

Mémoire

Auteur : Dosse, Benjamin

Promoteur(s) : Esser, Céline

Faculté : Faculté des Sciences

Diplôme : Master en sciences mathématiques, à finalité approfondie

Année académique : 2023-2024

URI/URL : <http://hdl.handle.net/2268.2/19964>

Avertissement à l'attention des usagers :

Tous les documents placés en accès ouvert sur le site le site MatheO sont protégés par le droit d'auteur. Conformément aux principes énoncés par la "Budapest Open Access Initiative"(BOAI, 2002), l'utilisateur du site peut lire, télécharger, copier, transmettre, imprimer, chercher ou faire un lien vers le texte intégral de ces documents, les disséquer pour les indexer, s'en servir de données pour un logiciel, ou s'en servir à toute autre fin légale (ou prévue par la réglementation relative au droit d'auteur). Toute utilisation du document à des fins commerciales est strictement interdite.

Par ailleurs, l'utilisateur s'engage à respecter les droits moraux de l'auteur, principalement le droit à l'intégrité de l'oeuvre et le droit de paternité et ce dans toute utilisation que l'utilisateur entreprend. Ainsi, à titre d'exemple, lorsqu'il reproduira un document par extrait ou dans son intégralité, l'utilisateur citera de manière complète les sources telles que mentionnées ci-dessus. Toute utilisation non explicitement autorisée ci-avant (telle que par exemple, la modification du document ou son résumé) nécessite l'autorisation préalable et expresse des auteurs ou de leurs ayants droit.



FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE

Extensions de processus gaussiens dans l'espace euclidien

Mémoire de fin d'études présenté en vue de l'obtention du titre de
Master en Sciences Mathématiques, à finalité approfondie

Année académique 2023-2024

Auteur :
Benjamin DOSSE

Promoteur :
Céline ESSER

Remerciements

Je veux formuler mes premiers remerciements à Céline Esser, ma promotrice. Tout d'abord, pour m'avoir intéressé aux probabilités et pour m'avoir permis d'étudier un sujet qui mêle autant l'analyse réelle et l'analyse harmonique en son sein. Ensuite, pour son soutien et son encadrement tout au long de la rédaction de ce mémoire, sans lesquels celui-ci n'existerait probablement pas sous cette forme. Enfin, pour ses conseils et ses remarques, tant sur la matière couverte que sur celle qui aura été écartée de ce mémoire.

Je ne peux réserver de mots assez forts à ma famille pour tout ce qu'elle aura fait pour moi. Sans elle, mille événements auraient eu raison de moi avant que je ne présente ce travail. En particulier, je dois remercier ma mère de m'avoir transmis la saine malédiction qu'est l'amour inconsidéré du café.

Je veux remercier spécialement Alex, avec qui j'ai la chance de partager des moments exceptionnels, et qui m'aura soutenu lors des longues insomnies qui ont parsemé la rédaction de ce mémoire. Tu es quelqu'un d'extraordinaire.

L'écriture d'un mémoire n'est pas que l'affaire de performances académiques. Nombreuses sont les personnes qui, à leurs façons, auront participé à la rédaction de ce mémoire. Je pense à ces personnes avec qui j'ai passé la plupart des mes années ici, et qui auront supporté la plupart de mes caprices : Guillaume, Antoine, Boris, Savinien. Ces années à l'université n'auraient pas été les mêmes sans vous, tout comme je ne serais pas qui je suis si je ne vous avais pas rencontré.

Merci à vous. Merci à toutes les personnes que je n'ai pas nommées, mais qui m'auront accompagné tout ce temps, qui m'auront apporté une aide précieuse lorsque j'en avais besoin.

Introduction

On peut définir le mouvement Brownien (standard) au moyen de sa représentation intégrale. Puisqu'il s'agit d'un processus gaussien, il est également possible de le définir à partir de sa fonction moyenne μ et de son opérateur de covariance K . Plus précisément, si $B = \{B(t) : t \in \mathbb{R}\}$ désigne un mouvement Brownien standard sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, alors la fonction moyenne μ est donnée par $\mu(t) = 0$ et l'opérateur de covariance est donné par $K(t, s) = \min\{t, s\}$.

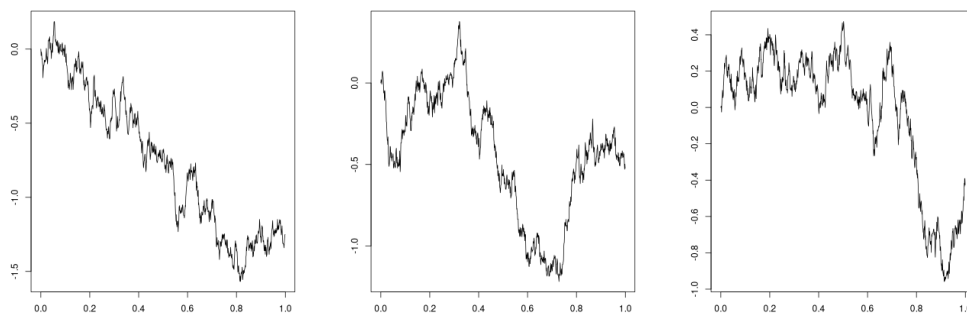


FIGURE 1 – Exemples de mouvements Browniens standard sur l'intervalle $[0, 1]$.

La première partie de ce mémoire est vouée à une étude sommaire de deux processus gaussiens définis sur la droite réelle. Dans le chapitre 1, le « *mouvement Brownien fractionnaire* » est introduit, où la régularité des trajectoires est contrôlée par une constante H appelée exposant de Hurst. Après l'étude de quelques propriétés, ce processus est généralisé en le « *mouvement Brownien multifractionnaire* », faisant l'objet du chapitre 2. L'évolution la plus notable entre ces deux processus est le choix de l'exposant de Hurst : alors qu'il est constant pour le premier, on considère une fonction qui dépend du temps pour le second. Une conséquence immédiate est l'évolution, au long des trajectoires, de la régularité de celles-ci.

La deuxième partie se consacre à étendre les processus abordés dans les premiers chapitres sur l'espace euclidien \mathbb{R}^d . En particulier, il sera question de deux types d'extensions notables, dont l'une est dite « isotrope » tandis que l'autre est « anisotrope », en un sens qui sera défini alors. Nous observerons que ces deux types d'extensions se distinguent en partie par la régularité de leurs trajectoires. Ainsi, le chapitre 3 définit le *champ* et le *drap Browniens fractionnaires*, et le chapitre 4 définit le *champ* et le *drap Browniens multifractionnaires*. Puisque de nombreuses propriétés des processus exposés dans la première partie peuvent se déduire des processus définis sur l'espace euclidien, on trouvera ici la démonstration de la plupart des résultats liés à la régularité.

Les résultats de cette deuxième partie sont principalement issus de l'article de Herbin ([2]), notamment en ce qui concerne les extensions anisotropes, ainsi que du livre d'Ayache ([3]). Pour ce dernier ouvrage, qui n'expose que les processus isotropes, nous avons pris soin de scinder l'étude des processus fractionnaires et multifractionnaires.

Puisque l'étude ci-après aura partiellement lieu dans \mathbb{R}^d , il nous semble pertinent de fixer d'emblée quelques notations. La suite finie de vecteurs (u_1, \dots, u_d) de \mathbb{R}^d désignera une base orthonormée quelconque de \mathbb{R}^d ; parfois, quelques vecteurs de cette base seront explicitement définis sans contrevenir à ce choix notation. Le vecteur e_j désignera le j^e vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^d , *i.e.* le vecteur ne contenant que des zéros, sauf en j^e position, où il contient 1. Le vecteur $\mathbf{1}_d$ de \mathbb{R}^d est celui contenant des 1 à toutes les positions. Enfin, un intervalle compact de \mathbb{R}^d est un produit cartésien de d intervalles compacts de \mathbb{R} .

Tout au long de cet ouvrage, et dès que cela sera possible, des représentations graphiques des processus évoqués seront proposées. Les simulations ont été réalisées à partir d'une description donnée dans l'article de Bierné et al. ([1]).

Liste des symboles

(e_1, \dots, e_d) ; e_j Base canonique de \mathbb{R}^d ; e_j contient des zéros partout sauf en j^e position.

(u_1, \dots, u_d) Base orthonormée quelconque de \mathbb{R}^d ; on pourra spécifier quelques vecteurs.

$\alpha_f(I)$ Exposant de Hölder global d'une fonction f sur l'intervalle compact I .

$\beta_f(t)$ Exposant de Hölder local d'une fonction f en le point t .

$\Delta_{s,t}X$ Incréments du processus X .

$\stackrel{\mathcal{L}}{=}$ Égalité au sens des lois fini-dimensionnelles.

$\stackrel{p.s.}{=}$ Égalité presque sûre.

$\gamma_f(t)$ Exposant de Hölder ponctuel d'une fonction f en le point t .

E° Intérieur d'un ensemble E .

$\mathbf{1}_d$ Vecteur de \mathbb{R}^d ne contenant que des 1.

$C^\alpha(I)$ Espace de Hölder global sur l'intervalle compact I .

$C^\alpha(t)$ Espace de Hölder ponctuel en le point t .

$G(u, v)$ Générateur de champ Brownien multifractionnaire.

dBf Drap Brownien fractionnaire.

mBf Mouvement Brownien fractionnaire.

mBm Mouvement Brownien multifractionnaire.

Table des matières

I	Représentations de processus Browniens	1
1	Mouvement Brownien fractionnaire	3
1.1	Définition et propriétés	3
1.2	Propriétés négatives	5
1.3	Écritures alternatives	7
1.4	Régularité des trajectoires	9
1.5	Décomposition en ondelettes	12
2	Mouvement Brownien multifractionnaire	15
2.1	Définition et propriétés	15
2.2	Propriétés des trajectoires du mBm	16
2.3	Décomposition en ondelettes	17
2.4	Un mot sur le mBm lorsque $H(t)$ n'est pas déterministe	17
II	Extensions à \mathbb{R}^d	19
3	Cas du mBf	21
3.1	Mouvement Brownien fractionnaire de Lévy	21
3.2	Drap Brownien fractionnaire	25
4	Cas du mBm	29
4.1	Champ Brownien multifractionnaire	29
4.2	Drap Brownien multifractionnaire	39
III	Annexes	43
A	Résultats complémentaires	45
A.1	Probabilités	45
A.2	Théorie de la mesure	45
A.3	Analyse harmonique	45
A.4	Analyse stochastique	46
A.5	Partie II	47
B	Codes	51
B.1	Sélection des angles optimaux	51
B.2	Génération des textures	53
	Bibliographie	59

Première partie

Représentations de processus Browniens

Chapitre 1

Mouvement Brownien fractionnaire

Bien que le mouvement Brownien fractionnaire possède des applications multiples et transversales, nous nous limiterons à une étude sommaire dans cette section. Pour de plus amples détails sur les propriétés génériques du mouvement Brownien fractionnaire, ou plus généralement, des processus α -stables, on pourra consulter le livre de Samorodnitsky et Taqqu ([4]), qui est une référence à ce sujet.. Concernant l'intégration stochastique définie à partir du mouvement Brownien fractionnaire, Biagini et al. ([5]) propose une étude détaillée de plusieurs type d'intégrales de ce type. On y trouvera en particulier des applications en finance et en théorie de la commande optimale. L'ouvrage de Mishura ([6]) s'attache à étudier les équations différentielles stochastiques bâties sur ce processus.

Les résultats de cette section sont issus principalement des ouvrages de Nourdin et de Biagini et al. ([5, 7]).

1.1 Définition et propriétés

Par le théorème de consistance de Kolmogorov, le mouvement Brownien fractionnaire peut être défini à partir de son opérateur de covariance.

DÉFINITION 1.1.1. Soient $H \in]0, 1[$ et $c \in]0, \infty[$; un *mouvement Brownien fractionnaire d'exposant de Hurst H* est un processus stochastique gaussien centré noté

$$B^H = \{B^H(t) : t \in \mathbb{R}\}$$

tel que

$$K_H(t_1, t_2) = \mathbb{E}[B^H(t_1)B^H(t_2)] = c(|t_1|^{2H} + |t_2|^{2H} - |t_1 - t_2|^{2H}) \quad (1.1.1)$$

quels que soient $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

Lorsque $c = \text{Var}(B^H(1))$ est égal à 1, le mouvement Brownien fractionnaire B^H est qualifié de *standard*.

NOTATION. Quand il n'y aura aucune ambiguïté, la mention « *d'exposant de Hurst H* » pourra être omise. De même, on pourra désigner un mouvement Brownien fractionnaire par le sigle « *mBf* ».

Comme nous pourrons le constater sous peu, l'exposant de Hurst H est un paramètre quantifiant la régularité des trajectoires du mBf B^H . En particulier, plus la valeur de H est proche de 0, plus ses trajectoires seront « *irrégulières* » (dans un sens que nous prendrons soin de préciser); à l'inverse, plus la valeur de H est proche de 1, plus les trajectoires de B^H seront « *régulières* ».

La Figure 1.1 présente des réalisations de mBf standards pour diverses valeurs de l'exposant de Hurst H .

REMARQUE 1.1.2. Lorsque l'exposant de Hurst H est égal à $\frac{1}{2}$, B^H est un mouvement Brownien (standard si de plus $c = 1$).

De même, il est possible de relâcher la définition du mBf en autorisant à H de prendre la valeur 1 : dans ce cas, le mBf est presque sûrement une droite. En effet, quel que soit $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(B^1(t) - tB^1(1))^2] &= \mathbb{E}[(B^1(t))^2] - 2t\mathbb{E}[B^1(t)B^1(1)] + \mathbb{E}[(tB^1(1))^2] \\ &= c(t^2 - t(t^2 + 1 - (t-1)^2) + t^2) = 0. \end{aligned}$$

La Figure 1.2 expose un comportement similaire avec un exposant de Hurst $H = 0.99999$.

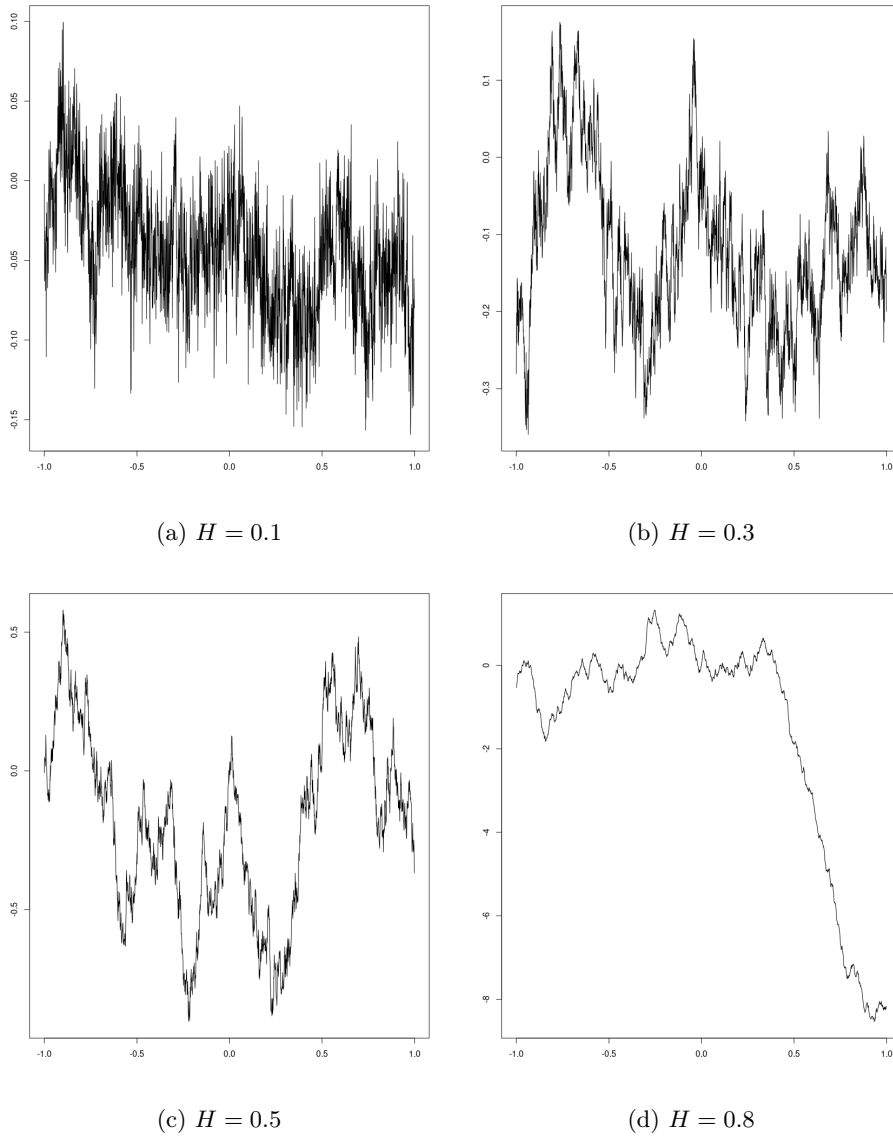


FIGURE 1.1 – Exemples de mouvements Browniens fractionnaires standard sur l'intervalle $[-1, 1]$.

1.1.1 Propriétés fondamentales

La Remarque 1.1.2 suggère que le mBf partage des propriétés analogues au mouvement Brownien standard. La proposition suivante donne une caractérisation du mBf.

PROPOSITION 1.1.3. *Soit $H \in]0, 1[$; si B^H est un mBf, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$:*

1. *Quel que soit $k \in \mathbb{R}$, $B^H(kt) \stackrel{\mathcal{L}}{\cong} |k|^H B^H(t)$;*
2. *Quel que soit $h \in \mathbb{R}$, $B^H(t+h) - B^H(h) \stackrel{\mathcal{L}}{\cong} B^H(t)$;*
3. *Si $t \neq 0$, $B^H(\frac{1}{t}) \stackrel{\mathcal{L}}{\cong} |t|^{-2H} B^H(t)$;*

où les égalités $\stackrel{\mathcal{L}}{\cong}$ désignent des égalités au sens des lois fini-dimensionnelles.

Réciproquement, si $B^H = \{B^H(t) : t \in \mathbb{R}\}$ est un processus gaussien vérifiant les points 1 et 2, et tel que

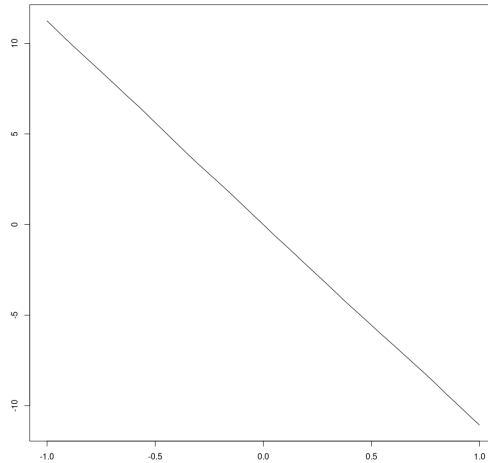
4. $B^H(0) \stackrel{p.s.}{=} 0$;
5. $\text{Var}(B^H(1)) = c \in]0, \infty[$;

alors B^H est un mBf d'exposant de Hurst H .

REMARQUE 1.1.4. La relation (1) permet d'écrire, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$B^H(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\cong} t^H B^H(1).$$

Démonstration. Pour montrer les points 1 à 3, il suffit de calculer l'opérateur de covariance dans chacun de ces cas, et d'appliquer le théorème de consistance de Kolmogorov.

FIGURE 1.2 – Exemple de mBf standard sur $[-1, 1]$ où $H = 0.99999$.

Pour montrer la réciproque, supposons disposer d'un processus B^H satisfaisant les hypothèses de celle-ci. Il suffit de montrer que le processus est centré (on applique points 1 et 2 à $B^H(2t)$ avec $h = t$, puis de calculer l'espérance), et que son opérateur de covariance vérifie l'équation (1.1.1). Pour ce dernier point, soient $t_1, t_2 \in [0, \infty[$; il vient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [B^H(t_1)B^H(t_2)] &= \frac{1}{2} \left(\mathbb{E} \left[(B^H(t_1))^2 \right] + \mathbb{E} \left[(B^H(t_2))^2 \right] - \mathbb{E} \left[(B^H(t_1) - B^H(t_2))^2 \right] \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathbb{E} \left[(B^H(t_1))^2 \right] + \mathbb{E} \left[(B^H(t_2))^2 \right] - \mathbb{E} \left[(B^H(|t_1 - t_2|))^2 \right] \right) \end{aligned}$$

vu l'hypothèse du point 2. De même, le point 1 et la Remarque 1.1.4 permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [B^H(t_1)B^H(t_2)] &= \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[(B^H(1))^2 \right] (t_1^{2H} + t_2^{2H} - |t_1 - t_2|^{2H}) \\ &= \frac{c}{2} (|t_1|^{2H} + |t_2|^{2H} - |t_1 - t_2|^{2H}). \end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve. ■

Vu la proposition précédente, on dira que le processus B^H est *auto-similaire* s'il vérifie le point 1, qu'il est à *incrémentations stationnaires* s'il vérifie le point 2, et qu'il respecte *l'inversion du temps* s'il vérifie le point 3.

1.2 Propriétés négatives

Le mouvement Brownien, en dépit de ses trajectoires (presque sûrement) nulle part dérivables, reste un processus plutôt régulier. En quelque sorte, et dans un sens que nous prendrons soin de détailler plus loin, ses trajectoires sont « régulières dans leur irrégularité ». Néanmoins, il existe d'autres notions de « régularité ». Si le mouvement Brownien – qui, en considération de la Remarque 1.1.2, est un mBf particulier – vérifie certaines de ces propriétés, il est pour ainsi dire *maximal* pour celles-ci.

1.2.1 Prédicibilité

Une manière de mesurer la régularité d'un processus stochastique est d'observer sa « prédictibilité », *i.e.* s'il est possible de prévoir, à plus ou moins long terme, son comportement. Dans le cas du mouvement Brownien standard, il est connu¹ qu'il s'agit d'une semi-martingale. Ce n'est pas le cas du mBf.

1.2.2 Propriété de Markov

Un processus vérifie la *propriété de Markov* si, pour prédire son comportement futur, seul l'instant présent est « utile ».

DÉFINITION 1.2.1. Soit $X = \{X(t) : t \in I\}$ un processus stochastique défini sur $I \subset \mathbb{R}$ et adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$; on dira de X qu'il vérifie la propriété de Markov si, quels que soient $t_1, t_2 \in I$ tels que $t_1 < t_2$ et quel que soit $A \in \mathbb{B}$, la relation

$$\mathbb{P}(X(t_2) \in A | \mathcal{F}_{t_1}) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathbb{P}(X(t_2) \in A | X(t_1)) \quad (1.2.1)$$

1. Toute martingale est une semi-martingale. On pourra consulter le livre de Le Gall ([8])

est vérifiée; on dira aussi que X est un *processus de Markov*.

Afin de montrer que si B^H est un mBf avec $H \neq \frac{1}{2}$, alors B^H ne vérifie pas la propriété de Markov, nous avons besoin du résultat suivant ([9]).

LEMME 1.2.2. *Soit $X = \{X(t) : t \in \mathbb{R}\}$ un processus gaussien centré; si X vérifie la propriété de Markov, alors quels que soient $t, u, v \in \mathbb{R}$ tels que $t < u < v$, on a :*

$$\mathbb{E}[X(t)X(v)] \mathbb{E}[(X(u))^2] = \mathbb{E}[X(t)X(u)] \mathbb{E}[X(u)X(v)]. \quad (1.2.2)$$

Démonstration. Soient $t, u, v \in \mathbb{R}$ tels que $t \leq u \leq v$; posons

$$X'(v) := X(v) - aX(u) \quad (1.2.3)$$

de sorte que $X'(v)$ et $X(u)$ soient non corrélés, *i.e.* avec

$$a = \frac{\mathbb{E}[X(v)X(u)]}{\mathbb{E}[(X(u))^2]}$$

si $\mathbb{E}[(X(u))^2]$ est non-nul, et $a = 0$ si non. Puisque X est un processus gaussien, les variables aléatoires intervenant dans la relation (1.2.3) sont indépendantes. De plus, puisque X vérifie la propriété de Markov, la Proposition A.4.3 permet d'écrire

$$\mathbb{P}(\{X(t) \in A\} \cap \{X(v) \in A\} | X(u)) = \mathbb{P}(\{X(t) \in A\} | X(u)) \mathbb{P}(\{X(v) \in A\} | X(u))$$

et par le Lemme A.2.1

$$\mathbb{P}(\{X(t) \in A\} \cap \{X'(v) \in A\} | X(u)) = \mathbb{P}(\{X(t) \in A\} | X(u)) \mathbb{P}(\{X'(v) \in A\} | X(u)).$$

En particulier, $X'(v)$ et $X(t)$ sont indépendantes, donc non corrélées, d'où

$$0 = \mathbb{E}[X'(v)X(t)] = \mathbb{E}[X(v)X(t)] - a\mathbb{E}[X(u)X(t)]$$

i.e.

$$\frac{\mathbb{E}[X(v)X(u)]}{\mathbb{E}[(X(u))^2]} \mathbb{E}[X(u)X(t)] = \mathbb{E}[X(v)X(t)].$$

Ce qui achève la preuve. ■

THÉORÈME 1.2.3. *Soit $H \in]0, 1[\setminus \frac{1}{2}$; si B^H est un mBf, alors B^H n'est pas un processus de Markov.*

Démonstration. D'abord, nous montrons que si B^H est un processus de Markov, alors il admet deux « représentations » équivalentes, définies à partir de son opérateur de covariance. Pour aboutir à une contradiction, nous montrons que le comportement limite de ces deux « représentations » diffère.

Vu le Lemme 1.2.2, quels que soient $t, u, v \in \mathbb{R}$ tels que $t < u < v$, il vient que

$$\mathbb{E}[B^H(t)B^H(v)] \mathbb{E}[(B^H(u))^2] = \mathbb{E}[B^H(t)B^H(u)] \mathbb{E}[B^H(u)B^H(v)]. \quad (1.2.4)$$

Posons $v = 1$ et définissons explicitement, pour tout $t \in]0, 1[$, la fonction φ_H par :

$$\varphi_H(t) = K_H(t, 1) \quad (1.2.5)$$

$$= \frac{1}{2} (t^{2H} + 1 - |t - 1|^{2H}). \quad (1.2.6)$$

Ainsi définie, la fonction φ_H est strictement positive sur $]0, 1[$; en particulier, il vient la relation

$$\frac{\mathbb{E}[B^H(t)B^H(u)]}{\mathbb{E}[(B^H(u))^2]} = \varphi_H\left(\frac{t}{u}\right)$$

pour autant que $u \in]t, 1[$. De cette égalité, et vu la relation (1.2.4), nous pouvons écrire une formule similaire pour φ_H :

$$\varphi_H(t) = \varphi_H\left(\frac{t}{u}\right)\varphi_H(u);$$

ce qui, en posant $\psi_H(x) = \ln(\varphi_H(e^{-x}))$, quel que soit $x \geq 0$, se récrit :

$$\psi_H(x + y) = \psi_H(x) + \psi_H(y). \quad (1.2.7)$$

Dès lors, par linéarité de ψ_H^2 , il existe une constante $c > 0$ telle que $\psi_H(x) = -cx$, étant donné que $\psi_H(0) = 0$ et que $\lim_{x \rightarrow \infty} \psi_H(x) = -\infty$. Autrement écrit, la fonction φ_H peut s'exprimer par

$$\varphi_H(t) = t^c$$

sur l'intervalle $]0, 1[$; remarquons déjà que cette réécriture implique

$$\varphi_H''(t) = c(c-1)t^{c-2}$$

i.e.

$$\lim_{t \rightarrow 1} |\varphi_H''(t)| = c|c-1| < \infty.$$

D'un autre côté, en dérivant deux fois l'expression (1.2.5), il vient l'égalité

$$\varphi_H''(t) = H(2H-1)(t^{2H-2} - (1-t)^{2H-2})$$

d'où

$$\lim_{t \rightarrow 1} |\varphi_H''(t)| = \infty.$$

En effet, par choix de H , $H(2H-1)$ est non-nul, et $2H-2$ est (strictement) négatif. Ainsi, vu la contradiction, il vient que B^H n'est pas un processus de Markov si $H \neq \frac{1}{2}$. ■

1.3 Écritures alternatives

La théorie du mouvement Brownien standard a permis le développement d'une intégrale stochastique (l'intégrale d'Itô). En particulier, si presque sûrement pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$\tilde{B}(t) = \int_{-\infty}^t dB(s),$$

alors $\tilde{B}(t)$ est un mouvement Brownien (standard). Ici, nous montrons qu'il est possible d'exprimer sous diverses formes le mouvement Brownien fractionnaire.

1.3.1 Intégrale stochastique

En 1968, B. Mandelbrot et J. Van Ness ([10]) introduisent le mouvement Brownien fractionnaire à l'aide d'une intégrale stochastique. S'il est hors de question de développer la théorie permettant de construire une telle intégrale³, nous renvoyons en Annexe A.5.1 pour un rappel plus détaillé.

En premier lieu, rappelons que si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une application (déterministe) de carré intégrable sur $I \subseteq \mathbb{R}$, alors l'intégrale stochastique

$$\int_I f(s)dB(s)$$

a un sens, et on dira de f qu'elle est *Itô-intégrable*. De plus, cette intégrale est une variable aléatoire gaussienne centrée et dont la variance est donnée par⁴

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_I f(s)dB(s) \right)^2 \right] = \int_I f(s)^2 ds. \quad (1.3.1)$$

Ainsi, soit $H \in]0, 1[\setminus \{\frac{1}{2}\}$, et considérons, et soit $B^H = \{B^H(t) : t \in \mathbb{R}\}$ le processus défini explicitement par l'intégrale

$$B^H(t) \stackrel{p.s.}{=} c \int_{\mathbb{R}} (t-s)^{H-\frac{1}{2}} \chi_{\{s \leq t\}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}} \chi_{\{s \leq 0\}} dB(s). \quad (1.3.2)$$

quel que soit $t \in \mathbb{R}$.

PROPOSITION 1.3.1. *L'intégrale (1.3.2) a un sens.*

2. On peut dériver par rapport à x l'expression (1.2.7) pour montrer que la dérivée est constante sur $[0, \infty[$.

3. On pourra néanmoins consulter [11, Chap. 3] pour de plus amples détails, et [8, Chap. 5] pour un développement qui étend la classe des intégrateurs aux semi-martingales.

4. Cette propriété est souvent nommée « isométrie d'Itô ».

Démonstration. Il suffit de vérifier que l'application

$$s \mapsto (t-s)^{H-\frac{1}{2}} \chi_{\{s \leq t\}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}} \chi_{\{s \leq 0\}} \quad (1.3.3)$$

est de carré intégrable sur \mathbb{R} . Remarquons tout d'abord que l'application (1.3.3) est de carré intégrable sur tout compact de \mathbb{R}^5 ; de plus, par un développement de Taylor-Maclaurin, il vient que si $|x| \leq \frac{1}{2}$, alors il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\left((1+x)^{H-\frac{1}{2}} - 1 \right)^2 \leq cx^2. \quad (1.3.4)$$

Dans la suite, supposons que $|s| > 2|t|$; par l'inégalité triangulaire, il vient que

$$0 < |s| - |t| \leq |t-s| \leq |s| + |t|.$$

De plus, si $H < \frac{1}{2}$, alors $H - \frac{1}{2} < 0$, et $|t-s|^{H-\frac{1}{2}}$ est majoré par $(|s| - |t|)^{H-\frac{1}{2}}$. Similairement, si $H > \frac{1}{2}$, alors $H - \frac{1}{2} > 0$, et $|t-s|^{H-\frac{1}{2}}$ est majoré par $(|s| + |t|)^{H-\frac{1}{2}}$. Par conséquent, quel que soit $H \in]0, 1[\setminus \{\frac{1}{2}\}$, il vient successivement :

$$\begin{aligned} \left((t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}} \right)^2 &\leq \left((|s| - |t|)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}} \right)^2 + \left((|s| + |t|)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}} \right)^2 \\ &= |s|^{2H-1} \left(\left(1 - \frac{|t|}{|s|}\right)^{H-\frac{1}{2}} - 1 \right)^2 + |s|^{2H-1} \left(\left(1 + \frac{|t|}{|s|}\right)^{H-\frac{1}{2}} - 1 \right)^2 \\ &\leq 2|s|^{2H-3} c |t|^2 \end{aligned}$$

où la dernière inégalité exploite la relation (1.3.4); en découlent alors les majorations

$$\int_{|s|>2|t|} \left((t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}} \right)^2 ds \leq 2c|t|^2 \int_{|s|>2|t|} |s|^{2H-3} < \infty.$$

Par un passage à la limite, il vient que l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \left((t-s)^{H-\frac{1}{2}} \chi_{\{s \leq t\}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}} \chi_{\{s \leq 0\}} \right)^2 ds$$

est finie, ce qui achève la preuve. ■

COROLLAIRE 1.3.2. *Le processus B^H défini par la relation (1.3.2) est un mBf d'exposant de Hurst H .*

Démonstration. Il suffit de calculer l'opérateur de covariance de B^H . Soient $s, t \in \mathbb{R}$ tels que $s < t$; il vient successivement :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[(B^H(t) - B^H(s))^2 \right] &= c^2 \int_{\mathbb{R}} \left((t-u)^{H-\frac{1}{2}} \chi_{\{u \leq t\}} - (s-u)^{H-\frac{1}{2}} \chi_{\{u \leq s\}} \right)^2 du \\ &\stackrel{v=u-s}{=} c^2 \int_{\mathbb{R}} \left((t-s-v)^{H-\frac{1}{2}} \chi_{\{v+s \leq t\}} - (-v)^{H-\frac{1}{2}} \chi_{\{v \leq 0\}} \right)^2 dv \\ &\stackrel{v=(t-s)w}{=} c^2 |t-s|^{2H} \int_{\mathbb{R}} \left((1-w)^{H-\frac{1}{2}} \chi_{\{w \leq 1\}} - (-w)^{H-\frac{1}{2}} \chi_{\{w \leq 0\}} \right)^2 dw \\ &= c^2 K |t-s|^{2H} \end{aligned}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [B^H(s)B^H(t)] &= \frac{1}{2} \left(\mathbb{E} \left[(B^H(t) - B^H(0))^2 \right] + \mathbb{E} \left[(B^H(s) - B^H(0))^2 \right] - \mathbb{E} \left[(B^H(t) - B^H(s))^2 \right] \right) \\ &= \frac{1}{2} c^2 K (|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}) \end{aligned}$$

ce qui suffit pour conclure. ■

REMARQUE 1.3.3. Le terme « fractionnaire » du mBf provient du choix historique de l'opérateur de covariance du processus. En effet, la définition donnée dans [10] fait intervenir une constante $c = \Gamma(H + \frac{1}{2})^{-1}$ dans l'expression (1.3.2), afin d'obtenir une intégrale dite *fractionnaire* (voir par exemple [12]).

5. C'est évident lorsque $H > \frac{1}{2}$; quand $H < \frac{1}{2}$, il faut vérifier l'intégrabilité lorsque $s \rightarrow t$, ce qui se fait sans grande difficulté.

1.3.2 Représentation harmonisable

L'analyse harmonique d'une fonction (déterministe) fait classiquement appel à deux outils : le développement en série de Fourier, ou son pendant « continu » : la transformation de Fourier. Le rôle de la représentation harmonisable est analogue : étudier un signal (aléatoire) dans le domaine fréquentiel.

Pour étudier cette « transformée de Fourier stochastique », nous devons introduire la mesure \widehat{B} . Dans la mesure du possible, nous souhaitons que cette mesure vérifie les propriétés usuelles de la transformation de Fourier, comme l'isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ dans lui-même.

DÉFINITION 1.3.4. La *mesure harmonisée* de la mesure de Wiener B , notée \widehat{B} , est la mesure définie explicitement par

$$\widehat{B}(A) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\chi}_A(s) dB(s) \quad (1.3.5)$$

quel que soit $A \in \mathbb{B}$, où $\widehat{\chi}_A$ désigne la transformée de Fourier de la fonction caractéristique de A .

REMARQUE 1.3.5. Si f est une fonction de carré intégrable sur \mathbb{R} , alors l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

est vérifiée, par le théorème de Plancherel. Cette isométrie, combinée avec (1.3.1), permet d'établir une identité à la Plancherel :

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(s) dB(s) \stackrel{p.s.}{=} \int_{\mathbb{R}} f(\xi) d\widehat{B}(\xi),$$

d'où l'égalité

$$\mathbb{E} \left[\left| \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) d\widehat{B}(\xi) \right|^2 \right] = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt.$$

Ainsi, une représentation harmonisable d'un mBf est obtenu à partir de la transformée de Fourier de l'application (1.3.3), d'où la proposition suivante :

PROPOSITION 1.3.6. Soient $H \in]0, 1[\setminus \{\frac{1}{2}\}$ et $\kappa_H \in]0, \infty[$ une constante ne dépendant que de H ; le processus $B^H = \{B^H(t) : t \in \mathbb{R}\}$ défini explicitement par

$$B^H(t) \stackrel{p.s.}{=} c\kappa_H \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\xi t} - 1}{|\xi|^{H+\frac{1}{2}}} d\widehat{B}(\xi)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ est un mBf d'exposant de Hurst H .

Démonstration. Il s'agit d'une application directe de la Proposition A.3.1 et de la Remarque 1.3.5. ■

1.4 Régularité des trajectoires

Commençons par rappeler que les trajectoires d'un processus X défini sur un ensemble $I \subset \mathbb{R}$ sont dites *localement Hölderiennes d'exposant α* si pour tout $\omega \in \Omega$ et pour tout compact $K \subset I$, il existe une constante $C_\alpha(\omega) > 0$ telle que

$$|X(t, \omega) - X(s, \omega)| \leq C_\alpha(\omega) |t - s|^\alpha.$$

PROPOSITION 1.4.1. Soit $H \in]0, 1[$ et soit B^H un mBf ; il existe une modification de B^H dont les trajectoires sont localement Hölderiennes d'exposant $\alpha \in]0, H[$.

Démonstration. Vu les propriétés d'autosimilarité de B^H (voir la Proposition 1.1.3), puisque la relation

$$\mathbb{E} [|B^H(t) - B^H(s)|^\alpha] = \mathbb{E} [|B^H(1)|^\alpha |t - s|^{\alpha H}]$$

est valable pour tout $\alpha > 0$, le Théorème A.4.1 permet d'établir le résultat. ■

La régularité Hölderienne donne un indice de la rugosité des trajectoires du mBf.

PROPOSITION 1.4.2. Soit B^H un mBf ; pour tout $t \in \mathbb{R}$, presque sûrement, les trajectoires de B^H ne sont pas dérivables en t .

Démonstration. En ce qui concerne le mouvement Brownien, il était possible d'invoquer la propriété de Markov afin de démontrer le résultat. Or, le mBf *n'est pas un processus de Markov* ! Nous allons utiliser l'autosimilarité de B^H à la place.

Soit E_{t,t_0} la variable aléatoire définie explicitement par :

$$E_{t,t_0} = \frac{B^H(t) - B^H(t_0)}{t - t_0}$$

quels que soient $t, t_0 \in \mathbb{R}$; vu la Proposition 1.1.3, il vient que

$$E_{t,t_0} \stackrel{\mathcal{L}}{=} (t - t_0)^{H-1} B^H(1).$$

Soit $d > 0$ et notons A_t^d l'événement défini par

$$A_t^d = \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t} \left| \frac{B^H(s)}{s} \right| > d \right\};$$

pour toute suite décroissante $(t_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$, la suite $(A_{t_n}^d)_{n \in \mathbb{N}_0}$ est décroissante, et

$$A_{t_n}^d \supset \left\{ \left| \frac{B^H(t_n)}{t_n} \right| > d \right\} = \{|B^H(1)| > t_n^{1-H} d\}. \quad (1.4.1)$$

Or, puisque la probabilité du terme de droite dans la relation (1.4.1) tend vers 1 lorsque $n \rightarrow \infty$, la conclusion en découle. ■

1.4.1 Régularité hölderienne

Nous pouvons donner des critères de continuité plus fins que la seule continuité des trajectoires. Pour cela, nous devons introduire les *espaces de Hölder*. Si nous ne donnons pas de preuve des propriétés énoncées ici, cela sera fait lorsque nous aborderons l'étude des draps et champs Browniens (multi)fractionnaires (voir Partie II).

DÉFINITION 1.4.3 (Espace de Hölder global). Soit I un intervalle compact de \mathbb{R} , et soit $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I ; g est dite α -hölderienne pour un certain $\alpha \in [0, 1[$ s'il existe $C > 0$ tel que la relation

$$|g(x) - g(y)| < C|x - y|^\alpha$$

est vérifiée quels que soient $x, y \in I$. L'espace des fonctions α -hölderiennes sur I , muni de la norme

$$\|\cdot\|_{C^\alpha} : g \mapsto \sup_{x \in I} |g(x)| + \sup_{\substack{x, y \in I \\ x \neq y}} \frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

est appelé l'*espace de Hölder global (sur I)* et est noté $C^\alpha(I)$.

DÉFINITION 1.4.4 (Exposant de Hölder global). Soient I un intervalle compact de \mathbb{R} et $f \in C^\alpha(I)$ pour un certain $\alpha \in [0, 1[$; l'*exposant de Hölder global de f sur I* , noté $\alpha_f(I)$, est défini par

$$\alpha_f(I) = \sup\{\alpha \in [0, 1[: f \in C^\alpha(I)\}.$$

L'exposant de Hölder global est une quantification *limite* de la régularité (hölderienne) d'une fonction.

EXEMPLE. Considérons le mouvement Brownien standard $B = \{B(t) : t \in \mathbb{R}\}$. Il est connu (par une application du Théorème A.4.1) que pour tout $\gamma \in]0, \frac{1}{2}[$, il existe une version \tilde{B} de B telle que les trajectoires de \tilde{B} sont γ -hölderiennes sur tout intervalle compact I de \mathbb{R} . En particulier, pour toute trajectoire $\tilde{B}(\cdot, \omega)$ de \tilde{B} , il vient que

$$\alpha_{\tilde{B}(\cdot, \omega)}(I) = \frac{1}{2}$$

quel que soit l'intervalle compact $I \subset \mathbb{R}$.

Il est possible de lier l'exposant de Hurst avec l'exposant de Hölder global d'un mBf.

PROPOSITION 1.4.5. Soit $H \in]0, 1[$; si $B^H = \{B^H(t) : t \in \mathbb{R}\}$ est un mBf, alors il existe un événement Ω^* de probabilité 1 tel que, pour tout $\omega \in \Omega^*$,

$$\alpha_{B^H(\cdot, \omega)}(I) = H.$$

quel que soit l'intervalle compact $I \subset \mathbb{R}$.

L'exposant de Hölder global d'une fonction f est calculé sur un intervalle compact I de \mathbb{R} . Si on considère un intervalle compact $I' \subset I$, alors naturellement

$$\alpha_f(I') \geq \alpha_f(I).$$

Dès lors, une question tout aussi naturelle émerge : peut-on étudier un comportement « de type hölderien » sur un intervalle compact qui « tend » vers un point ? Il s'agit de l'objet de la définition suivante.

DÉFINITION 1.4.6 (Exposant de Hölder local). Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} ; l'exposant de Hölder local d'une fonction f en un point $t \in \mathbb{R}$, noté $\beta_f(t)$, est défini par

$$\beta_f(t) = \sup\{\alpha_f(I) : I \text{ intervalle compact tel que } t \in I^\circ\}$$

quel que soit $t \in \mathbb{R}$.

PROPOSITION 1.4.7. Soit $H \in]0, 1[$; si B^H est un mBf, alors il existe un évènement Ω^* de probabilité 1 tel que, pour tout $\omega \in \Omega^*$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\beta_{B^H(\cdot, \omega)}(t) = H.$$

Les espaces de Hölder *ponctuels* permettent d'étudier ponctuellement la régularité d'une fonction.

DÉFINITION 1.4.8 (Espace de Hölder ponctuel). Soient $t \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in [0, 1[$; l'espace de Hölder ponctuel en t , noté $C^\alpha(t)$, est l'espace des fonctions $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies au voisinage de t pour lesquelles il existe $\varepsilon > 0$ tels que

$$\sup_{\substack{s \in B(t, \varepsilon) \\ s \neq t}} \frac{|g(t) - g(s)|}{|t - s|^\alpha} < \infty.$$

où $B(t, \varepsilon)$ désigne la boule fermée de centre t et de rayon ε , *i.e.*

$$B(t, \varepsilon) = \{s \in \mathbb{R} : |t - s| \leq \varepsilon\}.$$

Comme pour les espaces de Hölder globaux, il est possible de définir un *exposant de Hölder ponctuel*. Cet exposant est lui aussi une quantification *limite* de la régularité (ponctuelle) d'une fonction.

DÉFINITION 1.4.9 (Exposant de Hölder ponctuel). Soient $t \in \mathbb{R}$ et $f \in C^\alpha(t)$ pour un certain $\alpha \in [0, 1[$; l'exposant de Hölder ponctuel de f en t , noté $\gamma_f(t)$, est défini par

$$\gamma_f(t) = \sup\{\alpha \in [0, 1[: f \in C^\alpha(t)\}.$$

PROPOSITION 1.4.10. Soient $H \in]0, 1[$ et $t_0 \in \mathbb{R}$; si $B^H = \{B^H(t) : t \in \mathbb{R}\}$ est un mBf, alors il existe un évènement $\Omega_0 \subset \Omega$ de probabilité 1, tel que pour tout $\omega \in \Omega_0$, on a

$$\gamma_{B^H(\cdot, \omega)}(t_0) = H.$$

PROPOSITION 1.4.11. Soient $t_0 \in \mathbb{R}$, $\alpha \in [0, 1[$, et soit g une fonction définie sur un voisinage de t_0 . Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $g \in C^\alpha(t_0)$;
2. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\sup_{\rho \in]0, \varepsilon]} \frac{\sup_{t, s \in B(t_0, \rho)} |g(t) - g(s)|}{\rho^\alpha} < \infty.$$

Démonstration. Il suffit de calculer. Pour tout $\rho \in]0, \varepsilon]$, il vient que

$$\begin{aligned} \frac{\sup_{t, s \in B(t_0, \rho)} |g(t) - g(s)|}{\rho^\alpha} &\leq \frac{\sup_{t \in B(t_0, \rho)} |g(t) - g(t_0)|}{\rho^\alpha} + \frac{\sup_{s \in B(t_0, \rho)} |g(t_0) - g(s)|}{\rho^\alpha} \\ &\leq \frac{\sup_{t \in B(t_0, \rho)} |g(t) - g(t_0)|}{|t - t_0|^\alpha} + \frac{\sup_{s \in B(t_0, \rho)} |g(t_0) - g(s)|}{|t_0 - s|^\alpha} \\ &\leq 2 \frac{\sup_{t \in B(t_0, \varepsilon)} |g(t) - g(t_0)|}{|t - t_0|^\alpha}. \end{aligned}$$

où $\varepsilon > 0$ est tiré de la Définition 1.4.8. Puisque la borne supérieure est indépendante de ρ , cela suffit pour conclure cette partie de la preuve.

On a ainsi

$$\begin{aligned} \frac{\sup_{t \in B(t_0, \varepsilon)} |g(t) - g(t_0)|}{|t - t_0|^\alpha} &\leq \sup_{t \in B(t_0, \varepsilon)} \frac{\sup_{t, s \in B(t_0, |t - t_0|)} |g(t) - g(s)|}{|t - t_0|^\alpha} \\ &= \sup_{\rho \in]0, \varepsilon]} \frac{\sup_{t, s \in B(t_0, \rho)} |g(t) - g(s)|}{\rho^\alpha} < \infty. \end{aligned}$$

■

REMARQUE 1.4.12. Quel que soit $t \in \mathbb{R}$, on observe que $\beta_f(t) \leq \gamma_f(t)$.

1.5 Décomposition en ondelettes

Vu la fonction de covariance du mBf, il est naturel de se demander s'il existe une décomposition en ondelettes de ce processus. En particulier, grande est la tentation de procéder comme dans le cas déterministe. Pour rappel, si $f \in L^2(\mathbb{R})$, et si la famille de fonctions $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ forment une base orthonormée d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R})$, il existe une décomposition de la forme

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \psi_{j,k} \quad (1.5.1)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\mathbb{R})}$ désigne le produit scalaire de $L^2(\mathbb{R})$.

Dans le cas d'un mBf B^H , partons de sa représentation intégrale (voir la relation (1.3.2) et le Corollaire 1.3.2). Presque sûrement, pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$B^H(t) \stackrel{p.s.}{=} c \int_{\mathbb{R}} K(t, s) dB(s)$$

où $K(t, \cdot)$ est l'application définie explicitement sur \mathbb{R} par :

$$K(t, \cdot) : s \mapsto (t - s)^{H - \frac{1}{2}} \chi_{\{s \leq t\}} - (-s)^{H - \frac{1}{2}} \chi_{\{s \leq 0\}}$$

Procédons « classiquement » et considérons $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ une base orthonormée d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R})$; si l'on souhaite aboutir à une relation de la forme (1.5.1) pour B^H , il nous faut calculer les produits $\langle B^H, \psi_{j,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R})}$. Il vient que :

$$\begin{aligned} \langle B^H, \psi_{j,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} B^H(t) \overline{\psi_{j,k}(t)} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} K(t, s) dB(s) \right) \overline{\psi_{j,k}(t)} dt. \end{aligned}$$

Cette dernière intégrale est une variable aléatoire (il s'agit d'une intégrale stochastique) gaussienne, centrée, et sa variance est donnée par $\psi_{j,k}(t)^2 \|K(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$. De ce qui précède, il découle un développement en série de la forme :

$$B^H(t) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \varepsilon_{j,k}(t) \psi_{j,k}(t).$$

Cette décomposition est insatisfaisante, car en particulier elle ne permet pas de « séparer » la part aléatoire du processus de sa part déterministe. Plus précisément, il serait appréciable que l'aléa inhérent au processus ne dépende pas directement (*i.e.* comme une fonction) du temps.

Pour obtenir une telle décomposition, il est intéressant de noter que le processus B^H est entièrement défini par un noyau intégral (la fonction $K(t, \cdot)$ définie ci-avant). L'idée est donc de décomposer ce noyau dans la base d'ondelettes choisie.

En effet, soit $t \in \mathbb{R}$; puisque $K(t, \cdot)$ est une fonction déterministe de $L^2(\mathbb{R})$ (voir la Proposition 1.3.1), il existe une décomposition dans la base d'ondelettes de la forme

$$K(t, \cdot) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} c_{j,k}(t) \psi_{j,k}(\cdot)$$

où les $c_{j,k}(t)$ sont donnés par

$$c_{j,k}(t) = \int_{\mathbb{R}} K(t, s) \overline{\psi_{j,k}(s)} ds.$$

Dès lors, sous certaines hypothèses concernant les fonctions $\psi_{j,k}$ et $c_{j,k}$, il vient que

$$\begin{aligned} B^H(t) &\stackrel{p.s.}{=} \int_{\mathbb{R}} K(t,s) dB(s) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} c_{j,k}(t) \psi_{j,k}(s) dB(s) \\ &= \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} c_{j,k}(t) \int_{\mathbb{R}} \psi_{j,k}(s) dB(s) \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

où l'intégrale de la relation (1.5.2) est une variable aléatoire gaussienne, centrée, réduite. Il découle de ce développement une décomposition de la forme :

$$B^H(t) \stackrel{p.s.}{=} \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} c_{j,k}(t) \varepsilon_{j,k} \quad (1.5.3)$$

où $\varepsilon_{j,k} \stackrel{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$, puisque les ondelettes forment une base orthonormées, et grâce à l'isométrie d'Itô.

Le sujet d'intérêt est donc de trouver une famille de fonctions $\{c_{j,k} : j,k \in \mathbb{Z}\}$ adéquates pour en déduire le développement désiré. La proposition suivante, qui sera démontrée dans le cadre plus général des générateurs du mouvement Brownien multifractionnaire, donne de telles fonctions à partir d'une base orthonormée d'ondelettes.

PROPOSITION 1.5.1. *Soit $H \in]0, 1[$; si $B^H = \{B^H(t) : t \in \mathbb{R}\}$ est un mBf d'exposant de Hurst H , alors il existe une fonction $\Psi_1^H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, presque sûrement, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a*

$$B^H(t) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} 2^{-j} \varepsilon_{j,k} (\Psi_1^H(2^j t - k) - \Psi_1^H(-k))$$

où les $\varepsilon_{j,k}$ sont des variables aléatoires i.i.d. selon une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

Chapitre 2

Mouvement Brownien multifractionnaire

Un inconvénient considérable du mBf est son incapacité à faire varier la régularité des trajectoires au cours du temps. Le mouvement Brownien multifractionnaire (noté mBm dans la suite) permet de se passer de cette limitation en utilisant une fonction exposant de Hurst $H(t)$.

Cette section est basée sur les résultats donnés dans [3], néanmoins ceux-ci sont limités à une dimension afin de ne pas alourdir l'exposé, et ne seront démontrés que dans le cadre plus général des extensions à \mathbb{R}^d .

2.1 Définition et propriétés

Dans le Chapitre 1, la généralisation proposée par le mBf (par rapport au mouvement Brownien) consistait à introduire un exposant de Hurst $H \in]0, 1[$ afin d'assujettir les trajectoires du processus à une certaine irrégularité. Comme rappelé précédemment, Mandelbrot & Van Ness ([10]) introduisirent le mBf par une intégrale stochastique. Le choix d'une généralisation du mBf peut se faire à l'aide de ces représentations : dans l'article de Peltier & Lévy-Véhel ([13]), les auteurs proposent d'utiliser la représentation intégrale ; Ayache ([3]) propose de modifier la « transformée de Fourier » du mBf. Dans les deux cas, la modification porte sur l'exposant de Hurst, remplacé par une fonction mesurable¹ $t \mapsto H(t)$.

Dans la suite de cette section, une *fonction exposant de Hurst* est une fonction définie sur \mathbb{R} (Borel-)mesurable à valeur dans un fermé inclus dans l'intervalle $]0, 1[$.

DÉFINITION 2.1.1. Soit H une fonction exposant de Hurst et soit B un mouvement Brownien ; le processus $B^{H(\cdot)} = \{B^{H(t)}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ défini explicitement par

$$B^{H(t)}(t) \stackrel{p.s.}{=} c \int_{\mathbb{R}} |t-s|^{H(t)-\frac{1}{2}} - |s|^{H(t)-\frac{1}{2}} dB(s) \quad (2.1.1)$$

quel que soit $t \in \mathbb{R}$ est appelé *mouvement Brownien multifractionnaire d'exposant de Hurst $H(\cdot)$* .

Lorsque c est égal à 1, le mouvement Brownien multifractionnaire $B^{H(\cdot)}$ est qualifié de *standard*.

NOTATION. Quand il n'y aura aucune ambiguïté, la mention « *d'exposant de Hurst $H(\cdot)$* » pourra être omise. De même, on pourra désigner un mouvement Brownien multifractionnaire par le sigle « *mBm* ».

La Figure 2.1 présente des réalisations de mBm standards pour divers fonctions exposant de Hurst $H(\cdot)$.

REMARQUE 2.1.2. Évidemment, si H est une fonction exposant de Hurst constante, alors le mBm est un mBf. On peut donc supposer que le choix du terme « multifractionnaire » pour désigner ce processus tient du fait que l'exposant de Hurst peut prendre différentes valeurs tout au long d'une trajectoire. On peut aussi formuler l'hypothèse que le terme rappelle l'analyse *multifractale* qui, comme son nom le laisse entrevoir, introduit des « fractales » dont l'étude est réalisée non plus à l'aide d'une unique dimension, mais d'un spectre (potentiellement indénombrable) d'exposants.

Représentation harmonisable

Pour obtenir une expression du mBf dans le plan fréquentiel, il a suffi de calculer la transformée de Fourier d'une application. Par un argument tout à fait similaire, nous pouvons donner une représentation harmonisable du mBm.

1. Dans le livre d'Ayache ([3]), cette fonction est nommée « *fonction multifractionnaire de Hurst* ».

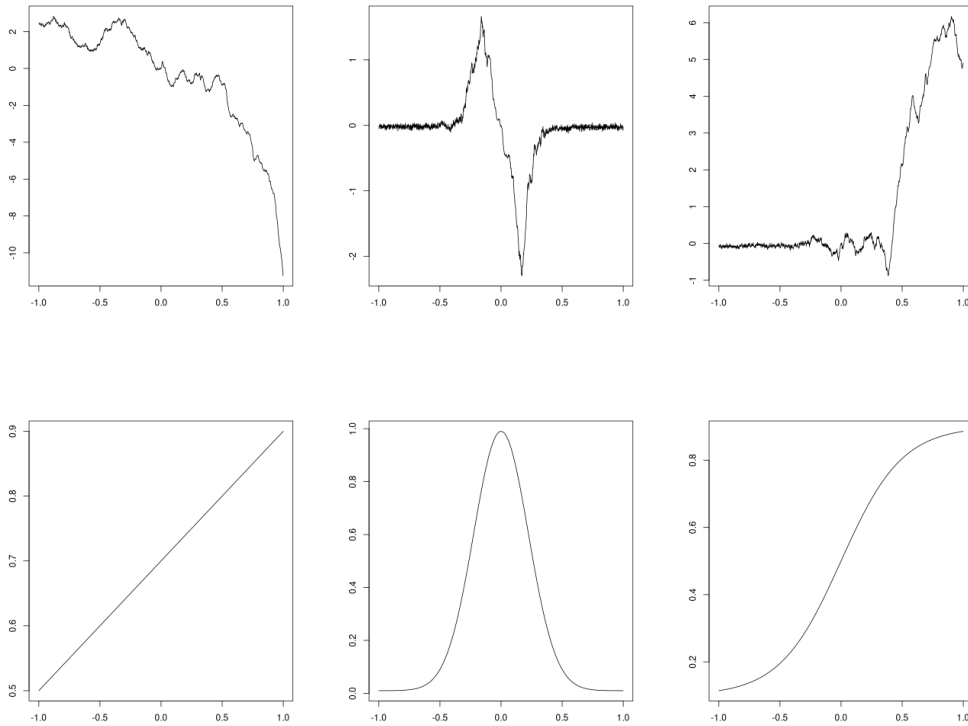


FIGURE 2.1 – Exemples de mBm standards et fonctions exposants de Hurst associées sur l'intervalle $[-1, 1]$.

THÉORÈME 2.1.3. Soit H une fonction exposant de Hurst, et soit B un mouvement Brownien défini sur \mathbb{R} ; le processus $B^{H(\cdot)} = \{B^{H(t)}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ défini explicitement par

$$B^{H(t)}(t) \stackrel{p.s.}{=} c\kappa_H \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\xi t} - 1}{|\xi|^{H(t)+\frac{1}{2}}} d\widehat{B}(\xi)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ est un mBm de fonction exposant de Hurst H .

2.2 Propriétés des trajectoires du mBm

Le mBf est un processus gaussien, et il en existe une version telle que, presque sûrement, ses trajectoires sont continues dans \mathbb{R} . Il serait heureux que ce soit également le cas des trajectoires du mBm. Cependant, l'exposant de Hurst est désormais une *fonction* exposant de Hurst, qui dépend du paramètre temporel. Par conséquent, si H est discontinu en $t_0 \in \mathbb{R}$, il est possible que toute modification du mBm soit presque sûrement discontinue en t_0 . En réalité, la régularité de H conditionne bien plus fortement la régularité des trajectoires du mBm.

THÉORÈME 2.2.1. Soit H une fonction exposant de Hurst et soit $B^{H(\cdot)} = \{B^{H(t)}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ un mBm; il existe un événement $\Omega_0 \subset \Omega$ de probabilité 1 tel que

1. Quel que soit $\omega \in \Omega_0$, $B^{H(\cdot)}(\cdot, \omega)$ est continu en 0;
2. Si $H(\cdot)$ est continue sur \mathbb{R} , alors pour tout $\omega \in \Omega_0$, les trajectoires de $B^{H(\cdot)}(\cdot, \omega)$ sont continues;
3. Si $H(\cdot)$ est discontinue en $t_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, alors il existe un événement $\Omega_0^{t_0} \subset \Omega_0$ de probabilité 1, dépendant de t_0 , tel que pour tout $\omega \in \Omega_0^{t_0}$, $B^{H(\cdot)}(\cdot, \omega)$ est discontinue en t_0 .

2.2.1 Régularité hölderienne

La Proposition 1.4.5 et la Proposition 1.4.7 lient l'exposant de Hurst d'un mBf avec les exposants de Hölder global et local. Dans le même esprit et sans surprise, pour un mBm, ces exposants de Hölder dépendent de la fonction exposant de Hurst.

PROPOSITION 2.2.2. Soit I un intervalle compact de \mathbb{R} , et soit H une fonction exposant de Hurst telle que $H \in C^{\alpha_I}(I)$, où

$$\inf\{H(t) : t \in I\} < \alpha_I < 1;$$

si $B^{H(\cdot)}$ est un mBm, alors il existe un évènement Ω^* de probabilité 1 tel que, pour tout $\omega \in \Omega^*$,

$$\alpha_{B^{H(\cdot)}(\cdot, \omega)}(I) = \inf\{H(t) : t \in I\}.$$

PROPOSITION 2.2.3. Soient H une fonction exposant de Hurst, et $B^{H(\cdot)} = \{B^{H(t)}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ un mBm de fonction exposant de Hurst $H(\cdot)$; pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'exposant de Hölder local du mBm $B^{H(\cdot)}$ en t est donné presque sûrement par

$$\beta_{B^{H(\cdot)}(\cdot, \omega)}(t) = \min\{\beta_{H(\cdot)}(t), H(t)\}$$

et l'exposant de Hölder ponctuel de $B^{H(\cdot)}$ en t est donné presque sûrement par

$$\gamma_{B^{H(\cdot)}(\cdot, \omega)}(t) = \min\{\gamma_{H(\cdot)}(t), H(t)\}.$$

2.3 Décomposition en ondelettes

La décomposition en ondelettes du mBf se confronte à la « séparation » de la partie aléatoire (contribution des variables gaussiennes $\varepsilon_{j,k}$) de la partie déterministe (dictée par la fonction Ψ_1^H). Dans le cas d'un mBm, il faut également considérer l'apport de la fonction exposant de Hurst qui le définit; néanmoins, cette fonction n'affecte que légèrement la forme de cette décomposition.

PROPOSITION 2.3.1. Soit un intervalle fermé $[\underline{H}, \overline{H}] \subset]0, 1[$ et soit une application mesurable $H : \mathbb{R} \rightarrow [\underline{H}, \overline{H}]$; si $B^{H(\cdot)} = \{B^{H(t)}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ est un mBm de fonction exposant de Hurst $H(\cdot)$, alors il existe une fonction $\Psi_1^{H(\cdot)}(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, presque sûrement, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$B^{H(t)}(t) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} 2^{-jH(t)} \varepsilon_{j,k} \left(\Psi_1^{H(t)}(2^j t - k) - \Psi_1^{H(t)}(-k) \right) \quad (2.3.1)$$

où les $\varepsilon_{j,k}$ sont des variables aléatoires i.i.d. selon une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

2.4 Un mot sur le mBm lorsque $H(t)$ n'est pas déterministe

Piste. Évoquer le problème de la construction (corrélations entre $H(t)$ et le mouvement Brownien utilisé pour intégrer), et le contournement par le développement en ondelettes (qui légitimera d'autant plus cette représentation).

Deuxième partie

Extensions à \mathbb{R}^d

Chapitre 3

Cas du mBf

Il est possible de définir un mBf sur \mathbb{R}^d de la même façon que sur \mathbb{R} : en définissant son opérateur de covariance, ou en donnant une représentation de celui-ci.

3.1 Mouvement Brownien fractionnaire de Lévy

Reprenons l'opérateur de covariance du mBf dans \mathbb{R} ; si $B^H = \{B^H(t) : t \in \mathbb{R}\}$ est un mBf alors son opérateur de covariance est donné par¹

$$K_H(t_1, t_2) := \mathbb{E}[B^H(t_1)B^H(t_2)] = c(|t_1|^{2H} + |t_2|^{2H} - |t_1 - t_2|^{2H}).$$

Une idée immédiate pour définir un processus similaire sur \mathbb{R}^d consiste donc à prendre des normes d'éléments de \mathbb{R}^d .

DÉFINITION 3.1.1. Soient $H \in]0, 1[$ et $c \in]0, \infty[$; un *mouvement Brownien fractionnaire de Lévy (ou isotrope) d'exposant de Hurst H* est un processus stochastique gaussien centré noté

$$B^H = \{B^H(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$$

tel que

$$K_H(t_1, t_2) = \mathbb{E}[B^H(t_1)B^H(t_2)] = c(\|t_1\|^{2H} + \|t_2\|^{2H} - \|t_1 - t_2\|^{2H}) \quad (3.1.1)$$

quels que soient $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^d$.

Comme dans le cas où $d = 1$, lorsque $c = \text{Var}(B^H(1))$ est égal à 1, le mBf de Lévy B^H est qualifié de *standard*.

REMARQUE 3.1.2. Le qualificatif « isotrope » introduit dans la Définition 3.1.1 n'est pas anodin. En effet, l'isotropie désigne « [le] fait de présenter les mêmes caractéristiques physiques dans toutes les directions »² Ainsi, il n'existe *a priori* aucune direction privilégiée dans l'étude d'un phénomène isotrope. Concernant le mBf de Lévy, considérons une matrice orthogonale³ Q ; on observe que

$$\begin{aligned} K_H(Qt_1, Qt_2) &= c(\|Qt_1\|^{2H} + \|Qt_2\|^{2H} - \|Q(t_1 - t_2)\|^{2H}) \\ &= c(\|t_1\|^{2H} + \|t_2\|^{2H} - \|t_1 - t_2\|^{2H}) \\ &= K_H(t_1, t_2). \end{aligned}$$

Ainsi, dès lors que $B^H = \{B^H(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$ est un mBf de Lévy, le processus $\widetilde{B}^H = \{B^H(Qt) : t \in \mathbb{R}^d\}$ l'est également.

La Figure 3.1 montre plusieurs réalisations de textures fractionnaires isotropes pour $c = 1$.

REMARQUE 3.1.3. Lorsque l'exposant de Hurst H du mBf de Lévy B^H est égal à 1, alors un calcul immédiat montre que B^H exhibe un comportement linéaire en t (en moyenne quadratique), *i.e.* si $t \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ alors

$$\mathbb{E}\left[\left(B^1(t) - tB^1\left(\frac{t}{\|t\|}\right)\right)^2\right] = 0.$$

1. Voir Section 1.1.

2. Définition issue du Trésor de la Langue Française informatisé, *via* le Centre National de Ressources Textuelles et Lexicales, à l'adresse <https://www.cnrtl.fr/definition/isotropie> (consulté le 21 avril 2024).

3. Les processus isotropes sont exactement ceux dont l'expression de l'opérateur de covariance est indépendant de la base orthonormée choisie.

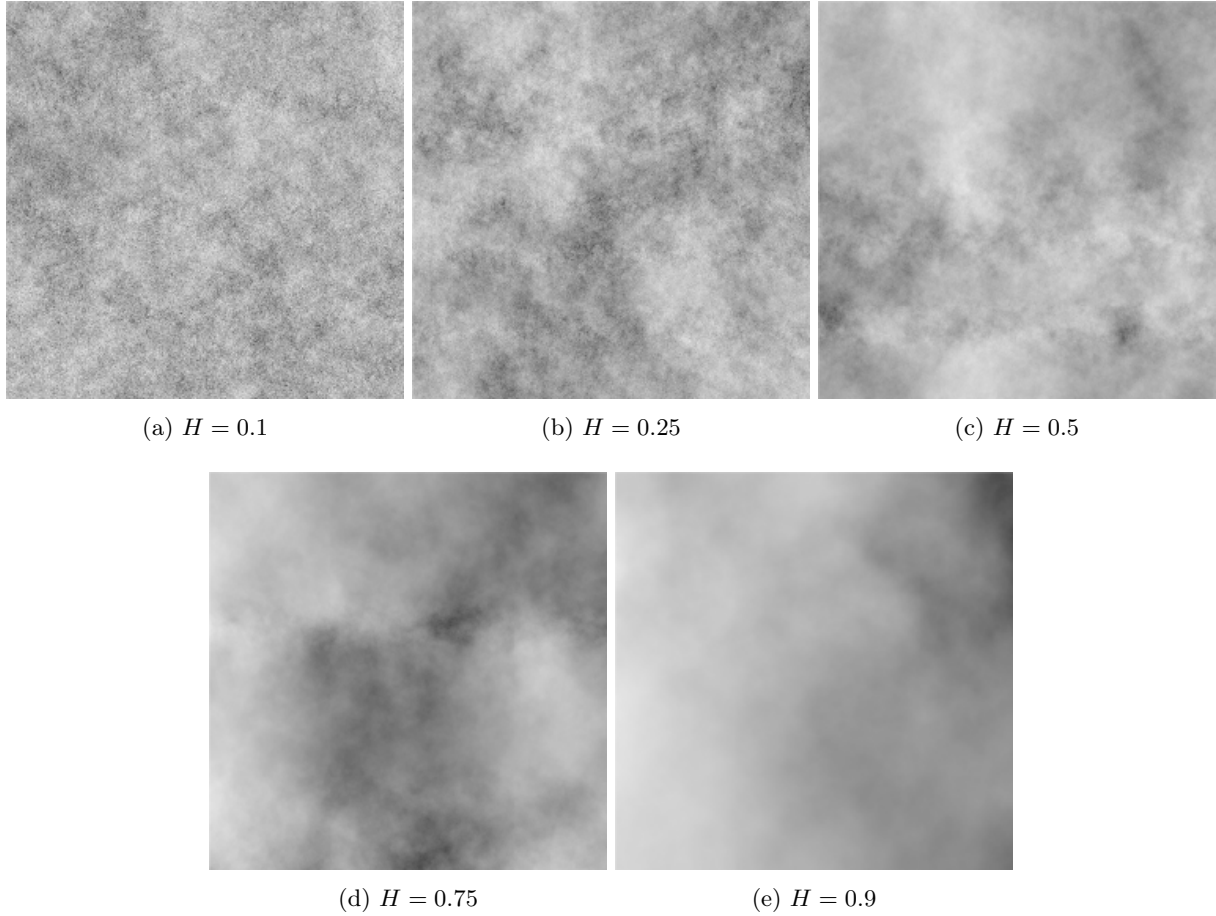


FIGURE 3.1 – Exemples de textures fractionnaires isotropes.

3.1.1 Propriétés fondamentales

Le mBf de Levy hérite de quelques propriétés du mBf « classique ».

PROPOSITION 3.1.4. *Soit $H \in]0, 1[$; si B^H est un mBf, alors pour tout $t \in \mathbb{R}^d$:*

1. *Quel que soit $k \in \mathbb{R}$, $B^H(kt) \stackrel{\mathcal{L}}{=} |k|^H B^H(t)$;*
2. *Quel que soit $h \in \mathbb{R}^d$, $B^H(t+h) - B^H(h) \stackrel{\mathcal{L}}{=} B^H(t)$;*

où les égalités $\stackrel{\mathcal{L}}{=}$ désignent des égalités au sens des lois fini-dimensionnelles.

Afin d'étudier les incréments du mBf de Levy, nous généralisons la notion d'incrément dans \mathbb{R}^d ; soient $X = \{X(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$ un processus défini sur \mathbb{R}^d , $s, t \in \mathbb{R}^d$, et notons $\Delta_{s,t}X$ la somme⁴

$$\Delta_{s,t}X = \sum_{r \in \{0,1\}^d} (-1)^{d-|r|} X(s + r^T(t-s))$$

On remarque, que s'il existe $i \in \{1, \dots, d\}$ tel que $s_i = t_i$, alors $\Delta_{s,t}X = 0$. Pour s'en rendre compte, il suffit de remarquer que si $r_0 \in \{0, 1\}^d$ est fixé, alors le vecteur $r'_0 \in \{0, 1\}^d$ choisi de sorte que $r_{0k} = r'_{0k}$ pour tout $k \in \{1, \dots, d\} \setminus \{i\}$ et tel que $r_{0i} = 1 - r'_{0i}$, alors il vient que

$$\begin{aligned} s + r_0^T(t-s) &= s + r_0'^T(t-s) \\ (-1)^{d-|r_0|} &= -(-1)^{d-|r_0'|} \end{aligned}$$

Vu ce qui précède, on préférera alors définir l'incrément du processus X par⁵

$$\Delta_{s,t}X = \sum_{r \in \{0,1\}^{|I|}} (-1)^{|I|-|r|} X((s_i + r_i(t_i - s_i))_{i \in I}) \quad (3.1.2)$$

où I est l'ensemble défini par

$$I = \{i \in \{1, \dots, d\} : s_i \neq t_i\}.$$

4. Ici, $|r|$ désigne la norme ℓ^1 de r (i.e. $|r| := \sum_{i=1}^d |r_i|$).

5. Si E est un ensemble fini, alors $|E|$ désigne le nombre d'éléments dans cet ensemble.

Nous sommes maintenant en mesure d'établir la stationarité des incréments du mBf de Levy.

PROPOSITION 3.1.5. *Soit $H \in]0, 1[$; si $B^H = \{B^H(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$ est un mBf de Levy, alors pour tout $h \in \mathbb{R}^d$,*

$$\Delta_{h,t+h}B^H \stackrel{\mathcal{L}}{=} \Delta_{0,t}B^H.$$

Démonstration. Soit $h \in \mathbb{R}^d$; il vient que

$$\begin{aligned} \Delta_{h,t+h}B^H &= \sum_{r \in \{0,1\}^d} (-1)^{d-|r|} B^H(h + r^T(t+h-h)) \\ &= \sum_{r \in \{0,1\}^d} (-1)^{d-|r|} B^H(h + r^T t) \\ &= \sum_{r \in \{0,1\}^d \setminus \{0\}} (-1)^{d-|r|} (B^H(h + r^T t) - B^H(h)) \end{aligned}$$

ce qui montre que tous les termes intervenants dans $\mathbb{E}[\Delta_{h,s+h}B^H \Delta_{h,t+h}B^H]$ sont de la forme

$$\mathbb{E}[(B^H(h + r^T s) - B^H(h))(B^H(h + r^T t) - B^H(h))] \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathbb{E}[B^H(r^T s)B^H(r^T t)]$$

vu le point 2 de la Proposition 3.1.4. Il en découle alors l'égalité

$$\mathbb{E}[\Delta_{h,s+h}B^H \Delta_{h,t+h}B^H] = \mathbb{E}[\Delta_{0,s}B^H \Delta_{0,t}B^H]$$

d'où la conclusion. ■

3.1.2 Écritures alternatives

Grâce à l'isotropie, il est aisé pour le mBf de Levy de dériver des représentations similaires au mBf « classique ». Nous proposons de lui donner une représentation intégrale ainsi qu'une représentation harmonisable.

Les démonstrations proposées ici permettent d'exposer les techniques que nous utiliserons dans le cas de la généralisation à \mathbb{R}^d du mBm. Les résultats de la Chapitre 4 sont en tout point applicables ici, à condition de fixer une fonction exposant de Hurst constante.

Représentation intégrale

Afin de définir une représentation similaire à celle développée dans la relation (1.3.2), il est nécessaire de donner un sens à la notion d'intégrale stochastique dans \mathbb{R}^d . Nous renvoyons vers l'Annexe A.5.1 pour une telle construction.

Naturellement, puisque l'opérateur de covariance du mBf de Levy (relation (3.1.1)) fait intervenir des normes, il en est de même pour la représentation intégrale. La démonstration de la proposition suivante est reprise de [2].

PROPOSITION 3.1.6. *Soit $H \in]0, 1[\setminus \{\frac{1}{2}\}$ et $c > 0$; si $B^H = \{B^H(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$ est le processus défini explicitement par l'intégrale*

$$B^H(t) \stackrel{p.s.}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \|t-s\|^{H-\frac{d}{2}} - \|s\|^{H-\frac{d}{2}} dB(s) \quad (3.1.3)$$

quel que soit $t \in \mathbb{R}^d$, alors B^H est un mBf de Levy.

Démonstration. Il suffit de procéder comme dans le cas de la Proposition 1.3.1 pour montrer que le noyau de l'intégrale intervenant dans la relation (3.1.3) est de carré intégrable (prendre garde à la constante $\frac{d}{2}$ dans les exposants).

Calculons l'opérateur de covariance de B^H ; soit $t, s \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(B^H(s) - B^H(t))^2] &= \int_{\mathbb{R}^d} (\|t-u\|^{H-\frac{d}{2}} - \|s-u\|^{H-\frac{d}{2}})^2 du \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (\|t-s-u\|^{H-\frac{d}{2}} - \|u\|^{H-\frac{d}{2}})^2 du. \end{aligned}$$

Soit $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ l'application qui transforme la base canonique de \mathbb{R}^d en une base orthonormée ($u_1 = \frac{\|t-s\|}{t-s}, u_2, \dots, u_d$); il vient que φ est sa propre différentielle en tout point $x \in \mathbb{R}^d$, et que φ est représentée par une matrice orthogonale. Dès lors, le déterminant de sa matrice jacobienne vaut 1, et l'on a :

$$\begin{aligned} \|t-s-u\|^2 &= \|t-s\|^2 - 2\langle t-s, u \rangle - \|u\|^2 \\ &= \|t-s\|^2 - 2\|t-s\| \langle u_1, v \rangle - \|v\|^2 \\ &= \| \|t-s\| e_1 - v \|^2 \end{aligned}$$

où $v = \varphi(u)$; il vient que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [(B^H(s) - B^H(t))^2] &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\| \|t - s\| e_1 - v \|^{H-\frac{d}{2}} - \|v\|^{H-\frac{d}{2}} \right)^2 dv \\ &= \|t - s\|^{2H-d} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\|e_1 - \frac{v}{\|t - s\|} \|^{H-\frac{d}{2}} - \left\| \frac{v}{\|t - s\|} \right\|^{H-\frac{d}{2}} \right)^2 dv \\ &\stackrel{v=\|t-s\|w}{=} \|t - s\|^{2H} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\|e_1 - w\|^{H-\frac{d}{2}} - \|w\|^{H-\frac{d}{2}} \right)^2 dw \end{aligned}$$

et dès lors que c désigne l'intégrale de cette dernière égalité, il en découle la relation :

$$\mathbb{E} [B^H(s)B^H(t)] = c (\|t\|^{2H} + \|s\|^{2H} - \|t - s\|^{2H})$$

d'où la conclusion. ■

Représentation harmonisable

La *mesure de Wiener harmonisée* peut être définie sur \mathbb{R}^d à condition de considérer des boréliens de \mathbb{B}^d dans la relation (1.3.5). Il devient alors possible de considérer une transformée de Fourier stochastique pour des processus comme le mBf de Levy, et cette transformée de Fourier préserve les propriétés habituelle d'une telle transformation.

REMARQUE 3.1.7. Si f est une fonction de carré intégrable sur \mathbb{R}^d , alors on a l'identité :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) dB(\xi) \stackrel{p.s.}{=} \int_{\mathbb{R}^d} f(t) d\widehat{B}(t), \quad (3.1.4)$$

d'où l'égalité

$$\mathbb{E} \left[\left| \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) d\widehat{B}(\xi) \right|^2 \right] = \int_{\mathbb{R}^d} |f(t)|^2 dt. \quad (3.1.5)$$

THÉORÈME 3.1.8. Soient $H \in]0, 1[\setminus \{\frac{1}{2}\}$ et $\kappa_{d,H} \in]0, \infty[$ une constante ne dépendant que de d et de H ; le processus $B^H = \{B^H(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$ défini explicitement par

$$B^H(t) \stackrel{p.s.}{=} c\kappa_{d,H} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{i\langle \xi, t \rangle} - 1}{\|\xi\|^{H+\frac{d}{2}}} d\widehat{B}(\xi)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}^d$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire dans \mathbb{R}^d , est un mBf d'exposant de Hurst H .

Démonstration. Dans un premier temps, calculons la transformée de Fourier de l'application ⁶

$$s \mapsto \|t - s\|^\alpha - \|s\|^\alpha \quad (3.1.6)$$

quels que soient $\alpha \in]-\frac{d}{2}, 1 - \frac{d}{2}[$ et $t \in \mathbb{R}^d$.

Par la Proposition A.3.1, la transformée de Fourier de l'application $x \mapsto \|x\|^\alpha$ est donnée par $t \mapsto \frac{\lambda_\alpha}{\|t\|^{\alpha+d}}$, où λ_α ne dépend que de α . De plus, si f admet une transformée de Fourier, alors $\widehat{f(\cdot - t)} = e^{-i\langle \cdot, t \rangle} \widehat{f(\cdot)}$, et il vient que la transformée de Fourier de l'application (3.1.6) est donnée par

$$\mathcal{F}(\|t - \cdot\|^\alpha - \|\cdot\|^\alpha) = \lambda_\alpha \frac{e^{-i\langle \cdot, t \rangle} - 1}{\|\cdot\|^{\alpha+d}}. \quad (3.1.7)$$

Montrons que, presque sûrement, quel que soit $t \in \mathbb{R}^d$, la variable aléatoire

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{i\langle \xi, t \rangle} - 1}{\|\xi\|^{\alpha+d}} d\widehat{B}(\xi) \quad (3.1.8)$$

est réelle. Pour cela, vu la Remarque 3.1.7, il suffit de montrer que la transformée de Fourier de l'application $\xi \mapsto \frac{e^{i\langle \xi, t \rangle} - 1}{\|\xi\|^{\alpha+d}}$ est réelle. En effet, si f est une application de $L^2(\mathbb{R}^d)$, il vient que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\Im \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(s) dB(s) \right)^2 \right] &= \Im \int_{\mathbb{R}^d} f(s)^2 ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \Im f(s)^2 ds \end{aligned}$$

6. L'application $\|\cdot\|$ n'est pas intégrable. Il s'agit ici de la transformée de Fourier de la distribution associée à l'application $\|\cdot\|$.

et si f est réelle, alors cette dernière intégrale est nulle. Or, il découle de la relation (3.1.8) les égalités

$$\Im \mathcal{F}_y \left(\frac{e^{i\langle \xi, t \rangle} - 1}{\|\xi\|^{\alpha+d}} \right) = \int_{\mathbb{R}^d} \Im e^{-i\langle y, \xi \rangle} \frac{e^{i\langle \xi, t \rangle} - 1}{\|\xi\|^{\alpha+d}} d\xi = 0$$

quel que soit $y \in \mathbb{R}^d$, par symétrie. Considérons alors $\alpha = H - \frac{d}{2}$ et $\kappa_{d,H} = \lambda_\alpha$, pour conclure. \blacksquare

3.1.3 Décomposition en ondelettes

Le champ Brownien fractionnaire étant défini sur \mathbb{R}^d , il faut considérer une décomposition multivariée. La construction est similaire à celle présentée dans le cas univarié, mais les ondelettes sont issues de plusieurs ondelettes-mères (pour la décomposition étudiée ici). De même, il faut prendre garde à considérer des $k \in \mathbb{Z}^d$ pour translater les fonctions apparaissant dans la décomposition.

PROPOSITION 3.1.9. *Soit $H \in]0, 1[$; si $B^H = \{B^H(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$ est un champ Brownien fractionnaire d'exposant de Hurst H , alors il existe une des fonctions $\Psi_1^H, \Psi_2^H, \dots, \Psi_{2^d-1}^H$ telles que, presque sûrement, pour tout $t \in \mathbb{R}^d$, on a*

$$B^H(t) = \sum_{p=1}^{2^d-1} \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ k \in \mathbb{Z}^d}} 2^{-jH} \varepsilon_{p,j,k} (\Psi_p^H(2^j t - k) - \Psi_p^H(-k)) \quad (3.1.9)$$

où les $\varepsilon_{p,j,k}$ sont des variables aléatoires i.i.d. selon une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

3.2 Drap Brownien fractionnaire

Le mBf de Levy est un *champ Brownien fractionnaire*. Le terme de *champ* est un terme générique rencontré dans la littérature pour évoquer des processus isotropes définis sur (un sous-ensemble de) \mathbb{R}^d . Le *drap* désigne un processus anisotrope⁷. Le drap se différencie du champ par la forme de son opérateur de covariance : au lieu de considérer des normes de vecteurs, on considère un produit tensoriel des opérateurs de covariances de d mBf d'exposant de Hurst (potentiellement) différents.

DÉFINITION 3.2.1. Soient $H \in]0, 1[^d$ et $c \in]0, \infty[^d$; le *drap Brownien fractionnaire d'exposant de Hurst H* est un processus stochastique gaussien centré noté

$$B^H = \{B^H(t) : t \in \mathbb{R}^d\} \quad (3.2.1)$$

dont l'opérateur de covariance est défini explicitement par

$$K_H(t, s) := \mathbb{E} [B^H(t)B^H(s)] = \prod_{k=1}^d c_k (|t_k|^{2H_k} + |s_k|^{2H_k} - |t_k - s_k|^{2H_k}), \quad (3.2.2)$$

quels que soient $t, s \in \mathbb{R}^d$.

Si c est égal à $\mathbf{1}_d$, alors le drap Brownien fractionnaire est qualifié de *standard*.

REMARQUE 3.2.2. Le drap Brownien fractionnaire pourra être désigné par le sigle « *dBf* » (avec ou sans mention de l'exposant de Hurst H , selon le contexte).

L'anisotropie d'un tel processus est clairement visible sur une texture, dont quelques exemples sont représentés dans la Figure 3.2.

REMARQUE 3.2.3. En raison de la nature des simulations proposées ci-dessus, l'exposant de Hurst du dBf est décrit par un exposant de Hurst (constant) partagé par les mBf constitutifs de ces simulations, ainsi que par l'amplitude du secteur dans lequel sont considérés les angles intervenant dans la simulation. L'article de Biermé et al. ([1]) présente en détails les difficultés d'une pareille simulation.

3.2.1 Propriétés fondamentales

Comme pour le mBf de Levy, le dBf est autosimilaire et ses incréments sont stationnaires.

PROPOSITION 3.2.4. *Soit $H \in]0, 1[^d$; si $B^H = \{B^H(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$ est un dBf, alors pour tout $t \in \mathbb{R}^d$, et pour tout $h \in \mathbb{R}^d$, on a⁸*

7. Parfois, il sera possible de rencontrer le terme « *texture* » pour désigner un processus défini sur (un sous-ensemble de) \mathbb{R}^2 . On pourra donc trouver des expressions de la forme « *texture (fractionnaire) (an)isotrope* ».

8. Voir la Section 3.1.1 concernant la notation $\Delta_{h,t+h} B^H$.

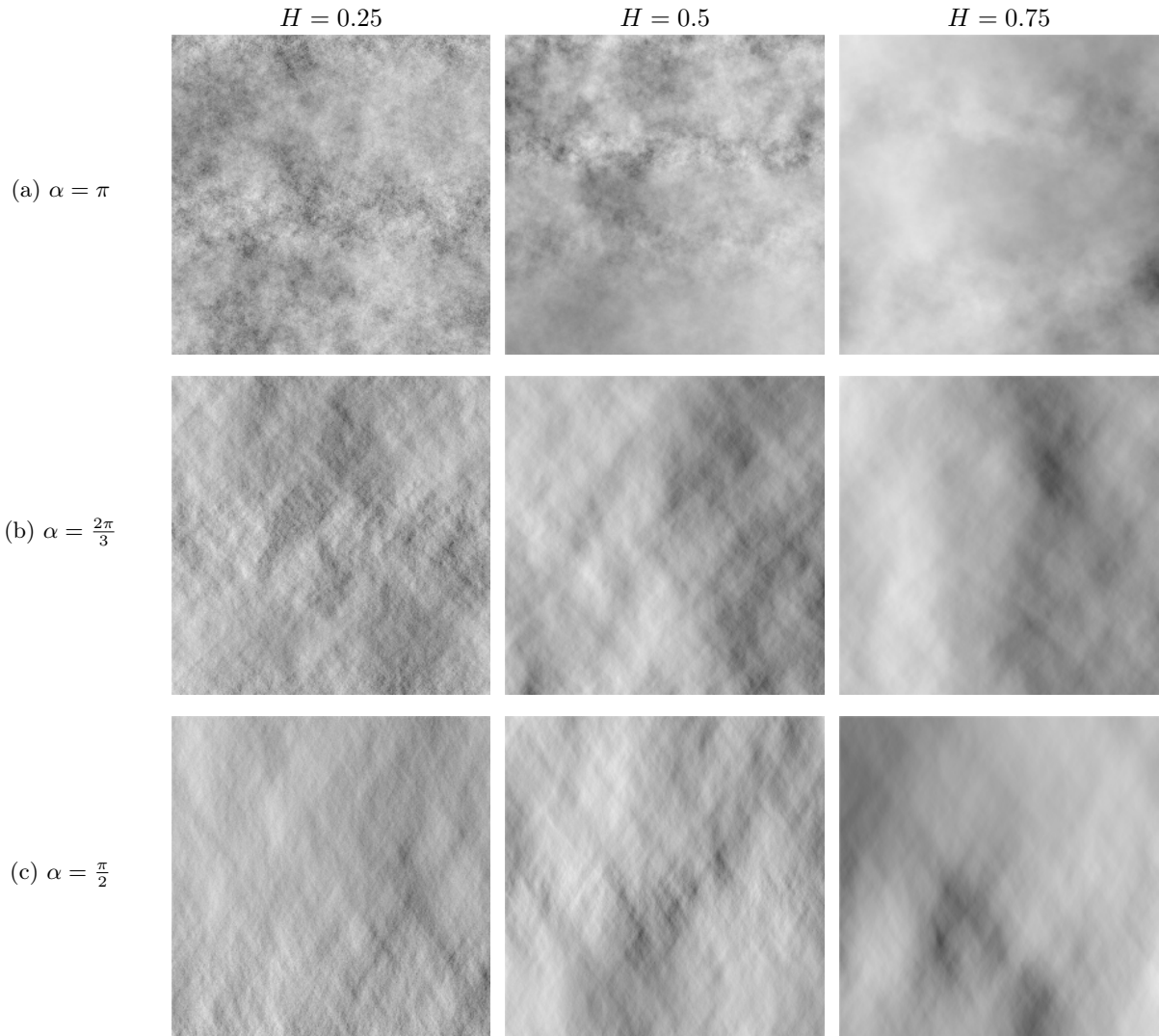


FIGURE 3.2 – Exemple de textures fractionnaires anisotropes.

1. Quel que soit $k \in \mathbb{R}$, $B^H(kt) \stackrel{\mathcal{L}}{=} |k|^{\sum_{j=1}^d H_j} B^H(t)$;
2. Quel que soit $h \in \mathbb{R}^d$, $\Delta_{h,t+h} B^H \stackrel{\mathcal{L}}{=} \Delta_{0,t} B^H$.

Démonstration. Soit $t, s \in \mathbb{R}^d$; commençons par démontrer l'autosimilarité de B^H . Soit $k \in]0, \infty[$; il vient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [B^H(kt)B^H(ks)] &= \prod_{j=1}^d c_j (|kt_j|^{2H_j} + |ks_j|^{2H_j} - |k(t_j - s_j)|^{2H_j}) \\
&= \prod_{j=1}^d |k|^{2H_j} c_j (|t_j|^{2H_j} + |s_j|^{2H_j} - |t_j - s_j|^{2H_j}) \\
&= |k|^{2\sum_{j=1}^d H_j} \prod_{j=1}^d c_j (|t_j|^{2H_j} + |s_j|^{2H_j} - |t_j - s_j|^{2H_j}) \\
&= |k|^{2\sum_{j=1}^d H_j} \mathbb{E} [B^H(t)B^H(s)]
\end{aligned}$$

où $c_j > 0$ quel que soit $j \in \{1, \dots, d\}$. Au final, il découle du développement précédent

$$\mathbb{E} [B^H(kt)B^H(ks)] = \mathbb{E} \left[|k|^{\sum_{j=1}^d H_j} B^H(t) |k|^{\sum_{j=1}^d H_j} B^H(s) \right].$$

Pour démontrer le point 2, considérons B^{H_1}, \dots, B^{H_d} , des mBf d'exposant de Hurst H_j pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$, et notons $\widetilde{B^H}$ le processus défini explicitement sur \mathbb{R}^d par

$$\widetilde{B^H}(t) = \prod_{j=1}^d B^{H_j}(t_j).$$

Clairement, B^H et \widetilde{B}^H partagent le même opérateur de covariance, et vu la définition des incréments dans \mathbb{R}^d , il en va de même pour les processus $\{\Delta_{h,t+h}B^H : t \in \mathbb{R}^d\}$ et $\{\Delta_{h,t+h}\widetilde{B}^H : t \in \mathbb{R}^d\}$. En procédant par récurrence sur d , il vient que

$$\begin{aligned}\Delta_{h,t+h}\widetilde{B}^H &= \sum_{r \in \{0,1\}^d} (-1)^{d-|r|} \prod_{j=1}^d B^{H_j}(h_j + r_j t_j) \\ &= \prod_{j=1}^d (B^{H_j}(h_j + t_j) - B^{H_j}(h_j))\end{aligned}$$

et il en découle les relations

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\Delta_{h,t+h}B^H \Delta_{h,s+h}B^H] &= \mathbb{E}[\Delta_{h,t+h}\widetilde{B}^H \Delta_{h,s+h}\widetilde{B}^H] \\ &= \prod_{j=1}^d \mathbb{E}[(B^{H_j}(h_j + t_j) - B^{H_j}(h_j)) (B^{H_j}(h_j + s_j) - B^{H_j}(h_j))].\end{aligned}$$

Vu la Proposition 1.1.3, la dernière égalité implique les relations

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\Delta_{h,t+h}B^H \Delta_{h,s+h}B^H] &= \prod_{j=1}^d \mathbb{E}[B^{H_j}(t_j)B^{H_j}(s_j)] \\ &= \mathbb{E}[\Delta_{0,t}B^H \Delta_{0,s}B^H]\end{aligned}$$

d'où la conclusion. ■

3.2.2 Écritures alternatives

Comme dans le cas du mBf de Levy, il est possible de dériver deux représentations du dBf depuis son opérateur de covariance. Présentons d'abord sa représentation intégrale, puis sa représentation harmonisable.

Représentation intégrale

Sans surprise, la représentation intégrale fait de nouveau intervenir un produit tensoriel, cette fois des noyaux intégraux de d mouvements Browniens fractionnaires.

PROPOSITION 3.2.5. *Soient $H \in]0, 1[\setminus \{\frac{1}{2}\}^d$ et $c \in]0, \infty[^d$; si $B^H = \{B^H(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$ est le processus défini explicitement par l'intégrale*

$$B^H(t) \stackrel{p.s.}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{k=1}^d c_k \left(|t_k - s_k|^{H_k - \frac{1}{2}} - |s_k|^{H_k - \frac{1}{2}} \right) dB(s) \quad (3.2.3)$$

quel que soit $t \in \mathbb{R}^d$, alors B^H est un dBf.

Démonstration. Soient $t, s \in \mathbb{R}^d$; par définition de l'intégrale stochastique dans \mathbb{R}^d , il vient que

$$\begin{aligned}K_H(t, s) &= \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{k=1}^d \left(|t_k - u_k|^{H_k - \frac{1}{2}} - |u_k|^{H_k - \frac{1}{2}} \right) \\ &\quad \left(|s_k - u_k|^{H_k - \frac{1}{2}} - |u_k|^{H_k - \frac{1}{2}} \right) du \\ &= \prod_{k=1}^d \int_{\mathbb{R}} \left(|t_k - u_k|^{H_k - \frac{1}{2}} - |u_k|^{H_k - \frac{1}{2}} \right) \\ &\quad \left(|s_k - u_k|^{H_k - \frac{1}{2}} - |u_k|^{H_k - \frac{1}{2}} \right) du_k\end{aligned} \quad (3.2.4)$$

où les intégrales intervenant dans la relation (3.2.4) sont des représentations de d mouvements Browniens fractionnaires. Il suffit alors de conclure à l'aide de la Proposition 1.3.1 et du Corollaire 1.3.2 pour obtenir un opérateur de covariance de la forme (3.2.2). ■

Représentation harmonisable

Le produit tensoriel apparaissant dans l'opérateur de covariance du dBf se retrouve dans sa représentation harmonisable.

La démonstration de la proposition suivante est renvoyée dans le Chapitre 4, au moment d'étudier le drap Brownien multifractionnaire (Théorème 4.2.2).

PROPOSITION 3.2.6. *Soient $H \in]0, 1[^d$ et $c \in]0, \infty[^d$; si $B^H = \{B^H(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$ est le processus défini explicitement par*

$$B^H(t) \stackrel{p.s.}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{k=1}^d c_k \frac{e^{it_k \xi_k} - 1}{|\xi_k|^{H_k + \frac{1}{2}}} d\widehat{B}(\xi) \quad (3.2.5)$$

quel que soit $t \in \mathbb{R}^d$, alors B^H est un dBf.

Chapitre 4

Cas du mBm

Les généralisations du mouvement Brownien multifractionnaire dans \mathbb{R}^d peuvent être obtenues de la même façon que pour le mouvement Brownien fractionnaire : à partir d'une représentation (intégrale ou harmonisable). Il s'agit de la construction rappelée par Herbin ([2]) et que nous reprenons ici. Ayache ([3]), propose une construction plus générale, établie à partir de *générateurs du champs Brownien multifractionnaire* dans \mathbb{R}^d . Nous introduirons ces générateurs dans la Section 4.1.2.

Dans la suite de cette section, une *fonction exposant de Hurst* est une fonction (Borel-)mesurable définie sur \mathbb{R}^d à valeur dans un fermé inclus dans l'intervalle $]0, 1[$.

Comme dans le Chapitre 3, nous proposons une extension isotrope et une extension anisotrope du mouvement Brownien multifractionnaire. En particulier, une décomposition dans une base d'ondelettes est proposée pour l'extension isotrope.

4.1 Champ Brownien multifractionnaire

DÉFINITION 4.1.1. Soient H une fonction exposant de Hurst et $c > 0$; un *champ (Brownien) multifractionnaire* est un processus gaussien centré noté

$$B^{H(\cdot)} = \{B^{H(t)}(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$$

défini explicitement par l'intégrale

$$B^{H(t)}(t) \stackrel{p.s.}{=} c \int_{\mathbb{R}^d} \|t - s\|^{H(t) - \frac{d}{2}} - \|s\|^{H(t) - \frac{d}{2}} dB(s) \quad (4.1.1)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}^d$.

Lorsque c est égal à 1, le champ Brownien multifractionnaire est qualifié de *standard*.

REMARQUE 4.1.2. A l'instar du mBf de Levy, et à condition de réaliser un changement de variable, il est facile d'observer que le champ Brownien multifractionnaire est un processus isotrope.

La Figure 4.1 présente des réalisations de textures multifractionnaires isotropes standards pour diverses fonctions exposant de Hurst $H(\cdot)$.

4.1.1 Représentation harmonisable

Le champ Brownien multifractionnaire peut s'écrire dans le domaine de Fourier à l'aide de la mesure de Wiener harmonisée. Le théorème suivant, dont la démonstration est similaire à celle du Théorème 3.1.8, donne une telle représentation.

THÉORÈME 4.1.3. Soit H une fonction exposant de Hurst et $c > 0$; si $B^{H(\cdot)} = \{B^{H(t)}(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$ est le processus défini explicitement par

$$B^{H(t)}(t) \stackrel{p.s.}{=} c \kappa_{d,H(t)} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{i\langle t, \xi \rangle} - 1}{\|\xi\|^{H(t) + \frac{d}{2}}} d\widehat{B}(\xi) \quad (4.1.2)$$

quel que soit $t \in \mathbb{R}^d$, alors $B^{H(\cdot)}$ est un champ Brownien multifractionnaire, où $\kappa_{d,H(\cdot)}$ est une fonction déterministe qui dépend de $H(\cdot)$.

Le Théorème 4.1.3 permet de donner l'opérateur de covariance du champ Brownien multifractionnaire (et en particulier, du mouvement Brownien multifractionnaire).

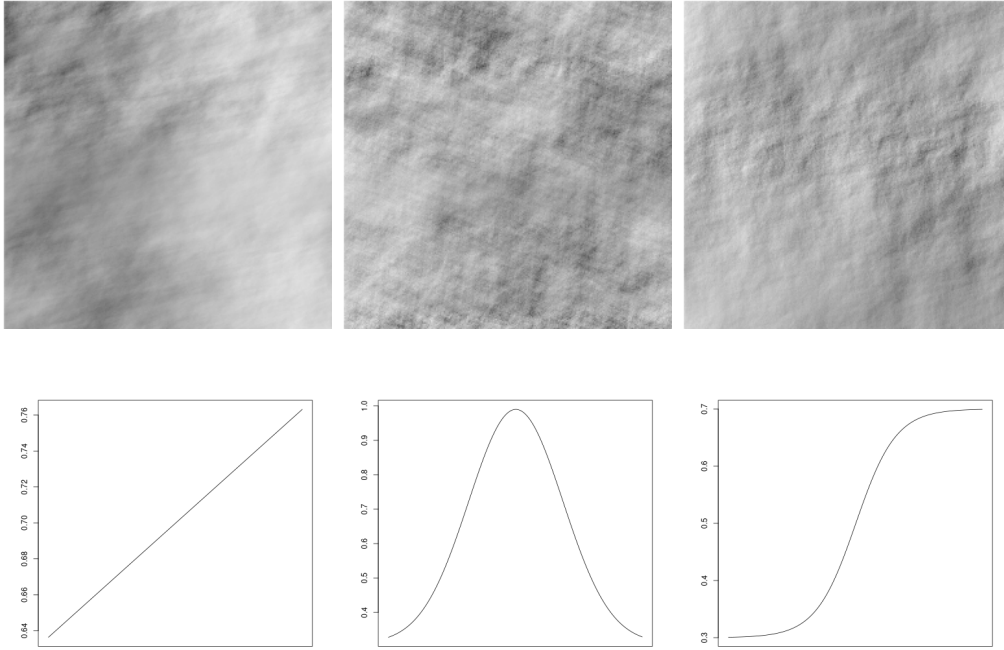


FIGURE 4.1 – Exemples de textures multifractionnaires isotropes.

COROLLAIRE 4.1.4. Soit H une fonction exposant de Hurst; si $B^{H(\cdot)} = \{B^{H(t)}(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$ est un champ Brownien multifractionnaire, alors il existe une fonction (déterministe) $\kappa_d : \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$ telle que, pour tout $t, s \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\mathbb{E} \left[B^{H(t)}(t) B^{H(s)}(s) \right] = \kappa_d(H(s) + H(t)) \left(\|t\|^{H(s)+H(t)} + \|s\|^{H(s)+H(t)} - \|t-s\|^{H(s)+H(t)} \right).$$

Démonstration. Vu la construction de la transformée de Fourier stochastique, et vu la relation (4.1.2), il vient que

$$\mathbb{E} \left[B^{H(t)}(t) B^{H(s)}(s) \right] = c \kappa_{d,H(t)} \kappa_{d,H(s)} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{(e^{i\langle t, \xi \rangle} - 1)(e^{-i\langle s, \xi \rangle} - 1)}{\|\xi\|^{H(t)+H(s)+d}} d\xi. \quad (4.1.3)$$

où $c > 0$ et où $\kappa_{d,H(t)}, \kappa_{d,H(s)}$ sont des fonctions telles que dans le Théorème 4.1.3.

Il faut alors calculer l'intégrale de la relation (4.1.3). Cela revient à calculer des intégrales de la forme

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1 - e^{i\langle t, \xi \rangle}}{\|\xi\|^{H(t)+H(s)+d}} d\xi.$$

Soit $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ l'application qui transforme la base canonique de \mathbb{R}^d en une base orthonormée ($u_1 = \frac{t}{\|t\|}, u_2, \dots, u_d$) (voir la Proposition 3.1.6 et sa démonstration); et de ce changement de base, il découle

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1 - e^{i\langle t, \xi \rangle}}{\|\xi\|^{H(t)+H(s)+d}} d\xi &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1 - e^{i\|t\|v_1}}{\|v\|^{H(t)+H(s)+d}} dv \\ &\stackrel{w=\|t\|v}{=} \frac{1}{\|t\|^{H(t)+H(s)}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1 - e^{iw_1}}{\|w\|^{H(t)+H(s)+d}} dw. \end{aligned}$$

Puisque

$$\frac{(e^{i\langle t, \xi \rangle} - 1)(e^{-i\langle s, \xi \rangle} - 1)}{\|\xi\|^{H(t)+H(s)+d}} = \frac{(1 - e^{i\langle t, \xi \rangle}) + (1 - e^{-i\langle s, \xi \rangle}) - (1 - e^{i\langle t-s, \xi \rangle})}{\|\xi\|^{H(t)+H(s)+d}}$$

la conclusion s'en suit, en considérant la fonction

$$\kappa_d :]0, 2[\rightarrow]0, \infty[: x \mapsto c \kappa_{d,H(t)} \kappa_{d,H(s)} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1 - e^{iw_1}}{\|w\|^{H(t)+H(s)+d}} dw.$$

■

REMARQUE 4.1.5. Grâce au Corollaire 4.1.4, il est clair que le champ Brownien multifractionnaire n'est pas un processus autosimilaire, et que ses incréments ne sont pas stationnaires.

4.1.2 Régularité des trajectoires

La représentation harmonisable du champ Brownien multifractionnaire permet de montrer que les trajectoires de ce processus sont presque sûrement continues. Cependant, afin de considérer des fonctions exposant de Hurst très irrégulières, il semble plus simple d'introduire le *générateur* du champ Brownien multifractionnaire.

DÉFINITION 4.1.6. Si $G = \{G(u, v) : u \in \mathbb{R}^d, v \in]0, 1[\}$ est un processus gaussien centré défini par

$$G(u, v) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{i\langle u, \xi \rangle} - 1}{\|\xi\|^{v+\frac{d}{2}}} d\widehat{B}(\xi)$$

alors G est appelé *générateur du champ Brownien multifractionnaire*.

REMARQUE 4.1.7. Si H désigne une fonction exposante de Hurst, alors $G(t, H(t))$ ($t \in \mathbb{R}^d$) est un champ Brownien multifractionnaire. Si H est constante, alors il s'agit d'un champ Brownien fractionnaire.

Les résultats suivants permettent de quantifier la régularité des trajectoires du champ Brownien multifractionnaire.

LEMME 4.1.8. Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ un intervalle compact, et soient $M_1, M_2 \in \mathbb{R}$ tels que $0 < M_1 < M_2 < 1$. Il existe $c_1, c_2, c_3 \in]0, \infty[$ tels que, pour tous $(u, v), (u', v') \in K \times [M_1, M_2]$, les inégalités suivantes

$$c_1|u - u'|^{\min\{v, v'\}} - c_2|v - v'| \leq \sqrt{\mathbb{E} \left[(G(u, v) - G(u', v'))^2 \right]} \leq c_3 \left(|u - u'|^{\min\{v, v'\}} + |v - v'| \right)$$

sont vérifiées.

Démonstration. Soient $K \subset \mathbb{R}^d$ un intervalle compact, $M_1, M_2 \in \mathbb{R}$ tels que dans l'énoncé, et soient $(u, v), (u', v')$ des éléments de $K \times [M_1, M_2]$ tels que $v \leq v'$; notons également A et B les quantités

$$A = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|e^{i\langle u-u', \xi \rangle} - 1|^2}{\|\xi\|^{2v+d}} d\xi \quad \text{et} \quad B = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|e^{i\langle u', \xi \rangle} - 1|^2}{\|\xi\|^{2v+d}} \left(\|\xi\|^{v-v'} - 1 \right)^2 d\xi.$$

Remarquons que

$$\sqrt{\mathbb{E} \left[(G(u, v) - G(u', v'))^2 \right]} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{e^{i\langle u, \xi \rangle}}{\|\xi\|^{v+\frac{d}{2}}} - \frac{e^{i\langle u', \xi \rangle}}{\|\xi\|^{v'+\frac{d}{2}}} \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

et

$$\left| \frac{e^{i\langle u, \xi \rangle}}{\|\xi\|^{v+\frac{d}{2}}} - \frac{e^{i\langle u', \xi \rangle}}{\|\xi\|^{v'+\frac{d}{2}}} \right|^2 = \left| e^{i\langle u', \xi \rangle} \frac{e^{i\langle u-u', \xi \rangle} - 1}{\|\xi\|^{v+\frac{d}{2}}} - \frac{e^{i\langle u', \xi \rangle} - 1}{\|\xi\|^{v+\frac{d}{2}}} \left(\|\xi\|^{v-v'} - 1 \right) \right|^2$$

donc, par l'inégalité triangulaire, il vient que

$$A^{\frac{1}{2}} - B^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\mathbb{E} \left[(G(u, v) - G(u', v'))^2 \right]} \leq A^{\frac{1}{2}} + B^{\frac{1}{2}}.$$

La suite de la démonstration consiste à obtenir les majorations

$$c_0 \|u - u'\|^{2v} \leq A \leq c'_0 \|u - u'\|^{2v} \tag{4.1.4}$$

et

$$B \leq c''_0 |v - v'|^2 \tag{4.1.5}$$

où $c_0, c'_0, c''_0 \in]0, \infty[$ sont tels que $c_0 \leq c'_0$.

Pour obtenir la majoration (4.1.4), supposons que $u \neq u'$, et considérons l'application $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ qui transforme la base canonique de \mathbb{R}^d en une base orthonormée ($w_1 = \frac{u-u'}{\|u-u'\|}, w_2, \dots, w_d$). Par un changement de variable similaire à celui fait dans la démonstration du Corollaire 4.1.4, il vient que

$$A = |u - u'|^{2v} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|e^{it_1} - 1|^2}{\|t\|^{2v+d}} dt$$

Ainsi, on peut considérer

$$c_0 = \int_{\|t\| \leq 1} \frac{|e^{it_1} - 1|^2}{\|t\|^{2M_1+d}} dt + \int_{\|t\| > 1} \frac{|e^{it_1} - 1|^2}{\|t\|^{2M_2+d}} dt$$

et

$$c'_0 = \int_{\|t\| \leq 1} \frac{|e^{it_1} - 1|^2}{\|t\|^{2M_2+d}} dt + \int_{\|t\| > 1} \frac{|e^{it_1} - 1|^2}{\|t\|^{2M_1+d}} dt$$

pour obtenir l'inégalité désirée. Si $u = u'$, les inégalités sont trivialement vérifiées avec ces mêmes constantes.

Pour obtenir la majoration (4.1.5), rappelons que¹, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$|e^{i\theta} - 1| \leq \min\{2, |\theta|\}.$$

Ainsi, il vient que

$$\begin{aligned} B &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{|e^{i\langle u', \xi \rangle} - 1|}{\|\xi\|^{v+\frac{d}{2}}} \right)^2 \left(\|\xi\|^{v-v'} - 1 \right)^2 d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{\min\{2, |\langle u', \xi \rangle|\}}{\|\xi\|^{v+\frac{d}{2}}} \right)^2 \left(\|\xi\|^{v-v'} - 1 \right)^2 d\xi \end{aligned}$$

En notant

$$\|\xi\|^{v-v'} = e^{(v-v') \ln \|\xi\|}$$

on obtient

$$\begin{aligned} B &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{\min\{2, |\langle u', \xi \rangle|\}}{\|\xi\|^{v+\frac{d}{2}}} \right)^2 \left(e^{(v-v') \ln \|\xi\|} - 1 \right)^2 d\xi \\ &= \int_{\|\xi\| \leq 1} \left(\frac{\min\{2, |\langle u', \xi \rangle|\}}{\|\xi\|^{v+\frac{d}{2}}} \right)^2 \left(e^{(v-v') \ln \|\xi\|} - 1 \right)^2 d\xi + \int_{\|\xi\| > 1} \left(\frac{\min\{2, |\langle u', \xi \rangle|\}}{\|\xi\|^{v+\frac{d}{2}}} \right)^2 \left(e^{(v-v') \ln \|\xi\|} - 1 \right)^2 d\xi \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

$$\leq \int_{\|\xi\| \leq 1} \left(\frac{\|u'\| \|\xi\|}{\|\xi\|^{v+\frac{d}{2}}} \right)^2 \left(e^{(v-v') \ln \|\xi\|} - 1 \right)^2 d\xi + \int_{\|\xi\| > 1} \left(\frac{2}{\|\xi\|^{v+\frac{d}{2}}} \right)^2 \left(e^{(v-v') \ln \|\xi\|} - 1 \right)^2 d\xi \quad (4.1.7)$$

$$\leq \int_{\|\xi\| \leq 1} \left(\frac{\|u'\| \|\xi\|}{\|\xi\|^{v+\frac{d}{2}}} \right)^2 \left(1 - e^{-(v-v') \ln \|\xi\|} \right)^2 d\xi + \int_{\|\xi\| > 1} \left(\frac{2}{\|\xi\|^{v+\frac{d}{2}}} \right)^2 \left(e^{(v-v') \ln \|\xi\|} - 1 \right)^2 d\xi.$$

où le passage de l'égalité (4.1.6) à l'égalité (4.1.7) exploite l'inégalité de Cauchy-Schwartz. De plus, pour tout $x \in [0, \infty[$, il est connu que

$$1 - e^{-x} \leq \min\{1, x\}$$

ainsi que

$$e^x - 1 \leq xe^x.$$

Et de ces inégalités, on peut tirer

$$\begin{aligned} B &\leq \int_{\|\xi\| \leq 1} \left(\frac{\|u'\|}{\|\xi\|^{v+\frac{d}{2}-1}} \right)^2 \left((v-v') \ln \|\xi\| \right)^2 d\xi + \int_{\|\xi\| > 1} \left(\frac{2}{\|\xi\|^{v+\frac{d}{2}}} \right)^2 \left((v-v') \ln \|\xi\| e^{(v-v') \ln \|\xi\|} \right)^2 d\xi \\ &= \|u'\|^2 |v-v'|^2 \int_{\|\xi\| \leq 1} \left(\frac{\ln \|\xi\|}{\|\xi\|^{v+\frac{d}{2}-1}} \right)^2 d\xi + 4|v-v'|^2 \int_{\|\xi\| > 1} \left(\frac{\|\xi\|^{v-v'} \ln \|\xi\|}{\|\xi\|^{v+\frac{d}{2}}} \right)^2 d\xi \\ &= |v-v'|^2 \left(\|u'\|^2 \int_{\|\xi\| \leq 1} \|\xi\|^{2(1-v)-d} (\ln \|\xi\|)^2 d\xi + 4 \int_{\|\xi\| > 1} \|\xi\|^{-2v'-d} (\ln \|\xi\|)^2 d\xi \right) \end{aligned}$$

et il suffit de poser

$$c''_0 = \left(\max_{u' \in K} \|u'\| + 4 \right) \left(\int_{\|\xi\| \leq 1} \|\xi\|^{2(1-M_2)-d} (\ln \|\xi\|)^2 d\xi + \int_{\|\xi\| > 1} \|\xi\|^{-2M_1-d} (\ln \|\xi\|)^2 d\xi \right)$$

pour conclure. ■

1. Il suffit de calculer le développement de Taylor de la fonction $\theta \mapsto \cos(\theta)$.

THÉORÈME 4.1.9. Soit $G = \{G(u, v) : u \in \mathbb{R}^d, v \in]0, 1[\}$ un générateur du champ Brownien multifractionnaire ; il existe une version de G , que l'on notera toujours $G = \{G(u, v) : u \in \mathbb{R}^d, v \in]0, 1[\}$, dont les trajectoires sont presque sûrement continues pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^d \times]0, 1[$, i.e. il existe $\Omega_0 \subset \Omega$, un événement de probabilité 1, tel que, pour tout $\omega \in \Omega_0$, $G(\cdot, \cdot, \omega)$ est une fonction continue de $\mathbb{R}^d \times]0, 1[$.

De plus, pour tout $\omega \in \Omega_0$, si K est un intervalle compact de \mathbb{R}^d , et si $M_1, M_2, \varepsilon \in \mathbb{R}$ sont tels que $0 < \varepsilon < M_1 < M_2 < 1$, alors quels que soient (u, v) et (u', v') , des éléments de $K \times [M_1, M_2]$, il existe une variable aléatoire (positive et finie) C telle que

$$|G(u, v, \omega) - G(u', v', \omega)| \leq C(\omega)(\|u - u'\| + |v - v'|)^{M_1 - \varepsilon}$$

Démonstration. Vu le Théorème A.4.2, il suffit de montrer que, quels que soient les éléments $(u, v), (u', v')$ de $K \times [M_1, M_2]$, on a

$$\mathbb{E} [(G(u, v) - G(u', v'))^2] \leq c(\|u - u'\| + |v - v'|)^{2M_1}$$

ce qui découle directement du Lemme 4.1.8. ■

Concernant la continuité des trajectoires du champ Brownien multifractionnaire, il faut considérer la présence de la fonction exposant de Hurst.

THÉORÈME 4.1.10. Soit H une fonction exposant de Hurst, $G = \{G(u, v) : u \in \mathbb{R}^d, v \in]0, 1[\}$ un générateur du champ Brownien multifractionnaire, et soit $B^{H(\cdot)} = G(\cdot, H(\cdot))$ un champ Brownien multifractionnaire ; il existe un événement $\Omega_0 \subset \Omega$ de probabilité 1 tel que

1. Quel que soit $\omega \in \Omega_0$, $B^{H(\cdot)}(\cdot, \omega)$ est continu en 0 ;
2. Si $H(\cdot)$ est continue sur \mathbb{R} , alors pour tout $\omega \in \Omega_0$, les trajectoires de $B^{H(\cdot)}(\cdot, \omega)$ sont continues ;
3. Si $H(\cdot)$ est discontinue en $t_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, alors il existe un événement $\Omega_0^{t_0} \subset \Omega_0$ de probabilité 1, dépendant de t_0 , tel que pour tout $\omega \in \Omega_0^{t_0}$, $B^{H(\cdot)}(\cdot, \omega)$ est discontinu en t_0 .

Démonstration. Considérons l'événement Ω_0 du Théorème 4.1.9.

Montrons la continuité en 0. Soit $\omega \in \Omega_0$, et soit $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite de \mathbb{R}^d telle que $u_j \rightarrow 0$; il faut montrer que

$$B^{H(u_j)}(u_j, \omega) \rightarrow B^{H(0)}(0, \omega) = 0.$$

Pour ce faire, montrons que quelle que soit la sous-suite $(u_{k(j)})_{j \in \mathbb{N}}$ de $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$, on peut extraire une sous-sous-suite $(u_{l(k(j))})_{j \in \mathbb{N}}$ telle que

$$B^{H(u_{l(k(j))})}(u_{l(k(j))}, \omega) \rightarrow 0.$$

On sait que $H : \mathbb{R}^d \rightarrow I$ est une fonction à image dans l'intervalle compact $I \subset]0, 1[$, donc il existe $H_0 \in I$ tel que la suite $(H(u_{l(k(j))}))_{j \in \mathbb{N}}$ converge vers H_0 . Vu le Théorème 4.1.9, on sait que $G(\cdot, \cdot, \omega)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^d \times]0, 1[$. En particulier, il vient que

$$B^{H(u_{l(k(j))})}(u_{l(k(j))}, \omega) = G(u_{l(k(j))}, H(u_{l(k(j))}), \omega) \rightarrow G(0, H_0, \omega) = 0.$$

La continuité des trajectoires de $B^{H(\cdot)}$ sous l'hypothèse de continuité de $H(\cdot)$ est une conséquence directe du Théorème 4.1.9.

Montrons le dernier point. Si $I \subset]0, 1[$ est un intervalle compact, et si $H(\cdot) : \mathbb{R}^d \rightarrow I$ est discontinue en t_0 , alors il existe une suite $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de \mathbb{R}^d et $H_0 \in I$ tels que $u_j \rightarrow t_0$ et $H(u_j) \rightarrow H_0$, avec $H_0 \neq t_0$. Dès lors, quel que soit $\omega \in \Omega_0$, il vient que

$$B^{H(u_j)}(u_j, \omega) = G(u_j, H(u_j), \omega) \rightarrow G(t_0, H_0, \omega),$$

et il suffit de montrer que pour presque tout $\omega' \in \Omega_0$, on a

$$G(t_0, H_0, \omega') \neq G(t_0, H(t_0), \omega').$$

Par définition du générateur du champ Brownien multifractionnaire, la variable aléatoire $G(t_0, H_0) - G(t_0, H(t_0))$ suit une loi gaussienne centrée, et il suffit donc de montrer que²

$$\mathbb{E} [(G(t_0, H_0) - G(t_0, H(t_0)))^2] > 0$$

². Si deux variables aléatoires sont égales presque sûrement, alors elles sont égales en moyenne quadratique. On procède ici par contraposition.

i.e.

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{e^{i\langle t_0, \xi \rangle} - 1}{\|\xi\|^{H_0 + \frac{d}{2}}} - \frac{e^{i\langle t_0, \xi \rangle} - 1}{\|\xi\|^{H(t_0) + \frac{d}{2}}} \right|^2 d\widehat{B}(\xi) > 0.$$

Or, cette dernière intégrale s'écrit

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{e^{i\langle t_0, \xi \rangle} - 1}{\|\xi\|^{H_0 + \frac{d}{2}}} - \frac{e^{i\langle t_0, \xi \rangle} - 1}{\|\xi\|^{H(t_0) + \frac{d}{2}}} \right|^2 d\widehat{B}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|e^{i\langle t_0, \xi \rangle} - 1|^2}{\|\xi\|^{2H_0 + d}} \left(1 - \|\xi\|^{H_0 - H(t_0)}\right)^2 d\widehat{B}(\xi)$$

ce qui montre que si $\mathbb{E}[(G(t_0, H_0) - G(t_0, H(t_0)))^2] = 0$, alors $e^{i\langle t_0, \xi \rangle} - 1 = 0$ quel que soit $\xi \in \mathbb{R}^d$, ce qui est impossible puisque $t_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. ■

REMARQUE 4.1.11. Dès qu'il sera question de *générateur du champ Brownien multifractionnaire*, on considérera une version vérifiant le Théorème 4.1.9. De même, on suppose que les fonctions exposant de Hurst intervenant dans la suite de ce document sont de plus continues.

4.1.3 Régularité de Hölder du champ Brownien multifractionnaire

Le Lemme 4.1.8 permet de déterminer l'exposant global de Hölder du champ Brownien multifractionnaire. Dans la suite, $B^{H(\cdot)} = G(\cdot, H(\cdot)) = \{G(t, H(t)) : t \in \mathbb{R}^d\}$, où G est un générateur de champ Brownien multifractionnaire.

LEMME 4.1.12. *Soit K un intervalle compact de \mathbb{R}^d et notons $\underline{H}_K = \inf\{H(t) : t \in K\}$; supposons qu'il existe $\alpha \in]0, 1[$ pour lequel $H(\cdot) \in C^\alpha(I)$. Alors il existe $c > 0$ tel que*

$$\sqrt{\mathbb{E}[(B^{H(t)}(t) - B^{H(s)}(s))^2]} \leq c \|t - s\|^{\min\{\underline{H}_K, \alpha\}}$$

quels que soient $t, s \in K$.

De même, il existe $c' > 0$, tel que

$$\sqrt{\mathbb{E}[(B^{H(t)}(t) - B^{H(s)}(t_0))^2]} \geq c \|t - t_0\|^{\min\{\underline{H}_K, \alpha\}}$$

pour tout $t, t_0 \in \mathbb{R}^d$ tels que

$$H(t_0) = \underline{H}_K.$$

Démonstration. Par définition de l'espace de Hölder global (voir la Définition 1.4.3³), il vient que

$$\sup_{t, s \in K} \frac{|H(t) - H(s)|}{\|t - s\|^\alpha} < \infty.$$

En particulier, si $\alpha_1, \alpha_2 \in]0, 1]$ sont tels que $\alpha_1 \leq \alpha_2$, alors $C^{\alpha_2}(K) \subset C^{\alpha_1}(K)$. Dès lors, il vient que

$$\sup_{t, s \in K} \frac{|H(t) - H(s)|}{\|t - s\|^{\min\{\underline{H}_K, \alpha\}}} < \infty.$$

Vu le Lemme 4.1.8, la conclusion s'en suit. ■

COROLLAIRE 4.1.13. *Reprenons les même notations que dans le Lemme 4.1.12. Il existe un événement $\Omega_0 \subset \Omega$, de probabilité 1, tel que pour tout $\omega \in \Omega_0$, on a*

$$\alpha_{B^{H(\cdot)}(\cdot, \omega)} = \min\{\underline{H}_K, \alpha\}.$$

Les propositions suivantes s'intéressent à la régularité locale et à la régularité ponctuelle de Hölder.

PROPOSITION 4.1.14. *Pour $t_0 \in \mathbb{R}^d$, l'exposant local de Hölder de $B^{H(\cdot)}$ en t_0 est donné par*

$$\beta_{B^{H(\cdot)}(\cdot)}(t_0) \stackrel{p.s.}{=} \min\{\beta_{H(\cdot)}(t_0), H(t_0)\}$$

et l'exposant ponctuel de Hölder de $B^{H(\cdot)}$ en t_0 est donné par

$$\gamma_{B^{H(\cdot)}(\cdot)}(t_0) \stackrel{p.s.}{=} \min\{\gamma_{H(\cdot)}(t_0), H(t_0)\}.$$

Démonstration. Soit $t_0 \in \mathbb{R}^d$ fixé pour l'ensemble de cette démonstration. Celle-ci se décompose en 4 étapes :

3. Qui s'adapte sans difficulté à l'espace euclidien, en considérant la norme de \mathbb{R}^d lorsque c'est nécessaire.

1. Tout d'abord, on minore l'exposant de Hölder local, à l'aide du Théorème A.4.1 ;
2. On améliore la borne inférieure trouvée lors de la première étape en prenant en compte l'exposant de Hölder ponctuel ;
3. À l'aide de quelques résultats techniques (non démontrés), on donne une borne supérieure à l'exposant de Hölder ponctuel ;
4. Enfin, on améliore cette borne supérieure dans le cas de l'exposant de Hölder local, ce qui permettra de conclure.

On sait que pour tout intervalle compact $K \subset \mathbb{R}^d$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand, il existe $C > 0$ tel que

$$\mathbb{E} \left[(B^{H(t)}(t) - B^{H(s)}(s))^{2n} \right] \leq C \|t - s\|^{2n\alpha}$$

pour tous $t, s \in K^\circ$, où $\alpha = \inf_{t \in K^\circ} \min\{\beta_{H(\cdot)}(t), H(t)\}$. Par le Théorème A.4.1, il existe un événement $\Omega_0 \subset \Omega$, de probabilité 1, tel que pour tout $\omega \in \Omega_0$, $B^{H(\cdot)}(\cdot, \omega) \in C^\beta(K)$ pour tout $\beta \in]0, \frac{2n\alpha - d}{2n}[$; en particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$ assez grand, il vient que

$$\beta_{B^{H(\cdot)}(\cdot)}(t) \geq \frac{2n\alpha - d}{2n}$$

quel que soit $t \in K$. En faisant tendre n vers l'infini, il vient que

$$\beta_{B^{H(\cdot)}(\cdot)}(t) \geq \alpha$$

et par continuité de $H(\cdot)$, en prenant l'intersection de tous les compacts K tels que $t_0 \in K^\circ$, il vient que

$$\beta_{B^{H(\cdot)}(\cdot)}(t_0) \geq \min\{\beta_{H(\cdot)}(t_0), H(t_0)\}. \quad (4.1.8)$$

Étudions la borne inférieure $\gamma_{B^{H(\cdot)}(\cdot)}(t_0)$. Vu la Remarque 1.4.12, si $\beta_{H(\cdot)}(t_0) = \gamma_{H(\cdot)}(t_0)$, alors la relation 4.1.8 donne également une borne inférieure pour $\gamma_{B^{H(\cdot)}(\cdot)}(t_0)$. Sinon, si $\beta_{H(\cdot)}(t_0) < \gamma_{H(\cdot)}(t_0)$, le Corollaire A.5.3 assure que, pour tout intervalle compact $K \subset \mathbb{R}^d$, il existe des constantes $L, M > 0$ tels que pour tout $t, s \in K$, on a

$$\mathbb{E} \left[(B^{H(t)}(t) - B^{H(s)}(s))^2 \right] \leq L \|t - s\|^{2H(t)} + M |H(t) - H(s)|^2.$$

Par le Lemme 4.1.12 et par un argument similaire à ce qui précède, il existe $c, \alpha > 0$ et tels que pour tout $t, s \in K$,

$$\mathbb{E} \left[(B^{H(t)}(t) - B^{H(s)}(s))^2 \right] \leq c \|t - s\|^\alpha.$$

Par le Théorème A.4.1, il existe un événement $\Omega_0 \subset \Omega$, de probabilité 1, tel que pour tout $\omega \in \Omega_0$, $B^{H(\cdot)}(\cdot, \omega) \in C^{\alpha_0}(K)$ quel que soit $\alpha_0 \in]0, \frac{\alpha}{2}[$. Considérons α_0 tel que $\frac{1}{\alpha_0} \in \mathbb{N}$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_0, M > 0$ tels que pour tout $\delta < \delta_0$ et pour tout $t \in B(t_0, \delta)$, on a

$$\mathbb{E} \left[(B^{H(t)}(t) - B^{H(t_0)}(t_0))^2 \right] \leq M \delta^{2 \min\{H(t_0), \gamma_{H(\cdot)}(t_0)\} - \varepsilon}.$$

Notons $\lambda = \min\{H(t_0), \gamma_{H(\cdot)}(t_0)\} - \varepsilon$; pour tout $p \in \mathbb{N}$, vu l'inégalité de Tchebychev (voir Proposition A.1.1), et vu que $B^{H(t)}(t) - B^{H(t_0)}(t_0)$ est une variable gaussienne centrée, il existe $M_p > 0$ tel que

$$\mathbb{P} \left(|B^{H(t)}(t) - B^{H(t_0)}(t_0)| > \delta^\lambda \right) \leq \frac{\mathbb{E} \left[(B^{H(t)}(t) - B^{H(t_0)}(t_0))^{2p} \right]}{\delta^{2p\lambda}} \leq M_p \delta^{p\varepsilon}.$$

Pour obtenir une majoration de la forme

$$\sup_{t, s \in B(t_0, \delta)} \frac{|B^{H(t)}(t) - B^{H(t_0)}(t_0)|}{\delta^\lambda} < \infty$$

nous allons d'abord montrer qu'un tel résultat tient lorsque l'on se restreint à des ensembles dyadiques. Puisque de tels ensembles sont dénombrables, il sera possible d'utiliser un argument « à la Borel-Cantelli ».

Soit $n \in \mathbb{N}$, et considérons $\delta = 2^{-n}$; pour tout $m \in \mathbb{N}$, posons

$$P_m = \{0, \pm 1, \dots, \pm 2^m\}$$

et

$$D_m = \left\{ t_0 + 2^{-(n+m)} k : k \in P_m^d \right\}.$$

Il vient successivement

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left(\max_{k \in (P_m \setminus \{0\})^d} |B^{H(t_0+k2^{-(m+n)})}(t_0+k2^{-(m+n)}) - B^{H(t_0)}(t_0)| > 2^{-n\lambda} \right) \\
& \leq \sum_{k \in (P_m \setminus \{0\})^d} \mathbb{P} \left(|B^{H(t_0+k2^{-(m+n)})}(t_0+k2^{-(m+n)}) - B^{H(t_0)}(t_0)| > 2^{-n\lambda} \right) \\
& \leq M_p 2^{(m+1)d} 2^{-np\varepsilon}.
\end{aligned} \tag{4.1.9}$$

Considérons

$$m = \frac{1}{\alpha_0} (1 + \lfloor \lambda \rfloor) n := n\kappa$$

et $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$d \frac{1}{\alpha_0} (1 + \lfloor \lambda \rfloor) - p\varepsilon < 0;$$

il vient que la relation (4.1.9) assure la convergence de la série de terme générale

$$\left(\mathbb{P} \left(|B^{H(t_0+k2^{-(n\kappa+n)})}(t_0+k2^{-(n\kappa+n)}) - B^{H(t_0)}(t_0)| > 2^{-n\lambda} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

et le lemme de Borel-Cantelli énonce qu'il existe une variable aléatoire finie n_0 telle que si $n \geq n_0$ alors

$$\max_{k \in (P_{n\kappa} \setminus \{0\})^d} |B^{H(t_0+k2^{-(n\kappa+n)})}(t_0+k2^{-(n\kappa+n)}) - B^{H(t_0)}(t_0)| \leq 2^{-n\lambda}. \tag{4.1.10}$$

Montrons que, presque sûrement, pour tout $m \in \mathbb{N}$, et pour tout $t \in D_m$, il existe $C > 0$ tel que

$$|B^{H(t)}(t) - B^{H(t_0)}(t_0)| \leq C 2^{-n\lambda}.$$

Si $m \leq n\kappa$, alors cela découle immédiatement de la relation (4.1.10). Sinon, si $m > n\kappa$, et si $t \in D_m$, notons $E_{t_0,t}^{n\kappa}$

$$E_{t_0,t}^{n\kappa} = \{x \in D_{n\kappa} : x \in |[t_0, t]|\}$$

où $|[t_0, t]|$ désigne le plus petit intervalle compact de \mathbb{R}^d contenant t_0 et t . Si $t_1 \in B(t, 2^{-(1+\kappa)n}) \cap E_{t_0,t}^{n\kappa}$, alors, vu ce qui précède, il vient que

$$\begin{aligned}
|B^{H(t)}(t) - B^{H(t_0)}(t_0)| & \leq |B^{H(t)}(t) - B^{H(t_1)}(t_1)| + |B^{H(t_1)}(t_1) - B^{H(t_0)}(t_0)| \\
& \leq C' 2^{-\alpha_0(1+\kappa)n} + 2^{-n\lambda} \\
& \leq C'' 2^{-n\lambda}
\end{aligned}$$

par définition de κ .

En particulier, pour tout $m \in \mathbb{N}$, et pour tous $t, s \in D_m$, il existe une constant $C_0 > 0$ telle que

$$|B^{H(t)}(t) - B^{H(s)}(s)| \leq C_0 2^{-n\lambda}.$$

et par continuité de $B^{H(\cdot)}$, il vient qu'un passage à la limite sur m permet d'écrire

$$\sup_{t, s \in B(t_0, 2^{-n})} |B^{H(t)}(t) - B^{H(s)}(s)| \leq C_0 2^{-n\lambda}$$

i.e.

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \sup_{t, s \in B(t_0, \delta)} \frac{|B^{H(t)}(t) - B^{H(s)}(s)|}{\delta^\lambda} < \infty.$$

Puisque pour tout $\varepsilon > 0$, elle est également vérifiée pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Q} \cap]0, \infty[$, et on a presque sûrement

$$\gamma_{B^{H(\cdot)}(\cdot)}(t_0) \geq \min\{H(t_0), \gamma_{H(\cdot)}(t_0)\} - \varepsilon$$

i.e. on a presque sûrement

$$\gamma_{B^{H(\cdot)}(\cdot)}(t_0) \geq \min\{H(t_0), \gamma_{H(\cdot)}(t_0)\}.$$

Étudions la borne supérieure de $\gamma_{B^{H(\cdot)}(\cdot)}(t_0)$. Si $H(t_0) < \gamma_{H(\cdot)}(t_0)$, alors on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|H(t_0 + h) - H(t_0)|}{\|h\|^{H(t_0)}} = 0.$$

Par le Lemme A.5.4, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour $h > 0$ assez petit,

$$\mathbb{E} \left[(B^{H(t_0+h)}(t_0 + h) - B^{H(t_0)}(t_0))^2 \right] \geq C \|h\|^{2H(t_0)}$$

et le Lemme A.5.6 permet d'écrire

$$\gamma_{B^{H(\cdot)}(\cdot)}(t_0) \leq H(t_0).$$

Si $H(t_0) > \gamma_{H(\cdot)}(t_0)$, soit $\alpha \in]\gamma_{H(\cdot)}(t_0), H(t_0)[$. Il vient qu'il existe une constante $C' > 0$ et une suite $(h_j)_{j \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ qui converge vers 0 tels que

$$|H(t_0 + h_j) - H(t_0)| \geq C' \|h_j\|^\alpha$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$. Vu le Lemme A.5.4, il existe des constantes $k_2, l_2 > 0$ telles que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[(B^{H(t_0+h)}(t_0 + h) - B^{H(t_0)}(t_0))^2 \right] &\geq k_2 C' \|h_j\|^{2\alpha} - l_2 \|h_j\|^{2H(t_0)} \\ &\geq C'' \|h_j\|^{2\alpha} \end{aligned}$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$, et l'on peut de nouveau conclure par le Lemme A.5.6 pour écrire que, presque sûrement,

$$\alpha \geq \gamma_{B^{H(\cdot)}(\cdot)}(t_0)$$

i.e.

$$\gamma_{B^{H(\cdot)}(\cdot)}(t_0) \leq \gamma_{H(\cdot)}(t_0)$$

vu que la relation est vérifiée pour tout $\alpha \in]\gamma_{H(\cdot)}(t_0), H(t_0)[$. Ainsi, de cette pénultième étape, il découle que, presque sûrement :

$$\gamma_{B^{H(\cdot)}(\cdot)}(t_0) \leq \min\{\gamma_{H(\cdot)}(t_0), H(t_0)\}. \quad (4.1.11)$$

Enfin, étudions la borne supérieure de $\beta_{B^{H(\cdot)}(\cdot)}(t_0)$.

Vu la Remarque 1.4.12, la relation (4.1.11) donne une borne supérieure pour $\beta_{B^{H(\cdot)}(\cdot)}(t_0)$, mais il reste à observer ce qu'il se passe lorsque $\beta_{H(\cdot)}(t_0) < H(t_0)$.

Soit $\alpha \in]\beta_{H(\cdot)}(t_0), H(t_0)[$; vu la définition de $\beta_{H(\cdot)}(t_0)$, il vient que

$$\limsup_{\rho \rightarrow 0} \sup_{t, s \in B(t_0, \rho)} \frac{|H(t) - H(s)|}{\|t - s\|^\alpha} = \infty$$

et pour tout $M > 0$, il existe $\rho_0 > 0$ tel que, si $\rho < \rho_0$, alors il existe $t, s \in B(t_0, \rho)$ tels que

$$|H(t) - H(s)| > M \|t - s\|^\alpha.$$

Il existe donc deux suites $(h_j)_{j \in \mathbb{N}}$ et $(l_j)_{j \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ qui converge vers 0 telles que pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$|H(t_0 + h_j) - H(t_0 + l_j)| > M \|h_j - l_j\|^\alpha.$$

En procédant comme ci-avant à l'aide du Lemme A.5.4 et du Lemme A.5.7 (à la place du Lemme A.5.6), il vient que, presque sûrement,

$$\beta_{B^{H(\cdot)}(\cdot)}(t_0) \leq \beta_{H(\cdot)}(t_0)$$

i.e.

$$\beta_{B^{H(\cdot)}(\cdot)}(t_0) \leq \min\{\beta_{H(\cdot)}(t_0), H(t_0)\}.$$

Ce qui achève la preuve de ce théorème. ■

4.1.4 Décomposition en ondelettes

Le champ Brownien multifractionnaire est un champ isotrope. Sa décomposition dans une base d'ondelettes est plutôt aisée, pour autant que l'on dispose d'une base d'ondelettes adéquates. Suivant le développement proposé par Ayache ([3]), nous considérons une base d'ondelettes *de Meyer* dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ (aussi appelées « ondelettes de Lemarié-Meyer »).

Pour rappeller, la base orthonormée d'ondelettes de Lemarié-Meyer est issue de $2^d - 1$ ondelettes-mères $\psi_1, \dots, \psi_{2^d - 1}$, où, quel que soit $p \in \{1, \dots, 2^d - 1\}$, $\psi_p : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ appartient à la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Pour rappel, on dira d'une fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ qu'elle appartient à la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ si elle est de classe C^∞ et si elle est à décroissance rapide, *i.e.* si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \{(1 + |x|)^n |D^\alpha f(x)|\} < \infty.$$

Ainsi, les ondelettes-mères $\psi_1, \dots, \psi_{2^d - 1}$ définissent, par des translations et des dilatations, une famille d'ondelettes

$$\{\psi_{p,j,k} : p \in \{1, \dots, 2^d - 1\}, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^d\}$$

telle que, si $x \in \mathbb{R}^d$ et si $(p, j, k) \in \{1, \dots, 2^d - 1\} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^d$, alors

$$\psi_{j,k,p}(x) = 2^{j \frac{d}{2}} \psi_p(2^j x - k).$$

Il est classique de manipuler ces fonctions à travers leurs transformées de Fourier, notamment parce que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors sa transformée de Fourier \widehat{f} est à support compact. De plus, les translations et dilatations peuvent s'exprimer *via* la transformée de Fourier par

$$\widehat{\psi_{p,j,k}}(\xi) = 2^{-j \frac{d}{2}} e^{-i2^{-j} \langle k, \xi \rangle} \widehat{\psi}_p(2^{-j} \xi). \quad (4.1.12)$$

Dans cette section, nous considérons le développement évoqué dans les Sections 1.5, 2.3 et 3.1.3.

Soit $G = \{G(u, v) : u \in \mathbb{R}^d, v \in]0, 1[\}$ un générateur du champ Brownien multifractionnaire; pour tout $p \in \{1, \dots, 2^d - 1\}$, et pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^d \times]0, 1[$ notons $\Psi_p^v(u)$ l'intégrale

$$\Psi_p^v(u) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i \langle u, \xi \rangle} \frac{\widehat{\psi}_p(\xi)}{\|\xi\|^{v + \frac{d}{2}}} d\xi.$$

Celles-ci sont bien définies et, grâce aux propriétés des ondelettes-mères de Lemarié-Meyer, il est clair qu'il s'agit de fonctions continues sur $\mathbb{R}^d \times]0, 1[$ à image dans \mathbb{R} .

De plus, vu les propriétés de l'intégrale stochastique, si on note $\varepsilon_{p,j,k}$ les variables aléatoires définies par

$$\varepsilon_{p,j,k} = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\psi}_{p,j,k}(\xi) d\widehat{B}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi_{p,j,k}(s) dB(s)$$

quels que soient $p \in \{1, \dots, 2^d - 1\}$, $j \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{Z}^d$, alors, puisque la base d'ondelettes est orthonormée, la familles des $\varepsilon_{p,j,k}$ est une famille de variables aléatoires gaussiennes $\mathcal{N}(0, 1)$ indépendantes.

Le théorème suivant donne la décomposition du générateur du champ Brownien multifractionnaire, à partir de laquelle il est aisé d'obtenir les diverses décompositions annoncées plus tôt.

THÉORÈME 4.1.15. *Soit $G = \{G(u, v) : u \in \mathbb{R}^d, v \in]0, 1[\}$ un générateur du champ Brownien multifractionnaire; G peut être représentée via*

$$G(u, v) = \sum_{p=1}^{2^d - 1} \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ k \in \mathbb{Z}^d}} 2^{-jv} \varepsilon_{p,j,k} (\Psi_p^v(2^j u - k) - \Psi_p^v(-k)).$$

Démonstration. Vu que la transformée de Fourier est une isométrie de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même, la famille de fonctions

$$\{\widehat{\psi}_{p,j,k} : p \in \{1, \dots, 2^d - 1\}, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^d\} \quad (4.1.13)$$

est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R}^d)$. Fixons $(u, v) \in \mathbb{R}^d \times]0, 1[$ et notons $K(u, v, \cdot)$ la fonction définie explicitement par

$$K(u, v, \xi) = \frac{e^{i \langle u, \xi \rangle} - 1}{\|\xi\|^{v + \frac{d}{2}}}$$

Puisque $K(u, v, \cdot)$ est une fonction de $L^2(\mathbb{R}^d)$, sa décomposition dans la base (4.1.13) est donnée par

$$K(u, v, \cdot) = \sum_{p=1}^{2^d-1} \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ k \in \mathbb{Z}^d}} \left\langle K(u, v, \cdot), \widehat{\psi}_{p,j,k} \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \widehat{\psi}_{p,j,k}(\cdot).$$

Cette série converge inconditionnellement (voir [14, Chapitre 5]) dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, et on a

$$\begin{aligned} \left\langle K(u, v, \cdot), \widehat{\psi}_{p,j,k} \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} &= \int_{\mathbb{R}^d} K(u, v, \xi) \widehat{\psi}_{p,j,k}(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{i\langle u, \xi \rangle} - 1}{\|\xi\|^{v+\frac{d}{2}}} \widehat{\psi}_{p,j,k}(\xi) d\xi \end{aligned}$$

quels que soient $p \in \{1, \dots, 2^d - 1\}$, $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}^d$. Or, vu la relation (4.1.12), la dernière intégrale s'écrit successivement :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{i\langle u, \xi \rangle} - 1}{\|\xi\|^{v+\frac{d}{2}}} \widehat{\psi}_{p,j,k}(\xi) d\xi &= \int_{\mathbb{R}^d} 2^{-j\frac{d}{2}} e^{-i2^{-j}\langle k, \xi \rangle} \frac{e^{i\langle u, \xi \rangle} - 1}{\|\xi\|^{v+\frac{d}{2}}} \widehat{\psi}_p(2^{-j}\xi) d\xi \\ &\stackrel{\eta=2^{-j}\xi}{=} 2^{-jv} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle k, \eta \rangle} \frac{e^{i\langle 2^j u, \eta \rangle} - 1}{\|\eta\|^{v+\frac{d}{2}}} \widehat{\psi}_p(\eta) d\eta \\ &= 2^{-jv} \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle 2^j u - k, \eta \rangle} - e^{-i\langle k, \eta \rangle}) \frac{\widehat{\psi}_p(\eta)}{\|\eta\|^{v+\frac{d}{2}}} d\eta. \end{aligned}$$

Par définition des applications Ψ_p^v , il en découle l'égalité

$$\left\langle K(u, v, \cdot), \widehat{\psi}_{p,j,k} \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 2^{-jv} (\Psi_p^v(2^j u - k) - \Psi_p^v(-k)).$$

Il vient que

$$\begin{aligned} G(u, v) &= \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{p=1}^{2^d-1} \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ k \in \mathbb{Z}^d}} 2^{-jv} (\Psi_p^v(2^j u - k) - \Psi_p^v(-k)) \widehat{\psi}_{p,j,k}(\xi) d\widehat{B}(\xi) \\ &= \sum_{p=1}^{2^d-1} \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ k \in \mathbb{Z}^d}} 2^{-jv} (\Psi_p^v(2^j u - k) - \Psi_p^v(-k)) \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\psi}_{p,j,k}(\xi) d\widehat{B}(\xi) \end{aligned}$$

où l'interversion des symboles sommes et intégrale est licite, en raison de la convergence uniforme de la série. En particulier, par isométrie de la transformée de Fourier stochastique, et par définition des $\varepsilon_{p,j,k}$,

$$G(u, v) = \sum_{p=1}^{2^d-1} \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ k \in \mathbb{Z}^d}} 2^{-jv} \varepsilon_{p,j,k} (\Psi_p^v(2^j u - k) - \Psi_p^v(-k))$$

ce qui permet de conclure. ■

REMARQUE 4.1.16. Il est possible de montrer qu'il existe un événement $\Omega_0 \subset \Omega$, de probabilité 1, tel que la série converge uniformément en (u, v) sur tout intervalle compact $K \subset \mathbb{R}^d \times]0, 1[$. La preuve de ce résultat repose sur une version du théorème d'Itô-Nisio (voir [15] par exemple). Ce théorème permet d'étendre la convergence de processus stochastique sur des espaces de Banach.

4.2 Drap Brownien multifractionnaire

Cette extension est très similaire à ce qui a été vu pour le drap Brownien fractionnaire : l'opérateur de covariance fait intervenir un produit tensoriel. Évidemment, comme dans le cas fractionnaire, le processus ainsi défini n'est pas isotrope.

Dans la suite, une fonction exposant de Hurst désigne une fonction Borel-mesurable définie sur \mathbb{R}^d et à image dans un intervalle compact de $]0, 1[$.

DÉFINITION 4.2.1. Soient H une fonction exposant de Hurst, et $c \in]0, \infty[^d$; le *drap Brownien multifractionnaire de fonction exposant de Hurst H* est un processus stochastique gaussien centré noté

$$B^{H(\cdot)} = \left\{ B^{H(t)}(t) : t \in \mathbb{R}^d \right\} \quad (4.2.1)$$

défini explicitement par l'intégrale

$$B^{H(t)}(t) \stackrel{p.s.}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^d \left(|t_i - s_i|^{H(t)_i - \frac{1}{2}} - |s_i|^{H(t)_i - \frac{1}{2}} \right) dB(s)$$

quel que soit $t \in \mathbb{R}^d$.

Si c est égal à $\mathbf{1}_d$, alors le drap Brownien multifractionnaire est qualifié de *standard*.

L'anisotropie d'un tel processus peut-être observé sur une texture. Quelques exemples sont représentées dans la Figure 4.2. Comme dans le cas du drap Brownien fractionnaire, les simulations réalisées d'un tel processus dépendent non seulement d'une fonction exposant de Hurst, mais également de l'amplitude du secteur dans lequel sont sélectionnés les angles intervenant dans la simulation.

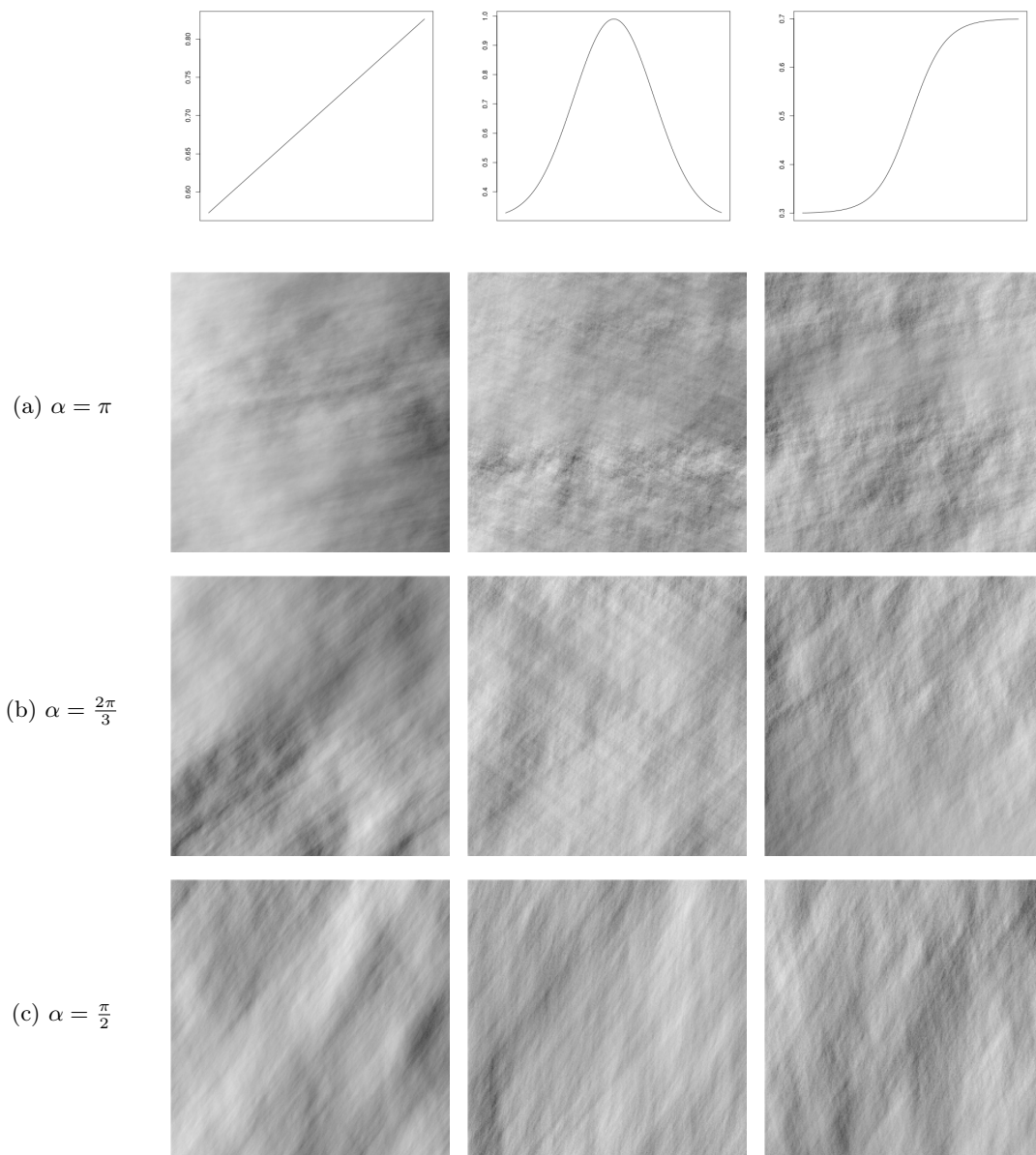


FIGURE 4.2 – Exemple de textures multifractionnaires anisotropes.

4.2.1 Représentation harmonisable

Le drap Brownien multifractionnaire dispose d'une représentation harmonisable. La démonstration du théorème suivant peut bien entendu s'appliquer à la Proposition 3.2.6, en considérant une fonction exposant de Hurst constante.

THÉORÈME 4.2.2. Soit H une fonction exposant de Hurst et soit $c \in]0, \infty[^d$; si $B^{H(\cdot)} = \{B^{H(t)}(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$ est le processus défini explicitement par

$$B^{H(t)}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{k=1}^d c_k \frac{e^{it_k \xi_k} - 1}{|\xi_k|^{H(t)_k + \frac{1}{2}}} d\widehat{B}(\xi)$$

quel que soit $t \in \mathbb{R}^d$, alors $B^{H(\cdot)}$ est un drap Brownien multifractionnaire.

Démonstration. En appliquant un calcul similaire au Théorème 3.1.8, on obtient ⁴

$$\mathcal{F}_\xi(|t_k - \cdot|^{H(t)_k - \frac{1}{2}} - |\cdot|^{H(t)_k - \frac{1}{2}}) = \kappa_{H(\cdot)_k} \frac{e^{it_k \xi_k} - 1}{|\xi|^{H(t)_k + \frac{1}{2}}}$$

De même, on a ⁵

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\xi \left(\prod_{k=1}^d \left(|t_k - \cdot|^{H(t)_k - \frac{1}{2}} - |\cdot|^{H(t)_k - \frac{1}{2}} \right) \right) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(\xi, x)} \prod_{k=1}^d \left(|t_k - x|^{H(t)_k - \frac{1}{2}} - |x|^{H(t)_k - \frac{1}{2}} \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{k=1}^d e^{-i\xi_k x_k} \left(|t_k - x|^{H(t)_k - \frac{1}{2}} - |x|^{H(t)_k - \frac{1}{2}} \right) dx \\ &= \prod_{k=1}^d \mathcal{F}_{\xi_k} \left(|t_k - \cdot|^{H(t)_k - \frac{1}{2}} - |\cdot|^{H(t)_k - \frac{1}{2}} \right), \end{aligned}$$

et on procède comme dans le Théorème 3.1.8 pour conclure ■

La représentation harmonisable du drap Brownien multifractionnaire permet de donner un opérateur de covariance au processus.

COROLLAIRE 4.2.3. Soit H une fonction exposant de Hurst; si $B^{H(\cdot)} = \{B^{H(t)}(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$ est un drap Brownien multifractionnaire, alors il existe une fonction (déterministe) $\kappa_d : \mathbb{R}^d \rightarrow]0, \infty[$ telle que, pour tout $t, s \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\mathbb{E} \left[B^{H(t)}(t) B^{H(s)}(s) \right] = \kappa_d(H(s) + H(t)) \prod_{k=1}^d \left(|t_k|^{H(t)_k + H(s)_k} + |s_k|^{H(t)_k + H(s)_k} - |t_k - s_k|^{H(t)_k + H(s)_k} \right).$$

Démonstration. À l'aide de la représentation harmonisable de $B^{H(\cdot)}$, on sait qu'il existe $c \in]0, \infty[^d$ tel que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[B^{H(t)}(t) B^{H(s)}(s) \right] &= \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{k=1}^d c_k \frac{(e^{it_k \xi_k} - 1)(e^{it_k \xi_k} - 1)}{|\xi_k|^{H(t)_k + H(s)_k + 1}} d\xi \\ &= \prod_{k=1}^d \int_{\mathbb{R}} c_k \frac{(e^{it_k \xi_k} - 1)(e^{it_k \xi_k} - 1)}{|\xi_k|^{H(t)_k + H(s)_k + 1}} d\xi_k \end{aligned}$$

où l'échange entre le symbole produit et intégral est licite, par convergence. En procédant comme dans le Corollaire 4.1.4, on remarque qu'il s'agit d'un produit de d covariance de champ Brownien multifractionnaire de \mathbb{R} (i.e. des mouvements Browniens multifractionnaires), ce qui permet de conclure. ■

4.2.2 Régularité des trajectoires

Les résultats concernant la régularité de Hölder du champ Brownien multifractionnaire peuvent s'appliquer au drap Brownien multifractionnaire, à condition de considérer quelques ajustements. On suppose dans la suite que les fonctions exposant de Hurst sont de plus continues.

PROPOSITION 4.2.4. Pour $t_0 \in \mathbb{R}^d$, l'exposant local de Hölder de $B^{H(\cdot)}$ en t_0 est donné par

$$\beta_{B^{H(\cdot)}(\cdot)}(t_0) \stackrel{p.s.}{=} \min\{\beta_{H(\cdot)}(t_0), \min_{k \in \{1, \dots, d\}} H(t_0)_k\}$$

et l'exposant ponctuel de Hölder de $B^{H(\cdot)}$ en t_0 est donné par

$$\gamma_{B^{H(\cdot)}(\cdot)}(t_0) \stackrel{p.s.}{=} \min\{\gamma_{H(\cdot)}(t_0), \min_{k \in \{1, \dots, d\}} H(t_0)_k\}.$$

Démonstration. La démonstration est similaire en tout point à celle de la Proposition 4.1.14, à ceci près qu'il faut désormais considérer $\min_{k \in \{1, \dots, d\}} H(t_0)_k$ au lieu de $H(t_0)$, et le Lemme A.5.5 au lieu du Lemme A.5.4. ■

4. L'application $|\cdot|$ n'est pas intégrable. Il s'agit ici de la transformée de Fourier de la distribution associée à l'application $|\cdot|$.

5. Il s'agit d'un abus de notations pratique; il montre les étapes à suivre en passant par les fonctions tests.

Troisième partie

Annexes

Annexe A

Résultats complémentaires

A.1 Probabilités

PROPOSITION A.1.1 (Inégalité de Tchebychev). *Pour tout $\alpha > 0$, si X est une variable aléatoire*

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \alpha) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\alpha^2}$$

A.2 Théorie de la mesure

LEMME A.2.1. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et soient $\mathcal{G}, \mathcal{H}, (\mathcal{F}_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ des σ -algèbres sur Ω ; la σ -algèbre \mathcal{H} est indépendante des σ -algèbres \mathcal{F}_j conditionnellement à la σ -algèbre \mathcal{G} si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, elle est indépendante de \mathcal{F}_{n+1} conditionnellement à $\mathcal{G}, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$.*

Démonstration. Voir par exemple [16]. ■

REMARQUE A.2.2. Le résultat précédent peut s'employer avec $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ pour obtenir l'indépendance au sens classique.

THÉORÈME A.2.3 (Théorème d'extension de Carathéodory). *Soit X un ensemble quelconque, et soit \mathcal{R} un anneau d'ensembles sur X . Si μ est une mesure définie sur \mathcal{R} , alors il existe une unique mesure μ' définie sur la σ -algèbre engendrée par \mathcal{R} telle que la restriction de μ' sur \mathcal{R} coïncide avec μ .*

A.3 Analyse harmonique

PROPOSITION A.3.1 (Transformée de Fourier de l'application $x \mapsto \|x\|^\alpha$). *Soit $\alpha \in]-\frac{d}{2}, 1 - \frac{d}{2}[$; la transformée de Fourier de la distribution associée à l'application $\|\cdot\|^\alpha$ dans \mathbb{R}^d est donnée par*

$$\mathcal{F}_\xi(\|\cdot\|^\alpha) = \frac{\lambda_\alpha}{\|\xi\|^{\alpha+d}}.$$

Démonstration. Soit φ une fonction test; on a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\|\cdot\|^\alpha)(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^d} \|\xi\|^\alpha \mathcal{F}_\xi \varphi d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \|\xi\|^\alpha e^{-i\langle \xi, t \rangle} \varphi(t) dt d\xi. \end{aligned}$$

On considère l'application ϕ qui transforme la base canonique de \mathbb{R}^d en une base orthonormée $(u_1 = \frac{t}{\|t\|}, u_2, \dots, u_d)$ ainsi que le changement de variable $(t, \xi) \mapsto (t, \lambda = \phi(\xi))$. Il vient que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \|\xi\|^\alpha e^{-i\langle \xi, t \rangle} \varphi(t) dt d\xi &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \|\lambda\|^\alpha e^{-i\lambda_1 \|t\|} \varphi(t) dt d\lambda \\ &\stackrel{u=\|t\|\lambda}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\|u\|^\alpha}{\|t\|^\alpha} e^{-iu_1} \varphi(t) \frac{1}{\|t\|^d} dt du. \end{aligned}$$

Au total, on a

$$\mathcal{F}(\|\cdot\|^\alpha)(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \|u\|^\alpha e^{-iu_1} du \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\|t\|^{\alpha+d}} \varphi(t) dt.$$

Ce qui montre qu'avec $\lambda_\alpha = \int_{\mathbb{R}^d} \|u\|^\alpha e^{-iu_1} du$, on a

$$\mathcal{F}_\xi(\|\cdot\|^\alpha) = \lambda_\alpha \frac{1}{\|t\|^{\alpha+d}} dt.$$

d'où la conclusion. ■

A.4 Analyse stochastique

THÉORÈME A.4.1 (Théorème de continuité de Kolmogorov (cas \mathbb{R}^d)). *Soit $X = \{X(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$ un processus stochastique pour lequel il existe $C > 0$, $p > 0$ et $\gamma > d$ tels que,*

$$\mathbb{E}[|X(t) - X(s)|^p] \leq C \|t - s\|^\gamma$$

quels que soient $t, s \in \mathbb{R}^d$. Il existe une version \tilde{X} de X dont les trajectoires sont α -höldériennes sur tout compact de \mathbb{R}^d pour tout $\alpha \in]0, \frac{\gamma-N}{p}[$.

THÉORÈME A.4.2 (Régularité de Hölder des champs gaussiens). *Soit $X = \{X(t) : t \in I\}$ un processus gaussien centré à valeurs réelles défini sur l'intervalle compact $I \subset \mathbb{R}^d$. Supposons qu'il existe $c > 0$ et $\nu \in]0, 1]$ tel que pour tous $t, s \in I$, l'inégalité suivante*

$$\mathbb{E}[|X(t) - X(s)|^2] \leq c \|t - s\|^{2\nu}$$

est vérifiée. Alors il existe une version continue de X dont les trajectoires sont presque sûrement β -höldériennes sur I pour tout $\beta \in [0, \nu[$.

PROPOSITION A.4.3 (Propriété de Markov et indépendance). *Soit $X = \{X(t) : t \in I\}$ un processus stochastique défini sur un ensemble $I \subset \mathbb{R}$, et notons $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ la filtration définie explicitement par*

$$\mathcal{F}_t = \sigma(\{X(s) : s \in I, s \leq t\}).$$

Notons de plus $(\mathcal{F}_{\geq t})_{t \in I}$ la collection définie explicitement par

$$\mathcal{F}_{\geq t} = \sigma(\{X(s) : s \in I, s \geq t\}).$$

Si X est un processus de Markov, alors quel que soit $t \in I$, la σ -algèbre engendrée par $X(t)$ est indépendante des σ -algèbres \mathcal{F}_t et $\mathcal{F}_{\geq t}$.

Démonstration. Si X est un processus de Markov, alors quels que soient $s, t \in I$ tels que $s \leq t$, et quel que soit $B \in \mathbb{B}$, on a

$$\mathbb{P}(X(t) \in B | X(s)) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathbb{P}(X(t) \in B | \mathcal{F}_s)$$

ou de façon équivalente, pour toute fonction f Borel-mesurable bornée

$$\mathbb{E}[f(X(t)) | X(s)] \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathbb{E}[f(X(t)) | \mathcal{F}_s].$$

Soient $s, t \in I$ tels que $s \leq t$, soit $A \in \mathbb{B}$, et soit $F \in \mathcal{F}_s$; il vient successivement

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{X(t) \in A\} \cap F | \mathcal{F}_s) &= \mathbb{P}(\{X(t) \in A\} | \mathcal{F}_s) \chi_F \\ &\stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathbb{P}(\{X(t) \in A\} | X(s)) \chi_F. \end{aligned}$$

Puisque $\mathbb{P}(\{X(t) \in A\} \cap F | \mathcal{F}_s)$ et $\mathbb{P}(\{X(t) \in A\} | X(s))$ sont des variables aléatoires $\sigma(X(s))$ -mesurables, un passage à l'espérance conditionnée par $X(s)$ donne :

$$\mathbb{P}(\{X(t) \in A\} \cap F | \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(\{X(t) \in A\} | X(s)) \mathbb{P}(F | X(s))$$

qui montre que $\sigma(X(t))$ est indépendant de la σ -algèbre \mathcal{F}_t .

Similairement, soit $u \in I$ tel que $s \leq u \leq t$, et soit $B \in \mathbb{B}$; il vient à la suite :

$$\mathbb{P}(\{X(t) \in A\} \cap \{X(u) \in B\} \cap F | \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(\{X(t) \in A\} \cap \{X(u) \in B\} | \mathcal{F}_s) \chi_F \tag{A.4.1}$$

$$= \mathbb{E}[\mathbb{P}(\{X(t) \in A\} | \mathcal{F}_u) \chi_{X(u) \in B} | \mathcal{F}_s] \chi_F \tag{A.4.2}$$

$$= \mathbb{E}[\mathbb{P}(\{X(t) \in A\} | X(u)) \chi_{X(u) \in B} | \mathcal{F}_s] \chi_F$$

$$= \mathbb{E}[\mathbb{P}(\{X(t) \in A\} \cap \{X(u) \in B\} | X(u)) | \mathcal{F}_s] \chi_F$$

$$= \mathbb{E}[\mathbb{P}(\{X(t) \in A\} \cap \{X(u) \in B\} | X(u)) | X(s)] \chi_F$$

$$= \mathbb{E}[\mathbb{P}(\{X(t) \in A\} \cap \{X(u) \in B\} | \mathcal{F}_u) | X(s)] \chi_F \tag{A.4.3}$$

$$= \mathbb{P}(\{X(t) \in A\} \cap \{X(u) \in B\} | X(s)) \chi_F \tag{A.4.4}$$

où le passage de la relation (A.4.1) à la relation (A.4.2) s'effectue grâce à la définition de l'espérance conditionnelle et de la mesurabilité de $\{X(u) \in B\}$ par rapport à la σ -algèbre \mathcal{F}_u , et où le passage de la relation (A.4.3) à la relation (A.4.4) est obtenu en exploitant la relation $\mathcal{F}_u \subset \mathcal{F}_s$. Par un passage à l'espérance conditionnée par $X(s)$, il vient alors

$$\mathbb{P}(\{X(t) \in A\} \cap \{X(u) \in B\} \cap F | \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(\{X(t) \in A\} \cap \{X(u) \in B\} | X(s)) \mathbb{P}(F | X(s)).$$

En procédant de proche en proche, on observe que si $t_1, \dots, t_n \in I$ ($n \in \mathbb{N}_0$) sont tels que $s \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$, alors le vecteur $(X(t_1), \dots, X(t_n))$ est indépendant de la σ -algèbre \mathcal{F}_s conditionnellement à $\sigma(X(s))$. Par conséquent, on observe l'inclusion

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \bigcup_{s \leq t_1 \leq \dots \leq t_n} \sigma(X(t_1), \dots, X(t_n)) \subset \{G \in \mathcal{F}_{\geq s} : \mathbb{P}(G \cap F | X(s)) = \mathbb{P}(G | X(s)) \mathbb{P}(F | X(s)) \forall F \in \mathcal{F}_s\}. \quad (\text{A.4.5})$$

Ce qui achève la preuve, puisque le membre de gauche de la relation (A.4.5) est un π -système générant $\mathcal{F}_{\geq s}$ et puisque le membre de droite est une classe de Dynkin incluse dans $\mathcal{F}_{\geq s}$. ■

A.5 Partie II

A.5.1 Construction d'une intégrale stochastique sur $L^2(\mathbb{R}^d)$

Cette construction est tirée du livre d'Ayache ([3]). Dans la suite, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace de probabilité.

DÉFINITION A.5.1. Notons $L^0(\Omega)$ l'espace de toutes les variables aléatoires définies sur Ω et notons \mathbb{B}_0^d l'anneau d'ensembles des boréliens $A \in \mathbb{B}^d$ de \mathbb{R}^d de mesures de Lebesgue finies.

Une fonction $Z : \mathbb{B}_0^d \rightarrow L^0(\Omega)$ est une mesure aléatoire si elle est telle que

- $Z(\emptyset) = 0$;
- Si $A_1, A_2 \in \mathbb{B}^d$ sont disjoints, alors $Z(A_1 \cup A_2) = Z(A_1) + Z(A_2)$

Si Z une mesure aléatoire à image dans $L^2(\Omega)$, on dira qu'elle est *orthogonale* si pour tous $A_1, A_2 \in \mathbb{B}^d$ disjoints, on a

$$\mathbb{E} \left[Z(A_1) \overline{Z(A_2)} \right] = 0$$

Si Z est une mesure aléatoire orthogonale, alors, par le Théorème A.2.3, l'application $A \in \mathbb{B}_0^d \mapsto \mathbb{E} [|Z(A)|^2]$ peut être étendue (de manière unique) en une mesure sur \mathbb{B}^d . Cette mesure est appelée *mesure de contrôle* de Z .

Si h est une fonction simple, alors il existe des boréliens A_1, \dots, A_k de mesures de Lebesgue finies et des constantes $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$ tels que

$$h = \sum_{j=1}^k a_j \chi_{A_j}$$

Si Z est une mesure aléatoire orthogonale, et si μ est sa mesure de contrôle, alors on définit l'*intégrale stochastique* de h par

$$\int_{\mathbb{R}^d} h(s) dZ(s) = \sum_{j=1}^k a_j Z(A_j).$$

On observe de plus que¹

$$\mathbb{E} \left[\left| \int_{\mathbb{R}^d} h(s) dZ(s) \right|^2 \right] = \int_{\mathbb{R}^d} |h(s)|^2 d\mu(s). \quad (\text{A.5.1})$$

Par un argument de complétude de $L^2(\Omega)$, l'intégrale stochastique associée à la mesure aléatoire Z peut être étendue à toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}, \mu)$ à l'aide d'une suite de fonctions simples $(h_j)_{j \in \mathbb{N}}$. On considère alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(s) dZ(s) = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} h_j(s) dZ(s)$$

1. L'isométrie est aussi appelée « *isométrie d'Itô* »

où la convergence a lieu dans $L^2(\Omega)$ et où la limite est indépendante de la suite $(h_j)_{j \in \mathbb{N}}$ choisie grâce à l'isométrie (A.5.1). On a de plus, pour tout $f, g \in L^2(\mathbb{R}, \mu)$,

$$\mathbb{E} \left[\left| \int_{\mathbb{R}^d} f(s) dZ(s) \right|^2 \right] = \int_{\mathbb{R}^d} |f(s)|^2 d\mu(s)$$

i.e.

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(s) dZ(s) \right) \overline{\left(\int_{\mathbb{R}^d} g(s) dZ(s) \right)} \right] = \int_{\mathbb{R}^d} f(s) \overline{g(s)} d\mu(s).$$

Nous sommes en mesure de définir l'intégrale stochastique que nous utiliserons dans ce mémoire.

Soit B une mesure aléatoire orthogonale dont la mesure de contrôle est la mesure de Lebesgue. La mesure B est une mesure dite *Brownienne* si le processus $\{B(A) : A \in \mathbb{B}_0^d\}$ est un processus gaussien centré à valeurs réelles. L'intégrale associée est appelée *intégrale stochastique Brownienne* ou *intégrale de Wiener*. Quel que soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(s) dB(s)$$

est une variable aléatoire gaussienne centrée, et est telle que

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(s) dB(s) \right)^2 \right] = \int_{\mathbb{R}^d} |f(s)|^2 ds$$

i.e.

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(s) dB(s) \right) \overline{\left(\int_{\mathbb{R}^d} g(s) dB(s) \right)} \right] = \int_{\mathbb{R}^d} f(s) \overline{g(s)} ds.$$

si $g \in L^2(\mathbb{R})$.

A.5.2 Quelques propriétés du champ Brownien multifractionnaire

Rappelons que si $B^{H(\cdot)} = \{B^{H(t)}(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$ est un champ Brownien multifractionnaire, alors son opérateur de covariance est donné par

$$\mathbb{E} \left[B^{H(t)}(t) B^{H(s)}(s) \right] = \kappa_d (H(s) + H(t)) \left(\|t\|^{H(s)+H(t)} + \|s\|^{H(s)+H(t)} - \|t-s\|^{H(s)+H(t)} \right).$$

où $\kappa_d :]0, 2[\rightarrow]0, \infty[$ est une fonction C^∞ sur tout intervalle compact $K \subset]0, 2[$.

Dans la suite, $B^{H(\cdot)} = \{B^{H(t)}(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$ désignera un champ Brownien multifractionnaire. Sauf mention contraire, ces résultats sont issus de l'article de Herbin ([2]).

PROPOSITION A.5.2. *Soit K un intervalle compact de \mathbb{R}^d ; pour tout $t, s \in K$, on a*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[(B^{H(t)}(t) - B^{H(s)}(s))^2 \right] &= \kappa_d (H(s) + H(t)) \|t-s\|^{H(s)+H(t)} \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} (H(s) + H(t), \|s\|) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} (H(s) + H(t), \|t\|) \right) (H(t) - H(s))^2 \\ &+ O_K((H(t) - H(s))(\|t\| - \|s\|)) + o_K((H(t) - H(s))^2) \end{aligned}$$

où

$$\varphi :]0, 2[\times]0, \infty[: (x, y) \mapsto \kappa_d(x) y^x.$$

COROLLAIRE A.5.3. *Soit K un intervalle compact de \mathbb{R}^d ; il existe $L, M > 0$ tels que pour tout $t, s \in K$, on a*

$$\mathbb{E} \left[(B^{H(t)}(t) - B^{H(s)}(s))^2 \right] \leq L \|t-s\|^{2H(t)} + M |H(t) - H(s)|^2.$$

LEMME A.5.4. *Pour tout intervalle compact $K \subset \mathbb{R}^d$, il existe des constantes $k_1, k_2, l_1, l_2 > 0$ telles que, pour tout $t, s \in K$,*

$$\mathbb{E} \left[(B^{H(t)}(t) - B^{H(s)}(s))^2 \right] \geq k_1 \|t-s\|^{2H(t)} - l_1 (H(t) - H(s))^2$$

et

$$\mathbb{E} \left[(B^{H(t)}(t) - B^{H(s)}(s))^2 \right] \geq k_2 (H(t) - H(s))^2 - l_2 \|t-s\|^{2H(t)}.$$

Pour le drap Brownien multifractionnaire, il faut adapter le résultat précédent.

LEMME A.5.5. *Pour tout intervalle compact $K \subset \mathbb{R}^d$, il existe des constantes $k_1, k_2, l_1, l_2 > 0$ telles que, pour tout $t, s \in K$ vérifiant $t_i - s_i > 0$, $t_k - s_k = 0 \forall k \in \{1, \dots, d\} \setminus \{i\}$ pour un $i \in \{1, \dots, d\}$ donné,*

$$\mathbb{E} \left[(B^{H(t)}(t) - B^{H(s)}(s))^2 \right] \geq k_1 \|t - s\|^{2H(t)_i} - l_1 (H(t)_i - H(s)_i)^2$$

et

$$\mathbb{E} \left[(B^{H(t)}(t) - B^{H(s)}(s))^2 \right] \geq k_2 (H(t)_i - H(s)_i)^2 - l_2 \|t - s\|^{2H(t)_i}.$$

LEMME A.5.6. *Soit $Z = \{Z(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$ un processus gaussien et soit $t_0 \in \mathbb{R}^d$. Supposons qu'il existe un réel $\mu \in]0, 1[$ tel que, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $c > 0$ et une suite $(h_j)_{j \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ qui converge vers 0, vérifiant*

$$\mathbb{E} [(Z(t + h_j) - Z(t))^2] \geq c \|h_j\|^{2\mu + \varepsilon}$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$. Alors il existe un événement $\Omega_0 \subset \Omega$, de probabilité 1, tel que

$$\gamma_{Z(\cdot, \omega)}(t_0) \leq \mu.$$

Le lemme précédent peut être adapté pour les exposants de Hölder locaux de processus gaussiens.

LEMME A.5.7. *Soit $Z = \{Z(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$ un processus gaussien et soit $t_0 \in \mathbb{R}^d$. Supposons qu'il existe un réel $\mu \in]0, 1[$ tel que, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $c > 0$ et deux suites $(h_j)_{j \in \mathbb{N}}$ et $(l_j)_{j \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ qui converge vers 0, vérifiant*

$$\mathbb{E} [(Z(t + h_j) - Z(t))^2] \geq c \|h_j - l_j\|^{2\mu + \varepsilon}$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$. Alors il existe un événement $\Omega_0 \subset \Omega$, de probabilité 1, tel que

$$\beta_{Z(\cdot, \omega)}(t_0) \leq \mu.$$

Annexe B

Codes

B.1 Sélection des angles optimaux

Afin de calculer une texture, l'algorithme réalise d'abord une sélection des angles (en résolvant un problème de programmation dynamique) pour lesquels le coût de calcul sera moindre.

Le code R suivant réalise cette sélection et enregistre les angles sélectionnés dans un format réutilisables par R pour simuler les textures.

Notons qu'une fois les angles sélectionnés (pour une précision et une ouverture angulaire données), il n'est plus nécessaire de réaliser ces calculs pour générer des textures par la suite. Cet algorithme est purement déterministe.

```
library(primes)

#####
## Selecting bands of least computing cost
#####

## Angle space generator
##
## To select the best angles (i.e. the ones with least computing cost
## while keeping the same precision), one must construct a set of
## vectors (p_k, q_k), and sort it in such a way that the sequence
## defined by
##
## u_k := arctan(p_k/q_k)
##
## is increasing.

angle_space <- function(prec = 0.001, inf = -pi/3, sup = pi/3) {
  start <- Sys.time()
  N <- 1 + ceiling(1 / tan(prec))
  cat("Computing the eligible angles set...")
  V <- c()
  for (q in 1:N)
    for (p in -N:N)
      if (gcd(p, q) == 1 && atan(p/q) >= inf && atan(p/q) <= sup)
        V = rbind(V, c(p, q, atan(p/q)))

  cat(" Done!\nOrdering the angle set...")
  V <- V[order(V[,3]),]

  stop <- Sys.time()
  cat(" Done!\n      This operation took: ",
      difftime(stop, start, units="secs"), " secs.\n", sep="")
  return(V)
}

elementary_costs <- function(angles, resolution) {
```



```

costs <- c()
for (i in 1:length(angles[,1])) {
  c <- resolution * (abs(angles[i,1]) + angles[i,2])
  c <- ceiling(log2(c))
  costs <- c(costs, c * 2^c)
}

return(costs)
}

solve_bellman <- function(angles, costs, prec) {
  n <- length(angles) - 2
  comp_costs <- rep(0, n+2)
  selected_ranks <- c()

  for (i in (n+1):1) {
    cmin <- Inf
    j <- i + 1
    selected_ranks <- c(selected_ranks, i)
    while (j <= n+2 && angles[j] <= angles[i] + prec) {
      if (comp_costs[j] <= cmin) {
        cmin <- comp_costs[j]
        selected_ranks[n - i + 1] <- j
      }
      j <- j + 1
    }
    comp_costs[i] <- costs[i] + cmin
  }

  return(rev(unique(selected_ranks)))
}

find_optimum_band <- function(prec = 0.01, inf = -pi/2, sup = pi/2,
                             resolution = 2^8) {
  cat("Computing optimum bands...",
      "\n   Sector (rad):   (", inf, ", ", sup, ")",
      "\n   Precision (rad): ", prec,
      "\n   Resolution:      ", resolution,
      "\n",
      sep="")
  start <- Sys.time()

  eligible_angles <- angle_space(prec = prec, inf = inf, sup = sup)
  cat("There are ", length(eligible_angles[,3]), " potential bands.",
      "\nComputing elementary costs associated with each of them...")
  angles_costs <- elementary_costs(angles = eligible_angles[,1:2],
                                   resolution = resolution)

  cat(" Done!")
  underflow_flag <- FALSE ; overflow_flag <- FALSE

  angles <- eligible_angles[,3]
  if (angles[1] != inf) {
    underflow_flag <- TRUE
    angles <- c(inf, angles)
    angles_costs <- c(0, angles_costs)
  }
  angles_costs[1] <- 0

  if (tail(angles, n = 1) != sup) {
    overflow_flag <- TRUE
    angles <- c(angles, sup)
  }
}

```

```

cat("\nSolving the Bellman equation...",
    sep="")
bellman_start <- Sys.time()
selected_ranks <- solve_bellman(angles = angles, costs = angles_costs,
                                prec = prec)
bellman_stop <- Sys.time()

if (underflow_flag)
  selected_ranks <- selected_ranks - 1
if (overflow_flag && tail(selected_ranks, n = 1) > length(eligible_angles[,3]))
  selected_ranks <- selected_ranks[1:length(selected_ranks)-1]

stop <- Sys.time()
cat(" Done!",
    "\nThere are ", length(selected_ranks), " chosen bands (",
    length(selected_ranks)*100/length(angles),
    "% from original amount).",
    "\nComputing optimum bands took: ",
    difftime(stop, start, units = "secs"),
    " secs.\n",
    sep="")
return(eligible_angles[selected_ranks,])
}

generate_optimal_bands <- function(prec, sector_amp) {
  for (p in prec)
    for (s in sector_amp) {
      angles <- find_optimum_band(prec = p,
                                  inf = -s/2,
                                  sup = s/2,
                                  resolution = 2^5)

      n_amp <- s * 180/pi
      name <- paste("RDS/OptBands_p.", p,
                   "-s.", n_amp,
                   ".rds", sep="")
      saveRDS(angles, file = name)
    }
}

precs <- c(0.1, 0.05, 0.04, 0.03, 0.02, 0.025, 0.01, 0.0075, 0.005, 0.0025)
sectors <- c(pi, 2*pi/3, pi/2, pi/3, pi/4, pi/6, pi/8, pi/10)
generate_optimal_bands(prec = precs, sector_amp = sectors)

```

B.2 Génération des textures

Le code R suivant permet de générer les trajectoires et les textures repris tout au long du mémoire. On en tire alors des textures isotropes et anisotropes, fractionnaires et multifractionnaires.

Ce code n'est pas optimisé, et peut prendre un temps assez long pour générer des textures de résolution plus élevée que $256\text{px} \times 256\text{px}$.

```

=====
## Fractional Brownian Sheet simulation
##
## Using an exact turning-band algorithm to compute anisotropic
## textures, joining together 1D FBM generated by a FFT
## algorithm.
##
## Algorithm is from Bierme, Moisan, and Richard, 2015.
##
## Author: Benjamin Dosse
## Date: 2024-05-01

```

```

## License: see LICENSE file.
#####
setwd("~/uni/2023/thesis/simulations")
source("OptBands.R")
library(MASS)

#####
## Generating 1D FBM
#####

## Theoretical covariance operator.
##
## Since the FBM is a Gaussian process, its covariance operator only
## depends on the difference of the argument.
fBm_covop <- function(t, hurst = 0.5) {
  H = 2 * hurst;
  return(1/2 * (abs(t-1)^H - 2*abs(t)^H + abs(t+1)^H))
}

## Circulant embedding
##
## Building a circulant matrix and diagonalizing it in the Fourier
## basis.
fBm_circ_vec <- function(length, hurst = 0.5) {
  # Returns a vector of double length.
  res = c()

  for (i in 1:length+1)
    res = c(res, fBm_covop(i-1, hurst))
  for (i in 1:length)
    res = c(res, fBm_covop(length-i, hurst))

  return(res)
}

## Random vectors
##
## Generating fractional gaussian noise from gaussian-distributed
## vectors.
fB_noise_mult <- function(length, hurst = c(0.5)) {
  x <- mvrnorm(n = 2, mu = rep_len(0, 2 * length),
              Sigma = diag(nrow = 2 * length))
  x <- complex(real = x[1,], imaginary = x[2,])
  noise <- c()

  for (h in hurst)
    noise <- cbind(noise,
                  1/sqrt(2 * length)
                  * fft(diag(sqrt(fft(fBm_circ_vec(length, h),
                                     inverse = TRUE))) %*% x))

  return(noise)
}

fB_noise <- function(length, hurst = 0.5) {
  x <- mvrnorm(n = 2, mu = rep_len(0, 2 * length),
              Sigma = diag(nrow = 2 * length))
  x <- complex(real = x[1,], imaginary = x[2,])

  noise <- 1/sqrt(2 * length) * fft(diag(sqrt(fft(fBm_circ_vec(length, hurst),
                                               inverse = TRUE))) %*% x)

  return(noise)
}

```

```

}

fBm <- function(resolution = 10, min = 0, max = 1, hurst = 0.5) {
  if (max <= 2 * min || as.integer(max - min) == 0)
    stop("'max' and 'min' shall be integers such that 'max' \
        is greater than two times 'min'.")

  int_min <- as.integer(min)
  int_max <- as.integer(max)

  mag <- 2^resolution
  start <- int_min * mag ; stop <- int_max * mag
  length <- stop - start
  time <- c() ; pos <- c()

  noise <- fB_noise(length = length/2, hurst = hurst)
  r_noise <- Re(noise) / sqrt(mag)

  for (k in 0:(length - 1)) {
    time <- c(time, int_min + k/mag)
    tmp <- 0

    if (k == 0 && int_min < 0)
      tmp <- -sum(r_noise[1:-start])
    else if (k > 0)
      tmp <- pos[k] + r_noise[k]

    pos <- c(pos, tmp)
  }

  return(list("time" = time, "motion" = pos, "noise" = r_noise))
}

mBm <- function(resolution = 5, min = 0, max = 1,
                hurst = function(x) {return(0.5)}) {
  if (max <= 2 * min || as.integer(max - min) == 0)
    stop("'max' and 'min' shall be integers such that 'max' \
        is greater than two times 'min'.")

  int_min <- as.integer(min)
  int_max <- as.integer(max)
  mag <- 2^resolution
  start <- int_min * mag ; stop <- int_max * mag
  length <- stop - start
  time <- c() ; pos <- c()

  hursts <- c()
  for (k in 0:(length-1))
    hursts <- c(hursts, hurst(int_min + k/mag))

  noise <- fB_noise_mult(length = length / 2, hurst = hursts)
  r_noise <- Re(noise) / sqrt(mag)

  for (k in 1:length) {
    time <- c(time, int_min + (k - 1)/mag)
    fbm <- c()

    for (j in 0:(k - 1)) {
      tmp <- 0

      if (j == 0 && int_min < 0)
        tmp <- -sum(r_noise[1:-start, k])
      else if (j > 0)

```

```

    tmp <- fbm[j] + r_noise[j, k]

    fbm <- c(fbm, tmp)
  }
  pos <- c(pos, tail(fbm, n = 1))
}

return(list("time" = time, "motion" = pos))
}

====
## Generating textures
====
## A texture is given by a turning-band field.
##
## A turning-band field is defined by a set of weights, a
## topothesy, a set of angles, and a normalizing factor.

TBF <- function(topothesy,
                hurst,
                angles,
                prec = 0.0025,
                resolution = 8) {
  ## setting up the grid
  mag <- 2^resolution
  N <- length(angles[,3]) - 1

  start <- 0 ; stop <- mag
  length <- stop - start

  grid <- matrix(0, nrow = length, ncol = length)

  for (i in 2:N) {
    tan_t <- angles[i,1:2]
    t <- angles[i,3]
    hurst_t <- hurst(t)
    lambda <- 0

    if (i == 2)
      lambda <- (angles[2,3] - angles[1,3]) + (angles[3,3] - angles[2,3])/2
    if (i == N)
      lambda <- (angles[N+1,3] - angles[N,3]) + (angles[N,3] - angles[N-1,3])/2
    else
      lambda <- (angles[i+1,3] - angles[i-1,3])/2

    gamma_h <- pi / (hurst_t * gamma(2*hurst_t) * sin(pi*hurst_t))
    topothesis <- topothesy(t)

    ## non-oriented band
    inf <- 0 ; sup <- 0
    if (tan_t[1] < 0) {
      inf <- tan_t[1]
      sup <- tan_t[2]
    } else {
      inf <- 0
      sup <- tan_t[1] + tan_t[2]
    }
  }

  FBm <- fBm(resolution = resolution,
             min = inf,
             max = sup,
             hurst = hurst_t)
}

```

```

## orienting constant
C <- (cos(t) / (mag * tan_t[2])) ^ hurst_t

C <- C * sqrt(lambda * gamma_h * topothesis)
FBM <- C * FBM$motion

skel_y <- c() ; skel_x <- c()

for (y in 1:length) {
  skel_y <- c(skel_y, (y-1)/mag)
  for (x in 1:length) {
    fX <- x * tan_t[1]
    fY <- y * tan_t[2]
    pos <- 0

    if (tan_t[1] < 0)
      pos <- 1 + fX + fY - mag * tan_t[1]
    else
      pos <- 1 + fX + fY

    grid[x,y] <- grid[x,y] + FBM[pos]
    if (y == 1)
      skel_x <- c(skel_x, (x-1)/mag)
  }
}

return(list("texture" = grid, "grid" = cbind(skel_x, skel_y)))
}

#####
## Generating TBF texture
#####
setwd("~/uni/2023/thesis/static/figures")

## Example values ; should be changed to illustrate different behaviours.

p <- 0.05 ; sectors <- c(180, 120, 90)
res <- 8 ; mag <- 2^res ;

for (s in sectors) {
  m <- 360 / (pi * s)
  hursts <- c(function(x) {return(0.2 * (m*x - m/2) + 0.7)},
              function(x) {return(0.68*exp(-(3/10*s - 18)*(m*x - m/2)^2)+0.31)},
              function(x) {return(0.2 * tanh((1/18*s) * (m*x - m/2)) + 0.5)})

  angles <- readRDS(paste("../simulations/RDS/OptBands_p.", p,
                          "-s.", s, ".rds", sep=""))
  for (i in 1:3) {
    AMuBF <- TBF(topothesis = function(x) {return(1)},
                 hurst = hursts[i][[1]],
                 angles = angles,
                 prec = p,
                 resolution = res)

    name <- paste("MuBF-hInd.", i, "-s.", s, ".png", sep="")
    png(filename = name,
         width = mag,
         height = mag,
         units = "px",
         bg = "white")

    heatmap(AMuBF$texture[-mag,-mag],

```

```
    Rowv = NA,
    Colv = NA,
    col = gray.colors(n = mag),
    labRow = FALSE,
    labCol = FALSE,
    margins = c(0,0))

dev.off()

name <- paste("MuBF-hurst-hInd.", i, ".png", sep="")
png(filename = name,
     width = 2*mag, height = 2*mag,
     units = "px", bg = "white")

plot(x = s*AMuBF$grid[,1] - s/2,
     y = hursts[i][[1]](AMuBF$grid[,1]),
     type='l',
     ylab='',
     xlab='',
     xaxt = 'n')

dev.off()

cat("Done!\n")
}
}
```

Bibliographie

- [1] Hermine BIERMÉ, Lionel MOISAN et Frédéric RICHARD. « A turning-band method for the simulation of anisotropic fractional brownian fields. » In : *Journal of Computational and Graphical Statistics* 24.3 (2015), p. 885-904. DOI : 10.1080/10618600.2014.946603.
- [2] Erick HERBIN. « From N parameter fractional Brownian motions to N parameter multifractional Brownian motions ». In : *Rocky Mountain Journal of Mathematics* 36.4 (2002), p. 25-60.
- [3] Antoine AYACHE. *Multifractional stochastic fields : wavelets strategies in multifractional frameworks*. World Scientific, 2018. XIV, 220. ISBN : 9789814525671.
- [4] Gennady SAMORODNITSKY et Murad S. TAQQU. *Stable Non-Gaussian Processes. Stochastic Models with Infinite Variance*. Stochastic Modeling 1. Boca Raton : CRC Press, 1994, p. xxii, 632. ISBN : 978-0-41205-171-5.
- [5] Francesca BIAGINI et al. *Stochastic calculus for fractional brownian motion and applications*. Probability and Its Applications. London : Springer-Verlag, 2008, p. xii, 329. ISBN : 978-1-85233-996-8.
- [6] Yuliya S. MISHURA. *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes*. Lectures Notes in Mathematics 1929. Berlin : Springer-Verlag, 2008, p. xvii, 397. ISBN : 978-3-540-75873-0.
- [7] Ivan NOURDIN. *Selected Aspects of Fractional Brownian Motion*. Bocconi & Springer Series. Milano : Springer-Verlag, 2012. IX, 122. ISBN : 978-88-470-2822-7.
- [8] Jean-François LE GALL. *Brownian Motion, Martingales, and Stochastic Calculus*. Graduate Texts in Mathematics. Berlin : Springer-Verlag, 2016. XIII, 273. ISBN : 978-3-319-31089-3.
- [9] A. K. BASU. *Introduction to Stochastic Process*. Harrow : Alpha Science International, 2007, p. xi, 419. ISBN : 978-1-84265-105-6.
- [10] Benoit B. MANDELBROT et John W. VAN NESS. « Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications ». In : *SIAM Review* 10.4 (1968), p. 422-437.
- [11] Bernt ØKSENDAL. *Stochastic Differential Equations : An Introduction with Applications*. 3^e éd. Universitext. Berlin : Springer-Verlag, 1992. XIII, 224. ISBN : 3540533354.
- [12] Shantanu DAS. « Introduction to Fractional Calculus ». In : *Functional Fractional Calculus*. 2^e éd. Berlin : Springer-Verlag, 2011. Chap. 1, p. 1-50. ISBN : 978-3-642-20545-3.
- [13] Romain François PELTIER et Jacques LÉVY-VÉHEL. *Multifractional Brownian Motion : definition and preliminary results*. Rapport de recherche INRIA n°2645. 1995.
- [14] Eugenio HERNÁNDEZ. *A first course on wavelets*. eng. Studies in advanced mathematics. Boca Raton : CRC Press, 1996. ISBN : 0849382742.
- [15] Kiyosi ITÔ et Nisio MAKIKO. « On the convergence of sums of independent Banach space valued random variables ». In : *Osaka J. Math.* 5.1 (1968), p. 35-48.
- [16] Olav KALLENBERG. *Foundations of Modern Probability*. Probability and its Applications. New-York : Springer, 1997. XII, 523. ISBN : 0-387-94957-7.