https://lib.uliege.be https://matheo.uliege.be

Mémoire

Auteur : Lambert, Thelma
Promoteur(s) : Nicolay, Samuel
Faculté : Faculté des Sciences
Diplôme : Master en sciences mathématiques, à finalité approfondie
Année académique : 2023-2024
URI/URL : http://hdl.handle.net/2268.2/19859

Avertissement à l'attention des usagers :

Tous les documents placés en accès ouvert sur le site le site MatheO sont protégés par le droit d'auteur. Conformément aux principes énoncés par la "Budapest Open Access Initiative"(BOAI, 2002), l'utilisateur du site peut lire, télécharger, copier, transmettre, imprimer, chercher ou faire un lien vers le texte intégral de ces documents, les disséquer pour les indexer, s'en servir de données pour un logiciel, ou s'en servir à toute autre fin légale (ou prévue par la réglementation relative au droit d'auteur). Toute utilisation du document à des fins commerciales est strictement interdite.

Par ailleurs, l'utilisateur s'engage à respecter les droits moraux de l'auteur, principalement le droit à l'intégrité de l'oeuvre et le droit de paternité et ce dans toute utilisation que l'utilisateur entreprend. Ainsi, à titre d'exemple, lorsqu'il reproduira un document par extrait ou dans son intégralité, l'utilisateur citera de manière complète les sources telles que mentionnées ci-dessus. Toute utilisation non explicitement autorisée ci-avant (telle que par exemple, la modification du document ou son résumé) nécessite l'autorisation préalable et expresse des auteurs ou de leurs ayants droit.

Faculté des Sciences
Département de Mathématique

Sur quelques notions de généricité

Mémoire de fin d'études présenté en vue de l'obtention du titre de
Master en Sciences Mathématiques, à finalité approfondie

Année académique 2023 – 2024

Auteure :
Thelma Lambert

Promoteur :
Samuel Nicolay

Introduction

L'étude de comportements génériques occupe une place importante en mathématiques. Si l'on considère un espace vectoriel X et une propriété $\mathcal{P}$, on peut s'interroger sur la *taille* de l'ensemble des éléments de X qui satisfont la propriété $\mathcal{P}$. Par exemple, si l'on examine la dérivabilité des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, nous connaissons

- des fonctions qui sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, telles que l'exponentielle ou les fonctions polynomiales,
- des fonctions qui sont dérivables partout sauf en un point, comme c'est le cas de la fonction $x \mapsto |x|$,
- des fonctions qui ne sont nulle part dérivables, l'une des plus célèbres constructions étant attribuée à Weierstrass et datant de 1872 ([157]),

et il est naturel de se demander si les fonctions continues qui admettent un sous-ensemble prescrit de points de dérivabilité sont *fréquentes* ou non. Plus généralement, l'ensemble des éléments de X qui satisfont $\mathcal{P}$ est-il *grand* ou *petit* ? Est-il possible qu'il ne soit ni l'un ni l'autre ?

Ce type de questionnement émerge dès que l'on dispose d'une propriété qui n'est ni systématiquement vraie, ni systématiquement fausse. Dès lors, savoir si elle est *rare* ou au contraire *fréquente*, est le mieux que l'on puisse espérer. En analyse fonctionnelle, connaître les comportements atypiques permet d'affiner notre appréhension d'un espace. Dans d'autres cas plus spécifiques, un résultat de généricité peut permettre de valider une estimation. Ainsi, la loi des grands nombres justifie le principe des sondages puisqu'elle affirme que l'espérance d'une variable aléatoire peut être *presque sûrement* approchée par les moyennes empiriques d'une réalisation si la taille de l'échantillon est suffisamment grande. Un autre exemple classique d'estimation validée grâce à la généricité (dont nous reparlerons dans l'annexe B) se manifeste en analyse multifractale. Lorsque l'on dispose d'un signal, on cherche souvent à calculer son *spectre de Hölder* afin d'en déduire des informations sur la régularité du signal. Ce calcul est cependant difficile voire impossible en pratique, ce qui conduit au développement de méthodes heuristiques permettant de l'estimer. Une telle méthode est appelée un *formalisme multifractal*. Elle doit toujours fournir une borne supérieure pour le spectre de Hölder, mais pas nécessairement sa valeur exacte. Ce qui justifie que l'on puisse appliquer cette procédure à un signal réel issu par exemple d'un séquençage d'ADN, d'analyses financières ([5]) ou encore de séries temporelles de températures ([48]), est à nouveau un résultat de généricité : l'approximation donne le spectre exact pour un ensemble *grand* de signaux.

Si l'on connaît uniquement des exemples où l'hypothèse considérée est vraie et que l'on souhaite montrer qu'elle est systématiquement vraie, un résultat de généricité est une première étape encourageante. Ainsi, la conjecture de Collatz affirme que pour tout $N \in \mathbb{N}_0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = N$ et la récurrence

$$u_{n+1} = \begin{cases} \frac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair} \\ 3u_n + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

finit toujours par revenir à la boucle (1,4,2). Inventé en 1928, ce problème enfantin mobilisa longtemps les mathématicien·ne·s qui ne parvinrent pourtant pas à la moindre preuve. En 2019, Tao soumit pour publication un élément de réponse ([151]), à savoir que la conjecture est *presque vraie pour presque tous les nombres.* Bien que loin du résultat absolu, son apport fut considéré comme *"one of the most significant results on the Collatz conjecture in decades"* par le journal *Quanta magazine* ([77]).

Par ailleurs, il est arrivé qu'un résultat de généricité pousse à reconsidérer l'opinion de scientifiques. Ainsi, Poincaré affirmait en 1908 à propos des fonctions continues nulle part dérivables ([131]) : *"La logique parfois engendre des monstres. Depuis un demi-siècle, on a vu surgir une foule de fonctions bizarres qui semblaient s'efforcer de ressembler aussi peu que possible aux honnêtes fonctions qui servent à quelque chose. [...] Autrefois, quand on inventait une fonction nouvelle, c'était en vue de quelque but pratique ; aujourd'hui, on les invente tout exprès pour mettre en défaut les raisonnements de nos pères, et on n'en tirera jamais que cela."*. Lorsqu'il fut montré que l'irrégularité était en fait la *norme* ([20, 118]), force fut de constater que ces fonctions avaient une existence pratique. En turbulence pleinement développée, la présence de fluctuations dans la régularité ponctuelle de la vitesse fut pour un temps attribuée à une structure interne spécifique, hypothèse qui fut contestée lorsqu'il s'avéra que *presque toute* fonction satisfaisait au *formalisme de Frisch et Parisi* ([88, 127]).

Naturellement, l'opération de passage au complémentaire établit un pont entre les ensembles *grands* et *petits*, ce qui induit une différenciation entre les ensembles *grands* et les ensembles *non-petits*. De plus, on s'attend à ce qu'un ensemble *grand* soit dense, de sorte qu'il permette d'approcher n'importe quel élément de l'espace. Si cette condition paraît insuffisante car elle fait des rationnels un ensemble *grand* parmi les réels, elle reste néanmoins une propriété escomptée.

Topologiquement, la première notion de généricité ayant vu le jour est attribuée à Baire ([16, 17]), donnant lieu au nom de *catégories de Baire*. Dans ce contexte, il est dit qu'un ensemble est *grand* s'il contient une intersection dénombrable d'ouverts denses. Ainsi, on peut se figurer les ensembles *petits* comme des ensembles pouvant être approchés par des ensembles *très troués*. Il est alors possible de jouer sur la *taille des trous* pour affiner cette notion, ce qui mène à ce que l'on nomme aujourd'hui la *porosité* ([49, 51]).

Contrairement aux notions topologiques, la théorie de la mesure fournit un cadre favorable au développement d'une intuition sur la *taille* des ensembles. Dans un espace mesuré $(X, \mathscr{A}, \mu)$, il est sensé de définir les ensembles *petits* comme les ensembles négligeables relativement à μ. Cela est d'autant plus naturel lorsque l'on travaille avec la mesure de Lebesgue puisque la *taille* d'un corps coïncide alors avec son volume. Malheureusement, la mesure de Lebesgue est uniquement définie sur des espaces vectoriels de dimension finie, ce qui exclut son utilisation dans les espaces fonctionnels classiques et nécessite le développement d'une nouvelle théorie plus générale. Cette théorie, qui porte le nom de *prévalence*, est due indépendamment à Hunt, Sauer et Yorke ([85]) et à Christensen ([39]).

Ce mémoire est composé de trois chapitres ainsi que de deux annexes.

Le chapitre 1 a pour but d'introduire les trois notions de généricité précédemment citées, à savoir les catégories de Baire, la porosité et la prévalence, et d'en donner certaines propriétés. On vérifie notamment que les ensembles *petits* sont d'intérieur vide et qu'ils se comportent naturellement vis-à-vis de l'inclusion, des unions dénombrables et des translations, ce qui constitue les quatre propriétés communément imposées à des ensembles pour pouvoir les considérer comme *petits*. Les sections 1.1 et 1.2 se focalisent respectivement sur les catégories de Baire et la porosité. Dans la section 1.3 qui a trait à la prévalence, nous suivons majoritairement l'article de Hunt, Sauer et Yorke et concluons par une comparaison avec le point de vue de Christensen. Enfin, la section 1.4 présente quelques autres notions de généricité.

Le chapitre 2 se consacre ensuite aux potentiels liens qui unissent ces trois notions de généricité. Plus précisément, la section 2.1 témoigne qu'aucune relation ne peut être établie en toute généralité entre la prévalence et les catégories de Baire car un ensemble peut aussi bien être *petit* en chacun des deux sens que *grand* selon un et *petit* selon l'autre. La section 2.2 montre quant à elle que la porosité est toujours strictement plus forte que les catégories de Baire, mais également strictement plus forte que la prévalence dans un espace de dimension finie. Ce dernier résultat dépendant de la dimension, la section 2.3 s'intéresse à une notion simultanément plus restrictive que la porosité et la prévalence dans tout espace de Banach.

Le chapitre 3 explore des exemples de propriétés génériques dans des espaces de dimension infinie. Il répond notamment à la question posée en début d'introduction : à chacun des trois sens considérés, *presque toute* fonction continue est nulle part dérivable.

Enfin, les annexes A et B ont pour but respectif de démontrer deux résultats auxiliaires généraux utiles à divers endroits du mémoire, et de présenter les espaces S^ν dont nous discutons dans la section 3.8.

Ce travail est donc une restructuration d'une multitude de résultats établis dans le domaine de la généricité. Le but est triple : fournir aux lecteur·trice·s une bibliographie riche, présenter divers résultats dans un ordre facilitant la lecture et en détailler les démonstrations. Quelques corrections sont en outre apportées à certaines preuves.

Remerciements

Je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont aidée, soutenue, conseillée ou qui m'ont enseigné durant ces cinq années d'étude et qui ont ainsi contribué à mon épanouissement et à l'aboutissement de ce mémoire.

Mes remerciements vont évidemment d'abord à mon promoteur Monsieur Samuel Nicolay qui m'a proposé ce sujet passionnant et m'a guidée tout au long de l'écriture de ce mémoire par ses conseils. Je le remercie pour son investissement et sa disponibilité. Je le remercie également de m'avoir donné dès la première année de bachelier le goût de l'analyse et de l'avoir entretenu par chacun des cours qui a suivi.

Merci également à Thomas Lamby grâce à qui j'ai découvert la prévalence en troisième année de bachelier au travers d'un projet, ce qui m'a probablement menée vers ce sujet de mémoire.

Merci à mes parents de m'avoir permis de faire ces études, tout particulièrement à ma maman qui est toujours d'un grand soutien. Merci à ma sœur Laura, mon interlocutrice mathématique attitrée, pour toutes les discussions stimulantes que nous avons eues et d'être une grande sœur géniale.

Merci finalement à tous·tes mes ami·e·s, qui tantôt m'encouragent, tantôt me font rire aux éclats, et qui rendent ainsi chaque année formidable.

Notations et remarques

Nous fournissons ci-dessous une liste de notations qui pourraient être sources d'ambiguïté et formulons par la même occasion quelques remarques les concernant.

- L'ensemble des naturels $0, 1, 2, \ldots$ est noté $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}_0$ lorsqu'il est privé de 0. Le même principe est appliqué à $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. De plus, on note $\overline{\mathbb{R}}$ la droite réelle complétée, i.e. $[-\infty, +\infty]$.
- Si A est un ensemble, son intérieur est noté A° et son adhérence $\overline{A}$.
- Si f est une fonction à valeurs dans $[0, +\infty[$ (resp. dans $]-\infty, 0]$) et si $f(x) = 0$ pour un x dans le domaine de f, nous utilisons la convention $\frac{1}{f(x)} = +\infty$ (resp. $-\infty$). De plus, on considère $\frac{1}{+\infty} = 0 = \frac{1}{-\infty}$.
- Les symboles $\#$, diam et ker désignent respectivement le cardinal d'un ensemble, le diamètre d'un ensemble et le noyau d'une application.
- Concernant les logarithmes, log désigne le logarithme en base 10, $\log_b$ le logarithme en base b et ln le logarithme népérien (en base e).
- Lorsque nous considérons un groupe G, nous notons son opération et son neutre respectivement via les symboles $+$ et 0 s'il est abélien ou $\cdot$ et 1 dans le cas contraire.
- La boule ouverte de centre x et de rayon r est notée $b(x, r)$. Si l'espace sous-jacent ne peut être déduit du contexte ou si plusieurs distances sont envisageables, on clarifie grâce à un indice. Si l'espace est nécessairement $\mathbb{R}^n$ pour un $n \in \mathbb{N}_0$, on précise seulement la dimension de l'espace. Lorsque l'espace est le plan complexe $\mathbb{C}$, on privilégie la notation $D(x, r)$ pour désigner la boule (dans ce cas appelée *disque*) ouverte de centre x et de rayon r. La frontière de cet ensemble est alors notée $C(x, r)$.
- Si $x_1, \ldots, x_n$ sont n points d'un espace vectoriel X, on note $\rangle x_1, \ldots, x_n \langle$ le sous-espace vectoriel de X engendré par $x_1, \ldots, x_n$ et $[x_1, \ldots, x_n]$ l'enveloppe convexe de $x_1, \ldots, x_n$ dans X. En particulier, le segment joignant deux points x et y de X, c'est-à-dire $\{tx + (1-t)y : t \in [0, 1]\}$, est noté $[x, y]$.
- L'ensemble des boréliens d'un espace topologique X est noté $\mathcal{B}(X)$. Si $X = \mathbb{R}^n$, on note $\mathbb{B}^n$ au lieu de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.
- La mesure de Lebesgue est notée $\mathcal{L}$. S'il est nécessaire de préciser la dimension de l'espace, elle est indiquée en exposant.
- L'ensemble des fonctions continues entre deux espaces topologiques X et Y est noté $C(X, Y)$. Si $Y = \mathbb{R}$, sa mention est omise.
- Selon le contexte, $\|\cdot\|_\infty$ peut désigner la norme uniforme sur $C([0, 1])$ ou sur ℓ^∞. Autrement dit, on a

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \quad \text{et} \quad \|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$

pour $f \in C([0, 1])$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$. La norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ est notée $\|\cdot\|_n$.

- Si X est un espace vectoriel, on note X' le dual algébrique de X et si X est muni d'une structure additionnelle d'espace vectoriel topologique, on note X^* son dual topologique. De plus, si X est un espace de Banach, on munit classiquement X^* de la norme opérateur notée $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$. On étend ensuite cette notation à n'importe quel opérateur linéaire et continu $T : (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$ entre deux espaces de Banach : la norme opérateur de T est définie de manière équivalente par les deux expressions

$$\|T\|_{\mathrm{op}} = \inf\{C > 0 : \|T(x)\|_Y \leq C \|x\|_X \ \forall x \in X\} \text{ et } \|T\|_{\mathrm{op}} = \sup_{x \in X, \|x\|_X = 1} \|T(x)\|_Y .$$

- Lorsque nous considérons une base d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R})$, nous privilégions à plusieurs reprises la normalisation L^∞ plutôt que la normalisation L^2 standard. Dans ce cas, si ψ est l'ondelette-mère de notre base, nous posons $\psi_{j,k} = \psi(2^j \cdot -k)$ pour tous $j, k \in \mathbb{Z}$. Pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$, la suite des coefficients d'ondelettes de f est alors notée (à moins d'une indication contraire) $(c_{j,k})_{j,k \in \mathbb{Z}}$ et est définie par

$$c_{j,k} = 2^j \int_{\mathbb{R}} f(x) \psi_{j,k}(x) \, dx$$

pour tous $j, k \in \mathbb{Z}$, ce qui permet de décomposer f sous la forme

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \psi_{j,k}.$$

Table des matières

1 Notions de généricité **11**
1.1 Catégories de Baire 12
1.2 Porosité 18
1.3 Prévalence 30
1.3.1 Première approche 31
1.3.2 Prévalence 35
1.3.3 Version de Christensen 55
1.4 Autres notions de généricité 60

2 Comparaison **65**
2.1 Baire et prévalence 65
2.2 Porosité et les deux autres notions 77
2.3 Les ensembles HP-petits 91

3 Applications **99**
3.1 Théorème de Fubini 100
3.2 Quelques résultats de prévalence 110
3.3 Fonctions continues nulle part dérivables 115
3.4 Fonctions de type monotone 136
3.5 Propriété de Bruckner-Garg 144
3.6 Domaine de dérivabilité 149
3.7 Fonctions analytiques et Gevrey-dérivables 155
3.8 Espaces S^ν 163

A Topologie et théorie de la mesure **175**

B Espaces S^ν **179**

Chapitre 1

Présentation de quelques notions de généricité

L'étude des comportements génériques requiert de formaliser la notion d'ensemble *petit*, ce qui nous occupera dans le premier chapitre de ce mémoire. Pour qu'une classe d'ensembles *petits* s'accorde avec notre intuition, il est communément attendu que ses éléments respectent les propriétés suivantes :

($\mathcal{P}_1$) un ensemble *petit* est d'intérieur vide,

($\mathcal{P}_2$) tout sous-ensemble d'un ensemble *petit* est *petit*,

($\mathcal{P}_3$) toute union dénombrable d'ensembles *petits* est *petite*,

($\mathcal{P}_4$) tout translaté d'un ensemble *petit* est *petit*.

Notons qu'une collection d'ensembles qui vérifient les conditions ($\mathcal{P}_2$) et ($\mathcal{P}_3$) est appelée un *σ-idéal*.

Dans les espaces vectoriels de dimension finie, la mesure de Lebesgue permet de quantifier le volume des corps et donc naturellement de définir les ensembles *petits* comme les ensembles de mesure nulle (i.e. Lebesgue-négligeables). La classe ainsi créée vérifie bien les quatre conditions précédemment mentionnées. En effet,

($\mathcal{P}_1$) un ensemble négligeable est d'intérieur vide,

($\mathcal{P}_2$) tout sous-ensemble d'un ensemble négligeable est négligeable,

($\mathcal{P}_3$) toute union dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable,

($\mathcal{P}_4$) tout translaté d'un ensemble négligeable est négligeable,

ce qui est clair vu les propriétés usuelles des mesures, l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue et le fait que toute boule est de mesure de Lebesgue strictement positive. Il est alors classiquement dit qu'une propriété est vérifiée *presque partout* si l'ensemble des points où elle n'est pas vérifiée est négligeable.

Nous aimerions disposer d'une notion d'ensemble *petit* valable sur des espaces vectoriels de dimension quelconque. [1] De plus, il est souhaitable que ces ensembles *petits* vérifient

1. Précisons que la dimension considérée est la dimension en tant qu'espace vectoriel, c'est-à-dire le nombre d'éléments d'une base de cet espace.

les propriétés ($\mathcal{P}_1$) à ($\mathcal{P}_4$). Nous pourrions également espérer que la classe définie étende celle des ensembles qui annulent la mesure de Lebesgue, c'est-à-dire que ces deux collections coïncident dans le cas où l'espace est de dimension finie. Nous discuterons dans la section 1.3.1 de la raison pour laquelle l'idée intuitive d'utiliser la famille des ensembles négligeables pour une mesure fixée a été abandonnée en dimension infinie. Plusieurs autres approches peuvent néanmoins être envisagées. Les deux premières, à savoir les *catégories de Baire* et la *porosité* présentées respectivement aux sections 1.1 et 1.2, découlent de considérations purement topologiques et permettent de déterminer un *comportement dominant* sans pour autant *quantifier la taille* des ensembles. De ce fait, ces deux notions perdent malheureusement la correspondance avec les ensembles négligeables dans $\mathbb{R}^n$. Au contraire, la *prévalence*, qui sera exposée dans la section 1.3, a été développée dans un contexte de théorie de la mesure, ce qui la lie à la théorie des probabilités et donne donc l'idée qu'un élément tiré aléatoirement appartient presque sûrement à un ensemble *grand*. De plus, la prévalence étend bien la notion d'ensemble Lebesgue-négligeable. Évidemment, bien d'autres approches existent et la section 1.4 a pour but d'en citer quelques-unes.

En plus des propriétés attendues, nous vérifierons que chaque notion est invariante par dilatation et rend *petits* les ensembles dénombrables ainsi que les compacts en dimension infinie. Cette dernière propriété est raisonnable au vu du théorème de Riesz qui affirme qu'un espace localement convexe séparé est de dimension finie si et seulement s'il possède une boule précompacte, [2] et implique donc en particulier que les compacts d'un espace de Banach de dimension infinie sont d'intérieur vide, i.e. vérifient la propriété ($\mathcal{P}_1$).

Dans la suite, puisque l'on souhaitera translater nos ensembles, on se placera toujours au minimum dans le cadre d'un groupe topologique non-trivial [3] G et on supposera même ce groupe complètement métrisable et abélien. Dans la section 1.3.3 (et uniquement dans cette section), qui présentera la version de la prévalence comme elle a été introduite par Christensen, la séparabilité sera en outre imposée à G. Cette section mise à part, dans le but de disposer d'une multiplication scalaire permettant de considérer des dilatations, nous supposerons que notre espace ambiant G est un espace vectoriel topologique réel ou complexe (toujours complètement métrisable mais non-nécessairement séparable donc). Dans les deux cas, le théorème de Birkhoff – Kakutani affirme que G admet une distance invariante à gauche (donc aussi à droite) compatible avec la topologie de G et qui le rend complet (sections 6 et 7 de [26], section 1.22 de [121], [101]). [4]

1.1 Catégories de Baire

La notion d'ensemble de *première ou deuxième catégorie* a été introduite par Baire en 1899 ([17]). En effet, il s'intéressa à cette époque à la convergence non-uniforme de séries et démontra l'une des plus célèbres applications du théorème de Baire, aujourd'hui nommée

2. Ce théorème est classique et sa démonstration peut être trouvée dans tout cours ou ouvrage de référence sur l'analyse fonctionnelle.

3. Par groupe *non-trivial*, on entend un groupe non-vide et non-réduit à son neutre. Cette hypothèse sera systématiquement imposée aux groupes et espaces vectoriels que l'on considèrera dans la suite.

4. Notons que la distance associée naturellement à un espace localement convexe à semi-normes dénombrables est invariante par translation.

théorème de la limite simple de Baire, dans le cas de fonctions réelles à une variable réelle. [5]

Théorème 1.1.1. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de $C(\mathbb{R})$. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la limite ponctuelle de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors l'ensemble $D(f)$ des points de discontinuité de f est un sous-ensemble maigre de $\mathbb{R}$. En particulier, f est continu sur une partie dense de $\mathbb{R}$.*

Pour ce faire, il exploita un résultat de théorie des ensembles qui admet le théorème de Baire réel comme corollaire direct. Peu de temps après, il généralisa son précédent travail et prouva d'une part que $\mathbb{R}^n$ est un espace de Baire, d'autre part que le théorème 1.1.1 est également vrai pour des fonctions à n variables réelles. Ces résultats furent exposés au Collège de France puis publiés en 1905 dans ses *Leçons sur les fonctions discontinues* ([16]). En 1914, dans le cadre de ses *Grandes lignes sur la théorie des ensembles*, Hausdorff universalisa les notions introduites par Baire et montra que tout espace métrique complet est de Baire ([78]).

L'étude des propriétés vérifiées sur un ensemble *grand* au sens des catégories de Baire remonte quant à elle au début des années 1930 et aux travaux de Mazurkiewicz ([118]), Banach ([20]), Saks ([140]) et Jarnik ([92]). Tous quatre s'intéressèrent au problème aujourd'hui classique de la dérivabilité des fonctions continues. Nous reviendrons à cette question dans la section 3.3.

Passons aux définitions et premières propriétés liées aux catégories de Baire. Pour cela, on fixe X un espace vectoriel topologique (réel ou complexe) complètement métrisable par une distance d invariante par translation (ce qui nous est permis au vu des commentaires de l'introduction). Il existe dans la littérature mathématique plusieurs définitions équivalentes des ensembles *maigres*. Une première possibilité est de les définir comme les *unions dénombrables d'ensembles nulle part denses* (voir par exemple [126]). C'est la généralisation la plus proche de la définition historiquement donnée par Baire.

Définition 1.1.2. Soit Y un sous-ensemble de X. Un sous-ensemble A de X est

- *dense dans* Y si A rencontre tout ouvert de Y,
- *dense* s'il est dense dans X,
- *nulle part dense* s'il n'est dense dans aucun ouvert de X, c'est-à-dire si tout ouvert de X contient un ouvert non-vide qui ne rencontre pas A ou, autrement dit, qui est contenu dans le complémentaire de A.

Un ensemble nulle part dense peut être caractérisé par les propriétés suivantes.

Proposition 1.1.3. *Soit A un sous-ensemble de X. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) A est nulle part dense,

(2) $\overline{A}$ n'a pas de point intérieur,

(3) le complémentaire de A contient un ouvert dense.

5. Le cas général de ce théorème sera énoncé et démontré plus tard (théorème 2.1.8).

Démonstration. Montrons pour commencer l'implication (1) $\Rightarrow$ (2). Par définition, A n'est dense dans aucun ouvert de X, ce qui signifie que pour tout ouvert U de X, $\overline{A} \not\supseteq U$.[6] Ainsi, $\overline{A}$ ne contient aucun ouvert et n'admet donc aucun point intérieur.

Établissons ensuite (2) $\Rightarrow$ (3). L'ensemble $X \setminus \overline{A}$ est un ouvert inclus dans le complémentaire de A. De plus, il est dense puisque

$$\overline{X \setminus \overline{A}} = X \setminus \overline{A}^{\circ} = X \setminus \emptyset = X.$$

Montrons pour conclure (3) $\Rightarrow$ (1). Soit D un ouvert dense inclus dans le complémentaire de A et soit U un ouvert quelconque de X. Par densité de D, on a $D \cap U \neq \emptyset$. Cette intersection étant ouverte, on peut même trouver un ouvert non-vide V inclus dedans. Cet ouvert vérifie alors $V \subseteq U$ et $V \cap A = \emptyset$, ce qui montre bien que A n'est pas dense dans U et finalement, U étant quelconque, que A est nulle part dense. □

La classe des ensembles nulle part denses est fermée sous certaines opérations.

Proposition 1.1.4. *Dans X,*

(1) tout sous-ensemble d'un ensemble nulle part dense est nulle part dense,

(2) toute union finie d'ensembles nulle part denses est nulle part dense,

(3) l'adhérence d'un ensemble nulle part dense est nulle part dense.

Démonstration. Le premier résultat est évident. Pour montrer le deuxième, considérons A_1 et A_2 deux ensembles nulle part denses. Par définition, pour tout ouvert U, il existe deux ouverts non-vides U_1 et U_2 vérifiant $U_1 \subseteq U \setminus A_1$ et $U_2 \subseteq U_1 \setminus A_2$. Ainsi, $U_2 \subseteq U \setminus (A_1 \cup A_2)$, ce qui montre que $A_1 \cup A_2$ est également nulle part dense. Enfin, vu la caractérisation obtenue en 1.1.3 et le fait que l'on a $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ quel que soit l'ensemble A, il est clair que le troisième et dernier point est satisfait. □

Par contre, une union dénombrable d'ensembles nulle part denses n'est pas nécessairement nulle part dense. Une telle union peut même être dense comme l'illustre l'ensemble des rationnels. En effet, $\mathbb{Q}$ est simultanément dense dans $\mathbb{R}$ et une union dénombrable de singletons qui sont évidemment nulle part denses dans $\mathbb{R}$. On introduit donc la définition suivante.

Définition 1.1.5. Un sous-ensemble de X est *maigre* (ou *de première catégorie*) s'il peut s'écrire comme une union dénombrable d'ensembles nulle part denses.

Dans une majorité de références, on trouve plutôt la définition suivante.

Définition 1.1.6. Un sous-ensemble de X est *maigre* s'il est inclus dans une union dénombrable de fermés d'intérieur vide.

6. Les résultats de topologie générale qui peuvent être trouvés dans [62] sont supposés connus. Le livre [34] peut être consulté pour plus de détails à ce sujet.

Les deux définitions sont cependant bien équivalentes.

Proposition 1.1.7. *Les définitions 1.1.5 et 1.1.6 sont équivalentes.*

Démonstration. Soit A un sous-ensemble maigre de X au sens de la définition 1.1.5. Alors il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles nulle part denses telle que $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on sait que A_n est inclus dans son adhérence et que $\overline{A_n}$ est d'intérieur vide. Cela montre que A est maigre au sens de la définition 1.1.6.

Soit à présent A un sous-ensemble maigre de X au sens de la définition 1.1.6. Alors il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fermés d'intérieur vide telle que $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Dans ce cas, $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A \cap A_n)$ et il suffit pour conclure de montrer que $A \cap A_n$ est nulle part dense pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or

$$\overline{A \cap A_n} \subseteq \overline{A_n} = A_n$$

et A_n n'admet pas de point intérieur, ce qui suffit. □

Les noms donnés aux ensembles *grands* et aux ensembles *non-petits* au sens de Baire ne sont pas standardisés. Nous utiliserons dans la suite la terminologie suivante.

Définition 1.1.8. Le complémentaire d'un sous-ensemble maigre de X est dit *résiduel* et un sous-ensemble de X qui n'est pas maigre est dit *de deuxième catégorie*. De manière équivalente, un ensemble résiduel est un ensemble qui contient une intersection dénombrable d'ouverts denses.

Les notions d'ensemble résiduel et de deuxième catégorie sont bien distinctes. Par exemple, si l'espace X est de deuxième catégorie, alors aucun sous-ensemble de X ne peut être à la fois maigre et résiduel sinon X pourrait s'écrire comme une union de deux ensembles maigres. Cela implique que tout ensemble résiduel est de deuxième catégorie mais la réciproque n'est pas nécessairement vraie. À l'inverse, si l'espace X est maigre, alors tout sous-ensemble de X est à la fois maigre et résiduel mais il n'existe aucun sous-ensemble de deuxième catégorie. Cela arrive notamment si X est séparé et σ-compact mais localement compact en aucun de ses points, comme c'est le cas de $\mathbb{Q}$ muni de la topologie induite par la topologie euclidienne de $\mathbb{R}$. En effet, on sait alors qu'il existe une suite de compacts $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ et $K_n^\circ = \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a de cette manière écrit X comme une union dénombrable de fermés d'intérieur vide, ce qui montre bien que X est maigre dans lui-même.

Le but des ensembles maigres étant de former la classe des ensembles *petits*, on veut éviter que X soit maigre. Plus que cela, la propriété $(\mathcal{P}_1)$ impose que les ensembles maigres soient d'intérieur vide. Cela motive la définition des *espaces de Baire*.

Définition 1.1.9. Un espace topologique est dit *de Baire* si toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense ou, de manière équivalente, si toute union dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide, ou encore si le seul ouvert maigre est le vide.

De la sorte, lorsque l'espace ambiant est de Baire, toute partie maigre est d'intérieur vide et même incluse dans un F_σ d'intérieur vide.

Le *théorème de Baire* qui suit motive les hypothèses imposées à l'espace ambiant pour définir les catégories de Baire, à savoir qu'il soit complètement métrisable. Le résultat et sa démonstration sont classiques (chapitre XXI de [145]).

Théorème 1.1.10. *Les espaces localement compacts*[7] *séparés, de même que les espaces complètement métrisables sont de Baire. Par ailleurs, tout ouvert d'un espace de Baire est de Baire (pour la topologie induite).*

Les définitions ayant été posées, nous pouvons à présent nous atteler à la vérification des propriétés des ensembles maigres, en commençant par celles attendues des ensembles *petits*.

Proposition 1.1.11. *Les sous-ensembles maigres de X vérifient les propriétés $(\mathcal{P}_1)$ à $(\mathcal{P}_4)$.*

Démonstration. Par définition, il est clair que tout sous-ensemble d'un ensemble maigre est maigre et que l'union d'une famille dénombrable d'ensembles maigres est maigre. Ainsi, les conditions $(\mathcal{P}_2)$ et $(\mathcal{P}_3)$ sont satisfaites. Il a en outre été remarqué précédemment que tout espace complètement métrisable est de Baire et que les ensembles maigres sont d'intérieur vide dans un espace de Baire, ce qui montre que la propriété $(\mathcal{P}_1)$ est vérifiée. Enfin, la stabilité par translation demandée au point $(\mathcal{P}_4)$ est évidente puisque les notions d'ensemble fermé et d'intérieur d'un ensemble sont invariantes par translation. □

Nous avons vu à la proposition 1.1.4 que l'adhérence d'un ensemble nulle part dense est elle-même nulle part dense. Qu'en est-il alors de l'adhérence d'un ensemble maigre ?

Remarque 1.1.12. Contrairement à celle des ensembles nulle part denses, la collection des ensembles maigres n'est pas stable par passage à l'adhérence. Plus précisément, l'adhérence d'un sous-ensemble A de X est maigre si et seulement si A est nulle part dense. En effet, la condition est suffisante par la proposition 1.1.4 et nécessaire car, si $\overline{A}$ est maigre, alors $\overline{A}$ est d'intérieur vide et A est nulle part dense.

Observons que pour tout fermé d'intérieur vide A de X et tout réel $\lambda > 0$, la continuité de la multiplication scalaire suffit à conclure que λA est également un fermé d'intérieur vide. Cela atteste d'une autre propriété de la famille des ensembles maigres annoncée dans l'introduction, à savoir la stabilité par dilatation.

Proposition 1.1.13. *La classe des sous-ensembles maigres de X est stable par dilatation.*

Vérifions également que les ensembles dénombrables fournissent bien toute une famille d'ensembles *petits* au sens de Baire.

Exemple 1.1.14. Il est clair que tout sous-ensemble dénombrable de X est maigre puisque les singletons sont des fermés d'intérieur vide dans X.

Pour en finir avec les propriétés typiques, nous aimerions confirmer que les compacts en dimension infinie alimentent encore notre liste d'exemples d'ensembles *petits*.

7. Un espace topologique est *localement compact* si chacun de ses points possède un voisinage compact.

Proposition 1.1.15. *Si X est un espace de Banach de dimension infinie, alors les compacts de X sont maigres.*

Démonstration. Puisque X est séparé, tout compact de X est fermé. De plus, par le théorème de Riesz, tout compact de X est d'intérieur vide. Ainsi, tout compact de X est nulle part dense et en particulier maigre. □

On a vérifié à la proposition 1.1.11 qu'une union dénombrable d'ensembles maigres est maigre. Dans le cas où les ensembles considérés sont ouverts, le *théorème des catégories de Banach* ([126]) permet de généraliser ce résultat à une union non-dénombrable.

Théorème 1.1.16. *Toute union d'ouverts maigres de X est maigre.*

Démonstration. Soit $\mathcal{C}$ une famille d'ouverts maigres non-vides de X et notons A l'union des éléments de $\mathcal{C}$. Soit $\mathcal{F} = \{U_i : i \in I\}$ une famille maximale d'ouverts non-vides disjoints, chacun contenu dans un élément de $\mathcal{C}$. Alors le fermé $\overline{A} \setminus \left(\bigcup_{i\in I} U_i\right)$ est nulle part dense. En effet, si l'on suppose au contraire que $\overline{A} \setminus \left(\bigcup_{i\in I} U_i\right)$ est d'intérieur non-vide, alors on peut inclure un ouvert non-vide U dedans. Dans ce cas, A est dense dans U donc U rencontre A et il existe un ouvert V de $\mathcal{C}$ qui rencontre U. L'intersection $U \cap V$ est un ouvert non-vide inclus dans un élément de $\mathcal{C}$ et disjoint de tous les éléments de $\mathcal{F}$, ce qui contredit la maximalité de $\mathcal{F}$.

Cela étant, chaque U_i est inclus dans un ensemble maigre donc peut s'écrire sous la forme $U_i = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_{i,n}$, avec $N_{i,n}$ nulle part dense pour tout $i \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Notons $N_n = \bigcup_{i\in I} N_{i,n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et montrons que chaque N_n est nulle part dense. Pour cela, on fixe un naturel n et un ouvert quelconque U de X. Si $U \cap N_n = \emptyset$, il est clair que N_n n'est pas dense dans U. Supposons donc que U rencontre N_n. Dans ce cas, il existe $i \in I$ tel que $U \cap N_{i,n} \neq \emptyset$. En particulier, $U \cap U_i \neq \emptyset$. Or cette intersection est un ouvert de X et $N_{i,n}$ est nulle part dense donc il existe un ouvert non-vide V tel que $V \subseteq (U \cap U_i) \setminus N_{i,n}$. Comme les U_i sont deux à deux disjoints, on en tire $V \subseteq U \setminus N_n$, ce qui montre que N_n n'est pas dense dans U. Dès lors, N_n est bien nulle part dense.

Ainsi,

$$A \subseteq \left(\overline{A} \setminus \left(\bigcup_{i\in I} U_i\right)\right) \bigcup \left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) = \left(\overline{A} \setminus \left(\bigcup_{i\in I} U_i\right)\right) \bigcup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n\right)$$

est maigre. □

Par ailleurs, les ensembles maigres sont liés à la théorie des jeux via le *jeu de Banach–Mazur* suivant : un intervalle fermé I_0 de $\mathbb{R}$ est fixé et un sous-ensemble A est assigné à la joueuse (a), tandis que son complémentaire $I_0 \setminus A$ est attribué à la joueuse (b). La joueuse (a) commence par choisir un intervalle fermé I_1 inclus dans I_0 puis (b) sélectionne un intervalle fermé I_2 inclus dans I_1, et ainsi de suite. Si $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ a au moins un point commun avec l'ensemble A, la joueuse (a) gagne la partie. Dans le cas contraire, c'est (b) qui gagne. Clairement, si A peut s'écrire $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, où chaque A_n est nulle part dense, alors (b) peut s'assurer de gagner en choisissant à son $n^{\text{ème}}$ tour un intervalle I_{2n} inclus dans $I_{2n-1} \setminus A_n$. Banach démontra qu'il s'agit en fait d'une caractérisation, i.e. que (b) possède une stratégie gagnante si et seulement si A est maigre. Tout·e lecteur·rice intéressé·e peut trouver plus de détails à ce propos dans la section 6 de [126] et les références qui y figurent.

La notion introduite dans la section suivante va renforcer les catégories de Baire. Intuitivement, un ensemble nulle part dense est "très troué" tandis qu'un ensemble *poreux* aura en outre au voisinage de chaque point des "trous d'une taille proportionnelle à la taille du voisinage".

1.2 Porosité

Il semble que la première apparition d'une notion proche de la porosité remonte à un article de 1920. Denjoy, un étudiant de Baire, y étudia les dérivées symétriques d'ordre 2 et leur application aux séries trigonométriques ([49], voir aussi [37] qui remit en lumière ce travail). Pour ce faire, il utilisa implicitement la notion d'*index* qui fournit une indication sur la *taille des trous* d'un ensemble au voisinage d'un de ses points et sera plus tard formalisée en les termes de la définition 1.2.1. Le second mathématicien considéré comme pionnier de la notion de porosité est Dolženko. En 1967, il fut le premier à lui donner sa nomenclature actuelle et à l'appliquer aux valeurs limites angulaires d'une fonction complexe ([51]).

Aujourd'hui, il existe de nombreuses notions de porosité qui sont des variations les unes des autres. Cette variété découle, entre autres, des nombreuses questions dans lesquelles la porosité apparaît naturellement. Nous verrons quelques-unes de ces définitions dans cette section : tout d'abord celle historique de Denjoy (1.2.1), suivie de la définition la plus courante (1.2.2 pour le cas réel et 1.2.5 ou 1.2.8 pour le cas général) et enfin d'une restriction naturelle de cette définition (1.2.9). Au cours du mémoire, deux autres variantes s'avèreront utiles pour des applications spécifiques et seront définies au moment propice (1.2.13 et 3.1.4). Cette liste est bien sûr non-exhaustive et ne comprend par exemple pas les porosités (q), symétrique, directionnelle, relative à une mesure ou encore la notion plus abstraite de relation de porosité. Pour plus de définitions et propriétés liées à la porosité, les lecteur·rice·s peuvent consulter [66, 82, 102, 107, 132, 134, 154, 156, 160, 163, 164] et toutes les autres références citées dans cette section.

Commençons donc avec la définition de l'*index* de Denjoy ([37, 153]).

Définition 1.2.1. Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et soit $x \in \mathbb{R}$. L'*index à droite* de A en x, noté $i^+(A,x)$, est la borne inférieure des réels r pour lesquels une suite de points $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 0 peut être trouvée avec $h_n > 0$, $x + h_n \in A$ et $1 < \frac{h_n}{h_{n+1}} < r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De même, l'*index à gauche* de A en x, noté $i^-(A,x)$, est la borne inférieure des réels r pour lesquels une suite de points $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 0 peut être trouvée avec $h_n < 0$, $x + h_n \in A$ et $1 < \frac{h_n}{h_{n+1}} < r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarquons tout d'abord que l'on a toujours $i^+(A,x), i^-(A,x) \geq 1$ lorsque $x \in \overline{A}$.[8] On peut également noter que, intuitivement, plus l'index est élevé, "plus grands sont les

8. Si $x \notin \overline{A}$, il est de toute évidence impossible de construire une suite de points de A qui converge vers x. Par conséquent, aucun réel r ne vérifie la condition de la définition 1.2.1 et $i^+(A,x) = i^-(A,x) = +\infty$.

trous de l'ensemble". En effet, pour tout $r < i^+(A,x)$ et toute suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement positive qui décroît strictement vers 0 et satisfait $h_n < r \cdot h_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x + h_N \notin A$. Or la seule condition pour construire h_N était de le sélectionner dans l'intervalle $\left]\frac{h_{N-1}}{r}, h_{N-1}\right[$. Cet intervalle est donc nécessairement disjoint de A et sa longueur croît lorsque r augmente. Ainsi, plus r est autorisé à prendre de grandes valeurs (ce qui arrive lorsque $i^+(A,x)$ grandit), "plus grand est le trou de A". Cette intuition se précisera avec le lemme 1.2.4.

Voyons à présent une définition plus actuelle de la *porosité*, toujours dans le cas d'un sous-ensemble de la droite réelle ([162]).

Définition 1.2.2. Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et soit I un intervalle réel. On note $\lambda(A,I)$ la longueur du plus grand sous-intervalle ouvert de I qui n'intersecte pas A.

On définit ensuite

- la *porosité* de A en x par

$$p(x,A) = \limsup_{h\to 0^+} \frac{\lambda(A,]x-h, x+h[)}{h},$$

- la *porosité à droite* de A en x par

$$p^+(x,A) = \limsup_{h\to 0^+} \frac{\lambda(A,]x, x+h[)}{h},$$

- la *porosité à gauche* de A en x par

$$p^-(x,A) = \limsup_{h\to 0^+} \frac{\lambda(A,]x-h, x[)}{h}.$$

Discutons de l'ensemble des valeurs possibles de la porosité.

Remarque 1.2.3. Clairement,

$$0 \le p^+(x,A), p^-(x,A) \le 1.$$

Dans le cas $x \in \overline{A}$, on a aussi

$$0 \le p(x,A) \le 1.$$

En effet, tout sous-intervalle de $]x-h, x+h[$ n'intersectant pas A doit être contenu soit dans $]x-h, x[$, soit dans $]x, x+h[$, ce qui implique

$$p(x,A) = \max(p^+(x,A), p^-(x,A)).$$

Par contre, si $x \notin \overline{A}$, alors pour h suffisamment petit, on a $]x-h, x+h[\cap A = \emptyset$, d'où $p(x,A) = 2$.

La connexion entre index et porosité est donnée par le lemme suivant ([153]).

Lemme 1.2.4. *Si A est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $x \in A$, alors*

$$i^+(A,x) = \frac{1}{1-p^+(x,A)} \quad et \quad i^-(A,x) = \frac{1}{1-p^-(x,A)}.$$

Démonstration. Débutons la preuve avec deux observations qui nous seront utiles par la suite. Tout d'abord, si A_1 et A_2 sont deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ tels que $A_1 \subseteq A_2$, alors $p^+(x,A_1) \geq p^+(x,A_2)$. En outre, si $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement positive qui décroît strictement vers 0 et si A est l'ensemble $\{x+h_n : n \in \mathbb{N}\}$, alors

$$\begin{aligned}
p^+(x,A) &= \limsup_{h\to 0^+} \frac{\lambda(A,]x,x+h[)}{h} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \sup_{0<h\leq\varepsilon} \sup_{n\in\mathbb{N},\, h_n\leq h} \frac{h_n - h_{n+1}}{h} \\
&\leq \lim_{\varepsilon\to 0^+} \sup_{n\in\mathbb{N},\, h_n\leq\varepsilon} \frac{h_n - h_{n+1}}{h_n} \\
&= 1 - \liminf_{n\to+\infty} \frac{h_{n+1}}{h_n}.
\end{aligned}$$

Cela étant, si $i^+(A,x) < +\infty$ et $i' > i^+(A,x)$, alors il existe une suite strictement positive $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui décroît strictement vers 0 et satisfait $x+h_n \in A$ ainsi que $1 < \frac{h_n}{h_{n+1}} < i'$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De nos deux observations, on tire

$$p^+(x,A) \leq 1 - \liminf_{n\to+\infty} \frac{h_{n+1}}{h_n} \leq 1 - \frac{1}{i'},$$

c'est-à-dire

$$i' \geq \frac{1}{1-p^+(x,A)}.$$

Comme cette relation est vérifiée pour tout $i' > i^+(A,x)$, un passage à la borne inférieure nous donne

$$i^+(A,x) \geq \frac{1}{1-p^+(x,A)}.$$

De plus, cette relation est évidemment vérifiée dans le cas $i^+(A,x) = +\infty$.

Montrons que l'autre inégalité est également vérifiée. Si $p^+(x,A) = 1$, la majoration est triviale. Supposons donc avoir $1 > p' > p^+(x,A)$ et choisissons $\delta \in]0,1[$ ainsi que $M \in \mathbb{N}$ tels que

$$\sup_{0<h\leq\delta} \frac{\lambda(A,]x,x+h[)}{h} < p' - \frac{1}{2^M},$$

d'où

$$\lambda(A,]x,x+h[) < \left(p' - \frac{1}{2^M}\right) h$$

pour tout $h \in]0, \delta]$. Il doit alors exister une suite $(x + h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A telle que $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît strictement vers 0 et, en posant $\theta = 1 - p'$, telle que

$$x + h_{n+1} \in]x + \theta h_n, x + h_n[$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.[9] Pour voir cela, nous sélectionnons d'abord $h_1 \in]0, \delta]$ tel que $x + h_1 \in A$ et procédons ensuite par induction en choisissant, $h_1, \dots, h_n$ ayant été construits, un point $x + h_{n+1}$ dans $A \cap \left]x + \theta h_n, x + h_n - \frac{h_n}{2^M}\right[$. L'existence de h_1 est assurée par la relation

$$\lambda(A,]x, x + \delta[) < p'\delta < \delta$$

et celle de h_{n+1}, c'est-à-dire l'affirmation $A \cap \left]x + \theta h_n, x + h_n - \frac{h_n}{2^M}\right[\neq \emptyset$, découle de la majoration

$$\lambda(A,]x, x + h_n[) < \left(p' - \frac{1}{2^M}\right) h_n = h_n - \theta h_n - \frac{h_n}{2^M} = \mathcal{L}\left(\left]x + \theta h_n, x + h_n - \frac{h_n}{2^M}\right[\right).$$

La suite ainsi construite vérifie bien les propriétés attendues : $h_n > 0$, $x + h_n \in A$ et $1 < \frac{h_n}{h_{n+1}} < \frac{1}{\theta}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ainsi que $\lim_{n\to+\infty} h_n \leq \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{2^M}\right)^{n-1} h_1 = 0$. Dès lors, on a

$$i^+(A, x) \leq \frac{1}{\theta} = \frac{1}{1 - p'}.$$

Puisque cette inégalité est vraie pour tout $p' > p^+(x, A)$, un passage à la borne inférieure nous donne

$$i^+(A, x) \leq \frac{1}{1 - p^+(x, A)}$$

et la preuve est complète. Des arguments similaires permettent de traiter le cas à gauche. $\square$

La porosité dans le cadre réel a été introduite afin d'établir le lien avec l'index de Denjoy. Puisque c'est chose faite, nous allons désormais nous concentrer sur des espaces plus généraux. On considère donc à nouveau un espace vectoriel topologique X (réel ou complexe) complètement métrisable par une distance d invariante par translation. Les définitions 1.2.5 et 1.2.8 se trouvent dans la thèse [68] qui s'inspire notamment de l'article [162].

Définition 1.2.5. Soit A un sous-ensemble de X et soit $x \in X$. Pour tout $R > 0$, on définit

$$\gamma(x, R, A) = \sup\{r > 0 : \exists z \in X \text{ tel que } b(z, r) \subseteq b(x, R) \setminus A\}$$

et on pose

$$p(x, A) = \limsup_{R\to 0^+} \frac{\gamma(x, R, A)}{R}.$$

9. Nous modifions ici légèrement la construction de [153] car il n'y est pas vérifié que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 alors que cette condition est imposée dans la définition de l'index.

On dit ensuite que A est

- *poreux en x* si $p(x,A) > 0$,
- *poreux* s'il est poreux en chacun de ses points,
- *σ-poreux* s'il peut s'écrire comme une union dénombrable d'ensembles poreux.

En particulier, si A est poreux en x, alors pour tout $R > 0$, il existe $r > 0$ et $z \in X$ tels que
$$b(z,r) \subseteq b(x,R) \setminus A.$$

Remarque 1.2.6. Les notations λ de la définition 1.2.2 et γ de la définition 1.2.5 se correspondent, si ce n'est que λ considère le *diamètre* des intervalles vérifiant une certaine propriété d'inclusion, alors que γ considère le *rayon* des boules vérifiant une condition analogue, ce qui induit l'apparition d'un facteur $\frac{1}{2}$. Une adaptation élémentaire des conclusions de la remarque 1.2.3 donne alors

$$p(x,A) \leq \frac{1}{2}\ \forall x \in \overline{A} \quad \text{et} \quad p(x,A) = 1\ \forall x \notin \overline{A}.$$

À la remarque 1.1.12, nous avons établi une propriété conjuguant adhérence et catégories de Baire. La connaissance de la porosité d'un ensemble nous permet également de tirer des conclusions quant à celle de son adhérence.

Remarque 1.2.7. On constate immédiatement que l'égalité $p(x,A) = p(x,\overline{A})$ est vraie pour tout $x \in X$. Fixons $R > 0$. D'une part $b(x,R) \setminus \overline{A} \subseteq b(x,R) \setminus A$, ce qui montre une première inégalité
$$p(x,A) \geq p(x,\overline{A}).$$ [10]

D'autre part, il est impossible d'avoir simultanément $b(z,r) \cap A = \emptyset$ et $b(z,r) \cap \overline{A} \neq \emptyset$. En effet, si $y \in b(z,r) \cap \overline{A}$, alors $b(y, r - d(y,z))$ rencontre A et est inclus dans $b(z,r)$, d'où $b(z,r) \cap A \neq \emptyset$. Il s'en dérive la seconde inégalité

$$p(x,A) \leq p(x,\overline{A}).$$

Les équivalences

$$\begin{aligned}
& p(x,A) > 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \exists \rho > 0 \text{ tel que } \limsup_{R \to 0^+} \frac{\gamma(x,R,A)}{R} > \rho \\
\Leftrightarrow\quad & \exists \rho > 0 \text{ tel que } \forall \varepsilon > 0, \exists R \in]0,\varepsilon] \text{ vérifiant } \frac{\gamma(x,R,A)}{R} > \rho \\
\Leftrightarrow\quad & \exists \rho > 0 \text{ tel que } \forall \varepsilon > 0, \exists R \in]0,\varepsilon] \text{ et } \exists z \in X \text{ vérifiant } b(z,\rho R) \subseteq b(x,R) \setminus A
\end{aligned}$$

nous conduisent à une définition alternative de la porosité en un point.

10. Plus généralement, $p(x,A_1) \geq p(x,A_2)$ pour tout $x \in X$ dès lors que A_1 est inclus dans A_2, cette remarque apparaissant déjà dans la démonstration du lemme 1.2.4.

Définition 1.2.8. Soit A un sous-ensemble de X et soit $x \in X$. On dit que A est *poreux en* x s'il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $R \in]0, \varepsilon]$ et $z \in X$ vérifiant

$$b(z, \rho R) \subseteq b(x, R) \setminus A.$$

Une manière naturelle de renforcer la porosité s'obtient en remplaçant la limite supérieure de la définition 1.2.5 par une limite inférieure ([115]). La terminologie utilisée peut fortement varier d'une source à l'autre selon que l'auteur·e accorde une importance particulière à l'une des deux notions ou les met au contraire sur un pied d'égalité. Dans ce second cas, on lit souvent les termes de porosité *inférieure* et *supérieure*. La porosité qui nous occupera majoritairement dans la suite étant la porosité *au sens faible* de la définition 1.2.5, nous distinguerons la nouvelle notion en lui donnant le nom de porosité *forte*.[11]

Définition 1.2.9. Soit A un sous-ensemble de X et soit $x \in X$. La *porosité forte* de A en x est définie par

$$\widetilde{p}(x, A) = \liminf_{R \to 0^+} \frac{\gamma(x, R, A)}{R}$$

et A est dit *fortement poreux* en x si $\widetilde{p}(x, A) > 0$.

Comme pour les catégories de Baire, nous allons en priorité vérifier que les propriétés attendues d'un ensemble *petit* sont satisfaites par notre nouvelle collection ([68]).

Proposition 1.2.10. *Les sous-ensembles σ-poreux de X obéissent aux propriétés $(\mathcal{P}_1)$ à $(\mathcal{P}_4)$.*

Démonstration. La stabilité de la classe $\mathcal{C}$ des ensembles σ-poreux vis-à-vis des unions dénombrables, c'est-à-dire la condition $(\mathcal{P}_3)$, découle directement de la définition. Pour montrer que $\mathcal{C}$ est stable pour l'inclusion, on utilise la définition 1.2.5. Pour cela, on suppose que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de sous-ensembles poreux de X, on note $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ et on considère un sous-ensemble B de A. On peut alors écrire $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cap B)$ et il suffit pour conclure de montrer que $A_n \cap B$ est poreux pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or $A_n \cap B \subseteq A_n$, d'où $p(x, A_n \cap B) \geq p(x, A_n) > 0$ pour tout $x \in A_n \cap B$ et tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui montre que la propriété $(\mathcal{P}_2)$ est satisfaite.

Nous verrons dans la suite (corollaire 2.2.2) que tout ensemble σ-poreux est maigre. Ainsi, les ensembles σ-poreux sont bien d'intérieur vide et la condition $(\mathcal{P}_1)$ est établie.

Vérifions maintenant que les ensembles σ-poreux satisfont la propriété $(\mathcal{P}_4)$ en utilisant la définition 1.2.8. Il suffit de montrer que tout translaté d'un ensemble poreux est lui-même poreux. Pour ce faire, supposons que A est un ensemble poreux et considérons l'ensemble $B = A + x_0$, avec x_0 un point de X. Soit $y \in B$. Dans ce cas, $y - x_0 \in A$ et A est poreux en $y - x_0$. Il existe donc $\rho > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $R_\varepsilon \in]0, \varepsilon]$ et $z_\varepsilon \in X$ pour lesquels

$$b(z_\varepsilon, \rho R_\varepsilon) \subseteq b(y - x_0, R_\varepsilon) \setminus A.$$

Ce même ρ convient pour établir la porosité de B en y puisque pour tout $\varepsilon > 0$,

$$b(z_\varepsilon + x_0, \rho R_\varepsilon) = b(z_\varepsilon, \rho R_\varepsilon) + x_0 \subseteq b(y, R_\varepsilon) \setminus B.$$

Ainsi, B est bien poreux en chacun de ses points. □

11. Nous attirons l'attention sur le fait que le nom d'ensemble *fortement poreux* est régulièrement réservé aux ensembles dont la porosité en tout point est $\frac{1}{2}$.

Assurons-nous en outre que, comme annoncé dans le préambule, les dilatés d'ensembles σ-poreux (proposition 1.2.11 tirée de [68]), les ensembles dénombrables (exemple 1.2.12) et les compacts en dimension infinie (corollaire 1.2.21 obtenu en suivant l'article [1]) sont σ-poreux.

Proposition 1.2.11. *La classe des ensembles σ-poreux de X est invariante par dilatation pour autant que la distance d sur X satisfasse $d(\lambda x, 0) \leq \lambda d(x, 0)$ pour tout $x \in X$ et tout $\lambda > 0$.* [12]

Démonstration. Il suffit de montrer que le dilaté de n'importe quel ensemble poreux est poreux. Soit donc A un sous-ensemble poreux de X et soit $\lambda > 0$. Fixons également $x \in A$ et $\rho > 0$ la constante donnée par la définition 1.2.8 pour le couple (x, A). Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe alors $R_\varepsilon \in]0, \varepsilon]$ et $z_\varepsilon \in X$ tels que

$$b(z_\varepsilon, \rho R_\varepsilon) \subseteq b(x, R_\varepsilon) \setminus A.$$

Nous affirmons que ρ convient également pour le couple $(\lambda x, \lambda A)$ ou, plus précisément, que pour tout $\varepsilon > 0$ fixé,

$$b(\lambda z_\varepsilon, \rho\lambda R_\varepsilon) \subseteq b(\lambda x, \lambda R_\varepsilon) \setminus \lambda A.$$

Si $y \in b(\lambda z_\varepsilon, \rho\lambda R_\varepsilon)$, alors $\frac{1}{\lambda}y \in b(z_\varepsilon, \rho R_\varepsilon)$. On en tire d'une part que $\frac{1}{\lambda}y$ appartient à $b(x, R_\varepsilon)$, d'où $y \in b(\lambda x, \lambda R_\varepsilon)$, et d'autre part que $\frac{1}{\lambda}y$ n'appartient pas à A, c'est-à-dire $y \notin \lambda A$. Ainsi, $y \in b(\lambda x, \lambda R_\varepsilon) \setminus \lambda A$ comme espéré. □

Exemple 1.2.12. Si X est tel que la frontière de n'importe quelle boule ouverte $b(x, r)$, avec $x \in X$ et $r > 0$, est le cercle $\{y \in X : d(x, y) = r\}$, [13] alors tout sous-ensemble dénombrable de X est σ-poreux. En effet, les singletons sont poreux dans X puisque, pour tout $x \in X$ et tout $R > 0$,

$$\gamma(x, R, \{x\}) = \sup\{r > 0 : \exists z \in X \text{ tel que } b(z, r) \subseteq b(x, R) \setminus \{x\}\} = \frac{R}{2},$$

d'où $p(x, \{x\}) = \frac{1}{2}$.

Le dernier résultat que nous avons en vue a trait à la porosité des compacts en dimension infinie. Il découlera directement des considérations ci-après.

Définition 1.2.13. Soient A un sous-ensemble de X, x un point de A et b une boule ouverte de X dont x est dans la frontière, i.e. telle que $x \in \overline{b} \setminus b$. On dit que A est *poreux en x respectivement à b* s'il existe $\gamma > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver des boules ouvertes b_1 et b_2 de X satisfaisant

$$b_1 \subseteq b_2 \subseteq b,\ x \in \overline{b_2} \setminus b_2,\ b_1 \cap A = \emptyset \text{ et } \varepsilon > \operatorname{diam}(b_1) \geq \gamma \operatorname{diam}(b_2).$$

12. L'hypothèse ajoutée à la distance d n'est pas imposée dans [68] mais elle semble nécessaire a minima pour la preuve présentée.

13. De manière équivalente, on peut imposer que pour tout $x \in X$ et tout $r > 0$, l'adhérence de $b(x, r)$ soit la boule fermée $\{y \in X : d(x, y) \leq r\}$, ou encore que pour tous $x, y \in X$ tels que $x \neq y$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $z \in X$ tel que $d(z, y) < \varepsilon$ et $d(x, z) < d(x, y)$. Cette condition est en particulier vérifiée lorsque la distance d satisfait à la propriété additionnelle de l'énoncé 1.2.11.

Si A est poreux en x respectivement à toutes les boules ouvertes de X contenant x dans leur frontière, on dit que A est *totalement poreux en* x. Un ensemble totalement poreux en chacun de ses points est simplement appelé *totalement poreux*.

Dans la suite du développement, une boule désignera toujours une boule ouverte à moins que le contraire ne soit spécifié.

Nous allons montrer que les compacts en dimension infinie sont totalement poreux. Comme la notion de porosité à laquelle nous nous intéressons majoritairement dans ce mémoire est celle des définitions 1.2.5 et 1.2.8, il nous faut également vérifier qu'elle est plus faible que la porosité totale. N'ayant pas trouvé de source traitant simultanément les deux notions de porosité, le raisonnement ci-dessous est original.

Proposition 1.2.14. *Si A est un sous-ensemble totalement poreux de X, alors A est poreux.*

Démonstration. Fixons un point x de A et une boule b de X contenant x dans sa frontière. Par définition, on sait qu'il existe $\gamma > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver des boules b_1 et b_2 de X satisfaisant $b_1 \subseteq b_2 \subseteq b$, $x \in \overline{b_2} \setminus b_2$, $b_1 \cap A = \emptyset$ et $\varepsilon > \operatorname{diam}(b_1) \geq \gamma \operatorname{diam}(b_2)$. Montrons que A est poreux en x en vérifiant la définition 1.2.8 avec $\rho = \frac{\gamma}{2}$. On fixe pour cela $\varepsilon > 0$. L'hypothèse appliquée à $\gamma\varepsilon$ nous donne des boules b_1 et b_2 de X telles que

$$b_1 \subseteq b_2,\ x \in \overline{b_2} \setminus b_2,\ b_1 \cap A = \emptyset \text{ et } \gamma\varepsilon > \operatorname{diam}(b_1) \geq \gamma \operatorname{diam}(b_2).$$

Posons $R = \operatorname{diam}(b_2)$ et notons z le centre de b_1. Alors $R \in]0, \varepsilon]$ et $b_1 \subseteq b_2 \subseteq b(x, R)$. Il suffit pour conclure de montrer que $b(z, \rho R)$ est inclus dans b_1. Or

$$\rho R = \frac{\gamma}{2} \operatorname{diam}(b_2) \leq \frac{\operatorname{diam}(b_1)}{2},$$

ce qui achève le raisonnement. □

Pour montrer que les compacts en dimension infinie sont *petits*, nous ferons appel à la notion de *module de continuité* et à plusieurs résultats intermédiaires.

Définition 1.2.15. Un *module de continuité* est une fonction $\omega : [0, +\infty] \to [0, +\infty]$ qui est croissante, continue en 0 et qui s'annule en 0.

Si $f : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ est une application entre espaces métriques, on dit que ω est un *module de continuité de f* si, en plus d'être un module de continuité, ω satisfait

$$d_2(f(x), f(y)) \leq \omega(d_1(x, y))$$

pour tous $x, y \in X_1$.[14]

14. La condition de croissance d'un module de continuité n'est pas toujours imposée mais elle n'est pas non plus embarrassante puisqu'une fonction qui admet un module de continuité non-nécessairement croissant ω admet $\widetilde{\omega} : [0, +\infty] \to [0, +\infty] : t \mapsto \sup_{0 \leq s \leq t} \omega(s)$ comme module de continuité croissant.

Si $f : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ est une fonction uniformément continue entre espaces métriques, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$ si $x, y \in X_1$ et $d_1(x, y) < \delta_\varepsilon$. On peut admettre $\delta_\varepsilon < \delta_{\varepsilon'}$ si $\varepsilon < \varepsilon'$ et définir

$$\omega : [0, +\infty] \to [0, +\infty] : t \mapsto \inf\{\varepsilon > 0 : t < \delta_\varepsilon\}. \tag{1.1}$$

Dans ce cas, ω est un module de continuité de f. En particulier, toute fonction de $C([0,1])$ admet un module de continuité. Dans la suite, nous aurons besoin de considérer un module de continuité commun à toutes les fonctions d'une partie compacte fixée dans $C([0,1])$. Le lemme suivant nous le permettra. Il s'agit probablement d'un résultat classique mais, n'en connaissant pas de preuve, nous avons ici adapté les arguments du théorème d'Arzelà–Ascoli ([59]).

Lemme 1.2.16. *Soit K un sous-ensemble compact de $C([0,1])$. Il existe une application ω telle que, pour tout $f \in K$, ω est un module de continuité de f. Un tel ω sera appelé un* module de continuité de K.

Démonstration. Pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $f_1, \ldots, f_n \in K$ tels que $K \subseteq \bigcup_{j=1}^n b(f_j, \frac{\varepsilon}{3})$. Par continuité uniforme de $f_1, \ldots, f_n$, il existe $\delta > 0$ tel que $|f_j(x) - f_j(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$ et tous $x, y \in [0,1]$ satisfaisant $|x - y| < \delta$. Par conséquent, si $f \in K$, il existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tel que

$$|f(x) - f(y)| \leq 2\,\|f - f_j\|_\infty + |f_j(x) - f_j(y)| < \varepsilon$$

pour tous $x, y \in [0,1]$ satisfaisant $|x - y| < \delta$. Nous venons ainsi de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $f \in K$ et tous $x, y \in [0,1]$, on a $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ si $|x - y| < \delta_\varepsilon$. Il suffit alors de définir ω comme en (1.1). □

Voyons maintenant deux propriétés immédiates dont nous nous servirons à plusieurs reprises.

Lemme 1.2.17. *Soient A, B des sous-ensembles de $C([0,1])$, soient $f \in A$, $g \in B$, soit $\alpha \in]0,1[$, soit $h_\alpha = \alpha f + (1-\alpha)g$ et soient $x, y \in [0,1]$. Alors*

$$\|h_\alpha - g\|_\infty = \alpha\,\|f - g\|_\infty .$$

Si B est en outre supposé compact et si ω est un module de continuité de B, alors

$$|h_\alpha(y) - h_\alpha(x)| \geq \alpha\,|f(y) - f(x)| - \omega(|y - x|).$$

Démonstration. On a

$$|h_\alpha(z) - g(z)| = |\alpha f(z) - \alpha g(z)| = \alpha\,|f(z) - g(z)|$$

pour tout $z \in [0,1]$, d'où $\|h_\alpha - g\|_\infty = \alpha\,\|f - g\|_\infty$. De plus, dans le cas où B est compact et ω est un module de continuité de B,

$$\begin{aligned}|h_\alpha(y) - h_\alpha(x)| &= |\alpha(f(y) - f(x)) + (1-\alpha)(g(y) - g(x))| \\ &\geq \alpha\,|f(y) - f(x)| - (1-\alpha)\omega(|y - x|) \\ &\geq \alpha\,|f(y) - f(x)| - \omega(|y - x|).\end{aligned}$$

□

Dans les deux résultats suivants, nous utiliserons l'universalité de $C([0,1])$ parmi les espaces de Banach séparables réels. Ce fait porte le nom de *théorème de Banach – Mazur* et s'énonce comme suit (pour une preuve, se référer à la proposition 1.5 de [28]).

Théorème 1.2.18. *Si X est un espace de Banach séparable réel, alors il existe une isométrie linéaire ϕ de X dans un sous-espace fermé de $C([0,1])$.*

Proposition 1.2.19. *Supposons que X est un espace de Banach séparable réel et considérons A un sous-ensemble fermé convexe de X. Si A admet une boule compacte, alors toutes les boules fermées*[15] *de A sont compactes.*

Démonstration. Nous allons plutôt montrer la contraposée. Par ailleurs, comme les fermés, convexes, boules et compacts sont préservés par les isométries linéaires, le théorème de Banach – Mazur 1.2.18 permet de supposer $X = C([0,1])$ sans perte de généralité.

Soit b une boule ouverte de A telle que $\overline{b}$ n'est pas compact dans X. Comme $\overline{b}$ est borné, par le théorème d'Arzelà – Ascoli, b n'est pas équicontinu. Dès lors, il existe $\beta > 0$ tel qu'à tout $\delta > 0$, il correspond $f_\delta \in b$ et $x_\delta, y_\delta \in [0,1]$ avec $|x_\delta - y_\delta| < \delta$ et $|f_\delta(x_\delta) - f_\delta(y_\delta)| \geq \beta$.

Soit b_1 n'importe quelle boule ouverte de A. Nous allons montrer que $\overline{b_1}$ n'est pas compact. Écrivons $b_1 = b(g,\varepsilon) \cap A$ (avec $g \in A$ et $\varepsilon > 0$), choisissons $N > \frac{\varepsilon}{2}$ suffisamment grand pour avoir $b(g,N) \supseteq \overline{b}$ et posons $\alpha = \frac{\varepsilon}{2N}$. Pour tout $f \in b$, il découle du lemme 1.2.17 que $h_\alpha = \alpha f + (1-\alpha)g$ appartient à b_1. En effet, pour un tel f, h_α est clairement dans A et, puisque $f \in b(g,N)$, on a

$$\|h_\alpha - g\|_\infty = \alpha \|f - g\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2N} \cdot N < \varepsilon.$$

Nous allons appliquer cette remarque à un f bien choisi. Supposons par l'absurde que $\overline{b_1}$ soit compact. Soient alors ω le module de continuité de $\overline{b_1}$ et $\delta > 0$ tel que $0 < \omega(\delta) \leq \frac{\alpha\beta}{6}$. Pour $h_\alpha = \alpha f_\delta + (1-\alpha)g$, on tire encore du lemme 1.2.17,

$$|h_\alpha(y_\delta) - h_\alpha(x_\delta)| \geq \alpha |f_\delta(y_\delta) - f_\delta(x_\delta)| - \omega(|y_\delta - x_\delta|) \geq \frac{5}{6} \cdot \alpha\beta \geq 5\omega(\delta) > \omega(\delta).$$

Cette relation contredit l'appartenance de h_α à b_1 puisque $|x_\delta - y_\delta| < \delta$. □

Nous avons à présent tous les ingrédients nécessaires pour obtenir le théorème principal.

Théorème 1.2.20. *Supposons que X est un espace de Banach séparable, réel et non-localement compact. Tout compact de X est totalement poreux.*

Démonstration. Nous allons à nouveau nous servir du théorème de Banach – Mazur 1.2.18 pour réduire la preuve au cas $X = C([0,1])$, ce qui est ici encore permis puisque les isométries linéaires préservent la propriété de compacité locale et les ensembles totalement poreux, ces ensembles étant définis à partir des notions de distance et de boule.

Fixons K un compact quelconque de X, $g \in K$ et b une boule de X contenant g dans sa frontière. Si $u \in X$ désigne le centre de b, alors $b = b(u, \|g-u\|_\infty)$. Sans perte

15. Par *boule ouverte de A*, nous entendons une boule ouverte de X centrée en un point de A et intersectée avec A, et par *boule fermée de A*, l'adhérence d'une telle boule ouverte de A.

de généralité, on peut supposer que b est de diamètre majoré par 1. On sait que $\overline{b}$ n'est pas compact puisque, dans le cas contraire, toute boule fermée de X serait compacte par la proposition 1.2.19 et X serait alors localement compact. Comme dans la preuve de la proposition 1.2.19, on se donne une constante $\beta > 0$ telle que pour tout $\delta > 0$, il existe $f_\delta \in b$ et $x_\delta, y_\delta \in [0,1]$ avec $|x_\delta - y_\delta| < \delta$ et $|f_\delta(x_\delta) - f_\delta(y_\delta)| \geq \beta$. On peut exiger $\beta < 1$ et définir $\gamma = \frac{\beta}{12}$.

Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Construisons des boules b_1 et b_2 de X vérifiant les hypothèses de la définition 1.2.13. En suivant la construction du lemme 1.2.17, on peut former une combinaison convexe v de u et g telle que $v \in b$ et $\|v - g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$. En effet, en prenant $\alpha' \in]0, \min(\varepsilon, 1)[$ et $v = \alpha' u + (1-\alpha')g$, on a

$$\|v - u\|_\infty = (1-\alpha') \|g - u\|_\infty < \|g - u\|_\infty$$

et

$$\|v - g\|_\infty < \varepsilon \|u - g\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons $b_2 = b(v, \|v - g\|_\infty)$. Alors $g \in \overline{b_2} \setminus b_2$ et $\operatorname{diam}(b_2) = 2\|v - g\|_\infty < \varepsilon$. De plus, $b_2 \subseteq b$ car, v étant sur le segment joignant u à g, pour tout $f \in b_2$, on a

$$\|f - u\|_\infty \leq \|f - v\|_\infty + \|v - u\|_\infty \leq \|v - g\|_\infty + (\|u - g\|_\infty - \|v - g\|_\infty) = \|u - g\|_\infty .$$

Définissons à présent b_1. Soit ω un module de continuité de $K \cup \{v\}$. Suivons les notations de la démonstration précédente appliquée à b_2 au lieu de b_1 (où g est remplacé par v et ε par $\|v - g\|_\infty$). On cherche N suffisamment grand pour avoir $b(v, N) \supseteq \overline{b}$. Comme le diamètre de b est majoré par 1 et $v \in b$, on peut prendre $N = 1$. Fixons alors $\alpha = \frac{\|v-g\|_\infty}{2}$ et $\delta > 0$ tel que $\omega(\delta) = \frac{\alpha\beta}{6}$. On sait que $h = \alpha f_\delta + (1-\alpha)v$ appartient à b_2 puisque $f_\delta \in b$. De plus, si on note (x, y) le couple (x_δ, y_δ), on a $|x - y| < \delta$, $|h(x) - h(y)| \geq 5\omega(\delta)$ et

$$\|h - v\|_\infty = \alpha \|f_\delta - v\|_\infty \leq \alpha.$$

Cela étant, on définit $b_1 = b(h, \omega(\delta))$. Pour tout $f \in b_1$, on a

$$\|f - v\|_\infty \leq \|f - h\|_\infty + \|h - v\|_\infty \leq \omega(\delta) + \alpha < 2\alpha = \|v - g\|_\infty$$

car $\omega(\delta) = \frac{\alpha\beta}{6} < \alpha$. Dès lors, $b_1 \subseteq b_2$. Pour voir que $b_1 \cap K$ est vide, on doit seulement remarquer que tout $f \in b_1$ vérifie $|f(x) - f(y)| > 2\omega(\delta)$. En effet, si l'on présume de l'existence d'un $f \in b_1$ tel que $|f(x) - f(y)| \leq 2\omega(\delta)$, alors l'inégalité $\|f - h\|_\infty < \omega(\delta)$ mène à l'absurdité

$$|h(x) - h(y)| \leq |h(x) - f(x)| + |f(x) - f(y)| + |f(y) - h(y)| < 5\omega(\delta).$$

De plus, cette relation implique que f n'appartient pas à K puisque toute fonction $\widetilde{f}$ de K vérifie

$$\left|\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(y)\right| = \left|\widetilde{f}(x_\delta) - \widetilde{f}(y_\delta)\right| \leq \omega(|x_\delta - y_\delta|) \leq \omega(\delta) \leq 2\omega(\delta).$$

Finalement,

$$\operatorname{diam}(b_1) = 2\omega(\delta) = \frac{\alpha\beta}{3}$$

et

$$\mathrm{diam}(b_2) = 2\,\|v - g\|_\infty = 4\alpha,$$

d'où

$$\mathrm{diam}(b_1) = \gamma\,\mathrm{diam}(b_2) < \varepsilon.$$

Puisque b est arbitraire parmi les boules de X contenant g dans leur frontière, K est bien totalement poreux. □

Si l'on applique le théorème 1.2.20 à un espace de Banach séparable, réel et de dimension infinie (un tel espace étant non-localement compact par le théorème A.1), on obtient que tout compact de X est totalement poreux et donc poreux par la proposition 1.2.14. Cela prouve bien le résultat d'intérêt et clôt l'investigation des propriétés classiques.

Corollaire 1.2.21. *Si X est un espace de Banach séparable, réel et de dimension infinie, alors tout compact de X est poreux.*

Par définition, un ensemble σ-poreux peut s'écrire comme une union dénombrable d'ensembles dont la porosité en chacun de leurs points est strictement positive. Il serait intéressant de pouvoir supposer que toutes ces porosités dépassent une certaine valeur, particulièrement lorsque l'on souhaite établir qu'un ensemble n'est pas σ-poreux ([119]).

Lemme 1.2.22. *Soit $p \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$. Tout sous-ensemble σ-poreux de X peut s'écrire $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ où $p(x, A_n) > p$ pour tout $x \in A_n$ et tout $n \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. Fixons A un sous-ensemble σ-poreux de X. Quitte à appliquer le résultat à chaque élément d'une décomposition de A en ensembles poreux, on peut supposer sans perte de généralité avoir $p(x, A) > 0$ pour tout $x \in A$. Choisissons $q \in]0, 1[$ tel que $\frac{q}{1+q} > p$ et posons

$$A_{k,l} = \left(\bigcap_{m\in\mathbb{N}_0} M_{k,m}\right) \setminus M_{k-1,l}$$

pour tous $k, l \in \mathbb{N}_0$, où $M_{0,l} = \emptyset$ pour tout $l \in \mathbb{N}_0$ et

$$M_{k,l} = \bigcup \left\{ b(z, r) : 0 < r < \frac{1}{l} \text{ et } b(z, q^k r) \cap A = \emptyset \right\}$$

pour tous $k, l \in \mathbb{N}_0$.

Fixons d'abord $k, l, m \in \mathbb{N}_0$ avec $m \geq l$ et supposons $x \in A_{k,l}$. Alors $x \in M_{k,m}$, d'où l'existence d'un réel r et d'un point z de X tels que $0 < r < \frac{1}{m}$, $x \in b(z, r)$ et $b(z, q^k r) \cap A = \emptyset$. Comme

$$0 < qr < r < \frac{1}{m} \leq \frac{1}{l} \quad \text{et} \quad b(z, q^{k-1}(qr)) \cap A = \emptyset,$$

on a

$$b(z, qr) \subseteq M_{k-1,l} \subseteq X \setminus A_{k,l}.$$

De plus, $d(z, x) + qr < (1 + q)r$, ce qui montre qu'on a

$$b(z, qr) \subseteq b(x, (1 + q)r).$$

Ainsi,

$$\gamma(x,(1+q)r,A_{k,l}) \geq qr,$$

d'où

$$p(x,A_{k,l}) \geq \frac{q}{1+q} > p.$$

Il suffit pour conclure la démonstration de montrer que A est inclus dans $\bigcup_{k,l\in\mathbb{N}_0} A_{k,l}$. Fixons donc $x \in A$. Puisque $\lim_{k\to+\infty} q^k = 0$, il existe $k \in \mathbb{N}_0$ tel que $p(x,A) > q^k$. En effectuant un raisonnement similaire à celui ayant conduit à la définition 1.2.8, on en déduit que pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, il existe $r \in \left]0,\frac{1}{m}\right[$ et $z \in X$ tels que $b(z,q^k r) \subseteq b(x,r) \setminus A$. En particulier, $x \in b(z,r)$ et il en résulte $x \in M_{k,m}$. Cela étant valable pour tout naturel non-nul m, x appartient à $\bigcap_{m\in\mathbb{N}_0} M_{k,m}$. En prenant k minimal parmi les indices pour lesquels x appartient à $\bigcap_{m\in\mathbb{N}_0} M_{k,m}$, on a $k \in \mathbb{N}_0$ et $x \notin M_{k-1,l}$ pour un $l \in \mathbb{N}_0$, d'où $x \in A_{k,l}$ comme requis. □

À la section 1.1, nous avons rapidement présenté le lien qui unit le jeu de Banach−Mazur et les catégories de Baire. L'existence d'une telle affinité entre la théorie des jeux et la porosité a également été étudiée ([165]).

Dans la section suivante, nous allons changer de point de vue et construire une troisième classe d'ensembles *petits* qui généralisera cette fois la notion d'ensemble Lebesgue-négligeable.

1.3 Prévalence

Le premier mathématicien à avoir développé la notion de prévalence est Christensen ([39]). En 1972, il publia un article traitant d'analogies entre les groupes polonais et les groupes localement compacts. Il était déjà bien connu à cette époque que tout groupe localement compact admet une mesure de Borel régulière et invariante par translation à gauche, appelée *mesure de Haar à gauche*. Cette mesure, qui universalise le rôle de la mesure de Lebesgue et définit donc naturellement une classe d'ensembles *petits*, ne s'étend malheureusement pas aux groupes non-localement compacts. Cristensen remarqua cependant que la classe des ensembles de mesure de Haar nulle se généralisait proprement aux groupes topologiques polonais et il appela les éléments de cette famille les ensembles *Haar-nuls*. Étrangers au travail de Christensen, Hunt, Sauer et Yorke redécouvrirent en 1992 les ensembles Haar-nuls auxquels ils donnèrent le nom d'ensembles *timides* ([84, 85]). L'intention de ces auteurs était cependant différente : ils considéraient un espace vectoriel topologique complètement métrisable et aspiraient à des résultats de généricité sur des espaces de dimension infinie, avec un intérêt tout particulier pour la théorie ergodique.

Les sous-sections 1.3.1 et 1.3.2 suivent majoritairement l'article [85] de Hunt, Sauer et Yorke (voir aussi [60, 68, 125]) car plus proche des objectifs de ce mémoire, tandis que le paragraphe 1.3.3 portera une attention particulière au point de vue de Christensen.

1.3.1 Première approche

Une première idée pour développer une notion de généricité dans un contexte de théorie de la mesure sur des espaces de dimension infinie serait d'imiter le cas de $\mathbb{R}^n$ en utilisant une mesure spécifique. Or nous savons que le rôle privilégié joué par la mesure de Lebesgue découle du fait qu'il s'agit, à une constante multiplicative près, de l'unique mesure invariante par translation et finie sur les boréliens bornés. Il est donc naturel d'espérer que la mesure recherchée vérifie ces mêmes propriétés. La proposition 1.3.2 assure cependant qu'une telle généralisation n'est pas possible car elle mène fatalement à la mesure triviale. La démonstration repose notamment sur le *lemme de Riesz* rappelé ci-dessous.

Lemme 1.3.1. *Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et soit Y un sous-espace vectoriel fermé propre de X. Pour tout $\eta \in\ ]0,1[$, il existe $x_\eta \in X$ tel que $\|x_\eta\| = 1$ et $\inf_{y\in Y} \|x_\eta - y\| \geq 1-\eta$.*

Démonstration. Soit $x \in X \setminus Y$ et notons $\alpha = \inf_{y\in Y} \|x-y\|$. Comme Y est fermé, on a $\alpha > 0$. Fixons également $\eta \in\ ]0,1[$. Étant donné la relation $\frac{\alpha}{1-\eta} > \alpha$, il existe $y_\eta \in Y$ tel que

$$\|x - y_\eta\| \leq \frac{\alpha}{1-\eta}.$$

Il suffit alors de définir x_η comme la renormalisation de $x - y_\eta$, i.e.

$$x_\eta = \frac{x - y_\eta}{\|x - y_\eta\|}.$$

Dans ce cas, pour tout $y \in Y$, si $\widetilde{y}$ désigne l'élément $y_\eta + y\,\|x - y_\eta\|$ de Y, on a bien

$$\|x_\eta - y\| = \left\|\frac{x - y_\eta - y\,\|x-y_\eta\|}{\|x-y_\eta\|}\right\| = \left\|\frac{x-\widetilde{y}}{\|x-y_\eta\|}\right\| \geq \frac{\alpha}{\|x-y_\eta\|} \geq 1-\eta,$$

ce qui conclut en passant à la borne inférieure. □

Proposition 1.3.2. *Soit μ une mesure non-nulle définie sur les boréliens d'un espace de Banach séparable $(X, \|\cdot\|)$ de dimension infinie. Si la mesure μ est invariante par translation, alors pour tout ouvert U de X, $\mu(U) = +\infty$.*

Démonstration. Procédons par l'absurde et supposons que le sous-ensemble U de X soit un ouvert de mesure finie. Alors U contient une boule ouverte b de rayon ε, également de mesure finie. L'espace X étant de dimension infinie, le lemme de Riesz 1.3.1 assure que la boule b contient une infinité de boules ouvertes disjointes de rayon $\frac{\varepsilon}{4}$. En effet, on peut supposer que b est centré à l'origine et considérer dans ce cas x_0 un élément non-nul de X tel que $\|x_0\| \leq \frac{2\varepsilon}{3}$, ainsi que V_0 le sous-espace vectoriel de X engendré par x_0. D'après le lemme 1.3.1 appliqué à $\eta < \frac{1}{4}$, il existe $x_1 \in X \setminus V_0$ tel que

$$\|x_1\| = \frac{2\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad \inf_{v\in V_0} \|x_1 - v\| > \frac{\varepsilon}{2}.$$

Itérons l'argument. Si $x_0, \ldots, x_n$ et $V_0, \ldots, V_n$ ont été construits, avec V_k le sous-espace vectoriel engendré par $x_0, \ldots, x_k$, alors on peut trouver $x_{n+1} \in X \setminus V_n$ tel que

$$\|x_{n+1}\| = \frac{2\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad \inf_{v \in V_n} \|x_{n+1} - v\| > \frac{\varepsilon}{2}.$$

On obtient ainsi une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X de norme égale à $\frac{2\varepsilon}{3}$ et tels que $\|x_i - x_j\| > \frac{\varepsilon}{2}$ pour tous naturels i, j distincts. En particulier, les boules $b(x_n, \frac{\varepsilon}{4})$ sont incluses dans b et deux à deux disjointes. Vu l'invariance par translation de la mesure μ, toutes ces boules ont en outre la même mesure. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $b_n = b(x_n, \frac{\varepsilon}{4})$. Comme $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} b_n \subseteq b$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mu(b_n) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} b_n\right) \leq \mu(b) < +\infty.$$

Par conséquent, $\mu(b_n) = 0$ pour tout naturel n. L'espace X étant séparable, il peut être recouvert par une union dénombrable de boules ouvertes de rayon $\frac{\varepsilon}{4}$, toutes de mesure nulle puisque la boule b a été choisie arbitrairement. Nous avons ainsi montré que X est de mesure nulle, ce qui est absurde puisque la mesure μ est non-nulle. Par conséquent, tout ouvert de X est bien de mesure infinie. □

Ainsi, la seule mesure borélienne finie sur les boréliens bornés et invariante par translation d'un espace de Banach séparable de dimension infinie est la mesure triviale $\mu = 0$. Si l'espace X n'est pas séparable, la démonstration permet tout de même d'affirmer qu'il existe des ouverts non-vides de mesure nulle dans X, à savoir les boules b_n, ce qui contredit la propriété $(\mathcal{P}_1)$.

Nous venons donc d'établir que l'invariance par translation est une condition trop restrictive. Nous pourrions néanmoins espérer imposer que la mesure recherchée soit *quasi-invariante*, c'est-à-dire qu'elle vérifie la propriété $(\mathcal{P}_4)$.

Définition 1.3.3. Une mesure μ définie sur les boréliens d'un espace vectoriel topologique X est dite *quasi-invariante (par translation)* si pour tout $B \in \mathcal{B}(X)$ tel que $\mu(B) = 0$, on a $\mu(B + x) = 0$ pour tout $x \in X$.

Dans $\mathbb{R}^n$, il existe d'ailleurs beaucoup de mesures finies et quasi-invariantes par translation.

Définition 1.3.4. On dit que deux mesures μ et ν définies sur un même espace mesurable $(X, \mathscr{A})$ sont *équivalentes* si elles admettent la même famille d'ensembles nuls, c'est-à-dire si elles sont absolument continues l'une par rapport à l'autre, ou encore si pour tout $A \in \mathscr{A}$, $\mu(A) = 0 \Leftrightarrow \nu(A) = 0$.

Il est clair que toute mesure borélienne équivalente par rapport à la mesure de Lebesgue est quasi-invariante par translation. [16] Une description complète de ces mesures est donnée par le résultat suivant ([73]).

16. Il s'agit en fait même d'une caractérisation, un fait établi dans [73] (théorème 2 de la section IV.5.1). Nous nous contenterons ici de l'implication énoncée puisqu'elle nous permet de donner des exemples de mesures quasi-invariantes.

Théorème 1.3.5. *Toute mesure borélienne, σ-finie et régulière μ sur $\mathbb{R}^n$ qui est équivalente à la mesure de Lebesgue est de la forme*

$$\mu(B) = \int_B f(x)\, dx \tag{1.2}$$

pour tout $B \in \mathbb{B}^n$, où f est une fonction strictement positive qui est intégrable sur tous les ensembles bornés de $\mathbb{R}^n$. Réciproquement, toute mesure définie par une expression de ce type est équivalente par rapport à la mesure de Lebesgue.

Démonstration. Supposons d'abord que μ est une mesure σ-finie, régulière telle que μ et $\mathcal{L}$ sont deux mesures équivalentes. Puisque μ est absolument continu par rapport à $\mathcal{L}$, on sait par le théorème de Radon−Nikodym qu'il existe une fonction mesurable $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty[$ telle que

$$\mu(B) = \int_B f(x)\, dx$$

pour tout $B \in \mathbb{B}^n$. Soit B_0 l'ensemble des points où f s'annule. Il est clair que B_0 est un borélien de $\mathbb{R}^n$ satisfaisant

$$\mu(B_0) = \int_{B_0} f(x)\, dx = 0,$$

d'où $\mathcal{L}(B_0) = 0$. Il s'ensuit que la fonction f est strictement positive Lebesgue-presque partout. Puisqu'elle peut être modifiée sur un ensemble Lebesgue-négligeable sans affecter la définition de μ, on peut supposer que f est à valeurs strictement positives. Finalement, montrons que f est intégrable sur n'importe quel ensemble borné. Par équivalence entre μ et $\mathcal{L}$, on a $\mu(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Puisqu'on a supposé la régularité de μ, il en découle que tout point x de $\mathbb{R}^n$ admet un voisinage ouvert V_x qui est de mesure μ finie. Comme tout ensemble compact de $\mathbb{R}^n$ peut être recouvert par un nombre fini de tels V_x (et donc également n'importe quel ensemble borné puisque son adhérence est compacte dans $\mathbb{R}^n$), la mesure μ de n'importe quel ensemble borné est finie, ce qui suffit.

Réciproquement, montrons que la mesure μ définie par l'expression (1.2) est équivalente par rapport à la mesure de Lebesgue. Pour tout $B \in \mathbb{B}^n$, d'une part si $\mathcal{L}(B) = 0$, alors clairement $\mu(B) = 0$, et d'autre part si $\mu(B) = 0$, alors la fonction positive $f \cdot \chi_B$ est nulle Lebesgue-presque partout. Comme f ne s'annule pas, nécessairement

$$\mathcal{L}(B) = \mathcal{L}(\{x \in \mathbb{R}^n : \chi_B(x) = 1\}) = 0.$$

□

Par conséquent, pour obtenir des exemples de mesures finies et quasi-invariantes, il suffit de considérer une mesure borélienne finie et équivalente par rapport à la mesure de Lebesgue. Vu le théorème 1.3.5, cela revient à se donner une fonction f strictement positive et intégrable sur tous les bornés de $\mathbb{R}^n$. Les *mesures Gaussiennes* illustrent cette situation.

Exemple 1.3.6. La *mesure Gaussienne standard* sur $\mathbb{R}^n$ est l'application

$$\gamma^n : \mathbb{B}^n \to [0,1] : B \mapsto \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_B \exp\left(-\frac{1}{2}\, \|x\|_n^2\right) dx.$$

Il s'agit d'une mesure de probabilité puisque l'intégrale de Poisson permet de calculer

$$\gamma^n(\mathbb{R}^n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}x_i^2}\, dx_i = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \prod_{i=1}^{n} \sqrt{2\pi} = 1.$$

De plus, on s'assure aisément que la mesure γ^n n'est pas invariante par translation en remarquant que la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-\frac{1}{2}x^2}$ est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. Par contre, cette mesure est bien quasi-invariante vu le raisonnement qui précède cet exemple.

Malheureusement, le résultat ci-dessous montre qu'en dimension infinie, utiliser une mesure quasi-invariante pour définir la prévalence n'est pas non plus une option viable.

Proposition 1.3.7. *Soit μ une mesure définie sur les boréliens d'un espace de Banach séparable X de dimension infinie. Si la mesure μ est σ-finie, régulière et quasi-invariante, alors elle est identiquement nulle.*

On va en réalité montrer un résultat plus fort, à savoir que s'il existe une mesure μ définie sur les boréliens d'un groupe topologique polonais, [17] non-identiquement nulle, σ-finie, régulière et quasi-invariante à gauche, alors ce groupe est σ-compact ([136]) et donc localement compact ([150]). Comme tout espace vectoriel topologique séparé localement compact est de dimension finie (théorème A.1), cela suffit bien.

Remarquons également que l'hypothèse de σ-finitude est en particulier vérifiée si la mesure μ est finie sur les boréliens bornés ou encore localement finie puisque X a été supposé séparable.

Démonstration. Supposons que $(G, \cdot)$ est un groupe topologique polonais et que μ est une mesure définie sur les boréliens de G, non-nulle, σ-finie, régulière et quasi-invariante par translation à gauche. On sait qu'il existe une suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de boréliens disjoints tels que $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ et $\mu(B_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par régularité intérieure de μ, pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un compact $K_n^{(m)}$ inclus dans B_n pour lequel

$$\mu(B_n) - \frac{1}{m2^{n+1}} < \mu(K_n^{(m)}).$$

On peut évidemment supposer $K_n^{(m)} \subseteq K_n^{(m+1)}$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Posons alors $M^{(m)} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n^{(m)}$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ et $M = \bigcup_{m\in\mathbb{N}_0} M^{(m)}$. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, les compacts de la suite $(K_n^{(m)})_{n\in\mathbb{N}}$ étant deux à deux disjoints, on a

$$\mu(G) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(B_n) < \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(K_n^{(m)}) + \frac{1}{m} = \mu(M^{(m)}) + \frac{1}{m}.$$

Par croissance de la suite $(M^{(m)})_{m\in\mathbb{N}_0}$, on trouve finalement

$$\mu(G) \leq \lim_{m\to+\infty} \left(\mu(M^{(m)}) + \frac{1}{m} \right) = \mu(M).$$

17. Un espace topologique X est dit *polonais* s'il est complètement métrisable et séparable.

En particulier, $\mu(M) > 0$. De la quasi-invariance par translation à gauche de μ, on tire alors la relation $\mu(gM) > 0$ pour tout $g \in G$. Supposons pouvoir trouver $g \in G$ tel que $\mu(gM \cap M) = 0$. Dans ce cas,

$$\mu(G) = \mu(gM \cup M) = \mu(gM) + \mu(M) - \mu(gM \cap M) > \mu(G),$$

une absurdité. Ainsi, tout $g \in G$ satisfait $gM \cap M \neq \emptyset$ et appartient donc à MM^{-1}. Par conséquent,

$$G = MM^{-1} = \bigcup_{n,n' \in \mathbb{N}} \bigcup_{m,m' \in \mathbb{N}_0} (K_n^{(m)}(K_{n'}^{(m')})^{-1})$$

et G est σ-compact. Notons $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \widetilde{K}_n$, où chaque $\widetilde{K}_n$ est un compact de G. Le théorème de Baire 1.1.10 assure alors qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\widetilde{K}_n^\circ \neq \emptyset$. Fixons un point z à l'intérieur de $\widetilde{K}_n$. Pour tout $g \in G$, $(gz^{-1})K_n$ est un voisinage compact de g, ce qui montre que G est localement compact. □

Un autre cheminement possible pour prouver la proposition 1.3.7 est de se ramener au résultat de non-existence 1.3.2 en montrant que X admet une mesure invariante s'il admet une mesure quasi-invariante (voir les arguments de [158] reproduits au théorème 2.14.3 de [146]).

Au vu de cette section, chercher une correspondance à la mesure de Lebesgue sur des espaces de dimension infinie semble voué à l'échec. Dès lors, une autre stratégie doit être mise en œuvre.

1.3.2 Prévalence

Définitions

L'astuce de Hunt, Sauer et Yorke fut de se pencher sur une caractérisation de la propriété *avoir une mesure de Lebesgue nulle* qui admette une extension raisonnable aux espaces de dimension infinie. Dans cette optique, considérons la classe des mesures de probabilité sur les boréliens de $\mathbb{R}^n$ à support compact. Vu la remarque ci-après, elle coïncide avec la famille des mesures μ définies sur $\mathbb{B}^n$ pour lesquelles il existe un compact K de $\mathbb{R}^n$ tel que $\mu(K) = \mu(\mathbb{R}^n) = 1$.

Remarque 1.3.8. Si ν est une mesure finie sur les boréliens d'un espace topologique séparé X, alors ν est à support compact si et seulement s'il existe un compact K de X tel que $\nu(K) = \nu(X)$. En effet, si l'on suppose que le support de ν est le compact K, alors $\nu(X \setminus K) = 0$, c'est-à-dire $\nu(X) = \nu(K)$. Réciproquement, si K est un compact tel que $\nu(X) = \nu(K)$, alors $\nu(X \setminus K) = 0$. Or, X étant séparé, $X \setminus K$ est ouvert dans X. Par conséquent, $\mathrm{supp}(\nu) \subseteq K$, ce qui suffit car tout sous-ensemble fermé d'un ensemble compact est compact.

La caractérisation exploitée est la suivante.

Proposition 1.3.9. *Soit B un borélien de $\mathbb{R}^n$. Alors $\mathcal{L}(B) = 0$ si et seulement s'il existe une mesure de probabilité μ sur les boréliens de $\mathbb{R}^n$ à support compact qui vérifie $\mu(B + x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.*

Démonstration. Pour la condition nécessaire, il suffit de définir la mesure μ comme la mesure de probabilité uniforme sur la boule unité, c'est-à-dire de poser

$$\mu(B) = \frac{\mathcal{L}(B \cap b)}{\mathcal{L}(b)}$$

pour tout $B \in \mathbb{B}^n$, où b désigne la boule ouverte de rayon 1 centrée en l'origine. Dans ce cas, le support de μ est inclus dans $\overline{b}$ qui est effectivement compact.

Réciproquement, puisque les mesures μ et $\mathcal{L}$ sont σ-finies, une application du théorème de Fubini – Tonelli à la fonction

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \{0, 1\} : (x, y) \mapsto \chi_B(x + y)$$

permet d'obtenir la relation

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mu(B - y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}(B - x)\, d\mu(x).$$

Or la première intégrale est nulle par hypothèse et la seconde se réécrit

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}(B - x)\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}(B)\, d\mu = \mu(\mathbb{R}^n)\, \mathcal{L}(B) = \mathcal{L}(B).$$

Ainsi, $\mathcal{L}(B) = 0$. □

Si μ est une mesure de probabilité sur les boréliens de $\mathbb{R}^n$ à support compact, définissons la mesure $\tilde{\mu}$ en posant

$$\tilde{\mu}(B) = \begin{cases} 0 & \text{si tout translaté de } B \text{ est de mesure } \mu \text{ nulle} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

pour tout borélien B de $\mathbb{R}^n$. Cette mesure $\tilde{\mu}$ est clairement invariante par translation et la proposition 1.3.9 nous apprend qu'elle majore la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{B}^n$. Ainsi, une manière de montrer qu'un borélien B est *petit* en un sens probabiliste invariant par translation est de montrer qu'il existe une mesure de probabilité μ à support compact pour laquelle $\widetilde{\mu}(B) = 0$.

L'abondance de mesures de probabilité à support compact sur les espaces vectoriels de dimension infinie (par exemple, la mesure uniforme sur la boule unité de n'importe quel sous-espace vectoriel de dimension finie) permet de généraliser cette méthode à d'autres espaces que $\mathbb{R}^n$. Formalisons cette idée grâce aux définitions suivantes.

Définition 1.3.10. Une mesure non-triviale μ définie sur les boréliens d'un espace vectoriel topologique complètement métrisable X est *transverse* à un borélien B de X si

(1) il existe un compact K de X tel que $0 < \mu(K) < +\infty$,

(2) $\mu(B + x) = 0$ pour tout $x \in X$.

Dans la suite, se donner une mesure sur un espace topologique signifiera que nous considérons une mesure non-triviale définie sur les boréliens de cet espace.

Pour des raisons de commodité d'utilisation (notamment si l'on souhaite considérer la mesure de Lebesgue), la définition 1.3.10 n'impose pas que les mesures transverses soient de probabilité à support compact malgré la présence de cette condition dans la caractérisation 1.3.9. Il sera montré plus tard (lemme 1.3.15) que cela n'impacte en rien le caractère *petit* ou non d'un borélien.

Si X est en outre supposé séparable, c'est-à-dire si X est un espace vectoriel topologique polonais, alors la condition (1) est automatiquement vérifiée pour n'importe quelle mesure finie, comme le montre le résultat suivant. [18]

Proposition 1.3.11. *Soit (X, d) un espace métrique complet séparable et soit μ une mesure de probabilité sur X. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble compact K_ε de X tel que*

$$\mu(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon.$$

Dans ce cas, on dit que la mesure μ est tendue. [19]

Démonstration. Soient $\varepsilon > 0$ et $D = \{e_m : m \in \mathbb{N}\}$ une partie dense de X. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, nous avons

$$X = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \overline{b\left(e_m, \frac{1}{n}\right)}.$$

Par continuité à gauche de μ, il s'en déduit

$$1 = \mu(X) = \lim_{k\to+\infty} \mu\left(\bigcup_{m=0}^{k} \overline{b\left(e_m, \frac{1}{n}\right)}\right)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, ce qui implique l'existence d'un naturel k_n tel que

$$\mu\left(\bigcup_{m=0}^{k_n} \overline{b\left(e_m, \frac{1}{n}\right)}\right) > 1 - \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, posons

$$A_n = \bigcup_{m=0}^{k_n} \overline{b\left(e_m, \frac{1}{n}\right)}$$

18. L'hypothèse de finitude de la mesure μ n'est pas nécessaire pour établir qu'elle est tendue (théorème 3.2 du chapitre II de [128]). Cependant, une mesure tendue ne satisfait qu'une des deux inégalités de la condition (1) et il faut tout de même supposer que μ est a minima une mesure de Borel pour conclure. C'est pour cette raison que nous traitons uniquement le cas fini dans la proposition 1.3.11.

19. Plus généralement, on dit qu'une mesure μ sur un espace métrique X est *tendue* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K_ε de X tel que $\mu(X \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$.

et

$$K_\varepsilon = \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} A_n.$$

Puisque chaque A_n est fermé, nous en tirons que K_ε est également fermé. De plus,

$$\mu(X \setminus K_\varepsilon) \le \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(X \setminus A_n) < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon,$$

d'où $\mu(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$.

Il reste à montrer que K_ε est compact. Puisque X est métrique, il suffit de montrer que K_ε est séquentiellement compact (théorème 3.28 de [2]). Soit donc $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de K_ε. Nous allons en extraire une sous-suite convergente via un argument type *diagonale de Cantor*. Puisque $K_\varepsilon \subseteq A_1$, nous savons par le principe des tiroirs qu'il existe $j_1 \in \{0, \ldots, k_1\}$ tel que

$$K^{(1)} = K_\varepsilon \cap \overline{b(e_{j_1}, 1)}$$

contient une sous-suite $(x_m^{(1)})_{m\in\mathbb{N}}$ de $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$. De même, vu l'inclusion $K^{(1)} \subseteq A_2$, il existe une sous-suite $(x_m^{(2)})_{m\in\mathbb{N}}$ de $(x_m^{(1)})_{m\in\mathbb{N}}$ dont tous les éléments appartiennent à

$$K^{(2)} = K^{(1)} \cap \overline{b\left(e_{j_2}, \frac{1}{2}\right)}$$

pour un $j_2 \in \{0, \ldots, k_2\}$ bien choisi. En procédant de proche en proche, nous obtenons pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ un ensemble $K^{(n+1)}$ de diamètre inférieur à $\frac{2}{n+1}$ et une sous-suite $(x_m^{(n+1)})_{m\in\mathbb{N}}$ de $(x_m^{(n)})_{m\in\mathbb{N}}$ dont tous les éléments appartient à $K^{(n+1)}$. Considérons la sous-suite $(x_m^{(m)})_{m\in\mathbb{N}_0}$ de $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, $(x_m^{(m)})_{m\ge n}$ est une sous-suite de $(x_m^{(n)})_{m\in\mathbb{N}}$ et vit donc dans $K^{(n)}$. Ainsi, pour tout $\eta > 0$, si N est un naturel tel que $N \ge \frac{1}{\eta}$ et si $p, q \ge 2N$, alors

$$d\left(x_p^{(p)}, x_q^{(q)}\right) < \frac{2}{2N} \le \eta.$$

Cela montre que la suite $(x_m^{(m)})_{m\in\mathbb{N}_0}$ est de Cauchy. L'espace (X, d) étant complet, elle converge vers un point $x \in X$ qui appartient à K_ε puisque K_ε est fermé. □

Il est utile de savoir quelles hypothèses jouent un rôle dans la tendance d'une mesure à être transverse à *beaucoup ou peu* de boréliens. C'est notamment le cas de la *concentration*. On dit qu'une mesure est *concentrée* sur un ensemble si la mesure du complémentaire est nulle. Intuitivement, si une mesure est *fortement concentrée*,[20] on connaît un ensemble *petit* qui est de mesure non-nulle et un borélien fixé a alors *de fortes chances* de contenir un translaté de cet ensemble. Ainsi, plus une mesure est concentrée, plus la classe des boréliens auxquels elle est transverse sera restreinte. L'exemple suivant illustre ce fait.

20. L'information contenue dans une mesure est incluse dans le plus grand ensemble sur lequel elle est concentrée. Dès lors, une mesure est *fortement concentrée* si l'information que renferme cette mesure est condensée sur un ensemble *petit* au sens de l'inclusion.

Exemple 1.3.12. Dans tout espace vectoriel topologique complètement métrisable X, la mesure de Dirac est uniquement transverse au vide. En effet, considérons $x_0 \in X$ et $\mu = \delta_{x_0}$. Le compact $\{x_0\}$ vérifie la condition (1) de la définition 1.3.10. En outre, tout translaté du vide est évidemment de mesure nulle, mais tout borélien non-vide admet au moins un translaté qui contient x_0 et qui est donc de mesure non-nulle.

Définition 1.3.13. Soit X un espace vectoriel topologique complètement métrisable. Un borélien B de X est *timide* s'il existe une mesure transverse à B. Plus généralement, un sous-ensemble de X est *timide* s'il est inclus dans un borélien timide. Enfin, le complémentaire d'un sous-ensemble timide de X est dit *prévalent*.

Une question qui se pose naturellement est de savoir s'il ne serait pas équivalent de définir un ensemble timide comme un ensemble qui admet une mesure transverse. Autrement dit, est-ce réellement utile de faire intervenir les boréliens dans la définition 1.3.13 ? Cette interrogation est liée à la nécessité de supposer l'ensemble B borélien dans la caractérisation 1.3.9. Elekes et al. traitent ces problèmes dans les articles [54, 55, 57] et en concluent que la mention des boréliens est fondée dans les deux cas. Plus précisément, il y est montré d'une part qu'un ensemble qui admet une mesure transverse n'est pas nécessairement inclus dans un borélien timide, et d'autre part que $\mathbb{R}$ possède un sous-ensemble A de mesure de Lebesgue non-nulle pour lequel il est possible de trouver une mesure de probabilité borélienne annulée par tous les translatés de A. En outre, il y est constaté que certains espaces vectoriels peuvent s'écrire comme une union dénombrable (voire finie) d'ensembles qui admettent une mesure transverse, ce qui réfute la propriété $(\mathcal{P}_3)$.

Les ensembles *petits* étant à présent définis, étudions leurs propriétés.

Généralisation de la notion *presque partout*

Nous aimerions d'abord montrer que les quatre propriétés présentées en début de chapitre s'adaptent aux ensembles timides, puis prouver la correspondance dans $\mathbb{R}^n$ avec l'annulation de la mesure de Lebesgue. On fixe pour cette section un espace vectoriel topologique X (réel ou complexe) muni d'une métrique d compatible avec la topologie de X, complète et invariante par translation.

Les propriétés $(\mathcal{P}_2)$ et $(\mathcal{P}_4)$ sont trivialement conservées, comme le montre le résultat suivant.

Proposition 1.3.14. *Si A est un sous-ensemble timide de X, alors il en va de même de tout sous-ensemble de A ainsi que de tout translaté de A.*

Démonstration. Si B est le borélien timide dans lequel A est inclus, alors tout sous-ensemble de A est inclus dans B et tout translaté $A + x$ de A, avec $x \in X$, est inclus dans le borélien $B + x$ qui admet la même mesure transverse que B. □

Passons à la propriété $(\mathcal{P}_1)$. Nous aurons besoin du lemme suivant qui lie la définition 1.3.10 des mesures transverses aux conditions imposées à la mesure μ dans la caractérisation 1.3.9.

Lemme 1.3.15. *Tout borélien timide de X admet une mesure transverse finie et à support compact. De plus, le support peut être choisi de diamètre arbitrairement petit.*

Démonstration. Soient B un borélien timide de X et μ une mesure transverse à B. Par la condition (1) de la définition 1.3.10, cette mesure peut être restreinte à un compact K de mesure finie non-nulle. Fixons $\varepsilon > 0$ et considérons un recouvrement de K par des boules ouvertes de rayon ε. Nous pouvons en extraire un recouvrement fini, noté $(b_n)_{n\in\{0,\ldots,N\}}$ ($N \in \mathbb{N}$), avec au moins une boule b_j de ce recouvrement qui intersecte K en un ensemble de mesure non-nulle. En effet, dans le cas contraire, K serait de mesure nulle puisque

$$\mu(K) = \mu\left(\bigcup_{n=0}^{N}(b_n \cap K)\right) \leq \sum_{n=0}^{N}\mu(b_n \cap K) = 0,$$

ce qui contredirait la construction de K. La restriction de μ à l'intersection entre K et l'adhérence de b_j est la mesure $\mu_{K\cap\overline{b_j}}$ définie en posant

$$\mu_{K\cap\overline{b_j}}(\widetilde{B}) = \mu(\widetilde{B} \cap K \cap \overline{b_j})$$

pour tout borélien $\widetilde{B}$ de X. Elle est clairement finie et transverse à B. En appliquant la remarque 1.3.8 à la mesure $\mu_{K\cap\overline{b_j}}$ et au compact $K \cap \overline{b_j}$, on voit qu'elle est également à support compact de rayon majoré par ε, ce qui conclut. $\square$

Proposition 1.3.16. *Tout sous-ensemble timide de X est d'intérieur vide.*

Démonstration. Supposons que A soit un sous-ensemble timide d'intérieur non-vide de X. Alors A est inclus dans un borélien timide B de X, également d'intérieur non-vide. D'une part, B est voisinage d'au moins un de ses points donc il existe $x \in B$ et $\varepsilon > 0$ tels que $b(x,\varepsilon) \subseteq B$. D'autre part, il existe une mesure μ transverse à B et le lemme 1.3.15 nous permet de supposer que son support K est un compact de diamètre majoré par ε. Par conséquent, nous pouvons trouver un point y de X pour lequel $K \subseteq b(x,\varepsilon) + y$. Pour un tel y, la relation

$$0 = \mu(B + y) \geq \mu(b(x,\varepsilon) + y) \geq \mu(K) > 0$$

mène à une contradiction. $\square$

De ce résultat découle directement le suivant.

Corollaire 1.3.17. *Tout sous-ensemble prévalent de X est dense dans X.*

Démonstration. Si A est un sous-ensemble prévalent de X, alors $X \setminus A$ est timide et la proposition 1.3.16 montre que $X \setminus A$ est d'intérieur vide. Puisque l'ensemble $X \setminus \overline{A}$ est un ouvert inclus dans $X \setminus A$, il est vide et A est bien dense dans X. $\square$

Il reste à démontrer la validité de $(\mathcal{P}_3)$. Introduisons le concept de *convolution* de deux mesures qui nous permettra, à partir de deux mesures transverses respectivement à deux boréliens, de construire une troisième mesure transverse à l'union de ces deux boréliens.

Définition 1.3.18. Soient μ et ν deux mesures σ-finies sur X et soit B un borélien de X. Désignons par $\mu \times \nu$ la mesure produit de μ et ν définie sur $X \times X$ et par B^Σ l'ensemble $\{(x,y) \in X \times X : x+y \in B\}$. Alors B^Σ est un borélien du produit cartésien $X \times X$ par continuité de l'addition et la *convolution* des deux mesures μ et ν est définie par la relation

$$(\mu * \nu)(B) = (\mu \times \nu)(B^\Sigma).$$

Autrement dit, la convolution $\mu * \nu$ est la mesure image de la mesure produit $\mu \times \nu$ par l'application

$$X \times X \to X : (x,y) \mapsto x+y.$$

Remarque 1.3.19. Comme

$$(B^\Sigma)_x = \{y \in X : (x,y) \in B^\Sigma\} = \{y \in X : x+y \in B\} = B - x.$$

pour tout $x \in X$, le théorème de Fubini permet de réécrire

$$(\mu * \nu)(B) = \int_X \mu(B-y)d\nu(y) = \int_X \nu(B-x)d\mu(x) = (\nu * \mu)(B).$$

Vérifions d'abord que la convolution de deux mesures constitue bien une mesure.

Proposition 1.3.20. *Soient μ et ν deux mesures σ-finies sur X. La convolution de μ et ν est une mesure sur X.*

Démonstration. La relation $(\mu * \nu)(\emptyset) = 0$ est claire. De plus, si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de boréliens de X deux à deux disjoints, alors

$$(\mu * \nu)\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = (\mu \times \nu)\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n^\Sigma\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}(\mu \times \nu)(B_n^\Sigma) = \sum_{n=0}^{+\infty}(\mu * \nu)(B_n)$$

puisque les éléments de $(B_n^\Sigma)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux disjoints. □

Montrons ensuite que le produit de convolution préserve la transversalité.

Lemme 1.3.21. *Soient μ et ν deux mesures finies à support compact. Si μ est transverse au borélien B de X, alors $\mu * \nu$ est également transverse à B.*

Démonstration. Notons K et L les supports respectifs des mesures μ et ν. Par continuité de l'addition, $K+L$ est un compact vérifiant

$$(\mu * \nu)(K+L) = (\mu \times \nu)((K+L)^\Sigma) \geq (\mu \times \nu)(K \times L) = \mu(K)\nu(L) > 0$$

car $K \times L \subseteq (K+L)^\Sigma$. De plus, la convolution $\mu * \nu$ est une mesure finie puisque

$$(\mu * \nu)(X) = (\mu \times \nu)(X^\Sigma) = (\mu \times \nu)(X \times X) = \mu(X)\nu(X) < +\infty.$$

Nous avons ainsi montré la condition (1) de la définition 1.3.10. Il nous faut encore vérifier que tout translaté de B est de mesure $\mu * \nu$ nulle. C'est clair car la remarque 1.3.19 permet d'écrire

$$(\mu * \nu)(B+x) = \int_X \mu(B+x-y)\, d\nu(y) = 0$$

pour tout $x \in X$. □

Remarque 1.3.22. Au vu de la démonstration, il suffit de supposer que μ et ν sont des mesures finies telles que $\nu(L) > 0$ pour un compact L de X et μ est transverse au borélien B de X pour que $\mu * \nu$ soit transverse à B.

Cela nous permet d'établir la stabilité vis-à-vis des unions finies.

Proposition 1.3.23. *Toute union finie de sous-ensembles timides de X est timide dans X.*

Démonstration. Il suffit de montrer que l'union de deux ensembles timides est timide. Prenons donc deux ensembles timides, deux boréliens timides B_1 et B_2 de X les contenant, et enfin deux mesures finies à support compact μ_1 et μ_2 transverses à B_1 et B_2 respectivement, l'existence de telles mesures étant garantie par le lemme 1.3.15. Le lemme 1.3.21 implique que la convolution $\mu_1 * \mu_2$ est transverse à B_1 et B_2, et donc aussi à $B_1 \cup B_2$ puisque

$$(\mu_1 * \mu_2)((B_1 \cup B_2) + x) \leq (\mu_1 * \mu_2)(B_1 + x) + (\mu_1 * \mu_2)(B_2 + x) = 0$$

quel que soit $x \in X$. □

Enfin, une généralisation des constructions précédentes à une convolution infinie de mesures permet de démontrer $(\mathcal{P}_3)$. [21]

Proposition 1.3.24. *Toute union dénombrable de sous-ensembles timides de X est timide dans X.*

Démonstration. Considérons une suite de sous-ensembles timides de X ainsi qu'une suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de boréliens timides les contenant. Soit également $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures transverses respectivement aux éléments de la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par le lemme 1.3.15, on peut supposer que chaque μ_n est une mesure finie à support compact K_n de diamètre strictement majoré par 2^{-n}. En normalisant et translatant ces mesures, on peut en outre supposer $\mu_n(X) = 1$ et $0 \in K_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Sous ces hypothèses, on peut définir une mesure μ qui est la convolution infinie des μ_n.

Par le théorème de Tychonoff, le produit cartésien $K^\Pi = \prod_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est un compact de $\prod_{n\in\mathbb{N}} X$. De plus, les espaces $(K_n, \mathcal{B}(K_n), \mu_n)$ sont des espaces probabilisés par la remarque 1.3.8. Vu la théorie des produits infinis de mesures, on peut considérer la mesure produit $\mu^\Pi = \prod_{n\in\mathbb{N}} \mu_n$ définie sur les boréliens de K^Π et on a $\mu^\Pi(K^\Pi) = 1$. Comme X est complet et comme $d(x_n, 0) < 2^{-n}$ pour tout $x_n \in K_n$ et tout $n \in \mathbb{N}$, l'application

$$\varphi : K^\Pi \to X : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$$

est bien définie et continue. En effet, pour tout $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^\Pi$, la suite des sommes partielles $(\sum_{n=0}^{N} x_n)_{N\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans X puisque pour tous $p, q \in \mathbb{N}$ avec $q > p$, on a

$$d\left(\sum_{n=0}^{p} x_n, \sum_{n=0}^{q} x_n\right) = d\left(\sum_{n=p+1}^{q} x_n, 0\right) \leq \sum_{n=p+1}^{q} d(x_n, 0) < \sum_{n=p+1}^{q} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^p} - \frac{1}{2^q} \leq \frac{1}{2^p}.$$

21. Les produits infinis de mesures sont présentés en détail dans la section 3.2 du mémoire [60].

Cela montre que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ converge bien dans X. Pour établir la continuité de φ,[22] considérons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^\Pi$ et V_x un voisinage de $x = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $b(x, 2^{-N}) \subseteq V_x$. Posons

$$r = \frac{2^{-N}}{2(N+2)}.$$

On veut montrer

$$\varphi\left(\prod_{n=0}^{N+1} b(x_n, r) \times \prod_{n\geq N+2} K_n\right) \subseteq b(x, 2^{-N}) \subseteq V_x,$$

ce qui montrera que $\varphi^{-1}(V_x)$ est un voisinage de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans K^Π. Comme $K_n \subseteq b(x_n, 2^{-n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$\sum_{n=0}^{N+1} b(x_n, r) + \sum_{n=N+2}^{+\infty} b(x_n, 2^{-n}) = x + \sum_{n=0}^{N+1} b(0, r) + \sum_{n=N+2}^{+\infty} b(0, 2^{-n}),$$

il suffit de prouver

$$\sum_{n=0}^{N+1} b(0, r) + \sum_{n=N+2}^{+\infty} b(0, 2^{-n}) \subseteq b(0, 2^{-N}).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit donc

$$y_n \in \begin{cases} b(0, r) & \text{si } n \leq N+1 \\ b(0, 2^{-n}) & \text{si } n \geq N+2 \end{cases}.$$

On a

$$d\left(\sum_{n=0}^{+\infty} y_n, 0\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} d(y_n, 0) < \sum_{n=0}^{N+1} \frac{2^{-N}}{2(N+2)} + \sum_{n=N+2}^{+\infty} 2^{-n} = 2^{-N-1} + 2^{-N-1} = 2^{-N},$$

ce qui termine la preuve de la continuité de φ.

L'image K de K^Π par φ est donc compacte et μ^Π induit une mesure μ à support dans K et définie pour tout $B \in \mathcal{B}(X)$ par

$$\mu(B) = \mu^\Pi(B^\Sigma),$$

où

$$B^\Sigma = \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^\Pi : \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \in B\right\} = \varphi^{-1}(B)$$

est un borélien de K^Π. Pour vérifier que μ est bien une mesure, le raisonnement est identique à celui utilisé pour la proposition 1.3.20. Il suffit pour conclure de montrer que μ est transverse à chaque B_n puisqu'il en découlerait que pour tout $x \in X$, on a

$$\mu\left(\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) + x\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(B_n + x) = 0.$$

22. Dans les sources consultées pour cette preuve (voir début de section 1.3), la continuité de φ est simplement mentionnée. Nous en donnons ici les détails.

Fixons donc $n \in \mathbb{N}$. Puisque le produit cartésien de mesures est associatif et commutatif, on peut écrire $\mu^\Pi = \mu_n \times \nu_n^\Pi$ avec $\nu_n^\Pi = \prod_{j \neq n} \mu_j$. Soit ν_n la mesure sur X induite par ν_n^Π sous l'application somme, c'est-à-dire

$$\nu_n(B) = \nu_n^\Pi(B^{\Sigma_n})$$

pour tout borélien B de X, où

$$B^{\Sigma_n} = \left\{ (x_j)_{j \neq n} \in \prod_{j \neq n} K_j : \sum_{j \neq n} x_j \in B \right\}.$$

Alors $\mu = \mu_n * \nu_n$. En effet, pour tout borélien B de X, nous avons

$$\begin{aligned}
(\mu_n * \nu_n)(B) &= \int_{K_n} \nu_n(B - x) d\mu_n(x) \\
&= \int_{K_n} \nu_n^\Pi((B - x)^{\Sigma_n}) d\mu_n(x) \\
&= \int_{K_n} \nu_n^\Pi((B^\Sigma)_x) d\mu_n(x) \\
&= (\mu_n \times \nu_n^\Pi)(B^\Sigma) \\
&= \mu^\Pi(B^\Sigma) \\
&= \mu(B)
\end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}
(B^\Sigma)_x &= \left\{ (x_j)_{j \neq n} \in \prod_{j \neq n} K_j : \sum_{j=0}^{+\infty} y_j \in B \text{ avec } y_j = x_j \ \forall j \neq n \text{ et } y_n = x \right\} \\
&= \left\{ (x_j)_{j \neq n} \in \prod_{j \neq n} K_j : \sum_{j \neq n} x_j \in B - x \right\} \\
&= (B - x)^{\Sigma_n}
\end{aligned}$$

pour tout $x \in K_n$. Vu le lemme 1.3.21, μ est transverse à B_n. □

Remarque 1.3.25. La démonstration précédente fait usage de la complétude de X. Nous verrons à l'exemple 1.3.33 que l'on ne peut se passer de cette hypothèse.

La théorie développée respecte donc bien les propriétés prescrites. Le second but de cette section est de vérifier que les concepts de timidité et de mesure de Lebesgue nulle coïncident dans $\mathbb{R}^n$.

Proposition 1.3.26. *Un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ est timide si et seulement s'il est inclus dans un borélien de mesure de Lebesgue nulle.*

Démonstration. Il est suffisant de montrer qu'un borélien de $\mathbb{R}^n$ est timide si et seulement s'il est de mesure de Lebesgue nulle. D'une part, le lemme 1.3.15 montre que si un borélien est timide, il admet une mesure transverse finie à support compact. Cette mesure peut aisément être ramenée à une mesure de probabilité et, dans ce cas, la proposition 1.3.9 implique que ce borélien est de mesure de Lebesgue nulle. D'autre part, si un borélien est de mesure de Lebesgue nulle, alors la mesure de Lebesgue est transverse à ce borélien puisque la condition (1) de la définition 1.3.10 est vérifiée pour n'importe quelle boule compacte et la condition (2) découle de l'invariance par translation. Cela montre que le borélien considéré est timide. □

En particulier, la mesure de Lebesgue est transverse à tout borélien timide de $\mathbb{R}^n$. Nous verrons bientôt que l'un des meilleurs candidats pour montrer qu'un borélien en dimension infinie est timide est une généralisation de la mesure de Lebesgue.

Nous pouvons remarquer que la classe des ensembles timides vérifie une autre propriété de stabilité, à savoir la stabilité par dilatation.

Proposition 1.3.27. *Si A est un sous-ensemble timide de X, alors pour tout $\lambda > 0$, l'ensemble λA est également timide.*

Démonstration. On sait qu'il existe un borélien B contenant A, un compact K et une mesure finie μ tels que $\mu(K) > 0$ et $\mu(B + x) = 0$ pour tout $x \in X$. Notons f l'application continue $f : X \to X : y \mapsto \lambda y$. Alors la mesure $\mu_f = \mu \circ f^{-1}$ est finie et vérifie

$$\mu_f(\lambda K) = \mu(K) > 0,$$

avec λK compact dans X, ainsi que

$$\mu_f(\lambda B + x) = \mu\left(B + \frac{1}{\lambda}x\right) = 0$$

quel que soit $x \in X$, ce qui montre que μ_f est transverse à λB. □

Pour vérifier que les ensembles dénombrables et les compacts en dimension infinie sont timides, nous n'utiliserons pas la définition telle quelle mais plutôt un critère pratique. C'est l'objet du paragraphe suivant.

Critères de (non-)prévalence

Manipuler la notion de prévalence nécessite de trouver des mesures transverses à des boréliens donnés. Une *mesure de Lebesgue portée par un sous-espace vectoriel de dimension finie* est souvent un bon candidat et permet de définir les *sondes* qui, à leur tour, fourniront une condition suffisante pour qu'un ensemble soit prévalent. [23] On considère ici un espace

23. Cette condition n'est cependant pas nécessaire, comme en atteste l'annexe B de [3] (avec la nomenclature propre à cet article que nous introduirons à la section 1.4).

vectoriel topologique X sur $\mathbb{R}$ [24] complètement métrisable par une distance d invariante par translation.

Définition 1.3.28. Soit S un sous-espace vectoriel de dimension finie n de X. Une *mesure de Lebesgue sur X portée par S* est une mesure $\mathcal{L}_S$ définie par $\mathcal{L}_S(B) = \mathcal{L}(\varphi^{-1}(B))$ pour tout borélien B de X, où $\varphi : \mathbb{R}^n \to S$ est un isomorphisme.

À chaque base de S est associé un isomorphisme φ et deux isomorphismes $\varphi, \psi : \mathbb{R}^n \to S$ donnent lieu à des mesures $\mathcal{L} \circ \varphi^{-1}, \mathcal{L} \circ \psi^{-1}$ distinctes. Cependant, ces deux mesures sont égales à une constante multiplicative près par le théorème de changement de variable et ont donc la propriété d'être absolument continues l'une par rapport à l'autre, c'est-à-dire d'admettre les mêmes ensembles négligeables. Puisque nous nous intéressons uniquement à ces ensembles de mesure nulle, l'abus de notation dans la définition 1.3.28 est commode.

Remarquons par ailleurs que la σ-algèbre borélienne de S pour la topologie induite par X est donnée par

$$\{B \cap S : B \in \mathcal{B}(X)\}$$

(proposition 3.3.20 de [60]), ce qui implique que $\varphi^{-1}(B) = \varphi^{-1}(B \cap S)$ est bien Lebesgue-mesurable pour tout borélien B de X.

Définition 1.3.29. Soit A un sous-ensemble de X. Une *sonde* pour A est un sous-espace vectoriel S de dimension finie de X pour lequel une mesure de Lebesgue portée par S est transverse à un borélien contenant le complémentaire de A dans X.

Intuitivement, S est donc une sonde pour A si pour tout $x \in X$, Lebesgue-presque tout point de $x + S$ appartient à A. Cela fournit bien un critère pour qu'un ensemble soit prévalent.

Proposition 1.3.30. *Si un sous-ensemble de X admet une sonde, alors il est prévalent.*

Démonstration. Soit A un sous-ensemble de X et soit S une sonde de X pour A. Par définition, $\mathcal{L}_S$ est une mesure transverse à un borélien contenant $X \setminus A$ et ce borélien est donc timide. Par inclusion, $X \setminus A$ est également timide et son complémentaire A est prévalent. □

De plus, une mesure de Lebesgue portée par un sous-espace vectoriel de dimension finie S de X vérifie toujours la condition (1) des mesures transverses en considérant comme compact la boule unité fermée de S. Pour prouver que $\mathcal{L}_S$ est transverse à un borélien, il suffira donc de garantir que tous les translatés dudit borélien annulent la mesure. Cette méthode peut être utilisée pour prouver que les ensembles dénombrables sont *petits*.

Corollaire 1.3.31. *Tout sous-ensemble dénombrable de X est timide.*

Démonstration. Comme une union dénombrable d'ensembles timides est timide (proposition 1.3.24), il suffit de montrer que les singletons le sont. Soit $y \in X$, soit v un élément non-nul de X, soit S le sous-espace vectoriel de dimension 1 engendré par v et soit

24. Les définitions et résultats qui suivent s'adaptent de manière élémentaire si X est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

$\varphi : \mathbb{R} \to S : \lambda \mapsto \lambda v$. Pour tout $x \in X$, $\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda v = y + x\}$ contient au plus un élément, d'où

$$\mathcal{L}_S(\{y\} + x) = \mathcal{L}(\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda v = y + x\}) = 0.$$

Ainsi, S est une sonde pour $X \setminus \{y\}$, ce qui induit que $\{y\}$ est timide. □

Les sondes permettent d'obtenir d'autres exemples-types d'ensembles qui sont timides, tels que les sous-espaces vectoriels propres ([22]) et les convexes qui n'engendrent pas tout l'espace ([146]).

Corollaire 1.3.32. *Tout sous-espace vectoriel propre et borélien de X est timide.*

Démonstration. Soit Y un sous-espace vectoriel propre et borélien de X et soit $A = X \setminus Y$. On désire construire une sonde pour A. Nous allons montrer que le sous-espace vectoriel engendré par n'importe quel élément a de A convient. À cette fin, fixons un tel a, notons S le sous-espace vectoriel de dimension 1 engendré par a et définissons $\varphi : \mathbb{R} \to S : \lambda \mapsto \lambda a$. Pour tout $x \in X$,

$$\mathcal{L}_S(X \setminus A + x) = \mathcal{L}(\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda a \in X \setminus A + x\}) = \mathcal{L}(\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda a - x \in Y\}) = 0$$

car l'ensemble

$$\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda a - x \in Y\}$$

contient au plus un élément. De fait, si l'on suppose au contraire qu'il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 a - x \in Y$ et $\lambda_2 a - x \in Y$, la linéarité de Y implique

$$a = \frac{(\lambda_1 a - x) - (\lambda_2 a - x)}{\lambda_1 - \lambda_2} \in Y,$$

une contradiction. □

Ce corollaire nous permet de donner un exemple d'espace non-complet se décomposant en une union dénombrable d'ensembles timides ([146]), ce qui justifie qu'on impose la complétude à l'espace X.

Exemple 1.3.33. Soit c_{00} l'espace des suites *ultimement nulles*, c'est-à-dire des suites qui n'admettent qu'un nombre fini d'éléments non-nuls. Muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, c_{00} est un espace vectoriel topologique normé qui n'est pas complet et qui peut s'écrire comme une union dénombrable d'ensembles timides. Pour le voir, considérons d'abord la suite $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}_0}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ par $x^{(n)} = (x_m^{(n)})_{m \in \mathbb{N}_0}$ avec

$$x_m^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{m} & \text{si } m \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Pour tous $p, q \in \mathbb{N}_0$ tels que $p < q$, on a

$$\left\| x^{(p)} - x^{(q)} \right\|_\infty = \frac{1}{p+1},$$

ce qui montre que la suite $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ est de Cauchy. Cependant, elle ne converge pas dans c_{00} car, dans le cas contraire, on pourrait trouver $(x_m)_{m\in\mathbb{N}_0} \in c_{00}$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} \left\| x^{(n)} - (x_m)_{m\in\mathbb{N}_0} \right\|_\infty = 0,$$

ce qui impliquerait en particulier

$$\lim_{n\to+\infty} x_m^{(n)} = x_m$$

et donc $x_m = \frac{1}{m}$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. Or $(\frac{1}{m})_{m\in\mathbb{N}_0}$ n'appartient pas à c_{00}. Cela étant, trouvons à présent une décomposition de c_{00} en une union dénombrable d'ensembles timides. Si pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, S_n désigne l'ensemble des suites dont seuls les n premiers éléments sont autorisés à être non-nuls, il est clair que S_n est un sous-espace vectoriel fermé propre de c_{00} (et donc un sous-ensemble timide par le corollaire 1.3.32) tel que $c_{00} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} S_n$.

Corollaire 1.3.34. *Tout sous-ensemble convexe borélien A de X qui ne contient aucun segment dans une direction fixée est timide. Cela arrive notamment si A est un borélien convexe qui n'engendre pas X.*

Démonstration. Soit y un élément non-nul de X tel que A ne contient aucun segment dans la direction de y. Notons S le sous-espace vectoriel de dimension 1 engendré par y et $\varphi : \mathbb{R} \to S : \lambda \mapsto \lambda y$. Par convexité de A et construction de y, pour tout $x \in X$, A rencontre $\{x + \lambda y : \lambda \in \mathbb{R}\}$ en au plus un point, ce qui montre qu'on a

$$\mathcal{L}_S(A - x) = \mathcal{L}(\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda y + x \in A\}) \leq \mathcal{L}(\{a\}) = 0.$$

Ainsi, S est une sonde pour $X \setminus A$ et A est timide. □

Outre leur praticité, un avantage des sondes est qu'une unique sonde peut souvent être utilisée pour montrer qu'une propriété donnée est prévalente sur plusieurs espaces fonctionnels en appliquant le corollaire suivant. Celui-ci, de même que la proposition 1.3.35 dont il découle, sont simplement énoncés dans [85]. Les preuves se déduisent aisément des définitions mais nous en donnons les détails par souci de complétude.

Proposition 1.3.35. *Supposons que μ est une mesure transverse à un borélien B de X dont le support est contenu dans un sous-espace vectoriel Y de X qui est complètement métrisable pour la topologie induite par X. Alors $B \cap Y$ est un sous-ensemble timide de Y.*

Démonstration. Par définition, il existe un compact K de X tel que $0 < \mu(K) < +\infty$ et $\mu(B + x) = 0$ pour tout $x \in X$. De plus, si l'on note U le plus grand ouvert de mesure μ nulle, on a $X \setminus U = \operatorname{supp}(\mu) \subseteq Y$. On doit trouver un compact $\widetilde{K}$ de Y qui satisfait $0 < \mu(\widetilde{K}) < +\infty$ et montrer qu'on a $\mu(B \cap Y + y) = 0$ pour tout $y \in Y$. Cette seconde condition est évidente puisque $\mu(B\cap Y + y) \leq \mu(B + y) = 0$ pour tout $y \in X$. Pour vérifier la première condition, posons $\widetilde{K} = K \cap \operatorname{supp}(\mu)$. Il s'agit bien d'un compact de Y qui vérifie $\mu(\widetilde{K}) \leq \mu(K) < +\infty$ et $\mu(\widetilde{K}) > 0$ sinon

$$\mu(K) \leq \mu(K \cap U) + \mu(K \cap (X \setminus U)) \leq \mu(U) + \mu(\widetilde{K}) = 0,$$

une contradiction. □

Corollaire 1.3.36. *Soit A un sous-ensemble de X, soit S une sonde pour A et soit Y un sous-espace vectoriel de X qui est complètement métrisable pour la topologie induite par X. Si $S \subseteq Y$, alors $A \cap Y$ est prévalent dans Y.*

Démonstration. Par définition d'une sonde, $\mathcal{L}_S$ est transverse à un borélien B contenant $X \setminus A$. De plus, $\operatorname{supp}(\mathcal{L}_S) \subseteq S \subseteq Y$. On déduit de la proposition 1.3.35 que $B \cap Y$ est timide dans Y, ce qui implique que $A \cap Y$ est prévalent dans Y. □

Utilisons à présent les sondes pour montrer que les compacts d'un espace de dimension infinie sont timides. Nous allons en fait établir que, pour un compact K donné, on peut construire un ensemble résiduel A de points de X tel que tout point de A engendre une sonde pour K. La conclusion découlera alors du fait que tout sous-ensemble résiduel de X est non-vide.

Proposition 1.3.37. *Si X est un espace de Banach de dimension infinie, alors tous les compacts de X sont timides.*

Démonstration. Soit K un compact de X. On pose

$$f : \mathbb{R} \times K \times K \to X : (\lambda, x, y) \mapsto \lambda(x - y).$$

Si $x \in X$ n'est pas dans l'image de f, alors x engendre une droite $L = \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{R}\}$ dont chaque translaté rencontre K en au plus un point. En effet, dans le cas contraire, il existerait $y \in X$, des points distincts y_1, y_2 de K et des réels distincts λ_1, λ_2 vérifiant

$$\begin{cases} y_1 = \lambda_1 x + y \\ y_2 = \lambda_2 x + y \end{cases},$$

d'où

$$x = \frac{y_1 - y_2}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Par conséquent, x appartiendrait à l'image de f, ce qui contredirait notre hypothèse. En particulier, L est une sonde pour le complémentaire de K, qui est borélien, puisque pour tout $y \in X$,

$$\mathcal{L}_L(K + y) = \mathcal{L}(\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda x \in K + y\}) \leq \mathcal{L}(\{\lambda_1\}) = 0,$$

où $\lambda_1 x - y$ est l'éventuel unique point de $(L - y) \cap K$.

Il reste à montrer que l'image de f n'est pas égale à l'espace X tout entier. Nous allons en fait montrer que l'image de f est d'intérieur vide. Pour tout $N \in \mathbb{N}_0$, l'ensemble $[-N, N] \times K \times K$ est compact comme produit cartésien de compacts. Par continuité de f, il s'ensuit que $f([-N, N] \times K \times K)$ est un compact de X. Par conséquent, l'image de f

$$f(\mathbb{R} \times K \times K) = \bigcup_{N \in \mathbb{N}_0} f([-N, N] \times K \times K)$$

est une union dénombrable de compacts. Puisque X est de dimension infinie, les compacts sont d'intérieur vide par le théorème de Riesz. Or X est séparé donc ils sont également fermés. On a ainsi écrit l'image de f comme une union dénombrable de fermés d'intérieur vide, ce qui implique par le théorème de Baire que l'image de f est d'intérieur vide. □

Les sondes seront encore utilisées à plusieurs reprises dans le chapitre 3. Cela achèvera de nous convaincre qu'elles constituent un outil puissant pour établir la prévalence de certaines propriétés. Par contre, si l'on veut montrer qu'un ensemble n'est pas timide, les sondes ne sont plus d'aucune utilité étant donné qu'elles ne fournissent qu'une condition suffisante. Pour y remédier, Shi propose dans sa thèse différentes conditions qui impliquent qu'un ensemble n'est pas timide ([146]). Tout d'abord, en se basant sur un travail antérieur de Dougherty ([52]), il répertorie huit propriétés de ce type, où la condition la plus forte (1) et la condition la plus faible (4') traduisent respectivement la prévalence et la non-timidité. Si X est supposé séparable, B est un borélien de X et μ désigne une mesure de probabilité sur X, les propriétés sont listées de cette manière :

(1) $\exists \mu \, \forall x \in X,\ \mu(B+x) = 1$,

(2) $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \mu \, \forall x \in X,\ \mu(B+x) > 1-\varepsilon$,

(3) $\exists \varepsilon > 0 \, \exists \mu \, \forall x \in X,\ \mu(B+x) > \varepsilon$,

(4) $\exists \mu \, \forall x \in X,\ \mu(B+x) > 0$,

(1') $\forall \mu \, \exists x \in X,\ \mu(B+x) = 1$,

(2') $\forall \varepsilon > 0 \, \forall \mu \, \exists x \in X,\ \mu(B+x) > 1-\varepsilon$,

(3') $\exists \varepsilon > 0 \, \forall \mu \, \exists x \in X,\ \mu(B+x) > \varepsilon$,

(4') $\forall \mu \, \exists x \in X,\ \mu(B+x) > 0$.

De plus, Shi déduit le schéma d'implications ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccccc} (1) & \Rightarrow & (2) & \Rightarrow & (3) & \Rightarrow & (4) \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ (1') & \Rightarrow & (2') & \Rightarrow & (3') & \Rightarrow & (4') \end{array}$$

où l'absence de flèche indique qu'il est possible de trouver un contre-exemple à l'implication. Outre cette énumération, Shi démontre le résultat suivant qui fournit un nouveau critère pour la *non-petitesse* d'un ensemble.

Lemme 1.3.38. *Un sous-ensemble de X qui contient un translaté de n'importe quel compact de X ne peut pas être timide.*

Démonstration. Fixons un sous-ensemble A de X qui contient un translaté de tout compact de X et supposons au contraire qu'il soit timide. Alors A est inclus dans un borélien B qui admet une mesure transverse μ. Soit K un compact de X pour lequel $\mu(K) > 0$. Par hypothèse, on peut trouver $x \in X$ vérifiant $K+x \subseteq A$. Pour un tel x, on obtient l'absurdité

$$0 < \mu(K) \leq \mu(B-x) = 0.$$

□

Il existe une seconde technique classique pour établir la prévalence d'une propriété (notamment mentionnée dans [61, 68, 90]), laquelle sera exploitée dans les sections 3.2 et 3.3. Cette méthode s'applique lorsque l'on considère un espace vectoriel topologique polonais E de fonctions à valeurs complexes définies sur $\mathbb{R}^n$ et une propriété $\mathcal{P}$ satisfaite par certains éléments de E. Si A désigne l'ensemble de ces éléments, nous aimerions déterminer une mesure de probabilité μ borélienne sur E telle que $\mu(E \setminus A + f) = 0$ pour tout $f \in E$. Pour construire μ, nous allons mettre à profit la correspondance entre processus stochastiques et mesures de probabilité. Considérons donc X un processus défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs presque sûrement dans E. Autrement dit, pour tout $t \in \mathbb{R}^n$, on fixe une variable aléatoire $X_t : \Omega \to \mathbb{C}$ de sorte que $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}^n}$ induise une application

$$X : \Omega_1 \to E : \omega \mapsto \{X_t(\omega)\}_{t\in\mathbb{R}^n},$$

où Ω_1 est un sous-ensemble de Ω tel que $\mathbb{P}(\Omega_1) = 1$. Supposons qu'un tel processus X puisse être construit avec la condition que pour tout $f \in E$, $X + f$ a presque sûrement la propriété $\mathcal{P}$. Dans ce cas, la loi $\mathbb{P}_X$ de X définie par $\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$ pour tout $B \in \mathcal{B}(E)$ est transverse au complémentaire de A. Notons que l'on suppose E séparable pour ne pas s'encombrer de la condition (1) des mesures transverses.

Jusqu'à présent, nous avons donc défini la prévalence, attesté des propriétés convenues et établi des critères permettant de prouver la (non-)prévalence d'un ensemble. Dans la section suivante, nous allons étudier les notions obtenues en affaiblissant certaines hypothèses qui interviennent dans les définitions liées à la prévalence.

Notions dérivées et liens avec la prévalence

On fixe toujours X un espace vectoriel topologique (réel ou complexe) complètement métrisable par une distance d invariante par translation. Une première possibilité est de ne plus supposer qu'une mesure transverse à un borélien B doit s'annuler en tout translaté de B mais seulement en *beaucoup* de translatés.

Définition 1.3.39. Une mesure μ sur X est *essentiellement transverse* à un borélien B de X si

(1) il existe un compact K tel que $0 < \mu(K) < +\infty$,

(2) $\mu(B + x) = 0$ pour un ensemble prévalent de $x \in X$.

Toute mesure transverse à un borélien lui est évidemment essentiellement transverse. La réciproque n'est pas nécessairement vraie.

Exemple 1.3.40. Comme dans l'exemple 1.3.12, on considère la mesure de Dirac δ_{x_0} en un point x_0 de X. On sait qu'elle n'est transverse qu'au vide. Par contre, elle est essentiellement transverse à tout singleton $\{x_1\}$ de X. En effet,

$$\{x \in X : \delta_{x_0}(\{x_1\} + x) = 0\} = X \setminus \{x_0 - x_1\}$$

est prévalent.

Néanmoins, remplacer les mesures transverses par les mesures essentiellement transverses dans la définition 1.3.13 n'altèrerait pas la classe des boréliens timides.

Proposition 1.3.41. *Si un borélien B de X admet une mesure essentiellement transverse, alors B est timide.*

Démonstration. Considérons μ une mesure essentiellement transverse à B. Comme la démonstration du lemme 1.3.15 ne fait intervenir que la condition (1) des mesures transverses, μ peut être supposé fini et à support compact. Par hypothèse, l'ensemble

$$\{x \in X : \mu(B - x) > 0\}$$

est timide et est donc contenu dans un borélien timide $\widetilde{B}$. Soit ν une mesure finie, à support compact et transverse à $\widetilde{B}$. Par le lemme 1.3.21, on sait que $\mu * \nu$ vérifie la condition (1) des mesures transverses. En outre, pour tout $x \in X$, on a

$$(\mu * \nu)(B + x) = \int_X \mu(B + x - y) d\nu(y) = 0$$

puisque

$$\{y \in X : \mu(B + x - y) > 0\} \subseteq \widetilde{B} + x$$

est de mesure ν nulle. Par conséquent, $\mu * \nu$ est transverse à B et B est timide. □

Intéressons-nous à présent à une définition locale de la prévalence.

Définition 1.3.42. Un sous-ensemble A de X est dit *localement timide* si tout point de X admet un voisinage dont l'intersection avec A est timide. Le complémentaire d'un ensemble localement timide est dit *localement prévalent*.

Cela nous définit une nouvelle famille d'ensembles *petits* et nous pouvons donc nous interroger sur la validité des propriétés $(\mathcal{P}_1)$ à $(\mathcal{P}_4)$.

Proposition 1.3.43. *Les sous-ensembles localement timides de X vérifient les propriétés $(\mathcal{P}_1)$, $(\mathcal{P}_2)$, $(\mathcal{P}_4)$ et la classe qu'ils définissent est stable par union finie.*

La preuve découle directement des définitions et des propriétés des ensembles timides mais, n'apparaissant dans aucune des sources consultées, nous l'exposons tout de même.

Démonstration. Soit A un sous-ensemble localement timide de X et soit $x \in X$. Par hypothèse, il existe un voisinage V de x dont l'intersection avec A est timide. L'intersection de V avec n'importe quel sous-ensemble de A est donc également timide, ce qui suffit pour $(\mathcal{P}_2)$.

Considérons à nouveau A un sous-ensemble localement timide de X et $y \in X$. On aimerait montrer que $A+y$ est localement timide, ce qui prouverait $(\mathcal{P}_4)$. Pour tout $x \in X$, $x-y$ admet un voisinage V dont l'intersection avec A est timide. Alors $V+y$ est un voisinage de x et $(V + y) \cap (A + y) = (V \cap A) + y$ est timide, ce qui conclut.

Pour $(\mathcal{P}_1)$, supposons que A est un sous-ensemble localement timide d'intérieur non-vide de X. Alors pour tout $x \in X$, il existe un voisinage V_x de x tel que $V_x \cap A$ est timide et donc d'intérieur vide. De plus, il existe un point $x \in X$ et une boule b centrée en x tels que $b \subseteq A$. Quitte à réduire le rayon de b, on peut supposer $b \subseteq V_x$. Le point x est alors intérieur à $V_x \cap A$, ce qui est impossible.

Enfin, soient A_1, A_2 deux sous-ensembles localement timides de X et soit $x \in X$. Par définition, on peut trouver deux voisinages V_1 et V_2 de x tels que l'intersection de V_i avec A_i est timide pour $i = 1, 2$. Alors $V_1 \cap V_2$ est un voisinage de x tel que

$$V_1 \cap V_2 \cap (A_1 \cup A_2) = (V_1 \cap V_2 \cap A_1) \cup (V_1 \cap V_2 \cap A_2)$$

est timide comme union de deux ensembles timides. Cela montre que $A_1 \cup A_2$ est localement timide. Par récurrence, on obtient la stabilité vis-à-vis des unions finies. □

En revanche, la propriété $(\mathcal{P}_3)$ ne peut pas être démontrée en mimant les arguments précédents car une intersection dénombrable de voisinages n'est pas nécessairement un voisinage. Sans hypothèse supplémentaire, il n'est donc pas clair si une union dénombrable d'ensembles localement timides reste ou non localement timide. Supposer l'espace séparable remédie à ce problème et induit même l'équivalence entre timidité et timidité locale.

Proposition 1.3.44. *Tout sous-ensemble timide de X est localement timide. Si X est séparable, la réciproque est également vraie.*

Démonstration. La première partie de l'énoncé est évidente par stabilité de la classe des ensembles timides vis-à-vis de l'inclusion. On suppose donc que X est séparable et on considère A un sous-ensemble localement timide de X. Comme X est métrique, la séparabilité est équivalente à la propriété de Lindelöf. Ainsi, tout recouvrement ouvert de X admet un sous-recouvrement dénombrable. On sait que pour tout $x \in X$, il existe un voisinage V_x de x tel que $V_x \cap A$ est timide et on peut supposer que chaque V_x est ouvert. La famille $\{V_x : x \in X\}$ forme alors un recouvrement ouvert de X. En extrayant un sous-recouvrement dénombrable $(V_{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$, A peut être écrit comme une union dénombrable d'ensembles timides

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (V_{x_n} \cap A),$$

ce qui justifie qu'il soit lui-même timide. □

Pour conclure cette partie, nous allons obtenir une caractérisation des boréliens timides due à Matoušková ([113], voir aussi [54, 68]) et qui nous sera notamment utile dans la section 2.3. Grâce à cette caractérisation, il n'est plus nécessaire d'exhiber une mesure annulée par tous les translatés d'un borélien, mais simplement de pouvoir rendre tous ces translatés de mesure arbitrairement petite, le coût étant une condition sur les supports. Pour ce faire, nous avons besoin de munir l'ensemble des mesures de probabilité d'une structure d'espace vectoriel.

Définition 1.3.45. Soit $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures sur X. On dit que la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge étroitement* vers une mesure de probabilité μ si pour toute fonction $f : X \to \mathbb{R}$ continue et bornée, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int f d\mu_n = \int f d\mu.$$

Notons qu'il est équivalent de remplacer l'ensemble des fonctions bornées et continues par l'ensemble des fonctions bornées et uniformément continues (théorème 2.1 de [30] ou théorème 6.1 du chapitre II de [128]). Cette observation assure de plus que la définition a du sens puisqu'une mesure de probabilité μ est entièrement déterminée par les intégrales $\int f d\mu$, où f varie parmi les fonctions uniformément continues et bornées (théorème 1.2 de [30]). Enfin, nous avons le résultat suivant (théorème 6.8 de [30], proposition 2.3 de [80] et section II.6 de [128]).

Lemme 1.3.46. *Si X est séparable et si $\mathcal{M}$ désigne l'ensemble des mesures de probabilité boréliennes sur X, alors la distance de Lévy – Prohorov π définie sur $\mathcal{M}$ par*

$$\pi(\mu,\nu) = \inf\{\varepsilon > 0 : \mu(A) \leq \nu(A_\varepsilon) + \varepsilon \text{ et } \nu(A) \leq \mu(A_\varepsilon) + \varepsilon \ \ \forall A \in \mathcal{B}(X)\},$$

où

$$A_\varepsilon = \{x \in X : \exists y \in A \text{ tel que } d(x,y) < \varepsilon\} = \bigcup_{y \in A} b(y,\varepsilon),$$

munit $\mathcal{M}$ d'une structure d'espace polonais. De plus, la convergence selon π est équivalente à la convergence étroite. Enfin, $\mathcal{M}$ muni de la convolution forme un semi-groupe abélien ayant la mesure de Dirac δ_0 comme élément neutre et tel que la convolution est continue relativement à la distance π.

Passons au théorème de Matoušková.

Théorème 1.3.47. *Si X est séparable et si B est un borélien de X, alors B est timide si et seulement si pour tout $\delta > 0$ et tout $r > 0$, il existe une mesure de probabilité μ sur X telle que $\operatorname{supp}(\mu) \subseteq \overline{b(0,r)}$ et $\mu(B+x) \leq \delta$ pour tout $x \in X$.*

Démonstration. La condition nécessaire est claire puisque, si B est un borélien timide de X, le lemme 1.3.15 assure que B admet une mesure transverse finie (et donc aussi de probabilité en normalisant) à support de diamètre arbitrairement petit.

Supposons donc que B est un borélien de X tel que pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, il existe une mesure de probabilité μ_n avec $\operatorname{supp}(\mu_n) \subseteq \overline{b(0,\frac{1}{n})}$ et $\mu_n(B+x) \leq \frac{1}{n}$ pour tout $x \in X$. Montrons d'abord que la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ converge étroitement vers la mesure de Dirac δ_0. Quelle que soit la fonction $f : X \to \mathbb{R}$ continue et bornée, on a l'encadrement

$$\inf_{x \in \overline{b(0,\frac{1}{n})}} f(x) \leq \int_X f(x)\, d\mu_n(x) \leq \sup_{x \in \overline{b(0,\frac{1}{n})}} f(x).$$

La fonction f étant continue en 0, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \inf_{x \in \overline{b(0,\frac{1}{n})}} f(x) = f(0) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \sup_{x \in \overline{b(0,\frac{1}{n})}} f(x) = f(0).$$

Par conséquent,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f(x)\, d\mu_n(x) = f(0) = \int_X f(x)\, d\delta_0(x)$$

et la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ converge bien étroitement vers δ_0. Le lemme 1.3.46 affirme alors que la suite $(\pi(\mu_n,\delta_0))_{n\in\mathbb{N}_0}$ converge vers 0, où π désigne la distance de Lévy – Prohorov. Comme la convolution est une application continue par rapport à π dont δ_0 est l'élément neutre, on en tire que pour tout $\nu \in \mathcal{M}$, $(\pi(\nu*\mu_n,\nu))_{n\in\mathbb{N}_0}$ converge vers 0. En particulier, on peut définir par récurrence une sous-suite $(\mu_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ telle que pour tout $n\in\mathbb{N}_0$, si

$$\nu_1=\delta_0 \quad \text{et} \quad \nu_{n+1}=\mu_{k(1)}*\ldots*\mu_{k(n)},$$

on a

$$\pi(\nu_n*\mu_{k(n)},\nu_n)<2^{-n}.$$

En effet, $\lim_{n\to+\infty}\pi(\nu_1*\mu_n,\nu_1)=0$ donc il existe $k(1)\in\mathbb{N}_0$ tel que $\pi(\nu_1*\mu_{k(1)},\nu_1)<2^{-1}$. Une fois $k(1)$ construit, comme $\lim_{n\to+\infty}\pi(\nu_2*\mu_n,\mu_{k(1)})=0$, on peut trouver $k(2)\in\mathbb{N}_0$ satisfaisant $k(2)>k(1)$ et $\pi(\nu_2*\mu_{k(2)},\mu_{k(1)})<2^{-2}$. Supposons que $k(1),\ldots,k(n)$ aient été sélectionnés. Comme $\lim_{n\to+\infty}\pi(\nu_{n+1}*\mu_n,\nu_{n+1})=0$, il existe $k(n+1)\in\mathbb{N}_0$ tel que $k(n+1)>k(n)$ et $\pi(\nu_{n+1}*\mu_{k(n+1)},\nu_{n+1})<2^{-(n+1)}$. Nous avons ainsi établi

$$\pi(\mu_{k(1)}*\ldots*\mu_{k(n)},\mu_{k(1)}*\ldots*\mu_{k(n-1)})<2^{-n}$$

pour tout $n\geq 2$, ce qui signifie que la suite $(\mu_{k(1)}*\ldots*\mu_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ est de Cauchy dans $(\mathcal{M},\pi)$. Or cet espace est complet donc la suite est convergente et on peut définir pour tout $n\in\mathbb{N}_0$ les mesures de probabilité μ, β_n et γ_n par

$$\mu=\lim_{m\to+\infty}\mu_{k(1)}*\ldots*\mu_{k(m)},\quad \beta_n=\lim_{m\to+\infty}\mu_{k(n+1)}*\ldots*\mu_{k(n+m)},\quad \gamma_n=\nu_n*\beta_n.$$

Nous allons montrer pour conclure que μ est transverse à B.

On peut écrire $\mu=\nu_n*\mu_{k(n)}*\beta_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}_0$ et, en utilisant l'associativité et la commutativité du produit de convolution, on obtient

$$\mu(B+x)=(\mu_{k(n)}*\gamma_n)(B+x)=\int_X\mu_{k(n)}(B+x-y)\,d\gamma_n(y)\leq\frac{1}{k(n)}$$

pour tout $x\in X$. En faisant tendre n vers l'infini, on trouve $\mu(B+x)=0$ pour tout $x\in X$. Pour que μ soit transverse à B, il faut encore qu'elle vérifie la condition (1) des mesures transverses, ce qui est évident puisqu'elle est tendue par la proposition 1.3.11. Ainsi, B est timide. $\square$

Pour clore cette présentation de la prévalence, voyons comment Christensen a introduit ses ensembles *petits* et dans quel contexte il les a appliqués.

1.3.3 Version de Christensen

Plutôt que de travailler sur des espaces vectoriels topologiques complètement métrisables, Christensen ([39], voir aussi [25, 38, 54, 110, 146]) considère des groupes topologiques abéliens polonais. Par rapport à Hunt, Sauer et Yorke, Christensen ajoute donc systématiquement l'hypothèse de séparabilité mais gagne en généralité en considérant des groupes plutôt que des espaces vectoriels. Christensen étend également la notion de timidité à une classe plus large que la σ-algèbre borélienne, à savoir la σ-algèbre des ensembles *universellement mesurables*.

Définition 1.3.48. Soit μ une mesure borélienne sur un espace topologique. On note $\mathscr{A}_\mu$ la complétion de la σ-algèbre borélienne relative à la mesure μ et $\overline{\mu} : \mathscr{A}_\mu \to [0, +\infty]$ la *complétion de la mesure* μ, ce qui a du sens puisque $\mathscr{A}_\mu$ est encore une σ-algèbre.

Un sous-ensemble A d'un espace polonais X est alors dit *universellement mesurable* s'il appartient à la collection $\mathscr{A}_\mu$ pour toute mesure borélienne σ-finie μ sur X. [25]

Il est connu que tout groupe localement compact admet une unique mesure de Haar à droite et une unique mesure de Haar à gauche, [26] ces deux mesures coïncidant dans le cas abélien. L'existence d'une mesure de Haar à gauche caractérise même le fait que le groupe sous-jacent soit localement compact (théorème 3.3.11 de [54]), d'où la nécessité de définir les ensembles *Haar-nuls* d'un groupe topologique polonais sans faire directement intervenir la mesure de Haar. Si l'on s'accorde comme précédemment sur le fait que le σ-idéal des ensembles nuls est presque aussi bon que la mesure de Haar elle-même, il est suffisant de caractériser les ensembles de mesure nulle via des notions qui admettent, elles, une généralisation dans le cas non-localement compact. La caractérisation 1.3.9 des boréliens de $\mathbb{R}^n$ de mesure de Lebesgue nulle admet un analogue dans le cadre actuellement considéré. En effet, la démonstration recourt uniquement à des hypothèses vérifiées par toute mesure de Haar sur un groupe topologique polonais localement compact, comme la σ-finitude ou le fait que la boule unité ouverte est de mesure strictement positive et finie.

Proposition 1.3.49. *Soit A un sous-ensemble universellement mesurable d'un groupe topologique abélien polonais localement compact $(G, +, d)$ et notons h la mesure de Haar sur G. Alors $\overline{h}(A) = 0$ si et seulement s'il existe une mesure de probabilité borélienne μ sur G à support compact qui vérifie $\overline{\mu}(A + g) = 0$ pour tout $g \in G$.*

Pour le reste de cette section, on fixe un groupe topologique abélien polonais $(G, +, d)$ et on suppose la distance d invariante par translation. Pour simplifier les notations, une mesure σ-finie sur G désignera dorénavant une mesure borélienne σ-finie sur G étendue aux ensembles universellement mesurables.

Parallèlement au travail de Hunt, Sauer et Yorke, Christensen en arrive alors à une définition de ses ensembles *petits*, auxquels il donne le nom d'ensembles *Haar-nuls*.

Définition 1.3.50. Soit A un sous-ensemble universellement mesurable de G. On dit que A est *Haar-nul* s'il existe une mesure de probabilité μ sur G telle que $\mu(A + g) = 0$ pour tout $g \in G$. On dit qu'une telle mesure μ est une *mesure de test* pour l'ensemble A. Plus généralement, un sous-ensemble de G est dit *Haar-nul* s'il est contenu dans un ensemble universellement mesurable et Haar-nul. [27]

Nous avons prétendu en début de section que les ensembles universellement mesurables fournissaient un cadre plus général que les boréliens. Cela signifie que l'on doit pouvoir

25. Selon les sources, la famille des mesures σ-finies est parfois remplacée par la famille de toutes les mesures boréliennes ou celle composée uniquement des mesures de probabilité. Nous avons opté pour l'utilisation des mesures σ-finies car ce choix était cohérent avec les résultats présentés dans la suite.

26. Plus exactement, l'unicité est satisfaite à une constante multiplicative près.

27. Remarquons que la définition des ensembles Haar-nuls ne demande pas que les mesures de test vérifient la condition (1) des mesures transverses puisque cette condition est automatiquement vérifiée par la proposition 1.3.11.

trouver un ensemble Haar-nul qui ne peut pas être inclus dans un borélien Haar-nul. Pour que cela soit possible, il faut dans un premier temps être capable d'exhiber un ensemble universellement mesurable qui n'est pas borélien. On appelle ensemble *analytique* tout sous-ensemble d'un espace polonais qui peut s'écrire comme l'image continue d'un borélien d'un autre espace polonais et ensemble *coanalytique* le complémentaire d'un ensemble analytique. On peut alors montrer que tout ensemble (co)analytique est universellement mesurable (théorème 21.10 de [99]) et que la classe des ensembles (co)analytiques contient strictement la σ-algèbre borélienne dans tout espace polonais indénombrable (théorème 4.1.5 de [150]). Dans un second temps, on s'interroge quant à l'existence d'un ensemble Haar-nul non-inclus dans un borélien Haar-nul. Elekes, Nagy et Vidnyánszky démontrent deux résultats liés à cette question (théorèmes 4.1.1 de [54] et 1.8 de [56]), à savoir que

- un ensemble Haar-nul est inclus dans un ensemble analytique Haar-nul si et seulement s'il est inclus dans un borélien Haar-nul,
- il existe un ensemble coanalytique qui est Haar-nul mais qui n'est pas inclus dans un borélien Haar-nul.

Cela ratifie l'intérêt des ensembles universellement mesurables.

Passons aux propriétés des ensembles Haar-nuls, en commençant par un survol des qualités des ensembles timides qui sont conservées. Les démonstrations s'adaptent facilement.

Proposition 1.3.51. *Soit A un sous-ensemble de G.*

(1) Si A est Haar-nul, alors tout sous-ensemble de A est Haar-nul.

(2) Si A est Haar-nul, alors tout translaté de A est Haar-nul.

(3) Si A est universellement mesurable et Haar-nul, alors il existe une mesure μ finie et à support compact sur G telle que $\mu(A+g)=0$ pour tout $g \in G$. De plus, le support de μ peut être choisi de diamètre arbitrairement petit.

(4) Si A est Haar-nul, alors A est d'intérieur vide.

(5) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de sous-ensembles Haar-nuls de G, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est Haar-nul.

(6) Si G est localement compact, alors A est Haar-nul si et seulement s'il est inclus dans un ensemble universellement mesurable de mesure de Haar nulle.

Remarquons que pour le point (5), l'un des composants de la preuve de Hunt, Sauer et Yorke est la convolution de mesures. Plus précisément, il est suffisant de faire appel à des convolutions de mesures finies. Pour pouvoir étendre la définition 1.3.18 dans ce cas, assurons-nous que A^{Σ} est mesurable respectivement à toute mesure finie de $G \times G$ lorsque A est universellement mesurable : l'application

$$f : G \times G \to G : (x, y) \mapsto x + y$$

étant mesurable par rapport aux σ-algèbres boréliennes, si A est universellement mesurable dans G et si μ est une mesure borélienne finie sur $G \times G$, alors $\mu \circ f^{-1}$ est une mesure borélienne finie sur G, d'où $A \in \mathscr{A}_{\mu\circ f^{-1}}$ et $f^{-1}(A) \in \mathscr{A}_{\mu}$. Comme la mesure μ est arbitraire,

$A^{\Sigma} = f^{-1}(A)$ est bien mesurable respectivement à toute mesure finie de $G \times G$ comme nous l'espérions.[28]

Dans la suite de son article, Christensen ne cherche pas à obtenir des résultats de généricité mais utilise plutôt les ensembles Haar-nuls comme outil.

Proposition 1.3.52. *Soient A et B deux ensembles universellement mesurables de G. On définit*

$$F(A,B) = \{g \in G : (g+A) \cap B \textit{ n'est pas Haar-nul}\}$$

Alors $F(A,B)$ est un ouvert de G.

Démonstration. Si $F(A,B) = \emptyset$, il n'y a rien à démontrer donc on suppose le contraire. Si $g \in F(A,B)$ et $C = (g+A) \cap B$, alors C est un ensemble universellement mesurable qui n'est pas Haar-nul et on a $g + F(C,C) \subseteq F(A,B)$. En effet, pour tout $g' \in F(C,C)$, $(g+g'+A) \cap B$ n'est pas Haar-nul car il contient

$$(g' + ((g+A) \cap B))) \cap ((g+A) \cap B)$$

qui n'est pas Haar-nul. Par conséquent, si $F(C,C)$ est un voisinage de 0, $g + F(C,C)$ est un voisinage de g pour tout $g \in F(A,B)$ et $F(A,B)$ est un voisinage de chacun de ses points comme espéré. Il est donc suffisant de considérer le cas $A = B$ et de montrer que si A est n'est pas Haar-nul, alors $F(A,A)$ est un voisinage de 0.

Supposons que ce ne soit pas le cas. On peut alors choisir une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de G dont tous les éléments sont hors de $F(A,A)$ et telle que $d(0,g_n) \leq \frac{1}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$A' = A \setminus \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} ((g_n + A) \cap A) \right).$$

Puisque nous avons ôté de A une union dénombrable d'ensembles Haar-nuls, A' n'est pas Haar-nul. Posons $K = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et munissons-le de la topologie produit et de la structure de groupe usuelle. Il s'agit alors d'un groupe topologique polonais compact (exemple 2.1.4, propositions 2.3.11 et 2.3.14 de [150]). On définit l'application

$$\varphi : K \to G : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x_n g_n.$$

Pour des raisons similaires à celles invoquées dans la démonstration de la proposition 1.3.24, cette fonction est bien définie et continue. Puisque A' n'est pas un ensemble Haar-nul, il existe $g \in G$ tel que $\varphi^{-1}(g+A')$ n'est pas de mesure de Haar nulle dans K. Par le théorème de Steinhaus,[29] l'ensemble $V = \varphi^{-1}(g+A') - \varphi^{-1}(g+A')$ est un voisinage de 0 dans K.

28. La seule hypothèse de f nécessaire pour effectuer ce raisonnement est sa mesurabilité. Cela fonctionne donc de la même manière pour toute application continue, comme le notent d'ailleurs Elekes et Vidnyánszky dans [57] (lemme 4.4). En particulier, si A est mesurable, $A^{\Sigma} = \varphi^{-1}(A)$ est mesurable avec les notations de la démonstration 1.3.24 et on peut également étendre la définition des convolutions infinies de mesures.

29. Classiquement énoncé pour les ensembles réels de mesure de Lebesgue non-nulle, le *théorème de Steinhaus* est valable dans des cadres plus généraux et notamment pour les ensembles de mesure de Haar non-nulle dans un groupe topologique polonais localement compact (corollaire 3.3.10 et section 5.2 de [54]). D'ailleurs, le résultat qui nous occupe présentement règlera le cas des groupes topologiques abéliens polonais non-localement compacts. En effet, nous sommes en train de montrer que si A n'est pas Haar-nul, alors $F(A,A)$ est un voisinage de 0. Or $F(A,A)$ est clairement inclus dans $A - A$.

Notons $e_n = (\delta_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque V est un voisinage de 0, $e_n \in V$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité de φ, cela implique

$$g_n = \varphi(e_n) \in (g + A') - (g + A') = A' - A'.$$

Par conséquent, $(g_n + A') \cap A' \neq \emptyset$, ce qui contredit la définition de A'. □

Ce résultat permet de retrouver le fait que les compacts sont *petits* dans les groupes non-localement compacts, une remarque formulée par Christensen dans un article ultérieur ([38]).

Proposition 1.3.53. *Si G n'est pas localement compact, alors les compacts de G sont Haar-nuls.*

Démonstration. Soient A, B deux sous-ensembles universellement mesurables de G. On définit

$$F(A, B) = \{g \in G : (g + A) \cap B \text{ n'est pas Haar-nul}\}.$$

Par la proposition précédente, $F(A, B)$ est ouvert dans G. Si A n'est pas Haar-nul, alors $0 \in F(A, A)$. Puisque $F(A, A) \subseteq A - A$, on en conclut que $A - A$ est un voisinage de 0. Les compacts étant d'intérieur vide dans un groupe non-localement compact, cela montre que les compacts de G sont Haar-nuls. □

Tout comme il a été montré dans le corollaire 1.3.32 que tout sous-espace vectoriel propre borélien d'un espace vectoriel topologique polonais X est timide, il est également vrai que tout sous-espace vectoriel propre universellement mesurable de X est Haar-nul. En effet, notons Y un tel sous-espace et supposons au contraire qu'il ne soit pas Haar-nul. Par la proposition 1.3.52, on sait que $F(Y, Y)$ est ouvert. De plus, il contient clairement Y. Comme Y n'est pas ouvert,[30] il existe $x \in X \setminus Y$ tel que $(x + Y) \cap Y$ n'est pas vide, ce qui est impossible.

Il n'est a priori pas trivial qu'il existe des sous-espaces vectoriels propres qui ne soient pas universellement mesurables mais le résultat suivant l'assure dans le cas d'un espace de Fréchet séparable réel ou complexe.

Proposition 1.3.54. *Soit X un espace de Fréchet séparable sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) et soit $\{a_i : i \in I\}$ une base algébrique[31] de X. Pour tout $i \in I$, notons $b_i : X \to \mathbb{K}$ l'application qui à un élément x de X associe le coefficient de a_i dans la décomposition de x selon la base $\{a_i : i \in I\}$. Alors les sous-espaces vectoriels propres $b_i^{-1}(\{0\})$ de X sont universellement mesurables pour au plus un nombre fini de $i \in I$.*

30. Un sous-espace vectoriel Y d'un espace vectoriel topologique X est d'intérieur non-vide si et seulement s'il est égal à X. En effet, supposons que Y contient un voisinage V d'un de ses points x. Alors $V - x \subseteq Y$ et $V - x$ est un voisinage de 0, d'où une partie absorbante de X. Il s'ensuit que pour tout $y \in X$, il existe $\delta > 0$ tel que $ty \in V - x$ pour tout scalaire t satisfaisant $|t| < \delta$. Ainsi, $y = t^{-1}(ty) \in Y$ et $Y = X$.

31. Rappelons qu'une *base algébrique*, également appelée *base de Hamel* ([75]), d'un espace vectoriel X est un sous-espace linéairement indépendant de X qui l'engendre via des combinaisons linéaires finies à coefficients dans le champ associé.

Démonstration. Supposons que $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite d'éléments distincts de I telle que $b_{i_n}^{-1}(\{0\})$ est universellement mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$Y_n = \bigcap_{m\geq n} b_{i_m}^{-1}(\{0\}).$$

Chaque Y_n est un sous-espace vectoriel propre et universellement mesurable, et donc un ensemble Haar-nul. Clairement, $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$. Cela implique que X est Haar-nul par la propriété $(\mathcal{P}_3)$, une contradiction. □

Christensen s'intéresse également à un potentiel analogue du théorème de Fubini. Ce problème sera discuté à la section 3.1.

D'autres auteur·e·s ont envisagé la notion d'ensemble Haar-nul sans les hypothèses de commutativité ou de séparabilité imposées par Christensen. Ainsi, on retrouve dans [40, 54, 123, 136, 146, 149] une définition des ensembles *Haar-nuls*, *Haar-nuls à gauche*, *Haar-nuls à droite*, *Haar-nuls à droite et à gauche* (i.e. les ensembles pour lesquels il est possible de trouver une mesure de probabilité annulant respectivement les translatés bilatéraux, les translatés à gauche, les translatés à droite ou les translatés à droite et à gauche [32]), ou encore *ouvertement Haar-nuls* (i.e. les ensembles pour lesquels il est possible de trouver une mesure de probabilité et, pour n'importe quel seuil, un ouvert dont les translatés bilatéraux sont tous de mesure inférieure au seuil) dans un groupe topologique polonais non-nécessairement abélien, ainsi qu'une étude des propriétés du résultat 1.3.51 pour ces classes d'ensembles et des liens qui les unissent entre elles. D'un autre côté, Borwein et Moors considèrent dans [32] un groupe topologique abélien complètement métrisable et étendent les ensembles *Haar-nuls* dans ce cadre. Il vérifient ensuite que leur définition est bien identique à celle de Christensen si le groupe est supposé séparable et examinent ce que devient la proposition 1.3.51 dans ce contexte plus large. Une extension des ensembles Haar-nuls aux semi-groupes avec unité a également été envisagée par Topsøe et Hoffmann-Jørgensen dans [155] (voir aussi [146]), où ils s'intéressent eux aussi à un potentiel analogue de la proposition 1.3.51.

Cela achève l'introduction de la prévalence et de ses propriétés. Nous disposons donc de trois notions principales de généricité que nous allons étudier plus avant dans les chapitres suivants.

1.4 Autres notions de généricité

Les ensembles maigres, poreux et timides sont loin d'être les seules notions d'ensemble *petit* que l'on peut trouver dans la littérature. Ainsi, nous avons déjà mentionné dans la section 1.2 la profusion de notions de porosité existantes. Notons également qu'une variation de la prévalence définie sur l'espace des applications régulières entre variétés lisses a été

32. Les translatés *bilatéraux* d'un ensemble A sont les ensembles qui peuvent s'écrire gAg' avec g et g' dans le groupe, tandis que *les translatés à droite et à gauche* sont les ensembles de la forme gA ou Ag avec g dans le groupe.

explorée par Kaloshin ([97], voir aussi la section 6 de [125]). La section 2.3 présentera en outre les ensembles *HP-petits*, dont l'étude fut initiée en 2001 par Kolář ([103]). Nous proposons ici de survoler quelques autres notions de généricité.

Commençons par voir quelques idées qu'ont pu susciter les concepts de catégories de Baire et de prévalence chez différents auteurs.

En 2001, Anderson et Zame développèrent une notion de *prévalence relative* appropriée à la théorie des jeux et à ses applications en économie ([3], voir aussi la section 4 de [125]). Pour donner du sens à de telles études, il est nécessaire qu'un équilibre existe, soit localement unique et dépende *gentiment* des paramètres du problème. Il est cependant commun qu'une telle situation ne se présente pas et on se contente alors qu'elle soit vérifiée pour un *grand* ensemble de paramètres. Or les espaces de paramètres couramment rencontrés en économie peuvent être eux-mêmes des sous-ensembles *petits* d'un espace ambiant, comme c'est le cas de l'ensemble des variables aléatoires positives dans l'espace des variables aléatoires, ce qui mena les auteurs à la définition d'une notion de *grandeur relative*. Intuitivement, il est nécessaire de supposer les mesures transverses à support dans le sous-ensemble considéré. Cette condition n'est cependant pas suffisante, ce dont on peut se convaincre en remarquant que le produit de convolution impliqué dans la preuve de la stabilité vis-à-vis des unions finies (proposition 1.3.23) ne préserve pas le support. Pour y remédier, Anderson et Zame donnent à leur définition la forme suivante.

Définition 1.4.1. Soient X un espace vectoriel topologique, C un sous-ensemble convexe de X qui est complètement métrisable dans la topologie induite par X, c un point de C, et A un sous-ensemble de C qui est universellement mesurable dans X. On dit que A est *timide dans C en c* si pour tout $\delta \in]0,1]$ et tout voisinage W de 0 dans X, il existe une mesure de probabilité borélienne et régulière μ sur X qui est à support compact inclus dans $(\delta(C-c)+c) \cap (W+c)$ et satisfait $\mu(A+x) = 0$ [33] pour tout $x \in X$.

Cette définition peut sembler étrange en raison du rôle joué par le point c et des conditions imposées au support de μ mais Anderson et Zame montrent d'une part que c n'a en fait pas d'importance (i.e. que si A est timide dans C en un point de C, alors A est timide dans C en tout point de C), et d'autre part que ces conditions sont nécessaires pour que la théorie développée soit consistante avec les attentes d'une collection d'ensembles *petits*. Ils étudient ensuite les propriétés des ensembles *relativement timides*, propriétés résumées dans la proposition suivante. On y retrouve les attentes $(\mathcal{P}_1)$ à $(\mathcal{P}_4)$, la correspondance avec les ensembles Lebesgue-négligeables et la prévalence classique dans les cas requis, ou encore un équivalent du critère par les sondes.

Proposition 1.4.2. *Soient X un espace vectoriel topologique, C un sous-ensemble convexe de X qui est complètement métrisable dans la topologie induite par X et A un sous-ensemble de C qui est universellement mesurable dans X.*

(1) Tout sous-ensemble d'un ensemble timide dans C est timide dans C.

33. Pour être précis, nous devrions considérer la complétion de μ. Nous avons déjà simplifié les notations de cette manière dans la section 1.3.3.

(2) Tout translaté d'un ensemble timide dans C est timide dans le translaté de C correspondant.

(3) Toute union dénombrable d'ensembles timides dans C est timide dans C.

(4) Aucun ouvert de C n'est timide dans C.

(5) Si $X = \mathbb{R}^n$ et si C n'est pas d'intérieur vide, alors A est timide dans C si et seulement si $\mathcal{L}(A) = 0$.

(6) S'il existe S un sous-espace vectoriel de X de dimension finie tel que $\mathcal{L}_S(C + y) > 0$ pour un $y \in X$ et $\mathcal{L}_S(A + x) = 0$ pour tout $x \in X$ (auquel cas on dit que A est finiment timide *dans C), alors A est timide dans C.*

(7) Si $C = X$, la définition 1.4.1 coïncide avec la prévalence classique (définition 1.3.13).

En 2004, Dodos s'intéressa à la structure de l'ensemble des mesures de test d'un ensemble Haar-nul et cela le mena à la définition de nouveaux ensembles *petits* dans un groupe topologique abélien polonais $(G, +, d)$ ([50], voir aussi [54] et les références qui s'y trouvent).

Définition 1.4.3. Notons $\mathcal{M}$ la famille des mesures de probabilité boréliennes de G (munie d'une structure d'espace polonais comme dans le lemme 1.3.46) et considérons A un sous-ensemble universellement mesurable de G. On définit

$$T(A) = \{\mu \in \mathcal{M} : \mu(A + g) = 0 \ \forall g \in G\}$$

et on dit que A est *génériquement Haar-nul* si $T(A)$ est résiduel dans $\mathcal{M}$.

Le résultat ayant inspiré cette notion est le suivant : si A est un sous-ensemble analytique de G, alors $T(A)$ est soit vide (auquel cas A n'est pas Haar-nul), soit maigre dans $\mathcal{M}$, soit résiduel dans $\mathcal{M}$. Il a ensuite été vérifié que les ensembles génériquement Haar-nuls satisfont bien aux propriétés $(\mathcal{P}_1)$ à $(\mathcal{P}_4)$. De plus, il est clair que tout ensemble génériquement Haar-nul est Haar-nul et il s'est également avéré que

- tout ensemble génériquement Haar-nul est maigre,
- tout ensemble Haar-nul et σ-compact est génériquement Haar-nul.

En 2013, Darji présenta une notion topologique de *petitesse* analogue à la notion d'ensemble Haar-nul de Christensen ([44], voir aussi [54, 86]). Il considéra donc $(G, +, d)$ un groupe topologique abélien polonais et soumit la définition suivante.

Définition 1.4.4. Un sous-ensemble A de G est dit *Haar-maigre* s'il existe un borélien B contenant A, un espace métrique compact non-vide K et une fonction continue $f : K \to G$ tels que $f^{-1}(B + g)$ est maigre dans K pour tout $g \in G$. Une telle fonction f est appelée une *fonction témoin* pour A.

Le résultat suivant résume quelques propriétés des ensembles Haar-maigres.

Proposition 1.4.5.

- *Tout sous-ensemble Haar-maigre de G est maigre et la réciproque est vraie si et seulement si G est localement compact.*
- *Les sous-ensembles Haar-maigres de G forment un σ-idéal stable par translation.* [34]
- *Si G n'est pas localement compact, alors tout compact de G est Haar-maigre.*

L'analogie entre les ensembles Haar-nuls et Haar-maigres n'assure cependant pas que ces deux notions coïncident et il existe de fait des ensembles Haar-nuls et maigres qui ne sont pas Haar-maigres, ainsi que des ensembles Haar-maigres qui ne sont pas Haar-nuls.

Nous allons à présent voir trois nouvelles notions d'ensemble *petit* dans un espace de Banach réel séparable $(X, \|\cdot\|)$ et énoncer les liens qui les unissent entre elles et aux ensembles timides. Il s'agit des ensembles *Gaussiens-nuls*, *Aronszajn-nuls* et *cube-nuls* introduits respectivement dans [130], [7] et [112] (sans définition explicite dans [112] néanmoins). Les références [25, 54, 68, 146] fournissent également des informations sur ces notions.

Définition 1.4.6. Une *mesure gaussienne non-dégénérée sur* $\mathbb{R}$ est une mesure μ définie pour tout $B \in \mathbb{B}$ par

$$\mu(B) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \int_B e^{-\frac{(t-a)^2}{2b}} dt$$

pour des constantes réelles a et b avec $b > 0$. Une *mesure gaussienne non-dégénérée sur* X est alors une mesure μ pour laquelle $\mu \circ f^{-1}$ est une mesure gaussienne non-dégénérée sur $\mathbb{R}$ pour tout $f \in X^* \setminus \{0\}$. On dit enfin qu'un borélien B de X est *Gaussien-nul* si $\mu(B) = 0$ pour toute mesure gaussienne non-dégénérée μ sur X.

Définition 1.4.7. Pour tout $x \in X \setminus \{0\}$, on note $\mathcal{A}(x)$ la collection des boréliens B de X qui intersectent toute ligne parallèle à x en un ensemble dont la mesure de Lebesgue est nulle. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille finie ou infinie d'éléments non-nuls de X, on note $\mathcal{A}(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ la collection des boréliens B de X qui peuvent se décomposer sous la forme $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ avec $B_n \in \mathcal{A}(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Un borélien B de X est alors dit *Aronszajn-nul* s'il appartient à $\cap \mathcal{A}(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}})$, où l'intersection est prise sur toutes les familles $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments non-nuls de X dont l'enveloppe linéaire est dense dans X.

Définition 1.4.8. Notons $Q = [0,1]^{\mathbb{N}}$ et ν la mesure produit standard sur Q. Une mesure borélienne μ sur X est dite *cubique* s'il existe $x \in X$ et une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X satisfaisant $\sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\| < +\infty$ tels que μ peut s'écrire sous la forme $\mu = \nu \circ T^{-1}$, où l'application T est définie par

$$T : Q \to X : (q_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto x + \sum_{n=0}^{+\infty} q_n x_n.$$

Une telle mesure est en outre dite *non-dégénérée* si tous les hyperplans fermés de X sont de mesure nulle. Un borélien B de X est appelé *cube-nul* s'il annule toutes les mesures cubiques non-dégénérées sur X.

34. La démonstration repose sur un lemme comparable au lemme 1.3.15 et qui affirme que tout ensemble Haar-maigre admet une fonction témoin dont l'ensemble image est inclus dans une boule centrée à l'origine de diamètre arbitrairement petit.

Comme dans le cas de la prévalence (définition 1.3.13), on dit ensuite qu'un sous-ensemble quelconque de X est Gaussien-nul, Aronszajn-nul ou cube-nul s'il est inclus dans un borélien de X du même type.

Les trois familles précitées vérifient les propriétés suivantes. En particulier, elles satisfont aux conditions $(\mathcal{P}_1)$ à $(\mathcal{P}_4)$.

Proposition 1.4.9.

- *La classe des sous-ensembles Gaussiens-nuls de X, celle des ensembles Aronszajn-nuls de X et celle des ensembles cube-nuls de X sont des σ-idéaux stables par translation.*
- *Tout borélien Gaussien-nul de X est timide.*
- *Il existe des compacts de X (et donc des sous-ensembles timides) qui ne sont pas Gaussiens-nuls.*
- *Un borélien de X est Gaussien-nul si et seulement s'il est Aronszajn-nul.*
- *Un borélien de X est Gaussien-nul si et seulement s'il est cube-nul.*

Enfin, dans un tout autre registre, notons qu'il est intéressant pour examiner la *taille* d'un ensemble de regarder s'il contient des *grandes structures algébriques*. C'est ainsi que Gurariy initia le concept de *linéabilité* qui apparut pour la première fois explicitement dans l'article [6] (voir aussi la thèse [61] et les références qui s'y trouvent).

Définition 1.4.10. Soient X un espace vectoriel (resp. un espace vectoriel topologique), A un sous-ensemble de X et κ un nombre cardinal. On dit que A est *κ-linéable* (resp. *κ-dense-linéable*) si $A \cup \{0\}$ contient un espace vectoriel de dimension κ (resp. un espace vectoriel de dimension κ qui est en outre dense dans X). La mention de κ est omise si le sous-espace est de dimension infinie.

L'idée derrière cette définition est de considérer les ensembles qui ne sont pas linéables comme *petits* puisqu'ils ne contiennent pas de *grande structure algébrique*.

Chapitre 2

Comparaison des trois notions de généricité

Nous disposons à présent de trois familles d'ensembles *petits* : les ensembles maigres, σ-poreux et timides. Le but de ce chapitre est de s'interroger quant à une éventuelle hiérarchie entre ces classes. Les catégories de Baire et la prévalence provenant de considérations pour les unes topologiques, pour l'autre liées à la théorie de la mesure, il ne serait pas surprenant qu'aucune relation ne puisse être établie en toute généralité. Nous commencerons donc par fournir des exemples d'ensembles maigres mais pas timides ou, à l'inverse, timides mais pas maigres. Nous verrons même que ces deux classes peuvent être *complémentaires*, au sens où il est possible de trouver un ensemble qui soit à la fois *grand* et *petit*. Ensuite, puisque nous avons présenté la porosité comme un durcissement des catégories de Baire, nous vérifierons que tout ensemble σ-poreux est bien maigre et verrons que la réciproque est fausse en toute généralité. Une fois cela démontré, nous saurons en particulier qu'un ensemble timide n'est pas nécessairement σ-poreux. Cela nous laissera avec une dernière question : la porosité est-elle également plus forte que la prévalence ou est-il au contraire possible de trouver un ensemble timide qui ne soit pas σ-poreux ? Pour affiner la discussion, nous envisagerons un potentiel impact de la dimension de l'espace sous-jacent, ce qui nous conduira à deux conclusions opposées : la porosité est strictement plus forte que la prévalence en dimension finie mais les deux notions sont *complémentaires* en dimension infinie. Pour compléter la discussion, nous témoignerons d'une part de l'absence de réciproque en dimension finie et nous attarderons d'autre part sur une notion supplémentaire de généricité dont le σ-idéal est inclus dans chacune des trois classes principales de ce mémoire dans tout espace de Banach.

2.1 Comparaison entre les catégories de Baire et la prévalence

Plaçons-nous d'abord en dimension finie, où les ensembles timides sont mieux connus. Malgré la différence de perspective, les notions de Baire et de prévalence sont d'accord sur certains ensembles de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 2.1.1. Dans $\mathbb{R}^n$, l'ensemble des nombres rationnels est dénombrable et est donc à la fois de mesure de Lebesgue nulle et maigre.

Exemple 2.1.2. L'ensemble de Cantor K est de mesure nulle et nulle part dense puisqu'à l'étape n, il est constitué de 2^n intervalles de longueur $\frac{1}{3^n}$. En passant à la limite pour n qui tend vers l'infini, on obtient donc que K ne contient aucun intervalle et satisfait

$$\mathcal{L}(K) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

Ces exemples ne sont cependant que des cas particulier et en général, un ensemble résiduel peut être de mesure de Lebesgue nulle ou, par passage au complémentaire, un ensemble maigre de mesure de Lebesgue *pleine* (i.e. de complémentaire de mesure nulle). Propriété un peu moins forte, certains ensembles peuvent être *petits* selon l'une des deux définitions mais *non-petits* selon l'autre. Il semble même que ces deux cas soient plutôt *la règle* vu la profusion d'exemples de ce type qu'il est possible de construire. En voici une liste non-exhaustive inspirée des publications [68, 85, 125, 126, 146].

Une première idée peut être tirée de l'exemple 2.1.1 qui nous apprend que les rationnels forment un ensemble maigre et négligeable. Comme nous savons aussi qu'ils sont denses, nous pouvons *grossir* $\mathbb{Q}$ pour le rendre ouvert mais en augmentant peu sa mesure. Prendre des intersections de tels *grossissements* nous mènera à un ensemble à la fois timide et résiduel.

Exemple 2.1.3. Soit $(a_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ une suite dense de points de $\mathbb{R}^n$ à coordonnées rationnelles. Pour tous naturels non-nuls i, j, on note

$$I_{i,j} = a_i + \left]-\frac{1}{2 \cdot 2^{i+j}}, \frac{1}{2 \cdot 2^{i+j}}\right[^n, \ G_j = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} I_{i,j} \ \text{ et } \ B = \bigcap_{j \in \mathbb{N}_0} G_j.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $j_\varepsilon \in \mathbb{N}_0$ tel que $\varepsilon > \frac{1}{2^{nj_\varepsilon}}$. Comme B est un borélien inclus dans G_{j_ε}, on a

$$\mathcal{L}(B) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mathcal{L}(I_{i,j_\varepsilon}) \leq 2^{-nj_\varepsilon} \sum_{i=1}^{+\infty} 2^{-ni} \leq \varepsilon$$

pour tout $\varepsilon > 0$. On en tire $\mathcal{L}(B) = 0$. Par ailleurs, les G_j sont des ouverts denses et B est donc bien résiduel.

Cette construction montre que $\mathbb{R}^n$ peut s'écrire comme l'union d'un ensemble maigre et d'un ensemble timide. On dit que deux mesures μ et ν définies sur un même espace mesurable $(X, \mathscr{A})$ sont *mutuellement singulières*, ce que l'on note $\mu \perp \nu$, s'il est possible de trouver un ensemble $A \in \mathscr{A}$ tel que $\mu(A) = 0 = \nu(X \setminus A)$. Les catégories de Baire et la prévalence forment donc deux classes *complémentaires* en un sens qui généralise la définition des mesures singulières.

Cet ensemble B construit dans l'exemple 2.1.3 peut sembler artificiel. L'exemple suivant nous en donne une occurrence naturelle en théorie ergodique, à savoir l'ensemble des réels de $[0, 1]$ dont la décomposition en base 2 s'écrit, pour une infinité de naturels n, sous la forme $\overline{0, A_n B_n C}$, où A_n est un bloc de n chiffres quelconques, B_n est constitué de n fois le chiffre 0 et C est une suite (finie ou non) non-identiquement nulle composée de 0 et de 1.

Exemple 2.1.4. Pour $n \in \mathbb{N}_0$, soit

$$U_n = \{x \in [0,1] : 0 < 2^n x \mod 1 < 2^{-n}\}.$$

Il est clair que chaque U_n est ouvert. De plus, il est connu que l'application

$$f : [0,1] \to [0,1] : x \mapsto 2x \mod 1$$

préserve la mesure de Lebesgue (exemple 2.4 de [53]) et U_n est donc de mesure 2^{-n}. Ainsi, les ensembles $V_m = \bigcup_{n>m} U_n$ sont également ouverts et vérifient

$$\mathcal{L}(V_m) \leq \sum_{n=m+1}^{+\infty} \mathcal{L}(U_n) = \sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^m}$$

pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. Une autre manière de calculer la longueur de U_n est de remarquer que l'on peut le réécrire sous la forme

$$U_n = \bigcup_{k=0}^{2^n-1} \left] \frac{k}{2^n}, \frac{k}{2^n} + \frac{1}{2^{2n}} \right[.$$

Cette reformulation nous permet en outre de remarquer que V_m est dense dans $[0,1]$. En effet, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $\varepsilon > 0$, si $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$ sont choisis de sorte que $n > m$, $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ et $x \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[$, alors $\left|x - \frac{k}{2^n}\right| < \varepsilon$ et l'intersection $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap U_n$ est non-vide, ce qui suffit. Il s'ensuit que l'ensemble $\bigcap_{m \in \mathbb{N}_0} V_m$ est un ensemble résiduel de mesure

$$\mathcal{L}\left(\bigcap_{m \in \mathbb{N}_0} V_m\right) = \lim_{m \to +\infty} \mathcal{L}(V_m) = 0.$$

Toujours dans le cadre de la théorie ergodique, les nombres normaux approvisionnent également notre liste de désaccords entre catégories de Baire et prévalence. Un nombre est *normal* si son développement dans n'importe quelle base b contient asymptotiquement autant de fois chacun des chiffres $0, \ldots, b-1$. Un résultat familier en théorie ergodique affirme que presque tout réel de $[0,1]$ est normal ([105], voir l'exemple 2.31 de [53] pour une preuve). Au sens de Baire, le comportement générique est opposé.

Exemple 2.1.5. Pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}_0$, notons $d_n(x)$ le bit en position n dans l'écriture binaire de x, de sorte que x s'écrive $x = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n(x) 2^{-n}$, et posons

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \#\{k \in \{1, \ldots, n\} : d_k(x) = 1\}.$$

Pour montrer que l'ensemble des nombres qui sont pas normaux en base 2 est maigre, nous allons construire un sous-ensemble résiduel A de $[0,1]$ tel que pour tout $x \in A$,

$$\liminf_{n \to +\infty} f_n(x) = 0 \quad \text{et} \quad \limsup_{n \to +\infty} f_n(x) = 1.$$

Fixons $\alpha \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, posons

$$A_{\alpha,n} = \{x \in [0,1] : \exists i, j \geq n \text{ tels que } f_i(x) \geq \alpha \text{ et } f_j(x) \leq 1-\alpha\}.$$

Bien sûr, les ensembles $A^\circ_{\alpha,n}$ sont ouverts et denses dans $[0,1]$. Par conséquent, l'ensemble $A_\alpha = \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} A^\circ_{\alpha,n}$ est résiduel. Or pour tout $x \in A_\alpha$, on a

$$\liminf_{n\to+\infty} f_n(x) \leq 1-\alpha \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to+\infty} f_n(x) \geq \alpha.$$

L'ensemble A défini par $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{\alpha_n}$, où $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$ qui converge vers 1, convient alors.

En particulier, l'ensemble des nombres normaux de $[0,1]$ est de mesure pleine et maigre.

Les *nombres de Liouville*, à savoir les nombres qui peuvent être approchés très finement par une suite de rationnels, fournissent encore un autre exemple de décomposition de $\mathbb{R}$ en deux ensembles *petits*.

Exemple 2.1.6. L'ensemble de Liouville est défini par

$$A = \left\{ z \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} : \forall n \in \mathbb{N},\ \exists p, q \in \mathbb{Z} \text{ avec } q > 1 \text{ et tels que } \left|z - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n} \right\}.$$

Cet ensemble est résiduel mais de mesure de Lebesgue nulle.

Démonstration. Montrons d'abord que le complémentaire de A dans $\mathbb{R}$ est maigre. Pour cela, on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble

$$G_n = \bigcup_{q=2}^{+\infty} \bigcup_{p\in\mathbb{Z}} \left] \frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n} \right[.$$

On a alors

$$A = (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n \right),$$

c'est-à-dire

$$\mathbb{R}\setminus A = \mathbb{Q} \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\mathbb{R}\setminus G_n) \right).$$

Or G_n est une union d'ouverts donc il est ouvert et $\mathbb{R}\setminus G_n$ est fermé. De plus, G_n est dense dans $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puisque $\mathbb{Q} \subseteq G_n$. De manière équivalente, $\mathbb{R}\setminus G_n$ est d'intérieur vide. Ainsi, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\mathbb{R}\setminus G_n)$ est maigre. Comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable, il est également maigre, et c'est finalement le cas de $\mathbb{R}\setminus A$.

Montrons à présent que l'ensemble de Liouville est Lebesgue-négligeable. On sait que $(A \cap]-m, m[)_{m\in\mathbb{N}_0}$ est une suite croissante d'union égale à A. De plus, vu ce que l'on vient de voir, on a

$$A \cap]-m, m[\subseteq G_n \cap]-m, m[$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $m \in \mathbb{N}_0$. Or

$$G_n \cap]-m,m[\subseteq \bigcup_{q=2}^{+\infty} \bigcup_{p=-mq}^{mq} \left] \frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n} \right[.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $m \in \mathbb{N}_0$,

$$\left\{ \left] \frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n} \right[: q \geq 2, p \in \{-mq, \ldots, mq\} \right\}$$

est un recouvrement de $A \cap]-m,m[$. Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(A \cap]-m,m[) &\leq \sum_{q=2}^{+\infty} \sum_{p=-mq}^{mq} \mathcal{L}\left(\left] \frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n} \right[\right) \\
&= \sum_{q=2}^{+\infty} \sum_{p=-mq}^{mq} \frac{2}{q^n} \\
&= \sum_{q=2}^{+\infty} (2mq+1) \cdot \frac{2}{q^n} \\
&\leq \sum_{q=2}^{+\infty} (4mq+q) \cdot \frac{1}{q^n} \\
&= (4m+1) \sum_{q=2}^{+\infty} \frac{1}{q^{n-1}} \\
&\leq (4m+1) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n-1}}\, dx \\
&= \frac{4m+1}{n-2}
\end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$. En faisant tendre n vers l'infini, on obtient que $A \cap]-m,m[$ est négligeable pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, ce qui conclut par stabilité de la famille des ensembles de mesure nulle vis-à-vis des unions dénombrables. □

Modifions à présent l'exemple 2.1.2 pour obtenir un ensemble de Cantor dit *gras*, c'est-à-dire un ensemble nulle part dense (comme l'ensemble de Cantor classique) mais de mesure arbitrairement proche de 1.

Exemple 2.1.7. Fixons $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq 2$ et construisons un fermé d'intérieur vide C_k vérifiant $\mathcal{L}(C_k) \geq 1 - \frac{1}{k}$. La construction est semblable à celle de l'ensemble de Cantor classique modulo la longueur des intervalles retirés. On part donc de l'intervalle $[0,1]$. À l'étape 1, on ôte l'intervalle ouvert centré en $\frac{1}{2}$ et de longueur $\frac{1}{k^2}$. À l'étape 2, on enlève de chacun des deux intervalles restants, l'intervalle ouvert centré en leur milieu et de longueur $\frac{1}{k^4}$. On itère cette construction : à l'étape n, on dispose de 2^{n-1} intervalles et on retire à chacun d'eux l'intervalle ouvert centré en leur milieu et de longueur $\frac{1}{k^{2n}}$. On définit enfin

C_k comme l'ensemble des points qui ne seront jamais retirés. Par construction, il est clair qu'il s'agit d'un fermé d'intérieur vide. De plus, la somme des longueurs des intervalles retirés vaut

$$L = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{k^{2n+2}} \leq \frac{1}{k^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^n = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{k}{k-1} \leq \frac{1}{k}.$$

Ainsi,

$$\mathcal{L}(C_k) = 1 - L \geq 1 - \frac{1}{k}.$$

Si l'on pose $C = \bigcup_{k\geq 2} C_k$, alors C est maigre et $\mathcal{L}(C) = 1$.

Les ensembles de Cantor gras vont nous servir à montrer que le théorème de la limite simple de Baire introduit en début de section 1.1 n'admet pas d'analogue pour la prévalence. Établissons d'abord le cas classique des catégories de Baire ([137]).

Théorème 2.1.8. *Soit (X, d_X) un espace métrique complet, soit (Y, d_Y) un espace métrique et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de $C(X, Y)$. Si $f : X \to Y$ est la limite ponctuelle de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors l'ensemble $D(f)$ des points de discontinuité de f est un sous-ensemble maigre de X. En particulier, f est continu sur une partie dense de X puisque X est de Baire.*

Démonstration. Pour $k \in \mathbb{N}_0$ et $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$A_{k,n} = \bigcap_{p,q\geq n} \left\{x \in X : d_Y(f_p(x), f_q(x)) \leq \frac{1}{k}\right\}.$$

Par continuité de f_p et f_q, chacun des ensembles constituant $A_{k,n}$ est fermé, et c'est donc également le cas de leur intersection. Fixons $k \in \mathbb{N}_0$. Puisque la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement, elle est simplement de Cauchy et $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{k,n}$. On en tire que $U_k = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^\circ_{k,n}$ est un ouvert dense de X. En effet, pour $n \in \mathbb{N}$, si on pose $\widetilde{A}_{k,n} = A_{k,n} \cap (X \setminus U_k)$, alors un ouvert contenu dans $\widetilde{A}_{k,n}$ serait contenu simultanément dans $X \setminus U_k$ et dans $A_{k,n}$ donc dans $A^\circ_{k,n}$ et finalement dans U_k, ce qui n'est pas possible. Dès lors, chaque $\widetilde{A}_{k,n}$ est un fermé d'intérieur vide de X et le théorème de Baire conclut que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{A}_{k,n} = X \setminus U_k$ est également d'intérieur vide.

Soit $x \in U_k$. Par définition de cet ensemble, il existe $n \in \mathbb{N}$ et un voisinage V de x tel que pour tous $p, q \geq n$ et tout $y \in V$,

$$d_Y(f_p(y), f_q(y)) \leq \frac{1}{k}.$$

En prenant $p = n$ et en faisant tendre q vers l'infini, on trouve

$$d_Y(f_n(y), f(y)) \leq \frac{1}{k}$$

pour tout $y \in V$ et il vient alors

$$\begin{aligned} d_Y(f(x), f(y)) &\leq d_Y(f(x), f_n(x)) + d_Y(f_n(x), f_n(y)) + d_Y(f_n(y), f(y)) \\ &\leq \frac{2}{k} + d_Y(f_n(x), f_n(y)). \end{aligned}$$

Comme f_n est continu en x on peut, quitte à rétrécir le voisinage V, supposer que l'on a aussi $d_Y(f_n(x), f_n(y)) \leq \frac{1}{k}$ pour tout $y \in V$. Par suite, tout $x \in U_k$ admet un voisinage V tel que

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq \frac{3}{k}$$

pour tout $y \in V$.

In fine, l'ensemble $U = \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} U_k$ est résiduel dans X et tel que la limite f est continue sur U car pour tout $x \in U$ et tout $k \in \mathbb{N}_0$, il existe un voisinage V de x tel que $d_Y(f(x), f(y)) \leq \frac{3}{k}$ pour tout $y \in V$. □

Certifions ensuite que ce théorème n'est plus valide lorsque *maigre* est remplacé par *timide* ([42]).

Proposition 2.1.9. *Il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ de fonctions de $C([0,1], [0,1])$ qui converge ponctuellement vers une fonction f dont l'ensemble des points de continuité est de mesure de Lebesgue nulle.*

Démonstration. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq 2$, soit C_k un sous-ensemble fermé de $[0,1]$ qui est d'intérieur vide et de mesure au moins égale à $1 - \frac{1}{k}$ (pour une telle construction, voir l'exemple 2.1.7). On peut supposer la suite $(C_k)_{k\geq 2}$ croissante. Pour tout $k \geq 2$, on note alors g_k la fonction qui à $x \in [0,1]$ associe la distance de x à C_k et pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on définit

$$f_n : [0,1] \to [0,1] : x \mapsto \sum_{k=2}^{+\infty} 2^{-k}(1 - g_k(x))^n.$$

Chaque terme $x \mapsto 2^{-k}(1 - g_k(x))^n$ est continu et la convergence de la série est uniforme en x donc chaque f_n est continu. De plus, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ converge ponctuellement vers une fonction f qui est strictement positive sur $\bigcup_{k=2}^{+\infty} C_k$ et nulle sur $[0,1] \setminus (\bigcup_{k=2}^{+\infty} C_k)$. En effet, si $x \in \bigcup_{k=2}^{+\infty} C_k$, alors il existe $K \geq 2$ tel que $x \in C_k$ pour tout $k \geq K$, ce qui implique

$$f_n(x) = \sum_{k=2}^{K-1} 2^{-k}(1 - g_k(x))^n + \sum_{k=K}^{+\infty} 2^{-k} \geq 2^{-K+1}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}_0$. Au contraire, si $x \notin \bigcup_{k=2}^{+\infty} C_k$, alors $g_k(x) \in]0,1[$ pour tout $k \geq 2$. Dans ce cas, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $K \geq 2$ et $N \in \mathbb{N}$ satisfaisant

$$\sum_{k=K}^{+\infty} 2^{-k} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad (1 - g_k(x))^n < \frac{\varepsilon}{2(K-2)}$$

pour tout $k \in \{2, \ldots, K-1\}$ et tout $n \geq N$. On en tire

$$f_n(x) \leq \sum_{k=2}^{K-1} (1 - g_k(x))^n + \sum_{k=K}^{+\infty} 2^{-k} < \varepsilon$$

pour tout $n \geq N$, ce qui montre que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ converge vers 0. Puisque $\bigcup_{k=2}^{+\infty} C_k$ est d'intérieur vide dans $[0,1]$ par le théorème de Baire, pour tout $x \in \bigcup_{k=2}^{+\infty} C_k$ et tout voisinage V de x, il existe un point de V en lequel f s'annule, ce qui montre que la limite f est discontinue en tout point de $\bigcup_{k=2}^{+\infty} C_k$. Or $\mathcal{L}\left(\bigcup_{k=2}^{+\infty} C_k\right) = 1$, ce qui conclut la preuve. □

Un autre type de différence que l'on peut observer entre les catégories de Baire et la prévalence porte sur l'intérêt de concepts définis en faisant intervenir l'une ou l'autre de ces deux notions. Les bases *RUC* et *RUD* illustrent ce cas. Elles tirent leur origine de l'absence de bases inconditionnelles dans certains espaces de Banach tels que $C([0,1])$ ou $L^1([0,1])$, ce qui rend naturel de considérer des versions plus faibles de l'inconditionnalité. Fixons un espace de Banach X pour le reste de la discussion. Rappelons-nous qu'une série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ de X est dite *inconditionnellement convergente* si elle converge quelle que soit la manière dont on signe ses termes. Une *base inconditionnelle* de X est alors une base $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que tout développement $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n$ d'un élément de X dans cette base forme une série qui converge inconditionnellement. Notons $\Omega = \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$. Une manière d'affaiblir ces bases inconditionnelles a été considérée par Billard et al. ([29]) qui définirent en 1986 les bases *RUC* dont la notion duale *RUD* fut explicitée 30 ans plus tard par Lopez-Abad et Tradacete ([109]).

Définition 2.1.10. Une série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ de X est dite *aléatoirement inconditionnellement convergente* (de l'anglais *randomly unconditionally convergent*) si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n x_n$ converge presque sûrement sur les signes $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ relativement à la mesure de Haar sur Ω.

Une base $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X est une *base RUC* (pour *Random Unconditional Convergence*) si toute série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n$ qui converge dans X est aléatoirement inconditionnellement convergente.

Une base $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X est une *base RUD* (pour *Random Unconditional Divergence*) si toute série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n$ qui est aléatoirement inconditionnellement convergente converge dans X.

Les fonctions de Rademacher $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$r_n : [0,1] \to \{-1,0,1\} : t \mapsto \operatorname{sign}(\sin(2^n \pi t))$$

permettent de redéfinir les séries aléatoirement inconditionnellement convergentes en ayant recours à la mesure de Lebesgue (lemme I.13 de [106]).

Lemme 2.1.11. *La suite de Rademacher $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes qui prennent les valeurs -1 et 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$.*

De manière équivalente, on dit donc qu'une série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ est aléatoirement inconditionnellement convergente si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} r_n(t) x_n$ converge pour Lebesgue-presque tout $t \in [0,1]$.

Le dessein nourri en introduisant ces bases est de disposer d'une notion strictement intermédiaire entre une base de Schauder et une base inconditionnelle de l'espace X. Cela justifierait de fait l'importance de l'étude de ces bases puisqu'elle constituerait une perspective enthousiasmante pour les espaces n'admettant pas de base inconditionnelle. Le résultat ci-dessous apporte une première réponse encourageante ([109]).

Proposition 2.1.12. *Une base de X est inconditionnelle si et seulement si elle est à fois RUC et RUD.*

Pour nous convaincre définitivement, notons que la base unitaire de l'espace de James généralisé ou la base de Walsh de $L^1([0,1])$ sont des bases RUD conditionnelles, que c_0 admet une base RUC conditionnelle, ou encore que tout espace ℓ^p $(1 < p < +\infty)$ admet une base RUC conditionnelle et une base RUD conditionnelle ([29, 109]).

Puisque l'on vient de montrer l'intérêt des bases RUC et RUD, la seconde étape de notre raisonnement est de remarquer que lorsque l'on remplace *presque sûrement* au sens probabiliste par *quasi-sûrement* au sens des catégories de Baire, les bases RUC coïncident avec les bases inconditionnelles et les bases RUD sont simplement les bases de Schauder de X. Ce travail a été effectué par Lefèvre qui démontra le théorème suivant ([104]).

Théorème 2.1.13. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X et soit $(a_{n,p})_{n,p\in\mathbb{N}}$ une matrice complexe infinie telle que la limite $l_p = \lim_{n\to+\infty} a_{n,p}$ existe pour tout $p \in \mathbb{N}$. On suppose avoir*

$$\lim_{r\to+\infty} \sum_{p=r+1}^{+\infty} |a_{n,p} f(x_p)| = 0$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $f \in X^*$, ainsi que l'existence de

$$\sigma_n^\varepsilon = \sum_{p=0}^{+\infty} \varepsilon_p a_{n,p} x_p$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\varepsilon = (\varepsilon_p)_{p\in\mathbb{N}} \in \Omega$. Enfin, on note

$$\Omega_C = \{\varepsilon \in \Omega : (\sigma_n^\varepsilon)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge dans } X\}.$$

Dans ce cas, soit Ω_C est maigre, soit $\sum_{p\in\mathbb{N}} l_p x_p$ converge inconditionnellement.

En appliquant ce résultat à la matrice $(a_{n,p})_{n,p\in\mathbb{N}}$ définie par

$$a_{n,p} = \begin{cases} 1 & \text{si } p \leq n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases},$$

on a $l_p = 1$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et l'ensemble Ω_C est décrit par

$$\Omega_C = \left\{ (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Omega : \sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n x_n \text{ converge dans } X \right\}.$$

On sait donc que soit Ω_C est maigre, soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ converge inconditionnellement. En particulier, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de X pour laquelle il existe un sous-ensemble résiduel $\widetilde{\Omega}$ de Ω tel que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n x_n$ converge dans X pour tout $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \widetilde{\Omega}$, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ converge inconditionnellement par le théorème de Baire.

Bien que nous ayons montré précédemment que les ensembles maigres et de mesure nulle dans $\mathbb{R}$ peuvent former deux classes *complémentaires*, il est notable qu'elles ont beaucoup de propriétés topologiques en commun. Cela suggère qu'elles pourraient être liées d'une certaine manière par des transformations topologiques et, de fait, il est possible de caractériser les ensembles maigres comme les ensembles *topologiquement équivalents* à un type particulier d'ensembles négligeables ([35, 126]).

Lemme 2.1.14. *Pour tout sous-ensemble maigre A de $[0,1]$, il existe un automorphisme h de $[0,1]$ qui laisse les extrémités inchangées et tel que $h(A)$ est négligeable.*

La preuve se base sur un argument de catégories dans l'espace H des automorphismes de $[0,1]$ qui laissent les bornes inchangées. Bien sûr, H est un sous-espace de $C([0,1])$ et peut donc être muni de la distance

$$d(g,h) = \sup_{x\in[0,1]} |g(x) - h(x)|\,.$$

Pour être dans les conditions du théorème de Baire, il faudrait en outre que (H,d) soit complet, ce qui n'est malheureusement pas le cas. Il a cependant été montré que H est un G_δ de $C([0,1])$ et le théorème d'Alexandroff assure alors qu'il est possible de définir une autre métrique $\widetilde{d}$ sur H qui induit une topologie équivalente à celle de (H,d) et pour laquelle $(H,\widetilde{d})$ est complet. La preuve consiste alors à montrer que

$$\{h \in H : h(A) \text{ est négligeable}\}$$

est résiduel dans $(H,\widetilde{d})$ et donc non-vide.

Démonstration. Soit A un sous-ensemble maigre de $[0,1]$ et soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles nulle part denses telle que $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathbb{N}_0$, on pose

$$E_{n,k} = \left\{h \in H : \mathcal{L}(h(\overline{A_n})) < \frac{1}{k}\right\}.$$

Fixons $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$ et $h \in E_{n,k}$. L'ensemble borné fermé $h(\overline{A_n})$ peut être inclus dans un ouvert U de $\mathbb{R}$ tel que $\mathcal{L}(U) < \frac{1}{k}$. Il existe en outre un nombre $\delta > 0$ tel que U contient pour chaque $x \in \overline{A_n}$ un intervalle centré en $h(x)$ de rayon δ. Il suffit en effet de définir δ comme la distance entre le compact $h(\overline{A_n})$ et le fermé $\mathbb{R}\setminus U$. Si $g \in H$ et $d(g,h) < \delta$, alors pour tout $x \in \overline{A_n}$,

$$|g(x) - h(x)| \leq d(g,h) < \delta,$$

d'où $g(x) \in U$. Ainsi, $g(\overline{A_n}) \subseteq U$ et donc $g \in E_{n,k}$. Comme $b_d(x,\delta)$ est un ouvert de $(H,\widetilde{d})$, cela montre que $E_{n,k}$ est un sous-ensemble ouvert de $(H,\widetilde{d})$.

Pour tout $g \in H$ et tout $\varepsilon \in\,]0,1[$, divisons $[0,1]$ en un nombre fini de sous-intervalles fermés disjoints $I_1,\ldots,I_N$ de longueur strictement inférieure à ε. Pour tout $i \in \{1,\ldots,N\}$, choisissons ensuite un intervalle fermé J_i inclus dans $I_i^\circ \setminus g(\overline{A_n})$, ce qui possible puisque $g(\overline{A_n})$ est nulle part dense, ainsi qu'un homéomorphisme linéaire par morceaux h_i de I_i dans lui-même qui laisse les extrémités fixes et envoie J_i sur un intervalle de longueur strictement plus grande que $\mathcal{L}(I_i) - \frac{1}{kN}$. Ensemble, ces h_i définissent une application

$$h : [0,1] \to [0,1] : x \mapsto h_i(x) \text{ si } x \in I_i$$

telle que $h \in H$ et

$$\mathcal{L}((h\circ g)(\overline{A_n})) = \mathcal{L}\left(\bigcup_{i=1}^N h_i(I_i \setminus J_i)\right) \leq \sum_{i=1}^N (\mathcal{L}(I_i) - \mathcal{L}(h_i(J_i))) < \sum_{i=1}^N \frac{1}{kN} = \frac{1}{k}.$$

Par conséquent, $h \circ g$ appartient à $E_{n,k}$. Puisque

$$d(h \circ g, g) = \sup_{x \in [0,1]} |h(g(x)) - g(x)| \leq \max_{i \in \{1,\dots,N\}} \sup_{y,z \in I_i} |y - z| \leq \varepsilon,$$

on a $b_d(g, \varepsilon) \cap E_{n,k} \neq \emptyset$. Or tout ouvert de $(H, \widetilde{d})$ contenant g contient également une boule $b_d(g, \varepsilon)$ pour un ε dans $]0,1[$ et il s'ensuit donc que $E_{n,k}$ est dense dans $(H, \widetilde{d})$.

Par conséquent, l'ensemble $E = \bigcap_{n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}_0} E_{n,k}$ est un ensemble résiduel de $(H, \widetilde{d})$. Si $h \in E$, alors $h(\overline{A_n})$ est de mesure nulle pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque $h(A) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} h(\overline{A_n})$, il s'ensuit que $h(A)$ est négligeable. □

Théorème 2.1.15. *Un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ est maigre si et seulement s'il existe un automorphisme h de la droite réelle tel que $h(A)$ est contenu dans un F_σ négligeable.*

Démonstration. Tout ensemble maigre A est inclus dans un F_σ maigre F. Divisons la droite en une suite d'intervalles semi-ouverts disjoints $(I_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de longueur 1. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, le lemme 2.1.14 fournit un automorphisme h_i de $\overline{I_i}$ qui laisse les extrémités fixes et envoie $F \cap \overline{I_i}$ sur un ensemble négligeable. Mises bout à bout, les applications h_i définissent un automorphisme h de $\mathbb{R}$ tel que $h(F) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} h(F \cap \overline{I_i})$ est un F_σ négligeable. Par conséquent, $h(A)$ est contenu dans le F_σ négligeable $h(F)$.

Réciproquement, soit A n'importe quel sous-ensemble d'un F_σ négligeable. Alors il existe une suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fermés négligeables telle que $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Comme tout ensemble négligeable est d'intérieur vide, chaque ensemble F_n est nulle part dense. Il s'ensuit que A et son image par n'importe quel automorphisme de $\mathbb{R}$ sont maigres. □

Une seconde observation qui corrobore un comportement similaire des deux σ-idéaux est leur similarité au sens suivant : une classe $\mathcal{M}$ de sous-ensembles de X est *similaire* à une classe $\mathcal{N}$ de sous-ensembles de Y s'il existe une application bijective $f : X \to Y$ telle que $f(A) \in \mathcal{N}$ si et seulement si $A \in \mathcal{M}$ (section 19 de [126]). En 1934, Sierpiński démontra l'existence d'une application bijective $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(A)$ est de mesure nulle si et seulement si A est maigre ([148]). Son résultat fut généralisé en 1943 par Erdős ([58]) sous la forme du théorème 2.1.16. L'hypothèse du continu ***(CH)*** est supposée dans chacun des résultats mentionnés.

Théorème 2.1.16. ***(CH)*** *Il existe une involution f de la droite réelle, c'est-à-dire une application bijective $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f = f^{-1}$, pour laquelle $f(A)$ est un ensemble de mesure nulle si et seulement si A est maigre et $f(A)$ est maigre si et seulement si A est de mesure nulle.*

Le théorème 2.1.16 porte le nom de *principe de dualité de Sierpiński-Erdős*. Grâce à lui, il est possible d'obtenir gratuitement des propriétés en appliquant le corollaire suivant.

Corollaire 2.1.17. ***(CH)*** *Soit $\mathcal{P}$ une proposition impliquant uniquement les notions de mesure nulle, d'ensemble maigre et de théorie pure des ensembles (qui sont préservées par les applications bijectives). Soit $\mathcal{P}^*$ la proposition obtenue en interchangeant dans $\mathcal{P}$ les termes* de mesure nulle *et* maigre *à chaque fois qu'ils apparaissent. Alors $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{P}^*$ et inversement, $\mathcal{P}^*$ implique $\mathcal{P}$.*

La section 20 de [126] propose des exemples de propositions *duales* au sens du corollaire 2.1.17.

Tous les résultats que nous avons établi jusqu'à présent étaient restreints à des espaces de dimension finie car l'utilisation de la mesure de Lebesgue simplifiait les raisonnements. Néanmoins, des exemples de concordance autant que de discordance entre les catégories de Baire et la prévalence existent en dimension quelconque. Nous verrons plusieurs exemples de ce type dans le chapitre 3 qui sera consacré à l'étude de propriétés génériques en dimension infinie. Comme illustration, citons sans démonstration un contraste possible entre ensembles résiduels et prévalents. Pour les détails, nous renvoyons respectivement à [98] pour le cas des catégories de Baire et à [96] pour celui de la prévalence (voir aussi [69]).

Définition 2.1.18. Un *ensemble de Kronecker* sur $\mathbb{R}$ est un compact K de $\mathbb{R}$ tel que toute fonction continue et de module 1 sur K soit approximable uniformément par des exponentielles imaginaires.

Théorème 2.1.19. *Soit K un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ homéomorphe à l'ensemble triadique de Cantor et soit μ une mesure non-nulle, sans atome et portée par K.*

- *L'ensemble des fonctions f de $C(\mathbb{R})$ telles que $f(K)$ est un ensemble de Kronecker et $\mu \circ f^{-1}$ est une mesure singulière (par rapport à la mesure de Lebesgue) est résiduel.*
- *L'ensemble des fonctions f de $C(\mathbb{R})$ telles que $f(K)$ est l'adhérence de son intérieur et $\mu \circ f^{-1}$ est une mesure absolument continue (par rapport à la mesure de Lebesgue) est prévalent.*

Par ailleurs, dans l'espace de Banach $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ des suites qui convergent vers 0, le cône positif est nulle part dense mais n'est pas timide ([33], également mentionné dans [146]). Ces deux sources fournissent cependant peu informations concernant la preuve. Pour montrer que le cône est d'intérieur vide, nous utilisons des arguments inspirés de [41]. Pour obtenir la timidité, il est indiqué de faire usage du critère pratique 1.3.38. Le fait que le cône contienne un translaté de tout compact semble classique mais, n'ayant trouvé aucune preuve de ce résultat, nous en fournissons une.

Exemple 2.1.20. Le cône positif

$$c_0^+ = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0 : x_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}\}$$

de c_0 est nulle part dense et non-timide.

Démonstration. Il est clair que c_0^+ est fermé dans c_0. S'il n'était pas d'intérieur vide, on pourrait trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de c_0 et un réel $r > 0$ tels que $b((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, r) \subseteq c_0^+$. Dans ce cas, si e_k désigne la suite $(\delta_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$, on aurait d'une part $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} - \frac{r}{2}e_k \in c_0^+$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et d'autre part $x_k - \frac{r}{2} < 0$ pour k suffisamment grand, ce qui n'est pas possible. On en conclut que c_0^+ est nulle part dense. Par ailleurs, on peut montrer que tout compact K de c_0 est inclus dans un ensemble

$$\{(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0 : |y_n| \leq x_n \ \forall n \in \mathbb{N}\}$$

pour un $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$. Fixons pour ce faire un tel compact K. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on définit la fonction

$$f_j : K \to \mathbb{R} : (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sup_{n\geq j} |y_n| .$$

Clairement, f_j est continu et $f_{j+1} \leq f_j$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. De plus, la suite $(f_j(y))_{j\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 pour tout $y \in K$. Le théorème de Dini (théorème 12.1 de [94]) affirme alors que la convergence de $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ vers 0 a lieu uniformément sur K. Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, il existe $J_k \in \mathbb{N}$ tel que $f_j((y_n)_{n\in\mathbb{N}}) < \frac{1}{k}$ pour tout $j \geq J_k$ et tout $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K$. En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, tout $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K$ et tout $n \geq J_k$, $|y_n| < \frac{1}{k}$. On peut bien évidemment supposer la suite $(J_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ strictement croissante, auquel cas il suffit de définir la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$x_n = \begin{cases} \sup_{y\in K} \|y\|_\infty & \text{si } 0 \leq k < J_1 \\ \frac{1}{k} & \text{si } J_k \leq n < J_{k+1} \end{cases}$$

pour que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartienne à c_0 et que l'inclusion

$$K \subseteq \{(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0 : |y_n| \leq x_n \ \forall n \in \mathbb{N}\}$$

soit vérifiée. Ainsi, tout compact peut être translaté de sorte à être inclus dans c_0^+, ce qui montre que ce cône n'est pas timide par le lemme 1.3.38. $\square$

Remarque 2.1.21. Plus généralement, l'existence d'un ensemble fermé convexe d'intérieur vide vérifiant la condition apparaissant dans le lemme 1.3.38 caractérise la non-réflexivité des espaces de Banach séparables (théorème 6 de [114]). Par conséquent, tout espace de Banach séparable et non-réflexif contient un ensemble nulle part dense et non-timide. À l'inverse, il existe une propriété $\mathcal{P}$ telle que, dans tout espace de Banach satisfaisant $\mathcal{P}$, tout ensemble fermé convexe d'intérieur vide est timide (théorème 2.5 de [113]).

Dans la section suivante, nous examinerons les liens qui unissent la porosité avec les catégories de Baire et la prévalence.

2.2 Comparaison entre la porosité et les deux autres notions

Nous avons présenté la porosité comme une notion qui renforce les catégories de Baire. Nous allons donc en premier lieu nous assurer que c'est bien le cas, et ce quelle que soit la dimension de l'espace ([68]). Nous verrons plus tard que la réciproque n'est cependant pas vraie, i.e. qu'il n'y a pas équivalence entre les deux notions.

Proposition 2.2.1. *Soit X un espace vectoriel topologique complètement métrisable. Tout sous-ensemble de X qui est poreux est également nulle part dense.*

Démonstration. Soit A un sous-ensemble poreux de X. D'après la définition 1.2.5, pour tout $x \in A$ et tout $R > 0$, il existe $r > 0$ et $z \in X$ tels que $b(z, r) \subseteq b(x, R) \setminus A$. En particulier, $b(x, R) \nsubseteq A$. Comme x et R sont quelconques, on en tire que A est d'intérieur vide. Nous allons en déduire que $\overline{A}$ est aussi d'intérieur vide. Supposons au contraire que x soit un point dans l'intérieur de $\overline{A}$. Alors il existe $r > 0$ tel que $b(x, r) \subseteq \overline{A}$ et une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A qui converge vers x. Cela implique que x_n appartient à $b(x, r)$ pour n suffisamment grand et on en tire l'existence de $r_0 > 0$ pour lequel $b(x_n, r_0) \subseteq b(x, r)$. Comme A est poreux en x_n, on peut trouver $z \in X$ et $\varepsilon > 0$ tels que $b(z, \varepsilon) \subseteq b(x_n, r_0) \setminus A$. Les deux conditions $b(z, \varepsilon) \subseteq \overline{A}$ et $b(z, \varepsilon) \cap A = \emptyset$ contredisent la définition de l'adhérence. □

En considérant des unions dénombrables, on obtient directement le corollaire suivant.

Corollaire 2.2.2. *Soit X un espace vectoriel topologique complètement métrisable. Tout sous-ensemble de X qui est σ-poreux est également maigre.*

On pourrait alors s'interroger sur l'utilité des catégories de Baire. Tout d'abord, une propriété donnée peut être générique au sens des catégories de Baire mais pas de la porosité, ce qui nous apprend que l'ensemble des points où elle n'est pas vérifiée est *petit*, mais pas autant qu'un ensemble σ-poreux. Qui plus est, il est souvent plus simple de montrer qu'un ensemble est maigre et cela suffit lorsque le but recherché est de montrer que son complémentaire est non-vide. Cette stratégie a notamment été employée pour démontrer la timidité des compacts en dimension infinie (proposition 1.3.37). Dans la section 18 de [126], Oxtoby discute en outre d'un problème d'existence dont la première solution fut obtenue grâce à un argument de catégories.

Dans un espace de dimension finie, nous disposons d'un résultat plus puissant que le corollaire 2.2.2 puisque la porosité est de surcroît plus forte que la timidité. Les deux extensions naturelles de ce résultat, à savoir l'équivalence et la généralisation à un espace de dimension quelconque sont cependant fausses.

Proposition 2.2.3. *Dans $\mathbb{R}^n$, un ensemble σ-poreux est à la fois maigre et de mesure nulle.*

La démonstration de ce résultat est fortement inspirée des arguments de [68]. Cependant, Fraysse y applique le *théorème de densité de Lebesgue* à un ensemble σ-poreux comme s'il s'agissait d'un borélien, ce qui n'est pas nécessairement le cas (une remarque formulée dans [162]). Nous proposons ici d'utiliser une version plus générale du théorème de densité que nous démontrons dans l'annexe A.

Démonstration. Le fait que tout ensemble σ-poreux soit maigre a déjà été démontré dans le cadre plus général d'un espace vectoriel topologique complètement métrisable (corollaire 2.2.2). Pour conclure, nous allons montrer qu'un ensemble poreux de $\mathbb{R}^n$ est de mesure de Lebesgue nulle. Soient donc A un sous-ensemble poreux de $\mathbb{R}^n$ et x l'un de ses points. Par la remarque 1.2.7, $\overline{A}$ est également poreux en x. En utilisant la définition 1.2.8, on sait qu'il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on peut trouver $R_m \in \left]0, \frac{1}{m}\right]$ et $z_m \in \mathbb{R}^n$ vérifiant

$$b(z_m, \rho R_m) \subseteq b(x, R_m) \setminus \overline{A}.$$

La suite $(R_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ ainsi créée converge vers 0. Notons $C > 0$ la constante pour laquelle $\mathcal{L}(b(z, r)) = Cr^n$ quels que soient $z \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. Comme

$$\mathcal{L}(b(x, R_m)) = \mathcal{L}(b(x, R_m) \cap \overline{A}) + \mathcal{L}(b(x, R_m) \setminus \overline{A}),$$

on a

$$\mathcal{L}^*(b(x,R_m)\cap A) \leq \mathcal{L}(b(x,R_m)\cap \overline{A}) = \mathcal{L}(b(x,R_m)) - \mathcal{L}(b(x,R_m)\setminus \overline{A}) \leq CR_m^n(1-\rho^n)$$

pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. En particulier,

$$\limsup_{m\to+\infty} \frac{\mathcal{L}^*(b(x,R_m)\cap A)}{\mathcal{L}(b(x,R_m))} \leq 1-\rho^n < 1.$$

Ainsi, aucun point de A n'est un point de densité extérieure. Or le théorème de densité de Lebesgue A.3 affirme que presque tout $x \in A$ est un point de densité extérieure de A. Par conséquent, A doit nécessairement vérifier $\mathcal{L}^*(A) = 0$ et finalement $\mathcal{L}(A) = 0$. □

Pour réfuter les réciproques des résultats 2.2.2 et 2.2.3, il nous faut construire un ensemble qui soit à la fois maigre et de mesure nulle mais pas σ-poreux. Les preuves d'existence de tels ensembles sont en général assez compliquée, raison pour laquelle nous n'en donnerons pas les détails. Nous allons tout de même fournir deux exemples. Pour le premier, notons que l'ensemble triadique de Cantor est un bon candidat puisque l'exemple 2.1.2 affirme qu'il est nulle part dense et de mesure nulle. Cependant, il ne peut être utilisé tel quel car il est poreux. C'est même le cas d'une famille plus générale d'ensembles *de type Cantor* obtenus en modifiant le découpage en tiers usuel.

Définition 2.2.4. Considérons une suite $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ de $\left]0,\frac{1}{2}\right[$. Nous allons définir un ensemble $C(\alpha)$ obtenu en découpant $[0,1]$ selon la suite α. Lorsque nous fractionnerons un intervalle, nous appellerons intervalles *blancs* les deux sous-intervalles conservés pour l'étape suivante et intervalle *noir* celui qui est définitivement retiré. À chaque étape $n \in \mathbb{N}_0$, nous allons définir 2^n intervalles blancs fermés J_n^j ($j \in \{1,\dots,2^n\}$) de longueur $\alpha_1\dots\alpha_n$ et 2^{n-1} intervalles noirs ouverts I_n^j ($j \in \{1,\dots,2^{n-1}\}$) de longueur $\alpha_1\dots\alpha_{n-1}(1-2\alpha_n)$. Plus précisément, à la première étape, on pose

$$J_1^1 = [0,\alpha_1]\,, I_1^1 = \left]\alpha_1, 1-\alpha_1\right[\,, J_1^2 = [1-\alpha_1, 1] \text{ et } C_1(\alpha) = J_1^1 \cup J_1^2.$$

À la deuxième étape, on découpe chacun des deux intervalles blancs J_1^1 et J_1^2 en deux intervalles blancs de longueur $\alpha_1\alpha_2$ et on retire un intervalle noir médian de longueur $\alpha_1(1-2\alpha_2)$, i.e. on pose

$$J_2^1 = [0,\alpha_1\alpha_2]\,, J_2^2 = [\alpha_1-\alpha_1\alpha_2, \alpha_1]\,, J_2^3 = [1-\alpha_1, 1-\alpha_1+\alpha_1\alpha_2]\,, J_2^4 = [1-\alpha_1\alpha_2, 1]$$

et

$$I_2^1 = \left]\alpha_1\alpha_2, \alpha_1-\alpha_1\alpha_2\right[\,, I_2^2 = \left]1-\alpha_1+\alpha_1\alpha_2, 1-\alpha_1\alpha_2\right[\,,$$

ainsi que

$$C_2(\alpha) = J_2^1 \cup J_2^2 \cup J_2^3 \cup J_2^4.$$

On répète cette construction : à la $n^{\text{ème}}$ itération, on obtient donc 2^n intervalles $J_n^1,\dots,J_n^{2^n}$ de longueur $\alpha_1\dots\alpha_n$,

$$C_n(\alpha) = \bigcup_{j=1}^{2^n} J_n^j$$

et 2^{n-1} intervalles $I_n^1, \dots, I_n^{2^{n-1}}$ de longueur $\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}(1-2\alpha_n)$ qui ont été retirés respectivement à $J_{n-1}^1, \dots, J_{n-1}^{2^{n-1}}$ pour construire $C_n(\alpha)$. Enfin, on définit

$$C(\alpha) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} C_n(\alpha).$$

Dans [154] (théorème A.11.1), Thomson classifie les différents comportements possibles de $C(\alpha)$ en termes de porosité selon la suite α impliquée dans sa construction. Il donne en particulier une condition sous laquelle $C(\alpha)$ est poreux, un cas dont nous détaillons la preuve ci-dessous. Il se déduit de ce résultat que l'ensemble ternaire $C(\frac{1}{3})$ (où $\frac{1}{3}$ désigne la suite constante) est effectivement poreux.

Proposition 2.2.5. *Si la suite $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ de $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ est telle que $\liminf_{n\to+\infty} \alpha_n < \frac{1}{2}$, alors $C(\alpha)$ est poreux.*

Démonstration. Soit $x \in C(\alpha)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, il existe $j \in \{1, \dots, 2^n\}$ tels que $x \in J_n^j$. Comme $I_{n+1}^j \subseteq J_n^j$, la distance entre x et I_{n+1}^j est majorée par $\alpha_1 \dots \alpha_{n+1}$. De plus, l'intervalle I_{n+1}^j est de longueur $\alpha_1 \dots \alpha_n(1-2\alpha_{n+1})$. La somme de ces deux quantités est

$$\alpha_1 \dots \alpha_{n+1} + \alpha_1 \dots \alpha_n(1-2\alpha_{n+1}) = \alpha_1 \dots \alpha_n(1-\alpha_{n+1})$$

et la suite $(\alpha_1 \dots \alpha_n(1-\alpha_{n+1}))_{n\in\mathbb{N}_0}$ converge clairement vers 0. Par conséquent,

$$p(x, C(\alpha)) = \limsup_{R\to 0^+} \frac{\gamma(x, R, C(\alpha))}{R} \geq \limsup_{n\to+\infty} \frac{\gamma(x, \alpha_1 \dots \alpha_n(1-\alpha_{n+1}), C(\alpha))}{\alpha_1 \dots \alpha_n(1-\alpha_{n+1})}.$$

Or si m_{n+1} désigne le milieu de I_{n+1}^j, on a

$$b\left(m_{n+1}, \frac{\alpha_1 \dots \alpha_n(1-2\alpha_{n+1})}{2}\right) \subseteq b(x, \alpha_1 \dots \alpha_n(1-\alpha_{n+1})) \setminus C(\alpha).$$

On en tire

$$\begin{aligned}
p(x, C(\alpha)) &\geq \limsup_{n\to+\infty} \frac{\alpha_1 \dots \alpha_n(1-2\alpha_{n+1})}{2\alpha_1 \dots \alpha_n(1-\alpha_{n+1})} \\
&= \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha_{n+1}}{1-\alpha_{n+1}}\right) \\
&\geq \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\alpha_{n+1}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\liminf_{n\to+\infty} \alpha_{n+1} - 1}\right) \\
&> 0,
\end{aligned}$$

ce qui montre que $C(\alpha)$ est poreux. $\square$

Thomson fournit également une condition suffisante pour que $C(\alpha)$ ne soit pas σ-poreux, à savoir que la suite α converge vers $\frac{1}{2}$. Certains arguments sont cependant peu détaillés dans la preuve et Thomson utilise une notion de porosité plus proche de l'index de Denjoy, ce qui complique la lecture. Dans [81], Humke propose une autre démonstration de ce résultat. En supposant ce fait établi et en suivant pour le reste les arguments de [68], nous avons le résultat suivant.

Proposition 2.2.6. *Si la suite $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ est définie par $\alpha_n = \frac{n}{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, alors le sous-ensemble $C(\alpha)$ de $\mathbb{R}$ est de mesure nulle et nulle part dense mais non-σ-poreux.*

Démonstration. Remarquons que la suite α est strictement croissante, à valeurs dans l'intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ et converge vers $\frac{1}{2}$. Par conséquent, $C(\alpha)$ n'est pas σ-poreux. Calculons ensuite la mesure de Lebesgue de $C(\alpha)$. Par continuité à droite, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(C(\alpha)) &= \lim_{n\to+\infty} \mathcal{L}(C_n(\alpha)) \\
&= \lim_{n\to+\infty} 2^n \alpha_1 \dots \alpha_n \\
&= \lim_{n\to+\infty} 2^n \prod_{i=1}^{n} \frac{i \cdot 2i}{(2i+1)\cdot 2i} \\
&= \lim_{n\to+\infty} 2^{2n} \frac{(n!)^2}{(2n+1)(2n)!}.
\end{aligned}$$

En utilisant la formule de Stirling, on trouve alors

$$\mathcal{L}(C(\alpha)) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n}(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n)^2}{(2n+1)\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{\pi n}}{2n+1} = 0.$$

Remarquons enfin que l'ensemble $C(\alpha)$ est clairement fermé. Comme on vient de montrer qu'il est Lebesgue-négligeable, on sait qu'il est également d'intérieur vide. Ainsi, $C(\alpha)$ est nulle part dense, ce qui conclut la preuve. $\square$

Remarque 2.2.7. Dans [68], Fraysse reprend en outre les arguments de [154] pour montrer que $C(\alpha)$ n'est pas σ-poreux et les précise. Il semble cependant que la preuve comporte deux erreurs. Le but de cette remarque est à la fois de les signaler et de retracer le raisonnement de Thomson.

L'idée est de procéder par l'absurde et de supposer que $C(\alpha)$ est σ-poreux. Tout d'abord, il est avancé que $C(\alpha)$ peut alors se décomposer sous la forme

$$C(\alpha) = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} E_n\right) \bigcup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \{x_n\}\right), \tag{2.1}$$

où $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ est la famille des points isolés de $C(\alpha)$ et $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de sous-ensembles de $C(\alpha)$ sans point isolé satisfaisant $p(x, E_n) = \frac{1}{2}$[1] pour tout $x \in E_n$ et

1. Plus exactement, il est supposé que la porosité de chaque E_n en chacun de ses points vaut 1 mais il manque probablement la normalisation mentionnée dans la remarque 1.2.6.

tout $n \in \mathbb{N}_0$. Or le lemme 1.2.22 affirme uniquement que c'est vrai si $\frac{1}{2}$ est remplacé par n'importe quelle constante strictement inférieure à $\frac{1}{2}$, et pour cause, le théorème 2.14 de [162] assure l'existence d'ensembles σ-poreux qui ne se décomposent pas sous la forme (2.1).

Continuons la démonstration. Comme la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ tend vers $\frac{1}{2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, il existe $k(n) \in \mathbb{N}_0$ tel que pour tout $k' > k(n)$,

$$|1 - 2\alpha_{k'}| < \frac{1}{3^{n+2}}.$$

Le but est d'obtenir une contradiction en construisant une suite décroissante $(F_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ de compacts non-vides de $C(\alpha)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, $x_n \notin F_n$ et $F_n \cap E_n = \emptyset$. Pour $n = 1$, on sait qu'il existe $k(1) \in \mathbb{N}_0$ tel que pour tout $k' > k(1)$, $|1 - 2\alpha_{k'}| < \frac{1}{27}$. Deux cas se présentent alors.

- Si E_1 est dense dans $C(\alpha)$, on pose $k'(1) = k(1)$ et on sélectionne $j \in \{1, \ldots, 2^{k'(1)}\}$ tel que $J^j_{k'(1)}$ ne contient pas x_1. On nomme cet intervalle $J(1)$.
- Si E_1 n'est pas dense dans $C(\alpha)$, il existe $k'(1) > k(1)$ et $j \in \{1, \ldots, 2^{k'(1)}\}$ tel que $J^j_{k'(1)}$ n'intersecte pas E_1 et ne contient pas x_1. On note $J(1)$ cet intervalle.

On pose ensuite

$$F_1 = J(1) \setminus \left(\bigcup_{k'>k'(1)} \bigcup_{j=1}^{2^{k'-1}} \{\widetilde{I}^j_{k'} : I^j_{k'} \subseteq J(1)\} \right)$$

où $\widetilde{I}^j_{k'}$ est l'intervalle ouvert de même centre que $I^j_{k'}$ et de longueur triple. Il est clair que F_1 est un compact de $C(\alpha)$ qui ne contient pas x_1. Pour montrer que F_1 est non-vide, $\mathcal{L}(F_1) > 0$ est établi dans [68]. Cette relation est cependant impossible puisque $F_1 \subseteq C(\alpha)$ et $\mathcal{L}(C(\alpha)) = 0$. Le problème dans la preuve vient de l'égalité

$$\mathcal{L}\left(\bigcup_{i=1}^{2^{k'-1}} \{\widetilde{I}^i_{k'} : I^i_{k'} \subseteq J(1)\} \right) = 3\alpha_1 \ldots \alpha_{k'-1}(1 - 2\alpha_{k'}),$$

qui équivaut à dire qu'à chaque étape $k' > k'(1)$, $J(1)$ contient un unique $I^j_{k'}$. Comme $J(1)$ contient en réalité $2^{k'-k'(1)-1}$ intervalles $I^j_{k'}$ de ce type, on a en fait

$$\mathcal{L}\left(\bigcup_{i=1}^{2^{k'-1}} \{\widetilde{I}^i_{k'} : I^i_{k'} \subseteq J(1)\} \right) = 2^{k'-k'(1)-1} 3\alpha_1 \ldots \alpha_{k'-1}(1 - 2\alpha_{k'}),$$

ce qui invalide la suite du raisonnement. La conclusion $F_1 \neq \emptyset$ reste malgré tout vraie puisque F_1 est obtenu à partir d'une construction de type Cantor où, à chaque étape k', un intervalle de longueur $3(1 - 2\alpha_{k'})\, \mathcal{L}(J^j_{k'-1})$ est retiré de $J^j_{k'-1}$, avec

$$3(1 - 2\alpha_{k'}) < \frac{1}{9} < \frac{1}{3}.$$

La dernière étape du cas $n = 1$ consiste à prouver que $F_1 \cap E_1$ est vide. Malheureusement, ce passage requiert a priori la décomposition (2.1).

La suite de la preuve consiste à itérer cette construction. Finalement, comme toute intersection dénombrable de compacts non-vides emboîtés est un compact non-vide, l'ensemble $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} F_n$ est un sous-ensemble non-vide de $C(\alpha)$ qui est disjoint de

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}\right)\bigcup\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = C(\alpha),$$

ce qui est impossible.

Une description très courte d'un autre sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui est à la fois maigre, de mesure nulle et non-σ-poreux est donnée dans la proposition suivante (théorème 5.1 de [162]).

Proposition 2.2.8. *L'ensemble*

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\sin(n!\pi x)|}{n} \leq 1\right\}$$

est fermé et de mesure nulle mais n'est pas σ-poreux.

Nous aimerions pouvoir facilement déduire d'un sous-ensemble non-σ-poreux de $\mathbb{R}$ un sous-ensemble non-σ-poreux de $\mathbb{R}^n$ pour n'importe quel $n \in \mathbb{N}_0$. Le lemme suivant donne une construction simple permettant de passer de l'un à l'autre. Les arguments sont issus de [164].

Lemme 2.2.9. *Soit $M \subseteq \mathbb{R}$ et soit $N = A \times \mathbb{R}^n$. Alors N est σ-poreux dans $\mathbb{R}^{n+1}$ si et seulement si M est σ-poreux dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Supposons pour commencer que M est σ-poreux. Comme M peut s'écrire $M = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k$, où chaque M_k satisfait $p(x, M_k) > 0$ pour tout $x \in M_k$, si

$$\gamma((x, y), R, A \times \mathbb{R}^n) \geq \gamma(x, R, A) \tag{2.2}$$

pour tout $x \in A$, tout $A \subseteq \mathbb{R}$, tout $y \in \mathbb{R}^n$ et tout $R > 0$, alors N est σ-poreux car il s'écrit $N = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}(M_k \times \mathbb{R}^n)$, avec $p(z, M_k \times \mathbb{R}^n) > 0$ pour tout $z \in M_k \times \mathbb{R}^n$ et tout $k \in \mathbb{N}$. Établissons donc la relation (2.2) pour $A \subseteq \mathbb{R}$, $x \in A$, $y \in \mathbb{R}^n$ et $R > 0$ fixés. On considère $r > 0$ et on suppose qu'il existe $z \in \mathbb{R}$ pour lequel

$$b_1(z, r) \subseteq b_1(x, R) \setminus A.$$

Il suffit alors de vérifier

$$b_{n+1}((z, y), r) \subseteq b_{n+1}((x, y), R) \setminus (A \times \mathbb{R}^n)$$

pour prouver (2.2). Or d'une part, pour tout $z' \in b_{n+1}((z, y), r)$, on a

$$\|z' - (x, y)\|_{n+1} \leq \|z' - (z, y)\|_{n+1} + \|(z, y) - (x, y)\|_{n+1} < r + |z - x| < R$$

et d'autre part, s'il existe $(z'_1, \ldots, z'_{n+1}) \in b_{n+1}((z,y),r) \cap (A \times \mathbb{R}^n)$, alors $|z'_1 - z| < r$ et $z'_1 \in A$, une contradiction.

Supposons à présent que N est σ-poreux. Alors N peut s'écrire $N = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k$, où chaque N_k est un sous-ensemble poreux de $\mathbb{R}^{n+1}$. Considérons une base dénombrable $\{B_m : m \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{R}^n$ et notons

$$M_{k,m} = \{x \in M : \{z \in \mathbb{R}^n : (x,z) \in N_k\} \text{ est dense dans } B_m\}$$

pour tous $k, m \in \mathbb{N}$. Si $x \in M$, alors $(x,z) \in N$ pour tout $z \in \mathbb{R}^n$. Si on suppose de plus $x \notin M_{k,m}$ pour tous $k, m \in \mathbb{N}$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\overline{\{z \in \mathbb{R}^n : (x,z) \in N_k\}}$ est d'intérieur vide. Par le théorème de Baire, on en tire

$$\mathbb{R}^n = (\{z \in \mathbb{R}^n : (x,z) \in N\})^\circ \subseteq \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \overline{\{z \in \mathbb{R}^n : (x,z) \in N_k\}}\right)^\circ = \emptyset,$$

ce qui est impossible. Dès lors, $M = \bigcup_{k,m\in\mathbb{N}} M_{k,m}$ et il est suffisant de montrer que chaque $M_{k,m}$ est poreux. Soient donc $k, m \in \mathbb{N}$, $x \in M_{k,m}$ et $z \in B_m$ tel que $(x,z) \in N_k$. Pour tout $R > 0$ tel que $b_n(z,R) \subseteq B_m$, l'inégalité

$$\gamma((x,z), R, N_k) \leq \gamma(x, R, M_{k,m})$$

a lieu car tout $r > 0$ pour lequel il existe $y = (y_1, \ldots, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ satisfaisant

$$b_{n+1}(y,r) \subseteq b_{n+1}((x,z),R) \setminus N_k,$$

est tel que

$$b_1(y_1,r) \subseteq b_1(x,R) \setminus M_{k,m}.$$

En effet, si on considère un tel r et un tel y, alors pour tout $y' \in b_1(y_1,r)$, on a

$$|y' - x| \leq |y' - y_1| + |y_1 - x| < r + \|y,(x,z)\|_{n+1} < R.$$

Par ailleurs, s'il existe $y' \in b_1(y_1,r) \cap M_{k,m}$, si $\widetilde{y} = (y_2, \ldots, y_{n+1})$ et si $\varepsilon > 0$ vérifie $|y' - y_1| < r - \varepsilon$, alors $\{z' \in \mathbb{R}^n : (y',z') \in N_k\}$ est dense dans B_m et

$$\|\widetilde{y} - z\|_n \leq \|(y_1,\widetilde{y}) - (x,z)\|_{n+1} = \|y - (x,z)\|_{n+1} < R.$$

Ainsi, $\widetilde{y} \in B_m$ et il existe $z' \in b_n(\widetilde{y},\varepsilon)$ tel que $(y',z') \in N_k$. Pour ce z', on a également

$$\|(y',z') - y\|_{n+1} \leq \|(y',z') - (y',\widetilde{y})\|_{n+1} + \|(y',\widetilde{y}) - y\|_{n+1} = \|z' - \widetilde{y}\|_n + |y' - y_1| < r,$$

une contradiction. Puisque N_k est poreux en (x,z),

$$p(x, M_{k,m}) \geq p((x,z), N_k) > 0$$

et l'ensemble $M_{k,m}$ est poreux dans $\mathbb{R}$, ce qui conclut. □

Cette construction a la particularité que N est de mesure nulle et nulle part dense si M l'est. En joignant la proposition 2.2.6 (ou 2.2.8) et le lemme 2.2.9, nous venons donc de montrer l'existence dans $\mathbb{R}^{n+1}$ d'un sous-ensemble de mesure nulle et nulle part dense mais non-σ-poreux.

Proposition 2.2.10. *Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, il existe un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ non-σ-poreux, de mesure nulle et nulle part dense.*

Dans le lemme 2.2.9, M est en fait la projection p_1 de N sur la première composante. Comme $p_1 \in (\mathbb{R}^{n+1})^*$, remplacer $\mathbb{R}^{n+1}$ par un espace de Banach et p_1 par une application quelconque de son dual topologique nous donnerait un résultat plus fort. Au vu du résultat suivant (proposition B de [163]), nous savons qu'au moins l'une des deux implications données par le lemme 2.2.9 est vraie dans ce cadre plus général.

Lemme 2.2.11. *Soit X un espace de Banach, soit f une application non-identiquement nulle de X^* et soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ nulle part dense, fermé et non-σ-poreux. Dans ce cas, $f^{-1}(A)$ est nulle part dense et non-σ-poreux dans X.*

En particulier, la porosité est une notion strictement plus restrictive que les catégories de Baire dans n'importe quel espace de Banach. Bien qu'un ensemble nulle part dense n'ait donc aucune raison d'être poreux en tout point, nous allons voir qu'il l'est en *beaucoup* de points ([65]).

Proposition 2.2.12. *Soit (X, d) un espace vectoriel topologique complet et soit A un sous-ensemble nulle part dense de X. L'ensemble des points x de A en lesquels $p(x, A) = \frac{1}{2}$ est résiduel dans A.*

Démonstration. Considérons $\widetilde{A} = \bigcap_{m,k\in\mathbb{N}_0} A_{m,k}$, où

$$A_{m,k} = \left\{ x \in A : \exists z \in X \text{ tel que } d(z, x) < \left(1 + \frac{1}{k}\right) d(z, A) < \frac{1}{m} \right\}.$$

Si $x \in A_{m,k}$, alors pour $z \in X$ satisfaisant

$$d(z, x) < \left(1 + \frac{1}{k}\right) d(z, A) < \frac{1}{m},$$

on a

$$b(z, d(z, A)) \subseteq b\left(x, 2\left(1 + \frac{1}{k}\right) d(z, A)\right) \setminus A.$$

En effet, si $y \in b(z, d(z, A))$, alors

$$d(y, x) \leq d(y, z) + d(z, x) < d(z, A) + \left(1 + \frac{1}{k}\right) d(z, A) < 2\left(1 + \frac{1}{k}\right) d(z, A)$$

et $y \notin A$ sinon $d(z, y) \geq d(z, A)$. Par conséquent, si $x \in \widetilde{A}$, alors pour tous $m, k \in \mathbb{N}_0$, il existe $R \in \left]0, \frac{1}{m\left(1+\frac{1}{k}\right)}\right[$ tel que

$$b(z, R) \subseteq b\left(x, 2\left(1 + \frac{1}{k}\right) R\right) \setminus A,$$

et donc $R' \in \left]0, \frac{2}{m}\right[$ tel que

$$\gamma(x, R', A) \geq \frac{R'}{2\left(1 + \frac{1}{k}\right)}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, on en tire la relation

$$p(x, A) \geq \frac{1}{2\left(1 + \frac{1}{k}\right)}.$$

En passant à la limite pour k qui tend vers l'infini, on trouve finalement $p(x, A) \geq \frac{1}{2}$.

Il suffit donc pour conclure de montrer que $\widetilde{A}$ est résiduel dans A. Or chaque $A_{m,k}$ est clairement ouvert dans A. Montrons que chaque $A_{m,k}$ est également dense dans A, ce qui suffira. [2] On fixe $m, k \in \mathbb{N}_0$, $x \in A$ et $\varepsilon > 0$ tel que $(1+\frac{1}{k})\frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{m}$. Notre but est de construire un point dans l'intersection $A_{m,k} \cap b(x, \varepsilon)$. Puisque A est nulle part dense, il existe $z \in X$ et $r > 0$ tels que $b(z, r) \subseteq b(x, \frac{\varepsilon}{2}) \setminus A$. En prenant r suffisamment grand, on peut supposer que $b(z, (1 + \frac{1}{k})r)$ rencontre A en un point noté y. Dans ce cas, y vérifie les deux conditions espérées, à savoir

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \left(1 + \frac{1}{k}\right) r \leq \varepsilon$$

et $y \in A_{m,k}$ puisque

$$d(z, y) < \left(1 + \frac{1}{k}\right) r \leq \left(1 + \frac{1}{k}\right) d(z, A)$$

et

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right) d(z, A) \leq \left(1 + \frac{1}{k}\right) d(z, x) < \left(1 + \frac{1}{k}\right) \frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{m}.$$

□

Nous avons également prétendu que l'implication 2.2.3 entre σ-porosité et timidité n'était plus valable en dimension infinie. Dans tout espace de Banach séparable de dimension infinie, ces deux notions peuvent même être *complémentaires* au sens spécifié dans la section 2.1 ([132], voir aussi [68]).

Lemme 2.2.13. *Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach séparable réel de dimension infinie. Il existe un sous-ensemble dénombrable $Z = \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ de X tel que $\{b(z_n, 7) : n \in \mathbb{N}\}$ est un recouvrement de X et*

$$\lim_{s \to +\infty} \sup_{x,y \in X,\, \|y-x\| \geq s} \left(\frac{\mathcal{L}\left([x, y] \bigcap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} b(z_n, 1)\right)\right)}{\|y - x\|} \right) = 0.$$ [3]

Démonstration. Comme X est séparable, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dense dans X. On pose alors $z_0 = x_0$ et on forme une nouvelle suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X comme suit. Supposons que $z_0, \ldots, z_{n-1}$ aient déjà été construits et, quitte à réindicer la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, fixons U_n un ouvert convexe de X contenant x_n et disjoint de $\rangle z_0, \ldots, z_{n-1}\langle$. D'après l'un des théorèmes

2. Cette propriété n'est pas démontrée dans [65] mais nous en donnons ici les détails.

3. Pour ne pas alourdir les notations, $\mathcal{L}$ désigne ici la mesure de Lebesgue sur n'importe quel sous-espace vectoriel $\rangle x\langle$ de dimension 1 de X, ce que nous avons noté $\mathcal{L}_{\rangle x\langle}$ dans le cadre des sondes. Avec l'isomorphisme usuel $\mathbb{R} \to \rangle x\langle : \lambda \mapsto \lambda x$, nous avons donc formellement $\mathcal{L}(B) = \mathcal{L}(\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda x \in B\})$ pour tout $B \in \mathcal{B}(X)$.

de séparation de Hahn-Banach (chapitre II section 3 de [142]), il existe $T \in X^*$ tel que $\|T\|_{\mathrm{op}} = 1$, $T(x) = 0$ pour tout $x \in \rangle z_0, \ldots, z_{n-1} \langle$ et $T(x) > 0$ pour tout $x \in U_n$. En particulier, $T(z_i) = 0$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ et $T(x_n) \geq 0$. De plus, on peut trouver $x \in X$ pour lequel $\|x\| = 1$ et $T(x) > \frac{5}{6}$. On pose alors $z_n = x_n + 6x$ et on obtient que la distance entre z_n et $\rangle z_0, \ldots, z_{n-1} \langle$ satisfait

$$\inf_{z \in \rangle z_0, \ldots, z_{n-1} \langle} \|z_n - z\| \geq \inf_{z \in \rangle z_0, \ldots, z_{n-1} \langle} |T(z_n - z)| = |T(z_n)| = T(x_n) + 6T(x) \geq 6T(x) > 5$$

et que la distance entre z_n et x_n vaut $\|z_n - x_n\| = 6\,\|x\| = 6$.

On veut d'abord montrer qu'on a $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} b(z_n, 7)$. Comme la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dense, pour tout $x \in X$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|x_n - x\| < \varepsilon$. Pour ce n, on a alors

$$\|x - z_n\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n - z_n\| < \varepsilon + 6.$$

En prenant $\varepsilon < 1$, on en tire $\|x - z_n\| < 7$ et donc $x \in b(z_n, 7)$.

Passons à la seconde partie de l'énoncé. On fixe $m \in \mathbb{N}$, deux points distincts x, y tels que $2^{m-2} \leq \|x - y\| < 2^{m-1}$ et d la droite déterminée par ces deux points. On considère ensuite l'ensemble fini ou non (potentiellement vide) des indices n pour lesquels la distance de z_n à d est strictement majorée par 1, c'est-à-dire $\{n \in \mathbb{N} : b(z_n, 1) \cap d \neq \emptyset\}$, et on range ses éléments pour l'écrire sous la forme d'une suite strictement croissante $(n_i)_{i \in \mathcal{I}}$, avec $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{N}$. Pour tout $i \in \mathcal{I}$, on fixe un point w_i de d distinct des w_j précédemment construits et tel que $\|w_i - z_{n_i}\| \leq 1$. Montrons que pour tous $i, j, k \in \mathcal{I}$ tels que $i < j < k$, la distance entre w_k et $[w_i, w_j]$ est strictement plus grande que $\|w_i - w_j\|$. Supposons au contraire qu'il existe $i, j, k \in \mathcal{I}$ tels que $i < j < k$ et la distance entre w_k et $[w_i, w_j]$ est majorée par $\|w_i - w_j\|$. Comme $w_k \in d$, on peut écrire $w_k = \alpha w_i + \beta w_j$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta = 1 - \alpha$. L'hypothèse implique alors $|\alpha| \leq 2$ et $|\beta| \leq 2$. On en tire que la distance entre z_{n_k} et $\rangle z_0, \ldots, z_{n_k - 1} \langle$ est majorée par

$$\begin{aligned}
\left\|z_{n_k} - (\alpha z_{n_i} + \beta z_{n_j})\right\| &\leq \left\|z_{n_k} - w_k + (\alpha w_i + \beta w_j) - (\alpha z_{n_i} + \beta z_{n_j})\right\| \\
&\leq \|z_{n_k} - w_k\| + |\alpha|\,\|w_i - z_{n_i}\| + |\beta|\,\left\|w_j - z_{n_j}\right\| \\
&\leq 5,
\end{aligned}$$

ce qui est contraire à la définition de z_{n_k}. Cela établit la minoration stricte de la distance entre w_k et $[w_i, w_j]$ par $\|w_i - w_j\|$ pour tous indices i, j, k satisfaisant $i < j < k$.

Prouvons a présent que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $2 \leq n \leq \#\mathcal{I}$ et tout sous-ensemble $\{i_1, \ldots, i_n\}$ sans répétition de $\mathcal{I}$, $\operatorname{diam}(\{w_{i_1}, \ldots, w_{i_n}\}) > 2^{n-1}$. Pour $n = 2$, si $i, j \in \mathcal{I}$ sont tels que $i \neq j$, alors

$$\|w_i - w_j\| \geq \left\|z_{n_i} - z_{n_j}\right\| - \|z_{n_i} - w_i\| - \left\|z_{n_j} - w_j\right\| \geq \left\|z_{n_i} - z_{n_j}\right\| - 2 > 2$$

comme demandé. Supposons à présent $n > 2$. Par hypothèse de récurrence, pour tout sous-ensemble $\{i_1, \ldots, i_{n-1}\}$ sans répétition de $\mathcal{I}$, on a $\operatorname{diam}(\{w_{i_1}, \ldots, w_{i_{n-1}}\}) > 2^{n-2}$. Or

$$\operatorname{diam}(\{w_{i_1}, \ldots, w_{i_{n-1}}\}) = \max_{k, l \in \{1, \ldots, n-1\}} \|w_{i_k} - w_{i_l}\|.$$

Notons k, l les indices qui réalisent ce maximum, $i = i_k$, $j = i_l$ et fixons un $n^{\text{ème}}$ indice i_n plus grand que les $n-1$ précédents. Au vu de ce qui précède, on sait que la distance entre

w_{i_n} et $[w_i, w_j]$ est strictement plus grande que $\|w_i - w_j\|$. En particulier, w_{i_n} n'appartient pas au segment $[w_i, w_j]$. Supposons sans perte de généralité $\|w_{i_n} - w_j\| < \|w_{i_n} - w_i\|$. Comme w_i, w_j, w_{i_n} sont alignés,

$$\|w_{i_n} - w_i\| = \|w_i - w_j\| + \|w_j - w_{i_n}\| > 2\,\|w_i - w_j\| > 2^{n-1}$$

et

$$\operatorname{diam}(\{w_{i_1}, \ldots, w_{i_n}\}) \geq \|w_{i_n} - w_i\| > 2^{n-1}.$$

Cela étant, supposons

$$\mathcal{L}\left([x,y] \bigcap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} b(z_n, 1)\right)\right) > 2m + 2.$$

Cette hypothèse implique que le cardinal de $\mathcal{I}$ est au moins m et que le segment $[x, y]$ contient une sous-suite d'au moins m éléments de la suite $(w_i)_{i\in\mathcal{I}}$. En effet, remarquons tout d'abord que les boules $b(z_n, 1)$, sont disjointes puisque $\|z_i - z_j\| > 5$ pour tous naturels i, j distincts. De plus, la quantité $\mathcal{L}([x, y] \cap b(z_n, 1))$ est majorée par 2 pour tout $n \in \mathbb{N}$ et vaut 0 si l'intersection est vide. Si $[x, y]$ contenait au plus $m - 1$ éléments de la suite $(w_i)_{i\in\mathcal{I}}$, alors il existerait au plus $m + 1$ boules $b(z_n, 1)$ qui rencontreraient $[x, y]$, à savoir les deux boules éventuelles qui contiennent les extrémités du segment et les au plus $m - 1$ boules associées aux $m-1$ points de $(w_i)_{i\in\mathcal{I}}$ appartenant à $[x, y]$. Par conséquent, on aurait

$$\mathcal{L}\left([x,y] \bigcap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} b(z_n, 1)\right)\right) \leq 2m + 2,$$

une contradiction au choix du couple (x, y). Cela étant, on obtient

$$\|x - y\| = \operatorname{diam}([x, y]) \geq \operatorname{diam}(\{w_{i_1}, \ldots, w_{i_m}\}) > 2^{m-1},$$

ce qui est contraire à l'hypothèse. Par suite,

$$\frac{\mathcal{L}\left([x,y] \bigcap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} b(z_n, 1)\right)\right)}{\|y - x\|} \leq (m + 1)2^{-m+3}.$$

Comme

$$\lim_{m\to+\infty} (m + 1)2^{-m+3} = 0,$$

le lemme est démontré. □

Théorème 2.2.14. *Tout espace de Banach séparable réel* $(X, \|\cdot\|)$ *de dimension infinie peut s'écrire comme l'union d'un ensemble timide et d'un ensemble σ-poreux.*[4]

Démonstration. Soit Z l'ensemble donné par le lemme 2.2.13 et soit

$$A = \bigcup_{z \in Z} b(z, 1).$$

On sait qu'il existe une suite croissante $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $]0, +\infty[$ qui converge vers $+\infty$ et pour laquelle

$$\mathcal{L}([x, y] \cap A) < 2^{-n} \|x - y\|$$

quels que soient $x, y \in X$ tels que $\|y - x\| > s_n$. Si l'on pose

$$A_n = \left\{ \frac{a}{2^n s_n} : a \in A \right\},$$

alors

$$\mathcal{L}([x, y] \cap A_n) < 2^{-n} \|x - y\|$$

à condition que $x, y \in X$ vérifient $\|y - x\| > 2^{-n}$. Soit

$$U = \limsup_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq k} A_n.$$

Alors pour tous $x, y \in X$ et tout $k \in \mathbb{N}$ tels que $\|x - y\| > 2^{-k}$, on a

$$\mathcal{L}([x, y] \cap U) \leq \sum_{n=k}^{+\infty} \mathcal{L}([x, y] \cap A_n) < \sum_{n=k}^{+\infty} 2^{-n} \|x - y\| = 2^{-k+1} \|x - y\|.$$

En faisant tendre k vers l'infini, on obtient $\mathcal{L}([x, y] \cap U) = 0$ pour tous éléments distincts x, y de X. Par conséquent, pour toute direction $y \in X \setminus \{0\}$, la mesure μ définie par

$$\mu_y(B) = \mathcal{L}(\{t \in [0, 1] : ty \in B\})$$

pour tout borélien B de X est une mesure de probabilité telle que pour tout $x \in X$,

$$\mu_y(U - x) = \mathcal{L}(\{t \in [0, 1] : ty + x \in U\}) = \mathcal{L}([x, x + y] \cap U) = 0.$$

En utilisant la proposition 1.3.11 pour obtenir la condition (1) des mesures transverses, la relation précédente entraîne que U est timide.

Nous devons montrer pour conclure que le complémentaire V de U dans X est σ-poreux. On sait que V peut s'écrire

$$V = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left(X \setminus \bigcup_{n\geq k} A_n \right).$$

4. Le résultat est même plus fort que cela puisque l'espace peut être décomposé en un ensemble Aronszajn-nul et un ensemble σ-poreux.

Fixons $k \in \mathbb{N}$, $x \in X \setminus \bigcup_{n \geq k} A_n$ et $R \in \left]0, \frac{8}{2^{k-1} s_k}\right]$. Il existe $n \in \mathbb{N}_0$ tel que $n \geq k$ et

$$\frac{8}{2^n s_n} < R \leq \frac{8}{2^{n-1} s_n}.$$

De plus, comme la famille $\{b(z, 7) : z \in Z\}$ recouvre X, il existe $z_0 \in Z$ pour lequel $\|2^n s_n x - z_0\| \leq 7$. En posant $z_n = \frac{z_0}{2^n s_n}$, on exhibe un point de A_n tel que tout $z \in b\left(z_n, \frac{1}{2^n s_n}\right)$ satisfait

$$\|z - x\| \leq \|z - z_n\| + \|z_n - x\| \leq \frac{1}{2^n s_n} + \frac{1}{2^n s_n} \|2^n s_n x - z_0\| \leq \frac{8}{2^n s_n} < R$$

et

$$\|2^n s_n z - z_0\| = 2^n s_n \|z - z_n\| < 1,$$

i.e. tel que

$$b\left(z_n, \frac{1}{2^n s_n}\right) \subseteq b(x, R) \cap A_n \subseteq b(x, R) \setminus \left(X \setminus \bigcup_{n \geq k} A_n\right).$$

Ainsi,

$$\gamma\left(x, R, X \setminus \bigcup_{n \geq k} A_n\right) \geq \frac{1}{2^n s_n} \geq \frac{R}{16}.$$

On en déduit

$$p\left(x, X \setminus \bigcup_{n \geq k} A_n\right) \geq \frac{1}{16}$$

et l'ensemble $X \setminus \bigcup_{n \geq k} A_n$ est donc poreux. Comme V est une union dénombrable de tels ensembles, on conclut que V est σ-poreux. □

Puisque tout espace de Banach séparable de dimension finie peut s'écrire comme l'union d'un ensemble maigre et d'un ensemble timide (exemple 2.1.3), tout espace de Banach séparable réel de dimension infinie peut se décomposer en un ensemble σ-poreux et un ensemble timide (théorème 2.2.14), et tout ensemble σ-poreux est maigre (corollaire 2.2.2), on obtient une décomposition du type 2.1.3 indépendamment de la dimension de l'espace.

Corollaire 2.2.15. *Tout espace de Banach séparable réel peut s'écrire comme l'union d'un ensemble maigre et d'un ensemble timide.*

Dans l'article [40] (voir aussi la section 5.4 de [54]), Cohen et Kallman prouvent que cette décomposition est valable dans d'autres espaces. C'est d'ailleurs cela qui motive leur investigation des ensembles *ouvertement Haar-nuls* brièvement mentionnés en fin de section 1.3.3. Ainsi, ils remarquent que dans tout groupe topologique polonais G, si le singleton neutre est ouvertement Haar-nul, G peut s'écrire comme l'union d'un ensemble Haar-nul et d'un ensemble maigre. Ils établissent ensuite une liste de groupes vérifiant cette condition, parmi lesquels le groupe des permutations d'un ensemble dénombrable, ou encore le groupe des bijections croissantes de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$ (tous deux munis de la topologie de la convergence ponctuelle). Dans sa thèse, Shi s'intéresse également à la question de l'existence d'une telle décomposition dans un groupe topologique abélien polonais et montre que l'existence d'une mesure μ et d'une constante $c \in]0,1[$ satisfaisant

$$\mu(b(g,r)) \leq c\mu(b(g,2r))$$

pour tout élément g du groupe et tout $r \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$ est une condition suffisante (théorème 2.16.2 de [146]).

Cette section nous a notamment appris que l'intersection $\mathcal{C}$ du σ-idéal des ensembles timides avec celui des ensembles σ-poreux est exactement la classe des ensembles σ-poreux en dimension finie, mais que cette caractéristique n'est plus vraie en dimension infinie. Il est donc légitime de se demander s'il est possible de définir un σ-idéal qui serait inclus dans $\mathcal{C}$ quelle que soit la dimension de l'espace. C'est dans cette optique que Kolář définit les ensembles *HP-petits* ([103], voir aussi [68]).

2.3 Les ensembles HP-petits

On considère dans cette section un espace de Banach séparable réel $(X, \|\cdot\|)$.

Définition 2.3.1. Soit A un sous-ensemble de X et soit $c \in]0,1]$. On dit que

- *A a la propriété $HP_{(c)}$* si pour tout $c' \in]0,c[$ et tout $r > 0$, il existe $C > 0$ et une suite $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de points de X tels que $\|y_i\| \leq r$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et
$$\#\{i \in \mathbb{N} : (x + b(y_i, c'r)) \cap A \neq \emptyset\} \leq C \quad \forall x \in X, \tag{2.3}$$
- A est *HP-petit* s'il peut s'écrire $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une constante $c_n \in]0,1]$ telle que A_n ait la propriété $HP_{(c_n)}$.[5]

La première propriété essentielle des ensembles HP-petits est leur appartenance simultanée aux classes des ensembles σ-poreux et timides.

Proposition 2.3.2. *Tous les sous-ensembles HP-petits de X sont à la fois σ-poreux et timides.*

Démonstration. Soit $c \in]0,1]$ et soit A un ensemble ayant la propriété $HP_{(c)}$. Il suffit de prouver que A est poreux et timide. On fixe $c' \in]0,c[$ et $r > 0$. Par définition il existe une suite $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et une constante C telles que $\|y_i\| \leq r$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et A vérifie l'équation (2.3).

Montrons que A est poreux. En particulier, pour tout $x \in A$, il y a au moins un indice $i \in \mathbb{N}$ tel que $x + b(y_i, c'r) \cap A = \emptyset$. Si on note $z = x + y_i$, on obtient que $b(z, c'r) \cap A$ est vide. Or $b(z, c'r) \subseteq b(x, 2r)$ puisque tout $z' \in b(z, c'r)$ satisfait

$$\|z' - x\| \leq \|z' - z\| + \|y_i\| < c'r + r \leq 2r.$$

5. La nomenclature découle du fait que les ensembles HP-petits ont pour but d'être à la fois **H**aar-nuls et σ-**p**oreux.

Ainsi, $\gamma(x, 2r, A) \geq c'r$ pour tout $r > 0$ et $p(x, A) \geq \frac{c'}{2} > 0$ pour tout $x \in A$.

Avant de passer à la timidité de A, nous allons justifier que l'on puisse supposer l'ensemble A fermé en montrant que $\overline{A}$ est $HP_{(c)}$. Pour $i \in \mathbb{N}$ et $x \in X$ fixés, étudions l'ensemble $\overline{A} \cap (x + b(y_i, c'r))$. Si y lui appartient, alors il existe une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A qui converge vers y. De plus, on a $\varepsilon = c'r - \|y - (x + y_i)\| > 0$. Dès lors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$\|z_n - (x + y_i)\| \leq \|z_n - y\| + \|y - (x + y_i)\| < \varepsilon + \|y - (x + y_i)\| = c'r,$$

ce qui montre que $(x + b(y_i, c'r)) \cap A$ est non-vide. Ainsi,

$$\#\{i \in \mathbb{N} : (x + b(y_i, c'r)) \cap \overline{A} \neq \emptyset\} \leq \#\{i \in \mathbb{N} : (x + b(y_i, c'r)) \cap A \neq \emptyset\} \leq C$$

et $\overline{A}$ a la propriété $HP_{(c)}$.

Enfin, supposons que A est fermé et vérifions que A est timide. On fixe $\delta > 0$, $n > \frac{C}{\delta}$ et $\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{y_i}$. Il est clair que μ est une mesure de probabilité. Par le théorème de Matoušková 1.3.47, il suffit de montrer que l'on a $\operatorname{supp}(\mu) \subseteq \overline{b(0,r)}$ et $\mu(A + x) \leq \delta$ pour tout $x \in X$. Or

$$\mu\left(X \setminus \overline{b(0,r)}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{y_i}\left(X \setminus \overline{b(0,r)}\right) = 0$$

car $y_i \in \overline{b(0,r)}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, et

$$\#\{i \in \mathbb{N} : y_i \in A + x\} \leq \#\{i \in \mathbb{N} : (-x + b(y_i, c'r)) \cap A \neq \emptyset\} \leq C$$

pour tout $x \in X$, d'où

$$\mu(A + x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{y_i}(A + x) \leq \frac{C}{n} < \delta$$

pour tout $x \in X$. □

En outre, la classe des ensembles HP-petits est bien un σ-idéal comme on l'espérait. Plus que cela, ses éléments vérifient les quatre propriétés attendues d'un ensemble *petit*.

Proposition 2.3.3. *Les sous-ensembles HP-petits de X vérifient les propriétés $(\mathcal{P}_1)$ à $(\mathcal{P}_4)$.*

Démonstration. Remarquons d'abord que la stabilité par union dénombrable de la classe $\mathcal{C}$ des ensembles HP-petits est claire par définition et que la proposition 2.3.2 implique immédiatement qu'un ensemble HP-petit est d'intérieur vide.

Pour $(\mathcal{P}_2)$ et $(\mathcal{P}_4)$, considérons $c \in]0, 1]$ et A un ensemble $HP_{(c)}$. Par définition, pour tout $c' \in]0, c[$ et tout $r > 0$ fixés, A vérifie l'équation (2.3) pour une suite $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de X telle que $\|y_i\| \leq r$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et pour une constante strictement positive C. Montrons à présent que $\mathcal{C}$ est stable vis-à-vis de l'inclusion. Il suffit pour cela de montrer que si $B \subseteq A$, alors B vérifie aussi la propriété $HP_{(c)}$. Or

$$\#\{i \in \mathbb{N} : (x + b(y_i, c'r)) \cap B \neq \emptyset\} \leq \#\{i \in \mathbb{N} : (x + b(y_i, c'r)) \cap A \neq \emptyset\} \leq C.$$

En ce qui concerne l'invariance par translation, fixons $y \in X$ et notons que pour tout $x \in X$, on a

$$\#\{i \in \mathbb{N} : (x + b(y_i, c'r)) \cap (A + y) \neq \emptyset\} = \#\{i \in \mathbb{N} : (x - y + b(y_i, c'r)) \cap A \neq \emptyset\} \leq C,$$

ce qui prouve que $A + y$ satisfait la propriété $HP_{(c)}$ et termine la preuve. $\square$

Jusqu'à présent, rien n'empêche que le seul ensemble HP-petit soit le vide. Nous verrons d'ailleurs que c'est le cas en dimension finie (proposition 2.3.8). Comme les ensembles HP-petits ont principalement été définis dans le but de pallier l'absence d'inclusion entre classe des ensembles σ-poreux et classe des ensembles timides en dimension infinie, leur comportement en dimension finie n'est pas primordial et nous allons simplement nous assurer que cette notion mérite d'être approfondie en dimension infinie. Pour ce faire, il suffit par exemple de montrer que tout compact est HP-petit en dimension infinie.

Proposition 2.3.4. *Soit $c \in]0, 1]$, soit A un sous-ensemble de X ayant la propriété $HP_{(c)}$ et soit K un compact de X. Alors $A + K$ a la propriété $HP_{(c)}$.*

Démonstration. On fixe $c' \in]0, c[$ et $r > 0$. On choisit ensuite $c'_A \in]c', c[$ et on pose $\varepsilon = r(c'_A - c') > 0$. Par définition, il existe $C_A > 0$ et une suite $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de X tels que $\|y_i\| \leq r$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et

$$\#\{i \in \mathbb{N} : (x + b(y_i, c'_A r)) \cap A \neq \emptyset\} \leq C_A$$

pour tout $x \in X$. Comme K est compact, il existe $z_1, \ldots, z_n \in X$ tels que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n b(z_i, \varepsilon)$. Fixons $x \in X$ et intéressons-nous à l'ensemble des $i \in \mathbb{N}$ tels que

$$(x + b(y_i, c'r)) \cap (A + K) \neq \emptyset.$$

Si i satisfait cette relation, alors il existe $y \in A$ et $z \in K$ tels que $y + z \in x + b(y_i, c'r)$. Comme $z \in K$, $z \in b(z_j, \varepsilon)$ pour un $j \in \{1, \ldots, n\}$. Or

$$\|y - (x - z + y_i)\| < c'r,$$

d'où

$$\|y - (x - z_j + y_i)\| \leq \|y - (x - z + y_i)\| + \|z - z_j\| < c'r + \varepsilon = c'_A r.$$

Par conséquent, $y \in ((x - z_j) + b(y_i, c'_A r)) \cap A$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\#\{i \in \mathbb{N} : (x + b(y_i, c'r)) \cap (A + K) \neq \emptyset\} &\leq \sum_{j=1}^n \#\{i \in \mathbb{N} : (x - z_j + b(y_i, c'_A r)) \cap A \neq \emptyset\} \\ &\leq nC_A,\end{aligned}$$

ce qui signifie que $A + K$ vérifie $HP_{(c)}$. $\square$

Corollaire 2.3.5. *Si X est de dimension infinie, alors les compacts de X sont HP-petits.*

Démonstration. Soit K un compact de X. On applique la proposition 2.3.4 à $c = \frac{1}{4}$ et $A = \{0\}$. Il faut pour cela s'assurer que A a la propriété $HP_{(\frac{1}{4})}$.[6] Comme X est de dimension infinie, pour tout $c' \in \left]0, \frac{1}{4}\right[$ et tout $r > 0$, la boule de centre 0 et de rayon $4c'r$ contient une infinité de boules ouvertes disjointes de rayon $c'r$ (il s'agit du même raisonnement que celui vu dans la preuve de la proposition 1.3.2). Notons $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ les centres d'une suite de telles boules. Alors $\|y_i\| < 4c'r < r$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et

$$\#\{i \in \mathbb{N} : (x + b(y_i, c'r)) \cap A \neq \emptyset\} \leq 1$$

pour tout $x \in X$, comme attendu. □

Nous pouvons remarquer que les ensembles HP-petits sont préservés par les projections continues à noyau de dimension finie. Cette observation nous sera utile pour établir qu'être HP-petit est strictement plus restrictif qu'être σ-poreux et timide ou, autrement dit, que la proposition 2.3.2 n'admet pas de réciproque.

Proposition 2.3.6. *Soit A un sous-ensemble de X. Si $P : X \to X$ est une projection (i.e. une application linéaire satisfaisant $P^2 = P$) continue telle que* $\dim(\ker P) < +\infty$*, alors on a équivalence entre*

(1) A est HP-petit dans X,

(2) $P(A)$ est HP-petit dans X,

(3) $P(A)$ est HP-petit dans $P(X)$.

Démonstration. Par définition de la projection, on sait que les inclusions $A \subseteq P(A) + \ker P$ et $P(A) \subseteq A + \ker P$ sont satisfaites. En effet, pour tout $x \in A$, $x = P(x) + x - P(x)$, où $P(x) \in P(A)$ et

$$P(x - P(x)) = P(x) - P(P(x)) = 0,$$

et $P(x) = x + P(x) - x$, avec $P(x) - x \in \ker P$ pour la même raison. Autre observation qui nous sera utile : si $y \in P(X)$, alors $y = P(x)$ pour un $x \in X$ et on a même

$$P(y) = P^2(x) = P(x) = y.$$

Commençons par remarquer que quel que soit $n \in \mathbb{N}_0$, $\ker P \cap \overline{b(0, n)}$ est compact dans $\ker P$ et donc aussi dans X. Ainsi, si l'on suppose que A est HP-petit dans X, alors $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} A_n$, où A_n est $HP_{(c_n)}$ pour un $c_n \in]0, 1]$, et on en tire

$$P(A) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \left(A_n + (\ker P \cap \overline{b(0, n)})\right),$$

où chaque $A_n + (\ker P \cap \overline{b(0, n)})$ est $HP_{(c_n)}$ par la proposition 2.3.4. Finalement, $P(A)$ est HP-petit dans X. L'autre implication se montrant de la même manière, cela nous donne l'équivalence entre (1) et (2).

6. Kolář affirme sans démonstration que $\{0\}$ est en fait $HP_{(\frac{1}{2})}$ et Fraysse prétend même qu'il est $HP_{(1)}$. Nous nous contentons ici de vérifier qu'il satisfait la propriété $HP_{(\frac{1}{4})}$, ce qui nous suffit.

Établissons ensuite l'implication (3) $\Rightarrow$ (2). Pour cela, on suppose que $P(A)$ est $HP_{(c)}$ dans $P(X)$ pour $c \in \,]0,1]$ et on fixe $c' \in \left]0, \frac{c}{\|P\|_{\mathrm{op}}}\right[$ ainsi que $r > 0$. On sait qu'il existe une suite $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $P(X)$ et $C > 0$ tels que $\|y_i\| \leq r$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et

$$\#\{i \in \mathbb{N} : (P(x) + b(y_i, c' \|P\|_{\mathrm{op}} r) \cap P(X)) \cap P(A) \neq \emptyset\} \leq C$$

pour tout $x \in X$. Or

$$(x + b(y_i, c'r)) \cap P(X) \subseteq P(x) + b(y_i, c' \|P\|_{\mathrm{op}} r) \cap P(X).$$

En effet, si $z \in (x + b(y_i, c'r)) \cap P(X)$, alors $\|z - (x + y_i)\| < c'r$, $z = P(z)$. Comme $y_i = P(y_i)$, il en découle $z - P(x) = P(z - x) \in P(X)$ et

$$\|z - (P(x) + y_i)\| = \|P(z) - (P(x) + P(y_i))\| \leq \|P\|_{\mathrm{op}} \|z - (x + y_i)\| < \|P\|_{\mathrm{op}} c'r.$$

Par conséquent, $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de X satisfaisant $\|y_i\| \leq r$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et

$$\#\{i \in \mathbb{N} : (x + b(y_i, c'r)) \cap P(A) \neq \emptyset\} \leq C$$

pour tout $x \in X$. Cela montre que $P(A)$ est $HP_{(\frac{c}{\|P\|_{\mathrm{op}}})}$ dans X. On en tire que si $P(A)$ est HP-petit dans $P(X)$, alors il l'est également dans X.

Il reste à montrer (2) $\Rightarrow$ (3). Pour cela, on suppose que $P(A)$ est $HP_{(c)}$ dans X. Fixons $c' \in \,]0, c[$, $r_0 > 0$ et

$$K = \ker P \cap \overline{b\left(0, (1 + \|P\|_{\mathrm{op}}) \cdot \frac{r_0}{\|P\|_{\mathrm{op}}}\right)}.$$

Comme $\ker P$ est de dimension finie, K est compact dans $\ker P$ et donc aussi dans X. D'après la proposition 2.3.4, $P(A) + K$ est encore $HP_{(c)}$ dans X. Par conséquent, il existe une suite $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de X et $C > 0$ tels que $\|y_i\| \leq \frac{r_0}{\|P\|_{\mathrm{op}}}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et

$$\#\left\{i \in \mathbb{N} : \left(x + b\left(y_i, \frac{c'r_0}{\|P\|_{\mathrm{op}}}\right)\right) \cap (P(A) + K) \neq \emptyset\right\} \leq C$$

pour tout $x \in X$. Comme $y_i - P(y_i) \in \ker P$ et

$$\|y_i - P(y_i)\| \leq \|y_i\| + \|P(y_i)\| \leq (1 + \|P\|_{\mathrm{op}}) \|y_i\| \leq (1 + \|P\|_{\mathrm{op}}) \cdot \frac{r_0}{\|P\|_{\mathrm{op}}},$$

$y_i - P(y_i) \in K$. Par ailleurs, si

$$b\left(P(x) + P(y_i), \frac{c'r_0}{\|P\|_{\mathrm{op}}}\right) \cap P(A) \neq \emptyset,$$

alors

$$b\left(P(x) + y_i, \frac{c'r_0}{\|P\|_{\mathrm{op}}}\right) \cap (P(A) + K) \neq \emptyset.$$

En effet, si $a \in A$ est tel que $P(a) \in b\left(P(x)+P(y_i), \frac{c'r_0}{\|P\|_{\mathrm{op}}}\right)$, alors $P(a)+y_i-P(y_i)$ appartient à $P(A)+K$ et satisfait

$$\|P(a)+y_i-P(y_i)-(P(x)+y_i)\| = \|P(a)-P(y_i)-P(x)\| < \frac{c'r_0}{\|P\|_{\mathrm{op}}}.$$

On en déduit que $(P(y_i))_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de $P(X)$ telle que $\|P(y_i)\| \leq \|P\|_{\mathrm{op}}\|y_i\| \leq r_0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et

$$\#\left\{i \in \mathbb{N} : \left(P(x)+b\left(P(y_i), \frac{c'r_0}{\|P\|_{\mathrm{op}}}\right)\right) \cap P(A) \neq \emptyset\right\} \leq C$$

pour tout $x \in X$. Finalement, $P(A)$ est $HP_{\left(\frac{c}{\|P\|_{\mathrm{op}}}\right)}$ dans $P(X)$ et $P(A)$ est HP-petit dans $P(X)$ s'il l'est dans X. □

Tout d'abord, le résultat suivant fournit toute une classe d'ensembles σ-poreux et timides mais non-HP-petits en dimension infinie. Il est simplement énoncé dans [103] puis démontré dans [68] mais nous ajoutons ici l'hypothèse que X est un espace de Hilbert, hypothèse nécessaire à la linéarité des projections, et modifions un argument dans la partie sur la porosité qui ne nous semblait pas fonctionner dans [68].

Proposition 2.3.7. *Si X est un espace de Hilbert de dimension infinie, alors tout hyperplan fermé de X est σ-poreux et timide mais non-HP-petit.*

Démonstration. Soit H un hyperplan fermé de X. Tout d'abord, remarquons que H peut s'écrire sous la forme $H = \{x \in X : \phi(x) = \alpha\}$, avec $\phi \in X^*$ (lemme 5.55 de [2] ou théorème 22.5 de [26]). Étant donné qu'appliquer une translation n'affecte pas le caractère timide, σ-poreux ou HP-petit d'un ensemble, on peut supposer que H contient 0, auquel cas on a $H = \{x \in X : \phi(x) = 0\}$.

Puisque H est en particulier un sous-espace vectoriel propre borélien de X, le corollaire 1.3.32 assure que H est timide.

De plus, d'après la proposition 2.3.6, si un ensemble A est HP-petit dans X, alors pour toute projection continue $P : X \to X$ telle que $\dim(\ker P) < +\infty$, $P(A)$ est HP-petit dans $P(X)$. En particulier, si l'on considère P la projection métrique sur H (i.e. l'application qui à $x \in X$ associe le point y de H qui minimise la distance $\|x-y\|$) et si H était HP-petit dans X, alors $P(H) = H$ serait HP-petit dans $P(X) = H$, ce qui est absurde. Ainsi, H n'est pas HP-petit.

Il nous reste à montrer que H est σ-poreux. Soit donc $x \in H$, i.e. $x \in X$ tel que $\phi(x) = 0$. Comme H est d'intérieur vide, il existe $y \in b\left(x, \frac{1}{2\|\phi\|_{\mathrm{op}}}\right)$ tel que $\phi(y) \neq 0$. On considère alors $\varepsilon \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ tel que $\varepsilon < |\phi(y)|$ et, pour tout $R > 0$, on pose $y' = \|\phi\|_{\mathrm{op}} R(y-x)+x$, de sorte que y' vérifie

$$\|y'-x\| \leq \|\phi\|_{\mathrm{op}} R\,\|y-x\| < \frac{R}{2} \quad \text{et} \quad |\phi(y')| = \|\phi\|_{\mathrm{op}} R\,|\phi(y)| > \|\phi\|_{\mathrm{op}} R\varepsilon.$$

De cette manière, pour tout $z \in b(y', \varepsilon R)$, on a

$$\|z - x\| \leq \|z - y'\| + \|y' - x\| < \varepsilon R + \frac{R}{2} < R$$

et

$$|\phi(y')| - |\phi(z)| \leq |\phi(y') - \phi(z)| < \|\phi\|_{\mathrm{op}} \varepsilon R,$$

d'où

$$|\phi(z)| > |\phi(y')| - \|\phi\|_{\mathrm{op}} \varepsilon R > 0.$$

Cela prouve la relation $b(y', \varepsilon R) \subseteq b(x, R) \backslash H$ et on obtient finalement $p(x, H) \geq \varepsilon > 0$. □

Ensuite, en dimension finie, un ensemble est simultanément σ-poreux et timide si et seulement s'il est σ-poreux, tandis qu'un ensemble est HP-petit si et seulement s'il est vide.

Proposition 2.3.8. *Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, le seul ensemble HP-petit de $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble vide.*

Démonstration. D'après la proposition 2.3.6 appliquée à la projection P sur la première coordonnée, il suffit de montrer que le seul ensemble HP-petit de $\mathbb{R}$ est le vide. Voyons si un singleton $\{x\}$ peut être HP-petit dans $\mathbb{R}$. Fixons $c \in]0, 1]$ et supposons que pour tout $c' \in]0, c[$ et tout $r > 0$, il existe $C > 0$ et une suite $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}$ tels que $|y_i| \leq r$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et

$$\#\{i \in \mathbb{N} : x \in z + b(y_i, c'r)\} = \#\{i \in \mathbb{N} : (z + b(y_i, c'r)) \cap \{x\} \neq \emptyset\} \leq C \tag{2.4}$$

pour tout $z \in \mathbb{R}$. Comme la suite $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$, elle possède une sous-suite $(y_{k(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un certain y. Si on pose $z = x - y$, alors pour tout i à partir d'un certain rang I_0, $\left|y - y_{k(i)}\right| < c'r$ et donc $x \in b(z + y_{k(i)}, c'r)$. On en tire qu'il existe une infinité d'indices $i \in \mathbb{N}$ pour lesquels $x \in z + b(y_i, c'r)$, ce qui contredit la relation (2.4). Par conséquent, $\{x\}$ n'est $HP_{(c)}$ pour aucun $c \in]0, 1]$. Comme il ne peut être décomposé en des ensembles plus petits, il n'est pas non plus HP-petit. Par stabilité de la classe des ensembles HP-petits vis-à-vis de l'inclusion, aucun ensemble non-vide ne peut être HP-petit dans $\mathbb{R}$. □

Cela conclut le chapitre 2 et la comparaison des différentes notions de généricité. Le troisième et dernier chapitre aura pour but d'obtenir des résultats de généricité à un ou plusieurs sens en dimension infinie.

Chapitre 3

Exemples de propriétés génériques

Maintenant que nous avons défini, étudié et comparé trois notions de généricité, nous allons les appliquer à quelques exemples.

Nous discuterons dans la section 3.1 de la possibilité d'étendre le théorème de Fubini à des espaces de dimension infinie et verrons que cela n'est possible que pour les catégories de Baire.

La section 3.2 présentera ensuite quatre résultats de prévalence, trois d'entre eux illustrant l'utilisation des sondes et le dernier la méthode des processus stochastiques.

Enfin, les sections 3.3 à 3.8 fourniront des résultats de généricité dans des espaces fonctionnels classiques.

La section 3.3 abordera la question des fonctions continues nulle part dérivables, où la dérivabilité en un point sera entendue au sens d'admettre une dérivée finie en ce point. Nous montrerons qu'à chacun des trois sens de généricité, presque toute fonction continue est nulle part dérivable. Pour les catégories de Baire et la prévalence, nous obtiendrons même que presque toute fonction n'est dans aucun espace de Hölder ponctuel ou, autrement dit, que la pire régularité possible est aussi la plus courante. Pour la porosité, nous pourrons seulement affirmer qu'à un point x_0 fixé, presque toute fonction n'est dans aucun espace de Hölder $C^{\alpha}(x_0)$. Notons que nous nous limiterons aux trois notions que nous avons pleinement développées mais que l'ensemble des fonctions continues nulle part dérivables est également linéable ([74], voir aussi [93]) [1] et de complémentaire HP-petit ([103]). Il existe par ailleurs des résultats concernant les dérivées infinies ou non-nécessairement finies. Ainsi, pour tout sous-ensemble parfait non-vide P de $[0,1]$,

$$\{f \in C([0,1]) : \forall x \in P, f'(x) = \infty\}$$

est timide ([46]), tandis que

$$\{f \in C([0,1]) : \exists x \in [0,1] \text{ tel que } f'(x) \in \overline{\mathbb{R}}\}$$

est maigre ([92]) mais n'est ni timide ni prévalent ([161]).

La section 3.4 s'intéressera aux fonctions continues qui ne sont nulle part monotones (et même nulle part de type monotone). Deux notions seront considérées : une version

1. Attention cependant que l'ensemble des fonctions continues qui sont partout dérivables est également linéable puisqu'il constitue un espace vectoriel de dimension infinie.

ponctuelle de la monotonicité pour laquelle le résultat de généricité sera valable pour les catégories de Baire et la porosité, et une version non-ponctuelle plus faible (pour laquelle nulle part monotone signifiera monotone sur aucun intervalle) qui sera en outre valide dans le cadre de la prévalence. Notons que l'ensemble des fonctions continues qui ne sont monotones sur aucun intervalle est également de complémentaire Haar-maigre ([54]) et multiplicativement timide, i.e. timide dans le semi-groupe avec unité $(C([0,1]),\cdot)$ ([146]).

Dans la section 3.5, nous définirons la propriété de *Bruckner–Garg* et montrerons que l'ensemble des fonctions continues qui la satisfont est résiduel et de complémentaire σ-poreux, mais n'est ni timide ni prévalent.

La section 3.6 étudiera l'ensemble des points de non-dérivabilité d'une fonction convexe et continue ou Lipschitzienne définie sur un espace de Banach et à valeurs réelles. Nous considérerons la dérivabilité au sens de Fréchet et celle, plus faible, au sens de Gâteaux et montrerons qu'avec des conditions adéquates sur l'espace, toute fonction continue et convexe est Fréchet-dérivable sur un ensemble de complémentaire σ-poreux et toute fonction Lipschitzienne est Gâteaux-dérivable sur un ensemble prévalent. Concernant ce second résultat, plusieurs généralisations sont connues : on peut considérer une fonction définie sur un sous-ensemble convexe fermé quelconque du domaine et utiliser la prévalence relative ([3]) ou considérer une fonction à valeurs dans un espace de Banach possédant *la propriété de Radon – Nikodym* et montrer que l'ensemble des points où elle n'est pas Gâteaux-dérivable est Aronszajn-nul (une notion qui, rappelons-le, est plus forte que la timidité) ([25]).

La section 3.7 aura trait à la généricité des fonctions nulle part analytiques, c'est-à-dire nulle part développables en série de Taylor, ainsi que des fonctions nulle part Gevrey-dérivables. Nous montrerons que ces deux ensembles de fonctions sont à la fois résiduels et prévalents. Notons qu'ils sont également denses-linéables ([24, 27]).

Finalement, la section 3.8 prouvera un résultat classique de généricité dans les espaces S^ν, valable dans le cadre des catégories de Baire et de la prévalence.

3.1 Théorème de Fubini

La première application à laquelle nous allons nous intéresser n'est pas à proprement parler un résultat de généricité. Plus exactement, nous allons nous interroger sur la validité d'un théorème bien connu de théorie de la mesure, le *théorème de Fubini*, lorsque les ensembles de mesure de Lebesgue nulle sont remplacés par d'autres ensembles *petits*. Dans sa forme classique, le théorème est énoncé comme suit.

Théorème 3.1.1. *Soient $(X,\mathscr{A}_X,\mu)$ et $(Y,\mathscr{A}_Y,\nu)$ deux espaces mesurés σ-finis. Un ensemble mesurable A de $X\times Y$ est de mesure $\mu\times\nu$ nulle si et seulement si la section suivant la direction $x\in X$, i.e. $A_x=\{y\in Y:(x,y)\in A\}$, est de mesure ν nulle pour μ-presque tout $x\in X$. De même, A est de mesure $\mu\times\nu$ nulle si et seulement si la section $A_y=\{x\in X:(x,y)\in A\}$ est de mesure μ nulle pour ν-presque tout $y\in Y$.*

Dans le cas particulier où $(X,\mathscr{A}_X,\mu)=(\mathbb{R}^n,\mathbb{B}^n,\mathcal{L}^n)$ et $(Y,\mathscr{A}_Y,\nu)=(\mathbb{R}^m,\mathbb{B}^m,\mathcal{L}^m)$, on a $X\times Y=\mathbb{R}^{n+m}$ et $\mu\times\nu=\mathcal{L}^{n+m}$ donc le résultat nous apprend qu'un ensemble

Lebesgue-mesurable de $\mathbb{R}^{n+m}$ est négligeable si et seulement si presque toute section dans une direction fixée de $\mathbb{R}^n$ ou de $\mathbb{R}^m$ est négligeable.

Pour obtenir un équivalent dans le cadre des catégories de Baire, *maigre* doit bien sûr se substituer à *négligeable*, mais *mesurable* doit également être remplacé par une notion qui lui correspond. On dit qu'un ensemble A *a la propriété de Baire* s'il existe un ouvert U tel que $A \triangle U$ est maigre. Il peut être montré que cette propriété est le pendant de la mesurabilité au sens où les ensembles ayant la propriété de Baire constituent une σ-algèbre engendrée par les ouverts et les ensembles maigres, tout comme les ensembles Lebesgue-mesurables forment une σ-algèbre engendrée par les ouverts et les ensembles négligeables (théorèmes 3.16 et 4.3 de [126]). Elle permet par ailleurs de formuler un analogue du théorème 3.1.1 dans le cadre des catégories de Baire : on l'appelle le *théorème de Kuratowski – Ulam* ([126]).

Théorème 3.1.2. *Soient X et Y deux espaces complètement métrisables, avec Y séparable. Si A est un sous-ensemble maigre de $X \times Y$, alors pour tout x dans un sous-ensemble résiduel de X, $A_x = \{y \in Y : (x,y) \in A\}$ est maigre dans Y et pour tout y dans un sous-ensemble résiduel de Y, $A_y = \{x \in X : (x,y) \in A\}$ est maigre dans X. De plus, si A est un sous-ensemble de $X \times Y$ qui a la propriété de Baire et si $\{x \in X : A_x$ est maigre dans $Y\}$ est résiduel dans X ou si $\{y \in Y : A_y$ est maigre dans $X\}$ est résiduel dans Y, alors A est maigre.*

Démonstration. Pour la première partie, nous allons montrer que si A est un fermé d'intérieur vide de $X \times Y$, alors A_x est un fermé d'intérieur vide de Y pour tout x dans un sous-ensemble résiduel de X. Cela suffira puisque si A est maigre, il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fermés d'intérieur vide telle que $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Or ce qui précède nous apprend que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un sous-ensemble résiduel D_n de X tel que $(A_n)_x$ est un fermé d'intérieur vide de Y pour tout $x \in D_n$. Il s'ensuit que tous les $(A_n)_x$ sont des fermés d'intérieur vide de Y si $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n$, où $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n$ est un sous-ensemble résiduel de X. Finalement, la relation $A_x \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n)_x$ montre que A_x est maigre dans Y pour tout x dans un ensemble résiduel de X. Cela étant, supposons que A est un fermé d'intérieur vide de $X \times Y$, considérons $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base dénombrable de Y et posons $U = (X \times Y) \setminus A$. Alors U est un ouvert dense de $X \times Y$. Pour tout naturel n, soit

$$U_n = \{x \in X : (x,y) \in U \text{ pour un } y \in b_n\}.$$

Fixons $n \in \mathbb{N}$, $x \in U_n$ et $y \in b_n$ tel que $(x,y) \in U$. Puisque U est ouvert, il existe des boules ouvertes b et b' telles que $x \in b$, $y \in b' \subseteq b_n$ et $b \times b' \subseteq U$. Il s'ensuit que b est inclus dans U_n et donc que U_n est ouvert dans X. De plus, pour tout ouvert non-vide V de X, l'ensemble $U \cap (V \times b_n)$ est non-vide par densité de U dans $X \times Y$, et cela entraîne que $U_n \cap V$ est également non-vide. Ainsi, U_n est un ouvert dense de X. On en déduit que l'ensemble $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ est résiduel dans X. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in U_n$, il existe $y \in b_n$ tel que $y \in U_x$. Par conséquent, pour tout $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$, U_x est un ouvert dense de Y car $U_x \cap b_n \neq \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en tire finalement que $A_x = Y \setminus U_x$ est un fermé d'intérieur vide de Y, ce qui conclut la preuve de cette implication.

Pour la seconde partie de l'énoncé, procédons par l'absurde et supposons que A est un sous-ensemble de deuxième catégorie de $X \times Y$ qui a la propriété de Baire et est tel que $\{x \in X : A_x$ est maigre dans $Y\}$ est résiduel dans X. Par hypothèse, A peut s'écrire $A = G \triangle M$, où M et G sont des sous-ensembles respectivement maigre et ouvert de $X \times Y$. Comme on vient de supposer que A n'est pas maigre, nécessairement G est de deuxième catégorie. Par le théorème des catégories de Banach 1.1.16, il existe des ouverts U et V de X et Y tels que $U \times V \subseteq G$ et $U \times V$ est de deuxième catégorie. Dans ce cas, U et V sont tous deux de deuxième catégorie. En effet, si l'un d'entre eux était maigre, en supposant sans perte de généralité qu'il s'agit de U, on pourrait écrire $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, où chaque A_n est nulle part dense. Ainsi, on aurait

$$U \times V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \times V) \quad \text{et} \quad (\overline{A_n \times V})^\circ \subseteq (\overline{A_n})^\circ \times (\overline{V})^\circ = \emptyset,$$

ce qui contredirait notre hypothèse sur le produit $U \times V$. De plus,

$$A_x \supseteq ((U \times V) \setminus M)_x = V \setminus M_x$$

pour tout $x \in U$ et M_x est maigre pour tout x dans U privé d'un ensemble maigre en utilisant la première partie de l'énoncé. Cela implique que A_x est de deuxième catégorie pour tout x dans un ensemble de deuxième catégorie, ce qui contredit le fait que A_x ne peut être de deuxième catégorie que pour un ensemble maigre de x. $\square$

Au contraire des catégories de Baire, la porosité ne fournit pas un cadre propice à une reformulation du théorème de Fubini. Voyons un premier contre-exemple, qui va nier l'implication

$$A \textit{ petit } \Rightarrow A_x \textit{ petit} \text{ pour tout } x \text{ sauf dans un ensemble } \textit{petit} \tag{3.1}$$

du théorème 3.1.1. Les arguments sont dus à Preiss et Zajíček ([134]).

Proposition 3.1.3. *Il existe un sous-ensemble σ-poreux A de $\mathbb{R}^2$ pour lequel l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : \mathcal{L}(\mathbb{R} \setminus A_x) = 0\}$ est résiduel.*

Puisqu'un ensemble σ-poreux de $\mathbb{R}^n$ est à la fois maigre et de mesure de Lebesgue nulle, cela montre bien que le théorème de Fubini ne fonctionne pas. En effet, si l'implication (3.1) était vraie, alors il existerait un sous-ensemble σ-poreux M de $\mathbb{R}$ tel que A_x est σ-poreux pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus M$. En particulier, il existerait un ensemble maigre M de $\mathbb{R}$ tel que A_x est de mesure de Lebesgue nulle pour tout x dans l'ensemble résiduel $\mathbb{R} \setminus M$. Puisque l'intersection de deux ensembles résiduels est non-vide, il existerait un $x \in \mathbb{R}$ tel que A_x et $\mathbb{R} \setminus A_x$ sont tous deux de mesure de Lebesgue nulle, une contradiction. La preuve de la proposition 3.1.3 se fera en plusieurs étapes et utilisera une nouvelle notion de porosité.

Définition 3.1.4. Soit $h : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ une fonction continue telle que $h(0) = 0$ et $h(x) > x$ pour tout $x > 0$. On dit qu'un sous-ensemble A de $\mathbb{R}^2$ est *h-poreux à droite en $c = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ dans la direction de l'axe x*, ce que l'on raccourcit en A est $(h, +)$-poreux en c, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $t, r > 0$ tels que $t < \varepsilon$, $h(r) > t$ et

$$(]a + t - r, a + t + r[\times]b - r, b + r[) \cap A = \emptyset. \tag{3.2}$$

Les ensembles $(h,-)$-*poreux en* c sont définis de manière symétrique, i.e. en remplaçant simplement $]a+t-r, a+t+r[$ par $]a-t-r, a-t+r[$ dans la condition (3.2), et un ensemble A est alors dit $(h,\pm)$-*poreux en* c si A est $(h,+)$-poreux et $(h,-)$-poreux en c. Les ensembles $(h,\pm)$-*poreux* et σ-$(h,\pm)$-*poreux* sont ensuite définis comme en 1.2.5.

En prenant une fonction h bien choisie, cette nouvelle notion de porosité est plus forte que la notion classique.

Remarque 3.1.5. Soit $h : [0,+\infty[\to [0,+\infty[: x \mapsto 2x$ et soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ $(h,+)$-poreux en $c=(a,b)$. Alors A est poreux en c par la définition 1.2.8. En effet, posons $\rho = \frac{1}{4}$ et fixons $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe $r,t>0$ tels que $t<\varepsilon$, $2r>t$ et

$$(]a+t-r, a+t+r[\times]b-r, b+r[) \cap A = \emptyset.$$

Si $z = \left(a+\frac{3t}{4}, b\right)$, on a clairement

$$b(z,\rho t) \subseteq b(c,t) \setminus A.$$

La conclusion est la même si A est supposé $(h,-)$-poreux en c.

Définition 3.1.6. Soient h comme dans la définition 3.1.4, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ et $\delta > 0$. On définit $W^+(A,h,\delta)$ comme l'ensemble des points $c=(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels il existe $t,r>0$ tels que $t<\delta$, $h(r)>t$ et

$$]a+t-r, a+t+r[\times]b-r, b+r[\subseteq A. \tag{3.3}$$

L'ensemble $W^-(A,h,\delta)$ est défini de manière symétrique, i.e. en remplaçant simplement $]a+t-r, a+t+r[$ par $]a-t-r, a-t+r[$ dans la condition (3.3).

Ces ensembles sont liés à la définition 3.1.4 de la manière suivante.

Remarque 3.1.7. Clairement, A est $(h,+)$-poreux en c si et seulement si

$$c \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} W^+\left(\mathbb{R}^2 \setminus A, h, \frac{1}{k}\right),$$

et le résultat obtenu en remplaçant + par − est également vrai.

Lemme 3.1.8. *Soit h comme dans la définition 3.1.4 et soient $t,s,v,w,\eta,\delta \in \mathbb{R}$ tels que $t<s$, $v<w$, $0<\eta<\frac{w-v}{2}$ et $\delta>0$. Il existe $T \in]t,s[$ tel que*

$$]T, 2s-T[\times]v+\eta, w-\eta[$$

est inclus dans

$$W^-(]t,T[\times]v,w[, h, \delta) \cap W^+(]2s-T, 2s-t[\times]v,w[, h, \delta).$$

Démonstration. Fixons $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon \leq \min\left(\frac{\delta}{3}, \eta, \frac{s-t}{2}\right)$ et sélectionnons T dans l'intervalle $]s-\varepsilon, s[$ de sorte à avoir

$$h(\varepsilon - (s-T)) > \varepsilon + (s-T),$$

ce qui est possible puisque, dans le cas contraire, on aurait l'absurdité

$$h(\varepsilon) = \lim_{T\to s} h(\varepsilon - (s-T)) \leq \lim_{T\to s} \varepsilon + (s-T) = \varepsilon.$$

Montrons que ce T convient. On a immédiatement

$$T > s - \varepsilon \geq s - \frac{s-t}{2} = \frac{s+t}{2} > t.$$

On se donne ensuite $a \in \,]T, 2s-T[$ et $b \in \,]v+\eta, w-\eta[$. En posant $p = a - (s-\varepsilon)$ et $r = \varepsilon - (s-T) > 0$, on trouve

$$0 < p < \varepsilon + (s-T) < 2\varepsilon < \delta,$$

$$h(r) > \varepsilon + (s-T) > p$$

et

$$]a-p-r, a-p+r[\, \times \,]b-r, b+r[\, \subseteq \,]t, T[\, \times \,]v, w[\,.$$

On en tire

$$(a, b) \in W^-(]t, T[\, \times \,]v, w[\,, h, \delta).$$

Pour prouver

$$(a, b) \in W^+(]2s-T, 2s-t[\, \times \,]v, w[\,, h, \delta),$$

il suffit de poser $p = s - (a-\varepsilon)$ au lieu de $p = a - (s-\varepsilon)$. En effet, on a dans ce cas

$$0 < T - s + \varepsilon < p < s - T + \varepsilon < \varepsilon < \delta,$$

$$h(r) > \varepsilon + (s-T) > p$$

et

$$]a+p-r, a+p+r[\, \times \,]b-r, b+r[\, \subseteq \,]2s-T, 2s-t[\, \times \,]v, w[\,.$$

□

Lemme 3.1.9. *Soit h comme dans la définition 3.1.4, soient $\varepsilon, \delta, \omega > 0$ et soient $I_1 = \,]a, b[$, $I_2 = \,]c, d[$ des intervalles bornés. Il existe un intervalle ouvert non-vide J inclus dans I_1, un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et un borélien B de $\mathbb{R}^2$ tels que*

(1) $\mathcal{L}(U_x) \leq \varepsilon$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,

(2) $\mathcal{L}(B_x) \leq \omega$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,

(3) $(J \times I_2) \setminus B \subseteq W^-(U, h, \delta) \cap W^+(U, h, \delta)$.

Démonstration. Nous allons supposer $\omega < d - c$. Posons $s = \frac{a+b}{2}$, choisissons $n \in \mathbb{N}_0$ tel que $\frac{d-c}{n} < \varepsilon$ et notons $\eta = \frac{\omega}{2n}$. Nous allons appliquer n fois le lemme 3.1.8 en conservant à chaque itération h, η, δ et s, mais en modifiant à chaque fois t, v et w. À la première étape, on applique le lemme à $t_1 = a$, $v = c$ et $w = c + \frac{d-c}{n}$, ce qui nous donne $T_1 \in]t_1, s[$. Ensuite, on applique le lemme à $t_2 = T_1$, $v = c + \frac{d-c}{n}$ et $w = c + \frac{2(d-c)}{n}$, et on obtient $T_2 \in]t_2, s[$. On procède n fois de la sorte et on pose $t_{n+1} = T_n$.

Définissons à présent

$$U = \left(\bigcup_{i=1}^{n} \left( ]2s - t_{i+1}, 2s - t_i[\times \left]c + \frac{i-1}{n}(d-c), c + \frac{i}{n}(d-c)\right[\right) \right) \bigcup \left(\bigcup_{i=1}^{n} \left( ]t_i, t_{i+1}[\times \left]c + \frac{i-1}{n}(d-c), c + \frac{i}{n}(d-c)\right[\right) \right),$$

$$J =]t_{n+1}, 2s - t_{n+1}[$$

et

$$B = J \times \left( ]c, d[\setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} \left]c + \frac{i-1}{n}(d-c) + \eta, c + \frac{i}{n}(d-c) - \eta\right[\right) \right).$$

Il est clair que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, B un borélien de $\mathbb{R}^2$ et J un intervalle ouvert. De plus, $t_{n+1} > \ldots > t_1 = a$, $2s - t_{n+1} \leq b$ et $t_{n+1} < 2s - t_{n+1}$, ce qui montre que J est non-vide et inclus dans I_1. Enfin,

(1)
$$U_x = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x \notin \bigcup_{i=1}^{n} (]2s - t_{i+1}, 2s - t_i[\cup]t_i, t_{i+1}[) \\ ]c + \frac{i-1}{n}(d-c), c + \frac{i}{n}(d-c)[& \text{sinon} \end{cases},$$

d'où $\mathcal{L}(U_x) \leq \frac{d-c}{n} < \varepsilon$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,

(2)
$$B_x = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x \notin J \\ ]c, d[\setminus \bigcup_{i=1}^{n}]c + \frac{i-1}{n}(d-c) + \eta, c + \frac{i}{n}(d-c) - \eta[& \text{sinon} \end{cases},$$

d'où

$$\mathcal{L}(B_x) \leq (d-c) - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d-c}{n} - 2\eta \right) = 2\eta n = \omega$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$,

(3) pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on sait par construction que

$$A_i =]t_{i+1}, 2s - t_{i+1}[\times \left]c + \frac{i-1}{n}(d-c) + \eta, c + \frac{i}{n}(d-c) - \eta\right[$$

est inclus dans

$$W^-(A_i^{(1)}, h, \delta), \text{ où } A_i^{(1)} =]t_i, t_{i+1}[\times \left]c + \frac{i-1}{n}(d-c), c + \frac{i}{n}(d-c)\right[$$

et dans

$$W^+(A_i^{(2)}, h, \delta), \text{ où } A_1^{(2)} =]2s - t_{i+1}, 2s - t_i[\times \left] c + \frac{i-1}{n}(d-c), c + \frac{i}{n}(d-c) \right[,$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned}(J \times I_2) \setminus B &=]t_{n+1}, 2s - t_{n+1}[\times \left(\bigcup_{i=1}^{n} \left] c + \frac{i-1}{n}(d-c) + \eta, c + \frac{i}{n}(d-c) - \eta \right[\right) \\ &\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i \\ &\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \left(W^-(A_i^{(1)}, h, \delta) \cap W^+(A_i^{(2)}, h, \delta) \right) \\ &\subseteq W^-(U, h, \delta) \cap W^+(U, h, \delta).\end{aligned}$$

□

Proposition 3.1.10. *Soit h comme dans la définition 3.1.4, soit $I =]c, d[$ un intervalle borné et soit $\xi > 0$. Il existe un borélien B de $\mathbb{R} \times I$ et un ensemble résiduel A de $\mathbb{R}$ tels que*

(1) B est $(h, \pm)$-poreux,

(2) $\mathcal{L}(B_x) \geq \mathcal{L}(I) - \xi$ pour tout $x \in A$.

Démonstration. Soit $(I^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite constituée de tous les intervalles ouverts à extrémités rationnelles. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, appliquons le lemme 3.1.9 à $I_1 = I^{(n)}$, $I_2 = I$, $\delta = \frac{1}{n}$, $\varepsilon = \omega = \frac{\xi}{2^{n+2}}$ et notons J_n, U_n, B_n les ensembles obtenus. Posons ensuite

$$A = \limsup_{n\to+\infty} J_n = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq k} J_n$$

et

$$B = (A \times I) \setminus \left(\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \right) \bigcup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n \right) \right).$$

Évidemment A est résiduel dans $\mathbb{R}$ et B est un borélien de $\mathbb{R}^2$. On a

$$\mathcal{L}(B_x) \geq \mathcal{L}(I) - \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{L}((B_n)_x) + \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{L}((U_n)_x) \right) \geq \mathcal{L}(I) - \xi$$

pour tout $x \in A$, ce qui prouve le point (2). Pour obtenir la condition (1), nous allons nous servir de la remarque 3.1.7. Fixons donc $c \in B$ et $l \in \mathbb{N}_0$. Dans ce cas, $c \in \bigcup_{n\geq l+1} J_n \times I$ et $c \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ donc on trouve $n > l$ tel que $c \in (J_n \times I) \setminus B_n$. Par construction, on a alors

$$c \in W^-\left(U_n, h, \frac{1}{n}\right) \cap W^+\left(U_n, h, \frac{1}{n}\right) \subseteq W^-\left(\mathbb{R}^2 \setminus B, h, \frac{1}{l}\right) \cap W^+\left(\mathbb{R}^2 \setminus B, h, \frac{1}{l}\right),$$

ce qui termine la preuve. □

Le théorème suivant achèvera notre raisonnement car, avec la remarque 3.1.5, il induit la proposition 3.1.3.

Théorème 3.1.11. *Soit h comme dans la définition 3.1.4. Il existe un borélien σ-$(h, \pm)$-poreux B de $\mathbb{R}^2$ tel que l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : \mathcal{L}(\mathbb{R} \setminus B_x) = 0\}$ est résiduel.*

Démonstration. Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite constituée de tous les intervalles ouverts à extrémités rationnelles. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition 3.1.10 appliquée à $I = I_n$ et $\xi = \frac{1}{2}\mathcal{L}(I_n)$ assure l'existence d'un sous-ensemble résiduel A_n de $\mathbb{R}$ et d'un borélien $(h, \pm)$-poreux B_n de $\mathbb{R}^2$ inclus dans $\mathbb{R} \times I_n$ tel que $\mathcal{L}((B_n)_x) \geq \frac{1}{2}\mathcal{L}(I_n)$ pour tout $x \in A_n$. Si on pose $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ et $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$, alors pour tout $x \in A$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{\mathcal{L}((\mathbb{R} \setminus B_x) \cap I_n)}{\mathcal{L}(I_n)} \leq \frac{\mathcal{L}(I_n \setminus (B_n)_x)}{\mathcal{L}(I_n)} \leq \frac{1}{2}.$$

Le théorème de densité de Lebesgue A.3 implique que $\mathcal{L}(\mathbb{R} \setminus B_x) = 0$ pour tout $x \in A$. Or B est bien σ-$(h, \pm)$-poreux et A résiduel comme demandé. □

La seconde implication donnée par le théorème de Fubini 3.1.1, à savoir

$$A_x \textit{ petit} \text{ pour tout } x \text{ sauf dans un ensemble } \textit{petit} \Rightarrow A \textit{ petit},$$

est également fausse lorsque *petit* signifie σ-poreux. Pour le montrer, il suffirait par exemple de construire une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont le graphe $\mathscr{G} = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ n'est pas σ-poreux puisque dans ce cas, $\mathscr{G}$ serait fermé par continuité de f, $\mathscr{G}$ ne serait pas σ-poreux, mais $\mathscr{G}_x = \{f(x)\}$ serait σ-poreux dans $\mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (exemple 1.2.12). L'existence d'une telle fonction a été établie par Foran ([65]).

Malgré l'absence d'analogue dans le cadre de la porosité, une forme partielle du théorème de Fubini qui permet d'écrire un sous-ensemble σ-poreux de $X \times Y$ comme l'union d'un ensemble σ-poreux *dans la direction* X avec un ensemble σ-poreux *dans la direction* Y a été exposée dans [134] (section 3 et plus précisément son théorème 3.8, voir aussi [68]). Ce résultat nécessitant de définir un nouveau type particulier de porosité, nous n'en donnerons par les détails.

Comme pour la porosité, le théorème de Fubini 3.1.1 ne s'étend pas dans le cadre de la prévalence. Le contre-exemple que nous allons exhiber est tiré de [39]. Il en existe d'autres, notamment dans [3, 54, 68]. Nous aurons besoin de deux résultats classiques d'analyse harmonique. Le premier est le *théorème de Carleson*, rappelé ci-dessous sans preuve ([64]).

Théorème 3.1.12. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique de carré intégrable dont les coefficients de Fourier dans $L^2([0, 2\pi])$ sont notés $\hat{f}(n)$ ($n \in \mathbb{Z}$). Alors*

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e^{inx} = f(x)$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

Le second est la possibilité d'associer à tout réel une fonction continue dont la série de Fourier ne converge pas en ce point. Une preuve non-constructive qui utilise le fait que l'ensemble des fonctions continues dont la série de Fourier ne converge pas au point donné est résiduel peut être trouvée dans [95] (théorème 1.4). Nous pouvons maintenant obtenir notre contre-exemple.

Théorème 3.1.13. *Considérons $L^2([0,2\pi])$ et $\mathcal{L}$ la mesure de Lebesgue restreinte aux boréliens de $[0,2\pi]$ (que l'on munit de l'addition modulo 2π). Il existe un borélien B du produit $L^2([0,2\pi]) \times [0,2\pi]$ tel que*

(1) pour tout $f \in L^2([0,2\pi])$, la section $B_f = \{x \in [0,2\pi] : (f,x) \in B\}$ est de mesure de Lebesgue 2π dans $[0,2\pi]$,

(2) pour tout $x \in [0,2\pi]$, la section $B_x = \{f \in L^2([0,2\pi]) : (f,x) \in B\}$ est un ensemble timide de $L^2([0,2\pi])$,

(3) le complémentaire de B est un ensemble timide dans le produit $L^2([0,2\pi]) \times [0,2\pi]$.

Démonstration. Soit B l'ensemble des couples (f,x) de $L^2([0,2\pi]) \times [0,2\pi]$ tels que la série de Fourier associée à f est convergente au point x. Il s'agit d'un borélien par continuité pour tout $N \in \mathbb{N}_0$ de l'application

$$(f,x) \in L^2([0,2\pi]) \times [0,2\pi] \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e^{inx}.$$

Le point (1) est une conséquence immédiate du théorème de Carleson. De plus, pour tout $x \in [0,2\pi]$,

$$B_x = \{f \in L^2([0,2\pi]) : \text{la série de Fourier de } f \text{ converge en } x\}$$

est un sous-espace vectoriel borélien de $L^2([0,2\pi])$ donc s'il n'était pas timide, il serait égal à l'espace tout entier. Comme on a rappelé que pour tout $x \in [0,2\pi]$, il existe $f \in L^2([0,2\pi])$ dont la série de Fourier ne converge pas en x, le point (2) est établi.

Pour conclure, trouvons une mesure transverse au complémentaire de B. On considère la mesure produit de la mesure de Dirac δ_0 de $L^2([0,2\pi])$ et de $\mathcal{L}$. Dans ce cas, pour tout $(g,t) \in L^2([0,2\pi]) \times [0,2\pi]$, on a

$$\begin{aligned} & (\delta_0 \times \mathcal{L})\big(\big(L^2([0,2\pi]) \times [0,2\pi]\big) \setminus B - (g,t)\big) \\ = \; & (\delta_0 \times \mathcal{L})(\{(f,x) \in L^2([0,2\pi]) \times [0,2\pi] : (f+g, x+t) \notin B\}) \\ = \; & \mathcal{L}(\{x \in [0,2\pi] : (g, x+t) \notin B\}) \\ = \; & 0 \end{aligned}$$

en utilisant à nouveau le théorème de Carleson. Comme $(\delta_0 \times \mathcal{L})(\{0\} \times [0,2\pi]) \in \,]0,+\infty[$, il s'ensuit que la condition (3) est également satisfaite. □

Cet énoncé nie bien concurremment les deux implications d'une éventuelle généralisation du théorème 3.1.1. D'une part, la timidité de B_x pour tout x n'implique pas la timidité de B et d'autre part, la timidité du complémentaire de B n'implique pas la timidité d'un ensemble prévalent de sections $(L^2([0,2\pi]) \setminus B)_x$. Remarquons que nous n'avons tiré profit dans ce raisonnement que des items (2) et (3). Au contraire, les points (1) et (3) tendent plutôt à confirmer le théorème de Fubini. Cette observation n'est pas fortuite puisque nous avons le résultat partiel suivant (cité sans preuve dans [39], démontré dans [32, 68] et généralisé dans [54]).

Théorème 3.1.14. *Soient $(G_1,+),(G_2,+)$ deux groupes topologiques abéliens polonais, avec G_2 localement compact de mesure de Haar notée h, et soit B un borélien de $G_1 \times G_2$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) l'ensemble des $g \in G_1$ pour lesquels la section B_g est de mesure de Haar nulle dans G_2 est prévalent,

(2) l'ensemble B est Haar-nul dans le produit $G_1 \times G_2$.

Démonstration. Supposons le point (1) vérifié. On sait que l'application $g \in G_1 \mapsto h(B_g)$ est borélienne et on en tire que l'ensemble

$$B_1 = \{g \in G_1 : h(B_g) > 0\}$$

est borélien. Comme il est également Haar-nul dans G_1 par hypothèse, on peut en considérer une mesure de test μ, c'est-à-dire une mesure de probabilité sur G_1 telle que $\mu(B_1+g)=0$ pour tout $g \in G_1$. Par σ-finitude des deux mesures h et μ, considérons leur produit $\mu \times h$ et montrons qu'il s'agit d'une mesure de test pour B. Pour tout $(g_1,g_2) \in G_1 \times G_2$, on a

$$\{g \in G_1 : h(((g_1,g_2)+B)_g) > 0\} = g_1 + B_1,$$

d'où

$$(\mu \times h)(B+(g_1,g_2)) = \int_{G_1} h((B+(g_1,g_2))_g)\, d\mu(g) = 0.$$

De plus, étant donné que h est une mesure de Borel régulière, il existe un compact K de G_2 pour lequel $0 < h(K) < +\infty$. En restreignant h à ce compact K puis en normalisant, la mesure $\mu \times h$ devient une mesure de probabilité qui annule tous les translatés de B.

Supposons à présent que la condition (2) est satisfaite et posons à nouveau

$$B_1 = \{g \in G_1 : h(B_g) > 0\}.$$

Notons ensuite δ_0 la mesure de Dirac associée au neutre 0_{G_1} de G_1, $\nu = \delta_0 \times h$ et μ une mesure de test pour l'ensemble B. Comme B_1 est borélien, le point (1) est équivalent à l'existence d'une mesure de test pour B_1. Dans cette optique, définissons une mesure de probabilité μ_1 sur G_1 par $\mu_1(\widetilde{B}) = \mu(\widetilde{B} \times G_2)$ pour tout borélien $\widetilde{B}$ de G_1 et fixons $g \in G_1$. Comme dans le lemme 1.3.21,

$$0 = (\nu * \mu)((g,0_{G_2})+B) = \int_{G_1 \times G_2} \nu(B+(g-g_1,-g_2))\, d\mu(g_1,g_2).$$

Or l'application

$$(g_1,g_2) \in G_1 \times G_2 \mapsto \nu(B+(g-g_1,-g_2)) = h((B+(0_{G_1},-g_2))_{g_1-g})$$

est borélienne (lemme 6.28 de [25]) et strictement positive sur $(g+B_1)\times G_2$. On en tire finalement la relation

$$\mu_1(g+B_1) = \mu((g+B_1)\times G_2) = 0.$$

□

3.2 Quelques résultats de prévalence

Cette deuxième section a pour but de se familiariser à l'utilisation des sondes et des processus stochastiques via quatre résultats de prévalence.

Pour le premier exemple (introduit dans [85] et détaillé dans [60, 125]), nous considérons l'espace de Banach $(L^1([0,1]), ||\cdot||)$, où

$$||f|| = \int_0^1 |f(x)|\, dx$$

pour toute fonction $f \in L^1([0,1])$.

Proposition 3.2.1. *L'ensemble des fonctions $f \in L^1([0,1])$ qui satisfont*

$$\int_0^1 f(x)\, dx \neq 0$$

est prévalent dans $L^1([0,1])$.

Démonstration. Notons A l'ensemble des fonctions f de $L^1([0,1])$ vérifiant la condition de l'énoncé et montrons que le sous-espace vectoriel S de dimension 1 de $L^1([0,1])$ constitué des fonctions constantes est une sonde pour A. Par continuité de l'application

$$f \in L^1([0,1]) \mapsto \int_0^1 f(x)\, dx,$$

A est un ouvert de $L^1([0,1])$ donc $L^1([0,1]) \setminus A$ est borélien et il nous faut prouver que $\mathcal{L}_S(L^1([0,1]) \setminus A + f) = 0$ quel que soit $f \in L^1([0,1])$. Or pour tout $f \in L^1([0,1])$, si φ désigne l'isomorphisme $\varphi : \mathbb{R} \to S : \alpha \mapsto \alpha$, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_S(L^1([0,1]) \setminus A + f) &= \mathcal{L}(\{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha - f \notin A) \\
&= \mathcal{L}\left(\left\{\alpha \in \mathbb{R} : \int_0^1 \alpha - f(x)\, dx = 0\right\}\right) \\
&= \mathcal{L}\left(\left\{\int_0^1 f(x)\, dx\right\}\right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

ce qui conclut. □

Au lieu d'utiliser une sonde, nous aurions pu remarquer que l'ensemble $L^1([0,1]) \setminus A$ est un sous-espace vectoriel propre fermé de $L^1([0,1])$, ce qui implique qu'il est timide par le corollaire 1.3.32 ([146]). Outre l'envie de s'habituer à cet outil pratique, il existe un autre avantage à l'utilisation de la sonde S dans la preuve : comme S est un sous-ensemble de $C^k([0,1])$ pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ et $C^k([0,1])$ un sous-espace vectoriel de $L^1([0,1])$, on obtient gratuitement que l'ensemble des fonctions de $C^k([0,1])$ dont l'intégrale sur $[0,1]$ est non-nulle est prévalent (corollaire 1.3.36).

Remarque 3.2.2. Puisque A est ouvert et prévalent, il est évidemment résiduel. Par contre, on montre facilement qu'il n'est pas linéable (exemple 1.3.14 de [61]).

Pour le deuxième résultat, nous nous plaçons dans l'espace de Fréchet $C^1(\mathbb{R})$ muni de la famille de semi-normes $\{p_n : n \in \mathbb{N}_0\}$, où p_n est défini par

$$p_n(f) = \sup_{x\in[-n,n]} \max(|f(x)|\,, |f'(x)|)$$

pour tout $f \in C^1(\mathbb{R})$ et tout $n \in \mathbb{N}_0$. Nous aurons besoin du *théorème de Sard* rappelé ci-dessous ([141]).

Théorème 3.2.3. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction de classe C^k avec $k \geq \max(n-m+1, 1)$. Si C désigne l'ensemble des valeurs critiques de f, c'est-à-dire l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ en lesquels la matrice jacobienne de f n'est pas de rang maximal, alors $\mathcal{L}(f(C)) = 0$.*

Ce théorème nous permet de montrer que, génériquement, une fonction et sa dérivée ne s'annulent pas simultanément.

Proposition 3.2.4. *L'ensemble des fonctions $f \in C^1(\mathbb{R})$ telles que $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $f(x) = 0$ est prévalent dans $C^1(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Notons A l'ensemble des fonctions de $C^1(\mathbb{R})$ vérifiant la condition de l'énoncé et pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, posons

$$A_n = \{f \in C^1(\mathbb{R}) : \exists x \in [-n, n] \text{ tel que } f(x) = 0 = f'(x)\}.$$

Dans ce cas, $C^1(\mathbb{R}) \setminus A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} A_n$ est une union dénombrable de fermés et donc un borélien. De fait, si $n \in \mathbb{N}_0$ et si $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite de A_n qui converge vers f dans $C^1(\mathbb{R})$, alors pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $x_m \in [-n, n]$ tel que $f_m(x_m) = 0 = f'_m(x_m)$. Quitte à considérer une sous-suite, on peut supposer que $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers $x \in [-n, n]$, auquel cas

$$\left.\begin{array}{r}\lim_{m\to+\infty} |f_m(x_m) - f(x)| \\ \lim_{m\to+\infty} |f'_m(x_m) - f'(x)|\end{array}\right\} \leq \lim_{m\to+\infty} p_n(f_m - f) = 0.$$

Finalement, on a $f(x) = 0 = f'(x)$, ce qui montre que f appartient à A_n. Cela étant, notons S le sous-espace vectoriel de dimension 1 de $C^1(\mathbb{R})$ constitué des fonctions constantes et $\varphi : \mathbb{R} \to S : \alpha \mapsto \alpha$. Si $g \in C^1(\mathbb{R})$ et C désigne l'ensemble des valeurs critiques de g, i.e. $C = \{x \in \mathbb{R} : g'(x) = 0\}$, alors la relation $\mathcal{L}(g(C)) = 0$ découle du théorème de Sard 3.2.3 et implique

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_S(C^1(\mathbb{R}) \setminus A + g) &= \mathcal{L}(\{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha - g \notin A\}) \\ &= \mathcal{L}(\{\alpha \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que } g(x) = \alpha \text{ et } g'(x) = 0\} \\ &= \mathcal{L}(\{\alpha \in \mathbb{R} : \exists x \in C \text{ tel que } g(x) = \alpha\}) \\ &= \mathcal{L}(g(C)) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Cela montre que S est une sonde pour A et achève le raisonnement. □

Ce résultat a été généralisé par Hunt, Sauer et Yorke (proposition 3 de [85]) à l'espace des fonctions k fois continûment dérivables et à l'ensemble des fonctions $f \in C^k(\mathbb{R})$ telles qu'en tout $x \in \mathbb{R}$, au plus un élément de $\{f^{(i)}(x) : i \in \{0, \ldots, k\}\}$ s'annule. La démonstration fait intervenir la notion de *transversalité*, une autre technique permettant d'obtenir des résultats de prévalence que nous n'avons pas introduite dans ce travail.

Pour le troisième exemple de cette section, l'espace ambiant sera l'espace de Banach $(\ell^p, \|\cdot\|)$, où $p \in \,]1, +\infty[$ et

$$\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}\| = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

pour tout $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \ell^p$. L'inclusion de ℓ^1 dans ℓ^p étant bien connue, il est naturel de s'interroger sur la *quantité* de suites de ℓ^p qui sont dans l'intersection $\ell^1 \cap \ell^p$. Le résultat suivant montre que c'est le cas de *peu* de suites (introduit dans [85] puis généralisé et détaillé dans [60, 125]).

Proposition 3.2.5. *Soit $p \in \,]1, +\infty[$. L'ensemble des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ de ℓ^p qui sont telles que $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} |a_n|$ diverge, i.e. telles que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \notin \ell^1$, est prévalent dans ℓ^p.*

Démonstration. Soit A l'ensemble des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ de ℓ^p telles que $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} |a_n|$ diverge. Cet ensemble est un borélien de ℓ^p. En effet, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $M \in \mathbb{N}_0$, si

$$A_k = \left\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \ell^p : \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \leq k\right\} \quad \text{et} \quad A_k^{(M)} = \left\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \ell^p : \sum_{n=1}^{M} |a_n| \leq k\right\},$$

l'ensemble A_k peut se réécrire $A_k = \bigcap_{M\in\mathbb{N}_0} A_k^{(M)}$. Chacun des ensembles $A_k^{(M)}$ étant fermé pour la convergence ponctuelle, il est également fermé dans ℓ^p et nous en tirons que l'ensemble A_k est lui aussi fermé dans ℓ^p. Par conséquent, $A = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} (\ell^p \setminus A_k)$ est un borélien de ℓ^p.

Considérons le sous-espace vectoriel S de dimension 1 de ℓ^p engendré par la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ et l'isomorphisme

$$\varphi : \mathbb{R} \to S : \alpha \mapsto \left(\frac{\alpha}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}.$$

Pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ de ℓ^p, on a alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_S(\ell^p \setminus A - (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}) &= \mathcal{L}\left(\left\{\alpha \in \mathbb{R} : \left(\frac{\alpha}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}_0} + (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \notin A\right\}\right) \\ &= \mathcal{L}\left(\left\{\alpha \in \mathbb{R} : \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \left|\frac{\alpha}{n} + a_n\right| \text{ converge}\right\}\right). \end{aligned}$$

Or, supposer qu'il existe deux réels distincts α et β tels que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \left|\frac{\alpha}{n} + a_n\right| \quad \text{et} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \left|\frac{\beta}{n} + a_n\right|$$

convergent induit une contradiction, à savoir la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}_0}\frac{1}{n}$ due à la majoration

$$\frac{1}{n}=\frac{|(\alpha+na_n)-(\beta+na_n)|}{|\alpha-\beta|\,n}\leq\frac{1}{|\alpha-\beta|}\cdot\left(\left|\frac{\alpha}{n}+a_n\right|+\left|\frac{\beta}{n}+a_n\right|\right).$$

Nous obtenons donc

$$\mathcal{L}_S(\ell^p\setminus A-(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0})=0.$$

□

Enfin, le quatrième et dernier résultat concerne la prolongeabilité des séries de puissances naturelles.

À toute série $\sum_{n\in\mathbb{N}}a_nz^n$ $(z\in\mathbb{C})$, on peut associer un réel positif r tel que la série converge uniformément sur tout compact à l'intérieur du disque ouvert $D(0,r)$ et diverge à l'extérieur du disque fermé. Ce réel r, appelé le *rayon de convergence* de la série, est déterminé par la formule

$$r=\left(\limsup_{n\to+\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)^{-1}.$$

Ainsi, la fonction $z\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ est holomorphe dans $D(0,r)$ mais n'est pas définie hors de $\overline{D(0,r)}$. La seule partie du plan complexe où l'on ne connaît a priori pas le comportement de la série est donc sur son *cercle de convergence* $C(0,r)$. Il existe d'ailleurs aussi bien des séries qui convergent en tout point de $C(0,r)$ que des séries qui convergent seulement en certains points, ou encore qui ne convergent nulle part sur le cercle ([144]).

On peut établir une correspondance entre les séries de puissances naturelles et les fonctions analytiques (dont nous parlerons à la section 3.7), au sens où la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}a_nz^n$ définit une fonction qui est sa propre série de Taylor en 0 sur son disque de convergence, et une fonction $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ qui se développe sous la forme $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$ pour tout $z\in D(0,r)$ est associée à une série de puissances dont le rayon de convergence est au minimum r.

Dans la suite, nous considérerons uniquement des séries dont le rayon de convergence est au moins 1. Nous noterons donc D le disque unité $D(0,1)$, X l'espace des fonctions associées à une série de puissances de rayon de convergence plus grand ou égal à 1 et Γ le cercle de convergence $C(0,1)$ des fonctions de X. Si $f\in X$, on dira qu'un point $a\in\Gamma$ est *régulier* pour f s'il existe un disque ouvert D_a centré en a tel que f admet un prolongement holomorphe dans $D\cup D_a$, et *singulier* s'il n'est pas régulier. Une fonction pour laquelle tout point de Γ est singulier sera qualifiée de *non-prolongeable* et nous dirons que *le cercle est une frontière naturelle* pour f. Nous munirons en outre X de la topologie induite par la famille de semi-normes $(p_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$, où

$$p_m(f)=\sup_{x\in\overline{D(0,r_m)}}|f(x)|$$

pour tout $f\in X$ et $(r_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ est une suite qui croît vers 1. Dans ce cas, X est un espace de Fréchet séparable.

Notre intérêt porte sur les fonctions de X qui admettent un point régulier. Notons que de telles fonctions existent, parmi lesquelles $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ admet un prolongement holomorphe à $\mathbb{C}\setminus\{1\}$. Nous allons voir que ces fonctions sont *rares* dans X. Pour ce faire, nous allons utiliser la technique des processus stochastiques. Cela nécessitera l'intervention de séries aléatoires et nous aurons besoin d'en considérer le rayon de convergence ainsi que d'en connaître certaines propriétés. Fixons un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Dans [139], il est stipulé qu'une série aléatoire $F(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ dont les coefficients $a_n : \Omega \to \mathbb{C}$ sont des variables aléatoires indépendantes admet un *rayon de convergence presque sûr*, c'est-à-dire un rayon de convergence valide pour toute série déterministe $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(\omega) z^n$ avec ω dans un ensemble de probabilité 1. De plus, le théorème 3.2.6 qui permet de déterminer le comportement d'une série aléatoire sur son cercle de convergence y est démontré. Nous noterons les séries aléatoires à l'aide de lettres majuscules et d'un couple d'arguments $(z, \omega) \in \mathbb{C} \times \Omega$, tandis que les lettres minuscules seront réservées aux séries déterministes qui dépendent d'un seul argument $z \in \mathbb{C}$. En outre, nous désignerons indifféremment par $r(\cdot)$ le rayon de convergence d'une série déterministe ou le rayon de convergence presque sûr d'une série aléatoire.

Théorème 3.2.6. *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. À la série aléatoire $F(z, \omega) = \sum_{n\in\mathbb{N}} X_n(\omega) z^n$, on peut associer une série déterministe $f_0(z)$ telle que la série aléatoire $H(z, \omega) = F(z, \omega) + f_0(z)$ vérifie les propriétés suivantes :*

(1) pour toute série déterministe $f(z)$, presque sûrement $r(F + f) \leq r(H)$,

(2) le cercle $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r(H)\}$ est presque sûrement une frontière naturelle pour la série $H(z, \omega)$,

(3) si une série $f(z) \in X$ vérifie presque sûrement l'équation $r(F + f) = r(H)$, alors le cercle $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r(F + f)\}$ est presque sûrement une frontière naturelle pour la série $F(z, \omega) + f(z)$.

Dans [68], Fraysse ajoute que l'on peut choisir $f_0(z) = 0$ si les X_n sont des variables aléatoires centrées et prouve le résultat suivant.

Proposition 3.2.7. *L'ensemble des fonctions de X qui sont non-prolongeables est prévalent dans X.*

Démonstration. Considérons $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi normale centrée réduite sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. On définit le processus F par

$$F : \Omega \to X : \omega \mapsto \left(z \in \mathbb{C} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n(\omega) z^n \right),$$

ce qui revient à considérer la série aléatoire $F(z, \omega) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \xi_n(\omega) z^n$. Enfin, soit $\mathcal{P}$ la propriété pour une fonction de X d'être non-prolongeable. On veut montrer que pour tout $f \in X$, $F + f$ a presque sûrement la propriété $\mathcal{P}$.

Nous devons d'abord nous assurer que le processus est bien presque sûrement à valeurs dans X. Nous allons construire un sous-ensemble Ω_1 de Ω qui est de probabilité 1 et tel que pour tout $\omega \in \Omega_1$, $r(F(z,\omega)) = 1$ (en particulier, $F(\omega) \in X$). Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, nous avons d'une part

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : |\xi_n(\omega)| \leq \frac{1}{n^2}\right\}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\frac{1}{n^2}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{n^2}$$

et d'autre part,

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : |\xi_n(\omega)| \geq n\}) \leq \frac{1}{n^2}$$

par l'inégalité de Bienaymé – Tchebychev. On tire alors du lemme de Borel – Cantelli que

$$\Omega_1 = \liminf_{n\to+\infty} \left\{\omega \in \Omega : \frac{1}{n^2} < |\xi_n(\omega)| < n\right\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}_0} \bigcap_{n\geq k} \left\{\omega \in \Omega : \frac{1}{n^2} < |\xi_n(\omega)| < n\right\}$$

est de probabilité 1. Or pour tout $\omega \in \Omega_1$, il existe $k \in \mathbb{N}_0$ tel que pour tout $n \geq k$, $\frac{1}{n^2} < |\xi_n(\omega)| < n$, d'où $r(F(z,\omega)) = 1$ puisque

$$1 = \limsup_{n\to+\infty} \left|\frac{1}{n^2}\right|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n\to+\infty} |\xi_n(\omega)|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n\to+\infty} |n|^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Cet ensemble Ω_1 convient donc bien pour notre affirmation.

Fixons à présent $f \in X$ et montrons qu'il existe un sous-ensemble Ω_2 de Ω_1 qui est également de probabilité 1 et tel que $F(\omega) + f$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$ pour tout $\omega \in \Omega_2$. On a $r(f) \geq 1$ et $r(F(\omega) + f) \geq 1 = r(F(\omega))$ pour tout $\omega \in \Omega_1$. Les variables aléatoires ξ_n étant centrées, le théorème 3.2.6 est vérifié pour $f_0 = 0$. Par le point (1), on peut définir un ensemble Ω^* de probabilité 1 tel que $r(F(\omega) + f) \leq r(F(\omega))$ pour tout $\omega \in \Omega^*$. Par conséquent, $r(F(\omega)+f) = r(F(\omega))$ pour tout $\omega \in \Omega_1 \cap \Omega^*$ et f vérifie la condition du point (3), ce qui induit l'existence d'un sous-ensemble Ω_2 de Ω_1 tel que $\mathbb{P}(\Omega_2) = 1$ et $F(\omega) + f$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$ pour tout $\omega \in \Omega_2$. Cela achève la démonstration. □

Remarque 3.2.8. Le résultat 3.2.7 est également vrai dans le cadre des catégories de Baire, i.e. l'ensemble des fonctions de X qui sont non-prolongeables est résiduel dans X. Ce résultat a été initialement prouvé dans [100] puis généralisé dans [95] (théorème 3.1).

3.3 Fonctions continues nulle part dérivables

Cette troisième section porte sur une question ultra classique en analyse, la régularité des fonctions continues. Depuis le dix-neuvième siècle et les travaux de Weierstrass, il est connu qu'il existe des fonctions continues qui ne sont dérivables en aucun point (voir expression (3.10)). Ces fonctions, d'abord considérées par certains mathématiciens comme des *monstres* en porte-à-faux avec leur intuition et ignorées par conséquent, se sont par la suite révélées être *la norme*, à chacun des trois sens de généricité développés dans ce mémoire.

Considérons donc l'espace de Banach $(C([0,1]), ||\cdot||)$, où

$$||f|| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

pour toute fonction $f \in C([0,1])$. C'est en 1931 qu'a été établie pour la première fois la généricité au sens de Baire des fonctions continues nulle part dérivables ([20, 118]). La démonstration présentée ici est tirée de [126, 150].

Proposition 3.3.1. *L'ensemble des fonctions continues qui sont nulle part dérivables est résiduel dans $C([0,1])$.*

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, soit

$$A_n = \left\{ f \in C([0,1]) : \exists x \in \left[0, 1-\frac{1}{n}\right] \text{ tel que } |f(x+h) - f(x)| \le nh \ \forall h \in]0, 1-x[\right\}.$$

Commençons par remarquer que chaque A_n est fermé. Fixons pour cela $n \in \mathbb{N}_0$ et considérons $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de A_n qui converge vers f dans $C([0,1])$. Il lui correspond une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\left[0, 1-\frac{1}{n}\right]$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $h \in]0, 1-x_k[$, on a

$$|f_k(x_k+h) - f_k(x_k)| \le nh.$$

Par compacité de $\left[0, 1-\frac{1}{n}\right]$, quitte à remplacer $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par une sous-suite bien choisie, on peut supposer que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $x \in \left[0, 1-\frac{1}{n}\right]$. Considérons $h \in]0, 1-x[$. La relation $0 < h < 1 - x_k$ est alors vérifiée pour k suffisamment grand, et donc

$$\begin{aligned}
|f(x+h) - f(x)| &\le |f(x+h) - f(x_k+h)| + |f(x_k+h) - f_k(x_k+h)| \\
&\quad + |f_k(x_k+h) - f_k(x_k)| + |f_k(x_k) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x)| \\
&\le |f(x+h) - f(x_k+h)| + \|f - f_k\| + nh + \|f_k - f\| + |f(x_k) - f(x)|.
\end{aligned}$$

En faisant tendre k vers l'infini dans la majoration précédente, on tire de la continuité de f en x et $x+h$ la relation

$$|f(x+h) - f(x)| \le nh.$$

Cela montre que f appartient à A_n et le critère par les suites conclut.

Toujours à $n \in \mathbb{N}_0$ fixé, montrons ensuite que $C([0,1]) \setminus A_n$ est dense dans $C([0,1])$. Puisque toute fonction continue peut être approchée uniformément et de manière arbitrairement proche par une fonction continue et linéaire par morceaux, il suffit de montrer que pour toute telle fonction g et tout $\varepsilon > 0$, il existe $f \in C([0,1]) \setminus A_n$ tel que $\|g - f\| \le \varepsilon$. Notons M le maximum des valeurs absolues des coefficients angulaires des segments constituant le graphe de g et sélectionnons un naturel m tel que $m\varepsilon > n + M$. Enfin, considérons $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction *distance à l'entier le plus proche* définie par

$$\phi(x) = \min(x - \lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1 - x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, ainsi que $f : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto g(x) + \varepsilon\phi(mx)$. Puisque l'application $x \mapsto \varepsilon\phi(mx)$ est une succession de segments de droite de coefficients angulaires $\pm\varepsilon m$, on a pour tout $x \in \left[0, 1-\frac{1}{n}\right]$ et pour $h > 0$ suffisamment petit,

$$|f(x+h) - f(x)| \ge |\varepsilon\phi(m(x+h)) - \varepsilon\phi(mx)| - |g(x+h) - g(x)| \ge \varepsilon mh - Mh > nh.$$

Ainsi, $f \in C([0,1]) \setminus A_n$. Or f approche bien la fonction g vu

$$\|g - f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \varepsilon\, |\phi(mx)| = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il s'ensuit que A_n est d'intérieur vide comme on le souhaitait.

Par conséquent, l'ensemble $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} A_n$ est maigre dans $C([0,1])$. Il s'agit de l'ensemble des fonctions continues qui ont des taux d'accroissement à droite bornés en un point de $[0,1[$. De même, l'ensemble $\widetilde{A}$ des fonctions qui ont des taux d'accroissement à gauche bornés en un point de $]0,1]$ est maigre. Le complémentaire de $A \cup \widetilde{A}$ est alors résiduel et inclus dans l'ensemble des fonctions continues nulle part dérivables, ce qui conclut. □

Il existe des caractérisations de la régularité ponctuelle plus fines que *dérivable ou non-dérivable.* Ainsi, on dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ appartient à l'*espace de Hölder ponctuel* $C^\alpha(x_0)$ pour $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in]0,+\infty[\setminus \mathbb{N}$ s'il existe des constantes strictement positives C, δ et un polynôme P de degré strictement inférieur à α tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $|x - x_0| \leq \delta$, on ait

$$|f(x) - P(x - x_0)| \leq C\, |x - x_0|^\alpha .$$

Comme annoncé dans l'introduction, une fonction continue Baire-typique n'est dans aucun de ces espaces ponctuels, c'est-à-dire a la pire régularité possible.

Proposition 3.3.2. *L'ensemble des fonctions continues qui n'appartiennent à $C^\alpha(x_0)$ pour aucun $x_0 \in [0,1]$ et aucun $\alpha > 0$ est résiduel dans $C([0,1])$.*

Remarquons qu'il suffit, par inclusion de $C^\alpha(x_0)$ dans $C^{\alpha'}(x_0)$ lorsque $\alpha \geq \alpha'$ (proposition 1.2.7 de [48]), de fixer $\alpha \in]0,1[$ et de montrer que l'ensemble des fonctions continues qui sont nulle part C^α est résiduel dans $C([0,1])$. En effet, en considérant une suite d'exposants $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $]0,1[$ qui converge vers 0, on trouve que l'ensemble

$$\bigcap_{\alpha>0} \{f \in C([0,1]) : f \notin C^\alpha(x_0)\ \forall x_0 \in [0,1]\}$$

peut se réécrire

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{f \in C([0,1]) : f \notin C^{\alpha_n}(x_0)\ \forall x_0 \in [0,1]\}$$

et est donc encore résiduel dans $C([0,1])$. De plus, si α est fixé dans $]0,1[$ et si $f \in C^\alpha(x_0)$ pour $x_0 \in [0,1]$, alors il existe $C > 0$, $\delta \in]0,1[$ et un polynôme P de degré 0 vérifiant

$$|f(x) - P(x - x_0)| \leq C\, |x - x_0|^\alpha$$

pour tout $x \in [0,1]$ tel que $|x - x_0| \leq \delta$. En évaluant en x_0, on trouve $P = f(x_0)$. En translatant il est également clair que pour tout $h \in \mathbb{R}$ vérifiant $|h| \leq \delta$ et $x_0 + h \in [0,1]$, on a

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| \leq 2C\, |h|^\alpha .$$

Ainsi, si $f \in C^\alpha(x_0)$, alors

$$\limsup_{h\to 0} \frac{|f(x_0+h)-f(x_0)|}{|h|^\alpha} < +\infty.$$

Par contraposition, si

$$\left\{ f \in C([0,1]) : \limsup_{h\to 0} \frac{|f(x_0+h)-f(x_0)|}{|h|^\alpha} = +\infty \ \forall x_0 \in [0,1] \right\} \tag{3.4}$$

est résiduel, c'est également le cas de l'ensemble des fonctions $f \in C([0,1])$ qui sont nulle part C^α. Il nous reste donc à montrer que l'ensemble (3.4) est résiduel, ce qui découle de la proposition suivante ([15]).

Proposition 3.3.3. *Soit* $\omega :]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ *une fonction continue telle que*

$$\lim_{h\to 0^+} \omega(h) = 0.$$

L'ensemble des fonctions $f \in C([0,1])$ *qui satisfont*

$$\limsup_{h\to 0^+} \frac{|f(x+h)-f(x)|}{\omega(h)} = +\infty$$

pour tout $x \in [0,1]$ *est résiduel.*

Démonstration. Supposons pour commencer qu'il existe une constante $C > 0$ pour laquelle

$$\limsup_{h\to 0^+} \frac{h}{\omega(h)} < C.$$

Dans ce cas, il existe $\delta > 0$ tel que $\frac{h}{\omega(h)} < C$ pour tout $h \in]0,\delta[$. Nous notons A l'ensemble de l'énoncé et suivons ensuite le raisonnement de la démonstration 3.3.1. On redéfinit les ensembles A_n par

$$A_n = \left\{ f \in C([0,1]) : \exists x \in \left[0, 1-\frac{1}{n}\right] \text{ tel que } \limsup_{h\to 0^+} \frac{|f(x+h)-f(x)|}{\omega(h)} \leq n \right\},$$

de sorte à avoir la décomposition $C([0,1]) \setminus A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} A_n$. La première étape consiste alors à montrer que chaque A_n est fermé. Pour cela, on considère $n \in \mathbb{N}_0$, une suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de A_n qui converge vers f dans $C([0,1])$ et on lui associe une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\left[0, 1-\frac{1}{n}\right]$ qui converge vers $x \in \left[0, 1-\frac{1}{n}\right]$ et pour laquelle

$$\limsup_{h\to 0^+} \frac{|f_k(x_k+h)-f_k(x_k)|}{\omega(h)} \leq n.$$

En utilisant les majorations obtenues précédemment, on trouve

$$\limsup_{h\to 0^+} \frac{|f(x+h)-f(x)|}{\omega(h)} \leq n,$$

i.e. $f \in A_n$. La seconde étape est de vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, toute fonction g continue et linéaire par morceaux et tout $\varepsilon \in]0,1[$, il existe $f \in C([0,1]) \setminus A_n$ tel que $\|g - f\| \leq \varepsilon$. En utilisant les mêmes définitions pour ϕ, M, m et f que précédemment, le seul point dont il faut encore s'assurer est l'appartenance de f à $C([0,1]) \setminus A_n$. Or pour tout $x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ fixé, on peut trouver $h_x \in \left]0, \frac{1}{m}\right[$ tel que

$$|\phi(m(x+h_x)) - \phi(mx)| \geq \frac{1}{4}.$$

De plus, puisque $m \geq n$, on sait que $x + h_x \in [0,1]$. Quitte à augmenter m, on peut supposer $\omega(h_x) < \frac{\varepsilon}{4(n+CM)}$ et $\frac{1}{m} < \delta$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{|f(x+h_x) - f(x)|}{\omega(h_x)} &\geq \frac{\varepsilon\,|\phi(m(x+h_x)) - \phi(mx)|}{\omega(h_x)} - \frac{|g(x+h_x) - g(x)|}{\omega(h_x)} \\
&\geq \frac{\varepsilon}{4\omega(h_x)} - \frac{|g(x+h_x) - g(x)|}{h_x} \cdot \frac{h_x}{\omega(h_x)} \\
&> n + CM - CM \\
&= n,
\end{aligned}$$

ce qui assure bien l'appartenance de f à $C([0,1]) \setminus A_n$.

Pour conclure, nous avons besoin de nous affranchir de la condition sur ω imposée dans le paragraphe précédent. Nous supposons donc

$$\limsup_{h \to 0^+} \frac{h}{\omega(h)} = +\infty.$$

Cela induit l'existence d'une suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ strictement positive, qui converge vers 0 et telle que $\lim_{n \to +\infty} \frac{h_n}{\omega(h_n)} = +\infty$. Par ce qui précède, on sait qu'il existe un ensemble résiduel $\widetilde{A}$ de $C([0,1])$ tel que pour tout $f \in \widetilde{A}$,

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{|f(x+h_n) - f(x)|}{h_n} = +\infty,$$

d'où

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{|f(x+h_n) - f(x)|}{h_n} \cdot \frac{h_n}{\omega(h_n)} = +\infty$$

et finalement

$$\limsup_{h \to 0^+} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{\omega(h)} = +\infty$$

pour tout $x \in [0,1]$. □

Nous savons que la porosité est une notion plus forte que celle des catégories de Baire. Il est donc naturel de se demander si les propositions 3.3.1 et 3.3.2 sont valides lorsque *résiduel* est remplacé par *de complémentaire σ-poreux*. Pour le premier résultat, la réponse est positive comme le montre la proposition 3.3.5 issue de [4]. Par contre, nous n'avons qu'une forme plus faible du second, où l'on se concentre sur la régularité en un point fixé : il s'agit de la proposition 3.3.8 tirée de [68].

Lemme 3.3.4. *Pour tout $a > 0$, il existe une fonction $u_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $2a$-périodique telle que*

(1) $0 \leq u_a(x) \leq 1 = u_a(a)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$,

(2) pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un intervalle fermé $I_a(x)$ inclus dans $\left[\frac{a}{8}, a\right]$, de longueur $\frac{a}{8}$ et tel que pour tout $h \in I_a(x)$,

$$|u_a(x+h) - u_a(x)| \geq \frac{h}{3a}.$$

Démonstration. Définissons

$$u_a(x) = \begin{cases} \frac{x}{a} & \text{si } x \in [0, a[\\ \frac{2a-x}{a} & \text{si } x \in [a, 2a[\end{cases}$$

et

$$u_a(x + 2ka) = u_a(x)$$

pour tout $x \in [0, 2a[$ et tout $k \in \mathbb{Z}$. Il est évident que la fonction u_a est $2a$-périodique, continue et qu'elle satisfait la condition (1). De plus, pour tout réel x fixé, s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x + 2ka \in \left[0, \frac{3a}{4}\right[\cup \left[a, \frac{7a}{4}\right[$, on pose $I_a(x) = \left[\frac{a}{8}, \frac{a}{4}\right]$ et s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x + 2ka \in \left[\frac{3a}{4}, a\right[\cup \left[\frac{7a}{4}, 2a\right[$, on définit $I_a(x) = \left[\frac{7a}{8}, a\right]$. Dans ce cas, si $k \in \mathbb{Z}$ satisfait $x + 2ka \in [0, 2a[$ et si $h \in I_a(x)$, on a bien

$$\begin{aligned}
|u_a(x+h) - u_a(x)| &= \begin{cases} |u_a(x+h+2ka) - u_x(x+2ka)| & \text{si } x + 2ka \in \left[0, \frac{3a}{4}\right[\\ |u_a(x+h+2ka) - u_a(x+2ka)| & \text{si } x + 2ka \in \left[a, \frac{7a}{4}\right[\\ |u_a(x+h+2ka) - u_a(x+2ka)| & \text{si } x + 2ka \in \left[\frac{3a}{4}, a\right[\\ |u_a(x+h+2(k-1)a) - u_a(x+2ka)| & \text{si } x + 2ka \in \left[\frac{7a}{4}, 2a\right[\end{cases} \\
&= \begin{cases} \left|\frac{x+h+2ka}{a} - \frac{x+2ka}{a}\right| & \text{si } x + 2ka \in \left[0, \frac{3a}{4}\right[\\ \left|\frac{2a-(x+h+2ka)}{a} - \frac{2a-(x+2ka)}{a}\right| & \text{si } x + 2ka \in \left[a, \frac{7a}{4}\right[\\ \left|\frac{2a-(x+h+2ka)}{a} - \frac{x+2ka}{a}\right| & \text{si } x + 2ka \in \left[\frac{3a}{4}, a\right[\\ \left|\frac{x+h+2(k-1)a}{a} - \frac{2a-(x+2ka)}{a}\right| & \text{si } x + 2ka \in \left[\frac{7a}{4}, 2a\right[\end{cases} \\
&\geq \frac{h}{3a}.
\end{aligned}$$

□

Proposition 3.3.5. *L'ensemble des fonctions continues qui sont nulle part dérivables est de complémentaire σ-poreux dans $C([0,1])$.*

Démonstration. On considère la même suite d'ensembles $(A_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ qu'à la proposition 3.3.1, i.e.

$$A_n = \left\{ f \in C([0,1]) : \exists x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] \text{ tel que } |f(x+h) - f(x)| \leq nh \ \forall h \in]0, 1-x[\right\}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}_0$. Vu les raisonnements qui précèdent, nous devons simplement montrer que chaque A_n est poreux. Fixons $n \in \mathbb{N}_0$, f un élément arbitraire de A_n et $\varepsilon > 0$. En utilisant la continuité uniforme de f, il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ pour tous $x_1, x_2 \in [0,1]$ vérifiant $|x_1 - x_2| \leq \delta$. Choisissons $a > 0$ tel que $a < \min(\frac{1}{n}, \delta, \frac{\varepsilon}{n})$. Pour ce $a > 0$, notons u_a la fonction construite dans le lemme 3.3.4 et restreinte à $[0,1]$. On sait que u_a appartient à $C([0,1])$ et vérifie $\|u_a\| = 1$, ainsi que

$$|u_a(x+h) - u_a(x)| \geq \frac{h}{3a}$$

pour tout $x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ et tout $h \in I_a(x)$, où $I_a(x)$ est inclus dans $\left[\frac{a}{8}, a\right]$ et de longueur $\frac{a}{8}$. Posons enfin $u = 75\varepsilon u_a$ et $g = f + u$. D'une part, on a alors $b(g,\varepsilon) \cap A_n = \emptyset$. En effet, pour $F \in b(g,\varepsilon)$, $x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ et $h \in I_a(x)$ quelconques, on a

$$\begin{aligned}
|F(x+h) - F(x)| &\geq |u(x+h) - u(x)| - |(g-u)(x+h) - (g-u)(x)| \\
&\quad - |(F-g)(x+h) - (F-g)(x)| \\
&\geq \frac{25\varepsilon h}{a} - \varepsilon - 2\,\|F - g\| \\
&\geq h\left(\frac{25\varepsilon}{a} - \frac{24\varepsilon}{a}\right) \\
&> nh,
\end{aligned}$$

et on en déduit que F n'appartient pas à A_n puisque $0 < h < 1 - x$. D'autre part, $\|f - g\| = 75\varepsilon$, d'où $b(g,\varepsilon) \subseteq b(f, 76\varepsilon)$. Par la définition 1.2.8 appliquée à $\rho = \frac{1}{76}$, cela assure le caractère poreux de A_n en f. $\square$

Pour obtenir le prochain résultat, nous ferons appel aux ondelettes. Bien que présenté ici en dimension 1, il se généralise donc facilement à n'importe quelle dimension d en considérant des bases d'ondelettes construites à partir de produits tensoriels. De plus, puisque nous travaillons avec des fonctions définies sur $[0,1]$, plutôt que de considérer une base d'ondelettes orthonormée traditionnelle $(\psi_{j,k})_{j,k\in\mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ définie à partir d'une ondelette-mère ψ dans la classe de Schwartz via les relations

$$\psi_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j \cdot -k),$$

nous allons la *périodiser*, c'est-à-dire la remplacer par la base orthonormée

$$(\widetilde{\psi}_{j,k})_{j\in\mathbb{N}, k\in\{0,\ldots,2^j-1\}} \cup \{1\}$$

de $L^2([0,1])$ définie par

$$\widetilde{\psi}_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \psi(2^j(\cdot - l) - k) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \psi_{j,k}(\cdot - l).$$

La construction de cette base et la préservation des propriétés des ondelettes ont été étudiées dans la section 9.3 de [47]. Pour éviter l'apparition d'un facteur $2^{\frac{j}{2}}$ dans les décompositions en ondelettes, on oublie (comme indiqué dans les notations) la normalisation L^2 que l'on remplace par une normalisation L^∞. Les mêmes remarques seront valables pour la proposition 3.3.17.

Définition 3.3.6. Soit $x_0 \in [0,1]$. On appelle *cône d'influence de taille $L > 0$ au-dessus de x_0* l'ensemble

$$\mathcal{K}_{x_0}(L) = \left\{ (j,k) \in \mathbb{N} \times \{0, \ldots, 2^j - 1\} : \left| \frac{k}{2^j} - x_0 \right| \leq \frac{L}{2^j} \right\}.$$

Dorénavant, nous désignerons par Λ l'ensemble $\Lambda = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} (\{j\} \times \{0, \ldots, 2^j - 1\})$.

Lemme 3.3.7. *Soit $f \in L^\infty([0,1])$, soit $x_0 \in [0,1]$, soit $\alpha \in]0, +\infty[\setminus \mathbb{N}$ et soit $L > 0$. Si $f \in C^\alpha(x_0)$, il existe $C > 0$ tel que pour tout $(j,k) \in \mathcal{K}_{x_0}(L)$, on a $|c_{j,k}| \leq C 2^{-\alpha j}$.*

Ce lemme est une conséquence immédiate du lemme 3.3.16 dont nous aurons besoin pour la proposition 3.3.17. Il nous permet d'obtenir la version affaiblie de la proposition 3.3.2 par des arguments inspirés de [68].

Proposition 3.3.8. *Soit $x_0 \in [0,1]$. L'ensemble des fonctions continues qui n'appartiennent à $C^\alpha(x_0)$ pour aucun $\alpha > 0$ est de complémentaire σ-poreux dans $C([0,1])$.*

Pour la preuve, nous considérons comme base d'ondelettes une famille $(\psi_{j,k})_{(j,k)\in\Lambda}$ construite par périodisation à partir d'une ondelette-mère ψ dans la classe de Schwartz et dont la norme

$$\|\psi\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)| \, dx$$

vaut 1.

Démonstration. La collection des ensembles de complémentaire σ-poreux étant stable par intersection dénombrable, il suffit, comme nous l'avions remarqué dans le cadre de la généricité au sens de Baire, de montrer que pour $\alpha > 0$ fixé, l'ensemble des fonctions continues qui n'appartiennent pas à $C^\alpha(x_0)$ est de complémentaire σ-poreux dans $C([0,1])$.

On considère le cône de taille 2 au-dessus de x_0, i.e.

$$\mathcal{K}_{x_0}(2) = \{(j,k) \in \Lambda : \left|2^j x_0 - k\right| \leq 2\}.$$

Remarquons qu'à chaque échelle j fixée, au plus 5 couples appartiennent à ce cône. D'après le lemme 3.3.7, $C([0,1]) \cap C^\alpha(x_0)$ est inclus dans l'ensemble

$$A = \{f \in C([0,1]) : \exists c > 0 \; \exists m \in \mathbb{N}_0 \text{ tels que } \forall j \geq m \; \forall k \in \mathcal{K}^j_{x_0}(2), |c_{j,k}| \leq c 2^{-\alpha j}\},$$

où

$$\mathcal{K}^j_{x_0}(2) = \{k \in \{0, \ldots, 2^j - 1\} : (j,k) \in \mathcal{K}_{x_0}(2)\}.$$

Or A peut s'écrire $A = \bigcup_{n,m\in\mathbb{N}_0} A_{c_n,m}$, où $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ est une suite de $]0, +\infty[$ qui tend vers l'infini et $A_{c,m}$ désigne l'ensemble

$$A_{c,m} = \{f \in C([0,1]) : \forall j \geq m \; \forall k \in \mathcal{K}^j_{x_0}(2), |c_{j,k}| \leq c 2^{-\alpha j}\}$$

pour tout $c > 0$ et tout $m \in \mathbb{N}_0$. De cette façon, nous nous ramenons à la preuve que chaque $A_{c,m}$ est poreux. On fixe alors $c > 0$, $m \in \mathbb{N}_0$ et $f \in A_{c,m}$. On considère également

$\beta \in]0,\alpha[$, une suite $(R_J)_{J\in\mathbb{N}}$ de terme général $R_J = 10c\,\|\psi\|\,\frac{2^\beta}{2^\beta-1}2^{-\beta J}$ et une suite $(g_J)_{J\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies pour tout $x \in [0,1]$ par

$$g_J(x) = \sum_{j=J}^{+\infty} \sum_{k\in\mathcal{K}^j_{x_0}(2)} 2c\ \mathrm{sign}(f_{j,k})2^{-\beta j}\psi_{j,k}(x).$$

Enfin, pour $J \in \mathbb{N}$, on note $(d_{j,k})_{(j,k)\in\Lambda}$ la suite des coefficients d'ondelettes de g_J dans la base $(\psi_{j,k})_{(j,k)\in\Lambda}$, i.e.

$$d_{j,k} = \begin{cases} 2c\ \mathrm{sign}(f_{j,k})2^{-\beta j} & \text{si } j \geq J \text{ et } k \in \mathcal{K}^j_{x_0}(2) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Encadrons la norme de g_J dans $C([0,1])$: d'une part,

$$\begin{aligned} \|g_J\| &= \sup_{x\in[0,1]} \left| \sum_{j=J}^{+\infty} \sum_{k\in\mathcal{K}^j_{x_0}(2)} 2c\ \mathrm{sign}(f_{j,k})2^{-\beta j}\psi_{j,k}(x) \right| \\ &\leq \sum_{j=J}^{+\infty} \sum_{k\in\mathcal{K}^j_{x_0}(2)} 2c2^{-\beta j} \sup_{x\in[0,1]} |\psi_{j,k}(x)| \\ &\leq 10c\,\|\psi\| \sum_{j=J}^{+\infty} 2^{-\beta j} \\ &= R_J, \end{aligned}$$

et d'autre part,

$$|d_{j,k}| = \left| 2^j \int_0^1 g_J(x)\psi_{j,k}(x)dx \right| \leq \|g_J\|\,\|\psi\|_{L^1(\mathbb{R})} = \|g_J\| \tag{3.5}$$

pour tout couple $(j,k) \in \Lambda$. De ces deux relations, on tire respectivement l'appartenance de $f + g_J$ à la boule $\overline{b(f, R_J)}$ et la relation $\|g_J\| \geq \sup_{(j,k)\in\Lambda} |d_{j,k}| = 2c2^{-\beta J}$.

Cela étant, nous allons établir que pour tout $J \geq m$ suffisamment grand, si $r_J = c2^{-\beta J}$, la boule $b(f + g_J, r_J)$ est incluse dans $b(f, 2R_J) \setminus A_{c,m}$. Comme la suite $(R_J)_{J\geq m}$ tend vers 0, cela montrera que la constante $\rho = \frac{2^\beta-1}{20\|\psi\|2^\beta}$ convient pour la définition 1.2.8 et donc que $A_{c,m}$ est bien poreux en f.

Commençons par supposer qu'il existe $h \in b(f+g_J, r_J)\cap A_{c,m}$ de coefficients d'ondelettes $(h_{j,k})_{(j,k)\in\Lambda}$. Par définition de $A_{c,m}$, on sait dans ce cas que pour tout $j \geq m$ et tout $k \in \mathcal{K}^j_{x_0}(2)$, on a

$$|c_{j,k} - h_{j,k}| \leq |c_{j,k}| + |h_{j,k}| \leq 2c2^{-\alpha j}. \tag{3.6}$$

Or pour tout $(j,k) \in \Lambda$, la relation (3.5) appliquée à la fonction $h - f - g_J$ donne

$$|h_{j,k} - c_{j,k} - d_{j,k}| \leq \|h - f - g_J\| \leq r_J.$$

Pour tout $k \in \mathcal{K}^J_{x_0}(2)$, il vient alors

$$|h_{J,k} - c_{J,k}| \geq |d_{J,k}| - |h_{J,k} - c_{J,k} - d_{J,k}| \geq 2c2^{-\beta J} - c2^{-\beta J} = c2^{-\beta J}. \tag{3.7}$$

En combinant les estimations (3.6) et (3.7), on trouve $2^{-\alpha J+1} \geq 2^{-\beta J}$. Comme $\beta < \alpha$, ceci est impossible pour J suffisamment grand et on a nécessairement $b(f+g_J, r_J) \cap A_{c,m} = \emptyset$.

Terminons la preuve en notant que pour tout $h \in b(f+g_J, r_J)$,

$$\|h-f\| \leq \|h-(f+g_J)\| + \|g_J\| < r_J + R_J \leq 2R_J$$

puisque

$$R_J = 10\,\|\psi\|\,\frac{2^\beta}{2^\beta-1} r_J \geq 10\,\|\psi\|_{L^1([0,1])}\, r_J \geq r_J.$$

□

Pour conclure cette section, intéressons-nous aux équivalences en termes de prévalence des résultats 3.3.1 et 3.3.2. Nous allons tout d'abord montrer que presque toute fonction continue est nulle part dérivable.

Proposition 3.3.9. *L'ensemble des fonctions continues qui sont nulle part dérivables est prévalent dans $C([0,1])$.*

La preuve qui suit recourt aux arguments de Hunt ([83], voir aussi [60]) et se divise en plusieurs résultats intermédiaires. Comme il a été montré par Mauldin ([116, 117]) que l'ensemble des fonctions nulle part dérivables n'est pas un borélien, [2] la première étape consiste à trouver un sous-ensemble borélien des fonctions continues nulle part dérivables.

Définition 3.3.10. Pour $L > 0$, une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est dite L*-Lipschitzienne* en un $x \in [0,1]$ si pour tout $y \in [0,1]$, $|f(x)-f(y)| \leq L|x-y|$. En général, une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est dite *Lipschitzienne* en un $x \in [0,1]$ si elle est L-Lipschitzienne en ce x pour un certain $L > 0$.

Il est alors clair qu'une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ qui n'est pas Lipschitzienne en un $x \in [0,1]$ n'est pas non plus dérivable en x. En effet, le quotient $\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|$ peut être rendu arbitrairement grand en considérant pour tout $L \in \mathbb{N}_0$, $h_L = y_L - x$, avec $y_L \in [0,1]$ satisfaisant $|f(x)-f(y_L)| > L\,|x-y_L|$, ce qui empêche la limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

d'être finie. Le résultat suivant découle alors.

Proposition 3.3.11. *L'ensemble des fonctions nulle part dérivables contient l'ensemble des fonctions nulle part Lipschitziennes.*

Les fonctions nulle part Lipschitziennes constituent donc un bon candidat. Assurons-nous qu'elles forment un borélien de $C([0,1])$.

2. Mauldin montre cependant qu'il s'agit d'un ensemble coanalytique. En particulier, il est universellement mesurable et cette remarque permet d'utiliser toute la théorie développée par Christensen (section 1.3.3). Comme elle se base sur deux résultats que nous n'avons pas démontré, nous n'en ferons pas usage dans la suite mais elle a le mérite de mettre en évidence l'avantage que peuvent conférer les ensembles universellement mesurables.

Proposition 3.3.12. *L'ensemble des fonctions nulle part Lipschitziennes est un borélien de* $C([0,1])$.

Démonstration. Pour tout $L \in \mathbb{N}_0$, posons

$$F_L = \{f \in C([0,1]) : f \text{ est } L\text{-Lipschitizienne en un } x \in [0,1]\} \tag{3.8}$$

et montrons que cet ensemble est un fermé de $C([0,1])$. Il s'ensuivra alors que l'ensemble

$$F = \{f \in C([0,1]) : f \text{ est Lipschitzienne en un } x \in [0,1]\} \tag{3.9}$$

est borélien en le réécrivant $F = \bigcup_{L \in \mathbb{N}_0} F_L$, d'où la conclusion par passage au complémentaire.

Fixons donc un naturel non-nul L et considérons une suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de F_L qui converge dans $C([0,1])$ vers une fonction notée f. Nous aimerions obtenir $f \in F_L$. Or on sait par construction que pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $x_m \in [0,1]$ tel que f_m est L-Lipschitzienne en x_m. La suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ainsi construite est bornée et quitte à en considérer une sous-suite, on peut supposer qu'elle converge vers un $x \in [0,1]$. Si $y \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(x_m)| + |f_m(x_m) - f_m(y)| + |f_m(y) - f(y)| \\ &\leq \|f - f_m\| + L|x - x_m| + L|x_m - y| + \|f - f_m\| \end{aligned}$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$, et en prenant la limite pour m qui tend vers l'infini, on obtient la relation espérée

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

□

La deuxième étape est de construire une sonde pour l'ensemble des fonctions nulle part Lipschitziennes, c'est-à-dire un sous-espace vectoriel engendré par un nombre fini d'éléments. Notons que nous aurons besoin d'au moins deux éléments.

Remarque 3.3.13. Une sonde de dimension 1 ne pourrait pas être utilisée. En effet, une sonde de dimension 1 est engendrée par une fonction continue g avec la propriété que pour toute fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f + \lambda g$ est nulle part dérivable pour presque tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Or l'application $f : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto -xg(x)$ est telle $f + \lambda g$ est dérivable en $x = \lambda$ pour tout $\lambda \in [0,1]$ et cet intervalle est de mesure de Lebesgue non-nulle.

En fait, exactement deux éléments suffiront pour définir une sonde, à savoir les deux fonctions [3]

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \cos(2^k \pi x) \quad \text{et} \quad h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sin(2^k \pi x). \tag{3.11}$$

3. Ces fonctions ont été inspirées de la célèbre famille de fonctions continues nulle part dérivables de Weierstrass donnée par

$$f = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \cos(b^k \pi\, \cdot) \tag{3.10}$$

avec $0 < a < 1$, $b > 1$ et $1 \leq ab < b$. Weierstrass a prouvé que cette fonction était nulle part dérivable pour certaines valeurs de a et de b ([157]), tandis que Hardy fut le premier à le montrer pour toutes les valeurs de a et de b ([76]).

Le critère de Riemann assure que ces deux fonctions sont bien définies et continues. De plus, Hardy a montré qu'elles ne sont nulle part Lipschitziennes ([76]). Enfin, elles sont clairement linéairement indépendantes. Pour montrer qu'elles engendrent une sonde, nous aurons besoin du lemme technique suivant.

Lemme 3.3.14. *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et tout intervalle fermé J de $[0,1]$ de longueur $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$,*

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \leq \frac{\ln^2 \varepsilon}{C}\left(\sup_J(\alpha g+\beta h) - \inf_J(\alpha g + \beta h)\right).$$

Démonstration. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et soit $I = [a, a+2^{-m}]$ un intervalle fermé de $[0,1]$ de longueur 2^{-m} pour un $m \in \mathbb{N}_0$.

Montrons tout d'abord que la relation

$$\sup_I f - \inf_I f \geq 2^m \pi \int_I f(x) \cos(2^{m+j}\pi x + \theta)\, dx \tag{3.12}$$

est vérifiée pour toute fonction $f \in C([0,1])$, tout $j \in \mathbb{N}_0$ et tout $\theta \in [0, 2\pi[$. Il est clair que l'application $x \mapsto \sin(2^{m+j}\pi x + \theta)$ est 2^{-m}-périodique, et cela implique l'égalité

$$\int_I \cos(2^{m+j}\pi x + \theta)\, dx = \left[\frac{\sin(2^{m+j}\pi x + \theta)}{2^{m+j}\pi}\right]_I = 0.$$

Par conséquent, ajouter une constante à f ne modifie pas les membres de l'inégalité (3.12). Par continuité uniforme de f sur I, cela permet de supposer $\sup_I f = -\inf_I f = K$ pour un certain $K \geq 0$, d'où $|f| \leq K$ sur I. Cela étant, admettons d'abord que a n'est pas zéro de la fonction $x \mapsto \cos(2^{m+j}\pi x + \theta)$. Comme ses zéros sont distants d'exactement 2^{-m-j}, elle admet 2^j zéros dans I et on peut noter ces zéros $x_0 < \ldots < x_{2^j-1}$. Selon que $2^{m+j}\pi x_0 + \theta$ est congru à $\frac{\pi}{2}$ ou à $\frac{3\pi}{2}$ modulo 2π, on a alors

$$\begin{aligned}
\int_I \left|\cos(2^{m+j}\pi x + \theta)\right| dx &= \left(\int_a^{x_0} \pm\cos(2^{m+j}\pi x + \theta)\, dx + \int_{x_0}^{x_1} \mp\cos(2^{m+j}\pi x + \theta)\, dx\right.\\
&\qquad \left. + \ldots + \int_{x_{2^j-1}}^{a+2^{-m}} \pm\cos(2^{m+j}\pi x + \theta)\, dx\right)\\
&= \left(\left[\pm\frac{\sin(2^{m+j}\pi x + \theta)}{2^{m+j}\pi}\right]_a^{x_0} + \left[\mp\frac{\sin(2^{m+j}\pi x + \theta)}{2^{m+j}\pi}\right]_{x_0}^{x_1}\right.\\
&\qquad \left. + \ldots + \left[\pm\frac{\sin(2^{m+j}\pi x + \theta)}{2^{m+j}\pi}\right]_{x_{2^j-1}}^{a+2^{-m}}\right)\\
&= \pm\sum_{i=0}^{2^j-1} 2(-1)^i \cdot \frac{\sin(2^{m+j}\pi x_i + \theta)}{2^{m+j}\pi}\\
&= \frac{2^j 2}{2^{m+j}\pi}
\end{aligned}$$

et on en tire

$$\begin{aligned} 2^m\pi \int_I f(x)\cos(2^{m+j}\pi x+\theta)\,dx &\le 2^m\pi K \int_I \left|\cos(2^{m+j}\pi x+\theta)\right| dx \\ &= 2K \\ &= \sup_I f - \inf_I f. \end{aligned}$$

Traitons ensuite le cas où a est un zéro de la fonction $x \mapsto \cos(2^{m+j}\pi x+\theta)$. Il en est alors de même de $a+2^{-m}$ et on note $x_0 < \ldots < x_{2^j-2}$ les 2^j-1 zéros de $x \mapsto \cos(2^{m+j}\pi x+\theta)$ dans $]a, a+2^{-m}[$. On retrouve

$$\begin{aligned} 2^m\pi \int_I f(x)\cos(2^{m+j}\pi x+\theta)\,dx &\le 2^m\pi K \int_I \left|\cos(2^{m+j}\pi x+\theta)\right| dx \\ &= \sup_I f - \inf_I f \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned} \int_I \left|\cos(2^{m+j}\pi x+\theta)\right| dx &= \Bigg(\int_a^{x_0} \pm\cos(2^{m+j}\pi x+\theta)\,dx + \int_{x_0}^{x_1} \mp\cos(2^{m+j}\pi x+\theta)\,dx \\ &\qquad + \ldots + \int_{x_{2^j-2}}^{a+2^{-m}} \mp\cos(2^{m+j}\pi x+\theta)\,dx\Bigg) \\ &= \frac{2\cdot(2^j-1)+2}{2^{m+j}\pi} \\ &= \frac{2^j 2}{2^{m+j}\pi} \end{aligned}$$

selon que $2^{m+j}\pi x_0+\theta$ est congru à $\frac{\pi}{2}$ ou à $\frac{3\pi}{2}$ modulo 2π. Nous avons ainsi démontré la relation (3.12).

Au vu de la majoration que nous souhaitons obtenir, nous allons à présent appliquer (3.12) à la fonction $f = \alpha g + \beta h$ et minorer $\sup_I f - \inf_I f$ autant que possible. En posant $\theta = y - \frac{\pi}{2}$, où y est sélectionné dans $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right[$ de sorte à satisfaire au système

$$\left\{\begin{array}{lcl} \cos(y) & = & \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \\ \sin(y) & = & \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \end{array}\right. ,$$

on voit que $\theta \in [0, 2\pi[$ dépend uniquement du couple (α, β) et permet de réécrire f sous la forme

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}(\alpha\cos(2^k\pi x) + \beta\sin(2^k\pi x)) = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\cos(2^k\pi x+\theta)$$

pour tout $x \in [0,1]$ puisque

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \cos(2^k \pi x + \theta) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sin(2^k \pi x + y) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \left(\sin(2^k \pi x) \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \cos(2^k \pi x) \right) \\ &= \frac{f(x)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.\end{aligned}$$

Quitte à remplacer f par $\frac{f}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$, nous pouvons considérer $\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = 1$. Par la relation (3.12), nous avons

$$\sup_I f - \inf_I f \geq \; 2^m \pi \int_I \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \cos(2^k \pi x + \theta) \cos(2^{m+j} \pi x + \theta)\, dx.$$

Par convergence uniforme de l'intégrande et compacité de l'ensemble d'intégration, on peut encore minorer $\sup_I f - \inf_I f$ par

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^m \pi}{2k^2} \left(\int_I \cos((2^{m+j} - 2^k)\pi x)\, dx + \int_I \cos((2^{m+j} + 2^k)\pi x + 2\theta)\, dx \right). \tag{3.13}$$

Or si $k > m$, soit $k \neq m+j$ et les deux intégrales s'annulent par périodicité de la primitive, soit $k = m+j$ et seule la seconde intégrale s'annule, la première devenant l'intégrale sur I de la fonction constante 1. Ainsi, l'expression (3.13) se réécrit

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{2^m \pi}{2k^2} \left(\int_I \cos((2^{m+j} - 2^k)\pi x)\, dx + \int_I \cos((2^{m+j} + 2^k)\pi x + 2\theta)\, dx \right) + \frac{2^m \pi 2^{-m}}{2(m+j)^2}.$$

Nous allons à présent nous intéresser aux deux intégrales qui apparaissent dans la somme. Pour tout $\theta' \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \{1, \ldots, m\}$, on a

$$\begin{aligned}\int_I \cos((2^{m+j} \pm 2^k)\pi x + \theta')\, dx &= \frac{2 \cos\left(\frac{2(2^{m+j} \pm 2^k)\pi a + 2\theta' \pm 2^{-m} \pi 2^k}{2} \right) \sin\left(\frac{\pm 2^{-m} \pi 2^k}{2} \right)}{(2^{m+j} \pm 2^k)\pi} \\ &\geq \frac{-2\,|\sin(\pm 2^{-m} \pi 2^{k-1})|}{(2^{m+j} \pm 2^k)\pi} \\ &= \frac{-2 \sin(| \pm 2^{-m} \pi 2^{k-1}|)}{(2^{m+j} \pm 2^k)\pi} \\ &\geq \frac{-2^k}{2^m (2^{m+j} \pm 2^k)}.\end{aligned}$$

En injectant dans les relations précédemment obtenues, on trouve

$$\sup_I f - \inf_I f \geq \frac{\pi}{2(m+j)^2} - \sum_{k=1}^{m} \frac{\pi}{2k^2} \left(\frac{2^k}{2^{m+j} - 2^k} + \frac{2^k}{2^{m+j} + 2^k} \right).$$

En utilisant pour tout $k \in \{1, \ldots, m\}$ l'inégalité $2m + j + 1 \geq 2k + 1$ et l'équivalence

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{m+j} - 2^k} + \frac{1}{2^{m+j} + 2^k}\right) \geq -\frac{1}{2^m(2^j - 1)} \quad \Leftrightarrow \quad 2^{2m+j+1} \geq 2^{2k+1},$$

on en déduit

$$\sup_I f - \inf_I f \geq \frac{\pi}{2(m+j)^2} - \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{2^k}{k^2}\right) \frac{\pi}{2^m(2^j - 1)}.$$

Pour majorer $\sum_{k=1}^{m} \frac{2^k}{k^2}$, on peut remarquer que la croissance de la fonction

$$x \in [0, +\infty[\mapsto \frac{x^2}{(x+1)^2}$$

et l'inégalité $\frac{16}{25} \geq \frac{5}{8}$ induisent pour tout $m \geq 4$ la relation $\frac{m^2}{(m+1)^2} \geq \frac{5}{8}$, qui est elle-même équivalente à l'inégalité

$$5 \cdot \frac{2^m}{m^2} \leq 4 \cdot \frac{2^{m+1}}{(m+1)^2},$$

dont on tire

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{2^k}{k^2} \leq 5 \cdot \frac{2^m}{m^2}$$

pour tout $m \geq 1$ via une récurrence à quatre cas de base. En effet, après vérification pour $m = 1, 2, 3, 4$, on obtient par induction

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{2^k}{k^2} \leq 5 \cdot \frac{2^m}{m^2} + \frac{2^{m+1}}{(m+1)^2} \leq 4 \cdot \frac{2^{m+1}}{(m+1)^2} + \frac{2^{m+1}}{(m+1)^2} = 5 \cdot \frac{2^{m+1}}{(m+1)^2}.$$

Grâce à cette observation, on a

$$\sup_I f - \inf_I f \geq \frac{\pi}{2(m+j)^2} - \frac{5\pi}{(2^j - 1)m^2}.$$

Cette inégalité étant vraie pour tout naturel non-nul j, elle l'est en particulier pour $j = 10$. En supposant $m \geq 2$, on a finalement

$$\sup_I f - \inf_I f \geq \frac{\pi}{2(m+10)^2} - \frac{5\pi}{(2^{10} - 1)m^2} \geq \frac{\pi}{2(6m)^2} - \frac{\pi}{200m^2} = \frac{2\pi}{225m^2}.$$

Pour conclure, on considère J un intervalle fermé de longueur arbitraire $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$ inclus dans $[0, 1]$ et $m \geq 2$ tel que $2^{-m} < \varepsilon \leq 2^{1-m}$. Quitte à translater I pour qu'il soit inclus dans J, nous avons

$$\sup_J f - \inf_J f \geq \sup_I f - \inf_I f \geq \frac{2\pi}{225m^2}.$$

Or

$$\frac{2}{225m^2} \geq \frac{1}{450(m-1)^2} \;\Leftrightarrow\; 4(m-1)^2 \geq m^2 \;\Leftrightarrow\; 3m^2 - 8m + 4 \geq 0,$$

cette dernière inégalité étant vraie puisque les deux zéros du polynôme sont $\frac{2}{3}$ et 2, et

$$\varepsilon \leq 2^{1-m} \Leftrightarrow m-1 \leq \log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = -\log_2(\varepsilon) \Leftrightarrow (m-1)^2 \leq \frac{\ln^2 \varepsilon}{\ln^2 2}.$$

Au total,

$$\sup_J f - \inf_J f \geq \frac{\pi}{450(m-1)^2} \geq \frac{\pi \ln^2 2}{450 \ln^2 \varepsilon}$$

et la constante $C = \frac{\pi \ln^2 2}{450}$ convient. □

Proposition 3.3.15. *L'ensemble des fonctions continues qui sont nulle part Lipschitziennes est prévalent dans* $C([0,1])$.

Démonstration. Notons A l'ensemble des fonctions de $C([0,1])$ qui sont nulle part Lipschitziennes et montrons que le sous-espace vectoriel S de dimension 2 de $C([0,1])$ engendré par les fonctions g et h définies en (3.11) est une sonde pour A. Puisque A est un borélien par la proposition 3.3.12, $C([0,1]) \setminus A$ l'est également et il nous faut prouver que l'on a $\mathcal{L}_S(C([0,1]) \setminus A - f) = 0$ quel que soit $f \in C([0,1])$. Or, si $f \in C([0,1])$ et si on définit l'isomorphisme

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to S : (\alpha, \beta) \mapsto \alpha g + \beta h,$$

alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_S(C([0,1]) \setminus A - f) &= \mathcal{L}(\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha g + \beta h + f \notin A\}) \\ &= \mathcal{L}(\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha g + \beta h + f \in F\}) \\ &\leq \sum_{L=1}^{+\infty} \mathcal{L}(\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha g + \beta h + f \in F_L\}), \end{aligned}$$

en utilisant les notations (3.8) et (3.9) de la proposition 3.3.12. Il suffit donc de montrer que

$$S_L = \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha g + \beta h + f \in F_L\}$$

est de mesure de Lebesgue nulle pour tout naturel non-nul L.

Fixons donc $L \in \mathbb{N}_0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq 2$, supposons recouvrir $[0,1]$ avec N intervalles fermés de longueur $\varepsilon = \frac{1}{N}$, notons I l'un de ces intervalles et posons

$$J = \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 : f + \alpha g + \beta h \text{ est } L\text{-Lipschitzienne en un } x \in I\}.$$

Nous allons montrer que J est inclus dans une boule de rayon $C\varepsilon \ln^2 \varepsilon$ pour une certaine constante strictement positive C indépendante de I et de ε, ce qui suffira. En effet, S_L pourra dans ce cas être recouvert de N boules, chacune de mesure $\frac{\pi}{2}C^2\varepsilon^2 \ln^4 \varepsilon$. Ainsi, la mesure de S_L sera majorée par $\frac{\pi}{2}C^2\varepsilon \ln^4 \varepsilon$. En prenant la limite pour ε qui tend vers 0, nous aurons finalement $\mathcal{L}(S_L) = 0$, comme voulu.

Pour montrer que J est inclus dans une boule de rayon $C\varepsilon \ln^2 \varepsilon$ comme annoncé, nous allons considérer deux points quelconques (α_1, β_1) et (α_2, β_2) de J. Pour $i \in \{1,2\}$, notons $f_i = f + \alpha_i g + \beta_i h$ et x_i un point de I en lequel f_i est L-Lipschitzienne. Comme I est de longueur ε, nous avons $|f_i(x) - f_i(x_i)| \leq L|x - x_i| \leq L\varepsilon$ pour tout $x \in I$ et pour chaque $i \in \{1, 2\}$. De cette relation résulte

$$|f_1(x) - f_2(x) - (f_1(x_1) - f_2(x_2))| \leq |f_1(x) - f_1(x_1)| + |f_2(x) - f_2(x_2)| \leq 2L\varepsilon$$

pour tout $x \in I$, d'où

$$\begin{aligned}\sup_I(f_1 - f_2) &= \sup_I(f_1 - f_2 - (f_1(x_1) - f_2(x_2)) + (f_1(x_1) - f_2(x_2)))\\ &\leq 2L\varepsilon + (f_1(x_1) - f_2(x_2))\\ &= 2L\varepsilon + (f_1(x_1) - f_1(x)) + (f_1(x) - f_2(x)) + (f_2(x) - f_2(x_2))\\ &\leq 4L\varepsilon + (f_1(x) - f_2(x))\end{aligned}$$

pour tout $x \in I$, dont on tire encore

$$\sup_I(f_1 - f_2) - \inf_I(f_1 - f_2) \leq 4L\varepsilon.$$

Or $f_1 - f_2 = (\alpha_1 - \alpha_2)g + (\beta_1 - \beta_2)h$. Nous obtenons donc

$$\sup_I((\alpha_1 - \alpha_2)g + (\beta_1 - \beta_2)h) - \inf_I((\alpha_1 - \alpha_2)g + (\beta_1 - \beta_2)h) \leq 4L\varepsilon.$$

Grâce au lemme 3.3.14, il est alors possible de trouver une constante strictement positive c telle que

$$\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2} \leq \frac{\ln^2 \varepsilon}{c} 4L\varepsilon.$$

Il suffit pour conclure de poser $C = \frac{4L}{c}$. □

Les ondelettes fournissent une autre technique permettant de démontrer des résultats de prévalence, et notamment que presque toute fonction a la pire régularité höldérienne possible ([68]). Nous ferons pour cela appel au résultat suivant dont une preuve peut être trouvée dans [89] (théorème 2).

Lemme 3.3.16. *Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, soit $x_0 \in [0, 1]$ et soit $\alpha \in \,]0, +\infty[\, \setminus \mathbb{N}$. Si $f \in C^\alpha(x_0)$, il existe $C > 0$ tel que pour tout $(j, k) \in \Lambda$, on a*

$$|c_{j,k}| \leq C 2^{-\alpha j}(1 + \left|2^j x_0 - k\right|)^\alpha.$$

Proposition 3.3.17. *L'ensemble des fonctions continues qui n'appartiennent à $C^\alpha(x)$ pour aucun $x \in [0, 1]$ et aucun $\alpha > \frac{1}{2}$* [4] *est prévalent dans $C([0, 1])$.*

Pour la preuve, nous considérons comme base d'ondelettes une famille $(\psi_{j,k})_{(j,k)\in\Lambda}$ obtenue par périodisation à partir d'une ondelette-mère ψ dans la classe de Schwartz.

4. En dimension d quelconque, $\frac{1}{2}$ est remplacé par $\frac{d}{2}$ car dans la majoration (3.17), un facteur 2^{di} apparaîtra (au lieu de 2^i) et il sera donc nécessaire d'avoir supposé $d - 2\alpha$ strictement négatif pour que la limite $\lim_{i\to+\infty} 2^{i(d-2\alpha)}$ reste égale à 0. Cela ne change cependant rien à la conclusion lorsque l'on applique la remarque 3.3.18.

Démonstration. Comme précédemment, on peut fixer $\alpha > \frac{1}{2}$ et se limiter à montrer que l'ensemble A des fonctions qui sont nulle part C^α est prévalent. Pour ce faire, on note S le sous-espace vectoriel de $C([0,1])$ engendré par les deux fonctions continues

$$g = \sum_{(j,k)\in\Lambda} \frac{1}{j^2}\psi_{j,k} \quad \text{et} \quad h = \sum_{(j,k)\in\Lambda} \frac{(-1)^k}{j^2}\psi_{j,k}$$

et on note φ l'isomorphisme

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to S : (\alpha, \beta) \mapsto \alpha g + \beta h.$$

De plus, pour tout $i \in \mathbb{N}$, on découpe $[0,1]$ en 2^i sous-intervalles dyadiques de longueur 2^{-i} et on désigne par $I_{i,l}$ l'intervalle dyadique fermé $\left[\frac{l}{2^i}, \frac{l+1}{2^i}\right]$ associé à $l \in \{0, \ldots, 2^j - 1\}$. Enfin, on pose

$$M_{i,l,C} = \left\{f \in C([0,1]) : \exists x \in I_{i,l} \text{ tel que } \forall (j,k) \in \Lambda, |c_{j,k}| \le C2^{-\alpha j}(1 + \left|2^j x - k\right|)^\alpha\right\}$$

pour tout $i \in \mathbb{N}$, tout $l \in \{0, \ldots, 2^i - 1\}$ et tout $C > 0$.

Nous allons commencer par montrer que chacun de ces ensembles est fermé dans $C([0,1])$. Supposons par conséquent que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de $M_{i,l,C}$ pour un $i \in \mathbb{N}$, un $l \in \{0, \ldots, 2^i - 1\}$ et un $C > 0$ fixés, et que cette suite converge dans $C([0,1])$ vers une fonction f. Notons $(c_{j,k}^{(n)})_{(j,k)\in\Lambda}$ les coefficients d'ondelettes de f_n et $(c_{j,k})_{(j,k)\in\Lambda}$ ceux de f. Puisque

$$c_{j,k} = 2^j \int_0^1 f(x)\psi_{j,k}(x)\,dx \quad \text{et} \quad c_{j,k}^{(n)} = 2^j \int_0^1 f_n(x)\psi_{j,k}(x)\,dx,$$

il est clair que pour tout $(j,k) \in \Lambda$, la suite $(c_{j,k}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $c_{j,k}$. En outre, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $I_{i,l}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $(j,k) \in \Lambda$,

$$\left|c_{j,k}^{(n)}\right| \le C2^{-\alpha j}(1 + \left|2^j x_n - k\right|)^\alpha. \tag{3.14}$$

Par compacité de $I_{i,l}$, quitte à considérer une sous-suite, on peut supposer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x \in I_{i,l}$. En passant à la limite pour n qui tend vers l'infini dans la majoration (3.14), on trouve

$$|c_{j,k}| \le C2^{-\alpha j}(1 + \left|2^j x - k\right|)^\alpha$$

pour tout $(j,k) \in \Lambda$, ce qui établit l'appartenance de la limite f à $M_{i,l,C}$. Ces ensembles sont donc bien fermés. En particulier,

$$M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \bigcup_{l=0}^{2^i-1} M_{i,l,n}$$

est un borélien de $C([0,1])$ qui, au vu du lemme 3.3.16, contient les fonctions continues qui appartiennent à $C^\alpha(x)$ pour un $x \in [0,1]$, c'est-à-dire le complémentaire de A.

Notre but à présent est de montrer que S est une sonde pour A en vérifiant que $\mathcal{L}_S$ annule tous les translatés de M. Fixons donc $f \in C([0,1])$ de coefficients d'ondelettes $(c_{j,k})_{(j,k)\in\Lambda}$. Si $J_{i,l,C}$ désigne l'ensemble

$$\left\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 : \exists x\in I_{i,l} \text{ tel que } \forall (j,k)\in\Lambda, \left|c_{j,k}+\frac{\alpha}{j^2}+\frac{(-1)^k\beta}{j^2}\right| \le C2^{-\alpha j}(1+\left|2^j x-k\right|)^{\alpha}\right\}$$

pour tout $i\in\mathbb{N}$, tout $l\in\{0,\ldots,2^i-1\}$ et tout $C>0$, alors

$$\mathcal{L}_S(M-f)=\mathcal{L}(\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 : f+\alpha g+\beta h\in M\})\le\sum_{n=0}^{+\infty}\mathcal{L}\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}}\bigcup_{l=0}^{2^i-1}J_{i,l,n}\right).$$

Nous obtiendrons donc la conclusion si nous parvenons à prouver que quel que soit $n\in\mathbb{N}$, l'ensemble $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}\bigcup_{l=0}^{2^i-1}J_{i,l,n}$ est de mesure de Lebesgue nulle.

On considère $i\in\mathbb{N}_0$, $l\in\{0,\ldots,2^i-1\}$, $C>0$ et deux éléments quelconques $(\alpha_1,\beta_1),(\alpha_2,\beta_2)$ de $J_{i,l,C}$. Par définition, cela signifie qu'il existe $x_1,x_2\in I_{i,l}$ tels que, pour $s\in\{1,2\}$, les coefficients d'ondelettes $(c^{(s)}_{j,k})_{(j,k)\in\Lambda}$ de $f_s=f+\alpha_s g+\beta_s h$ vérifient

$$\left|c^{(s)}_{j,k}\right|\le C2^{-\alpha j}(1+\left|2^j x_s-k\right|)^{\alpha} \tag{3.15}$$

pour tout $(j,k)\in\Lambda$. En particulier, la relation (3.15) s'applique à $j=i$ et $k\in D_l$, où

$$D_l=\begin{cases}\{l,l+1\} & \text{si } 0\le l<2^i-1\\ \{l-1,l\} & \text{si } l=2^i-1\end{cases}. \tag{3.16}$$

Puisqu'un tel k satisfait $|2^i x_1-k|\le 2$ et $|2^i x_2-k|\le 2$, on a

$$\left|c^{(1)}_{i,k}\right|\le 3^{\alpha}C2^{-\alpha i}\quad\text{et}\quad\left|c^{(2)}_{i,k}\right|\le 3^{\alpha}C2^{-\alpha i}.$$

On en tire

$$\left|c_{i,k}+\frac{\alpha_1}{i^2}+\frac{(-1)^k\beta_1}{i^2}-c_{i,k}-\frac{\alpha_2}{i^2}-\frac{(-1)^k\beta_2}{i^2}\right|=\left|c^{(1)}_{i,k}-c^{(2)}_{i,k}\right|\le\left|c^{(1)}_{i,k}\right|+\left|c^{(2)}_{i,k}\right|\le 3^{\alpha}2C2^{-\alpha i},$$

d'où

$$\left|\frac{\alpha_1-\alpha_2}{i^2}+(-1)^k\cdot\frac{\beta_1-\beta_2}{i^2}\right|\le 3^{\alpha}2C2^{-\alpha i},$$

et finalement

$$\left|(\alpha_1-\alpha_2)+(-1)^k(\beta_1-\beta_2)\right|\le 3^{\alpha}2C2^{-\alpha i}i^2.$$

Comme D_l contient deux entiers consécutifs, on peut sélectionner k de telle sorte que $(-1)^k(\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1-\beta_2)$ soit positif et en tirer

$$|\alpha_1-\alpha_2|+|\beta_1-\beta_2|\le 3^{\alpha}2C2^{-\alpha i}i^2.$$

A fortiori

$$\sqrt{(\alpha_1-\alpha_2)^2+(\beta_1-\beta_2)^2}\le 3^{\alpha}2C2^{-\alpha i}i^2.$$

De cette manière, on voit que $J_{i,l,C}$ peut être inclus dans une boule de rayon $3^\alpha 2C2^{-\alpha i}i^2$. Par conséquent,

$$\mathcal{L}\left(\bigcup_{l=0}^{2^i-1} J_{i,l,C}\right) \leq 2^i\frac{\pi}{2}(3^\alpha 2C2^{-\alpha i}i^2)^2 = 2C^2\pi 3^{2\alpha}2^{i(1-2\alpha)}i^4. \tag{3.17}$$

Comme $1-2\alpha<0$, en faisant tendre i vers l'infini, on obtient

$$\mathcal{L}\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}}\ \bigcup_{l\in\{0,\ldots,2^i-1\}} J_{i,l,C}\right) = 0,$$

ce qui était notre objectif. $\square$

Nous aimerions renforcer ce résultat en nous libérant de la condition $\alpha > \frac{1}{2}$. C'est l'objet de la remarque ci-dessous.

Remarque 3.3.18. Dans la démonstration, nous avons considéré une sonde de dimension 2. En utilisant plutôt une sonde de dimension n et modifiant l'ensemble D_l défini en (3.16) pour qu'il contienne suffisamment de valeurs, on peut inclure nos ensembles $J_{i,l,C}$ dans des boules de $\mathbb{R}^n$ de rayon majoré par $2C2^{-\alpha i}i^2(2^{n-1}+1)^\alpha$, ce qui change l'exposant $i(1-2\alpha)$ dans la majoration (3.17) en $i(1-n\alpha)$. Ainsi, la condition $\alpha > \frac{1}{2}$ imposée pour obtenir la convergence lorsque i tend vers l'infini peut être affaiblie en $\alpha > \frac{1}{n}$. Puisque la prévalence est une notion stable par intersection dénombrable, cette technique montre que l'ensemble des fonctions continues qui ne sont C^α nulle part et pour aucun $\alpha > 0$ est encore prévalent dans $C([0,1])$.

La technique des processus stochastiques peut également être mise en œuvre pour montrer que presque toute fonction continue sur $[0,1]$ est nulle part C^α pour tout $\alpha > \frac{1}{2}$ ([68]). Nous utiliserons ici le *mouvement brownien standard* sur $[0,1]$. Rappelons-en la définition ([108]).

Tout d'abord, on appelle *mouvement brownien* tout processus gaussien sur $[0,+\infty[$ centré, d'opérateur de covariance $K(s,t)=\min(s,t)$ pour tous $s,t\geq 0$ et à trajectoires presque sûrement continues. Classiquement, on considère la décomposition du mouvement brownien dans la *base de Schauder* $(\Lambda_{j,k})_{(j,k)\in\Lambda}$ ([143]) définie par

$$\Lambda_{j,k}(x) = \Lambda(2^jx-k)$$

pour tout $x\in[0,1]$, où Λ est la fonction *tente*

$$\Lambda : [0,1]\to\left[0,\frac{1}{2}\right] : x\mapsto \begin{cases} x & \text{si } 0\leq x\leq \frac{1}{2} \\ 1-x & \text{si } \frac{1}{2}\leq x\leq 1 \end{cases}.$$

Si l'on fixe une famille $\{\varepsilon\}\cup\{\varepsilon_{j,k}\}_{(j,k)\in\Lambda}$ de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$, indépendantes et identiquement distribuées selon une loi normale centrée réduite, alors le processus $\{B_t\}_{t\in[0,1]}$ défini par

$$B_t = \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{2^j-1} 2^{-\frac{j}{2}}\varepsilon_{j,k}\Lambda_{j,k}(t) + \varepsilon t$$

pour tout $t \in [0,1]$ est un mouvement brownien sur $[0,1]$ et on l'appelle le *mouvement brownien standard* sur $[0,1]$.

En adaptant les arguments du théorème de Paley, Wiener et Zygmund qui établit la non-dérivabilité presque sûre du mouvement brownien (voir le théorème 1.30 de [122] pour une preuve de ce théorème et les exercices 1.7 et 1.10 pour les adaptations), on peut montrer que pour tout $f \in C([0,1])$ et tout $s > \frac{1}{2}$, presque sûrement pour tout $t_0 \in [0,1]$, on a

$$\limsup_{t \to t_0} \frac{|B_t + f(t) - B_{t_0} - f(t_0)|}{|t - t_0|^s} = +\infty.$$

Ce résultat nous permet de donner une preuve alternative de la proposition 3.3.17. Comme nous l'avons vu à plusieurs reprises, il nous suffit de montrer que, à un exposant $\alpha > \frac{1}{2}$ fixé, l'ensemble des fonctions nulle part C^α est prévalent pour obtenir la conclusion.

Démonstration. Considérons $B = \{B_t\}_{t \in [0,1]}$ le mouvement brownien standard sur $[0,1]$ et $\mathcal{P}$ la propriété pour une fonction de $C([0,1])$ d'être nulle part C^α. On veut montrer que pour tout $f \in C([0,1])$ fixé, $B + f$ a presque sûrement la propriété $\mathcal{P}$, i.e. il existe un sous-ensemble Ω^* de Ω tel que $\mathbb{P}(\Omega^*) = 1$ et pour tout $\omega \in \Omega^*$, $B(\omega) + f$ a la propriété $\mathcal{P}$. Puisque le mouvement brownien a ses trajectoires presque sûrement continues, il existe un premier sous-ensemble Ω_1 de Ω tel que $\mathbb{P}(\Omega_1) = 1$ et $B(\omega) \in C([0,1])$ pour tout $\omega \in \Omega_1$. En outre, le résultat sus-cité assure l'existence d'un second sous-ensemble Ω_2 de Ω tel que $\mathbb{P}(\Omega_2) = 1$ et

$$\limsup_{t \to t_0} \frac{|B_t(\omega) + f(t) - B_{t_0}(\omega) - f(t_0)|}{|t - t_0|^\alpha} = +\infty$$

pour tout $\omega \in \Omega_2$ et tout $t_0 \in [0,1]$. En posant $\Omega^* = \Omega_1 \cap \Omega_2$, il est clair que Ω^* est de probabilité 1. De plus, s'il existait $\omega \in \Omega^*$ tel que $B(\omega) + f$ n'ait pas la propriété $\mathcal{P}$, alors il existerait $t_0 \in [0,1]$, $c > 0$ et $\delta > 0$ tels que

$$|B_t(\omega) + f(t) - (B_{t_0}(\omega) + f(t_0))| \leq c\,|t - t_0|^\alpha$$

pour tout $t \in [0,1]$ satisfaisant $|t - t_0| < \delta$. Dans ce cas, la relation

$$\limsup_{t \to t_0} \frac{|B_t(\omega) + f(t) - (B_{t_0}(\omega) + f(t_0))|}{|t - t_0|^\alpha} \leq \limsup_{t \to t_0} \frac{c\,|t - t_0|^\alpha}{|t - t_0|^\alpha} = c$$

nierait l'appartenance de ω à Ω_2. Ainsi, on a bien montré que $B + f$ a presque sûrement la propriété $\mathcal{P}$. □

Fraysse formule également un équivalent à la remarque 3.3.18 dans ce cadre.

Remarque 3.3.19. En utilisant le mouvement brownien fractionnaire de paramètre de Hurst H, on obtient la prévalence des fonctions nulle part C^α pour tout $\alpha > H$.

3.4 Fonctions de type monotone

Le prochain exemple de propriété générique que nous allons développer concerne les fonctions continues qui sont *globalement ou ponctuellement de type monotone*. On considère donc l'espace de Banach $(C([0,1]), \|\cdot\|)$, où $\|\cdot\|$ désigne à nouveau la norme uniforme sur $C([0,1])$. Lorsque nous parlerons d'intervalle, nous supposerons toujours que celui-ci n'est pas réduit à un point.

Définition 3.4.1. Soit f une fonction de $C([0,1])$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note f_λ la fonction définie pour tout $x \in [0,1]$ par $f_\lambda(x) = f(x) + \lambda x$.

On dit que f est

- *de type monotone sur un sous-intervalle fermé* I de $[0,1]$ s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f_{-\lambda}$ est monotone sur I,
- *nulle part de type monotone* si f n'est de type monotone sur aucun sous-intervalle fermé de $[0,1]$.

En outre, la fonction f est dite

- *croissante en un point* $x \in [0,1]$ s'il existe $\delta > 0$ tel que $f(t) \leq f(x)$ pour tout $t \in [0,1] \cap \,]x-\delta, x[$ et $f(t) \geq f(x)$ pour tout $t \in [0,1] \cap \,]x, x+\delta[$,
- *décroissante en un point* $x \in [0,1]$ si la fonction $-f$ est croissante en x,
- *monotone en un point* $x \in [0,1]$ si elle soit croissante soit décroissante en x,
- *de type monotone en un point* $x \in [0,1]$ s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que la fonction $f_{-\lambda}$ est monotone en x,
- *de type non-monotone* si f n'est de type monotone en aucun point de $[0,1]$.

Nous pouvons immédiatement remarquer qu'une fonction qui est de type monotone sur un intervalle fermé est de type monotone en tout point intérieur à cet intervalle. Par contraposition, une fonction qui est de type non-monotone n'est donc nulle part de type monotone.

Nous allons voir que les résultats de généricité topologique et de prévalence sont différents dans le cadre qui nous occupe ici. En effet, au sens de Baire ([36]) et de la porosité ([71]), le comportement typique des fonctions continues est d'être de type non-monotone, alors qu'au sens prévalent ([146], voir aussi [60]), presque toute fonction continue est nulle part de type monotone mais ce résultat ne peut pas être amélioré.

Proposition 3.4.2. *L'ensemble des fonctions continues qui sont de type non-monotone est résiduel dans* $C([0,1])$.

Démonstration. Soit A l'ensemble des fonctions f de $C([0,1])$ pour lesquelles il existe $x \in [0,1]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que la fonction $f_{-\lambda}$ est croissante en x. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, notons A_n l'ensemble des fonctions f de $C([0,1])$ pour lesquelles il existe $x \in [0,1]$ et $\lambda \in [-n, n]$ tels que la fonction $f_{-\lambda}$ vérifie

$$\begin{cases} f_{-\lambda}(t) \leq f_{-\lambda}(x) & \text{pour tout } t \in [0,1] \cap \,]x - \frac{1}{n}, x[\\ f_{-\lambda}(t) \geq f_{-\lambda}(x) & \text{pour tout } t \in [0,1] \cap \,]x, x + \frac{1}{n}[\end{cases}.$$

Il est clair que $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} A_n$. Notre but est de montrer que chaque A_n est un fermé d'intérieur vide, de sorte que A soit maigre. Fixons donc $n \in \mathbb{N}_0$.

Voyons d'abord pourquoi A_n est fermé. Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A_n qui converge dans $C([0,1])$ vers une fonction f. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $\lambda_k \in [-n,n]$ et $x_k \in [0,1]$ tels que la fonction $(f_k)_{-\lambda_k}$ vérifie

$$\begin{cases} (f_k)_{-\lambda_k}(t) \le (f_k)_{-\lambda_k}(x_k) & \text{pour tout } t \in [0,1] \cap \left]x_k - \frac{1}{n}, x_k\right[\\ (f_k)_{-\lambda_k}(t) \ge (f_k)_{-\lambda_k}(x_k) & \text{pour tout } t \in [0,1] \cap \left]x_k, x_k + \frac{1}{n}\right[\end{cases}.$$

Par compacité de $[-n,n]$ et $[0,1]$, on peut, quitte à considérer une sous-suite de $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, supposer que $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda \in [-n,n]$ et que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $x \in [0,1]$. Dans ce cas, on peut constater que f vérifie

$$\begin{cases} f_{-\lambda}(t) \le f_{-\lambda}(x) & \text{pour tout } t \in [0,1] \cap \left]x - \frac{1}{n}, x\right[\\ f_{-\lambda}(t) \ge f_{-\lambda}(x) & \text{pour tout } t \in [0,1] \cap \left]x, x + \frac{1}{n}\right[\end{cases},$$

ce qui assure l'appartenance de f à A_n. Pour ce faire, remarquons d'abord que la suite $((f_k)_{-\lambda_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f_{-\lambda}$ sur $[0,1]$. En effet,

$$\begin{aligned} \sup_{y\in[0,1]} |(f_k(y) - \lambda_k y) - (f(y) - \lambda y)| &\le \sup_{y\in[0,1]} (|f_k(y) - f(y)| + |\lambda_k - \lambda|\,|y|) \\ &\le \|f_k - f\| + |\lambda_k - \lambda| \end{aligned}$$

et le majorant tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini. De plus, la suite $(f_k(x_k) - \lambda_k x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x) - \lambda x$ puisque

$$|f_k(x_k) - \lambda_k x_k - (f(x) - \lambda x)| \le \|f_k - f\| + |\lambda_k x_k - \lambda x|$$

et le second membre de l'inégalité tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini. Supposons à présent que, contrairement à ce que l'on a affirmé, il existe $t \in [0,1] \cap \left]x - \frac{1}{n}, x\right[$ tel que $f(t) - \lambda t > f(x) - \lambda x$ (ou $t \in [0,1] \cap \left]x, x + \frac{1}{n}\right[$ tel que $f(t) - \lambda t < f(x) - \lambda x$, la conclusion étant identique dans ce cas). Alors pour tout $K \in \mathbb{N}$, il existe $k > K$ tel que

$$f_k(t) - \lambda_k t > f_k(x_k) - \lambda_k x_k.$$

Or il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_k \in \left]t, t + \frac{1}{n}\right[$ pour tout $k \ge N$. Ainsi, $t \in [0,1] \cap \left]x_k - \frac{1}{n}, x_k\right[$ pour tout $k \ge N$. En prenant $K = N$, on obtient une contradiction. Ce raisonnement montre donc bien que A_n est fermé.

Montrons ensuite que A_n est d'intérieur vide. On se donne pour cela U un ouvert quelconque de $C([0,1])$ et on construit une fonction de U qui n'appartient pas à A_n. Par densité des polynômes parmi les fonctions continues, il existe un polynôme $g \in U$ et $\varepsilon > 0$ tels que $b(g,\varepsilon) \subseteq U$. Soient $\alpha \in]0,\varepsilon[$, $\beta = \sup_{x\in[0,1]} |g'(x)|$ et m un naturel impair tel que

$$m > \max\left(2n, \frac{3(\beta + n)}{\alpha}\right).$$

On définit ensuite $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ comme étant la fonction continue qui prend la valeur

$$\begin{cases} \alpha \\ 0 \end{cases} \text{aux points de la forme} \begin{cases} \frac{2i}{m} \\ \frac{2i+1}{m} \end{cases} \text{avec } i \in \left\{0, \dots, \frac{m-1}{2}\right\}$$

et qui est linéaire entre deux tels points. On pose enfin $f = g + h$. Puisque

$$\|f - g\| = \|h\| \leq \alpha < \varepsilon,$$

il est clair que f est dans U. Soient $x \in [0,1]$ et $\lambda \in [-n, n]$ quelconques, ainsi que $i \in \{0, \dots, \frac{m-1}{2}\}$ tel que $\frac{2i}{m} \leq x < \frac{2i+2}{m}$. Dans le cas où $\frac{2i}{m} \leq x < \frac{2i+1}{m}$, on a $\frac{2i+1}{m} \in \left]x, x + \frac{1}{n}\right[$ et

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2i+1}{m}\right) - f(x) &= g\left(\frac{2i+1}{m}\right) - g(x) + h\left(\frac{2i+1}{m}\right) - h(x) \\ &\leq \beta\left(\frac{2i+1}{m} - x\right) - \alpha m\left(\frac{2i+1}{m} - x\right) \\ &< -n\left(\frac{2i+1}{m} - x\right), \end{aligned}$$

d'où

$$\left(f\left(\frac{2i+1}{m}\right) - \lambda \cdot \frac{2i+1}{m}\right) - (f(x) - \lambda x) < -n\left(\frac{2i+1}{m} - x\right) - \lambda\left(\frac{2i+1}{m} - x\right) \leq 0.$$

À présent, si $\frac{2i+1}{m} \leq x < \frac{2i+\frac{3}{2}}{m}$, on a $\frac{2i}{m} \in \left]x - \frac{1}{n}, x\right[$ et

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2i}{m}\right) - f(x) &= g\left(\frac{2i}{m}\right) - g(x) + h\left(\frac{2i}{m}\right) - h(x) \\ &\geq \beta\left(\frac{2i}{m} - x\right) + \frac{\alpha}{2} \\ &> \beta\left(\frac{2i}{m} - x\right) + \frac{3(\beta + n)}{2m} \\ &> -n\left(\frac{2i}{m} - x\right), \end{aligned}$$

d'où

$$\left(f\left(\frac{2i}{m}\right) - \lambda \cdot \frac{2i}{m}\right) - (f(x) - \lambda x) > n\left(x - \frac{2i}{m}\right) + \lambda\left(x - \frac{2i}{m}\right) \geq 0.$$

Enfin, si $\frac{2i+\frac{3}{2}}{m} \leq x < \frac{2i+2}{m}$, on a $\frac{2i+3}{m} \in \left]x, x+\frac{1}{n}\right[$ et

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2i+3}{m}\right) - f(x) &= g\left(\frac{2i+3}{m}\right) - g(x) + h\left(\frac{2i+3}{m}\right) - h(x) \\ &\leq \beta\left(\frac{2i+3}{m} - x\right) - \frac{\alpha}{2} \\ &< \beta\left(\frac{2i+3}{m} - x\right) - \frac{3(\beta+n)}{2m} \\ &\leq -n\left(\frac{2i+3}{m} - x\right), \end{aligned}$$

d'où

$$\left(f\left(\frac{2i+3}{m}\right) - \lambda \cdot \frac{2i+3}{m}\right) - (f(x) - \lambda x) < -n\left(\frac{2i+3}{m} - x\right) - \lambda\left(\frac{2i+3}{m} - x\right) \leq 0.$$

Cela montre que f n'est pas dans A_n comme voulu.

Pour achever la preuve, notons que si B désigne l'ensemble des fonctions f de $C([0,1])$ pour lesquelles il existe $x \in [0,1]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que la fonction $f_{-\lambda}$ est décroissante en x, alors $B = \{-f : f \in A\}$. Par conséquent, B est également maigre et $C([0,1]) \setminus (A \cup B)$, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions de type non-monotone, est résiduel. □

Proposition 3.4.3. *L'ensemble des fonctions continues qui sont de type non-monotone est de complémentaire σ-poreux dans $C([0,1])$.*

Démonstration. On utilise les mêmes notations que pour la proposition 3.4.2, de sorte à devoir simplement montrer que chaque A_n est poreux. On fixe par conséquent $n \in \mathbb{N}_0$, $f \in A_n$ et $R > 0$, ainsi que $r, s \in \left]0, +\infty\right[$ tels que $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} < \frac{1}{4}$. Par continuité uniforme de f, on considère en outre $\delta > 0$ satisfaisant

$$\delta < \min\left(\frac{1}{4n}, \frac{R}{3n}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{r} - \frac{2}{s}\right)\right)$$

et $|f(x) - f(y)| < \frac{R}{r}$ pour tous $x, y \in [0,1]$ avec $|x-y| \leq 2\delta$. On partitionne ensuite $[0,1]$ en N intervalles $[t_0, t_1], \ldots, [t_{N-1}, t_N]$ de longueur au plus 2δ et on pose $x_i = \frac{t_{i-1}+t_i}{2}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$. On définit enfin une fonction g comme suit : $g(0) = f(0) + \frac{R}{2}$ et pour tout $i \in \{0, \ldots, N-1\}$, g est linéaire sur les intervalles $[t_i, x_{i+1}]$ et $[x_{i+1}, t_{i+1}]$, $g(x_{i+1}) = f(x_{i+1}) + \frac{R}{2}$ et $g(t_{i+1}) = f(x_{i+1})$.

Pour tout $i \in \{1, \ldots, N-1\}$ et tous $x' \in [t_{i-1}, t_i]$, $x'' \in [t_i, t_{i+1}]$, on a

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - f(t_i)| + |f(t_i) - f(x'')| < \frac{2R}{r}.$$

Par conséquent, pour tout $i \in \{1, \ldots, N-1\}$, si $q \in \{f(x_i), f(x_{i+1})\}$ et si $x \in [t_i, t_{i+1}]$, alors

$$|g(x) - f(x)| \leq |g(x) - q| + |q - f(x)| \leq \frac{R}{2} + \frac{2R}{r} < R$$

car
$$|g(x)-q| \leq \max\left(|f(x_{i+1})-f(x_i)|, \frac{R}{2}\right) \leq \max\left(\frac{2R}{r}, \frac{R}{2}\right) = \frac{R}{2}.$$
De plus, pour tout $x \in [0, t_1]$,
$$|g(x)-f(x)| \leq |f(x)-f(0)| + |f(0)-g(x)| \leq \frac{R}{r} + |f(0)-f(x_1)| + \frac{R}{2} < R.$$
On en tire
$$\frac{R}{2} \leq \|f-g\| < R.$$
En particulier, $g \in b(f,R)$ et $b(g,\frac{R}{s}) \subseteq b(f,2R)$. On aimerait maintenant montrer que $b(g,\frac{R}{s}) \cap A_n$ est vide donc on se donne $h \in b(g,\frac{R}{s})$, $i \in \{0,\ldots,N-1\}$, $x \in [t_i, t_{i+1}]$ et $\lambda \in [-n,n]$. Dans le cas où
$$h(x) > f(x_{i+1}) + \frac{R}{s} + n(t_{i+1}-x),$$
puisque
$$h(t_{i+1}) \leq |h(t_{i+1}) - g(t_{i+1})| + g(t_{i+1}) \leq \frac{R}{s} + f(x_{i+1}),$$
on a
$$(h(x)-\lambda x) - (h(t_{i+1}) - \lambda t_{i+1}) > n(t_{i+1}-x) + \lambda(t_{i+1}-x) \geq 0,$$
avec $t_{i+1} \in \left]x, x+\frac{1}{n}\right[$. Supposons au contraire
$$h(x) \leq f(x_{i+1}) + \frac{R}{s} + n(t_{i+1}-x).$$
Si $i \neq 0$, puisque
$$\begin{aligned}
h(x_i) &\geq -|h(x_i)-g(x_i)| + g(x_i)\\
&\geq -\frac{R}{s} + f(x_i) + \frac{R}{2}\\
&\geq -\frac{R}{s} + f(x_{i+1}) - \frac{2R}{r} + \frac{R}{2}\\
&\geq \left(h(x) - \frac{R}{s} - n(t_{i+1}-x)\right) - \frac{2R}{r} + \frac{R}{2} - \frac{R}{s}\\
&= h(x) + \frac{R}{2} - \frac{2R}{r} - \frac{2R}{s} - n(t_{i+1}-x_i) - n(x_i - x)\\
&\geq h(x) + n(x-x_i),
\end{aligned}$$
on a
$$(h(x_i)-\lambda x_i) - (h(x)-\lambda x) \geq n(x-x_i) + \lambda(x-x_i) \geq 0,$$

avec $x_i \in \left]x - \frac{1}{n}, x\right[$. Si $i = 0$ et si $x \in]0, t_1]$, on a

$$\begin{aligned} h(0) - (h(x) - \lambda x) &\geq -|h(0) - g(0)| + g(0) - h(x) + \lambda x \\ &\geq -\frac{R}{s} + f(0) + \frac{R}{2} - f(x_1) - \frac{R}{s} - n(t_1 - x) + \lambda x \\ &\geq -\frac{2R}{s} + \frac{R}{2} - |f(0) - f(x_1)| - nt_1 + nx + \lambda x \\ &\geq \left(-\frac{2R}{s} + \frac{R}{2} - \frac{R}{r} - 2n\delta\right) + (n + \lambda)x \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

avec $0 \in \left]x - \frac{1}{n}, x\right[$. En particulier, en $x = t_1$, on trouve

$$h(0) - (h(t_1) - \lambda t_1) \geq 0$$

avec $t_1 \in \left]0, 0 + \frac{1}{n}\right[$. Ainsi, $h \notin A_n$.

Finalement, on a $\gamma(f, 2R, A_n) \geq \frac{R}{s}$, ce qui montre la porosité de A_n en f satisfait $p(f, A_n) \geq \frac{1}{2s} > 0$ et permet de conclure puisque f a été choisi arbitrairement dans A_n. □

Des propositions 3.4.2 et 3.4.3, on tire immédiatement que tout ensemble contenant les fonctions de type non-monotone est topologiquement *grand*.

Corollaire 3.4.4. *L'ensemble des fonctions continues qui ne sont nulle part de type monotone est résiduel et de complémentaire σ-poreux dans $C([0, 1])$.*

Pour la prévalence, on a l'équivalent du corollaire 3.4.4.

Proposition 3.4.5. *L'ensemble des fonctions continues qui ne sont nulle part de type monotone est prévalent dans $C([0, 1])$.*

Démonstration. Si A désigne l'ensemble des fonctions qui ne sont pas nulle part de type monotone et si l'on pose

$$A(I) = \{f \in C([0, 1]) : f \text{ est de type monotone sur } I\}$$

et

$$A_n(I) = \{f \in C([0, 1]) : \exists \lambda \in [-n, n] \text{ tel que } f_{-\lambda} \text{ est monotone sur } I\}$$

pour tout sous-intervalle fermé I de $[0, 1]$ et tout naturel non-nul n, nous avons bien sûr

$$A = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A(I_m) \quad \text{et} \quad A(I) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} A_n(I),$$

où $(I_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite composée de tous les intervalles fermés à extrémités rationnelles. Il nous suffit donc de montrer que chaque $A(I_m)$ est timide. On fixe pour cela un sous-intervalle fermé I de $[0, 1]$.

Soit $n \in \mathbb{N}_0$. Remarquons d'abord que $A_n(I)$ est fermé dans $C([0, 1])$. En effet, soit $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de $A_n(I)$ qui converge vers f dans $C([0, 1])$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe

$\lambda_m \in [-n, n]$ tel que $(f_m)_{-\lambda_m}$ est monotone sur I. Par compacité de $[-n, n]$, on peut supposer que la suite $(\lambda_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda \in [-n, n]$. Comme dans la preuve de la proposition 3.4.2, il en découle que la suite $((f_m)_{-\lambda_m})_{m\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f_{-\lambda}$ sur $[0, 1]$. Puisque les fonctions $(f_m)_{-\lambda_m}$ sont monotones sur I, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer qu'elles sont toutes croissantes ou toutes décroissantes sur I. On en tire alors que $f_{-\lambda}$ est également monotone sur I, ce qui signifie que f appartient à $A_n(I)$. Ce raisonnement induit en particulier que $A(I)$ est un borélien et facilitera la construction d'une sonde pour son complémentaire.

Soit $g \in C([0, 1])$ une application nulle part dérivable sur I, dont l'existence est notamment assurée par la proposition 3.3.1, et notons S le sous-espace vectoriel de dimension 1 engendré par g, ainsi que φ l'isomorphisme

$$\varphi : \mathbb{R} \to S : \alpha \mapsto \alpha g.$$

Vérifions que S est une sonde pour $C([0, 1]) \setminus A(I)$. Pour tout $f \in C([0, 1])$, on a

$$\mathcal{L}_S(A(I) - f) = \mathcal{L}(\{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha g + f \in A(I)\}).$$

Supposons qu'il soit possible de trouver deux réels distincts α et β tels que $f + \alpha g \in A(I)$ et $f + \beta g \in A(I)$. Dans ce cas, il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que les applications

$$x \mapsto f(x) + \alpha g(x) - \lambda_1 x \quad \text{et} \quad x \mapsto f(x) + \beta g(x) - \lambda_2 x$$

sont monotones sur I. Par le théorème de Lebesgue, elles sont alors dérivables presque partout sur I et il en va de même de la fonction

$$x \mapsto (f(x) + \alpha g(x) - \lambda_1 x) - (f(x) + \beta g(x) - \lambda_2 x) + (\lambda_1 - \lambda_2)x = (\alpha - \beta)g(x),$$

une contradiction avec le choix de g. On en tire la relation

$$\mathcal{L}_S(A(I) - f)) = 0.$$

$\square$

Avant d'achever cette section, nous aimerions nous assurer que l'on ne peut pas renforcer la proposition 3.4.5 en remplaçant *nulle part de type monotone* par *de type non-monotone*. Par ailleurs, s'il est établi que l'ensemble des fonctions de type non-monotone n'est pas prévalent, il est naturel de se demander si cet ensemble est timide. Le résultat ci-dessous répond aux deux questions.

Proposition 3.4.6. *L'ensemble des fonctions continues qui sont de type non-monotone n'est ni timide ni prévalent dans $C([0, 1])$.*

Pour s'en convaincre, nous allons caractériser le fait d'être de type monotone en un point via les *points de rencontre* (de l'anglais *knot points*).

Définition 3.4.7. Si $f \in C([0, 1])$ et $x \in [0, 1]$, on dit que x est un *point de rencontre* de f si les dérivées supérieures et inférieures de f en x satisfont respectivement $(\overline{D}f)(x) = +\infty$ et $(\underline{D}f)(x) = -\infty$, où

$$(\overline{D}f)(x) = \limsup_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{et} \quad (\underline{D}f)(x) = \liminf_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

La caractérisation évoquée dans [36] est donnée par le lemme 3.4.8. Son énoncé est cité dans plusieurs articles mais nous n'en avons pas trouvé de démonstration. Le raisonnement qui suit est inspiré d'arguments de [72].

Lemme 3.4.8. *Si $f \in C([0,1])$ et $x \in [0,1]$, alors x est un point de rencontre de f si et seulement si f n'est pas de type monotone en x.* [5]

Démonstration. Nous allons montrer que $(\underline{D}f)(x) = -\infty$ si et seulement si f n'est pas de type croissant en x, la correspondance entre l'égalité $(\overline{D}f)(x) = +\infty$ et le fait f ne soit pas de type décroissant en x se traitant de manière analogue. Les équivalences suivantes nous donnent la conclusion :

$$
\begin{aligned}
& (\underline{D}f)(x) = -\infty \\
\Leftrightarrow \quad & \forall N \in \mathbb{R},\ \lim_{\delta \to 0^+} \inf_{h \in \mathbb{R}_0,\, |h|<\delta} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} < -N \\
\Leftrightarrow \quad & \forall N \in \mathbb{R}\ \forall \delta > 0, \exists h \in \mathbb{R}_0 \text{ tel que } |h| < \delta \text{ et } \frac{f(x+h)-f(x)}{h} < -N \\
\Leftrightarrow \quad & \forall N \in \mathbb{R}\ \forall \delta > 0, \exists h \in \mathbb{R}_0 \text{ tel que } |h| < \delta \text{ et } \left\{ \begin{array}{ll} f(x+h)-f(x) < -Nh & \text{si } h>0 \\ f(x+h)-f(x) > -Nh & \text{si } h<0 \end{array} \right. \\
\Leftrightarrow \quad & \forall N \in \mathbb{R}\ \forall \delta > 0, \exists h \in \,]0,\delta[\, \text{tel que } f(x+h)+N(x+h) < f(x)+Nx \text{ ou} \\
& \qquad\qquad\qquad\quad \exists h \in \,]-\delta,0[\, \text{tel que } f(x+h)+N(x+h) > f(x)+Nx \\
\Leftrightarrow \quad & \forall N \in \mathbb{R}, f_N \text{ n'est pas croissant en } x.
\end{aligned}
$$

□

En particulier, f est de type non-monotone si et seulement tout $x \in [0,1]$ est un *point de rencontre* de f. La proposition 3.4.6 découle alors directement du théorème suivant appliqué à $A = B = \emptyset$ (théorème 1.1 de [46]).

Théorème 3.4.9. *Soient A, B deux sous-ensembles disjoints et dénombrables de $[0,1]$. L'ensemble $M_{A,B}$ des fonctions continues f qui vérifient $f'(x) = +\infty$ pour tout $x \in A$, $f'(x) = -\infty$ pour tout $x \in B$ et x est un point de rencontre de f pour tout $x \in [0,1] \setminus (A \cup B)$ n'est ni timide ni prévalent dans $C([0,1])$.*

Dans [46], le résultat est en fait uniquement énoncé dans le cas $A, B \neq \emptyset$. Néanmoins, la preuve fonctionne de la même façon sans cette restriction (une remarque formulée dans [18]). Elle s'appuie sur le lemme 1.3.38 pour montrer qu'aucun $M_{A,B}$ n'est timide (pour tout compact K de $C([0,1])$, on peut construire une fonction h telle que $K + h \subseteq M_{A,B}$). La non-prévalence de $M_{A,B}$ pour A, B non-tous deux vides se déduit alors de la relation $M_{A,B} \cap M_{B,A} = \emptyset$. Le cas $A = B = \emptyset$ découle enfin de l'inclusion de n'importe quel $M_{A,B}$ $(A, B \neq \emptyset)$ dans $C([0,1]) \setminus M_{\emptyset,\emptyset}$.

5. Cela implique en particulier qu'une fonction de type non-monotone est nulle part dérivable. Les propositions 3.4.2 et 3.4.3 généralisent donc les résultats de généricité topologique obtenus à la section 3.3.

3.5 Propriété de Bruckner-Garg

Dans cette partie, nous nous intéressons aux fonctions continues (comme précédemment, nous noterons $\|\cdot\|$ la norme uniforme sur $C([0,1])$) qui satisfont la *propriété de Bruckner-Garg*. Cette propriété tire son nom des deux mathématiciens Bruckner et Garg qui, en 1977, ont étudié les *niveaux* d'une fonction générique au sens de Baire ([36]). On appelle *niveaux* d'une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dans la direction $\lambda \in \mathbb{R}$, la famille des ensembles $\{x \in [0,1] : f(x) = \lambda x + c\}$ pour $c \in \mathbb{R}$. Lorsque $\lambda = 0$, on parle des *niveaux horizontaux* de f. Autrement dit, un niveau horizontal est la préimage d'un singleton. La propriété de Bruckner-Garg constitue alors une description de tous les niveaux horizontaux d'une fonction.

Définition 3.5.1. On dit que $f \in C([0,1])$ *a la propriété de Bruckner-Garg* si ses niveaux horizontaux sont décrits de la manière suivante : il existe un sous-ensemble dense et dénombrable D_f de $]\min f, \max f[$ tel que

(1) $f^{-1}(y)$ [6] est un singleton si $y \in \{\min f, \max f\}$,

(2) $f^{-1}(y)$ est un ensemble parfait, c'est-à-dire un ensemble fermé qui ne contient aucun point isolé, si $y \in]\min f, \max f[\setminus D_f$,

(3) $f^{-1}(y)$ est l'union d'un ensemble parfait non-vide P et d'un point isolé n'appartenant pas à P si $y \in D_f$.

En se fondant sur le lemme ci-dessous, Bruckner et Garg ont donc démontré que, au sens de Baire, presque toute fonction continue a la propriété de Bruckner-Garg ([36]).

Lemme 3.5.2. *L'ensemble des fonctions continues dont tout niveau horizontal contient au plus un extremum local est résiduel dans $C([0,1])$.*

Démonstration. Soit $\widetilde{A}$ l'ensemble des fonctions injectives sur leurs extrema locaux. Notons $\mathcal{I}$ la collection des sous-intervalles de $[0,1]$ fermés, à extrémités rationnelles et non-réduits à un singleton. Pour tout $I, J \in \mathcal{I}$, on pose

$$A_{I,J} = \left\{ f \in C([0,1]) : \inf_I f, \sup_I f \notin \left\{ \inf_J f, \sup_J f \right\} \right\}.$$

Soit alors

$$A = \bigcap_{I,J \in \mathcal{I},\, I \cap J = \emptyset} A_{I,J}.$$

Puisqu'il s'agit d'une intersection dénombrable, il nous suffit de montrer que A est inclus dans $\widetilde{A}$ et que chaque $A_{I,J}$ est résiduel pour pouvoir conclure.

Soit $f \in A$ quelconque. Si, contrairement à notre affirmation, f n'appartient pas à $\widetilde{A}$, alors il existe $y \in \mathbb{R}$ et deux points distincts x_1, x_2 de $f^{-1}(y)$ qui sont des extrema locaux de f. Supposons sans perte de généralité qu'il s'agit de maxima locaux. Dans ce cas, on peut trouver deux intervalles disjoints $I, J \in \mathcal{I}$ tels que $\sup_{x \in I} f(x) = f(x_1) = y$ et $\sup_{x \in J} f(x) = f(x_2) = y$, ce qui contredit $f \in A_{I,J}$.

6. Pour simplifier les écritures, nous utilisons dans cette section la notation $f^{-1}(y)$ en lieu et place de $f^{-1}(\{y\})$ pour désigner la préimage de y.

Fixons à présent deux intervalles disjoints $I, J \in \mathcal{I}$. On note

$$E_1 = E_{\sup,\sup} = \left\{ f \in C([0,1]) : \sup_I f \neq \sup_J f \right\}$$

puis on définit $E_2 = E_{\sup,\inf}$, $E_3 = E_{\inf,\sup}$ et $E_4 = E_{\inf,\inf}$ de manière analogue. Clairement, $A_{I,J} = \bigcap_{i=1}^4 E_i$. De plus, si $f \in E_1$, $\alpha = \sup_I f$ et $\beta = \sup_J f$, alors $\alpha \neq \beta$ et on peut supposer $\varepsilon = \beta - \alpha > 0$. Ainsi, $b(f, \frac{\varepsilon}{2}) \subseteq E_1$ car pour tout $g \in b(f, \frac{\varepsilon}{2})$, on a

$$\sup_I g = \sup_I (g - f + f) < \frac{\varepsilon}{2} + \sup_I f = \sup_J f - \frac{\varepsilon}{2} = \sup_J (f - g + g) - \frac{\varepsilon}{2} < \sup_J g.$$

Cela montre que E_1 est ouvert. Afin qu'il soit dense, pour tout $f \in C([0,1])$ et tout $\varepsilon > 0$, on doit pouvoir définir $g \in E_1$ tel que $\|f - g\| < \varepsilon$.[7] Si $f \in E_1$, on pose trivialement $g = f$. Sinon, $\sup_I f = \sup_J f$ et on définit g comme suit : on sélectionne d'abord $x \in I$ et $\eta > 0$ de sorte qu'ils satisfassent $f(x) = \sup_I f$, $]x - \eta, x + \eta[\cap J = \emptyset$, $]x - \eta, x + \eta[\subseteq]0, 1[$ si $x \notin \{0, 1\}$ et $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{4}$ pour tout $y \in [x - \eta, x + \eta] \cap [0, 1]$, puis on pose $g(x) = f(x) + \frac{\varepsilon}{4}$, $g = f$ sur $[0, 1] \setminus]x - \eta, x + \eta[$ et on impose que g soit linéaire sur chacun des intervalles $[0, 1] \cap]x, x + \eta[$ et $[0, 1] \cap]x - \eta, x[$. Il s'ensuit que E_1 est résiduel et la démonstration est identique pour E_2, E_3 et E_4. Par conséquent, $A_{I,J}$ est bien résiduel. □

Proposition 3.5.3. *L'ensemble des fonctions continues qui ont la propriété de Bruckner-Garg est résiduel dans $C([0,1])$.*

Démonstration. Notons A l'ensemble des fonctions continues f qui sont de type non-monotone et telles qu'aucun niveau horizontal de f ne contient plus d'un extremum local de f, c'est-à-dire l'intersection des deux ensembles résiduels donnés respectivement par la proposition 3.4.2 et le lemme 3.5.2. On prétend que toute fonction de A vérifie la propriété de Bruckner-Garg, ce qui terminerait la preuve. Fixons donc $f \in A$, $\alpha = \inf_{x \in [0,1]} f(x)$ et $\beta = \sup_{x \in [0,1]} f(x)$.

Nous aurons besoin des deux observations suivantes. Tout d'abord, comme f n'est en particulier monotone en aucun point de $[0, 1]$, pour tout $c \in \mathbb{R}$, un point $x \in f^{-1}(c)$ est un point isolé de $f^{-1}(c)$ si et seulement si x est un extremum local strict de f. En effet, un extremum local strict est un point isolé de son ensemble de niveau quelle que soit la fonction g considérée puisqu'il est possible de trouver un voisinage épointé de x sur lequel g prend des valeurs soit strictement inférieures, soit strictement supérieures à $g(x)$. Pour l'autre implication, si $\eta > 0$ est choisi de sorte que l'intersection $(]x - \eta, x + \eta[) \cap f^{-1}(c)$ se réduise au singleton $\{x\}$, on utilise la non-monotonie de f en x et le théorème des valeurs intermédiaires pour s'assurer de l'existence de $t \in]x - \eta, x[$ et $t' \in]x, x + \eta[$ tels que $f(t), f(t') > c$ ou $f(t), f(t') < c$. Par une nouvelle application du théorème des valeurs intermédiaires, on trouve $f > c$ ou $f < c$ sur $]x - \eta, x + \eta[\setminus \{x\}$. En outre, puisqu'on sait que chaque niveau horizontal de f contient au plus un extremum local de f, tout extremum local de f est un extremum local strict de f.

7. La densité de E_1 est simplement mentionnée dans [36]. La fonction g construite pour prouver cette propriété est inspirée de la fonction utilisée dans [70] pour établir la porosité du complémentaire de E_1. Nous réutiliserons d'ailleurs g dans le lemme 3.5.4.

Comme f est une fonction continue et nulle part monotone, l'ensemble D de ses extrema locaux est dense dans $[0,1]$. Par ailleurs, puisque tout point de D est un extremum local strict de f, D s'écrit $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} D_{\frac{1}{n}}$, avec D_δ défini par

$$D_\delta = \{x \in [0,1] : \pm f(y) < \pm f(x)\ \forall y \in [0,1] \text{ tel que } 0 < |x-y| \le \delta\}$$

et satisfaisant $\#\left(D_\delta \cap \left[\frac{k\delta}{2}, \frac{(k+1)\delta}{2}\right]\right) \le 1$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $\delta > 0$, et D est par conséquent dénombrable. Son image $f(D)$ est donc un ensemble dense dénombrable de $[\alpha,\beta]$. Aussi, puisque f atteint α et β, on a $\alpha,\beta \in f(D)$. Notons $D_f = f(D) \setminus \{\alpha,\beta\}$ et montrons que cet ensemble convient pour la définition 3.5.1. Si $c \in]\alpha,\beta[\setminus D_f$, le niveau $f^{-1}(c)$ ne contient aucun extremum local strict de f, donc $f^{-1}(c)$ n'admet pas de point isolé, i.e. $f^{-1}(c)$ est un ensemble parfait. De plus, puisqu'aucun niveau horizontal de f ne contient plus d'un extremum local de f, les niveaux $f^{-1}(\alpha)$ et $f^{-1}(\beta)$ sont clairement des singletons. Enfin, si $c \in D_f$, le niveau $f^{-1}(c)$ contient un et un seul extremum local x. Cet extremum étant strict, c'est l'unique point isolé de $f^{-1}(c)$. Par conséquent, $f^{-1}(c)\setminus\{x\}$ est un ensemble parfait qui est également non-vide par le théorème des valeurs intermédiaires. $\square$

Cela garantit en particulier l'existence de telles fonctions, dont aucun exemple n'était connu des auteurs à la publication de leur article.

Le lemme 3.5.2 a été généralisé par Gandini et Zamfirescu dans le cadre de la porosité ([70]).

Lemme 3.5.4. *L'ensemble des fonctions continues dont tout niveau horizontal contient au plus un extremum local est de complémentaire σ-poreux dans $C([0,1])$.*

Démonstration. En reprenant le raisonnement et les notations de la démonstration 3.5.2, il suffit de montrer que $C([0,1]) \setminus E_1$ est σ-poreux. Soient donc $f \in C([0,1]) \setminus E_1$ et $R > 0$. Dans ce cas, il existe $x \in I$ tel que $f(x) = \sup_I f = \sup_J f$ et nous avons construit dans la démonstration 3.5.2 une fonction $g \in C([0,1])$ telle que $\|f-g\| < R$. Rappelons deux propriétés de g dont nous aurons besoin dans la suite : $g = f$ sur J et $g(x) = f(x) + \frac{R}{4}$. Nous aimerions vérifier l'inclusion

$$b\left(g, \frac{R}{8}\right) \subseteq b(f, 2R) \cap E_1,$$

puisqu'elle assurerait $\gamma(f, 2R, C([0,1]) \setminus E_1) \ge \frac{R}{8}$ et donc $p(f, C([0,1]) \setminus E_1) \ge \frac{1}{16} > 0$. On considère par conséquent $h \in b(g, \frac{R}{8})$. Clairement,

$$\|f-h\| \le \|f-g\| + \|g-h\| < R + \frac{R}{8} < 2R.$$

De plus, $h \in E_1$ car

$$\sup_I h \ge h(x) > g(x) - \frac{R}{8} = f(x) + \frac{R}{8} > \sup_J f + \|h-g\| \ge \sup_J g + \sup_J (h-g) = \sup_J h.$$

$\square$

Puisque le caractère résiduel de l'ensemble des fonctions ayant la proprité de Bruckner-Garg (proposition 3.5.3) repose uniquement sur la connaissance que l'ensemble des fonctions de type non-monotone et l'ensemble des fonctions dont les niveaux horizontaux ne contiennent jamais plus d'un extremum local sont tous deux résiduels, le résultat homologue pour la porosité découle directement des proposition 3.4.3 et lemme 3.5.4.

Proposition 3.5.5. *L'ensemble des fonctions continues qui ont la propriété de Bruckner-Garg est de complémentaire σ-poreux dans $C([0,1])$.*

En revanche, nous constaterons que ni ce résultat ni son contraire n'est vrai au sens de la prévalence ([18, 19]). La non-prévalence est d'ores et déjà prévisible puisque la *grande taille* de l'ensemble des fonctions de type non-monotone, qui constitue l'un des deux fondements de la preuve de la généricité des fonctions ayant la propriété de Bruckner-Garg, n'est avérée qu'au sens de la *grandeur topologique*. On conserve cependant le second argument central de cette démonstration, c'est-à-dire l'équivalent des lemmes 3.5.2 et 3.5.4, ce qui nous servira à justifier la non-timidité.

Lemme 3.5.6. *L'ensemble des fonctions continues dont tout niveau horizontal contient au plus un extremum local est prévalent dans $C([0,1])$.*

Démonstration. En suivant le raisonnement et les notations du lemme 3.5.2, il suffit de montrer que chaque $A_{I,J}$ est prévalent pour que la conclusion suive. Fixons donc deux intervalles $I = [a, b]$ et $J = [c, d]$ de $\mathcal{I}$ avec $a < b < c < d$. Comme $A_{I,J}$ est une intersection finie d'ouverts, $C([0,1]) \setminus A_{I,J}$ est fermé. Pour tout $u \in [0,1]$, définissons la fonction continue $g_u : [0,1] \to [0,1]$ comme suit : $g_u(x) = 0$ pour tout $x \in [0,b]$, $g_u(x) = u$ pour tout $x \in [c,1]$ et g_u est linéaire sur l'intervalle $x \in [b,c]$. Posons ensuite

$$\phi : [0,1] \to C([0,1]) : u \mapsto g_u.$$

Par continuité de l'application ϕ, on peut enfin considérer la mesure de probabilité borélienne $\mu = \mathcal{L} \circ \phi^{-1}$ sur $C([0,1])$. Notons que $\phi([0,1])$ est un compact de $C([0,1])$ tel que

$$\mu(\phi([0,1])) = 1 = \mu(C([0,1])),$$

ce que la remarque 1.3.8 affirme être une condition suffisante pour que le support de μ soit un compact inclus dans $\{g_u : u \in [0,1]\}$. Par conséquent, pour tout $f \in C([0,1])$, $(C([0,1]) \setminus A_{I,J} + f) \cap \operatorname{supp}(\mu)$ contient au plus quatre éléments et

$$\mu(C([0,1]) \setminus A_{I,J} + f) = \mathcal{L}\left(\phi^{-1}((C([0,1]) \setminus A_{I,J} + f) \cap \operatorname{supp}(\mu))\right) = 0$$

par injectivité de ϕ. □

Nous aurons besoin d'un autre résultat intermédiaire qui s'appuie sur les deux lemmes énoncés ci-dessous (pour les preuves, consulter les lemme 5.1 et théorème 5.2 de [19]).

Lemme 3.5.7. *L'ensemble*

$$\{f \in C([0,1]) : f^{-1}(0) \text{ est un singleton}\}$$

est un borélien de $C([0,1])$.

Lemme 3.5.8. *Soit μ une mesure de probabilité borélienne sur $C([0,1])$. Il existe une fonction $g \in C([0,1])$ telle que*

$$\mu(\{f \in C([0,1]) : (f-g)^{-1}(0) \text{ est un singleton}\}) > 0.$$

En particulier,

$$\{f \in C([0,1]) : f^{-1}(0) \text{ est un singleton}\}$$

n'est pas timide.

Théorème 3.5.9. *L'ensemble*

$$\{f \in C([0,1]) : \exists C \subseteq \mathbb{R} \text{ tel que } \mathcal{L}(C) > 0 \text{ et } f^{-1}(y) \text{ est un singleton } \forall y \in C\}$$

est un borélien qui n'est pas timide.

Démonstration. Notons

$$A = \{f \in C([0,1]) : f^{-1}(0) \text{ est un singleton}\},$$

S le sous-espace vectoriel de $C([0,1])$ constitué des fonctions constantes, φ l'isomorphisme $\varphi : \mathbb{R} \to S : \alpha \mapsto \alpha$ et

$$B = \{f \in C([0,1]) : \mathcal{L}(\{y \in \mathbb{R} : f^{-1}(y) \text{ est un singleton}\}) > 0\}.$$

On peut réécrire

$$\begin{aligned} B &= \{f \in C([0,1]) : \mathcal{L}(\{y \in \mathbb{R} : (y-f)^{-1}(0) \text{ est un singleton}\}) > 0\} \\ &= \{f \in C([0,1]) : \mathcal{L}(\{y \in \mathbb{R} : y - f \in A\}) > 0\} \\ &= \{f \in C([0,1]) : \mathcal{L}_S(A+f) > 0\}. \end{aligned}$$

Puisque A est borélien par le lemme 3.5.7, l'application $f \in C([0,1]) \mapsto \mathcal{L}_S(A+f)$ est Borel-mesurable (lemme 6.28 de [25]) et B est borélien. Supposons que B soit timide. Dans ce cas, le lemme 1.3.15 assure l'existence d'une mesure de probabilité borélienne μ à support compact sur $C([0,1])$ telle que $\mu(B-g) = 0$ pour tout $g \in C([0,1])$. On en tire

$$\mu(\{f \in C([0,1]) : \mathcal{L}_S(A+f+g) > 0\}) = \mu(B-g) = 0$$

pour tout $g \in C([0,1])$. Par le théorème de Fubini, on a alors

$$(\mu * \mathcal{L}_S)(A+g) = \int_{C([0,1])} \mathcal{L}_S(A+f+g)\, d\mu(f) = 0.$$

Ainsi, $\mu * \mathcal{L}_S$ est une mesure transverse à A (en utilisant la démonstration 1.3.21 pour obtenir la condition (1)), ce qui contredit le lemme 3.5.8. $\square$

Proposition 3.5.10. *L'ensemble des fonctions continues qui ont la propriété de Bruckner-Garg n'est ni timide ni prévalent dans $C([0,1])$.*

Démonstration. Notons A l'ensemble des fonctions qui ont la propriété de Bruckner-Garg. Si B désigne le borélien du théorème 3.5.9, on sait que $C([0,1])\setminus B$ n'est pas prévalent. Par suite, aucun de ses sous-ensembles ne l'est. Or toute fonction f satisfaisant la propriété de Bruckner-Garg est telle que

$$\{y \in [0,1] : f^{-1}(y) \text{ est un singleton}\}$$

est fini et donc de mesure de Lebesgue nulle. Cela prouve que A est inclus dans $C([0,1])\setminus B$ et établit la non-prévalence de A.

Pour montrer que A n'est pas non plus timide, on utilise le même schéma qu'aux propositions 3.5.3 et 3.5.5. Ainsi, on sait que A contient $B \cap C$, où

$$B = \{f \in C([0,1]) : f \text{ est de type non-monotone}\}$$

et

$$C = \{f \in C([0,1]) : f \text{ est injectif sur ses extrema locaux}\}.$$

Comme B n'est pas timide par la proposition 3.4.6 et C est prévalent par le lemme 3.5.6, $B \cap C$ n'est pas timide, A non plus et la preuve est complète. $\square$

3.6 Domaine de dérivabilité des fonctions convexes et Lipschitziennes

Dans cette section, nous allons étudier la dérivabilité des fonctions définies sur un espace de Banach réel $(X, \|\cdot\|)$, à valeurs réelles et convexes ou Lipschitziennes. Rappelons d'abord quelques définitions. [8]

Définition 3.6.1. Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est dite

- *Lipschitzienne* s'il existe une constante positive C telle que

  $$|f(x) - f(y)| \leq C \|x - y\|$$

  pour tous $x, y \in X$,
- *localement Lipschitzienne* si tout point de X admet un voisinage sur lequel la fonction f est Lipschitzienne,
- *convexe* si pour tout $t \in [0,1]$ et tous $x, y \in X$, on a

  $$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Remarque 3.6.2. Toute fonction $f : X \to \mathbb{R}$ continue et convexe est localement Lipschitzienne (proposition 4.6 de [25]).

8. À la définition 3.3.10, nous avions défini une condition de Lipschitz ponctuelle, tandis que nous considérons ici une version uniforme.

Contrairement à la section 3.3 où l'on a obtenu des informations sur l'ensemble des fonctions qui admettent au moins un point de dérivabilité, nous nous concentrons ici sur l'ensemble des points de dérivabilité d'une fonction quelconque. Nous allons pour cela considérer deux notions de dérivabilité, la première étant celle de *Gâteaux* qui généralise le concept de dérivée directionnelle.

Définition 3.6.3. Une application $f : X \to \mathbb{R}$ est *Gâteaux-dérivable* en $x \in X$ si pour toute direction $d \in X$, la limite

$$T_x(d) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+hd) - f(x)}{h} \tag{3.18}$$

existe et est finie, et si l'application $d \mapsto T_x(d)$ appartient au dual topologique de X, auquel cas elle est appelée la *dérivée de Gâteaux* de f en x.

Il existe une notion de dérivabilité qui renforce la définition 3.6.3 en requérant en outre que la limite (3.18) existe uniformément pour d dans la boule unité de X. Dans ce cas, on parle de dérivabilité au sens de *Fréchet*.

Définition 3.6.4. Une application $f : X \to \mathbb{R}$ est *Fréchet-dérivable* en $x \in X$ s'il existe un opérateur $T_x \in X^*$ pour lequel

$$f(x+u) = f(x) + T_x(u) + o(\|u\|)$$

quand $\|u\| \to 0$. Dans ce cas, l'application T_x est appelée la *dérivée de Fréchet* de f en x.

Notons que si X est de dimension finie et si $f : X \to \mathbb{R}$ est une fonction Lipschitzienne, alors tout point de Gâteaux-dérivabilité de f est un point de Fréchet-dérivabilité et les deux notions coïncident (proposition 4.3 de [25]). Rappelons également le *théorème de Rademacher* (théorèmes 3.1.6 de [63], 9.1.2 de [31] ou encore 7.3 de [115]), qui rend naturelle l'implication de fonctions Lipschitziennes dans les questions de dérivabilité presque sûre.

Théorème 3.6.5. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une application Lipschitzienne, alors f est différentiable pour Lebesgue-presque tout point de $\mathbb{R}^n$.*

Une seconde raison de se restreindre à des fonctions Lipschitziennes est citée dans [25] (proposition 6.45) : si $f : X \to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que

$$\lim_{h\to 0} \left| \frac{f(x+hd) - f(x)}{h} \right| < +\infty$$

pour tout (x, d) dans un sous-ensemble résiduel de $X \times X$, alors la restriction de f à une certaine boule de X est Lipschitzienne.

Cela étant, puisque Fréchet-dérivabilité implique Gâteaux-dérivabilité et porosité implique maigreur, le résultat de généricité topologique le plus fort que nous pourrions obtenir est la σ-porosité de l'ensemble des points de Fréchet-dérivabilité. C'est l'objet de la proposition qui suit ([133], voir aussi [25]).

Proposition 3.6.6. *Si X^* est séparable et si $f : X \to \mathbb{R}$ est une fonction continue convexe sur X, alors l'ensemble des points de X en lesquels f n'est pas Fréchet-dérivable est σ-poreux dans X.*

La preuve fait intervenir la notion de *sous-différentielle* d'une fonction $f : X \to \mathbb{R}$: pour tout $x \in X$, on définit $\partial_f x$ comme l'ensemble des fonctionnelles $T \in X^*$ telles que

$$f(x+h) - f(x) \geq T(h)$$

pour tout $h \in X$. Dans [129] (proposition 3.25), il est montré que pour toute fonction f convexe et continue et tout $x \in X$, $\partial_f x$ est non-vide et inclus dans $\overline{b_{X^*}(0, C)}$, où C est la constante de Lipschitz locale de f au voisinage de x.

Démonstration. Notons A l'ensemble des points en lesquels f n'est pas Fréchet-dérivable. Pour tout $x \in A$, on choisit $p_x \in \partial_f x$, i.e. $p_x \in X^*$ satisfaisant $f(x+h) - f(x) \geq p_x(h)$ pour tout $h \in X$, ainsi qu'un naturel non-nul m_x tel que

$$\limsup_{\|h\| \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - p_x(h)}{\|h\|} > \frac{1}{m_x}.$$

Posons $A_m = \{x \in A : m_x = m\}$ pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. Puisque X^* est séparable, on peut en considérer une partie dense et dénombrable $(p^{(k)})_{k \in \mathbb{N}_0}$. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$ et tout $x \in A_m$, il existe $k_x \in \mathbb{N}_0$ tel que $\left\|p_x - p^{(k_x)}\right\|_{\mathrm{op}} < \frac{1}{12m}$. Si $A_{m,k} = \{x \in A_m : k_x = k\}$ pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, alors $A_m = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} A_{m,k}$ et

$$\|p_x - p_y\|_{\mathrm{op}} \leq \left\|p_x - p^{(k)}\right\|_{\mathrm{op}} + \left\|p^{(k)} - p_y\right\|_{\mathrm{op}} < \frac{1}{6m}$$

pour tous $x, y \in A_{m,k}$. Évidemment, $A = \bigcup_{m,k \in \mathbb{N}_0} A_{m,k}$ et il est suffisant de montrer que chaque $A_{m,k}$ est poreux pour obtenir la conclusion.

Fixons donc $m, k \in \mathbb{N}_0$ et $x \in A_{m,k}$. Puisque f est localement Lipschitzienne, on peut trouver $R > 0$ et $C > \frac{1}{m}$ tels que

$$|f(y) - f(z)| \leq C \|y - z\|$$

pour tous $y, z \in b(x, R)$. Alors $\|p_x\|_{\mathrm{op}} \leq C$. De plus, pour tout $r > 0$, il existe $h \in X$ tel que

$$f(x+h) - f(x) > \frac{\|h\|}{m} + p_x(h)$$

et $\|h\| < \min(r, \frac{R}{2})$. Pour montrer que $A_{m,k}$ est poreux en x, il suffit de vérifier

$$b\left(x+h, \frac{\|h\|}{3Cm}\right) \subseteq b\left(x, \frac{4\|h\|}{3}\right) \setminus A_{m,k}$$

puisque, dans ce cas, la définition 1.2.8 est satisfaite avec $\rho = \frac{1}{4Cm} > 0$. Remarquons tout d'abord que pour tout $y \in b\left(x+h, \frac{\|h\|}{3Cm}\right)$, on a

$$\|y - x\| \leq \|y - (x+h)\| + \|h\| < \|h\| \cdot \left(\frac{1}{3Cm} + 1\right) < \frac{4\|h\|}{3}.$$

Supposons ensuite que, contrairement à ce que l'on souhaite montrer, il est possible de trouver un point y dans l'intersection $b\left(x+h, \frac{\|h\|}{3Cm}\right) \cap A_{m,k}$. Par définition de p_y, on a

$$f(x) - f(y) \geq p_y(x-y).$$

On en tire

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(y) &> p_x(h) + \frac{\|h\|}{m} + p_y(x-y) \\ &= p_x((x+h)-y) + (p_y - p_x)(x-y) + \frac{\|h\|}{m}. \end{aligned}$$

Puisque $\|(x+h)-y\| < \frac{\|h\|}{3Cm}$ et $\|x-y\| < 2\|h\|$, on obtient

$$|p_x((x+h)-y)| < \frac{\|h\|}{3m} \quad \text{et} \quad |(p_y - p_x)(x-y)| < \frac{\|h\|}{3m}$$

et donc

$$f(x+h) - f(y) > \frac{\|h\|}{3m}.$$

D'un autre côté, $x+h \in b(x,R)$ et $y \in b(x,R)$ vu

$$\|(x+h)-x\| < \frac{R}{2} \quad \text{et} \quad \|y-x\| < \frac{4\|h\|}{3} < \frac{2R}{3},$$

ce qui implique

$$f(x+h) - f(y) \leq C\|(x+h)-y\| < \frac{\|h\|}{3m},$$

une contradiction. □

Pour la prévalence, on ne peut établir de résultat de généricité que pour la dérivabilité faible au sens de Gâteaux ([3]).

Proposition 3.6.7. *Si X est séparable et si $f : X \to \mathbb{R}$ est une fonction Lipschitzienne, alors l'ensemble des points de X en lesquels f n'est pas Gâteaux-dérivable est timide dans X.*

Démonstration. Désignons par A l'ensemble des points de X en lesquels f est Gâteaux-dérivable. Fixons ensuite un sous-ensemble dense dénombrable $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments distincts de X et pour toute paire (i,j) de naturels distincts, posons $z_{ij} = x_i - x_j$. Enfin, soit $\mathcal{J}$ la collection de tous les sous-ensembles finis de $\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 : i \neq j\}$ et, pour tout $J \in \mathcal{J}$, soit V_J le sous-espace vectoriel de X engendré par $\{z_{ij} : (i,j) \in J\}$.

Pour tout $J \in \mathcal{J}$, étudions l'ensemble des points en lesquels f est Gâteaux-dérivable dans les directions de V_J, c'est-à-dire

$$Y_J = \{y \in X : f|_{V_J+y} \text{ est Gâteaux-dérivable en } y\}.$$

On sait que Y_J est un borélien de X et on montre facilement que V_J en est une sonde. En effet, pour tout $y \in X$, en considérant l'isomorphisme

$$\varphi_J : \mathbb{R}^{\#J} \to V_J : (\lambda_{ij})_{(i,j)\in J} \mapsto \sum_{(i,j)\in J} \lambda_{ij} z_{ij},$$

la mesure $\mathcal{L}_{V_J}(X \setminus Y_J - y)$ se réécrit

$$\mathcal{L}\left(\left\{(\lambda_{ij})_{(i,j)\in J} : f|_{V_J+y+\sum_{(i,j)\in J}\lambda_{ij}z_{ij}} \text{ n'est pas Gâteaux-dérivable en } y + \sum_{(i,j)\in J} \lambda_{ij} z_{ij}\right\}\right)$$

et vaut donc 0 par le théorème de Rademacher 3.6.5. Ainsi, Y_J est prévalent dans X.

Notons à présent $Y_0 = \bigcap_{J\in\mathcal{J}} Y_J$. Puisqu'il s'agit d'une intersection dénombrable d'ensembles prévalents dans X, Y_0 est lui-même prévalent dans X. Pour compléter la preuve, il suffit de montrer que f est Gâteaux-dérivable en tout point de Y_0. On fixe donc $y \in Y_0$ et pour tout $J \in \mathcal{J}$, on désigne par φ_J la dérivée de Gâteaux de $f|_{V_J+y}$ en y, c'est-à-dire la fonctionnelle linéaire continue définie par

$$\varphi_J : V_J \to \mathbb{R} : d \mapsto \lim_{h\to 0} \frac{f(y+hd) - f(y)}{h}.$$

Notons également C la constante de Lipschitz de f et remarquons que la norme de φ_J dans V_J^* est majorée par C puisque

$$|\varphi_J(d)| \leq \lim_{h\to 0} \frac{C\,\|hd\|}{|h|} = C\,\|d\|$$

pour tout $d \in V_J$. Enfin, posons

$$Z_J = \{\psi \in X^* : \psi|_{V_J} = \varphi_J, \|\psi\|_{\mathrm{op}} \leq C\}$$

pour tout $J \in \mathcal{J}$. Le théorème de Hahn-Banach garantit que Z_J est non-vide pour tout $J \in \mathcal{J}$ et le théorème d'Alaoglu assure que $\{\psi \in X^* : \|\psi\|_{\mathrm{op}} \leq C\}$ muni de la topologie faible-$*$ est un espace métrique compact (théorèmes 3.15 et 3.16 de [138]). Par ailleurs, chaque Z_J est fermé dans l'espace $\{\psi \in X^* : \|\psi\|_{\mathrm{op}} \leq C\}$ et, puisque la dérivée de Gâteaux est unique quand elle existe, on sait également que Z_J est inclus dans $Z_{J'}$ si $J \subseteq J'$. Par conséquent, $\bigcap_{J\in\mathcal{J}} Z_J \neq \emptyset$ et on peut sélectionner un élément φ dans cette intersection. Montrons que φ est une dérivée de Gâteaux de f en y. Fixons $\delta > 0$ et une direction $d \in X$. Puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans X, on peut choisir deux indices distincts $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $\|x_i - (y+d)\| < \frac{\delta}{4C+2}$ et $\|x_j - y\| < \frac{\delta}{4C+2}$, d'où

$$\|z_{ij} - d\| \leq \|x_i - (y+d)\| + \|y - x_j\| < \frac{\delta}{2C+1}.$$

En utilisant le fait que f est Lipschitzienne avec constante C et que φ est linéaire de norme opérateur majorée par C, pour tout $h \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}
& |f(y+hd) - f(y) - \varphi(hd)| \\
\leq\ & |f(y+hd) - f(y+hz_{ij})| + |f(y+hz_{ij}) - f(y) - \varphi(hz_{ij})| + |\varphi(hz_{ij}) - \varphi(hd)| \\
\leq\ & C\,|h| \cdot \|d - z_{ij}\| + |f(y+hz_{ij}) - f(y) - \varphi(hz_{ij})| + C\,|h| \cdot \|d - z_{ij}\| \\
\leq\ & \frac{2C\,|h|\,\delta}{2C+1} + |f(y+hz_{ij}) - f(y) - h\varphi(z_{ij})|.
\end{aligned}$$

Pour $J \in \mathcal{J}$ contenant (i, j), notre construction garantit que la restriction de φ à V_J est la dérivée de Gâteaux de $f|_{V_J+y}$, donc le deuxième terme sera majoré par $\frac{|h|\delta}{2C+1}$ si $|h|$ est suffisamment petit. On a finalement

$$\left|\frac{f(y+hd)-f(y)}{h}-\varphi(d)\right| \leq \frac{2C\delta}{2C+1}+\frac{\delta}{2C+1}=\delta$$

si $|h|$ est suffisamment petit. Ainsi, φ est la dérivée de Gâteaux de f en y comme attendu. □

Justifions à présent qu'un résultat de généricité similaire à la proposition 3.6.7 ne puisse pas être obtenu lorsque *Fréchet-dérivable* remplace *Gâteaux-dérivable*. Selon les propriétés additionnelles de l'espace de Banach séparable $(X, \|\cdot\|)$, nous pouvons exhiber divers contre-exemples.

(1) Dans le cas où X^* n'est pas séparable, il est possible de trouver une norme équivalente à $\|\cdot\|$ qui n'est nulle part Fréchet-dérivable (proposition 4.12 de [25]). Or une telle norme est évidemment convexe et Lipschitzienne.

(2) Si X est non-réflexif, nous avons mentionné dans la remarque 2.1.21 l'existence d'un sous-ensemble C de X fermé convexe d'intérieur vide et non-timide. La fonction *distance à* C est alors continue et convexe mais n'est Fréchet-dérivable en aucun point de C ([133]).

(3) L'espace ℓ^2 est un exemple d'espace de Banach réflexif dont le dual topologique est séparable et pour lequel il est possible de définir une application continue et convexe $f : \ell^2 \to \mathbb{R}$ dont l'ensemble des points de Fréchet-dérivabilité est timide, et même Aronszajn-nul (exemple 6.46 de [25]).

Attardons-nous un instant sur le point (2)

Proposition 3.6.8. *Soit C un sous-ensemble de X non-vide fermé convexe et d'intérieur vide. La fonction*

$$f : X \to \mathbb{R} : x \mapsto d(x, C) = \inf\{\|x-y\| : y \in C\}$$

est convexe et continue mais n'est Fréchet-dérivable en aucun point de C.

Démonstration. La continuité de f est claire. Pour établir la convexité de f, il suffit de remarquer que pour tous $x_1, x_2 \in X$ et tout $t \in [0, 1]$, il existe deux points y_1 et y_2 de C tels que $f(x_1) = \|x_1 - y_1\|$ et $f(x_2) = \|x_2 - y_2\|$, d'où $ty_1 + (1-t)y_2 \in C$ et

$$\begin{aligned} f(tx_1+(1-t)x_2) &\leq \|tx_1+(1-t)x_2-(ty_1+(1-t)y_2)\| \\ &\leq t\,\|x_1-y_1\|+(1-t)\,\|x_2-y_2\| \\ &= tf(x_1)+(1-t)f(x_2). \end{aligned}$$

Étudions à présent l'ensemble des points de Fréchet-dérivabilité de f. Pour commencer, remarquons que si A est un ensemble non-vide de X et si $x \in A$ est tel que A est poreux en x, alors la fonction distance associée à A n'est pas Fréchet-dérivable en x.[9] En effet, si

9. Le raisonnement que nous suivons est inspiré d'une remarque de [107].

$y \mapsto d(y, A)$ était Fréchet-dérivable en x, alors nécessairement sa dérivée devrait être nulle puisque $d(x + hd, A) - d(x, A) \geq 0$ pour tout $d \in X$ et tout $h \in \mathbb{R}$. On veut donc montrer

$$\limsup_{h\to 0} \frac{|d(x+h, A) - d(x, A)|}{\|h\|} > 0.$$

Par la définition 1.2.8, il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $R_\varepsilon \in]0, \varepsilon]$ et $z_\varepsilon \in X$ tels que

$$b(z_\varepsilon, \rho R_\varepsilon) \subseteq b(x, R_\varepsilon) \setminus A.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, soit $h_\varepsilon = z_\varepsilon - x$. Alors $\|h_\varepsilon\| \leq R_\varepsilon \leq \varepsilon$ et $d(x + h_\varepsilon, A) \geq \rho R_\varepsilon$. Ainsi,

$$\limsup_{h\to 0} \frac{|d(x+h, A) - d(x, A)|}{\|h\|} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \sup_{h\in X,\, \|h\|\leq\varepsilon} \frac{d(x+h, A)}{\|h\|} \geq \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\rho R_\varepsilon}{\|h_\varepsilon\|} \geq \rho > 0.$$

Si l'on parvient à montrer que C est poreux, la conclusion découlera du raisonnement précédent. Soient donc $x \in C$ et $R > 0$ fixés. Choisissons $y \in b(x, \frac{R}{3}) \setminus C$. Par l'un des théorèmes de séparation de Hahn-Banach (corollaire 34.2 de [26]), il existe $p \in X^*$ tel que $\|p\|_{\mathrm{op}} = 1$ et $p(c) < p(y)$ pour tout $c \in C$. Sélectionnons $v \in X$ tel que $\|v\| = 1$ et $p(v) > \frac{1}{2}$. Posons enfin $z = y + \frac{Rv}{3}$. Pour montrer que C est poreux en x, il est suffisant de montrer l'inclusion

$$b\left(z, \frac{R}{6}\right) \subseteq b(x, R) \setminus C,$$

car on a alors $p(x, C) \geq \frac{1}{6}$. Remarquons tout d'abord que pour tout $t \in b(z, \frac{R}{6})$, on a

$$\|t - x\| \leq \|t - z\| + \|z - y\| + \|y - x\| < \frac{R}{6} + \frac{R}{3} + \frac{R}{3} < R.$$

Ensuite, supposons au contraire qu'il existe $t \in b(z, \frac{R}{6}) \cap C$. Alors $p(t-y) < 0$ par construction de p, mais aussi

$$p(t - y) = p((z - y) + (t - z)) \geq p\left(\frac{Rv}{3}\right) - |p(t - z)| > \frac{R}{6} - \frac{R}{6} = 0,$$

une contradiction. □

3.7 Fonctions analytiques et Gevrey-dérivables

Dans cette section essentiellement basée sur l'article [22], on considère l'espace $C^\infty([0, 1])$ des fonctions *indéfiniment continûment dérivables sur* $[0, 1]$ (c'est-à-dire indéfiniment continûment dérivables sur $]0, 1[$ et telles que la dérivée à n'importe quel ordre peut être étendue continûment à $[0, 1]$) et on le munit de la suite de semi-normes $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par

$$p_k(f) = \max_{0\leq j\leq k} \sup_{x\in[0,1]} \left|f^{(j)}(x)\right|$$

pour tout $f \in C^\infty([0,1])$ ou, de manière équivalente, de la distance d définie par

$$d(f,g)=\sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k}\frac{p_k(f-g)}{1+p_k(f-g)}$$

pour tous $f,g \in C^\infty([0,1])$. Cet espace est un espace de Fréchet. Nous allons tout d'abord nous intéresser à l'*analycité* des fonctions indéfiniment dérivables.

Définition 3.7.1. Si x_0 est un point de $[0,1]$ et f une fonction de classe C^∞ sur un intervalle contenant x_0, la *série de Taylor* de f en x_0 est notée $T(f,x_0)$ et définie par

$$T(f,x_0)(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. On dit que f est *analytique* en x_0 si $T(f,x_0)$ converge vers f sur un voisinage ouvert de x_0. Dans le cas contraire, on dit que f *admet une singularité* en x_0. Une fonction qui admet une singularité en tout point d'un intervalle I est dite *nulle part analytique* sur I. Dans le cas où I est un intervalle fermé $[a,b]$, la convergence des séries de Taylor $T(f,a)$ et $T(f,b)$ est uniquement considérée sur la restriction à $[a,b]$.

Si f a une singularité en x_0, alors soit le rayon de convergence $r_f(x_0)$ de la série en x_0 est 0 (i.e. la série converge seulement en x_0), soit la série converge sur un voisinage de x_0 mais la limite ne représente pas f, aussi petit que soit le voisinage de x_0. Dans le premier cas, on dit que x_0 est une *singularité de Pringsheim* et dans le second que x_0 est une *singularité de Cauchy*.

Rappelons que le rayon de convergence de la série $T(f,x_0)$ en x_0 est donné par la formule

$$r_f(x_0)=\left(\limsup_{n\to+\infty}\left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\right|^{\frac{1}{n}}\right)^{-1}.$$

Notre but est de montrer que les fonctions nulle part analytiques sont génériques aussi bien au sens de Baire qu'au sens prévalent. Pour les catégories, nous allons même faire mieux puisque nous allons voir que les fonctions qui admettent une singularité de Pringsheim en tout point sont génériques ([45, 135]). Notons qu'il aurait été impossible de considérer les singularités de Cauchy plutôt que celles de Pringsheim dans ce résultat au vu de la caractérisation suivante due à Zahorski ([159]).

Proposition 3.7.2. *Soient A,B deux sous-ensembles de $[0,1]$. Il existe une fonction de $C^\infty([0,1])$ dont l'ensemble des singularités de Cauchy est A et l'ensemble des singularités de Pringsheim est B si et seulement si A est un F_σ maigre, B est un G_δ, $A\cup B$ est fermé et $A\cap B=\emptyset$.*

En effet, cette propriété permet en particulier d'affirmer que l'ensemble des singularités de Cauchy d'une fonction n'est jamais très *grand*.

Corollaire 3.7.3. *Il n'existe pas de fonction qui admette une singularité de Cauchy en tout point d'un intervalle.*

Passons aux résultats de généricité annoncés.

Proposition 3.7.4. *L'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur* $[0,1]$ *qui ont une singularité de Pringsheim en tout point de* $[0,1]$ *est résiduel dans* $C^\infty([0,1])$.

Démonstration. Notons A l'ensemble des fonctions de $C^\infty([0,1])$ qui ont une singularité de Pringsheim en tout point de $[0,1]$ et supposons que f est une fonction de $C^\infty([0,1]) \setminus A$. Il existe alors $x_0 \in [0,1]$ tel que $r_f(x_0) > 0$. La relation

$$\limsup_{n\to+\infty} \left| \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \right|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{r_f(x_0)}$$

assure que l'on peut trouver un naturel non-nul n_0 tel que

$$\left| \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \right|^{\frac{1}{n}} < \frac{2}{r_f(x_0)}$$

pour tout $n \geq n_0$. Posons

$$C = \max_{n\in\{1,\ldots,n_0-1\}} \left| \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \right|^{\frac{1}{n}}$$

et choisissons un naturel M satisfaisant $M \geq \max\left(C, \frac{2}{r_f(x_0)}\right)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on a

$$\left|f^{(n)}(x_0)\right| \leq M^n n!.$$

Par conséquent, si on définit

$$F(M) = \{f \in C^\infty([0,1]) : \exists x_0 \in [0,1] \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}_0, \left|f^{(n)}(x_0)\right| \leq M^n n!\}$$

pour tout $M \in \mathbb{N}_0$, on a

$$C^\infty([0,1]) \setminus \left(\bigcup_{M\in\mathbb{N}_0} F(M) \right) \subseteq A.$$

Il suffit donc pour conclure de montrer que chaque $F(M)$ est fermé et d'intérieur vide. On fixe par conséquent $M \in \mathbb{N}_0$.

Supposons d'abord que $(f_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ est une suite de $F(M)$ qui converge vers f dans $C^\infty([0,1])$. Alors il existe une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ de $[0,1]$ telle que

$$\left|f_k^{(n)}(x_k)\right| \leq M^n n!$$

pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ et tout $k \in \mathbb{N}_0$. Quitte à considérer une sous-suite, on peut supposer que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ converge vers x_0 dans $[0,1]$. Fixons à présent $n \in \mathbb{N}_0$ quelconque. On a

$$\begin{aligned} \left|f^{(n)}(x_0)\right| &\leq \left|f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_k)\right| + \left|f^{(n)}(x_k) - f_k^{(n)}(x_k)\right| + \left|f_k^{(n)}(x_k)\right| \\ &\leq \left|f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_k)\right| + p_n(f - f_k) + M^n n!. \end{aligned}$$

En passant à la limite pour k qui tend vers $+\infty$, les deux premiers termes tendent vers 0 respectivement par continuité de $f^{(n)}$ et par convergence de la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ vers f. Ainsi,

$$\left|f^{(n)}(x_0)\right| \leq M^n n!.$$

Comme n est quelconque, cela assure que f appartient à $F(M)$ et finalement que $F(M)$ est fermé comme nous l'espérions.

Fixons à présent $f \in F(M)$ et $\varepsilon > 0$. On aimerait construire une fonction g qui appartienne à l'ensemble $b_d(f,\varepsilon) \setminus F(M)$. Choisissons $N \in \mathbb{N}$ suffisamment grand pour avoir

$$\sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2},$$

ainsi qu'un polynôme p pour lequel $p_N(f-p) < \frac{\varepsilon}{8}$. Enfin, considérons $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ satisfaisant

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left|h^{(k)}(x)\right|}{k!} = +\infty$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, une telle fonction étant construite dans [45]. Dans ce cas, pour tout $\delta > 0$, la fonction h_δ définie par

$$h_\delta(x) = \frac{1}{C+1} \cdot h\left(\frac{x}{\delta}\right)$$

pour tout $x \in [0,1]$, où

$$C = \frac{8}{\varepsilon} \cdot \max_{0\leq k\leq N} \sup_{x\in\left[0,\frac{1}{\delta}\right]} \left(\frac{\left|h^{(k)}(x)\right|}{\delta^k}\right),$$

appartient à $C^\infty([0,1])$ et satisfait

$$\max_{0\leq k\leq N} \left|h_\delta^{(k)}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{8} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left|h_\delta^{(k)}(x)\right|}{k!} \cdot \delta^k = +\infty$$

pour tout $x \in [0,1]$. En effet, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $k \in \{0,\ldots,N\}$, on a

$$h_\delta^{(k)}(x) = \frac{1}{(C+1)\delta^k} \cdot h^{(k)}\left(\frac{x}{\delta}\right) \quad \text{et} \quad C \geq \frac{8}{\varepsilon\delta^k} \left|h^{(k)}\left(\frac{x}{\delta}\right)\right|,$$

d'où

$$\left|h_\delta^{(k)}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{8} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left|h_\delta^{(k)}(x)\right|}{k!} \cdot \delta^k = \frac{1}{C+1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left|h^{(k)}\left(\frac{x}{\delta}\right)\right|}{k!} = +\infty.$$

Posons $g = p + h_{\frac{1}{2M}}$. Puisque

$$d(f,g) \leq \sum_{k=0}^{N} \frac{p_k(f-g)}{2^k} + \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} < 2p_N(f-g) + \frac{\varepsilon}{2}$$

et
$$p_N(f-g) \leq p_N(f-p) + p_N\left(h_{\frac{1}{2M}}\right) < \frac{\varepsilon}{4},$$
nous avons d'une part $d(f,g) < \varepsilon$. D'autre part, les fonctions g et $h_{\frac{1}{2M}}$ étant égales à un polynôme près, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $g^{(k)}(x) = h^{(k)}_{\frac{1}{2M}}(x)$ pour tout $x \in [0,1]$ et tout $k \geq K$. Par conséquent,
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left|g^{(k)}(x)\right|}{k!} \cdot \frac{1}{(2M)^k} = +\infty$$
pour tout $x \in [0,1]$, ce qui implique encore $g \notin F(M)$. □

Corollaire 3.7.5. *L'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur* $[0,1]$ *qui sont nulle part analytiques est résiduel dans* $C^\infty([0,1])$.

Proposition 3.7.6. *L'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur* $[0,1]$ *qui sont nulle part analytiques est prévalent dans* $C^\infty([0,1])$.

Démonstration. Pour tout sous-intervalle fermé I de $[0,1]$, notons x_I le point milieu de I et $A(I,x_I)$ l'ensemble
$$A(I,x_I) = \{f \in C^\infty([0,1]) : T(f,x_I) \text{ converge vers } f \text{ sur } I\}.$$
Puisqu'une fonction qui est analytique en un point est analytique sur un voisinage de ce point et par densité des rationnels, l'ensemble des fonctions nulle part analytiques se réécrit
$$C^\infty([0,1]) \setminus \left(\bigcup_{I \in \mathcal{I}} A(I,x_I)\right),$$
où $\mathcal{I}$ désigne la famille des sous-intervalles fermés à extrémités rationnelles de $[0,1]$. Cette famille étant dénombrable, montrer que chaque $A(I,x_I)$ est timide suffit à déduire la prévalence de l'ensemble des fonctions nulle part analytiques. Or $A(I,x_I)$ est un sous-espace vectoriel propre de $C^\infty([0,1])$. Nous pouvons donc nous contenter d'établir qu'il est borélien et la conclusion découlera du corollaire 1.3.32.

Fixons donc $I \in \mathcal{I}$. Pour tous $n,j \in \mathbb{N}_0$ et tout $x \in I$, posons
$$F_{n,j}(x) = \left\{f \in C^\infty([0,1]) : |T_j(f,x_I)(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}\right\},$$
où
$$T_j(f,x_I)(x) = \sum_{k=0}^{j} \frac{f^{(k)}(x_I)}{k!}(x-x_I)^k.$$
Puisque la convergence de $T(f,x_I)$ sur I est équivalente à la convergence uniforme de cette même série sur I, on a
$$A(I,x_I) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{j \geq k} \bigcap_{x \in I} F_{n,j}(x).$$

Si l'on parvient à prouver que chaque $F_{n,j}(x)$ est fermé, alors $A(I,x_I)$ sera bien un borélien. Supposons pour cela que f est un élément du complémentaire de $F_{n,j}(x)$, avec $n,j\in\mathbb{N}_0$ et $x\in I$ fixés, et sélectionnons $\varepsilon>0$ satisfaisant

$$|T_j(f,x_I)(x)-f(x)|>\frac{1}{n}+\varepsilon.$$

Notons également $C=2\sum_{j=0}^{k}\frac{\mathcal{L}(I)^k}{k!}$. Dans ce cas, $b_{p_j}(f,\frac{\varepsilon}{C})\subseteq C^\infty([0,1])\setminus F_{n,j}(x)$. En effet, pour tout $g\in b_{p_j}(f,\frac{\varepsilon}{C})$, on a

$$\begin{aligned}|T_j(g,x_I)(x)-g(x)| &\geq -|T_j(f-g,x_I)(x)|+|T_j(f,x_I)(x)-f(x)|-|g(x)-f(x)|\\ &> -\sum_{k=0}^{j}\frac{\left|g^{(k)}(x_I)-f^{(k)}(x_I)\right|}{k!}\cdot|x-x_I|^k+\frac{1}{n}+\varepsilon-\frac{\varepsilon}{C}\\ &> -\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{n}+\varepsilon-\frac{\varepsilon}{2}\\ &=\frac{1}{n}\end{aligned}$$

comme attendu. □

Nous allons à présent renforcer les résultats 3.7.5 et 3.7.6 en remplaçant les fonctions analytiques par des fonctions plus générales, à savoir les fonctions de *type Gevrey*.

Définition 3.7.7. Pour un réel $s>0$ et un $x_0\in[0,1]$, une fonction $f\in C^\infty([0,1])$ est dite *Gevrey-dérivable d'ordre s en x_0* s'il existe un voisinage compact I de x_0 dans $[0,1]$ ainsi que des constantes C et h strictement positives tels que

$$\sup_{x\in I}\left|f^{(n)}(x)\right|\leq Ch^n(n!)^s$$

pour tout $n\in\mathbb{N}_0$. De manière usuelle, on dit qu'une fonction est *nulle part Gevrey-dérivable* sur $[0,1]$ si pour tout $x_0\in[0,1]$ et tout $s>0$, f n'est pas Gevrey-dérivable d'ordre s en x_0.

Nous pouvons immédiatement noter qu'une fonction qui est Gevrey-dérivable d'ordre s en x_0 est aussi Gevrey-dérivable de tout ordre $s'>s$ en x_0. Par ailleurs, la dérivabilité à l'ordre $s=1$ correspond à l'analycité. Plus précisément, une fonction est Gevrey-dérivable à l'ordre 1 en x_0 si et seulement si elle est analytique en x_0 (théorème 1 de [111]). Les classes de Gevrey sont donc des classes intermédiaires entre l'espace des fonctions indéfiniment continûment dérivables et l'espace des fonctions analytiques. Elles ont en fait été introduites dans le but de classifier les fonctions C^∞ selon leur proximité avec les fonctions analytiques et jouent un rôle particulièrement important en théorie des équations différentielles linéaires aux dérivées partielles.

Commençons par construire une fonction de $C^\infty(\mathbb{R})$ qui est nulle part Gevrey-dérivable sur $[0,1]$.

Lemme 3.7.8. *Soit $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres strictement positifs tels que*

$$\lambda_k \geq (k+1)^{(k+1)^2} \quad \text{et} \quad \lambda_{k+1} \geq 2\sum_{j=1}^{k} \lambda_j^{2+k-j}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$, et soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e^{i\lambda_k x},$$

avec $c_k = \lambda_k^{1-k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Cette fonction appartient à $C^\infty(\mathbb{R})$ mais n'est nulle part Gevrey-dérivable dans $[0,1]$.

Démonstration. Notons d'abord qu'une telle suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ peut effectivement être construite en procédant par récurrence. De plus, elle vérifie $\lambda_{k+1} \geq 2\lambda_k^2$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $\lambda_0 \geq 1$, ce qui implique qu'elle est strictement croissante et que tous ses termes sont minorés 1.

Montrons à présent que f est bien de classe C^∞. Pour tous $n, k \in \mathbb{N}$, on a

$$c_k\lambda_k^n = \lambda_k^{1+n-k} \quad \text{et} \quad (c_k e^{i\lambda_k \cdot})^{(n)} = c_k i^n \lambda_k^n e^{i\lambda_k \cdot} = i^n \lambda_k^{1+n-k} e^{i\lambda_k \cdot},$$

d'où

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|(c_k e^{i\lambda_k x})^{(n)}\right| = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{1+n-k} + \sum_{l=0}^{+\infty} \lambda_{1+n+l}^{-l} \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{1+n-k} + \sum_{l=0}^{+\infty} \lambda_{1+n}^{-l} < +\infty,$$

ce qui suffit. Vérifions ensuite que pour tout $s > 0$, tout $x \in [0,1]$ et tous $C, h > 0$ fixés, il existe $n \in \mathbb{N}_0$ tel que

$$\left|f^{(n)}(x)\right| > Ch^n(n!)^s.$$

Par ce qui précède, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (c_k e^{i\lambda_k x})^{(n)} = \sum_{k=1}^{+\infty} i^n \lambda_k^{1+n-k} e^{i\lambda_k x}.$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, il vient

$$\begin{aligned}
\left|f^{(n)}(x)\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n-1} i^n \lambda_k^{n+1-k} e^{i\lambda_k x} + i^n\lambda_n e^{i\lambda_n x} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} i^n \lambda_k^{n+1-k} e^{i\lambda_k x}\right| \\
&\geq \lambda_n - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^{n+1-k} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k^{n+1-k} \\
&\geq \lambda_n - \frac{\lambda_n}{2} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k^{n+1-k} \\
&\geq \lambda_{n-1}^2 - \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_j^j} \\
&\geq n^{2n^2} - e \\
&\geq \frac{1}{2} \cdot n^{2n^2}.
\end{aligned}$$

Or en prenant $n \in \mathbb{N}$ satisfaisant $n \geq \max(s, 2, h)$ et $\frac{1}{2} \cdot n^n > C$, on a

$$\frac{1}{2} \cdot n^{2n^2} = \frac{1}{2} \cdot n^{n^2}(n^n)^n \geq \frac{1}{2} \cdot n^n n^n (n^n)^s > Ch^n (n!)^s$$

et donc

$$\left|f^{(n)}(x)\right| > Ch^n (n!)^s.$$

□

Grâce à ce résultat auxiliaire, nous sommes désormais capables de prouver que l'ensemble des fonctions nulle part Gevrey-dérivables est *grand* au sens de Baire et de la prévalence.

Proposition 3.7.9. *L'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur* $[0, 1]$ *qui sont nulle part Gevrey-dérivables est prévalent dans* $C^\infty([0, 1])$.

Démonstration. Par définition, l'ensemble des fonctions de $C^\infty([0, 1])$ qui sont nulle part Gevrey-dérivables est le complémentaire de

$$\bigcup_{s \in \mathbb{N}_0} \bigcup_{I \in \mathcal{I}} A(s, I),$$

où $\mathcal{I}$ désigne la collection des sous-intervalles fermés de $[0, 1]$ à extrémités rationnelles distinctes et

$$A(s, I) = \left\{ f \in C^\infty([0, 1]) : \exists C, h > 0 \text{ tels que } \sup_{x \in I} \left|f^{(n)}(x)\right| \leq Ch^n (n!)^s \ \forall n \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Par le corollaire 1.3.32 et la stabilité des ensembles timides vis-à-vis des unions dénombrables, il nous suffit pour conclure de vérifier que, pour $s \in \mathbb{N}_0$ et $I \in \mathcal{I}$ fixés arbitrairement, $A(s, I)$ est un sous-espace vectoriel propre borélien de $C^\infty([0, 1])$. Or c'est direct de voir qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel et le lemme 3.7.8 assure que l'inclusion $A(s, I) \subseteq C^\infty([0, 1])$ est stricte. Enfin, on a

$$A(s, I) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}_0} \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} A(s, I, m, n),$$

où

$$A(s, I, m, n) = \left\{ f \in C^\infty([0, 1]) : \sup_{x \in I} \left|f^{(n)}(x)\right| \leq m^{n+1} (n!)^s \right\}$$

est fermé dans $C^\infty([0, 1])$ pour tous $m, n \in \mathbb{N}_0$ puisque si $f \notin A(s, I, m, n)$ et si $\varepsilon > 0$ satisfait $\sup_{x \in I} \left|f^{(n)}(x)\right| > m^{n+1}(n!)^s + \varepsilon$, alors l'inclusion $b_{p_n}(f, \varepsilon) \subseteq C^\infty([0, 1]) \setminus A(s, I, m, n)$ est claire. Ainsi, $A(s, I)$ est bien un borélien de $C^\infty([0, 1])$. □

Proposition 3.7.10. *L'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur* $[0,1]$ *qui sont nulle part Gevrey-dérivables est résiduel dans* $C^\infty([0,1])$.

Démonstration. On définit $\mathcal{I}$, $A(s,I)$ et $A(s,I,m,n)$ comme dans la preuve 3.7.9. Ainsi, l'ensemble des fonctions de $C^\infty([0,1])$ qui sont nulle part Gevrey-dérivables est le complémentaire de

$$\bigcup_{s\in\mathbb{N}_0}\bigcup_{I\in\mathcal{I}}\bigcup_{m\in\mathbb{N}_0}\bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} A(s,I,m,n).$$

Rappelons également que chaque $A(s,I,m,n)$ est fermé et que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A(s,I,m,n)$ est inclus dans le sous-espace vectoriel propre $A(s,I)$. Cela assure que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A(s,I,m,n)$ est un fermé d'intérieur vide de $C^\infty([0,1])$ et conclut la preuve. □

3.8 Espaces S^ν

Nous nous intéressons dans cette section à un résultat classique de généricité sur les espaces S^ν. Une présentation de ces espaces et de leurs propriétés est disponible dans l'annexe B. Rappelons simplement les notations suivantes :

- $\nu : \mathbb{R} \to \{-\infty\} \cup [0,1]$ désigne une fonction croissante continue à droite pour laquelle il existe $\alpha_{\min} \in \mathbb{R}$ tel que $\nu(\alpha) = -\infty$ pour tout $\alpha < \alpha_{\min}$ et $\nu(\alpha) \geq 0$ pour tout $\alpha \geq \alpha_{\min}$,
- Ω est l'ensemble des suites complexes indicées par

$$\Lambda = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} (\{j\} \times \Lambda_j), \quad \text{avec } \Lambda_j = \{0,\ldots,2^j-1\},$$

  (dont nous noterons les éléments $\vec{c} = (c_{j,k})_{(j,k)\in\Lambda}$),
- pour $j \in \mathbb{N}$, $C > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\vec{c} \in \Omega$,

$$E_j(C,\alpha)(\vec{c}) = \{k \in \Lambda_j : |c_{j,k}| \geq C2^{-\alpha j}\},$$

- $$\nu_{\vec{c}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \alpha \mapsto \lim_{\varepsilon\to 0^+} \limsup_{j\to+\infty} \left(\frac{\log(\#E_j(1,\alpha+\varepsilon)(\vec{c}))}{\log(2^j)} \right)$$

  est le *profil asymptotique* de la suite $\vec{c} \in \Omega$,
- $S^\nu = \{\vec{c} \in \Omega : \nu_{\vec{c}} \leq \nu \text{ sur } \mathbb{R}\}$,
- d est la distance standard sur S^ν,
- pour toute suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dense dans $\mathbb{R}$, toute suite $(\varepsilon_m)_{m\in\mathbb{N}}$ qui décroît vers 0 et tous $m,n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\begin{aligned} d_{m,n} : S^\nu \times S^\nu &\to [0,+\infty] \\ \left(\vec{c},\vec{d}\right) &\mapsto \inf\left\{C \geq 0 : \#E_j(C,\alpha_n)\left(\vec{c}-\vec{d}\right) \leq C2^{(\nu(\alpha_n)+\varepsilon_m)j}\ \forall j \in \mathbb{N}\right\}. \end{aligned}$$

Il a été établi que pour presque toute suite $\vec{c}$ de S^ν, il y a en fait égalité entre les fonctions $\nu_{\vec{c}}$ et ν, et ce aussi bien au sens de Baire qu'au sens prévalent. Retraçons les arguments.

Proposition 3.8.1. *L'ensemble*

$$\{\vec{c} \in S^\nu : \nu_{\vec{c}}(\alpha) = \nu(\alpha)\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\}$$

est résiduel dans S^ν.

La démonstration est tirée de l'article [8].

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, posons

$$A_n = \left\{ \frac{n(n-1)}{2} + i : i \in \{0, \ldots, n-1\} \right\}.$$

Alors $(A_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ est une partition de $\mathbb{N}$ et $\#A_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$. Soient également $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ une suite de réels deux à deux distincts qui est dense dans $\mathbb{R}$ et $(\varepsilon_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ une suite qui décroît vers 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ et tout $N \geq n$, notons $j_N^{(n)}$ le $n^{\text{ème}}$ élément de A_N. Dans ce cas, $(j_N^{(n)})_{N\geq n,\, n\in\mathbb{N}_0}$ est une permutation des naturels. Enfin, définissons la suite $\vec{z} = (z_{j,k})_{(j,k)\in\Lambda}$ par

$$z_{j_N^{(n)},k} = \begin{cases} 2^{-\alpha_n j_N^{(n)}} & \text{pour } \lceil 2^{\nu(\alpha_n) j_N^{(n)}} \rceil \text{ valeurs de } k \text{ uniformément distribuées parmi } \Lambda_{j_N^{(n)}} \\ 0 & \text{pour les autres valeurs de k} \end{cases}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ et tout $N \geq n$. Ainsi, pour tous $m, n \in \mathbb{N}_0$, il existe un ensemble infini $J_{m,n}$ tel que pour tout $j \in J_{m,n}$, au moins $2^{(\nu(\alpha_n)-\varepsilon_m)j}$ coefficients de la suite $\vec{z}$ satisfont $2^{-\alpha_n j} \leq |z_{j,k}| \leq 2^{-(\alpha_n-\varepsilon_m)j}$. Il suffit en effet de considérer $J_{m,n} = \{j_N^{(n)} : N \geq n\}$. Par ailleurs, $\vec{z} \in S^\nu$ puisque pour tout $n \in \mathbb{N}_0$

$$\nu_{\vec{z}}(\alpha_n) = \lim_{m\to+\infty} \limsup_{j\to+\infty} \frac{\log_2(\#E_j(1, \alpha_n + \varepsilon_m)(\vec{z}))}{j},$$

avec

$$\#E_j(1, \alpha_n)(\vec{z}) = \#\{k \in \Lambda_j : |z_{j,k}| \geq 2^{-\alpha_n j}\} \leq 2^{\nu(\alpha_n)j} + 1$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$, ce qui suffit pour obtenir $\nu_{\vec{z}} \leq \nu$ sur $\mathbb{R}$ par continuité à droite de ces deux applications.

Sélectionnons ensuite une suite $(\vec{c}^{\,(l)})_{l\in\mathbb{N}_0}$ qui est dense dans S^ν et telle que pour tout $l \in \mathbb{N}_0$, il existe $j_l \in \mathbb{N}_0$ tel que $c_{j,k}^{(l)} = 0$ pour tout $j \geq j_l$ et tout $k \in \Lambda_j$. Cela étant, posons

$$j_{m,n,l} = \inf\{j \in J_{m,n} : j \geq j_l\}$$

et construisons une autre suite $(\vec{y}^{\,(l)})_{l\in\mathbb{N}_0}$ de S^ν en posant $\vec{y}^{\,(l)} = \vec{c}^{\,(l)} + \eta_l \vec{z}$ pour tout $l \in \mathbb{N}_0$, où $(\eta_l)_{l\in\mathbb{N}_0}$ est une suite de $[0,1]$ qui tend vers 0. Il est clair qu'il s'agit d'une suite de S^ν et nous aimerions montrer qu'elle est encore dense dans S^ν. Or pour tout $\varepsilon > 0$ et tout

$\vec{c} \in S^\nu$, en utilisant la densité de la suite $(\vec{c}^{\,(l)})_{l\in\mathbb{N}_0}$ et la continuité de la multiplication scalaire dans (S^ν, d), on peut trouver $l \in \mathbb{N}_0$ tel que $d(\vec{c}, \vec{c}^{\,(l)}) < \frac{\varepsilon}{2}$ et $d(\vec{0}, \eta_l \vec{z}) < \frac{\varepsilon}{2}$, d'où

$$d(\vec{c}, \vec{y}^{\,(l)}) \leq d(\vec{c}, \vec{c}^{\,(l)}) + d(\vec{0}, \eta_l \vec{z}) < \varepsilon$$

par invariance par translation de d. Par conséquent, pour tous $m, n, L \in \mathbb{N}_0$, l'ouvert $U_{m,n,L}$ défini par

$$U_{m,n,L} = \bigcup_{l \geq L} (\vec{y}^{\,(l)} + b_{m,n,l}),$$

avec

$$b_{m,n,l} = \left\{ \vec{c} \in S^\nu : d_{m,n}(\vec{c}, \vec{0}) < \frac{\eta_l}{2} 2^{-2\varepsilon_m j_{m,n,l}} \right\},$$

est lui aussi dense dans S^ν et

$$W = \bigcap_{m,n,L \in \mathbb{N}_0} U_{m,n,L}$$

est un sous-ensemble résiduel de S^ν.

Il nous reste à montrer que pour tout $\vec{c} \in W$, l'égalité $\nu_{\vec{c}} = \nu$ est satisfaite sur $\mathbb{R}$. Par définition de S^ν et $\alpha_{\min}$, il nous suffit en fait de vérifier $\nu_{\vec{c}}(\alpha) \geq \nu(\alpha)$ pour tout $\alpha \geq \alpha_{\min}$ pour avoir la conclusion. Considérons d'abord $\vec{c} \in b_{m,n,l}$ pour m, n, l fixés dans $\mathbb{N}_0$. On sait qu'il existe $C < \frac{\eta_l}{2} 2^{-2\varepsilon_m j_{m,n,l}}$ pour lequel

$$\#\{k \in \Lambda_{j_{m,n,l}} : \left|c_{j_{m,n,l},k}\right| \geq C 2^{-\alpha_n j_{m,n,l}}\} \leq C 2^{(\nu(\alpha_n)+\varepsilon_m) j_{m,n,l}} < \frac{\eta_l}{2} 2^{(\nu(\alpha_n)-\varepsilon_m) j_{m,n,l}}$$

et on en tire

$$\#\{k \in \Lambda_{j_{m,n,l}} : \left|c_{j_{m,n,l},k}\right| \geq \frac{\eta_l}{2} 2^{-\alpha_n j_{m,n,l}}\} \leq \frac{1}{2} 2^{(\nu(\alpha_n)-\varepsilon_m) j_{m,n,l}}.$$

Supposons à présent $\vec{c} \in W$. Dans ce cas, pour tous $m, n, L \in \mathbb{N}_0$, il existe $l \geq L$ tel que $\vec{c} - \vec{y}^{\,(l)} \in b_{m,n,l}$. Vu ce qui précède,

$$\#\left\{k \in \Lambda_{j_{m,n,l}} : \left|c_{j_{m,n,l},k} - y^{(l)}_{j_{m,n,l},k}\right| \geq \frac{\eta_l}{2} 2^{-\alpha_n j_{m,n,l}}\right\} \leq \frac{1}{2} 2^{(\nu(\alpha_n)-\varepsilon_m) j_{m,n,l}}.$$

Notons $j = j_{m,n,l}$. Puisque $j \geq j_l$, on a $y^{(l)}_{j,k} = \eta_l z_{j,k}$ pour tout $k \in \Lambda_j$. Il vient

$$\begin{aligned}
\#\left\{k \in \Lambda_j : |c_{j,k}| \geq \frac{\eta_l}{2} 2^{-\alpha_n j}\right\} &\geq \#\left\{k \in \Lambda_j : \left|y^{(l)}_{j,k}\right| - \left|c_{j,k} - y^{(l)}_{j,k}\right| \geq \frac{\eta_l}{2} 2^{-\alpha_n j}\right\} \\
&\geq \#\left\{k \in \Lambda_j : \left|y^{(l)}_{j,k}\right| \geq \eta_l 2^{-\alpha_n j} \text{ et } \left|c_{j,k} - y^{(l)}_{j,k}\right| < \frac{\eta_l}{2} 2^{-\alpha_n j}\right\} \\
&\geq 2^{(\nu(\alpha_n)-\varepsilon_m) j} - \frac{1}{2} 2^{(\nu(\alpha_n)-\varepsilon_m) j} \\
&= \frac{1}{2} 2^{(\nu(\alpha_n)-\varepsilon_m) j}.
\end{aligned}$$

Finalement, pour tous $m, n \in \mathbb{N}_0$, en choisissant bien la suite $(\eta_l)_{l\in\mathbb{N}_0}$, il existe une infinité de naturels j pour lesquels

$$\#E_j(1, \alpha_n + \varepsilon_m)(\vec{c}) = \#\left\{k \in \Lambda_j : |c_{j,k}| \geq 2^{-(\alpha_n+\varepsilon_m) j}\right\} \geq \frac{1}{2} 2^{(\nu(\alpha_n)-\varepsilon_m) j}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\nu_{\vec{c}}(\alpha_n) &= \lim_{m\to+\infty} \limsup_{j\to+\infty} \frac{\log_2(\#E_j(1,\alpha_n+\varepsilon_m)(\vec{c}))}{j} \\
&\geq \lim_{m\to+\infty} \lim_{j\to+\infty} \left(\nu(\alpha_n) - \varepsilon_m - \frac{1}{j}\right) \\
&= \nu(\alpha_n),
\end{aligned}$$

ce qui nous donne la conclusion par densité de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. □

Proposition 3.8.2. *L'ensemble*

$$\{\vec{c} \in S^\nu : \nu_{\vec{c}}(\alpha) = \nu(\alpha)\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\} \tag{3.19}$$

est prévalent dans S^ν.

Pour obtenir ce résultat, il nous faut construire une mesure borélienne sur S^ν qui est transverse au complémentaire de l'ensemble (3.19). Étant donné que S^ν est séparable, la proposition 1.3.11 affirme qu'une mesure de probabilité borélienne sur S^ν qui annule tous les translatés du complémentaire de l'ensemble (3.19) conviendrait. La construction d'une telle mesure comme proposée dans [11, 13] (voir aussi [60]) se fait en plusieurs étapes. Ainsi, nous commencerons par définir une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F})$, où $\mathscr{F}$ est la σ-algèbre borélienne pour la topologie de la convergence ponctuelle, c'est-à-dire la σ-algèbre produit $\mathscr{F} = \bigotimes_{(j,k)\in\Lambda} \mathcal{B}(\mathbb{C})$, ou encore la σ-algèbre engendrée par les cylindres. Nous vérifierons ensuite que cette mesure est une mesure de probabilité sur $(S^\nu, \mathscr{F}|_{S^\nu})$ puis nous nous assurerons qu'elle est borélienne par rapport à la topologie de S^ν induite par la distance d. Enfin, nous montrerons qu'elle annule bien les ensembles prescrits.

La première étape consiste donc en la construction d'une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F})$. On pose

$$F_j(\alpha) = \begin{cases} 2^{-j}\max(j^2, 2^{j\nu(\alpha)}) & \text{si } \alpha \geq \alpha_{\min} \\ 0 & \text{si } \alpha < \alpha_{\min} \end{cases}$$

pour tout $j \in \mathbb{N}\setminus\{3\}$ et

$$F_3(\alpha) = \begin{cases} 2^{-3}2^{3\nu(\alpha)} & \text{si } \alpha \geq \alpha_{\min} \\ 0 & \text{si } \alpha < \alpha_{\min} \end{cases}$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Notons que F_0 vaut 1 sur $[\alpha_{\min}, +\infty[$ et fixons $j \in \mathbb{N}$ quelconque. Alors F_j est une application à valeurs dans $[0,1]$ qui est croissante et continue à droite (soit car c'est le cas de ν, soit par définition si $j=0$). De plus, $\lim_{\alpha\to-\infty} F_j(\alpha) = 0$. Ainsi, il existe une unique mesure finie ρ_j sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que

$$F_j(\alpha) = \rho_j(]-\infty, \alpha])$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Posons $\rho_j(+\infty) = 1 - \lim_{\alpha\to+\infty} F_j(\alpha)$. Alors ρ_j est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ puisque

$$\rho_j(\mathbb{R}\cup\{+\infty\}) = 1.$$

Clairement, le support de ρ_j est inclus dans $[\alpha_{\min}, +\infty]$. On remarque également que ρ_j satisfait

$$\limsup_{j\to+\infty} \frac{\log_2(2^{j+r}\rho_j(]-\infty,\alpha]))}{j} = \limsup_{j\to+\infty} \frac{\log_2(2^{j+r}F_j(\alpha))}{j} = \limsup_{j\to+\infty} \frac{\log_2(2^{j\nu(\alpha)+r})}{j} = \nu(\alpha)$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $r \in \mathbb{R}$. Soit $U_{[0,2\pi]}$ la mesure uniforme sur $[0, 2\pi]$. Considérons la fonction

$$g_j : \mathbb{R}\cup\{+\infty\} \times [0,2\pi] \to \mathbb{C} : (\alpha, u) \mapsto \begin{cases} 2^{-j\alpha}e^{iu} & \text{si } \alpha \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{si } \alpha = +\infty \end{cases}.$$

Cette application est mesurable par rapport à $\mathcal{B}(\mathbb{R}\cup\{+\infty\}) \times \mathcal{B}([0,2\pi])$ et $\mathcal{B}(\mathbb{C})$. Nous pouvons donc définir pour chaque couple $(j,k) \in \Lambda$ la mesure image $\mathbb{P}_{j,k}$ par

$$\mathbb{P}_{j,k}(B) = (\rho_j \times U_{[0,2\pi]})(g_j^{-1}(B))$$

pour tout borélien B de $\mathbb{C}$. Il s'agit d'une mesure de probabilité sur $\mathbb{C}$ puisque

$$\mathbb{P}_{j,k}(\mathbb{C}) = (\rho_j \times U_{[0,2\pi]})(g_j^{-1}(\mathbb{C})) = \rho_j(\mathbb{R}\cup\{+\infty\}) \cdot U_{[0,2\pi]}([0,2\pi]) = 1.$$

Elle satisfait par ailleurs

$$\mathbb{P}_{j,k}(\{0\}) = \rho_j(\{+\infty\})$$

pour tout $(j,k) \in \Lambda$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{j,k}(\{c \in \mathbb{C} : |c| \geq 2^{-\alpha j}\}) &= (\rho_j \times U_{[0,2\pi]})(\{(\alpha', u) \in \mathbb{R} \times [0,2\pi] : \left|2^{-j\alpha'}e^{iu}\right| \geq 2^{-\alpha j}\}) \\ &= (\rho_j \times U_{[0,2\pi]})(]-\infty,\alpha] \times [0,2\pi]) \\ &= \rho_j(]-\infty,\alpha]) \\ &= F_j(\alpha) \end{aligned}$$

si j est en outre non-nul et si α est réel, ainsi que

$$\mathbb{P}_{0,0}(\{c \in \mathbb{C} : |c| \geq 1\}) = \rho_0(\mathbb{R}) = \lim_{\alpha\to+\infty} F_0(\alpha) = 1.$$

Considérons enfin la mesure de probabilité produit

$$\mathbb{P} = \bigotimes_{(j,k)\in\Lambda} \mathbb{P}_{j,k}$$

sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathscr{F})$.

Pour valider la deuxième étape, nous devons montrer que S^ν est $\mathbb{P}$-mesurable et de mesure 1. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $j \in \mathbb{N}$, considérons la fonction

$$f : \Omega \to \Lambda_j : \vec{c} \mapsto \#E_j(1,\alpha)(\vec{c}),$$

où Λ_j est muni de la topologie discrète et Ω de la σ-algèbre $\mathscr{F}$. Pour tout $l \in \Lambda_j$, on peut réécrire $f^{-1}(\{l\})$ sous la forme

$$\bigcup_{k_1 \in \Lambda_j} \cdots \bigcup_{k_l \in \Lambda_j \setminus \{k_1, \ldots, k_{l-1}\}} \left(\left(\bigcap_{i=1}^{l} \pi_{j,k_i}^{-1} \left([2^{-\alpha j}, +\infty[\right) \right) \bigcap \left(\bigcap_{k \in \Lambda_j \setminus \{k_1, \ldots, k_l\}} \pi_{j,k}^{-1} \left( ]-\infty, 2^{-\alpha j}[\right) \right) \right),$$

où les projections $\pi_{j,k}$ sont toutes mesurables. Il est alors clair que la fonction f est elle-même mesurable. Notons également que, par croissance de $\nu_{\vec{c}}$ et ν, on a

$$\{\vec{c} \in \Omega : \nu_{\vec{c}}(\alpha) \leq \nu(\alpha)\ \forall \alpha \geq \alpha_0\} = \{\vec{c} \in \Omega : \nu_{\vec{c}}(\alpha) \leq \nu(\alpha)\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\}$$

pour tout $\alpha_0 \in]-\infty, \alpha_{\min}[$. De même,

$$\{\vec{c} \in \Omega : \nu_{\vec{c}}(\alpha) = \nu(\alpha)\ \forall \alpha \geq \alpha_0\} = \{\vec{c} \in \Omega : \nu_{\vec{c}}(\alpha) = \nu(\alpha)\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\}$$

et

$$\{\vec{c} \in \Omega : \nu_{\vec{c}}(\alpha) \geq \nu(\alpha)\ \forall \alpha \geq \alpha_0\} = \{\vec{c} \in \Omega : \nu_{\vec{c}}(\alpha) \geq \nu(\alpha)\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, nous utiliserons la notation

$$\nu^*_{\vec{c}}(\alpha) = \limsup_{j \to +\infty} \left(\frac{\log(\# E_j(1,\alpha)(\vec{c}))}{\log 2^j} \right),$$

de sorte que $\nu_{\vec{c}}(\alpha)$ se réécrit

$$\nu_{\vec{c}}(\alpha) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \nu^*_{\vec{c}}(\alpha + \varepsilon).$$

En particulier, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $\alpha' > \alpha$, on a

$$\nu^*_{\vec{c}}(\alpha) \leq \nu_{\vec{c}}(\alpha) \leq \nu^*_{\vec{c}}(\alpha').$$

Concernant la mesurabilité de S^ν, nous avons la proposition suivante.

Proposition 3.8.3. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, les ensembles*

$$\{\vec{c} \in \Omega : \nu_{\vec{c}}(\alpha) \leq \nu(\alpha)\}, \quad \{\vec{c} \in \Omega : \nu_{\vec{c}}(\alpha) \geq \nu(\alpha)\} \quad \text{et} \quad \{\vec{c} \in \Omega : \nu_{\vec{c}}(\alpha) = \nu(\alpha)\}$$

appartiennent à $\mathscr{F}$. Il s'ensuit que les ensembles

- $\{\vec{c} \in \Omega : \nu_{\vec{c}}(\alpha) \leq \nu(\alpha)\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\}$,
- $\{\vec{c} \in \Omega : \nu_{\vec{c}}(\alpha) \geq \nu(\alpha)\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\}$,
- $\{\vec{c} \in \Omega : \nu_{\vec{c}}(\alpha) = \nu(\alpha)\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\}$

appartiennent à $\mathscr{F}$. En particulier, $S^\nu \in \mathscr{F}$.

Démonstration. Fixons d'abord $\alpha \in \mathbb{R}$. Comme $\nu(\alpha) \in \{-\infty\} \cup [0,1]$, nous allons nous intéresser aux ensembles qui comparent $\nu_{\vec{c}}(\alpha)$ à $r \in \{-\infty\} \cup [0,1]$. On a

$$\{\vec{c} \in \Omega : \nu^*_{\vec{c}}(\alpha) = -\infty\} = \bigcup_{J \in \mathbb{N}} \bigcap_{j \geq J} \{\vec{c} \in \Omega : \# E_j(1,\alpha)(\vec{c}) = 0\}.$$

De plus, pour tout $r \in [0,1]$, les ensembles $\{\vec{c} \in \Omega : \nu^*_{\vec{c}}(\alpha) = r\}$, $\{\vec{c} \in \Omega : \nu^*_{\vec{c}}(\alpha) \leq r\}$ et $\{\vec{c} \in \Omega : \nu^*_{\vec{c}}(\alpha) \geq r\}$ se réécrivent respectivement

$$\bigcap_{m\in\mathbb{N}_0}\left(\left(\bigcup_{J\in\mathbb{N}}\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0}\bigcap_{j\geq J}\left\{\vec{c}\in\Omega : \#E_j(1,\alpha)(\vec{c}) \leq 2^{j(r+\frac{1}{m}-\frac{1}{n})}\right\}\right)\bigcap\right.$$
$$\left.\left(\bigcap_{J\in\mathbb{N}}\bigcap_{n\in\mathbb{N}_0}\bigcup_{j\geq J}\left\{\vec{c}\in\Omega : \#E_j(1,\alpha)(\vec{c}) > 2^{j(r-\frac{1}{m}-\frac{1}{n})}\right\}\right)\right),$$

$$\{\vec{c}\in\Omega : \nu^*_{\vec{c}}(\alpha) = r\}\bigcup\left(\bigcup_{J\in\mathbb{N}}\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0}\bigcap_{j\geq J}\left\{\vec{c}\in\Omega : \#E_j(1,\alpha)(\vec{c}) \leq 2^{j(r-\frac{1}{n})}\right\}\right)$$

et

$$\{\vec{c}\in\Omega : \nu^*_{\vec{c}}(\alpha) = r\} \cup (\Omega \setminus \{\vec{c}\in\Omega : \nu_{\vec{c}}(\alpha) \leq r\}).$$

Or on a vu que la fonction $\vec{c} \mapsto \#E_j(1,\alpha)(\vec{c})$ était mesurable. Par conséquent, ces ensembles appartiennent à $\mathscr{F}$. On en tire que

$$\{\vec{c}\in\Omega : \nu_{\vec{c}}(\alpha) \leq -\infty\} = \{\vec{c}\in\Omega : \nu_{\vec{c}}(\alpha) = -\infty\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0}\left\{\vec{c}\in\Omega : \nu^*_{\vec{c}}\left(\alpha+\frac{1}{n}\right) = -\infty\right\}$$

et

$$\{\vec{c}\in\Omega : \nu_{\vec{c}}(\alpha) \geq -\infty\} = \Omega$$

appartiennent encore à $\mathscr{F}$. C'est en outre le cas de $\{\vec{c}\in\Omega : \nu_{\vec{c}}(\alpha) = r\}$, $\{\vec{c}\in\Omega : \nu_{\vec{c}}(\alpha) \leq r\}$ et $\{\vec{c}\in\Omega : \nu_{\vec{c}}(\alpha) \geq r\}$ au vu de leur reformulation respective sous la forme

$$\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}_0}\left\{\nu^*_{\vec{c}}\left(\alpha+\frac{1}{n}\right) \geq r\right\}\right)\bigcap\left(\bigcap_{m\in\mathbb{N}_0}\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0}\left\{\vec{c}\in\Omega : \nu^*_{\vec{c}}\left(\alpha+\frac{1}{n}\right) < r+\frac{1}{m}\right\}\right),$$

$$\{\vec{c}\in\Omega : \nu_{\vec{c}}(\alpha) = r\}\bigcup\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0}\left\{\vec{c}\in\Omega : \nu^*_{\vec{c}}\left(\alpha+\frac{1}{n}\right) < r\right\}\right)$$

et

$$\{\vec{c}\in\Omega : \nu_{\vec{c}}(\alpha) = r\} \cup (\Omega \setminus \{\vec{c}\in\Omega : \nu_{\vec{c}}(\alpha) \leq r\}).$$

Cela établit la première partie de l'énoncé.

Pour en déduire la seconde partie, il suffit de remarquer que si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dense de $\mathbb{R}$, alors

$$\{\vec{c}\in\Omega : \nu_{\vec{c}}(\alpha)\ \mathcal{R}\ \nu(\alpha)\ \forall\alpha\in\mathbb{R}\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{\vec{c}\in\Omega : \nu_{\vec{c}}(\alpha_n)\ \mathcal{R}\ \nu(\alpha_n)\}$$

puisque ν et $\nu_{\vec{c}}$ sont continues à droite, où le symbole $\mathcal{R}$ peut être remplacé par n'importe lequel des signes $\leq, =, \geq$. □

Il nous reste à calculer la probabilité de S^ν. À partir de maintenant, nous supposerons $\alpha_{\min} > 0$. Le lemme suivant est énoncé dans [11] (avec [12] référencé pour une preuve).

Lemme 3.8.4. *Il existe $C_1, C_2 > 0$ tels que pour tous $a, b \in [-\infty, +\infty[$ et tout $j \in \mathbb{N}_0$ satisfaisant $-\infty \leq a < b$ et $2^j \rho_j(]a,b]) \geq j^2$, la probabilité*

$$\mathbb{P}(\{\vec{c} \in \Omega : 2^{j-1}\rho_j(]a,b]) \leq \#\{k \in \Lambda_j : 2^{-bj} \leq |c_{j,k}| < 2^{-aj}\} \leq 2^{j+1}\rho_j(]a,b])\})$$

majore

$$1 - C_2 \frac{2^j}{j^2} e^{-C_1 j^2}.$$

Nous allons traiter séparément le cas $\alpha < \alpha_{\min}$ et $\alpha \geq \alpha_{\min}$ dans les propositions 3.8.5 et 3.8.6. Ensemble, elles nous donneront la conclusion espérée (qui fera l'objet du corollaire 3.8.7).

Proposition 3.8.5. *Pour tout $\alpha < \alpha_{\min}$, on a*

$$\mathbb{P}(\{\vec{c} \in \Omega : \nu_{\vec{c}}(\alpha) = -\infty\}) = 1.$$

Dès lors,

$$\mathbb{P}(\{\vec{c} \in \Omega : \nu_{\vec{c}}(\alpha) = -\infty \ \forall \alpha < \alpha_{\min}\}) = \mathbb{P}(\{\vec{c} \in \Omega : \nu_{\vec{c}}(\alpha) = -\infty \ \forall \alpha \in [\alpha_z, \alpha_{\min}[\}) = 1$$

pour tout $\alpha_z < \alpha_{\min}$.

Démonstration. Notons avant toute chose que les ensembles de l'énoncé sont mesurables au vu de la proposition 3.8.3. Soient $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha < \alpha' < \alpha_{\min}$. En utilisant la définition de $\mathbb{P}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{\vec{c} \in \Omega : \#E_j(1, \alpha')(\vec{c}) = 0\}) &= \mathbb{P}(\{\vec{c} \in \Omega : \forall k \in \Lambda_j, |c_{j,k}| < 2^{-\alpha' j}\}) \\
&= \prod_{k \in \Lambda_j} \mathbb{P}_{j,k}(\{|c_{j,k}| < 2^{-\alpha' j}\}) \\
&= (1 - F_j(\alpha'))^{2^j} \\
&= 1
\end{aligned}$$

pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, d'où

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in \mathbb{N}_0} \{\vec{c} \in \Omega : \#E_j(1, \alpha')(\vec{c}) = 0\} \right) = 1.$$

Puisque

$$\bigcap_{j \in \mathbb{N}_0} \{\vec{c} \in \Omega : \#E_j(1, \alpha')(\vec{c}) = 0\} \subseteq \{\vec{c} \in \Omega : \nu_{\vec{c}}(\alpha) = -\infty\},$$

la première partie de l'énoncé est établie.

La seconde partie découle alors immédiatement du constat suivant :

$$\begin{aligned}
\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{\vec{c} \in \Omega : \nu_{\vec{c}}(\alpha_n) = -\infty\} &= \{\vec{c} \in \Omega : \nu_{\vec{c}}(\alpha) = -\infty \ \forall \alpha < \alpha_{\min}\} \\
&\subseteq \{\vec{c} \in \Omega : \nu_{\vec{c}}(\alpha) = -\infty \ \forall \alpha \in [\alpha_z, \alpha_{\min}[\}
\end{aligned}$$

pour toute suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dense dans $]-\infty, \alpha_{\min}[$ et tout $\alpha_z < \alpha_{\min}$. $\square$

Proposition 3.8.6. *Pour tout $\alpha \geq \alpha_{\min}$, on a*

$$\mathbb{P}(\{\vec{c} \in \Omega : \nu_{\vec{c}}(\alpha) = \nu(\alpha)\}) = 1.$$

Dès lors,

$$\mathbb{P}(\{\vec{c} \in \Omega : \nu_{\vec{c}}(\alpha) = \nu(\alpha) \ \forall \alpha \geq \alpha_{\min}\}) = 1.$$

Démonstration. À nouveau, la proposition 3.8.3 assure que les ensembles de l'énoncé sont mesurables et la seconde relation se dérive aisément de la première en remarquant que l'égalité

$$\{\vec{c} \in \Omega : \nu_{\vec{c}}(\alpha) = \nu(\alpha) \ \forall \alpha \geq \alpha_{\min}\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{\vec{c} \in \Omega : \nu_{\vec{c}}(\alpha_n) = \nu(\alpha_n)\}$$

est vérifiée pour toute suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dense dans $[\alpha_{\min}, +\infty[$.

Fixons donc $\alpha \geq \alpha_{\min}$. Par définition de ρ_j, on a $2^j \rho_j(]-\infty, \alpha']) \geq j^2$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ tel que $j > 3$ et tout $\alpha' \geq \alpha$. Le lemme 3.8.4 donne l'existence de deux constantes C_1 et C_2 telles que

$$\mathbb{P}\left(\{\vec{c} \in \Omega : 2^{j-1}\rho_j(]-\infty, \alpha']) \leq \#E_j(1, \alpha')(\vec{c}) \leq 2^{j+1}\rho_j(]-\infty, \alpha'])\}\right) \geq 1 - C_2 \frac{2^j}{j^2} e^{-C_1 j^2}$$

pour tout $\alpha' \geq \alpha$ et tout $j > 3$. Par Borel−Cantelli, il vient

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{J \in \mathbb{N}_0} \bigcap_{j \geq J} \{\vec{c} \in \Omega : 2^{j-1}\rho_j(]-\infty, \alpha']) \leq \#E_j(1, \alpha')(\vec{c}) \leq 2^{j+1}\rho_j(]-\infty, \alpha'])\}\right) = 1$$

pour tout $\alpha' \geq \alpha$. Puisque

$$\bigcup_{J \in \mathbb{N}_0} \bigcap_{j \geq J} \{\vec{c} \in \Omega : 2^{j-1}\rho_j(]-\infty, \alpha']) \leq \#E_j(1, \alpha')(\vec{c}) \leq 2^{j+1}\rho_j(]-\infty, \alpha'])\}$$

est inclus dans

$$\{\vec{c} \in \Omega : \nu(\alpha') \leq \nu^*_{\vec{c}}(\alpha') \leq \nu(\alpha')\},$$

on a

$$\mathbb{P}(\{\vec{c} \in \Omega : \nu(\alpha') = \nu^*_{\vec{c}}(\alpha')\}) = 1$$

pour tout $\alpha' \geq \alpha$. Par conséquent, si $(\varepsilon_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite qui décroît vers 0, on a

$$\mathbb{P}(\{\vec{c} \in \Omega : \nu(\alpha + \varepsilon_m) = \nu^*_{\vec{c}}(\alpha + \varepsilon_m) \ \forall m \in \mathbb{N}\}) = 1.$$

Or si $\vec{c} \in \Omega$ est tel que $\nu(\alpha + \varepsilon_m) = \nu^*_{\vec{c}}(\alpha + \varepsilon_m)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, alors

$$\nu_{\vec{c}}(\alpha) = \lim_{m \to +\infty} \nu^*_{\vec{c}}(\alpha + \varepsilon_m) = \lim_{m \to +\infty} \nu(\alpha + \varepsilon_m) = \nu(\alpha)$$

par continuité à droite de ν. Ainsi,

$$\mathbb{P}(\{\vec{c} \in \Omega : \nu(\alpha) = \nu_{\vec{c}}(\alpha)\}) = 1.$$

□

Corollaire 3.8.7. *On a*

$$\mathbb{P}(\{\vec{c} \in \Omega : \nu_{\vec{c}}(\alpha) = \nu(\alpha)\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\}) = 1$$

et

$$\mathbb{P}(S^\nu) = 1.$$

Démonstration. Par les propositions 3.8.5 et 3.8.6, nous savons que les ensembles

$$\{\vec{c} \in \Omega : \nu_{\vec{c}}(\alpha) = -\infty\ \forall \alpha < \alpha_{\min}\} \quad \text{et} \quad \{\vec{c} \in \Omega : \nu_{\vec{c}}(\alpha) = \nu(\alpha)\ \forall \alpha \geq \alpha_{\min}\}$$

sont tous deux de probabilité 1. Or leur intersection est exactement

$$\{\vec{c} \in \Omega : \nu_{\vec{c}}(\alpha) = \nu(\alpha)\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\},$$

qui est lui-même inclus dans S^ν. Cela termine la preuve. □

La troisième étape consiste à garantir que $\mathbb{P}$ est une mesure borélienne sur (S^ν, d). Cela revient à montrer que $\mathcal{B}(S^\nu) \subseteq \mathscr{F}|_{S^\nu}$, ou encore que tous les ouverts de l'espace (S^ν, d) appartiennent à $\mathscr{F}|_{S^\nu}$.[10]

Proposition 3.8.8. *Tout ouvert de (S^ν, d) appartient à $\mathscr{F}|_{S^\nu}$.*

Démonstration. Puisque (S^ν, d) est métrique et séparable, il est de Lindelöf et tout ouvert peut se réécrire comme une union dénombrable d'ouverts de base. Il suffit donc pour conclure de montrer que (S^ν, d) admet une base topologique dont tous les éléments sont dans $\mathscr{F}|_{S^\nu}$. Or, par les propriétés des limites projectives, on sait qu'une base topologique de (S^ν, d) est donnée par les intersections finies de boules dans les espaces auxiliaires $E_{m,n}$ (avec les définitions de la note 3 de l'annexe B) restreintes à S^ν. La preuve se réduit donc à l'étude de ces boules. Fixons alors $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dense dans $\mathbb{R}$, $(\varepsilon_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite qui décroît vers 0, $m, n \in \mathbb{N}$, $\vec{d} \in S^\nu$ et $r > 0$. La boule $b_{m,n}(\vec{d}, r)$ de $E_{m,n}$ de centre $\vec{d}$ et de rayon r dans S^ν est l'ensemble

$$\bigcap_{j\in\mathbb{N}} \bigcup_{l\in\mathbb{N}_0} \left\{\vec{c} \in S^\nu : \#\left\{k \in \Lambda_j : |c_{j,k} - d_{j,k}| \geq \left(r - \frac{1}{l}\right) 2^{-\alpha_n j}\right\} \leq \left(r - \frac{1}{l}\right) 2^{(\nu(\alpha_n)+\varepsilon_m)j}\right\}.$$

Si $\nu(\alpha_n) = -\infty$, alors

$$\begin{aligned} b_{m,n}(\vec{d}, r) &= \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \bigcup_{l\in\mathbb{N}_0} \bigcap_{k\in\Lambda_j} \left\{\vec{c} \in S^\nu : |c_{j,k} - d_{j,k}| < \left(r - \frac{1}{l}\right) 2^{-\alpha_n j}\right\} \\ &= S^\nu \cap \left(\bigcap_{j\in\mathbb{N}} \bigcup_{l\in\mathbb{N}_0} \bigcap_{k\in\Lambda_j} \pi_{j,k}^{-1}\left(b_{\mathbb{C}}\left(d_{j,k}, \left(r - \frac{1}{l}\right) 2^{-\alpha_n j}\right)\right)\right) \end{aligned}$$

10. Dans ce cas, nous aurons même l'égalité entre les deux σ-algèbres puisque l'inclusion $\mathscr{F}|_{S^\nu} \subseteq \mathcal{B}(S^\nu)$ se déduit du point (4) de la proposition B.13.

appartient à $\mathscr{F}|_{S^\nu}$. Si $\nu(\alpha_n) \in \mathbb{R}$, pour tout $l \in \mathbb{N}_0$, on note

$$\lambda_l^* = \left\lfloor \left(r - \frac{1}{l}\right) 2^{(\nu(\alpha_n)+\varepsilon_m)j} \right\rfloor$$

puis pour tout $\lambda \in \{0, \ldots, \lambda_l^*\}$, on désigne par $K_j(\lambda)$ l'ensemble des $C_{2^j}^\lambda$ parties de Λ_j qui contiennent λ coefficients et pour $Z \in K_j(\lambda)$, on pose

$$C_j^{(l)}(Z) = \left\{ \vec{c} \in S^\nu : k \in Z \Leftrightarrow |c_{j,k} - d_{j,k}| \geq \left(r - \frac{1}{l}\right) 2^{-\alpha_n j} \right\}.$$

Dans ce cas, chaque $C_j^{(l)}(Z)$ se réécrit

$$S^\nu \cap \left(\left(\bigcap_{k \in Z} \pi_{j,k}^{-1} (\mathbb{C} \setminus b) \right) \bigcap \left(\bigcap_{k \in \Lambda_j \setminus Z} \pi_{j,k}^{-1} (b) \right) \right),$$

où

$$b = b_{\mathbb{C}} \left(d_{j,k}, \left(r - \frac{1}{l}\right) 2^{-\alpha_n j} \right),$$

et appartient donc à $\mathscr{F}|_{S^\nu}$. Par suite, c'est aussi le cas de

$$b_{m,n}(\vec{d}, r) = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \bigcup_{l \in \mathbb{N}_0} \bigcup_{\lambda \in \{0, \ldots, \lambda_l^*\}} \bigcup_{Z \in K_j(\lambda)} C_j^{(l)}(Z).$$

□

La quatrième et dernière étape consiste à s'assurer que $\mathbb{P}$ annule bien tous les translatés du complémentaire de l'ensemble (3.19) défini par

$$\{\vec{c} \in S^\nu : \nu_{\vec{c}}(\alpha) = \nu(\alpha) \; \forall \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Proposition 3.8.9. *Si $\vec{d} \in S^\nu$, alors*

$$\mathbb{P}(\{\vec{c} \in S^\nu : \nu_{\vec{c}-\vec{d}}(\alpha) = \nu(\alpha) \; \forall \alpha \in \mathbb{R}\}) = 1.$$

La preuve de ce résultat peut être trouvée dans [11] (théorème 5).

Corollaire 3.8.10. *Si A est le complémentaire de l'ensemble (3.19), c'est-à-dire l'ensemble des suites $\vec{c}$ de S^ν pour lesquelles $\nu_{\vec{c}}$ ne coïncide pas avec ν sur $\mathbb{R}$ tout entier, alors*

$$\mathbb{P}(\vec{d} + A) = 0$$

pour tout $\vec{d} \in S^\nu$. En particulier, A est timide dans S^ν.

Démonstration. Pour tout $\vec{d} \in S^\nu$, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\vec{d} + A) &= \mathbb{P}(\{\vec{c} \in S^\nu : \vec{c} - \vec{d} \in A\}) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\{\vec{c} \in S^\nu : \nu_{\vec{c}-\vec{d}}(\alpha) = \nu(\alpha) \; \forall \alpha \in \mathbb{R}\}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Annexe A

Topologie et théorie de la mesure

Il est connu qu'un espace vectoriel topologique séparé de dimension finie est isomorphe à $\mathbb{R}^n$ pour un $n \in \mathbb{N}$, et est donc localement compact (théorème 1.21 de [138]). Le théorème suivant fournit la réciproque de ce résultat ([43, 152]).

Théorème A.1. *Tout espace vectoriel topologique séparé localement compact est de dimension finie.*

Démonstration. Soit X un espace vectoriel topologique séparé localement compact. Par définition, on peut fixer un voisinage compact K de l'origine. Il est clair que $\frac{1}{2}K$ est encore un voisinage compact de l'origine. On peut donc considérer le recouvrement ouvert $\{x + \frac{1}{2}K^\circ : x \in X\}$ de K. Par compacité, on extrait une collection finie $x_1, \ldots, x_n$ de points de X tels que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \left(x_i + \frac{1}{2}K \right).$$

Notons W le sous-espace vectoriel de dimension finie engendré par $x_1, \ldots, x_n$. En particulier,

$$K \subseteq W + \frac{1}{2}K.$$

Si on itère cette relation, on obtient

$$K \subseteq W + \frac{1}{2^m}K$$

pour tout $m \in \mathbb{N}_0$. Considérons à présent U un voisinage arbitraire de 0. On sait que U contient un voisinage V de 0 qui est équilibré. Comme tout voisinage de 0 est absorbant, pour tout $x \in X$, il existe $m \in \mathbb{N}_0$ pour lequel $2^{-m}x \in V$. Ainsi, $\{2^m V^\circ : m \in \mathbb{N}_0\}$ est un recouvrement ouvert de K. Par compacité, il existe une collection finie $m_1 < \ldots < m_N$ de naturels tels que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} 2^{m_i} V.$$

Mais V est équilibré donc pour tous naturels i, j avec $i < j$, $2^i V \subseteq 2^j V$. Par conséquent, $2^{-m_N} K \subseteq V \subseteq U$ et on en tire la relation $K \subseteq W + U$. Comme tout voisinage d'un point

x de K s'écrit $x - U$ avec U un voisinage de l'origine, il vient $K \subseteq \overline{W} = W$. Or K est absorbant, ce qui implique que tout $x \in X$ appartient à $2^m K$ pour m suffisamment grand et donc à W. Finalement, $X = W$ est de dimension finie. □

Le second résultat présenté dans cette annexe est une généralisation du *théorème de densité de Lebesgue*. Généralement énoncé dans le cas d'ensembles Lebesgue-mesurables, il est ici démontré pour un sous-ensemble quelconque de $\mathbb{R}^n$ ([147]).

Définition A.2. Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. On dit que x est un *point de densité extérieure* de A si

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{\mathcal{L}^*(A \cap b(x,r))}{\mathcal{L}(b(x,r))} = 1.$$

Théorème A.3. *Lebesgue-presque tout point d'un sous-ensemble quelconque A de $\mathbb{R}^n$ est un point de densité extérieure de A.*

Démonstration. Soient N l'ensemble des points de A qui ne sont pas des points de densité extérieure et, pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, N_k l'ensemble des points x de A pour lesquels

$$\liminf_{r \to 0^+} \frac{\mathcal{L}^*(A \cap b(x,r))}{\mathcal{L}(b(x,r))} < 1 - \frac{1}{k}.$$

Vu la décomposition

$$N = \bigcup_{k \geq 2} N_k,$$

montrer que l'on a $\mathcal{L}^*(N_k) = 0$ pour tout $k \geq 2$ impliquera la conclusion, à savoir $\mathcal{L}(N) = 0$. Fixons donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq 2$, $\varepsilon > 0$ et notons $\mu = \mathcal{L}^*(N_k)$. Quitte à remplacer N_k par la famille dénombrable $\{N_k \cap \{x \in \mathbb{R}^n : m \leq |x| < m+1\} : m \in \mathbb{N}\}$ dont tous les éléments sont de mesure extérieure de Lebesgue finie et inclus dans N_k, on peut supposer $\mu < +\infty$.

Par régularité extérieure de $\mathcal{L}^*$, il existe un ouvert U contenant N_k et tel que

$$\mathcal{L}(U) < \mu + \varepsilon. \tag{A.1}$$

De plus, pour tout $x \in N_k$, il existe un réel $r > 0$ pouvant être choisi arbitrairement petit et satisfaisant à l'inégalité

$$\frac{\mathcal{L}^*(A \cap b(x,r))}{\mathcal{L}(b(x,r))} < 1 - \frac{1}{k}.$$

L'ensemble N_k étant inclus dans $A \cap U$, pour tout $x \in N_k$, il existe $r_x > 0$ tel que $b(x, r_x) \subseteq U$ et

$$\mathcal{L}^*(N_k \cap b(x, r_x)) < \left(1 - \frac{1}{k}\right) \mathcal{L}(b(x, r_x)).$$

La famille $\{b(x, r_x) : x \in N_k\}$ constituant un recouvrement ouvert de N_k, on peut, par la propriété de Lindelöf, en extraire un recouvrement dénombrable $\{b(x_j, r_{x_j}) : j \in \mathbb{N}_0\}$ avec $x_j \in N_k$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$. Si on note $b_j = b(x_j, r_{x_j})$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0$, nous avons $b_j \subseteq U$,

$$\mathcal{L}^*(N_k \cap b_j) < \left(1 - \frac{1}{k}\right) \mathcal{L}(b_j) \tag{A.2}$$

pour tout $j \in \mathbb{N}_0$ et $N_k \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}_0} b_j$. Par conséquent, $\mathcal{L}\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}_0} b_j\right) \geq \mu$ et on peut trouver $N \in \mathbb{N}_0$ tel que

$$\mathcal{L}\left(\bigcup_{j=1}^{N} b_j\right) > \mu - \varepsilon. \tag{A.3}$$

Quitte à réindicer, supposons $r_{x_1} \geq \ldots \geq r_{x_N}$. Posons $b_{n_1} = b_1$ et soit b_{n_2} la première boule de $b_1, \ldots, b_N$ qui n'a pas de point commun avec b_{n_1}. Si une telle boule existe, soit ensuite b_{n_3} la première boule de $b_1, \ldots, b_N$ qui n'a pas de point commun avec $b_{n_1} \cup b_{n_2}$. On continue de la sorte jusqu'à ce qu'on ne puisse pas sélectionner de boule ayant la propriété attendue. On arrive ainsi à une nouvelle suite de boules $b_{n_1}, \ldots, b_{n_l}$ extraite de la suite $b_1, \ldots, b_N$. Si pour une boule quelconque b, $3b$ désigne la boule de même centre que b et de rayon triple, on a

$$\bigcup_{j=1}^{N} b_j \subseteq \bigcup_{j=1}^{l} 3b_{n_j}. \tag{A.4}$$

En effet, soit x un point de b_i pour un $i \in \{1, \ldots, N\}$. Si la boule b_i figure dans la suite $b_{n_1}, \ldots, b_{n_l}$, évidemment $x \in \bigcup_{j=1}^{l} 3b_{n_j}$. Supposons donc qu'elle n'y figure pas. Dans ce cas, b_i intersecte une boule b_{n_k} avec $n_k \leq i$. Si y est un point commun à ces deux boules, puisque $r_{x_{n_k}} \geq r_{x_i}$, on a $x \in 3b_{n_k}$ car

$$d(x, x_{n_k}) \leq d(x, y) + d(y, x_{n_k}) < 2r_{x_i} + r_{x_{n_k}} \leq 3r_{x_{n_k}}.$$

Posons maintenant $T = \bigcup_{j=1}^{l} b_{n_j}$. Puisque les boules $b_{n_1}, \ldots, b_{n_l}$ sont disjointes, on a

$$3^n\,\mathcal{L}(T) = 3^n \sum_{j=1}^{l} \mathcal{L}(b_{n_j}) = \sum_{j=1}^{l} \mathcal{L}(3b_{n_j}) \geq \mathcal{L}\left(\bigcup_{j=1}^{l} 3b_{n_j}\right) \geq \mathcal{L}\left(\bigcup_{j=1}^{N} b_j\right) > \mu - \varepsilon$$

grâce aux relations (A.3) et (A.4), ainsi que

$$\mathcal{L}^*(N_k \cap T) \leq \sum_{j=1}^{l} \mathcal{L}^*(N_k \cap b_{n_j}) < \left(1 - \frac{1}{k}\right) \sum_{j=1}^{l} \mathcal{L}(b_{n_j}) = \left(1 - \frac{1}{k}\right) \mathcal{L}(T),$$

en utilisant ici l'inégalité (A.2). Constatons encore que T est un ouvert inclus dans U et N_k un sous-ensemble de U, d'où

$$\mathcal{L}(U) \geq \mathcal{L}(T) + \mathcal{L}^*(N_k \setminus T) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}^*(N_k) = \mathcal{L}^*(N_k \cap T) + \mathcal{L}^*(N_k \setminus T).$$

Enfin, rappelons que U a été construit pour vérifier (A.1), c'est-à-dire

$$\mathcal{L}(U) - \mathcal{L}^*(N_k) < \varepsilon.$$

En mettant bout à bout ces différentes relations, on trouve

$$\frac{\mathcal{L}(T)}{k} \leq \mathcal{L}(T) - \mathcal{L}^*(N_k \cap T) \leq (\mathcal{L}(U) - \mathcal{L}^*(N_k \setminus T)) - (\mathcal{L}^*(N_k) - \mathcal{L}^*(N_k \setminus T)) < \varepsilon,$$

d'où

$$\mu < (3^n k + 1)\varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, cela montre finalement que μ vaut 0. $\square$

Annexe B

Espaces S^ν

Dans cette annexe, nous présentons (sans démonstration) les espaces S^ν et leurs propriétés. Notons que nous considérerons souvent des fonctions définies sur $[0,1]$, auquel cas nous travaillerons avec des ondelettes périodisées à partir d'une ondelette-mère dans la classe de Schwartz (voir section 3.3). Rappelons que, dans une telle base, les coefficients d'ondelettes sont indexés pas l'ensemble $\Lambda = \bigcup_{j\in\mathbb{N}}(\{j\} \times \Lambda_j)$, où $\Lambda_j = \{0, \ldots, 2^j - 1\}$. De plus, bien que la dimension 1 ait été ici privilégiée pour faciliter les notations, les définitions et propriétés que nous allons introduire se généralisent naturellement à des fonctions à n variables.

La représentation de signaux au travers de leurs coefficients d'ondelettes est un outil largement utilisé. En particulier, une propriété d'un signal qui peut s'exprimer à partir des coefficients d'ondelettes indépendamment de la base choisie peut être étudiée dans des espaces de suites. C'est notamment le cas de la *régularité höldérienne* : si $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$, une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite *höldérienne (resp. log-höldérienne) d'ordre* α *en* x_0, ce que l'on note $f \in C^\alpha(x_0)$ (resp. $f \in C^\alpha_{\log}(x_0)$), s'il existe un polynôme P de degré strictement inférieur à α et une constante $C > 0$ tels que

$$|f(x) - P(x - x_0)| \leq C\,|x - x_0|^\alpha \,\left(\text{resp. } \leq C\,|x - x_0|^\alpha\,|\ln(|x - x_0|)|\,\right)$$

pour tout x dans un voisinage de x_0. La régularité ponctuelle d'une fonction f est alors caractérisée par le théorème suivant (théorème 1 de [90], voir aussi le théorème 3.3.5 de [48]).

Théorème B.1. *Si $f \in C^\alpha(x_0)$, alors il existe $C > 0$ et $J \in \mathbb{Z}$ tels que*

$$d_j(x_0) \leq C 2^{-\alpha j} \tag{B.1}$$

pour tout $j \geq J$, où $d_j(x_0)$ est la borne supérieure des $|c_\lambda|$ sur l'ensemble des intervalles dyadiques λ inclus dans l'un des trois intervalles adjacents à l'unique intervalle d'échelle j contenant x_0. Réciproquement, si f est uniformément de Hölder (i.e. appartient à un espace de Hölder uniforme) et s'il existe $C > 0$ tel que la relation (B.1) est vérifiée pour tout $j \in \mathbb{Z}$, alors $f \in C^\alpha_{\log}(x_0)$.

Cela étant, lorsqu'une fonction appartient à un espace $C^\alpha(x_0)$, il est naturel de chercher quel est le *meilleur* α pour lequel la propriété reste vérifiée. Par emboitement de ces espaces, cela revient à déterminer l'*exposant de Hölder*.

Définition B.2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction localement bornée [1] et soit $x_0 \in \mathbb{R}$. L'*exposant de Hölder* de f au point x_0 est défini par

$$h_f(x_0) = \sup\{\alpha \geq 0 : f \in C^\alpha(x_0)\}.$$

Dans certains domaines tels que l'analyse multifractale, la structure hiérarchisée des coefficients d'ondelettes joue un rôle primordial : des coefficients à des échelles j différentes n'ont pas la même importance tandis qu'au sein d'une même échelle, ils sont souvent interchangeables. Cette propriété apparaît notamment dans la caractérisation des espaces de Besov ([120]).

Définition B.3. Pour tout $p \in \,]0, +\infty]$, tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $\vec{c} \in \mathbb{C}^\Lambda$, on note

$$\|\vec{c}\|_{\ell^p(\Lambda_j)} = \begin{cases} \left(\sum_{k\in\Lambda_j} |c_{j,k}|^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } p < +\infty \\ \sup_{k\in\Lambda_j} |c_{j,k}| & \text{si } p = +\infty \end{cases}.$$

Alors pour tout $s \in \mathbb{R}$ et tous $p, q \in \,]0, +\infty]$, *l'espace de Besov homogène* $b^s_{p,q}$ est l'ensemble des suites $\vec{c} \in \mathbb{C}^\Lambda$ satisfaisant

$$\left(2^{(s-\frac{1}{p})j}\, \|\vec{c}\|_{\ell^p(\Lambda_j)}\right)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^q(\mathbb{N})$$

et on définit classiquement *l'espace de Besov homogène* $B^s_{p,q}$ comme l'ensemble des fonctions dont la suite des coefficients d'ondelettes est dans $b^s_{p,q}$.

Bien que naturels dans de multiples applications, ces espaces restent parfois insuffisants car ils ne tiennent pas compte de toute l'information que l'on peut retrouver dans les histogrammes des coefficients d'ondelettes. C'est en connaissance de ce manque que les espaces S^ν ont été définis par Jaffard ([87]) pour fournir deux informations additionnelles.

Tout d'abord, au lieu d'apporter un contrôle indirect sur la répartition asymptotique des coefficients via des sommes ℓ^p pondérées, les espaces S^ν amènent un contrôle direct en procurant une borne sur le nombre de coefficients ayant une certaine *taille*.

Ensuite, ces espaces permettent d'obtenir des indications auparavant inaccessibles quant à la régularité de certaines fonctions. En effet, en analyse multifractale, on cherche à déterminer une distribution géométrique des singularités d'une fonction f et de leur importance en calculant le *spectre de Hölder*

$$d_f : [0, +\infty] \to \{-\infty\} \cap [0, 1] : h \mapsto \dim_{\mathcal{H}} E^f(h)$$

de f, où $\dim_{\mathcal{H}}$ désigne la dimension de Hausdorff (avec la convention $\dim_{\mathcal{H}}(\emptyset) = -\infty$) et les ensembles *iso-Hölder* $E^f(h)$ sont donnés par

$$E^f(h) = \{x \in \mathbb{R} : h_f(x) = h\}.$$

1. Puisque les espaces $C^\alpha(x_0)$ sont tous inclus dans l'ensemble des fonctions localement bornées, cette condition est destinée à s'assurer que l'exposant de Hölder ne vaut pas $-\infty$.

Pour un signal réel, il est cependant difficile voire impossible en pratique de calculer le spectre de Hölder depuis la définition car cela implique de déterminer successivement plusieurs limites imbriquées. C'est pourquoi on utilise une manière indirecte d'estimer le spectre, appelée *formalisme multifractal*. Il s'agit d'une formule numériquement calculable qui se veut approcher le spectre. Plus précisément, cette formule doit donner une borne supérieure au spectre pour toute fonction uniformément de Hölder et donner le spectre exact pour certaines classes de processus stochastiques (par exemple, pour les séries d'ondelettes aléatoires). On s'attend également à pouvoir trouver un espace fonctionnel dans lequel l'égalité est vérifiée pour un ensemble générique de fonctions. Le premier formalisme multifractal a été proposé par Parisi et Frisch dans un contexte de turbulence pleinement développée ([127]). Depuis, nombre de variations de ce formalisme ont été envisagées (voir l'introduction de [21] et les références mentionnées), chacune présentant ses avantages et inconvénients. Le *formalisme thermodynamique* approxime le spectre d'une fonction f en appliquant une transformation de Legendre à la *fonction d'échelle* de f.

Définition B.4. Si f est une fonction de coefficients d'ondelettes $(c_{j,k})_{(j,k)\in\Lambda}$, la *fonction d'échelle* η_f de f est définie de manière équivalente par les deux expressions

$$\eta_f(p) = \liminf_{j\to+\infty} \frac{\log\left(2^{-j}\sum_{k\in\Lambda_j}|c_{j,k}|^p\right)}{\log 2^{-j}} \quad \text{et} \quad \eta_f(p) = \sup\left\{s\in\mathbb{R} : f \in B^{\frac{s}{p}}_{p,\infty}\right\}$$

pour tout $p > 0$. Le *formalisme thermodynamique* est alors donné par la formule

$$\widetilde{d}_f(h) = \eta_f^*(h) + 1$$

pour tout $h \geq 0$, où

$$\eta_f^*(h) = \inf_{p\geq p_c}(ph - \eta_f(p))$$

est la *transformée de Legendre* de η_f sur $[p_c, +\infty[$ et p_c est une valeur critique déterminée par η_f.

Ce formalisme est lié aux espaces de Besov au travers de la propriété suivante : avec certaines conditions sur la fonction η, on a $d_f(h) = \inf_{p\geq p_c}(ph - \eta(p) + 1)$ pour tout $h \in \left[s(0), \frac{1}{p_c}\right]$ et $\eta_f = \eta$ sur $]0, +\infty[$ pour un ensemble à la fois résiduel ([88]) et prévalent ([67]) de fonctions

$$f \in \bigcap_{\varepsilon>0}\bigcap_{p>0} B^{\frac{\eta(p)}{p}-\varepsilon}_{p,\infty}$$

(où p_c et s sont définis à partir de η). Malheureusement, ce formalisme ne permet d'accéder qu'à la partie concave et croissante du spectre. Puisque le spectre d'un signal réel n'a a priori aucune raison de vérifier ces deux hypothèses, celles-ci constituent des limitations à la validité du formalisme thermodynamique. Définir un formalisme capable de détecter des spectres non-concaves fut donc la seconde motivation qui conduisit à la définition des espaces S^ν.[2] On s'attend par conséquent à ce que les espaces S^ν apportent plus d'information que les espaces de Besov dans le cas où ν n'est pas concave, ce que confirmera la proposition B.14.

2. Le problème lié à la croissance se régla quant à lui en remplaçant les coefficients d'ondelettes par les *leaders*. L'intersection de ces deux solutions donna lieu aux espaces L^ν étudiés entre autres dans [21, 23].

Passons maintenant aux définitions et premières propriétés des espaces S^ν. Pour cette présentation, les références [8, 9, 10, 11, 13, 14, 60, 61] ont été consultées. Beaucoup fournissent une étude bien plus approfondie des espaces S^ν, comprenant ainsi une caractérisation du dual, une investigation des propriétés de convexité locale, la détermination de la dimension diamétrale ou encore une particularisation selon la fonction ν impliquée.

Afin d'étudier la taille des coefficients d'une fonction $f \in L^2([0,1])$ à une échelle $j \in \mathbb{N}$ donnée, posons

$$F_j(x) = \#\{k \in \Lambda_j : |c_{j,k}| < x\}$$

pour tout $x \geq 0$. En supposant que l'information disponible sur f est précisément la collection des fonctions F_j, nous aimerions savoir quelle information sur la répartition des coefficients ayant une certaine taille à une certaine échelle peut en être déduite. Le *profil et la densité d'ondelette* sont deux fonctions qui répondent à cette question.

Définition B.5. Soit $f \in L^2([0,1])$. Le *profil d'ondelette* ν_f de f est défini par

$$\nu_f(\alpha) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \limsup_{j \to +\infty} \left(\frac{\log(\#E_j(1, \alpha + \varepsilon)(f))}{\log(2^j)} \right)$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, avec la convention $\log(0) = -\infty$ et

$$E_j(C, \alpha)(f) = \{k \in \Lambda_j : |c_{j,k}| \geq C 2^{-\alpha j}\},$$

d'où

$$\#E_j(C, \alpha)(f) = 2^j - F_j(C 2^{-\alpha j})$$

pour tout $C > 0$, tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $j \in \mathbb{N}$. De plus, la *densité d'ondelette* ρ_f de f est définie par

$$\begin{aligned} \rho_f(\alpha) &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \limsup_{j \to +\infty} \left(\frac{\log(\#E_j(1, \alpha + \varepsilon)(f) - \#E_j(1, \alpha - \varepsilon)(f))}{\log(2^j)} \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \limsup_{j \to +\infty} \left(\frac{\log(\#\{k \in \Lambda_j : 2^{-(\alpha+\varepsilon)j} \leq |c_{j,k}| < 2^{-(\alpha-\varepsilon)j}\})}{\log(2^j)} \right) \end{aligned}$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ces définitions formalisent le fait qu'à chaque grande échelle j, il y a approximativement $2^{\nu_f(\alpha)j}$ coefficients de module plus grand que $2^{-\alpha j}$ et approximativement $2^{\rho_f(\alpha)j}$ coefficients de module égal à $2^{-\alpha j}$. Comme souhaité, les deux fonctions expriment donc le comportement asymptotique du nombre de coefficients ayant un ordre de grandeur donné. Cependant, puisque l'on souhaite considérer des signaux uniquement au travers de leurs coefficients d'ondelettes, nous utiliserons plutôt la fonction ν_f car elle est indépendante de la base d'ondelettes choisie (pour autant que l'ondelette-mère soit suffisamment régulière, localisée et ait suffisamment de moments nuls), alors que ce n'est pas toujours le cas de ρ_f. De plus, ν_f contient l'information maximale qui peut être déduite de la distribution des coefficients d'ondelettes sans dépendre de la base choisie, ce qui conforte ce choix ([87]).

Dans tout espace S^ν, ν jouera le rôle de borne supérieure des profils d'ondelette des fonctions de S^ν (proposition B.9). Étudions donc les propriétés de ν_f afin de déterminer quelles conditions imposer à ν. Il est clair que la fonction ν_f est croissante, continue à droite, à valeurs dans $\{-\infty\} \cup [0,1]$ et non-identiquement égale à $-\infty$ si $f \neq 0$. De plus, nous avons le résultat suivant (proposition 1.1.2 de [60]).

Proposition B.6. *Si f est une fonction de période 1 qui définit une distribution, alors il existe $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\sup_{(j,k)\in\Lambda} 2^{\alpha_0 j} |c_{j,k}| < +\infty,$$

d'où $\nu_f(\alpha) = -\infty$ pour tout $\alpha < \alpha_0$ et $\nu_f(\alpha) \geq 0$ pour tout $\alpha \geq \alpha_0$. En outre, $\alpha_0 > 0$ si f est uniformément de Hölder (section 6.4 de [120]).

Nous appelons *profils admissibles* les fonctions ν qui représentent les profils d'ondelette de distributions d'ordre fini. Vu ce qui précède, cela nous mène à la définition suivante.

Définition B.7. Un *profil admissible* est une fonction $\nu : \mathbb{R} \to \{-\infty\} \cup [0,1]$ croissante et continue à droite pour laquelle il existe $\alpha_{\min} \in \mathbb{R}$ tel que $\nu(\alpha) = -\infty$ pour tout $\alpha < \alpha_{\min}$ et $\nu(\alpha) \geq 0$ pour tout $\alpha \geq \alpha_{\min}$.

L'existence de $\alpha_{\min}$ revient à supposer que la quantité

$$\alpha_{\min} = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : \nu(\alpha) \geq 0\}$$

est réelle. Si on pose également

$$\alpha_{\max} = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : \nu(\alpha) = 1\},$$

on a

$$\begin{cases} \nu(\alpha) = -\infty & \text{si } \alpha < \alpha_{\min} \\ \nu(\alpha) \in [0,1[& \text{si } \alpha_{\min} \leq \alpha < \alpha_{\max} \\ \nu(\alpha) = 1 & \text{si } \alpha \geq \alpha_{\max} \end{cases},$$

le dernier cas étant possiblement vide puisque l'on n'impose pas $\alpha_{\max} < +\infty$.

Notons Ω l'ensemble des suites complexes indicées par Λ. Nous définirons les espaces S^ν comme des sous-espaces de Ω, en gardant cependant à l'esprit qu'à chaque suite est associée une distribution d'ordre fini et que l'étude de ces distributions via leurs coefficients d'ondelettes est uniquement possible par robustesse des espaces S^ν (c'est-à-dire indépendance de la définition vis-à-vis de la base d'ondelettes choisie).

Définition B.8. Étant donné un profil admissible ν, l'*espace S^ν* est l'ensemble des suites $\vec{c} \in \Omega$ satisfaisant la condition suivante : pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, tout $\varepsilon > 0$ et tout $C > 0$, il existe $J \in \mathbb{N}$ tel que

$$\#E_j(C,\alpha)(\vec{c}) \leq 2^{(\nu(\alpha)+\varepsilon)j}$$

pour tout $j \geq J$, avec la convention $2^{-\infty j} = 0$ pour tout $j \geq 0$ et

$$E_j(C,\alpha)(\vec{c}) = \{k \in \Lambda_j : |c_{j,k}| \geq C2^{-\alpha j}\}.$$

Naïvement, une suite $\vec{c} \in \Omega$ appartient à S^ν si et seulement si pour toute grande échelle j et tout nombre α, il y a moins de $2^{\nu(\alpha)j}$ coefficients plus grands en module que $2^{-\alpha j}$.

Étant donné que nous avons défini les espaces S^ν comme des espaces de suites, pour $\vec{c} \in \Omega$, il est pratique de définir le pendant $\nu_{\vec{c}}$ du profil d'ondelette par

$$\nu_{\vec{c}}(\alpha) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \limsup_{j \to +\infty} \left(\frac{\log(\#E_j(1, \alpha + \varepsilon)(\vec{c}))}{\log(2^j)} \right)$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. On l'appelle le *profil asymptotique* de la suite $\vec{c}$. On peut caractériser l'espace S^ν via une condition sur les profils asymptotiques des suites qu'il contient (lemme 2.3 de [14]).

Proposition B.9. *L'espace S^ν est un espace vectoriel et satisfait*

$$S^\nu = \{\vec{c} \in \Omega : \nu_{\vec{c}}(\alpha) \leq \nu(\alpha) \ \forall \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Afin de pouvoir utiliser les notions de généricité et résultats présentés dans le chapitre 1, nous aimerions équiper S^ν d'une structure d'espace vectoriel topologique complètement métrisable. Notons que la topologie de la convergence ponctuelle ne convient pas au vu de l'observation suivante ([13]).

Remarque B.10. D'une part, toute suite $\vec{c} \in \Omega$ qui admet uniquement un nombre fini de termes non-nuls satisfait $\nu_{\vec{c}}(\alpha) = -\infty$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, ce qui implique qu'elle appartient à l'espace S^ν. D'autre part, pour tout $\alpha \in]-\infty, \alpha_{\min}[$, la suite $\vec{c}_\alpha = (2^{-\alpha j})_{(j,k) \in \Lambda}$ est telle que $\nu_{\vec{c}_\alpha}(\alpha) = 1$. En particulier, $\vec{c}_\alpha$ n'appartient pas à S^ν si $\alpha < \alpha_{\min}$. Par conséquent, S^ν n'est pas fermé pour la topologie de la convergence ponctuelle.

Nous allons en fait montrer que S^ν peut être muni d'une unique topologie métrisable plus forte que la convergence ponctuelle et qui le rend complet. De plus, nous verrons que cette topologie fait de S^ν un espace séparable. Pour ce faire, nous suivrons pas à pas le développement présenté dans les sections 3 à 6 de [14], où toutes les preuves des propriétés énoncées peuvent être trouvées (sauf mention d'une autre source). Ainsi, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $\beta \in \{-\infty\} \cup [0, +\infty[$, on définit l'espace vectoriel auxiliaire

$$E(\alpha, \beta) = \left\{\vec{c} \in \Omega : \exists C, C' \geq 0 \text{ tels que } \#E_j(C, \alpha)(\vec{c}) \leq C' 2^{\beta j} \ \forall j \in \mathbb{N}\right\}$$

et on pose

$$d_{\alpha,\beta}\left(\vec{c}, \vec{d}\right) = \inf\left\{C + C' : C, C' \geq 0 \text{ et } \#E_j(C, \alpha)\left(\vec{c} - \vec{d}\right) \leq C' 2^{\beta j} \ \forall j \in \mathbb{N}\right\}$$

pour tous $\vec{c}, \vec{d} \in \Omega$, de sorte que $E(\alpha, \beta)$ et $d_{\alpha,\beta}$ sont liés par la formule

$$E(\alpha, \beta) = \{\vec{c} \in \Omega : d_{\alpha,\beta}(\vec{c}, 0) < +\infty\}.$$

Le but des applications $d_{\alpha,\beta}$ étant de faciliter la construction d'une métrique sur S^ν, nous aimerions qu'il s'agisse de distances sur les espaces $E(\alpha, \beta)$ et, effectivement, pour tout

$\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $\beta \in \{-\infty\} \cup [0,+\infty[$, $d_{\alpha,\beta}$ est une distance sur $E(\alpha,\beta)$ qui est par ailleurs invariante par translation et vérifie l'inégalité

$$d_{\alpha,\beta}\left(\lambda\vec{c},\vec{0}\right) \leq \max(1,|\lambda|)\cdot d_{\alpha,\beta}\left(\vec{c},\vec{0}\right)$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $\vec{c} \in \Omega$. [3]

Pour certaines valeurs du paramètre β, l'espace $(E(\alpha,\beta), d_{\alpha,\beta})$ peut se ramener à un espace bien connu :

- Si $\beta = -\infty$, alors $(E(\alpha,-\infty), d_{\alpha,-\infty})$ est l'ensemble des suites $\vec{c}$ pour lesquelles il existe $C \geq 0$ tel que pour tout $(j,k) \in \Lambda$, $|c_{j,k}| < C2^{-\alpha j}$, c'est-à-dire l'espace de suites C^{α}.
- Si $\beta \geq 1$, alors $d_{\alpha,\beta} \leq 1$ et $E(\alpha,\beta)$ est l'ensemble Ω. De plus,
  - si $\beta > 1$, la topologie définie par $d_{\alpha,\beta}$ est équivalente à la topologie de la convergence ponctuelle,
  - si $\beta = 1$ et $\alpha > 0$, alors pour tout $\lambda \neq 0$, $d_{\alpha,1}\left(\lambda\vec{1},\vec{0}\right) = 1$. Par conséquent, il est possible de trouver une suite complexe $(\lambda_m)_{m\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 mais telle que la suite $\left(\lambda_m\vec{1}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $\vec{0}$ pour la distance $d_{\alpha,\beta}$. En particulier, les topologies définies par $d_{\alpha,\beta}$ et la convergence ponctuelle ne coïncident pas.
- Si $\beta < 1$, on peut simplement affirmer que $E(\alpha,\beta)$ n'est pas borné pour la distance $d_{\alpha,\beta}$.

En particulier, seul le cas $\beta \in [0,1]$ nous intéressera dans la suite. Résumons maintenant les propriétés de nos espaces intermédiaires.

Proposition B.11. *Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \{-\infty\} \cup [0,+\infty[$.*

(1) L'addition est continue dans $(E(\alpha,\beta), d_{\alpha,\beta})$. Cependant, si $\beta \in [0,1]$, la multiplication scalaire n'est pas continue et $(E(\alpha,\beta), d_{\alpha,\beta})$ n'est pas un espace vectoriel topologique.

(2) Toute suite qui converge (resp. qui est de Cauchy) dans $(E(\alpha,\beta), d_{\alpha,\beta})$ converge ponctuellement (resp. est ponctuellement de Cauchy). Néanmoins, les ensembles bornés sont différents dans les deux topologies : un borné pour la topologie de la convergence ponctuelle n'est pas nécessairement borné pour la distance $d_{\alpha,\beta}$ et inversement.

(3) Si B est borné dans $(E(\alpha,\beta), d_{\alpha,\beta})$, alors il existe $r > 0$ tel que

$$\begin{aligned} B &\subseteq \{\vec{c} \in \Omega : \#E_j(r,\alpha)(\vec{c}) \leq r2^{\beta j}\ \forall j \in \mathbb{N}\} \\ &\subseteq \{\vec{c} \in \Omega : \#\{k \in \Lambda_j : |c_{j,k}| > r2^{-\alpha j}\} \leq r2^{\beta j}\ \forall j \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

3. Certaines sources préfèrent introduire les espaces auxiliaires comme suit :

$$\widetilde{E(\alpha,\beta)} = \{\vec{c} \in \Omega : \exists C \geq 0 \text{ tel que } \#E_j(C,\alpha)(\vec{c}) \leq C2^{\beta j}\ \forall j \in \mathbb{N}\}$$

et

$$\widetilde{d_{\alpha,\beta}}\left(\vec{c},\vec{d}\right) = \inf\left\{C \geq 0 : \#E_j(C,\alpha)\left(\vec{c}-\vec{d}\right) \leq C2^{\beta j}\ \forall j \in \mathbb{N}\right\}.$$

Il est clair que $\widetilde{E(\alpha,\beta)} = E(\alpha,\beta)$ et il a été établi (remarque 1.3.8 de [60]) que $d_{\alpha,\beta}$ et $\widetilde{d_{\alpha,\beta}}$ définissent la même topologie.

Réciproquement, pour tous $r, r' \geq 0$ *et tous* $\alpha' \in [\alpha, +\infty[$, $\beta' \in \{-\infty\} \cup [0, \beta]$, *l'ensemble*

$$B = \{\vec{c} \in \Omega : \#\{k \in \Lambda_j : |c_{j,k}| > r2^{-\alpha' j}\} \leq r' 2^{\beta' j} \ \forall j \in \mathbb{N}\}$$

est borné dans $(E(\alpha, \beta), d_{\alpha,\beta})$ *et est fermé pour la topologie de la convergence ponctuelle.*

(4) L'espace $(E(\alpha, \beta), d_{\alpha,\beta})$ *est un espace métrique complet.*

(5) Soient $\alpha' \in]\alpha, +\infty[$ *et* $\beta' \in \{-\infty\} \cup [0, \beta[$. *Si* $(\lambda_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *est une suite complexe qui converge vers* λ *et* $(\vec{c}^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ *une suite de* $E(\alpha, \beta)$ *qui converge pour* $d_{\alpha,\beta}$ *vers* $\vec{c} \in E(\alpha', \beta')$, *alors la suite* $(\lambda_m \vec{c}^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $\lambda\vec{c}$ *pour* $d_{\alpha,\beta}$.

Une question naturelle lorsque l'on dispose d'une famille d'espaces concerne la façon dont ils pourraient éventuellement s'emboiter. Ici, nous avons clairement

$$E(\alpha, \beta) \subseteq E(\alpha', \beta') \quad \text{et} \quad d_{\alpha',\beta'} \leq d_{\alpha,\beta}$$

si $\alpha \geq \alpha'$ et $\beta \leq \beta'$.

L'étude de la prévalence nécessitant d'exhiber des compacts de l'espace ambiant, il est également utile d'en connaître dans nos espaces auxiliaires.

Proposition B.12. *Soient* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in [0, +\infty[$. *Si* B *est un sous-ensemble borné de* $(E(\alpha, \beta), d_{\alpha,\beta})$, *alors toute suite de* B *qui converge ponctuellement converge aussi dans* $(E(\alpha', \beta'), d_{\alpha',\beta'})$, *et ce quels que soient* $\alpha' \in]-\infty, \alpha[$, $\beta' \in]\beta, +\infty[$. *Par suite, s'il existe* $\alpha' \in]-\infty, \alpha[$ *et* $\beta' \in]\beta, +\infty[$ *tels que* B *est borné dans* $(E(\alpha, \beta), d_{\alpha,\beta})$, *fermé dans* $(E(\alpha', \beta'), d_{\alpha',\beta'})$ *et ponctuellement borné, alors* B *est compact dans* $(E(\alpha', \beta'), d_{\alpha',\beta'})$.

Maintenant que nous avons étudié nos espaces auxiliaires, il nous faut établir une connexion avec les espaces S^ν. Cette connexion est donnée par les égalités

$$S^\nu = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcap_{\alpha\in\mathbb{R}} E(\alpha, \nu(\alpha) + \varepsilon) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\in\mathbb{N}} E(\alpha_n, \nu(\alpha_n) + \varepsilon_m) \tag{B.2}$$

pour toute suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dense dans $\mathbb{R}$ et toute suite $(\varepsilon_m)_{m\in\mathbb{N}}$ qui décroît vers 0. Notons que l'on peut se restreindre à des valeurs de α strictement inférieures à $\alpha_{\max}$ puisque $\nu(\alpha) + \varepsilon > 1$, d'où $E(\alpha, \nu(\alpha) + \varepsilon) = \Omega$ pour tout $\alpha \geq \alpha_{\max}$. Plus que cela, on peut se borner à considérer des valeurs de α dans l'intervalle $[\alpha_z, \alpha_{\max}[$ pour n'importe quel $\alpha_z < \alpha_{\min}$ puisque

$$E(\alpha, \nu(\alpha) + \varepsilon) = E(\alpha, -\infty) \supseteq E(\alpha_z, -\infty) = E(\alpha_z, \nu(\alpha_z) + \varepsilon)$$

pour tout $\alpha < \alpha_z$. Vu la relation (B.2), il est raisonnable de munir S^ν de la topologie de la limite projective, c'est-à-dire de la topologie la plus faible qui rend les injections

$$S^\nu \hookrightarrow E(\alpha_n, \nu(\alpha_n) + \varepsilon_m)$$

continues. Encore faut-il que cette topologie soit indépendante des suites $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dense dans $\mathbb{R}$ et $\varepsilon = (\varepsilon_m)_{m\in\mathbb{N}}$ décroissante vers 0 considérées. Pour tout couple (α, ε) de telles suites et pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, notons

$$E_{m,n}^{(\alpha,\varepsilon)} = E(\alpha_n, \nu(\alpha_n) + \varepsilon_m) \quad \text{et} \quad d_{m,n}^{(\alpha,\varepsilon)} = d_{\alpha_n, \nu(\alpha_n)+\varepsilon_m},$$

ainsi que

$$d_m^{(\alpha,\varepsilon)} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \frac{d_{m,n}^{(\alpha,\varepsilon)}}{d_{m,n}^{(\alpha,\varepsilon)} + 1} \quad \text{et} \quad d^{(\alpha,\varepsilon)} = \sum_{m=0}^{+\infty} 2^{-m} d_m^{(\alpha,\varepsilon)}.$$

Dans ce cas, toutes les applications $d^{(\alpha,\varepsilon)}$ sont des distances sur S^ν et elles définissent toutes la même topologie. [4] Par conséquent, d désignera n'importe laquelle de ces distances et on se permettra d'omettre les exposants (α, ε). Le résultat suivant résume les propriétés de l'espace (S^ν, d) et conclut l'étude de la topologie de S^ν.

Proposition B.13. *Soient $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dense de $\mathbb{R}$ et $(\varepsilon_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite qui décroît vers 0.*

(1) La topologie définie par d sur S^ν est la plus faible qui rend toutes les inclusions $S^\nu \hookrightarrow E_{m,n}$ continues.

(2) Une suite de S^ν est de Cauchy pour la distance d si et seulement si c'est une suite de Cauchy dans $(E_{m,n}, d_{m,n})$ pour tous $m, n \in \mathbb{N}$.

(3) Une suite de S^ν converge pour la distance d si et seulement si elle converge dans $(E_{m,n}, d_{m,n})$ pour tous $m, n \in \mathbb{N}$.

(4) La topologie induite par d sur S^ν est plus forte que la topologie de la convergence ponctuelle.

(5) L'espace (S^ν, d) est un espace vectoriel topologique.

(6) L'espace métrique (S^ν, d) est complet et la distance d est invariante par translation.

(7) Pour tout $\vec{c} \in S^\nu$, si la suite $\vec{c}^{(N)}$ est définie pour tout $N \in \mathbb{N}$ par

$$c_{j,k}^{(N)} = \begin{cases} c_{j,k} & si\ j \leq N, k \in \Lambda_j \\ 0 & si\ j > N, k \in \Lambda_j \end{cases},$$

alors $(\vec{c}^{(N)})_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers $\vec{c}$ dans (S^ν, d). Par conséquent, l'ensemble

$$\{\vec{c} \in S^\nu : \exists N \in \mathbb{N} \ \ tel\ que\ \forall (j,k) \in \Lambda, c_{j,k} \in \mathbb{Q} + i\,\mathbb{Q} \ \ et\ c_{j,k} = 0 \ \ si\ j \geq N\}$$

est une partie dense dénombrable de (S^ν, d) et cet espace est séparable.

4. Ce résultat peut être montré à la main ou déduit de la proposition B.13. En effet, le théorème du graphe fermé implique que toutes les distances sur S^ν qui définissent une topologie complète plus forte que la convergence ponctuelle, deux propriétés qui seront avérées dans le résultat suivant, sont nécessairement équivalentes (proposition 1.3.14 de [60]).

(8) Pour toutes suites $(C_{m,n})_{m,n\in\mathbb{N}}, (C'_{m,n})_{m,n\in\mathbb{N}}$ de $[0,+\infty[$, posons

$$K_{m,n} = \left\{\vec{c} \in S^\nu : \#\{k \in \Lambda_j : |c_{j,k}| > C_{m,n}2^{-\alpha_n j}\} \leq C'_{m,n}2^{j(\nu(\alpha_n)+\varepsilon_m)}\ \forall j \in \mathbb{N}\right\}$$

et

$$K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\in\mathbb{N}} K_{m,n}.$$

Toute suite de K qui converge ponctuellement converge également dans S^ν vers un élément de K. Il s'ensuit que K est un compact de S^ν. Par conséquent, un sous-ensemble $\widetilde{K}$ de S^ν est compact dans (S^ν, d) si et seulement s'il est fermé dans (S^ν, d) et si pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, il existe $C_{m,n}, C'_{m,n} \geq 0$ tels que

$$\widetilde{K} \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\in\mathbb{N}} K_{m,n}.$$

Puisque les espaces auxiliaires étaient dans certains cas liés aux espaces de Hölder, on s'attend à retrouver cette affinité avec les espaces S^ν. Plus précisément, si $\alpha_{\min} > 0$ et $\alpha < \alpha_{\min}$, alors $\nu(\alpha) = -\infty$ et $E(\alpha, \nu(\alpha) + \varepsilon) = C^\alpha$. Par conséquent, $S^\nu \subseteq \bigcap_{0<\alpha<\alpha_{\min}} C^\alpha$ et les éléments de S^ν sont uniformément de Hölder. Cela justifie que, lorsque l'on étudie les propriétés multifractales de fonctions dans l'espace S^ν, on ajoute l'hypothèse $\alpha_{\min} > 0$ afin qu'il soit possible d'utiliser la caractérisation B.1 de la régularité ponctuelle via les coefficients d'ondelettes.

Il est également possible d'établir un lien entre espaces S^ν et espaces de Besov qui confirme que les espaces S^ν renferment plus d'information (section 8 de [14]).

Proposition B.14. *Si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dense de $]0,+\infty[$ et si $(\varepsilon_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite de $]0,+\infty[$ qui converge vers 0, alors*

$$S^\nu \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\in\mathbb{N}} b_{p_n,\infty}^{\frac{\eta(p_n)}{p_n}-\varepsilon_m} = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcap_{p>0} b_{p,\infty}^{\frac{\eta(p)}{p}-\varepsilon},$$

où η est défini par

$$\eta(p) = \inf_{\alpha\geq\alpha_{\min}} (\alpha p - \nu(\alpha)) + 1$$

pour tout $p > 0$. L'inclusion devient une égalité si et seulement si ν est concave, auquel cas la topologie définie sur S^ν par d est équivalente à la topologie la plus faible qui rend chaque identité $S^\nu \to b_{p_n,\infty}^{\frac{\eta(p_n)}{p_n}-\varepsilon_m}$ continue.

Pour conclure cette présentation, discutons brièvement du formalisme multifractal associé à l'espace S^ν. Il est donné par la formule

$$d^\nu(h) = \begin{cases} h \sup_{h'\in]0,h]} \frac{\nu(h')}{h'} & \text{si } h \leq h_{\max} \\ 1 & \text{si } h > h_{\max} \end{cases},$$

où $h_{\max} = \inf_{h\geq\alpha_{\min}} \frac{h}{\nu(h)}$, et le théorème suivant établit la validité de ce formalisme.

Théorème B.15. *Si* $\alpha_{\min} > 0$, *alors*

(1) $d_f \leq d^\nu$ *pour tout* $f \in S^\nu$ *([11, 12]),*

(2) l'ensemble

$$\{f \in S^\nu : d_f(h) = d^\nu(h)\ \forall h \leq h_{\max} \text{ et } d_f(h) = -\infty\ \forall h > h_{\max}\}$$

est résiduel (théorème 13 de [8]) et prévalent (théorème 2 de [11]) dans S^ν.

Bibliographie

[1] S. J. Agronsky et A. M. Bruckner, *Local Compactness and Porosity in Metric Spaces*, Real Anal. Exch. **11** (1986), p. 365-379.

[2] C. D. Aliprantis et K. C. Border, *Infinite Dimensional Analysis : A Hitchhiker's Guide*, 3e éd., Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[3] R. M. Anderson et W. R. Zame, *Genericity with Infinitely Many Parameters*, Advances in Theoretical Economics **1** (2001), no 1, p. 1-62.

[4] V. Anisiu, *Porosity and continuous, nowhere differentiable functions*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **2** (1993), no 1, p. 5-14.

[5] A. Arneodo et S. Jaffard, *L'analyse multifractale des signaux*, Page Web du CNRS, 15 octobre 2004, disponible via l'URL `<https://images.math.cnrs.fr/L-analyse-multifractale-des-signaux.html>`, consulté le 13 mars 2024.

[6] R. Aron, V. I. Gurariy et J. B. Seoane, *Lineability and spaceability of sets of functions on* $\mathbb{R}$, Proc. Am. Math. Soc. **133** (2004), no 3, p. 795-803.

[7] N. Aronszajn, *Differentiability of Lipschitzian mappings between Banach spaces*, Stud. Math. **57** (1976), p. 147-190.

[8] J.-M. Aubry et F. Bastin, *A walk from multifractal analysis to functional analysis with* $\mathcal{S}^\nu$ *spaces, and back*, Recent Developments in Fractals and Related Fields (J. Barral et S. Seuret, éds), From the series "Applied and Numerical Harmonic Analysis", Birkhäuser, Boaston, 2010, p. 93-106.

[9] J.-M. Aubry et F. Bastin, *Advanced topology on the multiscale sequence spaces* S^ν, J. Math. Anal. Appl. **350** (2009), no 2, p. 439-454.

[10] J.-M. Aubry et F. Bastin, *Diametral dimension of some pseudoconvex multiscale spaces*, Stud. Math. **197** (2010), no 1, p. 27-42.

[11] J.-M. Aubry, F. Bastin et S. Dispa, *Prevalence of Multifractal Functions in* S^ν *Spaces*, J. Fourier Anal. Appl. **13** (2007), no 2, p. 175-185.

[12] J.-M. Aubry et S. Jaffard, *Random Wavelet Series*, Commun. Math. Phys. **227** (2002), no 3, p. 483-514.

[13] J.-M. Aubry *et al.*, *The spaces* S^ν *: New spaces defined with wavelet coefficients and related to multifractal analysis*, International journal of applied mathematics and statistics **7** (2007), p. 82-95.

[14] J.-M. Aubry *et al.*, *Topological properties of the sequence spaces S^ν*, J. Math. Anal. Appl. **321** (2006), nº 1, p. 364-387.

[15] H. Auerbach et S. Banach, *Über die Höldersche Bedingung*, Stud. Math. **3** (1931), p. 180-184.

[16] R. Baire, *Leçons sur les fonctions discontinues*, Collection de monographies sur la théorie des fonctions, Gauthier-Villars, Paris, 1905.

[17] R. Baire, *Sur les fonctions de variables réelles*, Annali di matematica pura ed applicata **3** (1899), nº 1, p. 1-123.

[18] R. Balka, U. B. Darji et M. Elekes, *Bruckner-Garg-type results with respect to Haar null sets in $C[0,1]$*, Proc. Edinb. Math. Soc. (2) **60** (2017), nº 1, p. 17-30.

[19] R. Balka, U. B. Darji et M. Elekes, *Hausdorff and packing dimension of fibers and graphs of prevalent continuous maps*, Adv. Math. **293** (2016), p. 221-274.

[20] S. Banach, *Über die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionenmengen.* Stud. Math. **3** (1931), p. 174-179.

[21] F. Bastin, C. Esser et S. Jaffard, *Large deviation spectra based on wavelet leaders*, Rev. Mat. Iberoam. **32** (2016), nº 3, p. 859-890.

[22] F. Bastin, C. Esser et S. Nicolay, *Prevalence of "nowhere analyticity"*, Stud. Math. **210** (2012), nº 3, p. 239-246.

[23] F. Bastin, C. Esser et L. Simons, *Topology on new sequence spaces defined with wavelet leaders*, J. Math. Anal. Appl. **431** (2015), nº 1, p. 317-341.

[24] F. Bastin *et al.*, *Algebrability and nowhere Gevrey differentiability*, Isr. J. Math. **205** (2015), p. 127-143.

[25] Y. Benyamini et J. Lindenstrauss, *Geometric Nonlinear Functional Analysis. Volume 1.* Vol. 48, AMS Colloquium Publications, American Mathematical Society, Providence, 2000.

[26] S. K. Berberian, *Lectures in Functional Analysis and Operator Theory.* Vol. 15, Grad. Texts Math. Springer-Verlag, New-York, 1974.

[27] L. Bernal-González, *Lineability of sets of nowhere analytic functions*, J. Math. Anal. Appl. **340** (2008), nº 2, p. 1284-1295.

[28] C. Bessaga et A. Pełczyński, *Selected topics in infinite-dimensional topology.* Vol. 58, Monogr. Mat. PWN - Polish scientific publishers, Warszawa, 1975.

[29] P. Billard *et al.*, *Biorthogonal Systems of Random Unconditional Convergence in Banach Spaces*, Texas Functional Analysis Seminar 1985–1986, Longhorn Notes, Univ. Texas, Austin, 1986, p. 13-35.

[30] P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, 2e éd., Wiley Ser. Probab. Stat. Wiley, Chichester, 1999.

[31] J. M. Borwein et A. S. Lewis, *Convex Analysis and Nonlinear Optimization : Theory and Examples*, 2e éd. Vol. 3, CMS Books Math. Springer, New York, 2006.

[32] J. M. Borwein et W. B. Moors, *Null sets and essentially smooth Lipschitz functions*, SIAM J. Optim. **8** (1998), nº 2, p. 309-323.

[33] J. M. Borwein et D. Noll, *Second order differentiability of convex functions in Banach spaces*, Trans. Am. Math. Soc. **342** (1994), nº 1, p. 43-81.

[34] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Topologie générale : Chapitres 1 à 4*, Springer-Verlag, Berlin, 2007, Réimpression inchangée de l'édition originale de 1971.

[35] A. M. Bruckner, J. B. Bruckner et B. S. Thomson, *Real analysis*, Prentice-Hall International, New Jersey, 1997.

[36] A. M. Bruckner et K. M. Garg, *The level structure of a residual set of continuous functions*, Trans. Am. Math. Soc. **232** (1977), p. 307-321.

[37] P. S. Bullen, *Denjoy's index and porosity*, Real Anal. Exch. **10** (1985), p. 85-144.

[38] J. P. R. Christensen, *Measure Theoretic Zero Sets in Infinite Dimensional Spaces and Applications to Differentiability of Lipschitz Mappings*, Publ. Dép. Math. (Lyon) **10** (1973), nº 2, p. 29-39.

[39] J. P. R. Christensen, *On sets of Haar measure zero in abelian Polish groups*, Israel J. Math. **13** (1972), p. 255-260.

[40] M. P. Cohen et R. R. Kallman, *Openly Haar null sets and conjugacy in Polish groups*, Israel J. Math. **215** (2016), nº 1, p. 1-30.

[41] Mathematics Stack Exchange contributors, *Examine if the positive cones $C_+[a,b]$ and c_0^+ of $C[a,b]$ and c_0 have interior points*, Page Web "Math Stack Exchange", disponible via l'URL `<https://math.stackexchange.com/questions/4153115/examine-if-the-positive-cones-c-a-b-and-c-0-of-ca-b-and-c-0>`, consulté le 26 avril 2024.

[42] Mathematics Stack Exchange contributors, *How badly can Dini's theorem fail if the p.w. limit isn't continuous ?*, Page Web "Math Stack Exchange", disponible via l'URL `<https://math.stackexchange.com/questions/102482/how-badly-can-dinis-theorem-fail-if-the-p-w-limit-isnt-continuous>`, consulté le 16 janvier 2024.

[43] Mathematics Stack Exchange contributors, *Locally compact Hausdorff topological vector spaces are finite-dimensional*, Page Web "Math Stack Exchange", disponible via l'URL `<https://math.stackexchange.com/questions/1570900/locally-compact-hausdorff-topological-vector-spaces-are-finite-dimensional>`, consulté le 3 mars 2024.

[44] U. B. Darji, *On Haar meager sets*, Topology Appl. **160** (2013), nº 18, p. 2396-2400.

[45] U. B. Darji et D. Swanson, *A note on the generic nature of Pringsheim functions*, Adv. Pure Appl. Math. **7** (2016), nº 4, p. 231-236.

[46] U. B. Darji et S. C. White, *Haar ambivalent sets in the space of continuous functions*, Acta Math. Hung. **126** (2010), nº 3, p. 230-240.

[47] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets.* Vol. 61, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, Society for Industrial et Applied Mathematics, Philadelphia, 1992.

[48] A. Deliège, *Analyse de la régularité hölderienne : De la théorie à l'application des séries temporelles de températures*, mém. de mast., Université de Liège, Liège, 2013.

[49] A. Denjoy, *Sur une propriété de séries trigonométriques.* Amst. Ak. Versl. **29** (1920), p. 628-639.

[50] P. Dodos, *Dichotomies of the set of test measures of a Haar-null set*, Isr. J. Math. **144** (2004), p. 15-28.

[51] E. P. Dolženko, *Boundary properties of arbitrary functions*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **31** (1967), p. 3-14.

[52] R. Dougherty, *Examples of non-shy sets*, Fundam. Math. **144** (1994), n° 1, p. 73-88.

[53] M. Einsiedler et T. Ward, *Ergodic Theory : With a view towards Number Theory.* Vol. 259, Grad. Texts Math. Springer-Verlag, London, 2011.

[54] M. Elekes et D. Nagy, *Haar null and Haar meager sets : a survey and new results*, Bull. Lond. Math. Soc. **52** (2020), n° 4, p. 561-619.

[55] M. Elekes et J. Steprāns, *Haar Null Sets and the Consistent Reflection of Non-meagreness*, Can. J. Math. **66** (2014), n° 2, p. 303-322.

[56] M. Elekes et Z. Vidnyánszky, *Haar null sets without G_δ hulls*, Isr. J. Math. **209** (2015), p. 199-214.

[57] M. Elekes et Z. Vidnyánszky, *Naively Haar null sets in Polish groups*, J. Math. Anal. Appl. **446** (2017), n° 1, p. 193-200.

[58] P. Erdős, *Some Remarks on Set Theory*, Ann. Math. (2) **44** (1943), n° 4, p. 643-646.

[59] C. Esser, *Analyse fonctionnelle*, Syllabus (année académique 2020 – 2021) et notes de cours manuscrites (année académique 2022 – 2023), Université de Liège.

[60] C. Esser, *Les espaces de suites S^ν : Propriétés topologiques, localement convexes et de prévalence*, mém. de mast., Université de Liège, Liège, 2011.

[61] C. Esser, *Regularity of functions : Genericity and multifractal analysis*, thèse de doct., Université de Liège, 2014.

[62] C. Esser, *Topologie générale*, Notes de cours manuscrites (année académique 2021 – 2022), Université de Liège.

[63] H. Federer, *Geometric Measure Theory.* Vol. 153, Grundlehren Math. Wiss. Springer-Verlag, Berlin, 1969.

[64] C. Fefferman, *Pointwise Convergence of Fourier Series*, Ann. Math. (2) **98** (1973), n° 3, p. 551-571.

[65] J. Foran, *Continuous functions need not have σ-porous graphs*, Real Anal. Exch. **11** (1986), p. 194-203.

[66] J. Foran et P. D. Humke, *Some set theoretic properties of σ-porous sets*, Real Anal. Exch. **6** (1981), p. 114-119.

[67] A. Fraysse, *Generic validity of the multifractal formalism*, SIAM J. Math. Anal. **39** (2007), nº 2, p. 593-607.

[68] A. Fraysse, *Résultats de généricité en analyse multifractale*, thèse de doct., Université Paris XII Val de Marne, 2005.

[69] A. Fraysse, S. Jaffard et J.-P. Kahane, *Quelques propriétés génériques en analyse*, C. R. Acad. Sci. Paris **340** (2005), nº 9, p. 645-651.

[70] P. M. Gandini et T. Zamfirescu, *The level set structure of nearly all real continuous functions*, Supplemento ai Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Convegno Internazionale di Topologia in Italia, Lecce - Otranto (septembre 1990), 2, nº 29, Circolo Matematico di Palermo, Palermo, 1992, p. 407-414.

[71] P. M. Gandini et A. Zucco, *Porosity and typical properties of real-valued continuous functions*, Abh. Math. Semin. Univ. Hamb. **59** (1989), p. 15-21.

[72] K. M. Garg, *On bilateral derivates and the derivative*, Trans. Am. Math. Soc. **210** (1975), p. 295-329.

[73] I. M. Gel'fand et N. Y. Vilenkin, *Generalized Functions.* Vol. 4 : *Applications of Harmonic Analysis*, Academic Press, New York et London, 1964, Translated from the Russian by Amiel Feinstein.

[74] V. I. Gurarij, *Subspaces and bases in spaces of continuous functions*, Sov. Math., Dokl. **7** (1966), p. 500-502.

[75] G. Hamel, *Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung : $f(x+y) = f(x) + f(y)$*. Math. Ann. **60** (1905), p. 459-462.

[76] G.H. Hardy, *Weierstrass's Non-Differentiable Function*, Transactions of the American Mathematical Society **17** (1916), nº 3, p. 301-325.

[77] K. Hartnett, *Mathematician Proves Huge Result on 'Dangerous' Problem*, Page Web du QuantaMagazine, 11 décembre 2019, disponible via l'URL `<https://www.quantamagazine.org/mathematician-proves-huge-result-on-dangerous-problem-20191211>`, consulté le 13 mars 2024.

[78] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Verlag, Leipzig, 1914.

[79] C. Heil, *A Basis Theory Primer*, Expanded ed., Appl. Numer. Harmon. Anal. Birkhäuser, New York, 2011.

[80] G. Högnäs et A. Mukherjea, *Probability Measures on Semigroups : Convolution Products, Random Walks and Random Matrices*, 2$^{\text{e}}$ éd., Probability and Its Applications, Springer, New York, 2011.

[81] P. D. Humke, *A criterion for the nonporosity of a general Cantor set*, Proc. Am. Math. Soc. **111** (1991), nº 2, p. 365-372.

[82] P. D. Humke et T. Vessey, *Another Note on σ-Porous Sets*, Real Anal. Exch. **8** (1983), p. 262-271.

[83] B. R. Hunt, *The prevalence of continuous nowhere differentiable functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **122** (1994), n° 3, p. 711-717.

[84] B. R. Hunt, T. Sauer et J. A. Yorke, *Prevalence : an addendum*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **28** (1993), n° 2, p. 306-307.

[85] B. R. Hunt, T. Sauer et J. A. Yorke, *Prevalence : a translation-invariant "almost every" on infinite-dimensional spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **27** (1992), n° 2, p. 217-238.

[86] E. Jabłońska, *Some analogies between Haar meager sets and Haar null sets in abelian Polish groups*, J. Math. Anal. Appl. **421** (2015), n° 2, p. 1479-1486.

[87] S. Jaffard, *Beyond Besov Spaces Part 1 : Distributions of Wavelet Coefficients*, Journal of Fourier Analysis and Applications **10** (2004), p. 221-246.

[88] S. Jaffard, *On the Frisch-Parisi conjecture*, J. Math. Pures Appl. (9) **79** (2000), n° 6, p. 525-552.

[89] S. Jaffard, *Pointwise smoothness, two-microlocalization and wavelet coefficients*, Publ. Mat., Barc. **35** (1991), n° 1, p. 155-168.

[90] S. Jaffard, *Wavelet Techniques in Multifractal Analysis*, Fractal Geometry and Applications : A Jubilee of Benoît Mandelbrot : Multifractals, Probability and Statistical Mechanics, Applications (M. L. Lapidus et M. van Frankenhuijsen, éds), vol. 72.2, Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc., Providence, 2004, p. 91-151.

[91] S. Jaffard et B. B. Mandelbrot, *Local Regularity of Nonsmooth Wavelet Expansions and Application to the Polya Function*, Adv. Math. **120** (1996), n° 39, p. 265-282.

[92] V. Jarnik, *Über die Differenzierbarkeit stetiger Funktionen.* Fundam. Math. **21** (1933), p. 48-58.

[93] P. Jiménez-Rodríguez, G. A. Muñoz-Fernández et J. B. Seoane-Sepúlveda, *On Weierstrass' monsters and lineability*, Bull. Belg. Math. Soc. - Simon Stevin **20** (2013), n° 4, p. 577-586.

[94] J. Jost, *Postmodern analysis*, 3e éd., Universitext, Springer, Berlin, 2005.

[95] J.-P. Kahane, *Baire's category theorem and trigonometric series*, J. Anal. Math. **80** (2000), p. 143-182.

[96] J.-P. Kahane, *Propriétés prévalentes, versus génériques, des images continues*, Bull. Sci. Math. **130** (2006), n° 2, p. 97-109.

[97] V. Y. Kaloshin, *Prevalence in the Space of Finitely Smooth Maps*, Funct. Anal. Appl. **31** (1997), n° 2, p. 95-99.

[98] R. Kaufman, *A functional method for linear sets*, Isr. J. Math. **5** (1967), p. 185-187.

[99] A. S. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory.* Vol. 156, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New-York, 1995.

[100] S. Kierst et E. Szpilrajn, *Sur certaines singularités des fonctions analytiques uniformes.* Fundam. Math. **21** (1933), p. 276-294.

[101] V. L. JR. Klee, *Invariant metrics in groups (solution of a problem of Banach)*, Proc. Am. Math. Soc. **3** (1952), p. 484-487.

[102] M. Koc, *Sigma-porous sets and the differentiation theory*, thèse de doct., Charles University in Prague, 2011.

[103] J. Kolář, *Porous sets that are Haar null, and nowhere approximately differentiable functions*, Proc. Am. Math. Soc. **129** (2000), n° 5, p. 1403-1408.

[104] P. Lefèvre, *Topological dichotomy and unconditional convergence*, Serdica Math. J. **25** (1999), n° 4, p. 297-310.

[105] J. Leroy, *Théorie ergodique*, Notes de cours manuscrites (année académique 2022 – 2023), Université de Liège.

[106] D. Li et H. Queffélec, *Introduction à l'étude des espaces de Banach : Analyse et probabilités*. Vol. 12, Cours Spécialisés, Société Mathématique de France, Paris, 2004.

[107] J. Lindenstrauss et D. Preiss, *On Fréchet differentiability of Lipschitz maps between Banach spaces*, Ann. Math. (2) **157** (2003), n° 1, p. 257-288.

[108] L. Loosveldt, *Processus stochastiques*, Syllabus et notes de cours manuscrites (année académique 2023 – 2024), Université de Liège.

[109] J. Lopez-Abad et P. Tradacete, *Bases of random unconditional convergence in Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **368** (2016), n° 12, p. 9001-9032.

[110] D. Maman, *Généricité et prévalence des propriétés multifractales de traces de fonctions*, thèse de doct., Université Paris-Est, 2013.

[111] S. Mandelbrojt, *Analytic functions and classes of infinitely differentiable functions : Part I. Infinitely differentiable functions*, A series of lectures delivered at The Rice Institute during the academic year 1940–1941, disponible via l'URL <`https://core.ac.uk/download/pdf/4465385.pdf`>, consulté le 23 mars 2024.

[112] P. Mankiewicz, *On the differentiability of Lipschitz mappings in Fréchet spaces*, Stud. Math. **45** (1973), p. 15-29.

[113] E. Matoušková, *The Banach-Saks property and Haar null sets*, Comment. Math. Univ. Carolin. **39** (1998), n° 1, p. 71-80.

[114] E. Matoušková et C. Stegall, *A characterization of reflexive Banach spaces*, Proc. Am. Math. Soc. **124** (1996), n° 4, p. 1083-1090.

[115] P. Mattila, *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces : Fractals and rectifiability*. Vol. 44, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[116] R. D. Mauldin, *The set of continuous nowhere differentiable functions*, Pac. J. Math. **83** (1979), n° 1, p. 199-205.

[117] R. D. Mauldin, *The set of continuous nowhere differentiable functions : A correction*, Pac. J. Math. **121** (1986), n° 1, p. 119-120.

[118] S. Mazurkiewicz, *Sur les fonctions non dérivables*. Stud. Math. **3** (1931), p. 92-94.

[119] M. E. Mera *et al.*, *Porosity, σ-porosity and measures*, Nonlinearity **16** (2003), n° 1, p. 247-255.

[120] Y. Meyer, *Wavelets and operators*. Vol. 37, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 1992, Translated from the 1990 French original by D. H. Salinger.

[121] D. Montgomery et L. Zippin, *Topological transformation groups*. Vol. 1, Intersci. Tracts Pure Appl. Math. Interscience Publishers, New York, 1955.

[122] P. Mörters et Y. Peres, *Brownian motion. With an appendix by Oded Schramm and Wendelin Werner*. Vol. 30, Camb. Ser. Stat. Probab. Math. Cambridge : Cambridge University Press, 2010.

[123] J. Mycielski, *Some unsolved problems on the prevalence of ergodicity, instability, and algebraic independence*, Ulam Q. **1** (1992), n° 3, p. 30-37.

[124] S. Nicolay, *Théorie de la mesure*, Syllabus (année académique 2021 – 2022), Université de Liège.

[125] W. Ott et J. A. Yorke, *Prevalence*, Bull. Am. Math. Soc. (N.S.) **42** (2005), n° 3, p. 263-290.

[126] J. C. Oxtoby, *Measure and Category : A Survey of the Analogies between Topological and Measure Spaces*, 2e éd. Vol. 2, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1980.

[127] G. Parisi et U. Frisch, *On the singularity structure of fully developed turbulence in turbulence and predictability in geophysical fluid dynamics and climate dynamics*, NTurbulence and Predictability of Geophysical Flows and Climate Dynamics **88** (1985).

[128] K. R. Parthasarathy, *Probability Measures on Metric Spaces*, Probability and Mathematical Statistics : A Series of Monographs and Textbooks, Academic Press, New York, 1967.

[129] J. Peypouquet, *Convex Optimization in Normed Spaces : Theory, Methods and Examples*, SpringerBriefs Optim. Springer, Cham, 2015.

[130] R. R. Phelps, *Gaussian null sets and differentiability of Lipschitz map on Banach spaces*, Pac. J. of M. **77** (1978), n° 2, p. 523-531.

[131] H. Poincaré, *Science et Méthode*, Ernest Flammarion, Paris, 1908.

[132] D. Preiss et J. Tišer, *Two Unexpected Examples Concerning Differentiability of Lipschitz Functions on Banach Spaces*, Geometric aspects of functional analysis (J Lindenstrauss et V. Milman, éds), vol. 77, Operator Theory Advances and Applications, From Israel Seminar (GAFA) 1992–94, Birkhäuser, Basel, 1995, p. 219-238.

[133] D. Preiss et L. Zajíček, *Fréchet Differentiation of Convex Functions in a Banach Space with a Separable Dual*, Proc. Am. Math. Soc. **91** (1984), n° 2, p. 202-204.

[134] D. Preiss et L. Zajíček, *Sigma-porous sets in products of metric spaces and sigma-directionally porous sets in Banach spaces*, Real Anal. Exchange **24** (1998/99), n° 1, p. 295-314.

[135] T. I. Ramsamujh, *Nowhere Analytic C^∞ Functions*, J. Math. Anal. Appl. **160** (1991), p. 263-266.

[136] C. Rosendal, *Automatic Continuity of Group Homomorphisms*, Bull. Symb. Log. **15** (2009), n° 2, p. 184-214.

[137] R. Rouvière, *Théorème de Baire et applications*, 2004, disponible via l'URL `<https://math.univ-cotedazur.fr/~frou/topologie/Baire.pdf>`, consulté le 21 février 2024.

[138] W. Rudin, *Functional analysis*, 2e éd., McGraw-Hill, New York, 1991.

[139] C. Ryll-Nardzewski, *D. Blackwell's conjecture on power series with random coefficients*, Stud. Math. **13** (1953), p. 30-36.

[140] S. Saks, *On the functions of Besicovitch in the space of continuous functions.* Fundam. Math. **19** (1932), p. 211-219.

[141] A. Sard, *The measure of the critical values of differentiable maps*, Bull. Am. Math. Soc. **48** (1942), p. 883-890.

[142] H. H. Schaefer et M. P. Wolff, *Topological Vector Spaces.* 2e éd. Vol. 3, Grad. Texts Math. Springer-Verlag, New York, 1999.

[143] J. Schauder, *Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen.* Math. Z. **26** (1927), p. 47-65.

[144] J.-P. Schneiders, *Analyse complexe*, Notes de cours manuscrites (année académique 2021 – 2022), Université de Liège.

[145] L. Schwartz, *Analyse : Deuxième partie, Topologie générale et analyse fonctionnelle*, Collection Enseignement des sciences, 11, Hermann, Paris, 1970.

[146] H. Shi, *Measure-theoretic notions of prevalence*, thèse de doct., Simon Fraser University, 1997.

[147] W. Sierpiński, *Démonstration élémentaire du théorème sur la densité des ensembles.* Fundam. Math. **4** (1923), p. 167-171.

[148] W. Sierpiński, *Sur la dualité entre la première catégorie et la mesure nulle*, Fundam. Math. **22** (1934), p. 276-280.

[149] S. Solecki, *Amenability, free subgroups, and Haar null sets in non-locally compact groups*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **93** (2006), n° 3, p. 693-722.

[150] S. M. Srivastava, *A Course on Borel Sets.* Vol. 180, Grad. Texts Math. Springer-Verlag, New York, 1998.

[151] T. Tao, *Almost all orbits of the Collatz map attain almost bounded values*, Forum of Mathematics, Pi **10** (2022), n° e12, p. 1-56.

[152] T. Tao, *Locally compact topological vector spaces*, Page Web "Terry Tao Wordpress", 24 mai 2011, disponible via l'URL `<https://terrytao.wordpress.com/2011/05/24/locally-compact-topological-vector-spaces/>`, consulté le 3 mars 2024.

[153] B. S. Thomson, *Derivation bases on the real line, II*, Real Anal. Exch. **8** (1983), p. 278-442.

[154] B. S. Thomson, *Real functions*. Vol. 1170, Lect. Notes Math. Springer, Berlin, 1985.

[155] F. Topsøe et J. Hoffmann-Jørgensen, « Analytic Spaces and Their Applications », in : *Analytic sets* (Rogers C. A., éds), Academic Press, London, 1980, p. 317-401.

[156] R. W. Vallin, *An introduction to shell porosity*, Real Anal. Exch. **18** (1993), n° 2, p. 294-320.

[157] K. Weierstrass, *Über continuirliche Functionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen*, Mathematische werke, Cambridge University Press, 1872, p. 71-74.

[158] Y. Yamasaki, *Measures on infinite dimensional spaces*. Vol. 5, Series in Pure Mathematics, World Scientific, Philadelphia, 1985.

[159] Z. Zahorski, *Sur l'ensemble des points singuliers d'une fonction d'une variable réelle admettant les dérivées de tous les ordres*, Fundamenta Mathematicae **34** (1947), p. 183-245.

[160] L. Zajíček, *On σ-porous sets in abstract spaces*, Abstr. Appl. Anal. **2005** (2005), n° 5, p. 509-534.

[161] L. Zajíček, *On differentiability properties of typical continuous functions and Haar null sets*, Proc. Am. Math. Soc. **134** (2005), n° 4, p. 1143-1151.

[162] L. Zajíček, *Porosity and σ-porosity*, Real Anal. Exchange **13** (1987–88), n° 2, p. 314-350.

[163] L. Zajíček, *Products of Non-σ-Porous sets and Foran Systems*, Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena **44** (1996), n° 2, p. 497-505.

[164] L. Zajíček, *Sets of σ-porosity and sets of σ-porosity* (q), Čas. Pěstování Mat. **101** (1976), n° 4, p. 350-359.

[165] M. Zelený, *The Banach-Mazur game and σ-porosity*, Fundam. Math. **150** (1996), n° 3, p. 197-210.