Mémoire

Auteur : Piraprez, Julie
Promoteur(s) : Rigo, Michel
Faculté : Faculté des Sciences
Diplôme : Master en sciences mathématiques, à finalité approfondie
Année académique : 2023-2024
URI/URL : http://hdl.handle.net/2268.2/19948

Faculté des Sciences
Département de Mathématique

Le théorème de Zeckendorf : généralisations et réciproques

Mémoire de fin d'études présenté en vue de l'obtention du titre de
Master en Sciences Mathématiques, à finalité approfondie

Année académique 2023-2024

Auteur :
Julie Piraprez

Promoteur :
Michel Rigo

Remerciements

"Cela semble toujours impossible jusqu'à ce que ce soit fait." - Nelson Mandela.

Parce que je n'y serais pas arrivée seule, je tiens à remercier :

- Mon promoteur, Michel Rigo, pour les nombreuses heures passées à répondre à mes questions, ses corrections et relectures, mais surtout pour sa disponibilité et ses précieux conseils ;
- Ma famille et mes amis, mais en particulier ma maman, mon frère et mon copain, pour leur soutien et pour m'avoir supportée durant mes nombreux coups de mou, remises en question et pertes de confiance ;
- Mes amis des maths, et plus particulièrement ma compatriote Fanny, sans qui les cours auraient été moins agréables ;
- Mes professeurs et leurs assistants, qui m'ont permis de me dépasser et d'évoluer au sein du B37.

Table des matières

Introduction

Un système de numération est un ensemble de règles permettant de représenter un ensemble de nombres et en particulier, les nombres entiers. Parmi ceux-ci, on retrouve le système décimal ou encore le système binaire. Le système décimal, utilisant la base dix, est le plus courant dans le monde occidental. Le système binaire, utilisant la base deux, est quant à lui surtout utilisé en informatique. Par après, des systèmes de numération plus généraux ont été introduits dont certains construits sur une suite linéaire récurrente. Dans ce travail, nous allons aborder un système de numération bien particulier, le système de numération de Zeckendorf.

Édouard Zeckendorf, né en 1901 à Liège, est un docteur en médecine et officier dans l'armée belge. Bien que, durant la guerre notamment, il consacra sa vie à sauver celle des autres, il étudia également les mathématiques en autodidacte.

Le Dr Zeckendorf publia un article dans la revue *The Fibonacci Quarterly* ainsi qu'une trentaine d'autres travaux dans Mathesis [1] et dans le *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*. Les sujets principaux de ces articles sont les nombres de Fibonacci et de Lucas, les nombres premiers, les équations quadratiques et les arrangements combinatoires de lettres.

La contribution mathématique la plus connue du Dr Zeckendorf est un théorème stipulant que chaque nombre naturel peut être exprimé, de façon unique, comme une somme de nombres de Fibonacci distincts et non consécutifs. Ces formes d'expression sont maintenant connues sous le nom de *représentations de Zeckendorf ou de Fibonacci*.

Il est à noter que ce théorème de Zeckendorf a été énoncé pour la première fois en 1951 par le mathématicien néérlandais C.G. Lekkerkerker dans un article intitulé *Voorstelling van natuurlijke getallen door een som van getallen van Fibonacci* [16]. Dans cet article, Lekkerkerker cite Zeckendorf comme étant l'auteur de ce résultat. Ce n'est qu'en 1972 que Zeckendorf publie, dans le *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, sa version du théorème dans un article intitulé *Représentation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas* [22]. Dans celui-ci, Zeckendorf déclare que le résultat et sa démonstration datent de 1939.

Les représentations de Zeckendorf ont été largement étudiées dans la littérature et ont donné naissance à de nombreux résultats et applications. Il s'agit de l'archétype d'un système de numération distinct des bases entières. Dans ce mémoire, c'est aux réciproques du théorème de Zeckendorf dont on va principalement s'intéresser. Ainsi, ce travail s'articule

1. *Mathesis : Recueil Mathématique* était une revue scientifique belge de mathématiques élémentaires, créée en 1881 par Paul Mansion et Joseph Jean Baptiste Neuberg.

essentiellement sur l'article *The weak converse of Zeckendorf's theorem* [4]. Dans cet article, le mathématicien américain Sungkon Chang donne plusieurs généralisations du théorème de Zeckendorf ainsi qu'une réciproque (faible) de chacune.

Présentons à présent l'articulation de ce mémoire. Dans le premier chapitre, nous introduisons les définitions et propriétés de base nécessaires à la compréhension du travail. Nous commençons par discuter des suites linéaires récurrentes. En particulier, le lecteur trouvera un théorème classique donnant la structure des solutions d'une relation de récurrence linéaire. Ensuite, nous abordons la suite de Fibonacci notée $(F_n)_{n\geq 1}$. Cette suite satisfait la relation de récurrence linéaire d'ordre 2

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \qquad \forall n \geq 1$$

avec comme conditions initiales $F_1 = 1$ et $F_2 = 2$. En particulier, nous rappelons que le quotient de deux nombres de Fibonacci consécutifs converge vers le nombre d'or. Pour finir, nous définissons les systèmes de numération positionnels et notamment le système de numération de Zeckendorf.

Dans le deuxième chapitre, nous nous intéressons au théorème de Zeckendorf. Comme déjà évoqué, celui-ci stipule que pour tout nombre naturel N, il existe un unique ensemble de d entiers naturels non nuls $i_1, \ldots, i_d$ avec $i_{j+1} \geq i_j + 2$ pour $j = 1, \ldots, d-1$ tel que,

$$N = \sum_{j=1}^{d} F_{i_j}.$$

Ensuite, nous nous intéressons à la somme des chiffres et nous démontrons, qu'en moyenne, le nombre total de 1 apparaissant dans les représentations de Zeckendorf de longueur n, se comporte asymptotiquement, à une constante multiplicative près, comme le nombre d'or à la puissance n.

Dans le troisième chapitre, nous répondons à la question *"Est-il possible de trouver d'autres suites de naturels pour lesquels, à l'instar du théorème de Zeckendorf, tout naturel possède une décomposition unique ?"*. En 1960, le mathématicien D. E. Daykin prouve, dans son article *Representation of Natural Numbers as Sums of Generalised Fibonacci Numbers* [6] que seule la suite de Fibonacci satisfait le théorème de Zeckendorf : Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'entiers positifs. Si tout entier positif se décompose de manière unique comme une somme de termes distincts et non consécutifs de la suite $(A_n)_{n\geq 1}$, alors $(A_n)_{n\geq 1}$ est la suite de Fibonacci. C'est ce qu'on appelle la *réciproque du théorème de Zeckendorf.*

Le quatrième chapitre a pour but de développer deux généralisations, données par Chang, du théorème de Zeckendorf.

En particulier, la première généralisation étend le résultat à d'autres conditions et à des suites linéaires récurrentes plus générales que la suite de Fibonacci. Comme par exemple, à la suite croissante $(Q_n)_{n\geq 1}$ de naturels définie par la relation de récurrence

$$Q_{n+2} = (n+1)\, Q_{n+1} + Q_n$$

pour tout $n \geq 1$ et ayant comme conditions initiales $Q_1 = 1$ et $Q_2 = 2$. Pour un tel exemple, on remarque que les coefficients des représentations ne sont pas bornés. Nous avons donc ici un cadre qui dépasse les systèmes positionnels classiques ayant des coefficients bornés. Ainsi, nous considérons une suite de naturels $(Q_n)_{n\geq 1}$ strictement croissante telle que $Q_1 = 1$. En toute généralité, tout Q_n s'exprime comme combinaison linéaire des termes précédents, $Q_{n-1} = \sum_{k\geq 1} \mu_k^n Q_k$. On associe ainsi à chaque n, une suite $(\mu_k^n)_{k\geq 1}$ à support fini. Pour une telle suite de suites $(\mu^n)_{n\geq 1}$, le théorème 4.1.38 détaille comment obtenir un ensemble $\mathcal{E}$ de suites admissibles (qui n'est autre que le langage de numération) pour lequel tout naturel se représente, de manière unique, par un élément de $\mathcal{E}$. En outre, la construction de cet ensemble $\mathcal{E}$ repose essentiellement sur l'étude des représentations maximales. C'est-à-dire, les décompositions des entiers n pour lesquels il existe k tel que $n + 1 = Q_k$. En base 10, ce rôle est joué par les mots de la forme $9 \cdots 9$.

La seconde généralisation étend le théorème de Zeckendorf aux entiers p-adiques, où p est un nombre premier. Ainsi, nous commençons par donner une brève introduction des nombres p-adiques. Ensuite, nous discutons un résultat similaire à ci-dessus pour lequel les suites considérées ne sont plus à support fini. Ainsi $(Q_n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante d'entiers p-adiques, où le caractère décroissant signifie que $|Q_k|_p > |Q_{k+1}|_p$ pour tout $k \geq 1$, où $|\cdot|_p$ est la norme p-adique. Ceci permet de donner naturellement du sens à des expressions telles que $\sum_{k\geq 1} \mu_k Q_k$. Comme dans le cadre des entiers, le théorème 4.2.20 s'intéresse à l'unicité de ce genre de décompositions. Nous aurons alors un contexte tout à fait différent et nous utiliserons la complétion des représentations étudiées précédemment.

Dans le dernier chapitre, nous abordons une réciproque faible des généralisations du théorème de Zeckendorf énoncées au chapitre 4. La réciproque faible de ces théorèmes de Zeckendorf généralisés est plus précise que la réciproque classique. En effet, celle-ci consiste à déterminer s'il existe une suite monotone satisfaisant le théorème. Ainsi, les principaux résultats du chapitre consistent à démontrer que l'unique suite monotone satisfaisant les théorèmes de Zeckendorf généralisés à d'autres suites récurrentes et aux p-adiques est la suite $(Q_n)_{n\geq 1}$ définie respectivement aux théorèmes 4.1.38 et 4.2.20.

Chapitre 1

Rappels

Ce premier chapitre vise à introduire les définitions et propriétés de base nécessaires à la compréhension de ce travail. Pour commencer, nous discutons les relations de récurrence linéaires et les suites satisfaisant de telles relations. En particulier, nous démontrons un théorème donnant la structure de celles-ci. Ensuite, nous définissons la suite de Fibonacci et démontrons que le quotient des termes consécutifs de la suite de Fibonacci converge vers le nombre d'or. Pour finir, nous abordons les systèmes de numération positionnels.

1.1 Suites linéaires récurrentes

Pour commencer, discutons des suites linéaires récurrentes dans $\mathbb{R}$. Le document principalement utilisé pour la rédaction de cette section est le cours de mathématiques discrètes de Michel Rigo [19].

Définition 1.1.1. Soit $p \geq 1$ un entier. Une suite $(A_n)_{n\geq 1}$ satisfait une *relation de récurrence d'ordre* p s'il existe une fonction $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ telle que

$$A_{n+p} = f(A_{n+p-1}, \dots, \mathrm{A}_n)$$

pour tout $n \geq 1$.

Définition 1.1.2. Une suite réelle $(A_n)_{n\geq 1}$ est dite *linéaire récurrente homogène (à coefficients constants) d'ordre* p si elle satisfait, pour tout $n \geq 1$, une *relation de récurrence linéaire homogène* de la forme

$$A_{n+p} = c_{p-1}A_{n+p-1} + \cdots + c_0 A_n \tag{1.1}$$

avec $c_{p-1}, \dots, c_0 \in \mathbb{R}$ et $c_0 \neq 0$. Une telle suite est entièrement déterminée par la donnée de ses p premiers termes $A_1, \dots, A_p$ et par la relation de récurrence.
A l'équation (1.1), on associe le polynôme de $\mathbb{R}[X]$

$$\chi(X) = X^p - c_{p-1}X^{p-1} - \cdots - c_1 X - c_0.$$

Ce polynôme de degré p est le *polynôme caractéristique* de la relation de récurrence.

Dans $\mathbb{C}$, le polynôme caractéristique se factorise complètement comme suit

$$\chi(X) = (X - \beta_1)^{m_1} \cdots (X - \beta_r)^{m_r}$$

où $\beta_1, \dots, \beta_r$ sont les zéros de χ de multiplicité respective $m_1, \dots, m_r$.

Rappelons que si β est un zéro de multiplicité m d'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, alors pour tout $i = 0, \ldots, m-1$, nous avons

$$(D^i P)(\beta) = 0 \quad \text{et} \quad (D^m P)(\beta) \neq 0.$$

Remarque 1.1.3. Notons que 0 n'est jamais zéro du polynôme caractéristique. En effet, si c'était le cas, cela reviendrait à "shiffter" la suite linéaire récurrente. Par exemple, considérons la relation de récurrence linéaire

$$x_{n+3} = x_{n+2} + x_{n+1} \quad \forall n \geq 1, \tag{1.2}$$

dont le polynôme caractéristique est

$$X^3 - X^2 - X = X(X^2 - X - 1).$$

Ainsi, 0 est zéro du polynôme caractéristique. Dans ce cas, x_4 est complètement déterminé par x_3 et x_2. Cependant, puisque x_1 peut prendre n'importe quelle valeur, cela revient au même d'étudier la relation (1.2) shifftée d'un rang, à savoir la relation

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \quad \forall n \geq 1.$$

Le théorème suivant donne la structure des solutions d'une équation linéaire récurrente homogène.

Théorème 1.1.4 (Théorème de structure). *Si $\chi(X) = \prod_{j=1}^{r}(X - \beta_j)^{m_j}$, alors pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$ et tout $t < m_j$, la suite*

$$(n^t \beta_j^n)_{n \geq 1}$$

est une solution de l'équation linéaire homogène

$$x_{n+p} = c_{p-1} x_{n+p-1} + \cdots + c_0 x_n \tag{1.3}$$

où $c_{p-1}, \ldots, c_0 \in \mathbb{R}$. De plus, l'ensemble des suites satisfaisant la relation (1.3) *forme une base de l'ensemble des solutions.*

Démonstration. Pour commencer, montrons que la suite $(n^t \beta_j^n)_{n \geq 1}$ est une solution de l'équation (1.3). Pour cela, il suffit de montrer que

$$(n+p)^t \beta_j^{n+p} = \sum_{i=0}^{p-1} c_i (n+i)^t \beta_j^{n+i} \quad \forall$$

pour tout $n \geq 1$.

Soit $s \in \mathbb{N}$, posons

$$P_s(X) = X(X-1)\cdots(X-s+1).$$

Puisque ce polynôme est de degré s et s'annule en $0, 1, \ldots, s-1$, les polynômes $P_0 = 1, P_1, \ldots, P_t$ forment une base de l'ensemble des polynômes de degré au plus t (car ils forment une partie génératrice et sont en nombre égal à la dimension de l'espace). Ainsi, puisque le polynôme $(X+n)^t$ est un élément de cet ensemble, il existe des coefficients $b_0, \dots, b_t$ tels que

$$(X+n)^t = \sum_{l=0}^{t} b_l P_l(X). \tag{1.4}$$

Or, par hypothèse, β_j est zéro de χ de multiplicité $m_j > t$. Ainsi,

$$(D^l\chi)(\beta_j) = 0 \tag{1.5}$$

pour tout $l \in \{0, \dots, t\}$. Ensuite, rappelons que

$$\chi(X) = X^p - \sum_{i=0}^{p-1} c_i X^i.$$

Ainsi, pour $0 \leq l \leq t$, on a

$$D^l\chi = \frac{p!}{(p-l)!}X^{p-l} - \sum_{i=l}^{p-1} c_i \frac{i!}{(i-l)!}X^{i-l}.$$

Alors, en évaluant cette dérivée en β_j et en utilisant (1.5), on obtient

$$(D^l\chi)(\beta_j) = P_l(p)\beta_j^{p-l} - \sum_{i=l}^{p-1} c_i P_l(i)\beta_j^{i-l} = 0.$$

Ensuite, en multipliant cette relation par β_j^l, on a

$$P_l(p)\beta_j^p = \sum_{i=l}^{p-1} c_i P_l(i)\beta_j^i.$$

En outre, puisque $P_l(i) = 0$ si $0 \leq i < l$ par définition de P, nous pouvons écrire

$$P_l(p)\beta_j^p = \sum_{i=0}^{p-1} c_i P_l(i)\beta_j^i.$$

Finalement, en utilisant (1.4) et cette dernière relation, il vient

$$\begin{aligned}
(n+p)^t\beta_j^{n+p} &= \sum_{l=0}^{t} b_l P_l(p)\beta_j^{n+p} \\
&= \sum_{l=0}^{t} b_l \beta_j^n \left(P_l(p)\beta_j^p\right) \\
&= \sum_{l=0}^{t} b_l \beta_j^n \sum_{i=0}^{p-1} c_i P_l(i)\beta_j^i \\
&= \sum_{i=0}^{p-1} c_i \left(\sum_{l=0}^{t} b_l P_l(i)\right)\beta_j^{n+i} \\
&= \sum_{i=0}^{p-1} c_i (n+i)^t \beta_j^{n+i},
\end{aligned}$$

comme voulu.

Montrons maintenant que l'ensemble des suites satisfaisant la relation (1.3) forme une base de l'ensemble des solutions. Puisque l'ensemble de ces suites est un sous-espace vectoriel isomorphe à l'ensemble des conditions initiales $\mathbb{R}^p$, ce sous-espace vectoriel est de dimension p. Ainsi, le nombre de solutions données par le théorème 1.1.4 étant égal à la dimension, il suffit de montrer l'indépendance linéaire.

En outre, en exploitant l'isomorphisme entre l'ensemble $\mathbb{R}^p$ des conditions initiales et l'ensemble des solutions de la relation (1.3), pour montrer que les suites

$$(\beta_1^n)_{n\geq 1}, (n\beta_1^n)_{n\geq 1}, \ldots, (n^{m_1-1}\beta_1^n)_{n\geq 1}, \ldots, (\beta_r^n)_{n\geq 1}, (n\beta_r^n)_{n\geq 1}, \ldots, (n^{m_r-1}\beta_r^n)_{n\geq 1}$$

sont linéairement indépendantes, il suffit de montrer que les p-uples

$$\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_1^2\\ \vdots\\ \beta_1^p\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\beta_1\\ 2\beta_1^2\\ \vdots\\ p\beta_1^p\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}\beta_1\\ 2^{m_1-1}\beta_1^2\\ \vdots\\ p^{m_1-1}\beta_1^p\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}\beta_r\\ \beta_r^2\\ \vdots\\ \beta_r^p\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}\beta_r\\ 2^{m_r-1}\beta_r^2\\ \vdots\\ p^{m_r-1}\beta_r^p\end{pmatrix}$$

sont linéairement indépendants. Et, ceci a lieu si et seulement si

$$\det(n^t\beta_j^n)$$

où $n = 1, \ldots, p$, $j = 1, \ldots, r$ et $t = 0, \ldots, m_j - 1$, est non nul. Or, en utilisant le déterminant de Vandermonde, ce déterminant devient

$$\prod_{j=1}^{r} 0!1!\ldots(m_j-1)!\beta_j^{m_j(m_j-1)/2}\prod_{j<i}(\beta_j-\beta_i)^{m_jm_i}.$$

Par conséquent, par la remarque 1.1.3 et puisque les zéros sont distincts, le déterminant est effectivement non nul.

Ainsi, l'ensemble des solutions de la relation (1.3) forme une base de l'ensemble des solutions.

□

Voici un exemple d'application du théorème de structure.

Exemple 1.1.5. Considérons la relation de récurrence linéaire

$$x_{n+3} = 8x_{n+2} - 21x_{n+1} + 18x_n, \quad \forall n \geq 1$$

avec les conditions initiales $x_1 = 0$, $x_2 = 7$, $x_3 = 41$. Le polynôme caractéristique de cette relation est donné par

$$\chi(X) = X^3 - 8X^2 + 21X - 18 = (X-3)^2\,(X-2).$$

Ainsi, puisque les zéros de ce polynôme sont 3 (de multiplicité 2) et 2 (de multiplicité 1), nous avons

$$x_n = (an+b)\,3^n + c\,2^n,$$

où a, b et c sont des constantes à déterminer. À l'aide des conditions initiales, nous obtenons

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 7 \\ x_3 = 41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + c = 0 \\ 3a + 3b + 2c = 7 \\ 18a + 9b + 4c = 41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -1. \end{cases}$$

Ainsi, par le théorème 1.1.4, nous obtenons que pour tout $n \geq 1$,

$$x_n = (2n + 1)\, 3^n - 2^n.$$

1.2 La suite de Fibonacci

Dans ce travail, nous nous intéresserons surtout à l'une des suites linéaires récurrentes d'ordre 2 les plus connues, il s'agit de la *suite de Fibonacci*.

Définition 1.2.1 (Suite de Fibonacci). *La suite de Fibonacci*, notée $(F_n)_{n\geq 1}$, est la suite linéaire récurrente d'ordre 2 dont les premiers termes sont

$$(F_n)_{n\geq 1} = 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots.$$

Cette suite satisfait la relation de récurrence linéaire

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \qquad \forall n \geq 1$$

avec comme conditions initiales $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$ et dont le polynôme caractéristique est

$$X^2 - X - 1.$$

En outre, les termes de cette suite sont appelés *les nombres de Fibonacci*.

On peut cependant prendre d'autres conditions initiales. Par exemple, en prenant $x_1 = 2$ et $x_2 = 1$, nous obtenons la suite

$$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, \ldots.$$

Cette suite, notée $(L_n)_{n\geq 1}$, est appelée la *suite de Lucas* et les termes qui la composent sont appelés *les nombres de Lucas*.

Le résultat suivant lie la suite de Fibonacci au nombre d'or et nous sera utile dans la suite.

Proposition 1.2.2. *La suite* $\left(\dfrac{F_{n+1}}{F_n}\right)_{n\geq 1}$ *converge vers le nombre d'or* $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Démonstration. Pour rappel, le polynôme caractéristique de la relation de récurrence satisfaite par la suite de Fibonacci est donné par

$$\chi(X) = X^2 - X - 1.$$

Puisque les zéros de ce polynôme sont

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

nous obtenons par le théorème 1.1.4 que, pour tout $n \geq 1$,

$$F_n = a\phi^n + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

où a et b sont des constantes. Afin de s'assurer que $a \neq 0$, nous allons déterminer a et b. Pour cela, nous utilisons les conditions initiales et résolvons le système suivant

$$\left\{\begin{array}{l} F_1 = 1 \\ F_2 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} a\phi + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) & = 1 \\ a\phi^2 + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 & = 2. \end{array}\right.$$

En introduisant le code suivant sur Mathematica

```
Solve[{a*((1+Sqrt[5])/2)+b*((1-Sqrt[5])/2) == 1,
résous            racine carrée                racine carrée
   a*((1+Sqrt[5])/2)^2+b*((1-Sqrt[5])/2)^2 == 2},{a,b}]
              racine carrée            racine carrée
```

$$\text{Out[2]= } \left\{\left\{a \to \frac{1}{10}\left(5+\sqrt{5}\right),\ b \to -\frac{5-3\sqrt{5}}{5\left(-1+\sqrt{5}\right)}\right\}\right\}$$

nous obtenons directement les solutions

$$a = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \quad \text{et} \quad b = \frac{5-3\sqrt{5}}{5-5\sqrt{5}}.$$

Ainsi, nous avons bien $a \neq 0$.

Remarquons, en particulier, que la formule

$$F_n = \left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)\phi^n + \left(\frac{5-3\sqrt{5}}{5-5\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

est l'analogue à *la formule de Binet* pour laquelle les conditions initiales sont $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$.

Ensuite, on a

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{a\phi^{n+1} + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{a\phi^n + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}.$$

Or, puisque

$$\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| < 1,$$

nous avons

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \longrightarrow 0 \quad \text{si } n \longrightarrow +\infty.$$

Ainsi, nous obtenons

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\phi^{n+1}}{\phi^n} = \phi,$$

comme voulu. □

1.3 Systèmes de numération positionnels

Dans cette section, afin de représenter les entiers, nous allons étudier les systèmes de numération positionnels, notés SNP. Parmi les SNP on retrouve notamment le système de numération de Zeckendorf (ou de Fibonacci) dont nous allons beaucoup parler dans ce travail.

Les systèmes de numération positionnels se basent sur une suite strictement croissante d'entiers $U = (U_n)_{n\geq 1}$, telle que

- $U_1 = 1$,
- $\left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right)_{n\geq 1}$ est borné par une constante C,

Dans un tel système de numération, tout entier positif se décompose de manière unique par l'algorithme d'Euclide, appelé *algorithme glouton*. Considérons un entier positif $N \in \mathbb{N}$. Puisque $(U_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante, il existe un unique $l \in \mathbb{N}$ tel que

$$U_l \leq N < U_{l+1}.$$

En effectuant la division euclidienne de N par U_l et en itérant sur le reste de cette division, nous pouvons définir la suite de restes $(r_i)_{i\geq 1}$ comme suit

$$\begin{aligned}
N &= c_l U_l + r_l && \text{avec } r_l < U_l \\
r_l &= c_{l-1} U_{l-1} + r_{l-1} && \\
&\vdots && \\
r_3 &= c_2 U_2 + r_2 && \\
r_2 &= c_1 U_1 + r_1 && \text{où } r_1 = 0 \text{ car } U_1 = 1.
\end{aligned}$$

Cet algorithme permet de décomposer l'entier N de manière unique comme suit

$$N = \sum_{i=1}^{l} c_i U_i,$$

avec $c_l \neq 0$. Dans ce cas, le mot $c_l \cdots c_1$ est appelé la *U-représentation normalisée* de N et est notée $\mathrm{rep}_U(N)$. En outre, le nombre 0 est représenté par le mot vide ε et l'ensemble $\mathrm{rep}_U(\mathbb{N})$ est appelé le *langage de la numération.*

On définit également la *U-valeur* d'un mot $w = w_l \cdots w_1$ sur $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, notée $\mathrm{val}_U(w)$, par

$$\begin{aligned} \mathrm{val}_U(\cdot) : \mathbb{N} \setminus \{0\} &\to \mathbb{N} \\ w = w_l \cdots w_1 &\mapsto \mathrm{val}_U(w) = \sum_{i=1}^{l} w_i U_i \end{aligned}$$

En outre, si la U-valeur d'un mot w est égale à un entier N, alors le mot w est une U-représentation de N, pas forcément la même que la U-représentation normalisée de N.

Remarque 1.3.1.

- Puisque le quotient $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ est borné par C, les coefficients c_i appartiennent à un alphabet minimal Σ_U inclus dans $\{0, \ldots, C\}$. Ceci implique notamment que l'alphabet du langage de la numération est fini.
- Si la suite U satisfait une relation de récurrence linéaire à coefficients entiers, le système de numération est dit *linéaire*.
- Soit $k \geq 2$ un entier. Si la suite U est la suite $(k^n)_{n \geq 1}$, le système de numération obtenu est le *système de numération en base entière* k. Dans ce contexte, la k-représentation normalisée d'un entier N est dénotée par $\mathrm{rep}_k(N)$ et la valeur d'un mot w sur $\Sigma_k := \{0, \ldots, k-1\}$ est dénotée par $\mathrm{val}_k(N)$.

En 1994, J. Shallit [20] donna le résultat suivant.

Théorème 1.3.2. *Soit $U = (U_n)_{n \geq 1}$ un SNP comme défini ci-dessus. Si $\mathbb{N}$ est $U-reconnaissable$, i.e. $\mathrm{rep}_U(\mathbb{N})$ est un langage régulier, alors la suite $(U_n)_{n \geq 1}$ satisfait une relation de récurrence linéaire à coefficients entiers (constants).*

Notons qu'il existe également, sous certaines conditions, une réciproque de ce théorème comme l'ont démontré Loraud en 1995 [17] et Hollander en 1998 [11].

Un des systèmes de numération positionnels linéaires les plus connus est le système de numération de Fibonacci, aussi appelé *système de numération de Zeckendorf*.

Ce système de numération est construit sur la suite de Fibonacci $F = (F_n)_{n \geq 1}$, définie comme suit

$$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 2 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \forall n \geq 1. \end{cases}$$

Notons que cette suite est bien strictement croissante et puisque la suite

$$\left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right)_{n \geq 1}$$

converge vers le nombre d'or comme nous l'avons montré à la proposition 1.2.2, le quotient $\dfrac{F_{n+1}}{F_n}$ est bien borné.

En outre, comme nous le verrons dans le chapitre 2, Zeckendorf [22] prouva que $\Sigma_F = \{0, 1\}$ et que le langage de numération est donné par $\mathrm{rep}_F(\mathbb{N}) = 1\{0, 01\}^* \cup \{\varepsilon\}$, c'est-à-dire l'ensemble des mots sur $\{0, 1\}$ qui ne contiennent pas le facteur 11 et qui ne commencent pas par 0.

Nous avons par exemple que la F-représentation normalisée, aussi appelée *représentation de Zeckendorf*, du nombre 17 est

$$\mathrm{rep}_F(17) = 100101$$

puisque $17 = 13 + 3 + 1$.

Chapitre 2

Le théorème de Zeckendorf

Dans ce deuxième chapitre, nous allons discuter du *théorème de Zeckendorf*. Ce théorème a été énoncé pour la première fois en 1951 par le mathématicien néérlandais C.G. Lekkerkerker dans un article intitulé *Voorstelling van natuurlijke getallen door een som van getallen van Fibonacci* [16]. Dans cet article, Lekkerkerker cite le docteur belge Edouard Zeckendorf comme étant l'auteur de ce résultat. Ce n'est alors qu'en 1972 que Zeckendorf donne sa propre version du théorème dans un article du *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège* [22]. Dans ce dernier, Zeckendorf déclara que son énoncé ainsi que sa démonstration datent de 1939.

Par la suite, de nombreux mathématiciens comme Keller [13], Brown [1], Daykin [6] ou plus récemment Chang [4] ont généralisé ce théorème. Certaines de ces généralisations seront présentées dans le chapitre 4.

Pour commencer, nous allons démontrer la version classique du théorème. Bien sûr ce résultat peut être vu comme un cas particulier des généralisations étudiées dans le chapitre 4. Cependant, pour des raisons historiques et de présentation pédagogique, nous avons décidé de commencer par cette version classique. Ensuite, nous obtiendrons une formule asymptotique comptant le nombre de 1 apparaissant dans les représentations de Zeckendorf de longueur n.

2.1 Le théorème de Zeckendorf

Considérons la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\geq 1}$ comme donnée à la définition 1.2.1. Le théorème de Zeckendorf assure alors que chaque entier positif N peut être représenté de manière unique comme la somme de termes distincts et non consécutifs de $(F_n)_{n\geq 1}$.

Théorème 2.1.1 (Théorème de Zeckendorf)**.** *Pour tout nombre naturel N, il existe un unique ensemble d'entiers naturels non nuls $i_1, \ldots, i_d$ ($d \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$) avec $i_{j+1} \geq i_j + 2$ pour $j = 1, \ldots, d-1$ tel que,*

$$N = \sum_{j=1}^{d} F_{i_j}.$$

Cette décomposition est appelée la décomposition de Zeckendorf de N.

Exemple 2.1.2. La décomposition de Zeckendorf de 64 est

$$64 = 55 + 8 + 1.$$

En outre, remarquons qu'il existe d'autres façons de représenter 64 comme la somme de nombres de Fibonacci :

$$\begin{aligned}
64 &= 55 + 5 + 3 + 1 \\
64 &= 34 + 21 + 8 + 1 \\
64 &= 34 + 21 + 5 + 3 + 1 \\
64 &= 34 + 13 + 8 + 5 + 3 + 1
\end{aligned}$$

cependant, il ne s'agit pas de décompositions de Zeckendorf puisque 34 et 21 sont des nombres de Fibonacci consécutifs, tout comme 5 et 3.

Remarque 2.1.3. Pour tout entier positif donné, sa décomposition de Zeckendorf peut être trouvée en utilisant l'algorithme glouton suivant : Soit $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Considérons F_k le plus grand nombre de Fibonacci tel que

$$F_k \leq N.$$

Si $N - F_k \neq 0$, on réitère avec $N - F_k$. Notons qu'en procédant de la sorte nous ne soustrayons jamais des nombres de Fibonacci consécutifs (disons F_k puis F_{k-1}) car sinon, nous aurions pu soustraire leur somme $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ pour commencer. De même nous ne soustrayons jamais le même nombre de Fibonacci deux fois car $F_{k+1} < 2 - F_k$.

Afin de démontrer le théorème 2.1.1, nous aurons besoin d'un lemme.

Lemme 2.1.4. *Pour tout ensemble d'entiers naturels non nuls* $i_1, \ldots, i_d$ *(*$d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$*) tel que* $i_{j+1} \geq i_j + 2$ *pour* $j = 1, \ldots, d-1$*, on a*

$$\sum_{j=1}^{d} F_{i_j} < F_{i_d+1}.$$

Démonstration. Procédons par récurrence sur la valeur du plus grand indice $i_d \geq 1$.

- **Cas de base** : Si $i_d = 1$, nous avons bien $F_1 = 1 < F_2 = 2$. De même, si $i_d = 2$, nous avons bien $F_2 = 2 < F_3 = 3$. De plus, si $i_d = 3$, la plus grande somme que nous pouvons construire est $F_3 + F_1 = 3 + 1 = 4 < 5 = F_4$.
- **Induction** : Supposons que pour toute suite d'indices $i_1 < \cdots < i_d - 1$ vérifiant la condition de Zeckendorf, on a

$$\sum_{j=1}^{d-1} F_{i_j} + F_{i_d-1} < F_{i_d}.$$

Considérons à présent une suite d'indices dont le plus grand élément est i_d

$$k_1 < \cdots < k_p = i_d$$

vérifiant la condition de Zeckendorf. Puisque $k_p = i_d$, on a

$$\sum_{l=1}^{p} F_{k_l} = \sum_{l=1}^{p-1} F_{k_l} + F_{i_d}.$$

Et, puisque $k_{p-1} \leq i_d - 2$, par hypothèse de récurrence, nous avons

$$\sum_{l=1}^{p-1} F_{k_l} < F_{k_{p-1}+1} \leq F_{i_d-1}$$

où la dernière égalité découle de la croissance de la suite de Fibonacci. Ainsi,

$$\sum_{l=1}^{p} F_{k_l} < F_{i_d-1} + F_{i_d} = F_{i_d+1}$$

comme voulu.

$\square$

Démontrons maintenant le théorème 2.1.1.

Preuve du théorème de Zeckendorf. Afin de démontrer le résultat, nous procédons en deux temps en commençant par démontrer l'existence pour ensuite démontrer l'unicité.
Existence. Démontrons que tout entier positif N possède une décomposition de Zeckendorf. Pour ce faire, nous procédons par récurrence sur $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

- **Cas de base** : Pour $N = 1, 2, 3$, la conclusion est directe puisqu'il s'agit de nombres de Fibonacci. En outre, si $N = 4$, nous pouvons écrire $N = 1 + 3$, où 1 et 3 sont bien des nombres de Fibonacci distincts et non consécutifs.
- **Induction** : Considérons $N \geq 1$, supposons que tous les naturels non nuls strictement inférieur à N possèdent une décomposition de Zeckendorf et montrons qu'il en existe une pour N.

  Si N est lui-même un nombre de Fibonacci, disons F_r, alors la décomposition $N = F_r$ convient. Dans le cas contraire, supposons que F_r ($r \geq 1$) soit le plus grand nombre de Fibonacci inférieur ou égal à N et posons $M = N - F_r$. Alors, puisque l'entier M est strictement inférieur à N, il admet, par hypothèse de récurrence, une décomposition de Zeckendorf. En d'autres termes, il existe un ensemble d'entiers naturels non nuls $i_1, \ldots, i_d$ ($d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) avec $i_{j+1} \geq i_j + 2$ pour $j = 1, \ldots, d-1$ tel que,

  $$M = \sum_{j=1}^{d} F_{i_j}.$$

  Ainsi, nous avons

  $$N = \sum_{j=1}^{d} F_{i_j} + F_r.$$

Il suffit maintenant de montrer que les nombres de Fibonacci F_{i_d} et F_r ne sont pas consécutifs. Nous avons

$$F_r + F_{i_d} \leq F_r + M = N < F_{r+1} = F_r + F_{r-1}$$

et donc

$$F_{i_d} < F_{r-1}.$$

Ainsi, F_{i_d} et F_r ne sont pas consécutifs et nous pouvons conclure à l'existence d'une décomposition de Zeckendorf.

Démontrons maintenant l'unicité.

Unicité. Pour démontrer l'unicité de la décomposition de Zeckendorf, nous procédons également par récurrence sur $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

- **Cas de base** : Pour $N = 1$, la seule décomposition valide est $N = F_1$. Pour $N = 2$ (resp. $N = 3$), la seule décomposition valide est $N = F_2$ (resp. $N = F_3$). Pour $N = 4$, la seule décomposition valide est $N = F_1 + F_3$.
- **Induction** : Soit $N \geq 1$. Supposons avoir l'unicité de la décomposition pour tout naturel non nul strictement inférieur à N et montrons l'unicité pour N. Tout d'abord, supposons avoir deux décompositions de Zeckendorf de N :

$$N = \sum_{j=1}^{d} F_{i_j} = \sum_{j=1}^{p} F_{k_j}.$$

Considérons ensuite F_{i_d} et F_{k_p}, les nombres de Fibonacci maximaux des deux décompositions et montrons que $F_{i_d} = F_{k_p}$. Pour ce faire, procédons par l'absurde et supposons sans perte de généralité que $F_{i_d} < F_{k_p}$. Ainsi, par le lemme 2.1.4, nous obtenons

$$N = \sum_{j=1}^{d} F_{i_j} < F_{i_d+1} \leq F_{k_p} \leq \sum_{j=1}^{p} F_{k_j} = N,$$

ce qui est absurde. Par conséquent, $F_{i_d} = F_{k_p}$ donc si $N = F_{i_d}$, alors N se décompose de manière unique. Sinon,

$$\sum_{j=1}^{d-1} F_{i_j} = \sum_{j=1}^{p-1} F_{k_j} = N - F_{i_d}.$$

Par hypothèse de récurrence, $N - F_{i_d} < N$ admet une unique décomposition de Zeckendorf et donc $d - 1 = p - 1$ et $F_{i_j} = F_{k_j}$ pour tout $j \in \{1, \ldots, d-1\}$. Ainsi, N se décompose de manière unique ce qui conclut la démonstration de l'unicité de la décomposition de Zeckendorf.

□

Notons que le docteur Zeckendorf démontra également que tout nombre naturel N peut être représenté par une somme de *nombres de Lucas* distincts non consécutifs. Cependant, l'unicité d'une telle décomposition n'est pas satisfaite puisqu'elle n'est en particulier pas unique pour les nombres $L_{2j+1} + 1$ [22]. Par exemple, pour $j = 1$, la décomposition du nombre $L_3 + 1 = 5$ n'est pas unique puisque $5 = L_1 + L_3 = 2 + 3$ et $5 = L_2 + L_4 = 1 + 4$.

Le résultat suivant est une réécriture du théorème 2.1.1 et confirme les dires sur le système de numération de Zeckendorf énoncés dans la section 1.3.

Corollaire 2.1.5. *Tout entier strictement positif N peut être représenté de manière unique par le mot binaire $\mathrm{rep}_F(N) = c_d c_{d-1} \cdots c_1$ tel que*

- $c_j \in \{0, 1\} \quad \forall j < d$,
- $c_d = 1$,
- $c_j = 1 \Rightarrow c_{j-1} = 0 \quad \forall j \in \{2, \ldots, d\}$,
- $N = \sum_{j=1}^{d} c_j F_j$.

Cette représentation est appelée la représentation de Zeckendorf de N.

Exemple 2.1.6. La représentation de Zeckendorf de 64 est

$$\mathrm{rep}_F(64) = 100010001.$$

En effet, nous avions constaté à l'exemple 2.1.2 que

$$64 = 55 + 8 + 1 = F_9 + F_5 + F_1.$$

La section suivante donne une propriété concernant ces représentations de Zeckendorf.

2.2 Nombre de 1 dans les représentations de Zeckendorf

Dans cette section, nous nous intéressons au comportement du nombre total de 1 apparaissant dans les représentations de Zeckendorf de longueur n.

Par exemple, si nous comptons le nombre de 1 dans les représentations de Zeckendorf de longueur 5

$$\begin{gathered} 10000 \\ 10001 \\ 10010 \\ 10100 \\ 10101, \end{gathered}$$

nous constatons qu'il y en a 10.

La proposition suivante donne le comportement moyen du nombre total de 1 dans les représentations de Zeckendorf de longueur n.

Proposition 2.2.1. *Si $K(n)$ est le nombre total de 1 apparaissant dans les représentations de Zeckendorf de longueur n, alors, en moyenne, il se comporte comme :*

$$\frac{K(n)}{n} \sim \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{10} \right) \phi^n.$$

Avant de démontrer la proposition 2.2.1, rappelons quelques notions de théorie des automates

Définition 2.2.2. Un *automate fini déterministe* (AFD) est un quintuple

$$\mathcal{A} = (Q, q_0, F, \Sigma, \delta),$$

où

- $Q = \{q_0, \ldots, q_l\}$ est l'ensemble (fini) des états de l'automate $\mathcal{A}$;
- $q_0 \in Q$ est l'état initial ;
- $F \subset Q$ est l'ensemble des états accepteurs ;
- Σ est un alphabet (ensemble fini) ;
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ est la fonction de transition.

Par convention, l'état initial est l'état ayant une flèche entrante et les états finaux sont ceux ayant une flèche sortante.

En outre, un mot w est accepté par l'automate $\mathcal{A}$ si $\delta(q_0, w) \in F$ et le langage accepté par $\mathcal{A}$ depuis l'état $q \in Q$ est

$$\mathcal{L}_q(\mathcal{A}) = \{w \in \Sigma^* \mid \delta(q_0, w) \in F\}.$$

Démontrons maintenant la proposition 2.2.1.

Démonstration. Considérons l'automate $\mathcal{A} = (Q, q_0, F, \Sigma, \delta)$, représenté à la figure 2.1 où

- $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$;
- $F = Q$;
- $\Sigma = \{0, 1\}$.

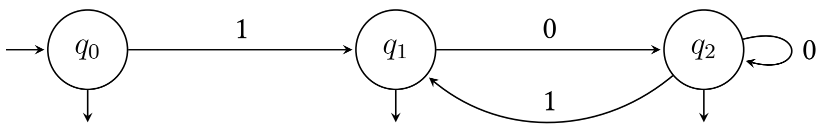

Figure 2.1 – L'automate $\mathcal{A}$.

Notons, en particulier, que dans ce cas, la fonction de transition δ est une fonction partielle puisque $\delta(q_1, 1)$ n'est pas défini.

Considérons $\mathcal{L}_q$ le langage accepté par $\mathcal{A}$ depuis l'état q et $u_q(n)$ le nombre de mots de longueur n acceptés par $\mathcal{A}$ depuis l'état q. Nous avons en particulier

$$u_q(n) = \#(\mathcal{L}_q \cap \{0, 1\}^n).$$

Soit $K_q(n)$ le nombre total de 1 dans les mots de longueur n acceptés depuis l'état q. Autrement dit,

$$K_q(n) = \sum_{\substack{|w|=n \\ w \in \mathcal{L}_q}} |w|_1.$$

où $|w|$ est la longueur du mot w et $|w|_1$ est le nombre de 1 apparaissant dans w. Dans notre cas, nous souhaitons étudier le nombre de 1 dans les représentations de Zeckendorf de longueur n, *i.e.* dans les mots de longueur n commençant par 1 et acceptés par $\mathcal{A}$. Ainsi, c'est $K_{q_0}(n)$ que nous souhaitons étudier.

Pour ce faire, intéressons-nous d'abord au comportement de $K_q(n)$ en toute généralité. Pour cela, considérons par exemple les mots du langage $\mathcal{L}_{q_2}(4)$:

$$\begin{array}{c} 0000 \\ 0001 \\ 0010 \\ 0101 \\ 1000 \\ 1001 \\ 1010 \end{array}$$

Si nous souhaitons compter le nombre total de 1 dans ces mots, *i.e.* $K_{q_2}(4)$, il nous suffit de compter le nombre total de 1 dans les mots de longueur 4 commençant par 0. Puisque $\delta(q_2, 0) = q_2$, cette quantité est donnée par $K_{q_2}(3)$. Ensuite, compter le nombre de total de 1 dans les mots de longueur 4 commençant par 1. Puisque $\delta(q_2, 1) = q_1$, cette quantité est donnée par la somme de $K_{q_1}(3)$ et du nombre total de 1 de tête ou, de façon équivalente, le nombre de mot de longueur 3 acceptés par $\mathcal{A}$ depuis q_1, *i.e.* $u_{q_1}(3)$. Ainsi, nous avons

$$K_{q_2}(4) = K_{q_2}(3) + K_{q_1}(3) + u_{q_1}(3).$$

Plus généralement, en regardant l'automate $\mathcal{A}$, nous obtenons pour chaque état de Q, les relations suivantes

$$\begin{aligned} K_{q_0}(n) &= K_{q_1}(n-1) + u_{q_1}(n-1) \\ K_{q_1}(n) &= K_{q_2}(n-1) \\ K_{q_2}(n) &= K_{q_2}(n-1) + K_{q_1}(n-1) + u_{q_1}(n-1) \end{aligned}$$

pour tout $n \geq 1$. Matriciellement, cela revient à

$$\begin{pmatrix} K_{q_0}(n) \\ K_{q_1}(n) \\ K_{q_2}(n) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} K_{q_0}(n-1) \\ K_{q_1}(n-1) \\ K_{q_2}(n-1) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} u_{q_0}(n-1) \\ u_{q_1}(n-1) \\ u_{q_2}(n-1) \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

En posant

$$\vec{K}(n) := \begin{pmatrix} K_{q_0}(n) \\ K_{q_1}(n) \\ K_{q_2}(n) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{u}(n-1) := \begin{pmatrix} u_{q_0}(n-1) \\ u_{q_1}(n-1) \\ u_{q_2}(n-1) \end{pmatrix},$$

l'égalité (2.1) devient

$$\vec{K}(n) = A\,\vec{K}(n-1) + B\,\vec{u}(n-1), \tag{2.2}$$

pour tout $n \geq 1$. Ensuite, montrons que

$$\vec{K}(n) = A^n\,\vec{K}(0) + \left(A^{n-1}B + A^{n-2}BA + \cdots + BA^{n-1}\right)\,\vec{u}(0), \tag{2.3}$$

pour tout $n \geq 1$. Pour cela, remarquons d'abord que pour tout $n \geq 1$, nous avons

$$\vec{u}(n) = A^n\vec{u}(0). \tag{2.4}$$

En effet, si $n = 1$, c'est direct par définition de $\vec{u}(1)$ et de A. Supposons maintenant que l'égalité soit vérifiée pour $n \geq 1$ et montrons la pour $n+1$. Par définition de $\vec{u}(n+1)$ et de A, nous avons directement

$$\vec{u}(n+1) = A\,\vec{u}(n) = A^{n+1}\,\vec{u}(0)$$

où la seconde égalité découle de l'hypothèse de récurrence. Ainsi, l'égalité (2.4) suit par récurrence. Démontrons maintenant l'égalité (2.3) en procédant par récurrence sur $n \geq 1$.

- **Cas de base** : Si $n = 1$, nous voulons montrer que

  $$\vec{K}(1) = A\,\vec{K}(0) + B\,\vec{u}(0).$$

  Ceci est direct par définition de $\vec{K}(0), \vec{u}(0), \vec{K}(1)$ et B.
- **Induction** : Supposons que

  $$\vec{K}(n) = A^n\,\vec{K}(0) + \left(A^{n-1}B + A^{n-2}BA + \cdots + BA^{n-1}\right)\,\vec{u}(0)$$

  et montrons le pour $n+1$. En utilisant la relation (2.2), l'hypothèse de récurrence et la relation (2.4), nous obtenons

  $$\begin{aligned}
  \vec{K}(n+1) &= A\,\vec{K}(n) + B\,\vec{u}(n) \\
  &= A\,\left(A^n\,\vec{K}(0) + \left(A^{n-1}B + A^{n-2}BA + \cdots + BA^{n-1}\right)\,\vec{u}(0)\right) + B\,\vec{u}(n) \\
  &= A^{n+1}\vec{K}(0) + \left(A^nB + A^{n-1}BA + \cdots + ABA^{n-1}\right)\,\vec{u}(0) + B\,\underbrace{\vec{u}(n)}_{=A^n\,\vec{u}(0)} \\
  &= A^{n+1}\vec{K}(0) + \left(A^nB + A^{n-1}BA + \cdots + ABA^{n-1} + BA^n\right)\,\vec{u}(0),
  \end{aligned}$$

  comme voulu.

Ainsi, nous avons bien

$$\vec{K}(n) = A^n\,\vec{K}(0) + \left(A^{n-1}B + A^{n-2}BA + \cdots + BA^{n-1}\right)\,\vec{u}(0)$$

avec

$$\vec{K}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \vec{u}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

car tous les états sont finaux et acceptent donc le mot vide. Par conséquent, nous obtenons

$$\vec{K}(n) = \sum_{l=0}^{n-1} A^l B A^{n-1-l} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

comme démontré dans l'article [8]. Ensuite, en introduisant le code suivant sur Mathematica

```
In[8]:= a = {{0, 1, 0}, {0, 0, 1}, {0, 1, 1}};
        b = {{0, 1, 0}, {0, 0, 0}, {0, 1, 0}};
        t[n_, l_] = Simplify[MatrixPower[a, l].b.MatrixPower[a, n - l - 1],
                    simplifie  puissance matricielle  puissance matricielle
          Element[n, Integers] && Element[l, Integers] && n - l > 0 && n > 0 && l ≥ 0]
          élément   nombres entiers  élément   nombres entiers
        (Sum[t[n, l], {l, 0, n - 1}].{1, 1, 1})[[1]]
         somme

In[12]:= FullSimplify[%, Element[n, Integers]]
         simplifie complète···  élément   nombres entier

Out[12]= 1/25 × 2^(-1-n) ((1 + √5)^n (6 √5 + 5 (-1 + √5) n) - (1 - √5)^n (6 √5 + 5 (1 + √5) n))
```

nous obtenons

$$K_{q_0}(n) = \frac{\phi^n}{50}\left((5\sqrt{5} - 5)\, n\right) - \underbrace{\frac{(1-\sqrt{5})^n}{50}\left((5\sqrt{5} + 5)\, n\right)}_{\xrightarrow[n \to \infty]{} 0},$$

où le premier terme est le terme dominant. Par conséquent, nous avons

$$\frac{K_{q_0}(n)}{n} \sim \phi^n \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{10}\right),$$

comme annoncé.

Ainsi, en moyenne, le nombre de 1 contenus dans les représentations de Zeckendorf de longueur n se comporte asymptotiquement, à une constante multiplicative près, comme le nombre d'or à la puissance n. □

Notons que si nous autorisons les zéros de tête dans les mots de longueur n, nous obtenons un comportement différent et plus complexe.

Chapitre 3

Réciproque du théorème de Zeckendorf

Est-il possible de trouver d'autres suites de naturels pour lesquels, à l'instar du théorème de Zeckendorf, tout naturel possède une décomposition unique ?

Nous allons voir dans ce chapitre que seule la suite de Fibonacci possède cette propriété. C'est ce que D. E. Daykin appelle la *réciproque du théorème de Zeckendorf* [6] :

Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'entiers positifs. Si tout entier positif se décompose de manière unique comme une somme de termes distincts et non consécutifs de la suite $(A_n)_{n\geq 1}$, alors $(A_n)_{n\geq 1}$ est la suite de Fibonacci.

3.1 Résultats préliminaires

Afin de démontrer la réciproque du théorème de Zeckendorf, nous avons besoin de plusieurs résultats.

Considérons $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite quelconque d'entiers positifs satisfaisant le théorème de Zeckendorf. Autrement dit, pour tout entier positif N, il existe un unique ensemble d'entiers naturels non nuls $i_1, \ldots, i_d$ ($d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) avec $i_{j+1} \geq i_j + 2$ pour $j = 1, \ldots, d-1$ tel que,

$$N = \sum_{j=1}^{d} A_{i_j}. \tag{3.1}$$

Puisque la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ n'est pas supposée croissante, nous allons considérer la suite $(B_n)_{n\geq 1}$ qui est une permutation de $(A_n)_{n\geq 1}$ telle que $B_i \leq B_{i+1}$ pour tout $i \geq 1$.

Commençons par démontrer un lemme utile pour évaluer les termes de $(A_n)_{n\geq 1}$.

Lemme 3.1.1. *Si $r \leq 2$, alors $B_r = r$. Si $r > 2$, le terme B_r est le plus petit nombre naturel qui ne peut pas être représenté sous la forme (3.1) en utilisant uniquement les termes $B_1, B_2, \ldots, B_{r-1}$ de $(A_n)_{n\geq 1}$.*

Démonstration. Le fait que $B_1 = 1$ et $B_2 = 2$ découle de l'unicité des décompositions de Zeckendorf des entiers 1 et 2.

Supposons que $r > 2$. Alors, si B_r pouvait être représenté sous la forme (3.1) en utilisant seulement $B_1, B_2, \ldots, B_{r-1}$, nous aurions une contradiction de l'unicité de la décomposition de B_r. De même, s'il existait un nombre naturel N inférieur à B_r qui ne pourrait pas être représenté en termes de $B_1, B_2, \ldots, B_{r-1}$, alors N ne pourrait pas être représenté du tout.

Ceci démontre le lemme. $\square$

Introduisons une notation. Nous allons écrire $X \,\nu\, Y$ pour dénoter que X et Y sont des termes voisins de la suite $(A_n)_{n\geq 1}$. Autrement dit, on note $X \,\nu\, Y$ s'il existe deux indices p et q satisfaisant $|p-q| = 1$ et tels que $X = A_p$ et $Y = A_q$. Nous dénotons la négation de $X \,\nu\, Y$ par $X \,\bar{\nu}\, Y$. Ainsi, si, par exemple, $(A_n)_{n\geq 1}$ est la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\geq 1}$, alors nous notons $5 \,\nu\, 8$ puisque $5 = F_4$ et $8 = F_5$. En revanche, puisque 3 et 8 ne sont pas voisins dans la suite de Fibonacci, nous notons $3 \,\bar{\nu}\, 8$.

Lemme 3.1.2. *Si r et s sont des nombres naturels non nuls tels que pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$ et pour tout $j \in \{1, \ldots, s\}$, on a*

$$B_i \,\bar{\nu}\, B_{r+j}, \tag{3.2}$$

alors B_{r+1} divise chacun des termes $B_{r+1}, B_{r+2}, \ldots, B_{r+s+1}$.

Démonstration. Procédons par récurrence sur $s \geq 1$.

- **Cas de base** : Si $s = 1$, alors le résultat est direct puisque B_{r+1} divise toujours B_{r+1}.
- **Induction** : Soit $1 \leq m \leq s$. Supposons que B_{r+1} divise chacun des termes B_{r+1}, $B_{r+2}, \ldots, B_{r+m}$ et montrons que B_{r+1} divise également B_{r+m+1}.

  Considérons l'ensemble S des entiers supérieurs à B_{r+m} dont les décompositions de la forme (3.1) utilisent uniquement les termes $B_{r+1}, B_{r+2}, \ldots, B_{r+m}$ de la suite $(A_n)_{n\geq 1}$. Considérons également le plus grand entier H de S ayant la propriété que si n est un entier quelconque, avec $B_{r+m} < n \leq H$, alors n se décompose sous la forme (3.1) en termes de $B_1, B_2, \ldots, B_{r+m}$.

  Ainsi, par définition de S et puisque $H \in S$, H se décompose de la façon suivante

  $$H = \sum_{j=1}^{d} A_{i_j} \quad \text{avec} \quad A_{i_j} \in \{B_{r+1}, \ldots, B_{r+m}\}$$

  et $i_{j+1} \geq i_j + 2$ pour tout $j \in \{1, \ldots, d\}$.

  Ensuite, par le lemme 3.1.1, on sait que B_{r+1} est le plus petit naturel qui ne peut pas être représenté sous la forme (3.1) en termes de $B_1, B_2, \ldots, B_r$ donc l'entier $B_{r+1} - 1$ se décompose forcément de la façon suivante

  $$B_{r+1} - 1 = \sum_{j=1}^{p} A_{k_j} \quad \text{avec} \quad A_{k_j} \in \{B_1, \ldots, B_r\}$$

  et $k_{j+1} \geq k_j + 2$ pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$.

  Ainsi, l'entier $H + B_{r+1} - 1$ se décompose sous la forme (3.1) en terme de $B_1, B_2, \ldots, B_r$, $B_{r+1}, \ldots, B_{r+m}$ et par l'hypothèse (3.2), cette décomposition ne contient pas de termes consécutifs donc il s'agit bien d'une décomposition de Zeckendorf valide.

  Par le même raisonnement, nous pouvons en déduire que chacun des entiers $H + 1, H + 2, \ldots, H + B_{r+1} - 1$ possède une décomposition de Zeckendorf valide en termes de $B_1, B_2, \ldots, B_{r+m}$. Ainsi, par définition de H, le nombre $H + B_{r+1}$ ne peut pas appartenir à S, sinon cela contredirait la maximalité de H.

Ensuite, considérons les deux situations suivantes :

(a) $H + B_{r+1}$ est représentable en termes de $B_1, B_2, \ldots, B_{r+m}$,

(b) $H + B_{r+1} = B_{r+m+1}$.

Montrons que nous avons soit la situation (a) soit la situation (b) mais jamais les deux simultanément. Pour cela, il suffit de montrer que si (a) est faux, alors (b) est vrai. Supposons que (a) soit faux. Puisque

$$H + B_{r+1} - 1 < H + B_{r+1}$$

et que nous avons montré que $H+B_{r+1}-1$ est représentable en termes de $B_1, B_2, \ldots,$ B_{r+m}, alors l'entier $H + B_{r+1}$ est le plus petit nombre naturel qui ne peut pas être représenté sous la forme (3.1) en utilisant uniquement les termes $B_1, B_2, \ldots, B_{r+m}$. Donc, par le lemme 3.1.1, nous avons

$$H + B_{r+1} = B_{r+m+1}$$

et donc (b) est vrai.

De plus, la situation (a) n'arrive jamais. Pour montrer cela, supposons que (a) soit vrai et obtenons une contradiction. Si (a) est vrai, la décomposition de $H + B_{r+1}$ sous la forme (3.1) doit contenir certains des termes $B_1, B_2, \ldots, B_r$ sinon $H + B_{r+1}$ serait représentable en termes de $B_{r+1}, B_{r+2}, \ldots, B_{r+m}$ et donc $H + B_{r+1}$ serait dans S, ce qui n'est pas le cas comme nous l'avons vu ci-dessus.

Séparons maintenant la décomposition de $H+B_{r+1}$ en deux décompositions disjointes K_1 et K_2 où K_1 n'utilise que les termes de $\{B_1, B_2, \ldots, B_r\}$ et K_2 les termes de $\{B_{r+1}, B_{r+2}, \ldots, B_{r+m}\}$. De cette façon, nous obtenons

$$H + B_{r+1} = K_1 + K_2, \tag{3.3}$$

où $K_2 \in S$. En outre, en vertu du lemme 3.1.1, $B_{r+1} \neq K_1$ et donc $H \neq K_2$.

Ensuite, considérons B_i un des termes de $\{B_1, B_2, \ldots, B_r\}$ qui apparait dans K_1. Alors, par le lemme 3.1.1, $B_{r+1} - B_i$ se décompose sous la forme (3.1) en termes de $B_1, B_2, \ldots, B_r$. Et, par définition de K_1, $K_1 - B_i$ se décompose également sous la forme (3.1) en termes de $B_1, B_2, \ldots, B_r$.

Ainsi, puisque $H \neq K_2$, l'équation (3.3) conduira à deux décompositions distinctes de $H + B_{r+1} - B_i$ sous la forme (3.1) en termes de $B_1, B_2, \ldots, B_{r+m}$. Ces deux décompositions ne contenant pas de termes consécutifs, au vu de l'hypothèse (3.2), il s'agit bien de deux décompositions de Zeckendorf valides et donc nous obtenons une contradiction.

Par conséquent, puisque (a) est faux, (b) est vrai et donc

$$H + B_{r+1} = B_{r+m+1}.$$

Ainsi, puisque par hypothèse de récurrence, H est divisible par B_{r+1}, nous obtenons que B_{r+m+1} est divisible par B_{r+1} comme voulu. Ceci conclut le lemme.

□

Lemme 3.1.3. *On a*

$$B_1 \,\nu\, B_2,$$

i.e. B_1 *est voisin de* B_2 *dans la suite* $(A_n)_{n\geq 1}$.

Démonstration. Procédons par l'absurde et supposons que

$$B_1 \,\bar{\nu}\, B_2. \tag{3.4}$$

Par le lemme 3.1.1 et par l'hypothèse (3.4), nous savons que les décompositions valides des entiers $1, 2$ et 3 sous la forme (3.1) sont les suivantes

$$1 = B_1, 2 = B_2, 3 = B_1 + B_2.$$

De plus, par le lemme 3.1.1, nous savons également que $B_3 = 4$.

Ainsi, puisque $1 \,\bar{\nu}\, B_2$, il existe un entier $s > 2$ que l'on peut supposer minimal, tel que

$$1 \,\nu\, B_s.$$

Par le lemme 3.1.1, nous savons alors que tout entier naturel inférieur ou égal à B_s se décompose sous la forme (3.1) en termes de $B_1, B_2, \ldots, B_s$.

De plus, puisque s est minimal, nous savons que les termes inférieurs à B_s ne sont pas voisins de 1. Ainsi, nous pouvons appliquer le lemme 3.1.2 en prenant $r = 1$ et ainsi obtenir que B_2 divise $B_2, \ldots, B_s$. Dès lors, puisque $B_2 = 2$, nous pouvons affirmer que les termes $B_2, \ldots, B_s$ sont pairs.

Par conséquent, puisque B_s est pair, $B_s + 1$ est impair et donc si nous avions une décomposition du nombre $B_s + 1$ sous la forme (3.1) en termes de $B_1, B_2, \ldots, B_s$, alors le terme $B_1 = 1$ serait obligatoirement utilisé. Cependant, puisque B_s est un voisin de B_1, le terme B_s ne serait quant à lui pas utilisé.

Ainsi, en retirant le terme B_1 de cette décomposition de $B_s + 1$, nous obtiendrions une décomposition de B_s différente de la décomposition faisant juste intervenir B_s lui-même, ce qui contredit l'unicité de la décomposition de B_s.

Par conséquent, nous ne pouvons pas décomposer $B_s + 1$ sous la forme (3.1) en termes de $B_1, B_2, \ldots, B_s$. Ainsi, puisque B_s se décompose sous la forme (3.1) en termes de $B_1, B_2, \ldots$, B_s, le lemme 3.1.1, implique que

$$B_{s+1} = B_s + 1.$$

Dans la suite, nous allons utiliser des arguments similaires afin d'évaluer les termes $B_{s+2}, B_{s+3}, \ldots$. Plus précisément, nous allons travailler cas par cas et montrer que dans chaque situation, nous obtenons une contradiction de l'unicité de la décomposition sous la forme (3.1) d'un nombre naturel. Ainsi, puisque chacun des cas mènera à une contradiction, nous pourrons conclure le lemme.

<u>Cas 1 : $B_s + 1 \,\bar{\nu}\, 1$:</u>

1.1. Si $B_s \,\bar{\nu}\, 2$, alors $B_s + 2$ possède deux décompositions valides différentes sous la forme (3.1), à savoir

$$\begin{aligned} &B_s + 2 = (B_s + 1) + 1 = B_{s+1} + B_1 \quad \text{et} \\ &B_s + 2 = B_s + B_2. \end{aligned}$$

Nous obtenons donc une contradiction.

1.2. Supposons que $B_s \,\nu\, 2$. Rappelons que puisque $s \geq 3$ et que les B_i sont classés dans l'ordre croissant, nous avons $B_s \geq B_3 = 4$.

1.2.1. Si $B_s > 4$, alors $B_s \neq B_3$ et puisque B_s possède déjà deux voisins, B_1 et B_2, nous savons que
$$B_s \,\bar{\nu}\, B_3. \tag{3.5}$$

Supposons que $B_s + 1 \,\bar{\nu}\, 2$**.** Dans ce cas, $B_s + 4$ possède deux décompositions différentes sous la forme (3.1), à savoir

$$B_s + 4 = (B_s + 1) + 1 + 2 = B_{s+1} + B_1 + B_2 \quad \text{et}$$
$$B_s + 4 = B_s + B_3.$$

Ces deux décompositions étant valides au vu de nos hypothèses, nous obtenons une contradiction.

Supposons maintenant que $B_s + 1 \,\nu\, 2$ et considérons le nombre impair $B_s + 3$. Rappelons que les termes $B_2, \ldots, B_s$ sont pairs et que les termes B_1 et B_{s+1} sont impairs. Ainsi, si le nombre impair $B_s + 3$ possède une décomposition valide sous la forme (3.1) en termes de $B_1, B_2, \ldots, B_{s+1}$, celle-ci doit soit contenir B_1 soit B_{s+1}.

Notons que B_1 est le seul terme de la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ à être égal à 1. Ainsi, si une telle décomposition de $B_s + 3$ utilisait B_1, alors en enlevant B_1 de la décomposition, nous obtiendrions une décomposition valide de $B_s + 2$ autre que $B_1 + B_{s+1}$ et donc une contradiction.

De façon similaire, si une telle décomposition de $B_s + 3$ utilisait B_{s+1}, alors, puisque par hypothèse $B_s + 1 \,\nu\, 2$, le terme 2 ne pourrait pas être utilisé dans la décomposition. Ainsi, en enlevant $B_{s+1} = B_s + 1$ de la décomposition de $B_s + 3$, nous obtiendrions une décomposition valide de 2 autre que B_2, et donc une contradiction.

Par conséquent, $B_s + 3$ ne peut pas être décomposé sous la forme (3.1) en termes de $B_1, B_2, \ldots, B_{s+1}$. Cependant, puisque $B_s + 2$ peut se décomposer comme cela, le lemme 3.1.1 implique que

$$B_{s+2} = B_s + 3.$$

Démontrons maintenant que le cas $B_s + 1 \,\nu\, 2$ mène à une contradiction.

Supposons avoir $B_s + 1 \,\bar{\nu}\, 4$. Puisque $B_3 = 4$, nous obtenons deux décompositions valides de $B_s + 5$ sous la forme (3.1), à savoir

$$B_s + 5 = (B_s + 3) + 2 = B_{s+2} + B_2 \quad \text{et}$$
$$B_s + 5 = (B_s + 1) + 4 = B_{s+1} + B_3.$$

Nous obtenons donc une contradiction.

Supposons maintenant que $B_s + 1 \,\nu\, 4$. Si $B_s + 3 \,\bar{\nu}\, 1$, c'est-à-dire $B_{s+2} \,\bar{\nu}\, B_1$, nous obtenons deux décompositions valides de $B_s + 4$ sous la forme (3.1), à savoir

$$B_s + 4 = (B_s + 3) + 1 = B_{s+2} + B_1 \quad \text{et}$$
$$B_s + 4 = B_s + B_3.$$

La seconde décomposition étant valide au vu de (3.5). Ainsi, nous obtenons une contradiction. Si maintenant $B_s + 3 \,\nu\, 1$, considérons la décomposition de $B_s + 6$. Si l'un des termes $B_s + 3, 1$ et B_s était utilisé dans cette décomposition, alors en retirant ce terme nous obtiendrions une contradiction de l'unicité de la décomposition de 3, $B_s + 5$ ou 6 respectivement. Nous pouvons donc ajouter le terme 1 à la décomposition de $B_s + 6$ et ainsi obtenir une décomposition valide de $B_s + 7$ autre que

$$B_s + 7 = (B_s + 3) + 4 = B_{s+2} + B_3$$

et donc une contradiction.

1.2.2. Si $B_s = B_3 = 4$, alors en particulier $B_{s+1} = B_4 = 5$. Considérons t le plus petit entier tel que B_t soit un voisin de 1 ou 2. Par minimalité de t et puisque B_3 est voisin de B_1 et B_2, nous savons que B_1, B_2 et B_3 ne sont pas voisins des termes $B_4, \ldots, B_{t-1}$. Ainsi, par le lemme 3.1.2, chacun des termes $B_4, \ldots, B_t$ est divisible par $B_4 = 5$.

Si $B_t \,\nu\, 1$, les termes B_t et 1 ne peuvent pas intervenir dans la décomposition de $B_t + 1$. En outre, puisque B_t est un multiple de 5, $B_t + 1$ n'en est pas un. Ainsi, puisque chacun des termes $B_4, B_5, \ldots, B_t$ est un multiple de 5 et que $B_2 \,\nu\, B_3$, le terme $B_t + 1$ ne peut pas être décomposé en termes de $B_1, B_2, \ldots, B_t$. De plus, puisque B_t se décompose en termes de $B_1, B_2, \ldots, B_t$, alors B_{t+1} est le plus petit nombre naturel qui ne peut pas être représenté en termes de $B_1, B_2, \ldots, B_t$. Ainsi, par le lemme 3.1.1, nous obtenons

$$B_{t+1} = B_t + 1.$$

Par conséquent, nous avons deux décompositions valides de $B_{t+1} + 1$ sous la forme (3.1), à savoir

$$\begin{aligned} B_{t+1} + 1 &= B_{t+1} + B_1 \quad \text{et} \\ B_{t+1} + 1 &= B_t + B_2 \end{aligned}$$

et donc une contradiction.

Si $B_t \,\nu\, 2$, nous obtenons par un raisonnement similaire au cas précédent que $B_{t+1} = B_t + 2$. Ainsi, nous avons deux décompositions valides de $B_{t+1} + 2$ sous la forme (3.1), à savoir

$$\begin{aligned} B_{t+1} + 2 &= B_{t+1} + B_2 \quad \text{et} \\ B_{t+1} + 2 &= B_t + B_3. \end{aligned}$$

Ce cas mène donc également à une contradiction.

Cas 2 : $B_s + 1 \,\nu\, 1$:

En procédant de façon similaire au cas précédent, nous pouvons montrer que ce cas mène également à une contradiction [1].

Par conséquent, puisque dans tous les cas possibles, nous obtenons une contradiction, nous pouvons conclure que

$$B_1 \,\nu\, B_2.$$

□

Lemme 3.1.4. *On a*

$$A_1 = 1 \quad \textit{et} \quad A_2 = 2.$$

Démonstration. Procédons par l'absurde et supposons que

$$A_1 \neq 1 \quad \text{ou} \quad A_2 \neq 2.$$

Supposons que $A_1 \neq 1$ et $A_2 = 2$. Par les lemmes 3.1.1 et 3.1.3, nous savons que $1 \,\nu\, 2$. Ainsi, puisque $A_1 \neq 1$, il existe un terme $A_i \neq 2$ tel que

$$1 \,\nu\, A_i.$$

Il est clair que la décomposition du nombre $A_i + 1$ sous la forme (3.1) ne peut ni utiliser A_i ni 1. De plus, si la décomposition utilisait 2, on pourrait remplacer dans celle-ci le terme 2 par le terme 1 et obtenir une contradiction de l'unicité de la décomposition de A_i. Par conséquent, la décomposition de $A_i + 1$ n'utilise aucun des termes A_i, 1 et 2. Nous pouvons donc lui ajouter 1 et obtenir une décomposition de $A_i + 2$ autre que $A_i + B_2$ et donc une contradiction de l'unicité de la décomposition de $A_i + 1$.

Supposons que $A_2 \neq 2$ et $A_1 = 1$. Dans ce cas, puisque A_1 n'a qu'un seul voisin dans la suite $(A_n)_{n\geq 1}$, à savoir A_2, et que nous avons $1 \,\nu\, 2$, nous devons avoir $A_2 = 2$, ce qui est une contradiction. □

3.2 Démonstration de la réciproque du théorème de Zeckendorf

Pour rappel, nous souhaitons démontrer le résultat suivant :

Théorème 3.2.1 (Réciproque du théorème de Zeckendorf)**.** *Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'entiers positifs. Si tout entier positif se décompose de manière unique comme une somme de termes distincts et non consécutifs de la suite $(A_n)_{n\geq 1}$, alors $(A_n)_{n\geq 1}$ est la suite de Fibonacci.*

Considérons les deux suites $(A_n)_{n\geq 1}$ et $(B_n)_{n\geq 1}$ définies à la section précédente. Afin de démontrer le théorème 3.2.1, montrons que

$$A_n = F_n$$

1. La démonstration complète de ce second cas est disponible dans l'annexe A.

pour tout $n \geq 1$.

Pour cela, nous procédons par l'absurde et supposons qu'il existe un nombre entier minimal r tel que $A_r \neq F_r$. Par le lemme 3.1.4, r doit donc être strictement supérieur à 2.

De plus, nous avons

$$B_i = A_i = F_i \tag{3.6}$$

pour tout $i = 1, 2, \ldots, r-1$. En effet, si la première égalité était fausse, il existerait un entier $k \geq r$ tel que $B_k < F_{r-1}$ et donc par le théorème 2.1.1, B_k posséderait une décomposition en termes de $B_1, \ldots, B_{r-2}$. Or, B_k possède une autre décomposition valide, à savoir B_k lui-même donc nous obtenons une contradiction de l'unicité des décompositions. Ainsi, la première égalité est vraie. En outre, la seconde égalité découle directement de la définition de r.

Par conséquent, comme $(F_n)_{n\geq 1}$ est la suite de Fibonacci et que $B_i = A_i = F_i$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, r-1$, il découle du théorème 2.1.1 que l'on peut décomposer sous la forme (3.1) tous les nombres naturels strictement inférieurs à F_r, et seulement ceux-ci, en termes de $B_1, B_2, \ldots, B_{r-1}$. Ainsi,

$$B_r = F_r$$

par le lemme 3.1.1.

En outre, puisque $A_r \neq F_r = B_r$ nous avons

$$B_1 \, \nu B_2 \, \nu \cdots \nu \, B_{r-1} \, \bar{\nu} \, B_r.$$

Ainsi, puisque B_r n'est voisin d'aucun B_i pour $i = 1, \ldots, r-1$, nous pouvons ajouter B_r aux décompositions des naturels strictement inférieurs à F_r et ainsi décomposer tous les nombres naturels strictement inférieurs à $2F_r$ en termes de $B_1, B_2, \ldots B_r$. Par conséquent, le lemme 3.1.1 implique que

$$B_{r+1} = 2F_r.$$

Plus généralement, si s est l'indice tel que B_s est le voisin de droite de B_{r-1}, *i.e.*

$$B_1 \, \nu B_2 \, \nu \cdots \nu \, B_{r-1} \, \nu \, B_s, \tag{3.7}$$

alors en particulier $s > r$ et aucun des termes $B_r, B_{r+1}, \ldots, B_{s-1}$ n'est voisin d'un B_i pour $i = 1, 2, \ldots, r-1$. Ainsi, par le lemme 3.1.2, B_r divise chacun des termes $B_r, B_{r+1}, \ldots, B_s$. En particulier, B_s est un multiple de B_r, donc il existe un nombre entier positif p tel que

$$B_s = pB_r = pF_r.$$

Ensuite, comme $B_{r-1} \nu B_s$, aucune décomposition du nombre $B_{r-1} + B_s$ ne peut utiliser B_{r-1} ou B_s. Supposons que nous ayons une décomposition de $B_{r-1} + B_s$ sous la forme (3.1) en termes de $B_1, B_2, \ldots, B_{r-2}, B_r, \ldots, B_{s-1}$. Séparons cette décomposition en deux décompositions disjointes K_1 et K_2 où K_1 n'utilise que les termes de $\{B_1, B_2, \ldots, B_{r-2}\}$ et K_2 les termes de $\{B_r, B_{r+1}, \ldots, B_{s-1}\}$. Ainsi,

$$K_1 + K_2 = B_{r-1} + B_s, \tag{3.8}$$

et par le lemme 3.1.1, nous avons également

$$0 \leq K_1 < B_{r-1} \leq B_r. \tag{3.9}$$

Or, puisque B_r divise chacun des $B_r, B_{r+1}, \ldots, B_s$, il divise également K_2 et donc en divisant les deux membres de l'égalité (3.8) par B_r, nous obtenons

$$K_1 \equiv B_{r-1} \mod B_r,$$

ce qui est une contradiction vu (3.9). Par conséquent, il n'est pas possible de décomposer $B_{r-1} + B_s$ sous la forme (3.1) en termes de $B_1, B_2, \ldots B_s$.

Cependant, par la relation (3.7), nous savons que chacun des nombres $B_s + 1, B_s + 2, \ldots, B_s + B_{r-1} - 1$ peut se décomposer sous la forme (3.1) en termes de $B_1, B_2, \ldots, B_s$. Ainsi, le lemme 3.1.1 implique que

$$B_{s+1} = \underbrace{B_{r-1}}_{=F_{r-1}} + \underbrace{B_s}_{=pF_r} = F_{r-1} + pF_r. \tag{3.10}$$

Nous procédons maintenant comme dans le lemme 3.1.3 afin d'obtenir des contradictions dans tous les cas possibles. Cela nous permettra de conclure qu'il n'existe pas d'indice r pour lequel $A_r \neq F_r$ et donc nous pourrons conclure le théorème.

1. Supposons que $B_s \,\bar{\nu}\, B_r$, c'est-à-dire $pF_r \,\bar{\nu}\, F_r$.
   Dans ce cas, nous obtenons une contradiction de l'unicité de la décomposition sous la forme (3.1) de l'entier $pF_r + F_{r-1} + F_{r-2}$. En effet, vu (3.10) et (3.6), nous avons

   $$(F_{r-1} + pF_r) + F_{r-2} = B_{s+1} + B_{r-2}$$

   et par définition de la suite de Fibonacci, nous obtenons également

   $$pF_r + (F_{r-1} + F_{r-2}) = pF_r + F_r = B_s + B_r.$$

   Ces deux décompositions étant valides, au vu de la relation (3.7) et de notre hypothèse, nous obtenons bien une contradiction.
2. Supposons que $B_s \,\nu\, B_r$, c'est-à-dire $pF_r \,\nu\, F_r$. Dans ce cas, nous avons

   $$B_1 \,\nu B_2 \,\nu \cdots \nu\, B_{r-1} \,\nu\, B_s \,\nu\, B_r, \tag{3.11}$$

   ou encore

   $$B_1 \,\nu B_2 \,\nu \cdots \nu\, F_{r-1} \,\nu\, pF_r \,\nu\, F_r.$$

   2.1. Si $s = r + 1$, alors

   $$pF_r = B_s = B_{r+1} = 2F_r$$

   et donc $p = 2$. De plus, si t est le nombre entier pour lequel nous avons

   $$B_1 \,\nu B_2 \,\nu \cdots \nu\, F_{r-1} \,\nu\, 2F_r \,\nu\, F_r \,\nu\, B_t, \tag{3.12}$$

   alors en particulier $t > r + 2$ et aucun des $B_{r+2}, B_{r+3}, \ldots, B_{t-1}$ n'est voisin de B_i pour $i = 1, 2, \ldots, r + 1$.
   Par conséquent, le lemme 3.1.2 implique que chacun des $B_{r+2}, B_{r+3}, \ldots, B_t$ est divisible par B_{r+2} et, en utilisant un argument similaire à celui utilisé pour montrer la relation (3.10), nous pouvons montrer que

   $$B_{t+1} = F_r + B_t.$$

Ainsi, nous obtenons deux décompositions de $2F_r + B_t$, à savoir

$$\begin{aligned}
&2F_r + B_t = B_s + B_t \quad \text{et} \\
&2F_r + B_t = F_r + (F_r + B_t) = B_r + B_{t+1}.
\end{aligned}$$

Ces deux décompositions étant valides au vu de la relation (3.12), il s'agit d'une contradiction.

2.2. Si $s > r + 1$, alors $p > 2$.

2.2.1. Si $B_r \,\bar{\nu}\, B_{s+1}$, alors vu (3.11), les deux décompositions

$$\begin{aligned}
&pF_r + 2F_r = B_s + B_{r+1} \\
&pF_r + 2F_r = (F_{r-2}) + (F_r) + (F_{r-1} + pF_r) = B_{r-2} + B_r + B_{s+1}
\end{aligned}$$

sont deux décompositions valides de $pF_r + 2F_r$, ce qui mène à une contradiction.

2.2.2. Si $B_r \,\nu\, B_{s+1}$, alors utilisant un argument similaire à précédemment, nous pouvons montrer que $B_{s+2} = F_r + F_{r-1} + pF_r$. Ainsi, les deux décompositions

$$\begin{aligned}
&pF_r + 2F_r = B_s + B_{r+1} \\
&pF_r + 2F_r = (F_{r-2}) + (F_r + F_{r-1} + pF_r) = B_{r-2} + B_{s+2}
\end{aligned}$$

étant valides vu (3.11), il s'agit également d'une contradiction.

Puisque tous les cas possibles mènent à une contradiction, il n'existe pas d'entier r pour lequel $A_r \neq F_r$. Autrement dit,

$$A_n = F_n$$

pour tout $n \geq 1$ et le théorème 3.2.1 est démontré. $\square$

Chapitre 4

Quelques généralisations du théorème de Zeckendorf

Il existe de nombreuses généralisations du *théorème de Zeckendorf*. Comme déjà mentionné dans le chapitre 2, Zeckendorf lui-même a déjà généralisé le théorème aux nombres de Lucas [22].

En 1960, D.E. Daykin [6] a généralisé le théorème à la (h,k)*-ième suite de Fibonacci généralisée*. Il définit cette suite de la manière suivante :

Soient h et k des nombres naturels tels que $1 \leq h \leq k \leq h+1$, la (h,k)*-ième suite de Fibonacci généralisée* $(V_n)_{n\geq 1}$ est définie par

$$\begin{cases} V_n &= n & \text{si} \quad 1 \leq n \leq k, \\ V_n &= V_{n-1} + V_{n-h} & \text{si} \quad k < n < h+k, \\ V_n &= V_{n-1} + V_{n-k} + (k-h) & \text{si} \quad n \geq h+k. \end{cases}$$

La généralisation de Daykin stipule alors que si $(V_n)_{n\geq 1}$ est la (h,k)-ième suite de Fibonacci généralisée avec $1 \leq h \leq k \leq h+1$. Alors, pour tout nombre naturel N, il existe un unique ensemble d'entiers naturels non nuls $i_1, \ldots, i_d$ ($d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) tel que $i_{j+1} \geq i_j + k$ pour $j = 2, \ldots, d-1$ et

$$N = \sum_{j=1}^{d} V_{i_j} \tag{4.1}$$

où

$$i_2 \geq i_1 + h \quad \text{si } d > 1.$$

En 1972, le journal *The Fibonnaci Quarterly* publie de nombreuses généralisations du théorème de Zeckendorf. On y retrouve notamment les généralisations de Keller [13] et de Hoggatt [10].

En 1992, M. W. Bunder généralise le théorème à tous les entiers [3]. Pour cela, il utilise les nombres dits de *Néga-Fibonacci*, définis sur les indices négatifs par

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n.$$

À l'heure actuelle, de nouvelles généralisations du théorème de Zeckendorf voient encore le jour. Par exemple, en 2021, le mathématicien américain Sungkon Chang a généralisé le théorème à d'autres suites linéaire récurrentes mais également aux entiers p-adiques [4]. Ce sont ces deux généralisations que nous allons considérer dans ce chapitre. Notons également que dans le même article, Chang donne une réciproque faible de ces généralisations. Ces réciproques faibles seront étudiées dans le chapitre 5.

4.1 Généralisation à d'autres suites linéaires récurrentes

Dans cette section, nous allons discuter de la généralisation, énoncée par Chang [4], du théorème de Zeckendorf à des suites linéaires récurrentes autres que la suite de Fibonacci. Tout au long de la section, nous illustrerons les résultats sur deux exemples. Le premier permettra de retrouver le théorème de Zeckendorf classique utilisant la suite de Fibonacci. Le second, permettant des coefficients non bornés, permettra de prouver que le théorème donné par Chang est bien une généralisation à d'autres suites récurrentes.

Pour commencer, discutons du concept de *suites de coefficients*.

Définition 4.1.1. Une *suite de coefficients* μ est une fonction définie sur les naturels non nuls et à valeur dans les naturels , *i.e.*

$$\mu : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{N},$$

telle que nous notons $\mu_k := \mu(k)$ pour $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

En outre, on dira que μ *possède un support fini* s'il existe un indice M tel que $\mu_k = 0$ pour tout $k > M$.

De plus, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots)$ désignera les valeurs de cette suite et la notation $\bar{\mu_k}$ signifiera que le terme μ_k est répété à l'infini.

Exemple 4.1.2. La suite de coefficients μ définie par

$$\mu_k = \begin{cases} k & \text{si} \quad k \leq 3, \\ 0 & \text{si} \quad k > 3, \end{cases}$$

est à support fini et est notée $\mu = (1, 2, 3, \bar{0})$.

Définition 4.1.3. Soit $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. La $i^{\text{ième}}$ suite de coefficients de base, notée e^i, est la suite de coefficients qui est telle que

$$e^i_k = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \neq i, \\ 1 & \text{si} \quad k = i. \end{cases}$$

Ainsi, nous avons par exemple $e^1 = (1, \bar{0})$ ou encore $e^4 = (0, 0, 0, 1, \bar{0})$.

Si μ est une suite de coefficients, alors on note $\text{res}_{[j,j+n]}(\mu)$ la restriction de μ aux indices de l'intervalle $[j, j+n]$, c'est à dire

$$\text{res}_{[j,j+n]}(\mu) := \sum_{k=j}^{j+n} \mu_k e^k.$$

Exemple 4.1.4. Si $\mu = (0, 2, 0, 4, 6, 3, 2, \bar{1})$, alors

$$\begin{aligned} \mathrm{res}_{[1,5]}(\mu) &= (0, 2, 0, 4, 6, \bar{0}) \\ \mathrm{res}_{[5,\infty[}(\mu) &= (0, 0, 0, 0, 6, 3, 2, \bar{1}). \end{aligned}$$

Pour la représentation des entiers positifs, nous utiliserons l'ordre lexicographique ascendant sur l'ensemble des suites de coefficients à support fini. Définissons cet ordre.

Définition 4.1.5. Considérons deux suites de coefficients à support fini μ et μ'. L'*ordre lexicographique ascendant*, dénoté $<_a$, est tel que $\mu <_a \mu'$ s'il existe un entier positif k tel que $\mu_j = \mu'_j$ pour tout $j > k$ et $\mu_k < \mu'_k$.

Ainsi, l'ordre lexicographique ascendant est défini sur les suites de coefficients à support fini. Notons également que cela ne signifie pas que les valeurs d'une suite de coefficients dans l'ensemble forment une suite croissante.

Exemple 4.1.6. Si $\mu = (2, 3, 9, 4, \bar{0})$ et $\mu' = (2, 4, 2, 5, \bar{0})$, alors $\mu <_a \mu'$ puisque $\mu_4 < \mu'_4$ et $\mu_j = \mu'_j$ pour tout $j > 4$.

Remarque 4.1.7. En particulier, pour tout $i \geq 1$, nous avons

$$e^i <_a e^{i+1}.$$

En effet, par la définition 4.1.3, il est facile de voir que nous avons $e^i_{i+1} < e^{i+1}_{i+1}$ et $e^i_j = e^{i+1}_j$ pour tout $j > i + 1$.

Introduisons maintenant la notion de collections de suites de coefficients ordonnées.

Définition 4.1.8. *Une collection $\mathcal{E}$ de suites de coefficients à support fini ordonnée de manière ascendante* est un ensemble de suites de coefficients ordonnées par l'ordre lexicographique ascendant qui contient la suite nulle et toutes les suites de coefficients de base e^i.

Dans le contexte des entiers, nous ne préciserons pas qu'une telle collection est ordonnée de manière ascendante puisque seul cet ordre sera utilisé.

Illustrons cette définition sur deux exemples. Notons que les collections définies dans ces deux exemples seront utilisées tout au long de la section afin d'illustrer les définitions et résultats.

Exemple 4.1.9. Considérons la collection $\mathcal{F}$ définie par l'ensemble des suites de coefficients à support fini μ qui sont telles que μ_k vaut 0 ou 1 pour tout $k \geq 1$ et telles que μ ne possède pas deux 1 consécutifs. Les premières suites de $\mathcal{F}$ sont

$$\begin{array}{l} (\bar{0}) \\ (1, \bar{0}) \\ (0, 1, \bar{0}) \\ (0, 0, 1, \bar{0}) \\ (1, 0, 1, \bar{0}) \\ (0, 0, 0, 1, \bar{0}) \\ (1, 0, 0, 1, \bar{0}) \\ (0, 1, 0, 1, \bar{0}) \\ \quad\vdots \end{array}$$

Ainsi, $\mathcal{F}$ correspond à la condition classique de Zeckendorf utilisée pour écrire les entiers positifs comme une somme de termes de Fibonacci. En d'autres termes, par le théorème de Zeckendorf, pour tout entier positif N, il existe une suite de coefficients $\mu \in \mathcal{F}$ telle que

$$N = \sum_{k \geq 1} \mu_k F_k.$$

Par exemple, pour représenter l'entier 64, c'est la suite $\mu = (1,0,0,0,1,0,0,0,1,\bar{0}) \in \mathcal{F}$ qui sera utilisée puisque

$$64 = F_9 + F_5 + F_1 = 55 + 8 + 1,$$

comme nous l'avions constaté à l'exemple 2.1.2.

Notons également que la collection $\mathcal{F}$ est bien ordonnée sous l'ordre lexicographique ascendant.

Nous allons maintenant introduire un second exemple de collection de suites de coefficients à support fini. Cet exemple vise à donner un cadre plus général en permettant notamment des coefficients non bornés, c'est-à-dire des coefficients pouvant potentiellement prendre des valeurs très grandes.

Exemple 4.1.10. Considérons la collection $\mathcal{E}_1$ définie par l'ensemble des suites de coefficients à support fini μ qui sont telles que

- $\mu_k \leq k$,
- $\mu_{k+1} = k + 1 \Rightarrow \mu_k = 0$,

pour tout $k \geq 1$. Ainsi, les premières suites de coefficients de $\mathcal{E}_1$ sont

$$\begin{array}{l} (\bar{0}) \\ (1,\bar{0}) \\ (0,1,\bar{0}) \\ (1,1,\bar{0}) \\ (0,2,\bar{0}) \\ (0,0,1,\bar{0}) \\ (1,0,1,\bar{0}) \\ (0,1,1,\bar{0}) \\ (1,1,1,\bar{0}) \\ (0,2,1,\bar{0}) \\ (0,0,2,\bar{0}) \\ \vdots \end{array}$$

Notons que la collection $\mathcal{E}_1$ est également ordonnée de manière ascendante.

Définition 4.1.11. Soient une collection $\mathcal{E}$ de suites de coefficients à support fini et une suite de coefficients $\mu \in \mathcal{E}$.

- La plus petite suite de coefficients dans $\mathcal{E}$ qui est supérieure à μ, si elle existe, est appelée *le successeur immédiat de μ dans $\mathcal{E}$*, et est notée $\widetilde{\mu}$.
- La plus grande suite de coefficients dans $\mathcal{E}$ qui est inférieure à μ, si elle existe, est appelée le *prédécesseur immédiat de μ dans $\mathcal{E}$*, et est notée $\hat{\mu}$.
- Si μ est non nulle, le plus grand indice n tel que $\mu_n \neq 0$ est appelé l'*ordre* de μ, et est noté ord(μ). Si $\mu = 0$, on pose ord(μ) $= 0$.

Illustrons cette définition.

Exemple 4.1.12. Considérons la collection $\mathcal{F}$ définie à l'exemple 4.1.9. Par la définition 4.1.8, $\mathcal{F}$ contient toutes les suites de coefficients de base, c'est-à-dire, $e^{i-1} \in \mathcal{F}$ pour tout $i \geq 2$. Considérons

$$e^7 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, \bar{0}).$$

Le prédécesseurs immédiat de e^7 dans $\mathcal{F}$ est donné par

$$\hat{e}^7 = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \bar{0}).$$

En effet, il s'agit bien de la plus grande suite de coefficients de $\mathcal{F}$ inférieure à e^7. De plus, nous avons ord(e^7) = 7 tandis que ord($\hat{e}^7$) = 6. Cependant, si nous considérons

$$e^6 = (0, 0, 0, 0, 0, 1, \bar{0}),$$

nous avons

$$\hat{e}^6 = (1, 0, 1, 0, 1, \bar{0}),$$

et ord$(e^6) = 6$ tandis que ord$(\hat{e}^6) = 5$. De façon plus générale,

$$\hat{e}^n = \begin{cases} (0, 1, 0, 1, 0, \cdots, 0, 1, \bar{0}) & \text{si} \quad n \quad \text{est impair,} \\ (1, 0, 1, 0, \cdots, 0, 1, \bar{0}) & \text{si} \quad n \quad \text{est pair,} \end{cases}$$

où le 1 le plus à droite se trouve en position $n-1$. Nous obtenons alors que pour tout $n \geq 1$, ord$(e^n) = n$ tandis que ord$(\hat{e}^n) = n - 1$.

Exemple 4.1.13. Considérons la collection $\mathcal{E}_1$ définie à l'exemple 4.1.10. Le prédécesseur immédiat de e^7 dans $\mathcal{E}_1$ est donné par

$$\hat{e}^7 = (0, 2, 0, 4, 0, 6, \bar{0}),$$

tandis que le prédécesseurs immédiat de e^6 dans $\mathcal{E}_1$ est donné par

$$\hat{e}^6 = (1, 0, 3, 0, 5, \bar{0}).$$

De façon plus générale,

$$\hat{e}^n = \begin{cases} (0, 2, 0, 4, 0, 6, 0, 8, 0, \ldots, 0, n-1, \bar{0}) & \text{si} \quad n \quad \text{est impair,} \\ (1, 0, 3, 0, 5, 0, 7, 0, 9, 0, \ldots, 0, n-1, \bar{0}) & \text{si} \quad n \quad \text{est pair.} \end{cases}$$

Nous obtenons alors que pour tout $n \geq 1$, ord$(e^n) = n$ tandis que ord$(\hat{e}^n) = n - 1$.

Remarque 4.1.14. Comme illustré aux exemples 4.1.12 et 4.1.13, nous avons toujours que $\text{ord}(e^n) = n$ et $\text{ord}(\hat{e}^n) = n - 1$.

Ainsi, les suites de bases e^n sont les plus petites suites d'ordre n donc il est évident que les prédécesseurs immédiats $\hat{e}^n$ sont les suites maximales d'ordre $n - 1$. C'est pourquoi les suites $\hat{e}^n$ seront appelées les *éléments maximaux* de la collection. Et, nous dirons qu'une suite μ de la collection est *maximale* s'il existe $n \geq 1$ tel que $\mu = \hat{e}^n$.

Introduisons maintenant la notion de *collection de Zeckendorf.*

Définition 4.1.15. Soit $\mathcal{E}$ une collection de suites de coefficients à support fini. La collection est dite *de Zeckendorf* (pour les nombres entiers positifs) si elle satisfait les conditions suivantes :

(1) Pour chaque $\mu \in \mathcal{E}$, il existe au plus un nombre fini de suites de coefficients inférieures à μ.

(2) Étant donné $\mu \in \mathcal{E}$, si son successeur immédiat $\widetilde{\mu}$ n'est pas $\mu + e^1$, alors il existe un indice $i \geq 2$ tel que $\text{res}_{[1,i[}(\mu) = \text{res}_{[1,i[}(\hat{e}^i)$ et $\widetilde{\mu} = e^i + \text{res}_{[i,\infty[}(\mu)$.

Notons que le point (2) de la définition 4.1.15 signifie simplement que si le successeur immédiat d'une suite μ de la collection de Zeckendorf n'est pas obtenu en ajoutant 1 à son premier terme μ_1, alors il existe $n \geq 1$ tel qu'un préfixe de μ est égal à un élément maximal $\hat{e}^n$.

Illustrons la définition 4.1.15.

Exemple 4.1.16. La collection $\mathcal{F}$ définie à l'exemple 4.1.9 est une collection de Zeckendorf.

Pour commencer, illustrons la définition 4.1.15 sur quelques exemples. Pour rappel, la collection $\mathcal{F}$ est notamment composée des suites de coefficients suivantes

$$\begin{aligned} &\vdots \\ \mu &= (0,0,1,0,1,\bar{0}) \\ \widetilde{\mu} &= (1,0,1,0,1,\bar{0}) \\ &\vdots \\ \mu' &= ({\color{red}0,1,0,1,0,1},{\color{blue}0,0,0,0,1,\bar{0}}) \\ \widetilde{\mu'} &= (0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,\bar{0}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ainsi, le successeur immédiat de la suite $\mu = (0,0,1,0,1,\bar{0})$ est bien $\mu + e^1 = (1,0,1,0,1,\bar{0})$. Cependant, le successeur immédiat de $\mu' = (0,1,0,1,0,1,0,0,0,0,1,\bar{0})$ n'est pas $\mu' + e^1$ car

$$\mu' + e^1 = (1,1,0,1,0,1,0,0,0,0,1,\bar{0})$$

n'est pas une suite de $\mathcal{F}$ car elle possède deux 1 consécutifs. Cependant, vu l'exemple 4.1.12, nous avons bien

$${\color{red}\text{res}_{[1,7[}(\mu')} = \text{res}_{[1,7[}(\hat{e}^7)$$

et

$$\begin{aligned}\widetilde{\mu'} &= e^7 + \mathrm{res}_{[7,\infty[}(\mu') \\ &= (0,0,0,0,0,0,1,\bar{0}) + (0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,\bar{0})\end{aligned}$$

comme demandé à la condition (2) de la définition 4.1.15.

Démontrons maintenant que la collection $\mathcal{F}$ est effectivement une collection de Zeckendorf. Pour cela, commençons par montrer le point (1) de la définition 4.1.15, *i.e.* montrons que pour tout $\mu \in \mathcal{F}$, il existe un nombre fini de suites de coefficients inférieures à μ. Tout d'abord, si $\mu \in \mathcal{F}$ est non nulle, alors sa forme générale est

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_k, 1, \bar{0})$$

par définition de $\mathcal{F}$. Soit $\delta \in \mathcal{F}$ telle que

$$\delta <_a \mu.$$

Dans ce cas, δ est de la forme

$$\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_l, \ldots)$$

avec $\delta_l = 0$ pour tout $l > k+1$. En effet, sinon on aurait $\mu <_a \delta$. Ainsi, dans le "pire" des cas, on aurait $\delta_1, \ldots, \delta_{k+1}$ non nuls. Par conséquent, une borne sur le nombre de telles suites δ est 2^{k+1} et le point (1) de la définition 4.1.15 est démontré.

Montrons maintenant le point (2) de la définition 4.1.15. Pour cela, considérons $\mu \in \mathcal{F}$ telle que $\widetilde{\mu} \neq \mu + e^1$ et montrons qu'il existe un indice $i \geq 2$ tel que

$$\mathrm{res}_{[1,i[}(\mu) = \mathrm{res}_{[1,i[}(\hat{e}^i) \quad \text{et} \quad \widetilde{\mu} = e^i + \mathrm{res}_{[i,\infty[}(\mu).$$

Pour commencer, remarquons que si $\widetilde{\mu} \neq \mu + e^1$, alors nous avons deux cas possibles :

(a) Soit $\mu_1 = 1$ et donc μ est de la forme

$$\mu = (\underbrace{1,0,1,0,1,0,\ldots,1,0}_{t \text{ fois } (1,0)}, 0, x, \bar{0}) = ((1,0)^t,\ 0, x, \bar{0}),$$

avec $t \geq 1$ maximal et x un mot sur l'alphabet $\{0,1\}$. Dans ce cas, nous avons

$$\widetilde{\mu} = ((0,0)^{t-1},\ 0,1,0,x,\bar{0}).$$

Par exemple, si

$$\mu = (1,0,1,0,1,0,0,0,1,\ldots) = ((1,0)^3,\ 0,0,1,\ldots),$$

alors nous avons bien

$$\widetilde{\mu} = (0,0,0,0,0,1,0,0,1,\ldots) = ((0,0)^2,\ 0,1,0,0,1,\ldots).$$

(b) Soit $\mu_1 = 0$ et $\mu_2 = 1$ et donc μ est de la forme

$$\mu = (\underbrace{0,1,0,1,\ldots,0,1}_{t \text{ fois } (0,1)},0,x,\bar{0}) = ((0,1)^t,0,0,x,\bar{0}),$$

avec $t \geq 1$ maximal et x un mot sur l'alphabet $\{0,1\}$. Dans ce cas, nous avons

$$\widetilde{\mu} = ((0,0)^t,\ 1,0,x,\bar{0}).$$

Par exemple, si

$$\mu = (0,1,0,1,0,0,0,1,\ldots) = ((0,1)^2,\ 0,0,0,1,\ldots),$$

alors nous avons bien

$$\widetilde{\mu} = (0,0,0,0,1,0,0,1,\ldots) = ((0,0)^2,\ 1,0,0,1,\ldots).$$

Par conséquent, au vu de la forme des $\hat{e}^n$ donnée à l'exemple 4.1.12, le point (2) de la définition 4.1.15 est satisfait dans chacun des cas en prenant $i = t$.

Les deux points de la définition 4.1.15 étant vérifiés, la collection $\mathcal{F}$ est une collection de Zeckendorf.

Exemple 4.1.17. La collection $\mathcal{E}_1$ définie à l'exemple 4.1.10 est une collection de Zeckendorf. Illustrons la définition 4.1.15 sur quelques exemples.

Considérons la suite

$$\mu = (0,2,0,4,0,6,3,2,\bar{0}) \in \mathcal{E}_1\,.$$

Par construction de $\mathcal{E}_1$, nous avons

$$\widetilde{\mu} = (0,0,0,0,0,0,0,4,2,\bar{0}) \neq \mu + e^1.$$

Et, vu l'exemple 4.1.13, nous avons bien

$$\mathrm{res}_{[1,7[}(\mu) = \mathrm{res}_{[1,7[}(\hat{e}^7)$$

et

$$\begin{aligned}\widetilde{\mu} &= e^7 + \mathrm{res}_{[7,\infty[}(\mu)\\ &= (0,0,0,0,0,0,1,\bar{0}) + (0,0,0,0,0,0,3,2,\bar{0})\end{aligned}$$

comme demandé à la condition (2) de la définition 4.1.15.

Démontrer que la collection $\mathcal{E}_1$ est une collection de Zeckendorf se fait de façon similaire à l'exemple 4.1.16.

La définition 4.1.15 donne une description concise des propriétés que la collection doit satisfaire pour être une collection de Zeckendorf. Ainsi, lorsqu'il est simple de déterminer le successeur immédiat de chaque membre de la collection comme dans les exemples 4.1.16 et 4.1.17, cette définition est utile pour déterminer si une collection est de Zeckendorf ou non.

Remarquons également que la première partie de la définition 4.1.15 dit que chaque suite de coefficients d'une telle collection de Zeckendorf $\mathcal{E}$ possède un unique prédécesseur immédiat dans $\mathcal{E}$ et la seconde partie dit qu'elle possède un unique successeur immédiat dans $\mathcal{E}$. Le lemme suivant permet d'expliquer cette propriété.

Lemme 4.1.18. *Soit $\mathcal{E}$ une collection de Zeckendorf. Soit μ^0 la suite de coefficients nulle, i.e $\mu^0 = (\bar{0})$ et soit μ^{n+1} le successeur immédiat de μ^n dans $\mathcal{E}$ pour tout $n \geq 0$. Alors, μ^n est le prédécesseur immédiat de μ^{n+1} dans $\mathcal{E}$ pour tout $n \geq 0$. De plus, nous avons*

$$\mathcal{E} = \{\mu^n : n \geq 0\}.$$

Démonstration. Considérons μ^0 la suite nulle et μ^{n+1} le successeur immédiat de μ^n pour tout $n \geq 0$.

Commençons par montrer que μ^n est le prédécesseur immédiat de μ^{n+1} dans $\mathcal{E}$. Pour cela, procédons par l'absurde et supposons que μ^n n'est pas le prédécesseur immédiat de μ^{n+1} dans $\mathcal{E}$. Dans ce cas, il existe une suite de coefficients $\mu' \in \mathcal{E}$ et un entier $n \geq 0$ tels que

$$\mu^n <_a \mu' <_a \mu^{n+1}.$$

Ainsi, μ^{n+1} n'est pas le successeur immédiat de μ^n et nous obtenons une contradiction. Par conséquent, μ^n est le prédécesseur immédiat de μ^{n+1} et la première partie du lemme est démontrée.

Pour démontrer la seconde partie du lemme, considérons

$$S := \{\mu^n : n \geq 0\}$$

et montrons que $S = \mathcal{E}$.

Puisque S ne contient que des suites de $\mathcal{E}$, nous avons directement que S est un sous-ensemble de $\mathcal{E}$, i.e. $S \subset \mathcal{E}$. Ainsi, pour prouver l'égalité, il suffit de montrer que $\mathcal{E} \subset S$. Pour cela, considérons μ' une suite de coefficients dans $\mathcal{E}$, et montrons que $\mu' \in S$.

Si $\mu' = \mu^0$, l'appartenance à S est directe. Supposons donc que μ' soit strictement supérieure à μ^0 et considérons le sous-ensemble

$$T := \{\alpha \in \mathcal{E} : \alpha \leq_a \mu'\}.$$

Par la première partie de la définition 4.1.15, nous savons que T est un ensemble fini. De plus, par la définition 4.1.5 et par hypothèse sur μ', nous avons $\mu^0 \in T$. Ainsi, le sous-ensemble fini $S \cap T$ est non vide et donc il possède un plus grand élément μ^m.

Pour conclure, il nous suffit maintenant de montrer que $\mu^m = \mu'$. En effet, puisque $\mu^m \in S \cap T$, nous aurons $\mu' \in S \cap T$ et en particulier $\mu' \in S$ comme voulu. Pour cela, nous allons montrer que le sous-ensemble

$$T' := \{\alpha \in T : \mu^m <_a \alpha\}$$

est vide, c'est-à-dire que μ^m est le plus grand élément de T, qui est μ'. Procédons par l'absurde et supposons que T' soit non vide. Soit γ un élément de T'. En particulier, par définition de T et de T', nous avons $\gamma \in \mathcal{E}$. Ainsi, puisque la collection $\mathcal{E}$ est totalement ordonnée pour l'ordre lexicographique ascendant et que μ^{m+1}, le successeur immédiat de μ^m, est un élément de $\mathcal{E}$, nous avons soit $\mu^{m+1} \leq_a \gamma$, soit $\gamma <_a \mu^{m+1}$ qui est vrai.

- Supposons que $\mu^{m+1} \leq_a \gamma$. Dans ce cas, puisque $\gamma \in T$, nous avons

  $$\mu^{m+1} \leq_a \gamma \leq_a \mu',$$

  Ainsi, $\mu^{m+1} \in S \cap T$ et puisque $\mu^m <_a \mu^{m+1}$, cela contredit le choix de μ^m.

- Supposons que $\gamma <_a \mu^{m+1}$. Dans ce cas, puisque $\gamma \in T'$, nous avons

$$\mu^m <_a \gamma <_a \mu^{m+1},$$

ce qui contredit le fait que μ^{m+1} est le successeur immédiat de μ^m.

Puisque les deux cas mènent à une contradiction, il n'existe pas de tel $\gamma \in T'$, et donc, nous avons montré que $\mu^m = \mu' \in S$. Ainsi, $\mathcal{E} \subset S$. $\square$

Ainsi, grâce au lemme 4.1.18, nous savons que si une collection est de Zeckendorf, il est possible de la construire de manière itérative à partir de la suite de coefficients nulle en cherchant les successeurs immédiats.

Nous allons maintenant voir qu'il est également possible de construire une collection de Zeckendorf uniquement à partir des éléments maximaux $\hat{e}^n$. Autrement dit, une collection de Zeckendorf est entièrement déterminée par le sous-ensemble $\{\hat{e}^n : n \geq 2\}$.

Pour cela, introduisons la notion de *μ-bloc*.

Définition 4.1.19. Soit un ensemble $\{\mu^n : n \geq 2\}$ de suites de coefficients à support fini ordonné de manière ascendante tel que $ord(\mu^n) = n - 1$ pour tout $n \geq 2$.

Une suite de coefficients λ est un *μ-bloc à l'indice* n s'il existe un indice $1 \leq i \leq n$ tel que

(1) $0 \leq \lambda_i < \mu_i^{n+1}$,
(2) $\text{res}_{]i,n]}(\lambda) = \text{res}_{]i,n]}(\mu^{n+1})$,
(3) $\lambda_s = 0$ pour tout $s \notin [i, n]$.

Nous appelons l'intervalle $[i, n]$ le *bloc-support* de λ.

De plus, nous dirons qu'un μ-bloc à l'indice n est *propre* s'il est différent de μ^n pour tout $n \geq 2$.

Remarque 4.1.20.
- La suite de coefficients μ^n est un μ-bloc à l'indice $n-1$ de support $[1, n[$.
- Le bloc-support d'un μ-bloc propre non nul est déterminé de manière unique.
- La suite de coefficients nulle est un μ- bloc propre à l'indice n pour tout entier $n \geq 1$, pour lequel le bloc-support est $[n, n]$.

Illustrons la définition 4.1.19.

Exemple 4.1.21. Considérons la collection de Zeckendorf $\mathcal{F}$ définie à l'exemple 4.1.9 et la suite de coefficients

$$\lambda = (0, 0, 1, 0, 1, \bar{0}).$$

Montrons que λ est un $\hat{e}$-bloc propre à l'indice 5 de bloc-support $[1, 5]$. Considérons pour cela, la suite de coefficients $\hat{e}$ d'ordre 5, c'est à dire

$$\hat{e}^6 = (1, 0, 1, 0, 1, \bar{0}),$$

au vu de l'exemple 4.1.12. Les trois conditions de la définition 4.1.19 sont satisfaites pour $i = 1$:

(1) $0 = \lambda_1 < \hat{e}_1^6 = 1$,

(2) $\text{res}_{]1,5]}(\lambda) = \text{res}_{]1,5]}(\hat{e}^6)$,
(3) $\lambda_s = 0$ pour tout $s \notin [1,5]$.

Ainsi, λ est bien un $\hat{e}$-bloc propre à l'indice 5 de bloc-support $[1,5]$.

Exemple 4.1.22. Considérons la collection de Zeckendorf $\mathcal{E}_1$ définie à l'exemple 4.1.10. Considérons

$$\lambda = (0,0,0,0,5,\bar{0}),$$

et montrons que λ est un $\hat{e}$-bloc propre à l'indice 5 de bloc-support $[3,5]$. Pour cela, nous devons considérer la suite de coefficients $\hat{e}$ d'ordre 5, c'est à dire

$$\hat{e}^6 = (1,0,3,0,5,\bar{0}),$$

VU l'exemple 4.1.13. Les trois conditions de la définition 4.1.19 sont satisfaites pour $i = 3$:
(1) $0 = \lambda_3 < \hat{e}^6_3 = 3$,
(2) $\text{res}_{]3,5]}(\lambda) = \text{res}_{]3,5]}(\hat{e}^6)$,
(3) $\lambda_s = 0$ pour tout $s \notin [3,5]$.

Ainsi, λ est bien un $\hat{e}$-bloc propre à l'indice 5 de bloc-support $[3,5]$. Notons que les suites de coefficients $(0,0,1,0,5)$ et $(0,0,2,0,5)$ sont également des $\hat{e}$-blocs propres à l'indice 5 de bloc-support $[3,5]$.

La proposition suivante nous sera utile dans le chapitre 5.

Proposition 4.1.23. *Soit n un entier. Si λ est un $\hat{e}$-bloc à l'indice n, alors $\text{res}_{[l,\infty[}(\lambda)$ est un $\hat{e}$-bloc à l'indice n pour tout $l \geq 1$.*

Démonstration. Par la définition 4.1.19, si λ est un $\hat{e}$-bloc à l'indice n, alors il existe un indice $1 \leq i \leq n$ tel que
(1) $0 \leq \lambda_i < \hat{e}^{n+1}_i$,
(2) $\text{res}_{]i,n]}(\lambda) = \text{res}_{]i,n]}(\hat{e}^{n+1})$,
(3) $\lambda_k = 0$ pour tout $k \notin [i,n]$.

Montrons que $\delta(l) := \text{res}_{[l,\infty[}(\lambda)$ satisfait ces trois points en procédant par cas sur la valeur de l. Avant tout, rappelons que par définition de la restriction, nous avons

$$\delta(l)_k = \begin{cases} 0 & \forall\, k < l, \\ \lambda_k & \forall\, k \geq l, \end{cases} \tag{4.2}$$

pour tout $l \geq 1$.

- Si $l \leq i$, alors par le point (3), nous avons

$$\lambda_k = 0 \quad \forall\, k < l.$$

  Ainsi, vu (4.2),

$$\delta(l)_k = \lambda_k$$

  pour tout $k \geq 1$ et donc $\delta(l)$ est bien un $\hat{e}$-bloc à l'indice n pour tout $l \geq 1$.

- Si $l = i+1$, alors
$$\delta(l)_i = 0 \leq \lambda_i < \hat{e}_i^{n+1}.$$
par le point (1). Ainsi, $\delta(l)$ satisfait le point (1). De plus, vu les points (2) et (3) et vu (4.2), nous avons également
$$\mathrm{res}_{]i,n]}(\delta(l)) = \mathrm{res}_{]i,n]}(\lambda) = \mathrm{res}_{]i,n]}(\hat{e}^{n+1})$$
et
$$\delta(l)_k = 0 \quad \forall\, k \notin [i,n].$$
Ainsi, $\delta(l)$ satisfait les trois points.

- Si $i+1 < l \leq n$, les points (1) et (3) sont satisfaits de façon similaire au cas $l = i+1$. Pour le point (2), nous avons deux cas possibles :
  (a) Soit $\lambda_k = 0$ pour tout $k \in]i,n]$ et vu (4.2), on a bien
  $$\mathrm{res}_{]i,n]}(\delta(l)) = \mathrm{res}_{]i,n]}(\lambda) = \mathrm{res}_{]i,n]}(\hat{e}^{n+1}).$$
  (b) Soit il existe $j \in]i,n]$ tel que $\lambda_j \neq 0$. Dans ce cas,
  $$(\delta(l))_j = 0 \neq \lambda_j = (\hat{e}^{n+1})_j$$
  et donc $\delta(l)$ ne satisfait pas le point (2) pour un tel i. Il faut alors prendre $i = j$ pour que $\delta(l)$ satisfasse les trois points de la définition.

  Ainsi, dans tous les cas, $\delta(l)$ est un $\hat{e}$-bloc à l'indice n pour tout $l \geq 1$.

- Si $l \geq n+1$, alors vu le point (3), nous avons
$$\delta(l)_k = \lambda_k = 0$$
pour tout $k \geq l$. Ainsi, vu (4.2), $\delta(l)$ est la suite nulle et par la remarque 4.1.20, nous savons que la suite nulle est un $\hat{e}$-bloc à l'indice n pour tout $n \geq 1$. Ainsi, $\delta(l)$ est un $\hat{e}$-bloc à l'indice n pour tout $l \geq 1$.

□

Pour montrer qu'il est possible de construire une collection de Zeckendorf uniquement à partir des éléments maximaux $\hat{e}^n$, nous aurons besoin de deux théorèmes.

Théorème 4.1.24. *Soit $\mathcal{E}$ une collection de suites de coefficients à support fini telle que les prédécesseurs immédiats $\hat{e}^n$ existent pour tout $n \geq 2$. Alors, la collection $\mathcal{E}$ est de Zeckendorf si et seulement si les deux propriétés suivantes sont satisfaites :*

(1) Pour tout $\mu \in \mathcal{E}$, il existe un entier positif M, un unique $\hat{e}$-bloc λ^1 de bloc-support $[i_1, n_1]$ et un unique $\hat{e}$-bloc propre λ^m de bloc-support $[i_m, n_m]$ pour $2 \leq m \leq M$ (si $M \geq 2$) tel que $i_1 = 1, n_m + 1 = i_{m+1}$ pour tout $1 \leq m \leq M-1$ tels que
$$\mu = \sum_{m=1}^{M} \lambda^m.$$
Nous appelons cette somme la $\hat{e}$-bloc décomposition de μ.

(2) Étant donné $\mu \in \mathcal{E}$, si

$$\mu = \sum_{m=1}^{M} \lambda^m$$

est la $\hat{e}$-bloc décomposition de μ alors,

$$\widetilde{\mu} = \begin{cases} \mu + e^1 & \textit{si} \quad \lambda^1 \quad \textit{n'est pas maximal,} \\ \sum_{m=2}^{M} \lambda^m + e^n & \textit{si} \quad \lambda^1 = \hat{e}^n \quad \textit{pour un certain}\, n \geq 2. \end{cases}$$

Illustrons ce théorème.

Exemple 4.1.25. Considérons la collection de Zeckendorf $\mathcal{F}$ définie à l'exemple 4.1.9 et illustrons les points (1) et (2) du théorème 4.1.24. Soit

$$\mu = (0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, \bar{0})$$

une suite de coefficients de $\mathcal{F}$. La $\hat{e}$-bloc décomposition de μ est alors

$$\mu = \underbrace{(0, 0, 1, 0, 1, \bar{0})}_{\lambda^1} + \underbrace{(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, \bar{0})}_{\lambda^2}$$

où λ^1 est un $\hat{e}$-bloc à l'indice 5, de bloc-support $[1, 5]$ comme démontré à l'exemple 4.1.21 et $\lambda^2 = e^8$ est un $\hat{e}$-bloc propre à l'indice 8, de bloc-support $[6, 8]$. Comme les bloc-supports sont disjoints, il s'agit bien d'une $\hat{e}$-bloc décomposition. Remarquons en particulier que la décomposition

$$\mu = e^3 + e^5 + e^8$$

n'est pas valide puisque les bloc-supports des $\hat{e}$-blocs e^3 et e^5 ne sont pas disjoints.

Ensuite, puisque λ^1 n'est pas maximal, le point (2) du théorème 4.1.24 stipule que nous devons avoir

$$\widetilde{\mu} = \mu + e^1 = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, \bar{0}),$$

ce qui est effectivement le cas, par construction de $\mathcal{F}$.

Exemple 4.1.26. Considérons la collection de Zeckendorf $\mathcal{E}_1$ définie à l'exemple 4.1.10 et illustrons les points (1) et (2) du théorème 4.1.24. Considérons la suite de coefficients de $\mathcal{E}_1$

$$\mu = (1, 1, 0, 4, 3, 0, 7, \bar{0}).$$

La $\hat{e}$-bloc décomposition de μ est alors

$$\mu = \underbrace{(1, \bar{0})}_{\lambda^1} + \underbrace{(0, 1, 0, 4, \bar{0})}_{\lambda^2} + \underbrace{(0, 0, 0, 0, 3, 0, 7, \bar{0})}_{\lambda^3},$$

où λ^1, λ^2 et λ^3 sont bien des $\hat{e}$-blocs propres (sauf pour λ^1) de bloc-supports disjoints.

De plus, puisque $\lambda^1 = \hat{e}^2$, λ^1 est maximal et donc le point (2) stipule que nous devons avoir

$$\begin{aligned} \widetilde{\mu} &= \lambda^2 + \lambda^3 + e^2 \\ &= (0, 1, 0, 4, \bar{0}) + (0, 0, 0, 0, 3, 0, 7, \bar{0}) + (0, 1, \bar{0}) \\ &= (0, 2, 0, 4, 3, 0, 7, \bar{0}), \end{aligned}$$

ce qui est effectivement le cas, par construction de $\mathcal{E}_1$.

Le théorème 4.1.27 est une sorte de réciproque du théorème 4.1.24. Celui-ci va nous permettre de construire un élément d'une collection de Zeckendorf en sommant des $\hat{e}$-blocs.

De plus, le théorème 4.1.27 stipule que si $\mathcal{E}$ est une collection de Zeckendorf, tout $\hat{e}$-bloc propre est un membre de $\mathcal{E}$. Notons que ceci n'est pas forcément vrai si $\mathcal{E}$ n'est pas de Zeckendorf.

Théorème 4.1.27. *Soit $\mathcal{E}$ une collection de Zeckendorf telle que les prédécesseurs immédiats $\hat{e}^n$ existent pour tout $n \geq 2$.*

Considérons λ^m pour $m = 1, \ldots, M$, des $\hat{e}$-blocs ayant des bloc-supports disjoints $[i_m, n_m]$ et tels que λ^m est propre pour tout $m \geq 2$ (si $M \geq 2$). Alors, la suite de coefficients

$$\sum_{m=1}^{M} \lambda^m$$

est un membre de $\mathcal{E}$.

Illustrons ce théorème.

Exemple 4.1.28. Considérons la collection de Zeckendorf $\mathcal{F}$ définie à l'exemple 4.1.9 et les $\hat{e}$-blocs

$$\lambda^1 = e^3 \quad \text{et} \quad \lambda^2 = e^6$$

dont les bloc-supports sont respectivement $[1, 3]$ et $[4, 6]$.

Puisque les bloc-supports sont disjoints, le théorème 4.1.27 stipule alors que la suite de coefficients

$$\mu = e^3 + e^6 = (0, 0, 1, 0, 0, 1, \bar{0}),$$

est un membre de $\mathcal{F}$, ce qui est effectivement le cas.

Exemple 4.1.29. Considérons la collection de Zeckendorf $\mathcal{E}_1$ définie à l'exemple 4.1.10 et les $\hat{e}$-blocs

$$\lambda^1 = (0, 1, 0, 4, \bar{0}) \quad \text{et} \quad \lambda^2 = (0, 0, 0, 0, 3, 0, 7, \bar{0})$$

dont les bloc-supports sont respectivement $[2, 4]$ et $[5, 7]$.

Puisque les bloc-supports sont disjoints, le théorème 4.1.27 stipule alors que la suite de coefficients

$$\mu = \lambda^1 + \lambda^2 = (0, 1, 0, 4, 3, 0, 7, \bar{0}),$$

est un membre de $\mathcal{E}_1$, ce qui est effectivement le cas.

Afin de montrer qu'il est possible de construire une collection de Zeckendorf uniquement à partir des éléments maximaux $\hat{e}^n$, nous aurons besoin d'une dernière définition.

Définition 4.1.30. Soit un ensemble $\{\mu^n : n \geq 2\}$ de suites de coefficients à support fini ordonné de manière ascendante tel que $\text{ord}(\mu^n) = n - 1$ pour tout $n \geq 2$.

La collection $\mathcal{E}$ de suites de coefficients *déterminée par* $\{\mu^n : n \geq 2\}$ est la collection $\mathcal{E}$ de suites de coefficients à support fini telle que toute suite de $\mathcal{E}$ possède une μ-bloc décomposition $\sum_{m=1}^{M} \lambda^m$ où M est un entier positif.

Finalement, le corollaire 4.1.31 montre qu'il est possible de construire une collection de Zeckendorf uniquement à partir des éléments maximaux $\hat{e}^n$.

Corollaire 4.1.31. *Si $\mathcal{E}$ est la collection de suites de coefficients déterminée par l'ensemble $\{\mu^n : n \geq 2\}$ de la définition 4.1.30, alors $\mathcal{E}$ est de Zeckendorf et $\hat{e}^n = \mu^n$ pour tout $n \geq 2$.*

De plus, $\mathcal{E}$ est la seule collection de Zeckendorf telle que $\hat{e}^n = \mu^n$ pour tout $n \geq 2$.

Les théorèmes 4.1.24 et 4.1.27 et le corollaire 4.1.31 ne seront pas démontrés dans ce travail. La décision de ne pas fournir les preuves a été prise afin de concentrer les ressources sur la généralisation du théorème de Zeckendorf, l'objectif principal de cette section. En effet, les preuves nécessiteraient l'utilisation d'autres résultats qui n'apportent pas de contribution directe à cet objectif. En outre, nous invitons le lecteur désireux d'en apprendre d'avantage à consulter les pages 21 à 25 de l'article [4].

Illustrons la définition 4.1.30 et le corollaire 4.1.31.

Exemple 4.1.32. La collection de Zeckendorf $\mathcal{F}$ définie à l'exemple 4.1.9 est la collection *déterminée par* $\{\mu^n : n \geq 2\}$, où

$$\mu^n = \begin{cases} (0,1,0,1,0,\cdots,0,1,\bar{0}) & \text{si} \quad n \quad \text{est impair,} \\ (1,0,1,0,\cdots,0,1,\bar{0}) & \text{si} \quad n \quad \text{est pair.} \end{cases}$$

Pour démontrer cela, nous devons montrer que tout membre de $\mathcal{F}$ possède une μ-bloc décomposition. Or, ceci est direct puisque si $\delta \in \mathcal{F}$, alors δ se décompose sous forme de blocs de la façon suivante

$$\delta = (0^{l_1},\ (0,1)^{k_1},\ 0^{l_2},\ (0,1)^{k_2},\ \ldots,\ 0^{l_{m-1}},\ (0,1)^{k_{m-1}},\ 0^{l_m},\ (0,1)^{k_m},\ \bar{0}),$$

avec $l_i > 0$ et $k_i > 0$ pour tout $1 \leq i \leq m$. Ceci permet alors de constater que toute suite $\delta \in \mathcal{F}$ possède effectivement une μ-bloc décomposition.

Par exemple, considérons

$$\delta = \left(\boxed{0,0,1}, \boxed{0,0,1,0,1,0,1}, \boxed{0,0,0,1,0,1,0,1}, \boxed{0,0,0,0,1}, \bar{0}\right) \in \mathcal{F}$$

où les blocs de la forme $0^{l_i}\,(01)^{k_i}$ sont encadrés. Ceci nous permet d'obtenir la μ-bloc décomposition de δ :

$$\begin{aligned} \delta = {} & \underbrace{(0,0,1,\bar{0})}_{\lambda_1} + \underbrace{(0,0,0,0,0,1,0,1,0,1,\bar{0})}_{\lambda_2} \\ & + \underbrace{(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,1,0,1,\bar{0})}_{\lambda_3} \\ & + \underbrace{(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,\bar{0})}_{\lambda_4} \end{aligned}$$

où λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4 sont bien des μ-blocs de bloc-supports disjoints.

Par conséquent, toute suite $\delta \in \mathcal{F}$ possède une telle décomposition et donc la collection $\mathcal{F}$ est déterminée par $\{\mu^n : n \geq 2\}$.

Le corollaire 4.1.31 stipule alors que la collection $\mathcal{F}$ est une collection de Zeckendorf et que $\hat{e}^n = \mu^n$ pour tout $n \geq 2$, ce que nous savions déjà être le cas vu les exemples 4.1.16 et 4.1.12. Ainsi, la collection $\mathcal{F}$ est déterminée par l'ensemble $\{\hat{e}^n : n \geq 2\}$.

Exemple 4.1.33. La collection de Zeckendorf $\mathcal{E}_1$ définie à l'exemple 4.1.10 est la collection *déterminée par* $\{\mu^n : n \geq 2\}$, où

$$\mu^n = \begin{cases} (0,2,0,4,0,6,0,8,0,\ldots,0,n-1,\bar{0}) & \text{si} \quad n \quad \text{est impair}, \\ (1,0,3,0,5,0,7,0,9,0,\ldots,0,n-1,\bar{0}) & \text{si} \quad n \quad \text{est pair}. \end{cases}$$

En effet, un peu comme dans l'exemple 4.1.32, on se convainc que tout membre de $\mathcal{E}_1$ possède une μ-bloc décomposition.

Le corollaire 4.1.31 stipule alors que la collection $\mathcal{E}_1$ est une collection de Zeckendorf et que $\hat{e}^n = \mu^n$ pour tout $n \geq 2$, ce que nous savions déjà être le cas vu les exemples 4.1.17 et 4.1.13. Ainsi, la collection $\mathcal{E}_1$ est déterminée par l'ensemble $\{\hat{e}^n : n \geq 2\}$.

Par conséquent, grâce au corollaire 4.1.31, il nous suffit maintenant de déterminer l'ensemble des prédécesseurs $\{\hat{e}^n : n \geq 2\}$ afin de définir une collection de Zeckendorf. Ainsi, connaître les éléments maximaux d'une collection va nous permettre de reconstruire toute la collection.

Avant de généraliser le théorème de Zeckendorf, il nous faut définir le dernier concept de *suite fondamentale*. Pour être fondamentale, une suite $Q = (Q_k)_{k\geq 1}$ de naturels doit notamment posséder la propriété de *$\mathcal{E}$-représentation unique* :

Définition 4.1.34. Soient une collection $\mathcal{E}$ de suites de coefficients à support fini et une suite $Q = (Q_k)_{k\geq 1}$ de naturels. On dira que Q possède *la propriété de $\mathcal{E}$-représentation unique* si pour toutes suites μ et μ' de $\mathcal{E}$ avec $\mu \neq \mu'$, nous avons

$$\mathrm{val}_Q(\mu) \neq \mathrm{val}_Q(\mu'),$$

où $\mathrm{val}_Q(\mu) = \sum_{k\geq 1} \mu_k Q_k$ comme défini à la section 1.3.

Étant donné une suite Q ayant la propriété de $\mathcal{E}$-représentation unique, dénotons par $\mathrm{val}_Q(\mathcal{E})$ le sous-ensemble constitué des valeurs $\mathrm{val}_Q(\mu)$ pour les suites de coefficients non-nulles $\mu \in \mathcal{E}$ et appelons ce sous-ensemble un *$\mathcal{E}$-sous-ensemble* de $\mathbb{N}$.

Définissons ensuite la notion de *suite fondamentale*.

Définition 4.1.35. Soient une collection $\mathcal{E}$ de suites de coefficients à support fini et un sous-ensemble Y de $\mathbb{N}$.

S'il existe une suite $Q = (Q_k)_{k\geq 1}$ de naturels ayant la propriété de $\mathcal{E}$-représentation unique telle que $\mathrm{val}_Q(\mathcal{E}) = Y$, alors Q est appelée une *suite fondamentale* pour le $\mathcal{E}$-sous-ensemble Y.

De plus, si la suite fondamentale Q est une suite croissante (resp. décroissante), alors Y est aussi appelé un *$\mathcal{E}$-sous-ensemble croissant (resp. décroissant) de* $\mathbb{N}$.

Remarquons que si Q est une *suite fondamentale* pour un $\mathcal{E}$-sous-ensemble Y, cela signifie simplement que tout élément de Y peut se décomposer sous la forme

$$\sum_{k\geq 1} \mu_k Q_k$$

pour une suite $\mu \in \mathcal{E}$.

Exemple 4.1.36. Considérons la collection de Zeckendorf $\mathcal{F}$ définie à l'exemple 4.1.9 et la suite $F = (F_n)_{n\geq 1}$ de naturels définie par la relation de récurrence

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

pour tout $n \geq 1$ et ayant comme conditions initiales $F_1 = 1$ et $F_2 = 2$. Ainsi, F est la suite de Fibonacci.

Nous verrons dans l'exemple 4.1.42 que la suite F est une suite fondamentale pour le $\mathcal{F}$-ensemble $\mathbb{N}$. Ainsi, F possède la propriété de $\mathcal{F}$-représentation unique, c'est-à-dire que pour toutes suites $\mu, \mu' \in \mathcal{F}$ telles que $\mu \neq \mu'$, on a

$$\mathrm{val}_F(\mu) \neq \mathrm{val}_F(\mu').$$

Par exemple, si $\mu = (1, 0, 1, \bar{0}) \in \mathcal{F}$, alors

$$\mathrm{val}_F(\mu) = F_1 + F_3 = 4.$$

Et, si $\mu' = (1, 0, 0, 1, \bar{0}) \in \mathcal{F}$, alors

$$\mathrm{val}_F(\mu') = F_1 + F_4 = 6.$$

De plus, le lemme 4.1.41 implique que pour tout $\mu \in \mathcal{F}$, nous avons

$$F_1 + \mathrm{val}_F(\mu) = \mathrm{val}_F(\widetilde{\mu}),$$

où $\widetilde{\mu}$ est le successeur immédiat de μ dans $\mathcal{F}$. Par exemple, si $\mu = (0, 0, 1, \bar{0})$, alors $\widetilde{\mu} = (1, 0, 1, \bar{0})$ et on a bien

$$\underbrace{F_1}_{=1} + \underbrace{\mathrm{val}_F(\mu)}_{=F_3=3} = \underbrace{\mathrm{val}_F(\widetilde{\mu})}_{=4}.$$

Ainsi, il est clair que

$$\mathrm{val}_F(\mathcal{F}) = \mathbb{N}\,.$$

Exemple 4.1.37. Considérons la collection de Zeckendorf $\mathcal{E}_1$ définie à l'exemple 4.1.10 et la suite croissante $Q = (Q_k)_{k\geq 1}$ de naturels définie par la relation de récurrence

$$Q_{n+2} = (n + 1)Q_{n+1} + Q_n$$

pour tout $n \geq 1$ et ayant comme conditions initiales $Q_1 = 1$ et $Q_2 = 2$. Les 10 premiers termes de Q sont

$$1, 2, 5, 17, 73, 382, 2365, 16937, 137861, 1257686.$$

Comme nous le verrons dans l'exemple 4.1.43, la suite Q possède la propriété de $\mathcal{E}_1$-représentation unique, c'est-à-dire que pour toutes suites $\mu, \mu' \in \mathcal{E}_1$ telles que $\mu \neq \mu'$, nous avons

$$\mathrm{val}_Q(\mu) \neq \mathrm{val}_Q(\mu').$$

Par exemple, si $\mu = (0, 2, \bar{0}) \in \mathcal{E}_1$, alors

$$\mathrm{val}_Q(\mu) = 2Q_2 = 4.$$

Et, si $\mu' = (1, 1, 1, \bar{0}) \in \mathcal{E}_1$, alors

$$\mathrm{val}_Q(\mu') = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 8.$$

En outre, puisque le lemme 4.1.41 implique que pour tout $\mu \in \mathcal{E}_1$,

$$Q_1 + \mathrm{val}_Q(\mu) = \mathrm{val}_Q(\widetilde{\mu}),$$

où $\widetilde{\mu}$ est le successeur immédiat de μ dans $\mathcal{E}_1$, le fait que

$$\mathrm{val}_Q(\mathcal{E}_1) = \mathbb{N}$$

est clair.

Chang [4] généralise le théorème de Zeckendorf à d'autres suites linéaires récurrentes de la façon suivante.

Théorème 4.1.38. *Soit $Q = (Q_k)_{k \geq 1}$ une suite de naturels strictement croissante telle que $Q_1 = 1$* [1].

(1) *Il existe des suites de coefficients μ^n d'ordre $n - 1$ pour tout $n \geq 2$ telles que*

$$Q_n = Q_1 + \sum_{k \geq 1} \mu_k^n Q_k. \tag{4.3}$$

(2) *Supposons qu'une suite de suites de coefficients μ^n d'ordre $n - 1$ pour $n \geq 2$ satisfasse la récurrence (4.3) pour tout $n \geq 2$ et considérons $\mathcal{E}$ une collection de Zeckendorf déterminée par $\{\hat{e}^n : n \geq 2\}$ où $\hat{e}^n = \mu^n$ pour tout $n \geq 2$.*
Alors, Q est une suite fondamentale pour le $\mathcal{E}$-ensemble des nombres $\mathbb{N}$.

Afin de démontrer le théorème 4.1.38, considérons une suite $Q = (Q_k)_{k \geq 1}$ de naturels strictement croissante telle que $Q_1 = 1$.

Commençons par démontrer le point (1) du théorème 4.1.38, *i.e.* montrons qu'il existe des suites de coefficients μ^n d'ordre $n - 1$ pour tout $n \geq 2$ telles que

$$Q_n = Q_1 + \sum_{k \geq 1} \mu_k^n Q_k.$$

Pour cela, il nous suffit d'utiliser un algorithme glouton comme décrit ci-dessous afin de construire de telles suites μ^n. Le point (1) suit donc directement de l'algorithme suivant.
Algorithme : Étant donnée Q_n pour $n \geq 2$, considérons a_1 le plus grand entier tel que

$$(Q_n - 1) - a_1 Q_{n-1} \geq 0$$

et pour $2 \leq k \leq n - 1$, nous définissons récursivement a_k comme étant le plus grand entier tel que

$$(Q_n - 1) - (a_1 Q_{n-1} + \ldots + a_k Q_{n-k}) \geq 0.$$

1. Cette condition est la même que celle rencontrée dans la définition d'un SNP à la section 1.3.

Ensuite, puisque $Q_1 = 1$, l'algorithme se termine avec une égalité

$$Q_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k Q_{n-k}.$$

Ainsi, par construction, les suites de coefficients μ^n définies par

$$\mu^n := (a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, \bar{0})$$

pour tout $n \geq 2$, sont telles que $\text{ord}(\mu^n) = n - 1$ et satisfont le point (1) du théorème 4.1.38.

Illustrons cet algorithme pour la suite de Fibonacci et la suite Q définie à l'exemple 4.1.37.

Exemple 4.1.39. Considérons la suite de Fibonacci F et illustrons cet algorithme glouton. Si $F_n = 21$, alors

$$(F_n - 1) - a_1 F_{n-1} \geq 0 \Leftrightarrow 20 \geq 13a_1$$

et le plus grand entier a_1 satisfaisant l'inégalité est $a_1 = 1$. En continuant de la sorte, nous obtenons

$$(a_1, \ldots, a_{n-1}) = (1, 0, 1, 0, 1, 0).$$

Ainsi, il est clair que

- si $n = 2m + 1$, alors
$$(a_1, \ldots, a_{n-1}) = (1, 0)^m,$$
- si $n = 2m$, alors
$$(a_1, \ldots, a_{n-1}) = (1, 0)^m 1.$$

Et donc, l'algorithme nous donne les suites μ^n définies, pour tout $n \geq 2$, par

$$\mu^n := (a_{n-1}, \ldots, a_1, \bar{0}) = \begin{cases} (0, 1, 0, 1, 0, \cdots, 0, 1, \bar{0}) & \text{si} \quad n \quad \text{est impair,} \\ (1, 0, 1, 0, \cdots, 0, 1, \bar{0}) & \text{si} \quad n \quad \text{est pair,} \end{cases}$$

où le 1 le plus à droite se trouve en position $n - 1$.

Exemple 4.1.40. Considérons la suite Q définie à l'exemple 4.1.37 et illustrons l'algorithme. Si $Q_n = 17$, alors

$$(Q_n - 1) - a_1 Q_{n-1} \geq 0 \Leftrightarrow 16 \geq 5a_1$$

et le plus grand entier a_1 satisfaisant l'inégalité est $a_1 = 3$. En continuant de la sorte, nous obtenons

$$(a_1, \ldots, a_{n-1}) = (3, 0, 1).$$

Ainsi, il est clair que

- si $n = 2m + 1$, alors
$$(a_1, \ldots, a_{n-1}) = (n - 1, 0, n - 3, 0, \ldots, 0, 5, 0, 3, 1),$$
- si $n = 2m$, alors
$$(a_1, \ldots, a_{n-1}) = (n - 1, 0, n - 3, 0, \ldots, 0, 4, 0, 2, 0).$$

Et donc, l'algorithme nous donne les suites μ^n définies, pour tout $n \geq 2$, par

$$\mu^n := (a_{n-1}, \dots, a_1, \bar{0}) = \begin{cases} (0,2,0,4,0,6,0,8,0,\dots,0,n-1,\bar{0}) & \text{si} \quad n \quad \text{est impair,} \\ (1,0,3,0,5,0,7,0,9,0,\dots,0,n-1,\bar{0}) & \text{si} \quad n \quad \text{est pair.} \end{cases}$$

Démontrons maintenant le point (2) du théorème 4.1.38. Pour cela, nous avons besoin d'un lemme.

Lemme 4.1.41. *Soient $\mathcal{E}$ et Q la collection de Zeckendorf et la suite strictement croissante définies comme dans le second point du théorème 4.1.38. Si $\mu \in \mathcal{E}$, alors*

$$Q_1 + \mathrm{val}_Q(\mu) = \mathrm{val}_Q(\widetilde{\mu}),$$

où $\widetilde{\mu}$ est le successeur immédiat de μ dans $\mathcal{E}$.

Démonstration. Pour commencer, remarquons que si $\widetilde{\mu} = e^1 + \mu$, alors nous avons

$$\begin{aligned} \mathrm{val}_Q(\widetilde{\mu}) &= \sum_{k\geq 1} \widetilde{\mu}_k Q_k \\ &= \sum_{k\geq 1} (e^1 + \mu)_k Q_k \\ &= \sum_{k\geq 1} e^1_k Q_k + \sum_{k\geq 1} \mu_k Q_k \\ &= Q_1 + \sum_{k\geq 1} \mu_k Q_k \\ &= Q_1 + \mathrm{val}_Q(\mu), \end{aligned}$$

où la quatrième égalité découle du fait que $e^1_1 = 1$ et $e^1_k = 0$ pour tout $k > 1$ par la définition 4.1.3. Ainsi, le lemme est vrai. Supposons maintenant que $\widetilde{\mu} \neq e^1 + \mu$. Dans ce cas, puisque $\mathcal{E}$ est de Zeckendorf, nous savons, par la définition 4.1.15, qu'il existe un indice $n \geq 2$ tel que

$$\mu = \hat{e}^n + res_{[n,\infty[}(\mu) \quad \text{et} \quad \widetilde{\mu} = e^n + res_{[n,\infty[}(\mu).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} Q_1 + \mathrm{val}_Q(\mu) &= Q_1 + \sum_{k\geq 1} \mu_k Q_k \\ &= Q_1 + \sum_{k\geq 1} \hat{e}^n_k Q_k + \sum_{k=n}^{\infty} \mu_k Q_k \\ &= Q_n + \sum_{k=n}^{\infty} \mu_k Q_k \\ &= \sum_{k\geq 1} e^n_k Q_k + \sum_{k=n}^{\infty} \mu_k Q_k \\ &= \sum_{k\geq 1} \widetilde{\mu}_k Q_k = \mathrm{val}_Q(\widetilde{\mu}) \end{aligned}$$

où la troisième égalité est obtenue en utilisant la définition récursive de Q donnée par (4.3) avec $\mu^n = \hat{e}^n$ et la quatrième égalité découle directement de la définition 4.1.3.

L'égalité recherchée étant obtenue dans les deux cas, nous pouvons conclure le lemme.

$\square$

Considérons une suite de suites de coefficients μ^n d'ordre $n-1$ pour $n \geq 2$ satisfaisant la relation de récurrence (4.3) pour tout $n \geq 2$. Considérons également $\mathcal{E}$ une collection de Zeckendorf déterminée par $\{\hat{e}^n : n \geq 2\}$ où $\hat{e}^n = \mu^n$ pour tout $n \geq 2$.

Afin de démontrer le point (2) du théorème, nous devons montrer que Q est une suite fondamentale pour le $\mathcal{E}$-ensemble des nombres $\mathbb{N}$. Autrement dit, il faut montrer que Q possède la propriété de $\mathcal{E}$-représentation unique et que $\mathrm{val}_Q(\mathcal{E}) = \mathbb{N}$.

Pour rappel, cela revient à montrer que pour toutes suites $\delta, \delta' \in \mathcal{E}$ telles que $\delta \neq \delta'$, on a

$$\mathrm{val}_Q(\delta) \neq \mathrm{val}_Q(\delta'),$$

et que l'ensemble de ces valeurs, $\mathrm{val}_Q(\mathcal{E})$, est l'ensemble $\mathbb{N}$. Pour ce faire, il suffit de montrer que la fonction $f : \mathcal{E} \setminus \{(\bar{0})\} \to \mathbb{N}$ définie par

$$f(\delta) = \mathrm{val}_Q(\delta)$$

est bijective dans $\mathbb{N}$.

Considérons $\delta^1 := e^1$ et définissons récursivement δ^{k+1} comme le successeur immédiat de δ^k dans $\mathcal{E}$ pour $k \geq 1$. Dans ce cas, le lemme 4.1.18 assure que

$$\mathcal{E} = \{(\bar{0})\} \cup \{\delta^k : k \geq 1\}.$$

Ensuite, procédons par récurrence pour montrer que $f(\delta^n) = n$ pour tout $n \geq 1$. Cela suffit pour montrer que la fonction f est bijective dans $\mathbb{N}$.

- **Cas de base** : Si $n = 1$, nous avons

  $$f(\delta^1) = \mathrm{val}_Q(\delta^1) = \sum_{k \geq 1} \delta^1_k Q_k = \sum_{k \geq 1} e^1_k Q_k = Q_1 = 1,$$

  où la quatrième égalité découle du fait que $e^1_1 = 1$ et $e^1_k = 0$ pour tout $k > 1$ par la définition 4.1.3.

- **Induction** : Supposons qu'il existe un indice $n \geq 1$ tel que $f(\delta^k) = k$ pour tout $k \leq n$ et montrons le résultat pour $n+1$. Puisque par construction δ^{n+1} est le successeur immédiat de δ^n, le lemme 4.1.41 assure que

  $$f(\delta^{n+1}) = \mathrm{val}_Q(\delta^{n+1}) = \sum_{k \geq 1} \delta^{n+1}_k Q_k = Q_1 + \sum_{k \geq 1} \delta^n_k Q_k = Q_1 + \mathrm{val}_Q(\delta^n).$$

  Or, par hypothèse de récurrence, $\mathrm{val}_Q(\delta^n) = n$. Ainsi, nous avons

  $$f(\delta^{n+1}) = Q_1 + n = n + 1,$$

  comme voulu.

Ainsi, pour toutes suites $\delta, \delta' \in \mathcal{E}$ telles que $\delta \neq \delta'$, on a

$$\mathrm{val}_Q(\delta) \neq \mathrm{val}_Q(\delta')$$

et $\mathrm{val}_Q(\mathcal{E}) = \mathbb{N}$, comme voulu. Ceci conclut la partie (2) du théorème 4.1.38. □

Illustrons le théorème 4.1.38 sur nos deux exemples habituels.

Exemple 4.1.42 (Théorème de Zeckendorf)**.** Considérons la suite de Fibonacci F et illustrons le théorème 4.1.38.

Vu l'exemple 4.1.39, nous savons déjà que la suite de suites de coefficients $(\mu^n)_{n\geq 2}$ satisfaisant le point (1) du théorème pour la suite F est la suite définie par les suites

$$\mu^n = \begin{cases} (0,1,0,1,0,\cdots,0,1,\bar{0}) & \text{si} \quad n \quad \text{est impair,} \\ (1,0,1,0,\cdots,0,1,\bar{0}) & \text{si} \quad n \quad \text{est pair.} \end{cases}$$

pour tout $n \geq 2$. Considérons la collection de Zeckendorf déterminée par $\{\hat{e}^n : n \geq 2\}$ où $\hat{e}^n = \mu^n$. Par l'exemple 4.1.32, nous savons qu'il s'agit de la collection de Zeckendorf $\mathcal{F}$ définie à l'exemple 4.1.9.

Par conséquent, le point (2) du théorème 4.1.38 implique que la suite de Fibonacci F est une suite fondamentale pour le $\mathcal{F}$-ensemble des nombres $\mathbb{N}$.

En d'autres termes, cela signifie que tout entier naturel peut se décomposer de manière unique comme

$$\sum_{k\geq 1} \mu_k F_k$$

pour une suite $\mu \in \mathcal{F}$.

Or, par construction de $\mathcal{F}$, les suites de coefficients $\mu \in \mathcal{F}$ sont telles que μ_k vaut 0 ou 1 pour tout $k \geq 1$ et telles que μ ne possède pas deux 1 consécutifs. Par conséquent, dans ce cas-ci, le théorème 4.1.38 est exactement le *théorème de Zeckendorf.*

Exemple 4.1.43. Considérons la suite Q définie à l'exemple 4.1.37 et illustrons le théorème 4.1.38 pour cette suite.

Par l'exemple 4.1.40, nous savons déjà que la suite de suites de coefficients $(\mu^n)_{n\geq 2}$ satisfaisant le point (1) du théorème pour la suite Q est la suite définie par les suites

$$\mu^n = \begin{cases} (0,2,0,4,0,6,0,8,0,\ldots,0,n-1,\bar{0}) & \text{si} \quad n \quad \text{est impair,} \\ (1,0,3,0,5,0,7,0,9,0,\ldots,0,n-1,\bar{0}) & \text{si} \quad n \quad \text{est pair.} \end{cases}$$

pour tout $n \geq 2$. Considérons la collection de Zeckendorf déterminée par $\{\hat{e}^n : n \geq 2\}$ où $\hat{e}^n = \mu^n$. Par l'exemple 4.1.33, nous savons qu'il s'agit de la collection de Zeckendorf $\mathcal{E}_1$ définie à l'exemple 4.1.10.

Par conséquent, le point (2) du théorème 4.1.38 implique que la suite Q est une suite fondamentale pour le $\mathcal{E}_1$-ensemble des nombres $\mathbb{N}$.

En d'autres termes, cela signifie que tout entier naturel peut se décomposer de manière unique comme

$$\sum_{k\geq 1} \mu_k Q_k$$

pour une suite $\mu \in \mathcal{E}_1$.

4.2 Généralisation aux entiers p-adiques

Dans son article [4], Chang généralise également le théorème de Zeckendorf aux entiers p-adiques. Avant de voir cette généralisation, nous allons rappeler la construction de ces entiers.

4.2.1 Construction des entiers p-adiques

Dans cette section, nous allons reconstruire l'anneau des entiers p-adiques $\mathbb{Z}_p$, où p est un nombre premier. Celle-ci est basée sur l'article [18], rédigé par une doctorante de l'université de Chicago. Le lecteur intéressé peut également se référer au livre [7].

Tout comme l'ensemble des nombres réels, l'ensemble des nombres p-adiques, où p est un nombre premier, est une complétion du champ $\mathbb{Q}$. Cependant, si c'est la distance euclidienne définie à partir de la valeur absolue euclidienne, qui donne naissance aux réels, c'est une autre distance, la distance p-adique qui permet de construire les nombres p-adiques.

Nous commençons par définir la distance p-adique. Pour cela, rappelons la définition d'une valeur absolue et d'une distance sur un champ $\mathbb{K}$.

Définition 4.2.1 (Valeur absolue)**.** Une *valeur absolue* sur $\mathbb{K}$ est une fonction $|\cdot| : \mathbb{K} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ qui satisfait les propriétés suivantes pour tous $x, y \in \mathbb{K}$:

1. $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$,
2. $|xy| = |x||y|$, et
3. $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Inégalité triangulaire).

De plus, une valeur absolue est dite *ultramétrique* si elle satisfait également la propriété suivante :

4. $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}$ (Inégalité triangulaire forte).

Remarque 4.2.2. Notons que toute fonction satisfaisant la propriété 4 satisfait nécessairement la propriété 3.

Définition 4.2.3 (Distance)**.** Une *distance* sur $\mathbb{K}$ est une fonction $d : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ satisfaisant les propriétés suivantes pour tout $x, y, z \in \mathbb{K}$

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$,
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Une distance est induite par une valeur absolue $|\cdot|$ si elle est définie par

$$d(x, y) = |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{K}\,.$$

Un ensemble sur lequel est défini une distance est appelé un *espace métrique* et si cette distance est induite par une valeur absolue ultramétrique, l'espace est alors qualifié d' *ultramétrique.*

Soit p un nombre premier fixé. Plaçons nous maintenant sur le champ $\mathbb{Q}$ et définissons la distance p-adique.

Définition 4.2.4 (la valuation p-adique)**.** La *valuation p-adique* sur $\mathbb{Q}$ est définie par une fonction $\nu_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$. Soit $x \in \mathbb{Q}$ tel que $x \neq 0$. Si $x \in \mathbb{Z}$, $\nu_p(x)$ est l'unique entier positif satisfaisant

$$x = p^{\nu_p(x)} x',$$

où $p \nmid x'$. Autrement dit, $\nu_p(x)$ est l'exposant de la plus grande puissance de p divisant x. Pour tous $x \in \mathbb{Q}$ non nul, nous pouvons écrire $x = \dfrac{a}{b}$, où $a, b \in \mathbb{Z}$. Ainsi, nous définissons

$$\nu_p(x) = \nu_p(a) - \nu_p(b).$$

Pour finir, nous posons

$$\nu_p(0) = +\infty.$$

Remarque 4.2.5. On considère souvent que la valuation p-adique d'un nombre décrit le degré de divisibilité de ce nombre par p, i.e. "combien de fois" ce nombre est divisible par p. Ainsi, cela fait sens de définir $\nu_p(0) = +\infty$ puisque 0 peut être divisé par p un nombre infini de fois.

Lemme 4.2.6. *Pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$, nous avons les propriétés suivantes*

1. $\nu_p(xy) = \nu_p(x) + \nu_p(y)$,
2. $\nu_p(x + y) \geq \min\{\nu_p(x), \nu_p(y)\}$.

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{Q}$. Nous pouvons écrire $x = \dfrac{a}{b}, y = \dfrac{c}{d}$, avec $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ et $b, d \neq 0$.

1. Remarquons d'abord que si $x = 0$ ou $y = 0$, alors la propriété est directement satisfaite puisque $\nu_p(xy) = \nu_p(x) + \nu_p(y) = +\infty$. Considérons alors le cas où x et y sont tous les deux non nuls. Par la définition 4.2.4, nous avons

$$\nu_p(x) = \nu_p(a) - \nu_p(b), \nu_p(y) = \nu_p(c) - \nu_p(d).$$

De plus, puisque $xy = \dfrac{ac}{bd}$,

$$\nu_p(xy) = \nu_p(ac) - \nu_p(bd).$$

Or, puisque $a, c \in \mathbb{Z}$, par la définition 4.2.4, on a

$$\begin{aligned} a &= p^{\nu_p(a)} a', \quad \text{où} \quad p \nmid a' \\ c &= p^{\nu_p(c)} c', \quad \text{où} \quad p \nmid c'. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$ac = p^{\nu_p(a)} a' \cdot p^{\nu_p(c)} c' = p^{\nu_p(a) + \nu_p(c)} a'c'$$

où $p \nmid a'c'$ (puisque $p \nmid a'$ et $p \nmid c'$). Ainsi, par la définition 4.2.4, $\nu_p(ac) = \nu_p(a) + \nu_p(c)$. Et, en procédant de façon similaire, nous obtenons $\nu_p(bd) = \nu_p(b) + \nu_p(d)$. Il suit alors que

$$\nu_p(xy) = \nu_p(ac) - \nu_p(bd) = \nu_p(a) + \nu_p(c) - \nu_p(b) - \nu_p(d).$$

Ceci démontre la première propriété.

2. Pour commencer, remarquons que si $x + y = 0$, alors la propriété est directement satisfaite puisque $\nu_p(x + y) = +\infty \geq \min\{\nu_p(x), \nu_p(y)\}$. Plaçons nous dans le cas où $x + y \neq 0$ et supposons, sans perte de généralité, que $\nu_p(x) \leq \nu_p(y)$. Ainsi, nous pouvons considérer que $\nu_p(x)$ est fini puisque si $\nu_p(x)$ était infini, $\nu_p(y)$ serait également infini donc on aurait $x = y = 0$ et $x + y = 0$. Ainsi, par la définition 4.2.4, nous avons

$$\nu_p(x) = \nu_p(a) - \nu_p(b).$$

En outre, si $y = 0$, on aurait trivialement $\nu_p(x + y) = \nu_p(x) = \min\{\nu_p(x), \nu_p(y)\}$ donc nous pouvons également considérer $y \neq 0$. Ainsi, nous avons

$$\nu_p(y) = \nu_p(c) - \nu_p(d).$$

Puisque $\nu_p(x) \leq \nu_p(y)$, nous avons

$$\begin{aligned} & \nu_p(a) - \nu_p(b) \leq \nu_p(c) - \nu_p(d) \\ \Leftrightarrow \quad & \nu_p(a) + \nu_p(d) \leq \nu_p(b) + \nu_p(c) \\ \Leftrightarrow \quad & \nu_p(ad) \leq \nu_p(bc), \end{aligned}$$

par la propriété 1. Ensuite, puisque $ad \in \mathbb{Z}$ et $bc \in \mathbb{Z}$, par la définition 4.2.4, nous avons

$$\begin{aligned} ad &= p^{\nu_p(ad)}m, \quad \text{où} \quad p \nmid m \\ bc &= p^{\nu_p(bc)}n, \quad \text{où} \quad p \nmid n. \end{aligned}$$

Et donc,

$$ad + bc = p^{\nu_p(ad)}m + p^{\nu_p(bc)}n.$$

Or, puisque $\nu_p(ad) \leq \nu_p(bc)$, on a $p^{\nu_p(ad)} | p^{\nu_p(bc)}$ donc $p^{\nu_p(ad)} | ad + bc$ et donc on obtient que $\nu_p(ad + bc) \geq \nu_p(ad)$. Ensuite, par la propriété 1, nous avons

$$\begin{aligned} & \nu_p(ad + bc) \geq \nu_p(ad) \\ \Leftrightarrow \quad & \nu_p(ad + bc) \geq \nu_p(a) + \nu_p(d) \\ \Leftrightarrow \quad & \nu_p(ad + bc) - \nu_p(b) - \nu_p(d) \geq \nu_p(a) - \nu_p(b) \\ \Leftrightarrow \quad & \nu_p(ad + bc) - \nu_p(bd) \geq \nu_p(a) - \nu_p(b). \end{aligned}$$

Pour finir, puisque $x + y = \dfrac{ad + bc}{bd}$, nous avons

$$\begin{aligned} \nu_p(x + y) &= \nu_p(ad + bc) - \nu_p(bd) \\ &\geq \nu_p(a) - \nu_p(b) \\ &= \nu_p(x) \\ &= \min\{\nu_p(x), \nu_p(y)\}, \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve de la propriété 2.

□

Définition 4.2.7. La *valeur absolue p-adique* est la fonction $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ définie par

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-\nu_p(x)} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

La valeur absolue p-adique induit la *distance p-adique*, notée d_p.

Exemple 4.2.8. Nous avons

$$|7|_3 = |1|_3 = 1, \ |7|_7 = \frac{1}{7},$$
$$|15|_3 = |6|_3 = \frac{1}{3}, \ |15|_7 = 1.$$

Proposition 4.2.9. *La valeur absolue p-adique est une valeur absolue ultramétrique sur $\mathbb{Q}$.*

Démonstration. Prenons $x, y \in \mathbb{Q}$ et montrons que la valeur absolue p-adique satisfait les 4 propriétés de la définition 4.2.1.

1. Si $x = 0$, la définition 4.2.7 implique que $|x|_p = 0$. Si $x \neq 0$, $|x|_p = p^{-\nu_p(x)}$ par définition. Ainsi, puisque $p \neq 0$, $|x|_p \neq 0$ et on peut conclure.
2. Si $x = 0$ ou $y = 0$, on a trivialement $|xy|_p = |x|_p|y|_p$. Supposons que $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Par la définition 4.2.7 et par la propriété 1 du lemme 4.2.6, on a

$$|x|_p|y|_p = p^{-\nu_p(x)-\nu_p(y)} = p^{-\nu_p(xy)} = |xy|_p.$$

3-4. Si $x+y = 0$, on a directement $|x+y|_p = 0 \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$. Supposons que $x+y \neq 0$ et supposons sans perte de généralité que $|x|_p \geq |y|_p$. Dans ce cas, $|x|_p \neq 0$ ce qui implique que $x \neq 0$ et donc $\nu_p(x) \leq \nu_p(y)$. Ainsi, par la propriété 2 du lemme 4.2.6, nous obtenons que $\nu_p(x+y) \geq \min\{\nu_p(x), \nu_p(y)\} = \nu_p(x)$ et donc $p^{-\nu_p(x+y)} \leq p^{-\nu_p(x)}$ et nous pouvons conclure puisque, par la définition 4.2.7, nous obtenons $|x+y|_p \leq |x|_p = \max\{|x|_p, |y|_p\}$.

□

Avant de passer à la construction des nombres p-adiques, énonçons un résultat très important concernant les valeurs absolues sur $\mathbb{Q}$. Ce théorème ne sera pas démontré dans ce travail mais est disponible aux pages 56-59 du livre [7].

Théorème 4.2.10 (Théorème d'Ostrowski)**.** *Toute valeur absolue non triviale sur $\mathbb{Q}$ est équivalente soit à la valeur absolue standard, soit à une valeur absolue p-adique.*

Sans rentrer dans les détails, nous allons maintenant parler de la construction du champ $\mathbb{Q}_p$ des nombres p-adiques et de l'anneau $\mathbb{Z}_p$ des entiers p-adiques.

Définition 4.2.11. Soit X un espace muni d'une valeur absolue $|\cdot|$. Une suite $(a_n)_n$ est de *Cauchy* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $m, n \geq N$,

$$|a_n - a_m| < \epsilon.$$

Définition 4.2.12. Un espace métrique X est *complet* si toute suite de Cauchy dans X converge vers un point de X.

Théorème 4.2.13. *Soit $\mathbb{K}$ un champ avec une valeur absolue $|\cdot|$. Alors il existe un champ complet $\mathbb{K}'$ avec une valeur absolue $|\cdot|'$ qui étend $\mathbb{K}$. Cette complétion $\mathbb{K}'$ est unique à isomorphisme près. De plus, sur $\mathbb{K}$, $|\cdot|'$ est restreinte à $|\cdot|$ et $\mathbb{K}$ est dense dans $\mathbb{K}'$.*

L'idée générale de la preuve est disponible dans [18] et la preuve complète aux pages 5-6 de la référence [21].

Définition 4.2.14. On définit *le champ des nombres p-adiques* $\mathbb{Q}_p$ comme la complétion de $\mathbb{Q}$ par rapport à la métrique p-adique. Cette complétion existe et est unique (à isomorphisme près) vu le théorème 4.2.13.

Notons qu'en raison du théorème d'Ostrowski, les ensembles des nombres réels et des nombres p-adiques sont les seules complétions de $\mathbb{Q}$.

Remarque 4.2.15. Puisque chaque rationnel est identifié à une suite de Cauchy qui est la suite constante, nous avons $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_p$.

Nous pouvons maintenant construire l'anneau des entiers p-adiques, $\mathbb{Z}_p$, à partir du champ $\mathbb{Q}_p$.

Définition 4.2.16. On définit l'*anneau* $\mathbb{Z}_p$ des entiers p-adiques par

$$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x|_p \leq 1\}.$$

Une autre façon (équivalente) de définir les entiers p-adiques est de les considérer comme les expressions formelles de la forme

$$c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + \cdots + c_n p^n + \cdots ,$$

avec $c_j \in [0, p-1]$ pour tout $j \geq 0$. En outre, cette expression formelle peut être vue comme la limite d'une suite d'entiers $(Q_n)_{n\geq 1}$, où

$$Q_n = c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + \cdots + c_{n-1} p^{n-1}.$$

Dans ce cas,

$$Q_n \in [0, p^n - 1]$$

et

$$Q_{n+1} \equiv Q_n \mod p^n$$

pour tout $n \geq 1$.

Remarque 4.2.17. Notons que pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $\nu_p(x) \geq 0$, donc $|x|_p \leq 1$. Ainsi, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_p$.

4.2.2 Généralisation du théorème de Zeckendorf

Soit p un nombre premier. Avant de donner la généralisation de Chang du théorème de Zeckendorf aux entiers p-adiques, commençons par adapter l'ordre d'une suite de coefficients, donné à la définition 4.1.11, au contexte des entiers p-adiques. Notons que, dans ce contexte, les suites de coefficients ne sont plus à support fini.

Définition 4.2.18. Soit p un nombre premier. Lorsqu'une suite de coefficients non nulle μ est utilisée pour les entiers p-adiques, le plus petit indice n tel que $\mu_n \neq 0$ est appelé l'*ordre p-adique* de μ, et est noté $\mathrm{ord}_p(\mu)$. Si $\mu = 0$, on définit $\mathrm{ord}_p(\mu) = \infty$.

Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait de ne pas confondre cet ordre avec l'ordre donné à la définition 4.1.11.

Ensuite, notons qu'une suite $Q = (Q_k)_{k\geq 1}$ d'entiers p-adiques est décroissante si $|Q_k|_p > |Q_{k+1}|_p$ pour tout $k \geq 1$. Par exemple, si nous avons

$$\begin{aligned} Q_1 &= 0 + p + 2p^2 + 1p^3 + \cdots \\ Q_2 &= 0 + 0p + 0p^2 + 1p^3 + \cdots , \end{aligned}$$

alors en particulier $|Q_1|_p = p^{-1}$ et $|Q_2|_p = p^{-3}$. Et donc, nous avons bien

$$|Q_1|_p = p^{-1} > |Q_2|_p = p^{-3}.$$

Remarque 4.2.19. Soit p un nombre premier. Si $Q = (Q_k)_{k\geq 1}$ est une suite décroissante d'entiers p-adiques et $\mu = (\mu_k)_{k\geq 1}$ est une suite d'entiers strictement inférieurs à p, alors,

$$|\mu_k Q_k|_p \longrightarrow 0.$$

Ainsi, la série

$$\mathrm{val}_Q(\mu) = \sum_{k\geq 1} \mu_k Q_k$$

est bien définie.

Nous allons maintenant donner la généralisation de Chang du théorème de Zeckendorf aux entiers p-adiques.

Théorème 4.2.20. *Soit p un nombre premier. Considérons $\mathcal{E}$ une collection arbitraire de suites de coefficients μ telle que $\mu_k < p$ pour tout $k \geq 1$. Si $Q = (Q_k)_{k\geq 1}$ est une suite décroissante d'entiers p-adiques, alors Q possède la propriété de $\mathcal{E}$-représentation unique. Autrement dit, pour toutes suites μ et $\delta \in \mathcal{E}$ telles que $\mu \neq \delta$,*

$$\mathrm{val}_Q(\mu) \neq \mathrm{val}_Q(\delta).$$

Démonstration. Considérons $Q = (Q_k)_{k\geq 1}$ une suite décroissante d'entiers p-adiques et procédons par contraposée, *i.e.* supposons qu'il existe deux suites de coefficients non nulles μ et δ dans $\mathcal{E}$ telles que

$$\mathrm{val}_Q(\mu) = \sum_{k\geq 1} \mu_k Q_k = \sum_{k\geq 1} \delta_k Q_k = \mathrm{val}_Q(\delta),$$

et montrons que $\mu = \delta$.

D'abord, montrons que

$$\mathrm{ord}_p(\mu) = \mathrm{ord}_p(\delta).$$

Pour cela, posons

$$n := \mathrm{ord}_p(\mu) \quad \text{et} \quad n' := \mathrm{ord}_p(\delta)$$

et supposons que $n < n'$. Dans ce cas, puisque Q est décroissante, nous avons

$$\mathrm{ord}_p(\sum_{k\geq 1} \mu_k Q_k) = \mathrm{ord}_p(Q_n).$$

Pour aider à la compréhension, illustrons ce résultat sur un exemple. Prenons $p = 5$ et considérons la suite de coefficients

$$\mu = (0, 0, 0, 1, 2, 0, \ldots).$$

Nous avons, en particulier $\mathrm{ord}_p(\mu) = 4$ et

$$\sum_{k\geq 1} \mu_k Q_k = 1Q_4 + 2Q_5 + \cdots .$$

Ainsi, puisque Q est une suite décroissante, nous avons bien

$$ord_p(\sum_{k\geq 1} \mu_k Q_k) = ord_p(Q_4).$$

Revenons maintenant à la preuve. Pour les mêmes raisons, nous avons également

$$\mathrm{ord}_p(\sum_{k\geq 1} \delta_k Q_k) = \mathrm{ord}_p(Q_{n'}).$$

En outre, par décroissance de la suite Q, nous avons $|Q_n|_p > |Q_{n'}|_p$ et donc nous obtenons

$$\mathrm{ord}_p(\sum_{k\geq 1} \mu_k Q_k) = \mathrm{ord}_p(Q_n) < \mathrm{ord}_p(Q_{n'}) = \mathrm{ord}_p(\sum_{k\geq 1} \delta_k Q_k).$$

Ceci contredit le fait que

$$\mathrm{ord}_p(\sum_{k\geq 1} \mu_k Q_k) = \mathrm{ord}_p(\sum_{k\geq 1} \delta_k Q_k).$$

Sans perte de généralité, nous concluons donc que

$$n = \mathrm{ord}_p(\mu) = \mathrm{ord}_p(\delta).$$

Ensuite, montrons que $\mu = \delta$. Pour cela, supposons qu'il existe un plus petit indice positif $s \geq n$ tel que $\mu_s \neq \delta_s$. Dans ce cas, si $m = \mathrm{ord}_p(Q_s) \geq 0$, alors

$$\mu_s Q_s \not\equiv \delta_s Q_s \mod p^m.$$

Cela contredit le fait que

$$\sum_{k\geq 1} \mu_k Q_k = \sum_{k\geq 1} \delta_k Q_k,$$

et donc, nous devons avoir $\mu = \delta$. $\square$

Chapitre 5

Réciproques faibles du théorème de Zeckendorf

La réciproque faible du théorème de Zeckendorf consiste à se demander s'il existe une suite monotone satisfaisant le théorème de Zeckendorf. Dans ce chapitre, nous allons nous concentrer sur la réciproque faible des théorèmes de Zeckendorf généralisés.

Par exemple, si nous définissons *la suite de Fibonacci d'ordre N*, que l'on appelle parfois suite de N-bonacci, comme la suite $(H_k)_{k\geq 1}$ telle que

$$H_n = \begin{cases} 2^{n-1} & \text{si} \quad 1 \leq n \leq N, \\ H_{n-1} + \cdots + H_{n-N} & \text{si} \quad n > N. \end{cases}$$

Le *théorème de Zeckendorf généralisé* pour cette suite stipule alors que chaque entier positif est exprimé, de manière unique, comme une somme de termes distincts de la suite de Fibonacci d'ordre N où N termes consécutifs ne sont pas utilisés. Appelons la restriction de ne pas permettre les N termes consécutifs *la condition de Zeckendorf d'ordre* N.

Dans ce cas, *la réciproque faible* de ce théorème de Zeckendorf généralisé pour la suite de Fibonacci d'ordre N stipule que *la suite de Fibonacci d'ordre N est la seule suite croissante qui représente N de manière unique sous la condition de Zeckendorf d'ordre N* [2].

Dans le chapitre 4, nous avons discuté de deux généralisations du théorème de Zeckendorf, à savoir une généralisation à d'autres suites linéaires récurrentes et une généralisation aux entiers p-adiques. Dans ce chapitre, nous nous concentrerons sur la réciproque faible de ces deux théorèmes, à savoir les théorèmes 4.1.38 et 4.2.20. Nous répondrons donc à la question suivante pour chacune de ces généralisations : *Existe-t-il une suite linéaire récurrente monotone satisfaisant le théorème de Zeckendorf généralisé ?*

5.1 Réciproque faible du théorème 4.1.38

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 4, Chang généralise le théorème de Zeckendorf à d'autres suites linéaires récurrentes [4]. Ainsi, si $Q = (Q_k)_{k\geq 1}$ est une suite strictement croissante de naturels telle que $Q_1 = 1$, alors le théorème 4.1.38 stipule deux choses :

(1) Il existe des suites de coefficients μ^n d'ordre $n-1$ pour tout $n \geq 2$ telles que

$$Q_n = Q_1 + \sum_{k\geq 1} \mu_k^n Q_k. \tag{5.1}$$

(2) Supposons qu'une suite de suites de coefficients μ^n d'ordre $n-1$ pour $n \geq 2$ satisfasse la récurrence (5.1) pour tout $n \geq 2$ et considérons $\mathcal{E}$ une collection de Zeckendorf déterminée par $\{\hat{e}^n : n \geq 2\}$ où $\hat{e}^n = \mu^n$ pour tout $n \geq 2$.

Alors, Q est une suite fondamentale pour le $\mathcal{E}$-ensemble des nombres $\mathbb{N}$.

Le théorème suivant affirme alors que l'unique suite strictement croissante satisfaisant le théorème 4.1.38 est la suite Q définie dans le théorème. Il s'agit de la *réciproque faible* du théorème 4.1.38.

Théorème 5.1.1. *Soit une collection $\mathcal{E}$ de suites de coefficients à support fini.*

(1) *Si $\mathcal{E}$ est de Zeckendorf, alors $\mathbb{N}$ est un $\mathcal{E}$-ensemble de nombres. Autrement dit, il existe une suite $Q = (Q_k)_{k\geq 1}$ de naturels ayant la propriété de $\mathcal{E}$-représentation unique telle que* $\mathrm{val}_Q(\mathcal{E}) = \mathbb{N}$.

(2) *Tout $\mathcal{E}$-sous-ensemble strictement croissant Y de $\mathbb{N}$ possède une unique suite strictement croissante fondamentale $Q = (Q_k)_{k\geq 1}$. De plus, si $\mathcal{E}$ est de Zeckendorf et $Y = \mathbb{N}$, alors Q est définie par*

$$\begin{cases} Q_1 = 1, \\ Q_n = \sum_{k\geq 1} \hat{e}^n_k Q_k + 1 \qquad \forall\, n \geq 2, \end{cases}$$

où $\hat{e}^n$ est le prédécesseur immédiat de e^n dans $\mathcal{E}$ pour tout $n \geq 2$.

Démonstration. (1) Par le théorème 4.1.38, nous savons qu'il existe une suite fondamentale Q pour le $\mathcal{E}$-ensemble des nombres $\mathbb{N}$. Ainsi, $\mathbb{N}$ est bien un $\mathcal{E}$-ensemble de nombres.

(2) Notons que pour la première partie du point (2), la collection n'est pas forcément de Zeckendorf.

Soient $Q = (Q_k)_{k\geq 1}$ et $Z = (Z_k)_{k\geq 1}$ des suites fondamentales de naturels strictement croissantes pour un $\mathcal{E}$-sous-ensemble strictement croissant Y de $\mathbb{N}$. Autrement dit,

$$Y = \mathrm{val}_Q(\mathcal{E}) = \mathrm{val}_Z(\mathcal{E}) \tag{5.2}$$

où

$$\mathrm{val}_Q(\mathcal{E}) = \left\{ \sum_{k\geq 1} \mu_k Q_k \mid \mu \in \mathcal{E} \right\} \quad \text{et} \quad \mathrm{val}_Z(\mathcal{E}) = \left\{ \sum_{k\geq 1} \mu_k Z_k \mid \mu \in \mathcal{E} \right\}.$$

Procédons par récurrence pour montrer que $Q_n = Z_n$ pour tout $n \geq 1$.

- **Cas de base** : Puisque $\mathcal{E}$ est une collection, nous savons par la définition 4.1.8 que $\mathcal{E}$ contient la suite de coefficients de base $e^1 = (1, \bar{0})$.

  De plus, $\mathcal{E}$ est ordonnée de manière ascendante et Q et Z sont strictement croissantes. Ainsi,

  $$\underbrace{\sum_{k\geq 1} e^1_k Q_k}_{=Q_1} \quad \text{et} \quad \underbrace{\sum_{k\geq 1} e^1_k Z_k}_{=Z_1},$$

  sont les plus petits entiers non nuls dans Y et donc $Q_1 = Z_1$.

- **Induction** : Supposons que $Q_k = Z_k$ pour tout $1 \leq k < n$ où $n \geq 2$ et montrons que $Q_n = Z_n$.

  Procédons par l'absurde et supposons, sans perte de généralité, que $Z_n < Q_n$. Dans ce cas, l'hypothèse (5.2) implique qu'il existe une suite de coefficients $\mu \in \mathcal{E}$ telle que
  $$Z_n = \sum_{k \geq 1} \mu_k Q_k,$$
  où $\operatorname{ord}(\mu) < n$. En effet, si $\operatorname{ord}(\mu) \geq n$, alors, puisque Q est strictement croissante, nous aurions
  $$Z_n = \sum_{k \geq 1} \mu_k Q_k \geq Q_n,$$
  ce qui contredit $Z_n < Q_n$. Donc, nous avons bien $\operatorname{ord}(\mu) < n$, i.e. $\mu_k = 0$ pour tout $k \geq n$. Ainsi, nous avons
  $$Z_n = \sum_{k \geq 1} \mu_k Q_k = \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k Q_k = \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k Z_k = \sum_{k \geq 1} \mu_k Z_k,$$
  où la troisième égalité découle de l'hypothèse de récurrence.

  En particulier, nous avons
  $$Z_n = \sum_{k \geq 1} e_k^n Z_k = \sum_{k \geq 1} \mu_k Z_k.$$
  Par conséquent, cela contredit l'hypothèse que Z possède la propriété de $\mathcal{E}$-représentation unique stipulant que pour tout $\mu, \mu' \in \mathcal{E}$ telles que $\mu \neq \mu'$, nous avons
  $$\operatorname{val}_Z(\mu) \neq \operatorname{val}_Z(\mu').$$
  Ainsi, nous obtenons une contradiction et donc $Q_n \leq Z_n$.

  De manière similaire, nous pouvons montrer que le cas $Q_n < Z_n$ mène également à une contradiction. Ainsi, nous pouvons conclure que $Q_n = Z_n$ et la première partie du point (2) est démontrée.

Démontrons maintenant la seconde partie du point (2). Par le théorème 4.1.38, la suite strictement croissante Q définie par
$$\begin{cases} Q_1 = 1, \\ Q_n = \sum_{k \geq 1} \hat{e}_k^n Q_k + Q_1 \qquad \forall\, n \geq 2, \end{cases}$$
où $\hat{e}^n$ est le prédécesseur immédiat de e^n dans $\mathcal{E}$ pour tout $n \geq 2$, est une suite fondamentale pour le $\mathcal{E}$-ensemble de nombre $\mathbb{N}$.

De plus, par l'unicité des suites strictement croissantes que nous venons de prouver ci-dessus, Q est l'unique suite fondamentale pour $\mathbb{N}$. Ceci démontre la seconde partie du point (2).

□

Illustrons le théorème 5.1.1 sur nos deux exemples du chapitre 4 :

Exemple 5.1.2. Considérons la collection $\mathcal{F}$ définie à l'exemple 4.1.9. Pour rappel, $\mathcal{F}$ est la collection définie par l'ensemble des suites de coefficients à support fini μ qui sont telles que μ_k vaut 0 ou 1 pour tout $k \geq 1$ et telles que μ ne possède pas deux 1 consécutifs. Ainsi, $\mathcal{F}$ correspond à la condition classique de Zeckendorf, ou encore à la condition de Zeckendorf d'ordre 2.

Par l'exemple 4.1.16, nous savons que $\mathcal{F}$ est une collection de Zeckendorf. Ainsi, par le théorème 5.1.1, le $\mathcal{F}$-ensemble de nombre $\mathbb{N}$ possède une unique suite fondamentale strictement croissante Q définie par

$$\begin{cases} Q_1 = 1, \\ Q_n = \sum_{k\geq 1} \hat{e}^n_k Q_k + 1 \qquad \forall\, n \geq 2, \end{cases}$$

où $\hat{e}^n$ est le prédécesseur immédiat de e^n dans $\mathcal{F}$ pour tout $n \geq 2$.

Or, par l'exemple 4.1.12, nous avons

$$\hat{e}^n = \begin{cases} (0, 1, 0, 1, 0, \cdots, 0, 1, \bar{0}) & \text{si} \quad n \quad \text{est impair,} \\ (1, 0, 1, 0, \cdots, 0, 1, \bar{0}) & \text{si} \quad n \quad \text{est pair,} \end{cases}$$

où le 1 le plus à droite se trouve en position $n - 1$.

Ainsi, par l'exemple 4.1.39, nous savons que la suite Q définie ci-dessus pour de tels $\hat{e}^n$ est en réalité la suite de Fibonacci.

Par conséquent, puisque $\mathcal{F}$ est la condition classique de Zeckendorf, le théorème 5.1.1 implique que la seule suite strictement croissante satisfaisant le théorème de Zeckendorf est la suite de Fibonacci.

Exemple 5.1.3. Considérons la collection de Zeckendorf $\mathcal{E}_1$ définie à l'exemple 4.1.10. Pour rappel, $\mathcal{E}_1$ est définie par l'ensemble des suites de coefficients à support fini μ qui sont telles que

- $\mu_k \leq k$,
- $\mu_{k+1} = k + 1 \Rightarrow \mu_k = 0$,

pour tout $k \geq 1$.

Puisque $\mathcal{E}_1$ est une collection de Zeckendorf, le théorème 5.1.1 implique que le $\mathcal{E}_1$-ensemble de nombre $\mathbb{N}$ possède une unique suite fondamentale strictement croissante Q définie par

$$\begin{cases} Q_1 = 1, \\ Q_n = \sum_{k\geq 1} \hat{e}^n_k Q_k + 1 \qquad \forall\, n \geq 2, \end{cases}$$

où $\hat{e}^n$ est le prédécesseur immédiat de e^n dans $\mathcal{E}_1$ pour tout $n \geq 2$.

Or, par l'exemple 4.1.13, nous avons

$$\hat{e}^n = \begin{cases} (0, 2, 0, 4, 0, 6, 0, 8, 0, \ldots, 0, n-1, \bar{0}) & \text{si} \quad n \quad \text{est impair,} \\ (1, 0, 3, 0, 5, 0, 7, 0, 9, 0, \ldots, 0, n-1, \bar{0}) & \text{si} \quad n \quad \text{est pair.} \end{cases}$$

Ainsi, par l'exemple 4.1.40, nous savons que la suite Q définie ci-dessus pour de tels $\hat{e}^n$ est en réalité la suite strictement croissante de naturels Q définie à l'exemple 4.1.37 par la relation de récurrence

$$Q_{n+2} = (n + 1)Q_{n+1} + Q_n$$

pour tout $n \geq 1$ et ayant comme conditions initiales $Q_1 = 1$ et $Q_2 = 2$.

5.2 Réciproque faible du théorème 4.2.20

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 4, Chang généralise également le théorème de Zeckendorf aux entiers p-adiques [4]. Ainsi, si nous fixons un nombre premier p, une collection arbitraire $\mathcal{E}$ de suites de coefficients μ telle que $\mu_n < p$ pour tout $n \geq 1$. Alors, le théorème 4.2.20 stipule que si $Q = (Q_k)_{k\geq 1}$ est une suite décroissante d'entiers p-adiques, Q possède la propriété de $\mathcal{E}$-représentation unique. Autrement dit, pour toutes suites μ et $\mu' \in \mathcal{E}$ telles que $\mu \neq \mu'$,

$$\mathrm{val}_Q(\mu) \neq \mathrm{val}_Q(\mu').$$

Afin de donner la réciproque faible de ce théorème, nous allons définir la notion de limite d'une suite formée de suites de coefficients.

Définition 5.2.1. Considérons la suite $(\mu^k)_{k\geq 1}$ formée de suites de coefficients à support fini. Une suite de coefficients μ est appelée la ***limite*** de la suite $(\mu^k)_{k\geq 1}$ s'il existe une suite croissante d'indices $(M_k)_{k\geq 1}$ telle que $M_k \geq \mathrm{ord}(\mu^k)$ et

$$\mathrm{res}_{[1,M_k]}(\mu) = \mathrm{res}_{[1,M_k]}(\mu^k)$$

pour tout $k \geq 1$.

Autrement dit, pour tout préfixe t de μ, il existe n tel que pour tout $k > n$, μ^k a t comme préfixe [1].

Exemple 5.2.2. Considérons la suite $(\mu^k)_{k\geq 1}$ formée des suites de coefficients à support fini définies par

$$\mu^k = \sum_{j=1}^{k} (1+2j)\, e^{1+2j}$$

pour tout $k \geq 1$. Ainsi, nous avons par exemple

$$\begin{aligned}\mu^1 &= (0,0,3,\bar{0}),\\ \mu^2 &= (0,0,3,0,5,\bar{0}),\\ \mu^3 &= (0,0,3,0,5,0,7,\bar{0}).\end{aligned}$$

Et, on a

$$\mathrm{ord}(\mu^k) = 1 + 2k$$

pour tout $k \geq 1$. La limite de la suite $(\mu^k)_{k\geq 1}$ est alors donnée par la suite de coefficients

$$\mu = \sum_{k=1}^{\infty} (1+2k) e^{1+2k} = (0,0,3,0,5,0,7,0,9,\ldots).$$

En effet, si nous considérons la suite croissante d'indice $(M_k)_{k\geq 1}$ définie par

$$M_k = 1 + 2k \geq \mathrm{ord}(\mu^k),$$

1. Remarquons que cette définition de limite est analogue à la convergence d'une suite de mots finis vers un mot infini limite.

pour tout $k \geq 1$, nous avons bien

$$\text{res}_{[1,M_k]}(\mu) = \text{res}_{[1,M_k]}(\mu^k)$$

pour tout $k \geq 1$. Par exemple, si $k = 3$, alors $M_3 = 7$ et nous avons bien

$$\underbrace{\text{res}_{[1,M_3]}(\mu)}_{=(0,0,3,0,5,0,7,\bar{0})} = \underbrace{\text{res}_{[1,M_3]}(\mu^3)}_{=(0,0,3,0,5,0,7,\bar{0})}.$$

Nous allons maintenant définir une collection de Zeckendorf pour les entiers p-adiques, comme nous l'avions fait pour les entiers positifs à la définition 4.1.15.

Définition 5.2.3. Soit p un nombre premier. Une collection $\mathcal{E}^\star$ de suites de coefficients est *une collection de Zeckendorf pour les entiers p-adiques* si elle possède une sous-collection de Zeckendorf $\mathcal{E}$ (pour les entiers positifs) telle que $\mathcal{E}^\star$ est l'ensemble des suites de coefficients qui sont les limites des suites de suites de coefficients dans $\mathcal{E}$.

Nous dirons que $\mathcal{E}^\star$ est la *complétion* de $\mathcal{E}$.

Remarque 5.2.4. Notons que nous avons toujours $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^\star$. En effet, si $\mu \in \mathcal{E}$, alors la suite constante $(\mu, \mu, \mu, \ldots) \in \mathcal{E}^\star$.

Exemple 5.2.5. Considérons la collection $\mathcal{E}_1$ définie à l'exemple 4.1.10. Si $\mathcal{E}^\star$ est la complétion de $\mathcal{E}_1$, alors la suite

$$\mu = \sum_{k=1}^{\infty}(1+2k)e^{1+2k}$$

est un élément de $\mathcal{E}^\star$. En effet, vu l'exemple 5.2.2, nous savons que μ est la limite de la suite $(\mu_k)_{k\geq 1}$ définie par

$$\mu_k = \sum_{j=1}^{k}(1+2j)e^{1+2j}$$

pour tout $k \geq 1$. Et, par définition de $\mathcal{E}_1$, $(\mu_k)_{k\geq 1}$ est un élément de $\mathcal{E}_1$. Par conséquent, μ est bien la limite d'une suite de $\mathcal{E}_1$ et donc μ appartient à $\mathcal{E}^\star$.

De même, nous pouvons montrer que

$$\mu' = \sum_{k=1}^{\infty}(3k)e^{3k} = (0,0,3,0,0,6,0,0,9,\ldots)$$

est également une suite de coefficients de $\mathcal{E}^\star$.

Le théorème 5.2.6 donne la réciproque faible associée au théorème 4.2.20 généralisant le théorème de Zeckendorf aux entiers p-adiques.

Théorème 5.2.6. *Soit p un nombre premier. Considérons une collection de Zeckendorf $\mathcal{E}$ pour les entiers positifs et $\mathcal{E}^\star$ la complétion de $\mathcal{E}$. Si pour tout $\mu \in \mathcal{E}^\star$, nous avons $\mu_n \leq \min\{\sqrt{p}, (p-1)/2\}$ pour tout $n \geq 1$, alors tout $\mathcal{E}^\star$-sous-ensemble décroissant de $\mathbb{Z}_p$ possède une unique suite fondamentale décroissante.*

Afin de démontrer le théorème 5.2.6, nous avons besoin de plusieurs lemmes.

Lemme 5.2.7. *Soient p un nombre premier et $\mathcal{E}$ une collection arbitraire de suites de coefficients μ telle que $\mu_k < p$ pour tout $k \geq 1$. Soit $Q = (Q_k)_{k\geq 1}$ et $Z = (Z_k)_{k\geq 1}$ des suites décroissantes d'entiers p-adiques telles que $\mathrm{val}_Q(\mathcal{E}) = \mathrm{val}_Z(\mathcal{E})$. Alors,*

$$ord_p(Q_k) = ord_p(Z_k)$$

pour tout $k \geq 1$.

Démonstration. Procédons par l'absurde et supposons qu'il existe un plus petit indice $k \geq 1$ tel que

$$\mathrm{ord}_p(Q_k) < \mathrm{ord}_p(Z_k).$$

Puisque $Q_k \in \mathrm{val}_Q(\mathcal{E}) = \mathrm{val}_Z(\mathcal{E})$, il existe une suite de coefficients non nulle $\mu \in \mathcal{E}$ telle que

$$Q_k = \sum_{j\geq 1} \mu_j Z_j.$$

Posons $n := \mathrm{ord}_p(\mu)$. Alors, puisque $\mu_j < p$ pour tout $j \geq 1$ et que la suite Z est décroissante, nous avons

$$\mathrm{ord}_p(Q_k) = \mathrm{ord}_p(\sum_{j\geq 1} \mu_j Z_j) = \mathrm{ord}_p(Z_n).$$

Si $n = k$, alors nous obtenons

$$\mathrm{ord}_p(Q_k) = \mathrm{ord}_p(Z_k),$$

ce qui contredit l'hypothèse sur k. Si $n < k$, alors nous avons

$$\mathrm{ord}_p(Q_k) = \mathrm{ord}_p(Z_n) = \mathrm{ord}_p(Q_n)$$

par hypothèse sur k, ce qui contredit la propriété de décroissance de Q. Par conséquent, nous avons $n > k$ et la décroissance de Z implique que

$$\mathrm{ord}_p(Q_k) = \mathrm{ord}_p(Z_n) > \mathrm{ord}_p(Z_k) > \mathrm{ord}_p(Q_k),$$

ce qui est une contradiction.

En utilisant un argument similaire, il est possible de montrer que le cas $\mathrm{ord}_p(Z_k) < \mathrm{ord}_p(Q_k)$ mène également à une contradiction. Ainsi, nous avons prouvé le lemme. □

Lemme 5.2.8. *Soient p un nombre premier et $\mathcal{E}^\star$ une collection de Zeckendorf pour les entiers p-adiques. Si $\mu \in \mathcal{E}^\star$, alors*

$$res_{[n,\infty[}(\mu) \in \mathcal{E}^\star$$

pour tout indice $n \geq 1$.

Démonstration. Soient $\mathcal{E}$ une collection de Zeckendorf (pour les entiers positifs) dont la complétion est $\mathcal{E}^\star$ et $\mu \in \mathcal{E}^\star$. Alors, par définition, il existe une suite croissante d'indices $(M_k)_{k\geq 1}$ telle que

$$\mathrm{res}_{[1,M_k]}(\mu) \in \mathcal{E} .$$

Puisque $\mathcal{E}$ est une collection de Zeckendorf, nous pouvons considérer

$$\mathrm{res}_{[1,M_k]}(\mu) = \sum_{t=1}^{T} \lambda^t$$

l'unique $\hat{e}$-bloc décomposition comme décrite au théorème 4.1.24.

Pour un entier positif arbitraire $n \leq M_k$, il existe un $\hat{e}$-bloc λ^s avec $1 \leq s \leq T$ tel que le bloc-support de λ^s est $[a,b]$ et $a \leq n \leq b$. Donc,

$$\mathrm{res}_{[n,M_k]}(\mu) = \mathrm{res}_{[n,b]}(\lambda^s) + \sum_{t=s+1}^{T} \lambda^t = \mathrm{res}_{[n,\infty[}(\lambda^s) + \sum_{t=s+1}^{T} \lambda^t,$$

où la seconde égalité découle du fait que $\lambda_i^s = 0$ pour tout $i > b$ par définition de λ^s. Or, par la proposition 4.1.23, nous savons que si λ^s est un $\hat{e}$-bloc à l'indice l, alors $\mathrm{res}_{[n,\infty[}(\lambda^s)$ est un $\hat{e}$-bloc à l'indice l pour tout les indices $n \geq 1$.

Par conséquent, $\mathrm{res}_{[n,M_k]}(\mu)$ s'écrit comme une somme de $\hat{e}$-blocs dont les bloc-supports sont disjoints. Donc, par le théorème 4.1.27, étant donné $n \geq 1$, nous avons

$$\delta^k := \mathrm{res}_{[n,M_k]}(\mu) \in \mathcal{E}$$

pour tout $k \geq 1$. Ainsi, puisque pour tout $k \geq 1$, nous avons $M_k \geq \mathrm{ord}(\delta^k)$ et

$$\mathrm{res}_{M_k}(\mathrm{res}_{[n,\infty[}(\mu)) = \mathrm{res}_{M_k}\delta^k$$

avec $\delta^k \in \mathcal{E}$, la définition 5.2.1 implique que la suite de coefficients $\mathrm{res}_{[n,\infty[}(\mu)$ est la limite d'une suite de suites de coefficients dans $\mathcal{E}$. Par conséquent,

$$\mathrm{res}_{[n,\infty[}(\mu) \in \mathcal{E}^\star,$$

par la définition 5.2.3. □

Lemme 5.2.9. *Soit p un nombre premier. Considérons $\mathcal{E}^\star$ une collection de Zeckendorf pour les entiers p-adiques telle que pour tout $\mu \in \mathcal{E}^\star$, $\mu_n \leq \min\{\sqrt{p}, (p-1)/2\}$ pour tout $n \geq 1$. Soient $Q = (Q_k)_{k\geq 1}$ et $Z = (Z_k)_{k\geq 1}$ des suites décroissantes d'entiers p-adiques telles que $\mathrm{val}_Q(\mathcal{E}^\star) = \mathrm{val}_Z(\mathcal{E}^\star)$. Alors, pour tout $n \geq 1$, il existe un $\hat{e}$-bloc λ tel que $\lambda_n = 1$, $\mathrm{ord}_p(\lambda) = n$ et*

$$Z_n = \sum_{k\geq 1} \lambda_k Q_k.$$

Démonstration. Soit $\mathcal{E}$ une collection de Zeckendorf pour les entiers positifs telle que $\mathcal{E}^\star$ est la complétion de $\mathcal{E}$ et soit n un entier positif.

Tout d'abord, puisque $e^n \in \mathcal{E} \subset \mathcal{E}^\star$, nous avons

$$Z_n = \sum_{k\geq 1} e_k^n Z_k \in \mathrm{val}_Z(\mathcal{E}^\star) = \mathrm{val}_Q(\mathcal{E}^\star).$$

Ainsi, il existe une suite de coefficients $\varepsilon \in \mathcal{E}^\star$ telle que

$$Z_n = \sum_{k\geq 1} \varepsilon_k Q_k.$$

Or, puisque $\mathcal{E}$ est une collection de Zeckendorf pour les entiers, le théorème 4.1.24 indique que toute suite de coefficients de $\mathcal{E}$ possède une $\hat{e}$-bloc décomposition. Ainsi, par la définition de la complétion et puisque $\varepsilon \in \mathcal{E}^\star$, il existe un $\hat{e}$-bloc non nul λ^1 à l'indice l et une suite de coefficients μ tels que

$$Z_n = \sum_{k\geq 1} \lambda_k^1 Q_k + \sum_{k\geq 1} \mu_k Q_k \tag{5.3}$$

et $\mu_k = 0$ pour $1 \leq k \leq l$. En outre, le lemme 5.2.8 implique que $\mu = (\mu_k)_{k\geq 1} \in \mathcal{E}^\star$.

Ensuite, par le lemme 5.2.7, nous avons

$$m := \mathrm{ord}_p(Q_n) = \mathrm{ord}_p(Z_n).$$

Donc, vu l'égalité (5.3)

$$\mathrm{ord}_p(Q_n) = \mathrm{ord}_p(\lambda_1^1 Q_1 + \cdots + \lambda_n^1 Q_n + \cdots + \lambda_l^1 Q_l + \mu_{l+1} Q_{l+1} + \cdots),$$

et la décroissance de la suite Q implique que nous devons avoir $\mathrm{ord}_p(\lambda^1) = n$. De plus, puisque les suites de coefficients dans $\mathcal{E}$ sont ordonnées de manière ascendante et que $\mu_k = 0$ pour $1 \leq k \leq l$, nous avons également $\mathrm{ord}_p(\mu) \geq l + 1$.

En outre, puisque $\lambda^1 \in \mathcal{E} \subset \mathcal{E}^\star$, nous savons que

$$\sum_{k\geq 1} \lambda_k^1 Q_k \in \mathrm{val}_Q(\mathcal{E}^\star) = \mathrm{val}_Z(\mathcal{E}^\star).$$

Ainsi,

$$Z_n - \sum_{k\geq 1} \mu_k Q_k = \sum_{k\geq 1} \lambda_k^1 Q_k \in \mathrm{val}_Z(\mathcal{E}^\star).$$

Par conséquent, il existe une suite de coefficients $\sigma \in \mathcal{E}^\star$ telle que

$$Z_n - \sum_{k\geq 1} \mu_k Q_k = \sum_{k\geq 1} \sigma_k Z_k. \tag{5.4}$$

Or, puisque λ^1 est un $\hat{e}$-bloc à l'indice l, nous obtenons

$$\mathrm{ord}_p(\mu) \geq l + 1 \geq \mathrm{ord}_p(\lambda^1) + 1 = n + 1.$$

Donc, vu que $\mathrm{ord}_p(\mu) \geq n + 1$ et que la suite Q est décroissante, nous avons

$$\mathrm{ord}_p\left(\sum_{k\geq 1} \mu_k Q_k\right) \geq \mathrm{ord}_p(Q_{n+1}) > \mathrm{ord}_p(Q_n) = \mathrm{ord}_p(Z_n).$$

Ainsi,

$$\mathrm{ord}_p\left(Z_n - \sum_{k\geq 1} \mu_k Q_k\right) = \mathrm{ord}_p(Z_n).$$

Par conséquent, vu l'égalité (5.4), nous devons avoir $\mathrm{ord}_p(\sigma) = n$. Ainsi, puisque $\mathrm{ord}_p\left(\sum_{k\geq 1} \mu_k Q_k\right) > \mathrm{ord}_p(Z_n)$, l'égalité (5.4) implique que

$$Z_n \equiv \sigma_n Z_n \mod p^m, \tag{5.5}$$

où $m = \mathrm{ord}_p(Z_n)$. Pour aider à la compréhension, nous illustrons les précédents développements sur un exemple. Considérons $p = 5$ afin de satisfaire les hypothèses du lemme et considérons

$$\begin{aligned} Z_n &= 0 + 0p + 1p^2 + 2p^3 + 1p^4 + \cdots \\ \sum_{k\geq 1} \mu_k Q_k &= 0 + 0p + 0p^2 + 1p^3 + 0p^4 + \cdots , \end{aligned}$$

ainsi, nous avons bien

$$\mathrm{ord}_p\left(\sum_{k\geq 1} \mu_k Q_k\right) = 4 > \mathrm{ord}_p(Z_n) = 3.$$

Par l'égalité (5.4) et puisque $\mathrm{ord}_p(\sigma) = n$, nous obtenons

$$\sum_{k\geq 1} \sigma_k Z_k = \sigma_n Z_n + \sigma_{n+1} Z_{n+1} + \cdots = 0 + 0p + 1p^2 + 1p^3 + 1p^4 + \cdots .$$

Mais, puisque $\mathrm{ord}_p(Z_n) = \mathrm{ord}_p(\sigma_n Z_n)$ et que Z est décroissante, nous avons

$$\sigma_n Z_n = 0 + 0p + 1p^2 + \cdots ,$$

et donc

$$Z_n \equiv \sigma_n Z_n \mod p^3,$$

comme voulu.

Revenons maintenant à la preuve. Puisque $\dfrac{Z_n}{p^{m-1}} \not\equiv 0 \mod p$, la relation (5.5) implique que

$$1 \equiv \sigma_n \mod p.$$

Et, puisque $\sigma_n < p$, nous avons $\sigma_n = 1$.

Ensuite, posons $\sigma^0 := res_{]n,\infty[}(\sigma)$. Puisque $\mathrm{val}_Q(\mathcal{E}^\star) = \mathrm{val}_Z(\mathcal{E}^\star)$, nous pouvons écrire

$$\sum_{k\geq 1} \mu_k Q_k = \sum_{k\geq 1} \delta_k Z_k \tag{5.6}$$

pour une suite de coefficients $\delta \in \mathcal{E}^\star$, de sorte que

$$ord_p(\mu) = ord_p(\delta) \geq l + 1.$$

Or, en utilisant le fait que $\sigma_n = 1$ et la définition de σ^0, nous avons

$$\begin{aligned} Z_n + \sum_{k\geq 1} \sigma_k^0 Z_k &= \sigma_n Z_n + \sigma_{n+1} Z_{n+1} + \sigma_{n+2} Z_{n+2} + \cdots \\ &= \sum_{k\geq 1} \sigma_k Z_k \\ &= Z_n - \sum_{k\geq 1} \mu_k Q_k, \end{aligned}$$

où la deuxième égalité vient du fait que $\mathrm{ord}_p(\sigma) = n$ et la troisième égalité découle de la relation (5.4). Ainsi, par l'égalité (5.6), nous obtenons

$$Z_n + \sum_{k\geq 1} \sigma_k^0 Z_k = Z_n - \sum_{k\geq 1} \delta_k Z_k,$$

et donc

$$0 = \sum_{k\geq 1} \sigma_k^0 Z_k + \sum_{k\geq 1} \delta_k Z_k = \sum_{k=n+1}^{l} \sigma_k^0 Z_k + \sum_{k=l+1}^{\infty} (\delta_k + \sigma_k^0) Z_k,$$

puisque $\mathrm{ord}_p(\delta) \geq l+1$.

Notons que, par hypothèse, pour tout $\mu \in \mathcal{E}^\star$, nous avons $\mu_n \leq \min\{\sqrt{p}, (p-1)/2\}$ pour tout $n \geq 1$. Ainsi, puisque $\delta \in \mathcal{E}^\star$ et que $\sigma^0 \in \mathcal{E}^\star$ par le lemme 5.2.8, nous avons

$$0 \leq \delta_k + \sigma_k^0 \leq 2\frac{p-1}{2} = p-1$$

pour tout $k \geq l+1$ et

$$0 \leq \sigma_k^0 \leq \frac{p-1}{2}$$

pour tout $n+1 \leq k \leq l$. Donc, puisque Z est une suite décroissante d'entiers p-adiques, il suit que

$$\delta_k = \sigma_k^0 = 0 \tag{5.7}$$

pour tout $k \geq l+1$ et

$$\sigma_k^0 = 0$$

pour tout $n+1 \leq k \leq l$.

Par conséquent, en utilisant les relations (5.3) et (5.6), nous obtenons

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 1} \lambda_k^1 Q_k &= Z_n - \sum_{k\geq 1} \mu_k Q_k \\ &= Z_n - \sum_{k\geq 1} \delta_k Z_k \\ &= Z_n,\end{aligned}$$

où la dernière égalité découle du fait que $\mathrm{ord}_p(\delta) \geq l+1$ et de l'égalité (5.7). Ainsi, comme voulu, nous obtenons

$$Z_n = \sum_{k\geq 1} \lambda_k^1 Q_k,$$

où λ^1 est un $\hat{e}$-bloc à l'indice l. Puisque nous avons déjà montré que $\mathrm{ord}_p(\lambda^1) = n$, il suffit de montrer que $\lambda_n^1 = 1$ pour conclure le lemme.

Montrons que $\lambda_n^1 = 1$. Puisque $Q_n \in \mathrm{val}_Z(\mathcal{E}^\star)$, il existe une suite de coefficients $\alpha \in \mathcal{E}^\star$ telle que

$$Q_n = \sum_{k\geq 1} \alpha_k Z_k.$$

De la même manière que précédemment, nous avons $\mathrm{ord}_p(\alpha) = n$ et nous posons $\alpha^0 :=\mathrm{res}_{]n,\infty[}(\alpha)$. Ainsi,

$$Q_n = \alpha_n Z_n + \sum_{k\geq 1} \alpha_k^0 Z_k.$$

Ensuite, en utilisant le fait que $m := \mathrm{ord}_p(Z_n) = \mathrm{ord}_p(Q_n)$ et que Z soit décroissante, nous pouvons montrer, comme nous l'avons fait pour la relation (5.5), que nous avons

$$Q_n = \sum_{k\geq 1} \alpha_k Z_k \equiv \alpha_n Z_n \mod p^m. \tag{5.8}$$

Ainsi, puisque

$$Z_n = \sum_{k\geq 1} \lambda_k^1 Q_k = \lambda_n^1 Q_n + \sum_{k\geq 1} (\mathrm{res}_{]n,\infty[}(\lambda^1))_k Q_k,$$

nous avons

$$Z_n \equiv \lambda_n^1 Q_n \mod p^m.$$

Ainsi, par la relation (5.8), nous obtenons

$$Z_n \equiv \lambda_n^1 \alpha_n Z_n \mod p^m \Leftrightarrow 1 \equiv \lambda_n^1 \alpha_n \mod p$$

puisque $\dfrac{Z_n}{p^{m-1}} \not\equiv 0 \mod p$. Ainsi, il existe $q \geq 0$ tel que

$$\lambda_n^1 \alpha_n = pq + 1. \tag{5.9}$$

Finalement, puisque $\lambda_n^1 \alpha_n < (\sqrt{p})^2 = p$, l'équation (5.9) implique que $q = 0$ et $\lambda_n^1 = 1$.

Par conséquent,

$$Z_n = \sum_{k\geq 1} \lambda_k^1 Q_k,$$

où λ^1 est un $\hat{e}$-bloc à l'indice l tel que $\mathrm{ord}_p(\lambda^1) = n$ et $\lambda_n^1 = 1$ et le lemme est démontré. $\square$

Nous allons maintenant démontrer le théorème 5.2.6 donnant la réciproque faible du théorème 4.2.20.

Démonstration du théorème 5.2.6. Soit p un nombre premier. Considérons une collection de Zeckendorf $\mathcal{E}$ pour les entiers positifs et $\mathcal{E}^\star$ la complétion de $\mathcal{E}$. Montrons que si pour tout $\mu \in \mathcal{E}^\star$, $\mu_n \leq \min\{\sqrt{p}, (p-1)/2\}$ pour tout $n \geq 1$, alors tout $\mathcal{E}^\star$-sous-ensemble décroissant de $\mathbb{Z}_p$ possède une unique suite fondamentale décroissante.

Pour montrer cela, considérons un $\mathcal{E}^\star$-sous-ensemble décroissant Y de $\mathbb{Z}_p$ et deux suites décroissantes d'entiers p-adiques $Q = (Q_k)_{k\geq 1}$ et $Z = (Z_k)_{k\geq 1}$ telles que

$$\mathrm{val}_Q(\mathcal{E}^\star) = \mathrm{val}_Z(\mathcal{E}^\star) = Y,$$

et montrons que $Q = Z$.

Soit n un entier positif, montrons que $Q_n = Z_n$. Par le lemme 5.2.9, il existe λ et δ des $\hat{e}$-blocs à l'indice s et t respectivement tels que $\mathrm{ord}_p(\lambda) = \mathrm{ord}_p(\delta) = n$, $\lambda_n = \delta_n = 1$ et

$$Z_n = \sum_{k\geq 1} \lambda_k Q_k \quad \text{et} \quad Q_n = \sum_{k\geq 1} \delta_k Z_k. \tag{5.10}$$

Par conséquent, puisque par hypothèse, $\lambda_k = 0$ pour tout $k \leq n$ et $k > s$, nous avons

$$Z_n = \sum_{k\geq 1} \lambda_k Q_k = Q_n + \sum_{k=n+1}^{s} \lambda_k Q_k.$$

Maintenant, vu (5.10), on obtient

$$Z_n = \sum_{k\geq 1} \delta_k Z_k + \sum_{k=n+1}^{s} \lambda_k Q_k.$$

Enfin, puisque que $\delta_k = 0$ pour tout $k \leq n$ et $k > t$, nous avons

$$Z_n = \left(Z_n + \sum_{k=n+1}^{t} \delta_k Z_k \right) + \sum_{k=n+1}^{s} \lambda_k Q_k.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=n+1}^{t} \delta_k Z_k + \sum_{k=n+1}^{s} \lambda_k Q_k = 0. \tag{5.11}$$

Ensuite, montrons que

$$\delta_k = \lambda_k = 0$$

pour tout $k \geq n+1$. Pour cela, procédons par l'absurde et supposons qu'il existe un plus petit indice $l \geq n+1$ tel que $\delta_l \neq 0$ ou $\lambda_l \neq 0$. Sans perte de généralité, supposons que $l = n+1$ et que $\delta_{n+1} \neq 0$.
Par le lemme 5.2.9, il existe un $\hat{e}$-bloc α à l'indice u tel que $\mathrm{ord}_p(\alpha) = n+1$, $\alpha_{n+1} = 1$ et

$$Z_{n+1} = \sum_{k\geq 1} \alpha_k Q_k.$$

Ainsi, en utilisant l'égalité (5.11), nous obtenons

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{k=n+1}^{t} \delta_k Z_k + \sum_{n+1}^{s} \lambda_k Q_k \\
&= \delta_{n+1} Z_{n+1} + \sum_{k=n+2}^{t} \delta_k Z_k + \lambda_{n+1} Q_{n+1} + \sum_{k=n+2}^{s} \lambda_k Q_k \\
&= \delta_{n+1} \left(\sum_{k\geq 1} \alpha_k Q_k \right) + \sum_{k=n+2}^{t} \delta_k Z_k + \lambda_{n+1} Q_{n+1} + \sum_{k=n+2}^{s} \lambda_k Q_k \\
&= \delta_{n+1} \left(Q_{n+1} + \sum_{k=n+2}^{u} \alpha_k Q_k \right) + \sum_{k=n+2}^{t} \delta_k Z_k + \lambda_{n+1} Q_{n+1} + \sum_{k=n+2}^{s} \lambda_k Q_k \\
&= (\delta_{n+1} + \lambda_{n+1})\, Q_{n+1} + \sum_{k=n+2}^{u} \alpha_k Q_k + \sum_{k=n+2}^{t} \delta_k Z_k + \sum_{k=n+2}^{s} \lambda_k Q_k,
\end{aligned}$$

où l'avant dernière égalité est obtenue en utilisant le fait que, par hypothèse sur α, nous avons $\alpha_k = 0$ pour tout $k \leq n+1$ et $k > u$ et $\alpha_{n+1} = 1$. Par conséquent, si nous posons $r :=$ord$_p(Q_{n+1})$, alors en utilisant un raisonnement similaire à celui utilisé pour la relation (5.5), il suit que

$$0 \equiv (\delta_{n+1} + \lambda_{n+1})Q_{n+1} \mod p^r.$$

Ainsi, puisque $\dfrac{Q_{n+1}}{p^{r-1}} \not\equiv 0 \mod p$, nous obtenons

$$0 \equiv \delta_{n+1} + \lambda_{n+1} \mod p.$$

Finalement, puisque par hypothèse, $\delta_{n+1} + \lambda_{n+1} \leq 2\dfrac{p-1}{2} = p-1 < p$, nous avons

$$\delta_{n+1} + \lambda_{n+1} = 0 \Leftrightarrow \delta_{n+1} = \lambda_{n+1} = 0$$

car $\delta_k, \lambda_k \geq 0$ pour tout $k \geq 1$. Ainsi, nous avons bien

$$\delta_k = \lambda_k = 0$$

pour tout $k \geq n+1$, comme voulu.

Par conséquent, en utilisant une des égalités (5.10), nous obtenons

$$Z_n = \sum_{k \geq 1} \lambda_k Q_k = \lambda_n Q_n + \sum_{k \geq n+1} \lambda_k Q_k = Q_n$$

puisque $\lambda_n = 1$, ord$_p(\lambda) = n$ et $\lambda_k = 0$ pour tout $k \geq n+1$. Ainsi, $Q_n = Z_n$ et ceci conclu la preuve. $\square$

Annexe A

Démonstration du cas 2 du lemme 3.1.3

Pour rappel, nous considérons une suite quelconque d'entiers positifs $(A_n)_{n\geq 1}$ satisfaisant le théorème de Zeckendorf et la suite $(B_n)_{n\geq 1}$ qui est une permutation de $(A_n)_{n\geq 1}$ telle que $B_i \leq B_{i+1}$ pour tout $i \geq 1$.

Nous souhaitons démontrer que

$$B_1 \,\nu\, B_2.$$

Pour cela, nous procédons par l'absurde et supposons que

$$B_1 \,\bar{\nu}\, B_2.$$

Par le lemme 3.1.1 et par l'hypothèse (3.4), nous savons que les décompositions valides des entiers $1, 2$ et 3 sous la forme (3.1) sont les suivantes

$$1 = B_1, 2 = B_2, 3 = B_1 + B_2.$$

De plus, par le lemme 3.1.1, nous savons également que $B_3 = 4$. Ensuite, puisque $1 \,\bar{\nu}\, B_2$, il existe un entier $s > 2$ que l'on peut supposer minimal, tel que

$$1 \,\nu\, B_s.$$

En outre, nous avons montré que

$$B_{s+1} = B_s + 1.$$

Supposons être dans le cas suivant :

Cas 2 : $B_s + 1 \,\nu\, 1$:

2.1. Supposons qu'aucun des termes $B_2, B_3, \ldots, B_{s-1}$ ne soit voisin ni de $B_s + 1$ ni de B_s. Par définition de B_s et par le lemme 3.1.1, nous pouvons décomposer sous la forme (3.1) tous les nombres naturels strictement inférieur à B_s en termes de $B_1, B_2, \ldots, B_{s-1}$. Ainsi, en ajoutant B_s à ces décompositions, nous obtenons une décomposition valide de tous les nombres naturels strictement inférieurs à $2B_s$ sous la forme (3.1) en termes de $B_1, B_2, \ldots, B_{s+1}$. Notons que le terme B_{s+1} est nécessaire pour la décomposition de l'entier $B_s + 1$.

Cependant, nous ne pouvons pas décomposer sous la forme (3.1) le terme $2B_s$ lui-même. En effet, si $2B_s$ avait une décomposition valide, celle-ci ne pourrait pas contenir le terme B_s. Ainsi, en retirant B_s à cette décomposition, nous obtiendrions une décomposition valide de B_s autre que B_s lui-même et donc une contradiction de l'unicité de la décomposition.

Par conséquent, le lemme 3.1.1 implique que

$$B_{s+2} = 2B_s.$$

Ainsi, nous obtenons deux décompositions différentes de l'entier $2B_s + 1$ sous la forme (3.1), à savoir

$$\begin{aligned} &2B_s + 1 = (B_s + 1) + B_s = B_{s+1} + B_s \quad \text{et} \\ &2B_s + 1 = B_{s+2} + B_1. \end{aligned}$$

Ces deux décompositions étant valides au vu de nos hypothèses, il s'agit d'une contradiction.

2.2. Supposons qu'il existe un nombre entier minimal r, $2 \leq r < s$, tel que B_r est un voisin de B_s ou de $B_s + 1$. Dans ce cas, aucun des termes $B_1, \ldots, B_{r-1}$ n'est voisin ni de B_s ni de B_{s+1}.

De plus, par le lemme 3.1.1, nous pouvons décomposer sous la forme (3.1) tout naturel strictement inférieur à B_r en termes de $B_1, B_2, \ldots, B_{r-1}$. Ainsi, en ajoutant B_s à ces décompositions, nous obtenons une décomposition valide de tous les naturels strictement inférieurs à $B_s + B_r$ en termes de $B_1, B_2, \ldots, B_{s+1}$.

2.2.1. Supposons que B_r soit voisin de B_s.

Considérons la décomposition du nombre $B_s + B_r$. Pour rappel, nous avons montré que les termes $B_2, B_3, \ldots, B_r, \ldots, B_s$ sont pairs, ainsi $B_s + B_r$ est également pair. En outre, puisque les termes impairs $B_s + 1$ et 1 sont voisins, la décomposition de $B_s + B_r$ ne peut utiliser ni $B_s + 1$ ni 1. De même, la décomposition ne peut pas utiliser B_s, car sinon, en laissant B_s de côté, nous obtiendrions une contradiction de l'unicité de la décomposition de B_r.

Par conséquent, nous pouvons ajouter le terme 1 à la décomposition de $B_s + B_r$ pour obtenir une décomposition valide de $B_s + B_r + 1$ sous la forme (3.1) différente de

$$B_s + B_r + 1 = B_{s+1} + B_r$$

et donc une contradiction.

2.2.2. Supposons maintenant que B_r soit voisin de $B_s + 1$. Dans ce cas, nous avons la situation suivante

$$B_r \,\nu\, B_s + 1 \,\nu\, 1 \,\nu\, B_s.$$

Ainsi, B_r n'est pas un voisin de B_s et donc nous sommes capables de décomposer sous la forme (3.1) tous les nombres naturels inférieurs à $B_s + B_r$ ainsi que $B_s + B_r$ lui même en termes de $B_1, B_2, \ldots, B_{s+1}$.

Cependant, aucune décomposition admissible de $B_s + B_r + 1$ ne peut utiliser soit $B_s + 1$ soit 1, car si une décomposition le faisait, alors en laissant ce terme

de côté, nous obtiendrions une contradiction de l'unicité de la décomposition de B_r ou $B_s + B_r$ respectivement.
Cependant, les termes $B_2, \ldots, B_s$ sont pairs et les termes B_1 et B_{s+1} sont impairs. Ainsi, si nous voulons décomposer le nombre impair $B_s + B_r + 1$ sous la forme (3.1) en termes de $B_1, B_2, \ldots, B_{s+1}$, cette décomposition doit soit contenir le terme 1 soit le terme B_{s+1}. Par conséquent, le nombre $B_s + B_r + 1$ ne peut pas être décomposé sous la forme (3.1) en termes de $B_1, B_2, \ldots, B_{s+1}$ et donc, par le lemme 3.1.1, nous obtenons que

$$B_{s+2} = B_s + B_r + 1.$$

Ensuite, notons que puisque $r \geq 2$, nous avons $B_r \geq B_2 = 2$.

2.2.2.1. Supposons que $B_r > 2$. Considérons le terme C, autre que 1, qui est un voisin de B_s dans la suite $(A_n)_{n\geq 1}$, c'est-à-dire que nous avons

$$B_r \,\nu\, B_s + 1 \,\nu\, 1 \,\nu\, B_s \,\nu\, C.$$

Ensuite, par définition de B_r, nous avons $B_r < B_s$. De plus, puisque nous avions montré qu'aucun des $B_1, \ldots, B_{r-1}$ n'est voisin de B_s, nous avons également $B_r < C$. En outre, puisque nous pouvons décomposer $B_r + 1$ comme $B_r + B_1$, si nous avions $C = B_r + 1$, nous aurions deux décompositions valides de $B_r + 1$, à savoir $B_r + B_1$ et C. De même, si nous avions $B_s = B_r + 1$, nous aurions deux décompositions valides de $B_r + 1$, à savoir $B_r + B_1$ et B_s. Ainsi, nous avons

$$B_s, C \neq B_r + 1.$$

Par conséquent, $B_s, C \geq B_r + 2$.

2.2.2.1.1. Supposons que $B_s, C > B_r + 2$. Dans ce cas, la décomposition du nombre $B_r + 2$ n'utilise ni B_s ni C puisque $B_s, C > B_r + 2$. De plus, la décomposition n'utilise pas non plus le terme 1 car si c'était le cas, alors en laissant 1 de côté, on obtiendrait une décomposition de $B_r + 1$ différente de $B_r + B_1$.
Par conséquent, nous pouvons ajouter le terme B_s à la décomposition de $B_r + 2$ et obtenir une décomposition de $B_s + B_r + 2$ différente de $B_{s+2} + B_1$ et donc, une contradiction.

2.2.2.1.2. Supposons que $\min(B_s, C) = B_r + 2$. Dans ce cas, s'il est possible de décomposer $B_r + 2$ comme $B_r + B_2$, nous obtenons une contradiction de l'unicité de la décomposition de $B_r + 2$. Ainsi, nous devons avoir

$$2 \,\nu\, B_r \,\nu\, B_s + 1 \,\nu\, 1 \,\nu\, B_s \,\nu\, C.$$

Ensuite, rappelons que $3 = B_1 + B_2$, ainsi $B_r \neq 3$ et donc $B_r \geq 4$.
Si $B_r > 4$, nous obtenons deux décompositions valides de $B_r + 4$, à savoir

$$\begin{aligned} B_r + 4 &= B_r + B_3 \quad \text{et} \\ B_r + 4 &= \{B_r + 2\} + B_2, \end{aligned}$$

où $\{B_r + 2\}$ est la décomposition de $B_r + 2$. Ainsi, nous obtenons une contradiction.

Supposons maintenant que $B_r = 4$. Dans ce cas, $B_s + B_r + 1 = B_s + 5$ et nous obtenons deux décompositions de $B_s + B_r + 5$, à savoir

$$B_s + B_r + 5 = (B_s + 5) + B_r = (B_s + B_r + 1) + B_r = B_{s+2} + B_r$$
$$B_s + B_r + 5 = 2 + (B_s + 1) + (B_r + 2) = B_2 + B_{s+1} + \{B_r + 2\}.$$

Puisque B_{s+2} et B_r ne sont pas voisins, la première décomposition est valide. De plus, puisque $\{B_r + 2\}$ est soit égal à C soit à B_s et que B_2 n'est voisin d'aucun des deux, la seconde décomposition est également valide. Nous obtenons donc une contradiction.

2.2.2.2. Supposons que $B_r = 2$. Dans ce cas, $B_{s+2} = B_s + B_r + 1 = B_s + 3$. Ensuite, rappelons que puisque $s > 2$, $B_s \geq 3$. Mais, puisque $3 = B_1 + B_2$, $B_s \neq 3$ et donc $B_s \geq 4$. Rappelons également que $4 = B_3$.

2.2.2.2.1 Supposons que $B_s > 4$ et que $B_s \,\bar{\nu}\, 4$. Dans ce cas, nous obtenons deux décompositions valides de $B_s + 4$, à savoir

$$B_s + 4 = (B_s + 3) + 1 = (B_s + B_r + 1) + 1 = B_{s+2} + B_1 \quad \text{et}$$
$$B_s + 4 = B_s + B_3$$

et donc une contradiction.

2.2.2.2.2 Supposons que nous avons soit $B_s = 4$, soit $B_s \,\nu\, 4$.

Supposons que $B_s \,\nu\, 4$ et que $B_s + 3 \,\bar{\nu}\, 2$. Autrement dit, nous avons

$$B_s + 3 \,\bar{\nu}\, 2 \,\nu\, B_s + 1 \,\nu\, 1 \,\nu\, B_s \,\nu\, 4,$$

et $B_s \neq 4$. Dans ce cas, nous obtenons deux décompositions valides de $B_s + 5$, à savoir

$$B_s + 5 = (B_s + 3) + 2 = B_{s+2} + B_2 \quad \text{et}$$
$$B_s + 5 = (B_s + 1) + 4 = B_{s+1} + B_3$$

et donc une contradiction.

Supposons que $B_s \,\nu\, 4$ et que $B_s + 3 \,\bar{\nu}\, 2$. Autrement dit, nous avons

$$B_s + 3 \,\nu\, 2 \,\nu\, B_s + 1 \,\nu\, 1 \,\nu\, B_s \,\nu\, 4,$$

et $B_s \neq 4$. Ensuite, par un raisonnement similaire au cas 1.2.1., nous en déduisons qu'aucun des termes $B_s + 1, 1$ et B_s n'est utilisé dans la décomposition de $B_s + 6$, et donc nous pouvons ajouter 1 à cette décomposition et obtenir une décomposition valide de $B_s + 7$ autre que

$$B_s + 7 = (B_s + 3) + 4 = B_{s+2} + B_3$$

et donc une contradiction.

Par conséquent, le cas 2 mène également à une contradiction. Nous pouvons donc conclure que $B_1 \,\nu\, B_2$. $\square$

Bibliographie

[1] BROWN, J. R. A New Characterization of the Fibonacci Numbers. *The Fibonacci Quarterly*. 1965, 3, p. 1-8.

[2] BRUCKMAN, P. S. The generalized Zeckendorf theorem. *The Fibonacci Quarterly*. 1989, 27, p. 338-347.

[3] BUNDER, M. W. Zeckendorf representations using negative Fibonacci numbers. *The Fibonacci Quarterly*. 1992, 30, p. 111-115.

[4] CHANG, S. The weak converse of Zeckendorf's Theorem. *Research in Number Theory*. 2021, 7. Article 48. pp. 39.

[5] CHARLIER, E. *Abstract Numeration Systems : Recognizability, Decidability, Multidimensional S-Automatic Words, and Real Numbers*. Disp. à l'adr. <https://orbi.uliege.be/handle/2268/8631> (visité le 19 mars 2024). Thèse de doctorat. Université de Liège. 2009.

[6] DAYKIN, D. E. Representation of Natural Numbers as Sums of Generalised Fibonacci Numbers. *Journal of the London Mathematical Society*. 1960, 35, p. 143-160.

[7] GOUVÊA, F. Q. *p-adic Numbers : An Introduction*. Springer, 1997.

[8] GRABNER, P. J. et M. RIGO. Additive functions with respect to numeration systems on regular languages. *Monatshefte für Mathematik*. 2003, 139, p. 205-219.

[9] HAYART, M. *Codages de Fibonacci*. Disp. à l'adr. <http://hdl.handle.net/2268.2/12801> (visité le 4 février 2024). Mémoire de master. Université de Liège. 2020-2021.

[10] HOGGATT, V. E. Generalized Zeckendorf Theorem. *The Fibonacci Quarterly*. 1972, 10, p. 89-93.

[11] HOLLANDER, M. Greedy numeration systems and regularity. *Theory of Computing Systems*. 1998, 31, p. 111-133.

[12] HREBENAR, P. *Arbres et bases rationnelles*. Disp. à l'adr. <http://hdl.handle.net/2268.2/18467> (visité le 11 février 2024). Mémoire de master. Université de Liège. 2022-2023.

[13] KELLER, T. J. Generalizations of Zeckendorf's Theorem. *The Fibonacci Quarterly*. 1972, 10, p. 95-102.

[14] KIMBERLING, C. Edouard Zeckendorf. *The Fibonacci Quarterly*. 1998, 36, p. 416-418.

[15] LACROIX, A. *Contributions to Recognizability : Self-generating Sets, Decidability, Automaticity and Multidimensional Sets*. Disp. à l'adr. <https://orbi.uliege.be/handle/2268/147877> (visité le 15 février 2024). Thèse de doctorat. Université de Liège. 2013.

[16] LEKKERKERKER, C. G. Voorstelling van natuurlijke getallen door een som van getallen van fibonacci. *Stichting Mathematisch Centrum*. 1951. Disp. à l'adr. <https://ir.cwi.nl/pub/6922> (visité le 8 septembre 2023).

[17] LORAUD, N. β-shift, systèmes de numération et automates. *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*. 1995, 7, p. 473-498.

[18] POMERANTZ, A. An introduction to the p-adic numbers. 2020. Disp. à l'adr. <https://math.uchicago.edu/~may/REU2020/REUPapers/Pomerantz.pdf> (visité le 3 avril 2024).

[19] RIGO, M. *Mathématiques discrètes*. Université de Liège, 2009. Disp. à l'adr. <http://www.discmath.ulg.ac.be/cours/main_sd.pdf> (visité le 29 septembre 2023). Notes de cours.

[20] SHALLIT, J. Numeration systems, linear recurrences, and regular sets. *Information and Computation*. 1994, 113, p. 331-347.

[21] STOLL, M. *p-adic Analysis in Arithmetic Geometry*. University of Bayreuth. Disp. à l'adr. <https://www.mathe2.uni-bayreuth.de/stoll/teaching/pAdicAnalysis-WS2015/Skript-pAdicAnalysis-pub-screen.pdf> (visité le 1er mai 2024). Notes de cours.

[22] ZECKENDORF, E. Représentation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas. *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*. 1972, 41, p. 179-182.