxale sous l'action du groupe $SO(3)$. Nous admettons ce théorème ; pour une démonstration, nous conseillons au lecteur [10].

Notons que ce paradoxe a été publié dans [7] et c'est la première fois de l'histoire qu'on voit apparaître la notion d'ensemble paradoxal.

Remarque 1.2.13. La démonstration de ce théorème requiert l'axiome du choix. Lorsque l'utilisation de cet axiome est nécessaire, on notera **(AC)** à coté de la proposition concernée.

Théorème 1.2.14 (Paradoxe de Hausdorff **(AC)**)**.** *Il existe un sous-ensemble, dénombrable D de la sphère S^2 tel que $S^2 \setminus D$ est paradoxal sous l'action du groupe $SO(3)$.*

Il est montré dans [10] que pour n'importe quelle partie dénombrable D de la sphère S^2,

$$S^2 \setminus D \sim S^2$$

pour le groupe $SO(3)$. Ainsi, on en tire que S^2 est paradoxal pour le groupe $SO(3)$ (théorème 1.2.10 combiné au paradoxe de Hausdorff). On peut étendre le caractère paradoxal de S^2 à $B(0,1) \setminus \{0\} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < |x| < 1\}$; c'est-à-dire la boule unité ouverte privée de l'origine. Pour ce faire, si $A \subseteq S^2$, on pose

$$A' = \{\lambda a \mid \lambda \in]0,1[,\ a \in A\}$$

et on montre que si A est paradoxal alors A' l'est aussi [3]. Et il est clair que

$$B(0,1) \setminus \{0\} = (S^2)'.$$

Finalement, S^2 et $B(0,1) \setminus \{0\}$ sont des ensembles paradoxaux sous l'action du groupe $SO(3)$. Puisque celui-ci est un groupe d'isomorphismes agissant sur $\mathbb{R}^3$, par la proposition 1.2.11, pour tout $r > 0$,

$$B(0,r) \setminus \{0\}$$

est paradoxal pour le groupe $SO(3)$ et donc en particulier pour le groupe $G(3)$. De plus, on peut montrer que pour tout $r > 0$,

$$B(0,r) \setminus \{0\} \sim B(0,r)$$

pour le groupe des isométries[3]. On en tire que $B(0,r)$ est paradoxal pour le groupe $G(3)$, pour tout $r > 0$. Par la proposition 1.2.12, tout translaté de $B(0,r)$ $(r > 0)$ est toujours paradoxal pour $G(3)$. Ainsi, toute boule ouverte de $\mathbb{R}^3$ est paradoxale sous l'action du groupe des isométries.

Le résultat suivant[3] permet de montrer que toutes les boules de $\mathbb{R}^3$ sont équidécomposables entre elles.

Théorème 1.2.15. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un $\mathbb{K}$-vectoriel topologique séparé. Soit G un groupe agissant sur X qui contient toutes les translations des éléments de X. Si A et B sont deux sous-ensembles bornés de X paradoxaux , d'intérieur non vide et inclus dans un compact, alors $A \sim B$.*

Nous obtenons donc le théorème suivant.

Théorème 1.2.16 (AC). *Deux boules ouvertes de $\mathbb{R}^3$ sont toujours équidécomposables sous l'action du groupe des isométries.*

Démonstration. On utilise le fait que toute boule ouverte de $\mathbb{R}^3$ est paradoxale sous l'action du groupe des isométries ainsi que le théorème 1.2.15. □

3. Le lecteur pourra consulter [10] pour une démonstration détaillée.

Nous sommes à présent sur le point d'obtenir le paradoxe de Banach-Tarski. En effet, la prochaine proposition est la dernière étape pour l'obtention de celui-ci.

Proposition 1.2.17. *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{B}$ une base de cet espace. Soit aussi G un groupe agissant sur X. Si tous les éléments de la base $\mathcal{B}$ sont équidécomposables entre eux alors pour tous $A, B \subseteq X$ d'intérieur non vide pour lesquels il existe $X_1, X_2 \in \mathcal{B}$ tels que $A \subseteq X_1$ et $B \subseteq X_2$, on a $A \sim B$.*

Démonstration. Etant donné que A, B sont d'intérieur non vide, il existe $Y_1, Y_2 \in \mathcal{B}$ tels que

$$Y_1 \subseteq A \subseteq X_1 \quad \text{et} \quad Y_2 \subseteq B \subseteq X_2.$$

Par hypothèse, $X_2 \sim Y_1$ et donc vu le lemme 1.2.4 il existe une bijection $g : X_2 \to Y_1$ telle que $B \sim g(B) \subseteq Y_1 \subseteq A$. Par un raisonnement analogue, on montre que A est équidécomposable à une partie de B. Ainsi, par le théorème 1.2.6, on obtient $A \sim B$ sous l'action du groupe G. ☐

On peut maintenant donner le paradoxe de Banach-Tarski dans $\mathbb{R}^3$.

Théorème 1.2.18 (Paradoxe de Banach-Tarski **(AC)**)**.** *Deux ensembles bornés et d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^3$ sont équidécomposables sous l'action du groupe des isométries.*

Démonstration. Il suffit d'utiliser la proposition 1.2.17, puisque les boules ouvertes forment une base de la topologie de $\mathbb{R}^3$ et qu'elles sont toutes équidécomposables entre elles. ☐

On en tire un corollaire immédiat.

Corollaire 1.2.19 (**AC**)**.** *Tout ensemble borné et d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^3$ est paradoxal sous l'action du groupe des isométries.*

Démonstration. Si $A \subseteq \mathbb{R}^3$ est borné et d'intérieur non vide alors $A \sim B(0, 1)$. On conclut par le théorème 1.2.10, puisque $B(0, 1)$ est paradoxal sous l'action du groupe des isométries. ☐

Une question naturelle à se poser est de savoir si le paradoxe de Banach-Tarski s'étend à d'autres dimensions.

Pour le **cas $\boldsymbol{n > 3}$**, la réponse est oui **(AC)**. Il suffit de montrer que les hypercubes centrés en 0

$$H_n(0, r) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| < \frac{r}{2} \; \forall i \in \{1, \ldots, n\}\} \qquad (r > 0),$$

sont paradoxaux pour l'action du groupe $G(n)$. Pour ce faire, on pose

$$p : \mathcal{P}(\mathbb{R}^3) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \quad A \mapsto A \times \{(x_4, \ldots, x_n) \mid |x_i| < \frac{r}{2} \; \forall i \in \{4, \ldots, n\}\}$$

et on montre que si A est paradoxal alors $p(A)$ aussi [4]. On a

$$p(C_3(0,r)) = H_n(0,r)$$

où

$$C_3(0,r) = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid |x_i| < \frac{r}{2} \ \forall i \in \{1,2,3\}\}.$$

Enfin, il suffit de procéder comme dans le cas $n = 3$, puisque les hypercubes $H_n(x,r)$ ($x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$) forment une base de la topologie de $\mathbb{R}^n$.

Pour le **cas $n = 1$**, la réponse est non. On peut même montrer que $\mathbb{R}$ ne contient aucun ensemble paradoxal [5].

Pour le **cas $n = 2$**, la réponse est également négative. Cependant, contrairement à $\mathbb{R}$, il existe [6] des ensembles paradoxaux dans $\mathbb{R}^2$, mais ceux-ci sont tous d'intérieur vide, comme nous le montrerons à la fin de la section 1.4.

1.3 Notions d'algèbre de Boole

Puisque nous avons fini de présenter les grandes étapes menant au paradoxe de Banach-Tarski, nous allons à présent montrer qu'il existe une mesure issue de la mesure de Lebesgue définie sur tout $\mathbb{R}^2$, comme annoncé. Afin d'y parvenir, nous avons besoin de la définition d'une *algèbre de Boole*, ainsi que de quelques-unes de leurs propriétés élémentaires, ceci fait l'objet de cette section.

Définition 1.3.1. Soient $\mathcal{A}$ un ensemble non vide, $\wedge, \vee$ deux opérations binaires et internes [7] définie sur $\mathcal{A}$ et * une opération unaire et interne définie sur $\mathcal{A}$ également. Le quadruplet $(\mathcal{A}, \wedge, \vee, ^*)$ est une *algèbre de Boole* si

(i) $a \wedge b = b \wedge a$ et $a \vee b = b \vee a$ (commutativité) ;

(ii) $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ et $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ (associativité) ;

(iii) $(a \wedge b) \vee b = b$ et $(a \vee b) \wedge b = b$ (absorption) ;

(iv) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ et $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ (distributivité) ;

(v) $(a \wedge a^*) \vee b = b$ et $(a \vee a^*) \wedge b = b$ (complémentarité).

On pose $1 = a \vee a^*$ et $0 = a \wedge a^*$.

---

4. Une démonstration très similaire et faite en détail se trouve à la section 2.4.2 de ce travail

5. Une esquisse de la démonstration sera faite à la remarque 2.4.5 de ce travail.

6. Le *paradoxe de Sierpinski-Mazurkiewicz* nous prouve l'existence d'ensemble paradoxal dans $\mathbb{R}^2$ pour le groupe $G(2)$. Il donne même une description explicite d'un ensemble paradoxal : si $u \in \mathbb{C}$ est un nombre transcendant (i.e. qui n'annule aucun polynôme à coefficients rationnels) de module 1, alors l'ensemble

$$\{a_0 + a_1 u + \cdots + a_n u^n \mid n \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{N}\ \forall i \in \{1,\ldots,n\}\}$$

est paradoxal pour le groupe $G(2)$. Une démonstration pourra être trouvée dans [23].

7. L'opération $\wedge$ est appelée inf et l'opération $\vee$ est appelée sup.

Dans la suite, on écrira $\mathcal{A}$ pour représenter l'algèbre de Boole $(\mathcal{A}, \wedge, \vee, ^*)$.

Remarques 1.3.2. On tire immédiatement de cette définition les résultats suivants :

1. $a \wedge 1 = a$ et $a \vee 0 = a$.
   Ces égalités découlent de la définition de 1 et 0 et de (iii).
2. $a \vee a = a$.
   On a $a \vee a = (a \vee a) \wedge 1 = (a \vee a) \wedge (a \vee a^*) = a \vee (a \wedge a^*) = a \vee 0 = a$.
3. $a \wedge a = a$.
   On a $a \wedge a = (a \wedge a) \vee 0 = (a \wedge a) \vee (a \wedge a^*) = a \wedge (a \vee a^*) = a \wedge 1 = a$.
4. $(a^*)^* = a$.
   On a
   $$a = ((a^*)^* \vee a^*) \wedge a = ((a^*)^* \wedge a) \vee (a^* \wedge a) = (a^*)^* \wedge a$$
   et
   $$(a^*)^* \wedge a = ((a^*)^* \wedge a) \vee ((a^*)^* \wedge a^*) = (a^*)^* \wedge (a \vee a^*) = (a^*)^*.$$

Définition 1.3.3. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Boole. On définit la relation suivante sur $\mathcal{A}$

$$a \leq b \iff a \wedge b = a.$$

Il est aisé de vérifier qu'il s'agit d'une relation d'ordre [8] sur $\mathcal{A}$.

Remarques 1.3.4.

1. On a
   $$a \wedge b = a \iff a \vee b = b.$$
   En effet, si $a \wedge b = a$ alors $a \vee b = (a \wedge b) \vee b = b$ par l'axiome d'absorption. De même, si $a \vee b = b$ alors $a \wedge b = a \wedge (a \vee b) = a$. Autrement dit, $a \leq b$ si et seulement si $a \vee b = b$.
2. Il est clair que 1 est l'élément maximum de l'algèbre de Boole $\mathcal{A}$ et 0 l'élément minimum.

Exemple 1.3.5. Si A est un ensemble non vide, le quadruplet $(\mathcal{P}(A), \cap, \cup, \complement)$ est une algèbre de Boole où $1 = A$, $0 = \emptyset$ et où la relation d'ordre est l'inclusion.

Définition 1.3.6. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Boole. Un sous-ensemble non vide $\mathcal{A}_0$ de $\mathcal{A}$ est une *sous-algèbre de Boole* de $\mathcal{A}$ si

$$a, b \in \mathcal{A}_0 \Rightarrow (a \wedge b,\ a \vee b \text{ et } a^* \in \mathcal{A}_0).$$

8. Une relation est une *relation d'ordre* si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

Remarques 1.3.7.

1. Toute sous-algèbre de Boole $\mathcal{A}_0$ contient 1 et 0.
   En effet, si $a \in \mathcal{A}_0$ alors $1 = a \vee a^*, 0 = a \wedge a^* \in \mathcal{A}_0$.
2. Une sous-algèbre de Boole $\mathcal{A}_0$ de $\mathcal{A}$ est une algèbre de Boole où on a restreint les opérations de $\mathcal{A}$ à $\mathcal{A}_0$.
3. L'intersection de sous-algèbres de Boole est une sous-algèbre de Boole.

Pour tout $X \subseteq \mathcal{A}$ où $\mathcal{A}$ est une algèbre de Boole, on peut à présent définir la plus petite sous-algèbre de Boole contenant X, qui est l'intersection de toutes les sous-algèbres de Boole de $\mathcal{A}$ contenant X.

Définition 1.3.8. Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Boole et $X \subseteq \mathcal{A}$ un ensemble. La sous-algèbre *engendrée* par X est la plus petite sous-algèbre de Boole de $\mathcal{A}$ contenant X. On la note $\langle X \rangle$.

On peut montrer le résultat suivant. Pour une démonstration nous conseillons [4] au lecteur.

Proposition 1.3.9. *Une sous-algèbre de Boole engendrée par un ensemble fini est finie.*

Définition 1.3.10. Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Boole et $b \in \mathcal{A}$. On pose

$$\mathcal{A}_b = \{a \in \mathcal{A} \mid a \leq b\}$$

et on définit $\vee_{\mathcal{A}_b}$, $\wedge_{\mathcal{A}_b}$ et ${}^{*\mathcal{A}_b}$ des opérations sur $\mathcal{A}_b$ comme étant

$$\begin{aligned} a_1 \vee_{\mathcal{A}_b} a_2 &= a_1 \vee a_2 \\ a_1 \wedge_{\mathcal{A}_b} a_2 &= a_1 \wedge a_2 \wedge b \\ a^{*\mathcal{A}_b} &= a^* \wedge b \end{aligned}$$

pour tous $a_1, a_2, a \in \mathcal{A}_b$. Dans ces conditions, la quadruplet $(\mathcal{A}_b, \wedge_{\mathcal{A}_b}, \vee_{\mathcal{A}_b}, {}^{*\mathcal{A}_b})$ est une algèbre de Boole. Et on a $a \wedge_{\mathcal{A}_b} a^{*\mathcal{A}_b} = 0$ et $a \vee_{\mathcal{A}_b} a^{*\mathcal{A}_b} = b$ si $a \in \mathcal{A}_b$.

Définition 1.3.11. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Boole. Un élément $a \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ est un *atome* si

$$(b \in \mathcal{A} \text{ et } b \leq a) \;\Rightarrow\; (b = 0 \text{ ou } b = a).$$

Exemple 1.3.12. Les atomes de l'algèbre de Boole $(\mathcal{P}(A), \cap, \cup, \complement)$ où $A \neq \emptyset$ sont les singletons. En effet, il est clair que les singletons sont des atomes. De plus, si $B \in \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ n'est pas un singleton alors il existe $b \in B$ tel que

$$\{b\} \subsetneq B.$$

Ainsi, $\{b\} \neq \emptyset$ et $\{b\} \neq B$; donc B n'est pas un atome.

La proposition suivante donne une autre caractérisation des atomes.

Proposition 1.3.13. *Si $a \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ alors a est un atome de $\mathcal{A}$ si et seulement si pour tout $b \in \mathcal{A}$, $a \leq b$ ou $a \wedge b = 0$.*

Démonstration.
Si a est un atome et si $b \in \mathcal{A}$, on a $(a \wedge b) \wedge a = a \wedge b$ donc $a \wedge b \leq a$; vu la définition des atomes, on a alors $a \wedge b = 0$ ou $a \wedge b = a$ (i.e. $a \leq b$).

Montrons à présent que la condition est suffisante. Soit $b \in \mathcal{A}$ tel que $b \leq a$. Si $b \neq 0$, alors $b = a \wedge b \neq 0$ et donc par hypothèse, $a \leq b$. Par antisymétrie, il vient alors $b = a$. □

Remarque 1.3.14. La condition $a \wedge b = 0$ de la proposition précédente est équivalente à $a \leq b^*$ (i.e. $a \wedge b^* = a$). En effet, si $a \wedge b = 0$ alors $a \wedge b^* = (a \wedge b^*) \vee (a \wedge b) = a \wedge 1 = a$ et si $a \wedge b^* = a$ alors $a \wedge b = (a \wedge b^*) \wedge b = 0$.

Remarque 1.3.15. Si $a, b \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ sont des atomes alors $a \wedge b = 0$ si $a \neq b$. En effet, vu la proposition 1.3.13 et puisque a est un atome, on a $a \leq b$ ou $a \wedge b = 0$. Si $a \leq b$ alors $a = b$ ou $a = 0$ car b est un atome, ce qui est impossible. Donc $a \wedge b = 0$.

Nous aimerions montrer un résultat très important pour la suite qui affirme que n'importe quel élément d'une algèbre de Boole finie s'écrit comme la sup des atomes plus petit. Pour cela, nous définissons une algèbre de Boole atomique et nous montrons que les algèbres de Boole finies sont atomiques.

Définition 1.3.16. Une algèbre de Boole $\mathcal{A}$ est *atomique* si pour tout $a \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$, il existe un atome b de $\mathcal{A}$ tel que $b \leq a$.

Proposition 1.3.17. *Toute algèbre de Boole finie est atomique.*

Démonstration. La méthode utilisée pour cette démonstration est du même type que la méthode de descente infinie de Fermat [9]. Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Boole finie et $a_0 \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$. Si a_0 est un atome, il n'y a rien à faire car $a_0 \leq a_0$. Sinon, il existe $a_1 \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ tel que $a_1 \leq a_0$ et $a_1 \neq a_0$; si a_1 est un atome, le résultat est démontré. Sinon, il existe $a_2 \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ tel que $a_2 \leq a_1$ et $a_2 \neq a_1$; si a_2 est un atome, le résultat est démontré. En étirant le procédé et puisque l'algèbre est finie, il existe $a_n \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ un atome tel que $a_n \leq a_{n-1} \leq a_0$ et $a_n \neq a_{n-1}$, ce qui permet de conclure. □

Nous pouvons à présent montrer le théorème souhaité.

9. Celle-ci utilise le fait que toute suite décroissante d'un ensemble ordonné possédant un plus petit élément, est forcément finie.

Théorème 1.3.18. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Boole finie. Pour tout $b \in \mathcal{A}$, on a*

$$b = \bigvee_{\substack{a \leq b \\ a \text{ atome}}} a.$$

Démonstration. Soit $b \in \mathcal{A}$. Posons

$$c = \bigvee_{\substack{a \leq b \\ a \text{ atome}}} a,$$

il est clair que $c \leq b$ car [10]

$$c \wedge b = \Big(\bigvee_{\substack{a \leq b \\ a \text{ atome}}} a \Big) \wedge b = \bigvee_{\substack{a \leq b \\ a \text{ atome}}} (a \wedge b) = \bigvee_{\substack{a \leq b \\ a \text{ atome}}} a = c.$$

Il reste à montrer que $b \leq c$; c'est-à-dire $b \wedge c = b$ ou encore $b \wedge c^* = 0$, vu la remarque 1.3.14 et puisque $(c^*)^* = c$. Procédons par l'absurde et supposons que $b \wedge c^* \neq 0$. Par la proposition 1.3.17 et puisque $\mathcal{A}$ est fini, $\mathcal{A}$ est atomique et il existe alors a_0 un atome tel que $a_0 \leq b \wedge c^*$. Or,

$$(b \wedge c^*) \wedge b = b \wedge c^*$$

donc $b \wedge c^* \leq b$ et par suite, $a_0 \leq b$. De plus, $a_0 \leq c$ car $a_0 \wedge \Big(\bigvee_{\substack{a \leq b \\ a \text{ atome}}} a \Big) = \bigvee_{\substack{a \leq b \\ a \text{ atome}}} (a_0 \wedge a)$ et on a

$$\begin{cases} a_0 \wedge a = a_0 & \text{si } a = a_0 \\ a_0 \wedge a = 0 & \text{si } a \neq a_0 \end{cases} \qquad \text{remarque 1.3.15.}$$

Pour résumer, on a

$$a_0 \leq b \wedge c^*, \quad a_0 \leq b \quad \text{et} \quad a_0 \leq c$$

et on obtient ainsi [11],

$$a_0 = a_0 \wedge ((b \wedge c^*) \wedge b \wedge c) = a_0 \wedge b \wedge c^* \wedge c = 0,$$

ce qui est absurde puisque a_0 est un atome. □

1.4 Théorème d'extension de mesure

Désormais, nous avons à notre disposition tous les outils pour pouvoir construire une extension de la mesure de Lebesgue définie sur $\mathbb{R}^2$. Plus précisément, nous démontrons le théorème qui étend sur une algèbre de Boole une mesure définie sur un de ses sous-anneaux.

10. Puisque l'algèbre est finie, il y a un nombre fini d'atomes a tel que $a \leq b$; ainsi, on montre facilement que

$$\Big(\bigvee_{\substack{a \leq b \\ a \text{ atome}}} a \Big) \wedge b = \bigvee_{\substack{a \leq b \\ a \text{ atome}}} (a \wedge b).$$

11. Il est évident que si $a \leq a_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ alors $a \leq a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$.

1.4.1 Théorème d'extension

Commençons par une série de définition.

Définition 1.4.1. Un *automorphisme* $g : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ d'une algèbre de Boole $\mathcal{A}$ est une bijection qui préserve les opérations $\wedge, \vee, ^*$.

Définition 1.4.2. Une *mesure* μ définie sur une algèbre de Boole $\mathcal{A}$ est une application

$$\mu : \mathcal{A} \to [0; \infty]$$

finiment additive (i.e. $\mu(a \vee b) = \mu(a) + \mu(b)$ $\forall a, b \in \mathcal{A}$ tels que $a \wedge b = 0$) telle que $\mu(0) = 0$.

Définition 1.4.3. Une *mesure exhaustive et finiment additive* sur l'ensemble[12] X est une mesure $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0; \infty]$ définie sur l'algèbre de Boole $\mathcal{P}(X)$.

Définition 1.4.4. Soit G un groupe d'automorphismes d'une algèbre de Boole $\mathcal{A}$. Une mesure μ définie sur $\mathcal{A}$ est *G-invariante* si $\mu(g(a)) = \mu(a)$ pour tout $a \in \mathcal{A}$ et pour tout $g \in G$.

Définition 1.4.5. Un *sous-anneau* $\mathcal{A}_0$ d'une algèbre de Boole $\mathcal{A}$ est un sous-ensemble non vide de $\mathcal{A}$ tel que

$$a, b \in \mathcal{A}_0 \ \Rightarrow \ a \vee b, \ a \wedge b^* \in \mathcal{A}_0.$$

Remarques 1.4.6.

1. L'intersection de sous-anneaux est un sous-anneau.
2. Une sous-algèbre de Boole est toujours un sous-anneau. En particulier, l'intersection d'une sous-algèbre de Boole avec un sous-anneau est un sous-anneau.
3. Un sous-anneau contient toujours 0.

Pour plus d'informations sur l'exemple suivant, le lecteur peut consulter [16].

Exemple 1.4.7. La collection des ensembles Lebesgue-mesurables dans $\mathbb{R}^n$ est un sous-anneau de l'algèbre de Boole de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ car l'ensemble des ensembles Lebesgue-mesurables est, en particulier, stable par passage au complémentaire, union finie et intersection finie.

Définition 1.4.8. Soit G un groupe d'automorphismes d'une algèbre de Boole $\mathcal{A}$. Le sous-anneau $\mathcal{A}_0$ de $\mathcal{A}$ est *G-invariant* si pour tout $g \in G$ on a $g(\mathcal{A}_0) \subseteq \mathcal{A}_0$.

Remarque 1.4.9. On peut définir une mesure μ sur le sous-anneau $\mathcal{A}_0$ de la même façon que sur l'algèbre de Boole $\mathcal{A}$, c'est-à-dire une application $\mu : \mathcal{A}_0 \to [0; \infty]$ finiment additive et telle que $\mu(0) = 0$.

Exemple 1.4.10. La mesure de Lebesgue est définie sur le sous-anneau des ensembles Lebesgue-mesurables. De plus, elle est $G(n)$-invariante.

12. Pour plus d'informations sur les mesures définies sur un ensemble, nous conseillons [16] au lecteur.

La proposition suivante est un premier grand pas vers notre objectif, à savoir étendre la mesure de Lebesgue à tout $\mathbb{R}^2$ en une mesure $G(2)$-invariante et finiment additive.

Proposition 1.4.11 (AC). *Soit $\mathcal{A}_0$ un sous-anneau d'une algèbre de Boole $\mathcal{A}$. Si μ est une mesure sur $\mathcal{A}_0$ alors il existe une mesure $\overline{\mu}$ qui étend μ sur $\mathcal{A}$.*

Démonstration. Supposons dans un premier temps que $\mathcal{A}$ est fini et procédons par récurrence sur le nombre d'atomes de $\mathcal{A}$.

Cas de base : $\mathcal{A} = \{0, 1\}$

Soit $\mathcal{A}_0 = \{0\}$ et on pose $\overline{\mu} = 0$ sur $\mathcal{A}$, soit $\mathcal{A}_0 = \{0, 1\}$ et il n'y a rien à faire.

Induction :

Si $\mathcal{A}_0 = \{0\}$ alors $\overline{\mu} = 0$ sur $\mathcal{A}$ convient. Si $\mathcal{A}_0 \neq \{0\}$ soit $b \in \mathcal{A}_0 \setminus \{0\}$ minimal dans $\mathcal{A}_0$, i.e. $(a \in \mathcal{A}_0,\ a \leq b) \Rightarrow (a = b \text{ ou } a = 0)$. On a

$$\mathcal{A}_{b^*} = \{a \in \mathcal{A} \mid a \leq b^*\} \subseteq \mathcal{A}$$

et il est clair que $\mathcal{A}_0 \cap \mathcal{A}_{b^*}$ est un sous-anneau de l'algèbre de Boole $\mathcal{A}_{b^*}$. Une simple vérification nous apprend que les atomes de $\mathcal{A}_{b^*}$ sont des atomes de $\mathcal{A}$ et nous allons montrer qu'il existe un atome de $\mathcal{A}$ qui n'est pas un atome de $\mathcal{A}_{b^*}$. Dans ce cas, on pourra appliquer l'hypothèse de récurrence à la mesure $\mu_{|\mathcal{A}_0 \cap \mathcal{A}_{b^*}}$ définie sur le sous-anneau $\mathcal{A}_0 \cap \mathcal{A}_{b^*}$ de l'algèbre de Boole $\mathcal{A}_{b^*}$.

Par la proposition 1.3.17 et puisque $\mathcal{A}$ est fini, il existe $a_0 \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ un atome de $\mathcal{A}$ tel que $a_0 \leq b$. De plus, cet atome n'appartient pas à $\mathcal{A}_{b^*}$, car sinon $a_0 \leq b^*$, d'où

$$\begin{aligned} a_0 \wedge b^* = a_0 &\Rightarrow (a_0 \wedge b) \wedge b^* = a_0 \qquad \text{car } a_0 \wedge b = a_0 \\ &\Rightarrow a_0 \wedge 0 = a_0, \end{aligned}$$

ce qui est absurde. Par hypothèse de récurrence, il existe une mesure $\nu : \mathcal{A}_{b^*} \to [0; \infty]$ qui étend $\mu_{|\mathcal{A}_0 \cap \mathcal{A}_{b^*}}$. Si $a \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ est un atome alors, vu la proposition 1.3.13 et la remarque 1.3.14, $a \leq b^*$ ou $a \leq b$; on pose

$$\begin{cases} \overline{\mu}(a) &= \nu(a) & \text{si } a \leq b^* \\ \overline{\mu}(a) &= \mu(b) & \text{si } a = a_0 \\ \overline{\mu}(a) &= 0 & \text{si } a \leq b \text{ et } a \neq a_0. \end{cases}$$

De cette façon $\overline{\mu}$ est bien défini [13] sur tous les atomes de $\mathcal{A}$. Si $c \in \mathcal{A}$ on pose,

$$\overline{\mu}(c) = \sum_{\substack{a \leq c \\ a \text{ atome}}} \overline{\mu}(a)$$

13. Précédemment, on a déjà remarqué que si a est un atome tel que $a \leq b$ alors $a \not\leq b^*$.

et l'application $\overline{\mu} : \mathcal{A} \to [0;\infty]$ est celle recherchée car, comme nous allons le montrer, elle est finiment additive et on a $\overline{\mu}_{|\mathcal{A}_0} = \mu$ sur $\mathcal{A}_0$. Montrons d'abord qu'elle est finiment additive. Soient $u, v \in \mathcal{A}$ tels que $u \wedge v = 0$, on a

$$\{a \in \mathcal{A} \mid a \text{ atome},\ a \leq u \vee v\} = \{a \in \mathcal{A} \mid a \text{ atome},\ a \leq u\} \cup \{a \in \mathcal{A} \mid a \text{ atome},\ a \leq v\}$$

de façon disjointe. En effet, si $a \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ est un atome tel que $a \leq u$ et $a \leq v$ alors $a = a \wedge u \wedge v = 0$, ce qui n'est pas possible. Pour montrer l'égalité, procédons par double inclusion. Soit a un atome de $\mathcal{A}$ tel que $a \leq u \vee v$ et $a \not\leq u$ (en particulier, par la proposition 1.3.13, $a \wedge u = 0$). On a

$$a = a \wedge (u \vee v) = (a \wedge u) \vee (a \wedge v) = a \wedge v,$$

ce qui montre que $a \leq v$. Soit a un atome tel que $a \leq u$ (le cas où $a \leq v$ est similaire). On sait que $a \not\leq v$ et par conséquent, $a \wedge v = 0$ (proposition 1.3.13) et par suite,

$$a \wedge (u \vee v) = (a \wedge u) \vee (a \wedge v) = a,$$

ce qui montre que $a \leq u \vee v$. Finalement,

$$\overline{\mu}(u \vee v) = \sum_{\substack{a \leq u \vee v \\ a \text{ atome}}} \overline{\mu}(a) = \sum_{\substack{a \leq u \\ a \text{ atome}}} \overline{\mu}(a) + \sum_{\substack{a \leq v \\ a \text{ atome}}} \overline{\mu}(a) = \overline{\mu}(u) + \overline{\mu}(v)$$

et $\overline{\mu}$ est finiment additive. Pour montrer que $\overline{\mu}_{|\mathcal{A}_0} = \mu$ sur $\mathcal{A}_0$, commençons par remarquer que $\overline{\mu}_{|\mathcal{A}_{b^*}} = \nu$, car si $c \in \mathcal{A}_{b^*}$ (i.e. $c \leq b^*$), on a

$$\begin{aligned}
\overline{\mu}(c) &= \sum_{\substack{a \leq c \\ a \text{ atome}}} \overline{\mu}(a) \\
&= \sum_{\substack{a \leq c \\ a \text{ atome}}} \nu(a) && a \leq c \leq b^* \Rightarrow a \leq b^* \\
&= \nu\Big(\bigvee_{\substack{a \leq c \\ a \text{ atome}}} a\Big) && \nu \text{ est finiment additive et remarque 1.3.15} \\
&= \nu(c) && \mathcal{A} \text{ est fini et théorème 1.3.18.}
\end{aligned}$$

Montrons maintenant que $\overline{\mu}(d) = \mu(d)$ si $d \in \mathcal{A}_0$. Soit $d \in \mathcal{A}_0$; on sait que $b \wedge d \leq b$ et par minimalité de b, on obtient $b \leq d$ ou $d \wedge b = 0$. Dans le premier cas, on a $b \vee d = d$. Par conséquent, $d = (b \vee d) \wedge (b \vee b^*) = b \vee (d \wedge b^*)$ et il s'ensuit que

$$\overline{\mu}(d) = \overline{\mu}(b \vee (d \wedge b^*)) = \overline{\mu}(b) + \overline{\mu}(d \wedge b^*)$$

car $b \wedge (d \wedge b^*) = 0$. Or $d \wedge b^* \in \mathcal{A}_0 \cap \mathcal{A}_{b^*}$, donc $\overline{\mu}(d \wedge b^*) = \nu(d \wedge b^*) = \mu(d \wedge b^*)$. On a aussi

$$b = \bigvee_{\substack{a \leq b \\ a \text{ atome}}} a = a_0 \vee \bigvee_{\substack{a \leq b \\ a \text{ atome} \\ a \neq a_0}} a$$

et donc $\overline{\mu}(b) = \overline{\mu}(a_0) = \mu(b)$. Finalement,

$$\overline{\mu}(d) = \overline{\mu}(b) + \overline{\mu}(d \wedge b^*) = \mu(b) + \mu(d \wedge b^*) = \mu(b \vee (d \wedge b^*)) = \mu(d).$$

Dans le deuxième cas, $d \wedge b^* = (d \wedge b^*) \vee (d \wedge b) = d$ donc $d \in \mathcal{A}_0 \cap \mathcal{A}_{b^*}$. Il s'ensuit que $\overline{\mu}(d) = \nu(d) = \mu(d)$. Ainsi, dans tous les cas, $\overline{\mu}(d) = \mu(d)$ si $d \in \mathcal{A}_0$, d'où la conclusion.

Supposons à présent que $\mathcal{A}$ n'est pas fini. Soit $\mathcal{C}$ une sous-algèbre finie de $\mathcal{A}$. On pose

$$M(\mathcal{C}) = \{\nu \in [0;\infty]^{\mathcal{A}} \mid \nu_{|\mathcal{C}} \text{ mesure qui étend } \mu_{|\mathcal{C}\cap\mathcal{A}_0}\}$$

et vu le cas précédent, $M(\mathcal{C})$ est non vide ; de plus il est fermé. Soient $n \in \mathbb{N}_0$ et $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$ des sous-algèbres finies de $\mathcal{A}$. Dans ce cas, par la proposition 1.3.9, $\langle \mathcal{C}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_n \rangle$ est une sous-algèbre finie de $\mathcal{A}$ et on a

$$\emptyset \neq M(< \mathcal{C}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_n >) \subseteq M(\mathcal{C}_1) \cap \cdots \cap M(\mathcal{C}_n).$$

Par conséquent, étant donné que $[0;\infty]^{\mathcal{A}}$ est un compact (théorème de Tychonoff [14]) et que

$$\mathcal{M} = \{M(\mathcal{C}) \mid \mathcal{C} \text{ sous-algèbre finie de } \mathcal{A}\}$$

est une famille de fermés dont toutes les sous-familles finies sont d'intersection non vide, alors

$$\bigcap_{M(\mathcal{C})\in\mathcal{M}} M(\mathcal{C}) \neq \emptyset.$$

Un élément de cette intersection satisfait l'énoncé. En effet, si

$$\nu \in \bigcap_{M(\mathcal{C})\in\mathcal{M}} M(\mathcal{C})$$

alors $\nu : \mathcal{A} \to [0;\infty]$ et $\nu(0) = 0$. De plus, $\nu(u \vee v) = \nu(u) + \nu(v)$ si $u \wedge v = 0$ car $M(\langle u, v\rangle) \in \mathcal{M}$. Pour finir, si $u \in \mathcal{A}_0$ alors $\nu(u) = \mu(u)$ car $M(\langle u\rangle) \in \mathcal{M}$. □

Pour la suite, donnons deux définitions et rappelons un théorème.

Définition 1.4.12. Soit X un ensemble. L'application μ est une *moyenne* sur X si c'est une mesure exhaustive sur X, finiment additive telle que $\mu(X) = 1$.

Définition 1.4.13. Le groupe G est *moyennable* s'il existe une moyenne G-invariante sur G (G agissant sur lui-même par l'action de translation à gauche).

Théorème 1.4.14. *Soient X un ensemble et G un groupe qui agit sur X. Si μ est une mesure exhaustive G-invariante sur X et f une application définie sur X et à valeur dans* $[0;\infty]$*, alors*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int f(h\cdot x)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

pour tout $h \in G$.

Démonstration. Notons $\mathcal{S}^+$ l'ensemble des fonctions simples définies sur X à valeurs positives. Et rappelons que dans les conditions de l'énoncé, on a

$$\int f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \sup\{\int g(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \mid g \in \mathcal{S}^+ \text{ et } g \leq f\}.$$

Soit g une fonction simple sur X à valeurs positives telle que $g \leq f$. Il existe alors $n \in \mathbb{N}_0$, $a_1, \ldots, a_n > 0$ et $A_1, \ldots, A_n \subseteq X$ des ensembles deux à deux disjoints tels que

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}(x).$$

Soit $h \in G$, on a $g \circ h \leq f \circ h$ et

$$g(h \cdot x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}(h \cdot x) \leq f(h \cdot x)$$

pour tout $x \in X$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \int g(h \cdot x)\,\mathrm{d}\mu(x) &= \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(h^{-1} \cdot A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) \qquad\qquad \text{car } \mu \text{ est } G\text{-invariant} \\ &= \int g(x)\,\mathrm{d}\mu(x). \end{aligned}$$

On en déduit que $\int f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \leq \int f(h \cdot x)\,\mathrm{d}\mu(x)$ pour tout $h \in G$. De plus,

$$\int f(h \cdot x)\,\mathrm{d}\mu(x) \leq \int f(h \cdot (h^{-1} \cdot x))\,\mathrm{d}\mu(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

pour tout $h \in G$, ce qui permet de conclure. $\square$

Nous pouvons à présent démontrer le théorème qui nous intéresse.

Théorème 1.4.15 (Théorème d'extension de mesure (**AC**))**.** *Soit G un groupe d'automorphismes d'une algèbre de Boole $\mathcal{A}$. Soient $\mathcal{A}_0$ un sous-anneau G-invariant de $\mathcal{A}$ et μ une mesure G-invariante sur $\mathcal{A}_0$. Si G est moyennable alors μ peut être étendu en une mesure $\overline{\mu}$ sur $\mathcal{A}$ qui est G-invariante.*

Démonstration. Vu la proposition 1.4.11 il existe une mesure $\nu : \mathcal{A} \to [0; \infty]$ qui étend μ. Soit $\theta : \mathcal{P}(G) \to [0; 1]$ une moyenne G-invariante sur G. Pour $b \in \mathcal{A}$ on pose

$$f_b : G \to [0; \infty] \quad g \mapsto \nu(g^{-1}(b))$$

et on définit $\overline{\mu}$ de la façon suivante

$$\begin{cases} \overline{\mu}(b) = \int f_b\,\mathrm{d}\theta & \text{si } f_b \text{ est borné} \\ \overline{\mu}(b) = \infty & \text{si } f_b \text{ n'est pas borné} \end{cases}$$

pour tout $b \in \mathcal{A}$. Dans ce cas $\overline{\mu} : \mathcal{A} \to [0; \infty]$ est une mesure G-invariante qui étend μ. En effet, remarquons que si $b \in \mathcal{A}_0$, on a

$$\nu(g^{-1}(b)) = \mu(g^{-1}(b)) = \mu(b)$$

car $\mathcal{A}_0$ et μ sont G-invariants et par conséquent, $f_b(g) = \mu(b)$ pour tout $g \in G$. De plus, si f_b n'est pas borné, alors pour tout $r > 0$ il existe $g \in G$ tel que

$$f_b(g) \geq r,$$

c'est-à-dire $\mu(b) \geq r$ pour tout $r > 0$ et donc $f_b(g) = \mu(b) = \infty$. Ainsi, si $b \in \mathcal{A}_0$ on a

$$\overline{\mu}(b) = \int \mu(b) \, \mathrm{d}\theta = \mu(b)$$

si f_b est borné. Sinon $\overline{\mu}(b) = \infty$ et $\mu(b) = \infty$, ce qui montre que $\overline{\mu} = \mu$ sur $\mathcal{A}_0$. De plus, $\overline{\mu}$ est finiment additive. En effet, soient $a, b \in \mathcal{A}$ tels que $a \wedge b = 0$. Il suffit alors de remarquer que $f_{a \vee b} = f_a + f_b$.

Il reste à montrer que $\overline{\mu}(k(b)) = \overline{\mu}(b)$ pour tout $k \in G$ et pour tout $b \in \mathcal{A}$. Soient $k \in G$ et $b \in \mathcal{A}$. Si f_b n'est pas borné alors $f_{k(b)}$ non plus. En effet, pour tout $r > 0$, il existe $g \in G$ tel que $f_b(g) \geq r$ et par conséquent, $f_{k(b)}(k \circ g) \geq r$. Dans ce cas $\overline{\mu}(k(b)) = \overline{\mu}(b) = \infty$. Sinon, f_b est borné et on a

$$\begin{array}{rcll}
\overline{\mu}(k(b)) & = & \int f_{k(b)}(g) \, \mathrm{d}\theta(g) & \\
& = & \int f_b(k^{-1} \circ g) \, \mathrm{d}\theta(g) & \\
& = & \int f_b(g) \, \mathrm{d}\theta(g) & \text{théorème 1.4.14} \\
& = & \overline{\mu}(b), &
\end{array}$$

ce qui permet de conclure. □

1.4.2 Moyennabilité du groupe G(2)

Nous savons que $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2), \cap, \cup, \complement)$ est une algèbre de Boole et que les ensembles Lebesgue-mesurables forment un sous-anneau de cette algèbre. De plus, $G(2)$ est un groupe d'automorphismes pour lequel la mesure de Lebesgue est invariante. De cette façon, si $G(2)$ est moyennable et grâce au théorème 1.4.15, il existe une mesure exhaustive sur $\mathbb{R}^2$, $G(2)$-invariante, finiment additive qui étend la mesure de Lebesgue.

Montrons ainsi, que le groupe $G(2)$ est moyennable. Pour ce faire, nous prouvons, d'une part, que tout groupe commutatif est moyennable et, d'autre part, que si N est un sous-groupe normal d'un groupe G tel que N et $G/_N$ sont moyennables, alors G est moyennable.

Commençons par une proposition et un lemme.

Proposition 1.4.16 (**AC**). *Soient I un ensemble d'indices et G_i ($i \in I$) des groupes tels que pour tous $i, j \in I$, il existe $k \in I$ tel que G_i et G_j sont des sous-groupes de G_k. Supposons que G_i est moyennable pour tout $i \in I$. Alors $G = \bigcup_{i \in I} G_i$ est un groupe moyennable.*

Démonstration. Vu les hypothèses, il est clair que G est un groupe. Pour tout $i \in I$, notons μ_i une moyenne G_i-invariante sur G_i et posons

$$M_i = \{\mu \in [0;1]^{\mathcal{P}(G)} \mid \mu \text{ moyenne } G_i\text{-invariante}\}.$$

L'ensemble M_i est non vide et fermé pour tout $i \in I$, car on vérifie facilement que l'application

$$\mathcal{P}(G) \to [0;1] \quad A \mapsto \mu_i(A \cap G_i)$$

est un élément de M_i. Soient $i, j \in I$, il existe $k \in I$ tel que $G_i, G_j \subseteq G_k$ et par conséquent,

$$\emptyset \neq M_k \subseteq M_i \cap M_j.$$

On en tire que l'ensemble $\{M_i \mid i \in I\}$ est une famille de fermés dont toutes les sous-familles finies sont d'intersection non vide. Par compacité,

$$\bigcap_{i \in I} M_i \neq \emptyset$$

et si μ est un élément de cette intersection alors, μ est une moyenne G-invariante sur G et par suite, le groupe G est moyennable. $\square$

Remarque 1.4.17. Soient G un groupe et $\mathcal{C}$ la collection de tous les sous-groupes finiment engendrés de G. On a

$$G = \bigcup_{H \in \mathcal{C}} H$$

et si $H_1, H_2 \in \mathcal{C}$ alors il existe $H_3 \in \mathcal{C}$ tel que $H_1 \subseteq H_3$ et $H_2 \subseteq H_3$. Ainsi, pour montrer qu'un groupe est moyennable, il suffit de montrer que tous ses sous-groupes finiment engendrés le sont.

Lemme 1.4.18. *Soit $G = \langle g_1, \ldots, g_n \rangle$ un groupe commutatif. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\mu_\varepsilon : \mathcal{P}(G) \to [0;1]$ une application telle que*

(i) $\mu_\varepsilon(G) = 1$;

(ii) $\mu_\varepsilon(A \cup B) = \mu_\varepsilon(A) + \mu_\varepsilon(B)$ *pour tous* $A, B \subseteq G$ *tels que* $A \cap B = \emptyset$;

(iii) $|\mu_\varepsilon(A) - \mu_\varepsilon(g_i \cdot A)| \leq \varepsilon$ *pour tout* $A \subseteq G$ *et tout* $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Démonstration. Soient $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}_0$ tel que $\frac{2}{N} \leq \varepsilon$. On pose [14]

$$N^n \mu_\varepsilon(A) = \#\{(k_1, \ldots, k_n) \mid 1 \leq k_1, \ldots, k_n \leq N \text{ et } g_1^{k_1} \circ \cdots \circ g_n^{k_n} \in A\}$$

14. Où $\#X$ représente le cardinal de l'ensemble X.

pour tout $A \subseteq G$. On sait que

$$\#\{(k_1, \ldots, k_n) \mid 1 \leq k_1, \ldots, k_n \leq N \text{ et } g_1^{k_1} \circ \cdots \circ g_n^{k_n} \in A\} \leq N^n;$$

en particulier, le point (i) est vérifié et, de plus, le point (ii) est évident. Si $i \in \{1, \ldots, n\}$ alors, vu la commutativité, on a

$$\begin{aligned} & g_1^{k_1} \circ \cdots \circ g_i^{k_i} \cdots \circ g_n^{k_n} \in A \\ \Leftrightarrow \quad & g_i \circ g_1^{k_1} \circ \cdots \circ g_i^{k_i} \cdots \circ g_n^{k_n} \in g_i \cdot A \\ \Leftrightarrow \quad & g_1^{k_1} \circ \cdots \circ g_i^{k_i+1} \cdots \circ g_n^{k_n} \in g_i \cdot A \end{aligned}$$

et on en tire que

$$|\mu_\varepsilon(A) - \mu_\varepsilon(g_i \cdot A)| \leq \frac{2N^{n-1}}{N^n} = \frac{2}{N} \leq \varepsilon$$

pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$; d'où la conclusion. □

Proposition 1.4.19 (AC). *Tout groupe commutatif est moyennable.*

Démonstration. Vu la remarque 1.4.17, il suffit de montrer que si $H = \langle g_1, \ldots, g_n \rangle \subseteq G$ alors il est moyennable. Soit $\varepsilon > 0$, posons

$$M_\varepsilon = \{\mu \in [0;1]^{\mathcal{P}(H)} \mid \mu \text{ vérifie } (i), (ii) \text{ et } (iii) \text{ du lemme 1.4.18}\}$$

et par le lemme 1.4.18, $M_\varepsilon \neq \emptyset$. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, M_ε est fermé. Soient $p \in \mathbb{N}_0$ et $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p > 0$, on a

$$\emptyset \neq M_{\inf_{i=1}^{p} \varepsilon_i} \subseteq M_{\varepsilon_1} \cap \cdots \cap M_{\varepsilon_p}$$

et par compacité de $[0,1]^{\mathcal{P}(H)}$, on a $\bigcap_{\varepsilon>0} M_\varepsilon \neq \emptyset$. Soit

$$\mu \in \bigcap_{\varepsilon>0} M_\varepsilon,$$

on a trivialement $\mu(H) = 1$ et $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ pour tous $A, B \subseteq H$ tels que $A \cap B = \emptyset$. De plus, si $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$|\mu(A) - \mu(g_i \cdot A)| \leq \varepsilon$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $A \subseteq H$. Finalement, $\mu(A) = \mu(g_i \cdot A)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et tout $A \subseteq H$; par conséquent, pour tout $g \in H$, on a $\mu(A) = \mu(g \cdot A)$, d'où la conclusion. □

La proposition suivante nous permettra d'affirmer que n'importe quel groupe résoluble est moyennable. Avant de l'énoncer et de la démontrer, rappelons la définition d'un sous-groupe normal et fixons les notations.

Définition 1.4.20. Soit H un sous-groupe d'un groupe G. On dit que H est un *sous-groupe normal* de G si

$$x \circ H = H \circ x$$

pour tout $x \in G$. Dans ce cas, on notera $H \triangleleft G$.

Proposition 1.4.21. *Soit N un sous-groupe normal d'un groupe G. Si N et $G/_N$ sont des groupes moyennables alors G est moyennable.*

Démonstration. Soit μ_1 (resp. μ_2) une moyenne N-invariante (resp. $G/_N$-invariante) sur N (resp. sur $G/_N$). Pour tout $A \subseteq G$, on pose

$$f_A \ : \ G/_N \to [0;\infty] \qquad g \circ N \mapsto \mu_1(N \cap g^{-1} \circ A).$$

Cette définition est bien indépendante du représentant choisi. En effet, si

$$g_1 \circ N = g_2 \circ N$$

dans $G/_N$ alors il existe $h \in N$ tel que

$$g_1 = g_2 \circ h \ \Leftrightarrow \ g_2^{-1} \circ g_1 = h \ \Leftrightarrow \ g_2^{-1} = h \circ g_1^{-1}$$

ainsi pour tout $A \subseteq G$, on obtient

$$\begin{aligned} f_A(g_2 \circ N) &= \mu_1(N \cap g_2^{-1} \circ A) \\ &= \mu_1(N \cap (h \circ g_1^{-1}) \circ A) \\ &= \mu_1(h \circ (N \cap g_1^{-1} \circ A)) && \text{car } h \circ N = N \\ &= \mu_1(N \cap g_1^{-1} \circ A) && \text{car } \mu_1 \text{ est } N\text{-invariant} \\ &= f_A(g_1 \circ N). \end{aligned}$$

Posons

$$\mu : G \to [0;\infty] \quad A \mapsto \int_{G/_N} f_A \,\mathrm{d}\mu_2,$$

cette application est une moyenne G-invariante sur G. En effet, $f_G(g \circ N) = \mu_1(N) = 1$ pour tout $g \in G$ et donc, $\mu(G) = 1$ puisque μ_2 est une moyenne sur $G/_N$. De plus, μ est clairement finiment additive et si $g \in G$ et $A \subseteq G$, on a

$$f_{g \circ A}(h \circ N) = \mu_1(N \cap h^{-1} \circ g \circ A) = \mu_1(N \cap (g^{-1} \circ h)^{-1} \circ A) = f_A(g^{-1} \circ h \circ N)$$

et par le théorème 1.4.14, on a

$$\mu(g \circ A) = \int_{G/_N} f_{g \circ A} \,\mathrm{d}\mu_2 = \int_{G/_N} f_A \,\mathrm{d}\mu_2 = \mu(A),$$

ce qui prouve que μ est G-invariante. $\square$

Comme annoncé, nous déduisons directement de ces deux propositions que tout groupe résoluble [15] est moyennable. En effet, rappelons que si G est un groupe résoluble alors il existe

$$\{e\} = G_0,\ G_1, \dots,\ G_{n-1},\ G_n = G$$

une suite de sous-groupes de G tels que $G_i \lhd G_{i+1}$ et le groupe $G_{i+1}/_{G_i}$ est commutatif pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Dans ce cas, G_0 et $G_1/_{G_0}$ sont des groupes moyennables, puisqu'ils sont commutatifs. Par la proposition 1.4.21, on en déduit que G_1 est moyennable. De là, G_2 est moyennable puisque G_1 et $G_2/_{G_1}$ le sont. En itérant, on prouve la moyennabilité du groupe résoluble G.

A présent, nous montrons que $G(2)$ est un groupe résoluble. Pour ce faire, rappelons quelques notions élémentaires. Si $g \in G(2)$ alors il existe [16] $\rho \in SO(2)$ et $\tau \in T(2)$ tels que $g = \tau \circ \rho$ ou $g = \tau \circ \rho \circ u$ où u est la réflexion, i.e. $u : (x, y) \mapsto (x, -y)$.

Proposition 1.4.22. *Le groupe $G(2)$ est résoluble.*

Démonstration. Il suffit de considérer la suite

$$\{e\} \lhd T(2) \lhd \big\langle T(2),\ SO(2)\big\rangle \lhd G(2).$$

En effet, par définition d'un sous-groupe normal, on a $T(2) \lhd \big\langle T(2),\ SO(2)\big\rangle$ et par le premier théorème d'isomorphie [17] appliqué à l'application déterminant noté det, on a

$$\big\langle T(2),\ SO(2)\big\rangle \lhd G(2)$$

car $\ker(\det) = \big\langle T(2),\ SO(2)\big\rangle$. De plus,

$$\big\langle T(2),\ SO(2)\big\rangle/_{T(2)} = SO(2) \qquad \text{et} \qquad G(2)/_{\big\langle T(2),\ SO(2)\big\rangle} = \{u, e\}.$$

Or, $SO(2)$ et $\{u, e\}$ sont des groupes commutatifs. D'où la conclusion. $\square$

On en tire un corollaire immédiat.

Corollaire 1.4.23 (AC). *Le groupe $G(2)$ est moyennable.*

Nous sommes à présent capables de montrer que les ensembles paradoxaux de $\mathbb{R}^2$ (pour le groupe des isométries) sont d'intérieur vide. Pour ce faire, notons $\mathcal{L}$ la mesure de Lebesgue et $\overline{\mathcal{L}}$ la mesure finiment additive obtenue en appliquant le théorème 1.4.15 à la mesure de Lebesgue définie sur le sous-anneau des ensembles Lebesgue-mesurables de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$.

15. Pour un complément d'informations, le lecteur peut consulter [6].
16. Où un élément de $SO(2)$ est vu comme une application linéaire dont la matrice qui la représente dans la base canonique est de déterminant 1.
17. Qui stipule que si $f : G \to H$ est un homomorphisme de groupes alors, $f(G)$ est un sous-groupe de H, $\ker(f)$ est un sous-groupe normal de G et $G/_{\ker(f)}$ est isomorphe à $f(G)$. Pour plus de détails, le lecteur est invité à consulter [5].

Théorème 1.4.24. *Si $X \subseteq \mathbb{R}^2$ est un ensemble paradoxal pour le groupe $G(2)$ alors il est d'intérieur vide.*

Démonstration. Par hypothèse, il existe $X_1, X_2 \subseteq X$ tels que $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, $X_1 \sim X$ et $X_2 \sim X$. On peut supposer que $X_1 \cup X_2 = X$ (remarque 1.2.8). Dans ce cas, il existe des partitions $(X_{1,i})_{i=1}^n$ et $(X_{2,i})_{i=1}^m$ de X_1 et X_2 respectivement, ainsi que des éléments de $G(2)$ $f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_m$ tels que $(f_i(X_{2,i}))_{i=1}^n$ et $(g_i(X_{2,i}))_{i=1}^m$ soient tous les deux des partitions de X.

Procédons par l'absurde et supposons que $\mathring{X} \neq \emptyset$. Il existe $r > 0$ et $y \in \mathring{X}$ tels que $B(y,r) \subseteq \mathring{X}$. Pour obtenir une absurdité, montrons que $\mathcal{L}(B(y,r)) = \overline{\mathcal{L}}(B(y,r)) = 0$.

Posons

$$s = \max_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} \{|y - f_i^{-1}(y)|,\ |y - g_j^{-1}(y)|\}.$$

De cette façon, si $x \in B(y,r)$ et puisque f_i^{-1} est une isométrie, on a

$$\begin{aligned} |y - f_i^{-1}(x)| &\le |y - f_i^{-1}(y)| + |f_i^{-1}(y) - f_i^{-1}(x)| \\ &\le |y - f_i^{-1}(y)| + |y - x| \\ &< s + r, \end{aligned}$$

c'est-à-dire $f_i^{-1}(B(y,r)) \subseteq B(y, r+s) \subseteq X$. De même, $g_i^{-1}(B(y,r)) \subseteq B(y,r+s) \subseteq X$. Il est clair que

$$B(y,r) = \bigcup_{i=1}^n (f_i(X_{1,i}) \cap B(y,r)) = \bigcup_{i=1}^m (g_i(X_{2,i}) \cap B(y,r)).$$

On en tire que

$$\begin{aligned} 2\overline{\mathcal{L}}(B(y,r)) &= \sum_{i=1}^n \overline{\mathcal{L}}(f_i(X_{1,i}) \cap B(y,r)) + \sum_{i=1}^m \overline{\mathcal{L}}(g_i(X_{2,i}) \cap B(y,r)) \\ &= \sum_{i=1}^n \overline{\mathcal{L}}(f_i^{-1}(f_i(X_{1,i}) \cap B(y,r))) + \sum_{i=1}^m \overline{\mathcal{L}}(g_i^{-1}(g_i(X_{2,i}) \cap B(y,r))) \\ &\le \sum_{i=1}^n \overline{\mathcal{L}}((X_{1,i}) \cap B(y,r+s)) + \sum_{i=1}^m \overline{\mathcal{L}}((X_{2,i}) \cap B(y,r+s)) \\ &\le \overline{\mathcal{L}}(B(y,r+s)). \end{aligned}$$

Par récurrence, on obtient l'inégalité

$$2^k \overline{\mathcal{L}}(B(y,r)) \le \overline{\mathcal{L}}(B(y, r+ks))$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. En passant à la limite, il vient

$$0 \le \overline{\mathcal{L}}(B(y,r)) \le \lim_{k\to\infty} \frac{\pi(r+ks)^2}{2^k} = 0,$$

ce qui suffit. □

Chapitre 2

Le paradoxe de Von Neumann [1]

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que les ensembles paradoxaux du plan pour le groupe des isométries, sont d'intérieur vide. Il est donc nécessaire de modifier ce groupe si nous voulons espérer obtenir des ensembles paradoxaux dans le plan d'intérieur non vide. Ceci fait l'objet de ce chapitre. En effet, nous présentons le *paradoxe de Von Neumann* qui stipule que sous l'action d'un certain groupe G, le carré unité est paradoxal. Il s'agit d'un groupe de transformations affines [2] préservant les aires, ainsi une notion paradoxale est conservée. Notons que pour ce paradoxe, comme pour celui de Banach-Tarski, l'axiome du choix est indispensable.

Dans la première partie de ce chapitre, nous faisons quelques rappels sur les applications affines et nous mettons en place les outils nécessaires à la démonstration du paradoxe de Von Neumann. Ensuite, nous donnons des conditions suffisantes pour qu'un ensemble soit paradoxal. Enfin, nous terminons par la démonstration du paradoxe de Von Neumann.

2.1 Préambule

Le paradoxe de Von Neumann fait appel à des applications affines ; c'est pourquoi dans cette section, nous en rappelons la définition et nous donnons quelques-unes de leurs propriétés. De plus, nous introduisons le groupe d'applications affines $\mathrm{SA}(2,\mathbb{Z})$ et nous définissons une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^2$ qui sera un outil extrêmement important pour la démonstration de ce paradoxe.

Définition 2.1.1. Une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est *affine* si pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on a

$$f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m) = \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_m f(x_m)$$

pour tous $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$ et tous $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$. On vérifie facilement que l'ensemble des applications affines bijectives muni de la composition de fonctions forme un groupe que l'on note $\mathrm{A}(n)$.

1. John Von Neumann (1903-1957) est un mathématicien et physicien américano-hongrois.
2. Le terme « transformation affine » est utilisé pour désigner une application affine bijective.

Remarque 2.1.2. Une application linéaire $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est en particulier affine.

Les deux prochains résultats, font le lien entre les applications affines et les applications linéaires. On montre en fait qu'une application affine n'est rien d'autre qu'une application linéaire composée avec une translation.

Lemme 2.1.3. *Une application affine $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que $f(0) = 0$ est linéaire.*

Démonstration. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ on a

$$f(\alpha x) = f(\alpha x + (1-\alpha)0) = \alpha f(x) + (1-\alpha)f(0) = \alpha f(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. On a aussi

$$\frac{1}{2}f(x+y) = \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(x+y) = f(\frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}(x+y)) = f(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y)$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$. D'où la conclusion. $\square$

Proposition 2.1.4. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est affine alors il existe une unique application linéaire $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que*

$$f(x) = l(x) + f(0)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Une application affine est donc la composée d'une application linéaire par une translation.

Démonstration. Si une telle application linéaire l existe, on a forcément $l(x) = f(x) - f(0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Si $l(x) = f(x) - f(0)$, on vérifie facilement que l est une application affine puisque pour tous $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ et tous $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$, on a

$$l(\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i) = \sum_{i=1}^m \alpha_i f(x_i) - \sum_{i=1}^m \alpha_i f(0) = \sum_{i=1}^m \alpha_i (f(x_i) - f(0)) = \sum_{i=1}^m \alpha_i l(x_i).$$

De plus, $l(0) = 0$ et on conclut par le lemme 2.1.3. $\square$

Avant de poursuivre, faisons quelques rappels sur les représentations matricielles des applications linéaires. Pour plus de détails, nous conseillons [18]. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$. On note $\mathscr{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F. Soient $l \in \mathscr{L}(E,F)$, $U = (u_1, \dots, u_n)$ une base de E et $V = (v_1, \dots, v_m)$ une base de F. La j $^{\text{ième}}$ colonne de la matrice représentant l dans les bases U et V est formée des composantes de $l(u_j)$ dans la base V. On note cette matrice $M_{U,V}(l)$ ou $M(l)$ ou encore simplement M s'il n'y a aucune confusion possible. L'application

$$\mathscr{L}(E,F) \to \mathbb{K}^n_m \quad l \mapsto M_{U,V}(l)$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. De plus, l'application

$$\mathscr{L}(E,E) \to \mathbb{K}_n^n \quad l \mapsto M_{U,U}(l)$$

est un isomorphisme d'anneaux. Si $U' = (u'_1, \ldots, u'_n)$ est une autre base de E alors il existe $S \in \mathbb{K}_n^n$ inversible tel que

$$M_{U,U}(l) = S^{-1} M_{U',U'}(l) S.$$

En particulier, $\det(M_{U,U}(l)) = \det(M_{U',U'}(l))$ et on peut noter ce déterminant $\det(l)$ puisqu'il est indépendant de la base choisie.

Remarque 2.1.5. Soient f une application affine et U une base de $\mathbb{R}^n$. On a

$$f(x) = l(x) + f(0) = M_{U,U}(l)x^\top + f(0)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ où l est l'application linéaire de la proposition 2.1.4. On note cette matrice $M_{U,U}(f)$ (ou $M(f)$ ou simplement M) et on pose $\det(f) = \det(l)$.

Sauf mention explicite du contraire, dans la suite de ce travail on considérera toujours comme base $U = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On confondra également l'ensemble des applications linéaires représentées (dans la base canonique) par une matrice d'un groupe G et le groupe G. Par exemple, on confondra l'ensemble des applications σ telles que $M_{U,U}(\sigma) \in \mathrm{SL}(2)$ et le groupe $\mathrm{SL}(2)$.

Définition 2.1.6. On pose

$$\mathrm{SA}(n,\mathbb{Z}) = \{\sigma \in \mathrm{A}(n) \mid M_{U,U}(\sigma) \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})\}$$

où $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ est le groupe des matrices entières de dimension n et dont le déterminant vaut 1. Il est clair que $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $\mathrm{SA}(n,\mathbb{Z})$ qui est lui-même un sous-groupe de $\mathrm{A}(n)$ et que par conséquent, leurs éléments sont des bijections. De plus, $T(n)$ est un sous-groupe de $\mathrm{SA}(n,\mathbb{Z})$.

Nous verrons plus tard que le groupe utilisé pour le paradoxe de Von Neumann est un sous-groupe de $\mathrm{SA}(2,\mathbb{Z})$. A présent, nous allons montrer que les éléments de $\mathrm{SA}(n,\mathbb{Z})$ préservent les aires en utilisant un résultat plus général et bien connu.

Rappel. *Soient $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble Lebesgue-mesurable et $f \in A(n)$. On a*

$$\mathcal{L}(A) = |\det(f)|\ \mathcal{L}(f(A)).$$

En effet, par définition on a

$$\mathcal{L}(A) = \int_A \mathrm{d}x$$

et si on effectue le changement de variable d'ordre infini $t = f(x)$ entre $\mathbb{R}^n$ et lui-même, alors la matrice Jacobienne est donnée par $M = M_{U,U}(f)$. On obtient ainsi

$$\mathcal{L}(A) = \int_{f(A)} |\det(M)|\,\mathrm{d}t = |\det(M)|\ \mathcal{L}(f(A)),$$

ce qui implique $\mathcal{L}(A) = |\det(f)|\ \mathcal{L}(f(A))$.

Corollaire 2.1.7. *Les éléments de $SA(n,\mathbb{Z})$ préservent les aires.*

Démonstration. C'est un corollaire immédiat du rappel sachant que

$$\det(\sigma) = 1$$

pour tout $\sigma \in \mathrm{SA}(n,\mathbb{Z})$. $\square$

Notation. *On note $J = [0,1[\times[0,1[$ le carré unité dans $\mathbb{R}^2$.*

Définition 2.1.8. On définit la relation $\sim_{\mathbb{R}^2}$ sur $\mathbb{R}^2$ de la façon suivante :

$$x \sim_{\mathbb{R}^2} y \;\Leftrightarrow\; \exists\,(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \;:\; y = x + (m,n).$$

On vérifie facilement que $\sim_{\mathbb{R}^2}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^2$.

Montrons une première propriété de cette relation.

Proposition 2.1.9. *Soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Il existe un unique $y \in J$ tel que $x \sim_{\mathbb{R}^2} y$. On note ce point $\widehat{x}$.*

Démonstration. Montrons d'abord l'existence. Si on pose

$$x' = (x_1 - \lfloor x_1 \rfloor,\; x_2 - \lfloor x_2 \rfloor),$$

il est clair que $x' \in J$ et que $x' \sim_{\mathbb{R}^2} x$. Passons à présent à l'unicité. Si $y = (y_1, y_2)$ et $z = (z_1, z_2)$ sont dans J et tels que

$$y \sim_{\mathbb{R}^2} x \quad \text{et} \quad z \sim_{\mathbb{R}^2} x$$

alors par transitivité, on a $y \sim_{\mathbb{R}^2} z$. Par conséquent, il existe $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$\begin{aligned} & y - z = (m,n) \\ \Leftrightarrow \quad & (y_1 - z_1,\; y_2 - z_2) = (m,n); \end{aligned}$$

or $y_1 - z_1 \in]-1,1[$ et $y_2 - z_2 \in]-1,1[$ et par suite, $y_1 - z_1 = 0$ et $y_2 - z_2 = 0$, ce qui prouve que $y = z$. $\square$

Le lemme suivant est extrêmement important pour la suite et sera, par conséquent, utilisé abondamment.

Lemme 2.1.10. *Soient $x, y \in \mathbb{R}^2$ tels que $x \sim_{\mathbb{R}^2} y$. Si $\sigma \in SA(2,\mathbb{Z})$ alors $\sigma(x) \sim_{\mathbb{R}^2} \sigma(y)$.*

Démonstration. Par hypothèse, il existe $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $y = x + (m,n)$; c'est-à-dire

$$y - x + (-m,-n) = 0. \tag{2.1}$$

Soit $\sigma \in \mathrm{SA}(2,\mathbb{Z})$. En appliquant σ dans les deux membres de (2.1), on obtient

$$\sigma(y) - \sigma(x) + \sigma((-m,-n)) = \sigma(0).$$

On sait qu'il existe $M \in SL(2,\mathbb{Z})$ tel que $\sigma(x) = Mx^\top + \sigma(0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$; ainsi,

$$\begin{aligned}\sigma(y) - \sigma(x) &= \sigma(0) - \sigma((-m,-n)) \\ &= \sigma(0) - (M\begin{pmatrix}-m\\-n\end{pmatrix} + \sigma(0)) \\ &= -M\begin{pmatrix}-m\\-n\end{pmatrix} = M\begin{pmatrix}m\\n\end{pmatrix} = (m',n') \in \mathbb{Z}^2 .\end{aligned}$$

On en tire que $\sigma(y) = \sigma(x) + (m', n')$ et donc $\sigma(x) \sim_{\mathbb{R}^2} \sigma(y)$. □

Définition 2.1.11. Soit $\sigma \in \mathrm{SA}(2,\mathbb{Z})$, on note $\widehat{\sigma} : J \to J$ l'application telle que

$$x \mapsto \widehat{\sigma}(x) = \widehat{\sigma(x)}.$$

La proposition suivante, donne quelques caractéristiques de cette application.

Proposition 2.1.12. *Soit $\sigma \in SA(2,\mathbb{Z})$. L'application $\widehat{\sigma} : J \to J$ est une bijection. De plus, il existe $(B_i)_{i=1}^n$ une partition finie de J et $(\tau_i)_{i=1}^n$ des éléments de $T(2)$ tels que*

$$\widehat{\sigma} = \tau_i \circ \sigma$$

sur B_i pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$.

Démonstration. Montrons d'abord que $\widehat{\sigma}$ est une bijection.

Injectivité : Soient $x, y \in J$ tels que $\widehat{\sigma}(x) = \widehat{\sigma}(y)$. On a

$$\sigma(y) \sim_{\mathbb{R}^2} \widehat{\sigma}(y) = \widehat{\sigma}(x) \sim_{\mathbb{R}^2} \sigma(x),$$

ce qui montre que $\sigma(y) \sim_{\mathbb{R}^2} \sigma(x)$. Puisque $\mathrm{SA}(2,\mathbb{Z})$ est un groupe et en appliquant le lemme 2.1.10, on a

$$\sigma^{-1}(\sigma(y)) \sim_{\mathbb{R}^2} \sigma^{-1}(\sigma(x)),$$

c'est-à-dire $x \sim_{\mathbb{R}^2} y$. Ainsi, $x = y$ car $x, y \in J$.

Surjectivité : Soit $x \in J$. On a $\widehat{\sigma^{-1}(x)} \sim_{\mathbb{R}^2} \sigma^{-1}(x)$ et en appliquant le lemme 2.1.10, on obtient

$$\sigma(\widehat{\sigma^{-1}(x)}) \sim_{\mathbb{R}^2} \sigma(\sigma^{-1}(x)) = x.$$

On en tire que $\widehat{\sigma}(\widehat{\sigma^{-1}(x)}) = x$, ce qui montre la surjectivité car $\widehat{\sigma^{-1}(x)} \in J$.

Montrons à présent la deuxième partie de la proposition. Soit $l : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire telle que

$$\sigma(x) = l(x) + \sigma(0)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^2$. On a $J = \{\alpha e_1 + \beta e_2 \mid \alpha, \beta \in [0,1[\}$, ainsi on obtient

$$\sigma(J) = \{\alpha l(e_1) + \beta l(e_2) \mid \alpha, \beta \in [0,1[\} + \sigma(0)$$

et donc $\sigma(J)$ est borné [3]. Il existe donc $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que

$$\sigma(J) \subseteq \bigcup_{i=-p}^{p} \bigcup_{j=-q}^{q} A_{i,j}$$

où $A_{i,j} = J + (i,j)$. On pose

$$B_{i,j} = \sigma^{-1}(A_{i,j}) \cap J$$

pour tout $(i,j) \in \{-p,\dots,p\} \times \{-q,\dots,q\} = A$; quitte à restreindre l'ensemble d'indice, on peut supposer avoir $B_{i,j} \neq \emptyset$ pour tout $(i,j) \in A$. Puisque σ est une bijection et que les $A_{i,j}$ sont deux à deux disjoints,

$$(B_{i,j})_{(i,j)\in A}$$

est une partition finie de J. Dans ce cas, pour tout $x \in J$, il existe un unique $(i_0,j_0) \in A$ tel que $x \in B_{i_0,j_0}$. De plus, pour tout $(i,j) \in A$ et pour tout $x \in B_{i,j}$, on a $\sigma(x) \in A_{i,j}$. Par conséquent, on obtient

$$\widehat{\sigma}(x) = \widehat{\sigma(x)} = \sigma(x) - (i,j),$$

ce qui permet de conclure. □

Notation. *Soit X un ensemble. Notons $B(X)$ le groupe des bijections de X dans lui-même.*

Proposition 2.1.13. *L'application*

$$\widehat{\cdot} \ : \ SA(2,\mathbb{Z}) \to B(J) \quad \sigma \mapsto \widehat{\sigma}$$

est un homomorphisme de groupe pour la composition de fonctions. De plus, elle est injective sur $SL(2,\mathbb{Z})$. En particulier, c'est un isomorphisme de $SL(2,\mathbb{Z})$ dans son image.

Démonstration. Soit $\sigma_1, \sigma_2 \in SA(2,\mathbb{Z})$, montrons que

$$\widehat{\sigma_1} \circ \widehat{\sigma_2} = \widehat{(\sigma_1 \circ \sigma_2)}$$

sur J. Soit $x \in J$. On a $\widehat{\sigma_2(x)} \sim_{\mathbb{R}^2} \sigma_2(x)$ et en appliquant le lemme 2.1.10, on obtient

$$\sigma_1(\widehat{\sigma_2(x)}) \sim_{\mathbb{R}^2} \sigma_1(\sigma_2(x));$$

et par suite,

$$\widehat{\sigma_1}(\widehat{\sigma_2(x)}) = \widehat{\sigma_1(\sigma_2(x))}.$$

On en tire que

$$\begin{aligned}
\widehat{\sigma_1} \circ \widehat{\sigma_2}(x) &= \widehat{\sigma_1}(\widehat{\sigma_2(x)}) \\
&= \widehat{\sigma_1(\sigma_2(x))} \\
&= \widehat{(\sigma_1 \circ \sigma_2)(x)} \\
&= \widehat{(\sigma_1 \circ \sigma_2)}(x).
\end{aligned}$$

3. En fait, $\sigma(J)$ est un parallélogramme dont les sommets sont $\sigma(0)$, $l(e_1) + \sigma(0)$, $l(e_2) + \sigma(0)$ et $l(e_1) + l(e_2) + \sigma(0)$.

Par conséquent l'application $\sigma \mapsto \widehat{\sigma}$ est un homomorphisme.

Soit $\sigma \in SL(2,\mathbb{Z})$ tel que $\widehat{\sigma} = \mathrm{id}_{|J}$. Montrons que $\sigma = \mathrm{id}$ sur $\mathbb{R}^2$ (i.e. l'application $\sigma \mapsto \widehat{\sigma}$ est injective). Par hypothèse, on sait que

$$\widehat{\sigma}(x) = x$$

pour tout $x \in J$. Il existe donc $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$x = \sigma(x) + (m,n),$$

ce qui montre que $x - \sigma(x) \in \mathbb{Z}^2$ pour tout $x \in J$. De là, on doit avoir $\sigma_{|J} = \mathrm{id}_{|J}$. Sinon, soient $x_0 \in J$ tel que $x_0 - \sigma(x_0) \neq 0$ et $n \geq 2$ un entier tel que

$$\frac{x_0 - \sigma(x_0)}{n} \notin \mathbb{Z}^2$$

(par exemple $n = \mathrm{pgcd}\big((x_0 - \sigma(x_0))_1,\ (x_0 - \sigma(x_0))_2\big) + 1$ convient). Ainsi, par linéarité on a

$$\frac{x_0}{n} - \sigma\left(\frac{x_0}{n}\right) = \frac{x_0 - \sigma(x_0)}{n} \notin \mathbb{Z}^2,$$

ce qui est impossible puisque

$$x - \sigma(x) \in \mathbb{Z}^2$$

pour tout $x \in J$ et que $\dfrac{x_0}{n} \in J$. Ceci implique que $\sigma = \mathrm{id}$ sur $\mathbb{R}^2$. En effet, si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ alors

$$(a,b) = 2a\ (\frac{1}{2},0) + 2b\ (0,\frac{1}{2})$$

d'où

$$\sigma(a,b) = 2a\ \sigma(\frac{1}{2},0) + 2b\ \sigma(0,\frac{1}{2}) = 2a\ (\frac{1}{2},0) + 2b\ (0,\frac{1}{2}) = (a,b),$$

car $\sigma_{|J} = \mathrm{id}_{|J}$. D'où la conclusion.

$\square$

Notation. *Si F est un sous-groupe de $SA(2,\mathbb{Z})$, on pose*

$$\widehat{F} = \{\widehat{f} \mid f \in F\}.$$

Dans ce cas, $\widehat{F}$ est un sous-groupe de $B(J)$ (car c'est l'image d'un groupe par un homomorphisme) qui agit sur J par l'action

$$(\widehat{f}, x) \mapsto \widehat{f} \cdot x = \widehat{f(x)}.$$

2.2 Action libre d'un groupe sur un ensemble

La notion d'équidécomposabilité et par conséquent celle d'ensemble paradoxal dépend fortement des propriétés du groupe agissant sur l'ensemble. Comme nous le montrons dans cette section, si un groupe G *agit librement* sur un ensemble X alors, si G est paradoxal, l'ensemble X l'est aussi. De plus, nous donnons des conditions suffisantes pour qu'un groupe soit paradoxal.

Commençons par donner la définition d'une *action libre* d'un groupe sur un ensemble.

Définition 2.2.1. Soit G un groupe qui agit sur un ensemble X. Si pour tout $g \in G \setminus \{e\}$ et tout $x \in X$, $g \cdot x \neq x$ alors on dit que G *agit librement* sur X.

Théorème 2.2.2 (AC). *Soit G un groupe qui agit librement sur X. Si G est un groupe paradoxal alors X est paradoxal pour G.*

Démonstration. Puisque les orbites de X sont disjoints et grâce à l'axiome du choix, il existe un ensemble intersectant chaque orbite de X en un seul point. Notons M cet ensemble.

Pour tout $A \subseteq G$, posons

$$\underline{A} = A \cdot M = \bigcup_{x \in M} A \cdot x \subseteq X,$$

où

$$A \cdot M = \{g \cdot x \mid g \in A,\, x \in M\} \quad \text{et} \quad A \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in A\}.$$

Il est clair que $A \cdot x \subseteq \operatorname{orb}(x)$. Notons que

$$\underline{G} = X$$

car $\underline{G} \subseteq X$ et si $y \in X$, il existe $x \in M$ tel que $y \in \operatorname{orb}(x)$ (vu la définition de M et puisque les orbites partitionnent X) ; ainsi, il existe $g \in G$ tel que $y = g \cdot x \in G \cdot x \subseteq \underline{G}$ et finalement, $y \in \underline{G}$. Remarquons de plus que

$$(A, B \subseteq G,\ A \cap B = \emptyset) \ \Rightarrow\ \underline{A} \cap \underline{B} = \emptyset.$$

En effet, si $z \in \underline{A} \cap \underline{B}$, alors il existe $x, y \in M$ tels que

$$z \in A \cdot x \subseteq \operatorname{orb}(x) \quad \text{et} \quad z \in B \cdot x \subseteq \operatorname{orb}(y).$$

Donc $z \in \operatorname{orb}(x) \cap \operatorname{orb}(y)$ ce qui implique que $\operatorname{orb}(x) = \operatorname{orb}(y)$ (puisque les orbites partitionnent X). Ainsi, $x = y$ vu la définition de M. On a donc $z \in A \cdot x \cap B \cdot x$ et il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $z = a \cdot x = b \cdot x$; c'est-à-dire $(b^{-1} \circ a) \cdot x = x$. Puisque G agit librement sur X, ceci implique $a = b$, ce qui est une contradiction.

Montrons que si $A, B \subseteq G$ sont équidécomposables pour l'action de translation à gauche (lorsque G agit sur lui-même) alors $\underline{A}$ et $\underline{B}$ sont équidécomposables pour l'action de G sur X.

Soient $(A_i)_{i=1}^n$ une partition de A, $(B_i)_{i=1}^n$ une partition de B et $g_1, \dots, g_n$ des éléments de G tels que

$$g_i \cdot A_i = \{g_i \circ a \mid a \in A_i\} = B_i$$

pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Dans ces conditions, $(\underline{A_i})_{i=1}^n$ est une partition de $\underline{A}$. En effet, vu ce qui précède, ce sont des ensembles deux à deux disjoints. De plus,

$$\bigcup_{i=1}^n \underline{A_i} = \underline{A}$$

puisque si $y \in \underline{A}$, il existe $x \in M$ et $i \in \{1, \dots, n\}$ tels que

$$y \in A_i \cdot x \subseteq \underline{A_i} \subseteq \bigcup_{i=1}^n \underline{A_i}.$$

Si $y \in \bigcup_{i=1}^n \underline{A_i}$, il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ et $x \in M$ tels que $y = g \cdot x$ pour un $g \in A_i \subseteq A$. Ceci implique que $y \in \underline{A}$. Un raisonnement analogue montre que $(\underline{B_i})_{i=1}^n$ est une partition de $\underline{B}$. De plus, on a

$$g_i \cdot \underline{A_i} = g_i \cdot A_i \cdot M = (g_i \cdot A_i) \cdot M = B_i \cdot M = \underline{B_i},$$

ce qui prouve que $\underline{A} \sim \underline{B}$ pour l'action de G sur X.

Par hypothèse, il existe $A, B \subseteq G$ disjoints tels que $A \sim G$ et $B \sim G$ pour l'action de translation à gauche. Ainsi, vu ce qui précède,

$$\underline{A} \cap \underline{B} = \emptyset, \quad \underline{A} \sim X \quad \text{et} \quad \underline{B} \sim X$$

pour l'action de G sur X, puisque $\underline{G} = X$.

$\square$

Les trois prochains résultats donnent des conditions suffisantes pour qu'un groupe soit paradoxal.

Proposition 2.2.3. *Tout groupe libre de rang* 2 *est paradoxal.*

Démonstration. Soit $X = \{a, b\}$ $(a \neq b)$ une famille génératrice libre de G. On pose

$$M(a) = \{a \circ x_1^{\varepsilon_1} \circ \cdots \circ x_n^{\varepsilon_n} \mid n \in \mathbb{N}, x_i \in X, \varepsilon_i = \pm 1, x_i^{\varepsilon_i} \circ x_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}} \neq e \ \forall i \in \{1, \dots, n-1\}, a \circ x_1^{\varepsilon_1} \neq e\}$$

(i.e. $M(a)$ est l'ensemble des éléments de G écrits sous formes réduites et commençant par a). On définit de la même façon $M(a^{-1})$, $M(b)$ et $M(b^{-1})$. Vu la définition d'un groupe libre,

$$\{\{e\},\ M(a),\ M(a^{-1}),\ M(b),\ M(b^{-1})\}$$

est une partition de G. Montrons que

$$M(a) \cup M(a^{-1}) \sim G$$

pour l'action de translation à gauche (de la même façon $M(b) \cup M(b^{-1}) \sim G$ pour l'action de translation à gauche). Ceci prouvera que G est un groupe paradoxal. On a

$$G = M(a^{-1}) \cup (G \setminus M(a^{-1}))$$

de façon disjointe. Il est clair que $M(a^{-1}) \sim M(a^{-1})$. Pour conclure par la proposition 1.2.5, il faut montrer que

$$M(a) \sim G \setminus M(a^{-1}).$$

On a en fait,

$$a^{-1} \cdot M(a) = G \setminus M(a^{-1}).$$

En effet, si $x \in a^{-1} \cdot M(a)$ alors $x = a^{-1} \circ a \circ x_1^{\varepsilon_1} \circ \cdots \circ x_n^{\varepsilon_n}$. Si $n = 0$ alors $x = e \in G \setminus M(a^{-1})$. Sinon, $x = x_1^{\varepsilon_1} \circ \cdots \circ x_n^{\varepsilon_n}$ avec en particulier $x_1^{\varepsilon_1} \neq a^{-1}$, donc $x \notin M(a^{-1})$. Si $x \in G \setminus M(a^{-1})$ alors $x = a^{-1} \circ a \circ x$ où on peut supposer que x est différent de e (si $x = e$, le résultat est évident puisque $x = e = a^{-1} \circ a \in a^{-1} \cdot M(a)$) et est écrit sous forme réduite. De plus, par hypothèse, x ne commence pas par a^{-1}. Ainsi, $a \circ x \in M(a)$ et $x \in a^{-1} \cdot M(a)$. □

Remarque 2.2.4. Dans la démonstration précédente, on se sert uniquement du fait que la famille génératrice libre de G contient (au moins) deux éléments distincts. Ainsi, la proposition précédente reste valable si le groupe libre est de rang n où $n \geq 2$.

Proposition 2.2.5 (AC). *Un groupe qui contient un sous-groupe paradoxal est paradoxal.*

Démonstration. Soit H un sous-groupe paradoxal d'un groupe G. Pour utiliser le théorème 2.2.2, il suffit de remarquer que H agit librement sur G grâce à l'action

$$H \times G \to G \quad (h, g) \mapsto h \circ g.$$

En effet, sinon il existe $h \in H \setminus \{e\}$ et $g \in G$ tels que $h \circ g = g$. Ainsi, $h \circ g \circ g^{-1} = g \circ g^{-1}$ et par suite $h = e$, ce qui n'est pas possible. On en conclut que G est paradoxal pour l'action de translation à gauche lorsque H agit sur G. Par conséquent, G est paradoxal (quand G agit sur lui-même par l'action de translation à gauche). □

Corollaire 2.2.6 (AC). *Un groupe qui contient un ensemble fini indépendant de cardinal supérieur à* 2 *est paradoxal.*

Démonstration. Soit S un sous-ensemble fini d'éléments indépendants d'un groupe G dont le cardinal est supérieur à 2. Par définition, $\langle S \rangle$ est un sous-groupe libre de G de rang supérieur à 2. On conclut pas la proposition 2.2.3 et la proposition 2.2.5. □

2.3 Le paradoxe de Von Neumann

L'objectif principal de cette section est de démontrer le *paradoxe de Von Neumann*. Afin d'y parvenir, nous démontrons quelques résultats intermédiaires. Nous commençons par montrer qu'il existe deux éléments indépendants σ_1 et σ_2 dans $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. Ensuite, nous montrons que J est équidécomposable à $J \setminus D$ sous l'action du groupe $T(2)$ pour n'importe quel de ses sous-ensembles dénombrables D. Nous finissons par la démonstration du *paradoxe de Von Neumann* qui stipule que J est paradoxal pour le groupe $G = \langle \sigma_1, \sigma_2, T(2) \rangle \subseteq \mathrm{SA}(2, \mathbb{Z})$.

Proposition 2.3.1. *Les deux matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

de $SL(2, \mathbb{Z})$ sont indépendantes (i.e. elles forment un ensemble d'éléments indépendants au sens de la définition 1.1.18).

Démonstration. Nous allons procéder par l'absurde, mais avant cela, remarquons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$(A^k)^\top = B^k.$$

Vu la proposition 1.1.19, supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}_0$ et $C_1, \ldots, C_n \in \{A, B\}$ tels que [4]

$$w = C_1^{k_1} \cdots C_n^{k_n} = I$$

où $k_i \in \mathbb{Z}_0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $C_i \neq C_{i+1}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. On peut supposer que w commence et se termine par une puissance de A. Sinon,

1. soit $w = B^{k_1} A^{k_2} \cdots B^{k_n} = I$ et il suffit de considérer $w^\top = A^{k_n} \cdots B^{k_2} A^{k_1} = I$;
2. soit $w = A^{k_1} B^{k_2} \cdots B^{k_n} = I$ et dans ce cas, on considère $A^{-r} w A^r = I$ où $r \in \mathbb{Z} \setminus \{0, k_1\}$;
3. soit $w = B^{k_1} A^{k_2} \cdots A^{k_n} = I$ et dans ce dernier cas, on considère $A^r w A^{-r} = I$ où $r \in \mathbb{Z} \setminus \{0, k_n\}$.

De plus, il est clair que $A^k \neq I$ et $B^k \neq I$ pour tout $k \in \mathbb{Z}_0$ et que $A^{k_1} B^{k_2} \neq I$ et $B^{k_1} A^{k_2} \neq I$ pour tous $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_0$. On peut donc également supposer que $n \geq 3$. Dès lors, on a

$$w = A^{k_1} B^{k_2} \cdots A^{k_n} = I$$

où $k_i \in \mathbb{Z}_0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $n \geq 3$.

Posons

$$X_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid |x| > |y| \right\} \quad \text{et} \quad X_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < |y| \right\}.$$

4. Ceci est bien une écriture sous forme réduite de l'identité. On a simplifié l'écriture en « calculant » les produits de même matrice. Par exemple $AABA^{-1}A^{-1}A^{-1}$ peut s'écrire A^2BA^{-3}.

On a $A^k X_2 \subseteq X_1$ pour tout $k \in \mathbb{Z}_0$. En effet, si $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in X_2$ on a

$$A^k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2ky \\ y \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} |2ky + x| &\geq ||2ky| - |x|| \\ &\geq 2|k||y| - |x| \\ &\geq 2|y| - |x| \\ &> 2|y| - |y| \\ &> |y|. \end{aligned}$$

De même, $B^k X_1 \subseteq X_2$ pour tout $k \in \mathbb{Z}_0$. De cette façon, on a

$$\begin{aligned} X_2 = wX_2 &= A^{k_1} B^{k_2} \cdots B^{k_{n-1}} A^{k_n} X_2 \\ &\subseteq A^{k_1} B^{k_2} \cdots A^{k_{n-2}} B^{k_{n-1}} X_1 \\ &\subseteq A^{k_1} B^{k_2} \cdots A^{k_{n-2}} X_2 \\ &\subseteq \cdots \\ &\subseteq A^{k_1} X_2 \\ &\subseteq X_1, \end{aligned}$$

ce qui est absurde. □

Remarque 2.3.2. Vu la démonstration de la proposition 2.3.1, les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix}$$

sont également indépendantes pour tout $m \geq 2$. De plus, le lecteur pourra consulter l'annexe A de ce travail pour obtenir un résultat plus général et par conséquent, acquérir un plus grand nombre de matrices de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ indépendantes.

De la proposition 2.3.1, se dégage un résultat plus général permettant de prouver l'existence d'éléments indépendants dans un groupe. On appelle ce résultat le *lemme du ping-pong* ou encore, le *critère de Klein* puisqu'il est dû au mathématicien allemand Félix Klein (1849-1925). Il s'énonce de la façon suivante.

Lemme 2.3.3 (Lemme du ping-pong)**.** *Soient G un groupe agissant sur un ensemble X et $a, b \in G$. Supposons que X_a et X_b sont des sous-ensembles disjoints de X tels que*

$$a^n \cdot X_b \subseteq X_a \qquad \textit{et} \qquad b^n \cdot X_a \subseteq X_b$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}_0$. Alors le sous-groupe de G engendré par a et b, est libre.

Sa démonstration se traite exactement de la même façon que celle de la proposition 2.3.1. Cependant, considérer la transposée de w dans le cas où

$$w = b^{k_1} a^{k_2} \cdots b^{k_n} = e$$

n'aurait aucun sens ; mais il suffit de remarquer que

$$X_a = wX_a = b^{k_1} a^{k_2} \cdots b^{k_n} X_a \subseteq \cdots \subseteq X_b,$$

ce qui n'est pas possible.

Lemme 2.3.4. *Pour tout sous-ensemble dénombrable D de J, on a*

$$J \sim J \setminus D$$

pour le groupe $T(2)$.

Démonstration. Notons $D = \{z_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ et posons

$$M_{i,j} = \{z_i - z_j + (m,n) \mid (m,n) \in \mathbb{Z}^2\}$$

pour tous $i, j \in \mathbb{N}$. Il est clair que $M_{i,j}$ est dénombrable ainsi que

$$M = \bigcup_{i,j \in \mathbb{N}} M_{i,j}$$

car il s'agit d'une union dénombrable d'ensembles dénombrables. Pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, posons

$$N_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid k(x,y) \in M\} \quad \text{et} \quad N = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} N_k ;$$

ces ensembles sont également dénombrables. Étant donné que $\mathbb{R}^2$ est non-dénombrable, il existe $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus N$ et notons τ la translation de (x_0, y_0). Soit $k \in \mathbb{N}_0$; on a

$$D \cap \widehat{\tau}^k(D) = \emptyset \tag{2.2}$$

car sinon il existe $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $z_i = \widehat{\tau}^k(z_j)$ et par suite, $z_i \sim_{\mathbb{R}^2} \tau^k(z_j) = z_j + k(x_0, y_0)$. Il existe donc $(m_0, n_0) \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$z_j + k(x_0, y_0) + (m_0, n_0) = z_i.$$

Autrement dit, $k(x_0, y_0) = z_i - z_j - (m_0, n_0) \in M_{i,j} \subseteq M$ ainsi, $(x_0, y_0) \in N_k \subseteq N$, ce qui est absurde. De plus, pour tous $k, l \in \mathbb{N}_0$ tels que $k \neq l$ on a

$$\widehat{\tau}^k(D) \cap \widehat{\tau}^l(D) = \emptyset.$$

En effet, sans perte de généralité, on peut supposer avoir $k > l$; de plus, supposons qu'il existe $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $\widehat{\tau}^k(z_i) = \widehat{\tau}^l(z_j)$; on peut alors écrire $\widehat{\tau}^{k-l}(z_i) = z_j$, ce qui n'est pas possible vu (2.2). Ainsi, les ensembles

$$D, \ \widehat{\tau}(D), \ \widehat{\tau}^2(D), \ \widehat{\tau}^3(D), \ldots \tag{2.3}$$

sont deux à deux disjoints. Posons

$$\underline{D} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \widehat{\tau}^k(D) \subseteq J;$$

on a $\underline{D} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}_0} \widehat{\tau}^k(D) \cup D = \bigcup_{l\in\mathbb{N}} \widehat{\tau}^{l+1}(D) \cup D = \widehat{\tau}(\underline{D}) \cup D$. De plus,

$$\widehat{\tau}(\underline{D}) \cap D = \emptyset$$

car $\widehat{\tau}(\underline{D}) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}_0} \widehat{\tau}^k(D)$ et vu (2.3). Dès lors,

$$J = (J \setminus \underline{D}) \cup \widehat{\tau}(\underline{D}) \cup D$$

où les unions sont disjointes. On a donc

$$J \setminus D = (J \setminus \underline{D}) \cup \widehat{\tau}(\underline{D}) \sim (J \setminus \underline{D}) \cup \underline{D} = J$$

pour le groupe $\widehat{T}(2)$. Or, vu la proposition 2.1.12, il existe $(B_i)_{i=1}^p$ une partition finie de J et $(\tau_i)_{i=1}^p$ des translations telles que

$$\widehat{\tau} = \tau_i$$

sur B_i pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$. Dès lors, quitte à restreindre les ensembles intervenant dans la décomposition de $J \setminus D$ et de J, on voit que $J \setminus D \sim J$ pour $T(2)$. □

Remarque 2.3.5. Précédemment, on a rencontré un résultat analogue en dimension 3 stipulant que pour tout sous-ensemble dénombrable D de S^2, on a $S^2 \sim S^2 \setminus D$ pour le groupe des rotations $SO(3)$.

Théorème 2.3.6 (Paradoxe de Von Neumann **(AC)**)**.** *Soient $\sigma_1, \sigma_2 \in SL(2,\mathbb{Z})$ deux éléments indépendants. Notons G le sous-groupe de $SA(2,\mathbb{Z})$ engendré par σ_1, σ_2 et $T(2)$. Dans ce cas, J est paradoxal pour G.*

Démonstration. On note

$$F = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle \subseteq SL(2,\mathbb{Z});$$

par construction, F est un sous-groupe libre de G de rang 2. On a

$$\widehat{F} = \{\widehat{f} \mid f \in F\} \quad \text{et} \quad \widehat{T}(2) = \{\widehat{\tau} \mid \tau \in T(2)\}.$$

On sait que $\widehat{F}$ et $\widehat{T}(2)$ sont des groupes qui agissent sur J. De plus, $\widehat{F}$ est un groupe libre de rang 2 puisque l'application $f \mapsto \widehat{f}$ est un isomorphisme de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ dans son image (proposition 2.1.13). Posons

$$C = \{x \in J \mid \exists f \in F \setminus \{\mathrm{id}\} \text{ tel que } \widehat{f}(x) = x\},$$

on remarque que $\widehat{F}$ agit librement sur $J \setminus C$ par l'action

$$(\widehat{f}, x) \mapsto \widehat{f} \cdot x = \widehat{f}(x)$$

car si $x \in J \setminus C$ alors $\widehat{f}(x) \in J \setminus C$. En effet, si $f = \mathrm{id}$ (i.e. $\widehat{f} = \mathrm{id}$) on conclut aussitôt. Sinon, supposons que

$$\widehat{f}(x) \in C,$$

il existe alors $g \in F \setminus \{\mathrm{id}\}$ tel que

$$\begin{aligned} & \widehat{g}(\widehat{f}(x)) = \widehat{f}(x) \\ \Leftrightarrow \quad & \widehat{f}^{-1} \circ \widehat{g} \circ \widehat{f}(x) = x \\ \Leftrightarrow \quad & (\widehat{f^{-1} \circ g \circ f})(x) = x. \end{aligned}$$

Or, $f^{-1} \circ g \circ f \in F$ et $x \notin C$ donc $f^{-1} \circ g \circ f = \mathrm{id}$; ceci est absurde puisque F est un groupe libre ($g \neq \mathrm{id}$ et $f \neq \mathrm{id}$) et par conséquent, l'élément neutre ne peut pas s'écrire sous forme réduite. Ainsi, $\widehat{F}$ agit sur $J \setminus C$ et, de plus, l'action est clairement libre comme annoncé.

Étant donné que $\widehat{F}$ est un groupe libre de rang 2, il est paradoxal (proposition 2.2.3). On en déduit, par le théorème 2.2.2, que $J \setminus C$ est paradoxal pour $\widehat{F}$. Par la proposition 2.1.12, pour tout $f \in F$, il existe $(B_i)_{i=1}^p$ une partition finie de J et $(\tau_i')_{i=1}^p$ des translations telles que

$$\widehat{f} = \tau_i' \circ f$$

sur B_i, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$. De plus, $\tau_i' \circ f \in G$ pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$; ainsi, quitte à restreindre les ensembles de la décomposition paradoxale, $J \setminus C$ est paradoxal pour G.

Pour terminer la démonstration, montrons que $J \sim J \setminus C$ pour $T(2)$ (dans ce cas, $J \sim J \setminus C$ pour G et par le théorème 1.2.10 et vu ce qui précède, J sera paradoxal pour G). Pour ce faire, il suffit de trouver un ensemble dénombrable $D \subseteq J$, tel que $J \setminus D \sim J \setminus C$ pour $T(2)$ et ensuite d'utiliser le lemme 2.3.4 ainsi que la transitivité de la relation d'équidécomposabilité.

Soit $\sigma \in SL(2, \mathbb{Z}) \setminus \{\mathrm{id}\}$. Il existe $(E_j)_{j=1}^q$ une partition finie de J et $(\tau_j)_{j=1}^q$ des translations telles que

$$\widehat{\sigma} = \tau_j \circ \sigma$$

sur E_j pour tout $j \in \{1, \ldots, q\}$. Fixons $j \in \{1, \ldots, q\}$ et montrons que l'ensemble des éléments de E_j qui sont fixés par $\widehat{\sigma}$ est inclus dans une droite. Si E_j ne contient pas au moins trois points non-alignés alors c'est évident [5]. Sinon,

1. soit $\widehat{\sigma}$ ne fixe qu'un seul point dans E_j et c'est trivial ;
2. soit $\widehat{\sigma}$ fixe deux points dans E_j et dans ce cas, $\widehat{\sigma}$ fixe le segment de droite inclus dans E_j passant par ces deux points (puisque sur E_j, l'application $\widehat{\sigma}$ est affine) ;
3. soit $\widehat{\sigma}$ fixe au moins trois points non-alignés dans E_j et dans ce cas,

   $$\widehat{\sigma}|_{E_j} = \tau_j \circ \sigma_{|E_j} = \mathrm{id}|_{E_j}$$

   et puisque $\tau_j \circ \sigma$ est une application affine définie sur $\mathbb{R}^2$, $\tau_j \circ \sigma = \mathrm{id}$ sur $\mathbb{R}^2$. Ainsi, $\sigma = \tau_j^{-1}$ sur $\mathbb{R}^2$ et donc $\sigma = \mathrm{id}$ (car σ est linéaire), ce qui contredit l'hypothèse.

5. Puisque, dans ce cas, E_j est lui-même inclus dans une droite.

Ceci montre que sur E_j, $\widehat{\sigma}$ fixe soit un unique point, soit un segment de droite. De plus, les éléments de J fixés par $\widehat{\sigma}$ sont inclus dans un nombre fini de droites si, par exemple, lorsque $\widehat{\sigma}$ fixe un point unique dans E_j, on considère la droite passant par ce point et l'origine (on a en effet, un nombre fini d'ensemble E_j). Or, $F \subseteq \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \subseteq \mathrm{SA}(2,\mathbb{Z})$ est un sous-groupe finiment engendré et est donc dénombrable ; ainsi, par définition de C on a

$$C = \{S_i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

où S_i est un sous-ensemble de J inclus dans une droite pour tout $i \in \mathbb{N}$. Soient $i \in \mathbb{N}$ et d_i une droite contenant S_i (si S_i possède plus d'un point, il n'y a qu'une droite possible ; si S_i ne contient qu'un seul point, on peut par exemple considérer la droite passant par ce point et l'origine). Nous allons construire une translation τ de sorte que $C \cap \widehat{\tau}^t(C)$ soit dénombrable pour tout $t \in \mathbb{Z}_0$. Si on note

$$D_i = d_i \cap J \supseteq S_i$$

pour tout $i \in \mathbb{N}$, il suffit de montrer que $D_i \cap \widehat{\tau}^t(D_j)$ est dénombrable pour tout $t \in \mathbb{Z}_0$ et tous $i, j \in \mathbb{N}$ car

$$\bigcup_{i,j\in\mathbb{N}} D_i \cap \widehat{\tau}^t(D_j) \supseteq \bigcup_{i,j\in\mathbb{N}} S_i \cap \widehat{\tau}^t(S_j) = C \cap \widehat{\tau}^t(C).$$

Soient $t \in \mathbb{Z}_0$ et $i, j \in \mathbb{N}$. Si D_i et D_j ne sont pas parallèles alors pour tout $\tau \in T(2)$, $D_i \cap \widehat{\tau}^t(D_j)$ est fini [6] et donc dénombrable. Si D_i et D_j sont parallèles alors on note T_{ij}^t l'ensemble des translations τ telles que

$$D_i \subseteq \widehat{\tau}^t(d_j),$$

i.e. il existe $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $D_i + (m,n) \subseteq \tau^t(d_j)$. Dans ces conditions, T_{ij}^t est dénombrable et donc

$$\bigcup_{\substack{t\in\mathbb{Z}_0 \\ i,j\in\mathbb{N}}} T_{ij}^t$$

est dénombrable. Or, $T(2)$ est non-dénombrable et donc il existe

$$\tau_0 \in T(2) \setminus \bigcup_{\substack{t\in\mathbb{Z}_0 \\ i,j\in\mathbb{N}}} T_{ij}^t.$$

Par construction, $D_i \cap \widehat{\tau_0}^t(D_j) = \emptyset$ et finalement, $C \cap \widehat{\tau_0}^t(C)$ est dénombrable pour tout $t \in \mathbb{Z}_0$ car, vu ce qui précède, il est inclus dans une union dénombrable d'ensembles finis. On pose

$$D = \{C \cap \widehat{\tau_0}^t(C) \mid t \in \mathbb{Z}_0\} \subseteq C;$$

6. Car une application affine conserve le parallélisme et $\tau^t(D_j)$ intersecte un nombre fini d'ensemble du type $A_{m,n} = J + (m,n)$.

c'est l'ensemble dénombrable recherché. En effet, si on pose

$$A_0 = \bigcup_{t\in\mathbb{N}} \widehat{\tau_0}^t(C \setminus D),$$

on a $D \cap A_0 = \emptyset$ car sinon soit $y \in D \cap A_0$; on a $y \in D \subseteq C$ et $y \in A_0$. Ainsi, il existe $t > 0$ tel que $y \in \widehat{\tau_0}^t(C \setminus D)$. Donc, il existe $x \in C \setminus D$ tel que $y = \widehat{\tau_0}^t(x)$ et par suite, $\widehat{\tau_0}^{-t}(y) = x$. Par conséquent, on obtient $x \in D$, ce qui n'est pas possible. On a

$$\widehat{\tau_0}(A_0) = \bigcup_{t\in\mathbb{N}} \widehat{\tau_0}^{t+1}(C \setminus D) = \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \widehat{\tau_0}^k(C \setminus D)\right) \setminus (C \setminus D),$$

finalement, on a $\widehat{\tau_0}(A_0) = A_0 \setminus (C \setminus D)$. On conclut en utilisant le lemme 1.2.5

$$J \setminus D = \big((J \setminus D) \setminus A_0\big) \cup A_0 \sim \big((J \setminus D) \setminus A_0\big) \cup \big(A_0 \setminus (C \setminus D)\big) = J \setminus C$$

pour $\widehat{T}(2)$ et donc pour $T(2)$. $\square$

Nous aimerions obtenir un résultat similaire au paradoxe de Banach-Tarski, c'est-à-dire montrer que tout borné d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^2$ est paradoxal sous l'action du groupe G du théorème 2.3.6. Pour ce faire, nous avons besoin de deux résultats préliminaires.

Proposition 2.3.7 (AC). *Soient $x \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$. Si on pose*

$$C_2'(x, r) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1, x_2 \in [x, r[\}$$

alors, pour tous $x, x' \in \mathbb{R}^2$ et tous $r, r' > 0$, on a

$$C_2'(x, r) \sim C_2'(x', r')$$

sous l'action de G. En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ et tout $r > 0$, on a $C_2'(x, r) \sim J$ sous l'action de G.

Démonstration. Nous savons, par le paradoxe de Von Neumann, que J est paradoxal sous l'action de G. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ et tout $r > 0$, l'ensemble $C_2'(x, r)$ est un translaté d'un dilaté de J. Par conséquent, en utilisant les propositions 1.2.11 et 1.2.12, on constate que $C_2'(x, r)$ est paradoxal pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ et tout $r > 0$. Il suffit alors de conclure par le théorème 1.2.15. Le cas particulier est trivial puisque $J = C_2'(0, 1)$. $\square$

Proposition 2.3.8 (AC). *Soient $x \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$. Si on pose*

$$C_2(x, r) = \{(x_1,\ x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1 - x| < \frac{r}{2},\ |x_2 - x| < \frac{r}{2}\}$$

alors, pour tous $x, x' \in \mathbb{R}^2$ et tous $r, r' > 0$, on a

$$C_2(x, r) \sim C_2(x', r')$$

sous l'action de G. En particulier, $C_2(x, r)$ est paradoxal.

Démonstration. Il existe $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^2$ et $s_1, s_2 > 0$ tels que

$$C_2'(y_1, s_1) \subseteq C_2(x, r) \subseteq C_2'(y_2, s_2).$$

Dans ce cas, par la proposition 2.3.7, on a

$$C_2(x, r) \subseteq C_2'(y_2, s_2) \sim J$$

et

$$J \sim C_2'(y_1, s_1) \subseteq C_2(x, r);$$

ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$ et par [7] le théorème 1.2.6, $C_2(x, r) \sim J$. Finalement, pour tous $x, x' \in \mathbb{R}^2$ et tous $r, r' > 0$, on a

$$C_2(x, r) \sim J \sim C_2(x', r')$$

sous l'action de G. De plus, puisque $C_2(x, r) \sim J$ et que J est paradoxal, $C_2(x, r)$ est paradoxal. □

On en déduit un premier corollaire.

Corollaire 2.3.9 (AC). *Deux ensembles bornés et d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^2$ sont équidécomposables sous l'action du groupe G.*

Démonstration. Puisque les ensembles $C_2(x, r)$ ($r > 0$ et $x \in \mathbb{R}^2$) forment une base de la topologie de $\mathbb{R}^2$ et par la proposition 1.2.17, deux ensembles bornés et d'intérieur non vide quelconques de $\mathbb{R}^2$ sont équidécomposables sous l'action de G. □

On en tire le résultat attendu.

Corollaire 2.3.10 (AC). *Tout ensemble borné et d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^2$ est paradoxal sous l'action du groupe G.*

Démonstration. C'est évident puisque si $A \subseteq \mathbb{R}^2$ est borné et d'intérieur non vide alors, par le corollaire précédent, on a

$$A \sim J$$

pour G. On conclut par le théorème 1.2.10. □

Nous voyons une fois de plus que le caractère paradoxal d'un ensemble ne dépend pas de sa nature mais bien du groupe agissant sur lui. En effet, un tel résultat était impossible en travaillant avec le groupe des isométries, puisque dans ce cas, tous les ensembles paradoxaux du plan sont d'intérieur vide.

7. Il est clair que si $A \subseteq B \sim C$ alors $A \sim C_0 \subseteq C$.

2.4 Généralisation aux autres dimensions

Nous pouvons à présent nous demander si le paradoxe de Von Neumann possède une généralisation aux autres dimensions. Nous savons que la paradoxe de Banach-Tarski peut s'obtenir dans $\mathbb{R}^n$ si $n \geq 3$, cependant, il est impossible en dimension 1 et 2. De plus, on sait qu'il n'y a aucun ensemble paradoxal dans $\mathbb{R}$ pour le groupe des isométries. Nous allons montrer, ici, à peu près les mêmes résultats, c'est-à-dire que le paradoxe de Von Neumann se généralise très bien dans $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 2$ mais il est impossible dans $\mathbb{R}$. On montre même qu'il n'y a aucun ensemble paradoxal dans $\mathbb{R}$.

Pour cette généralisation, nous travaillons avec le groupe $\mathrm{SA}(n, \mathbb{Z})$.

2.4.1 Cas de la dimension 1

Commençons par la dimension 1. Nous montrons que le paradoxe de Von Neumann ne peut pas se généraliser à la droite réelle. En effet, nous démontrons que, comme pour le groupe des isométries, il n'existe aucun ensemble paradoxal sous l'action de $\mathrm{SA}(1, \mathbb{Z})$ dans $\mathbb{R}$.

Au préalable, nous avons besoin de la définition suivante.

Définition 2.4.1. Soit S un sous-ensemble non vide et fini d'un groupe G. Notons $S_{\leq n}$ l'ensemble des éléments de G qui peuvent s'écrire comme produit d'au plus n éléments de S ou de leurs inverses. Le groupe G est dit à *croissance sous-exponentielle* si

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\gamma_S(n)} = 1$$

où $\gamma_S(n) = \# S_{\leq n}$.

Dans la suite, nous montrons que si un groupe à croissance sous-exponentielle agit sur un ensemble alors, tout sous-ensemble non vide de cet ensemble n'est pas paradoxal. Pour le cas qui nous intéresse, il sera clair que $\mathrm{SA}(1, \mathbb{Z}) = T(1)$ est un groupe à croissance sous-exponentielle une fois qu'on aura prouvé que tout groupe commutatif est à croissance sous-exponentielle.

Théorème 2.4.2. *Soit G un groupe à croissance sous-exponentielle agissant sur un ensemble X. Si A est une partie non vide de X alors A n'est pas paradoxal sous l'action du groupe G.*

Démonstration. Procédons par l'absurde et supposons qu'il existe A une partie non vide de X qui est paradoxal. Il existe donc $(B_i)_{i=1}^p$ et $(C_i)_{i=1}^q$ deux partitions de A, ainsi que $f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q$ des éléments de G tels que $f_1 \cdot B_1, \ldots, f_p \cdot B_p, g_1 \cdot C_1, \ldots, g_q \cdot C_q$ sont deux à deux disjoints. De plus, si on pose

$$\bigcup_{i=1}^{p} f_i \cdot B_i = A_1 \qquad \text{et} \qquad \bigcup_{i=1}^{q} g_i \cdot C_i = A_2,$$

on a $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Définissons $f(x) = f_i \cdot x$ si $x \in B_i$; la fonction $f : A \to A_1$ est bien définie et est bijective. De la même façon, on définit la bijection $g : A \to A_2$. Posons

$$S = \{f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q\}$$

et montrons que $\sqrt[n]{\gamma_S(n)} \geq 2$, ce qui est absurde puisque $\sqrt[n]{\gamma_S(n)} \longrightarrow 1$ si $n \to +\infty$ car G est un groupe à croissance sous-exponentielle.

Soit $n \in \mathbb{N}_0$ et posons

$$W = \{x_1 \circ \cdots \circ x_n \mid x_i \in \{f, g\}\}.$$

Soient $h_1, h_2 \in W$. On a

$$h_1 = x_1 \circ \cdots \circ x_n \quad \text{et} \quad h_2 = x'_1 \circ \cdots \circ x'_n$$

avec $x_i, x'_i \in \{f, g\}$. S'il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $x_i \neq x'_i$ alors, on a $h_1(A) \cap h_2(A) = \emptyset$ et par suite, $h_1 \neq h_2$. En effet, sinon soit $y \in A$ tel que $h_1(y) = h_2(y)$ et notons $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ le premier indice tel que $x_{i_0} \neq x'_{i_0}$. Après simplification, on obtient

$$x_{i_0} \circ \cdots \circ x_n(y) = x'_{i_0} \circ \cdots \circ x'_n(y),$$

ce qui n'est pas possible car les deux membres appartiennent à des ensembles disjoints. On en tire que $\#W = 2^n$. Soit $x_0 \in A$, on pose

$$D = \{h_i(x_0) \mid i \in \{1, \dots, 2^n\} \text{ et } h_i \in W\}$$

et vu ce qui précède, on a $\#D = 2^n$. Or, il est clair que pour tout $i \in \{1, \dots, 2^n\}$, il existe $s_i \in S_{\leq n}$ tel que $h_i(x_0) = s_i(x_0)$. De plus, si $i \neq j$ alors $s_i \neq s_j$. On en tire que $\gamma_S(n) \geq 2^n$ et par suite, on a

$$\sqrt[n]{\gamma_S(n)} \geq 2;$$

d'où la conclusion. □

Proposition 2.4.3. *Tout groupe commutatif est à croissance sous-exponentielle.*

Démonstration. Soient G un groupe commutatif et $S = \{s_1, \dots, s_p\}$ un sous-ensemble non vide de G. Si $g \in S_{\leq n}$ alors $g = s_1^{\alpha_1} \circ \cdots \circ s_p^{\alpha_p}$ avec $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$ car G est commutatif. De plus, puisque $g \in S_{\leq n}$, on a

$$\sum_{i=1}^{p} |\alpha_i| \leq n.$$

Par conséquent, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, on a $\alpha_i \in \{-n, \dots, 0, \dots, n\}$ et par suite, $S_{\leq n}$ contient au plus $(2n+1)^p$ éléments. D'où,

$$\sqrt[n]{\gamma_S(n)} \leq \sqrt[n]{(2n+1)^p} = \mathrm{e}^{\frac{p}{n} \ln(2n+1)}$$

et on a, en outre, $s_1^n \in S_{\leq n}$ ainsi, $1 \leq \sqrt[n]{\gamma_S(n)}$. Finalement, on a

$$1 \leq \sqrt[n]{\gamma_S(n)} \leq \mathrm{e}^{\frac{p}{n}\ln(2n+1)} \longrightarrow 1$$

si $n \to +\infty$ et par suite,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\gamma_S(n)} = 1.$$

□

On obtient ainsi le résultat principal de cette section.

Corollaire 2.4.4. *Toute partie non vide de $\mathbb{R}$ n'est pas paradoxale sous l'action du groupe $SA(1,\mathbb{Z})$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que $\mathrm{SA}(1,\mathbb{Z}) = T(1)$ est un groupe commutatif. On conclut par le le théorème 2.4.2 et la proposition 2.4.3. □

Remarque 2.4.5. On peut montrer de la même façon que $\mathbb{R}$ ne contient aucun ensemble paradoxal pour le groupe des isométries, puisque $G(1)$ est un groupe à croissance sous-exponentielle [8].

2.4.2 Cas des dimensions supérieures à 2

Dans cette section, nous montrons le résultat suivant :

Proposition 2.4.6 (AC). *Tout ensemble borné et d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ est paradoxal sous l'action du groupe $SA(n,\mathbb{Z})$.*

Pour ce faire, on utilise exactement la même technique que celle utilisée pour généraliser le paradoxe de Banach-Tarski mais cette fois-ci, nous effectuons toute la démonstration en détail. Autrement dit, on montre que

$$H_n(0,r) = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| < \frac{r}{2}\ \forall i \in \{1,\ldots,n\}\} \quad (r > 0)$$

est paradoxal sous l'action de $\mathrm{SA}(n,\mathbb{Z})$. On en tire que $H_n(x,r)$ l'est également, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $r > 0$ (propositions 1.2.11 et 1.2.12). Par le théorème 1.2.15, on a

$$H_n(x,r) \sim H_n(x',r')$$

sous l'action de $\mathrm{SA}(n,\mathbb{Z})$. Vu la proposition 1.2.17, on sait alors que si A et B sont des bornés d'intérieur non vide alors $A \sim B$; en particulier, $A \sim H_n(0,r)$ et par le théorème 1.2.10, on en conclut que A est paradoxal pour $\mathrm{SA}(n,\mathbb{Z})$. Tout revient donc à montrer que $H_n(0,r)$ est paradoxal sous l'action de $\mathrm{SA}(n,\mathbb{Z})$.

8. Une démonstration peut être trouvée dans [10].

On considère la bijection p définie comme suit

$$p : \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \quad A \mapsto A \times \{(x_3, \ldots, x_n) \mid |x_i| < \frac{r}{2} \ \forall i \in \{3, \ldots, n\}\}$$

et on montre que si A est paradoxal, $p(A)$ l'est également, ce qui suffit puisque

$$p(C_2(0, r)) = H_n(0, r)$$

et par la proposition 2.3.8, $C_2(0, r)$ est paradoxal sous $\mathrm{SA}(2, \mathbb{Z})$. Par hypothèse, il existe A_1 et A_2 deux sous-ensembles disjoints de A tels que $A_1 \sim A$ et $A_2 \sim A$. Il est clair que $p(A_1) \cap p(A_2) = \emptyset$ et de plus, $p(A_1) \subseteq p(A)$ et $p(A_2) \subseteq p(A)$. Nous allons montrer que

$$p(A_1) \sim p(A)$$

et de façon analogue, $p(A_2) \sim p(A)$, ce qui prouve que $p(A)$ est paradoxal. Soient $(B_i)_{i=1}^q$ une partition de A_1 et $g_1, \ldots, g_q$ des éléments de $\mathrm{SA}(2, \mathbb{Z})$ tels que $(g_i \cdot B_i)_{i=1}^q$ est une partition de A. Pour tout $i \in \{1, \ldots, q\}$ on considère l'application affine $\underline{g_i} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que

$$M(\underline{g_i}) = \begin{pmatrix} M(g_i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{n-2} \end{pmatrix}$$

et $\underline{g_i}(0) = (g_i(0), \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-2})$; dans ce cas [9], $\underline{g_i} \in \mathrm{SA}(n, \mathbb{Z})$ et on a

$$\begin{aligned}
\underline{g_i}(p(B_i)) &= \underline{g_i} \cdot (B_i \times \{(x_3, \ldots, x_n) \mid |x_i| < \tfrac{r}{2} \ \forall i \in \{3, \ldots, n\}\}) \\
&= (g_i \cdot B_i) \times \{(x_3, \ldots, x_n) \mid |x_i| < \tfrac{r}{2} \ \forall i \in \{3, \ldots, n\}\} \\
&= p(g_i \cdot B_i).
\end{aligned}$$

Ainsi, $p(B_i)$ est congruent à $p(g_i \cdot B_i)$; de plus, $(p(B_i))_{i=1}^q$ est une partition de $p(A_1)$ et $(p(g_i \cdot B_i))_{i=1}^q$ une partition de $p(A)$, d'où la conclusion.

9. Le déterminant d'une matrice diagonale par bloc est égal au produit des déterminants des matrices composant la diagonale.

Chapitre 3

Les mesures exhaustives et les ensembles paradoxaux

La première partie de ce chapitre établit la démonstration du *théorème de Tarski* qui lie la notion d'ensemble paradoxal à celle de mesure exhaustive. Dans la deuxième partie, en utilisant ce théorème, nous démontrons que le carré unité n'est pas paradoxal sous l'action du groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ et plus généralement, que le cube unité de $\mathbb{R}^n$ n'est pas paradoxal sous l'action du groupe $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$. Il est donc clair que nous ne pouvons donc pas nous passer des translations pour démontrer le paradoxe de Von Neumann. Enfin, dans la dernière section nous introduisons le concept d'*action localement commutative* et nous terminons par montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est paradoxal sous l'action du groupe spécial linéaire.

3.1 Le théorème de Tarski

Dans cette section, nous allons présenter et démontrer le théorème de Tarski énoncé ci-dessous.

Soit G un groupe agissant sur un ensemble X. Un sous-ensemble A de X n'est pas paradoxal pour G si et seulement s'il existe μ une mesure exhaustive et finiment additive sur X qui est G-invariante et telle que $\mu(A) = 1$.

Ce théorème est fondamental dans l'étude des décompositions paradoxales d'ensemble. Il permet de passer d'une définition exclusivement algébrique d'un ensemble paradoxal à une définition faisant intervenir des mesures exhaustives. En pratique, ce théorème est très utilisé puisque pour certains ensembles, il est beaucoup plus simple de montrer leur caractère paradoxal soit algébriquement soit en trouvant une mesure exhaustive comme stipulée dans l'énoncé. Le théorème de Tarski permet donc de simplifier certains problèmes.

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser à la condition nécessaire de ce théorème.

Proposition 3.1.1. *Soit G un groupe agissant sur un ensemble X. Soit μ une mesure exhaustive sur X, finiment additive et G-invariante. Si deux sous-ensembles A et B de X sont tels que $A \sim B$ alors $\mu(A) = \mu(B)$.*

Démonstration. Soient $(A_i)_{i=1}^n$ et $(B_i)_{i=1}^n$ des partitions respectives de A et B et soient $g_1, \ldots, g_n$ des éléments de G tels que

$$g_i \cdot A_i = B_i$$

pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. On a alors

$$\mu(B) = \mu(\bigcup_{i=1}^n B_i) = \sum_{i=1}^n \mu(B_i) = \sum_{i=1}^n \mu(g_i \cdot A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \mu(A),$$

d'où la conclusion. □

Corollaire 3.1.2. *Soit G un groupe agissant sur un ensemble X. Soit μ une mesure exhaustive sur X, finiment additive et G-invariante. Si un sous-ensemble A de X est paradoxal alors $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = \infty$.*

Démonstration. Soient A_1 et A_2 des sous-ensembles disjoints de A tels que $A_1 \sim A$ et $A_2 \sim A$. Par la proposition 3.1.1,

$$\mu(A) = \mu(A_1) = \mu(A_2)$$

et par suite, $2\mu(A) = \mu(A_1) + \mu(A_2) = \mu(A_1 \cup A_2) \leq \mu(A)$, ce qui permet de conclure. □

A ce stade, la condition nécessaire du théorème de Tarski est déjà prouvée. En effet, s'il existe μ une mesure exhaustive et finiment additive sur X qui est G-invariante et telle que $\mu(A) = 1$ alors par le corollaire 3.1.2, A ne peut pas être paradoxal.

Avant de poursuivre, rappelons brièvement la notion de monoïde. Si F est un ensemble non vide muni d'une opération binaire interne $+$ qui est associative et pour laquelle il existe un élément neutre noté 0, alors le triplet $(F, +, 0)$ est un *monoïde*. Si de plus les éléments de F commutent, on dit tout simplement que $(F, +, 0)$ est un *monoïde commutatif*.

Pour tout monoïde commutatif $(F, +, 0)$, on définit une relation $\leq$ sur F comme suit

$$x \leq y \;\Leftrightarrow\; \exists z \in F \;:\; x + z = y$$

et on vérifie facilement qu'il s'agit d'un pré-ordre[1] sur l'ensemble F. Pour tout $x \in F$, on pose

$$nx = \underbrace{x + \cdots + x}_{n \text{ fois}}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ et $nx = 0$ si $n = 0$. On en tire facilement que

1. Un *pré-ordre* est une relation réflexive et transitive.

1. $n(mx) = (nm)x$;
2. $(n+m)x = nx + mx$;
3. $n(x+y) = nx + ny$;
4. $n \leq m \;\Rightarrow\; nx \leq mx$;
5. $x \leq y \;\Rightarrow\; nx \leq ny$;
6. $x \leq y \;\Rightarrow\; x + z \leq y + z$,

pour tous $m, n \in \mathbb{N}$ et tous $x, y, z \in F$.

Exemple 3.1.3. Evidemment, le triplet $(\mathbb{N}, +, 0)$ est un monoïde commutatif.

Définition 3.1.4. Soient $(F, +, 0)$ un monoïde commutatif et $x_0 \in F$. On dit que l'élément $x \in F$ est *borné* par rapport à x_0 s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \leq nx_0$.

Remarques 3.1.5.

1. Si $x, y \in F$ sont bornés par rapport à $x_0 \in F$ alors $x + y$ est également borné par rapport à x_0. Cela découle de la définition de la relation $\leq$ et des propriétés des monoïdes commutatifs.
2. Si $x \in F$ n'est pas borné par rapport à $x_0 \in F$ alors pour tout $y \in F$, $x + y$ n'est pas borné par rapport à x_0. Sinon, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $z \in F$ tels que $(x+y)+z = nx_0$, c'est-à-dire $x + (y+z) = nx_0$, ce qui est absurde.

Définition 3.1.6. Soit $(F, +, 0)$ un monoïde commutatif. L'application

$$\mu : F \to [0; \infty]$$

est une *mesure*[2] *sur le monoïde* $(F, +, 0)$ si $\mu(x+y) = \mu(x) + \mu(y)$ pour tous $x, y \in F$.

Le théorème qui suit est la clef de la démonstration du théorème de Tarski. Cependant, avant de l'énoncer et de le démontrer, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 3.1.7. *Soient $(F, +, 0)$ un monoïde commutatif et $x_0 \in F$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a*

$$(k+1)x_0 \not\leq kx_0.$$

Supposons que tous les éléments de F sont bornés par rapport à x_0. Alors, dans ce cas, si F_0 est un sous-ensemble fini de F tel que $x_0 \in F_0$, il existe une application $\mu : F_0 \to [0; \infty]$ telle que

(i) $\mu(x_0) = 1$;

(ii) si $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n \in F_0$ sont tels que $\sum_{i=1}^{m} x_i \leq \sum_{j=1}^{n} y_j$ alors $\sum_{i=1}^{m} \mu(x_i) \leq \sum_{j=1}^{n} \mu(y_j)$.

2. Puisque $([0; \infty], +, 0)$ est un monoïde, l'application μ définit en fait un homomorphisme de monoïde. Remarquons cependant que cette application conserve l'ordre (i.e. $x \leq y \Rightarrow \mu(x) \leq \mu(y)$), ce qui fait penser à la monotonie d'une mesure définie sur l'ensemble des parties d'un ensemble.

Démonstration. Procédons par récurrence sur le cardinal de F_0.

<u>Cas de base</u> : $\#F_0 = 1$ (i.e. $F_0 = \{x_0\}$)

Il suffit de poser $\mu(x_0) = 1$ et le point (i) est satisfait. Montrons à présent que cette application satisfait également le point (ii). Soient $m, n \in \mathbb{N}_0$ tels que $mx_0 \leq nx_0$ et montrons que

$$\sum_{i=1}^{m} \mu(x_0) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(x_0),$$

c'est-à-dire $m \leq n$. Procédons par l'absurde et supposons que $n + 1 \leq m$; dans ce cas, en utilisant les propriétés des monoïdes commutatifs, on a $(n+1)x_0 \leq mx_0$ et par transitivité du pré-ordre $\leq$, on obtient $(n + 1)x_0 \leq nx_0$, ce qui contredit nos hypothèses.

<u>Induction</u> : $\#F_0 > 1$

Soit $y_0 \in F_0 \setminus \{x_0\}$. Par hypothèse de récurrence, il existe une application

$$\nu : F_0 \setminus \{y_0\} \to [0; \infty]$$

telle que $\nu(x_0) = 1$ et si $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n \in F_0 \setminus \{y_0\}$ tels que

$$x_1 + \cdots + x_m \leq y_1 + \cdots + y_n$$

alors $\sum_{i=1}^{m} \nu(x_i) \leq \sum_{j=1}^{n} \nu(y_j)$. On pose $\mu(x) = \nu(x)$ pour tout $x \in F_0 \setminus \{y_0\}$ et

$$\mu(y_0) = \inf_{\substack{r,p,q \in \mathbb{N}_0 \\ u_i, v_j \in F_0 \setminus \{y_0\} \\ u_1 + \cdots + u_q + ry_0 \leq v_1 + \cdots + v_p}} \frac{\sum_{j=1}^{p} \nu(v_j) - \sum_{i=1}^{q} \nu(u_i)}{r}.$$

L'application μ est évidemment bien définie sur $F_0 \setminus \{y_0\}$. De plus, l'expression

$$\sum_{j=1}^{p} \nu(v_j) - \sum_{i=1}^{q} \nu(u_i) \tag{3.1}$$

a du sens car les deux sommes sont finies. En effet, tous les éléments de F sont bornés par rapport à x_0 et donc en particulier ceux de $F_0 \setminus \{y_0\}$ aussi. Ainsi, pour tout $z \in F_0 \setminus \{y_0\}$ il existe $l \in \mathbb{N}$ tel que $z \leq lx_0$ et par conséquent,

$$\nu(z) \leq \sum_{i=1}^{l} \nu(x_0) = l,$$

ce qui prouve que l'expression (3.1) a bien du sens. De plus, par définition, $x_0 \leq x_0 + y_0$ et si l'application μ vérifie le point (ii) alors

$$\mu(x_0) \leq \mu(x_0) + \mu(y_0);$$

c'est-à-dire $0 \leq \mu(y_0)$. Finalement, si l'application

$$\mu : F_0 \to [0; \infty]$$

respecte le point (ii), elle est bien définie et elle satisfait l'énoncé. Il reste donc à prouver que μ vérifie bien le point (ii). Pour cela, il suffit de montrer que pour tous

$$x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n \in F_0 \setminus \{y_0\}$$

tels que $x_1 + \cdots + x_m + sy_0 \leq y_1 + \cdots + y_n + ty_0$ avec $s, t \in \mathbb{N}$ on a

$$\sum_{i=1}^{m} \nu(x_i) + s\mu(y_0) \leq \sum_{j=1}^{n} \nu(y_j) + t\mu(y_0). \tag{3.2}$$

Par souci de commodité, nous allons traiter trois cas différents.

Le **cas $s = t = 0$** est trivial.

Le **cas $s = 0$ et $t \neq 0$** permet de réécrire l'expression (3.2) sous la forme

$$\begin{aligned} & \textstyle\sum_{i=1}^{m} \nu(x_i) \leq \sum_{j=1}^{n} \nu(y_j) + t\mu(y_0) \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{\sum_{i=1}^{m} \nu(x_i) - \sum_{j=1}^{n} \nu(y_j)}{t} \leq \mu(y_0); \end{aligned}$$

de ce fait et par définition de l'infimum, il suffit alors de montrer que pour tous $r, p, q \in \mathbb{N}_0$ et tous $u_i, v_j \in F_0 \setminus \{y_0\}$ tels que $u_1 + \cdots + u_q + ry_0 \leq v_1 + \cdots + v_p$, on a

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} \nu(x_i) - \sum_{j=1}^{n} \nu(y_j)}{t} \leq \frac{\sum_{j=1}^{p} \nu(v_j) - \sum_{i=1}^{q} \nu(u_i)}{r}.$$

Par hypothèse et en utilisant les propriétés des monoïdes commutatifs, on a

$$\begin{aligned} & x_1 + \cdots + x_m \leq y_1 + \cdots + y_n + ty_0 \\ \Rightarrow \quad & rx_1 + \cdots + rx_m \leq ry_1 + \cdots + ry_n + rty_0 \\ \Rightarrow \quad & rx_1 + \cdots + rx_m + tu_1 + \cdots + tu_q \leq ry_1 + \cdots + ry_n + rty_0 + tu_1 + \cdots + tu_q \\ \Rightarrow \quad & rx_1 + \cdots + rx_m + tu_1 + \cdots + tu_q \leq ry_1 + \cdots + ry_n + t(ry_0 + u_1 + \cdots + u_q) \\ \Rightarrow \quad & rx_1 + \cdots + rx_m + tu_1 + \cdots + tu_q \leq ry_1 + \cdots + ry_n + t(v_1 + \cdots + v_p) \end{aligned}$$

et par conséquent, vu le point (ii) appliqué à ν, on obtient

$$\begin{aligned} & r\textstyle\sum_{i=1}^{m} \nu(x_i) + t\sum_{i=1}^{q} \nu(u_i) && \leq && r\sum_{j=1}^{n} \nu(y_j) + t\sum_{j=1}^{p} \nu(v_j) \\ \Leftrightarrow \quad & r\textstyle\sum_{i=1}^{m} \nu(x_i) - r\sum_{j=1}^{n} \nu(y_j) && \leq && t\sum_{j=1}^{p} \nu(v_j) - t\sum_{i=1}^{q} \nu(u_i), \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

Dans le dernier cas, c'est-à-dire le **cas $\boldsymbol{s \neq 0}$ et $\boldsymbol{t} \in \mathbb{N}$**, et par définition de l'infimum, il suffit de montrer que pour tous $r, p, q \in \mathbb{N}_0$ et tous $u_i, v_j \in F_0 \setminus \{y_0\}$ tels que

$$u_1 + \cdots + u_q + ry_0 \leq v_1 + \cdots + v_p,$$

on a

$$\sum_{i=1}^{m} \nu(x_i) + s\mu(y_0) \leq \sum_{j=1}^{n} \nu(y_j) + t\, \frac{\sum_{j=1}^{p} \nu(v_j) - \sum_{i=1}^{q} \nu(u_i)}{r}.$$

Par hypothèse, on a

$$\begin{aligned}
& x_1 + \cdots + x_m + sy_0 \leq y_1 + \cdots + y_n + ty_0 \\
\Rightarrow\ & rx_1 + \cdots + rx_m + rsy_0 \leq ry_1 + \cdots + ry_n + rty_0 \\
\Rightarrow\ & rx_1 + \cdots + rx_m + rsy_0 + tu_1 + \cdots + tu_q \leq ry_1 + \cdots + ry_n + rty_0 + tu_1 + \cdots + tu_q \\
\Rightarrow\ & rx_1 + \cdots + rx_m + rsy_0 + tu_1 + \cdots + tu_q \leq ry_1 + \cdots + ry_n + t(ry_0 + u_1 + \cdots + u_q) \\
\Rightarrow\ & rx_1 + \cdots + rx_m + rsy_0 + tu_1 + \cdots + tu_q \leq ry_1 + \cdots + ry_n + t(v_1 + \cdots + v_p).
\end{aligned}$$

Ainsi, par définition et en appliquant le point (ii) à ν, on a

$$\begin{aligned}
\mu(y_0) &\leq \frac{(r\sum_{j=1}^{n} \nu(y_j) + t\sum_{j=1}^{p} \nu(v_j)) - (r\sum_{i=1}^{m} \nu(x_i) + t\sum_{i=1}^{q} \nu(u_i))}{rs} \\
\Leftrightarrow\ \mu(y_0) &\leq \frac{r(\sum_{j=1}^{n} \nu(y_j) - \sum_{i=1}^{m} \nu(x_i))}{rs} + \frac{t(\sum_{j=1}^{p} \nu(v_j) - \sum_{i=1}^{q} \nu(u_i))}{rs} \\
\Leftrightarrow\ s\mu(y_0) &\leq \sum_{j=1}^{n} \nu(y_j) - \sum_{i=1}^{m} \nu(x_i) + t\, \frac{\sum_{j=1}^{p} \nu(v_j) - \sum_{i=1}^{q} \nu(u_i)}{r},
\end{aligned}$$

d'où la conclusion. □

Passons à présent au théorème annoncé.

Théorème 3.1.8 (AC). *Soient $(F, +, 0)$ un monoïde commutatif et $x_0 \in F$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(n+1)x_0 \nleq nx_0$.

(ii) Il existe une mesure $\mu : F \to [0; \infty]$ telle que $\mu(x_0) = 1$.

Démonstration. Commençons par montrer que la deuxième assertion implique la première. Soit $\mu : F \to [0; \infty]$ une mesure telle que $\mu(x_0) = 1$. Procédons par l'absurde et supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(n+1)x_0 \leq nx_0$. Dans ce cas, vu les propriétés qui découlent directement de la définition d'une mesure sur un monoïde, on a $\mu((n+1)x_0) \leq \mu(nx_0)$ et par suite, $(n+1)\mu(x_0) \leq n\mu(x_0)$ c'est-à-dire $n+1 \leq n$, ce qui est absurde.

Montrons à présent que la première assertion implique la deuxième. Pour ce faire, on peut supposer que tous les éléments de F sont bornés par rapport à x_0. En effet, si on montre l'existence d'une mesure μ uniquement définie sur les éléments bornés [3] de F et satisfaisant (ii), il suffit de poser $\mu(x) = \infty$ pour tout $x \in F$ non bornés pour conclure.

3. L'ensemble des éléments bornés de F munit de l'opération $+$ est aussi un monoïde commutatif étant donné que la somme de deux éléments bornés est bornée.

Ainsi, supposons que (i) est vérifiée et que les éléments de F sont bornés pour montrer le point (ii). On pose

$$\mathcal{F} = \{F_0 \mid F_0 \text{ fini, } F_0 \subseteq F \text{ et } x_0 \in F_0\}$$

et on va utiliser la même idée de démonstration que celle utilisée lors de la deuxième partie de la démonstration de la proposition 1.4.11. Pour tout $F_0 \in \mathcal{F}$, on pose

$$M(F_0) = \{\nu \in [0;\infty]^F \mid \nu(x_0) = 1 \text{ et } \nu(x+y) = \nu(x) + \nu(y)\ \forall x, y, x+y \in F_0\}.$$

L'ensemble $M(F_0)$ est non vide pour tout $F_0 \in \mathcal{F}$. En effet, le lemme 3.1.7 nous donne une application ν_0 définie sur F_0 telle que $\nu_0(x_0) = 1$. De plus, si $x, y \in F_0$ et $z = x + y$ appartient à F_0 alors $x + y \leq z$ et par le deuxième point du lemme 3.1.7, on obtient

$$\nu_0(x) + \nu_0(y) \leq \nu_0(z) = \nu_0(x+y).$$

De même, $\nu_0(x+y) \leq \nu_0(x) + \nu_0(y)$ et par suite, on a $\nu_0(x) + \nu_0(y) = \nu_0(x+y)$. Il suffit alors de poser

$$\begin{cases} \nu(x) &= \nu_0(x) & \text{si}\, x \in F_0 \\ \nu(x) &= 0 & \text{si}\, x \in F \setminus F_0 \end{cases}$$

et dans ce cas, $\nu \in M(F_0)$. Il est clair que $M(F_0)$ est fermé pour tout $F_0 \in \mathcal{F}$. Si $n \in \mathbb{N}_0$ et $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$ alors $F_1 \cup \cdots \cup F_n \in \mathcal{F}$ et il est évident que

$$\emptyset \neq M(F_1 \cup \cdots \cup F_n) \subseteq M(F_1) \cap \cdots \cap M(F_n).$$

Par conséquent et par compacité de $[0;\infty]^F$,

$$\{M(F_0) \mid F_0 \in \mathcal{F}\}$$

est une famille de fermés dont toutes les sous-familles finies sont d'intersection non vide, alors

$$\bigcap_{F_0 \in \mathcal{F}} M(F_0) \neq \emptyset.$$

Un élément de cette intersection satisfait l'énoncé car si μ est un tel élément alors $\mu \in [0;\infty]^F$ et $\mu(x_0) = 1$ puisque $\mu \in M(F_0)$ pour tout $F_0 \in \mathcal{F}$. De plus, pour tous $x, y \in F$, on a

$$\mu(x+y) = \mu(x) + \mu(y)$$

étant donné que $\mu \in M(\{x_0, x, y, x+y\})$. □

Notre prochain objectif est de construire un monoïde commutatif dont certains éléments satisfont à la condition (i) du théorème 3.1.8. Si X est un ensemble sur lequel le groupe G agit alors on va montrer qu'on peut associer à chaque sous-ensemble de X un élément de ce monoïde ; nous montrerons que si cet élément respecte la condition (i) alors le sous-ensemble de départ n'est pas paradoxal pour G. On commence à voir apparaitre le théorème de Tarski...

Définitions 3.1.9. Soit G un groupe agissant sur un ensemble X. Rappelons que $B(\mathbb{N})$ représente le groupe des bijections de $\mathbb{N}$ dans lui-même et posons

$$X^\star = X \times \mathbb{N} \qquad \text{et} \qquad G^\star = \{(g, \pi) \mid g \in G \text{ et } \pi \in B(\mathbb{N})\}.$$

Si on munit l'ensemble $G^\star$ de la composition composante à composante, on vérifie facilement que $G^\star$ est un groupe. De plus, il agit sur l'ensemble $X^\star$ par l'action

$$\big((g, \pi),\ (x, n)\big) \mapsto (g, \pi) \cdot (x, n) = (g \cdot x, \pi(n)).$$

Soit $A^\star \subseteq X^\star$. On dit que $n \in \mathbb{N}$ est un *niveau* de $A^\star$ s'il existe $x \in X$ tel que $(x, n) \in A^\star$. Autrement dit, si la projection de $A^\star$ sur $\mathbb{N}$ contient n. Si $A^\star$ possède un nombre fini de niveau alors $A^\star$ est dit *borné* (i.e. la projection de $A^\star$ sur $\mathbb{N}$ est bornée). On pose

$$F_{G,X} = \{[A^\star] \mid A^\star \text{ borné}\}$$

où $[A^\star] = \{B^\star \subseteq X^\star \mid A^\star \sim B^\star \text{ pour } G^\star\}$; c'est-à-dire la classe d'équivalence de $A^\star$ pour la relation d'équidécomposabilité caractérisée par l'action de $G^\star$ sur $X^\star$. On munit $F_{G,X}$ d'une opération $+$ définie comme suit

$$[A^\star] + [B^\star] = [A^\star \cup B^{\star\prime}]$$

où $B^{\star\prime} = \{(x, n+k) \mid (x, n) \in B^\star\}$ avec $k \in \mathbb{N}$ choisi tel que $A^\star$ et $B^{\star\prime}$ n'aient aucun niveau en commun ; en particulier, $A^\star \cap B^{\star\prime} = \emptyset$. On note $0 = [\emptyset]$.

Remarque 3.1.10. Soient $A^\star$ et $B^\star$ des sous-ensembles bornés de $X^\star$. Si on pose

$$B_1^\star = \{(x, n + k_1) \mid (x, n) \in B^\star\} \quad \text{et} \quad B_2^\star = \{(x, n + k_2) \mid (x, n) \in B^\star\}$$

où $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ sont choisis de sorte que $A^\star \cap B_1^\star = A^\star \cap B_2^\star = \emptyset$ alors $(e, \pi) \cdot B_1^\star = B_2^\star$ avec $\pi(n) = n - k_1 + k_2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, $B_1^\star \sim B_2^\star$ pour $G^\star$ et par le lemme 1.2.5, on a

$$[A^\star \cup B_1^\star] = [A^\star \cup B_2^\star].$$

Remarque 3.1.11. Le remarque 3.1.10 montre que l'opération $+$ est indépendante du naturel k que l'on choisi pour définir $B^{\star\prime}$. De plus, cette opération est indépendante du choix des représentants. En effet, si $C^\star \subseteq X^\star$ et $D^\star \subseteq X^\star$ sont tels que

$$[A^\star] = [C^\star] \qquad \text{et} \qquad [B^\star] = [D^\star]$$

alors, on a $A^\star \sim C^\star$ et $B^\star \sim D^\star$ pour $G^\star$. De plus, il est clair que $B^{\star\prime} \sim B^\star$ pour $G^\star$ et de la même façon que $D^{\star\prime} \sim D^\star$ pour[4] $G^\star$ (remarque 3.1.10). Ainsi, par transitivité, $B^{\star\prime} \sim D^{\star\prime}$ pour $G^\star$. Finalement, par le lemme 1.2.5, on a

$$A^\star \cup B^{\star\prime} \sim C^\star \cup D^{\star\prime}$$

4. Où $D^{\star\prime} = \{(x, n + k) \mid (x, n) \in D^\star\}$ avec $k \in \mathbb{N}$ choisi de sorte que $D^{\star\prime}$ et $C^\star$ n'aient aucun niveau en commun.

pour $G^\star$ car $A^\star \cap B^{\star\prime} = C^\star \cap D^{\star\prime} = \emptyset$, ceci montre que

$$[A^\star] + [B^\star] = [A^\star \cup B^{\star\prime}] = [C^\star \cup D^{\star\prime}] = [C^\star] + [D^\star].$$

De plus, il est clair que si $A^\star$ et $B^\star$ sont des sous-ensembles bornés de $X^\star$ alors $A^\star \cup B^{\star\prime}$ est un sous-ensemble borné de $X^\star$, ceci montre que l'opération $+$ est interne.

Pour l'instant, nous avons montré que l'opération $+$ est bien définie et interne. Pour montrer que $(F_{G,X}, +, 0)$ est un monoïde commutatif, il reste à prouver que l'opération $+$ est associative et commutative. De plus, il faut montrer que 0 est le neutre pour $+$. Ceci fait l'objet de la prochaine proposition.

Proposition 3.1.12. *Le triplet* $(F_{G,X},\ +,\ 0)$ *est un monoïde commutatif.*

Démonstration. Montrons d'abord l'associativité. Soient $A^\star, B^\star$ et $C^\star$ des sous-ensembles bornés de $X^\star$. On a

$$[A^\star] + \big([B^\star] + [C^\star]\big) = [A^\star] + [B^\star \cup C^{\star\prime}] = \big[A^\star \cup (B^\star \cup C^{\star\prime})'\,\big]$$

où

$$(B^\star \cup C^{\star\prime})' = \underbrace{\{(x, n + k_1) \mid (x, n) \in B^\star\}}_{=Y} \cup \underbrace{\{(x, n + k_1) \mid (x, n) \in C^{\star\prime}\}}_{=Z}$$

avec $k_1 \in \mathbb{N}$ choisi de sorte que les niveaux de $(B^\star \cup C^{\star\prime})'$ soient différents de ceux de $A^\star$. En particulier, les niveaux de Y sont différents de ceux de $A^\star$ et on peut donc poser $Y = B^{\star\prime}$. On a

$$Z = \{(x, n + k_2) \mid (x, n) \in C^\star\}$$

avec $k_2 \in \mathbb{N}$ bien choisi. Quitte à augmenter (ou diminuer) k_2, on peut supposer que les niveaux de Z et $A^\star \cup B^{\star\prime}$ sont distincts car ce sont des bornés de $X^\star$ (ils ont donc un nombre fini de niveaux). En particulier, on peut poser $Z = C^{\star\prime}$ et on a

$$[A^\star] + \big([B^\star] + [C^\star]\big) = \big[(A^\star \cup B^{\star\prime}) \cup C^{\star\prime}\big] = [A^\star \cup B^{\star\prime}] + [C^\star] = \big([A^\star] + [B^\star]\big) + [C^\star].$$

La commutativité découle directement du lemme 1.2.5 car $B^{\star\prime} \sim B^\star$ et $A^\star \sim A^{\star\prime}$ pour $G^\star$ et $B^{\star\prime} \cap A^\star = B^\star \cap A^{\star\prime} = \emptyset$. Ainsi, $A^\star \cup B^{\star\prime} \sim B^\star \cup A^{\star\prime}$ pour $G^\star$ et par suite,

$$[A^\star] + [B^\star] = [A^\star \cup B^{\star\prime}] = [B^\star \cup A^{\star\prime}] = [B^\star] + [A^\star].$$

De plus, il est clair que 0 est le neutre pour $+$ car $\emptyset' = \emptyset$, la conclusion découle. □

Nous avons vu que si $(F, +, 0)$ est un monoïde commutatif, on peut munir F d'un pré-ordre $\leq$. La proposition suivante caractérise ce pré-ordre dans le cas particulier où le monoïde commutatif est $(F_{G,X}, +, 0)$.

Proposition 3.1.13. *Soient* $A^\star$ *et* $B^\star$ *des sous-ensembles bornés de* $X^\star$*. On a*

$$[A^\star] \leq [B^\star] \ \Leftrightarrow\ \exists B_0^\star \subseteq B^\star \ :\ A^\star \sim B_0^\star \text{ pour } G^\star.$$

En particulier, si $A^\star \subseteq B^\star$ *alors* $[A^\star] \leq [B^\star]$*.*

Démonstration. Si $[A^\star] \leq [B^\star]$ alors par définition, il existe $C^\star \subseteq X^\star$ tel que

$$[A^\star] + [C^\star] = [B^\star].$$

On a $[A^\star]+[C^\star] = [A^\star \cup C^{\star\prime}]$ ainsi, $A^\star \cup C^{\star\prime} \sim B^\star$ pour $G^\star$. Puisque $A^\star$ et $C^{\star\prime}$ sont disjoints, on vérifie facilement qu'il existe $B_0^\star \subseteq B^\star$ tel que $A^\star \sim B_0^\star$ et $C^{\star\prime} \sim B^\star \setminus B_0^\star$ pour $G^\star$, ce qui permet de conclure.

Si $A^\star \sim B_0^\star$ pour $G^\star$ avec $B_0^\star \subseteq B^\star$ alors $[A^\star]+[B^\star \setminus B_0^\star] = [B^\star]$ car, par le lemme 1.2.5, on a

$$A^\star \cup (B^\star \setminus B_0^\star)' \sim B_0^\star \cup (B^\star \setminus B_0^\star)$$

pour $G^\star$, ce qui prouve que $[A^\star] \leq [B^\star]$. □

Remarque 3.1.14. En utilisant le théorème 1.2.6, on voit facilement que $\leq$ est antisymétrique et par conséquent, $\leq$ définit un ordre sur $F_{G,X}$.

Comme le montre le proposition suivante, ce monoïde particulier nous fournit une nouvelle formulation du caractère paradoxal d'un ensemble.

Proposition 3.1.15. *Soit G un groupe agissant sur un ensemble X. Le sous-ensemble A de X est paradoxal pour G si et seulement si $A \times \{0\} \sim A \times \{0\} \cup A \times \{1\}$ pour $G^\star$.*

Démonstration. Soit A un sous-ensemble de X paradoxal pour G. Par définition, il existe (A_1, A_2) une partition de A telle que $A_1 \sim A$ et $A_2 \sim A$ pour G. Il existe donc $(A_{1,i})_{i=1}^n$ et $(A_i')_{i=1}^n$ des partitions de A_1 et A respectivement et $g_1, \ldots, g_n \in G$ tels que $g_i \cdot A_{1,i} = A_i'$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. De même, il existe $(A_{2,i})_{i=1}^m$ et $(A_i'')_{i=1}^m$ des partitions de A_2 et A respectivement et $h_1, \ldots, h_m \in G$ tels que $h_i \cdot A_{2,i} = A_i'$ pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$. Dans ce cas, $((A_{1,i})_{i=1}^n, (A_{2,i})_{i=1}^m)$ est une partition de A et pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et tout $j \in \{1, \ldots, m\}$, on a

$$(g_i, \mathrm{id}) \cdot (A_{1,i} \times \{0\}) = A_i' \times \{0\} \qquad \text{et} \qquad (h_j, \pi) \cdot (A_{1,j} \times \{0\}) = A_j'' \times \{1\}$$

où $\pi(0) = 1$, $\pi(1) = 0$ et $\pi(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. D'où la conclusion.

Supposons à présent que $A \times \{0\} \sim A \times \{0\} \cup A \times \{1\}$ pour $G^\star$. Dans ce cas, il existe $(A_{0,1}, \ldots, A_{0,n}, A_{1,1}, \ldots, A_{1,m})$, $(A_i')_{i=1}^n$ et $(A_i'')_{i=1}^m$ des partitions de A telles que $A_{0,i}$ est congruent à A_i' pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $A_{1,j}$ est congruent à A_j'' pour tout $j \in \{1, \ldots, m\}$. Ainsi, les ensembles

$$A_0 = \bigcup_{i=1}^n A_{0,i} \qquad \text{et} \qquad A_1 = \bigcup_{i=1}^m A_{1,i}$$

sont disjoints et tels que $A_0 \sim A$ et $A_1 \sim A$ pour G, ce qui nous permet de conclure. □

Remarque 3.1.16. Dans la proposition 3.1.15, on peut remplacer 0 et 1 par n'importe quels naturels r et s tels que $r \neq s$.

Corollaire 3.1.17. *Soit G un groupe agissant sur un ensemble X. Le sous-ensemble A de X est paradoxal pour G si et seulement si*

$$[A \times \{0\}] = 2[A \times \{0\}].$$

En particulier, si A est paradoxal pour G alors $[A \times \{0\}] = n\,[A \times \{0\}]$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$.

Démonstration. Il suffit d'utiliser la proposition 3.1.15 et de remarquer qu'on a

$$[A \times \{0\}] = [A \times \{0\} \cup A \times \{1\}] = [A \times \{0\}] + [A \times \{0\}] = 2[A \times \{0\}].$$

Le cas particulier est une simple itération puisque

$$n\,[A \times \{0\}] = \underbrace{[A \times \{0\}] + [A \times \{0\}]}_{=[A \times \{0\}]} + [A \times \{0\}] + \cdots + [A \times \{0\}] = (n-1)\,[A \times \{0\}]$$

et ainsi de suite. □

Remarque 3.1.18. On peut faire la même remarque que pour la proposition 3.1.15, c'est-à-dire qu'on peut remplacer le 0 du corollaire 3.1.17 par n'importe quel naturel.

Le théorème suivant, appelé la *loi d'annulation*, est nécessaire pour obtenir le théorème de Tarski. Sa démonstration requiert quelques notions de théorie des graphes [5] ainsi que le *théorème de König* ; c'est pour cela que nous rappelons au lecteur qu'un graphe se note $\Gamma = (V, E)$ où V est l'ensemble des *sommets* et E est l'ensemble des *arêtes*, c'est-à-dire un ensemble de paires de sommets (on se place dans le cas non orienté). Si une paire de sommets est répétée dans E alors, on parlera de *multi-graphe*.

On dit qu'un graphe est *k-régulier* ($k \in \mathbb{N}$) si chaque sommet est adjacent à exactement k arêtes, autrement dit, si le *degré* de chaque sommet est exactement k. Un graphe est *biparti* si l'ensemble de ses sommets peut être partitionné en deux sous-ensembles, de sorte qu'aucune arête ne soit incidente à deux sommets du même sous-ensemble.

Pour finir, rappelons qu'un *couplage* M est un ensemble d'arêtes n'ayant aucun sommet en commun ; on dit que M est un *couplage parfait* si chaque sommet du graphe est incident à une (et donc a une seule) arête de M.

Maintenant, nous allons énoncer le théorème de König. Pour une démonstration, le lecteur pourra consulter [23].

Théorème 3.1.19 (Théorème de König (**AC**))**.** *Un multi-graphe biparti et k-régulier contient un couplage parfait ($k \in \mathbb{N}_0$).*

Passons à présent au théorème souhaité.

5. Les notations sont celles utilisée dans [19].

Théorème 3.1.20 (Loi d'annulation **(AC)**)**.** *Soient G un groupe agissant sur un ensemble X et $[A^\star], [B^\star] \in F_{G,X}$. S'il existe $n \in \mathbb{N}_0$ tel que $n[A^\star] = n[B^\star]$ alors $[A^\star] = [B^\star]$.*

Démonstration. On a

$$n[A^\star] = [A^\star] + \cdots + [A^\star] \quad \text{et} \quad [A^\star] + [A^\star] = [A^\star \cup A_1^\star]$$

où

$$A_1^\star = \{(x, n + k_1) \mid (x, n) \in A^\star\}$$

avec $k_1 \in \mathbb{N}_0$ bien choisi ; en particulier, on a $A_1^\star \cap A^\star = \emptyset$ et $[A_1^\star] = [A^\star]$. De plus, on a

$$[A^\star \cup A_1^\star] + [A^\star] = [A^\star \cup A_1^\star \cup A_2^\star]$$

avec

$$A_2^\star = \{(x, n + k_2) \mid (x, n) \in A^\star\}$$

où $k_2 \in \mathbb{N}_0$ bien choisi de sorte que, en particulier, $A^\star \cap A_2^\star = \emptyset$ et $A_1^\star \cap A_2^\star = \emptyset$. En itérant, il existe $A_1^\star, \dots, A_{n-1}^\star$ tels que

$$A_i^\star \ = \{(x, n + k_i) \mid (x, n) \in A^\star\}, \quad A_i^\star \cap A^\star \quad \text{et} \quad A_i^\star \cap A_j^\star$$

pour tous $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$ tels que $i \neq j$ et pour lesquels on obtient

$$n[A^\star] = [A^\star] + \cdots + [A^\star] = [A^\star \cup A_1^\star \cup \cdots \cup A_{n-1}^\star]. \tag{3.3}$$

De la même façon, il existe $B_1^\star, \dots, B_{n-1}^\star$ deux à deux disjoints et tels que $B_i^\star \cap B^\star = \emptyset$ pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$ et pour lesquels on a

$$n[B^\star] = [B^\star \cup B_1^\star \cup \cdots \cup B_{n-1}^\star].$$

De plus, quitte à augmenter ou diminuer les différents k_i, on peut supposer que

$$A_i^\star \cap B_j^\star = \emptyset, \quad A^\star \cap B_i^\star = \emptyset \quad \text{et} \quad B^\star \cap A_i^\star = \emptyset$$

pour tous $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$. Par hypothèse, $n[A^\star] = n[B^\star]$, c'est-à-dire

$$[A^\star \cup A_1^\star \cup \cdots \cup A_{n-1}^\star] = [B^\star \cup B_1^\star \cup \cdots \cup B_{n-1}^\star]$$

ce qui implique $D = A^\star \cup A_1^\star \cup \cdots \cup A_{n-1}^\star \sim B^\star \cup B_1^\star \cup \cdots \cup B_{n-1}^\star = D'$ pour $G^\star$. Par le lemme 1.2.4, pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, il existe des bijections

$$\chi : D \to D', \quad \varphi_i : A^\star \to A_i^\star \quad \text{et} \quad \psi_i : B^\star \to B_i^\star$$

telles que pour tout $C_1^\star \subseteq D$, tout $C_2^\star \subseteq A^\star$ et tout $C_3^\star \subseteq B^\star$ on a $C_1^\star \sim \chi(C_1^\star)$, $C_2^\star \sim \varphi_i(C_2^\star)$ et $C_3^\star \sim \psi_i(C_3^\star)$ pour $G^\star$. On note $A^\star = A_0^\star$ et $B^\star = B_0^\star$; de plus, pour tout $a \in A^\star$ et tout $b \in B^\star$, on pose

$$\underline{a} = \{\varphi_0(a), \varphi_1(a), \dots, \varphi_{n-1}(a)\} \qquad \text{et} \qquad \underline{b} = \{\psi_0(b), \psi_1(b), \dots, \psi_{n-1}(b)\}$$

avec $\varphi_0 = \psi_0 = \mathrm{id}$. On pose aussi $\underline{A} = \{\underline{a} \mid a \in A^\star\}$ et $\underline{B} = \{\underline{b} \mid b \in B^\star\}$.

A présent, notre objectif est de construire un graphe $\Gamma = (V, E)$ auquel on appliquera le théorème de König. On pose $V = \underline{A} \cup \underline{B}$ et il est clair que $\underline{A} \cap \underline{B} = \emptyset$. On définit E de sorte que pour tout $\underline{a} \in \underline{A}$, tout $\underline{b} \in \underline{B}$ et tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, on a

$$\{\underline{a}, \underline{b}\} \in E \;\Leftrightarrow\; \chi(\varphi_i(a)) \in \underline{b}$$

et par conséquent, Γ est n-régulier. En effet, si $\underline{a} \in \underline{A}$ alors pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, on a

$$\chi(\varphi_i(a)) \in D'$$

et ainsi, il existe $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ tel que $\chi(\varphi_i(a)) \in B_j^\star$ et par surjectivité de ψ_j, il existe $b \in B^\star$ tel que

$$\chi(\varphi_i(a)) = \psi_j(b) \in \underline{b};$$

ceci montre que pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ il existe $\underline{b_i} \in \underline{B}$ tel que $\{\underline{a}, \underline{b_i}\} \in E$. On montre de la même façon que si $\underline{b} \in \underline{B}$ alors $\underline{b}$ est de degré n. Ainsi, par le théorème de König, il existe M un couplage parfait et par conséquent, si $a \in A^\star$, il existe un unique $b \in B^\star$ tel que $\{\underline{a}, \underline{b}\} \in M$. On pose

$$A_{i,j} = \{a \in A^\star \mid \{\underline{a}, \underline{b}\} \in M \text{ et } \chi(\varphi_i(a)) = \psi_j(b)\}$$

et

$$B_{i,j} = \{b \in B^\star \mid \{\underline{a}, \underline{b}\} \in M \text{ et } \chi(\varphi_i(a)) = \psi_j(b)\}$$

pour tous $i, j \in \{0, \ldots, n-1\}$. Il est clair que $(A_{i,j})_{i,j \in \{0,\ldots,n-1\}}$ et $(B_{i,j})_{i,j \in \{0,\ldots,n-1\}}$ sont des partitions respectives de $A^\star$ et $B^\star$. De plus, pour tous $i, j \in \{0, \ldots, n-1\}$, on a $A_{i,j} \sim B_{i,j}$ pour $G^\star$. En effet, par construction des bijections φ_i, χ et ψ_j, on a

$$A_{i,j} \sim \varphi_i(A_{i,j}) \sim \chi(\varphi_i(A_{i,j})) = \psi_j(B_{i,j}) \sim B_{i,j}$$

pour $G^\star$. Finalement, $A^\star \sim B^\star$ pour $G^\star$, d'où la conclusion. □

Corollaire 3.1.21. *Soit G un groupe agissant sur un ensemble X. Si $A \subseteq X$ n'est pas paradoxal pour G alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(n+1)[A \times \{0\}] \not\leq n[A \times \{0\}]$.*

Démonstration. Posons $x = [A \times \{0\}] \in F_{G,X}$ et procédons par l'absurde. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$nx \geq (n+1)x = nx + x$$

or par hypothèse et en utilisant les propriétés des monoïdes commutatifs,

$$nx + x \geq (n+1)x + x = (n+2)x.$$

Finalement par transitivité, on a

$$nx \geq (n+1)x \geq (n+2)x$$

et en itérant, on obtient $nx \geq 2nx$. De plus, puisque $n \leq 2n$, on a $nx \leq 2nx$ et par antisymétrie de $\leq$, on a $nx = 2nx = n(2x)$. Par la loi d'annulation, on a $x = 2x$, c'est-à-dire

$$[A \times \{0\}] = 2[A \times \{0\}]$$

et par le corollaire 3.1.17, on en tire que A est paradoxal pour G, ce qui est absurde. $\square$

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème de Tarski.

Théorème 3.1.22 (Théorème de Tarski **(AC)**)**.** *Soit G un groupe agissant sur un ensemble X. Le sous-ensemble A de X n'est pas paradoxal pour G si et seulement s'il existe μ une mesure exhaustive et finiment additive sur X qui est G-invariante et telle que $\mu(A) = 1$.*

Démonstration. La condition nécessaire a déjà été traitée. Montrons la condition suffisante. Soit A un sous-ensemble de X qui n'est pas paradoxal pour G. Par le corollaire 3.1.21, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(n+1)[A \times \{0\}] \not\leq n[A \times \{0\}]$ et en utilisant le théorème 3.1.8, il existe une mesure

$$\nu : F_{G,X} \to [0; \infty]$$

telle que $\nu\big([A \times \{0\}]\big) = 1$ et $\nu(x+y) = \nu(x) + \nu(y)$ pour tous $x, y \in F_{G,X}$. Posons

$$\mu : \mathcal{P}(X) \to [0; \infty] \quad B \mapsto \nu\big([B \times \{0\}]\big)$$

et montrons que μ est la mesure recherchée. Tout d'abord, remarquons que μ est bien définie pour tout $B \in \mathcal{P}(X)$ et que $\mu(A) = 1$. De plus, une simple vérification montre que μ est finiment additive si on remarque que pour tous sous-ensembles disjoints B et C de X, on a

$$[B \times \{0\} \cup C \times \{0\}] = [B \times \{0\}] + [C \times \{0\}].$$

Ceci découle directement de la remarque 3.1.10 car on en déduit que

$$[B \times \{0\} \cup C \times \{0\}] = [B \times \{0\} \cup (C \times \{0\})'].$$

Pour finir, montrons que μ est G-invariante. Soient $g \in G$ et $B \subseteq X$, on a

$$\mu(g \cdot B) = \nu\Big(\big[(g \cdot B) \times \{0\}\big]\Big) = \nu\Big(\big[(g, \mathrm{id}) \cdot (B \times \{0\})\big]\Big)$$

or il est évident que $(g, \mathrm{id}) \cdot (B \times \{0\}) \sim B \times \{0\}$ pour $G^\star$, c'est-à-dire

$$\big[(g, \mathrm{id}) \cdot (B \times \{0\})\big] = [B \times \{0\}].$$

Finalement,

$$\mu(g \cdot B) = \nu\big([B \times \{0\}]\big) = \mu(B),$$

ce qui conclut la démonstration. $\square$

Remarque 3.1.23 (AC). Le théorème de Tarski nous apprend par exemple, qu'un groupe G est moyennable (définition 1.4.13) si et seulement s'il n'est pas paradoxal. On en tire, par le corollaire 2.2.6, que si un groupe possède deux éléments indépendants alors il n'est pas moyennable. On a longtemps cru en la véracité de la réciproque (i.e. les groupes non moyennables contiennent deux éléments indépendants) appelée *conjecture de Von Neumann* ; c'est seulement un demi siècle après avoir été énoncé quelle fut mise en défaut par Alexander Olshanskii qui exhibât dans [17] un groupe non moyennable ne contenant pas de sous-groupe libre.

Exemples 3.1.24. Il existe deux éléments indépendants dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \subseteq \mathrm{SL}(2)$; par conséquent, ces groupes ne sont pas moyennables. On peut également montrer [6] que le groupe $SO(3)$ contient deux éléments indépendants et par suite, $G(3)$ aussi ; de même, on en tire qu'ils ne sont donc pas moyennables.

Nous savons déjà que le caractère paradoxal d'un ensemble est intimement lié aux caractéristiques du groupe agissant sur lui et non, aux caractéristiques de l'ensemble lui-même. La proposition suivante montre que si le groupe est moyennable, l'ensemble sur lequel il agit ne peut être paradoxal.

Proposition 3.1.25 (AC). *Le groupe G est moyennable si et seulement si, pour tout ensemble X sur lequel G agit, X n'est pas paradoxal.*

Démonstration. La condition suffisante est évidente. En effet, le groupe G agit sur lui-même par l'action de translation à gauche et ainsi, par hypothèse, G n'est pas paradoxal et par la remarque 3.1.23, G est moyennable.

Soit X un ensemble sur lequel G agit. Pour montrer la condition nécessaire, nous allons exhiber une mesure exhaustive et finiment additive μ sur X qui est G-invariante et telle que $\mu(X) = 1$. Il suffira alors, de conclure par le théorème de Tarski. Pour ce faire, soit $x_0 \in X$ et pour tout $Y \subseteq X$, posons

$$\begin{cases} \nu(Y) = 1 & \text{si}\, x_0 \in Y \\ \nu(Y) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On vérifie facilement que cette application définit une mesure exhaustive finiment additive. Étant donné que G est moyennable, il existe ρ une moyenne G-invariante sur G et on pose

$$\mu(Y) = \int_G \nu(g \cdot Y)\, \mathrm{d}\rho(g)$$

pour tout $Y \subseteq X$. De cette façon, il est clair que l'application $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0; \infty]$ est exhaustive, finiment additive et telle que $\mu(X) = 1$. De plus, en utilisant le théorème 1.4.14, on voit quelle est G-invariante. D'où la conclusion. □

6. Une démonstration peut être trouvée dans [23].

3.2 Filtres et application du théorème de Tarski

Dans cette section, comme son nom l'indique, nous allons appliquer le théorème de Tarski et exhiber, pour tout $n \geq 1$, une mesure exhaustive que $\mathbb{R}^n$ finiment additive, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$-invariante et qui normalise le carré unité. Ainsi, on montre que si on enlève les translations du groupe $\mathrm{SA}(2, \mathbb{Z})$, la carré unité n'est plus paradoxal.

Pour parvenir à nos fins, il nous faut rappeler la définition d'un *filtre* et celle d'un *ultrafiltre* sur un ensemble et quelques unes de leurs propriétés. De plus, il nous faudra définir une convergence de suites d'un espace métrique quelconque à l'aide de ces ultrafiltres. Tous ces outils, nous permettrons de construire la mesure recherchée.

Commençons par la définition d'un *filtre*.

Définition 3.2.1. Soit X un ensemble. Un *filtre* sur X est un ensemble non vide $\mathscr{F}$ de $\mathcal{P}(X)$ tel que

(i) l'ensemble vide n'appartient pas à $\mathscr{F}$;

(ii) si $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$ alors $F_1 \cap F_1 \in \mathscr{F}$;

(iii) si $F_2 \supseteq F_1$ et $F_1 \in \mathscr{F}$ alors $F_2 \in \mathscr{F}$.

Remarque 3.2.2. Soit $\mathscr{F}$ un filtre sur un ensemble X. Si $F \in \mathscr{F}$ alors [7] $F^c \notin \mathscr{F}$. Sinon, par le point (ii) de la définition d'un filtre, $\emptyset = F \cap F^c \in \mathscr{F}$, ce qui n'est pas possible. De plus, on a $X \in \mathscr{F}$ puisque $\mathscr{F}$ est non vide et vu le point (iii) de la définition.

L'exemple suivant nous sera utile par la suite.

Exemple 3.2.3. Si l'ensemble X n'est pas fini alors $\{F \subseteq X \mid F^c \text{ est fini}\}$ est un filtre. On appelle ce filtre le *filtre de Fréchet* sur X.

Notre prochain objectif est de démontrer que tout filtre est inclus dans un filtre maximal qu'on appellera *ultrafiltre*. Pour ce faire, rappelons le *lemme de Zorn* duquel découle directement le *théorème d'existence des ultrafiltres*.

Rappel (Lemme de Zorn)**.** *Soit E un ensemble préordonné non vide. Supposons que toute partie totalement ordonnée de E possède un majorant dans E. Alors E possède un élément maximal.*

Théorème 3.2.4 (Existence des ultrafiltres (**AC**))**.** *Tout filtre sur X est inclus dans un filtre maximal.*

Démonstration. C'est une simple application du lemme de Zorn à l'ensemble des filtres sur X ordonné par inclusion. Montrons que si $\mathcal{C}$ est une partie totalement ordonnée de l'ensemble des filtres sur X alors, elle est majorée. Posons

$$\mathscr{M} = \bigcup_{\mathscr{F} \in \mathcal{C}} \mathscr{F} = \{F \subseteq X \mid \exists \mathscr{F} \in \mathcal{C} \text{ tel que } F \in \mathscr{F}\}$$

7. On parle ici du complémentaire de F dans X évidemment.

et montrons que $\mathscr{M}$ est un filtre qui majore $\mathcal{C}$. Par définition, il est clair que $\mathscr{M}$ majore $\mathcal{C}$. De plus, $\mathscr{M}$ ne contient pas l'ensemble vide.

Si $F_1, F_2 \in \mathscr{M}$ alors il existe $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2 \in \mathcal{C}$ tels que $F_1 \in \mathscr{F}_1$ et $F_2 \in \mathscr{F}_2$. Puisque $\mathcal{C}$ est totalement ordonné, soit $\mathscr{F}_2 \subseteq \mathscr{F}_1$ soit $\mathscr{F}_1 \subseteq \mathscr{F}_2$. Dans tous les cas, $F_1 \cap F_2 \in \mathscr{M}$.

Si $F_1 \in \mathscr{M}$ et si $F_2 \supseteq F_1$ alors il existe $\mathscr{F} \in \mathcal{C}$ tel que $F_1 \in \mathscr{F}$ et par définition d'un filtre, $F_2 \in \mathscr{F} \subseteq \mathscr{M}$. $\square$

Définition 3.2.5. Un filtre maximal sur l'ensemble des filtres ordonnés par inclusion est appelé *ultrafiltre*.

La proposition suivante caractérise les ultrafiltres.

Proposition 3.2.6 (AC). *Un filtre $\mathscr{F}$ sur un ensemble X est un ultrafiltre si et seulement si pour tout $Y \subseteq X$ on a $Y \in \mathscr{F}$ ou $Y^c \in \mathscr{F}$.*

Démonstration. Montrons d'abord que la condition est suffisante. Soit $\mathscr{G}$ un filtre tel que $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{G}$. Procédons par l'absurde et supposons que $\mathscr{G} \neq \mathscr{F}$. Soit $G \in \mathscr{G}$ tel que $G \notin \mathscr{F}$. Dans ce cas, par hypothèse $G^c \in \mathscr{F} \subseteq \mathscr{G}$ et $G^c \in \mathscr{G}$, ce qui n'est pas possible à cause de la remarque 3.2.2.

A présent, montrons que la condition est nécessaire. Soit $Y \subseteq X$ et supposons que $Y^c \notin \mathscr{F}$. Posons

$$\mathscr{G} = \{G \mid \exists F \in \mathscr{F} \text{ tel que } F \cap Y \subseteq G\}$$

et montrons que $\mathscr{G}$ est un filtre sur X contenant $\mathscr{F}$, ce qui suffit. En effet, comme $\mathscr{F}$ est maximal, on a $\mathscr{G} = \mathscr{F}$; or $X \cap Y \subseteq Y$ et par définition de $\mathscr{G}$, $Y \in \mathscr{G} = \mathscr{F}$, ce qui permet de conclure.

Montrons que $\mathscr{G}$ est un filtre. En effet, $\emptyset \notin \mathscr{G}$, car pour tout $F \in \mathscr{F}$, on a $F \cap Y \neq \emptyset$ car sinon, $F \subseteq Y^c$ et par définition d'un filtre, $Y^c \in \mathscr{F}$, ce qui n'est pas possible par hypothèse. Les conditions (ii) et (iii) de la définition d'un filtre sont de simples vérifications. De plus, il est clair que $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{G}$ car $F \cap Y \subseteq F$ pour tout $F \in \mathscr{F}$. $\square$

Définition 3.2.7. Un ultrafiltre $\mathscr{F}$ sur un ensemble X pour lequel il existe $x \in X$ tel que

$$\mathscr{F} = \{F \subseteq X \mid x \in F\}$$

est dit *principal*. Un ultrafiltre non principal est qualifié de *libre*.

Proposition 3.2.8 (AC). *Soit X un ensemble. Si X n'est pas fini alors il existe un ultrafiltre libre sur X.*

Démonstration. Puisque X n'est pas fini, on peut définir le filtre de Fréchet sur X. Par le théorème d'existence des ultrafiltres, il existe $\mathscr{F}$ un ultrafiltre contenant le filtre de Fréchet. Cet ultrafiltre est libre. En effet, sinon il existe $x \in X$ tel que

$$\mathscr{F} = \{F \subseteq X \mid x \in F\}$$

en particulier, $\{x\} \in \mathscr{F}$. Or, $\{x\}^c$ appartient au filtre de Fréchet et par conséquent, on a $\{x\}^c \in \mathscr{F}$; ce qui est absurde vu la remarque 3.2.2. $\square$

Définissons une convergence à l'aide des ultrafiltres libres sur $\mathbb{N}$ et montrons qu'elle hérite de propriétés classiques d'une convergence, i.e. l'unicité de la limite et la limite d'une somme est égale à la somme des limites.

Définition 3.2.9. Soit $\mathscr{F}$ un ultrafiltre libre sur $\mathbb{N}$. Soit $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite d'un espace métrique (X, d) quelconque. On dit que $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est $\mathscr{F}$-convergente si et seulement s'il existe $x \in X$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\{j \in \mathbb{N} \mid \mathrm{d}(x_j, x) < \varepsilon\} \in \mathscr{F}.$$

Dans ce cas, on écrit $x_j \underset{\mathscr{F}}{\longrightarrow} x$ ou $\lim\limits_{\mathscr{F}} x_j = x$.

Remarquons dans un premier temps que si une suite converge au sens classique, elle converge au sens de la définition 3.2.9

Proposition 3.2.10. *Soient $\mathscr{F}$ un ultrafiltre libre sur $\mathbb{N}$ et $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite d'un espace métrique (X, d). Si la suite $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge au sens classique, i.e. s'il existe $x \in X$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $J \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $j \geq J$, on a $d(x_j, x) < \varepsilon$, alors on a $x_j \underset{\mathscr{F}}{\longrightarrow} x$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Il faut montrer que $\{j \in \mathbb{N} \mid \mathrm{d}(x_j, x) < \varepsilon\} \in \mathscr{F}$. Or, par hypothèse on sait qu'il existe $J \in \mathbb{N}$ tel que

$$A = \{j \in \mathbb{N} \mid j \geq J\} \subseteq \{j \in \mathbb{N} \mid \mathrm{d}(x_j, x) < \varepsilon\};$$

il suffit alors de montrer que $A \in \mathscr{F}$ et d'utiliser le point (iii) de la définition d'un filtre. Procédons pas l'absurde et supposons $A \in \mathscr{F}$. Vu que $\mathscr{F}$ est un ultrafiltre, on a $A^c = \{0, \ldots, J-1\} \in \mathscr{F}$. Pour tout $k \in A^c$, soit $\{k\} \in \mathscr{F}$ soit $\mathbb{N}\setminus\{k\}\cap A^c = A^c\setminus\{k\} \in \mathscr{F}$, puisque $\mathscr{F}$ est un ultrafiltre. Or, si pour tout $k \in A^c$ on a $A^c \setminus \{k\} \in \mathscr{F}$ alors,

$$\emptyset = \bigcap_{k\in A^c} A^c \setminus \{k\} \in \mathscr{F},$$

car A^c est fini, ce qui n'est pas possible. Par conséquent, il existe $k_0 \in A^c$ tel que $\{k_0\} \in \mathscr{F}$. Puisque le filtre est libre, on a $\{F \subseteq \mathbb{N} \mid k_0 \in F\} \subsetneq \mathscr{F}$; en particulier, il existe $F \subseteq \mathbb{N}$ tel que $k_0 \notin F$ et tel que $F \in \mathscr{F}$. Si on pose

$$B = F \cap A^c \neq \emptyset$$

alors $B \in \mathscr{F}$ et on a

$$A = \big(\{k_0\} \cup A\big) \cap \big(B \cup A\big) \in \mathscr{F},$$

car $\{k_0\} \subseteq \{k_0\} \cup A$ et $B \subseteq B \cup A$, ce qui est absurde. $\square$

A présent, montrons que cette convergence hérite bien de propriétés classiques.

Proposition 3.2.11 (AC). *Soient $\mathscr{F}$ un ultrafiltre libre sur $\mathbb{N}$ et $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite d'un espace métrique (X, d) $\mathscr{F}$-convergente. Dans ce cas, la limite existe toujours et est unique. De plus, si $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite de (X, d) $\mathscr{F}$-convergente alors $(x_j + y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est $\mathscr{F}$-convergente et on a*

$$\lim_{\mathscr{F}}(x_j + y_j) = \lim_{\mathscr{F}} x_j + \lim_{\mathscr{F}} y_j.$$

Démonstration. Montrons d'abord l'unicité de la limite. Supposons avoir

$$x_j \underset{\mathscr{F}}{\longrightarrow} x \quad \text{et} \quad x_j \underset{\mathscr{F}}{\longrightarrow} y$$

et fixons $\varepsilon > 0$. On a

$$F_1 = \{j \in \mathbb{N} \mid \mathrm{d}(x_j, x) < \frac{\varepsilon}{2}\} \in \mathscr{F} \quad \text{et} \quad F_2 = \{j \in \mathbb{N} \mid \mathrm{d}(x_j, y) < \frac{\varepsilon}{2}\} \in \mathscr{F}$$

et par définition d'un filtre, on en tire que $\emptyset \neq F_1 \cap F_2 \in \mathscr{F}$. Soit $j_0 \in F_1 \cap F_2$, on a

$$\mathrm{d}(x, y) \leq \mathrm{d}(x, x_{j_0}) + \mathrm{d}(x_{j_0}, y) < \varepsilon$$

pour n'importe quel $\varepsilon > 0$, ce qui montre que $x = y$. Passons à la deuxième partie de la démonstration. Supposons que

$$x_j \underset{\mathscr{F}}{\longrightarrow} x \quad \text{et} \quad y_j \underset{\mathscr{F}}{\longrightarrow} y.$$

Soit $\varepsilon > 0$, on a

$$F_1' = \{j \in \mathbb{N} \mid \mathrm{d}(x_j, x) < \frac{\varepsilon}{2}\} \in \mathscr{F} \quad \text{et} \quad F_2' = \{j \in \mathbb{N} \mid \mathrm{d}(y_j, y) < \frac{\varepsilon}{2}\} \in \mathscr{F}$$

et dans ce cas, $F_1' \cap F_2' \in \mathscr{F}$. De plus,

$$F_1' \cap F_2' \subseteq \{j \in \mathbb{N} \mid \mathrm{d}(x_j + y_j, x - y) < \varepsilon\}$$

et par définition d'un filtre, $\{j \in \mathbb{N} \mid \mathrm{d}(x_j + y_j, x - y) < \varepsilon\} \in \mathscr{F}$, ce qui montre que $(x_j + y_j) \underset{\mathscr{F}}{\longrightarrow} x + y$. D'où la conclusion. □

La proposition suivante montre que sur tout compact d'un espace métrique, une suite est toujours $\mathscr{F}$-convergente.

Proposition 3.2.12 (AC). *Soient $\mathscr{F}$ un ultrafiltre libre sur $\mathbb{N}$ et K un compact d'un espace métrique (X, d). Si $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite de K alors elle est $\mathscr{F}$-convergente.*

Démonstration. Procédons par l'absurde et supposons que pour tout $\lambda \in K$, il existe $\varepsilon_\lambda > 0$ tel que [8]

$$\{j \in \mathbb{N} \mid x_j \in B(\lambda,\ \varepsilon_\lambda)\} \notin \mathscr{F}.$$

8. Où on note $B(y, r) = \{x \in X \mid \mathrm{d}(x, y) < r\}$.

Il est clair que

$$K \subseteq \bigcup_{\lambda \in K} B(\lambda,\ \varepsilon_\lambda)$$

et par compacité, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in K$ tels que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} B(\lambda_i,\ \varepsilon_i)$$

avec

$$F_i = \{j \in \mathbb{N} \mid x_j \in B(\lambda_i,\ \varepsilon_i)\} \notin \mathscr{F}$$

pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$. En particulier, vu la proposition 3.2.6, $F_i^c \in \mathscr{F}$ et par conséquent,

$$F_1^c \cap \cdots \cap F_p^c \in \mathscr{F}$$

il s'ensuit que

$$(F_1^c \cap \cdots \cap F_p^c)^c = F_1 \cup \cdots \cup F_p \notin \mathscr{F}.$$

Or $F_1 \cup \cdots \cup F_p = \mathbb{N}$, ce qui n'est pas possible. □

Voici le théorème principal de cette section. Cette démonstration est tirée de l'article [15].

Théorème 3.2.13 (AC). *Il existe μ une mesure exhaustive sur $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$), finiment additive, $SL(n, \mathbb{Z})$-invariante et telle que $\mu([0;1[^n) = 1$.*

Démonstration. Soit $\mathscr{F}$ un ultrafiltre libre sur $\mathbb{N}$. Soit $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un borné. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on pose

$$x_j = \frac{1}{j!^n}\ \#(X \cap \frac{1}{j!}\, \mathbb{Z}^n).$$

La suite $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ainsi définie est une suite du compact $[0; \infty]$. Par la proposition 3.2.12, elle est $\mathscr{F}$-convergente et on note $\lim_{\mathscr{F}} x_j = \lambda_X$. On pose alors pour tout $X \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} \mu(X) &= \lambda_X \quad \text{si } X \text{ est borné} \\ \mu(X) &= \infty \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

L'application $\mu : \mathbb{R}^n \to [0; \infty]$ est la mesure recherchée. En effet, $\mu(\emptyset) = 0$ car dans ce cas le suite est la suite nulle et par conséquent, $\lambda_\emptyset = 0$. On a également $\mu([0;1[^n) = 1$ puisque

$$\#\big([0;1[^n \cap \frac{1}{j!}\, \mathbb{Z}^n\big) = \#\big[([0;1[\cap \frac{1}{j!}\, \mathbb{Z})^n\big] = \prod_{i=1}^{n}\ \#\big([0;1[\cap \frac{1}{j!}\, \mathbb{Z}\big)$$

et que[9] $\#\big([0;1[\cap \frac{1}{j!}\, \mathbb{Z}\big) = j!$; par conséquent, $\lambda_{[0;1[^n} = 1$. Pour montrer la $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$-invariance, il suffit de remarquer que

$$\sigma \cdot (\frac{1}{j!}\, \mathbb{Z}^n) = \frac{1}{j!}\, \mathbb{Z}^n$$

9. On a exactement $[0;1[\cap \frac{1}{j!}\, \mathbb{Z} = \{0, \frac{1}{j!}, \ldots, \frac{j!-1}{j!}\}$.

pour tout $\sigma \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ et utiliser le fait que les éléments de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ sont des bijections. Pour finir, montrons que μ est finiment additif. Soient $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ des ensembles bornés tels que $X \cap Y = \emptyset$. On a

$$\frac{1}{j!^n}\ \#\big((X \cup Y) \cap \frac{1}{j!}\,\mathbb{Z}^n\big) = \frac{1}{j!^n}\ \#(X \cap \frac{1}{j!}\,\mathbb{Z}^n) + \frac{1}{j!^n}\ \#(Y \cap \frac{1}{j!}\,\mathbb{Z}^n)$$

par conséquent,

$$\lambda_{X\cup Y} = \lambda_X + \lambda_Y$$

et donc μ est finiment additive, ce qui conclut la démonstration. $\square$

On en tire un corollaire plutôt immédiat.

Corollaire 3.2.14 (AC). *Le carré unité de $\mathbb{R}^n$ n'est pas paradoxal sous l'action du groupe $SL(n,\mathbb{Z})$.*

Démonstration. Il suffit de combiner le théorème de Tarski avec le théorème 3.2.13. $\square$

3.3 Action localement commutative d'un groupe sur un ensemble

Dans cette section, nous commençons par donner la définition d'une *action de groupe localement commutative* puis nous démontrons une de ses propriétés essentielle. L'objectif étant de clôturer la section en montrant que le plan privé de l'origine est paradoxal sous l'action du groupe spécial linéaire. Remarquons que ce résultat est contre-intuitif puisque, par définition, les éléments de SL(2) ont un déterminant égal à 1 et préservent donc la mesure de Lebesgue.

Définition 3.3.1. Soit G un groupe qui agit sur un ensemble X. L'action de G sur X est dite *localement commutative* si $\mathrm{stab}(x)$ est commutatif pour tout $x \in X$. Autrement dit, l'action de G sur X est localement commutative si deux éléments de G qui ont un point fixe commun commutent.

Remarque 3.3.2. Si l'action du groupe G sur l'ensemble X est localement commutative alors l'action sur X de tout sous-groupe H de G est également localement commutative. Cela est évident car

$$\{h \in H \mid h \cdot x = x\} \subseteq \mathrm{stab}(x)$$

pour tout $x \in X$.

Exemple 3.3.3. Si l'action d'un groupe G sur un ensemble X est libre alors elle est localement commutative. En effet, dans ce cas on a

$$\mathrm{stab}(x) = \{e\}$$

pour tout $x \in X$, on conclut aussitôt.

Par cet exemple, nous constatons que la notion d'action localement commutative d'un groupe est « plus faible » que celle d'action libre. Précédemment, nous avons montré que si un groupe libre de rang 2 agit librement sur un ensemble X alors X est paradoxal pour ce groupe (théorème 2.2.2 et proposition 2.2.3). Naturellement, on peut se demander si ce résultat se généralise aux groupes libres de rang 2 ayant une action localement commutative sur un ensemble. Nous allons voir, dans la suite, qu'effectivement nous pouvons étendre ce résultat.

Commençons par une definition qui généralise celle d'action libre d'un groupe.

Définition 3.3.4. Soient $G_1, \ldots, G_n$ des groupes agissant sur un ensemble X. On dit que leur action est *conjointement libre* si pour tout $x \in X$, il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $g \cdot x \neq x$ pour tout $g \in G_i \setminus \{e\}$.

Dans les deux prochains résultats, nous nous servons des notations utilisées lors de l'introduction du monoïde $F_{G,X}$ de la section précédente.

Lemme 3.3.5. *Soient $A^\star$ et $B^\star$ deux sous-ensembles bornés de $X^\star$. On a*

$$[A^\star \cup B^\star] \leq [A^\star] + [B^\star].$$

En particulier, si $A_1^\star, \ldots, A_n^\star \subseteq X^\star$ sont bornés alors $\left[\bigcup_{i=1}^n A_i^\star\right] \leq \sum_{i=1}^n [A_i^\star]$.

Démonstration. Rappelons qu'on a $[A^\star] + [B^\star] = [A^\star \cup B^{\star\prime}]$ avec $A^\star \cap B^{\star\prime} = \emptyset$. Par la proposition 3.1.13, il suffit de montrer qu'il existe $B_0^\star \subseteq A^\star \cup B^{\star\prime}$ tel que

$$A^\star \cup B^\star \sim B_0^\star$$

pour $G^\star$. On a $B^\star = (B^\star \setminus A^\star) \cup (B^\star \cap A^\star)$ et par conséquent,

$$B^{\star\prime} = \underbrace{\{(x, n+k) \mid (x,n) \in B^\star \setminus A^\star\}}_{=C^\star} \cup \{(x, n+k) \mid (x,n) \in B^\star \cap A^\star\}$$

avec $k \in \mathbb{N}$ bien choisi (en particulier, $C^\star \cap A^\star = \emptyset$). Il est clair que $B^\star \setminus A^\star \sim C^\star$ pour $G^\star$ et par le lemme 1.2.5, on a

$$A^\star \cup B^\star = A^\star \cup (B^\star \setminus A^\star) \sim A^\star \cup C^\star \subseteq A^\star \cup B^{\star\prime}$$

pour $G^\star$, ce qui suffit.

Le cas particulier est une simple itération. Notons tout de même qu'il a bien du sens car l'union finie de bornés est bornée. □

Proposition 3.3.6 (**AC**). *Soient G un groupe agissant sur un ensemble X et $H_1, \ldots, H_n$ ($n \geq 1$) des sous-groupes libres de G de rang 2. Si l'action de ces sous-groupes est conjointement libre alors X est paradoxal pour G.*

Démonstration. Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. On pose

$$D_i = \{x \in X \mid \exists\, h \in H_i \setminus \{e\} \text{ tel que } h \cdot x = x\}$$

et $\delta_i = [(X \setminus D_i) \times \{0\}]$. Le groupe H_i agit librement sur $X \setminus D_i$ car si $x \in X \setminus D_i$ alors $h \cdot x \in X \setminus D_i$ pour tout $h \in H_i$. En effet, si $h = e$, c'est évident ; sinon supposons que $h \cdot x \in D_i$, il existe alors $g \in H_i \setminus \{e\}$ tel que

$$\begin{aligned} & g \cdot (h \cdot x) = h \cdot x \\ \Leftrightarrow \quad & (h^{-1} \circ g \circ h) \cdot x = x. \end{aligned}$$

Or $x \notin D_i$ et $h^{-1} \circ g \circ h \in H_i$ donc $h^{-1} \circ g \circ h = e$, ce qui est absurde car H_i est un groupe libre et $h^{-1} \circ g \circ h$ est une forme réduite. Par conséquent, on a $x \in X \setminus D_i$. De plus, l'action est clairement libre. On en tire que $X \setminus D_i$ est paradoxal pour H_i puisqu'il s'agit d'un groupe libre de rang 2 agissant librement sur cet ensemble [10]. En particulier, $X \setminus D_i$ est paradoxal pour G et par le corollaire 3.1.17, on obtient $\delta_i = 2\,\delta_i$. Ainsi, en utilisant la remarque 3.1.10, on a

$$[X \times \{0\}] = \big[(X \setminus D_i) \times \{0\} \cup D_i \times \{0\}\big] = \delta_i + [D_i \times \{0\}]$$

pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ car $(X \setminus D_i) \cap D_i = \emptyset$. On obtient [11]

$$[X \times \{0\}] = 2\,\delta_i + [D_i \times \{0\}] = \big(\delta_i + [D_i \times \{0\}]\big) + \delta_i = [X \times \{0\}] + \delta_i$$

et par suite,

$$[X \times \{0\}] = [X \times \{0\}] + \delta_1 = [X \times \{0\}] + \delta_2 + \delta_1 = \cdots = [X \times \{0\}] + \delta_n + \cdots + \delta_1. \tag{3.4}$$

De plus, on a

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus D_i)$$

car $\bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus D_i) \subseteq X$ et si $x \in X$ alors il existe $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $h \cdot x \neq x$ pour tout $h \in H_{i_0} \setminus \{e\}$ puisque l'action des H_i ($1 \leq i \leq n$) est conjointement libre, ce qui montre que $x \in X \setminus D_{i_0}$. Par le lemme 3.3.5, on obtient

$$[X \times \{0\}] = \left[\bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus D_i) \times \{0\}\right] \leq \sum_{i=1}^{n} \big[(X \setminus D_i) \times \{0\}\big] = \sum_{i=1}^{n} \delta_i. \tag{3.5}$$

10. On a déjà fait un raisonnement similaire dans la démonstration du théorème 2.3.6.
11. Rappelons que le monoïde $F_{G,X}$ est commutatif.

Finalement, en combinant (3.4) avec (3.5) et par les propriétés des monoïdes commutatifs, on a

$$[X \times \{0\}] = [X \times \{0\}] + \delta_n + \cdots + \delta_1 \geq [X \times \{0\}] + [X \times \{0\}] = 2\,[X \times \{0\}]$$

et par antisymétrie, $[X \times \{0\}] = 2\,[X \times \{0\}]$ ce qui prouve que X est paradoxal pour G (corollaire 3.1.17). $\square$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le résultat annoncé.

Corollaire 3.3.7 (**AC**)**.** *Soit G un groupe libre de rang 2 agissant sur un ensemble X. Si l'action de G est localement commutative alors X est paradoxal pour G.*

Démonstration. Soient σ et τ des éléments indépendants de G tels que $G = \langle \sigma, \tau \rangle$ et posons

$$\rho_i = \sigma^i \circ \tau \circ \sigma^{-i}$$

pour tout $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. On voit facilement que ce sont des éléments indépendants de G. Si on note

$$H_1 = \langle \rho_0, \rho_1 \rangle \qquad \text{et} \qquad H_2 = \langle \rho_2, \rho_3 \rangle$$

alors H_1 et H_2 sont deux sous-groupes libres de G de rang 2. De plus, leur action est conjointement libre car sinon, il existe $x \in X$, $h_1 \in H_1 \setminus \{e\}$ et $h_2 \in H_2 \setminus \{e\}$ tels que

$$h_1 \cdot x = h_2 \cdot x = x$$

et puisque l'action de G sur X est localement commutative, h_1 et h_2 commutent. On obtient ainsi,

$$h_1 \circ h_2 = h_2 \circ h_1$$

$$\Leftrightarrow \quad h_1 \circ h_2 \circ h_1^{-1} \circ h_2^{-1} = e,$$

ce qui est absurde puisque e ne peut pas s'écrire sous forme réduite. On conclut par la proposition 3.3.6. $\square$

Remarque 3.3.8 (**AC**)**.** Dans les conditions du corollaire 3.3.7, on peut montrer ([23]) que l'ensemble X est $(2, 2)$-paradoxal. Autrement dit, on peut montrer qu'il existe une partition (A_1, A_2, A_3, A_4) de X en 4 sous-ensembles et $\sigma, \tau \in G$ tels que

$$\sigma \cdot A_2 = A_2 \cup A_3 \cup A_4 \qquad \text{et} \qquad \tau \cdot A_4 = A_1 \cup A_2 \cup A_4.$$

Dans ce cas, $A_1 \cup (\sigma \cdot A_2) = X$ et $A_3 \cup (\tau \cdot A_4) = X$, ceci montre que $A_1 \cup A_2 \sim^2 X$ et $A_3 \cup A_4 \sim^2 X$ pour le groupe G. De plus, on a $(A_1 \cup A_2) \cap (A_3 \cup A_4) = \emptyset$.

Dans ce qui suit, nous appliquons les résultats précédents au groupe SL(2) et à l'ensemble $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Ainsi, nous montrons que cet ensemble est paradoxal pour ce groupe.

Proposition 3.3.9. *Le groupe $SL(2)$ a une action localement commutative sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.*

Démonstration. Il est clair que le groupe $\mathrm{SL}(2)$ agit sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ par l'action

$$(\sigma, x) \mapsto \sigma \cdot x = \sigma(x)$$

car les éléments de $\mathrm{SL}(2)$ sont des applications linéaires bijectives, ce qui implique $\ker(\sigma) = \{0\}$ pour tout $\sigma \in \mathrm{SL}(2)$; par conséquent, si $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ alors $\sigma(x) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Soient $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathrm{SL}(2)$ et $x_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ tels que

$$\sigma_1(x_0) = \sigma_2(x_0) = x_0,$$

il faut montrer que σ_1 et σ_2 commutent. Puisque $x_0 \neq (0, 0)$, il existe $y_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ tel que (x_0, y_0) forment une base de $\mathbb{R}^2$. Dans cette base, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\sigma_1(x) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} x^\top \quad \text{et} \quad \sigma_2(x) = \begin{pmatrix} 1 & a_2 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} x^\top,$$

où $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}^2$. De plus, on a $b_1 = b_2 = 1$ car $\det(\sigma_1) = \det(\sigma_2) = 1$. Finalement,

$$\sigma_1 \circ \sigma_2(x) = \begin{pmatrix} 1 & a_2 + a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x^\top = \begin{pmatrix} 1 & a_1 + a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x^\top = \sigma_2 \circ \sigma_1(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^2$. □

Corollaire 3.3.10 (AC). *L'ensemble $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est paradoxal sous l'action du groupe $SL(2)$.*

Démonstration. Par la proposition 2.3.1, il existe deux éléments indépendants σ_1, σ_2 de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \subseteq \mathrm{SL}(2)$. Ainsi, le groupe $F = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ est un sous-groupe libre de $\mathrm{SL}(2)$ de rang 2. Par la proposition 3.3.9 et la remarque 3.3.2, l'action de F sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est localement commutative. En utilisant le corollaire 3.3.7, on en tire que $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est paradoxal pour F et par suite, pour le groupe $\mathrm{SL}(2)$. □

Chapitre 4

Ensembles paradoxaux du plan sous l'action du groupe spécial linéaire

Nous avons vu, grâce au paradoxe de Von Neumann, que le carré unité dans $\mathbb{R}^2$ est paradoxal sous l'action du groupe $\mathrm{SA}(2, \mathbb{Z})$. Cependant, nous avons constaté que si nous retirons les translations de ce groupe, ce n'est plus le cas. Nous pourrions essayer de savoir si en « élargissant » un peu $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ on ne peut pas obtenir une décomposition paradoxal de J ou de $\mathring{J}$. Dans ce chapitre, nous allons plutôt nous intéresser à $\mathring{J}$. Cette question est la question 7.4 de [23] à laquelle nous allons répondre positivement. En effet, nous montrons que l'intérieur carré unité est paradoxal sous l'action du groupe spécial linéaire.

Dans la première partie, nous établissons un résultat permettant d'obtenir des ensembles équidécomposables sous l'action d'un groupe libre finiment engendré dont l'action est localement commutative. Dans la deuxième partie, nous donnons un premier critère pour qu'un ensemble du plan soit paradoxal sur l'action du groupe spécial linéaire. L'intérieur du carré unité ne respecte pas ce premier critère ; néanmoins, celui-ci permettra d'obtenir, dans la troisième et dernière partie de ce chapitre, un deuxième critère qui nous permettra de répondre à la question de départ.

Initialement, c'est Jan Mycielski en 1998 qui répondit à cette question dans [15]. Pour ce faire, il utilisa la conjecture suivante :

Il existe G un groupe libre agissant librement sur $B(0,1) \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ de sorte que pour tout $g \in G$, il existe $(A_i)_{i=1}^n$ une partition de $B(0,1) \setminus \{0\}$ et $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ des éléments de $SL(2)$ tels que $g_{|A_i} = \sigma_{i\,|A_i}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Dans ce chapitre, nous allons plutôt suivre la démarche adoptée par Miklos Laczkovich en 1999 dans son article [13]. En effet, celui-ci se passe complètement de cette conjecture pour répondre à la question, ce qui renforce l'idée quelle est vraie.

4.1 Préambule

Dans cette section, nous rappelons au lecteur la notion d'*homographie* et nous introduisons celle de *nombres algébriquement indépendants*. L'objectif est double : d'une part, cela permettra de trouver une condition suffisante pour obtenir un ensemble d'éléments indépendants dans SL(2) et, d'autre part, nous acquerrons un résultat permettant d'avoir des ensembles équidécomposable sous l'action d'un groupe libre finiment engendré et dont l'action est localement commutative.

Définition 4.1.1. Une *transformation homographique* (ou simplement une *homographie*) est une application

$$\Phi_A : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$$

avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_2^2$ tel que $\det(A) = ad - bc \neq 0$. On note [1]

$$\mathrm{LFT} = \{\Phi_A \mid A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})\}$$

l'ensemble des transformations homographiques ; il est aisé de vérifier que LFT est un groupe pour la composition de fonctions. De plus,

$$\Phi_{AB} = \Phi_A \circ \Phi_B$$

pour tous $A, B \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ et on en conclut que l'application

$$\mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) \to \mathrm{LFT} \quad A \mapsto \Phi_A$$

est un homomorphisme de groupe dont le noyau est $\{\lambda I \mid \lambda \in \mathbb{C}_0\}$.

Définition 4.1.2. Les nombres réels $a_1, \ldots, a_n$ sont dits *algébriquement indépendants* sur un corps $\mathbb{K}$ si pour tout polynôme non nul $P \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ on a

$$P(a_1, \ldots, a_n) \neq 0.$$

Il est clair que cette définition généralise celle des nombres transcendants. En effet, il suffit de prendre $n = 1$ dans la définition précédente et nous obtenons la définition d'un nombre transcendant sur le corps $\mathbb{K}$.

La remarque suivante nous montre qu'il existe au moins n nombres réels algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$. Il s'agit d'une généralisation de la preuve de l'existence de nombres réels transcendants sur $\mathbb{Q}$.

Remarque 4.1.3. Soient $n \in \mathbb{N}_0$ et $I \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble indénombrable. On voit facilement que l'ensemble $\mathbb{Q}[x]$ des polynômes à coefficients rationnels est dénombrable. De plus, si $P \in \mathbb{Q}[x]$ alors P possède un nombre fini de racines. Ainsi, l'ensemble des nombres

1. En anglais, une homographie est appelée « Linear Fractional Transformation ».

algébriques[2] sur $\mathbb{Q}$ est dénombrable. Il existe donc $\lambda_1 \in I$ un nombre transcendant sur $\mathbb{Q}$ car I n'est pas dénombrable. De la même façon, l'ensemble des racines des éléments de

$$\{P(\lambda_1, \cdot) \mid P \in \mathbb{Q}[x_1, x_2]\}$$

est dénombrable. Ainsi, il existe $\lambda_2 \in I$ tel que

$$P(\lambda_1, \lambda_2) \neq 0$$

pour tout $P \in \mathbb{Q}[x_1, x_2]$. En itérant, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in I$ tels que

$$P(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq 0$$

pour tout $P \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$. Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ et tout ensembles indénombrable $I \subseteq \mathbb{R}$, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in I$ des nombres algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

Le théorème suivant nous donne un ensemble d'homographies indépendantes au sens de la définition 1.1.18.

Théorème 4.1.4. *Soient $n \in \mathbb{N}_0$ et $A_1, \ldots, A_n$ des éléments de $\mathbb{R}_2^2$ de la forme*

$$A_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}$$

où l'ensemble $\{a_i, b_i, c_i, d_i \mid i \in \{1, \ldots, n\}\}$ est un ensemble de nombres algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Dans ce cas, les homographies $\{\Phi_{A_i} \mid i \in \{1, \ldots, n\}\}$ forment un ensemble d'éléments indépendants.

Démonstration. Dans un premier temps, remarquons que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\det(A_i) \neq 0.$$

En effet, sinon on obtient l'égalité $a_i d_i - c_i b_i = 0$ et les nombres a_i, b_i, c_i, d_i annulent donc un polynôme à coefficients rationnels, ce qui est impossible. On peut ainsi définir Φ_{A_i} pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Nous allons procéder par l'absurde en utilisant la proposition 1.1.19. Supposons qu'il existe Φ un élément de $\left\langle \Phi_{A_i} \mid i \in \{1, \ldots, n\} \right\rangle$ écrit sous forme réduite et égal à l'identité. Autrement dit, supposons qu'il existe $r \in \mathbb{N}_0$ et $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{Z}_0$ tels que

$$\Phi = \Phi_{A_{k_1}}^{m_1} \circ \cdots \circ \Phi_{A_{k_r}}^{m_r} = \mathrm{id} \tag{4.1}$$

avec $k_i \in \{1, \ldots, n\}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, $\Phi_{A_{k_i}}^{\mathrm{sgn}(m_i)} \circ \Phi_{A_{k_{i+1}}}^{\mathrm{sgn}(m_{i+1})} \neq \mathrm{id}$ et[3] $\Phi_{A_{k_i}} \neq \Phi_{A_{k_{i+1}}}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, r-1\}$. On a

$$\Phi = \Phi_{A_{k_1}^{m_1} \cdots A_{k_r}^{m_r}} \tag{4.2}$$

2. C'est-à-dire des nombres qui ne sont pas transcendants.
3. Où la fonction sgn associe à un nombre réel son signe.

et il existe P_1, P_2, P_3 et P_4 des polynômes à coefficients entiers tels que

$$A_{k_1}^{m_1} \cdots A_{k_r}^{m_r} = \begin{pmatrix} P_1(X_0) & P_2(X_0) \\ P_3(X_0) & P_4(X_0) \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

où $X_0 = (a_{k_1}, b_{k_1}, c_{k_1}, d_{k_1}, \ldots, a_{k_r}, b_{k_r}, c_{k_r}, d_{k_r})$ et $P_1(X_0)P_4(X_0) - P_2(X_0)P_3(X_0) \neq 0$ et par conséquent,

$$\Phi(x) = \frac{P_1(X_0)x + P_2(X_0)}{P_3(X_0)x + P_4(X_0)}$$

pour tout $x \in \mathbb{C}$. Remarquons d'ores et déjà que si on modifie uniquement les matrices du membre de gauche de (4.3), on obtient exactement les mêmes polynômes mais évalués en un autre point X_0 dépendant des éléments des nouvelles matrices. Vu les égalités en (4.1) et en (4.2), on a $A_{k_1}^{m_1} \cdots A_{k_r}^{m_r} = \lambda I$ $(\lambda \in \mathbb{C}_0)$ et de ce fait, on obtient les égalités

$$P_2(X_0) = P_3(X_0) = 0 \qquad \text{et} \qquad P_1(X_0) = P_4(X_0) = \lambda$$

et par indépendance algébrique, on sait finalement que $P_2 = P_3 = 0$ et $P_1 = P_4$. Posons

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dans ce cas, $\Phi_A(x) = \dfrac{1}{x}$ et $\Phi_B(x) = x + 2$ pour tout $x \in \mathbb{C}$. De plus, posons

$$\phi_i = \Phi_B^i \circ \Phi_A \circ \Phi_B^i = \Phi_{B^i A B^i}$$

pour tout $i \in \{1, \ldots, s\}$ où s est le nombre d'indices distincts dans $\{k_1, \ldots, k_r\}$. On a alors $\phi_i \in \mathrm{LFT}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, s\}$. Si on compose les ϕ_i de la même façon que les $\Phi_{A_{k_j}}$ dans le membre de gauche de l'égalité en (4.1) alors dans ce cas, en regroupant les différents termes et vu ce qui précède, on obtient

$$\phi = \Phi_B^{n_1} \circ \Phi_A \circ \Phi_B^{n_2} \circ \Phi_A \circ \cdots \circ \Phi_A \circ \Phi_B^{n_p} = \mathrm{id}$$

avec $n_1, \ldots, n_p \in \mathbb{Z}_0$. Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{C}$ on a

$$\phi(x) = \cfrac{1}{\cfrac{1}{\cfrac{1}{\ddots\cfrac{1}{x + 2n_p} + 2n_{p-1}} + 2n_3} + 2n_2} + 2n_1$$

et ainsi, $\phi(x)$ tend vers une limite finie lorsque x tend vers l'infini, ce qui est absurde car $\phi = \mathrm{id}$, d'où la conclusion.

$\square$

Le corollaire suivant permet d'obtenir un ensemble d'éléments indépendants pour le groupe SL(2), comme annoncé.

Corollaire 4.1.5. *Soient $n \in \mathbb{N}_0$ et $\{a_i, b_i, c_i, d_i \mid i \in \{1, \ldots, n\}\}$ un ensemble de réels algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Posons $D_i = a_i d_i - b_i c_i$ et supposons que $D_i > 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ ainsi que*

$$A_i = \begin{pmatrix} \dfrac{a_i}{\sqrt{D_i}} & \dfrac{b_i}{\sqrt{D_i}} \\ \dfrac{c_i}{\sqrt{D_i}} & \dfrac{d_i}{\sqrt{D_i}} \end{pmatrix}$$

pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dans ce cas, $\{A_i \mid i \in \{1, \ldots, n\}\} \subseteq SL(2)$ est un ensemble d'éléments indépendants (au sens de la définition 1.1.18).

Démonstration. Il est clair que $A_i \in \mathrm{SL}(2)$ et que $\Phi_{\sqrt{D_i}A_i} = \Phi_{A_i}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ainsi, par le théorème 4.1.4, l'ensemble

$$\{\Phi_{\sqrt{D_i}A_i} \mid i \in \{1, \ldots, n\}\} = \{\Phi_{A_i} \mid i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

est un ensemble d'éléments indépendants. Or, l'application $A \mapsto \Phi_A$ est un homomorphisme de groupe et par conséquent,

$$\{A_i \mid i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

est un ensemble d'éléments indépendants. $\square$

Pour la suite, rappelons qu'un graphe $\Gamma = (V, E)$ est dit *localement fini* si chaque sommet a un degré fini, et qu'un *chemin* est une suite ordonnée $(x_1, \ldots, x_n)$ d'arêtes adjacentes (i.e. $x_i = \{x_{i,1}, x_{i,2}\} \in E$ tel que $x_{i,2} = x_{i+1,1}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$). On dit qu'un chemin est *simple* si tous ses sommets sont distincts (et par conséquent, ses arêtes sont distinctes également), et qu'un chemin $(x_1, \ldots, x_n)$ est un *cycle* si $x_{n,2} = x_{1,1}$. Finalement, on dit qu'un graphe est *connexe* si, pour toute paire de sommets, il existe un chemin les joignant.

A présent, nous pouvons énoncer le lemme suivant. La démonstration est admise mais le lecteur intéressé pourra consulter [12] pour en obtenir une.

Lemme 4.1.6. *Soit Γ un multi-graphe biparti, connexe et localement fini. Si le degré de chaque sommet vaut au moins deux et si Γ contient au plus un cycle simple alors Γ contient un couplage parfait.*

C'est le théorème suivant qui permet d'obtenir des ensembles équidécomposables sous l'action d'un groupe libre, finiment engendré dont l'action est localement commutative.

Théorème 4.1.7. *Soit $G = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$ un groupe libre agissant sur un ensemble X. Supposons que l'action de G est localement commutative. Si A et B sont des sous-ensembles de X tels que*

(i) pour tout $x \in A$, il existe $i, j \in \{1, \dots, n\}$ $(i \neq j)$ tels que $f_i \cdot x, f_j \cdot x \in B$;

(ii) pour tout $y \in B$, il existe $i, j \in \{1, \dots, n\}$ $(i \neq j)$ et il existe $x_i, x_j \in A$ tels que $f_i \cdot x_i = f_j \cdot x_j = y$;

alors $A \sim B$ pour G.

Démonstration. Nous allons construire un graphe $\Gamma = (V, E)$ auquel nous appliquerons le lemme 4.1.6. Posons $V = A \cup B$ et on définit E de sorte que pour tout $x \in A$ et $y \in B$,

$$\{x, y\} \in E \iff \exists\, i \in \{1, \dots, n\} \;:\; f_i \cdot x = y.$$

Tout d'abord, remarquons que chaque $z \in V$ est connecté a au plus n sommets (par exemple, si $z \in A$ alors il est connecté au plus à $f_1 \cdot z, \dots, f_n \cdot z$). Autrement dit, le degré de chaque sommet vaut au plus n et par conséquent, Γ est localement fini. De plus, le degré de chaque $z \in V$ vaut au moins deux. En effet, si $z \in A$ alors par la condition (i), il existe $i, j \in \{1, \dots, n\}$ $(i \neq j)$ tels que[4] $\{z, f_i \cdot z\} \in E$ et $\{z, f_j \cdot z\} \in E$. En revanche, si $z \in B$ c'est la condition (ii) qui permet de conclure.

Comme dit précédemment, nous voulons appliquer le lemme 4.1.6 à Γ. Autrement dit, nous allons montrer que Γ contient un couplage parfait $M \subseteq E$, ce qui suffit. En effet, dans ce cas, pour tout $x \in A$ il existe un et un seul $y \in B$ tel que $\{x, y\} \in M$ et par conséquent, il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $f_i \cdot x = y$. Il existe donc une fonction[5]

$$A \to \{1, \dots, n\} \quad x \mapsto i_x$$

telle que $f_{i_x} \cdot x = y \in B$ avec $\{x, y\} \in M$. Si nous posons

$$A_i = \{x \in A \mid i_x = i\} \qquad \text{et} \qquad B_i = f_i \cdot A_i,$$

alors on a $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ et $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$. De plus,

$$B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$$

car si $y \in B$ alors il existe un unique $x \in A$ tel que $\{x, y\} \in M$ et on a $f_{i_x} \cdot x = y$; ainsi, $y \in B_{i_x}$. On a aussi $B_i \cap B_j = \emptyset$ si $i \neq j$. En effet, si $z \in B_i \cap B_j$ alors il existe $x_{i_x} \in A_{i_x}$ et $y_{i_y} \in A_{i_y}$ (avec $i_x = i$ et $i_y = j$) tels que $f_{i_x} \cdot x_{i_x} = f_{i_y} \cdot y_{i_y} = z$, c'est-à-dire $\{x_{i_x}, z\} \in M$ et $\{y_{i_y}, z\} \in M$, ce qui n'est pas possible car M est un couplage. Finalement, si Γ contient un couplage parfait alors $A \sim B$ pour G.

4. Si $f_i \cdot z = f_j \cdot z$ alors il s'agit d'un multi-graphe.

5. S'il existe $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $i \neq j$ et $f_i \cdot x = f_j \cdot x = y$ avec $\{x, y\} \in M$ alors, on choisi (par exemple) le plus petit indice.

Pour montrer que Γ contient un couplage parfait, on va montrer que chacune de ses composantes connexes en contient un. Il est alors évident que l'union de ces couplages parfaits sera un couplage parfait pour Γ.

Soit Γ_1 une composante connexe de Γ. Il est clair que Γ_1 est biparti, connexe, localement fini et que le degré de chacun de ses sommets vaut au moins deux. Pour lui appliquer le lemme 4.1.6, il faut encore montrer que Γ_1 contient au plus un cycle simple. Pour ce faire, pour tout $x \in A$ et $y \in B$ tels que $\{x, y\} \in E$, on sélectionne[6] $i_{\{x,y\}} \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $f_{i_{\{x,y\}}} \cdot x = y$ et on pose

$$\varphi(x, y) = f_{i_{\{x,y\}}} \qquad \text{et} \qquad \varphi(y, x) = f^{-1}_{i_{\{x,y\}}}.$$

De cette façon, pour tous $x, y \in V$ tel que $\{x, y\} \in E$, on a $\varphi(x, y) \in G$ et $\varphi(x, y) \cdot x = y$. Soit $W = (x_1, \ldots, x_t)$ un chemin simple. On pose

$$\alpha_W = \varphi(x_{t,1}, x_{t,2}) \circ \varphi(x_{t-1,1}, x_{t-1,2}) \circ \cdots \circ \varphi(x_{2,1}, x_{2,2}) \circ \varphi(x_{1,1}, x_{1,2}) \tag{4.4}$$

et on a $\alpha_W \cdot x_{1,1} = x_{t,2}$. De plus, α_W est un élément de G écrit sous forme réduite. En effet, on a

$$\varphi(x_{i+1,1}, x_{i+1,2}) \circ \varphi(x_{i,1}, x_{i,2}) \neq e$$

car sinon, en particulier $\varphi(x_{i+1,1}, x_{i+1,2}) \circ \varphi(x_{i,1}, x_{i,2}) \cdot x_{i,1} = x_{i,1}$, or

$$\varphi(x_{i+1,1}, x_{i+1,2}) \circ \varphi(x_{i,1}, x_{i,2}) \cdot x_{i,1} = x_{i+1,2} \neq x_{i,1}.$$

Si, maintenant, on suppose que W est un cycle simple alors α_W^j est un élément de G écrit sous forme réduite pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, car $\varphi(x_{1,1}, x_{1,2}) \circ \varphi(x_{t,1}, \underbrace{x_{t,2}}_{=x_{1,1}}) \neq e$.

Soient $C_1 = (x_1, \ldots, x_l)$ et $C_2 = (y_1, \ldots, y_k)$ des cycles simples de Γ_1 et montrons que $C_1 = C_2$.

Supposons d'abord que C_1 et C_2 passent par un même sommet. Quitte à faire une permutation circulaire des sommets, on peut supposer que $x_{1,1} = y_{1,1} = u$. On a

$$\alpha_{C_1} \cdot u = \alpha_{C_2} \cdot u = u$$

et par suite,

$$\begin{aligned} & \alpha_{C_1} \circ \alpha_{C_2} = \alpha_{C_2} \circ \alpha_{C_1} \\ \Leftrightarrow \quad & \alpha^{-1}_{C_1} \circ \alpha^{-1}_{C_2} \circ \alpha_{C_1} \circ \alpha_{C_2} = e, \end{aligned}$$

puisque G a une action localement commutative sur X. Ceci est uniquement possible s'il existe $r, s \in \mathbb{Z}_0$ et $\alpha \in G$ tels que

$$\alpha_{C_1} = \alpha^r \qquad \text{et} \qquad \alpha_{C_2} = \alpha^s.$$

6. Encore une fois, s'il existe plusieurs indices ayant cette propriété, on sélectionne (par exemple) le plus petit.

Dans ce cas, $\alpha_{C_1}^s = \alpha_{C_2}^r$ et ces éléments sont du type (4.4) ; l'élément $\alpha_{C_1}^s$ est associé au cycle parcourant $|s|$ fois C_1. De la même façon, $\alpha_{C_2}^r$ est associé au cycle parcourant $|r|$ fois C_2. Puisque $\alpha_{C_1}^s = \alpha_{C_2}^r$ et que C_1 et C_2 sont des cycles simples, ceci prouve que $C_1 = C_2$.

Supposons à présent que C_1 et C_2 sont disjoints. Soient x_0 un sommet de C_1 et y_0 un sommet de C_2. Étant donné que Γ_1 est connexe, il existe un chemin simple[7]

$$C = (u_0 = \{x_0, u_{0,2}\}, u_1, \ldots, u_{p-1}, u_p = \{u_{p,1}, y_0\})$$

où $u_i = \{u_{i,1}, u_{i,2}\} \in E$ pour tout $i \in \{0, \ldots, p\}$ et tels que $u_{0,2}, u_{1,1}, u_{1,2}, \ldots, u_{p-1,1}, u_{p-1,2}$ ne sont ni des sommets de C_1 ni des sommets de C_2. On a

$$\alpha_{C_1} \cdot x_0 = (\alpha_C^{-1} \circ \alpha_{C_2} \circ \alpha_C) \cdot x_0 = x_0$$

et en utilisant un raisonnement similaire au cas précédent, il existe $s, r \in \mathbb{Z}_0$ tels que

$$\alpha_{C_1}^s = (\alpha_C^{-1} \circ \alpha_{C_2} \circ \alpha_C)^r = \alpha_C^{-1} \circ \alpha_{C_2}^r \circ \alpha_C.$$

Or, l'élément $\alpha_C^{-1} \circ \alpha_{C_2}^r \circ \alpha_C$ est associé au cycle commençant par parcourir C puis parcourant $|r|$ fois C_2 et terminant par parcourir C en sens inverse, ce qui est impossible car $\alpha_{C_1}^s$ est associé à un cycle parcourant $|s|$ fois C_1 et le seul sommet commun entre ces deux cycles est x_0. $\square$

4.2 Premier critère

Dans cette section, nous allons exhiber un sous-ensemble des parties du plan dont les éléments sont paradoxaux sous l'action du groupe SL(2). Nous devons, avant tout, donner la définition d'une *action transitive*, ainsi que rappeler le concept de *normes matricielles* et établir quelques-unes de leurs propriétés.

Définition 4.2.1. L'action d'un groupe G sur un ensemble X est dite *transitive* si pour tout $x \in X$, $\operatorname{orb}(x) = X$. Autrement dit, si l'action ne possède qu'une seule orbite.

Lemme 4.2.2. *Le groupe SL(2) a une action transitive sur* $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Nous savons que $\operatorname{orb}(x) \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et nous devons montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \subseteq \operatorname{orb}(x)$. Soit $y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Il existe $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi[$ tels que

$$x = |x|\ (\cos(\theta_1),\ \sin(\theta_1)) \qquad \text{et} \qquad y = |y|\ (\cos(\theta_2),\ \sin(\theta_2)).$$

Dans ce cas,

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{|y|}{|x|} & 0 \\ 0 & \dfrac{|x|}{|y|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ -\sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) \end{pmatrix} x^\top = y^\top$$

et le produit des trois matrices ci-dessus appartient à SL(2). Ceci montre que $y \in \operatorname{orb}(x)$. $\square$

7. Il est possible que $C = (u_0 = \{x_0, y_0\})$.

Passons maintenant aux rappels sur les normes matricielles. Pour plus d'informations, nous conseillons [21] au lecteur.

Définition 4.2.3. Si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, on pose

$$|x|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

et on vérifie facilement que l'application

$$\mathbb{C}^n \to [0; \infty[\quad x \mapsto |x|_1$$

est une norme[8] sur $\mathbb{C}^n$. De plus, en manipulant les définitions, on peut montrer sans peine qu'il existe des constantes $c_1, c_2 > 0$ indépendantes de x telles que

$$|x|_2 \leq c_1 \; |x|_1 \qquad \text{et} \qquad |x|_1 \leq c_2 \; |x|_2$$

où $|\cdot|_2$ représente la norme euclidienne classique (que l'on note simplement $|\cdot|$ s'il n'y a aucune ambiguïté possible). On dit que les normes $|\cdot|_2$ et $|\cdot|_1$ sont *équivalentes.*

Définition 4.2.4. Si $A \in \mathbb{C}_n^n$ et $p \in \{1, 2\}$, on pose

$$\|A\|_p = \sup_{|x|_p \leq 1} |Ax^\top|_p$$

et on vérifie facilement que l'application

$$\mathbb{C}_n^n \to [0; \infty[\quad A \mapsto \|A\|_p$$

est une norme sur $\mathbb{C}_n^n$ si $p \in \{1, 2\}$. On dit que c'est la *norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle* $|\cdot|_p$.

Proposition 4.2.5. *Si $A \in \mathbb{C}_n^n$ et $x \in \mathbb{C}^n$ alors*

$$|Ax^\top|_p \leq \|A\|_p \; |x|_p$$

si $p \in \{1, 2\}$.

Démonstration. Si $x = 0$ alors l'inégalité est trivialement vérifiée.

Si $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ alors $\left| \dfrac{x}{|x|_p} \right|_p = 1$ et on a

$$\frac{1}{|x|_p} \; |Ax^\top|_p = \left| A \frac{x^\top}{|x|_p} \right|_p \leq \|A\|_p = \sup_{|y|_p \leq 1} |Ay^\top|_p,$$

et par suite, $|Ax^\top|_p \leq \|A\|_p \; |x|_p$. □

8. C'est-à-dire une application telle que $|ax|_1 = |a| \; |x|_1$, $|x + y|_1 \leq |x|_1 + |y|_1$ et $|x|_1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ pour tout $a \in \mathbb{C}$ et tous $x, y \in \mathbb{C}^n$.

Remarque 4.2.6. Si $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une application linéaire et $B \subseteq \mathbb{R}^n$ un borné alors $l(B)$ est un borné. En effet, vu la proposition précédente, il existe une constante $c \geq 0$ telle que

$$|l(x)| \leq c\ |x|$$

pour tout $x \in B$. Par conséquent,

$$\sup_{y \in l(B)} |y| = \sup_{x \in B} |l(x)| \leq c \sup_{x \in B} |x|$$

or, B est borné ce qui implique $\sup\limits_{x \in B} |x| < \infty$, d'où la conclusion.

Proposition 4.2.7. *Si* $A = (a_{jk})_{j,k \in \{1,\ldots,n\}} \in \mathbb{C}_n^n$ *alors*

$$\|A\|_1 = \sup_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{jk}| \right).$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $|x|_1 \leq 1$. Par définition, on a

$$\begin{aligned}
|Ax^\top|_1 &= \sum_{j=1}^{n} \left|(Ax^\top)_j\right| \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\ x_k \right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{jk}|\ |x_k| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{jk}| \right) |x_k| \\
&\leq \sup_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{jk}| \right) \sum_{k=1}^{n} |x_k| \\
&\leq \sup_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{jk}| \right).
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\|A\|_1 \leq \sup_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{jk}| \right).$$

De plus, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{jk}| = |A\ e_k^\top|_1 \leq \|A\|_1\ |e_k|_1 = \|A\|_1,$$

et par suite,

$$\sup_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{jk}|\right) \leq \|A\|_1;$$

d'où la conclusion. $\square$

Le théorème suivant donne une famille de sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ qui sont équidécomposables sous l'action de SL(2). Nous en tirerons un corollaire qui est le résultat principal de cette section, c'est-à-dire la donnée d'une famille de sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ paradoxaux pour SL(2).

Théorème 4.2.8. *Si $X, Y \subseteq \mathbb{R}^2$ sont deux sous-ensembles bornés, d'intérieur non vide et dont la distance à l'origine est strictement positive alors $X \sim Y$ sous l'action du groupe $SL(2)$.*

Démonstration. Au préalable, observons que $0 \notin \overline{X}$ si et seulement si $\mathrm{d}(X, 0) > 0$; par conséquent, $0 \notin \overline{X} \cup \overline{Y}$.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$; par le lemme 4.2.2, on a

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} = \mathrm{orb}(x_0) = \{Mx_0^\top \mid M \in \mathrm{SL}(2)\}$$

et par conséquent, il existe

$$A_{x_0} = \begin{pmatrix} a_{11}^{x_0} & a_{12}^{x_0} \\ a_{21}^{x_0} & a_{22}^{x_0} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2)$$

tel que $A_{x_0}x_0^\top \in \mathring{Y} \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Fixons $\varepsilon > 0$ tel que

$$B(A_{x_0}x_0^\top,\ \varepsilon) \subseteq \mathring{Y} \subseteq Y.$$

Puisque l'application $x \mapsto A_{x_0}x^\top$ est une application linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie, elle est continue ; par suite, il existe $\eta_{A_{x_0}} > 0$ de sorte que pour tout $z \in \mathbb{R}^2$ tel que $|z - x_0| < \eta_{A_{x_0}}$, on a

$$|A_{x_0}z^\top - A_{x_0}x_0^\top| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En particulier, si $z \in B(x_0, \eta_{A_{x_0}})$ alors $A_{x_0}z^\top \in B(A_{x_0}x_0^\top,\ \varepsilon) \subseteq Y$.

Soient $\eta > 0$ et $\delta \in \mathbb{R}_0$. Posons $b_{ij} = a_{ij}^{x_0} + \delta$ pour tous $i, j \in \{1, 2\}$ et $d = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$. Dans ce cas, on a

$$d = 1 + \delta(a_{11}^{x_0} + a_{22}^{x_0} - a_{12}^{x_0} - a_{21}^{x_0})$$

et si $|\delta|$ est suffisamment petit, alors $d > 0$ et on peut poser

$$B = \begin{pmatrix} \dfrac{b_{11}}{\sqrt{d}} & \dfrac{b_{12}}{\sqrt{d}} \\ \dfrac{b_{21}}{\sqrt{d}} & \dfrac{b_{22}}{\sqrt{d}} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2).$$

Quitte à diminuer $|\delta|$, on peut en outre supposer que

$$\|B - A_{x_0}\|_1 < \eta;$$

ainsi, pour tout $z \in B(x_0, \eta_{A_{x_0}})$, on obtient

$$\begin{aligned}
|Bz^\top - A_{x_0}x_0^\top| &\leq |Bz^\top - A_{x_0}z^\top| + |A_{x_0}z^\top - A_{x_0}x_0^\top| \\
&< c_1\ |Bz^\top - A_{x_0}z^\top|_1 + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< c_1\ \|B - A_{x_0}\|_1\ |z|_1 + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< c_1\ \|B - A_{x_0}\|_1 \underbrace{\sup}_{z \in B(x_0, \eta_{A_{x_0}})} |z|_1 + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \eta\ c' + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

si on prend $\eta = \dfrac{\varepsilon}{2\ c'}$. Finalement, il existe $\delta_{A_{x_0}} > 0$ tel que si

$$|b_{ij} - a_{ij}^{x_0}| \leq \delta_{A_{x_0}}$$

alors pour tout $z \in B(x_0, \eta_{A_{x_0}})$, on a $Bz^\top \in B(A_{x_0}x_0^\top,\ \varepsilon) \subseteq Y$ avec

$$B = \begin{pmatrix} \dfrac{b_{11}}{\sqrt{d}} & \dfrac{b_{12}}{\sqrt{d}} \\ \dfrac{b_{21}}{\sqrt{d}} & \dfrac{b_{22}}{\sqrt{d}} \end{pmatrix}$$

où $d = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} > 0$. De la même façon, il existe

$$C_{x_0} = \begin{pmatrix} c_{11}^{x_0} & c_{12}^{x_0} \\ c_{21}^{x_0} & c_{22}^{x_0} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2)$$

tel que $C_{x_0}x_0^\top \in \mathring{X} \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. De plus, il existe $\eta_{C_{x_0}} > 0$ tel que si $z \in B(x_0, \eta_{C_{x_0}})$ alors $C_{x_0}z^\top \in X$ et il existe $\delta_{C_{x_0}} > 0$ tel que si

$$|d_{ij} - c_{ij}^{x_0}| \leq \delta_{C_{x_0}}$$

alors, pour tout $z \in B(x_0, \eta_{C_{x_0}})$, on a $Dz^\top \in X$ avec

$$D = \begin{pmatrix} \dfrac{d_{11}}{\sqrt{d'}} & \dfrac{d_{12}}{\sqrt{d'}} \\ \dfrac{d_{21}}{\sqrt{d'}} & \dfrac{d_{22}}{\sqrt{d'}} \end{pmatrix}$$

où $d' = d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21} > 0$. Pour résumer, si $x_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ il existe $A_{x_0}, C_{x_0} \in \mathrm{SL}(2)$ tels que $A_{x_0}x_0^\top \in Y$ et $C_{x_0}x_0^\top \in X$. De plus, il existe $\eta_{A_{x_0}}, \eta_{C_{x_0}} > 0$ et $\delta_{A_{x_0}}, \delta_{C_{x_0}} > 0$ tels que pour tout $z \in B(x_0, \eta_{A_{x_0}})$, on a

$$\begin{pmatrix} \frac{b_{11}}{\sqrt{d}} & \frac{b_{12}}{\sqrt{d}} \\ \frac{b_{21}}{\sqrt{d}} & \frac{b_{22}}{\sqrt{d}} \end{pmatrix} z^\top \in Y$$

avec $|b_{ij} - a_{ij}^{x_0}| \leq \delta_{A_{x_0}}$ et $d = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} > 0$; et pour tout $z \in B(x_0, \eta_{C_{x_0}})$, on a

$$\begin{pmatrix} \frac{d_{11}}{\sqrt{d'}} & \frac{d_{12}}{\sqrt{d'}} \\ \frac{d_{21}}{\sqrt{d'}} & \frac{d_{22}}{\sqrt{d'}} \end{pmatrix} z^\top \in X$$

avec $|d_{ij} - c_{ij}^{x_0}| \leq \delta_{C_{x_0}}$ et $d' = d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21} > 0$.

On sait évidemment que [9]

$$\overline{X} \subseteq \bigcup_{x_0 \in \overline{X}} B(x_0, \eta_{A_{x_0}})$$

et par compacité de $\overline{X}$, il existe $x_1, \ldots, x_K \in \overline{X}$ tels que

$$X \subseteq \overline{X} \subseteq \bigcup_{k=1}^{K} B(x_k, \eta_{A_{x_k}});$$

de la même façon, il existe $y_1, \ldots, y_L \in \overline{Y}$ tels que

$$Y \subseteq \overline{Y} \subseteq \bigcup_{l=1}^{L} B(y_l, \eta_{C_{y_l}}).$$

Pour tout $k \in \{1, \ldots, K\}$, tout $l \in \{1, \ldots, L\}$ et tous $i, j \in \{1, 2\}$, soient

$$a_{ij}(x_k),\ b_{ij}(x_k),\ c_{ij}(y_l),\ d_{ij}(y_l)$$

des nombres algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$ tels que [10]

$$|a_{ij}(x_k) - a_{ij}^{x_k}| \leq \delta_{A_{x_k}} \quad \text{et} \quad |b_{ij}(x_k) - a_{ij}^{x_k}| \leq \delta_{A_{x_k}}$$

$$|c_{ij}(y_l) - c_{ij}^{x_l}| \leq \delta_{C_{x_l}} \quad \text{et} \quad |d_{ij}(y_l) - c_{ij}^{x_l}| \leq \delta_{C_{x_l}}.$$

9. Vu la remarque effectuée pour commencer la démonstration, si $x_0 \in \overline{X}$ alors $x_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
10. On peut procéder exactement comme pour la remarque 4.1.3 pour trouver ces nombres.

Si pour tout $k \in \{1, \dots K\}$, on pose

$$A_k = \begin{pmatrix} \dfrac{a_{11}(x_k)}{\sqrt{\alpha_k}} & \dfrac{a_{12}(x_k)}{\sqrt{\alpha_k}} \\ \dfrac{a_{21}(x_k)}{\sqrt{\alpha_k}} & \dfrac{a_{22}(x_k)}{\sqrt{\alpha_k}} \end{pmatrix}$$

où $\alpha_k = a_{11}(x_k)a_{22}(x_k) - a_{12}(x_k)a_{21}(x_k) > 0$ et si on définit de la même façon B_k, C_l et D_l pour tout $k \in \{1, \dots, K\}$ et tout $l \in \{1, \dots, L\}$ alors, par le corollaire 4.1.5,

$$G = \big\langle A_k,\ B_k,\ C_l,\ D_l \mid k \in \{1, \dots, K\},\ l \in \{1, \dots, L\}\big\rangle$$

est un sous-groupe libre de SL(2). De plus, vu la proposition 3.3.9 et remarque 3.3.2, son action sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est localement commutative. Pour terminer, montrons que les hypothèses du théorème 4.1.7 sont vérifiées. Pour tout

$$z \in X \subseteq \bigcup_{k=1}^{K} B(x_k, \eta_{A_{x_k}}),$$

il existe $k \in \{1, \dots, K\}$ tel que $z \in B(x_k, \eta_{A_{x_k}})$ et vu ce qui précède, on en tire que

$$A_k z^\top \in Y \qquad \text{et} \qquad B_k z^\top \in Y.$$

De même, pour tout $z \in Y \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{L} B(y_l, \eta_{C_{y_l}})$, il existe $l \in \{1, \dots, L\}$ tel que

$$C_l z^\top = z_1^\top \in X \qquad \text{et} \qquad D_l z^\top = z_2^\top \in X$$

et par suite, $C_l^{-1} z_1^\top = D_l^{-1} z_2^\top = z^\top \in Y$. Ainsi, par le théorème 4.1.7, on obtient

$$X \sim Y$$

pour G et par conséquent, sous l'action du groupe SL(2). D'où la conclusion. $\square$

Nous pouvons ainsi établir le corollaire suivant.

Corollaire 4.2.9. *Si $X \subseteq \mathbb{R}^2$ est un sous-ensemble borné, d'intérieur non vide et dont la distance à l'origine est strictement positive alors X est paradoxal sous l'action du groupe SL(2).*

Démonstration. Soient $x, y \in \mathring{X}$ tels que[11] $x \neq y$. Puisque $\mathbb{R}^2$ est un espace séparé, il existe $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tels que

$$B(x, \varepsilon_1) \cap B(y, \varepsilon_2) = \emptyset$$

et quitte à restreindre ε_1 et ε_2, on peut supposer que $B(x, \varepsilon_1) \subseteq X$ et $B(y, \varepsilon_2) \subseteq X$. Or, par le théorème 4.2.8,

$$B(x, \varepsilon_1) \sim X \qquad \text{et} \qquad B(y, \varepsilon_2) \sim X$$

sous l'action de SL(2), ce qui prouve que X est paradoxal pour ce groupe. $\square$

11. Ceci est possible car $\mathring{X} \neq \{x\}$, puisque sinon, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subseteq \mathring{X} = \{x\}$, ce qui est absurde.

4.3 Deuxième critère

C'est dans cette section que nous montrons que l'intérieur du carré unité du plan est paradoxal sous l'action du groupe spécial linéaire. Pour obtenir ce résultat, il nous faudra démontrer un théorème beaucoup plus général.

Commençons par quelques notations.

Définition 4.3.1. Soient $a, b \geq 0$ tels que $a < b$. On pose

$$D_n(a,b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a < |x| \leq b\}$$

ou simplement $D(a,b)$ si le contexte est clair. Remarquons que cet ensemble est borné et d'intérieur non vide. De plus, si $a > 0$ alors la distance à l'origine est strictement positive. En particulier, si $a > 0$, l'ensemble $D_2(a,b)$ est paradoxal sous l'action du groupe SL(2) (corollaire 4.2.9). Soulignons également que

$$D_n(0,r) = \overline{B(0,r)} \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

si $r > 0$.

Remarque 4.3.2. Nous savons que si $X \subseteq \mathbb{R}^n$, on a

$$0 \notin \overline{X} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}(X,0) > 0,$$

or $0 \notin \overline{X}$ s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(0,2\varepsilon) \cap X = \emptyset$, en particulier $\overline{B(0,\varepsilon)} \cap X = \emptyset$. On en conclut que si X est un ensemble borné, dont la distance à l'origine est strictement positive, alors il existe $a, b > 0$ tels que $0 < a < b$ de sorte que

$$X \subseteq D(a,b),$$

puisque $D(a,b) = \overline{B(0,b)} \setminus \overline{B(0,a)}$.

Démontrons le lemme suivant avant de passer au théorème principal de cette section.

Lemme 4.3.3. *Soit $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0;\infty]$ une mesure exhaustive et finiment additive. Supposons que $\mu(X) = 0$ pour tout ensemble borné $X \subseteq \mathbb{R}^n$ dont la distance à l'origine est strictement positive. Alors pour tout $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ borné et tout $r > 0$, on a*

$$\mu(Y) = \mu(Y \cap D(0,r)).$$

Démonstration. Soient $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble borné et $r > 0$. On a

$$Y = (Y \cap D(0,r)) \cup (Y \setminus D(0,r))$$

de façon disjointe. Par conséquent,

$$\mu(Y) = \mu(Y \cap D(0,r)) + \mu(Y \setminus D(0,r))$$

or, l'ensemble $Y \setminus D(0,r)$ est un borné dont la distance à l'origine est strictement positive ; ainsi, par hypothèse, on a $\mu(Y \setminus D(0,r)) = 0$. Finalement, on obtient

$$\mu(Y) = \mu(Y \cap D(0,r)),$$

d'où la conclusion. □

Nous pouvons à présent énoncer et démontrer le théorème.

Théorème 4.3.4 (AC). *Soit* $X \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ *un ensemble borné. Supposons qu'il existe* $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in SL(2)$ *tels que l'ensemble*

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} \sigma_i \cdot X \right) \cup \{0\}$$

est un voisinage de l'origine. Alors X *est paradoxal sous l'action du groupe* $SL(2)$.

Démonstration. Procédons par l'absurde et supposons que X n'est pas un ensemble paradoxal. Dans ce cas, par le théorème de Tarski, il existe μ une mesure exhaustive sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, finiment additive et SL(2)-invariante telle que $\mu(X) = 1$. Par hypothèse, il existe $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \mathrm{SL}(2)$ et $r > 0$ tels que

$$D(0,r) = \overline{B(0,r)} \setminus \{0\} \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{n} \sigma_i \cdot X \right).$$

De plus, par les caractères monotone, finiment additif et SL(2)-invariant de μ, on obtient [12]

$$\mu\left(D(0,r)\right) \leq \mu \left(\bigcup_{i=1}^{n} \sigma_i \cdot X \right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(\sigma_i \cdot X) = \sum_{i=1}^{n} \mu(X) = n < \infty$$

et posons $\mu\left(D(0,r)\right) = m \in [0; \infty[$. Il est clair que pour tout $a' > 0$ et tout $b' > 0$ tels que $0 < a' < b' \leq r$, on a

$$D(a', b') \subseteq D(0, r)$$

et par conséquent, $\mu(D(a', b')) \leq \mu\left(D(0,r)\right) = m$. De plus, par le théorème 4.2.8, pour tous $a, b > 0$ tels que $0 < a < b$, on a

$$D(a, b) \sim D(a', b')$$

sous l'action du groupe SL(2) et par suite, on obtient par la proposition 3.1.1

$$\mu(D(a,b)) = \mu(D(a',b')) \leq m < \infty.$$

Sachant que $D(a, b)$ est paradoxal sous l'action de SL(2) pour tous $a, b > 0$ tels que $0 < a < b$, on a

$$\mu(D(a,b)) = 0,$$

12. Si $A_1, \ldots, A_n \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ alors on pose $B_1 = A_1$ et $B_i = A_i \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{i-1})$ pour $i \in \{2, \ldots, n\}$. Dans ce cas, $B_i \cap B_j = \emptyset$ si $i \neq j$, $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ et $B_i \subseteq A_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. On a alors

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i).$$

vu le corollaire 3.1.2 et ce qui précède. On en tire que si $Z \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est un borné dont la distance à l'origine est strictement positive alors $\mu(Z) = 0$ (voir remarque 4.3.2).

Montrons que $m \neq 0$ et par conséquent, $m \in]0; \infty[$. Pour ce faire, prouvons dans un premier temps que pour tout $t > 0$, on a

$$\mu(D(0,t)) = \mu(D(0,r)) = m.$$

Si $t \geq r$ alors, en utilisant le lemme 4.3.3, on obtient

$$\mu(D(0,t)) = \mu(D(0,t) \cap D(0,r)) = \mu(D(0,r)) = m;$$

si $t < r$ alors on utilise le lemme 4.3.3 pour obtenir

$$m = \mu(D(0,r)) = \mu(D(0,r) \cap D(0,t)) = \mu(D(0,t));$$

dans tous les cas, $\mu(D(0,t)) = \mu(D(0,r)) = m$, comme annoncé. Puisque $X \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est borné, il existe $t > 0$ tel que $X \subseteq D(0,t)$ et par conséquent,

$$1 = \mu(X) \leq \mu(D(0,t)) = m$$

finalement, m est bien différent de 0.

A présent, nous allons construire ν une mesure exhaustive sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, finiment additive et SL(2)-invariante, telle que $\nu(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = m$. Ceci conduira a une absurdité, puisque $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est paradoxal sous l'action du groupe SL(2) (corollaire 3.3.10) ainsi, on doit avoir $\nu(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = 0$ ou $\nu(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = \infty$. Pour tout $Z \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, on pose

$$\nu(Z) = \mu(Z \cap D(0,r)).$$

Dans ce cas, $\nu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \to [0; \infty]$ définit une mesure exhaustive et finiment additive, car μ l'est. De plus,

$$\nu(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = \mu(D(0,r)) = m,$$

il reste donc à montrer que ν est SL(2)-invariante. Soient $Z \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et $\sigma \in \mathrm{SL}(2)$. L'application $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est continue, bijective et telle que $\sigma(0) = 0$; il existe donc $t > 0$ tel que

$$\overline{B(0,t)} \subseteq \sigma^{-1} \cdot \overline{B(0,r)},$$

ainsi, on obtient

$$D(0,t) \subseteq \sigma^{-1} \cdot D(0,r).$$

De plus, on a

$$\nu(\sigma \cdot Z) = \mu(\sigma \cdot Z \cap D(0,r)) = \mu\big(\sigma \cdot (Z \cap \sigma^{-1} \cdot D(0,r))\big) = \mu(Z \cap \sigma^{-1} \cdot D(0,r)),$$

par définition de ν et puisque μ est SL(2)-invariante. En outre, l'ensemble $\sigma^{-1} \cdot D(0,r)$ est un borné, car σ^{-1} est une application linéaire et $D(0,r)$ est un borné [13]. Par suite, l'ensemble

$$Z \cap \sigma^{-1} \cdot D(0,r)$$

13. Remarque 4.2.6.

est également borné. Vu le lemme 4.3.3, on a

$$\mu(Z \cap \sigma^{-1} \cdot D(0,r)) = \mu(Z \cap \sigma^{-1} \cdot D(0,r) \cap D(0,t)) = \mu(Z \cap D(0,t));$$

de plus, en utilisant deux fois le lemme 4.3.3 et puisque $Z \cap D(0,t)$ et $Z \cap D(0,r)$ sont bornés, on a

$$\mu(Z \cap D(0,t)) = \mu\big(Z \cap D(0,t) \cap D(0,r)\big) = \mu(Z \cap D(0,r)) = \nu(Z).$$

En conclusion, pour tout $Z \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et tout $\sigma \in \mathrm{SL}(2)$, on a $\nu(\sigma \cdot Z) = \nu(Z)$, ce qui prouve la SL(2)-invariance de ν et termine la démonstration. □

Corollaire 4.3.5 (**AC**)**.** *Si $X \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est un borné d'intérieur non vide contenant un triangle ouvert dont un des sommets est $(0,0)$ alors, X est paradoxal sous l'action du groupe SL(2).*

Démonstration. Si θ est l'angle orienté formé par les deux côtés du triangle adjacents au sommet $(0,0)$ alors, notons

$$\rho_i = \begin{pmatrix} \cos(i\frac{\theta}{2}) & -\sin(i\frac{\theta}{2}) \\ \sin(i\frac{\theta}{2}) & \cos(i\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2)$$

la rotation d'angle $i\frac{\theta}{2}$ pour tout $i \in \{0, \dots, \lfloor \frac{4\pi}{\theta} \rfloor + 1\}$. Dans ce cas, l'ensemble

$$\bigcup_{i=0}^{\lfloor \frac{4\pi}{\theta} \rfloor + 1} (\rho_i \cdot X) \cup \{0\}$$

est un voisinage de l'origine, puisqu'il contient un ensemble du type $D(0,r) \cup \{0\}$. Il suffit de conclure par le théorème 4.3.4. □

Corollaire 4.3.6 (**AC**)**.** *Pour tout $r > 0$, les ensembles*

$$\overline{B(0,r)} \setminus \{0\} \quad \textit{et} \quad B(0,r) \setminus \{0\}$$

ainsi que l'intérieur du carré unité J sont paradoxaux sous l'action du groupe SL(2).

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du corollaire 4.3.5. □

Nous montrons à présent une condition pour que deux ensembles du plan soient équidécomposables sous l'action du groupe spécial linéaire. Pour ce faire, montrons que les boules privées de l'origine sont équidécomposables entre elles sous l'action de ce groupe.

Dans la suite, on utilisera les notations se rapportant au monoïde $F_{\mathrm{SL}(2)^\star,\ \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}$.

Proposition 4.3.7 (AC). *Pour tous $r, s > 0$, on a*

$$[D(0,r) \times \{0\}] = [D(0,s) \times \{0\}]$$

et en particulier, $D(0,r)$ est équidécomposable à $D(0,s)$ sous l'action du groupe $SL(2)$ pour tous $r, s > 0$.

Démonstration. Soient $r, s > 0$ et supposons avoir $r < s$. Il existe $a, b > 0$ de sorte que $a < b \leq r$ et $D(a,b) \subseteq D(0,r)$ et par le théorème 4.2.8, on a

$$D(r,s) \sim D(a,b)$$

sous l'action du groupe SL(2) ; en particulier, il est clair que

$$D(r,s) \times \{0\} \sim D(a,b) \times \{0\}$$

sous l'action [14] de $\mathrm{SL}(2)^\star$. En utilisant la proposition 3.1.13, on obtient

$$[D(r,s) \times \{0\}] \leq [D(0,r) \times \{0\}]$$

et par suite, on a

$$\begin{aligned} & [D(r,s) \times \{0\}] + [D(0,r) \times \{0\}] \leq 2\,[D(0,r) \times \{0\}] \\ \Rightarrow \quad & \big[(D(r,s) \times \{0\}) \cup (D(0,r) \times \{1\})\big] \leq 2\,[D(0,r) \times \{0\}]. \end{aligned}$$

En utilisant la même idée que la remarque 3.1.10 puisque $D(r,s) \cap D(0,r) = \emptyset$, on voit que

$$\begin{aligned} \big[(D(r,s) \times \{0\}) \cup (D(0,r) \times \{1\})\big] &= \big[(D(r,s) \times \{0\}) \cup (D(0,r) \times \{0\})\big] \\ &= \big[(D(r,s) \cup D(0,r)) \times \{0\}\big] \\ &= [D(0,s) \times \{0\}] \end{aligned}$$

et on en tire que

$$[D(0,s) \times \{0\}] \leq 2\,[D(0,r) \times \{0\}]. \tag{4.5}$$

De plus, puisque $D(0,r) \subseteq D(0,s)$, on a

$$[D(0,r) \times \{0\}] \leq [D(0,s) \times \{0\}]; \tag{4.6}$$

ainsi, en combinant (4.5) et (4.6), on obtient

$$[D(0,r) \times \{0\}] \leq [D(0,s) \times \{0\}] \leq 2\,[D(0,r) \times \{0\}].$$

Vu le corollaire 4.3.6, l'ensemble $D(0,r)$ est paradoxal pour SL(2) ; par le corollaire 3.1.17, on en tire que

$$[D(0,r) \times \{0\}] = 2\,[D(0,r) \times \{0\}]$$

14. Une partition de l'ensemble $D(r,s) \times \{0\}$ est du type $(A_i \times \{0\})_{i=1}^n$ où $(A_i)_{i=1}^n$ est une partition de $D(r,s)$.

et par conséquent, on a

$$[D(0,r)\times\{0\}] \le [D(0,s)\times\{0\}] \le [D(0,r)\times\{0\}],$$

ce qui montre que $[D(0,r)\times\{0\}] = [D(0,s)\times\{0\}]$ pour tous $r,s>0$, puisque $\le$ est un ordre. Le cas particulier est une conséquence immédiate de ce qui précède. $\square$

Proposition 4.3.8 (AC). *Soient $X, Y \subseteq \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ deux ensembles bornés. Supposons qu'il existe $\sigma_1,\dots,\sigma_n,\rho_1,\dots,\rho_m \in SL(2)$ tels que les ensembles*

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n}\sigma_i\cdot X\right)\cup\{0\} \qquad \textit{et} \qquad \left(\bigcup_{i=1}^{m}\rho_i\cdot Y\right)\cup\{0\}$$

sont des voisinages de l'origine. Alors $X\sim Y$ sous l'action du groupe $SL(2)$.

Démonstration. Par hypothèse, il existe $r>0$ tel que

$$D(0,r)\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}\sigma_i\cdot X$$

et par conséquent, $[D(0,r)\times\{0\}] \le \left[\bigcup_{i=1}^{n}(\sigma_i\cdot X\times\{0\})\right]$. Vu le lemme 3.3.5, on a

$$\left[\bigcup_{i=1}^{n}(\sigma_i\cdot X\times\{0\})\right] \le \sum_{i=1}^{n}[\sigma_i\cdot X\times\{0\}] = \sum_{i=1}^{n}\left[(\sigma_i,\ \mathrm{id})\cdot(X\times\{0\})\right] = n\,[X\times\{0\}];$$

finalement, on obtient $[D(0,r)\times\{0\}] \le n\,[X\times\{0\}]$. De plus, il existe $s>0$ tel que $X\subseteq D(0,s)$ et par suite, on a

$$[X\times\{0\}] \le [D(0,s)\times\{0\}].$$

Par la proposition 4.3.7, on sait que

$$[D(0,s)\times\{0\}] = [D(0,r)\times\{0\}]$$

et par conséquent, puisque $D(0,r)$ est paradoxal pour SL(2), il suffit d'utiliser le corollaire 3.1.17 pour obtenir

$$\begin{aligned} n\,[D(0,s)\times\{0\}] &= n\,[D(0,r)\times\{0\}] \\ &= [D(0,r)\times\{0\}] \\ &\le n\,[X\times\{0\}] \\ &\le n\,[D(0,s)\times\{0\}]. \end{aligned}$$

On en tire que $n\,[D(0,s)\times\{0\}] = n\,[X\times\{0\}]$ et par la loi d'annulation, on obtient

$$[D(0,s)\times\{0\}] = [X\times\{0\}],$$

ce qui montre que $D(0,s) \sim X$ pour SL(2). De plus, pour tout $t > 0$, on a $D(0,t) \sim D(0,s)$ et par transitivité,

$$D(0,t) \sim X$$

pour SL(2) et pour tout $t > 0$. De même, $D(0,t) \sim Y$ sous l'action de SL(2) pour tout $t > 0$. Finalement, si $t_0 > 0$, on a

$$X \sim D(0,t_0) \sim Y$$

et $X \sim Y$ pour le groupe SL(2). □

Corollaire 4.3.9 (AC). *Si $X, Y \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ sont des bornés d'intérieur non vide contenant un triangle ouvert dont un des sommets est $(0,0)$ alors,*

$$X \sim Y$$

sous l'action du groupe SL(2).

Démonstration. Vu la démonstration du corollaire 4.3.5, il existe $\rho_1, \ldots, \rho_n, \rho'_1, \ldots, \rho'_m$ des rotations telles que les ensembles

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} \rho_i \cdot X\right) \cup \{0\} \qquad \text{et} \qquad \left(\bigcup_{i=1}^{m} \rho'_i \cdot Y\right) \cup \{0\}$$

sont des voisinages de l'origine. On conclut par la proposition 4.3.8. □

Annexe A

Complément sur les groupes libres de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$

Dans cette annexe, nous généralisons la proposition 2.3.1 afin d'obtenir beaucoup plus de paires de matrices indépendantes dans $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. Cette annexe est basée sur l'article [9].

Dans la suite, sauf mention explicite du contraire, les éléments d'une matrice $A \in \mathbb{C}_n^n$ (resp. $B \in \mathbb{C}_n^n$) seront notés a_{ij} (resp. b_{ij}) pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. De plus, pour tout $m \in \mathbb{Z}_0$, les éléments de A^m (resp. B^m) seront notés $a_{ij}^{(m)}$ (resp. $b_{ij}^{(m)}$) pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Commençons par une définition.

Définition A.0.10. Soit $A \in \mathbb{C}_n^n$. L'élément a_{ij} de A ($i, j \in \{1, \ldots, n\}$) est dit *dominant* si

$$|a_{ij}| > |a_{kl}|$$

pour tous $k, l \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $(k, l) \neq (i, j)$.

L'objectif est de montrer que si A et B sont deux éléments de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ tels que a_{12} et b_{21} sont dominants et tels que $A^k \neq I$ et $B^k \neq I$ pour tout $k \in \mathbb{N}_0$ alors, A et B sont indépendants. Il est clair que les matrices de la proposition 2.3.1 ainsi que celles de la remarque qui suit, vérifient bien ces hypothèses. De plus, il en existe d'autres satisfaisant à ces conditions ; c'est par exemple le cas des matrices

$$\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix};$$

par conséquent, elles sont également indépendantes. On a ainsi une famille beaucoup plus grande de paires de matrices indépendantes pour le groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$.

Avant toute chose, nous avons besoin d'un lemme un peu fastidieux mais néanmoins nécessaire, car il sera régulièrement utilisé dans la suite.

Lemme A.0.11. *Soit $A \in \mathbb{Z}_2^2$ tel que $|\det(A)| = 1$ et pour lequel l'élément a_{12} est dominant. On a alors*

(i) $|a_{12}| \geq 2$ *;*

(ii) $a_{11}a_{22} \neq 0$ *;*

(iii) $|a_{11}| \geq |a_{21}|$ *et* $|a_{22}| \geq |a_{21}|$ *;*

(iv) $|a_{12} - a_{11}| \geq |a_{22} - a_{21}|$.

Démonstration.

(i) Sinon, on a $|a_{12}| = 0$ ou $|a_{12}| = 1$. Le premier cas ne peut pas se produire. En effet, l'élément a_{12} est dominant et par conséquent, les naturels $|a_{11}|$, $|a_{21}|$ et $|a_{22}|$ doivent être négatifs, ce qui n'est évidemment pas possible. Dans le deuxième cas, puisque a_{12} est dominant, on obtient

$$|a_{11}| = |a_{21}| = |a_{22}| = 0,$$

ce qui conduit à $\det(A) = 0$ et ceci est impossible.

(ii) Supposons que $a_{11} = 0$ ou que $a_{22} = 0$. Dans ce cas, $\det(A) = -a_{12}a_{21}$ et par conséquent,

$$|a_{12}|\ |a_{21}| = 1,$$

ce qui montre que $|a_{21}| = |a_{12}| = 1$. Ceci contredit le point (i).

(iii) Nous allons uniquement montrer que $|a_{11}| \geq |a_{21}|$, car l'autre cas se traite de la même façon. On a

$$1 = |\det(A)| = |a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}| \geq |a_{12}|\ |a_{21}| - |a_{11}|\ |a_{22}|.$$

Ainsi, puisque $|a_{12}| > |a_{22}|$, on obtient

$$1 > |a_{12}|\ |a_{21}| - |a_{11}|\ |a_{12}| = |a_{12}|\ (|a_{21}| - |a_{11}|)$$

et par suite, $0 \geq |a_{12}|\ (|a_{21}| - |a_{11}|)$. Finalement, on a $|a_{21}| - |a_{11}| \leq 0$, d'où la conclusion.

(iv) La démonstration de ce point-ci, est un petit peu plus longue. En effet, nous savons que $|a_{11}| \geq 1$ vu le point (ii) et nous allons décomposer en deux cas.

Cas $|a_{11}| > 1$: On a

$$1 = |\det(A)| = |a_{11}a_{22} - a_{11}a_{21} + a_{11}a_{21} - a_{21}a_{12}| = |a_{11}(a_{22} - a_{21}) - a_{21}(a_{12} - a_{11})|$$

et par conséquent, en utilisant l'hypothèse et le point (iii), on obtient

$$\begin{aligned} 1 &\geq |a_{11}|\ |a_{22} - a_{21}| - |a_{21}|\ |a_{12} - a_{11}| \\ &\geq |a_{11}|\ |a_{22} - a_{21}| - |a_{11}|\ |a_{12} - a_{11}| \\ &\geq |a_{11}|\ (|a_{22} - a_{21}| - |a_{12} - a_{11}|). \end{aligned} \tag{A.1}$$

Finalement, on a
$$\frac{1}{|a_{11}|} \geq |a_{22} - a_{21}| - |a_{12} - a_{11}|$$
avec $1 > \dfrac{1}{|a_{11}|} > 0$, ce qui entraine $|a_{22} - a_{21}| - |a_{12} - a_{11}| < 1$, d'où la conclusion.

Cas $|a_{11}| = 1$: Par le point (iii), on sait que $|a_{21}| = 0$ ou $|a_{21}| = 1$. Dans le premier cas, vu l'inégalité (A.1), on en tire que $|a_{22}| \leq 1$ et il vient [1],
$$|a_{22} - 0| \leq 1 \leq |a_{12}| - |a_{11}| \leq |a_{12} - a_{11}|,$$
ce qu'on voulait. Dans le deuxième cas, il va falloir discuter en fonction de la valeur exacte de a_{11} et a_{21}, ainsi qu'en fonction du signe des deux autres éléments [2]. Nous allons juste détailler le cas où $a_{11} = a_{21} = 1$, puisque ce sont de simples vérifications.

Supposons donc avoir $a_{11} = a_{21} = 1$.

— Si $a_{22} > 0$ et $a_{12} > 0$ alors en particulier, $a_{22} \geq 1$ et $a_{12} \geq 2$ (vu le point (i)). Par conséquent, on a $|a_{22} - 1| = a_{22} - 1$ et $|a_{12} - 1| = a_{12} - 1$ et il est clair que $a_{22} - 1 \leq a_{12} - 1$.

— Si $a_{22} < 0$ et $a_{12} > 0$ alors en particulier, $a_{22} \leq -1$ et $a_{12} \geq 2$. Par conséquent, $|\det(A)| = |a_{22} - a_{12}| = a_{12} - a_{22} = 1$ et par suite, on a $3 \leq a_{12} - a_{22} = 1$, ce qui n'est pas possible et ce cas ne se produit jamais.

— Si $a_{22} > 0$ et $a_{12} < 0$ alors en particulier, $a_{22} \geq 1$ et $a_{12} \leq -2$. Par conséquent, $|\det(A)| = |a_{22} - a_{12}| = a_{22} - a_{12} = 1$ et par suite, on a $2 \leq |a_{12}| = -a_{12} = 1 - a_{22} \leq 0$, ce qui n'est pas possible et ce cas ne se produit jamais.

— Si $a_{22} < 0$ et $a_{12} < 0$ alors en particulier, $|a_{22} - 1| = 1 - a_{22}$ et $|a_{12} - 1| = 1 - a_{12}$ et il est clair que $-a_{22} < -a_{12}$ vu le caractère dominant de a_{12} et vu l'hypothèse. Par conséquent, on a $1 - a_{22} \leq 1 - a_{12}$.

D'où la conclusion. $\square$

Remarque A.0.12. Pour la suite, il est important de remarquer que si $B \in \mathbb{Z}_2^2$ est tel que $|\det(B)| = 1$ et tel que l'élément b_{21} est dominant alors, on peut appliquer le lemme A.0.11 à $B^\top$. Par conséquent, on obtient les inégalités suivantes :

(i) $|b_{21}| \geq 2$;

(ii) $b_{11}b_{22} \neq 0$;

(iii) $|b_{11}| \geq |b_{12}|$ et $|b_{22}| \geq |b_{12}|$;

(iv) $|b_{21} - b_{11}| \geq |b_{22} - b_{12}|$.

1. L'élément a_{12} étant dominant, on a $|a_{12}| > |a_{11}|$ et par suite, $|a_{12}| \geq |a_{11}| + 1$.
2. Remarquons d'ores et déjà que a_{12} et a_{22} ne peuvent pas être nuls.

Proposition A.0.13. *Soient $A, B \in \mathbb{Z}_2^2$ tels que $|\det(A)| = |\det(B)| = 1$. Si $a_{12}^{(n)}$ et $b_{21}^{(n)}$ sont dominants pour tout $n \in \mathbb{Z}_0$, alors A et B sont indépendants.*

Démonstration. Dans un premier temps, remarquons que $A^n, B^n \in \mathbb{Z}_2^2$ et que nous avons $|\det(A^n)| = |\det(B^n)| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}_0$; par conséquent, on pourra appliquer respectivement les inégalités du lemme A.0.11 et de la remarque A.0.12 à ces matrices.

Dans un deuxième temps, fixons $n \in \mathbb{Z}_0$ et montrons que si $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ est tel que $|x_n| \geq |y_n|$ et tel que $x_n \neq 0$, et si on pose

$$(x_n, y_n)A^n = (x'_n, y'_n) \tag{A.2}$$

alors, $|y'_n| \geq |x_n|$ et $|y'_n| \geq |x'_n|$. Par construction et puisque $|x_n| \geq |y_n|$, on a

$$\begin{aligned} |y'_n| &= |a_{12}^{(n)} x_n + a_{22}^{(n)} y_n| \\ &\geq |a_{12}^{(n)}|\ |x_n| - |a_{22}^{(n)}|\ |y_n| \\ &\geq |a_{12}^{(n)}|\ |x_n| - |a_{22}^{(n)}|\ |x_n| \\ &\geq (|a_{12}^{(n)}| - |a_{22}^{(n)}|)\ |x_n|. \end{aligned}$$

De plus, $|a_{12}^{(n)}| - |a_{22}^{(n)}| \geq 1$ car $a_{12}^{(n)}$ est dominant, ce qui conduit bien à $|y'_n| \geq |x_n|$. Quitte à multiplier la relation (A.2) par $\operatorname{sgn}(x_n)$ et par la matrice [3]

$$\operatorname{diag}(\operatorname{sgn}(a_{11}^{(n)}),\ \operatorname{sgn}(a_{12}^{(n)})),$$

on peut supposer que $x_n, a_{11}^{(n)}$ et $a_{12}^{(n)}$ sont positifs. Dès lors, on obtient

$$x'_n = a_{11}^{(n)} x_n + a_{21}^{(n)} y_n \geq 0$$

car vu le lemme A.0.11, on a $a_{11}^{(n)} \geq |a_{21}^{(n)}|$ et par hypothèse, on a $x_n \geq |y_n|$. Ceci entraine que $a_{11}^{(n)} x_n \geq |a_{21}^{(n)} y_n|$. De même, on a

$$y'_n = a_{12}^{(n)} x_n + a_{22}^{(n)} y_n \geq 0$$

car $a_{12}^{(n)} > |a_{22}^{(n)}|$ et par hypothèse. On en tire que

$$\begin{aligned} |y'_n| - |x'_n| &= y'_n - x'_n \\ &= (a_{12}^{(n)} - a_{11}^{(n)})\ x_n + (a_{22}^{(n)} - a_{21}^{(n)})\ y_n \\ &\geq (a_{12}^{(n)} - a_{11}^{(n)})\ x_n - |a_{22}^{(n)} - a_{21}^{(n)}|\ |y_n| \\ &\geq (a_{12}^{(n)} - a_{11}^{(n)} - |a_{22}^{(n)} - a_{21}^{(n)}|)\ |y_n|, \end{aligned}$$

3. On vérifie facilement que la matrice ainsi obtenue satisfait toujours nos hypothèses.

et par le dernier point du lemme A.0.11, on obtient $|y'_n| \geq |x'_n|$. De la même façon, si $|y_n| \geq |x_n|$ alors, on a $|x''_n| \geq |y_n|$ et $|x''_n| \geq |y''_n|$ avec

$$(x_n, y_n)B^n = (x''_n, y''_n)$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}_0$.

Enfin, montrons que A et B sont indépendantes en procédant par l'absurde. Vu la proposition 1.1.19, supposons qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ et $C_0, \ldots, C_r \in \{A, B\}$ tels que

$$w = C_0^{n_0} \cdots C_r^{n_r} = I$$

où $n_i \in \mathbb{Z}_0$ pour tout $i \in \{0, \ldots, r\}$ et tels que $C_i C_{i+1} \neq I$ et $C_i \neq C_{i+1}$ pour tout $i \in \{0, \ldots, r-1\}$. On peut supposer que w commence et se termine par une puissance de A. En effet, il suffit d'utiliser les mêmes arguments que ceux utilisés pour la démonstration de la proposition 2.3.1 hormis le fait que si w commence par une puissance de B et se termine par une puissance de B alors, on ne considère pas $w^\top$ mais on considère w multiplié à gauche A^s et à droite par A^{-s} pour un certain $s \in \mathbb{Z}_0$. Dès lors, on a

$$w = A^{n_0} B^{n_1} \cdots A^{n_r} = I$$

où $n_i \in \mathbb{Z}_0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$. Considérons $(1, 0)w$ et posons $(1, 0)A^{n_0} = (x_0, y_0)$ et

$$\begin{cases} (x_{2i},\ y_{2i})B^{n_{2i+1}} & = & (x_{2i+1},\ y_{2i+1}) & \forall i \in \mathbb{N} \\ (x_{2i-1},\ y_{2i-1})A^{n_{2i}} & = & (x_{2i},\ y_{2i}) & \forall i \in \mathbb{N}_0\,. \end{cases}$$

Au vu de ce qui précède, si $|x_{2i-1}| \geq |y_{2i-1}|$, on a $|y_{2i}| \geq |x_{2i-1}|$ et $|y_{2i}| \geq |x_{2i}|$; et par conséquent, on obtient $|x_{2i+1}| \geq |y_{2i}|$ et $|x_{2i+1}| \geq |y_{2i+1}|$ pour tout $i \in \mathbb{N}_0$. De plus, puisque $1 \geq 0$, on a $|y_0| \geq |x_0|$ et par suite, $|x_1| \geq |y_0|$ et $|x_1| \geq |y_1|$, ce qui entraine $|y_2| \geq |x_1|$. Finalement par induction, on obtient

$$|y_0| \leq |x_1| \leq |y_2| \leq |x_3| \leq \cdots \leq |x_{r-2}| \leq |y_{r-1}| \leq |x_r|.$$

Or, vu le premier point du lemme A.0.11, on a $2 \leq |a_{12}^{(n_0)}| = |y_0|$ ce qui montre que $|x_r| \geq 2$ et donc $(x_r,\ y_r) \neq (1, 0)$, ce qui est absurde puisque $(1, 0)w = (1, 0) = (x_r,\ y_r)$. $\square$

Remarque A.0.14. Si on observe bien la preuve précédente, on retrouve un peu l'idée de la démonstration de la proposition 2.3.1. En effet, si on note

$$X'_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid |x| \geq |y|\} \qquad \text{et} \qquad X'_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid |y| \geq |x|\}$$

alors multiplier un élément de X'_1 par une puissance de A donne un élément de X'_2 et multiplier un élément de X'_2 par une puissance de B donne un élément de X'_1 et ainsi de suite. Cependant, on ne conclut pas de la même façon car dans le cas qui nous intéresse ici, X'_1 et X'_2 ne sont pas disjoints et c'est pour cela qu'on a besoin d'un argument supplémentaire.

La dernière étape de cette section, consiste à montrer que si a_{12} (resp. b_{21}) est dominant pour une matrice $A \in \mathbb{Z}_2^2$ (resp. $B \in \mathbb{Z}_2^2$) ayant certaines propriétés alors, $a_{12}^{(n)}$ (resp. $b_{21}^{(n)}$) est dominant pour la matrice A^n (resp. B^n) pour tout $n \in \mathbb{Z}_0$. Il ne restera plus qu'à combiner ce résultat avec la proposition A.0.13 pour obtenir notre objectif. Pour y parvenir, nous avons besoin d'un lemme dont la démonstration nécessite quelques rappels. Pour plus d'informations, nous conseillons vivement au lecteur de consulter [18].

Rappel. *Nous savons que le polynôme caractéristique d'une matrice A de dimension 2 prend la forme particulière suivante*

$$x^2 - \mathrm{Tr}(A)x + \det(A).$$

De plus, le théorème de Cayley-Hamilton nous apprend que toute matrice annule son polynôme caractéristique et par conséquent, on obtient

$$A^2 - \mathrm{Tr}(A)A + \det(A)I = 0. \tag{A.3}$$

Nous pouvons à présent passer au lemme.

Lemme A.0.15. *Soit $A \in SL(2, \mathbb{Z})$. Si $A^k \neq I$ pour tout $k \in \mathbb{N}_0$ alors $|\mathrm{Tr}(A)| \geq 2$.*

Démonstration. Procédons par l'absurde et supposons que $|\mathrm{Tr}(A)| < 2$. Nous allons donc traiter deux cas.

Cas $\mathbf{Tr}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{0}$: Notons λ_1 et λ_2 les valeurs propres de A. Nous savons que

$$0 = \mathrm{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 \qquad \text{et} \qquad 1 = \det(A) = \lambda_1\lambda_2.$$

On tire de la première égalité que $\lambda_1 = -\lambda_2$ et par suite, grâce à la deuxième égalité, on a $-\lambda_2^2 = 1$, ce qui n'est pas possible.

Cas $|\mathbf{Tr}(\boldsymbol{A})| = \mathbf{1}$: Au vu de la relation (A.3), on a

$$A^2 = \mathrm{Tr}(A)A - I.$$

Par récurrence, on montre facilement que

$$A^k = t_k A - t_{k-1} I \tag{A.4}$$

avec $t_0 = 0$, $t_1 = 1$ et $t_{k+1} = \mathrm{Tr}(A)t_k - t_{k-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}_0$. Si $\mathrm{Tr}(A) = 1$ alors en utilisant (A.4), on obtient $A^6 = I$, ce qui contredit l'hypothèse. De la même façon, si $\mathrm{Tr}(A) = -1$ alors $A^3 = I$, ce qui est également absurde. D'où la conclusion. □

Proposition A.0.16. *Soit $A \in SL(2,\mathbb{Z})$ et supposons que $A^k \neq I$ pour tout $k \in \mathbb{N}_0$. Dans ce cas, si a_{12} est dominant alors $a_{12}^{(n)}$ est dominant pour tout $n \in \mathbb{Z}_0$.*

Démonstration. Supposons avoir $\mathrm{Tr}(A) \geq 0$ et $a_{12} \geq 0$. Soit $\mu \in \mathbb{Z}$ tel que $|\mu| = 1$. Posons $\delta_0 = -\mu$ et
$$\delta_n = a_{12}^{(n)} - \mu a_{11}^{(n)} \in \mathbb{Z}$$
pour tout $n \in \mathbb{N}_0$. Dès lors, on peut montrer que [4]
$$\delta_{n+1} = \mathrm{Tr}(A)\delta_n - \delta_{n-1}$$
pour tout $n \in \mathbb{N}_0$. On a $\delta_1 = a_{12} - \mu a_{11}$; ainsi, on obtient
$$\delta_1 \geq a_{12} - |\mu a_{11}| = a_{12} - |a_{11}| > 0$$
et par suite, $\delta_1 \geq 1$. De plus, puisque $\mathrm{Tr}(A) \geq 2$ vu le lemme A.0.15, on a
$$\delta_2 = \mathrm{Tr}(A)\delta_1 - \delta_0 \geq 2\delta_1 + \mu = \delta_1 + \underbrace{(\delta_1 + \mu)}_{\geq 0} \geq \delta_1 \geq 1 > 0.$$

Par conséquent, on a
$$\delta_3 = \mathrm{Tr}(A)\delta_2 - \delta_1 \geq 2\delta_2 - \delta_1 = \delta_2 + \underbrace{(\delta_2 - \delta_1)}_{\geq 0} \geq \delta_2 \geq 1 > 0$$
et en itérant, on trouve que $\delta_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, c'est-à-dire $a_{12}^{(n)} > \mu a_{11}^{(n)}$. Or $\mu = \pm 1$ et est arbitraire, on en tire que
$$a_{12}^{(n)} > a_{11}^{(n)} \qquad \text{et} \qquad a_{12}^{(n)} > -a_{11}^{(n)}$$
et par conséquent, on obtient $a_{12}^{(n)} > |a_{11}^{(n)}|$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$.

Pour montrer que $a_{12}^{(n)} > |a_{22}^{(n)}|$, on pose $\delta_n = a_{12}^{(n)} - \mu a_{22}^{(n)}$ et on fait exactement le même raisonnement. De plus, grâce au lemme A.0.11, on a $|a_{22}^{(n)}| \geq |a_{21}^{(n)}|$. On en tire que $a_{12}^{(n)} > |a_{21}^{(n)}|$, ce qui montre que $a_{12}^{(n)}$ est dominant pour tout $n \in \mathbb{N}_0$.

Si $\mathrm{Tr}(A) < 0$ et $a_{12} < 0$ alors il suffit d'appliquer le même raisonnement à $-A$. Si $\mathrm{Tr}(A) \geq 0$ et $a_{12} < 0$ alors on considère la matrice
$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Si $\mathrm{Tr}(A) < 0$ et $a_{12} > 0$ alors, dans ce dernier cas, on considère $-A'$. Dans tous les cas, on a montré que $a_{12}^{(n)}$ est dominant pour tout $n \in \mathbb{N}_0$. Il faut encore montrer que $a_{12}^{(-n)}$ est

4. C'est une simple vérification mais elle est un peu longue pour être détaillée ici.

dominant pour tout $n \in \mathbb{N}_0$. Pour ce faire, il suffit simplement de remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on a

$$A^{-n} = \begin{pmatrix} a_{22}^{(n)} & -a_{12}^{(n)} \\ -a_{21}^{(n)} & a_{11}^{(n)} \end{pmatrix}$$

et on a montré que $|a_{12}^{(-n)}| = |a_{12}^{(n)}|$ est strictement plus grand que le module des autres éléments de A^{-n}, ce qui montre que $a_{12}^{(-n)}$ est dominant pour tout $n \in \mathbb{N}_0$. $\square$

Remarque A.0.17. Soit $B \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ et supposons que $B^k \neq I$ pour tout $k \in \mathbb{N}_0$. Si b_{21} est dominant alors $b_{21}^{(n)}$ est dominant pour tout $n \in \mathbb{Z}_0$. En effet, il suffit d'appliquer la proposition A.0.16 à la matrice $B^\top$.

On peut enfin énoncer et démontrer le théorème principal de cette section.

Théorème A.0.18. *Soit $A, B \in SL(2, \mathbb{Z})$ tels que $A^k \neq I$ et $B^k \neq I$ pour tout $k \in \mathbb{N}_0$. Supposons que a_{12} et b_{21} sont dominants. Alors A et B sont indépendants.*

Démonstration. Par la proposition A.0.16 et la remarque A.0.17, on sait que $a_{12}^{(n)}$ et $b_{21}^{(n)}$ sont dominants pour tout $n \in \mathbb{Z}_0$. Ainsi, vu la proposition A.0.13, A et B sont indépendants. D'où la conclusion. $\square$

Bibliographie

[1] Stefan Banach et Alfred Tarski : Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes. *Fundamenta Mathematicae*, 6:244–277, 1924.

[2] Josette Calais : *Eléments de théorie des groupes.* Presses Universitaires de France, 3e édition, 1998.

[3] Pierre de la Harpe : *Topics in Geometric Group Theory.* Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, 2000.

[4] Steven Givant et Paul Halmos : *Introduction to Boolean Algebras.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag New York, 2009.

[5] Georges Hansoul : *Algèbre II.* Université de Liège, 2007.

[6] Georges Hansoul : *Algèbre III.* Université de Liège, 2010.

[7] Felix Hausdorff : *Grundzüge der Mengenlehre.* Veit and Company, Leipzig, 1914. Das Hauptwerk von Felix Hausdorff.

[8] Arie Hinkis : *Proofs of the Cantor-Bernstein Theorem : a Mathematical Excursion*, volume 45 de *Science Networks, Historical Studies.* Birkhäuser, 2013.

[9] Karl Goldberg et Morris Newman : Pairs of matrices of order two which generate free groups. *Illinois Journal of Mathematics*, 1(3):446–448, Octobre 1956.

[10] Thomas Kleyntssens : *Sur les ensembles paradoxaux : de Banach-Tarski à Dougherty-Foreman.* 2010-2011. Mémoire.

[11] Miklos Laczkovich : Equidecomposability of sets, invariant measures, and paradoxes. Octobre 1991. School on Measure Theory ans Real Analysis.

[12] Miklos Laczkovich : Paradoxical decompositions using lipschitz functions. *Mathematika*, 39:216–222, 1992.

[13] Miklos Laczkovich : Paradoxical sets under SL(2). *Annales Univ. Sci. Budapest.*, 42:141–145, 1999.

[14] Pierre Mathonet : *Topologie générale.* Université de Liège, 2013-2014.

[15] Jan Mycielski : Non-amenable groups with amenable action and some paradoxical decompositions in the plane. *Colloquium Mathematicum*, 75:149–157, 1998.

[16] Samuel Nicolay : *Théorie de la mesure.* Université de Liège, 2011-2012.

[17] Alexander Olshanskii : On the question of the existence of an invariant mean on a group. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 1980.

[18] Michel RIGO : *Algèbre linéaire*. Université de Liège, 2009.

[19] Michel RIGO : *Théorie des graphes*. Université de Liège, 2009.

[20] Joseph J. ROTMAN : *An Introduction to the Theory of Groups*, volume 148 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer New York, 1995.

[21] Jean-Pierre SCHNEIDERS : *Introduction à l'Analyse Numérique*. Université de Liège, 2010-2011.

[22] Jean-Pierre SCHNEIDERS : *Analyse fonctionnelle I*. Université de Liège, 2015-2016. Notes de cours personnelles.

[23] Stan WAGON : *The Banach-Tarski Paradox*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1993.