

## Mémoire

**Auteur** : Aslan, Davud

**Promoteur(s)** : Rigo, Michel

**Faculté** : Faculté des Sciences

**Diplôme** : Master en sciences mathématiques, à finalité spécialisée en statistique

**Année académique** : 2023-2024

**URI/URL** : <http://hdl.handle.net/2268.2/21064>

---

### *Avertissement à l'attention des usagers :*

*Tous les documents placés en accès ouvert sur le site le site MatheO sont protégés par le droit d'auteur. Conformément aux principes énoncés par la "Budapest Open Access Initiative"(BOAI, 2002), l'utilisateur du site peut lire, télécharger, copier, transmettre, imprimer, chercher ou faire un lien vers le texte intégral de ces documents, les disséquer pour les indexer, s'en servir de données pour un logiciel, ou s'en servir à toute autre fin légale (ou prévue par la réglementation relative au droit d'auteur). Toute utilisation du document à des fins commerciales est strictement interdite.*

*Par ailleurs, l'utilisateur s'engage à respecter les droits moraux de l'auteur, principalement le droit à l'intégrité de l'oeuvre et le droit de paternité et ce dans toute utilisation que l'utilisateur entreprend. Ainsi, à titre d'exemple, lorsqu'il reproduira un document par extrait ou dans son intégralité, l'utilisateur citera de manière complète les sources telles que mentionnées ci-dessus. Toute utilisation non explicitement autorisée ci-avant (telle que par exemple, la modification du document ou son résumé) nécessite l'autorisation préalable et expresse des auteurs ou de leurs ayants droit.*

---



FACULTÉ DES SCIENCES  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE

---

# Étude des graphes gracieux : Exploration, comptage et techniques de construction

---

Mémoire de fin d'études présenté en vue de l'obtention du titre de  
*Master en Sciences Mathématiques, à finalité spécialisé en statistique*

Année académique 2023-2024

*Auteur :*  
Davud ASLAN

*Promoteur :*  
Michel RIGO



## Remerciements

Ce mémoire marque la fin de mes études, un parcours riche en apprentissages et en expériences. Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à toutes les personnes qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce projet.

Je tiens tout particulièrement à remercier mon promoteur, Michel Rigo, pour son soutien indéfectible et sa disponibilité constante, même face aux défis et difficultés rencontrés. Son encadrement m'a permis de mener à bien ce travail.

Je souhaite également remercier chaleureusement Léa Tombu et Jordan Ledoux pour leur soutien précieux et leurs encouragements tout au long de ce périple. Un grand merci aussi à ma famille et leur famille, qui m'ont soutenu avec autant de bienveillance et de générosité.

# Introduction

Depuis leur introduction par Rosa en 1967, les graphes gracieux ont captivé l'attention croissante des mathématiciens. Leur définition repose sur un étiquetage spécifique des sommets, permettant d'attribuer à chaque arête une valeur unique, ce qui en fait un sujet d'étude riche en applications et en défis théoriques. Ces graphes trouvent également des applications dans divers secteurs tels que la conception de réseaux, la cryptographie, et même la bioinformatique, où l'unicité des étiquetages peut être exploitée pour résoudre des problèmes d'alignement de séquences.

Dans ce mémoire, nous nous engageons dans une analyse des graphes gracieux en nous concentrant sur trois axes principaux. Dans un premier temps, nous fournirons un aperçu des différentes familles de graphes, en identifiant celles qui peuvent être étiquetées de manière gracieuse. Nous examinerons les graphes classiques tels que les cycles, les graphes complets et les graphes bipartis, ainsi que d'autres familles, comme les graphes étoiles et les graphes chenilles, cas particuliers d'arbres, afin de mieux comprendre les caractéristiques qui favorisent ou entravent un étiquetage gracieux. Cette exploration établira des fondations solides pour une compréhension plus complète des graphes gracieux et de leurs propriétés.

Le troisième chapitre de ce travail sera consacré à l'analyse du nombre de graphes gracieux. Cette question pose des défis combinatoires significatifs. Nous nous intéresserons particulièrement à la proportion de graphes gracieux parmi l'ensemble des graphes, cherchant à quantifier cette proportion. Ce type d'analyse est essentiel pour évaluer l'ampleur du phénomène des graphes gracieux et pour envisager de nouvelles conjectures.

Enfin, le quatrième et dernier chapitre de ce mémoire se concentre sur les stratégies de création de nouveaux graphes gracieux. En utilisant des graphes déjà reconnus pour leur caractère gracieux, nous analyserons différentes méthodes permettant d'étendre ces graphes pour en construire de nouveaux. Nous examinerons également des constructions plus complexes visant à rendre gracieux des graphes qui, à première vue, ne le sont pas. Parmi ces méthodes, nous inclurons des opérations telles que l'ajout de sommets ou d'arêtes.

Parmi les résultats les plus importants que nous présenterons, principalement issus des articles [12] et [8], nous démontrerons que tout graphe est sous-graphe induit d'un graphe gracieux et nous exposerons des techniques pour construire un graphe gracieux en étendant un chemin de longueur arbitraire à partir d'un sommet arbitraire d'un graphe gracieux.

De cette manière, ce mémoire vise à enrichir les connaissances relatives aux graphes gracieux, en proposant une synthèse des résultats déjà établis, et en aspirant à approfondir la compréhension des graphes gracieux et à susciter des recherches futures qui continueront d'explorer les mystères de ces objets mathématiques.

# Chapitre 1

## Définitions et notions de base

Soit  $G$  un graphe fini simple et non orienté, c'est-à-dire sans boucle et sans arête multiple, comportant  $m$  sommets et  $n$  arêtes. Les notions suivantes se basent sur l'article [11]. On désigne par *valuation*  $f$  du graphe  $G$  toute application injective de l'ensemble des sommets de  $G$   $\{v_1, \dots, v_n\}$  dans l'ensemble des entiers naturels. À chaque sommet  $v_i$  du graphe est ainsi associé un nombre  $a_i \geq 0, i \in \{1, \dots, m\}$ , avec  $a_i \neq a_j$  si  $v_i \neq v_j$ , tel que  $f(v_i) = a_i$ . On appelle *valeur d'une arête*  $e_k = \{v_i, v_j\}$  le nombre  $b_k = |a_i - a_j|, k \in \{1, \dots, n\}$  où  $a_i$  et  $a_j$  sont les valeurs des sommets  $v_i$  et  $v_j$ . Par  $V_{f_G}$  on note l'ensemble des nombres  $a_i$  et par  $E_{f_G}$  l'ensemble des nombres  $b_k$  de la valuation du graphe  $G$ . Pour désigner l'ensemble des valeurs des sommets, on parlera alors de *valuation*, de *numérotation* ou d'*étiquetage* des sommets du graphe  $G$ .

**Définition 1.1.** Considérons les conditions suivantes

- (1)  $V_{f_G} \subset \{0, 1, \dots, n\}$ ,
- (2)  $V_{f_G} \subset \{0, 1, \dots, 2n\}$ ,
- (3)  $E_{f_G} = \{1, 2, \dots, n\}$ ,
- (4)  $E_{f_G} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , avec  $x_i = i$  ou  $x_i = 2n + 1 - i$  pour tout  $i$ ,
- (5) Il existe  $x \in \{0, 1, \dots, n\}$  tel que si  $\{v_i, v_j\}$  est une arête de  $G$  alors  $a_i \leq x < a_j$  ou  $a_j \leq x < a_i$ .

Une valuation satisfaisant les conditions :

- (1), (3) et (5) est appelée une  $\alpha$  - valuation.
- (1), (3) est appelée une  $\beta$  - valuation.
- (2), (3) est appelée une  $\sigma$  - valuation.
- (2), (4) est appelée une  $\rho$  - valuation.

**Remarque 1.2.** Dans la séquence ordonnée  $\alpha-, \beta-, \sigma-, \rho-$ , chaque valuation est aussi une valuation qui la succède. Par exemple, une  $\beta-$  valuation du graphe est aussi une  $\sigma-$  et une  $\rho-$  valuation.

En effet, une  $\alpha-$  valuation est une  $\beta-$  valuation puisque elle doit respecter une partie des mêmes conditions. Puisque  $\{0, 1, \dots, n\} \subset \{0, 1, \dots, 2n\}$ , la condition (1) implique directement la condition (2) et une  $\beta$ -valuation est une  $\sigma$ -valuation. Si  $E_{f_G} = \{1, 2, \dots, n\}$ , alors  $E_{f_G} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , avec  $x_i = i$  pour tout  $i$ . La condition (3) implique donc la condition (4) et une  $\sigma$ -valuation est une  $\rho$ -valuation.

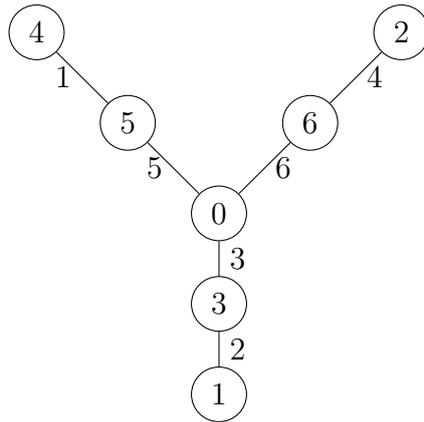
**Définition 1.3.** Un *graphe gracieux* est un graphe admettant une  $\beta$ -évaluation. Un graphe gracieux de  $n$  arêtes est donc un graphe admettant un étiquetage de ses sommets par des nombres naturels distincts pris dans l'ensemble  $\{0, \dots, n\}$  tel que les valeurs absolues des différences des étiquettes des extrémités des arêtes soient toutes distinctes et comprises dans l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$ .

De plus, on qualifie les nombres  $a_i$  associés aux sommets  $v_i$  d'un graphe gracieux d'*étiquetage gracieux*, de *évaluation gracieuse* ou de *numérotation gracieuse* du graphe.

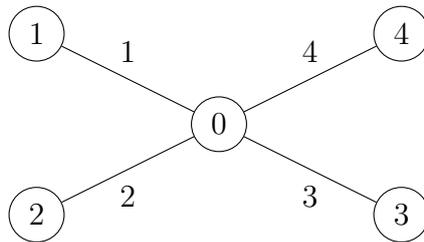
**Remarques 1.4.** • Il découle immédiatement de la définition que si  $G$  est un graphe gracieux avec  $m$  sommets et  $n$  arêtes, alors  $m \leq n + 1$ , étant donné que les valeurs des sommets doivent être distinctes et appartenir à l'ensemble  $\{0, \dots, n\}$ .

- Si  $G$  est un graphe gracieux de  $n$  arêtes, alors deux de ses sommets sont nécessairement numérotés 0 et  $n$ . En effet, puisque les sommets du graphe ont chacun une valeur comprise entre 0 et  $n$ , l'arête de valeur  $n$  ne peut se former que par la différence entre  $n$  et 0.
- Une  $\alpha$ -évaluation  $f$  d'un graphe  $G$  est une évaluation gracieuse de  $G$  admettant la propriété supplémentaire (5) qu'il existe un nombre entier  $x$  tel que pour toute arête  $\{u, v\}$  de  $G$ , alors  $f(u) \leq x < f(v)$  ou  $f(v) \leq x < f(u)$ . Cette particularité implique que le nombre  $x$  est en réalité la plus petite des deux valeurs aux extrémités de l'arête dont la valeur est 1.

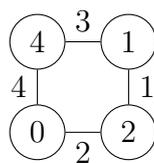
**Exemples 1.5.** Des graphes gracieux.



Arbre gracieux à 7 sommets.



Étoile gracieux à 5 sommets.



Cycle  $C_4$ .

FIGURE 1.4 – Exemples de graphes gracieux.

**Exemple 1.6.** Par contre, voici des numérotations de ces mêmes graphes qui ne sont pas gracieuses. En effet, pour le premier arbre, chaque valeur des sommets a augmenté de deux par rapport à l'étiquetage de la figure 1.4. Les valeurs des arêtes ne changent pas mais la fonction de valuation n'est plus définie sur  $\{0, \dots, \#E\}$ . Pour le graphe étoile, les valeurs 1 et 0 ont été échangées, impliquant deux arêtes de même valeur. Enfin, pour le graphe  $C_4$ , la fonction n'est plus injective.

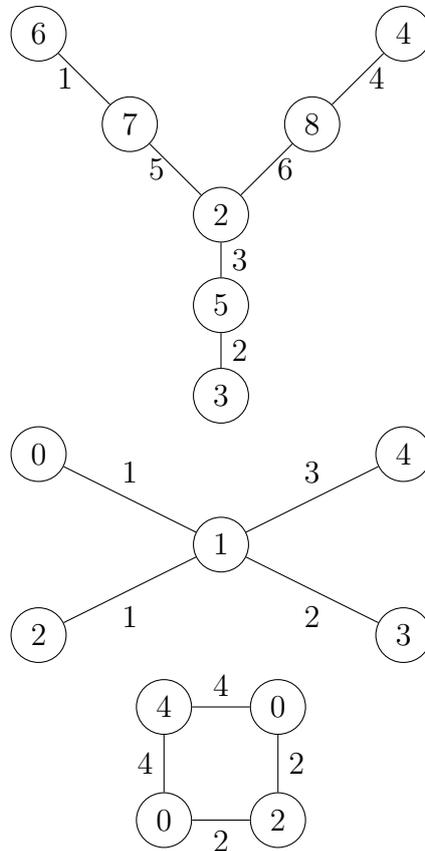


FIGURE 1.5 – Exemples de numérotations non gracieuses de graphes gracieux.

**Remarque 1.7.** Un même graphe gracieux peut avoir plusieurs numérotations possibles de ses sommets. En particulier, une autre numérotation du graphe  $C_4$  est présentée ci-dessous.

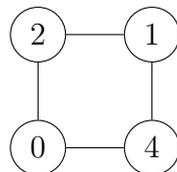


FIGURE 1.6 – Une autre valuation gracieuse de  $C_4$ .

**Proposition 1.8.** Soit  $G$  un graphe gracieux ayant  $n$  arêtes et une valuation  $f$ . La valuation complémentaire  $f'$  de  $f$  définie par  $f'(v) = n - f(v)$  pour tout  $v \in G$  est une valuation gracieuse de  $G$ .

*Démonstration.* Puisque  $f(v) \in \{0, \dots, n\}$  et que  $f$  est injective,  $f'(v) = n - f(v) \in \{0, \dots, n\}$  et est injective. De plus,

$$|f'(u) - f'(v)| = |n - f(u) - (n - f(v))| = |-f(u) + f(v)| = |f(u) - f(v)|.$$

Ainsi, les valeurs des arêtes de  $G$  restent inchangées, et  $f'$  constitue une valuation gracieuse de  $G$ .  $\square$

**Exemple 1.9.** Reprenons les graphes de la figure 1.4, cette fois-ci avec leur valuation complémentaire.

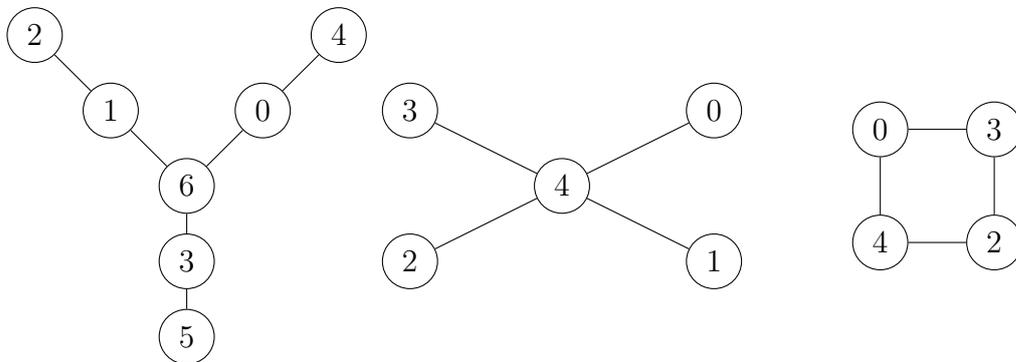


FIGURE 1.7 – Exemples de valuations complémentaires.

# Chapitre 2

## Exploration et caractérisation de graphes gracieux

À ce jour, les chercheurs n'ont pas encore obtenu de caractérisation de graphes gracieux quelconques. Toutefois, pour certaines classes de graphes, cette caractérisation existe. C'est ce que nous allons voir dans ce chapitre.

Le lemme suivant donne une condition nécessaire que les graphes eulériens<sup>1</sup> doivent respecter pour être gracieux.

**Lemme 2.1.** Si  $G$  est un graphe eulérien gracieux comportant  $n$  arêtes, alors  $n \equiv 0$  ou  $3 \pmod{4}$ ,

*Démonstration.* Procédons par l'absurde et supposons que  $n \equiv 1$  ou  $2 \pmod{4}$ .

- Si  $n \equiv 1 \pmod{4}$  alors  $n = 4l + 1$  avec  $l$  un naturel strictement positif. Soient  $b_1, \dots, b_n$  les valeurs des arêtes  $\{v_i, v_j\}$  du graphe. Nous allons raisonner sur la parité de  $\sum_{i=1}^n b_i$ . Puisque le graphe possède une  $\beta$ -valuation,  $\{b_k : 1 \leq k \leq n\} = \{|a_i - a_j| : 1 \leq i, j \leq n\} = \{1, 2, \dots, n\}$  et on a alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n b_k &= 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(4l+1)(4l+2)}{2} \\ &= (4l+1)(2l+1) \\ &\equiv 1 \pmod{2} \text{ car le produit de deux nombres impairs est impair.} \end{aligned}$$

- Si  $n \equiv 2 \pmod{4}$ , alors  $n = 4l + 2$  et on obtient

$$\sum_{k=1}^n b_k = \frac{(4l+2)(4l+3)}{2} = (2l+1)(4l+3) \equiv 1 \pmod{2}.$$

car le produit de deux nombres impairs est impair.

Jusqu'à présent, nous avons obtenu que si  $n \equiv 1$  ou  $2 \pmod{4}$ , on a donc  $\sum_{k=1}^n b_k \equiv 1$

---

1. Un graphe eulérien est un graphe qui possède un cycle eulérien. Un cycle eulérien est un cycle qui traverse chaque arête du graphe exactement une fois et revient à son point de départ. Pour un graphe non orienté, cela signifie que le graphe est connexe et que tous ses sommets ont un degré pair.

(mod 2).

Puisque le graphe est eulérien par hypothèse, il existe un circuit  $(v_1, \dots, v_p, v_1)$  qui passe une et une seule fois par toutes les arêtes. Pour ce circuit, on a alors  $\sum_{k=1}^n b_k = \sum_{i,j} |a_i - a_j| = |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_{p-1} - a_p| + |a_p - a_1|$ . Après avoir simplifié cette somme en supprimant les valeurs absolues, on obtient que pour tout  $i$ , chaque terme  $a_i$  est présent exactement un nombre pair de fois, chacun d'entre eux étant affecté du coefficient  $+1$  ou  $-1$ . Ainsi, pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ , il y a  $2k$  termes  $a_i$ , avec  $k$  un nombre naturel. Si on note  $c_{+,i}$  (resp.  $c_{-,i}$ ) comme étant le nombre de  $a_i$  précédés du signe  $+$  (resp. précédés du signe  $-$ ) avec  $c_{+,i} + c_{-,i} = 2k$ , alors pour tout  $i$ , on a

$$(c_{+,i} - c_{-,i})a_i = (c_{+,i} - (2k - c_{+,i}))a_i = 2(c_{+,i} - k)a_i \equiv 0 \pmod{2}.$$

En répétant le raisonnement pour chaque  $a_i$ , on en conclut que  $\sum_{k=1}^n b_k \equiv 0 \pmod{2}$ . D'où la contradiction obtenue et la preuve que  $G$  est gracieux. □

Illustrons ce raisonnement avec le graphe eulérien suivant composé de 4 sommets et de 9 arêtes.

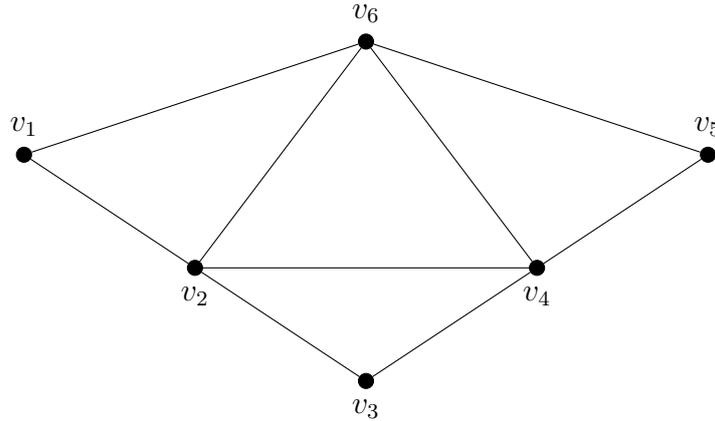


FIGURE 2.1 – Graphe eulérien de 6 sommets et 9 arêtes.

Considérons le circuit eulérien  $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_2, v_6, v_4, v_5, v_6, v_1)$ . Si l'on attribue des valeurs distinctes  $(a_i)_{1 \leq i \leq 6}$  aux sommets  $(v_i)_{1 \leq i \leq 6}$ , et en supposant, sans perte de généralité, que  $a_i > a_j$  pour tout  $i, j \in \{1, \dots, 6\}$ , alors, pour ce circuit, on a l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n b_k &= \sum_{i,j} |a_i - a_j| \\
&= |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + |a_3 - a_4| + |a_4 - a_2| + |a_2 - a_6| \\
&\quad + |a_6 - a_4| + |a_4 - a_5| + |a_5 - a_6| + |a_6 - a_1| \\
&= (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + (a_2 - a_4) \\
&\quad + (a_2 - a_6) + (a_4 - a_6) + (a_4 - a_5) + (a_5 - a_6) + (a_1 - a_6) \\
&= 2a_1 + 2a_2 + 0a_3 + 0a_4 + 0a_5 - 4a_6 \\
&= (2 + 0)a_1 + (3 - 1)a_2 + ((1 - 1)a_3 + (2 - 2)a_4 + (1 - 1)a_5 + (0 - 4)a_6
\end{aligned}$$

où, à la dernière ligne, chaque coefficient de  $a_i$  est exprimé par  $(c_{+,i} - c_{-,i})$ . Par exemple, pour le terme  $(3 - 1)a_2$ , cela signifie que 3 termes  $a_2$  sont précédés du signe + et 1 terme  $a_2$  est précédé du signe -. Tous les termes étant pairs, on en conclut que  $\sum_{i,j} |a_i - a_j| \equiv 0 \pmod{2}$ .

La caractérisation de graphes gracieux existe pour les cycles  $C_n$  et le graphe complet  $K_n$  à  $n$  sommets. Ces résultats sont présentés dans la partie suivante

**Théorème 2.2.** (a) Une  $\alpha$ -valuation du cycle  $C_n$  à  $n$  sommets existe si, et seulement si,  $n \equiv 0 \pmod{4}$

(b) Le cycle  $C_n$  est gracieux si, et seulement si,  $n \equiv 0$  ou  $3 \pmod{4}$

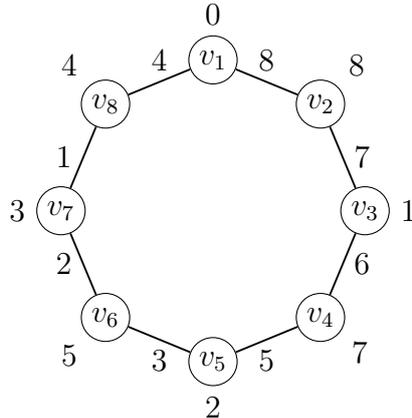
*Démonstration.* Notons  $C_n$  le cycle de longueur  $n$  donné par la suite de sommets  $(v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$ . La condition est nécessaire. Supposons qu'il existe une  $\alpha$ -valuation (et donc une  $\beta$ -valuation) du graphe. Puisque un polygone est un graphe eulérien, par le lemme,  $n \not\equiv 1$  et  $n \not\equiv 2 \pmod{4}$ . Ainsi,  $n \equiv 0$  ou  $3 \pmod{4}$ .

La condition est suffisante. Soit  $n \equiv 0 \pmod{4}$ .

Pour chaque sommet  $v_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), définissons la valuation suivante :

$$a_i = \begin{cases} (i - 1)/2 & \text{si } i \text{ impair,} \\ n + 1 - i/2 & \text{si } i \text{ pair, } i \leq n/2, \\ n - i/2 & \text{si } i \text{ pair, } i > n/2. \end{cases}$$

**Exemple 2.3.** Considérons le cas  $n = 8$ . Le cycle de longueur 8 correspondant est représenté ci-dessous



où sont inscrits les valeurs des sommets décrits par la valuation ainsi que les valeurs des arêtes définies par les différences positives entre les sommets correspondants. Prouvons que les conditions (1), (3), (5) définissant une  $\alpha$ -valuation pour cet octogone sont satisfaites :

- L'ensemble des  $a_i$  vaut  $\{0, 8, 1, 7, 2, 5, 3, 4\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\} \subset \{0, 1, \dots, n\}$ .
- L'ensemble des valeurs des arêtes vaut  $\{8, 7, 6, 5, 3, 2, 1, 4\} = \{1, 2, \dots, n\}$ .
- Pour satisfaire la condition (5) de la définition 1.1, il nous faut trouver un  $x$  naturel tel que pour toute arête  $\{v_i, v_j\}$ , on a  $a_i \leq x < a_j$  ou  $a_j \leq x < a_i$ . L'arête de valeur 1  $\{v_7, v_8\}$  avec  $a_7 = 3$  et  $a_8 = 4$  impose que si cette valeur existe, alors nécessairement elle doit valoir 3 puisque c'est est l'unique naturel  $x$  tel que  $a_7 \leq x < a_8$ . On constate ensuite que  $x = 3$  satisfait la condition aussi pour les 7 autres arêtes.

Montrons que la valuation décrite est bien une  $\alpha$ -valuation. Vérifions tout d'abord qu'il s'agit d'une application injective. Soient  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  et montrons que si  $i \neq j$  alors  $a_i = a_j$  conduit à une contradiction dans chacun des cas suivants

- (1)  $i$  impair et  $j$  pair tel que  $j \leq n/2$

$$a_i = a_j \Leftrightarrow \frac{i-1}{2} = n+1 - \frac{j}{2} \Leftrightarrow i = 2n+3 - j \geq 2n+3 - \frac{n}{2} = \frac{3n}{2} + 3 > n.$$

D'où  $i > n$ , ce qui est impossible.

- (2)  $i$  impair et  $j$  pair tel que  $n/2 < j \leq n$ .

$$a_i = a_j \Leftrightarrow \frac{i-1}{2} = n - \frac{j}{2} \Leftrightarrow i = 2n+1 - j \geq 2n+1 - n = n+1 > n.$$

D'où  $i > n$ , ce qui est impossible.

- (3)  $i, j$  pairs tels que  $i \leq n/2$  et  $j > n/2$

$$a_i = a_j \Leftrightarrow n+1 - \frac{i}{2} = n - \frac{j}{2} \Leftrightarrow i = j+2.$$

Ceci est absurde puisque  $i < j$ .

La valuation définie est donc bien une application injective.

De plus, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on a  $a_i \in \{0, \dots, n\}$ . Ainsi, la condition (1) de la définition 1.1 est bien respectée.

Il reste à montrer que la condition (3) de la définition 1.1 est satisfaite, c'est-à-dire que  $\{|a_i - a_{i+1}|, |a_n - a_1|; i = 1, \dots, n-1\} = \{1, \dots, n\}$ .

Soit  $i$  tel que  $1 \leq i \leq \frac{n}{2}$ .

Si  $i$  est impair, on a

$$\begin{aligned} |a_i - a_{i+1}| &= \left| \frac{i-1}{2} - \left( n+1 - \left( \frac{i+1}{2} \right) \right) \right| \\ &= \left| \frac{i}{2} - \frac{1}{2} - n - 1 + \frac{i}{2} + \frac{1}{2} \right| \\ &= |i - n - 1| \\ &= n+1 - i. \end{aligned}$$

Si  $i$  est pair, on obtient le même résultat

$$|a_i - a_{i+1}| = \left| n + 1 - \frac{i}{2} - \frac{(i+1-1)}{2} \right| = n + 1 - i.$$

Soit  $i$  tel que  $\frac{n}{2} + 1 \leq i \leq n - 1$ .

Si  $i$  est impair, on a

$$\begin{aligned} |a_i - a_{i+1}| &= \left| \frac{i-1}{2} - \left( n - \frac{i+1}{2} \right) \right| \\ &= \left| \frac{i-1}{2} - n + \frac{i+1}{2} \right| \\ &= |i - n| \\ &= n - i. \end{aligned}$$

Si  $i$  est pair, là aussi on obtient le même résultat

$$|a_i - a_{i+1}| = \left| n - \frac{i}{2} - \frac{i+1-1}{2} \right| = \left| \frac{i-1}{2} - n + \frac{i+1}{2} \right| = n - i.$$

Pour conclure, il faut également considérer la dernière arête  $|a_n - a_1| = \left| n - \frac{n}{2} - \frac{1-1}{2} \right| = \frac{n}{2}$ .  
Ainsi,

$$\begin{aligned} & \{|a_i - a_{i+1}|, |a_n - a_1| : i = 1, \dots, n-1\} \\ &= \left\{ |a_i - a_{i+1}| : 1 \leq i \leq \frac{n}{2} \right\} \cup \left\{ |a_i - a_{i+1}| : \frac{n}{2} + 1 \leq i \leq n-1 \right\} \cup \{|a_n - a_1|\} \\ &= \left\{ n + 1 - i : 1 \leq i \leq \frac{n}{2} \right\} \cup \left\{ n - i : \frac{n}{2} + 1 \leq i \leq n-1 \right\} \cup \left\{ \frac{n}{2} \right\} \\ &= \left\{ n + 1 - 1, \dots, n + 1 - \frac{n}{2} \right\} \cup \left\{ \frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2} - 2, \dots, 1 \right\} \cup \left\{ \frac{n}{2} \right\} \\ &= \left\{ n, n-1, \dots, \frac{n}{2} + 1 \right\} \cup \left\{ \frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2} - 2, \dots, 1 \right\} \cup \left\{ \frac{n}{2} \right\} \\ &= \{1, 2, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Remarquons que  $\frac{n}{2}$  a un sens puisque  $n \equiv 0 \pmod{4}$ . Enfin, montrons que  $x = \frac{n}{2} - 1$  satisfait la condition (5) de la définition 1.1. Dans notre exemple où  $n = 8$ , on a bien constaté que  $x = \frac{8}{2} - 1 = 3$  convient. Il nous faut montrer que  $a_i \leq x < a_{i+1}$  ou  $a_{i+1} \leq x < a_i$ . Là encore, il faut considérer chaque cas séparément.

(1) Soit  $i$  impair et  $i \leq \frac{n}{2}$ .

$$\begin{aligned} & a_i \leq x < a_{i+1} \\ \Leftrightarrow & \frac{i-1}{2} \leq \frac{n}{2} - 1 < n + 1 - \frac{i+1}{2} \\ \Leftrightarrow & i \leq n - 1 \text{ et } i < n + 3. \end{aligned}$$

(2) Soit  $i$  pair et  $i \leq \frac{n}{2}$ . On a

$$\begin{aligned} & a_{i+1} \leq x < a_i \\ \Leftrightarrow & \frac{i+1-1}{2} \leq \frac{n}{2} - 1 < n+1 - \frac{i}{2} \\ \Leftrightarrow & i \leq n \text{ et } i < n+4. \end{aligned}$$

(3) Soit  $i$  impair et  $i > \frac{n}{2}$ . On a

$$\begin{aligned} & a_i \leq x < a_{i+1} \\ \Leftrightarrow & \frac{i-1}{2} \leq \frac{n}{2} - 1 < n - \frac{i+1}{2} \\ \Leftrightarrow & i \leq n-1 \text{ et } i < n+1. \end{aligned}$$

(4) Soit  $i$  pair et  $i > \frac{n}{2}$ . On a

$$\begin{aligned} & a_{i+1} \leq x < a_i \\ \Leftrightarrow & \frac{i+1-1}{2} < \frac{n}{2} - 1 < n - \frac{i}{2} \\ \Leftrightarrow & i \leq n-2 \text{ et } i < n+2. \end{aligned}$$

(5)  $a_1 \leq x < a_n \Leftrightarrow 0 \leq \frac{n}{2} - 1 < \frac{n}{2}$ .

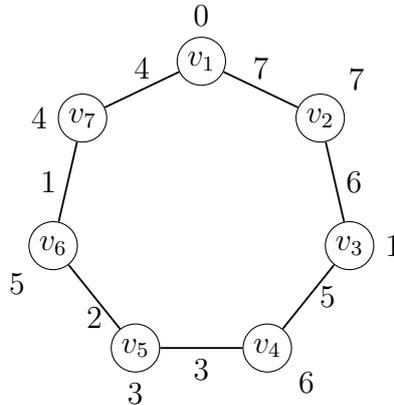
Chaque cas est donc bien vérifié et les  $a_i$  définissent bien une  $\alpha$ -évaluation du graphe.

Intéressons-nous maintenant à la seconde partie du théorème.

Soit  $n \equiv 3 \pmod{4}$ . Pour chaque sommet  $v_i$ , définissons la valuation de  $C_n$  suivante :

$$a_i = \begin{cases} n+1 - i/2 & \text{si } i \text{ pair,} \\ (i-1)/2 & \text{si } i \text{ impair, } i \leq (n-1)/2, \\ (i+1)/2 & \text{si } i \text{ impair, } i > (n-1)/2. \end{cases}$$

**Exemple 2.4.** Considérons le cas  $n = 7$ . L'heptagone décrit par cette valuation est représenté ci-dessous



Pour cette valuation, l'ensemble des valeurs des sommets vaut  $\{0, 7, 1, 6, 3, 5, 4\} \subset \{0, 1, \dots, n\}$  et l'ensemble des valeurs des arêtes vaut  $\{7, 6, 5, 3, 2, 1, 4\} = \{1, \dots, n\}$ . Ces deux conditions impliquent donc que l'heptagone est gracieux.

En revanche, il ne s'agit pas d'une  $\alpha$ -valuation car, pour chaque arête  $\{v_i, v_j\}$ , il est impossible de trouver  $x$  naturel satisfaisant la condition  $a_i \leq x < a_j$  ou  $a_j \leq x < a_i$ . En effet, si un tel  $x$  existe, l'arête  $\{v_6, v_7\}$  entraîne immédiatement que  $x$  vaut 4. Cette valeur de  $x$  satisfait la condition pour toutes les autres arêtes excepté l'arête  $\{v_7, v_1\}$  puisque  $0 \leq 4 \not< 4$ . On en conclut que la valuation de l'heptagone n'est pas une  $\alpha$ -valuation.

On démontre de manière analogue à ce qui a été fait précédemment que la valuation définie est une  $\beta$ -valuation du graphe. Il nous faut ainsi prouver que

$$\{|a_i - a_{i+1}|, |a_n - a_1|; i = 1, \dots, n-1\} = \{1, \dots, n\}.$$

Soit  $i$  tel que  $1 \leq i \leq (n-1)/2$ .

Alors, si  $i$  est pair, on a

$$|a_i - a_{i+1}| = \left| n+1 - \frac{i}{2} - \frac{(i+1)-1}{2} \right| = n+1-i$$

Si  $i$  est impair, on obtient le même résultat

$$|a_i - a_{i+1}| = \left| \frac{i-1}{2} - \left( n+1 - \frac{i+1}{2} \right) \right| = n+1-i$$

Soit  $i$  tel que  $\frac{n-1}{2} + 1 \leq i \leq n-1$ .

Alors, si  $i$  est pair, on a

$$|a_i - a_{i+1}| = \left| n+1 - \frac{i}{2} - \frac{(i+1)+1}{2} \right| = n-i$$

Si  $i$  est impair, on obtient le même résultat

$$|a_i - a_{i+1}| = \left| \frac{i+1}{2} - \left( n+1 - \frac{(i+1)}{2} \right) \right| = n-i$$

Il reste à considérer la dernière arête  $|a_n - a_1| = \left| \frac{n+1}{2} - \frac{1-1}{2} \right| = \frac{n+1}{2}$ .

Ainsi,

$$\begin{aligned} & \{|a_i - a_{i+1}|, |a_n - a_1|; i = 1, \dots, n-1\} \\ &= \left\{ n+1-i, 1 \leq i \leq \frac{n-1}{2} \right\} \cup \left\{ n-i, \frac{n-1}{2} + 1 \leq i \leq n-1 \right\} \cup \left\{ \frac{n+1}{2} \right\} \\ &= \left\{ n+1-1, n+1-2, \dots, n+1 - \frac{n-1}{2} \right\} \cup \left\{ n - \left( \frac{n-1}{2} + 1 \right), \dots, n - (n-1) \right\} \cup \left\{ \frac{n+1}{2} \right\} \\ &= \left\{ n, n-1, \dots, \frac{n+5}{2}, \frac{n+3}{2} \right\} \cup \left\{ \frac{n-1}{2}, \frac{n-3}{2}, \dots, 1 \right\} \cup \left\{ \frac{n+1}{2} \right\} \\ &= \{1, 2, \dots, n\}. \end{aligned}$$

□

Nous venons de voir que les cycles  $C_n$  sont gracieux sous certaines conditions. Regardons à présent les graphes chemins pour lesquels il existe toujours une valuation gracieuse.

**Théorème 2.5.** Un chemin est un graphe gracieux.

*Démonstration.* Soit  $P_n$  un chemin de  $n$  sommets  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  tel que  $\{v_i, v_{i+1}\}$  est une arête du graphe pour  $1 \leq i < n$ ,  $v_1$  et  $v_n$  étant les extrémités du chemin. Voici l'algorithme pour étiqueter les sommets :

- Étiquetez le premier sommet  $v_1$  par 0.
- Étiquetez le deuxième sommet  $v_2$  par  $n - 1$ .
- Étiquetez le troisième sommet  $v_3$  par 1.
- Étiquetez le quatrième sommet  $v_4$  par  $n - 2$ .
- Continuez ce processus en alternant la plus petite et la plus grande valeur disponibles de l'ensemble  $\{0, \dots, n\}$ .

Vérifions maintenant que l'étiquetage des arêtes est injectif et couvre toutes les valeurs de 1 à  $n - 1$  : Ainsi, les valeurs des arêtes sont déterminés par :

$$\begin{aligned} |f(v_1) - f(v_2)| &= n - 1, \\ |f(v_2) - f(v_3)| &= n - 2, \\ |f(v_3) - f(v_4)| &= n - 3, \\ &\vdots \\ |f(v_{n-1}) - f(v_n)| &= 1. \end{aligned}$$

Les valeurs des arêtes seront  $n - 1, n - 2, n - 3, \dots, 1$ . Donc, l'étiquetage des arêtes est injectif et couvre tous les entiers de 1 à  $n - 1$ . Ainsi,  $P_n$  est un graphe gracieux.  $\square$

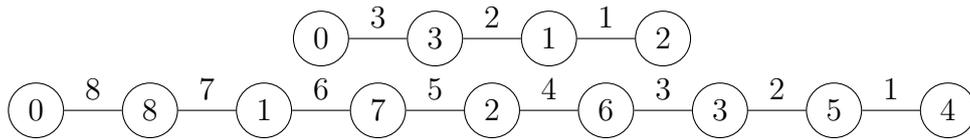


FIGURE 2.2 – Les graphes chemins  $P_4$  et  $P_9$  et une de leurs valuations gracieuses.

**Remarque 2.6.** Puisque toute valuation d'un graphe gracieux est également valable pour sa valuation complémentaire, on peut commencer la numérotation d'un chemin par la plus grande valeur  $n$  et alterner avec la plus petite et la plus grande valeur de l'ensemble  $\{0, \dots, n\}$  non déjà présentes dans le graphe.

Contrairement aux cycles et chemins pour lesquels il existe une valuation gracieuse, considérons un exemple où une telle valuation n'existe pas. Le résultat suivant est tiré de l'article [6].

**Théorème 2.7.** Pour  $n > 4$ , le graphe complet  $K_n$  n'est pas gracieux.

*Démonstration.* Supposons que  $K_n$  est gracieux. Nous allons montrer que cette hypothèse conduit à une contradiction. Le graphe  $K_n$  étant complet, il contient  $e = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$  arêtes. Puisque  $n > 4$ , on sait que  $e > 10$ . Comme  $K_n$  est gracieux, il est possible de

numéroter les sommets avec des nombres entiers compris entre 0 et  $e$  de telle façon que chaque arête ait une valeur distincte comprise entre 1 et  $e$ .

L'unique façon d'obtenir le nombre  $e$  comme différence positive de deux nombres entiers compris entre 0 et  $e$  est  $e - 0$ . Ainsi, deux des  $n$  sommets ont nécessairement les valeurs 0 et  $e$ . Les deux valeurs d'extrémités possibles pour obtenir une arête de valeur  $e - 1$  sont  $e$  et 1 ou  $e - 1$  et 0. Puisque 0 et  $e$  sont déjà des valeurs de sommets, alors 1 ou  $e$  est une valeur d'un sommet. Comme vu à la remarque 1.4, si  $(a_i)_i$  une valuation est valide, alors  $e - a_i$  l'est aussi. Ainsi, on peut supposer qu'un sommet ait une valeur de 1 sans perte de généralités.

Ensuite, pour obtenir l'arête de valeur  $e - 2$ , des extrémités de valeur  $e - 1$  et 1 ne conviennent pas car, dans ce cas, on aurait deux arêtes de valeur 1, celle joignant  $e$  à  $e - 1$  et celle joignant 1 à 0. Si on adjoint un sommet de valeur 2 avec le sommet de valeur  $e$  pour former l'arête de valeur  $e - 2$ , on aurait là aussi deux arêtes de valeur 1, celle joignant les sommets 0 et 1 et celle joignant les sommets 1 et 2.

Ainsi, un sommet de  $K_n$  a forcément une valeur de  $e - 2$  afin de former l'arête de valeur  $e - 2$  comme étant la différence entre  $e - 2$  et 0.

Jusqu'à présent, nous avons donc des sommets numérotés 0, 1,  $e - 2$  et  $e$  qui forment les arêtes de valeur 1, 2,  $e - 3$ ,  $e - 2$  et  $e$ . Pour obtenir l'arête  $e - 4$  d'extrémités  $u$  et  $v$ , les différents cas possibles sont repris dans le tableau suivant où les nombres encadrés correspondent aux sommets déjà présents dans le graphe :

$u$	$v$	Arêtes de même valeur
$e$	4	/
$e - 1$	3	$(e, e - 1)$ et $(1, 0)$
$e - 2$	2	$(2, 1)$ et $(1, 0)$
$e - 3$	1	$(e - 2, e - 3)$ et $(1, 0)$
$e - 4$	0	$(e - 2, e - 4)$ et $(e, e - 2)$

On voit donc que dans quatre cas sur cinq on obtient deux arêtes dont la différence en valeur absolue entre ses extrémités est la même. Ainsi, la seule façon d'obtenir une arête de valeur  $e - 4$  est celle d'extrémités  $e$  et 4. Nous avons maintenant des sommets numérotés 0, 1, 4,  $e - 2$  et  $e$  formant des arêtes de valeur 1, 2, 3, 4,  $e - 6$ ,  $e - 4$ ,  $e - 3$ ,  $e - 2$ ,  $e - 1$  et  $e$ . Notons que le graphe  $K_4$  avec  $e = 6$  présent dans la figure 2.3 possède cette valuation.

Par contre, il n'est pas possible d'obtenir une arête de valeur  $e - 5$  d'extrémités  $u$  et  $v$  comme montré dans le tableau suivant où là aussi les nombres encadrés représentent les sommets déjà présents dans  $K_n$ .

$u$	$v$	Arêtes de mêmes valeur
$e$	5	$(5, 4)$ et $(1, 0)$
$e - 1$	4	$(e, e - 1)$ et $(1, 0)$
$e - 2$	3	$(4, 3)$ et $(1, 0)$
$e - 3$	2	$(e - 2, e - 3)$ et $(1, 0)$
$e - 4$	1	$(e - 2, e - 4)$ et $(e, e - 2)$
$e - 5$	0	$(e - 2, e - 5)$ et $(4, 1)$

Chacun des cas possibles du tableau conduit à une contradiction puisque on y trouve deux arêtes différentes de même valeur.

Notons que la dernière ligne présente dans le tableau désigne bien 2 arêtes différentes  $(e - 2, e - 5)$  et  $(4, 1)$  puisque  $e > 10$ . En fait, ces 2 arêtes seraient identiques pour  $e = 6$ , ce qui correspond exactement au nombre d'arêtes du graphes complet  $K_4$  de 4 sommets avec les sommets numérotés  $\{0, 1, 4, 6\}$  et les arêtes de valeur  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Ceci contredit l'hypothèse que  $K_n$  est gracieux.

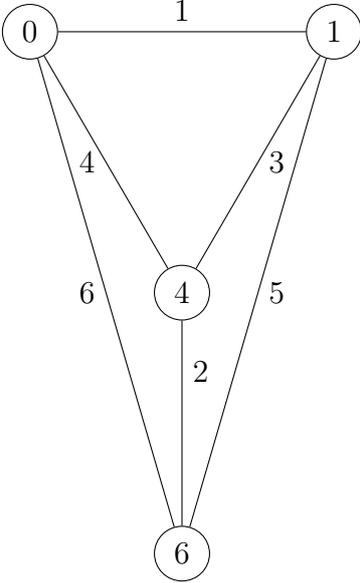


FIGURE 2.3 – Une numérotation du graphe complet gracieux  $K_4$ .

□

Après avoir vu les cycles, les chemins et les graphes complets, intéressons-nous maintenant aux graphes bipartis, dont on rappelle d'abord la définition.

**Définition 2.8.** Un graphe  $G$  est *biparti* si on peut partitionner l'ensemble de ses sommets  $V$  en deux sous-ensembles  $V_1$  et  $V_2$  de telle sorte que chaque arête de  $G$  possède une extrémité dans  $V_1$  et l'autre dans  $V_2$ . Le graphe  $G$  est *biparti complet* si chaque sommet de  $V_1$  est joint avec tous les sommets de  $V_2$ . Si  $V_1$  contient  $a$  sommets et  $V_2$  en contient  $b$ , on note ce graphe  $K_{a,b}$ .

**Théorème 2.9.** Pour tous  $a, b$  strictement positifs,  $K_{a,b}$  est gracieux.

*Démonstration.* On partitionne l'ensemble des sommets en deux ensembles  $V_1$  et  $V_2$  avec  $a$  sommets dans  $V_1$  et  $b$  sommets dans  $V_2$ . Étiquetons les sommets de la manière suivante :

- Les sommets de  $V_1$  sont étiquetés avec les entiers consécutifs de 0 à  $a - 1$ .
- Les sommets de  $V_2$  sont étiquetés avec les entiers  $a, 2a, \dots, ba$ .

Notons d'abord que le graphe  $K_{a,b}$  comprend  $a \cdot b$  arêtes, car chaque arête connecte un sommet de  $V_1$  à un sommet de  $V_2$ . À titre d'exemple, le graphe biparti  $K_{3,4}$  avec 12 arêtes et la valuation décrite est illustré à la figure 2.4.

Les valeurs attribuées aux sommets appartiennent bien à l'ensemble  $\{0, \dots, ba\}$ . La valuation est injective, car les valeurs attribuées aux sommets de  $V_1$  et  $V_2$  sont toutes distinctes entre elles, et les valeurs dans  $V_1$  sont strictement inférieures à celles dans  $V_2$ .

Pour montrer que cet étiquetage est gracieux, il nous reste à examiner les valeurs absolues des différences entre les étiquettes des sommets reliés par une arête.

Considérons tout d'abord le sommet de  $V_2$  nommé  $a$ . Puisque ce sommet est relié à tous les sommets de  $V_1$  numérotés  $\{0, \dots, a - 1\}$ , les valeurs des arêtes ayant une extrémité étiquetée  $a$  sont données par  $\{|a - 0|, |a - 1|, \dots, |a - (a - 1)|\} = \{1, \dots, a\}$ .

Examinons à présent le sommet de  $V_2$  étiqueté  $2a$ . Les valeurs des arêtes connectées à une extrémité étiquetée  $2a$  sont  $\{|2a - 0|, |2a - 1|, \dots, |2a - (a - 1)|\} = \{a + 1, a + 2, \dots, 2a - 1, 2a\}$ .

Cette démarche est répétée pour tous les sommets de  $V_2$ . Ainsi, pour le sommet de  $V_2$  étiqueté  $ba$ , les valeurs des arêtes dont une extrémité est  $ba$  sont  $\{|ba - 0|, |ba - 1|, \dots, |ba - (a - 1)|\} = \{(b - 1)a + 1, (b - 1)a + 2, \dots, ba - 1, ba\}$ .

En réunissant toutes les valeurs d'arêtes ainsi obtenues, nous obtenons l'ensemble  $\{1, \dots, a\} \cup \{a + 1, a + 2, \dots, 2a - 1, 2a\} \cup \dots \cup \{(b - 1)a + 1, (b - 1)a + 2, \dots, ba - 1, ba\} = \{1, \dots, ba\}$ .

□

**Corollaire 2.10.** Pour tous  $a$  et  $b$  strictement positifs,  $K_{a,b}$  admet une  $\alpha$ -valuation.

*Démonstration.* Comme mentionné dans la remarque 1.4, si une  $\alpha$ -valuation d'un graphe existe, alors la valeur critique correspondante  $x$  est la plus petite des deux valeurs dont l'arête vaut 1. Dans le cas de la  $\alpha$ -valuation décrite pour le graphe biparti complet  $K_{a,b}$ , la valeur de l'arête 1 a pour extrémités les sommets de valeur  $a - 1$  et  $a$ . Ainsi, la valeur critique  $x$  doit être égale à  $a - 1$ .

Par exemple, dans le graphe de la figure 2.4, l'arête de valeur 1 joint les sommets 2 et 3, ce qui implique que  $x$  vaut 2.

Il reste à démontrer que cette valeur de  $x$  est appropriée. En d'autres termes, pour toute arête du graphe dont les extrémités ont pour valeurs  $i$  et  $j$ , il faut que  $i \leq x < j$

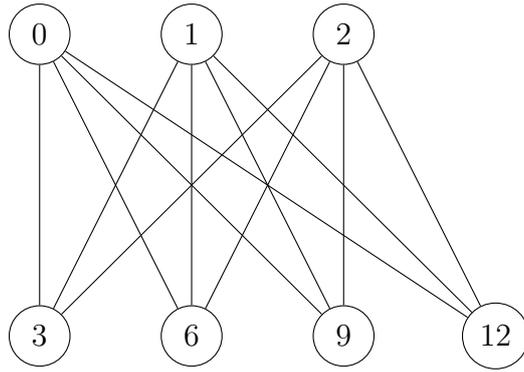


FIGURE 2.4 – Exemple du graphe biparti complet  $K_{3,4}$  avec les étiquettes spécifiées.

ou  $j \leq x < i$ . Chaque arête du graphe relie un sommet  $u$  de  $V_1$  à un sommet  $v$  de  $V_2$ . Si l'on note  $i$  et  $j$  les valeurs des sommets  $u$  et  $v$ , respectivement, on observe que, selon la valuation décrite, on a  $i \leq a - 1$  et  $j \geq a$ , ce qui entraîne  $i \leq a - 1 < j$ .

Cela prouve donc que le graphe biparti complet  $K_{a,b}$  admet bien une  $\alpha$ -évaluation.  $\square$

Nous allons maintenant voir d'autres classes de graphes particuliers qui sont des graphes gracieux.

**Définition 2.11.** Un graphe étoile  $S_n$  est un graphe composé d'un sommet central et de  $n$  sommets périphériques, chacun étant connecté uniquement au sommet central. Il s'agit exactement du graphe complet biparti  $K_{1,n}$ .

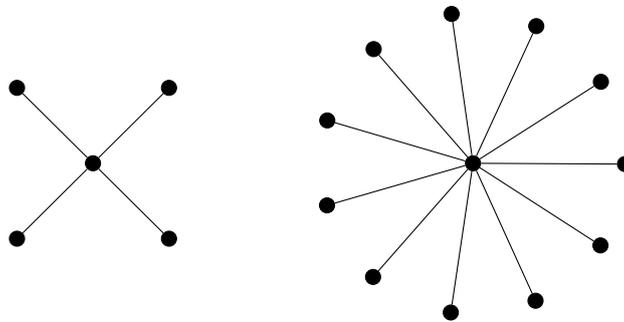


FIGURE 2.5 – Graphe étoile  $S_4$  (à gauche) et  $S_{11}$  (à droite).

**Proposition 2.12.** Les graphes étoiles sont des graphes gracieux.

*Démonstration.* Il suffit de numéroter le centre par 0 puis de 1 à  $n$  les autres sommets.  $\square$

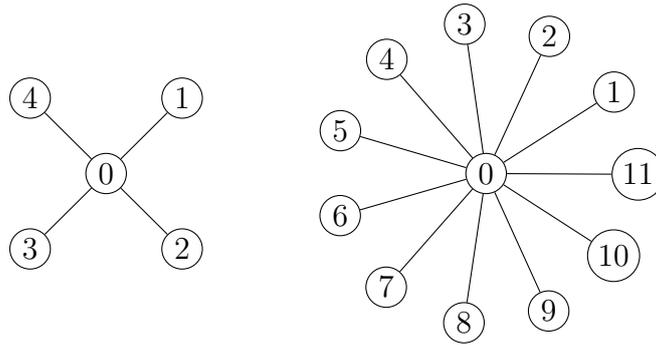


FIGURE 2.6 – Graphe étoile  $S_4$  (à gauche) et  $S_{11}$  (à droite) avec étiquetage des sommets.

**Définition 2.13.** *Un graphe chenille est un type particulier d'arbre dans lequel tous les sommets sont à une distance d'au plus un du chemin central, ce dernier étant un chemin simple parcourant le graphe. Les sommets ne se trouvant pas sur le chemin central sont donc des feuilles de l'arbre*

**Remarque 2.14.** On peut caractériser les graphes chenilles de plusieurs manières. En voici une liste non exhaustive :

- Les arbres pour lesquels la suppression des feuilles produit un chemin.
- Les arbres dans lesquels il existe un chemin passant par tous les sommets de degré deux ou plus.
- Les arbres dans lesquels chaque sommet de degré 3 ou plus a au plus deux voisins de degré 2 ou plus.
- Les graphes connexes qui peuvent être représentés en plaçant les sommets sur deux droites parallèles, avec des arêtes tracées par des segments de droite qui ont un point d'extrémité sur chacune des droites.

**Exemple 2.15.** Voici des exemples de graphe chenille.

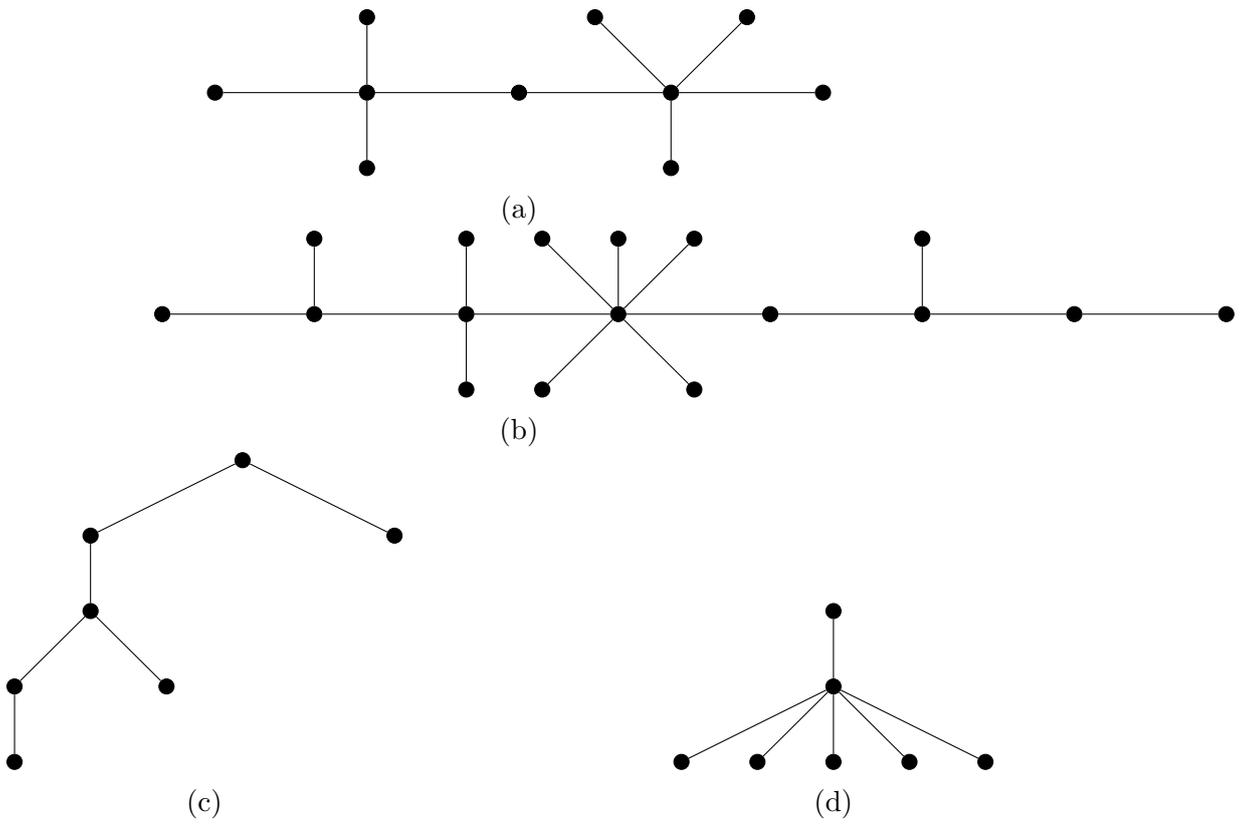


FIGURE 2.7 – Des exemples de graphe chenille.

**Théorème 2.16.** Tous les graphes chenilles sont gracieux.

*Démonstration.* La preuve est similaire à celle effectuée pour les chemins. Nous allons décrire l'étiquetage des sommets et montrer que celui-ci est gracieux. Soit  $C$  un graphe chenille de taille  $n$  et  $P_k = (v_1, \dots, v_k)$  son chemin central de longueur  $k$ .

Commençons par numéroter une extrémité de  $P_k$ . Sans perte de généralité, supposons que ce soit  $v_1$ . On assigne à  $v_1$  le plus petit label possible, soit 0. En passant à  $v_2$ , le prochain sommet de  $P$ , nous lui assignons le plus grand label disponible, soit  $n$ . Nous considérons ensuite le(s) voisin(s) non étiqueté(s) de  $v_2$ , y compris  $v_3$ , le prochain sommet de  $P$ . Si  $v_2$  a  $l$  voisins non étiquetés, nous assignons à ces voisins les  $l$  plus petits labels disponibles (dans ce cas  $1, 2, \dots, l$ ), où  $v_3$  reçoit le plus élevé de ces labels, soit  $l$ . Nous considérons ensuite les voisins de  $v_3$  qui n'ont pas encore été étiquetés (c'est-à-dire à l'exclusion de  $v_2$ ). Si  $v_3$  a  $j$  voisins non étiquetés, nous assignons à ces voisins les  $j$  plus grands labels disponibles (dans ce cas  $n-1, n-2, \dots, n-j$ ), où  $v_4$  reçoit le plus bas de ces labels, soit  $n-j$ .

Nous continuons de manière similaire, où à chaque  $v_i$  dans  $P$  nous assignons à ses  $m_i$  voisins non étiquetés soit les  $m_i$  plus grands labels disponibles, soit les  $m_i$  plus petits labels disponibles, selon que  $v_i$  ait été étiqueté avec une valeur "basse" ou une valeur "haute", respectivement. Nous procédons ainsi jusqu'à atteindre  $v_k$ , la fin de notre chemin.

Illustrons ce résultat en reprenant le graphe (b) de la figure 2.7 composé de  $n = 16$  arêtes où on nomme les sommets du sommet central par  $v_1, \dots, v_8$ .

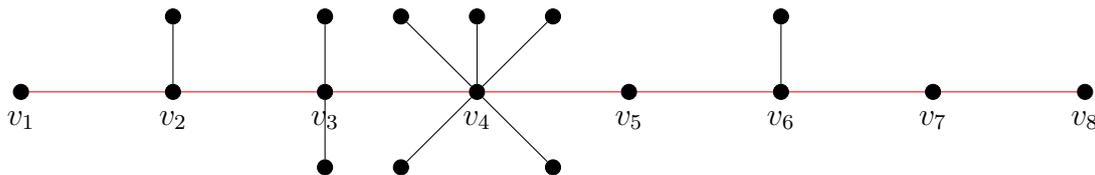


FIGURE 2.8 – Graphe chenille de chemin central  $(v_1, \dots, v_8)$ .

Nous devons numéroter les sommets avec les entiers de 0 à 16. Nous commençons par  $v_1$  à qui nous assignons la valeur 0. Ensuite,  $v_2$  prend la plus grande valeur disponible, c'est-à-dire 16. Ce dernier a deux voisins (dont  $v_3$ ) et nous leur assignons donc les plus petites valeurs disponibles, à savoir 1 et 2, avec la plus grande valeur pour  $v_3$ , c'est-à-dire 2. Ce sommet a trois voisins (dont  $v_4$ ), nous leur attribuons cette fois les plus grandes valeurs disponibles, à savoir 15, 14 et 13, avec la plus petite de ces valeurs (13) pour  $v_4$ . Nous continuons de la sorte en alternant les plus petites et grandes valeurs disponibles jusqu'à arriver au bout du chemin central, le sommet  $v_8$ , qui prend la valeur 11. Nous devons numéroter les sommets avec les entiers de 0 à 16. Nous commençons par  $v_1$  à qui nous assignons la valeur 0. Ensuite,  $v_2$  prend la plus grande valeur disponible, c'est-à-dire 16. Ce dernier a deux voisins (dont  $v_3$ ) et nous leur assignons donc les plus petites valeurs disponibles, à savoir 1 et 2, avec la plus grande valeur pour  $v_3$ , c'est-à-dire 2. Ce sommet a trois voisins (dont  $v_4$ ), nous leur attribuons cette fois les plus grandes valeurs disponibles, à savoir 15, 14 et 13, avec la plus petite de ces valeurs (13) pour  $v_4$ . Nous continuons de la sorte en alternant les plus petites et grandes valeurs disponibles jusqu'à arriver au bout du chemin central, le sommet  $v_8$ , qui prend la valeur 11. Le graphe complètement étiqueté est représenté ci-dessous, avec les valeurs des arêtes qui apparaissent dans un ordre décroissant de la gauche vers la droite et qui recouvre toutes les valeurs entières de 1 à 16, confirmant que ce graphe est gracieux.

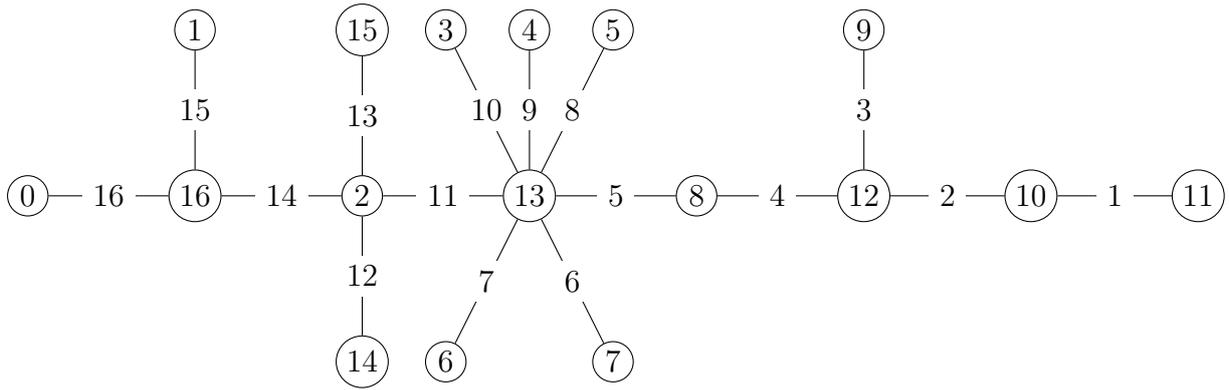
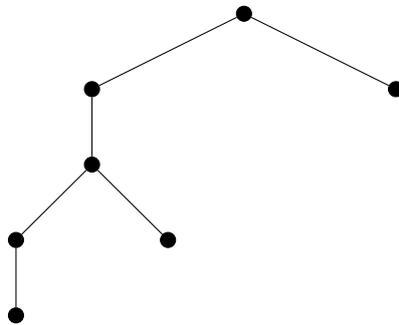


FIGURE 2.9 – Graphe chenille complètement étiqueté.

Un autre exemple avec l'arbre de taille 6 de la figure 2.7



La première étape ici, moins évidente que dans l'exemple précédent, consiste à identifier le chemin central, que l'on nomme par  $v_1, \dots, v_6$  et représenté en rouge.

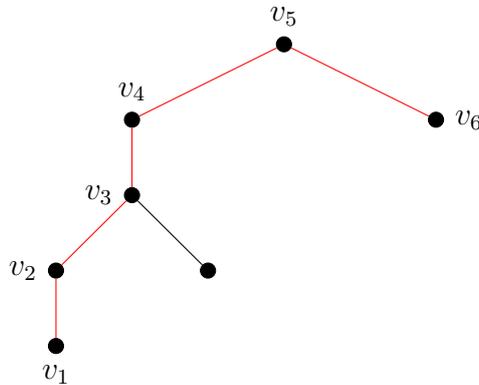


FIGURE 2.10 – Graphe chenille de chemin central  $(v_1, \dots, v_6)$ .

Nous commençons par attribuer la valeur 0 à  $v_1$  et la valeur 6 à  $v_2$ . Ce dernier n'a qu'un seul voisin,  $v_3$ , auquel nous attribuons la plus petite valeur disponible, soit 1. Le sommet  $v_3$  ayant deux voisins, nous leur assignons les plus grandes valeurs disponibles, soit 4 et 5, en donnant la plus petite de ces valeurs à  $v_4$ . L'arbre ne possédant plus de feuilles, il ne reste qu'à attribuer la valeur 2 à  $v_5$  et 3 à  $v_6$ . L'arbre complet étiqueté est représenté ci-dessous :

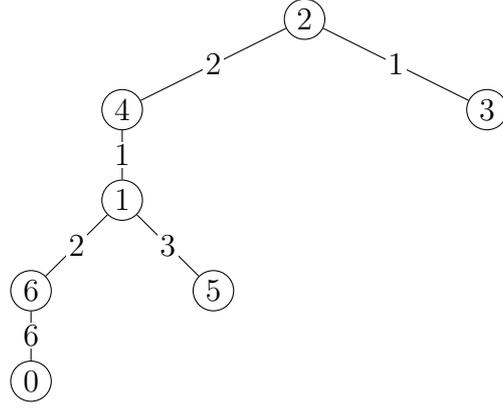


FIGURE 2.11 – Graphe chenille étiqueté.

Montrons maintenant que l'étiquetage décrit est gracieux. Les sommets du chemin obtenu en supprimant toutes les feuilles sont  $v_1, v_2, \dots, v_k$ . Pour chaque  $i = 1, 2, \dots, k$ , appelons les feuilles sortant de  $v_i$  par  $u_{i,1}, u_{i,2}, \dots, u_{i,n_i}$ .

Nous procédons par récurrence sur  $i$  de 1 à  $k$ . Si  $i = 1$ , notre graphe est un graphe étoile qui a été démontré comme gracieux. On commence par étiqueter  $v_1$  avec  $f(v_1) = 0$  et  $u_{1,1}, u_{1,2}, \dots, u_{1,n_1}$  par  $f(u_{1,j}) = n - j + 1$ . Cela signifie que nous avons utilisé les étiquettes 0 et  $n, n - 1, \dots, n - n_1 + 1$ . De plus, la valeur des arêtes  $\{v_1, u_{1,j}\}$  est donnée par  $|f(v_1) - f(u_{1,j})| = |0 - (n + 1 - j)| = n - j + 1$ . Nous obtenons donc également les étiquettes des arêtes  $n, n - 1, \dots, n - n_1 + 1$ .

Pour l'étape d'induction, supposons que nous ayons utilisé toutes les étiquettes de sommets  $0, 1, 2, \dots, l$  et  $n, n - 1, \dots, n - m$  (pour  $l < n$  et  $m < n$ ) ainsi que toutes les étiquettes d'arêtes  $n, n - 1, \dots, n - m, n - m - 1, \dots, n - m - l$  et que nous ayons déjà étiqueté  $v_1, v_2, \dots, v_{i-1}$  ainsi que  $u_{1,1}, u_{1,2}, \dots, u_{1,n_1}, \dots, u_{i-1,1}, \dots, u_{i-1,n_{i-1}}$ .

Maintenant, nous allons numéroter  $v_i$  et  $u_{i,1}, u_{i,2}, \dots, u_{i,n_i}$ . Si  $i$  est pair, alors  $i - 1$  est impair, donc  $f(v_{i-1}) = l$  puisque dans le chemin central, les sommets "impairs" reçoivent la plus grande des plus petites valeurs disponibles et les sommets "pairs" la plus petite des plus grandes valeurs disponibles. Nous posons  $f(v_i) = n - m - 1$ , de sorte que  $|f(v_i) - f(v_{i-1})| = |n - m - 1 - l| = n - m - 1 - l$ . Ensuite, nous posons  $f(u_{i,j}) = l + j$  pour  $j = 1, 2, \dots, n_i$ , de sorte que  $|f(v_i) - f(u_{i,j})| = |n - m - 1 - (l + j)| = n - m - l - j - 1$ . Ainsi, après cet étiquetage, nous avons utilisé les étiquettes des sommets  $\{0, 1, \dots, l + n_i\} = \{0, 1, \dots, l'\}$  et  $\{n, n - 1, \dots, n - m, n - m - 1\} = \{n, n - 1, \dots, n - m'\}$  en posant  $l' = l + n_i$  et  $m' = m + 1$ . Nous avons les étiquettes des arêtes  $\{n, n - 1, \dots, n - m, n - m - 1, \dots, n - m - l, \dots, n - m - l - n_i - 1\} = \{n, n - 1, \dots, n - m', \dots, n - m' - l'\}$ .

De même, si  $i$  est impair, alors  $i - 1$  est pair, donc  $f(v_{i-1}) = n - m$ . Nous posons  $f(v_i) = l + 1$  et  $f(u_{i,j}) = n - m - j$  pour  $j = 1, 2, \dots, n_i$ . Cela implique que nous obtenons les étiquettes d'arêtes  $|f(v_{i-1}) - f(v_i)| = n - m - l - 1$  et  $|f(v_i) - f(u_{i,j})| = |l + 1 - n + m + j| = n - m - l - j - 1$ . Nous avons donc utilisé les étiquettes  $\{0, 1, \dots, l, l + 1\} = \{0, 1, \dots, l'\}$  et  $\{n, n - 1, \dots, n - m, \dots, n - m - 1, \dots, n - m - n_i\} = \{n, n - 1, \dots, n - m'\}$ , en posant  $l' = l + 1$  et  $m' = m + n_i$ . Nous avons les étiquettes des arêtes  $\{n, n - 1, \dots, n - m, \dots, n - m - l, n - m - l - 1, \dots, n - m - l - n_i - 1\} = \{n, n - 1, \dots, n - m', \dots, n - m' - l'\}$ .

Alors, dans les deux cas, nous avons utilisé les étiquettes des sommets  $0, 1, \dots, l'$  et  $n, n - 1, \dots, n - m'$  et avons obtenu les étiquettes des arêtes  $n, n - 1, \dots, n - m', \dots, n - m' - l'$ . On peut donc continuer notre étiquetage de la même manière avec les  $l'$  et  $m'$  correspondants. Ceci complète l'induction.

À la fin, lorsque nous aurons terminé ce processus jusqu'à  $i = k$ , nous aurons utilisé

toutes les étiquettes de sommets de 0 à  $n$  et nous aurons obtenu toutes les étiquettes d'arêtes de  $n$  à 1. Ceci prouve que le graphe chenille est gracieux.

□

**Remarque 2.17.** Notons que si l'on applique cette construction à un graphe chemin  $v_1, \dots, v_n$  (qui est également un graphe chenille), on obtient la construction décrite dans le théorème 2.5, en alternant les plus petites et les plus grandes valeurs le long du graphe.

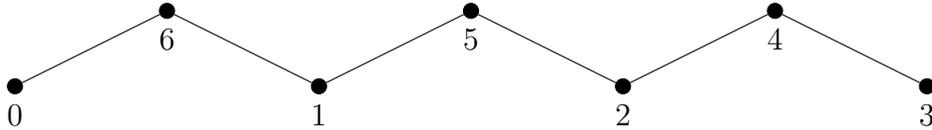


FIGURE 2.12 – Graphe chemin gracieux de 7 sommets.

Examinons maintenant une autre classe de graphes gracieux, les graphes roues.

**Définition 2.18.** Un graphe roue  $W_n$  ( $n \geq 3$ ) est un graphe d'ordre  $n+1$  formé en ajoutant un sommet central unique, appelé le "centre", qui est connecté à tous les sommets d'un graphe cycle  $C_n$ . Le graphe cycle  $C_n$  constitue le bord de la roue, tandis que le sommet central est relié à chaque sommet du cycle, formant ainsi la structure de la roue. Le graphe  $W_n$  contient  $2n$  arêtes et peut s'écrire comme  $C_n + K_1$

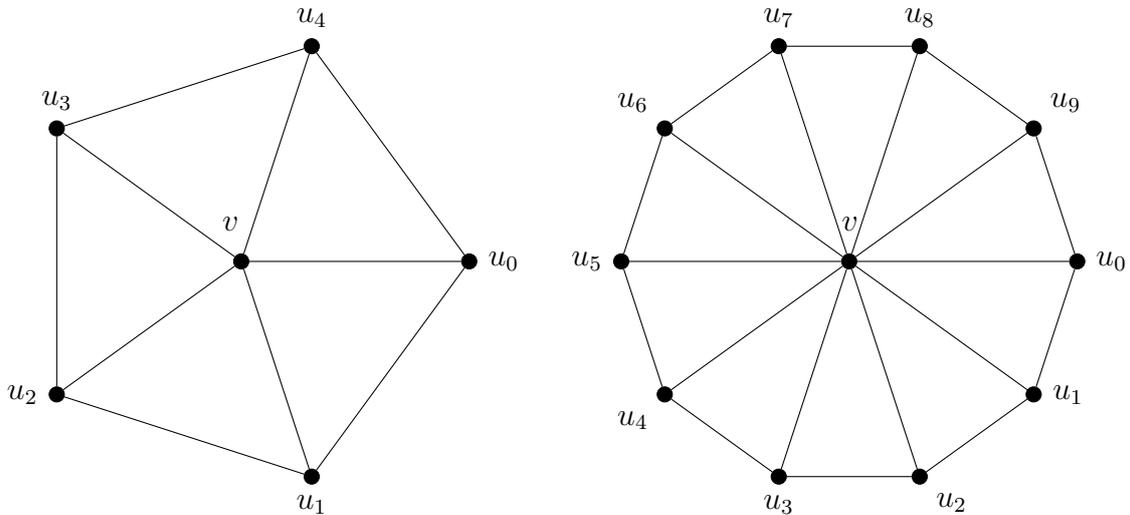


FIGURE 2.13 – Graphe roue  $W_5$  (à gauche) et  $W_{10}$  (à droite) avec noms des sommets.

**Exemple 2.19.**

**Proposition 2.20.** Le graphe roue  $W_p$  est gracieux pour tout  $p \geq 3$ .

*Démonstration.* Soit  $V(W_p) = \{u_0, u_1, \dots, u_{p-1}, v\}$  l'ensemble des sommets où  $v$  est le sommet connecté au cycle. Considérons les deux cas suivants :

1. Si  $p \equiv 0 \pmod{2}$ , alors la valuation suivante donne un étiquetage gracieux :

$$f(v) = 0$$

$$f(u_i) = \begin{cases} 2p & \text{si } i = 0 \\ 2 & \text{si } i = p - 1 \\ i & \text{si } i = 1, 3, 5, \dots, p - 3 \\ 2p - i - 1 & \text{si } i = 2, 4, 6, \dots, p - 2 \end{cases}$$

2. Si  $p \equiv 1 \pmod{2}$ , alors la valuation suivante donne un étiquetage gracieux :

$$f(v) = 0$$

$$f(u_i) = \begin{cases} 2p & \text{si } i = 0 \\ 2 & \text{si } i = 1 \\ p + i & \text{si } i = 2, 4, 6, \dots, p - 1 \\ p + 1 - i & \text{si } i = 3, 5, 7, \dots, p - 2 \end{cases}$$

**Exemple 2.21.** Remettons les deux graphes  $W_5$  et  $W_{10}$  avec l'étiquetage décrit ci-dessus. On constate bien que les arêtes ont toutes des valeurs différentes.

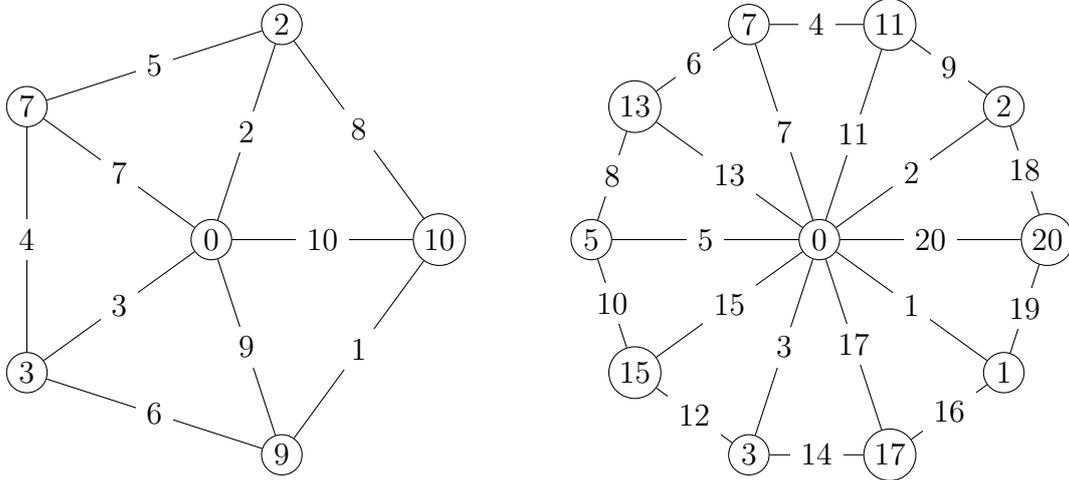


FIGURE 2.14 – Graphe roue  $W_5$  et  $W_{10}$  avec les valeurs des sommets et des arêtes.

Montrons maintenant que la fonction  $f$  est bien une valuation gracieuse du graphe roue  $W_p$ , c'est-à-dire que  $f : V \rightarrow \{0, \dots, 2p\}$  est injective et que les valeurs des arêtes couvrent l'ensemble des entiers de 1 à  $2p$ .

Commençons par le cas où  $p \equiv 0 \pmod{2}$ .

La fonction  $f$  est définie par :

$$f(v) = 0$$

et

$$f(u_i) = \begin{cases} 2p & \text{si } i = 0, \\ 2 & \text{si } i = p - 1, \\ i & \text{si } i = 1, 3, 5, \dots, p - 3, \\ 2p - i - 1 & \text{si } i = 2, 4, 6, \dots, p - 2. \end{cases}$$

En suivant cette définition, les valeurs des sommets sont :

$$\{f(v), f(u_0), \dots, f(u_{p-1})\} = \{0, 2p, 2\} \cup \{1, 3, \dots, p - 3\} \cup \{2p - 3, 2p - 5, \dots, p + 3, p + 1\}$$

ce qui peut être réécrit sous la forme :

$$\{0, 2, 2p\} \cup \{1, 3, 5, \dots, p - 3, p + 1, p + 3, \dots, 2p - 5, 2p - 3\},$$

où les deux derniers ensembles contiennent respectivement les valeurs paires et impaires.

Il est d'abord évident que ces valeurs sont toutes distinctes et appartiennent à l'ensemble  $\{0, \dots, 2p\}$ , ce qui garantit l'injectivité de  $f$ . Il reste à examiner les valeurs des arêtes. Les  $p$  arêtes reliant le sommet central aux autres sommets ont pour valeurs les étiquettes des sommets eux-mêmes (puisque le centre est étiqueté par 0). Ainsi, ces arêtes couvrent l'ensemble  $\{2, 2p\} \cup \{1, 3, 5, \dots, p - 3, p + 1, p + 3, \dots, 2p - 5, 2p - 3\}$ . Pour que l'étiquetage soit gracieux, il reste à couvrir toutes les valeurs paires excepté 2 et  $2p$ , ainsi que les deux valeurs impaires manquantes  $p - 1$  et  $2p - 1$ . Les arêtes restantes sont celles du cycle  $C_p$ , où l'on a :

$$\begin{aligned} |f(u_0) - f(u_1)| &= 2p - 1, \\ \{|f(u_i) - f(u_{i+1})| : i = 1, 3, \dots, p - 3\} &= \{|i - (2p - (i + 1) - 1)| : i = 1, 3, \dots, p - 3\} \\ &= \{2p - 2i - 2 : i = 1, 3, \dots, p - 3\} \\ &= \{2p - 4, 2p - 8, \dots, 8, 4\}, \\ \{|f(u_i) - f(u_{i+1})| : i = 2, 4, \dots, p - 2\} &= \{|(2p - i - 1) - (i + 1)| : i = 2, 4, \dots, p - 2\} \\ &= \{2p - 2i - 2 : i = 2, 4, \dots, p - 2\} \\ &= \{2p - 6, 2p - 10, \dots, 10, 6\}, \\ |f(u_{p-2}) - f(u_{p-1})| &= |2p - (p - 2) - 1 - 2| = p - 1, \\ |f(u_{p-1}) - f(u_0)| &= 2p - 2. \end{aligned}$$

Ainsi, les deux valeurs impaires manquantes  $2p - 1$  et  $p - 1$  sont bien présentes, tout comme toutes les valeurs paires sauf 2 et  $2p$ , car :

$$\{2p - 4, 2p - 8, \dots, 8, 4\} \cup \{2p - 6, 2p - 10, \dots, 10, 6\} \cup \{2p - 2\} = \{4, 6, 8, \dots, 2p - 6, 2p - 4, 2p - 2\}.$$

Nous avons ainsi démontré que  $f$  est une valuation gracieuse pour le cas où  $p \equiv 0 \pmod{2}$ .

Passons maintenant au cas où  $p \equiv 1 \pmod{2}$ . La démonstration est similaire à celle du cas précédent. La fonction  $f$  est définie par :

$$f(v) = 0$$

et

$$f(u_i) = \begin{cases} 2p & \text{si } i = 0, \\ 2 & \text{si } i = 1, \\ p + i & \text{si } i = 2, 4, 6, \dots, p - 1, \\ p + 1 - i & \text{si } i = 3, 5, 7, \dots, p - 2. \end{cases}$$

Les valeurs des sommets résultent donc en :

$$\{0, 2, 2p\} \cup \{p + 2, p + 4, \dots, 2p - 1\} \cup \{p - 2, p - 4, \dots, 5, 3\},$$

ce qui peut être réécrit sous la forme :

$$\{0, 2, 2p\} \cup \{3, 5, \dots, p - 2, p + 2, \dots, 2p - 1\}.$$

Les  $p$  arêtes reliant un sommet au centre englobent donc les valeurs  $\{2, 2p\} \cup \{3, 5, \dots, p - 2, p + 2, \dots, 2p - 1\}$ .

Il reste donc à inclure toutes les valeurs paires entières de l'intervalle  $]2, 2p[$  ainsi que les deux valeurs impaires 1 et  $p$ .

Les arêtes du cycle  $C_p$  ont pour valeurs :

$$\begin{aligned} |f(u_0) - f(u_1)| &= 2p - 2, \\ |f(u_1) - f(u_2)| &= |2 - (p + 2)| = p, \\ \{|f(u_i) - f(u_{i+1})| : i = 2, 4, \dots, p - 3\} &= \{|(p + i) - (p + 1 - (i + 1))| : i = 2, 4, \dots, p - 3\} \\ &= \{2i : i = 2, 4, \dots, p - 3\} \\ &= \{4, 8, \dots, 2p - 10, 2p - 6\}, \\ \{|f(u_i) - f(u_{i+1})| : i = 3, 5, \dots, p - 2\} &= \{|(p + 1 - i) - (p + (i + 1))| : i = 3, 5, \dots, p - 2\} \\ &= \{2i : i = 3, 5, \dots, p - 2\} \\ &= \{6, 10, \dots, 2p - 8, 2p - 4\}, \\ |f(u_{p-1}) - f(u_0)| &= |2p - 1 - 2p| = 1. \end{aligned}$$

Les deux valeurs impaires manquantes 1 et  $p$  sont bien présentes, tout comme les valeurs paires, sauf 2 et  $2p$ , puisque :

$$\{2p - 2\} \cup \{4, 8, \dots, 2p - 10, 2p - 6\} \cup \{6, 10, \dots, 2p - 8, 2p - 4\} = \{4, 6, 8, \dots, 2p - 6, 2p - 4, 2p - 2\}.$$

□

Nous avons examiné plusieurs classes de graphes pour lesquelles il est possible, ou non, de définir une valuation gracieuse. Passons à présent à l'étude d'une condition nécessaire qu'un graphe doit satisfaire pour être considéré comme gracieux.

**Théorème 2.22.** (condition nécessaire pour être un graphe gracieux)

Soit  $G$  un graphe gracieux comportant  $m$  sommets et  $n$  arêtes. Alors il est possible de partitionner les sommets de  $G$  en deux ensembles  $S$  et  $T$ , de telle sorte que le nombre d'arêtes reliant les sommets de  $S$  aux sommets de  $T$  soit exactement  $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ .

**Remarque 2.23.** Rappelons que  $\lfloor x \rfloor$  désigne la partie entière de  $x$ , c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à  $x$ . Si  $n$  est pair, alors le théorème précédent nous dit que le nombre d'arêtes reliant un sommet de  $S$  et un sommet de  $T$  vaut  $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor = \frac{n}{2}$ . Si  $n$  est impair, alors ce nombre vaut  $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor = \frac{n+1}{2}$ .

*Démonstration.* Si  $G$  est gracieux, les  $m$  sommets possèdent un étiquetage avec des nombres naturels de 0 à  $n$ . On peut ainsi partitionner l'ensemble des sommets en deux ensembles  $S$  et  $T$  contenant respectivement les étiquettes paires et impaires des sommets. Les  $n$  arêtes possèdent toutes une valeur entière distincte comprise entre 1 et  $n$ , et donc la moitié de ces arêtes ont une valeur impaire. Ainsi, il y a  $\frac{n}{2}$  arêtes impaires si  $n$  est pair et  $\frac{n+1}{2}$  arêtes impaires si  $n$  est impair. Quelle que soit la parité de  $n$ , on a donc exactement  $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$  arêtes impaires. Puisque la valeur d'une arête est la différence absolue de ses extrémités, si la valeur de l'arête est impaire alors elle doit nécessairement contenir une extrémité paire et l'autre impaire. Ces arêtes ne peuvent donc lier que des sommets de  $S$  avec des sommets de  $T$ . □

**Remarque 2.24.** Ce théorème pourrait être utilisé pour démontrer qu'un graphe n'est pas gracieux. En effet, si aucune partition des sommets de  $G$  satisfaisant les conditions énoncées n'existe, alors on peut en déduire que  $G$  n'est pas gracieux. Toutefois, en pratique, cette méthode est rarement utilisée, car elle nécessite d'examiner toutes les  $2^{(m-1)} - 1$  partitions possibles des sommets de  $G$  en deux sous-ensembles.

Dans ce chapitre, nous avons étudié certaines classes spécifiques de graphes arborés, notamment les graphes chemins, les graphes étoiles et les graphes chenilles, en tant qu'exemples de graphes gracieux. L'un des intérêts majeurs de l'étude des graphes arborés, bien que cela ne soit pas approfondi ici, est de fournir des outils et des techniques pour aborder la conjecture de Ringel, qui affirme que tous les arbres sont gracieux. Cette conjecture est équivalente à celle affirmant qu'un graphe complet  $K_{2n+1}$  peut être décomposé en  $2n + 1$  sous-graphes, tous isomorphes à un arbre donné de  $n$  arêtes.

# Chapitre 3

## Nombre de graphes gracieux

Nous allons maintenant essayer de caractériser le nombre de graphes gracieux en fonction de son nombre d'arêtes. Pour cela, nous allons tout d'abord définir le concept de suite d'étiquetage.

**Définition 3.1.** Pour tout entier strictement positif  $n$ , la suite d'entiers  $(j_1, j_2, j_3, \dots, j_n)$  notée  $(j_n)$  est une suite d'étiquetage si  $0 \leq j_i \leq n - i$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Ainsi, le  $n$ -ème terme d'une suite d'étiquetage est toujours 0, le  $(n - 1)$ -ème terme peut prendre les valeurs 0 et 1, le  $(n - 2)$ -ème terme peut prendre les valeurs 0, 1 ou 2 et ainsi de suite. Le premier terme peut prendre une valeur entière comprise entre 0 et  $n - 1$ . Par exemple, les suites  $(0, 4, 1, 0, 1, 0)$ ,  $(1, 2, 0, 0, 1, 0)$ ,  $(4, 3, 2, 1, 0)$  sont des suites d'étiquetage mais les suites  $(0, 1, 2, 3, 4)$ ,  $(1, 5, 1, 0, 0)$  et  $(5, 4, 3, 2, 1)$  n'en sont pas.

**Lemme 3.2.** Le nombre de suites d'étiquetage de  $n$  termes vaut  $n!$

*Démonstration.* Au vu de la définition, le  $n$ -ème et dernier terme de la suite doit valoir 0, le  $(n - 1)$ -ème terme peut prendre deux valeurs (0 ou 1), le  $(n - 2)$ -ème terme peut prendre 3 valeurs et ainsi de suite jusqu'au premier terme qui peut prendre les  $n$  valeurs de l'ensemble  $\{0, \dots, n - 1\}$ . Ainsi, le nombre total de suites d'étiquetage de  $n$  termes vaut  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!$ .  $\square$

**Théorème 3.3.** Le nombre de graphes gracieux de  $n$  arêtes vaut  $n!$ .

*Démonstration.* Nous allons montrer qu'à chaque graphe gracieux correspond une suite d'étiquetage et inversement.

- Soit  $G$  un graphe gracieux de  $n$  arêtes avec une valuation  $f$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on prend  $j_i$  le plus petit des deux sommets reliés par une arête de valeur  $i$ . Autrement dit,  $j_i = \min(f(u), f(v))$ , où  $|f(u) - f(v)| = i$ .

À titre d'exemple, considérons le cycle  $C_4$  représenté à la figure. L'arête de valeur 1 relie les sommets 1 et 2. Ainsi,  $j_1 = \min(1, 2) = 1$ . L'arête de valeur 2 relie les sommets 0 et 2. Donc  $j_2 = \min(0, 2) = 0$ . L'arête de valeur 3 relie les sommets 1 et 4 et ainsi  $j_3 = \min(1, 4) = 1$ . Enfin,  $j_4 = \min(0, 4) = 0$ . La suite d'étiquetage complète du graphe est  $(1, 0, 1, 0)$ .

La suite  $(1, 0, 1, 0)$  est bien une suite d'étiquetage, puisque  $j_1 = 1 \leq n - 1 = 3$ ,  $j_2 = 0 \leq n - 2 = 2$ ,  $j_3 = 1 \leq n - 3 = 1$  et  $j_4 = 0 \leq n - 4 = 0$ .

Il reste à démontrer que la suite  $(j_n)$  définie est bien une suite d'étiquetage, c'est-à-dire qu'elle vérifie la condition  $0 \leq j_i \leq n - i$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ . On sait que

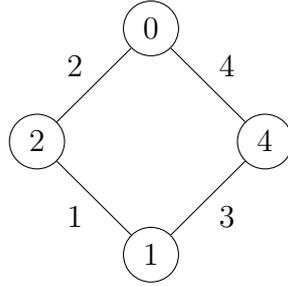


FIGURE 3.1 – Le graphe  $C_4$  avec une de ses valuations gracieuses.

$j_i = \min(f(u), f(v))$  avec  $|f(u) - f(v)| = i$  et où  $f$  est une valuation gracieuse du graphe  $G$ . Puisque  $f$  est injective, on a nécessairement  $f(u) \neq f(v)$ .

Considérons le cas où  $f(u) < f(v)$  (le cas  $f(v) < f(u)$  se traite de la même manière). Dans cette configuration, on a  $j_i = f(u)$ , et puisque  $f$  est une valuation, il est clair que  $0 \leq j_i \leq n$ . Il reste alors à prouver que  $j_i \leq n - i$ .

Étant donné que  $|f(u) - f(v)| = f(v) - f(u) = i$ , il en résulte que  $f(u) = f(v) - i$ . Sachant que  $f(v) \leq n$ , nous obtenons  $f(u) \leq n - i$ . Ainsi, la suite  $(j_n)$  satisfait bien les conditions requises pour être une suite d'étiquetage.

- Soit  $(j_n) = (j_1, j_2, j_3, \dots, j_n)$  une suite d'étiquetage. Nous allons construire le graphe  $G$  de la manière suivante : nous assignons  $n + 1$  sommets de valeur  $i$  pour tout  $i \in \{0, \dots, n\}$ .

Ensuite, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , nous joignons les sommets de valeur  $j_i$  et  $j_i + i$ . Cette construction a un sens car, étant donnée une suite d'étiquetage  $(j_n)$ , on a  $0 \leq j_i \leq n - i$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , ce qui implique  $i \leq j_i + i \leq n$ . Ainsi, les arêtes reliant  $j_i$  et  $j_i + i$  joignent bien deux sommets dont les valeurs sont comprises entre 0 et  $n$ .

A titre d'exemple, voici le graphe gracieux construit à partir de la suite  $(4, 0, 2, 1, 0)$ . Cette suite contient 5 termes, donc nous construisons 6 sommets dont les valeurs sont les entiers consécutifs de 0 à 5.

Puisque  $j_1 = 4$ , nous relierons le sommet  $j_1 = 4$  avec le sommet  $j_1 + 1 = 5$ . Pour  $j_2 = 0$ , nous relierons le sommet  $j_2 = 0$  avec  $j_2 + 2 = 2$ . Ensuite, puisque  $j_3 = 2$ , nous relierons le sommet  $j_3 = 2$  avec  $j_3 + 3 = 5$ . Pour  $j_4 = 1$ , on relie le sommet 1 avec 5. Enfin, pour  $j_5 = 0$ , on relie le sommet 0 avec le sommet 5.

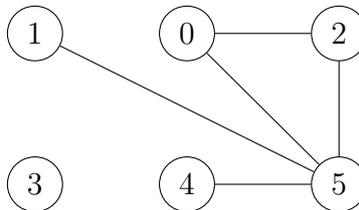


FIGURE 3.2 – Construction d'un graphe gracieux à partir de la suite d'étiquetage  $(4, 0, 2, 1, 0)$ .

Démontrons que cette construction aboutit bien à un graphe gracieux. Premièrement, les  $n + 1$  sommets reçoivent des valeurs distinctes de l'ensemble  $\{0, \dots, n\}$ , ce qui prouve que la fonction de valuation est injective. Deuxièmement, chaque arête relie les sommets  $j_i$

et  $j_i + i$ , avec  $i \in \{1, \dots, n\}$ . La valeur de chaque arête est donc égale à  $|j_i - (j_i + i)| = i$ . Ainsi, l'ensemble des valeurs des arêtes couvre exactement l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$ .  $\square$

Nous avons établi qu'il existe  $n!$  graphes gracieux avec  $n$  arêtes, mais quelle est leur proportion parmi l'ensemble des graphes possibles? Le résultat suivant, basé sur [12] et [9], met en évidence la rareté des graphes gracieux.

**Théorème 3.4.** Presque tous les graphes ne sont pas gracieux.

Pour démontrer ce résultat, nous aurons besoin du lemme suivant :

**Lemme 3.5.** Supposons que  $\lambda n$  soit un entier, où  $0 < \lambda < 1$ . Alors

$$C_n^{\lambda n} \geq \frac{2^{nH(\lambda)}}{\sqrt{8n\lambda(1-\lambda)}}$$

où l'entropie  $H$  est définie par  $H(\lambda) = -\lambda \log_2(\lambda) - (1-\lambda) \log_2(1-\lambda)$

*Démonstration.* La preuve utilise la formule de Stirling pour  $n!$  :

$$\sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n} < n! < \sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n+1/12n}$$

Pour un entier  $\lambda n$  où  $0 < \lambda < 1$ , posons  $\mu = 1 - \lambda$ . Le coefficient binomial  $C_n^{\lambda n}$  est défini comme :

$$C_n^{\lambda n} = \frac{n!}{(\lambda n)!(\mu n)!}$$

En appliquant la formule de Stirling à chaque factorielle dans cette expression et en utilisant la borne inférieure pour  $n!$  et la borne supérieure pour  $\lambda n$  et  $\mu n$ , nous obtenons :

$$C_n^{\lambda n} \geq \frac{\sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n}}{\left(\sqrt{2\pi}(\lambda n)^{\lambda n+1/2}e^{-\lambda n+1/12\lambda n}\right)\left(\sqrt{2\pi}\mu^{(\mu n)^{\mu n+1/2}e^{-\mu n+1/12\mu n}}\right)}$$

Simplifions les termes :

$$C_n^{\lambda n} \geq \frac{n^{n+1/2}e^{-n}}{\sqrt{2\pi}(\lambda n)^{\lambda n+1/2}(\mu n)^{\mu n+1/2}e^{-\lambda n-\mu n}e^{1/12\lambda n+1/12\mu n}}$$

En simplifiant davantage, nous avons :

$$C_n^{\lambda n} \geq \frac{n^{n+1/2}e^{-n}}{\sqrt{2\pi\lambda\mu}\lambda^{\lambda n}\mu^{\mu n}n^{(\lambda+\mu)n+1}e^{-(\lambda+\mu)n}e^{(\lambda+\mu)/12\lambda\mu n}}$$

En utilisant le fait que  $\lambda + \mu = 1$ , nous obtenons :

$$C_n^{\lambda n} \geq \frac{n^{n+1/2}}{\sqrt{2\pi\lambda\mu}\lambda^{\lambda n}\mu^{\mu n}n^{n+1}e^{1/12\lambda\mu n}} \quad (3.1)$$

$$\Leftrightarrow C_n^{\lambda n} \geq \frac{e^{-1/12\lambda\mu n}}{\sqrt{2\pi n\lambda\mu}\lambda^{\lambda n}\mu^{\mu n}} \quad (3.2)$$

Nous savons que l'entropie de  $\lambda$  est donnée par :

$$H(\lambda) = -\lambda \log_2 \lambda - \mu \log_2 \mu$$

Donc,

$$2^{nH(\lambda)} = 2^{n(-\lambda \log_2 \lambda - \mu \log_2 \mu)}$$

En utilisant les propriétés des logarithmes, nous obtenons :

$$2^{n(-\lambda \log_2 \lambda - \mu \log_2 \mu)} = 2^{-n\lambda \log_2 \lambda - n\mu \log_2 \mu} = 2^{\log_2 \lambda^{-\lambda n} + \log_2 \mu^{-\mu n}} = \lambda^{-\lambda n} \mu^{-\mu n}$$

Nous pouvons maintenant exprimer  $\lambda^{\lambda n}$  et  $\mu^{\mu n}$  en termes de  $2^{nH(\lambda)}$  :

$$C_n^{\lambda n} \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi n \lambda \mu} 2^{-nH(\lambda)}} e^{-1/12\lambda\mu n} = \frac{2^{nH(\lambda)}}{\sqrt{2\pi n \lambda \mu}} e^{-1/12\lambda\mu n}$$

Pour simplifier cette expression, nous savons que  $e^{-1/12\lambda\mu n}$  est très proche de 1 pour de grandes valeurs de  $n$ , donc nous pouvons approximer :

$$C_n^{\lambda n} \geq \frac{2^{nH(\lambda)}}{\sqrt{2\pi n \lambda \mu}} = \frac{2^{nH(\lambda)}}{\sqrt{2\pi n \lambda (1 - \lambda)}}$$

Pour terminer, il suffit de noter que  $\frac{1}{2\pi} \geq \frac{1}{8}$ , et donc :

$$C_n^{\lambda n} \geq \frac{2^{nH(\lambda)}}{\sqrt{2\pi n \lambda (1 - \lambda)}} \geq \frac{2^{nH(\lambda)}}{\sqrt{8n \lambda (1 - \lambda)}}$$

□

Nous pouvons maintenant passer à la démonstration du théorème

*Démonstration.* Nous montrons que pour un nombre fixe  $m$ , presque tous les graphes avec  $n$  sommets et  $m$  arêtes ne sont pas gracieux lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

- Commençons par compter le nombre de graphes étiquetés avec  $n$  sommets et  $m$  arêtes. Il nous faut donc choisir  $m$  arêtes parmi les  $C_n^2$  arêtes possibles. Il y a donc  $C_{C_n^2}^m$  graphes étiquetés de  $n$  sommets et  $m$  arêtes.
- À chaque permutation des étiquettes des sommets d'un graphe étiqueté correspond le même graphe non étiqueté. Puisqu'il y a  $n!$  permutations possibles des  $n$  étiquettes des sommets, le nombre de graphes étiquetés est au plus  $n!$  multiplié par le nombre de graphes non étiquetés. Par conséquent, le nombre de graphes non étiquetés est au moins  $\frac{1}{n!} C_{C_n^2}^m$ .
- Ensuite, comptons le nombre de façons d'étiqueter un graphe. Soit  $f$  une valuation sur  $n$  sommets avec des entiers distincts de  $\{0, \dots, m\}$ . Il y a  $C_{m+1}^n$  façons de choisir  $n$  entiers dans l'ensemble  $\{0, \dots, m\}$  et une fois ces nombres choisis, il y a  $n!$  façons d'attribuer ces nombres aux  $n$  sommets du graphe. Au total, il existe  $C_{m+1}^n \times n! = \frac{(m+1)!}{(m+1-n)! \times n!} \times n! = \frac{(m+1)!}{(m+1-n)!} \leq (m+1)^n$  telles valuations.
- Comptons maintenant combien de graphes il y a pour lesquels  $f$  est une valuation gracieuse. Soit  $p_i$  le nombre de paires de sommets  $\{u, v\}$  pour lesquelles  $|f(u) - f(v)| = i$ . Par exemple, pour un graphe de 4 sommets étiqueté avec les nombres 6, 2, 1 et 4, on a  $p_2 = 2$  car il y a deux paires  $\{4, 2\}$  et  $\{6, 4\}$  dont la différence en valeur absolue de ses éléments vaut 2. On a aussi  $p_1 = 1$  (la paire  $\{1, 2\}$ ),  $p_3 = 1$ ,  $p_4 = 1$ ,  $p_5 = 1$  et  $p_6 = 0$ . Clairement,  $\sum_{i=1}^m p_i$  compte le nombre de façons de prendre 2 sommets parmi  $n$  et vaut donc  $C_n^2$ . Un graphe gracieux doit contenir toutes les arêtes de 1 à  $m$  une et une seule fois. Ainsi, si nous construisons un graphe en

prenant une arête de chaque classe comptée par  $p_i$ , le graphe résultant est gracieux. En écartant les  $p_i$  pour lesquels  $p_i = 0$ , il existe donc  $\prod_{i=1}^m p_i$  graphes étiquetés pour lesquels  $f$  est une valuation gracieuse. Comme ce produit est maximisé lorsque tous les  $p_i$  sont égaux, chacun d'entre eux doit donc valoir  $\frac{C_n^2}{m} = \frac{n(n-1)}{2m}$  et on a donc  $\prod_{i=1}^m p_i \leq \left(\frac{C_n^2}{m}\right)^m$ .

En regroupant ces deux derniers résultats, il y a au plus  $(m+1)^n \left(\frac{n(n-1)}{2m}\right)^m$  graphes étiquetés gracieux.

Pour finir, nous montrons que le ratio  $\rho$  représentant la proportion de graphes étiquetés gracieux parmi tous les graphes possibles tend vers zéro lorsque  $n$  tend vers l'infini. De ce qui précède, on sait que

$$\rho \leq \frac{(m+1)^n \left(\frac{C_n^2}{m}\right)^m}{\frac{1}{n!} C_n^m C_n^2}$$

Écrivons  $m = \left(\frac{1}{2} - \mu\right) C_n^2$  avec  $\mu \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ , nous avons

$$\rho \leq \frac{(m+1)^n \left(\frac{C_n^2}{m}\right)^m}{\frac{1}{n!} C_n^m C_n^2} = \frac{(m+1)^n n! \left(\frac{C_n^2}{\left(\frac{1}{2}-\mu\right) C_n^2}\right)^m}{C_n^{\left(\frac{1}{2}-\mu\right) C_n^2} C_n^2} = \frac{(m+1)^n n!}{\left(\frac{1}{2} - \mu\right)^m C_n^{\left(\frac{1}{2}-\mu\right) C_n^2}}$$

Utilisons le lemme pour le terme  $C_n^{\left(\frac{1}{2}-\mu\right) C_n^2}$ , ce qui nous donne :

$$C_n^{\left(\frac{1}{2}-\mu\right) C_n^2} \geq \frac{2^{C_n^2 H\left(\frac{1}{2}-\mu\right)}}{\sqrt{8 C_n^2 \left(\frac{1}{2} - \mu\right) \left(1 - \left(\frac{1}{2} - \mu\right)\right)}}$$

Et donc,

$$\frac{1}{C_n^{\left(\frac{1}{2}-\mu\right) C_n^2}} \leq \frac{\sqrt{8 C_n^2 \left(\frac{1}{2} - \mu\right) \left(\frac{1}{2} + \mu\right)}}{2^{C_n^2 H\left(\frac{1}{2}-\mu\right)}}$$

On remplace ainsi ce terme dans notre inégalité :

$$\rho \leq \frac{(m+1)^n n! \sqrt{8 C_n^2 \left(\frac{1}{2} - \mu\right) \left(\frac{1}{2} + \mu\right)}}{\left(\frac{1}{2} - \mu\right)^m 2^{C_n^2 H\left(\frac{1}{2}-\mu\right)}}$$

Le terme  $\left(\frac{1}{2} - \mu\right)^m$  vaut

$$\left(\frac{1}{2} - \mu\right)^m = \left(\frac{1}{2} - \mu\right)^{\left(\frac{1}{2}-\mu\right) C_n^2} = 2^{\left(\frac{1}{2}-\mu\right) C_n^2 \log_2\left(\frac{1}{2}-\mu\right)}$$

En développant l'entropie  $H$ , nous avons :

$$2^{C_n^2 H\left(\frac{1}{2}-\mu\right)} = 2^{-C_n^2 \left[\left(\frac{1}{2}-\mu\right) \log_2\left(\frac{1}{2}-\mu\right) + \left(\frac{1}{2}+\mu\right) \log_2\left(\frac{1}{2}+\mu\right)\right]}$$

Nous combinons maintenant les deux termes obtenus :

$$\left(\frac{1}{2} - \mu\right)^m 2^{C_n^2 H\left(\frac{1}{2}-\mu\right)} = 2^{\left(\frac{1}{2}-\mu\right) C_n^2 \log_2\left(\frac{1}{2}-\mu\right)} \cdot 2^{-C_n^2 \left[\left(\frac{1}{2}-\mu\right) \log_2\left(\frac{1}{2}-\mu\right) + \left(\frac{1}{2}+\mu\right) \log_2\left(\frac{1}{2}+\mu\right)\right]}$$

En simplifiant cette expression, nous obtenons :

$$\left(\frac{1}{2} - \mu\right)^m 2^{C_n^2 H(\frac{1}{2}-\mu)} = 2^{-C_n^2 [(\frac{1}{2}+\mu) \log_2(\frac{1}{2}+\mu)]}$$

Nous obtenons finalement l'inégalité suivante :

$$\rho \leq \frac{(m+1)^n n! \sqrt{8 C_n^2 \left(\frac{1}{2} - \mu\right) \left(\frac{1}{2} + \mu\right)}}{2^{-C_n^2 [(\frac{1}{2}+\mu) \log_2(\frac{1}{2}+\mu)]}}$$

En prenant le logarithme népérien de chaque membre de l'inégalité, nous avons :

$$\rho \leq n \ln(m+1) + \ln(n!) + \ln \left( \sqrt{8 C_n^2 \left(\frac{1}{2} - \mu\right) \left(\frac{1}{2} + \mu\right)} \right) - \ln \left( 2^{-C_n^2 [(\frac{1}{2}+\mu) \log_2(\frac{1}{2}+\mu)]} \right)$$

Développons chaque terme séparément :

- Pour le terme  $n \ln(m+1)$ , sachant que  $m = \left(\frac{1}{2} - \mu\right) C_n^2$ , alors  $m+1 \approx C_n^2 \approx \frac{n^2}{2}$ , pour de grandes valeurs de  $n$ . Donc,

$$n \ln(m+1) \approx n \ln \left( \frac{n^2}{2} \right) = n(\ln n^2 - \ln 2) = n(2 \ln n - \ln 2) = 2n \ln n - n \ln 2$$

- Pour le terme  $\ln(n!)$ , en utilisant la formule de Stirling  $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ , nous avons :

$$\ln(n!) \approx \ln \left( \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \right) = \frac{1}{2} \ln(2\pi n) + n \ln n - n$$

- Pour le terme  $\ln \left( \sqrt{8 C_n^2 \left(\frac{1}{2} - \mu\right) \left(\frac{1}{2} + \mu\right)} \right)$ , sachant que  $C_n^2 \approx \frac{n^2}{2}$ , nous avons :

$$\sqrt{8 C_n^2 \left(\frac{1}{2} - \mu\right) \left(\frac{1}{2} + \mu\right)} \approx \sqrt{8 \cdot \frac{n^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{4} - \mu^2\right)} = \sqrt{4n^2 \left(\frac{1}{4} - \mu^2\right)} = n \sqrt{1 - 4\mu^2}$$

Donc,

$$\ln \left( \sqrt{8 C_n^2 \left(\frac{1}{2} - \mu\right) \left(\frac{1}{2} + \mu\right)} \right) = \ln \left( n \sqrt{1 - 4\mu^2} \right) = \ln n + \frac{1}{2} \ln(1 - 4\mu^2)$$

- Pour le terme  $\ln \left( 2^{-C_n^2 [(\frac{1}{2}+\mu) \log_2(\frac{1}{2}+\mu)]} \right)$ , nous avons :

$$\ln \left( 2^{-C_n^2 [(\frac{1}{2}+\mu) \log_2(\frac{1}{2}+\mu)]} \right) \approx -\frac{n^2}{2} \left(\frac{1}{2} + \mu\right) \log_2 \left(\frac{1}{2} + \mu\right) \ln 2$$

En combinant toutes ces expressions, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \ln \rho \leq & (2n \ln n - n \ln 2) + \left( \frac{1}{2} \ln(2\pi n) + n \ln n - n \right) + \left( \ln n + \frac{1}{2} \ln(1 - 4\mu^2) \right) \\ & - \left( -\frac{n^2}{2} \left(\frac{1}{2} + \mu\right) \log_2 \left(\frac{1}{2} + \mu\right) \ln 2 \right) \end{aligned}$$

En regroupant les termes, nous obtenons :

$$\ln \rho \leq 3n \ln n - n \ln 2 + \frac{1}{2} \ln(2\pi n) - n + \ln n + \frac{1}{2} \ln(1 - 4\mu^2) + \frac{n^2}{2} \left(\frac{1}{2} + \mu\right) \log_2 \left(\frac{1}{2} + \mu\right) \ln 2$$

Pour de grandes valeurs de  $n$ , le terme dominant est :

$$\frac{n^2}{2} \left(\frac{1}{2} + \mu\right) \log_2 \left(\frac{1}{2} + \mu\right) \ln 2$$

Or, puisque  $\frac{1}{2} + \mu \in ]0, 1[$ , il en résulte que  $\log_2 \left(\frac{1}{2} + \mu\right) < 0$  et  $\left(\frac{1}{2} + \mu\right) \log_2 \left(\frac{1}{2} + \mu\right) \ln 2 < 0$ , ce qui entraîne la convergence de  $\ln \rho$  vers  $-\infty$ . Par conséquent,  $\rho \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , et le résultat est démontré.

□

# Chapitre 4

## Méthode de Construction de graphes gracieux

Dans ce chapitre, nous allons tout d'abord voir comment construire des graphes gracieux à partir de graphes gracieux déjà existants. Pour ce faire, définissons tout d'abord le concept d'*augmentation totale* d'un graphe. Tout graphe gracieux  $G$  composé de  $m$  sommets et  $n$  arêtes peut être incorporé dans un graphe gracieux de  $n + 1$  sommets et  $n$  arêtes. Cette intégration peut être réalisée comme suit :

La démarche suivante est basée sur l'article [1]. Soit  $f$  la valuation de  $G$ . L'ensemble  $\{0, \dots, m\} - f(G)$  contient les nombres qui ne sont pas des étiquettes des sommets de  $G$ . Cet ensemble contient  $c = n - m - 1$  éléments. Notons que  $c$  est toujours positif ou nul car dans un graphe gracieux, le nombre de sommets ne dépasse jamais le nombre d'arêtes plus un.

La démarche consiste à ajouter  $c$  sommets isolés à  $G$ , chacun d'entre eux portant une étiquette de l'ensemble  $\{0, \dots, m\} - f(G)$ , créant ainsi un graphe non connexe, que nous appellerons  $G_f$ . Ce nouveau graphe comporte  $n + 1$  sommets et conserve les mêmes  $n$  arêtes que  $G$ , inchangées dans leur valeur. Le graphe  $G_f$  est qualifié d'*augmentation totale* de  $G$ .

Remarquons que l'augmentation totale de  $G$  revient simplement à lui ajouter des sommets isolés et que ce graphe ne peut être augmenté davantage, car il atteint le nombre maximal de sommets autorisés pour un graphe gracieux avec  $n + 1$  sommets et  $n$  arêtes. Reprenons les graphes  $C_4$  et  $K_4$  et leur valuation gracieuse  $f$  présente dans les figures 1.6 et 2.3, ainsi que leur augmentation totale.



Le graphe  $(C_4, f)$

Le graphe  $C_{4,f}$

FIGURE 4.1 – Augmentation totale du graphe  $C_4$ .

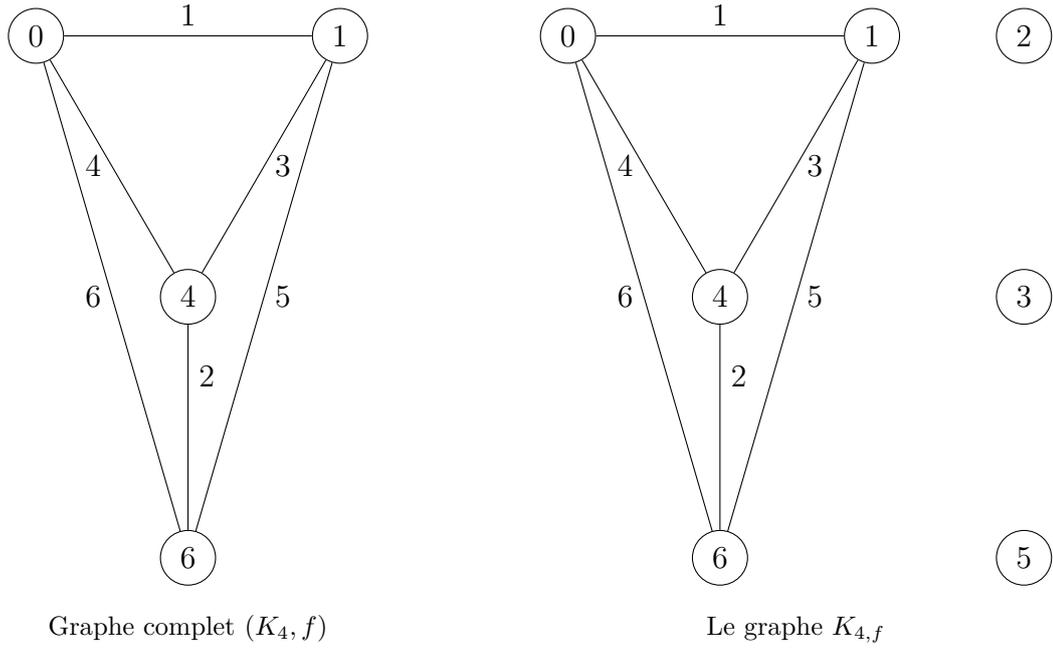


FIGURE 4.2 – Augmentation totale du graphe  $K_4$ .

Il est évident que si  $G$  est un graphe gracieux, alors  $G_f$  est également gracieux, car l'ajout de sommets isolés n'affecte pas la valeur des arêtes de  $G$ .

**Définition 4.1.**

- Un graphe non connexe composé de  $n$  sommets et sans arêtes est noté  $\overline{K_n}$ . Pour  $n = 1$ , on a  $\overline{K_1} = K_1$ .
- Si  $G = (V_1, E_1)$  et  $H = (V_2, E_2)$  sont deux graphes, alors  $G + H = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup \{(u, v) : u \in E_1, v \in V_2\})$ . Autrement dit,  $G + H$  est le graphe obtenu en préservant les sommets et les arêtes de  $G$  et de  $H$ , tout en ajoutant toutes les arêtes reliant un sommet de  $G$  à un sommet de  $H$ . Si  $G$  contient  $v_1$  sommets et  $e_1$  arêtes et si  $H$  contient  $v_2$  sommets et  $e_2$  arêtes, alors  $G + H$  contient  $v_1 + v_2$  sommets et  $e_1 + e_2 + v_1 v_2$  arêtes

**Théorème 4.2.** Le graphe  $G_f + \overline{K_n}$  est gracieux pour tout  $n \geq 1$ .

*Démonstration.* Supposons que  $G$  possède  $m$  sommets et  $e$  arêtes. On sait que  $G$  possède une valuation gracieuse  $f$  telle que  $f(E(G)) = \{1, \dots, e\}$ .

Il nous faut à présent trouver une valuation  $F$  du graphe  $G_f + \overline{K_n}$ . Soient  $a_1, \dots, a_m$  les  $m$  sommets de  $G$  et  $b_1, \dots, b_p$  les  $p$  sommets isolés de  $G_f$  qui ne sont pas dans  $G$ , chacun de ces  $b_i$  ayant une valeur  $k_i$  prise dans l'ensemble  $\{1, \dots, e\} - f(G)$ . On nomme aussi chaque sommet de  $\overline{K_n}$  par  $x_1, \dots, x_n$ . Soit  $F$  la fonction définie par :

$$F(v) = \begin{cases} f(v), & \text{si } v \in V(G) \\ k_i, & \text{si } v = b_i \text{ pour } 1 \leq i \leq p \\ e + i(e + 1), & \text{si } v = x_i \text{ pour } 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Il nous faut montrer que  $F$  est une valuation gracieuse du graphe  $G_f + \overline{K_n}$ . Le graphe  $G_f$  possède  $e + 1$  sommets et  $e$  arêtes, tandis que  $\overline{K_n}$  possède  $n$  sommets et aucune arête. Ainsi, le graphe combiné  $G_f + \overline{K_n}$  possède  $(e + 1) + n$  sommets et  $e + 0 + (e + 1) \times n$  arêtes. Pour démontrer que  $F$  est une valuation gracieuse de  $G_f + \overline{K_n}$ , nous devons vérifier que

les valeurs associées aux sommets sont distinctes et que les valeurs des arêtes forment un ensemble complet de 1 à  $e + (e + 1) \times n$ .

**Condition 1 : Distinctivité des valeurs des sommets**

Soient  $u$  et  $v$  deux sommets quelconques de  $G_f + \overline{K_n}$ . Nous considérons trois cas possibles :

- Si  $u$  et  $v$  sont tous deux dans  $G$ , alors  $F(u) = f(u)$  et  $F(v) = f(v)$ . Comme  $f$  est une valuation gracieuse de  $G$ ,  $f(u)$  et  $f(v)$  sont distincts. Par conséquent,  $F(u)$  et  $F(v)$  sont aussi distincts.
- Si  $u$  est dans  $G$  et  $v$  est dans  $G_f \setminus G$ , alors  $F(u) = f(u)$  et  $F(v) = k$ , avec  $k \in \{1, \dots, e\} \setminus f(G)$ . Puisque  $f(u) \in f(G)$ ,  $F(u)$  et  $F(v)$  sont distincts.
- Si  $u$  est dans  $G_f$  et  $v$  est dans  $\overline{K_n}$ , alors  $F(v) = e + i(e + 1)$  pour un certain  $i$  compris entre 1 et  $n$ . Ainsi,  $F(v) \geq 2e + 1$ , et comme  $G_f$  est gracieux, on a  $0 \leq F(u) \leq e$ . Par conséquent,  $F(u)$  et  $F(v)$  sont distincts.

**Condition 2 : Ensemble Complet des Valeurs Absolues des Différences**

Nous devons démontrer que les valeurs des arêtes forment un ensemble complet de 1 à  $e + (e + 1) \times n$ . Nous savons déjà que les arêtes de  $G$  forment l'ensemble  $\{1, \dots, e\}$ .

Les arêtes restantes sont celles qui relient un sommet de  $G_f$  à un sommet de  $\overline{K_n}$ . Il nous faut montrer que ces arêtes forment l'ensemble  $\{e + 1, \dots, e + n(e + 1)\}$ .

Considérons le premier sommet  $x_1$  de  $\overline{K_n}$  ayant une valeur de  $e + 1(e + 1) = 2e + 1$ . Ce sommet est relié à tous les sommets de  $G_f$ , formant des arêtes dont les valeurs sont  $\{(2e + 1) - 0, (2e + 1) - 1, \dots, (2e + 1) - e\} = \{2e + 1, 2e, \dots, e + 1\}$ , puisque le graphe  $G_f$  possède  $e + 1$  sommets prenant leur valeur entre 0 et  $e$ . Cet ensemble contient tous les entiers de  $e + 1$  à  $2e + 1$ .

De même, le sommet  $x_2$  a une valeur de  $e + 2(e + 1) = 3e + 2$ , et les arêtes le reliant à  $G_f$  ont des valeurs  $\{3e + 2, 3e + 1, \dots, 2e + 2\}$ , couvrant les entiers de  $2e + 2$  à  $3e + 2$ .

En général, pour le sommet  $x_n$  ayant une valeur de  $e + n(e + 1)$ , les arêtes le reliant à  $G_f$  ont des valeurs  $\{e + n(e + 1), e + n(e + 1) - 1, \dots, n(e + 1)\}$ .

Ainsi, l'ensemble des valeurs des arêtes reliant  $x_i$  (pour chaque  $i$  allant de 1 à  $n$ ) à  $G_f$  est formé par la réunion des ensembles suivants :

$$\begin{aligned} & \{2e + 1, 2e, \dots, e + 1\} \\ & \cup \{3e + 2, 3e + 1, \dots, 2e + 2\} \\ & \cup \dots \\ & \cup \{e + n(e + 1), e + n(e + 1) - 1, \dots, n(e + 1)\}. \end{aligned}$$

Cela représente l'ensemble de tous les entiers allant de  $e + 1$  à  $e + n(e + 1)$ . En d'autres termes, cet ensemble est :

$$\begin{aligned} & \{e + 1, e + 2, \dots, 2e + 1, 2e + 2, \dots, 3e + 1, 3e + 2, \dots, n(e + 1), \dots, e + n(e + 1)\} \\ & = \{1, \dots, e + n(e + 1)\}. \end{aligned}$$

Ainsi,  $F$  est une valuation du graphe  $G_f + \overline{K_n}$ , ce qui conclut la démonstration. □

Reprenons les graphes  $C_4$  et  $K_4$  avec leur augmentations totales. Par le théorème précédent, on sait que les graphes  $C_4 + \overline{K_n}$  et  $K_4 + \overline{K_n}$  sont gracieux pour tout entier

naturel  $n$  non nul. Pour illustrer le résultat, considérons les graphes  $C_4 + \overline{K}_2$  et  $K_4 + \overline{K}_1$ . Le théorème nous dit que la valuation des sommets de  $\overline{K}_2$  du graphe  $C_4 + \overline{K}_2$  est de  $4 + 1 \times (4 + 1) = 9$  et  $4 + 2 \times (4 + 1) = 14$ . La valeur du sommet de  $\overline{K}_1$  du graphe  $K_4 + \overline{K}_1$  est de  $6 + 1 \times (6 + 1) = 13$ .

Les deux graphes gracieux, ainsi que leurs valuations, sont représentés ci-dessous. Les valeurs des arêtes correspondent à la différence absolue de leurs extrémités :

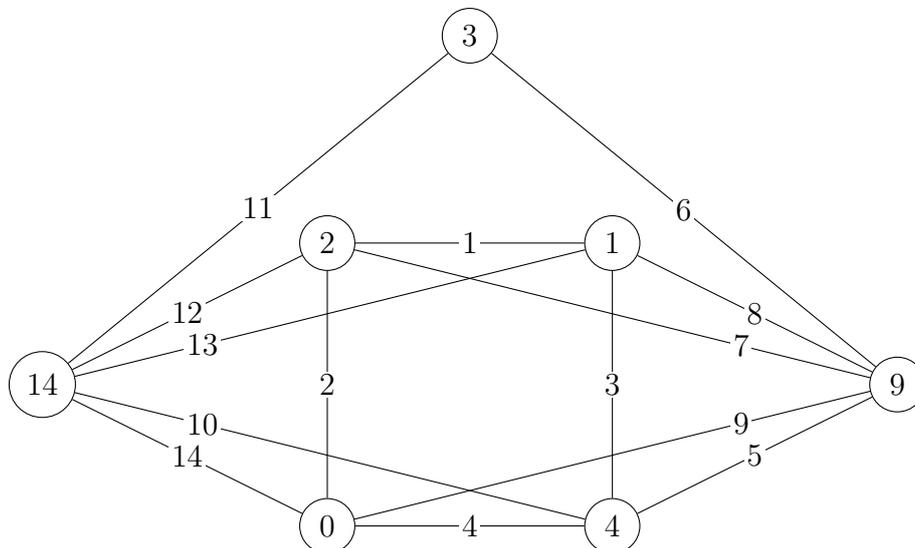


FIGURE 4.3 – Graphe gracieux  $C_{4,f} + \overline{K}_2$ .

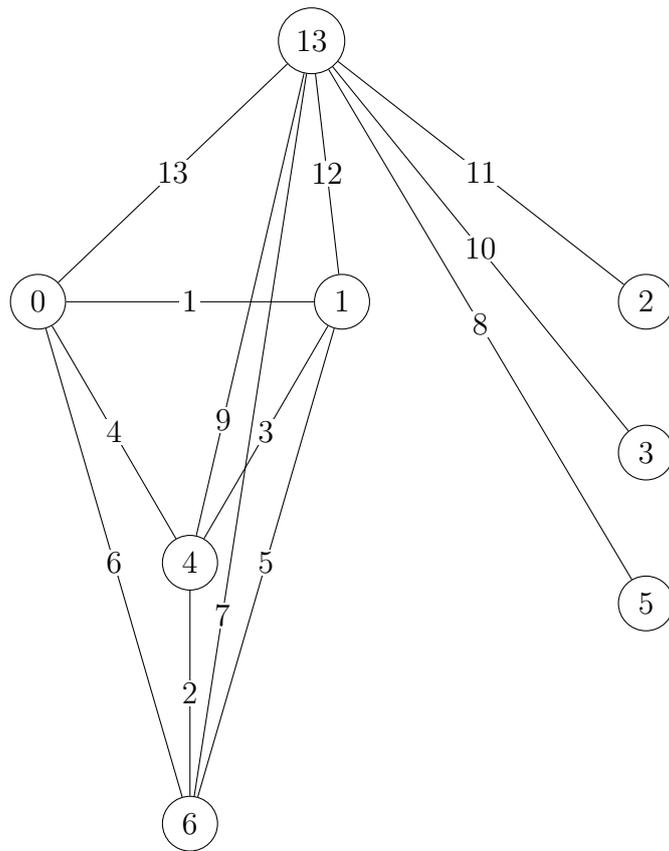


FIGURE 4.4 – Graphe gracieux  $K_4 + \overline{K_1}$ .

Puisque le résultat est valide pour tout  $n$ , on a ainsi une méthode pour construire une infinité de graphes gracieux. Soit  $(G, f)$  un graphe gracieux de  $m$  sommets, de  $e$  arêtes et de valuation  $f$ . Soit  $G_{f_1}$  l'augmentation totale de  $G$ . Par le théorème précédent, le graphe  $G_{f_1} + K_1$  est gracieux si on assigne la valeur  $e + (e + 1) = 2e + 1$  au sommet de  $K_1$ . Soit  $G_{f_2}$  l'augmentation totale de ce graphe. De nouveau, le graphe  $G_{f_2} + K_1$  est gracieux si on assigne cette fois-ci la valeur  $(2e + 1) + (2e + 1 + 1)$  au nouveau sommet. On peut continuer ce processus.

En règle générale, soit  $(G, f)$  un graphe gracieux de  $e$  arêtes et  $G_{f_1}$  son augmentation totale. Pour tout  $i \geq 2$ , on définit  $G_{f_i}$  comme l'augmentation totale du graphe gracieux  $G_{f_{i-1}} + K_1$  pour lequel on attribue la valeur  $2^{i-1} \cdot (e + 1) - 1$  au sommet de  $K_1$ . Cette valeur correspond au nombre d'arêtes du graphe  $G_{f_{i-1}} + K_1$ .

Illustrons cette méthode avec le graphe chemin  $P_3$  doté de sa valuation gracieuse

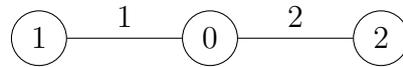


FIGURE 4.5 – Graphe  $G = P_3$ .

L'augmentation totale de ce graphe  $G_{f_1}$  est le graphe lui-même, puisqu'il possède déjà le nombre maximal de sommets requis pour un graphe gracieux. Ensuite, on sait que le graphe  $G_{f_1} + K_1$  est gracieux si on assigne la valeur  $2 + (2 + 1) = 5$  au sommet de  $K_1$ . Ce graphe est constitué de 4 sommets de valeurs 0, 1, 2 et 5. L'augmentation totale de ce graphe  $G_{f_2}$  s'obtient en ajoutant les sommets isolés dont les valeurs sont les entiers de 0 à 5 non déjà présents dans le graphe, à savoir ici les sommets 3 et 4.

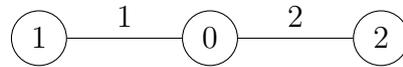


FIGURE 4.6 – Graphe  $G_{f_1}$ .

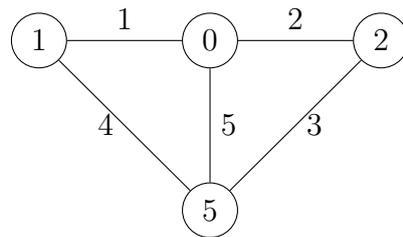


FIGURE 4.7 – Graphe  $G_{f_1} + K_1$ .

Pour le graphe  $G_{f_2} + K_1$ , nous ajoutons le sommet de  $K_1$  de valeur  $2^2 \cdot (2 + 1) - 1 = 11$  et le relierons à tous les sommets présents dans  $G_{f_2}$ . On peut ainsi continuer et former, à partir d'un graphe gracieux  $G$ , une infinité de graphes gracieux  $(G_{f_1}, G_{f_2}, G_{f_3}, \dots)$  de telle manière que  $G_{f_i}$  est un sous-graphe induit de  $G_{f_{i+1}}$ .

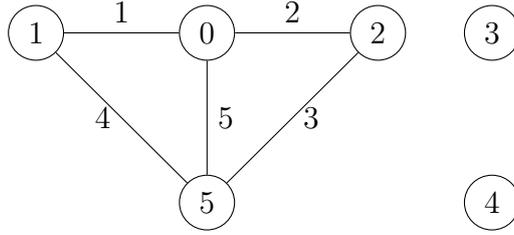


FIGURE 4.8 – Graphe  $G_{f_2}$ .

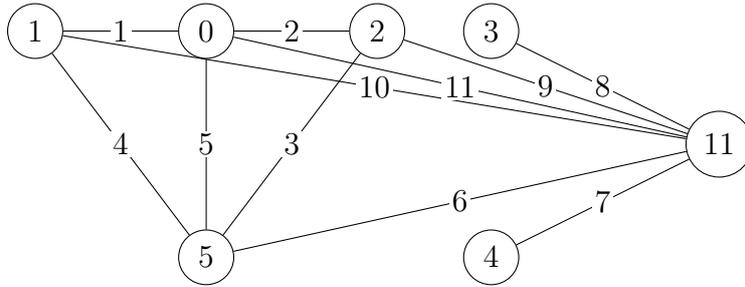


FIGURE 4.9 – Graphe  $G_{f_2} + K_1$ .

Nous venons d'explorer la manière dont il est possible de générer une infinité de graphes gracieux à partir d'un graphe de départ déjà gracieux. Mais qu'advient-il lorsque notre graphe initial n'est pas gracieux ? Nous allons maintenant démontrer qu'il est tout de même envisageable de construire un graphe gracieux à partir de n'importe quel graphe. Le résultat suivant est basé sur l'article [12].

**Théorème 4.3.** Tout graphe est sous-graphe induit d'un graphe gracieux

*Démonstration.* Nous allons exposer la méthode utilisée et l'illustrer avec un exemple. Considérons un graphe  $G = (V, E)$  doté de  $m$  sommets  $u_1, \dots, u_m$  et  $e$  arêtes, et d'une fonction de valuation  $f : V \rightarrow \{0, 1, \dots, k\}$  injective pour un certain  $k \geq e$ , de telle sorte que la fonction  $f_e : E \rightarrow \mathbb{N} : (u, v) \rightarrow |f(u) - f(v)|$  soit également injective. Enfin, il existe deux sommets  $u$  et  $v$  pour lesquels  $f(u) = 0$  et  $f(v) = k$ .

Une question se pose dès le départ : est-il possible, à partir de n'importe quel graphe, de trouver un entier  $k \geq e$  et une fonction de valuation injective  $f$  de telle sorte que la fonction  $f_e : E \rightarrow \mathbb{N} : (u, v) \rightarrow |f(u) - f(v)|$  soit également injective. Considérons la fonction  $f(u_i) = 2^i$  pour tout  $i = 1, \dots, m$  et montrons que cette fonction convient. Soient  $i$  et  $j$  deux entiers naturels compris entre 1 et  $m$ , avec  $i > j$ . La fonction  $f$  est clairement injective car  $2^i \neq 2^j$ . De plus, la différence entre deux puissances de 2 est toujours comprise entre deux puissances de 2 consécutives. Autrement dit,  $f_e(u_i, u_j) = |2^i - 2^j|$  et  $2^{i-1} \leq |2^i - 2^j| < 2^i$ . Ainsi, la fonction  $f_e$  est également injective. De plus, pour s'assurer d'avoir un sommet de valeur 0, nous utiliserons la fonction  $f(u_i) = 2^i - 1$ .

Notons  $u$  (resp.  $v$ ) les sommets de  $G$  de valeur 0 (resp.  $k$ ).

Construisons un graphe  $H$  gracieux tel que  $G$  est un sous-graphe induit de  $H$ . Par définition de  $f$ , les arêtes de  $G$  ont toutes une valeur différente comprise entre 0 et  $k$ .

Soit  $\{x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_s\}$  les  $s$  valeurs manquantes des arêtes de  $G$  pour être gracieux, avec  $r, s \leq m$ , tel que  $x_1, \dots, x_r$  ne sont pas des valeurs de sommets de  $G$  et  $x_{r+1}, \dots, x_s$  sont des valeurs de sommets dans  $G$ .

Pour chaque  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq r$ , on ajoute un sommet  $w_i$  de valeur  $x_i$  et on relie celui-ci à  $u$  de façon à former l'arête de valeur  $|w_i - u| = x_i$ . Pour chaque  $x_i$ ,  $r + 1 \leq i \leq s$ , on

ajoute un sommet  $w_i$  de valeur  $k + x_i$  et on relie  $w_i$  à  $u$  et  $v$  pour former les arêtes de valeur  $k + x_i$  et  $|k + x_i - k| = x_i$ .

Cette étape permet au graphe  $H$  d'inclure toutes les valeurs d'arêtes manquantes de  $G$ . Cependant, l'ajout d'arêtes de valeur  $k + x_i$ , c'est-à-dire des valeurs strictement supérieures à  $k$ , introduit de nouvelles valeurs d'arêtes manquantes pour que le graphe  $H$  soit gracieux, strictement comprises entre  $k$  et  $k + x_i$ . Ces valeurs ne sont pas des valeurs de sommets de  $G$  puisque ceux-ci ont une valeur inférieure à  $k$  et elles ne sont pas non plus des valeurs des sommets  $w_i$ . S'il y a  $t$  valeurs d'arêtes manquantes, on ajoute, pour chacune de ces valeurs  $y_i$ ,  $1 \leq i \leq t$ , un sommet  $z_i$  de valeur  $y_i$  et on relie ce sommet à  $u$  afin de former l'arête de valeur  $y_i$ .

Ainsi, le graphe  $H = (V \cup \{w_i \mid 1 \leq i \leq s\} \cup \{z_i \mid 1 \leq i \leq t\}, E \cup \{(w_i, u) \mid 1 \leq i \leq s\} \cup \{(w_i, v) \mid r + 1 \leq i \leq s\} \cup \{(y_i, u) \mid 1 \leq i \leq t\})$  est doté de la fonction de valuation  $f_H$  suivante :

$$f_H(a) = \begin{cases} f(a) & \text{si } a \in G, \\ x_i & \text{si } a = w_i, 1 \leq i \leq r, \\ k + x_i & \text{si } a = w_i, r + 1 \leq i \leq s, \\ y_i & \text{si } a = z_i, 1 \leq i \leq t. \end{cases}$$

Par construction,  $f_H$  est injectif et toutes les arêtes manquantes  $\{x_i \mid 1 \leq i \leq s\}$ , et  $\{y_i \mid 1 \leq i \leq t\}$  sont numérotées. Par conséquent, le graphe  $H$  est gracieux.  $\square$

Illustrons le résultat suivant avec le graphe  $G = (V, E)$  suivant, composé de 4 sommets nommés  $\{u_i, 1 \leq i \leq 4\}$  et de 5 arêtes.

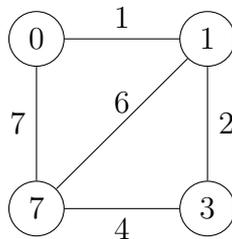


FIGURE 4.10 – Graphe non gracieux avec valuation.

Nous utiliserons fonction de valuation  $f : V \rightarrow \{0, \dots, k\}$  avec  $k = 7$  définie par  $f(u_i) = 2^i - 1$ . Les valeurs des arêtes formées par la différence absolue de leurs extrémités sont 1, 2, 4, 6 et 7. Les valeurs d'arêtes manquantes sont donc  $x_1 = 5$  et  $x_2 = 3$ , avec  $x_1$  qui n'est pas une valeur d'un sommet et  $x_2$  qui l'est. Nous ajoutons ainsi un sommet  $w_1$  de valeur  $x_1 = 5$  et nous relions ce sommet à  $u_1 = 0$  afin de former l'arête de valeur  $x_1$ .

En ce qui concerne la valeur  $x_2 = 3$ , nous construisons un sommet  $w_2$  de valeur  $k + x_2 = 7 + 3 = 10$  et nous relions ce sommet à  $u_1 = 0$  et  $u_4 = 7$  pour former les arêtes de valeur  $x_2$  et  $k + x_2 = 10$ .

De cette façon, toutes les arêtes de 1 à 7 sont présentes, mais l'ajout du sommet de valeur 10 crée deux nouvelles valeurs d'arêtes manquantes  $y_1 = 8$  et  $y_2 = 9$ . Nous créons ainsi deux nouveaux sommets  $z_1$  et  $z_2$  et nous les relions au sommet  $u_1$ .

Ainsi, le graphe  $H = (V \cup \{w_1, w_2, z_1, z_2\}, E \cup \{(u_1, w_1), (u_1, w_2), (u_1, z_1), (u_1, z_2), (u_4, w_2)\})$  pour lequel  $G$  est un qouq-graphe induit est gracieux.

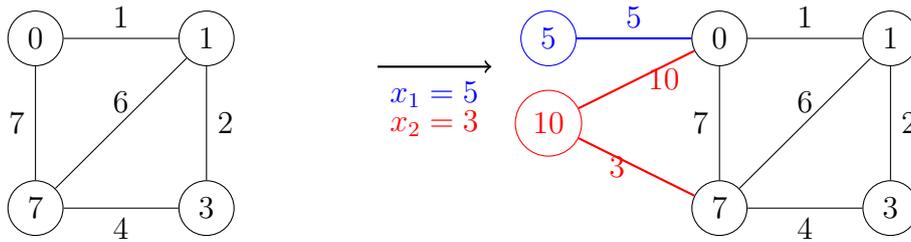


FIGURE 4.11 – Ajout des sommets de valeur 5 et 10.

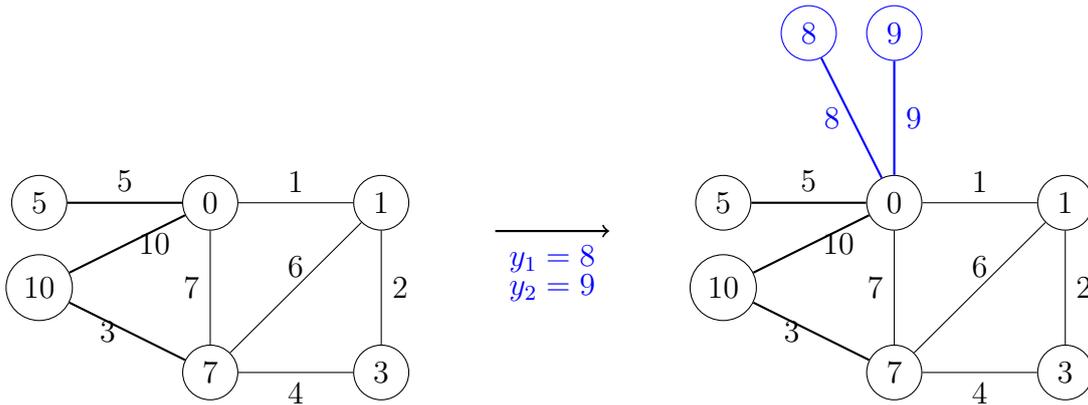


FIGURE 4.12 – Ajout des sommets de valeur 8 et 9.

Considérons le graphe complet  $K_5$ . Selon le théorème 2.7, ce graphe n'est pas gracieux. Cependant, en utilisant une construction similaire à l'exemple précédent, nous pouvons construire un graphe  $H$  gracieux dans lequel  $K_5$  est un sous-graphe induit.

Pour ce faire, nous utilisons la fonction de valuation  $f(u_i) = 2^i - 1$  pour les sommets de  $K_5$ , avec  $u_i$  pour  $1 \leq i \leq 5$ . Les valeurs des arêtes manquantes sont  $\{5, 9, 11, 13, 10\}$ , et comme aucune de ces valeurs n'est attribuée aux sommets de  $K_5$ , il suffit de créer cinq nouveaux sommets ayant ces valeurs. Ces nouveaux sommets seront reliés au sommet de valeur 0 pour former un graphe gracieux.

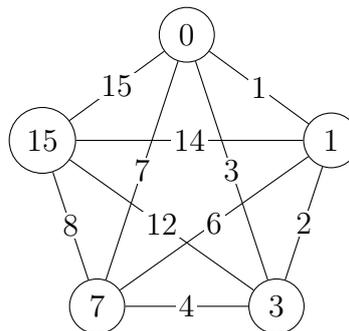


FIGURE 4.13 – Graphe complet  $K_5$  non gracieux de valuation  $f$ .

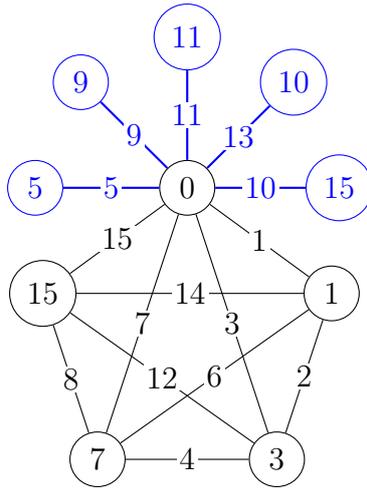


FIGURE 4.14 – Ajout des sommets de valeurs manquantes pour former un graphe gracieux.

En nous appuyant sur l'article [8], nous allons maintenant construire un nouveau graphe gracieux en étendant un chemin à partir d'un sommet du graphe  $G$  ayant pour valeur 0.

Tout d'abord, nous utiliserons l'expression *attacher le sommet  $v_1$  au sommet  $v_0$*  pour désigner l'unification de deux graphes  $G_0$  et  $G_1$  en combinant les sommets  $v_0$  et  $v_1$  en un seul sommet  $v$ , comme illustré dans la figure suivante :

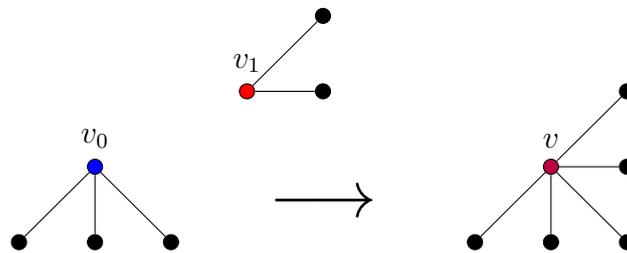


FIGURE 4.15 – Attachement du sommet  $v_1$  au sommet  $v_0$ .

**Proposition 4.4.** Soit  $G$  un graphe gracieux et  $g_0$  son sommet de valeur 0. Soit  $C$  une chenille dont le chemin central est composé des sommets  $v_1, \dots, v_k$ . Construisons un graphe  $G'$  en attachant le sommet  $v_1$  de  $C$  au sommet  $g_0$  de  $G$ . Alors  $G'$  admet un étiquetage gracieux qui attribue l'étiquette 0 à  $v_k$ .

*Démonstration.* Soit  $G$  un graphe gracieux avec  $n$  arêtes et un sommet  $g_0$  étiqueté 0. Nous procédons par récurrence sur le nombre de sommets du chemin central de  $C$ , noté  $k$ .

**Cas de base :** Soit  $C$  une chenille dont le chemin central a  $k = 1$  sommet. Dans ce cas,  $C$  est une étoile, et attacher  $v_1$  à  $g_0$  équivaut à étendre les  $n_1$  feuilles de  $v_1$  à partir de  $g_0$ . Un étiquetage gracieux du graphe résultant  $G'$ , avec taille  $n' = n + n_1$ , peut être généré en conservant toutes les étiquettes dans  $G$ , et en plaçant les étiquettes  $\{n + 1, \dots, n + n_1\}$  sur ces  $n_1$  feuilles de  $C$ . Cela induit toutes les étiquettes d'arêtes  $\{1, 2, \dots, n + n_1 = n'\}$  sur  $G'$ , donc  $G'$  est gracieux. Notez que l'étiquette 0 est sur  $g_0 = v_1 = v_k$ , le seul sommet du chemin central de  $C$ .

**Exemple 4.5.** Illustrons cette construction en utilisant le graphe gracieux  $G = C_3$  et le graphe étoile  $S_4$  de centre  $v_1$ . Le graphe  $C_3$  est numéroté avec les valeurs 0, 1, et 3, comme montré ci-dessous.

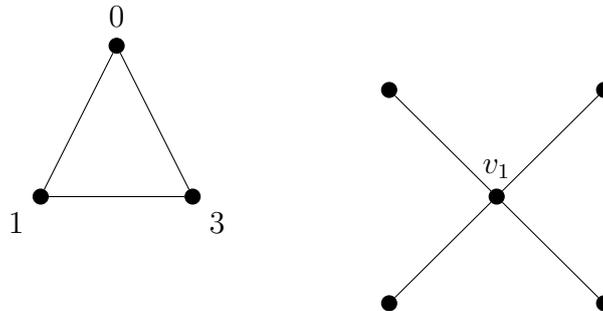


FIGURE 4.16 – Illustration du graphe  $C_3$  étiqueté (à gauche) et du graphe étoile  $S_4$  avec centre étiqueté  $v_1$  (à droite).

Le graphe  $G'$  est obtenu en attachant  $v_1$  au sommet de valeur 0 de  $C_3$ . Pour rendre ce graphe de  $n' = 7$  arêtes gracieux, il suffit de numéroté les feuilles de  $S_4$  par 4, 5, 6, 7 comme illustré ci-dessous.

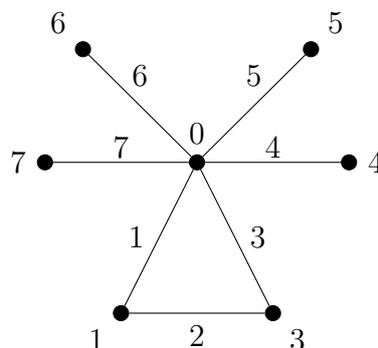


FIGURE 4.17 – Graphe  $G'$  gracieux obtenu en attachant  $v_1$  au sommet de valeur 0 de  $C_3$ .

**Étape d'induction :** Considérons une chenille  $C$  dont le chemin central possède  $k \geq 2$  sommets et notons  $n_1, \dots, n_k$  le nombre de feuilles des sommets du chemin central  $v_1, \dots, v_k$ . Construisons  $G'$ , de taille  $n'$ , en attachant  $v_1$  de  $C$  au sommet de valeur 0,  $g_0$ . Il nous faut montrer que  $G'$  est gracieux. Par hypothèse d'induction, il existe un étiquetage de  $G'$  jusqu'à  $v_{k-1}$  qui utilise les étiquettes des sommets  $\{0, 1, \dots, n' - n_k - 1\}$  et produit les étiquettes d'arêtes correspondantes  $\{1, 2, \dots, n' - n_k - 1\}$ . De plus, selon cette hypothèse, l'étiquette 0 est attribuée au sommet  $v_{k-1}$ . Pour obtenir un étiquetage gracieux de  $G'$ , il reste à attribuer les étiquettes  $\{n' - n_k, \dots, n'\}$  aux sommets restants.

Tout d'abord, plaçons l'étiquette  $n' - n_k$  sur le sommet  $v_k$  (voir la Figure 4.18). L'arête de valeur  $n' - n_k$  est ainsi créée entre les sommets 0 et  $n' - n_k$ . Ensuite, appliquons l'étiquetage complémentaire pour ces  $n' - n_k$  arêtes afin d'échanger les étiquettes des sommets  $v_{k-1}$  et  $v_k$  (voir la Figure 4.19).

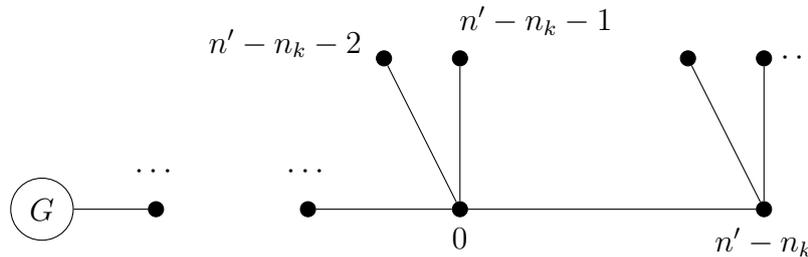


FIGURE 4.18 – Etiquetage partiel.

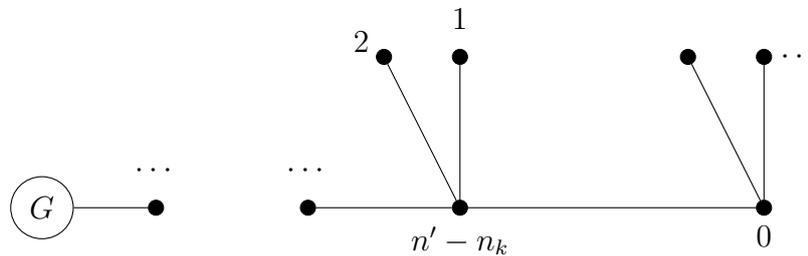
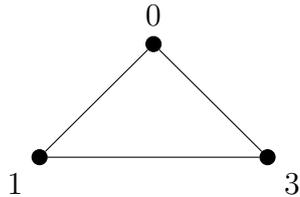


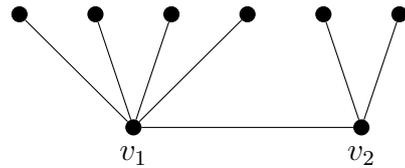
FIGURE 4.19 – Après étiquetage complémentaire.

Pour compléter l'étiquetage du graphe, nous attribuons les valeurs  $\{n' - n_k + 1, n' - n_k + 2, \dots, n'\}$  aux feuilles du sommet  $v_k$ . Puisque ce dernier est étiqueté par 0, les valeurs des arêtes générées par ces feuilles seront exactement  $\{n' - n_k + 1, n' - n_k + 2, \dots, n'\}$ . Par conséquent, l'ensemble des valeurs des arêtes couvrira l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n'\}$ , garantissant ainsi que  $G'$  est gracieux.

Pour illustrer cette construction, considérons à nouveau le graphe  $C_3$  gracieux et le graphe étoile  $S_4$ , auquel nous ajoutons un sommet adjacent à  $v_1$  pour former une chenille ayant deux sommets sur le chemin central, notés  $v_1$  et  $v_2$ , avec quatre feuilles attachées à  $v_1$  et deux feuilles attachées à  $v_2$ .



(a) Graphe  $C_3$  gracieux.



(b) Chenille avec sommets  $v_1$  et  $v_2$ .

On commence par attacher le sommet  $v_1$  au sommet de valeur 0 du graphe  $C_3$ . Cela nous permet d'obtenir un nouveau graphe  $G'$  avec  $n' = 10$  arêtes. Tout d'abord, les sommets sont étiquetés comme si  $v_2$  et ses arêtes incidentes n'existaient pas, comme illustré dans la figure 4.17. Ensuite, le sommet  $v_2$  est étiqueté avec la valeur  $n' - n_2 = 10 - 2 = 8$ , où  $n_2$  représente le nombre de feuilles de  $v_2$ .

Cet étiquetage nous permet de couvrir toutes les valeurs de 1 à  $n' - n_2 = 8$ . Enfin, pour appliquer l'étiquetage complémentaire sur ces 8 arêtes, on remplace chaque valeur de sommet  $x$  par son complément  $8 - x$  afin de conserver les mêmes étiquettes d'arêtes et que  $v_2$  obtienne la valeur 0. Pour compléter l'étiquetage gracieux, il suffit d'attribuer les valeurs 9 et 10 aux feuilles de  $v_2$ .

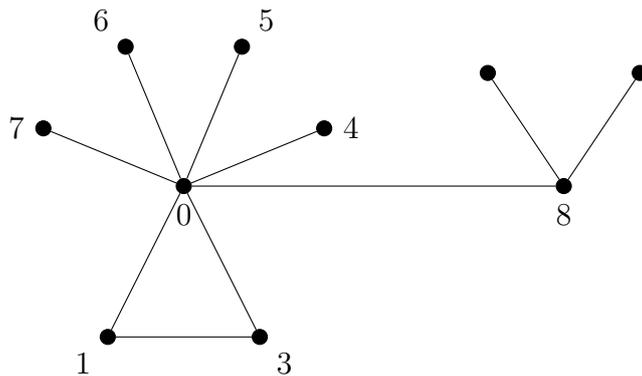


FIGURE 4.21 – Etiquetage partiel de  $G'$  et en attribuant la valeur 8 à  $v_2$ .

□

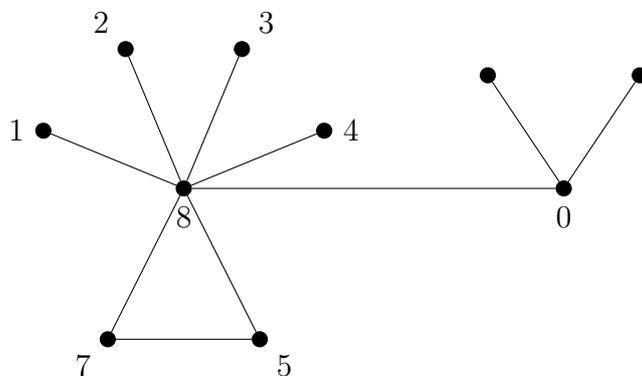


FIGURE 4.22 – Etiquetage complémentaire de l'étiquetage partiel de  $G'$ .

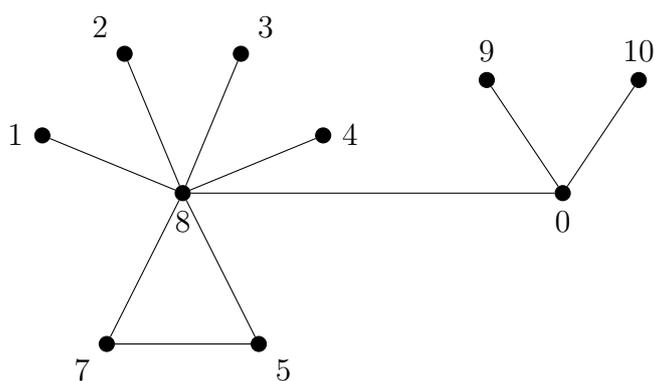


FIGURE 4.23 – Etiquetage complet gracieux du graphe  $G'$ .

Puisqu'un graphe chemin est également un graphe chenille, nous pouvons en déduire le corollaire suivant :

**Corollaire 4.6.** Soit  $G$  un graphe gracieux avec  $g_0$  comme sommet étiqueté par 0. Construisons un nouveau graphe  $G'$  en étendant un chemin de longueur arbitraire à partir du sommet  $g_0$  de  $G$ . Alors,  $G'$  est également gracieux.

Reprenons l'arbre à 7 sommets de la figure 1.4

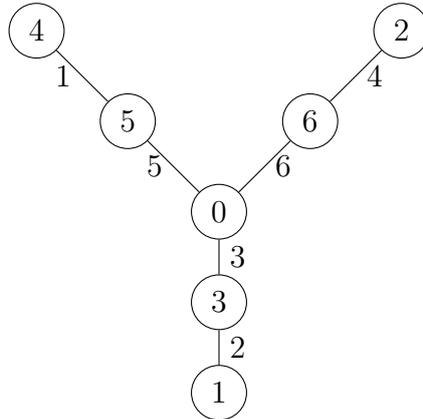


FIGURE 4.24 – Un arbre à 7 sommets et son étiquetage gracieux.

Étendons un chemin de longueur 3 à partir du sommet de valeur 0 dans ce graphe. Pour obtenir ce nouveau graphe comprenant 9 arêtes, il faut d'abord attribuer la valeur 7 au premier sommet du chemin, puis de réaliser l'étiquetage complémentaire du graphe partiellement étiqueté. Ensuite, la valeur 8 est assignée au deuxième sommet du chemin, suivie d'un nouvel étiquetage complémentaire. Enfin, la valeur 9 est attribuée au troisième sommet.

Le graphe entièrement étiqueté est présenté dans la figure 4.25.

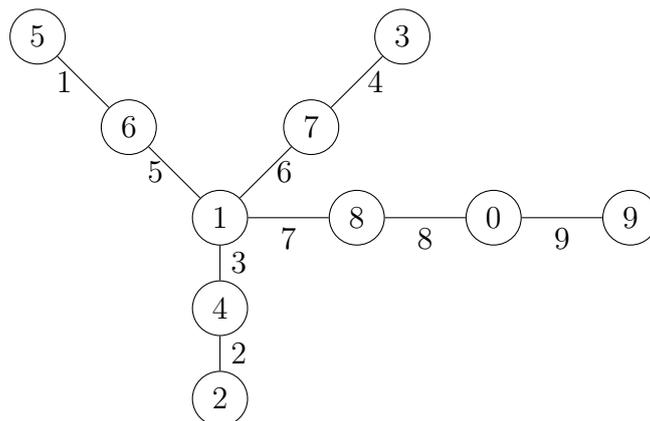


FIGURE 4.25 – Graphe gracieux étendu avec un chemin de longueur 3 à partir du sommet de valeur 0.

Le théorème attribue un rôle particulier au sommet étiqueté 0 dans notre graphe de base  $G$ . Cette contrainte peut poser des difficultés lors de la construction de graphes gracieux. Par conséquent, nous proposons d'examiner une technique permettant de construire des graphes gracieux en partant d'un sommet arbitraire d'un graphe gracieux donné.

**Proposition 4.7.** Soit  $G$  un graphe gracieux possédant  $m$  arêtes, et soit  $g_x$  un sommet de  $G$  ayant pour valeur  $x$ , avec  $0 \leq x \leq m$ . Considérons un chemin  $P$  constitué de  $2x + 1$  ou  $2x + 2$  sommets. Si l'on forme un nouveau graphe  $G'$  en reliant une extrémité de  $P$  au sommet  $g_x$  de  $G$ , alors  $G'$  est gracieux.

*Démonstration.* Considérons d'abord le cas où  $P$  possède  $2x + 1$  sommets.

Commençons par ajouter  $x$  à chaque étiquette de sommet dans  $G$ , y compris celle du sommet  $g_x$ . Cette opération augmente les étiquettes des sommets de  $G$  de  $x$  unités sans modifier les étiquettes des arêtes induites. Ainsi, le sommet  $g_x$  reçoit l'étiquette  $2x$ . Notre nouveau graphe comporte  $m + 2x + 1$  arêtes. Puisque les sommets du graphe  $G$  sont étiquetés avec des naturels compris entre  $0$  et  $m$ , si on augmente chaque valeur de sommet de  $x$ , les valeurs des sommets sont comprises entre  $x$  et  $x + m$ . De plus, il nous reste à attribuer  $2x + 1$  étiquettes, celles des sommets du chemin  $P$ , avec les étiquettes d'arêtes correspondantes dans  $\{m + 1, m + 2, \dots, m + 2x + 1\}$ .

L'étiquetage gracieux se fait en alternant les étiquettes les plus grandes et les plus petites le long du chemin, comme présenté dans la figure 4.26.

En suivant le chemin de gauche à droite, on observe d'abord que l'arête reliant le chemin au graphe a pour valeur  $|m + 2x + 1 - 2x| = m + 1$ . Les valeurs des arêtes suivantes sont alors :  $m + 2x + 1, m + 2x, m + 2x - 1, \dots, m + 5, m + 4, m + 3, m + 2$ . Cela conclut la démonstration.

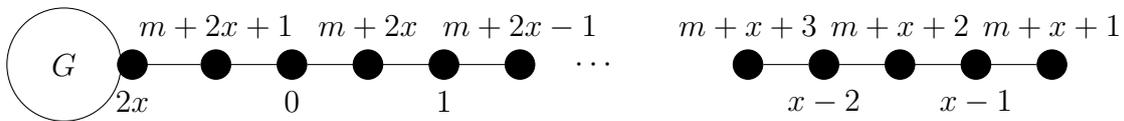


FIGURE 4.26 – Etiquetage du chemin de  $2x + 1$  sommets.

Illustrons ce résultat avec le graphe gracieux  $K_4$  de  $m = 6$  arêtes déjà présent à la figure 2.3

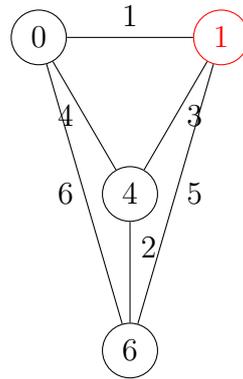


FIGURE 4.27 – Graphe complet gracieux  $K_4$  étiqueté.

Considérons le sommet étiqueté par la valeur 1 dans le graphe illustré. Selon le théorème en vigueur, lorsqu'un chemin de  $2x + 1 = 3$  sommets est étendu et qu'une arête est ajoutée entre le sommet de valeur 1 et une des extrémités du chemin, le graphe résultant est gracieux, conformément à l'étiquetage proposé. En conséquence, le nouveau graphe comportera un total de 9 arêtes.

L'étiquetage spécifie d'abord d'augmenter les valeurs des sommets du graphe  $K_4$  de  $x = 1$ . Ensuite, il reste à attribuer les valeurs  $\{0, 8, 9\}$  aux sommets du chemin comme suit : la valeur la plus grande 9 au premier sommet, la valeur 0 au deuxième sommet, et la valeur 8 au dernier sommet.

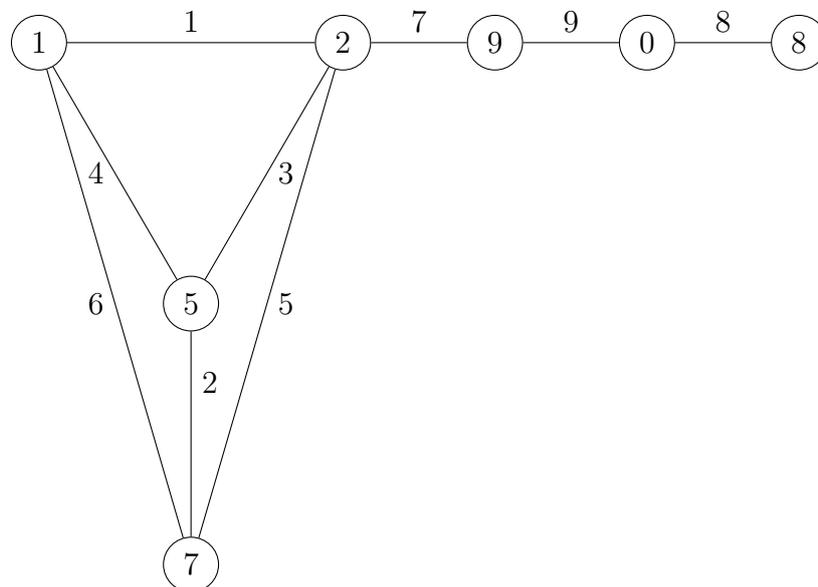


FIGURE 4.28 – Étiquetage complet du graphe obtenu en étendant un chemin de  $2x + 1 = 3$  sommets au sommet de valeur  $x = 1$  du graphe  $K_4$ .

Considérons maintenant le cas où  $P$  possède  $2x + 2$  sommets. La construction est similaire à celle précédemment décrite, à la différence près que l'on ajoute  $x + 1$  à chaque étiquette de sommet dans  $G$ . Ainsi, les étiquettes des sommets  $\{0, 1, \dots, x\}$  et  $\{m + x + 2, \dots, m + 2x + 2\}$  restent à assigner aux sommets de  $P$ . De plus, les plus grandes et les plus petites valeurs sont également alternées le long du chemin.

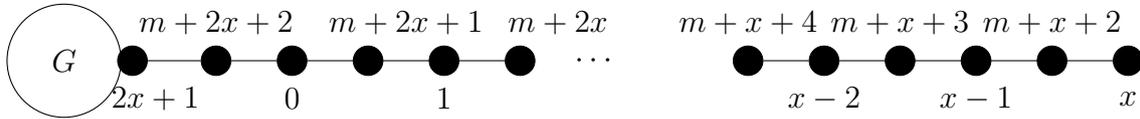


FIGURE 4.29 – Étiquetage du chemin de  $2x + 2$  sommets.

□

Reprenons le graphe complet  $K_4$  de la figure 4.27 où l'on souhaite étendre cette fois-ci un chemin de longueur  $2x + 2 = 4$  à partir du sommet de valeur 1. On augmente d'abord les valeurs des sommets de  $K_4$  de  $x + 1 = 2$ . Ensuite, il reste à attribuer les valeurs  $\{0, 1, 9, 10\}$  aux sommets du chemin en alternant la plus grande et plus petite valeur de cet ensemble le long du chemin.

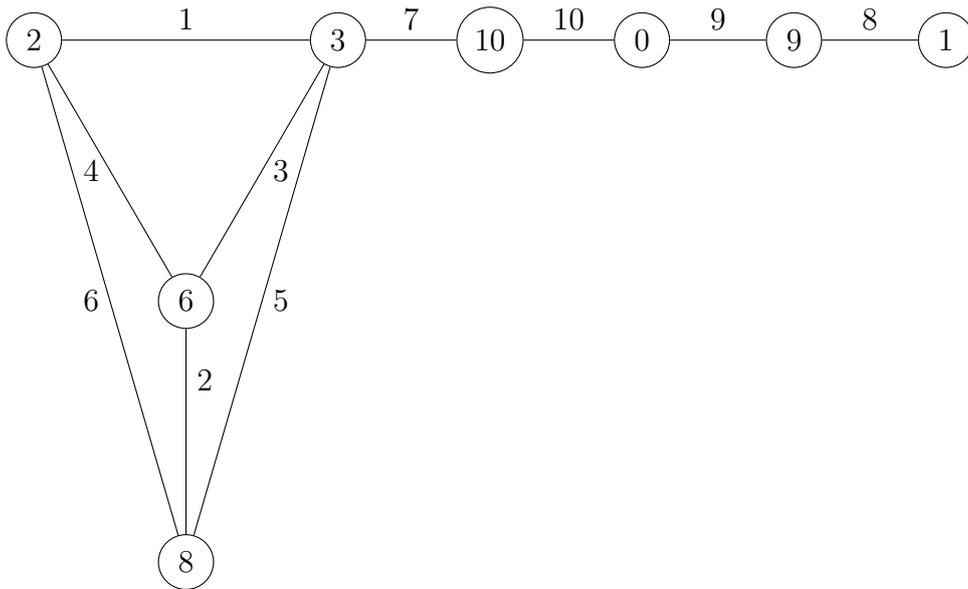


FIGURE 4.30 – Étiquetage complet du graphe obtenu en étendant un chemin de  $2x + 2 = 4$  sommets au sommet de valeur  $x = 1$  du graphe  $K_4$ .

**Remarque 4.8.** Dans le cas où  $P$  est d'ordre  $2x + 2$ , l'étiquetage présenté à la Figure 4.29 place le sommet de valeur  $x$  du graphe  $G'$  à l'extrémité du chemin.

En revanche, lorsque  $P$  est d'ordre  $2x + 1$ , l'étiquetage proposé à la Figure 4.26 place le sommet de valeur  $m + x + 1$  du graphe  $G'$  à l'extrémité du chemin. Cependant, en appliquant l'étiquetage complémentaire à ce graphe, c'est-à-dire en remplaçant chaque valeur d'arête  $y$  par son complément  $m + 2x + 1 - y$ , on s'assure que la construction place le sommet de valeur  $m + 2x + 1 - (m + x + 1) = x$  à l'extrémité du chemin.

Autrement dit, dans les deux cas, nous pouvons garantir que la valeur  $x$  est placée à l'extrémité du chemin  $P$ . Ce fait s'avérera crucial pour notre résultat principal.

Nous pouvons démontrer qu'il est possible de construire un graphe gracieux en prolongeant un chemin d'ordre au moins égal à  $2x(2x + 1)$  à partir d'un sommet de valeur  $x$  d'un graphe gracieux  $G$ . Toutefois, pour établir ce théorème, nous aurons d'abord besoin du lemme suivant, proposé ici sans preuve.

**Lemme 4.9.** Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels premiers entre eux. Soit  $c$  le plus petit entier tel que tous les entiers supérieurs ou égaux à  $c$  sont une combinaison linéaire à coefficients naturels de  $a$  et de  $b$ . Alors,  $c = (a - 1)(b - 1)$ .

Passons maintenant au résultat principal, qui est une généralisation du corollaire 4.6 dans le cas où  $x = 0$ .

**Théorème 4.10.** Soit  $G$  un graphe gracieux possédant  $m$  arêtes, et soit  $g_x$  un sommet de  $G$  ayant pour valeur  $x$ , avec  $0 \leq x \leq m$ . Considérons un chemin  $P$  constitué de  $n$  sommets. Formons un nouveau graphe  $G'$  en reliant une extrémité de  $P$  au sommet  $g_x$  de  $G$ . Si  $n \geq 2x(2x + 1)$ , alors  $G'$  est gracieux.

*Démonstration.* En vertu du Lemme 4.9, il suffit de montrer que si  $n$  est une combinaison linéaire à coefficients naturels de  $2x + 1$  et  $2x + 2$ , alors  $G'$  est gracieux.

Tout d'abord, d'après la Proposition 4.7, si  $P$  est d'ordre  $2x + 1$  ou  $2x + 2$ , alors il existe un étiquetage gracieux de  $G'$ . De plus, grâce à la Remarque 4.8, cet étiquetage place le sommet de valeur  $x$  à l'extrémité de  $P$ .

Puisque  $n$  est une combinaison linéaire à coefficients naturels de  $2x + 1$  et  $2x + 2$ , il existe deux entiers naturels  $s$  et  $t$  tels que  $n = s(2x + 1) + t(2x + 2)$ . Ainsi, pour obtenir un graphe gracieux, il suffit d'appliquer successivement  $s$  fois la construction décrite à la Figure 4.26 et  $t$  fois la construction décrite à la Figure 4.29. On obtient ainsi un graphe gracieux où un chemin d'ordre  $s(2x + 1) + t(2x + 2)$  a été étendu à partir d'un sommet de valeur  $x$  dans  $G$ .  $\square$

Par exemple, pour  $x = 1$ , la Proposition 4.7 et le Théorème 4.10 indiquent que le chemin étendu peut être d'ordre 3, 4 ou supérieur ou égal à 6 pour former un graphe gracieux  $G'$ . Le théorème 4.7 permet donc la construction de graphes gracieux de grande taille. Par exemple, pour  $x = 6$ , il est possible de construire des graphes gracieux en prolongeant un chemin d'ordre au moins égal à  $12 \times 13 = 156$ .

# Bibliographie

- [1] B.D. Acharya. Construction of certain infinite families of graceful graphs from a given graph. *Def. Sci. J.*, 32(3) :231–236, 1982.
- [2] Rohan Cattell. Graceful labellings of paths. *Discrete Mathematics*, 307(24) :3161–3176, 2007.
- [3] Kouros Eshghi. Introduction to graceful graphs. *Sharif University of Technology*, 2002.
- [4] Roberto Frucht. Graceful numbering of wheels and related graphs. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 319(1) :219–229, 1979.
- [5] Joseph A Gallian. Graph labeling. *The electronic journal of combinatorics*, pages DS6–Dec, 2012.
- [6] Solomon W Golomb. How to number a graph. In *Graph theory and computing*, pages 23–37. Elsevier, 1972.
- [7] Michael Guyer. Common techniques in graceful tree labeling with a new computational approach. Master’s thesis, Duquesne University, 2016.
- [8] Dylan Johnson. *Constructing Graceful Graphs by Extending Paths from Graceful Graphs*. 2018.
- [9] FJ MacWilliams. The theory of error-correcting codes. *Elsevier Science Publishers BV google schola*, 2 :39–47, 1977.
- [10] M. Rigo. *Théorie des graphes*. Notes de cours, Université de Liège, 2009–2010.
- [11] Alexander Rosa et al. On certain valuations of the vertices of a graph. In *Theory of Graphs (Internat. Symposium, Rome)*, pages 349–355, 1966.
- [12] Rodrigo Ming Zhou. Graceful labeling of graphs. *Master’s thesis, UFRJ/COPPE, Rio de Janeiro*, 12, 2016.