þÿInjectivé et surjectivité de l application asymtotique d ultraholomorphes de Carleman

Auteur : Kamga, Oscar-Joël

Promoteur(s) : Esser, Céline

Faculté : Faculté des Sciences

Diplôme : Master en sciences mathématiques, à finalité approfondie

Année académique : 2021-2022

URI/URL : http://hdl.handle.net/2268.2/16282

Faculté des Sciences

Département de Mathématique

Injectivé et surjectivité de l'application asymtotique de Borel dans les classes ultraholomorphes de Carleman

Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de Master en Sciences Mathématiques

Finalité approfondie

Année académique 2021-2022

Présenté par :
Kamga Oscar-Joël

Promotrice :
ESSER Céline

Remerciements

Tout d'abord, je voudrais remercier ma promotrice, Céline Esser pour son engagement, son attention, ses nombreuses relectures, ses précieux conseils et pour sa disponibilité dans le cadre de ce mémoire. Plus généralement, je la remercie en particulier pour tout le soutien qu'elle a pu m'apporter durant ces six années d'études.

Je remercie aussi chaleureusement mes parents, mes sœurs, mes frères et mes grands-parents pour tout le soutien et les nombreux encouragements qu'ils ont pu m'apporter durant toutes ces années d'études. Ces encouragements ont été pour moi une source de motivation dans les moments difficiles.

J'ai également une pensée particulière pour ma compagne qui m'a toujours soutenue et encouragée durant ces années d'études, même dans les moments les plus difficiles.

Je terminerais par remercier tous mes professeurs et tous ceux qui m'ont soutenu (directement ou indirectement) durant l'élaboration de ce mémoire.

Table des matières

Introduction . . . iii

1 Suite log-convexe **1**

1.1 Définitions et propriétés . . . 1

1.2 Équivalence et comparaison des suites . . . 9

1.3 Fonctions associées . . . 12

1.4 Indices de croissances $\omega(\mathbb{M})$ et $\gamma(\mathbb{M})$ . . . 18

2 Injectivité de l'application asymptotique de Borel **26**

2.1 Développement asymptotique et classes des fonctions ultra-holomorphes . . . 26

2.1.1 Définitions et propriétés . . . 26

2.1.2 L'application asymptotique de Borel . . . 32

2.2 Intervalles d'injectivité et de surjectivité pour l'application asymptotique de Borel 33

2.2.1 Résultats d'injectivités classiques . . . 35

2.2.2 Solution complète et impossibilité de la bijectivité . . . 39

3 Surjectivité de l'application asymptotique de Borel **45**

3.1 Suites de poids . . . 47

3.2 Suites de poids satisfaisant (dc) . . . 56

3.3 Suites fortement régulières . . . 61

3.4 Suites admettant un ordre proche non nul . . . 63

4 Opérateur d'extension global **66**

4.1 Propriétés sur les suites . . . 66

4.2 Existence d'opérateur d'extension global . . . 69

A Ordre proche **77**

A.1 Définitions et propriétés 77

B Théorèmes et propositions utiles **79**

C Surface de Riemann associée à fonction logarithme **83**

Introduction

En 1886, H.Poincaré a stimulé l'intérêt mathématique pour les séries de puissances formelles (généralement divergentes), en introduisant la notion développement asymptotique qui est une sorte développement de Taylor qui fournit des approximations successives : une fonction complexe f, holomorphe sur un secteur $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < r, a < arg(z) < b\}$,admet la série de puissances formelle complexe $\widehat{f} = \sum_{p \geqslant 0} a_p z^p$ comme son développement asymptotique (uniforme) à l'origine si pour tout $p \in \mathbb{N}$ et pour tout sous secteur propre borné T de S, il existe une constante positive $C_{p,T}$ telle que pour tout $z \in T$ on a

$$|f(z) - \sum_{n \geqslant 0}^{p-1} a_n z^n| \leqslant C_{p,T} |z|^p,$$

et nous écrivons $f \in \widetilde{\mathcal{A}}(S)$. Dans ce contexte, si ce développement est unique, il est naturel de considérer l'application asymptotique de Borel $\widetilde{\mathcal{B}} : \widetilde{\mathcal{A}} \to \mathbb{C}[[z]]$ envoyant une fonction f dans son développement asymptotique $\widehat{f}$.
En 1895, Émile Borel a prouvé qu'étant donné une suite $(a_n)_n$ de nombres complexes, il existe une fonction infiniment continûment dérivable f telle que $(D^n f)(0) = a_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. En 1916, J.F. Ritt a montré que l'application de Borel est surjective pour n'importe quel secteur du plan complexe. Plusieurs chercheurs ont essayé d'étendre ce théorème à d'autres classes de fonctions. En particulier, la question a été traitée dans le contexte des classes de fonctions ultraholomorphes, qui sont des sous-classes des fonctions holomorphes définies via des conditions de croissance sur leurs dérivées en utilisant des suites de poids. Nous montrons dans ce mémoire que l'application de Borel dans les classes de fonctions ultraholomorphes n'est jamais bijective.

Dans le premier chapitre, nous nous intéresserons aux suites log-convexes et aux différentes propriétés des dites suites. Par la suite nous présenterons également la fonction de poids associée à une suite log-convexe et leurs indices de croissance $\gamma(\mathbb{M})$ et $\omega(\mathbb{M})$ qui interviendrons dans l'étude de l'injectivité et la surjectivité de l'application asymptotique de Borel.

Dans le chapitre 2, nous introduirons les classes de fonctions holomorphes dans des secteurs non bornés de la surface de Riemann du logarithme à partir des suites de nombres réels positifs considérées dans le chapitre précédent. Par la suite, nous définirons l'application asymptotique de Borel qui à une fonction f associe son développement asymptotique. De plus, nous examinerons l'injectivité de l'application de Borel dans trois cas : dans les classes des fonctions ultraholomorphes de Roumieu-Carleman et dans les classes de fonctions admettant une développement asymptotique uniforme ou non à l'origine. En outre, on montrera que la solution dépend de l'ouverture du secteur et que l'injectivité est possible si le secteur est assez large. Enfin nous montrerons que l'application de Borel n'est jamais bijective.

Dans chapitre 3, nous rappellerons la surjectivité de l'application de Borel pour les fonctions de classe $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$. Par la suite, nous traiterons la surjectivité de l'application de Borel d'une part pour les suites de poids et les suites de poids satisfaisant (dc) et d'autre part pour les suites fortement régulières et les suites admettant un ordre proche non nul.

Dans le dernier chapitre, Nous rappellerons les propriétés sur les suites nécessaires pour prouver l'existence d'un opérateur d'extension global. Ensuite, nous montrerons l'existence d'opérateurs pour les suites de poids satisfaisant certaines conditions. Enfin, Nous allons construire un opérateur qui fait le lien entre la classe des fonctions ultradifférentiables $\mathcal{D}_{\mathbb{M}}$ et la classe des fonctions ultraholomorphes $\mathcal{A}_{\{\hat{\mathbb{M}}\}}(S_r)$.

Chapitre 1

Suite log-convexe

Les classes de fonctions et les séries de puissance formelles que nous définirons dans le chapitre 2 de notre travail sont définies par des restrictions de croissance de leurs dérivées ou de leurs coefficients, respectivement. Ces restrictions seront exprimées sous la forme d'une suite de nombres réels positifs qui satisferont certaines conditions appropriées en fonction du problème. Dans ce premier chapitre, nous présenterons ces conditions et les propriétés immédiates qui en découlent. Nous nous sommes principalement référencés de [15], [13], [11] et [16].

1.1 Définitions et propriétés

Dans la suite, $\mathbb{M} = (M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ représente toujours une suite de nombres réels positifs, et nous imposons toujours que $M_0 = 1$.

Définitions 1.1.1. (i) $\mathbb{M}$ est *log-convexe* (abrégé (lc)) si

$$M_p^2 \leqslant M_{p-1}M_{p+1}, \qquad \forall p \in \mathbb{N}_0.$$

(ii) $\mathbb{M}$ est *stable par opérateurs différentiels* ou sable *par dérivation* (abrégé (dc)) s'il existe $D > 0$ tel que

$$M_{p+1} \leqslant D^{p+1}M_p, \qquad \forall p \in \mathbb{N}.$$

(iii) $\mathbb{M}$ est à *croissance modérée* (abrégé (cm)) s'il existe $A > 0$ tel que

$$M_{p+q} \leqslant A^{p+q}M_pM_q, \qquad \forall p, q \in \mathbb{N}.$$

(iv) $\mathbb{M}$ est *non-quasianalytique* (abrégé (nq) si

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_k}{(k+1)M_{k+1}} < \infty.$$

(v) $\mathbb{M}$ est *fortement non-quasianalytique* (abrégé (fnq)) s'il existe $B > 0$ tel que

$$\sum_{q=p}^{\infty} \frac{M_q}{(q+1)M_{q+1}} \leqslant B\frac{M_p}{M_{p+1}}, \qquad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Définition 1.1.2. On dit que $\mathbb{M}$ est fortement régulier si $\mathbb{M}$ est (lc), (cm) et satisfait (fnq)

Remarque 1.1.3. (i) Si $\mathbb{M}$ est (cm) alors $\mathbb{M}$ satisfait (dc). (il suffit de prendre $q = 1$ dans la définition de (cm)).

(ii) Si $\mathbb{M}$ satisfait (fnq) alors $\mathbb{M}$ satisfait (nq).

En effet, supposons qu'il existe $B > 0$ tel que

$$\sum_{q=p}^{\infty} \frac{M_q}{(q+1)M_{q+1}} \leqslant B\frac{M_p}{M_{p+1}}, \qquad \forall p \in \mathbb{N}.$$

On a

$$\begin{aligned}\sum_{q=0}^{\infty} \frac{M_q}{(q+1)M_{q+1}} &= \sum_{q=0}^{p-1} \frac{M_q}{(q+1)M_{q+1}} + \sum_{q=p}^{\infty} \frac{M_q}{(q+1)M_{q+1}} \\ &\leqslant \sum_{q=0}^{p-1} \frac{M_q}{(q+1)M_{q+1}} + B\frac{M_p}{M_{p+1}} < \infty.\end{aligned}$$

Proposition 1.1.4. *Si nous posons,* $\widehat{\mathbb{M}} := (p!M_p)_{p\in\mathbb{N}}$, *alors les propriétés* (i), (iii), (iv) *et* (v) *sont préservées lors du passage de* $\mathbb{M}$ *à* $\widehat{\mathbb{M}}$.

Démonstration. (i) Supposons que $\mathbb{M}$ satisfait (lc), on a

$$\begin{aligned}\widehat{M_p^2} &= p!^2 M_p^2 \\ &\leqslant p!^2 M_{p-1}M_{p+1} \qquad \text{car } \mathbb{M} \text{ est (lc)} \\ &\leqslant \frac{p}{p+1}\widehat{M}_{p-1}\widehat{M}_{p+1}.\end{aligned}$$

D'où la conclusion car $\frac{p}{p+1} \leqslant 1$.

(ii) Supposons que $\mathbb{M}$ satisfait (cm), alors il existe $A > 0$ tel que

$$M_{p+q} \leqslant A^{p+q} M_p M_q.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\widehat{M}_{p+q} &= (p+q)!M_{p+q} \\ &\leqslant (p+q)!A^{p+q}M_pM_q \qquad \text{car } \mathbb{M} \text{ satisfait (cm)} \\ &\leqslant A^{p+q}\frac{(p+q)!}{p!q!}\widehat{M}_p\widehat{M}_q \\ &\leqslant (2A)^{p+q}\widehat{M}_p\widehat{M}_q \qquad \text{car } C_q^{p+q} \leqslant 2^{p+q}.\end{aligned}$$

D'où la conclusion.

(iii) Supposons $\mathbb{M}$ satisfait (nq),

$$\begin{aligned}\sum_{q\geqslant p}^{\infty}\frac{\widehat{M}_q}{(q+1)\widehat{M}_{q+1}} &= \sum_{q=p}^{\infty}\frac{q!M_q}{(q+1)(q+1)!M_{q+1}}\\ &\leqslant \sum_{q=p}^{\infty}\frac{M_q}{(q+1)M_{q+1}} < \infty \quad \text{car } \frac{1}{q+1}\leqslant 1\end{aligned}$$

(iv) Supposons $\mathbb{M}$ satisfait (fnq), alors il existe $B > 0$ tel que

$$\sum_{q=p}^{\infty}\frac{M_q}{(q+1)M_{q+1}} \leqslant B\frac{M_p}{M_{p+1}}, \qquad \forall p \in \mathbb{N}.$$

On a

$$\begin{aligned}\sum_{q\geqslant p}^{\infty}\frac{\widehat{M}_q}{(q+1)\widehat{M}_{q+1}} &= \sum_{q=p}^{\infty}\frac{q!M_q}{(q+1)(q+1)!M_{q+1}}\\ &\leqslant B\frac{M_p}{(p+1)M_{p+1}} \quad \text{car } \frac{1}{q+1}\leqslant\frac{1}{p+1}\\ &\leqslant B\frac{\widehat{M}_p}{\widehat{M}_{p+1}}.\end{aligned}$$

Ce qui suffit pour conclure.

□

Exemples 1.1.5. 1. La suite $\mathbb{M}$ définit par $M_p = (p!)^{\alpha}$ avec $\alpha > 0$ est une suite fortement régulière appelé suite de Gevrey d'ordre α. En effet

(i) $\mathbb{M}$ est (lc) car

$$(p!)^{2\alpha} \leqslant ((p-1)!)^{\alpha}.((p+1)!)^{\alpha} \Leftrightarrow p^{\alpha} \leqslant (p+1)^{\alpha},$$

qui est toujours vrai pour tout $\alpha > 0$.

(ii) $\mathbb{M}$ est (cm) car, puisque $\frac{(p+q)!}{p!q!} = C_q^{p+q} \leqslant 2^{p+q}$, on a

$$M_{p+q} = (p+q)!^{\alpha} \leqslant 2^{\alpha(p+q)}p!^{\alpha}q!^{\alpha} = 2^{\alpha(p+q)}M_pM_q.$$

(iii) $\mathbb{M}$ est (fnq) car

$$\sum_{q=p}^{\infty}\frac{M_q}{(q+1)M_{q+1}} = \sum_{q=p}^{\infty}\frac{1}{(q+1)^{\alpha+1}} \leqslant \int_p^{\infty} x^{-\alpha-1}dx = \frac{1}{\alpha}(p+1)^{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\frac{M_p}{M_{p+1}},$$

$\forall p \in \mathbb{N}$, d'où la conclusion.

2. La suite $\mathbb{M}$ définie par $M_p = (q)^{p^2}$ avec $q > 1$ est (lc) et (fnq) mais ne satisfait pas (cm). En effet
(i) $\mathbb{M}$ est (lc) car
$$(q)^{2p^2} \leqslant (q)^{(p-1)^2}.(q)^{(p+1)^2} \Leftrightarrow 1 \leqslant q^2,$$
qui est toujours vrai pour tout $q > 1$.
(ii) $\mathbb{M}$ est (fnq) car
$$\sum_{k=p}^{\infty} \frac{M_k}{(k+1)M_{k+1}} = \sum_{k=p}^{\infty} \frac{1}{(k+1)q^{2k+1}} \leqslant \frac{1}{q}\sum_{k=p}^{\infty} \frac{1}{q^{2k}} = \frac{q^2}{q^2-1}\frac{1}{q^{2p+1}} = \frac{q^2}{q^2-1}\frac{M_p}{M_{p+1}},$$
$\forall p \in \mathbb{N}$, d'où la conclusion.
(ii) $\mathbb{M}$ n'est pas à (cm) car
$$M_{a+b} = q^{(a+b)^2} = q^{a^2}q^{b^2}q^{2ab} = q^{2ab}M_aM_a.$$
Mais il n'existe pas $A > 0$ tel que $q^{2ab} \leqslant A^{a+b}$ pour tous $a, b > 1$.

Définition 1.1.6. Pour une suite $\mathbb{M}$ on définit *la suite des quotients* $\boldsymbol{m} = (m_p)_{p\in\mathbb{N}}$ par
$$m_p := \frac{M_{p+1}}{M_p} \qquad p \in \mathbb{N}.$$

Remarque 1.1.7. On peut observer que pour chaque $p \in \mathbb{N}$ on a
$$M_p = \frac{M_p}{M_{p-1}}\frac{M_{p-1}}{M_{p-2}}\cdots\frac{M_2}{M_1}\frac{M_1}{M_0} = m_{p-1}m_{p-2}\cdots m_1m_0.$$
Ainsi, on peut retrouver la suite $\mathbb{M}$ (avec $M_0 = 1$) une fois que m est connu, et donc la connaissance de l'une des suites équivaut à la connaissance de l'autre.

Dans la suite, les suites quotients des suites $\mathbb{M}, \mathbb{L}, \ldots$ seront désignées par les lettres minuscules $\boldsymbol{m}$,$\boldsymbol{l}$, $\cdots$.

Proposition 1.1.8. *Soit $\mathbb{M}$ une suite. Alors, nous avons :*
(i) $\mathbb{M}$ est (lc) si, et seulement si, $\boldsymbol{m}$ est croissant.
(ii) Supposons que $\mathbb{M}$ soit (lc). Alors,
(ii.a) $M_p^{1/p} \leqslant m_{p-1}$ pour tout $p \in \mathbb{N}_0$.
(ii.b) Si $\mathbb{M}$ satisfait (fnq) alors $\boldsymbol{m}$ tend vers l'infini.
(ii.c) La suite $(M_p^{1/p})_{p\in\mathbb{N}_0}$ est croissante.
(ii.d) $\lim_{p\to\infty} m_p = \infty$ si, et seulement si, $\lim_{p\to\infty} M_p^{1/p} = \infty$.

Démonstration. (i) On a

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \text{ est (lc)} &\Leftrightarrow M_p^2 \leqslant M_{p-1}M_{p+1} \quad \forall p \in \mathbb{N}_0 \\ &\Leftrightarrow \frac{M_p}{M_{p-1}} \leqslant \frac{M_{p+1}}{M_p} \quad \forall p \in \mathbb{N}_0 \\ &\Leftrightarrow m_{p-1} \leqslant m_p \quad \forall p \in \mathbb{N}_0 \\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{m} \text{ est croissant.} \end{aligned}$$

(ii.a) Puisque $\mathbb{M}$ est log-convexe, $\boldsymbol{m}$ est croissant (par (i)). Ainsi d'après la remarque (1.1.7), on a

$$\mathbb{M}_p = m_{p-1}m_{p-2}\cdots m_1 m_0 \leqslant m_{p-1}^p \qquad \text{car } \boldsymbol{m} \text{ est croissant.}$$

D'où la conclusion.

(ii.b) Supposons que $\boldsymbol{m}$ est borné, c'est-à-dire qu'il existe $C > 0$ tel que $m_p \leqslant C$ pour chaque $p \in \mathbb{N}$. On en tire donc que

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{M_l}{(l+1)M_{l+1}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(l+1)m_l} \geqslant \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(l+1)C} = \infty.$$

Ceci est impossible si $\mathbb{M}$ est (nq)(car $\mathbb{M}$ est (fnq) , donc $\boldsymbol{m}$ est non borné croissant. On obtient la conclusion.

(ii.c) D'après (ii.a), on a $\forall p \in \mathbb{N}$

$$M_{p+1}^{\frac{1}{p+1}} \leqslant m_p = \frac{M_{p+1}}{M_p}.$$

Ainsi

$$\frac{1}{p+1}\log(M_{p+1}) \leqslant \log(M_{p+1}) - \log(M_p).$$

On en tire que

$$\begin{aligned} \frac{1}{p+1}\log(M_{p+1}) &\geqslant \frac{1}{p}\log(M_p) \\ M_{p+1}^{\frac{1}{p+1}} &\geqslant M_p^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

D'où la conclusion.

(ii.d) Supposons que $\lim_{p\to\infty} M_p^{1/p} = \infty$. Puisque $\boldsymbol{m}$ est croissant et d'après (ii.a), on a

$$M_p^{\frac{1}{p}} \leqslant m_{p-1} \leqslant m_p.$$

On en tire que $\lim_{p\to\infty} m_p = \infty$.
Réciproquement, supposons que $\lim_{p\to\infty} m_p = \infty$. On a

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\log(M_{p+1}) - \log(M_p)}{p+1-p} = \lim_{p\to\infty} \log(\frac{M_{p+1}}{M_p}) = \lim_{p\to\infty} m_p = \infty.$$

On conclut par le théorème B.0.2 que

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p}\log(M_p) = \lim_{p\to\infty} M_p^{1/p} = \infty.$$

□

Proposition 1.1.9. *Soit $\mathbb{M}$ une suite. Alors, nous avons :*
(i) Si $\lim_{p\to\infty} m_p = \infty$, alors il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $M_p \leqslant M_{p+1}$ pour chaque $p \geqslant p_0$.
(ii) Si $\mathbb{M}$ est (lc) alors $M_pM_l \leqslant M_{p+l}$ pour tous $p, l \in \mathbb{N}$.

Démonstration. (i) Puisque $\lim_{p\to\infty} m_p = \infty$, alors il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $m_p = \frac{M_{p+1}}{M_p} > 1$ pour chaque $p \geqslant p_0$. D'où la conclusion.
(ii) Fixons $p \in \mathbb{N}$ et procédons par récurrence sur l.
Pour $l = 0$, on a, $M_pM_0 = M_p \leqslant M_{p+0}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.
Supposons que l'inégalité de la relation est vérifié vraie au rang l, et montrons qu'elle est vraie au rang $l+1$. En utilisant la définition, la croissance de $\boldsymbol{m}$ et l'hypothèse d'induction, on a

$$M_pM_{l+1} = M_pM_l\frac{M_{l+1}}{M_l} \leqslant M_{p+l}m_l \leqslant M_{p+l}m_{p+l} = M_{p+l+1}.$$

D'où la conclusion.

□

Définition 1.1.10. Une suite $\mathbb{M}$ est une *une suite de poids* si elle est (lc) et $\lim\limits_{p\to\infty} m_p = \infty$.

Remarque 1.1.11. Par proposition 1.1.8, il est clair que si $\mathbb{M}$ est (lc) et (fnq) alors $\mathbb{M}$ est une suite de poids. De manière équivalente si $\boldsymbol{m}$ est croissant et $\lim\limits_{p\to\infty}(M_p)^{1/p} = \infty$, alors $\mathbb{M}$ est une suite de poids.

Proposition 1.1.12. *Soit $\mathbb{M}$ une suite (lc). Alors les affirmations suivantes sont équivalentes :*
(i) $\mathbb{M}$ est à (cm),
(ii) $\sup\limits_{p\in\mathbb{N}_0}(m_p/M_p^{1/p}) < \infty$,
(iii) $\sup\limits_{p\in\mathbb{N}_0}(m_{2p}/m_p) < \infty$,
(iv) $\sup\limits_{p\in\mathbb{N}_0}(M_{2p}/M_p^2)^{1/p} < \infty$,

Démonstration. $(i) \Rightarrow (ii)$
Puisque $\mathbb{M}$ est log-convexe, en utilisant la croissance de $\boldsymbol{m}$ et la remarque 1.1.7, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}(m_p)^p &\leqslant m_p m_{p+1} \cdots m_{2p-1} \\ &= \frac{m_0 m_1 \cdots m_{p-1}}{m_0 m_1 \cdots m_{p-1}} m_p m_{p+1} \cdots m_{2p-1} \\ &= \frac{M_{2p}}{M_p}.\end{aligned}$$

De plus, puisque $\mathbb{M}$ satisfait la condition (cm), il existe $A > 1$ tel que $M_{2p} \leqslant A^{2p} M_p^2$ pour tout $p \in \mathbb{N}_0$ (en prenant $p = q$). Il résulte donc que,

$$(m_p)^p \leqslant M_{2p}/M_p \leqslant A^{2p} M_p \forall p \in \mathbb{N}_0. \tag{1.1.1}$$

D'où la conclusion.

$(ii) \Rightarrow (iii)$
D'après l'hypothèse, il existe $C > 0$ tel que

$$m_{2p} \leqslant C M_{2p}^{1/2p}$$

d'où

$$\begin{aligned}m_{2p}^{2p} &\leqslant C^{2p} M_{2p} \\ &= C^{2p} m_0 m_1 \cdots m_{p-1} m_p \cdots m_{2p-1} \\ &\leqslant C^{2p} (m_p)^p (m_{2p})^p, \forall p \in \mathbb{N}_0.\end{aligned}$$

D'où la conclusion.

$(iii) \Rightarrow (iv)$
Montrons d'abord que,

$$\sup_{p \in \mathbb{N}_0} (m_{2p}/m_{p-1}) < \infty. \tag{1.1.2}$$

En utilisant (iii), il existe $A > 1$ tel que

$$\frac{m_{2p}}{m_{p-1}} = \frac{m_{2p}}{m_p} \frac{m_p}{m_{p-1}} \leqslant A \frac{m_p}{m_{p-1}},\ p \in \mathbb{N}.$$

De plus, pour $p \geqslant 2$, on a $2p - 2 \geqslant p$. En utilisant la croissance de $\boldsymbol{m}$ et en appliquant à nouveau (iii), on en tire que

$$\frac{m_{2p}}{m_{p-1}} \leqslant A \frac{m_p}{m_{p-1}} \leqslant A \frac{m_{2p-2}}{m_{p-1}} \leqslant A^2,\ p \geqslant 2.$$

Enfin, en prenant $C := \max(A^2, m_2/m_0)$, on conclut que $\sup_{p\in\mathbb{N}}(m_{2p}/m_{p-1}) \leqslant C$. De même, en utilisant la croissance de $\boldsymbol{m}$, on a que

$$\begin{aligned}
M_{2p} &= m_0(m_1m_2)\cdots(m_{2p-3}m_{2p-2})m_{2p-1}\\
&\leqslant m_0m_2^2m_4^2\cdots m_{2(p-1)}^2m_{2p}\\
&\leqslant m_2^2m_4^2\cdots m_{2(p-1)}^2m_{2p}^2\frac{m_0}{m_{2p}}\\
&\leqslant C^{2p}m_0^2m_1^2m_2^2\cdots m_{p-2}^2m_{p-1}^2\frac{m_0}{m_{2p}} \quad \text{car on utilise (1.1.2)}\\
&\leqslant C^{2p}M_p^2,\ p\in\mathbb{N}_0 \quad \text{car on utilise et la croissance de } \boldsymbol{m}.
\end{aligned}$$

D'où la conclusion.
$(iv) \Rightarrow (i)$
Nous fixons $p, q \in \mathbb{N}$. Tout d'abord, si l'un ou les deux indices sont égaux à 0, alors la condition (cm) est satisfaite pour $A = 1$ puisque $M_0 = 1$, et $M_{p+0} = M_p = M_pM_0$. Par la suite, si $p + q$ est pair $i.e$ $p + q = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}_0$, par (iv), on en déduit qu'il existe $H > 1$ tel que

$$M_{p+q} = M_{2k} \leqslant H^kM_k^2 = (\sqrt{H})^{2k}M_pM_q\frac{M_k}{M_p}\frac{M_k}{M_q}.$$

Supposons que $p \leqslant k \leqslant q$ (la preuve est la même si $q < k < p$). Alors, puisque $\boldsymbol{m}$ est croissant, on a que

$$\begin{aligned}
\frac{M_k}{M_p}\frac{M_k}{M_q} &= \frac{m_0m_1\cdots m_{p-1}m_p\cdots m_{k-1}m_0m_1\cdots m_{k-1}}{m_0m_1\cdots m_{p-1}m_0m_1\cdots m_{k-1}m_k\cdots m_{q-1}}\\
&= m_pm_{p+1}\cdots m_{k-1}\frac{1}{m_km_{k+1}\cdots m_{q-1}}\\
&\leqslant \frac{m_k^{k-p}}{m_k^{q-k}} = m_k^0 = 1.
\end{aligned}$$

D'où $M_{p+q} \leqslant (\sqrt{H})^{p+q}M_pM_q$.
Enfin, si $p+q$ est impair $i.e$ $p+q = 2k-1$ avec $k \geqslant 2$, alors une des valeurs q ou p est impaire et l'autre est paire. Sans perte de généralité, supposons que q est impair et donc $p \geqslant 2$. En utilisant la proposition 1.1.9.(i) et le fait que $p + q + 1$ et $q + 1$ sont pairs, on se ramène au cas précédent. On en tire qu'il existe $A > 1$ tel que

$$M_{2k-1} \leqslant \frac{M_{2k}}{M_1} \leqslant \frac{A^{2k}M_pM_{q+1}}{M_1},$$

et $M_{q+1} \leqslant A^{\ell+1}M_qM_1$. On a donc

$$M_{p+q} = M_{2k-1} \leqslant A^{q+p+1}M_pA^{q+1}M_q \leqslant (A^2)^{q+p}M_pM_q$$

car $p \geqslant 2$ donc $p + 2 \leqslant 2p$. D'où la conclusion. □

Corollaire 1.1.13. *Soit* $\mathbb{M} = (M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *une suite (lc) satisfaisant la condition (cm) pour une constante* $A > 0$ *apparaissant dans la définition 1.1.1.*(ii)*. Alors ,*

$$m_p \leqslant A^2 M_p^{1/p} \leqslant A^2 m_p, \quad \forall p \in \mathbb{N}_0.$$

Démonstration. En utilisant (1.1.1) dans la proposition 1.1.12, la proposition 1.1.8.$(ii.a)$ et la croissance de $\boldsymbol{m}$, on a

$$m_p \leqslant A^2 M_p^{1/p} \leqslant A^2 m_{p-1} \leqslant A^2 m_p, \quad \forall p \in \mathbb{N}_0.$$

□

1.2 Équivalence et comparaison des suites

Introduisons à présent les notions de suites équivalentes et comparables qui interviendront dans la comparaison des classe des fonctions définies en termes de suites.

Définition 1.2.1. Soit $\mathbb{M}$ et $\mathbb{L}$ deux suites. On dit que $\mathbb{M}$ *est plus petit que* $\mathbb{L}$ s'il existe $C > 0$ tel que

$$M_p \leqslant C^p L_p, \forall p \in \mathbb{N},$$

ou, de manière équivalente, si

$$\sup_{p\in\mathbb{N}} (\frac{M_p}{L_p})^{1/p} < \infty.$$

Nous écrivons $\mathbb{M} \lesssim \mathbb{L}$.

Nous disons que $\mathbb{M}$ et $\mathbb{L}$ sont *comparables* si $\mathbb{M} \lesssim \mathbb{L}$ ou $\mathbb{L} \lesssim \mathbb{M}$ est vérifié. Si les deux conditions sont réunies, on dit que $\mathbb{M}$ est *équivalent* à $\mathbb{L}$, ie il existe des constantes strictement positives A, B telles que

$$A^p M_p \leqslant L_p \leqslant B^p M_p, \qquad \forall p \in \mathbb{N},$$

et on écrit $\mathbb{M} \approx \mathbb{L}$.

Remarques 1.2.2. (i) Nous remarquons que si $\mathbb{M}$ est une suite (lc), satisfaisant la condition (cm), alors d'après le corolaire 1.1.13, $\mathbb{M}$ et $(m_p^p)_{p\in\mathbb{N}}$ sont équivalents.

(ii) La relation $\approx$ est une relation d'équivalence. En effet,
- Il est clair que la relation $\approx$ est réflexive.
- la relation $\approx$ est symétrique car $\mathbb{M} \approx \mathbb{L} \Leftrightarrow \mathbb{M} \lesssim \mathbb{L}$ et $\mathbb{L} \lesssim \mathbb{M}$
- la relation $\approx$ est transitive car si $\mathbb{M} \approx \mathbb{L}$ et $\mathbb{L} \approx \mathbb{K}$ alors il existe des constantes strictement positives A, B, C et D telles que

$$A^p M_p \leqslant L_p \leqslant B^p M_p \quad \text{et} \quad C^p L_p \leqslant K_p \leqslant D^p L_p \qquad \forall p \in \mathbb{N}.$$

On en tire que

$$(CA)^p M_p \leqslant K_p \leqslant (DB)^p M_p, \qquad \forall p \in \mathbb{N}.$$

(iii) Soient deux suites comparables mais non équivalentes ie $\mathbb{M} \lesssim \mathbb{L}$ et $\mathbb{M} \not\approx \mathbb{L}$, alors on observe que

$$\inf_{p\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{M_p}{L_p}\right)^{1/p} = 0 \quad \text{et} \quad \sup_{p\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{M_p}{L_p}\right)^{1/p} < +\infty,$$

ou, de manière équivalente,

$$\liminf_{p\to\infty} \left(\frac{M_p}{L_p}\right)^{1/p} = 0 \quad \text{et} \quad \limsup_{p\to\infty} \left(\frac{M_p}{L_p}\right)^{1/p} < \infty.$$

De même, $\mathbb{M}$ et $\mathbb{L}$ sont *non-comparables* si

$$\inf_{p\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{M_p}{L_p}\right)^{1/p} = 0 \quad \text{et} \quad \sup_{p\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{M_p}{L_p}\right)^{1/p} = \infty,$$

ou, de manière équivalente, si

$$\liminf_{p\to\infty} \left(\frac{M_p}{L_p}\right)^{1/p} = 0 \quad \text{et} \quad \limsup_{p\to\infty} \left(\frac{M_p}{L_p}\right)^{1/p} = \infty.$$

Définition 1.2.3. Soit $\mathbb{M}$ et $\mathbb{L}$ des suites de nombres réelspositifs, on dit que $\boldsymbol{m}$ *est majoré* par $\boldsymbol{l}$ s'il existe $c > 0$ tel que

$$m_p \leqslant c l_p, \forall p \in \mathbb{N},$$

ou, de manière équivalente, si

$$\sup_{p\in\mathbb{N}} \frac{m_p}{l_p} < \infty,$$

et nous écrivons $\boldsymbol{m} \preceq \boldsymbol{l}$. La suite $\boldsymbol{m}$ est dite *semblable à* $\boldsymbol{l}$ si $\boldsymbol{m} \preceq \boldsymbol{l}$ et $\boldsymbol{l} \preceq \boldsymbol{m}$ ie si il existe des constantes strictement positives a, b telles que

$$a m_p \leqslant l_p \leqslant b m_p, \qquad \forall p \in \mathbb{N},$$

et on écrit $\boldsymbol{m} \simeq \boldsymbol{l}$.

Remarque 1.2.4. De même, la relation $\simeq$ est une relation d'équivalence.

Exemple 1.2.5. On définit $\mathbb{L} := (\Gamma(1+3p))_{p\in\mathbb{N}} = ((3p)!)_{p\in\mathbb{N}}$, où Γ désigne la fonction Gamma eulérienne. On a

$$\boldsymbol{l} = \frac{(3p+3)!}{(3p)!} = (3p+3)(3p+2)(3p+1),$$

de plus, $\displaystyle\lim_{p\to\infty} \frac{(3p+3)(3p+2)(3p+1)}{(p+1)^3} = 27$.

On conclut que $\boldsymbol{l} \simeq ((p+1)^3)_{p\in\mathbb{N}}$ et donc que $\mathbb{L} \approx \mathbb{M}$, où $\mathbb{M}$ est la suite de Gevrey d'ordre 3.

Proposition 1.2.6. *Soient $\mathbb{M}$ et $\mathbb{L}$ des suites, $\boldsymbol{m}$ et $\boldsymbol{l}$ les suites de quotients associées à $\mathbb{M}$ et $\mathbb{L}$, respectivement.*

(i) Si $\boldsymbol{m} \preceq \boldsymbol{l}$, alors $\mathbb{M} \lesssim \mathbb{L}$.
(ii) Si $\boldsymbol{m} \simeq \boldsymbol{l}$ alors $\mathbb{M} \approx \mathbb{L}$.

Démonstration. (i) Par hypothèse, il existe $c > 0$ tel que $m_p \leqslant cl_p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. En utilisant la remarque 1.1.7, on a que $M_p = m_0 m_1 \cdots m_{p-1}$ et $L_p = l_0 l_1 \cdots l_{p-1}$, on en tire donc que

$$M_p = m_0 m_1 \cdots m_{p-2} m_{p-1} \leqslant cl_0 cl_1 \cdots cl_{p-2} cl_{p-1} = c^p L_p \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

D'où la conclusion.
(ii) La conclusion découle directement du point (i).

□

La dernière proposition montre que la notion de comparabilité pour les suites de quotients est plus forte que la première. Sous des hypothèses appropriées, l'implication inverse peut être obtenue.

Proposition 1.2.7. *Soient $\mathbb{M}$ et $\mathbb{L}$ des suites (lc), $\boldsymbol{m}$ et $\boldsymbol{l}$ les suites de quotients correspondantes. Nous supposons que $\mathbb{M}$ a une croissance modérée. Si $\mathbb{M} \lesssim \mathbb{L}$, alors $\boldsymbol{m} \preceq \boldsymbol{l}$.*

Démonstration. Si on a $\mathbb{M} \lesssim \mathbb{L}$, alors il existe $C > 0$ tel que $M_p \leqslant C^p L_p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. De plus, par la proposition 1.1.8$(ii.a)$, on a $(L_p)^{1/p} \leqslant l_p$ et par le corollaire 1.1.13, on a $m_p \leqslant A^2 (M_p)^{1/p}$ pour un certain $A > 0$ et pour tout $p \in \mathbb{N}_0$. Il résulte donc que

$$m_p \leqslant A^2 (M_p)^{1/p} \leqslant A^2 C (L_p)^{1/p} \leqslant A^2 C l_p, \quad \forall p \in \mathbb{N}_0.$$

D'où la conclusion. □

Maintenant, étudions la stabilité par rapport aux relations d'équivalences $\simeq$ et $\approx$ de (cm) et (fnq).

Proposition 1.2.8. *Soient $\mathbb{M}$ et $\mathbb{L}$ deux suites. Si $\mathbb{M} \approx \mathbb{L}$ et $\mathbb{M}$ a une croissance modérée, alors $\mathbb{L}$ a aussi une croissance modérée.*

Démonstration. Par hypothèse, il existe $C > 1$ tel que $C^{-p} L_p \leqslant M_p \leqslant C^p L_p$ pour chaque $p \in \mathbb{N}$. En utilisant la croissance modérée de $\mathbb{M}$, on en tire que

$$\begin{aligned} L_{p+q} &\leqslant C^{q+p} M_{q+p} \quad \text{car } \mathbb{L} \lesssim \mathbb{M} \\ &\leqslant (AC)^{q+p} M_p M_q \quad \text{car } \mathbb{M} \text{ a (cm)} \\ &\leqslant (AC)^{q+p} C^p C^q L_q L_p \quad \text{car } \mathbb{M} \lesssim \mathbb{L} \\ &= (AC^2)^{p+q} L_q L_p, \quad \text{pour chaque } p, q \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

D'où la conclusion. □

Proposition 1.2.9. *Soient $\mathbb{M}$ et $\mathbb{L}$ deux suites. Si $\boldsymbol{m} \simeq \boldsymbol{l}$ et $\mathbb{M}$ est (fnq), alors $\mathbb{L}$ est aussi (fnq).*

Démonstration. Par hypothèse, il existe $c > 1$ tel que $c^{-1}l_p \leqslant m_p \leqslant cl_p$ pour chaque $p \in \mathbb{N}$. En utilisant la non-quasianalyticité forte de $\mathbb{M}$, on en tire que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{\infty} \frac{L_k}{(k+1)L_{k+1}} &= \sum_{k=p}^{\infty} \frac{1}{(k+1)l_k} \quad \text{par definition de } \boldsymbol{l} \\
&\leqslant c\sum_{k=p}^{\infty} \frac{1}{(k+1)m_k} \quad \text{car } \boldsymbol{m} \preceq \boldsymbol{l} \\
&\leqslant c\sum_{k=p}^{\infty} \frac{M_k}{(k+1)M_{k+1}} \quad \text{par definition de } \boldsymbol{m} \\
&\leqslant cB\frac{M_p}{M_{p+1}} \quad \text{car } \mathbb{M} \text{ a (fnq)} \\
&\leqslant cB\frac{1}{m_p} \quad \text{par definition de } \boldsymbol{m} \\
&\leqslant c^2B\frac{1}{l_p} \quad \text{car } \boldsymbol{l} \preceq \boldsymbol{m} \\
&\leqslant c^2B\frac{L_p}{L_{p+1}}, \quad \text{pour chaque } p \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

D'où la conclusion. □

Corollaire 1.2.10. *Soient $\mathbb{M}$ et $\mathbb{L}$ des suites, $\boldsymbol{m}$ et $\boldsymbol{l}$ les suites de quotients associés à $\mathbb{M}$ et $\mathbb{L}$, respectivement. Nous supposons que $\mathbb{M}$ et $\mathbb{L}$ sont (lc) et que l'un d'eux est à (cm). Si $\mathbb{M} \approx \mathbb{L}$, alors $\boldsymbol{m} \simeq \boldsymbol{l}$. En particulier, si $\mathbb{M}$ est fortement régulier et si $\mathbb{L}$ est (lc), alors $\boldsymbol{m} \preceq \boldsymbol{l}$ si et seulement si $\mathbb{M} \lessapprox \mathbb{L}$, et $\boldsymbol{m} \simeq \boldsymbol{l}$ si et seulement si $\mathbb{M} \approx \mathbb{L}$. Par conséquent, si $\mathbb{M} \approx \mathbb{L}$, alors $\mathbb{L}$ est également fortement régulier.*

Démonstration. La démonstration découle immédiatement des propositions 1.2.7, 1.2.8 et 1.2.9. □

Remarque 1.2.11. La log-convexité n'est ni stable par $\approx$, ni stable par $\simeq$.

1.3 Fonctions associées

Définition 1.3.1. Une fonction $\omega : [0, \infty[\to [0, \infty[$ est appelée une *fonction de poids* si elle est continue, croissante, $\omega(0) = 0$, et $\lim_{t\to\infty} \omega(t) = \infty$. Si en plus $\omega(t) = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$ on dit que ω est une *fonction de poids normalisée.* De plus, elle vérifie les conditions suivantes :

- (ω_1) $\omega(2t) = O(\omega(t))$ si $t \to \infty$, *ie* $\limsup_{t\to\infty} \frac{\omega(2t)}{\omega(t)} < +\infty$, ou encore il existe des constantes $C, N > 0$ telles que $\omega(2t) \leqslant C\omega(t)$ pour tout $t \geqslant N$.
- (ω_2) $\omega(t) = O(t)$ si $t \to \infty$, *ie* $\limsup_{t\to\infty} \frac{\omega(t)}{t} < +\infty$, ou encore il existe des constantes $C, N > 0$ telles que $\omega(t) \leqslant Ct$ pour tout $t \geqslant N$.

(ω_3) $\log(t) = o(\omega(t))$ si $t \to \infty$, *ie* $\lim_{t\to\infty} \frac{\log(t)}{\omega(t)} = 0$, ou encore pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $N > 0$ telle que $\log(t) \leqslant \varepsilon\omega(t)$ pour tout $t \geqslant N$

(ω_4) $\varphi_\omega : t \mapsto \omega(e^t)$ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$.

Exemples 1.3.2. (i) Soit la fonction ω définit sur $[0, \infty[$ par

$$\omega(t) = \max\{0, \log(t)^s\}, \quad \text{où } s > 1.$$

On a que la fonction ω est une fonction de poids normalisé qui vérifie les propriétés ci-dessus.
En effet, il est clair que la fonction ω est continue, croissante, $\omega(t) = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$, et $\lim_{t\to\infty} \omega(t) = \infty$. De plus, elle vérifie les propriétés suivantes :

(ω_1) On a

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \frac{\omega(2t)}{\omega(t)} &= \lim_{t\to\infty} \frac{\log(2t)^s}{\log(t)^s} \\ &= \lim_{t\to\infty} \left(\frac{\log(2) + \log(t)}{\log(t)}\right)^s \\ &= \lim_{t\to\infty} \left(1 + \frac{\log(2)}{\log(t)}\right)^s = 1 \quad \forall s > 1.\end{aligned}$$

D'où $\omega(2t) = O(\omega(t))$.

(ω_2) On a

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \frac{t}{\omega(t)} &= \lim_{t\to\infty} \frac{\log(t)^s}{t} \\ &= s \lim_{t\to\infty} \frac{\log(t)^{s-1}}{t} \quad \text{par le théorème de l'Hospital} \\ &= s(s-1) \lim_{t\to\infty} \frac{\log(t)^{s-2}}{t} \quad \text{par le théorème de l'Hospital} \\ &= 0 \quad \text{si } s - 2 < 0.\end{aligned}$$

De plus si $s - 2 > 0$ en itérant la procédure, il existe $n_s \in \mathbb{N}_0$ tel que $s - n_s < 0$. On en tire donc que,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\log(t)^s}{t} = s(s-1)\cdots(s - n_s + 1) \lim_{t\to\infty} \frac{\log(t)^{s-n_s}}{t} = 0$$

D'où $\omega(2t) = O(t)$.

(ω_3) On a

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\log(t)}{\omega(t)} = \lim_{t\to\infty} \log(t)^{1-s} = 0 \quad \forall s > 1.$$

D'où $\log(t) = o(\omega(t))$.

(ω_4) Il est assez facile de voir que $\varphi_\omega : t \mapsto \omega(e^t) = t^s$ pour tout $s > 1$ et $t > 1$ est une fonction convexe.

(ii) Par un raisonnement analogue on montre aisément que la fonction ω définie sur $[0, \infty[$ par $\omega(t) = t^{\frac{1}{s}}$ pour $s > 0$ est une fonction de poids.

Nous allons à présent montrer que à toute suite $\mathbb{M}$, on peut associer une fonction de poids. Pour toute suite $\mathbb{M}$, considérons l'application $\omega_{\mathbb{M}} : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ est définie par

$$\omega_{\mathbb{M}}(t) := \sup_{p\in\mathbb{N}} \log\big(\frac{t^p}{M_p}\big), \quad t > 0; \qquad \omega_{\mathbb{M}}(0) = 0.$$

Proposition 1.3.3. *Si* $\mathbb{M}$ *est une suite poids, alors* $\omega_{\mathbb{M}}$ *est une fonction continue, croissante dans* $[0, \infty[$ *et* $\lim_{t\to\infty} \omega_{\mathbb{M}}(t) = \infty$.

Démonstration. En effet, en utilisant le théorème B.0.1, pour $b_p = p, x = \log(t), a_p = \log(M_p) - \log(M_{p-1})$ et
$N_p = \sum_{i=1}^{p}(b_i - b_{i-1})a_i = \log(M_p) - \log(M_0) = \log(M_p)$ car $M_0 = 1$, on a

$$\omega_{\mathbb{M}}(t) := \sup_{p\in\mathbb{N}} \log\big(\frac{t^p}{M_p}\big) = \sup_{p\in\mathbb{N}}(p\log(t) - \log(M_p)) = p\log(t) - \log(M_p);$$

si $\log(t) \in [\log(m_{p-1}), \log(m_p)], p \geqslant 1$. De plus, si $t \leqslant m_0$, on a $\omega_{\mathbb{M}}(t) = 0$. Il en résulte donc que

$$\omega_{\mathbb{M}}(t) = \begin{cases} p\log t - \log(M_p) & \text{si } t \in [m_{p-1}, m_p[, \ p = 1, 2, \dots, \\ \\ 0 & \text{si } t \in [0, m_0[. \end{cases}$$

D'où la conclusion.

□

Remarque 1.3.4. Puisque l'application $t \to pt - \log(M_p)$ est convexe sur $\mathbb{R}$, on a tire que la fonction $t \to \omega_{\mathbb{M}}(\exp(t))$ est convexe sur $\mathbb{R}$. De plus, on a

$$\omega_{\mathbb{M}}(m_p) = \log(\frac{m_p^p}{M^p}) \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Alternativement,on considère la fonction $h_{\mathbb{M}} : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ définit par

$$\begin{aligned}
h_{\mathbb{M}}(t) :&= \inf_{p\in\mathbb{N}} M_p t^p \\
&= \inf_{p\in\mathbb{N}} \exp(\log(M_p t^p)) \\
&= \exp\left(\inf_{p\in\mathbb{N}} \log(M_p t^p)\right) \\
&= \exp\left(-\sup_{p\in\mathbb{N}} (-\log(M_p t^p))\right) \\
&= \exp\left(-\sup_{p\in\mathbb{N}} \log(\frac{1}{M_p t^p})\right) \\
&= \exp\big(-\omega_{\mathbb{M}}(1/t)\big), \quad t > 0; \qquad h_{\mathbb{M}}(0) = 0.
\end{aligned}$$

On en tire que cette fonction est continue croissante de $[0, \infty[$ à valeur dans $[0, 1]$ car

$$\lim_{t\to\infty} h_{\mathbb{M}}(t) = \lim_{t\to\infty} \exp\big(-\omega_{\mathbb{M}}(1/t)\big) = 1$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}
h_{\mathbb{M}}(t) = \exp\big(-\omega_{\mathbb{M}}(1/t)\big) &= \begin{cases} t^p M_p & \text{si} \quad \frac{1}{t} \in [m_{p-1}, m_p[, \ p = 1, 2, \dots, \\ 1 & \text{si} \quad \frac{1}{t} \in [0, m_0[. \end{cases} \\
&= \begin{cases} t^p M_p & \text{si} \quad t \in \big[\frac{1}{m_p}, \frac{1}{m_{p-1}}\big[, \ p = 1, 2, \dots, \\ 1 & \text{si} \quad t \geqslant 1/m_0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Proposition 1.3.5. *Soient deux suites $\mathbb{M}$ et $\mathbb{L}$. Si $\mathbb{M} \approx \mathbb{L}$, alors il existe $A, B > 0$ telles que*

$$\omega_{\mathbb{M}}(At) \leqslant \omega_{\mathbb{L}}(t) \leqslant \omega_{\mathbb{M}}(Bt), \qquad \forall t \geqslant 0.$$

ou, de manière équivalente, $H, L > 0$ tels que

$$h_{\mathbb{M}}(Lt) \leqslant h_{\mathbb{L}}(t) \leqslant h_{\mathbb{M}}(Ht), \qquad \forall t \geqslant 0.$$

Démonstration. Puisque $\mathbb{M} \approx \mathbb{L}$, il existe des constantes positives A, B telles que

$$A^{-p} M_p \leqslant L_p \leqslant B^{-p} M_p, \quad ie \quad \frac{B^p}{M_p} \leqslant \frac{1}{L_p} \leqslant \frac{A^p}{M_p} \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Ainsi, en multipliant l'inégalité précédente par t^p et en utilisant la définition de la fonction $\omega_{\mathbb{M}}$ on en tire que

$$\omega_{\mathbb{M}}(Bt) \leqslant \omega_{\mathbb{L}}(t) \leqslant \omega_{\mathbb{M}}(At), \qquad \forall t \geqslant 0.$$

$\square$

Exemple 1.3.6. Soit $\mathbb{M}$ la suite définie par $M_p = (p!)^\alpha$. On a

$$\omega_{\mathbb{M}}(t) = \begin{cases} p \log t - \log(M_p) & \text{si } t \in [p^\alpha, (p+1)^\alpha[, \ p = 1, 2, \ldots, \\ \\ 0 & \text{si } t \in [0, 1[. \end{cases}$$

De plus, puisque $\lim_{t \to +\infty} \frac{\omega_{\mathbb{M}}(t)}{t^{\frac{1}{\alpha}}} = 0$, il existe des constantes positives A, B telles que

$$At^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant \omega_{\mathbb{M}}(t) \leqslant Bt^{\frac{1}{\alpha}},$$

lorsque $t \to +\infty$.

Les suites positives ne sont pas toujours log-convexes, mais il est possible de les régulariser au moyen du minorant log-convexe développé dans [15].

Définition 1.3.7. Soit $\mathbb{M}$ une suite positive. $\mathbb{M}^{lc}$ est le minorant log-convexe de $\mathbb{M}$ si

(i) $\mathbb{M}^{lc}$ est une suite log-convexe ;

(ii) $M_p^{lc} \leqslant M_p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$;

(iii) Si $\mathbb{L}$ est une suite log-convexe et $L_p \leqslant M_p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, alors $L_p \leqslant M_p^{lc}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

La fonction associée à une suite positive est liée à son minorant log-convexe par la proposition suivante.

Proposition 1.3.8 ([15]). *Soit $\mathbb{M}$ une suite avec $\liminf M_p^{1/p} > 0$. Alors, nous avons que $M_p^{(lc)} = \sup_{t>0} t^p / e^{\omega_{\mathbb{M}}(t)}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Par conséquent, $\mathbb{M}$ est (lc) si et seulement si*

$$M_p = \sup_{t>0} \frac{t^p}{e^{\omega_{\mathbb{M}}(t)}} = \sup_{t>0} t^p h_{\mathbb{M}}(1/t) \ , \forall p \in \mathbb{N}.$$

Le lemme suivant nous donne une caractérisation de la croissance modérée(cm) en terme de la fonction associé à la suite.

Lemme 1.3.9. *Soit $\mathbb{M} = (M_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de poids. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathbb{M}$ a une croissance modérée,

(ii) Pour tout nombre réel $s \geqslant 1$, il existe $\rho(s) \geqslant 1$ (ne dépendant que de s et de $\mathbb{M}$) tel que

$$h_{\mathbb{M}}(t) \leqslant (h_{\mathbb{M}}(\rho(s)t))^s \quad \forall t \geqslant 0,$$

ou, de manière équivalente, que

$$s\omega_{\mathbb{M}}(t) \leqslant \omega_{\mathbb{M}}(\rho(s)t) \quad \forall t \geqslant 0.$$

(iii) Il existe $H \geqslant 1$ et $t_0 > 0$ (ne dépendant que de $\mathbb{M}$) tels que

$$h_{\mathbb{M}}(t) \leqslant (h_{\mathbb{M}}(Ht))^2 \quad \forall t \leqslant 1/t_0,.$$

ou, de manière équivalente, que

$$2\omega_{\mathbb{M}}(t) \leqslant \omega_{\mathbb{M}}(Ht) \quad \forall t \geqslant t_0.$$

Démonstration. $(i) \Rightarrow (ii)$ Soit $s \geqslant 1$, prenons $k \in \mathbb{N}$ tel que $k > s$. Par la condition (cm), il existe $A > 0$ (dépendant de k et de $\mathbb{M}$), tel que $M_{kp} \leqslant A^{kp}M_p^k$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ (par récurrence sur k). On en déduit que

$$h_{\mathbb{M}}(t) = \inf_{p\in\mathbb{N}} t^p M_p \leqslant \inf_{p\in\mathbb{N}_0} t^{kp} M_{kp} \leqslant \inf_{p\in\mathbb{N}} (tA)^{kp} M_p^k = (h_{\mathbb{M}}(At))^k,$$

pour chaque $t \geqslant 0$. De plus, Puisque $h_{\mathbb{M}}(t) \in [0, 1]$, on a

$$(h_{\mathbb{M}}(At))^k \leqslant (h_{\mathbb{M}}(At))^s \quad \forall t \geqslant 0.$$

D'où la conclusion pour $A = \rho(s)$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Pour $s = 2$ et $\rho(s) = H \geqslant 1$ dans (ii), et par définition, il existe $t_0 > 0$ tels que

$$h_{\mathbb{M}}(t) \leqslant (h_{\mathbb{M}}(Ht))^2 \quad \text{pour } t \leqslant 1/t_0,.$$

$(iii) \Rightarrow (i)$ Puisque $\mathbb{M}$ est (lc), en appliquant la proposition 1.3.8, on a que $M_p = \sup_{t>0}(t^p h_{\mathbb{M}}(1/t))$ pour tout $p \in \mathbb{N}_0$. Par (iii), on obtient que

$$\begin{aligned} M_{2p} &= \sup_{t>0} t^{2p} h_{\mathbb{M}}(1/t) \\ &= \max(\sup_{0<t<t_0}(t^{2p}h_{\mathbb{M}}(1/t)), \sup_{t\geqslant t_0}(t^{2p}h_{\mathbb{M}}(1/t))) \\ &\leqslant \max(t_0^{2p}, \sup_{t\geqslant t_0}(t^{2p}h_{\mathbb{M}}(H/t)^2)) \\ &\leqslant \max(t_0^{2p},\ H^{2p}M_p^2) \end{aligned}$$

pour tout $p \in \mathbb{N}$. Puisque $M_p \geqslant m_0^p$. On en tire que $M_{2p} \leqslant H^{2p}M_p^2$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. D'où la conclusion par proposition 1.1.12.

□

1.4 Indices de croissances $\omega(\mathbb{M})$ et $\gamma(\mathbb{M})$

Définissons à présent les indices de croissances $\omega(\mathbb{M})$ et $\gamma(\mathbb{M})$ qui interviendrons dans l'étude des classes de fonctions ultraholomorphes d'une part, et dans l'étude de l'injectivité et la surjectivité de l'application asymptotique de Borel d'autre part.

Définition 1.4.1. Soit $\mathbb{M}$ une suite et $\gamma \in \mathbb{R}$. On dit que $\mathbb{M}$ satisfait la propriété (P_γ) s'il existe une suite de nombres réels $\boldsymbol{l} = (l_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $a \geqslant 1$ tels que :
(i) $a^{-1}m_p \leqslant l_p \leqslant am_p$, $i.e$ $\boldsymbol{m} \simeq \boldsymbol{l}$ $\forall p \in \mathbb{N}$,
(ii) $((p+1)^{-\gamma}l_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Remarque 1.4.2. Si (P_γ) est satisfait, alors $(P_{\gamma'})$ est satisfait pour $\gamma' \leqslant \gamma$. En effet,

$$(p+1)^{-\gamma'}l_p = (p+1)^{\gamma-\gamma'}(p+1)^{-\gamma}l_p \leqslant (p+2)^{\gamma-\gamma'}(p+2)^{-\gamma}l_{p+1} = (p+2)^{-\gamma'}l_{p+1}$$

Ainsi,il est naturel de considérer son indice de croissance $\gamma(\mathbb{M})$ défini comme suit

$$\gamma(\mathbb{M}) := \sup\{\gamma \in \mathbb{R} : (P_\gamma) \text{ est satisfait}\}$$ [1].

Remarque 1.4.3. On a que si $\mathbb{M}$ est (lc) alors $\gamma(\mathbb{M}) \in [0, +\infty]$.
En effet, puisque $\mathbb{M}$ est (lc), on a que $\boldsymbol{m}$ est croissante, d'où (P_0) est satisfait.

Cet indice de croissance peut être exprimé de manière équivalente par différentes conditions.

Définition 1.4.4. Une suite $(l_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est *presque croissante* s'il existe $a > 0$ tel que pour chaque $p \in \mathbb{N}_0$ on a que $l_p \leqslant al_q$ pour chaque $q \geqslant p$.

Remarque 1.4.5. Pour tout $\gamma > 0$, on observe que la suite $((p+1)^{-\gamma}m_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ est presque croissante si, et seulement si, $(p^{-\gamma}m_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ est presque croissante. En effet, puisque $p^\gamma \leqslant (p+1)^\gamma \leqslant 2^\gamma p^\gamma$ pour tout $p \in \mathbb{N}_0$, si la suite $((p+1)^{-\gamma}m_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ est presque croissante alors il existe $a > 0$ tel que on a

$$p^{-\gamma}m_p \leqslant 2^\gamma(p+1)^{-\gamma}m_p \leqslant a2^\gamma(q+1)^{-\gamma}m_q \leqslant a2^\gamma q^{-\gamma}m_q \quad \forall q \geqslant p.$$

De même, si $(p^{-\gamma}m_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ est presque croissante alors il existe $a > 0$ tel que on a

$$(p+1)^{-\gamma}m_p \leqslant p^{-\gamma}m_p \leqslant aq^{-\gamma}m_q \leqslant a2^\gamma(q+1)^{-\gamma}m_q \quad \forall q \geqslant p.$$

1. Par convention $\sup\{\varnothing\} = -\infty$ et par définition $\sup\{\mathbb{R}\} = +\infty$.

Proposition 1.4.6. *Soit $\mathbb{M}$ une suite telle que la suite $\widehat{\mathbb{M}} = (p!M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est (lc). Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathbb{M}$ *satisfait (fnq)* $i.e$ *il existe* $B > 0$ *tel que*

$$\sum_{q=p}^{\infty} \frac{1}{(q+1)m_q} \leqslant \frac{B}{m_p}, \qquad \forall p \in \mathbb{N},$$

(ii) il existe une suite $\mathbb{H}$ *(lc) telle que* $\boldsymbol{h} \simeq \boldsymbol{m}$ *et* $\inf_{p\geqslant 1} \frac{h_{2p}}{h_p} > 1$,

(iii) $\lim_{k\to\infty} \liminf_{p\to\infty} \frac{m_{kp}}{m_p} = \infty$,

(iv) il existe $\varepsilon > 0$ *tel que la suite* $\left((p+1)^{-\varepsilon} m_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ *est presque croissante.*

Démonstration. $(i) \Rightarrow (ii)$ Supposons que $\boldsymbol{m}$ est (fnq), Pour chaque $p \in \mathbb{N}$, on considère la suite

$$t_p := \frac{1}{m_p} + \sum_{l=p}^{\infty} \frac{1}{(l+1)m_l}.$$

Puisque $\widehat{\mathbb{M}}$ est (lc), on a que $\widehat{\boldsymbol{m}} = (\widehat{m}_p)_{p\in\mathbb{N}} = ((p+1)m_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante. D'où on en tire que la suite $(t_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante car

$$\begin{aligned} t_p &= \frac{1}{m_p} + \frac{1}{(p+1)m_p} + \sum_{l=p+1}^{\infty} \frac{1}{(l+1)m_l} \\ &= \frac{p+2}{\widehat{m}_p} + \sum_{l=p+1}^{\infty} \frac{1}{(l+1)m_l} \\ &\geqslant \frac{p+2}{\widehat{m}_{p+1}} + \sum_{l=p+1}^{\infty} \frac{1}{(l+1)m_l} \\ &= t_{p+1} \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant le fait que $\mathbb{M}$ est (fnq), on tire que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$1 \leqslant m_p t_p = 1 + m_p \sum_{l=p}^{\infty} \frac{1}{(p+1)m_l} \leqslant 1 + B,$$

pour une constante $B > 0$.
On a donc $C := 1+B > 1$ est tel que $C^{-1}m_p \leqslant (t_p)^{-1} \leqslant m_p$ pour chaque $p \in \mathbb{N}$. En définissant, $b_p := 1/t_p$ pour chaque $p \in \mathbb{N}$, il résulte donc que $\boldsymbol{b} \simeq \boldsymbol{m}$. Par la proposition 1.2.9, on a que $\mathbb{B}$ satisfait (fnq) et puisque la suite $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante, on a que $\mathbb{B}$ est (lc). Pour chaque $p \in \mathbb{N}$, on considère

$$s_p := \frac{1}{b_p} + \sum_{l=p}^{\infty} \frac{1}{(l+1)b_l}.$$

Par un raisonnement analogue, on montre que $(s_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante. La suite $\mathbb{H} = h_p := 1/s_p$ pour chaque $p \in \mathbb{N}$ est (lc) et on a $\boldsymbol{h} \simeq \boldsymbol{b}$. Et donc par transitivité de la relation $\simeq$, on conclut que $\boldsymbol{h} \simeq \boldsymbol{m}$. De plus, puisque β est croissant, on a que

$$\begin{aligned}
\frac{h_{2p}}{h_p} = \frac{1/s_{2p}}{1/s_p} &= \frac{(1/b_p) + \sum_{l\geqslant p}(1/(l+1)b_l)}{(1/b_{2p}) + \sum_{l\geqslant 2p}(1/(l+1)b_l)} \\
&= \frac{(1/b_p) + \sum_{l\geqslant 2p}(1/(l+1)b_l) + \sum_{l=p}^{2p-1}(1/(l+1)b_l)}{(1/b_{2p}) + \sum_{l\geqslant 2p}(1/(l+1)b_l)} \\
&\geqslant 1 + \frac{\sum_{l=p}^{2p-1}(1/(l+1)b_l)}{(1/b_{2p}) + \sum_{l\geqslant 2p}(1/(l+1)b_l)} \quad \text{car } 1/b_{2p} \leqslant 1/b_p \\
&\geqslant 1 + \frac{p/(2pb_{2p})}{s_{2p}} = 1 + \frac{1}{2b_{2p}s_{2p}} \quad \text{car } 1/(l+1)b_l \geqslant 1/2pb_{2p-1} \geqslant 1/2pb_{2p} \text{ pour } l \in [p; 2p-1],
\end{aligned}$$

pour tout $p \in \mathbb{N}$. Puisque $\mathbb{B}$ satisfait (fnq), comme nous l'avons fait précédemment, il existe $D > 0$ tel que pour chaque $p \in \mathbb{N}$ nous avons $b_p s_p \leqslant D$ et on en tire donc que

$$\frac{h_{2p}}{h_p} \geqslant 1 + \frac{1}{2D}.$$

D'où la conclusion.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Montrons d'abord que

$$\lim_{k\to\infty} \liminf_{p\to\infty} \frac{h_{kp}}{h_p} = \infty.$$

Par (ii), il existe $\gamma > 1$ tel que $h_{2p}/h_p > \gamma$ pour tout $p \in \mathbb{N}_0$. De plus $h_{4p} > \gamma h_{2p} > \gamma^2 h_p$ et nous déduisons ainsi que $h_{2^n p}/h_p > \gamma^n$ pour tout $p, n \in \mathbb{N}_0$. Par conséquent, pour chaque $n \in \mathbb{N}_0$ nous avons que

$$\liminf_{p\to\infty} \frac{h_{2^n p}}{h_p} \geqslant \gamma^n.$$

Étant donné $M > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}_0$ tel que $\gamma^{n_0} > M$. En utilisant le fait que $\mathbb{H}$ est (lc)(et donc $\boldsymbol{h}$ est croissante), pour chaque $k \geqslant 2^{n_0}$ on a que $h_{kp} \geqslant h_{2^{n_0}p}$ pour chaque $p \in \mathbb{N}_0$ et nous déduisons que

$$\liminf_{p\to\infty} \frac{h_{kp}}{h_p} \geqslant \liminf_{p\to\infty} \frac{h_{2^{n_0}p}}{h_p} \geqslant \gamma^{n_0} > M.$$

D'où $\lim\limits_{k\to\infty} \liminf\limits_{p\to\infty} \dfrac{h_{kp}}{h_p} = \infty$.
Par la suite, puisque $\boldsymbol{h} \simeq \boldsymbol{m}$, il existe $c > 1$ tel que $c^{-1}h_p \leqslant m_p \leqslant ch_p$ pour chaque $p \in \mathbb{N}$. Alors, pour chaque $k, p \in \mathbb{N}_0$ on a que

$$\frac{h_{kp}}{c^2 h_p} \leqslant \frac{m_{kp}}{m_p}.$$

D'où en tire donc que
$$\lim_{k\to\infty}\liminf_{p\to\infty}\frac{m_{kp}}{m_p}=\infty.$$
$(iii)\Rightarrow(vi)$ Par (iii), pour tout $N>0$, on a $\liminf_{p\to\infty}\frac{m_{kp}}{m_p}>N$ pour k suffisamment grand. On fixe un tel k. Alors il existe $\varepsilon>0$ tel que $k^\varepsilon<N$. On en tire que
$$\liminf_{p\to\infty} m_{kp}/m_p>N>k^\varepsilon.$$
Alors, il existe $p_0\in\mathbb{N}_0$ tel que $m_{kp}/k^\varepsilon>m_p$ pour chaque $p\geqslant p_0$. Pour chaque $q,l\in\mathbb{N}_0$ avec $q\geqslant l\geqslant p_0$ il existe un plus grand $n\in\mathbb{N}$ tel que $k^nl\leqslant q<k^{n+1}l$, on a donc que
$$\frac{m_p}{l^\varepsilon}=\frac{k^\varepsilon m_p}{k^\varepsilon l^\varepsilon}\leqslant\frac{m_{kl}}{(kl)^\varepsilon}\leqslant\frac{m_{k^2l}}{(k^2l)^\varepsilon}\leqslant\cdots\leqslant\frac{m_{k^nl}}{k^nl}.$$
Puisque $\widehat{\boldsymbol{m}}$ est croissant, pour $q\geqslant l\geqslant p_0$ avec $k^nl\leqslant q<k^{n+1}l$ on en déduit que
$$\begin{aligned}\frac{m_l}{l^\varepsilon}\leqslant\frac{m_{k^n}l}{(k^nl)^\varepsilon}&=\frac{(k^nl+1)m_{k^n}l}{(k^nl+1)(k^nl)^\varepsilon}\\&\leqslant\frac{(q+1)m_q}{(k^nl+1)(k^nl)^\varepsilon}\quad\text{car }\widehat{\boldsymbol{m}}\text{ est croissant}\\&=\frac{m_q}{q^\varepsilon}\frac{(q+1)q^\varepsilon}{(k^nl+1)(k^nl)^\varepsilon}\\&\leqslant\frac{m_q}{q^\varepsilon}k^\varepsilon k\quad\text{car }k^nl\leqslant q<k^{n+1}l.\end{aligned}$$
Posons
$$A:=\max_{1\leqslant l\leqslant q\leqslant p_0}\frac{m_l}{m_q}\frac{q^\varepsilon}{l^\varepsilon}>1,\quad C:=Ak^\varepsilon k.$$
Si $q\geqslant l\geqslant p_0$, on a $\frac{m_l}{m_q}\frac{q^\varepsilon}{l^\varepsilon}\leqslant k^{\varepsilon+1}$, d'où $\frac{m_l}{l^\varepsilon}\leqslant C\frac{m_q}{q^\varepsilon}$.
Si $l\leqslant q\leqslant p_0$, on a $\frac{m_l}{m_q}\frac{q^\varepsilon}{l^\varepsilon}\leqslant A$ d'où $\frac{m_l}{l^\varepsilon}\leqslant C\frac{m_q}{q^\varepsilon}$.
Si $l\leqslant p_0\leqslant q$, alors on a que
$$\frac{m_l}{l^\varepsilon}\leqslant A\frac{m_{p_0}}{p_0^\varepsilon}\leqslant C\frac{m_q}{q^\varepsilon}.$$
Dans tous les cas on conclut que $(m_p/p^\varepsilon)_{p\in\mathbb{N}}$ est presque croissant.
$(iv)\Rightarrow(i)$ Par (vi), il existe $A>0$ tel que
$$(p+1)^{-\varepsilon}m_p\leqslant A(q+1)^{-\varepsilon}m_q,\qquad\forall q\geqslant p.$$
On en tire donc que
$$\frac{1}{m_q}\leqslant\frac{A(p+1)^\varepsilon(q+1)^{-\varepsilon}}{m_p},\qquad\forall q\geqslant p.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\sum_{q=p}^{\infty}\frac{1}{(q+1)m_q} &\leqslant \frac{A(p+1)^{\varepsilon}}{m_p}\sum_{q=p}^{\infty}(q+1)^{-\varepsilon-1}\\ &\leqslant \frac{A(p+1)^{\varepsilon}}{m_p}\int_{p+1}^{\infty}x^{-\varepsilon-1}dx\\ &= \frac{A(p+1)^{\varepsilon}}{m_p}\frac{1}{\varepsilon}(p+1)^{-\varepsilon}\\ &= \frac{A'}{m_p}, \qquad \forall p\in\mathbb{N}\end{aligned}$$

avec $A' = \frac{A}{\varepsilon}$, d'où la conclusion. $\square$

Proposition 1.4.7. *Soit $\mathbb{M}$ une suite de poids et $\gamma > 0$. Alors, $\mathbb{M}$ satisfait la propriété (P_γ) si, et seulement si, la suite $\left((p+1)^{-\gamma}m_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est presque croissante.*

Démonstration. Si $\mathbb{M}$ satisfait à (P_γ) avec $\boldsymbol{l} = (l_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et une constante $a \geqslant 1$, et si l'on prend $q, p \in \mathbb{N}$ avec $q \geqslant p$, on a

$$\begin{aligned}(p+1)^{-\gamma}m_p &\leqslant a(p+1)^{-\gamma}l_p \quad \text{puisque } \boldsymbol{m}\simeq\boldsymbol{l}\\ &\leqslant a(q+1)^{-\gamma}l_q \quad \text{puisque } \left((p+1)^{-\gamma}l_p\right)_{p\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}\\ &\leqslant a^2(q+1)^{-\gamma}m_q \quad \text{puisque } \boldsymbol{m}\simeq\boldsymbol{l},\end{aligned}$$

donc $\left((p+1)^{-\gamma}m_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est presque croissant.

Réciproquement, si $\left((p+1)^{-\gamma}m_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est presque croissant, il existe $a \geqslant 1$ tel que

$$(p+1)^{-\gamma}m_p \leqslant a(q+1)^{-\gamma}m_q, \qquad \forall q \geqslant p.$$

Nous définissons $l_p := (p+1)^{\gamma}\inf_{q\geqslant p}(q+1)^{-\gamma}m_q$.

(i) Pour chaque $p \in \mathbb{N}$, en utilisant l'inégalité précédente, on a

$$a^{-1}m_p \leqslant (p+1)^{\gamma}\inf_{q\geqslant p}(q+1)^{-\gamma}m_q = l_p \leqslant (p+1)^{\gamma}(p+1)^{-\gamma}m_p \leqslant am_p.$$

(ii) Pour chaque $q, p \in \mathbb{N}$ avec $q \geqslant p$,

$$(p+1)^{-\gamma}l_p = \inf_{l\geqslant p}(l+1)^{-\gamma}m_l \leqslant (q+1)^{-\gamma}(q+1)^{\gamma}\inf_{l\geqslant q}(l+1)^{-\gamma}m_l = (q+1)^{-\gamma}l_q.$$

Par conséquent, $\mathbb{M}$ satisfait à (P_γ). $\square$

Remarque 1.4.8. Le résultat ci-dessus montre que l'indice de croissance peut également être défini comme suit

$$\gamma(\mathbb{M}) = \sup\{\gamma > 0 : (m_p/(p+1)^\gamma)_{p\in\mathbb{N}} \text{ est presque croissante}\}.$$

Définition 1.4.9. Pour tout $\beta > 0$ on dit que $\boldsymbol{m}$ satisfait (γ_β) s'il existe $A > 0$ tel que

$$(\gamma_\beta) \qquad \sum_{q=p}^{\infty} \frac{1}{(m_q)^{1/\beta}} \leqslant \frac{A(p+1)}{(m_p)^{1/\beta}}, \qquad p \in \mathbb{N}.$$

Définition 1.4.10. Soit $\mathbb{M}$ une suite de nombres réels positif. On définit son indice $\omega(\mathbb{M})$ par

$$\omega(\mathbb{M}) := \liminf_{p\to\infty} \frac{\log m_p}{\log p}.$$

Remarques 1.4.11. (i) Si $\mathbb{M}$ est (lc) alors $\omega(\mathbb{M}) \geqslant 0$.
En effet puisque $\mathbb{M}$ est (lc) alors on a que $\boldsymbol{m}$ est croissant. ainsi

$$\frac{\log m_p}{\log p} \geqslant \frac{\log m_1}{\log p} \quad p \in \mathbb{N}.$$

D'où $\omega(\mathbb{M}) \geqslant 0$.

(ii) Par définition, $\gamma(\mathbb{M})$ et $\omega(\mathbb{M})$ sont stables pour la relation $\simeq$.
En effet, si $\boldsymbol{m} \simeq \boldsymbol{l}$, alors il existe $a > 0$ tel que $a^{-1}m_p \leqslant l_p \leqslant am_p$. Ainsi,

$$\frac{\log m_p}{\log p} \leqslant \frac{\log a}{\log p} + \frac{\log \ell_p}{\log p}$$

D'où par passage à la limite, on tire que $\omega(\mathbb{M}) \leqslant \omega(\mathbb{L})$.
Par un raisonnement analogue, on a $\omega(\mathbb{L}) \leqslant \omega(\mathbb{M})$.
De plus, si $((p+1)^{-\gamma}m_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est presque croissant, alors

$$\begin{aligned}(p+1)^{-\gamma}l_p &\leqslant a(p+1)^{-\gamma}m_p \quad \text{puisque } \boldsymbol{m} \simeq \boldsymbol{l} \\ &\leqslant ab(q+1)^{-\gamma}m_q \quad \text{pour un } b > 0 \text{ et } \forall q \geqslant p \\ &\leqslant ba^2(q+1)^{-\gamma}m_l \quad \text{pour un } b > 0 \text{ et } \forall q \geqslant p,\end{aligned}$$

donc $((p+1)^{-\gamma}l_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est presque croissant.
Par un raisonnement analogue on a également la réciproque. D'où $\gamma(\mathbb{M}) = \gamma(\mathbb{L})$.

(iii) Par le corolaire 1.2.10, pour les suites de poids satisfaisant (cm), en particulier pour les suites fortement régulières, ces valeurs sont également stables pour $\approx$.

Proposition 1.4.12. *Pour toute suite* $\mathbb{M}$*, on a* $\gamma(\mathbb{M}) \leqslant \omega(\mathbb{M})$*.*

Démonstration. Si $\gamma < \gamma(\mathbb{M})$, alors $\mathbb{M}$ satisfait (P_γ). Par définition de (P_γ), pour chaque $p \in \mathbb{N}$, on a que

$$m_0 \leqslant a\ell_0 \leqslant a\frac{\ell_p}{(p+1)^\gamma} \leqslant a^2\frac{m_p}{(p+1)^\gamma}.$$

Par conséquent, $a^{-2}m_0(p+1)^\gamma \leqslant m_p$ pour chaque $p \in \mathbb{N}$ et nous déduisons que

$$\begin{aligned}\omega(\mathbb{M}) = \liminf_{p\to\infty}\frac{\log m_p}{\log p} &\geqslant \liminf_{p\to\infty}\frac{\log(a^{-2}m_0(p+1)^\gamma)}{\log p}\\ &\geqslant \liminf_{p\to\infty}\frac{\gamma\log(p+1)}{\log p} + \liminf_{p\to\infty}\frac{m_0a^{-2}}{\log p} = \gamma.\end{aligned}$$

D'où $\omega(\mathbb{M})$ est un majorant de $\{\gamma \in \mathbb{R} : (P_\gamma) \text{ est satisfait}\}$, ainsi la conclusion suit facilement. □

Exemples 1.4.13. (i) Considérons la suite de Gevrey définit par $M_p = (p!)^\alpha$ avec $\alpha > 0$. On a

$$\omega(\mathbb{M}) = \liminf_{p\to\infty}\frac{\log m_p}{\log p} = \liminf_{p\to\infty}\frac{\alpha\log(p+1)}{\log p} = \alpha.$$

De plus, puisque $m_p = (p+1)^\alpha$, on a que $\mathbb{M}$ satisfait (P_α). D'où $\gamma(\mathbb{M}) = \alpha$ par la proposition 1.4.12.

(ii) Considérons $\mathbb{M}$ définie par $M_p = (q)^{p^2}$ avec $q > 1$. On a

$$\omega(\mathbb{M}) = \liminf_{p\to\infty}\frac{\log m_p}{\log p} = \liminf_{p\to\ \infty}\frac{(2p+1)\log q}{\log p} = +\infty.$$

De plus, la suite $\mathbb{M}$ est (lc). On en tire que $\gamma(\mathbb{M}) \in [0, +\infty]$. De plus,

$$\lim_{k\to+\infty}\liminf_{p\to\infty} m_{kp}/m_p = \lim_{k\to+\infty}\liminf_{p\to\infty} q^{2p(k-1)} = +\infty,$$

par la par la proposition 1.4.6, il existe $\gamma > 0$ tel que la suite $(q^{2p+1}(p+1)^{-\gamma})_{n\in\mathbb{N}}$ est presque croissante. Or pour $\gamma > 0$ la a suite $(q^{2p+1}(p+1)^{-\gamma})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour p suffisamment grand. D'où $\gamma(\mathbb{M}) = +\infty$

Proposition 1.4.14. *Soit* $\mathbb{M} = (M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres réels positif et* $s > 0$*. On a*

(i)

$$\gamma(p!^s\mathbb{M}) = \gamma(\mathbb{M}) + s, \qquad \gamma(\mathbb{M}^s) = s\gamma(\mathbb{M}),$$

(ii)

$$\omega(p!^s\mathbb{M}) = \omega(\mathbb{M}) + s, \qquad \omega(\mathbb{M}^s) = s\omega(\mathbb{M}),$$

où $p!^s\mathbb{M} = (p!^sM_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *et* $\mathbb{M}^s = (M_p^s)_{p\in\mathbb{N}}$.

Démonstration. (i) Par définition, on a que

$$\gamma(\mathbb{M}) = \sup\{\gamma > 0 : (m_p/(p+1)^{\gamma})_{p\in\mathbb{N}} \text{ est presque croissante, }\}$$

$$\gamma(\mathbb{M}^s) = \sup\{\gamma' > 0 : (m_p^s/(p+1)^{\gamma'})_{p\in\mathbb{N}} \text{ est presque croissante}\}$$

et

$$\gamma(p!^s\mathbb{M}) = \sup\{\gamma'' > 0 : ((p+1)^s m_p/(p+1)^{\gamma''})_{p\in\mathbb{N}} \text{ est presque croissante}\}.$$

De plus pour tout $s > 0$, il est aisé de voir que la suite $(m_p/(p+1)^{\gamma})_{p\in\mathbb{N}}$ est presque croissante si, et seulement si, la suite $(m_p^s/(p+1)^{s\gamma})_{p\in\mathbb{N}}$ est presque croissante. D'où on tire que $\gamma(\mathbb{M}^s) = s\gamma(\mathbb{M})$.
De même, pour tout $s > 0$, il est aisé de voir que la suite $(m_p/(p+1)^{\gamma})_{p\in\mathbb{N}}$ est presque croissante si, et seulement si, la suite $((p+1)^s m_p/(p+1)^{\gamma+s})_{p\in\mathbb{N}}$ est presque croissante. Donc on conclut que $\gamma(p!^s\mathbb{M}) = \gamma(\mathbb{M}) + s$

(ii) En utilisant la définition de l'indice ω, on a

$$\omega(p!^s\mathbb{M}) := \liminf_{p\to\infty} \frac{\log(p+1)^s m_p}{\log p} = \liminf_{p\to\infty} \frac{s\log(p+1) + \log m_p}{\log p} = \omega(\mathbb{M}) + s.$$

De même,

$$\omega(\mathbb{M}^s) := \liminf_{p\to\infty} \frac{\log m_p^s}{\log p} = \liminf_{p\to\infty} \frac{s\log m_p}{\log p} = s\omega(\mathbb{M}).$$

□

Corollaire 1.4.15. *Soit $\mathbb{M}$ une suite telle que la suite $\widehat{\mathbb{M}} = (p!M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est (lc) et $\beta > 0$, nous avons que*

(i) $\gamma(\mathbb{M}) > 0$ *si et seulement si $\mathbb{M}$ est (fnq)*

(ii) $\gamma(\widehat{\mathbb{M}}) > 1$ *si et seulement si $\widehat{\boldsymbol{m}}$ satisfait (γ_1).*

(iii) $\gamma(\widehat{\mathbb{M}}) > \beta$ *si et seulement si $\widehat{\boldsymbol{m}}$ satisfait (γ_β).*

Démonstration. (i) On a $\gamma(\mathbb{M}) > 0$ si et seulement si il existe $\varepsilon > 0$ tel que la suite $((p+1)^{-\varepsilon} m_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est presque croissante (d'après la proposition 1.4.6), ou de manière équivalente $\mathbb{M}$ est (fnq).

(ii) $\gamma(\widehat{\mathbb{M}}) > 1$ si et seulement si $\gamma(\mathbb{M}) + 1 > 1$ (d'après la proposition 1.4.14)si et seulement si $\mathbb{M}$ est (fnq)(d'après (i))si et seulement si $\widehat{\boldsymbol{m}}$ satisfait (γ_1)(par définition de (fnq) et de $\widehat{\boldsymbol{m}}$).

(iii) $\gamma(\widehat{\mathbb{M}}) > \beta$ si et seulement si $\gamma(\widehat{\mathbb{M}})^{1/\beta} > 1$(d'après la proposition 1.4.14)si et seulement si $\widehat{\boldsymbol{m}}^{1/\beta}$ satisfait (γ_1)(par (ii)) si et seulement si $\widehat{\boldsymbol{m}}$ satisfait (γ_β).

□

Chapitre 2

Injectivité de l'application asymptotique de Borel

Dans ce chapitre, nous allons définir des classes de fonctions holomorphes dans des secteurs non bornés de la surface de Riemann du logarithme à partir des suites de nombres réels positifs considérées dans le chapitre précédent. Par la suite, nous définirons l'application asymptotique de Borel qui à une fonction f associe son Développement asymptotique. Enfin, nous examinerons l'injectivité de l'application de Borel dans trois cas : dans les classes des fonctions ultraholomorphes de Roumieu-Carleman et dans les classes de fonctions admettant une Développement asymptotique uniforme ou non à l'origine. De plus, on montrera que la solution dépend de l'ouverture du secteur et que l'injectivité est possible si le secteur est assez large. Enfin nous montrerons que l'application de Borel n'est jamais bijective. Nous avons utilisé comme référence principale pour ce chapitre [13], [10] et [1].

2.1 Développement asymptotique et classes des fonctions ultra-holomorphes

Dans cette section, nous introduisons trois classes différentes de fonctions ultraholomorphes. Nous étudierons leurs relations et leurs propriétés élémentaires. Ensuite, nous définirons l'application asymptotique de Borel de ces classes dans la classe des séries de puissance formelles.

2.1.1 Définitions et propriétés

Notons $\mathcal{R}$ la surface de Riemann du logarithme, et $\mathbb{C}[[z]]$ l'espace des séries de puissances formelles en z à coefficients complexes.

Pour $\gamma > 0$, on considère des secteurs non bornés de direction bissectrice 0,

$$S_\gamma := \{z \in \mathcal{R} : |\arg(z)| < \frac{\gamma\,\pi}{2}\}$$

ou, en général, des secteurs bornés ou non bornés

$$S(d,\alpha,r) := \{z \in \mathcal{R} : |\arg(z) - d| < \frac{\alpha\,\pi}{2},\ |z| < r\}, \quad S(d,\alpha) := \{z \in \mathcal{R} : |\arg(z) - d| < \frac{\alpha\,\pi}{2}\}$$

avec une direction bissectrice $d \in \mathbb{R}$, une ouverture $\alpha\,\pi$ et (dans le premier cas) un rayon $r \in]0,\infty[$.

Définition 2.1.1. Une région sectorielle $G(d,\alpha)$ avec une direction bissectrice $d \in \mathbb{R}$ et une ouverture $\alpha\,\pi$ est un ensemble ouvert connexe dans $\mathcal{R}$ tel que $G(d,\alpha) \subset S(d,\alpha)$, et pour chaque $\beta \in (0,\alpha)$ il existe $\rho = \rho(\beta) > 0$ avec $S(d,\beta,\rho) \subset G(d,\alpha)$.

Nous écrivons simplement G_α pour toute région sectorielle de direction bissectrice $d = 0$ et d'ouverture $\alpha\,\pi$. En particulier, les secteurs sont des régions sectorielles.

Définition 2.1.2. On dit qu'un secteur borné (respectivement non borné) T est un *sous-secteur propre* d'une région sectorielle G (resp. d'un secteur non borné S) , et on écrit $T \ll G$ (resp. $T \lll S$), si $\overline{T} \subset G(rep.\overline{T} \subset S)$ (où l'adhérence de T est prise dans $\mathcal{R}$, et donc le sommet du secteur n'est pas considéré).

Définition 2.1.3. Nous disons qu'une fonction holomorphe $f : G \to \mathbb{C}$ admet la série de puissance formelle $\widehat{f} = \sum_{p=0}^{\infty} a_p z^p \in \mathbb{C}[[z]]$ comme son $\mathbb{M}-$*Développement asymptotique* dans G à l'origine si pour chaque T sous secteur propre borné de G il existe $C_T, A_T > 0$ tel que pour chaque $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\left|f(z) - \sum_{n=0}^{p-1} a_n z^n\right| \leqslant C_T A_T^p M_p |z|^p, \qquad z \in T.$$

Nous écrirons $f \sim_M \widehat{f}$ dans G. On note $\widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{M}}(G)$ l'espace des fonctions admettant un $M-$Développement asymptotique dans G.

Définition 2.1.4. Soit G une région sectorielle. Nous disons qu'une fonction holomorphe $f : G \to \mathbb{C}$ admet $\widehat{f}$ comme son $\mathbb{M}-$*Développement asymptotique uniforme dans* G *(de type* $1/A$ *pour quelque* $A > 0$*)* s'il existe $C > 0$ tel que pour chaque $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\left|f(z) - \sum_{n=0}^{p-1} a_n z^n\right| \leqslant C A^p M_p |z|^p, \qquad z \in G. \tag{2.1.1}$$

Dans ce cas, on écrit $f \sim_{\mathbb{M}}^u \widehat{f}$ dans G, et $\widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{M}}^u(G)$ désigne l'espace des fonctions admettant une $\mathbb{M}-$Développement asymptotique uniforme dans G. Notons que, en prenant $p = 0$ dans (2.1.1), on déduit que toute fonction dans $\widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{M}}^u(G)$ est une fonction bornée.

Définition 2.1.5. Nous définissons pour chaque $A > 0$ la classe $\mathcal{A}_{\mathbb{M},A}(G)$ constituée des fonctions holomorphes dans G telles que

$$\|f\|_{\mathbb{M},A} := \sup_{z\in G, n\in\mathbb{N}} \frac{|f^{(n)}(z)|}{A^n n! M_n} < \infty.$$

Alors, $\mathcal{A}_{\mathbb{M}}(G) := \cup_{A>0} \mathcal{A}_{\mathbb{M},A}(G)$ est appelé une *classe ultraholomorphe de Carleman de type Roumieu* dans la region sectorielle G.

Proposition 2.1.6. *Soit G une région sectorielle.*

(i) On a que $(\mathcal{A}_{\mathbb{M},A}(G), \| \ \|_{\mathbb{M},A})$ est un espace de Banach.

(ii) Si $\mathbb{M}$ est (lc) alors $\mathcal{A}_{\mathbb{M}}(G)$ est une algèbre en ce qui concerne la multiplication ponctuelle.

(iii) Si $\mathbb{M} \approx \mathbb{L}$, alors $\mathcal{A}_{\mathbb{M}}(G) = \mathcal{A}_{\mathbb{L}}(G)$

Démonstration. (i) Soit $A > 0$. Par linéarité de la dérivé, on a que la classe $\mathcal{A}_{\mathbb{M},A}(G)$ est un espace vectoriel complexe. De plus, $||.||_{\mathbb{M},A}$ définie une norme sur cet espace. En effet, soit $f, g \in \mathcal{A}_{\mathbb{M},A}(G)$, en utilisant la définition $||.||_{\mathbb{M},A}$, la linéarité de la dérivée et l'inégalité de Minkowski, on a

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{\mathbb{M},A} &= \sup_{z\in G, n\in\mathbb{N}} \frac{|(f+g)^{(n)}(z)|}{A^n n! M_n} \\
&\leqslant \sup_{z\in G, n\in\mathbb{N}} \left(\frac{|f^{(n)}(z)|}{A^n n! M_n} + \frac{|g^{(n)}(z)|}{A^n n! M_n} \right) \\
&\leqslant \sup_{z\in G, n\in\mathbb{N}} \frac{|f^{(n)}(z)|}{A^n n! M_n} + \sup_{z\in G, n\in\mathbb{N}} \frac{|g^{(n)}(z)|}{A^n n! M_n} \\
&= \|f\|_{\mathbb{M},A} + \|g\|_{\mathbb{M},A}\,.
\end{aligned}$$

Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{A}_{\mathbb{M},A}(G)$,en utilisant la définition $||.||_{\mathbb{M},A}$, la linéarité de la dérivée, on a

$$\|\lambda f\|_{\mathbb{M},A} = \sup_{z\in G, n\in\mathbb{N}} \frac{|(\lambda f)^{(n)}(z)|}{A^n n! M_n} = |\lambda| \sup_{z\in G, n\in\mathbb{N}} \frac{|f^{(n)}(z)|}{A^n n! M_n} = |\lambda \, \|f\|_{\mathbb{M},A}$$

Soit $f \in \mathcal{A}_{\mathbb{M},A}(G)$ tel que $\|f\|_{\mathbb{M},A} = 0$. Alors on a que $\sup_{z\in G, n\in\mathbb{N}} \frac{|f^{(n)}(z)|}{A^n n! M_n} = 0$. D'où $f^n(z) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $z \in G$. Ainsi, par le principe d'unicité du prolongement, on a que f est identiquement nul dans G.

Montrons que $\mathcal{A}_{\mathbb{M},A}(G)$ est un espace complet.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\mathcal{A}_{\mathbb{M},A}(G)$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour $A > 0$ fixé, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $p, q \geqslant N$, $\|f_p - f_q\|_{\mathbb{M},A} < \varepsilon$. Par linéarité de la dérivée, on a

$$\sup_{z\in G, n\in\mathbb{N}} \frac{|f_p^{(n)}(z) - f_q^{(n)}(z)|}{A^n n! M_n} \leqslant \varepsilon \quad \forall p, q \geqslant N. \tag{2.1.2}$$

D'où

$$\sup_{z\in G} |f_p(z) - f_q(z)| \leqslant \varepsilon \quad \forall p, q \geqslant N.$$

On en tire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément de Cauchy sur G, donc elle converge. Notons cette limite f. Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on obtient que la suite $(f_p^{(n)})_{p\in\mathbb{N}}$ est uniformément de Cauchy puisque

$$|f_p^{(n)}(z) - f_q^{(n)}(z)| \leqslant \varepsilon M_n n! A^n$$

pour tout $p, q \geqslant N$ et pour tout $z \in G$, qui peut être rendu arbitrairement petit en prenant ε arbitrairement petit. Donc en tire que la suite $(f_p^{(n)})_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $f^{(n)}$.
Montrons que la suite $(f_p^{(n)})_{p\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{A}_{\mathbb{M},A}(G)$.
En utilisant(2.1.2) et en faisant tendre q vers l'infini, on a

$$\sup_{z\in G, n\in\mathbb{N}} \frac{|f_p^{(n)}(z) - f^{(n)}(z)|}{A^n n! M_n} \leqslant \varepsilon \quad \forall p \geqslant N,$$

ce qui nous donne bien la convergence dans $\mathcal{A}_{\mathbb{M},A}(G)$. D'où ($\mathcal{A}_{\mathbb{M},A}(G), \| \|_{\mathbb{M},A}$) est un espace de Banach.

(ii) Supposons que $\mathbb{M}$ est (lc) et Soient deux fonctions f et g dans $\mathcal{A}_{\mathbb{M}}(G)$, ie il existe $A_f, B_g > 0$ tels que $f \in \mathcal{A}_{\mathbb{M},A_f}(G)$ et $g \in \mathcal{A}_{\mathbb{M},B_g}(G)$. De plus, Par le théorème de Leibniz, on a

$$(fg)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i f^{(i)} g^{(n-i)}.$$

Ainsi, puisque $f \in \mathcal{A}_{\mathbb{M},A}(G)$ et $g \in \mathcal{A}_{\mathbb{M},A}(G)$, il existe $a_f, b_g > 0$ tel que

$$|(fg)^n(z)| \leqslant a_f b_g \sum_{i=0}^{n} C_n^i i!(n-i)! A_f^i B_f^{n-i} M_i M_{n-i} \quad \forall z \in G.$$

Dès lors, par la proposition 1.1.9(ii) et par la formule du binôme de Newton, on en tire que

$$|(fg)^n(z)| \leqslant a_f b_g n! (A_f + B_g)^n M_n,$$

d'où $\|fg\|_{\mathbb{M},A} < \infty$. Par conséquent $fg \in \mathcal{A}_{\mathbb{M}}(G)$.

(iii) Puisque $\mathbb{M}$ est *équivalent* à $\mathbb{L}$, il existe des constantes strictement positives I, J telles que

$$I^p M_p \leqslant L_p \leqslant J^p M_p, \qquad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Soit $f \in \mathcal{A}_{\mathbb{M}}(G)$, alors il existe $A > 0$ tel que

$$\|f\|_{\mathbb{L},A} = \sup_{z\in G, n\in\mathbb{N}} \frac{|f^{(n)}(z)|}{A^n n! L_n} \leqslant \sup_{z\in G, n\in\mathbb{N}} \frac{|f^{(n)}(z)|}{A^n n! I M_n} < \infty.$$

On en tire que $\mathcal{A}_{\mathbb{M}}(G) \subset \mathcal{A}_{\mathbb{L}}(G)$.
De manière analogue, on montre que $\mathcal{A}_{\mathbb{L}}(G) \subset \mathcal{A}_{\mathbb{M}}(G)$. D'où le résultat.

□

Remarque 2.1.7.

Pour un secteur S, par Taylor, on a que les dérivées de $f \in \mathcal{A}_{\mathbb{M},A}(S)$ sont lipschitziennes. Soit une suite $(z_n)_n \in S$ telle que z_n converge vers 0. Puisque $f^{(p)}$ est lipschitzienne pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a que la suite $(f^{(p)}(z_n))_n$ converge car pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, il existe $C > 0$ tel que

$$|f^{(p)}(z_n) - f^{(p)}(z_m)| \leqslant C|z_n - z_m| \quad \forall z_n, z_m \in S$$

D'où, on en tire que la suite $(f^{(p)}(z_n))_n$ converge. Ainsi pour chaque $p \in \mathbb{N}_0$ on peut définir

$$f^{(p)}(0) := \lim_{z \in S, z \to 0} f^{(p)}(z) \in \mathbb{C}. \tag{2.1.3}$$

De plus, la relation (2.1.3) est indépendante du choix de la suite $(z_n)_n$. En effet, soit une suite $(z'_n)_n \in S$ telle que $(z'_n)_n$ converge vers 0. On a que la suite $(z''_n)_n = (z_1, z'_1, z_2, z'_2, \cdots)$ converge vers 0. Donc la suite $(f^{(p)}(z''_n))_n$ converge. Or les suites $(f^{(p)}(z_n))_n$ et $(f^{(p)}(z'_n))_n$ sont deux sous-suites de $(f^{(p)}(z''_n))_n$ et donc elles convergent vers la même limite.

Proposition 2.1.8. *Soit $\mathbb{M}$ une suite, S un secteur et G une région sectorielle. Alors ,*

(i) *Si $f \in \mathcal{A}_{\mathbb{M},A}(S)$ alors f admet $\widehat{f} := \sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{1}{p!} f^{(p)}(0) z^p$ comme son $\mathbb{M}-$développement asymptotique uniforme dans S de type $1/A$, où $(f^{(p)}(0))_{p \in \mathbb{N}}$ est donné par (2.1.3). Par conséquent, nous avons que*
$$\mathcal{A}_{\mathbb{M}}(S) \subseteq \widetilde{\mathcal{A}}^u_{\mathbb{M}}(S) \subseteq \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{M}}(S).$$

(ii) *$f \in \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{M}}(G)$ si et seulement si pour chaque $T \ll G$ il existe $A_T > 0$ tel que $f|_T \in \mathcal{A}_{\mathbb{M},A_T}(T)$. Si $f \in \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{M}}(G)$ et que $f \sim_{\mathbb{M}} \sum_{p=0}^{\infty} a_p z^p$, alors pour chaque $T \ll G$ et chaque $p \in \mathbb{N}$ on a*

$$a_p = \lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in T}} \frac{f^{(p)}(z)}{p!}, \tag{2.1.4}$$

et on peut fixer $f^{(p)}(0) := p! a_p$.

(iii) *Si S est non borné et $T \lll S$, alors il existe une constante $c = c(T, S) > 0$ telle que la restriction à T, $f|_T$, des fonctions f définies sur S et admettant un $\mathbb{M}-$développement asymptotique uniforme dans S de type $1/A > 0$, appartient à $\mathcal{A}_{\mathbb{M},cA}(T)$.*

(iv) *Si $f \in \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{M}}(G)$, son $\mathbb{M}-$développement asymptotique $\widehat{f}$ est unique.*

Démonstration. (i) Soit $f \in \mathcal{A}_{\mathbb{M},A}(S)$, alors par Taylor pour $z, z_0 \in S$, on a

$$f(z) - \sum_{n=0}^{p-1} \frac{f^{(p)}(z_0}{p!}(z - z_0)^n = \frac{1}{(p-1)!} \int_{z_0}^{z} (z - w)^{p-1} f^{(p)}(w) dw.$$

Or, puisque $f \in \mathcal{A}_{\mathbb{M},A}(S)$, il existe $C > 0$ tel que

$$\begin{aligned}\| \int_{z_0}^{z} (z-w)^{p-1} f^{(p)} dw \| &\leqslant \int_{z_0}^{z} (z-w)^{p-1} |f^{(p)}| dw \\ &\leqslant CA^p p! M_p \int_{z_0}^{z} (z-w)^{p-1} dw \\ &= CA^p p! M_p \frac{(z-z_0)^p}{p}.\end{aligned}$$

Ainsi, par passage à la limite lorsque $z_0 \to 0$, on en tire que

$$\left| f(z) - \sum_{n=0}^{p-1} a_n z^n \right| \leqslant CA^p M_p |z|^p, \qquad z \in S.$$

D'où la conclusion. Par conséquent, nous avons que

$$\mathcal{A}_{\mathbb{M}}(S) \subseteq \widetilde{\mathcal{A}}^{u}_{\mathbb{M}}(S) \subseteq \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{M}}(S).$$

(ii) Soit $f \in \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{M}}(G)$ Considérons $T \ll G$ borné et $p \in \mathbb{N}$. Soit $T_1 \ll G$ borné tel que $T \ll T_1$. Alors il existe un $r > 0$ tel que le disque fermé $\overline{D}(z, r|z|)$ est inclu dans T_1. Soit $w \in \partial\overline{D}(z, |z|r)$, alors $|w|^p \leqslant (1+r)|z|^p$ et $|w-z|^{p+1} = r^{p+1}|z|^{p+1}$. Puisque $f \in \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{M}}(G)$, il existe $C_T, A_T > 0$ tel que pour chaque $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\left| f(z) - \sum_{n=0}^{p-1} a_n z^n \right| \leqslant C_T A_T^p M_p |z|^p, \qquad z \in T_1.$$

Posons $r_f(z, p-1) = f(z) - \sum_{n=0}^{p-1} a_n z^n$. Puisque $r_f^{(p)}(z, p-1) = f^{(p)}$, par la formule intégrale de Cauchy on a que, pour tout $z \in T$,

$$\begin{aligned}f^{(p)}(z) &= \left| \frac{p!}{2\pi i} \int_{\partial\overline{D}(z,r)} \frac{r_f(w, p-1)}{(w-z)^{p+1}} dw \right| \\ &\leqslant \frac{p!}{2\pi} C_T A_T^p M_p |w|^p \frac{2\pi r|z|}{r^{p+1}|z|^{p+1}} \\ &\leqslant C_T (\frac{1+r}{r})^p A_T^p p! M_p,\end{aligned}$$

d'où $f|_T \in \mathcal{A}_{\mathbb{M},A_T}(T)$.
Réciproquement, soit $T \ll G$ il existe $A_T > 0$ tel que $f|_T \in \mathcal{A}_{\mathbb{M},A_T}(T)$. Alors par (i), on conclut que $f \in \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{M}}(G)$. De plus, par (i) on en tire que, si $f \sim_{\mathbb{M}} \sum_{p=0}^{\infty} a_p z^p$, alors pour chaque $T \ll G$ et chaque $p \in \mathbb{N}$ on a

$$a_p = \lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in T}} \frac{f^{(p)}(z)}{p!},$$

et par la relation (2.1.3), on peut définir $f^{(p)}(0) := p! a_p$.

(iii) Il découle directement de (i) et (ii).

(iv) Soit $f \in \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{M}}(G)$. Supposons que $f \sim_{\mathbb{M}} \widehat{f}_1 = \sum_{p=0}^{\infty} a_p z^p$ et $f \sim_{\mathbb{M}} \widehat{f}_2 = \sum_{p=0}^{\infty} a'_p z^p$ tel que $\widehat{f}_2 \neq \widehat{f}_1$. D'après (ii), pour chaque $T \ll G$ et chaque $p \in \mathbb{N}$ on a

$$a_p = \lim_{\substack{z\to 0\\ z\in T}} \frac{f^{(p)}(z)}{p!} = a'_p,$$

D'où la contradiction.

□

2.1.2 L'application asymptotique de Borel

On peut donc définir des classes de séries de puissance formelles

$$\mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M},A} = \Big\{ \widehat{f} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathbb{C}[[z]] : \mid \boldsymbol{a} \mid_{\mathbb{M},A} := \sup_{p\in\mathbb{N}_0} \frac{|a_p|}{A^p M_p} < \infty \Big\}.$$

L'espace $(\mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M},A}, ||_{\mathbb{M},A})$ est un espace de Banach par un raisonnement analogue à celui de la proposition= 2.1.6(i). On pose $\mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}} := \cup_{A>0}\mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M},A}$.

Étant donné $f \in \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{M}}(G)$ avec $f \sim_{\mathbb{M}} \widehat{f}$, et compte tenu de (2.1.4), il est évident que $\widehat{f} \in \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}}$, il est donc naturel de considérer l'application suivante.

Définition 2.1.9. Étant donné une région sectorielle G, nous définissons *l'application asymptotique de Borel*

$$\widetilde{\mathcal{B}} : \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{M}}(G) \longrightarrow \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}}$$

qui envoie une fonction $f \in \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{M}}(G)$ dans son $\mathbb{M}-$ Développement asymptotique $\widehat{f}$.

Remarque 2.1.10. On a que $\widetilde{\mathcal{B}}$ est linéaire et si G est un secteur S, par la Proposition 2.1.8.(i) nous voyons que l'application asymptotique de Borel est également bien définie sur $\mathcal{A}_{\mathbb{M}}(S)$ et $\widetilde{\mathcal{A}}^{u}_{\mathbb{M}}(S)$.
Si $\mathbb{M} \approx \mathbb{L}$, alors $\mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}} = \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{L}}$par un raisonnement analogue à celui de la proposition 2.1.6(iii).

Introduirons à présent la notion de fonction plate qui jouera un rôle important dans l'injectivité de l'application asymptotique de Borel.

Définition 2.1.11. Une fonction f dans l'une des classes précédentes est dite *plate* si $\widetilde{\mathcal{B}}(f)$ est la série puissance nulle, en d'autres termes, $f \sim_{\mathbb{M}} \widehat{0}$.

On peut exprimer la platitude en $\widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{M}}(G)$ au moyen des fonctions associées définies dans la sous-section 1.3.

Proposition 2.1.12. *Étant donné une suite $\mathbb{M}$, une région sectorielle G et une fonction holomorphe f dans G, les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) $f \in \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{M}}(G)$ *et* f *est plat,*

(ii) Pour tout sous-secteur propre borné T de G, il existe $c_1, c_2 > 0$ tel que

$$|f(z)| \leqslant c_1 e^{-\omega_{\mathbb{M}}(1/(c_2|z|))} = c_1 h_{\mathbb{M}}(c_2|z|), \qquad z \in T.$$

Démonstration. Supposons que $f \in \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{M}}(G)$ et f est plat, alors pour chaque sous secteur propre borné T de G il existe $C_T, A_T > 0$ tel que pour chaque $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\Big|f(z)\Big| \leqslant C_T A_T^p M_p |z|^p, \qquad z \in T.$$

En prenant la borne inférieur par rapport à p et par définition de $h_{\mathbb{M}}$, on obtient alors

$$\Big|f(z)\Big| \leqslant C_T h_{\mathbb{M}}(A_T|z|), \qquad z \in T.$$

D'où la conclusion, avec $c_1 = C_T$ et $c_2 = A_T$.

Réciproquement, supposons que Pour tout sous-secteur propre borné T de G, il existe $c_1, c_2 > 0$ tels que

$$|f(z)| \leqslant c_1 e^{-\omega_{\mathbb{M}}(1/(c_2|z|))} = c_1 h_{\mathbb{M}}(c_2|z|), \qquad z \in T.$$

Puisque la définition de $h_{\mathbb{M}}$ implique évidemment $h_{\mathbb{M}}(c_2|z|) \leqslant (c_2|z|)^p M_p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\Big|f(z)\Big| \leqslant c_1 c_2^p M_p |z|^p, \qquad z \in T.$$

On en déduit que $f \sim_{\mathbb{M}} \widehat{0}$. D'où la conclusion. □

Exemple 2.1.13. Dans le cas de Gevrey d'ordre α, en utilisant l'exemple 1.3.6, on a que si $f \in \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{M}}(G)$ et f est plat, alors il existe $c_1, c_2, A > 0$ tel que

$$|f(z)| \leqslant c_1 e^{-\omega_{\mathbb{M}}(1/(c_2|z|))} \leqslant c_1 \exp(-A c_2^{\frac{1}{\alpha}} |z|^{\frac{1}{\alpha}})$$

2.2 Intervalles d'injectivité et de surjectivité pour l'application asymptotique de Borel

En utilisant une simple rotation, nous voyons que l'injectivité et la surjectivité de l'application de Borel dans l'une des classes précédemment considérées ne dépendent pas de la direction bissectrice d de la région sectorielle G, nous nous limitons donc au cas $d = 0$. De plus, dans ce mémoire, nous restreindrons notre étude aux secteurs non bornés S_γ. On pose

$$\begin{aligned}
I_{\mathbb{M}} &:= \{\gamma > 0; \quad \widetilde{\mathcal{B}} : \mathcal{A}_{\mathbb{M}}(S_\gamma) \longrightarrow \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}} \text{ est injectif}\}, \\
\widetilde{I}^u_{\mathbb{M}} &:= \{\gamma > 0; \quad \widetilde{\mathcal{B}} : \widetilde{\mathcal{A}}^u_{\mathbb{M}}(S_\gamma) \longrightarrow \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}} \text{ est injectif}\}, \\
\widetilde{I}_{\mathbb{M}} &:= \{\gamma > 0; \quad \widetilde{\mathcal{B}} : \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{M}}(S_\gamma) \longrightarrow \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}} \text{ est injectif}\}.
\end{aligned}$$

Chaque fois qu'un de ces ensembles est non-vide, on dit que la classe correspondante est *quasianalytique*. Ainsi, la non-quasi-analyticité revient à l'existence de fonctions plates non triviales dans la classe.

Nous observons facilement que, par restriction et par principe d'unicité du prolongement, si $\gamma > 0$ est dans l'un de ces ensembles alors chaque $\gamma' > \gamma$ l'est aussi. En effet, si $\gamma' > \gamma$ alors $\widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{M}}(S'_\gamma) \subset \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{M}}(S_\gamma)$. Soit $f \in \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{M}}(S'_\gamma)$ tel que $\widetilde{\mathcal{B}}f = 0$. Par injectivité, on a que $f = 0$ dans S_γ et par Principe d'unicité du prolongement, on a que $f = 0$ dans S'_γ.
Par conséquent, $I_{\mathbb{M}}$, $\widetilde{I}^u_{\mathbb{M}}$ et $\widetilde{I}_{\mathbb{M}}$ sont soit des intervalles vides, soit des intervalles non bornés contenus dans $]0,\infty[$, que nous appelons *intervalles de quasi-analyticité ou d'injectivité.*

De même, nous définissons

$$\begin{aligned}
S_{\mathbb{M}} :=& \{\gamma > 0; \quad \widetilde{\mathcal{B}} : \mathcal{A}_{\mathbb{M}}(S_\gamma) \longrightarrow \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}} \text{ est surjectif}\},\\
\widetilde{S}^u_{\mathbb{M}} :=& \{\gamma > 0; \quad \widetilde{\mathcal{B}} : \widetilde{\mathcal{A}}^u_{\mathbb{M}}(S_\gamma) \longrightarrow \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}} \text{ est surjectif}\},\\
\widetilde{S}_{\mathbb{M}} :=& \{\gamma > 0; \quad \widetilde{\mathcal{B}} : \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{M}}(S_\gamma) \longrightarrow \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}} \text{ est surjectif}\}.
\end{aligned}$$

Il est également facile de vérifier que si $\gamma > 0$ est dans l'un de ces ensembles, alors chaque $0 < \gamma' < \gamma$ l'est également, donc $S_{\mathbb{M}}$, $\widetilde{S}^u_{\mathbb{M}}$ et $\widetilde{S}_{\mathbb{M}}$ sont soit vides, soit des intervalles ouverts à gauche ayant 0 comme extrémité, appelés *intervalles de surjectivité.* En utilisant la Proposition 2.1.8.(i) nous voyons facilement que

$$I_{\mathbb{M}} \supseteq \widetilde{I}^u_{\mathbb{M}} \supseteq \widetilde{I}_{\mathbb{M}}, \tag{2.2.1}$$

$$S_{\mathbb{M}} \subseteq \widetilde{S}^u_{\mathbb{M}} \subseteq \widetilde{S}_{\mathbb{M}}. \tag{2.2.2}$$

Remarque 2.2.1. Dans les résultats à venir, nous travaillons avec des suites de poids $\mathbb{M}$. L'exigence de la condition (lc) est motivée dans la proposition 2.1.6 et la remarque 2.1.10. Afin de justifier la condition de limite pour $\boldsymbol{m}$, on observe que pour une suite $\mathbb{M}$ est (lc), si $\lim_{p\to\infty} m_p \neq \infty$ alors $\lim_{p\to\infty} m_p < \infty$ et donc aussi $\lim_{p\to\infty}(M_p)^{1/p} < \infty$ par la proposition 1.1.8. Alors il existe $A > 0$ tel que $h_{\mathbb{M}}(t) = 0$ pour tout $t \in [0, A]$ par (1.3). Par conséquent, par la Proposition 2.1.12, si G est une région sectorielle quelconque et $f \in \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{M}}(G)$ est plat, nous avons que $f(t) = 0$ pour tout $t \in]0, A]$ ce qui, par le principe d'unicité du prolongement, on tire que f est identiquement nul dans G. Par conséquent, l'application de Borel est toujours injective.

Par contre, dans la même situation, l'application de Borel n'est jamais surjective. En effet, soit $R > 0$ tel que $R < |z|$ pour un certain $z \in G$. On peut considérer une fonction holomorphe à l'origine $L(z)$ dont le développement de Taylor à l'origine est donné par une série lacunaire [1] convergente $\widehat{L} \in \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}}$, dont le domaine de convergence est le disque de rayon R. Nous avons que $L \sim_{\mathbb{M}} \widehat{L}$ sur une région $G' \subseteq G$, donc par l'injectivité de l'application de Borel, il ne peut exister une autre fonction $E \in \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{M}}(G) \subseteq \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{M}}(G')$ telle que $E \sim_{\mathbb{M}} \widehat{L}$. Puisque L ne peut pas être prolongé analytiquement sur G, on conclut que l'application asymptotique de Borel n'est pas surjective.

1. une série lacunaire (aussi connue sous le nom de fonction lacunaire) est une série entière (ou la fonction somme de cette série entière) présentant des lacunes, c'est-à-dire dont un grand nombre de coefficients sont nuls. Ces fonctions holomorphes n'ont pas de prolongement analytique en dehors de leur disque de convergence.

2.2.1 Résultats d'injectivités classiques

Dans cette sous section, nous présenterons les différents résultats d'injectivités des différentes classes de fonctions et nous les reformulerons en termes d'indice de croissance $\omega(\mathbb{M})$ grâce à sa relation avec l'exposant de convergence de la suite $\boldsymbol{m}$.

Théorème 2.2.2 ([10], Section 2.4.III). *Soit $\mathbb{M}$ une suite de poids, $\gamma > 0$, $b \geqslant 0$ et*

$$H_b = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > b\}.$$

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

(i) $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{1}{m_p}\right)^{1/\gamma}$ *diverge,*

(ii) Si f est holomorphe dans H_b et qu'il existe $A, C > 0$ tels que

$$|f(z)| \leqslant \frac{CA^p M_p}{|z|^{\gamma p}}, \qquad z \in H_b, \quad p \in \mathbb{N}, \tag{2.2.3}$$

alors f est identiquement nul.

Proposition 2.2.3. *Soit une fonction f holomorphe dans H_0. On a que f vérifie (2.2.3) si et seulement si la fonction g donnée par $g(z) := f(1/z^{1/\gamma})$ appartient à $\widetilde{\mathcal{A}}^u_{\mathbb{M}}(S_\gamma)$ et g est plat.*

Démonstration. Soit holomorphe dans H_0. Supposons que f vérifie (2.2.3). Considérons la transformation $z : S_\gamma \to H_0$ définie par $z(w) = w^{-\frac{1}{\gamma}}$ et la fonction holomorphe $g : S_\gamma \to \mathbb{C}$ définie par $g(w) := f(z(w))$. Par hypothèse, il existe $A, C > 0$ tel que

$$|g(w)| = |f(z(w))| \leqslant CA^p M_p |w|^p \quad w \in S_\gamma, \quad p \in \mathbb{N}.$$

D'où g appartient à $\widetilde{\mathcal{A}}^u_{\mathbb{M}}(S_\gamma)$ et g est plat.
Réciproquement supposons que $g(z) := f(1/z^{1/\gamma})$ appartient à $\widetilde{\mathcal{A}}^u_{\mathbb{M}}(S_\gamma)$ et g est plat. Soit T un sous secteur propre borné de S_γ. Par hypothèse, il existe $A, C > 0$ tel que

$$g(z) \leqslant CA^p M_p |z|^p \quad z \in S_\gamma, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Considérons la transformation $z : H_0 \to S_\gamma$ définie par $z(w) = w^{-\gamma}$ et la fonction holomorphe $f : H_0 \to \mathbb{C}$ définie par $f(w) := g(z(w))$. Ainsi, on en tire que

$$|f(w)| = |g(z(w))| \leqslant \frac{CA^p M_p}{|w|^{\gamma p}} \quad w \in H_0, \quad p \in \mathbb{N}.$$

D'où la conclusion $\square$

Nous allons à présent introduire l'exposant de convergence de la suite $\boldsymbol{m}$, qui permet de régir l'étude de la divergence de la série $\sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{1}{m_p}\right)^{1/\gamma}$.

Définition 2.2.4. Soit $(c_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite non décroissante de nombres réels positif tendant vers l'infini. Le *exposant de convergence* de $(c_p)_p$ est défini comme suit

$$\lambda_{(c_p)} := \inf\{\mu > 0 : \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{c_p^{\mu}} \text{ converge}\} := \limsup_{p\to\infty}\frac{\log(p)}{\log(c_p)}.$$

(si l'ensemble précédent est vide, on pose $\lambda_{(c_p)} = \infty$).

Proposition 2.2.5. *On a*

$$\omega(\mathbb{M}) = \frac{1}{\lambda_{(m_p)}} = \frac{1}{\lambda_{((p+1)m_p)}} - 1,$$

ou, en d'autres termes,

$$\begin{aligned}\omega(\mathbb{M}) &= \sup\{\mu > 0 : \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(m_p)^{1/\mu}} < \infty\}\\ &= \sup\{\mu > 0 : \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{((p+1)m_p)^{1/(\mu+1)}} < \infty\}.\end{aligned}$$

Démonstration. On a

$$\omega(\mathbb{M}) := \liminf_{p\to\infty}\frac{\log(m_p)}{\log(p)} = \frac{1}{\limsup_{p\to\infty}\frac{\log(p)}{\log(m_p)}} = \frac{1}{\lambda_{(m_p)}}.$$

De plus,

$$\frac{\log(m_p)}{\log(p)} = \frac{\log(m_p(p+1))}{\log(p)} + \frac{\log(p+1)}{\log(p)}.$$

Par passage à la limite, on a

$$\frac{1}{\lambda_{(m_p)}} = \frac{1}{\lambda_{((p+1)m_p)}} - 1.$$

La conclusion s'ensuit. □

Théorème 2.2.6. *Soit $\mathbb{M}$ une suite de poids et $\gamma > 0$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(i) $\widetilde{\mathcal{B}} : \widetilde{\mathcal{A}}^u_{\mathbb{M}}(S_\gamma) \longrightarrow \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}}$ *est injectif.*

(ii) $\sum_{p=0}^{\infty}(m_p)^{-1/\gamma} = \infty$.

(iii) Soit $\gamma > \omega(\mathbb{M})$, *soit* $\gamma = \omega(\mathbb{M})$ *et* $\sum_{p=0}^{\infty}(m_p)^{-1/\omega(\mathbb{M})} = \infty$.

Démonstration. $(i) \Rightarrow (ii)$ Supposons que $\widetilde{\mathcal{B}} : \widetilde{\mathcal{A}}^u_{\mathbb{M}}(S_\gamma) \longrightarrow \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}}$ est injectif. Soit une fonction f holomorphe dans H_0 et qui vérifie (2.2.3). Par la proposition 2.2.3, on a que la fonction $g(z) := f(1/z^{1/\gamma})$ appartient à $\widetilde{\mathcal{A}}^u_{\mathbb{M}}(S_\gamma)$ et g est plat. D'où par injectivité de l'application $\widetilde{\mathcal{B}}$, on a que $g \equiv 0$ et donc par le Principe d'unicité du prolongement, on a que $f \equiv 0$. D'où la conclusion par le théorème 2.2.2.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Soit $g \in \widetilde{\mathcal{A}}^u_{\mathbb{M}}(S_\gamma$ tel que g soit plat. Par la proposition 2.2.3, on a que la fonction $f(z) := g(z^{-\gamma})$ est holomorphe dans H_0 et vérifie (2.2.3). Par conséquent, par le théorème 2.2.2, on a que $f \equiv 0$ et donc par le Principe d'unicité du prolongement, on a que $g \equiv 0$. D'où l'application $\widetilde{\mathcal{B}}$ est injective.

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$ Ceci découle directement de la proposition 2.2.5.

□

Théorème 2.2.7 ([22], Thm2). *Soit $\mathbb{M}$ une suite de poids et $\gamma > 0$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(i) $\widetilde{\mathcal{B}} : \mathcal{A}_{\mathbb{M}}(S_\gamma) \longrightarrow \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}}$ est injectif.

(ii) $\sum_{p=0}^{\infty}((p+1)m_p)^{-1/(\gamma+1)} = \infty$.

(iii) Soit $\gamma > \omega(\mathbb{M})$, soit $\gamma = \omega(\mathbb{M})$ et $\sum_{p=0}^{\infty}((p+1)m_p)^{-1/(\omega(\mathbb{M})+1)} = \infty$.

Démonstration. Le raisonnement est analogue à celui du théorème 2.2.6.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Supposons que $\widetilde{\mathcal{B}} : \mathcal{A}_{\mathbb{M}}(S_\gamma) \longrightarrow \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}}$ est injectif. Soit une fonction f holomorphe dans H_0 et qui vérifie (2.2.3). Par la proposition 2.2.3, on a que la fonction $g(z) := f(1/z^{1/\gamma})$ appartient à $\widetilde{\mathcal{A}}^u_{\mathbb{M}}(S_\gamma)$ et g est plat. Soit $T \ll S_\gamma$, par la proposition 2.1.8, il existe $A_T > 0$ tel que $g|_T \in \mathcal{A}_{\mathbb{M},A_T}(T)$. D'où la conclusion par par injectivité de l'application $\widetilde{\mathcal{B}}$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Découle du fait que $\mathcal{A}_{\mathbb{M}}(S_\gamma) \subset \widetilde{\mathcal{A}}^u_{\mathbb{M}}(S_\gamma)$.

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$ Ceci découle directement de la proposition 2.2.5. □

Du théorème 2.2.6, on peut déduire la généralisation partielle suivante du lemme de Watson.

Théorème 2.2.8. *Soit $\mathbb{M}$ une suite de poids, $\gamma > 0$ et G_γ une région sectorielle quelconque d'ouverture $\pi\gamma$. On a :*

(i) Si $\gamma > \omega(\mathbb{M})$, alors $\widetilde{\mathcal{B}} : \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{M}}(G_\gamma) \longrightarrow \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}}$ est injectif.

(ii) Si $\gamma < \omega(\mathbb{M})$, alors $\widetilde{\mathcal{B}} : \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{M}}(G_\gamma) \longrightarrow \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}}$ n'est pas injectif.

Démonstration. (i) Supposons que $\gamma > \omega(\mathbb{M})$. Soit $f \in \widetilde{\mathcal{A}}^u_{\mathbb{M}}$ tel que f soit plat. Soit T un sous secteur propre borné tel que $T = S(0, \beta, r)$ avec $\gamma > \beta > \omega(\mathbb{M})$. Par hypothèse, il existe $A, C > 0$ tel que

$$f(z) \leqslant CA^p M_p |z|^p \quad w \in T, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Considérons la transformation $z : H_0 \to T$ définie par $z(w) = 1/(w + (1/r)^{1/\beta})^\beta$, et la fonction holomorphe $g : H_0 \to \mathbb{C}$ définie par $g(w) := f(z(w))$.
puisque pour chaque $w \in H_0$ on a $|w + (1/r)^{1/\gamma}| > |w|$, on en déduit que

$$|g(w)| = |f(z(w))| \leqslant \frac{CA^p M_p}{|(w + (1/r)^{1/\beta})^\beta|^p} \leqslant \frac{CA^p M_p}{|w|^{\beta p}}, \qquad w \in H_0, \qquad p \in \mathbb{N}.$$

Ainsi, g vérifie (2.2.3). De plus, puisque $\beta > \omega(\mathbb{M})$, par la proposition 2.2.5, on a que

$$\sum_{p=0}^{\infty} (m_p)^{-1/\beta} = \infty.$$

Par conséquent, par le théorème 2.2.2, on a que $g \equiv 0$ et donc par le Principe d'unicité du prolongement, on a que $f \equiv 0$. D'où $\widetilde{\mathcal{B}} : \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{M}}(G_\gamma) \longrightarrow \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}}$ est injectif.

(ii) Supposons que $\gamma < \omega(\mathbb{M})$. Par la proposition 2.2.5, on a que

$$\sum_{p=0}^{\infty} (m_p)^{-1/\gamma} < \infty.$$

Ainsi, par le théorème 2.2.2, il existe une fonction f holomorphe sur H_0, non identiquement nulle et les constantes $A, C > 0$ tel que f vérifie (2.2.3). Considérons la fonction $z : S_\gamma \to H_0$ définie par $z(w) = w^{-1/\gamma}$ et la fonction g holomorphe sur S_γ et définie par $g(w) = f(z(w))$. Puisque f vérifie (2.2.3) On a

$$|g(w)| = |f(z(w))| \leqslant CA^p M_p |w|^p, \quad w \in S_\gamma, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Par conséquent, $g \neq 0$ et g est plat dans S_γ. De plus, la restriction de g à $G_\gamma \subset S_\gamma$ est une fonction plate non triviale. D'où la conclusion.

□

Remarque 2.2.9. Pour toute suite de poids $\mathbb{M}$, les informations des résultats précédents peuvent être résumées comme suit :

(i) Si $\omega(\mathbb{M}) = \infty$, par le théorème 2.2.7, on voit que $I_{\mathbb{M}} = \varnothing$ et (2.2.1) implique $I_{\mathbb{M}} = \widetilde{I}^u_{\mathbb{M}} = \widetilde{I}_{\mathbb{M}} = \varnothing$.

(ii) Si $\omega(\mathbb{M}) = 0$, par le Théorème 2.2.8 on remarque que $\widetilde{I}_{\mathbb{M}} =]0, \infty[$ et, par (2.2.1), nous avons que $I_{\mathbb{M}} = \widetilde{I}^u_{\mathbb{M}} = \widetilde{I}_{\mathbb{M}} =]0, \infty[$.

	$\sum_{p=0}^{\infty} \sigma_p = \infty$ $\sum_{p=0}^{\infty} \mu_p = \infty$	$\sum_{p=0}^{\infty} \sigma_p = \infty$ $\sum_{p=0}^{\infty} \mu_p < \infty$	$\sum_{p=0}^{\infty} \sigma_p < \infty$ $\sum_{p=0}^{\infty} \mu_p < \infty$
$I_{\mathbb{M}}$	$[\omega(\mathbb{M}), \infty[$	$[\omega(\mathbb{M}), \infty[$	$]\omega(\mathbb{M}), \infty[$
$\widetilde{I}^u_{\mathbb{M}}$	$[\omega(\mathbb{M}), \infty[$	$]\omega(\mathbb{M}), \infty[$	$]\omega(\mathbb{M}), \infty[$
$\widetilde{I}_{\mathbb{M}}$	$]\omega(\mathbb{M}), \infty[$ ou $[\omega(\mathbb{M}), \infty[$?	$]\omega(\mathbb{M}), \infty[$	$]\omega(\mathbb{M}), \infty[$

TABLE 2.1 – Intervalles d'injectivité pour une suite de poids avec $\omega(\mathbb{M}) \in]0, \infty[$.

(iii) Si $\omega(\mathbb{M}) \in]0, \infty[$, nous avons la situation décrite dans le Tableau 2.1, où $\sum_{p=0}^{\infty} \sigma_p$ désigne la série $\sum_{p=0}^{\infty} ((p+1)m_p)^{-1/(\omega(\mathbb{M})+1)}$ and $\sum_{p=0}^{\infty} (m_p)^{-1/\omega(\mathbb{M})}$ est abrégé en $\sum_{p=0}^{\infty} \mu_p$ (notez que $\sum_{p=0}^{\infty} \sigma_p < \infty$ implique $\sum_{p=0}^{\infty} \mu_p < \infty$ en appliquant les théorèmes 2.2.6 et 2.2.7 et en utilisant que $\mathcal{A}_{\mathbb{M}}(S_\gamma) \subseteq \widetilde{\mathcal{A}}^u_{\mathbb{M}}(S_\gamma)$).

En conclusion, nous voyons que le seul intervalle d'injectivité non déterminé par les résultats précédents est $\widetilde{I}_{\mathbb{M}}$, et seulement lorsque $\omega(\mathbb{M}) \in]0, \infty[$ et $\sum_{p=0}^{\infty} (m_p)^{-1/\omega(\mathbb{M})} = \infty$. En effet, il nous reste plus qu'à décider si $\omega(\mathbb{M}) \in \widetilde{I}_{\mathbb{M}}$ ou non. Nous montrerons l'existence de fonctions plates non triviales dans la classe $\widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{M}}(S_{\omega(\mathbb{M})})$, et donc on a toujours $\omega(\mathbb{M}) \notin \widetilde{I}_{\mathbb{M}}$ et $\widetilde{I}_{\mathbb{M}} =]\omega(\mathbb{M}), \infty[$.

Exemple 2.2.10. Si l'on considère la suite $\mathbb{M}_\alpha = (p!^\alpha)_{p\in\mathbb{N}}$, on a que $\omega(\mathbb{M}_\alpha) = \alpha$. Par conséquent, le tableau 2.2 contient toutes les informations sur les intervalles d'injectivité déduites des résultats classiques pour les suites $\mathbb{M}_\alpha$.

Toutes les informations sont connues (voir exemple 2.1.13) car la fonction $f(z) := \exp(-1/z^{1/\alpha}) \sim_{\mathbb{M}_\alpha} \hat{0}$ et $f \in \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{M}_\alpha}(S_\alpha)$, donc $\widetilde{I}_{\mathbb{M}_\alpha} =]\alpha, \infty[$. Comme mentionné précédemment, nous trouverons de telles fonctions pour toute suite $\mathbb{M}$ en utilisant les ordres proches (voir annexe A).

	$0 < \alpha$
$I_{\mathbb{M}_\alpha}$	$[\alpha, \infty[$
$\widetilde{I}^u_{\mathbb{M}_\alpha}$	$[\alpha, \infty[$
$\widetilde{I}_{\mathbb{M}_\alpha}$	$]\alpha, \infty[$ ou $[\alpha, \infty[$?

TABLE 2.2 – Intervalles d'injectivité pour la suite $\mathbb{M}_\alpha$ avec $\alpha > 0$.

2.2.2 Solution complète et impossibilité de la bijectivité

Maintenant, notre objectsi sera de construire des fonctions plates non triviales dans $\widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{M}}(S_{\omega(\mathbb{M})})$, ce qui, selon la Proposition 2.1.12, revient à obtenir des fonctions holomorphes dans $S_{\omega(\mathbb{M})}$ dont la croissance est convenablement contrôlée par $\omega_{\mathbb{M}}(t)$. La notion d'ordre proche (voir annexe A) jouera un rôle prépondérant à cet égard. Par conséquent, nous obtiendrons le premier résultat de surjectivité affirmant que l'application de Borel n'est jamais bijective.

Théorème 2.2.11. *Supposons que* $\mathbb{M}$ *soit une suite de poids avec* $\omega(\mathbb{M}) \in (0, \infty)$. *Alors,* $\omega(\mathbb{M})$ *n'appartient pas à* $\widetilde{I}_{\mathbb{M}}$.

Démonstration. Par souci de concision, posons $\omega := \omega(\mathbb{M})$. Par le théorème A.1.8, pour la fonction associée $\omega_{\mathbb{M}}$ on a $\rho[\omega_{\mathbb{M}}] = 1/\omega \in (0, \infty)$, et il existe un ordre proche non nul $\rho(t)$, avec $\lim_{t\to\infty} \rho(t) = 1/\omega$, et des constantes $A_1 > 0$ et $t_1 > 0$ telles que

$$\omega_{\mathbb{M}}(t) \leqslant A_1 t^{\rho(t)}, \quad t \geqslant t_1. \tag{2.2.4}$$

Prenons maintenant une fonction $V \in \mathfrak{B}(2\omega, \rho(t))$. La preuve sera complète si on montre que $G(z) := \exp(-V(1/z))$, qui est bien définie et holomorphe dans le secteur S_ω, appartient à $\widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{M}}(S_\omega)$ et qu'elle est plate, pour cela on utilisera la Proposition 2.1.12. Soit le sous-secteur $S(0, \beta, r_0) \ll S_\omega$, où $0 < \beta < \omega$ et $r_0 > 0$. Si $z \in S(0, \beta, r_0)$, on a $1/z \in S_\beta$ car $|\arg z^{-1}| = |-\arg z| < \frac{\beta\pi}{2}$. D'une part, selon (vi) dans le théorème A.1.6, combiné avec (2.2.4), il existe $A_2 > 0$ et $t_2 > 0$ tels que

$$\omega_{\mathbb{M}}(t) A_1 t^{\rho(t)} \leqslant A_2 V(t), \quad t \geqslant t_2. \tag{2.2.5}$$

D'autre part, la Proposition A.1.7 nous fournit des constantes $b > 0$ et $R_0 > 0$ telles que

$$\Re(V(\zeta)) \geqslant bV(|\zeta|), \qquad \zeta \in S_\beta, N - |\zeta| \geqslant R_0. \tag{2.2.6}$$

Choisissons $c > 0$ telle que $c > (A_2/b)^\omega$. Par la propriété (i) du théorème A.1.6 on a

$$\lim_{t\to\infty} \frac{V(t/c)}{V(t)} = \left(\frac{1}{c}\right)^{1/\omega} < \frac{b}{A_2},$$

donc il existe $R_1 > 0$ tel que

$$bV(t) > A_2 V(t/c), \quad t \geqslant R_1. \tag{2.2.7}$$

Soit $R_2 := \max(R_0, R_1, ct_2)$ et $r := R_2^{-1}$. Alors, en utilisant (2.2.6), (2.2.7) et (2.2.5), pour $z \in S(0, \beta, r)$ nous avons

$$-\Re(V(1/z)) \leqslant -bV(1/|z|) < -A_2 V(1/(c|z|)) \leqslant -\omega_{\mathbb{M}}(1/(c|z|)),$$

et donc

$$|G(z)| = e^{-\Re(V(1/z))} \leqslant e^{-\omega_{\mathbb{M}}(1/(c|z|))}.$$

$\forall r \geqslant r_0$. Si $r < r_0$, par compacité, il existe $K > 0$ tel que l'inégalité

$$|G(z)| \leqslant K e^{-\omega_{\mathbb{M}}(1/(c|z|))}$$

pour tout $z \in S(0, \beta, r_0)$.
On a donc construit une fonction plate non triviale. D'où la conclusion. □

Ainsi, le point d'interrogation dans le tableau 2.1 peut être supprimé et la réponse pour cette cellule est $]\omega(\mathbb{M}), \infty[$, ce qui complète l'étude de l'injectivité pour les secteurs non bornés.

Puisque les fonctions plates dans S_γ fournissent (par restriction) des fonctions plates dans toute région sectorielle G_γ d'ouverture $\pi\gamma$, les théorèmes 2.2.8 et 2.2.11 impliquent le résultat suivant.

Corollaire 2.2.12 (Lemme de Watson généralisé pour les régions sectorielles)**.** *Soit* $\mathbb{M}$ *une suite de poids,* $\gamma > 0$ *et* G_γ *une région sectorielle. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*
(i) L'application de Borel $\widetilde{\mathcal{B}} : \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{M}}(G_\gamma) \longrightarrow \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}}$ *est injectif.*
(ii) $\gamma > \omega(\mathbb{M})$.

Démonstration. $(i) \Rightarrow (ii)$ Par l'absurde. Supposons que $\omega(\mathbb{M}) \geqslant \gamma > 0$. Par hypothèse, on a que $\omega(\mathbb{M}) \in \widetilde{I}_{\mathbb{M}}$. D'après le théorème 2.2.11, on a que $\omega(\mathbb{M}) \notin \widetilde{I}_{\mathbb{M}}$. D'où la contradiction.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Découle directement du théorème 2.2.8

□

Théorème 2.2.13. *Soit* $\mathbb{M}$ *une suite de poids. Alors,*

$$S_{\mathbb{M}} \cap I_{\mathbb{M}} = \widetilde{S}^u_{\mathbb{M}} \cap \widetilde{I}^u_{\mathbb{M}} = \widetilde{S}_{\mathbb{M}} \cap \widetilde{I}_{\mathbb{M}} = \varnothing.$$

En d'autres termes, l'application de Borel n'est jamais bijective.

Démonstration. Dans les trois cas, nous allons montrer que la surjectivité pour tout $\gamma > 0$ implique la non-injectivité.

(i) Montrons que $\widetilde{S}_{\mathbb{M}} \cap \widetilde{I}_{\mathbb{M}} = \varnothing$. Supposons que $\widetilde{\mathcal{B}} : \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{M}}(S_\gamma) \longrightarrow \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}}$ soit surjectif. Puisqu'il est clair que la série $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ appartient à $\mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}}$, alors il existe $f \in \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{M}}(S_\gamma)$ telle que $f(z) \sim_{\mathbb{M}} \sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Pour $|z| < 1$, la fonction $g(z) := f(z) - \sum_{n=0}^{\infty} z^n = f(z) - 1/(1-z)$ est holomorphe dans $S_\gamma \backslash \{1\}$ et, par le principe d'unicité du prolongement, g n'est pas identiquement nul. De plus, $g \in \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{M}}(S(0,\gamma,1/2))$ et $g(z) \sim_{\mathbb{M}} \widehat{0}$, et donc l'application de Borel n'est pas injective dans $\widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{M}}(S(0,\gamma,1/2))$(sinon g serait identiquement nul sur $\widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{M}}(S(0,\gamma,1/2))$). Donc par le Corollaire 2.2.12 nous voyons que $\gamma \leqslant \omega(\mathbb{M})$. De nouveau par le Corollaire 2.2.12 nous concluons que $\widetilde{\mathcal{B}} : \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{M}}(S_\gamma) \longrightarrow \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}}$ n'est pas injectif.

(ii) Montrons que $\widetilde{S}^u_{\mathbb{M}} \cap \widetilde{I}^u_{\mathbb{M}} = \varnothing$. Supposons que $\widetilde{\mathcal{B}} : \widetilde{\mathcal{A}}^u_{\mathbb{M}}(S_\gamma) \longrightarrow \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}}$ soit surjectif. Puisque $z \in \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}}$, il existe $f \in \widetilde{\mathcal{A}}^u_{\mathbb{M}}(S_\gamma)$ tel que $f(z) \sim^u_{\mathbb{M}} z$ dans S_γ. La fonction $g(z) := f(z) - z$ est holomorphe dans S_γ et, puisque f est bornée dans S_γ, on a que g n'est pas identiquement nul. De plus, $g(z) \sim^u_{\mathbb{M}} \widehat{0}$ dans $S(0,\gamma,1)$, donc il existe $C, A > 0$ tels que pour chaque $z \in S(0,\gamma,1)$ on a

$$|g(z)| \leqslant CA^p M_p |z|^p, \qquad p \in \mathbb{N}.$$

Par conséquent, la fonction holomorphe $\psi : \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\} \to \mathbb{C}$, définie par $\psi(u) = g(1/u^\gamma)$, n'est pas identiquement nulle. De plus, si $\Re(u) > 1$ alors $|1/u^\gamma| < 1$. Ainsi on en tire que

$$|\Psi(u)| \leqslant \frac{CA^p M_p}{|u|^{\gamma p}}, \qquad p \in \mathbb{N}, \Re(u) > 1.$$

Par le théorème 2.2.2 dans H_1 et nous déduisons que $\sum_{n=0}^{\infty} m_p^{-1/\gamma} < \infty$. Par le théorème 2.2.6 nous concluons que $\widetilde{\mathcal{B}} : \widetilde{\mathcal{A}}^u_{\mathbb{M}}(S_\gamma) \longrightarrow \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}}$ n'est pas injectif.

(iii) Enfin, montrons que $S_{\mathbb{M}} \cap I_{\mathbb{M}} = \varnothing$. Si $\widetilde{\mathcal{B}} : \mathcal{A}_{\mathbb{M}}(S_\gamma) \longrightarrow \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}}$ est surjectif, il existe $f \in \mathcal{A}_{\mathbb{M}}(S_\gamma)$ tel que $f^{(p)}(0) = \delta_{1,p}$ pour chaque $p \in \mathbb{N}$, où $\delta_{1,p}$ est le symbole de Kronecker. Par définition de la classe, il existe $C, A > 0$ (sans perte de généralité, on peut supposer que $C \geqslant 1$ et $CAM_1 \geqslant 1$) tels que

$$|f^{(p)}(z)| \leqslant CA^p p! M_p, \qquad z \in S_\gamma, p \in \mathbb{N}. \tag{2.2.8}$$

Considérons la transformée de Laplace [2] de la fonction $f(z) - z$,

$$g(z) := \int_0^{\infty(\varphi)} e^{-zt}(f(t) - t)\, dt, \qquad z \in S_{\gamma+1}, \tag{2.2.9}$$

où l'intégration se fait sur la demi droite paramétrée par $r \in (0, \infty) \mapsto re^{i\varphi}$, dont l'argument est un nombre réel

$$\varphi \in \left]-\frac{\pi\gamma}{2}, \frac{\pi\gamma}{2}\right[\text{ tel que } \arg(z) + \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[. \tag{2.2.10}$$

Cette dernière condition garantit la décroissance exponentielle à l'infini du facteur e^{-zt} qui, avec la croissance linéaire de $f(t) - t$, assure que la fonction g est bien définie et holomorphe dans $S_{\gamma+1}$. Ainsi, nous avons que

$$\begin{aligned}
|g(z)| &= \left| \int_0^{\infty(\varphi)} e^{-zt} f(t)\, dt - \int_0^{\infty(\varphi)} te^{-zt}\, dt \right| \\
&\leqslant \left| \int_0^{\infty} e^{-re^{i\varphi}z} f(re^{i\varphi}) e^{i\varphi}\, dr - \int_0^{\infty} e^{-re^{i\varphi}z} re^{i\varphi} e^{i\varphi}\, dr \right| \\
&\leqslant \int_0^{\infty} e^{-r\Re(e^{i\varphi}z)} |f(re^{i\varphi})|\, dr + \left| \int_0^{\infty} e^{-re^{i\varphi}z} r\, dr \right|.
\end{aligned}$$

De plus, en utilisant (2.2.8) pour $p = 0$, on a

$$\int_0^{\infty} e^{-r\Re(e^{i\varphi}z)} |f(re^{i\varphi})|\, dr = \left[\frac{-C}{\Re(e^{i\varphi}z)} e^{-r\Re(e^{i\varphi}z)} \right]_0^{\infty} = \frac{C}{\Re(e^{i\varphi}z)}.$$

De plus, par intégration par partie, on a

$$\int_0^{\infty} e^{-re^{i\varphi}z} r\, dr = \left[\frac{-1}{e^{i\varphi}z} e^{-re^{i\varphi}z} \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-r\Re(e^{i\varphi}z)}\, dr = \int_0^{\infty} e^{-r\Re(e^{i\varphi}z)}\, dr$$

2. la transformée de Laplace d'une fonction f d'une variable réelle t, à support positif, est la fonction F de la variable complexe z, définie par :

$$\mathrm{F}(z) = \mathcal{L}\{f\}(p) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt} f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Ainsi, on en tire que

$$\begin{aligned}|g(z)| &\leqslant \frac{C}{\Re(e^{i\varphi}z)} + \left|\frac{1}{e^{i\varphi}z}\int_0^\infty e^{-re^{i\varphi}z}\,dr\right| \\ &\leqslant \frac{C}{\Re(e^{i\varphi}z)} + \frac{1}{|z|\Re(e^{i\varphi}z)},\end{aligned} \tag{2.2.11}$$

pour chaque $z \in S_{\gamma+1}$. Par la suite, en utilisant une par intégration par parties dans (2.2.9), en tenant compte du fait que $f(0) = 0$, on a

$$g(z) = \left[\frac{-1}{z}e^{-zt}(f(t)-t)\right] + \frac{1}{z}\int_0^{\infty(\varphi)} e^{-zt}(f'(t)-1)\,dt = \frac{1}{z}\int_0^{\infty(\varphi)} e^{-zt}(f'(t)-1)\,dt, \qquad z \in S_{\gamma+1}. \tag{2.2.12}$$

Ainsi, en paramétrant et en divisant l'intégrale comme précédemment, et en utilisant (2.2.8) pour $p = 1$ on a

$$|g(z)| \leqslant \frac{CAM_1}{|z|\Re(e^{i\varphi}z)} + \frac{1}{|z|\Re(e^{i\varphi}z)} \leqslant \frac{2CAM_1}{|z|\Re(e^{i\varphi}z)}. \tag{2.2.13}$$

Donc, en itérant l'intégration par parties dans (2.2.12) et en utilisant que $f^{(p)}(0) = \delta_{1,p}$, pour chaque $p \geqslant 2$ on déduit que,

$$g(z) = \frac{1}{z^p}\int_0^{\infty(\varphi)} e^{-zt} f^{(p)}(t)\,dt, \qquad z \in S_{\gamma+1}.$$

De même, en paramétrant et en divisant l'intégrale comme précédemment, et en utilisant (2.2.8) pour $p = 1$ nous déduisons que

$$|g(z)| \leqslant \frac{CA^p p! M_p}{|z|^p \Re(e^{i\varphi}z)}. \tag{2.2.14}$$

Notre objectif est d'appliquer le théorème 2.2.2 à la fonction h donnée par $h(w) = g(w^{\gamma+1})$, $w \in S_1$, lorsqu'elle est restreinte au demi-plan $\{w : \Re(w) > 1\}$. Ainsi de (2.2.11) on en tire que pour $\Re(w) > 1$ (et donc $|w| > 1$) on a

$$|h(w)| \leqslant \frac{C}{\Re(e^{i\varphi}w^{\gamma+1})} + \frac{1}{|w^{\gamma+1}|\Re(e^{i\varphi}w^{\gamma+1})} \leqslant \frac{2C}{\Re(e^{i\varphi}w^{\gamma+1})}.$$

De même, de (2.2.13) et (2.2.14), il résulte que

$$|h(w)| \leqslant \frac{CA^p p! M_p}{|w|^{p(\gamma+1)}\Re(e^{i\varphi}w^{\gamma+1})} \leqslant \frac{2CA^p p! M_p}{|w|^{p(\gamma+1)}\Re(e^{i\varphi}w^{\gamma+1})}, \quad \Re(w) > 1,\ p \in \mathbb{N}.$$

Nous choisissons maintenant φ afin de minimiser la valeur $\Re(e^{i\varphi}w^{\gamma+1})$. Nous étudions deux cas :

(i) Si $|\arg(w)| < \gamma\pi/(2(\gamma+1))$, alors $|\arg(w^{\gamma+1})| = (\gamma+1)|\arg(w)| < \gamma\pi/2$ et, d'apré (2.2.10), on peut choisir $\varphi = -\arg(w^{\gamma+1})$, et on en déduit que $\Re(e^{i\varphi}w^{\gamma+1}) = \Re(e^{-i\arg(w^{\gamma+1})}|w|^{\gamma+1}e^{i\arg(w^{\gamma+1})}) = |w|^{\gamma+1} > 1$. Donc, pour un tel w on a

$$|h(w)| \leqslant \frac{2CA^p p! M_p}{|w|^{p(\gamma+1)}}, \quad p \in \mathbb{N}. \tag{2.2.15}$$

(ii) Si $|\arg(w)| < [\gamma\pi/(2(\gamma+1), \pi/2[$, le choix précédent n'est pas possible, et on choisit

$$\varphi_\varepsilon = \begin{cases} -\frac{\gamma\pi}{2} + \varepsilon & \text{si } \arg(w) \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi\gamma}{2(\gamma+1)}\right], \\ \frac{\gamma\pi}{2} - \varepsilon & \text{si } \arg(w) \in \left[\frac{\pi\gamma}{2(\gamma+1)}, \frac{\pi}{2}\right), \end{cases}$$

pour tout $\varepsilon \in (0, \gamma\pi/2)$. Donc, $\Re(e^{i\varphi_\varepsilon} w^{\gamma+1}) = |w|^{\gamma+1}\cos((\gamma+1)|\arg(w)| - \gamma\pi/2 + \varepsilon)$, et en faisant tendre ε vers 0 on obtient que

$$|h(w)| \leqslant \frac{2CA^p p! M_p}{|w|^{p(\gamma+1)}|w|^{\gamma+1}\cos((\gamma+1)|\arg(w)| - \gamma\pi/2)}, \quad p \in \mathbb{N}. \tag{2.2.16}$$

De plus

$$0 < \frac{\pi}{2} - |\arg(w)| \leqslant (\gamma+1)(\frac{\pi}{2} - |\arg(w)|) \leqslant (\gamma+1)(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi\gamma}{2(\gamma+1)}|) = \frac{\pi}{2},$$

et donc puisque $\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ et que la fonction $x \to \sin(x)$ est croissante sur $]0, \frac{\pi}{2}]$, on a

$$\begin{aligned} |w|\cos\left((\gamma+1)|\arg(w)| - \frac{\gamma\pi}{2}\right) &= |w|\sin\left(\frac{\pi}{2} - (\gamma+1)\left(\frac{\pi}{2} - |\arg(w)|\right)\right) \\ &= |w|\sin\left((\gamma+1)\left(\frac{\pi}{2} - |\arg(w)|\right)\right) \\ &\geqslant |w|\sin\left(\frac{\pi}{2} - |\arg(w)|\right) \\ &= |w|\cos(\arg(w)) = \Re(w) > 1. \end{aligned}$$

Puisque nous avons également $|w|^\gamma > 1$, de (2.2.16) nous obtenons la même majoration (2.2.15) données dans le premier cas.

Puisque h n'est pas identiquement 0, par le théorème 2.2.2 on déduit que la série $\sum_{p=0}^{\infty}((p+1)m_p)^{-1/(\gamma+1)} < \infty$, et le Théorème 2.2.7 implique que $\widetilde{\mathcal{B}} : \mathcal{A}_{\mathbb{M}}(S_\gamma) \longrightarrow \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}}$ n'est pas injectif. □

Corollaire 2.2.14. *Si* $\omega(\mathbb{M}) < \infty$*, alors*

$$S_{\mathbb{M}} \subseteq \widetilde{S}^u_{\mathbb{M}} \subseteq \widetilde{S}_{\mathbb{M}} \subseteq]0, \omega(\mathbb{M})].$$

Démonstration. soit $\alpha \in \widetilde{S}_{\mathbb{M}}$. Supposons que $\alpha > \omega(\mathbb{M})$, alors par le corolaire 2.2.12, on a que $\alpha \in \widetilde{I}_{\mathbb{M}}$, ce qui est absurde par le théorème 2.2.13. □

Chapitre 3

Surjectivité de l'application asymptotique de Borel

Dans ce chapitre nous commencerons par rappeler la surjectivité de l'application de Borel sur la classe des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$. Par la suite, nous regarderons la surjectivité de l'application de Borel d'une part pour les suites de poids et les suites de poids satisfaisant (dc) et d'autre par pour les suites fortement régulières et les suites admettant un ordre proche non nul. Nous nous sommes principalement référencés de [13], [21] et [9].

L'application de Borel tire son origine de sa thèse en 1985. Il montre que qu'il est possible de trouver pour toute suite $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ une fonction de classe C^∞ dont les dérivées à l'origine coïncide avec cette suite. Ainsi nous avons le théorème de Borel suivant :

Théorème 3.0.1. *(1985, Borel) Pour toute suite de nombre réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $D^n f(0) = a_n \; \forall n \in \mathbb{N}$.*

Autrement dit

$$\widetilde{\mathcal{B}} : C^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}[[z]]$$

est surjectif.

Démonstration. Nous allons considérer une fonction plateau [1] φ, et notons $f_n = a_n \varphi\left(\frac{x}{\lambda_n}\right)\frac{x^n}{n!}$. Ainsi nous allons montrer que pour $\lambda_n > 0$ convenablement choisit, la série $\sum_n f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ et ainsi que chaque série dérivée.

Soit $\varphi \in D^\infty(\mathbb{R})$ tel que

1. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$, et K un compact contenu dans U. On appelle fonction plateau toute fonction indéfiniment dérivable, définie sur $\mathbb{R}$, à support dans U, comprise entre 0 et 1, et valant 1 sur K.

$$\varphi(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leqslant \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

Cette fonction existe par le théorème de régularisation d'un ensemble. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, prenons $\lambda_n \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ tel que

$$\frac{1}{\lambda_n} \geqslant \begin{cases} \sup_{\beta \leqslant n} \sup_{x \in \mathbb{R}} |D^\beta \varphi(x)| & \text{si } |a_n| \leqslant 1, \\ |a_n| \sup_{\beta \leqslant n} \sup_{x \in \mathbb{R}} |D^\beta \varphi(x)| & \text{si } |a_n| > 1. \end{cases}$$

Remarquons que $\sup_{x \in \mathbb{R}} |D^\beta \varphi(x)|$ existe puisque $\varphi \in D^\infty(\mathbb{R})$.

Nous allons démontrer que la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi\left(\frac{x}{\lambda_n}\right) \frac{x^n}{n!}$$

convient par application du théorème de la convergence uniforme. De plus, par définition de φ, on a que $f_n = a_n \varphi\left(\frac{x}{\lambda_n}\right) \frac{x^n}{n!} = 0$ si $\left|\frac{x}{\lambda_n}\right| > 1$. Par conséquent, cette fonction et ses dérivées sont nulles sur $\mathbb{R} \backslash [-\lambda_n,\ \lambda_n]$.

(i) On a que $f_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme produit et composé de fonctions de classe $C^\infty(\mathbb{R})$.

(ii) Pour tout $\beta \in \mathbb{N}$, montrons que la série des dérivées

$$\sum_{n=0}^{\infty} D^\beta (a_n \varphi(\frac{x}{\lambda_n}) \frac{x^n}{n!})$$

converge uniformément sur $\mathbb{R}$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \leqslant \lambda_n$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant \beta$, on a

$$\begin{aligned} \left| D^\beta \left(a_n \varphi\left(\frac{x}{\lambda_n}\right) \frac{x^n}{n!} \right) \right| &\leqslant \sum_{\gamma=0}^{\beta} C_\beta^\gamma \left| a_n D^\gamma \left(\frac{x^n}{n!}\right) D^{\beta-\gamma} \left(\varphi\left(\frac{x}{\lambda_n}\right) \right) \right| \\ &\leqslant \sum_{\gamma \leqslant \beta, \gamma \leqslant n} C_\beta^\gamma \frac{\lambda_n^{n-\gamma}}{(n-\gamma)!} \frac{1}{\lambda_n^{\beta-\gamma}} a_n \left| (D^{\beta-\gamma}\varphi)\left(\frac{x}{\lambda_n}\right) \right|. \end{aligned}$$

Si $|a_n| \leqslant 1$, on a $\sup\limits_{\beta \leqslant n} \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |D^\beta \varphi(x)| \leqslant \lambda_n^{-1}$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \leqslant \beta, \gamma \leqslant n} C_\beta^\gamma \frac{\lambda_n^{n-\gamma}}{(n-\gamma)!} . \frac{1}{\lambda_n^{\beta-\gamma}} a_n \left| (D^{\beta-\gamma}\varphi)\left(\frac{x}{\lambda_n}\right) \right| &\leqslant \sum_{\gamma \leqslant \beta, \gamma \leqslant n} C_\beta^\gamma \lambda_n^{n-\beta} \left| (D^{\beta-\gamma}\varphi)\left(\frac{x}{\lambda_n}\right) \right| \\ &\leqslant \sum_{\gamma \leqslant \beta, \gamma \leqslant n} C_\beta^\gamma \lambda_n^{n-\beta-1} \end{aligned}$$

Si $|a_n| > 1$, on sait que $|a_n| \sup_{\beta \leqslant n} \sup_{x\in\mathbb{R}} |D^\beta \varphi(x)| \leqslant \lambda_n^{-1}$ Par le même raisonnement que ci-dessus, on a

$$\sum_{\gamma\leqslant\beta,\gamma\leqslant n} C_\beta^\gamma \frac{\lambda_n^{n-\gamma}}{(n-\gamma)!} \frac{1}{\lambda_n^{\beta-\gamma}} a_n \left| \left(D^{\beta-\gamma}\varphi\right)\left(\frac{x}{\lambda_n}\right)\right| \leqslant \sum_{\gamma\leqslant\beta,\gamma\leqslant n} C_\beta^\gamma \lambda_n^{n-\beta-1}.$$

au final, puisque $\gamma \leqslant \beta$ et $\sum_{\gamma=0}^{\beta} C_\beta^\gamma = 2^\beta$, on a

$$\left| D^\beta \left(a_n \varphi\left(\frac{x}{\lambda_n}\right) \frac{x^n}{n!}\right)\right| \leqslant \sum_{\gamma\leqslant\beta,\gamma\leqslant n} C_\beta^\gamma \lambda_n^{n-\beta-1} \leqslant 2^{2\beta-n+1}. \tag{3.0.1}$$

De plus, si $|x| > \lambda_n$, alors la relation (3.0.1) est trivialement vérifiée. En utilisant la limite d'une série géométrique, on en tire que

$$\sum_{n=\beta}^{\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| D^\beta \left(a_n \varphi\left(\frac{x}{\lambda_n}\right) \frac{x^n}{n!}\right)\right| \leqslant \sum_{n=\beta}^{\infty} 2^{2\beta-n+1} \leqslant 2^{\beta+2},$$

d'où la série des dérivées converge uniformément.

(iii) Pour tout $\beta \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[D^\beta \left(a_n \varphi\left(\frac{x}{\lambda_n}\right) \frac{x^n}{n!}\right)\right]_0 = \left[\sum_{n=0}^{\beta} C_\beta^n D^n \left(\frac{x^n}{n!}\right) a_n D^{\beta-n} \left(\varphi\left(\frac{x}{\lambda_n}\right)\right)\right]_0 = a_\beta.$$

□

3.1 Suites de poids

Notre premier résultat est basé sur un théorème de H.-J. Petzsche dans le cadre des fonctions ultradifférentiables, mais nous ne démontrons pas ce théorème dans ce mémoire. Le lecteur désireux pourra consulter [6] ou [15]. Considérerons l'espace suivant :

Définition 3.1.1. On dit que $f \in \mathcal{E}_{\mathbb{M}}([-1,1])$ si $f \in \mathcal{C}^\infty([-1,1])$ et qu'il existe une constante $A > 0$ pour laquelle

$$\sup_{p\in\mathbb{N},\, x\in[-1,1]} \frac{|f^{(p)}(x)|}{A^p p! M_p} < \infty.$$

De manière correspondante, nous considérons l'application de Borel $\mathcal{B} : \mathcal{E}_{\mathbb{M}}([-1,1]) \longrightarrow \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}}$ qui a $f \in \mathcal{E}_{\mathbb{M}}([-1,1])$ associe sa série de puissance formelle $\sum_{p=0}^{\infty} (f^{(p)}(0)/p!) z^p$.

Théorème 3.1.2 ([6], Thm. 3.5)**.** *Soit $\mathbb{M}$ une suite telle que $\widehat{\mathbb{M}}$ est une suite de poids. Alors, l'application de Borel $\mathcal{B} : \mathcal{E}_{\mathbb{M}}([-1,1]) \longrightarrow \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}}$ est surjective si et seulement si $\widehat{\boldsymbol{m}}$ satisfait (γ_1).*

Nous pouvons donner un premier lien entre l'indice de croissance $\gamma(\mathbb{M})$ et les intervalles de surjectivités pour des suites de poids arbitraires.

Lemme 3.1.3. *Soit* $\mathbb{M}$ *une suite de poids. Si* $\widetilde{S}_{\mathbb{M}} \neq \emptyset$*, alors* $\mathbb{M}$ *possède fnq ou, de manière équivalente,* $\gamma(\mathbb{M}) > 0$.

Démonstration. Soit $\widehat{f} = \sum_{p=0}^{\infty} a_p z^p \in \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}}$. Puisqu'il existe $\gamma > 0$ tel que $\widetilde{\mathcal{B}} : \widetilde{\mathcal{A}}(S_\gamma) \longrightarrow \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}}$ est surjectif, il existe une fonction $f_1 \in \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{M}}(S_\gamma)$ telle que $\widetilde{\mathcal{B}}(f_1) = \widehat{f}$. Une rotation appropriée montre également que l'application $\widetilde{\mathcal{B}} : \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{M}}(S(\pi,\gamma)) \longrightarrow \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}}$ est surjective et donc il existe une fonction $f_2 \in \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{M}}(S(\pi,\gamma))$ telle que $\widetilde{\mathcal{B}}(f_2) = \widehat{f}$. Considérons la fonction h définie par

$$h(x) = f_1(x), \;\; x \in]0,1]; \quad h(x) = f_2(x), \;\; x \in [-1,0[; \quad h(0) = a_0,$$

appartient à $\mathcal{C}^\infty([-1,1])$ et $h^{(p)}(0) = p!a_p$ pour chaque $p \in \mathbb{N}$ (voir Proposition 2.1.8). De plus, en considérant des sous-secteurs appropriés de S_γ (respectivement, $S(\pi,\gamma)$) contenant $]0,1]$ (resp., $[-1,0[$), et encore par une double application de la Proposition 2.1.8.(ii), on obtient une constante $A > 0$ telle que

$$\sup_{p\in\mathbb{N}_0,\, x\in[-1,1]} \frac{|h^{(p)}(x)|}{A^p p! M_p} < \infty.$$

Par conséquent, nous déduisons que l'application de Borel $\mathcal{B} : \mathcal{E}_{\mathbb{M}}([-1,1]) \longrightarrow \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}}$ est également surjective. Puisque $\mathbb{M}$ est une suite de poids, $\widehat{\mathbb{M}}$ l'est aussi, donc par le Théorème 3.1.2 cette surjectivité revient à dire que la suite des quotients de $\widehat{\mathbb{M}} = (p!M_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$, à savoir $\widehat{\boldsymbol{m}}$, satisfait la condition (γ_1), qui est précisément la condition fnq pour $\mathbb{M}$. □

Pour les résultats à venir, nous aurons besoin d'introduire des classes ultradifférentiables suivants :

Pour un entier naturel $r \in \mathbb{N}$ et une suite $\mathbb{M}$, on considère l'espace $\mathcal{N}_{r,\mathbb{M}}([0,\infty[)$ (resp.$\mathcal{D}_{r,\mathbb{M}}(\mathbb{R})$) des fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty([0,\infty[)$ (resp.$f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ à support dans $[-1,1]$) telles que

(a) $f^{(pr+j)}(0) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}_0$ et $j \in \{1,\dots,r-1\}$ (cette condition est vide lorsque $r = 1$),

(b) il existe une constante $A > 0$ pour laquelle

$$||f|| = \sup_{p\in\mathbb{N},\, x\in[0,\infty[} \frac{|f^{(pr)}(x)|}{A^p p! M_p} < \infty.$$

resp.

$$||f|| = \sup_{p\in\mathbb{N},\, x\in\mathbb{R}} \frac{|f^{(pr)}(x)|}{A^p p! M_p} < \infty.$$

Le sous-espace de $\mathcal{N}_{r,\mathbb{M}}([0,\infty[)$ constitué des fonctions dont le support est contenu dans $[0,1]$ sera désigné par $\mathcal{L}_{r,\mathbb{M}}([0,\infty[)$.

De même, nous introduisons l'espace $\mathcal{E}_{r,\mathbb{M}}([0,1])$ des fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty([0,1])$ telles que

(a) $f^{(pr+j)}(0) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $j \in \{1, \dots, r-1\}$ (cette condition est vide lorsque $r = 1$),

(b) il existe une constante $A > 0$ pour laquelle

$$||f|| = \sup_{p \in \mathbb{N},\, x \in [0,1]} \frac{|f^{(pr)}(x)|}{A^p p! M_p} < \infty.$$

Notons que ces espaces coïncident avec les espaces classiques pour $r = 1$. Dans ce contexte, il est naturel de considérer la suite auxiliaire suivante.

Définition 3.1.4. Étant donné une suite $\mathbb{M}$ et $r \in \mathbb{N}$, sa *suite $r-$interpolée* $\mathbb{P}_{r,\mathbb{M}} = \mathbb{P} = (P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par

$$P_{kr+j} = \left(M_k^{r-j} M_{k+1}^j\right)^{1/r}, \quad k \in \mathbb{N}, j \in \{0, \dots, r\}.$$

Notons qu'avec $j = r$ pour k et $j = 0$ pour $k+1$ on obtient la même valeur. De plus, un simple calcul nous permet d'avoir

(i) $\mathbb{P}_{1,\mathbb{M}} = \mathbb{M}$,

(ii) $P_{kr} = M_k$ pour chaque $k \in \mathbb{N}$,

(iii) $p_{kr+j} = (m_k)^{1/r}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $j \in \{0, \dots, r-1\}$,

(iv) Si $\mathbb{M}$ est une suite de poids, alors $\mathbb{P}$ l'est aussi.

Nous déduisons également la relation suivante pour leurs indices d'injectivité.

Lemme 3.1.5. *Soit $\mathbb{M}$ une suite et $r \in \mathbb{N}$. Alors*

$$\omega(\mathbb{M}) = r\omega(\mathbb{P}).$$

Démonstration. En fixant $j \in \{0, \dots, r-1\}$, le lemme se déduit du calcul suivant

$$\begin{aligned}
\omega(\mathbb{M}) &= \liminf_{k \to \infty} \frac{\log m_k}{\log k} = r \liminf_{k \to \infty} \frac{\log (m_k)^{1/r}}{\log k} = r \liminf_{k \to \infty} \frac{\log p_{kr+j}}{\log(kr+j)} \frac{\log(kr+j)}{\log(k)} \\
&= r \liminf_{k \to \infty} \frac{\log p_{kr+j}}{\log(kr+j)} = r\omega(\mathbb{P}).
\end{aligned}$$

□

À présent, nous allons introduire la formule de Hankel, qui sera utile pour la démonstration de certains théorèmes.

Nous utiliserons la représentation intégrale de la fonction Gamma réciproque, généralement appelée appelée *formule de Hankel* (voir [3, p. 228]) :

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\phi} w^{-z} e^w dw$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$ où γ_ϕ est un chemin constitué d'une demi-droite dans la direction $-\phi\pi/2$ (pour tout $\phi \in]1,2[$) dont le point d'arrivée est w_0 sur la droite $\arg(w) = -\phi\pi/2$ puis l'arc de cercle $|w| = |w_0|$ de w_0 au point w_1 sur la droite $\arg(w) = \phi\pi/2$ (parcouru dans le sens inverse des aiguilles d'une montre), et enfin la demi-droite partant de w_1 dans la direction $\phi\pi/2$. Maintenant, pour tout $\beta \in]1, 3/2[$ et tout $t \in S_{(\beta-1)/2}$, on définit

$$\phi_{\beta,t} := \beta + 2\arg(t)/\pi \in](\beta+1)/2, (3\beta-1)/2[\subseteq]1, 7/4[.$$

Par conséquent, le changement de variables $u = t/w$ transforme $\gamma_{\phi_{\beta,t}}$ en δ_β qui est un chemin constitué d'un segment allant de l'origine à un point u_0 avec $\arg(u_0) = \beta\pi/2$, puis de l'arc de cercle $|u| = |u_0|$ de u_0 à le point u_1 sur la droite $\arg(u) = -\beta\pi/2$ (parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre), et enfin le segment allant de u_1 à l'origine. Par conséquent, pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $t \in S_{(\beta-1)/2}$ on a que

$$\frac{t^{z-1}}{\Gamma(z)} = \frac{-1}{2\pi i}\int_{\delta_\beta} u^{z-1}e^{t/u}\frac{du}{u}. \tag{3.1.1}$$

Proposition 3.1.6. *Soit $\mathbb{M}$ une suite telle que $\widehat{\mathbb{M}}$ est une suite de poids et $r \in \mathbb{N}$. Si la restriction de l'application*

$$\mathcal{B}_r : \mathcal{L}_{r,\mathbb{M}}([0,\infty[) \longrightarrow \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}}$$

qui à f associe la série formelle de puissance $\sum_{p=0}^{\infty}(f^{(pr)}(0)/p!)z^p$ est surjective, alors $\widehat{\boldsymbol{m}}$ satisfait (γ_r).

Démonstration. Par le théorème B.0.7,

$$\exists A \in \mathbb{N}_0 : \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M},1} \subset \mathcal{B}_r\mathcal{L}_{r,\mathbb{M},A}([0,\infty[)$$

. i.e il existe des fonctions telles que :

$$\exists A \in \mathbb{N}_0, C > 0 \forall \mathbf{a} = (a_p)_p \in \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M},1} \exists g \in \mathcal{L}_{r,\mathbb{M}}([0,\infty[) :$$

$$(a_p)_p \in \mathcal{B}_r\mathcal{L}_{r,\mathbb{M},A}([0,\infty[), \mathcal{B}_r g = \mathbf{a} \quad \text{et} \quad ||g|| \leqslant C.|\mathbf{a}|_1 = C.\sup_{p\in\mathbb{N}}\left(\frac{|a_p|}{p!M_p}\right).$$

Cela signifie que $\mathcal{B}_r : \mathcal{L}_{r,\mathbb{M}}([0,\infty[) \longrightarrow \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M},1}$ est surjectif. En particulier, pour $p \in \mathbb{N}$, soient les vecteurs unitaires $e_p := (\cdots, 0, 1, 0, \cdots) \in \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M},1}$. Alors, il existe des fonctions réelles $\varphi_p \in \mathcal{L}_{r,\mathbb{M}}([0,\infty[)$ telles que :

$$\varphi_p^{(jr)}(0) = (e_p)_p = \begin{cases} 1, & j = p, \\ 0 & j \in N_0, j \neq p, \\ ||\varphi_p|| \leqslant \frac{C}{p!M_P} = \frac{C}{\widehat{M_P}} \end{cases}$$

Comme $supp(\varphi_p) \subset [0,1]$, on a que $\varphi_p^{(pr)}(1) = 0$ et

$$\alpha_p = \inf\{x \in [0,1] | \varphi_p^{(pr)}(x) < 1/2\}$$

satisfait $0 < \alpha_p < 1$. En particulier, $\varphi_{2p}^{(2pr)}(x) \geqslant 1/2$ pour $x \in [0, \alpha_{2p}]$. Ainsi, en intégrant pr fois cette dernière inégalité, on en tire que

$$\varphi_{2p}^{(pr)}(x) \geqslant \frac{x^{pr}}{2(pr)!} \forall x \in [0, \alpha_{2p}]$$

D'où pour $x = \alpha_{2p}$, en utilisant la définition de la norme, le fait que $\widehat{\mathbb{M}}$ est une suite de poids, on a

$$\begin{aligned}
\alpha_{2p}^{pr} &\leqslant 2(pr)!\varphi_{2p}^{(pr)}(\alpha_{2p}) \\
&\leqslant 2(pr)!||\varphi_{2p}^{(pr)}||A^p\widehat{M}_p \\
&\leqslant 2(pr)^{pr}CA^p\frac{\widehat{M}_p}{\widehat{M}_{2p}} \\
&\leqslant 2C(pr)^{pr}A^p\frac{1}{\widehat{m}_p^p},
\end{aligned}$$

il résulte donc que

$$\alpha_{2p} \leqslant r\sqrt[pr]{2C}\sqrt[r]{A}\frac{p}{\sqrt[r]{\widehat{m}_p}}$$

Maintenant montrons que si

$$\exists p_0 \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad h > 0 : \alpha_{2p} \geqslant \sum_{k=4p}^{\infty} \frac{h}{\sqrt[r]{\widehat{m}_k}}, \quad \forall p \geqslant p_0 \tag{3.1.2}$$

Alors la condition (γ_r) est vérifiée, car

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{\infty} \frac{h}{\sqrt[r]{\widehat{m}_k}} = \sum_{k=p}^{4p-1} \frac{h}{\sqrt[r]{\widehat{m}_k}} + \sum_{k=4p}^{\infty} \frac{h}{\sqrt[r]{\widehat{m}_k}} &\leqslant \frac{3p}{\sqrt[r]{\widehat{m}_k}} + \frac{\alpha_{2p}}{h} \\
&\leqslant \left(3 + \frac{r}{h}\sqrt[pr]{2C}\sqrt[r]{A}\right)\frac{p}{\sqrt[r]{\widehat{m}_p}}
\end{aligned}$$

Pour démontrer 3.1.2 pour $h \in]0, \frac{1}{4}A^{-3/r}[$, on définie l'ensemble

$$P := \{p \in \mathbb{N} | \alpha_{2p} < \sum_{k=4p}^{\infty} \frac{h}{\sqrt[r]{\widehat{m}_k}}\}.$$

Montrons que P est fini.

Soient $p \in P$ et $\varrho_p(x) := \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \varphi_{2p}^{(pr)}(x) - 1, & x \geqslant 0 \end{cases}$ et soit la suite décroissante

$$\frac{1}{q_k} := \begin{cases} \frac{h}{\sqrt[r]{\widehat{m}_{4p}}}, & \text{pour } k \in \mathbb{N} \text{ tel que } k \leqslant pr, \\ \frac{h}{\sqrt[r]{\widehat{m}_{4p+l+1}}}, & \text{pour } k \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N} \text{ tel que } (p+l)r \leqslant k \leqslant (p+l+1)r. \end{cases}$$

Ainsi, on que $\alpha_{2p} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q_k}$. D'où par le lemme B.0.5, pour $T = \alpha_{2p}$, $(a_j)_j = (\frac{1}{q_j})_j$ et $m = +\infty$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} = |\varrho(\alpha_{2p})| &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} 4^k \sup_{x<\alpha_{2p}} \frac{1}{q_1} \cdots \frac{1}{q_k} |\varrho_p^{(k)}(x)| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} 4^{(p+k)r} \sup_{x<\alpha_{2p}} (\frac{1}{q_p})^{pr} (\frac{1}{q_{(p+1)r}})^r \cdots (\frac{1}{q_{(p+k)r}})^r |\varphi_{2p}^{((3p+k)r)}(x)| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^{(p+k)r} h^{(p+k)r}}{\widehat{m}_{4p}^p \widehat{m}_{4p+1} \cdots \widehat{m}_{4p+k}} \sup_{x \geqslant 0} |\varphi_{2p}^{((3p+k)r)}(x)| \quad \text{par definition de la suite } (\frac{1}{q_j})_j. \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^{(p+k)r} h^{(p+k)r}}{\widehat{m}_{4p}^p \widehat{m}_{4p+1} \cdots \widehat{m}_{4p+k}} ||\varphi_{2p}|| A^{3p+k} \widehat{M}_{3p+k} \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4h)^{(p+k)r}}{\widehat{m}_{4p}^p \widehat{m}_{4p+1} \cdots \widehat{m}_{4p+k}} . \frac{C}{\widehat{M}_{2p}} A^{3p+k} \widehat{M}_{3p+k} \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} (4h)^{(p+k)r} C A^{3p+k} \quad \text{car la suite } \widehat{\boldsymbol{m}} \text{ est croissante} \\
&= C(4h)^{pr} A^{3p} \sum_{k=0}^{\infty} ((4h)^r A)^k = \frac{C}{1-(4h)^r A} ((4h)^r A^3)^p.
\end{aligned}$$

Enfin, nous concluons que P ne peut être constitué que d'un nombre fini d'indices car $((4h)^r A^3)^p \to 0$ lorsque $p \to +\infty$ □

Théorème 3.1.7. *Soit* $\mathbb{M}$ *une suite de poids.*

(i) Soit $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$, *tel que* $\widetilde{\mathcal{B}} : \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{M}}(S_\alpha) \to \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}}$ *est surjectif. Alors,* $\gamma(\mathbb{M}) > \lfloor \alpha \rfloor$.

(ii) Si on a que $\widetilde{S}_{\mathbb{M}} =]0, \infty[$, *alors* $\gamma(\mathbb{M}) = \infty$.

Démonstration. (i) Considérons d'abord le cas $\alpha \in]0,1[$. Il suffit alors d'appliquer le Lemma 3.1.3 pour obtenir que $\mathbb{M}$ possède (fnq), ou de manière équivalente $\gamma(\mathbb{M}) > 0 = \lfloor \alpha \rfloor$, comme souhaité. Supposons maintenant que $\alpha > 1$ et posons $r = \lfloor \alpha \rfloor$, un entier naturel positif. Tout d'abord, pour $\check{\mathbb{M}} = (M_p/p!)_{p \in \mathbb{N}}$ nous allons prouver que la restriction de l'application $\mathcal{B}_r : \mathcal{E}_{r,\check{\mathbb{M}}}([0,1]) \longrightarrow \mathbb{C}[[z]]_{\check{\mathbb{M}}}$ est surjective. Puisque $r \notin \mathbb{N}$, on peut choisir deux nombres β_1, β_2 avec

$$1 < \beta_1 < \beta_2 < \min\{\frac{\alpha}{r}, \frac{3}{2}\}.$$

Étant donné $\widehat{g} = \sum_{p=0}^{\infty} a_p z^p \in \mathbb{C}[[z]]_{\breve{\mathbb{M}}}$, on écrit $b_p := a_p p!$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, et il existe $C_0, A_0 > 0$ tels que

$$|b_p| \leqslant C_0 A_0^p p! \breve{M}_p = C_0 A_0^p M_p, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Par conséquent, la transformée de Laplace formelle de $\widehat{g}$, définie par $\widehat{f} := \widehat{L}\widehat{g} = \sum_{p=0}^{\infty} b_p z^p$ appartient à $\mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}}$. Par hypothèse, il existe $\psi \in \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{M}}(S_\alpha)$ tel que $\widetilde{\mathcal{B}}(\psi) = \widehat{f}$. Par conséquent, étant donné β_2 et $R > 1$, il existe $C, A > 0$ tels que pour chaque $p \in \mathbb{N}$ on a

$$\left|\psi(z) - \sum_{k=0}^{p-1} b_k z^k\right| \leqslant C A^p M_p |z|^p, \qquad z \in S(0, r\beta_2, R^r). \tag{3.1.3}$$

La fonction $\varphi : S_{\alpha/r} \to \mathbb{C}$ donnée par $\varphi(u) = \psi(u^r)$, est bien définie et holomorphe dans $S_{\alpha/r}$, qui contient S_{β_2} comme sous-secteur propre non borné. De plus, selon (3.1.3) pour $p = 0$, pour chaque $w \in S(0, \beta_2, R)$ on a

$$|\varphi(u)| = |\psi(u^r)| \leqslant C M_0. \tag{3.1.4}$$

Nous considérons maintenant un chemin δ_{β_1} dans $S(0, \beta_2, R)$ constitué d'un segment δ_1 de l'origine à un point u_0 avec $|u_0| = R_0 < R$ et $\arg(u_0) = \pi\beta_1/2$, puis l'arc de cercle δ_2, parcouru dans le sens horaire sur la circonférence $|u| = R_0$ et allant de u_0 au point u_1 de la demie droite $\arg(u_1) = -\pi\beta_1/2$, et enfin le segment δ_3 allant de u_1 à l'origine.

Considérons la fonction $f : S_{(\beta_1-1)/2} \to \mathbb{C}$ donnée par

$$f(t) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\delta_{\beta_1}} e^{t/u} \varphi(u) \frac{du}{u}.$$

Observez que $\varphi(u)$ est holomorphe et borné à 0 dans $S(0, \beta_2, R)$, et pour chaque $t \in S_{(\beta_1-1)/2}$ on peut facilement vérifier que t/u passe par une demi-droite dans le demi-plan gauche ouvert et tend vers l'infini comme u passe par l'un des segments δ_1 ou δ_3 et tend vers 0. Par conséquent, f est holomorphe dans le secteur $S_{(\beta_1-1)/2}$. Notons qu'en vertu du théorème de Cauchy, la valeur attribuée à R_0 dans la définition de δ_{β_1} est sans importance pour la valeur de f.

Fixons dans les estimations suivantes un certain $t \in S(0, (\beta_1 - 1)/2, R)$ et un certain nombre naturel $p \in \mathbb{N}$. La formule de Hankel (3.1.1) pour $z = kr + 1$ nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} f(t) - \sum_{k=0}^{p-1} b_k \frac{t^{kr}}{(kr)!} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_{\beta_1}} e^{t/u} \left(\varphi(u) - \sum_{k=0}^{p-1} b_k u^{kr}\right) \frac{du}{u} \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{3} \int_{\delta_j} e^{t/u} \left(\varphi(u) - \sum_{k=0}^{p-1} b_k u^{kr}\right) \frac{du}{u}. \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

En prenant en compte (3.1.3), pour tout $u \in S(0, \beta_2, R)$ on a

$$\left|\varphi(u) - \sum_{k=0}^{p-1} b_k u^{kr}\right| = \left|\psi(u^r) - \sum_{k=0}^{p-1} b_k (u^r)^k\right| \leqslant C A^p M_p |u|^{pr}. \tag{3.1.6}$$

Donc, si nous choisissons $R_0 = |t|/p < R$, nous pouvons appliquer (3.1.6) et voir que

$$\left| \int_{\delta_2} e^{t/u} \left(\varphi(u) - \sum_{k=0}^{p-1} b_k u^{kr} \right) \frac{du}{u} \right| \leqslant \pi \beta_1 e^p C A^p M_p \left(\frac{|t|}{p} \right)^{pr}. \tag{3.1.7}$$

D'autre part, par les mêmes estimations (3.1.6) et par le choix fait pour R_0, pour $j = 1, 3$ on a

$$\begin{aligned} \left| \int_{\delta_j} e^{t/u} \left(\varphi(u) - \sum_{k=0}^{p-1} b_k u^{kr} \right) \frac{du}{u} \right| &\leqslant C A^p M_p \int_0^{|t|/p} s^{pr} |e^{t/(s e^{\pm i\pi\beta_1/2})}| \frac{ds}{s} \\ &\leqslant C C_1 A^p M_p \left(\frac{|t|}{p} \right)^{pr}, \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

où C_1 est une constante, indépendante de t et de p, donnée par

$$\begin{aligned} C_1 &= \sup_{t \in S(0,(\beta_1-1)/2,R),\ p \in \mathbb{N}} \int_0^{|t|/p} |e^{t/(s e^{\pm i\pi\beta_1/2})}| \frac{ds}{s} \\ &= \sup_{t \in S(0,(\beta_1-1)/2,R),\ p \in \mathbb{N}} \int_0^{|t|/p} e^{|t| \cos(\arg(t) \mp \pi\beta_1/2)/s} \frac{ds}{s} \\ &\leqslant \sup_{|t|<R,\ p \in \mathbb{N}} \int_0^{|t|/p} e^{-|t| \cos(\pi(\beta_1-1)/4)/s} \frac{ds}{s} = \sup_{p \in \mathbb{N}} \int_0^{1/p} e^{-\cos(\pi(\beta_1-1)/4)/u} \frac{du}{u} \\ &\leqslant \int_0^1 e^{-\cos(\pi(\beta_1-1)/4)/u} \frac{du}{u} < \infty. \end{aligned}$$

D'après (3.1.5), (3.1.7) et (3.1.8), et en utilisant la formule de Stirling, on trouve qu'il existe des constantes $C_2, A_2 > 0$ telles que pour chaque $p \in \mathbb{N}$ et $t \in S(0, (\beta_1 - 1)/2, R)$ on a

$$\left| f(t) - \sum_{k=0}^{p-1} b_k \frac{t^{kr}}{(kr)!} \right| \leqslant C_2 A_2^p \frac{M_p}{(pr)!} |t|^{pr}. \tag{3.1.9}$$

Cette dernière estimation est également valable pour $p = 0$, de manière similaire, en prenant $R_0 = |t|$ et en utilisant la définition de f et (3.1.4). On peut donc montrer que f admet la série $\sum_{p=0}^{\infty} b_p t^{pr}/(pr)!$ comme son développement asymptotique lorsque t tend vers 0 dans le secteur (si $r \geqslant 2$ on observe que pour $(p-1)r + 1 \leqslant n < pr$ on a $|t|^{pr} \leqslant |t|^n$ pour $|t| \leqslant 1$). Alors pour tout $m \in \mathbb{N}$ et chaque sous-secteur propre T de $S(0, (\beta_1 - 1)/2, R)$ on a

$$\lim_{t \to 0,\ t \in T} f^{(m)}(t) = \begin{cases} b_p & \text{si } m = pr \text{ pour un certain nombre naturel } p \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.1.10}$$

Enfin, nous définissons la fonction $F\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ donnée par $F(t) = f(t)$ pour $t \in (0,1]$, $F(0) = b_0$. Puisque f est holomorphe dans $S(0, (\beta_1 - 1)/2, R)$ et que nous avons (3.1.10), nous déduisons immédiatement que F appartient à $\mathcal{C}^\infty([0,1])$ et que

$$F^{(m)}(0) = \begin{cases} b_p & \text{si } m = pr \text{ pour un certain } p \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus, nous pouvons prendre $\varepsilon > 0$ de telle sorte que pour chaque $t \in]0,1]$ le disque $D(t, \varepsilon t)$ est contenu dans $S(0, (\beta_1 - 1)/2, R)$. Alors, la formule intégrale de Cauchy ainsi que (3.1.9) nous permettent de déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$|F^{(pr)}(t)| = \left| \left(f(t) - \sum_{k=1}^{p-1} b_k \frac{t^{kr}}{(kr)!} \right)^{(pr)} \right| \leqslant (pr)! \left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \right)^{pr} \frac{C_2 A_2^p M_p}{(pr)!} = C_3 A_3^p M_p.$$

En conclusion, $F \in \mathcal{E}_{r,\breve{\mathbb{M}}}([0,1])$ et $\mathcal{B}_r(F) = \widehat{g}$. Donc, S est surjectif.

Deuxièmement, d'après le Théorème 2.2.13 l'application $\widetilde{\mathcal{B}} : \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{M}}(S_\alpha) \to \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}}$ n'est pas injective, ce quisignifie par le Théorème 2.2.12 que $\alpha \leqslant \omega(\mathbb{M})$, alors $r = \lfloor \alpha \rfloor < \omega(\mathbb{M})$ car $\alpha \notin \mathbb{N}$. Par le Lemma 3.1.5 et par la proposition 1.4.14, si $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{r,\mathbb{M}}$ nous avons que

$$\omega(\breve{\mathbb{P}}) = \omega(\mathbb{P}_{r,\mathbb{M}}) - 1 = \omega(\mathbb{M})/r - 1 > 0.$$

Par conséquent, puisque $\mathbb{P}$ est (lc), on peut prendre en compte (**??**) et déduire que $\breve{\mathbb{P}}$ a (nq), donc par le théorème de Denjoy-Carleman (voir [8, Ch. 1]) il existe une $\mathcal{C}^\infty$ fonction C^∞ positive φ dans $\mathbb{R}$ à support dans $[-1,1]$ et qui prend la valeur 1 dans un voisinage de 0, telle qu'il existe $A > 0$ avec

$$\sup_{t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}} \frac{|\varphi^{(n)}(t)|}{A^n P_n} < \infty.$$

Par le lemme B.0.4, pour tout $h \in \mathcal{E}_{\nabla,\breve{\mathbb{M}}}([0,1])$ on peut vérifier que le produit φh appartient à $\mathcal{L}_{r,\breve{\mathbb{M}}}([0,\infty))$ et, de plus, $(\varphi h)^{(p)}(0) = h^{(p)}(0)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Puisque $\mathcal{B}_r : \mathcal{E}_{r,\breve{\mathbb{M}}}([0,1]) \longrightarrow \mathbb{C}[[z]]_{\breve{\mathbb{M}}}$ est surjectif, nous déduisons que $\mathcal{B}_r : \mathcal{L}_{r,\breve{\mathbb{M}}}([0,\infty)) \longrightarrow \mathbb{C}[[z]]_{\breve{\mathbb{M}}}$ l'est aussi. Par la Proposition 3.1.6, on conclut que $\boldsymbol{m}$ satisfait (γ_r), ce qui revient à $\gamma(\mathbb{M}) > r = \lfloor \alpha \rfloor$.

(ii) C'est une conséquence immédiate de (i). □

Corollaire 3.1.8. *Lorsque* $\mathbb{M}$ *est une suite de poids, si* $\gamma(\mathbb{M}) < \infty$ *on a toujours*

$$\widetilde{S}_{\mathbb{M}} \subseteq (0, \lfloor \gamma(\mathbb{M}) \rfloor + 1].$$

Dans le cas où $\gamma(\mathbb{M}) \in \mathbb{N}$*, alors* $\widetilde{S}_{\mathbb{M}} \subseteq]0, \gamma(\mathbb{M}) + 1[$.

Démonstration. Le cas $\widetilde{S}_{\mathbb{M}} = \varnothing$ est trivial. Nous traitons donc le cas dans lequel l'intervalle de surjectivité n'est pas vide, ce qui selon le Lemma 3.1.3 implique $\gamma(\mathbb{M}) > 0$.

Soit $\alpha \in \widetilde{S}_{\mathbb{M}}$. D'une part, si $\alpha \notin \mathbb{N}$, par le théorème 3.1.7 on a $\lfloor \alpha \rfloor < \gamma(\mathbb{M})$, et donc $\alpha - 1 < \lfloor \alpha \rfloor \leqslant \lfloor \gamma(\mathbb{M}) \rfloor$, d'où $\alpha < \lfloor \gamma(\mathbb{M}) \rfloor + 1$. Par contre, si $\alpha \in \mathbb{N}$ alors on peut appliquer le théorème 3.1.7 pour tout $\beta \in]\alpha - 1, \alpha[$ (puisque $\beta \in \widetilde{S}_{\mathbb{M}}$ aussi) et déduire que $\alpha - 1 = \lfloor \beta \rfloor < \gamma(\mathbb{M})$, donc $\alpha < \gamma(\mathbb{M}) + 1$. Nous déduisons que $\alpha \leqslant \lfloor \gamma(\mathbb{M}) + 1 \rfloor = \lfloor \gamma(\mathbb{M}) \rfloor + 1$, sauf dans le cas $\gamma(\mathbb{M}) \in \mathbb{N}$, où de plus α ne peut pas coïncider avec $\gamma(\mathbb{M}) + 1$. La conclusion s'ensuit facilement. □

Remarque 3.1.9. En résumé, pour une suite de poids $\mathbb{M}$ et en prenant en compte (2.2.2) et le théorème 2.2.13 nous voyons que :

(i) si $\gamma(\mathbb{M}) = 0$ (de manière équivalente, si $\mathbb{M}$ n'a pas fnq) alors $S_{\mathbb{M}} = \widetilde{S}^u_{\mathbb{M}} = \widetilde{S}_{\mathbb{M}} = \varnothing$.

(ii) si $\gamma(\mathbb{M}) \in]0, \infty[$ and

  (a) $\gamma(\mathbb{M}) \notin \mathbb{N}$, alors $S_{\mathbb{M}} \subseteq \widetilde{S}^u_{\mathbb{M}} \subseteq \widetilde{S}_{\mathbb{M}} \subseteq]0, \lfloor\gamma(\mathbb{M})\rfloor + 1] \cap (0, \omega(\mathbb{M})]$,

  (b) $\gamma(\mathbb{M}) \in \mathbb{N}$, alors $S_{\mathbb{M}} \subseteq \widetilde{S}^u_{\mathbb{M}} \subseteq \widetilde{S}_{\mathbb{M}} \subseteq]0, \gamma(\mathbb{M}) + 1[\cap]0, \omega(\mathbb{M})]$.

Si $\omega(\mathbb{M}) = \infty$, le deuxième intervalle dans ces intersections est remplacé par $]0, \infty[$.

3.2 Suites de poids satisfaisant (dc)

Comme il a été souligné dans la Remarque 3.1.9, le Corollaire 3.1.8 fournit également des informations sur $\widetilde{S}^u_{\mathbb{M}}$. Afin de l'améliorer légèrement, il nous faut imposer la condition (dc).

Proposition 3.2.1. *Soit $r \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{M}$ une suite telle que $\widehat{\mathbb{M}} = (p!M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de poids. Si l'application $\mathcal{B}_r : \mathcal{N}_{r,\mathbb{M}}([0,\infty)) \longrightarrow \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}}$ qui à f associe la série formelle de puissance $\sum_{p=0}^{\infty}(f^{(pr)}(0)/p!)z^p$ est surjective, alors la suite $\widehat{\boldsymbol{m}} = ((p+1)m_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ satisfait la condition (γ_r).*

Démonstration. Soit $\mathbb{P}$ la $r-$interpolation de de $\mathbb{M}$.
• Montrons que pour tout $g \in \mathcal{N}_{r,\mathbb{M}}([0,\infty))$, la restriction $g|_{[0,1]} \in \mathcal{E}_{\mathbb{P}}([0,1])$. Soit g une telle fonction, alors il existe $A > 0$ tel que

$$|g^{(pr)}(x)| \leqslant ||g||A^p\widehat{M}_p, \quad \forall p \in \mathbb{N}_0, \forall x \in [0, +\infty.$$

Posons $h := g^{(pr)}\left(\frac{\cdot+1}{2}\right) \in C^{\infty}([-1,1])$. Pour $t \in [-1,1]$, on a

$$|h(t)| = \left|g^{(pr)}\left(\frac{t+1}{2}\right)\right| \leqslant ||g||A^{pr}\widehat{M}_p := Q_0$$

$$|h^{(r)}(t)| = 2^{-r}\left|g^{((p+1)r)}\left(\frac{t+1}{2}\right)\right| \leqslant 2^{-r}||g||A^{(p+1)r}\widehat{M}_{p+1} := Q_r.$$

Par le lemme B.0.4, on obtient donc pour $q \in \{1, \cdots, r-1\}$:

$$\begin{aligned}
|h^{(q)}(t)| &= 2^{-q}\left|g^{(pr+q)}\left(\frac{t+1}{2}\right)\right| \\
&\leqslant \left(\frac{8er}{q}\right)^q \max\left(\left(|g||A^{pr}\widehat{M}_p\right)^{1-q/r}\left(2^{-r}||g||A^{(p+1)r}\widehat{M}_{p+1}\right)^{q/r}, \left(\frac{r}{2}\right)^q ||g||A^{pr}\widehat{M}_p\right) \\
&= \left(\frac{4er}{q}\right)^q ||g|| \max\left(A^{pr+q}\widehat{M}_p^{1-q/r}\widehat{M}_{p+1}^{q/r}, r^q A^{pr}\widehat{M}_p\right) \\
&= \left(\frac{4er}{q}\right)^q ||g||A^{pr} \max\left(A^p \widehat{P}_{pr+q}, r^q \widehat{P}_{pr}\right) \\
&\leqslant \left(\frac{4er}{q}\right)^q ||g||A^{pr}\left(\max(A,r)\right)^q \widehat{P}_{pr+q} \\
&\leqslant C||g||A^{pr}\widehat{P}_{pr+q}
\end{aligned}$$

avec $C := \max_{q\in\{1,\cdots,r-1\}}\left(\left(\frac{4er}{q}\right)^q (\max(A,r))^q\right)$.

Enfin, pour $x \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned}
\left|g^{(pr+q)}\left(\frac{t+1}{2}\right)\right| &= \left|2^q h^{(q)}(2x-1)\right| \leqslant 2^q C||g||A^{pr}\widehat{P}_{pr+q} \\
&= 2^q C||g||A^{-q}A^{pr+q}\widehat{P}_{pr+q} \\
&\leqslant C' A^{pr+q}\widehat{P}_{pr+q},
\end{aligned}$$

avec $C' := 2^r \max(1, A^{-r})C||g||$. D'où la conclusion.

• Montrons qu'il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{P}}([-1,1])$ tel que $\varphi = 1$ au voisinage de 0.

La suite $(e_p)_p$ définie par $e_1 = 1$ et $e_p = 0$ sinon appartient à $\mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}}$. Ainsi par Surjectivité, il existe $\varphi \in \mathcal{N}_{r,\mathbb{M}}([0,\infty[)$ tel que $\varphi^{(r)}(0) = 1$ et $\varphi^{(p)}(0) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}_0$ et distinct de r. Comme φ est borné sur $[0,+\infty[$, la fonction ψ définie sur $[0,+\infty[$ par $\psi(x) := \varphi(x) - x^r/r!$ n'est pas identiquement nulle mais $\mathcal{B}_r\psi = 0$ $i.e$ $\psi^{(p)}(0) = 0$ $\forall p \in \mathbb{N}_0$. Deux cas sont possibles :

1) Si $\psi|_{[0,1]} \not\equiv 0$, alors posons $f := \psi|_[0,1]$.
2) Si $\psi|_{[0,1]} \equiv 0$. Soit $x_0 := \sup\{x \geqslant 0 | \psi(t) = 0 \forall t \in [0,x]\}$, posons $f := \psi(.+x_0)|_[0,1]$.

Ainsi, par le point précédent, $f \in \mathcal{E}_{\mathbb{P}}([0,1])$ et par construction $f \not\equiv 0$ avec $\mathcal{B}_r f = 0$. Donc par le théorème de Denjoy-Carleman (voir [8, Ch. 1]), on a que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{n-1}}{P_n} < \infty$ et il existe $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{P}}([-1,1])$ tel que $\varphi = 1$ au voisinage de 0.

• Enfin, soit $\mathbf{a} = (a_p)_p \in \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}}$. Alors par hypothèse il existe une fonction $g \in \mathcal{N}_{r,\mathbb{M}}([0,\infty))$ tel que $\mathcal{B}_r g = \mathbf{a}$ ($i.e g^{(pr)} = a_p$). De plus, la fonction h définie sur $[0,\infty[$ par

$$h(x) = \begin{cases} \varphi(x)g(x), & x \in [0,1] \\ 0, & sinon \end{cases}$$

appartient à $\mathbb{C}^\infty([0,\infty[)$ et vérifie $h^{(pr)} = a_p$.
Montrons que $h \in \mathcal{L}_{r,\mathbb{M}}([0,\infty[)$.
Soient $p \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$. Puisque $g|_{[0,1]} \in \mathcal{E}_{\mathbb{P}}([0,1])$ et $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{P}}([-1,1])$, il existe $A > 0$ tel que

$$\begin{aligned}
\left|h^{(pr)}(x)\right| &= \Big|\sum_{j=0}^{pr} C_j^{pr} \varphi^{(pr-j)}(x) g^{(j)}(x)\Big| \\
&\leqslant \sum_{j=0}^{pr} C_j^{pr} ||\varphi|| A^{pr-j} \widehat{N}_{pr-j} ||g|| A^j \widehat{N}_j \\
&\leqslant ||\varphi|| ||g|| A^{pr} \widehat{N}_{pr} \sum_{j=0}^{pr} C_j^{pr} \\
&= ||\varphi|| ||g|| ((2A)^r)^p \widehat{M}_p,
\end{aligned}$$

D'où $h \in \mathcal{L}_{r,\mathbb{M}}([0,\infty[)$. Par conséquent l'application

$$\mathcal{B}_r : \mathcal{L}_{r,\mathbb{M}}([0,\infty[) \longrightarrow \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}}$$

est surjective. D'où la conclusion par la proposition 3.1.6. $\square$

Théorème 3.2.2. *Soit $\mathbb{M}$ une suite de poids satisfaisant (dc).*
(i) Soit $\alpha > 0$ tel que $\widetilde{\mathcal{B}} : \widetilde{\mathcal{A}}^u_{\mathbb{M}}(S_\alpha) \to \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}}$ est surjectif. Alors, $\gamma(\mathbb{M}) > \lfloor\alpha\rfloor$.
(ii) Si on a que $\widetilde{S}^u_{\mathbb{M}} = (0,\infty)$, alors $S_{\mathbb{M}} = \widetilde{S}^u_{\mathbb{M}} = \widetilde{S}_{\mathbb{M}} = (0,\infty)$ et $\gamma(\mathbb{M}) = \infty$.

Démonstration. (i) Considérons d'abord le cas $\alpha \in]0,1[$, puis $\alpha \in \widetilde{S}^u_{\mathbb{M}} \subseteq \widetilde{S}_{\mathbb{M}}$ et $\alpha \notin \mathbb{N}$, alors par le théorème 3.1.7 on conclut que $\gamma(\mathbb{M}) > 0$. Notons que dans ce cas, on n'a pas utilisé (dc).

Supposons maintenant que $\alpha \geqslant 1$ et mettons $r = \lfloor\alpha\rfloor$, un entier naturel positif (notons que, par le théorème 3.1.7, nous n'aurions besoin de considérer que le cas $\alpha = r \in \mathbb{N}$ mais la preuve fonctionne quand même). Notre objectif est de montrer que $\mathcal{B}_r : \mathcal{N}_{r,\breve{\mathbb{M}}}([0,\infty)) \longrightarrow \mathbb{C}[[z]]_{\breve{\mathbb{M}}}$ est surjectif.

Étant donné $\widehat{g} = \sum_{p=0}^\infty a_p z^p \in \mathbb{C}[[z]]_{\breve{\mathbb{M}}}$,posons $b_p := a_p p!$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Alors il existe $C_0, A_0 > 0$ tels que

$$|b_p| \leqslant C_0 A_0^p p! \breve{M}_p = C_0 A_0^p M_p, \quad p \in \mathbb{N}. \tag{3.2.1}$$

Considérons la série de puissance formelle $\widehat{f} = \sum_{p=0}^\infty (-1)^{pr} b_p z^p \in \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}}$. Par hypothèse, il existe $\psi \in \widetilde{\mathcal{A}}^u_{\mathbb{M}}(S_\alpha)$ tel que $\widetilde{\mathcal{B}}(\psi) = \widehat{f}$, et donc il existe $C, A > 0$ tel que pour chaque $p \in \mathbb{N}$ on a

$$\left|\psi(z) - \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{kr} b_k z^k\right| \leqslant C A^p M_p |z|^p, \qquad z \in S_\alpha. \tag{3.2.2}$$

La fonction $\varphi : S_{\alpha/r} \to \mathbb{C}$ donnée par $\varphi(w) = \psi(w^{-r}) - b_0$, est bien définie et holomorphe dans $S_{\alpha/r} \supseteq S_1$. De plus, selon (3.2.2) pour $p = 1$, pour tout $w \in S_1$ on a

$$\left|\frac{\varphi(w)}{w}\right| = \frac{1}{|w|} |\psi(w^{-r}) - b_0| \leqslant \frac{CAM_1}{|w|^{r+1}}. \tag{3.2.3}$$

Ainsi, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ donnée par

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1-\infty\, i}^{1+\infty\, i} e^{tu} \frac{\varphi(u)}{u}\, du$$

est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$. Par la formule classique de Hankel (3.1.1) pour la fonction Gamma réciproque, pour tout nombre naturel $p \geqslant 2$ et tout $t \in \mathbb{R}$ nous pouvons écrire

$$f(t) - \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{kr} b_k \frac{t^{kr}}{(kr)!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{1-\infty\, i}^{1+\infty\, i} e^{tu} \left(\frac{\varphi(u)}{u} - \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(-1)^{kr} b_k}{u^{kr+1}} \right) du. \tag{3.2.4}$$

Puisque, encore une fois par (3.2.2), nous avons

$$\left| \frac{\varphi(u)}{u} - \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{kr} b_k \frac{1}{u^{kr+1}} \right| = \frac{1}{|u|} \left| \psi(u^{-r}) - \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{kr} b_k (u^{-r})^k \right| \leqslant \frac{CA^p M_p}{|u|^{pr+1}} \tag{3.2.5}$$

pour chaque $u \in S_1$, nous pouvons appliquer le théorème de Leibniz pour les intégrales paramétriques et déduire que la fonction

$$f(t) - \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{kr} b_k \frac{t^{kr}}{(kr)!}$$

appartient à $\mathcal{C}^{pr-1}(\mathbb{R})$. De plus, toutes ses dérivées d'ordre $m \leqslant pr - 1$ à $t = 0$ sont nulles. En effet ceci peut être vérifié en dérivant le côté droit de (3.2.4) m fois sous le signe de l'intégrale, en l'évaluant à $t = 0$, puis en calculant l'intégrale au moyen du théorème de Cauchy. Pour cela, on considère les chemins Γ_s, $s > 0$, constitués de l'arc de cercle centré sur 1, joignant $1 + si$ et $1 - si$ et passant par $1 + s$, et du segment $[1 - si, 1 + si]$. Il est facile de vérifier que $\int_{\Gamma_s} u^{m-1}(\varphi(u) - \sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{kr} b_k u^{-kr}) du = 0$, et l'application (3.2.5) lorsque $s \to \infty$ conduit à la conclusion.

Comme p est arbitraire, on a que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et, de plus,

$$f^{(m)}(0) = \begin{cases} (-1)^{pr} b_p & \text{si } m = pr \text{ pour un certain } p \geqslant 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Enfin, nous définissons la fonction

$$F(t) = b_0 + f(-t), \quad t \geqslant 0.$$

Évidemment, $F \in \mathcal{C}^\infty([0, \infty))$ et $F^{(pr)}(0) = b_p$, $p \in \mathbb{N}$; $F^{(m)}(0) = 0$ sinon. Pour conclure, nous estimons les dérivées de F d'ordre pr pour un $p \in \mathbb{N}$. Pour $p = 0$ et $t \geqslant 0$, on prend en compte (3.2.1) et (3.2.3) afin d'obtenir que

$$|F^{(0)}(t)| \leqslant |b_0| + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} \frac{CAM_1}{|1 + yi|^{r+1}}\, dy \leqslant C_0 + \frac{CAM_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1 + y^2)^{(r+1)/2}}\, dy, \tag{3.2.6}$$

et donc F est borné. Pour $p \geqslant 1$, nous pouvons écrire la formule (3.2.4) évaluée à $-t$ comme suit
$$f(-t) - \sum_{k=1}^{p} b_k \frac{t^{kr}}{(kr)!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{1-\infty i}^{1+\infty i} e^{-tz} \left(\frac{\varphi(z)}{z} - \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^{kr} b_k}{z^{kr+1}} \right) dz.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} F^{(pr)}(t) &= b_p + \left(f(-t) - \sum_{k=1}^{p} b_k \frac{t^{kr}}{(kr)!} \right)^{(pr)} (t) \\ &= b_p + \frac{1}{2\pi i} \int_{1-\infty i}^{1+\infty i} e^{-tz} (-z)^{pr} \left(\frac{\varphi(z)}{z} - \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^{kr} b_k}{z^{kr+1}} \right) dz, \end{aligned}$$

et nous pouvons appliquer (3.2.1), et (3.2.5) afin d'obtenir

$$|F^{(pr)}(t)| \leqslant C_0 A_0^p M_p + \frac{C A^{p+1} M_{p+1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+y^2)^{(r+1)/2}} \, dy. \tag{3.2.7}$$

De (3.2.6) et (3.2.7), et puisque $\mathbb{M}$ satisfait (dc), on déduit qu'il existe $C_1, A_1 > 0$ tels que pour chaque $p \in \mathbb{N}$ on a
$$|F^{(pr)}(t)| \leqslant C_1 A_1^p M_p = C_1 A_1^p p! \widecheck{M}_p, \quad t \geqslant 0,$$
et donc $F \in \mathcal{N}_{r,\widecheck{\mathbb{M}}}([0,\infty))$ et $\mathcal{B}_r(F) = \widehat{g}$. En conclusion, $\mathcal{B}_r$ est surjectif comme souhaité, et par la Proposition 3.2.1 on déduit que $\boldsymbol{m}$ satisfait (γ_r), ce qui revient à $\gamma(\mathbb{M}) > r = \lfloor \alpha \rfloor$.
(ii) Le fait que tous les intervalles de surjectivité sont $[0,\infty[$ est une conséquence facile de (2.2.2) et de la Proposition 2.1.8.(iii), tandis que $\gamma(\mathbb{M}) = \infty$ découle de (i). □

Corollaire 3.2.3. *Chaque fois que* $\mathbb{M}$ *est une suite de poids satisfaisant (dc), on a*

$$S_{\mathbb{M}} \subseteq \widetilde{S}_{\mathbb{M}}^u \subseteq (0, \lfloor \gamma(\mathbb{M}) \rfloor + 1).$$

Si en outre $\gamma(\mathbb{M}) \in \mathbb{N}$*, alors* $S_{\mathbb{M}} \subseteq \widetilde{S}_{\mathbb{M}}^u \subseteq (0, \gamma(\mathbb{M}))$.

Démonstration. Les arguments sont similaires à ceux de la preuve du Corollaire 3.1.8. Le cas $\widetilde{S}_{\mathbb{M}}^u = \varnothing$ est trivial. Sinon, $\widetilde{S}_{\mathbb{M}} \neq \varnothing$ et, par le Lemma 3.1.3, $\gamma(\mathbb{M}) > 0$.

Soit $\alpha \in \widetilde{S}_{\mathbb{M}}^u$. Par le théorème 3.2.2 nous avons $\lfloor \alpha \rfloor < \gamma(\mathbb{M})$, et donc $\alpha < \lfloor \alpha \rfloor + 1 \leqslant \lfloor \gamma(\mathbb{M}) \rfloor + 1$, ce qui est la première affirmation. Dans le cas où $\gamma(\mathbb{M})\mathbb{N}$, la condition $\lfloor \gamma(\mathbb{M}) \rfloor < \gamma(\mathbb{M})$ ne tient pas, et donc $\gamma(\mathbb{M}) \notin \widetilde{S}_{\mathbb{M}}^u$ et l'intervalle $\widetilde{S}_{\mathbb{M}}^u$ doit être contenu dans $(0, \gamma(\mathbb{M}))$. □

Rappelons que si $\mathbb{M}$ n'est pas fnq le problème est résolu (voir la remarque 3.1.9). Supposons que $\mathbb{M}$ soit (lc), fnq et (dc) (les deux premières conditions impliquent que $\mathbb{M}$ est une suite de poids). Alors $\gamma(\mathbb{M}) \in (0, \infty]$, et nous avons la situation décrite dans le Tableau 3.1.

$\gamma(\mathbb{M}) \in \mathbb{N}$	$\gamma(\mathbb{M}) \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$
$S_{\mathbb{M}} \subseteq]0, \gamma(\mathbb{M})[$	$S_{\mathbb{M}} \subseteq]0, \lfloor\gamma(\mathbb{M})\rfloor + 1[\cap]0, \omega(\mathbb{M})]$
$\widetilde{S}^u_{\mathbb{M}} \subseteq]0, \gamma(\mathbb{M})[$	$\widetilde{S}^u_{\mathbb{M}} \subseteq]0, \lfloor\gamma(\mathbb{M})\rfloor + 1[\cap]0, \omega(\mathbb{M})]$
$\widetilde{S}_{\mathbb{M}} \subseteq]0, \gamma(\mathbb{M}) + 1[\cap]0, \omega(\mathbb{M})]$	$\widetilde{S}_{\mathbb{M}} \subseteq]0, \lfloor\gamma(\mathbb{M})\rfloor + 1] \cap (0, \omega(\mathbb{M})]$

Table 3.1 – Intervalles de surjectivité lorsque $\mathbb{M}$ est (lc), fnq et (dc).

3.3 Suites fortement régulières

Nous devons imposer d'autres conditions à la suite $\mathbb{M}$ afin d'obtenir des informations supplémentaires sur la surjectivité. Nous rappelons que l'on dit que $\mathbb{M}$ est fortement régulière si elle est (lc), fnq et (cm). Comme commenté précédemment, les deux premières conditions sont naturelles dans ce contexte, et la croissance modérée, qui est plus forte que (dc), est notre hypothèse supplémentaire.

Le principal résultat connu concernant la surjectivité des suites fortement régulières a été fourni par V. Thilliez

Théorème 3.3.1 ([9], Theorem 3.2.1). *Soit $\mathbb{M}$ une suite fortement régulière et $0 < \gamma < \gamma(\mathbb{M})$. Alors il existe $d \geqslant 1$ tel que pour tout $A > 0$ il existe un opérateur linéaire continu*

$$T_{\mathbb{M},A,\gamma} : \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M},A} \to \mathcal{A}_{\mathbb{M},dA}(S_\gamma)$$

tel que $\widetilde{\mathcal{B}} \circ T_{\mathbb{M},A,\gamma} = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M},A}}$, l'application identité dans $\mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M},A}$. Par conséquent, $\widetilde{\mathcal{B}} : \mathcal{A}_{\mathbb{M}}(S_\gamma) \longrightarrow \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}}$ est surjectif.

Théorème 3.3.2. *Soit $\mathbb{M}$ une suite fortement régulière, et soit donnée $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $r < \gamma(\mathbb{M})$,

(ii) il existe $d \geqslant 1$ tel que pour tout $A > 0$ il existe un opérateur linéaire continu

$$T_{\mathbb{M},A,r} : \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M},A} \to \mathcal{A}_{\mathbb{M},dA}(S_r)$$

tel que $\widetilde{\mathcal{B}} \circ T_{\mathbb{M},A,\gamma} = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M},A}}$ l'application identité dans $\mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M},A}$,

(iii) l'application de Borel $\widetilde{\mathcal{B}} : \mathcal{A}_{\mathbb{M}}(S_r)\ \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}}$ est surjective,

(iv) l'application de Borel $\widetilde{\mathcal{B}} : \widetilde{\mathcal{A}}^u_{\mathbb{M}}(S_r) \to \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}}$ est surjective.

Démonstration. (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) C'est le Théorème 3.3.1

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) Trivial.

(iv) $\Longrightarrow$ (i) Dans le cas où $r \in \mathbb{N}_0$, on utilise le Théorème 3.2.2.(i) et on conclut.

Sinon, on écrit $r = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}_0$ premiers entre eux, $q \geqslant 2$. Considérons la suite $\mathbb{M}^q = (M_n^q)_{n\in\mathbb{N}}$, qui s'avère également être fortement régulière (voir [9, Lemma 1.3.4]). Nous allons prouver que $\widetilde{\mathcal{B}} : \widetilde{\mathcal{A}}^u_{\mathbb{M}}(S_r) \to \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}}$ est surjectif, donc, encore une fois par le théorème 3.2.2.(i), nous obtiendrons que $p < \gamma(\mathbb{M}^q)$. Par conséquent, cela implique que $r = p/q < \gamma(\mathbb{M})$, comme souhaité.

Prouvons la surjectivité mentionnée ci-dessus. Étant donné $\widehat{f} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \in \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}^q}$, il existe $C, A > 0$ tel que $|a_j| \leqslant CA^j M_j^q$ pour chaque $j \in \mathbb{N}$. Définissons une nouvelle série puissance formelle $\widehat{g} = \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j$ avec des coefficients

$$b_{qj} = a_j,\ j \in \mathbb{N}; \quad b_m = 0 \text{ sinon.}$$

La log-convexité de $\mathbb{M}$ implique que $M_j^q \leqslant M_{qj}$ pour tout j, on a donc que

$$|b_{qj}| \leqslant CA^j M_j^q \leqslant C(A^{1/q})^{qj} M_{qj},$$

et par conséquent, $\widehat{g} \in \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}}$. Par hypothèse, il existe une fonction $g \in \widetilde{\mathcal{A}}^u_{\mathbb{M}}(S_r)$ telle que $\widetilde{\mathcal{B}}(g) = \widehat{g}$, et donc il existe $C_1, A_1 > 0$ telle que pour chaque $z \in S_r$ et $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\left| g(z) - \sum_{j=0}^{n-1} b_j z^j \right| \leqslant C_1 A_1^n M_n |z|^n. \tag{3.3.1}$$

Par conséquent, la fonction $f\colon S_p \to \mathbb{C}$ donnée par $f(w) = g(w^{1/q})$ est bien définie et holomorphe dans S_p. De plus, pour tout $w \in S_p$ et $n \in \mathbb{N}$ on déduit de (3.3.1) que

$$\begin{aligned}\left| f(w) - \sum_{j=0}^{n-1} a_j w^j \right| = \left| g(w^{1/q}) - \sum_{j=0}^{n-1} b_{qj} (w^{1/q})^{qj} \right| &= \left| g(w^{1/q}) - \sum_{k=0}^{qn-1} b_k (w^{1/q})^k \right| \\ &\leqslant C_1 A_1^{qn} M_{qn} |w^{1/q}|^{qn}.\end{aligned} \tag{3.3.2}$$

Nous appliquons maintenant la propriété (cm) de $\mathbb{M}$: il est facile de prouver qu'il existe $A_0 > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons $M_{qn} \leqslant A_0^n M_n^q$. Nous pouvons utiliser ce fait dans (3.3.2) et obtenir que

$$\left| f(w) - \sum_{j=0}^{n-1} a_j w^j \right| \leqslant C_1 (A_0 A_1^q)^n M_n^q |w|^n.$$

Donc, $f \in \widetilde{\mathcal{A}}^u_{\mathbb{M}^q}(S_p)$ et $\widetilde{\mathcal{B}}(f) = \widehat{f}$, ce qui montre la surjectivité comme prévu. □

Ce résultat a plusieurs conséquences importantes.

Corollaire 3.3.3. *Soit $\mathbb{M}$ une suite fortement régulière avec $\gamma(\mathbb{M}) \in \mathbb{Q}$. Alors, $S_{\mathbb{M}} = \widetilde{S}^u_{\mathbb{M}} =]0, \gamma(\mathbb{M})[$.*

Démonstration. Par le théorème 3.3.2 et (2.2.2), on a $]0, \gamma(\mathbb{M}))[\subseteq S_{\mathbb{M}} \subseteq \widetilde{S}^u_{\mathbb{M}}$, alors que (iii) $\Longrightarrow$ (i) dans le théorème 3.3.2 garantit que, $\gamma(\mathbb{M})$ étant rationnel, alors $\gamma(\mathbb{M}) \in \widetilde{S}^u_{\mathbb{M}}$, et ainsi $\widetilde{S}^u_{\mathbb{M}} \subseteq]0, \gamma(\mathbb{M})[$. □

Dans ce qui suit, $\mathbb{I}$ représente l'ensemble des nombres irrationnels.

Corollaire 3.3.4. *Soit $\mathbb{M}$ une suite fortement régulière, et soit $t \in \mathbb{R}$, $t > 0$. Chaque assertion implique la suivante :*

(i) $t < \gamma(\mathbb{M})$,

(ii) l'application de Borel $\widetilde{\mathcal{B}} : \mathcal{A}_{\mathbb{M}}(S_t) \to \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}}$ est surjective,

(iii) l'application de Borel $\widetilde{\mathcal{B}} : \widetilde{\mathcal{A}}^u_{\mathbb{M}}(S_t) \to \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}}$ est surjective,

(iv) l'application de Borel $\widetilde{\mathcal{B}} : \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{M}}(S_t)\mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}}$ est surjective,

(v) pour chaque $\xi \in \mathbb{I}$ avec $\xi < t$, l'application de Borel $\widetilde{\mathcal{B}} : \widetilde{\mathcal{A}}_M(S_\xi) \to \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}}$ est surjective,

(vi) $t \leqslant \gamma(\mathbb{M})$.

Donc, $(0, \gamma(\mathbb{M})) \subseteq S_{\mathbb{M}} \subseteq \widetilde{S}^u_{\mathbb{M}} \subseteq \widetilde{S}_{\mathbb{M}} \subseteq (0, \gamma(\mathbb{M})]$.

Démonstration. Seul le point (v) $\Longrightarrow$ (vi) nécessite une courte preuve. Pour chaque $q \in \mathbb{N}$ on a que $\zeta = \xi q \notin \mathbb{N}$, on va montrer que $\widetilde{\mathcal{B}} : \widetilde{\mathcal{A}}^q_{\mathbb{M}}(S_\zeta) \to \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}^q}$ est surjectif donc, par le théorème 3.1.7.(i), nous voyons que $\lfloor \zeta \rfloor < \gamma(\mathbb{M}^q)$. Alors $\gamma(\mathbb{M}) > \lfloor \xi q \rfloor / q > \xi - 1/q$. Puisque q est arbitraire, en faisant tendre q vers ∞ on déduit que $\xi \leqslant \gamma(\mathbb{M})$ pour tout irrationnel $\xi < t$, donc $t \leqslant \gamma(\mathbb{M})$.

La preuve de la surjectivité suit le même argument de ramification utilisé dans (iv) $\Longrightarrow$ (i) du théorème 3.3.2, où les relations asymptotiques obtenues pour les sous-secteurs bornés de S_ξ sont transformées en celles analogues pour les sous-secteurs bornés correspondants de S_ζ. □

	$\gamma(\mathbb{M}) \in \mathbb{Q}$	$\gamma(\mathbb{M}) \in \mathbb{I}$
$S_{\mathbb{M}}$	$]0, \gamma(\mathbb{M})[$	$]0, \gamma(\mathbb{M})[$ ou $]0, \gamma(\mathbb{M})]$
$\widetilde{S}^u_{\mathbb{M}}$	$]0, \gamma(\mathbb{M})[$	$]0, \gamma(\mathbb{M})[$ ou $]0, \gamma(\mathbb{M})]$
$\widetilde{S}_{\mathbb{M}}$	$]0, \gamma(\mathbb{M})[$ ou $]0, \gamma(\mathbb{M})]$	

TABLE 3.2 – Intervalles de surjectivité pour les suites fortement régulières

3.4 Suites admettant un ordre proche non nul

Dans cette dernière sous-section, en tenant compte du fait que l'application de Borel n'est jamais bijective, pr le théorème 2.2.13, nous déduirons plus d'informations concernant les intervalles de surjectivité. Afin de pouvoir déduire de ce résultat si oui ou non $\gamma(\mathbb{M})$ appartient à $S_{\mathbb{M}}$ et $\widetilde{S}^u_{\mathbb{M}}$, la régularité forte n'est pas suffisante et nous devons supposer que $\gamma(\mathbb{M}) = \omega(\mathbb{M})$ (en effet, si $\mathbb{M}$ admet un ordre proche non nul alors il est fortement régulier et $\gamma(\mathbb{M}) = \omega(\mathbb{M})$(voir [11, Remark 4.15])) . Alors,

(i) Si $\sum_{p=0}^{\infty} (m_p)^{-1/\omega(\mathbb{M})} = \infty$, on sait que $\widetilde{I}^u_{\mathbb{M}} = I_{\mathbb{M}} = [\omega(\mathbb{M}), \infty[= [\gamma(\mathbb{M}), \infty[$, et alors

$$S_{\mathbb{M}} = \widetilde{S}^u_{\mathbb{M}} =]0, \gamma(\mathbb{M})[, \qquad]0, \gamma(\mathbb{M})[\subseteq \widetilde{S}_{\mathbb{M}} \subseteq]0, \gamma(\mathbb{M})[.$$

(ii) Si $\sum_{p=0}^{\infty}(m_p)^{-1/\omega(\mathbb{M})} < \infty$ et $\sum_{p=0}^{\infty}((p+1)m_p)^{-1/(\omega(\mathbb{M})+1)} = \infty$, nous savons que $I_{\mathbb{M}} = [\gamma(\mathbb{M}), \infty[$ et $\widetilde{I}_{\mathbb{M}}^u =]\gamma(\mathbb{M}), \infty[$, et donc

$$S_{\mathbb{M}} =]0, \gamma(\mathbb{M})[, \qquad (0, \gamma(\mathbb{M})) \subseteq \widetilde{S}_{\mathbb{M}}^u \subseteq \widetilde{S}_{\mathbb{M}} \subseteq]0, \gamma(\mathbb{M})[.$$

Ainsi, les informations dont nous disposons pour les suites fortement régulières avec $\gamma(\mathbb{M}) = \omega(\mathbb{M})$ sont résumées dans les deux premières lignes du Tableau 3.3.

Théorème 3.4.1 (Théorème généralisé de Borel–Ritt–Gevrey)**.** *Soit $\mathbb{M}$ une suite de poids admettant un ordre proche non nul et $\gamma > 0$ donné. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(i) $\gamma \leqslant \omega(\mathbb{M}) = \gamma(\mathbb{M})$,

(ii) Pour chaque $\widehat{f} = \sum_{p\in\mathbb{N}} a_p z^p \in \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}}$, il existe une fonction $f \in \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{M}}(S_\gamma)$ telle que

$$f \sim_{\mathbb{M}} \widehat{f},$$

c'est-à-dire que $\widetilde{\mathcal{B}}(f) = \widehat{f}$. En d'autres termes, l'application de Borel $\widetilde{\mathcal{B}} : \widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{M}}(S_\gamma) \longrightarrow \mathbb{C}[[z]]_{\mathbb{M}}$ est surjective.

Donc, $\widetilde{S}_{\mathbb{M}} =]0, \gamma(\mathbb{M})] =]0, \omega(\mathbb{M})]$.

Démonstration. La preuve découle du corollaire 3.3.4. □

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">$\gamma(\mathbb{M}) \in \mathbb{Q}$</td><td colspan="3">$\gamma(\mathbb{M}) \in \mathbb{I}$</td></tr>
<tr><td>$\sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{1}{m_p}\right)^{\frac{1}{\omega(\mathbb{M})}} = \infty$</td><td>$\sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(p+1)m_p}\right)^{\frac{1}{\omega(\mathbb{M})+1}} = \infty$</td><td>$\sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(p+1)m_p}\right)^{\frac{1}{\omega(\mathbb{M})+1}} < \infty$</td></tr>
<tr><td>$S_{\mathbb{M}}$</td><td colspan="3">$]0, \gamma(\mathbb{M})[$</td><td></td></tr>
<tr><td>$\widetilde{S}_{\mathbb{M}}^u$</td><td colspan="2"></td><td colspan="2">$]0, \gamma(\mathbb{M})[$ ou $]0, \gamma(\mathbb{M})]$</td></tr>
<tr><td>$\widetilde{S}_{\mathbb{M}}$</td><td colspan="4">$]0, \gamma(\mathbb{M})]$</td></tr>
</table>

Table 3.3 – Intervalles de surjectivité pour les suites de poids admettant un ordre proche non nul.

	$0 < \alpha$
$S_{\mathbb{M}_\alpha}$	$]0, \alpha[$
$\widetilde{S}^u_{\mathbb{M}_\alpha}$	$]0, \alpha[$
$\widetilde{S}_{\mathbb{M}_\alpha}$	$]0, \alpha]$

Table 3.4 – Intervalles de surjectivité pour les suites $\mathbb{M}_\alpha$, $\alpha > 0$

Chapitre 4

Opérateur d'extension global

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux opérateurs d'extensions et aux inverses à droite de l'application de Borel. Nous rappellerons d'abord les propriétés qui nous serons utile pour la suite. Ensuite, nous donnerons des conditions sur les suites sous lesquelles il existe des opérateurs d'extension de l'application de Borel. Nous nous sommes principalement référencés de [14], [21] et [9].

4.1 Propriétés sur les suites

Définition 4.1.1. On dit que la suite $\mathbb{M}$ satisfait la condition (β_2) si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists k \in \mathbb{N},\ k > 1 : \limsup_{p\to\infty} \left(\frac{M_{kp}}{M_p}\right)^{\frac{1}{(k-1)p}} \frac{1}{m_{kp}} \leqslant \varepsilon, \tag{β_2}$$

Le lemme suivant donne des conditions équivalentes pour (β_2) :

Lemme 4.1.2. *Soit m une suite croissante, alors :*

(a) Pour $0 \leqslant j < p$, on a que la fonction $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(p, j) \mapsto \left(\frac{M_p}{M_j}\right)^{\frac{1}{(p-j)}}$ est croissante pour les deux variables.

(b) De plus, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) la suite $\mathbb{M}$ satisfait la condition (β_2),

(ii) $\exists l : \forall \varepsilon > 0, \exists \beta \in]0, 1[, \exists p_0 : \forall p \geqslant p_0, \exists j : \beta p \leqslant< p : \left(\frac{M_p}{M_j}\right)^{\frac{1}{(p-j)}} \leqslant \varepsilon.m_{lp}$,

(iii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \beta \in]0, 1[, \exists p_0 : \forall p \geqslant p_0 : \max_{j\leqslant\beta p} \frac{M_p}{M_j} \frac{1}{m_p^{p-j}} \leqslant \varepsilon^p$.

Démonstration. (a) Puisque $\boldsymbol{m}$ est croissante, on a que $\mathbb{M}$ est (lc). Pour j fixé posons $N_k := \frac{M_{k+j}}{j} = m_j \cdots m_{j+k-1}$ et $N_0 = 1$. Il résulte donc que la suite $(N_k)_k$ est également (lc) et par la proposition 1.1.8(ii.c), on a que $N_k^{1/k} = \left(\frac{M_p}{M_j}\right)^{\frac{1}{(p-j)}}$ est croissante où $p := k + j$.

(b) $(i) \implies (ii)$ par hypothèse, on a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists k \in \mathbb{N},\ k > 1 : \limsup_{j \to \infty} \left(\frac{M_{kj}}{M_j}\right)^{\frac{1}{(k-1)j}} \frac{1}{m_{kj-1}} \leqslant \varepsilon.$$

Posons $\beta := \frac{1}{k}$, avec $k = k(\varepsilon/2)$. En utilisant le point (a) et la croissance de $\boldsymbol{m}$, on a pour p suffisamment grand, tel que $p \leqslant kj - 1 < 2p$:

$$\left(\frac{M_p}{M_j}\right)^{\frac{1}{(p-j)}} \frac{1}{m_{2p}} \leqslant \left(\frac{M_{kj}}{M_j}\right)^{\frac{1}{(k-1)j}} \leqslant \varepsilon.$$

$(ii) \implies (iii)$ Nous appliquons (ii) pour $\varepsilon^{3l} < 1$ et nous supposons que $j \leqslant \beta p$ et $\beta < \frac{1}{2l}$. Posons $q := [p/l]$ et pour p assez grand, on a

$$\left(\frac{M_p}{M_j}\right)^{\frac{1}{(k-1)j}} \frac{1}{m_p} = \left(\frac{M_p}{M_j} \frac{1}{m_p^{p-j}}\right)^{\frac{1}{p*j}} \leqslant \left(\frac{M_q}{M_j} \frac{1}{m_l^{q-j} q}\right)^{\frac{1}{p-j}} \leqslant \varepsilon^{3l\frac{q-j}{p-j}} \leqslant \varepsilon^{\frac{p}{p-j}}.$$

La première inégalité résulte du fait que $M_p m_{lq}^{q-j} \leqslant M_q m_p^{p-j}$ et la dernière résulte du fait que

$$3l(q-j) = 3lq - 3lj > 3lq - 3lp/(2l) = 3lq - 3p/2 > 3(p-l) - 3p/2 \leqslant p,$$

ce qui est vrai pour p suffisamment grand et un l fixé.
$(ii) \implies (iii)$ choisissons k tel que $\frac{1}{k} = \beta$ et $\varepsilon \leqslant 1$. Ainsi pour $p = kj$ et $j \leqslant \beta p$ suffisamment grand, on a

$$\left(\frac{M_{kp}}{M_p}\right)^{\frac{1}{(k-1)p}} \frac{1}{m_{kp}} \leqslant \varepsilon^{\frac{kj}{j(k-1)}} = \varepsilon^{\frac{k}{k-1}} \leqslant \varepsilon.$$

□

Lemme 4.1.3. *Une suite positive $\mathbb{M}$ satisfait à (γ_r) si et seulement si sa r-interpolation $\mathbb{P}$ satisfait à (γ_1).*

Démonstration. La condition est nécessaire car

$$\begin{aligned}\sup_{p\in\mathbb{N}} \frac{p_p}{p} \sum_{q\geqslant p} \frac{1}{p_q} &= h \sup_{\substack{k\in\mathbb{N}_0\\ j\in\{1,\cdots,r\}}} \frac{p_{kr+j}}{kr+j} \sum_{q\geqslant kr+j} \frac{1}{p_q}\\ &\leqslant \sup_{k\in\mathbb{N}_0} \frac{\sqrt[r]{m_k}}{kr+j} \sum_{q\leqslant k} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{p_{qr+j}}\\ &\leqslant r \sup_{k\in\mathbb{N}_0} \frac{\sqrt[r]{m_k}}{kr+j} \sum_{q\leqslant k} \frac{1}{\sqrt[r]{m_q}}\\ &\leqslant r \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{\sqrt[r]{m_k}}{k} \sum_{q\leqslant k} \frac{1}{\sqrt[r]{m_q}} < \infty.\end{aligned}$$

La condition est suffisante car

$$\begin{aligned}\sup_{p\in\mathbb{N}} \frac{\sqrt[r]{m_p}}{p} \sum_{q\leqslant p} \frac{1}{\sqrt[r]{m_q}} &\leqslant r \sup_{p\in\mathbb{N}} \frac{p_{pr}}{pr} \sum_{q\geqslant p} \frac{1}{p_{qr}}\\ & r \sup_{p\in\mathbb{N}} \frac{p_{pr}}{pr} \sum_{q\geqslant pr} \frac{1}{p_q < \infty}.\end{aligned}$$

□

Le lemme suivant donne la condition pour que une suite satisfaisant (β_2) satisfasse $(\gamma_r)\forall r \in \mathbb{N}_0$.

Lemme 4.1.4. *Pour tout $r \in \mathbb{N}_0$, si la suite $\mathbb{M}$ satisfait la condition (β_2) et la suite $(m_p/p^r)_p \in \mathbb{N}$ est presque croissante, alors $\boldsymbol{m}$ satisfait la condition (γ_r).*

Démonstration. Soit la suite $(Q_p)_p$, définie par $Q_p = \sqrt[r]{M_p}$. Il est clair que $Q_0 = 1$ et que la suite $(Q_p)_p$ est (lc). Puis que $\mathbb{M}$ satisfait la condition (β_2), $\forall \varepsilon > 0,\ \exists k \in \mathbb{N},\ k > 1$:

$$\limsup_{p\to\infty} \left(\frac{Q_{kp}}{Q_p}\right)^{\frac{1}{(k-1)p}} \frac{1}{q_{kp}} = \limsup_{p\to\infty} \left(\left(\frac{M_{kp}}{M_p}\right)^{\frac{1}{(k-1)p}} \frac{1}{m_{kp}}\right)^{1/r} \leqslant \varepsilon.$$

De plus,

$$\begin{aligned}\limsup_{p\to\infty} \left(\frac{\check{Q}_{kp}}{\check{Q}_p}\right)^{\frac{1}{(k-1)p}} \frac{1}{\check{q}_{kp}} &= \limsup_{p\to\infty} \left(\frac{p!Q_{kp}}{(kp)!Q_p}\right)^{\frac{1}{(k-1)p}} \frac{kp}{q_{kp}}\\ &= \limsup_{p\to\infty} \left(\frac{Q_{kp}}{Q_p}\right)^{\frac{1}{(k-1)p}} \frac{1}{q_{kp}} kp \left(\frac{p!}{(kp)!}\right)^{\frac{1}{(k-1)p}}\\ &= \limsup_{p\to\infty} \left(\frac{Q_{kp}}{Q_p}\right)^{\frac{1}{(k-1)p}} \frac{1}{q_{kp}} kp \left(\frac{e^{p(k-1)}}{\sqrt{k}k^{kp}p^{p(k-1)}}\right)^{\frac{1}{(k-1)p}}\\ &\leqslant \varepsilon e k^{\frac{-1}{k-1}} \leqslant e\varepsilon.\end{aligned}$$

La dernière égalité résulte de la formule de Stirling : $n! \approx \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}, \forall n \in \mathbb{N}$. D'où en tire que la suite $(\breve{Q}_p)_p$ satisfait (β_2). Soit p_0 tel que la suite $(m_p/p^r)_p = p_0$ est presque croissante. Alors Il existe donc $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, de sorte que pour $p \geqslant p_0$:

$$\frac{\breve{q}_p}{\breve{q}_{kp}} \leqslant \left(\frac{\breve{Q}_{kp}}{\breve{Q}_p}\right)^{\frac{1}{(k-1)p}} \frac{1}{\breve{q}_{kp}} \leqslant \frac{1}{2}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\sum_{j \leqslant p} \frac{1}{q_j} = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{j=k^l p}^{k^{l+1}p-1} \frac{1}{q_j} \leqslant \sum_{l=0}^{+\infty} k^l p(k-1) \frac{1}{q_{k^l p}} = (k-1) \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{1}{\breve{q}_{k^l p}} \\ \leqslant \frac{k-1}{\breve{q}_p} \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^l = \frac{2(k-1)}{\breve{q}_p}.\end{aligned}$$

D'où on conclure que la suite $(q_p)_p$ satisfait (γ_1) et par conséquent la conclusion suit. □

4.2 Existence d'opérateur d'extension global

Définition 4.2.1. Pour tout $r \in \mathbb{N}$,un opérateur d'extension global T de $\mathbb{C}[[z]]_{\{\mathbb{M}\}}$ dans $\mathcal{E}_{\mathbb{M},r}([-1,1])$ (resp.$\mathcal{L}_{\mathbb{M}}([0,+\infty[)$; $\mathcal{N}_{\mathbb{M},r}([0,+\infty[)$ est une application tel que $(T\mathbf{a})^{(nr)}(0) = a_n$ pour tout $\mathbf{a} \in \mathbb{C}[[z]]_{\{\mathbb{M}\}}$ et $n \in \mathbb{N}_0$.

Maintenant nous pouvons montrer le lien entre l'existence d'un opérateur d'extension global et la condition (β_2)

Proposition 4.2.2. *Soit $\mathbb{M}$ une suite telle que $\widehat{\mathbb{M}}$ est une suite de poids et $r \in \mathbb{N}$. Si il existe un opérateur d'extension global $T : \mathbb{C}[[z]]_{\{\mathbb{M}\}} \longrightarrow \mathcal{N}_{\mathbb{M},r}([0,+\infty[)$, alors la suite $\widehat{\mathbb{M}}$ satisfait (β_2).*

Démonstration. Par le théorème B.0.7, il existe $A > 0$ tel que $T : \mathbb{C}[[z]]_{\{\mathbb{M},1\}} \longrightarrow \mathcal{N}_{\mathbb{M},r,A}([0,+\infty[)$ est aussi un opérateur d'extension global. Donc il existe $C > 0$ tel que

$$||T\mathbf{a}|| \leqslant C.|\mathbf{a}|_1 = C. \sup_{p \in \mathbb{N}} \left(\frac{|a_p|}{p!M_p}\right).$$

Alors, il existe des fonctions réelles $\varphi_p \in \mathcal{N}_{r,\mathbb{M}}([0,\infty[)$ telles que :

$$\varphi_p^{(jr)}(0) = (e_p)_p = \begin{cases} 1, & j = p, \\ 0 & j \in N_0, j \neq p, \\ ||\varphi_p|| \leqslant \frac{C}{p!M_P} = \frac{C}{\widehat{M}_p} \end{cases}$$

Par la formule de Taylor, pour tout $y > 0$, il existe un $\theta \in]0,1[$ tel que

$$\begin{aligned}
|\varphi_p^{(pr)}(y) - 1| &\leqslant \frac{y^{pr}}{(pr)!}|\varphi_p^{(2pr)}(\theta y)| \leqslant \frac{y^{pr}}{(pr)!}||\varphi_p||A^{2p}\widehat{M}_{2p} \\
&\leqslant C\frac{y^{pr}}{(pr)!}A^{2p}\frac{\widehat{M}_{2p}}{\widehat{M}_p} \leqslant C\frac{y^{pr}}{(pr)!}A^{2p}\widehat{m}_{p+1}\cdots\widehat{m}_{2p} \\
&\leqslant C\frac{y^{pr}}{(pr)!}A^{2p}\widehat{m}_{2p}^p.
\end{aligned}$$

Soit $h \in]0, A^{-2/r}[$. Alors pour tout $y \in I := [0, h \sqrt[pr]{(pr)!}/\sqrt[r]{\widehat{m}_{2p}}]$, on a $|\varphi_p^{(pr)}(y) - 1| \leqslant C\,(h^r A^2)^p$, ainsi $\varphi_p^{(pr)}(y) \geqslant 1/2$ pour p suffisamment grand. Ainsi pour $p \geqslant p_0$ et $j \in \{0, \cdots, p\}$, en intégrant $(p-j)r$ fois cette dernière inégalité, on a

$$|\varphi_p^{(jr)}(y)| \geqslant \frac{1}{2}\frac{y^{(p-j)r}}{((p-j)r)!}, \quad \forall y \in I,$$

de plus, en insérant le dernier point de I, on a

$$\frac{1}{2}\frac{h^{(p-j)r}}{((p-j)r)!}\frac{((pr)!)^{(p-j)/p}}{(\widehat{m}_{2p})^{p-j}} \leqslant \sup_{x\in[0,+\infty[}|\varphi_p^{(jr)}(x)|.$$

Par la suite, puisque $((pr)!)^{(p-j)r} \geqslant (((p-j)r)!)^{pr}$, on en tire que

$$\frac{1}{2}\left(\frac{h}{\sqrt[r]{\widehat{m}_{2p}}}\right)^{(p-j)r} \leqslant \sup_{x\in[0,+\infty[}|\varphi_p^{(jr)}(x)|, \quad \forall p \geqslant p_0, \quad \forall j \in \{0, \cdots, p\}. \tag{4.2.1}$$

Soit $\varepsilon > 0$, fixons $8s^{-1} < \varepsilon h^r$. En effectuant le même raisonnement que au début de la preuve, on a que il existe $q > 0$ et $B > 1$ tel que $T : \mathbb{C}[[z]]_{\{\mathbb{M},s\}} \subset \mathcal{N}_{\mathbb{M},r,q}([0,+\infty[)$ et en particulier $||\varphi_p||_q \leqslant \frac{B}{s^p\widehat{M}_p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. D'autre part, comme

$$\sup_{x\in[0,+\infty[}|\varphi_p^{(jr)}(x)| \leqslant ||\varphi_p||_q q^j\widehat{M}_j \leqslant Bq^j\frac{\widehat{M}_j}{s^p\widehat{M}_p},$$

en utilisant (4.2.1), on en tire que

$$\frac{1}{2}\left(\frac{h}{\sqrt[r]{\widehat{m}_{2p}}}\right)^{(p-j)r} \leqslant Bq^j\frac{\widehat{M}_j}{s^p\widehat{M}_p}$$

et donc

$$\left(\frac{\widehat{M}_p}{\widehat{M}_j}\right)^{1/(p-j)}\frac{1}{\widehat{m}_{2p}} \leqslant (2B)^{1/(p-j)}h^{-r}q^{j/(p-j)}s^{-p/(p-j)} \tag{4.2.2}$$

pour tout $p \geqslant p_0$ et $j \in \{0, \cdots, p\}$.
Maintenant fixons $\beta]0, 1/2[$ tel que $q^{4\beta} < 2$ et $s^{-1/(1-\beta)} < 2s^{-1}$, ainsi qu'un entier $p_1 > \sup\{4, p_0\}$ tel que $(2B)^{4/p_1} < 2$ et $q^{4\beta+4/p_1} < 2$. Pour tour $p \geqslant p_1$, posons $j_\beta := [\beta p]$ [1] $+ 1$. Ainsi, on a que $\beta p < j_\beta < 1 + p/2 < p$. D'une part de $j_\beta > \beta p$, on a $p - j_\beta < p(1-\beta)$, ainsi $p/(p-j_\beta) > 1/(1-\beta)$; d'autre part de $j_\beta \leqslant \beta p + 1$, on a $p - j_\beta \geqslant p(1-\beta) - 1 \geqslant p/4$, ainsi $j_\beta/(p-j_\beta) < 4j_\beta/p \leqslant 4 + 4/p$. Donc en utilisant l'inégalité (4.2.2), on en tire que

$$\left(\frac{\widehat{M}_p}{\widehat{M}_j}\right)^{1/(p-j)} \frac{1}{\widehat{m}_{2p}} \leqslant (2B)^{4/p} h^{-r} q^{4\beta+4/p} s^{-1/(1-\beta)} \leqslant \frac{8}{h^r s} < \varepsilon,$$

d'où la conclusion par le lemme 4.1.2

□

Théorème 4.2.3. *Soit $\mathbb{M}$ une suite telle que $\widehat{\mathbb{M}}$ est une suite de poids et $r \in \mathbb{N}$. les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) la suite $\widehat{\boldsymbol{m}}$ satisfait les conditions (γ_r) et (β_2),
(2) il existe un opérateur d'extension global $T_1 : \mathbb{C}[[z]]_{\{\mathbb{M}\}} \longrightarrow \mathcal{D}_{\mathbb{M},r}([-1,1])$,
(3) il existe un opérateur d'extension global $T_1 : \mathbb{C}[[z]]_{\{\mathbb{M}\}} \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{M},r}([0,+\infty[)$
(4) il existe un opérateur d'extension global $T_3 : \mathbb{C}[[z]]_{\{\mathbb{M}\}} \longrightarrow \mathcal{N}_{\mathbb{M},r}([0,+\infty[)$.

Démonstration. $(2) \implies (3) \implies (4)$: trivial puisque

$$\mathcal{D}_{\mathbb{M},r}([-1,1])|_{[0,1]} \subset \mathcal{L}_{\mathbb{M},r}([0,+\infty[)|_{[0,1]} \subset \mathcal{N}_{\mathbb{M},r}([0,+\infty[)|_{[0,1]}.$$

$(4) \implies (1)$ est une conséquence immédiate de la proposition 3.2.1 et 4.2.2.
$(1) \implies (2)$. Soit $\mathbb{P}$ la suite r-interpolée de $\mathbb{M}$. Puisque la suite $\widehat{\boldsymbol{m}}$ satisfait les conditions (γ_r), par lemme 4.1.3, la suite $(\widehat{p}_p)_p$ satisfait (γ_1). Ainsi par le théorème 3.1.2, il existe une extension $S : \mathbb{C}[[z]]_{\{\mathbb{P}\}} \longrightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{P}}([-1,1])$. choisissons $\varphi \in \mathcal{E}_{\mathbb{P}}([-1,1])$ tel que $\varphi \equiv 1$ au voisinage de 0 et $\varphi^{(p)}(-1) = \varphi^{(p)}(1) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}_0$. Et donc

$$U : \mathbb{C}[[z]]_{\{\mathbb{P}\}} \longrightarrow \mathcal{D}_{\mathbb{P}}([-1,1]), \quad (a_p)_p \mapsto \begin{cases} \varphi(x) S\mathbf{a}(x), & x \in [-1,1] \\ 0, & sinon \end{cases}$$

est un opérateur extension, car pour tout $p \in \mathbb{N}$, $x \in [-1,1]$ et $A > 0$, on a

$$(\varphi S\mathbf{a})^{(p)}(0) = \sum_{j=0}^{p} C_j^p \varphi^{(p-j)}(0)(S\mathbf{a})^{(j)}(0) = (S\mathbf{a})^{(p)}(0) = a_p$$

1. $[\beta p]$ désigne le plus grand entier $\leqslant \beta p$

et

$$\begin{aligned}\left|(\varphi S\mathbf{a})^{(p)}(x)\right| &= \Big|\sum_{j=0}^{p} C_j^p \varphi^{(p-j)}(x)(S\mathbf{a})^{(j)}(x)\Big| \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{p} C_j^p ||\varphi|| A^{p-j}\widehat{P}_{p-j}||(S\mathbf{a})||A^j\widehat{P}_j \\ &\leqslant ||\varphi||||(S\mathbf{a})||A^p\widehat{N}_p\sum_{j=0}^{p} C_j^p \\ &= ||\varphi||||(S\mathbf{a})||(2A)^p\widehat{N}_p\end{aligned}$$

De plus, l'opérateur

$$V : \mathbb{C}[[z]]_{\{\mathbb{M}\}} \longrightarrow U : \mathbb{C}[[z]]_{\{\mathbb{P}\}}, \quad (a_p)_p \mapsto (b_p)_p$$

avec $b_{pr+q} := \begin{cases} a_p, & q = 0 \\ 0, & q \in \{1, \cdots, r-1\} \end{cases}$ pour tout $p \in \mathbb{N}_0$ est un un opérateur linéaire et continu. Ceci est bien définit car $M_{pr} = P_p$ pour tout $p \in \mathbb{N}_0$.
Soit E le sous-espace vectoriel topologique de $\mathcal{D}_{\mathbb{P}}([-1,1])$ dont les éléments sont des fonctions f satisfaisant $f^{(pr+q)} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}_0$ et $q \in \{1, \cdots, r-1\}$. Alors l'image $UV \subset E$. De plus, par un raisonnement analogue que dans la preuve de la proposition 3.2.1, on a que $\mathcal{D}_{\mathbb{M},r}([-1,1]) \subset \mathcal{D}_{\mathbb{P}}([-1,1])$, ainsi l'opérateur

$$W : \mathcal{D}_{\mathbb{M},r}([-1,1]) \longrightarrow E, \quad f \mapsto f$$

est bien définit,bijectif, linéaire et continu. Par conséquent, l'opérateur

$$W^{-1}UV : \mathbb{C}[[z]]_{\{\mathbb{M}\}} \longrightarrow \mathcal{D}_{\mathbb{M},r}([-1,1])$$

est linéaire et continu par le théorème du graphe fermé. De plus, il s'agit d'un opérateur d'extension global, car pour $(a_p)_p \in \mathbb{C}[[z]]_{\{\mathbb{M}\}}$ et pour $p \in \mathbb{N}_0$, on a

$$\left(W^{-1}UV\mathbf{a}\right)^{pr}(0) = (UV\mathbf{a})^{pr}(0) = (V\mathbf{a})_{pr} = a_p.$$

$\square$

Nous allons à présent construire un opérateur qui fait le lien entre la classe des fonctions ultradifférentiables $\mathcal{D}_{\mathbb{M}}$ et la classe des fonctions ultraholomorphes $\mathcal{A}_{\{\widehat{\mathbb{M}}\}}(S_r)$.

Proposition 4.2.4. *Soient* $\mathbb{M}$ *une suite de poids,* $r \in \mathbb{N}$, $A > 0$ *et* $\gamma > 0$ *tel que* $\gamma < r$*. Alors il existe une constante* $c > 0$ *et un opérateur linéaire et continu*

$$W : \mathcal{D}_{r,\breve{M},A}([-1,1]) \to \mathcal{A}_{\widehat{\mathbb{M}},cA}(S_\gamma)$$

, de sorte que

$$(Wf)^{(n)}(0) = n!f^{(nr)}(0)\forall n \in \mathbb{N}\forall f \in \mathcal{D}_{r,\breve{M},A}([-1,1])$$

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{D}_{r,\widetilde{M},A}([-1,1])$, définissons φ sur $H_0 = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$ par

$$\varphi(z) := \frac{1}{z} \cdot \int_0^1 f(t) \exp(-\frac{t}{z}) dt$$

et la fonction g définie sur le secteur S_r par $g(z) := \varphi(\sqrt[r]{z})$. On a que g est holomorphe. De plus, pur $z \in S_1$ et $n \in \mathbb{N}$, il en résulte par intégration par partie répétée que

$$\begin{aligned}
\varphi(z) &= \frac{1}{z}([-z \cdot \exp(-\frac{t}{z}) f(t)]_0^1 + z \cdot \int_0^1 \exp(-\frac{t}{z}) f'(t) dt) \\
&= 0 + z^0 \cdot \exp(0) f(0) + z^0 \cdot \int_0^1 \exp(-\frac{t}{z}) f^{(1)}(t) dt \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} f^{(j)}(0) z^j + z^{n-1} \cdot \int_0^1 \exp(-\frac{t}{z}) f^{(n)}(t) dt,
\end{aligned}$$

d'où

$$\varphi(z) - \sum_{j=0}^{n-1} f^{(j)}(0) z^j = z^{n-1} \cdot \int_0^1 \exp(-\frac{t}{z}) f^{(n)}(t) dt. \tag{4.2.3}$$

Ainsi, en faisant une intégration par partie, on en tire que

$$\left|\frac{\varphi(z) - \sum_{j=0}^{n-1} f^{(j)}(0) z^j}{z^n} - f^{(n)}(0)\right| = \left|\int_0^1 \exp(-\frac{t}{z}) f^{(n+1)}(t) dt\right|.$$

De plus, on a que

$$\sup_{t\in[0,1]} |\exp(-\frac{t}{z})||f^{(n+1)}(t)| \leqslant c \cdot \sup_{t\in[0,1]} |\exp(-\frac{t}{z})| \leqslant c,$$

et $\lim\limits_{z\to 0, z\in S_1} \exp(-\frac{t}{z}) f^{(n+1)}(t) = 0$, par le théorème de la convergence dominée, on en tire que

$$\lim_{z\to 0} \frac{\varphi(z) - \sum_{j=0}^{n-1} f^{(j)}(0) z^j}{z^n} = f^{(n)}(0) \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.2.4}$$

Par la suite choisissons $\beta > 0$ tel que $\gamma < \beta < r$ et $s \in \mathbb{N}$ tel que le disque le disque D centré en z et de rayon $|z|/s$ soit contenu dans S_β pour tout $z \in S_\gamma$. Ainsi, on a $\Re(z) = |z| \cos(\arg z) \geqslant |z| \cos(\frac{\pi\beta}{2r})$. D'où $|z| \leqslant B \cdot \Re(z)$ pour $z \in S_{\beta/r}$ avec $B = \left(\cos\left(\frac{\pi\beta}{2r}\right)\right]^{-1}$. En utilisant (4.2.3), on en tire que

$$\begin{aligned}
\sup_{z\in S_{\beta/r}} \left|\frac{\varphi(z)-\sum_{j=0}^{nr-1} f^{(j)}(0)z^j}{z^{nr}}\right| &= \sup_{z\in S_{\beta/r}} \left|\frac{1}{z}\cdot\int_0^1 \exp(-\frac{t}{z}) f^{(nr)}(t)dt\right| \\
&\leqslant \sup_{t\in[0,1]} |f^{(nr)}(t)| \sup_{z\in S_{\beta/r}} \frac{1}{|z|}\int_0^1 \exp(-t\Re(\frac{1}{z}))dt \\
&\leqslant \|f\| A^n p! \breve{M}_n \cdot \sup_{z\in S_{\beta/r}} \frac{1}{|z|}\int_0^1 \exp(-t\Re(\frac{1}{z}))dt \\
&\leqslant \|f\| A^n M_n \cdot \sup_{z\in S_{\beta/r}} \frac{1-\exp(-\Re(\frac{1}{z}))}{|z|\cdot\Re(\frac{1}{z})}
\end{aligned}$$

Appliquons maintenant à g la formule intégrale de Cauchy pour $z \in S_\gamma$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
g^{(n)}(z) &= (g(z) - \sum_{j=0}^{n-1} f^{(rj)}(0)z^j)^{(n)} \\
&= (\varphi(\sqrt[r]{u}) - \sum_{j=0}^{nr-1} f^{(j)}(0)(\sqrt[r]{u})^j)^{(n)} \\
&= \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{\varphi(\sqrt[r]{u}) - \sum_{j=0}^{nr-1} f^{(j)}(0)(\sqrt[r]{u})^j}{(u-z)^{n+1}} du.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on a

$$\begin{aligned}
g^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D} &\left(\frac{\varphi(\sqrt[r]{u}) - \sum_{j=0}^{nr-1} f^{(j)}(0)(\sqrt[r]{u})^j}{(\sqrt[r]{u})^{nr}} - f^{(nr)}(0)\right)\frac{u^n}{(u-z)^{n+1}} du \\
+ \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D} &f^{(nr)}(0)\frac{u^n}{(u-z)^{n+1}} du,
\end{aligned}$$

et en utilisant (4.2.4), on en tire que

$$\lim_{z\to 0} g^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D} f^{(nr)}(0)\frac{1}{u} du = n! f^{(nr)}(0)$$

En outre, il résulte de (4.2.4), :

$$\begin{aligned}
|g^{(n)}(z)| &\leqslant \frac{n!}{2\pi}\cdot 2\pi\frac{|z|}{s}\sup_{u\in\partial D}\left|\frac{\varphi(\sqrt[r]{u}) - \sum_{j=0}^{nr-1} f^{(j)}(0)(\sqrt[r]{u})^j}{(|z|/s)^{n+1}}\right| \\
&= \frac{n! s^n}{|z|^n}\sup_{u\in\partial D}\left|\frac{\varphi(\sqrt[r]{u}) - \sum_{j=0}^{nr-1} f^{(j)}(0)(\sqrt[r]{u})^j}{(\sqrt[r]{u})^{nr}}\right| |u|^n \\
&\leqslant\leqslant \frac{n! s^n}{|z|^n}\cdot B\cdot\|f\| A^n \breve{M}_n\cdot\sup_{u\in\partial D}|u|^n \\
&= B\cdot\|f\|\cdot(A(s\,(1+1/s))^n . \widehat{M}_n,
\end{aligned}$$

d'où $||g|| \leqslant B|||f|$.
Donc si on fixe $g^{(n)}(0) := n!f^{(nr)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, alors

$$W : \mathcal{D}_{r,\breve{M},A}([-1,1]) \to \mathcal{A}_{\widehat{\mathbb{M}},cA}(S_\gamma), \quad f \mapsto g|_{S_\gamma}$$

est bien définie, linéaire et continu. □

Théorème 4.2.5. *Soit $\mathbb{M}$ une suite de poids et $r \in \mathbb{N}$. Si il existe un opérateur d'extension global $T_1 : \mathbb{C}[[z]]_{\{\mathbb{M}\}} \longrightarrow \mathcal{D}_{\mathbb{M},r+1}([-1,1])$, alors pour tout $\gamma \in]0,r[$, il existe un opérateur d'extension global $T : \mathbb{C}[[z]]_{\{\mathbb{M}\}} \to \mathcal{A}_{\{\widehat{\mathbb{M}}\}}(S_\gamma)$.*

Démonstration. Puisque $\mathbb{M}$ est une suite de poids, alors il est clair que $\breve{\mathbb{M}}$ est une suite de poids et par le théorème 4.2.3, on a que la suite $\widehat{\boldsymbol{m}}$ satisfait les conditions (γ_{r+1}) et (β_2). D'où lemme B.0.6 et lemme 4.1.4 on a que $\breve{\boldsymbol{m}}$ satisfait satisfait les conditions (γ_r) et (β_2). Donc par le théorème 4.2.3, il existe un opérateur d'extension global

$$U : \mathbb{C}[[z]]_{\{\breve{\mathbb{M}}\}} \longrightarrow \mathcal{D}_{\breve{\mathbb{M}},r}([-1,1]).$$

De plus,

$$V : \mathbb{C}[[z]]_{\{\mathbb{M}\}} \to \mathbb{C}[[z]]_{\{\breve{\mathbb{M}}\}}, \quad (a_p)_p \mapsto (a_p/p!)_p$$

est un isomorphisme et

$$W : \mathcal{D}_{r,\breve{M}}([-1,1]) \to \mathcal{A}_{\widehat{\mathbb{M}}}(S_\gamma),$$

l'opérateur donné par la proposition 4.2.4 car $\gamma < r$. D'où

$$WUV : \mathbb{C}[[z]]_{\{\mathbb{M}\}} \to \mathcal{A}_{\{\widehat{\mathbb{M}}\}}(S_\gamma)$$

est l'opérateur d'extension global recherché, car

$$(WUV\mathbf{a})^{(p)} = (p!UV\mathbf{a})^{(p)} = p!(V\mathbf{a})_p = a_p,$$

pour tout $\mathbf{a} = (a_p)_p \in \mathbb{C}[[z]]_{\{\mathbb{M}\}}$ et $p \in \mathbb{N}_0$. □

Déterminons à présent la condition sur les suites de poids pour laquelle il existe des opérateurs d'extension pour les secteurs d'ouverture arbitraire.

Théorème 4.2.6. *Soit $\mathbb{M}$ une suite de poids telle que*

$$\textit{pour tout } r \in \mathbb{N}_0,\ (m_{n-1}/n^r)_{n\in\mathbb{N}_0} \textit{ est presque croissant.} \tag{4.2.5}$$

Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour tout $r \in \mathbb{N}_0$, il existe un opérateur d'extension global $U_{\mathbb{M},r} : \mathbb{C}[[z]]_{\{\mathbb{M}\}} \to \mathcal{A}_{\{\widehat{\mathbb{M}}\}}(S_r)$.

(ii) Pour un certain $r \in \mathbb{N}_0$*, il existe un opérateur d'extension global* $U_{\mathbb{M},r} : \mathbb{C}[[z]]_{\{\mathbb{M}\}} \to \mathcal{A}_{\{\widehat{\mathbb{M}}\}}(S_r)$.

(iii) $\mathbb{M}$ *satisfait la condition* (β_2).

Démonstration. $(i) \implies (ii)$ trivial.

$(ii) \implies (iii)$. Pour $r \in \mathbb{N}_0$, Puisque $U_{\mathbb{M},r} : \mathbb{C}[[z]]_{\{\mathbb{M}\}} \to \mathcal{A}_{\{\widehat{\mathbb{M}}\}}(S_r)$ est un opérateur d'extension global, il en est de même de $U_{\mathbb{M},r}|_{[}0, \infty[: \mathbb{C}[[z]]_{\{\mathbb{M}\}} \to \mathcal{N}_{\{\mathbb{M},1\}}([0, \infty[)$. Donc par la proposition 4.2.2, on a que $\mathbb{M}$ satisfait la condition (β_2).
$(iii) \implies (i)$. Soit $r \in \mathbb{N}_0$ tel que $r \in]\alpha, \infty[$. Par hypothèse, $\mathbb{M}$ satisfait la condition (β_2) et la suite $(m_n/n^{r+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est -croissante, ainsi par le lemme 4.1.4, on en tire que $\boldsymbol{m}$ satisfait la condition $(\gamma_{r+1}$. D'où par le théorème 4.2.3, il existe un opérateur d'extension global $T : \mathbb{C}[[z]]_{\{\mathbb{M}\}} \to \mathcal{D}_{\{\mathbb{M},r+1\}}([-1, 1])$. Dons nous pouvons conclure par le théorème 4.2.5. □

Théorème 4.2.7. *Soit* $\mathbb{M}$ *une suite de poids. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\gamma(\mathbb{M}) = \infty$*.*

(ii) Pour tout $r > 0$*, il existe global* $U_{\mathbb{M},r} : \mathbb{C}[[z]]_{\{\mathbb{M}\}} \to \mathcal{A}_{\{\{hM\}}(S_r)$*.*

(iii) Pour tout $r > 0$*, il existe un opérateur d'extension global* $V_{\mathbb{M},r} : \mathbb{C}[[z]]_{\{\mathbb{M}\}} \to \widetilde{\mathcal{A}}^u_{\{\mathbb{M}\}}(S_r)$*.*

(iv) Tous les intervalles de surjectivité sont $]0, \infty[$*.*

Démonstration. $(i) \implies (ii)$ Étant donné $r > 0$, considérons $r_0 := \lfloor r \rfloor + 1 > r$. D'après la proposition 1.4.14 il est clair que $\gamma(\widehat{\mathbb{M}}) = \infty$, et par la Proposition B.0.3 nous avons que $\widehat{\mathbb{M}}$ satisfait (β_2). De plus, par le corollaire 1.4.15, on a que $\widehat{\boldsymbol{m}}$ satisfait (γ_{r_0+1}). On peut appliquer le théorème 4.2.3 pour la suite $\widehat{\mathbb{M}}$ et l'entier positif $r_0 + 1$, puis le théorème 4.2.5 pour la valeur $\alpha = r$, afin d'obtenir un opérateur d'extension global global global global global $U_{\mathbb{M},r} : \mathbb{C}[[z]]_{\{\mathbb{M}\}} \to \mathcal{A}_{\{\widehat{\mathbb{M}}\}}(S_r)$.

$(ii) \implies (iii)$ Il est clair par la Proposition 2.1.8.(i).

$(iii) \implies (iv)$ Par la définition d'un opérateur d'extension global comme inverse à droite pour l'application de Borel, nous avons évidemment $\widetilde{S}^u_{\mathbb{M}\}} =]0, \infty[$. Alors, (2.2.2) conduit au résultat.

$(iv) \implies (i)$ Il suffit d'appliquer le théorème 3.1.7. □

Annexe A

Ordre proche

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la notion d'ordre proche qui jouera un rôle essentiel dans l'étude de la quasi-analyticité des classes de fonctions ultraholomorphes.

A.1 Définitions et propriétés

Définition A.1.1. Nous disons qu'une fonction réelle ρ, définie sur $]c, \infty[$ pour un certain $c \geqslant 0$, est un *ordre proche* si les conditions suivantes sont réunies :

(i) ρ est continu et continuellement différentiable par morceaux dans $]c, \infty[$,

(ii) $\rho(t) \geqslant 0$ pour chaque $t > c$,

(iii) $\lim_{t\to\infty} \rho(t) = \rho < \infty$,

(iv) $\lim_{t\to\infty} t\rho'(t)\log(t) = 0$.

Dans le cas où la limite $\rho > 0$, on dit que $\rho(t)$ est un *ordre proche non nul.*

Remarque A.1.2. Par définition de la limite, si $\rho(t)$ est un ordre proche avec une limite ρ à l'infini, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $t_\varepsilon > 1$ tel que

$$t^{\rho-\varepsilon} < t^{\rho(t)} < t^{\rho+\varepsilon}, \quad t > t_\varepsilon.$$

Exemple A.1.3. La fonction $\rho(t) = \rho + \dfrac{1}{t^\gamma}$ est un ordre proche. En effet

(i) $\rho(t)$ est de classe $C^\infty(]0, \infty[)$,

(ii) $\rho(t) \geqslant 0$ pour chaque $t > 0$,

(iii) $\lim_{t\to\infty} \rho(t) = \rho < \infty$,

(iv) On a $\rho'(t) = \frac{-\gamma}{t^{\gamma+1}}$. Ainsi

$$\lim_{t\to\infty} t\rho'(t)\log(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{\gamma \log(t)}{t^\gamma} = 0$$

.

Définition A.1.4. Deux ordres proches ρ_1 et ρ_2 sont dits *équivalents* si

$$\lim_{r\to\infty} \big(\rho_1(r) - \rho_2(r)\big) \log(r) = 0.$$

Proposition A.1.5. *Si ρ_1 et ρ_2 sont équivalents et si $\lim_{r\to\infty} \rho_1(r) = \rho$, alors $\lim_{r\to\infty} \rho_2(r) = \rho$ et $\lim_{r\to\infty} r^{\rho_1(r)}/r^{\rho_2(r)} = 1$.*

Démonstration. Puisque ρ_1 et ρ_2 sont équivalents, on a

$$\lim_{r\to\infty} \rho_1(r) \log(r) = \lim_{r\to\infty} \rho_2(r) \log(r).$$

D'où on en déduit que

$$\lim_{r\to\infty} \rho_1(r) = \lim_{r\to\infty} \rho_2(r) = \rho \quad \text{et} \lim_{r\to\infty} r^{\rho_1(r)}/r^{\rho_2(r)} = 1$$

□

D'après les travaux de L. S. Maergoiz, nous avons les résultats suivants.

Théorème A.1.6 ([5], Thm. 2.4). *Soit ρ un ordre proche avec $\rho(r) \to \rho > 0$ lorsque $r \to \infty$. Pour chaque $\gamma > 0$ il existe une fonction analytique V dans S_γ telle que :*

(i) Pour tout $z \in S_\gamma$,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{V(zr)}{V(r)} = z^\rho,$$

uniformément dans les ensembles compacts de S_γ.

(ii) $\overline{V(z)} = V(\overline{z})$ pour tout $z \in S_\gamma$ (où, pour $z = (|z|, \arg(z))$, on pose $\overline{z} = (|z|, -\arg(z))$).

(iii) V est positif dans $]0,\infty[$, monotone croissant et $\lim_{r\to 0} V(r) = 0$.

(iv) La fonction $t \in \mathbb{R} \to V(e^t)$ est strictement convexe (c'est-à-dire que V est strictement convexe par rapport à $\log(t)$).

(v) La fonction $\log(V(t))$ est strictement concave sur $]0,\infty[$.

(vi) La fonction $\rho_V(t) := \log(V(t))/\log(t)$, $r > 0$, est un ordre proche équivalent à ρ.

Nous désignons par $\mathfrak{B}(\gamma, \rho)$ la classe de telles fonctions V.

Proposition A.1.7 ([5], Propriété 2.9). *Soit $\rho > 0$, ρ un ordre proche avec $\rho(r) \to \rho$, $\gamma \geqslant 2/\rho$ et $V \in \mathfrak{B}(\gamma, \rho)$. Alors, pour chaque $\alpha \in (0, 1/\rho)$, il existe des constantes $b > 0$ et $R_0 > 0$ telles que*

$$\Re(V(z)) \geqslant bV(|z|), \quad z \in S_\alpha,\ |z| \geqslant R_0,$$

où $\Re$ représente la partie réelle.

Théorème A.1.8 ([12], Ch. 2, Thm. 2.1). *Soit $\omega :]a,\infty[\to]0,\infty[$ une fonction continue non négative et non décroissante avec $\rho[\omega] := \limsup_{t\to\infty} \log(\omega(t))/\log(t) < \infty$. Alors, il existe un ordre proche $\rho(t)$ avec $\lim_{t\to\infty} \rho(t) = \rho[\omega]$ tel que*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\omega(t)}{t^{\rho(t)}} \in (0,\infty).$$

De plus, $\rho[\omega_{\mathbb{M}}] = \frac{1}{\omega}$.

Annexe B

Théorèmes et propositions utiles

Proposition B.0.1 ([10], Prop. 1.8.III., p. 18-19). *] Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites croissantes de nombres réels positifs. Posons*

$$b_0 := 0, \quad N_0 := 0 \quad \textit{et} \quad N_n := \sum_{i=1}^{n}(b_i - b_{i-1})a_i$$

Alors on a

$$\sup_{k\geqslant 1}(b_k x - N_k) = \sup_{k\geqslant 0}(b_k x - N_k) \ = b_m x - N_m,$$

pour

$$a_m \leqslant x \leqslant a_{m+1}, m \geqslant 1.$$

Démonstration. Puisque $b_0 := 0$ remarquons d'abord que,

$$N_n := \sum_{i=1}^{n}(b_i - b_{i-1})a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i a_i - \sum_{i=1}^{n} b_{i-1}a_i = \sum_{i=1}^{n-1}(a_i - a_{i+1})b_i + a_n b_n.$$

De plus, $b_k x - N_k \geqslant b_k a_k - N_k = \sum_{i=1}^{k-1} b_i(a_{i+1} - a_i) \geqslant 0$ pour tout $k \geqslant 1$ et $b_0 x - N_0 = 0$, d'où

$$\sup_{k\geqslant 1}(b_k x - N_k) = \sup_{k\geqslant 0}(b_k x - N_k).$$

Soit $x \in [a_m, a_{m+1}]$ pour $0 < p < m < q$ on a

$$\begin{aligned}
b_p x - N_p &= \sum_{k=1}^{p-1}(b_k(a_{k+1} - a_k)) + b_p(x - a_p) \\
&= \sum_{k=1}^{p-1}(b_k(a_{k+1} - a_k)) + b_p \sum_{k=p}^{m-1}(a_{k+1} - a_k) + b_p(x - a_m) \quad \text{car} \sum_{k=p}^{rn-1}(a_{k+1} - a_k) = a_m - a_p \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{m-1}(b_k(a_{k+1} - a_k)) + b_m(x - a_m) \quad \text{car } b_p \leqslant b_k \text{ pour } p \leqslant k \leqslant m \\
&= b_m x - N_m.
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} b_m x - N_m &\geqslant b_m x - N_m - \sum_{k=m+1}^{q} ((b_k - b_{k-1})a_k) + (b_q - b_m)x \quad \text{car } x \leqslant a_k \text{ pour } m+1 \leqslant k \leqslant q \\ &= b_q x - N_q. \end{aligned}$$

On voit donc que pour $0 < p < m < q$ on a $b_q x - N_q \leqslant b_m x - N_m$ et $b_p x - N_p \leqslant b_m x - N_m$. D'où la conclusion. □

Théorème B.0.2 ([19],Stolz-Cesaro Thm. 1.22)**.** *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement monotone et divergente. Alors*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l \ (\in [-\infty,\ +\infty])$$

implique

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l.$$

Démonstration. Supposons que l soit fini et que (b_n) soit strictement croissant. Choisissons un ε positif. Par hypothèse, il existe $n_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_\varepsilon$ on a $b_n > 0$ et

$$\left| \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} - l \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ainsi

$$(b_{n+1} - b_n)(l - \varepsilon/3) < a_{n+1} - a_n < (b_{n+1} - b_n)(l + \varepsilon/3). \tag{B.0.1}$$

En prenant dans(B.0.1), successivement $n = n_\varepsilon, n = n_\varepsilon + 1, \cdots, n = n_\varepsilon + p - 1$, et en additionnant toutes ces inégalités, on obtient successivement

$$(b_{n_\varepsilon+p} - b_{n\varepsilon})(l - \varepsilon/3) < a_{n\varepsilon+p} - a_{n\varepsilon} < (b_{n_\varepsilon+p} - b_{n_\varepsilon})(l + \varepsilon/3)\ ,$$

$$l - \frac{\varepsilon}{3} - (l - \frac{\varepsilon}{3})\frac{b_{n_\varepsilon}}{b_{n_\varepsilon+p}} + \frac{a_\varepsilon}{b_{n_\varepsilon+p}} < \frac{a_{n_\varepsilon+p}}{b_{n_\varepsilon+p}} < l + \frac{\varepsilon}{3} - (l + \frac{\varepsilon}{3})\frac{b_{n_\varepsilon}}{b_{n_\varepsilon+p}} + \frac{a_{n_\varepsilon}}{b_{n_\varepsilon+p}}.$$

De plus puisque b_n diverge, on a que les suites $(b_{n_5}/b_{n_\in+p})_p$ et $(a_{n\in}/b_{n_\varepsilon+p})_p$ tendent vers 0. Alors il existe $p_\varepsilon > 0$ tel que pour chaque $p \geqslant p_\varepsilon$ on a

$$\left| \frac{b_n}{b_{n_\varepsilon+p}}(l \pm \frac{\varepsilon}{3}) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{et} \left| \frac{b_n}{b_{n_\varepsilon+p}} \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Donc, pour chaque $n > n_\varepsilon + p_\varepsilon$, on a finalement

$$\left| l - \frac{a_n}{b_n} \right| < \varepsilon.$$

Donc $a_n/b_n \to l$.

Supposons que $l = +\infty$. Nous pouvons supposer que tous les b_n sont strictement positifs. Soit $M > 0$. Il existe n_M tel que pour tout $n \geqslant n_M$ on a

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} > \varepsilon$$

ei

$$a_{n+1} - a_n > M(b_{n+1} - b_n) \ .$$

En additionnant ces inégalités de n à $n + p - 1$, on a

$$a_{n+p} - a_n > M(b_{n+p} - b_n)$$

$$a_{n+p}/b_{n+p} > M + (a_n - Mb_n)/b_{n+p}.$$

Puisque, $((a_n - Mb_n)/b_{n+p})_p$ tend vers 0. Alors il existe un p_M tel que pour tout $p > p_M$ on a

$$|(a_n - Mb_n)/b_{n+p}| < M/2.$$

Donc, pour chaque $n > n_M + p_M$, on a finalement

$$a_n/b_n > \varepsilon/2.$$

Donc, $a_n/b_n \to \infty$. Le cas $l = -\infty$ se traite de manière similaire. □

La proposition suivante donne lien entre l'indice de croissance $\gamma(\mathbb{M})$ et la condition (β_2).

Proposition B.0.3 ([14], Proposition 4.4.). *Soit $\mathbb{M}$ une suite de poids. Si $\gamma(\mathbb{M}) = \infty$, alors $\mathbb{M}$ satisfait la condition (β_2).*

Le lemme suivant ne sera pas démontré. Le lecteur pourra consulter la preuve ici [10, Sect. 6.4.IV].

Lemme B.0.4. *Si $f \in \mathcal{C}^r([-1,1])$ pour un certain $r \in \mathbb{N}$ et que*

$$Q_0 := \sup_{xin[-1,1]} |f(x)|, \quad \textit{et} \quad Q_r := \sup_{x\in[-1,1]} |f^{(r)}(x)|,$$

alors

$$\sup_{x\in[-1,1]} |f^{(j)}(x)| \leqslant (8er/j)^j \max(Q_0^{1-j/r}, Q_r^{j/r}, (r/2)^j Q_0).$$

pour chaque $j \in \{1, \ldots, r-1\}$.

Lemme B.0.5 ([4],Lemma 1.3.6). *Soient $T > 0$ et $u \in C^m(]-\infty, T])$ qui s'annule sur $]-\infty, 0]$. Soit $(a_j)_j$ une suite décroissante positive tel que $T \leqslant a_1 + \cdots a_m$, alors pour $x \leqslant T$:*

$$|u(x)| \leqslant \sum_{j\in J} 4^j \sup_{y<x} a_1 \cdots a_j |u^{(j)(y)}|$$

Où $J = \{j | 1 \leqslant j \leqslant m \quad \textit{et} \quad a_j + 1 < a_j \quad \textit{ou} \quad j = m\}$

Lemme B.0.6 ([21],Lemma 2.1)**.** *Soit $\mathbb{M}$ est une suite (lc). Pour tout $r \in \mathbb{N}$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) la suite $\boldsymbol{m}$ satisfait la condition γ_{r+1},

(ii) la suite $\breve{\boldsymbol{m}}$ satisfait la condition γ_r.

Théorème B.0.7 (Théorème de factorisation de Grothendieck, [20] p.290)**.** *. Soit E un espace localement convexe, F et F_n des espaces de Fréchet et $u \in L(F, E)$, $u_n \in L(F_n, E)$, $n \in \mathbb{N}$. Si $u(F) \subset \cup_{n \in \mathbb{N}} u_n(F_n)$, il existe un $m \in \mathbb{N}$ tel que*

$$u(F) \subset u_m(F_m)$$

. Si u_m est injective, alors $v \in L(F, F_m)$ existe avec $u = u_m \circ v$.

Annexe C

Surface de Riemann associée à fonction logarithme

Dans cette section nous définirons la notion de surface de Riemann et nous allons voir la surface de Riemann du logarithme comme le graphe d'une fonction de $\mathbb{C}^2$. Nous nous somme principalement référencé de [17], mais pour une étude plus générale des Surfaces de Riemann associées à une fonction analytique voir [18].

Définition C.0.1. Une variété complexe de dimension n est un espace topologique séparé X recouvert par un nombre dénombrable de cartes. Une carte est la donnée d'un ouvert U_α de X, d'un ouvert V_α de $\mathbb{C}^n$ et d'un homéomorphisme $\phi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ tels que si deux cartes U_α et U_β se rencontrent, l'application de changement de cartes $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ soit un biholomorphisme [1].On dit que $(U_\alpha, \phi_\alpha)_\alpha$ est un atlas holomorphe.

Définition C.0.2. Une surface de Riemann est une variété complexe de dimension 1.

Considérons

$$R = \{(z, w) : z = \exp(w)\} \subset \mathbb{C}^2.$$

Montrons que R est une surface de Riemann. Puisque $\mathbb{C}^2$ est un espace métrique, on a que R est un espace topologique séparé. De plus, soit $(z, w) = (\exp(w), w) \in R$, la projection $\phi : R \to \mathbb{C}$ définie par $\phi(z, w) = z$ et soit D_w un disque centré en $z_1 = \exp(w)$ et ne contenant pas zéro. Alors,

$$h_w(z) = w + \int_{\mathcal{C}} \frac{d\eta}{\eta},$$

où $\mathcal{C}$ est n'importe quel chemin joignant z_1 à z_2 dans D_w. Montrons que h_w holomorphe dans

1. Holomorphe,bijective et d'inverse holomorphe

D_w et prend la valeur w en z_1. En effet, on a que $h_w(z)$, est holomorphe avec $h'_w(z) = \frac{1}{z}$ car

$$\begin{aligned}
\frac{h_w(z+\tau) - h_w(z)}{\tau} &= \frac{1}{\tau}\int_{z_1}^{z+\tau} \frac{d\eta}{\eta} - \frac{1}{\tau}\int_{z_1}^{z} \frac{d\eta}{\eta} \\
&= \frac{1}{\tau}\int_{z}^{z+\tau} \frac{d\eta}{\eta} \\
&= \int_0^1 \frac{dt}{z+t\tau} \\
&= \frac{\log(1+\tau) - \log(1)}{\tau} \to \frac{1}{z} \quad \text{quand } t \to 0.
\end{aligned}$$

De plus, posons $g(z) = \frac{\exp(h_w(z))}{z}$ sur D_w. Ainsi, on a

$$g'(z) = \frac{\exp(h_w(z)) - \exp(h_w(z))}{z^2} = 0.$$

Donc par le théorème de l'ouvert connexe, on a que g est constant sur D_w. Or $g(z_1) = -1$ car $z_1 = \exp(w)$, ainsi $\frac{\exp(h_w(z))}{z} = 1$ et on en tire que $(z, h_w(z)) \in R$.
Posons

$$U_w = \{(z, h_w(z)) : z \in D_w\} \subset R.$$

Soit ϕ_w la restriction de ϕ à U_w, on a que $\phi_w : U_w \to D_w$ est un homéomorphisme (car un inverse continue est donné par $z \to (z, h_w(z))$). De plus U_w est un ouvert de R (car image d'un ouvert par un homéomorphisme). Si deux de ces disques D_w et D'_w s'intersectent, la fonction de transition qui $z \to z$ définit sur l'intersection est bianalytique. On conclut donc que les cartes (ϕ_w, U_w) réalisent R comme une surface de Riemann et sur R, le logarithme est représenté par l'application

$$\varphi : (z, w) \to w.$$

On a que φ est un homéomorphisme de $R \to \mathbb{C}$ dont l'inverse est donné par $w \to (\exp(w), w)$. On appelle R la Surface de Riemann du logarithme. Généralisons ce résultat en montrant que l'ensemble des zéros d'une fonction de deux variables complexe est une surface de Riemann. pour le faire, admettons le théorème suivant :

Théorème C.0.3. *(Théorème des fonctions implicites) Soit $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ continue et $(z_0, w_0) \in \mathbb{C}^2$ est tel que $F(z_0, w_0) = 0$*

i. Si la fonction F est analytique en z pour chaque w fixé et $\frac{\partial F}{\partial z}(z_0, w_0) \neq 0$, alors il existe $\delta > 0$ tel pour tour $w \in D(w_0, \delta)$, on a une fonction $z = g(w)$ satisfaisant $F(z, w) = F(g(w), w) = 0$

ii. Si la fonction F est analytique en w pour chaque z fixé, alors $g(w)$ est analytique et on a

$$g'w) = \frac{\frac{\partial F}{\partial w}}{\frac{\partial F}{\partial z}}(g(w), w)$$

.

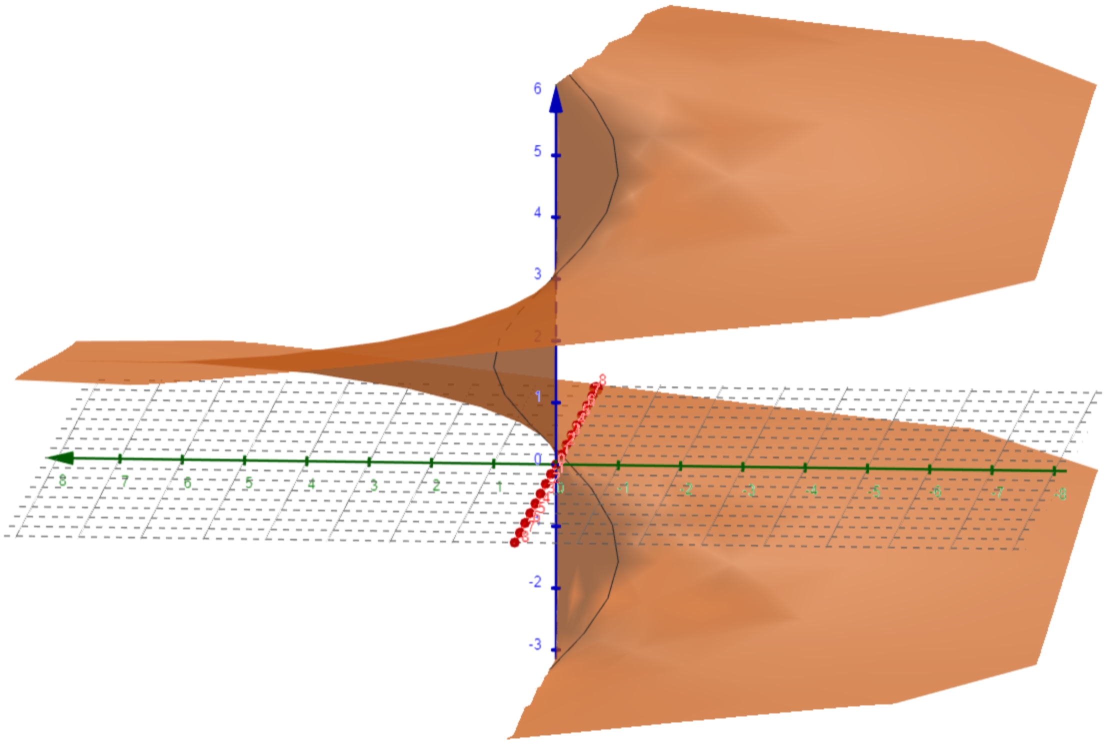

FIGURE C.1 – Surface de Riemann R de $\log z$

Théorème C.0.4. *Soit $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ continue tel que F est analytique en z pour chaque w fixé et F est analytique en w pour chaque z fixé. Si au moins une des dérivées partielles est non nul, alors*

$$R = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : F(z, w) = 0\} \subset \mathbb{C}$$

est une surface de Riemann.

Démonstration. Puisque $\mathbb{C}^2$ est un espace métrique et que l'ensemble des zéros d'une fonction à deux variable complexe est de dimension complexe un, on a que R est un espace topologique séparé de dimension complexe 1. De plus,

i. Si $(z_0, w_0) \in R$ et $\frac{\partial F}{\partial z}(z_0, w_0) \neq 0$, alors par le Théorème des fonctions implicites (C.0.3), il existe $\delta > 0$ tel pour tour $w \in D(w_0, \delta)$, on a une fonction $z = g(w)$ satisfaisant $F(z, w) = F(g(w), w) = 0$. Ainsi posons $D_w = D(w_0, \delta)$ et $U_w = \{(g(w), w) : w \in D_w\} \subset R$ car $F(g(w), w) = 0$.
Soit $\phi : (z, w) \to w$ et ϕ_w la restriction de ϕ à U_w, on a que $\phi_w : U_w \to D_w$ est un homéomorphisme(car un inverse continue est donné par $w \to (g(w), w)$. De plus U_w est un ouvert de R(car image d'un ouvert par un homéomorphisme). Donc la paire (U_w, ϕ_w) est une carte complexe de R en (z_0, w_0).

ii. De même si $(z_1, w_1) \in R$ et $\dfrac{\partial F}{\partial w}(z_1, w_1) \neq 0$, alors par le Théorème des fonctions implicites (C.0.3), il existe $\delta > 0$ tel pour tour $z \in D(z_1, \delta)$, on a une fonction $w = h(z)$ satisfaisant $F(z, w) = F(z, h(z)) = 0$.
Ainsi posons $D_z = D(z_1, \delta)$ et $U_z = \{(z, h(z)) : z \in D_z\} \subset R$ car $F(z, h(z)) = 0$.
Soit $\phi : (z, w) \to z$ et ϕ_z la restriction de ϕ à U_z, on a que $\phi_z : U_z \to D_z$ est un homéomorphisme(car un inverse continue est donné par $z \to (z, h(z))$. De plus U_z est un ouvert de R(car image d'un ouvert par un homéomorphisme). Donc la paire (U_z, ϕ_z) est une carte complexe de R en (z_1, w_1).

iii. Vérifions la compatibilité des cartes. Si nous avons deux cartes (U_w, ϕ_w) et $(U_{w'}, \phi_{w'})$, alors la fonction de transition est la fonction identité défini sur $D_w \cap D_{w'} \neq \phi$ qui est biholomorphe. De même pour deux cartes (U_z, ϕ_z) et $(U_{z'}, \phi_{z'})$. En fin si nous avons deux cartes (U_w, ϕ_w) et (U_z, ϕ_z) tel que $U_w \cap U_z \neq \phi$, alors les fonctions de transitions

$$\phi_w \circ \phi_z^{-1} : z \to h(z)$$

et

$$\phi_z \circ \phi_w^{-1} : w \to g(w)$$

sont holomorphes . D'où R est une surface de Riemann.

$\square$

Ainsi nous pouvons voir la surface de Riemann d'une fonction analytique comme le graphe d'une fonction à deux variable complexe.

Bibliographie

[1] J. Jiménez-Garrido, J. Sanz, Strongly regular sequences and proximate orders, J. Math. Anal. Appl. 438 (2016), no. 2, 920–945.

[2] H. Komatsu, Ultradistributions, I : Structure theorems and a characterization, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 20 (1973), 25–105.

[3] W. Balser, *Formal power series and linear systems of meromorphic ordinary differential equations*, Springer, Berlin, 2000.

[4] L., Hörmander : The analysis of linear partial differential operators I. Springer Verlag, Berlin, 1983

[5] L. S. Maergoiz, Indicator diagram and generalized Borel-Laplace transforms for entire functions of a given proximate order, St. Petersburg Math. J. 12 (2001), no. 2, 191–232.

[6] H.-J. Petzsche, On E. Borel's theorem, Math. Ann. 282 (1988), no. 2, 299–313.

[7] J. Sanz, Flat functions in Carleman ultraholomorphic classes via proximate orders, J. Math. Anal. Appl. 415 (2014), 623–643.

[8] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators I. Distribution theory and Fourier analysis*, Second edition. Springer Study Edition. Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[9] V. Thilliez, Division by flat ultradifferentiable functions and sectorial extensions, Results Math. 44 (2003), 169–188.

[10] S. Mandelbrojt, *Séries adhérentes, régularisation des suites, applications*, Collection de monographies sur la théorie des fonctions, Gauthier-Villars, Paris, 1952.

[11] J. Jiménez-Garrido, J. Sanz, and G. Schindl. Log-convex sequences and nonzero proximate orders. *J. Math. Anal. Appl.*, 448(2) :1572–1599, 2017.

[12] A. A. Goldberg, I. V. Ostrovskii, *Value distribution of meromorphic functions*, Transl. Math. Monogr. 236, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.

[13] J. Jiménez-Garrido, J. Sanz, and G. Schindl. Injectivity and surjectivity of the asymptotic borel map in Carleman ultraholomorphic classes. 2018.

[14] J. Jiménez-Garrido, J. Sanz, and G. Schindl. Surjectivity of the asymptotic Borel map in Carleman-Roumieu ultraholomorphic classes defined by regular sequences. 2018.

[15] G. SCHINDL, Spaces of smooth functions of Denjoy-Carleman-type, Université de Wien, Mémoire de fin d'études, 2009.

[16] J. Jiménez-Garrido, *Applications of regular variation and proximate orders to ultraholomorphic classes, asymptotic Développements and multisummability*, Thèse de doctorat, Université de Valladolid, 2018.

[17] A. J. Beardon, A primer on Riemann surfaces, Cambridge University Press, 1984.

[18] G. Springer, Introduction to Riemann surface, Addison-wesley, Massachusett, 1957

[19] Marian Muresan, A Concrete Approach to Classical Analysis, Springer-Verlag New York 2009, XVIII, 433.

[20] Meise, Reinhold ; Vogt, Dietmar : Introduction to functional analysis. Oxford University Press, 1997

[21] J. Schmets, M. Valdivia, Extension maps in ultradifferentiable and ultraholomorphic function spaces, Studia Math. 143 (3) (2000), 221–250.

[22] B. R. Salinas, Funciones con momentos nulos, Rev. Acad. Ci. Madrid 49 (1955), 331–368.

[23] A. S. B. Holland, *Introduction to the theory of entire functions*, Academic Press, New York and London, 1973.