

Mémoire

Auteur : Duflou, Celia

Promoteur(s) : Dupret, Marc-Antoine; Farnir, Martin

Faculté : Faculté des Sciences

Diplôme : Master en sciences spatiales, à finalité approfondie

Année académique : 2023-2024

URI/URL : <http://hdl.handle.net/2268.2/21210>

Avertissement à l'attention des usagers :

Tous les documents placés en accès ouvert sur le site le site MatheO sont protégés par le droit d'auteur. Conformément aux principes énoncés par la "Budapest Open Access Initiative"(BOAI, 2002), l'utilisateur du site peut lire, télécharger, copier, transmettre, imprimer, chercher ou faire un lien vers le texte intégral de ces documents, les disséquer pour les indexer, s'en servir de données pour un logiciel, ou s'en servir à toute autre fin légale (ou prévue par la réglementation relative au droit d'auteur). Toute utilisation du document à des fins commerciales est strictement interdite.

Par ailleurs, l'utilisateur s'engage à respecter les droits moraux de l'auteur, principalement le droit à l'intégrité de l'oeuvre et le droit de paternité et ce dans toute utilisation que l'utilisateur entreprend. Ainsi, à titre d'exemple, lorsqu'il reproduira un document par extrait ou dans son intégralité, l'utilisateur citera de manière complète les sources telles que mentionnées ci-dessus. Toute utilisation non explicitement autorisée ci-avant (telle que par exemple, la modification du document ou son résumé) nécessite l'autorisation préalable et expresse des auteurs ou de leurs ayants droit.

UNIVERSITÉ DE LIÈGE

MÉMOIRE

Sondage sismique des étoiles sous-géantes
grâce aux modes mixtes

MASTER EN SCIENCES SPATIALES



Auteur :
Celia DUFLOU

Promoteurs :
Marc-Antoine DUPRET
Martin FARNIR

Orientation Recherche

16 Août 2024

Remerciements

Dans un premier temps, j'aimerais remercier mes promoteurs : Marc-Antoine DUPRET et Martin FARNIR. Si ce mémoire a pu être abouti, c'est en partie grâce à leur conseils, leurs explications et leur temps. Ils ont cru en mon travail dans les moments où moi-même je n'y croyais pas. Je voudrais remercier tout particulièrement Martin, sans qui, rien n'aurait été possible. Il a été d'une aide et d'un soutien immense dans cette dernière épreuve. Merci pour toutes ces heures passées à discuter d'un millions de paramètres, de codes, de physique et de mathématiques.

Le mémoire, c'est l'aboutissement d'un bout de chemin pas si évident. C'est pour cela que j'aimerais remercier les personnes qui m'ont soutenue dans cette épreuve que sont les études en physique. J'aimerais profiter de cette page pour remercier ma maman qui a été mon principal soutien ces dernières années. Nous avons évolué ensemble et elle a su me comprendre dans mes peines comme dans mes joies. Merci maman pour tous tes efforts à tenter de comprendre mon mémoire et mes cours de physique. Merci aussi à mes deux sœurs Luna, Amalia et à mon très cher papa. J'en profite pour remercier ma cousine Emma, qui a pris le temps pour faire un travail de relecture d'une qualité historique.

Mon parcours aurait été bien différent si je n'avais pas eu mon compagnon de vie Jonathan. Sa présence m'a apaisée dans de nombreux moments et son soutien constant depuis plus de six ans m'a porté jusqu'ici. Merci pour tout.

Je pense que je n'aurais pas dépassé l'étape du bachelier sans cette super team de copain que sont Madeline, Julie, Lucy, Elise, Hélène et Justin. Merci pour tous ces blocus de rêve passés ensemble à rire, danser et pleurer. Je voudrais remercier tout particulièrement Julie et Lucy avec qui nous avons suivi nos aventures à Liège. Elles ont été d'un soutien gigantesque dans tous les aspect de la vie. Merci pour votre amitiés si sincère. Et le meilleur pour la fin, merci à la team des Astrobees pour tous les moments passés ensemble entre galère et anniversaires. Votre présence a été une source de joie constante et vous avez été la raison pour laquelle je me levais le matin pour aller à l'université. À bientôt pout de nouvelles aventures en Espagne.

Table des matières

Remerciements	iii
I Introduction et bases théoriques	1
1 Structure et évolution stellaire	5
1.1 Phases d'évolution stellaire et diagramme de Hertzsprung-Russell . . .	5
1.2 Équations de structure stellaire	8
1.3 Les sous-géantes	10
1.3.1 Définition	10
1.3.2 Évolution structurelle	10
2 Astérosismologie	13
2.1 Contexte	13
2.2 Hydrodynamique stellaire	14
2.2.1 Formalisme Eulérien	14
2.2.2 Formalisme Lagrangien	14
2.2.3 Équations de base de l'hydrodynamique stellaire	15
2.3 Approche perturbative	16
2.4 Simplification du problème par la méthode de séparation des variables	17
2.5 Fréquences caractéristiques	19
2.6 Cavités de propagation	20
2.7 Principaux indicateurs sismiques	23
2.8 Modes mixtes	26
2.9 Glitch d'hélium	29
2.10 Grands résultats de l'astérosismologie	29
2.11 Les sous-géantes	30
2.11.1 Évolution sismique	30
2.11.2 Difficultés de modélisation	33
II Méthodes et résultats	35
3 Méthodologie	37
3.1 Problématique	37
3.2 Méthodes	37
3.2.1 CLÉS et LOSC	37
3.2.2 WhoSGIAd	38
3.2.3 EGGMiMoSA	39
3.2.4 Problème de minimisation avec PORTE-CLÉS	39
3.3 Kepler et Gemma	41

4 Résultats et discussion	45
4.1 Paramètres CLÉS	45
4.2 Observation de l'évolution des modes p et g pour un modèle stellaire de masse $1.15M_{\odot}$	46
4.3 Gemma	50
4.4 Impact des différents paramètres sur l'évolution stellaire	52
4.4.1 Masse	52
4.4.2 Métallicité	55
4.4.3 Concentration en hydrogène	57
4.5 Grille de modèles	59
4.5.1 PORTE-CLÉS et interpolation linéaire	59
4.5.2 Convergence des premiers modèles	61
4.6 Corrections sur nos modèles	65
4.6.1 Correction empirique d'un modèle	65
4.6.2 Amplitude du glitch d'hélium	66
4.7 Discussion et discrimination des modèles	67
4.8 Le paramètre de phase ϵ_g	69
4.9 Discussion des paramètres	72
III Conclusion et perspectives	75
Bibliographie	79

Première partie

Introduction et bases théoriques

Introduction

Depuis la nuit des temps, les humains s'intéressent au ciel nocturne, faisant de l'astronomie un domaine ancien empli de mystères. Les étoiles ont été parmi les premiers corps célestes à être étudiés. Visibles à l'oeil nu, l'intérêt qu'elles ont suscité a toujours été très important et nous a permis lentement d'acquérir nos connaissances actuelles sur la physique stellaire. Grâce aux outils modernes, nous pouvons étudier les étoiles avec précision, les classifier en fonction de divers critères tels que leur masse et leur âge, et comprendre leur évolution, y compris celle de notre Soleil.

De plus, les étoiles constituent un laboratoire de la physique fondamentale. En effet, leurs processus internes nous permettent d'en apprendre plus sur la physique quantique, la physique nucléaire, la thermodynamique ou encore sur la physique statistique et l'hydrodynamique. L'évolution des galaxies est un cycle d'évènements dans lesquels les étoiles jouent un rôle important. Les galaxies évoluent grâce à l'effondrement de leurs nébuleuses constituées de gaz et de poussières. Cet effondrement donne naissance aux étoiles qui, lors de leur évolution finale, enrichissent l'univers en éléments plus lourds. Leur étude mène donc à une meilleure compréhension de la formation et de l'évolution des galaxies, nous permettant ainsi de retracer leur histoire.

La physique stellaire est aussi essentielle pour comprendre l'exoplanétologie car l'étoile est au centre des systèmes planétaires. La majorité du temps, il n'est pas possible d'observer directement ces planètes. La façon la plus commune de le faire est d'étudier leur signature dans la courbe de lumière de leurs étoiles. Cette signature se caractérise par une légère diminution de la luminosité reçue de l'étoile causée par un phénomène appelé « transit planétaire », qui résulte du passage d'une planète devant son étoile hôte. Les paramètres planétaires étant souvent dépendant des paramètres de son étoile, la connaissance d'une planète passe d'abord par la connaissance de son étoile hôte. Par exemple, en connaissant précisément le rayon d'une étoile, il est possible de déduire la taille relative de la planète qui passe devant.

Aujourd'hui, grâce à la photométrie directe, nous savons contraindre énormément de paramètres spécifiques des étoiles tels que leur température ou leur métallicité¹. Cependant, les erreurs sur ces paramètres restent significatives. L'arrivée de l'étude des oscillations stellaires, l'astérosismologie, a permis de réduire ces incertitudes et d'avoir des modèles toujours plus précis. L'astérosismologie permet de sonder les couches profondes des étoiles et de comprendre leur dynamique interne, offrant, en quelque sorte, une « autopsie » de celles-ci.

Ce travail a d'abord pour but de présenter les bases principales de la structure et l'évolution stellaire, ainsi que celles de l'étude des oscillations stellaires, l'astérosismologie. Nous pourrions ainsi démontrer que le lien entre ces disciplines est très étroit. Comprendre les phases d'évolutions stellaires d'un point de vue structurel et sismique sera donc capital dans cette approche. Nous nous arrêterons davantage sur la phase spécifique appelée « phase des sous-géantes » car cette analyse se concentrera sur une étoile en particulier, la sous-géante Gemma observée par Kepler (voir chapitre

1. Abondance de métaux dans un objet. En astrophysique, les éléments appelés métaux sont les éléments plus lourds que l'hydrogène et l'hélium.

3 section 3.3). L'objectif final de cette étude a pour but de contraindre certains de ses paramètres (masse, âge, composition chimique) à l'aide de différents outils numériques expliqués dans le chapitre 3. À terme, ces modèles pourraient servir pour à obtenir des données précises sur la structure interne des étoiles ou encore sur les planètes gravitant autour de ces étoiles.

Chapitre 1

Structure et évolution stellaire

1.1 Phases d'évolution stellaire et diagramme de Hertzsprung-Russell

La vie des étoiles, leur formation et leur évolution, est un sujet fascinant, détaillé dans l'ouvrage de KIPPENHAHN, WEIGERT et WEISS (1990). La compréhension des étoiles est cruciale pour appréhender non seulement notre Soleil, mais aussi les autres étoiles ainsi que l'évolution des galaxies en général. L'évolution stellaire se déroule en plusieurs phases clés, chacune caractérisée par des variations distinctes de luminosité et de température. Elles sont souvent représentées dans le diagramme de Hertzsprung-Russell (diagramme HR). Celui-ci est donc un outil fondamental pour comprendre et représenter l'évolution des étoiles. Il est essentiel non seulement pour repérer les types d'étoiles dans l'univers, mais également pour confronter la théorie de l'évolution stellaire avec les observations. Sur ce diagramme, deux grandeurs mesurables importantes sont généralement affichées : en abscisse, le logarithme de la température effective¹ des étoiles ($\log T_{eff}$), qui augmente vers la gauche, et en ordonnée, le logarithme de leur luminosité² par rapport à celle du Soleil ($\log(L/L_{\odot})$). Le catalogue Hipparcos (PERRYMAN et al., 1997), issu de la mission spatiale lancée en 1989, a permis une détermination réaliste des distances des étoiles proches grâce à ses mesures de parallaxe. Cette précision a permis de situer clairement toutes les étoiles du catalogue dans le diagramme couleur-magnitude, révélant ainsi des détails essentiels sur leur luminosité et leur température, comme illustré dans la figure 1.1. Depuis lors, la mission Gaia (PRUSTI et al., 2016), lancée par l'ESA en 2013, a permis d'obtenir des données toujours plus précises et plus nombreuses.

Comprendre les phases d'évolution stellaire est crucial pour saisir la dynamique interne des étoiles et faire le lien avec leur position sur le diagramme HR. La figure 1.2 montre l'évolution d'une étoile de 1,15 masses solaires et de métallicité solaire à travers ses différentes phases, telles qu'elles sont décrites ci-dessous, offrant un aperçu précieux de cette évolution.

La formation des étoiles commence dans une nébuleuse interstellaire, un vaste nuage froid de gaz et de poussière, où des effondrements gravitationnels locaux provoquent la fragmentation du nuage et conduisent à la formation de proto-étoile. En se contractant, les fragments forment un disque d'accrétion autour de la proto-étoile qui continue de se contracter, tandis que la température au cœur augmente sans atteindre encore des niveaux suffisants pour déclencher la fusion nucléaire.

1. La température effective est la température qu'aurait un corps noir ayant le même rayon et la même luminosité que l'étoile considérée.

2. La luminosité d'une étoile est la puissance totale rayonnée par celle-ci.

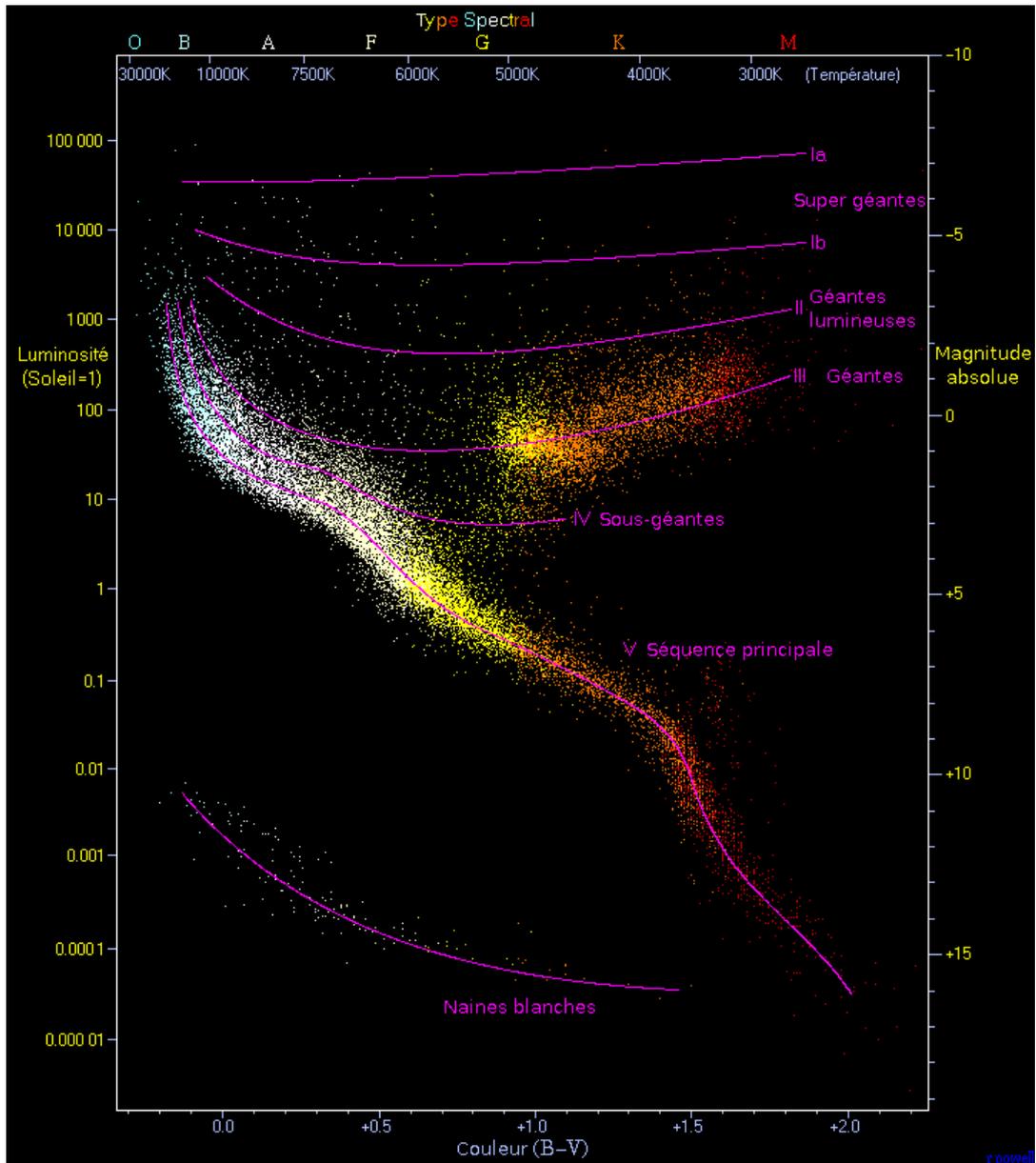


FIGURE 1.1 – Diagramme de couleur-magnitude (CMD) montrant la luminosité (ou magnitude absolue) en fonction de la couleur des étoiles, allant des étoiles blanches bleues à haute température à gauche, aux étoiles rouges à basse température à droite. Ce diagramme présente 22 000 étoiles du catalogue Hipparcos (PERRYMAN et al., 1997) et 1 000 naines rouges et blanches du catalogue Gliese (GLIESE, 1957). Les étoiles sur la séquence principale, comme le Soleil, forment une bande diagonale. Les géantes et supergéantes se trouvent en haut à droite, tandis que les naines blanches, à l’extrémité inférieure gauche, sont des étoiles éteintes se refroidissant lentement. Figure reprise de POWELL (2006).

Lorsque l’équilibre hydrostatique est établi, la proto-étoile entre dans la phase dite de pré-séquence principale (*PMS*, *Pre-Main-Sequence*). Cette phase est marquée par une contraction ralentie due à l’équilibre hydrostatique et se divise en deux séquences appelées « trajet de Hayashi » et « trajet de Henyey ». Lors de la descente de Hayashi, l’étoile est entièrement convective et l’équilibre thermique n’est pas encore établi.

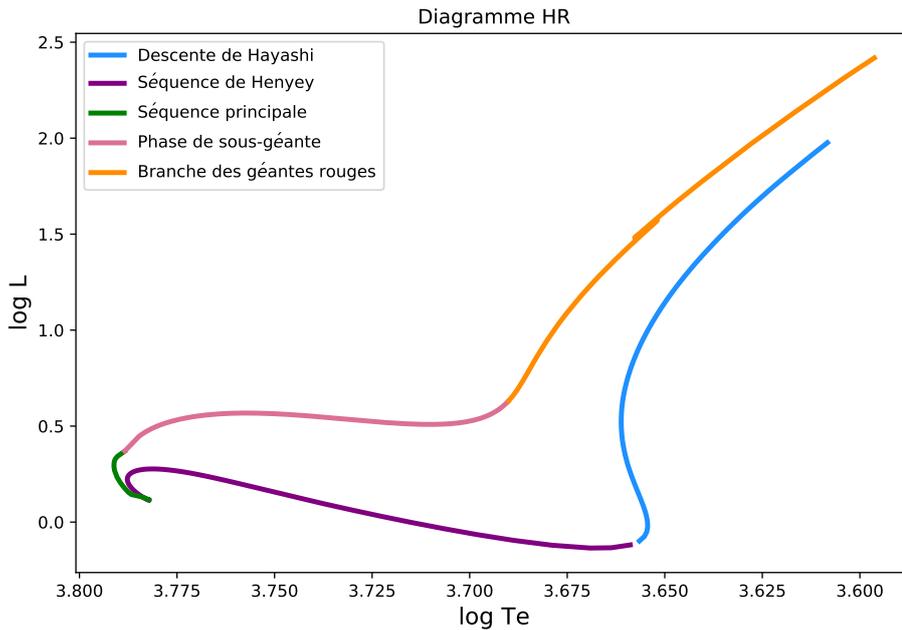


FIGURE 1.2 – Diagramme HR de l'évolution d'une étoile de $1,15 M_{\odot}$ et de métallicité solaire à travers cinq phases d'évolution : descente de Hayashi, séquence de Henyey, séquence principale, phase de sous-géante et branche des géantes rouges.

Comme le montre la courbe bleu sur la figure 1.2, l'étoile descend verticalement sur le diagramme HR. Cela traduit une baisse de luminosité induite par une contraction continue sans fusion nucléaire. Ensuite, toujours dans la pré-séquence principale, l'étoile entre dans la phase de Henyey, où le cœur devient partiellement radiatif, l'opacité diminue et donc la température effective augmente fortement. Cette phase est représentée en violet sur la figure 1.2.

Lorsque la température au cœur de l'étoile est suffisante pour démarrer les réactions nucléaires, celle-ci atteint le point de la Séquence Principale d'Âge Zéro (*ZAMS*, *Zero Age Main Sequence*) sur le diagramme HR. La ZAMS marque un point d'équilibre thermique avec un minimum local de luminosité, et c'est le début de la phase de séquence principale (*MS*, *Main Sequence*), la plus longue et stable de la vie d'une étoile. On voit d'ailleurs sur la figure 1.2 que la séquence principale (en vert) ne varie pas beaucoup en température et luminosité. Sur la figure 1.1, les étoiles de la séquence principale s'alignent le long d'une ligne diagonale allant du coin supérieur gauche (étoiles chaudes et brillantes) au coin inférieur droit (étoiles plus froides et moins lumineuses). Cette phase de fusion thermonucléaire centrale de l'hydrogène en hélium dure environ 90% de la vie totale d'une étoile telle que le Soleil.

Lorsque l'hydrogène central est épuisé, l'étoile sort de la séquence principale, passe par la branche des sous-géantes (*SGB*, *Subgiant branch*) et arrive sur la branche des géantes rouges (*RGB*, *Red giant branch*). La SGB et la RGB sont les phases en rose et en orange respectivement sur la figure 1.2. Son cœur se contracte tandis que son enveloppe se dilate, ce qui entraîne une augmentation de la luminosité. Son rayon peut alors s'étendre jusqu'à plusieurs centaines de fois son rayon initial. Sur la figure 1.1, les géantes rouges se trouvent en haut à droite. Pendant cette phase, l'étoile peut passer par différentes étapes de fusion, brûlant l'hélium, puis d'autres éléments plus

lourds comme le carbone et l’oxygène, selon sa masse.

Finalement, l’étoile éjecte son enveloppe externe et laisse derrière elle un noyau chaud et dense, connu sous le nom de naine blanche. Les naines blanches, situées en bas à gauche sur la figure 1.1, sont caractérisées par une luminosité très faible et une densité extrêmement élevée, ainsi que par des rayons beaucoup plus petits que ceux des étoiles de la séquence principale.

Dans le cadre de notre étude, nous nous concentrerons sur la phase située entre la séquence principale et la phase de géante rouge : la phase des sous-géantes. Cette phase est particulièrement intéressante car elle représente la transition critique d’une étoile quittant la stabilité de la séquence principale pour entamer son évolution vers la branche des géantes rouges. La phase des sous-géantes est relativement brève ; par conséquent, on observe moins d’étoiles à ce stade. Durant cette phase, l’étoile traverse rapidement le diagramme HR de gauche à droite, signifiant une diminution de sa température effective. Comprendre cette phase est essentiel pour saisir la dynamique évolutive des étoiles, mais elle est complexe à modéliser. Cette complexité réside dans l’évolution rapide de la structure stellaire et son interaction directe avec les processus de fusion nucléaire, rendant cette transition difficile à prédire avec précision. C’est dans ce contexte que l’astérosismologie trouve son sens, en permettant d’identifier cette phase grâce aux modes mixtes que nous détaillerons dans le chapitre 2. Les problématiques structurelles et sismiques des sous-géantes seront respectivement abordées à la fin des chapitres 1 et 2.

1.2 Équations de structure stellaire

Afin de comprendre et de pouvoir modéliser l’évolution et la structure stellaire, il faut formuler ses équations. Pour ce faire, plusieurs hypothèses doivent être imposées.

- *Une étoile est considérée comme un **fluide**.*
Les équations de la dynamique des fluides sont utilisées pour modéliser l’étoile.
- *Elle possède une **symétrie sphérique**.*
La structure de l’étoile dépend uniquement de la coordonnée radiale, c’est-à-dire de la distance au centre de l’étoile, ce qui simplifie les calculs en éliminant la rotation.
- *Elle est en **auto-gravitation**.*
La gravité est la seule force extérieure considérée dans les équations du fluide, excluant les champs électriques et magnétiques.
- *Elle est **stationnaire** à l’échelle du temps dynamique (équation (2.1))*
Les vitesses et les accélérations nettes sont négligées, bien que des flux de convection existent.
- *Elle est en **équilibre thermique local**.*
On peut définir une température locale constante dans une petite région autour de chaque couche de l’étoile.

Ces hypothèses et leurs conséquences simplifient grandement l’analyse et permettent d’énoncer les équations de structure. Les équations principales sont, entre autres, reprises des travaux de SCUFLAIRE et al. (2008a).

1. Conservation de la masse :

$$\frac{\partial m}{\partial r} = 4\pi r^2 \rho \quad (1.1)$$

où r le rayon, m la masse et ρ la densité.

2. Équilibre hydrostatique :

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{Gm\rho}{r^2} \quad (1.2)$$

où P est la pression et G la constante gravitationnelle.

3. Transfert de l'énergie :

L'équation du transfert d'énergie est telle que :

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{Gm\rho T}{r^2 P} \nabla \quad (1.3)$$

où ∇ est le gradient réel (ou gradient de température). Il décrit la variation de la température T en fonction de la profondeur, exprimée en termes de pression P et se note tel que

$$\nabla = \frac{d \ln T}{d \ln P}. \quad (1.4)$$

Deux mécanismes principaux transportent l'énergie à travers une étoile :

→ **Radiation** :

Dans les zones radiatives, nous avons que

$$\nabla = \nabla_{rad} = \frac{3\kappa PL}{16\pi ac Gm T^4} \quad (1.5)$$

où L est la puissance rayonnée et a est la constante de radiation telle que $\sigma = ac/4$ ³. Dans cette expression, nous avons également introduit l'opacité moyenne de Rosseland définie par :

$$\kappa = \left[\frac{\pi}{acT^3} \int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} d\nu \right]^{-1} \quad (1.6)$$

où κ_ν est l'opacité à la fréquence ν et B_ν est la fonction de Planck.

Nous pouvons donc trouver

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{Gm\rho T}{r^2 P} \nabla_{rad} = -\frac{3\kappa\rho L}{16\pi r^2 ac T^3}. \quad (1.7)$$

→ **Convection** :

La force motrice à l'origine des mouvements de convection est la poussée d'Archimède. Dans les zones avec une convection très efficace, nous avons que

$$\nabla = \nabla_{ad} = \left. \frac{\partial \ln T}{\partial \ln P} \right|_S. \quad (1.8)$$

3. σ est la constante de Boltzmann et c est la vitesse de la lumière dans le vide

Pour un gaz parfait, $\nabla_{ad} = 2/5$. Nous pouvons donc trouver que

$$\frac{\partial T}{\partial r} \approx -\frac{Gm\rho T}{r^2 P} \nabla_{ad}. \quad (1.9)$$

4. Équation de conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial L}{\partial r} = 4\pi r^2 \rho(\epsilon + \epsilon_g) \quad (1.10)$$

où L est la luminosité et ϵ le taux de production d'énergie nucléaire. Le terme ϵ_g est tel que

$$\epsilon_g = -\frac{dU}{dt} + \frac{P}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} = -T \frac{dS}{dt} - \sum_i \mu_i \frac{dn_i}{dt}, \quad (1.11)$$

où μ_i est le potentiel chimique de l'élément i et n_i est le nombre de moles par gramme. Dans l'équation (1.11), certains ouvrages ne conservent que le terme $-T \frac{dS}{dt}$ (KIPPENHAHN, WEIGERT et WEISS, 1990) mais cela reviendrait à négliger les effets des changements de composition chimique.

Les hypothèses de base permettent de simplifier les expressions et ainsi de modéliser correctement les étoiles. Cependant, ces hypothèses ne sont pas toujours valables, par exemple, près de la surface de l'étoile ou dans des conditions extrêmes comme la fin de vie d'une étoile massive.

1.3 Les sous-géantes

Comme énoncé plus haut, la phase des sous-géantes sera au cœur de ce travail. Cette section se concentre donc sur sa définition et son évolution structurelle. Nous aborderons l'évolution sismiques des sous-géantes à la fin du chapitre 2.

1.3.1 Définition

Comme expliqué plus haut, les sous-géantes sont des étoiles en phase de transition entre la séquence principale et la phase de géantes rouges et se trouvent sur la branche des sous-géantes dans le diagramme HR. Les sous-géantes sont légèrement plus lumineuses que les étoiles de la séquence principale, mais moins brillantes que celles de la branche des géantes rouges. Cette caractéristique rend parfois difficile la classification précise des étoiles dans cette phase de transition. De plus, cette phase transitoire est relativement courte par rapport à la durée de vie totale d'une étoile, ce qui complique encore leur détection. Cependant, l'astérosismologie permet une meilleure classification des sous-géantes en fournissant des informations détaillées sur leur structure interne et leur évolution comme nous le verrons dans le chapitre 2.

1.3.2 Évolution structurelle

À la fin de la phase de séquence principale, les étoiles ont épuisé l'hydrogène dans leur cœur. Cette phase de combustion centrale de l'hydrogène marque la fin d'un équilibre stable où l'hydrogène est transformé en hélium par fusion nucléaire. La production d'énergie par ces réactions crée un équilibre thermique qui contrebalance la force gravitationnelle. Cependant, lorsque cette réserve d'hydrogène s'épuise, la disparition de la production d'énergie par les réactions nucléaires entraîne un déséquilibre thermique, conduisant le cœur inerte à se contracter sous l'effet de la gravité. Si le cœur

de l'étoile est radiatif pendant la séquence principale, cette étape se fait graduellement et l'hydrogène s'épuise peu à peu dans le cœur. Au contraire, si le cœur est convectif, l'hydrogène au cœur s'épuise en une fois et la contraction se fait brusquement.

Cette contraction du cœur entraîne une augmentation de la température et de la pression au centre de l'étoile. Lorsque la température est suffisante à la périphérie de ce cœur, la phase de combustion en couche de l'hydrogène y démarre. Pour les étoiles massives, l'équilibre thermique n'est pas rétabli durant cette phase et l'enveloppe se dilate rapidement en conséquence. À l'inverse, pour les étoiles de masse comparable à celle du Soleil, l'équilibre thermique s'établit et cette phase dure plus longtemps.

L'expansion rapide de l'enveloppe stellaire est une réponse nécessaire pour compenser la contraction du cœur, créant ainsi une structure hybride au sein de l'étoile. Suite à cette expansion de l'enveloppe, la température effective de l'étoile diminue, augmentant ainsi le coefficient d'opacité κ . Cela implique que l'énergie produite par la combustion est davantage confinée dans l'enveloppe. Ce phénomène entraîne un emballement thermique, où la chaleur accumulée pousse encore plus l'enveloppe vers l'extérieur.

Au fur et à mesure que l'enveloppe se dilate, le rayon R de l'étoile augmente considérablement, tandis que sa température effective T_{eff} diminue. Ce processus conduit à une traversée rapide du diagramme HR, où l'étoile passe de la séquence principale à la branche des sous-géantes. Ce changement de position sur le diagramme HR reflète les changements dans la luminosité et la température effective de l'étoile durant cette phase de transition.

Suite à la baisse de température de l'enveloppe et à l'augmentation de son opacité, l'étoile devient entièrement convective. La baisse de température effective est alors fortement ralentie et la luminosité augmente, l'étoile grimpe alors sur la branche des géantes rouges. À ce moment-là, elle est toujours en phase de combustion en couche de l'hydrogène.

Ainsi, la contraction du cœur, la combustion en couche et l'expansion de l'enveloppe sont des processus étroitement liés qui entraînent l'étoile dans une phase de grande instabilité et de transformations rapides jusqu'à atteindre la phase des géantes rouges. La figure 1.3 représente la structure interne typique d'une sous-géante. On trouve au centre, son cœur d'hélium inerte, la température étant encore trop basse pour brûler l'hélium. Juste au dessus du cœur se trouve la coquille d'hydrogène en combustion. L'enveloppe encore en expansion est très grande comparée au cœur. Elle se compose d'une zone radiative et d'une partie externe convective. Cette structure peut varier en fonction du type d'étoile, de sa masse, de sa composition chimique ou de sa position sur la branche des sous-géantes.

Les étoiles sur la branche des sous-géantes évoluent plus ou moins rapidement en fonction de leur masse. Les étoiles de masse supérieure à environ 1,5 fois la masse solaire évoluent très rapidement vers le stade de géante (10^5 années). Cela implique qu'il y a statistiquement moins d'étoiles dans cette phase, créant le « trou de Hertzsprung » sur le diagramme HR. En revanche, les étoiles de plus faible masse peuvent rester dans cette phase plus longtemps (10^9 années).

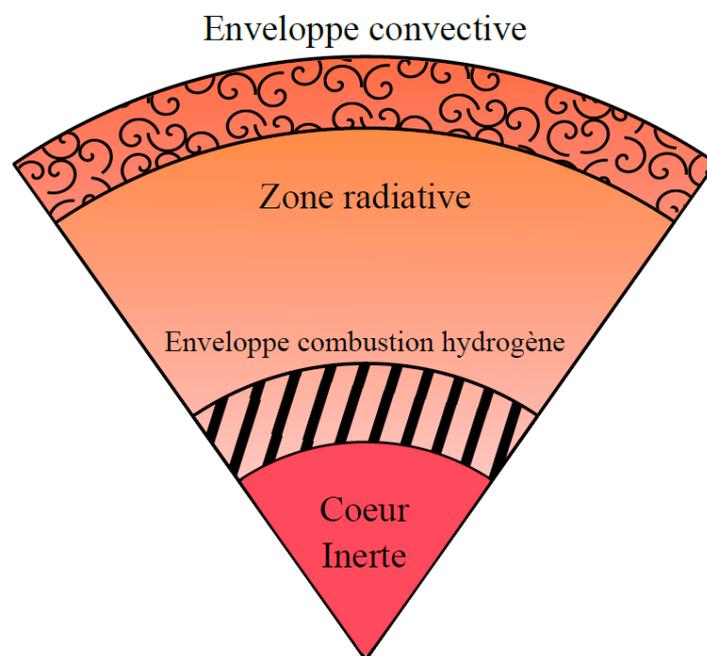


FIGURE 1.3 – Schéma de la structure interne typique d'une sous-géante. Figure reprise de NOLL (2021).

Chapitre 2

Astérosismologie

Dans ce chapitre, la théorie en astérosismologie est reprise principalement du cours de *Stellar stability and asteroseismology (SPAT0044)* du Professeur Marc-Antoine Dupret à l'Université de Liège (DUPRET, s. d.). Ce chapitre nous permet d'introduire les bases de ce domaine afin de comprendre correctement les concepts utilisés dans les modélisations qui suivront.

2.1 Contexte

L'astérosismologie est un domaine de la physique stellaire qui consiste à étudier les mouvements sismiques des étoiles et à établir un lien avec leur structure physique interne. Lorsque l'on regarde une étoile, on peut parfois observer des variations très faibles de sa luminosité. Ces variations sont liées à l'oscillation de l'étoile qui sont dues à la propagation de deux types d'ondes. À l'intérieur de l'étoile, il existe deux types de forces de rappel : le **gradient de pression** et la **force d'Archimède**. Elles formeront les deux modes de propagation d'ondes différents appelés les **modes de pression** (ou modes p) et les **modes de gravité** (ou modes g). Ces oscillations dépendent aussi de la position dans l'étoile et peuvent être radiales et non-radiales. Toutes ces informations permettent de sonder la structure interne des étoiles. Nous y reviendrons en détail plus tard dans ce chapitre.

L'astérosismologie est une discipline assez récente. Les données précises permettant l'étude de ce domaine ne sont accessibles que depuis une vingtaine d'années. Comme les variations de luminosités sont très faibles, des missions spatiales sont nécessaires pour obtenir des données précises. La mission CoRoT (*Convection, Rotation et Transits planétaires*, BAGLIN et al. (2009)) est l'une des premières missions spatiales dédiées entre autres à la détection des oscillations stellaires et elle a permis d'obtenir des données précises essentielles en astérosismologie.

Les oscillations stellaires sont un phénomène dynamique. Nous pouvons donc calculer le **temps dynamique** qui correspond au temps caractéristique des oscillations et au déséquilibre des forces.

$$t_{dyn} = \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \quad (2.1)$$

où R est le rayon de l'étoile, G est la constante de gravité et M est la masse de l'étoile. Avec ceci, nous voyons très clairement que, plus une étoile est dense ($R \searrow$ et $M \nearrow$), plus le temps dynamique sera petit et donc la période des oscillations sera plus petite aussi. Les fréquences d'oscillations seront plus hautes car la fréquence est inversement proportionnelle à la période.

Deux autres temps caractéristiques utiles sont le **temps de Helmholtz-Kelvin** (t_{HK}) qui correspond au déséquilibre thermique et le **temps nucléaire** (t_{nuc}) qui correspond à l'évolution en raison des réactions nucléaires.

$$t_{HK} = \frac{GM^2}{2RL} \quad (2.2)$$

$$t_{nuc} = \frac{E_{nuc}}{L} \quad (2.3)$$

où L est la puissance rayonnée et E_{nuc} est l'énergie nucléaire.

Dans la majeure partie des étoiles, le temps dynamique est inférieur au temps de Helmholtz-Kelvin et ce dernier est lui-même inférieur au temps nucléaire.

$$t_{dyn} < t_{HK} < t_{nuc} \quad (2.4)$$

À titre d'exemple, pour le Soleil, le temps dynamique est égal à 26 minutes, le temps de Helmholtz-Kelvin est égal à 10^7 années et le temps nucléaire est égal à 10^{10} années. Comme $t_{dyn} < t_{HK}$, le gaz n'a pas le temps d'échanger de la chaleur de manière significative pendant la période des oscillations. Cela nous permet de faire une approximation très importante : dans la majorité des étoiles, les **oscillations sont adiabatiques** car les échanges d'énergie sont négligeables. Cependant, cette approximation n'est pas valable pour toutes les couches des étoiles. Pour certaines couches, t_{dyn} et t_{HK} sont du même ordre. De plus, $t_{dyn} < t_{nuc}$ donc la composition chimique n'a pas le temps de changer non plus pendant la période des oscillations.

2.2 Hydrodynamique stellaire

Dans cette section, nous introduisons les équations de l'hydrodynamique ainsi que les formalismes Eulériens et Lagrangiens essentiels à la compréhension des oscillations stellaires.

2.2.1 Formalisme Eulérien

Les coordonnées Eulériennes sont les trois coordonnées d'espace sphérique : r , θ et ϕ . Ce système de coordonnées est fixe dans l'espace et est indépendant du mouvement. Nous écrivons $\frac{\partial}{\partial t}$ la dérivée partielle par rapport au temps en coordonnées Eulériennes.

Une perturbation Eulérienne X' autour d'une valeur d'équilibre X_0 est notée telle que

$$X(\vec{r}, t) = X_0(\vec{r}) + X'(\vec{r}, t). \quad (2.5)$$

Elle représente la différence entre une valeur instantanée et d'équilibre pour un point fixe dans l'espace.

2.2.2 Formalisme Lagrangien

Les coordonnées Lagrangiennes sont le système de coordonnées (\vec{a}) associé à chaque élément matériel du fluide et suivant ses mouvements.

Une perturbation Lagrangienne δX autour d'une valeur d'équilibre X_0 est notée telle que

$$X(\vec{a}, t) = X_0(\vec{a}) + \delta X(\vec{a}, t). \quad (2.6)$$

Elle représente la différence entre une valeur instantanée et d'équilibre pour un élément de matière fixé.

Dans ce système, la dérivée par rapport au temps sera notée telle que

$$\frac{DX}{Dt} = \frac{\delta X}{\delta t} + \nabla X \cdot \vec{v}. \quad (2.7)$$

Elle est appelée la dérivée matérielle et elle représente la variation par rapport au temps en suivant le mouvement du fluide.

Prenons par exemple une étoile qui oscille, la perturbation Eulérienne en masse ne sera pas nulle puisque le volume de l'étoile varie et donc la masse contenue dans un volume figé varie également. Par contre, la perturbation Lagrangienne en masse sera nulle puisque nous suivons cette variation de volume. Par conséquent, nous verrons toujours la même masse sous l'élément de matière que nous considérons. Nous reviendrons sur ces perturbations plus tard.

2.2.3 Équations de base de l'hydrodynamique stellaire

Afin de comprendre et trouver des solutions à notre problème, nous partirons toujours des trois équations fondamentales de l'hydrodynamique stellaire.

La conservation de la masse :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = \frac{\delta\rho}{\delta t} + \nabla \cdot (\rho\vec{v}) = 0 \quad (2.8)$$

avec ρ la densité et \vec{v} la vitesse.

La conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla\Psi - \frac{\nabla P}{\rho} \quad (2.9)$$

avec Ψ le potentiel gravitationnel et ∇P le gradient de pression. Ici, les effets de la viscosité peuvent être négligés car les mouvement de fluide sont hautement turbulents et le nombre de Reynolds associé aux oscillations est toujours grand (de l'ordre de 10^6).

L'équation de Poisson :

$$\nabla^2\Psi = 4\pi G\rho \quad (2.10)$$

Grâce à l'hypothèse des oscillations adiabatiques, nous pouvons trouver la relation adiabatique entre la variation de pression et de densité :

$$\left. \frac{d \ln P}{d \ln \rho} \right|_S \equiv \Gamma_1 \quad (2.11)$$

où Γ_1 est l'indice adiabatique et $|_S$ indique qu'il est évalué à entropie constante.

2.3 Approche perturbative

Dans un premier temps, nous imposerons une configuration d'équilibre à symétrie sphérique. Pour étudier les oscillations stellaires, la théorie des petites perturbations sera utilisée. Nous partons d'un modèle en équilibre avec $P_0(r)$, $T_0(r)$, $\rho_0(r)$ et $L_0(r)$. Nous étudierons des petites perturbations dues aux oscillations autour de cet état d'équilibre. Comme les oscillations sont petites et donc faibles par rapport à la hauteur d'échelle, le problème peut ainsi être linéarisé.

Les perturbations Eulériennes et Lagrangiennes seront utiles ici. Nous pouvons d'ailleurs trouver une relation importante entre les deux, la relation d'Euler-Lagrange :

$$\delta X = X' + \nabla X_0 \cdot \delta \vec{r} \quad (2.12)$$

où les perturbations sont petites par rapport aux valeurs d'équilibres et sont donc négligées au second ordre.

Grâce à toutes ces hypothèses, nous pouvons trouver des nouvelles formes pour les équations de base. Ce sont les équations pour les oscillations adiabatiques non-radiales.

La conservation de la masse :

$$\frac{\delta \rho}{\rho} = -\nabla \cdot \delta \vec{r} \quad (2.13)$$

La conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial^2 \delta \vec{r}}{\partial t^2} = -\nabla \Psi' - \frac{\nabla P'}{\rho} + \frac{\rho'}{\rho^2} \nabla P \quad (2.14)$$

L'équation de Poisson :

$$\nabla^2 \Psi' = 4\pi G \rho' \quad (2.15)$$

La relation adiabatique :

$$\frac{\delta P}{P} = \Gamma_1 \frac{\delta \rho}{\rho} \quad (2.16)$$

Dans le cas des oscillations radiales, nous pouvons démontrer (voir cours de M. Dupret (DUPRET, s. d.)) que ce problème prend la forme bien connue d'un problème de Sturm-Liouville (problème aux valeurs propres). Cela nous permet de trouver les fonctions propres et les valeurs propres du problème. Ceux-ci correspondent respectivement aux modes ($\xi(r) = \frac{\delta r}{r}$) et aux fréquences (σ^2) d'oscillations. Le problème de Sturm-Liouville est pertinent car il donne un cadre pour l'analyse des modes d'oscillations des étoiles. Les conditions aux limites sont choisies pour caractériser le comportement à la surface et au cœur de l'étoile. Ce problème a des solutions ayant des propriétés très intéressantes. Par exemple, les valeurs propres peuvent être exprimées comme une suite dénombrable tendant vers l'infini, cela implique que le nombre de modes est infini. Le déplacement radial est solution de ce problème.

2.4 Simplification du problème par la méthode de séparation des variables

Les équations pour les oscillations stellaires adiabatiques non-radiales nous permettent de trouver les fréquences caractéristiques. Pour cela, nous travaillons sous l'hypothèse d'une symétrie sphérique de la structure autour de laquelle l'étoile oscille¹ et nous utilisons les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) . La théorie des petites perturbations est encore utilisée pour trouver des équations linéarisées et nous permettre de trouver les modes propres. Ceux-ci nous donnent des informations sur les oscillations.

Dans notre cas, nous prenons des quantités de la forme,

$$P' = P'(r, \theta, \phi) \sin(\sigma t) \quad (2.17)$$

et le vecteur de déplacement sous la forme,

$$\delta \vec{r} = \xi_r \vec{e}_r + \xi_\theta \vec{e}_\theta + \xi_\phi \vec{e}_\phi = \delta \vec{r}(r, \theta, \phi) \sin(\sigma t). \quad (2.18)$$

Il est intéressant de rappeler la forme de opérateurs différentiels en coordonnées sphériques.

GRADIENT :

$$\nabla X(r, \theta, \phi) = \frac{\partial X}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial X}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial X}{\partial \phi} \vec{e}_\phi \quad (2.19)$$

DIVERGENCE :

$$\nabla \cdot \vec{V}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin(\theta) V_\theta) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} \quad (2.20)$$

LAPLACIEN :

$$\nabla^2 X(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial X}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial X}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 X}{\partial \phi^2} \quad (2.21)$$

Reprenons l'équation (2.14) de la conservation de la quantité de mouvement. Avec le problème aux valeurs propres, celle-ci dépend de la fréquences σ^2 .

$$\frac{\partial^2 \delta \vec{r}}{\partial t^2} = -\sigma^2 \delta \vec{r} = -\nabla \Psi' - \frac{\nabla P'}{\rho} + \frac{\rho'}{\rho^2} \nabla P \quad (2.22)$$

Nous pouvons ensuite séparer cette équation selon les trois coordonnées (r, θ, ϕ) . En considérant la symétrie sphérique et l'équilibre hydrodynamique, nous avons que $\frac{\nabla P}{\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \vec{e}_r = -\frac{GM}{r^2} \vec{e}_r$. Nous trouvons donc

1. Il faut noter que cette hypothèse n'est pas valide pour des étoiles en rotation rapide car la déformation liée à cette rotation brise cette symétrie. Cependant, les sous-géantes, que l'on étudiera dans ce travail, sont considérées comme des rotateurs lents. Cette approximation est donc valable, les modes $m = 0$ que l'on va considérer dans la suite ne sont pas perturbés.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma^2 \xi_r = \frac{\partial \Psi'}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial r} + \frac{\rho'}{\rho} \frac{GM}{r^2} \rightarrow \text{mouvement radial} \\ \sigma^2 \xi_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\Psi' + \frac{P'}{\rho} \right) \\ \sigma^2 \xi_\phi = \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\Psi' + \frac{P'}{\rho} \right) \end{array} \right\} \text{mouvement horizontal} \quad (2.23)$$

Prenons maintenant l'équation (2.13) de la conservation de la masse où nous utilisons la relation de la divergence en coordonnées sphériques.

$$\begin{aligned} \frac{\delta \rho}{\rho} &= -\nabla \cdot \delta \vec{r} \\ &= - \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \xi_r) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin(\theta) \xi_\theta) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial \xi_\phi}{\partial \phi} \right). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Dans l'équation (2.23), nous pouvons isoler ξ_θ et ξ_ϕ et les remplacer dans l'équation (2.24). Nous trouvons alors une équation de la forme

$$\frac{\delta \rho}{\rho} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \xi_r) - \frac{1}{\sigma^2 r^2} \mathcal{L}^2 \left(\phi' + \frac{P'}{\rho} \right) = 0 \quad (2.25)$$

où \mathcal{L}^2 est l'opérateur Legendrien. Il se définit tel que

$$\mathcal{L}^2 = -r^2 \nabla_{horizontal}^2 = \frac{-1}{\sin(\theta)} \partial_\theta (\sin(\theta) \partial_\theta) - \frac{1}{\sin^2(\theta)} \partial_\phi^2. \quad (2.26)$$

où $\nabla_{horizontal}$ est le laplacien dans la direction horizontale, c'est-à-dire sur les coordonnées θ et ϕ .

Reprenons maintenant l'équation de Poisson. Nous obtenons

$$\nabla^2 \Psi' = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \Psi'}{\partial r}) - \frac{1}{r^2} \mathcal{L}^2 \Psi' = 4\pi G \rho'. \quad (2.27)$$

Avec les équations (2.23) du mouvement radial, (2.24) et (2.27), nous obtenons un système de trois équations aux dérivées partielles. Afin de le résoudre, il faut utiliser la séparation des variables. Cela est possible grâce au fait que les équations ne dépendent que de r et que les dérivées par rapport à θ et à ϕ apparaissent uniquement dans le même opérateur \mathcal{L}^2 . Les harmoniques sphériques de degré ℓ et d'ordre azimutal m $Y_\ell^m(\theta, \phi)$ (où m est le nombre de lignes nodales méridionales et ℓ est le nombre total de lignes nodales) nous donnent une solution. En effet, les harmoniques sphériques sont fonctions propres de l'opérateur \mathcal{L}^2 et nous avons $\mathcal{L}^2 Y_\ell^m(\theta, \phi) = \ell(\ell+1) Y_\ell^m(\theta, \phi)$.

Notre système d'équation devient donc

$$\sigma^2 \xi_r = \frac{d\Psi'}{dr} + \frac{1}{\rho} \frac{dP'}{dr} + \frac{\rho'}{\rho} \frac{GM}{r^2} \quad (2.28)$$

$$\frac{\delta \rho}{\rho} + \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \xi_r) - \frac{\ell(\ell+1)}{\sigma^2 r^2} \left(\phi' + \frac{P'}{\rho} \right) = 0 \quad (2.29)$$

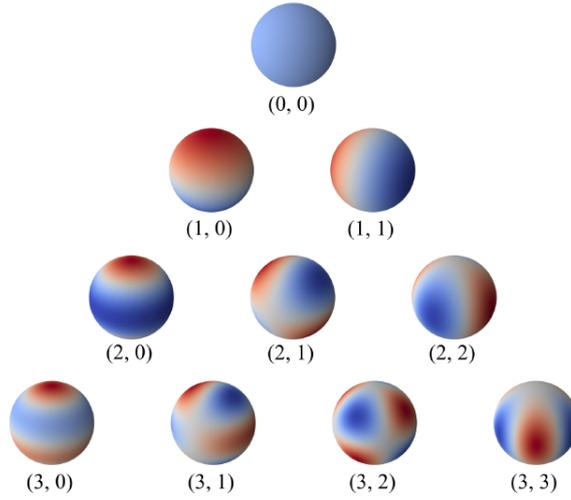


FIGURE 2.1 – Représentation des harmoniques sphériques pour différents (ℓ, m) (NOLL, 2021).

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Psi'}{dr} \right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \Psi' = 4\pi G \rho' \quad (2.30)$$

L'équation (2.28) représente le mouvement radial, l'équation (2.29) est l'association du mouvement horizontal avec la conservation de la masse et l'équation (2.30) est l'équation de Poisson.

Nous passons d'un problème complexe en 3 dimensions (r, θ, ϕ) à un problème plus simple en une dimension (r) . Remarquons ici qu'il y a une dégénérescence en m car ces équations ne dépendent que de ℓ , peu importe la valeur de m . Cela arrive lorsqu'on néglige la rotation.

2.5 Fréquences caractéristiques

Ces équations nous permettent d'introduire les fréquences caractéristiques. En effet, avec les équations (2.28) à (2.30), nous pouvons trouver

$$(\sigma^2 - N^2) \rho \xi_r = \frac{dP'}{dr} + \rho \frac{d\Psi'}{dr} + g \frac{P'}{c^2} \quad (2.31)$$

et

$$\frac{P'}{\rho c^2} \left(1 - \frac{L_\ell^2}{\sigma^2} \right) - \ell(\ell+1) \frac{\Psi'}{\sigma^2 r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \xi_r) - \frac{g}{c^2} \xi_r = 0 \quad (2.32)$$

où $g = \frac{GM}{r^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr}$ est l'accélération gravitationnelle locale et $c^2 = \frac{P\Gamma_1}{\rho}$ est la vitesse du son.

Dans ces équations, nous voyons apparaître les fréquences caractéristiques appelées fréquence de Brünt-Väisälä (N^2) et fréquence de Lamb (L_ℓ^2).

Fréquence de Brünt-Väisälä

La fréquence de Brünt-Väisälä est telle que

$$N^2 = \frac{GM}{r^2} \left(\frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln P}{dr} - \frac{d \ln \rho}{dr} \right) \quad (2.33)$$

et elle représente la fréquence caractéristique d'oscillation d'un élément de matière pour lequel la force d'Archimède est la force de rappel, c'est-à-dire la fréquence à laquelle oscille un certains volume de fluide autour de sa position d'équilibre. C'est donc la fréquence caractéristique des modes g . Elle est négative très proche de zéro ou nulle dans les zones convectives.

La fréquence de Brünt-Väisälä peut aussi s'écrire sous la forme suivante

$$N^2 = \frac{\rho g}{P} (\nabla_{ad} - \nabla + \nabla_{\mu}) \quad (2.34)$$

où $\nabla = \frac{d \ln T}{d \ln P}$ est le gradient réel (ou gradient de température), $\nabla_{ad} = \frac{d \ln T}{d \ln P} \Big|_S$ est le gradient adiabatique et $\nabla_{\mu} = \frac{d \ln \mu}{d \ln P}$ est le gradient de poids moléculaire moyen. Le terme $\nabla_{ad} - \nabla$ est le gradient super adiabatique et il nous permet de sonder le gradient de température. Le terme ∇_{μ} nous permet de sonder de manière très précise la composition chimique interne.

Fréquence de Lamb

La fréquence de Lamb est telle que

$$L_{\ell}^2 = \frac{\ell(\ell + 1)c^2}{r^2} \quad (2.35)$$

et elle dépend du degré ℓ . C'est la fréquence caractéristique des modes p pour lesquels le gradient de pression constitue la force de rappel.

2.6 Cavités de propagation

Afin d'analyser et interpréter le comportement des modes d'oscillations dans l'étoile, nous aimerions trouver une solution plus simple à nos équation pour arriver à une équation d'onde. Pour simplifier la résolution analytique des équations, nous pouvons appliquer l'approximation de Cowling (COWLING, 1941). Celle-ci consiste à négliger les effets de la perturbation Eulérienne du potentiel gravitationnel. Cette approximation est valable lorsque le nombre de nœuds de la fonction est grand et lorsque le degré harmonique ℓ est élevé. Nous négligeons donc les termes Ψ' et $\frac{d\Psi'}{dr}$. En effet, si nous regardons la solution intégrale de l'équation de Poisson, nous voyons que si ℓ est grand, Ψ' tend vers 0.

Ensuite, nous pouvons appliquer une seconde approximation. Celle-ci est très grossière mais elle nous permet de garder les termes dominants dans l'équation afin d'interpréter plus simplement le comportement des solutions. Comme nous considérons que le nombre de nœuds des modes propres est très grand, la longueur d'onde associée à l'oscillation et donc son hauteur d'échelle locale est beaucoup plus petite que la hauteur d'échelle des quantités d'équilibre. Cela nous permet de finalement trouver les équations simplifiées telles que

$$(\sigma^2 - N^2)\rho\xi_r \approx \frac{dP'}{dr} \quad (2.36)$$

et

$$\frac{P'}{\rho c^2} \left(1 - \frac{L_{\ell}^2}{\sigma^2} \right) + \frac{d\xi_r}{dr} \approx 0 \quad (2.37)$$

En dérivant l'équation (2.37) selon r et en y injectant l'équation (2.36), nous retrouvons l'expression d'une équation d'onde.

$$\frac{d^2 \xi_r}{dr^2} + k^2 \xi_r \approx 0 \quad (2.38)$$

où k^2 est le carré du nombre d'onde local et s'exprime tel que

$$k^2 = \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{L_\ell^2}{\sigma^2} \right) (\sigma^2 - N^2). \quad (2.39)$$

Nous avons maintenant deux cas possibles .

1. $k^2 > 0$: k est réel et $\sigma^2 > L_\ell^2, N^2$ ou $\sigma^2 < L_\ell^2, N^2$

L'équation décrit alors une propagation d'onde et nous pouvons trouver une solution de la forme

$$\xi_r \approx \frac{A}{\sqrt{k(r)}} \cos \left(\int k(r) dr \right). \quad (2.40)$$

2. $k^2 < 0$: k est imaginaire et $N^2 < \sigma^2 < L_\ell^2$ ou $L_\ell^2 < \sigma^2 < N^2$

L'onde est évanescence, son amplitude décroît exponentiellement et nous pouvons trouver une solution de la forme

$$\xi_r \approx \frac{A}{\sqrt{|k(r)|}} \exp \left(\int |k(r)| dr \right) \quad (2.41)$$

Nous pouvons déduire de ces solutions que nous avons 3 zones différentes au sein de l'étoile. Ce zones sont appelées **cavité p** , **cavité g** et **zone évanescence**. Les limites de ces régions sont définies par les fréquences de Lamb et de Brünt-Väisälä. On observe sur la figure 2.2 ces différentes zones ainsi que les modes qui s'y propagent.

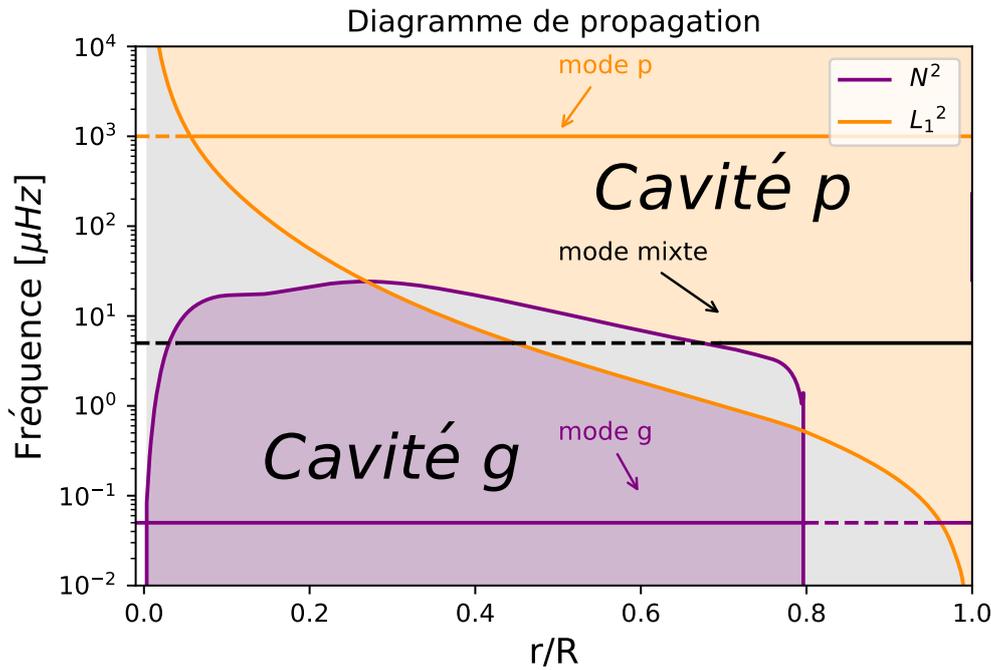


FIGURE 2.2 – Diagramme de propagation pour une étoile de $1.15 M_{\odot}$ en séquence principale. La fréquence de Brünt-Väisälä est représentée en violet et la fréquence de Lamb (pour les modes dipolaires $\ell = 1$) en orange. Les zones grisées sont les zones évanescentes, la zone en violet est la cavité g et la zone en orange est la cavité p . On observe aussi les fréquences théoriques d'un mode p , g et mixte en orange, violet et noir respectivement.

Cavité p

Pour les hautes fréquences ($\sigma^2 > L_{\ell}^2, N^2$), le gradient de pression est la principale force de rappel qui agit. Les modes qui se propagent sont appelés modes de pression (ou modes p) et on dit donc que l'onde se propage dans la cavité p . On peut observer cela sur la figure 2.2 en orange. Les modes p sont comparables à une onde stationnaire acoustique.

L'augmentation de la pression résultant de la compression du gaz agit comme une force de rappel produisant ces ondes. Le spectre des fréquences d'oscillations des modes p dépend principalement du profil de la vitesse du son $c(r)$. Les modes p sont équidistants en fréquences. Remarquons que la taille de la cavité p dépend du degré sphérique ℓ car la fréquence de Lamb (équation (2.35)) est différente pour chaque ℓ et croît monotonement avec ℓ . Donc, plus ℓ est petit, plus l'onde se propage profondément, c'est ce que l'on peut observer sur la figure 2.3 qui montre la propagation de deux modes p au sein d'une étoile.

Cavité g

Pour les fréquences plus basses ($\sigma^2 < L_\ell^2, N^2$), la force d'Archimède est la principale force de rappel. Les modes se propageant dans la cavité g sont appelés modes de gravité (ou modeS g). La figure 2.2 montre cette cavité g et un mode g théorique en violet. À une distance donnée du centre, la densité varie d'une latitude (ou longitude) à l'autre et si la densité est plus faible que celle du milieu environnant, la force d'Archimède sera orientée vers l'extérieur. Si elle est opposée au déplacement initial, un mode g apparaîtra. Les modes g ne se propagent pas dans la zone convective. Les différents modes g sont équidistants en période.

Zone évanescente

Lorsque $N^2 < \sigma^2 < L_\ell^2$ ou $L_\ell^2 < \sigma^2 < N^2$, l'onde décroît en amplitude. Ces régions sont appelées zones évanescente. Comme la fréquence de Lamb dépend du degré sphérique ℓ (elle est différente selon les modes), la taille de la zone évanescente variera avec ℓ . De manière générale, la zone évanescente, en gris sur la figure 2.2, aura tendance à augmenter avec ℓ sauf dans la partie évanescente qui se trouve sous Brunt-Väisälä (courbe violette) auquel cas elle rétrécira d'abord avec ℓ , sera nulle et puis, augmentera. Si la zone évanescente est plus grande, il y aura moins de couplage entre les deux cavités et on parle de piégeage des modes. En effet, si la zone évanescente augmente, les modes g sont piégés dans la cavité g et on ne les détectera pas ou très peu.

2.7 Principaux indicateurs sismiques

Dans cette section, nous utiliserons une analyse asymptotique de notre équation d'onde (2.38), ce qui implique de prendre des valeurs de l'ordre radial n élevées, la fréquence ν_n sera donc grande². Ici, la vitesse du son $c(r)$ n'est pas forcément constante dans l'étoile, ce qui implique que le nombre d'onde local dépend de la position ($k(r)$). Si $k(r)$ varie lentement par rapport à la longueur d'onde, nous pourrions également utiliser l'approximation JWKB pour trouver une solution asymptotique. La solution approchée de l'équation pourra alors être exprimée comme une combinaison de fonctions sinus et cosinus (ou exponentielles complexes), avec une longueur d'onde locale $\lambda(r) = \frac{2\pi}{k(r)}$ où $k(r)$ est le nombre d'onde local. Dans la limite asymptotique, le comportement des fonctions propres est oscillant. On peut montrer que l'équation d'onde avec le changement de variable suivant est moins approximative que l'équation (2.38).

$$\frac{d\bar{\xi}_r}{dr} + k^2(r)\bar{\xi}_r \approx 0, \quad (2.42)$$

où

$$\bar{\xi}_r \equiv \frac{\sqrt{\rho} \, r c}{\sqrt{\left| \frac{L_\ell^2}{\sigma^2} - 1 \right|}} \xi_r. \quad (2.43)$$

2. Remarquons qu'il n'y a pas de solutions analytiques à ce problème, excepté pour les hautes fréquences.

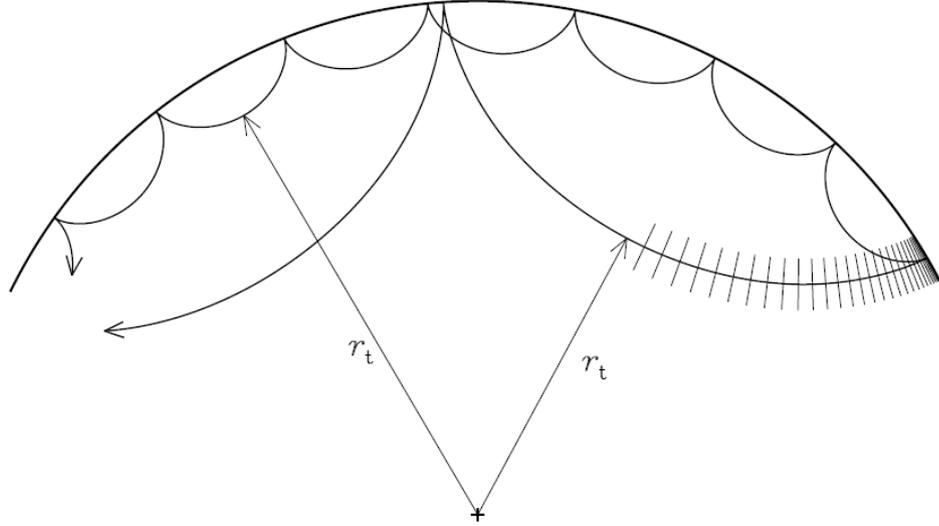


FIGURE 2.3 – Propagation des ondes acoustiques (mode p), correspondant aux modes $\ell = 30$ pour une fréquence $\nu = 3mHz$ (rayons à forte pénétration) et $\ell = 100$ pour une fréquence $\nu = 3mHz$ (rayons à faible pénétration). Les lignes orthogonales à l'ancienne trajectoire de propagation illustrent les fronts d'onde et r_t est le « turning point », c'est-à-dire, le point le plus profond où les ondes se réfléchissent avant de remonter. Figure extraite de l'ouvrage de AERTS, CHRISTENSEN-DALSGAARD et KURTZ (2010).

MODE DE PRESSION ($\sigma^2 > N^2, L_\ell^2$)

Dans un premier temps, regardons ce qu'il se passe dans la cavité p . Dans l'approximation JWKB, nous avons la solution

$$\bar{\xi}_r \approx \frac{A}{\sqrt{k(r)}} \cos \left(\int_{r_t}^r k(r) dr - \frac{\pi}{4} \right) \quad (2.44)$$

où r_t est le « turning point », c'est-à-dire le point le plus profond où les ondes se réfléchissent avant de remonter. Il correspond à l'endroit où $k^2(r) = 0$. Le terme $\frac{\pi}{4}$ est une phase imposée par les conditions aux limites au cœur et à la surface afin d'assurer la continuité. En effet, en $r = r_t$, l'intégrale est nulle et une phase permet d'assurer le comportement correct de la solution entre la zone de propagation p et la zone évanescente où l'onde décroît exponentiellement à mesure que le rayon tend vers 0.

À fréquences élevées, les modes de pression se comportent comme des ondes acoustiques et nous pouvons trouver $k(x)$ tel que

$$k^2 = \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{L_\ell^2}{\sigma^2} \right) (\sigma^2 - N^2) \approx \frac{\sigma^2}{c^2} \left(1 - \frac{L_\ell^2}{\sigma^2} \right) = \frac{\sigma^2}{c^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}. \quad (2.45)$$

Le problème se ramène toujours à poser les conditions aux bords pour trouver la solution. Avec ces conditions, nous pouvons trouver

$$\int_{r_t}^R k(r) dr = \int_{r_t}^R \frac{\sigma}{c} \sqrt{1 - \frac{\ell(\ell+1)c^2}{\sigma^2 r^2}} dr = (n + \alpha)\pi. \quad (2.46)$$

Grâce à cela, nous pouvons retrouver une relation importante qui est la relation de Duvall :

$$F\left(\frac{\sigma}{L}\right) = \int_{r_t(\sigma/L)}^R \sqrt{1 - \frac{L^2 c^2}{\sigma^2 r^2}} \frac{dr}{c} \approx \frac{(n + \alpha)\pi}{\sigma} \quad (2.47)$$

où $L = \sqrt{\ell(\ell+1)}$. La résolution de la relation de Duvall pour différents nombres entiers n et ℓ donne une bonne approximation pour le spectre en fréquences des modes p . Elle fait le lien entre le profil de vitesse du son $c(r)$ et des fréquences des modes p . En connaissant le spectre observé des fréquences, on peut sonder le profil de $c(r)$ par inversion de la relation.

Lorsque $\ell \ll n$, $k^2 \approx \frac{\sigma^2}{c^2}$, une solution asymptotique très approximative pour $\ell \ll n$ est donnée par

$$\nu_{n,\ell} \approx \left(n + \frac{\ell}{2} + \frac{1}{4} + \alpha\right) \Delta\nu \quad (2.48)$$

où α est un paramètre ajustable dépendant des caractéristiques des régions externes de l'étoile étudiée et $\Delta\nu$ peut être trouvé tel que

$$\int_{r_t}^R \frac{\sigma}{c} \sqrt{1 - \frac{L^2 c^2}{\sigma^2 r^2}} dr \approx \int_0^R \frac{\sigma}{r} dr = (n + \alpha)\pi \quad (2.49)$$

$$\nu_n = \frac{\sigma}{2\pi} = \frac{(n + \alpha)}{2 \int_{r_t}^R \frac{dr}{c}} \quad (2.50)$$

GRANDE SÉPARATION :

$$\Delta\nu_{n,\ell} = \nu_{n,\ell} - \nu_{n-1,\ell} \approx \Delta\nu_{asymptotique} = \left(2 \int_0^R \frac{dr}{c}\right)^{-1} \propto \frac{1}{t_{dyn}} = \sqrt{\frac{GM}{R^3}} \quad (2.51)$$

La différence en fréquence entre deux modes d'oscillation successifs de même degré sphérique ℓ mais de nombre radial n différent est appelée la **grande séparation**. Dans le régime asymptotique, les modes sont équidistants en fréquence. La grande séparation est principalement sensible aux régions superficielles, comme le montre l'expression intégrale, et proportionnelle à la racine carrée de la densité moyenne de l'étoile. Plus la densité moyenne est élevée, plus la grande séparation est grande. Elle est liée à la vitesse du son à l'intérieur de l'étoile et, par conséquent, à la structure interne et aux propriétés physiques de l'étoile telles que la température.

MODE DE GRAVITÉ ($\sigma^2 < N^2, L_\ell^2$)

Prenons maintenant le cas de la cavité g . La solution dans l'approximation de JWKB est toujours la même que l'équation (2.44) et nous pouvons approximer $k(x)$ tel que

$$k^2 = \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{L_\ell^2}{\sigma^2}\right) (\sigma^2 - N^2) \approx \ell(\ell+1) \frac{N^2}{\sigma^2 r^2}. \quad (2.52)$$

Nous appliquons maintenant les conditions limites au bas (r_{t1}) et au haut (r_{t2}) de la cavité. Supposons qu'il existe une zone évanescence au-dessus et en dessous de notre cavité de propagation. Cela implique d'imposer des conditions aux limites sur la phase, avec $-\frac{\pi}{4}$ à $r = r_{t1}$ et $\frac{\pi}{4}$ à $r = r_{t2}$. Nous pouvons donc trouver que

$$\int_{r_{t1}}^{r_{t2}} k(r) dr \approx \frac{\sqrt{\ell(\ell+1)}}{\sigma} \int_{r_{t1}}^{r_{t2}} \frac{N(r)}{r} dr = (n + \frac{1}{2})\pi. \quad (2.53)$$

Comme $P = \frac{2\pi}{\sigma}$, nous avons, pour un n et ℓ donné que

$$P_{n,\ell} \approx \frac{n + \frac{1}{2}}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \frac{2\pi^2}{\int_{r_{t1}}^{r_{t2}} \frac{N(r)}{r} dr} = (n + \frac{1}{2})\Delta\pi_\ell \quad (2.54)$$

Nous pouvons alors trouver la différence entre deux périodes consécutives telles que

ESPACEMENT EN PÉRIODE :

$$\Delta\pi_\ell = \frac{2\pi^2}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \frac{1}{\int_{r_{t1}}^{r_{t2}} \frac{N(r)}{r} dr} \approx \Delta P_{n,\ell} = P_{n,\ell} - P_{n-1,\ell} \quad (2.55)$$

L'indicateur $\Delta\pi_\ell$ dépend du degré ℓ et nous pouvons nous rendre compte par l'équation (2.54) que les modes g sont équidistants en période. Cet indicateur est très important car il nous permet de sonder les couches profondes de l'étoile. Par exemple, si le cœur se contracte la densité centrale ρ_c augmentera, $N(r)$ va aussi augmenter à cause de sa dépendance en ρ et donc $\Delta\pi_\ell$ va diminuer. Notons aussi que, par l'équation (2.54), les modes de gravité pour des oscillations radiales ($\ell = 0$) ne peuvent pas exister.

2.8 Modes mixtes

Les modes mixtes sont une catégorie particulière d'oscillations stellaires présentes dans les étoiles sous-géantes et géantes rouges. Pendant la séquence principale, les oscillations se composent d'ondes de pression à haute fréquence ou d'ondes de gravité à basse fréquence. À la fin de cette phase, les changements structurels internes de l'étoile (contraction du cœur et expansion de l'enveloppe) détaillés dans le chapitre 1 ont pour conséquence le rapprochement et le chevauchement des fréquences des modes p et des modes g . Ceci permet le couplage de ces 2 modes de natures différentes. Un mode mixte est donc un mode qui va subir un changement de nature et qui aura un comportement différent en fonction de l'endroit où l'on se trouve dans l'étoile.

Par exemple, si $\sigma^2 < N^2, L_\ell^2$ dans le cœur mais $\sigma^2 > N^2, L_\ell^2$ dans l'enveloppe, nous obtiendrons un mode qui change de nature. En effet, il se comportera comme un mode g dans les couches profondes et comme un mode p dans les couches externes. C'est ce que l'on appelle un mode mixte. L'existence de ces modes mixtes permet le sondage profond d'étoiles de type solaire. En séquence principale, on ne détecte pas les modes g et les modes p , eux, ne nous permettent que de sonder les régions les plus superficielles. Donc, grâce au couplage plus important des deux cavités (p et g) qui succède lors de la phase des sous-géantes, nous pouvons détecter les modes mixtes. C'est un atout essentiel à l'étude de la structure interne complète des étoiles de type

solaires et nous permet alors de mieux contraindre nos modèles.

Le spectre des modes mixtes peut être approximativement décrit grâce à la relation suivante (SHIBAHASHI (1979); TAKATA (2016)) :

$$\tan \theta_p = q \tan \theta_g \quad (2.56)$$

où θ_g est la phase totale de l'oscillation de l'onde de gravité dans le cœur et θ_p la phase totale de l'oscillation de l'onde de pression dans l'enveloppe. q est le coefficient de couplage et il mesure l'interaction entre les deux types d'oscillations.

θ_p et θ_g comprennent aussi les décalages de phase introduits aux limites intérieures et extérieures de chaque cavité. En effet, pour ces phases θ_p et θ_g , MOSSER et al. (2015) montrent que l'on peut trouver les formules asymptotiques approximatives suivantes

$$\begin{aligned} \theta_p &= \pi \left[\frac{\nu}{\Delta\nu} - \frac{1}{2} - \epsilon_p \right] \\ \theta_g &= \pi \left[\frac{1}{\nu\Delta\pi} - \epsilon_g \right] \end{aligned} \quad (2.57)$$

où ϵ_p et ϵ_g sont les décalages de phases. $\Delta\nu$ et $\Delta\pi$ sont respectivement la grande séparation et l'espacement en période.

À partir de ces équations (2.57), nous pouvons faire une remarque qui sera importante pour le chapitre 4. Dans le cas où nous avons un grand nombre de noeud dans la cavité g , le terme $\frac{1}{\nu\Delta\pi}$ sera beaucoup plus grand que ϵ_g . Si θ_g est fixé, un petit changement relatif de $\Delta\pi$ va conduire à un grand changement relatif de ϵ_g pour compenser. À l'inverse, un petit changement relatif de ϵ_g va impliquer un très petit changement relatif de $\Delta\pi$. Comme $\Delta\pi$ a un impact direct sur les caractéristiques stellaires (rayon, masse, etc), apporter un grand changement à ϵ_g implique de modifier légèrement $\Delta\pi$ et, par conséquent, les caractéristiques stellaires. Cependant, cela reste acceptable car ce changement est très peu significatif et implique une variation négligeable des caractéristiques stellaires.

La figure 2.4 montre la propagation d'ondes entre les cavités p et g . À la base de la cavité g et à la surface de la cavité p , on considère que les ondes se réfléchissent complètement (flèches noires). On observe que ces cavités sont séparées par une zone grisée qui représente la zone évanescente. Celle-ci est considérée comme semi-réfléchissante, ce qui implique que les ondes se propageant dans les différentes cavités (orange pour les modes p et violet pour les modes g) vont en partie se transmettre et en partie se réfléchir sur la zone évanescente. Les coefficients de transmission et de réflexion sont T et R respectivement et expriment le changement de l'onde après le contact avec la zone évanescente. En suivant la démonstration des travaux de TAKATA (2016), nous pouvons trouver la relation qui lie ces coefficients par la conservation de l'énergie telle que

$$T^2 + R^2 = 1. \quad (2.58)$$

Nous pouvons ainsi trouver la relation pour le coefficient de couplage q telle que

$$q = \frac{1 - R}{1 + R} \quad (2.59)$$

où R est donc le coefficient de transmission entre les deux cavités, dans la zone évanescente. Prenons les cas limites : si $R = 1$, les deux cavités ne sont pas du tout

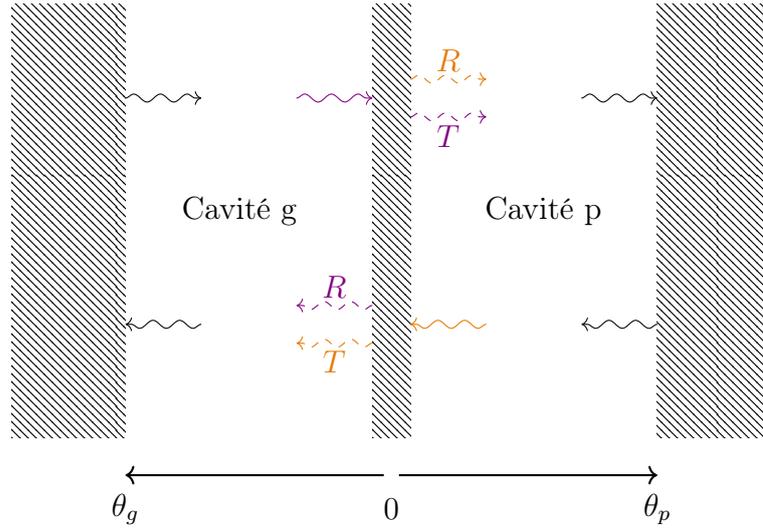


FIGURE 2.4 – Représentation schématique de la propagation d’ondes entre les deux cavités p et g . Les ondes en pointillées sont les parties transmises (T) et réfléchies (R) des ondes g en violet et des ondes p en orange. La zone grisée centrale représente la zone évanescente.

couplées tandis que, si $R = 0$, les ondes sont complètement transmises et les cavités « fusionnent » pour n’en former qu’une.

Les paramètres $\Delta\nu$, $\Delta\pi$, ϵ_p , ϵ_g et q sont donc les éléments essentiels pour traduire toute l’information sismique des modes mixtes.

Il est important de noter que, lorsque l’étoile est sur la séquence principale, les modes seront dominés p , tandis que, lorsqu’elle est dans la phase des géantes, les modes seront dominés g . En effet, sur la séquence principale, nous avons que $q = 0$ et donc

$$\tan \theta_p = 0 \quad (2.60)$$

que nous pouvons résoudre comme

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \sin \theta_p &= 0 \\ \Leftrightarrow \theta_p &= \pi \left[\frac{\nu}{\Delta\nu} - \frac{1}{2} - \epsilon_p \right] = n\pi \end{aligned} \quad (2.61)$$

et ainsi, retrouver une formulation asymptotique telle que

$$\Leftrightarrow \nu = \left(n + \frac{1}{2} + \epsilon_p \right) \Delta\nu. \quad (2.62)$$

La densité des modes dominés g autour de la fréquence maximale ν_{max} peut donc être définie telle que (MOSSER et al., 2015)

$$\mathcal{N}(\nu_{max}) = \frac{\Delta\nu}{\Delta\pi\nu_{max}^2}. \quad (2.63)$$

où $\Delta\nu$ est la grande séparation et $\Delta\pi_1$ est l’espacement en période pour les modes dipolaires. Les spectres dominés par les modes de pression ($\mathcal{N} \ll 1$) montrent une séparation de fréquence constante, tandis que les spectres dominés par les modes de

gravité ($\mathcal{N} \gg 1$) présentent un espacement régulier des périodes.

2.9 Glitch d'hélium

Pendant la phase de séquence principale, les étoiles de type solaire sont stables et présentent des fréquences très régulières. On qualifie cette régularité de « partie lisse » du spectre d'oscillations. Comme le spectre de fréquences varie lentement, nous pouvons trouver un polynôme qui représente la partie lisse du spectre. Cependant, il existe des écarts par rapport à cette régularité, appelés « glitches ». Si on enlève aux fréquences les valeurs de la partie lisse du spectre, on observe une variation plus rapide. Cette variation représente le glitch et peut être caractérisée et mesurée. Les glitches sont des signatures causées par des variations brusques dans la structure interne des étoiles, c'est-à-dire que la variation à l'origine du glitch se fait sur une échelle spatiale de l'ordre ou inférieure à la longueur d'onde d'un mode. Ces variations introduisent une oscillation en fonction de la fréquence dans le spectre d'oscillations. Le glitch d'hélium, en particulier, est situé dans la zone de seconde ionisation de l'hélium près de la surface de l'étoile. L'amplitude du glitch d'hélium (ou amplitude d'hélium, A_{He}) est liée à l'abondance en hélium dans cette zone (VERMA et al. (2019); FARNIR et al. (2019)).

Étant donné que cette région est très proche de la surface et dominée par la convection, elle fournit des informations précieuses sur l'abondance en hélium à la surface. En effet, l'enveloppe convective des étoiles de type solaire n'atteint pas la température requise pour exciter l'hélium, ce qui rend impossible les mesures spectroscopiques de l'abondance d'hélium. Ainsi, l'étude des glitches d'hélium via l'astérosismologie est l'un des rares moyens de déterminer cette abondance et cela permet d'améliorer la précision des modèles stellaires. De plus, il a été démontré qu'il existe une dégénérescence entre les valeurs de Y (concentration en hélium) et la masse M de l'étoile obtenues dans les modèles (LEBRETON et GOUPIL, 2014). Pouvoir mesurer la concentration en hélium d'une étoile de type solaire de manière précise est donc un atout majeur pour pouvoir discriminer les modèles stellaire et, surtout, obtenir des masses précises (un élément essentiel pour, par exemple, l'exoplanétologie).

La figure 2.5 montre la représentation du glitch d'hélium pour l'étoile KIC 11026764 (Gemma) à laquelle nous nous intéresserons par la suite. L'amplitude de l'oscillation est l'amplitude du glitch d'hélium.

2.10 Grands résultats de l'astérosismologie

L'astérosismologie est une discipline qui a déjà prouvé son utilité à maintes reprises. Elle permet de confronter nos modèles théoriques à nos observations de manières précises et d'une façon qui n'existait pas auparavant.

Un des grands résultats de ce domaine est que les modes mixtes permettent de distinguer les phases d'évolution des sous-géantes et géantes rouges. En effet, l'équipe de MOSSER et al. (2014) ont pu classer les stades évolutifs stellaires de manière très précise grâce aux mesures de la grande séparation $\Delta\nu$ et l'espacement en période pour les modes dipolaires $\Delta\pi_1$. C'est ce qu'illustre la figure 2.6. Nous voyons clairement que chaque stade évolutif se place à un endroit bien distinct sur le diagramme et indique une différence claire entre les géantes en combustion en couche de l'hydrogène et celle en combustion centrale de l'hélium. En effet, on peut voir sur la figure 2.6 que les étoiles sous-géantes se trouvent toutes à droite du diagramme, les géantes en

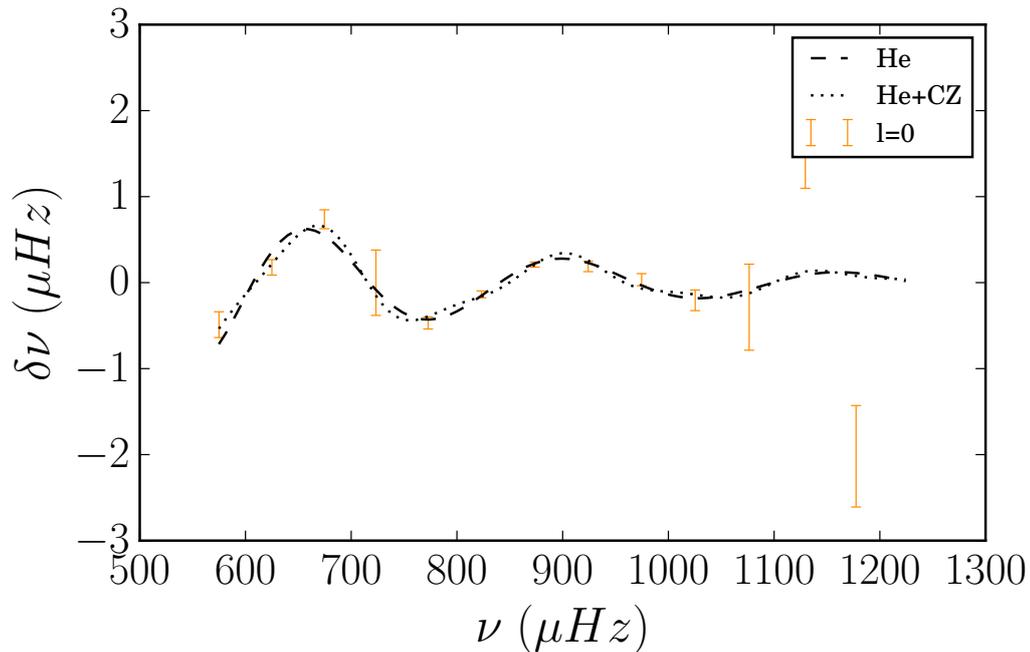


FIGURE 2.5 – Représentation du glitch d'hélium de l'étoile KIC 11026764 (Gemma) pour le mode $\ell = 0$.

combustion en couche de l'hydrogène se trouvent en dessous de $\Delta\pi_1 \approx 100$ et les géantes en combustion centrale de l'hélium se trouvent en haut à gauche.

Une autre découverte significative a été faite par DEHEUVELS et al. (2014). Ils ont démontré qu'il existe une différence de vitesse de rotation entre le cœur et l'enveloppe et que cette différence augmente à mesure que l'étoile évolue de la phase des sous-géante vers la phase des géantes. De plus, la rotation interne des sous-géantes est 100 fois plus lente que celle prédite par la conservation du moment angulaire (le cœur se contracte et devrait accélérer et l'enveloppe se dilate et devrait ralentir), ce qui indique qu'il y a un transport de moment cinétique vers l'enveloppe. Cela a donc obligé les astrophysiciens à revoir les modèles de transport de moment cinétique.

En conclusion, l'astérosismologie est un domaine en pleine expansion qui offre des découvertes très intéressantes dans la physique stellaire grâce, notamment, à l'utilisation des indicateurs sismiques.

2.11 Les sous-géantes

2.11.1 Évolution sismique

D'un point de vue sismique, les sous-géantes peuvent être étudiées grâce aux oscillations stellaires (variation périodique de la luminosité) détectées par des missions comme Kepler (BORUCKI, 2016). Comme expliqué dans la section 2.8, les modes d'oscillations mixtes, qui combinent des caractéristiques de modes de pression et de modes de gravité, permettent de sonder les conditions physiques dans le noyau des étoiles sous-géantes. Ces oscillations fournissent des indicateurs sismiques précieux pour suivre l'évolution stellaire et comprendre les transformations structurelles se produisant pendant cette phase.

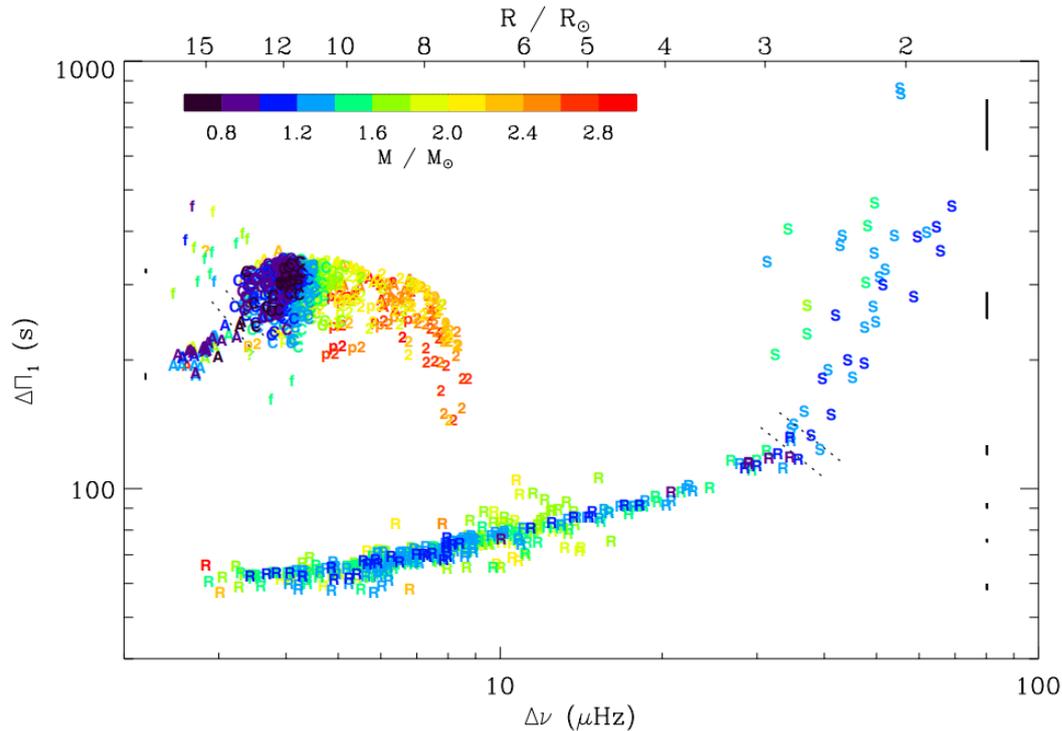


FIGURE 2.6 – Espacement des périodes $\Delta\pi_1$ en fonction de la grande séparation $\Delta\nu$. Une approximation sismique de la masse stellaire est indiquée par le code couleur. Les états évolutifs sont indiqués par S (SGB), R (RGB), f (stade subflash hélium), C (amas rouge), p2 (amas pré secondaire), 2 (amas secondaire), et A (étoiles quittant l’amas rouge se déplaçant vers l’AGB). Les boîtes d’erreur à droite indiquent les incertitudes moyennes, en fonction de $\Delta\pi_1$, pour les étoiles du RGB; pour les étoiles de l’amas, les incertitudes sont indiquées à gauche. Les lignes pointillées indiquent les limites entre les stades d’évolution. Figure tirée de MOSSER et al. (2014).

Pendant la séquence principale, les cavités de propagation p et g ne sont que très peu couplées et cela empêche les modes g d’être détectables. À la fin de la séquence principale, le cœur de l’étoile se contracte, ce qui provoque une augmentation significative de la densité au cœur ρ_c . Cette augmentation de densité entraîne une élévation des fréquences des modes de gravité g . En effet, selon l’équation 2.54, la période des modes g est inversement proportionnelle à la fréquence de Brunt-Väisälä N dans la région de propagation des modes g . Comme cette fréquence N dépend de la densité ρ selon l’équation 2.34, elle va augmenter au cœur à mesure que ρ_c augmente entraînant une diminution de la période et donc une augmentation de la fréquence des modes g .

À l’inverse, l’enveloppe externe de l’étoile se dilate, ce qui diminue la densité moyenne ($\frac{M}{R^3}$). Par conséquent, les fréquences des modes p diminuent aussi car la grande séparation entre les modes p est proportionnelle à la racine carrée de la densité moyenne de l’étoile selon l’équation 2.51.

En conséquence, à mesure que l’étoile évolue sur la branche des sous-géantes, les fréquences des modes p et g non-radiaux ($\ell > 0$) se rapprochent et se décalent, créant des croisements dans le spectre d’oscillations qu’on appelle « *croisement évités* » (AIZENMAN, SMEYERS et WEIGERT, 1977). L’apparition des modes g dans le spectre d’oscillations des sous-géantes se fait graduellement. Au début, un seul mode g sera présent parmi les modes p mais, peu à peu, de plus en plus de modes g seront visibles.

C'est ce que l'on peut observer sur la figure 2.7. Elle représente l'évolution des modes dipolaire ($\ell = 1$) au début de son arrivée sur la branche des sous-géantes. Dans cette figure 2.7, une tranche verticale correspond à l'ensemble des modes théoriques présents pour un âge donné. Ainsi, on voit que, plus le temps passe, plus le nombre de modes g qui intersecteront notre bande verticale augmente. On observe que les fréquences décroissent avec le temps ce qui reflète bien la théorie. En effet, au début les fréquences sont des modes p pur et leur fréquence diminue. Les bandes de couleurs montrent une augmentation soudaine des fréquences. Cela montre l'impact des modes g qui commence à apparaître formant ainsi ces croisement évités. À ce moment-là, les modes sont dominés g .

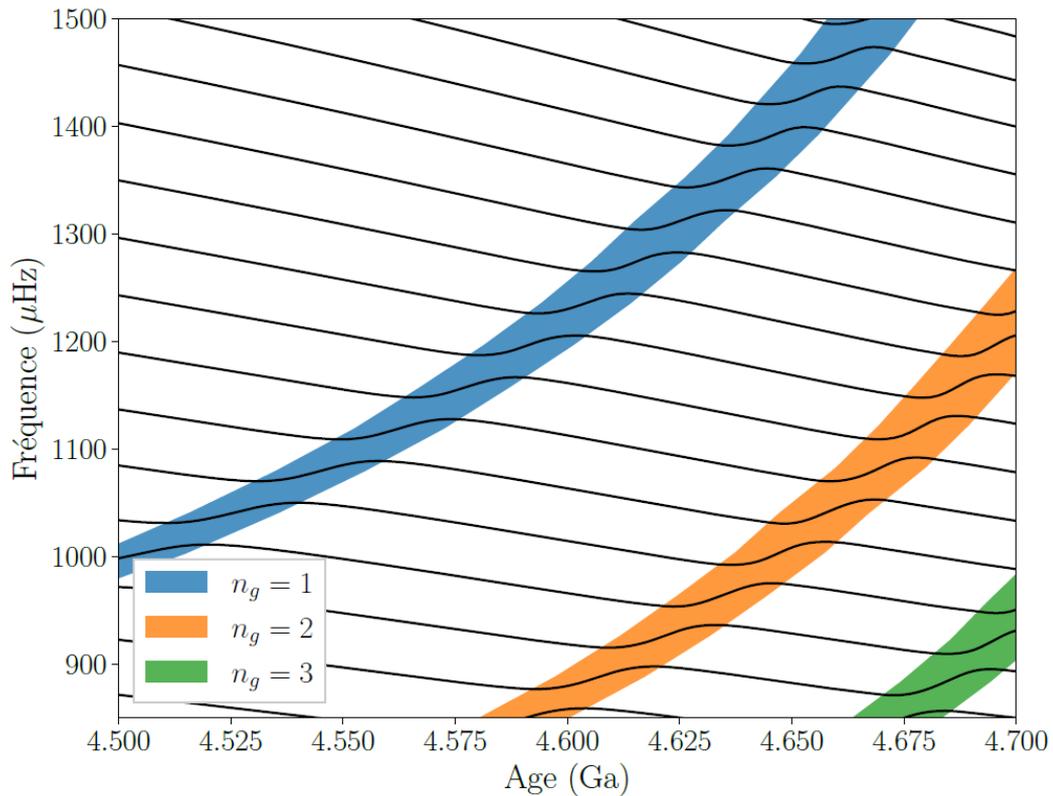


FIGURE 2.7 – Évolution des fréquences dipolaires pour un modèle de $1,3M_{\odot}$ en début de phase de sous-géante. Les régions colorées indiquent les périodes où les modes deviennent g -dominés, la couleur indiquant le nombre radial du mode g pur impliqué dans le croisement évité.

Figure reprise de NOLL (2021).

Ces modes mixtes, étant à la fois p et g , offrent une vue complète de la structure stellaire. Les modes g sondent les régions centrales de l'étoile, offrant des informations sur la structure thermique et chimique à l'aide de l'équation 2.34 de la fréquence de Brunt-Väisälä. Les modes p , quant à eux, sont sensibles aux caractéristiques de l'enveloppe externe et se propagent à la surface de l'étoile. Cette combinaison permet une analyse approfondie de la structure interne et de l'évolution des étoiles sous-géantes.

Une définition « sismique » des sous-géantes a été introduite par MOSSER et al. (2014). Le changement de régime entre la branche des sous-géantes et la branche des géantes rouges peut être résumé avec un critère empirique. Une sous-géante ayant une masse inférieure à $1,5M_{\odot}$ commence à monter la branche des géantes rouges lorsque

la relation suivante est vérifiée :

$$\left(\frac{\Delta\nu}{36,5 \mu\text{Hz}} \right) \left(\frac{\Delta\pi_1}{126 \text{s}} \right) < 1 \quad (2.64)$$

où $\Delta\nu$ est la grande séparation et $\Delta\pi_1$ est l'espacement en période des moments dipolaires ($\ell = 1$). Cette limite est représentée en pointillé sur la figure 2.6.

2.11.2 Difficultés de modélisation

Comme exprimé auparavant, la durée sur la phase SGB est très courte comparée au temps de vie totale des étoiles. De plus, l'évolution des modes mixtes est fortement non linéaire et les fréquences des modes g dépendent grandement de la masse. Pendant les croisements évités, les fréquences des modes changent très rapidement (de l'ordre de plusieurs μHz en un millions d'années). Ajoutons à cela les incertitudes observationnelles, tous ces facteurs mis ensemble rendent la modélisation des oscillations des modes mixtes très compliquée.

Deuxième partie

Méthodes et résultats

Chapitre 3

Méthodologie

3.1 Problématique

La problématique de ce travail est de mieux comprendre les sous-géantes, des étoiles dans un stade évolutif court juste après l'épuisement de leur hydrogène central. À cette fin, nous allons utiliser divers codes développés à l'Université de Liège ainsi que l'astérosismologie pour analyser les oscillations de ces étoiles. Nous analyserons les observations faites par le satellite Kepler sur la sous-géante Gemma et déterminerons des indicateurs sismiques pertinents. Comme expliqué dans la section 3.3, l'étude de l'étoile Gemma est pertinente car c'est une étoile proche solaire, ce qui en fait une cible idéale pour calibrer nos méthodes. De plus, les données récoltées par Kepler sont de qualité et permettent ainsi une analyse très précise. En utilisant ces outils, nous chercherons à identifier les modèles stellaires qui correspondent le mieux aux données observées. Ce processus permettra de contraindre précisément des caractéristiques fondamentales de Gemma, telles que sa masse, son âge et sa composition chimique. En outre, nous étudierons l'impact de la masse et de la métallicité sur les indicateurs sismiques et l'évolution stellaire. Le but final sera de trouver, grâce à l'utilisation de divers types de modélisations, un ou plusieurs modèles stellaires se rapprochant au maximum des observations faites sur Gemma, ouvrant ainsi la voie à des études plus approfondies sur les sous-géantes observées par Kepler.

3.2 Méthodes

Tout d'abord, il faut définir un code évolutif qui représente au mieux l'évolution stellaire. Ensuite, nous devons calculer les fréquences d'oscillations de ces modèles pour, finalement, pouvoir calculer les principaux indicateurs sismiques de nos modèles afin des les comparer avec ceux de Gemma. Cette comparaison nous permettra de trouver le modèle qui correspond le mieux aux observations de Gemma. Voici un aperçu des codes utilisés et de leur fonctionnement.

3.2.1 CLÉS et LOSC

Le *Codes Liégeois d'Évolution Stellaire* (« CLÉS ») est un outil de modélisation puissant développé au sein de l'université de Liège par des chercheurs de l'équipe d'*Astrophysique Stellaire Théorique et Astérosismologie* (SCUFLAIRE et al., 2008a). Grâce à l'utilisation de méthodes numériques avancées, il résout les équations non linéaires de structure et d'évolution chimique des étoiles et permet de retracer l'évolution stellaire à partir de conditions initiales.

Les équations utilisées dans CLÉS définissent l'état d'équilibre des étoiles à travers notamment *l'équilibre hydrostatique, la conservation de la masse, la conservation de*

l'énergie et le transfert de l'énergie qui sont les principales équations de la structure stellaire détaillées dans la section 1.2 du chapitre 1. Ces équations sont essentielles pour modéliser l'équilibre et l'évolution thermodynamique des étoiles. Certaines équations sont trop complexe pour être formulées de manière analytique. C'est pourquoi il existe aussi des tables dérivées de mesures expérimentales ou de simulations qui fournissent des valeurs pré-calculées pour certaines combinaisons de paramètres. CLÉS utilise notamment des tables d'opacité et des tables d'équation d'état pour intégrer des données thermodynamiques précises dans les simulations.

Pour démarrer une séquence évolutive avec CLÉS, il faut d'abord créer un fichier reprenant les conditions initiales imposées à l'étoiles (masse, concentration en hydrogène (X), concentration en hélium (Y), métallicité (Z), âge maximum, pas de temps, overshooting, etc). CLÉS génère ensuite des fichiers pour chaque pas de temps dans l'évolution stellaire, c'est-à-dire pour un certain stade évolutif fixé de l'étoile. Chacun de ces fichiers représente l'évolution de divers paramètres au sein même de l'étoile du cœur jusqu'à la surface. Divers paramètres tels que la température, la pression, la densité, etc. Ce code nous permet donc de comprendre l'évolution générale des étoiles mais aussi l'évolution de la structure interne de celles-ci.

Ensuite, à partir des modèles d'évolutions stellaires générés par CLÉS, LOSC (Liège Oscillation Codes) peut calculer les fréquences d'oscillations adiabatiques pour ces modèles (SCUFLAIRE et al., 2008b). C'est un outil essentiel pour calculer les propriétés sismiques des étoiles.

3.2.2 WhoSGlAd

WhoSGlAd (Whole Spectrum and Glitches Adjustment) est une méthode conçue pour analyser les spectres d'oscillations des oscillateurs de type solaire (FARNIR et al., 2019). Son but principal est de créer de nouveaux indicateurs sismiques qui soient aussi indépendants que possible les uns des autres, offrant ainsi des informations détaillées sur l'intérieur des étoiles.

Pour ce faire, WhoSGlAd utilise la méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt pour construire une base orthonormée avec K vecteurs de base q_k . Ces éléments de base sont fonction de l'ordre radial n . Le produit scalaire est défini tel que

$$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \sum_i \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} \quad (3.1)$$

où x et y sont deux quantités vectorielles, l'indice i indique l'élément associé i et σ_i est l'incertitude associée à l'élément i avec le degré sphérique ℓ_i et l'ordre radial n . On peut remarquer que le produit scalaire défini dans cette méthode est pondéré par les incertitudes des modes observés. Cela implique donc que la base de fonctions orthonormées dépend directement du jeu de fréquences observées (nombres de modes et incertitudes). De plus, les éléments de la base q_k sont fonctions de l'ordre radial n_i . Par conséquent, d'une étoile à l'autre, cette base et toutes les inférences en découlant, comme les indicateurs sismiques, seront affectées.

Les fréquences ajustées par WhoSGlAd sont données par

$$\nu_{fit} = \sum_{k=1}^K a_k q_k \quad (3.2)$$

où les q_k sont les éléments de la base orthonormée et les a_k sont les coefficients de l'ajustement. a_k est la projection des fréquences observées sur les vecteurs de base et est défini tel que

$$a_k = \langle \nu_{obs} | q_k \rangle \quad (3.3)$$

où ν_{obs} sont les fréquences observées.

En bref, cela consiste à projeter les fréquences d'oscillations des étoiles sur une base de fonctions orthonormées, ce qui permet d'obtenir des coefficients indépendants. Ensuite, ces coefficients sont combinés pour créer des indicateurs sismiques qui soient le moins corrélés possible.

Cette méthode définit une grande séparation qui correspond à un ajustement linéaire des fréquences dans le formalisme de WhoSGLAd. Cette grande séparation correspond à la pente des fréquences de degré sphérique ℓ en fonction de l'ordre radial n . Sa définition est donnée explicitement dans les travaux de FARNIR (2021). WhoSGLAd permet notamment d'identifier un indicateur très important : l'amplitude du glitch d'hélium. Avec WhoSGLAd, cet indicateur est tout à fait indépendant de la partie lisse du spectre par construction. Cela nous sera utile plus tard pour discriminer les modèles entre eux.

3.2.3 EGGMiMoSA

EGGMiMoSA est une méthode sismique qui permet d'analyser les modes mixtes qu'on retrouve dans des étoiles évoluées, plus particulièrement les sous-géantes et les géantes rouges (FARNIR et al., 2021). Pour rappel, ces modes sont des oscillations influencées à la fois par le cœur (mode g) et l'enveloppe (mode p) de l'étoile (changement de nature entre les modes). Les modes mixtes, qui se propagent du cœur à la surface de l'étoile, sont une opportunité unique de sonder la structure complète de l'étoile, contrairement aux étoiles de type solaire de séquence principale où seuls les modes p se propageant en surface sont détectés.

La méthode repose sur une description asymptotique de ces modes et ajuste cinq paramètres clés introduits dans la section 2.8 : l'espacement des périodes des modes g ($\Delta\pi$), la grande séparation des modes p ($\Delta\nu$), les décalages de pression (ϵ_p) et de gravité (ϵ_g) et la constante de couplage entre les deux cavités q . Une particularité essentielle d'EGGMiMoSA est qu'elle n'impose aucune hypothèse au-delà de la formulation asymptotique, ce qui permet de l'appliquer aussi bien aux sous-géantes qu'aux géantes rouges, une flexibilité que d'autres méthodes n'offrent généralement pas.

Pour assurer une bonne convergence, des estimations initiales de ces cinq paramètres asymptotiques sont utilisées. La méthode de minimisation de Levenberg-Marquardt permet alors d'ajuster ces paramètres aux données d'observation de manière précise. Finalement, EGGMiMoSA permet d'obtenir des valeurs cruciales telles que $\Delta\pi$ et ϵ_g , qui sont les principaux indicateurs étudiés de la structure interne des étoiles étudiées (PINÇON, GOUPIL et BELKACEM (2020); FARNIR et al. (2021)).

3.2.4 Problème de minimisation avec PORTE-CLÉS

Avec les observations disponibles de Gemma (section 3.3), il est maintenant possible de trouver des modèles ayant des paramètres s'approchant au mieux de ceux observés. Pour ce faire, il est nécessaire d'utiliser une méthode de minimisation. Dans notre cas, ce sera une méthode des moindres carrés avec la limitation d'une l'approche

locale. Celle-ci permet de comparer nos données observationnelles à un modèle.

Notre but ici sera de trouver un ou plusieurs modèles stellaires avec un nombre K de paramètres stellaires \mathbf{a} qui minimisent la différence entre les N contraintes observées $C_{i,obs}$ et modélisées $C_{i,mod}(\mathbf{a})$ avec nos modèles (\mathbf{a} est un vecteur dont les composantes sont les K paramètres libres). Cette différence est caractérisée par la fonction $\chi^2(\mathbf{a})$ telle que

$$\chi^2(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^N \frac{(C_{i,obs} - C_{i,mod}(\mathbf{a}))^2}{\sigma_i^2}. \quad (3.4)$$

où σ est l'incertitude associée.

Le principe sera de chercher à minimiser cette fonction. En effet, si la différence entre les contraintes observées $C_{i,obs}$ et modélisées $C_{i,mod}(\mathbf{a})$ est plus petite que l'erreur associée σ , le résultat de l'équation 3.4, $\chi^2(\mathbf{a})$, sera inférieur à 1 et cela signifiera que nous aurons trouvé un modèle qui s'approche au mieux de nos contraintes observées et, donc, un bon modèle. L'outil PORTE-CLÉS est utile pour cela.

PORTE-CLÉS est un code développé par M. Farnir à l'Université de Liège, basé sur l'algorithme de Levenberg-Marquardt, pour la recherche de modèles stellaires. Cette méthode compare les contraintes observées avec leurs contreparties théoriques en utilisant une fonction coût, l'équation 3.4, qu'elle cherche à minimiser. Pour ce faire, il teste plusieurs modèles en modifiant un ou plusieurs paramètres à la fois et observe l'impact sur le χ^2 . L'objectif est de minimiser cette fonction pour obtenir un modèle cohérent avec les observations.

L'algorithme de Levenberg-Marquardt, utilisé par PORTE-CLÉS et EGGMiMoSA, est un hybride entre la méthode de Newton-Raphson et la descente du gradient. La méthode de Newton-Raphson est une technique itérative qui ajuste les paramètres en utilisant les dérivées secondes de la fonction coût, ce qui permet une convergence rapide près du minimum. Cependant, elle peut être instable loin du minimum. La descente du gradient, quant à elle, ajuste les paramètres en suivant la pente la plus raide de la fonction coût, ce qui est plus stable mais souvent plus lent. Levenberg-Marquardt combine ces deux approches : il utilise principalement la méthode de Newton-Raphson pour sa rapidité de convergence, mais adopte la descente du gradient pour améliorer la stabilité lorsque l'algorithme est loin du minimum. La méthode de Levenberg-Marquardt implémentée dans PORTE-CLÉS permet donc de faire varier une série de paramètres afin d'ajuster au mieux les contraintes observées. À chaque itération, PORTE-CLÉS calcule les dérivées pour déterminer dans quelles directions modifier les paramètres libres et ensuite calcule le χ^2 . En théorie, si le nombre de contraintes observées N est égal au nombre de paramètres libres K , et si nos modèles permettent de physiquement représenter le problème, le code doit pouvoir trouver une solution exacte. Le résultat final est le modèle qui offre la meilleure approximation des paramètres libres. La figure 3.1 représente un schéma simplifié du fonctionnement de PORTE-CLÉS. Pour commencer, PORTE-CLÉS va générer un modèle. Ensuite, sur base des fréquences, il va calculer les indicateurs sismiques. Avec cela, il va comparer ses résultats avec ceux observés au travers de la fonction coût. Il va ensuite supposer dans quel sens modifier les paramètres du modèle et recommencer le processus jusqu'à obtenir un minimum de la fonction coût.

Cependant, le problème majeur de cet algorithme est qu'il peut parfois tomber

dans un minimum local. Un minimum local est un point où la fonction coût est plus petite que dans les points voisins, mais pas nécessairement la plus petite possible sur l'ensemble de l'espace des paramètres. Cela signifie que l'algorithme pourrait identifier un modèle qui semble optimal localement, mais qui n'est pas le meilleur possible globalement. Entre le minimum local et le minimum global, il peut y avoir un « mur » difficile à contourner pour la fonction coût. Le code peut donc être piégé dans ces minimums locaux, ce qui est un désavantage par rapport à une méthode globale. Cependant, les méthodes globales sont très coûteuses en temps de calcul et c'est pourquoi nous privilégions une méthode locale. Toutefois, une estimation intelligente du point de départ et une supervision du code sont essentielles.

Cette difficulté peut empêcher le modèle de converger vers la solution optimale. Pour surmonter ce problème, il peut être nécessaire de mettre en place certaines stratégies, comme varier les conditions initiales des paramètres. Ces stratégies permettent de guider l'algorithme hors des minimums locaux et de le diriger vers le minimum global, garantissant ainsi une solution plus précise et fiable.

EGGMiMoSA et WhoSGLAd, bien qu'incorporés dans PORTE-CLÉS pour définir de nouvelles contraintes, n'ont pas d'impact direct sur le fonctionnement fondamental de la méthode. Cette méthode s'inspire des travaux de MIGLIO et MONTALBÁN (2005), qui ont été parmi les premiers à utiliser l'algorithme de Levenberg-Marquardt pour la recherche de modèles stellaires, faisant de leur code un précurseur de PORTE-CLÉS.

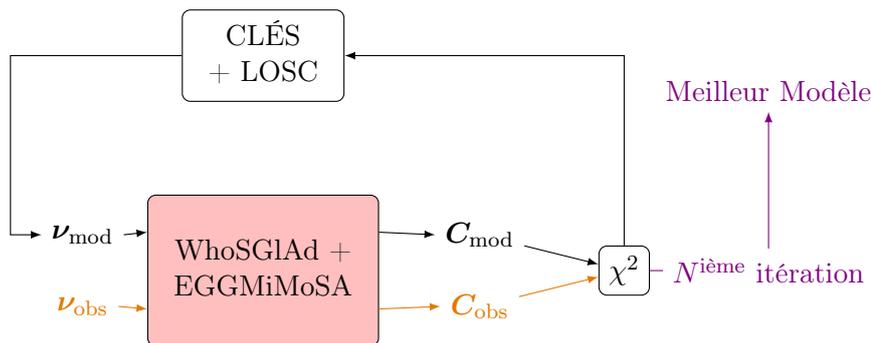


FIGURE 3.1 – Procédure de modélisation schématisée de PORTE-CLÉS.

3.3 Kepler et Gemma

En mars 2009, la NASA a lancé la mission Kepler (BORUCKI, 2016), un satellite conçu pour découvrir des planètes habitables semblables à la Terre autour d'étoiles similaires au Soleil. Doté d'un télescope de 0,95 mètre et de caméras numériques, Kepler surveille la luminosité de plus de 150 000 étoiles de type solaire avec une précision exceptionnelle. Le satellite est prévu pour détecter une variation de luminosité des étoiles, celle-ci étant causée par un transit planétaire. La profondeur du transit permet de déduire la taille relative de la planète par rapport à son étoile hôte. La mission inclut également une surveillance plus intensive de 512 étoiles, ce qui a permis de détecter les signatures d'oscillations caractéristiques des étoiles de type solaire et des sous-géantes. C'est le fait que ces étoiles ont été observées continuellement pendant de longues périodes qui nous permet d'atteindre la précision suffisante pour faire de l'astérosismologie détaillée. Ce domaine permet de contraindre de manière précise

T_{eff}	$\log g$	Métallicité
5636 ± 80	3.89 ± 0.06	0.04 ± 0.15

TABLE 3.1 – Valeurs spectroscopiques de la température effective (en Kelvin), du logarithme de l’accélération gravitationnelle locale, de la métallicité et du rayon (en rayon solaire) observés par Kepler pour KIC 11026764 (*Gemma*). Valeurs reprises des travaux de LI et al. (2020).

les rayons et les âges des étoiles, aidant ainsi à caractériser les systèmes planétaires découverts et à comprendre leur évolution au fil du temps. Les données obtenues fournissent également une vue d’ensemble sur la structure et l’évolution des étoiles de type solaire, même pour celles sans compagnons planétaires.

Cette mission a permis l’observation importante de patterns d’oscillations dans certaines étoiles. Les données des étoiles observées par de Kepler sont reprises dans le *Kepler Input Catalog* (KIC). L’équipe de LI et al. (2020) a analysé l’une d’entre elles : KIC 11026764 (*Gemma*). *Gemma* est une sous-géante qui a pu être observée pendant 48 mois. Ses données spectroscopiques sont reprises dans le tableau 3.1. Grâce à ces observations, LI et al. (2020) ont réussi à déterminer les fréquences d’oscillations en réduisant la courbe de lumière observée par Kepler. Ils ont ainsi détecté une trentaine de modes (pour $\ell = 0, 1, 2, 3$). Les fréquences trouvées par LI et al. (2020) sont reprises dans le tableau 3.2. De plus, c’est une étoile très proche solaire car ses paramètres (tableau 3.1) sont assez similaires à ceux du Soleil. Cela en fait une cible intéressante pour une étude approfondie. *Gemma* a d’ailleurs été étudiée par deux autres équipes auparavant (CHAPLIN et al. (2010) ; METCALFE et al. (2010)) qui ont trouvé des fréquences légèrement différentes de celles de LI et al. (2020). Cette étoile sera donc l’objet de cette étude et les fréquences trouvées par LI et al. (2020) seront la référence utilisée ici.

Dans cette recherche, nous utiliserons les fréquences du tableau 3.2 afin de trouver des modèles qui s’approchent le plus de *Gemma*. Pour cela, nous utiliserons toutes les modélisations détaillées plus haut.

ℓ	Fréquences	Incertitudes
0	574.95	0.15
0	624.99	0.09
0	674.65	0.11
0	723.38	0.38
0	772.77	0.07
0	823.16	0.04
0	873.72	0.03
0	924.14	0.06
0	974.69	0.07
0	1025.37	0.12
0	1076.39	0.50
0	1129.53	0.46
0	1177.49	0.59
1	587.88	0.10
1	620.48	0.06
1	654.62	0.09
1	694.18	0.05
1	723.64	0.22
1	755.15	0.05
1	799.58	0.04
1	847.44	0.04
1	893.98	0.04
1	925.81	0.04
1	954.08	0.04
1	1000.43	0.07
1	1050.02	0.12
1	1099.84	0.19
1	1151.32	0.34
1	1201.07	0.85
2	669.44	0.18
2	718.93	0.10
2	766.24	0.04
2	818.75	0.07
2	868.91	0.07
2	919.94	0.07
2	970.33	0.08
2	1020.56	0.15
2	1073.63	0.90
2	1124.26	0.81
2	1172.20	1.31
3	838.04	0.27
3	887.82	0.35
3	939.14	0.20
3	991.18	0.12
3	1041.06	0.98

TABLE 3.2 – Valeurs de fréquences (en μHz) de Gemma trouvées par LI et al. (2020) pour les modes $\ell = 0, 1, 2, 3$ avec les incertitudes associées.

Chapitre 4

Résultats et discussion

Le but de ce travail est de trouver un modèle stellaire qui contraint au mieux les paramètres de masse, âge et composition chimique pour l'étoile Gemma. Dans un premier temps, nous testerons l'impact de ces différents paramètres sur l'évolution stellaire grâce à l'outil CLÉS qui nous permet d'explorer une large gamme de scénarios d'évolution stellaire. Cela nous permettra de comprendre dans quel sens ajuster nos paramètres, afin de trouver des points de départ pour une minimisation correcte avec PORTE-CLÉS en évitant les minimum locaux. Puis, à partir des résultats trouvés avec les différentes méthodes citées plus haut, nous comparerons nos résultats aux observations sismiques de Gemma afin de trouver un ou plusieurs modèles adéquats.

Notons que, dans le cadre de cette étude, les modes étudiés seront uniquement les modes radiaux $\ell = 0$ et dipolaires $\ell = 1$. Nous utiliserons les indicateurs $\Delta\nu_0$ la grande séparation en fonction des modes $\ell = 0$ et $\Delta\pi_1$ l'espacement en période pour les modes $\ell = 1$. Pour des raisons de simplicité de lecture, nous les noterons respectivement $\Delta\nu$ et $\Delta\pi$.

4.1 Paramètres CLÉS

Paramètres dans CLÉS	Valeurs
Mass	1.15 [M_{\odot}]
X	0.72
Z	0.015
Metal	metal.agss09
Opac	opac.opal.agss09
EOS	eos.free.agss09
Atmos	atmos.edd.free.opal.agss09
MaxAge	7×10^9 [années]
AlphaConv	1.8
AlphaOver	0

TABLE 4.1 – Exemple de valeurs initiales des paramètres utilisés pour générer des modèles d'évolution stellaire d'une masse solaire avec une métallicité solaire et un paramètre α_{conv} calibré solaire.

Dans les simulations stellaires réalisées avec CLÉS, il faut tout d'abord introduire les conditions initiales. Un exemple est repris dans le tableau 4.1. Dans celui-ci, différents ensembles de tables sont utilisés pour définir les propriétés physiques et chimiques des étoiles. Le paramètre $Metal=metal.agss09$ utilise les abondances solaires de ASPLUND et al. (2009), fournissant une référence pour la composition chimique en métaux dans l'étoile. Le paramètre $Opac=opac.opal.agss09$ fait appel aux tables

d’opacité OPAL (IGLESIAS et ROGERS, 1996) pour décrire comment la matière stellaire absorbe et diffuse la radiation. Pour l’équation d’état, *EOS=eos.free.agss09* utilise une version spécifique libre basée sur les mêmes abondances solaires, décrivant les conditions thermodynamiques de la matière à différentes températures et densités (IRWIN, 2012). Enfin, *Atmos=atmos.edd.free.opal.agss09* signifie qu’on utilise un modèle d’atmosphère grise d’Eddington (EDDINGTON, 1959), avec les tables d’opacité OPAL (IGLESIAS et ROGERS, 1996) et les abondances de ASPLUND et al. (2009), pour modéliser la structure des couches externes de l’étoile. Ensemble, ces tables permettent de simuler de manière précise l’évolution et la structure interne des étoiles.

Pour cet exemple, nous avons pris une masse de 1.15 masses solaires car des modèles préliminaires à ce travail ont montré que c’était un bon point de départ pour la modélisation de Gemma.

Pour modéliser le mélange dans les zones convectives des étoiles, on utilise la théorie de la longueur de mélange (COX et GIULI, 1968) avec une valeur basée sur une calibration solaire, $\alpha_{MLT} = 1.8$ ¹. De plus, nous avons considéré qu’il n’y avait pas d’overshooting (*AlphaOver* = 0).

Dans cette étude, seulement quatre paramètres varieront en fonction des modèles dans la tableau 4.1 : la masse (*Mass*), l’âge (*MaxAge*), la concentration en hydrogène (*X*) et la concentration en métaux (*Z*).

4.2 Observation de l’évolution des modes *p* et *g* pour un modèle stellaire de masse $1.15M_{\odot}$

Dans un premier temps, il a fallu comprendre comment les modes *p* et *g* évoluaient au cours la vie d’une étoile. Nous avons commencé par prendre un modèle de masse $1.15M_{\odot}$ avec une composition chimique proche de celle du Soleil (tableau 4.1). Une séquence d’évolution stellaire a été générée à partir de ce modèle. La figure 4.1 représente l’évolution des fréquences (dimensionnelles et adimensionnelles²) pour les modes $l = 0$ et $l = 1$ en fonction de l’âge, du rayon et de la grande séparation ($\Delta\nu$). Au début du graphe (sur la gauche), on voit que les fréquences évoluent de manière linéaire le long de l’évolution de l’étoile (lors de sa phase de séquence principale). Les fréquences sont équidistantes entre elles, ce qui indique la présence de modes *p*. À partir d’un moment, on peut observer l’apparition de croisements évités, ce qui indique l’apparition de mode *g*. Cela se passe lorsque l’étoile entre dans la phase des sous-géantes. Si on prend un âge/rayon fixe, les croisements évités vont apparaître petit à petit. Ils correspondent au moment où un mode *g* et un mode *p* ont une fréquence très proche et où ils échangent leur nature. D’abord, un premier va apparaître, puis, il y en aura de plus en plus. Au bout d’un moment, il y aura plus de mode *g* que de mode *p*, cela marque la phase des géantes rouges que nous ne détaillerons pas dans ce travail. Nous observons clairement comment les modes *g* viennent perturber les modes *p* et l’apparition croissante des croisements évités au long de l’évolution.

À partir des fréquences d’oscillations calculées par LOSC, nous pouvons calculer la grande séparation pour chaque ordre radial n ($\Delta\nu_{n,l} = \nu_{n,l} - \nu_{n-1,l}$) et pour les modes $l = 0$ et $l = 1$ pour un modèle stellaire de $1.15M_{\odot}$. Ici, cette grande séparation est en fait la grande séparation locale, à ne pas confondre à celle qu’on utilise qui correspond à une valeur moyennée. Si nous regardons la grande séparation locale en

1. $\alpha_{MLT} = \frac{l}{H_p}$ où l représente la longueur de mélange et H_p est la hauteur d’échelle de pression.

2. Les fréquences adimensionnelles sont les fréquences multipliées par le temps dynamique de l’étoile.

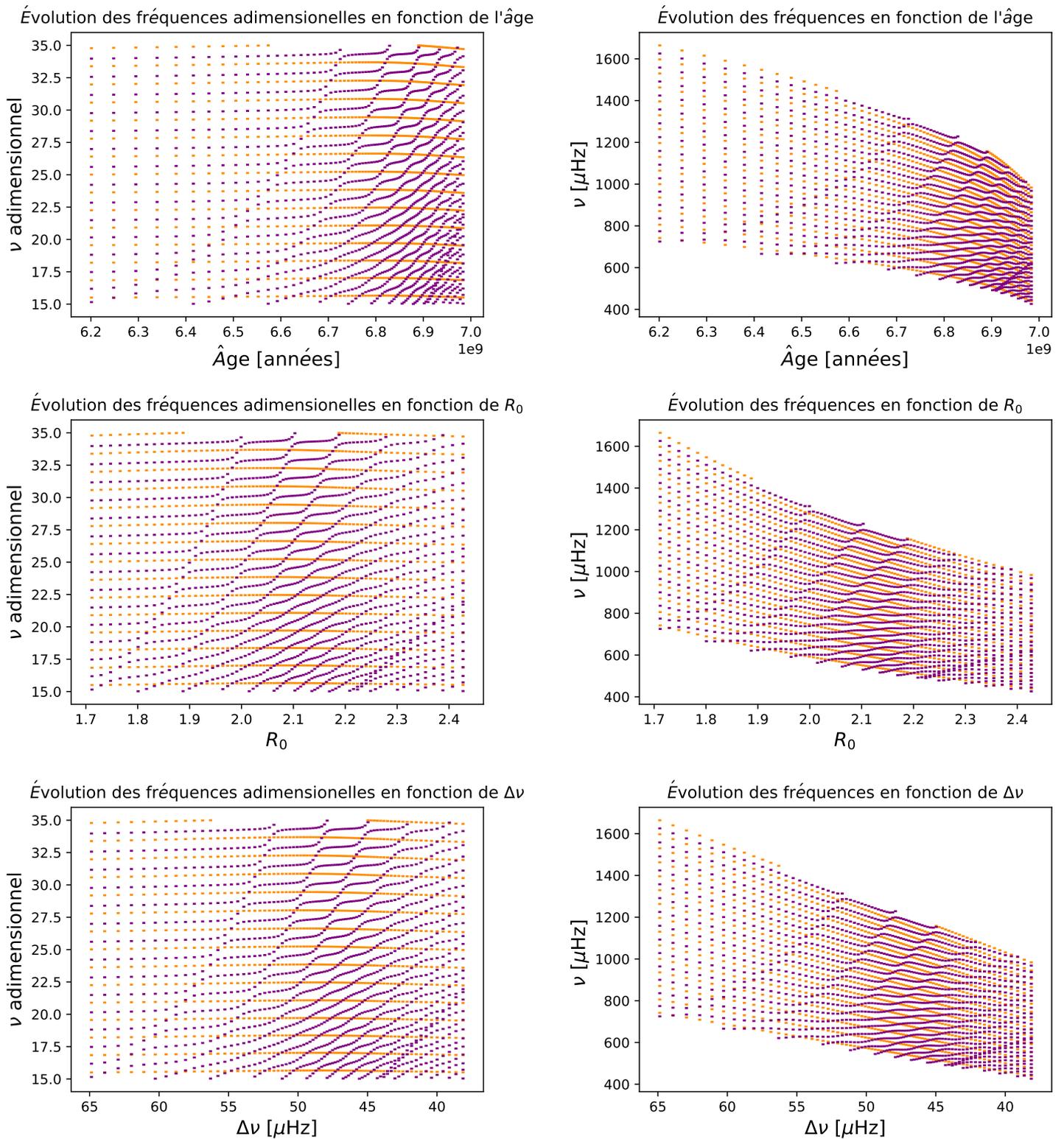


FIGURE 4.1 – Évolution des fréquences (adimensionnelles à gauche et dimensionnelles à droite) en fonction de l'âge, du rayon et de la grande séparation ($\Delta\nu$). Les modes $l = 0$ sont en orange et les modes $l = 1$ sont en violet.

fonction de la fréquence, nous obtenons la figure 4.2 qui montre trois premiers stades évolutifs différents ainsi qu'un quatrième avec l'espacement en période en fonction des fréquences. Dans le premier cas (« **Séquence principale** »), l'étoile se trouve sur la séquence principale. On observe que les modes $l = 0$ et $l = 1$ se trouvent à mi-chemin les uns des autres et que les modes p sont effectivement équidistants en fréquences. La courbe présente de légères oscillations, elles sont dues au glitch d'hélium. Dans le deuxième cas (« **Début phase sous-géante** »), l'étoile se trouve au début de la phase des sous-géantes, le mode $l = 0$ n'est pas perturbé et la grande séparation est constante tandis que le mode $l = 1$ est perturbé par l'apparition d'un mode g . Sur ce graphe, nous pouvons d'ailleurs observer la valeur moyenne de la grande séparation $\Delta\nu$ en pointillés. Les modes p sont espacés régulièrement en fréquence et $\Delta\nu$ est constant (l'approximation asymptotique est donc pertinente). Pour $\ell = 1$, deux modes dominés g apparaissent bien distinctement et viennent briser cette régularité en créant des creux dans le diagramme. Ils sont équidistants en période : ils sont séparés par $\Delta\pi \cdot \nu^2$ (de nouveau, l'asymptotique est une bonne approximation). Ces modes avec une double nature (p et g) sont les modes mixtes. Lorsque que l'étoile continue d'évoluer (« **Fin phase sous-géante** »), de plus en plus de modes g viennent perturber les modes p . Dans le quatrième cas (« **Début phase géante** »), l'étoile se trouve au début de la branche des sous-géantes. Nous avons alors pris l'espacement en période local à la place de la grande séparation pour l'axe des ordonnées car les modes sont dominés g et sont donc équidistants en période. Pour chacune de ces phases, nous pouvons voir la position de l'étoile correspondante sur le diagramme HR sur la figure 4.2

Si nous regardons la densité des modes dominés g dénotée \mathcal{N} , nous avons que :

- $\mathcal{N} < 1$ pour les sous-géantes jeunes, nous avons une régularité en fréquence.
- $\mathcal{N} \approx 1$ pour la transition des sous-géantes car nous avons environ un mode g par mode p .
- $\mathcal{N} > 1$ pour les géantes rouges, nous avons une régularité en période.

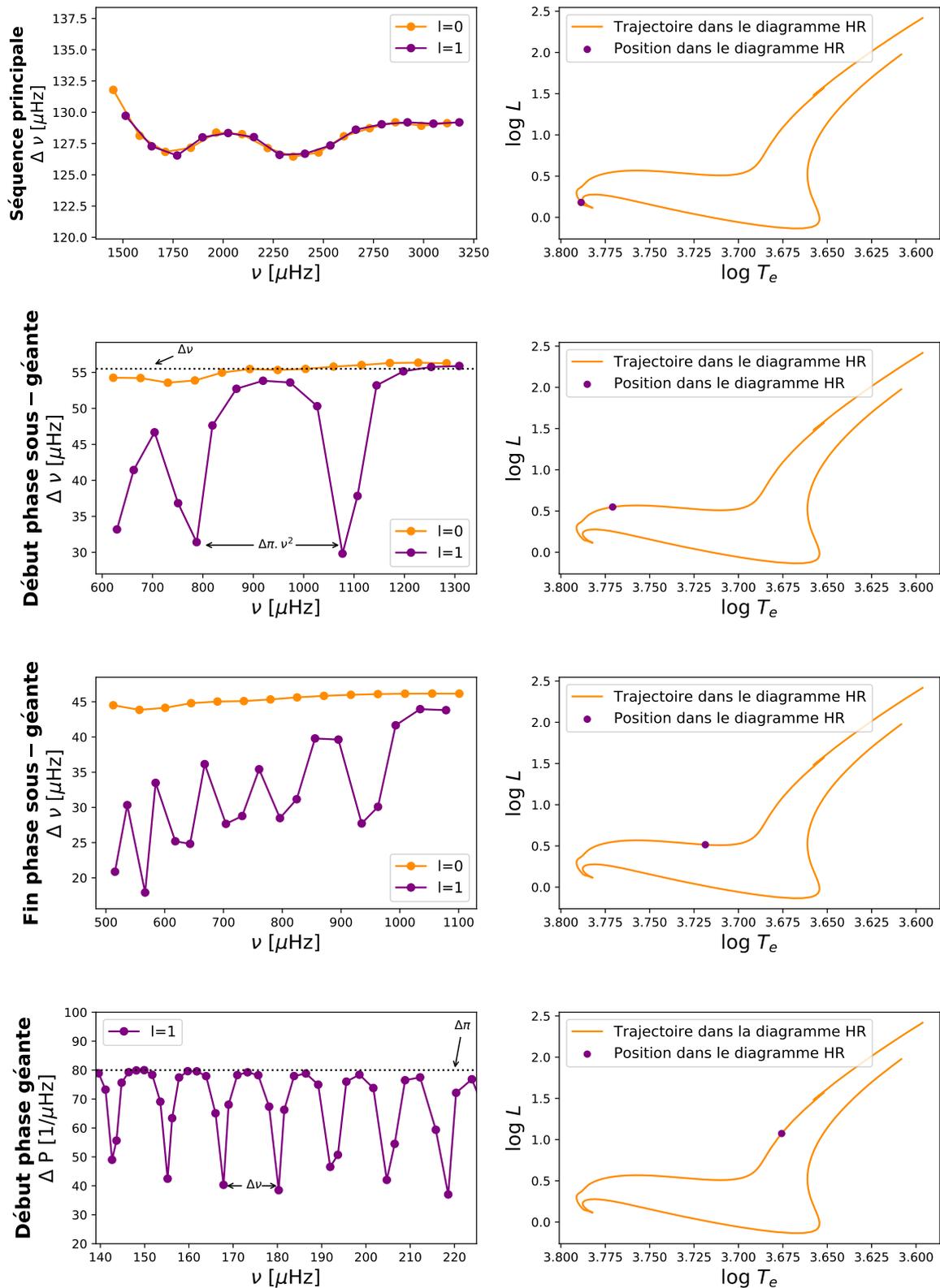


FIGURE 4.2 – Représentation des grandes séparations ($\Delta\nu_{n,l}$) successives en fonction des fréquences ($\nu_{n,l}$) pour les modes $l = 0$ et $l = 1$ pour trois stades évolutifs d'une étoile de $1.15M_{\odot}$ représentés par le diagramme HR. Le quatrième panneau représente l'évolution de l'espacement en période local en fonction des fréquences pour cette même étoile dans le début de la phase des sous-géantes.

4.3 Gemma

Dans un premier temps, analysons les résultats que nous obtenons avec les fréquences de Gemma. Cela nous permettra par la suite de trouver des modèles adéquats pour cette sous-géante.

Les fréquences observées de Gemma (tableau 3.2) ont été analysées par nos méthodes (sections 3.2.2 et 3.2.3) et nous avons pu en tirer les principaux indicateurs sismiques. Ces fréquences ont été obtenues grâce à la réduction de la courbe de lumière observées par Kepler (Li et al., 2020). Les indicateurs sismiques principaux de Gemma sont repris dans le tableau 4.2. Ces indicateurs sont les indicateurs sismiques mesurés avec EGGMiMoSA. Cette méthode calcule les indicateurs en ajustant la formulation $\tan \theta_p = q \tan \theta_g$ (détaillée dans la section 2.8) aux fréquences. Elle utilise les fréquences théoriques s'il s'agit d'un modèle et les fréquences observées s'il s'agit d'observations sur une étoile. Comme nous n'avons pas accès à la structure de Gemma, nous ne connaissons pas la valeur asymptotique de ses indicateurs.

Indicateurs sismiques	Valeurs
$\Delta\nu$	50.31 ± 0.01 (μHz)
$\Delta\pi$	268.27 ± 0.10 (s)
ϵ_p	0.8567 ± 0.0004
ϵ_g	0.0208 ± 0.002
q	0.1582 ± 0.0009
A_{He}	13.2 ± 1.0

TABLE 4.2 – Valeurs sismiques pour Gemma obtenues avec EGGMiMoSA.

La figure 4.3 illustre le diagramme à échelle de Gemma construit à partir des fréquences du tableau 3.2. Si on n'avait que des modes p parfaitement équidistants en fréquence, les points seraient alignés verticalement pour chaque degré sphérique ℓ . Pour les modes radiaux $\ell = 0$, c'est le cas. Cependant, on remarque toutefois quelques variations et les points ne sont pas complètement alignés. La courbure dans la crête des modes $\ell = 0$ est causée par les ordres plus élevés de l'asymptotique, la faible oscillation est liée au glitch et la chute à haute fréquence est due aux effets de surface. Pour les modes dipolaires $\ell = 1$, les modes ne s'alignent plus selon une crête parfaite mais il y a de grands « mouvements diagonaux ». Cela est dû à la présence de modes mixtes.

Nous avons ensuite regardé la grande séparation locale en fonction des fréquences de Gemma reprises dans le tableau 3.2. Ce résultat est visible sur la figure 4.4. Nous observons la présence de deux déplétions importantes pour les modes $\ell = 1$. Celles-ci sont liées à la présence de deux modes mixtes. Les modes $\ell = 0$ ne sont pas perturbés car ils sont radiaux. Les maximas correspondent au $\Delta\nu$ des modes p purs, comme l'illustre aussi la figure 4.2 « Début phase sous-géante ». L'écart entre deux déplétions est $\Delta p_i \cdot \nu^2$ et leur profondeur est inversement proportionnelle à la séparation en période. Nous voyons aussi que les incertitudes sont très petites et cela traduit la qualité remarquable des données sismiques.

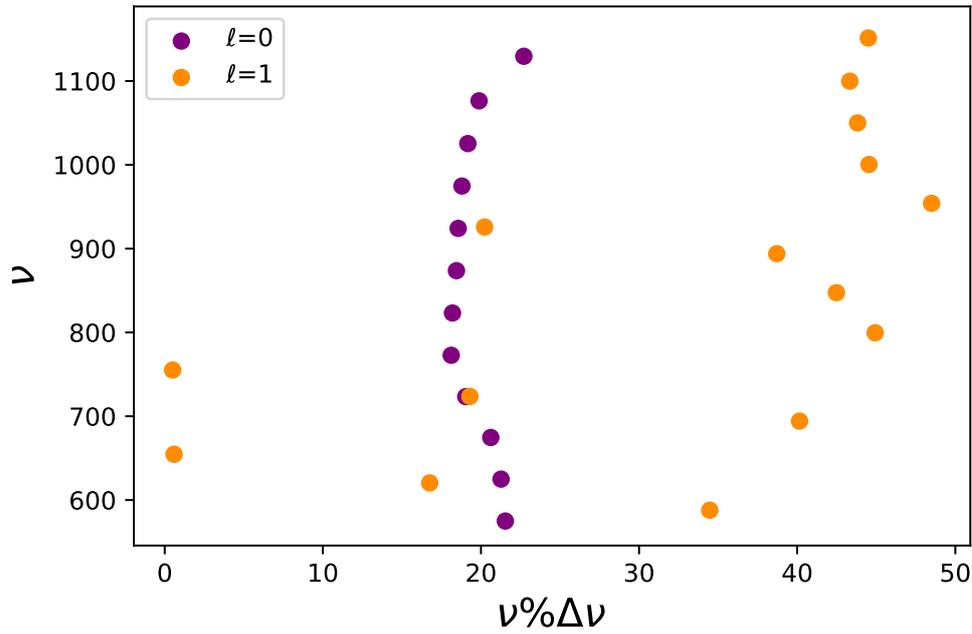


FIGURE 4.3 – Représentation du diagramme à échelle de Gemma en utilisant les fréquences du tableau 3.2. On observe les modes $\ell = 0$ et $\ell = 1$.

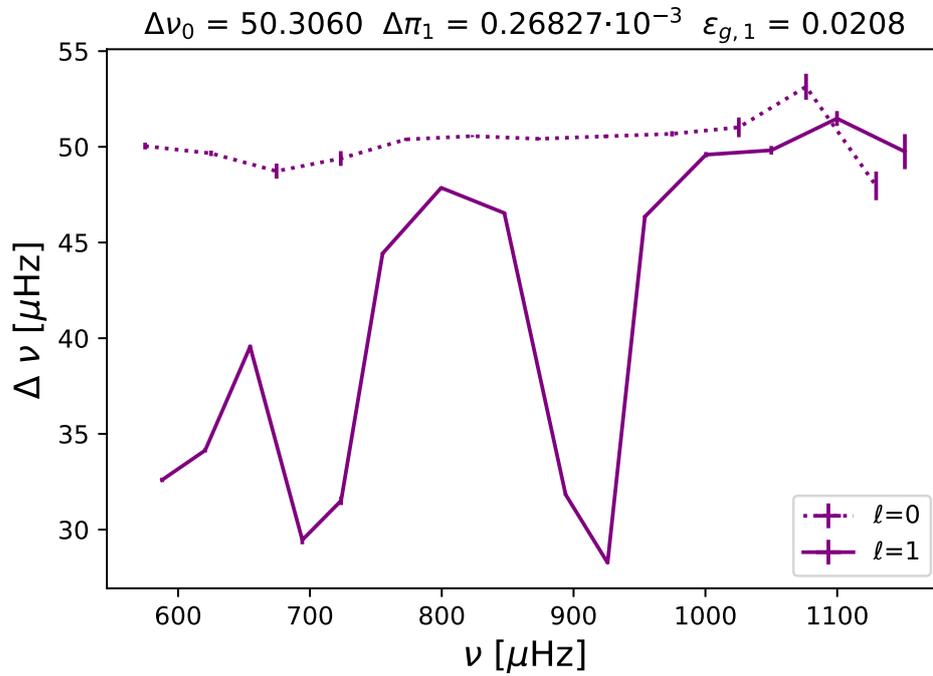


FIGURE 4.4 – Représentation des grandes séparations ($\Delta\nu_{n,l}$) successives en fonction des fréquences ($\nu_{n,l}$) pour les modes $l = 0$ et $l = 1$ pour les fréquences de Gemma (tableau 3.2) avec les barres d'erreur associées.

4.4 Impact des différents paramètres sur l'évolution stellaire

4.4.1 Masse

Dans un premier temps, nous fixerons la valeur des paramètres à ceux du Soleil (tableau 4.1) pour nos premiers modèles et nous changerons uniquement la valeur de la masse pour voir son impact sur l'évolution stellaire et sur les indicateurs sismiques $\Delta\pi$ et $\Delta\nu$.

La figure 4.5 illustre les évolutions de l'espacement en période $\Delta\pi$ en fonction de la grande séparation $\Delta\nu$ pour différentes masses et le point noir représente les observations faites pour Gemma (tableau 4.2). Sur cette figure 4.5, chaque couleur correspond à la séquence évolutive pour une masse donnée depuis la phase des sous-géantes jusqu'à la phase des géantes rouges et chaque point correspond à un modèle donné pour un âge donné. L'évolution se fait de droite à gauche.

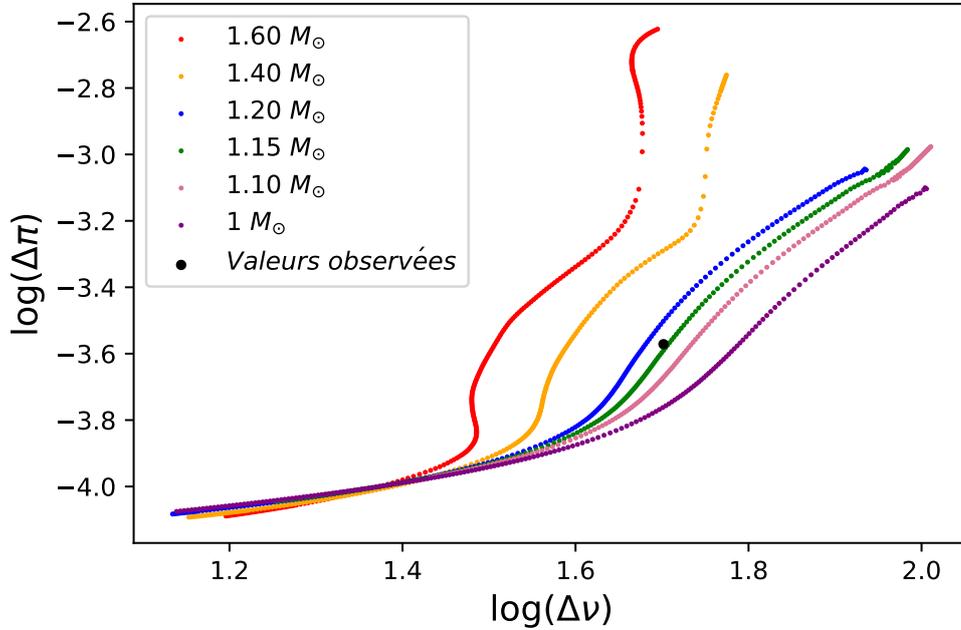


FIGURE 4.5 – Évolution de $\Delta\pi$ (en Ms) en fonction de $\Delta\nu$ (en μHz) pour différentes masses dans la phase sous-géante (droite) jusqu'à la phase géante (gauche), représentées en différentes couleurs. Le point noir représente les valeurs observées pour Gemma.

Cette figure nous montre bien que les valeurs de $\Delta\pi$ et de $\Delta\nu$ varient beaucoup avec un changement en masse et diminuent avec le temps. En effet, nous avons savons que

$$\Delta\nu \propto \sqrt{\frac{GM}{R^3}} \quad (4.1)$$

et que

$$\Delta\pi \propto \left(\int \frac{N(r)}{r} dr \right)^{-1}. \quad (4.2)$$

Comme le rayon augmente fortement dans la phase des sous-géantes et géantes, $\Delta\nu$ diminue suite à l'expansion de l'enveloppe car il est proportionnel à la racine de la

densité moyenne ($\frac{M}{R^3}$) qui diminue aussi. L'espacement en période $\Delta\pi$ diminue aussi car il est inversement proportionnel à la densité centrale (ρ_c) qui va augmenter à mesure que le cœur se contracte.

Sur base du diagramme 4.5 et des indicateurs de Gemma, nous pouvons faire une première estimation de sa masse pour cette composition chimique (tableau 4.1).

Regardons maintenant les figures 4.6a et 4.6b. Celle-ci reprend trois modèles dont les trajectoires sur le diagramme 4.5 passent proche du point noir des valeurs observées pour Gemma. Le graphe 4.6a représente l'évolution des indicateurs sismiques $\Delta\pi$ et $\Delta\nu$ pour trois modèles de masse différentes et le graphe 4.6b représente ces mêmes modèles évoluant sur le diagramme HR.

Nous observons que l'augmentation de la masse a tendance à augmenter les valeurs de $\Delta\pi$ et, à l'inverse, à diminuer les valeurs de $\Delta\nu$. Plus une étoile est massive, plus grand sera son rayon initial. Lors de la phase des sous-géantes, la dilatation de l'enveloppe et la contraction du cœur seront plus important pour une étoile avec un plus petit rayon (donc une plus petite masse). Cela implique que pour une masse plus petite, la densité centrale sera plus importante et, ainsi, $\Delta\pi$ sera plus petit. Le diagramme HR pour ces mêmes masses est représenté sur la figure 4.6b. Pour une masse plus élevée, nous y observons clairement une augmentation de la luminosité L et de la température effective T_e . En effet, plus la masse est grande, plus la température centrale est élevée (à densité fixée) et plus elle est lumineuse. Nous pouvons donc nous attendre à ce que les observations spectroscopiques jouent un rôle discriminant parmi les modèles obtenus à la fin.

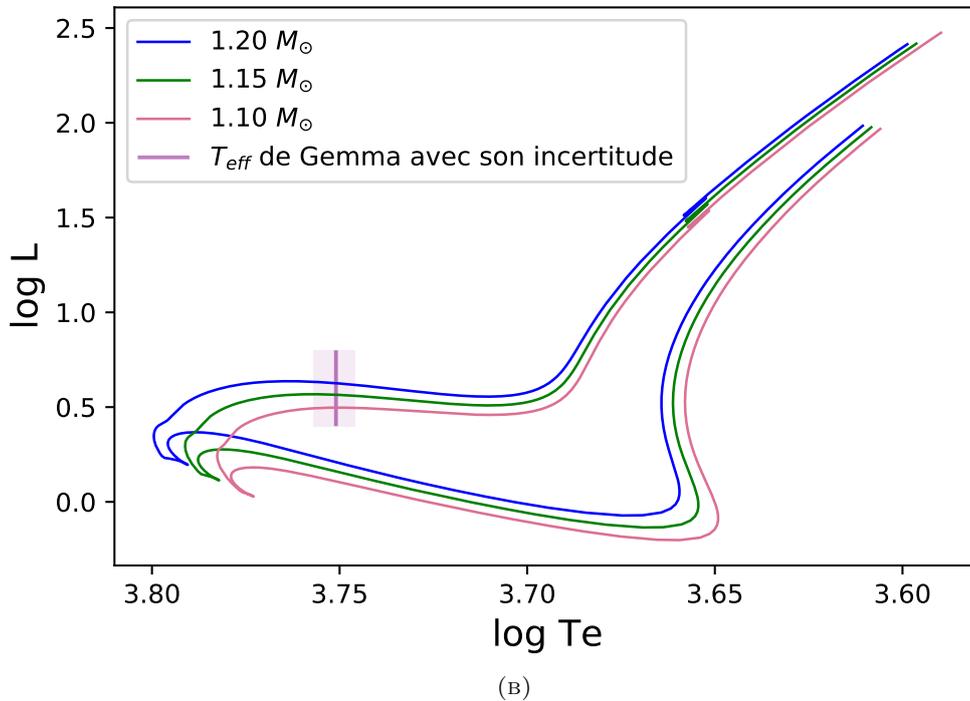
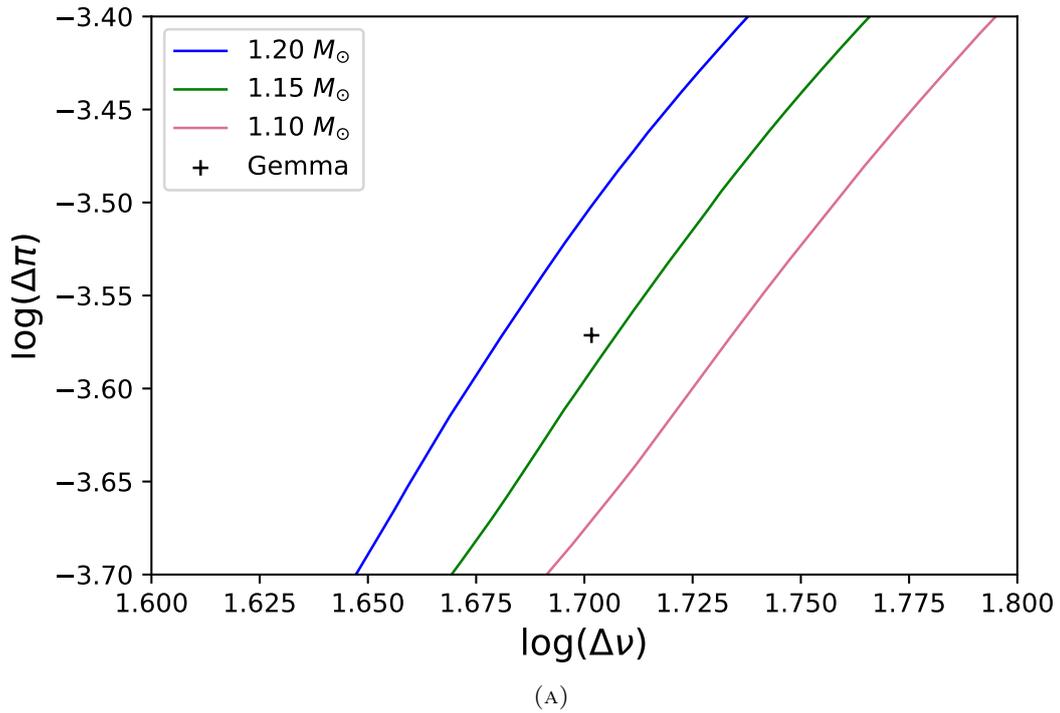


FIGURE 4.6 – (A) Évolution de $\Delta\pi$ (en Ms) en fonction de $\Delta\nu$ (en μHz) pour différentes masses (différentes couleurs) zoomées autour de la valeurs observées pour Gemma (point noir). (B) Diagramme HR pour différentes masses (différentes couleurs). La barre verticale correspond à la température effective de Gemma mesurée spectroscopiquement avec son incertitude.

4.4.2 Métallicité

Observons maintenant l'impact de la métallicité sur l'évolution stellaire et sur les indicateurs sismiques $\Delta\nu$ et $\Delta\pi$. Les figures 4.7a et 4.7b représentent trois modèles d'évolution stellaire avec une variation de la métallicité (Z) comme décrite dans le tableau 4.3. Tous les autres paramètres sont fixés comme dans la tableau 4.1.

Modèles	X	Z
Modèle en orange	0,72	0,010
Modèle en vert	0,72	0,015
Modèle en violet	0,72	0,020

TABLE 4.3 – Valeurs des concentration en hydrogène (X) et en métaux (Z) pour 3 modèles.

Nous pouvons observer sur les figures 4.7a et 4.7b que l'augmentation de la métallicité tend à diminuer les valeurs de $\Delta\pi$ et, à l'inverse, à augmenter les valeurs de $\Delta\nu$. Une étoile plus métallique va se comporter comme une étoile moins massive. Sur le diagramme HR (figure 4.7b), le modèle moins métallique a une température et une luminosité plus grande. La diminution de la concentration en métaux Z implique une diminution de la quantité de métaux dans l'étoile. Ceux-ci ont une section efficace plus grande donc, lorsque Z diminue, les photons sont moins capturés et passent plus facilement : la luminosité sera donc plus grande. En effet, si une étoile est moins métallique, l'opacité diminue, donc le transport de l'énergie par radiation est plus efficace. Nous pouvons dès lors nous rendre compte que les changements en masse et en métallicité ont des effets opposés sur les observables. Cependant, les courbes, ici, ne sont pas parallèles donc le problème n'est pas complètement dégénéré.

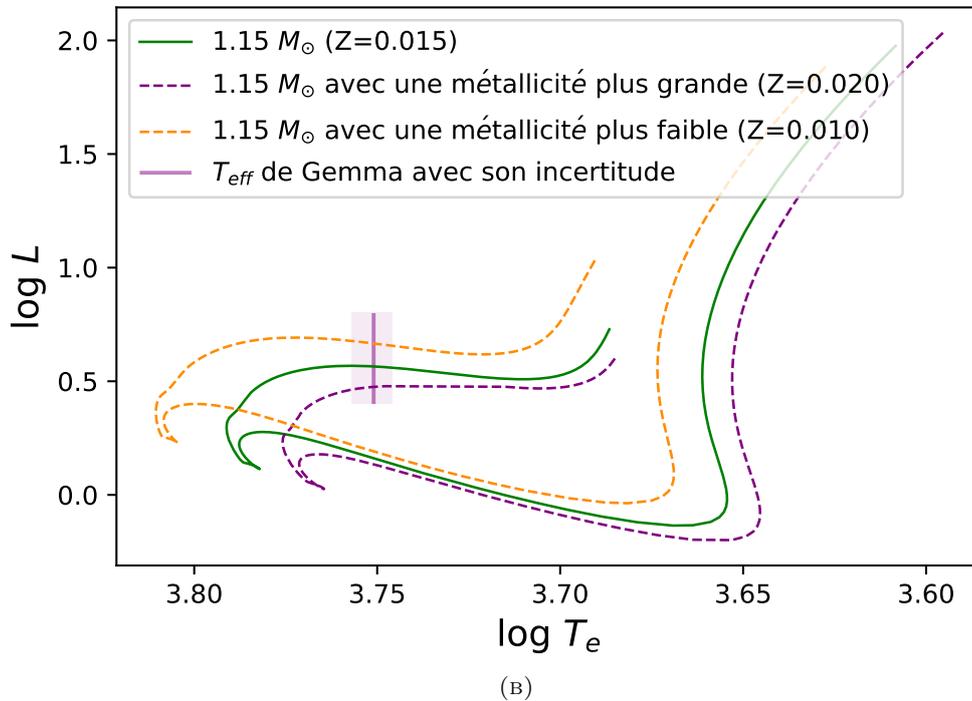
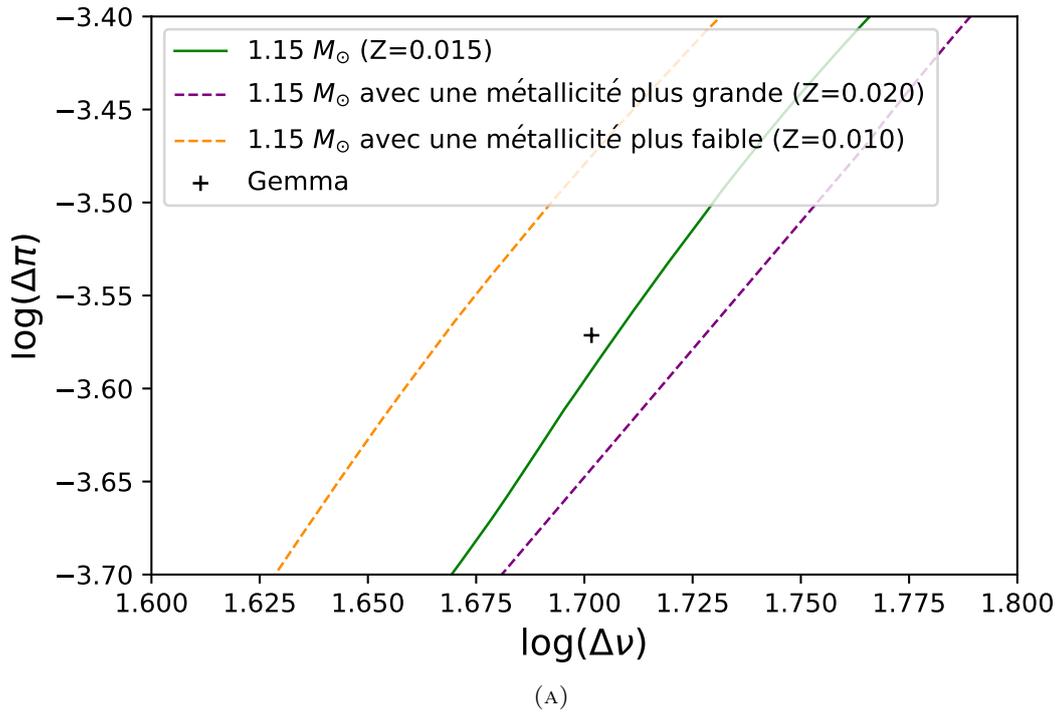


FIGURE 4.7 – (A) Évolution de $\Delta\pi$ (en Ms) en fonction de $\Delta\nu$ (en μHz) pour différentes valeurs de la métallicité (différentes couleurs) zommées autour de la valeurs observées pour Gemma (point noir). (B) Diagramme HR pour différentes valeurs de la métallicité (différentes couleurs). La barre verticale correspond à la température effective de Gemma mesurée spectroscopiquement avec son incertitude.

4.4.3 Concentration en hydrogène

Examinons maintenant l'influence d'une variation de la concentration en hydrogène sur l'évolution stellaire ainsi que sur les indicateurs sismiques $\Delta\nu$ et $\Delta\pi$. Les figures 4.8a et 4.8b illustrent trois modèles d'évolution stellaire correspondant à des concentrations en hydrogène (X) différentes, comme indiqué dans le tableau 4.4. Tous les autres paramètres sont fixés, conformément aux valeurs du tableau 4.1. Il est important de souligner que, lorsque la concentration en hydrogène X est modifiée tout en fixant la métallicité Z , la concentration en hélium Y va également varier, puisque $X + Y + Z = 1$.

Modèles	X	Z
Modèle en rouge	0,70	0,015
Modèle en vert	0,72	0,015
Modèle en rose	0,74	0,015

TABLE 4.4 – Valeurs des concentrations en hydrogène (X) et en métaux (Z) pour 3 modèles.

La figure 4.8a montre que la réduction de la concentration en hydrogène X entraîne une diminution de $\Delta\nu$ et une augmentation de $\Delta\pi$ à cause de l'impact de la variation de X sur la densité. Par ailleurs, la figure 4.8b révèle qu'une diminution de X tend à augmenter la luminosité et la température effective.

Lorsque la concentration en hydrogène X diminue, la concentration en hélium Y augmente. Une variation de X a un impact direct sur la masse moléculaire moyenne μ . Nous savons que

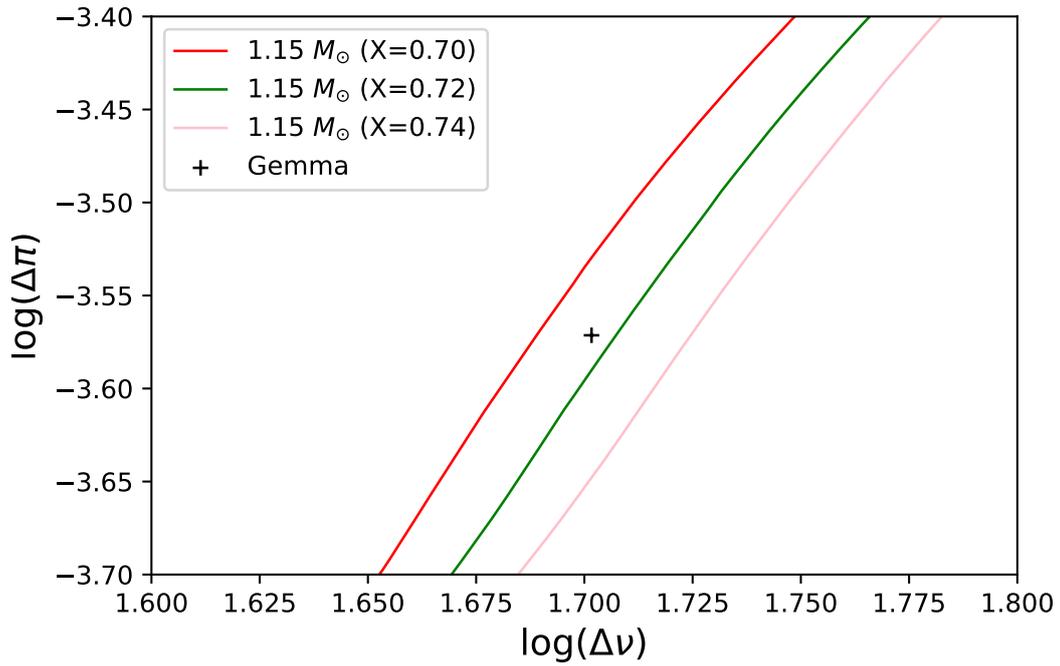
$$T \propto \frac{M\mu}{R} \quad (4.3)$$

et que

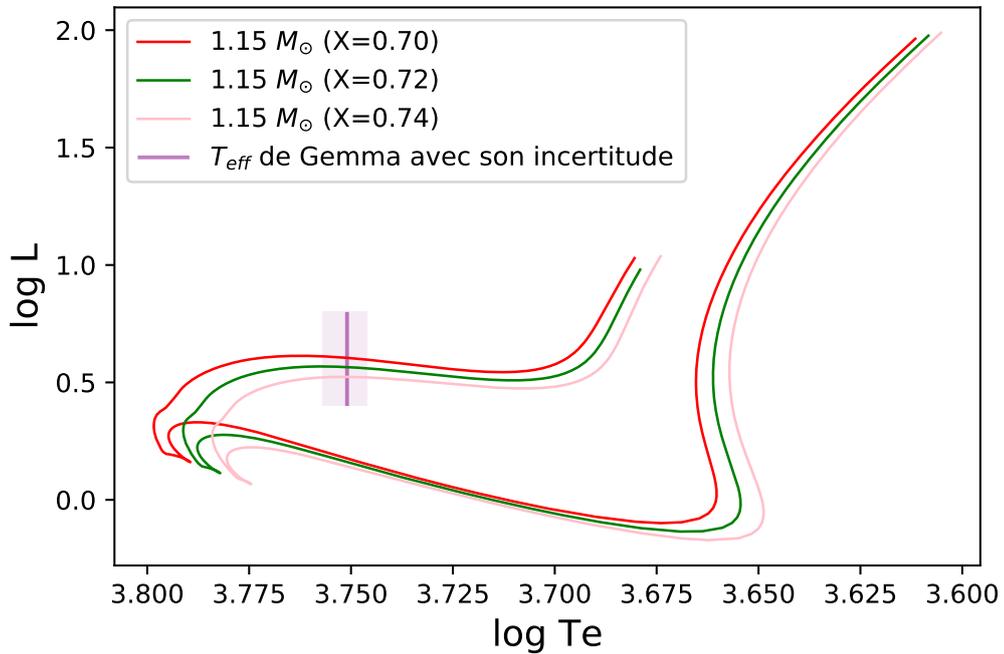
$$L \propto \frac{RT^4}{\kappa\rho} \propto M^3\mu^4. \quad (4.4)$$

où M est la masse, R est le rayon, κ est l'opacité et ρ la densité. Donc, si X diminue, μ augmente (et inversement) et comme la température et la luminosité dépendent de μ , elles vont aussi augmenter (et inversement). De plus, il y a un effet sur l'opacité lié au nombre d'électrons libres. Pendant la séquence principale, l'hydrogène se transforme en hélium par fusion nucléaire. Lors de ces réactions, des positrons sont émis et ceux-ci s'annihilent avec les électrons libres. Au fur et à mesure de l'évolution, il y aura donc de moins en moins d'électrons libres. Plus il y a d'électrons libres, plus l'opacité est grande. Donc, comme le nombre d'électrons libres est proportionnels à X , si X diminue, le nombre d'électrons libres va aussi diminuer ainsi que l'opacité. Donc, l'étoile sera plus lumineuse. Les effets vont donc dans le même sens que la métallicité.

Ces trois paramètres révèlent déjà la complexité inhérente au problème. Les paramètres physiques des étoiles sont intimement liés et interagissent de manière complexe, certains agissant dans le même sens, tandis que d'autres produisent des effets opposés. Ainsi, pour élaborer un modèle stellaire réaliste, il est nécessaire de faire varier un grand nombre de paramètres simultanément. Cette interdépendance complique considérablement la tâche de contraindre et de valider les modèles, rendant l'ajustement des prédictions aux observations d'autant plus difficile.



(A)



(B)

FIGURE 4.8 – (A) Évolution de $\Delta\pi$ (en Ms) en fonction de $\Delta\nu$ (en μHz) pour différentes valeurs de la concentration en hydrogène (différentes couleurs) zommées autour de la valeurs observées pour Gemma (point noir). (B) Diagramme HR pour différentes valeurs de la concentration en hydrogène (différentes couleurs). La barre verticale correspond à la température effective de Gemma mesurée spectroscopiquement avec son incertitude.

4.5 Grille de modèles

À partir de ce que nous avons trouvé ci-dessus, nous avons choisi de travailler sur 5 modèles en changeant un paramètre à la fois autour d'un modèle de référence ayant une composition solaire (modèle « *Référence* »). Nous avons fait varier les concentrations en hydrogène (X) et en métaux (Z) telle que représenté dans le tableau 4.9. Les paramètres restant sont maintenus aux valeurs imposées précédemment et sont listés dans le tableau 4.1.

Modèle	X	Z
<i>Référence</i>	0,72	0,015
X_{min}	0,70	0,015
X_{max}	0,74	0,015
Z_{min}	0,72	0,013
Z_{max}	0,72	0,017

TABLE 4.5 – Valeurs des concentration en hydrogène (X) et en métaux (Z) pour 5 modèles.

4.5.1 PORTE-CLÉS et interpolation linéaire

PORTE-CLÉS est l'outil qui nous a permis de trouver, pour chacun de ces jeux de paramètres, une masse et un âge idéal qui concordent le mieux possible avec les contraintes imposées par les observations. Nous faisons donc des ajustements à deux paramètres libres (masse et âge) et deux contraintes ($\Delta\nu$ mesuré de Gemma et $\Delta\pi$ mesuré de Gemma). Ces valeurs mesurées sont obtenues avec EGGMiMoSA. Pour une raison de stabilité, nous comparons les valeurs mesurées de Gemma avec les valeurs asymptotiques calculées sur la structure de nos modèles. Le point important étant de bien différencier les valeurs mesurées avec EGGMiMoSA des valeurs asymptotiques des indicateurs.

Rappel des valeurs asymptotiques de la grande séparation et de l'espacement en période respectivement :

$$\Delta\nu_{asymptotique} = \left(2 \int_0^R \frac{dr}{c} \right)^{-1} \quad (4.5)$$

$$\Delta\pi_{\ell,asymptotique} = \frac{2\pi^2}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \frac{1}{\int_{r_{t1}}^{r_{t2}} \frac{N(r)}{r} dr} \quad (4.6)$$

Afin que PORTE-CLÉS ne se perde pas dans un minimum local, il a fallu lui donner un point de départ (pour l'âge et la masse) assez proche de la solution. Pour le modèle de référence (avec une composition solaire), nous avons cherché des modèles qui bornaient de manière supérieure et inférieure les observations et nous avons appliqué une interpolation linéaire simple.

$$\begin{cases} y_{sup} = ax_{sup} + b \\ y_{inf} = ax_{inf} + b \end{cases} \quad (4.7)$$

$$a = \frac{y_{sup} - y_{inf}}{x_{sup} - x_{inf}}, \quad b = y_{sup} - ax_{sup} \quad (4.8)$$

où y correspond à $\Delta\nu$ du modèle associé et x est l'âge (ou la masse). On cherche à déterminer a et b . Cela nous permet de trouver x_{final} qui représente l'âge (ou la masse) proche de la solution grâce à $y_{obs} = \Delta\nu$ observé.

$$x_{final} = \frac{y_{obs} - b}{a} \quad (4.9)$$

À partir de ces points de départ en âge et en masse plus proches de la solution, PORTE-CLÉS a pu converger plus simplement pour trouver une solution. La figure 4.9 montre ces modèles « bornes » ainsi que le modèle trouvé avec PORTE-CLÉS.

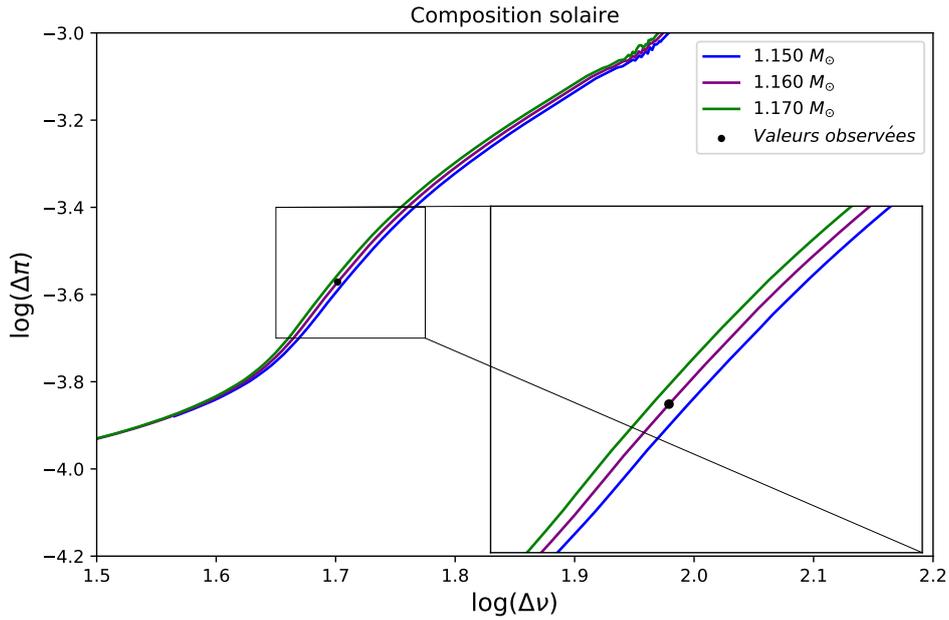


FIGURE 4.9 – Évolution de $\Delta\pi$ (en Ms) en fonction de $\Delta\nu$ (en μHz) pour différentes masses (différentes couleurs) zommées autour de la valeurs observées pour Gemma (point noir).

Nous avons ensuite appliqué la même méthode à tous les autres modèles comme le montre la figure 4.10. Cela nous a permis de trouver plusieurs modèles cohérents avec les paramètres sismiques de Gemma et ayant des compositions chimiques différentes.

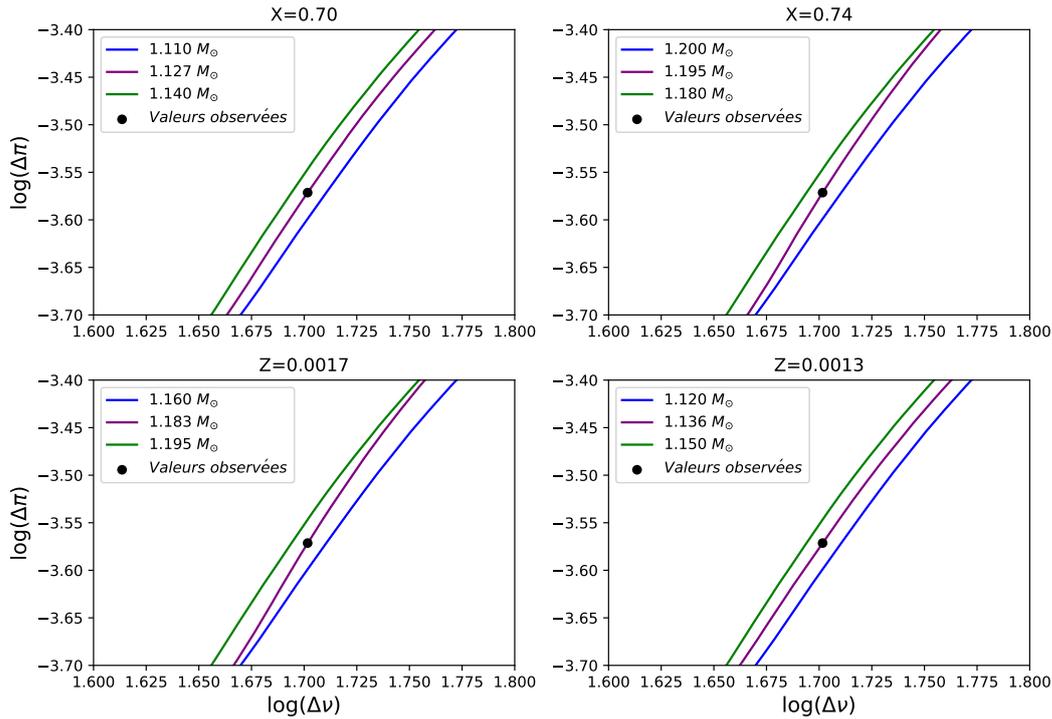
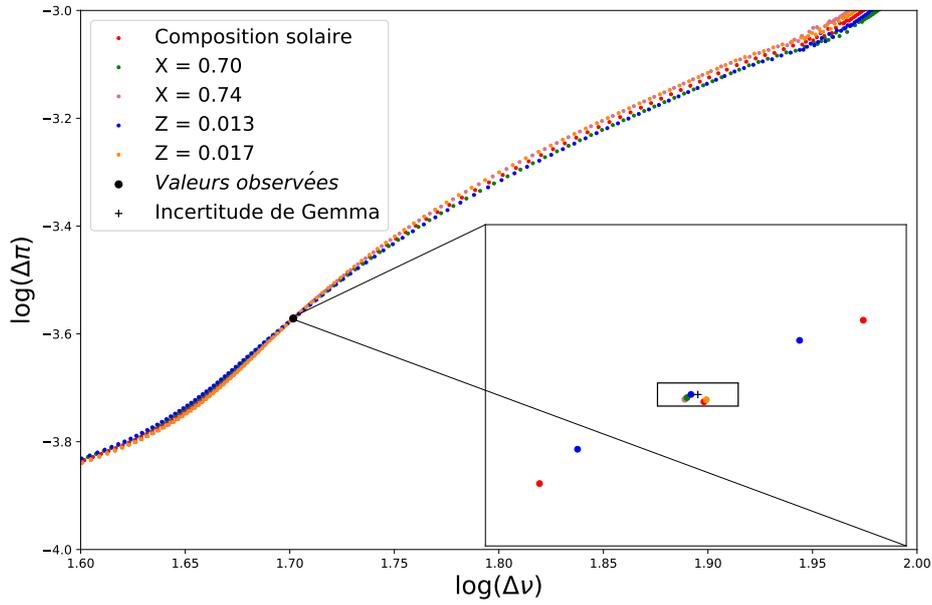


FIGURE 4.10 – Évolution de $\Delta\pi$ (en Ms) en fonction de $\Delta\nu$ (en μHz) pour différentes masses (différentes couleurs) et différentes variation de la composition chimique autour des valeurs solaires (tableau 4.1) zommées autour de la valeurs observées pour Gemma (point noir).

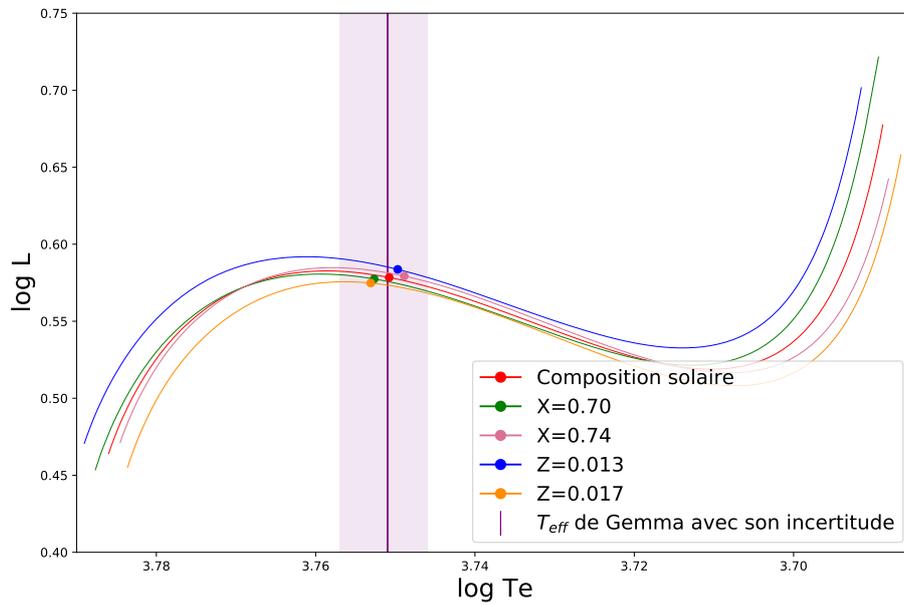
4.5.2 Convergence des premiers modèles

Sur la figure 4.11a, nous pouvons observer que tous les modèles, bien qu’ayant des compositions chimiques différentes, passent par le point des observations de Gemma. En effet, le zoom sur la figure nous montre que tous les modèles sont compris dans les barres d’erreur des indicateurs sismiques de Gemma. Nous pouvons voir à quel point les incertitudes sont petites et les données sont précises. Cependant, nous pouvons aussi observer qu’ils ont des pentes différentes quand ils passent par le point observé. Cela montre que la composition a bien un impact important sur le modèle final et que des contraintes additionnelles seront nécessaires pour les discriminer. C’est ce que nous observerons par la suite.

La figure 4.11b illustre la branche des sous-géantes sur le diagramme HR. Elle nous montre que les modèles de Gemma se trouvent tous sur cette branche. Nous voyons aussi qu’en fonction des modèles, le point ne se trouve pas forcément au même endroit de l’évolution stellaire et que chacun des modèles évolue différemment. Les paramètres spectroscopiques de Gemma pourraient alors nous aider à discriminer nos modèles entre eux. La barre verticale correspond à la température effective de Gemma avec son incertitude associée. Pour le moment, nous voyons que tous nos modèles sont compris dans les incertitudes de Gemma. Le tableau 4.6 nous montre les valeurs de la masse, l’âge, le logarithme de la température effective et le logarithme de l’accélération gravitationnelle locale pour chacun des modèles trouvés avec PORTE-CLÉS. On observe que les modèles avec X ou Z plus faible ont tendance à rendre une masse plus faible et une étoile plus jeune (et inversement).



(A)



(B)

FIGURE 4.11 – **(A)** Évolution de $\Delta\pi$ (en Ms) en fonction de $\Delta\nu$ (en μHz) pour les 5 modèles en accord avec les observations de Gemma (point noir). Le zoom se centre sur les valeurs observées de Gemma et la boîte représente son incertitude associée. **(B)** Les lignes représentent l'évolution stellaire sur le diagramme HR pour chacun des modèles du tableau 4.9 et les points représentent le modèle spécifique qui correspond le mieux à Gemma. La barre verticale correspond à la température effective de Gemma mesurée spectroscopiquement avec son incertitude.

Modèle	Masse	Âge	$\log Te$	$\log g$
Référence	1.161	$6.5215 \cdot 10^9$	3.75077	3.88210
X_{min}	1.127	$6.3355 \cdot 10^9$	3.75266	3.87783
X_{max}	1.195	$6.7094 \cdot 10^9$	3.74888	3.88619
Z_{min}	1.136	$6.4772 \cdot 10^9$	3.75510	3.87927
Z_{max}	1.183	$6.5611 \cdot 10^9$	3.74716	3.88472

TABLE 4.6 – Valeurs de la masse, l’âge, le logarithme de la température effective et le logarithme de l’accélération gravitationnelle locale pour chacun des modèles trouvés avec PORTE-CLÉS.

Prenons le modèle « Référence » et observons son diagramme de propagation représenté sur la figure 4.12. Celle-ci illustre la cavité de propagation p (en orange) et g (en violet) délimitée par les fréquences de Lamb (L_1) et de Brünt-Väisälä (N) respectivement. La fréquence de Brünt-Väisälä sur la figure atteint un pic au coeur de l’étoile. Cela est dû à l’augmentation de la densité centrale avec la contraction du coeur. Cela permet donc d’observer des modes mixtes. Trois fréquences caractéristiques de Gemma pour $\ell = 1$ (587.88, 847.44 et 1201.07 μHz) sont représentées sur ce diagramme. Cela nous permet de voir où se situent les modes que nous percevons.

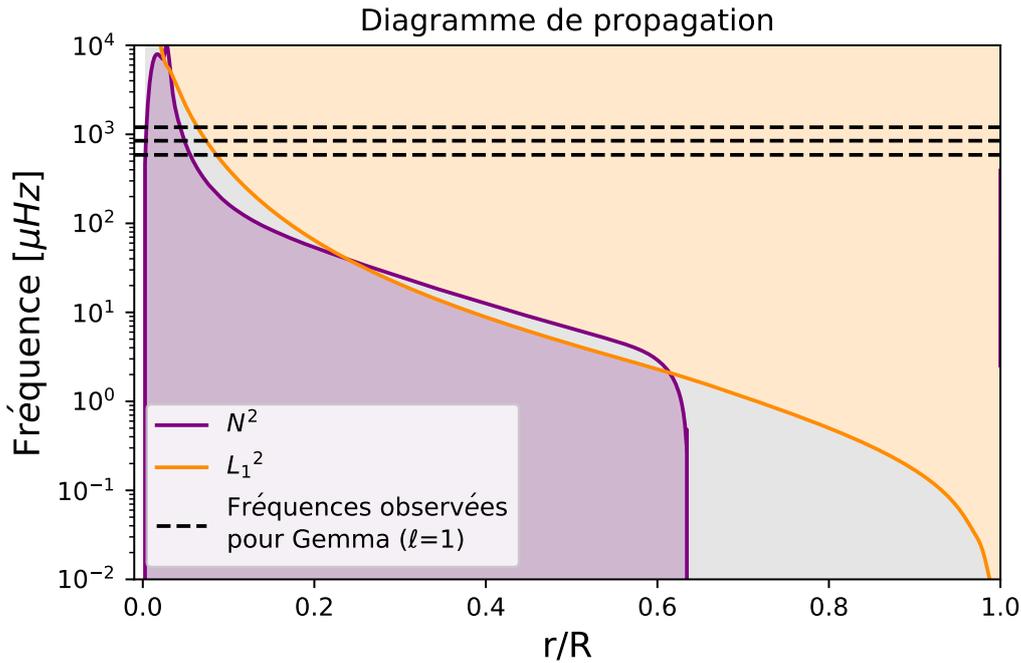


FIGURE 4.12 – Diagramme de propagation pour le modèle « Référence » ajusté avec PORTE-CLÉS. Les ligne continue violette et orange représentent les fréquences de Brünt-Väisälä et de Lamb respectivement. Les lignes en pointillé représentent trois fréquences (587.88, 847.44 et 1201.07 μHz) observées pour Gemma. La zone violette est la cavité g et la zone orange est la cavité p .

Observons maintenant si le diagramme de propagation présente des différences en fonction de nos modèles. La figure 4.13 nous montre la structure interne des cavités de propagation pour chacun des modèles trouvés avec PORTE-CLÉS. Nous pouvons noter que les profils de fréquence de Brünt-Väisälä (N) sont très similaires presque

partout dans l'étoile. Cela montre que nos indicateurs contiennent bien une information structurale, traduisant le fait que la structure sismique et, en particulier, le profil de densité interne est très proche entre chaque modèle. Les seules différences notables sont au niveau de la profondeur de l'enveloppe convective (point où la fréquence de Brünt-Väisälä (N) passe par 0). On y note surtout une sensibilité vis-à-vis de Z . En effet, plus Z est élevé plus l'opacité est grande et donc, plus profonde est la zone convective.

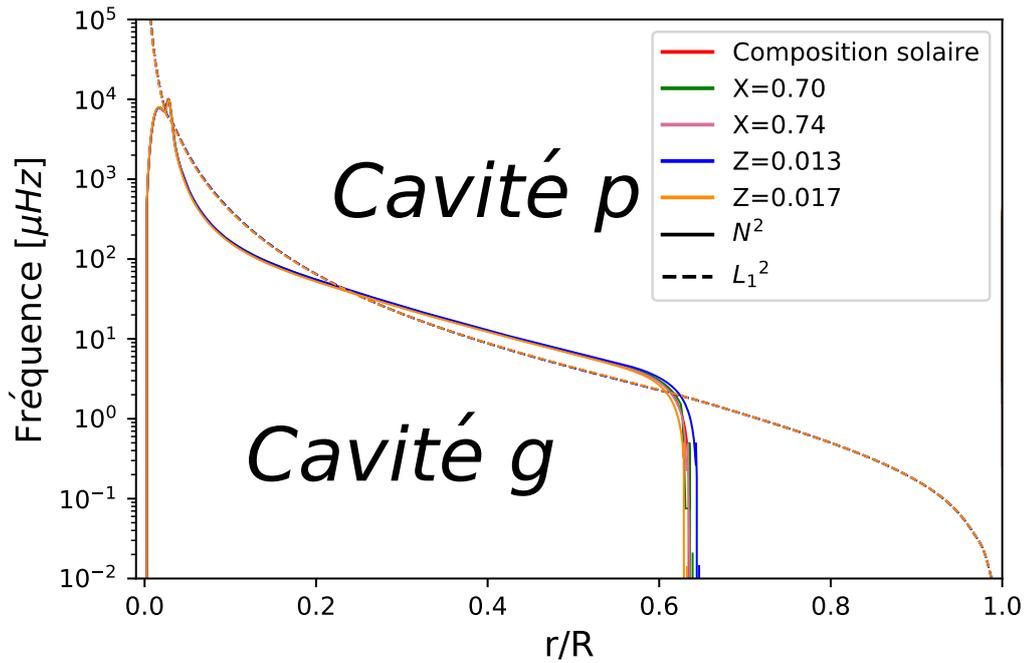


FIGURE 4.13 – Diagramme de propagation pour les modèles ajustés avec PORTE-CLÉS. La ligne continue est la fréquence de Brünt-Väisälä et la ligne en pointillé est la fréquence de Lamb.

Observons maintenant la figure 4.14 qui illustre la grande séparation locale en fonction des fréquences pour chacun de nos modèles ainsi que celui de Gemma. Nous notons la présence des mêmes modes mixtes que pour Gemma. Cependant, nous avons un décalage de phase de tous nos modèles comparés à Gemma. Par la suite, nous essayerons d'appliquer quelques corrections afin de trouver de nouveaux modèles qui se superposent au mieux à celui de Gemma et dont les valeurs spectroscopiques s'en rapprochent.

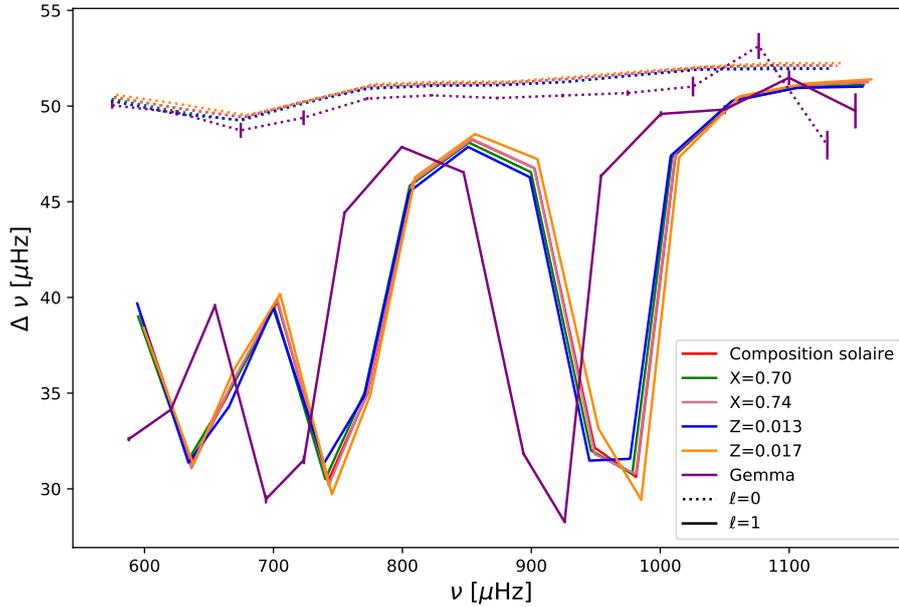


FIGURE 4.14 – Représentation des grandes séparations ($\Delta\nu_{n,l}$) successives en fonction des fréquences ($\nu_{n,l}$) pour les modes $l = 0$ et $l = 1$ pour les modèles ajustés avec PORTE-CLÉS.

4.6 Corrections sur nos modèles

4.6.1 Correction empirique d'un modèle

Pour chacun des modèles, il y a une différence entre $\Delta\nu$ mesuré et $\Delta\nu_{asymptotique}$ et entre $\Delta\pi$ mesuré et $\Delta\pi_{asymptotique}$. Lorsque nous calculons ces différences (α et β) pour chacun des modèles, nous voyons qu'elles sont à chaque fois du même ordre (tableau 4.7).

Modèle	$\Delta\nu$	$\Delta\pi$	$\Delta\nu_{asympt}$	$\Delta\pi_{asympt}$	α	β
Référence	51.0682	263.152	50.3115	268.237	-0.756699	5.0849
X_{min}	50.9475	264.075	50.3049	268.260	-0.642599	4.1849
X_{max}	51.0561	263.189	50.3068	268.258	-0.749299	5.0690
Z_{min}	50.9250	262.065	50.3075	268.300	-0.617499	6.2349
Z_{max}	51.1615	264.432	50.3089	268.254	-0.852599	3.8220

TABLE 4.7 – Valeurs des indicateurs sismiques principaux asymptotique et non-asymptotique et de leur différence pour les 5 modèles étudiés. α est la différence pour $\Delta\nu$ (en μHz) et β est la différence pour $\Delta\pi$ (en seconde).

Il serait intéressant à ce stade de faire de cette différence, une correction empirique. En effet, pour une étoile donnée, nous n'avons pas accès à sa structure interne et donc pas accès à la valeur asymptotique des indicateurs. Cependant, pour des raisons de stabilité numérique³, nous comparons les valeurs mesurées de Gemma aux valeurs

3. D'un point de vue purement pratique, travailler avec la valeur asymptotique (ou asymptotique corrigée) est plus stable numériquement et évite le casse-tête d'un choix sensé d'intervalle de fréquences et les possibles instabilités numériques lors de l'ajustement de EGGMiMoSA.

asymptotiques de nos modèles dans l’ajustement de PORTE-CLÉS. Cela induit donc un biais qu’il serait bon de corriger. Une façon d’extraire mieux l’information structurale sera alors d’appliquer cette correction empirique aux valeurs mesurées de $\Delta\pi$ et $\Delta\nu$ de Gemma qui sont les contraintes avec PORTE-CLÉS. La valeur de $\Delta\nu$ est, en réalité, mesurée avec WhoSGIAd et est très stable, aussi bien pour les observations que pour les modèles. Cette valeur est même meilleure que la valeur asymptotique car elle est déterminée directement et de façon fiable à partir des fréquences observées. La valeur asymptotique, quant à elle, utilise des approximations comme expliqué dans le chapitre 2 qui la rendent moins précise. En conséquence, ce modèle devrait être moins biaisé et bien plus fiable en terme d’ajustement de $\Delta\nu$. Cependant, pour $\Delta\pi$, cela reste risqué car la méthode EGGMiMoSA utilisée pour les calculs de $\Delta\pi$ n’est pas complètement stable. De plus, ces corrections ne sont probablement pas les mêmes pour toutes les étoiles.

$$\begin{cases} \alpha \text{ tel que } \Delta\nu = \alpha + \Delta\nu_{\text{asymptotique}} \\ \beta \text{ tel que } \Delta\pi = \beta + \Delta\pi_{\text{asymptotique}} \end{cases} \quad (4.10)$$

Nous pouvons maintenant utiliser PORTE-CLÉS et lancer une nouvelle minimisation à un nouveau modèles en appliquant cette correction à $\Delta\pi$ et $\Delta\nu$ mesurés pour Gemma. Nous observons sur la figure 4.15 que la correction va dans le sens des observations mais ne suffit pas pour ajuster correctement les données. Cependant, nous voyons que le $\Delta\nu$ les modes $\ell = 0$ s’aligne bien mieux avec celui de Gemma, ce qui appuie notre raisonnement du paragraphe précédent. Nos modèles restent toutefois en décalage de phase comparés aux observations.

4.6.2 Amplitude du glitch d’hélium

Pour le moment, tous nos modèles se valent, il faut donc ajouter une contrainte afin de discriminer les modèles les moins bons. Ce paramètre va être le glitch d’hélium. Sa valeur pour chacun des modèles est reprise dans le tableau 4.8. La valeur de l’amplitude du glitch d’hélium pour Gemma est 13.2 ± 1.0 . Cette valeur ainsi que toutes celles présentes dans le tableau 4.8 ont été obtenues grâce à la méthode WhoSGIAd.

Modèle	A_{He}
Référence	10.3 ± 1.0
X_{min}	11.4 ± 1.0
X_{max}	9.4 ± 1.0
Z_{min}	10.5 ± 1.0
Z_{max}	10.4 ± 1.0
Modèle corrigé	11.2 ± 1.0

TABLE 4.8 – Valeurs des amplitudes du glitch d’hélium A_{He} pour les 5 premiers modèles ainsi que pour le modèle corrigé asymptotique, tous ajustés avec PORTE-CLÉS.

Le modèle dont l’amplitude d’hélium (A_{He}) se rapprochent le plus de celle de Gemma est le modèle X_{min} avec la concentration en hydrogène la plus faible. Cela signifie donc que sa concentration en hélium est la plus haute, ce qui est très important car c’est le paramètre déterminant pour le glitch d’hélium. On observe de manière générale que plus X ou Z sont petits (donc Y plus grand), plus l’amplitude du glitch augmente et se rapproche de celle de Gemma.

En faisant un simple régression linéaire comme suit, nous pourrions trouver une correction en X .

$$\gamma = \frac{dA_{He}}{dX} = \frac{A_{He,ref} - A_{He,X_{min}}}{X_{ref} - X_{min}} \quad (4.11)$$

$$\delta A_{He} = A_{He,Gemma} - A_{He,ref} \quad (4.12)$$

$$\frac{\delta A_{He}}{\gamma} = \delta X \longrightarrow X_{ref} + \delta X \approx 0.6668 \quad (4.13)$$

Nous avons donc fait un nouveau modèle avec cette correction pour mieux ajuster le glitch. Ce modèle a une valeur de X assez faible de 0.667 et une valeur de Z de 0.015. Cela signifie donc que la valeur de l'hélium augmente.

La figure 4.15 illustre les grandes séparations ($\Delta\nu_{n,l}$) successives en fonction des fréquences ($\nu_{n,l}$) pour les modes $l = 0$ et $l = 1$ pour le modèle « Référence », le modèle corrigé asymptotique, le modèle corrigé avec le glitch, tous ajustés avec PORTE-CLÉS, ainsi que pour les observations faites pour Gemma. Nous observons que la correction empirique du modèle a légèrement décalé les fréquences vers la gauche mais ce n'est pas suffisant. De plus, le modèle corrigé avec le glitch ainsi que le modèle « Référence » se superposent et sont décalés par rapport aux fréquences de Gemma.

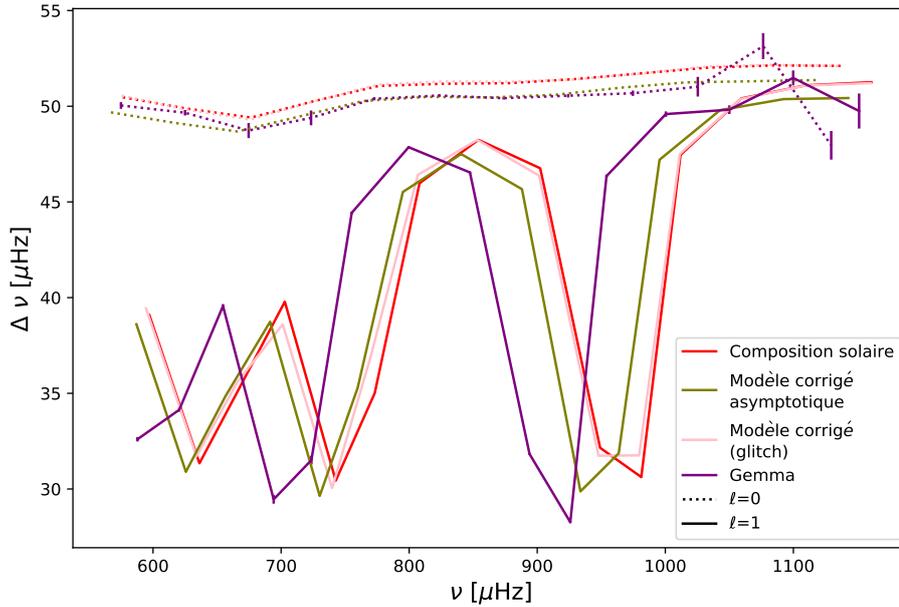


FIGURE 4.15 – Représentation des grandes séparations ($\Delta\nu_{n,l}$) successives en fonction des fréquences ($\nu_{n,l}$) pour les modes $l = 0$ et $l = 1$ pour le modèle « Référence », le modèle corrigé asymptotique, le modèle corrigé avec le glitch et les observations faites pour Gemma.

4.7 Discussion et discrimination des modèles

Le tableau 4.9 reprend les valeurs des masses, âges, rayon, densité moyenne $\frac{M}{R^3}$, densité au cœur ρ_c , amplitude du glitch d'hélium A_{He} , logarithme de la température effective $\log T_e$ et logarithme de l'accélération gravitationnelle locale $\log g$ pour les 5

Modèle	Masse	Âge	Rayon	$\frac{M}{R^3}$	ρ_c	A_{He}	$\log T_e$	$\log g$
<i>Référence</i>	1.161	$6.5215 \cdot 10^9$	2.043	801.3	4501.08	10.3	3.7508	3.8821
X_{min}	1.127	$6.3355 \cdot 10^9$	2.023	801.2	4508.44	11.4	3.7527	3.8778
X_{max}	1.195	$6.7094 \cdot 10^9$	2.063	801.0	4493.12	9.5	3.7489	3.8862
Z_{min}	1.136	$6.4772 \cdot 10^9$	2.028	801.9	4483.75	10.5	3.7551	3.8793
Z_{max}	1.183	$6.5611 \cdot 10^9$	2.057	800.8	4514.26	10.4	3.7472	3.8847
<i>Modèle corrigé</i>	1.178	$6.1665 \cdot 10^9$	2.074	777.2	4291.37	11.2	3.7559	3.8707
<i>Modèle glitch</i>	1.072	$6.0442 \cdot 10^9$	1.989	801.7	4531.46	13.0	3.7535	3.8754

TABLE 4.9 – Valeurs des masses, âges, rayon, densité moyenne $\frac{M}{R^3}$, densité au cœur ρ_c , amplitude du glitch d’hélium A_{He} , logarithme de la température effective $\log T_e$ et logarithme de l’accélération gravitationnelle locale $\log g$ pour les 5 modèles trouvés, le modèle corrigé asymptotique et le modèle corrigé avec le glitch.

modèles trouvés, le modèle corrigé asymptotique et le modèle corrigé avec le glitch. On observe que les masses de nos modèles se situent entre 1.07 et 1.20 masses solaires. Cette masse varie en fonction des jeux de paramètre de chacun des modèles. La masse la plus faible est celle du modèle corrigé avec le glitch, c’est-à-dire celui avec la plus petite valeur d’hydrogène X et donc la plus haute valeur d’hélium Y . À l’inverse, le modèle le plus massif est le modèle X_{max} avec la plus haute valeur d’hydrogène X (et donc Y plus petit). Cela indique clairement une anti-corrélation entre Y et M comme le montrent aussi LEBRETON et GOUPIL (2014), d’où l’importance de calibrer Y avec le glitch. Le rayon est d’environ 2 rayons solaires pour chacun des modèles mais varie autour de cette valeur. Les densités moyenne et centrale restent constantes sauf pour le modèle corrigé asymptotique, ce qui est normal car nous avons modifié les contraintes $\Delta\pi$ et $\Delta\nu$. En effet, l’indicateur $\Delta\nu$ fixe la densité moyenne tandis que $\Delta\pi$ fixe la densité centrale. Le fait de modifier leur valeur dans les contraintes a donc un impact direct sur les densités. Notons tout de même que la valeur de la densité moyenne devrait être moins biaisée et plus fiable pour le modèle corrigé asymptotique car c’est la correction d’un biais dans les résultats précédents. L’amplitude du glitch d’hélium ne correspond à celui de Gemma que pour le modèle corrigé avec le glitch, ce qui était l’effet attendu de cette correction. On peut remarquer aussi que, de manière générale, les modèles plus massifs sont plus vieux et les modèles moins massifs sont plus jeunes.

Observons maintenant les valeurs spectroscopiques du logarithme de la température effective $\log T_e$ et du logarithme de l’accélération gravitationnelle locale $\log g$ des nos modèles pour voir si nous pouvons les discriminer entre eux. Ces valeurs sont reprises dans le tableau 4.9 pour les 5 premiers modèles et les modèles corrigés asymptotique et avec le glitch. La figure 4.16 illustre le diagramme de $\log g$ en fonction de $\log T_{eff}$ pour tous les modèles discutés précédemment ainsi que pour Gemma avec ses incertitudes. Les lignes continues représentent les trajectoires évolutives sur ce diagramme et les points correspondent aux modèles spécifiques. Nous voyons que tous nos modèles entrent dans les barres d’erreur des données spectroscopiques de Gemma. Pour le moment, ces données ne nous permettent pas de discriminer nos modèles entre eux. Ce résultat montre combien les mesures sismiques bien plus précises que les mesures spectroscopiques permettent de bien mieux contraindre les modèles. Il serait donc intéressant d’ajouter d’autres indicateurs sismiques (par exemple, ϵ_g ou q) aux contraintes afin de rendre nos modèles encore plus précis.

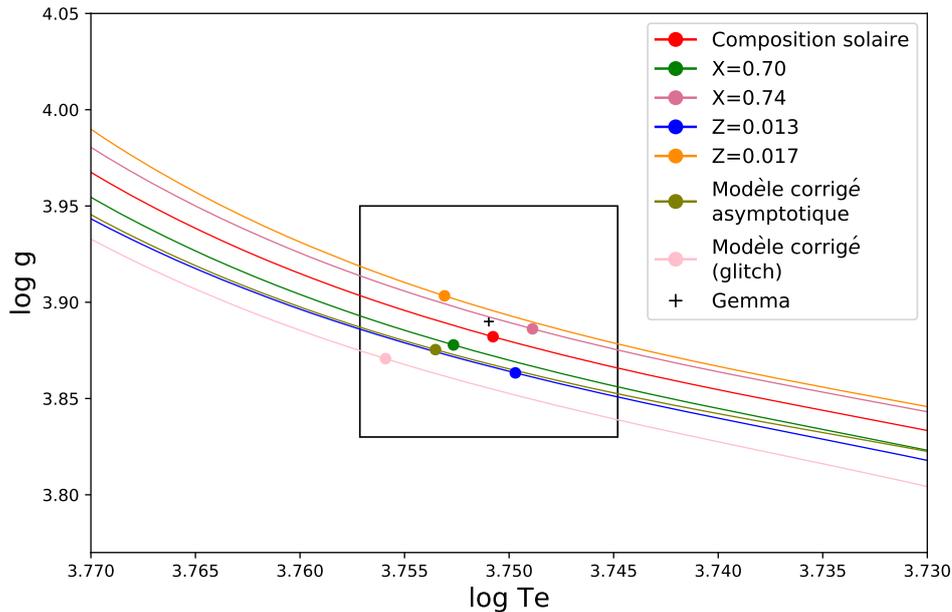


FIGURE 4.16 – Diagramme de $\log g$ en fonction de $\log T_{eff}$ pour tous les modèles ainsi que pour Gemma avec ses incertitudes.

4.8 Le paramètre de phase ϵ_g

Pour tous nos modèles, nous observons un décalage des minimums locaux (correspondant aux modes mixtes) par rapport aux observations Gemma comme le montrent les figures 4.15 et 4.14. Ceci est lié au fait que la phase des modes g est mal représentée. Le paramètre de phase ϵ_g est en cause car il fixe la position des modes mixtes. Le décalage systématique de la position de ces minimums locaux est donc dû à un mauvais ajustement des ϵ_g .

Comme nous savons que les modes mixtes se décalent de gauche à droite avec l'âge, nous avons regardé comment se décalaient les grandes séparations successives en fonction des fréquences pour les modes $l = 0$ et $l = 1$ pour le modèle « Référence » ajusté avec PORTE-CLÉS. On sait que les fréquences des modes p diminuent avec l'âge et inversement pour les fréquences des modes g . Cela conduit à un décalage de gauche à droite du pattern sur le graphe des grandes séparations successives en fonction des fréquences. Il est donc intéressant de regarder l'évolution du pattern autour d'un modèle central. Prenons donc un ensemble de modèles autour du modèle « Référence ». En pratique, cela signifie d'être moins exigeant sur les valeurs ajustées de $\Delta\pi$ et $\Delta\nu$ tout en faisant varier l'âge. En effet, nous avons vu dans la section 2.8 que ϵ_g est extrêmement corrélé à $\Delta\pi$. Pour rappel, un petit changement de ϵ_g induit un tout petit changement de $\Delta\pi$. Donc, prendre en compte ϵ_g dans les ajustements ne changerait pas tellement les résultats finaux sur les mesures des paramètres globaux tels que l'âge, la masse, etc. Plus précisément, un gros changement de ϵ_g requis se fait au prix d'un petit changement de $\Delta\pi$, ce qui ne requiert pas des changements importants des paramètres globaux.

Sur la figure 4.17, nous pouvons voir 6 modèles tirés de la séquence d'évolution du modèle « Référence » qui, lui, correspond au modèle 471. Nous voyons que si nous

reculons dans le temps (pour un âge plus jeune), les modes mixtes se décalent vers la gauche. Nous avons alors calculé la valeur de la fonction coût χ^2 entre les séparations en fréquences du modèle et de Gemma pour chacun de ces modèles afin de voir si celle-ci atteignait un minimum. Le modèle 469 atteint un minimum de la fonction coût. On observe donc, dans ce cas, que diminuer l'âge permet de corriger le décalage de phase des fréquences. En effet, la valeur de ϵ_g pour le modèle 469 est 0.9248 et se rapproche de la valeur de ϵ_g pour Gemma qui est 0.0208 ± 0.002 . Notons que l'indicateur ϵ_g est cyclique et compris entre 0 et 1. Donc, une valeur proche de 1 est aussi proche de 0. Ce modèle 469 approche mieux ϵ_g des observations comparé à tous nos autres modèles sans faire varier beaucoup les valeurs de $\Delta\pi$ et de $\Delta\nu$ (voir tableau 4.10).

Finalement, ajouter ce paramètre à nos ajustements avec PORTE-CLÉS serait une bonne approche pour envisager de meilleurs modèles. Pour rappel, PORTE-CLÉS ne fait pas d'ajustements de fréquences mais ajuste les indicateurs sismiques. Cette approche vise à résumer l'information sismique comprise dans le spectre d'oscillations. Ces indicateurs ont aussi été choisis pour qu'ils soient porteurs d'une information structurelle pertinente. Par exemple, $\Delta\nu$ sonde la densité moyenne et $\Delta\pi$ sonde la densité centrale. Il est donc normal que les fréquences individuelles ne soient pas parfaitement ajustées.

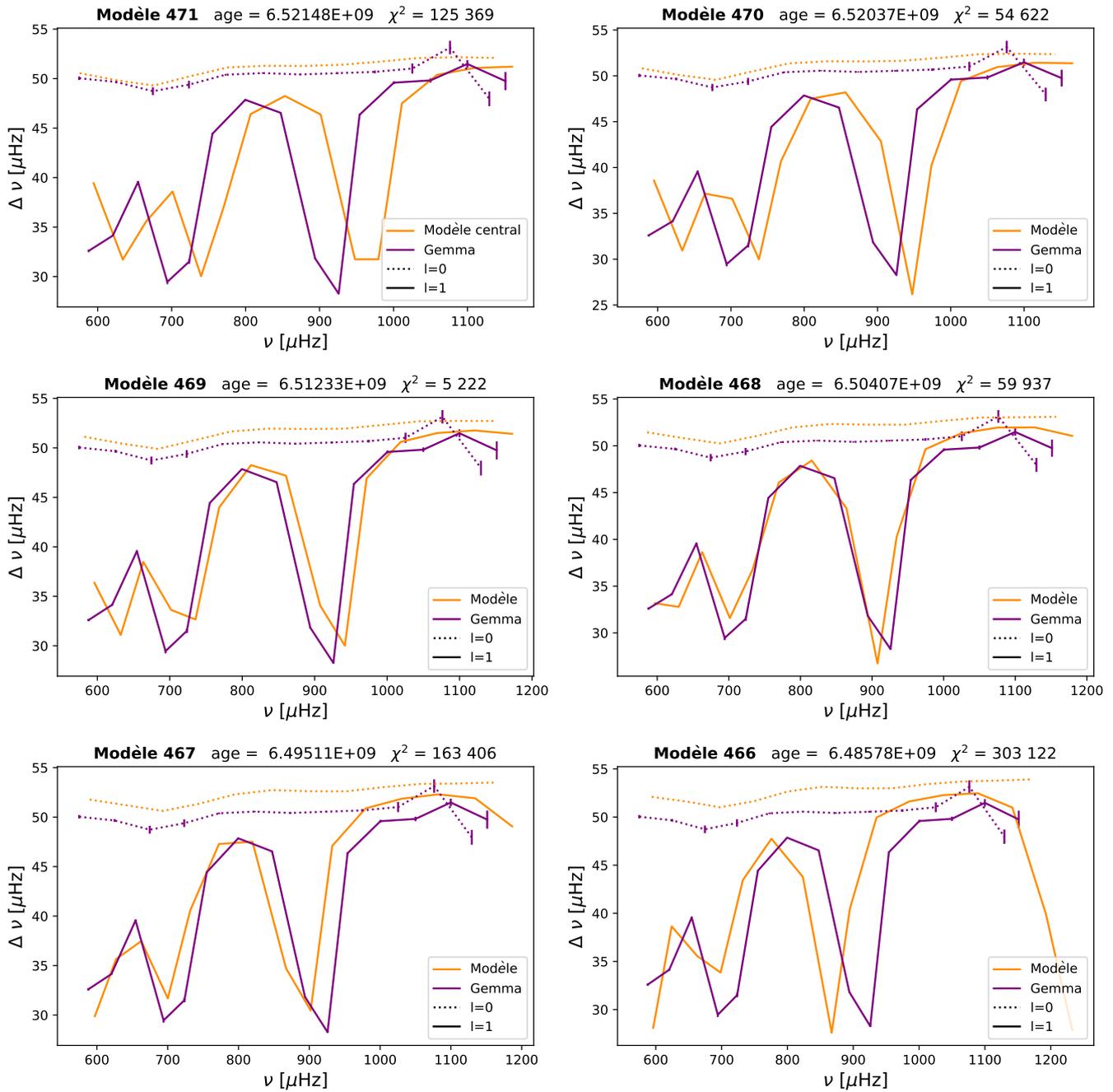


FIGURE 4.17 – Représentation des grandes séparations ($\Delta \nu_{n,l}$) successives en fonction des fréquences ($\nu_{n,l}$) pour les modes $l = 0$ et $l = 1$ pour le modèle « Référence » ajusté avec PORTE-CLÉS ainsi que plusieurs modèles précédents dans le temps le modèle « Référence » et les observations faites pour Gemma.

4.9 Discussion des paramètres

Finalement, nous avons obtenus huit modèles différents pour essayer d’ajuster les données observées de Gemma. Nous pouvons voir toutes leurs données sismiques et spectroscopiques dans le tableau 4.10. Ces mêmes données y sont aussi inscrites pour le cas de Gemma. On observe que les paramètres $\Delta\nu$ et $\Delta\pi$ sont tous assez similaires, ce qui est cohérent avec notre ajustement avec PORTE-CLÉS. Cependant, les autres indicateurs sismiques ne sont pas toujours en accord et nous pourrions les ajouter pour ajuster encore mieux nos modèles. Nous voyons aussi que le modèle 469 de la séquence de référence a une valeur de ϵ_g qui se rapproche de celle de Gemma. D’après nos résultats, le décalage de phase que nous retrouvons dans tous nos modèles serait peut-être dû à un mauvais ajustement de ϵ_g . À l’avenir, il serait bien de rajouter cet indicateur comme contrainte avec le même nombre de paramètres libres pour trouver de meilleurs modèles. On pourrait aussi imaginer d’ajuster le paramètre q pour encore augmenter la précision de nos modèles. Notons tout de même que si l’on ajoute des contraintes en plus que $\Delta\nu$ et $\Delta\pi$, l’ajustement sera moins bon pour celles-ci. Il faudra faire des concessions et/ou ajouter des paramètres libres tel que la métallicité, X , α_{MLT} ou encore α_{over} . De plus, nous pouvons voir que pour tous nos modèles, les paramètres spectroscopiques sont ajustés avec ceux de Gemma et rentrent dans ses barres d’erreur. Cela nous montre l’importance des paramètres sismiques pour trouver des modèles précis et contraindre les rayons des étoiles observées.

<i>MODÈLES</i>	$\Delta\nu_0$	$\Delta\pi_1$	A_{He}	ϵ_p	ϵ_g	q	$\log T_{eff}$	$\log g$
Gemma	50.31 ± 0.01	268.27 ± 0.10	13.2 ± 1.0	0.8567 ± 0.0004	0.0208 ± 0.002	0.1582 ± 0.0009	3.751 ± 0.006	3.89 ± 0.06
Référence	49.96	277.69	10.3	0.8232	0.7693	0.1829	3.751	3.88
X_{min}	50.72	274.95	11.4	0.8317	0.7290	0.1921	3.753	3.88
X_{max}	50.70	274.39	9.5	0.8449	0.7410	0.1826	3.749	3.89
Z_{min}	50.75	272.31	10.5	0.8245	0.7721	0.2029	3.755	3.88
Z_{max}	50.68	276.78	10.4	0.8486	0.7022	0.1737	3.747	3.88
Modèle corrigé	49.96	277.69	11.2	0.8232	0.7693	0.1829	3.756	3.87
Modèle glitch	50.74	275.19	13.0	0.8212	0.7186	0.2013	3.754	3.88
Modèle 469	51.04	266.82	10.6	0.8107	0.9248	0.1774	3.752	3.89

TABLE 4.10 – Tableau comparatif pour tous nos modèles et pour Gemma des valeurs sismiques (en violet) ainsi que des valeurs spectroscopiques (en orange).

Troisième partie

Conclusion et perspectives

Conclusion

Ce travail a permis de réaliser l'une des premières modélisations détaillées d'une étoile sous-géante (KIC 11026764, *Gemma*) en tenant compte de différentes physiques stellaires, notamment les paramètres de concentration en hydrogène X et de métallicité Z . À travers cette étude, nous avons pu observer l'impact significatif de ces paramètres, ainsi que de la masse stellaire, sur l'évolution globale de l'étoile et sur les caractéristiques sismiques qui en découlent. La recherche de modèles capables de reproduire fidèlement le spectre observé de Gemma a constitué un travail de longue haleine, nécessitant l'exploration de nombreuses configurations physiques. De plus, cette tâche s'est avérée complexe, car les paramètres physiques des étoiles sont fortement liés, créant un véritable casse-tête où chaque paramètre influence les autres de manière complexe et parfois contradictoire. Ce problème est hautement non linéaire car chaque modèle stellaire est la solution (à travers CLÉS) d'un jeu d'équation différentielles.

Pour cette étude, nous avons fait usage de codes récents tels que WhoSGLAd, EGGMiMoSA et PORTE-CLÉS, qui ont permis de lier les données spectroscopiques et sismiques de manière innovante. Cependant, malgré tous nos efforts, nous n'avons pas réussi à trouver un modèle qui corresponde parfaitement aux observations de Gemma. Un décalage de phase persiste entre nos modèles théoriques et les fréquences observées, suggérant que certains aspects physiques ou méthodologiques doivent encore être affinés pour parvenir à une modélisation plus précise. Par ailleurs, nous avons mis en avant l'importance de l'ajustement du glitch d'hélium qui permet de contraindre la quantité d'hélium et d'améliorer la précision de nos modèles stellaires. De plus, nous avons suggéré de corriger empiriquement les valeurs utilisées dans l'ajustement avec PORTE-CLÉS pour compenser le biais induits par l'utilisation des valeurs asymptotiques de $\Delta\nu$ et $\Delta\pi$. Cela a eu pour effet de mieux ajuster $\Delta\nu$ ainsi que de décaler légèrement les minimums locaux liés aux modes mixtes dans la graphie des grandes séparations successives en fonction des fréquences, se rapprochant ainsi des observations de Gemma. Malgré la différence qui persiste entre modèles et observations, ce travail a toutefois permis de soulever de potentielles solutions en, par exemple, décalant le spectre de $\Delta\nu$ en fonction de ν pour amoindrir ce décalage. Ainsi, un ajustement à $\Delta\nu$, $\Delta\pi$ et ϵ_g avec la masse et l'âge libres permettrait de trouver un bon compromis.

Pour poursuivre dans cette voie, il serait donc pertinent de développer de nouveaux modèles en ajoutant le paramètre ϵ_g comme contrainte, ce qui pourrait potentiellement résoudre le problème de décalage de phase. Bien que l'overshooting n'ait pas été considéré ici en raison de la potentielle faible masse de l'étoile étudiée, il pourrait être intéressant de tester son impact. En effet, les modèles se situent à la limite de l'apparition du cœur convectif, rendant ce paramètre potentiellement important. Cette limite se trouve entre 1.1 et 1.2 masses solaires selon la composition considérée. De plus, l'inclusion future des modes non radiaux $\ell = 2$ et $\ell = 3$ et de la petite séparation comme nouvel indicateur sismique pourrait enrichir nos analyses. Une discussion approfondie sur la valeur du paramètre α_{MLT} , issu de la théorie de la longueur de mélange (MLT),

serait également nécessaire, étant donné son caractère non-physique. MAGIC, WEISS et ASPLUND (2015) ont démontré que ce paramètre varie dans le diagramme de $\log g$ en fonction de T_{eff} ainsi qu'avec la métallicité. Il est donc normal de s'interroger sur la qualité de notre choix de valeur calibrée sur le Soleil.

À plus long terme, la méthode développée pourrait être appliquée à d'autres étoiles, par exemple en tenant compte du *splitting* rotationnel pour mieux comprendre le transport du moment angulaire. Un modèle de base solide servirait de point de départ pour des études d'inversion de structure, permettant ainsi de mieux comprendre les processus physiques à l'œuvre dans les sous-géantes, comme le transport du moment angulaire. Cela pourrait expliquer les observations de DEHEUVELS et al. (2014) qui ont trouvé que le cœur des sous-géantes était plus lent que ce que prédisait la théorie. Cette compréhension pourrait ensuite être étendue à d'autres phases de l'évolution stellaire, notamment aux géantes rouges, pour lesquelles la méthode EGGMiMoSA est également applicable.

Enfin, le développement de techniques permettant de contraindre précisément le rayon d'une étoile s'avérerait particulièrement utile pour la détermination du rayon des planètes en transit. Des méthodes similaires pourraient être appliquées aux étoiles hôtes d'exoplanètes, contribuant ainsi à une meilleure compréhension de l'évolution des systèmes exoplanétaires à travers des mesures précises de l'âge et du rayon des étoiles. En effet, dans la grande majorité des cas, on ne connaît une planète qu'aussi bien qu'on connaît son étoile hôte. Ces avancées ouvriraient de nouvelles perspectives en exoplanétologie, où la précision des données est essentielle pour décrypter les caractéristiques des mondes extrasolaires.

Bibliographie

- AERTS, C., J. CHRISTENSEN-DALSGAARD et D. W. KURTZ (2010). « Introducing Asteroseismology ». In : *Asteroseismology*. Sous la dir. de C. AERTS, J. CHRISTENSEN-DALSGAARD et D. W. KURTZ. Dordrecht : Springer Netherlands, p. 1-30. ISBN : 978-1-4020-5803-5. DOI : [10.1007/978-1-4020-5803-5_1](https://doi.org/10.1007/978-1-4020-5803-5_1). URL : https://doi.org/10.1007/978-1-4020-5803-5_1 (visité le 01/08/2024).
- AIZENMAN, M., P. SMEYERS et A. WEIGERT (1^{er} juin 1977). « Avoided Crossing of Modes of Non-radial Stellar Oscillations ». In : *Astronomy and Astrophysics* 58. ADS Bibcode : 1977A&A....58...41A, p. 41. ISSN : 0004-6361. URL : <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1977A&A....58...41A> (visité le 29/07/2024).
- ASPLUND, Martin et al. (22 sept. 2009). « The Chemical Composition of the Sun ». In : *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 47 (Volume 47, 2009). Publisher : Annual Reviews, p. 481-522. ISSN : 0066-4146, 1545-4282. DOI : [10.1146/annurev.astro.46.060407.145222](https://doi.org/10.1146/annurev.astro.46.060407.145222). URL : <https://www.annualreviews.org/content/journals/10.1146/annurev.astro.46.060407.145222> (visité le 15/07/2024).
- BAGLIN, Annie et al. (1^{er} fév. 2009). « CoRoT : Description of the Mission and Early Results ». In : 253. Conference Name : Transiting Planets ADS Bibcode : 2009IAUS..253...71B, p. 71-81. DOI : [10.1017/S1743921308026252](https://doi.org/10.1017/S1743921308026252). URL : <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2009IAUS..253...71B> (visité le 11/08/2024).
- BORUCKI, William J. (fév. 2016). « KEPLER Mission : development and overview ». In : *Reports on Progress in Physics* 79.3. Publisher : IOP Publishing, p. 036901. ISSN : 0034-4885. DOI : [10.1088/0034-4885/79/3/036901](https://doi.org/10.1088/0034-4885/79/3/036901). URL : <https://dx.doi.org/10.1088/0034-4885/79/3/036901> (visité le 26/07/2024).
- CHAPLIN, W. J. et al. (mars 2010). « THE ASTEROSEISMIC POTENTIAL OF KEPLER : FIRST RESULTS FOR SOLAR-TYPE STARS ». In : *The Astrophysical Journal Letters* 713.2. Publisher : The American Astronomical Society, p. L169. ISSN : 2041-8205. DOI : [10.1088/2041-8205/713/2/L169](https://doi.org/10.1088/2041-8205/713/2/L169). URL : <https://dx.doi.org/10.1088/2041-8205/713/2/L169> (visité le 30/07/2024).
- COWLING, T. G. (1^{er} jan. 1941). « The non-radial oscillations of polytropic stars ». In : *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 101. Publisher : OUP ADS Bibcode : 1941MNRAS.101..367C, p. 367. ISSN : 0035-8711. DOI : [10.1093/mnras/101.8.367](https://doi.org/10.1093/mnras/101.8.367). URL : <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1941MNRAS.101..367C> (visité le 30/07/2024).
- COX, J. P. et R. T. GIULI (1^{er} jan. 1968). *Principles of stellar structure*. Publication Title : Principles of stellar structure ADS Bibcode : 1968pss..book....C. URL : <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1968pss..book....C> (visité le 12/08/2024).
- DEHEUVELS, S. et al. (1^{er} avr. 2014). « Seismic constraints on the radial dependence of the internal rotation profiles of six Kepler subgiants and young red giants ». In : *Astronomy & Astrophysics* 564. Publisher : EDP Sciences, A27. ISSN : 0004-6361, 1432-0746. DOI : [10.1051/0004-6361/201322779](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201322779). URL : <https://www.aanda.org/articles/aa/abs/2014/04/aa22779-13/aa22779-13.html> (visité le 01/08/2024).

- DUPRET, Marc-Antoine (s. d.). *Marc-Antoine Dupret*. URL : <https://www.astro.uliege.be/~dupret/> (visité le 30/07/2024).
- EDDINGTON, AS (1959). « The Internal Constitution of the Stars (1926) ». In : *eq.(127.6)*, p. 188.
- FARNIR, M. et al. (1^{er} fév. 2019). « Comprehensive stellar seismic analysis - New method exploiting the glitches information in solar-like pulsators ». In : *Astronomy & Astrophysics* 622. Publisher : EDP Sciences, A98. ISSN : 0004-6361, 1432-0746. DOI : [10.1051/0004-6361/201834044](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201834044). URL : <https://www.aanda.org/articles/aa/abs/2019/02/aa34044-18/aa34044-18.html> (visité le 09/07/2024).
- FARNIR, M. et al. (1^{er} sept. 2021). « Asteroseismology of evolved stars with EGG-MiMoSA - I. Theoretical mixed-mode patterns from the subgiant to the RGB phase ». In : *Astronomy & Astrophysics* 653. Publisher : EDP Sciences, A126. ISSN : 0004-6361, 1432-0746. DOI : [10.1051/0004-6361/202141317](https://doi.org/10.1051/0004-6361/202141317). URL : <https://www.aanda.org/articles/aa/abs/2021/09/aa41317-21/aa41317-21.html> (visité le 09/07/2024).
- FARNIR, Martin (14 sept. 2021). « Asteroseismic study of solar-like pulsators along their evolution ». In : Publisher : ULiège - Université de Liège. URL : <https://orbi.uliege.be/handle/2268/262870> (visité le 09/07/2024).
- GLIESE, W. (1^{er} jan. 1957). « Katalog der Sterne näher ALS 20 Parsek für 1950.0 ». In : *Astronomisches Rechen-Institut Heidelberg Mitteilungen Serie A* 8. ADS Bibcode : 1957MiABA...8....1G, p. 1. URL : <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1957MiABA...8....1G> (visité le 24/07/2024).
- IGLESIAS, Carlos A. et Forrest J. ROGERS (1^{er} juin 1996). « Updated Opal Opacities ». In : *The Astrophysical Journal* 464. Publisher : IOP ADS Bibcode : 1996ApJ...464..943I, p. 943. ISSN : 0004-637X. DOI : [10.1086/177381](https://doi.org/10.1086/177381). URL : <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1996ApJ...464..943I> (visité le 15/07/2024).
- IRWIN, Alan W. (1^{er} nov. 2012). « FreeEOS : Equation of State for stellar interiors calculations ». In : *Astrophysics Source Code Library*. ADS Bibcode : 2012ascl.soft11002I, ascl :1211.002. URL : <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2012ascl.soft11002I> (visité le 15/07/2024).
- KIPPENHAHN, Rudolf, Alfred WEIGERT et Achim WEISS (1990). *Stellar structure and evolution*. T. 192. Springer.
- LEBRETON, Y. et M. J. GOUPIL (1^{er} sept. 2014). « Asteroseismology for “à la carte” stellar age-dating and weighing - Age and mass of the CoRoT exoplanet host HD 52265 ». In : *Astronomy & Astrophysics* 569. Publisher : EDP Sciences, A21. ISSN : 0004-6361, 1432-0746. DOI : [10.1051/0004-6361/201423797](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201423797). URL : <https://www.aanda.org/articles/aa/abs/2014/09/aa23797-14/aa23797-14.html> (visité le 12/08/2024).
- LI, Yaguang et al. (21 juin 2020). « Asteroseismology of 36 Kepler subgiants – I. Oscillation frequencies, linewidths, and amplitudes ». In : *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 495.2, p. 2363-2386. ISSN : 0035-8711. DOI : [10.1093/mnras/staa1335](https://doi.org/10.1093/mnras/staa1335). URL : <https://doi.org/10.1093/mnras/staa1335> (visité le 16/07/2024).
- MAGIC, Z., A. WEISS et M. ASPLUND (1^{er} jan. 2015). « The Stagger-grid : A grid of 3D stellar atmosphere models. III. The relation to mixing length convection theory ». In : *Astronomy and Astrophysics* 573. ADS Bibcode : 2015A&A...573A..89M, A89. ISSN : 0004-6361. DOI : [10.1051/0004-6361/201423760](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201423760). URL : <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2015A&A...573A..89M> (visité le 16/08/2024).
- METCALFE, T. S. et al. (oct. 2010). « A PRECISE ASTEROSEISMIC AGE AND RADIUS FOR THE EVOLVED SUN-LIKE STAR KIC 11026764 ». In : *The Astrophysical Journal* 723.2. Publisher : The American Astronomical Society, p. 1583.

- ISSN : 0004-637X. DOI : [10.1088/0004-637X/723/2/1583](https://doi.org/10.1088/0004-637X/723/2/1583). URL : <https://dx.doi.org/10.1088/0004-637X/723/2/1583> (visité le 04/07/2024).
- MIGLIO, A. et J. MONTALBÁN (1^{er} oct. 2005). « Constraining fundamental stellar parameters using seismology - Application to Centauri AB ». In : *Astronomy & Astrophysics* 441.2. Number : 2 Publisher : EDP Sciences, p. 615-629. ISSN : 0004-6361, 1432-0746. DOI : [10.1051/0004-6361:20052988](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20052988). URL : <https://www.aanda.org/articles/aa/abs/2005/38/aa2988-05/aa2988-05.html> (visité le 09/07/2024).
- MOSSER, B. et al. (1^{er} déc. 2014). « Mixed modes in red giants : a window on stellar evolution ». In : *Astronomy & Astrophysics* 572. Publisher : EDP Sciences, p. L5. ISSN : 0004-6361, 1432-0746. DOI : [10.1051/0004-6361/201425039](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201425039). URL : <https://www.aanda.org/articles/aa/abs/2014/12/aa25039-14/aa25039-14.html> (visité le 26/07/2024).
- MOSSER, B. et al. (1^{er} déc. 2015). « Period spacings in red giants - I. Disentangling rotation and revealing core structure discontinuities ». In : *Astronomy & Astrophysics* 584. Publisher : EDP Sciences, A50. ISSN : 0004-6361, 1432-0746. DOI : [10.1051/0004-6361/201527075](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201527075). URL : <https://www.aanda.org/articles/aa/abs/2015/12/aa27075-15/aa27075-15.html> (visité le 01/08/2024).
- NOLL, Anthony (14 déc. 2021). « Étude de l'extension des cœurs convectifs par la sismologie des étoiles sous-géantes ». Thèse de doct. Université Paul Sabatier - Toulouse III. URL : <https://theses.hal.science/tel-03683675> (visité le 04/07/2024).
- PERRYMAN, M a C et al. (1997). « The Hipparcos Catalogue ». In : *Astronomy and Astrophysics - A&A* 323.1. Publisher : EDP Sciences, p. 49-52. URL : <https://hal.science/hal-02053811> (visité le 24/07/2024).
- PINÇON, C., M. J. GOUPIL et K. BELKACEM (1^{er} fév. 2020). « Probing the mid-layer structure of red giants. I. Mixed-mode coupling factor as a seismic diagnosis ». In : *Astronomy and Astrophysics* 634. ADS Bibcode : 2020A&A...634A..68P, A68. ISSN : 0004-6361. DOI : [10.1051/0004-6361/201936864](https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2020A&A...634A..68P). URL : <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2020A&A...634A..68P> (visité le 12/08/2024).
- POWELL, Richard (2006). *The Hertzsprung Russell Diagram*. URL : <http://www.atlasoftheuniverse.com/hr.html> (visité le 24/07/2024).
- PRUSTI, T. et al. (1^{er} nov. 2016). « The Gaia mission ». In : *Astronomy & Astrophysics* 595. Publisher : EDP Sciences, A1. ISSN : 0004-6361, 1432-0746. DOI : [10.1051/0004-6361/201629272](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201629272). URL : <https://www.aanda.org/articles/aa/abs/2016/11/aa29272-16/aa29272-16.html> (visité le 30/07/2024).
- SCUFLAIRE, R. et al. (1^{er} août 2008a). « CLÉS, Code Liégeois d'Évolution Stellaire ». In : *Astrophysics and Space Science* 316.1, p. 83-91. ISSN : 1572-946X. DOI : [10.1007/s10509-007-9650-1](https://doi.org/10.1007/s10509-007-9650-1). URL : <https://doi.org/10.1007/s10509-007-9650-1> (visité le 04/07/2024).
- SCUFLAIRE, R. et al. (1^{er} août 2008b). « The Liège Oscillation code ». In : *Astrophysics and Space Science* 316.1, p. 149-154. ISSN : 1572-946X. DOI : [10.1007/s10509-007-9577-6](https://doi.org/10.1007/s10509-007-9577-6). URL : <https://doi.org/10.1007/s10509-007-9577-6> (visité le 16/07/2024).
- SHIBAHASHI, H. (1^{er} jan. 1979). « Modal Analysis of Stellar Nonradial Oscillations by an Asymptotic Method ». In : *Publications of the Astronomical Society of Japan* 31. Publisher : OUP ADS Bibcode : 1979PASJ...31...87S, p. 87-104. ISSN : 0004-6264. URL : <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1979PASJ...31...87S> (visité le 01/08/2024).
- TAKATA, Masao (oct. 2016). « Physical formulation of mixed modes of stellar oscillations ». In : *Publications of the Astronomical Society of Japan* 68.6, p. 91.

ISSN : 0004-6264. DOI : [10.1093/pasj/psw093](https://doi.org/10.1093/pasj/psw093). eprint : <https://academic.oup.com/pasj/article-pdf/68/6/91/8357380/psw093.pdf>. URL : <https://doi.org/10.1093/pasj/psw093>.

VERMA, Kuldeep et al. (1^{er} mars 2019). « Helium abundance in a sample of cool stars : measurements from asteroseismology ». In : *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 483. Publisher : OUP ADS Bibcode : 2019MNRAS.483.4678V, p. 4678-4694. ISSN : 0035-8711. DOI : [10.1093/mnras/sty3374](https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2019MNRAS.483.4678V). URL : <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2019MNRAS.483.4678V> (visité le 15/08/2024).