

Mémoire

Auteur : Brisbois, Claire

Promoteur(s) : Mathonet, Pierre; Zenaïdi, Naïm

Faculté : Faculté des Sciences

Diplôme : Master en sciences mathématiques, à finalité didactique

Année académique : 2022-2023

URI/URL : <http://hdl.handle.net/2268.2/17236>

Avertissement à l'attention des usagers :

Tous les documents placés en accès ouvert sur le site le site MatheO sont protégés par le droit d'auteur. Conformément aux principes énoncés par la "Budapest Open Access Initiative"(BOAI, 2002), l'utilisateur du site peut lire, télécharger, copier, transmettre, imprimer, chercher ou faire un lien vers le texte intégral de ces documents, les disséquer pour les indexer, s'en servir de données pour un logiciel, ou s'en servir à toute autre fin légale (ou prévue par la réglementation relative au droit d'auteur). Toute utilisation du document à des fins commerciales est strictement interdite.

Par ailleurs, l'utilisateur s'engage à respecter les droits moraux de l'auteur, principalement le droit à l'intégrité de l'oeuvre et le droit de paternité et ce dans toute utilisation que l'utilisateur entreprend. Ainsi, à titre d'exemple, lorsqu'il reproduira un document par extrait ou dans son intégralité, l'utilisateur citera de manière complète les sources telles que mentionnées ci-dessus. Toute utilisation non explicitement autorisée ci-avant (telle que par exemple, la modification du document ou son résumé) nécessite l'autorisation préalable et expresse des auteurs ou de leurs ayants droit.



FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE

Axiomatique des plans affines : de la géométrie à l'algèbre

Mémoire de fin d'études présenté en vue de l'obtention du titre de
Master en Sciences Mathématiques, à finalité didactique

Année académique 2022-2023

Auteur :
Claire BRISBOIS

Promoteur :
Pierre MATHONET

Co-Promoteur :
Naïm ZENAÏDI

Table des matières

1	Fondements de géométrie plane	7
1.1	Structures d'incidences	8
1.1.1	Aparté historique	9
1.2	Axiomes d'incidence et conséquences	10
1.2.1	Exemples, contre-exemples et indépendance des deux premiers axiomes	11
1.3	Parallélisme et Postulat d'Euclide	14
1.4	Étude du parallélisme	16
1.5	Quelques conséquences des trois premiers axiomes	19
2	Modèles de plan affine	21
2.1	Le plan cartésien réel	22
2.1.1	Droites définies par équations	22
2.1.2	Droites affines	24
2.2	Le plan affine sur un corps quelconque	26
2.3	Le plan de Moulton	34
2.4	Plans affines finis	41
2.4.1	La géométrie du tétraèdre	41
2.4.2	Cas général	43
3	Dilatations associées à un plan affine	45
3.1	Étude générale des dilatations	45
3.2	Traces d'une dilatation	49
3.2.1	Caractérisation des dilatations par leurs traces	50
3.3	Dilatations des différents modèles	52
3.3.1	Dilatations du plan \mathbb{K}^2	52
3.3.2	Dilatations du plan de Moulton	55
3.3.3	Dilatations de la géométrie du tétraèdre	60
3.4	Le groupe des dilatations non constantes	60
3.5	Homomorphismes Traçants	64
3.5.1	Structure d'anneau sur \mathcal{H}	65
3.6	Homomorphismes traçants des différents modèles	68
3.6.1	Homomorphismes traçants du plan \mathbb{K}^2	69
3.6.2	Homomorphismes traçants du plan de Moulton	71

3.6.3	Homomorphismes traçants de la géométrie du tétraèdre	73
4	Axiomes de transitivité et théorème d'isomorphie	74
4.1	Axiome IV et conséquences	74
4.2	Axiome V et conséquences	77
4.3	Axiomes de transitivité dans les différents modèles	79
4.3.1	Axiomes de transitivité dans le plan \mathbb{K}^2	79
4.3.2	Axiomes de transitivité dans le plan de Moulton	80
4.3.3	Axiomes de transitivité dans la géométrie du tétraèdre	81
4.4	Géométrie analytique et théorème d'isomorphie	81
5	Théorèmes de Desargues et Pappus	86
5.1	Le théorème de Desargues	86
5.2	Le théorème de Pappus	93
6	Quelques structures algébriques ordonnées	97
6.1	Groupes, anneaux et corps ordonnés	98
6.1.1	Groupes ordonnés	98
6.1.2	Anneaux ordonnés	101
6.1.3	Corps ordonnés	104
6.2	Automorphismes d'anneaux ordonnés	111
6.3	La construction de Hilbert	113
6.4	Anneaux faiblement ordonnés	121
6.5	Plans affines ordonnés	123

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon promoteur, Monsieur Pierre MATHONET, ainsi que mon co-promoteur, Monsieur Naïm ZENAÏDI, pour leurs conseils, leur suivi et leur disponibilité tout au long de l'élaboration de ce mémoire.

Je remercie également Monsieur Kévin BALHAN, Madame Gentiane HAESBROECK, Monsieur Michel RIGO et Monsieur Jean-Pierre SCHNEIDERS pour leur présence dans mon jury.

Je tiens aussi à remercier ma famille et mes amis pour leurs encouragements et leur soutien tout au long de mes études en mathématiques.

Pour finir, je tiens à remercier toutes les personnes rencontrées au cours de ces cinq années d'études passées à l'ULiège. Je pense en particulier aux étudiants de mon année et aux membres du CSM.

Introduction

Si on suit le cours de l'apprentissage de la géométrie, de l'école primaire à l'université, les objets tels que les points et les droites (voire les plans) sont peu à peu installés, et leurs propriétés sont constatées petit à petit sur des représentations graphiques. On se trouve sans le savoir dans la géométrie d'Euclide, où ces objets ne sont pas définis, mais où les règles du jeu géométrique sont fixées par une liste d'axiomes (ou postulats). Cette façon de pratiquer la géométrie date donc des *Éléments* [6]. Elle a l'avantage de permettre (si on le souhaite) de se lancer assez rapidement dans l'élaboration de raisonnements de nature géométrique, qui constituent de premiers pas vers l'abstraction mathématique, tout en restant liés à l'intuition au moyen de schémas, de représentations graphiques.

À la fin de l'enseignement secondaire, on introduit la géométrie vectorielle (où, à l'heure actuelle, on constate aussi les propriétés des "opérations sur les vecteurs"). Cette introduction suit chronologiquement l'introduction des coordonnées dans "le" plan, qui apparaissent dans le cycle inférieur de l'enseignement secondaire. À l'aide des coordonnées et de la géométrie vectorielle, on apprend finalement à écrire des équations de droites, de cercles, et autres coniques.

Dans les premiers cours d'algèbre et de géométrie de l'université, on abandonne cette démarche pour reconstruire une géométrie basée sur des définitions précises : on introduit les espaces vectoriels sur un corps (commutatif) \mathbb{K} , puis ensuite les points de la géométrie sont les éléments d'un ensemble \mathcal{A} sur lequel un espace vectoriel agit par translations (de manière libre et transitive). On peut enfin définir des sous-ensembles particuliers de \mathcal{A} , les variétés affines, puis les variétés affines de dimension 1, qui sont appelées droites. On peut alors démontrer que les propriétés auxquelles on s'était habitué dans le plan (un espace affine de dimension 2) sont vraies : par deux points distincts d'un plan passe une seule droite, il y a au moins une droite et un point non situé sur cette droite... On définit la notion de direction, ou de sous-espace vectoriel directeur d'une droite, et ensuite le parallélisme. On peut alors démontrer le célèbre postulat d'Euclide sur les parallèles : étant donné un point P et une droite d , il existe une unique droite parallèle à d et qui passe par P . Cette formulation équivalente de l'axiome est due à Playfair. Nous conseillons au lecteur de se référer au livre *Elements of Geometry* de Playfair [17] ou au mémoire d'Antoine Leboutte [11] pour plus de détails concernant l'importance de cet axiome.

Dans bien des ouvrages de géométrie, cette définition abstraite des espaces affines est laissée de côté et, pour parler de géométrie plane par exemple, on se contente d'introduire l'espace \mathbb{R}^2 et on définit les droites comme les ensembles de solutions d'équations

du premier degré, non triviales et compatibles. Cette approche rejoint le chemin suivi en géométrie affine quand on introduit dans cette dernière les repères, coordonnées et équations cartésiennes. Elle peut aussi être généralisée à des corps différents de \mathbb{R} : étant donné un corps \mathbb{K} , on construirait un plan dont les points seraient définis par les couples (x, y) d'éléments de \mathbb{K} , les droites seraient également définies au moyen des équations linéaires ou à l'aide d'éléments de \mathbb{K}^2 (les "vecteurs directeurs"). Nous verrons qu'il faudra alors être prudent, dans le cas général, à propos de la définition employée.

Cela permet de reconstruire la géométrie classique (et bien plus), mais au prix de l'introduction quelque peu abrupte des espaces vectoriels et de l'axiomatique des espaces affines. On peut dès lors se demander s'il serait possible de compléter les axiomes (postulats) d'Euclide pour donner un cadre solide à la géométrie (et/ou à son enseignement). Ce travail de fondation de la géométrie consistant à améliorer les axiomes d'Euclide a été réalisé, dans les espaces que nous appelons maintenant de dimension 2 et 3 par D. Hilbert, dans son ouvrage [9]. Dans ce mémoire, nous suivrons une axiomatique légèrement différente pour la géométrie plane, fondée sur la notion de structure d'incidence et ensuite de plan affine. Les objets d'une structure d'incidence sont alors donnés par des points et des droites, et une relation dite d'incidence entre points et droites. Les axiomes sur la relation d'incidence sont alors complétés par les axiomes de transitivité. Nous les étudions en détail dans le chapitre 4.

Dans la première partie de ce mémoire, nous nous intéressons aux liens qui peuvent exister entre la géométrie plane telle que décrite par Artin [1] et une géométrie que l'on pourrait introduire sur \mathbb{K}^2 , où \mathbb{K} est un corps. Il est assez aisé de montrer que \mathbb{K}^2 , où les points et droites sont définis comme nous en avons l'habitude, satisfont les premiers axiomes décrits dans ce travail. Se pose alors la question réciproque : étant donnée une géométrie satisfaisant certains axiomes, peut-on faire émerger un "ensemble de vecteurs" et même éventuellement un corps, de sorte que la géométrie en question soit en fait isomorphe à la géométrie de \mathbb{K}^2 .

Le chemin suivi est celui-ci : à partir de trois axiomes élémentaires (axiomes d'incidence et axiome des parallèles), nous pouvons définir les dilatations, ce sont des applications du plan dans lui-même qui sont soit constantes, soit transforment toute droite en une droite parallèle. Nous pouvons classifier les dilatations selon leur nombre de points fixes et nous récupérons ainsi les notions de translations et d'homothéties. Les translations jouent un rôle important puisque ce sont elles qui, dans la géométrie étudiée dans l'enseignement secondaire ou à l'université, sont associées à l'ensemble des vecteurs (muni de sa structure de groupe additif).

Nous introduisons ensuite l'ensemble des homomorphismes traçants : ce sont des applications du groupe des translations dans lui-même, qui préservent les traces de leurs arguments (une trace d'une dilatation est une droite passant par un point et son image). Il faut introduire deux axiomes supplémentaires, portant sur la transitivité de l'action des dilatations, pour munir l'ensemble des homomorphismes traçants d'une structure de corps. Ce corps agit naturellement sur les translations, et permet d'introduire la notion de repère et de coordonnées et d'identifier la géométrie à celle de \mathbb{K}^2 .

Les axiomes introduits pour construire ce corps \mathbb{K} peuvent cependant sembler peu

naturels, parce que de nature un peu plus algébrique. Nous consacrons alors le chapitre 5 à l'étude de l'équivalence de ces axiomes avec les théorèmes classiques de géométrie que sont les théorèmes de Pappus et Desargues. Plus précisément, nous démontrerons que les axiomes *IV* et *V* sont équivalents au théorème de Desargues alors que le théorème de Pappus est lui-même équivalent à la commutativité du corps de base \mathbb{K} .

Nous étudions ensuite les axiomes d'ordre en géométrie, tels que définis par Hilbert dans [9]. Dans un plan affine arguésien, donc une géométrie isomorphe à \mathbb{K}^2 , on peut naturellement traduire ces axiomes en termes de propriétés d'ordre sur le corps \mathbb{K} . Cela nous mène à étudier d'un peu plus près différentes structures algébriques ordonnées. En particulier, nous allons être amené à étudier le résultat de Artin-Schreier [2] et la généralisation de Szele [21]. Nous présentons ensuite une construction due à Hilbert d'un corps ordonné non commutatif. Nous terminons notre travail en analysant les équivalents géométriques des propriétés d'ordre étudiées du point de vue de l'algébrique.

Chapitre 1

Fondements de géométrie plane

Les *Éléments* d'Euclide constituent le premier traité de mathématique déductive qui nous soit parvenu. L'apport conceptuel fondamental de ce dernier du point de vue de l'histoire des mathématiques repose sur la volonté du mathématicien grec de présenter l'essentiel du savoir géométrique de l'époque en ne faisant reposer les raisonnements que sur un nombre limité de définitions préalables (les objets fondamentaux de la géométrie) ainsi que sur quelques propositions aisément acceptées (les axiomes ou postulats de la géométrie). Cette théorie est développée dans le livre de Heath [6]. De plus, les *Éléments* d'Euclide ont représenté la base du savoir mathématique pendant au moins deux millénaires [7] et leur enseignement était une des pierres angulaires de l'éducation jusqu'au milieu du 20-ième siècle au moins. Les discussions théoriques concernant la nature des objets géométriques ainsi que la dépendance des différents axiomes ont irrigué les débats philosophiques et mathématiques pendant des siècles, depuis les tentatives de Saccheri [19] et de Legendre [12], jusqu'aux travaux de D. Hilbert [9] sur le sujet.

D'une certaine manière les efforts des chapitres à venir sont un approfondissement axiomatique de l'approche de René Descartes, qui est le premier à avoir tenté d'algébriser la géométrie en introduisant la notion de coordonnées (voir [15]) : en effet, nous ferons émerger une structure de corps \mathbb{K} à partir de la donnée d'une géométrie satisfaisant cinq axiomes assez naturels et prouverons que cette dernière est isomorphe à \mathbb{K}^2 .

Pour y parvenir, nous présentons dans ce chapitre les définitions des objets fondamentaux de la géométrie plane d'Euclide (points, droites, relation d'incidence) du point de vue de la théorie des ensembles ainsi que les trois premiers axiomes de la géométrie plane tels que présentés dans le célèbre livre de E. Artin [1] et relayé dans le cours de L. Nolle [14]¹. Ce premier chapitre se termine en examinant de près la notion de parallélisme ainsi que quelques conséquences utiles des définitions et axiomes.

1. Ces notions sont bien entendu déjà présentes dans les *Éléments* d'Euclide mais leur statut précis a alimenté les débats pendant plusieurs millénaires. Ce n'est qu'au courant du 20-ième siècle que D. Hilbert les a formalisés et a démontré leur cohérence dans [9].

1.1 Structures d'incidences

Nous commençons directement en définissant la notion de structure d'incidence utilisée dans le cadre de ce mémoire ainsi que celle de plan affine. Elles sont développées dans le livre *Diagram Geometry : Related to Classical Groups and Buildings* [4]. La notion de structure d'incidence s'inspire de celles présentes incidemment dans les *Éléments* [6] d'Euclide mais a pour vocation de dépasser les limitations de cette dernière en reposant fermement sur la théorie des ensembles supposée acquise.

Définition 1.1.1 (Structure d'incidence). Une *structure d'incidence* est un triplet $(\Pi, \Delta, \mathcal{R})$ où

1. Π est un ensemble dont les éléments sont appelés *points*,
2. Δ est un ensemble dont les éléments sont appelés *droites*,
3. \mathcal{R} est une relation entre les éléments de Π et Δ : $\mathcal{R} \subset \Pi \times \Delta$.

On dit souvent que les points et les droites d'une structure d'incidence en sont les objets élémentaires et que la relation \mathcal{R} est la relation *d'incidence* de la structure d'incidence. Lorsque le point P et la droite d donnent lieu à $(P, d) \in \mathcal{R}$ (ou $P \mathcal{R} d$), on dit que " P est situé sur d " ou que " d passe par P ".

Remarque 1.1.2 (Vocabulaire). Dans la suite de ce chapitre, nous nous permettrons d'utiliser sans le définir le vocabulaire traditionnel. Ainsi, par exemple, si le point P est situé à la fois sur les droites d_1 et d_2 , c'est-à-dire si $(P, d_1) \in \mathcal{R}$ et $(P, d_2) \in \mathcal{R}$, nous dirons que d_1 et d_2 se rencontrent en P ou encore qu'elles sont sécantes en P .

Nous introduisons aussi la définition suivante qui nous sera utile pour comparer différentes structures d'incidence :

Définition 1.1.3. Soient $(\Pi_1, \Delta_1, \mathcal{R}_1)$ et $(\Pi_2, \Delta_2, \mathcal{R}_2)$ deux structures d'incidence. Un *isomorphisme de structures d'incidence* est un couple (Φ, Ψ) satisfaisant les conditions suivantes :

1. $\Phi : \Pi_1 \rightarrow \Pi_2$ est une bijection ;
2. $\Psi : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ est une bijection ;
3. Pour tous $P_1 \in \Pi_1$ et $d_1 \in \Delta_1$, on a

$$(P_1, d_1) \in \mathcal{R}_1 \text{ si et seulement si } (\Phi(P_1), \Psi(d_1)) \in \mathcal{R}_2.$$

Remarque 1.1.4. La définition d'une structure d'incidence ne requiert que la donnée de trois ensembles et est, pour cette raison, trop générale pour être vraiment intéressante. Nous formulerons dans les sections suivantes deux axiomes d'incidence et ensuite le postulat d'Euclide qui nous permettront de particulariser une classe de structures d'incidence (les plans affines) particulièrement intéressante.

1.1.1 Aparté historique

Étant donné que les *Éléments* d'Euclide ont représenté la base du savoir mathématique pendant au moins deux millénaires, il peut s'avérer intéressant d'investiger la nature des définitions des objets de la géométrie d'Euclide. Pour effectuer cette analyse, nous avons décidé de se référer au travail de Heath [6].

Le premier livre des *Éléments* contient un total de 35 définitions, 5 postulats, 10 axiomes et 48 propriétés. Nous allons nous concentrer sur la définition des objets de la géométrie d'Euclide : les points et les droites.

Voici les premières définitions présentes dans les *Éléments* :

BOOK I.

DEFINITIONS.

1. A **point** is that which has no part.
2. A **line** is breadthless length.
3. The extremities of a line are points.
4. A **straight line** is a line which lies evenly with the points on itself.
5. A **surface** is that which has length and breadth only.
6. The extremities of a surface are lines.
7. A **plane surface** is a surface which lies evenly with the straight lines on itself.
8. A **plane angle** is the inclination to one another of two lines in a plane which meet one another and do not lie in a straight line.
9. And when the lines containing the angle are straight, the angle is called **rectilinear**.
10. When a straight line set up on a straight line makes the adjacent angles equal to one another, each of the equal angles is **right**, and the straight line standing on the other is called a **perpendicular** to that on which it stands.
11. An **obtuse angle** is an angle greater than a right angle.
12. An **acute angle** is an angle less than a right angle.
13. A **boundary** is that which is an extremity of anything.
14. A **figure** is that which is contained by any boundary or boundaries.
15. A **circle** is a plane figure contained by one line such that all the straight lines falling upon it from one point among those lying within the figure are equal to one another ;

FIGURE 1.1 – Définitions issues de la traduction de Heath [6] des *Éléments*

Celles qui nous intéressent sont les définitions 1, 2 et 4. Nous allons donc analyser leur traduction française tirée de [16].

Définition 1. Le point est ce qui n'a aucune partie.

Définition 2. La ligne est une longueur sans largeur.

Définition 4. La ligne droite est celle qui est toute également interposée entre ses points.

Au vu des définitions d'Euclide, nous constatons qu'il a défini des notions géométriques en utilisant des termes indéfinis tels que "n'a aucune partie" et "toute également interposée". Il est alors légitime de se demander ce que signifient ces expressions. Ce problème s'explique par le fait qu'Euclide ne savait pas qu'il était en train de définir des indéfinis. En effet, les notions de points et de droites ne peuvent pas être définies de manière formelle sans avoir défini auparavant d'autres objets. Dans le présent travail, nous avons défini les points et les droites comme étant les éléments de deux ensembles donnés. Cette façon de procéder permet de ne pas avoir à définir ces notions, mais relève de la démarche axiomatique. Points et droites sont des indéfinis.

1.2 Axiomes d'incidence et conséquences

Dans cette section, nous introduisons deux axiomes qui permettront de formaliser les notions élémentaires de la géométrie d'Euclide qui seront au centre de nos préoccupations tout au long de ce travail. On se donne donc une structure d'incidence $(\Pi, \Delta, \mathcal{R})$ et on formule les deux axiomes suivants :

Axiome I. Si P et Q sont des points distincts de Π , il existe une unique droite, notée \overline{PQ} , qui passe par P et par Q .

Axiome II. Il existe deux points distincts A et B et un point C non situé sur \overline{AB} .

Remarque 1.2.1.

1. L'axiome I est bien naturel et garantit que deux points distincts déterminent une et une seule droite. En particulier, on tire de cet axiome que les droites \overline{PQ} et \overline{QP} sont égales chaque fois que les points $P, Q \in \Pi$ sont distincts.
2. L'axiome II permet de s'assurer qu'il y a assez de points pour former des droites, et pour que la géométrie que l'on étudie ne soit pas réduite à une droite. On traduit aussi cet axiome en disant qu'il existe trois points non colinéaires.
3. Bien entendu, on pourrait s'intéresser à d'autres axiomes que les deux précédents. Par exemple, dans le livre [8], Hartshorne considère un troisième axiome d'incidence qui stipule que toute droite contient au moins deux points. Les axiomes formulés ici sont directement tirés du livre [1] d'Artin et du cours [14] de Nollet.

Nous déduisons à présent quelques conséquences élémentaires des deux premiers axiomes formulés ci-dessus. Elles nous permettront notamment de faire les mêmes raisonnements que ceux auxquels nous sommes habitués depuis l'enseignement secondaire. Bien que très élémentaires, les preuves sont présentées en détail : c'est bien sûr très important de procéder de la sorte afin de s'assurer que ce que l'on utilise est bien déduit intégralement des définitions et axiomes qui sont à disposition à ce moment précis du présent travail.

Proposition 1.2.2. *Dans toute structure d'incidence satisfaisant l'axiome I, deux droites distinctes se rencontrent en au plus un point.*

Démonstration. Soient les droites d_1 et d_2 de Δ . Supposons que ces deux droites passent par les points A et B tels que $A \neq B$. Vu l'axiome I, il existe une unique droite passant par A et B , donc d_1 doit être égal à d_2 . \square

Proposition 1.2.3. *Dans toute structure d'incidence satisfaisant l'axiome I, si on a trois points distincts A , B et C tels que A est sur \overline{BC} , alors C est sur \overline{AB} .*

Démonstration. Comme A est sur \overline{BC} , en utilisant l'axiome I, on sait que $\overline{AB} = \overline{BC}$, vu que ces deux droites passent par A et par B et que $A \neq B$. Ainsi, C est bien situé sur \overline{AB} . \square

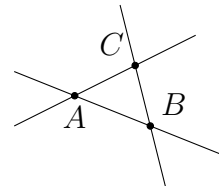
Théorème 1.2.4. *Dans toute structure d'incidence satisfaisant l'axiome II, l'ensemble Π contient au moins trois points distincts.*

Démonstration. C'est évident, car l'axiome II implique qu'il existe trois points distincts dans Π . \square

Théorème 1.2.5. *Dans toute structure d'incidence satisfaisant les axiomes I et II, l'ensemble Δ contient au moins trois droites distinctes.*

Démonstration.

Vu l'axiome II, il existe trois points distincts A , B et $C \in \Pi$ tels que C n'est pas situé sur \overline{AB} . Ainsi, \overline{AB} , \overline{AC} et \overline{BC} sont trois droites distinctes. En effet, \overline{AC} et \overline{BC} sont distinctes car sinon B serait situé sur \overline{AC} , donc C serait situé sur la droite \overline{AB} par la proposition 1.2.3.



\square

1.2.1 Exemples, contre-exemples et indépendance des deux premiers axiomes

Les premières situations considérées sont élémentaires mais elles permettent déjà de vérifier que les axiomes I et II sont indépendants.

Il est important de noter que toutes les illustrations qui suivent sont des représentations imagées des axiomes. Elles sont présentes dans le but de faciliter la compréhension, mais ne constituent en aucun cas une preuve.

Exemple 1.2.6. On se donne un ensemble à deux éléments distincts $\Pi = \{P, Q\}$ et on considère l'ensemble $\Delta = \{\{P, Q\}\}$. La relation d'appartenance \in fait alors du triplet (Π, Δ, \in) une structure d'incidence au sens de la définition 1.1.1. On vérifie directement que le premier axiome est satisfait. En effet, les points P et Q sont distincts vu que Π possède exactement deux éléments et ces deux points déterminent une et une seule droite de Δ . En effet, c'est l'unique droite $\{P, Q\}$ considérée. Par contre, on constate que l'axiome II n'est pas satisfait. En effet, celui-ci garantit que le cardinal de Π est supérieur à 3.

Les deux exemples suivants reposent sur quelques rudiments de théorie des graphes. Les définitions de base ne sont pas rappelées mais se trouvent dans [18].

Exemple 1.2.7. Soit G un graphe non orienté admettant au moins trois sommets distincts. Supposons par ailleurs que G ne soit pas un graphe complet et considérons alors les ensembles Π , Δ et la relation \mathcal{R} définis par

1. $\Pi = \{s : s \text{ est un sommet de } G\}$;
2. $\Delta = \{a : a \text{ est une arête de } G\}$;
3. Pour tous $s \in \Pi$ et $a \in \Delta$, on a $(s, a) \in \mathcal{R}$ si et seulement si s est une extrémité de l'arête a .

On vérifie facilement que le triplet $(\Pi, \Delta, \mathcal{R})$ satisfait l'axiome II vu que G possède au moins trois sommets distincts. Cependant, l'axiome I n'est pas satisfait. En effet, vu que le graphe G n'est pas complet, il existe une paire de sommets distincts s_1 et s_2 de Π qui ne sont pas les extrémités d'une arête de G . Ainsi, il n'existe pas de droite de Δ passant par s_1 et s_2 .

Exemple 1.2.8. Soit G un graphe complet non orienté admettant au moins trois sommets distincts. Considérons alors les ensembles Π , Δ et la relation \mathcal{R} définis comme dans l'exemple précédent. L'axiome I est bien satisfait vu que dans un graphe complet non orienté, deux sommets distincts déterminent une et une seule arête. L'axiome II est également satisfait vu que le graphe complet non orienté considéré possède au moins trois sommets distincts.

L'exemple précédent montre en fait que tout graphe (fini) complet non orienté admettant au moins trois sommets distincts détermine une structure d'incidence finie² satisfaisant les axiomes I et II. En fait, on démontre aisément que toute structure d'incidence finie satisfaisant les axiomes I et II est isomorphe à un graphe complet non orienté.

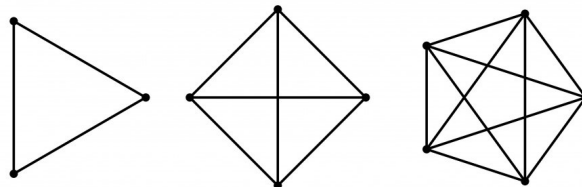


FIGURE 1.2 – Graphes complets non orientés à 3, 4 et 5 sommets

2. Cela signifie que l'ensemble Π des points est lui-même fini.

Nous présentons encore un exemple de géométrie satisfaisant l'axiome II mais pas l'axiome I. Dans ce cas-ci, l'axiome I est mis en défaut par excès contrairement à l'exemple 1.2.7 ci-dessus.

Exemple 1.2.9 (La sphère S^2). On considère l'espace \mathbb{R}^3 muni de sa norme euclidienne ainsi que sa sphère unité S^2 définie par

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

On considère les ensembles Π et Δ définis par

1. $\Pi = S^2$;
2. $\Delta = \{d : d = S^2 \cap \pi, \pi \text{ est un plan vectoriel de } \mathbb{R}^3\}$. Autrement dit, les droites considérées sont les intersections des plans vectoriels de \mathbb{R}^3 avec la sphère S^2 .

Si on considère la relation d'appartenance usuelle \in alors le triplet (Π, Δ, \in) est une structure d'incidence satisfaisant l'axiome II mais pas l'axiome I. En effet, les plans d'équations $ax + by = 0$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ contiennent tous les points $N : (0, 0, 1)$ et $S : (0, 0, -1)$. Autrement dit, il existe une infinité de droites de Δ passant par ces deux points.



FIGURE 1.3 – S^2 avec trois droites passant par N et S

Remarque 1.2.10. Il est relativement aisé de construire une structure d'incidence satisfaisant les axiomes I et II à partir de l'exemple précédent. Il suffit de passer au quotient pour la relation d'équivalence

$$(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2) \text{ si et seulement si } (x_1, y_1, z_1) = \pm(x_2, y_2, z_2).$$

Cela mène à la notion de plan projectif que nous ne poursuivrons pas dans ce travail. Elle est développée dans [22].

1.3 Parallélisme et Postulat d'Euclide

La notion de parallélisme est centrale dans le développement de la géométrie. Dans le contexte affine enseigné à l'université, cette dernière est définie en termes de sous-espace vectoriel directeur associé à une sous-variété affine. Dans les *Éléments* d'Euclide, on dit que deux droites sont parallèles si, étant placées dans le même plan et prolongées de part et d'autre à l'infini, elles ne se rencontrent nulle part. Dans le cadre de ce travail, voici la définition retenue pour le parallélisme.

Définition 1.3.1. Deux droites d_1 et d_2 sont *parallèles* si $d_1 = d_2$ ou s'il n'existe aucun point situé à la fois sur d_1 et sur d_2 . Nous noterons alors $d_1 \parallel d_2$.

Le troisième axiome utilisé dans ce travail règle l'existence et l'unicité d'une parallèle à une droite donnée.

Axiome III (Postulat d'Euclide). *Étant donné un point P et une droite d , il existe une et une seule droite qui passe par P et qui ne rencontre pas d .*

Remarque 1.3.2.

1. Ce postulat porte parfois le nom d'axiome des parallèles d'Euclide.
2. L'énoncé historique de ce postulat dans les *Éléments* [6] est donné par :

5. That, if a straight line falling on two straight lines make the interior angles on the same side less than two right angles, the two straight lines, if produced indefinitely, meet on that side on which are the angles less than the two right angles.

La traduction donnée par Peyrard dans [16] est la suivante : “Si une droite coupe deux droites de manière à ce que les angles intérieurs du même côté soient plus petits que deux angles droits, alors les deux lignes droites, prolongées à l'infini, se rencontrent du côté où les angles sont plus petits que deux angles droits”.

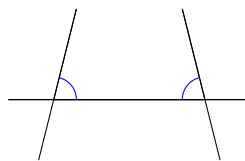


FIGURE 1.4 – Illustration du postulat d'Euclide dans les *Éléments*

3. Cet axiome est appelé le *postulat d'Euclide*, mais il s'agit en fait de la reformulation de Playfair de ce postulat. Celle-ci est sous une forme proche de celle que lui avait donnée le mathématicien antique Proclus. Ainsi, l'axiome des parallèles est également parfois désigné par l'expression “*axiome de Playfair*”³. Nous ne nous attarderons pas plus sur l'histoire de cet axiome. Celle-ci étant détaillée dans les références suivantes [3], [7], [17] et [11].

3. Dans le livre *Elements of Geometry* [17], Playfair démontre l'équivalence entre sa formulation de l'axiome et celle d'Euclide.

Nous sommes prêts à définir une des notions centrales de ce travail.

Définition 1.3.3 (Plan affine). Un *plan affine* est la donnée d'une structure d'incidence $(\Pi, \Delta, \mathcal{R})$ satisfaisant les deux axiomes d'incidence I, II et l'axiome des parallèles III.

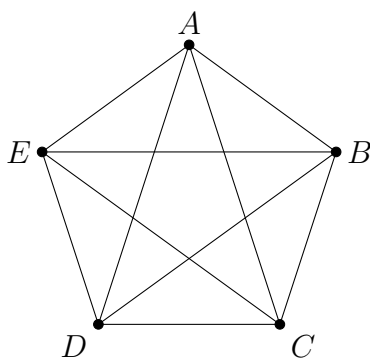
La proposition suivante nous donne notre premier exemple de plan affine :

Proposition 1.3.4. Soit G un graphe complet non orienté à 4 sommets distincts. Alors G est un plan affine.

Démonstration. Si G possède 4 sommets exactement alors chacun de ces sommets appartient à exactement 3 droites distinctes. Considérons pour fixer les idées la droite \overline{CD} et un point P . Si P est égal à C ou à D , alors la seule parallèle à \overline{CD} passant par P est la droite \overline{CD} . Si P est égal à A ou à B , disons A sans perte de généralité, on constate que les seules droites passant par A sont les droites \overline{AC} , \overline{AD} et \overline{AB} . Parmi ces trois droites une seule est parallèle à \overline{CD} : il s'agit de \overline{AB} . \square

Il se fait que le graphe complet non orienté à 4 sommets est le seul à satisfaire l'axiome des parallèles. La situation est suggérée au moyen de l'exemple suivant qui nous indique que tout graphe complet non orienté à au moins 5 sommets ne satisfait pas l'axiome III. Pour conclure, il suffira d'établir qu'aucun plan affine fini ne possède exactement 3 points. Ce sera une conséquence des résultats de la section suivante. On peut déjà préparer ce résultat en considérant l'exemple du graphe complet non orienté à trois sommets.

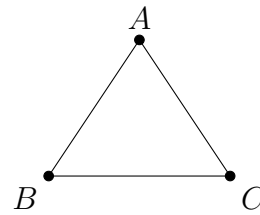
Exemple 1.3.5. Soit $\Pi = \{A, B, C, D, E\}$, où les cinq éléments sont distincts. Nous définissons ensuite $\Delta = \{\{P, Q\} : P, Q \in \Pi, P \neq Q\}$. De plus, si $P \in \Pi$ et $d \in \Delta$, on définit $P \mathcal{R} d$ si $P \in d$. Nous représentons cet exemple par le diagramme ci-dessous.



Nous avons vu à l'exemple 1.2.8 que les axiomes I et II sont vérifiés.

Cependant, l'axiome III n'est pas satisfait dans cet exemple, car $\{A, B\}$ et $\{A, C\}$ sont deux droites distinctes passant par le point A et parallèles à la droite $\{D, E\}$.

Exemple 1.3.6. Nous définissons l'ensemble $\Pi = \{A, B, C\}$, où les trois éléments sont supposés distincts. Nous définissons ensuite $\Delta = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}\}$. De plus, si $P \in \Pi$ et $d \in \Delta$, on définit $P R d$ si $P \in d$. Nous représentons cet exemple par le diagramme suivant.



L'axiome I est vérifié. En effet, pour tous points $P, Q \in \Pi$ tels que $P \neq Q$, l'unique droite passant par P et Q est la droite $\{P, Q\} \in \Delta$.

Étant donné que le point C n'est pas situé sur la droite $\{A, B\}$, on a bien l'axiome II.

Pour finir, aucune droite de Δ n'admet de parallèle distincte, l'axiome III n'est donc pas satisfait. Il ne s'agit pas d'un modèle de plan affine.

Nous formulons la remarque suivante pour mieux cerner la portée du postulat d'Euclide.

Remarque 1.3.7.

1. L'exemple de la sphère S^2 est instructif. Nous constatons que deux droites distinctes ne sont jamais parallèles. En effet, vu leur définition, deux droites distinctes s'intersectent en une paire de points antipodaux. Autrement dit, par un point P extérieur à la droite d , il ne passe aucune parallèle à d . Ainsi la sphère S^2 décrite à l'exemple 1.2.9 est une structure d'incidence où l'axiome III est mis en défaut.
2. L'exemple du disque de Beltrami met lui-aussi en défaut l'axiome III des parallèles, cette fois par excès. Dans celui-ci, on a

- (a) $\Pi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$;
- (b) $\Delta = \{c : c \text{ est une corde du disque unité } \Pi\}$;
- (c) \mathcal{R} est la relation d'appartenance.

On constate dans ce cas que la structure d'incidence $(\Pi, \Delta, \mathcal{R})$ satisfait les axiomes I, II mais pas l'axiome d'Euclide III.

1.4 Étude du parallélisme

Dans cette section, nous allons montrer que dans une structure d'incidence satisfaisant l'axiome III, le parallélisme est une relation d'équivalence. Nous pourrions alors introduire la notion de direction et obtenir différents résultats à propos des plans affines.

Tout d'abord, en paraphrasant la définition 1.3.1, on a le résultat classique suivant.

Proposition 1.4.1. *Dans toute structure d'incidence, deux droites parallèles qui ont un point en commun sont égales.*

Démonstration. Soient $d_1, d_2 \in \Delta$ tels que $d_1 \parallel d_2$. Soit $P \in \Pi$ tel que P est situé sur d_1 et sur d_2 . Vu que d_1 et d_2 ont un point en commun, la définition 1.3.1 garantit que $d_1 = d_2$. \square

Nous allons à présent montrer que le parallélisme est une relation d'équivalence.

Théorème 1.4.2. *Dans toute structure d'incidence satisfaisant l'axiome III, le parallélisme est une relation d'équivalence sur Δ .*

Démonstration. Pour montrer que le parallélisme est une relation d'équivalence, on doit montrer qu'il s'agit d'une relation symétrique, réflexive et transitive.

Le parallélisme est une relation symétrique. En effet, si $d_1 \parallel d_2$, soit $d_1 = d_2$, donc $d_2 = d_1$; soit il n'existe aucun point situé à la fois sur d_1 et sur d_2 , donc il n'existe aucun point situé à la fois sur d_2 et sur d_1 . On obtient bien que $d_2 \parallel d_1$.

Cette relation est réflexive, car toute droite d est égale à elle-même, donc $d \parallel d$.

La relation est aussi transitive. En effet, supposons que $d_1 \parallel d_2$ et $d_2 \parallel d_3$. Deux cas peuvent se produire :

- S'il n'existe aucun point situé à la fois sur d_1 et d_3 , on a $d_1 \parallel d_3$.
- Si d_1 et d_3 se coupent au point P , comme d_1 et d_3 passent par P et sont parallèles à d_2 , il découle de l'axiome III que $d_1 = d_3$. Ainsi, $d_1 \parallel d_3$.

\square

Définition 1.4.3. Une *direction* est un élément du quotient Δ/\parallel . La *direction d'une droite* d est la classe des droites parallèles à d .

Remarque 1.4.4. Dans toute structure d'incidence satisfaisant les axiomes I et III⁴, si deux droites distinctes d_1 et d_2 ont des directions différentes, alors elles se rencontrent en un et un seul point. En effet, d_1 et d_2 se rencontrent puisqu'elles ne sont pas parallèles. De plus, vu l'axiome I, elles ne possèdent qu'un point en commun. Sinon elles seraient confondues et auraient même direction.

Proposition 1.4.5. *Dans tout plan affine, il existe au moins trois directions différentes.*

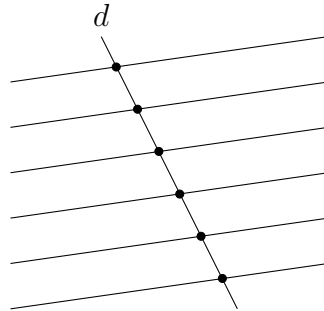
Démonstration. Par l'axiome II, il existe trois points distincts A, B et C tels que C n'est pas situé sur \overline{AB} . Les droites \overline{AB} , \overline{BC} et \overline{AC} ne sont pas parallèles deux à deux et définissent trois directions différentes. En effet, procédons par l'absurde et supposons que $\overline{AB} \parallel \overline{BC}$. Comme ces droites ont le point B en commun, par la proposition 1.4.1, on sait qu'elles coïncident. Cela signifie que C est situé sur la droite \overline{AB} , d'où la contradiction. En procédant de manière similaire, on obtient que \overline{AB} n'est pas parallèle à \overline{AC} et que \overline{BC} n'est pas parallèle à \overline{AC} . \square

Définition 1.4.6. L'ensemble des points situés sur la droite d s'appelle la *punctuelle de la droite* d et est notée (d) .

4. La structure d'incidence doit satisfaire l'axiome III pour que la notion de direction soit bien définie.

Théorème 1.4.7. *Dans toute structure d'incidence satisfaisant l'axiome III, si la direction δ ne contient pas la droite d , alors il existe une bijection de δ sur la ponctuelle (d) .*

On représente la situation de l'énoncé par le graphique suivant. On peut y voir l'idée de la démonstration du théorème.



Démonstration. Définissons l'application $f : \delta \rightarrow (d)$ qui à chaque élément de δ associe son unique point de rencontre avec d . Vu l'hypothèse, toute droite de δ n'est pas parallèle à d et a donc un point de rencontre unique avec d . On en tire que f est bien défini.

L'application f est injective. En effet, deux droites différentes de δ sont parallèles et distinctes, donc elles ne se rencontrent pas. Ainsi, les points de rencontre de ces droites avec d sont distincts.

L'application f est surjective car, par tout point de d , en utilisant l'axiome III, on peut mener une droite ayant la direction de δ . \square

Théorème 1.4.8. *Dans tout plan affine, on a les propriétés suivantes :*

1. *Toutes les ponctuelles sont équipotentes⁵.*
2. *Toutes les directions sont équipotentes.*
3. *Les ponctuelles et les directions sont équipotentes.*

Démonstration. Soient d_1 et d_2 deux droites distinctes. Montrons que (d_1) et (d_2) sont équipotents. Soit δ une direction différente de celles de d_1 et de d_2 . Vu la proposition 1.4.5, on sait que cette direction existe.

Par le théorème 1.4.7, il existe une bijection de l'ensemble des points de d_1 sur δ et une bijection de l'ensemble des points de d_2 sur δ . Ainsi, (d_1) et (d_2) sont équipotents. En particulier, ces ponctuelles sont équipotentes à la direction δ . On en tire que les ponctuelles sont équipotentes entre elles et qu'elles sont également équipotentes à δ .

Il reste à montrer que les directions sont équipotentes entre elles. Par la proposition 1.4.5, on sait qu'il existe trois directions différentes. Notons les δ_1 , δ_2 et δ_3 . Montrons que δ_1 et δ_2 sont équipotents. Soit une droite d_3 qui appartient à la direction δ_3 . Comme d_3 n'appartient pas aux directions δ_1 et δ_2 , par la première partie de la démonstration, on sait que (d_3) est équipotent à δ_1 et à δ_2 . Ainsi, δ_1 et δ_2 sont équipotents. On en tire que les directions sont équipotentes entre elles. \square

5. Deux ensembles sont dits *équipotents* si il existe une bijection de l'un dans l'autre.

1.5 Quelques conséquences des trois premiers axiomes

Nous allons voir que plusieurs conséquences intéressantes découlent des axiomes I, II et III. Nous commençons d'abord par étudier l'indépendance de ces axiomes.

Proposition 1.5.1. *Les axiomes I, II et III sont indépendants.*

Démonstration. Nous avons vu que l'exemple 1.3.5 satisfait les axiomes I et II, mais pas l'axiome III. Donc on sait déjà que l'axiome III n'est pas conséquence des deux autres.

Pour avoir une structure d'incidence satisfaisant les axiomes I et III, mais pas l'axiome II, il suffit de prendre $\Pi = \{A, B\}$, où les points sont distincts, et $\Delta = \{\{A, B\}\}$. Ainsi, l'axiome II est indépendant des autres.

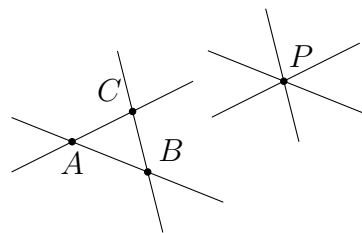
De même, pour avoir une structure d'incidence qui vérifie les axiomes II et III, mais pas l'axiome I, il suffit de considérer $\Pi = \{A, B, C, D\}$, où les points sont distincts, et $\Delta = \{\{A, B\}, \{C, D\}\}$. \square

Nous avons vu au théorème 1.2.5 que l'ensemble Δ contient au moins trois droites distinctes, nous pouvons poursuivre avec un résultat plus fort concernant l'ensemble des droites.

Théorème 1.5.2. *Soit $(\Pi, \Delta, \mathcal{R})$ un plan affine. Par tout point P de Π passent au moins trois droites distinctes.*

Démonstration. Par l'axiome II, il existe trois points distincts A, B et C tels que C n'est pas situé sur \overline{AB} . En raisonnant comme dans la preuve de la proposition 1.4.5, nous savons que les droites \overline{AB} , \overline{BC} et \overline{AC} appartiennent à trois directions différentes.

Soit P un point de Π . Par l'axiome III, il existe trois droites passant par P et parallèles respectivement à \overline{AB} , \overline{BC} et \overline{AC} . Ces trois droites sont distinctes, car sinon certaines des droites \overline{AB} , \overline{BC} et \overline{AC} coïncideraient et auraient donc même direction, ce qui est impossible.



\square

Proposition 1.5.3. *Dans une structure d'incidence satisfaisant les axiomes I et II, toute droite passe par au moins un point.*

Démonstration. Vu l'axiome II, il existe trois points distincts A, B et $C \in \Pi$ tels que C n'est pas situé sur \overline{AB} . Procédons par l'absurde et supposons qu'il existe $d \in \Delta$ tel que d ne passe par aucun point. Dans ce cas, d est parallèle à \overline{AB} , \overline{BC} et \overline{AC} . Par transitivité du parallélisme, on obtient que $\overline{AB} \parallel \overline{BC} \parallel \overline{AC}$. Comme ces droites sont parallèles et ont un point commun deux à deux, cela signifie que $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$. Dans ce cas, C est situé sur \overline{AB} , ce qui est contraire aux hypothèses. \square

Proposition 1.5.4. *Dans tout plan affine, toute droite passe par au moins deux points.*

Démonstration. Par la proposition précédente, nous savons que toute droite passe par au moins un point. On se donne alors une droite d et on choisit P un point situé sur d . Le théorème 1.2.4 nous indique que Π contient au moins trois points. On peut donc considérer P' distinct de P . Si d passe par P' , alors d passe par au moins ces deux points. Si d ne passe pas par P' , alors vu le théorème 1.5.2, on sait qu'il y a trois droites distinctes, et distinctes de d qui passent par P' . Une seule peut être parallèle à d , vu l'axiome II. Les deux autres ont un point commun avec d . Ces points sont distincts, sinon ces droites auraient deux points distincts en commun et coïncideraient. \square

Corollaire 1.5.5. *Dans tout plan affine, l'ensemble Π contient au moins quatre points.*

Démonstration. Vu l'axiome II, il existe trois points distincts A , B et C de Π tels que C n'est pas situé sur \overline{AB} . Les droites \overline{AC} et \overline{BC} passent par C et sont distinctes, sinon elles coïncideraient et C serait situé sur \overline{AB} . Par le théorème 1.5.2, il existe une troisième droite d passant par C et distincte de \overline{AC} et \overline{BC} . De plus, cette droite est différente de \overline{AB} , sinon \overline{AB} passerait par C . Ainsi, vu que d est distinct des droites \overline{AB} , \overline{AC} et \overline{BC} , on sait que A et B ne sont pas situés sur d . Or, par la proposition 1.5.4, d passe par au moins deux points. Il existe donc un point D distinct de A , B et C tel que d passe par D . \square

Chapitre 2

Modèles de plan affine

Nous donnons dans ce chapitre des exemples instructifs de plans affines, finis et infinis. Nous étudions en particulier le cas du plan \mathbb{K}^2 , où \mathbb{K} est un corps. Cette famille d'exemples est essentielle pour plusieurs raisons : d'une part, elle permet de se forger une intuition sur le contenu géométrique des trois axiomes retenus jusqu'à présent, mais nous verrons aussi qu'après avoir accepté deux axiomes supplémentaires (voir chapitre 4), il n'y aura pas d'autres exemples que ceux-là. Pour chaque modèle, il nous faut définir explicitement l'ensemble Π des points, l'ensemble Δ des droites et la relation \mathcal{R} d'incidence pour ensuite démontrer à la main que les trois axiomes sont bien satisfaits.

Nous commençons pour des raisons pédagogiques par l'étude d'un cas particulier : le produit cartésien \mathbb{R}^2 , où \mathbb{R} est le corps des réels. Il permet de se faire la main dans le cas où le corps est commutatif. Dans ce contexte, nous constatons que nous sommes confrontés à l'alternative suivante : les droites peuvent être définies par l'intermédiaire d'une équation linéaire ou par un paramétrage linéaire (comme dans le cours de B1 de Géométrie [13]). Nous investiguons chacune de ces deux situations en détail et montrons qu'elles mènent à des structures d'incidence isomorphes au sens de la définition 1.1.3. Ce cas particulier prépare le terrain pour traiter le cas général du produit cartésien \mathbb{K}^2 , où \mathbb{K} est un corps quelconque.

Ensuite, nous développons le plan de Moulton. Cet exemple permet notamment d'obtenir un modèle de plan affine qui n'est pas isomorphe au carré d'un corps \mathbb{K} . Il aura également une utilité particulière dans le chapitre 4, car il permettra d'illustrer l'existence de plans affines ne vérifiant pas les deux axiomes supplémentaires acceptés dans ce chapitre.

Pour terminer, nous traitons le cas des plans affines finis. Nous entamons la section par un exemple de plan affine à quatre points, appelé la géométrie du tétraèdre. Nous verrons par la suite que cet exemple est un cas particulier de la construction générale qui unifie tous les modèles, mais il permettra, comme les précédents d'illustrer les différents éléments qui apparaîtront tout au long de cette construction théorique. Nous terminons alors par l'étude du cas général des plans affines finis.

2.1 Le plan cartésien réel

2.1.1 Droites définies par équations

Nous commençons par la définition de la structure d'incidence du plan affine étudié.

Définition 2.1.1 (La structure d'incidence).

1. L'ensemble Π est le produit cartésien \mathbb{R}^2 ;
2. À tout triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(a, b) \neq (0, 0)$, nous associons la droite

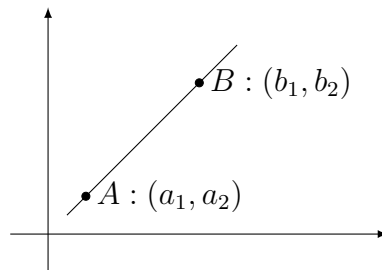
$$d_{(a,b,c)} = \{(x, y) \in \Pi : ax + by + c = 0\}.$$

On a alors $\Delta_{eq} = \{d_{(a,b,c)} : a, b, c \in \mathbb{R}, (a, b) \neq (0, 0)\}$.

3. Un point $P : (x, y) \in \Pi$ est en relation avec $d_{(a,b,c)}$ si $ax + by + c = 0$.

Les droites sont donc définies comme les ensembles de solutions d'équations du premier degré, et un point P est en relation avec une droite d si les composantes de P satisfont une équation définissant d . Notons cependant qu'une droite correspond bien sûr à plusieurs triplets (a, b, c) . La relation \mathcal{R} est donc la relation d'appartenance¹.

On peut bien sûr avoir à l'esprit la représentation classique suivante, bien utile pour se forger l'intuition, mais il faut se garder d'en déduire les propriétés que nous souhaitons démontrer.



Nous nous intéressons maintenant aux axiomes.

Proposition 2.1.2. *La structure d'incidence introduite dans la définition 2.1.1 est un plan affine.*

Démonstration.

1. Axiome I : Considérons deux points distincts $A : (a_1, a_2)$ et $B : (b_1, b_2)$. Pour l'existence d'une droite passant par A et B , on utilise bien sûr une formule bien connue depuis l'enseignement secondaire : ces points sont situés sur la droite d'équation

$$(b_2 - a_2)(x - a_1) - (b_1 - a_1)(y - a_2) = 0$$

1. La définition précédente a été formulée pour \mathbb{R}^2 , mais on aurait très bien pu la formuler en remplaçant \mathbb{R} par un corps commutatif \mathbb{K} quelconque. Nous traiterons le cas général ultérieurement dans ce chapitre.

comme on peut le vérifier directement. De plus, le triplet

$$(b_2 - a_2, -(b_1 - a_1), -(b_2 - a_2)a_1 + (b_1 - a_1)a_2)$$

satisfait bien $(b_2 - a_2, -(b_1 - a_1)) \neq (0, 0)$ vu que $A \neq B$. Pour établir l'unicité, nous considérons une droite $d_{(a,b,c)}$ contenant A et B . On a donc, pour $(a, b) \neq (0, 0)$,

$$aa_1 + ba_2 + c = 0 \quad \text{et} \quad ab_1 + bb_2 + c = 0.$$

Cela implique par soustraction membre à membre

$$a(b_1 - a_1) + b(b_2 - a_2) = 0.$$

Les solutions de cette équation s'écrivent $(t(b_2 - a_2), -t(b_1 - a_1))$ pour $t \in \mathbb{R}^*$. On a alors $c = -t(b_2 - a_2)a_1 + t(b_1 - a_1)a_2$ et on constate que l'équation définissant $d_{(a,b,c)}$ est univoquement déterminée, à un multiple non nul près. La droite d est donc unique.

2. Axiome II : Pour vérifier cet axiome, il suffit de considérer les points $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(0, 1)$ et de procéder par l'absurde. Supposons que la droite $d = d_{(a,b,c)}$ passe par ces trois points. En particulier, comme elle passe par les points $(0, 0)$ et $(1, 0)$, on a successivement $c = 0$, puis $a = 0$. On a donc

$$d = \{(x, y) \in \Pi : y = 0\}.$$

On obtient donc une contradiction puisque le point $(0, 1) \notin \{(x, y) \in \Pi : y = 0\}$.

3. Axiome III : Soient la droite $d_{(a,b,c)}$, où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ est tel que $(a, b) \neq (0, 0)$, et le point $P : (p_1, p_2) \in \Pi$. Une droite $d_{(a',b',c')}$ est parallèle à $d_{(a,b,c)}$ si et seulement si il existe $t \in \mathbb{R}^*$ tel que $(a', b') = t(a, b)$. En effet, le système²

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

admet une solution unique dès que le déterminant $ab' - a'b$ diffère de 0. Dans le cas contraire, il est soit incompatible et les droites correspondant à (a, b, c) et (a', b', c') n'ont pas de point commun, soit indéterminé, et les droites coïncident. Enfin, on a $ab' - a'b = 0$ si et seulement si (a, b) est multiple de (a', b') .

Nous pouvons à présent revenir à la droite $d_{(a,b,c)}$ et au point P . Vu ce qui précède, toute parallèle à $d_{(a,b,c)}$ admet une équation du type

$$tax + tby + c' = 0$$

où t est non nul. Elle passe par P si et seulement si on a

$$c' = -tap_1 - tbp_2.$$

2. C'est ici que nous utilisons la commutativité. Nous vérifierons dans la section suivante si nous pouvons nous en passer.

On constate que toute droite parallèle à $d_{(a,b,c)}$ et passant par P a pour équation

$$ta(x - p_1) + tb(y - p_2) = 0,$$

pour t non nul. Une telle droite existe donc et est unique vu que ces coefficients sont déterminés (à un facteur non nul près) à partir de $d_{(a,b,c)}$ et P .

□

2.1.2 Droites affines

Définition 2.1.3 (La structure d'incidence).

1. L'ensemble Π est le produit cartésien \mathbb{R}^2 ;
2. À tout point $A \in \Pi$ et à tout vecteur³ $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, nous associons la droite

$$d_{A,u} = \{A + tu \in \Pi : t \in \mathbb{R}\}.$$

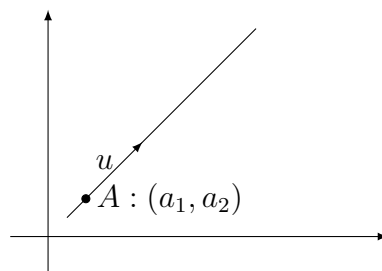
On a alors $\Delta_{af} = \{d_{A,u} : A \in \Pi, u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\}$.

3. Un point $P : (x, y) \in \Pi$ est en relation avec $d_{A,u} \in \Delta_{af}$ si il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$P = A + tu.$$

Les droites sont donc définies comme les ensembles de translatés d'un point donné A dans la direction d'un vecteur non nul donné u . Bien entendu, on observe qu'une droite correspond à plusieurs choix de point $A \in \Pi$ et de vecteur $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. La relation \mathcal{R} correspond à la relation d'appartenance⁴.

On peut avoir à l'esprit la représentation classique suivante, mais ici encore, on se gardera de déduire des propriétés à partir de graphiques.



3. Nous utilisons la terminologie habituelle des espaces affines, par habitude, mais il s'agit bien d'éléments de \mathbb{R}^2 .

4. La définition précédente a été formulée pour \mathbb{R}^2 , mais on aurait très bien pu la formuler en remplaçant \mathbb{R} par un corps commutatif \mathbb{K} quelconque. Comme annoncé, nous traiterons le cas général plus loin dans ce chapitre.

Avant de nous intéresser aux axiomes, on établit le lemme suivant.

Lemme 2.1.4. *Soient $A, B \in \Pi$ et $u, v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Alors on a les assertions suivantes :*

1. $d_{A,u} \parallel d_{B,v}$ si et seulement si u est multiple de v .
2. $d_{A,u} = d_{B,v}$ si et seulement si $A \in d_{B,v}$ et u est multiple de v .

Démonstration.

1. Supposons que $d_{A,u} \parallel d_{B,v}$. On traite les deux cas habituels. Si $d_{A,u} = d_{B,v}$, on sait qu'il existe $r, s \in \mathbb{R}$ tels que

$$A = B + rv \quad \text{et} \quad A + u = B + sv.$$

On en déduit $u = (s - r)v$. On a bien $s - r \in \mathbb{R}^*$, sinon on aurait $A = A + u$, donc $u = (0, 0)$. Si $d_{A,u}$ ne rencontre pas $d_{B,v}$, on peut procéder par l'absurde pour conclure. En effet, si u n'est pas multiple de v , alors u et v sont linéairement indépendants (car $u \neq (0, 0)$). Ces vecteurs forment donc une base et il s'ensuit qu'il existe $s, t \in \mathbb{R}$ tels que

$$A - B = -su + tv,$$

autrement dit $A + su = B + tv \in d_{A,u} \cap d_{B,v}$. C'est une contradiction.

Pour la réciproque, on suppose que $u = kv$, avec $k \in \mathbb{R}^*$ et on obtient alors

$$A + su = A + skv,$$

pour tout $s \in \mathbb{R}$. Il y a encore deux cas à traiter. Si $A \in d_{B,v}$, on sait qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $A = B + t_0v$ et on obtient ensuite

$$A + su = B + t_0v + skv = B + (t_0 + sk)v.$$

Cette relation permet de conclure que $d_{A,u} = d_{B,v}$, par double inclusion. Si $A \notin d_{B,v}$, on vérifie que $d_{A,u}$ et $d_{B,v}$ ne se rencontrent pas. Sinon, il existe $X \in d_{A,u} \cap d_{B,v}$ et finalement, par le cas que nous venons de traiter, $d_{A,u} = d_{X,u} = d_{X,v} = d_{B,v}$. On en déduit une contradiction puisqu'on obtient que $A \in d_{B,v}$.

2. Pour le deuxième point à prouver, on suppose d'abord que $d_{A,u} = d_{B,v}$. On en déduit directement $A \in d_{B,v}$ et on conclut par le point précédent.

Pour la réciproque, on sait qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $A = B + t_0v$ et $k \in \mathbb{R}^*$ tel que $u = kv$. On en déduit que

$$A + su = B + t_0v + su = B + (t_0 + sk)v$$

et enfin $d_{A,u} = d_{B,v}$, par double inclusion.

□

Nous pouvons à présent vérifier aisément les axiomes.

Proposition 2.1.5. *La structure d'incidence introduite dans la définition 2.1.3 est un plan affine*

Démonstration.

1. Axiome I : Soient $A, B \in \Pi$ tels que $A \neq B$. On vérifie directement que $A, B \in d_{A,B-A}$, ce qui suffit pour garantir l'existence d'une droite de Δ_{af} contenant A et B . Pour l'unicité, on procède comme ceci. Soit $d_{C,u} \in \Delta_{af}$ satisfaisant $A, B \in d_{C,u}$. On déduit qu'il existe $t_A, t_B \in \mathbb{R}$ tels que

$$A = C + t_A u \quad \text{et} \quad B = C + t_B u.$$

On obtient que $B - A = (t_B - t_A)u$. Le deuxième point du lemme 2.1.4 permet alors de conclure que $d_{C,u} = d_{A,B-A}$.

2. Axiome II : On vérifie directement que le point $(0, 1)$ n'appartient pas à la droite $d_{(0,0),(1,0)}$. Par contradiction, si c'était le cas, alors il existerait $t \in \mathbb{R}$ satisfaisant $(0, 0) + t(1, 0) = (0, 1)$, ce qui est impossible.
3. Axiome III : Pour établir cet axiome, on utilise le lemme 2.1.4. En effet, soient $d_{A,u} \in \Delta_{af}$ et $B \in \Pi$. Alors $d_{B,u}$ est une parallèle à $d_{A,u}$ passant par A . Supposons que $d_{C,v}$ soit une seconde parallèle à $d_{A,u}$ passant par B . Dans ce cas, $B \in d_{C,v}$ et u est multiple de v . En appliquant le lemme 2.1.4, nous obtenons que $d_{B,u} = d_{C,v}$. □

Nous avons traité les deux exemples séparément, dans un cadre bien connu, à des fins pédagogiques. Il est cependant clair que l'on peut passer de la définition par des équations à la définition par un paramétrage et vice-versa. C'est en fait un isomorphisme de structures d'incidence. Nous le vérifierons explicitement dans la section suivante.

2.2 Le plan affine sur un corps quelconque

Dans cette section, nous étudions l'ensemble \mathbb{K}^2 , où \mathbb{K} est un corps non nécessairement commutatif. Notons 0 et 1 les neutres de l'addition et de la multiplication respectivement. À partir de \mathbb{K} , nous allons définir une structure d'incidence vérifiant les axiomes introduits précédemment. Le plan affine ainsi obtenu généralise le plan \mathbb{R}^2 introduit en première année [13], et que nous venons de rappeler. Les développements sont semblables, à ceci près que nous la définissons sur un corps non nécessairement commutatif. Il est donc nécessaire de vérifier si les résultats bien connus de première année restent vrais dans ce contexte plus général.

Pour éviter les répétitions, on commence par établir qu'il est équivalent de décrire les droites au moyen d'une équation cartésienne du premier degré ou au moyen d'un paramétrage affine. Bien entendu, vu que le corps de référence n'est pas supposé commutatif, il est important de décrire précisément la notion de d'équation polynomiale à coefficients dans \mathbb{K} et la notion de paramétrage affine correspondante.

Définition 2.2.1. Un *polynôme à droite à coefficients dans \mathbb{K} , de degré 1 en les variables x_1, \dots, x_n* est une expression du type

$$P[x_1, \dots, x_n] = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n + b$$

avec $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{K}$. Une *équation du premier degré à droite* est une équation du type

$$x_1 a_1 + \dots + x_n a_n + b = 0$$

avec $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls et $b \in \mathbb{K}$.

Définition 2.2.2. Un *paramétrage affine à gauche* est une application

$$\Phi : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} \times \mathbb{K} : h \mapsto (q_1, q_2) + h(v_1, v_2)$$

avec $q_1, q_2, v_1, v_2 \in \mathbb{K}$ tels que $(v_1, v_2) \neq (0, 0)$.

Nous allons voir dans la proposition suivante que la donnée d'une équation à deux variables du premier degré à droite est équivalente à la donnée d'un paramétrage affine à gauche. Cela permettra de fédérer les deux approches usuelles qui permettent de décrire les structures d'incidence sur \mathbb{K}^2 .

Proposition 2.2.3. *Soit d un sous-ensemble de $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$. Alors d est l'ensemble des solutions d'une équation du premier degré à droite si et seulement si c'est l'image d'un paramétrage à gauche, c'est-à-dire si il existe $q_1, q_2, v_1, v_2 \in \mathbb{K}$ satisfaisant $(v_1, v_2) \neq (0, 0)$ tels que*

$$d = \{(q_1, q_2) + h(v_1, v_2) : h \in \mathbb{K}\}.$$

Démonstration. Montrons que l'image d'un paramétrage à gauche est toujours l'ensemble des solutions d'une équation du premier degré à droite. Soient $q_1, q_2, v_1, v_2 \in \mathbb{K}$ satisfaisant $(v_1, v_2) \neq (0, 0)$. On traite trois cas :

1. Si $v_1 = 0$, on a

$$\begin{aligned} (x, y) \in d &\Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{K} : (x, y) = (q_1, q_2) + h(v_1, v_2) \\ &\Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{K} : (x, y) = (q_1, q_2) + h(0, v_2) \\ &\Leftrightarrow x = q_1. \end{aligned}$$

2. Si $v_2 = 0$, on procède de la même façon

$$\begin{aligned} (x, y) \in d &\Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{K} : (x, y) = (q_1, q_2) + h(v_1, v_2) \\ &\Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{K} : (x, y) = (q_1, q_2) + h(v_1, 0) \\ &\Leftrightarrow y = q_2. \end{aligned}$$

3. Si $v_1 \neq 0$ et $v_2 \neq 0$, alors on a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} (x, y) \in d &\Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{K} : (x, y) = (q_1, q_2) + h(v_1, v_2) \\ &\Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{K} : (x, y) = (q_1, q_2) + h(v_1, v_2) \\ &\Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{K} : \begin{cases} x = q_1 + hv_1 \\ y = q_2 + hv_2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (x - q_1)v_1^{-1} = (y - q_2)v_2^{-1}. \end{aligned}$$

Dans chacun des cas, on a bien établi que tout paramétrage à gauche donne lieu à une équation du premier degré à droite en deux variables.

Pour la réciproque, soient $a_1, a_2, b \in \mathbb{K}$ satisfaisant $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$ tels que d est l'ensemble des solutions de l'équation du premier degré à droite suivante

$$xa_1 + ya_2 + b = 0.$$

On traite trois cas :

1. Si $a_1 = 0$, on a

$$\begin{aligned} (x, y) \in d &\Leftrightarrow ya_2 + b = 0 \\ &\Leftrightarrow y = -ba_2^{-1} \\ &\Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{K} : (x, y) = (q_1, -ba_2^{-1}) + h(v_1, 0), \end{aligned}$$

pour $q_1 \in \mathbb{K}$ et $v_1 \in \mathbb{K}^*$. On constate également que $v_2 = 0$ et $q_2 = -a_2^{-1}b \in \mathbb{K}$.

2. Si $a_2 = 0$, on procède de la même façon

$$\begin{aligned} (x, y) \in d &\Leftrightarrow xa_1 + b = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -ba_1^{-1} \\ &\Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{K} : (x, y) = (-ba_1^{-1}, q_2) + h(0, v_2), \end{aligned}$$

pour $q_2 \in \mathbb{K}$ et $v_2 \in \mathbb{K}^*$. On constate également que $v_1 = 0$ et $q_1 = -a_1^{-1}b \in \mathbb{K}$.

3. Si $a_1 \neq 0$ et $a_2 \neq 0$, alors on a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} (x, y) \in d &\Leftrightarrow xa_1 + ya_2 + b = 0 \\ &\Leftrightarrow xa_1 + b = y(-a_2) \\ &\Leftrightarrow (x + ba_1^{-1})a_1 = y(-a_2) \\ &\Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{K} : \begin{cases} x = -ba_1^{-1} + ha_1^{-1} \\ y = h(-a_2)^{-1} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{K} : (x, y) = (-ba_1^{-1}, 0) + h(a_1^{-1}, (-a_2)^{-1}). \end{aligned}$$

On constate que $-ba_1^{-1}, 0 \in \mathbb{K}$ et $a_1^{-1}, (-a_2)^{-1} \in \mathbb{K}^*$.

Dans chacun des cas, on a bien établi que toute équation du premier degré à droite en deux variables donne lieu à un paramétrage à gauche. \square

Remarque 2.2.4. Les plans affines (Π, Δ_{eq}, \in) et (Π, Δ_{af}, \in) de la section précédente 2.1 sont isomorphes. Au vu de la proposition 2.2.3, nous savons que les modèles de \mathbb{K}^2 définis en termes d'équation à droite ou au moyen de paramétrage à gauche sont équivalentes. Nous pouvons donc nous convaincre facilement que le couple (id, id) est un isomorphisme de structures d'incidence entre les plans affines (Π, Δ_{eq}, \in) et (Π, Δ_{af}, \in) .

Nous passons maintenant au cas général et nous définissons à présent une structure d'incidence sur \mathbb{K}^2 , au moyen de paramétrages à gauche.

Définition 2.2.5.

1. L'ensemble des points Π est donné par \mathbb{K}^2 .
2. Pour tous éléments $P \in \mathbb{K}^2$ et $u \in \mathbb{K}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, on définit la droite

$$d_{(P,u)} = \{P + tu : t \in \mathbb{K}\}.$$

On notera aussi $P+\rangle u\langle$ la droite $d_{(P,u)}$. L'ensemble des droites est donné par

$$\Delta = \{d_{(P,u)} : P \in \Pi, u \in \Pi \setminus \{(0, 0)\}\}.$$

3. La relation \mathcal{R} est la relation d'appartenance \in . Le point (α, β) appartient donc à la droite $P+\rangle u\langle$ lorsqu'il existe un élément λ de \mathbb{K} tel que

$$(\alpha, \beta) = P + \lambda u.$$

Avant d'aller plus loin, il est nécessaire de généraliser les notions d'indépendance linéaire et la décomposition d'un élément de \mathbb{K}^2 utilisant un couple de vecteurs linéairement indépendants. Cela nous permettra de vérifier aisément les axiomes de plan affine.

Définition 2.2.6. Nous notons $0 = (0, 0)$. Nous dirons que deux points u et v sont *linéairement indépendants à gauche* lorsque la condition $\alpha u + \beta v = 0$, pour $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, implique $\alpha = \beta = 0$. Dans le cas contraire, nous dirons que A et B sont *linéairement dépendants à gauche*.

Étudions maintenant les solutions de l'équation

$$\alpha u + \beta v = w, \tag{2.1}$$

lorsque $u, v \in \mathbb{K}^2$ sont tous les deux non nuls. La situation est identique à celle des champs bien connue. Elle est reprise dans le théorème suivant.

Théorème 2.2.7. *On se donne u et $v \in \mathbb{K}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $w \in \mathbb{K}^2$.*

1. *Si u et v sont linéairement indépendants, (2.1) possède une unique solution.*

2. Si u et v sont linéairement dépendants et si u et w sont linéairement indépendants, (2.1) ne possède pas de solution.
3. Si u et v sont linéairement dépendants et si u et w sont linéairement dépendants, alors à tout $\alpha \in \mathbb{K}$ correspond un unique $\beta \in \mathbb{K}$ tel que

$$\alpha u + \beta v = w.$$

Démonstration.

1. u et v sont linéairement indépendants :

- Unicité de la solution : supposons que (α_1, β_1) et (α_2, β_2) sont deux solutions de l'équation (2.1). De la relation $\alpha_1 u + \beta_1 v = \alpha_2 u + \beta_2 v = w$, on tire que

$$(\alpha_1 - \alpha_2)u + (\beta_1 - \beta_2)v = 0.$$

Comme u et v sont linéairement indépendants, on a $\alpha_1 = \alpha_2$ et $\beta_1 = \beta_2$.

- Existence de la solution : puisque $u = (u_1, u_2) \neq 0$, on peut supposer sans perte de généralité que $u_1 \neq 0$. Dans ce cas, u_1 admet un inverse u_1^{-1} .

Posons $e_1 : (1, 0)$ et $e_2 : (0, 1)$. On a $u = u_1 e_1 + u_2 e_2$ et on en tire que

$$e_1 = u_1^{-1}u - u_1^{-1}u_2 e_2.$$

On a donc

$$w = (w_1, w_2) = w_1 e_1 + w_2 e_2 = w_1 u_1^{-1}u + (w_2 - w_1 u_1^{-1}u_2) e_2.$$

et de la même façon

$$v = (v_1, v_2) = v_1 u_1^{-1}u + (v_2 - v_1 u_1^{-1}u_2) e_2.$$

Comme u et v sont linéairement indépendants, $v_2 - v_1 u_1^{-1}u_2 \neq 0$, car sinon on aurait $v = v_1 u_1^{-1}u$. Ainsi, $v_2 - v_1 u_1^{-1}u_2$ admet un inverse. On obtient que

$$e_2 = (v_2 - v_1 u_1^{-1}u_2)^{-1} (v - v_1 u_1^{-1}u)$$

et finalement,

$$\begin{aligned} w &= \left[w_1 u_1^{-1} - (w_2 - w_1 u_1^{-1}u_2)(v_2 - v_1 u_1^{-1}u_2)^{-1} v_1 u_1^{-1} \right] u \\ &\quad + (w_2 - w_1 u_1^{-1}u_2)(v_2 - v_1 u_1^{-1}u_2)^{-1} v. \end{aligned}$$

2. u et v sont linéairement dépendants et u et w sont linéairement indépendants :

Comme $u \neq 0$ et comme u et v sont linéairement dépendants, on peut trouver $k \in \mathbb{K}$ tel que $v = ku$.

Procédons par l'absurde et supposons qu'il existe α et $\beta \in \mathbb{K}$ tels que $w = \alpha u + \beta v$.

Dans ce cas, on a

$$w = (\alpha + \beta k)u,$$

ce qui contredit l'indépendance linéaire de u et w .

3. u et v sont linéairement dépendants et u et w sont linéairement dépendants :

Vu les dépendances linéaires, on peut trouver k et $l \in \mathbb{K}$ tels que $v = ku$ et $w = lu$. Montrons que l est unique.

On a $u = (u_1, u_2) \neq 0$, donc on peut supposer sans perte de généralité que $u_1 \neq 0$. Ainsi, l est unique, car

$$l_1u = l_2u \Rightarrow l_1u_1 = l_2u_1 \Rightarrow (l_1 - l_2)u_1 = 0 \Rightarrow l_1 = l_2.$$

De même, on obtient que k est unique. L'équation (2.1) devient $lu = (\alpha + \beta k)u$, donc

$$l = \alpha + \beta k,$$

qui est équivalente à $\beta = (l - \alpha)k^{-1}$, car $k \neq 0$ vu que $v \neq 0$.

□

Ce théorème permet de déterminer exactement les conditions de parallélisme de deux droites. La situation est également celle qui est bien connue dans les espaces affines de dimensions deux, construits sur un espace vectoriel \mathbb{K}^2 , où \mathbb{K} est un corps commutatif.

Corollaire 2.2.8. *Soient les droites $P+\rangle u\langle$ et $Q+\rangle v\langle$, où $u \neq 0$ et $v \neq 0$.*

1. *Si u et v sont linéairement indépendants, alors les droites possèdent un unique point d'intersection.*
2. *Si u et v sont linéairement dépendants et si u et $Q-P$ sont linéairement indépendants, alors les droites sont parallèles et distinctes.*
3. *Si u et v sont linéairement dépendants et si u et $Q-P$ sont linéairement dépendants, alors les droites coïncident.*

Démonstration. Pour obtenir les points d'intersection des deux droites de l'énoncé, il suffit de résoudre l'équation

$$\begin{aligned} P + ru &= Q + sv \\ \Leftrightarrow ru - sv &= Q - P, \end{aligned}$$

pour r et s dans \mathbb{K} . Les conclusions s'obtiennent alors en appliquant le théorème 2.2.7. □

Remarque 2.2.9. On constate que si deux droites ont plus d'un point commun, elles *coïncident*. En effet, dans le corollaire 2.2.8, on a traité tous les cas possibles de dépendance entre u , v et $Q - P$. Cela signifie que si l'on considère deux droites, soit elles possèdent un unique point commun, soit elles sont parallèles et distinctes, soit elles coïncident. Ainsi, si deux droites ont plus d'un point commun, on sait qu'elles coïncident.

Passons maintenant à la vérification des axiomes pour ce modèle.

Lemme 2.2.10. *Une droite d passe par un point P si et seulement si d s'écrit $P+\rangle u\langle$, avec $u \neq 0$.*

Démonstration. Il est clair que la droite $P+\rangle u\langle$ passe par $P = P + 0u$. Passons à la réciproque. Si la droite $R+\rangle u\langle$, avec $u \neq 0$, passe par le point P , alors il existe $t \in \mathbb{K}$ tel que

$$R + tu = P.$$

Montrons alors que $R+\rangle u\langle = P+\rangle u\langle$. Pour tout $t_1 \in \mathbb{K}$, on a

$$R + t_1u = P + (t_1 - t)u,$$

donc $R+\rangle u\langle \subset P+\rangle u\langle$. L'autre inclusion est obtenue de manière similaire. \square

Théorème 2.2.11. *Si les points P et Q sont distincts, alors $P+\rangle Q - P\langle$ est l'unique droite qui passe par P et par Q .*

Démonstration. Par le lemme 2.2.10, la droite $P+\rangle Q - P\langle$ passe par P . Elle passe aussi par Q , puisque

$$P + 1(Q - P) = P + Q - P = Q.$$

L'unicité découle de la remarque 2.2.9. \square

Comme précédemment, le deuxième axiome est simple à vérifier.

Théorème 2.2.12. *Il existe deux points distincts A et B et un point C non situé sur \overline{AB} .*

Démonstration. Les points $A : (0, 0)$, $B : (1, 0)$ et $C : (0, 1)$ ne sont pas alignés.

En effet, par le théorème 2.2.11, la droite qui passe par A et B est donnée par

$$A+\rangle B - A\langle.$$

Ainsi, tout point de cette droite est de la forme

$$A + t(B - A) = tB = (t, 0), \quad \text{avec } t \in \mathbb{K}.$$

De plus, quel que soit $t \in \mathbb{K}$, on a toujours $(t, 0) \neq C$. Ainsi, le point C n'est pas situé sur la droite \overline{AB} , donc ces trois points ne sont pas alignés. \square

Nous pouvons passer à l'axiome des parallèles.

Théorème 2.2.13. *Soient le point P et la droite $d = Q+\rangle u\langle$, avec $u \neq 0$. La droite $P+\rangle u\langle$ est l'unique droite qui est parallèle à $Q+\rangle u\langle$ et qui passe par P .*

Démonstration. La droite $P+\rangle u\langle$ contient P par le lemme 2.2.10. Elle est parallèle à la droite d par le corollaire 2.2.8. Montrons maintenant que c'est l'unique droite ayant cette propriété. Soit $d_1 = R+\rangle v\langle$ une droite contenant P et parallèle à d . On a alors par le lemme 2.2.10⁵

$$d_1 = R+\rangle v\langle = P+\rangle v\langle.$$

5. Plus précisément par la preuve de ce lemme.

Vu le corollaire 2.2.8, puisque d_1 est parallèle à d , u et v sont linéairement dépendants. On peut donc écrire $v = bu$, pour un $b \in \mathbb{K}$. On a alors

$$d_1 = P+\rangle v\langle = P+\rangle u\langle.$$

En effet, pour tout $t \in \mathbb{K}$, on a

$$P + tv = P + tbu.$$

On a donc $P+\rangle v\langle \subset P+\rangle u\langle$ et l'autre inclusion se montre de façon similaire. \square

Corollaire 2.2.14. *La structure d'incidence $(\Pi, \Delta, \mathcal{R})$ introduite dans la définition 2.2.5 est un plan affine au sens de la définition 1.3.3 quel que soit le corps \mathbb{K} considéré.*

Remarque 2.2.15. Les exemples de plan affine fournis par les produits cartésiens \mathbb{K}^2 avec \mathbb{K} un corps quelconque sont d'une importance capitale dans ce travail. En fait, nous verrons qu'après avoir accepté deux axiomes supplémentaires (voir chapitre 4), il n'y en a pas d'autres. C'est l'objectif des chapitres suivants de faire émerger cette structure algébrique à partir des données géométriques initiales.

Pour finir cette section, dans la remarque suivante, nous allons observer que l'axiome I impose de ne pas considérer simultanément des droites décrites par des paramétrages à droite et à gauche.

Remarque 2.2.16.

1. On pourrait se demander s'il est bien légitime de se concentrer sur des droites d'équations linéaires à droite⁶. L'exemple suivant où $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ est le corps (non commutatif) des quaternions montre qu'on ne peut pas impunément considérer les droites décrites par des équations linéaires à gauche et à droite sans perdre immédiatement l'axiome I. En effet, considérons la droite d_1 décrite par l'équation

$$xi = yj$$

et la droite d_2 définie par l'équation

$$ix = jy.$$

On vérifie directement que les points $(0, 0)$ et (i, j) appartiennent tous les deux à d_1 et d_2 . Cependant, on a $d_1 \neq d_2$ vu que le point $(1 + i, j - k)$ appartient à d_1 mais pas à d_2 . En effet, on a d'une part

$$(1 + i)i = i - 1 = (j - k)j,$$

mais aussi

$$i(1 + i) = i - 1 \neq -i - 1 = j(j - k).$$

6. Il nous a paru plus facile de formuler cette remarque en termes d'équations plutôt qu'au moyen de paramétrages. Les deux approches sont équivalentes vu la proposition 2.2.3.

2. Pour finir cette remarque et justifier encore un peu mieux pourquoi il est judicieux de se concentrer soit sur les droites définies par des équations à gauche soit par des équations à droite, on peut aussi constater que le sous-ensemble $d \subset \mathbb{H}^2$ donné par

$$d = \{(x, y) : ix + yj = 0\}$$

ne peut être décrit ni par un paramétrage affine à gauche ni par un paramétrage affine à droite. Supposons que d admette un paramétrage affine à gauche. Par le théorème 2.2.11, on peut supposer que ce paramétrage est de la forme

$$d = \{t(i, -j) : t \in \mathbb{H}\},$$

car les points $(0, 0)$ et $(i, -j)$ appartiennent à d . Mais il s'agit déjà d'une contradiction vu que le couple de quaternions $(-k, 1) = j(i, -j)$ est dans l'image du paramétrage considéré mais ne satisfait pas l'équation vu que

$$i(-k) + 1j = ki + j = 2j \neq 0.$$

On procède de même pour montrer qu'il n'y a pas de paramétrage affine à droite.

2.3 Le plan de Moulton

Dans cette section, nous allons définir une structure d'incidence, appelée le plan de Moulton, et vérifier qu'il s'agit d'un plan affine.

Du point de vue historique [20], le premier exemple de plan affine non arguésien⁷ a été donné par Hilbert en 1898. Cependant, celui-ci était peu naturel. Au fil des années, d'autres exemples ont été donnés et c'est en 1902 que Moulton publie un article sur le plan de Moulton. Ce modèle de plan affine non arguésien est plus naturel que celui de Hilbert. En particulier, le plan de Moulton apparaîtra comme exemple de plan non arguésien dans certaines éditions de l'ouvrage de Hilbert.

Nous commençons par définir la structure d'incidence du plan de Moulton.

Définition 2.3.1 (Le plan de Moulton).

1. L'ensemble Π des points est \mathbb{R}^2 .
2. Nous définissons l'ensemble des droites à partir de trois ensembles :
 - À tout couple $(m, p) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, nous associons la *droite de pente positive*

$$d_{(m,p)}^+ = \{(x, y) \in \Pi : y = mx + p\}.$$

Nous définissons l'*ensemble des droites de pente positive*

$$\Delta_1 = \{d_{(m,p)}^+ : m \geq 0, p \in \mathbb{R}\}.$$

7. La définition d'un plan affine arguésien sera donnée ultérieurement dans ce travail. Nous verrons qu'il s'agit d'un plan affine satisfaisant les deux axiomes qui seront introduits au chapitre 4.

- À tout $c \in \mathbb{R}$, nous associons la *droite verticale*

$$d_c = \{(x, y) \in \Pi : x = c\}.$$

Nous définissons l'*ensemble des droites verticales*

$$\Delta_2 = \{d_c : c \in \mathbb{R}\}.$$

- À tout couple $(m, p) \in \mathbb{R}_0^- \times \mathbb{R}$, nous associons la *droite de pente négative*

$$d_{(m,p)}^- = \left\{ (x, y) \in \Pi : y = \begin{cases} mx + p & \text{si } x < 0 \\ 2mx + p & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \right\}.$$

Nous définissons l'*ensemble des droites de pente négative*

$$\Delta_3 = \{d_{(m,p)}^- : m < 0, p \in \mathbb{R}\}.$$

L'ensemble des droites est donné par $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3$.

3. Pour tous $P \in \Pi$ et $d \in \Delta$, on définit $P \mathcal{R} d$ si $P \in d$, c'est-à-dire si les composantes de P satisfont l'équation qui définit d .

La structure d'incidence $M = (\Pi, \Delta, \mathcal{R})$ est appelée le *plan de Moulton*.

Nous allons montrer que les axiomes I à III sont vérifiés dans le plan de Moulton. Avant cela, nous avons besoin d'un résultat préliminaire concernant les positions relatives des droites de Δ .

Lemme 2.3.2. *Dans le plan de Moulton, on a les assertions suivantes :*

1. Soient $d_{(m,p)}^+$ et $d_{(m',p')}^+$ deux droites de Δ_1 .
Elles sont parallèles si et seulement si $m = m'$. En particulier, elles coïncident si et seulement si $m = m'$ et $p = p'$.
Elles ont un unique point commun si et seulement si $m \neq m'$.
2. Soient d_c et $d_{c'}$ deux droites de Δ_2 .
Elles sont parallèles. En particulier, elles coïncident si et seulement si $c = c'$.
3. Soient $d_{(m,p)}^-$ et $d_{(m',p')}^-$ deux droites de Δ_3 .
Elles sont parallèles si et seulement si $m = m'$. En particulier, elles coïncident si et seulement si $m = m'$ et $p = p'$.
Elles ont un unique point commun si et seulement si $m \neq m'$.
4. Deux droites de deux ensembles distincts parmi Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 ont un unique point commun.

Démonstration.

1. Soient $(m, p), (m', p') \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Les droites $d_{(m,p)}^+$ et $d_{(m',p')}^+$ de Δ_1 sont des droites euclidiennes. Nous savons donc depuis l'enseignement secondaire que ces droites :

- sont parallèles si et seulement si $m = m'$;
 - coïncident si et seulement si $m = m'$ et $p = p'$;
 - ont un unique point commun, donné par $\left(\frac{p' - p}{m - m'}, \frac{p'm - pm'}{m - m'} \right)$, si et seulement si $m \neq m'$.
2. Soient $c, c' \in \mathbb{R}$. Les droites d_c et $d_{c'}$ de Δ_2 sont des droites euclidiennes verticales. Nous savons donc également que ces droites toujours parallèles et qu'elles coïncident si et seulement si $c = c'$.
3. Soient $(m, p), (m', p') \in \mathbb{R}_0^- \times \mathbb{R}$. Étudions l'intersection des droites $d_{(m,p)}^-$ et $d_{(m',p')}^-$ de Δ_3 .
Le point $(x, y) \in \mathbb{R}_0^- \times \mathbb{R}$ est dans l'intersection de $d_{(m,p)}^-$ et $d_{(m',p')}^-$ si et seulement si

$$y = mx + p \quad \text{et} \quad y = m'x + p'.$$

On se retrouve ainsi avec deux droites euclidiennes définies sur $\mathbb{R}_0^- \times \mathbb{R}$. Nous savons donc que les droites $d_{(m,p)}^-$ et $d_{(m',p')}^-$ restreintes à $\mathbb{R}_0^- \times \mathbb{R}$

- sont parallèles si et seulement si $m = m'$;
- coïncident si et seulement si $m = m'$ et $p = p'$;
- ont un unique point commun, donné par $\left(\frac{p' - p}{m - m'}, \frac{p'm - pm'}{m - m'} \right)$, si et seulement si $m \neq m'$.

Le point $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ est dans l'intersection de $d_{(m,p)}^-$ et $d_{(m',p')}^-$ si et seulement si

$$y = 2mx + p \quad \text{et} \quad y = 2m'x + p'.$$

On se retrouve ainsi avec deux droites euclidiennes définies sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Nous savons donc que les droites $d_{(m,p)}^-$ et $d_{(m',p')}^-$ restreintes à $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$

- sont parallèles si et seulement si $m = m'$;
- coïncident si et seulement si $m = m'$ et $p = p'$;
- ont un unique point commun, donné par $\left(\frac{p' - p}{2(m - m')}, \frac{p'm - pm'}{m - m'} \right)$, si et seulement si $m \neq m'$.

Il nous reste à vérifier que lorsque $m \neq m'$, les droites $d_{(m,p)}^-$ et $d_{(m',p')}^-$ n'admettent pas un point commun sur $\mathbb{R}_0^- \times \mathbb{R}$ et sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ simultanément. Au vu des composantes des points communs possibles, nous observons qu'il suffit de regarder lorsque $\frac{p' - p}{m - m'}$ est positif ou strictement négatif. Pour cela, nous allons considérer différents cas.

- Si $m < m'$, alors $m - m' < 0$. Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} \frac{p' - p}{m - m'} \geq 0 &\Leftrightarrow p' - p \leq 0 \\ &\Leftrightarrow p' \leq p. \end{aligned}$$

- Si $m > m'$, alors $m - m' > 0$. Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} \frac{p' - p}{m - m'} \geq 0 &\Leftrightarrow p' - p \geq 0 \\ &\Leftrightarrow p' \geq p. \end{aligned}$$

Au final, nous pouvons conclure que les droites $d_{(m,p)}^-$ et $d_{(m',p')}^-$:

- sont parallèles si et seulement si $m = m'$;
- coïncident si et seulement si $m = m'$ et $p = p'$;
- ont un unique point commun si et seulement si $m \neq m'$. En particulier, ce point commun est donné par $\left(\frac{p' - p}{m - m'}, \frac{p'm - pm'}{m - m'}\right)$ si et seulement si $m < m'$ et $p < p'$ ou $m > m'$ et $p > p'$, et il est donné par $\left(\frac{p' - p}{2(m - m')}, \frac{p'm - pm'}{m - m'}\right)$ si et seulement si $m < m'$ et $p \geq p'$ ou $m > m'$ et $p \leq p'$.

4. Nous avons trois cas à considérer.

- Soient $(m, p) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$. Étudions l'intersection des droites $d_{(m,p)}^+ \in \Delta_1$ et $d_c \in \Delta_2$.

Le point (x, y) est dans l'intersection de ces droites si et seulement si

$$y = mx + p \quad \text{et} \quad x = c.$$

Ainsi, $d_{(m,p)}^+$ et d_c ont un unique point commun donné par $(c, mc + p)$.

- Soient $(m, p) \in \mathbb{R}_0^- \times \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$. Étudions l'intersection des droites $d_{(m,p)}^- \in \Delta_3$ et $d_c \in \Delta_2$. Deux cas sont possibles :

Si $c < 0$, alors le point (x, y) est dans l'intersection de ces droites si et seulement si

$$y = mx + p \quad \text{et} \quad x = c.$$

Si $c \geq 0$, alors le point (x, y) est dans l'intersection de ces droites si et seulement si

$$y = 2mx + p \quad \text{et} \quad x = c.$$

Ainsi, $d_{(m,p)}^-$ et d_c ont un unique point commun donné par $(c, mc + p)$ si $c < 0$ et $(c, 2mc + p)$ si $c \geq 0$.

- Soient $(m, p) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ et $(m', p') \in \mathbb{R}_0^- \times \mathbb{R}$. Étudions l'intersection des droites $d_{(m,p)}^+ \in \Delta_1$ et $d_{(m',p')}^- \in \Delta_3$. Par définition, on a $m > m'$. On regarde les intersections potentielles des restrictions de ces droites au demi-plan formé par les points d'abscisse négative, puis au demi-plan formé des points d'abscisse positive, respectivement.

Le point $(x, y) \in \mathbb{R}_0^- \times \mathbb{R}$ est dans l'intersection de ces droites si et seulement si

$$y = mx + p \quad \text{et} \quad y = m'x + p.$$

Ainsi, $d_{(m,p)}^+$ et $d_{(m',p')}^-$ restreintes à $\mathbb{R}_0^- \times \mathbb{R}$ ont un unique point d'intersection, donné par $\left(\frac{p' - p}{m - m'}, \frac{p'm - pm'}{m - m'} \right)$, si et seulement si $p' < p$.

Le point $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ est dans l'intersection de ces droites si et seulement si

$$y = mx + p \quad \text{et} \quad y = 2m'x + p.$$

Ainsi, $d_{(m,p)}^+$ et $d_{(m',p')}^-$ restreintes à $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ ont un unique point d'intersection, donné par $\left(\frac{p' - p}{m - 2m'}, \frac{p'm - 2pm'}{m - 2m'} \right)$, si et seulement si $p' \geq p$.

Les droites considérées ont donc bien une intersection unique, qui se trouve dans le demi-plan correspondant aux points d'abscisses positives, ou négatives, selon le signe de $p' - p$.

□

Proposition 2.3.3. *Le plan de Moulton est un plan affine.*

Démonstration.

1. Axiome I : Soient $P_1 : (x_1, y_1)$ et $P_2 : (x_2, y_2)$ deux points distincts de Π . Quitte à inverser les rôles de P_1 et de P_2 , on peut supposer que $x_1 \leq x_2$. Nous allons d'abord considérer le cas où $x_1 = x_2$, puis celui où $x_1 \neq x_2$.

(a) Si $x_1 = x_2$, alors on a $P_1, P_2 \in d_{x_1} \in \Delta_2$ et le résultat est vérifié.

(b) Si $x_1 \neq x_2$, alors P_1 et P_2 ne peuvent pas appartenir à une droite de Δ_2 . Ainsi, si il existe une droite d contenant P_1 et P_2 , alors elle appartient soit à Δ_1 , soit à Δ_3 . Dans le premier cas, comme Δ_1 contient les droites de pente positive et comme $x_1 < x_2$, on a $y_1 \leq y_2$. Dans le deuxième cas, l'ensemble Δ_3 contient les droites de pentes négatives, donc on a $y_1 > y_2$.

• Si $y_1 \leq y_2$, alors on cherche $m \geq 0$ et $p \in \mathbb{R}$ tels que

$$y_1 = mx_1 + p \quad \text{et} \quad y_2 = mx_2 + p$$

Par soustraction membre à membre, on obtient

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1) \Leftrightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

où la dernière étape a pu être réalisée étant donné que $x_1 \neq x_2$. Comme $x_1 < x_2$ et $y_1 \leq y_2$, on obtient bien un m positif. Afin de déterminer p , nous allons injecter la valeur de m dans la deuxième équation. On a

$$\begin{aligned} p &= y_2 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_2 \\ &= \frac{y_2 x_2 - y_2 x_1 - y_2 x_2 + y_1 x_2}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1}. \end{aligned}$$

Comme $m \geq 0$ et $p \in \mathbb{R}$ sont déterminés de manière unique, la seule droite qui puisse contenir les points P_1 et P_2 est $d^+ \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1} \right) \in \Delta_1$ et

effectivement, on vérifie qu'elle le fait.

- Si $y_1 > y_2$, alors nous savons que si il existe une droite contenant P_1 et P_2 , elle appartient à Δ_3 . Nous cherchons donc $m < 0$ et $p \in \mathbb{R}$ tels que $P_1, P_2 \in d_{(m,p)}^-$. Pour cela, nous allons devoir considérer différents cas :
 - Si $x_1 < x_2 < 0$, alors on cherche $m < 0$ et $p \in \mathbb{R}$ tels que

$$y_1 = mx_1 + p \quad \text{et} \quad y_2 = mx_2 + p.$$

En procédant de la même manière que dans le cas où $y_1 \leq y_2$, nous obtenons

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{et} \quad p = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1}.$$

Comme $x_1 < x_2$ et $y_1 > y_2$, on obtient bien un m strictement négatif. Comme $m < 0$ et $p \in \mathbb{R}$ sont déterminés de manière unique, la seule droite qui puisse contenir P_1 et P_2 est $d^- \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1} \right) \in \Delta_3$ et

effectivement, on vérifie qu'elle le fait.

- Si $0 < x_1 < x_2$, alors on cherche $m < 0$ et $p \in \mathbb{R}$ tels que

$$y_1 = 2mx_1 + p \quad \text{et} \quad y_2 = 2mx_2 + p.$$

On résout le système et on trouve

$$m = \frac{y_2 - y_1}{2(x_2 - x_1)} \quad \text{et} \quad p = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1}.$$

Comme $x_1 < x_2$ et $y_1 > y_2$, on obtient bien un m strictement négatif. Ainsi, $m < 0$ et $p \in \mathbb{R}$ sont déterminés de manière unique, donc la seule droite qui puisse contenir P_1 et P_2 est $d^- \left(\frac{y_2 - y_1}{2(x_2 - x_1)}, \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1} \right) \in \Delta_3$

et effectivement, on vérifie qu'elle le fait.

- Si $x_1 < 0 < x_2$, alors on cherche $m < 0$ et $p \in \mathbb{R}$ tels que

$$y_1 = mx_1 + p \quad \text{et} \quad y_2 = 2mx_2 + p$$

On résout le système et on obtient

$$m = \frac{y_2 - y_1}{2x_2 - x_1} \quad \text{et} \quad p = \frac{2y_1 x_2 - y_2 x_1}{2x_2 - x_1}.$$

Comme $x_1 < 0 < x_2$ et $y_1 > y_2$, on obtient bien un m strictement négatif. Ainsi, $m < 0$ et $p \in \mathbb{R}$ sont déterminés de manière unique, donc la

seule droite qui puisse contenir P_1 et P_2 est $d^- \left(\frac{y_2 - y_1}{2x_2 - x_1}, \frac{2y_1x_2 - y_2x_1}{2x_2 - x_1} \right) \in \Delta_3$

et effectivement, on vérifie qu'elle le fait.

2. Axiome II : Il suffit de considérer les points $(0, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, 0)$. Procédons par l'absurde et supposons que la droite d passe par ces trois points. En particulier, comme elle passe par les points $(0, 0)$ et $(0, 1)$, on a

$$d = d_0 = \{(x, y) \in \Pi : x = 0\}.$$

On obtient donc une contradiction puisque le point $(1, 0) \notin \{(x, y) \in \Pi : x = 0\}$.

3. Axiome III : Soient $P : (x, y) \in \Pi$ et $d \in \Delta$. Déterminons d' la parallèle à d passant par P .

(a) Si $P \in d$, alors $d' = d$.

(b) Si $P \notin d$, alors on doit considérer plusieurs cas :

- Si $d \in \Delta_1$, alors il existe $m \geq 0$ et $p \in \mathbb{R}$ tels que

$$d = d_{(m,p)}^+.$$

Vu le lemme 2.3.2, toute droite de Δ_2 et de Δ_3 a un point d'intersection avec d , donc $d' \in \Delta_1$. On cherche donc $m' \geq 0$ et $p' \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned} d' = d_{(m',p')}^+ \parallel d \quad \text{et} \quad P \in d' &\Leftrightarrow m' = m \quad \text{et} \quad y = mx + p' \\ &\Leftrightarrow m' = m \quad \text{et} \quad p' = y - mx. \end{aligned}$$

Ainsi, $d' = d_{(m,y-mx)}^+ \in \Delta_1$.

- Si $d \in \Delta_2$, alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$d = d_c.$$

Vu le lemme 2.3.2, on sait que $d' \in \Delta_2$. On cherche donc $c' \in \mathbb{R}$ tel que

$$d' = d_{c'} \parallel d \quad \text{et} \quad P \in d' \Leftrightarrow c' = x.$$

Ainsi, $d' = d_x \in \Delta_2$.

- Si $d \in \Delta_3$, alors il existe $m < 0$ et $p \in \mathbb{R}$ tels que

$$d = d_{(m,p)}^-.$$

Vu le lemme 2.3.2, on sait que $d' \in \Delta_3$. On cherche donc $m' < 0$ et $p' \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned} d' = d_{(m',p')}^- \parallel d \quad \text{et} \quad P \in d' &\Leftrightarrow m' = m \quad \text{et} \quad y = \begin{cases} mx + p & \text{si } x < 0 \\ 2mx + p & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow m' = m \quad \text{et} \quad p = \begin{cases} y - mx & \text{si } x < 0 \\ y - 2mx & \text{si } x \geq 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$d' = \begin{cases} d_{(m,y-mx)}^- & \text{si } x < 0 \\ d_{(m,y-2mx)}^- & \text{si } x \geq 0 \end{cases} .$$

□

Remarque 2.3.4. Dans la définition des droites de pentes négatives introduite à la définition 2.3.1, au lieu de multiplier par 2 la pente lorsque $x \geq 0$, nous aurions évidemment pu la multiplier par n'importe quel facteur différent de 1.

2.4 Plans affines finis

Dans cette section, nous traitons le cas des plans affines finis. Comme annoncé, nous allons commencer par un exemple de plan affine à quatre points, appelé la géométrie du tétraèdre. Ensuite, nous allons étudier le cas général.

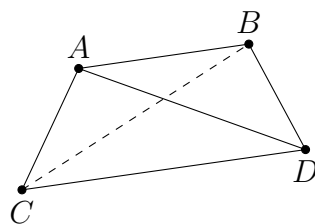
2.4.1 La géométrie du tétraèdre

Le modèle suivant, appelé *géométrie du tétraèdre* parce que le plan est constitué de quatre points distincts, permet a priori de se donner un exemple bien distinct de \mathbb{R}^2 , puisque le plan est un ensemble fini.

Définition 2.4.1 (Géométrie du tétraèdre). Nous définissons les ensembles suivants :

1. Le plan Π est $\{A, B, C, D\}$, où les quatre éléments sont distincts.
2. L'ensemble des droites est $\Delta = \{\{P, Q\} : P, Q \in \Pi \text{ et } P \neq Q\}$.
3. Si $P \in \Pi$ et $d \in \Delta$, on définit $P \mathcal{R} d$ si $P \in d$.

Nous représentons ce modèle par le diagramme suivant.



Nous allons voir que la géométrie du tétraèdre vérifie les axiomes I à III.

Proposition 2.4.2. *La géométrie du tétraèdre est un plan affine.*

Démonstration. La géométrie du tétraèdre correspond à un graphe complet non orienté à quatre sommets. Par la proposition 1.3.4, nous savons qu'il s'agit d'un plan affine. □

Nous vérifions à présent que la géométrie du tétraèdre est le plan affine qui possède le nombre minimum de points.

Proposition 2.4.3. *Le plus petit plan affine a quatre points.*

Démonstration. Par le corollaire 1.5.5, nous savons que dans tout plan affine, l'ensemble Π contient au moins quatre points. Or, par la proposition précédente 2.4.2, nous savons que la géométrie du tétraèdre est un plan affine et que dans ce cas Π contient quatre points, d'où la conclusion. \square

Théorème 2.4.4. *La géométrie du tétraèdre est un plan affine isomorphe au plan \mathbb{Z}_2^2 .*

Démonstration. Nous notons $(\Pi_T, \Delta_T, \mathcal{R}_T)$ la géométrie du tétraèdre. De plus, la structure d'incidence de \mathbb{Z}_2^2 est celle de la définition 2.2.5 pour $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$ et est notée $(\Pi_{\mathbb{Z}_2^2}, \Delta_{\mathbb{Z}_2^2}, \mathcal{R}_{\mathbb{Z}_2^2})$. Nous définissons $\Phi : \Pi_{\mathbb{Z}_2^2} \rightarrow \Pi_T$ par

$$(0, 0) \mapsto A; \quad (0, 1) \mapsto B; \quad (1, 0) \mapsto C; \quad (1, 1) \mapsto D.$$

Nous définissons $\Psi : \Delta_{\mathbb{Z}_2^2} \rightarrow \Delta_T$ par

$$\Psi \left(\overline{(a_1, a_2)(b_1, b_2)} \right) = \overline{\Phi(a_1, a_2)\Phi(b_1, b_2)},$$

pour tous $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}_2$ tels que $(a_1, a_2) \neq (b_1, b_2)$.

Nous devons vérifier que le couple (Φ, Ψ) est un isomorphisme de structures d'incidence au sens de la définition 1.1.3.

1. L'application Φ est bijective.

- Injectivité de Φ :

Supposons que P_1 et $P_2 \in \Pi_{\mathbb{Z}_2^2}$ sont tels que $\Phi(P_1) = \Phi(P_2)$. Au vu de la définition de Φ , il est évident que $P_1 = P_2$.

- Surjectivité de Φ :

Soit $P \in \Pi_T$, montrons qu'il existe $Q \in \Pi_{\mathbb{Z}_2^2}$ tel que $\Phi(Q) = P$. C'est évident vu la définition de Φ . Si $P = A$, alors $Q = (0, 0)$. Les autres cas sont similaires.

2. L'application Ψ est bijective.

Tout d'abord, comme dans la définition des droites de $\Delta_{\mathbb{Z}_2^2}$, le paramètre h appartient à \mathbb{Z}_2 , nous constatons que chaque droite contient exactement deux points, à savoir les points (a_1, a_2) et $(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ de \mathbb{Z}_2^2 .

- Injectivité de Ψ :

Soient $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{Z}_2^2$ tels que $(a_1, a_2) \neq (b_1, b_2)$ et $(c_1, c_2) \neq (d_1, d_2)$. Supposons que $\Psi \left(\overline{(a_1, a_2)(b_1, b_2)} \right) = \Psi \left(\overline{(c_1, c_2)(d_1, d_2)} \right)$. Dans ce cas, on a

$$\overline{\Phi(a_1, a_2)\Phi(b_1, b_2)} = \overline{\Phi(c_1, c_2)\Phi(d_1, d_2)}.$$

Comme les droites ne passent que par deux points, on doit avoir

$$\begin{aligned} \Phi(a_1, a_2) = \Phi(c_1, c_2) \quad \text{et} \quad \Phi(b_1, b_2) = \Phi(d_1, d_2) \\ \text{ou} \quad \Phi(a_1, a_2) = \Phi(d_1, d_2) \quad \text{et} \quad \Phi(b_1, b_2) = \Phi(c_1, c_2). \end{aligned}$$

Par injectivité de Φ , on a

$$\begin{aligned} (a_1, a_2) = (c_1, c_2) \quad \text{et} \quad (b_1, b_2) = (d_1, d_2) \\ \text{ou} \quad (a_1, a_2) = (d_1, d_2) \quad \text{et} \quad (b_1, b_2) = (c_1, c_2). \end{aligned}$$

Ainsi, $\overline{(a_1, a_2)(b_1, b_2)} = \overline{(c_1, c_2)(d_1, d_2)}$.

- Surjectivité de Ψ :

Soient $P, Q \in \Pi_T$ tels que $P \neq Q$. Montrons qu'il existe $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}_2$ satisfaisant $(a_1, a_2) \neq (b_1, b_2)$ tels que $\Psi(\overline{(a_1, a_2)(b_1, b_2)}) = \overline{PQ}$. Par surjectivité de Φ , il existe $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}_2$ tels que $P = \Phi(a_1, a_2)$ et $Q = \Phi(b_1, b_2)$. De plus, par injectivité de Φ , $(a_1, a_2) \neq (b_1, b_2)$ vu que $P \neq Q$. Ainsi, par définition de Ψ , on a

$$\overline{PQ} = \overline{\Phi(a_1, a_2)\Phi(b_1, b_2)} = \Psi(\overline{(a_1, a_2)(b_1, b_2)}).$$

3. Il reste à montrer que pour tous $P \in \Pi_{\mathbb{Z}_2^2}$ et $d \in \Delta_{\mathbb{Z}_2^2}$, on a

$$P \in d \quad \text{si et seulement si} \quad \Phi(P) \in \Psi(d).$$

C'est évident vu les définitions des applications bijectives Φ et Ψ .

□

On pourrait bien entendu se demander s'il existe d'autres exemples de plans affines finis que ceux fournis par le résultat 2.4.4. La réponse à cette question est positive : vu le corollaire 2.2.14, il est évident que les \mathbb{K}^2 , avec \mathbb{K} un corps fini constituent d'autres exemples de plans affines finis. Mais une question plus profonde surgit : existe-t-il un plan affine fini qui ne soit pas (isomorphe à) \mathbb{K}^2 , où \mathbb{K} est un corps. Un exemple est donné par le plan de Hugues [10]. Il s'agit d'un plan affine à $81 = 9^2$ points qui n'est pas isomorphe au carré d'un corps fini. D'autres exemples de plans affines finis non isomorphes au carré d'un corps ont été donnés par Veblen et Wedderburn [23].

2.4.2 Cas général

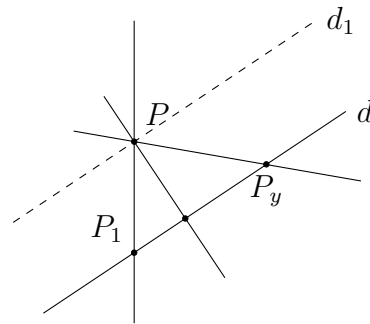
Considérons un plan affine pour lequel Π contient un nombre fini de points. Appelons x le nombre de directions de ce plan affine. Vu la proposition 1.4.5, on a $x \geq 3$.

Théorème 2.4.5. *Le nombre y de points d'une ponctuelle quelconque vaut $x - 1$. C'est aussi le nombre de droites de chaque direction.*

Démonstration. Soient une droite d et un point P non situé sur d . Ce point existe vu que l'axiome II est vrai. Montrons que d possède $x - 1$ points. On pourra alors conclure en utilisant le théorème 1.4.8.

Par P passent x droites distinctes, vu qu'il y a x directions, dont une seule est parallèle à d . Or, le nombre de points situés sur la droite d est égal au nombre de droites issues de P et non parallèles à d . Ainsi,

$$y = x - 1.$$



□

Théorème 2.4.6. *Le nombre p de points du plan affine vaut $(x - 1)^2$.*

Démonstration. Par un point P passent x droites distinctes qui possèdent chacune $x - 2$ points différents de P . Ces points sont deux à deux distincts et fournissent tous les points du plan affine différents de P . Ainsi,

$$\begin{aligned} p &= 1 + x(x - 2) \\ &= 1 + x^2 - 2x \\ &= (x - 1)^2. \end{aligned}$$

□

Remarque 2.4.7. Les points du plan affine se répartissent sur les $x - 1$ ponctuelles d'une même direction à raison de $x - 1$ points par ponctuelle. Ainsi, le cardinal d'un plan affine fini est un carré.

Théorème 2.4.8. *Le nombre de droites du plan affine vaut $x(x - 1)$.*

Démonstration. Il y a en effet x directions qui comprennent chacune $y = x - 1$ droites. □

Exemple 2.4.9. La géométrie du tétraèdre de la sous-section 2.4.1 comporte 4 points, 6 droites à deux points réparties en 3 directions de 2 droites.

Remarque 2.4.10. Nous n'avons nullement affirmé qu'il existe un plan affine pour lequel le nombre de directions serait arbitraire. C'est en fait un problème ouvert de déterminer s'il existe un plan affine correspondant à $x = 13$, donc contenant 144 points.

Chapitre 3

Dilatations associées à un plan affine

Nous allons maintenant définir de manière axiomatique les dilatations d'un plan affine. Elles correspondent, en géométrie classique, aux translations et aux homothéties. Ces transformations sont caractérisées dans les cours de géométrie affine de première année à l'université [13] comme les applications affines qui transforment toute droite en une droite parallèle, si on omet les homothéties de rapport nul. Ces dernières appliquent tout le plan sur le centre de l'homothétie.

Les dilatations inversibles contiennent le groupe des translations, qui jouent le rôle des vecteurs en géométrie affine. Dans la section 3.4, nous munissons cet ensemble d'une structure de groupe (additif). Nous souhaitons faire agir un corps sur l'ensemble des translations. Nous introduisons pour cela dans la section 3.5 l'ensemble des homomorphismes traçants, qui agissent sur le groupe des translations. Nous pouvons, moyennant une hypothèse légère sur le groupe des translations, munir l'ensemble des homomorphismes traçants d'une structure d'anneau avec unité. Nous en ferons un corps au chapitre 4, moyennant l'introduction de deux nouveaux axiomes.

3.1 Étude générale des dilatations

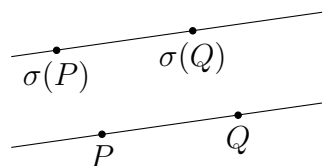
Donnons dès à présent la définition.

Définition 3.1.1. Une *dilatation* est une application $\sigma : \Pi \rightarrow \Pi$ telle que, pour tout couple de points distincts P et Q , $\sigma(Q)$ est situé sur la parallèle à \overline{PQ} menée par $\sigma(P)$.

Remarque 3.1.2. Nous n'avons pas écrit que $\overline{\sigma(P)\sigma(Q)}$ est parallèle à \overline{PQ} , car on ne sait pas si $\sigma(P)$ et $\sigma(Q)$ sont distincts.

Néanmoins, si σ est une dilatation, alors, pour tout couple de points distincts P et Q tels que $\sigma(P) \neq \sigma(Q)$, on a

$$\overline{PQ} \parallel \overline{\sigma(P)\sigma(Q)}.$$



Exemples 3.1.3.

1. Soit l'application identité $id : \Pi \rightarrow \Pi : P \mapsto P$. Il s'agit d'une dilatation puisque $\overline{PQ} \parallel \overline{PQ}$, pour tous $P, Q \in \Pi$ tels que $P \neq Q$.
2. Soit $P \in \Pi$, définissons l'application constante $c_P : \Pi \rightarrow \Pi : Q \mapsto P$. Elle applique donc tout point de Π sur le point P donné. Pour tout $P \in \Pi$, c_P est une dilatation. En effet, pour tous P_1 et $P_2 \in \Pi$ tels que $P_1 \neq P_2$, $c_P(P_2) = P$ est sur la droite parallèle à $\overline{P_1P_2}$ passant par $c_P(P_1) = P$.

Les dilatations sont caractérisées par les images de deux points distincts, comme l'indique le résultat suivant.

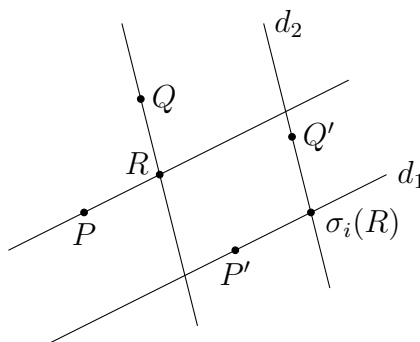
Théorème 3.1.4. *Si P, Q, P' et Q' sont des points tels que $P \neq Q$, il existe au plus une dilatation σ telle que $\sigma(P) = P'$ et $\sigma(Q) = Q'$.*

Démonstration. Supposons que σ_1 et σ_2 sont des dilatations telles que $\sigma_i(P) = P'$ et $\sigma_i(Q) = Q'$ pour $i \in \{1, 2\}$. Montrons que $\sigma_1 = \sigma_2$. Nous allons décomposer la preuve en deux parties. Premièrement, nous établirons que $\sigma_1(R) = \sigma_2(R)$ pour tout point R qui n'est pas situé sur la droite \overline{PQ} , puis pour tout point R situé sur cette droite.

1. Soit R un point non situé sur \overline{PQ} .

Par définition d'une dilatation, $\sigma_1(R)$ est sur la parallèle d_1 à \overline{PR} menée par P' et sur la parallèle d_2 à \overline{QR} menée par Q' . On a obtenu que $\sigma_1(R)$ est situé sur d_1 et sur d_2 . Montrons qu'il s'agit de l'unique point commun de ces deux droites. On sait que d_1 n'est pas parallèle à d_2 , car sinon \overline{PR} et \overline{QR} seraient parallèles par transitivité du parallélisme, donc R serait situé sur \overline{PQ} . Ainsi, $\sigma_1(R)$ est le seul point de rencontre de d_1 et d_2 .

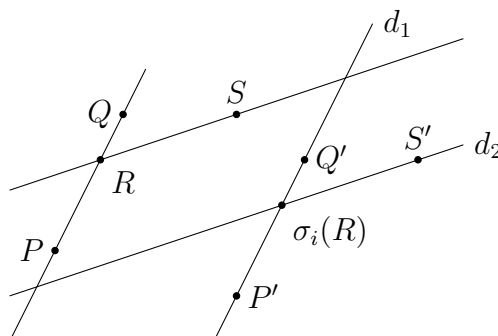
En procédant de manière similaire, on obtient qu'il en est de même pour $\sigma_2(R)$. Ainsi, $\sigma_1(R) = \sigma_2(R)$.



2. Soit R un point de \overline{PQ} .

Si $R = P$, on a $\sigma_1(R) = P' = \sigma_2(R)$. Il en est de même si $R = Q$.

Supposons donc que R est distinct de P et de Q . D'après l'axiome II, on peut trouver un point S qui n'est pas situé sur \overline{PQ} . Par le point précédent, on a $\sigma_1(S) = \sigma_2(S)$, notons ce point S' . On peut appliquer le point 1 de la démonstration au couple de points P et S , et on obtient alors $\sigma_1(R) = \sigma_2(R)$. En effet, le point R n'est pas situé sur la droite \overline{PS} .



□

Corollaire 3.1.5. Soient P, Q, P' et Q' des points tels que $P \neq Q$, $\sigma(P) = P'$ et $\sigma(Q) = Q'$, si une telle dilatation σ existe.

1. Si $P' = Q'$, alors σ existe et est unique : c'est l'application constante $c_{P'}$.
2. Si $P' \neq Q'$, alors si σ existe, c'est une bijection.

Démonstration.

1. On a $\sigma(P) = P' = \sigma(Q)$. L'application $c_{P'}$ est une dilatation satisfaisant les hypothèses. Par le théorème 3.1.4, on sait qu'elle est unique.
2. Montrons que σ est injectif. Soient R et S deux points tels que $\sigma(R) = \sigma(S)$. Montrons que $R = S$. Par l'absurde, si $R \neq S$, alors on est dans le premier cas du corollaire pour les points R et S , donc σ est constante. On aurait alors $P' = Q'$, ce qui est absurde vu les hypothèses.

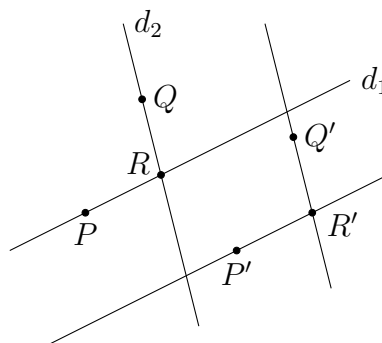
Montrons que σ est surjectif. Soit R' un point de Π . Montrons qu'on peut trouver un point R tel que $\sigma(R) = R'$. Il suffit de considérer la construction du théorème 3.1.4 dans le sens contraire. Vu les hypothèses, on a $\sigma(P) = P' \neq Q' = \sigma(Q)$. Nous allons tout d'abord montrer qu'il existe un point R tel que $\sigma(R) = R'$ lorsque R' n'est pas un point de la droite $\overline{P'Q'}$. On le prouvera ensuite pour les points R' situés sur cette droite.

- Supposons tout d'abord que R' n'est pas situé sur la droite $\overline{P'Q'}$. Soit d_1 la droite passant par P parallèle à $\overline{P'R'}$. Soit d_2 la droite passant par Q parallèle à $\overline{Q'R'}$. Vu qu'elles sont respectivement parallèles aux droites $\overline{P'R'}$ et $\overline{Q'R'}$ qui ne sont pas parallèles entre elles puisque $P' \neq Q'$, les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles (axiome III). Ainsi, elles ont un unique point commun R . Montrons que ce point est tel que $\sigma(R) = R'$.

En effet, par définition des dilatations, $\sigma(R)$ est situé sur la parallèle à \overline{QR} passant par $\sigma(Q) = Q'$, qui est la droite $\overline{Q'R'}$, et sur la parallèle à \overline{PR} passant par $\sigma(P) = P'$, qui est la droite $\overline{P'R'}$.

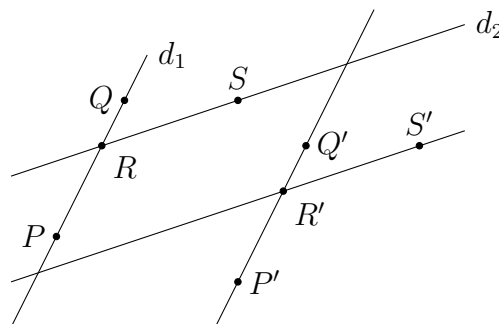
1. Voir l'exemple 3.1.3.

On sait également que ces droites sont distinctes et qu'elles se coupent en un unique point R' . Ainsi, on a bien $\sigma(R) = R'$.



- Supposons à présent que R' est situé sur $\overline{P'Q'}$. Étant donné que ces cas sont évidents, on peut supposer que R' est distinct de P' et de Q' . Vu l'axiome II, il existe un point S' qui n'est pas situé sur $\overline{P'Q'}$. Par le point précédent, on sait qu'il existe un point S tel que $\sigma(S) = S'$.

On peut appliquer le point 1 de la démonstration au couple de points P' et S' , et on obtient alors qu'il existe un point R tel que $\sigma(R) = R'$. En effet, le point R' n'est pas situé sur la droite $\overline{P'S'}$.



□

On peut classifier les dilatations selon leur ensemble de points fixes. Nous rappelons la définition.

Définition 3.1.6. On dit que P est un *point fixe* de la dilatation σ si $\sigma(P) = P$.

Le corollaire suivant limite le nombre de possibilités pour les points fixes.

Corollaire 3.1.7. Une dilatation qui possède au moins deux points fixes est l'application identité.

Démonstration. Soient $P \neq Q$ deux points fixes d'une dilatation σ . Par définition d'un point fixe, on a $\sigma(P) = P$ et $\sigma(Q) = Q$. En particulier, l'application identité id est telle que $id(P) = P$ et $id(Q) = Q$.

Or, vu le théorème 3.1.4, comme $P \neq Q$, on sait qu'il existe au plus une application σ telle que $\sigma(P) = P$ et $\sigma(Q) = Q$. Ainsi, $\sigma = id$. □

Nous allons à présent définir les deux ensembles d'applications qui constituent les dilatations. Celles-ci sont appelées les translations et les homothéties.

Définition 3.1.8. Une *translation* est une dilatation qui ne possède pas de point fixe ou qui est l'identité.

Définition 3.1.9. Une *homothétie* est une dilatation qui possède au moins un point fixe, appelé *centre* de l'homothétie.

Remarque 3.1.10. L'identité est la seule dilatation qui est à la fois une translation et une homothétie. En effet, par définition, il est évident que l'identité est une translation et une homothétie. Montrons que c'est la seule dilatation qui a cette propriété. Soit σ une dilatation qui est une translation et une homothétie. Comme σ est une homothétie, elle a un point fixe P . Vu que c'est également une translation, on en tire que c'est l'identité.

3.2 Traces d'une dilatation

Afin de caractériser les différentes dilatations, nous allons introduire le concept de trace d'une dilatation. Celui-ci nous permettra entre autres de déterminer à quelle condition une dilatation admet un point fixe.

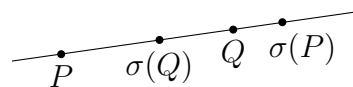
Définition 3.2.1. Une *trace* d'une dilatation σ est une droite qui contient à la fois un point P et son image $\sigma(P)$.

Vu la définition, on sait qu'une droite est une trace si elle contient un point et son image. Dans le théorème suivant, nous allons montrer que c'est alors vrai pour tous les points de la trace.

Théorème 3.2.2. Si Q est un point d'une trace d de la dilatation σ , alors $\sigma(Q)$ est situé sur d .

Démonstration. Puisque d est une trace, il existe un point P tel que P et $\sigma(P)$ soient situés sur d . Si $Q = P$, le théorème est évident.

Si $Q \neq P$, comme σ est une dilatation, $\sigma(Q)$ se trouve sur la parallèle à \overline{PQ} menée par $\sigma(P)$, c'est-à-dire sur d .



□

Corollaire 3.2.3. Si deux traces distinctes d'une dilatation σ se rencontrent, leur point de rencontre est un point fixe de σ .

Démonstration. Soient d_1 et d_2 deux traces distinctes de la dilatation σ qui se rencontrent au point P . Montrons que P est un point fixe de σ , c'est-à-dire que $\sigma(P) = P$. Comme le point P est situé à la fois sur d_1 et sur d_2 , on tire du théorème 3.2.2 que $\sigma(P)$ est également situé sur ces deux droites. Par hypothèse, nous savons que les droites d_1 et d_2 sont distinctes et ont un point en commun. Elles ont donc des directions différentes. Vu la remarque 1.4.4, ces droites ont un unique point en commun. Ainsi, $\sigma(P) = P$. □

3.2.1 Caractérisation des dilatations par leurs traces

Maintenant que nous avons introduit le concept de trace d'une dilatation, nous allons pouvoir caractériser les dilatations en fonction de leurs traces.

Théorème 3.2.4. *Une dilatation σ coïncide avec id si et seulement si toute droite est une trace de σ .*

Démonstration. La condition est évidemment nécessaire. En effet, si d est une droite passant par le point P , alors $\sigma(P) = id(P) = P$ est situé sur d . Ainsi, d est bien une trace.

Réciproquement, supposons que toute droite est une trace de la dilatation σ . Pour montrer que σ est l'application identité id , il suffit de montrer que tout point est fixe pour σ . Si on montre que par tout point passent au moins deux traces distinctes, alors le corollaire 3.2.3 nous permettra de conclure. Vu le théorème 1.5.2, par tout point P passent au moins trois droites. Par hypothèse, ce sont des traces. Vu qu'elles sont distinctes et qu'elles se coupent en ce point, le corollaire 3.2.3 nous indique que P est fixe pour σ . \square

Théorème 3.2.5. *Une dilatation σ est une homothétie différente de id , si et seulement si ses traces sont les droites qui passent par un même point P .*

Démonstration. Supposons que la dilatation $\sigma \neq id$ est une homothétie. En utilisant le corollaire 3.1.7, on sait qu'elle possède un seul point fixe P . Toute droite passant par P est une trace de σ , car elle passe par le point $\sigma(P) = P$.

Montrons à présent que toutes les traces de σ passent par P . Soit d une trace de σ . Procédons par l'absurde et supposons qu'elle ne passe pas par P . Si Q est un point de d , la droite \overline{PQ} passe par P , donc c'est une trace de σ . Par le corollaire 3.2.3, Q serait un point fixe de σ , distinct de P , ce qui est impossible vu que σ ne possède qu'un seul point fixe.

Réciproquement, supposons que les traces d'une dilatation σ sont les droites qui passent par un même point P et montrons que σ possède au moins un point fixe. Nous montrerons ensuite que $\sigma \neq id$. D'après le théorème 1.5.2, P est situé sur deux droites distinctes. Ce sont des traces de σ . En utilisant le corollaire 3.2.3, on obtient que P est un point fixe de σ . Dès lors σ est bien une homothétie.

Il reste à montrer que $\sigma \neq id$. Par l'absurde, supposons que σ est l'application identité. Vu le théorème 3.2.4, elle devrait alors posséder des traces qui ne passent pas par P . \square

Nous passons maintenant à la caractérisation des translations.

Théorème 3.2.6. *Une dilatation σ est une translation différente de id , si et seulement si ses traces sont les droites d'une direction δ .*

Démonstration. Supposons que σ est une translation différente de id . Ses traces ont même direction, car sinon, vu le corollaire 3.2.3, σ posséderait un point fixe. Notons δ cette direction et montrons que toute droite d de δ est une trace. Il existe un point P situé sur d . Par P passe la droite $d_1 = \overline{P\sigma(P)}$, qui est une trace de σ . On sait que les traces de σ ont même direction, dès lors δ est la direction de d_1 et $d_1 = d$, vu l'axiome III.

Réciproquement, supposons que les droites d'une direction δ sont les traces d'une dilatation σ et montrons que σ est une translation différente de id . Pour montrer cela, il suffit de montrer que σ n'admet pas de point fixe. Procédons par l'absurde et supposons que σ admet un point fixe P . Deux cas peuvent alors se produire :

1. Soit $\sigma = id$. Par le théorème 3.2.4, toute droite doit être une trace de σ . C'est impossible vu les hypothèses.
2. Soit σ est une homothétie différente de id . Par le théorème 3.2.5, les traces de σ sont les droites qui passent par le point P , d'où la contradiction.

On en tire que σ n'a pas de point fixe, σ est donc une translation différente de id . □

Définition 3.2.7. La direction d'une translation $\sigma \neq id$ est appelée la *direction de la translation*.

Le résultat suivant indique qu'une translation est déterminée par l'image d'un seul point.

Théorème 3.2.8. Si P et P' sont des points donnés, il existe au plus une translation τ telle que $\tau(P) = P'$.

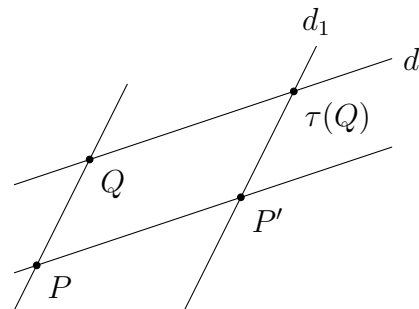
Démonstration. Soit τ une translation telle que $\tau(P) = P'$.

1. Si $P' = P$, τ est une translation qui a un point fixe, donc $\tau = id$.
2. Supposons que $P' \neq P$.

La droite $\overline{PP'}$ est une trace de τ , car elle passe par P et par $\tau(P) = P'$. Par l'axiome II, on peut considérer un point Q non situé sur cette droite.

Nous allons montrer que la donnée de l'image de P permet de déterminer univoquement celle de Q , et nous pourrons alors utiliser le théorème 3.1.4 pour conclure.

Vu le théorème 3.2.6, la parallèle d à $\overline{PP'}$ menée par Q est une trace de τ . Donc $\tau(Q)$ est sur d . Par définition d'une dilatation, la parallèle d_1 à \overline{PQ} menée par P' passe par $\tau(Q)$.



Étant donné que Q n'est pas situé sur $\overline{PP'}$, on sait que $\overline{PP'}$ et \overline{PQ} ne sont pas parallèles, donc d et d_1 ne le sont pas non plus, vu la transitivité du parallélisme.

Ainsi, $\tau(Q)$ est l'unique point de rencontre de d et d_1 . On peut maintenant appliquer le théorème 3.1.4.

□

3.3 Dilatations des différents modèles

Dans cette section, nous caractérisons les dilatations dans le cas des différents modèles introduits au chapitre 2.

3.3.1 Dilatations du plan \mathbb{K}^2

Nous commençons par classifier les dilatations du modèle de plan affine présenté à la section 2.2. Nous commençons par introduire des dilatations particulières.

Théorème 3.3.1. *Si A est un point donné de $\Pi = \mathbb{K}^2$ et si α est un élément donné de \mathbb{K} , alors l'application*

$$\sigma_{A,\alpha} : \Pi \rightarrow \Pi : X \mapsto \sigma_{A,\alpha}(X) = A + \alpha X$$

est une dilatation.

Démonstration. Soient les points distincts P et Q . Par le théorème 2.2.11, on a

$$\overline{PQ} = P+\rangle Q - P\langle.$$

De plus, vu le théorème 2.2.13, la parallèle à \overline{PQ} qui passe par $\sigma_{A,\alpha}(P)$ est $\sigma_{A,\alpha}(P)+\rangle Q - P\langle$. Montrons qu'elle passe par $\sigma_{A,\alpha}(Q)$.

On a

$$\sigma_{A,\alpha}(Q) = A + \alpha Q = A + \alpha P - \alpha P + \alpha Q = \sigma_{A,\alpha}(P) + \alpha(Q - P).$$

□

Théorème 3.3.2 (Classification des dilatations de la forme $\sigma_{A,\alpha}$). *Soient A un point et $\alpha \in \mathbb{K}$. On a les propriétés suivantes :*

1. *Si $\alpha = 0$, alors $\sigma_{A,\alpha}$ est la dilatation constante c_A ;*
2. *Si $\alpha \neq 0$, alors $\sigma_{A,\alpha}$ est injective. En particulier, elle n'est pas constante ;*
3. *Si $\alpha \neq 1$, alors $\sigma_{A,\alpha}$ possède un unique point fixe ;*
4. *Si $\alpha = 1$ et si $A = 0$, alors $\sigma_{A,\alpha} = id$;*
5. *Si $\alpha = 1$ et si $A \neq 0$, alors $\sigma_{A,\alpha}$ est une translation différente de id .*

Démonstration.

1. Supposons que $\alpha = 0$. On a par définition $\sigma_{A,\alpha}(X) = A + 0X = A$, pour tout $X \in \Pi$. Ainsi, la dilatation $\sigma_{A,\alpha}$ coïncide avec c_A .
2. Supposons que $\alpha \neq 0$. Dans ce cas, α est inversible. On a donc

$$\begin{aligned} \sigma_{A,\alpha}(P) = \sigma_{A,\alpha}(Q) &\Leftrightarrow A + \alpha P = A + \alpha Q \\ &\Leftrightarrow \alpha P = \alpha Q \\ &\Leftrightarrow P = Q. \end{aligned}$$

3. Supposons que $\alpha \neq 1$. On sait que $1 - \alpha \neq 0$ et est inversible. On a

$$\begin{aligned} X = \sigma_{A,\alpha}(X) &\Leftrightarrow X = A + \alpha X \\ &\Leftrightarrow (1 - \alpha)X = A \\ &\Leftrightarrow X = (1 - \alpha)^{-1}A. \end{aligned}$$

Donc $(1 - \alpha)^{-1}A$ est l'unique point fixe de σ .

4. Supposons que $\alpha = 1$ et $A = 0$. On a par définition

$$\sigma(X) = 0 + 1X = X,$$

pour tout $X \in \Pi$, donc $\sigma = id$.

5. Supposons que $\alpha = 1$ et $A \neq 0$. Pour montrer que $\sigma_{A,\alpha}$ est une translation différente de id , il suffit de montrer que $\sigma_{A,\alpha}$ n'admet pas de point fixe. Procédons par l'absurde et supposons que $\sigma_{A,\alpha}$ admet un point fixe X . Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} X = \sigma_{A,\alpha}(X) &\Leftrightarrow X = A + 1X \\ &\Leftrightarrow X = A + X \\ &\Leftrightarrow A = 0, \end{aligned}$$

ce qui est impossible vu les hypothèses. □

Il nous reste à démontrer que les dilatations introduites jusqu'ici sont les seules dilatations de ce modèle. Cela nécessite deux résultats sur les translations et les homothéties, qui nous seront utiles par la suite.

Théorème 3.3.3. *Soient les points P et Q . La dilatation $\tau = \sigma_{Q-P,1}$ est une translation telle que $\tau(P) = Q$.*

Démonstration. On a bien sûr par définition

$$\tau(P) = Q - P + P = Q.$$

De plus,

- Si $P = Q$, alors $Q - P = 0$. On est dans le quatrième cas de la classification, donc τ est la translation id .
- Si P et Q sont distincts, alors $Q - P \neq 0$. Cela correspond au cinquième cas de la classification, donc τ est une translation distincte de id . □

En ce qui concerne les homothéties, on a le résultat suivant.

Théorème 3.3.4. *Soient P , Q et R trois points colinéaires distincts. Il existe $\nu \in \mathbb{K}$ tel que $R = P + \nu(Q - P)$. Alors la dilatation $\sigma = \sigma_{(1-\nu)P, \nu}$ est une homothétie telle que*

$$\sigma(P) = P \quad \text{et} \quad \sigma(Q) = R.$$

Démonstration. Par le théorème 2.2.11, on sait que $\overline{PQ} = P + \langle \rangle Q - P \langle \rangle$. Par hypothèse, \overline{PQ} passe par R , donc il existe $\nu \in \mathbb{K}$ tel que

$$R = P + \nu(Q - P).$$

On a alors, par définition,

$$\begin{aligned} \sigma_{(1-\nu)P, \nu}(P) &= (1 - \nu)P + \nu P = P, \\ \sigma_{(1-\nu)P, \nu}(Q) &= (1 - \nu)P + \nu Q = P + \nu(Q - P) = R, \end{aligned}$$

ce qui suffit. □

Nous obtenons alors la caractérisation attendue.

Théorème 3.3.5. *Les seules dilatations sont les applications introduites au théorème 3.3.1.*

Démonstration.

1. Toute application constante c_A s'écrit $\sigma_{A,0}$.
2. Soit τ une translation et P un point. Posons $\tau(P) = Q$. Par le théorème 3.3.3, la translation $\tau' = \sigma_{Q-P,1}$ est telle que $\tau'(P) = Q$. En utilisant le théorème 3.2.8, on obtient que

$$\tau = \tau'.$$

3. Soit σ une homothétie non identique et non constante. Appelons P le point fixe de σ et Q un point distinct de P .

Vu que $\sigma(P) = P$ et vu la définition des dilatations 3.1.1, on sait que $R = \sigma(Q)$ est situé sur la droite \overline{PQ} .

Par le théorème 3.3.4, R s'écrit $P + \nu(Q - P)$ pour un $\nu \in \mathbb{K}$ et la dilatation $\sigma' = \sigma_{(1-\nu)P, \nu}$ est telle

$$\sigma'(P) = P \quad \text{et} \quad \sigma'(Q) = R.$$

Ainsi, on a

$$\sigma(P) = \sigma'(P) \quad \text{et} \quad \sigma(Q) = \sigma'(Q),$$

donc $\sigma = \sigma'$ par le théorème 3.1.4. □

3.3.2 Dilatations du plan de Moulton

Dans cette sous-section, nous déterminons toutes les dilatations non constantes du plan de Moulton, décrit à la section 2.3. Nous commençons par déterminer certaines dilatations, puis nous montrons qu'il n'y en a pas d'autre.

Proposition 3.3.6.

1. Pour tout $u \in \mathbb{R}$, l'application

$$t_u : \Pi \rightarrow \Pi : (x, y) \mapsto (x, y + u)$$

est une dilatation. Il s'agit en fait d'une translation.

2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $k > 0$, l'application

$$h_{a,k} : \Pi \rightarrow \Pi : (x, y) \mapsto (0, a) + k(x, y - a)$$

est une dilatation admettant un point fixe. Il s'agit en fait d'une homothétie.

Démonstration.

1. Soit $u \in \mathbb{R}$. Traitons le cas de t_u .

- Soit $(m, p) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, l'image par t_u de la droite $d_{(m,p)}^+ = \{(x, y) \in \Pi : y = mx + p\}$ de Δ_1 est la droite $d_{(m,p+u)}^+ = \{(x, y) \in \Pi : y = mx + p + u\}$ de Δ_1 .
- Soit $c \in \mathbb{R}$, l'image par t_u de la droite $d_c = \{(x, y) \in \Pi : x = c\}$ de Δ_2 est la droite d_c .
- Soit $(m, p) \in \mathbb{R}_0^- \times \mathbb{R}$, l'image par t_u de la droite

$$d_{(m,p)}^- = \left\{ (x, y) \in \Pi : y = \begin{cases} mx + p & \text{si } x < 0 \\ 2mx + p & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \right\}$$

de Δ_3 est la droite

$$d_{(m,p+u)}^- = \left\{ (x, y) \in \Pi : y = \begin{cases} mx + p + u & \text{si } x < 0 \\ 2mx + p + u & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \right\}$$

de Δ_3 .

Par le lemme 2.3.2, nous constatons que toute droite du plan de Moulton est envoyée sur une droite parallèle. Ainsi, t_u est une dilatation. De plus, t_u n'admet pas de point fixe sauf si $u = 0$. Dans ce cas, nous avons $t_u = id$. Donc t_u est bien une translation du plan de Moulton.

2. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $k > 0$. Traitons le cas de $h_{a,k}$. Pour tout $(x, y) \in \Pi$, on a

$$h_{a,k}(x, y) = (kx, ky + (1 - k)a) = (x', y').$$

- Soit $(m, p) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, déterminons l'image de $d_{(m,p)}^+ = \{(x, y) \in \Pi : y = mx + p\} \in \Delta_1$ par l'application $h_{a,k}$. On a

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky + (1-k)a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{x'}{k} \\ y = \frac{y' - (1-k)a}{k} \end{cases}.$$

Ainsi, l'image par $h_{a,k}$ de $d_{(m,p)}^+$ est la droite d'équation

$$\frac{y - (1-k)a}{k} = m\frac{x}{k} + p \Leftrightarrow y = mx + pk + (1-k)a,$$

c'est-à-dire la droite $d_{(m, pk+(1-k)a)}^+$ de Δ_1 .

- Soit $c \in \mathbb{R}$, l'image par $h_{a,k}$ de la droite $d_c = \{(x, y) \in \Pi : x = c\}$ de Δ_2 est la droite $d_{kc} = \{(x, y) \in \Pi : x = kc\}$ de Δ_2 .
- Soit $(m, p) \in \mathbb{R}_0^- \times \mathbb{R}$, l'image par $h_{a,k}$ de la droite

$$d_{(m,p)}^- = \left\{ (x, y) \in \Pi : y = \begin{cases} mx + p & \text{si } x < 0 \\ 2mx + p & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \right\}$$

de Δ_3 est la droite

$$d_{(m, kp+(1-k)a)}^- = \left\{ (x, y) \in \Pi : y = \begin{cases} mx + kp + (1-k)a & \text{si } x < 0 \\ 2mx + kp + (1-k)a & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \right\}$$

de Δ_3 .

Par le lemme 2.3.2, nous constatons que toute droite du plan de Moulton est envoyée sur une droite parallèle. Ainsi, $h_{a,k}$ est une dilatation. De plus, $h_{a,k}$ admet le point fixe $(a, 0)$. Donc $h_{a,k}$ est bien une homothétie du plan de Moulton. □

Notre objectif est maintenant de montrer qu'il n'y a pas d'autres dilatations non constantes dans le plan de Moulton. Nous procédons par l'absurde pour démontrer d'abord que toute dilatation non constante préserve la droite $d_0 = \{(x, y) \in \Pi : x = 0\}$.

Proposition 3.3.7. *Si σ est une dilatation non constante du plan de Moulton telle que $\sigma(0, 0) = (a, b')$, avec $a \neq 0$, alors il existe une dilatation non constante du plan de Moulton σ_1 telle que $\sigma_1(0, 0) = (a, 0)$. On a alors $\sigma_1(0, 1) = (a, b)$, où $b > 0$.*

Démonstration. Pour le premier point, il suffit de considérer $\sigma_1 = t_{-b'} \circ \sigma$. L'application σ_1 est bien une dilatation non constante du plan de Moulton puisque σ en est une par hypothèse et que c'est également le cas de $t_{-b'}$, par la proposition 3.3.2.

Comme σ_1 est une dilatation, $\sigma_1(0, 1)$ est situé sur la parallèle à la droite d_0 passant par $\sigma_1(0, 0) = (a, 0)$. Par le lemme 2.3.2, cette parallèle est la droite d_a de Δ_2 . Ainsi, il

existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $\sigma_1(0, 1) = (a, b)$. Pour finir, nous devons montrer que b est strictement positif. Procédons par l'absurde et supposons que b est négatif ou nul.

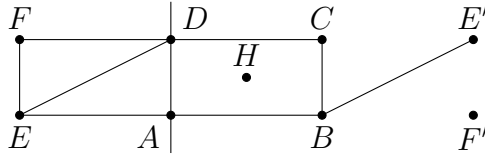
Il ne peut être nul car σ_1 n'étant pas constant, il s'agit d'une bijection, donc $(0, 0)$ et $(0, 1)$ ne peuvent pas avoir la même image.

En composant avec t_{-b} , puis avec $h_{0,-1/b}$, on obtient une dilatation non constante du plan de Moulton $\sigma_2 = h_{0,-1/b} \circ t_{-b} \circ \sigma_1$ qui applique $(0, 0)$ sur $(c, 1)$ et $(0, 1)$ sur $(c, 0)$, où $c = \frac{-a}{b}$.

Notons $A : (0, 0)$, $B : (c, 0)$, $C : (c, 1)$ et $D : (0, 1)$.

Comme $a \neq 0$, nous savons que $c \neq 0$. Nous allons considérer deux cas.

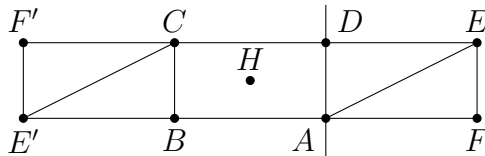
- Si $c > 0$, alors l'image par σ_2 de $E : (-c, 0)$ est sur la parallèle à la droite $\overline{EA} = d_{(0,0)}^+$ passant par $\sigma_2(A) = C$, à savoir la droite $d_{(0,1)}^+$, et sur la parallèle à $\overline{ED} = d_{(1/c,1)}^+$ contenant $\sigma_2(D) = B$, à savoir la droite $d_{(1/c,-1)}^+$. L'image de E est donc $E' : (2c, 1)$.



L'image par σ_2 de $F : (-c, 1)$ est sur la parallèle à $\overline{FD} = d_{(0,1)}^+$ passant par $\sigma_2(D) = B$, à savoir la droite $d_{(0,0)}^+$, et sur la parallèle à $\overline{FE} = d_{-c}$ passant par $\sigma_2(E) = E'$, à savoir la droite d_{2c} . Ainsi, l'image de F est $F' : (2c, 0)$.

Par le corollaire 3.2.3, le point $H : \left(\frac{c}{2}, \frac{1}{2}\right)$ est un point fixe car il est à l'intersection des traces \overline{AC} et \overline{DB} . Il devrait alors appartenir à $\overline{FF'}$. Or, une droite passant par F , F' et H n'est pas une droite du plan de Moulton.

- Si $c < 0$, on procède de la même façon. L'image par σ_2 de $E : (-c, 1)$ est sur la parallèle à \overline{EA} passant par $\sigma_2(A) = C$ et sur la parallèle à $\overline{ED} = d_{(0,1)}^+$ contenant $\sigma_2(D) = B$, à savoir la droite $d_{(0,0)}^+$. L'image de E est donc $E' : (2c, 0)$.



L'image par σ_2 de $F : (-c, 0)$ est sur la parallèle à $\overline{FA} = d_{(0,0)}^+$ passant par $\sigma_2(A) = C$, à savoir la droite $d_{(0,1)}^+$, et sur la parallèle à $\overline{FE} = d_{-c}$ passant par $\sigma_2(E) = E'$, à savoir la droite d_{2c} . Ainsi, l'image de F est $F' : (2c, 1)$.

Par le corollaire 3.2.3, le point $H : \left(\frac{c}{2}, \frac{1}{2}\right)$ est un point fixe car il est à l'intersection des traces \overline{AC} et \overline{DB} . Il devrait alors appartenir à $\overline{FF'}$. Or, une droite passant par F , F' et H n'est pas une droite du plan de Moulton.

On a donc bien une contradiction dans les deux cas et le résultat est prouvé. \square

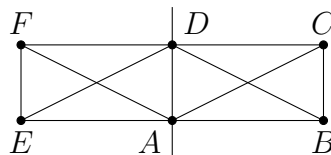
Proposition 3.3.8. *Si σ est une dilatation non constante du plan de Moulton, alors la droite $d_0 = \{(x, y) \in \Pi : x = 0\}$ est une trace de σ .*

Démonstration. Nous savons que le point $(0, 0)$ est situé sur la droite d_0 . Par la définition des traces 3.2.1, il suffit de montrer que l'image par σ de $(0, 0)$ est située sur d_0 .

Procédons par l'absurde. Dans le cas contraire, on a $\sigma(0, 0) = (a, b')$, avec $a \neq 0$. Par la proposition précédente 3.3.7, il existe une dilatation non constante du plan de Moulton σ_1 telle que $\sigma_1(0, 0) = (a, 0)$ et $\sigma_1(0, 1) = (a, b)$, avec $b > 0$. En composant avec $h_{0,1/b}$, on obtient une dilatation non constante du plan de Moulton $\sigma_2 = h_{0,1/b} \circ \sigma_1$ telle que $\sigma_2(0, 0) = (c, 0)$ et $\sigma_2(0, 1) = (c, 1)$, où $c = \frac{a}{b}$. Notons $A : (0, 0)$, $B : (c, 0)$, $C : (c, 1)$ et $D : (0, 1)$.

Comme $a \neq 0$, nous savons que $c \neq 0$. Nous allons considérer deux cas.

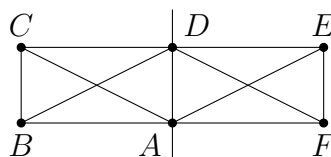
- Si $c > 0$, alors l'image par σ_2 de $E : (-c, 0)$ est sur la parallèle à la droite $\overline{EA} = d_{(0,0)}^+$ passant par $\sigma_2(A) = B$, à savoir la droite $d_{(0,0)}^+$, et sur la parallèle à \overline{ED} contenant $\sigma_2(D) = C$. Dès lors $\sigma_2(E) = (0, 0)$. L'image de E est donc A .



L'image par σ_2 de $F : (-c, 1)$ est sur la parallèle à $\overline{FD} = d_{(0,1)}^+$ passant par $\sigma_2(D) = C$, à savoir la droite $d_{(0,1)}^+$, et sur la parallèle à $\overline{FE} = d_{-c}$ passant par $\sigma_2(E) = A$, à savoir la droite d_0 . Dès lors $\sigma_2(F) = (0, 1)$. Ainsi, l'image de F est D .

Nous obtenons une contradiction car la droite \overline{FA} n'est pas parallèle à la droite $\overline{\sigma_2(F)\sigma_2(A)} = \overline{DB}$.

- Si $c < 0$, on procède de la même façon. L'image par σ_2 de $E : (-c, 1)$ est sur la parallèle à \overline{EA} passant par $\sigma_2(A) = B$ et sur la parallèle à $\overline{ED} = d_{(0,1)}^+$ contenant $\sigma_2(D) = C$, à savoir la droite $d_{(0,1)}^+$. Dès lors $\sigma_2(E) = (0, 1)$. L'image de E est donc D .



L'image par σ_2 de $F : (-c, 0)$ est sur la parallèle à $\overline{FA} = d_{(0,0)}^+$ passant par $\sigma_2(A) = B$, à savoir la droite $d_{(0,0)}^+$, et sur la parallèle à $\overline{FE} = d_{-c}$ passant par $\sigma_2(E) = D$, à savoir la droite d_0 . Dès lors $\sigma_2(F) = (0, 0)$. Ainsi, l'image de F est A .

Cependant, la droite \overline{DF} n'est pas parallèle à la droite $\overline{\sigma_2(D)\sigma_2(F)} = \overline{CA}$, d'où la contradiction.

On a donc bien une contradiction dans les deux cas et le résultat est prouvé. \square

Il reste maintenant à prouver le résultat final.

Théorème 3.3.9. *Toutes les dilatations non constantes du plan de Moulton sont celles données dans la proposition 3.3.6.*

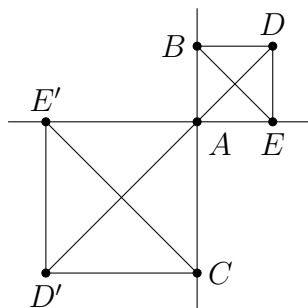
Démonstration. Soit σ une dilatation non constante du plan de Moulton. Par la proposition précédente 3.3.8, on a $\sigma(0, 0) = (0, b)$, pour un $b \in \mathbb{R}$. En composant avec t_{-b} , on obtient une dilatation non constante du plan de Moulton $\sigma_1 = t_{-b} \circ \sigma$ telle que $\sigma_1(0, 0) = (0, 0)$. Par la proposition 3.3.8, on a aussi $\sigma_1(0, 1) = (0, c)$. Si $c > 0$, alors en composant avec $h_{0,1/c}$, on obtient une dilatation non constante du plan de Moulton $\sigma_2 = h_{0,1/c} \circ \sigma_1$ telle que $\sigma_2(0, 0) = (0, 0)$ et $\sigma_2(0, 1) = (0, 1)$. Par le corollaire 3.1.7, on a $\sigma_2 = id$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} id = h_{0,1/c} \circ \sigma_1 &\Leftrightarrow id = h_{0,1/c} \circ t_{-b} \circ \sigma \\ &\Leftrightarrow \sigma = t_{-b}^{-1} \circ h_{0,1/c}^{-1}. \end{aligned}$$

Montrons que c est strictement positif. Procédons par l'absurde et supposons que c est négatif ou nul. Il ne peut être nul car σ_1 n'étant pas constant, il s'agit d'une bijection, donc $(0, 0)$ et $(0, 1)$ ne peuvent avoir la même image. Ainsi, on a $c < 0$.

Notons $A : (0, 0)$, $B : (0, 1)$ et $C : (0, c)$. On a $\sigma_1(A) = A$ et $\sigma_1(B) = C$.

L'image par σ_1 de $D : (1, 1)$ est sur la parallèle à la droite $\overline{DB} = d_{(0,1)}^+$ passant par $\sigma_1(B) = C$, à savoir la droite $d_{(0,c)}^+$, et sur la parallèle à \overline{DA} contenant $\sigma_1(A) = A$, à savoir la droite \overline{DA} . L'image de D est donc $D' : (c, c)$.



L'image par σ_1 de $E : (1, 0)$ est sur la parallèle à $\overline{EA} = d_{(0,0)}^+$ passant par $\sigma_1(A) = A$, à savoir la droite $d_{(0,0)}^+$, et sur la parallèle à $\overline{ED} = d_1$ passant par $\sigma_1(D) = D'$, à savoir la droite d_c . Ainsi, l'image de E est $E' : (c, 0)$.

Nous obtenons une contradiction car la droite \overline{BE} n'est pas parallèle à la droite $\overline{\sigma_1(B)\sigma_1(E)} = \overline{CE'}$.

Ainsi, c est strictement positif et toute dilatation non constante de Moulton σ est de la forme $t_{-b}^{-1} \circ h_{0,1/c}^{-1}$, avec $b \in \mathbb{R}$ et $c > 0$. Si $c = 1$, alors on a une translation du plan de Moulton et si $c \neq 1$, alors on a une homothétie du plan de Moulton de point fixe situé sur d_0 . \square

3.3.3 Dilatations de la géométrie du tétraèdre

Nous allons à présent déterminer quelles sont les dilatations de la géométrie du tétraèdre, décrite à la sous-section 2.4.1. Nous pouvons évidemment utiliser l'isomorphisme présenté au théorème 2.4.4 et obtenir les dilatations de la géométrie du tétraèdre à partir de la sous-section 3.3.1. Cependant, pour des raisons pédagogiques, il nous semble utile de détailler cet exemple à partir de la description géométrique du modèle du tétraèdre.

Proposition 3.3.10 (Géométrie du tétraèdre - suite). *L'ensemble des dilatations de la géométrie du tétraèdre est constitué de l'identité, des dilatations constantes et des translations distinctes de id associées à chaque partition $\{\{I, J\}, \{K, L\}\}$ de $\{A, B, C, D\}$ par*

$$\tau_{IJ}(I) = J, \quad \tau_{IJ}(J) = I, \quad \tau_{IJ}(K) = L, \quad \tau_{IJ}(L) = K.$$

Démonstration. On sait que les applications constantes c_A, c_B, c_C et c_D sont des dilatations et qu'il en est de même pour id . Montrons d'abord que les applications τ_{IJ} sont des translations. Il est clair que τ_{IJ} n'a pas de point fixe. Montrons que τ_{IJ} est une dilatation. Soient P et Q deux points distincts. Si $\{P, Q\} = \{I, J\}$ ou $\{P, Q\} = \{K, L\}$ alors $\{\tau(P), \tau(Q)\} = \{P, Q\}$ est parallèle à $\{P, Q\}$. Dans le cas contraire, $\{\tau(P), \tau(Q)\} = \{A, B, C, D\} \setminus \{P, Q\}$ est parallèle à $\{P, Q\}$.

Montrons maintenant qu'il n'y a pas d'autre dilatation.

Vu le corollaire 3.1.5, les autres dilatations sont des bijections. Soit σ une dilatation et supposons qu'elle n'est pas constante. Nous avons alors plusieurs cas.

- Si $\sigma(A) = A$, alors $\sigma(B) = B$ car si $\sigma(B) = C$ ou D , alors $\{\sigma(A), \sigma(B)\} = \{A, C\}$ ou $\{A, D\}$, n'est pas parallèle à $\{A, B\}$. De la même façon, $\sigma(C) = C$ et $\sigma(D) = D$. On obtient donc que $\sigma = id$.
- Si $\sigma(A) = B$, alors la droite $\{\sigma(A), \sigma(B)\}$ est parallèle à $\{A, B\}$ et contient B . Il s'agit donc de la droite $\{A, B\}$. Puisque σ est une bijection, on a $\sigma(B) = A$. Ainsi, $\sigma(C)$ n'est ni A , ni B . C'est donc C ou D . Si c'est C , alors on est ramené au cas précédent (en échangeant les rôles des points A et C), et σ doit être l'identité. Ceci est impossible. On a donc $\sigma(C) = D$ et pour les mêmes raisons que plus haut $\sigma(D) = C$.
- Si $\sigma(A) = C$, en procédant de la même manière qu'au point précédent, on obtient que $\sigma(C) = A$, $\sigma(B) = D$ et $\sigma(D) = B$.
- Si $\sigma(A) = D$, on obtient que $\sigma(D) = A$, $\sigma(B) = C$ et $\sigma(C) = B$.

□

On a ainsi décrit l'ensemble des dilatations de la géométrie du tétraèdre.

3.4 Le groupe des dilatations non constantes

Notons \mathcal{D} l'ensemble des dilatations non constantes. Si σ_1 et σ_2 sont des éléments de \mathcal{D} , nous noterons $\sigma_1\sigma_2$ la composition $\sigma_1 \circ \sigma_2$.

Remarquons d'abord que, vu le corollaire 3.1.5, les éléments de \mathcal{D} sont les dilatations bijectives.

Théorème 3.4.1. *L'ensemble \mathcal{D} des dilatations non constantes est un sous-groupe du groupe des applications de Π dans Π , muni de la composition des applications.*

Démonstration.

1. Montrons que le produit $\sigma_1\sigma_2$ de deux éléments de \mathcal{D} est une dilatation non constante. On sait que $\sigma_1\sigma_2 : \Pi \rightarrow \Pi$ est une application. Soient les points distincts P et Q , $\sigma_2(P)$ est différent de $\sigma_2(Q)$, vu l'injectivité de σ_2 . De même, $\sigma_1\sigma_2(P) \neq \sigma_1\sigma_2(Q)$. Par définition des dilatations, on a

$$\overline{\sigma_2(P)\sigma_2(Q)} \parallel \overline{PQ} \quad \text{et} \quad \overline{\sigma_1\sigma_2(P)\sigma_1\sigma_2(Q)} \parallel \overline{\sigma_2(P)\sigma_2(Q)},$$

donc

$$\overline{\sigma_1\sigma_2(P)\sigma_1\sigma_2(Q)} \parallel \overline{PQ}$$

et $\sigma_1\sigma_2$ est une dilatation. Étant donné que $\sigma_1\sigma_2$ est une composition de bijections, il s'agit aussi d'une bijection. Ainsi, on obtient que $\sigma_1\sigma_2$ est une dilatation bijective, donc une dilatation non constante.

2. L'application *id* est une dilatation non constante par définition. Il s'agit donc d'un élément de \mathcal{D} .
3. L'inverse σ^{-1} d'un élément σ de \mathcal{D} vérifie les égalités

$$\sigma^{-1}\sigma = id = \sigma\sigma^{-1}.$$

Montrons qu'il appartient à \mathcal{D} . Considérons deux points distincts P et Q . Par injectivité de σ^{-1} , on a $\sigma^{-1}(P) \neq \sigma^{-1}(Q)$.

On a aussi $\sigma\sigma^{-1}(P) = P$ et $\sigma\sigma^{-1}(Q) = Q$. Donc par définition d'une dilatation, $\sigma\sigma^{-1}(P) = P$ est situé sur la parallèle à $\overline{\sigma^{-1}(P)\sigma^{-1}(Q)}$ passant par $\sigma\sigma^{-1}(Q) = Q$.

Ainsi,

$$\overline{\sigma^{-1}(P)\sigma^{-1}(Q)} \parallel \overline{PQ}$$

et σ^{-1} est une dilatation. □

Nous allons à présent montrer que l'ensemble \mathcal{T} des translations est un sous-groupe normal du groupe \mathcal{D} des dilatations non constantes. Nous commencerons tout d'abord par prouver que \mathcal{T} est un sous-groupe de \mathcal{D} .

Théorème 3.4.2. *L'ensemble \mathcal{T} des translations est un sous-groupe de \mathcal{D} .*

Démonstration.

1. Montrons que l'inverse τ^{-1} d'une translation τ est une translation. Tout d'abord, τ est une dilatation non constante, donc τ^{-1} est une dilatation non constante. Si τ^{-1} ne possède pas de point fixe, c'est une translation. Dans le cas où τ^{-1} possède un point fixe P , on a $\tau^{-1}(P) = P$, donc $P = \tau(P)$. Ainsi, τ est une translation qui possède un point fixe et on a $\tau = \tau^{-1} = id$. Donc τ^{-1} est bien une translation.

2. Montrons que le produit $\tau_1\tau_2$ de deux éléments τ_1 et τ_2 de \mathcal{T} appartient à \mathcal{T} .

Comme pour le point précédent, il suffit d'établir que si $\tau_1\tau_2$ a un point fixe P , alors $\tau_1\tau_2 = id$.

Mais si on a $\tau_1\tau_2(P) = P$, alors $\tau_2(P) = \tau_1^{-1}(P)$. Nous savons que τ_1^{-1} est une translation. En utilisant le théorème 3.2.8, on obtient que $\tau_2 = \tau_1^{-1}$ et par conséquent,

$$\tau_1\tau_2 = id.$$

□

Théorème 3.4.3. *L'ensemble \mathcal{T} est un sous-groupe normal de \mathcal{D} .*

Démonstration. Il faut montrer que si $\sigma \in \mathcal{D}$ et si $\tau \in \mathcal{T}$, alors $\sigma\tau\sigma^{-1} \in \mathcal{T}$. On sait que $\sigma\tau\sigma^{-1}$ est une dilatation, et on doit montrer qu'elle n'a pas de point fixe ou que c'est l'identité. Si $\sigma\tau\sigma^{-1}$ admet un point fixe P , alors on déduit de $\sigma\tau\sigma^{-1}(P) = P$ que $\tau\sigma^{-1}(P) = \sigma^{-1}(P)$. La translation τ admet donc le point fixe $\sigma^{-1}(P)$. Ainsi, $\tau = id$ et $\sigma\tau\sigma^{-1} = id$. Si $\sigma\tau\sigma^{-1}$ n'admet pas de point fixe, alors c'est une translation. Dans les deux cas, on a $\sigma\tau\sigma^{-1} \in \mathcal{T}$. □

Théorème 3.4.4. *Si τ est une translation et si σ est une dilatation non constante, alors τ et $\sigma\tau\sigma^{-1}$ ont les mêmes traces. En particulier, si $\tau \neq id$, alors τ et $\sigma\tau\sigma^{-1}$ ont la même direction.*

Démonstration. Si $\tau = id$, la démonstration est évidente. Supposons donc que $\tau \neq id$. Dans ce cas, on a $\sigma\tau\sigma^{-1} \neq id$. En effet, si on avait $\sigma\tau\sigma^{-1} = id$, alors en multipliant à gauche par σ^{-1} et à droite par σ , on obtiendrait $\tau = id$.

Montrons qu'une trace $d_1 = \overline{P\tau(P)}$ de τ est une trace de $\sigma\tau\sigma^{-1}$. Puisque σ est une bijection, il existe un point Q tel que $P = \sigma^{-1}(Q)$. On a alors $d_1 = \overline{\sigma^{-1}(Q)\tau\sigma^{-1}(Q)}$. Comme σ est une dilatation, la droite

$$d_2 = \overline{\sigma\sigma^{-1}(Q)\sigma\tau\sigma^{-1}(Q)} = \overline{Q\sigma\tau\sigma^{-1}(Q)}$$

est parallèle à d_1 . Par définition, on sait que d_2 est une trace de $\sigma\tau\sigma^{-1}$. Comme $\sigma\tau\sigma^{-1} \in \mathcal{T}$, il résulte du le théorème 3.2.6 que d_1 est également une trace de $\sigma\tau\sigma^{-1}$. □

Théorème 3.4.5. *Soit une direction δ . Si on adjoint id aux translations de direction δ , on obtient un sous-groupe \mathcal{T}_δ de \mathcal{T} éventuellement réduit à id .*

Démonstration.

1. Montrons d'abord que l'inverse d'un élément de \mathcal{T}_δ appartient à \mathcal{T}_δ .

Puisque $id = id^{-1}$, il suffit de montrer que si la translation τ a la direction δ , alors il en est de même pour τ^{-1} . Toute trace de τ^{-1} est de la forme $d = \overline{\tau^{-1}(P)P}$. Puisque τ est une dilatation, d est parallèle à $\overline{P\tau(P)}$, qui est une trace de τ . Ainsi, vu le théorème 3.2.6, d est une trace de τ . Ainsi, τ^{-1} est une translation de direction δ .

2. Montrons que si τ_1 et τ_2 sont des translations de direction δ , alors il en est de même pour $\tau_1\tau_2$, à moins que $\tau_1\tau_2 = id$.

Cela résultera du fait que les points P , $\tau_2(P)$ et $\tau_1\tau_2(P)$ sont alignés. En effet, si c'est le cas, alors les traces de $\tau_1\tau_2$, qui sont de la forme $\overline{P\tau_1\tau_2(P)}$, ont la même direction que les traces de τ_2 , c'est-à-dire δ . Donc, $\tau_1\tau_2$ est bien une translation de direction δ . Montrons que P , $\tau_2(P)$ et $\tau_1\tau_2(P)$ sont alignés. Comme τ_2 est une translation de direction δ , en utilisant le théorème 3.2.6, on sait que $\overline{P\tau_2(P)}$ est une trace de τ_2 de direction δ . De même, comme τ_1 est une translation de direction δ , $\overline{\tau_2(P)\tau_1\tau_2(P)}$ est une trace de τ_1 de direction δ . En particulier, les droites $\overline{P\tau_2(P)}$ et $\overline{\tau_2(P)\tau_1\tau_2(P)}$ sont parallèles et ont un point commun, à savoir $\tau_2(P)$. Ainsi, en utilisant l'axiome III, on sait que $\overline{P\tau_2(P)} = \overline{\tau_2(P)\tau_1\tau_2(P)}$. Ainsi, les points P , $\tau_2(P)$ et $\tau_1\tau_2(P)$ sont bien alignés.

□

Théorème 3.4.6. *S'il existe deux translations de directions différentes, alors \mathcal{T} est commutatif.*

Démonstration. Il faut prouver que si τ_1 et $\tau_2 \in \mathcal{T}$, alors $\tau_1\tau_2 = \tau_2\tau_1$. La démonstration est évidente lorsque $\tau_1 = id$ ou $\tau_2 = id$. Supposons que $\tau_1 \neq id$ et $\tau_2 \neq id$. Nous allons considérer deux cas différents : τ_1 et τ_2 de directions différentes, puis de même direction.

1. Supposons que τ_1 et τ_2 n'ont pas la même direction. Démontrer que $\tau_1\tau_2 = \tau_2\tau_1$ équivaut à montrer que $\tau_1^{-1}\tau_2^{-1}\tau_1\tau_2 = id$.

Par le théorème 3.4.4, $\tau_1^{-1}\tau_2^{-1}\tau_1$ a la direction de τ_2^{-1} , et donc de τ_2 , par le théorème 3.4.5. Ainsi, en utilisant le théorème 3.4.5, soit $\tau_1^{-1}\tau_2^{-1}\tau_1\tau_2 = id$, soit $\tau_1^{-1}\tau_2^{-1}\tau_1\tau_2$ a la direction de τ_2 .

De même, en remarquant que $\tau_2^{-1}\tau_1\tau_2$ a la direction de τ_1 , on obtient que soit $\tau_1^{-1}\tau_2^{-1}\tau_1\tau_2$ est l'identité, soit $\tau_1^{-1}\tau_2^{-1}\tau_1\tau_2$ a la direction de τ_1 .

Étant donné que τ_1 et τ_2 n'ont pas la même direction, ces deux conclusions ne sont compatibles que si $\tau_1^{-1}\tau_2^{-1}\tau_1\tau_2 = id$.

2. Dans le cas où τ_1 et τ_2 ont la même direction, d'après les hypothèses, on peut trouver une translation $\tau_3 \neq id$ qui n'a pas la même direction que τ_1 et τ_2 .

Si $\tau_1 = \tau_2$, le résultat est acquis. Dans le cas contraire, tout revient à montrer que $\tau_1\tau_2\tau_3 = \tau_2\tau_1\tau_3$. Remarquons d'abord que $\tau_2\tau_3$ n'a pas la même direction que τ_1 . En effet, dans ce cas, τ_3 aurait la même direction que $\tau_2^{-1}\tau_1$. Ainsi, en utilisant le théorème 3.4.5, on obtient que τ_3 à la même direction que τ_1 , ce qui est impossible.

Ainsi, en utilisant le point précédent, on a

$$\tau_1\tau_2\tau_3 = \tau_1(\tau_2\tau_3) = (\tau_2\tau_3)\tau_1 = \tau_2(\tau_3\tau_1) = \tau_2(\tau_1\tau_3) = \tau_2\tau_1\tau_3.$$

□

3.5 Homomorphismes Traçants

Dans les sections précédentes, nous avons fait apparaître le groupe des translations. Nous souhaitons maintenant faire apparaître un corps qui agira sur les translations. La structure est effectivement déjà présente, mais il nous faudra attendre l'introduction de deux nouveaux axiomes au chapitre 4 pour montrer que c'est un corps. Dans plusieurs résultats de cette section, nous allons supposer que l'ensemble des translations \mathcal{T} est commutatif. Nous verrons plus tard que cette hypothèse sera satisfaite en conséquence des axiomes que nous introduirons au chapitre suivant.

L'idée qui sous-tend les définitions qui suivent est simple à comprendre si on prend comme exemple la géométrie affine de première année [13], où les vecteurs sont associés à des translations. La somme de vecteurs correspond à la composée des translations via la relation de Chasles. Multiplier un vecteur par un nombre transforme une translation en la translation identique si ce nombre est nul, ou en une translation de même direction si ce nombre est non nul. Enfin, la multiplication par un nombre doit distribuer la somme. Cela se traduit par le fait que cette opération induit un homomorphisme du groupe des translations dans lui-même. On pose donc naturellement la définition suivante.

Définition 3.5.1. Si $\alpha : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ est une application, nous noterons $\alpha[\tau]$ l'image par α d'un élément τ de \mathcal{T} .

Un *homomorphisme traçant*² est une application $\alpha : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ telle que pour toutes les translations τ_1 et τ_2 :

1. $\alpha[\tau_1\tau_2] = \alpha[\tau_1] \alpha[\tau_2]$
2. Les traces de τ_1 sont des traces de $\alpha[\tau_1]$.

Nous noterons \mathcal{H} l'ensemble des homomorphismes traçants.

Remarque 3.5.2.

1. En utilisant le théorème 3.2.6, on obtient que la deuxième condition est équivalente à la condition suivante :

Pour toute direction δ , $\tau_1 \in \mathcal{T}_\delta \Rightarrow \alpha[\tau_1] \in \mathcal{T}_\delta$.

2. Si $\alpha \in \mathcal{H}$, alors $\alpha[id] = id$.

En effet, vu la définition, on sait que les traces de id sont des traces de $\alpha[id]$. En particulier, toutes les droites sont des traces de id , vu le théorème 3.2.4. Au total, toutes les droites sont des traces de $\alpha[id]$, donc on a $\alpha[id] = id$.

3. Si $\alpha[\tau] \neq id$, alors, vu le théorème 3.2.6, les traces de $\alpha[\tau]$ sont les droites d'une direction δ . Cette direction est celle des traces de τ .

Si $\alpha[\tau] = id$, alors toutes les droites sont des traces de $\alpha[\tau]$. On constate donc que $\alpha[\tau]$ admet plus de traces que τ lorsque $\tau \neq id$ et $\alpha[\tau] = id$.

2. Dans la référence [1], un homomorphisme traçant est appelé un homomorphisme qui conserve les traces.

Définition 3.5.3. On définit l'application identité par $\mathcal{I} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T} : \tau \mapsto \tau$. On définit également les applications $0 : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T} : \tau \mapsto id$ et $\iota : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T} : \tau \mapsto \tau^{-1}$.

Proposition 3.5.4. *Les applications \mathcal{I} et 0 sont des homomorphismes traçants. Si \mathcal{T} est commutatif, alors l'application ι est aussi un homomorphisme traçant.*

Démonstration.

1. Montrons que $\mathcal{I} \in \mathcal{H}$. Pour tous $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}$, on a

$$\mathcal{I}[\tau_1\tau_2] = \tau_1\tau_2 = \mathcal{I}[\tau_1] \mathcal{I}[\tau_2].$$

De plus, les traces de τ_1 sont bien des traces de $\mathcal{I}[\tau_1]$, vu que $\mathcal{I}[\tau_1] = \tau_1$.

2. Montrons que $0 \in \mathcal{H}$. Pour tous $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}$, on a

$$0[\tau_1\tau_2] = id = id id = 0[\tau_1] 0[\tau_2].$$

De plus, vu le théorème 3.2.4, on sait que toute droite est une trace de id . Ainsi, pour toute translation τ , les traces de τ sont bien des traces de $0[\tau] = id$.

3. Enfin, montrons que $\iota \in \mathcal{H}$. D'une part, si \mathcal{T} est commutatif, on a

$$\iota[\tau_1\tau_2] = (\tau_1\tau_2)^{-1} = \tau_2^{-1}\tau_1^{-1} = \tau_1^{-1}\tau_2^{-1} = \iota[\tau_1] \iota[\tau_2],$$

pour tous $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}$. D'autre part, à partir du théorème 3.4.5, les traces de τ sont les traces de τ^{-1} .

□

Définition 3.5.5. Si σ est une dilatation non constante, la *conjugaison par σ* est l'application $C_\sigma : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T} : \tau \mapsto \sigma\tau\sigma^{-1}$.

Proposition 3.5.6. *Si σ est une dilatation non constante, alors C_σ est un homomorphisme traçant.*

Démonstration. En effet, le théorème 3.4.3 montre que $\sigma\tau\sigma^{-1}$ appartient à \mathcal{T} . De plus, à partir du théorème 3.4.4, on sait que les traces de τ sont des traces de $\sigma\tau\sigma^{-1}$.

Finalement, on a

$$C_\sigma[\tau_1\tau_2] = \sigma\tau_1\tau_2\sigma^{-1} = \sigma\tau_1\sigma^{-1}\sigma\tau_2\sigma^{-1} = C_\sigma[\tau_1] C_\sigma[\tau_2] \quad \text{pour tous } \tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}.$$

□

3.5.1 Structure d'anneau sur \mathcal{H}

Nous définissons maintenant des opérations sur l'ensemble \mathcal{H} des homomorphismes traçants. Ces opérations sont naturelles si on garde par exemple à l'esprit que les homomorphismes traçants sont l'analogie dans notre cadre de travail de la multiplication des vecteurs par les nombres. Si on souhaite les propriétés naturelles pour cette multiplication, on est amené à poser les définitions qui vont suivre. Dans cette section, α , β et γ désignent des homomorphismes traçants.

Définition 3.5.7. La somme de \mathcal{H} est l'opération

$$+ : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} : (\alpha, \beta) \mapsto \alpha + \beta$$

où pour tout $\tau \in \mathcal{T}$,

$$(\alpha + \beta)[\tau] = \alpha[\tau] \beta[\tau].$$

Leur produit,

$$\cdot : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} : (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \cdot \beta$$

où pour tout $\tau \in \mathcal{T}$,

$$(\alpha \cdot \beta)[\tau] = \alpha[\beta[\tau]].$$

Remarquons que comme d'habitude, nous omettrons le symbole \cdot pour noter le produit, sauf si cela nuit à la compréhension. Avant d'aller plus loin, il faut s'assurer que la définition posée ci-dessus est licite.

Proposition 3.5.8. Si le groupe \mathcal{T} des translations est commutatif, alors la somme et le produit dans \mathcal{H} sont des opérations internes.

Démonstration.

- La somme est interne : Soient $\alpha, \beta \in \mathcal{H}$, montrons que $\alpha + \beta \in \mathcal{H}$.

Tout d'abord, en utilisant successivement les définitions de la somme et des homomorphismes traçants, on a

$$(\alpha + \beta)[\tau_1\tau_2] = \alpha[\tau_1\tau_2] \beta[\tau_1\tau_2] = \alpha[\tau_1] \alpha[\tau_2] \beta[\tau_1] \beta[\tau_2].$$

Ensuite, vu la commutativité de \mathcal{T} et la définition de la somme, on obtient

$$(\alpha + \beta)[\tau_1\tau_2] = \alpha[\tau_1] \beta[\tau_1] \alpha[\tau_2] \beta[\tau_2] = (\alpha + \beta)[\tau_1] (\alpha + \beta)[\tau_2].$$

Ainsi, on obtient que $\alpha + \beta$ est un homomorphisme. Il reste à prouver que cet homomorphisme est traçant.

Soit $\tau \in \mathcal{T}$. Montrons que les traces de τ sont des traces de $(\alpha + \beta)[\tau]$.

- Si τ est l'identité, alors $(\alpha + \beta)[\tau] = id \in \mathcal{T}$ et donc τ et $(\alpha + \beta)[\tau]$ ont les mêmes traces.
- Si τ n'est pas l'identité, alors il a une direction δ . Par définition des homomorphismes traçants, $\alpha[\tau]$ et $\beta[\tau]$ appartiennent à \mathcal{T}_δ . Vu le théorème 3.4.5, il en est de même pour $(\alpha + \beta)[\tau] = \alpha[\tau] \beta[\tau]$.

Au final, on a bien $\alpha + \beta \in \mathcal{H}$.

- Le produit est interne : Soient $\alpha, \beta \in \mathcal{H}$, montrons que $\alpha\beta \in \mathcal{H}$.

Vu les définitions du produit et des homomorphismes traçants, on a

$$(\alpha\beta)[\tau_1\tau_2] = \alpha[\beta[\tau_1\tau_2]] = \alpha[\beta[\tau_1] \beta[\tau_2]] = \alpha[\beta[\tau_1]] \alpha[\beta[\tau_2]] = (\alpha\beta)[\tau_1] (\alpha\beta)[\tau_2].$$

Ainsi, $\alpha\beta$ est un homomorphisme. Il reste à prouver qu'il est traçant.

Comme α et β sont des homomorphismes traçants, si τ appartient à \mathcal{T}_δ , on sait qu'il en est de même pour $\beta[\tau]$, donc pour $\alpha[\beta[\tau]] = (\alpha\beta)[\tau]$.

Donc, on a $\alpha\beta \in \mathcal{H}$.

□

Proposition 3.5.9. *Si \mathcal{T} est commutatif, alors la somme munit \mathcal{H} d'une structure de groupe commutatif.*

Démonstration. Pour montrer que la somme munit \mathcal{H} d'une structure de groupe commutatif, il faut montrer que la somme est commutative et associative, qu'elle admet un neutre et que tout élément de \mathcal{H} possède un opposé.

1. L'addition est commutative :

Soient $\alpha, \beta \in \mathcal{H}$. En utilisant la définition de la somme et la commutativité de \mathcal{T} , on a pour tout $\tau \in \mathcal{T}$:

$$(\alpha + \beta)[\tau] = \alpha[\tau] \beta[\tau] = \beta[\tau] \alpha[\tau] = (\beta + \alpha)[\tau].$$

2. L'addition est associative :

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{H}$. Vu la définition de la somme, pour tout $\tau \in \mathcal{T}$, on obtient

$$((\alpha + \beta) + \gamma)[\tau] = (\alpha + \beta)[\tau] \gamma[\tau] = \alpha[\tau] \beta[\tau] \gamma[\tau] = \alpha[\tau] (\beta + \gamma)[\tau] = (\alpha + (\beta + \gamma))[\tau].$$

3. L'addition admet 0 comme neutre :

Soit $\alpha \in \mathcal{H}$. En ayant recours aux définitions de la somme et de l'application 0, pour tout $\tau \in \mathcal{T}$, on a

$$(0 + \alpha)[\tau] = 0[\tau] \alpha[\tau] = id \alpha[\tau] = \alpha[\tau] = \alpha[\tau] id = \alpha[\tau] 0[\tau] = (\alpha + 0)[\tau].$$

4. Tout élément α possède un opposé :

Vu la commutativité de la somme, il suffit de montrer que, pour tout $\alpha \in \mathcal{H}$, il existe un élément β de \mathcal{H} tel que $\alpha + \beta = 0$. Montrons que $\beta = \iota\alpha$ répond à la question :

$$(\alpha + \beta)[\tau] = (\alpha + \iota\alpha)[\tau] = \alpha[\tau] \iota[\alpha[\tau]] = \alpha[\tau] (\alpha[\tau])^{-1} = id = 0[\tau],$$

pour tout $\tau \in \mathcal{T}$.

□

Convention : L'opposé $\iota\alpha$ d'un élément α de \mathcal{H} sera noté $-\alpha$ et on écrira $\alpha - \beta$ pour $\alpha + (-\beta)$.

Théorème 3.5.10. *Si \mathcal{T} est commutatif, alors la somme et le produit d'homomorphismes traçants munissent \mathcal{H} d'une structure d'anneau associatif avec unité.*

Démonstration. On sait déjà que la somme munit \mathcal{H} d'une structure de groupe commutatif. Il suffit donc de montrer que le produit est associatif, admet un neutre et est doublement distributif par rapport à la somme.

1. Le produit est associatif :

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{H}$. Par définition du produit, on a, pour tout $\tau \in \mathcal{T}$,

$$((\alpha\beta)\gamma)[\tau] = (\alpha\beta)[\gamma[\tau]] = \alpha[\beta[\gamma[\tau]]] \quad \text{et} \quad (\alpha(\beta\gamma))[\tau] = \alpha[(\beta\gamma)[\tau]] = \alpha[\beta[\gamma[\tau]]],$$

d'où

$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma).$$

2. Le produit admet \mathcal{I} comme neutre :

Soient $\alpha \in \mathcal{H}$. Vu les définitions du produit et de l'application \mathcal{I} , on obtient, pour tout $\tau \in \mathcal{T}$,

$$(\alpha\mathcal{I})[\tau] = \alpha[\mathcal{I}[\tau]] = \alpha[\tau] \quad \text{et} \quad (\mathcal{I}\alpha)[\tau] = \mathcal{I}[\alpha[\tau]] = \alpha[\tau],$$

d'où

$$\alpha\mathcal{I} = \alpha = \mathcal{I}\alpha.$$

3. Le produit est doublement distributif par rapport à la somme :

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{H}$. Il faut montrer que

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \quad \text{et} \quad (\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma.$$

On a bien ces deux relations, car en utilisant les définitions de la somme, du produit et des homomorphismes traçants, on obtient les égalités suivantes

$$\begin{aligned} (\alpha(\beta + \gamma))[\tau] &= \alpha[(\beta + \gamma)[\tau]] = \alpha[\beta[\tau] \gamma[\tau]] = \alpha[\beta[\tau]] \alpha[\gamma[\tau]] \\ &= (\alpha\beta)[\tau] (\alpha\gamma)[\tau] = (\alpha\beta + \alpha\gamma)[\tau] \end{aligned}$$

et

$$((\alpha + \beta)\gamma)[\tau] = (\alpha + \beta)[\gamma[\tau]] = \alpha[\gamma[\tau]] \beta[\gamma[\tau]] = (\alpha\gamma)[\tau] (\beta\gamma)[\tau] = (\alpha\gamma + \beta\gamma)[\tau],$$

pour tout $\tau \in \mathcal{T}$.

□

3.6 Homomorphismes traçants des différents modèles

Dans cette section, nous caractérisons les homomorphismes traçants dans le cas des différents modèles introduits au chapitre 2.

3.6.1 Homomorphismes traçants du plan \mathbb{K}^2

Vu les théorèmes 3.3.2 et 3.3.5, les translations dans \mathbb{K}^2 s'écrivent

$$t_u : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2 : X \mapsto X + u, \quad \text{où } u \in \mathbb{K}^2. \quad (3.1)$$

Proposition 3.6.1. *Les groupes $(\mathbb{K}^2, +, 0)$ et $(\mathcal{T}_{\mathbb{K}^2}, \circ, id)$ sont isomorphes.*

Démonstration. Montrons que l'application

$$t : (\mathbb{K}^2, +, 0) \rightarrow (\mathcal{T}_{\mathbb{K}^2}, \circ, id) : u \mapsto t_u$$

est un isomorphisme de groupes. Nous devons vérifier que l'application t est un homomorphisme bijectif.

- Homomorphisme : Soient $u, u' \in \mathbb{K}^2$. Par commutativité de la somme, on a

$$t(u + u') = t_{u+u'} = t_{u'+u} = t_u \circ t_{u'}.$$

- Surjectivité : C'est évident par la définition de t_u (3.1) et les théorèmes 3.3.2 et 3.3.5.
- Injectivité : Soient $u, u' \in \mathbb{K}^2$ tels que $t(u) = t(u')$. Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} t(u) = t(u') &\Rightarrow t_u = t_{u'} \\ &\Rightarrow t_u(0) = t_{u'}(0) \\ &\Rightarrow u = u'. \end{aligned}$$

□

Nous montrons à présent qu'il existe un isomorphisme d'anneaux entre \mathbb{K} et l'ensemble des homomorphismes de \mathbb{K}^2 , noté $\mathcal{H}_{\mathbb{K}^2}$.

Proposition 3.6.2. *L'application*

$$h : \mathbb{K} \rightarrow \mathcal{H}_{\mathbb{K}^2} : \alpha \mapsto h_\alpha$$

telle que $h(\alpha)[t_u] = t_{\alpha u}$, pour tout $u \in \mathbb{K}^2$, est un isomorphisme d'anneaux.

Démonstration. Commençons par montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, l'application

$$h(\alpha) : \mathcal{T}_{\mathbb{K}^2} \rightarrow \mathcal{T}_{\mathbb{K}^2} : t_u \mapsto t_{\alpha u}$$

est un homomorphisme traçant. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$.

- L'application $h(\alpha)$ est un homomorphisme : Soient $u, u' \in \mathbb{K}^2$. D'une part, on a

$$h(\alpha)[t_u \circ t_{u'}] = h(\alpha)[t_{u+u'}] = t_{\alpha(u+u')}.$$

Et d'autre part, on a aussi

$$h(\alpha)[t_u] \circ h(\alpha)[t_{u'}] = t_{\alpha u} \circ t_{\alpha u'} = t_{\alpha u + \alpha u'} = t_{\alpha(u+u')}.$$

- L'application $h(\alpha)$ préserve les traces. Nous considérons plusieurs cas.
 - Si $\alpha = 0$, alors pour tout $u \in \mathbb{K}^2$, on a $h(\alpha)[t_u] = t_0 = id$. Vu que, par le théorème 3.2.4, toutes les droites sont des traces de id , les traces de t_u sont bien des traces de id .
 - Si $\alpha \neq 0$, alors on considère plusieurs cas. Si $u = 0$, alors $t_0 = id$. Par le deuxième point de la remarque 3.5.2, on a

$$h(\alpha)[t_0] = h(\alpha)[id] = id.$$

Ainsi, les traces de t_0 sont bien des traces de $h(\alpha)[t_0]$.

Si $u \neq 0$, nous savons qu'une trace de t_u est une droite déterminée par X et $t_u(X) = X + u$, c'est-à-dire la droite $\{X + su : s \in \mathbb{K}\}$. De plus, une trace de $t_{\alpha u}$ est déterminée par X et $t_{\alpha u}(X) = X + \alpha u$, c'est-à-dire la droite $\{X + s\alpha u : s \in \mathbb{K}\}$.

Or, ces droites sont identiques, donc les traces de t_u sont des traces de $h(\alpha)[t_u] = t_{\alpha u}$.

Il nous reste à montrer que h est un isomorphisme d'anneaux.

- L'application h est un homomorphisme : Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ et $u \in \mathbb{K}^2$. On a, en utilisant la définition 3.5.7,

$$\begin{aligned} h(\alpha_1 + \alpha_2)[t_u] &= t_{(\alpha_1 + \alpha_2)u} \\ &= t_{\alpha_1 u + \alpha_2 u} \\ &= t_{\alpha_1 u} \circ t_{\alpha_2 u} \\ &= h(\alpha_1)[t_u] \circ h(\alpha_2)[t_u] \\ &= (h(\alpha_1) + h(\alpha_2))[t_u]. \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} h(\alpha_1 \alpha_2)[t_u] &= t_{(\alpha_1 \alpha_2)u} \\ &= t_{\alpha_1(\alpha_2 u)} \\ &= h(\alpha_1)[t_{\alpha_2 u}] \\ &= h(\alpha_1)[h(\alpha_2)[t_u]] \\ &= (h(\alpha_1)h(\alpha_2))[t_u]. \end{aligned}$$

Montrons à présent que l'image par h des neutres de \mathbb{K} sont les neutres de $\mathcal{H}_{\mathbb{K}^2}$. On a

$$h(0)[t_u] = t_{0u} = t_0 = id = 0[t_u],$$

et

$$h(1)[t_u] = t_{1u} = t_u = \mathcal{I}[t_u].$$

- L'application h est injective : Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ tels que $h(\alpha_1) = h(\alpha_2)$.

On en déduit que

$$\begin{aligned} h(\alpha_1)[t_{(1,0)}] &= h(\alpha_2)[t_{(1,0)}] \\ \Rightarrow t_{(\alpha_1,0)} &= t_{(\alpha_2,0)} \\ \Rightarrow \alpha_1 &= \alpha_2, \end{aligned}$$

par injectivité de l'application t .

- L'application h est surjective : Soit ϕ un homomorphisme traçant de \mathbb{K}^2 . Pour tout $(u, v) \in \mathbb{K}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, comme ϕ préserve les traces, il existe $c_{u,v}$ tel que

$$\phi [t_{(u,v)}] = t_{(c_{u,v}u, c_{u,v}v)}.$$

En particulier, on a

$$\phi [t_{(u,0)}] = t_{(c_{u,0}u, 0)},$$

et

$$\phi [t_{(0,v)}] = t_{(0, c_{0,v}v)}.$$

Comme ϕ est un homomorphisme, on a

$$\begin{aligned} \phi [t_{(u,v)}] &= \phi [t_{(u,0)}] \circ \phi [t_{(0,v)}] \\ &= t_{(c_{u,0}u, 0)} \circ t_{(0, c_{0,v}v)} \\ &= t_{(c_{u,0}u, 0) + (0, c_{0,v}v)} \\ &= t_{(c_{u,0}u, c_{0,v}v)}. \end{aligned}$$

Au total, on a

$$t_{(c_{u,v}u, c_{u,v}v)} = t_{(c_{u,0}u, c_{0,v}v)}.$$

Ainsi, par injectivité de t , on a $c_{u,0}u = c_{u,v}u$ et $c_{0,v}v = c_{u,v}v$.

Si $u \neq 0$ et $v \neq 0$, alors on obtient que $c_{u,v} = c_{u,0} = c_{0,v}$.

Si $u = 0$, alors $v \neq 0$. Considérons un $u' \in \mathbb{K}$ tel que $u' \neq 0$ et procédons de la même manière que précédemment, on obtient que $c_{u',v} = c_{u',0} = c_{0,v}$.

De même si $v = 0$, alors $u \neq 0$. On obtient que $c_{u,v'} = c_{u,0} = c_{0,v'}$, pour un $v' \in \mathbb{K}$ tel que $v' \neq 0$.

Ainsi, on a montré que $c_{u,v}$ est une constante $c \in \mathbb{K}$ sur $\mathbb{K}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. On sait que $\phi(id) = id$, donc on pose $c_{0,0} = c$ et on conclut des développements précédents que $\phi = h(c)$.

□

3.6.2 Homomorphismes traçants du plan de Moulton

Vu la sous-section 3.3.2, nous savons que l'ensemble des translations du plan de Moulton est donné par

$$\mathcal{T} = \{t_u : u \in \mathbb{R}\},$$

où, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $t_u : \Pi \rightarrow \Pi : (x, y) \mapsto (x, y + u)$.

Le résultat suivant permet d'obtenir l'ensemble des homomorphismes traçants du plan de Moulton.

Proposition 3.6.3. *Tout homomorphisme $\alpha : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ est un homomorphisme traçant du plan de Moulton.*

Démonstration. Soit $\alpha : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ un homomorphisme. Pour montrer qu'il s'agit d'un homomorphisme traçant, il suffit de montrer que pour tout $\tau \in \mathcal{T}$, les traces de τ sont des traces de $\alpha[\tau]$.

Soit $u \in \mathbb{R}$, si $\alpha[t_u] = id$, alors toutes les droites sont des traces de $\alpha[t_u]$, par le théorème 3.2.4. En particulier, les traces de t_u sont donc des traces de $\alpha[t_u]$.

Si $\alpha[t_u] \neq id$, alors il existe $u' \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha[t_u] = t_{u'} \neq id$. Ainsi, par le théorème 3.2.6, les traces de $t_{u'}$ sont les droites d'une direction. En particulier, comme toutes les translations du plan de Moulton sont des translations verticales, toutes les translations ont la même direction. Vu le deuxième point de la remarque 3.5.2, on sait que $t_u \neq id$. Ainsi, t_u et $t_{u'}$ ont la même direction, donc les traces de t_u sont des traces de $\alpha[t_u] = t_{u'}$. \square

Nous constatons qu'il existe un isomorphisme de groupes entre \mathcal{T} et \mathbb{R} .

Proposition 3.6.4. *Les groupes (\mathcal{T}, \circ, id) et $(\mathbb{R}, +, 0)$ sont isomorphes.*

Démonstration. Montrons que l'application

$$t : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{T} : u \mapsto t_u$$

est un isomorphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +, 0)$ dans (\mathcal{T}, \circ, id) . Nous devons vérifier que l'application t est un homomorphisme bijectif.

- Homomorphisme : Soient $u, u' \in \mathbb{R}$. Par commutativité et associativité de la somme dans \mathbb{R} , et en se rappelant la définition de t_u (voir ci-dessus), on a

$$t(u + u') = t_{u+u'} = t_{u'+u} = t_u \circ t_{u'}.$$

- Surjectivité : C'est évident vu la caractérisation des translations du plan de Moulton.
- Injectivité : Soient $u, u' \in \mathbb{R}$ tels que $t(u) = t(u')$. Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} t(u) = t(u') &\Rightarrow t_u = t_{u'} \\ &\Rightarrow t_u(0) = t_{u'}(0) \\ &\Rightarrow u = u'. \end{aligned}$$

\square

Théorème 3.6.5. *L'ensemble des homomorphismes traçants du plan de Moulton est isomorphe, en tant qu'anneau, à l'ensemble des fonctions additives de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .*

Démonstration. Vu la proposition 3.6.3, on constate que les homomorphismes traçants du plan de Moulton sont exactement les homomorphismes de \mathcal{T} dans \mathcal{T} .

Par la proposition 3.6.4, \mathcal{T} est isomorphe au groupe $(\mathbb{R}, +, 0)$. Cet isomorphisme induit un isomorphisme de l'ensemble des homomorphismes de \mathcal{T} dans l'ensemble des homomorphismes de $(\mathbb{R}, +, 0)$ dans $(\mathbb{R}, +, 0)$. Ces derniers homomorphismes sont exactement les fonctions additives. \square

3.6.3 Homomorphismes traçants de la géométrie du tétraèdre

Nous allons à présent déterminer quels sont les homomorphismes traçants de la géométrie du tétraèdre, décrite à la sous-section 2.4.1. Nous avons décrit l'ensemble des dilatations de la géométrie du tétraèdre dans la proposition 3.3.10. De plus, nous savons que dans ce modèle toute dilatation ayant un point fixe et non constante est l'identité. On voit également que les dilatations qui ne possèdent pas de point fixe sont exactement les trois bijections différentes de id décrites dans la proposition 3.3.10. En particulier, ces bijections sont les translations τ_{AB} , τ_{AC} et τ_{AD} . Ainsi, l'ensemble des translations de la géométrie du tétraèdre est donné par

$$\mathcal{T} = \{id, \tau_{AB}, \tau_{AC}, \tau_{AD}\}.$$

Proposition 3.6.6. *L'anneau des homomorphismes traçants de la géométrie du tétraèdre est isomorphe à \mathbb{Z}_2 .*

Démonstration. Les translations τ_{AB} , τ_{AC} et τ_{AD} ont des directions différentes, donc pour avoir un homomorphisme traçant α , chaque translation doit être envoyée soit sur elle-même soit sur l'identité. Sinon, par le théorème 3.2.6, α ne préserverait pas les traces.

Si $\alpha[\tau_{AB}] = id$, montrons que $\alpha[\tau_{AC}] = id$. Sinon, on a $\alpha[\tau_{AC}] = \tau_{AC}$. Mais alors

$$\alpha[\tau_{AD}] = \alpha[\tau_{AB}\tau_{AC}] = \alpha[\tau_{AB}]\alpha[\tau_{AC}] = \alpha[\tau_{AC}] = \tau_{AC},$$

une contradiction. Ainsi, les seuls homomorphismes traçants possibles sont 0 et \mathcal{T} , décrits à la définition 3.5.3. \square

Chapitre 4

Axiomes de transitivité et théorème d'isomorphie

Nous introduisons ici deux nouveaux axiomes concernant les dilatations. Dans les sources que nous suivons ([1] et [14]), ils sont donnés par leurs numéros, les axiomes IV et V. Nous remarquons que ces axiomes indiquent que les translations agissent transitivement sur Π , et que les dilatations admettant un point fixe agissent transitivement sur leurs traces. Nous les appelons donc axiomes de transitivité.

4.1 Axiome IV et conséquences

Dans le but de garantir que l'ensemble \mathcal{H} des homomorphismes traçants soit un corps, nous allons introduire un quatrième axiome, qui concerne la transitivité de l'action des translations. Nous verrons également que la commutativité de l'ensemble des translations \mathcal{T} est une conséquence de cet axiome.

Axiome IV (Axiome de transitivité des translations). *Quels que soient les points P et Q , il existe une translation τ telle que $\tau(P) = Q$.*

L'axiome précise l'existence d'une translation. Il est naturel de s'interroger sur l'unicité.

Proposition 4.1.1 (Unicité de la translation). *Étant donnés deux points P et Q , la translation τ telle que $\tau(P) = Q$ est unique.*

Démonstration. Par l'axiome IV, on sait qu'une telle translation existe. De plus, on obtient qu'elle est unique par le théorème 3.2.8, qui nous indique qu'étant donnés deux points P et Q , il existe au plus une translation τ telle que $\tau(P) = Q$. \square

Définition 4.1.2. Étant donnés deux points P et Q , nous noterons τ_{PQ} l'unique translation telle que $\tau(P) = Q$.

L'unicité de la translation qui applique un point sur un autre permet de retrouver les résultats classiques.

Proposition 4.1.3. *Pour tous points P, Q et R , on a*

1. *la relation de Chasles : $\tau_{PQ} = \tau_{RQ} \tau_{PR}$;*
2. *$\tau_{PP} = id$.*

Démonstration.

1. Par définition, on sait que la translation τ_{PQ} est l'unique translation telle que $\tau(P) = Q$. Or, on a

$$\tau_{RQ} \tau_{PR}(P) = \tau_{RQ}(R) = Q.$$

Par unicité, on obtient bien que $\tau_{PQ} = \tau_{RQ} \tau_{PR}$.

2. De même, par la définition, on sait que la translation τ_{PP} est l'unique translation telle que $\tau(P) = P$. Par unicité, comme $id(P) = P$, on obtient que $\tau_{PP} = id$. □

Nous allons voir que plusieurs conséquences découlent de l'axiome IV.

Proposition 4.1.4. *Dans un plan affine satisfaisant l'axiome IV, le groupe \mathcal{T} des translations est commutatif.*

Démonstration. Par le théorème 3.4.6, on sait que s'il existe deux translations de directions différentes, alors \mathcal{T} est commutatif.

Vu l'axiome II, on sait qu'il existe trois points distincts A, B et C tels que C n'est pas situé sur la droite \overline{AB} . Ainsi, τ_{AB} et τ_{AC} sont des translations de directions différentes. □

Théorème 4.1.5. *Dans un plan affine satisfaisant l'axiome IV, si α est un homomorphisme traçant différent de 0 et si P est un point donné, alors il existe une et une seule dilatation non constante σ de point fixe P telle que $\alpha[\tau] = \sigma\tau\sigma^{-1}$, pour tout $\tau \in \mathcal{T}$.*

Démonstration.

- Unicité de σ :

Supposons que σ satisfasse les conditions, et montrons que dans ce cas, on doit avoir que, pour tout point X , $\sigma(X) = \alpha[\tau_{PX}](P)$.

Par hypothèse, on a $\alpha[\tau_{PX}] = \sigma\tau_{PX}\sigma^{-1}$. Par conséquent,

$$\alpha[\tau_{PX}](P) = \sigma\tau_{PX}\sigma^{-1}(P) = \sigma\tau_{PX}(P),$$

car P est un point fixe de σ^{-1} . En effet, on sait que $\sigma(P) = P$, donc $P = \sigma^{-1}(P)$. Ainsi, comme $\tau_{PX}(P) = X$, on a

$$\alpha[\tau_{PX}](P) = \sigma(X).$$

- Existence de σ :

Définissons l'application

$$\sigma : \Pi \rightarrow \Pi : X \mapsto \sigma(X) = \alpha[\tau_{PX}](P).$$

Il faut montrer que σ est une dilatation non constante de point fixe P telle que $\alpha[\tau] = \sigma\tau\sigma^{-1}$, pour tout $\tau \in \mathcal{T}$.

- σ est une dilatation :

Soient les points distincts X et Y . Comme \overline{XY} est une trace de la translation τ_{XY} , en utilisant le théorème 3.2.6, on sait que la parallèle d à \overline{XY} menée par $\sigma(X)$ est une trace de τ_{XY} . Étant donné que α est un homomorphisme traçant, il s'agit également d'une trace de $\alpha[\tau_{XY}]$. De plus, elle passe par $\sigma(Y)$. En effet, en utilisant les définitions de σ , des homomorphismes traçants et la relation de Chasles de la proposition 4.1.3, on a

$$\sigma(Y) = \alpha[\tau_{PY}](P) = \alpha[\tau_{XY}\tau_{PX}](P) = \alpha[\tau_{XY}] \alpha[\tau_{PX}](P) = \alpha[\tau_{XY}]\sigma(X).$$

Comme la droite d est une trace de $\alpha[\tau_{XY}]$ et qu'elle passe par $\sigma(X)$, elle passe également par $\alpha[\tau_{XY}]\sigma(X) = \sigma(Y)$. Ainsi, $\sigma(Y)$ est situé sur la parallèle à \overline{XY} menée par $\sigma(X)$, donc σ est bien une dilatation.

- P est un point fixe de σ :

$$\sigma(P) = \alpha[\tau_{PP}](P) = \alpha[id](P) = P,$$

où la deuxième et la troisième égalités sont obtenues en utilisant respectivement la proposition 4.1.3 et le deuxième point de la remarque 3.5.2.

- σ n'est pas constant :

Dans le cas contraire, pour tout point X , on aurait $\sigma(X) = P$. Donc en particulier $\alpha[\tau_{PX}](P) = P$ et $\alpha[\tau_{PX}] = id$ puisque l'identité est la seule translation qui admet un point fixe. Comme toute translation est de la forme τ_{PX} , on en déduit que $\alpha[\tau] = id$ pour tout $\tau \in \mathcal{T}$ et donc $\alpha = 0$.

- $\alpha[\tau] = \sigma\tau\sigma^{-1}$:

Soit $\tau \in \mathcal{T}$. En posant $X = \tau(P)$, on a $\tau = \tau_{PX}$ (vu le théorème 3.2.8). De $\sigma(X) = \alpha[\tau_{PX}](P)$, on tire que

$$X = \sigma^{-1}\alpha[\tau_{PX}](P) = \sigma^{-1}\alpha[\tau_{PX}]\sigma(P),$$

car $\sigma(P) = P$. Vu la proposition 3.5.6, $\sigma^{-1}\alpha[\tau_{PX}]\sigma$ est une translation pour laquelle l'image de P est X . Ainsi, par le théorème 3.2.8, on a

$$\sigma^{-1}\alpha[\tau_{PX}]\sigma = \tau_{PX}.$$

On obtient bien que $\alpha[\tau_{PX}] = \sigma\tau_{PX}\sigma^{-1}$.

□

Remarque 4.1.6. Dans la proposition 3.5.6, on a vu que l'application qui à toute translation τ associe $\sigma\tau\sigma^{-1}$ est un homomorphisme traçant. Le théorème précédent prouve que tout homomorphisme traçant différent de 0 est de cette forme.

Corollaire 4.1.7. *Tout homomorphisme traçant différent de 0 est bijectif.*

Démonstration. C'est immédiat puisque toute dilatation non constante est bijective. \square

Théorème 4.1.8. *Si les axiomes I à IV sont satisfaits, alors l'ensemble \mathcal{H} est un corps.*

Démonstration. Vu ce qui précède, il suffit de montrer que tout homomorphisme traçant $\alpha \neq 0$ possède un inverse α^{-1} pour la multiplication, c'est-à-dire que $\alpha\alpha^{-1} = \mathcal{I} = \alpha^{-1}\alpha$.

Si P est un point, vu le théorème 4.1.5, il existe une dilatation non constante σ de point fixe P telle que $\alpha[\tau] = \sigma\tau\sigma^{-1}$, pour tout $\tau \in \mathcal{T}$. On sait que α^{-1} défini par $\alpha^{-1}[\tau] = \sigma^{-1}\tau\sigma$ est un homomorphisme traçant. Montrons par exemple que $\alpha\alpha^{-1} = \mathcal{I}$, c'est-à-dire que pour toute translation τ , $(\alpha\alpha^{-1})[\tau] = \tau$.

En appliquant successivement les définitions du produit, de α^{-1} et de α , on a

$$(\alpha\alpha^{-1})[\tau] = \alpha[\alpha^{-1}[\tau]] = \alpha[\sigma^{-1}\tau\sigma] = \sigma\sigma^{-1}\tau\sigma\sigma^{-1} = \tau.$$

En procédant de manière similaire, on obtient également que $\alpha^{-1}\alpha = \mathcal{I}$. \square

Corollaire 4.1.9. *Si α et β sont des homomorphismes traçants différents de 0, alors l'homomorphisme traçant $\alpha\beta$ est également différent de 0.*

Démonstration. Tous les corps sont intègres et par le théorème 4.1.8, nous savons que \mathcal{H} est un corps. \square

Théorème 4.1.10. *Si $\tau \in \mathcal{T}$ et $\alpha \in \mathcal{H}$ sont tels que $\alpha[\tau] = id$, alors $\alpha = 0$ ou $\tau = id$.*

Démonstration. Soient $\tau \in \mathcal{T}$ et $\alpha \in \mathcal{H}$ tels que $\alpha[\tau] = id$. Si α diffère de 0, alors, en utilisant le théorème 4.1.8, on sait qu'il possède un inverse α^{-1} et on a

$$\tau = \mathcal{I}[\tau] = (\alpha^{-1}\alpha)[\tau] = \alpha^{-1}[\alpha[\tau]] = \alpha^{-1}[id] = id,$$

où la dernière égalité est obtenue grâce au deuxième point de la remarque 3.5.2. \square

Corollaire 4.1.11. *Si $\tau \in \mathcal{T}$ et $\alpha, \beta \in \mathcal{H}$ sont tels que $\alpha[\tau] = \beta[\tau]$, alors $\tau = id$ ou $\alpha = \beta$.*

Démonstration. Soient $\tau \in \mathcal{T}$ et $\alpha, \beta \in \mathcal{H}$ tels que $\alpha[\tau] = \beta[\tau]$. On a

$$id = 0[\tau] = (\beta - \alpha)[\tau] = \beta[\tau] - \alpha[\tau] = \beta[\tau] - \beta[\tau] = 0[\tau].$$

Ainsi, par le théorème 4.1.10, on a $\alpha - \beta = 0$ ou $\tau = id$, d'où la conclusion. \square

4.2 Axiome V et conséquences

L'axiome suivant concerne encore une transitivité, celle des homothéties. Bien sûr, une homothétie ne peut agir transitivement sur tout le plan Π . Si elle a un point fixe P , alors tout point Q distinct de P a une image située sur la droite \overline{PQ} . On ne peut donc demander qu'une homothétie agisse transitivement. De même, si on se restreint à une droite contenant P , l'action n'est pas transitive, puisque P est fixe. Mais on peut demander que l'action soit transitive sur chaque droite contenant P , privée de P . C'est l'objet du dernier axiome, qui est donc un axiome de transitivité des homothéties, au meilleur sens possible.

Axiome V (Transitivité des homothéties). *Il existe un point P tel que, si Q et R sont des points distincts et distincts de P , situés sur une droite qui passe par P , alors il existe une dilatation σ de point fixe P telle que*

$$\sigma(Q) = R.$$

Remarque 4.2.1.

1. Si $Q = R$, une telle dilatation existe aussi, mais il s'agit de l'identité.
En effet, on a $\sigma(P) = P$ et $\sigma(Q) = Q$ avec $P \neq Q$. Donc $\sigma = id$.
2. La dilatation σ dont l'existence est évoquée dans l'axiome V, n'est pas constante.
Dans les conditions de l'axiome V, on a $\sigma(P) = P$ et $\sigma(Q) = R$. Si σ est constant, alors $P = R$, ce qui est contraire aux hypothèses.

Théorème 4.2.2. *Dans un plan affine satisfaisant les axiomes IV et V, si τ_1 et τ_2 sont des translations du sous-groupe \mathcal{T}_δ relatif à la direction δ et si $\tau_1 \neq id$, alors il existe un unique homomorphisme traçant α tel que $\tau_2 = \alpha[\tau_1]$.*

Démonstration.

- Existence :

Considérons un point P fourni par l'axiome V. Par définition des translations, comme $\tau_1 \neq id$, on sait que τ_1 n'admet pas de point fixe. Ainsi, l'image par τ_1 du point P est distincte de P .

Nous allons considérer différents cas.

- Si $\tau_2(P) = P$, alors $\tau_2 = id$. Donc en posant $\alpha = 0$, on a bien $\tau_2 = \alpha[\tau_1]$.
- Si $\tau_2(P) = \tau_1(P)$, alors en utilisant le théorème 3.2.8, on sait que $\tau_2 = \tau_1$. Donc en posant $\alpha = \mathcal{I}$, on a bien $\tau_2 = \alpha[\tau_1]$.
- Si $\tau_2(P) \neq P$ et si $\tau_2(P) \neq \tau_1(P)$, alors $\tau_1(P)$ et $\tau_2(P)$ sont des points distincts et distincts de P . De plus, comme τ_1 et τ_2 ont la même direction, ils sont également situés sur une droite qui passe par P . Par l'axiome V, il existe donc une dilatation σ non constante et donc bijective telle que $\sigma(P) = P$ et $\sigma\tau_1(P) = \tau_2(P)$. Comme $\sigma(P) = P$, on a $P = \sigma^{-1}(P)$. Ainsi,

$$\sigma\tau_1\sigma^{-1}(P) = \tau_2(P).$$

Par le théorème 3.4.3, on sait que $\sigma\tau_1\sigma^{-1}$ est une translation. Par unicité, on a $\sigma\tau_1\sigma^{-1} = \tau_2$.

De plus, par la proposition 3.5.6, on sait que $C_\sigma : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T} : \tau \mapsto \sigma\tau\sigma^{-1}$ est un homomorphisme traçant et on a bien $\tau_2 = C_\sigma[\tau_1]$.

- Unicité :

Supposons qu'il existe deux homomorphismes traçants α et β tels que $\tau_2 = \alpha[\tau_1]$ et $\tau_2 = \beta[\tau_1]$. On a

$$\alpha[\tau_1] = \beta[\tau_1].$$

Comme $\tau_1 \neq id$, en utilisant le corollaire 4.1.11, on obtient que $\alpha = \beta$.

□

Théorème 4.2.3. *L'axiome V est valable en tout point. Cela signifie que si P' , Q' et R' sont des points distincts alignés, alors il existe une dilatation σ telle que*

$$\sigma(P') = P' \quad \text{et} \quad \sigma(Q') = R'.$$

Démonstration. Comme P' , Q' et R' sont alignés, les translations $\tau_{P'Q'}$ et $\tau_{P'R'}$ ont même direction. On sait aussi que $\tau_{P'Q'} \neq id$, car P' et Q' sont distincts.

Ainsi, vu le théorème 4.2.2, il existe un homomorphisme traçant α tel que

$$\tau_{P'R'} = \alpha[\tau_{P'Q'}].$$

De plus, α est différent de 0, car $\tau_{P'R'} \neq id$.

En vertu du théorème 4.1.5, il existe une unique dilatation non constante σ de point fixe P' telle que $\alpha[\tau] = \sigma\tau\sigma^{-1}$, pour tout $\tau \in \mathcal{T}$.

Montrons que σ satisfait les conditions de l'énoncé. On sait déjà que $\sigma(P') = P'$. D'autre part,

$$\sigma(Q') = \sigma\tau_{P'Q'}(P') = \sigma\tau_{P'Q'}\sigma^{-1}(P') = \alpha[\tau_{P'Q'}](P') = \tau_{P'R'}(P') = R'.$$

□

4.3 Axiomes de transitivité dans les différents modèles

Dans cette section, nous allons regarder si les différents modèles introduits au chapitre 2 sont des plans affines satisfaisant les axiomes IV et V. Nous savons déjà qu'il s'agit de plans affines, il reste donc à voir si les axiomes IV et V sont vérifiés.

4.3.1 Axiomes de transitivité dans le plan \mathbb{K}^2

Nous commençons par montrer que le plan affine \mathbb{K}^2 introduit à la section 2.2 satisfait les axiomes IV et V.

Proposition 4.3.1. *La structure d'incidence $(\Pi, \Delta, \mathcal{R})$ introduite dans la définition 2.2.5 est un plan affine satisfaisant les axiomes IV et V, quel que soit le corps \mathbb{K} considéré.*

Démonstration. Nous avons déjà montré à la section 2.2 qu'il s'agit d'un plan affine. Il reste à vérifier que ce plan affine satisfait les axiomes IV et V.

- Axiome IV : Soient $P, Q \in \Pi$. Vu le théorème 3.3.3, la dilatation $\tau = \sigma_{Q-P,1}$ ¹ est une translation telle que $\tau(P) = Q$.
- Axiome V : Soient P, Q et R trois points colinéaires distincts de Π . Par le théorème 3.3.4, il existe $\nu \in \mathbb{K}$ tel que $R = P + \nu(Q - P)$ et la dilatation $\sigma = \sigma_{(1-\nu)P,\nu}$ est telle que

$$\sigma(P) = P \quad \text{et} \quad \sigma(Q) = R.$$

□

1. Nous utilisons les notations du théorème 3.3.1.

4.3.2 Axiomes de transitivité dans le plan de Moulton

Nous allons voir que le plan de Moulton, introduit à la section 2.3, ne satisfait pas les axiomes IV et V. En montrant ce résultat, nous obtiendrons l'existence de plans affines ne satisfaisant pas les axiomes IV et V.

Proposition 4.3.2. *Le plan de Moulton décrit à la définition 2.3.1 est un plan affine qui ne satisfait ni l'axiome IV, ni l'axiome V.*

Démonstration. À la sous-section 3.3.2, nous avons déterminé l'ensemble des dilatations du plan de Moulton :

- Pour tout $u \in \mathbb{R}$, l'application

$$t_u : \Pi \rightarrow \Pi : (x, y) \mapsto (x, y + u)$$

est une translation.

- Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $k > 0$, l'application

$$h_{a,k} : \Pi \rightarrow \Pi : (x, y) \mapsto (0, a) + k(x, y - a)$$

est une homothétie de point fixe $(0, a)$.

Dans la section 2.3, nous avons montré que le plan de Moulton est un plan affine. Montrons qu'il ne satisfait pas les axiomes IV et V.

- Axiome IV : Procédons par l'absurde et supposons que le plan de Moulton satisfait l'axiome IV. Dans ce cas, quels que soient P et $Q \in \Pi$, il existe une translation τ telle que $\tau(P) = Q$.

Nous avons constaté que les translations du plan de Moulton sont des translations verticales. Ainsi, pour tous points $P : (x_1, y_1)$ et $Q : (x_2, y_2) \in \Pi$ tels que $x_1 \neq x_2$, il n'existe pas de translation de Moulton τ telle que $\tau(P) = Q$. L'axiome IV n'est donc pas satisfait.

- Axiome V : Procédons par l'absurde et supposons que le plan de Moulton satisfait l'axiome V. Dans ce cas, il existe un point P tel que, si Q et R sont des points distincts et distincts de P , situés sur une droite qui passe par P , alors il existe une dilatation σ de point fixe P telle que

$$\sigma(Q) = R.$$

La dilatation σ est donc une homothétie distincte de l'identité.

Nous avons constaté que toute dilatation non constante préserve la droite

$$d_0 = \{(x, y) \in \Pi : x = 0\}.$$

Donc le point fixe P ne peut être que de la forme $(a, 0)$, pour un a dans \mathbb{R} , et l'homothétie $h_{a,k}$ pour k positif. Alors les points $Q = (a, 1)$ et $R = (a, -1)$ ne peuvent être appliqués l'un sur l'autre par une homothétie de rapport positif. L'axiome V n'est donc pas satisfait.

□

4.3.3 Axiomes de transitivité dans la géométrie du tétraèdre

Nous allons à présent voir que la géométrie du tétraèdre, décrite à la sous-section 2.4.1, satisfait les axiomes IV et V.

Proposition 4.3.3. *La géométrie du tétraèdre est un plan affine satisfaisant les axiomes IV et V.*

Démonstration. Dans la sous-section 2.4.1, nous avons démontré que la géométrie du tétraèdre est un plan affine. Il reste à vérifier les axiomes IV et V.

- Axiome IV : Nous avons décrit l'ensemble des dilatations de la géométrie du tétraèdre dans la proposition 3.3.10 et nous avons obtenu que l'ensemble des translations de ce modèle est $\mathcal{T} = \{id, \tau_{AB}, \tau_{AC}, \tau_{AD}\}$. L'axiome IV est vérifié, puisque chaque translation τ_{AB} , τ_{AC} , τ_{AD} échange A et B , C ou D respectivement.
- Axiome V : Étant donné que toute droite ne contient que deux points distincts et puisque l'ensemble des translations est un groupe, il n'existe pas trois points colinéaires distincts.

□

4.4 Géométrie analytique et théorème d'isomorphie

Dans les sections précédentes, nous avons introduit deux axiomes supplémentaires, portant sur la transitivité de l'action des dilatations. Nous avons comme objectif de munir l'ensemble des homomorphismes traçants \mathcal{H} d'une structure de corps. Cela a été fait au théorème 4.1.8. Nous établissons maintenant un isomorphisme entre un plan affine satisfaisant les axiomes IV et V et le plan affine \mathcal{H}^2 satisfaisant également les axiomes IV et V (défini à la section 2.2). Pour cela, nous devons définir une base. Après avoir défini la notion de repère, nous pourrions obtenir les coordonnées d'un point. Nous retrouverons donc la géométrie analytique usuelle définie sur un corps quelconque \mathbb{K} .

Soit $(\Pi, \Delta, \mathcal{R})$ le plan affine satisfaisant les axiomes IV et V décrit à la définition 2.2.5. Nous commençons par définir la notion de base.

Définition 4.4.1 (Base). Une *base* est la donnée d'un couple (τ_1, τ_2) de translations non identiques de directions différentes.

Le résultat suivant permettra d'obtenir la notion de composantes d'une translation.

Théorème 4.4.2. *Soit (τ_1, τ_2) une base. Soit $f : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{H}^2$ l'application qui à une translation τ associe l'unique couple (α, β) d'homomorphismes traçants tel que*

$$\tau = \alpha[\tau_1]\beta[\tau_2].$$

Cette application est une bijection.

Démonstration. Nous commençons par montrer que l'application f est bien définie, c'est-à-dire que pour tout $\tau \in \mathcal{T}$, il existe un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathcal{H}^2$ tel que $\tau = \alpha[\tau_1]\beta[\tau_2]$.

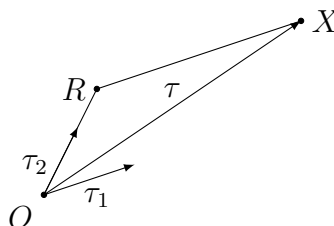
- Existence :

Soient $\tau \in \mathcal{T}$ une translation et O un point fixé du plan Π . Posons $X = \tau(O)$.

Comme τ_1 et τ_2 ont des directions différentes, la trace de τ_2 qui passe par O rencontre la trace de τ_1 qui passe par X en un point R .

Par le théorème 4.2.2, on peut trouver des homomorphismes traçants α et β tels que

$$\tau_{RX} = \alpha[\tau_1] \quad \text{et} \quad \tau_{OR} = \beta[\tau_2]$$



Finalement, on a

$$\tau = \tau_{OX} = \tau_{RX}\tau_{OR} = \alpha[\tau_1] \beta[\tau_2].$$

- Unicité :

Soit τ une translation, supposons qu'il existe deux couples (α, β) et (γ, δ) d'homomorphismes traçants tels que

$$\tau = \alpha[\tau_1] \beta[\tau_2] \quad \text{et} \quad \tau = \gamma[\tau_1] \delta[\tau_2].$$

Dans ce cas, on a $\alpha[\tau_1] \beta[\tau_2] = \gamma[\tau_1] \delta[\tau_2]$, donc $(\alpha - \gamma)[\tau_1] = (\delta - \beta)[\tau_2]$.

Nous allons considérer différents cas.

- Supposons que $\alpha - \gamma = 0$. Dans ce cas, on a $(\alpha - \gamma)[\tau_1] = 0[\tau_1] = id$ et $(\delta - \beta)[\tau_2] = (\alpha - \gamma)[\tau_1] = id$.

Comme $\tau_1 \neq id$ et $\tau_2 \neq id$, en utilisant le théorème 4.1.10, on obtient que

$$\alpha = \gamma \quad \text{et} \quad \delta = \beta.$$

- Supposons que $\delta - \beta = 0$. Ce cas est analogue au précédent.

- Supposons que $\alpha - \gamma \neq 0$ et $\delta - \beta \neq 0$.

Vu la définition 3.5.1, si $(\alpha - \gamma)[\tau_1]$ et $(\delta - \beta)[\tau_2]$ sont des translations différentes de id , on sait que $(\alpha - \gamma)[\tau_1]$ et $(\delta - \beta)[\tau_2]$ ont la même direction que τ_1 et τ_2 respectivement. C'est absurde puisque τ_1 et τ_2 ont des directions différentes. On a donc $(\alpha - \gamma)[\tau_1] = id$ et $(\delta - \beta)[\tau_2] = id$.

Comme $\tau_1 \neq id$ et $\tau_2 \neq id$, en utilisant le théorème 4.1.10, on obtient que

$$\alpha = \gamma \quad \text{et} \quad \delta = \beta.$$

Montrons que l'application f est une bijection.

- Injectivité de f :

Soient τ et $\tau' \in \mathcal{T}$ tels que $f(\tau) = f(\tau')$. Il existe (α, β) et $(\alpha', \beta') \in \mathcal{H}^2$ tels que

$$f(\tau) = (\alpha, \beta) = (\alpha', \beta') = f(\tau').$$

Ainsi,

$$\tau = \alpha[\tau_1] \beta[\tau_2] = \alpha'[\tau_1] \beta'[\tau_2] = \tau'.$$

- Surjectivité de f :

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathcal{H}^2$. Soit O un point fixé du plan Π . Posons $X = \alpha[\tau_1] \beta[\tau_2](O)$. Par définition, l'application $\alpha[\tau_1] \beta[\tau_2]$ est une translation. De plus, par unicité, on a $\alpha[\tau_1] \beta[\tau_2] = \tau_{OX}$. On a donc bien $f(\tau_{OX}) = (\alpha, \beta)$.

□

Définition 4.4.3 (Composantes). Étant donnée une base $\mathcal{B} = (\tau_1, \tau_2)$, on appelle l'application f du théorème précédent le *passage aux composantes dans la base \mathcal{B}* . Si $f(\tau) = (\alpha, \beta)$, les homomorphismes traçants α et β sont appelés les *composantes* de τ dans la base \mathcal{B} . On note $\tau : (\alpha, \beta)$.

Nous introduisons à présent les notions de repère et de coordonnées.

Définition 4.4.4. Nous appellerons *repère* un couple $(O, (\tau_1, \tau_2))$ formé d'un point O et d'une base. Les *coordonnées* d'un point P relatives à ce repère sont les composantes α et β de la translation τ_{OP} . On écrit $P : (\alpha, \beta)$.

Nous allons maintenant établir que tout plan affine satisfaisant les axiomes IV et V est isomorphe, au sens de la définition 1.1.3, au plan \mathcal{H}^2 , où \mathcal{H} est le corps des homomorphismes traçants associés à $(\Pi, \Delta, \mathcal{R})$. Pour appliquer la définition des isomorphismes, il nous faut tout d'abord une bijection entre les ensembles des points. Elle est fournie par le passage aux coordonnées.

Proposition 4.4.5. *Soit $(O, (\tau_1, \tau_2))$ un repère. L'application*

$$\Phi : \Pi \rightarrow \mathcal{H}^2 : P \mapsto (\alpha, \beta),$$

où α et β sont les composantes de la translation τ_{OP} , est une bijection.

Démonstration. Il suffit de montrer que l'application $g : \Pi \rightarrow \mathcal{T} : X \mapsto \tau_{OX}$ est une bijection. En effet, dans ce cas, comme $\Phi = f \circ g$, où f est l'application passage aux composantes, on aura montré que Φ est une bijection.

- Injectivité de g :

Soient $X, Y \in \Pi$ tels que $g(X) = g(Y)$. Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} g(X) = g(Y) &\Rightarrow \tau_{OX} = \tau_{OY} \\ &\Rightarrow \tau_{OX}(O) = \tau_{OY}(O) \\ &\Rightarrow X = Y. \end{aligned}$$

- Surjectivité de g :

Soit $\tau \in \mathcal{T}$. Posons $X = \tau(O)$. Par unicité, on a $\tau = \tau_{OX} = g(X)$.

□

Pour appliquer la définition d'isomorphisme, il faut une application Ψ entre les ensembles de droites, qui préserve la relation d'incidence, au sens qu'un point X est situé sur une droite d dans Π si et seulement si $\Phi(X)$ appartient $\Psi(d)$. Il est donc naturel de poser la définition suivante.

Définition 4.4.6. Étant donné un repère $(O, (\tau_1, \tau_2))$ d'un plan affine arguésien $(\Pi, \Delta, \mathcal{R})$, nous définissons

$$\Psi : \Delta \rightarrow 2^{\mathcal{H}} : d \mapsto \Psi(d) = \{\Phi(X) : X\mathcal{R}d\}.$$

Voici maintenant le théorème d'isomorphie attendu.

Théorème 4.4.7 (Théorème d'isomorphie). *Si $(\Pi, \Delta, \mathcal{R})$ est un plan affine arguésien dont \mathcal{H} est le corps des homomorphismes traçants, alors pour tout repère $(O, (\tau_1, \tau_2))$, le couple (Φ, Ψ) définit un isomorphisme de structures d'incidence entre $(\Pi, \Delta, \mathcal{R})$ et le plan affine \mathcal{H}^2 construit sur \mathcal{H} (définition 2.2.5).*

Démonstration. Nous avons déjà montré à la proposition 4.4.5 que Φ est une bijection. Il nous suffit maintenant de montrer que Ψ est à valeurs dans l'ensemble des droites de \mathcal{H}^2 , et que c'est une bijection. En effet, on aura alors directement par définition de Ψ que pour tout $X \in \Pi$, $X\mathcal{R}d$ si et seulement si $\Phi(X)$ appartient à $\Psi(d)$.

Montrons que pour toute droite $d \in \Delta$, $\Psi(d)$ est une droite de \mathcal{H}^2 . Soient P et Q deux points distincts situés sur d . Notons $\Phi(P) = (\alpha, \beta) \in \mathcal{H}^2$ et notons également (γ, δ) les composantes de la translation τ_{PQ} . On a tout d'abord $(\gamma, \delta) \neq (0, 0)$, sinon on aurait $\tau_{PQ} = 0[\tau_1] 0[\tau_2] = id$, ce qui est impossible car $\tau_{PQ}(P) = Q \neq P$. Ensuite, montrons que $X\mathcal{R}d$ si et seulement si il existe un homomorphisme traçant t tel que $\tau_{PX} = t[\tau_{PQ}]$. D'une part si $X\mathcal{R}d$, τ_{PQ} et τ_{PX} ont la même direction et, puisque $\tau_{PQ} \neq id$, en utilisant le théorème 4.2.2, on sait qu'il existe un homomorphisme traçant t tel que $\tau_{PX} = t[\tau_{PQ}]$. D'autre part, si un tel homomorphisme existe alors les traces de τ_{PQ} sont des traces de τ_{PX} . En particulier la droite $d = \overline{PQ}$ est une trace de τ_{PX} et donc $X\mathcal{R}d$. Traduisons maintenant cette condition sur les coordonnées de X .

Vu la proposition 4.1.3, on a

$$\tau_{OX} = \tau_{PX}\tau_{OP}.$$

En utilisant la commutativité et les définitions du produit et de la somme, on a

$$\begin{aligned} \tau_{OX} &= t[\tau_{PQ}] \alpha[\tau_1] \beta[\tau_2] \\ &= t[\gamma[\tau_1] \delta[\tau_2]] \alpha[\tau_1] \beta[\tau_2] \\ &= (t\gamma)[\tau_1] (t\delta)[\tau_2] \alpha[\tau_1] \beta[\tau_2] \\ &= (\alpha + t\gamma)[\tau_1] (\beta + t\delta)[\tau_2]. \end{aligned}$$

Dès lors,

$$X\mathcal{R}d \Leftrightarrow \exists t \in \mathcal{H} : \Phi(X) = (\alpha + t\gamma, \beta + t\delta),$$

et finalement $\Psi(d) = \{(\alpha + t\gamma, \beta + t\delta) : t \in \mathcal{H}\}$ est une droite de \mathcal{H}^2 .

Il reste à montrer que Ψ est une bijection

- Injectivité de Ψ :

Soient $d, d' \in \Delta$ tels que $\Psi(d) = \Psi(d')$. Soient P, Q deux points distincts situés sur d . Alors $d = \overline{PQ}$ et $\Phi(P)$ et $\Phi(Q)$ appartiennent à $\Psi(d)$. Par hypothèse, il existe P' et Q' situés sur d' tels que

$$\Phi(P) = \Phi(P') \quad \text{et} \quad \Phi(Q) = \Phi(Q').$$

Par injectivité de Φ , on obtient $P = P'$ et $Q = Q'$, de sorte que $d' = \overline{P'Q'} = \overline{PQ} = d$.

- Surjectivité de Ψ :

Considérons une droite D de \mathcal{H}^2 . Par définition, cette droite s'écrit

$$D = \{(\alpha, \beta) + t(\gamma, \delta) : t \in \mathcal{H}\},$$

où $(\alpha, \beta) \in \mathcal{H}^2$ et $(\gamma, \delta) \in \mathcal{H}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Par surjectivité de Φ , il existe des points $P, Q \in \Pi$ tels que $\Phi(P) = (\alpha, \beta)$, et $\Phi(Q) = (\alpha + \gamma, \beta + \delta)$. Les points P et Q sont distincts, puisque $\Phi(P) \neq \Phi(Q)$. On a alors

$$\tau_{OP} = \alpha[\tau_1]\beta[\tau_2] \quad \text{et} \quad \tau_{OQ} = (\alpha + \gamma)[\tau_1](\beta + \delta)[\tau_2].$$

On trouve alors par un calcul simple que

$$\tau_{PQ} = \tau_{OQ}(\tau_{OP})^{-1} = \gamma[\tau_1]\delta[\tau_2].$$

Dès lors les composantes de τ_{PQ} sont (γ, δ) et la première partie de la preuve indique alors que $\Psi(\overline{PQ}) = d$.

□

Chapitre 5

Équivalents géométriques des axiomes de transitivité

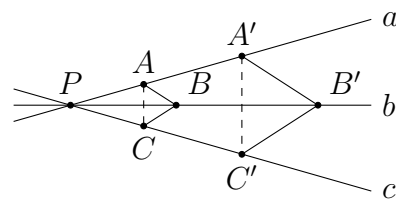
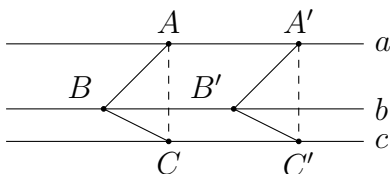
Dans ce chapitre, nous revenons sur les axiomes IV et V. Ces axiomes sont, tels qu'ils sont énoncés, de nature moins géométrique que les trois premiers, qui sont uniquement basés sur les droites et le parallélisme. Nous montrerons que ces axiomes sont en fait équivalents à un énoncé classique de géométrie, le théorème de Desargues. Ce théorème se décline en deux cas : droites parallèles et droites concourantes, et chacun des cas est équivalent pour un plan affine à un des axiomes de transitivité.

Si une structure d'incidence satisfait les cinq axiomes que nous avons considérés jusqu'à présent, alors elle est isomorphe à \mathcal{H}^2 , où \mathcal{H} est un corps. Il est naturel de se demander à quelle condition (géométrique) ce corps est commutatif. Il s'avère que cette propriété est équivalente au fait que le théorème de Pappus soit vrai dans la géométrie considérée.

5.1 Le théorème de Desargues

Nous commençons par rappeler l'énoncé classique du théorème de Desargues.

Théorème 5.1.1 (Desargues). *Soient trois droites distinctes a , b et c parallèles ou concourantes en un point P . Soient les points A et A' , B et B' , C et C' respectivement situés sur les droites a , b et c et distincts de P si les droites sont concourantes. Si la droite \overline{AB} est parallèle à la droite $\overline{A'B'}$ et si la droite \overline{BC} est parallèle à la droite $\overline{B'C'}$, alors les droites \overline{AC} et $\overline{A'C'}$ sont également parallèles.*



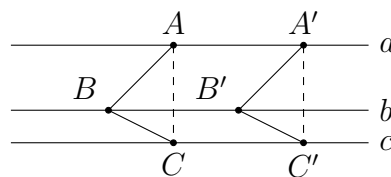
Dans cette section, nous allons montrer que dans un plan affine, l'énoncé de Desargues avec des droites parallèles est équivalent à l'axiome IV et que l'axiome V est équivalent à l'énoncé de Desargues pour des droites qui concourent au point dont l'existence est évoquée dans l'axiome V.

Théorème 5.1.2. *Dans un plan affine, l'axiome IV est équivalent à l'énoncé de Desargues avec des droites parallèles.*

Démonstration.

- Supposons que l'axiome IV est vérifié.

Reprenons les notations de l'énoncé de Desargues 5.1.1.



Par l'axiome IV, on sait qu'il existe une translation τ telle que $\tau(A) = A'$. Par définition des dilatations, $\tau(B)$ est situé sur la parallèle à \overline{AB} passant par $\tau(A) = A'$. De plus, comme τ est une translation, $\overline{B\tau(B)}$ est une trace, donc elle est parallèle à la trace $\overline{A\tau(A)}$, par le théorème 3.2.6. Donc $\tau(B)$ est à l'intersection de b et de la parallèle à \overline{AB} passant par A' . C'est donc B' .

En procédant de manière analogue, nous obtenons que $\tau(C)$ est situé à la fois sur c et sur la parallèle à \overline{BC} passant par B' . Ainsi, $\tau(C) = C'$.

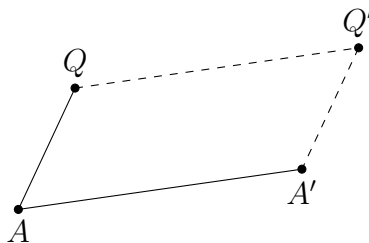
Enfin, puisque τ est une dilatation, $\tau(C) = C'$ est situé sur la parallèle à \overline{AC} menée par A' . On a donc $\overline{AC} \parallel \overline{A'C'}$.

- Supposons que l'énoncé de Desargues est vrai dans le cas des droites parallèles. Soient les points A et A' . Cherchons une translation τ telle que $\tau(A) = A'$.

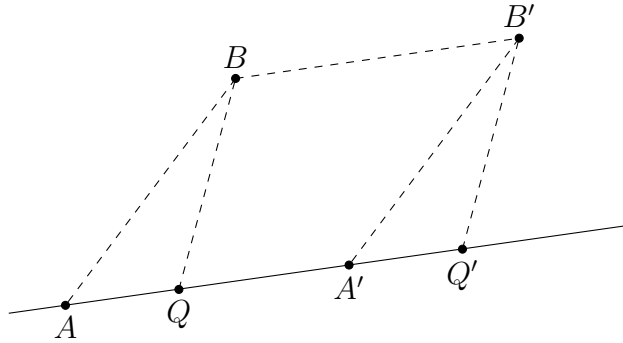
Si $A = A'$, il suffit de prendre $\tau = id$. Supposons que $A \neq A'$.

- DÉFINITION DE τ :

Si Q n'est pas situé sur la droite $\overline{AA'}$, nous poserons $\tau(Q) = Q'$, où Q' est le point d'intersection de la parallèle à $\overline{AA'}$ menée par Q et de la parallèle à \overline{AQ} menée par A' .



Pour déterminer l'image Q' par τ d'un point Q de $\overline{AA'}$, fixons une fois pour toutes un point B , non situé sur $\overline{AA'}$, dont l'image par τ est B' . Vu l'axiome II, on sait que ce point B existe. Alors nous définissons le point Q' comme le point d'intersection de $\overline{AA'}$ avec la parallèle à \overline{BQ} menée par B' . On remarque que $\tau(A) = A'$.

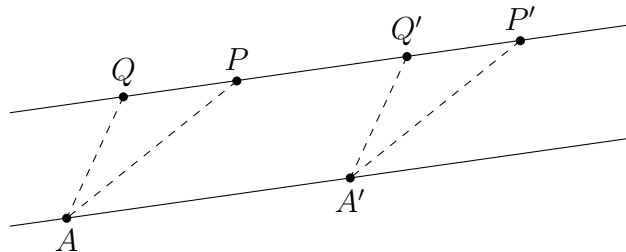


- τ EST UNE DILATATION :

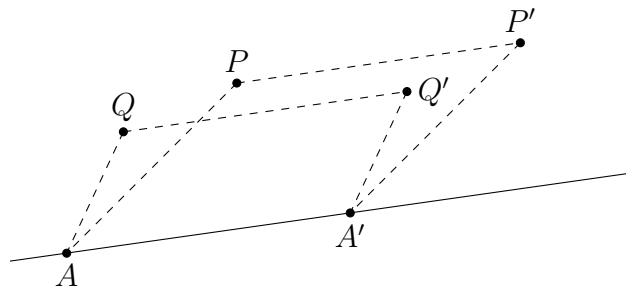
L'application τ n'est visiblement pas constante car A' n'est pas égal à B' . Montrons que si P et Q sont des points distincts, alors on a $\overline{PQ} \parallel \overline{\tau(P)\tau(Q)}$, c'est-à-dire $\overline{PQ} \parallel \overline{P'Q'}$.

- *Premier cas* : P et Q n'appartiennent pas à $\overline{AA'}$

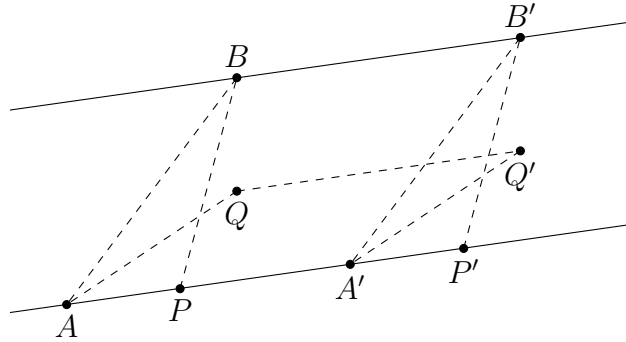
Si $\overline{PQ} \parallel \overline{AA'}$, le résultat est acquis puisque P, Q, P' et Q' sont situés sur la même droite, à savoir la droite \overline{PQ} .



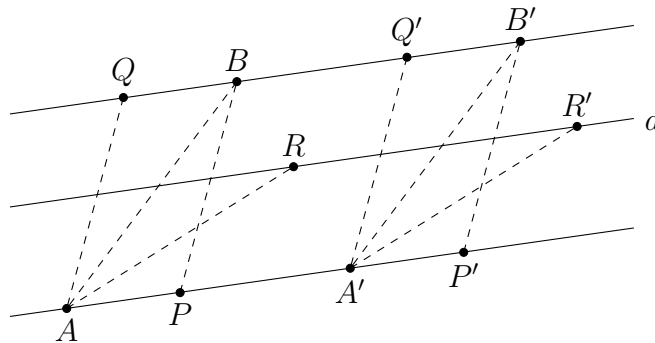
Dans le cas contraire, par définition de τ , on a $\overline{AP} \parallel \overline{A'P'}$ et $\overline{AQ} \parallel \overline{A'Q'}$. En utilisant l'énoncé de Desargues 5.1.1, on obtient que $\overline{PQ} \parallel \overline{P'Q'}$.



- *Deuxième cas* : P appartient à $\overline{AA'}$ et Q n'appartient pas à $\overline{AA'}$ ni à $\overline{BB'}$
 Comme P appartient à $\overline{AA'}$, par définition de τ , on sait que P' appartient également à $\overline{AA'}$ et que $\overline{BP} \parallel \overline{B'P'}$. De plus, comme B et Q ne sont pas situés sur $\overline{AA'}$, par le premier cas, on sait que $\overline{BQ} \parallel \overline{B'Q'}$. Le théorème de Desargues 5.1.1 permet de conclure au parallélisme de \overline{PQ} et de $\overline{P'Q'}$.



- *Troisième cas* : P appartient à $\overline{AA'}$ et Q appartient à $\overline{BB'}$
 Deux cas sont à envisager.
 - a) La géométrie contient une droite d parallèle à $\overline{AA'}$, distincte de $\overline{AA'}$ et de $\overline{BB'}$. Soit R un point situé sur cette droite. Par définition de τ , $\tau(R) = R'$ est situé sur d .



Par le premier cas, on obtient que

$$\overline{RQ} \parallel \overline{R'Q'}.$$

Par le second cas, on obtient que

$$\overline{RP} \parallel \overline{R'P'}.$$

En appliquant le théorème de Desargues 5.1.1, on obtient que $\overline{PQ} \parallel \overline{P'Q'}$.

- b) La géométrie ne contient pas de droite parallèle à $\overline{AA'}$ distincte de $\overline{AA'}$ et $\overline{BB'}$. Les directions de la géométrie comportent ainsi deux droites et les droites comportent deux points.

La géométrie ne contient que les points A , A' , B et B' . En effet, si C était un point distinct de ces quatre points, il n'appartiendrait ni à $\overline{AA'}$, ni à $\overline{BB'}$. Et, en utilisant l'axiome III, par C , on pourrait tracer une parallèle à ces droites distincte de celles-ci, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Le plan affine est la géométrie du tétraèdre et l'axiome IV est vérifié.

◦ *Quatrième cas* : P et Q appartiennent à $\overline{AA'}$

Par définition de τ , les points P , Q , P' et Q' sont situés sur la droite $\overline{AA'}$. Ainsi, $\overline{PQ} = \overline{P'Q'}$, donc le résultat est acquis.

• τ EST UNE TRANSLATION :

Vu les théorèmes de la section 3.2.1, cela résulte du fait que τ admet au moins deux traces parallèles, à savoir $\overline{AA'}$ et $\overline{BB'}$.

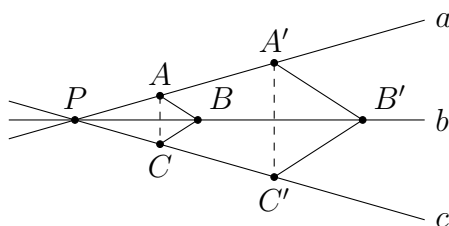
□

Théorème 5.1.3. *Dans un plan affine, l'axiome V est équivalent à l'énoncé de Desargues avec des droites concourantes.*

Démonstration.

1. Supposons que l'axiome V est vérifié.

Reprenons les notations de l'énoncé de Desargues 5.1.1.



Par l'axiome V, on sait qu'il existe une dilatation σ telle que $\sigma(P) = P$ et $\sigma(A) = A'$. Étant donné que σ admet un point fixe, on sait que σ est une homothétie. Vu les théorèmes 3.2.4 et 3.2.5, les droites a , b et c sont des traces de σ . Par définition des dilatations, $\sigma(B)$ est situé sur la parallèle à \overline{AB} passant par $\sigma(A) = A'$. Or, $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$, on en tire que $\sigma(B) \in \overline{A'B'}$. De plus, $B \in b$ et b est une trace de σ . Par le théorème 3.2.2, on a $\sigma(B) \in b$. Ainsi, $\sigma(B)$ est situé à la fois sur la droite $\overline{A'B'}$ et sur la droite b . Étant donné que $A' \in a$ et que $a \neq b$, ces deux droites sont distinctes. Leur seul point commun est le point B' . Ainsi, $\sigma(B) = B'$.

En procédant de manière analogue, nous obtenons que $\sigma(C)$ est situé à la fois sur la droite $\overline{B'C'}$ et sur la droite c . Or, ces droites n'ont que C' comme point en commun, donc $\sigma(C) = C'$.

Puisque $\sigma(A) = A' \neq C' = \sigma(C)$, on a

$$\overline{AC} \parallel \overline{\sigma(A)\sigma(C)} = \overline{A'C'}.$$

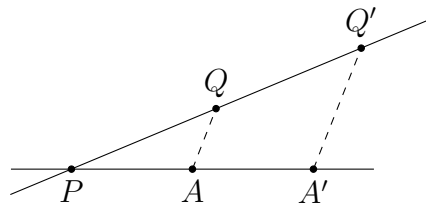
Le théorème de Desargues avec les droites concourantes est donc vérifié.

2. Supposons que l'énoncé de Desargues est vrai dans le cas des droites concourantes au point P . Soient les points A et A' distincts de P . Cherchons une dilatation σ telle que $\sigma(P) = P$ et $\sigma(A) = A'$.

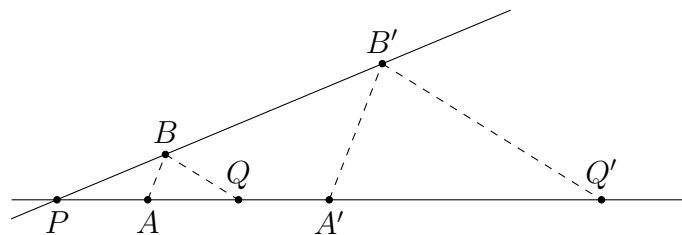
Si $A = A'$, il suffit de prendre $\sigma = id$. Supposons que $A \neq A'$.

- DÉFINITION DE σ :

Si Q n'est pas situé sur la droite $\overline{AA'}$, nous poserons $\sigma(Q) = Q'$, où Q' est le point d'intersection de la droite \overline{PQ} et de la parallèle à \overline{AQ} menée par A' .



Pour déterminer l'image Q' par σ d'un point Q de $\overline{AA'}$, fixons une fois pour toutes un point B , non situé sur $\overline{AA'}$, dont l'image par σ est B' . Vu l'axiome II, on sait que ce point B existe. Ainsi, Q' sera le point d'intersection de $\overline{AA'}$ avec la parallèle à \overline{BQ} menée par B' . On remarque que $\sigma(P) = P$ et $\sigma(A) = A'$.

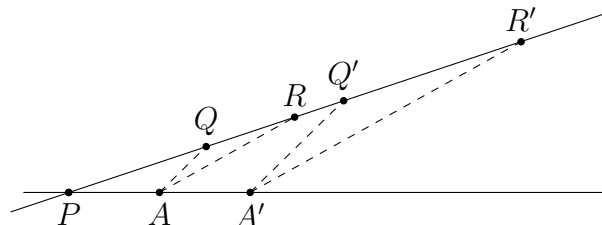


- σ EST UNE DILATATION :

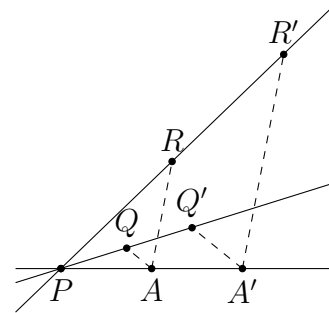
L'application σ n'est visiblement pas constante car A' n'est pas égal à B' . Montrons que si Q et R sont des points distincts et distincts de P , alors on a $\overline{QR} \parallel \overline{\sigma(Q)\sigma(R)}$, c'est-à-dire $\overline{QR} \parallel \overline{Q'R'}$.

- Premier cas : Q et R n'appartiennent pas à $\overline{AA'}$

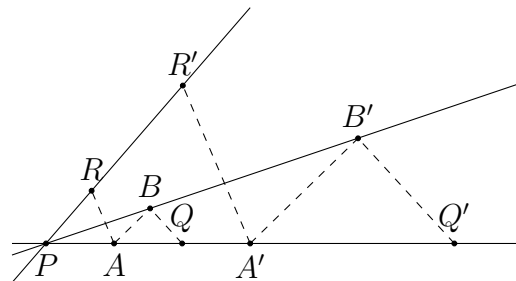
Si \overline{QR} passe par P , le résultat est acquis puisque Q, R, Q' et R' sont situés sur la même droite, à savoir la droite \overline{QR} .



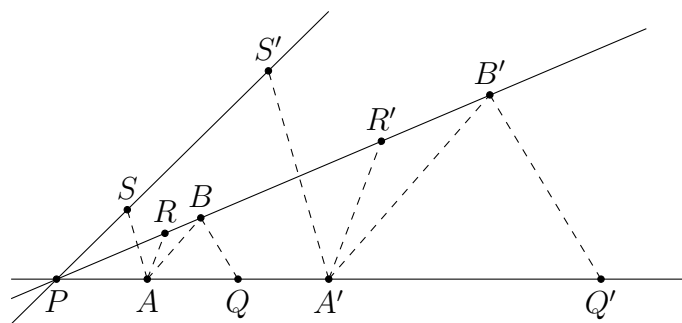
Dans le cas contraire, par définition de σ , on a $\overline{AQ} \parallel \overline{A'Q'}$ et $\overline{AR} \parallel \overline{A'R'}$. En utilisant l'énoncé de Desargues 5.1.1, on obtient que $\overline{QR} \parallel \overline{Q'R'}$.



- *Deuxième cas* : Q appartient à $\overline{AA'}$ et R n'appartient pas à $\overline{AA'}$ ni à $\overline{BB'}$. Comme Q appartient à $\overline{AA'}$, par définition de σ , on sait que Q' appartient également à $\overline{AA'}$ et que $\overline{BQ} \parallel \overline{B'Q'}$. De plus, comme B et R ne sont pas situés sur $\overline{AA'}$, par le premier cas, on sait que $\overline{BR} \parallel \overline{B'R'}$. Le théorème de Desargues 5.1.1 permet de conclure au parallélisme de \overline{QR} et de $\overline{Q'R'}$.



- *Troisième cas* : Q appartient à $\overline{AA'}$ et R appartient à $\overline{BB'}$. Deux cas sont à envisager.
 - a) La géométrie contient une droite d passant par P distincte de $\overline{AA'}$ et de $\overline{BB'}$. Soit S un point situé sur cette droite. Par définition de σ , $\sigma(S) = S'$ est également situé sur d .



Par le premier cas, on obtient que

$$\overline{RS} \parallel \overline{R'S'}.$$

Par le second cas, on obtient que

$$\overline{QS} \parallel \overline{Q'S'}.$$

En appliquant le théorème de Desargues 5.1.1, on obtient que $\overline{QR} // \overline{Q'R'}$.

- b) La géométrie ne contient pas de droite passant par P distincte de $\overline{AA'}$ et $\overline{BB'}$. Comme B n'est pas situé sur $\overline{AA'}$ et comme P est situé sur $\overline{AA'}$ avec $P \neq A$, en utilisant l'axiome III, on doit avoir une parallèle à \overline{AB} passant par P . On a donc une droite passant par P distincte de $\overline{AA'}$ et $\overline{BB'}$, ce qui est contraire à l'hypothèse. On constate donc que dans un plan affine, on ne peut pas se retrouver dans ce cas-ci.
- o *Quatrième cas* : Q et R appartiennent à $\overline{AA'}$

Par définition de σ , les points Q, R, Q' et R' sont situés sur la droite $\overline{AA'}$. Ainsi, $\overline{QR} = \overline{Q'R'}$, donc le résultat est acquis.

□

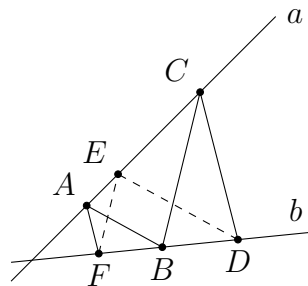
Les théorèmes précédents justifient la définition suivante.

Définition 5.1.4. Un *plan affine arguésien* est un plan affine qui vérifie les axiomes IV et V.

5.2 Le théorème de Pappus

Nous rappelons à présent l'énoncé classique du théorème de Pappus.

Théorème 5.2.1 (Pappus). *Soient deux droites distinctes a et b . Choisissons des points A et C sur a et B et D sur b , tels que A, B, C et D sont différents du point de concours éventuel de a et b . Appelons E l'intersection de a avec la parallèle à \overline{AB} menée par D . Appelons F l'intersection de b avec la parallèle à \overline{BC} menée par E . Alors \overline{AF} est parallèle à \overline{CD} .*

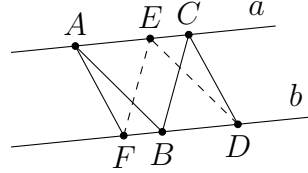


Nous scinderons le théorème en deux cas : celui où les droites a et b de l'énoncé sont parallèles, et celui dans le cas général. Nous verrons tout d'abord que l'énoncé de Pappus est vrai dans un plan affine arguésien si a et b sont parallèles. Ensuite, nous démontrerons que le corps \mathcal{H} des homomorphismes traçants est commutatif si et seulement si l'énoncé de Pappus est vrai en général.

Théorème de Pappus pour des droites parallèles

Proposition 5.2.2. *Dans un plan affine arguésien, le théorème de Pappus est vérifié lorsque les droites a et b sont parallèles.*

Démonstration. Reprenons les notations du théorème de Pappus 5.2.1.



Pour montrer que \overline{AF} est parallèle à \overline{CD} , il suffit de montrer que $\tau_{CA} = \tau_{DF}$ puisque les translations transforment toute droite en une droite parallèle. On a

$$\begin{aligned} \tau_{CA} &= \tau_{EA}\tau_{CE} \\ &= \tau_{DB}\tau_{BF} \\ &= \tau_{BF}\tau_{DB} \\ &= \tau_{DF}, \end{aligned}$$

où la deuxième égalité est obtenue en utilisant le fait que les droites \overline{AB} et \overline{ED} et les droites \overline{CB} et \overline{EF} sont parallèles deux à deux et où on utilise la commutativité de \mathcal{T} pour la troisième égalité. \square

Théorème de Pappus et commutativité du corps \mathcal{H}

Nous considérons ici un plan affine arguésien $(\Pi, \Delta, \mathcal{R})$ et nous analysons le théorème de Pappus pour des droites non parallèles. Puisque le plan est arguésien, on sait qu'il est isomorphe à \mathcal{H}^2 , où \mathcal{H} est le corps des homomorphismes traçants. Nous aurions pu travailler directement dans \mathcal{H}^2 , mais nous décidons de rester dans le plan Π .

Lemme 5.2.3. *Si P est un point, alors le groupe \mathcal{D}_P des dilatations non constantes de point fixe P est isomorphe au groupe multiplicatif \mathcal{H}^* .*

Démonstration. À tout élément $\alpha \neq 0$ de \mathcal{H} , vu le théorème 4.1.5, on peut faire correspondre l'unique dilatation non constante $\sigma_\alpha \in \mathcal{D}_P$ telle que $\alpha[\tau] = \sigma_\alpha \tau \sigma_\alpha^{-1}$, pour tout $\tau \in \mathcal{T}$.

En vertu de la remarque 4.1.6, on sait que l'application $\alpha \mapsto \sigma_\alpha$ est surjective. Elle est également injective, car

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha = \sigma_\beta &\Rightarrow \forall \tau \in \mathcal{T}, \alpha[\tau] = \beta[\tau] \\ &\Rightarrow \alpha = \beta, \end{aligned}$$

où la dernière implication est obtenue par définition de l'égalité des applications.

Il reste à montrer que $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_\alpha\sigma_\beta$. Vu la définition de $\sigma_{\alpha\beta}$, il suffit de montrer que $\sigma_\alpha\sigma_\beta$ est une dilatation de point fixe P et que pour tout $\tau \in \mathcal{T}$, on a $(\alpha\beta)[\tau] = (\sigma_\alpha\sigma_\beta)\tau(\sigma_\alpha\sigma_\beta)^{-1}$. Le premier point est direct, car, vu que P est un point fixe de σ_α et de σ_β , on a $\sigma_\alpha\sigma_\beta(P) = P$. Pour le deuxième point, on a

$$\begin{aligned} (\alpha\beta)[\tau] &= \alpha[\beta[\tau]] \\ &= \alpha[\sigma_\beta\tau\sigma_\beta^{-1}] \\ &= \sigma_\alpha\sigma_\beta\tau\sigma_\beta^{-1}\sigma_\alpha^{-1} \\ &= \sigma_\alpha\sigma_\beta\tau(\sigma_\alpha\sigma_\beta)^{-1}. \end{aligned}$$

□

Théorème 5.2.4. *Dans un plan affine arguésien, le corps \mathcal{H} est commutatif si et seulement si l'énoncé de Pappus est vrai.*

Démonstration. D'après le lemme précédent, il suffit de montrer que \mathcal{D}_P est commutatif si et seulement si l'énoncé de Pappus est vrai.

- La condition est nécessaire :

Reprenons les notations de l'énoncé de Pappus 5.2.1 et supposons que les droites a et b se coupent en un point P . Par hypothèse, on sait que \mathcal{D}_P est commutatif.

Vu l'axiome V, appelons σ_1 et σ_2 les dilatations non constantes de point fixe P telles que

$$\sigma_1(A) = E \quad \text{et} \quad \sigma_2(E) = C.$$

Puisque $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ et $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$, on a

$$\sigma_1(B) = D \quad \text{et} \quad \sigma_2(F) = B.$$

Puisque $\sigma_1\sigma_2$ est une dilatation, \overline{AF} est parallèle à la droite qui joint $\sigma_1\sigma_2(A)$ à $\sigma_1\sigma_2(F)$.

Or,

$$\sigma_1\sigma_2(A) = \sigma_2\sigma_1(A) = C \quad \text{et} \quad \sigma_1\sigma_2(F) = D.$$

Ainsi, \overline{AF} est parallèle à \overline{CD} et l'énoncé de Pappus est vrai.

- La condition est suffisante :

Supposons que l'énoncé de Pappus est vrai.

Soient σ_1 et σ_2 deux dilatations non constantes de point fixe P . Montrons que pour tout point A , on a

$$\sigma_1\sigma_2(A) = \sigma_2\sigma_1(A).$$

Si $A = P$, on a

$$\sigma_1\sigma_2(P) = P = \sigma_2\sigma_1(P),$$

car P est un point fixe de σ_1 et de σ_2 .

Supposons que $A \neq P$. Par P , menons une droite b distincte de \overline{PA} . Soit $F \neq P$ un point de b .

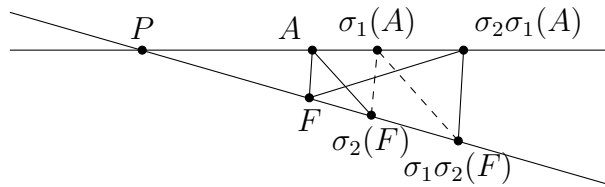
Posons

$$E = \sigma_1(A),$$

$$C = \sigma_2(E) = \sigma_2\sigma_1(A),$$

$$B = \sigma_2(F),$$

$$D = \sigma_1(B) = \sigma_1\sigma_2(F).$$



On a $\overline{AB} \parallel \overline{ED}$ et $\overline{EF} \parallel \overline{CB}$. Ainsi, par le théorème de Pappus, on obtient que

$$\overline{AF} \parallel \overline{CD}.$$

Ainsi,

$$C = \sigma_1\sigma_2(A).$$

□

Le théorème précédent justifie la définition suivante.

Définition 5.2.5. Un *plan affine pappien* est un plan affine arguésien pour lequel le corps des homomorphismes traçants est commutatif.

Chapitre 6

Quelques structures algébriques ordonnées et leurs équivalents géométriques

Les quatre premiers chapitres de ce travail ont permis de faire émerger des structures algébriques naturelles (le groupe des dilatations non constantes, le sous-groupe normal des translations, certains de ses sous-groupes et le corps des homomorphismes traçants) à partir de cinq axiomes (I à V) assez simples. Le point culminant de cette approche est bien entendu le théorème d'isomorphie 4.4.7 qui stipule que les plans affines arguésiens sont tous bâtis sur des corps (commutatifs ou non) : ces plans sont en effet isomorphes à \mathcal{H}^2 , où \mathcal{H} est un corps donné a priori. Le cinquième chapitre affine encore un peu ce dictionnaire géométrie/algèbre et étudie de près l'interprétation géométrique des axiomes de transitivité IV et V et de certaines propriétés comme la commutativité du corps de base considéré. C'est ainsi que se termine la première phase de notre exploration des axiomes d'incidence et de transitivité.

Cette revisite due à Artin [1] des travaux de Hilbert sur les fondements de la géométrie se poursuit naturellement en sondant une nouvelle batterie d'axiomes. Déjà dans ses *Grundlagen* [9], Hilbert les avait classés, en vue de fonder solidement la géométrie d'Euclide, en différentes familles : les axiomes d'incidence et l'axiome des parallèles, les axiomes d'ordre et ensuite les axiomes de continuité et de congruence.

Le présent chapitre poursuit notre étude des axiomes de Hilbert, en particulier ceux concernant l'ordre. La formulation initiale par Hilbert des axiomes d'ordre repose sur une relation ternaire qui permet de mathématiser la notion "être entre".

Parmi les axiomes d'ordre, on peut citer les suivants :

Axiome VI. *Si un point B est situé entre un point A et un point C , alors A , B et C sont trois points distincts d'une droite. Le point B est également situé entre C et A .*

Axiome VII. *Pour tous points distincts A et C , il existe au moins un point B situé sur la droite \overline{AC} tel que C est entre A et B .*

Dans le travail d'Hilbert [9], plusieurs conséquences des axiomes d'ordre sont obtenues. En particulier, pour tous points distincts A et C , il existe au moins un point D situé sur la droite \overline{AC} qui est situé entre A et C . De plus, pour tout triplet de points distincts situés sur une droite, il y en a toujours un qui est situé entre les deux autres.

Nous sentons bien après avoir manipulé ces deux axiomes qu'ils devraient déboucher sur la description d'une relation d'ordre sur chacune des ponctuelles du plan affine étudié et finalement sur le corps de référence sous-jacent. C'est donc tout naturellement que nous investiguons dans ce chapitre différentes structures algébriques munies de structures d'ordre compatibles avec les opérations considérées. Nous y étudions en particulier le résultat de Artin-Schreier [2] et la généralisation de Szele [21]. Nous présentons ensuite une très belle construction due à Hilbert d'un corps ordonné non commutatif. Cet exemple issu de [9] permet de cerner de plus près l'interdépendance des différents axiomes. La dernière section opère le retour à la géométrie : on y étudie les équivalents géométriques des propriétés d'ordre étudiées du point de vue de l'algébrique dans les sections précédentes.

6.1 Groupes, anneaux et corps ordonnés

Comme annoncé, dans cette section, nous allons étudier les groupes, anneaux et corps ordonnés.

6.1.1 Groupes ordonnés

Définition 6.1.1. Un *groupe ordonné* est un couple (G, S) , où G est un groupe et S est une partie de G telle que, en utilisant les notations multiplicatives,

- (a) $\{S^{-1}, \{1\}, S\}$ est une partition de G ,
- (b) $SS \subset S$,
- (c) $x \in G \Rightarrow x^{-1}Sx \subset S$.

Remarque 6.1.2.

1. La condition (c) de la définition 6.1.1 est automatiquement satisfaite dans le cas commutatif. En effet, dans ce cas, pour tous $x \in G$ et $s \in S$, on a

$$x^{-1}sx = x^{-1}xs = s \in S.$$

2. L'ensemble S ne peut être un sous-groupe de G , car $1 \notin S$.
3. Si G n'est pas trivial, alors S et G sont forcément des ensembles infinis.

En effet, S est non vide et les puissances entières strictement positives d'un élément s de S sont des éléments de S , vu que $SS \subset S$. Ces éléments sont nécessairement distincts. En effet, s'il existe k, l strictement positifs tels que $k < l$ et $s^k = s^l$, alors on a $s^{l-k} = 1$, et donc $1 \in S$, ce qui est absurde.

On aurait pu s'attendre à ce qu'un groupe ordonné soit défini comme un groupe muni d'un ordre qui est compatible avec l'opération de multiplication du groupe. Nous démontrons maintenant que c'est effectivement le cas, en associant une relation d'ordre à tout sous ensemble S satisfaisant les conditions de la définition 6.1.1.

Définition 6.1.3. Si (G, S) est un groupe ordonné, on définit la relation binaire \leq sur G associée à S par

$$a \leq b \Leftrightarrow a = b \text{ ou } a^{-1}b \in S.$$

Théorème 6.1.4. Si (G, S) est un groupe ordonné, la relation binaire \leq associée à S est un ordre total de G tel que, pour tous $a, b, c, d \in G$,

1. $a < b \Rightarrow ac < bc$ et $ca < cb$,
2. $a < b \Rightarrow b^{-1} < a^{-1}$,
3. $a < b$ et $c < d \Rightarrow ac < bd$,
4. $1 < a \Leftrightarrow a \in S$.

Démonstration. Nous utilisons les notations et la numérotation de la définition 6.1.1. Nous montrons que la relation \leq est réflexive, transitive et antisymétrique :

- La relation est réflexive par définition ;
- Soient $a, b, c \in G$ tels que $a \leq b$ et $b \leq c$. Si on a $a = b$ ou $b = c$, alors on a directement $a \leq c$. Dans le cas contraire, par définition, on a $a^{-1}b \in S$ et $b^{-1}c \in S$. D'après la condition (b), l'ensemble S est stable par produit, on a donc $a^{-1}c \in S$, donc $a \leq c$.
- Enfin, si $a \leq b$ et $b \leq a$ et $a \neq b$, alors on obtient que $a^{-1}b \in S$ et $b^{-1}a \in S$, ce qui implique aussi $a^{-1}b \in S^{-1}$, c'est absurde puisque $S \cap S^{-1} = \emptyset$.

On obtient que \leq est bien un ordre sur G .

Montrons que cet ordre est total. Vu la condition (a), étant donné $a, b \in G$, alors $a^{-1}b = 1$, donc $a = b$, ou $a^{-1}b$ appartient à S , auquel cas $a < b$, ou $a^{-1}b \in S^{-1}$, qui implique $(a^{-1}b)^{-1} \in S$ et donc $b^{-1}a \in S$, et finalement $b < a$.

La propriété 4 découle directement de la définition de l'ordre \leq . En effet, $a < b$ signifie exactement $a^{-1}b \in S$. Donc $1 < b$ est équivalent à $b \in S$.

Montrons la propriété 1. La première partie découle directement de la définition. En effet, vu que $a < b \Leftrightarrow a^{-1}b \in S$, on a

$$\begin{aligned} ca < cb &\Leftrightarrow (ca)^{-1}cb \in S \\ &\Leftrightarrow a^{-1}c^{-1}cb \in S \\ &\Leftrightarrow a^{-1}b \in S. \end{aligned}$$

Pour la deuxième partie, on utilise la condition (c) avec $a^{-1} \in G$ pour obtenir

$$\begin{aligned} a^{-1}b \in S &\Rightarrow aa^{-1}ba^{-1} \in S \\ &\Rightarrow ba^{-1} \in S. \end{aligned}$$

On procède de la même façon pour $ac \in G$:

$$\begin{aligned} a^{-1}b \in S &\Rightarrow ba^{-1} \in S \\ &\Rightarrow (ac)^{-1}ba^{-1}ac \in S \\ &\Rightarrow (ac)^{-1}bc \in S \Leftrightarrow ac < bc. \end{aligned}$$

De plus, on obtient les propriétés¹ 2 et 3 comme conséquences immédiates de la première.

Pour la deuxième propriété, on a, en appliquant la propriété 1 avec a^{-1} puis b^{-1} ,

$$a < b \Rightarrow aa^{-1} < ba^{-1} \Rightarrow b^{-1}aa^{-1} < b^{-1}ba^{-1}.$$

Pour la troisième propriété, on a par la propriété 1,

$$a < b \Rightarrow ac < bc \text{ et } c < d \Rightarrow bc < bd.$$

Donc

$$a < b \text{ et } c < d \Rightarrow ac < bc < bd \Rightarrow ac < bd.$$

□

Théorème 6.1.5 (Réciproque). *Si G est un groupe muni d'un ordre total \leq satisfaisant la propriété 1 du théorème précédent, alors*

$$S = \{x \in G \mid 1 < x\}$$

est l'unique sous-ensemble de G tel que

- 1) (G, S) est un groupe ordonné ;
- 2) l'ordre associé à S au moyen de la définition 6.1.3 est \leq .

Démonstration. Si $G = \{1\}$, le seul ordre sur G est défini par $1 \leq 1$. L'ensemble S de l'énoncé est vide, et on vérifie directement que (G, S) est un groupe ordonné. L'ordre associé à S est bien \leq , comme on le vérifie à partir de la définition 6.1.3, ou au vu du fait qu'il n'y a qu'un ordre sur G .

Supposons maintenant que G n'est pas trivial. Comme la propriété 1 entraîne la deuxième, on a

$$1 < a \Leftrightarrow a^{-1} < 1.$$

On constate donc que $S^{-1} = \{x \in G \mid x < 1\}$. La condition (a) de la définition suit, puisque l'ordre \leq est total : on a

$$G = \{x \in G \mid x < 1\} \cup \{1\} \cup \{x \in G \mid 1 < x\}.$$

1. En fait, la propriété 2 a déjà été établie dans les lignes précédentes, mais il est utile pour des développements futurs de l'obtenir à partir de la première propriété.

Montrons que la condition (c) est vérifiée. Soit $x \in G$ et $s \in S$. On a $1 < s$. En utilisant la propriété 1, on obtient

$$1 < s \Rightarrow x^{-1}1x < x^{-1}sx \Rightarrow 1 < x^{-1}sx.$$

Donc $x^{-1}sx \in S$.

Enfin, comme la première propriété entraîne la troisième, si $a, b \in S$, on a $1 < a$ et $1 < b$, donc $1 < ab$. La condition (b) est également vraie.

Il reste à montrer qu'on a bien, pour tous $a, b \in G$, $a \leq b \Leftrightarrow a = b$ ou $a^{-1}b \in S$. Mais on a par la propriété 3 du théorème 6.1.4

$$a < b \Leftrightarrow a^{-1}a \leq a^{-1}b \Leftrightarrow a^{-1}b \in S.$$

Il reste à montrer l'unicité de S . Mais si \leq est l'ordre associé à S , par la propriété 4 du théorème 6.1.4, on a $a \in S$ si et seulement si $1 < a$. \square

Dans la section suivante, nous allons définir la notion d'anneau ordonné. Si A est un anneau, muni des opérations d'addition et de multiplication, alors $(A, +, 0)$ est un groupe commutatif, généralement écrit en notation additive. Nous traduisons dès lors ici les définitions de cette section dans ce contexte.

Définition 6.1.6. Un *groupe ordonné* commutatif est un couple (G, S) , où G est un groupe et S est une partie de G telle que

- (a) $\{-S, \{1\}, S\}$ est une partition de G ,
- (b) $S + S \subset S$.

L'équivalence avec la donnée d'un ordre total étudiée dans les résultats ci-dessus conduit à définir l'ordre associé à S par la condition $a < b$ si et seulement si $b - a \in S$, et S est alors l'ensemble des éléments de G strictement supérieurs à l'unité 0 de G . La condition (c) disparaît puisque le groupe est supposé additif.

Exercice 6.1.7. Un exemple de groupe ordonné commutatif additif est donné par $(\mathbb{R}, \mathbb{N}^*)$, et $(\mathbb{R}^*, \mathbb{N}^*)$ est un groupe ordonné multiplicatif. Cependant, on constate directement que $(\mathbb{N}, \mathbb{N}^*)$ n'est pas un groupe ordonné commutatif additif.

6.1.2 Anneaux ordonnés

Nous passons à la définition des anneaux ordonnés, et nous suivons la même démarche que dans le cas des groupes. Nous donnons la définition d'un ensemble ordonnant (qui permet d'ordonner), et nous définissons un ordre associé à cet ordonnant. Le travail a en fait déjà été effectué puisque tout anneau est d'abord un groupe. Il reste donc à demander la ou les propriété(s) adéquate(s) pour que l'ordre associé à cet ordonnant soit compatible avec la multiplication dans l'anneau.

Définition 6.1.8. Un *anneau ordonné* est un couple (A, P) , où A est un anneau et P est une partie de A telle que (A, P) soit additivement un groupe ordonné pour la structure additive de A , et telle que P soit stable pour la multiplication.

Le fait que (A, P) soit additivement un groupe ordonné permet de définir un ordre total, l'*ordre de* (A, P) ou l'ordre sur A associé à P , comme nous l'avons décrit à la section précédente : on a $a < b$ si et seulement si $b - a \in P$.

On appelle P l'*ordonnant de* (A, P) ou un *ordonnant de* A . En considérant la version additive du théorème 6.1.4 (que nous rappelons ci-dessous), on a l'équivalence entre $x \in P$ et $0 < x$. On dit donc aussi que P est l'*ensemble des éléments positifs de l'anneau ordonné* A . Enfin, nous dirons qu'un anneau donné A peut être *structuré en anneau ordonné* s'il admet un ordonnant P .

L'ordre sur A associé à P est fixé univoquement par la structure additive. Il reste maintenant à montrer que la propriété de stabilité rend l'ordre compatible avec la multiplication. C'est l'objet du résultat suivant.

Théorème 6.1.9. *Dans un anneau ordonné (A, P) , on a les règles habituelles du calcul des inégalités :*

1. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$,
2. $a < b \Rightarrow -b < -a$,
3. $a < b$ et $c < d \Rightarrow a + c < b + d$,
4. $0 < a \Leftrightarrow a \in P$,
5. $0 < a$ et $0 < b \Rightarrow 0 < ab$,
6. $0 < a$ et $b < 0 \Rightarrow ab < 0$ et $ba < 0$,
 $c < a$ et $0 < b \Rightarrow cb < ab$ et $bc < ba$,
 $c < a$ et $b < 0 \Rightarrow ab < cb$ et $ba < bc$,
7. $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$.

Démonstration. Les propriétés 1 à 4 découlent du théorème 6.1.4. Pour la propriété 5, si $0 < a$ et $0 < b$, alors a et b appartiennent à P . Vu la stabilité de P pour la multiplication de A , alors ab appartient à P et donc $0 < ab$, et de même $0 < ba$.

Montrons que les propriétés 6 découlent directement de la propriété 5.

- Montrons que $0 < a$ et $b < 0 \Rightarrow ab < 0$ et $ba < 0$.

En utilisant les propriétés 2 et 5, on a

$$\begin{aligned} 0 < a \text{ et } b < 0 &\Rightarrow 0 < a \text{ et } 0 < -b \\ &\Rightarrow 0 < -(ab) \\ &\Rightarrow ab < 0. \end{aligned}$$

En procédant de la même manière, on a aussi

$$b < 0 \text{ et } 0 < a \Rightarrow ba < 0.$$

- Montrons que $c < a$ et $0 < b \Rightarrow cb < ab$ et $bc < ba$.

Par définition de l'ordre, on a $c < a$ si et seulement si $0 < a - c$. Ensuite, en appliquant la propriété 5, on a

$$\begin{aligned} c < a \text{ et } 0 < b &\Rightarrow 0 < a - c \text{ et } 0 < b \\ &\Rightarrow 0 < (a - c)b \\ &\Rightarrow 0 < ab - cb \\ &\Rightarrow cb < ab, \end{aligned}$$

et en procédant de la même manière, on a aussi

$$0 < b \text{ et } c < a \Rightarrow bc < ba.$$

- Montrons que $c < a$ et $b < 0 \Rightarrow ab < cb$ et $ba < bc$.

En utilisant la propriété 2, on a $b < 0 \Rightarrow 0 < -b$.

Ainsi, vu le point précédent et la propriété 2, on obtient que

$$\begin{aligned} c < a \text{ et } b < 0 &\Rightarrow c < a \text{ et } 0 < -b \\ &\Rightarrow c(-b) < a(-b) \text{ et } (-b)c < (-b)a \\ &\Rightarrow -cb < -ab \text{ et } -bc < -ba \\ &\Rightarrow ab < cb \text{ et } ba < bc. \end{aligned}$$

Enfin, pour la propriété 7, on applique directement la propriété 5 en notant que $a^2 = (-a)^2$ et c'est donc le carré d'un nombre strictement positif si $a \neq 0$. \square

Corollaire 6.1.10. *Si (A, P) est un anneau ordonné non trivial, alors A et P sont infinis et l'anneau A n'a aucun diviseur de 0. Si en outre l'anneau A possède l'élément unité 1, alors on a $-1 < 0 < 1$ et une somme finie de produits $a_1^2 \dots a_s^2$ ne peut être strictement négative.*

Démonstration. Puisque pour la structure additive de A , (A, P) est un groupe ordonné, par définition, le caractère infini découle de la remarque 6.1.2.

Si $a, b \in A$ sont tels $ab = 0$, alors on a aussi

$$(-a)b = a(-b) = (-a)(-b) = 0.$$

Si a et b sont non nuls, il y a dans ces produits au moins un qui est le produit de deux éléments strictement positifs. Il ne peut alors être nul, par la propriété 5 du théorème 6.1.9, une contradiction.

Si l'anneau possède une unité 1 et est non trivial, alors $1 \neq 0$, et par le théorème 6.1.9 (propriété 7), on a $1 = 1^2 > 0$. Par la propriété 2 de ce même théorème, on a alors $-1 < -0 = 0$.

Enfin, par la propriété 7 du même théorème, si $a_1, \dots, a_s \in A$ sont non nuls, alors a_1^2, \dots, a_s^2 sont strictement positifs, et par la propriété 5, leur produit aussi. Si l'un d'entre eux est nul, leur produit aussi. Donc les produits de carrés sont positifs ou nuls, et leurs sommes finies aussi, par la propriété 3 du même théorème. \square

La proposition suivante, sorte de réciproque du théorème 6.1.9, indique que tout ordre total compatible avec les opérations est associé à un ordonnant.

Théorème 6.1.11 (Réciproque). *Si l'anneau $A \neq \{0\}$ possède un ordre total \leq vérifiant les propriétés 1 et 5 du théorème 6.1.9, alors l'ensemble $P = \{x \in A \mid 0 < x\}$ est l'unique sous-ensemble de A tel que*

- 1) (A, P) est un anneau ordonné;
- 2) l'ordre associé à P au moyen de la définition 6.1.3 (dans sa version additive) est \leq .

Démonstration. Puisqu'un anneau ordonné est avant tout un groupe ordonné, le théorème 6.1.5 (dans sa version additive) indique que l'ensemble P de l'énoncé est l'unique sous-ensemble qui satisfait la deuxième condition de l'énoncé et fait de (A, P) un groupe ordonné. On a donc démontré l'unicité. Pour l'existence, il faut encore montrer que P est stable pour la multiplication. C'est le cas, vu la propriété 5 du théorème 6.1.9. \square

Exemple 6.1.12. L'anneau des entiers \mathbb{Z} possède un ordonnant unique.

En effet, si (\mathbb{Z}, P) est un anneau ordonné, alors pour l'ordre $<$ associé à P , on sait que $P = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x\}$, et par le corollaire 6.1.10, on a donc $1 \in P$. Puisque P est stable pour l'addition, il en est de même pour tout naturel positif n . Par contre, $-n \notin P$, car sinon $0 \in P$, ce qui est absurde. On peut ainsi conclure que P ne peut être que l'ensemble des entiers strictement positifs : $P = \mathbb{N}^*$. Pour conclure, il faut encore montrer que c'est bien un ordonnant pour l'anneau \mathbb{Z} . C'est le cas puisque dans \mathbb{Z} , le produit de deux nombres strictement positifs est positif.

6.1.3 Corps ordonnés

Nous étudions maintenant quelques propriétés des corps ordonnés. Puisqu'un corps est un anneau avec unité où tout élément non nul est inversible, la définition de corps ordonné est évidente. Rappelons maintenant la définition de la caractéristique d'un anneau avec unité.

Définition 6.1.13. Si A est un anneau avec unité 1, définissons

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow A : z \mapsto f(z) = \begin{cases} 1 + \cdots + 1 & (z \text{ termes}) & \text{si } z \in \mathbb{N}^*, \\ -f(-z) & & \text{si } -z \in \mathbb{N}^*, \\ 0 & & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Rappelons également les propriétés de f .

Proposition 6.1.14. *L'application f est un homomorphisme d'anneaux. En particulier, $\ker(f)$ est un sous-groupe de \mathbb{Z} , et est donc égal à $n\mathbb{Z}$ ($n \in \mathbb{N}$). De plus, $\mathbb{Z}/\ker(f)$ est isomorphe à $f(\mathbb{Z})$. Si $n = 0$, alors A contient un sous-anneau isomorphe à \mathbb{Z} . Si $n = 1$, alors A est trivial. Si l'anneau A n'a pas de diviseur de 0, alors $n = 0$ ou n est premier.*

Démonstration. Le fait que f soit un homomorphisme est une vérification directe des propriétés nécessaires. Le noyau d'un homomorphisme de groupes est un sous-groupe, et la liste des sous-groupes de \mathbb{Z} est celle qui est donnée dans l'énoncé. L'isomorphie donnée dans l'énoncé découle directement du premier théorème d'isomorphie pour les anneaux. Dans le cas où n est nul, on a $\ker(f) = \{0\}$, donc \mathbb{Z} est isomorphe à $f(\mathbb{Z})$. Dans le cas où $n = 1$, f est nul, donc $1 = f(1) = 0$ et pour tout $a \in A$, on a $1a = 0a = 0$, donc A est réduit à $\{0\}$.

Si n est un entier non nul et non premier, alors il existe p et q strictement compris entre 1 et n tels que $n = pq$. On a alors $f(p) \neq 0$ et $f(q) \neq 0$, mais $f(p)f(q) = f(pq) = f(n) = 0$, d'où une contradiction. \square

Définition 6.1.15. Le nombre n défini dans la proposition 6.1.14 est appelé la caractéristique de A .

Étendons maintenant l'homomorphisme f au corps des rationnels.

Théorème 6.1.16. *Tout corps A de caractéristique nulle contient un sous-corps isomorphe au corps \mathbb{Q} des nombres rationnels.*

Démonstration. On souhaite étendre f en un homomorphisme f^* de \mathbb{Q} dans A . On n'a pas le choix : pour tout $s \in \mathbb{Q}^*$, on doit avoir

$$f^*(s)f^*(s^{-1}) = f^*(ss^{-1}) = f^*(1) = 1.$$

Donc

$$f^*(s^{-1}) = (f^*(s))^{-1} = (f(s))^{-1}.$$

On définit donc l'application

$$f^* : \mathbb{Q} \rightarrow A : rs^{-1} \mapsto f(r)(f(s))^{-1}.$$

L'application f^* est bien définie :

- Puisque f est injectif et que $f(0) = 0$, si $s \neq 0$, alors $f(s) \neq 0$ et donc $f(s)$ est inversible dans A .
- Si $r, r' \in \mathbb{Z}$ et $s, s' \in \mathbb{Z}^*$, sont tels que $rs^{-1} = r's'^{-1}$, alors on a $rs' = r's$, et donc puisque f est un homomorphisme :

$$f(r)f(s') = f(r')f(s).$$

Vu la commutativité de $f(\mathbb{Z})$ et l'inversibilité de $f(s)$ et $f(s')$, on obtient ainsi que $f(r)(f(s))^{-1} = f(r')(f(s'))^{-1}$, c'est-à-dire $f^*(rs^{-1}) = f^*(r's'^{-1})$.

L'application f^* est un homomorphisme pour l'addition et la multiplication :

- On a pour tous $r, r' \in \mathbb{Z}$ et $s, s' \in \mathbb{Z}^*$,

$$\begin{aligned} f^*(rs^{-1} + r's'^{-1}) &= f^*((rs' + sr')(ss')^{-1}) = f(rs' + sr')(f(ss'))^{-1} \\ &= (f(r)f(s') + f(s)f(r'))f(s)^{-1}f(s')^{-1}. \end{aligned}$$

D'autre part, on a également

$$\begin{aligned} f^*(rs^{-1}) + f^*(r's'^{-1}) &= f(r)f(s)^{-1} + f(r')f(s')^{-1} \\ &= f(r)f(s')f(s')^{-1}f(s)^{-1} + f(r')f(s)f(s)^{-1}f(s')^{-1}. \end{aligned}$$

Ces deux éléments sont égaux vu la commutativité de $f(\mathbb{Z})$.

- De même, on a pour tous $r, r' \in \mathbb{Z}$ et $s, s' \in \mathbb{Z}^*$,

$$f^*(rs^{-1}r's'^{-1}) = f^*((rr')(ss')^{-1}) = f(rr')f(ss')^{-1} = f(r)f(r')f(s)^{-1}f(s')^{-1}$$

et

$$f^*(rs^{-1})f^*(r's'^{-1}) = f(r)f(s)^{-1}f(r')f(s')^{-1}.$$

Ces deux éléments sont égaux vu la commutativité de $f(\mathbb{Z})$.

L'application f^* est injective : si $f^*(rs^{-1}) = 0$, alors $f(r)f(s)^{-1} = 0$, mais puisque $f(s)$ est inversible, cela implique $f(r) = 0$, puis, vu l'injectivité de f , $r = 0$, et donc $rs^{-1} = 0$.

Ainsi, $f^*(\mathbb{Q})$ est un sous-corps de A isomorphe à \mathbb{Q} . \square

Théorème 6.1.17. *Si (A, P) est un corps ordonné, alors A est de caractéristique nulle et P est un sous-groupe normal multiplicatif de A^* , d'indice 2. De plus, si on pose $S = \{x \in A \mid x > 1\}$, alors (P, S) est un groupe ordonné.*

Démonstration. Notons \leq l'ordre associé à P . Par la propriété 4 du théorème 6.1.9, on sait que pour cet ordre

$$P = \{x \in A : 0 < x\}.$$

Le corollaire 6.1.10 indique que $0 < 1$, donc 1 appartient à P . La stabilité additive de P montre que pour tout naturel n non nul, $f(n) = 1 + \dots + 1$ ne s'annule pas. La caractéristique de A est donc nulle.

Montrons que P est un sous-groupe multiplicatif de A^* .

- Bien sûr, par définition $0 \notin P$, et donc $P \subset A^*$;
- Le sous-ensemble P est stable par multiplication : c'est la propriété 5 du théorème 6.1.9;
- Nous venons de montrer qu'il contient l'unité 1;
- Il reste à montrer que P est stable par passage à l'inverse, mais pour tout $a \in P$, a est inversible et $(a^{-1})^2$ appartient à P vu la propriété 7 du théorème 6.1.9. Alors $a^{-1} = a(a^{-1})^2$ appartient à P .

Le fait que P soit d'indice 2 et normal découle du fait qu'il n'y a que deux classes latérales, à droite ou à gauche, à savoir P et $-P = (-1)P = P(-1)$, puisque $\{-P, P\}$ est une partition de A^* . Dès lors, P est bien un sous-groupe normal de A^* , d'indice 2.

L'ensemble S est une partie de P , car $0 < 1$, donc pour tout $x \in S$, on a $x > 1 > 0$ et x appartient à P . Le théorème 6.1.5 assure que (P, S) est un groupe ordonné. \square

Ce théorème admet la réciproque suivante, qui sera utilisée sous peu pour prouver le théorème de Szele.

Proposition 6.1.18. *Si A est un corps et si P est sous-groupe normal multiplicatif de A^* , d'indice 2 (et normal), stable par addition, alors (A, P) est un corps ordonné, de caractéristique nulle.*

Démonstration. Si P est un sous-groupe de A^* , il contient 1 et pas 0. Puisqu'il est stable par addition, alors la somme de n fois 1 appartient à P pour tout naturel n non nul, donc elle est différente de 0 et A est bien de caractéristique nulle.

De plus, -1 n'appartient pas à P , sinon par stabilité additive, 0 appartiendrait à P , ce qui est absurde. Donc $-P = P(-1) = (-1)P$ est l'autre classe latérale de A^* . Puisque P est d'indice 2, $A^* = P \cup P(-1) = P \cup -P$ et l'union est disjointe. Donc $\{-P, \{0\}, P\}$ est une partition de A . Enfin, P est stable par multiplication, puisque c'est un sous-groupe de A^* , donc (A, P) est un corps ordonné. \square

Terminons par une proposition sur la possibilité d'inclure un ordonnant dans un autre.

Proposition 6.1.19. *Si P est un ordonnant de l'anneau A inclus dans une partie additivement stable Q de A^* , alors on a $P = Q$. Un ordonnant de l'anneau A ne peut contenir un autre ordonnant de A .*

Démonstration. Procédons par l'absurde et supposons qu'il existe un $x \in Q$ et $x \notin P$. Comme x est non nul et puisque $\{-P, \{0\}, P\}$ est une partition de A , on a $-x \in P$. Ainsi, vu que $P \subset Q$ et par stabilité additive de Q , on a $0 = x + (-x) \in Q$, d'où la contradiction. \square

Exemples 6.1.20. Les corps \mathbb{Q} et puis \mathbb{R} sont successivement construits et sont munis d'une relation d'ordre satisfaisant les conditions 1 et 5 du théorème 6.1.9. Le théorème 6.1.11 montre alors que dans les deux cas, l'ensemble des nombres strictement positifs fournit un ordonnant P du corps considéré. On peut montrer que c'est en fait le seul ordonnant possible.

- Dans le cas de \mathbb{Q} , si P' est un ordonnant, alors 1 appartient à P' par le corollaire 6.1.10. Puisque P' est stable par addition, tous les entiers positifs appartiennent à P' , et puisqu'il est stable par inversion et multiplication, P' contient tous les rationnels positifs. Par la proposition 6.1.19, on a $P = P'$.
- Dans le cas de \mathbb{R} , la façon dont on a construit l'ordre implique que tout nombre positif est un carré. Si P' est un ordonnant de \mathbb{R} , il contient P par le point 7 du théorème 6.1.9, et est donc égal à P .

Par contre, il existe des corps qui ne peuvent être structurés en corps ordonnés. C'est le cas de tous les corps finis vu le corollaire 6.1.10 (par exemple). C'est aussi le cas du corps des nombres complexes ou des quaternions toujours par ce même corollaire, puisque dans ces corps, on a $-1 = i^2$.

On peut dès lors se demander quel corps admet un ordonnant. Le théorème d'Artin et Schreier donne une réponse dans le cas des champs.

Théorème 6.1.21 (E. Artin et O. Schreier). *Le champ A possède un ordonnant si et seulement si -1 n'est pas une somme finie de carrés.*

Nous ne donnons pas la preuve de ce théorème, qui a été prouvé en 1927 par Artin et Schreier [2]. Il s'agit en fait d'une conséquence du théorème suivant, prouvé ultérieurement par Szele [21] en 1952 dans le cas des corps quelconques.

Théorème 6.1.22 (T. Szele). *Le corps A possède un ordonnant si et seulement si, dans A , -1 n'est pas une somme finie de produits $a_1^2 \dots a_s^2$.*

Avant de démontrer ce théorème, nous allons prouver quelques résultats nécessaires.

Lemme 6.1.23. *Soient A un corps et S l'ensemble des sommes finies de produits $a_1^2 \dots a_s^2$ de facteurs non nuls de A^* . On a*

$$S = \left\{ \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l a_{ij}^2, k \geq 1, l \geq 1 \text{ et } a_{ij} \in A^* \forall i \in \{1, \dots, k\}, \forall j \in \{1, \dots, l\} \right\}.$$

Si $-1 \notin S$, alors l'ensemble S est un sous-groupe normal de A^ , stable pour l'addition et tel que $0 \notin S$.*

Démonstration. Pour montrer que S est un sous-ensemble de A^* , il suffit de montrer que $0 \notin S$. Nous devons donc montrer que $S + S \subset S$, $SS \subset S$, $0 \notin S$, $S^{-1} \subset S$, $1 \in S$ et $a^{-1}Sa \subset S$, pour tout $a \in A^*$.

- $S + S \subset S$: Si $s, s' \in S$, alors $s + s'$ est encore une somme finie de produits de carrés de facteurs non nuls. Ainsi, $s + s' \in S$.
- $SS \subset S$: Si $s, s' \in S$, alors ss' est encore une somme finie de produits de carrés de facteurs non nuls, par distributivité du produit sur la somme. Ainsi, $ss' \in S$.
- $0 \notin S$: Procédons par l'absurde et supposons que $0 \in S$. Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} 0 &= a_1^2 \dots a_s^2 + b_1^2 \dots b_t^2 + \dots \\ \Leftrightarrow -a_1^2 \dots a_s^2 &= b_1^2 \dots b_t^2 + \dots \end{aligned}$$

Ainsi, on a $-a_1^2 \dots a_s^2 \in S$. En multipliant à droite par $a_s^{-2} \dots a_1^{-2}$, où $a_i^{-2} = (a_i^{-1})^2$ pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$, on obtient que $-1 \in S$ vu la stabilité par multiplication de S , ce qui est contraire aux hypothèses.

- $S^{-1} \subset S$: Soit $s \in S$. Vu que $s^{-2} = (s^{-1})^2$, on a $s^{-2} \in S$. Ainsi, étant donné que $SS \subset S$, on obtient que

$$s^{-1} = ss^{-2} \in S.$$

- $1 \in S$: En effet, $1 = 1^2$, dès lors $1 \in S$.
- $a^{-1}Sa \subset S$, pour tout $a \in A^*$: Soient $a \in A^*$ et $s \in S$. Vu les points précédents, nous savons que a^{-2} , s^{-1} et $(sa)^2 \in S$. Ainsi, vu la stabilité par multiplication de S ,

$$a^{-2}s^{-1}(sa)^2 = a^{-2}s^{-1}s^2a^2 = a^{-2}sa^2 \in S.$$

On peut conclure, car $a^{-2}s^{-1}(sa)^2 = a^{-1}(sa)^{-1}(sa)^2 = a^{-1}sa$.

Au total, S est un sous-groupe normal de A^* , stable pour l'addition et tel que $0 \notin S$. \square

Lemme 6.1.24. *Si A est un corps tel que -1 n'est pas une somme finie de produits de carrés d'éléments non nuls, alors S est un sous-groupe normal de A^* , stable pour l'addition, tel que $0 \notin S$ et tel que le quotient A^*/S est commutatif.*

Démonstration. Vu le lemme précédent 6.1.23, il suffit de montrer que le quotient est commutatif. Pour cela, montrons que $(xyx^{-1}y^{-1})S = S$ pour tous $x, y \in A^*$. On sait que

$$xS \ xS = x^2S = S, \text{ pour tout } x \in A^*,$$

d'où $x^{-1}S = xS$, pour tout $x \in A^*$. Ainsi, pour tous $x, y \in A^*$, on a

$$\begin{aligned} (xyx^{-1}y^{-1})S &= xS \ yS \ x^{-1}S \ y^{-1}S \\ &= xS \ yS \ xS \ yS \\ &= (xy)^2S \\ &= S. \end{aligned}$$

\square

Nous pouvons à présent démontrer le théorème de Szele.

Démonstration du théorème 6.1.22. La condition est nécessaire. Si P est un ordonnant de A , alors par le corollaire 6.1.10, on obtient successivement que -1 est strictement négatif, et qu'une somme finie de produits de carrés ne peut être strictement négative, donc -1 n'est pas une somme finie de produits de carrés.

Pour montrer que la condition est suffisante, par la proposition 6.1.18, il suffit de montrer qu'elle entraîne l'existence dans le groupe multiplicatif A^* d'un sous-groupe d'indice 2 stable pour l'addition.

Cherchons ce sous-groupe. Il devrait correspondre aux nombres positifs, il est donc naturel d'y inclure tous les carrés d'éléments non nuls, tous leurs produits et toutes leurs sommes. Soit S l'ensemble des éléments de A qui sont des sommes finies de produits $a_1^2 \dots a_s^2$ de facteurs non nuls.

Vu le lemme 6.1.23, nous savons que S est un sous-groupe normal propre de A^* , stable

pour l'addition. Mais il n'a aucune raison d'être d'indice 2. Nous devons considérer des sous-groupes contenant S pour construire le sous-groupe cherché.

Considérons Φ l'ensemble de tous les sous-groupes T de A^* tels que $S \subset T$, $-1 \notin T$ et $T+T \subset T$. Vu que S satisfait ces conditions, on sait que $\Phi \neq \emptyset$. Montrons que toute chaîne de Φ admet un majorant. Soit \mathcal{C} une chaîne de Φ ,

$$\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$$

est un majorant de \mathcal{C} , puisque pour tout $C \in \mathcal{C}$, $C \in \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$.

Vu le lemme de Zorn, il s'ensuit que Φ possède un élément maximal P . Le théorème sera alors démontré si (A, P) est un anneau ordonné. En considérant la formulation additive des définitions 1.1.1 et 6.1.8, pour que (A, P) soit un anneau ordonné, on doit avoir :

- $PP \subset P$, c'est bien le cas étant donné que P est un sous-groupe ;
- $P + P \subset P$, c'est bien le cas étant donné que $P \in \Phi$;
- $-x + P + x \subset P$ si $x \in A$, c'est bien le cas étant donné que dans un corps l'addition est commutative ;
- $\{P, \{0\}, -P\}$ partition de A .

Il reste à montrer que $\{P, \{0\}, -P\}$ est une partition de A . Il suffit de montrer que $P \cap -P = \emptyset$ et $P \cup -P = A^*$. Par l'absurde, supposons qu'il existe $x \in P \cap -P$. Dans ce cas, on a $x \in P$ et $-x \in P$. Dès lors $x + (-x) = 0 \in P$, ce qui est impossible. Ainsi, $P \cap -P = \emptyset$. Procédons également par l'absurde pour montrer que $P \cup -P = A^*$ et supposons qu'il existe $d \in A^*$ tel que $d \notin P \cup -P$. Notons P' l'ensemble des éléments $u + vd$, où u et v sont des éléments non simultanément nuls de $P \cup \{0\}$. Si $P' \in \Phi$, alors on obtiendra une contradiction, vu qu'on aura contredit la maximalité de P . Vérifions si $P' \in \Phi$.

1. $S \subset P'$, car l'ensemble P est une partie partie de P' , qui contient donc S .
2. $-1 \notin P'$: Sinon il existe $u, v \in P \cup \{0\}$ non simultanément nuls tels que $u + vd = -1$. On sait que $v \neq 0$, car sinon $-1 = u \in P$. Ainsi, on a $d = v^{-1}(-1 - u)$, donc $-d = v^{-1}(1 + u)$. Nous savons que $1 + u \in P$, car si $u = 0$, alors $1 \in P$ et si $u \neq 0$, alors $u \in P$ et on a $P + P \subset P$. Comme v^{-1} , $1 + u \in P$ et $PP \subset P$, on a $-d \in P$, donc $d \in -P$, ce qui est absurde étant donné que $d \notin P \cup -P$.
3. $P' + P' \subset P'$: Soient $(u, v), (u', v') \in (P \cup \{0\}) \times (P \cup \{0\}) \setminus \{(0, 0)\}$. On a

$$u + vd + u' + v'd = (u + u') + (v + v')d,$$

où $(u + u', v + v') \in (P \cup \{0\}) \times (P \cup \{0\}) \setminus \{(0, 0)\}$, car

$$\begin{cases} u + u' = 0 \\ v + v' = 0 \end{cases} \Rightarrow u = u' = v = v' = 0.$$

4. P' est un sous-groupe de A^* :

- $0 \notin P'$: Sinon il existe $u, v \in P \cup \{0\}$ non simultanément nuls tels que $u + vd = 0$. On sait que $v \neq 0$, car sinon $u = 0$ et u et v sont simultanément nuls, ce qui est contraire aux hypothèses. En procédant par l'absurde, on obtient également que $u \neq 0$ vu que $d \in A^*$. Ainsi, on a $d = v^{-1}(-u)$, donc $-d = v^{-1}u$. Comme $v^{-1}, u \in P$ et $PP \subset P$, on a $-d \in P$, donc $d \in -P$, ce qui est absurde étant donné que $d \notin P \cup -P$.
- $P'P' \subset P'$: Soient $(u, v), (u', v') \in (P \cup \{0\}) \times (P \cup \{0\}) \setminus \{(0, 0)\}$. On a

$$(u + vd)(u' + v'd) = uu' + uv'd + u'vd + vv'd^2 = (uu' + vv'd^2) + (uv' + u'v)d,$$
 où $(uu' + vv'd^2, uv' + u'v) \in (P \cup \{0\}) \times (P \cup \{0\}) \setminus \{(0, 0)\}$.
- $P'^{-1} \subset P'$: C'est évident comme on a la stabilité pour la multiplication et $S \subset P'$. En effet, soit $x \in P'$, on a

$$x^{-1} = x(x^{-1})^2 \in P'S \subset P'P' \subset P'.$$

Finalement, P' appartient à Φ et P ne serait pas maximal, d'où la contradiction. \square

6.2 Automorphismes d'anneaux ordonnés

On rappelle qu'un automorphisme d'un anneau A est un isomorphisme de A dans lui-même. C'est donc une bijection de A dans A qui préserve la somme, le produit et l'unité, de la manière habituelle. Si on considère des anneaux ordonnés, il est naturel de demander que les automorphismes préservent l'ordre, et cela conduit à la définition suivante.

Définition 6.2.1. Un *automorphisme de l'anneau ordonné* (A, P) est un automorphisme α de l'anneau A tel que $\alpha(P) = P$.

Proposition 6.2.2. Si P est un ordonnant de l'anneau A et si α est un automorphisme de A , alors $\alpha(P)$ est un aussi un ordonnant de A .

Démonstration. Vu que α est un automorphisme, $\alpha(P)$ est additivement et multiplicativement stable. En effet, si a', b' appartiennent à $\alpha(P)$, il existe $a, b \in P$ tels que $a' = \alpha(a)$ et $b' = \alpha(b)$. On a alors

$$a' + b' = \alpha(a) + \alpha(b) = \alpha(a + b) \in \alpha(P),$$

car P est stable par addition, et on procède de même pour $a'b' = \alpha(ab)$.

De même $0 \notin \alpha(P)$, sinon 0 s'écrirait $\alpha(a)$ pour $a \in P$, mais puisque $\alpha(0) = 0$, par injectivité de α , on obtiendrait $0 \in P$, ce qui est impossible.

De plus, $\alpha(P)$ est disjoint de $-\alpha(P)$. Sinon, il existerait a' dans $\alpha(P) \cap -\alpha(P)$, donc $a, b \in P$ tels que $a' = \alpha(a) = -\alpha(b)$. Puisque P est stable par addition, on aurait $a + b \in P$, mais aussi $\alpha(a + b) = 0$, donc $a + b = 0$, ce qui est absurde.

Enfin, tout $a' \in A^*$ appartient à $\alpha(P)$ ou à $\alpha(-P) = -\alpha(P)$. En effet, il existe $a \in A$ tel que $\alpha(a) = a'$. On ne peut pas avoir $a = 0$, sinon $a' = 0$. Donc a appartient à P ou à $-P$, et a' appartient à $\alpha(P)$ ou $\alpha(-P)$. \square

Proposition 6.2.3. *Si P est un ordonnant de l'anneau A et si l'automorphisme α de A vérifie $\alpha(P) \subset P$, alors α est un automorphisme de (A, P) .*

Démonstration. Pour que α soit un automorphisme de (A, P) , on doit avoir $\alpha(P) = P$.

Comme P est un ordonnant de l'anneau A et comme α est un automorphisme de A , en appliquant la proposition 6.2.2, on sait que $\alpha(P)$ est également un ordonnant de A . De plus, vu la proposition 6.1.19, on sait qu'un ordonnant de l'anneau A ne peut contenir un autre ordonnant de A . Or, par hypothèse, on a $\alpha(P) \subset P$. Cette inclusion ne peut donc être stricte, d'où $\alpha(P) = P$. \square

Proposition 6.2.4. *Si α est un automorphisme de l'anneau ordonné (A, P) , alors α est strictement croissant pour l'ordre \leq de (A, P) . Réciproquement, un automorphisme α de l'anneau A strictement croissant pour l'ordre de (A, P) est un automorphisme de (A, P) .*

Démonstration. Pour tous $x, y \in A$, on a

$$\begin{aligned} x < y &\Rightarrow 0 < y - x \\ &\Rightarrow y - x \in P \\ &\Rightarrow \alpha(y - x) \in \alpha(P) = P \\ &\Rightarrow 0 < \alpha(y) - \alpha(x) \\ &\Rightarrow \alpha(x) < \alpha(y). \end{aligned}$$

Réciproquement, on obtient $\alpha(P) \subset P$ et il suffit d'appliquer la proposition 6.2.3. \square

Proposition 6.2.5. *Si α est un automorphisme de l'anneau ordonné (A, P) , alors les puissances entières de α sont aussi des automorphismes de (A, P) .*

Démonstration. On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, α^n est un automorphisme de (A, P) :

- Si $n = 0$, alors α^0 est l'automorphisme identité de A .
- Fixons $n \in \mathbb{N}$ et supposons que la propriété est vérifiée pour α^n . Alors $\alpha^{n+1} = \alpha^n \circ \alpha$ est un automorphisme de l'anneau A et de plus

$$\alpha^{n+1}(P) = \alpha^n(\alpha(P)) = \alpha^n(P) = P,$$

puisque α est un automorphisme de (A, P) par hypothèse et puisque α^n en est un aussi par hypothèse de récurrence. Donc α^{n+1} est un automorphisme de (A, P) .

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, α^{-n} est l'inverse de α^n . C'est donc aussi un automorphisme de (A, P) . \square

Proposition 6.2.6. *L'anneau des entiers \mathbb{Z} , le corps des nombres rationnels \mathbb{Q} et celui des réels \mathbb{R} ne possèdent qu'un seul automorphisme d'anneau. Il s'agit de l'identité.*

Démonstration. Dans un anneau A avec unité, un automorphisme α vérifie $\alpha(1) = 1$. En effet, pour tout $a \in A$, on a

$$\alpha(a) = \alpha(1a) = \alpha(1)\alpha(a).$$

On obtient le résultat annoncé en considérant $a = \alpha^{-1}(1)$.

L'anneau \mathbb{Z} est engendré par 1 et cela entraîne l'unicité de l'automorphisme d'anneaux. En effet, si α est un automorphisme, par récurrence, on a $\alpha(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On sait que $\alpha(0) = 0$, et on a $\alpha(-n) = -\alpha(n) = -n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $\alpha = id$.

Si α est un automorphisme de \mathbb{Q} , alors pour les mêmes raisons que ci-dessus, la restriction de α à \mathbb{Z} est l'identité, et pour tous $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{Z}^*$, on a

$$\alpha(mn^{-1}) = \alpha(m)\alpha(n^{-1}) = (\alpha(m))(\alpha(n))^{-1} = mn^{-1},$$

et donc α est l'identité.

Dans \mathbb{R} , l'ordonnant P est unique : c'est l'ensemble des nombres positifs pour l'ordre naturel. Si α est un automorphisme de (\mathbb{R}, P) , alors par les arguments ci-dessus, la restriction de α à \mathbb{Q} est l'identité. De plus, α est strictement croissant pour l'ordre naturel \leq de \mathbb{R} , vu la proposition 6.2.4. Par définition de \mathbb{R} , tout réel r est caractérisé par la classe des rationnels $q \leq r$. Mais puisque α est strictement croissant, on a

$$q \leq r \Leftrightarrow q = \alpha(q) \leq \alpha(r),$$

donc r et $\alpha(r)$ sont caractérisés par les mêmes classes de rationnels et doivent donc coïncider. \square

6.3 La construction de Hilbert

Dans cette section, nous allons construire un corps ordonné non commutatif. L'idée repose sur une extension d'un corps ordonné (A, P) à l'aide d'un automorphisme α de (A, P) . On va construire un corps ordonné $H(\alpha) = (B, T)$, dans lequel (A, P) est naturellement plongé. Cette construction permet d'illustrer l'existence d'un corps ordonné non commutatif.

Définition 6.3.1 (Définition du groupe $(B, +)$). On définit B comme étant l'ensemble des familles $a = (a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ d'éléments de A , où un nombre fini de termes a_i d'indice négatif sont non nuls. L'addition dans B est définie terme à terme par

$$+ : B \times B \rightarrow B : (a, b) \mapsto a + b,$$

où

$$(a + b)_i = a_i + b_i$$

pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

On a ainsi défini un groupe additif.

Proposition 6.3.2. *L'addition dans B est interne et munit B d'une structure de groupe commutatif, où le neutre est l'élément $0 = (0)_{i \in \mathbb{Z}}$.*

Démonstration.

- Démontrons que la somme est interne. Pour tous $a, b \in B$, il existe N_a et N_b tels que $a_i = 0$ pour $i < N_a$ et $b_i = 0$ pour $i < N_b$. On a donc

$$(a + b)_i = a_i + b_i = 0,$$

dès que $i < \min\{N_a, N_b\}$.

- La somme est commutative puisque pour tous $a, b \in B$, on a

$$(b + a)_i = b_i + a_i = a_i + b_i = (a + b)_i,$$

pour tout $i \in \mathbb{Z}$, puisque la somme dans A est commutative.

- Elle est associative puisque pour tous $a, b, c \in B$, on a

$$((a + b) + c)_i = (a + b)_i + c_i = (a_i + b_i) + c_i = a_i + (b_i + c_i) = (a + (b + c))_i,$$

pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

- L'élément $0 \in B$ est défini par $0_i = 0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$, et on a directement $a + 0 = a = 0 + a$ pour tout $a \in B$.
- Enfin pour tout $a \in B$, on définit l'opposé $-a$ de a par $(-a)_i = -a_i$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Cet élément est bien dans B car il n'a qu'un nombre fini de composantes négatives, et on a bien $a + (-a) = (-a) + a = 0$, comme on le vérifie en calculant chaque composante de cette somme.

□

Nous allons maintenant introduire une multiplication dans B , qui va permettre de munir cet ensemble d'une structure de corps. L'idée pour bien comprendre cette définition peut être expliquée simplement si on se base sur la remarque suivante.

Remarque 6.3.3. On peut voir B comme un sous-ensemble de l'ensemble des séries formelles (plus précisément des séries de Laurent formelles) à coefficients dans A , indicées par \mathbb{Z} . À $a \in B$, on associe simplement la série $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k X^k$. La somme dans B n'est rien d'autre que la somme usuelle de ces séries. Pour la multiplication, on souhaite définir le produit des éléments a et b de B . On s'intéresse au produit des séries correspondantes. Le produit classique est obtenu comme si on distribuait et collectait les termes de même degré :

$$\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k X^k \right) \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} b_l X^l \right) = \sum_{k, l \in \mathbb{Z}} a_k b_l X^{k+l} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k b_{i-k} \right) X^i.$$

Si on veut faire apparaître l'action d'un automorphisme α , on peut faire de même, mais en convenant que le symbole X ne commute pas avec les coefficients qui le suivent, chaque

"commutateur" faisant apparaître une action de α . La formule du produit précédent se généralise donc à

$$\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k X^k \right) \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} b_l X^l \right) = \sum_{k, l \in \mathbb{Z}} a_k \alpha^k(b_l) X^{k+l} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \alpha^k(b_{i-k}) \right) X^i.$$

C'est exactement la définition que nous allons poser, tout en gardant le formalisme des suites que nous avons adopté ci-dessus.

Définition 6.3.4 (Multiplication). La multiplication dans B est

$$\cdot : B \times B \rightarrow B : (a, b) \mapsto a \cdot b,$$

où

$$(a \cdot b)_i = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \alpha^k(b_{i-k}) \quad (6.1)$$

pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Il convient d'effectuer certaines vérifications pour s'assurer que la définition est bien posée.

Proposition 6.3.5. *La multiplication dans B est bien définie : la série apparaissant dans (6.1) contient un nombre fini de termes. De plus le produit de deux éléments de B est encore un élément de B .*

Démonstration. Pour $a, b \in B$, il existe N_a et N_b tels que $a_i = 0$ si $i \leq N_a$ et $b_i = 0$ si $i \leq N_b$. Dans le i -ème terme de $a \cdot b$, les termes de la série sont $a_k \alpha^k(b_{i-k})$, $k \in \mathbb{Z}$. Ils sont nuls dès que $k < N_a$ ou $i - k < N_b$. Les seuls termes de la série qui peuvent être non nuls correspondent donc aux indices k tels que $N_a \leq k \leq i - N_b$. Donc la série est bien une somme finie.

Pour que le produit $a \cdot b$ appartienne à B , il faut que $(a \cdot b)_i = 0$ pour les indices i suffisamment petits. D'après la discussion précédente, pour i tel que $i - N_b < N_a$, tous les termes de la somme définissant $(a \cdot b)_i$ sont nuls. \square

Comme il est d'usage, nous ne noterons pas l'opération \cdot entre deux éléments de B à moins que cela ne prête à confusion.

Notons 1_B la famille (a_i) , où $a_0 = 1$ et $a_i = 0$ pour $i \neq 0$. Il est immédiat que 1_B est un neutre à gauche de la multiplication ainsi définie.

Proposition 6.3.6 (Structure d'anneau). *Si on définit $1 \in B$ par $1_i = \delta_{i,0}$, alors la structure $(B, +, 0, \cdot, 1)$ est un anneau avec unité à gauche.*

Démonstration. Commençons par vérifier que la multiplication est distributive par rapport à l'addition, à gauche et à droite. Pour tous $a, b, c \in B$, on a

$$(a(b+c))_i = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \alpha^k((b+c)_{i-k}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k (\alpha^k(b_{i-k}) + \alpha^k(c_{i-k})).$$

Puisque c'est une somme finie, on a finalement

$$(a(b+c))_i = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \alpha^k(b_{i-k}) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \alpha^k(c_{i-k}).$$

D'autre part, on a également par définition

$$(ab+ac)_i = (ab)_i + (ac)_i = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \alpha^k(b_{i-k}) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \alpha^k(c_{i-k}).$$

De même, pour la distributivité à droite, en procédant de la même manière, on a

$$((b+c)a)_i = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (b+c)_k \alpha^k(a_{i-k}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \alpha^k(a_{i-k}) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \alpha^k(a_{i-k}),$$

tandis que

$$(ba+ca)_i = (ba)_i + (ca)_i = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \alpha^k(a_{i-k}) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \alpha^k(a_{i-k}).$$

L'élément 1 est une unité à gauche puisque pour tout $a \in B$, et tout $i \in \mathbb{Z}$, on a

$$(1.a)_i = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1)_k \alpha^k(a_{i-k}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{k,0} \alpha^k(a_{i-k}) = a_i.$$

Il reste à prouver l'associativité de la multiplication. On a

$$((ab)c)_i = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (ab)_k \alpha^k(c_{i-k}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l \alpha^l(b_{k-l}) \right) \alpha^k(c_{i-k}).$$

D'autre part, on a aussi

$$(a(bc))_i = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \alpha^k((bc)_{i-k}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \alpha^k \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} b_j \alpha^j(c_{i-k-j}) \right).$$

En échangeant les lettres k et l et le fait que α soit un automorphisme, sachant qu'il s'agit de sommes finies, on a finalement

$$(a(bc))_i = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_l \alpha^l(b_j) \alpha^{l+j}(c_{i-l-j}).$$

En collectant dans cette somme finie les termes dont la somme des indices est égale à l'entier k , on voit qu'elle est égale à

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l, j \in \mathbb{Z}: l+j=k} a_l \alpha^l(b_j) \alpha^{l+j}(c_{i-l-j}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l \alpha^l(b_{k-l}) \right) \alpha^k(c_{i-k}),$$

et le résultat est prouvé. \square

Nous allons maintenant prouver que B est en fait un corps. Pour cela, nous aurons besoin d'un résultat, le théorème de Dickson [5].

Proposition 6.3.7 (Théorème de Dickson). *Si H est un ensemble muni d'une opération associative \cdot satisfaisant les conditions suivantes :*

- (1) *il existe $1_G \in H$ tel que $1_G a = a$, pour tout $a \in H$ (neutre à gauche);*
- (2) *pour tout $b \in H$, il existe $a \in H$ tel que $ab = 1_G$ (inverse à gauche).*

Alors, on a

1. $ba = 1_G$ (inverse à droite);
2. $a1_G = a$, pour tout $a \in H$ (neutre à droite).

Démonstration.

1. Soit $b \in H$, par (2), il existe $a \in H$ tel que $ab = 1_G$.

En utilisant (1) et l'associativité, on a

$$a = 1_G a = (ab)a = a(ba).$$

Comme $a \in H$, par (2), il existe $c \in H$ tel que $ca = 1_G$.

Ainsi, en utilisant l'associativité et (1), on a

$$\begin{aligned} ca = c(a(ba)) &\Leftrightarrow ca = (ca)(ba) \\ &\Leftrightarrow 1_G = 1_G(ba) \\ &\Leftrightarrow 1_G = ba. \end{aligned}$$

2. Soit $b \in H$, par (2) et la première partie de la preuve, il existe $a \in H$ tel que $ab = 1_G = ba$.

Ainsi, en utilisant l'associativité et (1), on a

$$b1_G = b(ab) = (ba)b = 1_G b = b.$$

□

Proposition 6.3.8. *Quels que soient le corps ordonné (A, P) et l'automorphisme α de (A, P) , la structure $(B, +, 0, \cdot, 1)$ est un corps.*

Démonstration. Nous avons à prouver que $(B^*, \cdot, 1)$ est un groupe. Par le théorème de Dickson, puisque nous savons que 1 est une unité à gauche, il suffit de prouver que tout élément non nul de B admet un inverse à gauche (au moins), et que B^* est stable pour la multiplication. Fixons un élément non nul $b \in B$ et écrivons l'équation $xb = 1$ pour $x \in B$: c'est par définition

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} x_i \alpha^i(b_{k-i}) = \delta_{k,0} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq 0. \end{cases} \quad (6.2)$$

Il existe $N_b \in \mathbb{Z}$ tel que $b_j = 0$ pour $j < N_b$ et $b_{N_b} \neq 0$. On définit de même N_x pour x . La somme ci-dessus s'écrit alors, pour tout k

$$\sum_{i=N_x}^{k-N_b} x_i \alpha^i(b_{k-i}) = \delta_{k,0}.$$

Pour rendre les équations pour $k < 0$ trivialement satisfaites, nous fixons $N_x = -N_b$.

- Pour $k < 0$, la somme ci-dessus est vide, et l'équation (6.2) est donc satisfaite, pour ces valeurs de k .
- Pour $k = 0$, l'équation devient

$$x_{N_x} \alpha^{N_x}(b_{-N_x}) = 1.$$

et est satisfaite pour

$$x_{N_x} = \left(\alpha^{N_x}(b_{-N_x}) \right)^{-1}$$

- Pour $k > 0$, l'équation s'écrit

$$x_{k-N_b} \alpha^{k-N_b}(b_{N_b}) + \sum_{i=-N_b}^{k-N_b-1} x_i \alpha^i(b_{k-i}) = 0.$$

On peut donc déterminer x_{k-N_b} pour tout $k > 0$, par induction.

L'existence d'un inverse à gauche implique que B^* est stable pour la multiplication. En effet, si $x, y \in B^*$ sont tels que $xy = 0$, alors $x^{-1}xy = 0$ donc $1y = 0$, ce qui est absurde. \square

Pour terminer, nous définissons un ordonnant sur B , qui fait de $H(\alpha)$ un corps ordonné tel que (A, P) se plonge dans $H(\alpha)$.

Définition 6.3.9 (Ordonnant du corps B). Nous notons

$$T = \{b \in B : b_{N_b} \in P\},$$

où N_b est comme ci-dessus l'entier² tel que $b_{N_b} \neq 0$ et $b_k = 0$ pour $k < N_b$.

Vérifions que cette définition répond à la question.

Proposition 6.3.10. *L'ensemble T est un ordonnant de B .*

Démonstration. Vérifions les conditions de la définition.

- Puisque P est un ordonnant de A , pour $b \neq 0$, on a $b_{N_b} \in P$ ou $-b_{N_b} \in P$, donc $b \in T$ ou $-b \in T$, les deux cas étant exclusifs. De plus, 0 n'appartient ni à T , ni à $-T$. Donc $\{-T, \{0\}, T\}$ est une partition de B .
- L'ensemble T est stable pour l'addition. En effet, pour $a, b \in T$, a et b sont non nuls, donc leurs termes a_{N_a} et b_{N_b} appartiennent à P . Si par exemple $N_a < N_b$, alors $N_{a+b} = N_a$, et $(a+b)_{N_{a+b}} = a_{N_a} \in P$. On procède de même si $N_a > N_b$. Si $N_a = N_b$, alors a_{N_a} et b_{N_a} appartiennent à P et donc leur somme appartient à P aussi. Elle est de plus non nulle, et on a donc $N_{a+b} = N_a$ et $(a+b)_{N_a}$ appartient à P , donc $a+b$ appartient à T .

2. Pour $b = 0$, N_b n'est pas défini, et nous définissons $0 \notin T$.

- L'ensemble T est stable pour l'addition. Si a, b appartiennent à T , ils sont non nuls, et on a donc $a_{N_a}, b_{N_b} \in T$. Nous avons étudié le premier terme potentiellement non nul de ab dans la preuve de la proposition 6.3.5 : il a un indice égal $N_a + N_b$ et vaut

$$(a + b)_{N_a + N_b} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \alpha^k (b_{N_a + N_b - k}) = a_{N_a} \alpha^{N_a} (N_b).$$

Cet élément de A appartient à P parce que P est stable pour la multiplication et parce que $\alpha^{N_a}(N_b)$ appartient à P , vu la proposition 6.2.5.

□

Il reste à montrer que le corps ordonné $H(\alpha) = (B, T)$ est une extension de (A, P) . On a un plongement naturel de A dans B : on associe à a une suite dont a est le terme d'indice nul et dont tous les autres termes sont nuls. On vérifie ensuite que cette identification a les bonnes propriétés.

Définition 6.3.11 (Injection de A dans B). Nous définissons

$$\iota : A \rightarrow B : a \mapsto \iota(a) : (\iota(a))_i = a \delta_{i,0}.$$

Proposition 6.3.12. *L'application ι est un homomorphisme injectif de A dans B , tel que $\iota(P) = \iota(A) \cap T$, donc ι identifie (A, P) à un sous-corps ordonné de (B, T) .*

Démonstration. Par définition des neutres additif et multiplicatif dans B , on a $\iota(0) = 0$ et $\iota(1) = 1$. De plus, ι est un homomorphisme d'anneaux puisque pour tous $a, b \in A$, et $i \in \mathbb{Z}$, on a

$$(\iota(a + b))_i = (a + b) \delta_{i,0} = a \delta_{i,0} + b \delta_{i,0} = (\iota(a) + \iota(b))_i$$

et

$$(\iota(a)\iota(b))_i = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\iota(a))_k \alpha^k ((\iota(b))_{i-k}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a \delta_{k,0} \alpha^k (b \delta_{i-k,0}).$$

La somme est donc réduite à un seul terme $a \alpha^0 (b \delta_{i,0}) = (ab) \delta_{i,0} = (\iota(ab))_i$, ce qui suffit.

L'application ι est injective. Si $\iota(a) = \iota(a')$, pour $a, a' \in A$, alors

$$a = (\iota(a))_0 = (\iota(a'))_0 = a'.$$

L'égalité $\iota(P) = \iota(A) \cap T$ découle directement de la définition de ι et de T , et le résultat suit. □

Pour arriver au résultat principal de ce chapitre, il nous reste à analyser les conditions pour que l'extension que nous venons de construire soit commutative.

Théorème 6.3.13. *L'extension $H(\alpha) = (B, T)$ du corps ordonné (A, P) est commutative si et seulement si A est un champ dont α est l'automorphisme identité.*

Démonstration. La condition est nécessaire. En effet, supposons que B soit commutatif.

- Alors A est commutatif. En effet pour tous $a, a' \in A$, on a

$$\iota(aa') = \iota(a)\iota(a') = \iota(a')\iota(a) = \iota(a'a).$$

Donc $aa' = a'a$ puisque ι est injectif.

- L'homomorphisme α est l'identité de A . En effet, dans le cas contraire, il existe $a \in A$ tel que $\alpha(a) \neq a$. En définissant $b \in B$ par $b_i = \delta_{i,1}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a

$$(\iota(a)b)_1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\iota(a))_k \alpha^k(b_{1-k}) = a1 = a \quad \text{et} \quad (b\iota(a))_1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \alpha^k((\iota(a))_{1-k}) = \alpha(a),$$

d'où une contradiction.

La condition est suffisante. En effet, pour tous $a, b \in B$, on a, si α est l'identité,

$$(ab)_i = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k (b_{i-k}) \quad \text{et} \quad (ba)_i = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k (a_{i-k}).$$

On constate que ces deux sommes coïncident à l'aide d'un changement d'indices, si A est commutatif. \square

Nous arrivons au théorème fondamental de ce chapitre. On a vu que \mathbb{Q} n'admet pas d'automorphisme d'anneau non trivial. La proposition précédente montre que la construction de Hilbert ne donne pas un corps ordonné non commutatif dans ce cas. Mais elle admet un automorphisme non trivial, et peut donc être étendue en un corps ordonné non commutatif.

Théorème 6.3.14. *Le champ des nombres rationnels \mathbb{Q} admet une extension de corps ordonné commutative et munie d'un automorphisme de corps ordonné différent de l'identité. En particulier, il existe des corps ordonnés non commutatifs.*

Démonstration. Si α est l'automorphisme identité de \mathbb{Q} , alors la construction de Hilbert fournit un champ ordonné $H(id) = (B, P)$, qui est une extension du corps ordonné \mathbb{Q} .

Nous définissons maintenant un automorphisme de cet anneau ordonné, distinct de l'identité. Soit en effet

$$\beta : B \rightarrow B : b \mapsto \beta(b) : (\beta(b))_i = 2^i b_i.$$

Alors β est visiblement différent de l'identité. De plus c'est une bijection de B dans B , puisque son inverse est donné par

$$\beta^{-1} : B \rightarrow B : b \mapsto \beta(b) : (\beta^{-1}(b))_i = 2^{-i} b_i.$$

De plus, on a $\beta(0) = 0$ et $\beta(1) = 1$, et β est un homomorphisme puisque pour tout $i \in \mathbb{Z}$,

$$(\beta(a+b))_i = 2^i (a+b)_i = 2^i (a_i + b_i) = 2^i a_i + 2^i b_i = (\beta(a) + \beta(b))_i,$$

et d'autre part, $(\beta(ab))_i = 2^i(ab)_i$ et

$$(\beta(a)\beta(b))_i = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\beta(a))_k (\beta(b))_{i-k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (2^k a_k) (2^{i-k} b_{i-k}) = 2^i \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k b_{i-k} = 2^i (ab)_i.$$

L'application β à un élément $a \in A$ ne change pas le signe de ses termes. On a donc $\beta(P) = P$ et β est bien un automorphisme.

On obtient un corps totalement ordonné non commutatif en appliquant la construction d'Hilbert à l'automorphisme β de $H(id) = (A, P)$. Vu les théorèmes 6.1.16 et 6.1.17, on obtient bien une extension non commutative et totalement ordonnée du champ \mathbb{Q} . \square

6.4 Anneaux faiblement ordonnés

Dans cette section, nous allons étudier une autre structure algébrique, à savoir les anneaux faiblement ordonnés.

Nous commençons par leur définition.

Définition 6.4.1. Un *anneau faiblement ordonné* est un couple (A, \leq) , où A est un anneau avec unité 1 et \leq est un ordre total de A tel que

1. pour tout $a \in A$, la bijection s_a de A dans A définie par "l'addition de a "

$$s_a : A \rightarrow A : x \mapsto x + a$$

est monotone,

2. Si $a \in A$ n'est pas un diviseur de 0, alors l'injection "multiplication à droite par a "

$$m_a : A \rightarrow A : x \mapsto xa$$

est monotone.

Exemples 6.4.2.

1. Un premier exemple (trivial) est donné par l'anneau $A = \{0\}$. Le seul ordre possible est l'égalité. La première condition de la définition est satisfaite et la deuxième est vide.
2. Tout anneau avec unité ayant deux éléments est faiblement ordonné (et pas ordonné). En effet, on a dans ce cas $0 \neq 1$. Puisque 0 est neutre pour l'addition, et puisque $1 + 1$ ne peut être égal à 1 (sinon $1 = 0$), l'addition est celle de \mathbb{Z}_2 . Puisque 0 est absorbant et puisque 1 est une unité, la multiplication est aussi celle de \mathbb{Z}_2 . Ces anneaux sont donc isomorphes au champ \mathbb{Z}_2 .

Pour l'ordre il y a deux possibilités, puisqu'on doit avoir $0 \leq 0$ et $1 \leq 1$.

- a) $0 \leq 1$ (et $1 \not\leq 0$). L'application s_0 est l'identité et est donc croissante. L'application s_1 échange 0 et 1 et est donc décroissante. La multiplication m_1 par 1 est l'identité, et 0 est un diviseur de 0. Donc (\mathbb{Z}_2, \leq) est faiblement ordonné.

- b) $1 \leq 0$ (et $0 \not\leq 1$). Les vérifications sont identiques aux précédentes, et donc pour cet ordre \mathbb{Z}_2 est également faiblement ordonné.
3. Tout anneau avec unité 1 possédant un ordonnant P , muni de l'ordre \leq associé à P , est faiblement ordonné. En effet, dans ce cas, par le corollaire 6.1.10 soit A est trivial, et on est dans le premier exemple ci-dessus, soit A est infini et intègre, et satisfait $0 < 1$. Pour tout a , l'application s_a est toujours strictement croissante par le théorème 6.1.9 (propriété 1). Enfin, le même théorème (propriétés 5 et 6) permet de montrer que si a est positif, alors l'application m_a est strictement croissante, et que si a est négatif, elle est strictement décroissante.

Remarque 6.4.3.

1. Si (A, \leq) est un anneau faiblement ordonné, alors il en est de même de (A, \geq) . Quitte à considérer l'ordre réciproque, on pourra toujours imposer la condition $0 < 1$ hormis dans le cas de l'anneau trivial, seul cas où on a $0 = 1$.
2. Si (A, \leq) est un anneau faiblement ordonné, alors pour tout $a \in A$, l'application s_a est injective et est donc strictement monotone. Il en va de même pour m_a si a n'est pas un diviseur de 0.

Théorème 6.4.4. *Si (A, \leq) est un anneau faiblement ordonné de cardinal supérieur à 2, alors $P = \{x \mid x \in A \text{ et } 0 < x\}$ est additivement stable et définit la partition $\{-P, \{0\}, P\}$ de A . Si en outre l'anneau A est intègre et $0 < 1$, alors P est un ordonnant de A tel que l'ordre associé à P est \leq .*

Démonstration. Pour obtenir que P définit une partition, on montre que la multiplication par -1 , m_{-1} est strictement décroissante, car alors pour $x \in A^*$, on a soit $x \in P$, soit $x < 0$, mais alors $-x = m_{-1}(x) > 0$ et x appartient à $-P$.

Pour cela il faut et il suffit de démontrer que $-1 \neq 1$ (c'est-à-dire que la caractéristique de A n'est pas 2, car on sait qu'elle ne vaut pas 1). En effet, dans ce cas, on a $-1 < 1$ ou $1 < -1$ puisque \leq est un ordre total. On sait que m_{-1} est strictement croissant ou strictement décroissant. S'il est strictement croissant, $-1 < 1$ implique $1 < -1$, ce qui est absurde. De même, $1 < -1$ implique $-1 < 1$. On obtient $-1 < 1 < -1$, ce qui est impossible.

Procédons par l'absurde et supposons que $-1 = 1$, alors on a $1 + 1 = 0$, donc $a + a = 0$ pour tout $a \in A$. De plus, pour tout a , l'application s_a est strictement monotone mais échange 0 et a . Elle est donc strictement décroissante. Puisque le cardinal de A est supérieur à 2, A contient 3 éléments distincts a, b, c et puisque l'ordre est total, on peut supposer sans perte de généralité que $a < b < c$. Comme s_{b+c} est strictement décroissant, il vient $a + b + c > c > b$, puis, de la même façon avec s_{a+b} , on obtient $c < a + b + c < a$, ce qui est absurde. On a donc $-1 \neq 1$.

Montrons maintenant que P est stable pour l'addition. Nous venons de montrer que s_a est strictement croissant pour tout $a \in A$. Dès lors, si a, b appartiennent à P , on a $a > 0$, et $s_b(a) = a + b > b > 0$.

Enfin, si A intègre et $0 < 1$, alors pour tout a strictement positif, on a $m_a(0) = 0 < a = m_a(1)$, donc m_a est strictement croissant. Donc si $0 < b$, on a aussi $0 = m_a(0) < m_a(b) = ba$.

Cela montre la stabilité multiplicative de P , qui est donc bien un ordonnant de A , par définition.

Puisque s_a est strictement croissant, la condition $a < b$ est équivalente à $0 < b - a$, soit $b - a \in P$. Donc \leq est l'ordre associé à P au sens de la définition 6.1.3. \square

6.5 Plans affines ordonnés

Nous commençons cette section par la définition d'un plan affine ordonné. Nous allons ensuite montrer que dans un plan affine arguésien, le fait que le corps des homomorphismes traçants soit faiblement ordonné est équivalent au fait que le plan affine soit ordonné. Nous pourrions alors obtenir l'indépendance des théorèmes de Desargues et de Pappus.

Définition 6.5.1. On dit qu'un *plan affine* $(\Pi, \Delta, \mathcal{R})$ est *ordonné* lorsque chaque ponctuelle est munie d'une relation d'ordre total et que les bijections entre ponctuelles induites par les projections parallèles sont monotones.

Théorème 6.5.2. *Si un plan affine est ordonné et arguésien, alors il existe un ordre total \leq du corps \mathcal{H} des homomorphismes traçants tel que (\mathcal{H}, \leq) soit un corps faiblement ordonné.*

Démonstration.

- Fixons un point P et une translation $\tau \neq id$. Appelons d la droite qui passe par P et par $\tau(P)$.

L'égalité $X = x[\tau](P)$, équivalente à $x[\tau] = \tau_{PX}$, définit une bijection entre la ponctuelle (d) et le corps \mathcal{H} des homomorphismes traçants, vu le théorème 4.2.2 et la définition 3.5.1.

Si nous convenons d'écrire $x < y$ sur \mathcal{H} lorsque $x[\tau](P) < y[\tau](P)$ sur (d) , alors \leq sera un ordre total de \mathcal{H} .

- Nous devons montrer la monotonie dans \leq de la permutation s_a du corps \mathcal{H} pour tout $a \in \mathcal{H}$ et de la permutation m_a lorsque $a \neq 0$.

Autrement dit, sur la ponctuelle (d) , la permutation qui au point $x[\tau](P)$ associe le point $(x + a)[\tau](P) = (a + x)[\tau](P) = x[\tau] a[\tau](P)$ doit être monotone pour tout $a \in \mathcal{H}$, tandis que la permutation qui, pour $a \neq 0$, au point $x[\tau](P)$ associe le point $(xa)[\tau](P) = x[a[\tau]](P)$ doit également être monotone.

Notre but sera atteint si nous prouvons plus généralement que, en notant P' un point donné et $\tau' \neq id$ une translation donnée, la correspondance entre $x[\tau](P)$ et $x[\tau](P')$ est induite par une projection parallèle de (d) sur la ponctuelles (d') contenant P' et $\tau(P')$, et que la correspondance entre $x[\tau](P)$ et $x[\tau'](P)$ est induite par un projection parallèle de (d) sur la ponctuelle (d'') contenant P et $\tau'(P)$.

Nous pourrions d'ailleurs supposer que la ponctuelle (d) est distincte des ponctuelles (d') et (d'') , quitte à recourir à un point auxiliaire P'' ou à une translation auxiliaire τ'' .

a) Soient $P, \tau \neq id, d = \overline{P\tau(P)}, P' \notin (d)$ et $d' = \overline{P'\tau(P')}$. Projetons (d) sur (d') parallèlement à $\overline{PP'}$ et constatons que l'image de $x[\tau](P)$ est $x[\tau](P')$: c'est vrai pour $x = 0$ et comme $x[\tau]$ est une dilatation, $\overline{x[\tau](P) x[\tau](P')}$ est parallèle à $\overline{PP'}$.

b) Soient $P, \tau \neq id, \tau' \neq id, d = \overline{P\tau(P)}$ et $d'' = \overline{P\tau'(P)}$ tels que $d \neq d''$. Projetons (d) sur (d'') parallèlement à $\overline{\tau(P)\tau'(P)}$ et prouvons que l'image de $x[\tau](P)$ est $x[\tau'](P)$.

C'est évident pour $x = 0$ ou $x = 1$. Selon le théorème 4.1.5, $x \neq 0$ entraîne l'existence d'une dilatation non constante σ de point fixe P telle que $x[\tau] = \sigma\tau\sigma^{-1}$ et $x[\tau'] = \sigma\tau'\sigma^{-1}$, d'où $x[\tau](P) = \sigma\tau(P)$ et $x[\tau'](P) = \sigma\tau'(P)$. La droite passant par les points $x[\tau](P)$ et $x[\tau'](P)$ est donc bien parallèle à la droite $\overline{\tau(P)\tau'(P)}$.

□

Corollaire 6.5.3. *Le corps des homomorphismes traçants d'un plan affine ordonné distinct de la géométrie du tétraèdre possède un ordonnant.*

Théorème 6.5.4 (Réciproque). *Si le corps \mathcal{H} des homomorphismes traçants d'un plan affine arguésien est faiblement ordonné, alors on peut ordonner ce plan affine.*

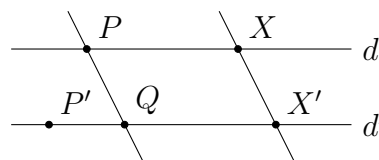
Démonstration. Associons à chaque droite d un point P situé sur celle-ci et une translation $\tau \neq id$ de trace d . Nous définissons alors un ordre total sur la ponctuelle (d) en écrivant $x[\tau](P) \leq y[\tau](P)$ lorsque $x \leq y$ dans \mathcal{H} .

Si la ponctuelle (d') est ordonnée de même à partir d'un point P' et de la translation τ' , et si la direction δ est distincte de celles des translations τ et τ' , alors il faut montrer que la projection de (d) sur (d') parallèle à δ est monotone.

1. Supposons d'abord que d et d' sont parallèles et distinctes.

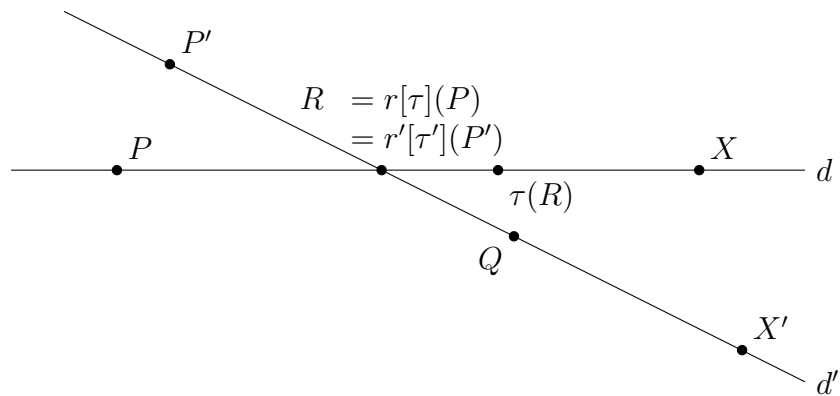
Notons Q le point d'intersection de d' avec la droite de direction δ qui passe par P . Nous avons déjà prouvé au point a) du théorème précédent que la projection $\tau_{PQ}(X)$ sur (d') d'un point $X = x[\tau](P)$ de (d) est $X' = x[\tau](Q)$.

Or, vu le théorème 4.2.2, on a $\tau = a[\tau']$ et $Q = b[\tau'](P')$, de sorte que $X' = (ax + b)[\tau'](P')$. On a bien sûr $a \neq 0$ et $m_a s_b$ est une bijection monotone de \mathcal{H} par hypothèse. Il en résulte que notre projection est monotone.



2. Supposons maintenant d et d' non parallèles.

La figure ci-dessous permet de réduire les explications au maximum.



Nous avons vu au point *b*) de la démonstration du théorème précédent que, dans la projection de (d) sur (d') parallèlement à la droite qui passe par R et par $a[\tau'](R)$, l'image de $X = (x - r)[\tau](R)$ est $X' = (x - r)[a[\tau']](R) = (r' + (x - r)a)[\tau'](P')$. La thèse résulte donc de la monotonie de $s_{-r}m_a s_{r'}$.

□

Nous obtenons alors le corollaire suivant qui permet de conclure que les théorèmes de Desargues 5.1.1 et de Pappus 5.2.1 sont indépendants.

Corollaire 6.5.5. *Il existe des plans affines ordonnés non pappiens.*

Démonstration. Cela découle de la définition 5.2.5, de la section 2.2 et du théorème 6.3.14.

□

Bibliographie

- [1] ARTIN, Emil. *Geometric algebra*. New York : Interscience, 1957.
- [2] ARTIN, Emil et Otto SCHREIER. Eine kennzeichnung der reell abgeschlossenen körper. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*. 1927, 5 (1), p. 225-231.
- [3] BONOLA, Roberto. *Non-Euclidean Geometry : A Critical and Historical Study of Its Development*. Chicago : The Open Court Publishing Company, 1912. Trad. de l'italien par H. S. CARSLAW. ISBN 0-486-60027-0.
- [4] BUEKENHOUT, Francis et Arjeh M. COHEN. Diagram geometry : Related to Classical Groups and Buildings. In : *Ergebnisse der Mathematik and ihrer Grenzgebiete*, Berlin : Springer-Verlag, 2013, vol. 57.
- [5] DICKSON, Leonard Eugene. Definitions of a group and a field by independent postulates. *Transactions of the American Mathematical Society*. 1905, 6 (2), p. 198-204.
- [6] EUCLID. *The thirteen books of Euclid's elements : Books I and II*. Vol. 1. New York : Dover Publications, Inc., 1956. Trad. de l'allemand par Thomas L. HEATH. ISBN 0-486-60088-2.
- [7] GÓMEZ, Joan. Quand les droites deviennent courbes : les géométries non-euclidiennes. In : *Le monde est mathématique*, Barcelone : RBA, 2011.
- [8] HARTSHORNE, Robin. *Geometry : Euclid and Beyond*. New York : Springer, 2000. ISBN 0-387-98650-2.
- [9] HILBERT, David. *Grundlagen der Geometrie*. Stuttgart : B. G. Teubner, 1956.
- [10] HUGHES, Daniel R. A class of non-desarguesian projective planes. *Canadian journal of mathematics*. 1957, 9, p. 378-388.
- [11] LEBOUTTE, Antoine. *Géométrie hyperbolique : pourquoi Euclide a eu raison d'admettre son cinquième postulat*. Mém. de mast. ULiège Université. 2021-2022.
- [12] LEGENDRE, Adrien-Marie. *Éléments de géométrie*. Mons : H. Manceaux, 1882.
- [13] MATHONET, Pierre. *Géométrie*.
- [14] NOLLET, Louis. *Géométrie Plane*.
- [15] NRICH, team. Going places with mathematicians. Disponible via l'URL <<https://nrich.maths.org/2570/index>> (consulté le 15 mai 2023).

- [16] PEYRARD, François. *Éléments de géométrie d'Euclide*. 1804.
- [17] PLAYFAIR, John. *Elements of Geometry*. New York : W.E. Dean, 1846.
- [18] RIGO, Michel. *Théorie des graphes*.
- [19] SACCHERI, Gerolamo. Euclid vindicated from every blemish. In : DE RISE, Vincenzo, éd., *Classic Texts in the Sciences*, Switzerland : Springer International Publishing, 2014. 1^{re} éd. Trad. de l'italien par G.B. HALSTED et L. ALLEGRI.
- [20] STROPPEL, Markus. Early explicit examples of non-desarguesian plane geometries. *Journal of geometry*. 2011, 102 (1–2), p. 179-188.
- [21] SZELE, Tibor. On ordered skew fields. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 1952, 3 (3), p. 410-413.
- [22] UEBERBERG, Johannes. *Foundations of Incidence Geometry : Projective and Polar Spaces*. Vol. 147. Berlin, Heidelberg : Springer, 2011. ISBN 3-642-20971-8.
- [23] VEBLEN, Oswald et Joseph Henry MACLAGAN-WEDDERBURN. Non-desarguesian and non-pascalian geometries. *Transactions of the American Mathematical Society*. 1907, 8 (3), p. 379-388.