

Analyse de l'interaction piéton-structure dans le cadre des vibrations horizontales des passerelles - Regard critique sur les recommandations du Setra

Auteur : Dumortier, Romain

Promoteur(s) : Denoël, Vincent

Faculté : Faculté des Sciences appliquées

Diplôme : Master en ingénieur civil des constructions, à finalité spécialisée en "civil engineering"

Année académique : 2023-2024

URI/URL : <http://hdl.handle.net/2268.2/20857>

Avertissement à l'attention des usagers :

Tous les documents placés en accès ouvert sur le site le site MatheO sont protégés par le droit d'auteur. Conformément aux principes énoncés par la "Budapest Open Access Initiative"(BOAI, 2002), l'utilisateur du site peut lire, télécharger, copier, transmettre, imprimer, chercher ou faire un lien vers le texte intégral de ces documents, les disséquer pour les indexer, s'en servir de données pour un logiciel, ou s'en servir à toute autre fin légale (ou prévue par la réglementation relative au droit d'auteur). Toute utilisation du document à des fins commerciales est strictement interdite.

Par ailleurs, l'utilisateur s'engage à respecter les droits moraux de l'auteur, principalement le droit à l'intégrité de l'oeuvre et le droit de paternité et ce dans toute utilisation que l'utilisateur entreprend. Ainsi, à titre d'exemple, lorsqu'il reproduira un document par extrait ou dans son intégralité, l'utilisateur citera de manière complète les sources telles que mentionnées ci-dessus. Toute utilisation non explicitement autorisée ci-avant (telle que par exemple, la modification du document ou son résumé) nécessite l'autorisation préalable et expresse des auteurs ou de leurs ayants droit.



Analyse de l'interaction piéton- structure dans le cadre des vibrations horizontales des passerelles

Regard critique sur les recommandations du Setra

Travail de fin d'études en vue de l'obtention du grade de
master "Ingénieur Civil en construction"
Université de Liège - Faculté des Sciences Appliquées
Année académique 2023-2024

Etudiant: Romain Dumortier

Promoteur: Vincent Denoël

Jury:

- Vincent Denoël, promoteur
- Olivier Bruls
- Guillaume Drion
- Yves Duchêne

Remerciements

Ce document est le fruit de 6 mois de travail qui a été rendu possible grâce à certaines personnes qu'il convient à présent de remercier.

Je tiens tout d'abord à remercier mon promoteur le professeur Vincent Denoël pour ses réponses à mes nombreuses questions et pour la relecture, Yves Duchêne pour le temps qu'il a bien voulu m'accorder ainsi que les professeurs Olivier Bruls et Guillaume Drion d'avoir accepté de compléter mon jury.

Je remercie ensuite les membres de la Centrale des Cours pour le bon temps qu'on a passé ensemble.

Un grand merci également aux membres du RCA Spa et à mes camarades d'entraînement qui m'ont permis de me vider la tête et ont rendu mes souffrances sur la piste plus supportables.

Enfin, je tiens évidemment à remercier ma famille et plus particulièrement mes parents pour leur soutien tout au long de mon parcours.

Résumé

L'étude des vibrations horizontales des passerelles à connu un boost depuis presque un quart de siècle. Cependant, les différents modèles proposés ont souvent du mal à reproduire rigoureusement les observations du terrain. Certains chercheurs ou organismes comme le Sétra ont tenté alors d'établir des modèles simples permettant un dimensionnement rapide. Ces modèles simples se basent souvent sur des hypothèses fortes qui peuvent avoir un impact important sur les conclusions.

Ce travail présente deux méthodes de résolution différentes d'un modèle d'interaction piéton-structure. Ce modèle est composé de l'équation de la dynamique pour le comportement de la structure et d'une équation hybride Van der Pol-Rayleigh modélisant le comportement du piéton.

Le modèle développé est ensuite utilisé pour apporter un regard critique sur les recommandations émises par le Sétra en 2006 sur le dimensionnement des passerelles piétonnes vis-à-vis des vibrations latérales.

Table des matières

1.	Introduction	5
1.1.	Contexte	5
1.2.	Sollicitation des piétons	5
1.3.	Synchronisation	7
1.4.	L'oscillateur auto-entretenu	9
1.4.1.	L'oscillateur de Van der Pol	10
1.4.2.	L'oscillateur de Rayleigh	11
1.5.	Classification des interaction piéton-structure	12
1.6.	Recommandations du guide du Sétra	13
1.7.	Objectif de ce travail	18
2.	Modèle mathématique	20
2.1.	Couplage avec la structure	21
2.2.	Modèle sans prise en compte de la forme du mode	22
2.2.1.	Mise sous forme adimensionnelle	22
2.2.2.	Approche multi-échelles	23
2.2.3.	Méthode de résolution numérique	27
2.2.4.	Analyse du modèle	28
2.3.	Prise en compte de la forme du mode	37
2.3.1.	Approche multi-échelles	38
2.3.2.	Méthode de résolution numérique	39
2.3.3.	Analyse du modèle	40
3.	Comparaison avec les recommandations du Sétra	46
4.	Conclusion	50
A.	Analyse par échelles multiples du modèle sans prise en compte de la forme du mode	52
B.	Analyse du modèle de piéton simplifié.....	54
C.	Comparaison avec les recommandations du Sétra pour le set de paramètres « Pedestrian 1 »	55
5.	Références.....	56

1. Introduction

1.1. Contexte

Avec l'avènement de méthodes et d'outils de calcul toujours plus performants, les architectes ont pu laisser libre cours à leur créativité afin de créer des structures toujours plus élégantes et légères. Cette élégance est régulièrement synonyme de finesse et donc de souplesse. Cette souplesse, en combinaison avec la légèreté, rend les passerelles piétonnes actuelles très sensibles aux chargements dynamiques de foule. Une des causes de cette sensibilité est le rapport de masse important entre la foule et la structure (jusqu'à 0,3 dans des cas extrêmes). Ce rapport de masse rend l'impact d'un piéton sur une passerelle plus important que celui d'une voiture sur un pont bien plus massif. D'autre part, la rigidité et la masse des passerelles actuelles amènent à une fréquence propre pour des vibrations transversales souvent proches de 1 [Hz]. Cette fréquence est proche de la fréquence fondamentale de la force latérale engendrée par un piéton. Une telle proximité entre la fréquence naturelle de la passerelle et la fréquence d'excitation est un facteur de risque quant à l'apparition de synchronisation entre les piétons et la structure et du phénomène de lock-in.

Assez méconnu et peu étudié à l'époque, ce lock-in a été observé à de multiples reprises, lors des inaugurations de la passerelle Léopold-Sédar-Sengor¹ en 1999 (1) à Paris et du Millenium Bridge à Londres en 2000 (2) par exemple. Ces passerelles ont rapidement été fermées pour une période plus ou moins longue afin de réaliser des analyses dynamiques poussées pour comprendre ce qu'il s'était passé. Il est ressorti de ces études que ces passerelles n'avaient subi aucun dommage structurel mais qu'elles possédaient un mode de vibration latéral d'une fréquence naturelle proche de 1 [Hz]. Pour le Millenium Bridge, ce mode avait été excité par une foule étant allée jusqu'à 2000 personnes en simultané soit 1,3 personne par m^2 (2). Cette foule était suffisamment importante pour amener la structure à des déplacements significatifs qui ont effrayé les personnes présentes.

À la suite de ces événements, des mesures d'atténuation ont été prises par le placement d'amortisseurs afin de diminuer l'amplitude des vibrations des passerelles et éviter un nouveau phénomène de synchronisation.

La communauté scientifique s'est également emparée du sujet et de nombreux modèles ont été développés pour tenter de représenter au mieux le phénomène de synchronisation d'une foule avec une structure dans une tentative d'établir des critères pouvant mener au phénomène de lock-in. Ce phénomène sera décrit à la section 1.3.

1.2. Sollicitation des piétons

Lorsqu'un piéton marche sur une passerelle, la force qu'il applique à chaque pas sur le tablier peut être décomposée en une composante verticale et deux

¹ Anciennement passerelle Solférino

composantes horizontales. La première des composantes horizontales est la force longitudinale, parallèle à la direction de la marche. Cette composante est de peu d'intérêt dans l'analyse globale des vibrations des passerelles étant donné qu'elle agit dans l'axe principal de la structure. La seconde composante horizontale est la force transversale, perpendiculaire à la précédente, qui vient du balancement du corps d'une jambe sur l'autre. Cette composante est bien plus à risque pour les structures étant donné qu'elle sollicite le tablier en flexion transversale plutôt qu'en traction/compression. C'est l'impact de cette seconde composante qui est analysé dans ce travail.

La marche peut être caractérisée par trois paramètres liés entre eux par la relation

$$v_{\text{piéton}} = l_{\text{pas}} * f_{\text{marche}} \quad (1.1)$$

Cette relation stipule que la vitesse de marche d'un piéton peut être calculée en multipliant la longueur des pas (l_{pas}) par la fréquence de marche (f_{marche}). La longueur de pas est prise comme la distance entre les deux pieds du piéton lorsque ceux-ci sont simultanément en contact avec le sol. La fréquence de marche est le nombre de pas réalisés par un piéton en une seconde. Ces deux paramètres ne sont en général pas indépendants et la longueur de pas augmente souvent avec la fréquence. Les valeurs moyennes de ces paramètres en fonction du type de marche sont représentées dans le Tableau 1.

	f_s [Hz]	v_s [m/s]	l_s [m]
slow walk	~ 1.7	1.1	0.60
normal walk	~ 2.0	1.5	0.75
fast walk	~ 2.3	2.2	1.00
slow running (jog)	~ 2.5	3.3	1.30
fast running (sprint)	> 3.2	5.5	1.75

Tableau 1 – Caractéristiques de différents types de marches (3)

Dans la suite de ce travail, en l'absence de relation simple permettant de calculer la vitesse de marche en fonction de la fréquence, la vitesse sera toujours considérée comme étant la vitesse moyenne d'une marche normale. La fréquence sera elle considérée dans l'intervalle [1,6; 2,2] [Hz] afin de pouvoir faire varier les caractéristiques de piéton. Ce paramètre a été choisi car le paramètre le plus intuitif et le plus pertinent dans l'analyse de phénomènes vibratoires.

Dans le cas de vibrations horizontales, le cycle de sollicitation par le piéton sur le tablier recommence à chaque fois que le même pied (gauche ou droite) est posé sur le sol contrairement à la force verticale dont le cycle recommence à chaque pas. Cela signifie que la fréquence de la force horizontale vaut la moitié de la fréquence de marche ;

$$f_h = \frac{f_{\text{marche}}}{2} \quad (1.2)$$

La force appliquée par le piéton étant périodique, elle peut être décomposée en série de Fourier.

$$F_p(t) = F_{p0} + F_{p1} \cos(2\pi f_h t) + \sum_{i=2}^n F_{pi} \cos(2\pi i f_h t + \varphi_i) \quad (1.3)$$

Où

- F_{p0} est la force statique appliquée par le piéton, nulle dans le cas de la force latérale
- F_{pi} est l'amplitude de la i^e harmonique de la force,
- φ_i est la phase de la i^e harmonique relative à la première,
- n est le nombre d'harmoniques prises en compte.

En général, les 2 premières harmoniques sont suffisantes pour caractériser avec une précision suffisante la force exercée par le piéton. Pour la composante transversale de cette force, les amplitudes correspondantes valent approximativement (4) :

$$F_{p0} = 0; F_{p1} \approx 35 [N]; F_{p2} \approx 7 [N]. \quad (1.4)$$

Ces valeurs correspondent à 5% et 1% de 700 [N] soit le poids moyen d'un humain.

1.3. Synchronisation

La synchronisation est un phénomène qui apparaît lorsque plusieurs oscillateurs ont des fréquences naturelles proches et sont légèrement couplés. La synchronisation se manifeste à travers le phénomène de lock-in. Celui-ci se traduit par une coordination du mouvement de ces oscillateurs et l'ajustement de leurs fréquences à une fréquence commune. Il est nécessaire pour l'apparition de la synchronisation qu'au moins l'un des oscillateurs ait une source d'énergie interne (oscillateur auto-entretenu) et que l'énergie apportée par ceux-ci soit suffisante pour entretenir le mouvement des autres. Si l'apport d'énergie devait être extérieur, les oscillateurs pourraient toujours s'influencer entre eux mais seraient surtout influencés par la sollicitation extérieure. Cela se rapprocherait alors plus d'un phénomène de résonance plutôt que de la synchronisation. La différence entre résonance et synchronisation réside dans le type d'oscillateurs concernés. La résonance ne concerne que des oscillateurs linéaires là où la synchronisation a besoin d'oscillateurs auto-entretenus et donc non-linéaires.

Couplage : L'importance du couplage est évidente car en l'absence de celui-ci, il n'y a aucun moyen pour un oscillateur de transmettre de l'information et d'influencer un autre oscillateur. Il est cependant important que les oscillateurs restent relativement indépendants les uns des autres. En effet, un couplage trop important reviendrait à créer un grand système unifié. Le couplage peut prendre plusieurs formes. Les exemples les plus souvent cités sont le cas de deux pendules accrochés à une corde ou celui de deux métronomes posés sur une planche, elle-même posée sur des rouleaux et libre de se déplacer parallèlement aux pendules des métronomes. Un couplage fort reviendrait à remplacer la corde par une barre

rigidement fixée aux pendules ou, dans l'autre exemple, relier directement les pendules des métronomes par une tige.

La différence de fréquences : La différence de fréquences correspond à la différence entre les fréquences naturelles des oscillateurs. Plus cette différence est petite, plus il est simple pour des oscillateurs de se synchroniser. L'ensemble des différences de fréquences permettant une synchronisation sont souvent rassemblés en une zone de synchronisation également appelée lock-in range dont l'étendue dépend de la force de couplage entre les oscillateurs. Au plus cette force est grande, au plus la zone est étendue. Cela peut être vérifié par l'analyse des cas extrêmes. Si la force de couplage est nulle, il n'y a pas de communication entre les oscillateurs et donc pas de synchronisation. Pour une force de couplage très importante, les oscillateurs sont considérés comme un seul et même système, la zone de synchronisation est donc infinie. Une fois que deux oscillateurs sont synchronisés, leur différence de fréquences effectives est nulle.

Déphasage : Une autre caractéristique importante des oscillateurs en cas de synchronisation est leur phase ou plutôt la différence de phase entre les deux autrement appelée déphasage. La phase est une valeur entre 0 et 2π [rad] permettant de décrire l'état exact de l'oscillateur. Lors de la synchronisation de deux oscillateurs, deux cas de figure sont possibles.

- Oscillations en phase : Le premier cas est celui où le déphasage est minimal entre les oscillateurs. Ceux-ci sont constamment dans un état similaire et atteignent leurs maximums et minimums en même temps.
- Oscillations en opposition de phase : L'autre cas est la situation inverse. Le déphasage est maximal et lorsqu'un oscillateur atteint son maximum, l'autre atteint son minimum. Ce cas de figure est en général instable et peu observé dans la réalité.

Il est à noter cependant que le déphasage n'est jamais parfaitement nul ou égal à π mais peut en être très proche.

Dans le cadre de ce travail, seul un oscillateur est dit auto-entretenu, le piéton. Celui-ci est donc capable de se synchroniser avec le mouvement de la passerelle. Ce cas de synchronisation ne correspond pas exactement au phénomène décrit ci-dessus. Le piéton, en tant qu'oscillateur auto-entretenu, est capable de se synchroniser sur le mouvement de la passerelle mais il en est également le moteur. Le comportement observé est alors une combinaison d'un phénomène de synchronisation d'un oscillateur sur un autre mais également d'un phénomène d'entraînement du second par le premier. Cela se traduit par un alignement de la fréquence du piéton sur celle de la passerelle mais avec un déphasage de $\frac{\pi}{2}$. Ce déphasage est le même que dans le cas de la résonance d'un oscillateur linéaire avec une sollicitation périodique. Ce déphasage maximise le transfert d'énergie de la sollicitation vers l'oscillateur linéaire. En effet, en prenant l'équation de la dynamique soumise à une sollicitation harmonique et en la multipliant par la vitesse, il est possible de rapporter chaque terme à un type d'énergie.

$$\dot{x}(m\ddot{x} + c\dot{x} + kx) = (F \sin \omega t)\dot{x} \quad (1.5)$$

Où

- $m\dot{x}\ddot{x} = \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right)'$ et $kx\dot{x} = \left(\frac{1}{2}kx^2\right)'$ correspondent respectivement aux dérivées de l'énergie cinétique et potentielle, les deux étant des énergies récupérables.
- $\int c\dot{x}^2$ et $\int (F \sin \omega t)\dot{x}$ correspondent respectivement à l'énergie dissipée par et injectée dans le système.

Le déphasage de $\frac{\pi}{2}$ intervient dans la maximisation de cette énergie injectée. En interprétant le terme $F \sin \omega t$ comme un coefficient multipliant l'accélération du piéton, le déplacement de celui-ci suit aussi un comportement $A \sin \omega t$. En posant alors le déplacement de la structure $x = \cos \omega t$ étant déphasée de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à celui du piéton, la vitesse de la structure devient proportionnelle à $\sin \omega t$ et parfaitement en phase avec la sollicitation.

Le couplage entre les deux oscillateurs est la force de contact entre les pieds du piéton et le tablier de la passerelle. Ce couplage pourrait être considéré comme très rigide étant donné que le pied suit chaque déplacement du tablier. Cependant, le corps humain étant fait de multiples articulations, le couplage en est grandement atténué.

Dans le cas d'interactions piétons-structure, la synchronisation n'a été observée presque que dans le cas d'oscillations transversales du tablier. Cependant, même les cas les plus célèbres et les plus marquants n'ont pas mis en danger l'intégrité structurale des passerelles. En effet, une fois que l'amplitude des oscillations devient trop importante, les piétons s'arrêtent car ils ne sont plus capables de mettre un pied devant l'autre sans perdre l'équilibre. Cet arrêt des piétons empêche un développement plus important de l'amplitude de vibration. Une absence de risque structurel n'est tout de même pas une raison pour ne pas chercher à diminuer les effets ou les probabilités d'apparition de la synchronisation piéton-structure. Comme l'ont démontré les différents exemples présentés précédemment, des oscillations trop importantes du tablier sont, dans un premier temps, inconfortables puis deviennent dans un deuxième temps un facteur d'inquiétude pour les usagers si elles augmentent encore.

1.4. L'oscillateur auto-entretenu

Un oscillateur auto-entretenu est un type d'oscillateurs un peu particulier dans le sens où il n'a pas besoin d'être excité par un apport externe d'énergie pour osciller. Il possède en effet une source d'énergie interne qui lui permet d'osciller jusqu'à l'épuisement de cette source. C'est par exemple le cas d'un piéton qui marche. Dans ce cas, le mouvement de l'oscillateur a une fréquence et une amplitude constante. Ce mouvement peut être représenté graphiquement dans un plan de phase par un cycle limite. Ce cycle limite est le mouvement stationnaire vers lequel l'oscillateur va tendre après une période transitoire lorsqu'il subit de petites perturbations. Cela

signifie que le mouvement à long terme de l'oscillateur auto-entretenu est indépendant des conditions initiales.

1.4.1. L'oscillateur de Van der Pol

L'oscillateur de Van der Pol est un type bien connu d'oscillateurs auto-entretenus. Il fut présenté en 1920 par le physicien néerlandais Balthasar Van der Pol. C'est l'un des tout premiers oscillateurs non-linéaires. L'oscillateur de Van der Pol se présente sous la forme

$$\ddot{x} - \epsilon \omega_0 \dot{x}(1 - x^2) + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.6)$$

Où

- ϵ est un paramètre d'amortissement
- x est la variable étudiée
- ω_0 est la fréquence propre du système.

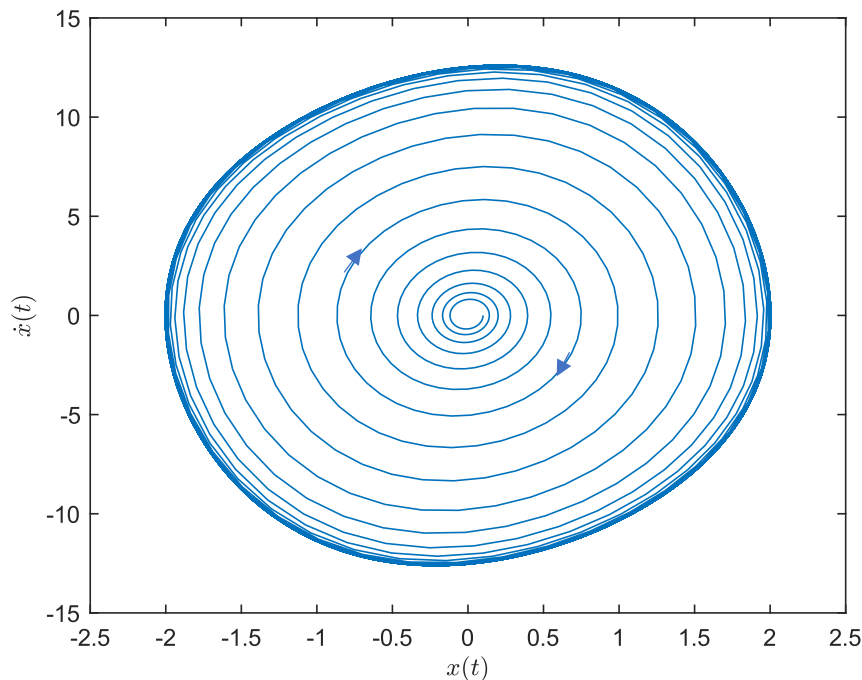


Figure 1 – Exemple d'oscillateur de Van der Pol ($\epsilon = 0.1107$ & $\omega_0 = 1 \left[\frac{rad}{s} \right]$)

Si $\epsilon = 0$, l'équation se résume à

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1.7)$$

Dont la solution est de la forme

$$x = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t. \quad (1.8)$$

Cette solution ne peut pas être considérée comme un cycle limite car elle dépendait des conditions initiales. Cette indépendance vis-à-vis des conditions initiales est apportée par l'équilibrage entre la source d'énergie interne et une dissipation

d'énergie soit respectivement le terme d'amortissement négatif $-\epsilon\omega_0\dot{x}$ et le terme d'amortissement positif $\epsilon\omega_0\dot{x}x^2$ qui grandit avec le déplacement $x^2(t)$.

Placé au membre de droite de l'équation (1.6), l'amortissement négatif agit comme une force extérieure proportionnelle à la vitesse du système et parfaitement en phase avec celle-ci lorsque $x^2 \ll 1$. Cela a pour conséquence d'augmenter l'amplitude de la réponse du système car celui-ci est parfaitement synchronisé avec la sollicitation.

Le terme d'amortissement positif quant à lui est non seulement proportionnel à la vitesse mais également au carré de la position. Cette combinaison fait que l'action des deux termes d'amortissement est toujours opposée mais n'atteint pas son maximum en même temps. Le cycle limite est donc le résultat de l'équilibre de ces deux termes qui se contrebalancent continuellement.

1.4.2. L'oscillateur de Rayleigh

L'oscillateur de Rayleigh est un autre type bien connu d'oscillateurs auto-entretenus. Sa formulation est similaire à celle de l'oscillateur de Van der Pol

$$\ddot{x} - \epsilon\omega_0\dot{x}(1 - \dot{x}^2) + \omega_0^2x = 0 \quad (1.9)$$

La seule différence avec l'oscillateur de Van der Pol réside dans le terme d'amortissement positif qui n'est plus proportionnel à la vitesse et au carré de la position mais au cube de la vitesse. Cela n'apporte pas beaucoup de différences sur le comportement de l'oscillateur mais bien sur l'amplitude du cycle limite. Pour des paramètres identiques, les oscillateurs de Van der Pol et Rayleigh, représentés respectivement par la Figure 1 et la Figure 2, ont des amplitudes qui varient du simple au double.

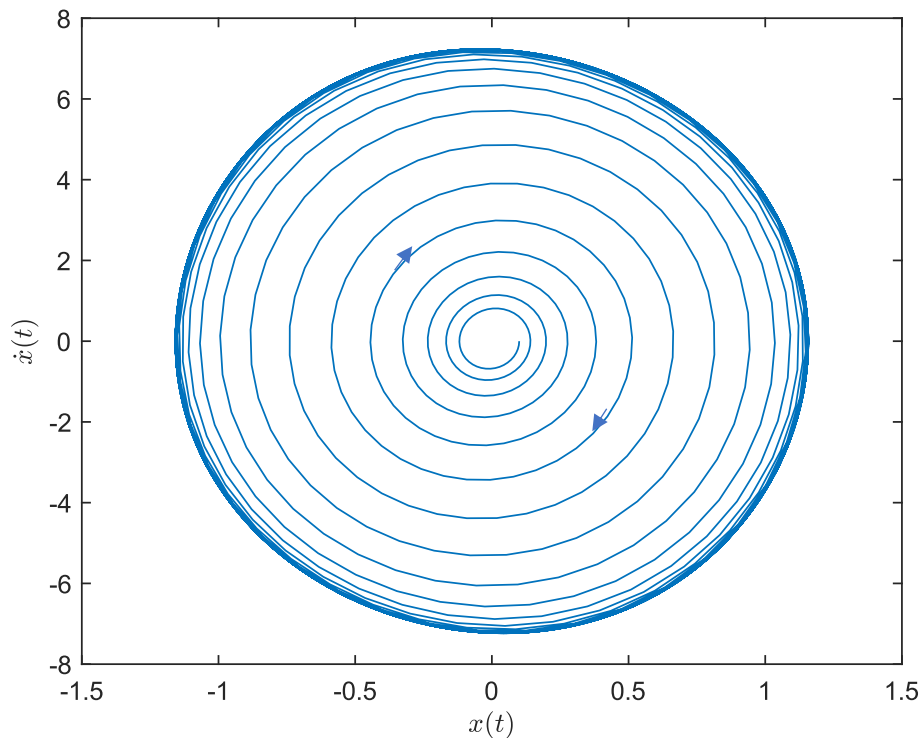


Figure 2 – Exemple d’oscillateur de Rayleigh ($\epsilon = 0.1107$ & $\omega_0 = 1 \left[\frac{rad}{s} \right]$)

1.5. Classification des interactions piéton-structure

L’analyse de l’impact de la marche des piétons sur une passerelle peut être réalisée avec différents niveaux de complexité et à différentes échelles. Afin d’apporter de la clarté dans les différents modèles existants, une classification de ceux-ci est proposée par Erlicher, S. et al. dans (5).

- Classe A Modèles les plus complexes reprenant une foule complète. Ces modèles prennent en compte aussi bien les interactions piéton-structure que les interactions piéton-piéton. La modélisation peut être aussi bien discrète (somme de piétons) que continue (foule=fluide (6)).
- Classe B Modélisation de foule avec interaction piéton-piéton mais pas piéton-structure. Certains modèles prennent en compte la présence d’obstacles et l’impact de ceux-ci sur la foule.
- Classe C Modélisation de l’interaction piéton-structure uniquement avec une densité de piétons suffisamment faible pour ne pas avoir d’influence les uns sur les autres. (7)
- Classe D Modélisation d’un piéton sur un sol dont le déplacement est connu et contrôlé (5). Le modèle est découplé car le piéton n’a pas d’influence sur la structure.

Classe E Modélisation de la marche sur sol rigide. Il n’y a évidemment plus de couplage possible. (8)

Tableau 2 – Classification des modèles piétons-structure

Les classes A et B s’intéressant à une foule complète, les modèles en faisant partie sont des modèles macroscopiques. Les autres modèles sont des modèles à l’échelle microscopique car ils se concentrent sur les piétons individuellement. Les modèles de classe A sont souvent une combinaison d’un modèle de classe B avec un modèle de classe C, lui-même construit à partir d’un modèle de classe D ou E.

Le modèle analysé dans le cadre de ce mémoire est un modèle de classe C construit à la base d’un modèle de classe E (8).

1.6. Recommandations du guide du Sétra

Le Sétra est un organisme public français fondé en 1968 et dissous/intégré en 2014 au Centre d’étude et d’expertise sur les risques, l’environnement, la mobilité et l’aménagement (CEREMA). Le but de cet organisme était de rassembler et de participer à des études afin de faire avancer les connaissances scientifiques et les méthodes de construction des infrastructures routières à une époque où les normes Eurocode n’existaient pas encore et que le secteur de la construction manquait d’uniformisation. Les résultats de ces travaux ont été régulièrement publiés dans des guides à l’intention des ingénieurs et maîtres d’œuvre. Les productions du Sétra n’ont jamais eu valeur de norme et servent maintenant de complément à celles des Eurocodes.

En 2006, le Sétra a publié un guide de recommandations pour la construction de passerelles piétonnes et la prise en compte des effets dynamiques. Cette publication et les travaux qui la composent ont fait suite à l’inauguration début des années 2000 des passerelles du Millenium à Londres et la passerelle Léopold-Sédar-Senghor à Paris. Ces inaugurations, suivies très vite de leurs fermetures temporaires, ont mis en évidence les lacunes des Eurocodes dans la prise en compte des effets dynamiques pour des structures relativement souples.

La recommandation principale du Sétra pour le dimensionnement des passerelles vis-à-vis des vibrations horizontales transversales est de limiter l’accélération latérale maximale de la structure à $0,1 \left[\frac{m}{s^2} \right]$. Bien que plusieurs gammes d’accélération limites aient été déterminées en fonction du niveau de confort exigé par le maître d’œuvre, la limite de $0,1 \left[\frac{m}{s^2} \right]$ est utilisée afin d’éviter tout risque de synchronisation.

Acceleration ranges	0	0.1	0.15	0.3	0.8
Range 1	Max				
Range 2		Mean			
Range 3			Min		
Range 4					

Figure 3 – Gammes d’accélération de confort limite en $\frac{m}{s^2}$ pour les vibrations horizontales (4)

En-dessous de cette limite, il est supposé que l’accélération est imperceptible car faisant partie de la classe de confort la plus élevée. Ce seuil a été déterminé par des tests réalisés sur les passerelles du Millenium et de Léopold-Sédar-Sengor. Les résultats des tests réalisés à Paris présentent des augmentations drastiques du niveau de synchronisation des piétons lorsque l’accélération latérale de la passerelle dépasse 0,1 à 0,15 $\left[\frac{m}{s^2}\right]$. Le niveau de synchronisation étant le ratio entre le nombre équivalent de piétons et le nombre réel de piétons présents sur la passerelle, il passe de 10% lorsque l’accélération est en dessous du seuil à entre 30% et 60% dans certains cas lorsque le seuil est dépassé. De la même manière, une fois le seuil atteint, l’accélération de la structure augmente rapidement, pouvant atteindre une valeur de 0,6 $\left[\frac{m}{s^2}\right]$.

Les tests réalisés à Londres ont également mesuré l’accélération de la structure ainsi que la force appliquée par un petit groupe de piétons (6 à 10 personnes). Les résultats de cette campagne de tests ont permis d’identifier un seuil d’accélération similaire aux tests de Paris amenant une augmentation similaire de l’accélération ainsi qu’une augmentation de près de 60% de la force appliquée (de 100 [N] à 160 [N]).

L’accélération de la passerelle est calculée en fonction de ses caractéristiques géométriques, de sa classe d’utilisation et de la fréquence propre de ses premiers modes de vibration.

La classe d’utilisation est déterminée par le maître d’ouvrage et traduit le type de trafic attendu sur la passerelle. Il existe 4 classes différentes.

- La classe IV correspond à un trafic très peu dense.
- La classe III correspond à un trafic normal pouvant occasionnellement être traversée par un groupe plus important.
- Les passerelles de classe II sont placées dans des centres urbains ou d’autres zones très fréquentées pouvant être occasionnellement chargées sur l’entièreté de sa portée.
- Les passerelles de classe I sont régulièrement sujettes à des foules très denses comme lors de grands événements sportifs ou culturels.

La classe de la structure a une influence sur la densité de foule considérée dans les calculs et également sur les formules utilisées. Cette densité de foule permet de calculer la fréquence naturelle des premiers modes de la passerelle chargée. Ces fréquences ainsi que les fréquences à vide des mêmes modes sont comparées avec les fréquences de marche classiques des piétons afin d'estimer le risque que la passerelle et la foule ne se synchronisent.

Frequency	0	0.3	0.5	1.1	1.3	2.5
Range 1						
Range 2						
Range 3						
Range 4						

Figure 4 – Gammes de fréquences en Hz des vibrations horizontales (4)

La gamme 1 correspond à des fréquences de marche plausibles et donc à un risque élevé de synchronisation. Les passerelles dans la gamme de fréquences 2 ne sont pas à risque directement car plus éloignées de la fréquence de marche moyenne des piétons. Cependant, leur fréquence pourrait s'en rapprocher pour une masse critique de piétons importante.

La gamme 3 ne conduit à des calculs que pour les passerelles de classe I & II. Les calculs considèrent la possibilité d'une synchronisation de la passerelle avec la seconde harmonique de la décomposition en série de Fourier de la force appliquée par le piéton.

La gamme 4 est considérée comme négligeable et ne requiert pas de calculs.

Une fois la gamme de fréquences identifiée, il est possible de déterminer le cas de chargement à vérifier pour la passerelle comme présenté à la Figure 5. Celui-ci dépend de la classe de la structure ainsi que de la gamme de fréquence. De ce cas de chargement dépend la formule utilisée pour calculer le chargement par m^2 de tablier.

		Load cases to select for acceleration checks		
Traffic	Class	Natural frequency range		
		1	2	3
Sparse	III	Case 1	Nil	Nil
Dense	II		Case 1	Case 3
Very dense	I	Case 2	Case 2	Case 3

Figure 5 – Cas de chargement à vérifier (4)

Le cas 1 considère une foule disparate ou dense en fonction de la classe de la structure. Cette foule est transformée en un nombre équivalent de piétons marchant tous en phase et à la même fréquence ayant le même impact que des piétons plus nombreux ($d = 0,5$ ou $0,8$ piétons/m² respectivement pour la classe III et II) mais non synchronisés entre eux ni avec la structure. Pour une foule peu dense, le nombre équivalent est donné par la formule

$$N_{eq} = 10,8\sqrt{\xi n} \quad (1.10)$$

L'équation (1.10) est utilisée ensuite pour calculer le chargement en N/m² appliqué sur l'ensemble du tablier par les piétons.

$$F_y = d * (35N) * \cos(2\pi f_v t) * 10,8 \sqrt{\frac{\xi}{n}} \psi \quad (1.11)$$

Où

- 35N est l'amplitude de la première harmonique de la force transversale exercée par un piéton
- f_v est la fréquence naturelle de la passerelle,
- t est le temps,
- ξ est le taux d'amortissement de la structure
- ψ est un terme prenant en compte le risque de synchronisation dont la valeur est représentée à la Figure 6.

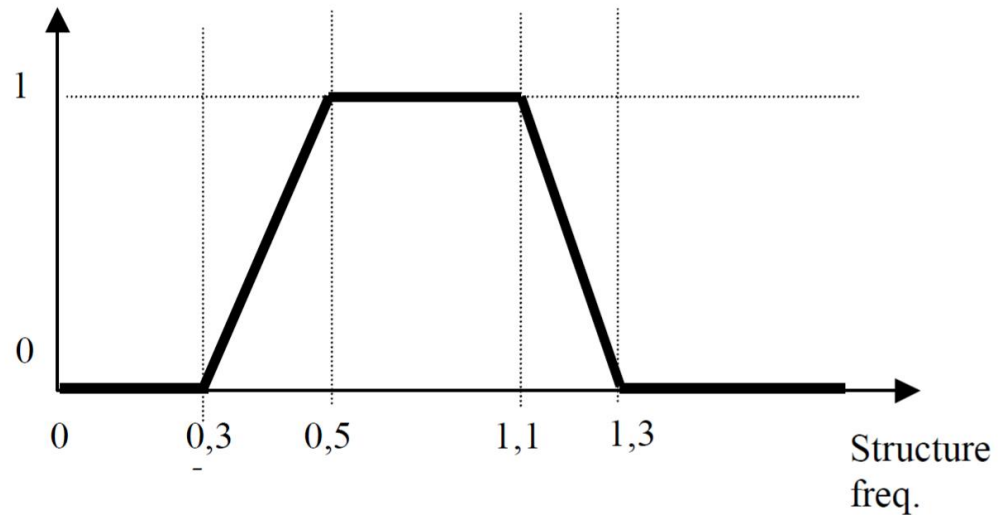


Figure 6 – Valeur du coefficient ψ en fonction de la fréquence de la structure en Hz (4)

Le cas 2 ne concerne que les passerelles de classe I. Celui-ci considère une foule très dense ($d = 1$ piéton/m²). Dans ces conditions, tous les piétons sont forcés de marcher à une même fréquence mais ont des phases toujours aléatoires. La foule est donc aussi transformée en un nombre équivalent de piétons mais selon une formule différente.

$$N_{eq} = 1,85\sqrt{n} \quad (1.12)$$

Le chargement dynamique à appliquer est donc donné par l'équation,

$$1 * (35N) * \cos(2\pi f_v t) * 1.85 \sqrt{\frac{1}{n}} \psi. \quad (1.13)$$

Le 3^e cas de chargement est utilisé pour les passerelles de la gamme de fréquences 3. Les calculs se basent donc sur la 2^e harmonique de la sollicitation, dont l'amplitude est plus faible que celle de la première. La force maximale exercée par un piéton est désormais de 7N au lieu de 35N. Outre ce changement et l'utilisation d'un autre paramètre ψ , les équations sont les mêmes que celles utilisées pour les autres cas. Pour les passerelles de classe I, l'équation du cas 2 est utilisée et pour les passerelles de classe II l'équation du cas 1. La valeur du coefficient ψ est représentée à la Figure 7.

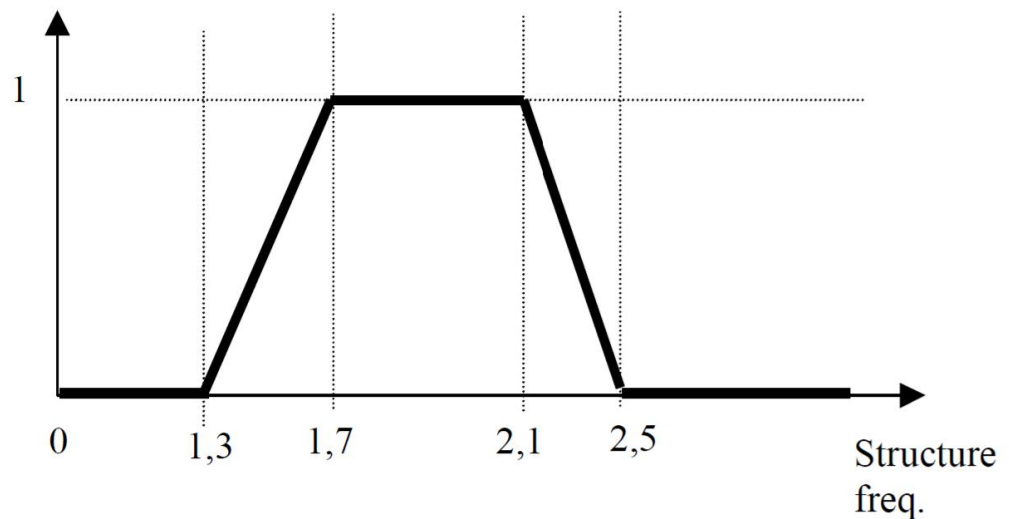


Figure 7 – Valeur du coefficient ψ pour le cas de chargement 3 (4)

Une fois le chargement dynamique obtenu, l'accélération stationnaire, après la période transitoire, peut être calculée via l'équation (1.14).

$$\ddot{q}_i(t) = \frac{1}{2\xi_i} \frac{\phi_i F_0}{m_i} \cos(\omega_i t) \quad (1.14)$$

Cette équation correspond à la réponse quasi-statique multipliée par le coefficient d'amplification dynamique $\frac{1}{2\xi_i}$. La limite de $0,1 \left[\frac{m}{s^2} \right]$ peut donc être vérifiée en prenant le maximum de l'équation (1.14).

1.7. Objectifs de ce travail

Plusieurs critiques peuvent être adressées aux recommandations du Setra. Premièrement, le critère sur l'accélération de $0,1 \text{ [m/s}^2\text{]}$ est assez brut. Ce critère a été déterminé sur base des incidents du Millénium bridge et de la passerelle de Léopold-Sédar-Sengor. Ces passerelles ayant des caractéristiques très similaires, l'universalité de ce critère est très discutable. Il est également possible que l'accélération ne soit pas le seul voire pas du tout un critère sur l'apparition de synchronisation piéton-structure.

Deuxièmement, la zone de fréquences jugées à risque est assez large. La limite supérieure valant plus du double de la limite inférieure, les accélérations correspondantes pour de mêmes amplitudes de déplacement ont une relation du simple au quadruple. Cela signifie que deux passerelles ayant des caractéristiques similaires, à l'exception de leurs fréquences, seront considérées à risque de la même manière alors même que l'accélération de l'une sera bien supérieure à celle de l'autre. Par ailleurs, dans la suite de la méthode de calcul présentée dans le guide, la fréquence de la structure et par extension celle du piéton ne sont plus réellement prises en compte.

Le premier objectif de ce travail est donc de vérifier que le critère de synchronisation décrit dans le guide du Sétra soit valable pour des passerelles ayant

des caractéristiques différentes de celles de Léopold-Sédar-Sengor et du Millenium bridge. Limitée par le temps et les moyens, cette vérification est effectuée uniquement via des simulations numériques.

L'objectif final de ce travail est, en repartant d'un modèle de sollicitation, d'essayer de déterminer/retrouver des conditions de synchronisation et de comparer l'accélération obtenue avec celle calculée par la méthode du Sétra. Cet objectif a été poursuivi à l'aide de modèles mathématiques présentés au Chapitre 2. Ces modèles ne traitent malheureusement pas certaines autres critiques pouvant être adressées aux recommandations du Sétra comme l'utilisation dans les calculs d'un nombre équivalent de piétons qui, bien que très utile dans les développements mathématiques, est très difficilement définissable et dont les différentes méthodes existantes peuvent donner des résultats très différents les uns des autres. Ces lacunes nécessitent un modèle d'interactions piéton-piéton pour être comblées.

2. Modèle mathématique

Lors de l'analyse des sollicitations des piétons sur une passerelle, il existe plusieurs possibilités pour modéliser ces sollicitations. Soit la force appliquée au tablier est modélisée par une force périodique plus ou moins complexe, soit le piéton est représenté par un modèle masse-ressort afin de prendre en compte également l'impact des mouvements de la passerelle sur le piéton. L'objectif de ce travail étant d'analyser la synchronisation piéton-structure, c'est cette deuxième solution qui a été choisie.

Le modèle utilisé pour modéliser les piétons lors de ce travail est le modèle présenté dans (5). Ce modèle est présenté comme un modèle hybride d'oscillateurs auto-entretenus de Van der Pol et Rayleigh. Il a été développé pour caractériser la marche d'un piéton sur sol rigide.

$$\ddot{u} - 2\mu\omega_0\dot{u}\left(1 - \beta u^2 - \frac{\gamma}{\omega_0}\dot{u}u - \frac{\delta}{\omega_0^2}\dot{u}^2\right) + \omega_0^2 u = 0 \quad (2.1)$$

Avec,

- $u(t), \dot{u}(t)$ & $\ddot{u}(t)$ respectivement le déplacement, la vitesse et l'accélération latérale du centre de gravité du piéton,
- ω_0 la fréquence angulaire de marche du piéton.

Les paramètres μ, β, γ et δ caractérisent l'amplitude de balancement du piéton. Ces paramètres sont présents dans quatre termes différents. Le premier, uniquement proportionnel à μ , est un terme d'amortissement négatif. Deux des trois suivants sont des termes d'amortissement positif proportionnels à $\mu\beta$ et $\mu\delta$. Le troisième, proportionnel à $\mu\gamma$, est également un terme d'amortissement mais peut être aussi bien positif que négatif à cause du produit $\dot{u}u$. Il est possible en annulant certains de ces paramètres de retomber soit sur un oscillateur de Van der Pol ($\gamma = \delta = 0$) soit un oscillateur de Rayleigh ($\beta = \gamma = 0$). L'ensemble des termes étant proportionnels à la masse du piéton, celle-ci a été simplifiée dans le modèle.

Les valeurs des paramètres β, γ et δ généralement utilisées dans la suite de ce document sont présentées dans le Tableau 3. Ces valeurs sont issues de (8) et caractérisent un piéton en particulier analysé par l'équipe de recherche. D'autres valeurs de ces paramètres y sont présentées.

Paramètre	Valeur
$\beta \left[\frac{1}{m^2} \right]$	4785
$\gamma \left[\frac{1}{m^2} \right]$	7416
$\delta \left[\frac{1}{m^2} \right]$	3426

Tableau 3 – Valeurs généralement utilisées dans la suite de ce document

2.1. Couplage avec la structure

Le modèle d paragraphe précédent, déterminé sur sol rigide, peut aisément être couplé avec une structure. Pour ce faire, il suffit de placer au membre de droite du modèle de piéton l'accélération subie par celui-ci, c'est-à-dire l'accélération de la structure à la position du piéton. La valeur de l'accélération est obtenue en multipliant l'accélération modale par la valeur du mode à la position du piéton ($-\phi_i(x)\ddot{q}$).

De la même manière, la structure, modélisée par l'équation de la dynamique, peut être couplée au modèle du piéton en utilisant le principe d'action-réaction. Cependant, le modèle présenté dans (5) ayant été développé sur sol rigide, le déplacement u ne représente plus le déplacement complet du piéton mais uniquement son déplacement relatif au tablier de la structure sur laquelle il marche. Le déplacement absolu du piéton s'écrit alors $\phi_i q + u$ et la force totale subie par le piéton

$$m_0(\phi_i(x)\ddot{q} + \ddot{u}) = m_0 \left(2\mu\omega_0\dot{u} \left(1 - \beta u^2 - \frac{\gamma}{\omega_0}\dot{u}u - \frac{\delta}{\omega_0^2}\dot{u}^2 \right) - \omega_0^2 u \right) \quad (2.2)$$

Où

- m_0 est la masse du piéton ;
- ϕ_i est le i^e mode de déplacement de la structure ;
- x est la position du piéton sur la structure ;
- $q(t)$, $\dot{q}(t)$ & $\ddot{q}(t)$ sont respectivement le déplacement, la vitesse et l'accélération latérale de la structure.

Cette force est également subie par la structure et son impact dépend également de la position du piéton et de la forme du mode. Le modèle couplé complet s'écrit donc,

$$\begin{cases} \ddot{u} - 2\mu\omega_0\dot{u} \left(1 - \beta u^2 - \frac{\gamma}{\omega_0}\dot{u}u - \frac{\delta}{\omega_0^2}\dot{u}^2 \right) + \omega_0^2 u = -\phi_i(x)\ddot{q} \\ m_i^*\ddot{q} + c_i\dot{q} + k_i q = -\phi_i(x)m_0(\phi_i(x)\ddot{q} + \ddot{u}) \end{cases} \quad (2.3)$$

Où

- m_i^* est la masse de la structure dans la base modale ;
- c_i est l'amortissement de la structure dans la base modale ;
- k_i est la rigidité de la structure dans la base modale.

Dans un premier temps, le système couplé sera analysé en considérant le mode $\phi(x) = 1$. Ce cas de figure est équivalent à celui d'un piéton marchant sur un tapis roulant placé au ventre du mode. Par la suite, la forme du mode sera prise en compte afin de se rapprocher d'une situation réelle. Dans le cadre de ce travail, un seul mode sera considéré à la fois afin de ne pas complexifier outre mesure les calculs.

2.2. Modèle sans prise en compte de la forme du mode

2.2.1. Mise sous forme adimensionnelle

La mise sous forme adimensionnelle des équations permet de faciliter la comparaison entre des cas dont les caractéristiques sont différentes mais dont les rapports entre elles sont comparables. Tout d'abord, un temps adimensionnel $\tau = \omega_0 t$ est défini. Les dérivées temporelles deviennent

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \omega_0 \frac{d}{d\tau} \quad (2.4)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{d}{dt} \frac{d}{dt} = \omega_0 \frac{d}{d\tau} \omega_0 \frac{d}{d\tau} = \omega_0^2 \frac{d^2}{d\tau^2} \quad (2.5)$$

Les dérivées selon τ sont notées « ' ».

La deuxième équation est modifiée pour faire apparaître la fréquence angulaire et le taux d'amortissement de la structure qui sont des grandeurs plus simples à déterminer que l'amortissement c .

$$\omega = \sqrt{\frac{k_i}{m_i^*}} \quad (2.6)$$

$$\xi = \frac{c_i}{2\sqrt{k_i m_i^*}} \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} \omega_0^2 u'' - 2\mu\omega_0^2 u' \left(1 - \beta u^2 - \frac{\gamma}{\omega_0} \omega_0 u' u - \frac{\delta}{\omega_0^2} \omega_0^2 u'^2\right) + \omega_0^2 u = -\omega_0^2 q'' \\ \omega_0^2 q'' + 2\omega\xi\omega_0 q' + \omega^2 q = -M\omega_0^2 (q'' + u'') \end{cases} \quad (2.8)$$

Différents termes adimensionnels sont introduits comme :

- Les déplacements adimensionnels $U(\tau) = \frac{u(t(\tau))}{u^*}$ & $Q(\tau) = \frac{q(t(\tau))}{q^*}$;
- Le rapport entre la fréquence de la structure et la fréquence de marche du piéton $\tilde{\omega} = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1}{\Omega}$;
- Le rapport entre la masse du piéton et la masse de la structure $M = \frac{m_0}{m_i^*}$.

$$\begin{cases} u^* U'' - 2\mu u^* U' (1 - \beta u^{*2} U^2 - \gamma u^{*2} U' U - \delta u^{*2} U'^2) + u^* U = -q^* Q'' \\ q^* Q'' + 2\tilde{\omega}\xi q^* Q' + \tilde{\omega}^2 q^* Q = -M(q^* Q'' + u^* U'') \end{cases} \quad (2.9)$$

Enfin, le système est simplifié en considérant que le rapport entre le déplacement caractéristique de la structure et le déplacement caractéristique du piéton est égal à un petit nombre $\varepsilon = 0.025$.

$$\frac{q^*}{u^*} = \varepsilon \quad (2.10)$$

Cette hypothèse se justifie par le fait que le piéton et la structure subissent la même force mais ont des inerties totalement différentes. Pour une même force appliquée,

la structure se déplacera beaucoup moins que le piéton. Les valeurs de ces déplacements caractéristiques seront discutées plus tard.

$$\begin{cases} U'' - 2\mu U'(1 - \beta u^{*2}U^2 - \gamma u^{*2}U'U - \delta u^{*2}U'^2) + U = -\varepsilon Q'' \\ Q'' + 2\tilde{\omega}\xi Q' + \tilde{\omega}^2 Q = -M\left(Q'' + \frac{U''}{\varepsilon}\right) \end{cases} \quad (2.11)$$

2.2.2. Approche multi-échelles

Seule l'enveloppe de la réponse ayant un intérêt dans ce travail, une approche multi-échelles est utilisée afin de déduire du système couplé des équations décrivant la dynamique lente du système. Il s'agit donc de définir cette échelle de temps lent

$$T = \varepsilon\tau \quad (2.12)$$

Dorénavant, les déplacements dépendent donc aussi de cette échelle de temps

$$U(\tau) = U(\tau, T) \quad (2.13)$$

$$Q(\tau) = Q(\tau, T) \quad (2.14)$$

Et les dérivées deviennent

$$\frac{d}{d\tau} = \partial_\tau + \varepsilon\partial_T \quad (2.15)$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} = \partial_\tau^2 + 2\varepsilon\partial_\tau\partial_T + \varepsilon^2\partial_T^2 \quad (2.16)$$

Le risque de synchronisation piéton-structure étant d'autant plus important que leurs fréquences propres sont proches, ce rapport est considéré proche de 1 et est exprimé sous la forme

$$\tilde{\omega} = 1 + \varepsilon\eta \quad (2.17)$$

Avec $\eta \sim 1$ un paramètre de « detuning ».

De la même manière, les autres paramètres du problème sont exprimés sous la forme d'un paramètre de l'ordre de 1 multiplié par un petit nombre.

- Le rapport de masse $M = \varepsilon^2 M^*$;
- Les amortissements $\mu = \varepsilon\mu^*$ & $\xi = \varepsilon\xi^*$.

Étant donnée la valeur petite de ε , seuls les termes d'ordre ε^0 & ε^1 sont conservés. Finalement, le système devient

$$\begin{cases} U'' - 2\varepsilon\mu^*U'(1 - \beta u^{*2}U^2 - \gamma u^{*2}U'U - \delta u^{*2}U'^2) + U = -\varepsilon Q'' \\ Q'' + 2(1 + \varepsilon\eta)\varepsilon\xi^*Q' + (1 + 2\varepsilon\eta)Q = -\varepsilon M^*U'' \end{cases} \quad (2.18)$$

Le système est ensuite résolu par la méthode des échelles multiples en utilisant les ansatz suivants

$$U(\tau, T; \varepsilon) = U_0(\tau, T) + \varepsilon U_1(\tau, T) + O(\varepsilon^2) \quad (2.19)$$

$$Q(\tau, T; \varepsilon) = Q_0(\tau, T) + \varepsilon Q_1(\tau, T) + O(\varepsilon^2) \quad (2.20)$$

Les développements sont présentés en Annexe A. Après mise en évidence des termes en ε^0 des équations (A.4) et (A.5) il vient

$$\partial_\tau^2 U_0 + U_0 = 0 \quad (2.21)$$

$$\partial_\tau^2 Q_0 + Q_0 = 0 \quad (2.22)$$

La solution de ces équations peut s'écrire sous la forme

$$U_0 = R_u(T) \cos(\tau + \varphi(T)) \quad (2.23)$$

$$Q_0 = R_q(T) \cos(\tau + \varphi(T) + \psi(T)) \quad (2.24)$$

Avec les amplitudes R_u & R_q la phase φ ainsi que la phase relative ψ . Ces solutions peuvent être introduites dans les équations aux dérivées partielles correspondant à l'ordre ε^1 .

$$\partial_\tau^2 U_1 + U_1 = -\partial_\tau^2 Q_0 - 2\partial_{\tau T}^2 U_0 + 2\mu^* \partial_\tau U_0 (1 - \beta u^{*2} U_0^2 - \gamma u^{*2} U_0 \partial_\tau U_0 - \delta (u^* \partial_\tau U_0)^2) \quad (2.25)$$

$$\partial_\tau^2 Q_1 + Q_1 = -M^* \partial_\tau^2 U_0 - 2\partial_{\tau T}^2 Q_0 - 2\xi^* \partial_\tau Q_0 - 2\eta Q_0 \quad (2.26)$$

L'élimination des termes séculaires permet de mettre en évidence les dérivées selon T des amplitudes et des phases.

$$\begin{cases} R'_u = \mu^* R_u - \mu^* \frac{\beta}{4} u^{*2} R_u^3 - \frac{3\mu^* \delta}{4} u^{*2} R_u^3 + \frac{R_q}{2} \sin \psi \\ \varphi' = \mu^* \frac{\gamma}{4} u^{*2} R_u^2 - \frac{R_q}{R_u} \cos \psi \\ R'_q = -\frac{M^*}{2} R_u \sin \psi - \xi^* R_q \\ \psi' = \eta - \mu^* \frac{\gamma}{4} u^{*2} R_u^2 - \left(M^* \frac{R_u}{R_q} - \frac{R_q}{R_u} \right) \frac{\cos \psi}{2} \end{cases} \quad (2.27)$$

Bien que 4 équations composent ce système, seule 3 variables sont présentes dans les équations 1, 3 et 4. Par conséquent, seules ces équations sont nécessaires. La deuxième équation est laissée sur le côté pour l'instant.

Dans le cas actuel d'un mode de déplacement $\phi = 1$, l'hypothèse d'une solution stationnaire peut être posée. Cette hypothèse permet d'annuler les dérivées temporelles et de trouver une solution analytique aux équations ci-dessus.

Des équations de R'_u & R'_q il est possible de retirer la relation

$$2\mu^* R_u - \mu^* \frac{\beta}{2} u^{*2} R_u^3 - \frac{3\mu^* \delta}{2} u^{*2} R_u^3 = -R_q \sin \psi = \frac{M^*}{2\xi^*} R_u \sin^2 \psi \quad (2.28)$$

Qui permet de trouver

$$R_u = \frac{1}{u^*} \sqrt{\frac{4 - \frac{M^*}{\xi^* \mu^*} \sin^2 \psi}{\beta + 3\delta}} \quad (2.29)$$

$$R_q = \frac{M^*}{2u^*\xi^*} |\sin \psi| \sqrt{\frac{4 - \frac{M^*}{\xi^*\mu^*} \sin^2 \psi}{\beta + 3\delta}} \quad (2.30)$$

Une amplitude étant toujours positive, seule la valeur absolue du sinus est conservée.

Afin de simplifier les expressions, la valeur du déplacement caractéristique du piéton peut être choisie de telle sorte qu'il se simplifie avec le dénominateur de la racine.

$$u^* = \frac{1}{\sqrt{\beta + 3\delta}} \quad (2.31)$$

Avec les valeurs du Tableau 3 $u^* = 0,0081$.

Cela donne,

$$R_u = \sqrt{4 - \frac{M^*}{\xi^*\mu^*} \sin^2 \psi} = 2 \sqrt{1 - \frac{M^*}{4\xi^*\mu^*} \sin^2 \psi} \quad (2.32)$$

$$R_q = \frac{M^*}{\xi^*} |\sin \psi| \sqrt{1 - \frac{M^*}{4\xi^*\mu^*} \sin^2 \psi} \quad (2.33)$$

Ces équations permettent de déterminer l'amplitude de la réponse sur le cycle limite. Des équations (2.32) et (2.33) peut être tirée une condition sur l'existence d'une solution stationnaire. Le contenu d'une racine carrée devant rester positif, la condition suivante peut être établie

$$\frac{M^*}{4\xi^*\mu^*} \leq 1 \Leftrightarrow M^* \leq 4\xi^*\mu^* \quad (2.34)$$

En reprenant les paramètres de base du problème, la relation s'écrit

$$m_0 \leq 4\xi\mu m^* \quad (2.35)$$

Cette relation stipule simplement que pour qu'une solution lente stationnaire existe, il faut que la masse du piéton ou de la foule soit inférieure au produit de la masse modale, du taux d'amortissement de la structure et du paramètre d'amortissement du piéton. Dans le cas contraire, la solution sera tout au plus quasi-stationnaire.

Les équations (2.32) et (2.33) montrent que lorsqu'une solution périodique existe (une solution lente stationnaire), ψ tends vers ψ_∞ et les amplitudes de la vibration de la structure R_q et du balancement du piéton R_u dépendent directement de la phase stationnaire ψ_∞ . Cette dépendance est représentée à la Figure 8 pour différentes valeurs du rapport $\frac{M^*}{4\xi^*\mu^*}$. Ces rapports correspondent à une passerelle normale (0,1), une passerelle très peu amortie (0,3 et 0,7) et une passerelle suspendue (1).

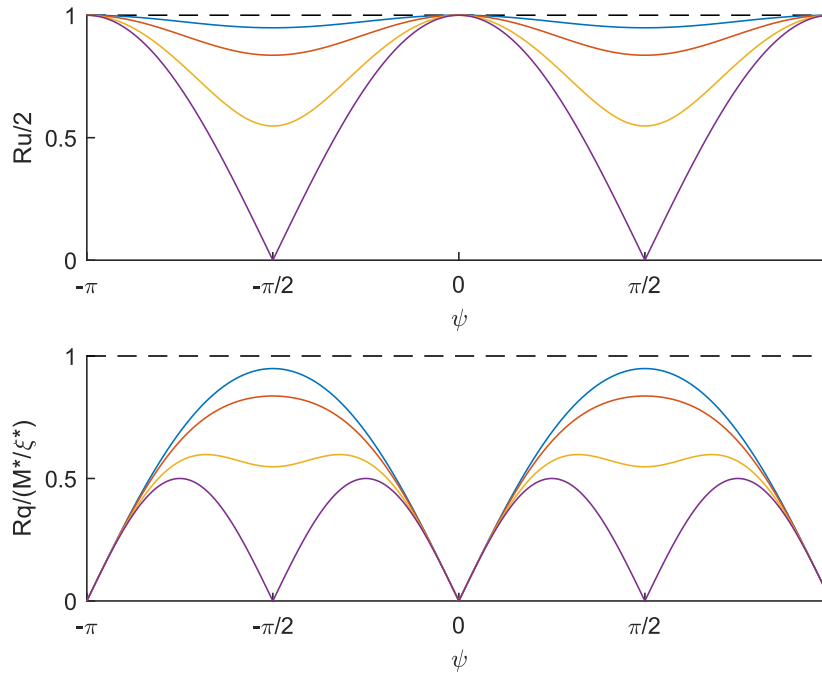


Figure 8 – Comportement des équations (2.32) et (2.33) en fonction de la phase relative pour différentes valeurs du rapport $\frac{M^*}{4\xi^*\mu^*}$ (0,1 ; 0,3 ; 0,7 ; 1)

La Figure 8 montre que, en fonction du rapport $\frac{M^*}{4\xi^*\mu^*}$, Rq possède 1 ou 3 optimums. Ceux-ci peuvent être trouvés en annulant la dérivée de l'équation (2.33).

$$\left(\sin \psi \sqrt{1 - \frac{M^*}{4\xi^*\mu^*} \sin^2 \psi} \right)' = 0 \quad (2.36)$$

En posant $\alpha = \frac{M^*}{4\xi^*\mu^*}$, la dérivée s'exprime,

$$\cos \psi \sqrt{1 - \alpha \sin^2 \psi} + \frac{\sin \psi (-2\alpha) \sin \psi \cos \psi}{2\sqrt{1 - \alpha \sin^2 \psi}} = 0 \quad (2.37)$$

$$\cos \psi - 2\alpha \sin^2 \psi \cos \psi = 0 \quad (2.38)$$

Dont les solutions sont $\cos \psi = 0$ (soit $\psi = \frac{\pi}{2}$) et $\frac{1}{2\alpha} = \sin^2 \psi$. Cette deuxième solution est de multiplicité 2 et n'est valable que lorsque $\frac{1}{2\alpha} < 1$ soit $\frac{1}{2} < \frac{M^*}{4\xi^*\mu^*}$.

La seule inconnue restante étant la phase relative, les équations (2.32) et (2.33) sont implémentées dans l'équation de phase relative (2.27) afin d'en trouver les racines en utilisant le rapport des amplitudes.

$$\frac{Rq}{Ru} = -\frac{M^*}{2\xi^*} \sin \psi \quad (2.39)$$

Après quelques développements, il est possible de réécrire l'équation de phase en fonction de la cotangente de la phase relative ψ .

$$\xi^* \cot^3 \psi + \left(\eta - \mu^* \frac{\gamma}{4} u^{*2} R_u^2 \right) \cot^2 \psi + \left(\xi^* - \frac{M^*}{4\xi^*} \right) \cot \psi + \eta - \mu^* \frac{\gamma}{4} u^{*2} R_u^2 = 0 \quad (2.40)$$

Et après développement du terme R_u^2 ,

$$\begin{aligned} & \xi^* \cot^5 \psi + (\eta - \mu^* \gamma u^{*2}) \cot^4 \psi + \left(2\xi^* - \frac{M^*}{4\xi^*} \right) \cot^3 \psi \\ & + \left(2\eta - \mu^* \gamma u^{*2} \left(2 - \frac{M^*}{4\mu^* \xi^*} \right) \right) \cot^2 \psi + \left(\xi^* - \frac{M^*}{4\xi^*} \right) \cot \psi \\ & + \eta - \mu^* \gamma u^{*2} \left(1 - \frac{M^*}{4\mu^* \xi^*} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

Les (ou la) racines réelles de ce polynôme étant trop longues et compliquées à calculer, elles sont obtenues numériquement grâce à la fonction roots de matlab.

L'analyse de ces résultats est présentée aux sections 2.2.4.1 et 2.2.4.2.

2.2.3. Méthode de résolution numérique

Plusieurs modèles numériques ont été développés jusqu'à ce stade.

Le système (2.3) traduit le problème initial, alors que (2.27) en est une version en dynamique lente (sans prise en compte de la forme du mode). Lorsqu'ils ne peuvent être résolus analytiquement, ces différents modèles sont résolus avec le solveur ode45 de matlab. Ce solveur utilise une méthode de Runge-Kutta 45 pour résoudre des équations différentielles ordinaires du premier ordre.

Cette limitation au premier ordre demande certaines adaptations au modèle de base. Celui-ci passe alors d'un système de 2 équations différentielles ordinaires du deuxième ordre à quatre équations différentielles ordinaires du premier ordre.

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_2 \\ \dot{u}_2 - 2\mu\omega_0 u_2 \left(1 - \beta u_1^2 - \frac{\gamma}{\omega_0} u_2 u_1 - \frac{\delta}{\omega_0^2} u_2^2 \right) + \omega_0^2 u_1 = -\dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 = q_2 \\ \dot{q}_2 + 2\omega\xi q_2 + \omega^2 q_1 = -M(\dot{q}_2 + \dot{u}_2) \end{cases} \quad (2.42)$$

Les équations (2.42(2.42)b) & (2.42d) sont mises sous forme matricielle afin d'être facilement résolues par le solveur ode45.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ M & 1 + M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_2 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mu\omega_0 u_2 \left(1 - \beta u_1^2 - \frac{\gamma}{\omega_0} u_2 u_1 - \frac{\delta}{\omega_0^2} u_2^2 \right) - \omega_0^2 u_1 \\ -2\omega\xi q_2 - \omega^2 q_1 \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

Les différents modèles sont calculés sur un intervalle de temps permettant au piéton de réaliser 3 passages successifs sur la passerelle. Le pas de temps est pris de telle sorte à avoir une quarantaine de pas de temps par pas réalisé par le piéton.

Le modèle (2.27) ayant pu être résolu analytiquement, les équations sont simplement implémentées dans matlab sans besoin de solver.

2.2.4. Analyse du modèle

2.2.4.1. Analyse de la phase relative

ψ étant la phase relative entre le piéton et la passerelle, elle devrait être proche de $\frac{\pi}{2}$ en cas de synchronisation du piéton et d'entraînement de la structure. Dans ce cas, l'équation de phase (2.41) peut être grandement simplifiée en utilisant la condition $|\cot \psi| \ll 1$. Ceci amène une condition sur la différence de fréquence maximisant l'amplitude de vibration :

$$\eta - \mu^* \gamma u^{*2} \left(1 - \frac{M^*}{4\mu^* \xi^*} \right) = 0 \quad (2.44)$$

Soit

$$\Omega = \frac{1}{1 + \varepsilon \mu^* \gamma u^{*2} \left(1 - \frac{M^*}{4\mu^* \xi^*} \right)} \quad (2.45)$$

Tous les termes de l'équation étant positifs, la condition (2.35) déterminant l'existence d'une solution pour les équations d'amplitude permet de conclure que la synchronisation apparaît pour des rapports de fréquences inférieurs ou égaux à 1.

Cela signifie que, sauf lorsque $M^* = 4\mu^* \xi^*$, la synchronisation apparaît pour une fréquence de marche du piéton inférieure à la fréquence de la structure. C'est une première différence importante avec les conclusions de (7). En effet, dans son TFE, I. Lô ne prend pas en compte les paramètres γ et δ du modèle de piéton. Il est évident qu'en annulant γ dans l'équation (2.45) Ω vaille toujours 1. Dès lors, la synchronisation piéton-structure avait toujours lieu pour une fréquence de marche du piéton très proche de celle de la structure.

Par exemple, les solutions de l'équation (2.45) pour les paramètres du Tableau 5 et de la Figure 9 sont représentées dans le Tableau 4.

$\xi[-]$	0,005	0,01	0,015	0,0175	0,02	0,03	0,05
$\Omega[-]$	0,801	0,793	0,791	0,79	0,789	0,788	0,787

Tableau 4 – Solutions de l'équation (2.45)

Le décalage dû au paramètre γ peut s'expliquer mathématiquement par une modification de la fréquence effective de vibration du modèle de piéton. En effet, en mettant en évidence dans (2.1) les termes en $\omega_0 u$ et en ne considérant pas les paramètres β & δ , il est possible de réécrire l'équation sous la forme

$$\ddot{u} + \omega_{eff}^2 u = 0. \quad (2.46)$$

Dont la solution s'écrit sous la forme

$$u = A \cos(\omega_{eff} t + \varphi). \quad (2.47)$$

Avec

$$\omega_{eff}^2 = \omega_0 \left(\omega_0 + \frac{2\mu\gamma u^2}{\omega_0} \right) \text{ la fréquence effective.}$$

Cette influence sur la fréquence effective se retrouve également dans l'équation de la phase additionnelle $\varphi(T)$ (2.27). Contrairement aux 3 autres équations du système (2.27), l'hypothèse de régime stationnaire n'implique pas $\varphi' = 0$. En effet, les valeurs des paramètres et les expressions des variables ne permettent pas d'annuler l'équation

$$\varphi' = \mu^* \frac{\gamma}{4} u^{*2} R_u^2 - \frac{R_q}{R_u} \cos \psi. \quad (2.27)$$

Cependant, dans l'hypothèse d'un régime stationnaire, l'ensemble des termes de l'équation sont considérés comme constants. Cela permet d'intégrer simplement l'équation

$$\begin{aligned} \varphi(T) &= \varphi_0 + T \left(\mu^* \frac{\gamma}{4} u^{*2} R_u^2 - \frac{R_q}{R_u} \cos \psi \right) \\ \varphi(T) &= \varphi_0 + T \left(\mu^* \gamma u^{*2} - \frac{\gamma u^{*2} M^*}{4 \xi^* \mu^*} \sin^2 \psi + \frac{M^*}{2 \xi^*} \sin \psi \cos \psi \right) \\ \varphi(T) &= \varphi_0 + \tau \left(\mu \gamma u^{*2} - \varepsilon \frac{\gamma u^{*2} M^*}{4 \xi^* \mu^*} \sin^2 \psi + \frac{M}{2 \xi} \sin \psi \cos \psi \right) \end{aligned} \quad (2.48)$$

La pulsation de la réponse sur le cycle limite peut être trouvée en remplaçant l'équation (2.48) dans les expressions de U_0 & Q_0 (2.23) et (2.24).

$$\omega_{mod} = 1 + \mu \gamma u^{*2} - \varepsilon \frac{\gamma u^{*2} M}{4 \xi \mu} \sin^2 \psi + \frac{M}{2 \xi} \sin \psi \cos \psi \quad (2.49)$$

Cette équation démontre à nouveau l'influence du paramètre γ sur la pulsation de la réponse sur le cycle limite. Celle-ci est modifiée dans un premier temps par le terme $\mu \gamma u^{*2}$ et cette modification est tantôt atténuée tantôt accentuée par des termes dépendants du rapport de masse et du taux d'amortissement de la structure.

Les solutions de l'équation de phase (2.41) pour différents taux d'amortissement et en fonction de Ω sont représentées à la Figure 9 et la Figure 10. Ces solutions sont calculées avec les paramètres suivants

Paramètre	Set de données 1
$M^* [-]$	1,6
$\mu^* [-]$	22,14
$\gamma [m^{-2}]$	7416
$u^* [m]$	0,0081

Tableau 5 – Valeur des paramètres utilisé dans l'analyse des équations

Dans ces conditions, le taux limite d'amortissement pour l'apparition de plus d'une solution se trouve entre 0,15 et 0,175 comme mis en évidence par la Figure 10. Il est cependant compliqué d'identifier mathématiquement cette limite étant donné qu'il n'est pas possible d'annuler tous les coefficients sauf un comme dans (7).

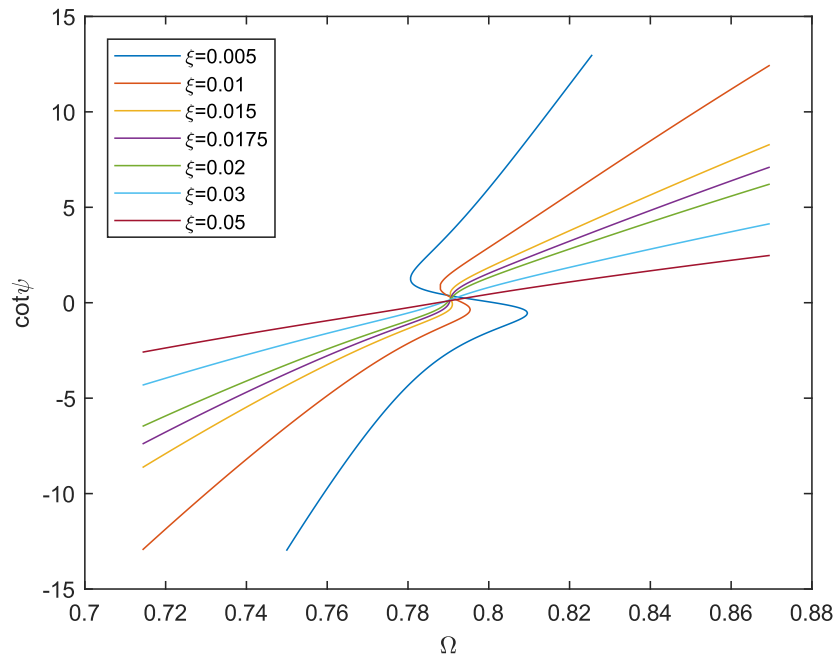


Figure 9 – Phase relative piéton-structure en fonction du rapport des fréquences pour différents taux d'amortissement

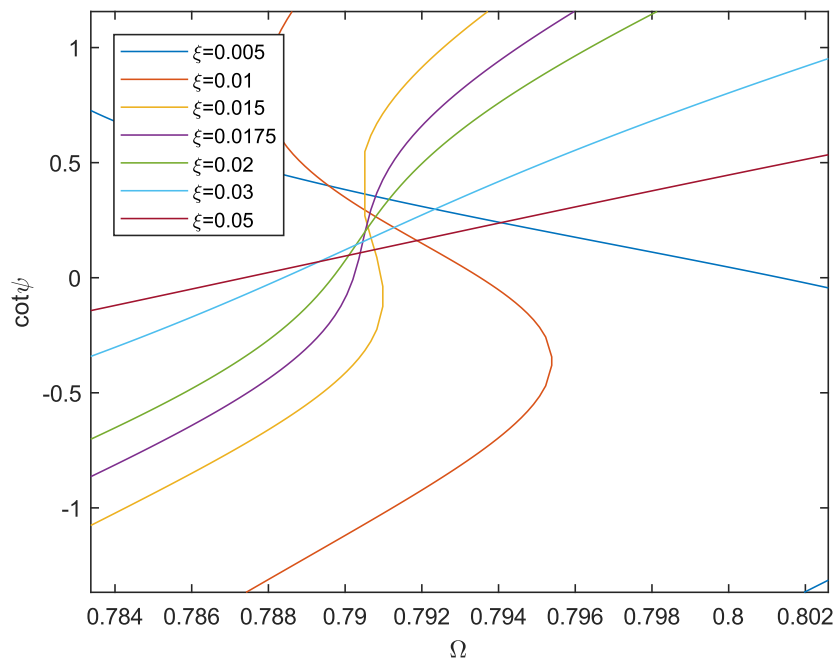


Figure 10 – Zoom sur le comportement de la phase relative aux alentours de $\cot \psi = 0$

2.2.4.2. Analyse des amplitudes

Les solutions de l'équation de phase peuvent ensuite être utilisées pour calculer l'amplitude de la réponse sur le cycle limite à l'aide des équations (2.29) et (2.30). Les résultats sont présentés sur la Figure 11 et la Figure 12.

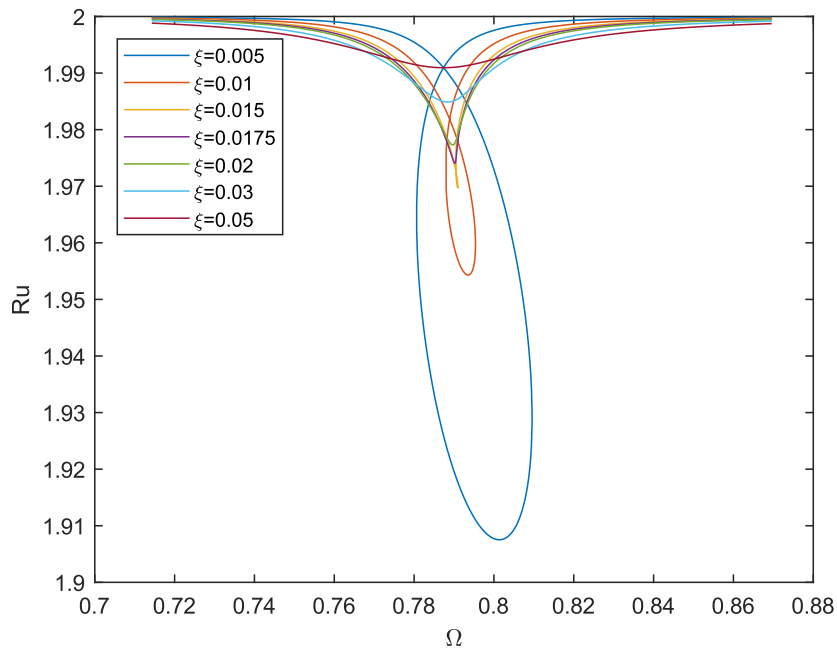


Figure 11 – Amplitude maximale de la réponse du piéton sur le cycle limite du système adimensionnalisé en fonction du rapport des fréquences pour différents taux d'amortissement

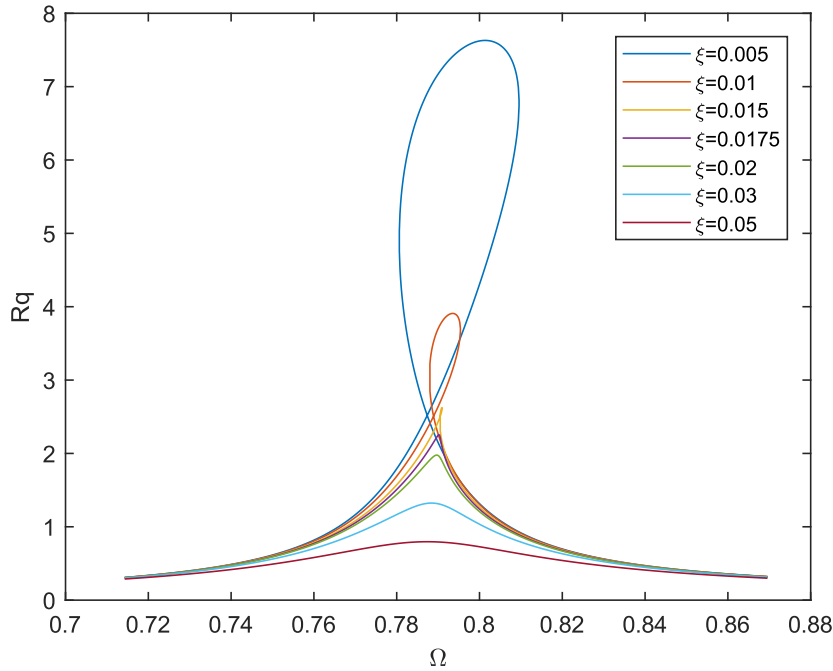


Figure 12 – Amplitude maximale de la réponse de la structure sur le cycle limite du système adimensionnalisé en fonction du rapport des fréquences pour différents taux d’amortissement

La première chose à remarquer est la symétrie des comportements des deux amplitudes. Cette symétrie peut être comprise comme le partage d’une quantité fixe d’énergie dans un système fermé. Lorsque le piéton et la passerelle sont proches de la synchronisation, l’amplitude de la réponse de la passerelle est plus importante car le piéton lui transfère plus d’énergie. Pour des rapports de fréquences plus éloignés, R_u tend vers 2 et R_q vers 0. Ce qui correspond aux limites des équations (2.29) & (2.30) ainsi qu’à la physique du problème. En effet, si le piéton n’est pas capable de se synchroniser, il va simplement marcher comme sur un sol rigide et le tablier ne se déplacera presque pas. Avant de comparer les amplitudes des déplacements de la structure et du piéton, il est important de garder à l’esprit que ces amplitudes doivent encore être multipliées par les déplacements caractéristiques afin d’obtenir les déplacements réels. Le rapport de ces déplacements caractéristiques valant $\varepsilon = 0,025$, le déplacement réel maximal de la passerelle reste généralement inférieur à celui du piéton.

Deuxièmement, il est, comme attendu possible d’identifier les mêmes zones de fréquences dans lesquelles les équations présentent 3 solutions. Cependant, contrairement au modèle présenté dans (7), la boucle formée des solutions supplémentaires n’est pas symétrique par rapport à un axe vertical mais inclinée vers des rapports de fréquences plus élevés. Cette inclinaison avait déjà été mise en évidence dans (5) à travers la nullité d’un paramètre $\alpha = \frac{\tilde{\omega}\gamma}{\beta+3\tilde{\omega}^2\delta}$ traduisant bien que l’inclinaison de la boucle et donc le changement de la fréquence de marche dépend uniquement de la prise en compte du paramètre γ . De la même manière, comme discuté à la section 2.2.2, les maximums et minimums respectivement des

R_q et R_u sont réalisés lorsque $\cos \psi = 0$ (soit $\cot \psi = 0$) mais ne correspondent plus à $\Omega = 1$ comme dans (7). Ces maximums et minimums ont déjà été analysés plus en détail à la section 2.2.2. Les différences de forme s'expliquent par le paramètre représenté sur l'axe des abscisses. En effet, plusieurs valeurs de ψ sont possibles pour chaque valeur de Ω d'où la présence de boucles.

Lorsque plusieurs solutions existent, la question se pose alors de savoir quelles solutions sont stables et lesquelles ne le sont pas. Plusieurs simulations ont été effectuées et dans tous les cas, indépendamment des conditions initiales, le modèle a convergé vers l'amplitude de R_q la plus faible et celle de R_u la plus élevée. Cette conclusion semble indiquer que les solutions supplémentaires composant les boucles sont instables alors que ce sont les solutions correspondant aux phases relatives les plus proches de $\frac{\pi}{2}$. Autrement dit, les solutions correspondant à une synchronisation piéton-structure semblent instables à partir d'un certain taux d'amortissement.

Là où il y a, pour certains taux d'amortissement, deux abscisses pour lesquelles l'équation de phase présente deux solutions, ces abscisses sont au nombre de trois pour les équations d'amplitude. Cette abscisse est celle correspondant à l'« origine » de la boucle. C'est ce point qui est en réalité composé non pas d'une mais de deux solutions identiques vis-à-vis de l'amplitude des réponses du piéton et de la structure sur le cycle limite mais différentes en phase. À cette abscisse correspondent deux solutions symétriques par rapport à $\cot \psi = 0$ de l'équation de phase. Ces deux solutions correspondant à des angles supplémentaires, les sinus de ces angles sont égaux.

2.2.4.3. Validation des équations moyennées

Afin de valider les analyses réalisées et avant de poursuivre en ajoutant une forme modale, il est bon de comparer le système de base (2.8) avec les équations de dynamique lente (2.27). Cette comparaison permet de voir d'une part si les prévisions des analyses sont exactes et d'autre part si le comportement de la dynamique rapide est correctement capturé par les équations de la dynamique lente. Ces vérifications sont effectuées pour différents rapports de fréquences et avec les paramètres suivants

Paramètre	Set de données	Set de données
	1 « Pedestrian 1 »	2 « Pedestrian 2 »
M^* [-]	1,568	1,584
ω_0 [Hz]	4,68	5,1711
μ^* [-]	5,5	22,14
γ [m^{-2}]	52852	7416
u^* [m]	0,0062	0,0081
β [m^{-2}]	0	4785
ξ^* [-]	0,2	0,2
α [-]	1,45	0,45

Tableau 6 – Paramètres utilisés pour la validation des équations de temps lent
 Les résultats de ces comparaisons sont montrés à la Figure 13 et la Figure 14.

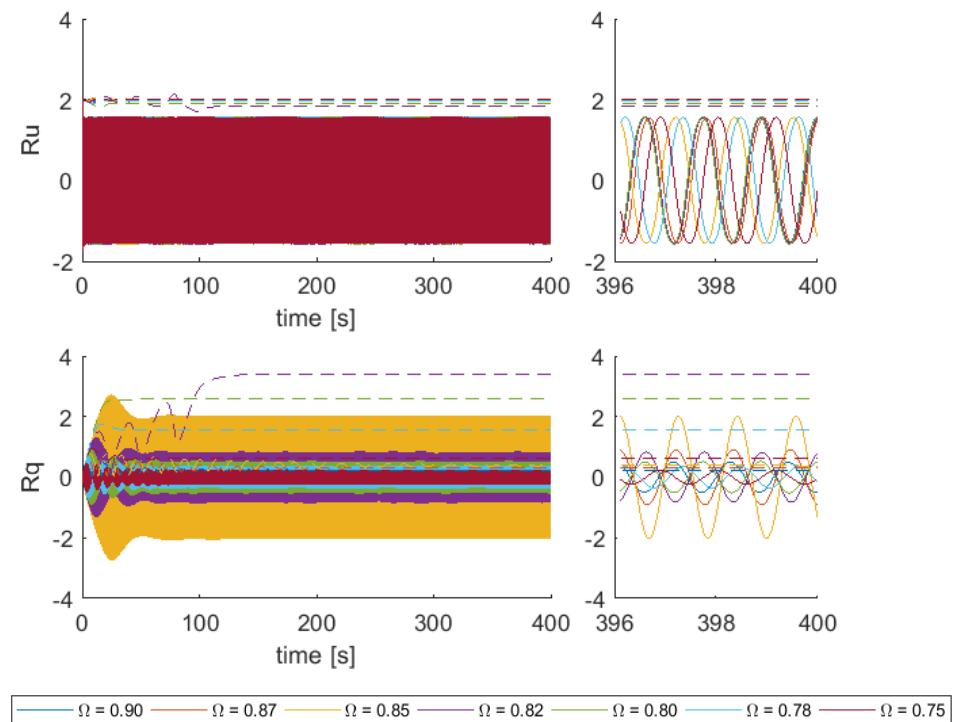


Figure 13 – Validation des équations de la dynamique lente pour les paramètres
 « Pedestrian 1 »

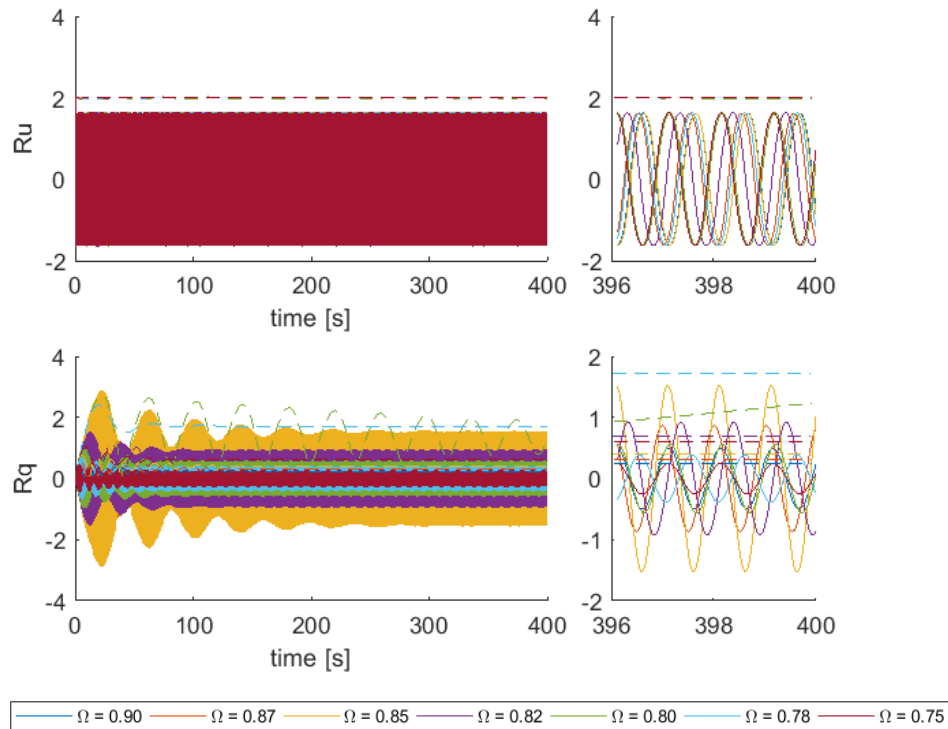


Figure 14 – Validation des équations de la dynamique lente pour les paramètres « Pedestrian 2 »

Il est évident au vu des Figures ci-dessus que les équations de la dynamique lente ne parviennent pas à capturer correctement le comportement du système. Étant donnée la robustesse de la méthode des échelles multiples, le problème se situe dans le respect des hypothèses de départ de la méthode. L'une des hypothèses principales de cette méthode est la possibilité de décomposer les équations en termes proportionnels à un certain ordre d'un petit nombre (ε). Pour que cette séparation fonctionne, il est important que l'ensemble des termes d'un ordre soient négligeables par rapport à l'ordre précédent. Le problème réside alors dans le choix des paramètres. En effet, dans le cas du set de données 1, la valeur du paramètre γ est trop grande pour être compensée efficacement par le produit $\mu * u^2$.

Dans le cas du deuxième set de données, c'est le paramètre μ qui est trop grand. D'ailleurs, d'un point de vue physique la valeur de ce paramètre semble improbable car elle correspond à un taux d'amortissement de plus de 50%. Même si cette valeur est multipliée par d'autres paramètres par rapport à l'équation classique de la dynamique, cela reste un amortissement anormalement élevé. Le temps de mémoire (2.50) d'un tel amortissement, semble indiquer qu'il ne suffit que d'un pas à un tel piéton pour oublier les perturbations subies.

$$t_{memoire} = \frac{T_0}{2\mu} = 0.9T_0 \quad (2.50)$$

Une telle vitesse d'oubli est assez improbable car en général plus proche des 10 pas. Cela signifierait un taux d'amortissement $\mu = 0.0553$ qui, en plus de correspondre

mieux à la réalité, permet également de respecter les hypothèses de la méthode des échelles multiples.

Des corrections peuvent donc être apportées aux paramètres afin de réaliser une nouvelle validation des équations de temps lent. Les nouveaux sets de paramètres sont repris dans le Tableau 7.

Paramètre	Set de données 1 « Pedestrian 1 » modifié	Set de données 2 « Pedestrian 2 » modifié
M^* [-]	1,568	1,584
ω_0 [Hz]	4,68	5,1711
μ^* [-]	5,5	2,214
γ [m^{-2}]	5285,2	7416
u^* [m]	0,0062	0,0081
β [m^{-2}]	0	4785
ξ^* [-]	0,2	0,2
α [-]	1,45	0,45

Tableau 7 – Paramètres modifiés pour la validation des équations de temps lent

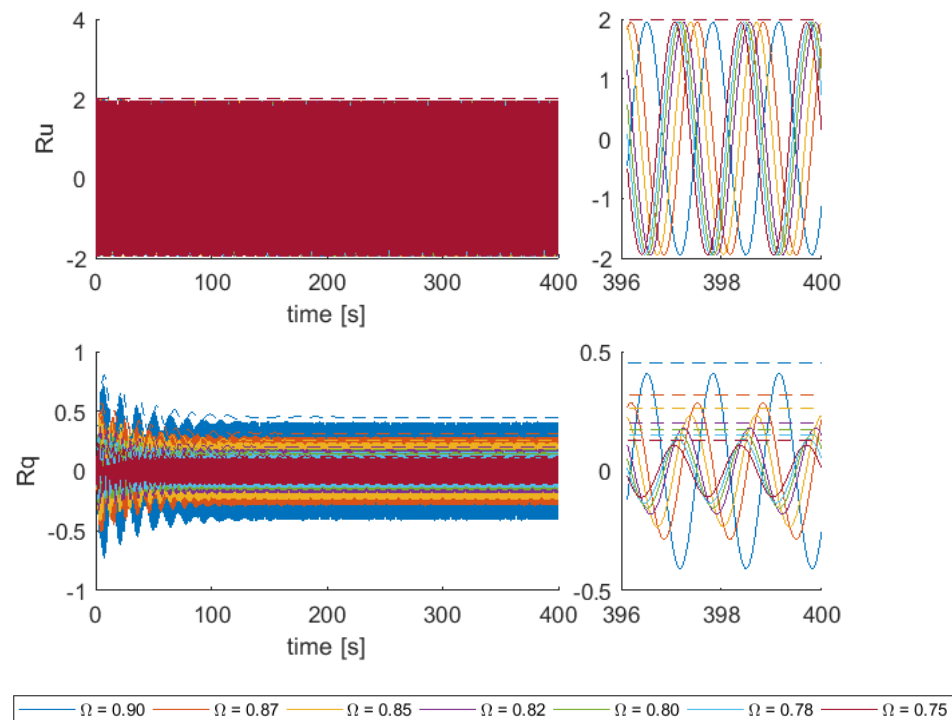


Figure 15 – Validation des équations de la dynamique lente pour les paramètres « Pedestrian 1 » modifiés

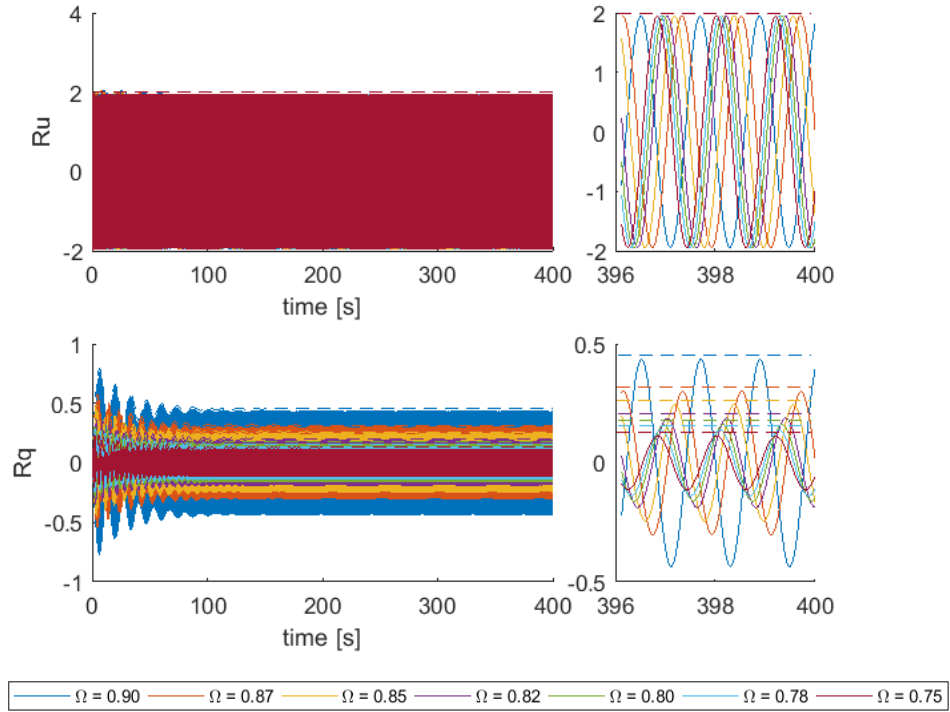


Figure 16 – Validation des équations de la dynamique lente pour les paramètres « Pedestrian 2 » modifiés

Malgré certaines imprécisions, les équations de temps lent avec les paramètres modifiés capturent assez bien le comportement du modèle. La même validation peut donc être tentée en prenant en compte la forme du mode

2.3. Prise en compte de la forme du mode

Pour la plupart des passerelles actuelles, le principal mode propre impacté par les sollicitations de piétons est celui dont la fréquence est la plus proche du Hz. En général, ce mode est le premier mode propre qui, dans le cas d'une passerelle à une travée bi-appuyée, peut être approximé par un demi-sinus. Le déplacement maximal du mode étant normalisé à 1, l'amplitude normalisée de ce déplacement en un point d'abscisse x est notée

$$\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (2.51)$$

Cette amplitude normalisée est multipliée par le déplacement $q(t)$ afin d'obtenir le déplacement réel. Reste alors à déterminer la position $x(t)$ du piéton pour connaître l'impact de la structure sur celui-ci. En considérant que le temps t commence lorsque le piéton arrive sur la passerelle, la position du piéton peut s'exprimer

$$x(t) = vt \quad (2.52)$$

$$\sin\left(\frac{\pi vt}{L}\right) \quad (2.53)$$

Cette expression peut remplacer le terme $\phi_i(x)$ dans le système (2.3).

$$\begin{cases} \ddot{u} - 2\mu\omega_0\dot{u}\left(1 - \beta u^2 - \frac{\gamma}{\omega_0}\dot{u}u - \frac{\delta}{\omega_0^2}\dot{u}^2\right) + \omega_0^2 u = -\sin\left(\frac{\pi vt}{L}\right)\ddot{q} \\ m_i^*\ddot{q} + 2\omega\xi m_i^*\dot{q} + \omega^2 m_i^* q = -\sin\left(\frac{\pi vt}{L}\right)m_0\dot{u} \end{cases} \quad (2.54)$$

Afin de pouvoir utiliser les mêmes méthodes de résolution que pour le modèle sans prise en compte de la déformée modale, il convient d'adimensionnaliser le système ainsi que l'expression de la position du piéton.

Pour l'expression de la position du piéton, la première étape est de faire apparaître le temps adimensionnel τ .

$$\frac{\pi vt}{L} = \frac{\pi v}{L} \frac{\tau}{\omega_0} \quad (2.55)$$

Ensuite, le rapport $\frac{\pi}{\omega_0}$ peut être remplacé par $\frac{T_0}{2}$ où T_0 est la période transversale d'un pas. La fraction dans le sinus peut également être multipliée au numérateur et au dénominateur par le petit nombre ε . La forme du mode devient,

$$\frac{vT_0}{2\varepsilon L} \varepsilon\tau = \frac{l_0}{2\varepsilon L} \varepsilon\tau. \quad (2.56)$$

Où l_0 est la longueur de pas.

Désormais, l'équation de la forme du mode consiste en une constante $V = \frac{vT_0}{2\varepsilon L}$ multipliant la variable de temps lent $T = \varepsilon\tau$.

Pour le système d'équations, les mêmes adimensionnalisations que dans le cas du mode rigide sont utilisées. Les dérivées temporelles sont remplacées par les dérivées selon τ (2.4) et (2.5), les déplacements par les déplacements adimensionnels U & Q et les fréquences par leur rapport $\tilde{\omega}$. Enfin, les déplacements caractéristiques sont simplifiés selon la relation (2.10). Finalement,

$$\begin{cases} \left\{ U'' - 2\mu U'(1 - \beta u^{*2}U^2 - \gamma u^{*2}U'U - \delta u^{*2}U'^2) + U = -\sin(VT)\varepsilon Q'' \right. \\ \left. Q'' + 2\tilde{\omega}\xi Q' + \tilde{\omega}^2 Q = -\sin(VT)M\left(\sin(VT)Q'' + \frac{U''}{\varepsilon}\right) \right. \end{cases} \quad (2.57)$$

Ce système est, comme attendu, très semblable au système (2.11).

2.3.1. Approche multi-échelles

Les mêmes simplifications que pour le cas $\phi = 1$ peuvent être utilisées afin de développer une approche multi-échelles permettant de se concentrer sur l'enveloppe de la réponse plutôt que sur la dynamique complète.

$$\begin{cases} \left\{ U'' - 2\varepsilon\mu^*U'(1 - \beta u^{*2}U^2 - \gamma u^{*2}U'U - \delta u^{*2}U'^2) + U = -\sin(VT)\varepsilon Q'' \right. \\ \left. Q'' + 2(1 + \varepsilon\eta)\varepsilon\xi^*Q' + (1 + 2\varepsilon\eta)Q = -\sin(VT)\varepsilon M^*U'' \right. \end{cases}$$

Étant donné que la forme du mode est toujours multipliée par ε , les solutions d'ordre ε^0 du système sont les mêmes que dans le cas rigide.

$$\partial_\tau^2 U_0 + U_0 = 0 \quad (2.59)$$

$$\partial_\tau^2 Q_0 + Q_0 = 0 \quad (2.60)$$

La solution de ces équations peut s'écrire sous la forme

$$U_0 = R_u(T) \cos(\tau + \varphi(T)) \quad (2.61)$$

$$Q_0 = R_q(T) \cos(\tau + \varphi(T) + \psi(T)) \quad (2.62)$$

Les développements dans le cas de la prise en compte de la forme du mode sont très semblables à ceux du cas rigide (Annexe A). En effet, la forme du mode, même dépendante du temps, se comporte un peu comme une constante car elle n'est impactée ni par les dérivées partielles, ni par les ansatz. Ces faibles différences mènent à un système équations différentielles similaire à celui obtenu précédemment.

$$\left\{ \begin{array}{l} R'_u = \mu^* R_u - \mu^* \frac{\beta}{4} u^{*2} R_u^3 - \frac{3\mu^* \delta}{4} u^{*2} R_u^3 + \frac{R_q}{2} \sin \psi \sin(VT) \\ \varphi' = \mu^* \frac{\gamma}{4} u^{*2} R_u^2 - \frac{R_q}{R_u} \cos \psi \sin(VT) \\ R'_q = -\frac{M^*}{2} R_u \sin \psi \sin(VT) - \xi^* R_q \\ \psi' = \eta - \mu^* \frac{\gamma}{4} u^{*2} R_u^2 - \left(M^* \frac{R_u}{R_q} - \frac{R_q}{R_u} \right) \frac{\cos \psi}{2} \sin(VT) \end{array} \right. \quad (2.63)$$

Cependant, la prise en compte d'une déformée modale réelle, même approximée, empêche la recherche de solutions stationnaires étant donné le caractère non-autonome du second membre. Le système (2.63) doit donc être résolu tel quel.

2.3.2. Méthode de résolution numérique

La méthodologie utilisée pour la résolution du modèle (2.3) avec prise en compte de la forme du mode est la même qu'à la section 2.2.3. La prise en compte de la forme du mode donne dans ce cas le modèle suivant ;

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{u}_1 = u_2 \\ \dot{u}_2 - 2\mu\omega_0 u_2 \left(1 - \beta u_1^2 - \frac{\gamma}{\omega_0} u_2 u_1 - \frac{\delta}{\omega_0^2} u_2^2 \right) + \omega_0^2 u_1 = -\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \dot{q}_2 \end{array} \right. \quad (2.64)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{q}_1 = q_2 \\ \dot{q}_2 + 2\omega\xi q_2 + \omega^2 q_1 = -\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) M \left(\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \dot{q}_2 + \dot{u}_2 \right) \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \\ M \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) & 1 + M \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_2 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\mu\omega_0 u_2 \left(1 - \beta u_1^2 - \frac{\gamma}{\omega_0} u_2 u_1 - \frac{\delta}{\omega_0^2} u_2^2 \right) - \omega_0^2 u_1 \\ -2\omega\xi q_2 - \omega^2 q_1 \end{pmatrix} \quad (2.65)$$

Où x est la position du piéton, calculée en chaque instant grâce à sa vitesse. Il est considéré que le piéton opère un demi-tour immédiatement après avoir atteint une des extrémités du pont. Ainsi, sa position reste toujours comprise entre 0 et L .

Le modèle (2.63) est également résolu avec la fonction ode45 de matlab mais les équations étant toutes du premier ordre, aucune adaptation n'est nécessaire.

2.3.3. Analyse du modèle

La prise en compte de la forme du mode n'ayant pas permis de poser l'hypothèse d'un comportement stationnaire, une analyse au préalable du comportement isolé de chaque variable n'est pas possible. La validation des équations est réalisée avec les paramètres modifiés du Tableau 7. La forme du mode considérée est, comme précédemment, un demi-sinus ($n=1$).

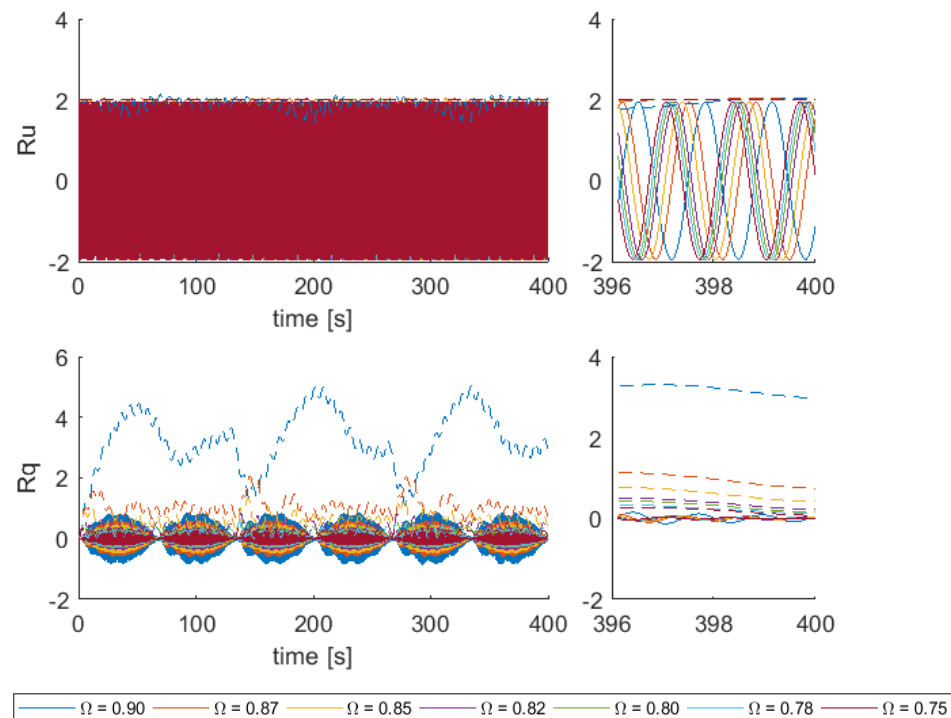


Figure 17 – Validation des équations de la dynamique lente pour les paramètres « Pedestrian 1 » modifiés et prise en compte de la forme du mode

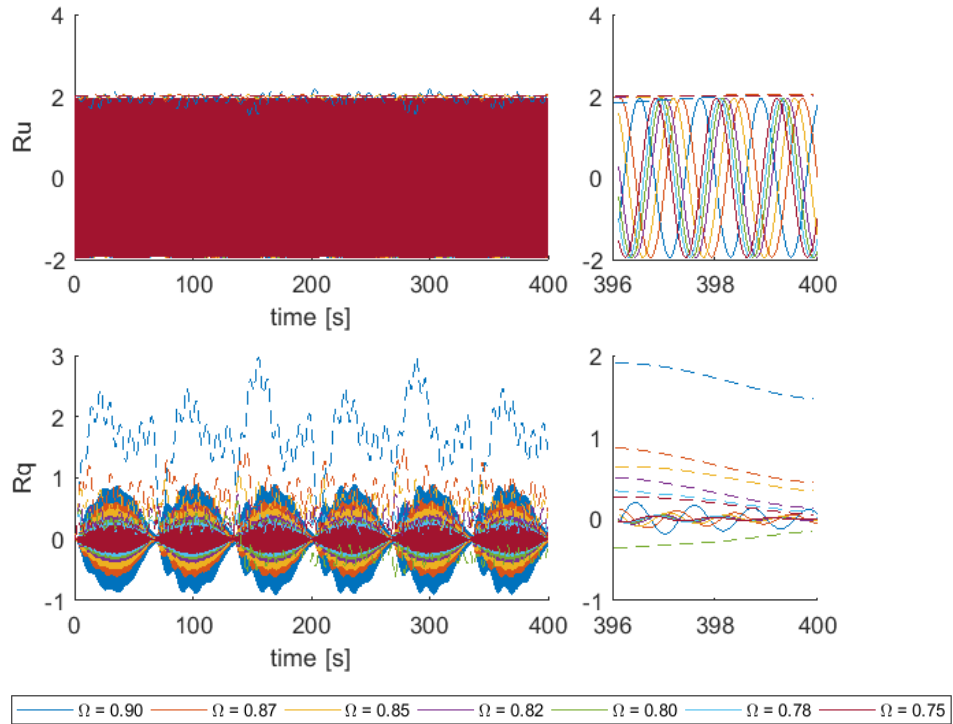


Figure 18 – Validation des équations de la dynamique lente pour les paramètres « Pedestrian 2 » modifiés et prise en compte de la forme du mode

Lorsque la forme du mode est prise en compte, les Figures ci-dessus montrent que les équations de la dynamique lente ne parviennent plus du tout à capturer le comportement du modèle alors même que les problèmes de paramètres sont censés être réglés. La cause de ce problème est donc à chercher ailleurs. Une investigation possible est d’analyser des versions simplifiées des deux équations du système séparément pour voir où se trouve le problème.

En posant les hypothèses d’une petite sollicitation périodique d’une fréquence égale à celle de la structure et égale à 1, l’équation de la dynamique devient

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \varepsilon \sin \omega t \sin\left(\frac{\pi v_p}{L} t\right) \quad (2.66)$$

$$\ddot{x} + 2\xi\dot{x} + x = \varepsilon \sin \tau \sin(V\varepsilon\tau). \quad (2.67)$$

Ensuite, les mêmes méthodes de résolution que dans la Section 2.2.2 sont utilisées

$$\partial_\tau^2 x_0 + x_0 = 0 \quad (2.68)$$

$$x_0 = A(T) \cos(\tau + \varphi(T)) \quad (2.69)$$

La solution (2.69) est ensuite réinjectée dans l’équation de l’ordre ε^1 .

$$\partial_\tau^2 x_1 + x_1 = \sin(\tau) \sin(VT) + 2A \sin(\tau + \varphi) + 2A' \sin(\tau + \varphi) + 2A\varphi' \cos(\tau + \varphi) \quad (2.70)$$

Les développements afin d’arriver à la solution (2.71) sont présentés en Annexe B.

$$A = \alpha e^{-T} + \frac{1}{2(1+V^2)} (V \cos(VT) - \sin(VT)) \quad (2.71)$$

L'établissement relativement aisé d'une solution analytique pour l'équation de la dynamique semble indiquer que le problème est ailleurs. En appliquant les mêmes hypothèses ($\omega_0 = \omega = 1$) il vient,

$$\ddot{u} - 2\mu\omega_0\dot{u}(1 - \beta u^2 - \frac{\gamma}{\omega_0}\dot{u}u - \frac{\delta}{\omega_0^2}\dot{u}^2) + \omega_0^2 u = \varepsilon \sin \omega t \sin\left(\frac{\pi v_p}{L}t\right) \quad (2.72)$$

$$\ddot{u} - 2\varepsilon\dot{u}(1 - \beta u^2 - \gamma\dot{u}u - \delta\dot{u}^2) + u = \varepsilon \sin \tau \sin(V\varepsilon\tau). \quad (2.73)$$

Les mêmes raisonnements que pour l'équation de la dynamique amènent au résultat suivant.

$$\cos(\tau + \varphi) : 2A\varphi' - 2A^3\frac{\gamma}{4} - \sin \varphi \sin(VT) = 0 \quad (2.74)$$

$$\sin(\tau + \varphi) : -\cos \varphi \sin(VT) + 2A + 2A' - \frac{2\beta A^3}{4} - 2\delta A^3\frac{3}{4} = 0 \quad (2.75)$$

Contrairement à l'équation de la dynamique, $\varphi = 0$ n'est pas une solution de l'équation (2.74). Ces deux équations doivent donc être résolues numériquement car les termes non-linéaires rendent très compliqué l'établissement d'une solution analytique. Les résultats sont ensuite comparés à ceux d'une résolution numérique des équations de base afin de s'assurer de la correspondance des deux. Ces résolutions sont réalisées avec, pour les paramètres β, γ et δ , les valeurs du set de paramètre « pedestrian 2 » repris dans le Tableau 6.

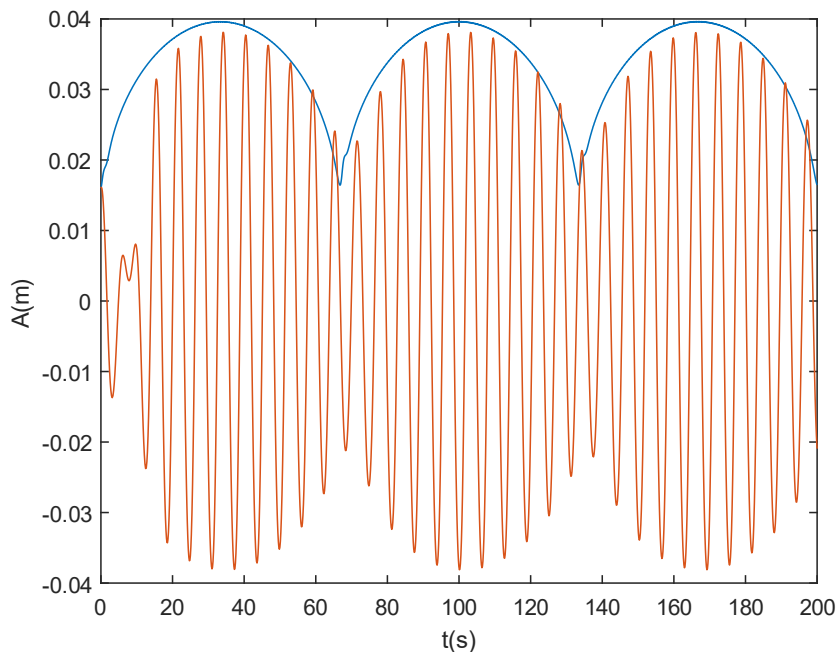


Figure 19 – Comparaison des résultats des équations des dynamiques lente et rapide

La première chose à remarquer sur la Figure 19 est l'assez bonne corrélation entre l'équation de la dynamique rapide et celle de la dynamique lente. Cependant, comme cette corrélation n'apparaît pas dans les modèles plus complexes, il est

important de la vérifier pour d'autres paramètres. Dans ce cas-ci, seuls les paramètres μ et ω_0 sont réellement différents par rapport au modèle de base. La valeur modifiée de μ étant relativement proche de ε (0,055 contre 0,025), le paramètre dont plusieurs valeurs vont être testées est la fréquence de marche. Ce changement n'entre pas en conflit avec l'hypothèse $\omega_0 = 1$ car celle-ci n'était pas nécessaire pour l'établissement de l'équation (2.73). En effet, la fréquence de marche se simplifie lors de l'établissement de l'échelle de temps $\tau = \omega_0 t$. Cela dit, cette simplification indique une indépendance totale de l'équation de la dynamique lente vis-à-vis de la fréquence de marche, ce qui n'est pas le cas pour l'équation de la dynamique rapide.

La Figure 20 montre clairement cette dépendance de l'équation de la dynamique rapide envers la fréquence. Là où le comportement de la dynamique lente reste toujours $A = \text{constante}$ (0,0163 [m]) + évolution suivant la forme du mode, les résultats de la dynamique rapide varient tant en amplitude maximale qu'en forme. Les résultats de la résolution des équations de la dynamique lente sont finalement assez logiques étant donné qu'il s'agit d'un oscillateur auto-entretenu excité par force extérieure, celui-ci oscille entre l'amplitude de son cycle limite lorsque l'excitation est nulle et une amplitude maximale lorsque l'excitation est maximale. Les différentes formes de solutions de l'équation de la dynamique rapide sont, elles, plus compliquées à expliquer. En effet, non seulement l'amplitude maximale diminue lorsque la fréquence augmente, mais la forme s'écarte d'autant plus de celle attendue.

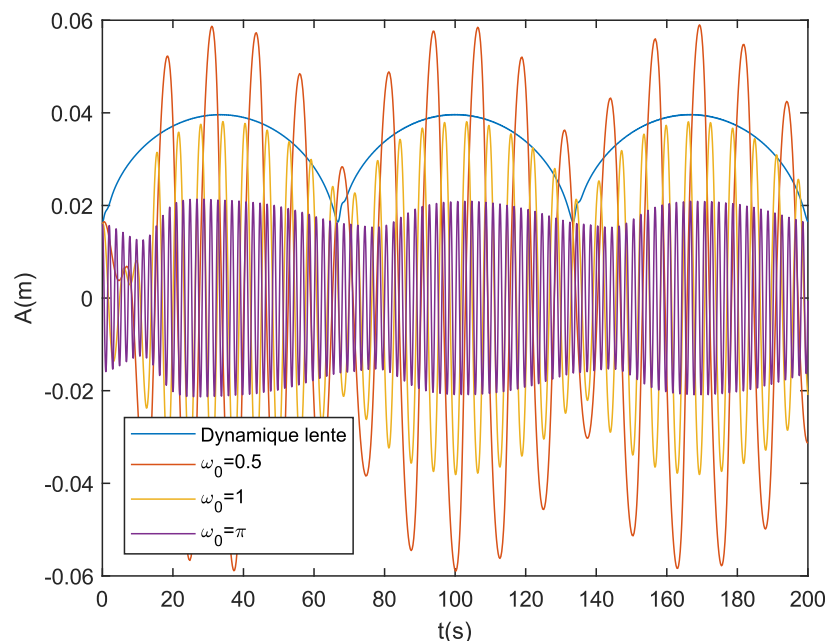


Figure 20 – Comparaison des équations des dynamiques lente et rapide pour différentes fréquences

Quand l'excitation est juste fournie par la forme du mode, un décalage vers le haut est observé mais son amplitude diminue avec l'augmentation de la fréquence. En effet, l'excitation uniquement par la forme du mode est toujours positive donc

amplifie le mouvement quand le piéton balance dans un sens et le freine quand le piéton balance dans l'autre sens. Une augmentation de la fréquence de balancement a pour effet d'en réduire la période et donc le temps pendant lequel l'excitation uniquement par la forme du mode peut avoir un effet bénéfique. Le balancement en sera donc moins amplifié.

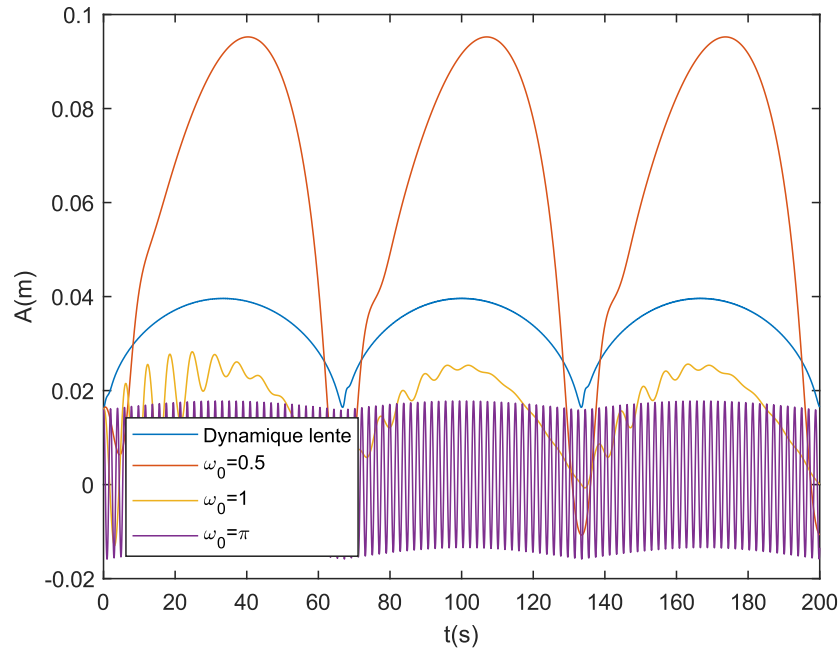


Figure 21 – Influence de la forme du mode pour différentes fréquences

Quand la forme du mode n'est pas prise en compte, une augmentation similaire au cas précédent de l'amplitude est observée. De la même manière, cette augmentation diminue au plus la fréquence augmente. La même explication peut être avancée au détail près que cette fois-ci, l'excitation est toujours en phase avec les oscillations du piéton. Le balancement du piéton est donc symétrique peu importe sa direction.

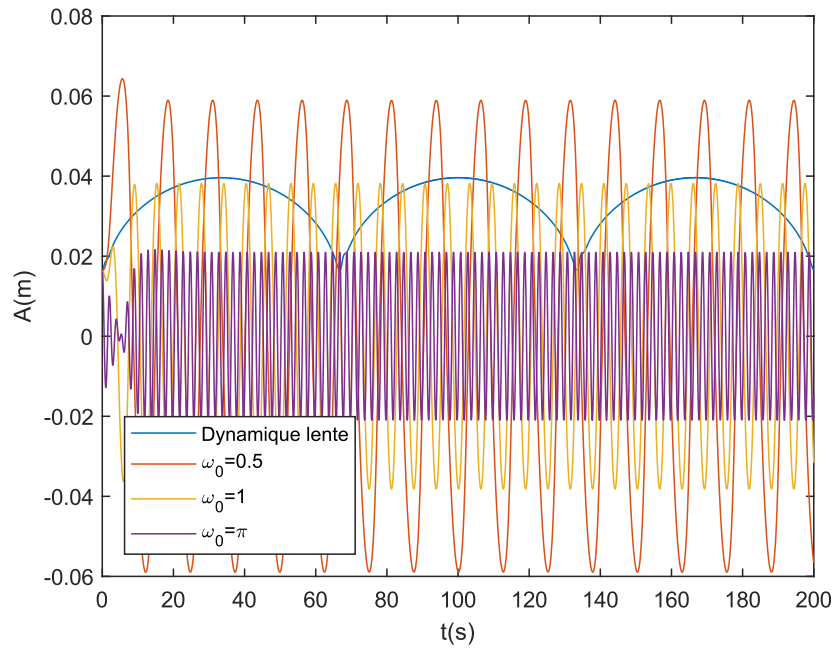


Figure 22 – Influence d’une excitation harmonique pour différentes fréquences

Toutes ces différences entre la dynamique lente et la dynamique rapide mettent clairement en évidence un problème dans la méthode des échelles multiples qui a du mal à capturer correctement le comportement du modèle de piéton. Il est donc nécessaire, pour répondre aux objectifs de ce travail, d’utiliser le modèle (2.54).

3. Comparaison avec les recommandations du Sétra

Une fois établis le modèle utilisé et la méthode de résolution, les résultats peuvent être comparés à ceux de la méthode de calcul du Sétra. Pour une comparaison plus fiable, l'hypothèse du Sétra stipulant que la fréquence de marche des piétons est égale à la fréquence de la passerelle chargée (limitée à 1,1 [Hz], voir §1.2) est également utilisée dans la résolution du modèle mathématique. De plus, la densité de piétons est calculée en fonction du rapport de masse et de la surface du tablier plutôt qu'en fonction de la classe de la passerelle. Le cas de calcul du Sétra est donc choisi en fonction de cette densité. Au-dessus de $1 \left[\frac{\text{piéton}}{\text{m}^2} \right]$, la formule du cas 1 est utilisée et en-dessous, celle du cas 2. Les paramètres du piéton utilisés sont, à l'exception de la fréquence de marche, ceux du set « Pedestrian 2 modifié » du Tableau 7 (L'annexe B reprend les mêmes graphiques pour le set de paramètres « Pedestrian 1 modifié »). La formule des cas 2 et 3 (voir (1.11)) devient donc ;

$$F_s = \frac{1}{Ll} F_p \cos(\omega_0 t) 10,8 \sqrt{\frac{\xi m M_m}{m_p}} \psi. \quad (3.1)$$

Où la densité est remplacée par le rapport du nombre de piétons sur la surface du tablier avec ;

- Ll la surface du tablier,
- $\frac{mM_m}{m_p}$ le nombre de piétons présents simultanément sur la passerelle.

Les autres paramètres utilisés sont repris au Tableau 8.

Paramètre	Valeur
M_m [kg]	350000
L [m]	100
l [m]	5
ξ [-]	0,005

Tableau 8 – Paramètres de la structure

La première comparaison qui peut être effectuée n'est pas à proprement parler une comparaison des deux modèles mais plutôt une critique du seuil d'accélération du Sétra. La Figure 23 montre que le modèle mathématique ne présente pas d'augmentation brusque de l'amplitude de la réponse une fois l'accélération de $0,1 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$ dépassée.

Ce résultat est un argument contre la potentielle universalité du critère sur l'accélération du Sétra.

Le pic de la réponse de la structure se situe toujours aux alentours d'une fréquence effective de 1,1 [Hz]. La réponse chute rapidement pour des fréquences plus élevées mais beaucoup moins pour des fréquences plus basses. Cette relative stabilité à basse fréquence peut probablement s'expliquer par le fait que les paramètres de

piétons correspondent à une fréquence de marche plus élevée. Cette réponse plus faible de la structure serait alors due à une sollicitation moindre du piéton, elle-même due à une réponse en quelque sorte quasi-statique du piéton. Les courbes de niveau de la réponse et de l'accélération n'ont pas vraiment la même forme mais cela s'explique assez simplement. Pour un déplacement s'exprimant sous la forme $x(t) = \cos \omega t$ son accélération s'exprime sous la forme $\ddot{x}(t) = -\omega^2 \cos \omega t$. Le rapport de l'amplitude maximale des deux vaut alors $\frac{1}{\omega^2}$. Pour des pulsations supérieures à $1 \left[\frac{rad}{s} \right]$, l'amplitude de l'accélération est plus élevée que celle du déplacement. C'est pour cette raison que le plateau à basse fréquence pour le déplacement n'en est pas un pour l'accélération et que, une fois le pic dépassé, l'accélération diminue moins vite que le déplacement.

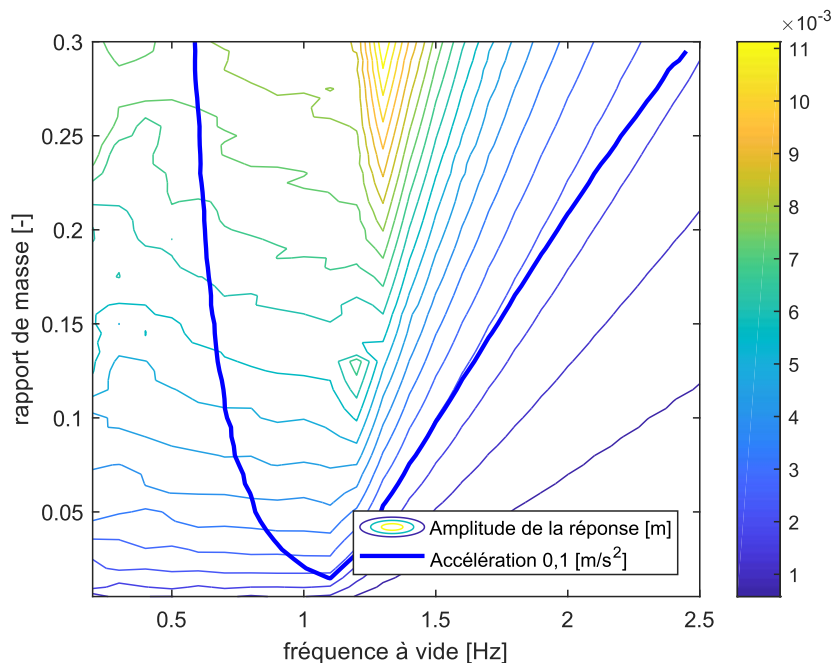


Figure 23 – Amplitude maximale de la réponse de la passerelle en fonction de la fréquence à vide et du rapport de masse superposée avec la courbe de niveau 0,1 $\left[\frac{m}{s^2} \right]$ de l'accélération maximale de la passerelle

La deuxième comparaison consiste en la superposition des limites d'accélération calculées avec les deux méthodes présentées. La première chose à remarquer sur la Figure 24 est l'absence presque totale de corrélation entre les deux modèles. La limite calculée par le Sétra a une forme assez prévisible avec ses différents paliers. En effet, les formules présentées dans le guide ne prenant en compte la fréquence de la passerelle que dans la valeur du paramètre ψ du Sétra, le résultat du calcul est le même peu importe la fréquence tant que $\psi = 1$. Ce résultat est dû à l'absence de prise en compte réelle de la fréquence naturelle de la structure et de la fréquence de marche. L'impact du déplacement du tablier sur le mouvement du piéton n'est également pas pris en compte dans les formules du Sétra ce qui amène une différence en plus entre les deux modèles.

Le décalage vers la droite observable sur la Figure 24 est dû à la diminution de la fréquence par la masse des piétons présents sur la passerelle. Pour référence, une fréquence à vide de 1,5 [Hz] devient pour un rapport de masse de 30%

$f_{eff} = 1,5 \sqrt{\frac{1}{1+0,3}} = 1,32$ [Hz]. Cette différence est d'autant plus importante que la fréquence à vide est grande.

Le passage du cas 2 au cas 1 est également marqué par la cassure aux alentours du rapport de masse $m = 0,1$. Une telle cassure n'est pas très physique mais inhérente au principe de formules différentes en fonction du cas.

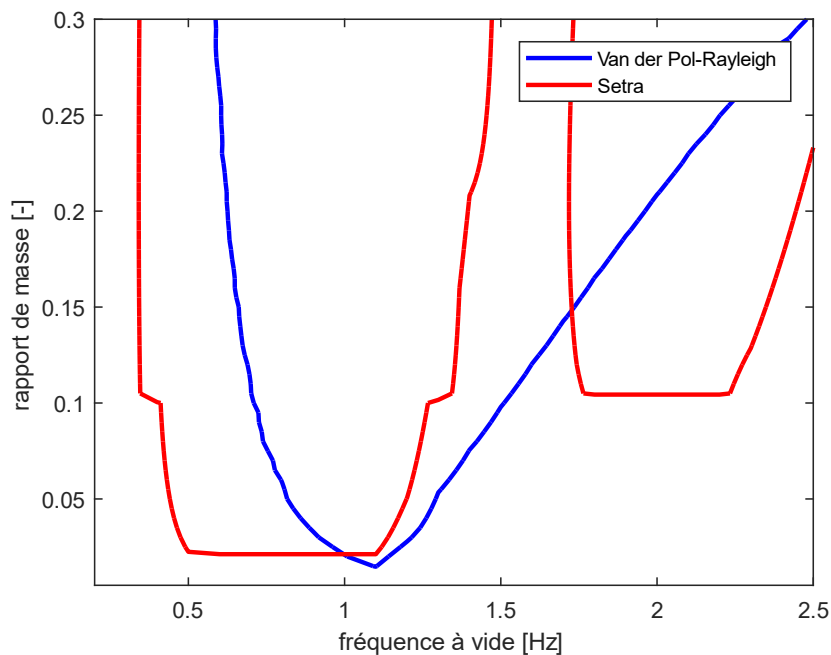


Figure 24 – Courbes de niveau $0,1 \left[\frac{m}{s^2} \right]$ de l'accélération maximale de la passerelle calculée avec la méthode du Sétra et le modèle mathématique

La Figure 24 montre que, en se fiant au modèle mathématique, la méthode du Sétra surestime grandement l'amplitude de l'accélération à basse fréquence et ce, même si le modèle mathématique prend en compte des conditions de calcul plus défavorables. En effet, contrairement aux hypothèses du Sétra, l'utilisation d'une seule équation pour représenter le mouvement des piétons implique qu'ils aient tous les mêmes caractéristiques, le même mouvement et qu'ils soient tous à la même position. Cela signifie qu'à un moment donné, l'ensemble de la foule se trouve au milieu de la portée de la passerelle, soit là où son impact est le plus grand. De plus, vers les fréquences plus élevées, le Sétra sous-estimerait grandement l'amplitude de l'accélération de la passerelle.

Une autre manière de mesurer la différence entre les résultats du Sétra et ceux du modèle mathématique est de calculer l'amplitude de l'accélération selon le modèle le long de la courbe de niveau du Sétra. Le résultat de ce calcul est présenté à la Figure 25.

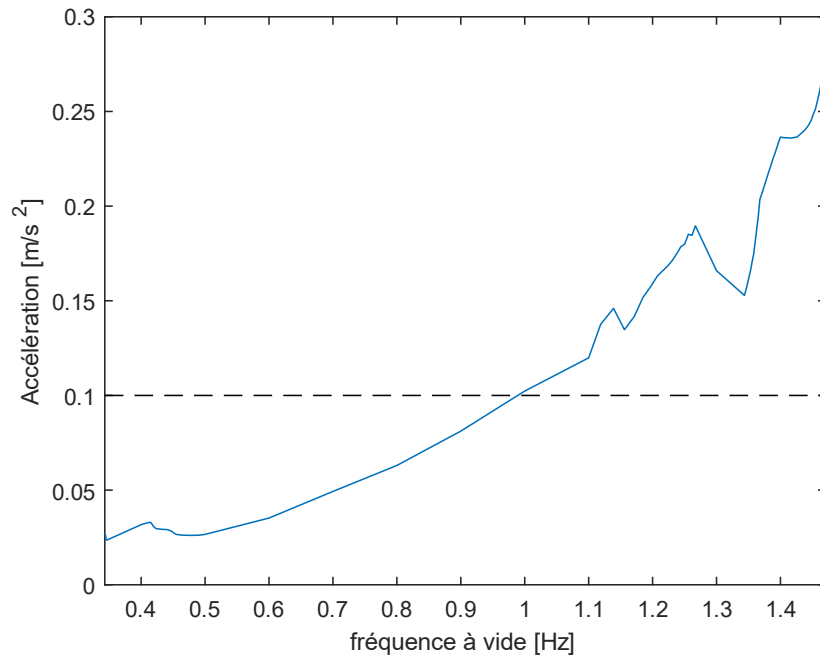


Figure 25 – Accélération calculée par le modèle le long de la courbe de niveau su Sétra

Pour des très basses fréquences, le rapport entre l'accélération du modèle et du Sétra est de 1 pour 4 là où il est de 3 pour 1 pour les fréquences plus élevées. Ceci prouve encore l'absence totale de corrélation entre les deux modèles. Cela prouve également que le paramètre ψ dans les formules du Sétra fait chuter un peu rapidement l'accélération par rapport aux résultats du modèle.

4. Conclusion

Bien que le modèle mathématique développé lors de ce travail soit toujours imparfait, il a permis de mettre en évidence certaines lacunes du guide de recommandation du Sétra.

Premièrement, le critère sur l'accélération qui avait été mis en évidence à la suite des tests réalisés sur les passerelles du Millenium et Léopold-Sédar-Sengor ne semble pas être valide pour toutes les passerelles. Les simulations réalisées pour des caractéristiques de passerelles différentes n'ont pas montré la même augmentation drastique de l'amplitude de vibration du tablier mise en évidence dans le guide. Au contraire, le modèle a montré qu'il était difficile d'établir un seuil clair de début de synchronisation mais que c'était plutôt une lente évolution vers une synchronisation de plus en plus importante.

Ensuite, l'absence presque totale de considération de la fréquence naturelle de la structure ne permettait pas une prise en compte complète du comportement dynamique de la passerelle et du fait que le lien entre amplitude de vibration et d'accélération n'est pas linéaire. Les conclusions du Sétra peuvent donc être tantôt trop, tantôt pas assez conservatives en fonction de la fréquence.

Le modèle mathématique utilisé a cependant encore des défauts qu'il s'agirait de gommer dans de futures recherches. Le premier de ces défauts est de ne considérer qu'une seule équation pour les piétons. Cela serait peut-être acceptable dans un modèle qui générerait la foule comme un fluide mais ce n'est pas le cas ici. Le modèle présenté ici est un modèle particulaire dont chaque particule devrait être traitée par sa propre équation. Une prise en compte de plusieurs équations permettrait de répartir les piétons sur tout le tablier et de leur donner des phases initiales différentes plutôt que de les considérer comme se trouvant tous au même endroit et ayant les mêmes caractéristiques.

C'est là l'autre défaut important de ce modèle, il n'est pas possible de faire varier les paramètres de piétons dans un même calcul. Les piétons sont toujours tous identiques et il est compliqué d'établir des paramètres vraiment représentatifs d'une foule.

En résumé, il est possible malgré un modèle perfectible de dire que le guide du Sétra a pour lui une simplicité et une rapidité de calcul. Qualités cependant contrebalancées par des recommandations parfois très conservatives.

Annexes

A. Analyse par échelles multiples du modèle sans prise en compte de la forme du mode

$$\begin{cases} U'' - 2\varepsilon\mu^*U'(1 - \beta u^{*2}U^2 - \gamma u^{*2}U'U - \delta u^{*2}U'^2) + U = -\varepsilon Q'' \\ Q'' + 2(1 + \varepsilon\eta)\varepsilon\xi^*Q' + (1 + 2\varepsilon\eta)Q = -\varepsilon M^*U'' \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Le système (A.1) est développé en utilisant les ansatz (2.19) et (2.20) ainsi que les dérivées (2.15) et (2.16).

$$(\partial_\tau^2 + 2\varepsilon\partial_{\tau T}^2 + \varepsilon^2\partial_T^2)(U_0 + \varepsilon U_1) - 2\varepsilon\mu^*(\partial_\tau + \varepsilon\partial_T)(U_0 + \varepsilon U_1)(1 - \beta u^{*2}(U_0 + \varepsilon U_1)^2 - \gamma u^{*2}(\partial_\tau + \varepsilon\partial_T)(U_0 + \varepsilon U_1)(U_0 + \varepsilon U_1) - \delta u^{*2}(\partial_\tau + \varepsilon\partial_T)(U_0 + \varepsilon U_1)^2) + (U_0 + \varepsilon U_1) = -\varepsilon(\partial_\tau^2 + 2\varepsilon\partial_{\tau T}^2 + \varepsilon^2\partial_T^2)(Q_0 + \varepsilon Q_1) \quad (\text{A.2})$$

$$(\partial_\tau^2 + 2\varepsilon\partial_{\tau T}^2 + \varepsilon^2\partial_T^2)(Q_0 + \varepsilon Q_1) + 2(1 + \varepsilon\eta)\varepsilon\xi^*(\partial_\tau + \varepsilon\partial_T)(Q_0 + \varepsilon Q_1) + (1 + 2\varepsilon\eta)(Q_0 + \varepsilon Q_1) = -\varepsilon M^*(\partial_\tau^2 + 2\varepsilon\partial_{\tau T}^2 + \varepsilon^2\partial_T^2)(U_0 + \varepsilon U_1) \quad (\text{A.3})$$

Les développements sont limités aux termes d'ordre ε^0 et ε^1 étant donné la faible valeur du paramètre ε .

$$\partial_\tau^2 U_0 + 2\varepsilon\partial_{\tau T}^2 U_0 + \varepsilon\partial_\tau^2 U_1 - 2\varepsilon\mu^*\partial_\tau U_0(1 - \beta u^{*2}U_0^2 - \gamma u^{*2}(\partial_\tau U_0)U_0 - \delta u^{*2}(\partial_\tau U_0)^2) + (U_0 + \varepsilon U_1) = -\varepsilon\partial_\tau^2 Q_0 \quad (\text{A.4})$$

$$\partial_\tau^2 Q_0 + 2\varepsilon\partial_{\tau T}^2 Q_0 + \varepsilon\partial_\tau^2 Q_1 + 2(1 + \varepsilon\eta)\varepsilon\xi^*(\partial_\tau Q_0 + \varepsilon\partial_T Q_0 + \varepsilon\partial_\tau Q_1) + (1 + 2\varepsilon\eta)(Q_0 + \varepsilon Q_1) = -\varepsilon M^*\partial_\tau^2 U_0 \quad (\text{A.5})$$

Les solutions de l'ordre ε^0 sont discutées au chapitre 2.2.2.

Les solutions (2.23) et (2.24) sont injectées dans les équations (2.25) et (2.26) à l'aide des dérivées

$$\begin{aligned} \partial_\tau U_0 &= -R_u(T) \sin(\tau + \varphi(T)) \\ \partial_\tau Q_0 &= -R_q(T) \sin(\tau + \varphi(T) + \psi(T)) \\ \partial_{\tau T}^2 U_0 &= -R'_u(T) \sin(\tau + \varphi(T)) - R_u(T) \cos(\tau + \varphi(T)) \varphi' \\ \partial_{\tau T}^2 Q_0 &= -R'_q(T) \sin(\tau + \varphi(T) + \psi(T)) \\ &\quad - R_q(T) \cos(\tau + \varphi(T) + \psi(T)) (\varphi' + \psi') \\ \partial_\tau^2 U_0 &= -R_u(T) \cos(\tau + \varphi(T)) \\ \partial_\tau^2 Q_0 &= -R_q(T) \cos(\tau + \varphi(T) + \psi(T)) \end{aligned}$$

Cela donne

$$\begin{aligned} \partial_\tau^2 U_1 + U_1 &= R_q(T) \cos(\tau + \varphi(T) + \psi(T)) + 2(R'_u(T) \sin(\tau + \varphi(T)) - \\ &R_u(T) \cos(\tau + \varphi(T)) \varphi') - 2\mu^* R_u(T) \sin(\tau + \varphi(T)) (1 - \beta u^{*2}(R_u(T) \cos(\tau + \\ &\varphi(T)))^2 + \gamma u^{*2} R_u(T) \cos(\tau + \varphi(T)) R_u(T) \sin(\tau + \varphi(T)) - \\ &\delta(u^* R_u(T) \sin(\tau + \varphi(T)))^2) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} \partial_\tau^2 Q_1 + Q_1 = & M^* R_u(T) \cos(\tau + \varphi(T)) + 2 \left(R'_q(T) \sin(\tau + \varphi(T) + \psi(T)) - \right. \\ & \left. R_q(T) \cos(\tau + \varphi(T) + \psi(T)) (\varphi' + \psi') \right) + 2 \xi^* R_q(T) \sin(\tau + \varphi(T) + \psi(T)) - \\ & 2\eta R_q(T) \cos(\tau + \varphi(T) + \psi(T)) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Les équations (A.6) et (A.7) peuvent être réécrites en mettant en évidence les termes en $\cos(\tau + \varphi(T))$, $\sin(\tau + \varphi(T))$, $\cos^3(\tau + \varphi(T))$ et $\sin^3(\tau + \varphi(T))$ et en utilisant les relations (A.8), (A.9), (A.10) et (A.11).

$$\sin(\tau + \varphi + \psi) = \sin(\tau + \varphi) \cos \psi + \cos(\tau + \varphi) \sin \psi \quad (\text{A.8})$$

$$\cos(\tau + \varphi + \psi) = \cos(\tau + \varphi) \cos \psi - \sin(\tau + \varphi) \sin \psi \quad (\text{A.9})$$

$$\cos^3 \theta = \frac{1}{4} (\cos 3\theta + \cos \theta) \quad (\text{A.10})$$

$$\sin^3 \theta = \frac{1}{4} (-\sin 3\theta + \sin \theta) \quad (\text{A.11})$$

Une telle réécriture permet de mettre en évidence les termes séculaires à annuler

$$\begin{aligned} \partial_\tau^2 U_1 + U_1 = & \cos(\tau + \varphi) \left(R_q \cos \psi + 2R_u \varphi' - \mu^* \frac{\gamma}{2} u^{*2} R_u^3 \right) + \sin(\tau + \\ & \varphi) \left(2R'_u - 2\mu^* R_u + \mu^* \frac{\beta}{2} u^{*2} R_u^3 + \frac{3\mu^* \delta}{2} u^{*2} R_u^3 + R_q \sin \psi \right) + \cos 3(\tau + \\ & \varphi) (\dots) + \sin 3(\tau + \varphi) (\dots) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{aligned} \partial_\tau^2 Q_1 + Q_1 = & \cos(\tau + \varphi) \left(M^* R_u + 2R_q ((\varphi' + \psi') - \eta) \cos \psi + 2(R'_q + \right. \\ & \left. \xi^* R_q) \sin \psi \right) + \sin(\tau + \varphi) \left(2(R'_q + \xi^* R_q) \cos \psi - 2R_q ((\varphi' + \psi') - \eta) \sin \psi \right) + \\ & \cos 3(\tau + \varphi) (\dots) + \sin 3(\tau + \varphi) (\dots) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Cela revient à annuler les équations du système (A.14).

$$\begin{cases} R_q \cos \psi + 2R_u \varphi' - \mu^* \frac{\gamma}{2} u^{*2} R_u^3 = 0 \\ 2R'_u - 2\mu^* R_u + \mu^* \frac{\beta}{2} u^{*2} R_u^3 + \frac{3\mu^* \delta}{2} u^{*2} R_u^3 + R_q \sin \psi = 0 \\ M^* R_u + 2R_q ((\varphi' + \psi') - \eta) \cos \psi + 2(R'_q + \xi^* R_q) \sin \psi = 0 \\ 2(R'_q + \xi^* R_q) \cos \psi - 2R_q ((\varphi' + \psi') - \eta) \sin \psi = 0 \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

B. Analyse du modèle de piéton simplifié

$$\sin(\tau) = \sin(\tau + \varphi - \varphi) = \cos \varphi \sin(\tau + \varphi) - \sin \varphi \cos(\tau + \varphi) \quad (\text{B.1})$$

$$\cos(\tau + \varphi) : 2A\varphi' - \sin \varphi \sin(VT) = 0 \quad (\text{B.2})$$

$$\sin(\tau + \varphi) : \cos \varphi \sin(VT) + 2A + 2A' = 0 \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{cases} \varphi = 0 \\ A + A' = -\frac{1}{2}\sin(VT) \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

$$A = c \sin(VT) + d \cos(VT) \quad (\text{B.5})$$

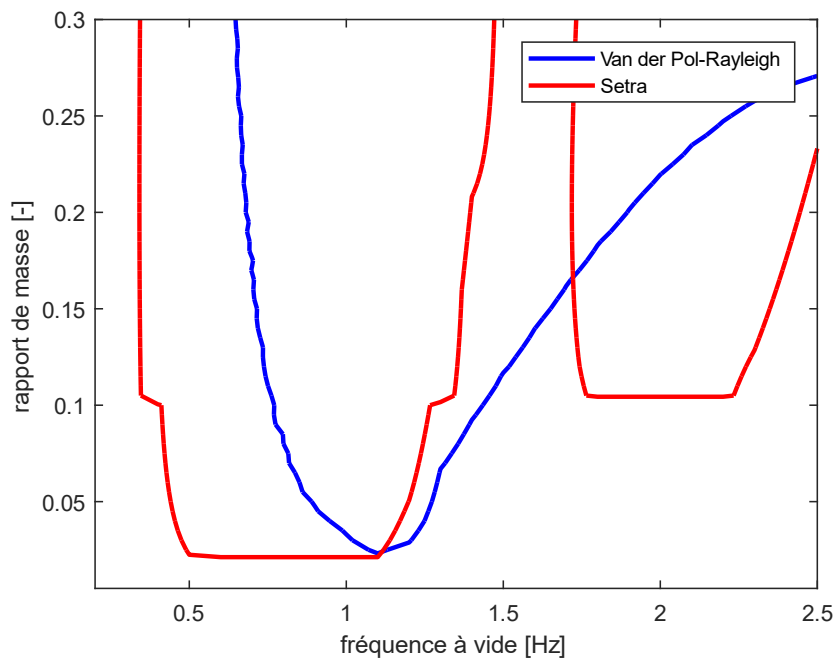
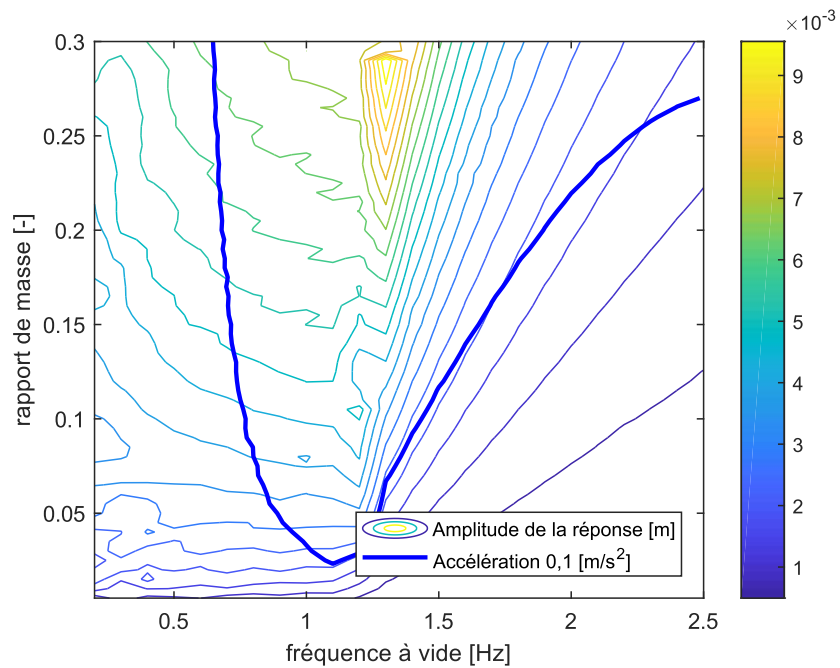
$$A' = cV \cos(VT) - dV \sin(VT) \quad (\text{B.6})$$

$$(cV + d) \cos(VT) + \left(c - dV + \frac{1}{2}\right) \sin(VT) \quad (\text{B.7})$$

$$\begin{cases} d = -cV \\ c + cV^2 + \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{cases} c = -\frac{1}{2(1+V^2)} \\ d = \frac{V}{2(1+V^2)} \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

C. Comparaison avec les recommandations du Sétra pour le set de paramètres « Pedestrian 1 »



5. Références

1. Passerelle Léopold-Sédar-Senghor. *Wikipedia*. [En ligne] [Citation : 13 06 2024.] https://fr.wikipedia.org/wiki/Passerelle_L%C3%A9opold-S%C3%A9dar-Senghor.
2. Millenium Bridge (Londres). *Wikipedia*. [En ligne] [Citation : 29 07 2024.] [https://fr.wikipedia.org/wiki/Millennium_Bridge_\(Londres\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Millennium_Bridge_(Londres)).
3. Bachman, H. et al. *Vibrations in Structures: Induced by Man and Machines*. s.l. : IABSE, 1987.
4. Setra. *Technical guide: Footbridges: Assessment of vibrational behaviour of footbridges*. s.l. : Sétra, 2006.
5. Erlicher, S. et al. A modified hybrid Van der Pol / Rayleigh model for the lateral pedestrian force on a periodically moving floor. *Mechanical Systems and Signal Processing*. Elsevier Ltd., Décembre 2013, Vol. 41, pp. 485-501.
6. Bodgi, J. *Pedestrian-structure synchronisation : application to swaying footbridges*. s.l. : Ecole des Ponts ParisTech, 2008. pastel-00004784.
7. Lô, I. *Modélisation des vibrations latérales des passerelles sous l'effet des piétons*. Liège : Univerité de Liège, 2020.
8. Erlicher, S. et al. Modeling the lateral pedestrian force on a rigid floor by a self-sustained oscillator. *Mechanical System and Signal Processing*. Elsevier Ltd., Juillet 2010, Vol. 24, pp. 1579-1604.