Mémoire

Auteur : Martino, Virginie
Promoteur(s) : Schneiders, Jean-Pierre
Faculté : Faculté des Sciences
Diplôme : Master en sciences mathématiques, à finalité didactique
Année académique : 2022-2023
URI/URL : http://hdl.handle.net/2268.2/18494

Faculté des Sciences
Département de Mathématique

Sur les transformations de Cauchy et de Fourier-Borel

Mémoire de fin d'études présenté en vue de l'obtention du titre de
Master en Sciences Mathématiques, à finalité didactique

Année académique 2022-2023

Auteur :
Virginie Martino

Promoteur :
Jean-Pierre Schneiders

Remerciements

Je souhaite exprimer mes sincères remerciements en premier lieu à mon promoteur, Monsieur Schneiders, pour son aide précieuse, sa disponibilité et ses relectures attentives tout au long de la réalisation de ce mémoire. Merci pour le temps qu'il m'a consacrée.

Un grand merci à tous les enseignants et assistants que j'ai pu rencontrer lors de mes études. Je tiens particulièrement à exprimer ma gratitude envers Françoise Bastin, Céline Esser, Gentiane Haesbroeck et Michel Rigo pour avoir accepté de faire partie du jury de ce mémoire.

Mes remerciements vont également à Elodie pour les bons moments partagés ensemble toutes ces années. Je lui suis reconnaissante pour son soutien constant et ses encouragements dans les moments difficiles.

Enfin, je remercie mes parents et mes proches pour leur soutien inébranlable lors de ces six années, pour m'avoir encouragée à donner le meilleur de moi-même afin de ne rien regretter.

Introduction

L'analyse complexe est une branche des mathématiques qui est apparue au cours du $19^{\text{ème}}$ siècle et qui consiste à étudier les fonctions de variables complexes. De cette théorie émerge la notion de fonctions holomorphes qui sont des fonctions complexes possédant des propriétés intéressantes et permettant de déduire des résultats très puissants tel que le Théorème de Cauchy 1.1.10. En approfondissant les recherches sur de telles fonctions, nous pouvons prendre connaissance du livre "*Complex analysis and special topics in harmonic analysis*"[2]. C'est sur ce document principal que se basera ce mémoire.

L'objet de ce mémoire est l'analyse du dual topologique des espaces de fonctions holomorphes. Plus précisément, nous allons étudier ces éléments, les fonctionnelles analytiques. Nous allons, en particulier, montrer deux isomorphismes. Le premier entre l'espace des fonctionnelles analytiques sur un compact K de $\mathbb{C}$ et l'ensemble des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}\setminus K$ qui tendent vers 0 à l'infini et le deuxième entre le dual topologique des fonctions holomorphes sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et l'espace des fonctions entières de type exponentiel sur Ω. Nous verrons qu'il faut certaines conditions sur K et sur Ω pour que de tels isomorphismes aient lieu.

Plus précisément, ce travail est constitué de trois chapitres.

Le premier traite des espaces de fonctions holomorphes de manière générale. Tout d'abord, nous définissons l'espace de fonctions holomorphes sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et nous rappelons les résultats les plus indispensables de la théorie des fonctions holomorphes sur Ω, notamment étudiés dans [8]. Ensuite, nous regardons de quelle topologie nous pouvons munir cet espace et nous montrons qu'il est de Fréchet. On s'intéresse également à l'espace des germes de fonctions holomorphes sur un fermé de $\mathbb{C}$ qui est défini comme une limite inductive. Nous terminons ce chapitre par une étude des ensembles holomorphiquement convexes.

Dans le chapitre 2, nous introduisons les fonctionnelles analytiques sur un ouvert de $\mathbb{C}$ et nous regardons leurs propriétés de base. Ensuite, nous définissons la notion de porteur K d'une fonctionnelle analytique et nous faisons le lien avec le dual topologique $\mathscr{O}'(K)$. Finalement, nous introduisons la transformation de Cauchy et nous montrons l'isomorphisme entre l'espace des fonctionnelles analytiques sur un compact K de $\mathbb{C}$ et l'ensemble des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}\setminus K$ qui tendent vers 0 à l'infini. Ce dernier résultat nous permet de montrer l'existence d'un plus petit porteur holomorphiquement convexe d'une fonctionnelle analytique.

Nous terminons ce mémoire par un chapitre consacré à la transformation de Fourier-Borel. Nous commençons par parler de la transformée de Borel et de ses propriétés, notamment son lien avec la transformation de Laplace. Ensuite, nous faisons une étude de la transformation de Fourier-Borel, en particulier, nous montrons qu'il s'agit d'une fonction entière. Nous finissons par montrer le théorème suivant qui est le résultat central de ce mémoire :

Théorème. *Soit K un sous-ensemble convexe et compact d'un ouvert convexe Ω. Soit f une fonction entière de type exponentiel telle que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C_\varepsilon > 0$ telle que f satisfait partout*

$$|f(z)| \leq C_\varepsilon e^{H_K(z)+\varepsilon|z|}.$$

Alors, il existe une unique fonctionnelle analytique $T \in \mathscr{O}'(\Omega)$ telle que $\mathscr{F}(T) = f$.

Tout au long de ce travail, le lecteur sera confronté à des notions d'analyse fonctionnelle et de topologie algébrique. C'est pourquoi, nous renvoyons le lecteur aux Annexe A et Annexe B pour plus de détails sur ces sujets.

Table des matières

Chapitre 1

Espaces de fonctions holomorphes

1.1 Quelques rappels

Nous allons commencer par présenter un certain nombre de résultats sur les fonctions holomorphes. Nous nous réfèrerons essentiellement à [8].

Commençons tout d'abord par rappeler la définition d'une fonction holomorphe.

Définition 1.1.1. Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$ est dite *holomorphe* si et seulement si elle est de classe C_1 et est telle que

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$$

sur Ω. L'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω se note $\mathscr{O}(\Omega)$. Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $C_1(\Omega)$ sur le corps $\mathbb{C}$.

Une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier est appelée *fonction entière*.

Rappelons à présent quelques généralités et résultats importants sur les fonctions holomorphes qui nous seront utiles par la suite.

Proposition 1.1.2. *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction où Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$, alors f est holomorphe sur Ω si et seulement si*

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ \neq}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe et est finie pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$.

Définissons à présent le sens que nous mettons derrière l'expression "compact bordé par la courbe orientée C".

Définition 1.1.3. Une partie Γ de $\mathbb{C}$ est un *arc* de $\mathbb{C}$ si et seulement si il existe une application

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{C},$$

avec $[a, b] \subseteq \Omega$, de classe C_1, telle que γ' ne s'annule pas sur $[a, b]$ et γ est une bijection.

Dans ce cas, on dit que γ est un *paramétrage* de Γ.

Soit Γ un arc de $\mathbb{C}$ et soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ un paramétrage de Γ. On peut montrer que l'ensemble $\{\gamma(a), \gamma(b)\}$ ne dépend pas du paramétrage choisi mais uniquement de Γ. On appellera cet ensemble le *bord* de Γ et on le notera $\partial\Gamma$.

Définition 1.1.4. Une *courbe* de $\mathbb{C}$ est une partie C de $\mathbb{C}$ qui peut s'écrire sous la forme

$$\Gamma_1 \cup ... \cup \Gamma_J$$

où les Γ_j sont des arcs de $\mathbb{C}$ tels que

(i) $\Gamma_j \cap \Gamma_l \subseteq \partial\Gamma_j \cap \partial\Gamma_l$ pour $j \neq l$.

(ii) $\Gamma_j \cap \Gamma_l \cap \Gamma_k = \emptyset$ pour j, l, k distincts.

Dans ce cas, on dit que $(\Gamma_1, ..., \Gamma_J)$ est un *découpage* de C en arcs.

On peut orienter les arcs de $\mathbb{C}$. Fixer une orientation d'un arc Γ de $\mathbb{C}$ revient à choisir l'extrémité et l'origine de Γ.

Définition 1.1.5. Un *découpage orienté d'une courbe* C de $\mathbb{C}$ est la donnée d'un découpage en arcs $\Gamma_1, ..., \Gamma_J$ de C et d'orientations pour chaque Γ_j de sorte que deux arcs distincts n'ont ni la même origine, ni la même extrémité.

Définition 1.1.6. Une *courbe orientée* est la donnée d'une courbe C et d'un de ses découpages orientés.

Définition 1.1.7. Soit K un compact de $\mathbb{C}$. On dit que K est un compact *régulier* de $\mathbb{C}$ si K est l'adhérence de son intérieur. Autrement dit,

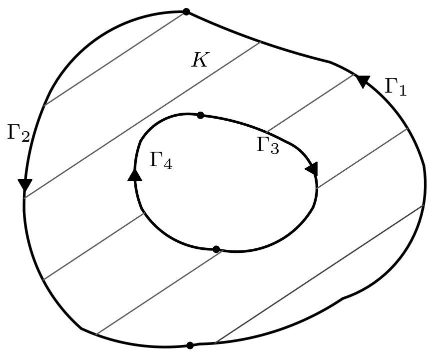
$$K = \overline{K^\circ}.$$

Une démonstration du résultat suivant peut être trouvée dans [8].

Proposition 1.1.8. *Soit K un compact régulier de $\mathbb{C}$ dont la frontière $K^\bullet$ est une courbe C de $\mathbb{C}$ et soit $\Gamma_1, ..., \Gamma_J$ un découpage de C en arcs. Alors, les arcs Γ_j, orientés de sorte que le vecteur tangent ait K à sa gauche, définissent une orientation de C.*

Définition 1.1.9. Soit K un compact régulier de $\mathbb{C}$ dont la frontière $K^\bullet$ est une courbe C de $\mathbb{C}$. L'orientation de la courbe C considérée à la proposition précédente est appelée "*l'orientation K à gauche de C*".

Si K est un compact dont la frontière est une courbe C de $\mathbb{C}$ dont $\Gamma_1, ..., \Gamma_4$ est un découpage de C en arcs. L'orientation K à gauche de C est exactement la situation suivante :



Pour alléger les notations, nous dirons que le compact K est bordé par la courbe orientée C pour dire que K est un compact régulier dont la frontière est une courbe C de $\mathbb{C}$ et que C a comme orientation l'orientation K à gauche.

Proposition 1.1.10 (Théorème de Cauchy)**.** *Si f est holomorphe sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et si K est un compact de Ω bordé par la courbe orientée C, alors*

$$\int_C f(z)\, dz = 0.$$

Énonçons à présent le Théorème de Morera qui est en quelque sorte une réciproque du Théorème de Cauchy.

Proposition 1.1.11 (Théorème de Morera)**.** *Soit f une fonction continue sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Supposons que*

$$\int_{\partial R} f(z)\, dz = 0$$

pour tout rectangle fermé R de Ω dont les côtés sont parallèles aux axes. Alors, f est holomorphe sur Ω.

Une application du Théorème de Morera, qui nous sera utile dans la suite, est le résultat suivant. Une démonstration peut être trouvée dans [3].

Soit (X, μ) un espace mesurable. Rappelons qu'une mesure μ est *σ-finie sur X* s'il existe une suite croissante $(X_k)_k$ d'ensembles de X telle que

$$\bigcup_k X_k = X \quad \text{et} \quad \mu(X_k) < \infty \quad \forall k.$$

Corollaire 1.1.12. *Soit (X, μ) un espace mesurable σ-fini et $\mu \geq 0$. Soit $f : \Omega \times X \to \mathbb{C}$ une fonction telle que*

(i) pour tout $z \in \Omega$, $t \mapsto f(z, t)$ est mesurable et définie sur X ;

(ii) pour tout $z \in \Omega$, il existe un disque fermé $D[z, r] \subseteq \Omega$ et une fonction g sur X intégrable par rapport à μ tels que

$$|f(\xi, t)| \leq g(t) \qquad \forall \xi \in D[z, r];$$

(iii) pour tout $t \in X$, $z \mapsto f(z,t)$ est holomorphe sur Ω.

Alors, la fonction

$$F(z) := \int_X f(z,t)\, d\mu(t)$$

est holomorphe sur Ω.

Nous allons à présent énoncer une des formules les plus importantes de la théorie des fonctions holomorphes.

Proposition 1.1.13 (Formule de représentation de Cauchy)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, soit f une fonction holomorphe sur Ω et soit K un compact de Ω bordé par la courbe orientée C. Alors pour tout $z_0 \in K^\circ$, on a*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\,\mathrm{i}\,\pi} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$

On en tire le corollaire suivant qui nous montre, en particulier, que toute fonction holomorphe sur Ω est en fait une fonction de classe C_∞ sur Ω.

Corollaire 1.1.14 (Formule de représentation de Cauchy pour les dérivées)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, soit f une fonction holomorphe sur Ω et soit K un compact de Ω bordé par la courbe orientée C. Alors, pour tout $z_0 \in K^\circ$, on a*

$$\frac{\partial^{p+q} f}{\partial z^p \partial \overline{z}^q}(z_0) = \delta_{q0} \frac{p!}{2\,\mathrm{i}\,\pi} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{p+1}}\, dz.$$

En particulier, f est de classe C^∞ sur Ω.

Une conséquence importante du corollaire précédent réside dans le fait que le module des dérivées d'une fonction holomorphe peut être contrôlé par le module de cette fonction. Plus précisément, nous avons :

Corollaire 1.1.15 (Inégalités de Cauchy)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, soit f une fonction holomorphe sur Ω et soit K un compact de Ω bordé par la courbe orientée C. Alors, pour tout $z_0 \in K^\circ$ et tous $p, q \in \mathbb{N}$, on a*

$$\left| \frac{\partial^{p+q} f}{\partial z^p \partial \overline{z}^q}(z_0) \right| \leq \delta_{q0} \frac{p!}{2\pi} \frac{\sup_C |f|}{d(z_0, C)^{p+1}} L_C$$

où L_C est la longueur de la courbe C.

Grâce aux inégalités de Cauchy, on peut tirer des résultats intéressants sur la convergence dans $\mathscr{O}(\Omega)$, notamment :

Théorème 1.1.16 (Théorème de Weierstrass)**.** *Soit f_m une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Supposons que f_m converge vers f uniformément sur tout compact de Ω. Alors,* *(i)* f *est holomorphe sur* Ω *;*

(ii) $f_m^{(p)}$ *converge uniformément vers* $f^{(p)}$ *sur tout compact de* Ω*.*

Dans la suite, nous serons amenés à rencontrer des fonctions holomorphes qui possèdent une limite à l'infini. Pour tout $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$, nous poserons

$$f(\infty) = \lim_{z \to \infty} f(z)$$

lorsque cette limite a un sens.

Rappelons le développement en série de Taylor qui consiste à approcher une fonction holomorphe en série entière autour d'un point $z_0 \in \mathbb{C}$.

Proposition 1.1.17. *Soit* $R > 0$ *et* f *une fonction holomorphe sur le disque ouvert* $D(z_0, R)$ *de* $\mathbb{C}$*. Alors, sur ce disque, on a*

$$f(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m (z - z_0)^m$$

avec $a_m = \dfrac{f^{(m)}(z_{0)}}{m!}$.

Une telle série est appelée la série de Taylor de f *en* z_0*.*

Terminons cette section par le rappel suivant :

Lemme 1.1.18 (Grandes encoches)**.** *Soit* A *un angle plein fermé de sommet* z_0 *et d'ouverture* α *et soit* C_R *l'arc de cercle de centre* z_0 *et de rayon* R *intercepté par* A*. Supposons que* $f(z)$ *soit continu dans* A *et que*

$$\lim_{\substack{z \to \infty \\ z \in A}} (z - z_0) f(z) = \lambda.$$

Alors,

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} f(z)\, dz = \mathrm{i}\, \alpha \lambda.$$

1.2 Topologies sur $\mathscr{O}(\Omega)$

Proposition 1.2.1. *Soit* K *un compact inclus dans* Ω*. On définit les semi-normes* $p_K(.)$ *sur l'ensemble des fonctions holomorphes de* Ω *par*

$$p_K(f) = \sup_{z \in K} |f(z)|.$$

L'ensemble

$$P = \{p_K(.) = \sup_K |.| : K \text{ compact de } \Omega\}$$

est un ensemble filtrant de semi-normes sur $\mathscr{O}(\Omega)$*.*

Démonstration. La définition de la semi-norme $p_K(.)$ a bien un sens pour toutes fonctions holomorphes sur Ω car une fonction holomorphe est continue. Elle est donc bornée sur les compacts et on a

$$\sup_K |f| < +\infty.$$

Montrons à présent que P est filtrant. Autrement dit, on doit montrer que pour tous K_1, K_2 compacts de Ω, il existe K_3 compact de Ω et $C > 0$ tels que

$$\max\{p_{K_1}(f), p_{K_2}(f)\} \leq C p_{K_3}(f)$$

pour toutes fonctions f holomorphes sur Ω. Considérons $C = 1$ et $K_3 := K_1 \cup K_2$. Alors, K_3 est un compact inclus dans Ω car K_3 est une union finie de compacts de Ω. Ce qui convient. □

Par la Proposition A.1.3, on munit donc $\mathscr{O}(\Omega)$ de la topologie définie par le système de semi-normes P définit à la Proposition 1.2.1. Appelons cette topologie $\mathscr{T}_P$.

Cependant, nous savons que toute fonction holomorphe est de classe C_∞ sur Ω (grâce au Corollaire 1.1.14). En particulier, toute fonction holomorphe est de classe C_d sur Ω pour tout $d > 0$. On pourrait donc naturellement munir $\mathscr{O}(\Omega)$ de la topologie induite par $C_d(\Omega)$ pour tout $d > 0$. Nous avons donc la proposition suivante :

Proposition 1.2.2. *Soit K un compact de Ω et $d \in \mathbb{N}$, on peut définir les semi-normes $p_{K,d}(.)$ sur l'ensemble des fonctions holomorphes de Ω par*

$$p_{K,d}(f) = \sup_{z\in K} \sup_{p,q\geq 0,\ p+q\leq d} \left| \frac{\partial^{p+q} f}{\partial z^p \partial \overline{z}^q}(z) \right|.$$

L'ensemble

$$P_d = \{p_{K,d}(.) = \sup_K \sup_{p,q\geq 0,\ p+q\leq d} \left| \frac{\partial^{p+q}}{\partial z^p \partial \overline{z}^q}\ . \right| : K \text{ compact de } \Omega\}$$

est un ensemble filtrant de semi-normes sur $\mathscr{O}(\Omega)$ pour tout $d > 0$.

Démonstration. Soit $d > 0$. Montrons que P_d est filtrant. Autrement dit, on doit montrer que pour tous K_1, K_2 compacts de Ω, il existe K_3 compact de Ω et $C > 0$ tels que

$$\max\{p_{K_1,d}(f), p_{K_2,d}(f)\} \leq C p_{K_3,d}(f)$$

pour toutes fonctions holomorphes sur Ω. Considérons $C = 1$ et $K_3 := K_1 \cup K_2$. Alors, K_3 est un compact inclus dans Ω car K_3 est une union finie de compacts de Ω. Ce qui convient. □

On peut donc également, par la Proposition A.1.3 munir $\mathscr{O}(\Omega)$ de la topologie définie par le système de semi-normes P_d défini à la Proposition 1.2.2 pour tout $d > 0$. Nommons cette topologie $\mathscr{T}_{P_d}$.

On va à présent montrer que les topologies $\mathscr{T}_P$ et $\mathscr{T}_{P_d}$ sont équivalentes pour tout $d > 0$. Pour ce faire, nous allons utiliser la Proposition A.1.5 d'analyse fonctionnelle.

Grâce à celle-ci, il nous suffit de montrer que P est équivalent à P_d pour tout $d > 0$ car, grâce à la Proposition A.1.5, cela impliquera que $\mathscr{T}_P$ est équivalente à $\mathscr{T}_{P_d}$ pour tout $d > 0$.

Proposition 1.2.3. *L'ensemble filtrant de semi-normes P_d est équivalent à l'ensemble filtrant de semi-normes P pour tout $d > 0$. En particulier, la topologie $\mathscr{T}_P$ est équivalente à la topologie $\mathscr{T}_{P_d}$ pour tout $d > 0$.*

Démonstration. Soit $d > 0$. Il est clair que $P \preceq P_d$. En effet, il suffit de prendre $d = 1$ pour avoir la conclusion.

Il nous reste à montrer que $P_d \preceq P$. Autrement dit, il faut montrer que pour tout $p \in P_d$, il existe $q \in P$ et $C > 0$ tels que $p \leq Cq$. Soit f une fonction holomorphe sur Ω. Soit $z_0 \in \Omega$ et soit $\varepsilon > 0$ avec $\varepsilon < d(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega)$. Alors, $D\,[z_0, \varepsilon]$ est un compact de Ω et est bordé par la courbe $C(z_0, \varepsilon)$. Grâce aux inégalités de Cauchy 1.1.15, on a

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial^{p+q} f}{\partial z^p \partial \overline{z}^q}(z_0)\right| &\leq \delta_{q0} \frac{p!}{2\pi} \frac{\sup_{z \in C(z_0,\varepsilon)} |f(z)|}{d(z_0, C(z_0, \varepsilon))^{p+1}} L_{C(z_0,\varepsilon)} \\
&\leq \frac{p!}{2\pi} \frac{2\pi\varepsilon}{\varepsilon^{p+1}} \sup_{z \in C(z_0,\varepsilon)} |f(z)| \\
&= \frac{p!}{\varepsilon^p} \sup_{z \in C(z_0,\varepsilon)} |f(z)|.
\end{aligned}$$

Soit K un compact de Ω et soit $\varepsilon > 0$ avec $\varepsilon < d(K, \mathbb{C} \setminus \Omega)$. On en tire que

$$\begin{aligned}
\sup_{z_0 \in K} \left|\frac{\partial^{p+q} f}{\partial z^p \partial \overline{z}^q}(z_0)\right| &\leq \frac{p!}{\varepsilon^p} \sup_{z_0 \in K} \sup_{C(z_0,\varepsilon)} |f| \\
&\leq \frac{p!}{\varepsilon^p} \sup_{K_\varepsilon} |f|
\end{aligned}$$

où $K_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : d(z, K) \leq \varepsilon\}$. De plus, on a

$$\begin{aligned}
\sup_{p,q \geq 0,\ p+q \leq d} \sup_{z_0 \in K} \left|\frac{\partial^{p+q} f}{\partial z^p \partial \overline{z}^q}(z_0)\right| &\leq \sup_{p,q \geq 0,\ p+q \leq d} \frac{p!}{\varepsilon^p} \sup_{K_\varepsilon} |f| \\
&\leq \frac{d!}{\varepsilon^d} \sup_{K_\varepsilon} |f|.
\end{aligned}$$

D'où la conclusion. □

Le résultat précédent montre que $\mathscr{O}(\Omega)$ est un sous-espace topologique de $C_d(\Omega)$ pour tout $d \geq 0$.

De la même manière, nous pouvons munir $\mathscr{O}(\Omega)$ de la topologie induite par $C_\infty(\Omega)$ comme nous savons que toute fonction holomorphe est de classe C_∞. Pour ce faire, considérons l'ensemble

$$P_\infty = \{p_{K,d}(.) = \sup_K \sup_{p,q\geq 0,\ p+q\leq d} \left| \frac{\partial^{p+q}}{\partial z^p \partial \overline{z}^q}\ . \right| : K \text{ compact de } \Omega, d > 0\}.$$

On procède de la même façon qu'à la démonstration de la Proposition 1.2.2 pour montrer que P_∞ est filtrant. On peut donc munir $\mathscr{O}(\Omega)$ de la topologie définie par le système de semi-normes P_∞. Nommons la $\mathscr{T}_{P_\infty}$.

Grâce à la Proposition 1.2.3, on sait que la topologie $\mathscr{T}_P$ est également équivalente à la topologie $\mathscr{T}_{P_\infty}$ et donc que $\mathscr{O}(\Omega)$ est aussi un sous-espace topologique de $C_\infty(\Omega)$.

Proposition 1.2.4. *L'espace $\mathscr{O}(\Omega)$ est de Fréchet.*

Démonstration. Vérifions que l'espace des fonctions holomorphes vérifie les différentes propriétés de la Définition A.2.3. Autrement dit, vérifions que $\mathscr{O}(\Omega)$ est un espace localement convexe séparé, à semi-normes dénombrables et complet.

Par la Définition A.1.6 et les résultats de la section précédente, on sait que $\mathscr{O}(\Omega)$ est un espace localement convexe.

Montrons à présent que l'ensemble P défini à la Proposition 1.2.1 est équivalent à un système dénombrable de semi-normes. Soit $(K_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ une suite de compacts inclus dans Ω telle que

$$\bigcup_{m\in\mathbb{N}_0} K_m = \Omega$$

et pour laquelle $K_m \subseteq K^\circ_{m+1}$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. Cette suite peut être construite, par exemple, en considérant

$$K_m = \{x \in \Omega : |x| \leq m, d(x, \mathbb{C} \setminus \Omega) \geq \frac{1}{m}\}$$

pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. Pour une telle suite, on voit que pour tout compact $K \subseteq \Omega$, il existe $M \in \mathbb{N}_0$ tel que $K \subseteq K_m$ pour tout $m \geq M$. En effet, on a

$$\begin{aligned} K \subseteq \Omega &= \bigcup_{m\in\mathbb{N}_0} K_m \\ &\subseteq \bigcup_{m\in\mathbb{N}_0} K^\circ_{m+1}. \end{aligned}$$

Or, $\bigcup_{m\in\mathbb{N}_0} K^\circ_{m+1}$ est un recouvrement ouvert de K et comme K est compact, on peut en extraire un recouvrement fini. De plus, comme la suite $(K_m)_{n\in\mathbb{N}_0}$ est croissante, on en tire qu'il existe un $M \in \mathbb{N}_0$ tel que $K \subseteq K_m$ pour tout $m \geq M$. Il s'ensuit que P est équivalent à

$$\{p_{K_m} : m \in \mathbb{N}_0\}$$

qui est un ensemble filtrant et dénombrable de semi-normes sur $\mathscr{O}(\Omega)$.

Le caractère séparé est immédiat. En effet, s'il existe $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ telle que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $p_{K_m}(f) = 0$, alors $f = 0$.

Il nous reste à montrer qu'il est complet. Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy de $\mathscr{O}(\Omega)$ et $(K_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ une suite de compacts définis comme ci-dessus. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ et $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}_0$ tel que

$$\sup_{x\in K_m} |f_r(x) - f_s(x)| < \varepsilon \quad \forall r, s \geq N.$$

Autrement dit, la suite $(f_n)_n$ est uniformément de Cauchy sur K_m et donc elle converge. En faisant tendre m vers l'infini, on obtient la convergence sur tout compact de Ω. De plus, grâce au Théorème de Weierstrass 1.1.16, si f est la limite uniforme de la suite $(f_n)_n$ sur tout compact de Ω, on sait que f est holomorphe sur Ω. Ce qui suffit à montrer que $\mathscr{O}(\Omega)$ est complet.

□

Remarque 1.2.5. Rappelons que $C_d(\Omega)$ est aussi un espace de Fréchet pour tout $d \geq 0$. Au vu des résultats de la section précédente, on sait que $\mathscr{O}(\Omega)$ est un sous-espace topologique de $C_d(\Omega)$ pour tout $d \geq 0$. De plus, il est clair que $\mathscr{O}(\Omega)$ est fermé dans $C_d(\Omega)$ pour tout $d \geq 0$. Par la Proposition A.2.4, on aurait pu aussi en tirer que $\mathscr{O}(\Omega)$ est de Fréchet.

1.3 Espace des germes de fonctions holomorphes sur un fermé de $\mathbb{C}$

Soit V un ouvert de $\mathbb{C}$, rappelons que $\mathscr{O}(V)$ est l'ensemble des fonctions holomorphes sur V. On sait que $\mathscr{O}(V)$ est un espace de Fréchet.

Soit F un fermé de $\mathbb{C}$.

Considérons l'ensemble

$$\mathscr{V}_F = \{V : V \text{ voisinage ouvert de } F\}$$

muni du pré-ordre

$$W \leq V \;\Leftrightarrow\; V \subseteq W.$$

Cet ensemble est filtrant. En effet, on veut montrer que pour tous $V_1, V_2 \in \mathscr{V}_F$, il existe $V_3 \in \mathscr{V}_F$ tel que

$$\begin{aligned} & V_1 \leq V_3 \text{ et } V_2 \leq V_3 \\ \Leftrightarrow\; & V_3 \subseteq V_1 \text{ et } V_3 \subseteq V_2. \end{aligned}$$

Si on considère $V_3 = V_1 \cap V_2$ convient. On peut conclure comme l'intersection de deux voisinages ouverts est un voisinage ouvert.

Considérons les applications linéaires continues

$$R_{VW} : \mathscr{O}(W) \to \mathscr{O}(V) : f \mapsto f_{|V}$$

pour tous $V, W \in A$ tels que $W \leq V$.

On en tire donc que $(\mathscr{O}(V), R_{VW})_{V\in A}$ est un système inductif filtrant.

Définition 1.3.1. Notons $\mathscr{O}(F)$ l'espace localement convexe de la limite inductive du système inductif filtrant $(\mathscr{O}(V), R_{VW})_{V\in A}$. Autrement dit, posons

$$\mathscr{O}(F) = \varinjlim_{V\in A} \mathscr{O}(V).$$

Remarque 1.3.2. Pour tout $V \in \mathscr{V}_F$. Considérons l'application canonique

$$R_V : \mathscr{O}(V) \to \mathscr{O}(F).$$

— Par définition de $\mathscr{O}(F)$, on sait que pour tout $f \in \mathscr{O}(F)$, il existe un voisinage ouvert V de F tel que $f \in \mathscr{O}(V)$.

— Soient V_1 et V_2 deux voisinages ouverts de F et soient $f_{V_1} \in \mathscr{O}(V_1)$ et $f_{V_2} \in \mathscr{O}(V_2)$. Supposons que

$$R_{V_1}(f_{V_1}) = R_{V_2}(f_{V_2})$$

alors il existe V_3 voisinage ouvert de F tel que $V_1 \leq V_3$ et $V_2 \leq V_3$, avec

$$R_{V_3V_1}(f_{V_1}) = R_{V_3V_2}(f_{V_2}).$$

Les éléments de $\mathscr{O}(F)$ peuvent donc être vus comme des germes de fonctions holomorphes sur F.

Remarque 1.3.3. Remarquons qu'un compact est un fermé, donc par ce qui précède, si K est un compact de $\mathbb{C}$,

$$\mathscr{O}(K) = \varinjlim_{V\in \mathscr{V}_K} \mathscr{O}(V).$$

1.4 Ensemble holomorphiquement convexe

Les résultats de cette section se basent essentiellement sur [11]. Rappelons d'abord que :

Définition 1.4.1. Une partie A d'un espace topologique X est *relativement compacte* dans X si A est inclus dans une partie compacte de X.

Proposition 1.4.2. *Une partie A d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est relativement compacte dans Ω si et seulement si son adhérence dans Ω est un compact de Ω. Dans ce cas,* $\overline{A}^{\Omega} = \overline{A}^{\mathbb{C}} \subseteq \Omega$.

Définition 1.4.3. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et K un compact de Ω. On dit qu'une fonction f holomorphe sur Ω *sépare* le compact K du point $z_0 \in \Omega\backslash K$ si

$$|f| \leq 1 \text{ sur } K \text{ et } |f(z_0)| > 1.$$

Définition 1.4.4. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et K un compact de Ω. On dit que K *est holomorphiquement convexe* si et seulement si pour tout point z_0 de $\Omega\backslash K$, il existe une fonction holomorphe sur Ω qui sépare z_0 de K.

Définition 1.4.5. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et K un compact de Ω. On appelle *enveloppe holomorphiquement convexe de K dans Ω* l'ensemble

$$\widehat{K}^{\Omega} = \bigcap_{f \in \mathscr{O}(\Omega)} \{z \in \Omega : |f(z)| \leq \sup_K |f|\}.$$

Proposition 1.4.6. *Un compact K de l'ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est holomorphiquement convexe dans Ω si et seulement si*

$$K = \widehat{K}^{\Omega}.$$

Proposition 1.4.7. *Un compact K de l'ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est holomorphiquement convexe si et seulement si $\Omega \backslash K$ ne possède pas de composante connexe relativement compacte dans Ω.*

Proposition 1.4.8. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et K un compact de Ω. L'enveloppe holomorphiquement convexe de K dans Ω est le plus petit compact holomorphiquement convexe de Ω contenant K. De plus, si $\mathscr{U}_{rc}$ représente l'ensemble des composantes connexes de $\Omega \backslash K$ qui sont relativement compactes dans Ω, on a*

$$\widehat{K}^{\Omega} = K \cup \bigcup_{U \in \mathscr{U}_{rc}} U.$$

Soit K un compact de l'ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Rappelons que l'*enveloppe convexe de K* est l'ensemble

$$\mathrm{co}(K) = \bigcap_{a \in \mathbb{C}} \{z \in \mathbb{C} : \langle a, z \rangle \leq \sup_{z_0 \in K} \langle a, z_0 \rangle\}.$$

Corollaire 1.4.9. *Si K est un compact de l'ouvert Ω alors $\widehat{K}^{\Omega}$ est inclus dans l'enveloppe convexe de K.*

Démonstration. Soit $z \in \widehat{K}^{\Omega}$. On sait alors que pour tout $f \in \mathscr{O}(\Omega)$, on a

$$|f(z)| \leq \sup_K |f|.$$

Soit $a \in \mathbb{C}$, il est clair que $e^{\overline{a}z} \in \mathscr{O}(\Omega)$. De plus, on sait que

$$|e^{\overline{a}z}| = e^{\mathrm{Re}(\overline{a}z)} = e^{\langle a, z \rangle}.$$

On en tire donc que

$$\begin{aligned} |e^{\overline{a}z}| &\leq \sup_{\zeta \in K} |e^{\overline{a}\zeta}| \\ &= \sup_{\zeta \in K} e^{\langle a, z \rangle}. \end{aligned}$$

D'où la conclusion. $\square$

Théorème 1.4.10 (Théorème de Runge)**.** *Soit K un compact d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Alors, toute fonction holomorphe sur un voisinage de K est limite uniforme sur K de fonctions holomorphes sur Ω si et seulement si K est holomorphiquement convexe dans Ω.*

Proposition 1.4.11. *Soient $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ deux ensembles ouverts de $\mathbb{C}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *$\mathscr{O}(\Omega_2)$ est dense dans $\mathscr{O}(\Omega_1)$.*

(2) *Pour tout compact K inclus dans Ω_1, on a $\widehat{K}^{\Omega_2} = \widehat{K}^{\Omega_1}$.*

(3) *Pour tout compact K inclus dans Ω_1, on a $\widehat{K}^{\Omega_2} \cap \Omega_1 = \widehat{K}^{\Omega_1}$.*

(4) *Pour tout compact K inclus dans Ω_1, l'ensemble $\widehat{K}^{\Omega_2} \cap \Omega_1$ est compact.*

(5) *Si $\Omega_2 \backslash \Omega_1 = L \cup F$ avec L compact, F fermé dans Ω_2 et $L \cap F = \emptyset$, alors $L = \emptyset$.*

Démonstration. $\underline{(1) \Rightarrow (3)}$: Supposons que $\mathscr{O}(\Omega_2)$ est dense dans $\mathscr{O}(\Omega_1)$. Soit K un compact de Ω_1. Montrons par double inclusion que $\widehat{K}^{\Omega_2} \cap \Omega_1 = \widehat{K}^{\Omega_1}$.

Soit $z \in \widehat{K}^{\Omega_1}$, alors $z \in \Omega_1$ comme $\widehat{K}^{\Omega_1} \subseteq \Omega_1$. On sait aussi que pour tout $f \in \mathscr{O}(\Omega_1)$, on a

$$|f(z)| \leq \sup_K |f|.$$

De plus, si $f \in \mathscr{O}(\Omega_2)$, alors $f_{|\Omega_1} \in \mathscr{O}(\Omega_1)$. On en tire que $z \in \widehat{K}^{\Omega_2}$.

Soit $z \in \widehat{K}^{\Omega_2} \cap \Omega_1$. Alors, $z \in \widehat{K}^{\Omega_2}$ et $z \in \Omega_1$. D'où, pour tout $f \in \mathscr{O}(\Omega_2)$, on a

$$|f(z)| \leq \sup_K |f|.$$

Par densité, on en tire que $z \in \widehat{K}^{\Omega_1}$.
$\underline{(3) \Rightarrow (4)}$: Soit K un compact de Ω_1. Il est clair que $\widehat{K}^{\Omega_2} \cap \Omega_1$ est compact comme par hypothèse on sait que c'est égal à $\widehat{K}^{\Omega_1}$ qui est un compact.
$\underline{(4) \Rightarrow (1)}$: Soit $K' = \widehat{K}^{\Omega_2} \cap \Omega_1$ et $K'' = \widehat{K}^{\Omega_2} \cap (\mathbb{C} \backslash \Omega_1)$. Par hypothèse, on sait que K' et K'' sont deux ensembles compacts disjoints et que leur union est un sous-ensemble holomorphiquement convexe de Ω_2, à savoir $\widehat{K}^{\Omega_2}$. En effet, on a

$$K' \cup K'' = (\widehat{K}^{\Omega_2} \cap \Omega_1) \cup (\widehat{K}^{\Omega_2} \cap (\mathbb{C} \backslash \Omega_1)) = \widehat{K}^{\Omega_2}.$$

Pour tout $f \in \mathscr{O}(\Omega_1)$, on peut considérer la fonction définie par $F = f$ sur K' et 1 sur K'', et par le Théorème de Runge 1.4.10, cette fonction est limite uniforme sur $K' \cup K''$ de fonctions de $\mathscr{O}(\Omega_2)$. En particulier, $\mathscr{O}(\Omega_2)$ est dense dans $\mathscr{O}(\Omega_1)$.
$\underline{(4) \Rightarrow (2)}$: Si on prend $f = 0$, le fait que $K \subseteq K'$ et que les valeurs dans K'' d'une fonction holomorphe dans Ω_2 peuvent être estimées par ses valeurs dans K' impliquent que $K'' = \emptyset$.
$\underline{(2) \Rightarrow (3)}$: Si on suppose que $\widehat{K}^{\Omega_2} = \widehat{K}^{\Omega_1}$, alors on a

$$\widehat{K}^{\Omega_2} \cap \Omega_1 = \widehat{K}^{\Omega_1} \cap \Omega_1 = \widehat{K}^{\Omega_1}$$

comme on sait que $\widehat{K}^{\Omega_1} \subseteq \Omega_1$.
$\underline{(5) \Rightarrow (2)}$. Soit K un compact de Ω_1, montrons que $\widehat{K}^{\Omega_2} = \widehat{K}^{\Omega_1}$. Considérons U une

composante connexe relativement compacte de $\Omega_2 \backslash K$. Comme $U^\bullet \subseteq K \subseteq \Omega_1$ et $\overline{U} = U \cup U^\bullet$, l'ensemble

$$L = \overline{U} \cap (\Omega_2 \backslash \Omega_1) = U \cap (\Omega_2 \backslash \Omega_1)$$

est un ensemble compact dans U. De plus, comme $(\mathbb{C} \backslash U) \cap (\Omega_2 \backslash \Omega_1)$ est fermé dans Ω_2, on a, par hypothèse, $L = \emptyset$. Donc, $U \subseteq \Omega_1$ et grâce au théorème de Runge 1.4.10, on en tire que

$$\widehat{K}^{\Omega_2} \subseteq \widehat{K}^{\Omega_1}.$$

De plus, l'autre inclusion est évidente car on a $\widehat{K}^{\Omega_1} \subseteq \widehat{K}^{\Omega_2} \cap \Omega_1$. D'où la conclusion.
$\underline{(2) \Rightarrow (5)}$. Soit $\Omega_2 \backslash \Omega_1 = L \cup F$ avec L un compact, F un fermé de Ω_2 et $L \cap F = \emptyset$. Soit un ensemble ouvert w tel que $L \subseteq w$, $\overline{w} \cap F = \emptyset$ et w est un ensemble relativement compact dans Ω_2. Comme

$$w^\bullet \cap (\Omega_2 \backslash \Omega_1) = w^\bullet \cap (L \cup F) = \emptyset$$

et que $w^\bullet \subseteq \Omega_2$, on en tire que $w^\bullet \subseteq \Omega_1$. Par le principe du maximum, on conclut que $L \subseteq w \subseteq \widehat{w^\bullet}^{\Omega_2}$. Par hypothèse, on a $\widehat{w^\bullet}^{\Omega_2} = \widehat{w^\bullet}^{\Omega_1} \subseteq \Omega_1$, donc on a $L \subseteq \Omega_1$. D'où $L = \emptyset$ car on a supposé que $\Omega_2 \backslash \Omega_1 = L \cup F$, d'où la conclusion. $\square$

Définition 1.4.12. Dans le cas où ces conditions équivalentes sont satisfaites, on dit que l'ouvert Ω_1 est *holomorphiquement convexe* dans Ω_2.

Définition 1.4.13. Un ensemble ouvert Ω holomorphiquement convexe dans $\mathbb{C}$ est appelé un *ouvert de Runge* de $\mathbb{C}$.

Remarque 1.4.14. La Proposition 1.4.11 contient la caractérisation classique des ensembles de Runge. A savoir, Ω est un ensemble de Runge si et seulement si $\mathbb{C} \backslash \Omega$ n'a pas de composantes connexes compactes.

Chapitre 2

Fonctionnelles analytiques et transformation de Cauchy

2.1 Théorème de représentation de Riesz

Définition 2.1.1. Soit $(X, \mathscr{T})$ un espace topologique. La *σ-algèbre de Borel* $\mathscr{B}(X, \mathscr{T})$ de l'espace $(X, \mathscr{T})$ est la σ-algèbre engendrée par les ouverts de $(X, \mathscr{T})$,

$$\mathscr{B}(X, \mathscr{T}) = \sigma(\{U \in \mathscr{T}\}).$$

Un élément $B \in \mathscr{B}(X, \mathscr{T})$ est appelé un *ensemble borélien* .

Définition 2.1.2. Soit $(X, \mathscr{T})$ un espace topologique séparé et soit $\mathscr{B}$ la σ-algèbre de Borel de l'espace $(X, \mathscr{T})$. Une mesure $\mu : \mathscr{B} \to [0, \infty]$ est appelée une *mesure de Radon* si elle satisfait les propriétés suivantes :

— $\mu(K) < \infty$ pour tout ensemble compact K ;

— Si B est un sous-ensemble borélien de X, alors

$$\mu(B) = \inf\{\mu(\omega) : \omega \text{ un ouvert et } B \subseteq \omega\};$$

— Si ω est un sous-ensemble ouvert de X, alors

$$\mu(\omega) = \sup\{\mu(K) : K \text{ un compact et } K \subseteq \omega\}.$$

Soit X un espace topologique localement compact et séparé. Notons par $C_c(X)$ l'espace des fonctions continues à support compact sur X. On munit $C_c(X)$ de la topologie localement convexe de la limite inductive des $C_K(X)$ définie à la section A.4.

Nous allons à présent énoncer le Théorème de représentation de Riesz qui affirme qu'une forme linéaire positive et continue sur $C_c(X)$ peut être représentée par une unique mesure de Radon sur X.

On dit que la forme linéaire Λ sur $C_c(X)$ est *positive* si $\Lambda(f) \geq 0$ pour tout $f \in C_c(X)$ tel que $f \geq 0$.

Une démonstration de ce théorème peut être trouvée dans [1].

Théorème 2.1.3 (Théorème de représentation de Riesz)**.** *Soit X un espace localement compact séparé et soit $\Lambda : C_c(X) \to \mathbb{R}$ une forme linéaire positive et continue. Alors, il existe une unique mesure de Radon μ telle que*

$$\Lambda(f) = \int f \, d\mu$$

pour tout $f \in C_c(X)$.

Définition 2.1.4. Soit $\mathscr{M}$ une σ-algèbre sur un ensemble X. Appelons une famille dénombrable $(E_j)_{j \in J}$ d'éléments de $\mathscr{M}$ une *partition* de E si

— $E_j \cap E_k = \emptyset$ si $j \neq k$;

— $E = \bigcup_{j \in J} E_j$.

Une *mesure complexe* μ sur $\mathscr{M}$ est donc une fonction complexe sur $\mathscr{M}$ telle que

$$\mu(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$$

pour toute partition $(E_j)_{j \in J}$ de E.

Soit X un espace localement compact séparé. Le Théorème de Riesz 2.1.3 caractérise les formes linéaires positives et continues de $C_c(X)$. Nous pouvons à présent énoncer la version complexe de ce théorème.

Notons $C_{0,0}(X)$ l'espace des fonctions continues qui tendent vers 0 à l'infini et munissons $C_{0,0}(X)$ de la topologie définie par la norme

$$p(.) = \sup_X |.|.$$

Cette norme est bien définie pour tout $f \in C_{0,0}(X)$ car, comme f tend vers 0 à l'infini, f est bornée sur X et donc

$$\sup_X |f| < +\infty.$$

Muni de cette topologie, $C_{0,0}(X)$ est un espace de Banach.

Une démonstration du résultat suivant peut être trouvée dans [7].

Théorème 2.1.5 (Théorème de représentation de Riesz-Markov)**.** *Si X est un espace localement compact séparé, alors toute forme linéaire continue Φ sur $C_{0,0}(X)$ est représentée par une unique mesure de Radon complexe dans le sens où*

$$\Phi(f) = \int_X f \, d\mu$$

pour tout $f \in C_{0,0}(X)$. De plus, on a

$$|\mu|(X) = ||\Phi||.$$

En particulier, il nous montre que l'on peut représenter tout élément du dual topologique de l'espace des fonctions continues à support compact à l'aide d'une mesure. On peut donc en déduire le corollaire suivant.

Corollaire 2.1.6. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Le dual de $C_0(\Omega)$ est l'ensemble des mesures à support compact.*

Démonstration. Sans entrer dans les détails de la démonstration, celle-ci repose sur la remarque suivante. Si l'on pose

$$A = \{K \text{ compact de } \Omega\},$$

on peut montrer que

$$C_0(\Omega) = \varprojlim_{K \in A} C_{0,0}(K).$$

On en déduit que

$$C_0'(\Omega) = \varinjlim_{K \in A} C_{0,0}'(K).$$

□

2.2 Définition d'une fonctionnelle analytique et premières propriétés

Définition 2.2.1. Une *fonctionnelle analytique* sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est une fonction linéaire continue $T : \mathscr{O}(\Omega) \to \mathbb{C}$ sur l'espace de Fréchet $\mathscr{O}(\Omega)$.

La famille de ces fonctionnelles analytiques est le dual topologique $\mathscr{O}'(\Omega)$ de $\mathscr{O}(\Omega)$.

On note l'action de T sur un élément $h \in \mathscr{O}(\Omega)$ par

$$\langle T, h\rangle \quad \text{ou} \quad T(h).$$

Si T est une fonctionnelle analytique sur un ouvert Ω, alors grâce à la continuité de T et à l'inégalité A.1, il existe un compact K inclus dans Ω et une constante $C > 0$ tels que pour tout $f \in \mathscr{O}(\Omega)$, on a

$$|\langle T, f\rangle| \leq C p_K(f). \tag{2.1}$$

Comme nous savons que $\mathscr{O}(\Omega)$ est un sous-espace vectoriel topologique de $C_0(\Omega)$, par le Théorème de Hahn-Banach A.5.2 et plus précisément par la Proposition A.5.3, on sait que tout élément de $\mathscr{O}'(\Omega)$ admet un prolongement en un élément de $C_0'(\Omega)$. En particulier, l'application $C_0'(\Omega) \to \mathscr{O}'(\Omega)$, dual de l'inclusion $\mathscr{O}(\Omega) \to C_0(\Omega)$, est surjective. De plus, par le Théorème de représentation de Riesz, on sait que tout élément de $C_0'(\Omega)$ se représente par une seule mesure de Radon complexe. On sait donc que tout élément $T \in \mathscr{O}'(\Omega)$ peut être représenté par une mesure à support compact μ. On a alors

$$\langle T, h\rangle = \int h \, d\mu$$

pour tout $h \in \mathscr{O}(\Omega)$. Cependant, la surjection $C_0'(\Omega) \to \mathscr{O}'(\Omega)$ n'est en général pas injective, et il peut donc exister plusieurs mesures qui représentent la même fonctionnelle analytique.

Exemple 2.2.2. Soit $a \in \Omega$, la fonctionnelle analytique $f \mapsto f(a)$, habituellement notée δ_a, peut être représentée par la mesure de Dirac δ_a. Mais aussi par la mesure μ associée à la fonctionnelle définie sur $C_0(\Omega)$ par

$$f \mapsto \frac{1}{2\,\mathrm{i}\,\pi} \int_{C(a,r)} \frac{f(z)}{z-a}\, dz$$

où $0 < r < d(a, \mathbb{C} \setminus \Omega)$. En effet, comme f holomorphe sur Ω, on sait par la formule de représentation de Cauchy 1.1.13 que

$$\frac{1}{2\,\mathrm{i}\,\pi} \int_{C(a,r)} \frac{f(z)}{z-a}\, dz = f(a).$$

Cependant, comme $\mathrm{supp}(\mu) \subseteq C(a,r)$ et $\mathrm{supp}(\delta_a) = \{a\}$, on obtient deux mesures différentes qui donnent la même fonctionnelle analytique.

Définition 2.2.3. Soit $T \in \mathscr{O}'(\Omega)$ et $\varphi \in \mathscr{O}(\Omega)$. On définit *la multiplication* φT en posant

$$\langle \varphi T, h \rangle := \langle T, \varphi h \rangle$$

pour tout $h \in \mathscr{O}(\Omega)$.

On vérifie aisément que $\varphi T \in \mathscr{O}'(\Omega)$ puisque nous avons $\varphi h \in \mathscr{O}(\Omega)$.

On vérifie également que l'action de l'anneau $\mathscr{O}(\Omega)$ sur $\mathscr{O}'(\Omega)$ fait de $\mathscr{O}'(\Omega)$ un $\mathscr{O}(\Omega)$ module.

Définition 2.2.4. La *dérivée d'une fonctionnelle analytique* $T \in \mathscr{O}'(\Omega)$, notée $\dfrac{\partial T}{\partial z}$, est définie par la formule

$$\langle \frac{\partial T}{\partial z}, h \rangle := -\langle T, \frac{\partial h}{\partial z} \rangle$$

pour tout $h \in \mathscr{O}(\Omega)$.

Proposition 2.2.5. *Soit $T \in \mathscr{O}'(\Omega)$. La dérivée de T est une fonctionnelle analytique sur Ω.*

Démonstration. Soit $h \in \mathscr{O}(\Omega)$. Montrons que $\dfrac{\partial T}{\partial z} \in \mathscr{O}'(\Omega)$. Autrement dit, par l'inégalité (2.1), montrons qu'il existe un compact K inclus dans Ω et une constante $C > 0$ tels que

$$|\langle \frac{\partial T}{\partial z}, h \rangle| \leq C \sup_K |h|.$$

On sait que

$$|\langle \frac{\partial T}{\partial z}, h \rangle| = | - \langle T, \frac{\partial h}{\partial z} \rangle|.$$

De plus, on a $T \in \mathscr{O}'(\Omega)$ et $\dfrac{\partial h}{\partial z} \in \mathscr{O}(\Omega)$. Il existe donc un compact K inclus dans Ω et une constante $C > 0$ tels que

$$|\langle T, \frac{\partial h}{\partial z}\rangle| \leq C \sup_K |\frac{\partial h}{\partial z}|.$$

Considérons $0 < \varepsilon < 1$ tel que $\varepsilon < d(K, \mathbb{C} \setminus \Omega)$. Par les inégalités de Cauchy 1.1.15, on a

$$\sup_K \left|\frac{\partial h}{\partial z}\right| \leq \frac{1}{\varepsilon} \sup_{K_\varepsilon} |h|$$

avec $K_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : d(z, K) \leq \varepsilon\}$. On en tire que

$$\begin{aligned} |\langle \frac{\partial T}{\partial z}, h\rangle| &= |\langle T, \frac{\partial h}{\partial z}\rangle| \\ &\leq C \sup_K \left|\frac{\partial h}{\partial z}\right| \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon} \sup_{K_\varepsilon} |h|. \end{aligned}$$

On en conclut donc que $\dfrac{\partial T}{\partial z}$ est une fonctionnelle analytique sur Ω. $\square$

Corollaire 2.2.6. *L'action de l'opérateur différentiel*

$$P(z, \frac{\partial}{\partial z}) := \sum_{j=0}^{n} a_j(z) \frac{\partial^j}{\partial z^j},$$

avec $a_j \in \mathscr{O}(\Omega)$ pour tout j, sur l'espace $\mathscr{O}'(\Omega)$ est donnée par

$$\langle P(z, \frac{\partial}{\partial z})T, h\rangle = \langle T, P^*(z, \frac{\partial}{\partial z})h\rangle,$$

où $P^*(z, \dfrac{\partial}{\partial z}) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \dfrac{\partial^j}{\partial z^j} a_j$ est un opérateur, autrement dit

$$P^*(z, \frac{\partial}{\partial z})h = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{\partial^j}{\partial z^j}(a_j h)$$

si $h \in \mathscr{O}(\Omega)$.

En particulier, $\mathscr{O}'(\Omega)$ est un module sur l'anneau $\mathscr{D}(\Omega)$ des opérateurs de dérivation holomorphe sur Ω.

2.3 Porteur d'une fonctionnelle analytique

Nous allons à présent introduire la notion de porteur d'une fonctionnelle analytique. Celle-ci remplace la notion de support pour les distributions ou les mesures.

Définition 2.3.1. Soit $T \in \mathscr{O}'(\Omega)$, un *porteur* de T est un compact K de Ω tel que pour chaque voisinage V de K relativement compact dans Ω, il existe une constante $C_V \geq 0$ telle que

$$|\langle T, h\rangle| \leq C_V \sup_{z\in V} |h(z)|$$

pour tout $h \in \mathscr{O}(\Omega)$.

Proposition 2.3.2. *Soit $T \in \mathscr{O}'(\Omega)$, K est un porteur de T si et seulement si K est un compact tel que pour tout voisinage V de K, il existe un compact K_V de V et une constante $C_{K_V} > 0$ tels que*

$$|\langle T, h\rangle| \leq C_{K_V} \sup_{K_V} |h|$$

pour tout $h \in \mathscr{O}(\Omega)$.

Démonstration. Soit $T \in \mathscr{O}'(\Omega)$.

Supposons d'abord la condition satisfaite. Soit V un voisinage de K qui est relativement compact dans Ω. Par hypothèse, il existe un compact K_V de V et une constante $C_V > 0$ tels que

$$|\langle T, h\rangle| \leq C_{K_V} \sup_{K_V} |h|$$

pour tout $h \in \mathscr{O}(\Omega)$. Or, comme V est relativement compact, on sait que

$$\sup_V |h| < +\infty.$$

Comme $K_V \subseteq V$, on en tire que

$$\begin{aligned} |\langle T, h\rangle| &\leq C_{K_V} \sup_{K_V} |h| \\ &\leq C_{K_V} \sup_V |h| \end{aligned}$$

pour tout $h \in \mathscr{O}(\Omega)$.

Réciproquement, supposons que la Définition 2.3.1 soit satisfaite. Autrement dit, supposons que

$$|\langle T, h\rangle| \leq C_V \sup_V |h|$$

pour tout $h \in \mathscr{O}(\Omega)$ et tout V voisinage de K relativement compact dans Ω. Soit V un voisinage quelconque de K. On sait que $K \subseteq V$. De plus, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < d(K, \mathbb{C} \setminus V)$, alors on a

$$V' := \{z \in \mathbb{C} : d(z, K) < \varepsilon\} \subseteq V.$$

On sait également que

$$V' \subseteq K_\varepsilon$$

avec, pour rappel,

$$K_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : d(z, K) \leq \varepsilon\}$$

qui est un compact. On en tire donc que V' est relativement compact et que

$$K \subseteq V' \subseteq K_\varepsilon \subseteq V.$$

Par hypothèse, il existe $C_{V'} \geq 0$ tel que

$$\begin{aligned} |\langle T, h\rangle| &\leq C_{V'} \sup_{V'} |h| \\ &\leq C_{V'} \sup_{K_\varepsilon} |h| \end{aligned}$$

pour tout $h \in \mathscr{O}(\Omega)$. $\square$

Rappelons que lors de la Section 1.3, pour définir $\mathscr{O}(K)$ pour K compact, nous avons considéré les restrictions

$$R_\Omega : \mathscr{O}(\Omega) \to \mathscr{O}(K)$$

lorsque Ω est un voisinage ouvert de K. Or, ce qui nous intéresse plus particulièrement est d'étudier les éléments de $\mathscr{O}'(K)$. On s'intéresse donc à la continuité des applications de la forme

$$T : \mathscr{O}(K) \to \mathbb{C}\,.$$

Au vu de la Proposition A.3.5, une application

$$T : \mathscr{O}(K) \to \mathbb{C}$$

est continue si et seulement si pour tout voisinage ouvert V de K,

$$T \circ R_V : \mathscr{O}(V) \to \mathbb{C}$$

est continue. Autrement dit, pour tout V voisinage de K, il existe un compact K_V de V et une constante $C_V > 0$ tels que

$$|\langle T \circ R_V, h\rangle| \leq C_V \sup_{K_V} |h|$$

pour tout $h \in \mathscr{O}(V)$.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{O}(K) \arrow[r, "T"] & \mathbb{C} \\ \mathscr{O}(V) \arrow[u, "R_V"] \arrow[ur, "T \circ R_V"'] & \end{tikzcd}$$

Par dualité, on peut considérer les applications linéaires continues

$$R'_\Omega : \mathscr{O}'(K) \to \mathscr{O}'(\Omega).$$

Par ce qui précède, on a

$$T \in \mathrm{Im}(R'_\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad K \text{ porteur de } T.$$

Soit $T \in \mathscr{O}'(\Omega)$. La fonctionnelle analytique T possède au moins un porteur via la continuité de T et l'Inégalité (2.1). En effet, on sait que

$$p_K(f) = \sup_K |f|$$

avec K un compact de Ω.

De plus, si T est représentée par une mesure à support compact μ, alors le support de μ est un porteur de T. En effet, considérons K un compact de Ω tel que

$$K = \mathrm{supp}(\mu).$$

On a alors

$$\begin{aligned} |\langle T, h\rangle| &= |\int h \, d\mu| \\ &\leq \int |h| \, d\mu \\ &\leq C\mu(K) \sup_K |h|. \end{aligned}$$

Si V est un voisinage de K relativement compact dans Ω, on sait que

$$K \subseteq V \quad \text{et} \quad \sup_V |h| < +\infty.$$

On en tire donc que

$$|\langle T, h\rangle| \leq C_V \sup_V |h|$$

si on pose $C_V := C\mu(K)$.

Il n'y a pas unicité car tout ensemble compact L dans Ω qui contient un porteur K est aussi un porteur.

En particulier, si K est un porteur de T, alors $\widehat{K}^\Omega$ est aussi un porteur de T.

2.4 Transformée de Cauchy d'une fonctionnelle analytique

Commençons par définir la transformée de Cauchy pour une mesure.

Définition 2.4.1. Soit μ une mesure à support compact dans $\mathbb{C}$. La *transformée de Cauchy* de μ est la fonction définie par

$$\widehat{\mu}(z) := \frac{1}{\pi}\int \frac{1}{z-\zeta}\, d\mu(\zeta)$$

pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{supp}(\mu)$.

Proposition 2.4.2. *Soit μ une mesure dont le support est inclus dans un compact K de $\mathbb{C}$. La transformée de Cauchy de μ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus K$ et tend vers 0 à l'infini.*

Démonstration. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus K$, la fonction

$$\zeta \mapsto \frac{1}{z-\zeta}$$

est bien définie sur K. Donc

$$\widehat{\mu}(z) := \frac{1}{\pi}\int \frac{1}{z-\zeta}\, d\mu(\zeta)$$

est bien définie lorsque $z \in \mathbb{C} \setminus K$. Par le Corollaire 1.1.12, on en tire que $\widehat{\mu}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus K$. De plus, lorsqu'on considère z qui tend vers l'infini, alors la fonction $z \mapsto \dfrac{1}{z-\zeta}$ tend vers 0 uniformément sur K. On en déduit que $\widehat{\mu}(z)$ tend vers 0 lorsque z tend vers l'infini. $\square$

Définition 2.4.3. Soit K un compact de $\mathbb{C}$ et $T \in \mathscr{O}'(K)$. La *transformée de Cauchy de la fonctionnelle analytique* T , notée $\widehat{T}$, est la fonction définie par

$$\widehat{T}(z) = \frac{1}{\pi}\langle T_\zeta, \frac{1}{z-\zeta}\rangle$$

pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus K$.

Remarque 2.4.4. Soit $T \in \mathscr{O}'(K)$. Si μ est une mesure à support compact qui représente la fonctionnelle analytique T, alors au vu des Définitions 2.4.1 et 2.4.3, on sait que

$$\widehat{T}(z) = \widehat{\mu}(z)$$

pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus K$.

Proposition 2.4.5. *Soit K un compact de $\mathbb{C}$ et $T \in \mathscr{O}'(K)$. Alors,*

(1) *La fonction* $\widehat{T}$ *est holomorphe sur* $\mathbb{C}\setminus K$ *et tend vers 0 à l'infini ;*

(2) *On a*

$$\widehat{T}(z) = \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{+\infty}\langle T_\zeta, \frac{-1}{(\zeta - z_0)^{m+1}}\rangle (z - z_0)^m$$

pour z *voisin de* $z_0 \in \mathbb{C}\setminus K$ *;*

(3) *On a*

$$\widehat{T}(z) = \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{+\infty}\langle T_\zeta, \zeta^m\rangle \frac{1}{z^{m+1}}$$

pour z *voisin de* ∞.

Démonstration. Soit $z_0 \in \mathbb{C}\setminus K$ et $\zeta \in K$. Considérons z tel que

$$|z_0 - z| < d(z_0, K) \leq |z_0 - \zeta|.$$

On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z-\zeta} &= \frac{1}{z - z_0 + z_0 - \zeta} \\
&= \frac{1}{z_0 - \zeta}\frac{1}{1 - \dfrac{z_0 - z}{z_0 - \zeta}} \\
&= \frac{1}{z_0 - \zeta}\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\frac{z_0 - z}{z_0 - \zeta}\right)^m \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(z_0 - z)^m}{(z_0 - \zeta)^{m+1}}.
\end{aligned}$$

De plus, la série converge uniformément en ζ comme on a

$$\frac{|z_0 - z|}{|z_0 - \zeta|} < 1.$$

On en tire que

$$\begin{aligned}
\langle T_\zeta, \frac{1}{z-\zeta}\rangle &= \langle T_\zeta, \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(z_0 - z)^m}{(z_0 - \zeta)^{m+1}}\rangle \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty}\langle T_\zeta, \frac{(z_0 - z)^m}{(z_0 - \zeta)^{m+1}}\rangle \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty}\langle T_\zeta, \frac{-1}{(\zeta - z_0)^{m+1}}\rangle (z - z_0)^m.
\end{aligned}$$

On peut sortir la série de la fonctionnelle car T est continue et la série converge uniformément.

On vient de montrer que

$$\langle T_\zeta, \frac{1}{z-\zeta}\rangle$$

est une série de puissances sur un voisinage de z_0, ce qui montre le point (2). De plus, on en tire que $\widehat{T}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus K$.

Choisissons, à présent, $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que

$$|z_0| > \sup_{z\in K} |z|.$$

On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{z_0-\zeta} &= \frac{1}{z_0}\frac{1}{1-\dfrac{\zeta}{z_0}} \\ &= \frac{1}{z_0}\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\frac{\zeta}{z_0}\right)^m \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{\zeta^m}{z_0^{m+1}}\end{aligned}$$

si $|\zeta| < |z_0|$. De plus, la série converge uniformément en ζ sur $D(0,|z_0|)$ comme on a

$$\frac{|\zeta|}{|z_0|} < 1.$$

On en tire que

$$\begin{aligned}\langle T_\zeta, \frac{1}{z_0-\zeta}\rangle &= \langle T_\zeta, \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{\zeta^m}{z^{m+1}}\rangle \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty}\langle T_\zeta, \zeta^m\rangle\frac{1}{z^{m+1}}\end{aligned}$$

ce qui montre le point (3). De plus, on remarque que $\widehat{T}$ tend vers 0 à l'infini. □

Remarque 2.4.6. Remarquons qu'il est possible de montrer directement le résultat précédant en combinant la Remarque 2.4.4 et la Proposition 2.4.2.

Théorème 2.4.7. *Soit K un compact holomorphiquement convexe dans $\mathbb{C}$. Si f est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus K$ qui tend vers 0 à l'infini, alors f détermine une fonctionnelle analytique $T_f \in \mathscr{O}'(K)$ telle que $\widehat{T}_f = f$. Cette fonctionnelle analytique est telle que*

$$\langle T_{f,V}, h\rangle = \frac{1}{2\,\mathrm{i}}\int_{C_V} f(z)h(z)\, dz$$

si $h \in \mathscr{O}(V)$ avec V un voisinage ouvert de K et où $C_V \in Z_1(V\backslash K)$ est un cycle spécial tel que

$$\begin{aligned} \operatorname{Ind}_{C_V}(a) = 1 \quad &\textit{si} \quad a \in K \\ \operatorname{Ind}_{C_V}(a) = 0 \quad &\textit{si} \quad a \in V\backslash K. \end{aligned}$$

Démonstration. Soit V un voisinage ouvert de K. Si $h \in \mathscr{O}(V)$, on pose

$$\langle T_{f,V}, h\rangle := \frac{1}{2\,\mathrm{i}}\int_{C_V} f(z)h(z)\,dz \tag{2.2}$$

où $C_V \in Z_1(V\backslash K)$ est un cycle spécial tel que

$$\begin{aligned} \operatorname{Ind}_{C_V}(a) = 1 \quad &\text{si} \quad a \in K \\ \operatorname{Ind}_{C_V}(a) = 0 \quad &\text{si} \quad a \in V\backslash K. \end{aligned}$$

On sait qu'un tel cycle existe par la Proposition B.4.5. On remarque que si $\underline{C_V}$ est un autre cycle ayant les même propriétés, alors C_V et $\underline{C_V}$ sont homologues dans $V\backslash K$ et cela entraine que la definition 2.2 ne dépend par de C_V.

On remarque ensuite que si W est voisinage ouvert de K tel que $W \subseteq V$, alors

$$\begin{aligned} \langle T_{f,W}, h_{|W}\rangle &= \frac{1}{2\,\mathrm{i}}\int_{C_W} f(z)h_{|W}(z)\,dz \\ &= \frac{1}{2\,\mathrm{i}}\int_{C_V} f(z)h_{|V}(z)\,dz \\ &= \langle T_{f,V}, h\rangle. \end{aligned}$$

La deuxième égalité ayant lieu car C_V et C_W sont homologues dans $\mathbb{C}\backslash K$. Par les propriétés des limites inductives, on peut donc définir $T_f \in \mathscr{O}'(K)$.

Pour montrer que $\widehat{T_f} = f$, on remarque que les deux fonctions sont holomorphes sur $\mathbb{C}\backslash K$ et qu'elles sont nulles à l'infini. On remarque également que si $z \in \mathbb{C}\backslash K$ alors

$$\zeta \mapsto \frac{1}{z-\zeta}$$

est holomorphe sur $V := \mathbb{C}\backslash\{z\}$. De plus, V est un ouvert contenant K. Ainsi,

$$\langle T_{f,\zeta}, \frac{1}{z-\zeta}\rangle = \frac{1}{2\,\mathrm{i}}\int_{C_V} f(\zeta)\frac{1}{z-\zeta}\,d\zeta$$

où $C_V \in Z_1(V\backslash K)$ est un cycle spécial tel que

$$\begin{aligned} \operatorname{Ind}_{C_V}(a) = 1 \quad &\text{si} \quad a \in K \\ \operatorname{Ind}_{C_V}(a) = 0 \quad &\text{si} \quad a = z. \end{aligned}$$

On remarque que

$$\begin{aligned}\widehat{T_f}(z) &= \frac{1}{\pi}\langle T_{f,\zeta}, \frac{1}{z-\zeta}\rangle \\ &= \frac{1}{2\,\mathrm{i}\,\pi}\int_{C_V} \frac{1}{z-\zeta} f(\zeta)\, d\zeta \\ &= \frac{-1}{2\,\mathrm{i}\,\pi}\int_{C_V} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.\end{aligned}$$

Or, comme $z \in \mathbb{C} \setminus K$, on peut trouver un $R > 0$ tel que

$$R > |z| \quad \text{et} \quad R > \sup_{z \in K} |z|$$

et donc considérer le cercle qui englobe K, C_V et z, notons le C_R.

Par la formule de représentation de Cauchy 1.1.13, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}_{C_R - C_V}(z) f(z) &= \frac{1}{2\,\mathrm{i}\,\pi}\int_{C_R - C_V} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \\ &= \frac{-1}{2\,\mathrm{i}\,\pi}\int_{C_V} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \frac{1}{2\,\mathrm{i}\,\pi}\int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.\end{aligned}$$

Or, comme on sait que f tend vers 0 à l'infini, on a

$$\lim_{\zeta \to \infty} \zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = 0.$$

Par le Lemme des grandes encoches 1.1.18, on en tire que

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0.$$

D'où,

$$\mathrm{Ind}_{C_R - C_V}(z) f(z) = \frac{-1}{2\,\mathrm{i}\,\pi}\int_{C_V} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

De plus, on a

$$\mathrm{Ind}_{C_R - C_V}(z) = \mathrm{Ind}_{C_R}(z) - \mathrm{Ind}_{C_V}(z).$$

Or, par construction de z, on a $\mathrm{Ind}_{C_V}(z) = 0$ et nous savons que $\mathrm{Ind}_{C_R}(z) = 1$ On en conclut que

$$\mathrm{Ind}_{C_R - C_V}(z) = 1.$$

Au final, on a

$$\begin{aligned}\widehat{T_f}(z) &= \frac{-1}{2\,\mathrm{i}\,\pi}\int_{C_V} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \\ &= \mathrm{Ind}_{C_R - C_V}(z) f(z) \\ &= f(z)\end{aligned}$$

pour $z \in \mathbb{C} \setminus K$.

$\square$

Par le point (3) de la Proposition 2.4.5, on sait que

$$\widehat{T}(z) = \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{+\infty}\langle T_\zeta, \zeta^m\rangle \frac{1}{z^{m+1}}$$

pour z voisin de ∞. Donc, on a

$$\begin{aligned}\widehat{T}(z) = 0 &\Leftrightarrow \sum_{m=0}^{+\infty}\langle T_\zeta, \zeta^m\rangle \frac{1}{z^{m+1}} = 0\\ &\Leftrightarrow \langle T_\zeta, \zeta^m\rangle = 0 \qquad \forall m \geq 0.\end{aligned}$$

On en tire que T s'annule sur les polynômes. Or, par le Théorème de Runge 1.4.10 et comme K est holomorphiquement convexe, on sait que toute fonction holomorphe sur un voisinage ouvert de K est limite uniforme sur K de fonctions rationnelles. D'où, T s'annule sur toute fonction holomorphe sur un voisinage ouvert de K. On en tire donc que la transformée de Cauchy de T sur K est injective.

Définition 2.4.8. Notons $\mathscr{O}_0(\mathbb{C}\setminus K)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}\setminus K$ qui tendent vers 0 à l'infini. Autrement dit, on a

$$\mathscr{O}_0(\mathbb{C}\setminus K) = \{f \in \mathscr{O}(\mathbb{C}\setminus K), f(\infty) = 0\}.$$

Corollaire 2.4.9. *L'application*

$$\widehat{\ }\colon \mathscr{O}'(K) \to \mathscr{O}_0(\mathbb{C}\setminus K)$$

est un isomorphisme. En particulier, les ensembles $\mathscr{O}'(K)$ et $\mathscr{O}_0(\mathbb{C}\setminus K)$ sont isomorphes.

Démonstration. La dernière remarque combinée avec le Théorème 2.4.7 permet de montrer l'isomorphisme. □

2.5 Dual topologique de l'espace des fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Considérons l'ensemble filtrant

$$A = \{K : K \text{ compact de } \ \Omega\}$$

muni du pré-ordre

$$K \leq L \ \Leftrightarrow \ K \subseteq L.$$

Considérons les applications linéaires continues

$$R_{KL} : \mathscr{O}(L) \to \mathscr{O}(K) : T \mapsto T_{|K}$$

pour tous $K, L \in A$ tels que $K \leq L$. Par dualité et par la Proposition A.5.3, on peut considérer les applications linéaires continues

$$R'_{KL} : \mathscr{O}'(K) \to \mathscr{O}'(L)$$

pour tous $K, L \in A$ tels que $K \leq L$.

On en tire donc que $(\mathscr{O}'(K), R'_{KL})_{K \in A}$ est un système inductif filtrant. Montrons que $\mathscr{O}'(\Omega)$ est la limite inductive du système inductif filtrant $(\mathscr{O}'(K), R'_{KL})_{K \in A}$.

Soit K un compact de Ω. Considérons l'application

$$R'_K : \mathscr{O}'(K) \to \mathscr{O}'(\Omega).$$

Ces applications existent car comme $\mathscr{O}(K)$ est la limite inductive des $\mathscr{O}(V)$ lorsque V est un voisinage ouvert de K, on sait que

$$R_\Omega : \mathscr{O}(\Omega) \to \mathscr{O}(K).$$

De plus, par dualité et par la Proposition A.5.3, on en tire qu'il existe

$$R'_K : \mathscr{O}'(K) \to \mathscr{O}'(\Omega).$$

- On sait que pour tout $T \in \mathscr{O}'(\Omega)$, il existe un compact K de Ω qui est un porteur de la fonctionnelle analytique T. D'où $T \in \mathscr{O}'(K)$.
- Soient K_1 et K_2 deux compacts de Ω et soient $T_{K_1} \in \mathscr{O}'(K_1)$ et $T_{K_2} \in \mathscr{O}'(K_2)$. Supposons que

  $$R'_{K_1}(T_{K_1}) = R'_{K_2}(T_{K_2}).$$

  Autrement dit, supposons que

  $$T_{K_1}(f_{|K_1}) = T_{K_2}(f_{|K_2}) \qquad \forall f \in \mathscr{O}(\Omega). \tag{2.3}$$

  Montrons que s'il existe K_3 un compact de Ω tel que $K_1 \subseteq K_3$ et $K_2 \subseteq K_3$, alors

  $$R'_{K_1 K_3}(T_{K_1}) = R'_{K_2 K_3}(T_{K_2}).$$

  Autrement dit, on veut montrer qu'il existe un compact K_3 de Ω tel que

  $$T_{K_1}(g_{|K_1}) = T_{K_2}(g_{|K_2}) \quad \forall g \in \mathscr{O}(K_3).$$

  Pour ce faire, on peut considérer $K_3 = \widehat{K_1 \cup K_2}^{\Omega}$. Dans ce cas, par le Théorème de Runge 1.4.10, on sait que toutes les fonctions de $\mathscr{O}(K_3)$ sont limites uniformes de fonctions de $\mathscr{O}(\Omega)$. Donc comme on a l'égalité (2.3) pour tout $f \in \mathscr{O}(\Omega)$, par passage à la limite, on l'obtient aussi pour tout $g \in \mathscr{O}(K_3)$. Ce qui nous permet de conclure.

On en tire donc que $\mathscr{O}'(\Omega)$ est la limite inductive des $\mathscr{O}'(K)$. On note

$$\mathscr{O}'(\Omega) = \varinjlim_{K \in A} \mathscr{O}'(K).$$

2.6 Existence d'un plus petit porteur holomorphiquement convexe

Proposition 2.6.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Toute intersection de compacts holomorphiquement convexes dans Ω est un compact holomorphiquement convexe dans Ω.*

Démonstration. Soit $\mathscr{F}$ une famille non vide de compacts holomorphiquement convexes dans Ω. On sait que l'intersection

$$\bigcap_{K \in \mathscr{F}} K$$

est compacte. Montrons que cette intersection est holomorphiquement convexe dans Ω.

Soit $z_0 \in \Omega \backslash \bigcap_{K \in \mathscr{F}} K$, alors il existe $K_1 \in \mathscr{F}$ tel que $z_0 \in \Omega \backslash K_1$. Or, K_1 est holomorphiquement convexe dans Ω, il existe donc $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ qui sépare z_0 de K_1. De plus, on a

$$\bigcap_{K \in \mathscr{F}} K \subseteq K_1.$$

Donc f sépare z_0 de $\bigcap_{K \in \mathscr{F}} K$. D'où la conclusion. □

Proposition 2.6.2. *Soit Ω un ouvert holomorphiquement convexe de $\mathbb{C}$ et $T \in \mathscr{O}'(\Omega)$. Si $\mathscr{F}$ est l'ensemble de tous les porteurs compacts holomorphiquement convexes de T, alors l'intersection*

$$\bigcap_{K \in \mathscr{F}} K$$

est le plus petit porteur holomorphiquement convexe de T.

Démonstration. Pour montrer que $\bigcap_{K \in \mathscr{F}} K$ est un porteur de T, il faut construire une transformée de Cauchy $\widehat{T}$ telle que

$$\widehat{T} \in \mathscr{O}(\mathbb{C} \setminus \bigcap_{K \in \mathscr{F}} K).$$

Ainsi, on pourra conclure par le Corollaire 2.4.9.

On sait que

$$\mathbb{C} \setminus \bigcap_{K \in \mathscr{F}} K = \bigcup_{K \in \mathscr{F}} \mathbb{C} \setminus K.$$

De plus, par hypothèse, pour tout $K \in \mathscr{F}$, on a que K est un porteur holomorphiquement convexe de T, autrement dit, $T \in \mathscr{O}'(K)$. Donc, par la Proposition 2.4.3, on a

$$\widehat{T_K} \in \mathscr{O}(\mathbb{C} \setminus K) \quad \forall K \in \mathscr{F}.$$

Comme nous voulons construire $\widehat{T}$ sur une union d'ouverts, si on la connait sur chaque ouvert et que sur l'intersection de deux ouverts elles coïncident, alors on saura que $\widehat{T} \in \mathscr{O}(\bigcup_{K \in \mathscr{F}} \mathbb{C} \setminus K)$ et on pourra conclure.

On en déduit que $\widehat{T_K} \in \mathscr{O}(\mathbb{C} \setminus K)$ sont de telles fonctions. De plus, on a

$$\widehat{T_{K_1}}_{|(\mathbb{C} \setminus K_1) \cap (\mathbb{C} \setminus K_2)} = \widehat{T_{K_2}}_{|(\mathbb{C} \setminus K_1) \cap (\mathbb{C} \setminus K_2)}.$$

En effet, on sait que

$$\begin{aligned} \widehat{T_{K_1}}(z) &= \frac{1}{\pi} \langle T_\zeta, \frac{1}{z-\zeta} \rangle \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus K_1, \\ \text{et} \ \ \widehat{T_{K_2}}(z) &= \frac{1}{\pi} \langle T_\zeta, \frac{1}{z-\zeta} \rangle \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus K_2. \end{aligned}$$

Il est donc clair que si $z \in (\mathbb{C} \setminus K_1) \cap (\mathbb{C} \setminus K_2)$, alors

$$\widehat{T_{K_1}}(z) = \widehat{T_{K_2}}(z).$$

Les transformées de Cauchy $\widehat{T_K}$ vont se recoller en une fonction $\widehat{T}$ qui est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \bigcap_{K \in \mathscr{F}} K$. D'où la conclusion. $\square$

Chapitre 3

Transformation de Fourier-Borel

3.1 $\mathscr{C}$-transformation d'une fonctionnelle analytique

Soit Ω un ouvert de Runge.

Dans le chapitre 2, nous avons essentiellement travaillé avec l'espace $\mathscr{O}'(K)$ lorsque K est un compact de $\mathbb{C}$. Nous allons à présent travailler avec le dual topologique $\mathscr{O}'(\Omega)$ lorsque Ω est un ouvert de Runge. Comme nous avons montré à la section 2.5 que $\mathscr{O}'(\Omega)$ est la limite inductive des $\mathscr{O}'(K)$, on sait que tout ce qui est valable sur $\mathscr{O}'(K)$ l'est sur $\mathscr{O}'(\Omega)$ au vu des propriétés de la limite inductive. On peut donc considérer la transformée de Cauchy de la fonctionnelle analytique $T \in \mathscr{O}'(\Omega)$.

Définition 3.1.1. Notons $\mathscr{O}_0(\mathbb{C} \setminus \Omega)$ l'espace vectoriel de tous les germes des fonctions holomorphes dans un voisinage de $\mathbb{C} \setminus \Omega$ qui tendent vers 0 à l'infini. Autrement dit, on a

$$\mathscr{O}_0(\mathbb{C} \setminus \Omega) = \{f \in \mathscr{O}(\mathbb{C} \setminus \Omega), f(\infty) = 0\}.$$

Définition 3.1.2. Soit $T \in \mathscr{O}'(\Omega)$. La *$\mathscr{C}$-transformée de la fonctionnelle analytique T* ,

$$\mathscr{C} : \mathscr{O}'(\Omega) \to \mathscr{O}_0(\mathbb{C} \setminus \Omega),$$

est la fonction définie par

$$\mathscr{C}(T)(z) = \langle T_\zeta, \frac{1}{z - \zeta}\rangle$$

avec $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Remarquons que $\mathscr{C}(T) = \pi\widehat{T}$.

La $\mathscr{C}$-transformée d'une fonctionnelle analytique est un isomorphisme linéaire par le Corollaire 2.4.9. Notons que, grâce au Théorème 2.4.7, on a

$$\langle T, h\rangle = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{C_\Omega} \mathscr{C}(T)(z)h(z)\, dz$$

pour tout $h \in \mathscr{O}(\Omega)$.

3.2 Fonction d'appui

Nous allons à présent nous intéresser à une fonction qui sera importante dans la suite. Nous nous basons essentiellement sur [5].

Définition 3.2.1. Soit K un ensemble non vide de $\mathbb{C}$. La fonction $H_K : \mathbb{C} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie par

$$H_K(u) = \sup_{z \in K}(\mathrm{Re}(zu)) \qquad u \in \mathbb{C}$$

est appelée la *fonction d'appui de l'ensemble K* .

Remarquons que la fonction d'appui d'un ensemble non vide est finie lorsque celui-ci est un ensemble borné.

Rappelons que le produit scalaire dans $\mathbb{C}$ est donné par

$$\langle a, b\rangle = \mathrm{Re}(a\bar{b})$$

pour tous $a, b \in \mathbb{C}$. On remarque donc que si $u \in \mathbb{C}$, on peut écrire

$$\begin{aligned} H_K(u) &= \sup_{z \in K}(\mathrm{Re}(zu)) \\ &= \sup_{z \in K}\langle z, \overline{u}\rangle. \end{aligned}$$

Rappelons la définition suivante :

Définition 3.2.2. Une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est dite *convexe* si pour tout $(x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ et tout $\alpha \in [0, 1]$, on a

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y).$$

Proposition 3.2.3. *Soit K un ensemble non vide de $\mathbb{C}$. La fonction H_K est une fonction convexe.*

Démonstration. Soit $(x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ et $\alpha \in [0, 1]$. On a

$$\begin{aligned} H_K(\alpha x + (1-\alpha)y) &= \sup_{z \in K}(\mathrm{Re}((\alpha x + (1-\alpha)y)z) \\ &= \sup_{z \in K}(\alpha \,\mathrm{Re}(xz) + (1-\alpha)\,\mathrm{Re}(yz)) \\ &\leq \alpha \sup_{z \in K}(\mathrm{Re}(xz)) + (1-\alpha) \sup_{z \in K}(\mathrm{Re}(yz)) \\ &= \alpha H_K(x) + (1-\alpha)H_K(y). \end{aligned}$$

D'où la conclusion. □

Remarquons que si $u = 0$, alors on a

$$H_K(u) = \sup_{z \in K}(\mathrm{Re}(0)) = 0.$$

Exemple 3.2.4. Supposons que K est le disque unité $D(0,1)$ et essayons de calculer $H_{D(0,1)}(u)$ pour tout $u \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Si $z \in D(0,1)$, alors, par l'Inégalité de Cauchy-Schwarz, on sait que

$$|\langle z, \overline{u}\rangle| \leq |z||\overline{u}|.$$

Or, comme $z \in D(0,1)$, on a $|z| = 1$. On en tire que

$$|\langle z, u\rangle| \leq |\overline{u}|.$$

De plus, comme $\dfrac{\overline{u}}{|u|} \in D(0,1)$, on a

$$H_{D(0,1)}(u) \geq \langle \frac{\overline{u}}{|u|}, \overline{u}\rangle.$$

On sait également que

$$\begin{aligned}\langle \frac{\overline{u}}{|u|}, \overline{u}\rangle &= \mathrm{Re}(\frac{\overline{u}}{|u|}u)\\ &= |u|.\end{aligned}$$

Il en découle que

$$H_{D(0,1)}(u) = |u|$$

pour tout $u \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Interprétation géométrique

Soit K un compact de $\mathbb{C}$ et soit $u \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Notons L_u la demi-droite commençant à l'origine avec la direction u, c'est-à-dire

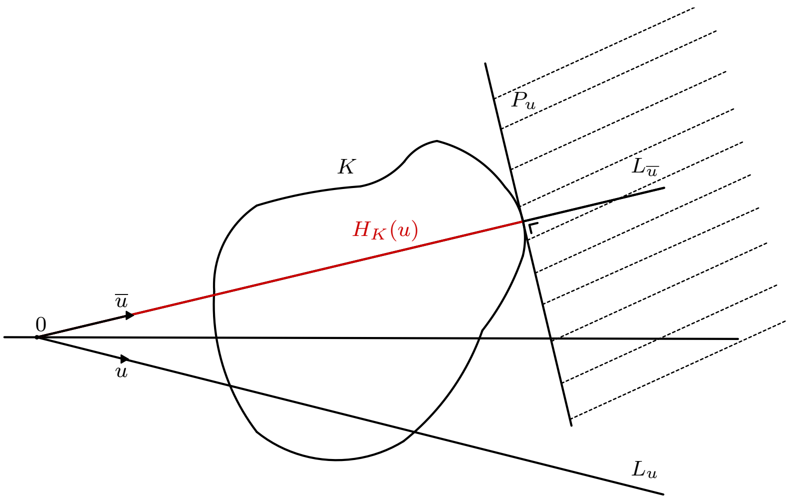
$$L_u = \{su : s \geq 0\}.$$

Définissons également le demi-plan ouvert P_u par

$$\begin{aligned}P_u &= \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(zu) > H_K(u)\}\\ &= \{z \in \mathbb{C} : \langle z, \overline{u}\rangle > \sup_{\zeta\in K}\langle \zeta, \overline{u}\rangle\}.\end{aligned}$$

La valeur H_K représente la distance signée entre l'origine et la frontière du demi-plan P_u. Cette ligne intersecte K et K est entièrement contenue dans $\mathbb{C}\setminus P_u$.

On peut représenter la situation comme suit :



La frontière du demi-plan P_u peut être appelée la *droite d'appui* de l'ensemble K.

3.3 Transformation de Borel

Commençons par rappeler la définition suivante.

Définition 3.3.1. Soit f une fonction entière. On dit que f est de *type exponentiel* s'il existe des constantes $A > 0, B > 0$ telles que

$$|f(z)| \leq A \exp(B|z|)$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Dans toute cette section, nous supposerons que K est un ensemble convexe et compact d'un ouvert connexe Ω de $\mathbb{C}$. Nous considérerons f une fonction entière de type exponentiel.

Comme f est une fonction entière, par le développement en série de Taylor 1.1.17, on sait qu'elle peut s'écrire sous la forme

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Définition 3.3.2. Soit f une fonction entière de type exponentiel. La *transformée de Borel de la fonction* f est la fonction définie par

$$\mathscr{B}(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n! a_n}{z^{n+1}}$$

pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ pour lesquels la série converge.

De plus, comme f est de type exponentiel, il existe des constantes $C > 0, R > 0$ telles que

$$|f(z)| \leq Ce^{R|z|} \tag{3.1}$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$. Il est suffisant de choisir $R > 0$ tel que $K \subseteq D(0, R)$. Si R_0 est le plus petit rayon tel que $K \subseteq D\,[0, R_0]$, on peut choisir ε avec $R_0 + \varepsilon < R$, $C_\varepsilon = C$ et utiliser $H_K(z) \leq H_{D[0,R_0]} = R_0|z|$.

Proposition 3.3.3. *La transformée de Borel est holomorphe sur* $\mathbb{C} \setminus D\,[0, R]$ *et a une limite nulle lorsque* z *tend vers l'infini.*

Démonstration. Par le développement en série de Taylor 1.1.17, on sait que

$$a_n = \frac{f^n(0)}{n!}.$$

Or, par la formule de représentation de Cauchy pour les dérivées 1.1.14, on a

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\,\mathrm{i}\,\pi} \int_{C(0,\rho)} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz$$

pour tout $\rho > 0$. Grâce aux inégalités de Cauchy 1.1.15, on a

$$\begin{aligned} |a_n| &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{\sup_{z \in C(0,\rho)} |f(z)|}{\rho^{n+1}} 2\pi\rho \\ &= \sup_{z \in C(0,\rho)} \frac{|f(z)|}{\rho^n}. \end{aligned}$$

Comme cette inégalité est vraie quel que soit $\rho > 0$, en particulier, elle l'est pour la borne inférieure. Donc,

$$\begin{aligned} |a_n| &\leq \inf_{\rho > 0} \Big(\sup_{z \in C(0,\rho)} \frac{|f(z)|}{\rho^n} \Big) \\ &\leq C \inf_{\rho > 0} \frac{e^{R\rho}}{\rho^n} \end{aligned}$$

où la dernière inégalité vient du fait que f vérifie l'inéquation (3.1). En faisant une étude de la fonction

$$\rho \mapsto \frac{e^{R\rho}}{\rho^n},$$

on obtient que la borne inférieure est atteinte en

$$\rho = \frac{n}{\rho}.$$

On en tire donc que

$$\begin{aligned}|a_n| &\leq Ce^{R\frac{n}{R}}\left(\frac{n}{R}\right)^{-n}\\ &= C\frac{e^n R^n}{n^n}.\end{aligned}$$

De plus, la formule de Stirling nous dit que

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} \qquad (n \to +\infty).$$

Autrement dit,

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}(1+\varepsilon(n))$$

lorsque $\varepsilon(n) \to 0$ si $n \to +\infty$. Donc on a

$$\begin{aligned}n!|a_n| &\leq n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}(1+\varepsilon(n))C\frac{e^n R^n}{n^n}\\ &\leq CR^n\sqrt{2\pi n}(1+\varepsilon(n))\end{aligned}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{CR^n\sqrt{2\pi n}(1+\varepsilon(n))} = R.$$

On en tire que

$$\limsup_{n\to\infty}(n!|a_n|)^{\frac{1}{n}} \leq R.$$

Ceci implique que la série qui définit $\mathscr{B}$ converge à chaque fois que $|z| > R$.

De plus, on observe que la fonction $\mathscr{B}$ coïncide dans le demi-plan $\mathrm{Re}(z) > R$, avec la transformée de Laplace de la fonction f. En effet, on a

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(f)(z) &= \int_0^\infty f(t)e^{-tz}\,dt\\ &= \int_0^\infty \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n e^{-tz}\,dt\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^\infty t^n e^{-tz}\,dt\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{n!}{z^{n+1}}\\ &= \mathscr{B}(z)\end{aligned}$$

où l'intégration terme à terme est justifiée par l'estimation

$$\int_0^\infty \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|t^n e^{-t\,\mathrm{Re}(z)}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} n!|a_n|(\mathrm{Re}(z))^{-n+1} < +\infty$$

qui est valide lorsque $\mathrm{Re}(z) > R$. $\square$

3.4 Transformation de Fourier-Borel d'une fonctionnelle analytique

Définition 3.4.1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $T \in \mathscr{O}'(\Omega)$. La *transformée de Fourier-Borel* de la fonctionnelle analytique T est la fonction définie par

$$\mathscr{F}(T)(z) := \langle T_\xi, e^{\xi z} \rangle$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Proposition 3.4.2. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $T \in \mathscr{O}'(\Omega)$. La fonction $\mathscr{F}(T)$ est une fonction entière.*

Démonstration. Soit $\zeta \in \Omega$. On sait que l'on a

$$e^{\zeta z} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\zeta z)^m}{m!}$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$. De plus, on sait que cette série converge uniformément en ζ. On en tire donc que

$$\begin{aligned}\langle T_\zeta, e^{\zeta z} \rangle &= \langle T_\zeta, \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\zeta z)^m}{m!} \rangle \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \langle T_\zeta, \frac{\zeta^m}{m!} z^m \rangle \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \langle T_\zeta, \zeta^m \rangle \frac{z^m}{m!}.\end{aligned}$$

On peut sortir la série de la fonctionnelle analytique car T est continue et la série converge uniformément. On en tire que $\mathscr{F}(T)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier. □

Remarque 3.4.3. Remarquons qu'il est possible de montrer le résultat précédent grâce aux mesures. En effet, comme $T \in \mathscr{O}'(\Omega)$, T peut être représentée par une mesure à support compact. Appelons cette mesure μ. On a donc

$$\langle T, f \rangle = \int f \, d\mu$$

pour tout $f \in \mathscr{O}(\Omega)$. On en tire que

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(T) &= \langle T_\zeta, e^{\zeta z} \rangle \\ &= \int e^{\zeta z} \, d\mu\end{aligned}$$

pour tout $\zeta \in \Omega$. De plus, on sait que la fonction $z \mapsto e^{\zeta z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ pour tout $\zeta \in \Omega$. Nous savons également que la fonction $\zeta \mapsto e^{\zeta z}$ est bien définie et mesurable sur Ω pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Par la Proposition 1.1.12, on en tire que $\mathscr{F}(T)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Rappelons qu'une *courbe de Jordan* est un lacet γ dans $\mathbb{C}$ telle que $\gamma_{|[0,1[}$ est injectif.

Proposition 3.4.4. *Soit Ω un ouvert convexe et soit $T \in \mathscr{O}'(\Omega)$. Si T a comme support convexe l'ensemble K, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C_\varepsilon > 0$ telle que*

$$|\mathscr{F}(T)(z)| \leq C_\varepsilon e^{H_K(z)+\varepsilon|z|} \qquad z \in \mathbb{C}$$

où H_K est la fonction d'appui de l'ensemble K.

En particulier, $\mathscr{F}(T)$ est une fonction entière de type exponentiel.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Considérons $V(K,\varepsilon) = \{\zeta \in \mathbb{C} : d(\zeta, K) < \varepsilon\}$ et γ une courbe de Jordan de longueur finie dans $V(K,\varepsilon)\backslash K$.

Par le Théorème 2.4.7, on peut écrire

$$\mathscr{F}(T)(z) = \frac{1}{2\,\mathrm{i}} \int_\gamma e^{\zeta z} \widehat{T}(z)\, d\zeta$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$. De plus, pour tout $\zeta \in \gamma$, on a $d(\zeta, K) < \varepsilon$. Donc, il existe $\zeta_K \in K$ tel que $|\zeta - \zeta_K| < \varepsilon$.

Pour tout $\zeta \in \gamma$, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(\zeta z) &= \langle \zeta, \overline{z} \rangle \\
&= \langle \zeta - \zeta_K, \overline{z} \rangle + \langle \zeta_K, \overline{z} \rangle \\
&\leq |\zeta - \zeta_K||z| + \langle \zeta_K, \overline{z} \rangle \\
&\leq \varepsilon|z| + \langle \zeta_K, \overline{z} \rangle \\
&\leq \varepsilon|z| + \sup_{\zeta \in K}(\mathrm{Re}(\zeta z)).
\end{aligned}$$

On en tire donc que

$$\begin{aligned}
\sup_{\zeta \in \gamma}(\mathrm{Re}(\zeta z)) &\leq \sup_{\zeta \in K}(\mathrm{Re}(\zeta z)) + \varepsilon|z| \\
&= H_K(z) + \varepsilon|z|.
\end{aligned}$$

Soit $M = \max_{\zeta \in \gamma} |\widehat{T}(\zeta)|$ et soit l la longueur de γ. On en tire que

$$|\mathscr{F}(T)(z)| \leq M l e^{H_K(z)+\varepsilon|z|}.$$

D'où la conclusion en posant $C_\varepsilon = Ml$. $\square$

Cette proposition a une contre-partie.

Théorème 3.4.5. *Soit K un sous-ensemble convexe et compact d'un ouvert convexe Ω. Soit f une fonction entière de type exponentiel telle que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C_\varepsilon > 0$ telle que f satisfait partout*

$$|f(z)| \leq C_\varepsilon e^{H_K(z)+\varepsilon|z|}.$$

Alors, il existe une unique fonctionnelle analytique $T \in \mathscr{O}'(\Omega)$ telle que $\mathscr{F}(T) = f$. Cette fonctionnelle analytique est telle que

$$\langle T, h\rangle := \frac{1}{2\,\mathrm{i}\,\pi}\int_\gamma \mathscr{B}(\zeta)h(\zeta)\,d\zeta$$

si $h \in \mathscr{O}(\Omega)$ et avec γ une courbe de Jordan dans $\Omega\backslash K$ d'indice 1.

Démonstration. Comme par hypothèse, on sait que f est une fonction entière de type exponentiel, on peut écrire f sous la forme

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$$

avec $a_n \in \mathbb{C}$ pour tout n. Considérons également la transformée de Borel de f.

Soit $u \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, pour simplifier, on peut supposer que $|u| = 1$. Rappelons que

$$L_u = \{su : s \geq 0\} \quad \text{et} \quad P_u = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(zu) > H_K(u)\}.$$

Soient $\varepsilon > 0$, $z \in P_u$ et $t = su \in L_u$. Par hypothèse, on a

$$|f(t)e^{-zt}| \leq C_\varepsilon e^{H_K(t)+\varepsilon|t|-\mathrm{Re}(zt)}.$$

Comme $z \in P_u$, par définition de P_u, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}(zu) \geq H_K(u) + \alpha \\ \Leftrightarrow\ &\mathrm{Re}(zu) - H_K(u) \geq \alpha \\ \Leftrightarrow\ &H_K(u) - \mathrm{Re}(zu) \leq -\alpha. \end{aligned}$$

Cette même inégalité est valide dans un demi-plan strictement inclus dans P_u. On a

$$\begin{aligned} H_K(t) + \varepsilon|t| - \mathrm{Re}(zt) &= H_K(su) + \varepsilon|su| - \mathrm{Re}(zsu) \\ &= \sup_{z\in K}(\mathrm{Re}(zsu)) + s\varepsilon|u| - s\,\mathrm{Re}(zu) \\ &= s\sup_{z\in K}(\mathrm{Re}(zu)) + s\varepsilon - s\,\mathrm{Re}(zu) \\ &= sH_K(u) + s\varepsilon - s\,\mathrm{Re}(zu) \\ &= s(H_K(u) - \mathrm{Re}(zu) + \varepsilon) \\ &\leq s(\varepsilon - \alpha) \end{aligned}$$

car on sait que $\mathrm{Re}(zu) - H_K(u) \leq \alpha$. On en tire que

$$|f(t)e^{-zt}| \leq C_\varepsilon e^{s(\varepsilon-\alpha)}.$$

En considérant $0 < \varepsilon < \alpha$, par exemple, $\varepsilon = \dfrac{\alpha}{2}$, on a

$$|f(t)e^{-zt}| \leq C_{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{\alpha}{2}|s|}.$$

On vient de montrer que l'intégrale

$$\varphi_u(z) := \int_{L_u} f(t)e^{-zt}\, dt$$

converge uniformément dans le demi-plan

$$\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(zu) > H_K(u) + \alpha\}$$

pour tout $\alpha > 0$.

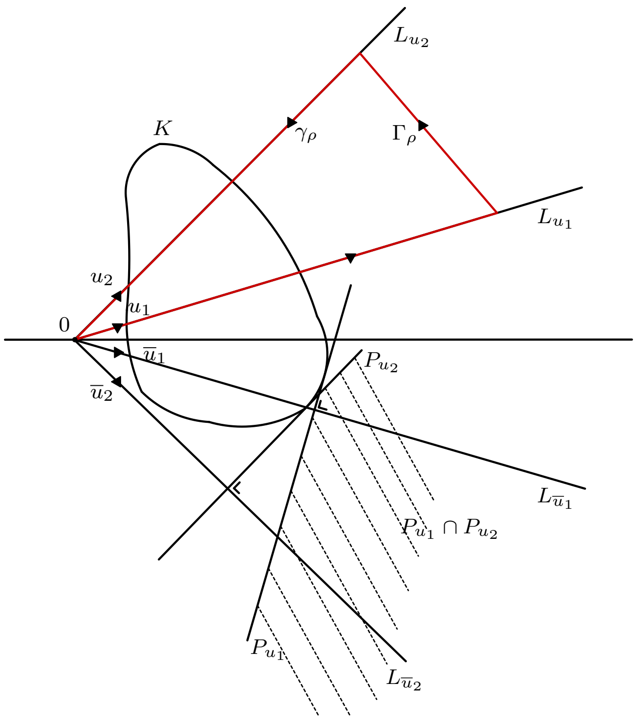
Ceci implique que φ_u est une fonction holomorphe dans P_u.

Considérons à présent $u_1, u_2 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ tels que $u_1 \neq u_2$, $|u_1| = |u_2| = 1$ et

$$0 < arg(\frac{\overline{u_2}}{\overline{u_1}}) < \pi.$$

Soit $\rho > 0$. Considérons γ_ρ la courbe dans $\mathbb{C}$ formée des parties de L_{u_1} et L_{u_2} à l'intérieur de $D(0,\rho)$, ainsi que Γ_ρ, la sécante au plus petit des deux arcs déterminée par les deux rayons de $\partial D(0,\rho)$.

On peut représenter la situation comme suit :



Montrons que

$$\lim_{\rho\to\infty} \int_{\Gamma} f(t)e^{-tz}\, dt = 0$$

lorsque $z \in P_{u_1} \cap P_{u_2}$.

Pour ce faire, il faut estimer $|f(t)|e^{-\mathrm{Re}(tz)}$ lorsque $t \in \Gamma_\rho$. L'idée principale est d'utiliser le fait que γ_ρ entoure une région convexe et que H_K est une fonction convexe.

Si $t \in \Gamma_\rho$, alors les extrémités du segment sont précisément ρu_1 et ρu_2, donc on en tire que

$$t = \rho(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2)$$

pour $\lambda \in [0,1]$. D'où,

$$H_K(t) = \rho H_K(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2).$$

Par convexité de la fonction H_K, on a

$$H_K(t) \leq \rho(\lambda H_K(u_1) + (1-\lambda)H_K(u_2)).$$

D'un autre côté, on sait que $z \in P_{u_1} \cap P_{u_2}$, donc pour un certain $\alpha > 0$, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(zu_1) &= \langle z, \overline{u_1}\rangle \\ &\geq H_K(u_1) + \alpha, \\ \text{et} \quad \operatorname{Re}(zu_2) &= \langle z, \overline{u_2}\rangle \\ &\geq H_K(u_2) + \alpha. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(tz) &= \rho\langle z, \lambda\overline{u_1} + (1-\lambda)\overline{u_2}\rangle \\ &= \rho\left[\lambda\langle z, \overline{u_1}\rangle + (1-\lambda)\langle z, \overline{u_2}\rangle\right] \\ &\geq \rho\left[\lambda H_K(u_1) + (1-\lambda)H_K(u_2) + \alpha\right]. \end{aligned}$$

En résumé, pour $t \in P_\rho$, on a

$$\begin{aligned} |f(t)|e^{-\operatorname{Re}(tz)} &\leq C_\varepsilon e^{H_K(t)+\varepsilon|t|-\operatorname{Re}(tz)} \\ &\leq C_\varepsilon e^{(\varepsilon-\alpha)\rho}. \end{aligned}$$

Si on prend $\varepsilon = \dfrac{\alpha}{2}$ et $C_\varepsilon = C$, on a

$$\begin{aligned} \left|\int_{\Gamma_\rho} f(t)e^{-zt}\,dt\right| &\leq C\pi\rho e^{-\frac{\alpha}{2}\rho} \\ &\to 0 \qquad \text{si } \rho \to \infty. \end{aligned}$$

Par le Théorème de Cauchy 1.1.10, on a

$$\int_{\gamma_\rho} f(t)e^{-tz}\,dt = 0.$$

Donc, on en tire que $\varphi_{u_1}(z) = \varphi_{u_2}(z)$ lorsque $z \in P_{u_1} \cap P_{u_2}$.

Ceci montre que la fonction φ_u détermine une fonction holomorphe à valeur unique dans l'union de tous les demi-plans P_u, $|u| = 1$, en d'autres termes, dans $\mathbb{C} \setminus K$.

Lorsqu'on considère $u = 1$, on observe que pour $\operatorname{Re}(z) > R$, la transformée de Laplace de f coïncide avec $\mathscr{B}$, donc la fonction que l'on vient juste d'obtenir est précisément la prolongée analytique de $\mathscr{B}$ de $\mathbb{C} \setminus D[0, R]$ dans $\mathbb{C} \setminus K$. On notera aussi $\mathscr{B}$ cette extension.

Comme la transformée de Cauchy est injective, il existe une unique fonctionnelle analytique $T \in \mathscr{O}'(\Omega)$ portée par K telle que $\mathscr{C}(T) = \mathscr{B}$.

A savoir, si γ une courbe de Jordan dans $\Omega \setminus K$ d'indice 1, alors pour tout $h \in \mathscr{O}(\Omega)$, on peut définir T par

$$\langle T, h \rangle := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \mathscr{B}(\zeta) h(\zeta)\, d\zeta.$$

Calculons $\mathscr{F}(T)(z)$ pour cette fonctionnelle analytique T. On pose $h(\zeta) = e^{z\zeta}$ dans la définition de T et on remarque que l'on peut remplacer γ par le cercle de centre 0 et de rayon $\rho > R$ car h est une fonction entière. On trouve

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(T)(z) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \mathscr{B}(\zeta) e^{z\zeta}\, d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n! a_n}{\zeta^{n+1}} \right) e^{z\zeta}\, d\zeta \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} n! a_n \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{e^{\zeta z}}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta.
\end{aligned}$$

On peut sortir la somme de l'intégrale car la série converge uniformément sur γ. De plus, par la formule de représentation de Cauchy pour les dérivées 1.1.14, on remarque que

$$\begin{aligned}
\frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{e^{z\zeta}}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta &= \frac{\partial^n (e^{z\zeta})}{\partial z^n}(0) \\
&= z^n e^0 \\
&= z^n.
\end{aligned}$$

On en tire donc que

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(T)(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n! a_n \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{e^{\zeta z}}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \\
&= f(z).
\end{aligned}$$

Terminons cette preuve en montrant l'unicité de la fonctionnelle analytique. Supposons que $\mathscr{F}(T_1) = \mathscr{F}(T_2)$ pour $T_1, T_2 \in \mathscr{O}'(\Omega)$.

Soit $z \in \mathbb{C}$, on sait que la série

$$e^{\xi z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n \xi^n}{n!}$$

converge dans $\mathscr{O}'(\Omega)$, donc pour tout $T \in \mathscr{O}'(\Omega)$, on a

$$\mathscr{F}(T)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\langle T, \xi^n \rangle}{n!} z^n.$$

Ceci montre que $\mathscr{F}(T)$ détermine $\langle T, \xi^n \rangle$ pour tout $n \geq 0$.
Donc on a

$$\mathscr{F}(T_1) = \mathscr{F}(T_2) \Leftrightarrow \langle T_1, \xi^n \rangle = \langle T_2, \xi^n \rangle \qquad \forall n \geq 0.$$

La densité de $\mathscr{O}(\mathbb{C})$ dans $\mathscr{O}(\Omega)$ implique que $T_1 = T_2$. Ce qui conclut la preuve du théorème.
□

Définition 3.4.6. (1) La fonction $\mathscr{B}$ introduite au théorème précédent est appelée la *transformée de Borel de la fonction f* et la *transformée de Cauchy de la fonctionnelle analytique T*.

(2) La représentation de $f = \mathscr{F}(T)$ par la forme

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\, \mathrm{i}} \int_\gamma \mathscr{B}(t) e^{tz}\, dt$$

est appelée la *représentation de Polya de f* .

(3) La fonction $\mathscr{C}(T) = \pi \widehat{T}$ est appelée *$\mathscr{C}$-transformée de T*.

(4) Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. On note par

$$\mathrm{Exp}(\Omega)$$

l'espace vectoriel de toutes les fonctions entières f pour lesquelles il existe au moins un sous-ensemble convexe et compact K de Ω tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C_\varepsilon > 0$ telle que f satisfait l'inégalité

$$|f(z)| \leq C_\varepsilon e^{H_K(z) + \varepsilon |z|}.$$

On peut résumer le résultat du théorème précédent comme suit :

Pour un ensemble ouvert convexe Ω, la transformée de Fourier-Borel établit un isomorphisme linéaire

$$\begin{aligned} \mathscr{F} : \mathscr{O}'(\Omega) &\to \mathrm{Exp}(\Omega) \\ T &\mapsto \mathscr{F}(T). \end{aligned}$$

La transformée de Borel est un isomorphisme

$$\begin{aligned} \mathscr{B} : \mathrm{Exp}(\Omega) &\to \mathscr{O}_0(\mathbb{C} \setminus \Omega) \\ f &\mapsto \mathscr{B}(f). \end{aligned}$$

Finalement, la C-transformée est aussi un isomorphisme

$$\begin{aligned} \mathscr{C} : \mathscr{O}'(\Omega) &\to \mathscr{O}_0(\mathbb{C} \setminus \Omega) \\ T &\mapsto \mathscr{C}(T) = \pi \widehat{T}. \end{aligned}$$

On obtient donc le diagramme suivant qui commute

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Exp}(\Omega) \arrow[dd, "\mathscr{B}"] \\ \mathscr{O}'(\Omega) \arrow[ur, "\mathscr{F}"] \arrow[dr, "\mathscr{C}"'] & \\ & \mathscr{O}_0(\mathbb{C} \setminus \Omega) \end{tikzcd}$$

De plus, l'application $\mathscr{B}^{-1}$ est la représentation de Polya.

Annexe A

Rappels d'analyse fonctionnelle

A.1 Topologies sur les espaces à semi-normes

Présentons ici un certain nombre de résultats sur les espaces localement convexes. Nous nous référons essentiellement à [4].

Définition A.1.1. Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Une application $p : X \to [0, +\infty[$ est une *semi-norme* sur X si

(a) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ pour tous $x, y \in X$;

(b) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ pour tous $x \in X$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

Définition A.1.2. Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Soit P un ensemble de semi-normes sur X, on dit que P est *filtrant* si pour tous $p, q \in P$, il existe $r \in P$ et $C > 0$ tels que,

$$\max\{p, q\} \leq Cr.$$

La proposition qui suit nous permet de faire le lien entre les ensembles filtrants de semi-normes et la topologie qu'on associe à un espace vectoriel X.

Proposition A.1.3. *Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Soit P un ensemble filtrant de semi-normes sur X. Pour tout $x \in X$, notons ν_x l'ensemble des parties de X qui contiennent une semi-boule $b_p(x, r)$ avec $p \in P$ et $r > 0$. Il existe une unique topologie $\mathscr{T}_P$ sur X telle que, pour tout $x \in X$, ν_x forme le système de voisinages de x.*

La définition suivante nous permet de comparer deux ensembles de semi-normes entre eux.

Définition A.1.4. Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Soient P et Q deux ensembles de semi-normes sur X. On dit que P est *plus faible* que Q, ce que l'on note $P \preceq Q$, si pour tout $p \in P$, il existe $q \in Q$ et $C > 0$ tels que $p \leq Cq$.

Si on a $P \preceq Q$ et $Q \preceq P$, alors nous dirons que P et Q sont *équivalents*, ce que nous noterons $P \approx Q$.

Grâce à la proposition qui suit, nous pouvons comparer les topologies définies à partir de semi-normes.

Proposition A.1.5. *Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Si P et Q sont deux ensembles filtrants de semi-normes sur X, alors $P \preceq Q$ si et seulement si $\mathscr{T}_P \subseteq \mathscr{T}_Q$.*

Définition A.1.6. Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. $(X, \mathscr{T}_P)$ est un *espace localement convexe* si P est un ensemble filtrant de semi-normes sur X.

A.2 Espaces de Fréchet

Les différents résultats de cette section ainsi que leur démonstration se trouvent dans [4].

Avant de définir les espaces de Fréchet, il nous faut définir deux notions importantes.

Nous aurons besoin du caractère séparé d'un espace localement convexe. Donnons donc un critère de séparation :

Proposition A.2.1. *Un espace localement convexe $(X, \mathscr{T}_P)$ est séparé si et seulement si pour tout $x \in X\backslash\{0\}$, il existe $p \in P$ tel que $p(x) \neq 0$.*

Il nous faut également définir la notion d'espace complet.

Définition A.2.2. Un espace localement convexe séparé à semi-normes dénombrables $(X, \mathscr{T}_P)$ est *complet* si toute suite de Cauchy de X converge.

Définition A.2.3. Un *espace de Fréchet* est un espace localement convexe séparé à semi-normes dénombrables et complet.

Un *espace de Banach* est un espace normé complet.

Proposition A.2.4. *Tout sous-espace fermé d'un espace de Fréchet est un espace de Fréchet.*

A.3 Limites inductives

Cette section se base essentiellement sur [9].

Définition A.3.1. Soit $(A, \leq)$ un ensemble pré-ordonné. On dit que $(A, \leq)$ est un *ensemble pré-ordonné filtrant* si

$$\forall(\alpha, \beta) \in A^2, \exists\gamma \in A \text{ tel que } \alpha \leq \gamma \text{ et } \beta \leq \gamma.$$

Définition A.3.2. Un *système inductif (filtrant)* d'espaces localement convexes est la donnée

— d'un ensemble pré-ordonné (filtrant) A ;

— d'un espace localement convexe E_α pour chaque $\alpha \in A$;

— d'une application linéaire et continue

$$T_{\beta,\alpha} : E_\alpha \to E_\beta$$

pour chaque couple $(\alpha, \beta) \in A^2$ avec $\alpha \leq \beta$ de sorte que

  — $T_{\gamma\beta} \circ T_{\beta\alpha} = T_{\gamma\alpha} \qquad \forall \alpha \leq \beta \leq \gamma$;

  — $T_{\alpha\alpha} = id_{E_\alpha} \qquad \forall \alpha \in A$.

Définition A.3.3. Soit $(E_\alpha, T_{\beta\alpha})_{\alpha \in A}$ un système inductif d'espaces localement convexes. Une *limite inductive* de ce système est la donnée d'un espace localement convexe E et d'applications linéaires continues

$$T_\alpha : E_\alpha \to E$$

telles que

$$T_\beta \circ T_{\beta\alpha} = T_\alpha \qquad \forall \alpha \leq \beta \text{ dans } A$$

et de sorte que si $(S_\alpha : E_\alpha \to F)_{\alpha \in A}$ est une autre famille du même type, alors il existe une unique application $S : E \to F$ telle que

$$S \circ T_\alpha = S_\alpha \qquad \forall \alpha \in A.$$

$$\begin{tikzcd}
E_\alpha \arrow[rr, "T_{\gamma\alpha}"] \arrow[dr, "T_{\beta\alpha}"] \arrow[dddr, "S_\alpha"'] & & E_\gamma \arrow[dddl, "T_\gamma"] \\
& E_\beta \arrow[ur, "T_{\gamma\beta}"] \arrow[d, "T_\beta"] & \\
& E \arrow[d, "S"] & \\
& F &
\end{tikzcd}$$

Ainsi, si la limite inductive existe, elle est unique à un isomorphisme près et on note

$$E = \varinjlim_{\alpha \in A} E_\alpha.$$

A.3.1 Construction de la limite inductive canonique

Soit $(E_\alpha, T_{\beta,\alpha})_{\alpha\in A}$ un système inductif d'espaces localement convexes et soit

$$\bigoplus_{\alpha\in A} E_\alpha = \{(x_\alpha)_{\alpha\in A} : x_\alpha \in E_\alpha, \sharp\{\alpha \in A : x_\alpha \neq 0\} < +\infty\}$$

la somme directe des espaces localement convexes E_α.

Considérons l'application linéaire continue L caractérisée par

$$L \circ s_{\beta\alpha} = s_\beta \circ T_{\beta\alpha} - s_\alpha$$

pour tout $(\beta, \alpha) \in A^2, \beta \leq \alpha$ et avec $s_\alpha : E_\alpha \to \bigoplus_{\alpha\in A} E_\alpha$ et $s_{\beta\alpha} : E_\alpha \to \bigoplus_{(\alpha,\beta)\in A^2, \alpha\leq\beta} E_\alpha$ des applications continues.

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{(\alpha,\beta)\in A^2, \beta\geq\alpha} E_\alpha \arrow[rr, "L"] & & \bigoplus_{\alpha\in A} E_\alpha \\
E_\alpha \arrow[u, "s_{\beta\alpha}"] \arrow[urr, "s_\beta \circ T_{\beta\alpha} - s_\alpha"'] \arrow[rr, "T_{\beta\alpha}"] & & E_\beta \arrow[u, "s_\beta"']
\end{tikzcd}$$

Soit

$$E = \bigoplus_{\alpha\in A} E_\alpha / \operatorname{Im}(L)$$

et soit

$$T_\alpha = q \circ s_\alpha$$

où $q : \bigoplus_{\alpha\in A} E_\alpha \to E$ est l'application du passage au quotient.

Vérifions que $T_\beta \circ T_{\beta\alpha} = T_\alpha$ pour tout $(\alpha, \beta) \in A^2$ tel que $\alpha \leq \beta$.

On a

$$\begin{aligned}
T_\beta \circ T_{\beta\alpha} &= q \circ s_\beta \circ T_{\beta\alpha} \\
&= q \circ s_\beta \circ T_{\beta\alpha} - q \circ s_\alpha + q \circ s_\alpha \\
&= q \circ (s_\beta \circ T_{\beta\alpha} - s_\alpha) + q \circ s_\alpha \\
&= q \circ L \circ S_{\beta\alpha} + T_\alpha
\end{aligned}$$

Or, on a $q \circ L = 0$. On en tire donc que

$$T_\beta \circ T_{\beta\alpha} = T_\alpha$$

pour tout $(\alpha, \beta) \in A^2$ tel que $\alpha \leq \beta$.

Montrons à présent qu'il s'agit d'une solution universelle. Soit $(F, S_\alpha)_{\alpha \in A}$ une autre famille du même type. On a une application linéaire continue

$$\underline{S} : \bigoplus_{\alpha \in A} E_\alpha \to F$$

caractérisée par

$$\underline{S} \circ s_\alpha = S_\alpha.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \underline{S} \circ L \circ s_{\beta\alpha} &= \underline{S} \circ (s_\beta \circ T_{\beta\alpha} - s_\alpha) \\ &= \underline{S} \circ s_\beta \circ T_{\beta\alpha} - \underline{S} \circ s_\alpha \\ &= S_\beta \circ T_{\beta\alpha} - s_\alpha \\ &= 0 \end{aligned}$$

si $(\alpha, \beta) \in A^2$ tels que $\alpha \leq \beta$. Donc

$$\underline{S} \circ L = 0 \Rightarrow \underline{S} = 0 \;\; \text{sur} \quad \mathrm{Im}(L)$$

alors, il existe $S : E \to F$ unique telle que $S \circ q = \underline{S}$. On a alors,

$$\begin{aligned} S \circ T_\alpha &= S \circ q \circ s_\alpha \\ &= \underline{S} \circ s_\alpha \\ &= S_\alpha \quad \forall \alpha \in A \end{aligned}$$

En conclusion, $(E, T_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une limite inductive du système considéré.

On vient donc de montrer que si on a un système inductif, alors il possède une limite inductive.

Les éléments de la limite inductive sont assez difficiles à décrire. En effet, un élément est une classe d'équivalence d'éléments de la somme. Or, si on est dans le cas d'un système inductif filtrant, les objets de la limite inductive sont plus simples à décrire.

A.3.2 Cas filtrant

Proposition A.3.4. *Si $(E_\alpha, T_{\beta\alpha})_{\alpha \in A}$ est un système inductif filtrant et si $(E, T_\alpha)_{\alpha \in A}$ est sa limite inductive canonique alors*

- $E = \bigcup_{\alpha \in A} \mathrm{Im}(T_\alpha)$;
- *Pour $e_\alpha \in E_\alpha$, $e_\beta \in E_\beta$, on a*

$$T_\alpha(e_\alpha) = T_\beta(e_\beta) \textit{ si et seulement si } \exists \gamma \geq \alpha, \gamma \geq \beta, \textit{ avec } T_{\gamma\alpha}(e_\alpha) = T_{\gamma\beta}(e_\beta).$$

Démonstration. Soit
$$X = \{(\alpha, e_\alpha) : \alpha \in A, e_\alpha \in E_\alpha\} = \bigsqcup_{\alpha \in A} E_\alpha.$$
On définit la relation
$$\mathscr{R} = \{((\alpha, e_\alpha), (\beta, e_\beta)) : \exists \gamma \geq \alpha, \gamma \geq \beta : T_{\gamma\alpha}(e_\alpha) = T_{\gamma\beta}(e_\beta)\}.$$
Alors $\mathscr{R}$ est clairement réflexive et symétrique. Elle est aussi transitive car si
$$((\alpha, e_\alpha), (\beta, e_\beta)) \in \mathscr{R} \text{ et } ((\beta, e_\beta), (\gamma, e_\gamma)) \in \mathscr{R}$$
alors, il existe $\mu \geq \alpha, \mu \geq \beta$ avec
$$T_{\mu\alpha}(e_\alpha) = T_{\mu\beta}(e_\beta)$$
et il existe $\nu \geq \beta, \nu \geq \gamma$ avec
$$T_{\nu\beta}(e_\beta) = T_{\nu\gamma}(e_\gamma).$$
Comme A est filtrant, il existe $\delta \geq \nu, \delta \geq \mu$, on a alors
$$\begin{aligned} T_{\delta\alpha}(e_\alpha) &= T_{\delta\mu}(T_{\mu\alpha}(e_\alpha)) \\ &= T_{\delta\mu}(T_{\mu\beta}(e_\beta)) \\ &= T_{\delta\beta}(e_\beta) \\ \text{et} \quad T_{\delta\beta}(e_\beta) &= T_{\delta\nu}(T_{\nu\beta}(e_\beta)) \\ &= T_{\delta\nu}(T_{\nu\gamma}(e_\gamma)) \\ &= T_{\delta\gamma}(e_\gamma). \end{aligned}$$

On en tire que
$$T_{\delta\alpha}(e_\alpha) = T_{\delta\gamma}(e_\gamma) \Leftrightarrow ((\alpha, e_\alpha), (\gamma, e_\gamma)) \in \mathscr{R}.$$
On a donc une relation d'équivalence et on peut quotienter X par cette relation.

On pose
$$F = X \backslash \mathscr{R} \text{ et } S_\alpha = q_{\mathscr{R}} \circ j_\alpha$$
où j_α est l'inclusion de E_α dans $\bigsqcup_{\alpha \in A} E_\alpha$ et $q_{\mathscr{R}} : X \to X \backslash \mathscr{R}$.

On vérifie que $(F, S_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une limite inductive au sens ensembliste (c'est à dire sans se préoccuper de la continuité) du système considéré et la conclusion en découle. □

La notion de limite inductive est très intéressante quand on travaille avec des applications linéaires. En effet, on a la proposition suivante :

Proposition A.3.5. *Soit $X = \varinjlim_{\alpha \in A} X_\alpha$, et soit Y un espace localement convexe. L'application linéaire*
$$T : X \to Y$$
est continue si et seulement si
$$T_{|X_\alpha} : X_\alpha \to Y$$
est continue pour tout $\alpha \in A$.

A.4 Espace des fonctions continues à support compact

Rappelons la définition d'un espace topologique localement compact.

Définition A.4.1. Un espace topologique $(X, \mathscr{T})$ est *localement compact* si tout point de X possède un système fondamental de voisinages compacts.

Soit X un espace topologique localement compact.

Notons $C_0(X)$ l'ensemble des fonctions continues sur X. Soit K un compact inclus dans X. On définit les semi-normes $p_K(.)$ sur $C_0(X)$ par

$$p_K(f) = \sup_{x \in K} |f(x)| \quad \forall f \in C_0(X).$$

Comme f est continue, elle est bornée sur les compacts et donc

$$\sup_K |f| < +\infty.$$

Proposition A.4.2. *L'ensemble*

$$P = \{p_K(.) = \sup_K |.| : K \text{ compact de } X\}$$

est un ensemble filtrant de semi-normes sur $C_0(X)$.

Démonstration. Il suffit de procéder de la même manière que pour démontrer la Proposition 1.2.1. □

Par la Proposition A.1.5, on peut munir $C_0(X)$ de la topologie définie par l'ensemble P.

De plus, pour chaque ensemble compact K de X, on peut définir l'ensemble

$$C_K(X) = \{f \in C_0(X) : \text{supp}(f) \subseteq K\}.$$

Il est clair que $C_K(X)$ est un sous-espace de $C_0(X)$. Comme lorsque $f \in C_K(X)$, f est à support compact, il ne reste plus qu'une semi-norme sur l'ensemble P défini à la Proposition A.4.2. On en déduit que l'on peut munir $C_K(X)$ de la topologie équivalente à celle associée à la seule semi-norme

$$\sup_K |.|.$$

De plus, si K est un compact régulier, autrement dit $K = \overline{K^\circ}$, alors $C_K(X)$ est un espace de Banach.

Définissons à présent l'ensemble $C_c(X)$ comme étant l'ensemble des fonctions continues à support compact dans X. Autrement dit,

$$C_c(X) = \{f \in C_0(X) : \text{supp}(f) \text{ est compact dans } X\}.$$

Considérons l'ensemble

$$A = \{K : K \text{ compact de } X\}$$

muni du pré-ordre

$$K \leq L \;\Leftrightarrow\; K \subseteq L.$$

Cet ensemble est filtrant. En effet, on veut montrer que pour tous $K_1, K_2 \in A$, il existe $K_3 \in A$ tel que

$$\begin{aligned} & K_1 \leq K_3 \text{ et } K_2 \leq K_3 \\ \Leftrightarrow\; & K_1 \subseteq K_3 \text{ et } K_2 \subseteq K_3. \end{aligned}$$

Si on considère $K_3 = K_1 \cup K_2$, on a bien

$$K_1 \subseteq K_1 \cup K_2 \text{ et } K_2 \subseteq K_1 \cup K_2.$$

On peut conclure étant donné que l'union de deux ensembles compacts est un ensemble compact.

Posons

$$E_K = \{f \in C_0(X) : \operatorname{supp}(f) \subseteq K\} = C_K(X)$$

pour tout $K \in A$.

Considérons les applications linéaires continues

$$T_{LK} : E_K \to E_L : f \mapsto f$$

pour tous $K, L \in A$ tels que $K \leq L$.

On en tire donc que $(E_K, T_{LK})_{K \in A}$ est un système inductif filtrant. On va donc noter l'ensemble $C_c(X)$ comme la limite inductive du système inductif filtrant $(E_K, T_{LK})_{K \in A}$. Pour ce faire, il faut que nous vérifions les deux points de la Proposition A.3.4.

Soit K un compact de X. Considérons l'application

$$T_K : C_K(X) \to C_c(X).$$

Si $K \leq L$, c'est-à-dire, si $K \subseteq L$, on a

$$C_K(X) \xrightarrow{T_{LK}} C_L(X) \xrightarrow{T_L} C_c(X)$$

- On sait que pour tout $f \in C_c(X)$, il existe un compact K de X tel que $f \in C_K(X)$. En effet, si $f \in C_c(X)$, alors f est à support compact, donc si on considère $K = \operatorname{supp}(f)$, on a $f \in C_K(X)$.
- Soient K et L deux compacts de X et soient $f_K \in C_K(X)$ et $f_L \in C_L(X)$. Supposons que

  $$T_K(f_K) = T_L(f_L)$$

  et montrons que s'il existe M compact de X tel que $L \leq M$ et $K \leq M$, alors

  $$T_{MK}(f_K) = T_{ML}(f_L).$$

  Pour ce faire, on peut considérer $M = K \cup L$ et on obtient l'égalité voulue.

On en tire donc que $C_c(X)$ est la limite inductive des $C_K(X)$. On note

$$C_c(X) = \varinjlim_{K \in A} C_K(X).$$

Et on munit $C_c(X)$ de la topologie localement convexe de limite inductive des $C_K(X)$.

A.5 Dual topologique

Rappelons à présent quelques définitions et propriétés du dual topologique d'un espace localement convexe quelconque. Les résultats et les démonstrations de cette section se trouvent dans [4].

Définition A.5.1. Soit (X, P) un espace localement convexe. Le *dual topologique* X' de (X, P) est l'ensemble des applications $T : X \to \mathbb{C}$ qui sont linéaires et continues sur X.

Or, on sait qu'une application $T : X \to \mathbb{C}$ est continue s'il existe une semi-norme $p \in P$ et une constante $C > 0$ telles que

$$|T(x)| \leq Cp(x) \quad \forall x \in X. \tag{A.1}$$

On en tire que le dual de (X, P) est formé des applications qui satisfont la condition (A.1).

Rappelons à présent le Théorème de Hahn-Banach.

Théorème A.5.2 (Hahn-Banach)**.** *Soient X un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, p une semi-norme sur X et Y un sous-espace vectoriel de X. Supposons que $T : Y \to \mathbb{C}$ soit une forme linéaire telle que*

$$|T(x)| \leq p(x)$$

pour tout $x \in Y$, alors il existe une forme linéaire $\tilde{T} : X \to \mathbb{C}$ telle que $\tilde{T}_{|Y} = T$ et

$$|\tilde{T}(x)| \leq p(x)$$

pour tout $x \in X$.

Le résultat suivant est une conséquence du Théorème de Hahn-Banach pour les espaces localement convexes.

Proposition A.5.3. *Soient (X, P) un espace localement convexe et Y un sous-espace vectoriel de X muni de la topologie induite. Toute forme linéaire continue sur Y admet un prolongement linéaire continu sur X.*

En particulier, tout élément de Y' admet un prolongement en un élément de X'.

Démonstration. Si $T : Y \to \mathbb{C}$ est une forme linéaire et continue, alors par la condition (A.1), on sait qu'il existe $p \in P$ et $C > 0$ tels que

$$|T(y)| \leq Cp(y) \quad \forall y \in Y.$$

Posons $p' = Cp$, il est clair que p' est une semi-norme. En appliquant le Théorème de Hahn-Banach A.5.2 à p', il existe $\tilde{T} : X \to \mathbb{C}$ tel que

$$|\tilde{T}(x)| \leq p'(x) = Cp(x) \quad \forall x \in X.$$

On obtient ainsi le prolongement recherché. □

On peut représenter ce résultat grâce au diagramme suivant :

$$\begin{array}{c} Y \hookrightarrow X \\ Y' \twoheadleftarrow X' \end{array}$$

A.6 Transformation de Laplace

Les résultats de cette section proviennent de [10].

Définition A.6.1. Soit f une fonction définie presque partout sur $]0, +\infty[$. On dit que f admet une transformée de Laplace si $e^{-zt}f(t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ pour au moins un $z \in \mathbb{C}$. Dans ce cas, on appelle la *transformée de Laplace* de f la fonction

$$z \mapsto \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt$$

définie pour tous les $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels $e^{-zt}f(t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

La transformée de Laplace de f en z sera notée $\mathscr{L}(f)(z)$.

Remarquons que $t \mapsto e^{-zt}f(t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $t \mapsto |e^{-zt}f(t)|$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. Or, il est clair que

$$|e^{-zt}f(t)| = e^{-\operatorname{Re}(z)t}|f(t)|.$$

On en tire donc que le domaine de définition de la transformée de Laplace est égal à $\Gamma_f \times \mathbb{R}$ où

$$\Gamma_f = \{x \in \mathbb{R} : e^{-xt}|f(t)| \in \mathrm{L}_1(]0, +\infty[)\}.$$

De plus, Γ_f est un des intervalles suivant :

(a) $]-\infty, +\infty[$;

(b) $[c, +\infty[$;

(c) $]c, +\infty[$.

Définition A.6.2. Si f est une fonction définie presque partout sur $]-\infty, +\infty[$ admettant une transformée de Laplace, on définit *l'abscisse de convergence* c_f de la transformée de Laplace de f comme étant $-\infty$ ou c en fonction de la forme de Γ_f.

On appelle *ouvert de convergence* de la transformée de Laplace de f l'ouvert

$$\Omega_f =]c_f, +\infty[\times \mathbb{R} \,.$$

Proposition A.6.3. *Soit f est une fonction définie presque partout sur $]-\infty, +\infty[$ admettant une transformée de Laplace. Alors $\mathscr{L}(f)$ est holomorphe sur son ouvert de convergence.*

Annexe B

Rappels de topologie algébrique

Dans ce chapitre, nous allons faire un certains nombre de rappels sur la notion de chemin et de chaine singulière. Nous allons démontrer les résultats qui nous sont utiles dans ce travail. Ces rappels se trouvent exclusivement dans [3] et [12].

B.1 Homotopie

Soit X un espace topologique.

Définition B.1.1. Un *chemin de x vers y* dans X est une application continue

$$\gamma : [0,1] \to X$$

telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

Un *lacet de base x* dans X est un chemin de x vers x.

Définition B.1.2. Soient γ_0 et γ_1 deux chemins de x vers y. Une *homotopie de chemins à extrémités fixes* de γ_0 vers γ_1 dans X est une homotopie de γ_0 vers γ_1. Autrement dit, il s'agit d'une application

$$H : [0,1] \times [0,1] \to X$$

continue telle que

$$H(t,0) = \gamma_0(t) \quad \text{et} \quad H(t,1) = \gamma_1(t)$$

pour tout $t \in [0,1]$ qui, de plus, est telle que

$$H(0,s) = x \quad \text{et} \quad H(1,s) = y$$

pour tout $s \in [0,1]$.

B.2 Indice d'un chemin γ

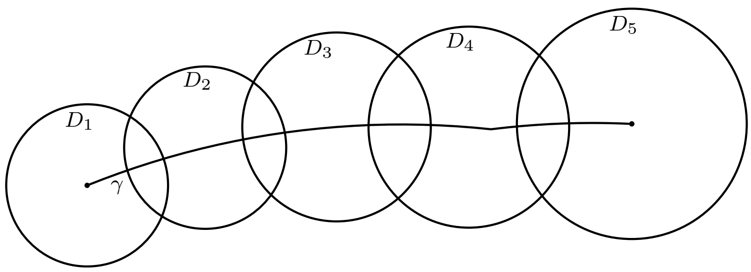
Rappelons brièvement comment est définie l'intégrale d'une fonction holomorphe le long d'un chemin continu.

Soit $\gamma : [0,1] \mapsto \mathbb{C}$ un chemin continu. Considérons un découpage de $[0,1]$ de la forme

$$0 = s_0 < s_1 < ... < s_{J-1} < s_J = 1$$

et des disques ouverts $D_1, ..., D_J$ tels que

$$\gamma([s_{j-1}, s_j]) \subseteq D_j \quad \forall j \in \{1, ..., J\}.$$



Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. Sur le disque D_j, on peut supposer qu'il existe une fonction $F_j \in \mathscr{O}(D_j)$ telle que

$$f = F_j'$$

pour tout $j \in \{1, ..., J\}$. En effet, soit $j \in \{1, ..., J\}$, comme D_j est un disque ouvert, on sait que sur D_j, f est de la forme

$$f = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m z^m.$$

Si l'on considère

$$F_j = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{a_m}{m+1} z^{m+1},$$

on a $F_j \in \mathscr{O}(D_j)$ et $F_j' = f$ sur D_j comme on peut dériver la série terme à terme. De plus, on sait que $D_j \cap D_{j+1}$ est connexe, donc les deux primitives F_j et F_{j+1} sont égales à une constante près. Ainsi, on définit l'intégrale sur γ de f par

$$\int_\gamma f = \sum_{j=1}^{J} (F_j(s_j) - F_j(s_{j-1})).$$

Cette définition a un sens indépendamment du choix de la primitive F_j car la différence entre deux primitives est une constante. De plus, on peut facilement vérifier que cette définition ne dépend pas du découpage choisi.

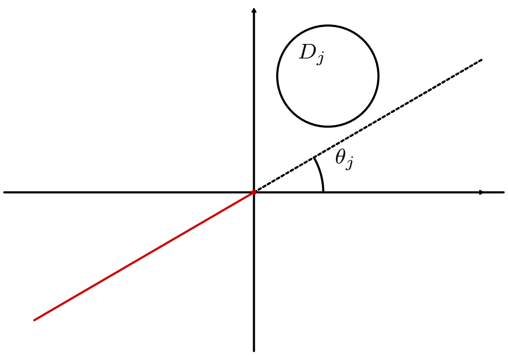
En particulier, lorsque l'on considère la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$, on sait que

$$\frac{1}{z} = \frac{\partial \ln_\theta(z)}{\partial z}$$

avec, pour rappel, $\ln_\theta(z) = \ln(ze^{-\mathrm{i}\,\theta}) + \mathrm{i}\,\theta$ si $\theta \in \mathbb{R}$.

Rappelons également que la fonction $z \mapsto \ln_\theta(z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus (]-\infty, 0]\, e^{\mathrm{i}\,\theta})$.

Si, pour tout $j \in \{1, ..., J\}$, on considère les disques D_j de sorte que $0 \notin D_j$ et $]-\infty, 0]\, e^{\mathrm{i}\,\theta_j} \subseteq \mathbb{C} \setminus D_j$ avec $\theta_j \in \mathbb{R}$. On est donc en présence de la situation suivante :



Alors on a

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz &= \sum_{j=1}^{J} (\ln_{\theta_j}(s_j) - \ln_{\theta_j}(s_{j-1}))\\ &:= \triangle_\gamma \ln(z).\end{aligned}$$

Lorsque l'on considère seulement des lacets dans $\mathbb{C}$, on peut introduire la notion d'indice d'un lacet par rapport à un point.

Définition B.2.1. Soit γ un lacet de $\mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma([0, 1])$. On appelle *indice de γ par rapport à a* le nombre

$$\mathrm{Ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2\,\mathrm{i}\,\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z - a}.$$

Ce nombre est toujours un entier. En effet, comme γ est un lacet, on a

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = \triangle_\gamma \arg(z).$$

On sait aussi que l'argument sur γ va varier seulement d'un multiple entier de 2π. En considérant

$$\frac{1}{2\,\mathrm{i}\,\pi} \int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = \frac{1}{2\pi} \triangle_\gamma \arg(z),$$

on obtient que l'indice de γ par rapport à 0 est bien un entier.

Intuitivement, l'indice d'un lacet par rapport à un point a compte, dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, le nombre de tours que ce lacet effectue autour du point a.

Exemple B.2.2. Si on considère le cercle de centre 0 et de rayon $\varepsilon > 0$, $C(0, \varepsilon)$, l'indice de $C(0, \varepsilon)$ par rapport à zéro est le nombre

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}_{C(0,\varepsilon)}(0) &= \frac{1}{2\,\mathrm{i}\,\pi} \int_{C(0,\varepsilon)} \frac{dz}{z} \\ &= \frac{1}{2\,\mathrm{i}\,\pi} \int_0^{2\pi} \frac{i\varepsilon e^{it}}{\varepsilon e^{it}}\, dt \\ &= 1.\end{aligned}$$

Intuitivement, il est facile de se convaincre que le cercle parcourt 1 tour dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

B.3 Chaines singulières

Soir X un espace topologique et $p \in \mathbb{N}$.

Rappelons que si $x_0, ..., x_p$ sont des points de $\mathbb{R}^n$, alors on note $[x_0, ..., x_p]$ l'enveloppe convexe de l'ensemble fini $\{x_0, ..., x_p\}$. On a donc

$$[x_0, ..., x_p] = \{\lambda_0 x_0 + ... + \lambda_p x_p : \lambda_0 \geq 0, ..., \lambda_p \geq 0, \lambda_0 + ... + \lambda_p = 1\}.$$

Définition B.3.1. Le *p-simplexe standard* est l'ensemble

$$\triangle_p = [e_0, e_1, ..., e_p]$$

où

$$e_0 = (0, ..., 0), e_1 = (1, 0, ..., 0), ..., e_p = (0, 0, ..., 1).$$

On en tire que

$$\triangle_p = \{(\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{R}^n : \lambda_0 \geq 0, ..., \lambda_p \geq 0, \lambda_0 + ... + \lambda_p \leq 1\}.$$

Regardons plus en détail les cas de $p = 0, p = 1$ et $p = 2$ car dans la suite, nous nous intéresserons uniquement au cas où $p \in \{0, 1, 2\}$.

- Si $p = 0$, on a $\triangle_0 = \{0\} \subseteq \mathbb{R}_0$.
- Si $p = 1$, on a $\triangle_1 = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$.
- Si $p = 2$, on a $\triangle_0 = [(0, 0), (1, 0), (0, 1)] \subseteq \mathbb{R}^2$.

Définition B.3.2. Un *p-simplexe affine de* $\mathbb{R}^n$ est une application du type

$$\sigma_{(x_0,...,x_p)} = \triangle_p \to \mathbb{R}^n$$

telle que

$$\sigma_{(x_0,...,x_p)}(\lambda_1, ..., \lambda_p) = x_0 + \lambda_1(x_1 - x_0) + ... + \lambda_p(x_p - x_0)$$

pour tout $(\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \triangle_p$.

Définition B.3.3. Un *p-simplexe singulier de X* est une application continue

$$\sigma : \triangle_p \to X.$$

On note $\sum_p(X)$ l'ensemble de ces p-simplexes singuliers.

Définition B.3.4. Une *p-chaine singulière de X* est un élément du groupe abélien libre

$$C_p(X) = \mathbb{Z}^{\sum_p(X)}$$

engendré par $\sum_p(X)$.

Si $c \in C_p(X)$, alors on a

$$c = \sum_{\sigma \in \sum_p(X)} c_\sigma \sigma$$

où $(c_\sigma)_{\sigma \in \sum_p(X)}$ est une famille de coefficients entiers telle que $c_\sigma \neq 0$ un nombre fini de fois.

Définition B.3.5. Pour $p \geq 1$, on définit *l'opérateur de bord d'une p-chaine singulière* par

$$\partial_p : C_p(X) \to C_{p-1}(X)$$

de sorte que

$$\partial_p(\sigma) = \sum_{j=1}^{p} (-1)^j \sigma \circ \sigma_{(e_0,\ldots,\widehat{e_j},\ldots,e_p)}$$

pour tout $\sigma \in \sum_p(X)$ et où $\sigma_{(e_0,\ldots,\widehat{e_j},\ldots,e_p)}$ est défini à la Définition B.3.2.

Si on se concentre sur les cas où $p = 1$ et $p = 2$, on a

— Si $\sigma \in \sum_1(X)$, on a

$$\partial_1(\sigma) = \sigma \circ \sigma_{(e_1)} - \sigma \circ \sigma_{(e_0)}.$$

Or, on sait que $e_0 = 0$ et $e_1 = 1$, donc on en tire que

$$\partial_1 = \sigma(1) - \sigma(0).$$

— Si $\sigma \in \sum_2(X)$, on a

$$\partial_2(\sigma) = \sigma \circ \sigma_{(e_1,e_2)} - \sigma \circ \sigma_{(e_0,e_2)} + \sigma \circ \sigma_{(e_0,e_1)}.$$

Proposition B.3.6. *Pour tout $p \geq 2$, on a*

$$\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0.$$

On peut étendre la définition de l'opérateur de bord ∂_p pour tout $p \in \mathbb{Z}$ en posant $\partial_p = 0$ si $p \leq 0$.

On a alors, $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

Il est donc naturel de considérer la suite

$$.... \to C_2(X) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0 \to ....$$

Définition B.3.7. Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, posons

$$Z_p(X) = \ker(\partial_p),$$

nous nommerons *p-cycles singuliers* les éléments de $Z_p(X)$ et posons

$$B_p(X) = \mathrm{Im}(\partial_{p+1}),$$

les éléments de $B_p(X)$ seront appelés les *p-bords singuliers*.

Si $p \geq 1$, on a

$$B_p(X) \subseteq Z_p(X)$$

car si $\sigma \in B_p(X)$ alors il existe $\sigma' \in C_{p+1}(X)$ tel que $\sigma = \partial_{p+1}(\sigma')$ et on a $\sigma \in C_p(X)$. D'où,

$$\partial_p \sigma = \partial_p(\partial_{p+1}(\sigma')) = 0.$$

au vu de la Proposition B.3.6. D'où la conclusion.

Définition B.3.8. Pour tout $p \geq 0$, posons

$$H_p(X) = Z_p(X)/B_p(X).$$

$H_p(X)$ est le p^e *groupe d'homologie singulière de* X.

Deux éléments de $Z_p(X)$ qui sont congrus modulo $B_p(X)$ sont dits homologues.

B.4 1-chaine singulière, 1-cycle singulier et 1-bord singulier

Concentrons-nous à présent sur le cas où $p = 1$ et où $X = \Omega$ avec Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

D'après la Définition B.1.1 et comme $\triangle_1 = [0, 1]$, on sait que l'ensemble des 1-simplexes singuliers de Ω est l'ensemble des chemins continus dans Ω

$$\gamma : [0, 1] \to \Omega.$$

De plus, par la Définition B.3.4, il est clair qu'une 1-chaine singulière de Ω est une combinaison linéaire de chemins continus de Ω.

On en tire que si $\gamma \in Z_1(\Omega)$, alors γ est en fait un lacet dans Ω.

Définition B.4.1. On appelle une *chaine spéciale* dans Ω une 1-chaine singulière

$$c = \sum_i n_i \gamma_i$$

où $n_i \in \mathbb{Z}$ et γ_i est soit un chemin horizontal, soit vertical de la forme

$$\gamma_i(t) = (ta + (1-t)b, c) \quad \text{ou} \quad \gamma_i(t) = (c, ta + (1-t)b).$$

avec $a, b, c \in \mathbb{C}$.

Proposition B.4.2. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Tout cycle $\sigma \in Z_1(\Omega)$ est homologue à un cycle spécial.*

Démonstration. Il est suffisant de montrer que tout chemin γ est homotope dans Ω à un chemin spécial (c'est-à-dire que γ est une composée de chemins verticaux et horizontaux).

Soient γ_1, γ_2 deux chemins dans Ω avec la même extrémité, i.e.

$$\gamma_1(0) = \gamma_2(0) \quad \text{et} \quad \gamma_1(1) = \gamma_2(1).$$

Si on suppose que

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} |\gamma_1(t) - \gamma_2(t)|$$

est suffisamment petite, alors γ_1 et γ_2 sont homotopes grâce à l'application

$$H(t, s) = s\gamma_1(t) + (1 - s)\gamma_2(t)$$

qui est une homotopie dans Ω à extrémités fixes.

Montrons à présent que si on considère γ un chemin quelconque, alors on peut l'approcher aussi près que l'on veut par un chemin spécial. Par ce qui précède, on saura que γ est homotope à un chemin spécial.
Soit $\varepsilon > 0$. Considérons un découpage de $[0, 1]$ de la forme

$$0 = s_0 < s_1 < ... < s_{J-1} < s_J = 1$$

de sorte que $d(s_j, s_{j+1}) < \varepsilon$ pour tout $j \in \{1, ..., J\}$. Ceci est possible comme nous savons que γ est continu.

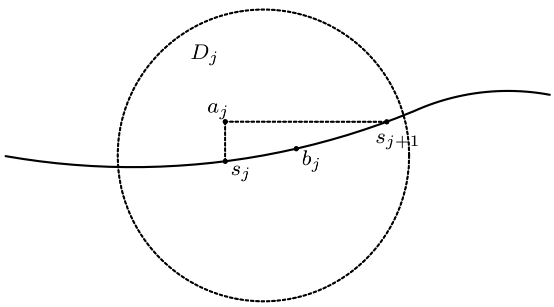
Soit $j \in \{1, ..., J\}$, il existe un disque ouvert D_j qui est tel que

$$\gamma([s_j, s_{j+1}]) \subseteq D_j.$$

Si on considère deux points a_j et b_j de $\mathbb{C}$ tels que

$$d(s_j, a_j) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad d(s_j, b_j) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad a_j = x_j + \mathrm{i}\, y_j \quad \text{et} \quad b_j \in \gamma([s_j, s_{j+1}]).$$

Nous sommes en présence de la situation suivante :



Il est clair que $a_j \in D_j$ et $b_j \in D_j$. On en tire que

$$\begin{aligned} d(a_j, b_j) &\leq d(a_j, s_j) + d(s_j, b_j) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Considérons γ_1 un chemin d'origine s_j et d'extrémité s_{j+1} composé des deux segments de la forme

$$\gamma_{1,1}(t) = (ts_j - (1-t)a_j, y_j) \quad \text{et} \quad \gamma_{1,2}(t) = (x_j, ta_j - (1-t)s_{j+1})$$

pour tout $t \in [0,1]$. Considérons également γ_2 un chemin d'origine s_j et d'extrémité s_{j+1} tel que

$$\gamma_2(t) = \gamma\left(\frac{s - s_j}{s_{j+1} - s_j}\right)$$

pour tout $s \in [s_j - s_{j+1}]$ lorsque $t = \dfrac{s - s_j}{s_{j+1} - s_j}$.

Alors, par ce qui précède, on en déduit que

$$|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in [0,1].$$

On en tire que γ_1 et γ_2 sont homotopes et γ_1 est un chemin spécial.

En procédant de même pour tout $j \in \{1, ..., J\}$, on obtient que γ est homotope à un chemin spécial.

□

Définition B.4.3. (1) Le *support* d'une i-chaine singulière ($i = 0, 1, 2$) $\sigma = \sum_i v_i \sigma_i$ est l'ensemble

$$\operatorname{supp}(\sigma) = \bigcup_i \operatorname{Im}(\sigma_i).$$

(2) Si Ω est un ouvert connexe, $\delta \in Z_1(\Omega)$ et $a \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{supp}(\delta)$, on appelle *indice de δ par rapport a* , le nombre

$$\operatorname{Ind}_\delta(a) := \sum_i n_i \operatorname{Ind}_{\gamma_i}(a)$$

si $\delta = \sum_i n_i \gamma_i$, avec $\gamma \in \sum_i(X)$ et $v_i \in \mathbb{Z}$.

Remarquons que

$$\delta \in B_1(\Omega) \Leftrightarrow \exists \delta' \in C_2(\Omega) \text{ tel que } \partial_2(\delta') = \delta.$$

et que

$$\delta \in Z_1(\Omega) \Leftrightarrow \partial_1(\delta) = 0.$$

On sait que tout 1-bord singulier est un 1-cycle. On a la proposition suivante qui donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un 1-cycle soit un 1-bord.

Proposition B.4.4. *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Un 1-cycle δ, $\delta \in Z_1(\Omega)$ est un 1-bord si et seulement si*

$$\mathrm{Ind}_\delta(a) = 0$$

pour tout $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.

Démonstration. Par la Proposition B.4.2, on peut supposer que δ est un 1-cycle spécial de la forme

$$\sum_k v_k \gamma_k$$

avec $n_k \in \mathbb{N}$ et γ_k un chemin horizontal ou vertical pour tout k.

Considérons deux suites finies croissantes de nombres réels $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ et $(b_l)_{l\in\mathbb{N}}$ où $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ contient toutes les projections des extrémités des chemins γ_k sur l'axe des x et $(b_l)_{l\in\mathbb{N}}$ celles sur l'axe de y. On peut supposer que tout chemin γ_k est soit de la forme

$$[a_j, a_{j+1}] \times (b_l) \quad \text{(segment horizontal)}$$

soit de la forme

$$(a_j) \times [b_l, b_{l+1}] \quad \text{(segment vertical).}$$

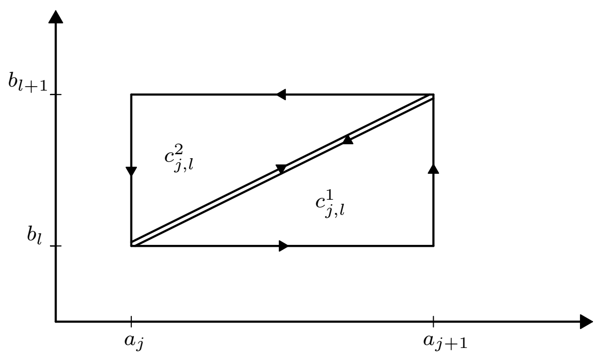
Notons $Q_{j,l}$ le rectangle

$$[a_j, a_{j+1}] \times [b_l, b_{l+1}]$$

qui sera le support de la 2-chaine

$$c_{j,l} = c^1_{j,l} + c^2_{j,l}$$

comme sur le dessin ci-dessous.



Soit $z_{j,l}$ un point intérieur à $Q_{j,l}$. Considérons la 1-chaine

$$\delta' := \sum_{j,l} \mathrm{Ind}_\delta(z_{j,l}) \partial_2(c_{j,l}).$$

On remarque que δ' est un 1-cycle sur $\mathbb{C}$ car on a

$$\partial_1(\delta') = \sum_{j,l} \mathrm{Ind}_\delta(z_{j,l}) \partial_1 \circ \partial_2(c_{j,l})$$

et par la proposition B.3.6, on sait que

$$\partial_1 \circ \partial_2 = 0.$$

On veut donc montrer que δ' est un 1-bord dans Ω.

Si $\mathrm{Ind}_\delta(z_{j,l}) \neq 0$, alors $Q_{j,l} \subseteq \Omega$. En effet, si ce n'est pas le cas, alors soit $z \in Q_{j,l} \backslash \Omega$. Par hypothèse, on sait donc que $\mathrm{Ind}_\delta(z) = 0$. Le segment $[z_{j,l}, z]$ n'intersecte pas $\mathrm{supp}(\delta)$ comme nous savons que $[z_{j,l}, z] \subseteq Q^\circ_{j,l}$ et que $z \notin \Omega$. Donc on sait que Ind_δ est constant sur ce segment et on a

$$\mathrm{Ind}_\delta(z_{j,l}) = 0 = \mathrm{Ind}_\delta(z)$$

ce qui est impossible.

Par conséquent, δ' est le bord de la 2-chaine $c \in C_2(\Omega)$ avec

$$c := \sum_{j,l} \mathrm{Ind}_\delta(z_{j,l}) c_{j,l}$$

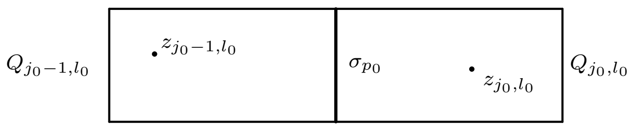
où la somme n'a lieu que sur les indices j, l pour lesquels $\mathrm{Ind}_\delta(z_{j,l}) \neq 0$.

Montrons à présent que $\delta = \delta'$. Supposons que l'on peut écrire

$$\delta - \delta' = \sum_p n_p \sigma_p$$

où $n_p \in \mathbb{N}$ et où les σ_p sont des segments soit verticaux, soit horizontaux.

Supposons qu'il existe p_0 tel que $n_{p_0} \neq 0$ et supposons que σ_{p_0} est un segment vertical sur le coté gauche de Q_{j_0,l_0}.



Définissons

$$\delta'' := \delta - \delta' + n_{p_0} \partial(c_{j_0,l_0}).$$

On sait que l'on a

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ind}_{\delta-\delta'}(z_{j,l}) = 0 \quad \forall j, l \\ \text{et} \quad &\mathrm{Ind}_{\partial(c_{j_0,l_0})}(z_{j_0,l_0}) = 1. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ind}_{\delta''}(z_{j_0,l_0}) = n_{p_0} \\ \text{et} \quad &\mathrm{Ind}_{\delta''}(z_{j_0-1,l_0}) = 0. \end{aligned}$$

Or, on sait aussi que $n_{p_0}\partial(c_{j_0,l_0})$ contient le terme $-n_{p_0}\sigma_{p_0}$, on en tire que $\mathrm{supp}_{\delta''}$ n'intersecte pas le segment $[z_{j_0-1,l_0}, z_{j_0,l_0}]$. Ceci implique que $n_{p_0} = 0$, ce qui est impossible. On en tire donc que $\delta = \delta'$ et que $\delta = \partial_2(c)$, d'où la conclusion. □

Proposition B.4.5. *Soit K un compact de $\mathbb{C}$ et V un voisinage ouvert de K. Il existe $C_V \in Z_1(V\backslash K)$ qui est un cycle spécial tel que*

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ind}_{C_V}(a) = 1 \quad si \quad a \in K \\ &\mathrm{Ind}_{C_V}(a) = 0 \quad si \quad a \in V\backslash K. \end{aligned}$$

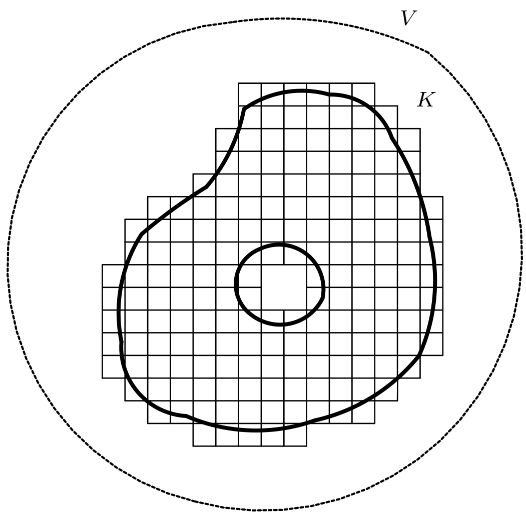
Démonstration. Soit $\rho = d(K, \mathbb{C}\backslash V) > 0$.

Considérons le pavage de $\mathbb{C}$ par des carrés fermés de centre

$$\frac{\rho}{2}(p + q\,\mathrm{i}),\ \ p, q \in \mathbb{Z}$$

et de côté $\dfrac{\rho}{2}$.

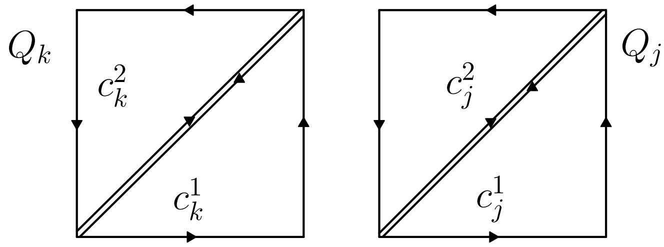
Soit $Q_0, Q_1, ..., Q_n$ ces carrés intersectant K. Soit $a \in Q_j^\circ$ pour un $j \in \{1, ..., n\}$. On est donc en présence de la situation suivante :



On considère Q_j comme le support de la 2-chaine

$$c_j = c_j^1 + c_j^2$$

où c_j^k avec $k = 1, 2$ sont les triangles de la figure ci-dessous.



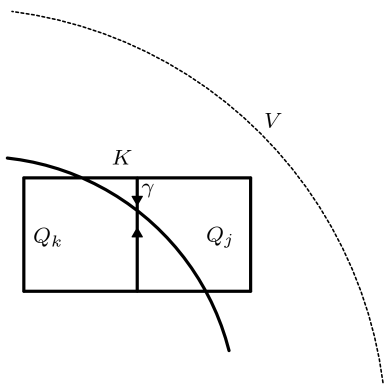
Soit

$$\delta := \sum_{j=0}^{n} \partial(c_j).$$

Comme c_j est une 2-chaine, $\partial(c_j)$ est une 1-chaine. De plus, il existe une 2-chaine δ' telle que $\delta = \partial(\delta')$. On en tire que, par la Définition B.3.7, $\delta \in B_1(V)$.

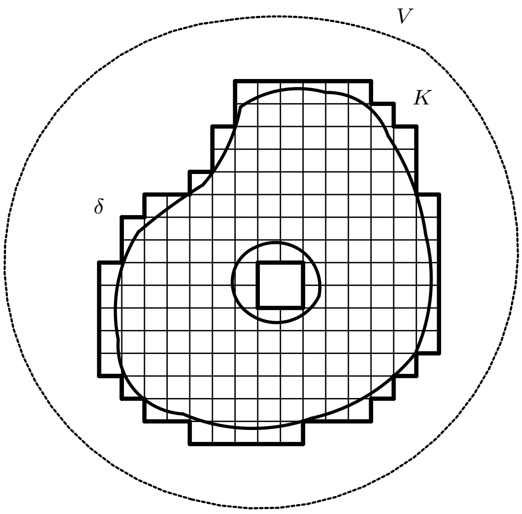
Montrons à présent que δ est un 1-cycle dans $V \backslash K$. Autrement dit, montrons que δ est une 1-chaine qui a son bord nul.

Si un des côtés γ de Q_j n'est pas entièrement dans $V \backslash K$, ça veut dire qu'il intersecte K. Donc, le carré du pavage adjacent à Q_j le long de γ intersecte K. Notons le Q_k, avec $0 \leq k \leq n$, $k \neq j$.



Il s'ensuit que le segment γ n'est pas dans supp(δ) comme il apparait deux fois dans δ. La première fois, il apparait dans $\partial(c_j)$ et la deuxième fois dans $\partial(c_k)$ mais avec un signe opposé.

La 1-chaine δ est donc un 1-cycle dans $V \backslash K$ comme son bord en tant que chaine de $V \backslash K$ a la même expression que le bord de δ considéré comme une 1-chaine de V.



De plus, on a

$$\mathrm{Ind}_\delta(a) = \sum_i \mathrm{Ind}_{\partial(c_i)}(a) = 1.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ind}_{\partial(c_0)}(a) = 1 \\ \text{et} \quad &\mathrm{Ind}_{\partial(c_j)}(a) = 0 \quad \forall 1 \le j \le n. \end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que la fonction

$$a \mapsto \mathrm{Ind}_\delta(a)$$

est continue sur $\mathbb{C} \setminus \mathrm{supp}(\delta)$ et de procéder par densité. $\square$

Bibliographie

[1] ALIPRANTIS, Charalambos D. *Infinite Dimensional Analysis A Hitchhiker's Guide.* 3rd ed. 2006. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2006. ISBN 1-280-61805-1.

[2] BERENSTEIN, Carlos A. *Complex analysis and special topics in harmonic analysis.* New York : Springer, 1995 - 1995. ISBN 9781461384472.

[3] BERENSTEIN, Carlos A. *Complex variables : an introduction.* New York : Springer-Verlag, 1991. (Graduate texts in mathematics ; 125). ISBN 0-387-97349-4.

[4] ESSER, Céline. *Analyse Fonctionnelle.* Notes d'un cours donné en master en sciences mathématiques à l'Université de Liège.

[5] HIRIART-URRUTY, Jean-Baptiste. *Fundamentals of convex analysis.* Berlin : Springer, 2001. (Grundlehren text editions). ISBN 3540422056.

[6] NICOLAY, Samuel. *Théorie de la mesure.* Notes d'un cours donné en 2ème année de bachelier en sciences mathématiques à l'Université de Liège.

[7] RUDIN, Walter. *Real and complex analysis.* 3rd ed. New York : McGraw-Hill, 1987. (McGraw-Hill series in higher mathematics). ISBN 0070542341.

[8] SCHNEIDERS, Jean-Pierre. *Analyse Complexe.* Notes d'un cours donné en 3ème année de bachelier en sciences mathématiques à l'Université de Liège.

[9] SCHNEIDERS, Jean-Pierre. *Analyse Fonctionnelle.* Notes d'un cours donné en master en sciences mathématiques à l'Université de Liège.

[10] SCHNEIDERS, Jean-Pierre. *Analyse III, 1re partie.* Notes d'un cours donné en bachelier en sciences mathématiques à l'Université de Liège. Année académique 2019-2020.

[11] SCHNEIDERS, Jean-Pierre. *Complément d'Analyse Complexe.* Notes d'un cours donné en master en sciences mathématiques à l'Université de Liège.

[12] SCHNEIDERS, Jean-Pierre. *Topologie Algébrique.* Notes d'un cours donné en master en sciences mathématiques à l'Université de Liège.

Index