

Mémoire

Auteur : Dalem, Fanny

Promoteur(s) : Rigo, Michel

Faculté : Faculté des Sciences

Diplôme : Master en sciences mathématiques, à finalité approfondie

Année académique : 2023-2024

URI/URL : <http://hdl.handle.net/2268.2/19911>

Avertissement à l'attention des usagers :

Tous les documents placés en accès ouvert sur le site le site MatheO sont protégés par le droit d'auteur. Conformément aux principes énoncés par la "Budapest Open Access Initiative"(BOAI, 2002), l'utilisateur du site peut lire, télécharger, copier, transmettre, imprimer, chercher ou faire un lien vers le texte intégral de ces documents, les disséquer pour les indexer, s'en servir de données pour un logiciel, ou s'en servir à toute autre fin légale (ou prévue par la réglementation relative au droit d'auteur). Toute utilisation du document à des fins commerciales est strictement interdite.

Par ailleurs, l'utilisateur s'engage à respecter les droits moraux de l'auteur, principalement le droit à l'intégrité de l'oeuvre et le droit de paternité et ce dans toute utilisation que l'utilisateur entreprend. Ainsi, à titre d'exemple, lorsqu'il reproduira un document par extrait ou dans son intégralité, l'utilisateur citera de manière complète les sources telles que mentionnées ci-dessus. Toute utilisation non explicitement autorisée ci-avant (telle que par exemple, la modification du document ou son résumé) nécessite l'autorisation préalable et expresse des auteurs ou de leurs ayants droit.



FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE

Polynôme chromatique de graphes

Mémoire de fin d'études présenté en vue de l'obtention du titre de
Master en Sciences Mathématiques, à finalité approfondie

Année académique 2023-2024

Auteur :
Fanny DALEM

Promoteur :
Michel RIGO

Remerciements

Je souhaite tout d'abord remercier tout particulièrement mon promoteur, Michel Rigo, pour sa disponibilité constante, son suivi attentif, ses précieux conseils et ses relectures assidues tout au long de l'élaboration de ce mémoire.

Je tiens également à remercier les membres du jury, Gentine Haesbroeck, Jean-Pierre Schneiders et Julien Leroy, ainsi que la lectrice externe, Manon Stipulanti, pour avoir accepté de lire ce travail et de participer à sa défense.

Je souhaite également exprimer ma gratitude envers mes amis et ma famille pour leur soutien indéfectible, leurs encouragements constants et leur aide tout au long de mon parcours à l'Université de Liège.

Enfin, je tiens à adresser mes remerciements les plus chaleureux à mes amis étudiants en mathématiques, en particulier Marie, pour les moments agréables partagés et leur aide précieuse. Je souhaite également remercier de tout cœur Julie pour les souvenirs inoubliables partagés, ainsi que sa compréhension, son aide et son soutien inconditionnels tout au long de notre parcours universitaire.

Table des matières

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Le nombre chromatique d'un graphe : rappels | 9 |
| 1.1 | Définitions préliminaires de théorie des graphes | 9 |
| 1.2 | Notions de coloriage et de nombre chromatique | 10 |
| 1.3 | Le nombre chromatique de différentes familles de graphes | 12 |
| 1.4 | Le nombre chromatique de graphes inhabituels | 23 |
| 2 | Encadrement du nombre chromatique d'un graphe | 27 |
| 2.1 | Les graphes de Mycielski | 27 |
| 2.2 | Bornes inférieures | 33 |
| 2.3 | Bornes supérieures | 34 |
| 2.4 | Le théorème de Brooks | 44 |
| 3 | Le polynôme chromatique d'un graphe | 61 |
| 3.1 | Notions de coloriage propres distincts et de polynôme chromatique | 61 |
| 3.2 | Le théorème de Suppression-Contraction | 65 |
| 3.3 | Le polynôme chromatique de différentes familles de graphes | 68 |
| 3.4 | Propriétés du polynôme chromatique et de ses coefficients | 81 |
| 3.5 | Équivalence et unicité chromatique | 87 |
| 3.6 | Un problème non résolu | 93 |
| 4 | NP-complétude | 95 |
| 4.1 | Définitions préliminaires | 95 |
| 4.2 | Les classes P, NP et NPC | 98 |
| 4.3 | Le problème 3SAT | 99 |
| 4.4 | Le problème k COL | 100 |
| 4.4.1 | Le problème 2COL | 100 |
| 4.4.2 | Le problème 3COL | 106 |
| 4.4.3 | Le problème 4COL | 109 |
| 4.4.4 | Retour au problème k COL | 111 |

Introduction

La *théorie des graphes*, branche fondamentale des mathématiques discrètes, explore des relations entre objets encodées par des structures appelées graphes. Un *graphe (non orienté)* se compose d'un ensemble fini V de sommets et d'une relation binaire symétrique E définie sur ces sommets, représentant une structure où les sommets sont connectés par des arêtes. Ces structures permettent de modéliser efficacement une multitude de problèmes, dont les problèmes de coloriage. Ces derniers consistent à attribuer des couleurs à chaque sommet d'un graphe de manière à éviter que deux sommets adjacents reçoivent la même couleur. L'objectif est souvent de déterminer le *nombre chromatique* d'un graphe G , noté $\chi(G)$, c'est-à-dire le nombre minimum de couleurs nécessaires pour effectuer cette tâche. Ces problèmes trouvent des applications dans des domaines variés tels que la cartographie, la planification des emplois du temps, la chimie et l'informatique. En 1912, dans l'article [8], George David Birkhoff a introduit le concept de *polynôme chromatique*, un outil puissant permettant de déterminer le nombre chromatique. En disposant du polynôme chromatique $P_G(z)$ d'un graphe G , nous pouvons aisément obtenir son nombre chromatique en identifiant la plus petite valeur naturelle z pour laquelle $P_G(z)$ est strictement positif. Bien que ce polynôme ait été initialement développé dans le cadre du théorème des quatre couleurs, qui cherche à colorer tout graphe planaire avec seulement quatre couleurs, le polynôme chromatique est devenu un concept fondamental en théorie des graphes, offrant des perspectives similaires à celles des problèmes de coloriage. Notons que les deux concepts associés aux problèmes de coloriage fournissent des informations uniques pour comprendre la structure et les propriétés des graphes.

Examinons succinctement deux exemples concrets d'applications de la théorie des graphes. Tout d'abord, dans le domaine de la cartographie, les graphes peuvent être utilisés pour déterminer le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorer les pays d'une carte géographique, en veillant à ce que des pays voisins aient des couleurs distinctes. Ce problème revient à déterminer le nombre chromatique de la carte en considérant un graphe dont les sommets représentent les différents pays et où deux sommets sont reliés si et seulement si les pays correspondants partagent une frontière commune. En outre, les graphes peuvent être employés pour résoudre des problèmes d'incompatibilité lors du transport en train de produits chimiques. Pour ce faire, un graphe peut être construit, où les sommets représentent les différents produits chimiques et les arêtes relient deux sommets si et seulement si ces produits sont incompatibles lors du transport. La minimisation du nombre de wagons nécessaires pour transporter tous les produits peut être ramenée à un problème de coloriage des sommets du graphe et à la recherche du nombre chromatique de ce dernier.

Ce travail vise à offrir une vue d'ensemble sur les problèmes de coloriage, mettant particulièrement l'accent sur le développement du concept de polynôme chromatique. Pour ce faire, nous analysons en détail le nombre chromatique et le polynôme chromatique, explorant leurs caractéristiques, leurs relations et leurs applications dans divers contextes.

De nombreux exemples sont également présentés au lecteur dans l'espoir de favoriser la compréhension de ces concepts essentiels en théorie des graphes. Les principales sources utilisées pour la rédaction de ce travail sont [3, 10, 21, 23]. Les concepts de base ont quant à eux été rédigés à partir des notes de cours [12, 24] dispensés à l'Université de Liège.

Détaillons à présent le contenu de ce travail. Le premier chapitre sert d'introduction, offrant d'abord un rappel des concepts élémentaires et établissant les notations qui seront utilisées tout au long du mémoire. Bien que les lecteurs familiers avec ces concepts puissent y trouver peu d'informations nouvelles, il constitue une référence utile pour ceux moins familiarisés avec le sujet. Ce chapitre aborde également la notion de *coloriage propre* des sommets d'un graphe, signifiant que l'attribution des couleurs à chaque sommet d'un graphe est telle que deux sommets adjacents ne se voient pas attribuer la même couleur. Par exemple, la figure 1 illustre un coloriage propre des sommets du graphe de Petersen. Cette notion prépare le terrain pour l'introduction du premier concept central de ce travail : le nombre chromatique. Après avoir introduit cette notion clé, notre objectif est d'examiner le nombre chromatique dans différentes familles classiques de graphes. Enfin, pour conclure ce premier chapitre, nous illustrons la détermination du nombre chromatique de deux graphes moins courants, à savoir les graphes de Wiener-Araya et de Goldner-Harary.

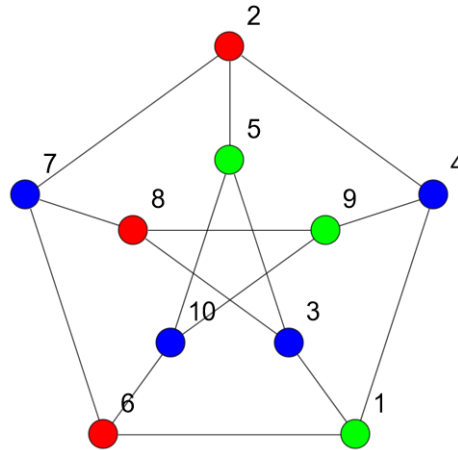


FIGURE 1 – Un coloriage propre des sommets du graphe de Petersen.

Dans le deuxième chapitre, nous débutons par une présentation détaillée des *graphes de Mycielski*, une famille infinie de graphes sans triangle mais possédant un nombre chromatique arbitrairement grand. Grâce à la construction de Mycielski, conçue pour générer un nouveau graphe sans triangle avec un nombre chromatique $k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$), à partir d'un graphe sans triangle de nombre chromatique k , nous établissons un *théorème de Mycielski*. Celui-ci affirme que le $k^{\text{ème}}$ graphe de Mycielski ($k \geq 2$) est sans triangle et possède un nombre chromatique égal à k .

Les graphes de Mycielski jouent un rôle central dans le chapitre en tant qu'exemples illustratifs des résultats qui suivent, notamment des bornes inférieures et supérieures pour le nombre chromatique. Nous démontrons notamment une borne supérieure due aux mathématiciens Georges Szekeres et Herbert Wilf, établissant que pour tout graphe G de n

sommets, nous avons :

$$\chi(G) \leq 1 + \max\{\delta(H) : H \text{ est un sous-graphe induit de } G\} \leq 1 + \Delta(G),$$

où $\delta(H)$ représente le degré minimal des sommets du sous-graphe H de G , tandis que $\Delta(G)$ désigne le degré maximal des sommets du graphe G , et où un sous-graphe induit est obtenu en sélectionnant certains sommets de G et en considérant toutes les arêtes de G qui relient ces sommets.

Grâce à la borne supérieure de Szekeres-Wilf, nous établissons deux autres bornes supérieures importantes. La première affirme que pour tout graphe connexe et non régulier G , $\chi(G) \leq \Delta(G)$, tandis que la seconde stipule que pour un graphe G de n sommets, si G est un graphe complet ou un cycle de longueur impaire, alors $\chi(G) = \Delta(G) + 1$.

Enfin, nous concluons ce chapitre par la démonstration d'un *théorème de Brooks*, qui fournit une meilleure borne supérieure pour le nombre chromatique. Celui-ci affirme que pour un graphe connexe G de n sommets, si G n'est ni un graphe complet ni un cycle de longueur impaire, alors $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Le troisième chapitre de ce travail explore la notion de *coloriages propres distincts* des sommets d'un graphe, préparant ainsi le terrain pour l'introduction du second concept central de ce travail : le polynôme chromatique. Des coloriages propres distincts représentent différentes manières de colorer de manière adéquate les sommets d'un graphe, chaque coloriage étant considéré comme distinct si son arrangement de couleurs ne peut être transformé en un autre par une simple permutation.

Une fois cette notion établie, notre objectif est d'analyser le polynôme chromatique de diverses familles classiques de graphes. Pour ce faire, nous commençons par introduire la *formule de Suppression-Contraction*, qui permet de calculer récursivement le polynôme chromatique d'un graphe donné. Cette formule stipule que pour un graphe G et l'une de ses arêtes e , le polynôme chromatique de G satisfait l'équation $P_G(z) = P_{G-e}(z) - P_{G \cdot e}(z)$. En outre, afin de déterminer le polynôme chromatique des graphes appartenant à la famille des graphes bipartis complets, il est nécessaire d'introduire en premier lieu les nombres de Stirling de seconde espèce. Le *nombre de Stirling de deuxième espèce*, noté $S(n, m)$, représente le nombre de partitions d'un ensemble de n éléments en m sous-ensembles non vides (non ordonnés). Nous démontrons notamment une relation de récurrence pour ces nombres de Stirling, définie pour tout naturel n non nul et pour tout naturel m par $S(n, m) = mS(n-1, m) + S(n-1, m-1)$, ainsi qu'une forme close qui lie les factorielles décroissantes aux puissances par le biais des nombres de Stirling :

$$z^n = \sum_{i=0}^n S(n, i) z^{\underline{i}},$$

où $z^{\underline{i}} = z(z-1) \cdots (z-i+1)$ désigne la *factorielle décroissante* de i . Ainsi, nous verrons que le polynôme chromatique du graphe biparti complet $K_{m,n}$ s'exprime en fonction de deux nombres de Stirling :

$$P_{K_{m,n}}(z) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n S(m, i) S(n, j) z^{\underline{i+j}}.$$

Par la suite, nous extrayons des informations cruciales sur les propriétés et la structure d'un graphe à partir de son polynôme chromatique. Nous démontrons que le degré du

polynôme chromatique correspond au nombre de sommets du graphe, que son coefficient dominant est toujours égal à 1, que l'opposé du coefficient du deuxième terme de plus haut degré correspond au nombre d'arêtes du graphe, et que les termes du polynôme alternent en signe. De plus, nous proposons une caractérisation des graphes connexes en fonction du coefficient du terme en z dans le polynôme chromatique.

Nous abordons également les concepts d'équivalence chromatique et d'unicité chromatique. Deux graphes sont considérés comme *chromatiquement équivalents* s'ils sont non isomorphes mais possèdent le même polynôme chromatique, tandis qu'un graphe G est *chromatiquement unique* si, pour tout graphe H ayant le même polynôme chromatique que G , H est isomorphe à G . Nous illustrons ces concepts à l'aide d'exemples tirés des familles classiques de graphes étudiées dans ce travail.

Pour clore ce chapitre, nous mettons en évidence que tous les polynômes à coefficients entiers ne correspondent pas à un polynôme chromatique, soulignant ainsi la complexité de la relation entre les propriétés des graphes et leurs polynômes chromatiques.

Pour terminer ce travail, remarquons qu'en théorie des graphes, de nombreux problèmes présentent une complexité arbitrairement élevée, notamment les problèmes de coloriage en toute généralité. Bien que le polynôme chromatique puisse fournir directement le nombre chromatique, il est difficile à calculer en raison de sa définition combinatoire. Ainsi, ce mémoire se termine en examinant la complexité algorithmique du problème de coloration des sommets d'un graphe avec un nombre donné de couleurs. Il est établi que la coloration des sommets d'un graphe peut être résolue en temps polynomial lorsque le nombre de couleurs est de deux ou moins. Cependant, dès que ce nombre dépasse trois, le problème devient NP-complet.

Chapitre 1

Le nombre chromatique d'un graphe : rappels

Ce chapitre a pour premier objectif de rappeler différentes définitions fondamentales de la théorie des graphes et d'établir les notations qui seront employées tout au long de ce travail.

Dans un deuxième temps, notre attention se portera sur le concept de nombre chromatique d'un graphe. Avant d'approfondir cette notion, une section préliminaire fondamentale sera dédiée à la définition du coloriage propre des sommets d'un graphe, établissant ainsi la base pour la définition du nombre chromatique que nous allons étudier.

Par la suite, nous pourrions nous interroger sur la valeur du nombre chromatique pour différentes catégories classiques de graphes. C'est pourquoi une section sera réservée à l'introduction de ces diverses familles de graphes et à l'étude du nombre chromatique au sein de celles-ci.

Pour clôturer ce premier chapitre, nous pourrions également nous questionner sur la valeur du nombre chromatique pour des graphes moins courants dans la littérature. C'est ainsi qu'une dernière section détaillera une méthode permettant de déterminer le nombre chromatique pour deux types de graphes inhabituels.

1.1 Définitions préliminaires de théorie des graphes

Comme annoncé précédemment, dans cette section, nous présentons les définitions de base utilisées en théorie des graphes, qui seront employées tout au long de ce travail. Les références [15, 24] ont été consultées pour la rédaction de cette section.

Définition 1.1.1. Un *graphe fini non orienté* G est défini comme un couple (V, E) où V est un ensemble fini de sommets, et E un ensemble (éventuellement vide) d'arêtes qui est une relation symétrique sur V (*i.e.* s'il existe un arc qui relie le sommet u au sommet v , alors il existe également un arc qui relie le sommet u au sommet v).

Une arête d'un graphe ayant pour extrémités le même sommet est appelée une *boucle*. Un graphe G est qualifié de *simple* s'il ne contient aucune boucle, c'est-à-dire qu'aucune arête ne relie un sommet à lui-même. Dans le cadre de ce travail, nous ne travaillerons pas avec des multi-graphes, ce qui implique qu'il ne peut y avoir qu'une seule arête reliant deux sommets donnés du graphe.

Tout au long du travail, sauf mention explicite du contraire, nous considérerons des graphes finis, non orientés et simples.

Définition 1.1.2. Le nombre de sommets d'un graphe $G = (V, E)$ est appelé l'*ordre du graphe* et est noté par $\#V$. Le nombre d'arêtes du graphe G est appelé la *taille du graphe* et est noté par $\#E$.

Dans le graphe $G = (V, E)$, deux sommets v_i et v_j sont dits *voisins* ou *adjacents* si l'arête $\{v_i, v_j\}$ est présente dans l'ensemble E des arêtes du graphe (autrement dit, s'ils sont reliés par une arête). L'arête $\{v_i, v_j\}$ est dite *incidente* aux sommets v_i et v_j .

Le *degré d'un sommet* v , noté $\deg(v)$, correspond au nombre d'arêtes incidentes à ce sommet. Étant donné un graphe $G = (V, E)$ d'ordre n , notons respectivement

$$\Delta(G) = \max\{\deg(v_i) : i = 1, \dots, n\} \text{ et } \delta(G) = \min\{\deg(v_i) : i = 1, \dots, n\}$$

les degrés maximal et minimal des sommets du graphe G .

Un graphe $G = (V, E)$ est dit *k-régulier* si pour tout sommet $v \in V$, on a $\deg(v) = k$.

Un *ensemble indépendant* est un ensemble de sommets deux à deux non adjacents.

Définition 1.1.3. Un *sous-graphe* d'un graphe $G = (V, E)$ est un graphe $H = (V', E')$ pour lequel $V' \subseteq V$ et $E' \subseteq E \cap (V' \times V')$.

Définition 1.1.4. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un *chemin de longueur* $n \geq 1$ est une suite ordonnée de sommets v_1, \dots, v_n telle que chaque paire de sommets consécutifs v_i et v_{i+1} ($1 \leq i < n$) est reliée par une arête $\{v_i, v_{i+1}\}$ appartenant à l'ensemble des arêtes E du graphe G . Un tel chemin est dit *simple* si les arêtes du chemin sont toutes distinctes et si le chemin ne passe pas deux fois par un même sommet. Dans le cas où les extrémités v_1 et v_n du chemin sont identiques, on parle d'un *cycle* ou d'un *circuit*. Deux sommets v_i et v_j sont dits *connectés* s'il existe un chemin les joignant.

Un graphe $G = (V, E)$ est dit *connexe* si pour chaque paire de sommets dans le graphe, il existe un chemin les reliant, *i.e.* si chaque paire de sommets est connectée. Sinon, lorsque des sommets ne sont pas connectés, on dit que le graphe G est *non connexe* ou *disconnecté*.

Une *composante connexe* d'un graphe $G = (V, E)$ est un sous-graphe $H = (V', E')$ de G qui est à la fois connexe et maximal, *i.e.* aucun autre sous-graphe connexe de G ne peut contenir H . Par conséquent, tout graphe connexe est composé exactement d'une seule composante connexe.

Définition 1.1.5. Une *face* d'un graphe planaire¹ $G = (V, E)$ est une région du plan délimitée par des arêtes qui forment un cycle simple.

1.2 Notions de coloriage et de nombre chromatique

Tel que précédemment indiqué, l'objectif de cette seconde section est d'établir la définition du concept de nombre chromatique d'un graphe. À cet effet, il est essentiel d'introduire la notion de coloriage propre d'un graphe et de l'exemplifier pour mieux appréhender le sujet. Pour rédiger cette section, les références [15, 24, 27] ont été consultées.

Définition 1.2.1. Un *coloriage* des sommets d'un graphe $G = (V, E)$ est une application $c : V \rightarrow \mathbb{N}$ qui assigne une couleur à chaque sommet du graphe G . Chaque sommet v du graphe sera associé à une couleur spécifique $c(v)$.

Un coloriage c des sommets d'un graphe $G = (V, E)$ est qualifié de *propre* lorsque l'attribution des couleurs à chaque sommet du graphe G est telle que deux sommets

1. Une définition précise de cette notion sera fournie dans la section suivante.

adjacents ne reçoivent pas la même couleur. Dans le cas contraire, on parle de *coloriage impropre*.

Si $\lambda \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ représente le nombre de couleurs possibles pour colorer les sommets du graphe G , alors un λ -coloriage propre de G sera représenté par une fonction $c : V \rightarrow \{1, \dots, \lambda\}$, avec la contrainte que, pour toute paire de sommets $\{u, v\}$ de $V \times V$, $c(u) \neq c(v)$ lorsque les sommets u et v sont adjacents dans G . On dira que G est un graphe λ -colorable s'il possède un λ -coloriage propre.

Remarque 1.2.2. Notons que pour obtenir un coloriage propre, il est permis d'attribuer une même couleur à deux sommets qui ne sont pas adjacents.

Observons aussi que dans le cas où un coloriage propre d'un graphe existe, ce graphe est nécessairement sans boucle, c'est-à-dire qu'il prend la forme d'un graphe simple.

Remarque 1.2.3. Pour rappel, le *graphe ligne* d'un graphe $G = (V, E)$, noté $L(G)$, est le graphe dont les sommets sont les arêtes de G . De plus, deux sommets dans $L(G)$ sont adjacents si et seulement si les arêtes correspondantes partagent un sommet commun dans G , c'est-à-dire que les arêtes correspondantes sont adjacentes.

Maintenant que la définition du graphe ligne a été évoquée, il est important de souligner que plutôt que de se pencher sur le problème de coloration des sommets du graphe initial, il est possible de se concentrer sur le problème dual de coloration des arêtes du graphe ligne correspondant. Ce problème consiste à attribuer une couleur à chaque arête du graphe ligne de manière à ce que deux arêtes adjacentes reçoivent des couleurs différentes.

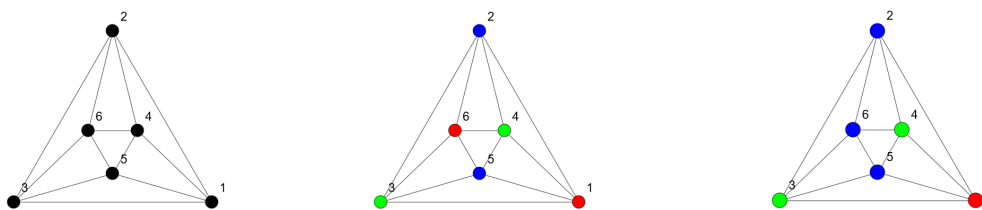
Pour illustrer les différentes notions de la définition précédente, examinons l'exemple suivant.

Exemple 1.2.4. Considérons le graphe G représenté à la figure 1.1a, qui est composé de 6 sommets et de 12 arêtes.

À la figure 1.1b, un coloriage propre de ce graphe est présenté, puisque des sommets adjacents reçoivent des couleurs distinctes. La présence d'une copie du graphe complet K_3 en tant que sous-graphe dans G sera par la suite un indicateur clair que le graphe G n'est pas 2-colorable. En effet, nous verrons plus tard (à la proposition 1.3.14) que cela découle du fait que le graphe complet K_3 nécessite trois couleurs distinctes pour colorer ses sommets de manière propre. De plus, étant donné que nous sommes parvenus à établir un coloriage propre des sommets du graphe en utilisant trois couleurs, nous pouvons affirmer que le graphe est 3-colorable.

En revanche, le coloriage du graphe illustré à la figure 1.1c est impropre, car les sommets adjacents 2 et 6, ainsi que 5 et 6, se sont vus attribuer la même couleur (bleu), *i.e.* $c(2) = c(6) = c(5)$.

Remarquons que le coloriage proposé à la figure 1.1b attribue une même couleur à des sommets non adjacents.



(a) Graphe G . (b) Un coloriage propre de G . (c) Un coloriage impropre de G .

FIGURE 1.1 – Illustration des notions de coloriage propre et impropre.

Le concept de coloriage propre étant défini, tous les éléments sont en place pour définir la première notion centrale de ce travail.

Définition 1.2.5. Le *nombre chromatique* d'un graphe $G = (V, E)$ correspond à la valeur minimum de λ pour laquelle le graphe G est λ -colorable. Ce nombre sera noté $\chi(G)$.

En d'autres termes, le *nombre chromatique* du graphe G est donné par :

$$\chi(G) := \min\{\lambda : G \text{ est } \lambda\text{-colorable}\}.$$

Tout au long du travail, sauf mention explicite du contraire, nous adopterons la convention selon laquelle le terme *coloriage* des sommets d'un graphe désignera spécifiquement un *coloriage propre*.

1.3 Le nombre chromatique de différentes familles de graphes

Ayant établi la définition du nombre chromatique, nous allons maintenant présenter et prouver plusieurs résultats qui nous renseignent sur la valeur de ce nombre pour les diverses familles classiques de graphes que nous allons introduire. Pour ce faire, cette section suivra la structure suivante : nous alternerons les définitions des familles classiques de graphes avec les propriétés correspondantes concernant le nombre chromatique.

Il convient de noter que cette section constituera un atout pour établir le nombre chromatique de graphes particuliers qui seront abordés ultérieurement.

Intéressons-nous d'abord au nombre chromatique des graphes vides. Le lecteur pourra retrouver les concepts et résultats présentés dans le mémoire [21] et dans les notes de cours [24].

Définition 1.3.1. Un *graphe vide* est un graphe $G = (V, E)$ qui ne possède aucune arête, *i.e.* son ensemble d'arêtes E est vide ($E = \emptyset$). Le graphe vide d'ordre $n \in \mathbb{N}$ sera noté E_n .

Proposition 1.3.2. Le *nombre chromatique* du graphe vide E_n est 1, *i.e.* $\chi(E_n) = 1$.

Démonstration. Par construction, le graphe vide ne contient pas d'arêtes, ce qui signifie qu'aucun sommet n'est adjacent à un autre sommet. Par conséquent, il est évident qu'une seule couleur (disons le bleu) suffit pour colorer tous les sommets du graphe E_n . \square

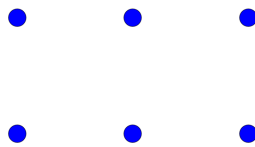


FIGURE 1.2 – Le nombre chromatique du graphe vide E_6 est 1.

Intéressons-nous à présent aux graphes planaires, une notion issue des notes de cours [24].

Définition 1.3.3. Un graphe est dit *planaire* s'il peut être représenté dans le plan de telle manière que les sommets et les arêtes du graphe sont disposés de sorte qu'aucune paire d'arêtes ne se croise. Si une telle représentation dans le plan n'existe pas, on dit que le graphe est *non planaire*.

Exemple 1.3.4. Le graphe situé à gauche de la figure 1.3 est un graphe planaire. En effet, il peut être représenté dans le plan sans que ses arêtes ne se croisent en déplaçant simplement le sommet 1 au centre du triangle formé par les sommets 2, 3 et 4. Cette transformation donne lieu au même graphe, car seule sa représentation change. Ce dernier est illustré à droite dans la figure 1.3.

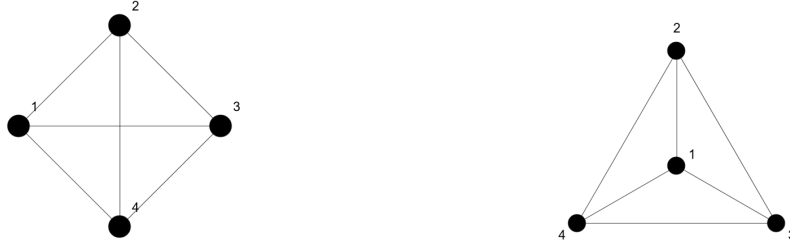


FIGURE 1.3 – Illustration de la notion de graphe planaire.

Le nombre chromatique des graphes planaires est étroitement lié au théorème des quatre couleurs, qui a été démontré en 1976 par les mathématiciens Kenneth Appel (1932 – 2013) et Wolfgang Haken (1928 – 2022). Avant de présenter brièvement quelques détails sur la preuve élaborée par ces deux scientifiques [29], rappelons d'abord l'énoncé du célèbre théorème en question, qui sera considéré comme admis dans ce travail.

Théorème 1.3.5 (Théorème des quatre couleurs, Appel & Haken, 1976). *Quatre couleurs suffisent pour colorer n'importe quelle carte découpée en régions connexes, de manière telle que deux régions adjacentes reçoivent des couleurs distinctes.*

Pour prouver ce théorème, Appel et Haken ont identifié un ensemble inévitable de 1482 configurations réductibles : autrement dit, toute carte non 4-colorable doit contenir l'une des 1482 configurations et chacune de ces configurations est réductible. Il est important de noter que cette preuve du théorème des quatre couleurs a été assistée par ordinateur et a suscité des critiques car elle était extrêmement longue et complexe, rendant difficile sa vérification manuelle dans son intégralité. Pour des explications plus détaillées et une preuve rigoureuse du théorème des quatre couleurs, vous pouvez vous référer à l'article intitulé "Every Planar Map is Four Colorable" [2], publié en 1989 par les mathématiciens Appel et Haken.

Grâce au théorème des quatre couleurs, nous pouvons obtenir un résultat concernant le nombre chromatique des graphes planaires. Pour expliquer cela, commençons par comprendre la raison pour laquelle tout graphe planaire peut être représenté par le graphe dual d'une carte géographique, en nous appuyant sur leurs définitions issues des notes de cours [24].

Une carte géographique est essentiellement une collection de pays (régions) avec des frontières communes, où chaque pays peut être vu comme une face. Cette carte géographique peut être représentée sous forme d'un graphe planaire, appelé le *graphe dual de la carte géographique*, en plaçant un sommet dans chaque pays et en connectant deux sommets par une arête si les pays correspondants partagent une frontière. En d'autres termes, chaque sommet dans le graphe dual représente un pays de la carte, et les arêtes représentent les frontières partagées entre les pays.

Analysons à présent la correspondance entre les graphes planaires et leurs graphes duaux. Par construction, chaque face d'un graphe planaire correspond à un sommet dans

son graphe dual, et chaque arête entre deux faces dans le graphe planaire correspond à une arête reliant les sommets correspondants dans le graphe dual. Cette correspondance établit donc une relation intrinsèque entre les structures des graphes planaires et de leurs graphes duaux.

Examinons désormais le graphe dual d'un graphe planaire. Cette configuration assure que les pays de la carte géographique correspondent aux sommets du graphe dual, et que les frontières partagées entre les pays sont représentées par les arêtes du graphe dual.

En combinant ces points, nous pouvons constater qu'un graphe planaire peut être représenté par le graphe dual d'une carte géographique en utilisant la correspondance entre les faces d'un graphe planaire et les sommets de son graphe dual. Cette représentation permet de visualiser les relations entre les régions géographiques et leurs frontières.

Par conséquent, les deux problèmes de coloriage sont équivalents, puisqu'ils consistent tous deux à attribuer des couleurs de manière à ce que des pays (régions) adjacents reçoivent des couleurs différentes, que ce soit sur la carte géographique elle-même (à savoir, le graphe planaire) ou sur le graphe dual de la carte géographique. Ainsi, le théorème des quatre couleurs garantit que seulement quatre couleurs sont nécessaires pour réaliser cette coloration de manière appropriée.

En conclusion, nous obtenons le résultat suivant (issu de la section 3.3 de la référence [21]), dont la preuve découle directement du théorème 1.3.5.

Corollaire 1.3.6. *Le nombre chromatique d'un graphe planaire G est toujours inférieur ou égal à quatre, i.e. $\chi(G) \leq 4$.*

Penchons-nous à présent brièvement sur la notion de graphes isomorphes, issue des notes de cours [24].

Définition 1.3.7. Deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ sont *isomorphes* s'il existe une bijection $f : V_1 \rightarrow V_2$ entre les sommets de G_1 et ceux de G_2 telle que $\{u, v\}$ est une arête de G_1 si et seulement si $\{f(u), f(v)\}$ est une arête de G_2 . Autrement dit, deux graphes sont dits *isomorphes* s'ils ont le même nombre de sommets et la même configuration de connexions entre ces sommets, même si les étiquettes attribuées à chaque sommet peuvent différer.

De cette définition, nous pouvons déduire directement le résultat suivant.

Proposition 1.3.8. *Si G et G' sont deux graphes isomorphes, alors $\chi(G) = \chi(G')$.*

Focalisons-nous désormais sur des caractérisations des graphes bipartis et du nombre chromatique. Avant d'énoncer et de prouver divers résultats, rappelons d'abord la définition d'un graphe biparti, qu'il soit complet ou non. Le livre [15] et les notes de cours [24] ont été consultés pour définir le concept suivant.

Définition 1.3.9. Un graphe $G = (V, E)$ est dit *biparti* lorsque l'ensemble des sommets V peut être partitionné en deux sous-ensembles disjoints V_1 et V_2 de sorte qu'aucun sommet d'un sous-ensemble ne soit adjacent à un sommet du même sous-ensemble. Autrement dit, chaque arête a une extrémité dans V_1 et l'autre dans V_2 (i.e. $E \subseteq V_1 \times V_2$).

Un *graphe biparti complet* est un graphe biparti dont l'ensemble des sommets est partitionné en les deux sous-ensembles disjoints V_1 et V_2 , de cardinalité m et n respectivement (où $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), et qui est tel que chaque sommet du sous-ensemble V_1 est adjacent à tous les sommets du sous-ensemble V_2 et inversement (i.e. $E = V_1 \times V_2$). Un tel graphe sera noté $K_{m,n}$.

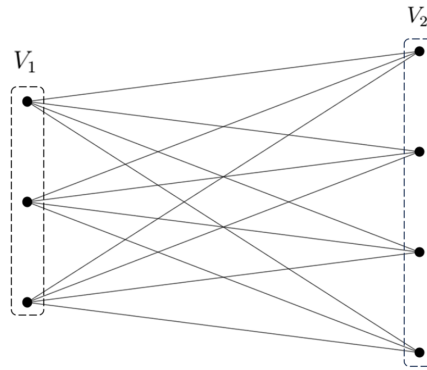


FIGURE 1.4 – Le graphe biparti complet $K_{3,4}$.

Une première caractérisation importante est la suivante, dont la preuve est issue des notes de cours [14, 21].

Proposition 1.3.10. *Un graphe G avec au moins une arête (i.e. non vide) est biparti si et seulement si $\chi(G) = 2$.*

Démonstration. Tout d’abord, montrons que la condition est nécessaire. Supposons que $G = (V, E)$ est un graphe avec au moins une arête et qu’il s’agit d’un graphe biparti dont la partition des sommets est donnée par $V = V_1 \cup V_2$. En utilisant la couleur rouge pour les sommets de V_1 et la couleur verte pour les sommets de V_2 , il est évident, selon la définition 1.3.9, que chaque arête du graphe G a des extrémités de couleurs différentes. Par conséquent, puisque le graphe G contient au moins une arête, nous obtenons que $\chi(G) = 2$.

À présent, montrons que la condition est suffisante. Supposons que $\chi(G) = 2$, i.e. le graphe G est 2-colorable. Dans cette situation, le graphe G doit contenir au moins une arête, sinon une seule couleur serait suffisante pour colorer tous ses sommets sans enfreindre la règle de la coloration. Supposons que les deux couleurs sont le rouge et le vert. Définissons l’ensemble V_1 comme l’ensemble des sommets colorés en rouge et l’ensemble V_2 comme l’ensemble des sommets colorés en vert. Étant donné que le coloriage proposé est adéquat, il est clair que les ensembles V_1 et V_2 sont deux ensembles indépendants : aucune arête ne relie deux sommets appartenant au même ensemble. Cela implique que chaque arête a un sommet d’extrémité dans V_1 et l’autre dans V_2 . Par conséquent, selon la définition 1.3.9, nous pouvons en conclure que G est un graphe biparti dont la partition des sommets est donnée par $V = V_1 \cup V_2$. □

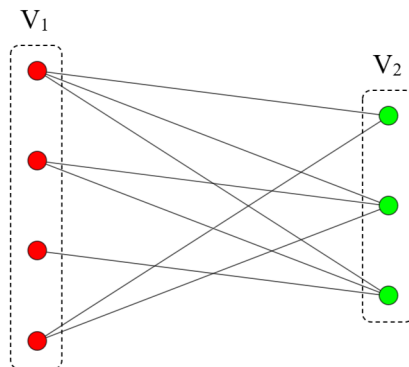


FIGURE 1.5 – Le nombre chromatique de ce graphe biparti (non complet) est 2.

Un autre théorème caractérisant les graphes bipartis (dont la preuve est issue de la section 2.1 du livre [10]), souvent désigné dans la littérature sous le nom de *théorème de König*, est formulé comme suit.

Théorème 1.3.11 (König, 1936). *Un graphe G est biparti si et seulement si il ne contient pas de cycle de longueur impaire.*

Démonstration. Tout d'abord, montrons que la condition est nécessaire. Supposons que $G = (V, E)$ est un graphe biparti dont la partition des sommets est donnée par $V = V_1 \cup V_2$. Procédons par l'absurde et supposons donc que le graphe G contient au moins un cycle v_1, \dots, v_n de longueur impaire n , noté C_n . Nous supposons sans perte de généralité que le premier sommet du cycle, v_1 , appartient à V_1 . Puisque le graphe G est biparti, par la définition 1.3.9, nous constatons par récurrence que pour tout indice $i \in \{1, \dots, n\}$, nous avons $v_i \in V_1$ si i est impair et $v_i \in V_2$ si i est pair. Cependant, nous savons que $v_1 \in V_1$ et que l'arête $\{v_n, v_1\} \in C_n$. Comme n est impair, cela signifie que $v_n \in V_1$. Cela mène à une contradiction car cela implique que l'arête $\{v_n, v_1\} \in E$ a ses deux extrémités dans V_1 , ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle G est un graphe biparti. Par conséquent, nous en concluons qu'un graphe biparti ne peut pas contenir de cycle de longueur impaire.

À présent, montrons que la condition est suffisante. Supposons que $G = (V, E)$ soit un graphe qui ne contient pas de cycle de longueur impaire, et démontrons qu'il est biparti. Il est évident que si le graphe G est composé d'un seul sommet, alors il est biparti. Considérons maintenant que G est un graphe non trivial. Nous supposons sans perte de généralité que G est un graphe connexe, quitte à considérer chaque composante connexe de G séparément. Notre objectif est de déterminer une partition de l'ensemble des sommets V de G en deux ensembles indépendants. Soit $d(u, v)$ la longueur d'un plus court chemin joignant les deux sommets u et v dans G . Choisissons un sommet arbitraire v dans G et définissons les deux ensembles de sommets suivants :

- I correspond à l'ensemble des sommets tels qu'un plus court chemin $d(v, w)$, pour chaque sommet w de V , soit de longueur impaire ;
- P correspond à l'ensemble des sommets tels qu'un plus court chemin $d(v, w)$, pour chaque sommet w de V , soit de longueur paire, *i.e.* $P = V \setminus I$.

Il est évident que I et P sont des ensembles disjoints, *i.e.* $I \cap P = \emptyset$, et $V = I \cup P$. Il nous reste à prouver que I et P sont des ensembles indépendants. Pour ce faire, procédons par l'absurde et supposons que deux sommets u et w de I (resp. P) sont adjacents. Soient P_{vu} et P_{vw} des plus courts chemins entre les sommets v et u , et v et w , respectivement. Par construction, P_{vu} est un chemin de longueur impaire (resp. paire), et il en va de même pour P_{vw} . Par conséquent, le cycle formé par $P_{vu}, \{u, w\}, P_{vw}$ est dans G et a une longueur égale à $d(v, u) + 1 + d(w, v)$, qui est impaire, ce qui contredit l'hypothèse que le graphe G ne contient pas de cycle de longueur impaire. Ainsi, aucune paire de sommets dans I (resp. P) ne peut être constituée de sommets adjacents. Par conséquent, I et P sont des ensembles indépendants qui partitionnent l'ensemble des sommets V de G . Cela prouve que le graphe G est biparti. \square

En combinant les deux résultats précédents, nous pouvons déduire le corollaire suivant :

Corollaire 1.3.12. *Un graphe G avec au moins une arête (*i.e.* non vide) ne contient pas de cycle de longueur impaire si et seulement si $\chi(G) = 2$.*

Étudions à présent, grâce au mémoire [1] et aux notes de cours [24], le nombre chromatique des graphes appartenant à la famille des graphes complets.

Définition 1.3.13. Un *graphe complet* est un graphe $G = (V, E)$ pour lequel chaque paire de sommets est reliée par une arête, *i.e.* $E = V \times V \setminus \{(v, v) : v \in V\}$. Le graphe complet d'ordre $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sera noté K_n .

Proposition 1.3.14. *Le nombre chromatique du graphe complet K_n est égal au nombre n de sommets, *i.e.* $\chi(K_n) = n$.*

Démonstration. Par construction, tous les sommets sont adjacents dans un graphe complet. Par conséquent, les n sommets du graphe complet K_n doivent tous avoir des couleurs différentes pour garantir un coloriage propre. \square

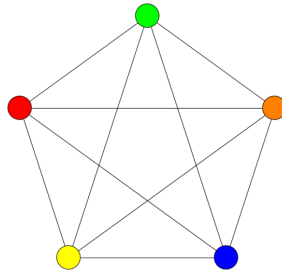


FIGURE 1.6 – Le nombre chromatique du graphe complet K_5 est 5.

À partir de cette proposition, nous pouvons dériver le corollaire 1.3.19 établissant une borne inférieure pour le nombre chromatique d'un graphe en fonction de l'ordre maximal d'une clique. Avant de présenter ce corollaire et de le démontrer, il est nécessaire d'introduire d'abord les nouvelles notions suivantes. Les références [1, 21, 24] ont été consultées pour rédiger les concepts et les résultats suivants.

Définition 1.3.15. Soient $G = (V, E)$ un graphe et W un sous-ensemble de V . Le *sous-graphe* de G induit par W est défini comme le sous-graphe $H = (W, E')$ pour lequel $E' = E \cap (W \times W)$. En d'autres termes, H est un sous-graphe obtenu en sélectionnant certains sommets de G (ceux appartenant à W), puis en considérant toutes les arêtes de G qui relient ces sommets (c'est-à-dire les arêtes dont les deux extrémités se trouvent dans W).

Si $W \subseteq V$ est tel que le sous-graphe induit par W ne contient aucune arête, alors les sommets de W sont dits *indépendants*. Le nombre maximal de sommets indépendants dans G est noté $\alpha(G)$. En d'autres termes, $\alpha(G)$ est la taille du plus grand ensemble de sommets que l'on peut choisir dans G sans qu'il y ait d'arête entre eux.

Définition 1.3.16. Une *clique* dans un graphe non orienté et simple $G = (V, E)$ est un sous-graphe $H = (V', E')$ de G tel qu'il existe une arête entre chaque paire de ses sommets. Remarquons que le fait que chaque paire de sommets dans une telle clique H soit reliée par une arête en fait un graphe complet K_n , où n correspond à l'ordre de H .

L'*ordre d'une clique* est défini comme le nombre de sommets qui la composent. L'*ordre maximal d'une clique* dans G est noté $\omega(G)$. En d'autres termes, $\omega(G)$ est la plus grande valeur de n pour laquelle le graphe complet K_n est un sous-graphe induit de G .

Remarque 1.3.17. Comme chaque graphe non vide contient (au minimum) un K_1 comme sous-graphe induit, $\omega(G)$ est une quantité bien définie.

Pour démontrer le corollaire que nous souhaitons présenter, il est essentiel de précéder cela en énonçant le lemme suivant, dont la preuve est évidente.

Lemme 1.3.18. *Soient $G = (V, E)$ un graphe et $H = (V', E')$ un sous-graphe de G . Alors $\chi(G) \geq \chi(H)$.*

En effet, cela découle du fait que deux sommets voisins dans un sous-graphe implique qu'ils étaient déjà voisins dans le graphe de départ. De plus, le sous-graphe ne crée pas de contraintes supplémentaires, puisque des sommets qui ne sont pas adjacents dans le graphe d'origine le resteront dans le sous-graphe. En réalité, le sous-graphe peut même avoir moins de contraintes, en vertu de la définition 1.1.3 d'un sous-graphe.

Maintenant que nous avons introduit les deux définitions précédentes ainsi que le lemme précédent, nous sommes en mesure de présenter et de démontrer le corollaire suivant.

Corollaire 1.3.19. *Pour tout graphe G , on a $\chi(G) \geq \omega(G)$.*

Démonstration. Supposons que H soit un sous-graphe induit de G isomorphe à $K_{\omega(G)}$, qui existe par définition vu la remarque 1.3.17. On peut alors conclure que

$$\begin{aligned} \chi(G) &\geq \chi(H) && \text{par le lemme 1.3.18} \\ &= \chi(K_{\omega(G)}) && \text{par la proposition 1.3.8} \\ &= \omega(G) && \text{par la proposition 1.3.14.} \quad \square \end{aligned}$$

Pour illustrer cette propriété, regardons l'exemple suivant.

Exemple 1.3.20. Considérons le graphe de Poussin P composé de 15 sommets et de 39 arêtes, illustré à la figure 1.7a. Le nombre chromatique de ce graphe, noté $\chi(P)$, est égal à 4.

Ce résultat découle de la présence d'une copie du cycle C_5 de longueur impaire, formée par les sommets 3, 6, 10, 14 et 9. Nous verrons par la suite (à la proposition 1.3.30) que cette observation est un indicateur clair que l'utilisation d'au moins trois couleurs est nécessaire pour colorer les sommets de P .

De plus, nous constatons que pour éviter que deux sommets adjacents ne reçoivent la même couleur, une quatrième couleur est requise : cela s'explique par le fait que le sommet 2 est adjacent à tous les sommets du cycle C_5 identifié précédemment, lequel exigeait déjà l'utilisation de trois couleurs.

Nous en concluons que le graphe P est 4-colorable, puisqu'un coloriage utilisant quatre couleurs est illustré à la figure 1.7b.

Maintenant, cherchons la valeur de l'ordre maximal d'une clique dans P , notée $\omega(P)$. Nous pouvons observer que la plus grande valeur de n pour laquelle K_n forme une clique dans le graphe de Poussin P est 3. En effet, le graphe de Poussin contient des copies des graphes complets K_1 , K_2 et K_3 , mais ne contient pas de copies des graphes complets d'ordre supérieur. Par conséquent, nous obtenons $\omega(P) = 3$. Une clique d'ordre trois est formée des sommets 4, 7 et 14, et elle est mise en évidence en rouge dans la figure 1.8.

Au final, nous constatons que $3 = \omega(P) \leq \chi(P) = 4$.

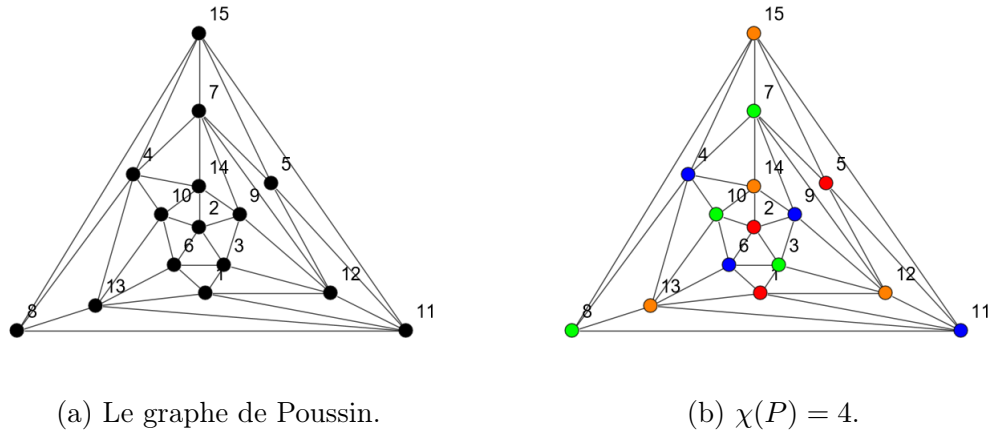
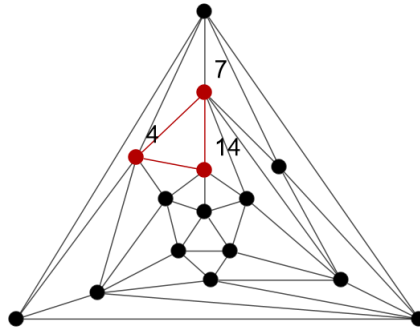


FIGURE 1.7 – Le nombre chromatique du graphe de Poussin est de 4.

FIGURE 1.8 – $\omega(P) = 3$.

Nous pouvons également nous concentrer sur le nombre chromatique des arbres. Les notes de cours [21], le mémoire [24] et le livre [27] ont été parcourus pour rédiger ce qui suit.

Définition 1.3.21. Un *arbre* est un graphe $G = (V, E)$ qui est à la fois connexe et sans cycle. Un sommet v dans un arbre est appelé *feuille* s'il possède exactement un voisin. L'ensemble des arbres composés de n sommets et de $n - 1$ arêtes, où n est un naturel non nul, sera noté \mathcal{T}_n .

Proposition 1.3.22. *Le nombre chromatique d'un arbre $T \in \mathcal{T}_n$ ($n \geq 2$) est 2, i.e. $\chi(T) = 2$.*

Démonstration. Procédons par récurrence sur le nombre de sommets $n \geq 2$ de l'arbre.

Tout d'abord, le cas de base $n = 2$ est évident puisqu'un arbre à deux sommets peut être coloré avec deux couleurs différentes en attribuant une couleur par sommets.

Supposons maintenant que la propriété est vraie pour tout arbre d'ordre n ($n > 2$), c'est-à-dire que tout arbre à n sommets peut être coloré en utilisant seulement deux couleurs. Pour l'induction, considérons un arbre d'ordre $n+1$ et choisissons arbitrairement une feuille f de l'arbre. En supprimant cette feuille, nous obtenons un arbre d'ordre n . Par hypothèse de récurrence, nous pouvons colorer cet arbre d'ordre n avec deux couleurs différentes, disons rouge et vert. À présent, si nous replaçons le sommet f et examinons la couleur de son voisin v dans l'arbre d'ordre n , nous pouvons colorer f en rouge si v est

coloré en vert, sinon nous colorons f en vert. Cette étape garantit que seulement deux couleurs sont nécessaires pour colorer l'arbre d'ordre $n + 1$.

Par conséquent, en utilisant l'argument de récurrence, nous montrons que tout arbre peut être coloré en utilisant seulement deux couleurs. \square



FIGURE 1.9 – Illustration de tous les arbres à 4 sommets (à isomorphisme près) et de la propriété selon laquelle leur nombre chromatique est égal à 2.

Remarque 1.3.23. Il convient de souligner que tout arbre est toujours un graphe biparti. En effet, nous avons défini un arbre comme un graphe connexe et sans cycle, et le théorème de König 1.3.11 affirme qu'un graphe est biparti si et seulement si il ne contient pas de cycle de longueur impaire. Or, étant donné que les arbres sont dépourvus de cycles, ils ne contiennent pas non plus de cycles de longueur impaire. Par conséquent, le théorème de König nous assure que tous les arbres sont effectivement des graphes bipartis.

De la proposition précédente concernant le nombre chromatique des arbres émergent deux résultats, portant respectivement sur le nombre chromatique des graphes en étoile et celui des chemins.

Définition 1.3.24. Un *graphe en étoile* d'ordre n (où n est un nombre naturel supérieur ou égal à 2), également appelé *n -étoile*, est un arbre composé de n sommets, où un sommet est de degré $n - 1$ et où tous les autres sommets sont de degré 1. Par conséquent, ce type de graphe en étoile est isomorphe au graphe biparti complet $K_{1,n-1}$. Un tel graphe sera noté S_n .

Corollaire 1.3.25. *Le nombre chromatique d'un graphe en étoile S_n ($n \geq 2$) est 2, i.e. $\chi(S_n) = 2$.*

Démonstration. En se basant sur la définition 1.3.24, un graphe en étoile d'ordre n est un arbre d'ordre n . Par conséquent, la propriété recherchée découle directement de la proposition 1.3.22. \square

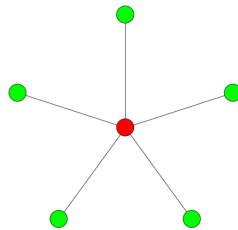


FIGURE 1.10 – Le nombre chromatique du graphe en étoile S_6 est 2.

Définition 1.3.26. Un *chemin* d'ordre n , où n est un naturel non nul, est un graphe $G = (V, E)$ caractérisé par une suite ordonnée de sommets v_1, v_2, \dots, v_n où chaque paire de sommets consécutifs $\{v_i, v_{i+1}\}$ forme une arête du graphe pour chaque $i \in \{1, \dots, n-1\}$. En d'autres termes, un chemin contenant au moins deux sommets est un graphe connexe où les deux sommets aux extrémités sont de degré 1, tandis que tous les autres sommets sont de degré 2. Un tel graphe sera noté P_n . La *longueur d'un chemin* correspond au nombre d'arêtes qu'il contient.

Corollaire 1.3.27. *Le nombre chromatique d'un chemin P_n ($n \geq 2$) est 2, i.e. $\chi(P_n) = 2$.*

Démonstration. En se basant sur la définition 1.3.26, un chemin d'ordre n peut être vu comme un graphe connexe et sans cycle. Selon la définition 1.3.21, il peut également être perçu comme un arbre d'ordre n . Par conséquent, la propriété recherchée découle directement de la proposition 1.3.22. \square



FIGURE 1.11 – Le nombre chromatique du chemin P_5 est 2.

Remarque 1.3.28. Notons que tout chemin est un graphe biparti puisqu'un chemin est un arbre particulier.

Pour conclure cette section, portons maintenant notre attention sur le nombre chromatique des graphes appartenant respectivement à la famille des cycles et à celle des graphes roues. Le lecteur pourra retrouver les concepts et les résultats présentés par la suite dans le mémoire [21] et dans les notes de cours [24].

Définition 1.3.29. Un *cycle* d'ordre n (où n est un naturel supérieur à 3), également appelé *n-cycle*, est un graphe $G = (V, E)$ caractérisé par une suite ordonnée de sommets $v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$ où chaque paire de sommets consécutifs $\{v_i, v_{i+1}\}$ forme une arête du graphe pour chaque $i \in \{1, \dots, n-1\}$ et où il existe une arête reliant les sommets v_1 et v_n . Un tel graphe sera noté C_n .

Proposition 1.3.30. *Le nombre chromatique d'un cycle C_n ($n \geq 3$) est 2 si n est pair et 3 si n est impair, i.e.*

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 3 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Démonstration. Vu les définitions 1.3.26 et 1.3.29, on peut voir un cycle d'ordre n comme un chemin d'ordre n , caractérisé par une suite ordonnée de sommets adjacents v_1, \dots, v_n , auquel on ajoute une arête entre les sommets v_n et v_1 .

Tout d'abord, examinons le cas où C_n est un cycle composé d'un nombre pair n de sommets, i.e. $n = 2k$ avec k un nombre naturel supérieur à 2. Dans ce cas, le résultat est évident. En effet, vu le corollaire 1.3.27, les sommets du chemin v_1, \dots, v_{2k} peuvent être colorés en utilisant deux couleurs, disons rouge et vert, comme suit : les sommets d'indice impair en rouge et les sommets d'indice pair en vert. Dans le cycle C_{2k} , les sommets v_1 et v_{2k} sont adjacents et puisqu'ils sont respectivement colorés en rouge et en vert, le coloriage proposé utilisant deux couleurs est valide.

Passons maintenant au cas où C_n est un cycle composé d'un nombre impair n de sommets, *i.e.* $n = 2k + 1$ avec k un nombre naturel non nul. En supprimant un sommet arbitraire du cycle C_{2k+1} , nous obtenons un chemin d'ordre pair $2k$. Supposons sans perte de généralité que nous supprimons le sommet v_{2k+1} du cycle. En procédant de la sorte, nous obtenons le chemin P_{2k} caractérisé par la suite ordonnée de sommets v_1, \dots, v_{2k} . Par le corollaire 1.3.27, et en utilisant le même raisonnement que précédemment, les sommets du chemin P_{2k} d'ordre pair peuvent être colorés en utilisant deux couleurs, disons rouge et vert, comme suit : les sommets d'indice impair en rouge et les sommets d'indice pair en vert. À présent, si nous replaçons le sommet v_{2k+1} et examinons la couleur de ses voisins v_1 et v_{2k} dans le cycle C_{2k+1} , nous observons que les sommets v_1 et v_{2k} sont respectivement colorés en rouge et en vert. Par conséquent, une troisième couleur, disons bleu, est nécessaire pour colorer le sommet v_{2k+1} afin d'obtenir un coloriage valide du cycle C_{2k+1} d'ordre impair. \square



FIGURE 1.12 – Les nombres chromatiques des graphes C_5 et C_6 sont de 3 et 2, respectivement.

De cette proposition découle directement un résultat, portant sur le nombre chromatique des graphes roues.

Définition 1.3.31. Un *graphe roue* d'ordre $n + 1$, où n est un nombre naturel supérieur ou égal à 3, est obtenu en prenant un cycle C_n d'ordre n et en ajoutant un nouveau sommet v adjacent à chaque sommet du graphe cycle. Le sommet v est appelé *centre du graphe roue* et les arêtes incidentes à ce sommet central v sont appelées *rayons du graphe roue*. Un tel graphe en forme de roue sera noté W_{n+1} .

Proposition 1.3.32. *Le nombre chromatique d'un graphe roue W_{n+1} ($n \geq 3$) est 3 si n est pair et 4 si n est impair, *i.e.**

$$\chi(W_{n+1}) = \begin{cases} 3 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 4 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Démonstration. Selon la définition 1.3.31, un graphe roue W_{n+1} est construit en prenant un cycle C_n et en ajoutant un nouveau sommet v adjacent à chaque sommet du graphe C_n .

Vu la proposition 1.3.30, nous savons qu'au moins deux (resp. trois) couleurs sont nécessaires pour colorer les sommets d'un cycle d'ordre pair (resp. impair). De plus, étant donné que le centre du graphe roue v est adjacent à tous les sommets du cycle C_n , une couleur supplémentaire est nécessaire pour colorer le sommet v . Par conséquent, le nombre chromatique de W_{n+1} est donné par :

$$\chi(W_{n+1}) = \chi(C_n) + 1. \quad \square$$



FIGURE 1.13 – Les nombres chromatiques des graphes roues W_5 et W_{10} sont de 3 et 4, respectivement.

Avant d'aborder la prochaine section du chapitre, il convient de souligner qu'un graphe complet, un chemin, un cycle, un arbre et un graphe en étoile, constitués d'un seul sommet, sont tous équivalents au graphe vide à un seul sommet E_1 . Par conséquent, leur nombre chromatique est égal à 1.

1.4 Le nombre chromatique de graphes inhabituels

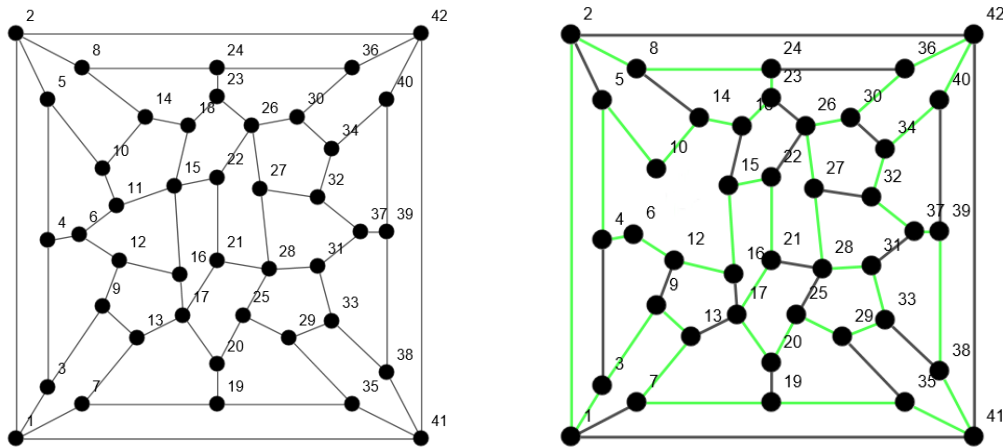
Dans cette section, notre objectif est de déterminer le nombre chromatique de deux nouveaux exemples de graphes. Ceux-ci ne font pas partie des familles de graphes traitées précédemment, ce qui rend leur étude particulièrement intéressante, car nous ne disposons pas a priori d'un résultat nous fournissant directement la valeur de leur nombre chromatique. Le but de cette section est de mettre en pratique les résultats établis dans la section précédente. Ce processus nous permettra ainsi d'illustrer la pertinence et la robustesse de nos méthodes dans des contextes variés.

Commençons par examiner le graphe de Wiener-Araya, illustré à la figure 1.14a, qui est un graphe planaire possédant 42 sommets, 67 arêtes et dont tous ses sommets ont un degré de 3 ou 4. Mentionnons que ce graphe occupe une place significative dans la recherche d'un plus petit graphe hypohamiltonien, comme l'indique l'article [19].

Présentons brièvement le concept ainsi que les différentes avancées dans ce domaine. Le lecteur pourra approfondir les différents faits mentionnés (avec plus de détails) dans ce même article [19].

Un graphe *hypohamiltonien* est défini comme un graphe qui n'est pas hamiltonien, ce qui signifie qu'il ne contient pas de circuit hamiltonien, c'est-à-dire qu'il ne possède pas de circuit passant une et une seule fois par chaque sommet du graphe. Cependant, la suppression de n'importe quel sommet de ce graphe permet de le rendre hamiltonien.

Cette propriété des graphes a été étudiée pour la première fois dans les années 1960, avec le graphe de Petersen (non planaire) comme exemple initial connu. Cependant, en 1973, le mathématicien Václav Chvátal a soulevé la question du plus petit graphe hypohamiltonien planaire. Depuis lors, plusieurs mathématiciens se sont attelés à résoudre ce problème et à améliorer les résultats antérieurs. Parmi eux, Gábor Wiener et Makoto Araya ont réalisé une avancée en 2011 en identifiant un graphe hypohamiltonien planaire contenant 42 sommets (illustré à la figure 1.14). Cette découverte a donné lieu à la rédaction d'un article intitulé "On Planar Hypohamiltonian Graphs" [28], publié en 2012 par les deux mathématiciens.



(a) Le graphe de Wiener-Araya ne possède pas de circuit hamiltonien. (b) Le graphe de Wiener-Araya sans le sommet 11 possède un circuit hamiltonien, représenté en vert.

FIGURE 1.14 – Le graphe de Wiener-Araya est un graphe hypohamiltonien planaire.

Toutefois, cette borne de 42 sommets a été surpassée quelques années plus tard grâce à l'assistance de l'informatique. En effet, une recherche assistée par ordinateur a conduit à la découverte de 25 graphes hypohamiltoniens planaires possédant 40 sommets, améliorant ainsi la borne précédente. Cette avancée est détaillée dans l'article "Planar Hypohamiltonian Graphs on 40 Vertices" [19].

À l'heure actuelle, la question posée par Chvátal suscite toujours l'intérêt des mathématiciens et des chercheurs en théorie des graphes.

Exemple 1.4.1. Le nombre chromatique du graphe de Wiener-Araya, noté W , est égal à 3. En effet, nous pouvons observer, grâce à la figure 1.15, que chacune des faces du graphe est pentagonale, *i.e.* délimitée par un cycle simple de 5 arêtes. Puisque ce cycle est de longueur impaire, la proposition 1.3.30 nous indique que l'utilisation d'au moins trois couleurs est nécessaire pour colorer les sommets de chaque cycle de telle manière que deux sommets adjacents ne reçoivent pas la même couleur, *i.e.* $\chi(W) \geq 3$. De plus, étant donné que le graphe W est planaire, le corollaire du théorème des quatre couleurs 1.3.6 nous assure que $\chi(W) \leq 4$. En outre, une coloration possible des sommets du graphe d'intérêt est illustrée à la figure 1.15, et elle requiert l'utilisation de seulement trois couleurs, *i.e.* $\chi(W) \leq 3$. Par conséquent, nous obtenons le résultat souhaité, à savoir $\chi(W) = 3$.

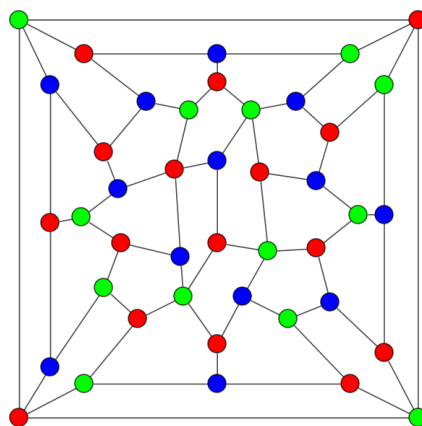


FIGURE 1.15 – Le graphe de Wiener-Araya est 3-colorable.

Le second exemple que nous allons examiner est le graphe de Goldner-Harary. Il s'agit d'un graphe planaire qui comprend 11 sommets et 27 arêtes. En 1975, les mathématiciens Anita Goldner et Frank Harary ont démontré que ce graphe est le plus petit graphe planaire maximal non hamiltonien, comme indiqué à la page 2 de l'article [7]. Cela signifie qu'il est planaire et qu'on ne peut pas lui ajouter d'arête supplémentaire sans perdre sa planarité. De plus, il ne contient pas de circuit hamiltonien.

En outre, le graphe de Goldner-Harary est un exemple de graphe *parfait*. Cela signifie que le nombre chromatique de chaque sous-graphe induit est égal à l'ordre de la plus grande clique dans ce sous-graphe induit, comme défini dans la section 14.4 du livre [9]. En d'autres termes, les propriétés de coloration et de clique de ce graphe sont intrinsèquement liées.

Enfin, il est important de noter que ce graphe est 3-connexe. Cela signifie qu'il est connecté et que pour le disconnecter, il faut au moins supprimer 3 sommets, conformément à la définition 2.4.6.

Exemple 1.4.2. Le nombre chromatique du graphe de Goldner-Harary, noté G , est égal à 4. En effet, vu la figure 1.16, nous constatons la présence d'une copie du graphe complet K_4 en tant que sous-graphe dans G . Cela permet d'affirmer, selon la proposition 1.3.14 et le corollaire 1.3.19, qu'il faut au moins quatre couleurs pour colorer les sommets de K_4 , d'où $\chi(G) \geq 4$. De plus, étant donné que le graphe G est planaire, le corollaire du théorème des quatre couleurs 1.3.6 nous assure que $\chi(G) \leq 4$. Par conséquent, nous concluons que $\chi(G) = 4$. Une coloration possible des sommets du graphe d'intérêt est illustrée à la figure 1.16.

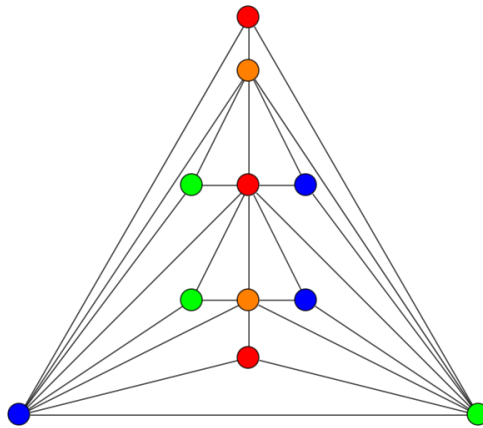


FIGURE 1.16 – Le graphe de Goldner-Harary est 4-colorable.

Chapitre 2

Encadrement du nombre chromatique d'un graphe

Dans ce deuxième chapitre, notre objectif est de déterminer les valeurs possibles du nombre chromatique. Pour répondre à cette question, nous présentons et illustrons divers résultats qui permettent d'établir des bornes inférieures et supérieures pour le nombre chromatique, offrant ainsi une idée de la quantité minimale et/ou maximale de couleurs nécessaires (mais non suffisantes) pour réaliser le coloriage d'un graphe. De plus, dans certains cas, nous constatons que les bornes fournies par les résultats sont atteintes pour des familles particulières de graphes.

Dans le but d'illustrer les différentes bornes du nombre chromatique d'un graphe que nous étudierons ultérieurement, nous allons introduire une nouvelle famille de graphes particuliers : les graphes obtenus à partir de la construction de Mycielski.

2.1 Les graphes de Mycielski

Pour rédiger cette section, les notes de cours [6], la section 14.3 du livre [9], l'article [22] et la section 5.2 du livre [27] ont été consultés.

La construction de Mycielski est une méthode qui permet de construire des graphes sans triangle, c'est-à-dire des graphes qui n'ont pas de sous-graphes isomorphes au graphe complet K_3 , ayant un nombre chromatique arbitrairement grand.

Cette construction a été développée par le mathématicien polono-américain Jan Mycielski (1932 – présent) en 1955 dans le but d'obtenir le résultat suivant : à partir d'un graphe sans triangle G ayant un nombre chromatique égal à k , la construction de Mycielski produit un nouveau graphe sans triangle G' avec un nombre chromatique égal à $k + 1$.

Décrivons maintenant cette construction de manière formelle.

Définition 2.1.1. À partir d'un graphe G , la *construction de Mycielski* produit un nouveau graphe G' qui contient G comme sous-graphe. Pour ce faire, en partant du graphe G , dont l'ensemble des sommets est $\{v_1, \dots, v_n\}$, nous introduisons de nouveaux sommets $U = \{u_1, \dots, u_n\}$, ainsi qu'un sommet supplémentaire w . Ensuite, nous ajoutons des arêtes de sorte que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, chaque sommet u_i soit adjacent à tous les voisins de v_i , et nous ajoutons également des arêtes pour connecter w à tous les sommets de U .

Explorons la méthode de construction de Mycielski à travers un exemple élémentaire.

Exemple 2.1.2. Considérons le cycle à quatre sommets v_1, v_2, v_3, v_4 . Conformément à la construction de Mycielski décrite à la définition précédente, nous introduisons quatre nouveaux sommets u_1, u_2, u_3, u_4 , ainsi qu'un sommet supplémentaire w . Ensuite, nous connectons nos différents sommets comme suit : nous ajoutons des arêtes entre le sommet w et les quatre sommets u_1, u_2, u_3, u_4 , et entre chaque sommet u_i et tous les voisins de v_i , pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. La figure 2.1 illustre le graphe obtenu après l'application de la construction de Mycielski au graphe initial.

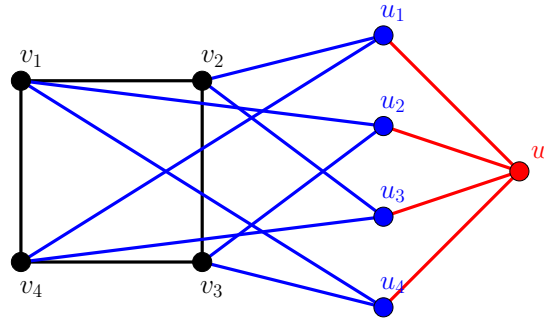


FIGURE 2.1 – Le graphe obtenu par la construction de Mycielski en partant d'un cycle à quatre sommets.

Dans notre travail, nous allons nous intéresser à la suite de graphes G_2, G_3, \dots obtenue de proche en proche en partant du graphe complet $G_2 = K_2$ et en itérant la construction de Mycielski. Les quatre premiers graphes générés par cette méthode sont illustrés à la figure 2.2.

Remarquons que les graphes deviennent rapidement de plus en plus grands. En effet, si le graphe de départ $G = (V, E)$ est composé de $\#V = n$ sommets et de $\#E = m$ arêtes, alors le nouveau graphe obtenu en appliquant la construction de Mycielski est composé de $2n + 1$ sommets et de $3m + n$ arêtes.

Étant donné que le nombre de sommets de K_2 est $\#V(K_2) = 2$, nous pouvons démontrer que le graphe obtenu à la $k^{\text{ème}}$ étape ($k \geq 2$) de la construction de Mycielski possède $\#V(G_k) = 3 \cdot 2^{k-2} - 1$ sommets.

Pour ce faire, procédons par récurrence sur le nombre de sommets $\#V(G_k)$ du graphe obtenu à la $k^{\text{ème}}$ étape ($k \geq 2$) de la construction de Mycielski.

Tout d'abord, pour le cas de base $k = 2$, nous avons :

$$\#V(G_2) = 3 \cdot 2^{2-2} - 1 = 3 - 1 = 2$$

et le graphe $G_2 = K_2$ possède bien 2 sommets.

Supposons maintenant que le graphe obtenu à la $k^{\text{ème}}$ étape ($k > 2$) de la construction de Mycielski possède $\#V(G_k) = 3 \cdot 2^{k-2} - 1$ sommets, et démontrons que le graphe obtenu à la $(k + 1)^{\text{ème}}$ étape est composé de $\#V(G_{k+1}) = 3 \cdot 2^{k-1} - 1$ sommets.

Le graphe obtenu en appliquant la construction de Mycielski possède $2 \cdot \#V(G_k) + 1$ sommets à l'étape $k + 1$, selon la définition 2.1.1. Ainsi, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \#V(G_{k+1}) &= 2 \cdot \#V(G_k) + 1 \\ &= 2 \cdot (3 \cdot 2^{k-2} - 1) + 1 \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= 3 \cdot 2^{k-1} - 2 + 1 \\ &= 3 \cdot 2^{(k+1)-2} - 1. \end{aligned}$$

Cette preuve nous permet de constater que le nombre de sommets croît de manière exponentielle à chaque étape de la construction.

Par ailleurs, le lecteur intéressé par le nombre d'arêtes peut se référer à l'OEIS #A122695 (voir [25]).

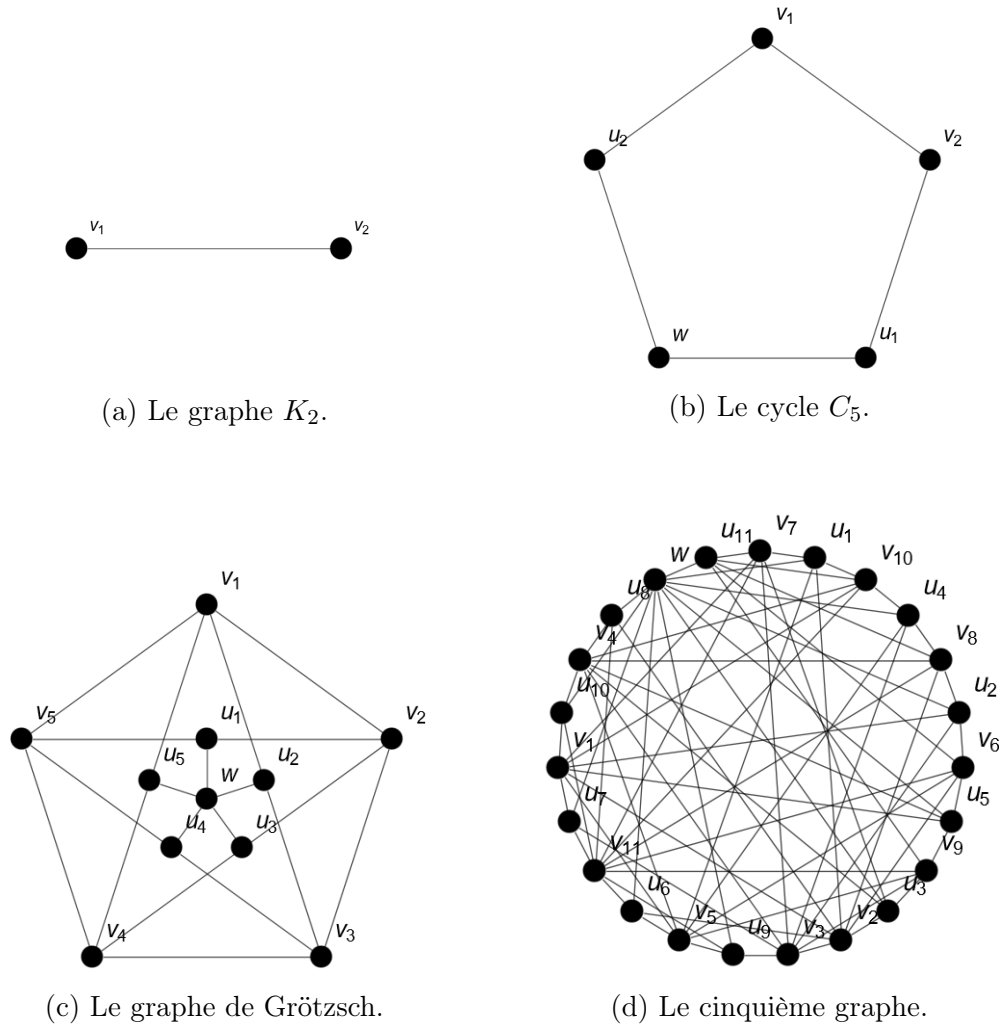


FIGURE 2.2 – Les quatre premiers graphes obtenus à partir de K_2 en appliquant la construction de Mycielski.

Nous utilisons dans la suite le terme "graphe de Mycielski M_k " pour désigner le graphe obtenu à la $k^{\text{ème}}$ étape ($k \geq 2$) de la construction de Mycielski.

Comme mentionné précédemment, nous allons utiliser les graphes de Mycielski comme exemples pour illustrer nos différentes bornes inférieures et supérieures. Par conséquent, il est essentiel de déterminer leur nombre chromatique respectif. Pour ce faire, démontrons le résultat suivant.

Théorème 2.1.3 (Mycielski, 1955). *Pour tout nombre naturel k supérieur ou égal à 2, le graphe de Mycielski M_k est sans triangle et a un nombre chromatique égal à k .*

Démonstration. Procédons par récurrence sur le nombre chromatique k .

Tout d'abord, le cas de base $k = 2$ est vérifié. En effet, le graphe complet K_2 constitué de deux sommets a les propriétés requises : il est sans triangle et a un nombre chromatique égal à 2, vu la proposition 1.3.14.

Supposons maintenant que le graphe de Mycielski M_k est sans triangle et a un nombre chromatique égal à k ($k > 2$), et démontrons que le graphe de Mycielski M_{k+1} est également sans triangle et de nombre chromatique égal à $k + 1$.

Désignons l'ensemble des sommets du graphe M_k par V_{M_k} . Cet ensemble est composé des sommets v_1, v_2, \dots, v_n , où n est le nombre d'éléments dans V_{M_k} .

Soit M_{k+1} le graphe formé à partir du graphe M_k par la construction de Mycielski consistant à ajouter $n + 1$ sommets u_1, \dots, u_n, w , et à ajouter des arêtes de sorte que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, chaque sommet u_i soit adjacent à tous les voisins du sommet v_i dans M_k , ainsi qu'à w .

1. Montrons tout d'abord que le graphe M_{k+1} est sans triangle.

Premièrement, remarquons que par construction, l'ensemble des sommets $U := \{u_1, \dots, u_n\}$ forme un ensemble indépendant dans le graphe M_{k+1} . Par conséquent, aucun triangle ne peut contenir plus d'un sommet u_i de U .

Deuxièmement, étant donné que le graphe M_k est sans triangle par hypothèse de récurrence, aucun triangle ne peut être formé de trois sommets de V_{M_k} .

Enfin, le sommet w n'est adjacent à aucun sommet de V_{M_k} , mais il est adjacent à tous les sommets de U , ce qui signifie que w ne peut pas appartenir à un triangle.

Ainsi, s'il existe un triangle dans le graphe M_{k+1} , il doit être constitué d'un sommet u_i de U et de deux sommets adjacents v_j et v_k de V_{M_k} , qui sont voisins de v_i (puisque, par construction, u_i est adjacent à tous les voisins de v_i mais pas à v_i lui-même). Par conséquent, si u_i, v_j, v_k forment un triangle dans le graphe M_{k+1} , alors v_i, v_j, v_k formeraient un triangle dans le graphe M_k (car le sommet u_i est adjacent aux voisins du sommet v_i). Mais, cela signifierait que le graphe M_k contient un triangle, ce qui contredit l'hypothèse de récurrence affirmant que M_k est sans triangle.

Nous pouvons donc en conclure que le graphe M_{k+1} est sans triangle, comme souhaité.

2. Montrons à présent que le graphe M_{k+1} a un nombre chromatique égal à $k + 1$. Étant donné que, par hypothèse de récurrence, le graphe M_k a un nombre chromatique égal à k , cela signifie qu'il est k -colorable, c'est-à-dire qu'il existe une fonction de coloration $c : V_{M_k} \rightarrow \{1, \dots, k\}$ pour ses sommets.

Pour obtenir un $(k + 1)$ -coloriage des sommets du graphe M_{k+1} , nous pouvons simplement étendre le k -coloriage de M_k en un nouveau $(k + 1)$ -coloriage $c' : V_{M_{k+1}} \rightarrow \{1, \dots, k + 1\}$ défini comme suit :

- $c'(v_i) = c(v_i)$;
- $c'(u_i) = c(v_i)$;
- $c'(w) = k + 1$.

Une telle définition est valide car, pour les sommets v_i dans M_k , nous attribuons les mêmes couleurs que celles assignées par le coloriage c dans le contexte de M_k . Ainsi, cela garantit que le coloriage c' est propre lorsqu'on se restreint à l'ensemble des sommets de M_k .

De plus, puisque par construction, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, chaque sommet u_i est adjacent à tous les voisins du sommet v_i mais pas à v_i lui-même, et que les voisins de v_i n'ont pas reçu la couleur $c(v_i)$ dans le coloriage c (puisque un coloriage adéquat est tel que des sommets adjacents ne reçoivent pas la même couleur), nous sommes en mesure d'attribuer au sommet u_i la même couleur que celle attribuée au sommet v_i , *i.e.* $c'(u_i) = c(v_i)$.

Enfin, comme colorer les sommets de l'ensemble U nécessite k couleurs (car, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, nous avons $c'(u_i) = c(v_i)$ et car M_k est k -colorable donc k couleurs suffisent pour colorer tous les sommets v_i de M_k) et que le sommet w est adjacent à tous les sommets de U , une $(k + 1)^{\text{ème}}$ couleur doit être attribuée au sommet w afin de garantir un coloriage valide.

Avec ce $(k + 1)$ -coloriage des sommets du graphe M_{k+1} , nous avons donc démontré l'inégalité $\chi(M_{k+1}) \leq \chi(M_k) + 1$.

Afin de démontrer que $\chi(M_{k+1}) = \chi(M_k) + 1$, nous allons établir que $\chi(M_k) < \chi(M_{k+1})$, *i.e.* $\chi(M_k) + 1 \leq \chi(M_{k+1})$.

Pour ce faire, nous allons considérer un k -coloriage des sommets du graphe M_{k+1} et nous allons chercher à obtenir un coloriage des sommets du graphe M_k utilisant moins de k couleurs. Supposons que c' soit un k -coloriage de M_{k+1} . Sans perte de généralité, quitte à permuter les couleurs, nous pouvons supposer que la couleur k est assignée au sommet w , *i.e.* $c'(w) = k$. Ensuite, étant donné que le sommet w est adjacent à tous les sommets de l'ensemble U , cela limite le coloriage c' aux couleurs $\{1, \dots, k - 1\}$ pour colorer les sommets de l'ensemble U . Par ailleurs, comme le sommet w n'est adjacent à aucun sommet du graphe M_k , les k couleurs peuvent être utilisées pour colorer les sommets de l'ensemble V_{M_k} .

Soit A l'ensemble des sommets de M_k pour lesquels le coloriage c' assigne la couleur k . Nous allons maintenant utiliser U pour recolorer les sommets de A avec les couleurs $\{1, \dots, k - 1\}$. Si nous pouvons effectuer cette opération correctement, nous aurons ainsi créé un $(k - 1)$ -coloriage de M_k , un graphe k -chromatique, ce qui est contradictoire.

Procédons comme suit pour obtenir la recoloration souhaitée : pour chaque sommet v_j appartenant à l'ensemble A , nous modifions sa couleur pour qu'elle soit égale à $c'(u_j)$. Cette modification ne pose aucun problème, puisque, par construction, chaque sommet u_j dans U est adjacent à tous les voisins de v_j dans V_{M_k} mais pas à v_j lui-même, et que les voisins du sommet v_j (initialement coloré avec la couleur k) et donc les voisins de u_j , ont déjà été colorés avec des couleurs différentes de k dans c' . De plus, nous savons que les sommets de U ne peuvent être colorés qu'avec les couleurs $\{1, \dots, k - 1\}$ parce qu'ils sont connectés à w , qui a été coloré avec la couleur k . Dès lors, nous sommes en mesure d'attribuer au sommet v_j la même couleur que celle attribuée au sommet u_j dans c' .

En conséquence, grâce à cette recoloration, nous soutenons que c' est un $(k - 1)$ -coloriage des sommets de M_k . Pour s'en convaincre, prenons une arête $\{v_i, v_j\}$ dans M_k (avec $i \neq j$, car nous avons supposé travailler avec des graphes simples).

Si les sommets v_i et v_j n'appartiennent pas à l'ensemble A , alors nous n'avons pas modifié la coloration de ces sommets. Donc, l'arête $\{v_i, v_j\}$ n'est pas monochromatique, car c' était un coloriage approprié du graphe M_{k+1} .

Si le sommet v_i appartient à l'ensemble A mais pas le sommet v_j , alors v_j est voisin de v_i et, par construction, le sommet u_i a une arête vers v_j . Cependant, étant donné que nous avons changé la couleur de v_i en $c'(u_i)$, cela signifie que $c'(u_i) \neq c'(v_j)$, car c' était un coloriage approprié des sommets du graphe M_{k+1} . Par conséquent, l'arête $\{v_i, v_j\}$ n'est pas non plus monochromatique.

Comme il n'y a pas d'arêtes entre les sommets de l'ensemble A (car ils étaient tous initialement colorés avec la couleur k sous c' , et donc il n'y avait pas d'arêtes entre eux), cela couvre tous les cas.

Nous avons ainsi transformé c' en un $(k-1)$ -coloriage d'un graphe ayant un nombre chromatique égal à k . Par minimalité du nombre chromatique, cela est impossible. Nous pouvons en conclure que c' ne peut pas exister, c'est-à-dire que M_{k+1} ne peut pas être coloré avec k couleurs, ce qui se traduit par $\chi(M_k) < \chi(M_{k+1})$.

Au final, nous obtenons le résultat escompté : $\chi(M_{k+1}) = \chi(M_k) + 1 = k + 1$.

Par conséquent, le graphe M_{k+1} est sans triangle et a un nombre chromatique égal à $k + 1$. \square

Grâce à ce théorème, nous pouvons déterminer le nombre chromatique des divers graphes de Mycielski obtenus à partir du graphe complet K_2 , notés M_k pour $k \geq 2$. La figure 2.3 spécifie le nombre chromatique des quatre premiers graphes obtenus à partir du graphe complet K_2 en appliquant la construction de Mycielski. Elle inclut également un exemple de coloriage approprié des sommets de chacun des graphes.

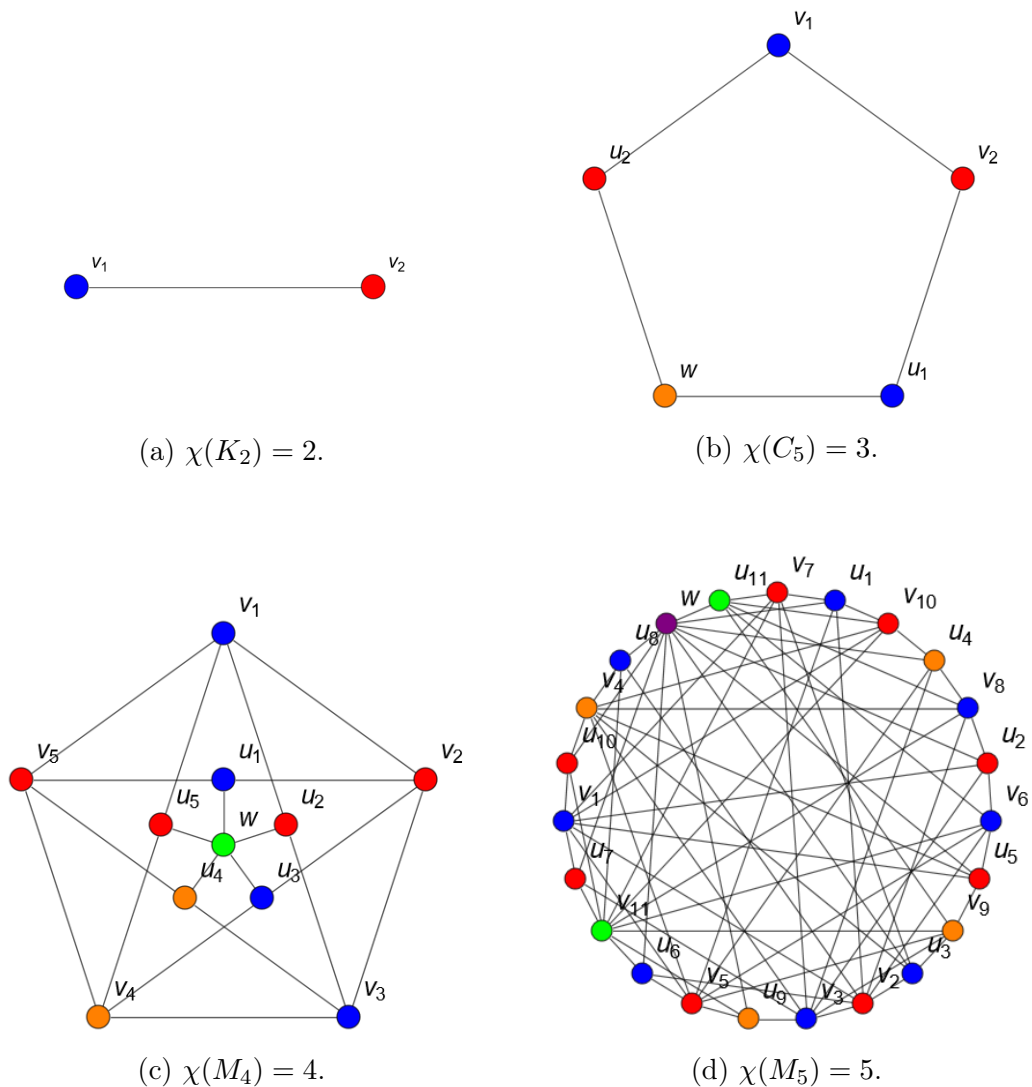


FIGURE 2.3 – Le nombre chromatique des quatre premiers graphes obtenus à partir de K_2 en appliquant la construction de Mycielski.

2.2 Bornes inférieures

Commençons par présenter différentes bornes inférieures pour le nombre chromatique d'un graphe.

Dans le chapitre précédent, nous avons déjà établi une première borne inférieure pour le nombre chromatique d'un graphe en fonction d'un sous-graphe de ce dernier, comme l'indique le lemme 1.3.18 : le nombre chromatique d'un graphe est toujours supérieur ou égal au nombre chromatique d'un de ses sous-graphes.

De plus, nous avons également déjà établi une deuxième borne inférieure pour le nombre chromatique d'un graphe en fonction de l'ordre maximal d'une clique, comme l'indique le corollaire 1.3.19 : le nombre chromatique d'un graphe est toujours supérieur ou égal à l'ordre maximal d'une clique dans ce graphe.

La proposition suivante expose une troisième borne inférieure pour le nombre chromatique d'un graphe en fonction du nombre de sommets et du nombre maximal de sommets indépendants (voir les mémoires [1, 21]). Pour rappel, les concepts d'ensemble de sommets indépendants et de nombre maximal de sommets indépendants ont été définis précédemment dans les définitions 1.1.2 et 1.3.15.

Proposition 2.2.1. *Si $G = (V, E)$ est un graphe ayant $\#V$ sommets et un nombre maximal de sommets indépendants $\alpha(G)$, alors $\chi(G) \geq \frac{\#V}{\alpha(G)}$. En particulier, on a $\chi(G) \geq \left\lceil \frac{\#V}{\alpha(G)} \right\rceil$.*

Démonstration. Supposons que le graphe G soit coloré avec $\chi(G) = \lambda$ couleurs. Soit $V_i \subseteq V$ l'ensemble de tous les sommets ayant reçu la couleur i , pour chaque $i \in \{1, \dots, \lambda\}$. Puisque le coloriage des sommets de G est propre, chaque ensemble V_i de sommets est indépendant, formant ainsi une partition de l'ensemble V des sommets. De ce fait, puisque $\alpha(G)$ représente le nombre maximal de sommets indépendants dans le graphe G , il est évident que $\#V_i \leq \alpha(G)$, pour chaque $i \in \{1, \dots, \lambda\}$. Puisque nous disposons d'une partition de V , il s'ensuit que :

$$\#V = \# \bigcup_{i=1}^{\lambda} V_i = \sum_{i=1}^{\lambda} \#V_i \leq \sum_{i=1}^{\lambda} \alpha(G) = \lambda \alpha(G).$$

Nous obtenons ainsi l'inégalité souhaitée $\lambda \geq \frac{\#V}{\alpha(G)}$.

En particulier, puisque λ est un nombre naturel, il est clair que $\lambda \geq \left\lceil \frac{\#V}{\alpha(G)} \right\rceil$. □

Remarque 2.2.2. Il est important de remarquer que si tous les sous-ensembles indépendants V_i de l'ensemble de sommets V ont la même cardinalité, alors la borne inférieure fournie par la proposition précédente nous renseigne sur le nombre minimal d'ensembles indépendants qui pourraient exister dans le graphe G .

Examinons maintenant cette propriété à travers l'exemple suivant.

Exemple 2.2.3. Considérons le graphe de Mycielski M_4 constitué de 11 sommets et de 20 arêtes, illustré à la figure 2.2c.

Nous pouvons identifier les seize ensembles indépendants suivants :

$\{1, 4, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{2, 3, 6\}, \{2, 5, 6\}, \{3, 4, 6\}, \{1, 4, 7, 10\}, \{1, 5, 7, 9\}, \{1, 7, 9, 10\}, \{2, 3, 8, 11\},$
 $\{2, 5, 9, 11\}, \{2, 8, 9, 11\}, \{3, 4, 8, 10\}, \{3, 8, 10, 11\}, \{4, 7, 8, 10\}, \{5, 7, 9, 11\}, \{7, 8, 9, 10, 11\}.$

Nous en déduisons que le nombre maximal de sommets indépendants dans P est $\alpha(P) = 5$.

En conclusion, nous constatons que $\chi(P) \geq \frac{\#V}{\alpha(G)} = \frac{11}{5} = 2.2$. En particulier, nous avons $\chi(P) \geq \left\lceil \frac{11}{5} \right\rceil = 3$.

2.3 Bornes supérieures

Maintenant, présentons différentes bornes supérieures pour le nombre chromatique d'un graphe.

Une première borne supérieure pour le nombre chromatique d'un graphe en fonction du nombre de sommets est la suivante (voir le mémoire [1]) : pour tout graphe G d'ordre n , on a $\chi(G) \leq n$. La démonstration de cette affirmation est évidente. En effet, pour rappel, il suffit d'assigner une couleur distincte à chaque sommet du graphe G . En procédant de la sorte, chaque sommet aura une couleur unique, et comme il y a au maximum n sommets, le nombre de couleurs nécessaires ne dépassera pas n .

Au vu de la proposition 1.3.14, nous pouvons observer que la borne supérieure préalablement énoncée, $\chi(G) \leq n$, est atteinte uniquement lorsque le graphe G en question est un graphe complet. Il s'agit bien du seul cas, car s'il manque une arête, deux sommets pourraient avoir la même couleur.

Le résultat qui suit établit une seconde borne supérieure pour le nombre chromatique d'un graphe en fonction du nombre d'arêtes (voir le mémoire [21]).

Proposition 2.3.1. *Pour tout graphe $G = (V, E)$, on a $\chi(G) \leq \frac{1+\sqrt{8\cdot\#E+1}}{2}$. En particulier, on a $\chi(G) \leq \left\lceil \frac{1+\sqrt{8\cdot\#E+1}}{2} \right\rceil$.*

Démonstration. Considérons un $\chi(G)$ -coloriage des sommets du graphe G et posons $\lambda = \chi(G)$. Dans un tel coloriage, chaque ensemble de sommets partageant la même couleur forme un ensemble indépendant, ce qui implique que deux sommets appartenant au même ensemble de couleur ne sont pas adjacents. Par conséquent, λ nous renseigne sur une partition de l'ensemble V des sommets en un nombre minimum d'ensembles indépendants.

Il est important de noter qu'il doit exister au moins une arête entre chaque paire de ces λ ensembles indépendants, sinon nous pourrions les colorer avec la même couleur. Supposons, sans perte de généralité, qu'il y ait exactement une arête entre chaque paire de ces ensembles. Le nombre total d'arêtes entre ces ensembles sera alors donné par C_λ^2 , ce qui correspond au nombre de façons de choisir 2 sommets parmi λ ensembles.

En outre, étant donné qu'il doit exister au moins une arête entre chaque paire de ces λ ensembles indépendants, nous obtenons

$$\#E \geq C_\lambda^2 = \frac{\lambda \cdot (\lambda - 1)}{2}.$$

Ceci peut également être exprimé de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
& \#E \geq \frac{\lambda \cdot (\lambda - 1)}{2} \\
\Leftrightarrow & 2 \cdot \#E \geq \lambda^2 - \lambda \\
\Leftrightarrow & 2 \cdot \#E + \frac{1}{4} \geq \lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} \\
\Leftrightarrow & \frac{8 \cdot \#E + 1}{4} \geq \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 \\
\Leftrightarrow & \sqrt{\frac{8 \cdot \#E + 1}{4}} \geq \lambda - \frac{1}{2} \quad \text{puisque } \lambda \geq 1 \text{ et } \#E \geq 0 \\
\Leftrightarrow & \frac{1 + \sqrt{8 \cdot \#E + 1}}{2} \geq \lambda.
\end{aligned}$$

En particulier, puisque λ est un nombre naturel, il est clair que $\lambda \leq \left\lfloor \frac{1 + \sqrt{8 \cdot \#E + 1}}{2} \right\rfloor$. \square

Il est important de noter que la borne supérieure que nous venons de présenter est atteinte pour une famille spécifique de graphes.

Remarque 2.3.2. La borne supérieure théorique préalablement établie $\chi(G) \leq \frac{1 + \sqrt{8 \cdot \#E + 1}}{2}$ est atteinte lorsque le graphe G en question appartient à la famille des graphes complets. En effet, dans un graphe complet, chaque paire de sommets est reliée par une arête. Par conséquent, le nombre d'arêtes est simplement égal au nombre de paires de sommets. Étant donné que le nombre de façon de choisir deux sommets parmi n sommets est donné par le coefficient binomial C_n^2 , où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ représente le nombre de sommets du graphe complet K_n , le nombre d'arêtes est égal à $\frac{n \cdot (n - 1)}{2}$. Dès lors, le nombre chromatique du graphe complet K_n , *i.e.* $\chi(K_n)$, est égal à

$$\frac{1 + \sqrt{8 \cdot \frac{n \cdot (n - 1)}{2} + 1}}{2} = \frac{1 + \sqrt{4n^2 - 4n + 1}}{2} = \frac{1 + \sqrt{(2n - 1)^2}}{2} = \frac{1 + 2n - 1}{2} = n,$$

où la troisième égalité s'obtient en tenant compte du fait que $2n - 1 \geq 0$ puisque n est un nombre naturel non nul.

Examinons à présent un exemple concret pour illustrer le résultat précédent.

Exemple 2.3.3. Considérons à nouveau le graphe de Mycielski M_4 , représenté à la figure 2.2c. Ce graphe est composé de 20 arêtes, *i.e.* $\#E = 20$. Par conséquent, la borne $\frac{1 + \sqrt{8 \cdot \#E + 1}}{2}$ est égale à ≈ 6.84 . Ainsi, nous constatons que

$$\chi(M_4) \leq \frac{1 + \sqrt{8 \cdot \#E + 1}}{2} \approx 6.84.$$

Considérons maintenant le graphe de Mycielski M_5 constitué de 23 sommets, représenté à la figure 2.2d. Ce graphe est composé de 71 arêtes, *i.e.* $\#E = 71$. Par conséquent, la borne $\frac{1 + \sqrt{8 \cdot \#E + 1}}{2}$ est égale à ≈ 12.43 . Dès lors, nous constatons que

$$\chi(M_5) \leq \frac{1 + \sqrt{8 \cdot \#E + 1}}{2} \approx 12.43.$$

La proposition suivante présente une troisième borne supérieure pour le nombre chromatique d'un graphe en fonction du degré maximal (introduit à la définition 1.1.2). La section 7.1.1 du livre [10] a été consultée pour établir le résultat suivant.

Proposition 2.3.4. *Pour tout graphe $G = (V, E)$ d'ordre n et de degré maximal $\Delta(G)$, on a $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$, où $\Delta(G)$ représente le degré maximal des sommets du graphe G .*

Démonstration. Procédons par récurrence sur le nombre de sommets n du graphe G .

Tout d'abord, le cas de base $n = 1$ est évident, puisque dans cette situation, le graphe G se compose d'un unique sommet et ne comporte pas d'arêtes (car nous avons supposé travailler avec des graphes simples). Par conséquent, $\chi(G) = 1$ et $\Delta(G) = 0$.

Supposons à présent que la propriété soit vérifiée pour tous les graphes (simples) d'ordre $n - 1$ ($n \geq 2$), c'est-à-dire que tout graphe G composé de $n - 1$ sommets puisse être coloré avec au plus $\Delta(G) + 1$ couleurs. Pour l'induction, considérons un graphe H d'ordre n et choisissons arbitrairement un sommet v au sein de ce graphe H . En supprimant ce sommet (ainsi que ses arêtes incidentes), nous obtenons un graphe d'ordre $n - 1$, c'est-à-dire le graphe $H \setminus \{v\}$, dont le degré maximal ne dépasse pas $\Delta(H)$. Par hypothèse de récurrence, nous sommes en mesure de colorer le graphe $H \setminus \{v\}$ avec un maximum de $\Delta(H) + 1$ couleurs. À présent, replaçons le sommet v , y compris ses arêtes incidentes. Ce dernier possède au plus $\Delta(H)$ voisins qui ont déjà reçu une couleur. Dès lors, il est nécessaire d'ajouter une couleur supplémentaire pour colorer le sommet v . Par conséquent, un maximum de $\Delta(H) + 1$ couleurs sont nécessaires pour colorer le graphe H d'ordre n . \square

Nous pouvons constater que la borne supérieure venant d'être présentée est atteinte pour des familles de graphes particulières. Cette observation sera ultérieurement démontrée au corollaire 2.3.16.

Remarque 2.3.5. Remarquons que la borne supérieure théorique précédemment établie $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ est atteinte lorsque le graphe G en question est un graphe complet ou un cycle de longueur impaire.

Afin d'exemplifier la propriété précédente, examinons à nouveau les graphes de Mycielski M_4 et M_5 .

Exemple 2.3.6. Considérons les graphes de Mycielski M_4 et M_5 présentés à la figure 2.2.

Nous pouvons constater que le degré maximal Δ des graphes M_4 et M_5 est respectivement égal à 5 et 11. Par conséquent, l'inégalité énoncée dans la proposition précédente est valable pour les deux graphes :

$$\chi(M_4) \leq \Delta(M_4) + 1 = 6 \quad \text{et} \quad \chi(M_5) \leq \Delta(M_5) + 1 = 12.$$

Avant de corroborer l'observation énoncée à la remarque 2.3.5 (au corollaire 2.3.16), il est important de souligner que le résultat énoncé dans la proposition 2.3.4 est en réalité équivalent au fait que $\chi(G) \leq \Delta(G)$ ou $\chi(G) = \Delta(G) + 1$, étant donné que $\chi(G)$ est un nombre naturel. Ceci nous suggère donc que cette borne supérieure pourrait éventuellement être optimisée. . .

Une première optimisation de la borne supérieure précédemment exposée est présentée dans le théorème 2.3.12. Cette quatrième borne supérieure est basée sur le degré minimal des différents sous-graphes induits (introduit à la définition 1.1.2) et a été établie par les mathématiciens Georges Szekeres (1911 – 2005) et Herbert Wilf (1931 – 2012). Cependant, sa démonstration requiert l'utilisation d'un algorithme visant à assigner des couleurs aux

sommets d'un graphe de manière à garantir que deux sommets adjacents aient des couleurs distinctes. Pour rédiger ce qui suit, la section 7.1.1 du livre [10] a été consultée.

L'algorithme en question est présenté dans la définition qui suit.

Définition 2.3.7. *L'algorithme de coloration gloutonne* pour un graphe $G = (V, E)$ d'ordre n , basé sur une énumération des sommets $\{v_1, \dots, v_n\}$ de V , consiste à colorer les sommets dans la suite ordonnée v_1, v_2, \dots, v_n , en attribuant à chaque sommet v_i ($i \in \{1, \dots, n\}$) la plus petite couleur disponible dans la liste $\mathcal{C} = \{1, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$ de couleurs potentielles qui n'a pas encore été utilisée parmi ses voisins.

Développons à présent un algorithme simple (sous forme de pseudo-code) pour parvenir à une coloration appropriée d'un graphe, en utilisant l'approche de la coloration gloutonne.

Algorithme 2.3.8. Supposons que les sommets d'un graphe $G = (V, E)$ soient ordonnés comme suit : v_1, v_2, \dots, v_n . Nous allons maintenant procéder à la coloration des sommets v_i (où $i \in \{1, 2, \dots, n\}$) de manière successive. Pour ce faire, nous utiliserons les couleurs disponibles dans la liste $\mathcal{C} = \{1, 2, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$ et attribuerons à chaque sommet la plus petite couleur disponible dans \mathcal{C} qui n'a pas encore été assignée à ses voisins.

Algorithme 1 : Coloration gloutonne

Données : Choix d'un ordre des sommets de G : v_1, v_2, \dots, v_n ;
 Ensembles des voisins des différents sommets : $\nu(v_1), \nu(v_2), \dots, \nu(v_n)$.
 $c(v_1) = 1$;
Pour $i \in \{2, \dots, n\}$ **Faire**
 | $c(v_i) = \inf\{j : c(v_t) \neq j, \forall t \in \{1, \dots, i-1\} \text{ tel que } v_t \in \nu(v_i)\}$;
Fin
Sortie : Un coloriage des sommets de G , $c : V \rightarrow \mathbb{N}$.

Analysons succinctement l'algorithme décrit dans la partie encadrée. Notons d'abord que la notation $\nu(v_i)$ désigne l'ensemble des voisins du sommet v_i . L'idée fondamentale de l'algorithme consiste à attribuer la première couleur disponible, c'est-à-dire la couleur 1, au premier sommet v_1 , puis à parcourir les sommets v_2, v_3, \dots, v_n restants dans cet ordre spécifique. À chaque itération de la boucle, l'objectif est d'assigner la plus petite couleur qui n'a pas encore été utilisée parmi les voisins du sommet v_i . La variable j , qui détermine la couleur à attribuer à un sommet, prendra des valeurs successives, débutant à 1 et allant jusqu'à ce qu'une valeur adéquate soit trouvée. Il est important de noter que la valeur maximale que j peut atteindre est $\Delta(G) + 1$. Cela découle du fait que, dans l'algorithme en question, chaque sommet à colorer a au plus $\Delta(G)$ voisins dans le sous-graphe induit. Une fois que tous les sommets du graphe G ont été parcourus et ont reçu une couleur, l'algorithme s'arrête et renvoie une coloration c appropriée des sommets de G .

Au vu de la définition et du pseudo-code venant d'être exposés, nous pouvons faire les quelques observations suivantes (voir la section 3.4.1 du mémoire [1], les sections 1.7.3 et 7.1.1 du livre [10] et la section 3 des notes de cours [20]).

Remarque 2.3.9. Tout d'abord, l'algorithme de coloration est qualifié de "glouton" en raison de son approche simple et rapide. Il ne tient pas compte d'une stratégie à long terme ni d'une vue d'ensemble du problème de coloration. Au lieu de cela, il opère de manière "gloutonne", prenant des décisions basées uniquement sur les informations immédiates et

locales disponibles à chaque étape. Cette approche néglige donc l'impact sur les sommets à colorer ultérieurement et ne vise pas à minimiser le nombre de couleurs utilisées.

De plus, cet algorithme est simple à comprendre et à mettre en œuvre. Il fournit une méthode de résolution accessible, qui ne nécessite pas de calculs complexes ni d'heuristiques sophistiquées.

En ce qui concerne l'efficacité de résolution du problème (nous considérerons un algorithme efficace s'il s'effectue en un temps de calcul polynomial), le temps de calcul de l'algorithme est quadratique ($\mathcal{O}((\#V)^2)$), car il parcourt tous les sommets du graphe exactement une fois, en examinant les voisins de chaque sommet pour déterminer la plus petite couleur disponible. En ce qui concerne la mémoire, l'algorithme stocke principalement les couleurs attribuées à chaque sommet, ce qui nécessite un espace mémoire de l'ordre de $\mathcal{O}(\#V)$.

En outre, l'algorithme de coloration gloutonne ne garantit pas un coloriage optimal des sommets, car le nombre de couleurs utilisées dépend de l'ordre dans lequel les sommets sont traités. Il existe un grand nombre d'énumérations possibles ($(\#V)!$), ce qui rend peu "probable" que l'algorithme produise une coloration avec le nombre minimum de couleurs. Dans la section 4.4, nous verrons que le problème de déterminer si un graphe peut être coloré avec un nombre donné de couleurs est *NP-complet* lorsque le nombre de couleurs est supérieur ou égal à 3. Cela signifie qu'il n'existe pas d'algorithme à complexité polynomiale pour le résoudre, à moins que P soit égal à NP¹.

Pour terminer, il existe plusieurs stratégies pour choisir l'ordre des sommets à traiter (en dehors d'une sélection aléatoire), comme ordonner les sommets par ordre décroissant de degré, ordonner les sommets par ordre croissant de degré, ou même recourir à des heuristiques plus élaborées. Cependant, il est essentiel de noter que différents ordres de traitement des sommets conduisent généralement à des colorations différentes du graphe. C'est pourquoi il est important de trouver un ordre efficace pour minimiser le nombre de couleurs nécessaires à l'obtention d'un coloriage adéquat. Trouver des ordres optimaux peut néanmoins s'avérer un défi complexe. Parmi les stratégies couramment adoptées pour ordonner les sommets, on trouve le choix de classer en premier les sommets de plus haut degré.

Par ailleurs, il convient de mentionner qu'il existe d'autres algorithmes permettant de colorer de manière appropriée les sommets d'un graphe. Un exemple est l'algorithme de coloration des sommets ordonnés selon un parcours en largeur, désigné sous le nom de *BFSCol* dans le chapitre 4 de ce travail. Nous aborderons cet algorithme plus en détail dans la section 4.4 dédiée à l'étude du problème de décision *kCOL*. Ce problème consiste à déterminer si un graphe donné peut être coloré avec au plus k couleurs, de telle sorte que deux sommets adjacents n'aient jamais la même couleur.

1. Dans un prochain chapitre, nous aborderons le concept d'efficacité des algorithmes. Un algorithme est considéré efficace s'il peut résoudre un problème en un nombre d'étapes de calcul limité par une fonction polynomiale de la taille des données en entrée. Lorsqu'un problème peut être résolu de cette manière, il est classé dans la catégorie P, pour polynomiale. Cependant, pour de nombreux problèmes, il n'est pas clair s'ils appartiennent à la classe P. C'est pourquoi il est nécessaire de définir d'autres classes, notamment la classe NP (pour non déterministe polynomiale). Un problème de décision, c'est-à-dire un problème pour lequel la réponse est soit "oui" soit "non", appartient à la classe NP s'il est possible de vérifier une solution proposée en un temps polynomial. Une question fondamentale se pose alors : si nous pouvons vérifier une solution en temps polynomial, est-il également possible de trouver la solution elle-même en temps polynomial ? Autrement dit, cette question revient à déterminer si P est égal à NP.

Une illustration de cet algorithme de coloration gloutonne, ainsi que de la remarque précédente, est présentée dans l'exemple qui suit.

Exemple 2.3.10. Le graphe icosaédrique I est un graphe 5-régulier composé de 12 sommets et de 30 arêtes. Ce dernier est illustré à la figure 2.4a.

Notre but est de déterminer un coloriage approprié pour les sommets du graphe illustré à la figure 2.4a en appliquant l'algorithme de coloration gloutonne. Les sommets du graphe ont tout d'abord été arrangés de manière aléatoire : $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l$, et doivent être colorés en suivant l'ordre des couleurs : $\mathcal{C} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Pour accomplir notre tâche, il suffit de suivre les indications énoncées dans la définition 2.3.7. En les respectant scrupuleusement, le tableau 2.1 montre les différentes couleurs attribuées aux sommets du graphe I . Ceci est réalisé en prenant en considération l'ordre dans lequel les sommets doivent être colorés ainsi que les voisins du sommet à colorer qui ont déjà reçu une couleur.

| Ordre des sommets | Voisins du sommet déjà colorés | Couleur attribuée |
|-------------------|--|-------------------|
| a | / | 1 |
| b | / | 1 |
| c | $c(a) = 1$ | 2 |
| d | $c(b) = 1$ | 2 |
| e | $c(a) = 1, c(d) = 2$ | 3 |
| f | $c(a) = 1, c(d) = 2, c(e) = 3$ | 4 |
| g | $c(b) = 1, c(c) = 2$ | 3 |
| h | $c(b) = 1, c(c) = 2, c(g) = 3$ | 4 |
| i | $c(a) = 1, c(c) = 2, c(g) = 3, c(e) = 3$ | 4 |
| j | $c(a) = 1, c(c) = 2, c(f) = 4, c(h) = 4$ | 3 |
| k | $c(b) = 1, c(d) = 2, c(e) = 3, c(g) = 3, c(i) = 4$ | 5 |
| l | $c(b) = 1, c(d) = 2, c(f) = 4, c(h) = 4, c(j) = 3$ | 5 |

TABLE 2.1 – Application de l'algorithme de coloration gloutonne pour le graphe icosaédrique, dont l'ordre des sommets correspond à l'ordre lexicographique.

En effet, le premier sommet à être coloré est le sommet a , et puisque la plus petite couleur disponible dans l'ensemble \mathcal{C} est la couleur 1, nous lui attribuons cette couleur. Ensuite, nous passons au sommet b . Étant donné qu'il n'est pas adjacent au sommet a , déjà coloré avec la couleur 1, la plus petite couleur disponible dans \mathcal{C} reste le 1. Ainsi, nous attribuons également la couleur 1 au sommet b . Nous poursuivons en colorant le sommet c . Puisqu'il est adjacent au sommet a (coloré avec 1) mais pas au sommet b (coloré avec 1 également), la plus petite couleur disponible dans \mathcal{C} est le 2. Par conséquent, nous attribuons la couleur 2 au sommet c . Pour colorer le sommet d , il suffit de lui attribuer la couleur 2, car il est uniquement adjacent au sommet coloré b , qui est coloré en 1. Le sommet e est adjacent aux sommets a et d , qui ont déjà été colorés en 1 et 2, respectivement. Par conséquent, la plus petite couleur disponible dans \mathcal{C} est le 3, ce qui nous permet d'attribuer la couleur 3 au sommet e . Pour déterminer les couleurs des autres sommets, la même méthode est appliquée.

Au final, en appliquant l'algorithme de coloration gloutonne que nous venons de décrire et en considérant que l'ensemble de couleurs $\mathcal{C} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ correspond à l'ensemble de couleurs {vert, rouge, bleu, jaune, orange}, nous parvenons au coloriage représenté à la figure 2.4b.

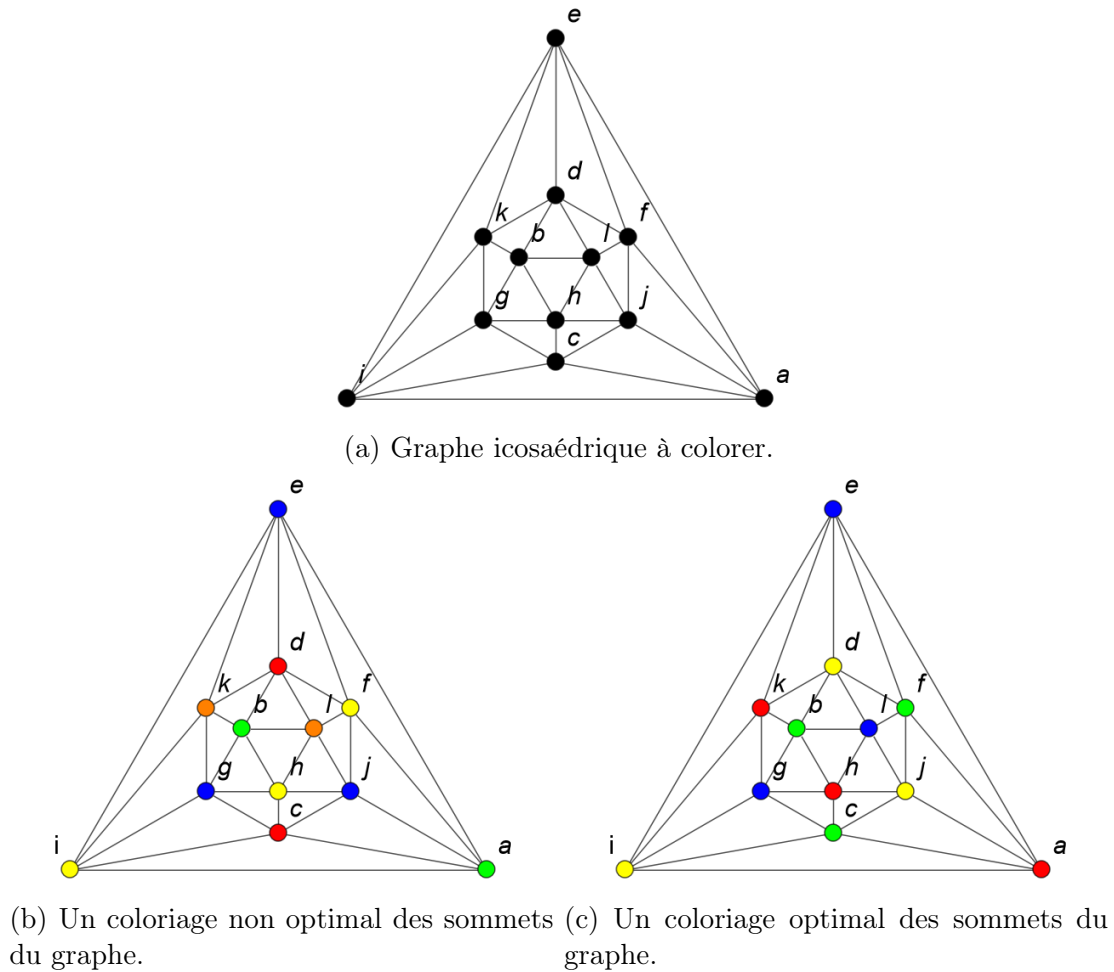


FIGURE 2.4 – Un exemple d'application de l'algorithme de coloration gloutonne.

En outre, il est important de noter que le nombre chromatique du graphe I , pour lequel nous avons établi la coloration, est égal à 4. En effet, le graphe I étant planaire, le corollaire du théorème des quatre couleurs 1.3.6 nous assure que $\chi(I) \leq 4$. De plus, la présence d'une copie du graphe roue W_6 en tant que sous-graphe dans I nous permet d'affirmer, selon la proposition 1.3.32, qu'il faut au moins quatre couleurs pour colorer les sommets de W_6 , d'où $\chi(I) \geq 4$. Dès lors, nous pouvons conclure que le nombre chromatique du graphe icosaédrique est 4.

Cependant, l'application de l'algorithme de coloration gloutonne n'a pas abouti à une coloration optimale pour ce graphe spécifique (puisque le coloriage illustré à la figure 2.4b utilise cinq couleurs). En effet, il est possible de colorer les sommets du graphe avec moins de 5 couleurs tout en respectant la contrainte que deux sommets adjacents reçoivent des couleurs différentes.

Maintenant, les sommets du graphe ont été arrangés de manière aléatoire : $b, h, l, g, k, d, f, j, c, a, e, i$, et doivent être colorés en suivant l'ordre des couleurs : $\mathcal{C} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Pour accomplir notre tâche, il suffit d'à nouveau suivre les indications énoncées dans la définition 2.3.7. En les respectant scrupuleusement, le tableau 2.2 montre les différentes couleurs attribuées aux sommets du graphe I .

Par conséquent, à la différence du coloriage obtenu en ordonnant les sommets dans l'ordre lexicographique, l'application de l'algorithme de coloration gloutonne nous a per-

mis d'aboutir à une coloration optimale pour le graphe en question : il n'est pas possible de colorer les sommets du graphe avec moins de 4 couleurs tout en maintenant la condition que deux sommets adjacents aient des couleurs différentes.

| Ordre des sommets | Voisins du sommet déjà colorés | Couleur attribuée |
|-------------------|--|-------------------|
| b | / | 1 |
| h | $c(b) = 1$ | 2 |
| l | $c(b) = 1, c(h) = 2$ | 3 |
| g | $c(b) = 1, c(h) = 2$ | 3 |
| k | $c(b) = 1, c(g) = 2$ | 2 |
| d | $c(b) = 1, c(k) = 2, c(l) = 3$ | 4 |
| f | $c(d) = 4, c(l) = 3$ | 1 |
| j | $c(f) = 1, c(h) = 2, c(l) = 3$ | 4 |
| c | $c(g) = 3, c(h) = 2, c(j) = 4$ | 1 |
| a | $c(c) = 1, c(f) = 1, c(j) = 4$ | 2 |
| e | $c(a) = 2, c(d) = 4, c(f) = 1, c(k) = 2$ | 3 |
| i | $c(a) = 2, c(c) = 1, c(e) = 3, c(g) = 3, c(k) = 2$ | 4 |

TABLE 2.2 – Application de l'algorithme de coloration gloutonne pour le graphe icosaédrique, dont l'ordre des sommets correspond à un ordre aléatoire.

Il est intéressant de remarquer que grâce à l'algorithme de coloration gloutonne, nous pouvons fournir une preuve alternative de la proposition 2.3.4 (voir les notes de cours [5]).

Remarque 2.3.11. Montrons, en utilisant une stratégie de coloration gloutonne, que pour tout graphe $G = (V, E)$ d'ordre n et de degré maximal $\Delta(G)$, on a $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Appliquons l'algorithme de coloration gloutonne au graphe G , tel que décrit dans la définition 2.3.7 :

- Phase d'initialisation : Ordonnons les sommets du graphe G dans l'ordre suivant : v_1, \dots, v_n et considérons une liste $\mathcal{C} = \{1, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$ de couleurs potentielles ;
- À l'étape i : Regardons le sommet v_i , et attribuons-lui la plus petite couleur disponible dans \mathcal{C} qui n'a pas encore été utilisée parmi ses voisins.

Par construction, l'algorithme de coloration gloutonne décrit ci-dessus génère un coloriage approprié des sommets du graphe G . Dans le pire des cas, tous les voisins d'un sommet v ont des couleurs distinctes, ce qui nécessite l'ajout d'une couleur pour colorer le sommet v . Lorsque cela se produit, le nombre de couleurs utilisées dépasse d'une unité le nombre de voisins du sommet v . Étant donné que chaque sommet a au plus $\Delta(G)$ voisins (par définition de $\Delta(G)$), le coloriage obtenu pour le graphe G utilise au plus $\Delta(G) + 1$ couleurs. Par conséquent, nous obtenons l'inégalité souhaitée : $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Maintenant que nous avons défini la notion d'algorithme de coloration gloutonne, nous sommes en mesure de fournir une quatrième borne supérieure pour le nombre chromatique d'un graphe en fonction du degré minimal des différents sous-graphes induits (introduit à la définition 1.1.2). La section 7.1.1 du livre [10] et les notes de cours [14] ont été consultés pour rédiger la preuve qui suit.

Théorème 2.3.12 (Szekeres & Wilf, 1968). *Pour tout graphe $G = (V, E)$ d'ordre n , on a*

$$\chi(G) \leq 1 + \max\{\delta(H) : H \text{ est un sous-graphe induit de } G\} \leq 1 + \Delta(G),$$

où $\delta(H)$ représente le degré minimal des sommets du sous-graphe H de G .

Démonstration. Posons $k := \max\{\delta(H) : H \text{ est un sous-graphe induit de } G\}$.

Montrons tout d'abord la première inégalité. Considérons un graphe G composé de n sommets. Nous allons établir un ordre pour les sommets de G de manière à ce que l'algorithme de coloration gloutonne nécessite au plus $k + 1$ couleurs. Pour ce faire, nous utiliserons la notation $\deg_H(v)$, qui indique le degré du sommet v dans le sous-graphe H de G .

Commençons par remarquer que puisque $G_n := G$ est un sous-graphe induit de G , il existe un sommet v_n dans G_n tel que $\deg_{G_n}(v_n) = \delta(G_n) \leq k$, l'inégalité découlant de la définition de k . En supprimant ce sommet v_n , ainsi que ses arêtes incidentes, nous obtenons le graphe $G_{n-1} := G_n \setminus \{v_n\}$. Comme G_{n-1} est également un sous-graphe induit de G , il existe un sommet v_{n-1} dans G_{n-1} tel que $\deg_{G_{n-1}}(v_{n-1}) = \delta(G_{n-1}) \leq k$, l'inégalité découlant de la définition de k .

De manière analogue, pour $i \in \{n-2, \dots, 1\}$, en supprimant le sommet v_{i+1} ainsi que ses arêtes incidentes, nous obtenons le graphe $G_i := G_{i+1} \setminus \{v_{i+1}\}$. Comme G_i est un sous-graphe induit de G , il existe un sommet v_i dans G_i tel que $\deg_{G_i}(v_i) = \delta(G_i) \leq k$, l'inégalité découlant de la définition de k .

En suivant cette procédure, nous avons établi un ordre pour les sommets v_1, v_2, \dots, v_n de sorte que chaque sommet v_i , pour $i \in \{1, \dots, n\}$, ait au plus k voisins dans G_i , car $\deg_{G_i}(v_i) = \delta(G_i) \leq k$ représente le degré de v_i dans G_i .

Maintenant, utilisons une coloration gloutonne avec cet ordre. Nous attribuons tout d'abord une couleur arbitraire à l'unique sommet v_1 de G_1 . Ensuite, pour tout $i \in \{2, \dots, n\}$, étant donné que le graphe G_i est composé des sommets $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ déjà colorés ainsi que du sommet v_i avec $\deg_{G_i}(v_i) \leq k$, nous pouvons colorer v_i avec une couleur différente de celles de ses voisins si nous disposons de $k + 1$ couleurs. Par conséquent, nous obtenons le résultat souhaité : $\chi(G) \leq k + 1$.

Montrons maintenant la seconde inégalité. Cette inégalité découle du fait que le degré maximal $\Delta(G)$ de G est un majorant du degré minimal de n'importe quel sous-graphe induit de G . Cela est dû à la définition 1.1.2 des degrés maximal et minimal, ainsi qu'au fait que les sommets de chaque sous-graphe induit sont également des sommets du graphe d'origine. Par conséquent, les degrés des sommets de chaque sous-graphe induit ne peuvent pas être plus élevés que le degré maximal du graphe initial. \square

Nous pouvons observer que le borne supérieure de Szekeres-Wilf est atteinte pour des familles classiques de graphes bien précises.

Remarque 2.3.13. Remarquons que la borne supérieure théorique établie par les mathématiciens Szekeres et Wilf, *i.e.* $\chi(G) \leq 1 + \max\{\delta(H) : H \text{ est un sous-graphe induit de } G\}$, est atteinte lorsque le graphe G en question est un graphe complet ou un cycle de longueur impaire.

Pour illustrer cette propriété, examinons l'exemple suivant.

Exemple 2.3.14. Considérons encore une fois les graphes de Mycielski M_4 et M_5 présentés à la figure 2.2.

Comme mentionné précédemment, le nombre chromatique des graphes M_4 et M_5 est respectivement de 4 et 5. De plus, nous pouvons constater que le maximum des degrés minimaux parmi les sous-graphes de M_4 (resp. M_5) est égal à 3 (resp. 4). Cela est dû au fait que le sous-graphe M_4 (resp. M_5) est un des sous-graphes qui présente le degré minimal le plus élevé parmi les sous-graphes de M_4 (resp. M_5).

Par conséquent, l'inégalité énoncée dans la proposition précédente devient une égalité pour les graphes M_4 et M_5 :

$$4 = \chi(M_4) = \max_{H \subseteq M_4} (\delta(H)) + 1 = 4 \quad \text{et} \quad 5 = \chi(M_5) = \max_{H \subseteq M_5} (\delta(H)) + 1 = 5.$$

De la proposition 2.3.4 et du théorème de Szekeres-Wilf 2.3.12, nous pouvons déduire une cinquième borne supérieure du nombre chromatique qui concerne les graphes connexes qui ne sont pas réguliers (voir la section 7.1.1 du livre [10]).

Corollaire 2.3.15. *Pour tout graphe connexe et non régulier G , on a $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

Démonstration. Supposons que G soit un graphe connexe et non régulier.

Procédons par l'absurde et supposons que $\chi(G) > \Delta(G)$. D'après la proposition 2.3.4, il est clair que $\chi(G) = \Delta(G) + 1$. En appliquant le théorème de Szekeres-Wilf 2.3.12, nous pouvons affirmer qu'il existe un sous-graphe induit H dans G tel que $\delta(H) = \Delta(G)$. En effet, si ce n'était pas le cas, cela signifierait que pour tout sous-graphe induit H de G , on aurait $\delta(H) \neq \Delta(G)$. Cependant, le théorème de Szekeres-Wilf affirme que pour tout sous-graphe induit H de G , $\chi(G) \leq 1 + \max\{\delta(H)\} \leq 1 + \Delta(G)$ et donc, en particulier, $\max\{\delta(H)\} \leq \Delta(G)$. Par conséquent, nous pouvons toujours affirmer que pour tout sous-graphe induit H de G , $\delta(H) \leq \Delta(G)$. Puisque, pour tout sous-graphe induit H dans G , nous avons à la fois $\delta(H) \leq \Delta(G)$ et $\delta(H) \neq \Delta(G)$, il est clair que $\delta(H) < \Delta(G)$, ce qui serait contradictoire, car dans ce cas, on aurait $\chi(G) < 1 + \Delta(G)$, alors que nous avons supposé que $\chi(G) = \Delta(G) + 1$.

Mais alors, H est un sous-graphe induit régulier, car selon les définitions de δ et de Δ , pour tout sommet v de H , il est toujours vrai que $\delta(H) \leq \deg(v) \leq \Delta(G)$, et dans notre cas où $\delta(H) = \Delta(G)$, il est clair que pour tout sommet v de H , $\delta(H) = \deg(v) = \Delta(G)$, ce qui signifie que H est un graphe régulier. De plus, H ne peut pas être connecté à un sommet extérieur à lui-même, car il est régulier avec un degré maximal de $\Delta(G)$.

Par conséquent, étant donné que le graphe G est connexe par hypothèse, cela signifie que $G = H$. Cependant, nous avons montré que H est un sous-graphe induit régulier, ce qui contredit l'hypothèse initiale selon laquelle G est non régulier. \square

Nous pouvons désormais nous interroger sur les types de graphes qui ne satisfont pas la borne énoncée dans le corollaire 2.3.15. Le théorème de Brooks répond à cette question.

Avant de présenter et de démontrer ce théorème, nous allons formellement prouver l'observation énoncée dans la remarque 2.3.5 : si G est un graphe complet ou un cycle de longueur impaire, alors $\chi(G) = \Delta(G) + 1$ (voir la section 2.4 des notes de cours [1]). Bien que la démonstration de ce résultat puisse sembler évidente, nous la formaliserons dans le corollaire suivant. Cette démarche est en réalité importante puisque nous aborderons ensuite un cas différent : celui d'un graphe G qui n'est ni un graphe complet, ni un cycle de longueur impaire. Dans ce contexte, nous démontrerons le résultat $\chi(G) \leq \Delta(G)$, connu sous le nom du théorème de Brooks, qui correspond en réalité à une seconde optimisation de la borne supérieure 2.3.4 étudiée précédemment.

Corollaire 2.3.16. *Soit $G = (V, E)$ un graphe d'ordre n et de degré maximal $\Delta(G)$. Si G est un graphe complet ou un cycle de longueur impaire, alors $\chi(G) = \Delta(G) + 1$.*

Démonstration. Traitons d'abord le cas où le graphe G est un graphe complet d'ordre n . Étant donné qu'un graphe complet d'ordre n a tous ses sommets de degré $n - 1$, il est évident que $\Delta(G) = n - 1$. De plus, d'après la proposition 1.3.14, nous savons que $\chi(G) = n$. Par conséquent, nous pouvons conclure que $\chi(G) = n = n - 1 + 1 = \Delta(G) + 1$.

Traitons maintenant le cas où le graphe G est un cycle de longueur impaire d'ordre n . Étant donné qu'un cycle de longueur impaire a tous ses sommets de degré 2, il est évident que $\Delta(G) = 2$. De plus, selon la proposition 1.3.30, nous savons que $\chi(G) = 3$. Ainsi, nous pouvons conclure que $\chi(G) = 3 = 2 + 1 = \Delta(G) + 1$. \square

2.4 Le théorème de Brooks

Comme mentionné préalablement, il s'est avéré que la borne supérieure énoncée dans la proposition 2.3.4 a été améliorée par le mathématicien anglais Rowland Leonard Brooks (1916 — 1993). Le théorème 2.4.18 expose la borne supérieure établie par Brooks. Cependant, la démonstration de ce théorème nécessite l'introduction de nouvelles notions ainsi que l'utilisation de divers résultats intermédiaires. Cette section est donc consacrée entièrement à la présentation du théorème de Brooks et des résultats qui sont utiles à sa preuve. Le livre [10] ainsi que les notes de cours [24] ont été consultés pour rédiger cette section.

Pour débiter, nous allons rappeler la définition d'une arête de coupure et nous allons donner une caractérisation des arbres en utilisant cette notion.

Définition 2.4.1. Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe (ou une composante connexe d'un graphe). Une arête e du graphe G est définie comme une *arête de coupure* si le graphe $G - e$, obtenu après suppression de cette arête, n'est plus connexe. De manière plus générale, une arête e est considérée comme une arête de coupure de G si le graphe $G - e$ a au moins une composante connexe de plus que le graphe G .

Il est à noter que, en particulier, au moins une des extrémités d'une arête de coupure est un point d'articulation² de G .

Proposition 2.4.2. Une arête e est une arête de coupure du graphe $G = (V, E)$ si et seulement si e n'appartient à aucun cycle de G .

Démonstration. Montrons tout d'abord la condition nécessaire. Si e est une arête de coupure dans le graphe G , alors, selon la définition 2.4.1 d'une arête de coupure, il existe des sommets u et v qui sont connectés initialement dans G mais qui ne le sont plus dans $G - e$. Cela implique qu'il existe un chemin dans G joignant u et v et passant par e . Dans le graphe $G - e$, ce chemin est divisé en deux parties : l'une reliant le sommet u à une extrémité de e , que nous appellerons e_2 , et l'autre reliant le sommet v à l'autre extrémité de e , que nous appellerons e_1 . Montrons maintenant que e ne peut appartenir à aucun cycle dans le graphe G . Pour cela, procédons par l'absurde et supposons que e appartient à un cycle dans le graphe G . Dans ce cas, il existerait un chemin joignant e_1 à e_2 et ne passant pas par e . Cependant, cela conduirait à la conclusion que les sommets u et v sont encore connectés dans $G - e$, ce qui contredirait l'hypothèse initiale selon laquelle e est une arête de coupure (ce qui signifie que les deux sommets u et v sont connectés dans G mais ne le sont plus dans $G - e$).

2. Cette notion sera introduite à la définition 2.4.6.

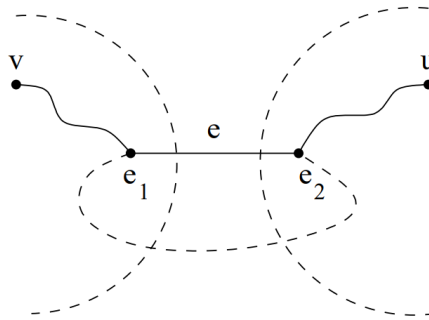


FIGURE 2.5 – Illustration (provenant des notes de cours [24] à la page 41) de la situation rencontrée dans la condition nécessaire de le proposition 2.4.2.

Montrons à présent la condition suffisante. Procédons par contraposition et supposons que $e = \{e_1, e_2\}$ n'est pas une arête de coupure dans le graphe G . Si le graphe G est connexe, alors le graphe $G - e$ l'est encore, puisque e n'est pas une arête de coupure du graphe G , ce qui signifie que sa suppression ne disconnecte pas le graphe. Ainsi, étant donné que $G - e$ est connexe, il existe un chemin dans $G - e$ reliant les sommets e_1 et e_2 . Par conséquent, nous concluons que dans le graphe G , l'arête e appartient à un cycle, puisque les sommets e_1 et e_2 peuvent être reliés soit par l'arête e dans G , soit par un chemin dans $G - e$. \square

Théorème 2.4.3. *Un graphe $G = (V, E)$ connexe est un arbre si et seulement si chacune de ses arêtes est une arête de coupure.*

Démonstration. Montrons tout d'abord la condition nécessaire. Soient G un arbre et e l'une de ses arêtes. En vertu de la définition 1.3.21 d'un arbre, G est connexe et sans cycle. En appliquant la proposition 2.4.2, nous en concluons que e est une arête de coupure, car le graphe G ne possède aucun cycle. Par conséquent, puisque l'arête e est arbitraire, nous pouvons en déduire que toutes les arêtes de G sont des arêtes de coupure.

Montrons à présent la condition suffisante. Procédons par contraposition et supposons que G est un graphe connexe possédant un cycle. Alors, selon la proposition 2.4.2, les arêtes de ce cycle ne peuvent pas être des arêtes de coupure. \square

Introduisons maintenant la notion de sous-arbre couvrant. Une fois cette notion établie, nous serons en mesure de formuler et de prouver une proposition cruciale pour la démonstration du théorème de Brooks. Cette proposition nous permettra de construire un coloriage valide des sommets d'un graphe qui satisfait les hypothèses du théorème.

Définition 2.4.4. Un sous-graphe $H = (V', E')$ d'un graphe $G = (V, E)$ est un *sous-graphe couvrant* de G s'il contient tous les sommets de G , *i.e.* $V' = V$, et si pour tout sommet v dans V , il existe un sommet u dans V tel que $\{u, v\} \in E'$.

Dans le contexte d'un graphe connexe G , un sous-graphe couvrant H de G est qualifié de *sous-arbre couvrant* si H est un arbre.

Proposition 2.4.5. *Tout graphe connexe possède un sous-arbre couvrant.*

Démonstration. Considérons un graphe connexe G . Pour démontrer ce résultat, nous allons procéder par récurrence sur le nombre m d'arêtes.

Tout d'abord, examinons le cas de base lorsque $m = 0$. Dans ce cas, si le graphe G est connexe mais ne possède aucune arête, alors il se réduit à un unique sommet, ce qui forme déjà un arbre.

Supposons maintenant que le graphe G possède $m \geq 1$ arêtes et que la propriété est vraie pour tout graphe ayant strictement moins de m arêtes. Si G est en lui-même un arbre, alors il est son propre sous-arbre couvrant. Cependant, si G n'est pas en lui-même un arbre, *i.e.* si G contient un cycle vu la définition 1.3.21 d'un arbre, retirons une arête de ce cycle (tout en conservant ses extrémités). Le graphe résultant G' demeure connexe et possède strictement moins de m arêtes. Ainsi, par hypothèse de récurrence, G' possède un sous-arbre couvrant qui, par extension, est également un sous-arbre couvrant pour G . \square

Définissons à présent les notions de point d'articulation et de k -connexité, deux concepts mathématiques essentiels pour les résultats à venir et pour le théorème de Brooks. De plus, nous introduirons la notion de bloc, qui sera largement utilisée dans les preuves des résultats intermédiaires posant les bases avant la démonstration du théorème de Brooks.

Définition 2.4.6. Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe. Un sommet v est un *point d'articulation* dans G si la suppression de ce sommet (ainsi que la suppression des arêtes incidentes) dans G entraîne la disconnexion ou, la réduction à un sommet, du sous-graphe résultant $G - v$. Autrement dit, $G - v$ possède davantage de composantes connexes que le graphe initial G , ou est réduit à un unique sommet.

Un *ensemble d'articulation* est un ensemble de sommets W dans G tel que la suppression de ces sommets (ainsi que la suppression des arêtes incidentes) dans G entraîne la disconnexion ou, la réduction à un sommet, du sous-graphe résultant $G - W$. En d'autres termes, $G - W$ possède davantage de composantes connexes que le graphe initial G , ou est réduit à un unique sommet. Notons $\kappa(G)$ la *taille minimale d'un ensemble d'articulation* pour le graphe G :

$$\kappa(G) = \min\{\#W \mid W \subseteq V : G - W \text{ est disconnecté ou réduit à un sommet}\}.$$

Posons $\kappa(H) = 0$ lorsque le graphe H est non connexe, et $\kappa(\emptyset) = 0$ pour le graphe vide.

Si $\kappa(G) = k \geq 1$, alors le graphe G est dit *k-connexe*. Cela signifie que quels que soient les $k - 1$ sommets supprimés, le graphe G reste connexe. Cependant, il est possible de trouver k sommets (bien choisis) dont la suppression conduit à la disconnexion de G ou à sa réduction à un seul sommet.

Définition 2.4.7. Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe, et soit W un sous-ensemble de V . Le sous-graphe induit par W , noté B , est appelé *bloc* de G s'il est connexe, sans point d'articulation et s'il est maximal pour l'inclusion dans l'ensemble des sous-graphes induits connexes et sans point d'articulation.

Autrement dit, cela signifie que :

1. B est connexe ;
2. B est sans point d'articulation ;
3. si $W' \supset W$ et si le sous-graphe induit par W' dans G , noté B' , est connexe et sans point d'articulation, alors $B' = B$.

Définition 2.4.8. À partir des blocs et des points d'articulation d'un graphe $G = (V, E)$, nous pouvons définir un graphe de la manière suivante :

- les sommets de ce nouveau graphe sont les blocs d'une part et les points d'articulation de G d'autre part (s'il y en a) ;
- il existe une arête entre un point d'articulation x et un bloc B si $x \in B$.

Ce graphe ainsi défini est appelé le *graphe des blocs* de G et est noté $\beta(G)$.

Maintenant que les définitions de bloc et de graphe des blocs ont été exposées, il est pertinent de souligner l'observation suivante.

Remarque 2.4.9. Lorsque le graphe G comporte au moins deux blocs, le graphe des blocs associé $\beta(G)$ est un graphe biparti.

Cette propriété découle de la partition de l'ensemble des sommets du graphe G en deux sous-ensembles disjoints : les blocs de G d'une part, et les points d'articulation de G d'autre part. De plus, toutes les arêtes de $\beta(G)$ établissent une connexion entre un sommet de la première partie et un sommet de la deuxième partie, en vertu de la définition 2.4.8 de $\beta(G)$. Par conséquent, vu la définition 1.3.9 d'un graphe biparti, nous concluons que $\beta(G)$ est un graphe biparti.

Pour mieux appréhender les concepts de bloc et de graphe des blocs, examinons l'exemple suivant.

Exemple 2.4.10. Considérons le graphe G représenté à la figure 2.6a. Notre objectif initial consiste à le décomposer en blocs. Au vu de la définition 2.4.7, nous constatons que le graphe G d'intérêt se divise en six blocs distincts, comme le montre l'illustration à la figure 2.6b. Chacun de ces six blocs est connexe, dépourvu de points d'articulation et satisfait la propriété de maximalité.

Ensuite, notre objectif est d'identifier les points d'articulation présents dans le graphe G . Conformément à la définition 2.4.6, seuls les sommets 3 et 12 sont des points d'articulation.

Enfin, après avoir repéré les blocs et les points d'articulation dans le graphe G , nous pouvons construire le graphe des blocs de G . Ce dernier est représenté à la figure 2.7. Pour construire ce graphe des blocs, chaque bloc est représenté par des cercles de couleur correspondant au bloc identifié, les points d'articulation sont représentés par des carrés, et les relations entre les différents sommets sont établies selon les directives de la définition 2.4.8.

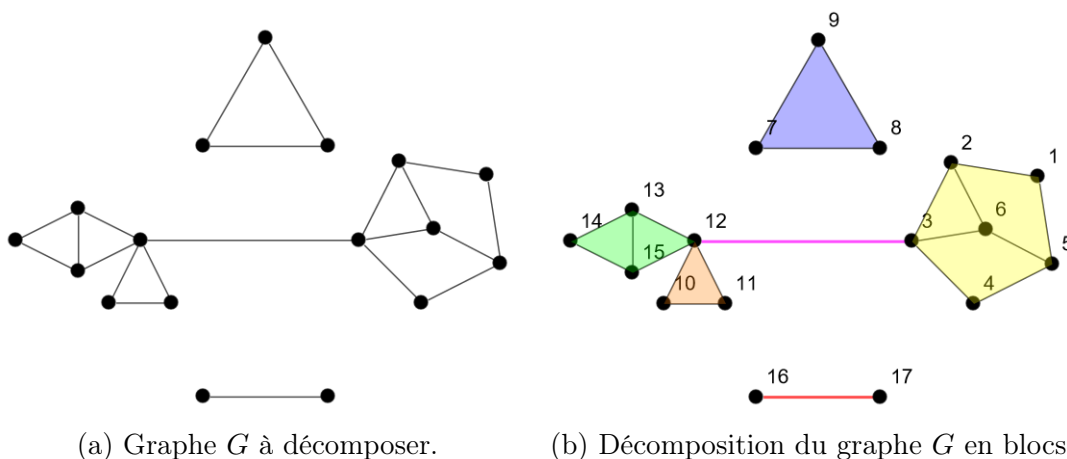
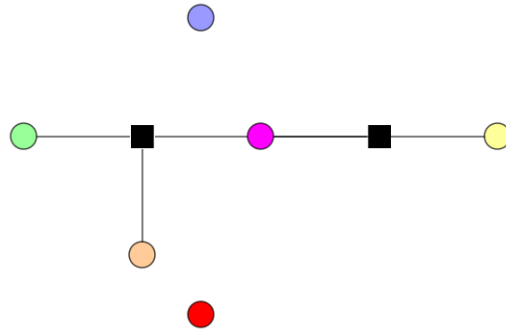


FIGURE 2.6 – Illustration de la décomposition d'un graphe en blocs.

FIGURE 2.7 – Graphe des blocs de G .

Dans la remarque suivante, nous allons donner une définition plus détaillée d'un bloc. Grâce à cette nouvelle définition, nous pourrions constater que tout sous-graphe induit d'un graphe connexe et sans point d'articulation est inclus dans un bloc.

Remarque 2.4.11. Rappelons tout d'abord la définition d'un élément maximal dans un ensemble. Soit (E, \leq) un ensemble ordonné, et soit A un sous-ensemble de E . Un élément $m \in A$ est un *élément maximal* de A si, pour tout $x \in A$, $m \leq x \Rightarrow x = m$. Autrement dit, il n'existe aucun élément de l'ensemble A qui soit supérieur à m .

Utilisons maintenant cette notion d'élément maximal pour donner une définition plus détaillée de la notion de bloc que celle donnée dans la définition 2.4.7. Considérons un graphe $G = (V, E)$. Soit A l'ensemble des parties X de V telles que le sous-graphe induit de G par X , noté $G(X)$, soit connexe et sans point d'articulation. Les blocs B correspondent aux éléments maximaux de A ($M \in A$ est maximal (pour l'inclusion) si et seulement si $B = G(M)$ est un bloc).

De manière plus détaillée, pour tout $X \in A$, il existe un élément maximal $M \in A$ tel que $X \subseteq M$. Ainsi, tout sous-graphe induit de G connexe et sans point d'articulation est inclus dans un bloc. Cela s'applique notamment lorsque le sous-graphe induit est un cycle simple, puisqu'un cycle simple est connexe et sans point d'articulation par construction.

Maintenant, nous allons démontrer plusieurs résultats qui reposent sur un graphe connexe. Ces résultats nous permettront de prouver le lemme 2.4.17, lequel jouera un rôle crucial dans la démonstration d'un des deux cas à considérer dans la preuve du théorème de Brooks.

Intéressons-nous d'abord aux points d'intersection des différents blocs d'un graphe connexe.

Lemme 2.4.12. *Soit $G = (V, E)$ un graphe.*

1. Si $B_1 = (V_1, E_1)$ et $B_2 = (V_2, E_2)$ sont deux blocs distincts de G (c'est-à-dire $V_1 \neq V_2$), alors $|V_1 \cap V_2| \leq 1$.
2. Si G est connexe, ses points d'articulation sont exactement les intersections de ses blocs distincts.

Démonstration.

1. Procédons par contraposition et supposons que $|V_1 \cap V_2| \geq 2$. Considérons $G_3 = G(V_1 \cup V_2)$ le sous-graphe induit de G par l'ensemble des sommets $V_1 \cup V_2$, noté également $B_1 \cup B_2$ puisque G_3 est formé par l'union des blocs B_1 et B_2 . Considérons

un sommet z dans $V_1 \cup V_2$. Étant donné que B_1 et B_2 sont des blocs, ils sont connexes en vertu de la définition 2.4.7. Par conséquent, puisque z est un sommet de $B_1 \cup B_2$, le sous-graphe G_3 est connexe. En effet, pour deux sommets quelconques dans $B_1 \cup B_2$, soit ils sont dans le même bloc B_1 (respectivement B_2), qui est connexe par définition d'un bloc, et donc un chemin les joignant existe ; soit l'un appartient à B_1 et l'autre à B_2 , et un chemin peut être établi du sommet dans B_1 à z , suivi d'un chemin de z au sommet dans B_2 (puisque $z \in V_1 \cup V_2$). En outre, l'hypothèse $|V_1 \cap V_2| \geq 2$ assure que $(V_1 \cap V_2) \setminus \{z\} \neq \emptyset$. Ainsi, la suppression du sommet z ne disconnecte pas le sous-graphe G_3 . Par conséquent, le sous-graphe G_3 demeure sans point d'articulation. En vertu de la maximalité des blocs B_1 et B_2 , tous deux inclus dans G_3 qui est à la fois connexe et sans point d'articulation, il s'ensuit nécessairement que $G_3 = B_1$ et $G_3 = B_2$. Cela conduit à la conclusion recherchée $B_1 = B_2$.

2. Soit x un point d'articulation dans le graphe G . Selon la définition 2.4.6, le graphe $G - x$ n'est pas connexe. Par conséquent, il existe deux sommets distincts y et y' dans $G - x$ qui ne sont pas connectés. Par connexité de G , il existe un chemin simple (et non un cycle, puisque les sommets y et y' ne sont pas connectés dans $G - x$) C_0 dans G joignant les sommets y et y' . Il est à noter que ce chemin C_0 doit nécessairement passer par le sommet x , puisque y et y' ne sont pas connectés dans le graphe $G - x$. En outre, le chemin C_0 peut être décomposé comme suit : $C_0 = C \cup C'$, où C est un chemin allant de y à x et où C' est un chemin allant de x à y' . Le sommet z (respectivement z') adjacent à x sur le chemin C (respectivement C') n'est pas connecté au sommet z' (respectivement z) dans le graphe $G - x$, sinon les deux sommets y et y' seraient connectés dans le graphe $G - x$. Ainsi, les sommets z et z' se trouvent dans deux composantes connexes distinctes de $G - x$.

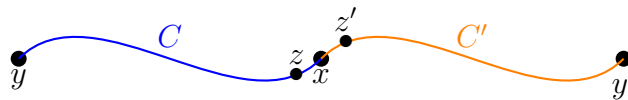


FIGURE 2.8 – Illustration du chemin C_0 joignant les sommets y et y' dans le graphe G .

Par ailleurs, le sous-graphe $G(\{x, z\})$ (respectivement $G(\{x, z'\})$), constitué de deux sommets connectés par une arête, est connexe et sans point d'articulation, car lorsque l'on retire l'un de ses deux sommets, le graphe résultant se compose d'un unique sommet et est donc connexe. Ces sous-graphes $G(\{x, z\})$ et $G(\{x, z'\})$ sont donc inclus respectivement dans des blocs B et B' de G , en vertu de la définition 2.4.7 d'un bloc. Par ailleurs, comme les sommets z et z' ne sont pas connectés dans le graphe $G - x$ (puisque'ils sont dans deux composantes connexes distinctes), ils ne le sont pas non plus dans $(B \cup B') - x$, car c'est la sommet x qui assure la connexion entre les sommets z et z' . Dès lors, puisque les sommets z et z' sont connectés dans $B \cup B'$ mais pas dans $(B \cup B') - x$, il en découle que x est un point d'articulation du graphe $B \cup B'$. De plus, il est impossible d'avoir $B = B'$, puisque, si c'était le cas, $B \cup B' = B$ n'aurait pas de point d'articulation. En effet, B est un bloc donc, selon la définition 2.4.7, il est dépourvu de point d'articulation. Cette conclusion entrerait en contradiction avec le fait établi que x est un point d'articulation du graphe $B \cup B' = B$. Par conséquent, $B \neq B'$ et x appartient à deux blocs distincts B et B' , puisque les sous-graphes $G(\{x, z\})$ et $G(\{x, z'\})$ sont respectivement inclus dans les blocs B et B' (d'où $x \in B$ et $x \in B'$).

Réciproquement, soit x un sommet appartenant à deux blocs distincts B et B' du graphe G . D'une part, $B \cup B'$ est connexe. En effet, pour deux sommets quelconques dans $B \cup B'$, soit ils sont dans le même bloc B (respectivement B'), qui est connexe par définition d'un bloc, et donc un chemin les joignant existe ; soit l'un appartient à B et l'autre à B' , et un chemin peut être établi du sommet dans B à x , suivi d'un chemin de x au sommet dans B' (puisque x est un sommet commun aux blocs B et B'). D'autre part, $B \cup B'$ possède un point d'articulation z puisque, sinon $B \cup B'$ formerait un bloc plus grand que B et B' , qui est à la fois connexe et sans point d'articulation. Cela contredirait la propriété de maximalité des blocs B et B' . De plus, ce sommet $z \in B \cup B'$ est nécessairement égal à x . En effet, si ce n'était pas le cas, supposons sans perte de généralité que le sommet z est dans $B - x$. Alors, $B - z$ est connexe (car un bloc ne possède pas de point d'articulation par définition), et B' est connexe (car un bloc est connexe par définition). Ainsi, $(B \cup B') - z$ est connexe, puisque l'union de composantes connexes ayant des sommets communs est connexe (dans notre cas, x , qui est différent de z , est un sommet de B et de B' par hypothèse). Comme $(B \cup B') - z$ est connexe, cela montre que z n'est pas un point d'articulation de $B \cup B'$, ce qui contredit le fait que z est un point d'articulation de $B \cup B'$. Par conséquent, $x = z$ est un point d'articulation de $B \cup B'$. Montrons maintenant que x est un point d'articulation de G . Comme x est un point d'articulation de $B \cup B'$, il existe $y \in V(B)$ et $y' \in V(B')$ des sommets adjacents à x respectivement dans les blocs B et B' . Si x n'était pas un point d'articulation de G , il existerait un chemin simple C reliant y à y' évitant x . En refermant le chemin par les arêtes $\{y', x\}$ et $\{x, y\}$, on obtient un cycle simple C' passant par x et traversant les blocs B et B' , ce qui contredirait la remarque 2.4.11 indiquant qu'un cycle simple ne peut pas traverser plusieurs blocs distincts.

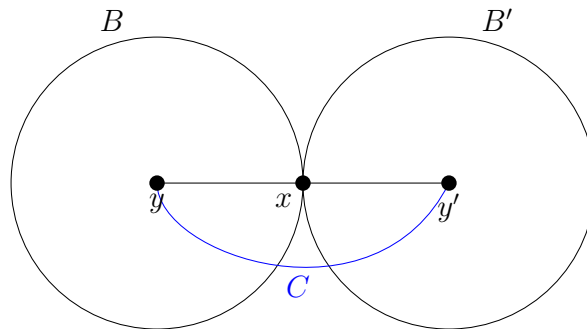


FIGURE 2.9 – Illustration : x est un point d'articulation de G .

□

La remarque suivante établit une propriété qui sera exploitée pour démontrer la conservation de la connexité dans le graphe des blocs $\beta(G)$.

Remarque 2.4.13. Un chemin C reliant deux sommets quelconques d'un graphe $G = (V, E)$ se compose d'une succession de chemins C' reliant chacun deux sommets appartenant à un même bloc et composant le chemin C . Le passage éventuel entre deux blocs s'effectue par le biais de l'unique point d'articulation de G qui est commun à ces deux blocs, comme indiqué dans le lemme 2.4.12.

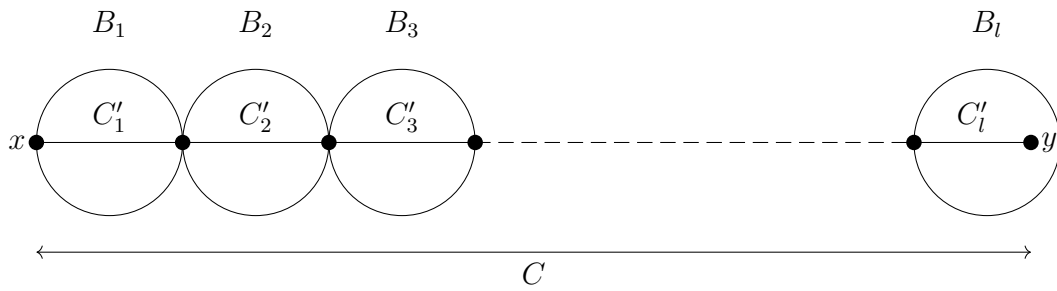


FIGURE 2.10 – Un chemin C reliant le point d'articulation x et le sommet y dans le graphe G , décomposé en une succession de chemins $C'_1, C'_2, C'_3, \dots, C'_l$.

Lorsqu'on considère un chemin C' entre deux sommets x et x' appartenant au même bloc B dans G , trois situations se présentent. Si x et x' sont des points d'articulation distincts de G , le chemin C correspond à un chemin simple sur trois sommets x, B, x' dans $\beta(G)$, conformément à la définition 2.4.8 de $\beta(G)$. Si x est un point d'articulation de G et si x' n'en est pas un, le chemin C est un chemin simple sur deux sommets x, B dans $\beta(G)$. Enfin, si x et x' ne sont pas des points d'articulation de G , le chemin C est réduit à un seul sommet B dans $\beta(G)$.

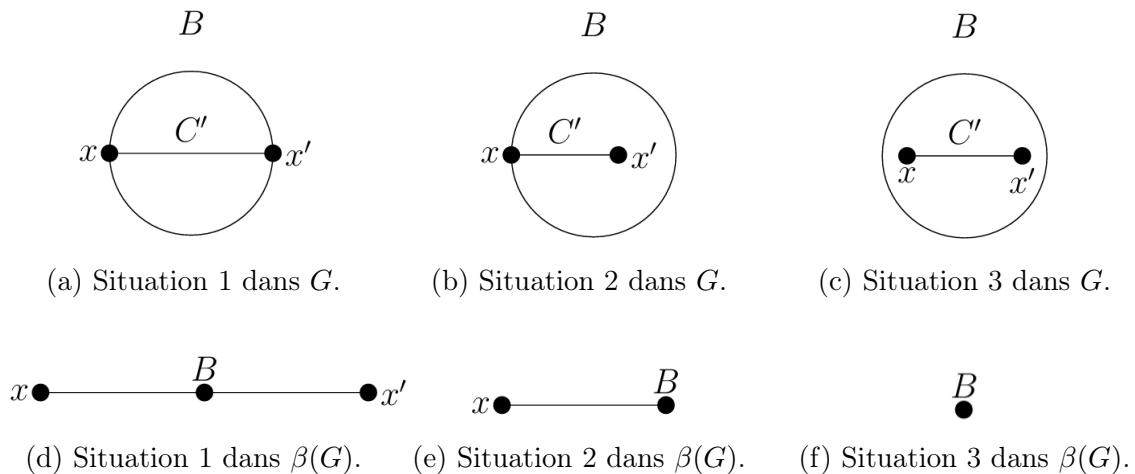


FIGURE 2.11 – Illustration des trois situations rencontrées lorsqu'on considère un chemin C' entre deux sommets x et x' d'un même bloc B .

Par conséquent, un chemin simple connectant deux sommets de blocs différents de G se traduit dans $\beta(G)$ par une succession de chemins sur trois sommets, avec éventuellement des chemins simples sur deux sommets à chaque extrémité, comme décrit préalablement.

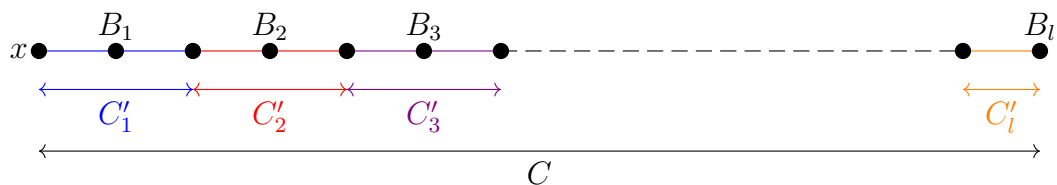


FIGURE 2.12 – Le chemin C reliant le point d'articulation x et le sommet y dans le graphe des blocs $\beta(G)$, décomposé en une succession de chemins $C'_1, C'_2, C'_3, \dots, C'_l$.

Réciproquement, tout chemin simple dans $\beta(G)$ provient d'un chemin simple (qui n'est pas nécessairement unique) dans G , par construction de $\beta(G)$.

Prouvons maintenant que la connexité dans le graphe des blocs $\beta(G)$ est préservée, de même que les points d'articulation.

Lemme 2.4.14. *Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe. Alors $\beta(G)$ est connexe et les points d'articulation de G sont des points d'articulation de $\beta(G)$.*

Démonstration. Pour démontrer le résultat souhaité, nous procédons en deux étapes :

1. Montrons tout d'abord que $\beta(G)$ est connexe.

Si le graphe G est un bloc, alors le graphe des blocs $\beta(G)$ se réduit à un unique sommet puisque, selon la définition 2.4.8 de $\beta(G)$, les sommets de $\beta(G)$ correspondent exactement aux blocs du graphe G , et dans notre cas, G constitue un bloc. Ainsi, le graphe des blocs $\beta(G)$ est connexe.

Supposons maintenant que le graphe G possède plusieurs blocs. Comme G est connexe, chaque bloc de G contient au moins un point d'articulation de G . En effet, si ce n'était pas le cas, cela signifierait qu'il existe (au moins) un bloc B dans G ne contenant aucun point d'articulation de G . Dès lors, la suppression de n'importe quel sommet du bloc B ne devrait pas disconnecter le graphe G . Cependant, puisque le graphe G admet plusieurs blocs, si B était un bloc sans point d'articulation et que son retrait ne disconnecte pas G , cela signifierait qu'il existe un bloc plus grand que B dans G qui est à la fois connexe et sans point d'articulation. Cela entraînerait une contradiction, car cela contredirait le caractère maximal du bloc B . En outre, puisque chaque bloc de G contient au moins un point d'articulation de G , et que chaque point d'articulation est connecté à son bloc dans le graphe des blocs $\beta(G)$ (par construction), il suffit de démontrer que l'on peut relier deux points d'articulation distincts (et quelconques) x et x' de G dans $\beta(G)$. Si nous parvenons à le démontrer, cela garantira qu'il existe un chemin entre toute paire de sommets dans $\beta(G)$, car chaque bloc de G contient au moins un point d'articulation de G , et chaque point d'articulation dans un bloc est connecté à ce bloc dans $\beta(G)$. Donc, chaque bloc sera connecté à tous les autres blocs de G . Puisque, par hypothèse, le graphe G est connexe, il existe un chemin entre les sommets x et x' dans G . Ce chemin correspond à un chemin entre x et x' dans $\beta(G)$, qui est une succession de chemins simples sur trois sommets de $\beta(G)$, conformément à la remarque 2.4.13. Par conséquent, étant donné que pour toute paire de sommets de $\beta(G)$, il existe un chemin les joignant, cela prouve la connexité de $\beta(G)$.

2. Montrons à présent que les points d'articulation de G sont des points d'articulation de $\beta(G)$.

Soit x un point d'articulation de G . Montrons que x est également un point d'articulation de $\beta(G)$. Comme x est un point d'articulation de G , le graphe $G - x$ n'est pas connexe (vu la définition 2.4.6). Par conséquent, en raison de cette non-connexité, il existe deux sommets y et y' de G adjacents à x dans G , qui ne sont pas connectés dans $G - x$. Le sous-graphe $G(\{x, y\})$ (respectivement $G(\{x, y'\})$), formé des deux sommets x et y (respectivement x et y'), étant connexe et sans point d'articulation, il est inclus dans un bloc B (respectivement B'), en vertu de la définition 2.4.7 d'un bloc. Ces deux blocs B et B' se coupent en x , selon le lemme 2.4.12. Or, $B - x$ et $B' - x$ sont connexes (car les blocs B et B' sont connexes et dépourvus de point d'articulation, conformément à la définition d'un bloc). Ainsi, aucun point de $B - x$

n'est connecté à un point de $B' - x$ dans $G - x$. En effet, étant donné que x est un point d'articulation de G , entraînant que $G - x$ n'est pas connexe, les parties connexes adjacentes à x , à savoir $B - x$ et $B' - x$, ne sont pas connectées l'une à l'autre dans $G - x$ car elles s'intersectent uniquement en le point d'articulation x dans G . En outre, les blocs B et B' ne sont pas connectés l'un à l'autre dans $\beta(G - x)$. En effet, s'ils l'étaient, selon la remarque 2.4.13, il existerait une succession de chemins sur trois sommets du type B_1, x_1, B_2 , qui formerait un chemin de B à B' dans $\beta(G - x)$. Ce chemin se traduirait dans G en un chemin entre les sommets $y \in V(B)$ et $y' \in V(B')$ évitant le sommet x , ce qui contredirait le fait que les sommets y et y' ne sont pas connectés dans $G - x$. Par conséquent, le fait que les blocs B et B' soient disconnectés l'un de l'autre dans $\beta(G - x)$ établit que $\beta(G - x)$ n'est pas connexe, prouvant ainsi que x est un point d'articulation de $\beta(G)$. □

En outre, nous pouvons établir que le graphe des blocs d'un graphe connexe est en fait un arbre. À partir de ce résultat, nous pourrions en déduire une propriété concernant les graphes connexes ayant au moins un point d'articulation.

Proposition 2.4.15. *Si G est un graphe connexe, alors son graphe des blocs $\beta(G)$ est un arbre.*

Démonstration. Pour démontrer que le graphe des blocs $\beta(G)$ est un arbre, il suffit d'établir que $\beta(G)$ est sans cycle.

Procédons par l'absurde et supposons qu'il existe un circuit simple C dans $\beta(G)$. Comme le graphe $\beta(G)$ est biparti (selon la remarque 2.4.9), ce circuit serait de longueur paire, au vu du théorème 1.3.11 de König. De plus, au moins deux des sommets du circuit C dans $\beta(G)$ seraient des points d'articulation x et y de G . En effet, par construction de $\beta(G)$ (voir la définition 2.4.8), les sommets de $\beta(G)$ sont les blocs et les points d'articulation de G . Pour avoir un circuit simple de longueur paire dans $\beta(G)$, il est nécessaire d'avoir au moins quatre sommets, ceux-ci devant alterner entre des blocs et des points d'articulation. Cette alternance est due à la construction de $\beta(G)$, où une arête est présente entre un bloc B et un point d'articulation x si $x \in B$. Ainsi, $\beta(G)$ contiendrait au moins deux sommets correspondant à des points d'articulation de G . Cependant, par définition d'un circuit, la suppression de l'un ou l'autre des sommets du circuit C ne disconnecte pas les autres sommets de ce circuit. Par conséquent, x et y ne seraient pas des points d'articulation de $\beta(G)$. Cette situation contredirait le lemme 2.4.14, qui énonce que les points d'articulation de G sont des points d'articulation de $\beta(G)$. En effet, la suppression des sommets x ou y devrait normalement entraîner la disconnexion du graphe $\beta(G)$, ce qui n'est pas conforme à la réalité.

Finalement, puisque le graphe $\beta(G)$ est connexe (vu le lemme 2.4.14) et sans cycle, nous concluons qu'il s'agit bien d'un arbre. □

Corollaire 2.4.16. *Soit G un graphe connexe ayant au moins un point d'articulation (et donc ayant au moins trois sommets). Alors il existe au moins deux blocs contenant chacun un seul point d'articulation de G .*

Démonstration. Comme, par hypothèse, le graphe G admet au moins un point d'articulation, il possède au moins deux blocs. En effet, cela découle du fait qu'un point d'articulation sépare le graphe en au moins deux composantes connexes quand on le retire de G . Ainsi, étant donné que le graphe G est connexe (par hypothèse) mais possède un point

d'articulation, il ne peut pas constituer un seul bloc. Par conséquent, le graphe des blocs $\beta(G)$ doit contenir au minimum trois sommets, en l'occurrence le point d'articulation et les deux blocs.

Comme G est un graphe connexe, d'après la proposition 2.4.15, le graphe des blocs $\beta(G)$ est un arbre.

Par conséquent, $\beta(G)$ contient au moins deux feuilles, x_1 et x_2 , puisqu'il possède au moins trois sommets par hypothèse. En effet, pour démontrer que tout arbre ayant au moins deux sommets possède au moins deux feuilles, commençons par remarquer que tout arbre avec deux (ou trois) sommets possède au moins deux feuilles, car un arbre à deux (ou trois) sommets se réduit à un chemin contenant deux (ou trois) sommets, dont les deux sommets aux extrémités sont de degré de 1, selon la définition 1.3.26. Prouvons maintenant que tout arbre avec au moins quatre sommets possède au moins deux feuilles. Procédons par l'absurde et supposons qu'un tel arbre ne possède qu'une seule feuille, c'est-à-dire un seul sommet de degré 1. Cela implique que tous les autres sommets de l'arbre ont un degré d'au moins 2. Par conséquent, cela signifie que lorsqu'un tel sommet est atteint, il est possible d'en repartir. Ainsi, en un nombre fini d'étapes, nous construisons un circuit. Ceci est absurde car, selon la définition 1.3.21, un arbre est sans cycle.

De plus, remarquons que dans le graphe des blocs $\beta(G)$, un sommet correspondant à un point d'articulation dans le graphe G est de degré au moins 2. Cela s'explique par le fait qu'un point d'articulation dans G correspond à un sommet connectant au moins deux composantes connexes, se traduisant par une connexion entre au moins deux blocs distincts dans $\beta(G)$ par le biais de ce sommet d'articulation.

Par conséquent, dans le graphe des blocs $\beta(G)$, les sommets de degré 1 correspondent à des blocs, et chaque sommet de degré 1 a une seule arête incidente. Conformément à la définition 2.4.8 de $\beta(G)$, cette arête relie un bloc à un point d'articulation. Dès lors, chaque bloc de degré 1 possède un seul point d'articulation. \square

Grâce aux résultats intermédiaires que nous venons d'établir, nous sommes désormais en mesure de formuler et de démontrer le lemme suivant, qui revêt une importance primordiale dans la preuve du théorème de Brooks.

Lemme 2.4.17. *Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe sans point d'articulation (i.e. au moins 2-connexe), non complet et de degré minimal $\delta(G) \geq 3$ (donc $|V| \geq 4$). Alors il existe un sommet x ayant deux voisins x_1 et x_2 non adjacents tels que $G(V \setminus \{x_1, x_2\})$ soit connexe.*

Démonstration. Nous devons examiner deux cas distincts :

- 1) Si le graphe G est au moins 3-connexe, alors il existe un sommet x ayant deux voisins non adjacents.

En effet, si ce n'était pas le cas, alors pour chaque paire de voisins x_1 et x_2 de tout sommet x , les sommets x_1 et x_2 seraient adjacents. Montrons que dans ce cas, le graphe G est complet. Soient $x, y \in V$ deux sommets quelconques et distincts du graphe G . Comme le graphe G est connexe par hypothèse, il existe un chemin $x, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, y$ reliant les sommets x et y . Puisque les sommets x et t_2 sont voisins du sommet t_1 , ils sont adjacents (vu l'hypothèse selon laquelle tous les voisins de chaque sommet du graphe G sont adjacents deux à deux). De même, t_1 et t_3 étant voisins de t_2 , ils sont adjacents, et x et t_3 étant voisins de t_1 , ils sont également adjacents. En continuant de proche en proche, nous montrons que y est voisin

de x . Par conséquent, cela montre que le graphe G est complet, ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle G n'est pas complet.

Ainsi, il existe un sommet x ayant deux voisins x_1 et x_2 non adjacents. Étant donné que le graphe G est au moins 3-connexe, le graphe $G(V \setminus \{x_1, x_2\})$ reste connexe, par la définition 2.4.6 de la k -connexité.

2) Si le graphe G est 2-connexe mais pas 3-connexe. Alors :

- (a) Puisque le graphe G est 2-connexe, par la définition 2.4.6 de la k -connexité, il existe un sommet x de G tel que le graphe $G(V \setminus \{x\})$, noté $G - x$, possède au moins un point d'articulation. Comme le graphe $G - x$ est connexe et possède au moins un point d'articulation, selon le corollaire 2.4.16, le graphe $G - x$ admet au moins deux blocs contenant chacun un seul point d'articulation de $G - x$. Considérons les blocs B_1 et B_2 , ayant respectivement comme points d'articulation b_1 et b_2 dans $G - x$ (il est possible que $b_1 = b_2$ si les blocs B_1 et B_2 partagent un sommet commun).
- (b) Chacun des blocs B_1 et B_2 contient au moins deux sommets. En effet, supposons par l'absurde qu'un bloc soit réduit à un seul sommet, noté $\{a\}$. Cela impliquerait que le point d'articulation de ce bloc (dans $G - x$) serait également l'unique sommet de celui-ci. Par conséquent, ce bloc ne serait connecté à aucun autre sommet.

En effet, si le point d'articulation du bloc B_1 (constitué d'un unique sommet) était connecté à un autre bloc, cela se ferait par l'intermédiaire d'un point d'articulation. Cependant, cela impliquerait que le bloc B_1 serait inclus dans un bloc plus grand contenant ces deux points d'articulation, ce qui contredirait la maximalité du bloc B_1 constitué d'un seul sommet. Dès lors, comme les points d'articulation sont précisément les seuls sommets qui garantissent la connectivité entre les différents blocs du graphe (vu le lemme 2.4.12), un bloc réduit à un seul sommet, qui est également un point d'articulation, ne peut être connecté à d'autres sommets dans $G - x$ sans contredire la maximalité d'un bloc.

Ainsi, ce bloc serait un sommet isolé dans le graphe $G - x$, ce qui est incompatible avec le fait que le graphe $G - x$ est connexe et possède au moins deux sommets vu l'hypothèse $\delta(G) \geq 3$.

- (c) Considérons $e = \{a, b\}$ une arête sortante du bloc B_1 dans le graphe G , ce qui signifie que $a \in B_1$ et $b \notin B_1$ (l'existence d'une telle arête est établie par les points (a) et (b)). Dans ce cas, soit $b = x$, soit $a = b_1$. Ce raisonnement est similaire pour le bloc B_2 .

Si $a \neq b_1$, alors nécessairement $b = x$. En effet, supposons par l'absurde que $b \neq x$. Dans cette situation, b se trouve dans un autre bloc B' distinct de B_1 , car $b \notin B_1$ étant donné que $e = \{a, b\}$ est une arête sortante du bloc B_1 . Cependant, si b est dans un autre bloc B' , alors, selon le lemme 2.4.12 (indiquant que le passage éventuel entre deux blocs distincts s'effectue par le biais de l'unique point d'articulation qui est commun à ces deux blocs), cela signifie qu'il existe une seule arête reliant un sommet de B_1 au sommet b , à savoir l'arête reliant b_1 à b . Par conséquent, $a = b_1$, ce qui est une contradiction. Maintenant, si $b \neq x$, alors e est une arête de $G - x$ (car $x \notin B_1$ et $a \in B_1$, donc $a \neq x$), ce qui implique qu'elle appartient à un bloc B'_1 . En effet, puisque e est

une arête "sortante" du bloc B_1 , elle ne peut pas être une arête de B_1 . De plus, comme le graphe $G - x$ admet au moins un point d'articulation, qui sépare le graphe en au moins deux composantes connexes quand on le retire de G , cela garantit l'existence d'un tel bloc B'_1 . Ainsi, puisque $a \in B_1$ et $e = \{a, b\} \in B'_1$, $a \in B_1 \cap B'_1$ et a est point d'articulation de $G - x$ (vu le lemme 2.4.12). Comme l'unique point d'articulation de B_1 est b_1 et que $a \in B_1$, nécessairement $a = b_1$.

- (d) Le sommet x possède deux voisins x_1 et x_2 qui sont non adjacents. En effet, prenons un sommet $t_1 \in B_1$ tel que $t_1 \neq b_1$. Étant donné que G est 2-connexe et que $t_1 \neq b_1$, il existe un chemin de t_1 à x évitant b_1 (sinon, b_1 serait un point d'articulation de G). Ce chemin quitte le bloc B_1 par une arête sortante $e = \{a, b\}$, où $a \neq b_1$ puisque le chemin évite le sommet b_1 . Conformément au point (c), puisque $a \neq b_1$, on a $b = x$. Posons alors $x_1 = a$. Ainsi, $e = \{a, b\} = \{x_1, x\}$ et x est adjacent à x_1 et $x_1 \neq b_1$, avec $x_1 \in B_1$. De manière similaire, x est adjacent à x_2 et $x_2 \neq b_2$, où $x_2 \in B_2$. Par conséquent, comme $x_1 \neq b_1$ et $x_2 \neq b_2$, avec $x_1 \in B_1$ et $x_2 \in B_2$, et en tenant compte du caractère maximal des blocs, nous en concluons que les sommets x_1 et x_2 ne sont pas adjacents.

- (e) Montrons que le graphe $G(V \setminus \{x_1, x_2\})$ est connexe.

Remarquons tout d'abord que puisque par hypothèse, $\delta(G) \geq 3$, le degré de x est au moins 3. Par conséquent, il existe $y \in G - x$ adjacent à x mais différent de x_1, x_2 (selon le point (d)). Ainsi, pour établir la connexité, il suffit de démontrer que tout sommet t de $G - x$ peut être relié à y en restant dans $G - x$ et en évitant x_1 et x_2 .

- Si $y \notin B_1 \cup B_2$, considérons un chemin C de t à y dans $G - x$. Si le chemin C passe par $x_1 \in B_1$, il entre dans B_1 et doit donc passer par b_1 (puisque l'entrée dans un bloc se fait par le point d'articulation de $G - x$ contenu dans le bloc, vu le lemme 2.4.12). Il doit également en ressortir par b_1 (car la sortie d'un bloc se fait par le point d'articulation du bloc, vu le lemme 2.4.12). Nous pouvons donc raccourcir C en supprimant le passage par B_1 , évitant ainsi x_1 (on passe donc juste par le point d'articulation b_1 de B_1) (voir la figure 2.13). Le même raisonnement s'applique pour éviter x_2 .
- Si $y \in B_1$, considérons un chemin C de t à y dans $G - x$. Ce chemin entre dans B_1 par b_1 (vu le lemme 2.4.12), puis va de b_1 à y dans B_1 . Si C passe par x_1 , comme B_1 est au moins 2-connexe (car, selon la définition 2.4.7 d'un bloc, un bloc est connexe et sans point d'articulation), il existe un autre chemin de b_1 à y , évitant ainsi x_1 (car $B_1 - x_1$ reste connexe).
- Si $y \in B_2$, le raisonnement peut être répété de manière similaire. Considérons un chemin C de t à y dans $G - x$. Ce chemin entre dans B_2 par b_2 (vu le lemme 2.4.12), puis va de b_2 à y dans B_2 . Si C passe par x_2 , comme B_2 est au moins 2-connexe, il existe un autre chemin de b_2 à y , évitant ainsi x_2 (car $B_2 - x_2$ reste connexe).

□

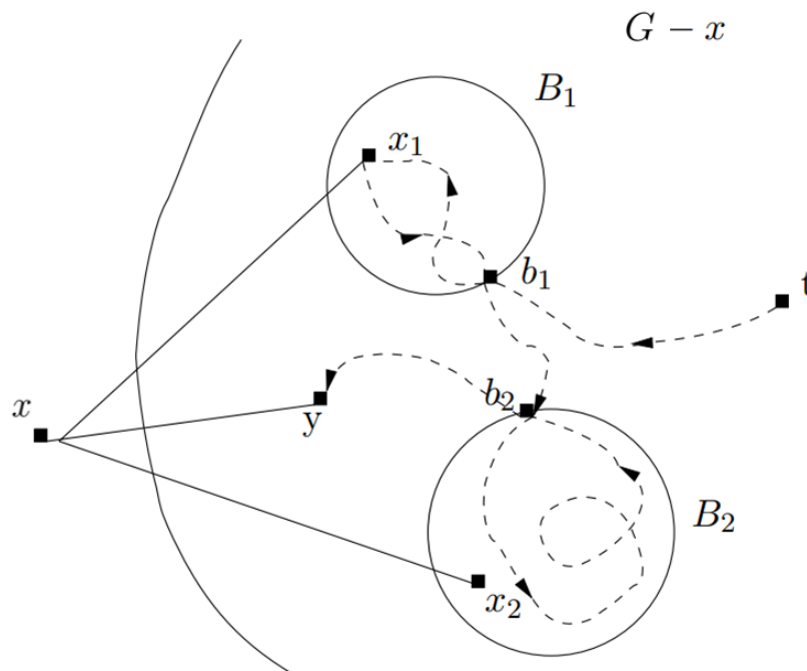


FIGURE 2.13 – Illustration (provenant du livre [10] à la page 221) de la situation du point (e) dans le cas où $y \notin B_1 \cup B_2$.

Grâce aux résultats précédents, nous disposons de tous les éléments nécessaires pour prouver la borne supérieure du nombre chromatique d'un graphe, telle qu'énoncée par Brooks.

Théorème 2.4.18 (Brooks, 1941). *Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe d'ordre n et de degré maximal $\Delta(G)$. Si G n'est ni un graphe complet, ni un cycle de longueur impaire, alors $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

Démonstration. Considérons un graphe connexe G d'ordre n et de degré maximal $\Delta(G)$, qui n'est ni un graphe complet, ni un cycle de longueur impaire.

Si $\Delta(G) = 0$, alors le graphe G possède un unique sommet (puisque, par hypothèse, il est connexe, ce qui signifie que chaque paire de sommets est connectée, conformément à la définition 1.1.4), ce qui en fait le graphe complet K_1 . Par conséquent, le graphe ne satisfait pas les hypothèses du théorème.

Si $\Delta(G) = 1$, alors le graphe G possède deux sommets (puisque, par hypothèse, il est connexe) et constitue le graphe complet K_2 . Par conséquent, le graphe ne satisfait pas les hypothèses du théorème.

Si $\Delta(G) = 2$, alors la propriété de connexité du graphe G implique que G est soit un chemin, soit un cycle. Selon les propositions 1.3.22 et 1.3.30, les chemins ouverts et les cycles de longueur paire ont un nombre chromatique égal à 2, ce qui correspond également au degré maximal. Par contre, les cycles de longueur impaire sont exclus des hypothèses du théorème.

Nous pouvons donc poursuivre notre démonstration en supposant que $\Delta(G) \geq 3$.

Si le graphe G n'est pas régulier, alors d'après le corollaire 2.3.15 l'assertion est vraie.

Supposons à présent que le graphe G est $\Delta(G)$ -régulier. Dans la suite de la démonstration, nous utiliserons les notations suivantes : $\deg_G(v)$ désigne le degré du sommet v dans le graphe G , et $\deg_{G_j}(v)$ indique le degré du sommet v dans le sous-graphe G_j de G . Notons également $k = \Delta(G)$.

1. Si G admet un point d'articulation x , par la définition 2.4.6, le graphe $G - x$ peut être décomposé en une union finie de sous-graphes connexes $C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup \dots \cup C_p$, où $p \geq 2$ est le nombre de composantes connexes de $G - x$.

Soit, pour tout i , G_i le sous-graphe de G obtenu en ajoutant le sommet x à C_i ainsi que toutes les arêtes de G reliant x aux sommets de C_i , i.e. $G_i = G(C_i \cup \{x\})$.

De plus, le graphe G est k -régulier par hypothèse. Par conséquent, même si le sommet x a un degré $\deg_G(x) = k$, conformément à la définition 1.1.2 de $k = \Delta(G)$ et au caractère régulier d'un graphe, sa nature de point d'articulation entraîne que pour chaque $i \in \{1, \dots, p\}$, nous avons $\deg_{G_i}(x) < k$. Cela s'explique par la définition 2.4.6 d'un point d'articulation, car le sommet x est connecté aux autres composantes connexes alors que les sommets de C_i ne le sont pas. Ainsi, par construction, le degré de x dans chaque graphe G_i est inférieur à k . Par conséquent, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, les graphes G_i ne sont pas k -réguliers. Donc, d'après le corollaire 2.3.15, chaque graphe G_i peut être coloré avec un maximum de k couleurs. En réarrangeant éventuellement les couleurs, il est possible d'attribuer la même couleur au sommet x dans chaque graphe G_i . De cette manière, les coloriage individuels s'assemblent pour former un coloriage complet du graphe G , utilisant au plus k couleurs. Ainsi, nous pouvons conclure que $\chi(G) \leq k$.

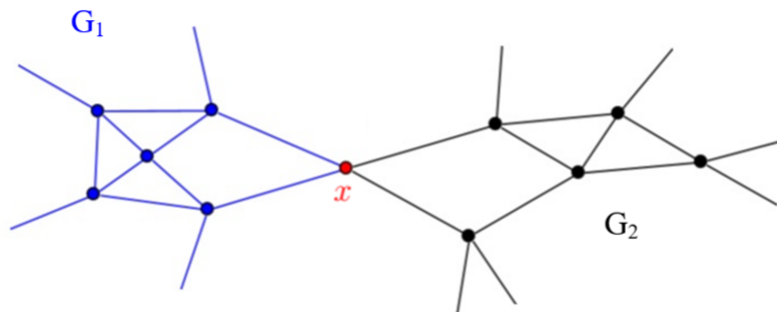


FIGURE 2.14 – Un point d'articulation x permettant de disconnecter le graphe $G = G_1 \cup G_2$.

2. Si G n'admet pas de point d'articulation, d'après le lemme 2.4.17, il existe un sommet x ayant deux voisins x_1 et x_2 non adjacents tels que $G(V \setminus \{x_1, x_2\})$ soit connexe. Par conséquent, d'après la proposition 2.4.5, le graphe $G(V \setminus \{x_1, x_2\})$ admet un sous-arbre couvrant T de G , que nous allons orienter de manière à ce que tous les chemins de T mènent au sommet x .

Posons $v_n = x$, où n représente le nombre de sommets dans G . Ordonnons ensuite les sommets de cet arbre (et donc de $G(V \setminus \{x_1, x_2\})$) avec des nombres supérieurs à 2, de telle manière que leurs indices augmentent le long de chaque chemin menant à v_n , créant ainsi l'ordre v_3, \dots, v_{n-1}, v_n . Cette disposition implique que pour chaque sommet v_i distinct de v_n , il existe un autre sommet v_j adjacent à v_i avec $j > i$. Nous complétons cet ordre en forçant $v_1 = x_1 < v_2 = x_2 < v_3$.

Appliquons maintenant l'algorithme de coloration gloutonne, tel que décrit à la définition 2.3.7, afin de construire un coloriage $c : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ des sommets du graphe G .

Tout d'abord, les sommets $v_1 = x_1$ et $v_2 = x_2$ reçoivent la même couleur, car ils ne sont pas adjacents. Ainsi, sans perte de généralité, nous pouvons attribuer la couleur 1 à ces deux sommets :

$$f(v_1) = f(v_2) = 1.$$

Ensuite, le sommet v_3 a au moins un voisin plus grand que lui (non coloré), donc il a au plus $k - 1$ voisins qui ont déjà été colorés (ici, ce sont au plus les sommets v_1 et v_2), étant donné que v_3 est un sommet dans le graphe k -régulier G . Ainsi, nous pouvons le colorer avec l'une des k couleurs :

$$f(v_3) = 2.$$

De manière générale, pour tout $i \in \{3, \dots, n - 1\}$, le sommet v_i a un voisin plus grand que lui, ce qui signifie qu'il a au plus $k - 1$ voisins déjà colorés. Par conséquent, il peut être coloré sans conflit avec l'une des k couleurs disponibles.

Enfin, le sommet $v_n = x$ a k voisins (étant donné que x est un sommet dans le graphe G , qui est k -régulier), dont v_{n-1}, v_1, v_2 , mais ces deux derniers sont de la même couleur. Ainsi, les voisins de x nécessitent au plus $k - 1$ couleurs, laissant une couleur disponible dans la liste $\{1, \dots, k\}$ que nous pouvons attribuer à x .

Cette approche permet ainsi d'obtenir un coloriage adéquat pour G , nécessitant au plus k couleurs. Ainsi, nous pouvons conclure que $\chi(G) \leq k$.

La figure 2.15 illustre cette deuxième situation : le graphe de gauche considéré est 3-régulier, un sous-arbre couvrant du graphe de gauche (obtenu après avoir supprimé les sommets v_1 et v_2 ainsi que leurs arêtes incidentes) est souligné en bleu et il est possible de colorer ses sommets en utilisant au plus trois couleurs, comme décrit précédemment.

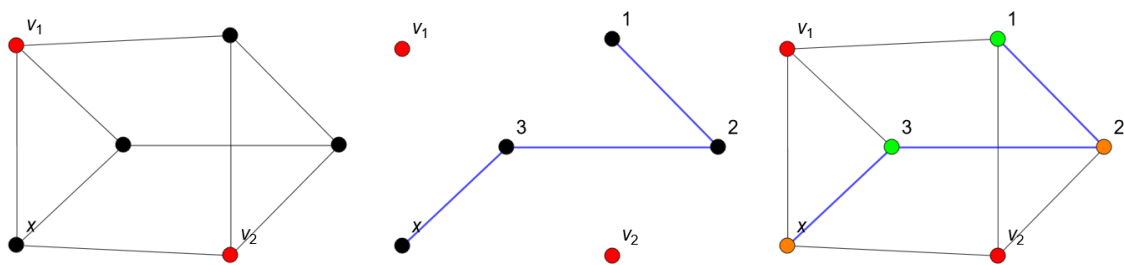


FIGURE 2.15 – Illustration de la deuxième situation dans la démonstration du théorème de Brooks.

□

Examinons l'exemple suivant pour illustrer ce théorème.

Exemple 2.4.19. Considérons les graphes de Mycielski M_4 et M_5 , représentés à la figure 2.2.

Il est évident que le degré maximal Δ du graphe M_4 (resp. M_5) est 5 (resp. 11). Par conséquent, nous obtenons les inégalités suivantes pour les deux graphes :

$$\chi(M_4) \leq \Delta(M_4) = 5 \quad \text{et} \quad \chi(M_5) \leq \Delta(M_5) = 11.$$

Bien évidemment, pour ces deux exemples particuliers, d'après la figure 2.3, nous pouvons déterminer la valeur exacte du nombre chromatique. Cependant, comme nous le verrons dans le chapitre 4, pour un graphe arbitraire de grande taille, connaître la valeur exacte du nombre chromatique est un problème algorithmiquement difficile. Ainsi, disposer d'une borne donnée par $\Delta(G)$ s'avère en général utile.

Enfin, nous constatons que pour le graphe de Mycielski M_4 , la borne de Brooks est relativement proche du véritable nombre chromatique. En revanche, pour le graphe de Mycielski M_5 , nous observons que la borne de Brooks n'est pas aussi précise.

Chapitre 3

Le polynôme chromatique d'un graphe

Comme mentionné dans la section 8.3 du livre [13], durant plus d'un siècle où le problème des quatre couleurs est demeuré sans solution, de nombreux mathématiciens ont étudié diverses approches dans l'espoir de résoudre ce défi prestigieux.

En 1912, George David Birkhoff a introduit la fonction $P_M(\lambda)$, qui fournit le nombre de λ -coloriages propres distincts pour une carte M et un naturel λ . Comme nous allons le constater, $P_M(\lambda)$ est exprimé sous la forme d'un polynôme en λ pour chaque carte M et est appelé le polynôme chromatique de M . Par conséquent, établir que $P_M(4)$ est strictement positif pour toute carte M aurait validé la conjecture des quatre couleurs. En 1932, Hassler Whitney a élargi l'étude des polynômes chromatiques des cartes aux graphes. Cependant, malgré les nombreux résultats obtenus par Whitney sur les polynômes chromatiques des graphes et l'étude des zéros de ces polynômes pour les graphes planaires par d'autres chercheurs, aucune preuve de la conjecture des quatre couleurs n'en a résulté.

Un regain d'intérêt pour les polynômes chromatiques des graphes a eu lieu en 1968 suite à la publication d'un article de synthèse [23] par Ronald Cedric Read.

Dans ce chapitre, nous commençons par explorer la notion de coloriages propres distincts et examiner le nombre de ces coloriages dans un graphe, puis nous nous penchons sur le concept de polynôme chromatique. Ensuite, nous démontrons le théorème de Suppression-Contraction, un outil essentiel pour déterminer le polynôme chromatique d'un graphe spécifique. Nous passons après cela à la détermination du polynôme chromatique pour les différentes familles de graphes présentées dans le premier chapitre de ce travail. En outre, nous analysons diverses propriétés du polynôme chromatique et de ses coefficients, fournissant ainsi des indications sur la structure du graphe sous-jacent. Par ailleurs, nous abordons les notions d'équivalence et d'unicité chromatique, soulignant que la connaissance du polynôme chromatique offre des informations limitées sur le graphe en question. Enfin, pour clore cette section, nous illustrons par un exemple que bien que nous ayons identifié plusieurs conditions nécessaires, celles-ci ne sont pas suffisantes pour garantir qu'un polynôme donné est effectivement le polynôme chromatique d'un graphe spécifique.

3.1 Notions de coloriages propres distincts et de polynôme chromatique

Nous commençons par introduire la notion de polynôme chromatique. Pour ce faire, nous abordons d'abord le concept de coloriages propres distincts avant de donner la dé-

finition du polynôme chromatique. Cette section a été rédigée en consultant la section 2 du mémoire [3], la sous-section 9.8 du livre [10], la section IV.3 des notes de cours [24] ainsi que la section 5.3 du livre [27].

Définition 3.1.1. Soient $G = (V, E)$ un graphe ayant au moins un sommet et λ un naturel non nul. Deux coloriage propres $c_G(\lambda) : V \rightarrow \{1, \dots, \lambda\}$ et $c'_G(\lambda) : V \rightarrow \{1, \dots, \lambda\}$ des sommets du graphe G utilisant exactement λ couleurs sont considérés comme *distincts* s'il existe (au moins) un sommet u dans V tel que $c_G(u) \neq c'_G(u)$. Cette condition implique que toute permutation des couleurs d'un coloriage est considérée comme un nouveau coloriage.

Le concept de coloriage propres distincts étant défini, tous les éléments sont en place pour définir la seconde notion centrale de ce travail.

Définition 3.1.2. Soient $G = (V, E)$ un graphe ayant $n \geq 1$ sommets et λ un naturel non nul.

Notons $m_G(\lambda)$ le *nombre de coloriage propres distincts* des sommets du graphe G utilisant exactement λ couleurs.

Introduisons également $z^{\underline{k}}$, le polynôme en la variable $z \in \mathbb{C}$ de degré k , défini comme suit :

$$z^{\underline{k}} = z(z-1) \cdots (z-k+1).$$

Ce polynôme est appelé la *factorielle décroissante* de z .

Avec ces notations, le *polynôme chromatique* du graphe G d'ordre n est donné par

$$\begin{aligned} P_G(z) &= \sum_{k=1}^n \frac{m_G(k)}{k!} z^{\underline{k}} \\ &= \frac{z}{1!} m_G(1) + \frac{z(z-1)}{2!} m_G(2) + \cdots + \frac{z(z-1) \cdots (z-n+1)}{n!} m_G(n). \end{aligned}$$

Pour rappel, tout au long du travail, sauf mention explicite du contraire, nous adoptons la convention selon laquelle le terme coloriage des sommets d'un graphe désigne spécifiquement un coloriage propre.

Maintenant que nous avons introduit le concept de polynôme chromatique, nous pouvons formuler l'observation suivante.

Remarque 3.1.3. Nous pouvons remarquer que la quantité $\frac{m_G(k)}{k!}$ correspond au nombre de partitions de l'ensemble V des sommets du graphe G en k sous-ensembles indépendants non vides, donnant lieu à tous les coloriage possibles des n sommets de G utilisant exactement k couleurs.

La proposition suivante met en avant le rôle du polynôme chromatique d'un graphe.

Proposition 3.1.4. *Le polynôme chromatique P_G d'un graphe G est une fonction dont la valeur en le naturel λ correspond au nombre de coloriage propres distincts de G utilisant au plus λ couleurs.*

Démonstration. Considérons un graphe $G = (V, E)$ d'ordre n . Tout d'abord, remarquons qu'il est inutile d'inclure dans l'expression du polynôme chromatique $P_G(\lambda)$ du graphe G , les termes dont l'exposant est strictement supérieur à λ . En effet, lorsque $k > \lambda$, la

factorielle décroissante λ^k est nulle. Par conséquent, vu la définition 3.1.2 du polynôme chromatique, nous obtenons :

$$P_G(\lambda) = \sum_{k=1}^{\lambda} \frac{m_G(k)}{k!} \lambda^k.$$

De plus, pour tout $k \leq \lambda$, il existe $\frac{m_G(k)}{k!}$ partitions de l'ensemble V des sommets du graphe G en k sous-ensembles non vides de sommets indépendants. Considérons ces partitions et pour chaque partition $C_1 \cup \dots \cup C_k$ de l'ensemble V , autorisons-nous à choisir k couleurs parmi λ .

Dans le sous-ensemble C_1 de sommets, nous avons λ choix de couleurs possibles. Cela découle de la définition 1.1.2, qui stipule qu'un ensemble indépendant est formé de sommets qui ne sont pas adjacents deux à deux. Pour le sous-ensemble C_2 de sommets, nous avons $\lambda - 1$ choix possibles. Cela est dû au fait que certains sommets du sous-ensemble indépendant C_2 sont adjacents à certains sommets du sous-ensemble indépendant C_1 dans la partition $C_1 \cup \dots \cup C_k$, nécessitant ainsi que les sommets de C_2 ne partagent pas la même couleur que ceux de C_1 . Ce raisonnement se poursuit jusqu'au sous-ensemble C_k , où nous avons $\lambda - k + 1$ choix possibles.

Ainsi, chacune des $\frac{m_G(k)}{k!}$ partitions de V en k sous-ensembles donnent lieu à λ^k coloriages utilisant exactement k des λ couleurs disponibles. Par conséquent, $P_G(\lambda)$ correspond au nombre de coloriages propres distincts du graphe G utilisant au plus λ couleurs. \square

Grâce à cette proposition, nous sommes en mesure de faire la constatation suivante.

Remarque 3.1.5. Il est à noter que $P_G(0) = 0$ pour tout graphe G , car il est impossible de colorer un graphe ayant au moins un sommet avec aucune couleur. Ainsi, puisque $P_G(0)$ représente le terme indépendant du polynôme chromatique, nous pouvons conclure que ce terme est toujours nul pour tout graphe G .

En outre, en vertu de la proposition 3.1.4 et de la définition 1.2.5 de $\chi(G)$, il est évident que :

- si $k < \chi(G)$, alors $P_G(k) = 0$;
- si $k \geq \chi(G)$, alors $P_G(k) > 0$.

Par conséquent, $\chi(G)$ est le plus petit entier k tel que $P_G(k) > 0$, car $P_G(k) > 0$ indique qu'il existe au moins un coloriage valide des sommets du graphe G utilisant au plus k couleurs, et $\chi(G)$ représente précisément le nombre minimum de couleurs nécessaires pour un tel coloriage.

Illustrons à présent le calcul du concept de polynôme chromatique pour en saisir le fonctionnement.

Exemple 3.1.6. Considérons le graphe $G = (V, E)$ représenté à la figure 3.1. Notre objectif est de déterminer le polynôme chromatique de ce graphe.

Pour ce faire, examinons les façons de partitionner l'ensemble V en k sous-ensembles indépendants non vides, donnant lieu à tous les coloriages possibles des cinq sommets du graphe G utilisant exactement k couleurs, avec $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Étant donné qu'il n'existe aucune partition de V en moins de trois sous-ensembles indépendants non vides, il est évident que $\frac{m_G(k)}{k!} = 0$ pour $k < 3$.

Pour $k = 3$, il y a une unique partition possible en trois sous-ensembles indépendants non vides :

$$V = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3, 4, 5\}.$$

Cette partition donne lieu à $3! = 6$ coloriage distincts $c_G(3)$ des sommets du graphe G :

1. $v_1 \mapsto 1, v_2 \mapsto 2, v_3, v_4, v_5 \mapsto 3$;
2. $v_1 \mapsto 1, v_2 \mapsto 3, v_3, v_4, v_5 \mapsto 2$;
3. $v_1 \mapsto 2, v_2 \mapsto 1, v_3, v_4, v_5 \mapsto 3$;
4. $v_1 \mapsto 2, v_2 \mapsto 3, v_3, v_4, v_5 \mapsto 1$;
5. $v_1 \mapsto 3, v_2 \mapsto 1, v_3, v_4, v_5 \mapsto 2$;
6. $v_1 \mapsto 3, v_2 \mapsto 2, v_3, v_4, v_5 \mapsto 1$.

Dès lors, nous avons $\frac{m_G(3)}{3!} = \frac{3!}{3!} = 1$.

Pour $k = 4$, il y a trois partitions possibles en quatre sous-ensembles indépendants non vides :

$$V = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3, 4\} \cup \{5\} = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4, 5\} = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3, 5\} \cup \{4\}.$$

Chaque partition donne lieu à $4! = 24$ coloriage distincts des sommets du graphe G .

Ainsi, nous avons $\frac{m_G(4)}{4!} = \frac{3 \cdot 4!}{4!} = 3$.

Pour $k = 5$, il y a une unique partition possible en cinq sous-ensembles indépendants non vides : $V = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \{5\}$. Cette partition donne lieu à $5! = 120$ coloriage distincts des sommets du graphe G . Ainsi, nous avons $\frac{m_G(5)}{5!} = \frac{5!}{5!} = 1$.

En combinant ces résultats, nous concluons que le polynôme chromatique de G est :

$$\begin{aligned} P_G(z) &= \sum_{k=1}^5 \frac{m_G(k)}{k!} z^k \\ &= z^5 + 3z^4 + z^3 \\ &= z^5 - 7z^4 + 18z^3 - 20z^2 + 8z, \end{aligned}$$

De plus, en effectuant le calcul de $P_G(z)$ pour $z \in \{3, 4, 5, 6\}$, nous obtenons les résultats suivants : $P_G(3) = 6$, $P_G(4) = 96$, $P_G(5) = 540$, et $P_G(6) = 1920$. Par conséquent, il est possible de colorer les sommets du graphe G avec au plus trois (respectivement quatre, cinq, six) couleurs de 6 (respectivement 96, 540, 1920) manières distinctes.

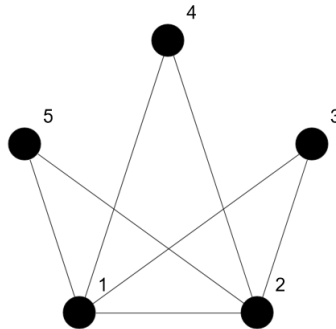


FIGURE 3.1 – Le graphe G , de polynôme chromatique $P_G(z) = z^5 - 7z^4 + 18z^3 - 20z^2 + 8z$.

3.2 Le théorème de Suppression-Contraction

Contrairement aux attentes pouvant découler de l'exemple 3.1.6, le calcul du polynôme chromatique d'un graphe n'est généralement pas une tâche aisée, comme nous le verrons dans le chapitre 4. En effet, le choix d'une méthode de coloriage des sommets d'un graphe pour minimiser le nombre de couleurs utilisées peut être compliqué. Cela nécessite une approche plus élaborée pour obtenir, de manière cohérente, le polynôme chromatique d'un graphe. Pour cela, nous utiliserons une méthode connue sous le nom de théorème de Suppression-Contraction. Ce théorème nous offre un cadre théorique pour calculer le polynôme chromatique en éliminant ou contractant des arêtes du graphe d'origine de manière stratégique, simplifiant ainsi le processus de calcul tout en préservant les propriétés chromatiques essentielles du graphe.

Par conséquent, cette deuxième section est consacrée à la preuve du théorème de Suppression-Contraction. Les informations contenues dans les sections 2.1 et 2.2 du mémoire [3] ainsi que dans la section 3 du chapitre IV des notes de cours [24] ont été consultées pour élaborer cette partie.

Commençons par définir deux opérations sur les graphes.

Définition 3.2.1. Considérons un graphe G avec e une arête et ses extrémités u et v (i.e. $e = \{u, v\}$).

Définissons $G - e$ comme le graphe G sans l'arête e , et $G \cdot e$ le graphe G où l'arête e est retirée et où les sommets u et v sont fusionnés en un seul sommet. Nous appelons $G - e$ la *suppression* de l'arête e et $G \cdot e$ la *contraction* de l'arête e .

Remarquons que lors de la contraction de deux sommets, il est possible que des boucles ou des arêtes multiples soient créées. Cependant, les boucles empêchent un graphe d'avoir un coloriage propre puisque tout sommet contenant une boucle est adjacent à lui-même. Par conséquent, nous décidons de supprimer les boucles pour garantir un coloriage adéquat. De même, les arêtes multiples fournissent des informations redondantes et sont donc remplacées par une unique arête lors de la contraction.

Grâce à ces deux concepts, nous sommes en mesure d'énoncer et de démontrer le théorème de Suppression-Contraction. À titre de rappel, tout au long de ce travail, sauf mention explicite du contraire, nous considérons des graphes simples (il est d'ailleurs raisonnable de poser $P_G(\lambda) = 0$ lorsqu'un graphe G possède une boucle, car un sommet adjacent à lui-même ne peut pas être coloré).

Théorème 3.2.2 (Suppression-Contraction). *Pour un graphe G et pour l'une de ses arêtes e , le polynôme chromatique du graphe G satisfait la relation suivante :*

$$P_G(z) = P_{G-e}(z) - P_{G \cdot e}(z). \quad (3.1)$$

Démonstration. Considérons tous les coloriages du graphe $G - e$ utilisant exactement λ couleurs. Il y en a de deux types :

- (1) ceux pour lesquels on assigne aux extrémités u et v de l'arête e deux couleurs distinctes ;
- (2) ceux pour lesquels on assigne aux extrémités u et v de l'arête e une même couleur.

Les coloriages du premier type sont en bijection avec les coloriages du graphe G utilisant exactement λ couleurs, car dans le graphe G , les sommets u et v sont adjacents, et donc, ils doivent être colorés avec des couleurs différentes. Les coloriages du second type

sont en bijection avec les coloriage du graphe $G \cdot e$ utilisant exactement λ couleurs, car dans le graphe $G \cdot e$, les sommets u et v sont remplacés par un unique sommet, et donc, ils ont la même couleur.

Ainsi, le nombre de coloriages distincts de $G - e$ utilisant au plus λ couleurs est le même que le nombre total de coloriages distincts de G et de $G \cdot e$ avec au plus λ couleurs. Par conséquent, nous avons :

$$P_{G-e}(\lambda) = P_G(\lambda) + P_{G \cdot e}(\lambda). \quad (3.2)$$

□

Illustrons désormais le calcul du polynôme chromatique d'un graphe en utilisant le théorème de Suppression-Contraction.

Exemple 3.2.3. Considérons le graphe G représenté à la figure 3.2a. Supposons que l'arête e sur laquelle nous souhaitons effectuer une Suppression-Contraction soit celle reliant les sommets 2 et 4.

Pour la suppression, nous retirons l'arête e du graphe G , ce qui nous donne le graphe $G - e$ illustré à la figure 3.2b. Quant à la contraction, nous retirons à nouveau l'arête e , tout en fusionnant les sommets 2 et 4 en un unique sommet, que nous nommons 2,4. Pendant cette opération, il est crucial de maintenir toutes les connexions initiales de ces sommets avec les sommets 1 et 3. Lors de cette contraction, toute arête multiple qui pourrait apparaître est également supprimée. Le résultat de cette contraction est le graphe $G \cdot e$, visible à la figure 3.2c.

Dans la section 3.3, nous observerons que les polynômes chromatiques du graphe $G - e$ (qui est le cycle C_4) et du graphe $G \cdot e$ (qui est le chemin P_3) sont exprimés comme suit :

$$P_{G-e}(z) = (z - 1)^4 + (z - 1) \quad \text{et} \quad P_{G \cdot e}(z) = z(z - 1)^2.$$

Par conséquent, la relation (3.1) de Suppression-Contraction nous indique que le polynôme chromatique du graphe G s'exprime comme la différence des polynômes chromatiques des graphes $G - e$ et $G \cdot e$:

$$\begin{aligned} P_G(z) &= P_{G-e}(z) - P_{G \cdot e}(z) \\ &= (z - 1)^4 + (z - 1) - z(z - 1)^2 \\ &= (z - 1)((z - 1)^3 + 1 - z(z - 1)) \\ &= z(z - 1)(z - 2)^2. \end{aligned}$$

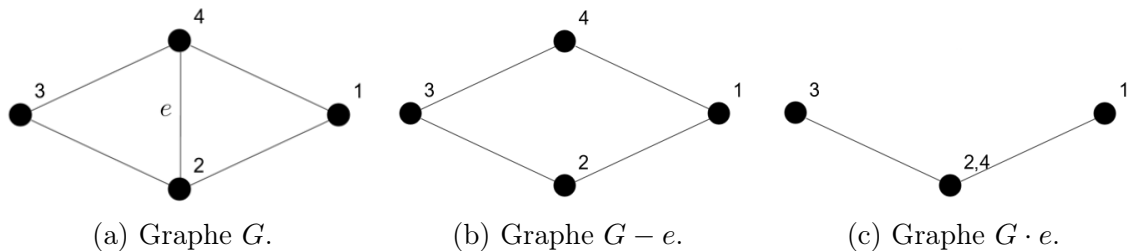


FIGURE 3.2 – Illustration du calcul du polynôme chromatique d'un graphe à l'aide du théorème de Suppression-Contraction.

À la suite de cet exemple, nous pouvons formuler l'observation suivante.

Remarque 3.2.4. La méthode de Suppression-Contraction permet de déterminer le polynôme chromatique d'un graphe en le simplifiant à chaque étape, réduisant ainsi le nombre d'arêtes (lors de la suppression et de la contraction) et de sommets (lors de la contraction). Une fois que le polynôme chromatique d'un graphe est connu, il n'est plus nécessaire de continuer la méthode de Suppression-Contraction sur ce graphe. Cependant, si le polynôme chromatique d'un graphe intermédiaire est inconnu, le processus de Suppression-Contraction est appliqué à ce graphe jusqu'à conduire à des graphes vides, comme illustré à la figure 3.3.

Remarquons également qu'à chaque étape de Suppression-Contraction, jusqu'à deux polynômes chromatiques inconnus doivent être calculés. Or, malgré l'utilité de décomposer un graphe en un ensemble de graphes vides, cette approche entraîne un doublement du nombre de graphes à chaque étape de Suppression-Contraction, ce qui rend le processus de détermination du polynôme chromatique laborieux pour les graphes contenant un grand nombre d'arêtes, car il devient exponentiel par rapport au nombre d'arêtes du graphe. Cette complexité concorde avec la difficulté de calculer le polynôme chromatique d'un graphe, comme nous le verrons dans le chapitre 4.

$$\begin{aligned}
 \square &= \text{---} - \text{---} \\
 &= \text{---} - \underbrace{\text{---} - \text{---}} + \text{---} \\
 &= \text{---} - \text{---} - 2 \left\{ \text{---} - \text{---} \right\} + \text{---} \\
 &= \text{---} - 3 \text{---} + 3 \text{---} \\
 &= \begin{pmatrix} \circ & & \\ & - & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} \circ & & \\ & - & \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} \circ & & \\ & & \\ \circ & & - \circ \end{pmatrix} \\
 &= \begin{matrix} \circ & \circ & & \circ & & \circ \\ & & - & 4 & \circ & + & 6 & - & 3 & \circ \\ \circ & \circ & & \circ & & \circ \end{matrix}
 \end{aligned}$$

FIGURE 3.3 – Plusieurs itérations du processus de Suppression-Contraction appliqué au cycle C_4 conduisent à une collection de graphes vides (illustration provenant de l'article [23] à la page 58).

3.3 Le polynôme chromatique de différentes familles de graphes

Nous allons présenter plusieurs résultats fournissant le polynôme chromatique pour les diverses familles de graphes introduites dans la section 1.3. La section 2.2 du mémoire [3] a été consultée pour rédiger ce qui suit.

En vertu de la remarque 3.2.4, il s'avère que si nous connaissons le polynôme chromatique d'un graphe vide, nous sommes en mesure de déterminer le polynôme chromatique d'un graphe donné en utilisant la méthode de Suppression-Contraction.

Pour déterminer le polynôme chromatique d'un graphe vide, notons d'abord que ce dernier, s'il possède plus d'un sommet, est non connexe. Ainsi, il convient de déterminer le polynôme chromatique d'un graphe non connexe en fonction de ses composantes connexes. Une fois cela réalisé, cette méthode peut être appliquée pour déterminer le polynôme chromatique du graphe vide.

Le lemme suivant établit le polynôme chromatique des graphes appartenant à la famille des graphes non connexes.

Lemme 3.3.1. *Soit G un graphe non connexe ayant pour composantes connexes G_1, G_2, \dots, G_k . Alors, le polynôme chromatique du graphe G est donné par*

$$P_G(z) = P_{G_1}(z) \cdot P_{G_2}(z) \cdots P_{G_k}(z).$$

Démonstration. Étant donné que les composantes connexes d'un graphe sont disjointes, pour un ensemble donné de λ couleurs, chaque composante connexe peut être colorée avec au plus ces λ couleurs, indépendamment des coloriage des autres composantes. Par conséquent, le nombre de coloriages distincts du graphe G est obtenu en multipliant le nombre de coloriages distincts de chaque composante connexe. \square

Comme évoqué précédemment, ce lemme nous permet de déterminer le polynôme chromatique des graphes appartenant à la famille des graphes vides.

Proposition 3.3.2. *Le polynôme chromatique du graphe vide E_n est*

$$P_{E_n}(z) = z^n.$$

Démonstration. Considérons un ensemble de λ couleurs. Comme aucun sommet n'est adjacent à un autre sommet dans le graphe vide E_n à n sommets, les n sommets isolés peuvent être colorés indépendamment, chacun de λ façons différentes. Ainsi, en vertu du lemme 3.3.1, nous concluons que le polynôme chromatique du graphe vide E_n est le produit des polynômes chromatiques de chacune des n composantes connexes, chacune étant formée d'un unique sommet. \square

La capacité à déterminer le polynôme chromatique d'un graphe en fonction de ses composantes connexes facilite grandement le processus de Suppression-Contraction. Par ailleurs, la connaissance des polynômes chromatiques de certaines familles de graphes permet également de simplifier ce processus. C'est pourquoi nous allons maintenant examiner les polynômes chromatiques des graphes rencontrés dans la section 1.3, comme annoncé précédemment.

Déterminons d'abord le polynôme chromatique des graphes appartenant à la famille des graphes complets, en nous appuyant respectivement sur les sections 3.2 et 4.2 des mémoires [3, 21].

Proposition 3.3.3. *Le polynôme chromatique du graphe complet K_n est*

$$P_{K_n}(z) = z(z-1)\cdots(z-n+1) = z^n.$$

Démonstration. Considérons un ensemble de λ couleurs. Il est clair que le nombre de choix possibles pour colorer chaque sommet du graphe complet K_n à n sommets dépend du nombre de couleurs déjà attribuées aux sommets précédents. En effet, dans un graphe complet, chaque paire de sommets est reliée par une arête, donc aucun sommet ne peut partager la même couleur avec ses voisins pour obtenir un coloriage valide.

Ainsi, pour le premier sommet, nous avons λ choix de couleurs possibles. Pour le deuxième sommet, nous avons $\lambda - 1$ choix possibles. De manière générale, pour tout $i \in \{3, \dots, n-1\}$, nous avons $\lambda - (i-1) = \lambda - i + 1$ choix pour le $i^{\text{ème}}$ sommet, étant donné que ce sommet est adjacent à chacun des $i-1$ autres sommets déjà colorés. Enfin, pour le $n^{\text{ème}}$ et dernier sommet, nous avons $\lambda - (n-1) = \lambda - n + 1$ choix de couleurs possibles. \square

Nous nous concentrons maintenant sur le polynôme chromatique des arbres. Notons qu'en réalité, nous démontrons que tous les arbres d'ordre n ont le même polynôme chromatique. Pour rédiger ce qui suit, la section 3.2 du mémoire [3] et la section 3 du chapitre IV des notes de cours [24] ont été parcourues.

Proposition 3.3.4. *Pour tout arbre $T \in \mathcal{T}_n$ ($n \geq 1$), son polynôme chromatique est*

$$P_T(z) = z(z-1)^{n-1}. \quad (3.3)$$

Démonstration. Procédons par récurrence sur le nombre de sommets $n \geq 1$ de l'arbre et considérons un ensemble de λ couleurs.

Tout d'abord, le cas de base $n = 1$ est évident puisqu'un arbre à un sommet, noté T_1 , peut être coloré de λ façons différentes. Donc, $P_{T_1}(\lambda) = \lambda = \lambda(\lambda-1)^{1-1}$ et la propriété est vérifiée lorsque $n = 1$.

Supposons maintenant que la propriété est vraie pour tout arbre $T_n \in \mathcal{T}_n$ d'ordre n ($n > 1$), c'est-à-dire que le polynôme chromatique de tout arbre à n sommets est donné par $P_{T_n}(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^{n-1}$. Pour l'induction, considérons un arbre arbitraire $T_{n+1} \in \mathcal{T}_{n+1}$ ayant $n+1$ sommets. Un tel arbre possède au moins un sommet de degré 1, *i.e.* une feuille, car l'arbre a au moins deux sommets, puisque $n > 1$. Soit e l'arête incidente à cette feuille. En supprimant l'arête e , nous obtenons la suppression $T_{n+1} - e$, qui est l'union disjointe d'un arbre à n sommets et d'un arbre à un seul sommet. En contractant l'arête e , nous obtenons la contraction $T_{n+1} \cdot e$, qui est un arbre à n sommets. En vertu de la relation (3.1) de Suppression-Contraction, nous avons :

$$P_{T_{n+1}}(\lambda) = P_{T_{n+1}-e}(\lambda) - P_{T_{n+1} \cdot e}(\lambda).$$

En utilisant le cas de base, l'hypothèse de récurrence ainsi que le lemme 3.3.1, nous pouvons conclure que :

$$\begin{aligned} P_{T_{n+1}}(\lambda) &= \lambda(\lambda(\lambda-1)^{n-1}) - \lambda(\lambda-1)^{n-1} \\ &= \lambda(\lambda-1)^{n-1}(\lambda-1) \quad \text{par mise en évidence} \\ &= \lambda(\lambda-1)^n. \end{aligned}$$

Par conséquent, l'hypothèse est vérifiée pour les arbres composés de $n+1$ sommets, et donc, par récurrence, elle est valide pour tout n . \square

De cette proposition découle un résultat fournissant une borne supérieure pour le polynôme chromatique d'un graphe connexe, tel qu'indiqué dans la section 4.2 du mémoire [21] ainsi que dans la section 6 de l'article [23].

Corollaire 3.3.5. *Pour un graphe connexe G d'ordre n et pour un ensemble de λ couleurs, nous avons*

$$P_G(\lambda) \leq \lambda(\lambda - 1)^{n-1}.$$

Démonstration. Étant donné que tout graphe connexe possède un sous-arbre couvrant (conformément à la proposition 2.4.5), considérons n'importe quel sous-arbre couvrant T du graphe G . Les sommets de cet arbre T peuvent être colorés de $\lambda(\lambda - 1)^{n-1}$ manières différentes, comme énoncé dans la proposition 3.3.4.

Il convient de noter que chaque coloriage du graphe G est également un coloriage de l'arbre T du fait qu'un sous-arbre couvrant T contient tous les sommets du graphe G . Cependant, tous les coloriages possibles de T ne seront pas nécessairement des coloriages valides pour G , car T est un sous-graphe du graphe G et ne contient pas nécessairement toutes les arêtes présentes dans G . \square

À partir de cette borne supérieure, nous pouvons conclure que, en général, le polynôme chromatique des graphes connexes possède une borne supérieure minimale. En effet, le corollaire 3.3.5 assure l'existence d'une telle borne supérieure, tandis que la proposition 3.3.4 démontre que cette borne supérieure est la plus petite possible.

De la proposition 3.3.4 concernant le polynôme chromatique des arbres émerge deux résultats sur le polynôme chromatique des graphes en étoile et des chemins, respectivement. Cela découle du fait que les chemins et les graphes en étoile sont des arbres particuliers.

Corollaire 3.3.6. *Le polynôme chromatique d'un chemin P_n ($n \geq 2$) est*

$$P_{P_n}(z) = z(z - 1)^{n-1}.$$

Corollaire 3.3.7. *Le polynôme chromatique d'un graphe en étoile S_n ($n \geq 2$) est*

$$P_{S_n}(z) = z(z - 1)^{n-1}.$$

Tout comme nous avons déterminé le nombre chromatique des cycles, nous pouvons maintenant porter notre attention sur le polynôme chromatique de ces graphes. Le lecteur pourra retrouver le résultat présenté par la suite dans la section 3.2 du mémoire [3].

Proposition 3.3.8. *Le polynôme chromatique d'un cycle C_n ($n \geq 3$) est*

$$P_{C_n}(z) = (z - 1)^n + (-1)^n(z - 1).$$

Démonstration. Procédons par récurrence sur le nombre de sommets $n \geq 3$ du cycle et considérons un ensemble de λ couleurs.

Tout d'abord, le cas de base $n = 3$ est évident, puisqu'un cycle à trois sommets correspond au graphe complet K_3 . En vertu de la proposition 3.3.3, nous obtenons

$$\begin{aligned} P_{C_3}(\lambda) &= P_{K_3}(\lambda) \\ &= \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) \\ &= (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda) \\ &= (\lambda - 1)((\lambda - 1)^2 - 1) \\ &= (\lambda - 1)^3 - (\lambda - 1) \\ &= (\lambda - 1)^3 + (-1)^3(\lambda - 1), \end{aligned}$$

et la propriété est vérifiée lorsque $n = 3$.

Supposons maintenant que la propriété est vraie pour tout cycle d'ordre n ($n > 3$), c'est-à-dire que le polynôme chromatique de tout cycle à n sommets est donné par

$$P_{C_n}(\lambda) = (\lambda - 1)^n + (-1)^n(\lambda - 1).$$

Pour l'induction, considérons un cycle ayant $n + 1$ sommets. Choisissons de manière arbitraire une arête e du cycle C_{n+1} . En supprimant cette arête e , nous obtenons la suppression $C_{n+1} - e$, qui est un chemin à $n + 1$ sommets. En contractant l'arête e , nous obtenons la contraction $C_{n+1} \cdot e$, qui est un cycle à n sommets. Par la relation (3.1) de Suppression-Contraction, nous avons :

$$\begin{aligned} P_{C_{n+1}}(\lambda) &= P_{C_{n+1}-e}(\lambda) - P_{C_{n+1}\cdot e}(\lambda) \\ &= \lambda(\lambda - 1)^n - ((\lambda - 1)^n + (-1)^n(\lambda - 1)) \\ &= \lambda(\lambda - 1)^n - (\lambda - 1)^n + (-1)^{n+1}(\lambda - 1) \\ &= (\lambda - 1)^n(\lambda - 1) + (-1)^{n+1}(\lambda - 1) \\ &= (\lambda - 1)^{n+1} + (-1)^{n+1}(\lambda - 1), \end{aligned}$$

où la seconde égalité est obtenue en utilisant la proposition 3.3.6 conjointement avec l'hypothèse de récurrence. \square

De cette proposition découle directement un résultat, portant sur le polynôme chromatique des graphes roues. La preuve suivante a été rédigée à l'aide de la section 4.2 du mémoire [21].

Proposition 3.3.9. *Le polynôme chromatique d'un graphe roue W_{n+1} ($n \geq 3$) est*

$$P_{W_{n+1}}(z) = z(z - 2)^n + (-1)^nz(z - 2).$$

Démonstration. Déterminons le nombre de coloriage distincts utilisant au plus λ couleurs pour le graphe roue W_{n+1} à $n + 1$ sommets.

Commençons par colorer le sommet central du graphe roue. Étant donné qu'aucun sommet n'a été coloré jusqu'à présent, nous disposons de λ choix possibles pour colorer ce premier sommet. Puisque le centre du graphe roue W_{n+1} est adjacent aux n sommets restants, nous devons retirer la couleur utilisée pour colorer le sommet central de notre ensemble de couleurs. À présent, nous disposons de $\lambda - 1$ couleurs différentes pour colorer les n derniers sommets, qui forment un cycle C_n à n sommets. En vertu de la proposition 3.3.8, nous savons que le nombre de coloriage distincts utilisant au plus $\lambda - 1$ couleurs pour le cycle C_n est donné par le polynôme chromatique $P_{C_n}(\lambda - 1) = (\lambda - 2)^n + (-1)^n(\lambda - 2)$.

Par conséquent, le polynôme chromatique du graphe roue W_{n+1} est :

$$\begin{aligned} P_{W_{n+1}}(\lambda) &= \lambda P_{C_n}(\lambda - 1) \\ &= \lambda((\lambda - 2)^n + (-1)^n(\lambda - 2)) \\ &= \lambda(\lambda - 2)^n + (-1)^n\lambda(\lambda - 2). \end{aligned} \quad \square$$

Désormais, nous allons déterminer le polynôme chromatique des graphes appartenant à la famille des graphes bipartis complets. Pour ce faire, nous devons d'abord introduire les nombres de Stirling de seconde espèce. La section 6.5 du livre [11], la section 1.5 du livre [13], la section 6.1 du livre [17], la section 4.5 du mémoire [21], la section 4 de l'article [23] ainsi que la section 1.2 du livre [27] ont été consultées pour rédiger ce qui suit.

Définition 3.3.10. Le nombre de Stirling de deuxième espèce, noté $S(n, m)$, représente le nombre de partitions d'un ensemble de n éléments en m sous-ensembles non vides (non ordonnés).

Il est évident que $S(n, 1) = 1$ et $S(n, n) = 1$, pour $n \geq 0$, car un ensemble de n éléments ne peut être partitionné que d'une seule façon en 1 ou n sous-ensembles. De plus, $S(n, 0) = 0$ pour tout $n \geq 1$, car un ensemble de $n \geq 1$ éléments ne peut être partitionné en 0 sous-ensemble. De même, $S(n, m) = 0$ pour $m > n$, car un ensemble de n éléments ne peut être partitionné en $m > n$ sous-ensembles.

Pour mieux appréhender la définition précédente, illustrons le calcul de différentes valeurs du nombre de Stirling de seconde espèce.

Exemple 3.3.11. L'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ de quatre éléments peut être partitionné en :

- quatre sous-ensembles d'une seule façon : $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$;
- en deux sous-ensembles de sept façons : $\{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}, \{\{1, 2, 4\}, \{3\}\}, \{\{1, 3, 4\}, \{2\}\}, \{\{2, 3, 4\}, \{1\}\}, \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}, \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}, \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$;
- en trois sous-ensembles de six façons : $\{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}, \{\{1, 3\}, \{2\}, \{4\}\}, \{\{1, 4\}, \{2\}, \{3\}\}, \{\{2, 3\}, \{1\}, \{4\}\}, \{\{2, 4\}, \{1\}, \{3\}\}, \{\{3, 4\}, \{1\}, \{2\}\}$;
- en un sous-ensemble d'une seule façon : $\{\{1, 2, 3, 4\}\}$.

Par conséquent, les nombres de Stirling de seconde espèce pour un ensemble de quatre éléments sont $S(4, 1) = 1$, $S(4, 2) = 7$, $S(4, 3) = 6$ et $S(4, 4) = 1$.

La proposition suivante énonce une relation de récurrence ainsi qu'une expression close pour les nombres de Stirling de deuxième espèce, tout en fournissant une forme close qui lie les factorielles décroissantes aux puissances par le biais des nombres de Stirling. La preuve de ce résultat s'inspire respectivement des sections 6.5 et 6.1 des livres [11, 17].

Proposition 3.3.12. Pour un naturel n non nul, nous avons :

1. $S(n, m) = mS(n-1, m) + S(n-1, m-1)$ pour tout naturel m ;

2. $S(n, m) = \frac{1}{m!} \sum_{i=0}^m (-1)^i C_m^i (m-i)^n$ pour $m \in \{0, 1, \dots, n\}$;

et pour un naturel n , nous avons :

3. $z^n = \sum_{i=0}^n S(n, i) z^i$.

Démonstration. Prouvons les trois points séparément.

1. Pour établir cette relation de récurrence, nous utilisons le fait que $S(n, m)$ représente le nombre de façons de partitionner un ensemble de n éléments en m sous-ensembles non vides, comme stipulé dans la définition 3.3.10.

Ainsi, pour partitionner n éléments en m sous-ensembles, deux possibilités se présentent :

- soit nous incluons le $n^{\text{ème}}$ élément dans un sous-ensemble déjà existant, ce qui correspond à $mS(n-1, m)$ telles partitions, puisque chacune des $S(n-1, m)$ façons de répartir les $n-1$ premiers objets en m sous-ensembles non vides donne m sous-ensembles auxquels le $n^{\text{ème}}$ objet peut se joindre ;
- soit nous créons un nouveau sous-ensemble pour le $n^{\text{ème}}$ élément, ce qui correspond à $S(n-1, m-1)$ telles partitions, puisque une fois que nous avons introduit ce sous-ensemble additionnel contenant uniquement le $n^{\text{ème}}$ élément, il nous reste à partitionner les $n-1$ éléments restants dans les $m-1$ sous-ensembles restants.

2. Comme stipulé dans la définition 3.3.10, $S(n, m)$ représente le nombre de façons de partitionner un ensemble de n éléments en m sous-ensembles distincts non vides. Comptons le nombre de tels arrangements possibles.

Tout d’abord, il y a m^n façons de répartir n éléments dans m sous-ensembles sans aucune contrainte, puisque chaque élément peut être placé dans l’un des m sous-ensembles disponibles.

Cependant, parmi ces m^n arrangements, nous comptons en excès les situations où au moins un sous-ensemble est vide, alors que le problème spécifie que tous les sous-ensembles doivent contenir au moins un élément. Ainsi, nous devons soustraire le nombre de cas où au moins un sous-ensemble est vide. Il y a C_m^1 façons de choisir un sous-ensemble à laisser vide, et $m - 1$ façons de répartir chacun des n éléments dans les $m - 1$ sous-ensembles restants. Cela conduit à $(-1)^1 C_m^1 (m - 1)^n$ arrangements à soustraire.

Mais, en retirant les arrangements comportant au moins un sous-ensemble vide, nous soustrayons implicitement deux fois les arrangements où au moins deux sous-ensembles vides apparaissent. Par exemple, si nous cherchons à répartir $n = 4$ éléments dans $m = 3$ sous-ensembles, en nous appuyant sur la figure 3.4, nous observons que lorsque nous considérons les arrangements avec au moins un sous-ensemble vide (le choix de ce sous-ensemble étant indiqué en rouge), nous considérons deux fois les configurations où deux sous-ensembles sont vides, comme illustré par les situations encadrées.

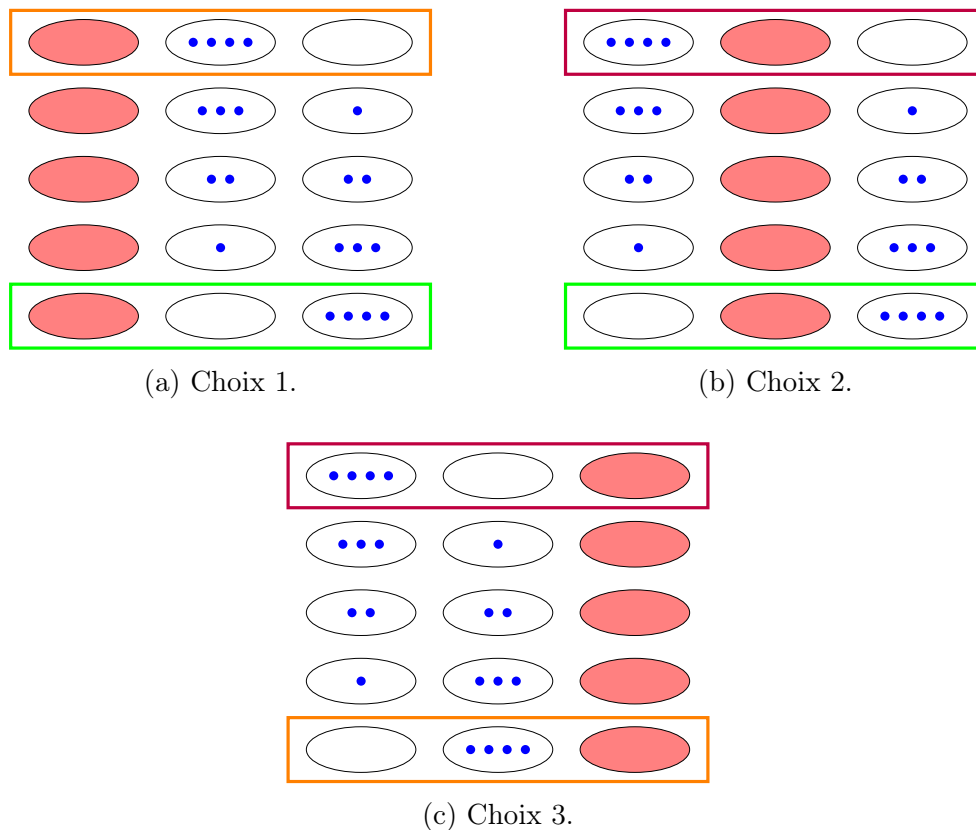


FIGURE 3.4 – Illustration des différents arrangements possibles contenant au moins un sous-ensemble vide, avec $n = 4$ et $m = 3$.

Pour corriger cette sous-estimation, nous devons ajouter à nouveau les cas où au moins deux sous-ensembles sont vides. Il y a C_m^2 façons de choisir deux sous-ensembles à laisser vides, et $m - 2$ façons de répartir chacun des n éléments dans les $m - 2$ sous-ensembles restants. Cela conduit à $(-1)^2 C_m^2 (m - 2)^n$ arrangements à ajouter.

Nous répétons ce processus d'inclusion-exclusion jusqu'à considérer le cas où tous les m sous-ensembles sont vides. Dans ce cas, il y a C_m^m façons de choisir m sous-ensembles à laisser vides, et $m - m = 0$ façon de répartir chacun des n éléments dans les 0 sous-ensembles restants. Cela conduit à $(-1)^m C_m^m (m - m)^n = 0$ arrangement. Puisque les m sous-ensembles sont non ordonnés contrairement aux arrangements, il convient de diviser par $m!$, qui représente le nombre de permutations possibles des m sous-ensembles. Par conséquent, nous obtenons pour $m \in \{0, 1, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned} S(n, m) &= \frac{1}{m!} (C_m^0 m^n - C_m^1 (m - 1)^n + C_m^2 (m - 2)^n - C_m^3 (m - 3)^n + \dots) \\ &= \frac{1}{m!} \sum_{i=0}^m (-1)^i C_m^i (m - i)^n, \end{aligned}$$

qui représente le nombre de façons de répartir n éléments dans m sous-ensembles distincts non vides.

3. Procédons par récurrence sur n .

Tout d'abord, le cas de base $n = 0$ est évident, puisque

$$\sum_{i=0}^0 S(0, i) z^i = \underbrace{S(0, 0)}_{=1} z^0 = z^0 = 1 = z^0.$$

Supposons que le résultat est vrai pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons qu'il est vrai pour $n + 1$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} S(n+1, i) z^i &= \sum_{i=1}^{n+1} (iS(n, i) + S(n, i-1)) z^i \quad \text{par le point 1} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} iS(n, i) z^i + \sum_{i=1}^{n+1} S(n, i-1) z^i \\ &= \sum_{i=1}^n iS(n, i) z^i + \sum_{i=2}^{n+1} S(n, i-1) z^i \quad \text{car } S(n, i) = 0 \text{ pour } i = 0 \text{ et } i > n \\ &= \sum_{i=1}^n iS(n, i) z^i + \sum_{j=1}^n S(n, j) z^{j+1} \quad \text{en réindiquant la seconde somme} \\ &= \sum_{i=1}^n S(n, i) (i z^i + z^{i+1}). \end{aligned}$$

Or, par définition de la factorielle décroissante, nous avons

$$\begin{aligned} z^{i+1} &= z^i (z - (i + 1) + 1) = z^i (z - i) \\ \Leftrightarrow z^{i+1} &= z^i z - i z^i \\ \Leftrightarrow z^{i+1} + i z^i &= z^i z. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{n+1} S(n+1, i)z^i &= \sum_{i=1}^n S(n, i)(iz^i + z^{i+1}) \\
 &= \sum_{i=1}^n S(n, i)(z^i z) \\
 &= z \sum_{i=1}^n S(n, i)z^i \\
 &= zz^n \text{ par hypothèse de récurrence} \\
 &= z^{n+1}. \quad \square
 \end{aligned}$$

Grâce à cette proposition, nous pouvons faire la constatation suivante.

Remarque 3.3.13. Il est important de noter que les polynômes z^0, z^1, \dots, z^n forment une base de l'ensemble des polynômes de degré au plus n .

Toujours dans l'optique de déterminer le polynôme chromatique des graphes appartenant à la famille des graphes bipartis complets, maintenant que nous avons présenté les nombres de Stirling de seconde espèce, il est nécessaire d'aborder la notion de graphe joint ainsi que le calcul du polynôme chromatique associé à ce type de graphe.

Définition 3.3.14. Le *graphe joint* de deux graphes $G = (V_G, E_G)$ et $H = (V_H, E_H)$, dont les ensembles de sommets V_G et V_H sont disjoints, est noté $G + H$. Il est défini comme l'union disjointe des graphes G et H , incluant toutes les arêtes qui relient les sommets de G aux sommets de H .

En d'autres termes, le graphe joint $G + H$ a pour ensemble de sommets

$$V_{G+H} = V_G \cup V_H,$$

et pour ensemble d'arêtes

$$E_{G+H} = E_G \cup E_H \cup \{\{u, v\} : u \in V_G, v \in V_H\}.$$

Un exemple concret illustrant la notion de graphe joint que nous venons de définir est présenté ci-dessous.

Exemple 3.3.15. Le graphe joint du graphe papillon, représenté en rose, et du chemin P_2 , représenté en bleu, est illustré à la figure 3.5. Chacun des sommets du graphe papillon est relié à tous les sommets du chemin par des arêtes de couleur rouge.

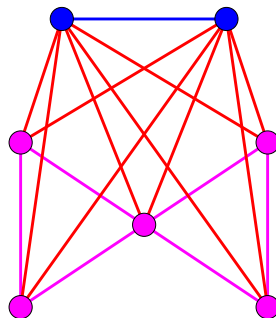


FIGURE 3.5 – Le graphe joint du graphe papillon et du chemin P_2 .

Passons maintenant à l'étude du calcul du polynôme chromatique d'un graphe joint. Avant d'aborder ce sujet, il est primordial de comprendre la notion de produit ombral.

Définition 3.3.16. Considérons deux polynômes $P(z)$ et $Q(z)$ exprimés sous forme de factorielle décroissante, c'est-à-dire $P(z) = \sum_{i=1}^n p_i z^i$ et $Q(z) = \sum_{j=1}^m q_j z^j$, où $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$.

Le *produit ombral* de $P(z)$ et $Q(z)$, noté $P(z) * Q(z)$, est obtenu en multipliant les polynômes de manière habituelle, où les factorielles sont traitées comme des puissances. Donc, nous avons $P(z) * Q(z) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_i q_j z^{i+j}$

À titre d'exemple, nous avons $z^8 * z^5 = z^{8+5} = z^{13}$ et $(3z^4 + 2z^2) * (5z^7 - 4z^3) = 15z^{4+7} + 10z^{2+7} - 12z^{4+3} - 8z^{2+3} = 15z^{11} + 10z^9 - 12z^7 - 8z^5$.

La remarque suivante expose une propriété du produit ombral, qui sera pertinente dans la démonstration du calcul du polynôme chromatique d'un graphe biparti complet.

Remarque 3.3.17. Il est important de noter que le produit ombral de polynômes quelconques sous forme de factorielle décroissante se comporte comme un opérateur bilinéaire.

Pour démontrer que le produit ombral $*$ est un opérateur bilinéaire, considérons $P(z), Q(z)$ et $R(z)$ trois polynômes exprimés sous forme de factorielle décroissante, de degrés respectifs n, m et p , et considérons des scalaires α et β . En d'autres termes, nous pouvons les écrire comme suit :

$$P(z) = \sum_{i=1}^n p_i z^i, \quad Q(z) = \sum_{j=1}^m q_j z^j \quad \text{et} \quad R(z) = \sum_{k=1}^l r_k z^k,$$

où les p_i, q_j et r_k sont des complexes.

Nous devons vérifier les deux propriétés suivantes :

1. Linéarité de $*$ sur le premier facteur :

$$(\alpha P_G(z) + \beta P_H(z)) * P_K(z) = \alpha(P_G(z) * P_K(z)) + \beta(P_H(z) * P_K(z)).$$

2. Linéarité de $*$ sur le second facteur :

$$P_G(z) * (\alpha P_H(z) + \beta P_K(z)) = \alpha(P_G(z) * P_H(z)) + \beta(P_G(z) * P_K(z)).$$

Par la définition 3.3.16, puisque le produit ombral de deux polynômes chromatiques revient à effectuer la multiplication habituelle de polynômes et à traiter le produit de factorielles décroissantes comme un produit de puissances, la linéarité sur le premier facteur s'obtient comme suit :

$$\begin{aligned} & (\alpha P_G(z) + \beta P_H(z)) * P_K(z) \\ &= \left(\alpha \sum_{i=1}^n p_i z^i + \beta \sum_{j=1}^m q_j z^j \right) * \left(\sum_{k=1}^l r_k z^k \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{\max(m,n)} (\alpha p_i + \beta q_i) z^i \right) * \left(\sum_{k=1}^l r_k z^k \right) \quad \text{où } p_i = 0 \text{ si } i > n \text{ et } q_i = 0 \text{ si } i > m \\ &= \sum_{s=2}^{\max(m,n)+l} \left(\sum_{i+k=s} (\alpha p_i + \beta q_i) r_k \right) z^s \quad \text{par définition du produit ombral} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{s=2}^{\max(m,n)+l} \left(\alpha \sum_{i+k=s} p_i r_k + \beta \sum_{i+k=s} q_i r_k \right) z^s \\
 &= \alpha \sum_{s=2}^{\max(m,n)+l} \sum_{i+k=s} p_i r_k z^s + \beta \sum_{s=2}^{\max(m,n)+l} \sum_{i+k=s} q_i r_k z^s \\
 &= \alpha \sum_{s=2}^{n+l} \sum_{i+k=s} p_i r_k z^s + \beta \sum_{s=2}^{m+l} \sum_{i+k=s} q_i r_k z^s \quad \text{puisque } p_i = 0 \text{ si } i > n \text{ et } q_i = 0 \text{ si } i > m \\
 &= \alpha \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^l p_i r_k z^{i+k} + \beta \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l q_j r_k z^{j+k} \\
 &= \alpha \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^l p_i r_k (z^i * z^k) + \beta \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l q_j r_k (z^j * z^k) \quad \text{par définition du produit ombra} \\
 &= \alpha \left[\left(\sum_{i=1}^n p_i z^i \right) * \left(\sum_{k=1}^l r_k z^k \right) \right] + \beta \left[\left(\sum_{j=1}^m q_j z^j \right) * \left(\sum_{k=1}^l r_k z^k \right) \right] \\
 &= \alpha(P(z) * R(z)) + \beta(Q(z) * R(z)).
 \end{aligned}$$

Dans la deuxième égalité, la définition de la somme de polynômes est exploitée. Les troisième et cinquième égalités sont dérivées de la distributivité de la multiplication de polynômes par rapport à la somme de polynômes. La quatrième égalité est obtenue en utilisant la distributivité de la multiplication par un scalaire par rapport à la somme de scalaires. Pour la cinquième égalité, la linéarité de la multiplication d'un polynôme par un scalaire est appliquée. Enfin, l'avant-dernière égalité est obtenue grâce à la linéarité de la multiplication de polynômes.

De façon analogue, nous obtenons la propriété de linéarité sur le second facteur.

Avant de formuler et de démontrer le théorème 3.3.19 concernant le polynôme chromatique d'un graphe joint, faisons une observation préliminaire.

Remarque 3.3.18. Il est crucial de noter que la relation (3.2) peut également être reformulée comme suit, si e est une arête entre deux sommets non adjacents dans le graphe G :

$$P_G(z) = P_{G+e}(z) + P_{G \cdot e}(z).$$

En d'autres termes, le polynôme chromatique du graphe de départ G peut être exprimé comme la somme des polynômes chromatiques de deux graphes : le graphe $G + e$, obtenu en ajoutant l'arête e à G ; et le graphe $G \cdot e$, construit en fusionnant les extrémités de l'arête e dans G .

Grâce à cette reformulation, nous observons que l'itération du processus de Suppression-Contraction réexprimé conduit à une collection de graphes complets, comme illustré notamment à la figure 3.6 (où A et B désignent les sommets considérés à chaque itération du processus). Ainsi, en itérant cette règle, le polynôme chromatique d'un graphe donné $G = (V, E)$ d'ordre n peut être exprimé comme la somme de polynômes chromatiques de graphes complets.

En utilisant la proposition 3.3.3 stipulant que le polynôme chromatique d'un graphe complet correspond à une factorielle décroissante, nous pouvons réexprimer le polynôme

chromatique du graphe G comme une somme de factorielles décroissantes de z :

$$P_G(z) = \sum_{k=1}^n c_k z^k,$$

où c_k représente le nombre de façons de partitionner l'ensemble de sommets V en k sous-ensembles indépendants non vides, comme constaté à la remarque 3.1.3.

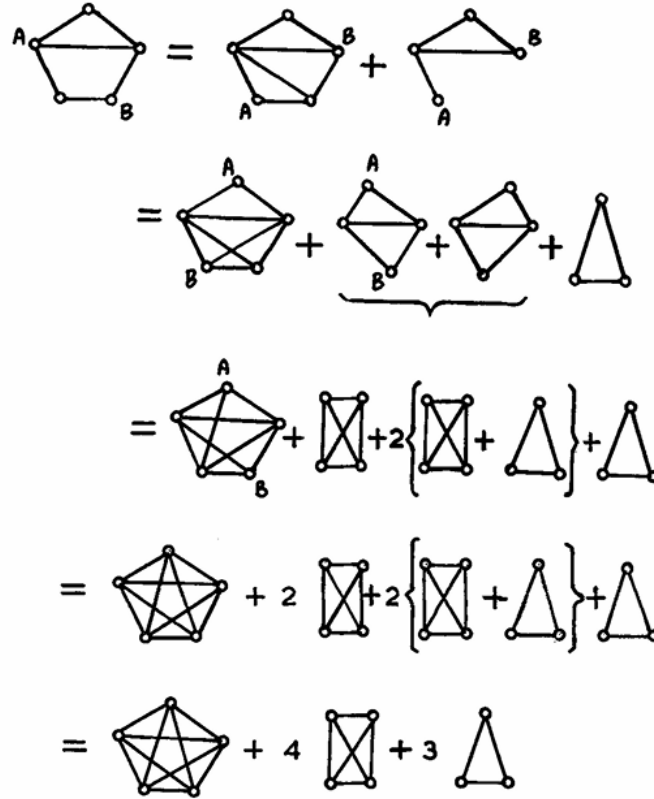


FIGURE 3.6 – L'itération du processus de Suppression-Contraction réexprimé conduit à une collection de graphes complets (illustration provenant de l'article [23] à la page 57).

Maintenant que tous les éléments sont en place, nous pouvons étudier le polynôme chromatique d'un graphe joint.

Théorème 3.3.19. Soient $G = (V_G, E_G)$ et $H = (V_H, E_H)$ deux graphes disjoints, où $\#V_G = n$ et $\#V_H = m$. Le polynôme chromatique du graphe joint $G + H$ de ces deux graphes satisfait la relation suivante :

$$P_{G+H}(z) = P_G(z) * P_H(z).$$

Démonstration. En se référant à la remarque 3.3.18, nous pouvons exprimer le polynôme chromatique de tout graphe donné comme une somme de polynômes chromatiques de graphes complets. Ainsi, en appliquant de manière itérative la formule de Suppression-Contraction réorganisée $P_G(z) = P_{G+e}(z) + P_{G-e}(z)$ aux graphes G et H séparément, nous avons :

$$P_G(z) = \sum_{i=1}^n c_i z^i = c_1 P_{K_1}(z) + c_2 P_{K_2}(z) + \cdots + c_n P_{K_n}(z)$$

et

$$P_H(z) = \sum_{j=1}^m d_j z^j = d_1 P_{K_1}(z) + d_2 P_{K_2}(z) + \cdots + d_m P_{K_m}(z).$$

En appliquant de manière itérative la formule de Suppression-Contraction réorganisée au graphe joint $G + H$, les sous-graphes G et H du graphe joint $G + H$ peuvent être décomposés exactement comme décrit dans les équations ci-dessus. De plus, à chaque étape, chaque sommet de chaque graphe K_i ($1 \leq i \leq n$) obtenu lors de la Suppression-Contraction de G sera adjacent à chaque sommet de chaque graphe K_j ($1 \leq j \leq m$) obtenu lors de la Suppression-Contraction de H (puisque, dans le graphe joint, tous les sommets de G sont adjacents aux sommets de H). En conséquence, nous pourrions exprimer le polynôme chromatique du graphe joint $P_{G+H}(z)$ en termes de toutes les combinaisons possibles de graphes joints entre un graphe complet de G et un graphe complet de H . Cependant, le graphe joint d'un graphe complet ayant i sommets et d'un autre ayant j sommets est lui-même un graphe complet, ayant $i + j$ sommets.

Par conséquent, pour un terme z^i dans l'expression sous forme factorielle décroissante de $P_G(z)$, et pour un terme z^j dans l'expression sous forme factorielle décroissante de $P_H(z)$, le polynôme chromatique du graphe joint sous forme factorielle décroissante $P_{G+H}(z)$ comprendra un terme $z^{i+j} = z^i * z^j$. Il en découle que le polynôme chromatique $P_{G+H}(z)$ peut être obtenu dans sa forme factorielle décroissante en multipliant les formes factorielles décroissantes de $P_G(z)$ et de $P_H(z)$ comme s'il s'agissait de puissances. Ainsi, $P_{G+H}(z) = P_G(z) * P_H(z)$. \square

Pour exemplifier ce résultat, examinons l'exemple suivant.

Exemple 3.3.20. Déterminons la valeur du polynôme chromatique du graphe G , illustré à la figure 3.7, en utilisant le théorème 3.3.19.

Le graphe G peut être vu comme le graphe joint du graphe complet K_2 (représenté en bleu) et du chemin P_3 (représenté en rose). Ainsi, selon le théorème 3.3.19, le polynôme chromatique de G est donné par :

$$\begin{aligned} P_G(z) &= P_{K_2+P_3}(z) \\ &= P_{K_2}(z) * P_{P_3}(z). \end{aligned}$$

D'après la proposition 3.3.3, le polynôme chromatique du graphe complet K_2 est

$$P_{K_2}(z) = z^2,$$

et selon la proposition 3.3.6, le polynôme chromatique du chemin P_3 est

$$\begin{aligned} P_{P_3}(z) &= z(z-1)^2 \\ &= z^3 - 2z^2 + z \\ &= \underbrace{z^3 - 3z^2 + 2z}_{=z^3} + \underbrace{z^2 - z}_{=z^2} \\ &= z^3 + z^2. \end{aligned}$$

Au total, nous obtenons

$$\begin{aligned}
P_G(z) &= (z^2) * (z^3 + z^2) \\
&= z^{2+3} + z^{2+2} \\
&= z^5 + z^4 \\
&= z(z-1)(z-2)(z-3)(z-4) + z(z-1)(z-2)(z-3) \\
&= z^5 - 10z^4 + 35z^3 - 50z^2 + 24z + z^4 - 6z^3 + 11z^2 - 6z \\
&= z^5 - 9z^4 + 29z^3 - 39z^2 + 18z.
\end{aligned}$$

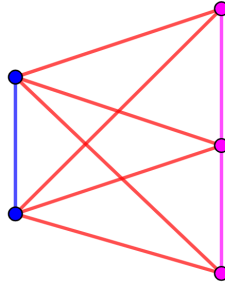


FIGURE 3.7 – Le graphe joint G .

Grâce à ce théorème, nous sommes en mesure de déterminer le polynôme chromatique des graphes faisant partie de la famille des graphes bipartis complets.

Proposition 3.3.21. *Le polynôme chromatique du graphe biparti complet $K_{m,n}$ est*

$$P_{K_{m,n}}(z) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n S(m, i) S(n, j) z^{i+j}.$$

Démonstration. Etant donné que le graphe biparti complet $K_{m,n}$ peut être considéré comme le graphe joint des graphes vides E_m et E_n , i.e. $K_{m,n} = E_m + E_n$, en vertu du théorème 3.3.19, nous avons :

$$\begin{aligned}
P_{K_{m,n}}(z) &= P_{E_m}(z) * P_{E_n}(z) \\
&= z^m * z^n \quad \text{par la proposition 3.3.2} \\
&= \left(\sum_{i=1}^m S(m, i) z^i \right) * \left(\sum_{j=1}^n S(n, j) z^j \right) \quad \text{par le point 3 de la proposition 3.3.12} \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n S(m, i) S(n, j) (z^i * z^j) \quad \text{par bilinéarité du produit ombral} \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n S(m, i) S(n, j) z^{i+j} \quad \text{par définition du produit ombral.}
\end{aligned}$$

□

Afin d'illustrer cette proposition 3.3.21, calculons le polynôme chromatique d'un graphe biparti complet.

Exemple 3.3.22. Considérons le graphe biparti complet $K_{2,3}$, illustré à la figure 3.8. Selon la proposition 3.3.21, le polynôme chromatique de $K_{2,3}$ est :

$$\begin{aligned}
 P_{K_{2,3}}(z) &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 S(2, i)S(3, j)z^{i+j} \\
 &= S(2, 1)S(3, 1)z^{1+1} + S(2, 1)S(3, 2)z^{1+2} + S(2, 1)S(3, 3)z^{1+3} \\
 &\quad + S(2, 2)S(3, 1)z^{2+1} + S(2, 2)S(3, 2)z^{2+2} + S(2, 2)S(3, 3)z^{2+3} \\
 &= z^2 + 3z^3 + z^4 + z^3 + 3z^4 + z^5 \quad \text{puisque tous ces nombres de Stirling valent 1,} \\
 &\quad \text{sauf } S(3, 2) \text{ qui vaut 3} \\
 &= z^2 + 4z^3 + 4z^4 + z^5 \\
 &= z^5 - 6z^4 + 15z^3 - 17z^2 + 7z,
 \end{aligned}$$

où les valeurs des nombres de Stirling de seconde espèce sont répertoriées dans l’OEIS sous le numéro #A008277 (voir l’encyclopédie [25]).

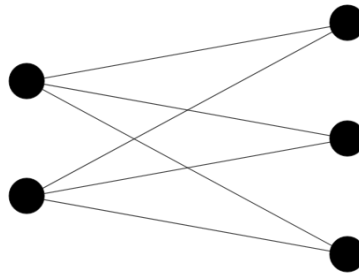


FIGURE 3.8 – Le graphe biparti complet $K_{2,3}$.

3.4 Propriétés du polynôme chromatique et de ses coefficients

Dans cette section, nous explorons les propriétés des polynômes chromatiques, mettant en lumière leur capacité à fournir des informations essentielles sur les graphes. Malgré les différences significatives entre les graphes et leurs polynômes chromatiques respectifs, nous constaterons qu’ils partagent des traits communs à travers les coefficients de ces polynômes. Ces propriétés, initialement étudiées par le mathématicien Ronald Cedric Read en 1968 (voir l’article [23]), sont désormais largement reconnues et constituent une contribution importante à notre compréhension des graphes.

Pour débiter, intéressons-nous aux caractéristiques des coefficients du polynôme chromatique d’un graphe $G = (V, E)$ quelconque, d’ordre n , de taille m et de polynôme chromatique $P_G(z)$.

Les informations présentées ci-dessous sont issues de la section 3.1 du mémoire [3], de la section 6 de l’article [23] ainsi la section 5.3 du livre [27].

Théorème 3.4.1. *Le polynôme chromatique $P_G(z)$ d’un graphe G vérifie les assertions suivantes :*

1. *Son degré est égal au nombre de sommets dans le graphe G .*
2. *Son coefficient dominant vaut 1.*

3. Le coefficient de z^{n-1} est $-m$, i.e. l'opposé du nombre d'arêtes du graphe G .
4. Son premier coefficient est positif, et tous les termes alternent en signe.
5. Ses coefficients sont des entiers.
6. Si le coefficient de z^k est 0, alors le coefficient de z^{k-1} l'est aussi.

Démonstration. Procédons par récurrence forte sur le nombre d'arêtes $m \geq 0$ du graphe G .

Tout d'abord, le cas de base $m = 0$ est évident. Si le graphe G possède 0 arêtes et n sommets, il s'agit simplement du graphe vide E_n . Selon la proposition 3.3.2, le polynôme chromatique de ce graphe est $P_G(z) = P_{E_n}(z) = z^n$. Ainsi, les propriétés sont trivialement vérifiées lorsque $m = 0$.

Pour la récurrence forte, supposons que chacune de ces propriétés soit vraie pour tout graphe ayant au plus m arêtes ($m \geq 1$), et montrons que ces propriétés sont également vérifiées pour un graphe G ayant n sommets et $m + 1$ arêtes.

En vertu de la relation (3.1) de Suppression-Contraction, nous savons que

$$P_G(z) = P_{G-e}(z) - P_{G \cdot e}(z). \quad (3.4)$$

Comme la suppression $G - e$ contient une arête de moins que le graphe initial G , soit m arêtes, mais le même nombre de sommets n , par hypothèse de récurrence, le polynôme chromatique de $G - e$ est de la forme

$$P_{G-e}(z) = z^n - mz^{n-1} + c_1z^{n-2} - c_2z^{n-3} + \dots, \quad (3.5)$$

où chaque coefficient c_i est un entier positif.

De la même manière, étant donné que la contraction $G \cdot e$ possède au moins une arête de moins que le graphe initial G mais a exactement un sommet de moins que G , à savoir $n - 1$ sommets, par hypothèse de récurrence, le polynôme chromatique de $G \cdot e$ est de la forme

$$P_{G \cdot e}(z) = z^{n-1} - m'z^{n-2} + d_1z^{n-3} - d_2z^{n-4} + \dots, \quad (3.6)$$

où m' représente le nombre d'arêtes dans la contraction $G \cdot e$ et où chaque coefficient d_i est un entier positif.

Par conséquent, nous obtenons :

$$\begin{aligned} P_G(z) &= P_{G-e}(z) - P_{G \cdot e}(z) \\ &= (z^n - mz^{n-1} + c_1z^{n-2} - c_2z^{n-3} + \dots) \\ &\quad - (z^{n-1} - m'z^{n-2} + d_1z^{n-3} - d_2z^{n-4} + \dots) \\ &= z^n - (m + 1)z^{n-1} + (c_1 + m')z^{n-2} - (c_2 + d_1)z^{n-3} + \dots \end{aligned}$$

Les propriétés suivantes sont vérifiées pour le graphe G :

1. Le degré du polynôme chromatique du graphe G correspond au nombre de sommets de G , à savoir n .

En effet, vu les expressions (3.5) et (3.6), les polynômes chromatiques $P_{G-e}(z)$ et $P_{G \cdot e}(z)$ sont respectivement des polynômes de degré n et $n - 1$. Ainsi, le polynôme chromatique $P_G(z)$ du graphe G est un polynôme de degré n auquel on soustrait un polynôme de degré $n - 1$, vu la relation (3.4) de Suppression-Contraction. Étant donné que cette soustraction ne peut pas annuler le terme de degré n dans $P_{G-e}(z)$ et qu'aucun terme d'un degré supérieur à n ne peut apparaître, il est nécessaire que le polynôme chromatique $P_G(z)$ soit également un polynôme de degré n .

2. Le coefficient dominant du polynôme chromatique du graphe G est 1, étant donné que le coefficient de z^n vaut 1.
3. Le coefficient du terme en z^{n-1} dans le polynôme chromatique du graphe G est égal à $-(m+1)$, ce qui correspond effectivement à moins le nombre d'arêtes du graphe G .
4. Le premier coefficient du polynôme chromatique du graphe G est positif, puisqu'il vaut 1. De plus, tous les coefficients alternent en signe, car chacun d'entre eux est de la forme $\pm(c_i + d_j)$, où les c_i et d_j sont des entiers positifs.
5. Chaque coefficient du polynôme chromatique du graphe G est un entier. En effet, le coefficient dominant est égal à 1, et tous les autres coefficients sont de la forme $\pm(c_i + d_j)$, où les c_i et d_j sont des entiers positifs.
6. Si le coefficient de z^k dans le polynôme chromatique du graphe G est nul, alors le coefficient de z^{k-1} est nul également.

Pour comprendre cela, examinons le premier coefficient dans $P_G(z)$ qui est nul. Ce coefficient particulier est tel que $c_i + d_j = 0$. Étant donné que c_i et d_j sont tous deux des entiers positifs, cela implique que c_i et d_j sont tous deux égaux à 0. Ensuite, comme $P_{G-e}(z)$ et $P_{G,e}(z)$ ont tous deux moins de $m+1$ arêtes, tous les coefficients suivants c_k et d_k sont également nuls, par hypothèse de récurrence. Par conséquent, les coefficients de chaque terme suivant dans $P_G(z)$ sont également nuls, car ils ne sont que des combinaisons de ces coefficients nuls.

Ainsi, chacune des six propriétés est vérifiée pour le polynôme chromatique de n'importe quel graphe. \square

À partir de ce théorème, nous pouvons déduire les observations suivantes.

Remarque 3.4.2. Le point 6 du théorème précédent stipule que si le coefficient de z^k dans $P_G(z)$ est 0, alors le coefficient de z^{k-1} l'est aussi. Par conséquent, cela implique que les puissances du polynôme chromatique d'un graphe G sont consécutives.

En outre, en utilisant les points 4, 5 et 6 du théorème précédent ainsi que la remarque 3.1.3, nous pouvons déduire que le polynôme chromatique d'un graphe $G = (V, E)$ d'ordre n peut s'exprimer comme une somme de puissances du nombre de couleurs λ :

$$P_G(\lambda) = \sum_{k=1}^n c_k \lambda^k,$$

où c_k représente le nombre de façons de partitionner l'ensemble de sommets V en k sous-ensembles indépendants non vides.

Explorons maintenant une caractéristique liée à la somme des coefficients du polynôme chromatique d'un graphe.

Théorème 3.4.3. *La somme des coefficients du polynôme chromatique $P_G(z)$ d'un graphe $G = (V, E)$ d'ordre n est nulle, sauf si le graphe G ne possède pas d'arêtes.*

Démonstration. Pour obtenir la somme des coefficients d'un polynôme en la variable z , il suffit d'évaluer ce polynôme en $z = 1$. En vertu de la remarque 3.4.2, le polynôme chromatique de G peut être réécrit comme $P_G(z) = \sum_{k=1}^n c_k z^k$, où c_k représente le nombre de façons de partitionner l'ensemble de sommets V en k sous-ensembles indépendants non vides. Ainsi, la somme des coefficients est donnée par $P_G(1) = \sum_{k=1}^n c_k$, ce qui correspond

au nombre de façons de colorer les sommets du graphe G avec exactement une couleur. Cependant, si le graphe G contient au moins une arête, il ne peut pas être coloré avec une seule couleur, ce qui implique que cette somme doit être égale à 0.

En revanche, si le graphe G ne comporte aucune arête, il correspond au graphe vide E_n , dont le polynôme chromatique est donné par $P_{E_n}(z) = z^n$. Dans cette situation particulière, la somme des coefficients du polynôme chromatique vaut 1. \square

Examinons à présent un exemple pour illustrer la propriété que nous venons de mettre en évidence.

Exemple 3.4.4. Considérons le graphe de Mycielski M_4 , illustré à la figure 2.2c.

En utilisant la fonction *Chromatic Polynomial* du logiciel mathématique *Wolfram Mathematica*, nous obtenons le polynôme chromatique du graphe M_4 suivant :

$$P_{M_4}(z) = z^{11} - 20z^{10} + 190z^9 - 1130z^8 + 4644z^7 - 13693z^6 + 29080z^5 - 43455z^4 + 43185z^3 - 25402z^2 + 6600z. \quad (3.7)$$

Les propriétés énoncées dans le théorème 3.4.1 sont vérifiées pour $P_{M_4}(z)$, et nous indiquent en particulier que le graphe de Mycielski M_4 possède 11 sommets et 20 arêtes.

En outre, le résultat établi dans le théorème 3.4.3 est également confirmé pour le graphe M_4 , car la somme des coefficients de $P_{M_4}(z)$ est nulle :

$$1 - 20 + 190 - 1130 + 4644 - 13693 + 29080 - 43455 + 43185 - 25402 + 6600 = 0.$$

Pour clore cette section, nous allons explorer la propriété de connexité des graphes en utilisant leur polynôme chromatique. Nous venons de montrer que le polynôme chromatique permet de déterminer le nombre de sommets et le nombre d'arêtes d'un graphe. Cependant, il convient de souligner que disposer uniquement du polynôme chromatique ne fournit que peu d'informations sur le graphe qu'il représente, comme indiqué dans la section 4 du mémoire [3]. Pour rédiger cette fin de section, nous nous appuyons respectivement sur les sections 4 et 6.1 des mémoires [3, 21].

Une caractérisation de la connexité d'un graphe s'obtient aisément à partir de son polynôme chromatique. À partir de cela, nous pouvons facilement déduire des informations sur le nombre de composantes connexes présentes dans un graphe en utilisant son polynôme chromatique, comme indiqué dans le résultat suivant.

Théorème 3.4.5. *Soit $G = (V, E)$ un graphe d'ordre n , de taille m et de polynôme chromatique $P_G(z)$. Alors, la plus petite puissance k pour laquelle le coefficient de z^k dans $P_G(z)$ est non nul correspond au nombre de composantes connexes du graphe G .*

En particulier, le graphe G est connexe si et seulement si le coefficient de z dans $P_G(z)$ est non nul.

Démonstration. Commençons par établir la caractérisation de la connexité d'un graphe. Montrons tout d'abord la condition nécessaire. Supposons que le graphe G est connexe, et montrons que le coefficient de z dans le polynôme chromatique de G est non nul. Pour ce faire, procédons par récurrence forte sur le nombre m d'arêtes dans le graphe G .

Tout d'abord, le cas de base $m = 0$ est évident. En effet, lorsque le graphe connexe G contient $m = 0$ arêtes, il s'agit simplement du graphe vide composé d'un seul sommet. Ainsi, le polynôme chromatique du graphe G est $P_G(z) = P_{E_1}(z) = z$, lequel présente effectivement un coefficient non nul pour le terme en z .

Supposons à présent que tout graphe connexe comportant moins de m arêtes ($m \geq 1$) possède un polynôme chromatique avec un coefficient en z non nul. Pour l'induction, considérons un graphe connexe G avec m arêtes et n sommets. Par la relation (3.1) de Suppression-Contraction, nous savons que $P_G(z) = P_{G-e}(z) - P_{G \cdot e}(z)$. Après la suppression de l'arête e , le graphe résultant de la suppression $G - e$ a toujours n sommets, mais le nombre d'arêtes est désormais réduit à $m_1 = m - 1$. Le graphe G étant connexe, il convient de noter que le graphe $G - e$ peut soit rester connexe, soit devenir non connexe. Cependant, puisque le graphe résultant de la contraction $G \cdot e$ est simplement le graphe G où une arête a été contractée, il demeure connexe et il comporte exactement $n - 1$ sommets ainsi qu'un certain nombre m_2 d'arêtes, où $m_2 < m$. Par conséquent, étant donné que $G \cdot e$ reste un graphe connexe, le terme en z dans $P_{G \cdot e}(z)$ possède un coefficient non nul, selon l'hypothèse de récurrence. Ainsi, en vertu du théorème 3.4.1, nous obtenons :

$$P_{G-e}(z) = z^n - m_1 z^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} c_1 z$$

et

$$P_{G \cdot e}(z) = z^{n-1} - m_2 z^{n-2} + \dots + (-1)^{n-2} c_2 z,$$

où c_1 et c_2 sont des entiers positifs, et c_2 doit être non nul. Or, les termes $(-1)^{n-1} c_1$ et $(-1)^{n-2} c_2$ doivent avoir des signes opposés étant donné que les coefficients c_1 et c_2 sont des entiers positifs. Dès lors, cela implique que

$$\begin{aligned} P_G(z) &= P_{G-e}(z) - P_{G \cdot e}(z) \\ &= (z^n - m_1 z^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} c_1 z) - (z^{n-1} - m_2 z^{n-2} + \dots + (-1)^{n-2} c_2 z) \\ &= z^n - (m_1 + 1) z^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} (c_1 + c_2) z. \end{aligned}$$

Ainsi, le coefficient de z est non nul, et notre hypothèse est vérifiée pour tous les graphes connexes.

Montrons à présent la condition suffisante. Procédons par contraposition et montrons que si le graphe G n'est pas connexe, alors le coefficient de z dans le polynôme chromatique du graphe G est nul. Supposons que le graphe non connexe G se décompose en composantes connexes distinctes G_1, G_2, \dots, G_k , où $k \geq 2$ est le nombre de composantes connexes de G . Alors, par le lemme 3.3.1, le polynôme chromatique de G est le produit des polynômes chromatiques de ses composantes connexes :

$$P_G(z) = P_{G_1}(z) \cdot P_{G_2}(z) \cdots P_{G_k}(z).$$

En vertu du théorème 3.4.1 concernant les propriétés des coefficients des polynômes chromatiques, étant donné que le terme indépendant de chaque polynôme chromatique $P_{G_i}(z)$ ($i \in \{1, \dots, k\}$) est nul, le terme de degré le plus bas dans chaque polynôme chromatique est au moins $c_i z$, où c_i est un entier non nul.

Par conséquent, si tous les polynômes chromatiques individuels $P_{G_i}(z)$ ont un terme non nul en z , alors le terme de degré le plus bas dans $P_G(z)$ est donné par l'expression

$$c_1 z \cdot c_2 z \cdots c_k z = (c_1 \cdot c_2 \cdots c_k) z^k,$$

dont nous déduisons que le coefficient du terme en z dans $P_G(z)$ est nul, étant donné que $k \geq 2$. Par ailleurs, si certaines composantes connexes C_i ($i \in \{1, \dots, k\}$) ont un coefficient nul pour le terme en z , cela implique que le degré du terme le plus bas est supérieur à k . Ainsi, dans tous les cas, le polynôme chromatique d'un graphe non connexe

est tel que le coefficient associé au terme en z est nul. Par conséquent, par contraposition, nous avons démontré que si le coefficient de z dans un polynôme chromatique est non nul, alors le graphe associé est connexe.

Intéressons-nous à présent au nombre de composantes connexes d'un graphe. Si le graphe G est connexe, alors, en vertu de la condition nécessaire, la plus petite puissance k pour laquelle le coefficient de z^k dans $P_G(z)$ est non nul vaut 1, qui correspond bien au nombre de composantes connexes du graphe G . Dans le cas où le graphe G est non connexe, supposons qu'il ait k composantes connexes. Conformément au lemme 3.3.1, $P_G(z)$ peut être calculé en multipliant les polynômes chromatiques de ses composantes connexes. Or, dans chacun de ces polynômes, le coefficient de z est non nul, comme stipulé par la condition nécessaire. Par conséquent, le monôme de degré le plus bas dans $P_G(z)$ est z^k , où k représente le nombre de composantes connexes du graphe G . \square

Pour illustrer le résultat précédent, examinons les exemples suivants : l'un portant sur un graphe connexe et l'autre sur un graphe non connexe.

Exemple 3.4.6. Considérons le graphe de Mycielski M_4 , illustré à la figure 2.2c. Le polynôme chromatique du graphe M_4 est donné par l'équation (3.7).

D'après le théorème 3.4.5, étant donné que le coefficient en z est non nul, nous en déduisons que le graphe M_4 est connexe, comme le confirme la définition 1.1.4.

Exemple 3.4.7. Considérons le graphe non connexe G , illustré à la figure 3.9, qui se compose de trois composantes connexes : les graphes G_1, G_2 et G_3 (de gauche à droite). Le polynôme chromatique du graphe G peut être calculé en multipliant les polynômes chromatiques de chaque composante connexe, comme stipulé dans le lemme 3.3.1. Ainsi, nous avons :

$$\begin{aligned} P_G(z) &= P_{G_1}(z) \cdot P_{G_2}(z) \cdot P_{G_3}(z) \\ &= z^{14} - 15z^{13} + 101z^{12} - 403z^{11} + 1059z^{10} - 1925z^9 \\ &\quad + 2471z^8 - 2241z^7 + 1408z^6 - 584z^5 + 144z^4 - 16z^3, \end{aligned}$$

puisque les polynômes chromatiques des trois composantes connexes sont tels que :

1. Le polynôme chromatique du graphe G_1 est $P_{G_1}(z) = z^3(z-1)^2 = z(z-1)^3(z-2)$. En effet, le graphe G_1 possède une copie du graphe complet K_3 en tant que sous-graphe. Le polynôme chromatique du graphe complet K_3 est $P_{K_3}(z) = z^3$. De plus, les deux autres sommets de G_1 , qui ne font pas partie de K_3 , peuvent chacun être colorés de $z-1$ façons différentes car chacun d'eux est adjacent à un sommet de K_3 déjà coloré.
2. Le polynôme chromatique du graphe G_2 est identique à celui de G_1 , c'est-à-dire $P_{G_2}(z) = z(z-1)^3(z-2)$. En effet, de manière similaire, le graphe G_2 possède une copie du graphe complet K_3 en tant que sous-graphe, et les deux autres sommets sont à chaque fois adjacents à un sommet précédemment coloré, pouvant ainsi être colorés de $z-1$ façons différentes.
3. Le polynôme chromatique du graphe G_3 est $P_{G_3}(z) = z(z-1)(z-2)^2$, comme déjà illustré à la figure 3.2a.

D'après le théorème 3.4.5, puisque la plus petite puissance de z ayant un coefficient non nul dans $P_G(z)$ est 3, nous concluons que le graphe G possède trois composantes connexes, ce qui est effectivement le cas.

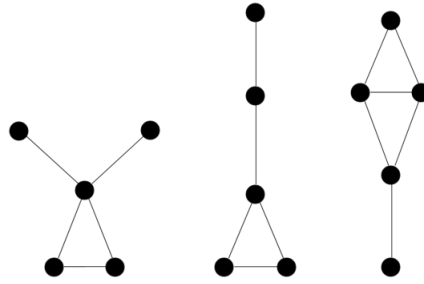


FIGURE 3.9 – Illustration de la détermination du nombre de composantes connexes d'un graphe à partir de son polynôme chromatique.

3.5 Équivalence et unicité chromatique

Comme mentionné précédemment, le polynôme chromatique seul offre des informations limitées sur la nature du graphe qu'il décrit. En effet, étant donné un polynôme "raisonnable", déterminer s'il existe un graphe dont il est le polynôme chromatique n'est pas toujours simple. De plus, même en identifiant un tel graphe, il peut exister d'autres graphes qui partagent également ce même polynôme chromatique. Pour illustrer cela, examinons l'exemple suivant.

Exemple 3.5.1. Les graphes $G = (V_G, E_G)$ et $H = (V_H, E_H)$ représentés à la figure 3.10 ont le même polynôme chromatique. Pour le démontrer, nous calculons le polynôme chromatique de chacun des deux graphes.

Le polynôme chromatique du graphe G a déjà été déterminé à l'exemple 3.1.6. Pour rappel, il est donné par :

$$P_G(z) = z^5 - 7z^4 + 18z^3 - 20z^2 + 8z.$$

À présent, examinons les façons de partitionner l'ensemble V_H en k sous-ensembles indépendants non vides, générant ainsi tous les coloriage possibles des cinq sommets de H utilisant exactement k couleurs, où $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Étant donné qu'il n'existe aucune partition de V_H en moins de trois sous-ensembles indépendants non vides, il est évident que $\frac{m_H(k)}{k!} = 0$ pour $k < 3$.

Pour $k = 3$, il y a une unique partition possible en trois sous-ensembles indépendants non vides pour V_H :

$$V_H = \{1, 3\} \cup \{2, 4\} \cup \{5\}.$$

Cette partition donne lieu à $3! = 6$ coloriage distincts des sommets du graphe H . Dès lors, nous avons $\frac{m_H(3)}{3!} = \frac{3!}{3!} = 1$.

Pour $k = 4$, il y a trois partitions possibles en quatre sous-ensembles indépendants non vides pour V_H :

$$V_H = \{1, 3\} \cup \{2\} \cup \{4\} \cup \{5\} = \{1, 4\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{5\} = \{1\} \cup \{2, 4\} \cup \{3\} \cup \{5\}.$$

Chaque partition donne lieu à $4! = 24$ coloriage distincts des sommets du graphe H . Ainsi, nous avons $\frac{m_H(4)}{4!} = \frac{3 \cdot 4!}{4!} = 3$.

Pour $k = 5$, il y a une unique partition possible en cinq sous-ensembles indépendants non vides pour V_H :

$$V_H = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \{5\}.$$

Chaque partition donne lieu à $5! = 120$ coloriage distincts des sommets du graphe H .

Ainsi, nous avons $\frac{m_H(5)}{5!} = \frac{5!}{5!} = 1$.

En combinant ces résultats, nous concluons que le polynôme chromatique de H est :

$$\begin{aligned} P_H(z) &= \sum_{k=1}^5 \frac{m_H(k)}{k!} z^k \\ &= z^5 + 3z^4 + z^3 \\ &= z^5 - 7z^4 + 18z^3 - 20z^2 + 8z. \end{aligned}$$

Nous constatons ainsi que les graphes G et H ont le même polynôme chromatique, bien qu'ils ne soient pas isomorphes, comme nous le verrons dans l'exemple 3.5.3.

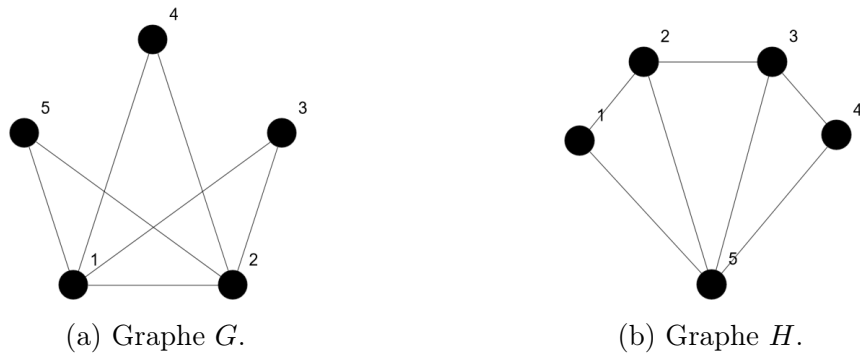


FIGURE 3.10 – Illustration de deux graphes ayant le même polynôme chromatique.

Maintenant, nous allons explorer le cas où un polynôme chromatique caractérise de manière unique un graphe. Pour ce faire, nous allons introduire les concepts d'équivalence chromatique et d'unicité chromatique. Pour bien comprendre ces concepts, il est nécessaire de définir ce que sont des graphes isomorphes. Les informations fournies dans la section 1.4 du livre [13] ont été utilisées pour rédiger ce qui suit.

Définition 3.5.2. Deux graphes $G = (V_G, E_G)$ et $H = (V_H, E_H)$ sont dits *isomorphes*, ce qui signifie qu'ils partagent la même structure, s'il existe une bijection $\phi : V_G \rightarrow V_H$ telle que deux sommets u et v sont adjacents dans G si et seulement si $\phi(u)$ et $\phi(v)$ sont adjacents dans H . La fonction ϕ est alors appelée *isomorphisme*. Si les graphes G et H sont isomorphes, nous écrivons $G \cong H$. En l'absence d'une telle fonction ϕ , les graphes G et H sont dits *non isomorphes*.

Illustrons à présent cette définition à l'aide d'un exemple concret.

Exemple 3.5.3. Le graphe $G = (V_G, E_G)$ et le graphe de Petersen $P = (V_P, E_P)$, représentés à la figure 3.11, sont isomorphes. En effet, la fonction

$$\phi : V_G \rightarrow V_P$$

définie par

$$\begin{aligned} \phi(u_1) &= v_4, \phi(u_2) = v_8, \phi(u_3) = v_7, \phi(u_4) = v_6, \phi(u_5) = v_{10}, \\ \phi(u_6) &= v_3, \phi(u_7) = v_2, \phi(u_8) = v_9, \phi(u_9) = v_1, \phi(u_{10}) = v_5 \end{aligned}$$

est un isomorphisme entre les deux graphes.

En revanche, les graphes M et N , illustrés à la figure 3.12, ne sont pas isomorphes. En effet, le graphe N est un graphe biparti, et selon le théorème 1.3.11 de König, il est dépourvu de cycles de longueur impaire. Cependant, le graphe M contient un cycle de longueur impaire impliquant les sommets $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$. Par conséquent, les graphes M et N ne peuvent être isomorphes.

De façon similaire, nous pouvons constater que les graphes G et H , représentés à la figure 3.10, ne sont pas isomorphes. Cette conclusion découle de l'observation que les degrés des sommets de G diffèrent de ceux des sommets de H .

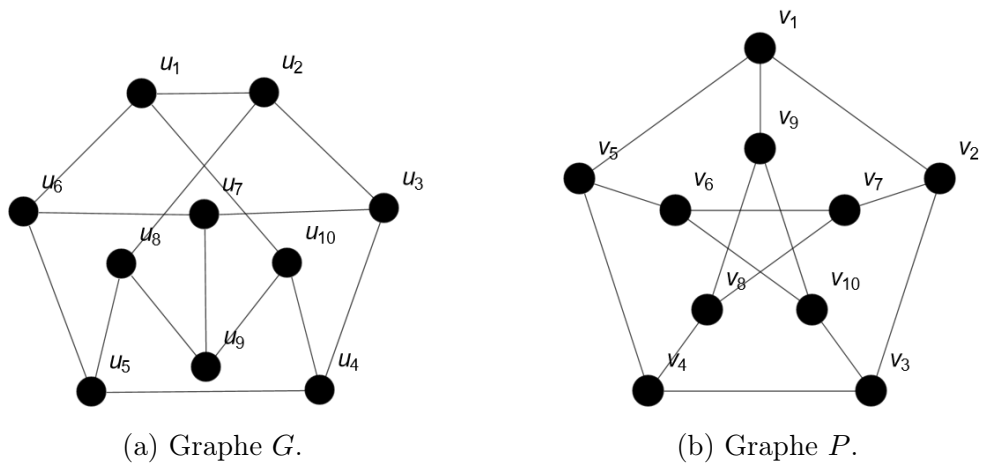


FIGURE 3.11 – Illustration de deux graphes isomorphes.

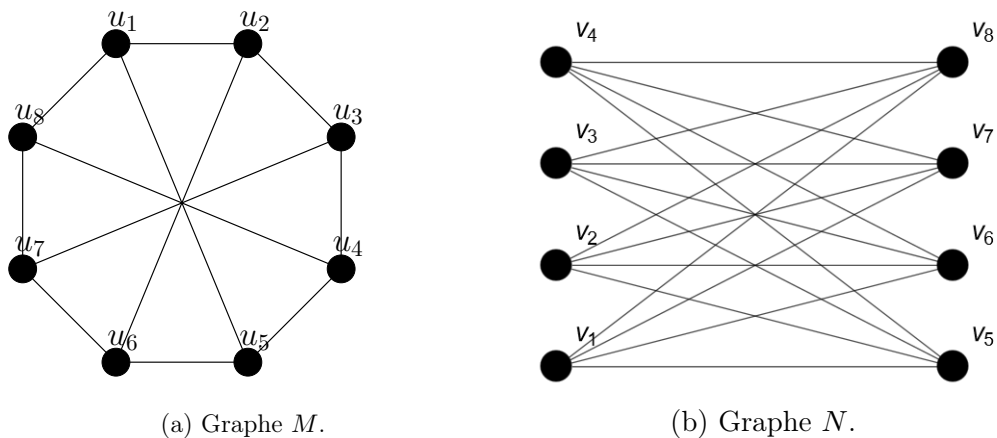


FIGURE 3.12 – Illustration de deux graphes non isomorphes.

Après avoir introduit la notion de graphes isomorphes et l'isomorphisme entre graphes, nous sommes en mesure de faire la constatation suivante découlant directement de la définition d'un isomorphisme.

Remarque 3.5.4. Si deux graphes G et H diffèrent par leur ordre, leur taille ou les degrés de leurs sommets, alors ils ne sont pas isomorphes.

Remarquons que ces conditions sont nécessaires mais pas suffisantes pour établir l'isomorphisme entre deux graphes.

Par exemple, considérons les graphes illustrés à la figure 3.13, qui ont les mêmes ordre, taille, et degrés de sommets. Ces deux graphes sont d'ordre 6, de taille 10 et comportent un sommet de degré 2, deux sommets de degré 3 et trois sommets de degré 4. Cependant, ils ne sont pas isomorphes. Cette conclusion découle de l'observation que les sommets de degré 2 dans les graphes sont respectivement les sommets u_1 et v_1 . Le sommet u_1 (resp. v_1) est adjacent à deux sommets de degré 4, à savoir u_2 et u_5 (resp. v_2 et v_5). Cependant, dans le graphe de gauche, les sommets u_2 et u_5 sont adjacents, tandis que dans le graphe de droite, les sommets v_2 et v_5 ne le sont pas. Ainsi, cette différence de structure prouve que les deux graphes ne sont pas isomorphes.

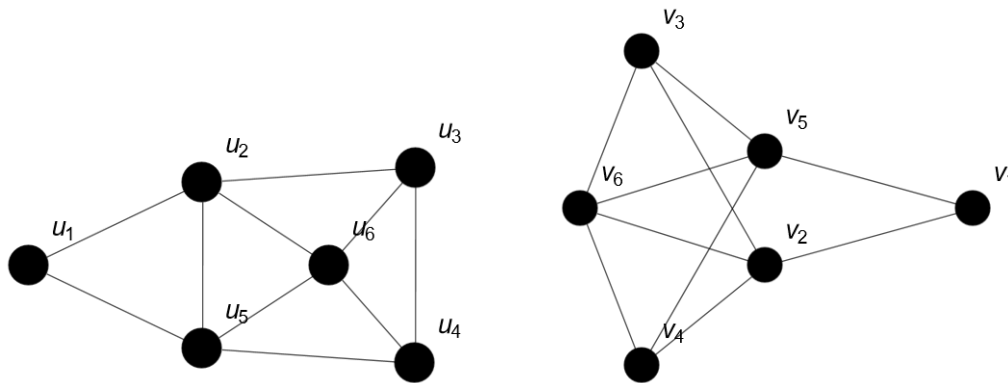


FIGURE 3.13 – Illustration de deux graphes non isomorphes ayant même ordre, taille et degrés de sommets.

Cela nous permet de remarquer que d'autres conditions sont nécessaires pour établir l'isomorphisme entre deux graphes, en plus de celles évoquées précédemment (à savoir, pour rappel, l'ordre, la taille et les degrés des sommets).

Il est évident que les graphes isomorphes partagent toujours le même polynôme chromatique. Cependant, il arrive parfois que des graphes non isomorphes partagent également leur polynôme chromatique. Les concepts suivants ont été introduits en consultant la section 4 du mémoire [3] et la section 8.3 du livre [13].

Commençons par définir la notion d'équivalence chromatique.

Définition 3.5.5. Deux graphes G et H sont dit *chromatiquement équivalents* s'ils sont non isomorphes mais possèdent le même polynôme chromatique.

Remarquons que deux arbres de même ordre sont chromatiquement équivalents. En effet, conformément à la proposition 3.3.4, ils ont le même polynôme chromatique. Cependant, comme l'atteste le théorème suivant, lorsque nous disposons du polynôme chromatique d'un arbre à n sommets, donné par l'équation (3.3), il est malheureusement impossible de déterminer précisément quel arbre ce polynôme décrit.

Prouvons maintenant que les arbres d'ordre n sont les seuls à posséder un tel polynôme chromatique.

Théorème 3.5.6. *Si le polynôme chromatique d'un graphe G est donné par*

$$P_G(z) = z(z-1)^{n-1},$$

alors le graphe G est un arbre composé de n sommets.

Démonstration. Considérons un graphe G ayant pour polynôme chromatique $P_G(z) = z(z-1)^{n-1}$. Nous pouvons développer ce polynôme comme suit, en utilisant la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} P_G(z) &= z(z-1)^{n-1} \\ &= z [C_{n-1}^0 z^{n-1} - C_{n-1}^1 z^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1} C_{n-1}^{n-1} z^0] \\ &= z^n - (n-1)z^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} z. \end{aligned}$$

Dans cette expression, nous remarquons que le terme en z a un coefficient non nul. Par conséquent, conformément au théorème 3.4.5, le graphe G est connexe. De plus, grâce au théorème 3.4.1, nous observons que le graphe G possède n sommets et $n-1$ arêtes.

Par ailleurs, le graphe G est sans cycle. En effet, puisque le graphe G est connexe, en vertu de la proposition 2.4.5, nous savons que G possède un sous-arbre couvrant. Étant donné qu'un graphe connexe à n sommets compte au moins $n-1$ arêtes, et que selon la définition 1.3.21, tout sous-arbre couvrant à n sommets comporte précisément $n-1$ arêtes, nous concluons que si le graphe G possède exactement $n-1$ arêtes, alors il constitue lui-même le sous-arbre couvrant, ce qui implique son absence de cycles.

Ainsi, le graphe G doit être un arbre, selon la définition 1.3.21. □

Maintenant, intéressons-nous au concept d'unicité chromatique.

Définition 3.5.7. Un graphe G est dit *chromatiquement unique* si, pour tout graphe H ayant le même polynôme chromatique que G , H est isomorphe à G .

Grâce à cette définition, nous pouvons faire la constatation suivante sur les graphes représentés à la figure 3.10.

Remarque 3.5.8. Reprenons les graphes G et H illustrés à la figure 3.10. Comme démontré dans l'exemple 3.5.3, nous avons établi que ces deux graphes ne sont pas isomorphes. De plus, comme indiqué dans l'exemple 3.5.1, nous avons également montré qu'ils partagent le même polynôme chromatique. Ainsi, bien que les graphes G et H soient chromatiquement équivalents, ils ne sont pas chromatiquement uniques.

En règle générale, les graphes ne sont pas chromatiquement uniques. Toutefois, certaines familles de graphes que nous avons examinées précédemment sont des exemples de graphes chromatiquement uniques : lorsque le polynôme chromatique décrit l'un de ces graphes, nous pouvons déterminer précisément lequel. Nous allons étayer cette affirmation par la suite.

Les deux résultats suivants mettent en lumière le fait que les graphes complets et les cycles sont respectivement des exemples de graphes chromatiquement uniques.

Théorème 3.5.9. *Le graphe complet K_n est chromatiquement unique.*

Démonstration. Considérons un graphe G de polynôme chromatique

$$P_G(z) = z(z-1)\cdots(z-n+1),$$

comme déjà vu à la proposition 3.3.3. Lorsque nous développons ce polynôme, nous obtenons :

$$\begin{aligned} P_G(z) &= z(z-1)\cdots(z-n+1) \\ &= z^n + z^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} (-i) + z^{n-2} \left(\sum_{0 \leq i < j \leq n-1} i \cdot j \right) + \cdots + z \cdot (-1) \cdots (-n+1) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k} \right) \left(\sum_{0 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n-1} (-1)^k i_1 \cdot i_2 \cdots i_k \right) \\ &= z^n - \left(\sum_{i=1}^{n-1} i \right) z^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1} (n-1)! z \\ &= z^n - \frac{(n-1)n}{2} z^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1} (n-1)! z \\ &= z^n - \frac{n!}{2!(n-2)!} z^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1} (n-1)! z \\ &= z^n - C_n^2 z^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1} (n-1)! z. \end{aligned}$$

Dans cette expression, nous remarquons que le coefficient du terme en z est non nul. Par conséquent, conformément au théorème 3.4.5, le graphe G est connexe. De plus, le degré du polynôme est n et le coefficient du terme de degré $n-1$ est $-\frac{n(n-1)}{2}$. Par le théorème 3.4.1, cela implique que le graphe G possède n sommets et $\frac{n(n-1)}{2}$ arêtes. Par conséquent, le graphe G doit être un graphe complet, selon la définition 1.3.13 d'un graphe complet. \square

Théorème 3.5.10. *Le cycle C_n est chromatiquement unique.*

Démonstration. Considérons un ensemble de λ couleurs ainsi qu'un graphe G de polynôme chromatique

$$P_G(\lambda) = (\lambda-1)^n + (-1)^n (\lambda-1),$$

comme déjà vu à la proposition 3.3.8. Lorsque nous développons ce polynôme en utilisant la formule du binôme de Newton, nous obtenons :

$$\begin{aligned} P_G(\lambda) &= (\lambda-1)^n + (-1)^n (\lambda-1) \\ &= C_n^0 \lambda^n - C_n^1 \lambda^{n-1} + \cdots + C_n^{n-1} (-1)^{n-1} \lambda + C_n^n (-1)^n + (-1)^n (\lambda-1) \\ &= \lambda^n - n\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1} (n\lambda - 1 - \lambda + 1) \\ &= \lambda^n - n\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1} (n-1)\lambda. \end{aligned}$$

Dans cette expression, nous constatons que le coefficient du terme en λ est non nul. Par conséquent, conformément au théorème 3.4.5, le graphe G est connexe. En outre, le degré du polynôme est n et le coefficient du terme de degré $n-1$ est $-n$. Conformément au théorème 3.4.1, cela signifie que le graphe G possède n sommets et n arêtes.

Or, d'après la définition 1.3.21, nous savons également qu'un arbre à n sommets comporte nécessairement exactement $n - 1$ arêtes. Cela s'explique par le fait qu'ajouter une arête supplémentaire au même ensemble de sommets créerait un cycle, et avoir strictement moins de $n - 1$ arêtes contredirait la connexité. Ainsi, puisque G est un graphe connexe avec n sommets et n arêtes, il doit contenir un cycle.

Pour démontrer que le graphe G ne contient pas plus d'un cycle, procédons par l'absurde et supposons qu'il possède $l \geq 2$ cycles. Étant donné que le graphe G est connexe, conformément à la définition 1.1.4, cela implique qu'il existe un chemin reliant chaque paire de sommets dans G . Puisque plusieurs cycles sont présents dans G , cette propriété demeurerait valide si nous retirions exactement une arête à chaque cycle. Cependant, après avoir retiré ces arêtes, nous aurions toujours n sommets mais seulement $n - l$ arêtes restantes. Étant donné qu'au moins $n - 1$ arêtes sont nécessaires pour maintenir la connexité d'un graphe à n sommets, et que $l > 1$, cela impliquerait que G est disconnecté, ce qui constitue une contradiction.

Par conséquent, nous savons désormais que le graphe G contient exactement un cycle. Supposons maintenant que le nombre de sommets dans ce cycle est égal à k , où $k \leq n$. Dès lors, il y a exactement $n - k$ sommets qui ne font pas partie du cycle.

Reconstruisons à présent le polynôme chromatique du graphe G . Nous commençons par considérer le cycle C_k à k sommets. Par la proposition 3.3.8, nous savons que son polynôme chromatique est donné par :

$$P_{C_k}(\lambda) = (\lambda - 1)^k + (-1)^k(\lambda - 1).$$

Ensuite, étant donné qu'il existe un chemin reliant chaque sommet parmi les $n - k$ restants dans le graphe, sans former de cycles additionnels, nous pouvons procéder à leur coloration en commençant par le cycle initial C_k , en assignant une couleur à chaque sommet de manière séquentielle. Par conséquent, comme chaque nouveau sommet que nous colorions n'a qu'un seul sommet adjacent déjà coloré, nous sommes contraints d'utiliser $\lambda - 1$ couleurs au maximum pour chaque nouveau sommet. Ainsi, chaque sommet contribue avec un facteur de $\lambda - 1$ au polynôme chromatique du graphe G . En conséquence, le polynôme chromatique du graphe G est :

$$P_G(\lambda) = [(\lambda - 1)^k + (-1)^k(\lambda - 1)] (\lambda - 1)^{n-k}.$$

Cependant, nous savons aussi que $P_G(\lambda) = (\lambda - 1)^n + (-1)^n(\lambda - 1)$. Ainsi, nous constatons que

$$\begin{aligned} & [(\lambda - 1)^k + (-1)^k(\lambda - 1)] (\lambda - 1)^{n-k} = (\lambda - 1)^n + (-1)^n(\lambda - 1) \\ \Leftrightarrow & (\lambda - 1)^n + (-1)^k(\lambda - 1)^{n-k+1} = (\lambda - 1)^n + (-1)^n(\lambda - 1) \\ \Leftrightarrow & (-1)^k(\lambda - 1)^{n-k+1} = (-1)^n(\lambda - 1). \end{aligned}$$

Par conséquent, nous en déduisons que $(-1)^k = (-1)^n$ et $(\lambda - 1)^{n-k+1} = (\lambda - 1)$, ce qui implique $n = k$. Ainsi, la longueur du cycle dans G est exactement n , ce qui signifie que G est un n -cycle. \square

3.6 Un problème non résolu

Dans cette section, nous explorons la question fondamentale "*Est-ce qu'un polynôme donné est le polynôme chromatique d'un graphe ?*", en nous basant sur les informations

présentées dans la section 3.1 du mémoire [3], dans la section 14.7 du livre [9] et dans la section 9 de l'article [23].

Bien que de nombreuses propriétés des polynômes chromatiques aient été découvertes, jusqu'à présent, personne n'a réussi à identifier avec certitude quels polynômes sont réellement chromatiques. Une conjecture formulée par Ronald Cedric Read en 1968 suggère l'idée suivante, qui a été démontrée en 2012 par le mathématicien américain June Huh dans l'article [18].

Théorème 3.6.1 (Huh, 2012). *Pour un polynôme chromatique donné $P_G(z)$ avec des coefficients entiers c_0, \dots, c_n , $P_G(z)$ est unimodal, ce qui signifie qu'il existe un naturel $i \in \{0, \dots, n\}$ tel que*

$$|c_0| \leq |c_1| \leq \dots \leq |c_{i-1}| \leq |c_i| \geq |c_{i+1}| \geq \dots \geq |c_n|.$$

Cette propriété, bien que semblant simple à première vue, s'est avérée être difficile à démontrer. En fait, la démonstration générale de ce résultat n'a été réalisée que lorsque Huh a établi que les polynômes chromatiques sont tous *log-concaves*. Cette propriété implique que pour tous les coefficients c_0, \dots, c_n du polynôme $P_G(z)$, nous avons l'inégalité $c_{i-1}c_{i+1} \leq c_i^2$ pour chaque $0 < i < n$. Il est à noter que, dans ce travail, nous admettons ces résultats. Par conséquent, si un coefficient du polynôme est nul, alors tous les coefficients suivants le sont également. Ainsi, ce résultat démontre également que les polynômes chromatiques sont unimodaux.

Cependant, malgré la véracité de ces conditions, ainsi que d'autres énumérées dans la section 3.4, elles ne suffisent pas à caractériser complètement les polynômes chromatiques. Par exemple, considérons le polynôme $P(z) = z^4 - 3z^3 + 3z^2$. Bien qu'il satisfasse certaines conditions, il n'est pas le polynôme chromatique d'un graphe. En effet, selon les propriétés énoncées dans le théorème 3.4.1, le graphe correspondant à ce polynôme possède quatre sommets et trois arêtes. De plus, la somme des coefficients de ce polynôme est $1 - 3 + 3 = 1$, ce qui diffère de zéro. Par conséquent, bien que ce polynôme soit à la fois log-concave et unimodal, il ne peut pas être le polynôme chromatique d'un graphe, car il ne satisfait pas la condition énoncée dans le théorème 3.4.3.

Chapitre 4

NP-complétude

Dans les sections précédentes, nous avons abordé la question de la coloration des graphes, cherchant à déterminer si les sommets d'un graphe peuvent être colorés avec un nombre prédéfini de couleurs. Nous avons souligné que cette problématique devient NP-complète dès que le nombre de couleurs autorisées est de trois ou plus. Cette classification implique qu'aucun algorithme efficace n'a encore été découvert pour résoudre ce problème dans un délai raisonnable, sur toutes les instances possibles.

Dans ce chapitre, notre objectif principal est d'explorer en profondeur la complexité algorithmique de ce problème, en analysant divers scénarios selon le nombre de couleurs spécifié. Pour ce faire, nous commençons par rappeler les concepts de base de la théorie de la complexité. Nous introduisons ensuite les classes de complexité P, NP et NPC, tout en exposant une condition essentielle pour qu'un problème appartienne à la classe NP. Nous rappelons également la définition du problème 3SAT et examinons sa complexité, car cette connaissance s'avère être un atout pour prouver notre exploration à venir. Enfin, nous introduisons le problème central de ce chapitre : le problème k COL. Dans cette section, nous démontrons que pour une valeur spécifique de k , à savoir $k = 2$, le problème k COL peut être résolu en temps polynomial, appartenant ainsi à la classe P. Cependant, dès que k dépasse la valeur 3, le problème k COL devient NP-complet, ce qui pose un défi algorithmique majeur.

4.1 Définitions préliminaires

L'objectif de cette première section est de présenter les notions élémentaires des théories de la calculabilité et de la complexité. Cette section a été élaborée en se référant aux notes de cours [12].

Pour commencer, nous rappelons les définitions d'une machine de Turing et d'une configuration machine.

Définition 4.1.1. Une *machine de Turing* est la donnée d'un quintuple $\mathcal{M} = (Q, q_0, h, A, \delta)$ où :

- Q est un ensemble fini non vide, appelé l'*ensemble des états* ;
- q_0 et h sont des éléments de Q , appelés respectivement *état initial* et *état final* ;
- A est un alphabet contenant le symbole blanc $\#$ mais ne contenant pas les symboles L et R, indiquant respectivement une instruction de déplacement à gauche et à droite ;
- $\delta : (Q \setminus \{h\}) \times A \rightarrow Q \times (A \cup \{L, R\})$ est une fonction partielle, appelée *fonction de transition*.

Une machine de Turing $\mathcal{M} = (Q, q_0, h, A, \delta)$ peut être représentée par un graphe orienté dont les sommets sont les états et où pour tous $p, q \in Q$, $a \in A$ et $x \in A \cup \{L, R\}$ tels que $\delta(p, a) = (q, x)$, un arc étiqueté par a, x est dessiné de p vers q . De plus, l'état initial est désigné par une flèche entrante et l'état final par un double cercle.

Une *machine de Turing non déterministe* est définie comme une machine de Turing standard à ceci près que δ est maintenant une relation de transition.

Définition 4.1.2. Une *configuration mémoire* est un couple $(w, k) \in A^* \#^\omega \times \mathbb{N} \setminus \{0\}$, où le mot infini w est un mot de A^* suivi d'une infinité de symboles blancs $\#$. Le mot infini w est appelé le *ruban mémoire*, tandis que l'entier k est un *pointeur* qui pointe sur la $k^{\text{ème}}$ lettre de w . Nous disons aussi que k désigne une *cellule référencée* qui contient le symbole $w[k]$.

Pour simplifier les écritures, nous renseignons souvent uniquement la partie significative d'une configuration mémoire. La *partie significative* r d'une configuration mémoire (w, k) telle que $w[l] \neq \#$ et $w[n] = \#$ pour tout $n > l$ est définie par

$$r = \begin{cases} w[1, k-1]w[k]w[k+1, l] & \text{si } l \geq k \\ w[1, l]\#^{k-l-1}\underline{\#} & \text{si } l < k, \end{cases}$$

où le symbole souligné désigne la cellule référencée par le pointeur k .

Une *configuration machine* est un triplet (p, w, k) , où p est un état et (w, k) est une configuration mémoire. Une configuration machine (p, w, k) est souvent notée $p.r$, où r est la partie significative de la configuration mémoire (w, k) .

La définition suivante décrit le processus des transitions d'une machine de Turing.

Définition 4.1.3. Une machine de Turing $\mathcal{M} = (Q, q_0, h, A, \delta)$ agit sur les configurations machines de la manière suivante. Trois actions sont possibles :

1. Si nous nous trouvons dans la configuration machine (p, w, k) et que $\delta(p, w[k]) = (q, a)$ avec $a \in A$, alors nous basculons dans la configuration machine (q, w', k) où

$$w'[n] = \begin{cases} w[n] & \text{si } n \neq k \\ a & \text{si } n = k. \end{cases}$$

2. Si nous nous trouvons dans la configuration machine (p, w, k) et que $\delta(p, w[k]) = (q, R)$, alors nous basculons dans la configuration machine $(q, w, k+1)$.
3. Si nous nous trouvons dans la configuration machine (p, w, k) avec $k \geq 2$ et que $\delta(p, w[k]) = (q, L)$, alors on bascule dans la configuration machine $(q, w, k-1)$.

La notation $C \vdash C'$ signifie que C' est une configuration machine atteignable depuis C en une transition avec les trois règles précédentes. On note $C \vdash^* C'$ s'il existe $j \geq 0$, des configurations machines C_0, \dots, C_j telles que l'on ait

- $C = C_0$;
- $C' = C_j$;
- $C_i \vdash C_{i+1}$ pour tout $i \in \{0, \dots, j-1\}$.

Une *configuration pendante* est une configuration machine (p, w, k) , avec $p \neq h$, depuis laquelle aucune configuration machine n'est atteignable. Cela peut se produire soit lorsque la fonction de transition δ (qui est partielle) n'est pas définie en $(p, w[k])$, soit lorsque $k = 1$ et $\delta(p, w[1]) = (q, L)$.

Une *configuration initiale* est une configuration machine de la forme (q_0, w, k) , tandis qu'une *configuration d'arrêt* est une configuration machine de la forme (h, w, k) .

Trois situations peuvent se produire lorsqu'une machine de Turing est lancée à partir d'une configuration machine donnée.

1. La machine de Turing aboutit dans une configuration d'arrêt en un nombre fini de transitions, auquel cas on dit que la machine de Turing s'arrête.
2. La machine de Turing atteint une configuration pendante.
3. Une infinité de transitions successives sont possibles, auquel cas on dit que la machine de Turing ne s'arrête pas.

Observons que pour une machine de Turing non déterministe, nous pouvons faire les constatations suivantes.

Remarque 4.1.4. Afin de se représenter les possibles actions d'une machine de Turing non déterministe au départ d'une configuration mémoire donnée, nous construisons l'arbre des transitions de la machine dont la racine est la configuration d'intérêt.

Dans l'arbre des transitions, certaines branches sont finies, d'autres pas. Une branche finie mène soit dans une configuration d'arrêt, soit dans une configuration pendante.

Évoquons à présent les définitions d'une fonction calculable, d'un langage décidable et d'un langage acceptable. Avant d'introduire la définition suivante, nous devons aborder la notion de *codage unaire des naturels* : cela implique l'utilisation d'un symbole spécial u , où chaque nombre naturel n est encodé par le mot u^n .

Définition 4.1.5. Soient A_1, \dots, A_{d+1} ($d \in \mathbb{N}$) des alphabets ne contenant pas le symbole blanc $\#$. Une fonction $f : A_1^* \times \dots \times A_d^* \rightarrow A_{d+1}^*$ est dite *calculable* (par machine de Turing) s'il existe une machine de Turing $\mathcal{M} = (Q, q_0, h, B, \delta)$ telle que $\cup_{i=1}^{d+1} A_i \subseteq B$ et telle que pour tout $(w_1, \dots, w_d) \in A_1^* \times \dots \times A_d^*$, nous ayons $q_0.\#w_1\#\dots\#w_d\#\# \vdash^* h.\#f(w_1, \dots, w_d)\#\#$.

Définition 4.1.6. Un langage L sur un alphabet A ne contenant pas le symbole blanc $\#$ est dit *décidable* si sa fonction caractéristique

$$\chi_L : A^* \rightarrow \mathbb{N}, w \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } w \notin L \\ 1 & \text{si } w \in L \end{cases}$$

est calculable.

Autrement dit, un langage $L \subseteq A^*$ (avec $\# \notin A$) est décidable s'il existe une machine de Turing $\mathcal{M} = (Q, q_0, h, B, \delta)$ avec $A \subseteq B$ telle que, pour tout $w \in A^*$, lorsqu'elle est exécutée à partir de la configuration initiale $q_0.\#w\#\#$, elle atteint la configuration d'arrêt $h.\#u\#\#$ si w appartient au langage L et elle atteint la configuration d'arrêt $h.\#\#\#$ sinon. De manière informelle, dans le premier cas, nous dirons que la machine répond "oui" et dans le deuxième cas, nous dirons qu'elle répond "non".

Définition 4.1.7. Soit une machine de Turing $\mathcal{M} = (Q, q_0, h, A, \delta)$. Un mot w sur $A \setminus \{\#\}$ est *accepté* par \mathcal{M} si, en partant de la configuration initiale $q_0.\#w\#\#$, nous atteignons une configuration d'arrêt en suivant les transitions de \mathcal{M} . Le *langage accepté par une machine de Turing* \mathcal{M} , noté $L(\mathcal{M})$, est l'ensemble des mots qu'elle accepte. Un langage est dit *acceptable* s'il existe une machine de Turing qui l'accepte.

Un mot w est *accepté par une machine de Turing non déterministe* s'il existe une branche dans l'arbre des transitions de racine $q_0.\#w\#\#$ qui se termine dans une configuration d'arrêt.

Abordons maintenant diverses notions de la théorie de la complexité. Nous débutons cette exploration en présentant le concept de complexité temporelle dans le pire des cas.

Définition 4.1.8. Soient \mathcal{M} une machine de Turing non déterministe d'alphabet A et w un mot sur $A \setminus \{\#\}$.

La *durée d'exécution* de \mathcal{M} sur w , notée $d_{\mathcal{M}}(w)$, est définie comme suit : elle vaut 0 si $w \notin L(\mathcal{M})$, et elle vaut le nombre minimum de transitions permettant d'atteindre une configuration d'arrêt à partir de $q_0.\#w\#$ en respectant les transitions de \mathcal{M} , si $w \in L(\mathcal{M})$. La *fonction de complexité (temporelle)* de \mathcal{M} est la fonction

$$T_{\mathcal{M}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto \sup\{d_{\mathcal{M}}(w) : w \in (A \setminus \{\#\})^n\}.$$

Grâce à la mise en place de cette définition, nous sommes à présent en mesure d'aborder les concepts de machine de Turing polynomiale et de fonction P-calculable. Ces concepts joueront un rôle crucial dans l'introduction de la définition d'une transformation polynomiale.

Définition 4.1.9. Une machine de Turing \mathcal{M} est dite *polynomiale* si sa fonction de complexité est majorée par un polynôme, ou de manière équivalente, s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $T_{\mathcal{M}} \in \mathcal{O}(n^k)$.

Une fonction est dite *P-calculable* s'il existe une machine de Turing déterministe polynomiale qui la calcule.

Définition 4.1.10. Soient $K \subseteq A^*$ et $L \subseteq B^*$ des langages sur des alphabets éventuellement distincts. Une application $f : A^* \rightarrow B^*$ est une *transformation polynomiale* de K vers L si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. f est P-calculable,
2. Pour tout $w \in A^*$, $w \in K$ si et seulement si $f(w) \in L$.

Nous écrivons $K \leq L$ pour exprimer qu'il existe une transformation polynomiale de K vers L .

4.2 Les classes P, NP et NPC

Dans cette deuxième section, les définitions de trois catégories de classe de la théorie de la complexité sont rappelées. De plus, nous énonçons un résultat démontrant qu'un langage appartient à la classe NP. Les notes de cours [12] ont été consultées lors de la rédaction de cette section.

Les classes P, NP et NPC sont définies dans le passage suivant.

Définition 4.2.1. La *classe P* représente l'ensemble des langages décidés par une machine de Turing déterministe polynomiale.

La *classe NP* représente l'ensemble des langages acceptés par une machine de Turing non déterministe polynomiale.

La *classe NPC* = $\{L \in NP : \forall K \in NP, K \leq L\}$ regroupe l'ensemble des langages dits *NP-complets*. Un langage L est dit *NP-difficile* si pour tout $K \in NP$, on a $K \leq L$.

De cette définition, nous déduisons qu'afin de démontrer qu'un langage L est NP-complet, il est nécessaire de prouver que L appartient à la classe NP et que L est NP-difficile. En règle générale, la première étape consiste à trouver un certificat succinct de

L , tandis que la deuxième étape consiste en une réduction à un problème déjà connu pour être NP-difficile.

La notion de certificat succinct est présentée dans la définition qui suit, et elle est accompagnée d'un résultat donnant une condition nécessaire pour qu'un langage appartienne à la classe NP. Bien que ce résultat soit considéré comme admis dans ce travail, une démonstration est disponible dans le théorème 3.4.8 des notes de cours [12].

Définition 4.2.2. Soit L un langage sur un alphabet A . Un *certificat succinct* de L est la donnée d'un langage $D \in P \cap (A \cup B \cup \{\star\})^*$ et d'un polynôme $Q \in \mathbb{Z}[X]$ tels que

$$L = \{w \in A^* : \exists x \in B^{\leq Q(|w|)} \text{ tel que } w \star x \in D\},$$

où B est l'alphabet de D et \star est un symbole n'appartenant ni à A ni à B .

En d'autres termes, l'idée du certificat succinct est que pour chaque instance positive (*i.e.* une instance pour laquelle la réponse au problème est "oui"), il existe une preuve "courte" que cette instance est en effet positive. Ainsi, pour déterminer si un mot w de A^* appartient au langage L dans le cas où un mot supplémentaire x (qui n'est pas trop long) nous est donné, il suffit de vérifier que les deux données w et x appartiennent à un langage D qui est polynomial, c'est-à-dire qu'il existe un algorithme rapide pour déterminer leur appartenance à D .

Proposition 4.2.3. Si un langage L possède un certificat succinct, alors $L \in NP$.

4.3 Le problème 3SAT

Dans cette troisième section, nous abordons le problème 3SAT en nous appuyant sur les notes de cours [12]. L'introduction de ce problème est essentielle pour atteindre l'objectif de ce chapitre, qui consiste, rappelons-le, à déterminer si un graphe peut être coloré avec un nombre donné de couleurs en temps polynomial.

Pour une meilleure compréhension de l'énoncé du problème 3SAT, commençons par introduire quelques concepts fondamentaux de la logique mathématique.

Définition 4.3.1. Une formule de la logique propositionnelle est qualifiée de *satisfaisable* s'il existe une distribution des valeurs de vérité des variables qui la composent qui la rend vraie.

Un *littéral* est une variable propositionnelle ou sa négation.

Une *clause* est une disjonction de variables propositionnelles ou de négation de variables propositionnelles. La *longueur d'une clause* est définie comme le nombre de variables ou de négations de variables propositionnelles qui la composent.

Une *forme normale conjonctive (FNC)* est une conjonction de clauses. La *longueur d'une FNC* est la somme des longueurs des clauses qui la composent.

Exemplifions les concepts précédents à travers l'exemple suivant.

Exemple 4.3.2. La formule $a \vee \neg b \vee \neg c$ est une clause de longueur 3, tandis que la formule $(a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge (a \vee c)$ est une FNC de longueur 5.

Examinons à présent la satisfaisabilité de ces formules. La formule $a \vee \neg b \vee \neg c$ est satisfaisable. Par exemple, avec la distribution $(1, 0, 1)$ pour les variables propositionnelles (a, b, c) , la formule est vraie. De même, une telle distribution rend également la formule $(a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge (a \vee c)$ vraie, confirmant ainsi sa satisfaisabilité. En revanche, la formule

$a \wedge \neg a$ n'est pas satisfaisable. En effet, quelle que soit la valeur de vérité attribuée à la variable propositionnelle a , la conjonction de a avec sa négation aboutit toujours à une incompatibilité, rendant la formule fausse.

À présent, nous disposons de tous les éléments nécessaires pour formuler le problème 3SAT.

Définition 4.3.3 (3SAT). Étant donné une FNC comportant uniquement des clauses de longueur 3, décider si elle est satisfaisable.

Il s'avère que ce problème de la logique propositionnelle appartient à la classe NPC. Toutefois, ce résultat est admis dans le cadre de ce travail. Une preuve est par ailleurs disponible dans le théorème 3.6.2 des notes de cours [12].

Théorème 4.3.4 (Karp, 1972). *Le problème 3SAT est NP-complet.*

4.4 Le problème k COL

Dans cette quatrième et dernière section, nous commençons par introduire le problème de décision k COL. Par la suite, nous établissons la classification de complexité pour le problème 2COL, démontrant son appartenance à la classe P, tandis que le problème 3COL est établi comme appartenant à la classe NPC. Enfin, nous concluons en déduisant que le problème k COL est NP-complet dès que k atteint ou dépasse trois.

Présentons le problème du coloriage des sommets d'un graphe en nous appuyant sur la section 8.2.3 du livre [16].

Définition 4.4.1 (k COL). Le problème de k -coloriage des sommets d'un graphe, abrégé k COL, est le suivant : étant donné un graphe $G = (V, E)$ et un entier k ($1 \leq k \leq \#V$), existe-t-il un coloriage (propre) des sommets de G utilisant au plus k couleurs ?

4.4.1 Le problème 2COL

Nous démontrons dans cette sous-section que le problème 2COL appartient à la classe P. Pour ce faire, nous nous appuyons sur les ressources suivantes : les exercices du chapitre 1 du livre [16] ainsi que les notes de cours [26].

Pour atteindre cet objectif, nous présentons un algorithme qui effectue à la fois le parcours en largeur des sommets d'un graphe et le coloriage des sommets du graphe dans un ordre déterminé par ce parcours en largeur.

Algorithme 4.4.2. L'algorithme *BFSCol* (*Breadth-First Search Coloring*) vise à colorer les sommets d'un graphe de manière efficace en utilisant le parcours en largeur. Le *parcours en largeur*, également connu sous le nom de *BFS* (*Breadth-First Search*) en anglais, est une méthode systématique pour explorer les sommets d'un graphe. Son principe fondamental consiste à visiter tous les voisins d'un sommet avant de passer aux voisins des voisins.

L'algorithme BFS garantit que tous les sommets du graphe sont visités dans l'ordre de leur distance par rapport au sommet de départ. En d'autres termes, il visite d'abord les sommets les plus proches, puis ceux à une distance de 2, puis de 3, et ainsi de suite. Cela en fait un outil efficace pour déterminer un chemin le plus court entre deux sommets dans un graphe.

Algorithme 2 : Coloriage des sommets d'un graphe ordonnés selon un parcours en largeur, abrégé *BFS*Col pour Breadth-First Search Coloring

```

Donnée : Un graphe connexe  $G = (V, E)$ .
Queue = {};
Visited = {};
Fixer un sommet de départ arbitraire  $v_1 \in V$ ;
Queue.append( $v_1$ );
Visited.append( $v_1$ );
 $c(v_1) = 0$ ;
Tant que Queue  $\neq \emptyset$  Faire
    CurrentNode = Queue[0];
    Queue.pop(0);
    Pour  $u \in \nu(\text{CurrentNode})$  Faire
        Si  $u \notin \text{Visited}$  Alors
            Visited.append( $u$ );
            Queue.append( $u$ );
             $c(u) = \min\{a \in \mathbb{N} : a \neq c(v_j), \forall j < \text{Visited.index}(u) : \{u, v_j\} \in E\}$ .
        Fin
    Fin
Fin
Sortie : La liste des sommets du graphe  $G$  parcourus en largeur, Visited, et un coloriage des sommets du graphe  $G$ ,  $c : V \rightarrow \mathbb{N}$ .

```

Analysons succinctement l'algorithme décrit dans la partie encadrée. Tout d'abord, l'algorithme prend en entrée un graphe connexe $G = (V, E)$. Remarquons que dans le cas où le graphe n'est pas connexe, nous ne parcourons que les sommets d'une composante connexe du graphe. Deux listes sont initialisées par la suite : une liste *Queue* pour stocker les sommets à explorer, et une liste *Visited* pour stocker les sommets déjà visités. En outre, l'algorithme fixe un sommet de départ arbitraire v_1 dans le graphe, qu'il ajoute ensuite aux listes *Queue* et *Visited*, avant de lui attribuer la couleur 0.

Après cela, l'algorithme entre dans une boucle qui se poursuit tant que la liste *Queue* n'est pas vide. À chaque itération de cette boucle, il stocke le premier sommet dans la variable *CurrentNode* puis le retire de la liste *Queue* (principe FIFO, First-In, First-Out). Pour chaque voisin u du sommet *CurrentNode*, l'algorithme vérifie si ce voisin a déjà été visité. Si ce n'est pas le cas, u est ajouté à la liste *Visited* et à la liste *Queue* pour une exploration ultérieure. L'algorithme assigne une couleur $c(u)$ à u en cherchant la plus petite couleur non utilisée parmi les couleurs attribuées aux voisins déjà colorés du sommet u . Plus précisément, il attribue à $c(u)$ la plus petite valeur a dans les nombres naturels telle que a est différente de la couleur de tous les voisins déjà colorés du sommet u .

Une fois que tous les sommets accessibles depuis le sommet de départ v_1 ont été explorés, l'algorithme s'arrête et renvoie la liste *Visited* contenant tous les sommets visités dans l'ordre BFS, ainsi qu'un coloriage valide des sommets du graphe, représenté par la fonction $c : V \rightarrow \mathbb{N}$, qui associe à chaque sommet sa couleur.

Pour mieux comprendre le fonctionnement de cet algorithme, nous allons l'illustrer à l'aide d'un exemple.

Exemple 4.4.3. Considérons le graphe de Möbius-Kantor M composé de 16 sommets et de 24 arêtes, illustré à la figure 4.1a. Ce graphe est connexe et biparti (puisqu’il ne contient aucun cycle de longueur impaire), conformément à la définition 1.1.4 et au théorème 1.3.11 de König. En vertu de la proposition 1.3.10, nous savons que le graphe M a un nombre chromatique de $\chi(M) = 2$, ce qui signifie qu’il est 2-colorable.

Nous souhaitons maintenant trouver un 2-coloriage des sommets du graphe de Möbius-Kantor. Pour ce faire, nous allons utiliser l’algorithme *BFSCol*.

Nous commençons par considérer le graphe connexe M et nous choisissons le sommet v_1 indiqué en rouge dans la figure 4.1a comme sommet de départ.

En appliquant l’algorithme 4.4.2 *BFS* à partir du sommet v_1 , nous obtenons un ordre des sommets comme présenté dans le tableau 4.2 et illustré à la figure 4.1b.

Maintenant que nous avons établi un ordre pour les sommets du graphe de Möbius-Kantor M , nous devons leur attribuer des couleurs. Pour accomplir cette tâche, nous suivons à nouveau les étapes de l’algorithme 4.4.2 scrupuleusement. Le tableau 4.1 montre les différentes couleurs attribuées aux sommets du graphe M , en respectant l’ordre dans lequel ils doivent être colorés et en prenant en compte les couleurs déjà attribuées aux sommets voisins.

En utilisant le rouge pour la couleur 0 et le bleu pour la couleur 1, nous obtenons le coloriage représenté à la figure 4.1c.

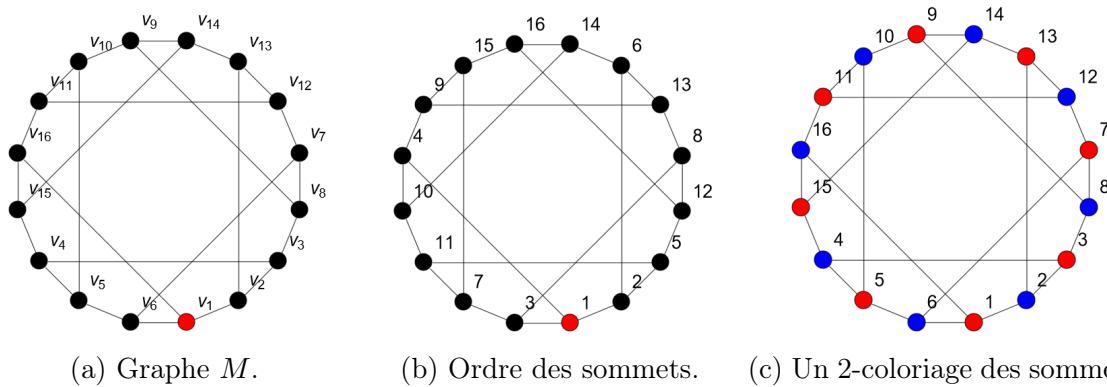


FIGURE 4.1 – Illustration de l’algorithme *BFSCol* sur le graphe de Möbius-Kantor M .

| Ordre des sommets | Voisins du sommet déjà colorés | Couleur attribuée |
|-------------------|--------------------------------------|-------------------|
| v_1 | / | 0 |
| v_2 | $c(v_1) = 0$ | 1 |
| v_6 | $c(v_1) = 0$ | 1 |
| v_{16} | $c(v_1) = 0$ | 1 |
| v_3 | $c(v_2) = 1$ | 0 |
| v_{13} | $c(v_2) = 1$ | 0 |
| v_5 | $c(v_6) = 1$ | 0 |
| v_7 | $c(v_6) = 1$ | 0 |
| v_{11} | $c(v_{16}) = 1$ | 0 |
| v_{15} | $c(v_{16}) = 1$ | 0 |
| v_4 | $c(v_5) = c(v_{15}) = 0$ | 1 |
| v_8 | $c(v_3) = c(v_7) = 0$ | 1 |
| v_{12} | $c(v_7) = c(v_{11}) = c(v_{13}) = 0$ | 1 |
| v_{14} | $c(v_{13}) = c(v_{15}) = 0$ | 1 |
| v_{10} | $c(v_5) = c(v_{11}) = 0$ | 1 |
| v_9 | $c(v_8) = c(v_{10}) = c(v_{14}) = 1$ | 0 |

TABLE 4.1 – Application de l’algorithme *BFSCol*.

| <i>Queue</i> | <i>Visited</i> | <i>CurrentNode</i> | <i>Queue</i> | $\nu(\text{CurrentNode})$ |
|---|---|--------------------|--|---------------------------|
| v_1 | v_1 | v_1 | / | v_2, v_6, v_{16} |
| v_2, v_6, v_{16} | v_1, v_2, v_6, v_{16} | v_2 | v_6, v_{16} | v_1, v_3, v_{13} |
| $v_6, v_{16}, v_3,$ v_{13} | $v_1, v_2, v_6, v_{16},$ v_3, v_{13} | v_6 | v_{16}, v_3, v_{13} | v_1, v_5, v_7 |
| $v_{16}, v_3, v_{13},$ v_5, v_7 | $v_1, v_2, v_6, v_{16},$ v_3, v_{13}, v_5, v_7 | v_{16} | $v_3, v_{13}, v_5,$ v_7 | v_1, v_{11}, v_{15} |
| $v_3, v_{13}, v_5,$ v_7, v_{11}, v_{15} | $v_1, v_2, v_6, v_{16}, v_3,$ $v_{13}, v_5, v_7, v_{11}, v_{15}$ | v_3 | $v_{13}, v_5, v_7,$ v_{11}, v_{15} | v_2, v_4, v_8 |
| $v_{13}, v_5, v_7,$ $v_{11}, v_{15}, v_4,$ v_8 | $v_1, v_2, v_6, v_{16}, v_3,$ $v_{13}, v_5, v_7, v_{11}, v_{15},$ v_4, v_8 | v_{13} | $v_5, v_7, v_{11},$ v_{15}, v_4, v_8 | v_2, v_{12}, v_{14} |
| $v_5, v_7, v_{11},$ $v_{15}, v_4, v_8,$ v_{12}, v_{14} | $v_1, v_2, v_6, v_{16}, v_3,$ $v_{13}, v_5, v_7, v_{11}, v_{15},$ v_4, v_8, v_{12}, v_{14} | v_5 | v_7, v_{11}, v_{15} $v_4, v_8, v_{12},$ v_{14} | v_4, v_6, v_{10} |
| $v_7, v_{11}, v_{15},$ $v_4, v_8, v_{12},$ v_{14}, v_{10} | $v_1, v_2, v_6, v_{16}, v_3,$ $v_{13}, v_5, v_7, v_{11}, v_{15},$ $v_4, v_8, v_{12}, v_{14}, v_{10}$ | v_7 | $v_{11}, v_{15}, v_4,$ $v_8, v_{12}, v_{14},$ v_{10} | v_6, v_8, v_{12} |
| $v_{11}, v_{15}, v_4,$ $v_8, v_{12}, v_{14},$ v_{10} | $v_1, v_2, v_6, v_{16}, v_3,$ $v_{13}, v_5, v_7, v_{11}, v_{15},$ $v_4, v_8, v_{12}, v_{14}, v_{10}$ | v_{11} | $v_{15}, v_4, v_8,$ v_{12}, v_{14}, v_{10} | v_{10}, v_{12}, v_{16} |
| $v_{15}, v_4, v_8,$ v_{12}, v_{14}, v_{10} | $v_1, v_2, v_6, v_{16}, v_3,$ $v_{13}, v_5, v_7, v_{11}, v_{15},$ $v_4, v_8, v_{12}, v_{14}, v_{10}$ | v_{15} | $v_4, v_8, v_{12},$ v_{14}, v_{10} | v_4, v_{14}, v_{16} |
| $v_4, v_8, v_{12},$ v_{14}, v_{10} | $v_1, v_2, v_6, v_{16}, v_3,$ $v_{13}, v_5, v_7, v_{11}, v_{15},$ $v_4, v_8, v_{12}, v_{14}, v_{10}$ | v_4 | $v_8, v_{12}, v_{14},$ v_{10} | v_3, v_5, v_{15} |
| $v_8, v_{12}, v_{14},$ v_{10} | $v_1, v_2, v_6, v_{16}, v_3,$ $v_{13}, v_5, v_7, v_{11}, v_{15},$ $v_4, v_8, v_{12}, v_{14}, v_{10}$ | v_8 | v_{12}, v_{14}, v_{10} | v_3, v_7, v_9 |
| $v_{12}, v_{14}, v_{10},$ v_9 | $v_1, v_2, v_6, v_{16}, v_3,$ $v_{13}, v_5, v_7, v_{11}, v_{15},$ $v_4, v_8, v_{12}, v_{14}, v_{10}, v_9$ | v_{12} | v_{14}, v_{10}, v_9 | v_7, v_{11}, v_{13} |
| v_{14}, v_{10}, v_9 | $v_1, v_2, v_6, v_{16}, v_3,$ $v_{13}, v_5, v_7, v_{11}, v_{15},$ $v_4, v_8, v_{12}, v_{14}, v_{10}, v_9$ | v_{14} | v_{10}, v_9 | v_9, v_{13}, v_{15} |
| v_{10}, v_9 | $v_1, v_2, v_6, v_{16}, v_3,$ $v_{13}, v_5, v_7, v_{11}, v_{15},$ $v_4, v_8, v_{12}, v_{14}, v_{10}, v_9$ | v_{10} | v_9 | v_5, v_9, v_{11} |
| v_9 | $v_1, v_2, v_6, v_{16}, v_3,$ $v_{13}, v_5, v_7, v_{11}, v_{15},$ $v_4, v_8, v_{12}, v_{14}, v_{10}, v_9$ | v_9 | / | v_8, v_{10}, v_{14} |

TABLE 4.2 – Application de l'algorithme *BFS*.

Focalisons-nous à présent sur la complexité de l'algorithme *BFSCol*. Le résultat qui suit jouera un rôle crucial dans la démonstration des théorèmes relatifs à l'appartenance à diverses classes de complexité du problème *kCOL* pour différentes valeurs de k . Il permettra de donner une borne sur le temps total nécessaire pour vérifier si un coloriage donné satisfait la propriété d'être un coloriage propre des sommets d'un graphe. En effet, nous allons voir que, quel que soit le graphe donné, l'algorithme *BFSCol* fournit rapidement une réponse affirmative ou négative à la question "Le graphe donné est-il k -colorable?".

Lemme 4.4.4. *Le processus de coloriage des sommets de n'importe quel graphe à l'aide de l'algorithme *BFSCol* peut être réalisé en temps polynomial (voire même linéaire) par rapport à la taille du graphe, soit en $\mathcal{O}(|V| + |E|)$.*

Démonstration. Considérons le processus de partitionnement d'un graphe donné G (qu'il soit connexe ou non) en composantes connexes et la coloration des sommets de chacune de ces composantes à l'aide de l'algorithme *BFSCol*.

Lorsque l'algorithme *BFSCol* est appliqué sur le graphe G , chaque sommet du graphe est parcouru exactement une fois, et il est possible que l'algorithme *BFSCol* soit lancé plusieurs fois.

En effet, le parcours en largeur garantit cette exploration complète : chaque sommet non visité est exploré une seule fois avec tous ses voisins accessibles, et reçoit une couleur en fonction des couleurs déjà attribuées à ses voisins précédemment visités. Les sommets déjà visités sont quant à eux simplement ignorés.

Si, à partir d'un sommet donné, tous les sommets accessibles ont été visités mais que certains sommets du graphe G n'ont pas encore été explorés, cela identifie une nouvelle composante connexe, nécessitant un nouveau lancement de l'algorithme *BFSCol* à partir d'un sommet non visité.

Une fois que tous les sommets du graphe G ont été visités (cette vérification est effectuée en temps constant à chaque itération de la boucle principale, car elle consiste simplement à vérifier si le nombre de sommets visités est égal au nombre total de sommets du graphe G), le pire des cas nécessite un parcours unique de chaque sommet et de chaque arête du graphe pour identifier toutes les composantes connexes et attribuer une couleur à chaque sommet.

Ainsi, la complexité temporelle de l'algorithme *BFSCol* est proportionnelle à la taille du graphe, soit $\mathcal{O}(|V| + |E|)$. Cette analyse démontre que l'algorithme est capable de partitionner le graphe en composantes connexes et de colorer ses sommets de manière efficace, garantissant une exécution en temps polynomial, voire linéaire, en fonction de la taille du graphe. \square

Maintenant que nous avons présenté l'algorithme *BFSCol* et que nous avons analysé sa complexité, nous sommes en mesure de démontrer le théorème central de cette sous-section.

Théorème 4.4.5. *Le problème *2COL* est polynomial.*

Démonstration. Dans le problème *2COL*, un graphe G (d'ordre n) est donné et nous devons déterminer s'il est 2-colorable.

Nous pouvons supposer que le graphe G est connexe. Dans le cas contraire, il suffit de traiter chaque composante connexe séparément. Pour prouver ce résultat, nous devons démontrer deux affirmations :

1. Si le graphe G est un graphe connexe 2-colorable, alors l'algorithme *BFSCol* fournit un coloriage des sommets du graphe G utilisant au plus 2 couleurs.

Supposons que c' est un 2-coloriage des sommets du graphe G . Sans perte de généralité, quitte à permuter les couleurs, nous pouvons supposer que $c'(v_1) = 0$. Soit c le coloriage des sommets du graphe G obtenu via l'algorithme *BFSCol*.

Démontrons maintenant que les deux fonctions de coloriage c et c' coïncident toujours, ce qui nous permettra de conclure qu'il s'agit en réalité d'un unique coloriage. Autrement dit, si nous avons un 2-coloriage des sommets du graphe G , c' est forcément celui obtenu via l'algorithme *BFSCol*. Pour prouver cela, prouvons par récurrence forte sur i que $c(v_i) = c'(v_i)$, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Tout d'abord, le cas de base $i = 1$ est évident puisque l'algorithme *BFSCol* attribue directement $c(v_1) = 0$, comme spécifié dans l'algorithme 4.4.2.

Pour l'induction, supposons que le résultat est vrai pour tous les sommets précédant le $i^{\text{ème}}$, et montrons que $c'(v_i)$ ($i > 1$) satisfait la même règle que celle utilisée pour construire le coloriage c , à savoir :

$$c'(v_i) = \min\{a \in \mathbb{N} : a \neq c'(v_j), \forall j < i \text{ tels que } \{v_i, v_j\} \in E\}. \quad (4.1)$$

Autrement dit, la couleur attribuée à v_i par le coloriage c' est déterminée par les couleurs déjà attribuées aux sommets précédents v_j .

Comme c' est un 2-coloriage adéquat des sommets du graphe G , la valeur $a = c'(v_i)$ satisfait naturellement la condition $a \neq c'(v_j)$ pour tous les $j < i$ tels que $\{v_i, v_j\} \in E$. Si $c'(v_i) = 0$, alors a est nécessairement la valeur minimale satisfaisant cette condition.

Si $c'(v_i) = 1$, alors, en vertu de la définition de l'algorithme *BFS*, il existe un sommet déjà coloré v_j (avec $j < i$) connecté au sommet v_i . Notons qu'une telle connexion existe puisque, selon l'ordre des sommets obtenus via l'algorithme *BFS*, si le sommet v_i n'était connecté à aucun des sommets v_1, \dots, v_{i-1} , le graphe G ne serait pas connexe, ce qui contredirait notre hypothèse. Dès lors, puisque c' est un 2-coloriage adéquat des sommets du graphe G , nous devons nécessairement avoir $c'(v_j) = 0$ (car v_i et v_j sont adjacents et donc, ne peuvent pas avoir la même couleur). Or, par hypothèse de récurrence, nous savons que $c'(v_j) = c(v_j) = 0$, donc nous avons $c(v_j) = 0$. Par conséquent, si nous appliquons l'algorithme *BFSCol* au graphe G , cela implique que $c(v_i) = 1$, et nous ne disposons d'aucun autre choix possible étant donné que nous avons déjà assigné la couleur 0 précédemment.

Ainsi, par la définition de l'algorithme 4.4.2 *BFSCol*, nous avons

$$c(v_i) = \min\{a \in \mathbb{N} : a \neq c(v_j), \forall j < i \text{ tels que } \{v_i, v_j\} \in E\}. \quad (4.2)$$

Dès lors, puisque par hypothèse de récurrence, les membres de droite des équations (4.1) et (4.2) sont égaux, nous en tirons que $c(v_i) = c'(v_i)$.

2. Le coloriage des sommets de n'importe quel graphe peut être effectué en temps polynomial (et même linéaire) par rapport à la taille du graphe, à savoir en $\mathcal{O}(|V| + |E|)$, comme démontré au lemme 4.4.4.

Par conséquent, le processus de coloration des sommets d'un graphe 2-colorable peut être effectué en temps linéaire (et donc, polynomial) par rapport à la taille du graphe, grâce à l'efficacité de l'algorithme de partitionnement en composantes connexes et de l'algorithme *BFSCol* appliqué à chaque composante. Cela prouve donc que le problème

2COL appartient à la classe P, conformément à la définition 4.2.1. En effet, pour tout graphe donné, en exécutant l'algorithme *BFSCol* (qui, rappelons-le, fournit un coloriage valide des sommets d'un graphe, dans tous les cas), nous pouvons déterminer s'il est 2-colorable. Nous avons deux cas possibles. Premièrement, si le graphe G est 2-colorable, alors l'algorithme produit un coloriage valide avec deux couleurs en temps polynomial. Deuxièmement, si le graphe G n'est pas 2-colorable, alors l'algorithme produit un coloriage valide avec au moins trois couleurs et fournit la réponse en temps polynomial également. Par conséquent, à la fin de l'algorithme, nous sommes en mesure de répondre à la question "Le graphe G est-il 2-colorable?" par oui ou par non en temps polynomial. Ainsi, quel que soit le cas, nous sommes capables de décider en temps polynomial si le graphe G est 2-colorable ou non. \square

4.4.2 Le problème 3COL

Dans cette sous-section, nous démontrons que le problème 3COL appartient à la classe NPC. Pour ce faire, nous nous appuyons sur les travaux présentés dans la sous-section 8.2.3 et l'appendice B des livres [16, 27].

Théorème 4.4.6 (Stockmeyer, 1973). *Le problème 3COL est NP-complet.*

Démonstration. Dans le problème 3COL, un graphe nous est donné en entrée et nous devons déterminer s'il est 3-colorable.

Il est facile de voir que $3COL \in NP$. En effet, étant donné un 3-coloriage des sommets d'un graphe G , nous pouvons vérifier en temps linéaire par rapport à la taille du graphe G , à savoir en $\mathcal{O}(|V| + |E|)$, en appliquant un algorithme *BFSCol* si ce coloriage est un 3-coloriage des sommets du graphe G , en s'assurant que les extrémités de chaque arête du graphe ont une couleur différente et en s'assurant que seules trois couleurs sont utilisées.

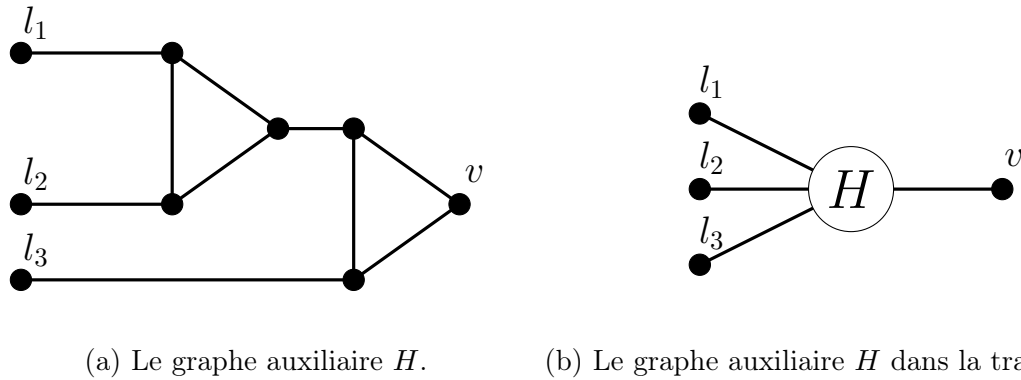
Pour prouver que le problème 3COL est NP-difficile, il suffit de montrer que $3SAT \leq 3COL$, en vertu de la définition 4.2.1 de la classe NPC et du théorème 4.3.4. À chaque instance ϕ de 3SAT (c'est-à-dire une FNC dont toutes les clauses sont de longueur 3), nous allons associer une instance $(G_\phi, 3)$ de 3COL, où $G_\phi = (V_\phi, E_\phi)$, de telle manière que :

1. $|G_\phi| = |V_\phi| + |E_\phi|$ soit polynomial par rapport à $|\phi|$;
2. ϕ est satisfaisable si et seulement si le graphe G_ϕ admet un 3-coloriage.

Soit $\phi \equiv c_1 \wedge \dots \wedge c_k$ une instance de 3SAT, où chaque $c_i = l_1 \vee l_2 \vee l_3$ est une clause de longueur 3, et où chaque l_1, l_2 et l_3 est une variable propositionnelle de ϕ ou sa négation. Notons u_1, \dots, u_l les variables propositionnelles de ϕ .

Nous cherchons à transformer cette instance ϕ en un graphe G_ϕ satisfaisant les deux conditions ci-dessus. Notons que cette démarche est illustrée à l'exemple 4.4.7.

Pour faire cette transformation, nous allons utiliser le graphe auxiliaire H , illustré à la figure 4.2a où $\{l_1, l_2, l_3\}$ sont les entrées et où v est la sortie. Lorsque nous utilisons H dans la transformation, nous l'attachons à un graphe plus grand au niveau des entrées, comme suggéré à la figure 4.2b.



(a) Le graphe auxiliaire H . (b) Le graphe auxiliaire H dans la transformation.

FIGURE 4.2 – Illustration du graphe auxiliaire H .

Considérons maintenant des 3-coloriages utilisant l'ensemble de couleurs $\{0, 1, 2\}$. Prouvons à présent les deux affirmations suivantes :

- (a) Dans tout 3-coloriage c d'un graphe tel que représenté à la figure 4.3, si $c(u) = c(v)$, alors $c(z) = c(u)$.

En effet, l'existence de l'arête verticale reliant les sommets a et b implique que les sommets a et b reçoivent les deux autres couleurs (différentes de $c(u)$). Donc, dans le triangle a, b, z , le sommet z reçoit la même couleur que les sommets u et v .

- (b) Pour tout x , il existe un 3-coloriage valide d'un graphe tel que représenté à la figure 4.3 donnant la couleur x au sommet z .

En effet, selon les couleurs attribuées aux sommets u et v , les sommets a et b doivent recevoir des couleurs différentes de $c(u)$ et $c(v)$ respectivement. De plus, en raison de l'existence de l'arête verticale reliant les sommets a et b , nous devons avoir $c(a) \neq c(b)$. Ainsi, pourvu que les couleurs des sommets a et b soient choisies de manière appropriée, il est toujours possible d'attribuer la couleur x au sommet z , sans enfreindre les règles de coloration.

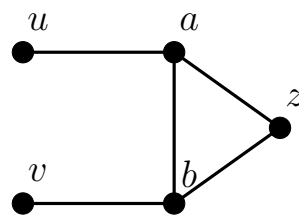


FIGURE 4.3 – Structure de graphes présente dans le graphe auxiliaire H .

Vu ces deux affirmations, nous pouvons en déduire que d'une part, chaque 3-coloriage des sommets de H dans lequel les entrées sont toutes colorées avec la couleur 0 attribue également la couleur 0 à v . D'autre part, si certaines entrées sont colorées avec des couleurs autres que la couleur 0, alors ce coloriage peut s'étendre à un 3-coloriage propre de H dans lequel la sortie v n'a pas la couleur 0.

À partir de toute instance ϕ de 3SAT, nous construisons un graphe G_ϕ ayant des sommets u_j et \bar{u}_j pour chaque variable u_j dans ϕ ; une copie H_i de H pour chaque clause c_i ; et deux sommets spéciaux a et b . Pour chaque j ($1 \leq j \leq l$), les sommets a, u_j, \bar{u}_j forment un triangle. Pour chaque clause c_i ($1 \leq i \leq k$), le sous-graphe H_i est attaché au

graphe formé jusqu'à présent par le biais des sommets correspondant aux littéraux dans c_i . Le sommet représentant le $j^{\text{ème}}$ littéral (qui, pour rappel, est une variable propositionnelle ou sa négation) dans la clause c_i joue le rôle de l_j dans H_i . Mis à part ces points d'attache, les graphes auxiliaires H_i sont mutuellement disjoints. Enfin, le sommet b est adjacent au sommet a et au sommet de sortie v_i pour chaque H_i .

Montrons que la taille de G_ϕ est proportionnelle à la longueur de ϕ . Nous avons :

$$\begin{aligned}
|G_\phi| &= |V_\phi| + |E_\phi| \\
&= (2l + 6k + 2) + (10k + 3l + 1 + k) \quad \text{par construction de } G_\phi \\
&= 5l + 17k + 3 \\
&\leq 15k + 17k + 3 \quad \text{puisque } l \leq 3k \text{ étant donné que dans le pire des cas,} \\
&\quad \text{nous mettons des variables différentes dans chaque clause} \\
&= 32k + 3 \\
&\leq \frac{32}{3}|\phi| + 3 \quad \text{car } |\phi| = 3k.
\end{aligned}$$

Ainsi, la taille de G_ϕ est polynomiale par rapport à la taille de ϕ .

Montrons à présent que ϕ est satisfaisable si et seulement si le graphe G_ϕ admet un 3-coloriage. Pour ce faire, commençons par démontrer la condition nécessaire. Supposons que ϕ soit satisfaisable, c'est-à-dire que ϕ admette une distribution des valeurs de vérité de ses l variables propositionnelles qui la rende vraie. Montrons que cette distribution fournit un 3-coloriage c des sommets du graphe G_ϕ . Lorsque la variable propositionnelle u_j est vraie dans la distribution, nous fixons $c(u_j) = 1$ et $c(\bar{u}_j) = 0$; sinon, nous fixons $c(u_j) = 0$ et $c(\bar{u}_j) = 1$. Comme ϕ admet une distribution qui la rend vraie (c'est-à-dire qui rend vraie chaque clause), pour chaque clause c_i , au moins l'un des littéraux l_j est vrai. Par conséquent, dans chaque graphe auxiliaire H_i , au moins l'un des littéraux $\{l_1, l_2, l_3\}$ est coloré avec la couleur 1 selon notre distribution. Par notre observation sur le graphe H , nous pouvons étendre le coloriage c de sorte que chaque sortie v_i ait une couleur différente de 0. Nous complétons alors le 3-coloriage en fixant $c(b) = 0$ car le sommet b est adjacent aux sorties v_i de H_i qui sont colorées avec les couleurs 1 ou 2, et $c(a) = 2$ car le sommet a est adjacent aux variables propositionnelles et à leurs négations, qui sont colorées avec les couleurs 0 ou 1. Ce faisant, nous avons établi que si ϕ est satisfaisable, alors le graphe G_ϕ admet un 3-coloriage.

Démontrons maintenant la condition suffisante. Supposons que le graphe G_ϕ possède un 3-coloriage c de ses sommets. Quitte à renommer les couleurs, nous pouvons supposer que $c(a) = 2$ et $c(b) = 0$. Puisque $c(a) = 2$, pour chaque variable, nous avons un littéral coloré avec la couleur 0 et un autre coloré avec la couleur 1. Considérons la distribution des valeurs de vérité dans laquelle la variable u_j est vraie lorsque $c(u_j)$ est 1, et fautive lorsque $c(u_j)$ est 0. Nous prétendons que cette distribution des valeurs de vérité rend ϕ satisfaisable. En effet, puisque $c(b) = 0$, chaque sortie v_i a une couleur différente de la couleur 0. En vertu de notre observation sur le graphe auxiliaire H , les sommets correspondant aux entrées dans H_i ne peuvent pas tous être colorés avec la couleur 0. Par conséquent, chaque clause contient au moins un littéral vrai. Ainsi, nous concluons que l'instance ϕ de 3SAT est satisfaisable. \square

Illustrons maintenant la construction du graphe G_ϕ de la preuve du théorème 4.4.6 à l'aide d'un exemple.

Exemple 4.4.7. Considérons l'instance de 3SAT suivante, constituée de quatre variables ($l = 4$) et de trois clauses ($k = 3$) :

$$\phi \equiv (u_1 \vee \bar{u}_2 \vee u_3) \wedge (u_2 \vee \bar{u}_3 \vee \bar{u}_2) \wedge (\bar{u}_1 \vee u_3 \vee \bar{u}_4).$$

Alors le graphe G_ϕ correspondant est le graphe représenté à la figure 4.4.

La distribution $(1, 1, 0, 0)$ pour les variables propositionnelles (u_1, u_2, u_3, u_4) rend ϕ vrai et le coloriage c défini par :

- $c(u_1) = c(u_2) = c(\bar{u}_3) = c(\bar{u}_4) = 1$;
- $c(\bar{u}_1) = c(\bar{u}_2) = c(u_3) = c(u_4) = 0$;
- $c(b) = 0$;
- $c(a) = 2$;
- $c(v_i) = 1$ ou 2 , pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, selon la couleur des voisins de v_i dans le graphe auxiliaire H_i correspondant ;

est un 3-coloriage des sommets du graphe G_ϕ .

Observons que ce 3-coloriage n'est pas unique, car il peut exister diverses configurations de couleur en fonction des couleurs attribuées aux voisins des sommets v_i de chaque graphe auxiliaire H_i .

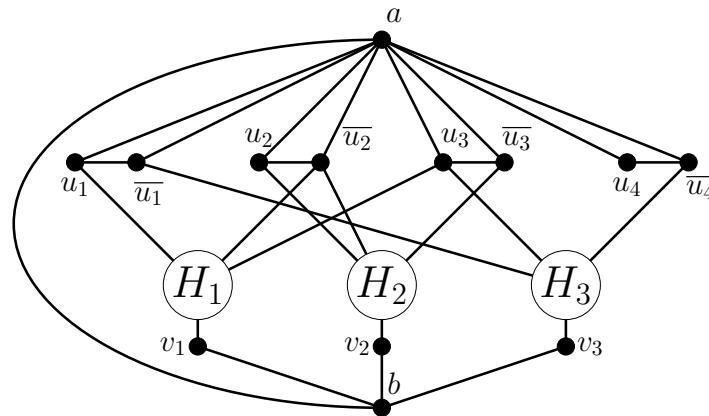


FIGURE 4.4 – Illustration de la construction du graphe G_ϕ .

4.4.3 Le problème 4COL

Dans cette sous-section, nous montrons que le problème 4COL appartient à la classe NPC. Pour ce faire, nous nous appuyons sur les notes de cours [4].

Théorème 4.4.8. *Le problème 4COL est NP-complet.*

Démonstration. Le problème 4COL consiste à déterminer si un graphe donné est 4-colorable.

Il est facile de voir que $4COL \in NP$, en utilisant un raisonnement similaire à celui utilisé précédemment pour démontrer que 3COL appartient à NP.

Pour prouver que le problème 4COL est NP-difficile, il suffit de montrer que $3COL \leq 4COL$, en vertu de la définition 4.2.1 de la classe NPC et du théorème 4.4.6. À chaque instance $G_{3COL} = (V_{3COL}, E_{3COL})$ de 3COL, nous allons associer une instance $G_{4COL} = (V_{4COL}, E_{4COL})$ de 4COL de telle manière que :

1. $|G_{4COL}|$ soit polynomial par rapport à $|G_{3COL}|$;
2. le graphe G_{3COL} admet un 3-coloriage si et seulement si le graphe G_{4COL} admet un 4-coloriage.

Soit G_{3COL} une instance de 3COL. Construisons un nouveau graphe G_{4COL} en ajoutant un unique sommet supplémentaire v et en le reliant à tous les sommets du graphe G_{3COL} .

La taille de cette construction est clairement proportionnelle à la taille de G_{3COL} . En effet, nous avons :

$$\begin{aligned} |G_{4COL}| &= |V_{4COL}| + |E_{4COL}| \\ &= (|V_{3COL}| + 1) + (|E_{3COL}| + |V_{3COL}|) \quad \text{par construction de } G_{4COL} \\ &= 2|V_{3COL}| + |E_{3COL}| + 1, \end{aligned}$$

ce qui confirme que la taille de G_{4COL} est polynomiale par rapport à la taille de G_{3COL} .

Montrons à présent que le graphe G_{3COL} admet un 3-coloriage si et seulement si le graphe G_{4COL} admet un 4-coloriage. Pour ce faire, commençons par démontrer la condition nécessaire. Supposons que le graphe G_{3COL} soit 3-colorable. Alors le graphe G_{4COL} est 4-colorable car le sommet ajouté v , connecté à tous les autres sommets du graphe, peut être coloré avec une quatrième couleur, tout en étant connecté uniquement à des sommets déjà colorés, chacun avec une des trois autres couleurs.

Démontrons maintenant la condition suffisante. Supposons que le graphe G_{4COL} soit 4-colorable. Comme le sommet v est connecté à tous les autres sommets du graphe, v doit être le seul sommet dans G_{4COL} à avoir une certaine couleur, tandis que tous les autres sommets doivent chacun être colorés avec l'une des trois autres couleurs disponibles. Par conséquent, le graphe G_{3COL} est 3-colorable. \square

Illustrons à présent la construction du graphe G_{4COL} de la preuve du théorème 4.4.8 à l'aide d'un exemple.

Exemple 4.4.9. Considérons l'instance G_{3COL} de 3COL, pour laquelle un 3-coloriage est illustré à la figure 4.5a. Alors le graphe G_{4COL} correspondant et le 4-coloriage associé sont représentés à la figure 4.5b.

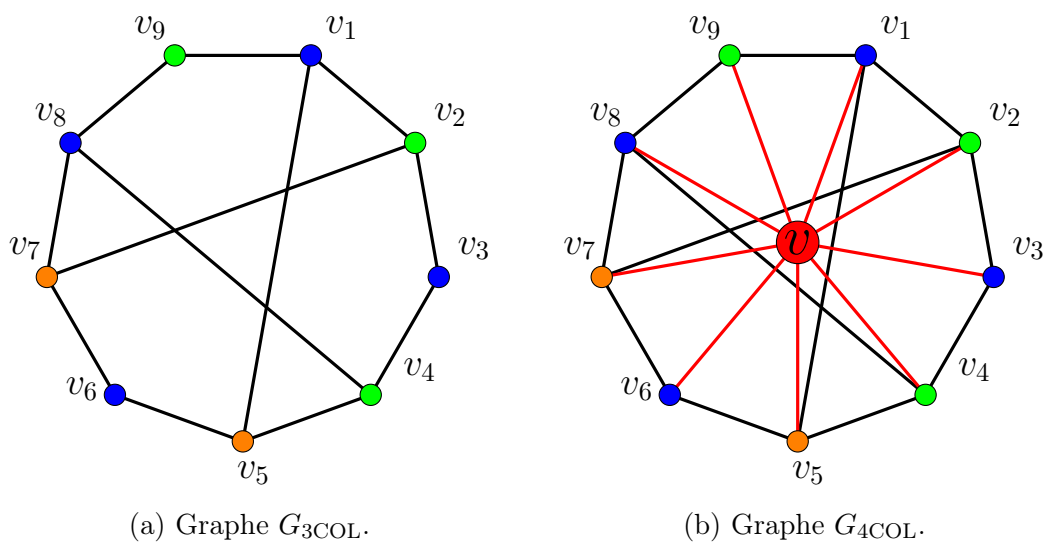


FIGURE 4.5 – Illustration de la construction du graphe G_{4COL} .

4.4.4 Retour au problème k COL

Dans les trois sous-sections précédentes, nous avons établi que le problème 2COL peut être résolu en temps polynomial, tandis que les problèmes 3COL et 4COL sont NP-complets. Mais que se passe-t-il pour le problème k COL, lorsque k est supérieur à quatre ? En suivant une méthode similaire à celle employée dans le théorème 4.4.8, nous pouvons identifier une transformation polynomiale du problème k COL vers le problème $(k+1)$ COL, pour tout $k \geq 3$. Ainsi, par récurrence, nous pouvons prouver que le caractère NP-complet du problème k COL entraîne également la NP-complétude du problème $(k+1)$ COL.

Par conséquent, étant donné que le nombre chromatique d'un graphe, qui est le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour colorer les sommets du graphe, est directement lié à la résolution du problème k COL, il en découle que déterminer le nombre chromatique d'un graphe est également NP-complet. En d'autres termes, la difficulté de résoudre le problème k COL se répercute sur la difficulté de déterminer le nombre chromatique du graphe.

Bibliographie

- [1] Abdelouahed Alla Hamou, *Coloration des graphes et applications*, Mémoire de fin d'études présenté en vue de l'obtention du diplôme de Master Sciences et Techniques à l'Université Sidi Mohamed Ben Abdellah, 2018, disponible via l'URL <<https://memoirepfe.fst-usmba.ac.ma/download/4972/pdf/4972.pdf>>, consulté le 1^{er} août 2023.
- [2] Kenneth Appel et Wolfgang Haken, *Every planar map is four colorable*. Vol. 98, Contemporary Mathematics, Providence, RI : American Mathematical Society, 1989.
- [3] Amanda Aydelotte, *An exploration of the chromatic polynomial*, Travail de fin de bachelier à l'Université d'État de Boise, 2017, disponible via l'URL <http://scholarworks.boisestate.edu/math_undergraduate_theses/7>, consulté le 5 février 2024.
- [4] Zhaojun Bai, *Problem 4 of Homework 8*, Notes pour le cours "Algorithm Design and Analysis" à l'Université de Californie à Davis, 2019, disponible via l'URL <<https://www.cs.ucdavis.edu/~bai/ECS122A/Notes/NPC3b.pdf>>, consulté le 30 avril 2024.
- [5] Padraic Bartlett, *Lecture 4 : The Chromatic Number*, Notes de cours à destination des étudiants du département de mathématique à l'Université de Californie à Santa Barbara, 2011, disponible via l'URL <https://web.math.ucsb.edu/~padraic/mathcamp_2011/introGT/MC2011_intro_to_GT_wk1_day4.pdf>, consulté le 27 août 2023.
- [6] Padraic Bartlett, *Lecture 5 : Mycielski Graphs*, Notes de cours à destination des étudiants du département de mathématique à l'Université de Californie à Santa Barbara, 2014, disponible via l'URL <https://web.math.ucsb.edu/~padraic/ucsb_2013_14/math137a_w2014/math137a_w2014_lecture5.pdf>, consulté le 30 octobre 2023.
- [7] Michael Bekos *et al.*, *Four pages are indeed necessary for planar graphs*, Journal of Computational Geometry **11** (2020), n° 1, p. 332-353.
- [8] George David Birkhoff, *A determinant formula for the number of ways of coloring a map*, Annals of Mathematics **14** (1912), p. 42-46.
- [9] John Adrian Bondy et Uppaluri Siva Ramachandra Murty, *Graph theory*. Vol. 244, Graduate Texts in Mathematics, Berlin : Springer, New York, 2008.
- [10] Alain Bretto, Alain Faisant et François Hennecart, *Éléments de théorie des graphes*, Collection IRIS, Paris : Springer, 2012.
- [11] Richard Anthony Brualdi, *Introductory combinatorics*, Elsevier North-Holland, 1977.

- [12] Émilie Charlier, *Algorithmique et calculabilité*, Notes de cours à l'Université de Liège, Année académique 2022-2023, disponible via l'URL <<http://www.discmath.ulg.ac.be/charlier/calculabilite.pdf>>, consulté le 30 avril 2024.
- [13] Gary Chartrand et Ping Zhang, *Chromatic graph theory*, Discrete Mathematics and its Applications, Chapman & Hall/CRC, 2009.
- [14] Peter Danziger, *Chapitre 7 : Colouring*, Notes de cours à destination des étudiants du cours "MTH 607 Graph Theory" du département de mathématique de l'Université métropolitaine de Toronto, 2008, disponible via l'URL <<https://math.ryerson.ca/~danziger/professor/MTH607/Handouts/colouring.pdf>>, consulté le 30 juillet 2023.
- [15] Reinhard Diestel, *Graph theory*, 5^e éd. Vol. 173, Graduate Texts in Mathematics, Berlin : Springer, 2017.
- [16] Alan Gibbons, *Algorithmic graph theory*, Cambridge University Press, 1994.
- [17] Ronald Lewis Graham, Donald Ervin Knuth et Oren Patashnik, *Concrete mathematics : a foundation for computer science*, Addison-Wesley Publishing Company, 1989.
- [18] June Huh, *Milnor numbers of projective hypersurfaces and the chromatic polynomial of graphs*, Journal of the American Mathematical Society **25** (2012), n° 3, p. 907-927.
- [19] Mohammadreza Jooyandeh *et al.*, *Planar hypohamiltonian graphs on 40 vertices*, Journal of Graph Theory **84** (2017), n° 2, p. 121-133.
- [20] Mark Muldoon, *Lecture 3 : Graph Colouring*, Notes de cours à destination des étudiants de l'Université de Manchester, 2020, disponible via l'URL <<https://personalpages.manchester.ac.uk/staff/mark.muldoon/Teaching/DiscreteMaths/LectureNotes/GraphColouring>>, consulté le 29 octobre 2023.
- [21] Seyedfakhredin Musavishavazi, *The Chromatic Polynomial of Graphs*, Mémoire de fin d'études présenté en vue de l'obtention du diplôme de Mathématiques Appliquées aux Médias Numériques à l'Université de Mittweida, 2018, DOI : 10.13140/RG.2.2.33057.94564, consulté le 16 juillet 2023.
- [22] Jan Mycielski, *Sur le coloriage des graphs*, Colloquium Mathematicum **3** (1955), p. 161-162.
- [23] Ronald Cedric Read, *An introduction to chromatic polynomials*, Journal of Combinatorial Theory **4** (1968), p. 52-71.
- [24] Michel Rigo, *Théorie des graphes*, Notes de cours à l'Université de Liège, Année académique 2009-2010, disponible via l'URL <http://www.discmath.ulg.ac.be/cours/main_graphes.pdf>, consulté le 23 juillet 2023.
- [25] Neil James Alexander Sloane, *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS)*.
- [26] Salil Vadhan, *Lecture 13 : Graph Coloring*, Notes de cours à destination des étudiants du cours "Introduction to Algorithms and their Limitations" à l'Université de Harvard, 19 octobre 2021, disponible via l'URL <<https://salil.seas.harvard.edu/files/salil/files/cs120-fall2021-lec13.pdf>>, consulté le 28 avril 2024.
- [27] Douglas Brent West, *Introduction to graph theory*, Prentice-Hall, 1996.
- [28] Gábor Wiener et Makoto Araya, *On planar hypohamiltonian graphs*, Journal of Graph Theory **67** (2011), n° 1, p. 55-68.

- [29] Robin James Wilson, *Newsletter no. 46 : Four colours suffice, or how to colour a map*, European Mathematical Society Newsletter (2002), n° 46, p. 15-19.