
La diversification d'un portefeuille d'actions individuelles américaines grâce au Bitcoin sous l'angle d'un investisseur domestique : analyse de l'impact sur le rendement et le risque.

Auteur : Culot, Maxence

Promoteur(s) : Pietquin, John

Faculté : HEC-Ecole de gestion de l'Université de Liège

Diplôme : Master en sciences de gestion, à finalité spécialisée en management général (Horaire décalé)

Année académique : 2022-2023

URI/URL : <http://hdl.handle.net/2268.2/17395>

Avertissement à l'attention des usagers :

Tous les documents placés en accès ouvert sur le site le site MatheO sont protégés par le droit d'auteur. Conformément aux principes énoncés par la "Budapest Open Access Initiative"(BOAI, 2002), l'utilisateur du site peut lire, télécharger, copier, transmettre, imprimer, chercher ou faire un lien vers le texte intégral de ces documents, les disséquer pour les indexer, s'en servir de données pour un logiciel, ou s'en servir à toute autre fin légale (ou prévue par la réglementation relative au droit d'auteur). Toute utilisation du document à des fins commerciales est strictement interdite.

Par ailleurs, l'utilisateur s'engage à respecter les droits moraux de l'auteur, principalement le droit à l'intégrité de l'oeuvre et le droit de paternité et ce dans toute utilisation que l'utilisateur entreprend. Ainsi, à titre d'exemple, lorsqu'il reproduira un document par extrait ou dans son intégralité, l'utilisateur citera de manière complète les sources telles que mentionnées ci-dessus. Toute utilisation non explicitement autorisée ci-avant (telle que par exemple, la modification du document ou son résumé) nécessite l'autorisation préalable et expresse des auteurs ou de leurs ayants droit.

La diversification d'un portefeuille d'actions individuelles américaines grâce au Bitcoin sous l'angle d'un investisseur domestique : analyse de l'impact sur le rendement et le risque

Promoteur :

John PIETQUIN

Lecteur(s) :

Gildas BLANCHARD

Travail de fin d'études présenté par

Maxence CULOT

en vue de l'obtention du diplôme de

Master en sciences de gestion, à finalité spécialisée
en management général

Année académique 2022/2023

Abstract

Avec la croissance exponentielle des cryptomonnaies, Bitcoin a été popularisé comme actif financier. Ce travail de fin d'études analyse l'impact de l'intégration de Bitcoin dans un portefeuille d'actions individuelles américaines dans le cadre d'un investisseur domestique.

Afin de quantifier cet impact, la théorie moderne du portefeuille est mise en pratique. Les portefeuilles optimaux maximisant le rendement atteignable pour un certain risque sont respectivement créés avec et sans Bitcoin. L'ensemble de ces portefeuilles optimaux forme les frontières efficientes.

En comparant les deux frontières efficientes obtenues, avec et sans Bitcoin, il apparaît que l'intégration de Bitcoin augmente le rendement moyen du portefeuille tout en conservant le même niveau de risque, ou de manière équivalente diminue le risque du portefeuille tout en conservant le même niveau de rendement. Il est donc bénéfique pour un investisseur d'allouer une partie de son portefeuille sur un actif tel que Bitcoin.

Enfin, ce travail analyse brièvement les limitations de l'interprétation de ces résultats en se basant sur les hypothèses considérées pour établir les portefeuilles efficientes.

Remerciements

La réalisation de ce travail de fin d'études n'aurait pas été possible sans l'aide précieuse de M. John Pietquin, mon promoteur. Je tiens à le remercier tout particulièrement pour son suivi, ses conseils ainsi que son partage d'expérience tout au long de cette année.

Enfin, je tiens également à remercier ma famille pour le soutien dont j'ai bénéficié pendant la réalisation de ce mémoire. De même, je remercie Marie-Laurence et André pour leur relecture approfondie et leurs précieux conseils.

Table des matières

1	Introduction	1
2	Revue de littérature.....	3
2.1	Théorie moderne du portefeuille	3
2.1.1	Origine et évolution	3
2.1.2	Principes de base	3
2.1.3	L'or comme actif de diversification	5
2.1.4	Limitations	5
2.2	Bitcoin	8
2.2.1	Historique et caractéristiques du Bitcoin	8
2.2.2	Bitcoin en tant qu'actif financier	9
2.2.3	Impacts environnementaux.....	14
3	Méthodologie.....	16
3.1	Évaluation des caractéristiques d'un portefeuille	16
3.1.1	Mesure du rendement d'un portefeuille diversifié.....	16
3.1.2	Mesure du risque d'un portefeuille diversifié	16
3.1.3	Concept de frontière efficiente	18
3.2	Construction des portefeuilles	20
3.2.1	Sélection des actifs	20
3.2.2	Nombre de positions	21
3.2.3	Profils d'investisseur.....	23
3.2.4	Horizon de temps	24
3.3	Données.....	25
3.4	Solveurs	28
4	Développement et résultats	30
4.1	Paramètres des portefeuilles d'actifs	30
4.2	Constitution de différents portefeuilles.....	36
4.2.1	Positionnement des actifs	36
4.2.2	Portefeuilles réalisables.....	38
4.2.3	Portefeuille équipondéré	40
4.3	Portefeuilles efficients.....	40
4.3.1	Frontière efficiente	40
4.3.2	Pondération des actifs	44
4.3.3	Instabilité du modèle.....	47
4.4	Sélection des portefeuilles par rapport au profil de l'investisseur	48
4.4.1	Profil prudent.....	48
4.4.2	Profil équilibré	48
4.4.3	Profil dynamique	49
4.5	Caractéristiques du Bitcoin	50
4.5.1	Bitcoin et loi normale	50
4.5.2	Évolution de la corrélation du Bitcoin	51
5	Discussions	55
6	Conclusion.....	57

7	<i>Bibliographie</i>	58
A.	<i>Annexe 1 – Codes Matlab</i>	63
B.	<i>Annexe 2 – Solveur Python</i>	65

Table des figures et tableaux

Figure 1 - Procédé d'investissement selon la théorie moderne du portefeuille (Fabozzi et al., 2002).....	4
Figure 2 - Mesure de l'asymétrie d'une variable (Taylor, 2023).....	6
Figure 3 - Représentation symbolique d'un bitcoin.....	8
Figure 4 – Évolution de la capitalisation de Bitcoin (Bitcoin Price, 2023)	9
Figure 5 - Volatilité journalière du Bitcoin, ETH et S&P500, exprimée en logarithme (Thorn, 2021).....	10
Figure 6 – Évolution de la quantité de bitcoins (Hertig, 2022).....	12
Figure 7 – Impact du halving sur le cours du Bitcoin (Hertig, 2022)	13
Figure 8 - La frontière efficiente (Lang, 2019).....	19
Figure 9 - Répartitions des classes d'actifs (Brock, 2023).....	20
Figure 10 - Répartition sectorielle Nasdaq/S&P500.....	21
Figure 11 - Risque spécifique et risque systématique (Brealey et al., 2006)	22
Figure 12 - Évolution du prix des actifs (échelle logarithmique)	26
Figure 13 – Évolution normalisée du prix des actifs	27
Figure 14 - Évolution du rendement mensuel des actifs [%]	31
Figure 15 - Rendement annuel moyen [%]	32
Figure 16 - Volatilité moyenne [%]	33
Figure 17 - Matrice de corrélation.....	34
Figure 18 - Positionnement des actifs	37
Figure 19 - Portefeuilles réalisables.....	39
Figure 20 - Frontière efficiente sans Bitcoin.....	40
Figure 21 - Frontière efficiente avec Bitcoin.....	41
Figure 22 - Comparaison de la frontière efficiente avec et sans Bitcoin	42
Figure 23 - Comparaison de la performance d'Amazon par rapport à la frontière efficiente .	43
Figure 24 - Distribution de la pondération des actifs en fonction du rendement	45
Figure 25 - Distribution de la pondération des actifs en fonction du risque	46
Figure 26 - Instabilité du modèle d'optimisation.....	47
Figure 27 - Densité de probabilité des rendements mensuels du Bitcoin.....	50
Figure 28 - Évolution de la corrélation entre Bitcoin et l'indice S&P500.....	52
Tableau 1 - Profils d'investisseurs.....	23
Tableau 2 - Actifs constituant le portefeuille	25
Tableau 3 - Rendement et volatilité des actifs	36
Tableau 4 - Pondération aléatoire pour un portefeuille.....	38
Tableau 5 - Rendement-volatilité d'un investisseur prudent	48
Tableau 6 - Rendement-volatilité d'un investisseur équilibré	49
Tableau 7 - Rendement-volatilité d'un investisseur dynamique	49

1 Introduction

Les cryptomonnaies ont révolutionné le paysage financier en offrant de nouvelles perspectives d'investissement. Parmi ces cryptomonnaies, Bitcoin a acquis une renommée mondiale en tant que pionnier et leader du marché. Son ascension fulgurante a suscité un intérêt croissant des investisseurs cherchant à diversifier leurs portefeuilles traditionnels.

Ce travail de fin d'études se concentre sur la mesure de l'impact d'intégration du Bitcoin dans un portefeuille diversifié d'actions individuelles américaines. Il analyse les effets de cette intégration sur le rendement et le risque du portefeuille.

Le développement de ce sujet est motivé par l'intérêt grandissant pour les cryptomonnaies en tant qu'actif financier combiné avec la volonté de diversifier toujours plus les portefeuilles d'actions par de nouveaux actifs prometteurs. Pour ce faire, les performances de portefeuilles diversifiés avec et sans Bitcoin seront analysées. La comparaison de ces performances, tant en termes de rendement que de risque, permettra de dégager dans quelle mesure l'ajout de Bitcoin peut impacter positivement le portefeuille diversifié d'un investisseur domestique. Enfin, ces résultats fourniront des informations clés pour les investisseurs afin d'optimiser leur stratégie d'allocation sur l'actif qu'est Bitcoin.

Le corps de ce travail de fin d'études est séparé en quatre chapitres distincts. La première partie concerne une revue de la littérature existante. Celle-ci permet de poser le cadre de la théorie du portefeuille, ainsi que d'expliquer l'utilité de Bitcoin dans cette étude. La seconde partie est relative à la méthodologie utilisée tout au long de ce travail. Elle se base sur la théorie du portefeuille pour construire les portefeuilles optimaux d'actifs. La troisième partie analyse quant à elle le développement et les résultats obtenus. Enfin, la dernière partie est une discussion sur les résultats et les limitations sous-jacentes de ce travail.

2 Revue de littérature

2.1 Théorie moderne du portefeuille

2.1.1 Origine et évolution

La théorie moderne du portefeuille a été construite en 1952. Cette théorie est une approche d'optimisation basée sur deux critères, la moyenne et la variance. Pour un actif, ces deux critères sont calculés sur base de ses rendements. Elle permet de dégager la pondération optimale des différents actifs constitutifs du portefeuille, soit en minimisant le risque pour l'ensemble des rentabilités atteignables, soit en maximisant la rentabilité pour l'ensemble des niveaux de risque possibles (Markowitz, 1952).

Depuis lors, de nouveaux concepts et optimisations ont été apportés à cette théorie de base pour évaluer le risque et calculer les performances d'un portefeuille diversifié de manière plus complexe. D'autres méthodes afin de calculer la variance de chaque actif ainsi que la matrice de covariance ont été appliquées pour améliorer le modèle de Markowitz (Lee & Eid Junior, 2018). Parmi ces méthodes, il est possible de citer la semi-variance, qui mesure la dispersion des rendements inférieurs à la moyenne. Elle mesure donc uniquement le risque d'un potentiel de baisse d'un actif (Kenton, 2022). Une autre méthode de calcul de la variance utilisée par les investisseurs et les banques commerciales est la valeur à risque, communément abrégée VaR. La VaR quantifie quant à elle le risque comme étant une combinaison de la perte maximale associée à l'actif sur une période donnée avec la probabilité que la perte se produise (Kenton, 2023). Cependant, la théorie moderne du portefeuille de Markowitz reste à ce jour celle appliquée dans les différents domaines de la finance de par sa simplicité d'utilisation ainsi que sa précision (Fabozzi et al., 2002).

2.1.2 Principes de base

L'objectif de tout investisseur est de maximiser le rendement de son capital tout en respectant un certain niveau de risque ou bien de minimiser son niveau de risque pour un certain rendement attendu. Pour ce faire, la composition d'un portefeuille diversifié selon Markowitz (1952) permet d'optimiser la pondération des actifs menant au meilleur compromis entre le rendement et le risque (Lafrance, 1983). Le risque d'un portefeuille est défini comme la variance de ses rendements, ainsi que des corrélations entre ses actifs. Sur base de ces éléments, en ajoutant des contraintes sur la sélection des actifs, il est possible de déterminer un portefeuille optimisé (Markowitz, 1952).

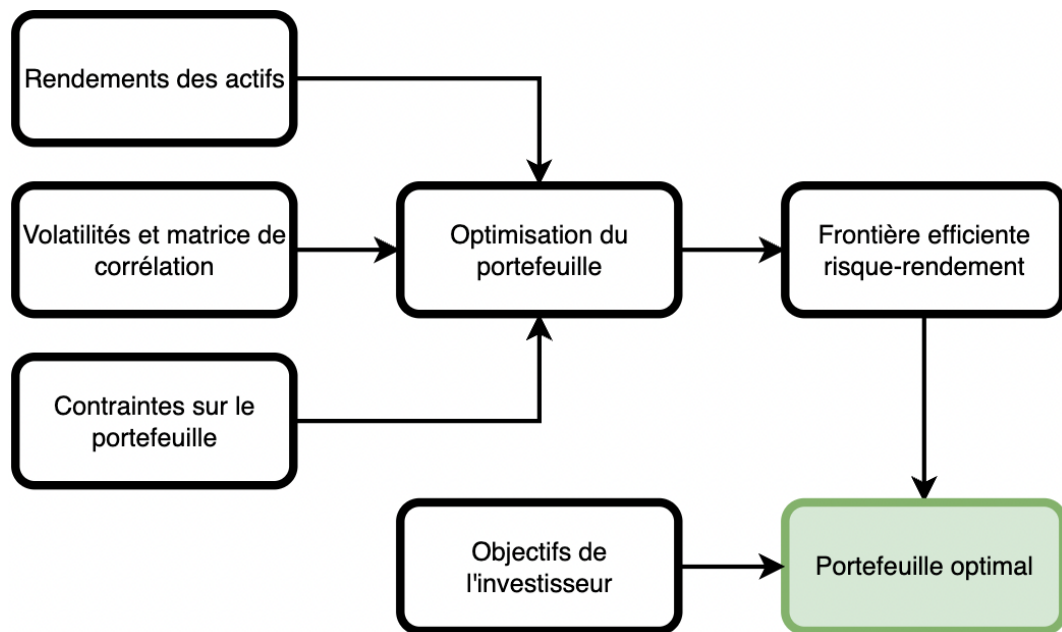


Figure 1 - Procédé d'investissement selon la théorie moderne du portefeuille (Fabozzi et al., 2002)

La théorie moderne du portefeuille se base sur plusieurs hypothèses, la première étant l'aversion au risque des investisseurs. En effet, pour un même niveau de rendement, l'investisseur préférera toujours le portefeuille impliquant le moins de risque. De même, pour un même niveau de risque, l'investisseur préférera le portefeuille offrant le plus grand rendement (Holovatiuk, 2020). Ensuite, elle suppose que tous les investisseurs ont le même horizon temporel long terme, et que chacun d'entre eux possède un portefeuille dit de Markowitz. Elle suppose aussi que le risque d'un actif est mesuré par la variance de ses rendements. Ce niveau de risque ainsi que la rentabilité de l'actif sont considérés comme étant les deux seuls facteurs de décision. En outre, les frais d'achat et/ou de vente ne sont pas considérés dans ce modèle (Poncet & Portait, 2009). Enfin, elle repose sur l'efficacité des marchés financiers, c'est-à-dire que le prix d'un actif reflète toute l'information disponible au sujet de l'actif en question (Dimson & Mussavian, 2000).

Cette théorie met en avant les avantages de la diversification. En effet, pour un même niveau de rendement, le risque d'un portefeuille diversifié est inférieur ou égal à celui des actifs pris indépendamment. Tout l'intérêt de la diversification est donc de réduire le risque d'un portefeuille pour un même niveau de rendement. Cet impact est d'autant plus grand si les actifs ne sont pas ou peu corrélés entre eux. En effet, si un actif subit une correction, cette perte peut être atténuée ou compensée par d'autres actifs faiblement corrélés, non corrélés ou négativement corrélés. De cette manière, la volatilité, autrement dit le risque, de chaque

actif n'intervient pas directement sur le portefeuille mais contribue au niveau du risque global de celui-ci en lien avec les autres actifs (Yu, 2008). Pour prendre l'exemple d'un portefeuille constitué de deux actifs peu corrélés, le risque du portefeuille contenant ces deux actifs sera inférieur à celui d'un portefeuille contenant un seul de ces actifs. Dans un portefeuille diversifié idéal, les différents actifs constitutifs ne sont pas corrélés entre eux (Cheng, 2018).

2.1.3 L'or comme actif de diversification

Dans l'étude de la constitution de portefeuilles, l'or a toujours été considéré comme un actif majeur contribuant à la diversification. En effet, le coefficient de corrélation de l'or avec le S&P500 en fait un excellent actif de couverture, communément appelé *hedge* en anglais. Le terme *hedge* signifie que l'actif est non corrélé voir négativement corrélé en moyenne (Miyazaki & Hamori, 2016). De manière plus nuancée, un *safe haven* est quant à lui un actif non corrélé voir négativement corrélé uniquement dans les périodes auxquelles les marchés sont tourmentés (Chen, 2023). A contrario, un diversificateur est un actif positivement corrélé en moyenne avec les autres actifs du portefeuille (Segal, 2022).

Dans le cas de l'or, il a été depuis des siècles utilisé comme couverture lors des incertitudes économiques. L'or sert aussi de réserve de valeur, ce qui se confirme par la détention de volumes conséquents d'or par les banques centrales du monde entier. À titre d'exemple, le coefficient de corrélation entre l'or et l'indice Standard & Poor's 500 est de $-0,03$ pour la période allant de 1976 à 2004 (Hillier et al., 2006).

Enfin, il a été démontré que les portefeuilles constitués d'or performaient mieux en moyenne en permettant de réduire le risque systématique, particulièrement dans les périodes de crise économique (McCown & Zimmerman, 2006).

2.1.4 Limitations

Bien que la théorie moderne de Markowitz (1952) soit simple et explicite, elle présente néanmoins plusieurs limitations majeures.

La première d'entre elles est l'hypothèse que la distribution des rendements d'un actif suive une loi normale centrée autour de la moyenne. Cette hypothèse présente des limites car la distribution des rentabilités de la majorité des actifs ne correspond pas à cette loi normale, particulièrement dans les marchés émergents, tels que les cryptomonnaies auxquelles appartient Bitcoin. Plus la distribution réelle des rendements s'écarte d'une distribution

normale, plus l'hypothèse moyenne-variance s'avère inexacte pour représenter le comportement d'un actif, et donc les résultats provenant de ce modèle sont erronés. Cependant, en prenant en considération les moments d'ordre 3 et 4 de la distribution des rendements, respectivement appelés coefficient d'asymétrie et coefficient d'aplatissement, il est possible de rendre compte de ces variations et d'optimiser la précision du modèle [Figure 2] (Jondeau & Rockinger, 2006). Toutefois, même en intégrant cette caractéristique dans le modèle, avec une pondération adéquate, cette limitation peut être atténuée mais pas complètement solutionnée (Kaut et al., 2007).

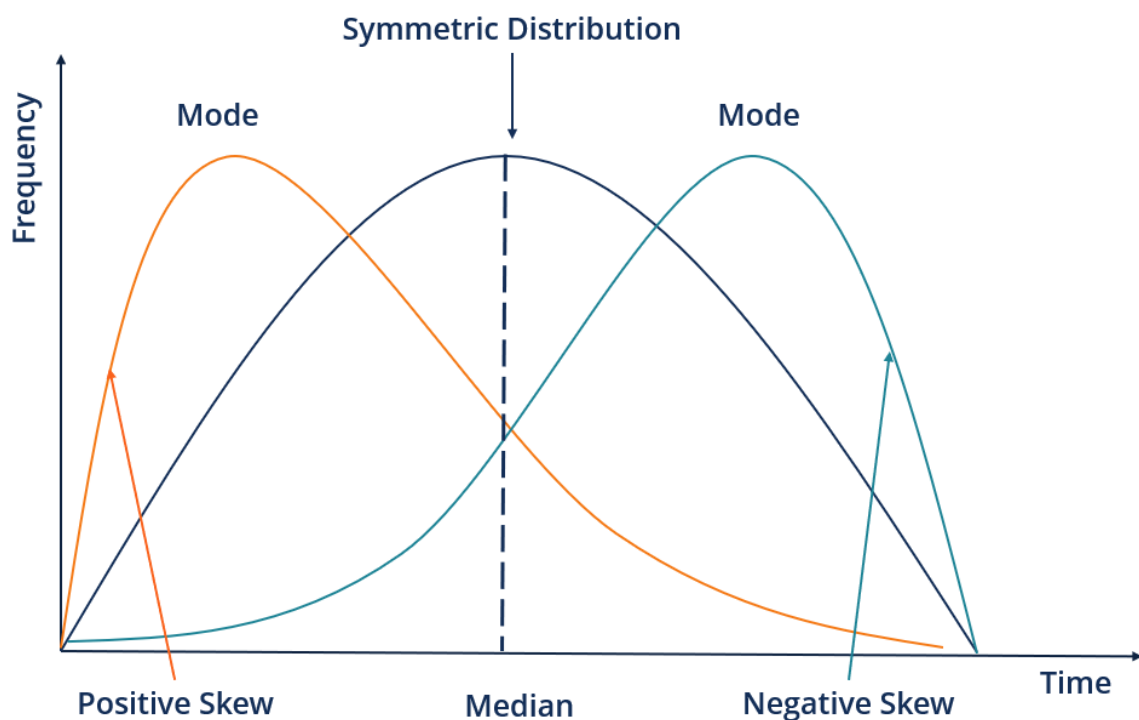


Figure 2 - Mesure de l'asymétrie d'une variable (Taylor, 2023)

La deuxième limitation majeure est que ce modèle se base sur des données historiques de rendement, et ces données ne représentent pas nécessairement le futur de l'actif en question. Cette limitation n'apparaît pas uniquement dans la théorie du portefeuille, mais également dans de nombreuses théories s'appuyant sur les performances passées pour en dégager des tendances et faire des projections pour des performances futures. La variation entre les rendements attendus et les rendements réels peut donc avoir un impact significatif, impact encore plus grand si l'horizon de temps d'investissement n'est pas suffisamment long. De la même manière, les différentes corrélations entre les actifs ne sont pas figées dans le temps, et leur fluctuation aura donc une conséquence sur la pondération du portefeuille (Maupas, 2007). Selon Stephen Figlewski (1994), les projections futures sont d'autant plus précises que les données sont reprises dans un intervalle de temps suffisamment long. De plus, cette

limitation peut être mitigée car l'amplitude des erreurs diminue au fur et à mesure que les projections établies sont réalisées avec un objectif long terme (Figuewski, 1994).

Enfin, les anomalies comportementales influencent nécessairement les choix de l'investisseur. L'aversion aux pertes justifie la déformation des probabilités objectives. Quand le cours d'un actif s'effondre, les investisseurs succombent bien souvent à leurs émotions, indépendamment des probabilités mathématiques mises en place dans leur stratégie. De même, lors d'une forte croissance, l'euphorie tend à modifier le comportement supposé rationnel de l'investisseur. Pour finir, bien que le risque puisse être mathématiquement défini, sa perception est variable en fonction des investisseurs et de leur situation. Il est encore une fois à noter que cette limitation n'est pas propre à la théorie moderne du portefeuille, mais bien à l'ensemble des modèles mathématiques d'investissement (Broihanne et al., 2006).

2.2 Bitcoin

2.2.1 Historique et caractéristiques du Bitcoin

Créé en 2008 par un individu ou un groupe de personnes sous le pseudonyme de Satoshi Nakamoto, Bitcoin est une cryptomonnaie, c'est-à-dire une monnaie numérique qui utilise des techniques de cryptographie pour sécuriser et vérifier les transactions ainsi que pour la création de nouvelles unités de monnaie (Doumenis et al., 2021). Il prend ses racines dans les années 2008 au moment de la crise de confiance envers les institutions bancaires et financières où les banques proposaient aux particuliers des prêts à taux variables ne pouvant qu'augmenter et mener à la catastrophe, se traduisant par la crise des subprimes, en combinaison d'une forte impression monétaire (Bakry et al., 2021).

Le concept initial de Bitcoin a été présenté dans un livre blanc publié par Nakamoto (2008), intitulé "Bitcoin: A Peer-to-Peer Electronic Cash System". Ce document décrit un système de paiement en ligne décentralisé qui utilise une technologie de registre distribué appelée la blockchain pour enregistrer les transactions de manière sécurisée et transparente. Ce registre de paiement décentralisé permet à deux parties s'accordant sur une transaction de procéder à celle-ci sans nécessiter l'intervention d'une tierce partie de confiance telle qu'une banque ou une institution financière (Nakamoto, 2008).



Figure 3 - Représentation symbolique d'un bitcoin

Contrairement aux monnaies traditionnelles, Bitcoin n'est pas contrôlé par une banque centrale ou une institution financière. Au lieu de cela, les transactions sont validées par un réseau de pairs (utilisateurs) qui utilisent des ordinateurs pour vérifier les transactions et ajouter de nouveaux blocs à la blockchain (Garriga et al., 2018).

2.2.2 Bitcoin en tant qu'actif financier

Depuis sa création, la capitalisation du Bitcoin a subi une croissance exponentielle au cours des années. En 2018, soit près de dix ans après sa création, sa capitalisation s'élevait à 116 milliards de dollars américains, en mai 2021 celle-ci représentait pas loin de 700 milliards de dollars (Yi et al., 2018). En considérant l'émission de bitcoins limitée à 21 millions, Bitcoin a le potentiel pour être une réserve de valeur et un actif permettant d'être une couverture contre les crises économiques ainsi que l'inflation constante. Cependant, il convient de nuancer cette affirmation car bien que la quantité limitée de bitcoins puisse les rendre précieux, leur valeur reste sujette à la volatilité et peut être affectée par l'offre et la demande, les réglementations en vigueur, etc. En outre, l'utilisation de bitcoins comme couverture contre les crises économiques et l'inflation n'est pas garantie ; et ce, dépendant des politiques monétaires des gouvernements ainsi que de l'évolution des marchés financiers (Bakry et al., 2021).

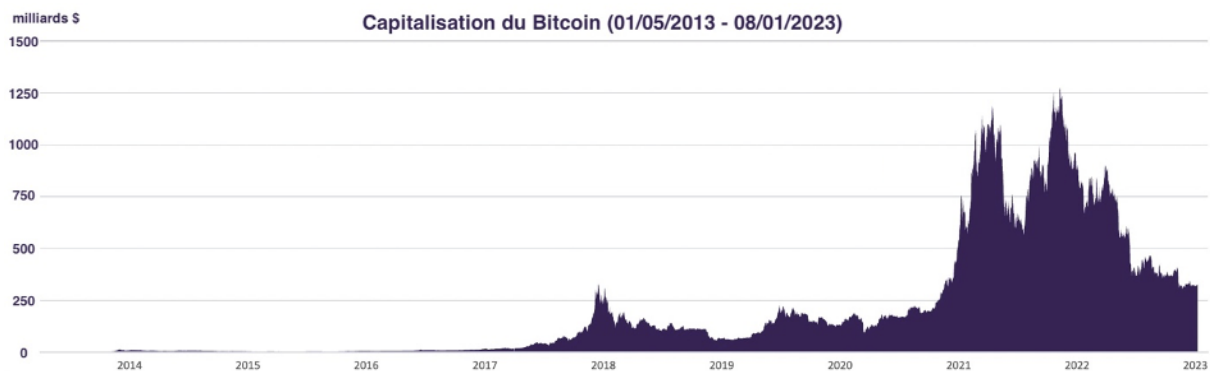


Figure 4 – Évolution de la capitalisation de Bitcoin (*Bitcoin Price*, 2023)

La croissance de la place des cryptomonnaies sur les marchés financiers a attiré l'intérêt d'économistes et académiciens voulant évaluer la possibilité pour le Bitcoin d'être inclus dans des portefeuilles d'actifs (Bouoiyour & Selmi, 2015; Eisl et al., 2015). Certaines analyses montrent que l'ajout de bitcoins dans un portefeuille diversifié tend à avoir un impact positif sur le ratio rendement/risque du portefeuille. En effet, l'augmentation du rendement compense sa volatilité plus élevée que les autres actifs traditionnels (Kajtazi & Moro, 2019).

La forte volatilité du Bitcoin en fait un actif très risqué dans le portefeuille d'un investisseur. Elle est significativement plus élevée que la volatilité de l'or, des paires de devises ainsi que des actions composant le S&P500, indice de référence. Cet écart de volatilité avec d'autres actifs plus traditionnels est aussi dû à la relative nouveauté du marché des cryptomonnaies, encore sujet à de fréquentes crises systémiques ainsi qu'à l'éclatement de bulles spéculatives

(Pichl & Kaizoji, 2017). À titre de comparaison, voici une figure représentant la volatilité du Bitcoin et de l'Ethereum, une autre cryptomonnaie, par rapport au S&P500 :

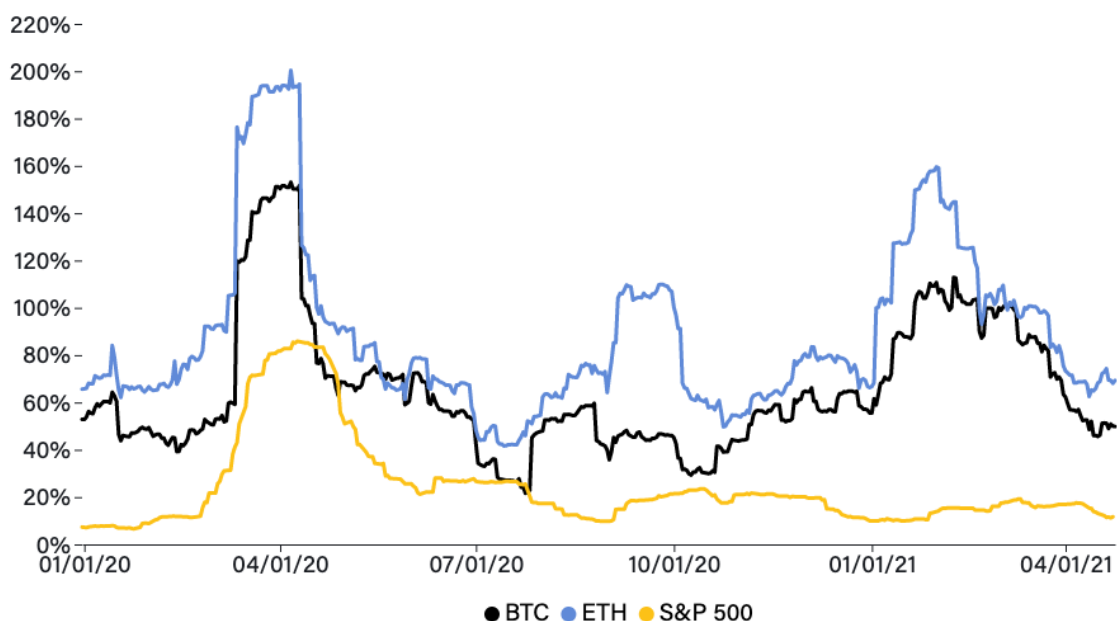


Figure 5 - Volatilité journalière du Bitcoin, ETH et S&P500, exprimée en logarithme (Thorn, 2021)

Un autre atout majeur en faveur de l'intégration de bitcoins dans un portefeuille d'actifs diversifiés est sa faible corrélation avec les actifs conventionnels (Cheng, 2018). En effet, le marché relatif aux cryptomonnaies fonctionnant dans un autre narratif que le marché économique, la corrélation avec les autres actifs conventionnels est proche de zéro pour la période concernant 2013 à 2017 (Bouri et al., 2017). Il est toutefois à noter que cette propriété n'est pas constante au cours du temps et était dans ce cas précis spécifique à la période de 2013 coïncidant avec l'explosion de la popularité du Bitcoin. De plus amples données temporelles seraient requises pour pouvoir valider cette hypothèse (Kajtazi & Moro, 2019).

Étant donné que les coefficients de corrélation sont positifs et faibles, Bitcoin peut donc servir de diversificateur dans un portefeuille. L'ajout de bitcoins en tant que diversificateur permet donc de réduire le risque global d'un portefeuille tout en suivant la tendance de fond du dit portefeuille. Cela s'explique par le fait que le Bitcoin est une alternative d'investissement aux matières premières (Stensås et al., 2019).

De plus, le contexte économique incertain a renforcé les perspectives du Bitcoin en tant que refuge économique (Dyhrberg, 2016b). Cependant, il est important de faire remarquer que de nombreux auteurs sont en désaccord sur la caractérisation du Bitcoin comme un diversificateur (Dyhrberg, 2016a; Smales, 2019). En effet, la corrélation de Bitcoin avec les autres actifs du marché est dépendante de l'évolution de Bitcoin, de la réglementation autour des cryptomonnaies ainsi que du type de crise auquel le monde économique doit faire face. À titre d'exemple, Bitcoin a agi comme safe haven durant le krach de 2015 sur la bourse de Shanghai, alors qu'il se caractérise comme étant un diversificateur dans la moyenne des cas (Stensås et al., 2019). La caractérisation de Bitcoin en tant que diversificateur, safe haven ou couverture est aussi dépendante des actifs auxquels Bitcoin est comparé. En effet, en prenant Bitcoin par rapport aux cent plus grandes capitalisations de la bourse de Londres, il agit comme un hedge, à savoir comme actif de couverture de par sa corrélation négative avec ces autres actifs (Dyhrberg, 2016b).

Pour de nombreux économistes, une bonne partie de la considération de Bitcoin comme un actif financier crédible provient de son émission limitée. En effet, il n'y aura jamais plus de 21 millions de bitcoins. Cette limite, fixe et immuable, est due au mécanisme de minage du Bitcoin. Pour expliquer ce phénomène, un bloc agrégeant toutes les transactions sur le réseau est miné approximativement toutes les 10 minutes. En récompense du travail fourni les mineurs reçoivent des bitcoins qui sont nouvellement émis. Cependant, chaque 210'000 blocs, la quantité de récompenses, et donc de bitcoins émis, est divisée par deux (Denisova et al., 2019; Meynkhhard, 2019).

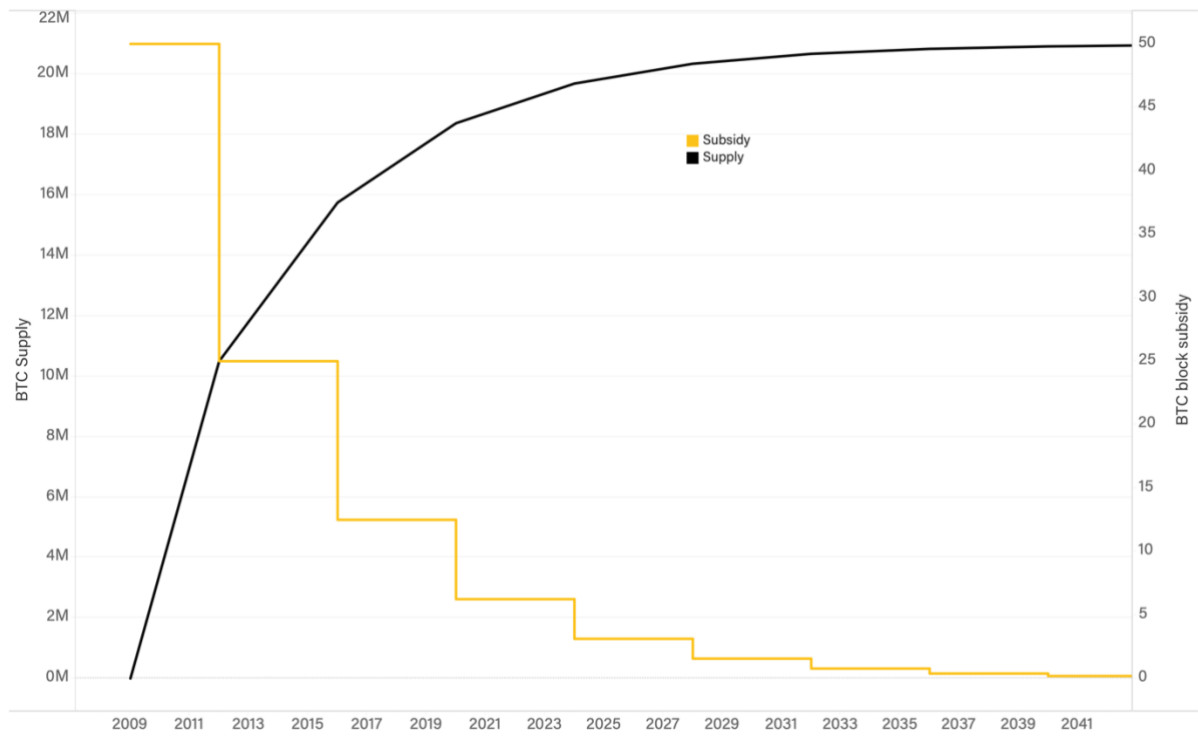


Figure 6 – Évolution de la quantité de bitcoins (Hertig, 2022)

Cet évènement où l'émission de bitcoin est réduite de moitié s'appelle le *halving*. Cet halving a un impact tout particulier sur le cours du Bitcoin. En effet, la logique voudrait qu'à la suite d'un halving le prix du bitcoin augmente fortement, étant donné que la quantité libérée devient plus faible, en considérant une demande stable ou croissante. Cependant, les faits démontrent que cette augmentation de prix n'apparaît pas précisément le jour du halving. En effet, sur les marchés financiers, il est considéré que tout ce qui relève de l'information publique est déjà reflété dans le prix. Une estimation précise de la date du halving est anticipable et donc le prix avant, pendant et après le halving prend déjà en compte cette donnée (Schär, 2020).

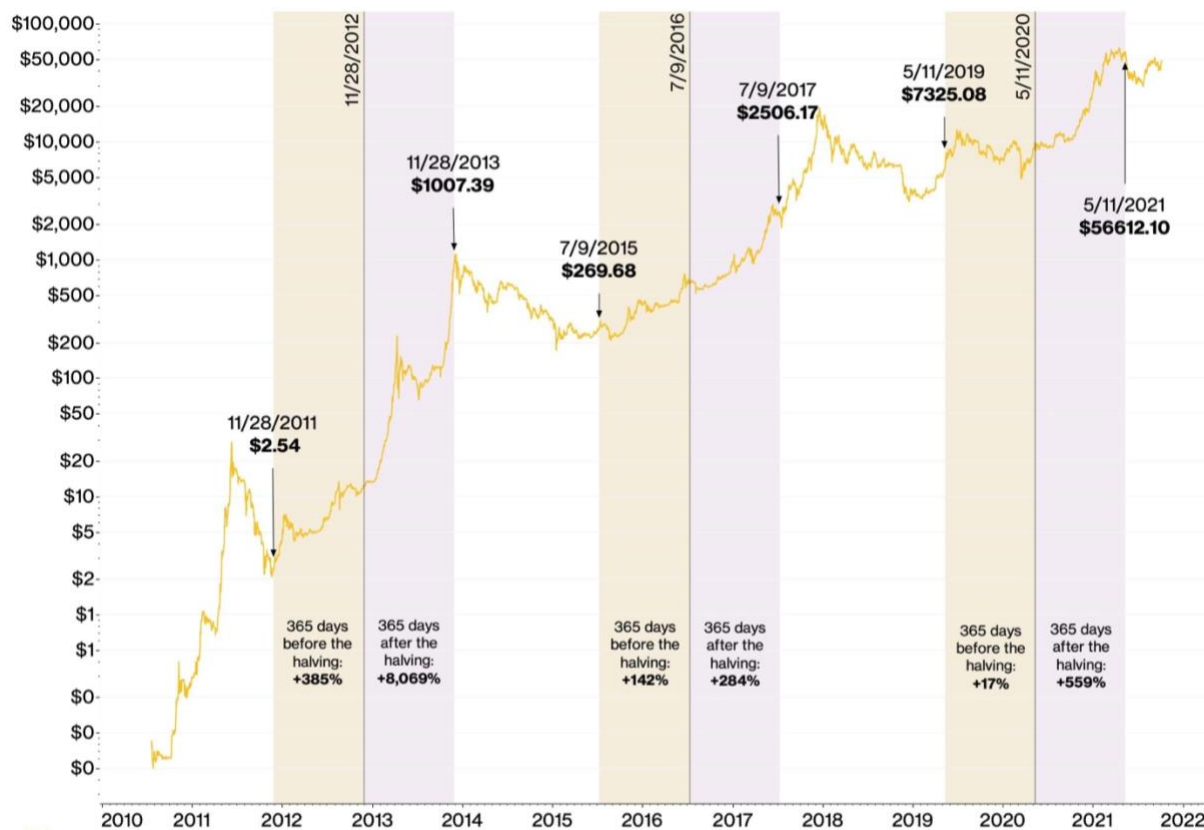


Figure 7 – Impact du halving sur le cours du Bitcoin (Hertig, 2022)

Bien que l'impact du halving ne soit pas direct, en prenant un intervalle d'une année de part et d'autre de la date effective d'un halving, le cours du Bitcoin connaît une forte hausse. Cependant, cette hausse de prix en pourcentage tend à diminuer au fur et à mesure des halvings ainsi que de la croissante maturité du Bitcoin (Hertig, 2022).

Il est toutefois important de rappeler que d'autres auteurs considèrent le Bitcoin et les cryptomonnaies de manière générale comme une bulle spéculative et non comme un actif propre à se trouver des portefeuilles d'investisseurs (Frank et al., 2017; Kreuser & Sornette, 2018; Platt et al., 2017). Certains académiciens avancent que le Bitcoin ne remplit aucun rôle auquel on peut l'attribuer, à savoir ni la fonction de monnaie, ni de moyen d'échange ou de réserve de valeur (Yermack, 2015).

2.2.3 Impacts environnementaux

Afin de sécuriser le réseau et d'ajouter de nouveaux blocs de transactions, le minage des bitcoins nécessite la résolution de calculs complexes via des ordinateurs. Ces ordinateurs, fonctionnant en permanence, consomment beaucoup d'électricité, et par conséquent sont de gros émetteurs de gaz à effet de serre. En 2020, la consommation électrique nécessaire à la sécurisation du réseau Bitcoin représentait 132,48 TWh, selon une étude menée par l'Université de Cambridge, et est en constante augmentation (Paul, 2022).

Malgré l'ampleur de ces chiffres, il faut prendre en compte que cette énergie n'est pas gaspillée mais est utilisée afin d'apporter de la valeur aux utilisateurs de l'écosystème. Certaines études montrent que les impacts négatifs du Bitcoin sur l'environnement seraient compensés par son utilité, tant comme moyen d'échange que de réserve de valeur, comparée au minage d'or (Badea & Mungiu-Pupăzan, 2021). De plus, l'impact sociétal est aussi à relativiser en regard de celui de la finance traditionnelle (Cocco et al., 2019). A cela s'ajoute l'intérêt des mineurs de cryptomonnaies à utiliser des sources d'électricité renouvelable, car celles-ci sont celles coûtant le moins cher et donc ayant un impact positif direct sur leur rentabilité. Avant de se faire bannir de la Chine à l'été 2021, de nombreux mineurs installaient leur équipement à côté des barrages hydrauliques afin de profiter de l'énergie renouvelable et peu chère. À ce moment, près de 40% de la consommation énergétique provenait de ressources renouvelables (Jones et al., 2022).

3 Méthodologie

3.1 Évaluation des caractéristiques d'un portefeuille

La performance du portefeuille diversifié est définie comme la combinaison de deux caractéristiques, son niveau de rendement ainsi que son risque.

3.1.1 Mesure du rendement d'un portefeuille diversifié

Le rendement d'un actif est calculé comme étant la différence entre le prix de l'actif au temps $t+1$ et le prix de l'actif au temps t , par rapport au prix de l'actif au temps t . Mathématiquement, cela donne la formulation suivante :

$$R_i = \frac{P_{t+1} - P_t}{P_t} \quad (1)$$

où

- R_i est le rendement de l'actif i sur la période $t \rightarrow t+1$,
- P_{t+1} est le prix de l'actif i au temps $t+1$,
- P_t est le prix de l'actif i au temps t ,

Pour un portefeuille composé de plusieurs actifs, le rendement global du portefeuille est calculé comme la somme du rendement de chacun de ses actifs proportionnellement au poids de chaque actif dans le portefeuille (Markowitz, 1952):

$$R_p = \sum_i w_i R_i \quad (2)$$

où

- R_p est le rendement global du portefeuille p ,
- R_i est le rendement de l'actif i ,
- w_i est la pondération de l'actif i dans le portefeuille p .

3.1.2 Mesure du risque d'un portefeuille diversifié

La mesure du risque d'un actif, aussi appelée volatilité, se définit par sa variance. Elle quantifie l'importance des fluctuations autour de la moyenne du rendement. Mathématiquement, cela donne la formulation suivante :

$$\sigma_i^2 = \frac{\sum_i^N (R_i - \bar{R})^2}{N} \quad (3)$$

où

- σ_i^2 est le risque de l'actif i ,
- R_i est le rendement de l'actif i ,
- \bar{R} est le rendement moyen de l'actif i ,
- N est le nombre d'échantillon de rendement de l'actif i .

Afin de calculer le niveau de risque global du portefeuille, il faut définir la corrélation entre deux actifs. Cette corrélation se définit au moyen de la covariance. Mathématiquement, cela se traduit par :

$$\sigma_{A,B} = \frac{\sum_i^N (A_i - \bar{A}) * (B_i - \bar{B})}{N} \quad (4)$$

où

- $\sigma_{A,B}$ est la covariance entre l'actif A et l'actif B,
- A_i est le rendement de l'actif A,
- \bar{A} est le rendement moyen de l'actif A,
- B_i est le rendement de l'actif B,
- \bar{B} est le rendement moyen de l'actif B,
- N est le nombre d'échantillons de rendement de l'actif A et de l'actif B.

En prenant en compte un portefeuille de plusieurs actifs, le risque global du portefeuille est quant à lui défini comme suit (Markowitz, 1952) :

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1} \sum_{j=1} w_i w_j \sigma_{i,j} \quad (5)$$

Où

- σ_p^2 est le risque du portefeuille p ,
- σ_{ij} est la covariance entre l'actif i et l'actif j ,
- σ_{ii} est l'écart-type de l'actif i ,
- σ_{jj} est l'écart-type de l'actif j ,
- w_i est la pondération de l'actif i dans le portefeuille p ,
- w_j est la pondération de l'actif j dans le portefeuille p .

Dans le cadre de ce travail, la notion de volatilité utilisée réfèrera à l'écart-type des rendements, à savoir la racine carrée de la variance mentionnée ci-dessus. Enfin, il a été choisi d'utiliser la variance du portefeuille comme caractérisant le risque. D'autres études ont fait la comparaison de cette mesure du risque avec d'autres méthodes plus complexes telles que la semi-variance, VaR, GARCH, etc (Chan et al., 1999; Roman & Mitra, 2009). La conclusion générale est que la variance comme simple mesure du risque est la méthode retenue encore à l'heure actuelle par les praticiens, ce qui justifie ce choix méthodologique (Lee & Eid Junior, 2018).

3.1.3 Concept de frontière efficiente

En faisant varier les valeurs des poids pondérés de chaque actif dans le portefeuille, il est possible de créer un ensemble de portefeuilles réalisables. Chaque portefeuille est ainsi constitué d'un couple rendement-volatilité. Parmi ceux-ci, en optimisant la sélection des actifs, à savoir leur pondération, il est possible de déterminer un sous-ensemble de portefeuilles appelés portefeuilles efficients.

Les portefeuilles efficients sont donc ceux présentant la plus petite variance possible pour une rentabilité donnée ou bien la plus grande rentabilité possible pour une variance donnée. L'ensemble de ces portefeuilles réalisables forme la frontière efficiente (Poncet & Portait, 2009). Elle est calculée comme suit :

$$\min \sigma_p^2 \text{ sous les contraintes : } \sum_i w_i = 1, 0 \leq w_i \leq 1 \text{ et } R_p = \dots \quad (6)$$

ou comme suit :

$$\text{Max } R_p \text{ sous les contraintes : } \sum_i w_i = 1, 0 \leq w_i \leq 1 \text{ et } \sigma_p^2 = \dots \quad (7)$$

Afin de trouver les portefeuilles efficients, ces deux formulations sont valables en prenant l'hypothèse que seuls le rendement et la volatilité, représentée par la variance, sont les deux uniques paramètres influençant le choix de l'investisseur.

Les inconnues de ces problèmes d'optimisation, étant le vecteur w_i , représentent le poids de l'actif i dans le portefeuille p . Lorsque la variance cherche à être minimisée, le rendement attendu du portefeuille doit être une contrainte. De même, lorsque le rendement cherche à être maximisé, la variance maximale attendue doit être une contrainte du problème.

Graphiquement, l'ensemble des points de l'espace représentant un portefeuille efficient réalisable forme une courbe appelée frontière efficiente [Figure 8].

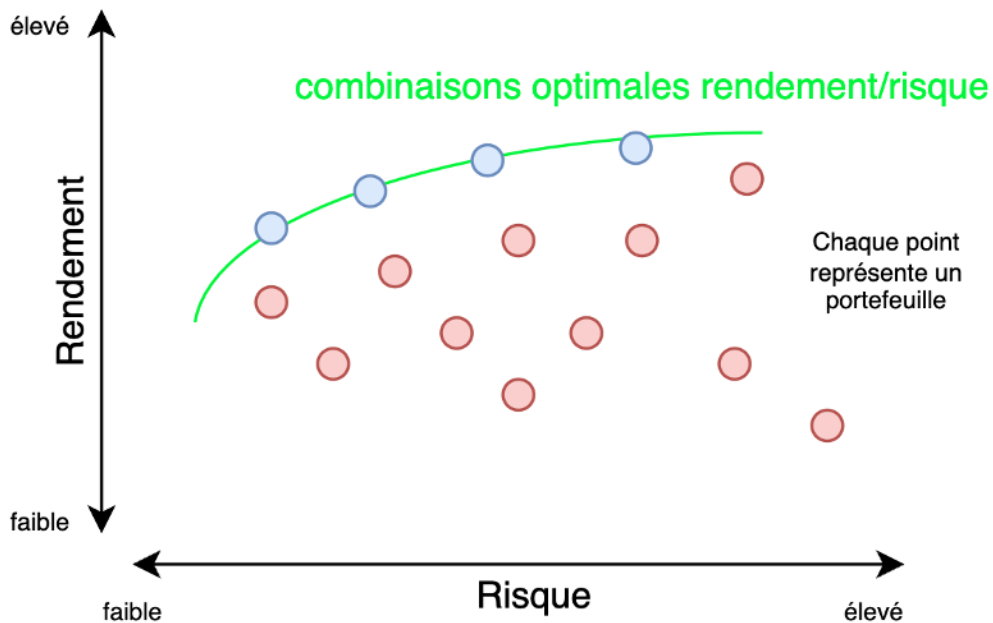


Figure 8 - La frontière efficiente (Lang, 2019)

Chaque portefeuille présent sur cette courbe est donc optimal. Afin de choisir l'unique portefeuille optimal, il faut croiser cette frontière efficiente avec les attentes et le profil de l'investisseur. Ces attentes peuvent être représentées sous la forme d'une courbe d'indifférence. Cette courbe représente l'ensemble des portefeuilles avec un couple rendement-volatilité qui satisfait l'investisseur. En croisant cette courbe avec la frontière efficiente, il est possible de déterminer le portefeuille idéal de l'investisseur.

3.2 Construction des portefeuilles

3.2.1 Sélection des actifs

Afin de construire un portefeuille diversifié, il est important de choisir quels seront les actifs constituant ledit portefeuille. Parmi les types d'actifs existants, ceux principalement utilisés par les investisseurs sont : les actions individuelles, les bons du Trésor, le Forex, les matières premières, l'immobilier, les placements alternatifs tels que les cryptomonnaies, etc (Krückeberg & Scholz, 2019).



Figure 9 - Répartitions des classes d'actifs (Brock, 2023)

Bien que le choix des actifs représente un compromis entre le rendement et la volatilité du portefeuille constitué, dans la pratique, il est important de noter que le choix des actifs n'est pas totalement objectif mais est guidé par des facteurs comportementaux et non comportementaux propres à l'investisseur (Gusni & Nugraha, 2021).

Afin de pouvoir considérer les cryptomonnaies comme une classe d'actif, il faut qu'elle soit stable, investissable, intérieurement homogène, extérieurement hétérogène, augmentant la fonction d'utilité d'un portefeuille sans sélection particulière d'un actif dans la classe et qui peut être disponible à l'investissement pour un coût raisonnable. Sur base de ces critères, les cryptomonnaies pourraient être considérées comme une classe d'actif (Krückeberg & Scholz, 2019).

Dans le cadre de ce mémoire, le portefeuille sera uniquement constitué d'actions individuelles, ainsi que de bitcoins. Bien qu'un portefeuille idéal devrait comprendre une diversité d'actifs telle que préconisée, ce choix méthodologique est simplement pris par facilité d'analyse et de mise à disposition des informations.

Cependant, même si ce choix méthodologique restreint la variété de types d'actifs, le portefeuille doit toujours être aussi diversifié que possible. Pour ce faire, uniquement les actions reprises dans le Standard & Poor 500 seront utilisées. En comparant la diversification des deux indices de référence, à savoir le S&P500 et le NASDAQ, une analyse de répartition sectorielle des 25 premières actions sur base de leurs poids dans l'indice donne la répartition suivante :

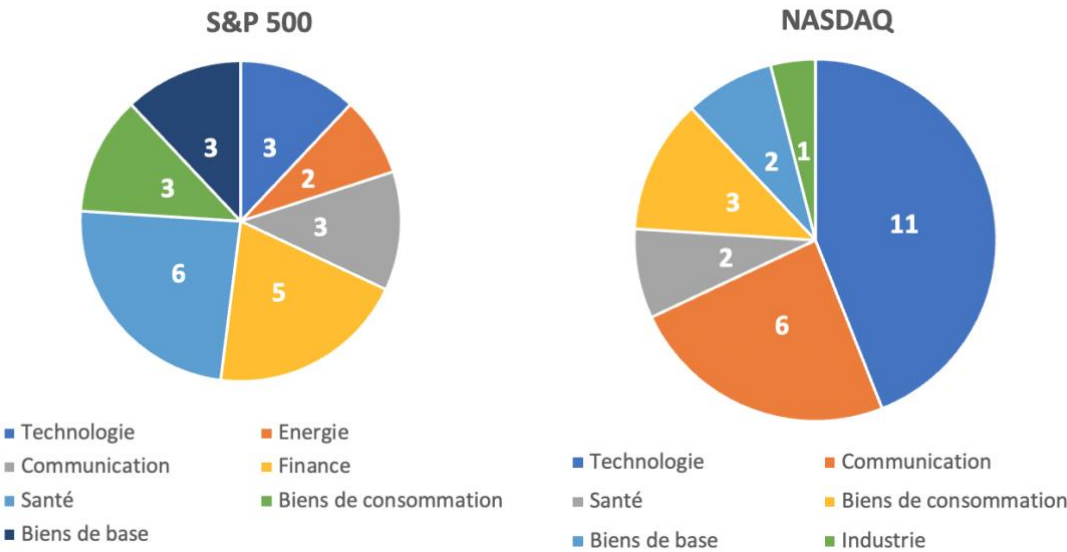


Figure 10 - Répartition sectorielle Nasdaq/S&P500

Le Standard & Poor 500 étant plus diversifié au travers des différents secteurs d'activités et c'est donc cet indice de référence qui servira de base pour sélectionner les actions du portefeuille.

3.2.2 Nombre de positions

Pour constituer un portefeuille correctement diversifié et donc diminuer le risque, il faut un certain nombre d'actifs et que chaque actif soit idéalement non corrélé aux autres actifs du portefeuille. Cependant, il est toutefois impossible d'éliminer complètement ce risque, indépendamment des corrélations et du nombre d'actifs retenus. Il est donc crucial de déterminer le bon nombre d'actifs à inclure dans le portefeuille.

Certaines études montrent que le nombre d'actions suffisant pour obtenir une bonne diversification varierait entre 8 et 10 actions (Evans & Archer, 1968). Cependant, d'autres études plus récentes montrent que ce nombre se situerait plus entre 30 et 50 actions individuelles (Benjelloun, 2010; Chong & Phillips, 2013; Oyenubi, 2019).

Le nombre d'actions dans le portefeuille sera donc fonction du niveau de risque que l'investisseur est prêt à prendre. Les statistiques varient en fonction des auteurs, selon Alexeev et Dungey (2015), un portefeuille équilibré constitué de 7 actions individuelles permettrait de réduire le risque de 85% (Alexeev & Dungey, 2015). Ce chiffre monte jusqu'à 90% pour un portefeuille de 10 actions. De manière similaire, il est possible de réduire le risque du portefeuille de 95% en se basant sur 20 actions individuelles (Tang, 2004). Enfin Kryzanowski et Singh (2010) avancent qu'il est possible de réduire le risque de 90% en constituant un portefeuille avec un nombre variant de 20 à 25 actions individuelles (Kryzanowski & Singh, 2010). Pour finir, le nombre d'actions à considérer lors de la création d'un portefeuille est fortement dépendant du profil de l'investisseur, du niveau de risque qu'il est prêt à prendre ainsi que de sa connaissance dans le marché en question (Zaimovic et al., 2021).

En distinguant le risque spécifique, c'est-à-dire propre à une action, du risque systématique, c'est-à-dire concernant l'entière du marché, le risque spécifique peut être complètement éliminé en prenant suffisamment d'actifs tandis que le risque systématique sera toujours présent (*Différences entre risque systématique et risque spécifique*, 2023).

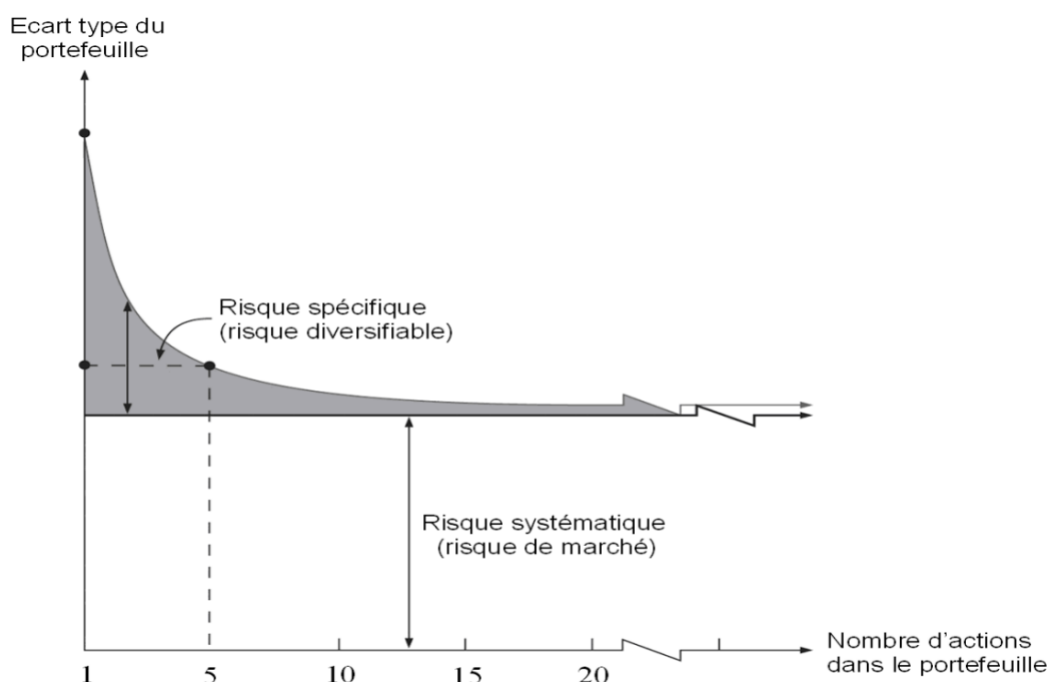


Figure 11 - Risque spécifique et risque systématique (Brealey et al., 2006)

Sur base de cette littérature, le portefeuille sera constitué de 25 actions. Ce nombre a été choisi de manière à rester assez faible que pour être facilement manipulable, et suffisamment important que pour limiter le risque au sein du portefeuille. Ces 25 actions, prises par ordre décroissant de poids dans l'indice S&P500, permettront de réduire le risque de l'ordre de 90% grâce à la diversification. Le 26e actif du portefeuille sera bien évidemment le Bitcoin, pilier de cette analyse.

3.2.3 Profils d'investisseur

Lors de la constitution d'un portefeuille, son niveau de risque ainsi que son exposition vont différer en fonction du profil de l'investisseur. Chaque investisseur sélectionnera le portefeuille maximisant sa fonction d'utilité (Markowitz, 1952). Cependant, le comportement humain introduit de l'irrationalité dans le choix de constitution du portefeuille d'actifs, en se basant sur ses émotions et biais cognitifs (Thaler & Sunstein, 2008). La personnalité de l'investisseur joue également un rôle, par exemple, les investisseurs présentant un comportement extraverti seront plus enclins à prendre des risques que ceux qui sont davantage introvertis (Baddeley et al., 2010).

En parallèle de la personnalité, la situation financière ainsi que l'âge et le statut marital de l'investisseur jouent également un rôle dans la sélection des actifs. Cette perception de sa situation actuelle influencera directement sa préférence et le niveau de risque qu'il est prêt à prendre dans son portefeuille. En regroupant l'aversion au risque des investisseurs selon trois catégories, 8,87% des investisseurs ont une forte aversion au risque, 54,84% d'entre eux ont une tolérance modérée au risque et 36,29% d'entre eux ont une tolérance élevée au risque (De Bortoli et al., 2019).

Dans le cadre de ce travail, trois profils d'investisseurs seront étudiés. Voici les valeurs arbitraires associées à chacun de ces profils :

Profil	Risque toléré
Prudent	< 5%
Équilibré	7% < - < 9%
Dynamique	> 10%

Tableau 1 - Profils d'investisseurs

L'investisseur prudent aura tendance à vouloir faire croître son patrimoine mais en prenant très peu de risques. A contrario, un investisseur agressif cherchera à maximiser son rendement en tolérant l'augmentation de son niveau de risque. Dans un profil intermédiaire,

l'investisseur équilibré choisira un portefeuille lui garantissant un bon rendement avec un niveau de risque raisonnable (Eon, 2020).

3.2.4 Horizon de temps

Dans l'objectif de conserver un portefeuille de croissance, il est important de considérer l'horizon temporel de l'investissement comme un facteur déterminant pour l'analyse du portefeuille. En effet, si l'horizon temporel est étendu, les données considérées prendront en compte un long historique de l'action analysée, ce qui est bénéfique pour une projection long terme, mais contiendront également des informations sur le prix qui ne sont potentiellement plus pertinentes pour la période envisagée. Cependant, la période d'analyse doit être suffisamment longue afin de prendre en compte les différents cycles économiques du marché, tels que les phases de récession, etc (Elliott & Timmermann, 2016).

De manière similaire, la fréquence d'échantillonnage joue également un rôle important. Si une fréquence élevée augmente la précision de l'analyse en fournissant plus d'informations, une fréquence trop importante amène du bruit dû aux mouvements parasites du marché. Ces bruits n'apportent pas d'informations pertinentes et nuisent à l'analyse des données (Figlewski, 1994). Étant donné que la théorie du portefeuille se base sur une vision long terme, une fréquence d'échantillonnage mensuelle a été retenue. Celle-ci permet d'une part de gommer les mouvements parasites journaliers non représentatifs et d'autre part reflète suffisamment l'évolution des prix sur le marché. De cette manière, en parallèle de l'historique retenu, le nombre d'échantillons restera de taille manipulable pour l'analyse des données.

L'objectif de ce mémoire visant à établir l'impact et l'intérêt d'intégrer du Bitcoin pour en mesurer l'effet sur le portefeuille avec une vision long terme, un historique de 8 ans sera pris en compte. Les données de prix des actions ainsi que du Bitcoin seront reprises du 1^{er} janvier 2015 au 31 décembre 2022. Cet horizon est suffisamment long pour englober plusieurs cycles de marché mais ne prend pas un historique trop grand, de sorte à éliminer des calculs la période de démarrage de Bitcoin. En effet, les premières années ne sont pas représentatives de la situation actuelle étant donné que le Bitcoin s'est placé sur un marché émergent et n'avait initialement pas la volonté de venir se positionner en tant qu'actif de diversification.

3.3 Données

En prenant les actifs par ordre décroissant de poids dans l'indice S&P500 à la date du 6 avril 2023 ainsi que le Bitcoin, le portefeuille sera constitué des actifs suivants :

N°	Ticker	Nom de l'actif
1	AAPL	Apple
2	MSFT	Microsoft
3	AMZN	Amazon
4	GOOGL	Alphabet
5	BRK-B	Berkshire Hathaway
6	GOOG	Alphabet
7	NVDA	Nvidia
8	XOM	Exxon Mobil
9	UNH	Unitedhealth group
10	TSLA	Tesla
11	JNJ	Johnson & Johnson
12	JPM	JPMorgan Chase & Co
13	V	Visa
14	PG	Procter & Gamble
15	META	Meta Platforms
16	HD	The Home Depot
17	MA	Mastercard
18	CVX	Chevron
19	MRK	Merck & Co
20	LLY	Eli Lilly and Company
21	ABBV	Abbvie
22	BAC	Bank of America
23	PFE	Pfizer
24	KO	The Coca-cola company
25	PEP	PepsiCo
26	BTC	Bitcoin

Tableau 2 - Actifs constituant le portefeuille

Pour la suite des calculs et figures, l'ensemble des différentes données financières sont extraites du site Yahoo Finance (*Yahoo Finance*, 2023) à la date du 6 avril 2023. L'évolution du prix des actifs est représentée dans la figure ci-dessous [Figure 12].

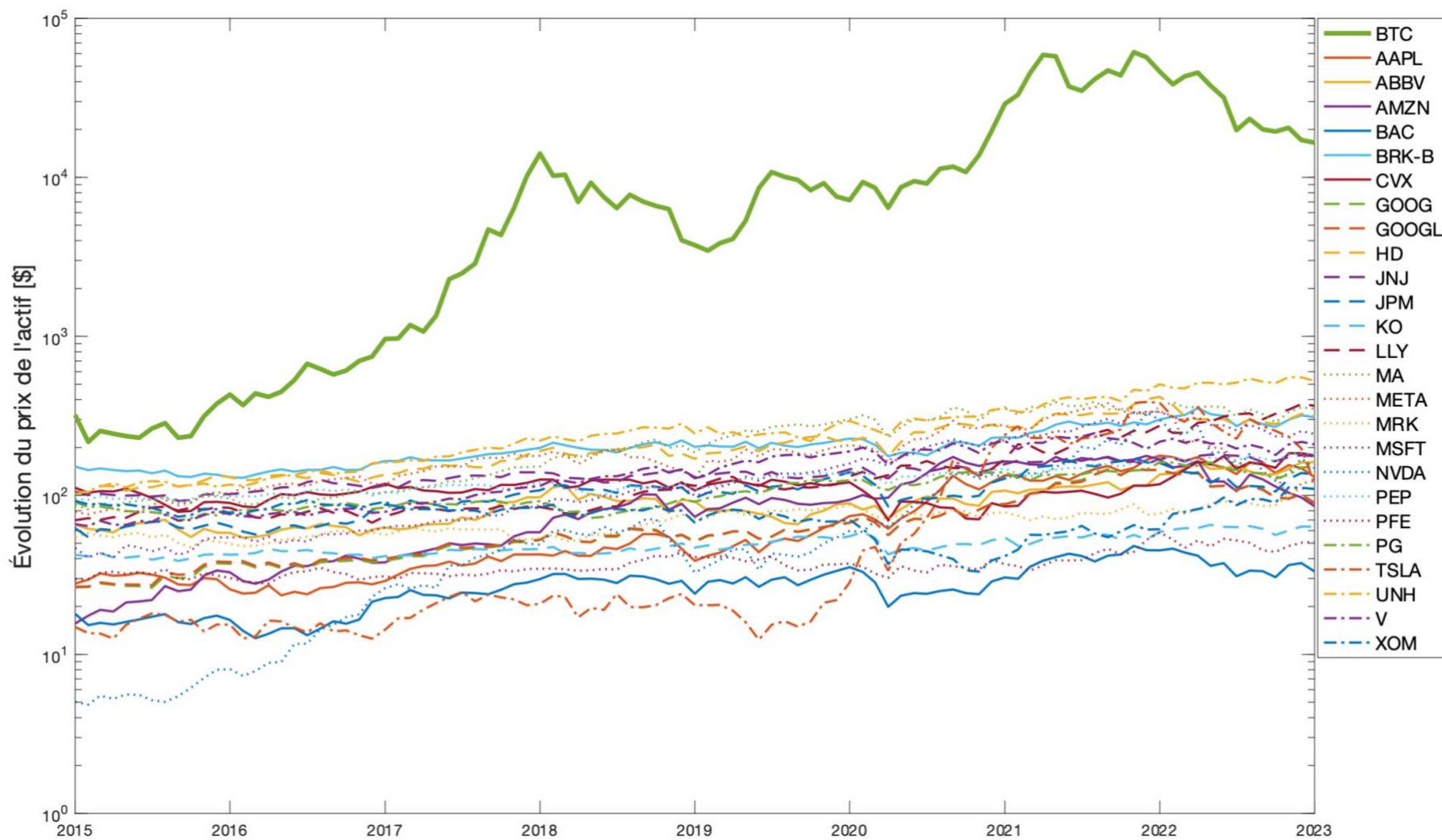


Figure 12 - Évolution du prix des actifs (échelle logarithmique)

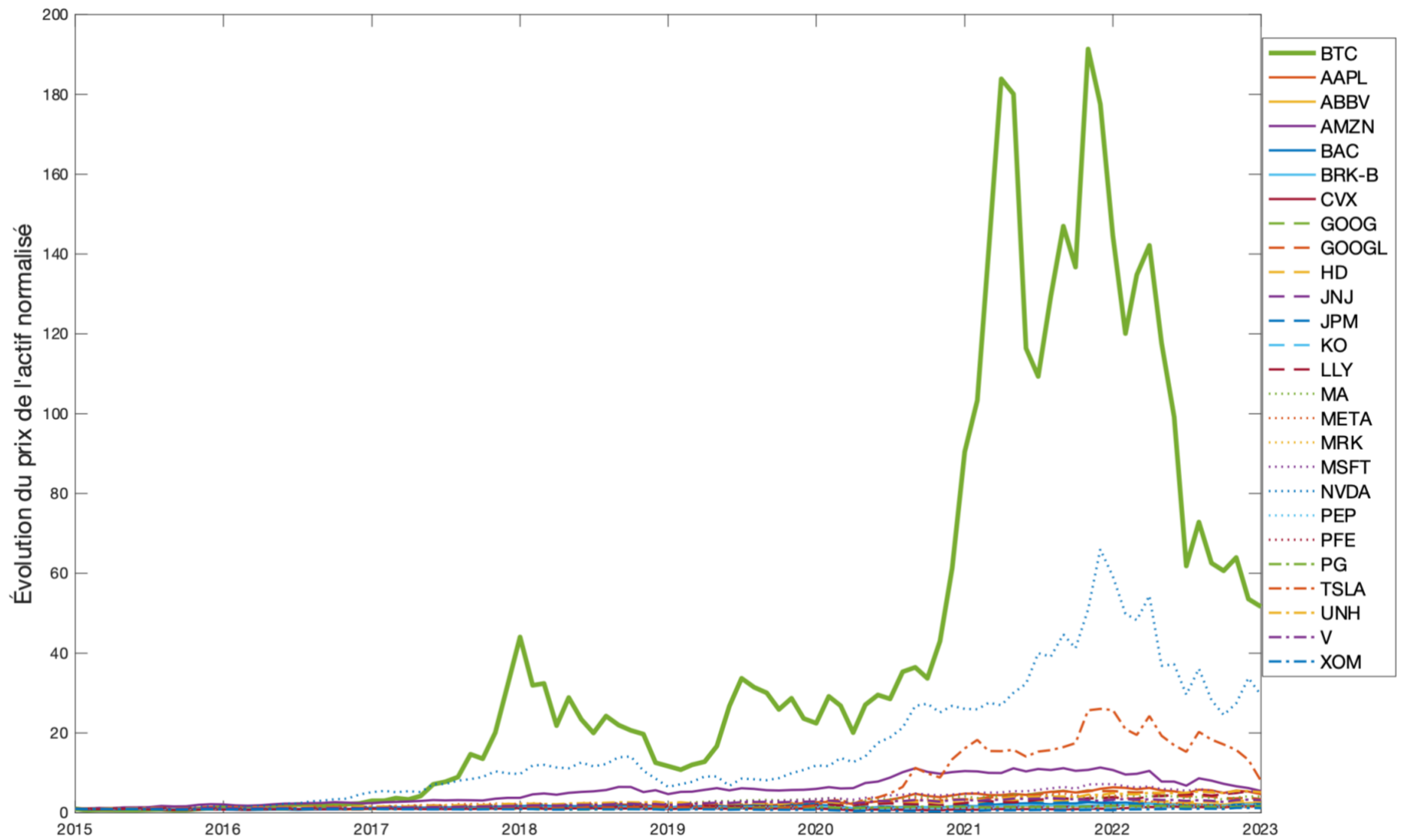


Figure 13 – Évolution normalisée du prix des actifs

Sur la Figure 12, l'échelle logarithmique permet d'apprécier la croissance des actifs proportionnellement au prix de l'action. Il peut être observé que l'ensemble des actifs marque une évolution positive de son prix entre début 2015 et fin 2022. Le Bitcoin, représenté par la courbe supérieure verte, est l'actif enregistrant la plus forte progression, et de loin par rapport à l'ensemble des actions du S&P500 considérées.

La Figure 13 représente quant à elle l'évolution normalisée à 1\$ du prix des actifs. L'échelle de l'axe Y représente donc le coefficient multiplicateur du prix par rapport à son prix au 1^{er} janvier 2015. Il apparaît clairement que Bitcoin est l'actif ayant bénéficié du plus gros multiple sur toute la durée considérée, avec un maximum à près de 200 fois son prix de départ. Le revers de la médaille est que c'est aussi l'actif ayant subi la chute la plus importante depuis son plus haut cours historique.

3.4 Solveurs

Afin de traiter l'ensemble de ces données, de calculer les moyennes, variances, covariances, le solveur Matlab sera utilisé. C'est également ce solveur qui sera utilisé afin de manipuler les données et produire les graphiques se trouvant dans la suite de ce document. Le script regroupant les différents calculs se trouve en annexe [Annexe 1 – Codes Matlab].

Une fois les variables établies, la résolution du problème d'optimisation est faite dans le solveur Python au travers de la fonction *minimize*. Cette fonction prend en entrée la fonction objectif ainsi que les contraintes telles que définies dans la section 3.1.3. Afin de minimiser cette fonction sous les contraintes données, la méthode "*Sequential Least Squares Programming*", abrégée *SLSQP*, est utilisée afin d'approximer de manière itérative le résultat, à savoir de maximiser le rendement (équivalent à minimiser l'opposé du rendement) sous une volatilité donnée. Cette méthode a été choisie car elle permet la résolution de problèmes d'optimisation non linéaire sur un ensemble de variables, bornés, avec aussi bien des contraintes d'égalités que d'inégalités. Le code permettant la résolution de ce problème d'optimisation se trouve en [Annexe 2 – Solveur Python].

4 Développement et résultats

4.1 Paramètres des portefeuilles d'actifs

Avant de procéder aux constitutions des portefeuilles d'actifs, les principales variables doivent être calculées afin de pouvoir être données en entrée des modèles construits. Il s'agit donc de calculer, sur base de l'évolution du prix des actifs, leurs rendements annuels moyens ainsi que la volatilité associée. De plus, la corrélation entre les actifs sera mesurée afin de servir également de variable de décision pour affecter au mieux les différentes proportions d'actifs dans le portefeuille.

La figure ci-dessous montre l'évolution des rendements mensuels des actifs [Figure 14]. Le rendement mensuel du Bitcoin est la courbe verte plus épaisse. Comme il peut être observé, le rendement du Bitcoin subit des pics plus importants en intensité, synonyme d'une variation de prix plus élevée sur le mois en question. Cette volatilité s'observe aussi bien lors des chutes de prix que lors des augmentations. Ces variations auront donc un impact direct sur la variance du Bitcoin. Concernant les autres actifs, il ne se dégage aucun comportement spécifique.

En prenant en compte le prix de l'actif à la fin de l'année 2022 par rapport au début de l'année 2015, le rendement moyen peut être calculé sur une période de 8 années complètes. Cette période est suffisamment longue pour englober les différentes phases de marché et de rendre compte du rendement moyen lissé sur une période de temps. Les différents rendements moyens annuels sont représentés dans la Figure 15.

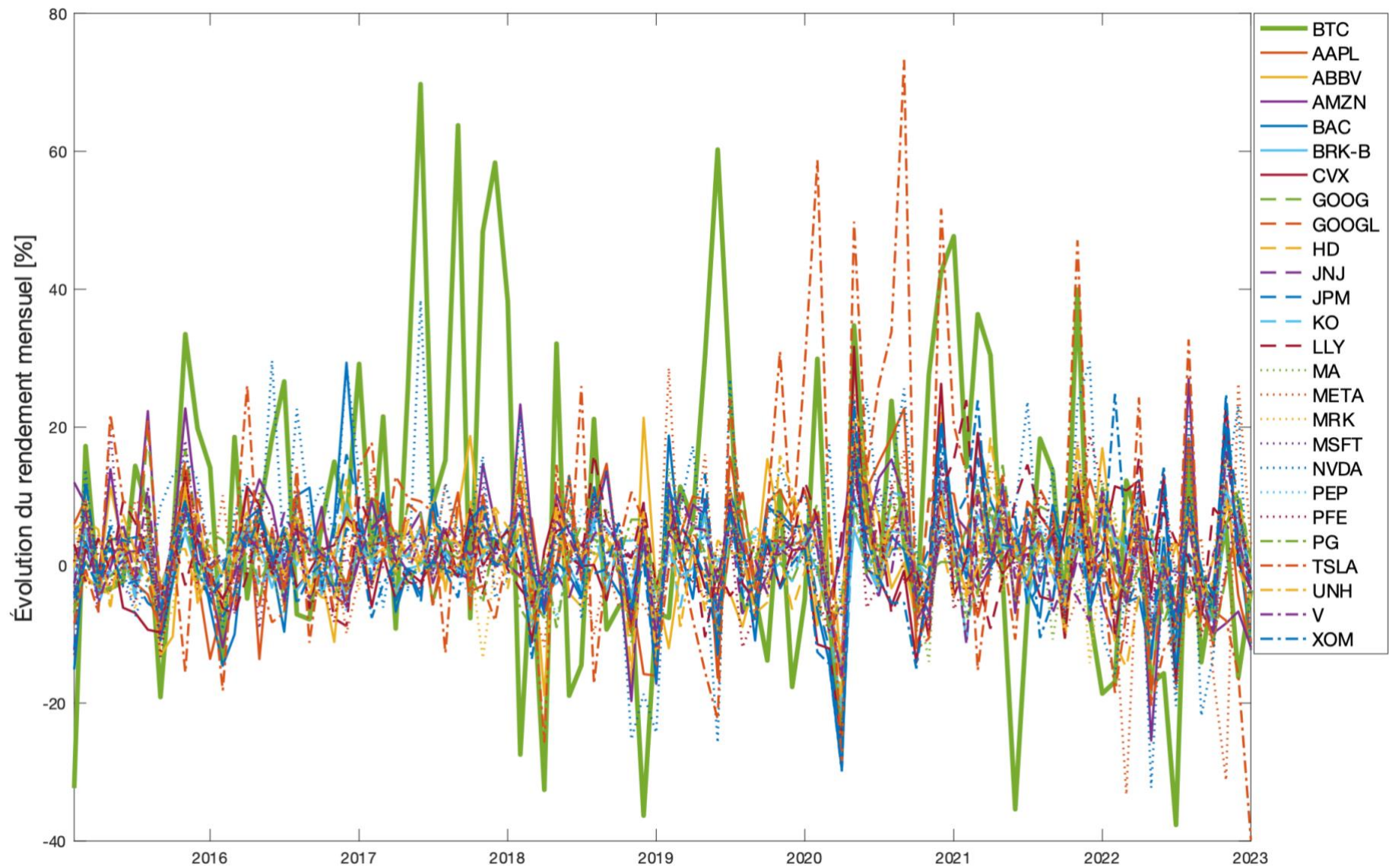


Figure 14 - Évolution du rendement mensuel des actifs [%]

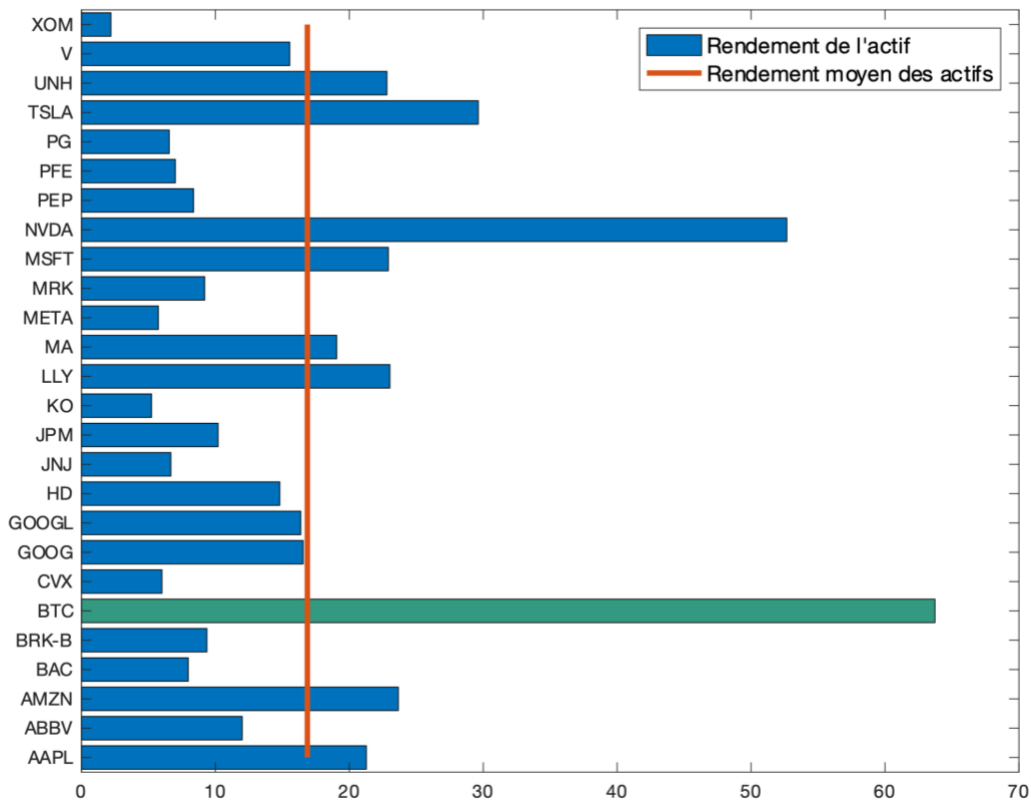


Figure 15 - Rendement annuel moyen [%]

La ligne verticale sur la figure ci-dessus représente la moyenne des rendements annuels moyens des différents actifs. Cela représente une croissance moyenne pour les 26 actifs de 16,87%/an. Le Bitcoin, en vert, atteint un rendement annuel moyen de 63,73% sur la période allant de début 2015 à fin 2022. Ce rendement est très grand par rapport au rendement moyen du S&P500, étant en moyenne de 8,31%.

Un autre actif se démarquant est NVIDIA, qui représente un rendement annuel moyen de 52,67%. Cette forte croissance est due au secteur technologique sur lequel l'entreprise s'est positionnée. En effet, possédant presque 90% des parts de marché dans la conception de GPU, des processeurs graphiques, l'émergence de l'intelligence artificielle combinée aux besoins de plus en plus grandissants de l'industrie de s'équiper en matériel informatique, la capitalisation de NVIDIA s'en trouve positivement impactée. En prenant en compte l'excellente gestion de l'entreprise, notamment avec de nombreux partenariats et une forte réduction de la dette long terme, il est cohérent que l'action NVIDIA connaisse de bonnes performances.

A contrario, d'autres actifs tels qu'Exxon Mobil, Coca-Cola, etc ont les croissances les plus faibles des actifs constituant le portefeuille.

Après s'être intéressé aux rendements, la volatilité des différents actifs peut donc être calculée. Celle-ci se base sur les variations entre les rendements mensuels des actifs. La figure ci-dessous met en évidence la volatilité liée à chacun des actifs [Figure 16]. La volatilité fait référence ici à l'écart-type des rendements, à savoir la racine carrée de leur variance.

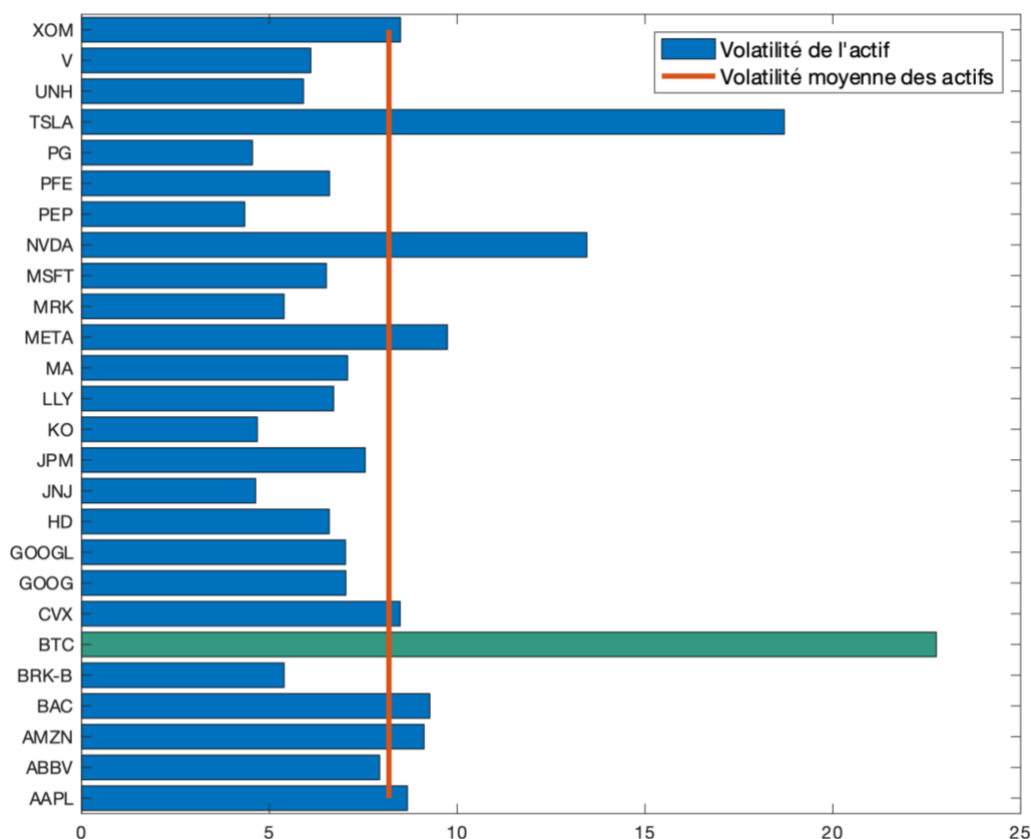


Figure 16 - Volatilité moyenne [%]

La ligne verticale sur la figure ci-dessus représente la moyenne de la volatilité des différents actifs. Cela représente une volatilité moyenne pour les 26 actifs de 8,18%. Le Bitcoin, en vert, présente une volatilité de 22,75% sur la période allant de 2015 à 2022. Cette hypervolatilité est représentative de la dispersion des rendements, avec des montées abruptes mais également des chutes conséquentes. Cette volatilité est donc bien en phase avec le graphique d'évolution des rendements du Bitcoin, en dents de scie [Figure 14].

Un autre actif à forte volatilité est l'entreprise Tesla, avec pas moins de 18,71%. En effet, au cours des dernières années, le prix de l'action a connu de fortes variations. Plusieurs facteurs sont à la source de ces mouvements. De manière non exhaustive, avec la hausse du prix du baril de pétrole, les sociétés sur le secteur énergétique favorisant le développement de l'électricité s'en sont trouvées positivement impactées. Tesla étant dans la vente de voitures électriques, le cours de l'action s'en retrouve largement apprécié. De même, les excellentes

ventes des nouveaux modèles de voitures Tesla combinées à la finalisation de plusieurs usines de production de masse ont également contribué à valoriser l'entreprise en bourse. Enfin, les décisions politiques forçant le passage aux voitures électriques sont également une cause de la croissance des ventes de Tesla et donc de sa valorisation boursière. Cependant, le comportement de l'actuel CEO, Elon Musk, tend à avoir des effets abrupts sur les cours boursiers, tant à la hausse qu'à la baisse. En effet, ce personnage hautement médiatisé possède une influence directe sur la considération de Tesla par les investisseurs au travers de ses actions.

Après avoir calculé la volatilité propre à chaque actif, il est intéressant d'analyser les relations qu'il existe entre les différents actifs constituant le portefeuille. Pour ce faire, les coefficients de corrélation sont calculés respectivement pour chaque paire d'actifs. En croisant les différents coefficients, la matrice de corrélation ci-dessous est obtenue [Figure 17].

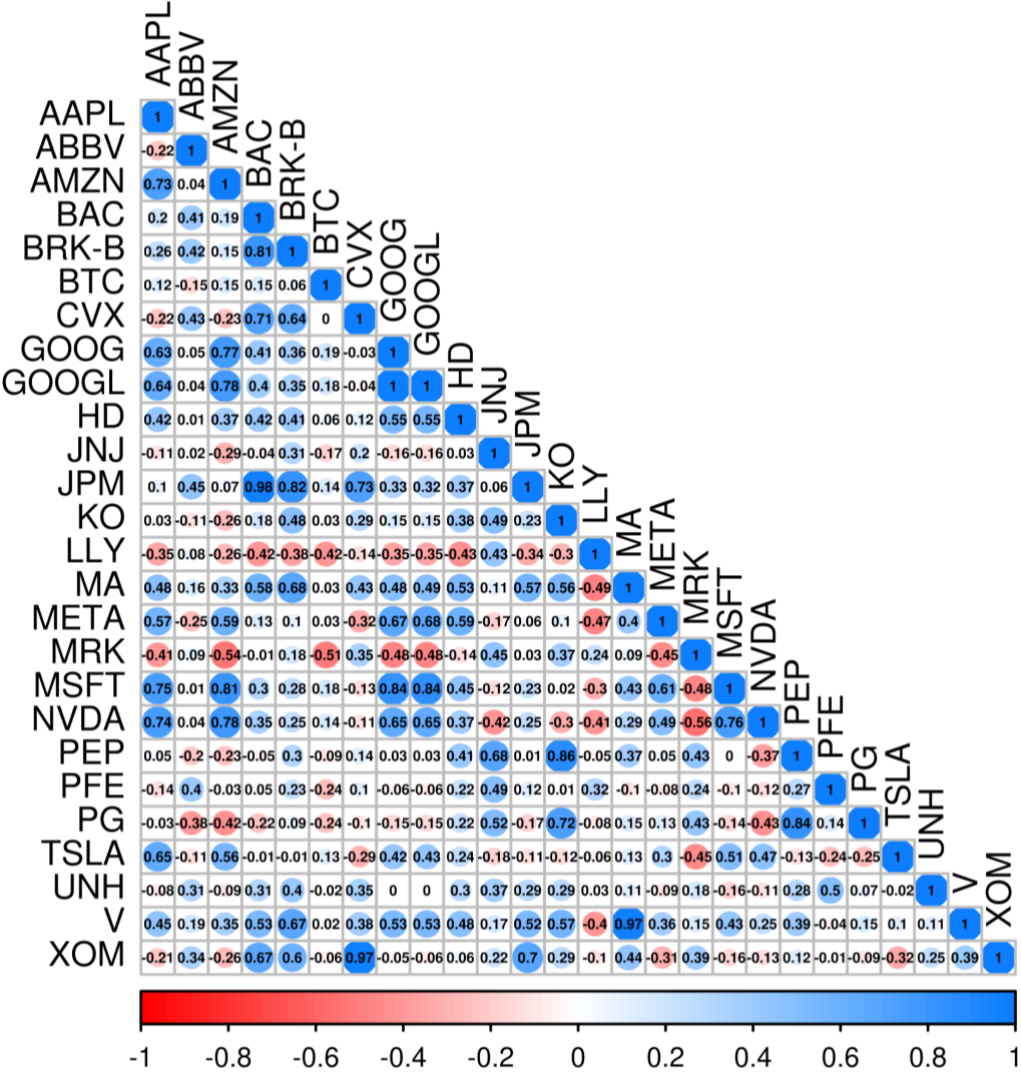


Figure 17 - Matrice de corrélation

Plusieurs éléments importants ressortent de cette matrice de corrélation. Dans un premier temps, il est possible d'observer de fortes corrélations entre les entreprises évoluant sur le même secteur. Par exemple, Exxon Mobil et Chevron présentent un coefficient de corrélation de $0,97$, autrement dit les variations de prix des deux entreprises sont propres au marché sur lequel elles se situent plus que par leurs caractéristiques intrinsèques. Ce même ordre de grandeur se retrouve également entre la Bank of America et JPMorgan Chase, évoluant tous deux dans le secteur de la finance. C'est également le cas pour PepsiCo et Coca-Cola, dont l'activité principale se centre autour de la vente de diverses boissons sucrées, avec un coefficient de corrélation de $0,86$.

A contrario, d'autres actifs affichent une corrélation négative entre eux. C'est notamment le cas de Merk&Co qui présente une corrélation négative $-0,54$ avec Amazon, de $-0,48$ avec Google, $-0,51$ avec Bitcoin ou bien encore $-0,45$ avec Meta. Dans l'objectif de diversifier notre portefeuille, l'action Merk&Co pourrait très bien servir d'actif de couverture pour lisser le risque tout en conservant un bon rendement, fixé à $9,20\%$ pour cette action. Pour le cas d'Eli Lilly and Company, l'action est en moyenne faiblement corrélée négativement avec l'ensemble des actifs du portefeuille.

En ce qui concerne Bitcoin, l'actif est corrélé positivement mais imparfaitement en moyenne avec les autres actifs du portefeuille. En calculant la moyenne des coefficients de corrélation, le bitcoin est corrélé de $-0,0119$ avec les autres actifs en moyenne. Analysé comme cela, Bitcoin rentrerait donc dans la catégorie des actifs de couverture. Cependant, en retirant les valeurs extrêmes de corrélation telles que Merk&Co ($-0,51$) et Eli Lilly and Company ($-0,42$), la corrélation moyenne de Bitcoin avec les autres actifs est de $0,0399$. Sous cet angle, Bitcoin agit donc comme un diversificateur de par sa corrélation faiblement positive avec les autres actifs, ce qui correspond à la plupart des corrélations analysées dans la matrice ci-dessus. Cependant, même si l'analyse moyenne permet de dégager une tendance, elle n'est pas représentative d'un comportement particulier qui, lui, va dépendre de la pondération des différents actifs dans le portefeuille.

4.2 Constitution de différents portefeuilles

Après avoir calculé les variables de base servant d'entrées aux différents modèles, il est possible de construire les différents portefeuilles et de choisir le ou lesquels seront les plus appropriés pour un profil d'investisseur ainsi que d'analyser l'impact sur la pondération des actifs.

4.2.1 Positionnement des actifs

Il est possible de représenter la position des actifs dans cet espace de portefeuilles réalisables. Chaque actif est donc constitué d'un rendement et d'une volatilité qui lui est propre. Les données des différents actifs sont reprises dans le Tableau 3:

Ticker	Rendement moyen	Volatilité	Ticker	Rendement moyen	Volatilité
AAPL	21,27%	8,67%	PG	19,06%	7,08%
MSFT	12,00%	7,94%	META	5,74%	9,74%
AMZN	23,66%	9,12%	HD	9,20%	5,39%
GOOGL	7,97%	9,27%	MA	22,91%	6,52%
BRK-B	9,37%	5,39%	CVX	52,67%	13,45%
GOOG	6,01%	8,48%	MRK	8,37%	4,34%
NVDA	16,55%	7,04%	LLY	7,01%	6,60%
XOM	16,38%	7,03%	ABBV	6,55%	4,55%
UNH	14,81%	6,59%	BAC	29,63%	18,71%
TSLA	6,68%	4,63%	PFE	22,81%	5,91%
JNJ	10,20%	7,55%	KO	15,55%	6,10%
JPM	5,23%	4,68%	PEP	2,20%	8,49%
V	23,03%	6,71%	BTC	63,73%	22,75%

Tableau 3 - Rendement et volatilité des actifs

Graphiquement, la figure ci-dessous positionne ce couple rendement-volatilité de chaque actif indépendamment des autres [Figure 18].

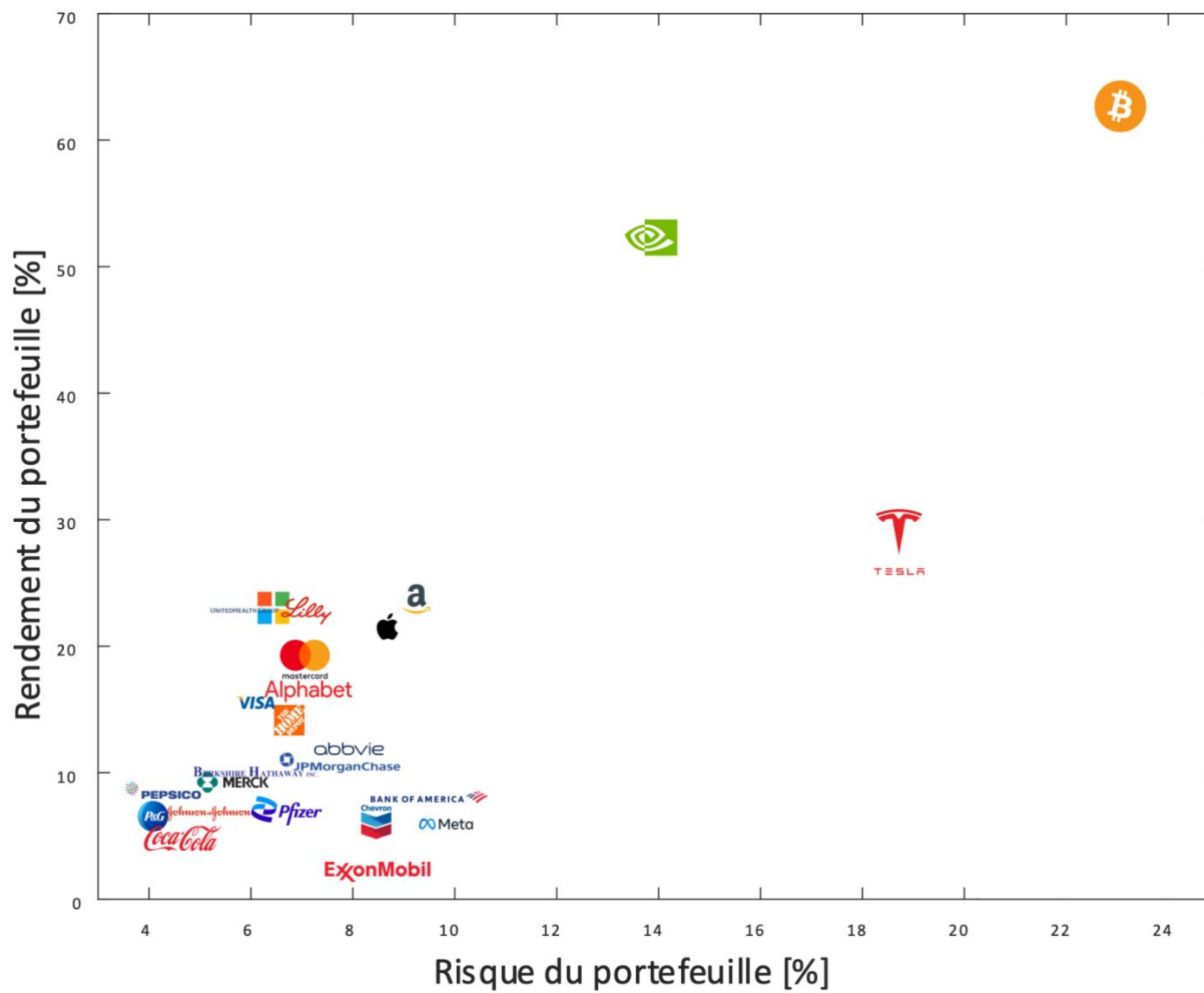


Figure 18 - Positionnement des actifs

Les actifs présentant le profil le plus sécuritaire se situent dans le coin inférieur gauche, avec une volatilité la plus faible possible. A contrario, les actifs présentant un risque élevé se situeront dans le coin supérieur droit, là où la volatilité et le rendement sont plus élevés que pour les autres actifs. Un investisseur, dépendant de son profil, cherchera en priorité des actifs se situant le plus près possible du coin supérieur gauche, car c'est dans cette zone de l'espace que les portefeuilles présentent le plus haut rendement pour la plus faible variance. Cependant, aucun actif ne se trouve dans cette zone. Par conséquent, l'investisseur devra donc faire un compromis entre avoir un rendement suffisant tout en gardant un niveau de risque acceptable selon sa stratégie.

En prenant en compte sa réputation, le Bitcoin se trouve bien évidemment là où le rendement est le plus élevé mais présente également une volatilité plus importante que tous les autres actifs. L'action de l'entreprise NVIDIA se trouve quant à elle dans une zone médiane avec un compromis rentabilité-risque intéressant. Finalement, les actifs avec la variance la plus faible tels que Coca-Cola, PepsiCo, Procter & Gamble, Berkshire Hathaway sont aussi ceux avec le rendement le moins élevé. D'une part, cela s'explique par la maturité des entreprises en question et d'autre part, par la stabilité des secteurs dans lesquels elles évoluent.

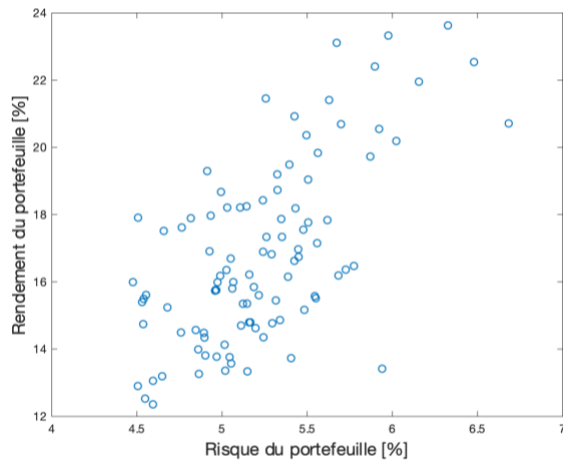
4.2.2 Portefeuilles réalisables

En constituant un portefeuille composé avec une pondération aléatoire des différents actifs ci-dessus, la pondération des différents actifs menant à ce portefeuille offrant un rendement de 13,79% avec une volatilité de 5,04% est reprise dans le tableau ci-dessous [Tableau 4].

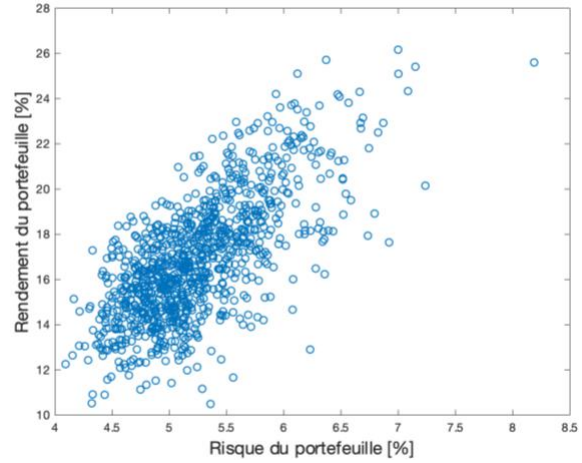
Actif	Pondération	Actif	Pondération	Actif	Pondération	Actif	Pondération
AAPL	1,70%	GOOG	1,79%	MA	0,61%	PG	3,06%
ABBV	12,88%	GOOGL	10,44%	META	4,42%	TSLA	7,76%
AMZN	6,96%	HD	0,63%	MRK	5,27%	UNH	3,78%
BAC	2,68%	JNJ	1,45%	MSFT	0,53%	V	0,81%
BRK-B	1,96%	JPM	2,31%	NVDA	0,39%	XOM	5,37%
BTC	1,18%	KO	1,58%	PEP	10,73%		
CVX	1,26%	LLY	0,51%	PFE	9,93%		

Tableau 4 - Pondération aléatoire pour un portefeuille

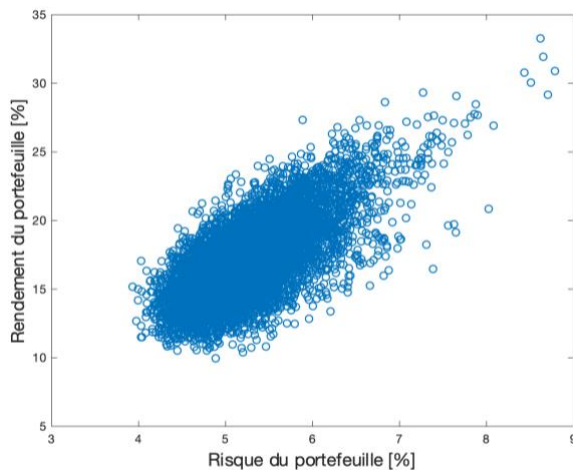
En générant plusieurs simulations avec différents vecteurs de poids w_i pondérés, il est possible de concevoir différents portefeuilles. La figure ci-dessous montre différents ensembles réalisables avec respectivement 100, 1'000, 10'000 et 100'000 portefeuilles [Figure 19].



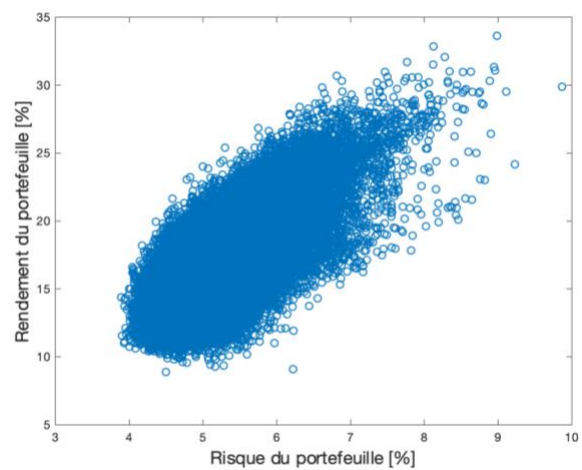
Simulation pour 100 portefeuilles



Simulation pour 1'000 portefeuilles



Simulation pour 10'000 portefeuilles



Simulation pour 100'000 portefeuilles

Figure 19 - Portefeuilles réalisables

Plus le nombre de portefeuilles créés dans la simulation est élevé, plus l'espace formant l'ensemble des portefeuilles réalisables se distingue. Il apparaît clairement sur ces différents graphiques que certaines zones de l'espace ne sont pas accessibles. En effet, il est impossible de constituer un portefeuille présentant une volatilité de 5% avec un rendement supérieur à 30%. Cette impossibilité est due au fait qu'aucun actif ni de combinaisons d'actifs ne permettent d'atteindre un tel portefeuille.

4.2.3 Portefeuille équipondéré

Un premier portefeuille pouvant être construit est un portefeuille équipondéré, à savoir que chacun des actifs du portefeuille représente le même poids. Pour ce faire, chaque actif participe à hauteur de 3,85% au portefeuille total. Ce portefeuille équipondéré offre un rendement de 16,87% avec une volatilité de 5,03%. Ce portefeuille répartissant équitablement le risque sur chacun des actifs, bien que tout à fait valable, n'est toutefois pas optimal.

4.3 Portefeuilles efficients

4.3.1 Frontière efficiente

En optimisant la répartition des actifs, il est possible d'atteindre le meilleur compromis rendement-risque satisfaisant le portefeuille de l'investisseur. Via un solveur codé sur Python se chargeant de trouver l'ensemble des pondérations donnant le meilleur rendement pour un risque prédéfini, l'ensemble des couples rendement-risque ainsi définis forment la frontière efficiente. La figure ci-dessous représente cette frontière constituée sur base de l'ensemble des actifs excepté Bitcoin [Figure 20].

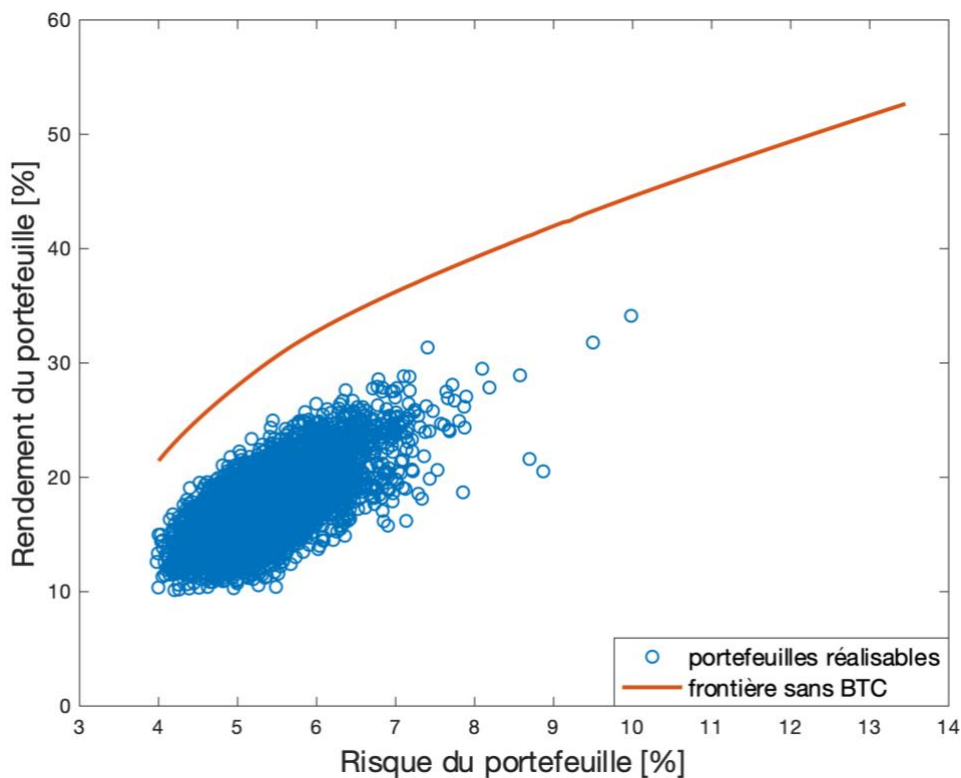


Figure 20 - Frontière efficiente sans Bitcoin

Il apparaît clairement que la frontière efficiente offre un meilleur rapport risque-rendement que les portefeuilles réalisables construits aléatoirement. En effet, l'obtention de cette frontière demande une pondération toute particulière, où la plupart des actifs n'entrent pas en compte dans le portefeuille au profit d'autres actifs offrant un meilleur rapport rendement/risque/corrélation ou bien les trois simultanément. L'ensemble des portefeuilles construits aléatoirement est donc statistiquement centré autour du portefeuille équipondéré, moins performant que les portefeuilles de la frontière efficiente.

La figure ci-dessous représente quant à elle la frontière efficiente d'un portefeuille où le choix des actifs inclut le Bitcoin [Figure 21].

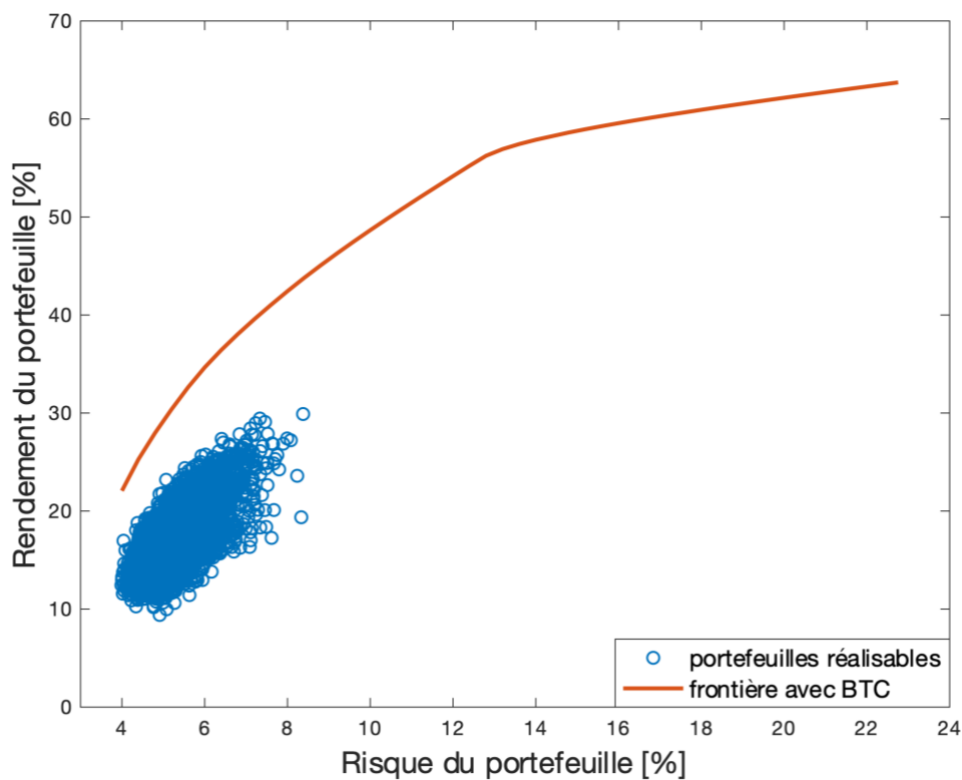


Figure 21 - Frontière efficiente avec Bitcoin

De manière identique à la figure précédente, la remarque sur la distribution des portefeuilles réalisables par rapport à l'espace couvert par la frontière efficiente est d'application. À titre d'exemple, le portefeuille situé sur la partie extrême droite de la frontière efficiente, représente dans ce cas-ci le portefeuille présentant le plus grand rendement mais aussi le plus grand risque. Ce point représente précisément la position du Bitcoin sur l'espace rendement- risque.

Afin de quantifier l'impact de l'ajout de Bitcoin dans le portefeuille, ces deux frontières peuvent être comparées. La figure ci-dessous représente cette comparaison [Figure 22].

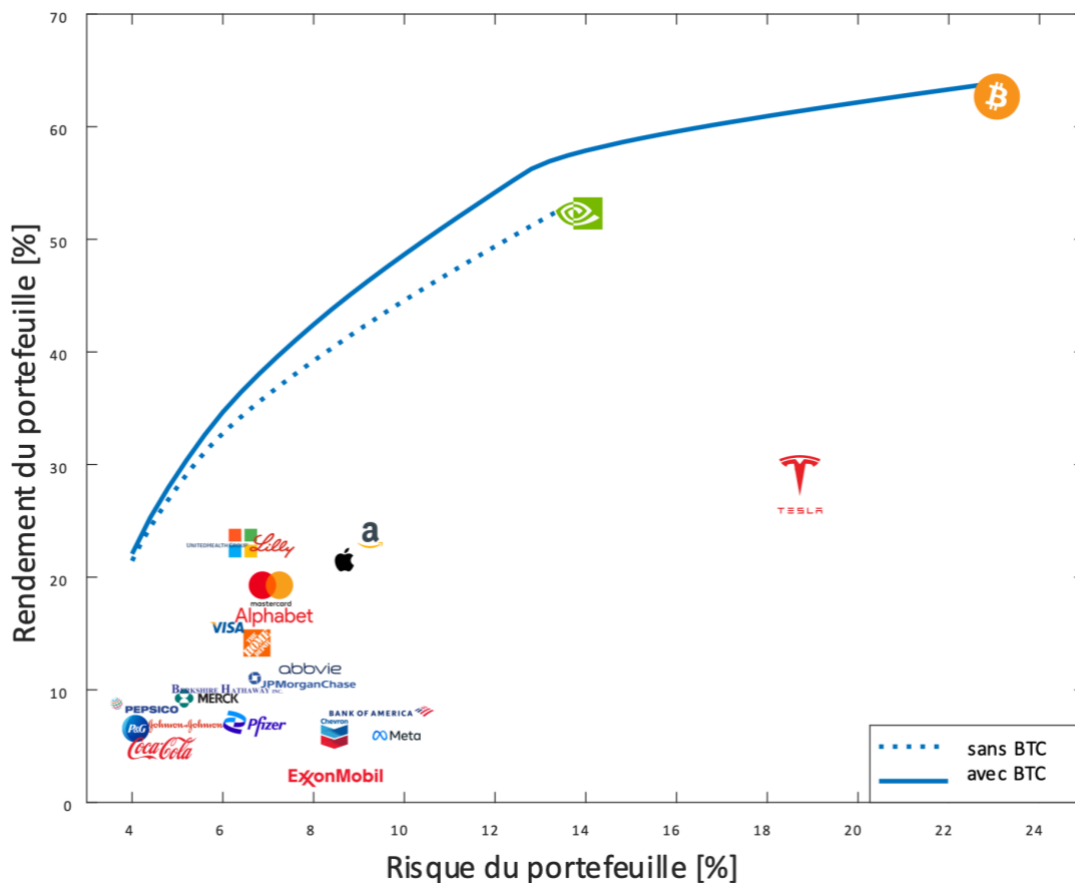


Figure 22 - Comparaison de la frontière efficiente avec et sans Bitcoin

Sur cette figure, il apparaît clairement que la frontière efficiente sans Bitcoin est moins intéressante que celle avec Bitcoin. En effet, la diversification ainsi que les performances offertes par Bitcoin lui font une place de choix dans le portefeuille. L'écart de performance entre les deux frontières s'agrandit au fur et à mesure que le risque augmente ou de manière similaire lorsque le rendement attendu augmente. Sur la frontière sans Bitcoin, il est impossible de former un portefeuille offrant un rendement supérieur à l'actif ayant le rendement le plus élevé, indépendamment du risque. Cette borne supérieure explique pourquoi la frontière efficiente obtenue sans Bitcoin s'arrête plus tôt dans l'espace rendement-risque que celle obtenue avec du Bitcoin, où la limite est le positionnement de Bitcoin dans cet espace.

La comparaison des frontières efficaces avec la position de l'ensemble des actifs met en avant l'atout majeur de la diversification. En effet, en prenant un zoom sur une partie de la figure, il est possible de voir que les portefeuilles construisant la frontière efficiente sont plus performants que les actifs pris individuellement [Figure 23].

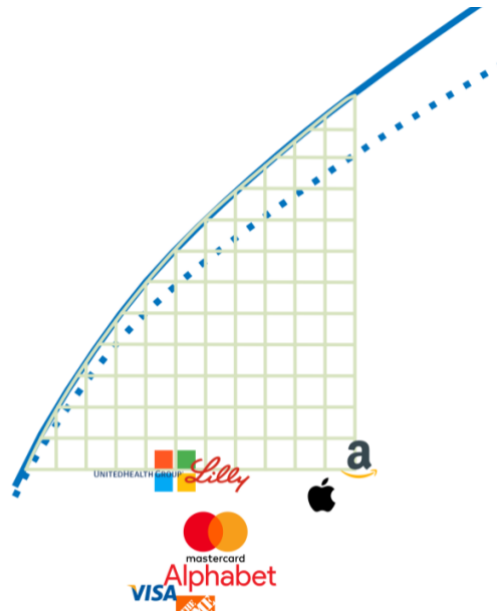


Figure 23 - Comparaison de la performance d'Amazon par rapport à la frontière efficiente

En prenant l'exemple de l'action AMZN représentative de l'entreprise Amazon, l'ensemble des portefeuilles dans l'espace quadrillé sont des portefeuilles objectivement plus performants que l'actif pris individuellement. En se déplaçant graphiquement depuis l'action Amazon vers la gauche, les portefeuilles présentent le même rendement mais avec un risque plus faible. De manière similaire, en se déplaçant graphiquement depuis l'action Amazon vers le haut de la frontière efficiente, les portefeuilles formés présentent le même risque que l'actif mais en offrant un rendement plus élevé. Les positions optimales sont bien évidemment les portefeuilles réalisables présentant le meilleur ratio entre rendement et risque, à savoir le plus en haut à gauche possible sur ce graphique.

La diversification, obtenue grâce aux différentes corrélations entre les actifs, permet de créer des portefeuilles offrant un meilleur compromis rendement-risque que chacun des actifs pris individuellement.

4.3.2 Pondération des actifs

Après avoir formé et analysé la frontière efficiente, il est possible d'investiguer la pondération de chaque actif menant aux portefeuilles optimaux constituant la frontière efficiente. La figure suivante représente l'évolution de la pondération des actifs en fonction du rendement du portefeuille lors de la formation de la frontière efficiente [Figure 24].

Dans un premier temps, on s'aperçoit que seuls certains actifs sont constitutifs des portefeuilles efficaces. Les portefeuilles sont composés d'une pondération variable entre les actifs de Eli Lilly & Co, Mastercard, Merck & Co, Microsoft, Nvidia, Procter & Gamble, UnitedHealth Group ainsi que Bitcoin. Ce sous-ensemble d'actions représente les actifs les plus performants et offrant les corrélations les plus propices à diminuer le risque tout en garantissant le même rendement.

Dans un second temps, la proportion de Bitcoin dans le portefeuille n'est jamais nulle et augmente proportionnellement au rendement attendu. En effet, Bitcoin présentant un rendement moyen de 63,73% avec un risque associé de 22,75%, sa contribution sera d'autant plus grande que la tolérance au risque de l'investisseur est élevée et donc que le rendement espéré sera élevé. À de plus faibles risques, et donc rendements, la quantité de Bitcoin dans le portefeuille est moindre, mais suffisamment significative que pour être considérée.

La figure ci-dessous représente la même distribution de la pondération des actifs mais en fonction du risque du portefeuille [Figure 25]. L'évolution de la pondération des actifs est identique à celle décrite à la Figure 24, seule l'échelle est modifiée.

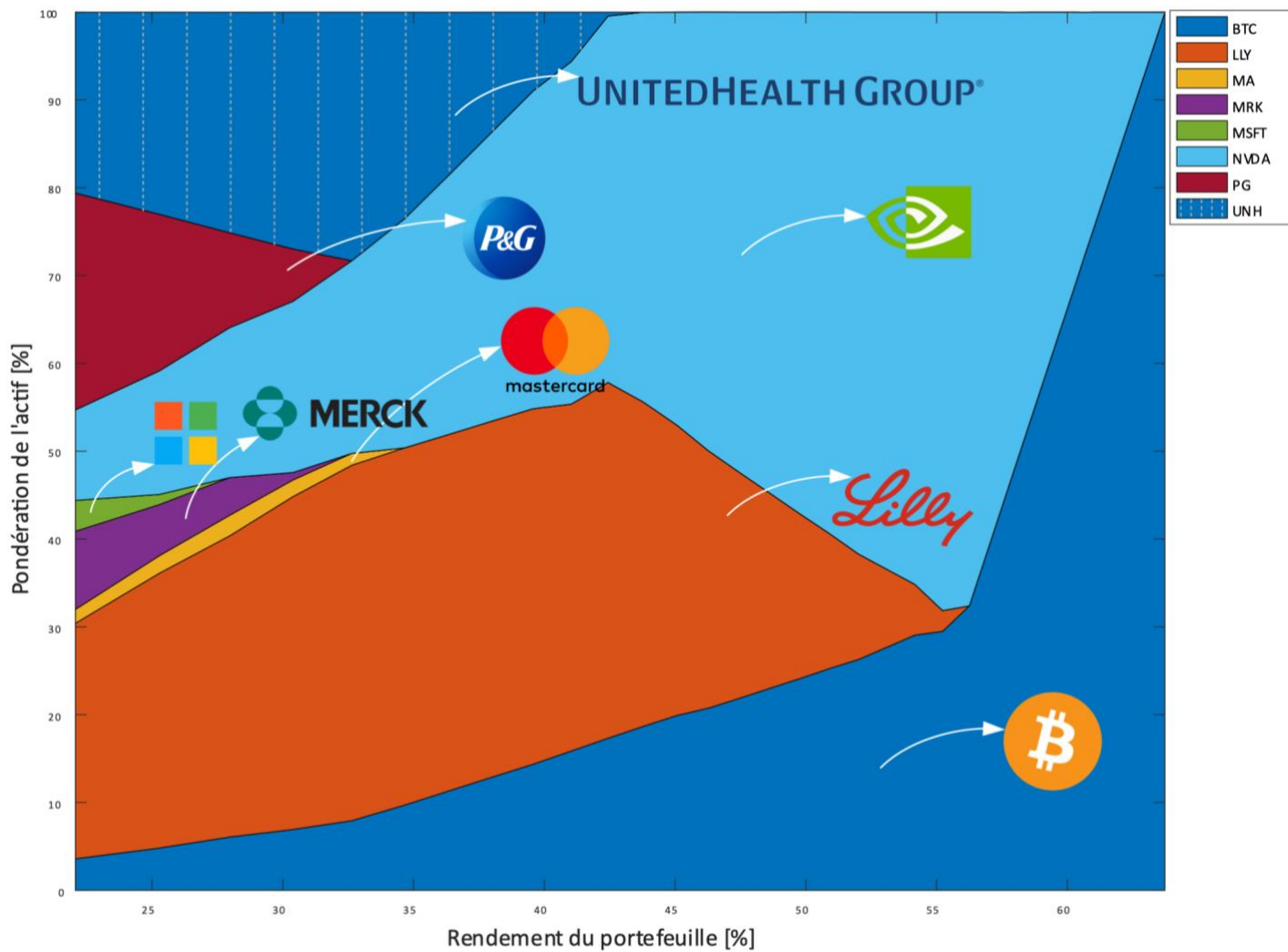


Figure 24 - Distribution de la pondération des actifs en fonction du rendement

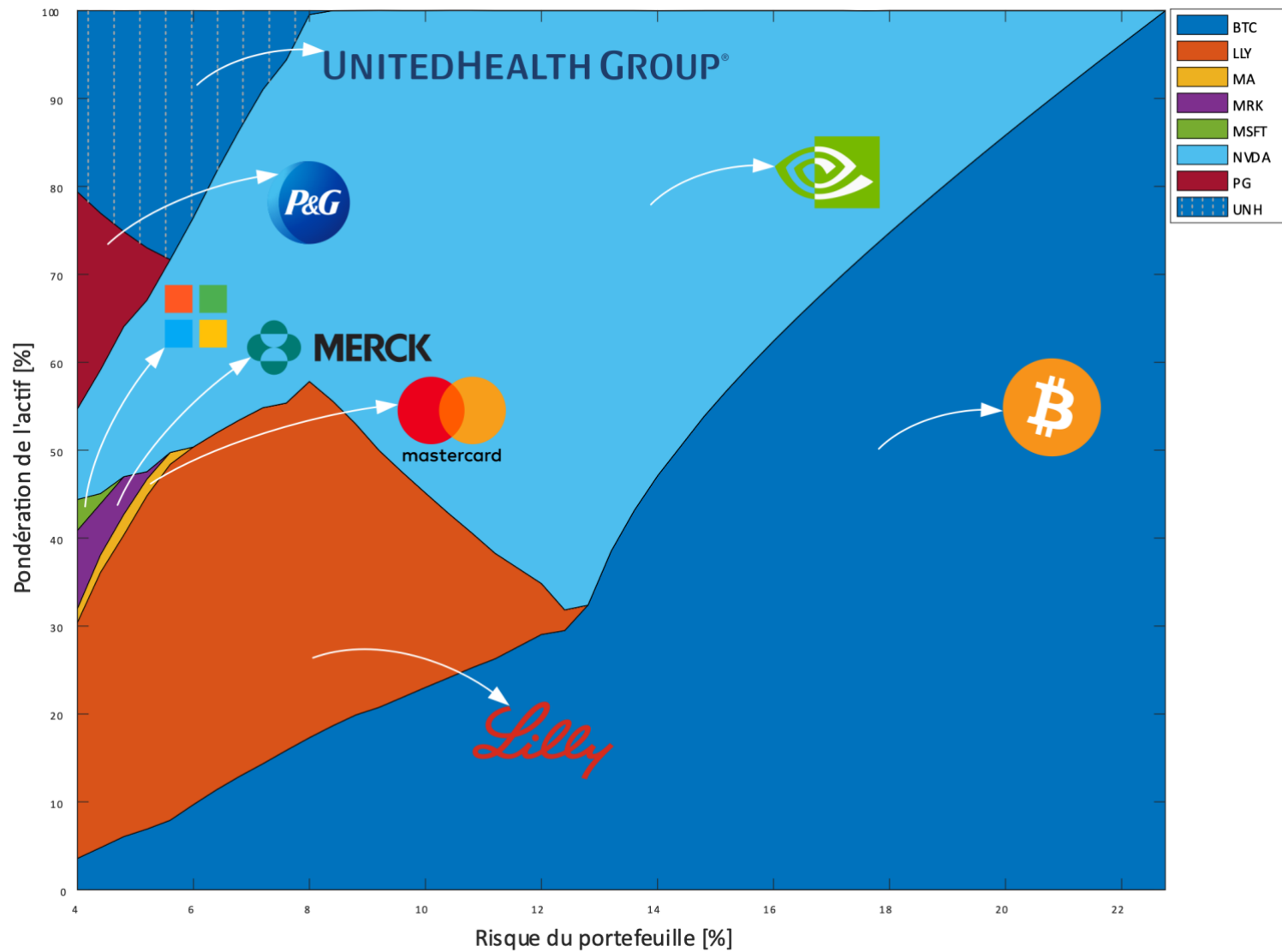


Figure 25 - Distribution de la pondération des actifs en fonction du risque

4.3.3 Instabilité du modèle

Lors de la résolution du problème d'optimisation via le solveur Python, il apparaît certaines instabilités. Ces instabilités se manifestent sous la forme de creux lors de la formation de la frontière efficiente. Il est évident que ces points ne constituent pas une solution du problème, dû à leur performance inférieure à celle du point situé à leur gauche sur la figure. Graphiquement, ces instabilités sont représentées ci-dessous [Figure 26].

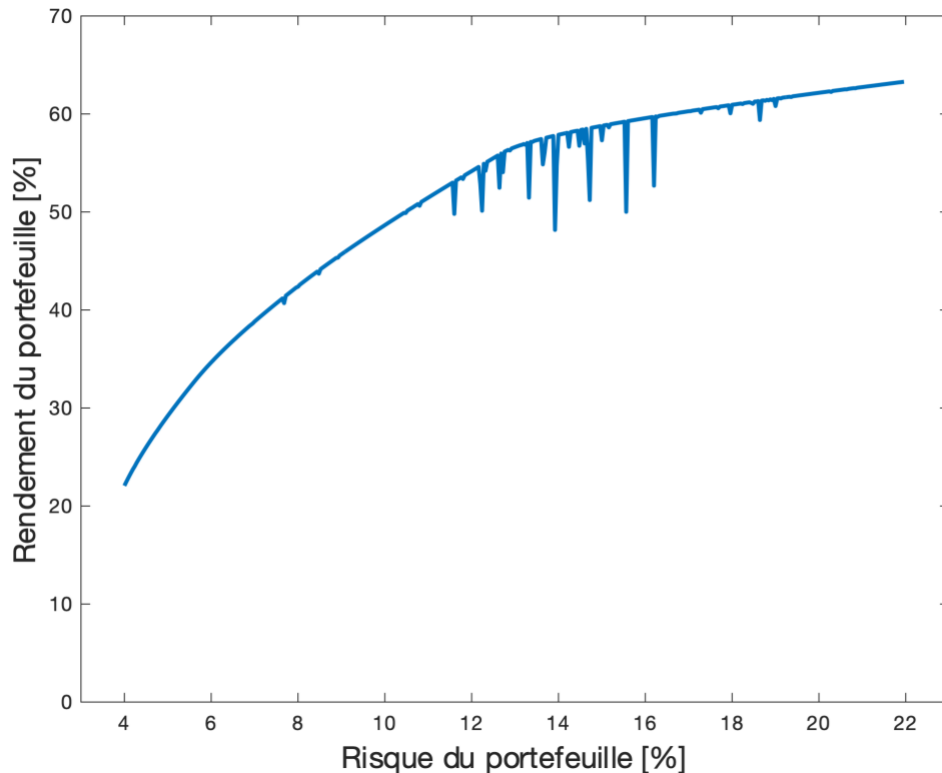


Figure 26 - Instabilité du modèle d'optimisation

Ces instabilités sont croissantes proportionnellement par rapport aux nombres de points calculés pour la formation de la frontière efficiente. Afin d'atténuer leur effet, le modèle choisi calcule la frontière efficiente sur un ensemble de 200 points et les quelques anomalies présentes sont retirées des résultats finaux. La diminution de la tolérance du modèle permet également d'améliorer la précision, sans toutefois régler complètement le problème. Ces instabilités ne sont pas dues à la méthode d'optimisation utilisée mais bien au solveur python et à son interprétation des contraintes ainsi que de la fonction objectif, menant à des imprécisions telles que représentées sur la Figure 26.

4.4 Sélection des portefeuilles par rapport au profil de l'investisseur

Chaque investisseur a des objectifs, des attentes et une tolérance au risque qui lui est propre. En se basant sur les 3 profils d'investisseur définis ci-dessus [Section 3.2.3], il est possible de choisir une sélection appropriée d'actifs en fonction du profil qui permet d'optimiser le rendement, tout en satisfaisant la minimisation du risque et en garantissant une satisfaction à long terme pour l'investisseur. Cette sélection s'établit de par le croisement entre la frontière efficiente et les objectifs de l'investisseur. Dans le cadre de ce travail, une attention particulière est portée sur la pondération du Bitcoin dans le portefeuille global afin d'établir quelle est la proportion idéale du Bitcoin afin de diversifier au mieux le portefeuille de l'investisseur.

4.4.1 Profil prudent

Pour un investisseur prudent, la sécurité de son capital sera son objectif principal. Par conséquent, sa variable d'intérêt est donc la volatilité de son portefeuille. Pour un investisseur supportant une volatilité raisonnable de 5%, voici les rendements espérés avec et sans Bitcoin dans son portefeuille :

	Portefeuille 1	Portefeuille 2
Volatilité	5%	5%
Rendement	28,15 %	29,18%
% BTC	- %	6,48%

Tableau 5 - Rendement-volatilité d'un investisseur prudent

Dans le cas d'un investisseur au profil prudent, celui-ci peut augmenter la diversification de son portefeuille afin de conserver le même niveau de risque mais augmenter son rendement. Cette augmentation de rendement se fait grâce à l'incorporation de Bitcoin dans le portefeuille, en faible quantité. Cependant, étant donné la forte volatilité de Bitcoin, il paraît évident que sa proportion est d'autant plus faible que la volatilité du portefeuille global est faible, contrainte voulue par l'investisseur.

4.4.2 Profil équilibré

Dans le cadre de ce travail, un investisseur considéré comme équilibré est un investisseur qui va chercher un rendement relativement important tout en conservant son niveau de risque dans une limite acceptable selon lui. Pour cet investisseur, les variables de décision sont à la

fois le rendement et la volatilité. Voici plusieurs exemples de portefeuilles pouvant convenir à un investisseur au profil équilibré :

	Portefeuille 1	Portefeuille 2	Portefeuille 3	Portefeuille 4
Volatilité	7%	7%	9%	9%
Rendement	36,14%	38,81%	42,04%	45,18%
% BTC	- %	13,63%	- %	20,32%

Tableau 6 - Rendement-volatilité d'un investisseur équilibré

Pour un investisseur équilibré, afin d'obtenir le meilleur rendement possible pour une rentabilité donnée ou inversement la volatilité la plus faible pour un rendement donné, la proportion du Bitcoin dans le portefeuille est supérieure à 10%. Cette proportion augmente significativement au fur et à mesure que le risque toléré par l'investisseur augmente. À titre d'exemple, la proportion atteint 13,63% pour une volatilité de 7% et grimpe à plus de 20% pour une volatilité de 9%. Cette forte augmentation se représente graphiquement par l'évolution de la frontière efficiente.

Encore une fois, les portefeuilles intégrant du Bitcoin performant mieux que ceux n'en intégrant pas. Cette différence de performances se fait davantage ressentir lorsque le risque toléré augmente ou bien que le rendement attendu par l'investisseur augmente. Graphiquement, il est possible de voir ce phénomène par l'écart croissant entre les deux frontières efficientes, avec et sans Bitcoin, lorsque le rendement et le risque augmentent.

4.4.3 Profil dynamique

Dans le cas d'un profil dynamique, l'investisseur est prêt à prendre de très gros risques avec son capital et ce, afin de maximiser son rendement. De manière générale, cette stratégie est adoptée par des investisseurs aux capitaux élevés qui allouent une stratégie plus risquée sur une petite partie de leur capital.

Pour un investisseur souhaitant un rendement annuel supérieur à 50%, voici certains portefeuilles pouvant convenir :

	Portefeuille 1	Portefeuille 2	Portefeuille 3	Portefeuille 4
Volatilité	12,28%	10,47%		16,60%
Rendement	50%	50%	60%	60%
% BTC	- %	24,33%	- %	66,29%

Tableau 7 - Rendement-volatilité d'un investisseur dynamique

Dans un premier temps, pour un investisseur cherchant une rentabilité de 50%, la volatilité du portefeuille diminue de plus de 2% en intégrant du Bitcoin dans le portefeuille. Cependant, la quantité de Bitcoin à intégrer devient largement majoritaire dans le portefeuille d’actions et il est donc crucial de mener une analyse de risques plus poussée afin de mesurer avec plus de précision les impacts sous-jacents.

4.5 Caractéristiques du Bitcoin

4.5.1 Bitcoin et loi normale

La théorie moderne du portefeuille étant fondée sur les deux critères moyenne et variance, il est crucial de déterminer si les actifs respectent bien cette hypothèse. Les calculs et optimisations ci-dessus sont basés sur l’hypothèse que la distribution des rendements correspond à une loi normale, de moyenne μ et d’écart-type σ . Pour le Bitcoin, la figure ci-dessous compare la distribution réelle des rendements avec la distribution calculée sur base d’une loi normale [Figure 27].

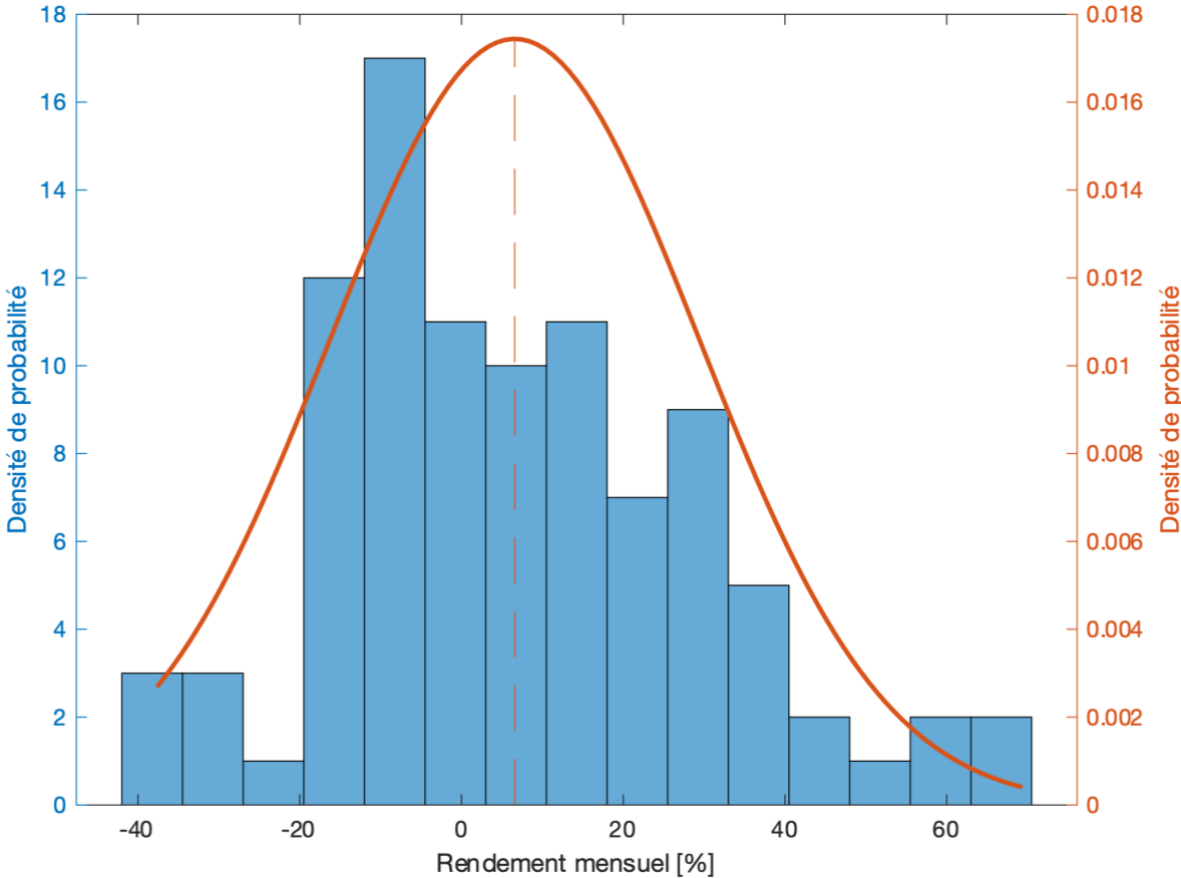


Figure 27 - Densité de probabilité des rendements mensuels du Bitcoin

Il apparaît clairement que la loi normale donne une représentation assez éloignée de la distribution réelle des rendements mensuels. Afin de mesurer la disparité des données, deux caractéristiques peuvent être prises en compte.

D'une part, le coefficient d'aplatissement de la distribution des rendements mensuels est de 4,09, ce qui représente un aplatissement inférieur à celui d'une loi normale pour laquelle ce coefficient est de 3,0. Cette différence n'est pas suffisamment importante que pour engendrer de grosses erreurs dans les calculs. D'autre part, sur la distribution des rendements mensuels du Bitcoin autour de la moyenne, le coefficient d'asymétrie est de 1,48. Ce coefficient étant positif, cela représente une déformation de la distribution normale avec une majorité des données se trouvant dans la partie gauche du graphique, inférieure à la moyenne. Cela signifie que même si la majorité des rendements mensuels sont inférieurs à cette moyenne, les rendements mensuels supérieurs compensent cet écart. Graphiquement, cela se traduit par une forte concentration de rendements mensuels autour des -10%.

L'écart entre la distribution réelle des rendements mensuels et l'approximation qui en a été faite est une des limitations de ce modèle. En effet, bien que les calculs soient corrects, les hypothèses prises en compte ne correspondent pas nécessairement à la réalité de l'évolution des actifs.

4.5.2 Évolution de la corrélation du Bitcoin

La corrélation entre les actifs est la variable fondamentale sur laquelle reposent les bénéfices de la diversification. Dans les modèles d'optimisation construits, Bitcoin joue le rôle de diversificateur de par sa corrélation positive et imparfaite en moyenne avec les autres actifs. Cependant, cette corrélation n'est pas une donnée figée et évolue au cours du temps et en fonction de facteurs externes tels que la régulation, les événements économiques, etc. Le graphique ci-dessous montre l'évolution de la corrélation entre Bitcoin et l'indice de référence Standard & Poor's 500 [Figure 28].

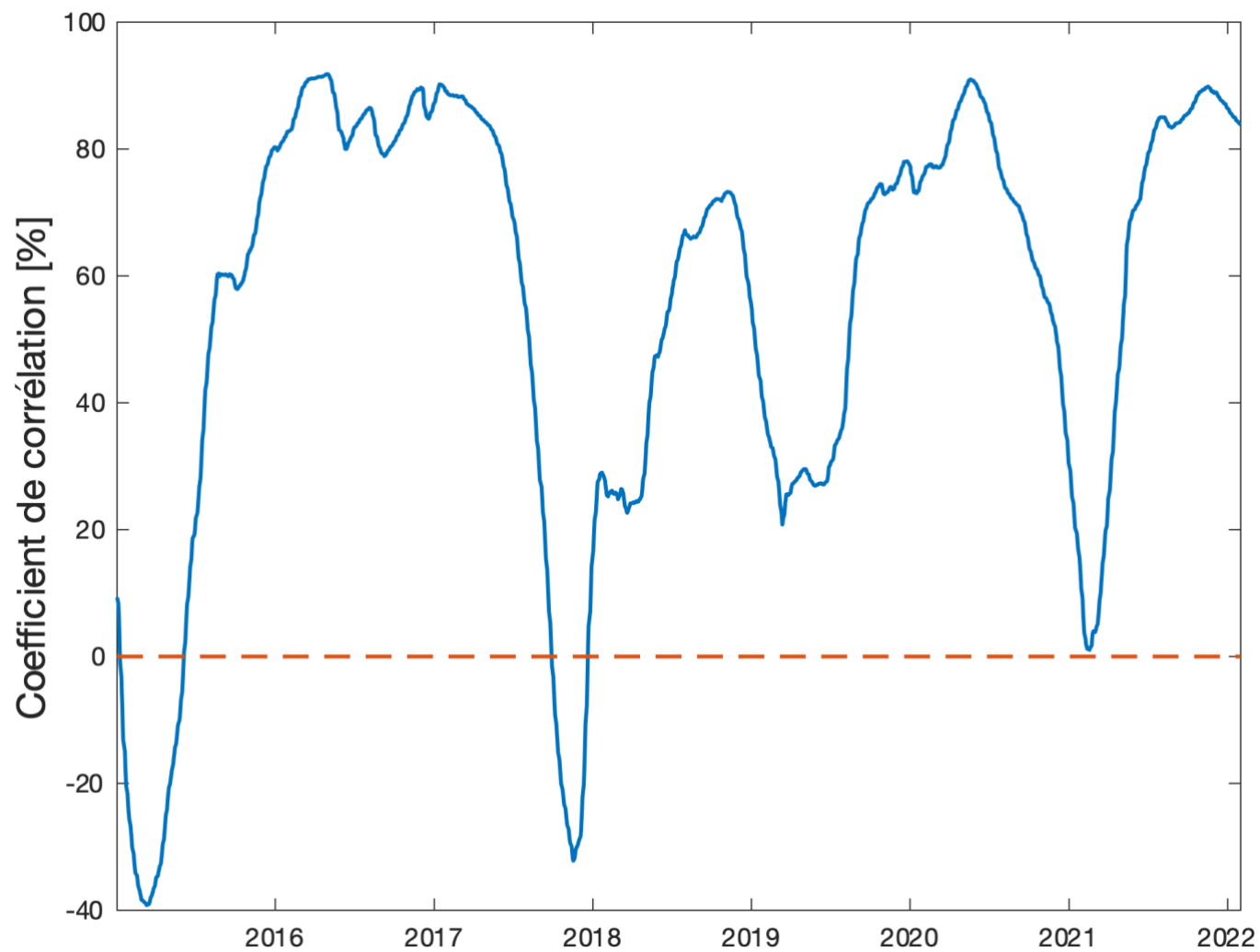


Figure 28 - Évolution de la corrélation entre Bitcoin et l'indice S&P500

Ce coefficient de corrélation est calculé avec une fréquence journalière des variations de prix sur une période glissante d'approximativement une année. Cette période glissante n'est pas strictement égale à une année, soit 365 jours, car la bourse étant fermée les weekends ainsi que certains jours particuliers, il n'existe pas de données pour ces jours en question. Bitcoin ayant une évolution de prix continue, les données correspondantes aux jours pour lesquels il n'existe pas de données pour l'indice S&P500 ne sont pas prises en compte.

La corrélation entre le Bitcoin et le Standard & Poor's 500 varie fortement de 2015 à 2022. En effet, la corrélation alterne entre le positif et le négatif, classant respectivement le Bitcoin comme diversificateur ou comme actif de couverture.

Les raisons de cette variation de corrélation sont nombreuses et diverses. De manière non exhaustive, lorsque dans les périodes de crise les investisseurs décident d'adopter un comportement plus conservateur, les actifs risqués tels que les cryptomonnaies et les actions sont vendues afin de se tourner vers des refuges tels que l'or et autres, traduisant une certaine corrélation positive entre le Bitcoin et l'ETF S&P500 (Godbole, 2023). De même, lors de la relevée des taux d'intérêt, les cryptomonnaies subissent la même tendance baissière que les actions (Frank, 2023). Un autre point en faveur de cette corrélation positive est l'accessibilité de plus en plus aisée et le développement de Bitcoin, draguant ainsi les fonds d'Institutionnels. Ces Institutionnels appliquant des raisonnements similaires pour les cryptomonnaies que pour leurs autres actifs en portefeuille, la corrélation positive est renforcée par leur présence (Auer et al., 2023). Toutefois, lors des crises de confiance dans le système économique actuel, Bitcoin, initialement créé comme une solution à ce problème de confiance, se valorise à la hausse alors que les marchés traditionnels connaissent parfois des baisses drastiques.

5 Discussions

Afin d'analyser et de tirer des conclusions sur base des résultats précédents, certains points et limites doivent être considérés.

Premièrement, bien que le Bitcoin impacte positivement la frontière efficiente de par ses caractéristiques de rendement et de volatilité, il est important de considérer les limites de ce modèle. En effet, la distribution des rendements de Bitcoin ne suit pas une loi normale telle qu'approximée dans les modèles d'optimisation présentés précédemment. Par conséquent, les analyses et recommandations qu'il est possible de tirer sur base des résultats sont à considérer à la lumière de cette limitation. Cette comparaison de correspondance entre la distribution réelle des rendements et le modèle théorique utilisé devrait être analysée pour chaque actif étudié. En effet, la simplicité de ce modèle est un atout pour sa mise en œuvre mais présente des approximations nuisant à l'exactitude des résultats.

Deuxièmement, les performances passées ne présagent en rien les performances futures. Les modèles et résultats sont valables sur base des données historiques utilisées mais rien ne garantit que les actifs suivent la courbe de tendance projetée dans les années à venir. Outre les réglementations, il existe tout un ensemble de facteurs économiques tels que la santé financière des entreprises, le contexte géopolitique, les évolutions technologiques et bien d'autres encore ayant un impact sur l'évolution des actions d'entreprises et sur les cryptomonnaies.

Troisièmement, bien qu'indépendant du type d'actif, le comportement des investisseurs est un facteur difficilement mesurable et ayant un impact considérable dans la prise de décision. Bitcoin, avec sa volatilité très élevée, pourrait engendrer si il était intégrée dans le portefeuille d'un investisseur des réactions émotionnelles fortes nuisant à la stratégie long terme construite avec les modèles ci-dessus.

Enfin, Bitcoin ainsi que les autres cryptomonnaies sont des technologies émergentes qui ne se sont développées que très récemment et qui doivent encore trouver leur utilité réelle dans le monde actuel. Comme pour toute technologie émergente, le risque dans les premières années de pérennisation est élevé avant de subir une décroissance en fonction de l'adoption de la technologie. Même si Bitcoin a fait ses preuves depuis 2008, rien ne garantit son utilisation sur le long terme et doit être considéré comme un risque majeur pour un investisseur.

6 Conclusion

En conclusion, ce travail démontre l'impact positif de l'intégration de Bitcoin dans un portefeuille diversifié d'actions individuelles américaines. L'ensemble des calculs, des simulations et des résultats a été réalisé à partir de données historiques mensuelles reprenant le cours de 25 actions individuelles américaines et du Bitcoin sur une période de 8 ans allant de janvier 2015 à décembre 2022.

Les portefeuilles efficients avec du Bitcoin offrent un meilleur rendement global tout en conservant un même niveau de risque comparativement aux portefeuilles sans Bitcoin ou, de manière équivalente, diminuent le risque tout en conservant le même niveau de rendement. Cet écart de performance est de plus en plus important à mesure que le risque toléré par l'investisseur augmente, ce qui se traduit par un écart croissant entre les deux frontières efficientes, respectivement avec et sans Bitcoin. De plus, Bitcoin présente une corrélation relativement faible avec les autres actifs, ce qui en fait un diversificateur potentiel pour atténuer le risque et améliorer les performances globales du portefeuille.

Cependant, il est important de noter certaines limites de cette étude. Tout d'abord, les résultats sont basés sur des données historiques et peuvent varier dans des conditions de marché différentes. En outre, les limitations de l'hypothèse moyenne-variance doivent être également prises en compte afin de nuancer les résultats obtenus.

Pour les perspectives futures, il serait intéressant d'approfondir d'une part les facteurs fondamentaux qui influenceront les performances futures de Bitcoin, telles que l'évolution des réglementations et des conditions de marché. D'autre part, il serait également judicieux d'affiner la modélisation de la moyenne et de la volatilité des actifs afin d'améliorer la précision des résultats obtenus sur base des modèles.

En somme, malgré certaines limitations, ce travail démontre l'impact positif de l'intégration de Bitcoin dans un portefeuille diversifié d'actions individuelles américaines, en termes d'amélioration du rendement tout en conservant le risque initial du portefeuille sans Bitcoin. Cela pose donc des jalons pour les investisseurs souhaitant améliorer leur stratégie d'allocation de portefeuilles afin de bénéficier de meilleures performances grâce aux avantages de Bitcoin.

7 Bibliographie

- Alexeev, V., & Dungey, M. (2015). Equity portfolio diversification with high frequency data. *Quantitative Finance*, 15(7), 1205-1215.
- Auer, R., Farag, M., Lewrick, U., Orazem, L., & Zoss, M. (2023). *Banking in the shadow of Bitcoin? The institutional adoption of cryptocurrencies*.
- Baddeley, M., Burke, C., Schultz, W., & Tobler, T. (2010). *Impacts of personality on herding in financial decision-making*.
- Badea, L., & Mungiu-Pupăzan, M. C. (2021). The economic and environmental impact of bitcoin. *IEEE Access*, 9, 48091-48104.
- Bakry, W., Rashid, A., Al-Mohamad, S., & El-Kanj, N. (2021). Bitcoin and portfolio diversification : A portfolio optimization approach. *Journal of Risk and Financial Management*, 14(7), 282.
- Benjelloun, H. (2010). Evans and Archer—forty years later. *Investment Management and Financial Innovations*, 7(1), 98-104.
- Bitcoin Price*. (2023, 8 janvier). CoinGecko. <https://www.coingecko.com/en/coins/bitcoin>
- Bouoiyour, J., & Selmi, R. (2015). What does Bitcoin look like? *Annals of Economics & Finance*, 16(2).
- Bouri, E., Molnár, P., Azzi, G., Roubaud, D., & Hagfors, L. I. (2017). On the hedge and safe haven properties of Bitcoin : Is it really more than a diversifier? *Finance Research Letters*, 20, 192-198.
- Brealey, R. A., Myers, S., & Allen, F. (2006). *Principes de gestion financière, 8 e éd.* Paris, Pearson Education France.
- Brock, C. (2023, 13 février). *All About Asset Classes and Investment Diversification*. The Motley Fool. <https://www.fool.com/investing/stock-market/basics/asset-classes/>
- Broihanne, M.-H., Merli, M., & Roger*, P. (2006). Théorie comportementale du portefeuille : Intérêt et limites. *Revue économique*, 572(2), 297-314.
- Chan, L. K., Karceski, J., & Lakonishok, J. (1999). On portfolio optimization : Forecasting covariances and choosing the risk model. *The review of Financial studies*, 12(5), 937-974.
- Chen, J. (2023, 18 mars). *Safe Haven : Definition and Examples in Investing*. Investopedia. <https://www.investopedia.com/terms/s/safe-haven.asp#:~:text=our%20editorial%20policies-,What%20is%20a%20Safe%20Haven%3F,the%20event%20of%20market%20downturns.>
- Cheng, L. (2018). *Does Bitcoin Offer Diversification Benefit in a Portfolio?* [PhD Thesis]. The Ohio State University.
- Chong, J., & Phillips, G. M. (2013). Portfolio size revisited. *The Journal of Wealth Management*, 15(4), 49-60.
- Cocco, L., Tonelli, R., & Marchesi, M. (2019). An agent based model to analyze the bitcoin mining activity and a comparison with the gold mining industry. *Future Internet*, 11(1), 8.

- De Bortoli, D., da Costa Jr, N., Goulart, M., & Campara, J. (2019). Personality traits and investor profile analysis : A behavioral finance study. *PloS one*, 14(3), e0214062.
- Denisova, V., Mikhaylov, A., & Lopatin, E. (2019). Blockchain infrastructure and growth of global power consumption. *International Journal of Energy Economics and Policy*, 9(4), 22-29. <https://doi.org/10.32479/ijeep.7685>
- Différences entre risque systématique et risque spécifique.* (2023). Finance de marché. <http://financedemarche.fr/finance/differences-entre-risque-systematique-et-risque-specifique>
- Dimson, E., & Mussavian, M. (2000). Market efficiency. *The current state of business disciplines*, 3(1), 959-970.
- Doumenis, Y., Izadi, J., Dhamdhere, P., Katsikas, E., & Koufopoulos, D. (2021). A critical analysis of volatility surprise in Bitcoin cryptocurrency and other financial assets. *Risks*, 9(11), 207.
- Dyhrberg, A. H. (2016a). Bitcoin, gold and the dollar—A GARCH volatility analysis. *Finance Research Letters*, 16, 85-92.
- Dyhrberg, A. H. (2016b). Hedging capabilities of bitcoin. Is it the virtual gold? *Finance Research Letters*, 16, 139-144.
- Eisl, A., Gasser, S. M., & Weinmayer, K. (2015). Caveat emptor : Does Bitcoin improve portfolio diversification? Available at SSRN 2408997.
- Elliott, G., & Timmermann, A. (2016). Forecasting in economics and finance. *Annual Review of Economics*, 8, 81-110.
- Eon, O. (2020, 12 mai). *Etude sur les règles de profilage des clients des banques et l'appariement de ces profils avec les produits dans le cadre d'un service de conseil en investissement.* Autorité des marchés financiers. <https://www.amf-france.org/fr/actualites-publications/publications/rapports-etudes-et-analyses/etude-sur-les-regles-de-profilage-des-clients-des-banques-et-lappariement-de-ces-profils-avec-les>
- Evans, J. L., & Archer, S. H. (1968). Diversification and the Reduction of Dispersion : An Empirical Analysis. *The Journal of Finance*, 23(5), 761. <https://doi.org/10.2307/2325905>
- Fabozzi, F. J., Gupta, F., & Markowitz, H. M. (2002). The legacy of modern portfolio theory. *The journal of investing*, 11(3), 7-22.
- Figlewski, S. (1994). *Forecasting volatility using historical data.*
- Frank, J. (2023, 8 mars). *Les analystes observent une diminution de la corrélation entre Bitcoin (BTC) et le marché boursier américain.* Cryptonews. <https://fr.cryptonews.com/news/analystes-diminution-correlation-entre-bitcoin-btc-marche-boursier-americaain.htm#:~:text=Selon%20un%20graphique%20pr%C3%A9sent%20par,30%2C%20en%20d%C3%A9but%20de%20semaine.>
- Frank, J., Chin, K., & Ciolli, J. (2017, 15 décembre). *PAUL KRUGMAN: Bitcoin is a more obvious bubble than housing was.* Business Insider. <https://www.businessinsider.com/paul-krugman-says-bitcoin-is-a-bubble-2017-12?r=US&IR=T>
- Garriga, M., Arias, M., & De Renzis, A. (2018). Blockchain and cryptocurrency : A comparative

framework of the main architectural drivers. *arXiv preprint arXiv:1812.08806*.

Godbole, O. (2023, 6 avril). *Bitcoin's Tight Correlation With Nasdaq-SPX Ratio Muddies Safe-Haven Narrative*. CoinDesk. <https://www.coindesk.com/markets/2023/04/06/bitcoins-tight-correlation-with-nasdaq-to-sp-500-ratio-muddies-the-safe-haven-narrative/>

Gusni, G., & Nugraha, N. (2021). Portfolio Asset Allocation Decisions : A Meta-Analysis. *SRIWIJAYA INTERNATIONAL JOURNAL OF DYNAMIC ECONOMICS AND BUSINESS*, 4(2), 95-102.

Hertig, A. (2022, 4 octobre). *Bitcoin Halving, Explained*. CoinDesk. <https://www.coindesk.com/learn/bitcoin-halving-explained/>

Hillier, D., Draper, P., & Faff, R. (2006). Do precious metals shine? An investment perspective. *Financial Analysts Journal*, 62(2), 98-106.

Holovatiuk, O. (2020). Cryptocurrencies as an asset class in portfolio optimisation. *Central European Economic Journal*, 7(54), 33-55.

Jondeau, E., & Rockinger, M. (2006). Optimal portfolio allocation under higher moments. *European Financial Management*, 12(1), 29-55.

Jones, B. A., Goodkind, A. L., & Berrens, R. P. (2022). Economic estimation of Bitcoin mining's climate damages demonstrates closer resemblance to digital crude than digital gold. *Scientific Reports*, 12(1), 14512. <https://doi.org/10.1038/s41598-022-18686-8>

Kajtazi, A., & Moro, A. (2019). The role of bitcoin in well diversified portfolios : A comparative global study. *International Review of Financial Analysis*, 61, 143-157.

Kaut, M., Vladimirou, H., Wallace, S. W., & Zenios, S. A. (2007). Stability analysis of portfolio management with conditional value-at-risk. *Quantitative Finance*, 7(4), 397-409.

Kenton, W. (2022, 17 mai). *Semivariance : Meaning, Formulas, and Calculations*. Investopedia. <https://www.investopedia.com/terms/s/semivariance.asp#:~:text=What%20is%20a%20Semivariance%3F,of%20a%20set%20of%20data.>

Kenton, W. (2023, 23 mars). *Understanding Value at Risk (VaR) and How It's Computed*. Investopedia. <https://www.investopedia.com/terms/v/var.asp>

Kreuser, J. L., & Sornette, D. (2018). Bitcoin bubble trouble. *Forthcoming in Wilmott Magazine*, 18-24.

Krückeberg, S., & Scholz, P. (2019). *Cryptocurrencies as an asset class*. Springer.

Kryzanowski, L., & Singh, S. (2010). Should minimum portfolio sizes be prescribed for achieving sufficiently well-diversified equity portfolios? *Frontiers in Finance and Economics*, 7(2), 1-37.

Lafrance, R. (1983). Évaluation de l'hypothèse de la moyenne-variance : Une application au portefeuille des banques canadiennes. *L'Actualité économique*, 59(1), 20-37.

Lang, T. (2019, 1 juillet). *Our 'Efficient Frontier' Investment Theory*. Crypto Briefing. <https://inyova.ch/en/expertise/efficient-frontier-investment-theory/>

Lee, S. C., & Eid Junior, W. (2018). Portfolio construction and risk management : Theory versus practice. *RAUSP Management Journal*, 53(3), 345-365. <https://doi.org/10.1108/RAUSP-04-2018-009>

Markowitz, H. M. (1952). *Portfolio Selection, the journal of finance*. 7 (1).

- Maupas, P. (2007, 23 février). *Construire un portefeuille de fonds : La frontière efficiente*. Quantalys. <https://www.quantalys.com/Article/Consultation/3#:~:text=Hypoth%C3%A8ses%20sous%20Djacentes%20%C3%A0%20la%20fronti%C3%A8re%20efficiente&text=L'investisseur%20rationnel%20pr%C3%A9f%C3%A8re%2C%20%C3%A0,type%20des%20rendements%20du%20portefeuille>.
- McCown, J. R., & Zimmerman, J. R. (2006). Is gold a zero-beta asset? Analysis of the investment potential of precious metals. *Analysis of the Investment Potential of Precious Metals (July 24, 2006)*.
- Meynkhard, A. (2019). Fair market value of bitcoin : Halving effect. *Investment Management and Financial Innovations*, 16(4), 72-85.
- Miyazaki, T., & Hamori, S. (2016). Asymmetric correlations in gold and other financial markets. *Applied Economics*, 48(46), 4419-4425.
- Nakamoto, S. (2008). Bitcoin : A peer-to-peer electronic cash system. *Decentralized business review*, 21260.
- Oyenubi, A. (2019). Diversification measures and the optimal number of stocks in a portfolio : An information theoretic explanation. *Computational Economics*, 54, 1443-1471.
- Paul, K. (2022, 26 mai). *What are the environmental impacts of cryptocurrencies?* Business Insider. <https://www.businessinsider.com/personal-finance/cryptocurrency-environmental-impact?r=US&IR=T>
- Pichl, L., & Kaizoji, T. (2017). Volatility analysis of bitcoin. *Quantitative Finance and Economics*, 1(4), 474-485.
- Platt, E., Rennison, J., & Bullock, N. (2017, 30 novembre). *Bitcoin swings from bull to bear and back in a day*. Financial Times. <https://www.ft.com/content/4682c87c-d560-11e7-a303-9060cb1e5f44>
- Poncet, P., & Portait, R. (2009). La théorie moderne du portefeuille : Théorie et applications. *STDI Frame Maker 4986_ . book*, 795.
- Roman, D., & Mitra, G. (2009). Portfolio selection models : A review and new directions. *Wilmott journal: the international journal of innovative quantitative finance research*, 1(2), 69-85.
- Schär, F. (2020, 21 avril). *Understanding the Bitcoin Halving*. CfC St. Moritz. <https://cfc-stmoritz.com/blog/understanding-the-bitcoin-halving>
- Segal, T. (2022, 13 août). *What Is Diversification ? Definition as Investing Strategy*. Investopedia. <https://www.investopedia.com/terms/d/diversification.asp>
- Smales, L. A. (2019). Bitcoin as a safe haven : Is it even worth considering? *Finance Research Letters*, 30, 385-393.
- Stensås, A., Nygaard, M. F., Kyaw, K., & Treepongkaruna, S. (2019). Can Bitcoin be a diversifier, hedge or safe haven tool? *Cogent Economics & Finance*, 7(1), 1593072.
- Tang, G. Y. (2004). How efficient is naive portfolio diversification? An educational note. *Omega*, 32(2), 155-160.

- Taylor, S. (2023, 14 mai). *Skewness*. Corporate Finance Institute. <https://corporatefinanceinstitute.com/resources/data-science/skewness/>
- Thaler, R. H., & Sunstein, C. R. (2008). Nudge : Improving decisions about health. *Wealth, and Happiness*, 6, 14-38.
- Thorn, A. (2021, 14 septembre). *Crypto Long & Short : The Pattern in Bitcoin's Volatility*. CoinDesk. <https://www.coindesk.com/markets/2021/04/25/crypto-long-short-the-pattern-in-bitcoins-volatility/>
- Yahoo Finance*. (2023). <https://finance.yahoo.com/>
- Yermack, D. (2015). Is Bitcoin a real currency? An economic appraisal. In *Handbook of digital currency* (p. 31-43). Elsevier.
- Yi, S., Xu, Z., & Wang, G.-J. (2018). Volatility connectedness in the cryptocurrency market : Is Bitcoin a dominant cryptocurrency? *International Review of Financial Analysis*, 60, 98-114. <https://doi.org/10.1016/j.irfa.2018.08.012>
- Yu, K. (2008). *Portfolio improvement and asset allocation*.
- Zaimovic, A., Omanovic, A., & Arnaut-Berilo, A. (2021). How many stocks are sufficient for equity portfolio diversification? A review of the literature. *Journal of Risk and Financial Management*, 14(11), 551.

A. Annexe 1 – Codes Matlab

```
% Chargement de l'évolution des prix (.csv)
load("donnees");

% Rendements mensuels
length = size(data);
rendement_mensu = zeros((length(1)-1),length(2));
for j = 1:length(2)
    for i = 1:length(1)-1
        rendement_mensu(i,j) = (data(i+1,j)-data(i,j))/data(i,j);
    end
end

% Variance
variance = zeros(1,length(2));
for i = 1:length(2)
    variance(i)=var(rendement_mensu(:,i), 1);
end

% Covariance
covariance = zeros(length(2), length(2));
for i = 1:length(2)
    for j = 1:length(2)
        tmp = cov(rendement_mensu(:,i), rendement_mensu(:,j), 1);
        covariance(i,j) = tmp(1,2);
    end
end

% Correlation
correlation = zeros(length(2), length(2));
for i = 1:length(2)
    for j = 1:length(2)
        tmp = corrcoef(rendement_mensu(:,i), rendement_mensu(:,j));
        correlation(i,j) = tmp(1,2);
    end
end

% Rendement annuel moyen
rendement_moyen = zeros(length(2), 1);
for i = 1:length(2)
    tmp = (data(end,i)-data(1,i))/data(1,i);
    rendement_moyen(i) = (1+tmp)^(1/((length(1)-1)/12))-1;
end

% Portefeuille aléatoire
w = randfixedsum(26,1,1,0,1);

rendement_portefeuille = 0;
for i = 1:length(2)
    rendement_portefeuille = rendement_portefeuille +
w(i)*rendement_moyen(i);
end

variance_portefeuille = 0;
for i = 1:length(2)
    for j = 1:length(2)
```

```

        variance_portefeuille = variance_portefeuille +
w(i)*w(j)*covariance(i,j);
    end
end

% Portefeuilles réalisables
nbr_portefeuilles = 1000;
portefeuille = zeros(nbr_portefeuilles,2);

for z = 1:nbr_portefeuilles
    w = randfixedsum(length(2),1,1,0,1); %portefeuille de (26,1), somme =
1, [a b] = [0 1]

    rendement_portefeuille = 0;
    for i = 1:length(2)
        rendement_portefeuille = rendement_portefeuille +
w(i)*rendement_moyen(i);
    end

    variance_portefeuille = 0;
    for i = 1:length(2)
        for j = 1:length(2)
            if i == j
                variance_portefeuille = variance_portefeuille +
w(i)^2*variance(i);
            else
                variance_portefeuille = variance_portefeuille +
w(i)*w(j)*covariance(i,j);
            end
        end
    end

    var_tmp = 0;
    for i = 1:length(2)
        for j = 1:length(2)
            var_tmp = var_tmp + w(i)*w(j)*covariance(i,j);
        end
    end

    portefeuille(z,1) = rendement_portefeuille;
    portefeuille(z,2) = variance_portefeuille;
end

plot(sqrt(portefeuille(:,2))*100, 100*portefeuille(:,1), "o");

% Frontière efficiente
load('Optimisation_python.mat'); %Output python

hold on;
plot(python_ET_BTC*100, python_Rp_BTC*100, 'LineWidth', 2);

hold on;
plot(python_ET*100, python_Rp*100, 'LineWidth', 2);

axis([3 24 0 70]);
legend({'portefeuilles réalisables', 'frontière avec BTC', 'frontière sans
BTC'}, 'FontSize', 12);
xlabel('Risque du portefeuille [%]', 'FontSize', 15);
ylabel('Rendement du portefeuille [%]', 'FontSize', 15);

```

B. Annexe 2 – Solveur Python

```
#!/usr/bin/env python3
# -*- coding: utf-8 -*-

import numpy as np
from scipy.optimize import minimize
import scipy.io as spio

mat = spio.loadmat('data.mat', squeeze_me=True)
Rm = mat['rendement_moyen']
Cov = mat['covariance']

def objective(w):
    Rp = 0
    for i in range(len(Rm)):
        Rp = Rp + w[i]*Rm[i];
    return -Rp

def constraint1(w):
    sum = 0;
    for i in range(len(Rm)):
        sum = sum + w[i];
    return (sum-1)

def constraint2(w):
    vol = 0;
    for i in range(len(Rm)):
        for j in range(len(Rm)):
            vol = vol + w[i]*w[j]*Cov[i][j];
    return (vol-var)

def constraint3(w):
    return w[22]

b = (0.0, 1.0);
bnds = (b,b,b,b,b,b,b,b,b,b,b,b,b,b,b,b,b,b,b,b,b,b,b,b);

con1 = {'type':'eq', 'fun': constraint1};
con2 = {'type':'eq', 'fun': constraint2};
con3 = {'type':'eq', 'fun': constraint3};
cons = [con1, con2, con3];

w0 = [1/len(Rm)]*len(Rm);

size = 450
recap_Rp = [0]*size
recap_Vp = [0]*size
lower_bond = 0.04
uper_bond = 0.22
```

```

interval = (uper_bond - lower_bond )/size;

recap_weight = np.zeros((len(Rm), 1), float)

for z in range(size):
    ET = lower_bond + z*interval
    var = ET*ET;

    sol = minimize(objective, w0, method='SLSQP', bounds=bnds,
constraints=cons);
    final = sol.x

    rendement = 0
    for k in range(len(Rm)):
        rendement = rendement + final[k]*Rm[k]

    recap_Rp[z] = rendement
    recap_Vp[z] = ET
    recap_weight = np.hstack((recap_weight,
np.atleast_2d(final).T))

```