

## Mémoire

**Auteur** : Delbovier, Nicolas

**Promoteur(s)** : Leroy, Julien; Charlier, Emilie

**Faculté** : Faculté des Sciences

**Diplôme** : Master en sciences mathématiques, à finalité approfondie

**Année académique** : 2022-2023

**URI/URL** : <http://hdl.handle.net/2268.2/17291>

---

### *Avertissement à l'attention des usagers :*

*Tous les documents placés en accès ouvert sur le site le site MatheO sont protégés par le droit d'auteur. Conformément aux principes énoncés par la "Budapest Open Access Initiative"(BOAI, 2002), l'utilisateur du site peut lire, télécharger, copier, transmettre, imprimer, chercher ou faire un lien vers le texte intégral de ces documents, les disséquer pour les indexer, s'en servir de données pour un logiciel, ou s'en servir à toute autre fin légale (ou prévue par la réglementation relative au droit d'auteur). Toute utilisation du document à des fins commerciales est strictement interdite.*

*Par ailleurs, l'utilisateur s'engage à respecter les droits moraux de l'auteur, principalement le droit à l'intégrité de l'oeuvre et le droit de paternité et ce dans toute utilisation que l'utilisateur entreprend. Ainsi, à titre d'exemple, lorsqu'il reproduira un document par extrait ou dans son intégralité, l'utilisateur citera de manière complète les sources telles que mentionnées ci-dessus. Toute utilisation non explicitement autorisée ci-avant (telle que par exemple, la modification du document ou son résumé) nécessite l'autorisation préalable et expresse des auteurs ou de leurs ayants droit.*

---



FACULTÉ DES SCIENCES  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE

---

# Fractale de Rauzy associée à une substitution Pisot irréductible et unimodulaire

---

Mémoire de fin d'études présenté en vue de l'obtention du titre de  
*Master en Sciences Mathématiques, à finalité approfondie*

Année académique 2022-2023

*Auteur :*  
Nicolas DELBOVIER

*Promoteur :*  
Julien LEROY

*Co-Promoteur :*  
Emilie CHARLIER

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction et rappels</b>	<b>3</b>
1.1	Introduction . . . . .	3
1.2	Rappels d'algèbre . . . . .	4
1.3	Rappels de combinatoire des mots . . . . .	5
<b>2</b>	<b>La tuile centrale</b>	<b>7</b>
2.1	Substitutions Pisot irréductibles . . . . .	7
2.2	Décomposition de $\mathbb{R}^n$ et projections sur les sous-espaces . . . . .	8
2.2.1	Décomposition de $\mathbb{C}^n$ . . . . .	9
2.2.2	Projection sur les sous-espaces de $\mathbb{C}^n$ . . . . .	12
2.2.3	Décomposition de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	12
2.2.4	Projection sur les sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	15
2.3	La tuile centrale (ou fractale de Rauzy) . . . . .	18
2.4	Equation d'ensemble et graphe préfixe-suffixe . . . . .	21
2.4.1	Equation d'ensemble et SFIG . . . . .	21
2.4.2	Le graphe préfixe-suffixe . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Pavages et multi-pavages sur <math>\mathbb{H}_e</math> et <math>\mathbb{H}_c</math></b>	<b>29</b>
3.1	Définitions générales . . . . .	29
3.2	Pavage sur la droite dilatante $\mathbb{H}_e$ . . . . .	30
3.3	Approximation d'un hyperplan . . . . .	31
3.4	Pavage de l'hyperplan contractant $\mathbb{H}_c$ par des faces projetées . . . . .	36
3.5	Transition vers le multi-pavage auto-réplicatif . . . . .	37
3.6	Substitutions de tips . . . . .	41
3.7	Multi-pavage auto-réplicatif . . . . .	47
<b>4</b>	<b>Condition de pavage</b>	<b>53</b>
4.1	Propriétés de finitude . . . . .	53
4.2	Le graphe des ancêtres . . . . .	56
4.3	Le graphe des ancêtre à deux parties . . . . .	60

<b>5</b>	<b>Dualité</b>	<b>66</b>
5.1	Cordons et dualité . . . . .	66
5.2	Condition de super coïncidence . . . . .	68
<b>A</b>	<b>Résultats intermédiaires</b>	<b>73</b>
<b>B</b>	<b>Substitutions généralisées</b>	<b>75</b>

# Chapitre 1

## Introduction et rappels

### 1.1 Introduction

Les fractales de Rauzy ont fait leur première apparition dans la littérature en 1982 dans un article du mathématicien français Gérard Rauzy [16]. Dans son article, Rauzy fait apparaître un pavage de  $\mathbb{R}^2$  à l'aide de tuiles auto-similaires en lien avec la substitution de Tribonacci  $1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$ . Plus tard, la construction de Rauzy sera généralisée à des substitutions "aux bonnes propriétés" et de nouvelles fractales de Rauzy vont ainsi voir le jour.

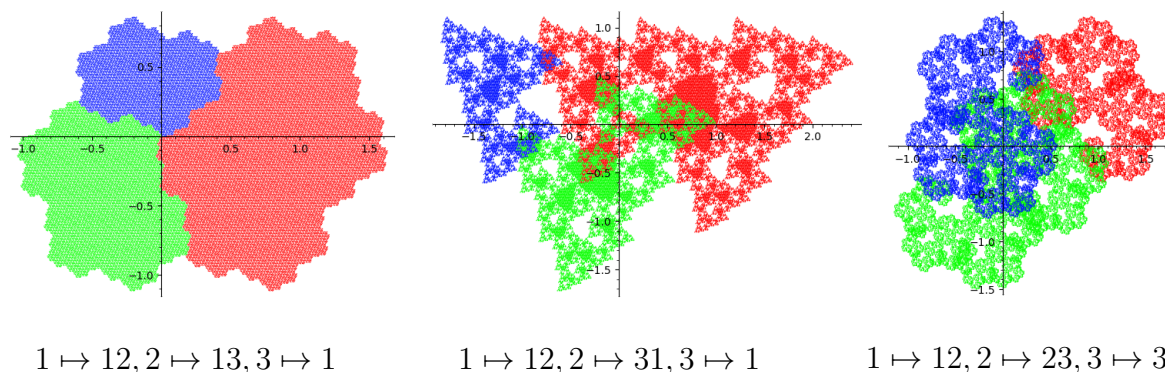


FIGURE 1.1: Fractales de Rauzy associées à différentes substitutions. Ces figures ont été générées en utilisant le logiciel sagemath.

A l'heure actuelle, il existe plusieurs façons de construire les fractales de Rauzy. Ce travail s'intéresse à la construction à l'aide d'une substitution de Pisot irréductible et unimodulaire.

Le mémoire s'organise de la façon suivante. Le premier chapitre sert à introduire nos notations et à rappeler les résultats de bases utiles pour la suite. Ensuite, le deuxième chapitre s'intéresse à la construction de la fractale et à l'étude de certaines de ses propriétés de base. Le chapitre 3 met alors en évidence que la tuile centrale constitue un multi-pavage

du plan. Cela nous mène tout naturellement au chapitre 4 qui s'intéresse au cas où le multi-pavage est un pavage auquel cas nous disons que la "condition de pavage" est satisfaite. Différents résultats permettant de vérifier cette condition sont démontrés et des graphes sont construits dans le but d'en donner une condition calculatoire équivalente. Enfin, un dernier chapitre met en évidence le fait que nos constructions en dimension  $n - 1$  possèdent un équivalent dual en dimension 1.

## 1.2 Rappels d'algèbre

**Théorème 1.2.1** (Perron-Frobenius). *Soit  $M$  une matrice irréductible ayant uniquement des entrées positives (ou nulles). Alors,  $M$  admet une valeur propre positive  $\alpha$  qui est plus grande ou égale en module à toutes les autres valeurs propres  $\lambda$  :  $\alpha \geq |\lambda|$ . Cette valeur propre  $\alpha$  ainsi que ses conjugués algébriques sont des valeurs propres simples. De plus, il existe un vecteur propre associé à  $\alpha$  avec des composantes strictement positives dans la base canonique.*

*De plus, si  $M$  est primitive, alors  $\alpha$  domine strictement les autres valeurs propres en module :  $\alpha > |\lambda|$ .*

**Définition 1.2.2.** La valeur propre  $\alpha$  du théorème précédent est appelée valeur propre de Perron-Frobenius, valeur propre dominante ou rayon spectral de  $M$  et est notée  $\rho(M)$ .

**Théorème 1.2.3** (Gantmacher 1960). *Soit  $M$  une matrice irréductible à entrées positives (ou nulles) et soit  $\alpha$  sa valeur propre de Perron-Frobenius. L'inégalité  $\alpha \mathbf{v} \leq M\mathbf{v}$  (considérée composante à composante) implique soit que  $\mathbf{v}$  est un vecteur propre de valeur propre  $\alpha$  de  $M$ , soit que  $\mathbf{v} = 0$ . Dans tous les cas,  $\alpha \mathbf{v} = M\mathbf{v}$ .*

**Définition 1.2.4.** Un nombre  $\alpha \in \mathbb{R}$  est dit *algébrique* si il est racine d'un polynôme à coefficients entiers.

Le nombre  $\alpha$  est dit *entier algébrique* s'il est racine d'un polynôme monique à coefficients entiers.

Les *conjugués algébriques* d'un entier algébrique sont les racines de son polynôme minimum.

**Théorème 1.2.5.** *Soit  $M$  une matrice  $n \times n$  réelle. Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  les valeurs propres réelles et  $\lambda_{r+1}, \overline{\lambda_{r+1}}, \dots, \lambda_{r+s}, \overline{\lambda_{r+s}}$  les valeurs propres complexes. Notons enfin*

$$\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \dots, \mathbf{u}_{r+1}, \overline{\mathbf{u}_{r+1}}, \dots, \mathbf{u}_{r+s}, \overline{\mathbf{u}_{r+s}}$$

*les vecteurs propres associés. Supposons que pour chaque valeur propre (réelle ou complexe) les multiplicité algébrique et géométriques coïncident. Alors  $M = CBC^{-1}$  où  $B$  et  $C$  sont comme suit :*

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \lambda_r & & & & & \\ & & & B_{\lambda_{r+1}} & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & B_{\lambda_{r+s}} & \end{pmatrix} \text{ où } B_\lambda = \begin{pmatrix} \Re(\lambda) & \Im(\lambda) \\ -\Im(\lambda) & \Re(\lambda) \end{pmatrix}$$

$$C = \left( \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} | & & | & & | & & | \\ \mathbf{u}_1 & \dots & \mathbf{u}_r & \mathfrak{R}\mathbf{u}_{r+1} & \mathfrak{S}\mathbf{u}_{r+1} & \dots & \mathfrak{R}\mathbf{u}_{r+s} & \mathfrak{S}\mathbf{u}_{r+s} \\ | & & | & & | & & | & | \end{array} \right).$$

### 1.3 Rappels de combinatoire des mots

Cette section comporte des rappels nécessaires sur la théorie de la combinatoire des mots. Seuls les définitions utiles pour la suite sont reprises ici. Pour plus de détails sur la combinatoire des mots voir [13] et [14].

Une *alphabet*  $A$  est un ensemble fini d'éléments appelés *lettres* (ou *symboles*). Un *mot fini*  $w$  sur  $A$  est une suite finie de lettres  $w_0 \dots w_n$  de  $A$ . A la suite vide correspond un mot spécial appelé *mot vide* et noté  $\varepsilon$ . L'ensemble des mots finis sur  $A$  est noté  $A^*$ . L'ensemble des mots finis non vide est noté  $A^+ = A^* \setminus \varepsilon$ . Etant donné un mot fini  $w = w_1 \dots w_n$ , nous notons sa longueur  $|w|$ . Si  $a \in A$  nous notons  $|w|_a$  le nombre d'occurrences de  $a$  dans  $w$ . L'ensemble des mots finis de longueurs  $n$  est noté  $A^n$ . Nous pouvons associer au mot fini  $w$  un vecteur  $n \times 1$  qui compte le nombre d'occurrences de chaque lettre dans  $w$  appelé *vecteur de Parikh*. Nous notons  $\mathbf{P}$  la relation qui associe un mot fini à son vecteur de Parikh. Cette relation sera appelée fonction d'abélianisation dans la suite.

Une opération naturelle sur les mots est la *concaténation* qui consiste simplement à "coller" deux mots côte à côte pour en former un nouveau.

Un *mot infini*  $w$  sur  $A$  est une suite infinie de lettres  $w_0 w_1 \dots$  de  $A$ . On peut voir un mot infini comme une fonction des naturels dans  $A$  qui associe à chaque  $n \in \mathbb{N}$  la lettre  $w_n$ . L'ensemble des mots infinis sur  $A$  est noté  $A^{\mathbb{N}}$ . Un mot infini  $w$  est dit *ultimement périodique* si il peut être écrit sous la forme  $w = uv^\omega = uvvvv \dots$  pour  $u, v \in A^*, v \neq \varepsilon$ . Si  $u = \varepsilon$ , alors  $w$  est dit *périodique*. Si un mot infini n'est pas ultimement périodique, alors il est dit *apériodique*. Nous pouvons également considérer des mots biinfinis  $w = \dots w_{-2} w_{-1} w_0 w_1 w_2 \dots$ . Ceux-ci peuvent être vu comme des fonctions de  $\mathbb{Z}$  dans  $A$ .

Nous considérerons la distance suivante sur les mots infini :  $d(x, y) = 2^{-\inf\{n \mid x_n \neq y_n\}} \forall x, y \in A^{\mathbb{N}}$ . Nous étendons alors cette distance aux mots finis en posant  $d(u, v) = d(u', v')$  pour tout  $u, v \in A^*$  et où  $u' = u \odot^\omega$  est un mot infini de préfixe  $u$  et se terminant par une infinité de symboles n'appartenant pas à l'alphabet. Remarquons que cette distance est ultramétrique, c'est-à-dire qu'elle satisfait l'inégalité triangulaire forte :  $d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\} \forall x, y, z \in A^{\mathbb{N}}$ .

Un mot  $u$  est un facteur d'un mot fini ou infini  $w$  si ce dernier s'écrit  $w = pus$  pour  $p \in A^*$  et  $s \in A^* \cup A^\omega$ . Si  $p = \varepsilon$ ,  $u$  est dit *préfixe* de  $w$ . Si  $s = \varepsilon$ ,  $u$  est appelé *suffixe* de  $w$ . Le mot  $u \neq \varepsilon$  est un préfixe (ou suffixe) *propre* de  $w$  si  $u$  est un préfixe (suffixe) de  $w$  tel que  $u \neq w$ . L'ensemble des facteurs d'un mot  $w$  est noté  $\mathcal{F}(w)$ . L'ensemble  $\mathcal{F}_n(w)$  est l'ensemble des facteurs de  $w$  de longueur  $n$ . Étant donné un mot fini ou infini  $w = w_0 w_1 w_2 \dots$ , nous notons  $w_{[i, j]}$  le facteur  $w_i \dots w_j$ . De même, nous notons  $w_{[i, j[}$  le facteur  $w_i \dots w_{j-1}$ . Un facteur  $u$  d'un mot infini  $w$  est *récurrent* s'il apparaît une infinité de fois dans  $w$ . Le facteur  $u$  est *uniformément récurrent* si il apparaît une infinité de fois dans  $w$  et à délais borné

(il existe  $K \in \mathbb{N}$  tel que  $u$  apparait au moins toutes les  $K$  lettres). Le mot infini  $w$  est dit (uniformément) récurrent si ses facteurs le sont.

Soient  $A$  et  $B$  deux alphabets. Un *morphisme* est une application  $\sigma : A^* \rightarrow B^*$  telle que  $\sigma(uv) = \sigma(u)\sigma(v)$  pour tout  $u, v \in A^*$ . Vu cette dernière propriété, un morphisme est totalement déterminé par son image en chaque lettre. Un morphisme  $\sigma$  est dit *effaçant* si il existe  $a \in A$  tel que  $\sigma(a) = \varepsilon$ . Le morphisme est dit *non-effaçant* sinon. Un morphisme  $\sigma : A^* \rightarrow A^*$  ayant même ensemble de départ et d'arrivée est appelé un *endomorphisme*. Une *substitution* est un endomorphisme non-effaçant. Une substitution  $\sigma$  est dite uniforme si  $|\sigma(a)| = |\sigma(b)| \forall a, b \in A$ .

Une substitution  $\sigma : A^* \rightarrow A^*$  est prolongeable sur  $a \in A$  si  $\sigma(a) = aw$  pour  $w \in A^+$ . Un point fixe d'une substitution  $\sigma$  est un mot infini  $u$  tel que  $\sigma(u) = u$ . Pour une substitution  $\sigma$  prolongeable sur  $a$ , nous avons que  $\sigma^n(a)$  est préfixe de  $\sigma^{n+1}(a)$  pour tout  $n \geq 0$ . Ainsi, le mot infini  $\sigma^\omega(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^n(a)$  est un point fixe de  $\sigma$ .

A une substitution  $\sigma$ , nous associons une matrice  $M_\sigma$ , appelée *matrice d'incidence*, telle que  $M_{a,b} = |\sigma(b)|_a$ . Une substitution est dite *primitive* si il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que pour toute paire de lettres  $(a, b) \in A^2$ , le mot  $\sigma^k(a)$  contient au moins une occurrence de  $b$ . Ceci implique que la matrice d'incidence d'une substitution primitive est primitive.

Nous avons le lien suivante entre la matrice d'incidence et le vecteur de Parikh d'une substitution :  $\mathbf{P}(\sigma(w)) = M_\sigma \mathbf{P}(w)$  pour tout mot  $w \in A^*$ . De là, nous pouvons déduire que  $M_{\sigma^k} = M_\sigma^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .



# Chapitre 2

## La tuile centrale

Avant de commencer ce chapitre établissons nos conventions d'écriture.

**Notation.** Dans un souci de clarté, nous ne noterons en gras que les vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{C}^n$  et laisserons en écriture basique ceux des autres espaces que nous allons rencontrer. Nous noterons également  $\mu_k$  la mesure de Lebesgue de dimension  $k$  ( $\mu_1$  mesure des distances,  $\mu_2$  des surfaces,  $\mu_3$  des volumes, etc.).

### 2.1 Substitutions Pisot irréductibles

Une condition importante pour construire la fractale de Rauzy à l'aide d'une substitution est d'imposer que la substitution soit Pisot irréductible. Le but de cette section est donc d'introduire ces substitutions et d'en explorer quelques propriétés utiles pour la suite.

Un entier algébrique  $\alpha > 1$  est un *nombre de Pisot* si chacun de ses conjugués algébriques  $\lambda$  est tel que  $|\lambda| < 1$ .

On dira d'une substitution primitive  $\sigma$  qu'elle est :

- *Pisot* (ou *de Pisot*) si sa valeur propre dominante est un nombre de Pisot.
- *irréductible* si le degré algébrique de sa valeur propre dominante est égal à la taille de l'alphabet. Ceci revient à demander que son polynôme caractéristique soit irréductible sur  $\mathbb{Q}$ .
- *unimodulaire* si le déterminant de sa matrice d'incidence vaut  $\pm 1$ .

Par la suite, nous nous autoriserons à parler simplement de substitutions *Pisot* pour dire *primitive et de Pisot*.

**Remarque 2.1.1.** Remarquons que demander qu'une substitution primitive et irréductible  $\sigma$  soit unimodulaire est équivalent à demander que le terme constant de son polynôme minimum vaille  $\pm 1$ . En effet, comme  $\sigma$  est irréductible, le terme indépendant du polynôme caractéristique est donné par le produit des valeurs propres. Or, le produit des valeurs propres est aussi égal au déterminant de  $M_\sigma$  vu le Théorème 1.2.1.

**Exemple 2.1.2.** La substitution de Tribonacci  $\sigma : 1 \mapsto 12, 2 \mapsto 13, 3 \mapsto 1$  est une substitution Pisot irréductible et unimodulaire. En effet, nous avons

$$M_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_\sigma^3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det(M_\sigma) = 1$$

ce qui prouve que  $\sigma$  est primitive et unimodulaire. De plus, son polynôme caractéristique est

$$\chi_\sigma = x^3 - x^2 - x - 1$$

qui est irréductible sur  $\mathbb{Q}$  et les valeurs propres sont approximativement

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\simeq 1.839286755214161 \\ \lambda_2 &\simeq -0.4196433776070806 - 0.6062907292071993i \\ \lambda_3 &\simeq -0.4196433776070806 + 0.6062907292071993i \end{aligned}$$

d'où  $\sigma$  est de Pisot irréductible.

**Proposition 2.1.3.** Soit  $\sigma$  une substitution de Pisot irréductible et  $P_\sigma$  le polynôme caractéristique de sa matrice d'incidence  $M_\sigma$ . Les propriétés suivantes sont vérifiées.

- 1) La substitution  $\sigma$  ne peut pas être uniforme.
- 2) Les racines de  $\chi_\sigma$  sont toutes simples.
- 3) La matrice  $M_\sigma$  est diagonalisable.

*Démonstration.* 1) Rappelons que pour toute matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  à valeurs positives nous avons

$$\min_j \sum_i A_{i,j} \leq \rho(A) \leq \max_j \sum_i A_{i,j}$$

où  $\rho(A)$  est la valeur propre dominante. Supposons par l'absurde que  $\sigma$  est l-uniforme. Dans ce cas, nous avons

$$\sum_i (M_\sigma)_{i,j} = l, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Ainsi,  $\rho(M_\sigma) = l$  vu le rappel. Nous obtenons alors que  $l \in \mathbb{Z}$  est une racine de  $P_\sigma$  et ce dernier est donc réductible sur  $\mathbb{Z}$  d'où une contradiction.

2) Comme  $\sigma$  est de Pisot, elle est (supposée) primitive. Ainsi, par le théorème de Perron-Frobenius (1.2.1), les racines de  $\chi_\sigma$  sont toutes simples.

3) Une matrice dont toutes les valeurs propres sont simples est diagonalisable.  $\square$

## 2.2 Décomposition de $\mathbb{R}^n$ et projections sur les sous-espaces

Le but de cette section est de décomposer l'espace  $\mathbb{R}^n$  en fonction des vecteurs propres de la matrice  $M_\sigma$ . Nous commencerons d'abord par décomposer  $\mathbb{C}^n$  pour passer à  $\mathbb{R}^n$  dans un

second temps. Cette façon de procéder en deux parties est du au fait que les constructions se passent raisonnablement facilement dans  $\mathbb{C}^n$  mais nécessitent un peu plus de travail pour être transposée à  $\mathbb{R}^n$  comme nous allons le voir par la suite.

Dans tout ce qui suit, nous allons restreindre notre étude au cas d'une substitution Pisot irréductible et unimodulaire car la théorie est bien plus simple dans ce cas. Notons cependant que certains résultats s'étendent au cas réductible dans la littérature (voir par exemple [8] ou [5]).

### 2.2.1 Décomposition de $\mathbb{C}^n$

Considérons donc une substitution Pisot, irréductible et unimodulaire  $\sigma$  sur un alphabet  $A$  de taille  $n$  et soit  $\beta$  la valeur propre de Perron-Frobenius de  $M_\sigma$ . Commençons par remarquer que le degré algébrique de cette valeur propre est  $n$ . En effet, comme  $\sigma$  est de Pisot, le polynôme caractéristique  $\chi_\sigma$  est irréductible et est donc le polynôme minimum de ses racines.

Appelons  $\beta^{(2)}, \dots, \beta^{(r)}$  les  $r - 1$  conjugués réels de  $\beta := \beta^{(1)}$ . Les sous-espaces propres correspondant sont tous de dimensions 1 vu la Proposition 2.1.3. Notons maintenant  $\beta^{(r+1)}, \overline{\beta^{(r+1)}}, \dots, \beta^{(r+s)}, \overline{\beta^{(r+s)}}$  les  $2s$  conjugués complexes de  $\beta$ . Nous ordonnerons les valeurs propres de la façon suivante

$$(\beta^{(1)}, \dots, \beta^{(n)}) = (\beta^{(1)}, \dots, \beta^{(r)}, \beta^{(r+1)}, \dots, \beta^{(r+s)}, \overline{\beta^{(r+1)}}, \dots, \overline{\beta^{(r+s)}}).$$

Autrement dit, nous posons  $\beta^{(r+i)} = \overline{\beta^{(r+s+i)}}$  pour tout  $i \in \{1, \dots, s\}$ . Notons que nous avons  $n = r + 2s$  par la Proposition 2.1.3.

Maintenant nos notations établies, nous commençons par étudier des vecteurs propres gauche et droit associés à la valeur propre dominante. Avant cela, introduisons la définition suivante.

**Définition 2.2.1.** Nous appelons *morphisme canonique de Galois*  $\sigma_k$  l'application :

$$\begin{aligned} \sigma_k : \mathbb{Q}(\beta) &\rightarrow \mathbb{Q}(\beta^{(k)}), & q &\mapsto q \text{ si } q \in \mathbb{Q} \\ & & \beta &\mapsto \beta^{(k)}. \end{aligned}$$

**Proposition 2.2.2.** Soit  $\sigma$  une substitution Pisot, irréductible et unimodulaire.

- 1) Il existe un vecteur propre à gauche  $\mathbf{v}_\beta$  de  $M_\sigma$  associé à la valeur propre  $\beta$  et ayant ses composantes dans la base canonique strictement positives dans  $\mathbb{Z}(\beta)$ .
- 2) Il existe un unique vecteur propre à droite  $\mathbf{u}_\beta$  de  $M_\sigma$  associé à la valeur propre  $\beta$ , ayant ses composantes dans la base canonique strictement positives dans  $\mathbb{Q}(\beta)$  et tel que  $\langle \mathbf{v}_\beta, \mathbf{u}_\beta \rangle = 1$ .
- 3) Les composantes dans la base canonique  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  du vecteur  $\mathbf{v}_\beta$  sont linéairement indépendantes sur  $\mathbb{Q}$ . De même, les composantes dans la base canonique de  $\mathbf{u}_\beta$  sont linéairement indépendantes sur  $\mathbb{Q}$ .

*Démonstration.* 1) Un tel vecteur  $\mathbf{v}_\beta$  existe bel et bien. En effet, le fait que les composantes dans la base canonique soient strictement positives découlent du théorème de Perron-Frobenius 1.2.1. Ensuite, puisque  $M_\sigma$  est à entrées entières et que  $\beta \in \mathbb{Q}(\beta)$ , il est clair que  $\mathbf{v}_\beta \in \mathbb{Q}(\beta)$ . De plus, en multipliant les composantes d'un tel vecteur propre par le ppcm des dénominateurs de ses composantes, nous obtenons un vecteur dont les composantes sont toutes dans  $\mathbb{Z}(\beta)$ .

2) Un vecteur  $\mathbf{u}_\beta$  comme définit ci-haut existe bel et bien. En effet, comme dans le point précédant, il existe un vecteur propre à droite  $\mathbf{u}'_\beta$  associé à  $\beta$  et dont les composantes dans la base canonique sont toutes strictement positives dans  $\mathbb{Q}(\beta)$ . Dès lors  $\langle \mathbf{u}'_\beta, \mathbf{v}_\beta \rangle > 0$  et il suffit de prendre  $\mathbf{u}_\beta = \mathbf{u}'_\beta / \langle \mathbf{u}'_\beta, \mathbf{v}_\beta \rangle$ . Vu ce qui précède,  $\mathbf{u}_\beta$  a clairement des coordonnées positives dans  $\mathbb{Q}(\beta)$ .

3) Montrons que les composantes de  $\mathbf{v}_\beta$  sont linéairement indépendantes sur  $\mathbb{Q}$  (le raisonnement est le même pour  $\mathbf{u}_\beta$ ). Écrivons  $\mathbf{v}_\beta = (x_1, \dots, x_n)$  et supposons que  $\sum_j q_j x_j = 0$ , où  $q_j \in \mathbb{Q} \forall j$ . Dès lors, en notant  $\mathbf{v}_\beta^{(i)} = (x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$ , nous avons aussi  $\sum_j q_j x_j^{(i)} = 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}$  en appliquant les morphismes canoniques de Galois à l'égalité précédente (voir Définition 2.2.1). Ainsi,  $q = (q_1, \dots, q_n)$  est orthogonal à  $n$  vecteurs linéairement indépendants, d'où  $q = 0$ .  $\square$

Remarquons que le lemme précédent laisse une liberté sur le choix du vecteur  $\mathbf{v}_\beta$ . Pour fixer les idées, nous choisissons pour la suite le vecteur dont les entrées sont les plus petites. Nous verrons que ce choix n'impacte pas nos constructions si ce n'est par un facteur multiplicatif.

Maintenant que nous avons  $\mathbf{v}_\beta$  et  $\mathbf{u}_\beta$ , nous obtenons les autres vecteurs propres à gauche  $\mathbf{v}_{\beta^{(i)}}$  et à droite  $\mathbf{u}_{\beta^{(i)}}$  (associés à  $\beta^{(i)}$ ) en remplaçant  $\beta (= \beta^{(1)})$  par  $\beta^{(i)}$  dans les coordonnées des vecteurs  $\mathbf{v}_\beta$  et  $\mathbf{u}_\beta$  respectivement. Puisque des vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes sont linéairement indépendants, le lemme suivant est immédiat.

**Lemme 2.2.3.** *La famille  $\{\mathbf{u}_{\beta^{(1)}}, \dots, \mathbf{u}_{\beta^{(n)}}\}$  est une base de  $\mathbb{C}^n$  (en tant que  $\mathbb{C}$ -vectoriel) constituée de vecteurs propres à droite de  $M_\sigma$  et la famille  $\{\mathbf{v}_{\beta^{(1)}}, \dots, \mathbf{v}_{\beta^{(n)}}\}$  est une base de  $\mathbb{C}^n$  constitué de vecteurs propres à gauches de  $M_\sigma$*

$$M_\sigma \mathbf{u}_{\beta^{(k)}} = \beta^{(k)} \mathbf{u}_{\beta^{(k)}} \quad \text{et} \quad M_\sigma^T \mathbf{v}_{\beta^{(k)}} = \beta^{(k)} \mathbf{v}_{\beta^{(k)}} \quad \text{avec} \quad \mathbf{u}_{\beta^{(k)}}, \mathbf{v}_{\beta^{(k)}} \in \mathbb{Q}(\beta^{(k)}).$$

Nous démontrons maintenant les formules des produit scalaire entre les différents vecteurs propres.

**Proposition 2.2.4.** *Les vecteurs propres à gauche et à droite définis plus haut satisfont*

les relations suivantes

$$\begin{aligned} \text{Si } k = 1, \dots, r & \quad \begin{cases} \langle \mathbf{u}_{\beta^{(k)}}, \mathbf{v}_{\beta^{(k)}} \rangle = 1, \\ \langle \mathbf{u}_{\beta^{(j)}}, \mathbf{v}_{\beta^{(k)}} \rangle = \langle \overline{\mathbf{u}_{\beta^{(j)}}}, \mathbf{v}_{\beta^{(k)}} \rangle = 0, \text{ pour } j \neq k \end{cases} \\ \text{Si } k = r+1, \dots, r+s & \quad \begin{cases} \langle \overline{\mathbf{u}_{\beta^{(k)}}}, \mathbf{v}_{\beta^{(k)}} \rangle = 1, \\ \langle \mathbf{u}_{\beta^{(k)}}, \mathbf{v}_{\beta^{(k)}} \rangle = 0, \\ \langle \mathbf{u}_{\beta^{(j)}}, \mathbf{v}_{\beta^{(k)}} \rangle = \langle \overline{\mathbf{u}_{\beta^{(j)}}}, \mathbf{v}_{\beta^{(k)}} \rangle = 0, \text{ pour } j \neq k \end{cases} \end{aligned}$$

*Démonstration.* Pour simplifier les notations, prenons deux valeurs propres  $\lambda, \mu \in \{\beta^{(1)}, \dots, \beta^{(n)}\}$  tels que  $M_\sigma \mathbf{u} = \mu \mathbf{u}$  et  $M_\sigma^T \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$ . Nous effectuons la preuve en plusieurs parties en fonction des cas.

Supposons d'abord  $\lambda \neq \bar{\mu}$ . Nous devons montrer que  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ . Or, nous avons successivement

$$\begin{aligned} \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= \lambda \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{v} = \bar{\mathbf{u}}^T \lambda \mathbf{v} \\ &= \bar{\mathbf{u}}^T M_\sigma^T \mathbf{v} = \overline{(M_\sigma \mathbf{u})}^T \mathbf{v} \\ &= \bar{\mu} \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{v} = \bar{\mu} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$(\lambda - \bar{\mu}) \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$$

de sorte que  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ .

Supposons maintenant  $\mu = \bar{\lambda}$  et considérons le morphisme de Galois  $\sigma : \mathbb{Q}(\beta) \rightarrow \mathbb{Q}(\mu)$  (en particulier,  $\mathbf{u} = \sigma(\mathbf{u}_\beta)$ ). Nous devons montrer que  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 1$ . Notons alors  $\mathbf{u}_\beta = (a_1, \dots, a_n)$  et  $\mathbf{v}_\beta = (b_1, \dots, b_n)$  les composantes des vecteurs propres de Perron gauche et droit dans la base canonique. Nous obtenons successivement

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{v} \\ &= \sum_{i=1}^n \bar{u}_i v_i = \sum_{i=1}^n \overline{\sigma(a_i)} \sigma(b_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \sigma(\bar{a}_i) \sigma(b_i) = \sum_{i=1}^n \sigma(\bar{a}_i b_i) \\ &= \sigma\left(\sum_{i=1}^n \bar{a}_i b_i\right) = \sigma(\langle \mathbf{u}_\beta, \mathbf{v}_\beta \rangle) \\ &= \sigma(1) = 1 \end{aligned}$$

□

Le Lemme 2.2.3 nous permet de décomposer  $\mathbb{C}^n$  de la façon suivante. Nous notons  $\mathbb{K}_e$  le sous-espace propre de  $\mathbb{C}^n$  engendré par le vecteur  $\mathbf{u}_\beta$  et  $\mathbb{K}_c$  le sous-espace propre de  $\mathbb{C}^n$  engendré par les vecteurs  $\mathbf{u}_{\beta^{(i)}}$  pour  $i = 2, \dots, n$ . Puisque les vecteurs  $(\mathbf{u}_{\beta^{(i)}})_{1 \leq i \leq n}$  forment une base de  $\mathbb{C}^n$ , nous pouvons écrire

$$\mathbb{C}^n = \mathbb{K}_e \oplus \mathbb{K}_c.$$

## 2.2.2 Projection sur les sous-espaces de $\mathbb{C}^n$

Nous avons vu dans la section précédente que  $\mathbb{C}^n = \mathbb{K}_e \oplus \mathbb{K}_c$ . Dés lors, pour tout  $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ , il existe des constantes  $\lambda_j$  complexes tels que

$$\mathbf{z} = \sum_{j=1}^{r+2s} \lambda_j \mathbf{u}_{\beta(j)}.$$

Or, en prenant le produit scalaire de  $\mathbf{z}$  avec  $\mathbf{v}_{\beta(j)}$  pour  $j \in \{1, \dots, r+2s\}$  et en utilisant la Proposition 2.2.4, nous obtenons

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{z}, \mathbf{v}_{\beta(k)} \rangle &= \sum_{j=1}^{r+2s} \lambda_j \langle \mathbf{u}_{\beta(j)}, \mathbf{v}_{\beta(k)} \rangle \\ &= \begin{cases} \lambda_k & \text{si } k = 1, \dots, r \\ \lambda_{k+s} & \text{si } k = r+1, \dots, r+s \\ \lambda_{k-s} & \text{si } k = r+s+1, \dots, r+2s \end{cases}. \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \begin{cases} \langle \mathbf{z}, \mathbf{v}_{\beta(k)} \rangle & \text{si } k \leq r \\ \langle \mathbf{z}, \overline{\mathbf{v}_{\beta(k)}} \rangle & \text{si } k > r \end{cases} \\ &= \langle \mathbf{z}, \overline{\mathbf{v}_{\beta(k)}} \rangle \quad \forall k. \end{aligned}$$

Dés lors, tout  $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$  se décompose de la sorte :

$$\mathbf{z} = \sum_{k=1}^{r+2s} \langle \mathbf{z}, \overline{\mathbf{v}_{\beta(k)}} \rangle \mathbf{u}_{\beta(k)} = \langle \mathbf{z}, \mathbf{v}_{\beta} \rangle \mathbf{u}_{\beta} + \sum_{k=2}^{r+2s} \langle \mathbf{z}, \overline{\mathbf{v}_{\beta(k)}} \rangle \mathbf{u}_{\beta(k)} \quad (2.1)$$

L'équation (2.1) implique que pour tout  $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ , la projection  $\pi'_e(\mathbf{z})$  de  $\mathbf{z}$  sur  $\mathbb{K}_e$  le long de  $\mathbb{K}_c$  est donnée par :

$$\pi'_e : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{K}_e : \mathbf{z} \mapsto \langle \mathbf{z}, \mathbf{v}_{\beta} \rangle \mathbf{u}_{\beta}. \quad (2.2)$$

De même la projection  $\pi'_c$  sur  $\mathbb{K}_c$  le long de  $\mathbb{K}_e$  est donnée par :

$$\pi'_c : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{K}_c : \mathbf{z} \mapsto \sum_{k=2}^{r+2s} \langle \mathbf{z}, \overline{\mathbf{v}_{\beta(k)}} \rangle \mathbf{u}_{\beta(k)}. \quad (2.3)$$

## 2.2.3 Décomposition de $\mathbb{R}^n$

Nous disposons maintenant d'une décomposition de  $\mathbb{C}^n$  à l'aide des vecteurs propres de la matrice d'incidence  $M_{\sigma}$ . En particulier, l'équation (2.1) donne aussi une décomposition des éléments de  $\mathbb{R}^n$ . De plus, par le Lemme A.0.3, nous avons pour tout  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} \Re(\langle \mathbf{z}, \mathbf{v}_{\beta(k)} \rangle) = \Re(\langle \mathbf{z}, \overline{\mathbf{v}_{\beta(k)}} \rangle) \\ \Im(\langle \mathbf{z}, \mathbf{v}_{\beta(k)} \rangle) = -\Im(\langle \mathbf{z}, \overline{\mathbf{v}_{\beta(k)}} \rangle). \end{cases}$$

Dés lors, dans la décomposition

$$\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_\beta \rangle \mathbf{u}_\beta + \sum_{k=2}^{r+2s} \langle \mathbf{x}, \overline{\mathbf{v}_{\beta^{(k)}}} \rangle \mathbf{u}_{\beta^{(k)}} \quad (2.4)$$

d'un réel  $\mathbf{x}$ , les parties imaginaires s'annulent. Plus précisément, pour tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , nous avons successivement

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_\beta \rangle \mathbf{u}_\beta + \sum_{k=2}^{r+2s} \langle \mathbf{x}, \overline{\mathbf{v}_{\beta^{(k)}}} \rangle \mathbf{u}_{\beta^{(k)}} \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_\beta \rangle \mathbf{u}_\beta + \sum_{k=2}^r \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_{\beta^{(k)}} \rangle \mathbf{u}_{\beta^{(k)}} + \sum_{k=r+1}^{r+s} \langle \mathbf{x}, \overline{\mathbf{v}_{\beta^{(k)}}} \rangle \mathbf{u}_{\beta^{(k)}} + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_{\beta^{(k)}} \rangle \overline{\mathbf{u}_{\beta^{(k)}}} \end{aligned}$$

Regardons de plus près la dernière somme dans la décomposition ci-haut. Pour un  $k \in \{r+1, \dots, r+s\}$  fixé et en notant  $\mathbf{u}_{\beta^{(k)}} = a_k + ib_k$ , nous avons la simplification suivante :

$$\begin{aligned} &\langle \mathbf{x}, \overline{\mathbf{v}_{\beta^{(k)}}} \rangle \mathbf{u}_{\beta^{(k)}} + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_{\beta^{(k)}} \rangle \overline{\mathbf{u}_{\beta^{(k)}}} \\ &= \left( \underbrace{\Re(\langle \mathbf{x}, \overline{\mathbf{v}_{\beta^{(k)}}} \rangle)}_{\Re(\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_{\beta^{(k)}} \rangle)} + i \underbrace{\Im(\langle \mathbf{x}, \overline{\mathbf{v}_{\beta^{(k)}}} \rangle)}_{-\Im(\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_{\beta^{(k)}} \rangle)} \right) (a_k + ib_k) + \left( \Re(\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_{\beta^{(k)}} \rangle) + i \Im(\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_{\beta^{(k)}} \rangle) \right) (a_k - ib_k) \\ &= 2\Re(\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_\beta \rangle) \Re \mathbf{u}_{\beta^{(k)}} + 2\Im(\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_\beta \rangle) \Im \mathbf{u}_{\beta^{(k)}} . \end{aligned}$$

Dés lors, tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  se décompose comme suit :

$$\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_\beta \rangle \mathbf{u}_\beta + \sum_{k=2}^r \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_{\beta^{(k)}} \rangle \mathbf{u}_{\beta^{(k)}} + \sum_{k=r+1}^{r+s} 2\Re(\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_\beta \rangle) \Re \mathbf{u}_{\beta^{(k)}} + 2\Im(\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_\beta \rangle) \Im \mathbf{u}_{\beta^{(k)}} . \quad (2.5)$$

Au vu de cette dernière égalité, nous concluons la chose suivante. Dans  $\mathbb{C}^n$  les éléments se décomposent en fonction des vecteurs propres de la matrice d'incidence  $M_\sigma$ . Or, ces vecteurs n'étant pas tous réels, ils ne forment plus une base de  $\mathbb{R}^n$ . Cependant, remplacer les vecteurs complexes non-réels par leurs parties réelles et imaginaires suffit à retrouver une famille génératrice qui se trouve même être une base comme en témoigne la proposition suivante.

**Proposition 2.2.5.** *La famille suivante est une base de  $\mathbb{R}^n$  :*

$$\mathcal{B} = \{ \mathbf{u}_{\beta^{(1)}}, \dots, \mathbf{u}_{\beta^{(r)}}, \Re \mathbf{u}_{\beta^{(r+1)}}, \Im \mathbf{u}_{\beta^{(r+1)}}, \dots, \Re \mathbf{u}_{\beta^{(r+s)}}, \Im \mathbf{u}_{\beta^{(r+s)}} \}$$

*Démonstration.* Considérons une combinaison linéaire nulle des vecteurs de l'énoncé :

$$\sum_{k=1}^r a_k \mathbf{u}_{\beta^{(k)}} + \sum_{k=r+1}^{r+s} (b_k \Re \mathbf{u}_{\beta^{(k)}} + c_k \Im \mathbf{u}_{\beta^{(k)}}) = 0.$$

Cette équation peut se réécrire dans  $\mathbb{C}^n$  de la sorte :

$$\sum_{k=1}^r a_k \mathbf{u}_{\beta^{(k)}} + \sum_{k=r+1}^{r+s} \left( \left( \frac{b_k - ic_k}{2} \right) \mathbf{u}_{\beta^{(k)}} + \left( \frac{b_k + ic_k}{2} \right) \overline{\mathbf{u}_{\beta^{(k)}}} \right) = 0.$$

L'indépendance linéaire des vecteurs  $\mathbf{u}_{\beta^{(i)}}$  dans  $\mathbb{C}^n$  (Lemme 2.2.3) implique  $a_k = \frac{b_k + ic_k}{2} = \frac{b_k - ic_k}{2} = 0$  pour tout  $k$ , c'est-à-dire  $a_k = b_k = c_k = 0$  pour tout  $k$ .  $\square$

Nous pouvons maintenant décomposer  $\mathbb{R}^n$  en une somme directe comme nous avons précédemment décomposé  $\mathbb{C}^n$ .

**Définition 2.2.6.** La *droite dilatante* de la matrice  $M_\sigma$  est le sous-espace vectoriel réel  $\mathbb{H}_e$  engendré par le vecteur  $\mathbf{u}_\beta$ .

**Définition 2.2.7.** L'*espace contractant* de la matrice  $M_\sigma$  est le sous-espace vectoriel réel  $\mathbb{H}_c$  engendré par les vecteurs

$$\mathcal{B}_c = \{ \mathbf{u}_{\beta^{(2)}}, \dots, \mathbf{u}_{\beta^{(r)}}, \Re \mathbf{u}_{\beta^{(r+1)}}, \Im \mathbf{u}_{\beta^{(r+1)}}, \dots, \Re \mathbf{u}_{\beta^{(r+s)}}, \Im \mathbf{u}_{\beta^{(r+s)}} \}.$$

Nous obtenons donc la décomposition

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{H}_e \oplus \mathbb{H}_c. \quad (2.6)$$

**Remarque 2.2.8.** Le vecteur propre à gauche  $\mathbf{v}_\beta$  est orthogonal à  $\mathbb{H}_c$ .

*Démonstration.* En effet, par la Proposition 2.2.4 nous avons  $\langle \mathbf{v}_\beta, \mathbf{u}_{\beta^{(k)}} \rangle = 0$  pour tout  $k = 2, \dots, n$ . Dés lors, en fixant  $k \in \{2, \dots, n\}$  et en notant  $\mathbf{u}_{\beta^{(k)}} = a_k + ib_k$ , nous obtenons successivement

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}_{\beta^{(k)}}, \mathbf{v}_\beta \rangle &= 0 = 0 + 0i \\ &= \overline{\mathbf{u}_{\beta^{(k)}}}^t \mathbf{v}_\beta \\ &= \sum_{j=1}^n (a_k - ib_k)_j (\mathbf{v}_\beta)_j \\ &= \sum_{j=1}^n (a_k)_j (\mathbf{v}_\beta)_j - i \sum_{j=1}^n (b_k)_j (\mathbf{v}_\beta)_j \\ &= \langle \mathbf{v}_\beta, \Re \mathbf{u}_{\beta^{(k)}} \rangle - i \langle \mathbf{v}_\beta, \Im \mathbf{u}_{\beta^{(k)}} \rangle, \end{aligned}$$

de sorte que  $\langle \mathbf{v}_\beta, \Re \mathbf{u}_{\beta^{(k)}} \rangle = \langle \mathbf{v}_\beta, \Im \mathbf{u}_{\beta^{(k)}} \rangle = 0$ . La conclusion suit.  $\square$



## 2.2.4 Projection sur les sous-espaces de $\mathbb{R}^n$

Pour ce qui est de la projections que les sous-espaces, nous suivons la même idée que dans la section précédente : nous partons des projections  $\pi'_e : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{K}_e$  et  $\pi'_c : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{K}_c$  que nous restreignons à  $\mathbb{R}^n$ . Pour être plus clair, nous introduisons les définitions suivantes

**Définition 2.2.9.** La projection  $\pi_c$  sur l'hyperplan contractant  $\mathbb{H}_c$  le long de la droite dilatante  $\mathbb{H}_e$  est donnée par la restriction de  $\pi'_c$  sur  $\mathbb{R}^n$ , c'est-à-dire

$$\pi_c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{H}_c, \mathbf{x} \mapsto \sum_{k=2}^{r+2s} \langle \mathbf{x}, \overline{\mathbf{v}_{\beta^{(k)}}} \rangle \mathbf{u}_{\beta^{(k)}}.$$

De même la projection  $\pi_e^*$  de  $\mathbb{R}^n$  sur  $\mathbb{H}_e$  le long de l'hyperplan contractant  $\mathbb{H}_c$  est donnée par la restriction de  $\pi'_e$  à  $\mathbb{R}^n$ , c'est-à-dire

$$\pi_e^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{H}_e, \mathbf{x} \mapsto \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_{\beta} \rangle \mathbf{u}_{\beta}.$$

Vu ce qui précède, ces projecteurs sont bien définis. Remarquons notre choix étrange de notation pour la projection sur  $\mathbb{H}_e$ . Ceci est dû au fait que nous n'allons pas travailler avec cette projection dans la suite mais plutôt avec une renormalisation de celle-ci. Nous introduisons ainsi la définition suivante.

**Définition 2.2.10.** La *hauteur* d'un vecteur  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  est  $\pi_e(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_{\beta} \rangle$ .

La fonction  $\pi_e$  est donc la projection de  $\mathbb{R}^n$  sur  $\mathbb{H}_e$  le long de  $\mathbb{H}_c$  suivie d'une renormalisation qui transforme les valeurs d'arrivées en valeurs de  $\mathbb{R}$  et non pas de  $\mathbb{H}_e$ . Remarquons que  $\pi_e(\mathbb{H}_c) = 0$ . La fonction  $\pi_e$  mesure d'une certaine manière la distance à l'hyperplan  $\mathbb{H}_c$  d'où le terme "hauteur".

Dans la suite de ce mémoire, bon nombre de résultats ont lieu sur  $\mathbb{H}_c$ . Ainsi, il est naturel de regarder la restriction de  $M_{\sigma}$  sur cette espace.

**Définition 2.2.11.** Nous noterons  $h_{\sigma} : \mathbb{H}_c \rightarrow \mathbb{H}_c, \mathbf{x} \mapsto M_{\sigma}\mathbf{x}$  la restriction de  $M_{\sigma}$  à  $\mathbb{H}_c$ .

Ce qui suit justifie l'appellation "contractant" de  $\mathbb{H}_c$ . Rappelons d'abord qu'une application  $f$  d'un espace métrique  $(E, d)$  dans lui-même est une *contraction uniforme* si il existe une constante  $k < 1$  tel que  $\forall x, y \in E, d(f(x), f(y)) \leq k d(x, y)$ . Ainsi, le terme "uniforme" fait référence au fait que la même valeur  $k$  convient pour toutes les paires d'éléments de  $E$ .

Nous notons  $\|\cdot\|_c$  la norme maximale sur  $\mathbb{H}_c$  par rapport aux vecteurs  $\mathbf{u}_{\beta^{(i)}}$  pour  $i \geq 2$ , c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} \forall \nu \in \mathbb{H}_c, \|\nu\|_c &= \max\{|\langle \nu, \overline{\mathbf{v}_{\beta^{(i)}}} \rangle| : i = 2, \dots, r + s\} \\ &= \max\{|\langle \nu, \mathbf{v}_{\beta^{(i)}} \rangle| : i = 2, \dots, r + s\} \end{aligned} \quad (2.7)$$

où la deuxième égalité découle du Lemme A.0.3. Cette norme correspond donc à la valeur absolue maximale d'un coefficient dans la décomposition (2.4) d'un élément de  $\mathbb{H}_c$ .

En posant  $\beta_{\max} := \max\{|\beta^{(i)}| : i \geq 2\}$ , nous avons successivement

$$\begin{aligned} \|h_\sigma(\nu)\|_c &= \|M_\sigma \nu\|_c = \max_{i \geq 2} \{|\langle M_\sigma \nu, \mathbf{v}_{\beta^{(i)}} \rangle|\} \\ &= \max_{i \geq 2} \{|\langle \nu, M_\sigma^T \mathbf{v}_{\beta^{(i)}} \rangle|\} = \max_{i \geq 2} \{|\langle \nu, \beta^{(i)} \mathbf{v}_{\beta^{(i)}} \rangle|\} \\ &\leq \beta_{\max} \|\nu\|_c, \end{aligned}$$

ce qui nous donne une inégalité qui s'avère fort utile dans nos développements :

$$\|h_\sigma(\nu)\|_c \leq \beta_{\max} \|\nu\|_c \text{ pour tout } \nu \in \mathbb{H}_c. \quad (2.8)$$

Nous notons  $B_c(\nu, R)$  la boule ouverte de centre  $\nu$  et de rayon  $R$  par rapport à cette norme. Nous pouvons maintenant définir une distance appropriée sur  $\mathbb{H}_c$  de la façon suivante

$$d_c : \mathbb{H}_c \times \mathbb{H}_c \rightarrow \mathbb{R}, (\nu, \nu') \mapsto \|\nu - \nu'\|_c. \quad (2.9)$$

Cette distance fait de  $h_\sigma$  une contraction uniforme, comme le montre la proposition suivante.

**Proposition 2.2.12.** *La fonction  $h_\sigma$  est une contraction uniforme (pour la distance  $d_c$ ) de facteur  $\beta_{\max}$ .*

*Démonstration.* La preuve est directe. Soit  $\nu, \nu' \in \mathbb{H}_c$ . Nous obtenons successivement :

$$\begin{aligned} d_c(h_\sigma(\nu), h_\sigma(\nu')) &= \|h_\sigma(\nu - \nu')\|_c \\ &\leq \beta_{\max} \|\nu - \nu'\|_c = \beta_{\max} d_c(\nu, \nu'). \end{aligned}$$

□

**Proposition 2.2.13.** *L'application  $h_\sigma$  contracte la mesure de Lebesgue  $\mu_{n-1}$  par un facteur  $1/\beta$ .*

*Démonstration.* Par le Théorème 1.2.5, la matrice  $H_\sigma$  représentant  $h_\sigma$  dans la base  $\mathcal{B}_c$  est donnée par

$$H_\sigma = \begin{pmatrix} \beta^{(2)} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \beta^{(r)} & & & \\ & & & B_{\beta^{(r+1)}} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & B_{\beta^{(r+s)}} \end{pmatrix} \text{ où } B_\beta = \begin{pmatrix} \Re(\beta) & \Im(\beta) \\ -\Im(\beta) & \Re(\beta) \end{pmatrix}$$

Nous en concluons que le déterminant de  $h_\sigma$  est donné par

$$\det(h_\sigma) = \beta^{(2)} \dots \beta^{(r)} |\beta^{(r+1)}|^2 \dots |\beta^{(r+s)}|^2$$

de sorte que  $\det(h_\sigma) < 1$  vu l'hypothèse Pisot. Rappelons alors que si  $\mu_d$  est la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^d$  et que  $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ , alors pour tout  $E \in \mathbb{R}^d$  mesurable, nous avons  $\mu(AE) = |\det(A)| \mu(E)$ . La conclusion suit. □

Nous pouvons maintenant observer que la projection  $\pi_c$  satisfait une relation de commutation avec la fonction d'abélianisation. En effet, en rappelant la relation suivante :

$$\mathbf{P}(\sigma(w)) = M_\sigma \mathbf{P}(w) \quad \forall w \in A^* \quad (2.10)$$

où  $\mathbf{P}$  désigne la fonction d'abélianisation, nous déduisons l'égalité qui suit :

$$\pi_c \circ \mathbf{P} \circ \sigma(w) = h_\sigma \circ \pi_c \circ \mathbf{P}(w) \quad \forall w \in A^*. \quad (2.11)$$

Nous terminons cette section par une équivalence liant les projecteurs  $\pi_e$  et  $\pi_c$  aux points de  $\mathbb{Q}^n$ .

**Proposition 2.2.14.** *Pour tout  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Q}^n$ , nous avons les équivalences suivantes :*

$$\pi_c(\mathbf{x}) = \pi_c(\mathbf{y}) \Leftrightarrow \pi_e(\mathbf{x}) = \pi_e(\mathbf{y}) \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}. \quad (2.12)$$

*Démonstration.* Il est évident que si les points sont les mêmes, ils ont la même image par les projecteurs. Montrons donc l'autre sens de ces implications.

Soient  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Q}^n$  tels que  $\pi_e(\mathbf{x}) = \pi_e(\mathbf{y})$ . Nous obtenons

$$\begin{aligned} \pi_e(\mathbf{x}) = \pi_e(\mathbf{y}) &\Leftrightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_\beta \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{v}_\beta \rangle \\ &\Leftrightarrow \langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{v}_\beta \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) (\mathbf{v}_\beta)_i = 0 \end{aligned}$$

Vu le point 3) de la proposition 2.2.2, les composantes de  $\mathbf{v}_\beta$  sont linéairement indépendantes sur  $\mathbb{Q}$  de sorte que cette dernière égalité n'est possible que si  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ .

Supposons maintenant  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Q}^n$  tels que  $\pi_c(\mathbf{x}) = \pi_c(\mathbf{y})$ . Nous obtenons successivement

$$\begin{aligned} \pi_c(\mathbf{x}) = \pi_c(\mathbf{y}) &\Leftrightarrow \sum_{i=2}^{r+2s} \langle \mathbf{x}, \overline{\mathbf{v}_{\beta^{(i)}}} \rangle \mathbf{u}_{\beta^{(i)}} = \sum_{i=2}^{r+2s} \langle \mathbf{y}, \overline{\mathbf{v}_{\beta^{(i)}}} \rangle \mathbf{u}_{\beta^{(i)}} \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=2}^{r+2s} \langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \overline{\mathbf{v}_{\beta^{(i)}}} \rangle \mathbf{u}_{\beta^{(i)}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \overline{\mathbf{v}_{\beta^{(i)}}} \rangle = 0 \quad \forall i \in \{2, \dots, r+2s\} \\ &\Leftrightarrow \sum_{j=1}^n (\mathbf{x} - \mathbf{y})_j (\overline{\mathbf{v}_{\beta^{(i)}}})_j = 0 \quad \forall i \in \{2, \dots, r+2s\} \end{aligned}$$

où la somme sur  $i$  disparaît car les  $\mathbf{u}_{\beta^{(i)}}$  sont linéairement indépendants. Nous concluons alors comme dans le cas précédent en remarquant que les composantes des  $\overline{\mathbf{v}_{\beta^{(i)}}}$  sont linéairement indépendantes sur  $\mathbb{Q}$ .  $\square$

## 2.3 La tuile centrale (ou fractale de Rauzy)

Ce chapitre définit la fractale de Rauzy associée à notre substitution  $\sigma$  Pisot, irréductible et unimodulaire. Nous préférons ici le terme de tuile centrale pour désigner cet objet.

Commençons par rappeler qu'une substitution prolongeable admet un point fixe (Lemme A.0.1). À partir de maintenant nous rajoutons donc l'hypothèse de prolongeabilité à notre substitution  $\sigma$  Pisot irréductible et unimodulaire. Ainsi, il existe  $u \in A$  tel que  $\sigma(u) = u$ . De plus,  $u$  est uniformément récurrent vu la Proposition A.0.2.

**Définition 2.3.1.** La *ligne brisée* associée au point fixe  $u$  de la substitution  $\sigma$  Pisot irréductible est définie comme étant la ligne brisée de  $\mathbb{R}^n$  dont les sommets sont donnés par  $\{\mathbf{P}(u_0 \dots u_{N-1}) \mid N \in \mathbb{N}\}$ . Elle est notée  $L_u$ .

Nous pouvons également définir la ligne brisée comme étant un "escalier" créé par une union de segments.

**Définition 2.3.2.** Soit  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$  et  $i \in A$ . Nous appelons *cordon géométrique de base* le segment  $[\mathbf{x}, i]_g = \{\mathbf{x} + \theta e_i \mid \theta \in [0, 1]\}$ .

La ligne brisée associée au point fixe  $u$  est donc l'union des cordons géométriques de base  $[\mathbf{P}(u_0 \dots u_{N-1}), u_N]_g$  pour  $N \in \mathbb{N}$  c'est à dire :

$$L_u = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} [\mathbf{P}(u_0 \dots u_{N-1}), u_N]_g \quad (2.13)$$

**Exemple 2.3.3.** Considérons la substitution de Fibonacci  $\sigma : a \mapsto ab, b \mapsto a$  dont le point fixe est donné par  $u := \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^n(a) = abaababaaba \dots$ . Les sommets de la ligne brisée sont donc trouvés en regardant les vecteurs de Parikh des préfixes de  $u$  comme suit :

Préfixe	Point associé
a	(1, 0)
ab	(1, 1)
aba	(2, 1)
abaa	(3, 1)
abaab	(3, 2)
...	...

Une illustration de la ligne brisée associée à la substitution de Fibonacci est donnée ci-bas Figure 2.1.

Les points de la ligne brisée nous permettent de définir la tuile centrale.

**Définition 2.3.4** (La tuile centrale). Soit  $\sigma$  une substitution Pisot irréductible et unimodulaire. La *tuile centrale*  $\mathcal{T}_\sigma$  est définie comme l'adhérence de la projection par  $\pi_c$  des sommets de la ligne brisée  $L_u$ , c'est à dire

$$\mathcal{T}_\sigma := \overline{\{\pi_c \circ \mathbf{P}(u_0 \dots u_{N-1}) \mid N \in \mathbb{N}\}}.$$

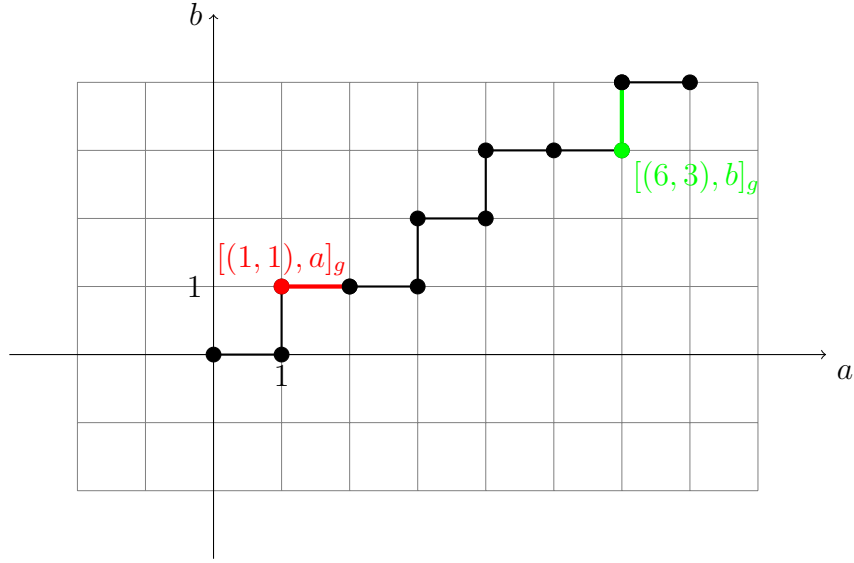


FIGURE 2.1: Illustration des cordons géométriques de base et de la ligne brisée associée à la substitution  $\sigma : a \mapsto ab, b \mapsto a$ .

Les sous-tuiles  $\mathcal{T}_\sigma(i)$  de la tuile centrale  $\mathcal{T}_\sigma$  sont définies en fonction de la lettre  $u_N$  apparaissant après le mot  $u_0 \dots u_{N-1}$ . En effet, on pose pour tout  $i \in A$

$$\mathcal{T}_\sigma(i) := \overline{\{\pi_c \circ \mathbf{P}(u_0 \dots u_{N-1}) \mid N \in \mathbb{N}, u_N = i\}}.$$

Des illustrations de la tuile centrale et des sous-tuiles associées à différentes substitutions sont données Figure 1.1.

Par définition, il est clair que la tuile centrale est une union finie de ses sous-tuiles

$$\mathcal{T}_\sigma = \bigcup_{i \in A} \mathcal{T}_\sigma(i).$$

**Remarque 2.3.5.** A ce stade, il pourrait sembler que la tuile centrale dépend du choix du point fixe  $u$  mais nous verrons plus tard qu'elle ne dépend que de la substitution  $\sigma$ . En revanche, le choix de  $\mathbf{v}_\beta$  modifie les tuiles. En effet, le choix de  $\mathbf{v}_\beta$  modifie la fonction  $\pi_c$  par un facteur multiplicatif.

**Théorème 2.3.6.** *Soit  $\sigma$  une substitution Pisot irréductible et unimodulaire. La tuile centrale  $\mathcal{T}_\sigma$  et les sous-tuiles  $\mathcal{T}_\sigma(i)$  sont des ensembles compacts.*

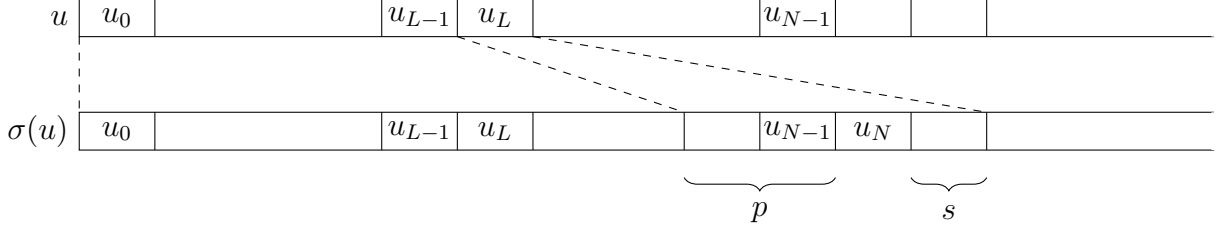
*Démonstration.* Notons d'abord que la compacité des sous-tuiles  $\mathcal{T}_\sigma(i)$  est conséquence directe de la compacité de la tuile centrale  $\mathcal{T}_\sigma$  puisqu'elles en sont des sous-ensembles fermés.

Pour prouver la compacité de  $\mathcal{T}_\sigma$ , il suffit de prouver que les points  $\pi_c \circ \mathbf{P}(u_0 \dots u_{N-1})$  pour  $N \in \mathbb{N}$  restent à distance uniformément bornée de l'origine dans  $\mathbb{H}_c$ .

Afin de prouver cette dernière assertion, nous allons décomposer le préfixe  $u_0 \dots u_{N-1}$  en la concaténation de mots de la forme  $\sigma^k(p)$  pour un certains  $k$  naturel et un certains mot  $p$ . Puisque  $\sigma(u) = u$ , il existe  $L \leq N$  tel que  $\sigma(u_0 \dots u_{L-1})$  est un préfixe propre de  $u_0 \dots u_{N-1}$  et  $u_0 \dots u_{N-1}$  est préfixe de  $\sigma(u_0 \dots u_L)$ . En d'autres termes, il existe un préfixe  $p$  de  $\sigma(u_L)$  tel que

$$u_0 \dots u_{N-1} = \sigma(u_0 \dots u_{L-1}) p, \quad \text{avec } \sigma(u_L) = p u_N s. \quad (2.14)$$

Une illustration de la situation est donnée ici-bas.



De là, nous pouvons opérer la même décomposition sur le préfixe  $u_0 \dots u_{L-1}$  à l'intérieur de  $\sigma$  et ainsi de suite jusqu'à obtenir une décomposition de la forme souhaitée. Ainsi, en répétant le processus nous obtenons pour tout  $N$  une expansion de la forme

$$u_0 \dots u_{N-1} = \sigma^K(p_K) \sigma^{K-1}(p_{K-1}) \dots \sigma(p_1) p_0.$$

Vu la relation (2.11), nous avons

$$\pi_c \circ \mathbf{P}(u_0 \dots u_{N-1}) = h_\sigma^K \circ \pi_c \circ \mathbf{P}(p_K) + \dots + h_\sigma \circ \pi_c \circ \mathbf{P}(p_1) + \pi_c \circ \mathbf{P}(p_0).$$

Rappelons que par la Proposition 2.2.12, nous avons

$$d_c(h_\sigma(x), 0) \leq \beta_{\max} d_c(x, 0).$$

Comme les  $\mathbf{P}(p_i)$  prennent un nombre fini de valeurs, cela implique que les points  $\pi_c \circ \mathbf{P}(u_0 \dots u_{N-1})$  restent à distance uniformément bornée de l'origine pour tout  $N \in \mathbb{N}$ . En effet, pour  $N \in \mathbb{N}$ , nous avons successivement

$$\begin{aligned} d_c\left(\pi_c\left(\mathbf{P}(u_0 \dots u_{N-1})\right), 0\right) &= d_c\left(\sum_{k=0}^{N-1} h_\sigma^k\left(\pi_c\left(\mathbf{P}(p_k)\right)\right), 0\right) \\ &\leq \sum_{k=0}^{N-1} d_c\left(h_\sigma^k\left(\pi_c\left(\mathbf{P}(p_k)\right)\right), 0\right) \\ &\leq \sum_{k=0}^{N-1} \beta_{\max}^k d_c\left(\pi_c\left(\mathbf{P}(p_k)\right), 0\right) \\ &\leq C \sum_{k=0}^{N-1} \beta_{\max}^k \\ &\leq \frac{C}{1 - \beta_{\max}} \end{aligned}$$

où nous pouvons majorer par une constante  $C$  car les  $\mathbf{P}(p_i)$  sont en nombre fini et où la dernière inégalité vient de la limite d'une série géométrique.  $\square$

**Remarque 2.3.7.** Remarquons que l'inégalité de la preuve précédente :

$$d_c\left(\pi_c(\mathbf{P}(u_0 \dots u_{N-1})), 0\right) \leq \frac{C}{1 - \beta_{\max}}$$

indiquant que les points  $\pi_c(\mathbf{P}(u_0, \dots, u_{N-1}))$  reste à distance uniformément bornée de l'origine dans  $(\mathbb{H}_c, d_c)$  implique également que les points  $\mathbf{P}(u_0 \dots u_{N-1})$  reste à distance uniformément bornée de la demi-droite  $\mathbf{u}_\beta \mathbb{R}_+$  dans  $(\mathbb{R}^n, d_E)$  où  $d_E$  est la distance euclidienne. En effet, vu l'équivalence des normes de  $\mathbb{R}^{n-1}$ , il existe une constante  $D$  tel que  $\|x\|_c \leq D\|x\|_E$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ , de sorte que l'inégalité précédente se réécrit

$$d_E\left(\pi_c(\mathbf{P}(u_0 \dots u_{N-1})), 0\right) \leq \frac{C'}{1 - \beta_{\max}}$$

pour  $C' = CD$ . Or,  $d_E\left(\pi_c(\mathbf{P}(u_0 \dots u_{N-1})), 0\right) = d_E(\mathbf{P}(u_0 \dots u_{N-1}), \mathbf{u}_\beta \mathbb{R}_+)$ , d'où la conclusion.

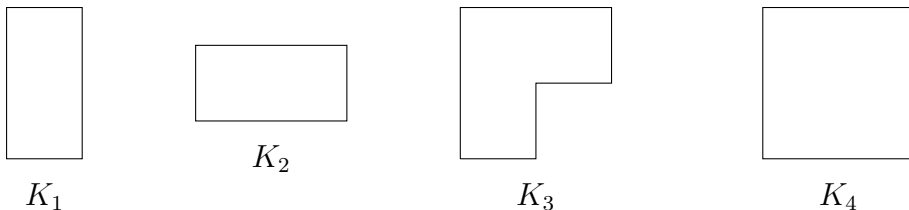
## 2.4 Equation d'ensemble et graphe préfixe-suffixe

Une des propriétés intéressante de la tuile centrale et de ses sous-tuiles est qu'elles satisfont ce qu'on appelle une *équation d'ensemble*. Nous verrons que cette équation entre les tuiles est liée à un graphe encodant la décomposition de l'image des lettre par la substitution  $\sigma$  nommé *graphe préfixe-suffixe*.

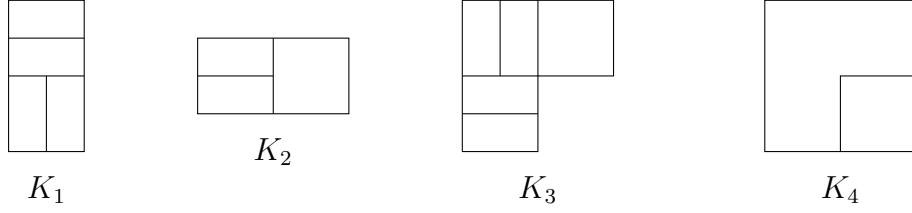
### 2.4.1 Equation d'ensemble et SFIG

Considérons une collection finie d'ensembles compacts  $\{K_1, \dots, K_q\}$ . Nous dirons que cette collection satisfait une *équation d'ensemble* si chaque  $K_i$  peut-être décomposé en une union de copies contractées de lui-même et des autres ensembles  $K_j$ .

**Exemple 2.4.1.** Considérons les ensembles compacts suivants :



et supposons, à titre d'exemple, qu'ils se décomposent de la manière suivante :



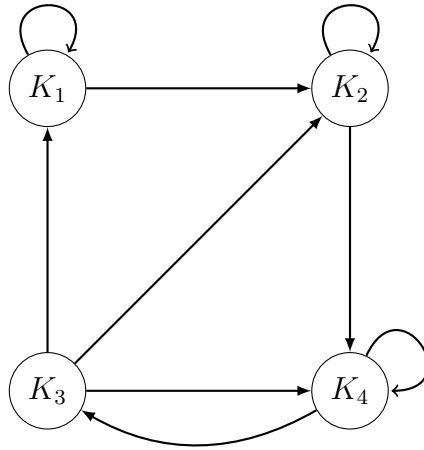
Nous pouvons alors noter les équations d'ensembles suivantes :

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \alpha_1(K_1) \cup \beta_1(K_1) \cup \gamma_1(K_2) \cup \delta_1(K_2) \\
 K_2 &= \alpha_2(K_2) \cup \beta_2(K_2) \cup \gamma_2(K_4) \\
 K_3 &= \alpha_3(K_1) \cup \beta_3(K_1) \cup \gamma_3(K_2) \cup \delta_3(K_2) \cup \eta_3(K_4) \\
 K_4 &= \alpha_4(K_3) \cup \beta_4(K_4)
 \end{aligned}$$

où les fonctions  $\alpha_i, \dots, \eta_i$  contractent et tradament les compacts.

A une telle équation d'ensemble, il existe un graphe naturel associé : ses sommets sont donnés par  $\{K_i \mid 1 \leq i \leq q\}$  et il y a une arête  $e$  entre  $K_i$  et  $K_j$  (notée  $i \xrightarrow{e} j$ ) si  $K_j$  apparaît dans la décomposition de  $K_i$ .

**Exemple 2.4.2.** En considérant les compacts de l'exemple 2.4.1 juste au-dessus, nous obtenons le graphe suivant.



A l'inverse, nous pouvons également partir d'un graphe et lui associer un ensemble fini de compacts non-vides en introduisant la notion de *système de fonctions itérées associé à un graphe* SFIG (appelé "graph-directed iterated function system" ou GIFS en anglais). Considérons un graphe dirigé  $G$  avec comme ensemble de sommet  $\{1, \dots, q\}$  et comme ensemble d'arêtes  $E$ , tel que chaque sommet possède au moins une arête sortante. A chaque arête  $e$  du graphe, nous associons une contraction  $\tau_e : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Nous appelons *système de fonctions itérées associé à un graphe* le couple  $(G, \{\tau_e\}_{e \in E})$ .



Il peut être montré (voir [15]) qu'étant donné un SFIG  $(G, \{\tau_e\}_{e \in E})$ , il existe une unique collection d'ensembles compacts non-vides  $\{K_1, \dots, K_q\} \subset \mathbb{R}^n$  tels que

$$K_i = \bigcup_{i \xrightarrow{e} j} \tau_e(K_j)$$

où l'union porte sur tous les sommets de  $G$  qui sont atteints en un coup depuis le sommet  $i$ . Les ensembles  $K_i$  sont appelés les *attracteurs du SFIG* ou *solutions du SFIG*. Notons que l'unicité n'est pas vraie en règle générale et ne tient que dans le cas où les ensembles sont compacts non-vides. Pour plus de détails sur les SFIG et leur lien avec les fractales de Rauzy voir [18].

## 2.4.2 Le graphe préfixe-suffixe

Nous pouvons maintenant construire un graphe au départ de nos tuiles  $\mathcal{T}_\sigma(i)$  et appliquer ce qui a été dit à la section précédente à notre cas particulier. Le graphe dont il est question ici est appelé le *graphe préfixe-suffixe*. Il décrit la manière dont les images des lettres par  $\sigma$  peuvent être décomposées comme dans la preuve du théorème 2.3.6.

**Définition 2.4.3** (Graphe préfixe-suffixe). Soit  $\sigma$  une substitution sur l'alphabet  $A$  et soit  $P_\sigma$  l'ensemble fini suivant :

$$P_\sigma := \{(p, i, s) \in A^* \times A \times A^* \mid \exists j \in A : \sigma(j) = pis\}.$$

L'ensemble des sommets du *graphe préfixe-suffixe*  $\mathcal{G}_\sigma$  associé à  $\sigma$  est l'alphabet  $A$ . Il y a une arête étiquetée par  $(p, i, s) \in P_\sigma$  de  $i$  vers  $j$  si et seulement si  $\sigma(j) = pis$ . Nous utilisons alors la notation  $i \xrightarrow{(p,i,s)} j$ .

**Exemple 2.4.4.** Illustrons la définition précédente sur la substitution  $\sigma(1) = 112, \sigma(2) = 113, \sigma(3) = 1$ . La première étape pour construire le graphe préfixe-suffixe est de déterminer l'ensemble  $P_\sigma$ . Nous avons

$$\begin{aligned} \sigma(1) &= \varepsilon.1.12 = 1.1.2 = 11.2.\varepsilon \\ \sigma(2) &= \varepsilon.1.13 = 1.1.3 = 11.3.\varepsilon \\ \sigma(3) &= \varepsilon.1.\varepsilon \end{aligned}$$

de sorte que  $P_\sigma = \{(\varepsilon, 1, 12), (1, 1, 2), (11, 2, \varepsilon), (\varepsilon, 1, 13), (1, 1, 3), (11, 3, \varepsilon), (\varepsilon, 1, \varepsilon)\}$ . Le graphe est donc le suivant (Figure 2.2).

En associant à l'arête  $e = (p, i, s)$  la fonction de contraction :

$$\tau_e : \mathbb{H}_c \rightarrow \mathbb{H}_c, \nu \mapsto h_\sigma(\nu) + \pi_c \circ \mathbf{P}(p),$$

nous obtenons alors un SFIG  $(\mathcal{G}_\sigma, \{\tau_e\}_{e \in P_\sigma})$ .

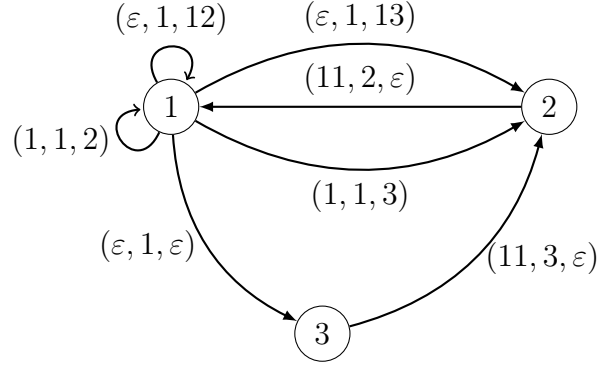


FIGURE 2.2: Graphe préfixe-suffixe de la substitution  $\sigma(1) = 112, \sigma(2) = 113, \sigma(3) = 1$ .

Nous sommes maintenant en mesure d'exprimer l'équation d'ensembles satisfaite par les sous-tuiles de la tuile centrale. Ceci fait l'objet du théorème suivant.

**Théorème 2.4.5** (Sirvent et Wang [19]). *Soit  $\sigma$  une substitution Pisot irréductible et unimodulaire sur l'alphabet  $A$ . Les sous-tuiles  $\mathcal{T}_\sigma(i)$  sont les solutions du SFIG  $(\mathcal{G}_\sigma, \{\tau_e\}_{e \in P_\sigma})$ , c'est à dire*

$$\forall i \in A, \quad \mathcal{T}_\sigma(i) = \bigcup_{\substack{j \in A, \\ i \xrightarrow{(p,i,s)} j}} h_\sigma(\mathcal{T}_\sigma(j)) + \pi_c \circ \mathbf{P}(p). \quad (2.15)$$

De plus, l'union de l'équation précédente est disjointe en mesure.

*Démonstration.* La clé de cette démonstration résulte dans la décomposition (2.14) introduite lors de la démonstration du théorème 2.3.6. Soit  $i \in A$  et supposons que  $u_N = i$ . Par définition,  $\pi_c \circ \mathbf{P}(u_0, \dots, u_{N-1}) \in \mathcal{T}_\sigma(i)$ . Vu l'équation (2.14), il existe  $L \in \mathbb{N}$  et une décomposition de  $u$  telle que :

- 1)  $\sigma(u_L) = pu_Ns = pis$
- 2)  $u_0 \dots u_{N-1} = \sigma(u_0 \dots u_{L-1})p$

Dés lors, en passant à l'abélianisé et en projetant sur  $\mathbb{H}_c$ , nous obtenons

$$\pi_c \circ \mathbf{P}(u_0 \dots u_{N-1}) = h_\sigma \circ \pi_c \circ \mathbf{P}(u_0, \dots, u_{L-1}) + \pi_c \circ \mathbf{P}(p).$$

Ceci implique que  $\pi_c \circ \mathbf{P}(u_0 \dots u_{N-1}) \in h_\sigma(\mathcal{T}_\sigma(u_L)) + \pi_c \circ \mathbf{P}(p)$ . Comme cela est vrai pour tout  $N$  tel que  $u_N = i$ , nous avons

$$\begin{aligned} \{\pi_c \circ \mathbf{P}(u_0 \dots u_{N-1}) \mid u_N = i, N \in \mathbb{N}\} &= \bigcup_{\substack{(p,j,s), \\ \sigma(j)=pis}} h_\sigma\{\pi_c \circ \mathbf{P}(u_0 \dots u_{L-1}) \mid u_L = j, L \in \mathbb{N}\} + \pi_c \circ \mathbf{P}(p) \\ &\subseteq \mathcal{T}_\sigma(i) \end{aligned}$$

où l'inclusion vient de ce que  $\mathcal{T}_\sigma(i)$  est l'adhérence du membre de gauche. Ainsi, en passant à l'adhérence, nous obtenons

$$\bigcup_{\substack{(p,j,s), \\ \sigma(j)=pis}} h_\sigma \mathcal{T}_\sigma(j) + \pi_c \circ \mathbf{P}(p) \subseteq \mathcal{T}_\sigma(i)$$

et comme les deux membres de cette égalité sont des fermés contenant  $\{\pi_c \circ \mathbf{P}(u_0 \dots u_{N-1}) | u_N = i, N \in \mathbb{N}\}$  et que  $\mathcal{T}_\sigma(i)$  est le plus petit fermé contenant cet ensemble, nous avons l'égalité.

Montrons maintenant que l'union est disjointe en mesure. Rappelons d'abord que  $h_\sigma$  contracte  $\mu_{n-1}$ , la mesure de Lebesgue de dimension  $n-1$ , par un facteur  $1/\beta$  (Proposition 2.2.13) et que  $\mu_{n-1}$  est invariante par translation. Dés lors, vu notre égalité (2.15) nous obtenons successivement

$$\begin{aligned} \mu_{n-1}(\mathcal{T}_\sigma(i)) &= \mu_{n-1}\left(\bigcup_{\substack{(p,j,s), \\ \sigma(j)=pis}} h_\sigma(\mathcal{T}_\sigma(j)) + \pi_c \circ \mathbf{P}(p)\right) \\ &= \mu_{n-1}\left(\bigcup_{\substack{(p,j,s), \\ \sigma(j)=pis}} h_\sigma(\mathcal{T}_\sigma(j))\right) \\ &\leq \sum_{\substack{(p,j,s), \\ \sigma(j)=pis}} \mu_{n-1}\left(h_\sigma(\mathcal{T}_\sigma(j))\right) \\ &= \sum_{j \in A} m_{ij} \mu_{n-1}\left(h_\sigma(\mathcal{T}_\sigma(j))\right) \\ &= \sum_{j \in A} m_{ij} \frac{1}{\beta} \mu_{n-1}(\mathcal{T}_\sigma(j)) \end{aligned}$$

où les  $m_{ij}$  sont les coefficients de la matrice d'incidence  $M_\sigma$ . Ces coefficients  $m_{ij}$  apparaissent car il y a exactement  $m_{ij}$  façons de faire apparaître  $i$  dans la décomposition de  $\sigma(j)$  vu la définition de la matrice d'incidence  $M_\sigma$ . Afin de mieux voir ce qu'il se passe, réécrivons l'inégalité précédente comme suit :

$$\beta \mu_{n-1}(\mathcal{T}_\sigma(i)) \leq \sum_{j \in A} m_{ij} \mu_{n-1}(\mathcal{T}_\sigma(j)), \quad \forall i \in A.$$

Comme  $\beta$  est la valeur propre de Perron de  $M_\sigma$ , le théorème 1.2.3 implique que l'inégalité précédente est en faite une égalité. En reprenant les développements précédents et en regardant où apparait l'inégalité, nous obtenons de ce qui précède

$$\mu_{n-1}\left(\bigcup_{\substack{(p,j,s), \\ \sigma(j)=pis}} h_\sigma(\mathcal{T}_\sigma(j))\right) = \sum_{\substack{(p,j,s), \\ \sigma(j)=pis}} \mu_{n-1}\left(h_\sigma(\mathcal{T}_\sigma(j))\right).$$

Ceci implique qu'il n'y a aucun superposition de mesure strictement positive dans l'union (2.15) ce qui conclut.  $\square$

**Exemple 2.4.6.** Reprenons la substitution  $\sigma(1) = 112, \sigma(2) = 113, \sigma(3) = 1$  de l'exemple 2.4.4. Afin de décomposer  $\mathcal{T}_\sigma(i)$  comme dans l'équation (2.15), il suffit de regarder les arêtes sortantes du sommet  $i$  dans le graphe préfixe-suffixe (Figure 2.2). Nous obtenons alors les décompositions suivantes.

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_\sigma(1) &= h_\sigma(\mathcal{T}_\sigma(1)) \cup (h_\sigma(\mathcal{T}_\sigma(1)) + \pi_c(\mathbf{e}_1)) \cup h_\sigma(\mathcal{T}_\sigma(2)) \cup (h_\sigma(\mathcal{T}_\sigma(2)) + \pi_c(\mathbf{e}_1)) \cup h_\sigma(\mathcal{T}_\sigma(3)) \\ \mathcal{T}_\sigma(2) &= h_\sigma(\mathcal{T}_\sigma(1)) + 2\pi_c(\mathbf{e}_1) \\ \mathcal{T}_\sigma(3) &= h_\sigma(\mathcal{T}_\sigma(2)) + 2\pi_c(\mathbf{e}_1).\end{aligned}$$

L'équation de SFIG (2.15) permet de développer les points de la tuile centrale en terme de puissances de  $h_\sigma$  comme le montre le corollaire suivant.

**Corollaire 2.4.7** (Siegel et Thuswaldner [18]). *Soit  $\sigma$  une substitution Pisot irréductible et unimodulaire. Si  $\nu \in \mathbb{H}_c$  appartient à la tuile  $\mathcal{T}_\sigma(i_0)$  ( $i_0 \in A$ ), alors il existe un chemin  $(p_k, i_k, s_k)_{k \geq 0}$  démarrant de  $i_0$  dans le graphe préfixe-suffixe tel que*

$$\nu = \sum_{k \geq 0} h_\sigma^k(\pi_c \circ \mathbf{P}(p_k)). \quad (2.16)$$

*Démonstration.* Supposons que  $\nu \in \mathcal{T}_\sigma(i_0)$ . Alors, l'équation de SFIG (2.15) permet d'écrire  $\nu$  comme  $\nu = h_\sigma(\nu_1) + \pi_c \circ \mathbf{P}(p_0)$  avec  $\nu_1 \in \mathcal{T}_\sigma(i_1)$  et  $\sigma(i_1) = p_0 i_0 s_0$ . Par récurrence, nous obtenons  $\nu = h_\sigma^k(\nu_k) + h_\sigma^{k-1}(\pi_c \circ \mathbf{P}(p_k)) + \dots + \pi_c \circ \mathbf{P}(p_0)$  avec  $\nu_k \in \mathcal{T}_\sigma(i_k)$  et  $\sigma(i_k) = p_{k-1} i_{k-1} s_{k-1}$ . Comme les  $\nu_k$  et  $\pi_c \circ \mathbf{P}(p_k)$  restent à distance uniformément bornée de l'origine et que  $h_\sigma$  est une contraction uniforme, la série converge de sorte que  $\nu = \sum_{k \geq 0} h_\sigma^k(\pi_c \circ \mathbf{P}(p_k))$ .  $\square$

**Remarque 2.4.8.** L'équation (2.15) admet la  $k$ -ième itération suivante pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et  $i \in A$

$$\mathcal{T}_\sigma(i) = \bigcup_{\substack{j \in A, \\ \sigma^k(j) = i}} h_\sigma^k(\mathcal{T}_\sigma(j)) + \pi_c \circ \mathbf{P}(p). \quad (2.17)$$

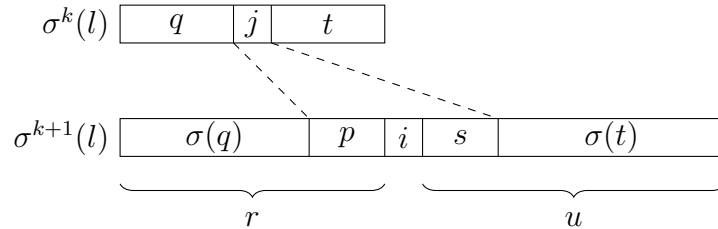
*Démonstration.* Montrons cette formule par récurrence sur  $k$ . Nous obtenons successive-

ment

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_\sigma(i) &= \bigcup_{\substack{j \in A, \\ \sigma(j)=pis}} h_\sigma(\mathcal{T}_\sigma(j)) + \pi_c \circ \mathbf{P}(p) \\
&= \bigcup_{\substack{j \in A, \\ \sigma(j)=pis}} h_\sigma \left( \bigcup_{\substack{l \in A, \\ \sigma^k(l)=qjt}} h_\sigma^k(\mathcal{T}_\sigma(l)) + \pi_c \circ \mathbf{P}(q) \right) + \pi_c \circ \mathbf{P}(p) \\
&= \bigcup_{\substack{j \in A, \\ \sigma(j)=pis}} \bigcup_{\substack{l \in A, \\ \sigma^k(l)=qjt}} \left( h_\sigma^{k+1}(\mathcal{T}_\sigma(l)) + h_\sigma(\pi_c \circ \mathbf{P}(q)) + \pi_c \circ \mathbf{P}(p) \right) \\
&= \bigcup_{\substack{j \in A, \\ \sigma(j)=pis}} \bigcup_{\substack{l \in A, \\ \sigma^k(l)=qjt}} \left( h_\sigma^{k+1}(\mathcal{T}_\sigma(l)) + \pi_c(\mathbf{P}(\sigma(q)p)) \right) \\
&= \bigcup_{\substack{l \in A, \\ \sigma^{k+1}(l)=riu}} h_\sigma^{k+1}(\mathcal{T}_\sigma(l)) + \pi_c \circ \mathbf{P}(r)
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'équation (2.15), l'hypothèse de récurrence, la linéarité de  $h_\sigma$ , l'équation (2.11) et où les deux unions se simplifient en une seule à la dernière étape car pour tout  $l \in A$ ,

$$\{ri \in A^* \mid ri \text{ préfixe de } \sigma^{k+1}(l)\} = \{\sigma(q)p \mid \exists j \in A : qj \text{ préfixe de } \sigma^k(l) \text{ et } pi \text{ préfixe de } \sigma(j)\}.$$



□

Etant donné l'unicité de la solution d'un SFIG pour les ensembles compacts non-vides, nous déduisons le corollaire suivant.

**Corollaire 2.4.9.** *Soit  $\sigma$  une substitution Pisot irréductible et unimodulaire sur l'alphabet  $A$ . La tuile centrale  $\mathcal{T}_\sigma$  et les sous-tuiles  $\mathcal{T}_\sigma(i)$  pour  $i \in A$  ne dépendent pas du choix du point fixe  $u$  de  $\sigma$ .*

Nous savons maintenant que chaque sous-tuile  $\mathcal{T}_\sigma(i)$  se décompose de manière unique en copies contractées des autres tuiles et d'elle même (les ensembles  $h_\sigma(\mathcal{T}_\sigma(j)) + \pi_c \circ \mathbf{P}(p)$ ). Cette décomposition des  $\mathcal{T}_\sigma(i)$  est disjointe en mesure. Cependant, rien ne nous assure pour le moment que les  $\mathcal{T}_\sigma(i)$  eux-mêmes sont disjoints en mesures dans la décomposition de  $\mathcal{T}_\sigma$ . Pour prouver cela, nous introduisons la notion de "coïncidence combinatoire" sur les substitutions.

**Définition 2.4.10.** Une substitution  $\sigma$  sur l'alphabet  $A$  satisfait la *condition de coïncidence combinatoire forte* si pour toute paire  $(j_1, j_2) \in A^2$  il existe  $k \in \mathbb{N}$  et  $i \in A$  tels que  $\sigma^k(j_1) = p_1 i s_1$  et  $\sigma^k(j_2) = p_2 i s_2$  avec  $\mathbf{P}(p_1) = \mathbf{P}(p_2)$ .

Réexprimons la définition précédente en d'autres termes. Une substitution  $\sigma$  satisfait la condition de coïncidence combinatoire forte si pour tout  $j_1, j_2 \in A$ , il existe des naturels  $n$  et  $k$  tels que  $\sigma^k(j_1)$  et  $\sigma^k(j_2)$  ont la même  $n$ -ième lettre et que les préfixes de longueurs  $n - 1$  ont la même image par l'application d'abélianisation.

La condition de coïncidence combinatoire forte implique que les  $\mathcal{T}_\sigma(i)$  sont disjoints en mesure, comme le montre le théorème suivant.

**Théorème 2.4.11** (Arnoux et Ito [4]). *Soit  $\sigma$  une substitution Pisot irréductible et unimodulaire. Si  $\sigma$  satisfait la condition de coïncidence combinatoire forte, alors les sous-tuiles  $\mathcal{T}_\sigma(i)$  de la tuile centrale  $\mathcal{T}_\sigma$  sont disjointes en mesures.*

*Démonstration.* La condition de coïncidence combinatoire forte se traduit dans notre contexte en disant que pour toute paire de lettres  $(j_1, j_2) \in A^2$ , il existe une lettre commune  $i \in A$ , un naturel  $k$  et un même abélianisé  $\mathbf{P}(p) := \mathbf{P}(p_1) = \mathbf{P}(p_2)$  tels que les deux sous-tuiles  $h_\sigma^k(\mathcal{T}_\sigma(j_1)) + \pi_c \circ \mathbf{P}(p)$  et  $h_\sigma^k(\mathcal{T}_\sigma(j_2)) + \pi_c \circ \mathbf{P}(p)$  apparaissent dans la décomposition (2.17) de  $\mathcal{T}_\sigma(i)$ . Le Théorème 2.4.5 montre que ces tuiles sont disjointes en mesure, impliquant alors que  $\mathcal{T}_\sigma(j_1)$  et  $\mathcal{T}_\sigma(j_2)$  sont disjointes en mesure. Comme cela est vrai pour toute paire  $(j_1, j_2) \in A^2$ , le résultat est démontré.  $\square$

# Chapitre 3

## Pavages et multi-pavages sur $\mathbb{H}_e$ et $\mathbb{H}_c$

Ce chapitre s'intéresse à la construction de pavages et multi-pavages sur la ligne dilatante  $\mathbb{H}_e$  et l'hyperplan contractant  $\mathbb{H}_c$ .

### 3.1 Définitions générales

Soient  $K_i, i \in A$  une collection finie d'ensembles compacts d'un sous ensemble  $\mathbb{H}$  de  $\mathbb{R}^n$  tel que chaque  $K_i$  est l'adhérence de son intérieur et soit  $p$  un entier strictement positif. Un *multi-pavage* de degré  $p$  de l'espace  $\mathbb{H}$  par les compacts  $K_i$  est une collection de copies translattées des ensemble  $K_i$  de la forme  $\mathcal{I} := \{K_i + \gamma \mid (\gamma, i) \in \Gamma\}$  où  $\Gamma \subseteq \mathbb{H} \times A$  et qui satisfont les conditions suivantes.

- (i) Tout l'espace  $\mathbb{H}$  est recouvert par les éléments de  $\mathcal{I}$ , i.e.,

$$\mathbb{H} = \bigcup_{(\gamma, i) \in \Gamma} K_i + \gamma$$

- (ii) Chaque sous ensemble compact de  $\mathbb{H}$  intersecte un nombre fini d'éléments de  $\mathcal{I}$ .
- (iii) Presque tout point de  $\mathbb{H}$  (pour la mesure de Lebesgue) est recouvert exactement  $p$  fois.

L'ensemble  $\Gamma$  est appelé *ensemble de translation*. Si l'union des éléments de  $\{K_i + \gamma \mid (\gamma, i) \in \Gamma\}$  ne satisfait que (i), on parle de recouvrement de  $\mathbb{H}$ . Les ensembles  $K_i + \gamma$  sont appelés *tuiles*. Ainsi, un multi-pavage de degré  $p$  est une union de tuiles  $\bigcup_{(\gamma, i) \in \Gamma} K_i + \gamma$  qui recouvre tout l'espace  $\mathbb{H}$  avec possiblement des chevauchements et de telle sorte que presque tout point appartient à exactement  $p$  tuiles. Si  $p = 1$  le multi-pavage est simplement appelé *pavage*.

La condition (ii) signifie que la projection de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{H}$  est un ensemble *localement fini*, i.e., chaque point de  $\mathbb{H}$  possède un voisinage qui intersecte un nombre fini de projections sur la première composante de points de  $\Gamma$ . On dit aussi que  $\Gamma$  est un ensemble localement fini par abus de langage.

Notons que des systèmes dynamiques peuvent être associés aux pavages de manière analogue aux systèmes dynamiques associés aux substitutions. Pour plus de détails sur les systèmes dynamiques de pavages voir par exemple [20].

Soit une collection d'ensembles compacts non vides  $\{K_i + \gamma \mid (\gamma, i) \in \Gamma\}$  (qui n'est pas nécessairement un multi-pavage). Nous disons que l'ensemble  $K_j + \delta$  *apparaît* dans  $\{K_i + \gamma \mid (\gamma, i) \in \Gamma\}$  si  $(\delta, j) \in \Gamma$ . Un sous-ensemble fini de  $\Gamma$  est appelé une *parcelle*. Cela correspond à une union finie de tuiles de  $\{K_i + \gamma \mid (\gamma, i) \in \Gamma\}$ . Le translaté d'une parcelle  $P = \{(\gamma_1, i_1), \dots, (\gamma_n, i_n)\}$  par  $\nu_0 \in \mathbb{H}$  est défini comme  $P + \nu_0 := \{(\gamma_1 + \nu_0, i_1), \dots, (\gamma_n + \nu_0, i_n)\}$ . Deux parcelles  $P = \{(\gamma_1, i_1), \dots, (\gamma_n, i_n)\}$  et  $P' = \{(\gamma'_1, i'_1), \dots, (\gamma'_n, i'_n)\}$  sont dites *équivalentes* si elle coïncident à une translation près, c'est-à-dire si il existe  $\nu_0 \in \mathbb{H}$  tel que  $P' = \{(\gamma_1 + \nu_0, i_1), \dots, (\gamma_n + \nu_0, i_n)\}$ .

Supposons maintenant que  $\{K_i + \gamma \mid (\gamma, i) \in \Gamma\}$  soit un recouvrement de  $\mathbb{H}$ . Nous disons qu'une boule  $B(\nu, R)$  de  $\mathbb{H}$  est contenue dans une parcelle  $P = \{(\gamma_1, i_1), \dots, (\gamma_n, i_n)\}$  si  $B(\nu, R)$  est contenue dans l'enveloppe convexe des points  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ . Nous définissons de même que  $P$  est contenu dans une boule  $B(\nu, R)$  si cette dernière contient l'enveloppe convexe des  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ . Nous disons de  $\Gamma$  qu'il est *répétitif* si pour toute parcelle  $P$ , il existe  $R > 0$  tel que chaque boule de rayon  $R$  dans  $\mathbb{H}$  contient une parcelle équivalente à  $P$ . Cette notion est analogue à la notion de récurrence uniforme sur les mots.

Un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  est appelé *ensemble Delone* si il est à la fois *uniformément discret* (il existe  $r > 0$  tel que toute boule ouverte de rayon  $r$  contient au plus un point de l'ensemble) et *relativement dense* (il existe  $R > 0$  tel que toute boule fermée de rayon  $R$  contient au moins un point de l'ensemble). Nous dirons par extension que  $\Gamma$  est un ensemble Delone si sa projection sur la première composante est un ensemble Delone.

## 3.2 Pavage sur la droite dilatante $\mathbb{H}_e$

Nous associons à  $\sigma$  un pavage par des intervalles de la demi-droite  $\mathbb{R}_+ \mathbf{u}_\beta \subset \mathbb{H}_e$ . Pour ce faire, nous projetons la ligne brisée  $L_u$  à l'aide de la projection  $\pi_e^*$  sur la droite dilatante  $\mathbb{H}_e$  le long de l'hyperplan contractant  $\mathbb{H}_c$ .

En utilisant alors non pas  $\pi_e^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{H}_e$  mais  $\pi_e : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , nous obtenons un pavage de la demi droite réelle  $\mathbb{R}_+$  (et non plus un pavage de  $\mathbb{R}_+ \mathbf{u}_\beta$ ). Les tuiles sur cette demi-droite sont des translatés des intervalles  $I_i = [0, \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{v}_\beta \rangle]$  pour  $i \in A$ . Ceci vient du fait que la ligne brisée  $L_u$  est une union de cordons géométriques de base  $[\mathbf{x}, i]_g = \{\mathbf{x} + \theta \mathbf{e}_i \mid \theta \in [0, 1]\}$  et que  $\pi_e([0, i]) = [0, \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{v}_\beta \rangle]$ .

Le pavage ainsi obtenu est donc un pavage de  $\mathbb{R}_+$  par les intervalles  $I_{u_0}, I_{u_1}, I_{u_2}, \dots$  mis côte à côte depuis l'origine. L'ensemble de translation de ce pavage (comme défini à la Section 3.1) est alors

$$\Gamma_e = \{(\pi_e \circ \mathbf{P}(u_0 \dots u_{N-1}), u_N) \mid N \geq 0\}.$$

Remarquons que puisque 0 est un point extrême de la première tuile  $I_{u_0}$  et que nous avons pris les composantes de  $\mathbf{v}_\beta$  dans  $\mathbb{Z}(\beta)$ , les points extrémaux de toutes les tuiles sont dans  $\mathbb{Z}(\beta)$ .



Nous appelons ce pavage de  $\mathbb{R}_+$  *le pavage auto-similaire de la ligne dilatante* et nous le notons  $\mathcal{E}_u$ . Nous avons donc

$$\mathcal{E}_u = \{\pi_e([\mathbf{x}, i]_g) \mid (\pi_e(\mathbf{x}), i) \in \Gamma_e\}.$$

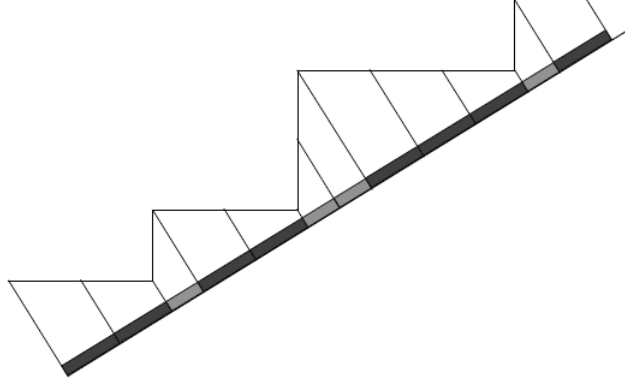


FIGURE 3.1: Projection de la ligne brisée  $L_u$  de la substitution  $\sigma(1) = 112$ ,  $\sigma(2) = 21$ . Le pavage est ici représenté dans la direction de la ligne dilatante afin d'illustrer le lien entre  $L_u$  et  $\mathcal{E}_u$ . Cependant,  $\mathcal{E}_u$  est bien un pavage de  $\mathbb{R}_+$  et non de  $\mathbf{u}_\beta \mathbb{R}_+$ . Image tirée de [21]

Remarquons que comme  $u$  est uniformément récurrent (Proposition A.0.2), chaque lettre  $i$  de  $u$  apparaît infiniment souvent et donc chaque tuile  $\pi_e([\mathbf{x}, i]_g)$  de  $\mathcal{E}_u$  aussi. La terminologie "auto-similaire" vient du fait que les points extrémaux de  $\mathcal{E}_u$  sont stables par la multiplication par  $\beta$  comme le montre le lemme suivant.

**Lemme 3.2.1.** *Les points extrémaux de  $\mathcal{E}_u$  sont stables pour la multiplication par  $\beta$ .*

*Démonstration.* Un point extrême de  $\mathcal{E}_u$  s'écrit  $\pi_e(\mathbf{P}(w))$  pour  $w$  un préfixe du point fixe  $u$  de  $\sigma$ . Dès lors, en multipliant par  $\beta$ , nous obtenons successivement

$$\begin{aligned} \beta\pi_e(\mathbf{P}(w)) &= \beta\langle \mathbf{P}(w), \mathbf{v}_\beta \rangle = \langle \mathbf{P}(w), \beta \mathbf{v}_\beta \rangle \\ &= \langle \mathbf{P}(w), M_\sigma^T \mathbf{v}_\beta \rangle = \langle M_\sigma \mathbf{P}(w), \mathbf{v}_\beta \rangle \\ &= \pi_e(M_\sigma \mathbf{P}(w)) = \pi_e \circ \mathbf{P}(\sigma(w)). \end{aligned}$$

Or,  $\sigma(w)$  est un préfixe de  $u$ , de sorte que  $\pi_e \circ \mathbf{P}(\sigma(w))$  soit encore un point extrême de  $\mathcal{E}_u$ .  $\square$

### 3.3 Approximation d'un hyperplan

Nous avons réussi assez aisément à construire un pavage de  $\mathbb{H}_e$  et nous souhaitons maintenant faire de même pour  $\mathbb{H}_c$ . Pour ce faire, nous avons besoin d'être capable d'approximer un hyperplan par une union de *faces unités* ce que nous détaillons dans cette section.

**Définition 3.3.1** (Cordon de base et face unité). Soit  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$  et soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Nous appelons *cordon géométrique de base de type  $i$  (situé) en  $\mathbf{x}$*  le segment  $[\mathbf{x}, i]_g$  défini par

$$[\mathbf{x}, i]_g = \{\mathbf{x} + \lambda \mathbf{e}_i \mid \lambda \in [0, 1]\}.$$

Nous appelons *face unité géométrique de type  $i$  (située) au point  $\mathbf{x}$*  l'ensemble  $[\mathbf{x}, i]_g^*$  défini par<sup>1</sup>

$$[\mathbf{x}, i]_g^* = \{\mathbf{x} + \sum_{j \mid j \neq i} \lambda_j \mathbf{e}_j \mid \lambda_j \in [0, 1] \forall j\}.$$

Si  $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n$ , nous nous autorisons à écrire  $\mathbf{y} + [\mathbf{x}, i]_g^*$  à la place de  $[\mathbf{y} + \mathbf{x}, i]_g^*$ . Le type  $i$  de la face  $[\mathbf{x}, i]_g^*$  correspond au vecteur  $\mathbf{e}_i$  auquel la face est orthogonale.

Dans les deux définitions précédentes, l'indice  $g$  indique que nous faisons référence à l'objet géométrique situé dans l'espace  $\mathbb{R}^n$ . Lorsque nous omettons cet indice en écrivant par exemple  $[\mathbf{x}, i]$  ou  $[\mathbf{x}, i]^*$  nous considérons alors simplement une représentation symbolique de ces objets et nous parlons de *cordons formels* et *faces formelles*. L'exposant  $*$  fait quant à lui référence à la dualité entre les cordons de base de type  $i$  et les faces unités de type  $i$  (plus de détails sur la dualité entre cordons et faces sont donnés Section 5.1).

**Définition 3.3.2** (cube unité). Nous appelons *cube unité* n'importe quel translaté du *cube unité fondamentale*, c'est-à-dire n'importe quel cube de la forme  $\mathbf{z} + \mathcal{C}$  où  $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^n$  et où  $\mathcal{C}$  est :

$$\mathcal{C} = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{e}_i \mid \lambda_i \in [0, 1] \right\}.$$

Le point  $\mathbf{z}$  est appelé le *sommet distingué* (ou *point distingué*) de  $\mathbf{z} + \mathcal{C}$ .

Nous pouvons maintenant introduire la notion d'*hyperplan étagé*. Notons que certains auteurs utilise le terme hyperplan discret mais nous préférons ici le terme étagé car il ne s'agit pas d'un ensemble discret de points.

**Définition 3.3.3** (Hyperplan étagé). Soit  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}_+^n$  un vecteur non nul. Notons  $\mathcal{S}$  l'union des cubes unité qui intersectent le demi-espace des points  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  vérifiant  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle < 0$ . L'*hyperplan étagé*  $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$  de vecteur normal  $\mathbf{v}$  est défini comme étant la frontière topologique de  $\mathcal{S}$ . Un point  $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^n$  de  $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$  à coordonnées entières est appelé un *sommet* de  $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$ .

Un hyperplan étagé est donc naturellement recouvert par des faces de cubes unités comme définies plus haut. Il peut être vu comme une approximation de l'hyperplan d'équation  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle = 0$ .

L'appartenance d'un point de  $\mathbb{Z}^n$  à l'hyperplan étagé se traduit en une inégalité sur le produit scalaire avec le vecteur normal comme le montre la proposition suivante.

---

1. Ce choix de faces unité n'est pas canonique, nous considérons les faces "inférieures" du cube unité, mais certains auteurs considèrent les faces "supérieures".

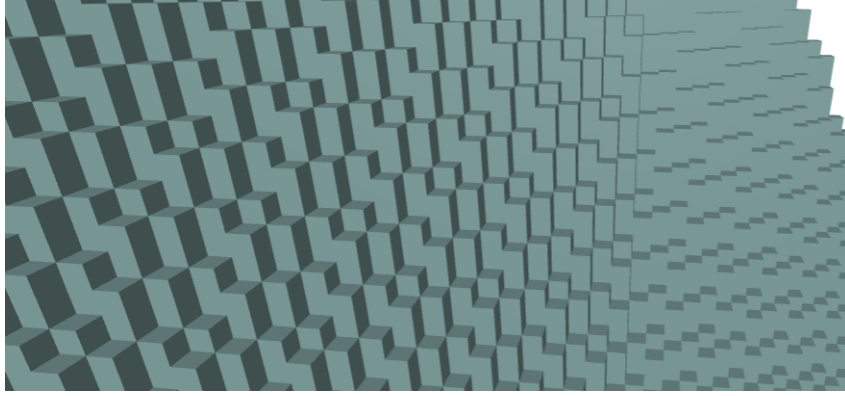


FIGURE 3.2: L'hyperplan étagé dans un espace à dimension 3. Cette image a été générée en utilisant la librairie `sage.combinat.e_one_star` du logiciel `sagemath`.

**Proposition 3.3.4** (Arnoux, Berthé, Siegel [3]). *Soit  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}_+^n$ . Un point  $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^n$  est un sommet de l'hyperplan étagé  $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$  si et seulement si  $0 \leq \langle \mathbf{z}, \mathbf{v} \rangle < \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{v}\|_1$*

*Démonstration.* La preuve s'effectue en plusieurs étapes.

- (1) Le cube unité  $\mathbf{z} + \mathcal{C}$  appartient à  $\mathcal{S}$  si et seulement si  $\langle \mathbf{z}, \mathbf{v} \rangle < 0$ . Nous allons montrer séparément les deux implications de l'équivalence. D'abord, si  $\langle \mathbf{z}, \mathbf{v} \rangle < 0$ , alors il est clair que  $\mathbf{z} + \mathcal{C}$  est un cube de  $\mathcal{S}$  par définition. Ensuite, si  $\mathbf{z} + \mathcal{C}$  appartient à  $\mathcal{S}$ , alors il existe  $\mathbf{x} \in \mathbf{z} + \mathcal{C}$  tel que  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle < 0$ . Dès lors, il existe  $\mathbf{u} \in [0, 1]^n$  tel que  $\mathbf{x} = \mathbf{z} + \mathbf{u}$ . Nous obtenons alors l'inégalité souhaitée car

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{v} \rangle = \underbrace{\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle}_{<0} - \underbrace{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}_{\geq 0} < 0.$$

- (2) Un point  $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^n$  appartient à  $\mathcal{S}$  si et seulement si  $\langle \mathbf{z}, \mathbf{v} \rangle < \|\mathbf{v}\|_1$ .

En effet, le point  $\mathbf{z}$  appartient à  $\mathcal{S}$  si et seulement si il est le sommet d'un cube  $\mathbf{z}' + \mathcal{C}$  inclus dans  $\mathcal{S}$  (notons que  $\mathbf{z}$  pourrait n'être le sommet "inférieur" d'aucun cube si, par exemple, il se trouve sur la frontière de  $\mathcal{S}$  d'où l'apparition du sommet  $\mathbf{z}'$  dans le raisonnement). Comme  $\mathbf{z} \in \mathbf{z}' + \mathcal{C}$ , nous avons  $z_i - z'_i \in \{0, 1\}$ . Dès lors,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{z} - \mathbf{z}', \mathbf{v} \rangle &= \sum_i (z_i - z'_i) v_i \leq \sum_i v_i = \|\mathbf{v}\|_1 \\ \Leftrightarrow \langle \mathbf{z}, \mathbf{v} \rangle &= \sum_i z_i v_i \leq \sum_i v_i + \sum_i v_i z'_i = \|\mathbf{v}\|_1 + \langle \mathbf{z}', \mathbf{v} \rangle \end{aligned}$$

Or, par le point (1) nous avons  $\langle \mathbf{z}', \mathbf{v} \rangle < 0$  d'où

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{v} \rangle < \|\mathbf{v}\|_1$$

En d'autres termes, un point de  $\mathbb{Z}^n$  appartient à  $\mathcal{S}$  si et seulement si son translaté par le vecteur  $(-1, \dots, -1)$  appartient au demi-espace des points  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  vérifiant  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle < 0$

- (3) Remarquons qu'un point  $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^n$  appartient à l'intérieur de  $\mathcal{S}$  si et seulement si tous les cubes unités dont il est un sommet appartiennent à  $\mathcal{S}$ . Pour le voir, il est peut-être plus simple de se dire qu'un point de  $\mathbb{Z}^n$  se trouvant sur le bord de  $\mathcal{S}$  est forcément le sommet d'au moins un cube unité qui n'est pas dans  $\mathcal{S}$ .

Dés lors, un point  $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^n$  appartient à  $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$  si et seulement si il est sur la frontière de  $\mathcal{S}$  c'est-à-dire si les conditions suivantes sont satisfaites :

- le point  $\mathbf{z} \in \mathcal{S}$ , c'est-à-dire,  $\langle \mathbf{z}, \mathbf{v} \rangle < \|\mathbf{v}\|_1$  vu le point (2).
- le point  $\mathbf{z}$  n'appartient pas à l'intérieur de  $\mathcal{S}$ , c'est-à-dire qu'il existe un cube  $\mathbf{z}' + \mathcal{C}$  qui contient  $\mathbf{z}$  et qui n'est pas inclus dans  $\mathcal{S}$  vu (3). Dés lors, il existe  $\mathbf{z}'$  tel que  $z_i - z'_i \in \{0, 1\}$  et  $\langle \mathbf{z}', \mathbf{v} \rangle \geq 0$ . Ainsi, en rappelant que  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}_+^n$  nous obtenons successivement

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{z} - \mathbf{z}', \mathbf{v} \rangle &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \langle \mathbf{z}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{z}', \mathbf{v} \rangle &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \langle \mathbf{z}, \mathbf{v} \rangle &\geq 0 \end{aligned}$$

ce qui conclut. □

Le recouvrement par des faces permet également de donner une définition plus calculatoire des hyperplans étagé comme montré ci-dessous. Cela s'avèrera très pratique pour la suite dans nos démonstrations.

**Proposition 3.3.5.** *Soit  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}_+^n$ . Un point  $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^n$  est le sommet distingué d'une face de type  $i$  incluse dans  $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$  si et seulement si  $0 \leq \langle \mathbf{z}, \mathbf{v} \rangle < \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{v} \rangle$ .*

*Démonstration.* Commençons par supposer que  $[\mathbf{z}, i]_g^* \in \mathcal{P}_{\mathbf{v}}$ . Alors, par la Proposition 3.3.4, tous les sommets  $\mathbf{z}' \in \mathbb{Z}^n$  de la face  $[\mathbf{z}, i]_g^*$  vérifient

$$0 \leq \langle \mathbf{z}', \mathbf{v} \rangle < \sum_{j=1}^n \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{v} \rangle.$$

En particulier, nous avons  $0 \leq \langle \mathbf{z}, \mathbf{v} \rangle$ . De plus, le "sommet supérieur"  $\mathbf{z} + \sum_{j \neq i} \mathbf{e}_j$  vérifie également ces inéquations, ce qui nous donne

$$0 \leq \langle \mathbf{z} + \sum_{j \neq i} \mathbf{e}_j, \mathbf{v} \rangle < \sum_{j=1}^n \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{v} \rangle.$$

En décomposant cette dernière inéquation, nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{z}, \mathbf{v} \rangle + \sum_{j \neq i} \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{v} \rangle &< \sum_{j \neq i} \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{v} \rangle \\ \Leftrightarrow \langle \mathbf{z}, \mathbf{v} \rangle &< \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{v} \rangle, \end{aligned}$$

ce qui conclut ce cas.

Supposons maintenant avoir un sommet  $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^n$  de  $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$  tel que  $0 \leq \langle \mathbf{z}, \mathbf{v} \rangle < \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{v} \rangle$  et montrons qu'il est le sommet distingué d'une face de type  $i$  incluse dans  $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$ . Pour ce faire, commençons par prouver que le fait que tous les sommets de  $[\mathbf{z}, i]_g^*$  appartiennent à  $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$  implique que la face elle-même appartient à l'hyperplan étagé. Soient  $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{2^n-1}$  les sommets de  $[\mathbf{z}, i]_g^*$ . Puisque nous avons une face de type  $i$ , la  $i$ ème coordonnées est la même pour tous les sommets. Les sommets sont donc de la forme

$$\mathbf{z}_1 = (x_1, \dots, x_n)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_k &= (x_1 + \theta_1^{(k)}, \dots, x_i, \dots, x_n + \theta_n^{(k)}) \quad \text{pour } k \geq 2, \text{ avec } \theta_j^{(k)} \in \{0, 1\} \forall j \\ &= \mathbf{z}_1 + \sum_{j \neq i} \theta_j^{(k)} \mathbf{e}_j. \end{aligned}$$

Or, comme  $\mathbf{z}_1 \in \mathcal{P}_{\mathbf{v}}$ , nous avons  $\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ , ce qui implique que  $\mathbf{z}_1 + \mathcal{C} \not\subseteq \mathcal{S}$ . De plus, considérons le sommet  $\mathbf{z}_1 + \sum_{j \neq i} \mathbf{e}_j \in \mathcal{P}_{\mathbf{v}} = \mathbf{z}_k$  pour un certains  $k \geq 2$ . Par la Proposition 3.3.4, nous avons

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{z}_k, \mathbf{v} \rangle &< \|\mathbf{v}\|_1 \\ \Leftrightarrow \langle \mathbf{z}_1 + \sum_{j \neq i} \mathbf{e}_j, \mathbf{v} \rangle &< \sum_j \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{v} \rangle \\ \Leftrightarrow \langle \mathbf{z}_1 - \mathbf{e}_i, \mathbf{v} \rangle &< 0, \end{aligned}$$

ce qui implique que  $(\mathbf{z}_1 - \mathbf{e}_i) + \mathcal{C} \subseteq \mathcal{S}$ . Ainsi, la face  $[\mathbf{z}, i]_g^*$  est à l'intersection entre un cube unité de  $\mathcal{S}$  et un cube unité hors de  $\mathcal{S}$  et donc appartient bien à la frontière de  $\mathcal{S}$ , c'est-à-dire  $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$ .

Vu ce qui précède, il nous reste à montrer que tous les sommets de  $[\mathbf{z}, i]_g^*$  sont dans  $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$ . Or un sommet  $\mathbf{z}' \in \mathbb{Z}^n$  de  $[\mathbf{z}, i]_g^*$  est de la forme

$$\mathbf{z}' = \mathbf{z} + \sum_{k \neq i} \theta_k \mathbf{e}_k$$

où  $\theta_k \in \{0, 1\}$ . Dés lors, en utilisant l'hypothèse nous obtenons successivement

$$\begin{aligned} 0 &< \langle \mathbf{z} + \sum_{k \neq i} \theta_k \mathbf{e}_k, \mathbf{v} \rangle \\ &= \underbrace{\langle \mathbf{z}, \mathbf{v} \rangle}_{< \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{v} \rangle} + \underbrace{\sum_{k \neq i} \theta_k \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{v} \rangle}_{< \sum_{k \neq i} \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{v} \rangle} \\ &< \sum_{k=1}^n \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{v} \rangle, \end{aligned}$$

ce qui prouve que tous les sommets de  $[\mathbf{z}, i]_g^*$  sont dans  $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$  par la Proposition 3.3.4, d'où la conclusion.

□

Le corollaire suivant est alors immédiat.

**Corollaire 3.3.6.** *Soit  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}_+^n$ . L'hyperplan étagé  $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$  est l'union des faces  $[\mathbf{z}, i]_g^*$  vérifiant  $0 \leq \langle \mathbf{z}, \mathbf{v} \rangle < \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{v} \rangle$ .*

### 3.4 Pavage de l'hyperplan contractant $\mathbb{H}_c$ par des faces projetées

Dans cette section nous associons à  $\mathbb{H}_c$  un pavage dont les tuiles sont les projetés des faces de l'hyperplan étagé  $\mathcal{P}_{\mathbf{v}_\beta}$  associé à  $\mathbb{H}_c$  (voir Définition 3.3.3). Notons que vu la Remarque 2.2.8,  $\mathbf{v}_\beta$  est un vecteur normal de  $\mathbb{H}_c$  d'où le fait que nous utilisons  $\mathcal{P}_{\mathbf{v}_\beta}$  pour l'approximer. Ce premier pavage de  $\mathbb{H}_c$  constitue la première étape vers la construction, par la suite, d'un multi-pavage de l'hyperplan contractant dont les tuiles seront les  $\mathcal{T}_\sigma(i)$  pour  $i \in A$ .

Nous commençons donc par considérer l'hyperplan étagé  $\mathcal{P}_{\mathbf{v}_\beta}$  (voir Définition 3.3.3). Remarquons que vu la Proposition 3.3.5, une face  $[\mathbf{x}, i]^*$  fait partie de l'hyperplan étagé si et seulement si

$$0 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_\beta \rangle < \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{v}_\beta \rangle. \quad (3.1)$$

Comme discuté dans la section 3.3, l'hyperplan étagé est une sorte d'approximation "pixelisée" de l'hyperplan  $\mathbb{H}_c$ . Nous considérerons également une approximation discrète de  $\mathbb{H}_c$ .

**Définition 3.4.1** (Hyperplan discret). *L'hyperplan discret associé à  $\mathbb{H}_c$  est l'ensemble des points  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$  vérifiant*

$$0 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_\beta \rangle < \|\mathbf{v}_\beta\|_1. \quad (3.2)$$

Remarquons que la Proposition 3.3.4 indique que les points de l'hyperplan discret correspondent aux sommets de  $\mathcal{P}_{\mathbf{v}_\beta}$ .

**Remarque 3.4.2.** Certains auteurs appellent "hyperplan discret" ce que nous avons ici défini comme étant l'hyperplan étagé. Nous préférons cette dernière terminologie car l'hyperplan étagé n'est pas un ensemble discret de points.

Pour ce qui est de ce que nous appelons "hyperplan discret", le terme *hyperplan discret arithmétique standard* (*standard arithmetic discrete hyperplane* en anglais) peut être trouvé dans la littérature.

Notre première étape consiste à projeter les faces de l'hyperplan étagé par  $\pi_c$  ce qui nous donne un premier pavage de  $\mathbb{H}_c$  comme le montre la proposition suivante.

**Proposition 3.4.3.** *La collection des projections des faces de l'hyperplan étagé  $\mathcal{P}_{\mathbf{v}_\beta}$  c'est-à-dire,*

$$\{\pi_c([\mathbf{x}, i]_g^*) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n, i \in A, 0 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_\beta \rangle < \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{v}_\beta \rangle\}$$

*est un pavage polyédrale de  $\mathbb{H}_c$  par  $n$  types de faces projetées.*

*Démonstration.* Il est clair que la projection des faces  $[\mathbf{x}, i]_g^*$  forment une couverture de  $\mathbb{H}_c$  par  $n$  types de polyèdres puisque les projections conservent le parallélisme et sont invariantes par translation. Ainsi, chaque type de face projetée va donner un polyèdre. De plus, nous déduisons de la Proposition 2.2.14 que les polyèdres ainsi obtenus ne s'intersectent que sur leurs bords, d'où la conclusion.  $\square$

Nous allons maintenant remplacer ce pavage de  $\mathbb{H}_c$  par un pavage dont les tuiles sont les  $\mathcal{T}_\sigma(i)$ . A chaque face  $[\mathbf{x}, i]_g^*$  de l'hyperplan étagé  $\mathcal{P}_{\mathbf{v}_\beta}$ , nous associons une copie de la tuile  $\mathcal{T}_\sigma(i)$  situé en  $\pi_c(\mathbf{x})$  dans l'hyperplan contractant  $\mathbb{H}_c$ . L'ensemble de translation  $\Gamma_c$  de ce pavage, nommé *l'ensemble de translation auto-réplicatif*, est alors défini comme suit :

$$\Gamma_c = \{(\gamma, i) \in \pi_c(\mathbb{Z}^n) \times A \mid \gamma = \pi_c(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n, 0 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_\beta \rangle < \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{v}_\beta \rangle\}. \quad (3.3)$$

Un élément de la forme  $(\gamma, i) \in \Gamma_c$  est appelé un *tip* et est noté  $[\gamma, i]^*$ . Cette notation s'explique par le fait que nous considérons  $[\gamma, i]^*$  comme une représentation de la projection par  $\pi_c$  de la face de type  $i$  située en  $\mathbf{x}$ , c'est-à-dire

$$[\gamma, i]^* := \pi_c([\mathbf{x}, i]_g^*) \quad \text{avec } \gamma = \pi_c(\mathbf{x}).$$

Remarquons que pour chaque  $(\gamma, i) \in \Gamma_c$ , le point  $\gamma \in \mathbb{H}_c$  correspond à la projection d'un sommet distingué de  $\mathcal{P}_{\mathbf{v}_\beta}$  vu la Proposition 3.3.5.

## 3.5 Transition vers le multi-pavage auto-réplicatif

Maintenant que nous disposons d'un premier pavage de  $\mathbb{H}_c$  par des faces projetées, nous voulons montrer que remplacer ces faces projetées par nos tuiles  $\mathcal{T}_\sigma(i)$  continue de former un pavage. Nous commencerons par prouver que placer nos tuiles  $\mathcal{T}_\sigma(i)$  comme décrit par l'ensemble de translation  $\Gamma_c$  ci-haut mène à une couverture de  $\mathbb{H}_c$ . Nous avons d'abord besoin des deux lemmes suivants.

**Lemme 3.5.1** (Canterini et Siegel [7]). *Les vecteurs  $(\pi_c(\mathbf{e}_i) - \pi_c(\mathbf{e}_1))_{2 \leq i \leq n}$  sont linéairement indépendants. En particulier, ils forment une base de  $\mathbb{H}_c$ .*

*Démonstration.* Considérons une combinaison linéaire nulle des vecteurs de l'énoncé :

$$\sum_{i=2}^n \lambda_i (\pi_c(\mathbf{e}_i) - \pi_c(\mathbf{e}_1)) = 0.$$

Par linéarité de  $\pi_c$ , l'équation précédente se réécrit

$$\pi_c\left(\sum_{i=2}^n \lambda_i(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_1)\right) = 0.$$

Or, puisque  $\pi_c$  est la projection le long de  $\mathbb{H}_c$ , son noyau est généré par  $\mathbf{u}_\beta$ . Il existe donc  $r \in \mathbb{R}$  tel que

$$\sum_{i=2}^n \lambda_i \mathbf{e}_i - \sum_{i=2}^n \lambda_i \mathbf{e}_1 = r \mathbf{u}_\beta.$$

Dés lors, si  $r \neq 0$ , les coordonnées des  $\mathbf{u}_\beta$  dans la base  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  sont linéairement dépendantes sur  $\mathbb{Q}$ , ce qui est impossible vu la Proposition 2.2.2. Ainsi,  $r = 0$  et l'indépendance linéaire des vecteurs  $\mathbf{e}_i$  implique que  $\lambda_i = 0$  pour tout  $i \in \{2, \dots, n\}$ .  $\square$

**Lemme 3.5.2** (Canterini et Siegel [7]). *Soient  $(\alpha_2, \dots, \alpha_n)$  les coordonnées de  $\pi_c(\mathbf{e}_1)$  dans la base  $\{\pi_c(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_1) \mid 2 \leq i \leq n\}$ . Les nombres  $1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  sont rationnellement indépendants.*

*Démonstration.* Vu l'énoncé nous pouvons écrire

$$\pi_c(\mathbf{e}_1) = \sum_{i=2}^n \alpha_i \pi_c(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_1).$$

En regroupant tout dans le membre de gauche et en utilisant la linéarité de  $\pi_c$ , nous obtenons

$$\pi_c\left(\left(1 + \sum_{i=2}^n \alpha_i\right)\mathbf{e}_1 - \sum_{i=2}^n \alpha_i \mathbf{e}_i\right) = 0.$$

Puisque le noyau de  $\pi_c$  est généré par  $\mathbf{u}_\beta$ , il existe un nombre réel  $r$  tel que

$$\left(1 + \sum_{i=2}^n \alpha_i\right)\mathbf{e}_1 - \sum_{i=2}^n \alpha_i \mathbf{e}_i = r \mathbf{u}_\beta.$$

De plus, le nombre  $r$  ne peut pas valoir 0, sinon nous aurions  $(1 + \sum_{i=2}^n \alpha_i)\mathbf{e}_1 = \sum_{i=2}^n \alpha_i \mathbf{e}_i$ , ce qui est impossible. Si maintenant les  $\alpha_i$  et 1 sont rationnellement dépendants, alors nous déduisons de l'équation précédente que la première composante de  $\mathbf{u}_\beta$  dans la base  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  est une combinaison rationnelle des autres coordonnées dans la même base. Or, la Proposition 2.2.2 indique que cela est impossible.  $\square$

Nous nous rapprochons maintenant de notre but de prouver que les tuiles  $\mathcal{T}_\sigma(i)$  recouvrent  $\mathbb{H}_c$ . Il ne nous reste plus qu'à montrer un résultat de densité. Ce résultat sera conséquence du théorème de Kronecker que nous rappelons ici sans preuve (pour une preuve voir [9]).



**Théorème 3.5.3** (Théorème de Kronecker). *Soit  $r \geq 1$  et soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  des nombres réels tels que  $1, \alpha_1, \dots, \alpha_r$  sont rationnellement indépendants. Pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour tout  $(x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r$ , il existe un élément  $N \in \mathbb{N}$  et  $(p_1, \dots, p_r) \in \mathbb{Z}^r$  tel que*

$$\forall i \in \{1, \dots, r\}, |N\alpha_i - p_i - x_i| < \varepsilon.$$

**Corollaire 3.5.4.** *Soit  $\sigma$  une substitution Pisot irréductible et unimodulaire. L'ensemble  $\pi_c(\{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^n \mid \langle \mathbf{z}, \mathbf{v}_\beta \rangle \geq 0\})$  est dense dans  $\mathbb{H}_c$ .*

*Démonstration.* Nous commençons par prouver que  $\pi_c(\mathbb{Z}^n)$  est dense dans  $\mathbb{H}_c$ . Soient  $\alpha = (\alpha_2, \dots, \alpha_n)$  le vecteur des composantes de  $\pi_c(\mathbf{e}_1)$  dans la base  $\{\pi_c(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_1) \mid 2 \leq i \leq n\}$ , c'est-à-dire

$$\pi_c(\mathbf{e}_1) = \sum_{i=2}^n \alpha_i \pi_c(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_1).$$

Ensuite, comme les nombres  $1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  sont rationnellement indépendants (Lemme 3.5.2), le Théorème de Kronecker 3.5.3 indique que pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout  $x = (x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  et  $p = (p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}^{n-1}$  tels que

$$\forall i \in \{2, \dots, n\}, |x_i - N\alpha_i - p_i| < \varepsilon.$$

De là, nous déduisons que  $\overline{\mathbb{N}\alpha + \mathbb{Z}^{n-1}} = \mathbb{R}^{n-1}$ . Considérons maintenant l'isomorphisme suivant

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^{n-1} &\rightarrow \mathbb{H}_c \\ x = (x_2, \dots, x_n) &\mapsto \sum_{i=2}^n x_i \pi_c(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_1). \end{aligned}$$

Comme  $\varphi$  est un isomorphisme, nous avons  $\overline{\varphi(\mathbb{N}\alpha + \mathbb{Z}^{n-1})} = \mathbb{H}_c$ . Pour conclure que  $\pi_c(\mathbb{Z}^n)$  est dense dans  $\mathbb{H}_c$ , il suffit alors de montrer que  $\varphi(\mathbb{N}\alpha + \mathbb{Z}^{n-1}) \subseteq \pi_c(\mathbb{Z}^n)$ . Soit  $x \in \varphi(\mathbb{N}\alpha + \mathbb{Z}^{n-1})$ . Il existe  $N \in \mathbb{N}$  et  $p \in \mathbb{Z}^{n-1}$  tels que  $x = \varphi(N\alpha + p)$ . En décomposant dans la base  $\{\pi_c(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_1) \mid 2 \leq i \leq n\}$  de  $\mathbb{H}_c$  et en utilisant la linéarité de  $\pi_c$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=2}^n (N\alpha_i + p_i) \pi_c(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_1) \\ &= N \sum_{i=2}^n \alpha_i \pi_c(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_1) + \sum_{i=2}^n p_i \pi_c(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_1) \\ &= N \pi_c(\mathbf{e}_1) + \pi_c\left(\sum_{i=2}^n p_i \pi_c(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_1)\right) \\ &= \pi_c\left(N\mathbf{e}_1 + \sum_{i=2}^n p_i (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_1)\right), \end{aligned}$$

ce qui prouve que  $x \in \pi_c(\mathbb{Z}^n)$ . Ceci termine de prouver que  $\overline{\pi_c(\mathbb{Z}^n)} = \mathbb{H}_c$ .

Montrons maintenant que  $\pi_c(\{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^n \mid \langle \mathbf{z}, \mathbf{v}_\beta \rangle \geq 0\})$  est dense dans  $\mathbb{H}_c$ . Soit  $\nu \in \mathbb{H}_c$ . Par densité de  $\pi_c(\mathbb{Z}^n)$ , il existe  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$  tel que  $|\nu - \pi_c(\mathbf{x})| < \frac{\varepsilon}{2}$ . De plus,  $h_\sigma$  étant une contraction, il existe  $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^n$  et  $N \in \mathbb{N}$  tels que

$$\begin{cases} |\pi_c(M_\sigma^N \mathbf{z})| = |h_\sigma^N \circ \pi_c(\mathbf{z})| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \langle \mathbf{x} + M_\sigma^N \mathbf{z}, \mathbf{v}_\beta \rangle > 0. \end{cases}$$

Posons  $\mathbf{y} = \mathbf{x} + M_\sigma^N \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^n$ . Dés lors, nous avons

$$|\nu - \pi_c(\mathbf{y})| = |\nu - \pi_c(\mathbf{x} + M_\sigma^N \mathbf{z})| \leq |\nu - \pi_c(\mathbf{x})| + |\pi_c(M_\sigma^N \mathbf{z})| < \varepsilon$$

de sorte que  $\pi_c(\{\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n \mid \langle \mathbf{y}, \mathbf{v}_\beta \rangle \geq 0\})$  est dense dans  $\mathbb{H}_c$ .  $\square$

Nous pouvons maintenant montré que nos tuiles  $\mathcal{T}_\sigma(i)$  recouvrent  $\mathbb{H}_c$  comme annoncé précédemment.

**Proposition 3.5.5.** *Soit  $\sigma$  une substitution Pisot irréductible et unimodulaire. Les assertions suivantes sont vérifiées.*

- (i) *l'ensemble  $\Gamma_c$  est un ensemble de Delone.*
- (ii) *L'union  $\{\mathcal{T}_\sigma(i) + \gamma \mid [\gamma, i]^* \in \Gamma_c\}$  est une couverture de  $\mathbb{H}_c$ .*

*Démonstration.* (i) C'est une conséquence directe de la Proposition 3.4.3 impliquant que  $\Gamma_c$  est l'ensemble de translation d'un pavage de  $\mathbb{H}_c$  par un nombre fini de polyèdres. En effet, puisque les polyèdres sont en nombre fini, nous pouvons prendre  $R$  la distance maximale entre deux sommets d'un même polyèdre et nous obtenons alors que toute boule fermé de rayon  $R$  contient au moins un sommet, de sorte que  $\Gamma_c$  est relativement dense. De même, nous pouvons choisir  $r$  la distance minimale entre 2 sommets d'un polyèdre pour obtenir que toute boule ouverte de rayon  $r/2$  contient au plus un sommet, de sorte que  $\Gamma_c$  est uniformément discret.

(ii) Pour prouver ce deuxième point, nous avons d'abord besoin d'une observation intermédiaire. Soit  $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^n$  avec  $\langle \mathbf{z}, \mathbf{v}_\beta \rangle \geq 0$ . Il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que en posant  $\mathbf{x} := \mathbf{P}(u_0 \cdots u_{N-1})$ , alors

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_\beta \rangle \leq \langle \mathbf{z}, \mathbf{v}_\beta \rangle < \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_\beta \rangle + \langle \mathbf{e}_{u_N}, \mathbf{v}_\beta \rangle.$$

En soustrayant  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_\beta \rangle$ , nous obtenons alors

$$0 \leq \langle \mathbf{z} - \mathbf{x}, \mathbf{v}_\beta \rangle < \langle \mathbf{e}_{u_N}, \mathbf{v}_\beta \rangle$$

ce qui prouve que  $(\mathbf{z} - \mathbf{x}, \mathbf{e}_{u_N}) \in \Gamma_c$ . De plus, comme  $\mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{z} - \mathbf{x})$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \pi_c(\mathbf{z}) &= \pi_c(\mathbf{x}) + \pi_c(\mathbf{z} - \mathbf{x}) \\ &= \pi_c \circ \mathbf{P}(u_0 \cdots u_{N-1}) + \pi_c(\mathbf{z} - \mathbf{x}) \\ &\in \mathcal{T}_\sigma(u_N) + \pi_c(\mathbf{z} - \mathbf{x}). \end{aligned}$$

Autrement dit, nous venons de prouver que pour tout  $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^n$  tel que  $\langle \mathbf{z}, \mathbf{v}_\beta \rangle \geq 0$ , nous avons  $\pi_c(\mathbf{z}) \in \mathcal{T}_\sigma(i) + \gamma$  où  $\gamma = \pi_c(\mathbf{z} - \mathbf{x})$ ,  $i = u_N$  et  $[\gamma, i]^* \in \Gamma_c$ .

Nous sommes maintenant en mesure de prouver (ii). Soit  $\nu \in \mathbb{H}_c$ . Par le Corollaire 3.5.4, il existe une suite  $(\pi_c(\mathbf{z}_k))_{k \in \mathbb{N}}$  où  $\langle \mathbf{z}_k, \mathbf{v}_\beta \rangle \geq 0$  pour tout  $k$  et qui converge vers  $\nu$ . De plus, nous venons de dire que pour chaque  $k$ , il existe  $[\gamma_k, i_k]^* \in \Gamma_c$  tel que  $\pi_c(\mathbf{z}_k) \in \mathcal{T}_\sigma(i_k) + \gamma_k$ . Puisque les sous-tuiles  $\mathcal{T}_\sigma(i)$  pour  $i \in A$  sont bornées et  $\Gamma_c$  est uniformément discret, il existe une infinité de  $k$  pour lesquels  $(\gamma_k, i_k)$  prend la même valeur, disons  $(\gamma, i)$ . Nous avons donc  $\nu \in \mathcal{T}_\sigma(i) + \gamma$ , ce qui prouve que nous avons une couverture de  $\mathbb{H}_c$ .  $\square$

**Corollaire 3.5.6.** *Soit  $\sigma$  une substitution Pisot irréductible et unimodulaire. Les sous-tuiles  $\mathcal{T}_\sigma(i)$ , pour  $i \in A$ , ont un intérieur non vide.*

*Démonstration.* Par la proposition 3.5.5,  $\Gamma_c$  est un ensemble dénombrable. Ensuite, par le théorème de Baire, toute union dénombrable de fermés d'intérieurs vides de  $\mathbb{H}_c$  est un fermé d'intérieur vide. Ainsi, comme  $\mathbb{H}_c$  est clairement d'intérieur non-vide et est recouvert par une union dénombrable des  $(\mathcal{T}_\sigma(j))_{j \in A}$  (qui sont des fermés), nous déduisons qu'il existe  $i \in A$  tel que l'intérieur de  $\mathcal{T}_\sigma(i)$  est non vide. De plus, comme  $\sigma$  est primitive par définition, le graphe préfixe-suffixe  $\mathcal{G}_\sigma$  est fortement connexe. Ainsi, vu l'équation (2.15), nous déduisons que chaque sous-tuile  $\mathcal{T}_\sigma(j)$  pour  $j \neq i$  contient une copie contractée de  $\mathcal{T}_\sigma(i)$  d'où la conclusion.  $\square$

## 3.6 Substitutions de tips

Pour clore ce chapitre, il reste à montrer que la collection de tuiles  $\mathcal{I}_\sigma := \{\mathcal{T}_\sigma(i) + \gamma \mid [\gamma, i]^* \in \Gamma_c\}$  constitue un multi-pavage de  $\mathbb{H}_c$ . Pour ce faire, nous avons d'abord besoin de remarquer que  $\Gamma_c$  est stabilisé par une application dilatante agissant sur  $\pi_c(\mathbb{Z}^n) \times A$ . Cette application est en fait une nouvelle substitution agissant non plus sur les lettres mais sur les tips (ou de manière équivalente, sur les faces unité) et qui est inspirée de l'équation de SFIG (2.15) satisfaite par les sous-tuiles. Ce genre de substitutions agissant sur des faces de cubes unités ont été introduites par Arnoux et Ito dans [4] sous le nom de *substitution généralisée*. Afin de clarifier les notations qui vont suivre et de donner une intuition sur les substitutions généralisées, une introduction informelle est donnée en annexe Chapitre B pour le lecteur intéressé.

**Définition 3.6.1** (Substitution de SFIG). La *substitution de SFIG sur les tips* associée à la substitution  $\sigma$ , notée  $\mathbf{E}_1^*(\sigma)$ , est définie sur les tips par

$$\mathbf{E}_1^*(\sigma)([\gamma, i]^*) = \bigcup_{(p,j,s), \sigma(j)=pis} \left\{ [h_\sigma^{-1}(\gamma + \pi_c \circ \mathbf{P}(p)), j]^* \right\}. \quad (3.4)$$

Nous omettons la dépendance en  $\sigma$  quand cela est clair et notons donc  $\mathbf{E}_1^*$  à la place de  $\mathbf{E}_1^*(\sigma)$ . Nous étendons ensuite l'application aux parcelles en posant

$$\mathbf{E}_1^*(X_1) \cup \mathbf{E}_1^*(X_2) = \mathbf{E}_1^*(X_1 \cup X_2).$$

Il est direct de constater que tous les éléments apparaissant dans l'union (3.4) sont distincts.

**Remarque 3.6.2.** Nous définissons l'application  $\mathbf{E}_1^*$  sur les tips mais nous pourrions la définir sur n'importe quel *face formelle*  $[\pi_c(\mathbf{x}), i]^*$ .

De plus, notre définition de  $\mathbf{E}_1^*$  sur des faces formelles nous place dans un cadre plus général que si nous travaillions avec les faces géométriques. En effet, nous pouvons également voir  $\mathbf{E}_1^*$  comme une application agissant sur les faces de cube unité et la formule (3.4) se traduit comme suit :

$$\mathbf{E}_1^*(\sigma)([\mathbf{x}, i]_g^*) = \bigcup_{(p,j,s), \sigma(j)=pis} \left\{ [M_\sigma^{-1}(\mathbf{x} + \mathbf{P}(p)), j]_g^* \right\}.$$

Cette traduction revient simplement à remplacer les tips  $[\pi_c(\mathbf{x}), i]^*$  par les faces  $[\mathbf{x}, i]_g^*$  dans l'équation (3.4).

Comme dans le cas de substitutions classiques où l'image est entièrement déterminée par l'image des lettres, une substitution de SFIG  $\mathbf{E}_1^*(\sigma)$  est entièrement déterminée par l'image des tips de la forme  $[0, i]^*$  et l'application  $h_\sigma$ .

**Lemme 3.6.3.** *L'image d'une substitution de SFIG  $\mathbf{E}_1^*(\sigma)$  est entièrement déterminée par l'image des tips de la forme  $[0, i]^*$  et l'application  $h_\sigma$ .*

*Démonstration.* En effet, en prenant  $[\gamma, i]^* \in \Gamma_c$  nous obtenons successivement

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1^*(\sigma)([\gamma, i]^*) &= \bigcup_{(p,j,s), \sigma(j)=pis} [h_\sigma^{-1}(\gamma + \pi_c \circ \mathbf{P}(p)), j]^* \\ &= \bigcup_{(p,j,s), \sigma(j)=pis} h_\sigma^{-1}(\gamma) + [h_\sigma^{-1}(\pi_c \circ \mathbf{P}(p)), j]^* \\ &= h_\sigma^{-1}(\gamma) + \bigcup_{(p,j,s), \sigma(j)=pis} [h_\sigma^{-1}(\pi_c \circ \mathbf{P}(p)), j]^* \\ &= h_\sigma^{-1}(\gamma) + \mathbf{E}_1^*(\sigma)([0, i]^*). \end{aligned}$$

□

Illustrons la formule (3.4) sur un exemple.

**Exemple 3.6.4.** Considérons à nouveau la substitution  $\sigma(1) = 112$ ,  $\sigma(2) = 113$ ,  $\sigma(3) = 1$ .

Afin de calculer  $\mathbf{E}_1^*([0, 1]^*)$  comme dans l'équation (3.4), nous commençons par chercher les occurrences de 1 dans  $\sigma(1)$ ,  $\sigma(2)$  et  $\sigma(3)$ . Nous trouvons 5 apparitions de 1 dans les images de  $\sigma$  :

$$\begin{aligned} \sigma(1) &= \varepsilon.1.12 = 1.1.2 \\ \sigma(2) &= \varepsilon.1.3 = 1.1.3 \\ \sigma(3) &= \varepsilon.1.\varepsilon \end{aligned}$$

ce qui donne l'image suivante :

$$\mathbf{E}_1^*([0, 1]^*) = [0, 1]^* \cup [0, 2]^* \cup [0, 3]^* \cup [h_\sigma^{-1} \circ \pi_c \circ \mathbf{P}(1), 1]^* \cup [h_\sigma^{-1} \circ \pi_c \circ \mathbf{P}(1), 2]^*.$$

Nous calculons de même

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1^*([0, 2]^*) &= [h_\sigma^{-1} \circ \pi_c \circ \mathbf{P}(11), 1]^* \\ \mathbf{E}_1^*([0, 3]^*) &= [h_\sigma^{-1} \circ \pi_c \circ \mathbf{P}(11), 2]^*.\end{aligned}$$

Pour finir, nous utilisons la relation  $h_\sigma^{-1} \circ \pi_c = \pi_c \circ M_\sigma^{-1}$  pour simplifier les expressions ci-haut et nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1^*([0, 1]^*) &= [0, 1]^* \cup [0, 2]^* \cup [0, 3]^* \cup [\pi_c(\mathbf{e}_3), 1]^* \cup [\pi_c(\mathbf{e}_3), 2]^* \\ \mathbf{E}_1^*([0, 2]^*) &= [2\pi_c(\mathbf{e}_3), 1]^* \\ \mathbf{E}_1^*([0, 3]^*) &= [2\pi_c(\mathbf{e}_3), 2]^*.\end{aligned}$$

Graphiquement nous avons la substitution suivante :



où le point en gras sert à marquer l'origine et les fines lignes noires représentent les axes.

Il existe une profonde connexion entre la substitution de SFIG  $\mathbf{E}_1^*$  et l'équation de SFIG (2.15). Cette dernière peut en effet être réécrite de la sorte

$$\forall [\gamma, i]^* \in \Gamma_c, \quad \mathcal{T}_\sigma(i) + \gamma = \bigcup_{[\eta, j]^* \in \mathbf{E}_1^*([\gamma, i]^*)} h_\sigma(\mathcal{T}_\sigma(j) + \eta). \quad (3.5)$$

En effet, nous avons successivement

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_\sigma(i) + \gamma &= \bigcup_{[\eta, j]^* \in \mathbf{E}_1^*([\gamma, i]^*)} h_\sigma(\mathcal{T}_\sigma(j) + \eta) \\ &= \bigcup_{\substack{j \in A, \\ i \xrightarrow{(p, i, s)} j}} h_\sigma(\mathcal{T}_\sigma(j) + h_\sigma^{-1}(\gamma + \pi_c \circ \mathbf{P}(p))) \\ &= \bigcup_{\substack{j \in A, \\ i \xrightarrow{(p, i, s)} j}} h_\sigma(\mathcal{T}_\sigma(j)) + \gamma + \pi_c \circ \mathbf{P}(p)\end{aligned}$$

et nous retrouvons bien l'équation (2.15) (où  $\gamma$  a été ajouté dans les deux membres). De plus, comme précédemment, nous pouvons itérer plusieurs fois l'équation (3.5) pour obtenir

$$\forall [\gamma, i]^* \in \Gamma_c, \quad \mathcal{T}_\sigma(i) + \gamma = \bigcup_{[\eta, j]^* \in \mathbf{E}_1^{*N}([\gamma, i]^*)} h_\sigma^N(\mathcal{T}_\sigma(j) + \eta). \quad (3.6)$$

Nous obtenons alors le penchant de l'équation (2.17) dans le contexte des substitutions de SFIG. Les détails de cette itération N-ième sont fort similaires à ceux de l'équation (2.17) mais sont quand même donnés dans la démonstration suivante par souci de complétude.

*Démonstration.* En procédant par récurrence sur  $N$  nous obtenons successivement pour tout  $[\gamma, i]^* \in \Gamma_c$ ,

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_\sigma(i) + \gamma &= \bigcup_{[\eta, j]^* \in \mathbf{E}_1^*([\gamma, i]^*)} h_\sigma(\mathcal{T}_\sigma(j) + \eta) \\
&= \bigcup_{[\eta, j]^* \in \mathbf{E}_1^*([\gamma, i]^*)} h_\sigma \left( \bigcup_{[\delta, l]^* \in \mathbf{E}_1^{*N}([\eta, j]^*)} h_\sigma^N(\mathcal{T}_\sigma(l) + \delta) \right) \\
&= \bigcup_{[\eta, j]^* \in \mathbf{E}_1^*([\gamma, i]^*)} \bigcup_{[\delta, l]^* \in \mathbf{E}_1^{*N}([\eta, j]^*)} h_\sigma^{N+1}(\mathcal{T}_\sigma(l) + \delta) \\
&= \bigcup_{[\delta, l]^* \in \mathbf{E}_1^{*N+1}([\gamma, i]^*)} h_\sigma^{N+1}(\mathcal{T}_\sigma(l) + \delta)
\end{aligned}$$

□

Les substitutions de tips jouissent de plusieurs propriétés intéressantes que nous résumons ci-dessous.

**Théorème 3.6.5.** [Arnoux et Ito [4] + Ei, Ito et Rao [8]] Soit  $\sigma$  une substitution Pisot irréductible et unimodulaire et soit  $\mathbf{E}_1^*$  sa substitution de SFIG associée.

- (i) L'ensemble de translation  $\Gamma_c$  est stable sous l'action de  $\mathbf{E}_1^*$ .
- (ii) Les images par  $\mathbf{E}_1^*$  de deux tips différents de  $\Gamma_c$  ne partagent aucun tip.
- (iii) La substitution  $\mathbf{E}_1^*$  envoie  $\Gamma_c$  sur  $\Gamma_c$ , c'est-à-dire  $\mathbf{E}_1^*(\Gamma_c) = \Gamma_c$ .

*Démonstration.* (i) Soit  $[\gamma, i]^* \in \Gamma_c$  avec  $\gamma = \pi_c(\mathbf{x})$  pour  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$  tel que  $0 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_\beta \rangle < \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{v}_\beta \rangle$ . Nous obtenons successivement

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_1^*(\sigma)([\gamma, i]^*) &= \bigcup_{(p, j, s), \sigma(j)=pis} [h_\sigma^{-1}(\gamma + \pi_c \circ \mathbf{P}(p)), j]^* \\
&= \bigcup_{(p, j, s), \sigma(j)=pis} [\pi_c(M_\sigma^{-1}\mathbf{x} + M_\sigma^{-1}\mathbf{P}(p)), j]^* \\
&= \bigcup_{(p, j, s), \sigma(j)=pis} [\pi_c(M_\sigma^{-1}(\mathbf{x} + \mathbf{P}(p))), j]^*.
\end{aligned}$$

Il reste à vérifier que chaque élément de la dernière union est bien un tip de  $\Gamma_c$ . Remarquons d'abord que vu l'hypothèse d'unimodularité de  $\sigma$ , la matrice  $M_\sigma^{-1}$  est à entrées entières de sorte que la première composante de chaque tuple de l'union est bien dans  $\pi_c(\mathbb{Z}^n)$ . Ensuite, pour tout  $j \in A$  tel que  $\sigma(j) = pis$ , nous devons vérifier les deux inégalités suivantes :

$$\langle M_\sigma^{-1}(\mathbf{x} + \mathbf{P}(p)), \mathbf{v}_\beta \rangle > 0 \quad (1)$$

$$\langle M_\sigma^{-1}(\mathbf{x} + \mathbf{P}(p)) - \mathbf{e}_j, \mathbf{v}_\beta \rangle < 0 \quad (2) .$$

Pour (1), nous avons clairement  $\langle \mathbf{P}(p), \mathbf{v}_\beta \rangle \geq 0$  en plus de  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_\beta \rangle \geq 0$  par hypothèse. Ainsi,  $\langle \mathbf{x} + \mathbf{P}(p), \mathbf{v}_\beta \rangle \geq 0$  et comme  $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{y}, \mathbf{v}_\beta \rangle \geq 0\}$  est stable sous l'action de  $M_\sigma^{-1}$  (Lemme A.0.4), la première inégalité est démontrée.

Pour (2), commençons par remarquer que  $M_\sigma^{-1} \mathbf{P}(\sigma(j)) = \mathbf{e}_j$ . Dés lors, nous obtenons

$$\begin{aligned} & M_\sigma^{-1}(\mathbf{x} + \mathbf{P}(p)) - \mathbf{e}_j \\ &= M_\sigma^{-1}(\mathbf{x} + \mathbf{P}(p)) - M_\sigma^{-1} \mathbf{P}(\sigma(j)) \\ &= M_\sigma^{-1}(\mathbf{x} + \mathbf{P}(p) - \mathbf{P}(\sigma(j))) \\ &= M_\sigma^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{e}_i - \mathbf{P}(s)). \end{aligned}$$

Or, comme  $\langle \mathbf{x} - \mathbf{e}_i, \mathbf{v}_\beta \rangle < 0$  et  $\langle -\mathbf{P}(s), \mathbf{v}_\beta \rangle < 0$  nous avons  $\langle M_\sigma^{-1}(\mathbf{x} + \mathbf{P}(p)) - \mathbf{e}_j, \mathbf{v}_\beta \rangle = \langle \mathbf{x} - \mathbf{e}_i - \mathbf{P}(s), \mathbf{v}_\beta \rangle < 0$ . Dés lors, nous concluons de la même façon que précédemment en remarquant que  $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{y}, \mathbf{v}_\beta \rangle < 0\}$  est stable sous l'action de  $M_\sigma^{-1}$  (Lemme A.0.4).

(ii) Supposons par l'absurde qu'il existe un tip  $[\eta, j]^* \in \Gamma_c$  tel que  $[\eta, j]^* \in \mathbf{E}_1^*([\gamma, i]^*)$  et  $[\eta, j]^* \in \mathbf{E}_1^*([\gamma', i']^*)$  avec  $[\gamma, i]^* \neq [\gamma', i']^*$ . Par définition de  $\mathbf{E}_1^*$ , nous avons alors  $\sigma(j) = pis = p'i's'$  et

$$\eta = h_\sigma^{-1}(\gamma + \pi_c \circ \mathbf{P}(p)) = h_\sigma^{-1}(\gamma' + \pi_c \circ \mathbf{P}(p')).$$

Ceci implique que

$$\gamma + \pi_c \circ \mathbf{P}(p) = \gamma' + \pi_c \circ \mathbf{P}(p') \quad (3.7)$$

vu que  $h_\sigma$  est inversible. Nous avons alors deux cas :  $\gamma = \gamma'$  ou  $\gamma \neq \gamma'$ .

Si  $\gamma = \gamma'$ , alors  $\mathbf{P}(p) = \mathbf{P}(p')$  vu (3.7). De plus, comme  $\sigma(j) = pis = p'i's'$ , nous sommes dans la situation suivante :

$$\begin{array}{l} \sigma(j) \begin{array}{|c|c|c|} \hline p & i & s \\ \hline \end{array} \\ \vdots \\ \sigma(j) \begin{array}{|c|c|c|} \hline p' & i' & s' \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Ainsi, clairement  $i = i'$  et les tips  $[\gamma, i]^*$  et  $[\gamma', i']^*$  ne sont pas distincts, ce qui contredit l'hypothèse.

Si maintenant  $\gamma \neq \gamma'$ , alors vu (3.7) et la Proposition 2.2.14 nous devons avoir  $\mathbf{P}(p) \neq \mathbf{P}(p')$ . Ceci implique  $|p| \neq |p'|$  puisque  $p$  et  $p'$  sont tous deux préfixes de  $\sigma(j)$ . Supposons sans perte de généralité que  $|p| < |p'|$  et décomposons  $p' = piu$ .

$$\begin{array}{l} \sigma(j) \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline p & i & u & \\ \hline \end{array} \\ \vdots \\ \sigma(j) \begin{array}{|c|c|c|} \hline p' & i' & \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Ensuite, comme  $[\gamma, i]^*, [\gamma', i']^* \in \Gamma_c$ , nous pouvons écrire  $\gamma = \pi_c(\mathbf{x})$  et  $\gamma' = \pi_c(\mathbf{x}')$  pour  $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{Z}^n$  tels que

$$0 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_\beta \rangle < \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{v}_\beta \rangle \quad \text{et} \quad 0 \leq \langle \mathbf{x}', \mathbf{v}_\beta \rangle < \langle \mathbf{e}_{i'}, \mathbf{v}_\beta \rangle.$$

Dés lors, en repartant de (3.7), nous obtenons successivement

$$\begin{aligned} \gamma + \pi_c \circ \mathbf{P}(p) &= \gamma' + \pi_c \circ \mathbf{P}(p') \\ \Leftrightarrow \pi_c(\mathbf{x}) + \pi_c \circ \mathbf{P}(p) &= \pi_c(\mathbf{x}') + \pi_c \circ \mathbf{P}(p) + \pi_c \circ \mathbf{P}(i) + \pi_c \circ \mathbf{P}(u) \\ \Leftrightarrow \pi_c(\mathbf{x}) &= \pi_c(\mathbf{x}') + \pi_c(\mathbf{e}_i) + \pi_c(\mathbf{P}(u)) \\ \Leftrightarrow \pi_c(\mathbf{x}) &= \pi_c(\mathbf{x}' + \mathbf{e}_i + \mathbf{P}(u)) \\ \Leftrightarrow \mathbf{x} &= \mathbf{x}' + \mathbf{e}_i + \mathbf{P}(u) \end{aligned}$$

où la dernière équivalence vient de la Proposition 2.2.14. Or, en calculant le produit scalaire de  $\mathbf{x}$  avec  $\mathbf{v}_\beta$ , nous obtenons maintenant

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_\beta \rangle &= \underbrace{\langle \mathbf{x}', \mathbf{v}_\beta \rangle}_{\geq 0} + \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{v}_\beta \rangle + \underbrace{\langle \mathbf{P}(u), \mathbf{v}_\beta \rangle}_{\geq 0} \\ &\geq \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{v}_\beta \rangle \end{aligned}$$

ce qui est impossible car  $[\gamma, i]^* \in \Gamma_c$  implique que  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_\beta \rangle < \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{v}_\beta \rangle$ .

(iii) Nous savons déjà que  $\mathbf{E}_1^*(\Gamma_c) \subseteq \Gamma_c$ , montrons l'autre inclusion. Soit  $[\eta, j]^* \in \Gamma_c$  tel que  $\eta = \pi_c(\mathbf{y})$  avec  $0 \leq \langle \mathbf{y}, \mathbf{v}_\beta \rangle < \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{v}_\beta \rangle$ . Notons  $P^\geq$  le demi-espace  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_\beta \rangle \geq 0\}$  et  $P^<$  le demi-espace  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_\beta \rangle < 0\}$ . En prenant  $\mathbf{y}' = \mathbf{y} - \mathbf{e}_j$ , nous avons  $\mathbf{y}' \in P^<$  de sorte que  $M_\sigma \mathbf{y}' \in P^<$  vu le Lemme A.0.4. Or, puisque  $\mathbf{P}(\sigma(j)) = M_\sigma \mathbf{e}_j$ , en notant  $(p_i)_{1 \leq i \leq l}$  la suite (finie) des préfixes propres de  $\sigma(j)$ , nous avons que

$$M_\sigma \mathbf{y} - \{\mathbf{P}(p_1), \dots, \mathbf{P}(p_l), M_\sigma \mathbf{e}_j\}$$

définit un chemin de cordons liant  $M_\sigma \mathbf{y}$  à  $M_\sigma \mathbf{y}'$ , c'est-à-dire un chemin de  $P^\geq$  à  $P^<$ . Dés lors, ce chemin doit passer à travers  $P^= := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_\beta \rangle = 0\}$ . Supposons que le chemin intersecte  $P^=$  à la  $k$ -ième étape. Nous avons alors

$$0 \leq \langle M_\sigma \mathbf{y} - \mathbf{P}(p_k), \mathbf{v}_\beta \rangle < \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{v}_\beta \rangle$$

pour un  $i \in A$  vu la Proposition 3.3.5. Ainsi, en posant  $\gamma = \pi_c(M_\sigma \mathbf{y} - \mathbf{P}(p_k))$ , nous avons  $[\gamma, i] \in \Gamma_c$  tel que  $[\eta, j] \in \mathbf{E}_1^*([\gamma, i]^*)$  vu la définition de  $\mathbf{E}_1^*$ . □

Le point (iii) de la proposition précédente implique que  $\Gamma_c$  est un point fixe de la substitution généralisée  $\mathbf{E}_1^*$ . Ceci explique la terminologie *auto-réplcatif* de l'ensemble de translation  $\Gamma_c$ . Remarquons que nous utilisons la terminologie "auto-réplcatif" et non "auto-similaire" car l'application  $h_\sigma$  n'est pas forcément une similitude.

Pour clore cette section, nous démontrons le résultat fondamental suivant.



**Proposition 3.6.6.** *Soit  $\sigma$  une substitution Pisot irréductible et unimodulaire et  $\mathbf{E}_1^*$  sa substitution de SFIG associée. Si  $[\eta_1, j_1]^*, [\eta_2, j_2]^* \in \mathbf{E}_1^{*N}([\gamma, i])$  pour un certains  $[\gamma, i]^* \in \Gamma_c$  et un certains  $N$ , alors*

$$\mu_{n-1}((\mathcal{T}_\sigma(j_1) + \eta_1) \cap (\mathcal{T}_\sigma(j_2) + \eta_2)) = 0.$$

*Démonstration.* Reprenons l'équation de SFIG itérée (3.6)

$$\forall [\gamma, i]^* \in \Gamma_c, \quad \mathcal{T}_\sigma(i) + \gamma = \bigcup_{[\eta, j]^* \in \mathbf{E}_1^{*N}([\gamma, i]^*)} h_\sigma^N(\mathcal{T}_\sigma(j) + \eta).$$

Vu le Théorème 2.4.5, nous savons que l'intersection de chaque paire de tuiles dans l'union du membre de droite est de mesure nulle. Dès lors, comme  $[\eta_1, j_1]^*, [\eta_2, j_2]^* \in \mathbf{E}_1^{*N}([\gamma, i])$ , l'intersection  $h_\sigma^N(\mathcal{T}_\sigma(j_1) + \eta_1) \cap h_\sigma^N(\mathcal{T}_\sigma(j_2) + \eta_2)$  est de mesure nulle. Ceci implique que l'intersection  $(\mathcal{T}_\sigma(j_1) + \eta_1) \cap (\mathcal{T}_\sigma(j_2) + \eta_2)$  est également de mesure nulle.  $\square$

La propriété précédente nous dit que deux sous-tuiles translatées par des vecteurs issus de tips appartenant à l'image  $\mathbf{E}_1^{*N}([\gamma, i]^*)$  ne s'intersectent pas (sauf peut-être sur un ensemble de mesure nulle).

### 3.7 Multi-pavage auto-répliatif

Nous construisons dans cette section un multi-pavage de  $\mathbb{H}_c$  dont les tuiles sont les  $\{\mathcal{T}_\sigma(i) + \gamma \mid (\gamma, i) \in \Gamma_c\}$ . Pour cela, nous avons d'abord besoin du théorème suivant.

**Théorème 3.7.1.** *Soit  $\sigma$  une substitution Piost, irréductible et unimodulaire. La frontière de la tuile centrale  $\mathcal{T}_\sigma$  ainsi que celle de chaque sous-tuile  $\mathcal{T}_\sigma(i)$  est de mesure nulle. De plus,  $\mathcal{T}_\sigma$  et chaque  $\mathcal{T}_\sigma(i)$  est l'adhérence de son intérieur.*

*Démonstration.* D'abord, nous avons  $\tau_e(\partial X) = \partial(\tau_e(X))$  pour tout  $e \in P_\sigma$  et pour tout sous-ensemble  $X$  de  $\mathbb{H}_c$  car les applications  $\tau_e$  pour  $e \in P_\sigma$  sont des homéomorphismes. Ensuite, en utilisant les mêmes notations et en faisant les mêmes détails que dans la preuve du Théorème 2.4.5, nous déduisons de l'équation (2.15) que

$$\beta \mu_{n-1}(\partial \mathcal{T}_\sigma(i)) \leq \sum_{j \in A} m_{ij} \mu_{n-1}(\partial \mathcal{T}_\sigma(j)). \quad (3.8)$$

En continuant de suivre la preuve du Théorème 2.4.5, nous obtenons l'égalité

$$\beta \mu_{n-1}(\partial \mathcal{T}_\sigma(i)) = \sum_{j \in A} m_{ij} \mu_{n-1}(\partial \mathcal{T}_\sigma(j)). \quad (3.9)$$

Comme l'union dans l'équation (2.15) est disjointe en mesure, il en est de même pour les ensembles  $\partial \mathcal{T}_\sigma(i)$  avec  $i \in A$ . Dès lors, l'égalité précédente implique que ces ensembles sont tous de mesure strictement positive ou bien tous de mesure nulle. Supposons qu'ils soient

tous de mesure strictement positive et montrons que ce cas mène à une contradiction. Par le Corollaire 3.5.6, les sous-tuiles  $\mathcal{T}_\sigma(i)$  ont un intérieur non-vide. Soit  $i \in A$  et soit  $B$  une boule ouverte incluse dans l'intérieur de  $\mathcal{T}_\sigma(i)$ . Considérons l'équation (3.6) appliquée à  $\mathcal{T}_\sigma(i) = \mathcal{T}_\sigma(i) + 0$ , c'est-à-dire

$$\mathcal{T}_\sigma(i) = \bigcup_{[\eta,j]^* \in \mathbf{E}_1^{*N}([0,i]^*)} h_\sigma^N(\mathcal{T}_\sigma(j) + \eta). \quad (3.10)$$

Choisissons  $N$  suffisamment grand pour que  $\tau_e^N(\mathcal{T}_\sigma(j)) \subseteq B$ , pour un certains  $j$  tel que  $\sigma^N(j) = pis$ . Remarquons qu'un tel entier  $N$  existe car les applications  $\tau_e$  sont des contractions. Ceci implique que  $\partial(\tau_e^N(\mathcal{T}_\sigma(j))) \cap \partial\mathcal{T}_\sigma(i) = \emptyset$ . Remarquons également que  $e = (p, i, s) \in P_{\sigma^N}$  est une arête du graphe préfixe-suffixe associé à  $\sigma^N$  et que ces arêtes décrivent l'union dans la décomposition des tuiles. Dès lors, nous avons  $\tau_e(\nu) = h_\sigma^N(\nu) + \pi_e \circ \mathbf{P}(p)$  pour tout  $\nu \in \mathbb{H}_c$  (en rappelant que  $h_{\sigma^N} = h_\sigma^N$ ). Nous supposons également choisir  $N$  suffisamment grand pour avoir  $m_{ij}^N > 0$  pour tout  $i, j \in A$  (en utilisant la primitivité de  $M_\sigma$ ). En utilisant l'équation (3.10) et en rappelant que  $\partial(A \cup B) \subseteq \partial A \cup \partial B$  nous déduisons alors de ce qui précède :

$$\partial\mathcal{T}_\sigma(i) \subseteq \bigcup_{[\eta,k]^* \in \mathbf{E}_1^{*N}([0,i]^*), [\eta,k]^* \neq [\pi_e \circ \mathbf{P}(p), j]^*} \partial h_\sigma^N(\mathcal{T}_\sigma(k) + \eta). \quad (3.11)$$

Ceci implique l'inégalité suivante

$$\mu_{n-1}(\partial\mathcal{T}_\sigma(i)) < \beta^{-N} \sum_{k \in A} m_{ik}^N \mu_{n-1}(\partial\mathcal{T}_\sigma(k)),$$

en faisant, à nouveau, le même genre de détails que dans la preuve du Théorème 2.4.5 et en rappelant que les ensembles dans le membre de droite de l'équation (3.11) sont disjoints en mesure. Or, en répétant  $N$  fois l'équation (3.9), nous obtenons

$$\mu_{n-1}(\partial\mathcal{T}_\sigma(i)) = \beta^{-N} \sum_{k \in A} m_{ik}^N \mu_{n-1}(\partial\mathcal{T}_\sigma(k)),$$

une contradiction. Ceci fini donc de prouver que la frontière de chaque sous-tuile est de mesure nulle (il en va alors de même pour  $\mathcal{T}_\sigma$  vu que  $\partial(A \cup B) \subseteq \partial A \cup \partial B$ ).

Montrons maintenant que chaque sous-tuile est l'adhérence de son intérieur. Soit  $i \in A$  et soit  $\nu \in \mathcal{T}_\sigma(i)$ . Soit  $B$  une boule ouverte de centre  $\nu$ . Nous utilisons comme précédemment la formule pour la décomposition Nième (3.6) pour un  $N$  suffisamment grand et nous obtenons  $\nu \in \tau_e^N(\mathcal{T}_\sigma(j)) \subseteq B$ , pour un certains  $j$  tel que  $\sigma^N(j) = pis$  avec  $e = (p, i, s) \in P_{\sigma^N}$ . Par le Corollaire 3.5.6,  $\mathcal{T}_\sigma(j)$  est d'intérieur non-vide d'où  $\tau_e^N(\mathcal{T}_\sigma(j))$  est également d'intérieur non-vide. Ainsi,  $B$  contient des points intérieurs de  $\mathcal{T}_\sigma(i)$ . Nous venons donc de prouver que n'importe quelle boule ouverte centrée en  $\nu$  contient des points intérieurs de  $\mathcal{T}_\sigma(i)$ . Comme  $\nu$  a été choisi arbitrairement dans  $\mathcal{T}_\sigma(i)$ , nous concluons que  $\mathcal{T}_\sigma(i)$  est l'adhérence de son intérieur. Dès lors, il en est de même pour  $\mathcal{T}_\sigma$  vu l'égalité  $\mathcal{T}_\sigma = \bigcup_{i \in A} \mathcal{T}_\sigma(i)$ .  $\square$

Nous avons maintenant tout ce qu'il nous faut pour démontrer que les copies des sous-tuiles translâtées forment un multi-pavage de  $\mathbb{H}_c$ .

**Théorème 3.7.2.** *Soit  $\sigma$  une substitution Pisot, irréductible et unimodulaire. La collection  $\mathcal{I}_\sigma := \{\mathcal{T}_\sigma(i) + \gamma \mid [\gamma, i]^* \in \Gamma_c\}$  est un multi-pavage de  $\mathbb{H}_c$ . De plus,  $\Gamma_c$  est répétitif.*

*Démonstration.* Nous séparons la preuve de ce théorème en plusieurs parties. Notons que nous nous servons des définitions introduites dans la Section 3.1.

**L'ensemble de translation  $\Gamma_c$  est localement fini.** Comme  $\mathcal{T}_\sigma(i)$  est compact pour tout  $i \in A$  et comme  $\Gamma_c$  est uniformément discret vu la Proposition 3.5.5, la collection  $\mathcal{I}_\sigma$  est localement finie, c'est-à-dire qu'il existe un entier positif  $p$  tel que chaque point de  $\mathbb{H}_c$  est couvert au plus  $p$  fois.

**L'ensemble de translation  $\Gamma_c$  est répétitif.** Nous devons montrer que pour chaque parcelle  $P$ , il existe  $R > 0$  tel que chaque boule de rayon  $R$  contient une copie translâtée de  $P$ . Fixons une parcelle  $P = \{[\pi_c(\mathbf{z}_k), i_k]^* \mid 1 \leq k \leq l\}$  de  $\Gamma_c$ . Soit  $R_P$  tel que la boule  $B(0, R_P)$  contient la parcelle  $P$ .

Nous introduisons la notion de *coupe* au-dessus de  $\mathbb{H}_c$ . Nous notons  $L[a, b] := \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \mid a \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_\beta \rangle < b\}$  l'ensemble des points dont la hauteur est entre  $a$  et  $b$ . Rappelons que  $\Gamma_c$  correspond à la projection des faces dont le sommet distingué est dans  $L[0, \|\mathbf{v}_\beta\|_\infty]$  vu (3.3).

Vu la définition (3.3) de  $\Gamma_c$ , il existe  $\varepsilon_k > 0$  tel que  $\mathbf{z}_k$  appartient à la coupe  $L[0, (1 - \varepsilon_k)\langle \mathbf{e}_{i_k}, \mathbf{v}_\beta \rangle]$  pour tout  $k \in \{1, \dots, l\}$ . Posons  $\varepsilon := \frac{1}{2} \min_k \varepsilon_k \langle \mathbf{e}_{i_k}, \mathbf{v}_\beta \rangle$  (notons que  $\varepsilon > 0$  car  $P$  est fini).

Toujours par la définition (3.3), nous déduisons que pour tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$ , avoir  $\mathbf{x} \in L[0, \varepsilon]$  implique que la parcelle  $\pi_c(\mathbf{x}) + P$  appartient à  $\Gamma_c$ . En effet, un élément  $[\gamma, i]^* \in \pi_c(\mathbf{x}) + P$  est tel que  $\gamma = \pi_c(\mathbf{x}) + \pi_c(\mathbf{z}_k) = \pi_c(\mathbf{x} + \mathbf{z}_k)$  pour un  $k \in \{1, \dots, l\}$  et  $i = i_k$ . Or, en combinant le fait que  $\mathbf{x} \in L[0, \varepsilon]$  et que  $\mathbf{z}_k \in L[0, \langle \mathbf{e}_{i_k}, \mathbf{v}_\beta \rangle]$ , nous obtenons successivement

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle \mathbf{x} + \mathbf{z}_k, \mathbf{v}_\beta \rangle &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_\beta \rangle + \langle \mathbf{z}_k, \mathbf{v}_\beta \rangle \\ &< \frac{1}{2} \min_k \varepsilon_k \langle \mathbf{e}_{i_k}, \mathbf{v}_\beta \rangle + \langle \mathbf{e}_{i_k}, \mathbf{v}_\beta \rangle - \varepsilon_k \langle \mathbf{e}_{i_k}, \mathbf{v}_\beta \rangle \\ &< \min_k \varepsilon_k \langle \mathbf{e}_{i_k}, \mathbf{v}_\beta \rangle + \langle \mathbf{e}_{i_k}, \mathbf{v}_\beta \rangle - \min_k \varepsilon_k \langle \mathbf{e}_{i_k}, \mathbf{v}_\beta \rangle \\ &= \langle \mathbf{e}_{i_k}, \mathbf{v}_\beta \rangle, \end{aligned}$$

c'est-à-dire  $[\gamma, i]^* \in \Gamma_c$ .

Il reste à prouver qu'il existe  $R > 0$  tel que chaque boule de rayon  $R$  de  $\mathbb{H}_c$  contient un point  $\pi_c(\mathbf{x})$  avec  $\mathbf{x} \in L[0, \varepsilon]$ . Rappelons que les coordonnées de  $\mathbf{v}_\beta$  sont rationnellement indépendantes. Par le Théorème de Kronecker 3.5.3, il existe  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{Z}^n$  tel que  $\mathbf{x}_0 \in L[0, \varepsilon/2]$ . Divisons la coupe  $L[0, \|\mathbf{v}_\beta\|_\infty]$  en  $N = \lceil \|\mathbf{v}_\beta\|_\infty 2/\varepsilon \rceil$  coupes  $L[j\varepsilon/2, (j+1)\varepsilon/2]$  de hauteur  $\varepsilon/2$ . Puisque  $0 < \langle \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_\beta \rangle < \varepsilon/2$ , chaque coupe peut être translâtée jusqu'à  $L[0, \varepsilon]$  : pour tout  $j \leq N$ , il existe  $m_j$  tel que  $m_j \mathbf{x}_0 + L[j\varepsilon/2, (j+1)\varepsilon/2] \subset L[0, \varepsilon]$ .

Soit  $\nu \in \mathbb{H}_c$ . Nous utilisons le fait que  $\Gamma_c$  est un ensemble de Delone, en particulier qu'il est relativement dense (Proposition 3.5.5). Soit  $R' > 0$  tel que chaque boule de rayon  $R'$  contient le projeté par  $\pi_c$  d'un point de l'hyperplan discret (Définition 3.4.1). Ainsi, la boule  $B(\nu, R')$  contient un point  $\pi_c(\mathbf{x})$  avec  $\mathbf{x} \in L[0, \|\mathbf{v}_\beta\|_\infty]$ . Il existe donc  $j$  tel que le point  $\mathbf{x}$  appartient à une coupe  $L[j\varepsilon/2, (j+1)\varepsilon/2]$  et donc il existe  $m_j$  tel que  $\mathbf{x} + m_j \mathbf{x}_0 \in L[0, \varepsilon]$ . Vu ce qui précède, cela implique que la parcelle  $\pi_c(\mathbf{x} + m_j \mathbf{x}_0) + P$  appartient à  $\Gamma_c$ .

Finalement, nous déduisons que la boule de centre  $\nu$  et de rayon  $R := R' + \max_k \|m_k \mathbf{x}_0\|_c + R_P$  contient une copie translatée de la parcelle de départ  $P$ . Comme  $\nu \in \mathbb{H}_c$  a été choisi arbitrairement, cela prouve la répétitivité de  $\Gamma_c$ .

**La collection  $\mathcal{I}_\sigma$  est un multi-pavage.** Nous savons que  $\mathcal{I}_\sigma$  satisfait la condition (i) par la Proposition 3.5.5 et nous venons de démontrer que la condition (ii) de la définition d'un multi-pavage tient également (voir Section 3.1). Procédons par l'absurde et supposons que  $\mathcal{I}_\sigma$  ne satisfait pas (iii).

Comme la frontière de chaque sous-tuile est de mesure nulle par le Théorème 3.7.1, l'union des frontières de tous les éléments de  $\mathcal{I}_\sigma$  est aussi de mesure nulle. Dés lors, supposons par l'absurde que (iii) n'est pas vrai et supposons donc qu'il existe  $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{H}_c$ , deux entiers positifs  $l_1 \neq l_2$  et  $\varepsilon > 0$  tels que  $B(\nu_j, \varepsilon)$  est couvert exactement  $l_j$  fois par la collection  $\mathcal{I}_\sigma$ , pour  $j = 1, 2$ . Plus précisément, il existe deux parcelles  $P_1, P_2 \subset \Gamma_c$  de cardinalité  $l_1$  et  $l_2$  respectivement telles que  $B(\nu_j, \varepsilon) \subseteq \bigcap_{[\gamma, i]^* \in P_j} (\mathcal{T}_\sigma(i) + \gamma)$  pour  $j = 1, 2$ . De plus,  $B(\nu_j, \varepsilon)$  est d'intersection vide avec toutes les tuiles de  $\mathcal{I}_\sigma$  qui ne sont pas contenues dans  $P_j$ . Nous supposons sans perte de généralité que  $l_1 < l_2$ .

Considérons maintenant la famille  $h_\sigma^{-m} \mathcal{I}_\sigma$  (rappelons que  $h_\sigma^{-1}$  est une dilatation). Par ce qui précède, chaque point de  $h_\sigma^{-m} B(\nu_1, \varepsilon)$  appartient à exactement  $l_1$  tuiles de  $h_\sigma^{-m} \mathcal{I}_\sigma$ . Par le Théorème 3.6.5 (iii), chaque tuile de  $h_\sigma^{-m} \mathcal{I}_\sigma$  est de la forme  $h_\sigma^{-m} (\mathcal{T}_\sigma(i) + \gamma)$  avec  $[\gamma, i]^* \in \Gamma_c$ . Vu l'équation (3.5) et la Proposition 3.6.6, une telle tuile peut être décomposée en une union finie de tuile de  $\mathcal{I}_\sigma$  disjointes en mesure. Ainsi, presque tout point de  $h_\sigma^{-m} B(\nu_1, \varepsilon)$  appartient à exactement  $l_1$  tuile de  $\mathcal{I}_\sigma$ .

Puisque l'ensemble de translation  $\Gamma_c$  est répétitif, nous pouvons choisir  $m$  suffisamment grand pour que  $h_\sigma^{-m} B(\nu_1, \varepsilon)$  contienne une copie  $P_2 + \gamma$  de la parcelle  $P_2$ . Cela signifie que la boule  $B(\nu_2, \varepsilon) + \gamma$  est incluse dans  $h_\sigma^{-m} B(\nu_1, \varepsilon)$  pour  $m$  suffisamment grand. Rappelons que  $B(\nu_2, \varepsilon)$  est couverte exactement  $l_2$  fois par  $\mathcal{I}_\sigma$ . Il n'y a à priori aucune raison de penser que la boule translatée  $B(\nu_2, \varepsilon) + \gamma$  est recouverte exactement  $l_2$  fois elle aussi. En effet, d'autres tuiles pourraient "envahir"  $B(\nu_2, \varepsilon) + \gamma$ . Cependant, cette boule translatée est couverte par chaque élément de la parcelle  $P_2 + \gamma$  ce qui implique qu'elle est au moins recouverte  $l_2$  fois par des éléments de  $\mathcal{I}_\sigma$ . Ceci implique une contradiction puisque presque tout point de  $h_\sigma^{-m} B(\nu_1, \varepsilon)$  appartient à exactement  $l_1$  tuiles de  $\mathcal{I}_\sigma$  et que  $l_1 < l_2$ .  $\square$

Nous pouvons maintenant donner un nom à ce multi-pavage.

**Définition 3.7.3.** Soit  $\sigma$  une substitution Pisot, irréductible et unimodulaire. Nous appelons *multi-pavage auto-répliatif* le multi-pavage  $\mathcal{I}_\sigma$  du Théorème 3.7.2

Une illustration du multi-pavage auto-répliatif est donnée Figure 3.7. Pour tous les

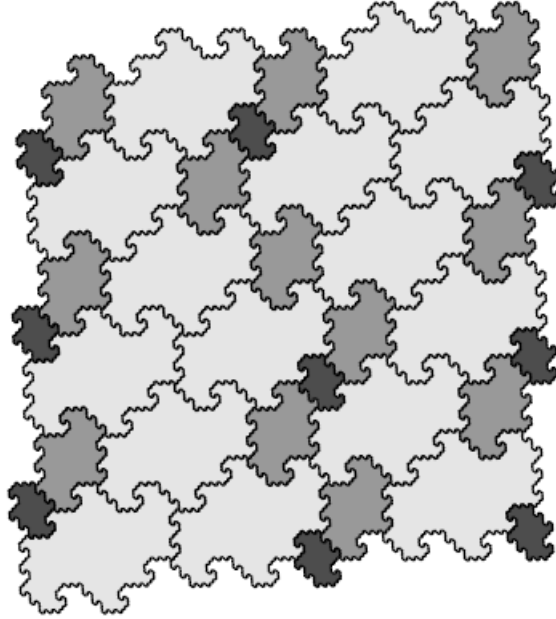


FIGURE 3.3: Multi-pavage auto-répliatif pour la substitution  $\sigma(1) = 112, \sigma(2) = 113, \sigma(3) = 1$ . Ce multi-pavage est en effet un (simple) pavage. Image issue de [21].

exemples de substitution Pisot irréductible et unimodulaire connus, le multi-pavage auto-répliatif est en fait un (simple) pavage. Nous introduisons donc la définition suivante.

**Définition 3.7.4** (Condition de pavage). Une substitution Pisot, irréductible et unimodulaire  $\sigma$  satisfait la *condition de pavage* si le multi-pavage auto-répliatif est un pavage.

Il existe en fait une conjecture connue sous le nom de *conjecture Pisot* affirmant que dès qu'une substitution  $\sigma$  est Pisot, irréductible et unimodulaire alors elle satisfait la propriété de pavage. Notons que cette conjecture connaît plusieurs reformulations équivalentes dans la littérature. Une forme équivalente de la conjecture a déjà été démontrée dans le cas d'un alphabet à deux lettres [10].

Nous terminons cette section avec le théorème suivant.

**Théorème 3.7.5.** Soit  $\sigma$  une substitution Pisot, irréductible et unimodulaire. Soient  $k, l$  deux entiers positifs. Alors,  $\mathcal{T}_{\sigma^k} = \mathcal{T}_{\sigma^l}$ . De plus, la substitution  $\sigma^k$  satisfait la condition de pavage si et seulement si  $\sigma^l$  satisfait la condition de pavage.

*Démonstration.* Remarquons que  $h_{\sigma^k} = h_{\sigma^l}$  pour tout  $k$  car nous savons déjà que  $M_{\sigma^k} = M_{\sigma^l}^k$  pour tout  $k$  (voir rappels de combinatoires Section 1.3). Vu l'équation (2.17), les tuiles

centrales  $\mathcal{T}_{\sigma^k}$  et  $\mathcal{T}_{\sigma^l}$  vérifient respectivement

$$\forall i \in A, \mathcal{T}_{\sigma^k}(i) = \bigcup_{\substack{j \in A, \\ \sigma^{kl}(j)=pis}} h_{\sigma}^{kl}(\mathcal{T}_{\sigma^k}(j)) + \pi_c \circ \mathbf{P}(p) \quad \text{et}$$

$$\forall i \in A, \mathcal{T}_{\sigma^l}(i) = \bigcup_{\substack{j \in A, \\ \sigma^{kl}(j)=pis}} h_{\sigma}^{kl}(\mathcal{T}_{\sigma^l}(j)) + \pi_c \circ \mathbf{P}(p),$$

où nous avons appliqué l'itération  $l$ -ième à  $\mathcal{T}_{\sigma^k}$  et l'itération  $k$ -ième à  $\mathcal{T}_{\sigma^l}$ . Ainsi, pour tout  $i \in A$ , les sous-tuiles  $\mathcal{T}_{\sigma^k}(i)$  et  $\mathcal{T}_{\sigma^l}(i)$  satisfont la même équation de SFIG et par unicité des attracteurs d'un SFIG, ces tuiles coïncident.

Pour ce qui est de l'équivalence, remarquons que l'ensemble de translation  $\Gamma_c$  ne dépend que de  $\mathbf{v}_{\beta}$  qui est un vecteur propre à gauche commun à  $\sigma^k$  et  $\sigma^l$ . Ceci implique que les multi-pavages auto-réplicatifs associés à  $\sigma^k$  et  $\sigma^l$  sont en fait identiques d'où la conclusion.  $\square$

# Chapitre 4

## Condition de pavage

Dans ce chapitre, nous nous intéressons principalement à la condition de pavage. Nous présentons plusieurs résultats permettant de vérifier cette condition.

### 4.1 Propriétés de finitude

Notons que la substitution  $\sigma$  satisfait la condition de pavage si et seulement si chaque intersection de deux tuiles distinctes dans le multi-pavage auto-répliatif est de mesure nulle. Or, nous avons déjà gagné de l'information sur l'intersection des sous-tuiles. En effet, le Théorème 2.4.5 affirme que les copies contractées des sous-tuiles apparaissant dans la décomposition de chaque  $\mathcal{T}_\sigma(i)$  sont disjointes en mesure. De plus, le Théorème 2.4.11 indique que les sous-tuiles  $\mathcal{T}_\sigma(i)$  avec  $i \in A$  sont disjointes si la substitution  $\sigma$  satisfait la condition de coïncidence combinatoire forte.

Le but de cette section est de gagner de l'information sur l'intersection des tuiles dans tout le multi-pavage auto-répliatif. Plus précisément, nous donnons une condition suffisante pour que les tuiles de notre multi-pavage soient disjointes en mesure. Autrement dit, nous démontrons une condition suffisante pour que le multi-pavage auto-répliatif soient en fait un (simple) pavage.

Soit  $U$  la parcelle

$$U := [0, 1]^* \cup [0, 2]^* \cup \dots \cup [0, n]^*. \quad (4.1)$$

Il est clair que  $U \subset \Gamma_c$  vu (3.3). En continuant notre analogie entre les tips et leur représentations géométriques (voir Section 3.3), nous appelons  $U$  le *cube unité inférieur*.

Une première observation directe est que  $U \subset \mathbf{E}_1^*(U)$ . En effet, pour tout  $j \in A$ ,  $[0, j]^*$  est inclus dans  $\mathbf{E}_1^*([0, i]^*)$  où  $i$  est la première lettre de  $\sigma(j)$  vu (3.4). De plus, l'inclusion est stricte car, vu la primitivité de  $\sigma$ , il doit exister une lettre  $i$  dont l'image  $\sigma(i)$  est un mot de longueur au moins 2. Ainsi, vu (3.4) il existe  $x \in \mathbb{H}_c$  non nul et  $j \in A$  tel que  $[x, j]^* \in \mathbf{E}_1^*(U)$  (or clairement  $[x, j]^* \notin U$  car  $x \neq 0$ ).

Nous déduisons du paragraphe précédent et du Théorème 3.6.5 que la suite  $(\mathbf{E}_1^{*m}(U))_{m \geq 0}$  est une suite strictement croissante (pour l'inclusion) d'ensembles de  $\Gamma_c$ . Un cas particu-

lièrement intéressant est celui où  $\mathbf{E}_1^{*m}(U)$  fini par recouvrir tout l'ensemble de translation auto-répliatif  $\Gamma_c$  lorsque  $m$  tend vers l'infini. Dans cette idée, nous introduisons la Définition 4.1.1.

Une illustration de  $\mathbf{E}_1^{*m}(U)$  est donnée Figures 4.1 et 4.2 pour un  $m$  fixé et pour les substitutions  $\sigma(1) = 112, \sigma(2) = 113, \sigma(3) = 1$  et  $\tau(1) = 2, \tau(2) = 3, \tau(3) = 12$ . Ces figures semblent indiquer que  $\mathbf{E}_1^{*m}(U)$  finit par couvrir  $\Gamma_c$  dans le cas de  $\sigma$  mais pas dans le cas de  $\tau$ .

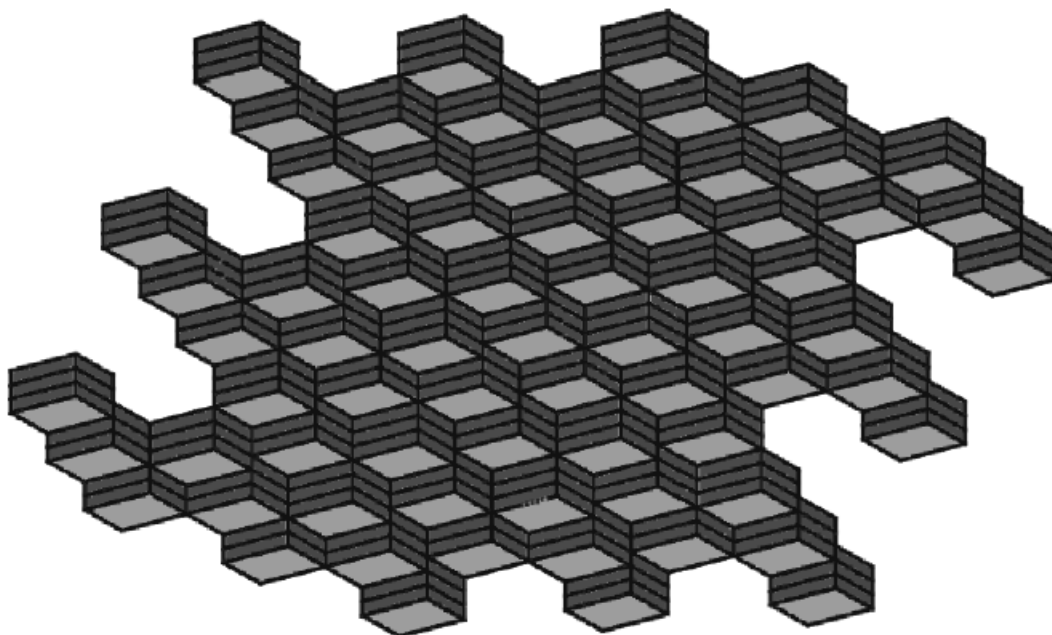


FIGURE 4.1: La parcelle  $\mathbf{E}_1^{*5}(U)$  pour la substitution  $\sigma(1) = 112, \sigma(2) = 113, \sigma(3) = 1$ . Image issue de [21].

**Définition 4.1.1** (Condition de finitude géométrique). Soit  $\sigma$  une substitution Pisot irréductible et unimodulaire et soit  $\mathbf{E}_1^*$  sa substitution de SFIG associée. Nous dirons que  $\sigma$  satisfait la *condition de finitude géométrique* si

$$\Gamma_c = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathbf{E}_1^{*m}(U). \quad (4.2)$$

Nous pouvons maintenant propager l'information que nous avons sur les intersections nulles au sein des sous-tuiles  $\mathcal{T}_\sigma(i)$ . En effet, la condition de finitude géométrique couplée à la condition de coïncidence combinatoire forte implique que l'intersection de toute paire de tuiles distinctes dans le multi-pavage auto-répliatif est de mesure nulle. Ceci fait l'objet du théorème suivant.



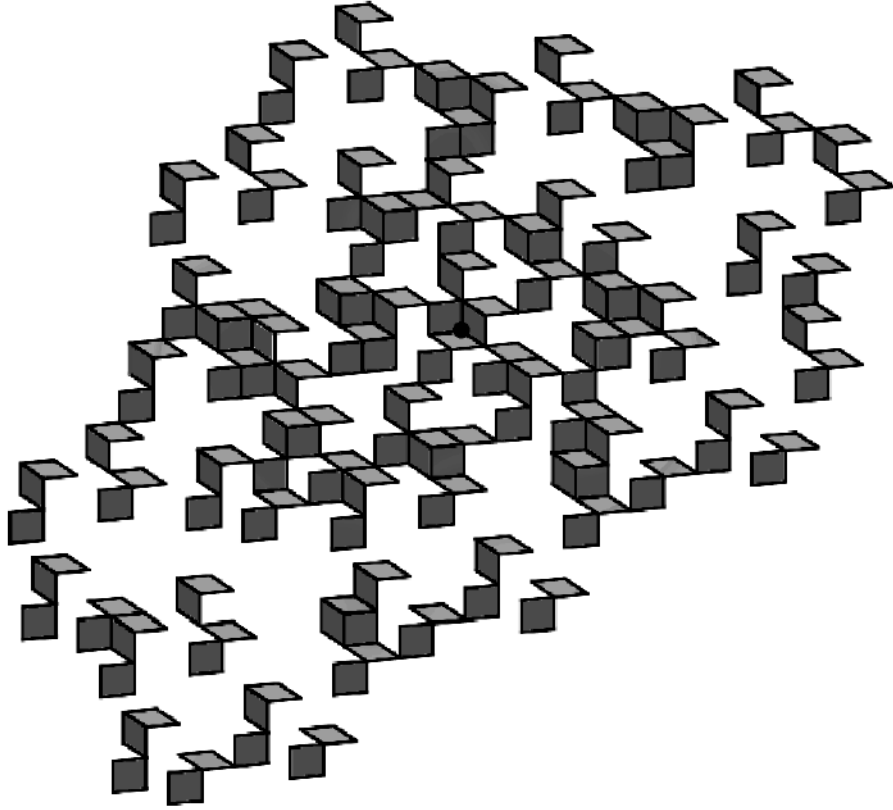


FIGURE 4.2: La parcelle  $\mathbf{E}_1^{*15}(U)$  pour la substitution  $\tau(1) = 2, \tau(2) = 3, \tau(3) = 12$ . Image issue de [21].

**Théorème 4.1.2.** *Soit  $\sigma$  une substitution Pisot irréductible et unimodulaire. Si  $\sigma$  satisfait à la fois la condition de coïncidence combinatoire forte et la condition de finitude géométrique, alors le multi-pavage auto-réplcatif est un pavage.*

*Démonstration.* Considérons deux tuiles  $\mathcal{T}_\sigma(i_1) + \gamma_1$  et  $\mathcal{T}_\sigma(i_2) + \gamma_2$  du multi-pavage auto-réplcatif. Par la propriété de finitude géométrique, il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$[\gamma_1, i_1]^* \in \mathbf{E}_1^{*N}(U) = \bigcup_{j \in A} \mathbf{E}_1^{*N}([0, j]^*).$$

Ainsi, il existe  $N \in \mathbb{N}$  et  $j_1 \in A$  tel que  $[\gamma_1, i_1]^* \in \mathbf{E}_1^{*N}([0, j_1]^*)$ . Ceci implique que  $\mathcal{T}_\sigma(i_1) + \gamma_1$  apparaît dans la décomposition  $N$ -ième (3.10) de  $\mathcal{T}_\sigma(j_1)$ . De même, il existe  $j_2 \in A$  tel que  $\mathcal{T}_\sigma(i_2) + \gamma_2$  apparaît dans la décomposition  $N$ -ième de  $\mathcal{T}_\sigma(j_2)$  pour le même  $N$  (quitte à prendre  $N$  assez grand). Si  $j_1 = j_2$ , c'est terminé car nous sommes alors dans les hypothèses de la Proposition 3.6.6. Si  $j_1 \neq j_2$ , la condition de coïncidence combinatoire forte permet d'utiliser le Théorème 2.4.11 qui indique que les sous-tuiles  $\mathcal{T}_\sigma(j_1)$  et  $\mathcal{T}_\sigma(j_2)$  sont disjointes à un ensemble de mesure nulle près, d'où la conclusion. □

Une condition plus restrictive pour avoir la condition de pavage est la *condition de superfinitude géométrique* qui suit.

**Définition 4.1.3** (Condition de superfinitude géométrique). Soit  $\sigma$  une substitution Pisot, irréductible et unimodulaire et soit  $\mathbf{E}_1^*$  sa substitution de SFIG associée. Nous dirons que  $\sigma$  satisfait la *condition de superfinitude géométrique* si il existe  $i \in A$  tel que

$$\Gamma_c = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathbf{E}_1^{*m}([0, i]^*). \quad (4.3)$$

**Remarque 4.1.4.** Dans le cas de la superfinitude géométrique, le Théorème 4.1.2 s'applique sans avoir besoin de l'hypothèse de coïncidence combinatoire forte. En effet, en reprenant les mêmes notations que dans la preuve du théorème, la superfinitude géométrique implique que nous sommes forcément dans le cas  $j_1 = j_2$ .

## 4.2 Le graphe des ancêtres

Nous allons maintenant donner une manière de calculer explicitement si la condition de finitude géométrique est satisfaite. L'idée est de prouver que cette condition est satisfaite si et seulement si une parcelle finie (dépendant de  $\sigma$ ) est ultimement recouverte par les itérations de  $\mathbf{E}_1^*$  sur le cube unité inférieur  $U$ .

Une conséquence du Théorème 3.6.5 (ii) est que chaque tip possède une unique pré-image sous l'action de  $\mathbf{E}_1^*$ . Nous appellerons cette pré-image un *ancêtre*.

**Définition 4.2.1** (Ancêtre d'un tip). L'*ancêtre* d'un tip  $[\eta, j]^* \in \Gamma_c$  est l'unique tip  $[\gamma, i]^* \in \Gamma_c$  tel que  $[\eta, j]^* \in \mathbf{E}_1^*([\gamma, i]^*)$ .

Nous posons  $\mathcal{M}_\sigma := \max\{\|\pi_c \circ \mathbf{P}(p)\|_c \mid (p, i, s) \in P_\sigma\}$ . Ceci nous permet de définir la parcelle annoncée en début de section.

**Définition 4.2.2** (Parcelle racine). La *parcelle racine*  $V_\sigma$  associée à une substitution  $\sigma$  Pisot irréductible et unimodulaire est définie par

$$V_\sigma := \left\{ [\gamma, i]^* \in \Gamma_c \mid \|\gamma\|_c \leq \frac{\mathcal{M}_\sigma}{1 - \beta_{\max}} \right\}. \quad (4.4)$$

**Remarque 4.2.3.** Remarquons que  $\mathcal{M}_\sigma / (1 - \beta_{\max})$  est une borne supérieure sur le diamètres des sous-tuiles  $\mathcal{T}_\sigma(i)$ .

*Démonstration.* Soient  $\nu, \nu' \in \mathcal{T}_\sigma(i)$ . En utilisant le Corollaire 2.4.7, nous avons successi-

vement

$$\begin{aligned}
\|\nu - \nu'\|_c &= \left\| \sum_{k \geq 0} h_\sigma^k(\pi_c \circ \mathbf{P}(p_k)) - \sum_{k \geq 0} h_\sigma^k(\pi_c \circ \mathbf{P}(p'_k)) \right\|_c \\
&= \left\| \sum_{k \geq 0} h_\sigma^k(\pi_c(\mathbf{P}(p_k) - \mathbf{P}(p'_k))) \right\|_c \\
&\leq \sum_{k \geq 0} \beta_{\max}^k \mathcal{M}_\sigma = \frac{\mathcal{M}_\sigma}{1 - \beta_{\max}}.
\end{aligned}$$

□

Nous déduisons alors de ce qui précède que si  $0 \in \mathcal{T}_\sigma(j) + \gamma$ , alors  $[\gamma, j]^* \in V_\sigma$ .

**Théorème 4.2.4.** *Soit  $\sigma$  une substitution Pisot irréductible et unimodulaire. Nous avons*

$$\Gamma_c = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathbf{E}_1^{*m}(V_\sigma).$$

*Démonstration.* Rappelons que par la définition (3.4) de  $\mathbf{E}_1^*$ , l'image d'un tip  $[\gamma, i]^*$  est donnée par

$$\mathbf{E}_1^*([\gamma, i]^*) = \bigcup_{(p, j, s), \sigma(j)=pis} \left\{ [h_\sigma^{-1}(\gamma + \pi_c \circ \mathbf{P}(p)), j]^* \right\}.$$

Ainsi, si  $[\gamma, i]^*$  est l'ancêtre d'un tip  $[\eta, j]^*$ , alors  $\eta$  est de la forme  $\eta = h_\sigma^{-1}(\gamma + \pi_c \circ \mathbf{P}(p))$ , ce qui se réécrit

$$\gamma = h_\sigma(\eta) - \pi_c \circ \mathbf{P}(p), \quad (4.5)$$

où  $p$  est un préfixe de  $\sigma(j)$ . Fixons un tip  $[\eta, j]^* \in \Gamma_c$  et considérons  $([\gamma_k, i_k]^*)_{k \geq 1}$  les ancêtres successifs de  $[\eta, j]^*$ , c'est-à-dire  $[\eta, j]^* \in \mathbf{E}_1^*([\gamma_1, i_1]^*)$  et  $[\gamma_k, i_k]^* \in \mathbf{E}_1^*([\gamma_{k+1}, i_{k+1}]^*)$  pour  $k \geq 1$ . Par (4.5), nous avons

$$\gamma_{k+1} = h_\sigma(\gamma_k) - \pi_c \circ \mathbf{P}(p)$$

où  $p$  est un préfixe de  $\sigma(i_k)$ . Dés lors, en prenant la norme  $\|\cdot\|_c$  de part et d'autre de cette égalité et en utilisant (2.8) nous déduisons

$$\|\gamma_{k+1}\|_c \leq \beta_{\max} \|\gamma_k\|_c + \mathcal{M}_\sigma. \quad (4.6)$$

Soit  $\alpha \in ]\beta_{\max}, 1[$ . En utilisant l'inégalité précédente, nous avons

$$\|\gamma_k\|_c \geq \frac{\mathcal{M}_\sigma}{\alpha - \beta_{\max}} \implies \|\gamma_{k+1}\|_c \leq \alpha \|\gamma_k\|_c. \quad (4.7)$$

Soit  $V^{(\alpha)} := \left\{ [\gamma, i]^* \in \Gamma_c \mid \|\gamma\|_c < \frac{\mathcal{M}_\sigma}{\alpha - \beta_{\max}} \right\}$ . Comme  $\Gamma_c$  est uniformément discret (Proposition 3.5.5), les  $V^{(\alpha)}$  sont des parcelles finies. Notons également que

$$\bigcap_{\beta_{\max} < \alpha < 1} V^{(\alpha)} = V_\sigma.$$

Dés lors, il existe  $\alpha_0 < 1$  tel que  $V^{(\alpha)} = V_\sigma = V^{(\alpha_0)}$  pour tout  $\alpha \in [\alpha_0, 1[$ . Nous avons alors deux cas possibles :

- Soit  $\|\gamma_1\|_c < \frac{\mathcal{M}_\sigma}{\alpha - \beta_{\max}}$  et donc  $\gamma_1 \in V^{(\alpha_0)}$ .
- Soit  $\|\gamma_1\|_c \geq \frac{\mathcal{M}_\sigma}{\alpha - \beta_{\max}}$  et par (4.7) nous avons  $\|\gamma_2\|_c \leq \alpha \|\gamma_1\|_c$ . Nous pouvons donc, dans ce cas, répéter l'argument sur  $\gamma_2$ .

Remarquons que dans le deuxième cas,  $\|\gamma_2\|_c < \|\gamma_1\|_c$  vu le choix de  $\alpha$  et nous retombons donc dans le premier cas en un nombre fini d'étapes. Ainsi, il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que le  $k$ -ième ancêtre  $[\gamma_k, i_k]^*$  de  $[\eta, j]^*$  appartient à  $V^{(\alpha_0)}$ . Comme  $V^{(\alpha_0)} = V_\sigma$ , nous venons de prouver que  $\Gamma_c = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathbf{E}_1^{*m}(V_\sigma)$ .  $\square$

**Remarque 4.2.5.** La parcelle  $V_\sigma$  contient les ancêtres de ses éléments. En effet, soit  $[\eta, j]^* \in V_\sigma$  et soit  $[\gamma, i]^*$  son ancêtre. En utilisant (4.6) nous obtenons successivement

$$\begin{aligned} \|\gamma\|_c &\leq \beta_{\max} \|\eta\|_c + \mathcal{M}_\sigma \\ &< \beta_{\max} \frac{\mathcal{M}_\sigma}{1 - \beta_{\max}} + \mathcal{M}_\sigma \\ &= \frac{\mathcal{M}_\sigma}{1 - \beta_{\max}} \end{aligned}$$

ce qui implique  $[\gamma, i]^* \in V_\sigma$ .

**Corollaire 4.2.6.** *Si il existe  $m \geq 1$  tel que  $\mathbf{E}_1^{*m}(U)$  contient  $V_\sigma$ , alors la condition de finitude géométrique est satisfaite. Dans ce cas, nous pouvons calculer explicitement un tel  $m$ .*

*Démonstration.* Si il existe  $m$  tel que  $\mathbf{E}_1^{*m}(U) \supseteq V_\sigma$ , alors  $\mathbf{E}_1^{*m+1}(U) \supseteq \mathbf{E}_1^*(V_\sigma)$ . En continuant à prendre les images par  $\mathbf{E}_1^*$  nous obtenons

$$\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathbf{E}_1^{*m}(U) \supseteq \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathbf{E}_1^{*m}(V_\sigma) = \Gamma_c$$

où l'égalité avec  $\Gamma_c$  vient du Théorème 4.2.4. Comme clairement  $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathbf{E}_1^{*m}(U) \subseteq \Gamma_c$ , la condition de finitude géométrique est bien satisfaite.

Pour ce qui est du calcul de ce  $m$  (si il existe),  $V_\sigma$  et  $\mathbf{E}_1^*$  étant clairement tous les deux calculables explicitement, nous pouvons trouver un tel  $m$  en prenant les images successives de  $U$  par  $\mathbf{E}_1^*$  et en vérifiant à chaque étape si l'image contient  $V_\sigma$ .  $\square$

La preuve du Théorème 4.2.4 se base principalement sur la notion d'ancêtre. Nous allons maintenant combiner cette notion avec la parcelle racine pour obtenir un graphe qui nous permettra de vérifier explicitement si la condition de finitude géométrique est satisfaite.

**Définition 4.2.7** (Graphe des ancêtres). Les *graphe des ancêtres* est un graphe dirigé dont les sommets sont les tips qui apparaissent dans la parcelle racine  $V_\sigma$  (voir Définition 4.2.2). Il y a une arête de  $[\eta, j]^*$  vers  $[\gamma, i]^*$  si  $[\gamma, i]^*$  est l'ancêtre de  $[\eta, j]^*$ , c'est-à-dire  $[\eta, j]^* \in \mathbf{E}_1^*([\gamma, i]^*)$ .

Le calcul du graphe des ancêtres est direct. D'abord, lister tous les tips qui appartiennent à  $V_\sigma$ . Ensuite, pour chaque  $[\gamma, i]^* \in V_\sigma$ , calculer les tips  $[\eta, j]^* \in \mathbf{E}_1^*([\gamma, i]^*)$  et ajouter une arête de chaque  $[\eta, j]^*$  vers  $[\gamma, i]^*$  si  $[\eta, j]^* \in V_\sigma$ .

**Remarque 4.2.8.** Le choix que nous avons fait ici pour l'orientation du graphe des ancêtres (suivre la relation "a comme ancêtre") peut paraître contre-intuitive ou arbitraire à première vue mais cela n'est pas le cas. Ce choix d'orientation est motivé par notre volonté de "zoomer en dehors" des sous-tuiles afin de retrouver le multi-pavage auto-répliatif d'où le besoin de retracer les ancêtres. Le choix contraire d'orientation a déjà été utilisé par exemple dans [18] pour une construction de graphe similaire mais les auteurs cherchaient ici à étudier le bord des sous-tuiles et donc voulaient être capables de "zoomer à l'intérieur" des ces sous-tuiles.

Comme chaque tip possède un unique ancêtre et que  $V_\sigma$  contient les ancêtres de ses éléments, chaque sommet dans le graphe des ancêtres possède exactement une arête sortante. Ceci implique que n'importe quel chemin suffisamment long fini par atteindre un cycle puisque le nombre de sommets du graphe est fini. De plus, remarquons qu'un tip de la forme  $[0, j]^*$  admet comme unique arête sortante un tip qui est également de la forme  $[0, i]^*$ . En effet, par le même raisonnement qu'au début de la Section 4.1, l'ancêtre (unique) de  $[0, j]^*$  est le tip  $[0, i]^*$  où  $i$  est la première lettre de  $\sigma(j)$ . Dés lors, dès qu'un cycle contient un tip de  $U$ , il ne contient que des éléments de  $U$ . Nous dirons que le cycle *est contenu* dans  $U$ . Cette observation nous permet de donner une méthode simple pour vérifier la condition de finitude géométrique.

**Proposition 4.2.9.** *Soit  $\sigma$  une substitution Pisot irréductible et unimodulaire. La condition de finitude géométrique est satisfaite si et seulement si tous les cycles dans le graphe des ancêtres sont contenus dans  $U$ .*

*Démonstration.* Si la propriété de finitude géométrique est satisfaite, n'importe quel chemin suffisamment long dans le graphe des ancêtres contient un tip de  $U$  et donc chaque cycle du graphe contient un tip de  $U$ . Par la remarque précédant l'énoncé, nous déduisons que chaque cycle dans le graphe est contenu dans  $U$ .

Supposons maintenant que chaque cycle est contenu dans  $U$ . En utilisant à nouveau les observations faites avant l'énoncé, nous déduisons que chaque tip de  $V_\sigma$  admet dans sa suite d'ancêtres successifs un élément qui appartient à un cycle, donc un élément de  $U$ , ce qui conclut vu le Corollaire 4.2.6.  $\square$

**Exemple 4.2.10.** Deux exemples de graphes des ancêtres sont illustrés Figures 4.3 et 4.4 pour les substitutions introduites précédemment. Nous pouvons constater que le graphe de la substitution  $\sigma(1) = 112, \sigma(2) = 113, \sigma(3) = 1$  satisfait la condition de la Proposition 4.2.9 alors que le graphe associé à  $\tau(1) = 2, \tau(2) = 3, \tau(3) = 12$  ne la satisfait pas. En effet, dans le second exemple, le graphe des ancêtres, admet deux cycles dont seulement un des deux est contenu dans  $U$ . Ceci confirme ce qu'il semblait se passer Figures 4.1 et 4.2.

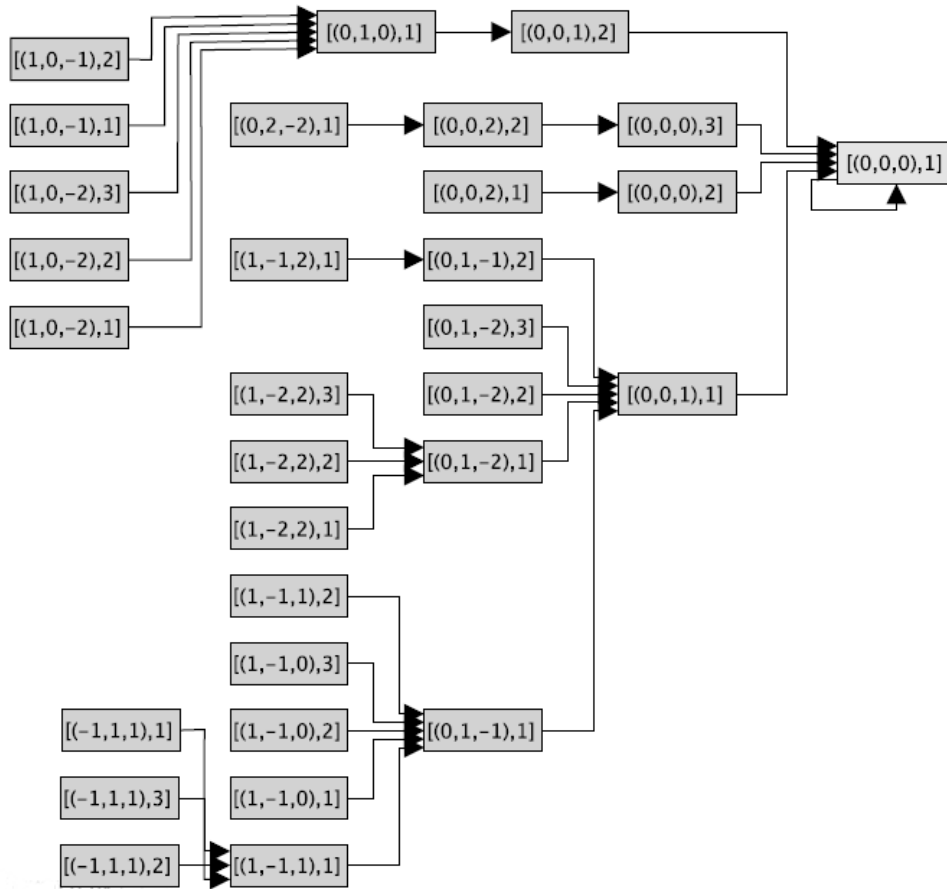


FIGURE 4.3: Le graphe des ancêtres pour la substitution  $\sigma(1) = 112, \sigma(2) = 113, \sigma(3) = 1$ . Afin de ne pas alourdir le graphe, les projections  $\pi_c$  ont été omises volontairement sur les sommets. Image issue de [21]. Ce graphe a été généré par yFiles.

### 4.3 Le graphe des ancêtre à deux parties

Dans la section précédente, nous avons construit le graphe des ancêtres permettant de vérifier la condition de finitude géométrique. Or, cette condition n'est pas équivalente à la condition de pavage. Ainsi, nous introduisons ici un nouveau graphe inspiré par le graphe des ancêtres mais permettant de vérifier une condition équivalente à la condition de pavage.

Nous commençons par ré-exprimer la condition de pavage grâce au théorème suivant.

**Théorème 4.3.1** (Ito et Rao [8]). *Soit  $\sigma$  une substitution Pisot irréductible et unimodulaire et soit  $E_1^*$  sa substitution de SFIG associée. Le multi-pavage auto-répliatif est un pavage*

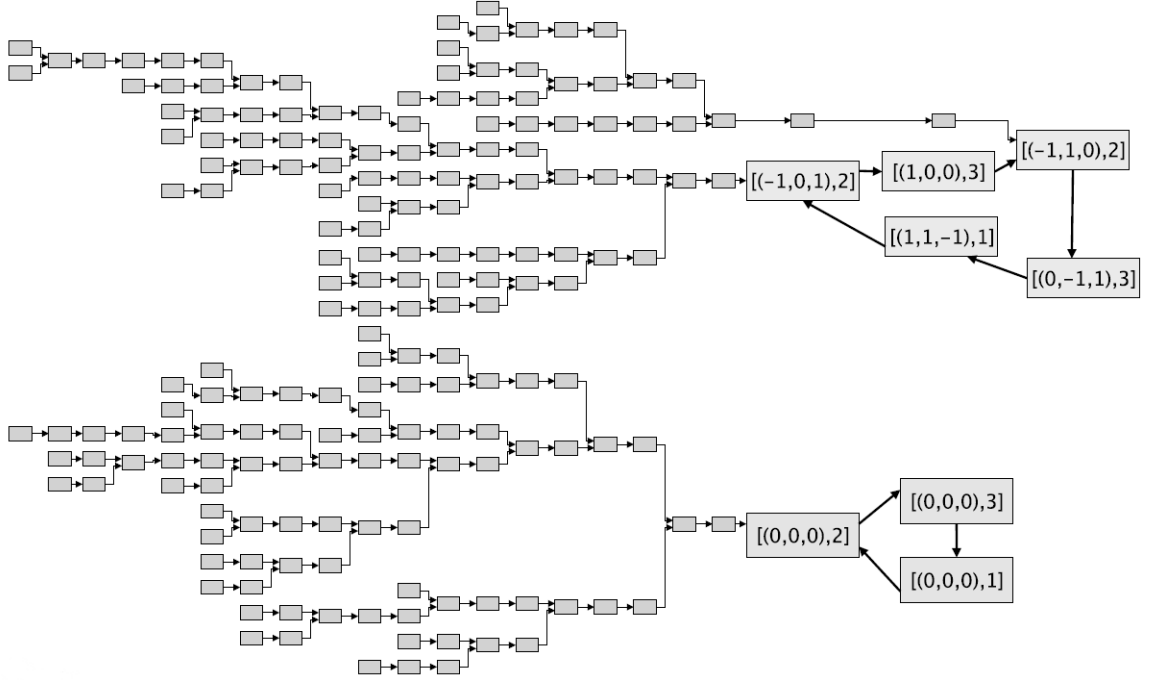


FIGURE 4.4: Le graphe des ancêtres pour la substitution  $\tau(1) = 2, \tau(2) = 3, \tau(3) = 12$ . Afin de ne pas alourdir le graphe, les projections  $\pi_c$  ont été omises volontairement sur les sommets. Remarquons que le graphe est constitué de deux composantes connexes. Image issue de [21]. Ce graphe a été généré par yFiles.

si et seulement si pour tout  $i \in A$ , le rayon de la plus grande boule contenue dans l'union

$$\bigcup_{[\gamma,j]^* \in \mathbf{E}_1^{*m}([0,i]^*)} [\gamma,j]^* \quad (4.8)$$

tends vers l'infini lorsque  $m \rightarrow \infty$ .

*Démonstration.* Notons d'abord que l'énoncé ne dépend pas du choix de la norme vu l'équivalence des normes de  $\mathbb{R}^n$ .

Supposons que  $\sigma$  satisfait la condition de pavage. Fixons  $i \in A$ . Pour  $m \in \mathbb{N}$ , soit  $B_c(\delta_m, R_m)$  la boule (pour la norme  $\|\cdot\|_c$ ) de plus grand rayon contenue dans  $h_\sigma^{-m}(\mathcal{T}_\sigma(i))$ . Comme  $\mathcal{T}_\sigma(i)$  est d'intérieur non vide (Corollaire 3.5.6) et comme  $h_\sigma^{-1}$  est une dilatation, nous avons  $\lim_{m \rightarrow +\infty} R_m = \infty$ . L'équation de SFIG (3.6) donne que  $h_\sigma^{-m} \mathcal{T}_\sigma(i)$  est couverte par les tuiles  $\mathcal{T}_\sigma(j) + \gamma$  avec  $[\gamma, j]^* \in \mathbf{E}_1^{*m}([0, i]^*)$ . La condition de pavage implique alors que pour chaque tip  $[\eta, k]^* \notin \mathbf{E}_1^{*m}([0, i]^*)$ , la tuile  $\mathcal{T}_\sigma(k) + \eta$  est disjointe en mesure de  $B_c(\delta_m, R_m)$ . Soit  $C$  Le diamètre de la tuile centrale  $\mathcal{T}_\sigma$ , c'est-à-dire  $C := \sup\{\|\nu - \nu'\|_c \mid \nu, \nu' \in \mathcal{T}_\sigma\}$ . Dés lors, chaque tip  $[\gamma, j]^*$  avec  $\|\gamma - \delta_m\|_c < R_m - C$

doit appartenir à  $\mathbf{E}_1^{*m}([0, i]^*)$ . Comme  $(R_m)_m \rightarrow +\infty$ , ceci montre que le rayon de la plus grande boule contenue dans l'union (4.8) tend vers l'infini avec  $m$ .

Inversement, supposons que le rayon de la plus grande boule contenue dans l'union (4.8) tend vers l'infini lorsque  $m \rightarrow +\infty$ . Soit  $P$  une parcelle de  $\Gamma_c$ . Vu la répétitivité de  $\Gamma_c$  (Théorème 3.7.2),  $P$  est contenue, à translation près, dans n'importe quelle boule de  $\Gamma_c$  de rayon suffisamment grand. Ainsi, il existe  $\nu \in \mathbb{H}_c$  et  $m > 0$  tel que  $P \subseteq \nu + \mathbf{E}_1^{*m}([0, i]^*)$  et donc  $P \subseteq \mathbf{E}_1^{*m}([h_\sigma^m(\nu), i]^*)$  en faisant le même genre de détails que dans le Lemme 3.6.3. La Proposition 3.6.6 implique alors que les tuiles  $\mathcal{T}_\sigma(j) + \gamma$  avec  $[\gamma, j]^* \in P$  sont d'intérieurs disjoints. Comme  $P$  a été choisi arbitrairement, ceci prouve que  $\sigma$  satisfait la condition de pavage.  $\square$

Le corollaire suivant nous permet de ré-exprimer la condition de pavage en une condition plus calculatoire.

**Corollaire 4.3.2.** *Soit  $\sigma$  une substitution Pisot irréductible et unimodulaire. Le multi-pavage auto-répliatif est un pavage si et seulement si pour chaque paire de tips  $([\eta_1, j_1]^*, [\eta_2, j_2]^*) \in \Gamma_c^2$  il existe  $\delta \in \mathbb{H}_c$ ,  $m \geq 0$  et  $i \in A$  tels que*

$$\delta + \{[\eta_1, j_1]^*, [\eta_2, j_2]^*\} \subseteq \mathbf{E}_1^{*m}([0, i]^*). \quad (4.9)$$

*Démonstration.* Si la condition (4.9) est satisfaite, la Proposition 3.6.6 implique que  $\mathcal{T}_\sigma(j_1) + \eta_1$  et  $\mathcal{T}_\sigma(j_2) + \eta_2$  ne se chevauchent pas pour toute paire de tips  $([\eta_1, j_1]^*, [\eta_2, j_2]^*)$ . Ainsi, la propriété de pavage est satisfaite.

Inversement, le Théorème 4.3.1 indique que la condition de pavage est équivalente à ce que  $\mathbf{E}_1^{*m}([0, i]^*)$  contienne des boules arbitrairement grandes lorsque  $m \rightarrow \infty$ . Ainsi, par la répétitivité de  $\Gamma_c$  (Théorème 3.7.2), un translaté de chaque parcelle  $\{[\eta_1, j_1]^*, [\eta_2, j_2]^*\} \subseteq \Gamma_c$  apparaît dans  $\mathbf{E}_1^{*m}([0, i]^*)$  pour un certains  $i \in A$  et un certains  $m \in \mathbb{N}$ .  $\square$

La reformulation de la condition de pavage donnée par le Corollaire 4.3.2 signifie que chaque paire de tips appartient à l'image d'un tip de  $U$  à un même vecteur de translation près. Nous voulons maintenant être capable de vérifier (4.9). Pour ce faire, nous construisons un nouveau graphe similaire au graphe des ancêtre mais nous devons cette fois savoir retracer les ancêtres des parcelles à *vecteur de translation près*. Aussi, nous nous servons de l'existence d'un vecteur de translation  $\delta$  pour chaque paire de tip afin de ne travailler qu'avec des paires pour lesquelles au moins un des éléments  $\eta_1, \eta_2$  vaut 0. Nous introduisons donc la définition suivante où nous appelons *parcelle à deux parties* une parcelle à deux éléments.

**Définition 4.3.3** (Ancêtre à deux parties). Soit  $\{[\eta_1, j_1]^*, [\eta_2, j_2]^*\}$  une parcelle à deux parties de  $\Gamma_c$ . Un *ancêtre à deux parties* de  $\{[\eta_1, j_1]^*, [\eta_2, j_2]^*\}$  est une parcelle à deux parties de la forme  $\{[0, i_1]^*, [\gamma, i_2]^*\} \subseteq \Gamma_c$  pour laquelle il existe  $\delta \in \mathbb{H}_c$  tel que

$$\{[\eta_1, j_1]^*, [\eta_2, j_2]^*\} \subseteq \delta + \mathbf{E}_1^*(\{[0, i_1]^*, [\gamma, i_2]^*\}) \quad (4.10)$$

avec  $\{[\eta_1, j_1]^*, [\eta_2, j_2]^*\} \cap (\delta + \mathbf{E}_1^*([0, i_1]^*)) \neq \emptyset$  et  $\{[\eta_1, j_1]^*, [\eta_2, j_2]^*\} \cap (\delta + \mathbf{E}_1^*([\gamma, i_2]^*)) \neq \emptyset$ .



Remarquons qu'ici l'unicité d'un ancêtre à deux parties n'est pas garantie. Une parcelle peut en effet avoir plusieurs ancêtres à deux parties à cause de la liberté dans le choix du vecteur  $\delta$ . Une dernière remarque intéressante est que les tips  $[\eta_1, j_1]^*$  et  $[\eta_2, j_2]^*$  de la Définition 4.3.3 ne doivent pas nécessairement être différents et il en est de même pour  $[0, i_1]^*$  et  $[\gamma, i_2]^*$ .

Comme précédemment, Nous voulons définir un nouveau graphe (le graphe des ancêtres à deux parties) dans l'idée d'être capable de vérifier (4.9) où ne devons vérifier récursivement les relations d'ancêtres. Nous définissons dans cette optique une nouvelle parcelle racine.

**Définition 4.3.4.** La *parcelle racine à deux parties*  $W_\sigma$  associée à la substitution  $\sigma$  est définie comme

$$W_\sigma := \left\{ [\gamma, i]^* \in \Gamma_c \mid \|\gamma\|_c \leq \frac{2\mathcal{M}_\sigma}{1 - \beta_{\max}} \right\}. \quad (4.11)$$

**Remarque 4.3.5.** Tout comme  $V_\sigma$ , la parcelle racine à deux parties  $W_\sigma$  contient les ancêtres de ses éléments. Le raisonnement est identique à celui de la Remarque 4.2.5 mais est laissé ici à titre de complétude. Soit  $[\eta, j]^* \in W_\sigma$  et soit  $[\gamma, i]^*$  son ancêtre. En utilisant l'inégalité (4.6) nous obtenons successivement

$$\begin{aligned} \|\gamma\|_c &\leq \beta_{\max} \|\eta\|_c + \mathcal{M}_\sigma \\ &< \beta_{\max} \frac{2\mathcal{M}_\sigma}{1 - \beta_{\max}} + \mathcal{M}_\sigma = \frac{(1 + \beta_{\max})\mathcal{M}_\sigma}{1 - \beta_{\max}} \\ &< \frac{2\mathcal{M}_\sigma}{1 - \beta_{\max}} \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que  $|\beta_{\max}| < 1$ . Ainsi,  $[\gamma, i]^* \in W_\sigma$  par définition.

**Remarque 4.3.6.** Remarquons que  $2\mathcal{M}_\sigma/1 - \beta_{\max}$  est au moins deux fois plus grand que le diamètre de chaque  $\mathcal{T}_\sigma(i)$  étant donné la Remarque 4.2.3. Dés lors,  $\mathcal{T}_\sigma(i) \cap (\mathcal{T}_\sigma(j) + \gamma) \neq \emptyset$  implique que  $[\gamma, j]^* \in W_\sigma$ .

Comme nous travaillons avec des paires de tips  $\{[\eta_1, j_1]^*, [\eta_2, j_2]^*\}$  pour lesquels au moins au des deux éléments  $\eta_1$  ou  $\eta_2$  vaut 0, nous pouvons condenser notre notation comme suit.

**Notation 4.3.7.** Nous allons représenter la paire de tips  $\{[0, k]^*, [\gamma, l]^*\}$  par la notation  $[k, \gamma, l]^*$ , avec la condition que  $k \leq l$  si  $\gamma = 0$ . Cette dernière condition sert à éviter la redondance.

**Définition 4.3.8** (Graphe des ancêtres à deux parties). Le *graphe des ancêtres à deux parties* est un graphe dirigé tel que l'ensemble de sommets est

$$\{[k, \gamma, l]^* \mid (k, \gamma, l) \in A \times \mathbb{H}_c \times A, [\gamma, l]^* \in W_\sigma, k \leq l \text{ si } \gamma = 0\}.$$

Il y a une arête de  $[j_1, \eta, j_2]^*$  vers  $[i_1, \gamma, i_2]^*$  si la parcelle  $\{[0, i_1]^*, [\gamma, i_2]^*\}$  est un ancêtre à deux parties de la parcelle  $\{[0, j_1]^*, [\eta, j_2]^*\}$ .

**Remarque 4.3.9.** Chaque sommet du graphe des ancêtres à deux parties admet au moins une arête sortante. En effet, soit  $[j_1, \eta, j_2]^* = \{[0, j_1]^*, [\eta, j_2]^*\}$  un sommet du graphe. Nous savons que le tip  $[0, j_1]^*$  admet un ancêtre de la forme  $[0, i_1]^*$  (voir début de la Section 4.1). Ensuite, comme  $W_\sigma$  contient les ancêtres de ses éléments (Remarque 4.3.5), il existe  $[\gamma, i_2]^* \in W_\sigma$  tel que  $[\eta, j_1]^* \in \mathbf{E}_1^*([\gamma, i_2]^*)$ . Nous avons donc

$$\{[0, j_1]^*, [\eta, j_2]^*\} \subseteq \mathbf{E}_1^* \left( \{[0, i_1]^*, [\gamma, i_2]^*\} \right)$$

avec  $\{[\eta_1, j_1]^*, [\eta_2, j_2]^*\} \cap (0 + \mathbf{E}_1^*([0, i_1]^*)) \neq \emptyset$  et  $\{[\eta_1, j_1]^*, [\eta_2, j_2]^*\} \cap (0 + \mathbf{E}_1^*([\gamma, i_2]^*)) \neq \emptyset$ , ce qui prouve que  $[j_1, \eta, j_2]^*$  admet une arête sortante vers  $[i_1, \gamma, i_2]^*$ .

Comme précédemment, il est clair que la parcelle racine à deux parties  $W_\sigma$  peut être effectivement calculée. Ainsi, le graphe des ancêtre à deux parties peut être calculer comme suit. D'abord lister tous sommets  $[k, \gamma, l]^*$  en appariant tous les tips de  $W_\sigma$  deux à deux. Ensuite, il suffit de remarquer que  $[\eta, j]^* \subseteq \delta + \mathbf{E}_1^*([\gamma, i]^*)$  si et seulement si il existe  $p$  préfixe de  $\sigma(j)$  tel que  $\sigma(j) = pis$  et  $\delta = \eta - h_\sigma^{-1}(\gamma + \pi_c \circ \mathbf{P}(p))$  (voir preuve du Théorème 4.2.4). Cela permet alors de vérifier si la condition (4.10) est satisfaite pour chaque paire de sommets  $([j_1, \eta, j_2]^*, [i_1, \gamma, i_2]^*)$ .

Avant d'arriver au résultat majeur de cette section, nous avons besoin du lemme suivant.

**Lemme 4.3.10.** *Soit  $\{[\gamma_1, i_1]^*, [\gamma_2, i_2]^*\}$  une parcelle de  $\Gamma_c$ . Alors, au moins un des ensembles  $\{[0, i_1]^*, [\gamma_2 - \gamma_1, i_2]^*\}$  et  $\{[0, i_2]^*, [\gamma_1 - \gamma_2, i_1]^*\}$  est une parcelle de  $\Gamma_c$ .*

*Démonstration.* Comme  $[\gamma_1, i_1]^*$  et  $[\gamma_2, i_2]^*$  appartiennent à  $\Gamma_c$ , nous avons

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \pi_c(\mathbf{x}_1), \quad \mathbf{x}_1 \in \mathbb{Z}^n, \quad 0 \leq \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{v}_\beta \rangle < \langle \mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{v}_\beta \rangle, \\ \gamma_2 &= \pi_c(\mathbf{x}_2), \quad \mathbf{x}_2 \in \mathbb{Z}^n, \quad 0 \leq \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_\beta \rangle < \langle \mathbf{e}_{i_2}, \mathbf{v}_\beta \rangle. \end{aligned}$$

De plus, par la Proposition 2.2.14,  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$  sont uniques.

Supposons que  $\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{v}_\beta \rangle \leq \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_\beta \rangle$  (l'autre cas se traite de manière similaire). Vu les inégalités précédentes, il est claire que  $0 = \langle 0, \mathbf{v}_\beta \rangle < \langle \mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{v}_\beta \rangle$  et comme  $\pi_c(0) = 0$ , nous obtenons  $[0, i_1]^* \in \Gamma_c$ . Ensuite, vu notre hypothèse, nous avons  $\langle \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_\beta \rangle - \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{v}_\beta \rangle = \langle \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, \mathbf{v}_\beta \rangle \geq 0$ . De plus, comme  $\langle \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_\beta \rangle < \langle \mathbf{e}_{i_2}, \mathbf{v}_\beta \rangle$ , nous avons aussi  $\langle \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_\beta \rangle - \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{v}_\beta \rangle < \langle \mathbf{e}_{i_2}, \mathbf{v}_\beta \rangle$  ce qui finit de montrer que  $[\gamma_2 - \gamma_1, i_2]^* \in \Gamma_c$ .  $\square$

Nous pouvons maintenant donner le résultat principal de cette section.

**Théorème 4.3.11** (Condition de pavage sur le graphe des ancêtre à deux parties). *Soit  $\sigma$  une substitution Pisot irréductible et unimodulaire. La substitution  $\sigma$  satisfait la condition de pavage si et seulement si depuis chaque sommet dans le graphe des ancêtres à deux parties, il existe un chemin vers un sommet de la forme  $[i, 0, i]^*$  pour  $i \in A$ .*

*Démonstration.* La condition de pavage est équivalente à (4.9), qui peut se reformuler comme suit : pour chaque paire de tips  $([\eta_1, j_1]^*, [\eta_2, j_2]^*) \in \Gamma_c$ , il existe  $\delta \in \mathbb{H}_c$ ,  $m \geq 0$  et  $i \in A$  tels que

$$\{[\eta_1, j_1]^*, [\eta_2, j_2]^*\} \subseteq \delta + \mathbf{E}_1^{*m}([0, i]^*).$$

Or, il est assez facile de se convaincre que cette dernière condition est équivalente à la condition suivante : pour toute parcelle à deux parties  $\{[0, j_1]^*, [\eta, j_2]^*\}$ , il existe  $m \in \mathbb{N}$ ,  $i \in A$  et  $\delta \in \mathbb{H}_c$  tels que  $\{[0, j_1]^*, [\eta, j_2]^*\} \subseteq \delta + \mathbf{E}_1^{*m}([0, i]^*)$ .

Par définition d'un ancêtre à deux parties, ceci est encore équivalent à ce que pour chaque  $\{[0, j_1]^*, [\eta, j_2]^*\}$  il existe  $m \in \mathbb{N}$  et  $i \in A$  tels que

$$\{[0, i]^*, [0, i]^*\} \text{ est un ancêtre à deux parties } m\text{-ième de } \{[0, j_1]^*, [\eta, j_2]^*\}. \quad (4.12)$$

Ainsi, pour prouver le théorème, il suffit de montrer que nous pouvons supposer sans perte de généralité que la parcelle  $\{[0, j_1]^*, [\eta, j_2]^*\}$  de l'équation (4.12) est un sommet du graphe des ancêtres à deux parties. Il suffit pour cela de montrer que l'on peut supposer que  $[\eta, j_2]^* \in W_\sigma$  dans l'équation (4.12) (nous avons déjà trivialement  $[0, j_1]^* \in W_\sigma$ ).

Supposons, par l'absurde, que  $[\eta, j_2]^* \notin W_\sigma$ . Alors,

$$\|\eta\|_c > \frac{2\mathcal{M}_\sigma}{1 - \beta_{\max}}. \quad (4.13)$$

Par unicité des ancêtres des tips, il existe une unique paire de tips  $\{[\gamma_1, i_1]^*, [\gamma_2, i_2]^*\} \subseteq \Gamma_c$  telle que

$$[0, j_1]^* \in \mathbf{E}_1^*([\gamma_1, i_1]^*) \quad \text{et} \quad [\eta, j_2]^* \in \mathbf{E}_1^*([\gamma_2, i_2]^*). \quad (4.14)$$

Par le Lemme 4.3.10, au moins un des deux ensembles  $\{[0, i_1]^*, [\gamma_2 - \gamma_1, i_2]^*\}$  et  $\{[0, i_2]^*, [\gamma_1 - \gamma_2, i_1]^*\}$  est dans  $\Gamma_c$ . Supposons avoir le cas  $\{[0, i_1]^*, [\gamma_2 - \gamma_1, i_2]^*\} \subseteq \Gamma_c$  (l'autre cas se traite de manière analogue). Alors,  $\{[0, i_1]^*, [\gamma_2 - \gamma_1, i_2]^*\}$  est un ancêtre à deux parties de  $\{[0, j_1]^*, [\eta, j_2]^*\}$ . Par (4.5) et (4.6) nous avons

$$\|\gamma_1\|_c \leq \mathcal{M}_\sigma \quad \text{et} \quad \|\gamma_2\|_c \leq \beta_{\max} \|\eta\|_c + \mathcal{M}_\sigma.$$

En couplant ces relations à l'équation(4.13) nous obtenons successivement

$$\begin{aligned} \|\gamma_2 - \gamma_1\|_c &\leq \|\gamma_2\|_c + \|\gamma_1\|_c \\ &\leq \beta_{\max} \|\eta\|_c + 2\mathcal{M}_\sigma \\ &< \beta_{\max} \|\eta\|_c + \|\eta\|_c(1 - \beta_{\max}) = \|\eta\|_c. \end{aligned}$$

Dés lors, en utilisant le même argument que dans la preuve du Théorème 4.2.4, nous concluons qu'il existe un entier positif  $m'$  tel que  $\{[0, j_1]^*, [\eta, j_2]^*\}$  admet un ancêtre à deux parties  $m'$ -ième  $\{[0, k_1]^*, [\gamma', k_2]^*\}$  satisfaisant  $\gamma' \in W_\sigma$ . Ainsi, nous pouvons supposer que  $[\eta, j_2]^* \in W_\sigma$  dans l'équation (4.12), ce qui conclut.  $\square$

# Chapitre 5

## Dualité

Dans ce dernier chapitre, nous montrons que le problème de la condition de pavage sur  $\mathbb{H}_c$  possède un équivalent dual sur  $\mathbb{H}_e$ .

### 5.1 Cordons et dualité

Jusqu'à présent, nous avons travaillé avec  $\Gamma_c$  dont les éléments, que nous avons appelés "tips", correspondent à des faces unités projetées par  $\pi_c$ . Cette notion de tip nous a permis de définir la substitution de SFIG  $\mathbf{E}_1^*$  (Définition 3.6.1). Cette dernière étant inspirée par l'équation de SFIG (2.15) satisfaites par les tuiles  $\mathcal{T}_\sigma(i)$  pour  $i \in A$ . Ce formalisme nous a alors permis de ré-exprimer la condition de pavage (voir par exemple Théorème 4.3.1 et Théorème 4.3.11).

Nous souhaitons maintenant adopter le point de vue dual unidimensionnel. Plutôt que de travailler avec des faces d'hypercubes, nous travaillons ici avec des segments et nous remplaçons la projection  $\pi_c$  par la projection  $\pi_e$ . Nous appelons donc *cordon formel de base* un élément de la forme  $(\mathbf{x}, i) \in \mathbb{Z}^n \times A$ . Les cordons formels sont évidemment une représentation symbolique des cordons géométriques. Ainsi, nous utilisons la notation  $[\mathbf{x}, i]$  à la place de  $(\mathbf{x}, i)$  pour désigner un cordon formel. Enfin, nous appelons simplement *cordon formel* tout union de cordons formels de base. Nous définissons les *cordons géométriques* de la même façon.

Les faces d'hypercubes et les segments peuvent être considérés comme duaux du point de vue du principe de dualité de l'algèbre linéaire. Plus de détails sur cette dualité sont donnés dans [4].

Nous verrons dans la suite que cette dualité entre les faces et les cordons va nous permettre de traduire les propriétés de  $\Gamma_c$  en des propriétés de  $\Gamma_e$  et ainsi de travailler avec le pavage  $\mathcal{E}_u$  de la demi-droite réelle  $\mathbb{R}_+$ .

Considérons un mot  $w \in A^*$ . Nous pouvons construire de façon naturelle un cordon formel et un cordon géométrique joignant  $\mathbf{0}$  au point  $\mathbf{P}(w) \in \mathbb{Z}^n$  simplement en lisant les lettres de  $w$ . Nous pouvons dire que les cordons permettent de conserver de l'information

perdue lors de l'abélianisation.

Nous étendons maintenant  $\sigma$  pour agir sur les unions de cordons formels de base  $[\mathbf{x}, i]$  dans la même idée que lorsque nous avons étendu  $\sigma$  en  $\mathbf{E}_1^*(\sigma)$  pour agir sur les tips.

**Définition 5.1.1.** Soit  $\sigma$  une substitution Pisot irréductible et unitaire. La *réalisation formelle unidimensionnelle* de  $\sigma$  est définie sur l'ensemble des cordons formels par

$$\mathbf{E}_1\{[\mathbf{y}, j]\} = \bigcup_{(p,i,s), \sigma(j)=pis} \{[M_\sigma \mathbf{y} + \mathbf{P}(p), i]\}$$

$$\mathbf{E}_1(Y_1 \cup Y_2) = \mathbf{E}_1(Y_1) \cup \mathbf{E}_1(Y_2).$$

Nous utiliserons la notation  $\mathbf{E}_1[\mathbf{y}, i]$  pour  $\mathbf{E}_1\{[\mathbf{y}, i]\}$ .

Remarquons que nous définissons  $\mathbf{E}_1$  sur les cordons formel et non sur les cordons géométriques car cela permet un cadre plus général. En effet, nous pourrions considérer que le cordon formel  $[\mathbf{x}, i]$  représente l'élément  $\pi_e([\mathbf{x}, i]) \in \Gamma_e$  et ainsi voir  $\mathbf{E}_1$  comme une application agissant sur les éléments de  $\Gamma_e$  de la même manière que nous voyons  $\mathbf{E}_1^*$  comme une application agissant sur les tips de  $\Gamma_c$  plutôt que sur les faces unités.

Nous attirons également l'attention du lecteur sur le fait que l'union apparaissant dans les formules de  $\mathbf{E}_1^*$  et  $\mathbf{E}_1$  sont fort similaires mais bel et bien différentes (ce qui peut ne pas être clair avec nos choix de notation des lettres). Pour mieux comprendre la différence qui existe entre ces deux unions notons que la formule de  $\mathbf{E}_1^*$  (3.4) se réécrit comme suit

$$\mathbf{E}_1^*([\gamma, j]^*) = \bigcup_{(p,i,s), \sigma(i)=pjs} \{[h_\sigma^{-1}(\gamma + \pi_c \circ \mathbf{P}(p)), i]^*\}.$$

Ainsi, dans  $\mathbf{E}_1^*[\gamma, j]$  nous regardons les images dans lesquelles  $j$  apparaît, alors que dans  $\mathbf{E}_1[\mathbf{y}, j]$  nous regardons l'image de  $j$ .

**Remarque 5.1.2.** En refaisant les mêmes genre de détails que dans le Lemme 3.6.3, nous déduisons que pour tout cordon formel  $[\mathbf{y}, j]$ , l'image  $\mathbf{E}_1[\mathbf{y}, j]$  est entièrement caractérisée par les images  $\mathbf{E}_1[\mathbf{0}, i]$  pour  $i \in A$  et la matrice  $M_\sigma$ . En effet, nous avons

$$\mathbf{E}_1([\mathbf{y}, j]) = M_\sigma \mathbf{y} + \mathbf{E}_1([0, j]).$$

Une première propriété intéressante de  $\mathbf{E}_1$  est sa stabilité sur les cordons de  $L_u$ . Cette propriété est en quelque sorte un parallèle avec la stabilité de  $\mathbf{E}_1^*$  sur  $\Gamma_c$ .

**Proposition 5.1.3.** La ligne brisée  $L_u$  est invariante sous l'action de  $\mathbf{E}_1$ .

*Démonstration.* Soit un cordon géométrique  $[\mathbf{P}(u_0 \dots u_{N-1}), u_N]_g$  apparaissant dans la ligne brisée  $L_u$  (voir (2.13)). Nous calculons

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1[\mathbf{P}(u_0 \dots u_{N-1}), u_N] &= \bigcup_{\sigma(u_N)=pis} [M_\sigma \mathbf{P}(u_0 \dots u_{N-1}) + \mathbf{P}(p), i] \\ &= \bigcup_{\sigma(u_N)=pis} [\mathbf{P}(\sigma(u_0 \dots u_{N-1})) + \mathbf{P}(p), i] \\ &= \bigcup_{\sigma(u_N)=pis} [\mathbf{P}(\sigma(u_0 \dots u_{N-1})p), i]. \end{aligned}$$

Regardons de plus près un cordon géométrique  $[\mathbf{P}(\sigma(u_0 \dots u_{N-1})p), i]_g$  apparaissant dans la dernière union. Le mot  $\sigma(u_0 \dots u_{N-1})pis = \sigma(u_0 \dots u_{N-1}u_N)$  est un préfixe du point fixe  $u$  de  $\sigma$ . Ainsi, il existe  $M \in \mathbb{N}$  tel que  $[\mathbf{P}(\sigma(u_0 \dots u_{N-1})p), i]_g = [\mathbf{P}(u_0 \dots u_{M-1}), u_M]_g$  et chacun des cordons apparaissant dans l'union appartient donc à  $L_u$  d'où la conclusion.  $\square$

Le lemme suivant montre le lien qui existe entre  $\mathbf{E}_1^*$  et  $\mathbf{E}_1$ .

**Lemme 5.1.4** (Dualité). *Soient  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n$ . Nous avons l'équivalence suivante*

$$[\pi_c(\mathbf{y}), j]^* \in \mathbf{E}_1^*([\pi_c(\mathbf{x}), i]^*) \iff [-\mathbf{x}, i] \in \mathbf{E}_1([- \mathbf{y}, j]).$$

*Démonstration.* Soient  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n$ . Vu la définition (3.4) de  $\mathbf{E}_1^*$ , nous avons  $[\pi_c(\mathbf{y}), j]^* \in \mathbf{E}_1^*([\pi_c(\mathbf{x}), i]^*)$  si et seulement si il existe  $p$  tel que  $\sigma(j) = pis$  et

$$\pi_c(\mathbf{y}) = h_\sigma^{-1}(\pi_c(\mathbf{x}) + \pi_c(\mathbf{P}(p))) = \pi_c(M_\sigma^{-1}\mathbf{x} + M_\sigma^{-1}\mathbf{P}(p))$$

où nous utilisons la relation  $h_\sigma^{-1} \circ \pi_c = \pi_c \circ M_\sigma^{-1}$ . Dés lors, en utilisant (2.12)<sup>1</sup>, ceci est équivalent à  $\mathbf{y} = M_\sigma^{-1}(\mathbf{x} + \mathbf{P}(p))$ , c'est-à-dire  $-\mathbf{x} = M_\sigma(-\mathbf{y}) + \mathbf{P}(p)$  et donc  $[-\mathbf{x}, i] \in \mathbf{E}_1([- \mathbf{y}, j])$ .  $\square$

Le lemme précédent nous permet alors de déduire les équivalences qui suivent. La preuve est directe.

**Lemme 5.1.5.** *Soit  $\sigma$  une substitution Pisot irréductible et unitaire. Les assertions suivantes sont vérifiées.*

- (i) Ancêtre. *Un tip  $[\pi_c(\mathbf{x}), i]^*$  est un ancêtre de  $[\pi_c(\mathbf{y}), j]^*$  si et seulement si  $[-\mathbf{x}, i]$  est un segment du cordon  $\mathbf{E}_1([- \mathbf{y}, j])$ .*
- (ii) Ancêtre commun. *Deux tips  $[\pi_c(\mathbf{y}_1), j_1]^*$  et  $[\pi_c(\mathbf{y}_2), j_2]^*$  ont un ancêtre commun  $[\pi_c(\mathbf{x}), i]^*$  si et seulement si les cordons  $\mathbf{E}_1([- \mathbf{y}_1, j_1])$  et  $\mathbf{E}_1([- \mathbf{y}_2, j_2])$  contiennent tous les deux le segment  $[-\mathbf{x}, i]$ .*
- (iii) Équation (4.10) d'un ancêtre à deux partie. *Il existe  $\delta$  tel que  $\{[\pi_c(\mathbf{y}_1), j_1]^*, [\pi_c(\mathbf{y}_2), j_2]^*\} \subset \delta + \mathbf{E}_1^*\{[0, i_1]^*, [\pi_c(\mathbf{x}), i_2]^*\}$  si et seulement si il existe  $\mathbf{z}$  tel que  $\mathbf{z} + \{[\mathbf{0}, i_1], [-\mathbf{x}, i_2]\} \subset \mathbf{E}_1\{[-\mathbf{y}_1, j_1], [-\mathbf{y}_2, j_2]\}$ .*
- (iv) Parcelle ancêtre à deux partie. *Il existe un élément  $\delta$  tel que  $\{[\pi_c(\mathbf{y}_1), j_1]^*, [\pi_c(\mathbf{y}_2), j_2]^*\} \subset \delta + \mathbf{E}_1^*([0, i]^*)$  si et seulement si il existe  $\mathbf{z}$  tel que  $[\mathbf{z}, i] \in \mathbf{E}_1([- \mathbf{y}_1, j_1]) \cap \mathbf{E}_1([- \mathbf{y}_2, j_2])$ .*

## 5.2 Condition de super coïncidence

Les relations établies Section 5.1 mènent naturellement à la définition suivante qui étend la notion de coïncidence combinatoire forte introduite Définition 2.4.10. Nous pouvons considérer ce qui suit comme une version duale de la propriété d'avoir un ancêtre commun.

---

1. Rappelons que  $M_\sigma^{-1} \in \mathbb{Z}^n$  car  $\sigma$  est unimodulaire.

**Définition 5.2.1** (Coïncidence géométrique forte). Nous disons que les cordons formels de base  $[\mathbf{y}_1, j_1]$  et  $[\mathbf{y}_2, j_2]$  satisfont la *condition de coïncidence géométrique forte* si il existe un entier positif  $N$  tel que  $\mathbf{E}_1^N([\mathbf{y}_1, j_1])$  et  $\mathbf{E}_1^N([\mathbf{y}_2, j_2])$  ont au moins un cordon formel de base en commun.

**Remarque 5.2.2.** La condition de coïncidence combinatoire forte (Définition 2.4.10) est équivalente au fait que  $[\mathbf{0}, j_1]$  et  $[\mathbf{0}, j_2]$  satisfont la condition de coïncidence géométrique forte pour toute paire  $(j_1, j_2) \in A$ . En effet, supposons que  $\mathbf{E}_1^N([\mathbf{0}, j_1])$  et  $\mathbf{E}_1^N([\mathbf{0}, j_2])$  possèdent un cordon formel de base  $[\mathbf{x}, i]$  en commun. Vu la définition de  $\mathbf{E}_1$ , ceci est équivalent à :  $\sigma^N(j_1) = p_1 i s_1$  et  $\sigma^N(j_2) = p_2 i s_2$  avec  $\mathbf{P}(p_1) = \mathbf{P}(p_2)$ .

Nous allons maintenant voir un lien entre les tips de  $\Gamma_c$  et les cordons formels de  $\Gamma_e$ . Avant cela, rappelons que pour tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , nous appelons  $\pi_e(\mathbf{x})$  sa hauteur (Définition 2.2.10) car cette quantité mesure d'une certaine manière la distance à l'hyperplan contractant  $\mathbb{H}_c$ . Cela nous mène à la définition suivante

**Définition 5.2.3.** Nous disons que les cordons formels de base  $[\mathbf{x}, i]$  et  $[\mathbf{y}, j]$  ont la même hauteur si

$$\text{int}(\pi_e([\mathbf{x}, i]_g)) \cap \text{int}(\pi_e([\mathbf{y}, j]_g)) \neq \emptyset$$

**Lemme 5.2.4.** Soient  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n$  tels que  $\pi_e(\mathbf{x}) \leq \pi_e(\mathbf{y})$ . Alors, pour tout  $i \in A$  les assertions suivantes sont équivalentes.

- Pour tout  $j \in A$ , les cordons formels de base  $[\mathbf{x}, i]$  et  $[\mathbf{y}, j]$  ont la même hauteur.
- Le tip  $[\pi_c(-\mathbf{x} + \mathbf{y}), i]^*$  appartient à  $\Gamma_c$ .

*Démonstration.* Soient  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n$  tels que  $\pi_e(\mathbf{x}) \leq \pi_e(\mathbf{y})$  (c'est-à-dire  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_\beta \rangle \leq \langle \mathbf{y}, \mathbf{v}_\beta \rangle$ ). Fixons  $i \in A$  et supposons que les deux cordons formels de base  $[\mathbf{x}, i]$  et  $[\mathbf{y}, j]$  ont même hauteur pour tout  $j \in A$ , c'est-à-dire

$$\text{int}(\pi_e([\mathbf{x}, i]_g)) \cap \text{int}(\pi_e([\mathbf{y}, j]_g)) \neq \emptyset \quad \forall j \in A.$$

De là nous déduisons que

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_\beta \rangle \leq \langle \mathbf{y}, \mathbf{v}_\beta \rangle < \langle \mathbf{x} + \mathbf{e}_i, \mathbf{v}_\beta \rangle.$$

Ceci implique alors  $0 \leq \langle -\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{v}_\beta \rangle < \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{v}_\beta \rangle$ , ce qui signifie que  $[\pi_c(-\mathbf{x} + \mathbf{y}), i]^* \in \Gamma_c$ .

La preuve de l'autre implication suit en "remontant" la preuve précédente.  $\square$

**Définition 5.2.5** (Condition de super coïncidence). Une substitution Pisot irréductible et unimodulaire  $\sigma$  satisfait la *condition de super coïncidence* si toute paire de cordons de base de même hauteur  $[\mathbf{x}, i]$  et  $[\mathbf{y}, j]$  satisfont la condition de coïncidence géométrique forte.

Cette condition de coïncidence géométrique permet de ré-exprimer la condition de pavage comme nous allons le voir. Avant cela nous avons besoin du lemme suivant.

**Lemme 5.2.6.** (i) Les cordons  $[\mathbf{y}_1, j_1], [\mathbf{y}_2, j_2]$  satisfont la condition de coïncidence géométrique forte si et seulement si c'est aussi le cas des cordons  $[\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2, j_1], [\mathbf{0}, j_2]$ .

(ii) Les cordons  $[\mathbf{y}_1, j_1], [\mathbf{y}_2, j_2]$  ont la même hauteur si et seulement si les cordons  $[\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2, j_1], [\mathbf{0}, j_2]$  ont la même hauteur.

*Démonstration.* (i) Les cordons  $[\mathbf{y}_1, j_1], [\mathbf{y}_2, j_2]$  satisfont la condition de coïncidence géométrique forte si et seulement si il existe  $N \in \mathbb{N}$  et un cordon  $[\mathbf{x}, i]$  tels que

$$[\mathbf{x}, i] \in \mathbf{E}_1^N[\mathbf{y}_1, j_1] \cap \mathbf{E}_1^N[\mathbf{y}_2, j_2].$$

Or, nous avons successivement

$$\begin{aligned} & [\mathbf{x}, i] \in \mathbf{E}_1^N[\mathbf{y}_1, j_1] \cap \mathbf{E}_1^N[\mathbf{y}_2, j_2] \\ \Leftrightarrow & [\mathbf{x}, i] \in \mathbf{E}_1^N[\mathbf{y}_1, j_1] \cap M_\sigma^N \mathbf{y}_2 + \mathbf{E}_1^N[\mathbf{0}, j_2] \\ \Leftrightarrow & [\mathbf{x}, i] - M_\sigma^N \mathbf{y}_2 \in \mathbf{E}_1^N[\mathbf{y}_1, j_1] - M_\sigma^N \mathbf{y}_2 \cap \mathbf{E}_1^N[\mathbf{0}, j_2] \\ \Leftrightarrow & [\mathbf{x}, i] - M_\sigma^N \mathbf{y}_2 \in \mathbf{E}_1^N[\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2, j_1] \cap \mathbf{E}_1^N[\mathbf{0}, j_2], \end{aligned}$$

ce qui prouve que  $[\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2, j_1]$  et  $[\mathbf{0}, j_2]$  satisfont la condition de coïncidence géométrique forte.

(ii) Les cordons  $[\mathbf{y}_1, j_1], [\mathbf{y}_2, j_2]$  ont la même hauteur si et seulement si

$$\text{int}(\pi_e[\mathbf{y}_1, j_1]_g) \cap \text{int}(\pi_e[\mathbf{y}_2, j_2]_g) \neq \emptyset.$$

Or, nous avons successivement

$$\begin{aligned} & \mathbf{x} \in \text{int}(\pi_e[\mathbf{y}_1, j_1]_g) \cap \text{int}(\pi_e[\mathbf{y}_2, j_2]_g) \\ \Leftrightarrow & \mathbf{x} \in \text{int}(\pi_e\{\mathbf{y}_1 + \theta_1 \mathbf{e}_{j_1} \mid \theta_1 \in [0, 1]\}) \cap \text{int}(\pi_e\{\mathbf{y}_2 + \theta_2 \mathbf{e}_{j_2} \mid \theta_2 \in [0, 1]\}) \\ \Leftrightarrow & \mathbf{x} \in \{\pi_e(\mathbf{y}_1) + \theta_1 \pi_e(\mathbf{e}_{j_1}) \mid \theta_1 \in ]0, 1[ \} \cap \{\pi_e(\mathbf{y}_2) + \theta_2 \pi_e(\mathbf{e}_{j_2}) \mid \theta_2 \in ]0, 1[ \} \\ \Leftrightarrow & \mathbf{x} - \pi_e(\mathbf{y}_2) \in \{\pi_e(\mathbf{y}_1) - \pi_e(\mathbf{y}_2) + \theta_1 \pi_e(\mathbf{e}_{j_1}) \mid \theta_1 \in ]0, 1[ \} \cap \{\theta_2 \pi_e(\mathbf{e}_{j_2}) \mid \theta_2 \in ]0, 1[ \} \\ \Leftrightarrow & \mathbf{x} - \pi_e(\mathbf{y}_2) \in \text{int}(\pi_e[\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2, j_1]_g) \cap \text{int}(\pi_e[\mathbf{0}, j_2]_g), \end{aligned}$$

d'où la conclusion. □

**Théorème 5.2.7.** Une substitution Pisot irréductible et unimodulaire  $\sigma$  satisfait la condition de super coïncidence si et seulement si la condition de pavage est satisfaite.

*Démonstration.* Par le Corollaire 4.3.2, la condition de pavage est satisfaite si et seulement si pour toute paire de tips  $[\pi_c(\mathbf{y}_1), j_1]^*, [\pi_c(\mathbf{y}_2), j_2]^* \in \Gamma_c$  il existe  $\delta \in \mathbb{H}_c$ ,  $i \in A$  et  $m \in \mathbb{N}$  tels que

$$\{[\pi_c(\mathbf{y}_1), j_1]^*, [\pi_c(\mathbf{y}_2), j_2]^*\} \subseteq \delta + \mathbf{E}_1^{*m}([0, i]^*).$$

Le lemme 5.1.4 (iv) montre que cette dernière condition est équivalente au fait qu'il existe  $\mathbf{z}$  tel que  $[\mathbf{z}, i] \in \mathbf{E}_1^m([-\mathbf{y}_1, j_1]) \cap \mathbf{E}_1^m([-\mathbf{y}_2, j_2])$ . Ainsi, nous déduisons que la condition de



pavage est satisfaite si et seulement si  $[\mathbf{y}_1, j_1]$  et  $[\mathbf{y}_2, j_2]$  satisfont la condition de coïncidence géométrique forte pour tout  $[\pi_c(\mathbf{y}_1), j_1]^*, [\pi_c(\mathbf{y}_2), j_2]^* \in \Gamma_c$ . Étant donné le Lemme 4.3.10, nous pouvons supposer sans perte de généralité que  $[\pi_c(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2), j_1]^* \in \Gamma_c$ . Dés lors, le Lemme 5.2.6 (i) implique que la condition de pavage est équivalente à ce que  $[\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2, j_1]$  et  $[\mathbf{0}, j_2]$  satisfont la condition de coïncidence géométrique forte dès que  $[\pi_c(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2), j_1]^* \in \Gamma_c$ . Par le Lemme 5.2.4, cela est équivalent au fait que  $[\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2, j_1]$  et  $[\mathbf{0}, j_2]$  satisfont la condition de coïncidence géométrique forte dès que ces derniers ont la même hauteur. Or, le Lemme 5.2.6 (ii) indique que  $[\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2, j_1]$  et  $[\mathbf{0}, j_2]$  ont la même hauteur si et seulement si  $[\mathbf{y}_1, j_1]$  et  $[\mathbf{y}_2, j_2]$  ont la même hauteur. Ainsi, la condition de pavage est équivalente à ce que  $[\mathbf{y}_1, j_1]$  et  $[\mathbf{y}_2, j_2]$  satisfont la condition de coïncidence géométrique forte dès que ces cordons ont la même hauteur. Autrement dit, la condition de pavage est équivalente à la condition de super coïncidence.  $\square$

Comme précédemment avec le graphe des ancêtres à deux parties, nous aimerions maintenant construire un graphe permettant de vérifier cette nouvelle condition équivalente à la condition de pavage. Nous constaterons en fait que le graphe que nous allons construire est isomorphe au graphe des ancêtres à deux parties.

Pareillement à la Section 4.3, nous introduisons la notation  $[i_1, \mathbf{x}, i_2]$  pour les triplets  $(i_1, \mathbf{x}, i_2) \in A \times \mathbb{Z}^n \times A$  avec  $[-\pi_c(\mathbf{x}), i_2]^* \in W_\sigma$  où nous supposons que  $i_1 \leq i_2$  si  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  afin d'éviter la redondance. Le triplet  $[i_1, \mathbf{x}, i_2]$  représente une paire de cordons  $[\mathbf{0}, i_1]$  et  $[\mathbf{x}, i_2]$  ayant même hauteur vu le Lemme 5.2.4.

**Définition 5.2.8** (Graphe de configuration). Le *graphe de configuration* est un graphe dirigé dont l'ensemble des sommets est

$$\{[i_1, \mathbf{x}, i_2] \mid (i_1, \mathbf{x}, i_2) \in A \times \mathbb{Z}^n \times A, [-\pi_c(\mathbf{x}), i_2]^* \in W_\sigma, i_1 \leq i_2 \text{ si } \mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

Il y a une arête de  $[j_1, \mathbf{y}, j_2]$  vers  $[i_1, \mathbf{x}, i_2]$  si il existe  $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^n$  tel que

$$\mathbf{z} + \{[\mathbf{0}, i_1], [\mathbf{x}, i_2]\} \subseteq \mathbf{E}_1 \{[\mathbf{0}, j_1], [\mathbf{y}, j_2]\}$$

avec  $\mathbf{z} + [\mathbf{0}, i_1] \cap \mathbf{E}_1 \{[\mathbf{0}, j_1], [\mathbf{y}, j_2]\} \neq \emptyset$  et  $\mathbf{z} + [\mathbf{x}, i_2] \cap \mathbf{E}_1 \{[\mathbf{0}, j_1], [\mathbf{y}, j_2]\} \neq \emptyset$ .

En utilisant le Lemme 5.1.4, nous obtenons que le graphe de configuration est isomorphe au graphe des ancêtres à deux parties.

**Proposition 5.2.9.** *Le graphe de configuration et le graphe des ancêtres à deux parties sont isomorphes.*

*Démonstration.* Par définition,  $[i_1, \mathbf{x}, i_2]$  est un sommet du graphe de configuration si et seulement si  $[i_1, -\pi_c(\mathbf{x}), i_2]^*$  est un sommet du graphe des ancêtres à deux parties. Dés lors, en utilisant (3.3), nous en déduisons une bijection entre les sommets des deux graphes. Pour ce qui est des arêtes, le Lemme 5.1.5 (iii) affirme qu'il existe  $\delta \in \mathbb{H}_c$  tel que

$$\{[0, j_1]^*, [\pi_c(\mathbf{y}), j_2]^*\} \subset \delta + \mathbf{E}_1^* \{[0, i_1]^*, [\pi_c(\mathbf{x}), i_2]^*\}$$

avec

$$\{[0, j_1]^*, [\pi_c(\mathbf{y}), j_2]^*\} \cap (\delta + \mathbf{E}_1^*([0, i_1]^*)) \neq \emptyset \text{ et } \{[0, j_1]^*, [\pi_c(\mathbf{y}), j_2]^*\} \cap (\delta + \mathbf{E}_1^*([\pi_c(\mathbf{x}), i_2]^*)) \neq \emptyset$$

si et seulement si il existe  $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^n$  tel que

$$\mathbf{z} + \{[\mathbf{0}, i_1], [-\mathbf{x}, i_2]\} \subset \mathbf{E}_1\{[0, j_1], [-\mathbf{y}, j_2]\}$$

avec

$$(\mathbf{z} + [\mathbf{0}, i_1]) \cap \mathbf{E}_1\{[\mathbf{0}, j_1], [-\mathbf{y}, j_2]\} \neq \emptyset \text{ et } (\mathbf{z} + [-\mathbf{x}, i_2]) \cap \mathbf{E}_1\{[\mathbf{0}, j_1], [-\mathbf{y}, j_2]\} \neq \emptyset.$$

Ainsi, les arêtes sont également en bijection, ce qui conclut.  $\square$

Le théorème suivant découle alors directement de la Proposition 5.2.9 et du Théorème 4.3.11.

**Théorème 5.2.10.** *Une substitution Pisot irréductible et unimodulaire  $\sigma$  satisfait la condition de pavage si et seulement si pour chaque sommet du graphe de configuration, il existe un chemin vers un sommet de la forme  $[k, \mathbf{0}, k]$ .*

# Annexe A

## Résultats intermédiaires

Ce chapitre est dédié à la démonstration de quelques résultats intermédiaires utilisés dans le développement de ce mémoire.

**Lemme A.0.1.** *Une substitution  $\sigma : A^* \rightarrow A^*$  prolongeable sur  $a \in A$  converge dans  $A^{\mathbb{N}}$  vers  $\sigma^\omega(a)$ . De plus,  $\sigma^\omega(a)$  est un point fixe de  $\sigma$ .*

*Démonstration.* Comme  $A^{\mathbb{N}}$  est un espace métrique, il suffit de montrer que la suite  $(\sigma^n(a))_n$  est de Cauchy. Ensuite, en notant  $x_n := \sigma^n(a) \odot^\omega \forall n$ , ceci est équivalent à montrer que  $d(x_n, x_{n+1}) \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Montrons donc cette dernière assertion.

D'une part, remarquons que  $\sigma^n(a)$  est un préfixe de  $\sigma^{n+1}(a)$ . En effet,  $\sigma^{n+1}(a) = \sigma^n(\sigma(a)) = \sigma^n(au) = \sigma^n(a)\sigma^n(u)$  (en supposant que  $u$  est tel que  $\sigma(a) = au$ ).

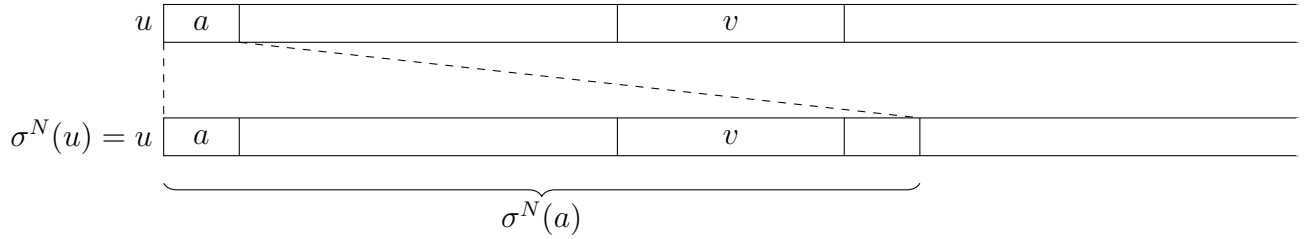
D'autre part, en notant  $\Lambda(x, y)$  le plus long préfixe commun à  $x$  et  $y$  pour tout  $x, y \in A^{\mathbb{N}}$ , alors  $d(x, y) \rightarrow 0$  est équivalent à  $|\Lambda(x, y)| \rightarrow \infty$ .

Or, comme  $\sigma^n(a)$  est un préfixe de  $\sigma^{n+1}(a)$ , nous avons  $|\Lambda(x_n, x_{n+1})| \geq |\sigma^n(a)|$ . De plus,  $\sigma$  étant prolongeable sur  $a$ , nous avons  $|\sigma^n(a)| \rightarrow \infty$ , ce qui conclut la première partie de la preuve.

Montrons maintenant que  $\sigma^\omega(a)$  est un point fixe. Notons  $x := \sigma^\omega(a)$ . D'une part, nous avons  $(\sigma(x_{[0, n[}]))_n \rightarrow \sigma(\sigma^\omega(a))$ . D'autre part,  $\sigma^n(a)$  est un préfixe de  $x$  pour tout  $n$  et  $\sigma(x_{[0, |\sigma^n(a)|]}) = \sigma^{n+1}(a) \rightarrow x$ . Or,  $(\sigma(x_{[0, |\sigma^n(a)|]}))_n$  est une sous-suite de la suite  $(\sigma(x_{[0, k]}))_k$ . Ainsi,  $(\sigma(x_{[0, |\sigma^n(a)|]}))_n \rightarrow \sigma(x)$  et  $\sigma(x) = x$  par unicité de la limite.  $\square$

**Proposition A.0.2.** *Soit  $\sigma : A^* \rightarrow A^*$  une substitution primitive et prolongeable sur  $a \in A$ . Le point fixe  $u = \sigma^\omega(a)$  est uniformément récurrent.*

*Démonstration.* Nous devons montrer que tout facteur  $v$  de  $u$  apparaît une infinité de fois et à délais borné. Soit  $v \in \mathcal{F}(u)$  un facteur de  $u$ . Comme  $u = \sigma^\omega(a)$  est un point fixe,  $\sigma^n(a)$  est un préfixe de  $u$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . De plus,  $|\sigma^n(a)| \rightarrow \infty$  lorsque  $n \rightarrow \infty$  car  $\sigma$  est prolongeable sur  $a$ . Dès lors, il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $v$  est un facteur de  $\sigma^N(a)$ .



Or, comme  $\sigma$  est primitif, il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $\sigma^k(a) \in A^*bA^*$  pour tout  $a, b \in A$ , c'est-à-dire que toutes les lettres apparaissent dans toutes les images de  $\sigma^k$ . On en déduit que le nombre de  $a$  dans  $\sigma^n(a)$  tend vers l'infini lorsque  $n$  tend vers l'infini c'est-à-dire que  $a$  est récurrent dans  $u$  et donc  $v$  aussi par ce qui précède. Or,  $a$  apparaît à délais borné par  $\max_{|w|=2} |\sigma^k(w)|$  car chaque lettre apparaît dans  $\sigma^k(w_1)$  et  $\sigma^k(w_2)$ . Nous en déduisons que  $u$  apparaît à délais borné par  $\max_{|w|=2} |\sigma^k(w)| \max_{b \in A} |\sigma^n(b)|$ , ce qui conclut.  $\square$

**Lemme A.0.3.** Soient  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$  et  $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ . Nous avons

$$\begin{cases} \Re(\langle \mathbf{z}, \mathbf{v} \rangle) = \Re(\langle \mathbf{z}, \bar{\mathbf{v}} \rangle) \\ \Im(\langle \mathbf{z}, \mathbf{v} \rangle) = -\Im(\langle \mathbf{z}, \bar{\mathbf{v}} \rangle). \end{cases}$$

*Démonstration.* En notant  $\mathbf{v} = a + ib$ , nous obtenons successivement

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{z}, \mathbf{v} \rangle &= \sum_{l=1}^n z_l(a_l + ib_l) \\ &= \sum_{l=1}^n z_l a_l + i \sum_{l=1}^n z_l b_l \\ &= \langle \mathbf{z}, \Re(\mathbf{v}) \rangle + i \langle \mathbf{z}, \Im(\mathbf{v}) \rangle \end{aligned}$$

En refaisant les mêmes développements pour  $\langle \mathbf{z}, \bar{\mathbf{v}} \rangle$ , nous obtenons

$$\langle \mathbf{z}, \bar{\mathbf{v}} \rangle = \langle \mathbf{z}, \Re(\mathbf{v}) \rangle - i \langle \mathbf{z}, \Im(\mathbf{v}) \rangle$$

d'où les égalités annoncées.  $\square$

**Lemme A.0.4.** Le demi-espace  $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{y}, \mathbf{v}_\beta \rangle \geq 0\}$  est stable sous l'action de  $M_\sigma^{-1}$  et sous l'action de  $M_\sigma$ . Il en va de même pour le demi-espace  $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{y}, \mathbf{v}_\beta \rangle < 0\}$ .

*Démonstration.* Montrons la stabilité par  $M_\sigma^{-1}$ . Nous avons successivement

$$\begin{aligned} \langle M_\sigma^{-1} \mathbf{y}, \mathbf{v}_\beta \rangle &= \langle \mathbf{y}, (M_\sigma^{-1})^T \mathbf{v}_\beta \rangle \\ &= \langle \mathbf{y}, (M_\sigma^T)^{-1} \mathbf{v}_\beta \rangle \\ &= \langle \mathbf{y}, \frac{1}{\beta} \mathbf{v}_\beta \rangle \\ &= \frac{1}{\beta} \langle \mathbf{y}, \mathbf{v}_\beta \rangle. \end{aligned}$$

Comme  $\beta > 0$ , la conclusion suit. La stabilité par  $M_\sigma$  se montre de manière analogue.  $\square$

# Annexe B

## Substitutions généralisées

Nous développons ici quelque peu l'intuition derrière le concept de *substitutions généralisées* comme l'a fait Jolivet dans [12].

La définition des substitutions généralisées peut sembler assez ésotérique au première abord. Ainsi, commençons par donner une interprétation géométrique des ces substitutions comme l'ont fait Arnoux et Ito dans [4]. Notons que les résultats qui suivent peuvent varier légèrement dans la littérature selon le choix des faces unités (faces "inférieures" ou "supérieures"). Nous pouvons trouver des références utilisant  $M_\sigma^T$  à la place de  $M_\sigma$ ,  $\mathbf{P}(s)$  plutôt que  $\mathbf{P}(p)$ , ... Cependant, rien de fondamental ne change.

**L'application  $E_0(\sigma)$  :** Soit  $w = w_1, \dots, w_n \in A^*$  un mot fini. Nous pouvons lui associer un chemin  $\gamma(w)$  dans  $\mathbb{R}^n$  en concaténant des cordons géométriques de base (voir Définition 3.3.1) de la façon suivante :

$$\gamma(w) = \bigcup_{k=1}^n [\mathbf{P}(w_1, \dots, w_{k-1}), w_k]_g.$$

L'extrémité du chemin est alors donnée par  $\mathbf{P}(w)$ . Soit maintenant  $\sigma : A^* \rightarrow A^*$  une substitution. Nous notons  $\mathbf{E}_0(\sigma) : \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}^3$  l'unique application linéaire vérifiant  $\mathbf{E}_0(\mathbf{P}(w)) = \mathbf{P}(\sigma(w))$  pour tout mot  $w \in A^*$ . Cette application envoie l'extrémité du chemin  $\gamma(w)$  sur l'extrémité du chemin  $\gamma(\sigma(w))$ . En faite, cela correspond à la multiplication par  $M_\sigma$  des extrémités. On a donc une interprétation "zéro-dimensionnelle" de  $\sigma$  d'où le "0" dans  $\mathbf{E}_0(\sigma)$ .

**L'application  $\mathbf{E}_1(\sigma)$  :** Nous voulons maintenant envoyer tout le chemin  $\gamma(w)$  sur tout le chemin  $\gamma(\sigma(w))$  et non plus seulement agir sur les extrémités. Nous associons donc à  $\sigma$  l'unique application linéaire  $\mathbf{E}_1(\sigma)$  vérifiant  $\mathbf{E}_1(\sigma)(\gamma(w)) = \gamma(\sigma(w))$ . Il peut être montré que l'image d'un segment  $[\mathbf{x}, i]_g$  est donné par

$$\mathbf{E}_1(\sigma)([\mathbf{x}, i]_g) = \bigcup_{k \mid \sigma(i)=pks} [M_\sigma \mathbf{x} + \mathbf{P}(p), k]_g,$$

et étant donné la linéarité de la multiplication par  $M_\sigma$ , cela suffit pour caractériser  $\mathbf{E}_1(\sigma)$ . Cette interprétation peut être vue comme unidimensionnelle car elle agit sur des segments

d'où le "1" dans  $E_1(\sigma)$ .

**L'application  $\mathbf{E}_1^*(\sigma)$  :** Nous passons de l'application  $\mathbf{E}_1(\sigma)$  à  $\mathbf{E}_1^*(\sigma)$  par dualité en agissant non plus sur des cordons géométriques de base  $[\mathbf{x}, i]_g$  mais sur des face unités  $[\mathbf{x}, i]_g^*$ .

**Généralisation :** Ce formalisme a été généralisé par Sano, Arnoux et Ito [17] où une définition de  $\mathbf{E}_k(\sigma)$  et  $\mathbf{E}_k^*(\sigma)$  est donnée pour tout  $k \leq n$  dans  $\mathbb{R}^n$ . L'idée est que l'application  $\mathbf{E}_k(\sigma)$  agit sur les faces unités de dimensions  $k$  et  $\mathbf{E}_k^*(\sigma)$  agit sur les faces unités de dimension  $n - k$ .

# Bibliographie

- [1] S. AKIYAMA. « Self affine tiling and Pisot numeration system. » In : S. KANEMITSU et K. GYÖRKY. *Number Theory and Its Applications*. 1999.
- [2] Pierre ARNOUX, Valérie BERTHÉ et Shunji ITO. « Discrete planes,  $\mathbb{Z}^2$ -actions, Jacobi-Perron algorithm and substitutions ». eng. In : *Annales de l'Institut Fourier* 52.2 (2002), p. 305-349. ISSN : 0373-0956.
- [3] Pierre ARNOUX, Valérie BERTHÉ et Anne SIEGEL. « Two-dimensional iterated morphisms and discrete planes ». eng. In : *Theoretical computer science* 319.1 (2004), p. 145-176. ISSN : 0304-3975.
- [4] Pierre ARNOUX et Shunji ITO. « Pisot substitutions and Rauzy fractals ». eng. In : *Bulletin of the Belgian Mathematical Society, Simon Stevin* 8.2 (2001), p. 181-207. ISSN : 1370-1444.
- [5] Veronica BAKER, Marcy BARGE et Jaroslaw KWAPISZ. « Geometric realization and coincidence for reducible non-unimodular pisot tiling spaces with an application to beta-shifts ». eng. In : *Annales de l'Institut Fourier* 56.7 (2006), p. 2213-2248. ISSN : 0373-0956.
- [6] Valérie BERTHÉ et Laurent VUILLON. « Tilings and rotations on the torus : a two-dimensional generalization of Sturmian sequences ». eng. In : *Discrete mathematics* 223.1 (2000), p. 27-53. ISSN : 0012-365X.
- [7] Vincent CANTERINI et Anne SIEGEL. « Geometric representation of substitutions of Pisot type ». eng. In : *Transactions of the American Mathematical Society* 353.12 (2001), p. 5121-5144. ISSN : 0002-9947.
- [8] Hiromi EI, Shunji ITO et Hui RAO. « Atomic surfaces, tilings and coincidences. II. Reducible case ». eng. In : *Annales de l'Institut Fourier* 56.7 (2006), p. 2285-2313. ISSN : 0373-0956.
- [9] G. H. HARDY et E. M. WRIGHT. *An introduction to the theory of numbers*. Oxford University Press, 1985.
- [10] MICHAEL HOLLANDER et BORIS SOLOMYAK. « Two-symbol Pisot substitutions have pure discrete spectrum ». eng. In : *Ergodic theory and dynamical systems* 23.2 (2003), p. 533-540. ISSN : 0143-3857.

- [11] Timo JOLIVET. « Combinatorics of Pisot Substitutions ». eng. Thèse de doct. Nov. 2013, p. 147.
- [12] Timo JOLIVET. « Méthodes combinatoires pour l'engendrement de plans discrets ». fr. Mém. de mast. École normale supérieure de Lyon, 2010.
- [13] M. LOTHAIRE. *Algebraic combinatorics on words*. eng. Encyclopedia of mathematics and its applications ; 90. Cambridge : Cambridge University Press, 2002. ISBN : 9780521812207.
- [14] M. LOTHAIRE. *Combinatorics on words*. eng. Second edition. Cambridge mathematical library. Cambridge : Cambridge University Press, 1983. ISBN : 0-511-56609-3.
- [15] R. Daniel MAULDIN et S. C. WILLIAMS. « Hausdorff Dimension in Graph Directed Constructions ». eng. In : *Transactions of the American Mathematical Society* 309.2 (1988), p. 811-829. ISSN : 0002-9947.
- [16] Gérard RAUZY. « Nombres algébriques et substitutions ». fr. In : *Bulletin de la Société Mathématique de France* 110 (1982), p. 147-178. DOI : 10.24033/bsmf.1957. URL : <http://archive.numdam.org/articles/10.24033/bsmf.1957/>.
- [17] Yuki SANO, Pierre ARNOUX et Shunji ITO. « Higher dimensional extensions of substitutions and their dual maps ». eng. In : *Journal d'analyse mathématique (Jerusalem)* 83.1 (2001), p. 183-206. ISSN : 0021-7670.
- [18] Anne SIEGEL et Jörg M. THUSWALDNER. « Topological properties of Rauzy fractals ». eng. In : *Mémoire de la Société mathématique de France* 1 (2009), p. 1-144. ISSN : 0249-633X.
- [19] Víctor F. SIRVENT et Yang WANG. « Self-affine tiling via substitution dynamical systems and Rauzy fractals ». eng. In : *Pacific journal of mathematics* 206.2 (2002), p. 465-485. ISSN : 0030-8730.
- [20] BORIS SOLOMYAK. « Dynamics of self-similar tilings ». eng. In : *Ergodic theory and dynamical systems* 17.3 (1997), p. 695-738. ISSN : 0143-3857.
- [21] Jörg Thuswaldner VALÉRIE BERTHÉ Anne Siegel. « Substitutions, Rauzy fractals and tilings ». eng. In : *Combinatorics, Automata and Number Theory*. T. 135. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 2010, p. 248-323. ISBN : 9780521515979.
- [22] Michel Rigo VALÉRIE BERTHÉ. « Preliminaries ». eng. In : *Combinatorics, automata, and number theory*. Encyclopedia of mathematics and its applications ; volume 135. Cambridge : Cambridge University Press, 2010. ISBN : 1-139-88662-2.