

## Mémoire

**Auteur :** Mailleux, Pauline

**Promoteur(s) :** Balhan, Kevin; Zenaïdi, Naïm

**Faculté :** Faculté des Sciences

**Diplôme :** Master en sciences mathématiques, à finalité didactique

**Année académique :** 2023-2024

**URI/URL :** <http://hdl.handle.net/2268.2/21391>

---

### *Avertissement à l'attention des usagers :*

*Tous les documents placés en accès ouvert sur le site le site MatheO sont protégés par le droit d'auteur. Conformément aux principes énoncés par la "Budapest Open Access Initiative"(BOAI, 2002), l'utilisateur du site peut lire, télécharger, copier, transmettre, imprimer, chercher ou faire un lien vers le texte intégral de ces documents, les disséquer pour les indexer, s'en servir de données pour un logiciel, ou s'en servir à toute autre fin légale (ou prévue par la réglementation relative au droit d'auteur). Toute utilisation du document à des fins commerciales est strictement interdite.*

*Par ailleurs, l'utilisateur s'engage à respecter les droits moraux de l'auteur, principalement le droit à l'intégrité de l'oeuvre et le droit de paternité et ce dans toute utilisation que l'utilisateur entreprend. Ainsi, à titre d'exemple, lorsqu'il reproduira un document par extrait ou dans son intégralité, l'utilisateur citera de manière complète les sources telles que mentionnées ci-dessus. Toute utilisation non explicitement autorisée ci-avant (telle que par exemple, la modification du document ou son résumé) nécessite l'autorisation préalable et expresse des auteurs ou de leurs ayants droit.*

---



FACULTÉ DES SCIENCES  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE

---

# Le Théorème Fondamental de l'Algèbre

## De la thèse de Gauss aux Corps Réels Clos

---

Mémoire de fin d'études présenté en vue de l'obtention du titre de  
*Master en Sciences Mathématiques, à finalité didactique*

Année académique 2023-2024

*Auteur :*  
Pauline MAILLEUX

*Promoteur :*  
Kevin BALHAN

*Co-Promoteur :*  
Naïm ZENAÏDI



# Table des matières

|            |   |            |
|------------|---|------------|
| <b>I</b>   | <b>Introduction</b>   | <b>7</b>   |
| <b>1</b>   | <b>Équations algébriques solubles par radicaux</b>                                  | <b>9</b>   |
| 1.1        | Résolution des équations du premier degré : la méthode de fausse position . . . . . | 9          |
| 1.2        | Résolution des équations du second degré . . . . .                                  | 11         |
| 1.3        | Résolution des équations du troisième degré . . . . .                               | 13         |
| 1.3.1      | Le geste de Bombelli : un aperçu . . . . .  | 16         |
| 1.4        | Résolution des équations du quatrième degré . . . . .                               | 17         |
| <b>II</b>  | <b>La thèse de Gauss</b>  | <b>21</b>  |
| <b>2</b>   | <b>Analyse de la thèse de Gauss (1799)</b>  | <b>25</b>  |
| 2.1        | Un théorème de factorisation . . . . .  | 26         |
| 2.2        | Approche géométrique de l'existence d'une racine . . . . .                          | 28         |
| 2.3        | Étude des courbes $\Gamma_{R_P}, \Gamma_{I_P}$ d'après Gauss . . . . .              | 34         |
| 2.4        | La preuve de Gauss : les lacunes . . . . .  | 39         |
| 2.5        | Perspectives sur la preuve de Gauss (1799) . . . . .                                | 42         |
| 2.5.1      | Le point de vue complexe . . . . .  | 42         |
| 2.5.2      | Quelques mots à propos de l'apport d'A. Ostrowski . . . . .                         | 45         |
| <b>3</b>   | <b>Complétion élémentaire de la preuve de Gauss</b>                                 | <b>47</b>  |
| 3.1        | La preuve de Basu et Velleman : analyse et détails . . . . .                        | 48         |
| 3.2        | Perspectives sur l'article de Basu et Velleman . . . . .                            | 51         |
| <b>III</b> | <b>A propos du caractère algébrique des preuves du TFA</b>                          | <b>53</b>  |
| <b>4</b>   | <b>Corps réels clos</b>   | <b>55</b>  |
| 4.1        | Corps réels clos et premières propriétés . . . . .                                  | 55         |
| 4.2        | Caractérisation des corps réels clos . . . . .                                      | 60         |
| <b>IV</b>  | <b>Annexe</b>   | <b>65</b>  |
| <b>5</b>   | <b>La thèse de Gauss (1799)</b>   | <b>67</b>  |
| <b>6</b>   | <b>Les polynômes de Tchebychev</b>  | <b>103</b> |
| <b>7</b>   | <b>Démonstration du TFA étudiée en premier bachelier</b>                            | <b>107</b> |
| 7.1        | Rudiments concernant la théorie des polynômes . . . . .                             | 107        |
| 7.2        | Lemmes et démonstration du TFA présentés par M.Rigo . . . . .                       | 109        |
| 7.3        | Contributions de d'Alembert . . . . .   | 112        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 7.4      | Comparaison des différentes démonstrations . . . . .                | 112        |
| <b>8</b> | <b>Introduction historique au TFA</b>                               | <b>115</b> |
| 8.1      | Ligne du temps . . . . .  | 115        |
| 8.2      | Distinction entre deux théorèmes : TFA et TFL . . . . .             | 116        |
| 8.3      | Le Mémoire de 1702 de Leibniz . . . . .                             | 117        |
| 8.4      | Euler et l'Évolution du Théorème Fondamental de l'Algèbre . . . . . | 117        |
| 8.5      | L'apport de D'Alembert . . . . .                                    | 118        |
| 8.6      | Travaux de Gauss de 1799 . . . . .                                  | 119        |
|          | <b>Table des figures</b>  | <b>123</b> |

## Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à toutes les personnes qui ont contribué à la réalisation de ce mémoire.

Tout d'abord, je remercie chaleureusement mon promoteur, Kevin Balhan, et mon co-promoteur, Naïm Zenaïdi, pour leur guidance, leurs précieux conseils et leur soutien tout au long de ce projet. Leur disponibilité et leur soutien moral ont été déterminants pour mener à bien ce travail.

Je souhaite également remercier les membres du jury, Gentiane Haesbroeck, Jean-Pierre Schneiders et Julien Leroy, ainsi que le lecteur externe, Pierre Mathonet, pour avoir accepté de lire ce travail et de participer à sa défense.

Un grand merci à l'ensemble des enseignants et du personnel de l'Université de Liège pour leur accompagnement et leur engagement, qui ont enrichi mon parcours académique. Un tout grand merci à Laurent Loosveldt, sans qui je n'aurais certainement pas continué mon parcours.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance envers mes camarades de classe, notamment Pauline David, Julie Piraprez et Fanny Dalem, pour leur soutien moral, leurs encouragements et les discussions enrichissantes durant ces cinq années.

Enfin, je remercie ma famille et mes amis, et tout particulièrement ma maman, pour leur patience et leur soutien inconditionnel, sans lesquels ce projet n'aurait pas pu aboutir.

## Introduction au mémoire

Le théorème fondamental de l'algèbre, établi par Gauss au XVIII<sup>e</sup> siècle, précise qu'un polynôme (à coefficients réels) de degré  $n$  possède  $n$  racines si celles-ci sont comptées avec leur multiplicité. Bien que fondamental, ce théorème purement existentiel, ne dit rien sur l'obtention des solutions elles-mêmes des équations de degré  $n$  associées.

La première partie de ce mémoire, préalable à une analyse historique du théorème fondamental chez Gauss, qui est l'objet du mémoire, passe en revue les cas classiques d'équations algébriques solubles par radicaux, en cherchant à comprendre les mécanismes sous-jacents à leur résolution. Nous n'aurons évidemment pas la prétention d'être exhaustifs ; il s'agit avant tout de mettre en évidence quelques jalons importants de l'évolution de l'algèbre jusqu'à l'établissement du théorème fondamental de l'algèbre par Gauss.

La seconde partie est consacrée au "Théorème Fondamental de l'Algèbre" (TFA), exploré sous un angle à la fois mathématique et historique. Nous analyserons en détail la première preuve largement acceptée de ce théorème, proposée par Gauss dans sa thèse à l'Université d'Helmstedt en 1799 [22]. En annexe, cette preuve sera comparée à celle enseignée en première année de bachelier dans le cours d'algèbre, mettant en évidence les avancées et les limites des approches historiques. Le deuxième chapitre examinera le travail [5] de Basu et Velleman, qui prétendent combler les lacunes de la première preuve de Gauss en proposant une méthode "élémentaire", surprenante à la lumière des travaux d'Ostrowski en 1920 [23].

Enfin, dans la troisième partie, nous nous interrogeons sur le caractère algébrique du Théorème Fondamental de l'Algèbre, en cherchant à déterminer s'il existe une démonstration purement algébrique du TFA. Cela nous mènera à étudier la notion de corps réels clos tel que présentés dans [4].

Première partie

**Introduction**





# Chapitre 1

## Équations algébriques solubles par radicaux

### 1.1 Résolution des équations du premier degré : la méthode de fausse position

Dans un corps quelconque, les équations du premier degré peuvent se ramener à une équation du type :

$$ax = b.$$

Il existe alors 3 cas de figure concernant la résolution de l'équation :

- 1) Si  $a \neq 0$ , la solution de l'équation est donnée par  $x = \frac{b}{a}$ .
- 2) Si  $a = 0$  et  $b \neq 0$ , l'égalité n'a aucune chance de se produire et l'équation n'admet alors aucune solution. L'ensemble des solutions est alors vide.
- 3) Si  $a = 0$  et  $b = 0$  alors l'égalité est vraie quelque soit la valeur de l'inconnue. L'équation admet alors pour ensemble de solutions l'ensemble de tous les nombres sur lequel on travaille.

Dans les réels, la solution d'une équation du premier degré non-triviale est unique et se réduit donc à une simple division. Néanmoins, les techniques de résolution d'équations du premier degré varient selon les époques et les lieux, notamment en fonction du système de numération et les méthodes de division mobilisables. La méthode dite de « *fausse position* » (simple) des égyptiens en est un exemple emblématique. En utilisant le symbolisme algébrique, elle consiste en substance en ceci :

- 1) choisir un nombre  $x'$ , la fausse position, et calculer valeur  $b' = ax'$  obtenue avec la fausse position ;
- 2) calculer le quotient  $q' = \frac{b}{b'}$ , autrement dit : diviser ce que l'on doit trouver ( $b$ ) par ce qu'on a trouvé ( $b'$ ) à partir du choix de fausse position ;
- 3) la solution du problème est alors donnée par le produit de la fausse position  $x'$  par  $q'$  :

$$x' \cdot q' = x' \cdot \frac{b}{b'}.$$

De fait, la technique semble légitime puisque

$$a \cdot \left( x' \cdot \frac{b}{b'} \right) = (a \cdot x') \cdot \frac{b}{b'} = b' \cdot \frac{b}{b'} = b.$$

Le papyrus de Rhind et le papyrus de Moscou nous ont laissé des traces de l'algèbre égyptienne. On y trouve des problèmes pratiques concernant la gestion de denrées alimentaire ou du bétail, dont la résolution se ramène à celle d'équation du premier degré du type :  $x + ax = b$ ,

ou encore  $ax = b$ , en laissant de côté les hiéroglyphes égyptiens et en adoptant les notations d'aujourd'hui. Dans le papyrus de Rhind [8], on trouve par exemple le problème suivant :

"Une quantité ajoutée à son septième vaut 19. Quelle est cette quantité ? "

Il s'agit donc de résoudre l'équation :

$$x + \frac{1}{7}x = 19 \quad \text{ou} \quad \left(1 + \frac{1}{7}\right)x = 19.$$

C'est une équation linéaire de la forme  $ax = b$  dont la solution est bien entendu

$$x = \frac{19}{1 + \frac{1}{7}}$$

et est obtenue, de nos jours, par simple division des deux membres de l'égalité. Toutefois, cette division ne va pas de soi pour le scribe égyptien, pour qui la multiplication procède par duplications successives et addition des résultats et la division se réalise par une procédure inverse. La proportionnalité est donc implicite dans tous les calculs égyptiens.

La solution arithmétique proposée par le scribe est présentée sous forme d'un tableau<sup>1</sup> à 3 colonnes<sup>2</sup> :

| Colonne 1                  | Colonne 2                       | Colonne 3                        |
|----------------------------|---------------------------------|----------------------------------|
| 7      1\                  | 8      1                        | $2\frac{1}{4}\frac{1}{8}$ 1      |
| 1\ $\frac{1}{7}\backslash$ | 16     2\                       | $4\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ 2\     |
| 8      total               | 4 $\frac{1}{2}$                 | $9\frac{1}{2}$ 4\                |
|                            | 2 $\frac{1}{4}\backslash$       | $16\frac{1}{2}\frac{1}{8}$ total |
|                            | 1 $\frac{1}{8}\backslash$       |                                  |
|                            | total $2\frac{1}{4}\frac{1}{8}$ |                                  |

Dans la première colonne, le scribe calcule ce que devient la quantité  $x' = 7$  (fausse position choisie judicieusement pour faciliter les calculs) si on lui ajoute son septième :

$$\left(1 + \frac{1}{7}\right) \cdot 7 = 7 + 1 = 8.$$

Dans la deuxième colonne, il divise 19 (résultat devant être obtenu) par 8 (ce qui a été obtenu en choisissant 7 comme fausse position) :

$$19 = 16 + 2 + 1 = (2 \cdot 8) + \left(\frac{1}{4} \cdot 8\right) + \left(\frac{1}{8} \cdot 8\right) = \left(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) \cdot 8.$$

En divisant chacun des termes par 8, le scribe obtient :

$$q' = \frac{b}{b'} = \frac{19}{8} = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}.$$

La troisième colonne présente enfin la solution du problème après calcul du produit du quotient  $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$  obtenu dans la deuxième colonne par la fausse position 7 :

$$x' \cdot q' = x' \cdot \frac{b}{b'} = \left(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) \cdot 7.$$

Il faudra attendre Al-Kwarizmi ( $\approx 780-850$ ) pour que l'algèbre prenne une forme plus systématique et généralisée, où les techniques de résolution des équations ne se limitent plus à des cas particuliers, et jeter les bases de l'algèbre moderne.

1. Par souci de clarté, nous ne respectons pas ici la mise en page originale.  
2. Cette procédure est décrite dans [12].

## 1.2 Résolution des équations du second degré

Dans  $\mathbb{R}$ , la technique de résolution des équations du second degré du type :

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ avec } a, b, c \in \mathbb{R},$$

réside essentiellement en le calcul du réalisant  $\Delta = b^2 - 4ac$  dont la valeur détermine le nombre de solutions de l'équation. La théorie se résume comme ceci :

1) si  $\Delta > 0$ , l'équation possède alors deux solutions données par les calculs de

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

2) si  $\Delta = 0$ , l'équation possède une solution unique  $x = \frac{-b}{2a}$ ,

3) si  $\Delta < 0$ , l'équation ne possède alors aucune solution.

Tout le raisonnement repose sur l'identité algébrique

$$ax^2 + bx + c = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$$

qui peut être obtenue mathématiquement au moyen d'une division par  $a$  après mise en évidence, de la complétion algébrique en un carré parfait, une factorisation via un produit remarquable classique. La discussion concernant les racines de l'équation correspondante repose ensuite in fine sur la propriété d'intégrité de l'ensemble de nombres utilisés, les nombres réels en l'occurrence.

Déjà chez les scribes babyloniens, on trouve des traces de résolutions de problèmes pratiques qui peuvent se modéliser par des équations quadratiques de types [37] :

$$x^2 + ax = b, x^2 - ax = b, \text{ et } x^2 + b = ax.$$

Toutefois, les techniques qui permettent de les résoudre sont exprimées de manière rhétorique. Par exemple, la question de la résolution de l'équation  $x^2 + x = \frac{3}{4}$  en ces termes [12] :

"Si tu ajoutes un carré à son côté, tu trouves le nombre  $\frac{45}{60}$ . Quel est le côté ?"

et la technique de résolution qui l'accompagne est présentée comme une succession de calculs à effectuer :

|   |  |
|---|--|
| Le carré ajouté au côté égale $\frac{45}{60}$ .       | $x^2 + x = \frac{3}{4}$                    |
| Prends le nombre 1.                                   | 1  |
| Divise-le en deux, soit $\frac{30}{60}$ .             | $\frac{1}{2}$                              |
| Prends-en le carré, soit $\frac{15}{60}$ .            | $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ |
| Ajoute-le à $\frac{45}{60}$ , soit 1.                 | $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$            |
| C'est le carré de 1.                                  | $1 = 1^2$                                  |
| Soustrais-en $\frac{30}{60}$ , soit $\frac{30}{60}$ . | $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$            |
| C'est le côté recherché.                              | $x = \frac{1}{2}$                          |

La légitimité de cette technique proviendrait d'une procédure géométrique pour déterminer la longueur du côté d'un carré d'aire  $\frac{3}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^2$ . De fait, la construction de ce carré rend intelligible cette succession d'opérations dictées par le scribe :

- 1) au carré de côté  $x$ , on adjoint un rectangle de côtés  $x$  et 1 ;
- 2) on coupe en leur milieu les côtés de longueur 1 de ce rectangle, que l'on coupe ainsi en deux rectangles d'aire  $\frac{1}{2}x$  ;

- 3) en adjoignant chacun de ces rectangles à deux côtés adjacents du carré de côté  $x$ , la possibilité d'obtenir un carré de côté  $(x + \frac{1}{2})$  en complétant la surface d'aire  $\frac{3}{4}$  ainsi recomposée par un carré de côté  $\frac{1}{2}$ ;
- 4) l'aire totale de ce carré est donc égale à  $\frac{3}{4} + \frac{1}{4}$ ;
- 5) son côté est donc de longueur 1, et la longueur  $x$  du côté du carré initial est vaut  $1 - \frac{1}{4}$ .

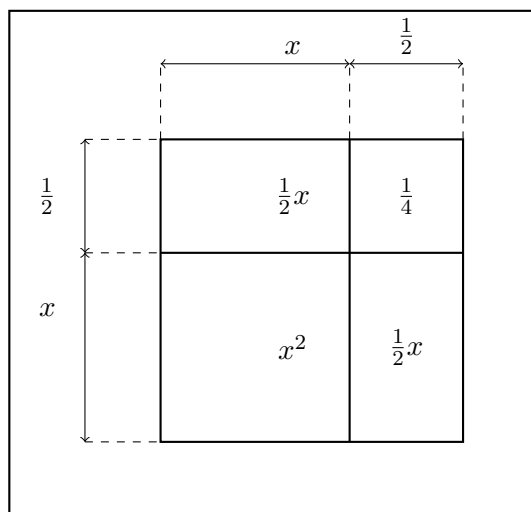


FIGURE 1.1 – Procédure géométrique pour déterminer la longueur du côté d'un carré.

On ne trouve trace d'aucune théorie générale de résolution d'équation du second degré chez les babyloniens [12], car ils se contentaient de décrire la procédure conduisant à la solution des problèmes traités. Ils ne cherchaient d'ailleurs peut-être pas à en établir une, mais l'hypothèse que cette procédure géométrique de reconstruction d'un carré dicterait leur méthode de résolution est crédible, ne serait-ce que par les références géométriques utilisées dans les énoncés de leurs problèmes.

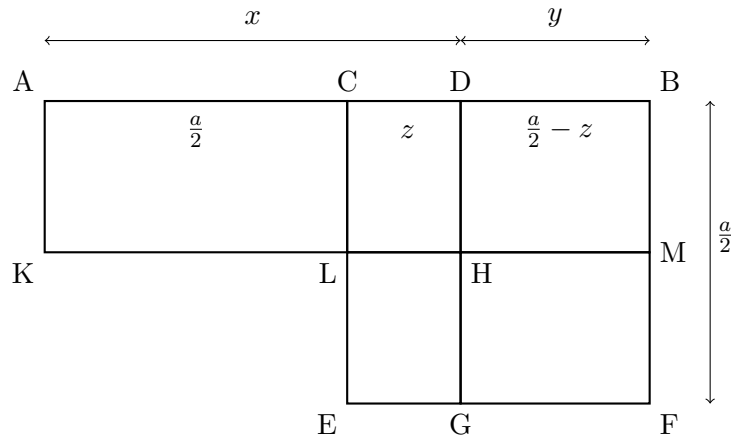
De plus, on retrouvera dans *Les Eléments* d'Euclide, qui souhaite entre autres y rassembler les savoirs d'une époque, un traitement géométrique des équations du second degré. En effet, bien que la résolution des équations du second degré n'y est pas traitée explicitement par Euclide, certaines propositions s'y rapportent (voir [37]). Par exemple, la proposition 5 du livre 2 affirme que si un segment  $[AB]$  est coupé en  $C$  en deux segments égaux :  $|AC| = |CB|$  et en segments inégaux en  $D$  alors la somme des aires du rectangle  $ADHK$  (figure 1.2) et du carré  $LHGE$  est égale à l'aire du carré  $CBFE$ .

La construction est la suivante :

- 1) couper le segment  $[AB]$  en son milieu  $C$  et en l'un quelconque de ses points  $D$ ;
- 2) construire ensuite le carré  $CBFE$ ;
- 3) tracer sa diagonale  $BE$ ;
- 4) tracer la parallèle  $d_1$  à  $BF$  et  $CE$  passant par  $D$ , soient  $H = d_1 \cap BE$  et  $G = EF \cap d_1$ ;
- 5) tracer la parallèle  $d_2$  à  $BC$  et  $EF$  passant par  $H$ , soient  $M = BF \cap d_2$  et  $L = CE \cap d_2$ ;
- 6) tracer la parallèle  $d_3$  à  $BF$  et  $CE$  passant par  $A$ , soit  $K = d_3 \cap d_2$ .

Si l'on comprend que les segments inégaux en lesquels le segment  $[AB]$ , de longueur fixée  $|AB| = a$ , est coupé sont inconnus :  $|AD| = x$  et  $|DB| = y$ , il apparaît que la proposition nous fournit la solution du système :

$$\begin{cases} x + y = a \\ x \cdot y = b \end{cases}$$

FIGURE 1.2 – Représentation issue du livre *Les Éléments* d'Euclide.

dans lequel la première égalité modélise la contrainte liée au découpage inégal du segment  $[AB]$  et la seconde modélise l'aire  $b$  du rectangle  $ADHK$ . La proposition nous fournit donc la solution des équations du second degré suivantes :

$$ax - x^2 = b \text{ ou } ay - y^2 = b,$$

selon la substitution effectuée. En effet, le segment  $|CD| = z = x - \frac{a}{2}$ . Dès lors, l'aire de  $ADBK$  est donnée par :

$$b = x \cdot y = \left(z + \frac{a}{2}\right) \cdot \left(\frac{a}{2} - z\right) = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - z^2$$

et

$$z = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}.$$

Ainsi,

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \text{ et } y = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}.$$

Cette proposition permet donc de résoudre n'importe quelle équation à coefficients réels positifs.

Le recours à la géométrie permettait aux Grecs de contourner l'attribution d'une mesure aux grandeurs en jeu, évitant ainsi le problème lié à la découverte de l'incommensurabilité de certaines grandeurs, tout en conservant un niveau de généralité souhaité.

### 1.3 Résolution des équations du troisième degré

La résolution des équations du troisième degré :  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ , peut être ramenée à la résolution des équations réduites :  $x^3 + px + q = 0$ ,  $p, q \in \mathbb{R}$  et  $p \neq 0$ . La méthode de résolution des équations du troisième degré repose encore sur une identité polynomiale, obtenue comme dans le cas quadratique, en complétant algébriquement le "cube

parfait" :

$$\begin{aligned}
 ax^3 + bx^2 + cx + d &= a \left( x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} \right) \\
 &= a \left[ \left( x^3 + 3\frac{b}{3a}x^2 + 3\frac{b^2}{9a^2}x + \frac{b^3}{27a^3} \right) - 3\frac{b^2}{9a^2}x - \frac{b^3}{27a^3} + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} \right] \\
 &= a \left[ \left( x^3 + 3\frac{b}{3a}x^2 + 3\frac{b^2}{9a^2}x + \frac{b^3}{27a^3} \right) + \frac{c}{a}x - 3\frac{b^2}{9a^2}x + \frac{d}{a} - \frac{b^3}{27a^3} \right] \\
 &= a \left[ \left( x + \frac{b}{3a} \right)^3 + \left( \frac{c}{a} - \frac{3b^2}{9a^2} \right)x + \frac{d}{a} - \frac{b^3}{27a^3} \right].
 \end{aligned}$$

Nous obtenons donc une expression équivalente qui ne présente pas de terme du second degré que nous pouvons réécrire sous la forme

$$X^3 + pX + q = 0,$$

où  $X = x + \frac{b}{3a}$ ,  $p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}$ , et  $q = \frac{d}{a} - \frac{b^3}{27a^3}$ , on obtient donc une équation dont la forme générale est la suivante (voir [17]) :

$$x^3 + px + q = 0.$$

Tout comme la complétion algébrique du "carré parfait" liée à la complétion géométrique d'un carré, celle du cube est issue d'une construction géométrique d'un cube. C'est d'ailleurs sur cette dernière que Cardan prend appui pour résoudre des équations du troisième degré dans son *Ars Magna* [7]. Prenons l'exemple de l'équation

$$x^3 + 6x = 20. \tag{1.1}$$

Cardan annonce que la solution est donnée par la différence entre les longueurs des côtés  $u$  et  $v$  de deux cubes, dont la différence  $v^3 - u^3$  des volumes est 20 et le produit  $u.v$  des longueurs de leurs côtés est le tiers de 6. Voici un extrait de *Ars Magna* proposé par Flament dans [17, p.20]) :

*Je suppose deux cubes AE et CL dont la différence soit 20, tels que le produit de leurs côtés AC et CK soit 2 (qui est le tiers de 6, nombre de choses); je dis que la différence de ces côtés AC et CK est la chose, ou que si CB égale CK, AB est l'estimation de la chose.*

Autrement dit, il s'agit de résoudre le système

$$\begin{cases} v^3 - u^3 = 20 & (= -q) \\ u.v = 2, & (= \frac{p}{3}) \end{cases}$$

avec  $x = v - u$ . Géométriquement, l'équation  $x^3 + 6x = 20$  revient à adjoindre au cube de côté  $x$  un solide de volume  $6x$ , de manière à ce que leur volume total soit de 20 unités.

L'idée initiale est de reconstituer un cube de côté  $v = x + u$  et, pour y parvenir, on analyse ce problème en supposant disposer déjà de ce cube (figure 1.4).

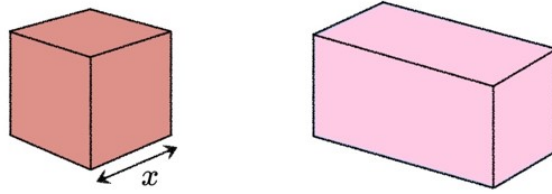


FIGURE 1.3 – Complétion du cube (I).

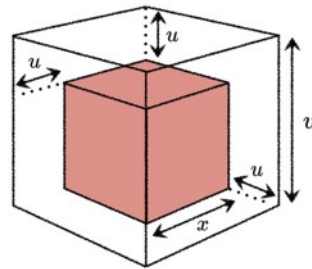


FIGURE 1.4 – Complétion du cube (II).

Le volume adjoint au cube de côté  $x$  peut être décomposé<sup>3</sup> en les 7 solides suivants, suggérés à la figure 1.5 :

- 1) trois parallélépipèdes rectangles dont deux des faces sont des carrés de côtés  $x$  et quatre rectangles de dimensions  $x, u$  ;
- 2) trois parallélépipèdes rectangles dont deux faces sont des carrés de côté  $u$  et quatre rectangles de côtés  $x, u$  ;
- 3) un cube de côté  $v$ .

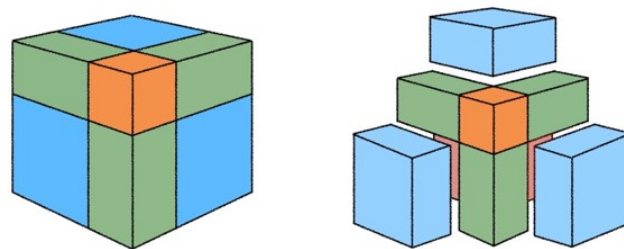


FIGURE 1.5 – Complétion du cube (III).

Il se fait que les 6 parallélépipèdes considérés ont un volume total donné par  $V = 3ux^2 + 3u^2x$ . Ces derniers peuvent être agencés de manière à former un parallélépipède de côtés  $x, x + u, 3u$ . La justification géométrique est suggérée à la figure 1.6 suivante :

---

3. Cette constatation empirique pourrait, bien entendu, être justifiée algébriquement ou géométriquement.



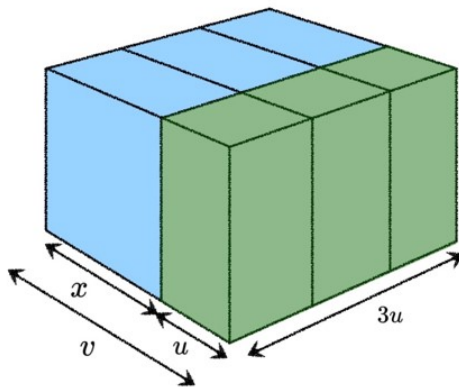


FIGURE 1.6 – Complétion du cube (IV).

alors que la justification algébrique tient dans l'équation

$$V = x(x + u)3u = 3ux^2 + 3u^2x.$$

En revenant à l'équation (1.1) considérée par Cardan, ce volume est celui qui a été ajouté au volume  $x^3$  du cube de côté  $x$ . Il est donc égal à  $6x$ . On peut en tirer la relation

$$V = 3uvx = 6x, \quad (1.2)$$

autrement dit :  $3uv = 6$ . On obtient de la sorte une équation liant  $u$  et  $v$ , à savoir

$$uv = 2.$$

Ces considérations géométriques fournissent ainsi les relations suivantes

$$\begin{cases} x + u & = & v \\ uv & = & 2 \\ x^3 + 6x + u^3 & = & 20 + u^3 \end{cases} \quad (1.3)$$

qui, si on considère la relation (1.2), on déduit le système

$$\begin{cases} x + u & = & v \\ u^3v^3 & = & 8 \\ v^3 & = & 20 + u^3 \end{cases} \quad (1.4)$$

Cette méthode de reconstitution géométrique du cube est à l'origine de la technique algébrique, dite de Cardan, qui est décrite en toute généralité, par exemple, dans [33]. D'un point de vue algébrique, cette méthode repose sur la considération du signe du réalisant  $\Delta = -(4p^3 + 27q^2)$  de l'équation étudiée  $x^3 + px + q = 0$ . Voir aussi le mémoire [27] pour quelques détails concernant la méthode de Cardan.

### 1.3.1 Le geste de Bombelli : un aperçu

Dans le contexte de la résolution d'équations telles que  $x^3 - 15x = 4$ , où ce réalisant est négatif et pour laquelle une recherche empirique conduit rapidement à une solution (ici  $x = 4$ ) Bombelli aura l'audace de prolonger la technique de Cardan. Ce geste de Bombelli conduira à un questionnement sur l'existence des nombres complexes : l'obtention de la réponse  $x = 4$  attendue après manipulation des racines carrées de nombres négatifs comme s'il s'agissait de

nombres réels pose la question de leur existence. Cette manipulation consiste en substance en ceci. En appliquant la méthode de Cardan, Bombelli trouve la solution suivante<sup>4</sup> :

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{\frac{4 \pm \sqrt{16 - \frac{4.3375}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{4 \mp \sqrt{16 - \frac{4.3375}{27}}}{2}} \\ &= \sqrt[3]{2 \pm \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 \mp \sqrt{-121}} \\ &= \sqrt[3]{2 \pm 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 \mp 11\sqrt{-1}} \end{aligned}$$

Ces racines cubiques peuvent être extraites, du moins dans le cas où  $a$  et  $b$  sont des entiers pour obtenir :

$$\sqrt[3]{2 \pm 11\sqrt{-1}} = 2 \pm \sqrt{-1}.$$

En effet, en supposant que l'on peut écrire ces expressions sous la forme  $a + b\sqrt{-1}$ , alors

$$\begin{aligned} (a + b\sqrt{-1})^3 &= a^3 + 3a^2b\sqrt{-1} + 3ab^2\sqrt{-1}^2 + b^3\sqrt{-1}^3 \\ &= a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)\sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Recherchons des valeurs de  $a$  et  $b$  telles que

$$\begin{cases} a^3 - 3ab^2 = 2 \\ 3a^2b - b^3 = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a.(a^2 - 3b^2) = 2 \\ b.(3a^2 - b^2) = 11 \end{cases}$$

On sait qu'une solution de l'équation  $x^3 - 15x - 4 = 0$  est  $x = 4$ . Il s'agit d'une solution entière, et la première équation du système équivalent obtenu nous donne que  $a$  est un diviseur de 2, la seconde montre que  $b$  est un diviseur de 11. Ce qui ne laisse pas énormément de possibilités, et l'on peut vérifier que  $a = 1, b = 1$  n'est pas solution du système, mais que  $a = 2, b = 1$  bien. Et, en effet,

$$\begin{aligned} (2 + \sqrt{-1})^3 &= 2^3 + 3.2^2\sqrt{-1} + 3.2(\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{-1})^3 \\ &= 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1} \\ &= 2 + 11\sqrt{-1}, \end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned} (2 - \sqrt{-1})^3 &= 2^3 - 3.2^2\sqrt{-1} + 3.2(\sqrt{-1})^2 - (\sqrt{-1})^3 \\ &= 8 - 12\sqrt{-1} - 6 + \sqrt{-1} \\ &= 2 - 11\sqrt{-1} \end{aligned}$$

La solution s'écrit donc :

$$x = 2 \pm 11\sqrt{-1} + 2 \mp 11\sqrt{-1} = 4$$

Ainsi, on obtient que  $x = 4$  est bien solution de l'équation  $x^3 - 15x - 4 = 0$ . Le geste de Bombelli met en lumière la nécessité d'un travail sur les nombres complexes, même lorsque les racines étudiées sont réelles.

## 1.4 Résolution des équations du quatrième degré

Peu de temps après la découverte des solutions pour les équations cubiques, Ludovico Ferrari (1522- 1565), un élève de Cardan, a trouvé la solution aux équations quadratiques, qui a été présentée pour la première fois dans le livre *Ars Magna* de Cardan [7]. La méthode de Ferrari

4. La discussion qui suit est tirée de [17] p.494 où la notation  $\sqrt{-1}$  est utilisée, disons, en hommage à Bombelli.

repose principalement sur la transformation des équations (voir chapitre 3 du livre [37] de J.P Tignol). Considérons l'équation de degré 4 suivante :

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$

où  $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ , et  $a \neq 0$ . De la même manière que pour les équations du troisième degré, elle peut être exprimée sous la forme réduite :

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

avec  $p, q, r \in \mathbb{R}$ . L'étape suivante consiste à regrouper les termes linéaires dans le membre de droite et compléter le carré parfait dans le membre de gauche. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} x^4 + px^2 &= -qx - r \\ \Leftrightarrow x^4 + px^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^2 &= -qx - r + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{p}{2}\right)^2 &= -qx - r + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

L'idée est alors d'ajouter une quantité  $u$  dans l'expression du carré à gauche en compensant également du côté droit de telle sorte à ce que le membre de droite devienne également un carré. De cette manière, Ferrari égale les aires de deux carrés mais uniquement en ayant recours à l'arithmétique et non plus à des développements géométriques.

$$\begin{aligned} \left(x^2 + \frac{p}{2} + u\right)^2 &= -qx - r + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + 2ux^2 + pu + u^2 \\ &= 2ux^2 - qx - r + u^2 + pu + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \\ &= \left(\sqrt{2u}x - \frac{q}{2\sqrt{2u}}\right)^2 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \left(\frac{-q}{2\sqrt{2u}}\right)^2 &= -r + u^2 + pu + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{q^2}{8u} = -r + u^2 + pu + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow 8u^3 + 8u^2p + 8\left(\left(\frac{p}{2}\right)^2 - r\right)u - q^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 8u^3 + 8u^2p + (2p^2 - 8r)u - q^2 = 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, en résolvant cette équation cubique, nous pouvons trouver une quantité  $u$  pour laquelle l'équation suivante est vérifiée :

$$-qx - r + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + 2ux^2 + pu + u^2 = \left(\sqrt{2u}x - \frac{q}{2\sqrt{2u}}\right)^2$$

Ainsi, en revenant à l'équation

$$\left(x^2 + \frac{p}{2} + u\right)^2 = \left(\sqrt{2u}x - \frac{q}{2\sqrt{2u}}\right)^2$$

on obtient les égalités suivantes :

$$x^2 + \frac{p}{2} + u = \sqrt{2u}x - \frac{q}{2\sqrt{2u}} \text{ ou } x^2 + \frac{p}{2} + u = -\sqrt{2u}x + \frac{q}{2\sqrt{2u}}$$

Les valeurs de  $x$  sont alors obtenues en résolvant ces deux équations du second degré. Effectivement, d'une part on a l'égalité

$$x^2 - \sqrt{2u}x + u + \frac{p}{2} + \frac{q}{2\sqrt{2u}} = 0$$

donc

$$\Delta_1 = 2u - 4u - 2p - 2\frac{q}{2\sqrt{2u}} = -2(u + p + \frac{q}{\sqrt{2u}})$$

ce qui implique finalement

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{2u} \pm \sqrt{-2(u + p + \frac{q}{\sqrt{2u}})}}{2}$$

et d'autre part, on a l'égalité

$$x^2 + \sqrt{2u}x + u + \frac{p}{2} - \frac{q}{2\sqrt{2u}} = 0$$

donc

$$\Delta_2 = 2u - 4u - 2p + 2\frac{q}{2\sqrt{2u}} = -2(u + p - \frac{q}{\sqrt{2u}})$$

ce qui implique finalement

$$x_{3,4} = \frac{-\sqrt{2u} \pm \sqrt{-2(u + p - \frac{q}{\sqrt{2u}})}}{2}.$$

Remarquons que nous avons supposé dans nos calculs que  $u \neq 0$ , cependant il est tout de même important de discuter du cas où  $u = 0$  serait racine de l'équation :

$$8u^3 + 8u^2p + (2p^2 - 8r)u - q^2 = 0.$$

Si  $u = 0$ , cette équation implique forcément que  $q = 0$  et l'équation initiale est alors donnée par

$$x^4 + px^2 + r = 0$$

qui est une équation du second degré que nous pouvons facilement résoudre. En effet,

$$\Delta = p^2 - 4r$$

$$(x^2)_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4r}}{2}.$$

Ainsi,  $x_1$  et  $x_2$  sont donnés par les valeurs suivantes :

$$x_1 = \sqrt{\frac{-p + \sqrt{p^2 - 4r}}{2}} \text{ ou } x_2 = -\sqrt{\frac{-p + \sqrt{p^2 - 4r}}{2}}$$

et

$$x_3 = \sqrt{\frac{-p - \sqrt{p^2 - 4r}}{2}} \text{ ou } x_4 = -\sqrt{\frac{-p - \sqrt{p^2 - 4r}}{2}}.$$

Les solutions de l'équation initiales sont alors données par :

$$z_1 = \sqrt{\frac{-p + \sqrt{p^2 - 4r}}{2}} - \frac{a}{4}$$

$$z_2 = -\sqrt{\frac{-p + \sqrt{p^2 - 4r}}{2}} - \frac{a}{4}$$

$$z_3 = \sqrt{\frac{-p - \sqrt{p^2 - 4r}}{2}} - \frac{a}{4}$$

$$z_4 = -\sqrt{\frac{-p - \sqrt{p^2 - 4r}}{2}} - \frac{a}{4}$$

En résumé, la méthode de Ferrari nous donne les solutions de l'équation

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

pour autant que  $p$ ,  $q$  et  $r$  soient définis de la manière ci-dessus et tant que  $u$  est solutions de l'équation

$$8u^3 + 8u^2p + (2p^2 - 8r)u - q^2 = 0.$$

Deux cas sont alors possibles en fonction de si  $q$  est non nul ou pas.

- si  $q \neq 0$  : les solutions de l'équation sont alors données par

$$z_1 = x_1 - \frac{a}{4} = \sqrt{\frac{u}{2}} + \sqrt{-\frac{u}{2} - \frac{p}{2} - \frac{q}{2\sqrt{2u}}} - \frac{a}{4}$$

$$z_2 = x_2 - \frac{a}{4} = \sqrt{\frac{u}{2}} - \sqrt{-\frac{u}{2} - \frac{p}{2} - \frac{q}{2\sqrt{2u}}} - \frac{a}{4}$$

$$z_3 = x_3 - \frac{a}{4} = -\sqrt{\frac{u}{2}} + \sqrt{-\frac{u}{2} - \frac{p}{2} - \frac{q}{2\sqrt{2u}}} - \frac{a}{4}$$

$$z_4 = x_4 - \frac{a}{4} = -\sqrt{\frac{u}{2}} - \sqrt{-\frac{u}{2} - \frac{p}{2} - \frac{q}{2\sqrt{2u}}} - \frac{a}{4}$$

- si  $q = 0$  : les solutions de l'équation sont alors données par :

$$z_1 = \sqrt{\frac{-p + \sqrt{p^2 - 4r}}{2}} - \frac{a}{4}$$

$$z_2 = -\sqrt{\frac{-p + \sqrt{p^2 - 4r}}{2}} - \frac{a}{4}$$

$$z_3 = \sqrt{\frac{-p - \sqrt{p^2 - 4r}}{2}} - \frac{a}{4}$$

$$z_4 = -\sqrt{\frac{-p - \sqrt{p^2 - 4r}}{2}} - \frac{a}{4}.$$

Deuxième partie

La thèse de Gauss



# Remarques préliminaires

Cette deuxième partie du mémoire est dédiée à une analyse approfondie du Théorème Fondamental de l'Algèbre, abordé à travers une perspective historique et mathématique. Dans la première partie, nous avons fait un rappel du contexte historique entourant l'évolution de l'étude des équations algébriques, notamment celles de degré 1, 2, 3 et 4, et de leur résolution par radicaux. Par ailleurs, l'annexe de ce mémoire comprend un chapitre détaillé 8, qui explore l'histoire du Théorème Fondamental de l'Algèbre et examine les avancées successives tout en mettant en lumière les contributions des principaux mathématiciens de l'époque.

**Théorème 1 (TFA).** *Tout polynôme  $P$  non constant à coefficients complexes admet au moins une racine dans le corps  $\mathbb{C}$  des nombres complexes<sup>5</sup>.*

Remarquons que ce théorème nous renseigne sur l'existence de solution sans pour autant nous donner des formules pour résoudre nos équations.

## Équivalence des différentes formulations du TFA

Le Théorème Fondamental de l'Algèbre se prête à plusieurs formulations. La proposition suivante met en lumière l'équivalence de plusieurs de ces énoncés, soulignant ainsi la richesse et la profondeur de ce théorème fondamental [2] :

**Proposition 1.** *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- 1) *Le corps  $\mathbb{C}$  est algébriquement clos.*
- 2) *Tout polynôme à coefficients complexes est scindé<sup>6</sup>.*
- 3) *Tout polynôme non constant à coefficients réels admet au moins une racine complexe.*
- 4) *Les polynômes irréductibles à coefficients réels sont exactement les polynômes de degré 1, et les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif.*
- 5) *Tout polynôme non constant à coefficients réels s'écrit comme un produit de polynômes à coefficients réels de degré 1 ou 2.*

*Démonstration.*

- 1) **1**  $\Rightarrow$  **2** : Procédons par récurrence sur le degré du polynôme. Pour le cas de base, on constate que si  $n = 0$  alors il n'y a rien à démontrer. Supposons alors que le résultat soit vérifié pour tout polynôme de degré  $n$  et montrons qu'il l'est toujours pour un polynôme  $P$  de degré  $n+1$ . Par 1, on sait qu'il existe  $\alpha$ , une racine du polynôme  $P$ . Alors le polynôme peut s'écrire sous la forme  $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$  où  $Q$  est un polynôme de degré  $n$ . En utilisant l'hypothèse de récurrence, on sait que le polynôme  $Q$  est scindé ce qui implique que  $P$  est également scindé.

---

5. Cette propriété fait du corps  $\mathbb{C}$  un corps algébriquement clos.

6. Cela signifie que tout polynôme  $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$  de degré  $n$  et à coefficients complexes peut s'écrire sous la forme  $a_n(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n)$  où  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  sont les racines du polynôme.



- 2) **2**  $\Rightarrow$  **5** : Par hypothèse, on sait que tout polynôme  $P$  à coefficients réels est scindé sur  $\mathbb{C}$ . Supposons que  $\alpha$  soit une racine complexe non réelle du polynôme  $P$  alors  $\bar{\alpha}$  qui est le conjugué de  $\alpha$  est aussi une racine de  $P$  de même ordre de multiplicité. Or,  $(x - \alpha)(x - \bar{\alpha})$  est à coefficients réels donc on obtient le point 5 en regroupant les termes pour chaque racine complexe.
- 3) **5**  $\Rightarrow$  **4** : Par le point 5, on sait que si  $P$  est un polynôme irréductible, il est de degré 1 ou 2. S'il est de degré 1, alors, on obtient directement qu'il est irréductible. Par contre, s'il est de degré 2 il est irréductible sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si son discriminant est strictement négatif.
- 4) **4**  $\Rightarrow$  **3** : Un polynôme  $P$  non constant à coefficients réels admet au moins un diviseur  $R$  irréductible sur  $\mathbb{R}$ . Or, par le point 4, on sait que  $R$  est un polynôme de degré 1 ou 2. Cela implique que  $R$  admet une racine complexe qui est alors aussi une racine du polynôme  $P$ .
- 5) **3**  $\Rightarrow$  **1** : Considérons  $P(x)$  un polynôme à coefficients complexes ainsi que  $P^*(x)$  le polynôme obtenu en remplaçant chaque coefficient de  $P(x)$  par son conjugué. Alors,  $P(x)P^*(x) = R(x)$  où  $R(x)$  est un polynôme à coefficients réels. Par le point 3, cela implique que  $R(x)$  admet une racine complexe  $\alpha$  et donc on obtient que  $P(\alpha)P^*(\alpha) = 0$ . Si  $\alpha$  est une racine de  $P$  alors on obtient directement le point 1. En revanche, si  $\alpha$  n'est pas une racine de  $P$ , alors cela implique que  $P^*(\alpha) = 0$ , ce qui donne  $P(\bar{\alpha}) = P^*(\alpha) = \bar{0} = 0$ . Ce qui prouve également le point 1.

□

Le premier chapitre de cette deuxième partie est consacré à une analyse détaillée et une réécriture moderne de la première démonstration du Théorème Fondamental de l'Algèbre, réalisée par Carl Friedrich Gauss en 1799 dans sa thèse intitulée "*Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reals primi vel secundi gradus resolvi posse*"<sup>7</sup> [22]. La thèse originale de Gauss rédigée en latin est disponible dans l'annexe de ce mémoire au chapitre 5. Cette analyse vise à examiner la méthode employée par Gauss pour prouver que tout polynôme à coefficients réels peut être décomposé en facteurs de degré un ou deux.

Au cours de cette étude, nous soulignerons que Gauss lui-même a admis que certaines parties de sa démonstration n'étaient pas pleinement justifiées. En effet, il a reconnu l'existence de lacunes dans son raisonnement et a promis d'apporter une preuve supplémentaire pour lever toute ambiguïté, bien qu'il ne l'ait jamais fournie. Gauss a exprimé cette promesse dans une note de bas de page de sa thèse (voir [22][p.27]), où il écrit :

*Bien que je sache, personne n'a soulevé de doutes à ce sujet. Cependant, si quelqu'un exigeait la preuve, je m'engage à fournir une démonstration qui ne laisserait place à aucun doute, à une autre occasion... (Gauss, 1799)*

C'est seulement en 1920 qu'une justification complète de l'approche de Gauss a été apportée par le mathématicien A. Ostrowski [23]. Ostrowski a réussi à combler les lacunes laissées par Gauss, fournissant ainsi une démonstration complète et rigoureuse du Théorème Fondamental de l'Algèbre. Dans le deuxième chapitre, nous nous intéresserons aux travaux de Basu et Velleman [5], réalisés en 2017. Ces mathématiciens ont proposé une approche élémentaire pour compléter la preuve initiale de Gauss, clarifiant et simplifiant certains aspects de la démonstration.

---

7. Nouvelle démonstration du théorème : toute fonction algébrique entière d'une variable est décomposable en facteurs réels du premier ou du second degré.

## Chapitre 2

# Analyse de la thèse de Gauss (1799)

*Probe itaque iis, quae hucusque exposita sunt, perpensis, demonstrationem nouam theorematis grauissimi ex principiis omnino diuersis petitam peritis haud ingratam fore spero, quam exponere statim agredior.*

---

Gauss, 1799

Dans l'introduction de sa thèse doctorale de 1799 [22], Gauss passe en revue les tentatives de démonstration de plusieurs mathématiciens renommés tels que d'Alembert, Euler, Foncenex et Lagrange, en soulignant les failles et les lacunes de chacune de leurs preuves. Gauss critique minutieusement les démonstrations de ses prédécesseurs, cherchant à établir une nouvelle démonstration rigoureuse. Gauss fournit alors une première démonstration du Théorème Fondamental de l'Algèbre en 1799 dont l'énoncé est le titre de sa thèse<sup>1</sup> :

**Théorème 2.** *Toute fonction algébrique entière d'une variable est décomposable en facteurs réels du premier ou du second degré.*

Dans ce chapitre, nous entreprendrons une analyse approfondie de la démonstration de Gauss, en la revisitant à la lumière des cours de mathématiques enseignés dans un cursus standard de mathématiques à l'ULiège.

La première étape consiste à examiner le théorème de factorisation des polynômes à coefficients réels, tel qu'énoncé par Gauss. Ce théorème s'appuie sur l'existence d'un couple de paramètres  $(r, \phi)$ , que Gauss a démontrée par une approche géométrique. Notre objectif sera de reformuler cette démonstration dans un cadre contemporain, plus rigoureux, en introduisant de nouvelles notations. Pour ce faire, afin d'approfondir l'analyse et la compréhension de la preuve de Gauss, nous nous sommes référés aux articles [19] et [28].

Par la suite, nous explorerons en détail l'approche géométrique de Gauss concernant l'existence des racines en question. Cette méthode repose sur la représentation polaire de certaines courbes algébriques et leur intersection dans le plan complexe : il s'agit du cœur de la démonstration par Gauss de l'existence des racines d'un polynôme à coefficients réels.

Enfin, nous mettrons en lumière certaines des limitations de la démonstration de Gauss, reconnues par les mathématiciens ultérieurs ( et par Gauss lui-même), en soulignant les critiques liées à sa dépendance à l'égard des considérations géométriques. En complément, nous aborderons des perspectives modernes sur cette preuve, incluant une reformulation en termes de nombres complexes, et nous mettrons en avant les contributions plus contemporaines, notamment celles d'A. Ostrowski, qui ont permis de combler les lacunes laissées par Gauss.

---

0. Par conséquent, compte tenu de ce qui a été expliqué jusqu'à présent, j'espère que la nouvelle démonstration du théorème le plus important à partir de principes complètement différents ne sera pas inacceptable pour les experts, ce que je vais expliquer immédiatement.

1. Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reals primi vel secundi gradus resolvi posse.

## 2.1 Un théorème de factorisation

La démonstration de Gauss se caractérise par une approche simple. Elle débute par l'énoncé d'un théorème de factorisation des polynômes à coefficients réels (voir [22, p.21] reproduite au chapitre 5 de l'annexe). La preuve de ce théorème repose sur un lemme fondamental, qui constitue le point clé de l'argumentation. L'assertion principale du théorème s'appuie sur l'existence d'un couple  $(r, \phi)$ , dont Gauss démontre ensuite l'existence par une méthode géométrique que nous analyserons dans la section suivante.

**Lemme 1.** *Pour tout  $\phi \in \mathbb{R}$  et pour tout naturel  $m$  supérieur ou égal à 2, on a la factorisation suivante*

$$\sin(\phi)x^m - \sin(m\phi)x + \sin((m-1)\phi) = (x^2 - 2\cos(\phi)x + 1)S_m(\phi, x) \quad (2.1)$$

où

$$S_m(\phi, x) = \sin(\phi)x^{m-2} + \sin(2\phi)x^{m-3} + \dots + \sin((m-2)\phi)x + \sin((m-1)\phi).$$

*Démonstration.* Soit  $\phi \in \mathbb{R}$ . Pour prouver le lemme, on procède par récurrence sur  $m$ .

1) Pour le cas de base, on constate que

$$\sin(\phi)x^2 - \sin(2\phi)x + \sin(\phi) = \sin(\phi)(x^2 - 2\cos(\phi)x + 1).$$

2) Supposons que l'égalité (2.1) soit satisfaite. Vu que

$$S_{m+1}(\phi, x) = xS_m(\phi, x) + \sin(m\phi),$$

on obtient directement

$$\begin{aligned} (x^2 - 2\cos(\phi)x + 1)S_{m+1}(\phi, x) &= (x^2 - 2\cos(\phi)x + 1)(xS_m(\phi, x) + \sin(m\phi)) \\ &= x(x^2 - 2\cos(\phi)x + 1)S_m(\phi, x) + (x^2 - 2\cos(\phi)x + 1)\sin(m\phi) \\ &= x(\sin(\phi)x^m - \sin(m\phi)x + \sin((m-1)\phi)) \\ &\quad + (x^2 - 2\cos(\phi)x + 1)\sin(m\phi) \\ &= \sin(\phi)x^{m+1} + (\sin((m-1)\phi) - 2\cos(\phi)\sin(m\phi))x + \sin(m\phi) \\ &= \sin(\phi)x^{m+1} - \sin((m+1)\phi)x + \sin(m\phi) \end{aligned}$$

parce que

$$\begin{aligned} \sin((m-1)\phi) - 2\cos(\phi)\sin(m\phi) &= \sin(m\phi)\cos(\phi) - \cos(m\phi)\sin(\phi) - 2\cos(\phi)\sin(m\phi) \\ &= -\sin(m\phi)\cos(\phi) - \cos(m\phi)\sin(\phi) \\ &= -\sin((m+1)\phi). \end{aligned}$$

□

Voici une reformulation possible du théorème de factorisation énoncé par Gauss (voir [22, p.20] reproduite au chapitre 5 de l'annexe) afin de l'exprimer de manière plus rigoureuse, en évitant les ambiguïtés éventuelles de la formulation originale et en contournant certaines limitations des notations employées par Gauss<sup>2</sup> :

**Théorème 3.** *Soit  $P(x) = \sum_{j=0}^d a_j x^j \in \mathbb{R}[x]$  un polynôme à coefficients réels de degré  $d$ . Supposons qu'il existe  $r_0 \in \mathbb{R}^+$ ,  $\phi_0 \in [0, 2\pi[$  tels que*

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^d a_j r_0^j \cos(j\phi_0) = 0 \\ \sum_{j=1}^d a_j r_0^j \sin(j\phi_0) = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

2. Voir [22] ainsi que l'article de Jean-Pierre Friedelmeyer [19] pour d'autres détails.

alors  $P(x)$  est divisible par

$$\begin{cases} x^2 - 2r_0 \cos(\phi_0)x + r_0^2 & \text{si } r_0 \sin(\phi_0) \neq 0 \\ x - r_0 \cos(\phi_0) & \text{si } r_0 \sin(\phi_0) = 0. \end{cases}$$

*Démonstration.* Soient  $r_0 \in \mathbb{R}^+$ ,  $\phi_0 \in [0, 2\pi[$  satisfaisant les conditions de l'énoncé. Supposons  $r_0 = 0$ . Alors on a

$$P(r_0 \cos(\phi_0)) = \sum_{j=0}^d a_j r_0^j \cos(j\phi_0) = 0$$

par hypothèse. Donc  $a_0 = 0$  et on obtient  $P(x) = x \sum_{j=1}^d a_j x^{j-1}$ . Le résultat est ainsi établi dans ce cas. On peut donc supposer  $r_0 \neq 0$  dans la suite de la preuve. Pour simplifier la formulation de la preuve, notons

$$\begin{cases} R_P(r_0, \phi_0) & = \sum_{j=0}^d a_j r_0^j \cos(j\phi_0) \\ I_P(r_0, \phi_0) & = \sum_{j=1}^d a_j r_0^j \sin(j\phi_0) \end{cases}$$

et posons

$$\mathcal{P}_d(r_0, \phi_0, x) = r_0 \sin(\phi_0)P(x) - I_P(r_0, \phi_0)x + r_0 \cos(\phi_0)I_P(r_0, \phi_0) - r_0 \sin(\phi_0)R_P(r_0, \phi_0).$$

Alors, on déduit

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_d(r_0, \phi_0, x) &= r_0 \sin(\phi_0) \sum_{j=1}^d a_j x^j - \sum_{j=1}^d a_j r_0^j \sin(j\phi_0)x + \sum_{j=1}^d a_j r_0^{j+1} \sin(j\phi_0) \cos(\phi_0) \\ &\quad - \sum_{j=1}^d a_j r_0^{j+1} \cos(j\phi_0) \sin(\phi_0) \\ &= \sum_{j=1}^d a_j (r_0 \sin(\phi_0)x^j - r_0^j \sin(j\phi_0)x) + \sum_{j=1}^d a_j r_0^{j+1} \sin((j-1)\phi_0) \\ &= \sum_{j=1}^d a_j (r_0 \sin(\phi_0)x^j - r_0^j \sin(j\phi_0)x + r_0^{j+1} \sin((j-1)\phi_0)) \\ &= \sum_{j=1}^d a_j r_0^{j+1} \left( \sin(\phi_0) \left(\frac{x}{r_0}\right)^j - \sin(j\phi_0) \left(\frac{x}{r_0}\right) + \sin((j-1)\phi_0) \right). \end{aligned}$$

Le lemme précédent garantit que le membre de droite de l'égalité précédente est divisible par

$$\left(\frac{x}{r_0}\right)^2 - 2 \cos(\phi_0) \frac{x}{r_0} + 1.$$

On conclut directement : en effet, si  $r_0 \sin(\phi_0) \neq 0$ , on déduit que

$$P(x) = \frac{\mathcal{P}_d(r_0, \phi_0, x)}{r_0 \sin(\phi_0)}$$

est divisible par  $x^2 - 2 \cos(\phi_0)r_0x + r_0^2$ . Par ailleurs, si  $\sin(\phi_0) = 0$ , on déduit  $\cos(m\phi_0) = (\pm 1)^m = \cos^m(\phi_0)$  si bien que

$$P(r_0 \cos(\phi_0)) = \sum_{j=0}^m a_j r_0^j \cos(\phi_0)^j = \sum_{j=0}^m a_j r_0^j \cos(j\phi_0) = 0$$

par hypothèse et le polynôme est divisible par  $x - r_0 \cos(\phi_0)$ . □

## 2.2 Approche géométrique de l'existence d'une racine

Étant donné un polynôme  $P \in \mathbb{R}[x]$  de degré  $d$ , le théorème 3 dépend de l'existence de deux nombres  $r_0, \phi_0$  satisfaisant les hypothèses (2.2). L'objectif des développements suivant de la thèse de Gauss - voir [22, p.22-31]) disponible dans la chapitre 5 de l'annexe - est de démontrer qu'un tel couple de nombres  $r_0, \phi_0$  existe toujours quelque soit le polynôme à coefficients réels choisi initialement<sup>3</sup>. L'approche de Gauss est dite géométrique parce que ce couple de nombres est, in fine, obtenu comme intersection de deux courbes algébriques du plan. Dans cette section, nous présentons la démarches de Gauss en comblant autant que possible les lacunes de sa preuve initiale.

Les résultats de la section précédente montrent que Gauss utilise systématiquement la forme polaire des nombres complexes, bien qu'il semble s'efforcer de ne pas l'employer ouvertement, voire de la cacher. Cependant, la définition des sous-ensembles en termes de coordonnées polaires, telle que présentée par Gauss, présente des ambiguïtés, particulièrement en ce qui concerne le point  $(0, 0)$ .

**Definition 1.** Soit  $P \in \mathbb{R}[x]$  un polynôme à coefficient réels. Alors on définit les fonctions

$$\begin{cases} R_P(r, \phi) : \mathbb{R}^+ \times [0; 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R} & ; (r, \phi) \rightarrow \sum_{j=0}^d a_j r^j \cos(j\phi) \\ I_P(r, \phi) : \mathbb{R}^+ \times [0; 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R} & ; (r, \phi) \rightarrow \sum_{j=1}^d a_j r^j \sin(j\phi) \end{cases}$$

où  $\mathbb{R}^+ = ]0, +\infty[$ . On définit les sous-ensembles  $\mathcal{R}_P, \mathcal{I}_P \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  en tant que graphes des fonctions  $R_P \circ \varphi, I_P \circ \varphi$  où la fonction  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0; +\infty[ \times [0; 2\pi[$  désigne le passage aux coordonnées polaires, i.e

$$\mathcal{R}_P = \{(r \cos(\phi), r \sin(\phi), R_P(r, \phi)) : (r, \phi) \in \mathbb{R}^+ \times [0; 2\pi[\} \quad (2.3)$$

et

$$\mathcal{I}_P = \{(r \cos(\phi), r \sin(\phi), I_P(r, \phi)) : (r, \phi) \in \mathbb{R}^+ \times [0; 2\pi[\}. \quad (2.4)$$

La fonction  $\varphi$  n'est pas bien définie en  $(0, 0)$ . En coordonnées polaires, ce point est caractérisé par un rayon  $r = 0$ , mais l'angle  $\phi$  reste indéterminé car toutes les valeurs d'angles convergent vers ce même point. Cette situation rend les fonctions  $R_P$  et  $I_P$  ambiguës en  $(0, 0)$  puisque  $\phi$  n'a pas de valeur unique en ce point. Même si, théoriquement, le choix de  $\phi$  n'a pas de conséquence directe lorsque  $r = 0$  (puisque toutes les valeurs de  $\phi$  correspondent au même point en coordonnées cartésiennes), cette approche alourdit inutilement la définition. Il est alors plus simple et plus naturel de définir ces sous-ensembles directement en utilisant les coordonnées cartésiennes.

Dès lors, nous allons commencer par définir ces deux sous-ensembles en coordonnées cartésiennes qui sont naturellement associées au polynôme  $P$ , ce qui diffère de l'approche de Gauss dans sa thèse. Ensuite, nous établirons le lien avec la description polaire proposée par Gauss. Dans son travail, Gauss affirme sans démonstration que les sous-ensembles considérées sont continus. Il est important de noter qu'à son époque, cette notion n'était pas encore clairement définie et qu'il n'existait pas de définition précise de la notion de continuité. Pour formuler ce résultat de manière rigoureuse, la définition utilisant les coordonnées cartésiennes nous facilitera la tâche.

---

3. Pour une interprétation complexe de l'existence d'une telle paire de nombres  $(r_0, \phi_0)$ , voir la section 2.5.1.

**Definition 2.** Soit  $P(x) = \sum_{j=0}^d a_j x^j \in \mathbb{R}[x]$ . Alors on définit les fonctions

$$\tilde{R}_P(x, y) = \sum_{j=0}^d a_j \sum_{\substack{k \in \{0, \dots, j\} \\ k \text{ pair}}} C_j^k (-1)^{\frac{k}{2}} x^{j-k} y^k$$

et

$$\tilde{I}_P(x, y) = \sum_{j=1}^d a_j \sum_{\substack{k \in \{1, \dots, j\} \\ k \text{ impair}}} C_j^k (-1)^{\frac{k-1}{2}} x^{j-k} y^k.$$

On définit les sous-ensembles  $\mathcal{R}_P, \mathcal{I}_P \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  en tant que graphes des fonctions  $R_P$  et  $I_P$  respectivement :

$$\tilde{\mathcal{R}}_P = \{(x, y, \tilde{R}_P(x, y)) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

et

$$\tilde{\mathcal{I}}_P = \{(x, y, \tilde{I}_P(x, y)) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

**Lemme 2.** Soit  $P = \sum_{j=0}^d a_j x^j \in \mathbb{R}[x]$  un polynôme à coefficients réels de degré  $d$ . Alors on a

$$\begin{cases} \tilde{R}_P(r \cos(\phi), r \sin(\phi)) &= R_P(r, \phi) \\ \tilde{I}_P(r \cos(\phi), r \sin(\phi)) &= I_P(r, \phi) \end{cases} \quad (2.5)$$

pour tous  $r \in \mathbb{R}^+, \phi \in \mathbb{R}^4$ . En particulier, on a

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{R}}_P &= \mathcal{R}_P \cup \{(0, 0, \tilde{R}_P(0, 0))\} \\ \tilde{\mathcal{I}}_P &= \mathcal{I}_P \cup \{(0, 0, \tilde{I}_P(0, 0))\}. \end{cases}$$

De plus, pour tout  $r \in \mathbb{R}^+$ , il existe des polynômes  $p_r$  et  $q_r$  de degré au plus  $d$  et  $d-1$  respectivement tels que

$$\begin{cases} R_P(r, \phi) &= p_r(\cos(\phi)) \\ I_P(r, \phi) &= \sin(\phi) q_r(\cos(\phi)). \end{cases} \quad (2.6)$$

*Démonstration.* Il suffit de vérifier. En effet, soient  $r \in \mathbb{R}^+, \phi \in \mathbb{R}$ . Alors on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{R}_P(r \cos(\phi), r \sin(\phi)) &= \sum_{j=0}^d a_j \sum_{\substack{k \in \{0, \dots, j\} \\ k \text{ pair}}} C_j^k (-1)^{\frac{k}{2}} (r \cos(\phi))^{j-k} (r \sin(\phi))^k \\ &= \sum_{j=0}^d a_j r^j \sum_{\substack{k \in \{0, \dots, j\} \\ k \text{ pair}}} C_j^k (-1)^{\frac{k}{2}} \cos^{j-k}(\phi) \sin^k(\phi) \\ &= \sum_{j=0}^d a_j r^j \cos(j\phi) = R_P(r, \phi) \end{aligned}$$

vu la proposition 9 (voir chapitre 6 de l'annexe concernant les polynômes de Tchebychev) et les

---

4. Nous utiliserons la notation  $\mathbb{R}^+$  pour désigner l'ensemble des réels positifs, c'est-à-dire  $\mathbb{R}^+ = ]0, +\infty[$ .

définitions 1 et 2. De même, en utilisant une nouvelle fois la proposition 9, on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{I}_P(r \cos(\phi), r \sin(\phi)) &= \sum_{j=1}^d a_j \sum_{\substack{k \in \{1, \dots, j\} \\ k \text{ impair}}} C_j^k (-1)^{\frac{k-1}{2}} (r \cos(\phi))^{j-k} (r \sin(\phi))^k \\ &= \sum_{j=1}^d a_j r^j \sum_{\substack{k \in \{1, \dots, j\} \\ k \text{ impair}}} C_j^k (-1)^{\frac{k-1}{2}} \cos^{j-k}(\phi) \sin^k(\phi) \\ &= \sum_{j=1}^d a_j r^j \sin(j\phi) = I_P(r, \phi). \end{aligned}$$

Pour conclure, on obtient d'abord

$$R_P(r, \phi) = \sum_{j=0}^d a_j r^j \cos(j\phi) = \sum_{j=0}^d a_j r^j T_j(\cos(\phi))$$

où  $T_j$  est le  $j$ -ème polynôme de Tchebychev de première espèce (voir l'annexe 6 et le théorème 9) et encore

$$I_P(r, \phi) = \sum_{j=1}^d a_j r^j \sin(j\phi) = \sin(\phi) \sum_{j=1}^d a_j r^j U_j(\cos(\phi)).$$

où  $U_j$  est le  $j$ -ème polynôme de Tchebychev de deuxième espèce.  $\square$

En parallèle de notre analyse de la démonstration, nous allons étudier systématiquement un exemple concret pour illustrer les idées de Gauss ainsi que les précisions que nous apportons.

**Exemple.** Considérons le polynôme suivant :

$$P(x) = x^4 - 2x^2 + 3x + 10$$

En utilisant la définition en coordonnées polaires, les sous-ensembles  $R_P$  et  $I_P$  sont données par :

$$R_P(r, \phi) = r^4 \cos(4\phi) - 2r^2 \cos(2\phi) + 3r \cos(\phi) + 10.$$

$$I_P(r, \phi) = r^4 \sin(4\phi) - 2r^2 \sin(2\phi) + 3r \sin(\phi),$$

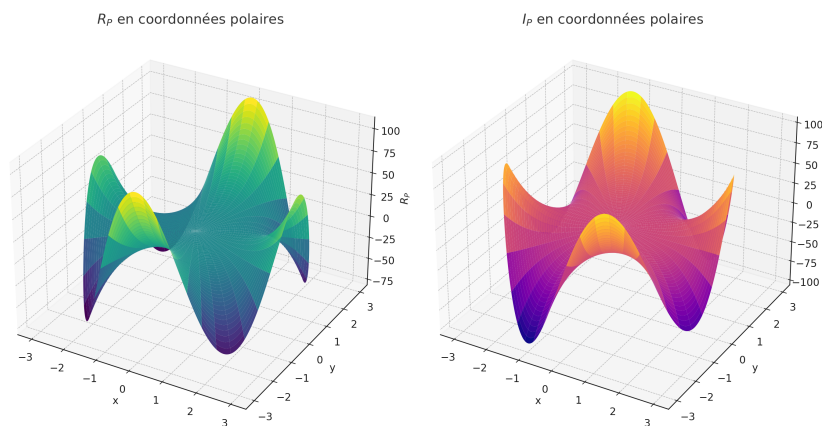


FIGURE 2.1 – Représentation de  $\mathcal{R}_P$  et  $\mathcal{I}_P$  en coordonnées polaires.

Réexprimons les sous-ensembles données en coordonnées polaires en termes de coordonnées cartésiennes au vu des définitions :

1) Partie réelle  $\tilde{\mathcal{R}}_P$  :

$$\mathcal{R}_P(r, \phi) = r^4 \cos(4\phi) - 2r^2 \cos(2\phi) + 3r \cos(\phi) + 10$$

- Conversion de  $\cos(\phi)$  :

$$\cos(\phi) = \frac{x}{r}$$

- Conversion de  $\cos(2\phi)$  :

$$\cos(2\phi) = \frac{x^2 - y^2}{r^2}$$

- Conversion de  $\cos(4\phi)$  :

$$\cos(4\phi) = \frac{x^4 + y^4 - 6x^2y^2}{r^4}$$

En substituant ces expressions, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{R}}_P(x, y) &= (x^2 + y^2)^2 \left( \frac{x^4 + y^4 - 6x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) - 2(x^2 + y^2) \left( \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) + 3\sqrt{x^2 + y^2} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + 10 \\ &= x^4 - 6x^2y^2 - 2x^2 + 3x + y^4 + 2y^2 + 10 \end{aligned}$$

Partie imaginaire  $\tilde{\mathcal{I}}_P$  :

$$\mathcal{I}_P(r, \phi) = r^4 \sin(4\phi) - 2r^2 \sin(2\phi) + 3r \sin(\phi)$$

- Conversion de  $\sin(\phi)$  :

$$\sin(\phi) = \frac{y}{r}$$

- Conversion de  $\sin(2\phi)$  :

$$\sin(2\phi) = 2 \sin(\phi) \cos(\phi) = \frac{2xy}{r^2}$$

- Conversion de  $\sin(4\phi)$  :

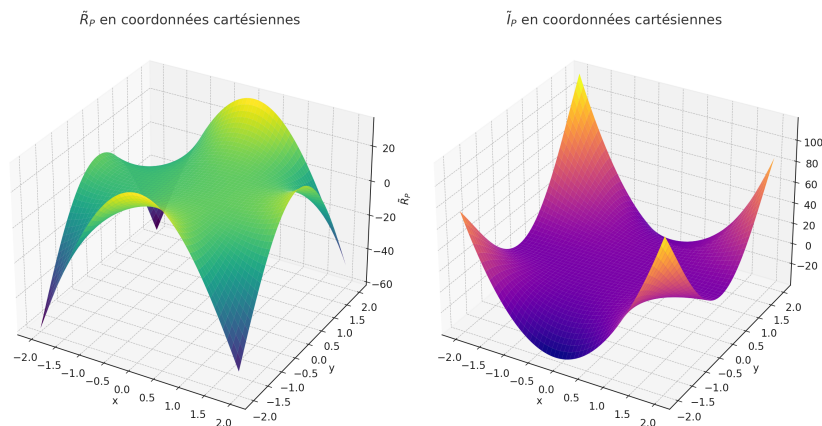
$$\sin(4\phi) = 2 \sin(2\phi) \cos(2\phi) = \frac{8x^2y^2}{r^4} - \frac{2y^4}{r^4}$$

En substituant ces expressions, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{I}}_P(x, y) &= (x^2 + y^2)^2 \left( \frac{8x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2y^4}{(x^2 + y^2)^2} \right) - 2(x^2 + y^2) \left( \frac{2xy}{x^2 + y^2} \right) + 3\sqrt{x^2 + y^2} \left( \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\ &= 8x^2y^2 - 2y^4 - 4xy + 3y. \end{aligned}$$

Le résultat suivant rassemble les propriétés élémentaires des sous-ensembles considérés par Gauss et définis ci-dessus. Dans sa preuve, Gauss suppose sans démonstration que les sous-ensembles  $\mathcal{R}_P$  et  $\mathcal{I}_P$  sont continus ce qui est nécessaire pour pouvoir démontrer le théorème. Nous allons donc démontrer que  $\mathcal{R}_P$  et  $\mathcal{I}_P$  sont en effet bien continus et que ces deux sous-ensembles coupent un plan fixe.



FIGURE 2.2 – Représentation de  $\mathcal{R}_P$  et  $\mathcal{I}_P$  en coordonnées cartésiennes.

**Proposition 2.** Soit  $P \in \mathbb{R}[x]$ . Les sous-ensembles  $\mathcal{R}_P$  et  $\mathcal{I}_P$  sont des surfaces plongées<sup>5</sup> lisses de  $\mathbb{R}^3$ . De plus, elles intersectent chacune le plan d'équation  $z = 0$ .

*Démonstration.* La première assertion est immédiate vu la définition 2. En effet, les sous-ensembles  $\mathcal{R}_P$  et  $\mathcal{I}_P$  sont alors des graphes de fonctions polynomiales. Pour la seconde assertion, on utilise la définition 1 et le fait que pour une valeur de  $\phi$  fixée, les fonctions  $R_P(r, \phi)$  et  $I_P(r, \phi)$  sont polynomiales en  $r$ . Plus précisément, si  $P(x) = \sum_{j=0}^d a_j x^j$  avec  $a_d > 0$ , on obtient  $R_P(r, \frac{\pi}{2d}) = a_d r^d + \sum_{j=0}^d a_j r^j \cos(\frac{j\pi}{2d})$  et  $R_P(r, \frac{3\pi}{2d}) = -a_d r^d + \sum_{j=0}^d a_j r^j \cos(\frac{3j\pi}{2d})$ . Vu que les fonctions  $R_P$  et  $I_P$  sont continues et définies sur un connexe, on déduit que chacune de ces fonctions s'annulent<sup>6</sup>.  $\square$

Gauss aurait donc justifié ses propos en s'appuyant sur l'utilisation du Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI), bien que ce théorème n'avait pas encore été formellement prouvé à son époque.<sup>7</sup>

Pour démontrer son théorème, Gauss doit démontrer qu'il existe au moins un point qui se trouve simultanément sur le plan d'équation  $z = 0$ , sur la première surface  $\mathcal{R}_P$ , et sur la deuxième surface  $\mathcal{I}_P$ . Pour ce faire, il considère les sous-ensembles  $\{z = 0\} \cap \mathcal{R}_P$  et  $\{z = 0\} \cap \mathcal{I}_P$ .

**Définition 3.** Soit  $P \in \mathbb{R}[x]$ . On considère les sous-ensembles

$$\Gamma_{R_P} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : R_P(x, y) = 0\}$$

et

$$\Gamma_{I_P} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : I_P(x, y) = 0.\}$$

Bien évidemment, ces sous-ensembles sont les intersections des surfaces  $\mathcal{R}_P$  et  $\mathcal{I}_P$  avec le plan d'équation  $z = 0$  : il s'agit de deux courbes algébriques<sup>8</sup> sur les propriétés desquelles reposent l'argument géométrique proposé ensuite par Gauss dans sa thèse<sup>9</sup>. Nous poursuivons notre exemple concret afin d'illustrer le propos de Gauss.

5. Pour la définition précise et des détails supplémentaires, voir par exemple [31].

6. Voir [32] pour les résultats de base en analyse.

7. La formalisation et la preuve rigoureuse du TVI ont été accomplies plus tard, en 1817, par Bernard Bolzano, mathématicien et philosophe tchèque. Avant cette preuve, le théorème était utilisé de manière intuitive par les mathématiciens, mais sans fondement rigoureux. Cela illustre une pratique courante en mathématiques où des concepts et résultats sont souvent utilisés de manière préliminaire ou intuitive avant d'être rigoureusement établis.

8. Pour rappel, une courbe algébrique réelle plane est l'ensemble des points  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  qui satisfont une équation de la forme  $f(x, y) = 0$  où  $f$  est un polynôme à coefficients réels de degré au moins 1.

9. Des précisions concernant la nature et les propriétés de ces courbes sont fournies dans l'article [23] d'A. Ostrowski qui permet de combler l'essentiel des lacunes non-élémentaires présentes dans la thèse de Gauss de 1799.

**Exemple** (Suite 1). En repartant de notre polynôme

$$P(x) = x^4 - 2x^2 + 3x + 10$$

nous pouvons définir les courbes  $\Gamma_{R_P}$  et  $\Gamma_{I_P}$ .

$$1) \Gamma_{R_P}(x, y) \equiv x^4 - 6x^2y^2 + y^4 - 2x^2 + 2y^2 + 3x + 10 = 0,$$

$$2) \Gamma_{I_P}(x, y) \equiv 4x^3y - 12xy^3 - 2(2xy) + 3y = 0.$$

Ces deux courbes sont représentées à la figure 2.3. Sur cette représentation, la courbe  $\Gamma_{R_P}$  est représentée en bleu et  $\Gamma_{I_P}$  en rouge.

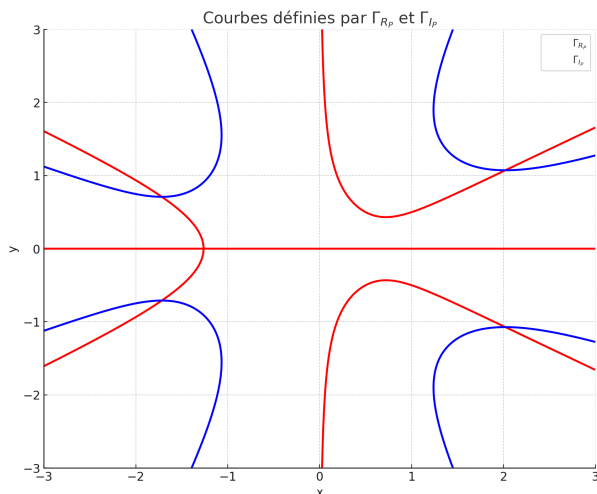


FIGURE 2.3 – Représentation des courbes  $\Gamma_{R_P}$  et  $\Gamma_{I_P}$ .

A présent, nous pouvons reformuler, en suivant Gauss de près, le problème de l'existence de la paire  $(r_0, \phi_0)$  permettant le recours au théorème 3. La proposition suivante permet de résumer l'approche de Gauss :

**Proposition 3.**

- 1) La paire  $(r_0, \phi_0) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[$  satisfait (2.2) si et seulement si le point  $(r_0 \cos(\phi_0), r_0 \sin(\phi_0))$  appartient à l'intersection des courbes  $\Gamma_{R_P}$  et  $\Gamma_{I_P}$ .
- 2) La paire  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  satisfait  $\tilde{R}_P(x_0, y_0) = \tilde{I}_P(x_0, y_0) = 0$  si et seulement si le point  $(x_0, y_0)$  appartient à l'intersection des courbes  $\Gamma_{R_P}$  et  $\Gamma_{I_P}$ .

*Démonstration.*

- 1) Pour prouver cette équivalence, il suffit de constater que

$$\tilde{R}_P(r \cos(\phi), r \sin(\phi)) = \sum_{j=0}^d a_j \sum_{\substack{k \in \{0, \dots, j\} \\ k \text{ pair}}} C_j^k (-1)^{\frac{k}{2}} (r \cos(\phi))^{j-k} (r \sin(\phi))^k = \sum_{j=0}^d a_j r^j \cos(j\phi)$$

et

$$\tilde{I}_P(r \cos(\phi), r \sin(\phi)) = \sum_{j=1}^d a_j \sum_{\substack{k \in \{1, \dots, j\} \\ k \text{ impair}}} C_j^k (-1)^{\frac{k-1}{2}} (r \cos(\phi))^{j-k} (r \sin(\phi))^k = \sum_{j=1}^d a_j r^j \sin(j\phi).$$

- 2) Soit  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\tilde{R}_P(x_0, y_0) = 0$  et  $\tilde{I}_P(x_0, y_0) = 0$ . Cela signifie que  $(x_0, y_0)$  satisfait simultanément les équations de  $\Gamma_{R_P}$  et  $\Gamma_{I_P}$ , car, par définition,  $\Gamma_{R_P}$  est l'ensemble des points où  $\tilde{R}_P(x, y) = 0$ , et  $\Gamma_{I_P}$  est l'ensemble des points où  $\tilde{I}_P(x, y) = 0$ . Ainsi,  $(x_0, y_0)$  appartient à l'intersection des courbes  $\Gamma_{R_P}$  et  $\Gamma_{I_P}$ . Réciproquement, supposons que le point  $(x_0, y_0)$  appartient à l'intersection des courbes  $\Gamma_{R_P}$  et  $\Gamma_{I_P}$ . Par définition de cette intersection, cela signifie que  $(x_0, y_0)$  satisfait simultanément les conditions  $\tilde{R}_P(x_0, y_0) = 0$  et  $\tilde{I}_P(x_0, y_0) = 0$ . Par conséquent, la paire  $(x_0, y_0)$  vérifie les deux équations.

□

Pour achever sa preuve et valider sont théorème de factorisation 3, Gauss est donc amené à étudier de près l'intersection des courbes algébriques  $\Gamma_{R_P}$  et  $\Gamma_{I_P}$ . Pour ce faire, nous constatons qu'il utilise un résultat subtil concernant les courbes algébriques, démontré plus tard par A.Ostrowski [23].

### 2.3 Étude des courbes $\Gamma_{R_P}, \Gamma_{I_P}$ d'après Gauss

*Lorsqu'un cercle de la magnitude requise est tracé autour du centre  $C$ , alors  $2m$  branches de la première courbe et autant de la deuxième courbe y entreront, et en effet de telle manière que toute paire successive de branches de la première courbe sera séparée par une branche de la deuxième courbe alternativement.*

---

Gauss, 1799

Dans cette section, nous poursuivons notre analyse de la thèse de Gauss et présentons l'étude des courbes  $\Gamma_{R_P}$  et  $\Gamma_{I_P}$  qu'il initie. Plus précisément, nous examinons les étapes de son raisonnement et les méthodes utilisées pour établir que ces deux courbes s'intersectent bel et bien en relevant, et c'est un fait bien connu [23] [35], que c'est précisément à ce point que son argumentation faiblit considérablement. Nous nous efforçons de suivre au mieux son raisonnement afin de repérer les imprécisions manifestes. Ces lacunes ont été comblées par Ostrowski [23] et Basu et Velleman [5] et seront l'étude du chapitre suivant.

Pour identifier précisément les lacunes dans la présentation de Gauss, nous restons dans cette section au plus proche de son texte. Ainsi, nous revenons aux définitions en termes de coordonnées polaires vu que le recours aux coordonnées cartésiennes nous a permis à présent de définir rigoureusement les objets géométriques définis par Gauss au début de son travail.

La première étape de l'argument de Gauss consiste à prouver qu'il existe un cercle que nous notons  $\mathcal{C}_R$  centré à l'origine et de rayon  $R$  intersectant exactement  $2d$  fois chacune des courbes  $\Gamma_{R_P}$  et  $\Gamma_{I_P}$  où  $P \in \mathbb{R}[x]$  un polynôme à coefficient réels de degré  $d$ .

**Théorème 4.** *Soit  $P \in \mathbb{R}[x]$  un polynôme à coefficient réels de degré  $d$ . Il existe  $R > 0$  tel que*

- 1) *on a  $|\mathcal{C}_R \cap \Gamma_{R_P}| = 2d$ . En particulier, il existe  $\alpha_0(r), \dots, \alpha_{2d-1}(r) \in [0, 2\pi[$  tels que*

$$\mathcal{C}_R \cap \Gamma_{R_P} = \{(R \cos \alpha_i(r), R \sin \alpha_i(r)) \mid 0 \leq \alpha_0(r) < \dots < \alpha_{2d-1}(r) < 2\pi\};$$

- 2) *on a  $|\mathcal{C}_R \cap \Gamma_{I_P}| = 2d$ . En particulier, il existe  $\beta_0(r), \dots, \beta_{2d-1}(r) \in [0, 2\pi[$  tels que*

$$\mathcal{C}_R \cap \Gamma_{I_P} = \{(R \cos \beta_i(r), R \sin \beta_i(r)) \mid 0 \leq \beta_0(r) < \dots < \beta_{2d-1}(r) < 2\pi\};$$

- 3) *pour tout  $i \in \{1, \dots, 2d-1\}$ , on a  $\beta_{i-1}(r) < \alpha_{i-1}(r) < \beta_i(r) < \alpha_i(r)$ .*

*Démonstration.* Soit  $P(x) = \sum_{j=0}^d a_j x^j \in \mathbb{R}[x]$  un polynôme satisfaisant  $a_d > 0$ .

1) Notons  $\theta_{2k+1} = \frac{(2k+1)\pi}{4d}$ ,  $k = 0, \dots, 4d-1$ . Alors on constate directement que<sup>10</sup>

$$\sigma(a_d \cos(d\theta_{2k+1})) = \begin{cases} 1 & \text{si } 2k+1 = \pm 1 \pmod{8} \\ -1 & \text{si } 2k+1 = \pm 3 \pmod{8} \end{cases}$$

si  $\sigma$  désigne la fonction signe. En effet, si  $2k+1 = \pm 1 \pmod{8}$  alors il existe  $l \in \mathbb{Z}$  tel que  $2k+1 = \pm 1 + 8l$  et on obtient

$$\cos(d\theta_{2k+1}) = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{(\pm 1 + 8l)\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pm\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

De même, on a

$$\sigma(a_d \sin(d\theta_{2k+1})) = \begin{cases} 1 & \text{si } 2k+1 = 1 \text{ ou } 3 \pmod{8} \\ -1 & \text{si } 2k+1 = 5 \text{ ou } 7 \pmod{8}. \end{cases}$$

2) On montre dans un premier temps qu'il existe  $R_0 > 0$  tel que

$$\sigma(a_d \cos(d\theta_{2k+1})) = \sigma(R_P(r, \theta_{2k+1}))$$

pour tous  $r > R_0$  et pour tout entier  $k \in \{0, \dots, 4d-1\}$ . C'est direct vu que, par définition, on a

$$R_P(r, \theta_{2k+1}) = r^d \left( a_d \cos(d\theta_{2k+1}) + \sum_{j=0}^{d-1} a_j r^{j-d} \cos(j\theta_{2k+1}) \right)$$

et que la seconde somme tend vers 0 si on laisse tendre  $r$  vers l'infini. Plus précisément, on vérifie que

$$R_0 = \max \left\{ 1; \frac{\sqrt{2}^{d-1}}{a_d} \sum_{j=0}^{d-1} |a_j| \right\}$$

convient. En effet, si  $r > R_0$  on a bien

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=0}^{d-1} a_j r^{j-d} \cos(j\theta_{2k+1}) \right| &\leq \frac{1}{r} \left| \sum_{j=0}^{d-1} a_j r^{j-(d-1)} \cos(j\theta_{2k+1}) \right| \\ &\leq \frac{1}{r} \sum_{j=0}^{d-1} |a_j| \\ &< |a_d| \frac{\sqrt{2}}{2} = |a_d \cos(d\theta_{2k+1})|. \end{aligned}$$

On peut ensuite conclure<sup>11</sup> que pour tout  $r > R_0$ , la fonction

$$R_P(R_0, \cdot) : [0; 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}$$

admet au moins une racine dans chacun des  $2d$  intervalles

$$] \theta_1, \theta_3[, ] \theta_5, \theta_7[, \dots, ] \theta_{8d-3}, \theta_{8d-1} [. \quad (2.7)$$

10. Nous utilisons ici la lettre grecque  $\sigma$  pour désigner la fonction suivante :

$$\sigma(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

11. Gauss utilise une nouvelle fois le TVI. Comme nous l'avons vu précédemment, ce théorème n'était pourtant pas encore démontré à cette époque.

On a montré de la sorte que le cardinal de l'ensemble  $\mathcal{C}_R \cap \Gamma_{I_P}$  satisfait  $|\mathcal{C}_R \cap \Gamma_{I_P}| \geq 2d$ .

On peut procéder de manière analogue pour établir le résultat correspondant à  $I_P$ <sup>12</sup>. Par ailleurs, montrons qu'il existe un  $R'_0 > 0$  tel que

$$\sigma(a_d \sin(d\theta_{2k+1})) = \sigma(I_P(r, \theta_{2k+1}))$$

pour tout  $r > R'_0$  et pour tout  $k \in \{0, \dots, 4d-1\}$ . En fait, il se fait que  $R'_0 = R_0$  convient. En effet, si  $r > R_0$ , alors nous avons les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^{d-1} a_j r^{j-d} \sin(j\theta_{2k+1}) \right| &\leq \frac{1}{r} \left| \sum_{j=1}^{d-1} a_j r^{j-(d-1)} \sin(j\theta_{2k+1}) \right| \\ &\leq \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{d-1} |a_j| \\ &< |a_d| \frac{\sqrt{2}}{2} = |a_d \sin(d\theta_{2k+1})|. \end{aligned}$$

On peut maintenant conclure que pour  $r > R_0$ , la fonction  $I_P(r, \cdot) : [0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}$  admet au moins une racine dans chacun des  $2d$  intervalles

$$] \theta_3, \theta_5[, ] \theta_7, \theta_9[, \dots, ] \theta_{8d-5}, \theta_{8d-3}[, ] \theta_{8d-1}, \theta_1[. \quad (2.8)$$

Cela implique  $|\mathcal{C}_R \cap \Gamma_{I_P}| \geq 2d$ .

- 3) Pour poursuivre, il reste à prouver qu'il existe  $R_1 > 0$  tel que pour tout  $r > R_1$ , la fonction  $R_P$  (resp.  $I_P$ ) s'annule exactement une fois dans les intervalles décrits en (2.7) (resp. les intervalles décrits en (2.8)). Dans un premier temps, nous calculons la dérivée par rapport à la variable  $\phi$  des fonctions  $R_P$  et  $I_P$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{R}_P}{\partial \phi}(r, \phi) &= - \sum_{j=0}^d a_j j r^j \sin(j\phi) \\ \frac{\partial \mathcal{I}_P}{\partial \phi}(r, \phi) &= \sum_{j=1}^d a_j j r^j \cos(j\phi). \end{aligned}$$

On vérifie encore une fois que

$$R_1 = R_0 = \max \left\{ 1; \frac{\sqrt{2}^{d-1}}{a_d} \sum_{j=0}^{d-1} |a_j| \right\}$$

convient. En effet, si  $r > R_1$ , on a bien

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=0}^{d-1} a_j j r^{j-d} \sin(j\phi) \right| &\leq \frac{1}{r} \left| \sum_{j=0}^{d-1} a_j j r^{j-(d-1)} \sin(j\phi) \right| \\ &\leq \frac{1}{r} \left| \sum_{j=0}^{d-1} a_j j r^{j-(d-1)} \right| \\ &\leq \frac{d}{r} \sum_{j=0}^{d-1} |a_j| \\ &< |a_d| d \frac{\sqrt{2}}{2} \leq d |a_d| \sin(d\phi) \end{aligned}$$

12. Dans son travail, Gauss a donné des affirmations similaires pour les valeurs de  $\mathcal{I}_P$  mais sans entrer dans autant de détails, affirmant que les résultats raisonnements étaient identiques.

si  $\phi$  appartient à un des intervalles décrit en (2.7). On établit de la même manière le résultat correspondant pour  $\mathcal{I}_P$ . On obtient

$$\left| \sum_{j=1}^{d-1} a_j j r^{j-d} \cos(j\phi) \right| \leq \frac{1}{r} \left| \sum_{j=1}^{d-1} a_j j r^{j-(d-1)} \cos(j\phi) \right| < |a_d| d \frac{\sqrt{2}}{2} \leq d |a_d| |\cos(d\phi)|$$

si  $\phi$  appartient à un des intervalles (2.8). On déduit ensuite que les deux dérivées ne peuvent pas s'annuler sur les intervalles considérés. On peut alors conclure : fixons  $r > R_0$  et supposons que la fonction  $R_P$  (resp.  $I_P$ ) s'annule au moins deux fois sur un intervalle du type (2.7) (resp. (2.8)). Alors, vu le théorème de Rolle<sup>13</sup>, on déduit que la  $\frac{\partial R_P}{\partial \phi}(r, \phi)$  s'annule sur cet intervalle contrairement à ce qui vient d'être établi. On a donc démontré que

$$|\mathcal{C}_R \cap \Gamma_{R_P}| = |\mathcal{C}_R \cap \Gamma_{I_P}| = 2d.$$

4) Soit  $r_0 > R_0$ . Vu les points précédents, on peut décrire explicitement l'ensemble  $\mathcal{C}_{r_0} \cap \Gamma_{R_P}$  de la manière suivante

$$\mathcal{C}_{r_0} \cap \Gamma_{R_P} = \{(r_0 \cos \alpha_i(r_0), r_0 \sin \alpha_i(r_0)) \mid 0 \leq \alpha_0(r_0) < \dots < \alpha_{2d-1}(r_0) < 2\pi\}$$

avec  $\alpha_i(r) \in ]\theta_{1+4i}, \theta_{3+4i}[$ ,  $i = 0, \dots, 2d - 1$ . De manière similaire, on a

$$\mathcal{C}_{r_0} \cap \Gamma_{I_P} = \{(r_0 \cos \beta_i(r_0), r_0 \sin \beta_i(r_0)) \mid 0 \leq \beta_0(r_0) < \dots < \beta_{2d-1}(r_0) < 2\pi\}$$

avec  $\beta_i(r_0) \in ]\theta_{3+4i}, \theta_{5+4i}[$ ,  $i = 0, \dots, 2d - 1$ . On déduit directement que l'on a pour tout  $i \in \{1, \dots, 2d - 1\}$ , on a  $\beta_{i-1}(r_0) < \alpha_{i-1}(r_0) < \beta_i(r_0) < \alpha_i(r_0)$ .

□

Nous continuons l'étude de notre exemple explicite :

**Exemple** (Suite 2). On peut maintenant déterminer le rayon  $R$  pour lequel le cercle décrit par ce rayon va intersecter les courbes  $\mathcal{R}_P = 0$  et  $\mathcal{I}_P = 0$  au total  $2d = 8$  fois chacune. On doit avoir

$$R > \left\{ \max \left( 1, \sqrt{2} \frac{(2 + 3 + 10)}{1} \right) \right\} = \left\{ \max \left( 1, 15\sqrt{2} \right) \right\}.$$

On peut donc prendre  $R = 22$ . Calculons les valeurs de  $\mathcal{R}_P(R, \phi)$  pour  $\phi = \frac{\pi}{4d}$ ,  $\phi = \frac{3\pi}{4d}$ ,  $\phi = \frac{5\pi}{4d}$ ,  $\dots$ ,  $\phi = \frac{(8d-1)\pi}{4d}$ .

Ainsi, nous obtenons :

- Si  $\phi = \frac{\pi}{16}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_P(22, \phi) &= 22^4 \cdot \cos\left(4 \cdot \frac{\pi}{16}\right) - 2 \cdot 22^2 \cdot \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{16}\right) + 3 \cdot 22 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{16}\right) + 10 \\ &\approx 164824.423 > 0 \end{aligned}$$

- Si  $\phi = \frac{3\pi}{16}$  :

$$\mathcal{R}_P(22, \phi) \approx -165949.567 < 0$$

- Si  $\phi = \frac{5\pi}{16}$  :

$$\mathcal{R}_P(22, \phi) \approx -165226.901 < 0$$

- Si  $\phi = \frac{7\pi}{16}$  :

$$\mathcal{R}_P(22, \phi) \approx 166561.197 > 0$$

13. Gauss affirme ce résultat sans référence explicite à ce théorème. Pour rappel, ce théorème stipule que si une fonction réelle et continue sur un intervalle fermé  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$  prend la même valeur aux extrémités de l'intervalle, alors il existe au moins un point  $c \in (a, b)$  satisfaisant  $f'(c) = 0$ . Voir [32]. Ce théorème a été démontré pour la première fois par le mathématicien français Michel Rolle en 1691.

- Si  $\phi = \frac{9\pi}{16}$  :  

$$\mathcal{R}_P(22, \phi) \approx 166535.446 > 0$$
- ⋮
- Si  $\phi = \frac{29\pi}{16}$  :  

$$\mathcal{R}_P(22, \phi) \approx -165949.567 < 0$$
- Si  $\phi = \frac{31\pi}{16}$  :  

$$\mathcal{R}_P(22, \phi) \approx 164824.423 > 0$$

On constate bien que  $\mathcal{R}_P$  s'annule entre  $]\theta_1, \theta_3[$ , entre  $]\theta_5, \theta_7[$ ,  $\dots$ , jusqu'à  $]\theta_{29}, \theta_{31}[$ . Un raisonnement similaire peut être appliqué à  $\mathcal{I}_P$ .

Représentons ensuite ce cercle dans le même repère que les deux courbes. On obtient bien à chaque fois 8 intersections avec chaque courbe :

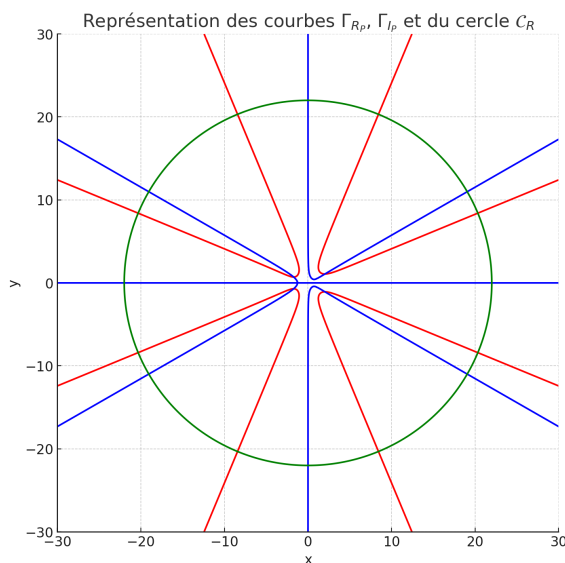


FIGURE 2.4 – Représentation des courbes  $\Gamma_{R_P}$ ,  $\Gamma_{I_P}$  et le cercle de rayon  $R$ .

Nous terminons cette section par une remarque importante qui sera utilisée dans le chapitre qui suit.

**Remarque 1.** En reprenant les notations de l'énoncé du théorème 4 et du lemme 2, nous observons que chacun des nombres  $\cos(\alpha_i(r))$ ,  $i = 0, \dots, 2d - 1$  est une racine des équations  $p_r(x) = 0$  où  $p_r$  est un polynôme de degré  $r$  à coefficients réels. Vu les relations

$$p_r(\cos(\theta)) = R_P(r, \theta) = \tilde{R}_P(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$$

déduites de (2.6) et (2.5), on peut conclure que les égalités

$$\alpha_i(r) + \alpha_{2d-1-i}(r) = 2\pi$$

sont satisfaites pour tout  $i = 0, \dots, 2d - 1$  parce que  $P$  est à coefficients réels et que les nombres  $\alpha_i(r)$ ,  $i = 0, \dots, 2d - 1$  sont classés par ordre croissant. De même, pour tout  $i = 1, \dots, d - 1$ ,  $d + 1, \dots, 2d - 1$ , on obtient

$$\beta_i(r) + \beta_{2d-i}(r) = 2\pi$$

et on vérifie directement que  $\beta_0(r) = 0$ ,  $\beta_d(r) = \pi$  en se référant à l'expression du polynôme  $q_r$  donnée en (2.6). Il s'ensuit qu'on dispose des factorisations

$$p_r(x) = 2^d a_d (x - \cos(\alpha_0(r))) \dots (x - \cos(\alpha_{d-1}(r))) \quad (2.9)$$

et

$$q_r(x) = 2^d a_d (x - \cos(\beta_1(r))) \dots (x - \cos(\beta_{d-1}(r))). \quad (2.10)$$

## 2.4 La preuve de Gauss : les lacunes

*En effet, ce remarquable érudit nous avait déjà présenté une démonstration de cette proposition en 1799 mais elle avait, comme il l'a admis, le défaut de prouver une vérité purement analytique sur la base d'une considération géométrique. Voir [6, p.51]*

Bolzano, 1817

Malgré son ingéniosité, la démonstration que Gauss proposée en 1799 manque de rigueur : il énonce de nombreux résultats sans les prouver explicitement, se bornant parfois à traiter des cas particuliers et à donner des indications clés concernant la marche à suivre. Certains de ses arguments reposent parfois sur des résultats d'apparence élémentaire mais qui n'ont été prouvés que bien plus tard : par exemple, la proposition 2 s'appuie de manière essentielle sur le Théorème des Valeurs Intermédiaires [32]. Bernard Bolzano<sup>14</sup>, entre autres, critiqua la dépendance à la géométrie du travail de Gauss et fournit dans la foulée la première preuve satisfaisante du Théorème de la Valeur Intermédiaire [6]. Par ailleurs, ses considérations s'appuient aussi sur des notions de base (continuité, dérivabilité, ...) dont l'étude était certainement encore balbutiante. Dans cette section, nous étudions les derniers arguments présentés par Gauss dans sa thèse, en pointant certaines faiblesses de son raisonnement, sans pour autant chercher à y remédier directement puisque les résultats sous-jacents s'avèrent délicats à prouver. En effet, dans la partie finale de son travail, Gauss explore la nature des courbes algébriques  $\Gamma_{R_P}$ ,  $\Gamma_{I_P}$  et utilise des résultats subtils concernant la topologie, le comportement à l'infini, et les propriétés d'intersection des courbes  $\Gamma_{R_P}$  et  $\Gamma_{I_P}$ . Gauss était tellement convaincu de ces résultats, que nous décrirons plus bas, qu'il les enjambe de la manière suivante<sup>15</sup> :

*Bien que je sache, personne n'a soulevé de doutes à ce sujet. Cependant, si quelqu'un en exigeait la preuve, je m'engage à fournir une démonstration qui ne laisserait place à aucun doute, à une autre occasion... (Gauss 1799)*

Cependant, la thèse de Gauss reste une réalisation remarquable et est largement acceptée comme la première démonstration du Théorème Fondamental de l'Algèbre dépourvue de défauts majeurs. Les théorèmes qu'il utilisait implicitement ont été tous prouvés rigoureusement par la suite, confirmant ainsi la validité de son approche.

Voici un résumé de la fin de l'argument de Gauss. Il choisit un rayon  $r > 0$  pour lequel les conclusions du théorème 3 sont vérifiées et désigne

- 1) par 0 le point sur la circonférence du cercle où elle est intersectée par la partie gauche de l'axe (qui est elle-même l'une des  $2d$  branches<sup>16</sup> de la courbe  $\Gamma_{I_P}$ ),
- 2) par 1 le point le plus proche où une branche de la deuxième courbe entre,
- 3) ...

Il déduit (sans preuve formelle) qu'avec les notations des sections précédentes, les  $\alpha_i$  pour  $i \in 0, \dots, 2d - 1$  correspondent au point d'indice impair et les  $\beta_i$  pour  $i \in 0, \dots, 2d - 1$  correspondent au point d'indice pair. Gauss appuie sans propos en recourant à des schémas frappant qui orientent en sa faveur le lecteur. En voici une reproduction :

14. Bolzano a reproché à Gauss l'utilisation de considérations géométriques pour prouver des vérités analytiques. Cependant, il a reconnu que les démonstrations ultérieures de Gauss (1816) avaient corrigé ce défaut en adoptant une approche purement analytique.

15. Voir [22, p.27] de la thèse Gauss (annexe 5) et Friedelmeyer [19].

16. Gauss mentionne systématiquement le concept de branche d'une courbe algébrique plane alors qu'il ne définit cette notion nul part dans son travail.



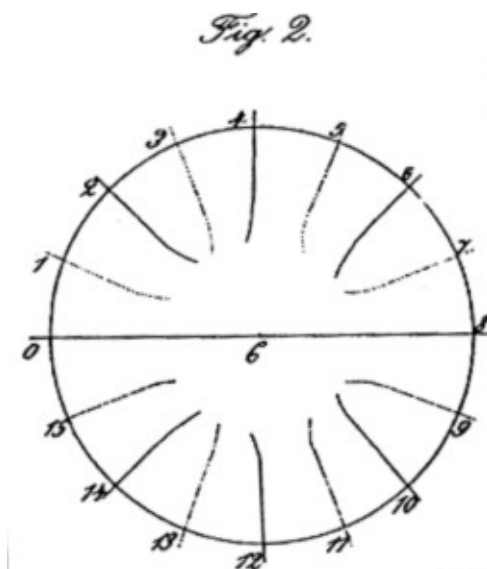


FIGURE 2.5 – La figure 2 de la thèse de Gauss de 1799.

Gauss énonce ensuite une suite de résultats qui sont justifiés de manière incomplètes en recourant à l'intuition visuelle du lecteur et (re)formulés ci-dessous :

**Proposition 4** (voir p.27 de [22]). *Tout point d'indice impair est relié à un autre point d'indice impair par une branche de  $\Gamma_{R_p}$  et que tout point d'indice pair est relié à un autre point d'indice pair par une branche de  $\Gamma_{I_p}$ , ces branches étant situées à l'intérieur du cercle.*

Les arguments de Gauss sont géométriques, voire dépendant du dessin proposé. Il affirme que toute courbe algébrique pénètre et ressort nécessairement d'un espace délimité. Voici sa justification<sup>17</sup> :

*Dans le cas présent, cela est vraiment manifeste : supposons qu'une branche, par exemple 2, ne sorte nulle part du cercle. Alors, vous pourriez entrer dans le cercle entre 0 et 2, contourner toute cette branche (qui devrait se perdre à l'intérieur du cercle), et finalement sortir à nouveau du cercle entre 2 et 4, sans intersecter la première courbe. Cela est absurde car, au point d'entrée, la première surface serait au-dessus de vous et, à la sortie, en dessous de vous. Par conséquent, vous devez nécessairement avoir rencontré la première surface quelque part, c'est-à-dire un point de la première courbe. (Gauss 1799)*

Nous voyons que Gauss est allé plus loin que simplement argumenter que les courbes en question qui entrent dans le cercle doivent également en sortir. Il a soutenu qu'en fait, toute branche qui entre dans le cercle doit en sortir à un point différent<sup>18</sup>. Son argumentation repose finalement sur la figure décrite ci-dessous :

17. Bien que Gauss ait affirmé que ce résultat avait déjà été établi par d'autres mathématiciens, il revient sur cette affirmation dans une note de bas de page, indiquant qu'il pourrait fournir une preuve sans aucun doute à une autre occasion. En effet, aucune preuve rigoureuse n'a été donnée avant les années 1920, celle-ci se révélant non triviale. Voir section 2.5.2.

18. C'est précisément sur ce sujet que S. Smale s'insurge dans [35] et exprime l'opinion que ce résultat est loin d'être élémentaire...

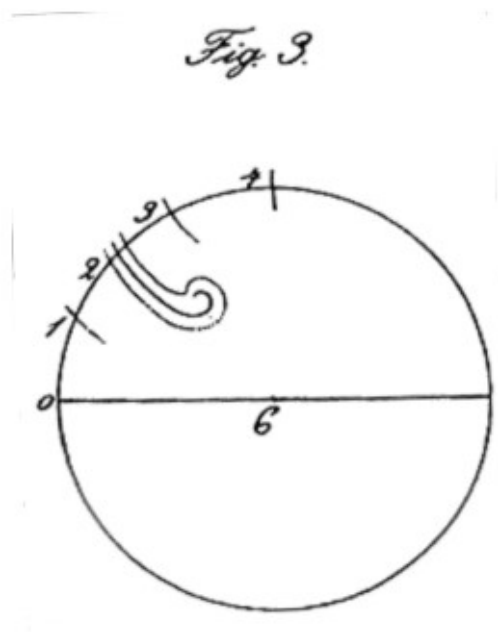


FIGURE 2.6 – La Figure 3 de la thèse de Gauss de 1799.

La dernière étape du raisonnement de Gauss repose sur le résultat suivant :

**Proposition 5** (voir [22][p.28]). *Dans les conditions précédentes et compte tenu de cette connaissance des connexions entre les points sur le cercle extérieur, les courbes  $\Gamma_{RP}$  et  $\Gamma_{IP}$  s'intersectent.*

En analysant les arguments de Gauss pour justifier le résultat annoncé, on constate que ces derniers reposent in fine sur l'utilisation implicite du théorème de Jordan<sup>19</sup> concernant les courbes continues simples du plan et d'une variante du théorème des valeurs intermédiaires déjà rencontrés plus tôt. Le diagramme ci-dessous est utilisé par Jean-Pierre Friedelmeyer dans [19] pour étayer les arguments menés par Gauss.

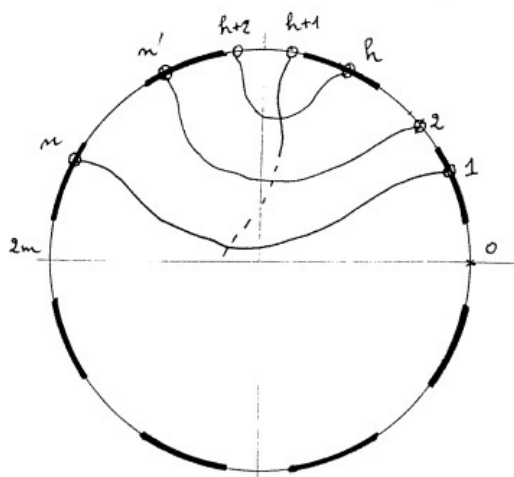


FIGURE 2.7 – La figure dans l'analyse de J.P. Friedelmeyer ([19]).

19. Le complémentaire d'une courbe de Jordan  $S$  dans un plan affine réel est formé d'exactly deux composantes connexes distinctes, l'une bornée et l'autre non. Toutes deux ont pour frontière la courbe de Jordan  $S$ . Ce théorème a été démontré par Camille Jordan (1838–1922) en 1887.

## 2.5 Perspectives sur la preuve de Gauss (1799)

### 2.5.1 Le point de vue complexe

*Ceterum ex eo tempore, quo analystae comperti sunt, infinite multas aequationes esse, quae nullam omnino radicem phihaberent, nisi quantitates formae  $a + b\sqrt{-1}$  admittantur, tales quantitates fictivae tamquam peculiare quantitatum genus, quas imaginarias dixerunt, ut realibus distinguerentur, consideratae et in totam analysin introductae sunt; quonam iure? hoc loco non disputo. – Demonstrationem meam absque omni quantitatum imaginarium subsidio absolam, etsi eadem libertate, qua omnes recentiores analystae usi sunt, etiam mihi uti liceret.*

---

Gauss, 1799

En analysant la thèse de Gauss, on constate que celui-ci s'acharne obstinément à éviter tout recours explicite aux nombres complexes, conformément à la perception de l'époque qui les jugeait moins rigoureux que les nombres réels et malgré que certains parmi ses contemporains les utilisaient sans restriction. Néanmoins, lors du 50e anniversaire de sa démonstration originale, il publia une quatrième démonstration utilisant librement les nombres complexes, alors largement acceptés par la communauté mathématique de l'époque. C'est étonnant de la part de Gauss étant donné qu'il est habituellement reconnu comme l'un des grands promoteurs de ces derniers [17], et qu'il s'est dès lors trouvé contraint d'utiliser des détours trigonométriques pour arriver à ses fins.

L'objectif de cette section est d'interpréter les résultats clés établis par Gauss dans sa thèse et analysés précédemment du point de l'algèbre des nombres complexes. Le théorème 3 s'interprète aisément dans le cadre des nombres complexes et nous allons voir que sa preuve est grandement simplifiée.

**Théorème 5.** *Soit  $P \in \mathbb{R}[x]$  un polynôme à coefficients réels. Si  $z_0 \in \mathbb{C}$  satisfait  $P(z_0) = 0$  alors on a aussi  $P(\bar{z}_0) = 0$ . De plus,*

- 1) *si  $z_0 = r_0 e^{i\phi_0} \notin \mathbb{R}$  alors le polynôme  $P(x)$  est divisible par  $(x - z_0)(x - \bar{z}_0) = x_0^2 - 2r_0 x \cos(\phi_0) + r_0^2$ .*
- 2) *si  $z_0 = r_0 e^{i\phi_0} \in \mathbb{R}$  alors le polynôme  $P(x)$  est divisible par  $(x - r_0 \cos(\phi_0))$ .*

*Démonstration.* Soient  $P(x) = \sum_{i=1}^d a_i x^i$  avec  $a_i \in \mathbb{R}$  et  $z_0$  tel que  $P(z_0) = 0$ . Alors on a

$$0 = \overline{P(z_0)} = \sum_{i=1}^d \overline{a_i z_0^i} = \sum_{i=1}^d a_i \bar{z}_0^i = P(\bar{z}_0).$$

Si  $z_0 = r_0 e^{i\phi_0}$  n'est pas réel alors  $z_0$  et  $\bar{z}_0$  sont deux racines distinctes de l'équation  $P(x) = 0$  et on déduit de la théorie générale ([33]) que  $P(x)$  est divisible par

$$\begin{aligned} (x - z_0)(x - \bar{z}_0) &= ((x - r_0 \cos(\phi_0)) - ir_0 \sin(\phi_0))((x - r_0 \cos(\phi_0)) + ir_0 \sin(\phi_0)) \\ &= x^2 - 2r_0 \cos(\phi_0)x + r_0^2 \sin^2(\phi_0). \end{aligned}$$

Si  $z_0 = r_0 e^{i\phi_0}$  est réel alors  $z_0 = r_0 \cos(\phi_0)$  et  $P(x)$  est divisible par  $(x - r_0 \cos(\phi_0))$ . □

---

19. De plus, à partir du moment où les analystes ont découvert qu'il existait une infinité d'équations qui n'auraient aucune racine, à moins d'admettre des quantités de la forme  $a + b\sqrt{-1}$ , de telles quantités fictives ont été considérées comme une classe spéciale de quantités qu'ils ont appelées imaginaires, c'est-à-dire pour les distinguer des réels et ils ont été introduits dans toute l'analyse; de quel droit? Je ne conteste pas ce point. - J'absoudrai ma démonstration sans aucun support de quantités imaginaires, bien qu'il me soit permis de le faire avec la même liberté avec laquelle tous les analystes modernes l'ont tenté.

De même les définitions importantes 1 et 2 ont une interprétation naturelle dans le cadre des nombres complexes.

**Lemme 3.** Soit  $P(x)$  un polynôme à coefficients réel de degré  $d$ . Pour tout couple  $(r, \phi) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[$ , on a<sup>20</sup>

$$\begin{cases} R_P(r, \phi) &= \Re(P(e^{i\phi})) \\ I_P(r, \phi) &= \Im(P(e^{i\phi})) \end{cases} \quad (2.11)$$

et, pour tout couple  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on a

$$\begin{cases} \tilde{R}_P(x, y) &= \Re(P(x + iy)) \\ \tilde{I}_P(x, y) &= \Im(P(x + iy)). \end{cases} \quad (2.12)$$

*Démonstration.* Soit  $P(x)$  un polynôme à coefficients réel et de degré  $d$ . La preuve est immédiate. En effet, si  $(r, \phi) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[$ , on a

$$R_P(r, \phi) = \sum_{j=0}^d a_j r^j \cos(j\phi) = \sum_{j=0}^d a_j r^j \Re(e^{j\phi}) = \Re(P(e^{i\phi}))$$

et

$$I_P(r, \phi) = \sum_{j=0}^d a_j r^j \sin(j\phi) = \sum_{j=0}^d a_j r^j \Im(e^{j\phi}) = \Im(P(e^{i\phi})).$$

De même, si  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on a

$$\tilde{R}_P(x, y) = \sum_{j=0}^d a_j \sum_{\substack{k \in \{0, \dots, j\} \\ k \text{ pair}}} C_j^k (-1)^{\frac{k}{2}} x^{j-k} y^k = \sum_{j=0}^d a_j \Re((x + iy)^j) = \Re(P(x + iy))$$

et

$$\tilde{I}_P(x, y) = \sum_{j=1}^d a_j \sum_{\substack{k \in \{0, \dots, j\} \\ k \text{ impair}}} C_j^k (-1)^{\frac{k-1}{2}} x^{j-k} y^k = \sum_{j=0}^d a_j \Im((x + iy)^j) = \Im(P(x + iy)).$$

□

Au vu du résultat précédent, les courbes  $\Gamma_{R_P}$  et  $\Gamma_{I_P}$  considérée par Gauss et mentionnées à la définition 3 sont évidemment les lieux d'annulation des parties réelles et imaginaire du polynôme  $P$ . Si on revient à l'énoncé du théorème 3, l'existence d'une paire de nombres  $(r_0, \phi_0)$  satisfaisant les relations (2.11) et (2.12) garantissent que le polynôme étudié est divisible par

$$(x - r_0 \cos(\phi_0)) \text{ si } r_0 \sin(\phi_0) = 0$$

ou par

$$Q(x) = (x^2 - 2r_0 \cos(\phi_0)x + r_0^2) \text{ si } r_0 \sin(\phi_0) \neq 0.$$

Dans le premier cas, on déduit directement que le polynôme satisfait  $P(r_0 \cos(\phi_0)) = 0$  et dans le second cas, on vérifie que  $P(r_0 \cos(\phi_0) + ir_0 \sin(\phi_0)) = 0$  parce que

$$\begin{aligned} Q(r_0 \cos(\phi_0) + ir_0 \sin(\phi_0)) &= (r_0 \cos(\phi_0) + ir_0 \sin(\phi_0))^2 - 2r_0 \cos(\phi_0)(r_0 \cos(\phi_0) + ir_0 \sin(\phi_0)) + r_0^2 \\ &= (r_0^2 \cos^2(\phi_0) - r_0^2 \sin^2(\phi_0) - 2r_0^2 \cos^2(\phi_0) + r_0^2) \\ &\quad + i(2r_0^2 \cos(\phi_0) \sin(\phi_0) - 2r_0^2 \cos(\phi_0) \sin(\phi_0)) = 0. \end{aligned}$$

<sup>20</sup>. Soit  $z = x + iy$  un nombre complexe, où  $x$  et  $y$  sont des nombres réels, et  $i$  est tel que  $i^2 = -1$ . Alors on note  $\Re(z)$  la partie réelle du nombre complexe  $z$ , c'est-à-dire  $\Re(z) = x$ . De la même manière, on note  $\Im(z)$  sa partie imaginaire, c'est-à-dire  $\Im(z) = y$ .

Enfin, notons que l'énoncé du théorème prouvé dans la thèse de Gauss ne coïncide pas avec ce que nous appelons aujourd'hui le Théorème Fondamental de l'Algèbre (voir 7). En effet, ce Théorème Fondamental de l'Algèbre stipule que tout polynôme non constant  $P$  à coefficients complexes et de degré  $m$  admet  $m$  racines complexes si on tient compte de leurs multiplicités. L'énoncé de Gauss 2 quant à lui garantit que tout polynôme non constant à coefficients réels se factorise en un produit de facteurs linéaires et de facteurs quadratiques irréductibles. Le lemme suivant permet de le justifier et de renforcer le crédit accordé à Gauss. La définition ci-dessous est importante à ce sujet.

**Definition 4.** Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $P = \sum_{k=0}^n c_k z^k \in \mathbb{C}[z]$  un polynôme à coefficients complexes de degré  $n$ . Alors on note  $\overline{P}$  la fonction polynomiale définie par

$$\overline{P}(z) = \sum_{k=0}^n \overline{c_k} z^k.$$

pour tout  $z \in \mathbb{C}$ .

**Lemme 4.** Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $P \in \mathbb{C}[z]$ .

- 1) Pour tous  $z \in \mathbb{C}$ , on a  $\overline{P}(z) = \overline{P(\overline{z})}$ .
- 2) La fonction  $\overline{P}$  est un polynôme à coefficients réel.
- 3) Soit  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Si  $\mathcal{Z}_P$  désigne l'ensemble d'annulation de  $P$ , alors on a  $z_0 \in \mathcal{Z}_{\overline{P}}$  si et seulement si  $z_0 \in \mathcal{Z}_P \cup \overline{\mathcal{Z}_P}$ .

*Démonstration.* Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $P = \sum_{k=0}^n c_k z^k \in \mathbb{C}[z]$  un polynôme à coefficients complexes de degré  $n$  et  $z \in \mathbb{C}$ . Alors on obtient

$$\overline{P(\overline{z})} = \overline{\sum_{k=0}^n c_k \overline{z}^k} = \overline{\sum_{k=0}^n c_k z^k} = \sum_{k=0}^n \overline{c_k} z^k$$

en appliquant systématiquement les propriétés de la conjugaison complexe. Pour le second point à démontrer, on observe d'abord que les relations suivantes sont bien satisfaites

$$\begin{aligned} (P\overline{P})(z) &= P(z)\overline{P}(z) \\ &= \left( \sum_{j=0}^n c_j z^j \right) \left( \sum_{k=0}^n \overline{c_k} z^k \right) \\ &= \sum_{l=0}^{2n} \left( \sum_{j+k=l} c_j \overline{c_k} \right) z^l \end{aligned}$$

si bien que la fonction  $P\overline{P}$  est polynomiale. Pour conclure le raisonnement, il suffit de se convaincre que chacun des coefficients du polynôme ci-dessous est réel. C'est direct parce que, pour tout  $l \in \{0, \dots, 2n\}$ , on a

$$\overline{\sum_{j+k=l} c_j \overline{c_k}} = \sum_{j+k=l} \overline{c_j} c_k = \sum_{j+k=l} c_j \overline{c_k}.$$

Pour prouver la dernière assertion, on procède comme ceci. Soit  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Vu l'assertion précédente, on a

$$(P\overline{P})(z_0) = P(z_0)\overline{P(\overline{z_0})}.$$

Vu que  $\mathbb{C}$  est un corps, on tire directement de cette égalité que  $z_0$  est une zéro du polynôme  $P\overline{P}$  si et seulement si  $z_0$  ou  $\overline{z_0}$  est un zéro de  $P$ .  $\square$

### 2.5.2 Quelques mots à propos de l'apport d'A. Ostrowski

*But for the moment, I wish to point out what an immense gap Gauss' proof contained. It is a subtle point even today that a real algebraic plane curve cannot enter a disk without leaving.*

---

Smale, 1981

Comme nous l'avons vu précédemment, Gauss n'a pas pleinement justifié toutes ses affirmations, pensant que celles-ci étaient simples et pourraient être fournies ultérieurement si nécessaire. Cela a été souligné par de nombreux mathématiciens depuis Bolzano[6] en 1817 jusqu'à Steven Smale en 1981 (voir [35]), où il critique la démonstration de Gauss de 1799, relevant certaines des lacunes sont importantes et difficiles à combler.

En 1920, A. Ostrowski a prouvé dans [23], non sans peine les résultats utilisés sans preuve par Gauss, mettant un point presque final aux efforts entrepris par Gauss 121 ans plus tôt. Dans ce travail, nous n'aborderons pas en détail l'article de A. Ostrowski. D'une part, il s'agit d'un travail ardu, tant d'un point de vue mathématique que linguistique. D'autre part, il s'avère qu'une contribution récente (voir [5]) prétend pouvoir contourner le problème délicat de la topologie et de l'entrelacement des courbes  $\Gamma_{RP}$  et  $\Gamma_{IP}$  de manière élémentaire. L'analyse de ce travail intéressant est le sujet du chapitre suivant.

En effet, en 2017, Soham Basu et Daniel Velleman ont présenté une nouvelle démonstration du TFA (voir [5]), qu'ils qualifient d'élémentaire, étant donné qu'ils parviennent à finaliser l'argument de Gauss tout en évitant les subtilités traitées par Ostrowski. Leur approche est intrigante et n'a peut-être pas reçu l'attention qu'elle méritait puisqu'elle court-circuite les résultats non-triviaux d'Ostrowski... Pour cette raison, le chapitre suivant de ce mémoire est consacré à l'analyse du travail récent de Basu et Velleman.



## Chapitre 3

# Complétion élémentaire de la preuve de Gauss

*It has often been said that attempts to prove the fundamental theorem began with d'Alembert (1746), and that the first satisfactory proof was given by Gauss (1799). This opinion should not be accepted without question, as the source of it is Gauss himself.*

---

Stillwell [voir [36][p.285-286] ], 2010

### Introduction

Bien que les premières tentatives de démonstration remontent à d'Alembert en 1746 [9], Carl Friedrich Gauss est souvent considéré (voir [22]) comme le premier à avoir fourni une démonstration satisfaisante, ou du moins dont les lacunes sont prétendument aisées à combler, du Théorème Fondamental de l'Algèbre. Ce point de vue a été décrit et, surtout, commenté dans le chapitre précédent<sup>1</sup>. Dans leur article<sup>2</sup> [5] qui est le sujet de ce chapitre, deux mathématiciens, S. Basu<sup>3</sup> et Daniel J. Velleman<sup>4</sup> ont présenté une méthode élémentaire pour conclure rigoureusement la preuve géométrique de Gauss, permettant ainsi de contourner les développements d'Ostrowski. Dans ce chapitre, nous étudions de près l'article [5] de Basu et Velleman et complétons chaque fois qu'il est nécessaire leurs arguments afin de faciliter la lecture de leur travail.

L'article en question est divisé en quatre sections : la première consiste en une longue citation de J. Stillwell à laquelle nous avons déjà fait allusion. La seconde est un résumé rapide des développements menés par Gauss dans sa thèse. C'est l'occasion pour eux de fixer quelques notations et d'expliquer pourquoi il suffit, en suivant Gauss, de traiter le cas des polynômes à coefficients réels : cette discussion menée de manière informelle se résume au lemme 4 traité précédemment. La troisième section est celle qui nous a intéressé tout particulièrement : en effet, c'est précisément dans cette dernière qu'ils décrivent leur méthode pour compléter de manière élémentaire la preuve de Gauss. Cependant, leur exposition se décline, il faut le constater, souvent dans un mode explicatif, les assertions, raisonnements et ébauches de preuve s'enchaînant de manière peu structurée. Le travail présenté ci-dessous consiste dès lors en la (re)formulation des assertions rencontrées et la (re)structuration de leurs arguments en preuves mathématiques<sup>5</sup>.

---

1. Contrairement à ce point de vue, J. Stillwell affirme dans [36] que la preuve initialement proposée par d'Alembert en 1746 s'avère plus commode en réalité à compléter, notamment si on compare, ces développements à ceux menés par A. Ostrowski dans [23].

2. "On Gauss's First Proof of the Fundamental Theorem of Algebra"

3. Soham Basu est diplômé en B.Tech. de l'IIT Bombay (2011).

4. D. J. Velleman est professeur adjoint à l'Université du Vermont.

5. Remarquons que le style d'exposition est certainement lié au moyen de publication choisi par les auteurs... C'est dommage vu que, précisément, il s'agissait de savoir, enfin, s'il était bien vrai que la preuve de Gauss pouvait



### 3.1 La preuve de Basu et Velleman : analyse et détails

Le début de la preuve de Basu et Velleman est identique à celui de Gauss : ils considèrent les deux courbes algébriques étudiées par Gauss et naturellement associées à un polynôme

$$P(x) = \sum_{j=1}^d a_j x^j$$

à coefficients réels justifiant leurs propos par une discussion (voir nos définitions 1, 2 et 3). Le lemme 2 et la définition 3 du chapitre précédent résument simplement leur démarche en la recadrant dans le contexte naturel des polynômes de Tchebychev qu'ils ne mentionnent d'ailleurs pas (voir l'annexe 6). La suite de leur argument est résumée dans le résultat ci-dessous (voir théorème 4) :

**Théorème 6.**

- 1) Pour tout  $r \in \mathbb{R}^+$ , les équations  $R_P(r, \phi) = 0$  et  $I_P(r, \phi) = 0$  admettent au plus  $2d$  solutions dans l'intervalle  $[0, 2\pi[$ .
- 2) Il existe  $R > 0$  tel que pour tout  $r > R$ , les équations  $R_P(r, \phi) = 0$  et  $I_P(r, \phi) = 0$  admettent exactement  $2d$  solutions dans  $[0, 2\pi[$ .
- 3) Soit  $R > 0$  satisfaisant les conditions du point précédent et fixons  $r > R$ . Si on dénote par  $\alpha_0(r) < \dots < \alpha_{2d-1}(r) \in [0, 2\pi[$  les racines de  $R_P(r, \phi) = 0$  et  $\beta_0(r) < \dots < \beta_{2d-1}(r) \in [0, 2\pi[$  les racines de  $I_P(r, \phi) = 0$  alors, on a

$$\beta_{i-1}(r) < \alpha_{i-1}(r) < \beta_i(r) < \alpha_i(r), \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, 2d-1\}. \quad (3.1)$$

Le résultat ci-dessus correspond au lemme 2 du chapitre précédent. Pour rappel, en s'inspirant de la preuve de Gauss, nous l'avions prouvé en deux temps : d'abord en établissant, au moyen d'une étude de signe, que le nombre de solutions des équations considérées était minoré par  $2d$  puis en recourant au théorème de Rolle. Comme on va s'en rendre compte, Basu et Velleman procèdent à rebours.

*Démonstration.*

- 1) C'est une conséquence directe du théorème 9 et du lemme 2.
- 2) Le second point repose sur une analyse du comportement asymptotique des termes dominants de  $R_P(r, \phi)$  et  $I_P(r, \phi)$  : voir la preuve du théorème 4.
- 3) Leurs arguments sont similaires à ce que nous avons donné en détail dans la preuve du théorème 4.

□

Nous allons voir qu'un changement de stratégie dans la preuve de Gauss permet à Basu et Velleman de conclure en recourant uniquement à des notions d'analyse élémentaire : en effet, ces deniers adoptent une approche assez minimaliste qui, il faut le reconnaître cependant, n'apporte rien à la compréhension de la topologie des courbes algébriques abordées par Gauss et établie par Ostrowski, mais suffit pour conclure la preuve. L'apport central de Basu et Velleman est, après analyse, la définition suivante de rayon d'entrelacement d'un polynôme à coefficients réels et l'étude subséquente de la topologie de l'ensemble de ces nombres.

**Definition 5.** Soit  $P \in \mathbb{R}[x]$ . On dit qu'un nombre  $R > 0$  est un rayon d'entrelacement pour  $P$  s'il satisfait les conditions 2), 3) du théorème 6. On note

$$\mathcal{E}_P = \{R > 0 : R \text{ est un rayon d'entrelacement pour } P\} \quad (3.2)$$

l'ensemble des rayons d'entrelacement de  $P$ . Pour tout  $r > R$ , on dit aussi que les racines des équations  $R_P(r, \theta) = I_P(r, \theta) = 0$  sont entrelacées.

---

être complétée de manière élémentaire...

La figure suivante (inspirée de [5]) suggère que le rayon du cercle pointillé est un rayon d'entrelacement pour le polynôme  $P_0(z) = z^8 + 0.2z^7 - 0.1z^6 - 0.3z^5 - 0.1z^3 + 0.2z^2 - 0.3z + 0.1$ . Les lignes rouges continues (resp. lignes bleues en pointillés) décrivent les solutions de  $R_{P_0}(x, y) = 0$  (resp.  $I_{P_0}(x, y) = 0$ ) :

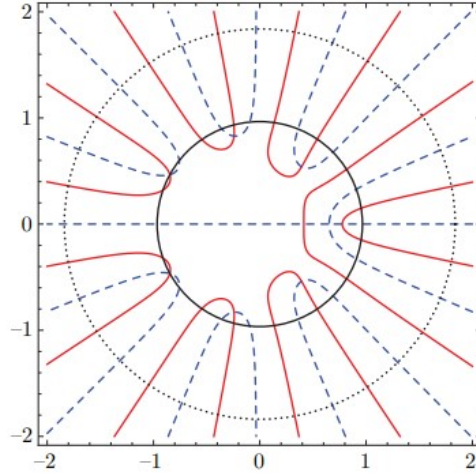


FIGURE 3.1 – Un rayon d'entrelacement du polynôme  $P_0$ .

Le théorème 6 garantit que l'ensemble des rayons d'entrelacement est une partie non-vide de  $\mathbb{R}^+$ . L'idée de Gauss pour conclure sa preuve revient alors à, après avoir choisi un rayon d'entrelacement  $R$  et  $r_0 > R$ , suivre la courbe<sup>6</sup>  $R_P(r, \theta) = 0$  depuis un point sur le cercle  $|z| = r_0$  vers l'intérieur du cercle, affirmant ensuite - sans justification (voir 2.4) - que cette dernière devait émerger du disque  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r_0\}$  après avoir intersecter la courbe d'équation  $I_P(r, \phi) = 0$ . En revanche, Basu et Velleman se contente de prouver l'intersection de ces deux courbes de manière indirecte après avoir étudié précisément l'ensemble  $\mathcal{E}_P$  des rayons d'entrelacement du polynôme  $P$  considéré.

**Lemme 5.** *Soit  $P \in \mathbb{R}[x]$  un polynôme à coefficients réels et de degré  $d$ .*

- 1) *L'ensemble  $\mathcal{E}_P$  des rayons d'entrelacement est un ouvert<sup>7</sup> ;*
- 2) *Pour  $0 \leq j \leq 2d - 1$ , les fonctions  $\alpha_j : \mathcal{E}_P \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\beta_j : \mathcal{E}_P \rightarrow \mathbb{R}$  du théorème 6 sont continues.*

*Démonstration.*

- 1) Soient  $P \in \mathbb{R}[x]$  un polynôme de degré  $d$  et  $r \in \mathcal{E}_P$  un rayon d'entrelacement de  $P$ . Par définition, on sait que

$$0 = \beta_0(r) < \alpha_0(r) < \beta_1(r) < \dots < \beta_{2d-1}(r) < \alpha_{2d-1}(r) < 2\pi.$$

En posant  $\beta_{2d}(r) = 2\pi, \forall r \in \mathbb{R}^+$  pour simplifier les notations, on constate que les nombres  $\alpha_j(r) - \beta_j(r), \beta_{j+1}(r) - \alpha_j(r), j = 0, \dots, 2d$  sont tous strictement positifs.

On note alors

$$\delta_r = \min \left\{ \frac{\alpha_j(r) - \beta_j(r)}{2}, \frac{\beta_{j+1}(r) - \alpha_j(r)}{2} : j = 0, \dots, 2d \right\}$$

et on déduit que  $\delta_r > 0$  et que pour tout  $0 < t < \delta_r$ , on a

6. Plus précisément, son image dans  $\mathbb{R}^2$  par l'application  $\varphi^{-1}$  voir définition 1.

7. Par définition, une partie  $U$  de  $\mathbb{R}$  est ouverte si, pour tout  $x \in U$ , il existe un intervalle ouvert  $I$  satisfaisant  $x \in I \subset U$ . Voir [32].

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_0(r) + t < \alpha_0(r) - t, \\ \alpha_0(r) + t < \beta_1(r) - t, \\ \dots \\ \beta_{2d-1}(r) + t < \alpha_{2d-1}(r) - t \\ \alpha_{2d-1}(r) + t < \beta_{2d}(r) - t. \end{array} \right. \quad (3.3)$$

La remarque 1 garantit que la fonction  $R_P(r, \cdot)$  (resp.  $I_P(r, \cdot)$ ) change de signe en chacun de ses zéros  $\alpha_0(r), \dots, \alpha_{2d-1}(r)$  (resp.  $\beta_0(r), \dots, \beta_{2d-1}(r)$ ). Il s'ensuit que les nombres  $R_P(r, \alpha_j(r) - t)$  et  $R_P(r, \alpha_j(r) + t)$  (resp.  $I_P(r, \beta_j(r) - t)$  et  $I_P(r, \beta_j(r) + t)$ ) ont des signes opposés. Vu la continuité des fonctions  $R_P$  et  $I_P$ , il existe  $\delta_1 > 0$  tel que pour tout  $0 < |r - s| < \delta_1$ , on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma(R_P(s, \alpha_j(r) - t)) = \sigma(R_P(r, \alpha_j(r) - t)) \\ \sigma(R_P(s, \alpha_j(r) + t)) = \sigma(R_P(r, \alpha_j(r) + t)) \\ \sigma(I_P(s, \beta_j(r) - t)) = \sigma(I_P(r, \beta_j(r) - t)) \\ \sigma(I_P(s, \beta_j(r) + t)) = \sigma(I_P(r, \beta_j(r) + t)). \end{array} \right.$$

On en déduit que la fonction  $R_P(s, \cdot)$  (resp.  $I_P(s, \cdot)$ ) admet au moins un zéro dans chacun des  $2d$  intervalles

$$] \alpha_j(r) - t, \alpha_j(r) + t[, j = 0, \dots, 2d - 1 \quad (\text{resp. } ] \beta_j(r) - t, \beta_j(r) + t[, j = 0, \dots, 2d - 1). \quad (3.4)$$

En procédant comme plus haut, on conclut que la fonction  $R_P(s, \cdot)$  (resp.  $I_P(s, \cdot)$ ) admet précisément  $2d$  zéros dans l'intervalle  $[0, 2\pi[$  vu la relation

$$R_P(s, \theta) = p_r(\cos(\theta)) \quad (\text{resp. } I_P(s, \theta) = \sin(\theta)q_r(\cos(\theta))).$$

Les relations (3.3) ci-dessus garantissent que les zéros de  $R_P(s, \cdot)$  et  $I_P(s, \cdot)$  sont entrelacés. On a bien démontré que l'ensemble est  $\mathcal{E}_P$  est un ouvert vu que  $s \in \mathcal{E}_P$  pour tout  $s$  satisfaisant  $|r - s| < \delta_1$ .

- 2) Nous poursuivons avec les notations du point précédent et nous voulons démontrer que pour tout  $j = 0, \dots, 2d - 1$ , la fonction  $\alpha_j$  (resp.  $\beta_j$ ) est continue sur  $\mathcal{E}_P$ . Pour ce faire, nous fixons  $j \in \{0, \dots, 2d - 1\}$  et  $r \in \mathcal{E}_P$ . Alors, on observe que pour tout  $0 < \varepsilon < \delta_r$ , on a

$$|r - s| < \delta_1 \implies \alpha_j(s) \in ] \alpha_j(r) - \varepsilon, \alpha_j(r) + \varepsilon[$$

vu les intervalles (3.4).

□

Le théorème ci-dessous résume l'approche élémentaire proposée par Basu et Velleman pour compléter la preuve de Gauss.

**Théorème 7.** *Soit  $P \in \mathbb{R}[x]$  un polynôme de degré  $d$  satisfaisant  $P(0) \neq 0$ . Alors l'ensemble  $\mathcal{E}_P$  des rayons d'entrelacement de  $P$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^+$  satisfaisant*

$$\iota_P = \inf \mathcal{E}_P > 0.$$

*En particulier, il existe  $\alpha \in [0, 2\pi[$  tel que  $R_P(\iota_P, \alpha) = I_P(\iota_P, \alpha)$ .*

*Démonstration.* Soit  $P \in \mathbb{R}[x]$  satisfaisant  $P(0) \neq 0$ . Nous savons déjà que  $\mathcal{E}_P$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^+$ . Il s'agit donc d'une partie minorée de  $\mathbb{R}$  et, par conséquent, admet une borne inférieure  $\inf \mathcal{E}_P \notin \mathcal{E}_P$  (voir [32]).

1. Supposons par l'absurde que  $\inf \mathcal{E}_P = 0$ . On en déduit par définition qu'il existe une suite de rayons d'entrelacement  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfaisant

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0.$$

Par ailleurs, vu la définition 2, on a l'identité  $P(x) = \tilde{R}_P(x, 0)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et on conclut

$$\begin{aligned} P(0) &= \tilde{R}_P(0, 0) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{R}_P(r_n \cos(\alpha_j(r_n)), r_n \sin(\alpha_j(r_n))) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} R_P(r_n, \alpha_j(r_n)) = 0 \end{aligned}$$

par (2.5) et la définition des rayons d'entrelacement.

2. Vu ce qui précède, on sait que  $0 < \iota_P = \inf \mathcal{E}_P \notin \mathcal{E}_P$ . On sait alors qu'il existe une suite de rayons d'entrelacement  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergente vers  $\iota_P$ . En appliquant à répétition le théorème de Bolzano-Weierstrass<sup>8</sup>, on peut supposer que, pour tout  $j \in \{0, \dots, 2d-1\}$ , les suites  $(\alpha_j(r_n))_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\beta_j(r_n))_{n \in \mathbb{N}}$  sont convergentes vers  $a_j$  et  $b_j$  respectivement. Par continuité des fonctions  $R_P$  et  $I_P$ , nous déduisons d'abord que, pour tout  $j \in \{0, \dots, 2d-1\}$ , on a

$$R_P(\iota_P, a_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} R_P(r_n, \alpha_j(r_n)) = 0 \quad (3.5)$$

et

$$I_P(\iota_P, b_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_P(r_n, \beta_j(r_n)) = 0. \quad (3.6)$$

Ensuite, vu que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$\beta_0(r_n) < \alpha_0(r_n) < \beta_1(r_n) < \dots < \beta_{2d-1}(r_n) < \alpha_{2d-1}(r_n) \quad (3.7)$$

par définition des rayons d'entrelacement, on déduit les inégalités

$$0 = b_0 \leq a_0 \leq b_1 \leq \dots \leq b_{2d-1} \leq a_{2d-1} \leq 2\pi.$$

Supposons à présent que toutes ces inégalités sont strictes. On déduit de (3.5), (3.6), (3.7) que  $\iota_P$  est un rayon d'entrelacement. Il s'agit d'une contradiction. Par conséquent, au moins une des inégalités est non stricte. Il existe alors  $j, k \in \{0, \dots, 2d-1\}$  tels que

$$a_j \equiv b_k$$

et on déduit  $R_P(\iota_P, a_j) = 0$  et  $I_P(\iota_P, a_j) = I_P(\iota_P, b_k) = 0$ .

□

## 3.2 Perspectives sur l'article de Basu et Velleman

La démonstration proposée par Basu et Velleman [5] complète la méthode de Gauss en introduisant la notion de rayon d'entrelacement associé à tout polynôme  $P$  à coefficients réels. Ils établissent l'existence de la borne inférieure de l'ensemble de rayon, notée  $\iota_P$  et satisfaisant  $\iota_P > 0$  si  $P(0) \neq 0$ . Ils démontrent que le cercle centré à l'origine et de rayon  $\iota_P$  doit nécessairement contenir au moins une racine du polynôme  $P$ .

Cette approche, bien que fondée sur des concepts élémentaires, repose néanmoins sur des notions fines : topologie des parties de  $\mathbb{R}$ , définition précises des ouverts, existence d'une borne

8. Le théorème de Bolzano-Weierstrass (voir [32]), énonce que toute suite bornée de  $\mathbb{R}^n$  admet une sous-suite convergente.

inférieure, ... En utilisant des arguments topologiques de base, ils parviennent à combler les lacunes laissées par Gauss<sup>9</sup>.

Cependant, on peut reprocher à Basu et Velleman de ne pas avoir su tirer pleinement parti des outils modernes dont ils disposent. Gauss, à son époque, avait laissé certaines parties de sa démonstration dans le vague, probablement par manque d'outils rigoureux. De manière surprenante, Basu et Velleman semblent reproduire ce flou, malgré ce qu'ils annoncent dans leur article et contrairement à ce qu'on aurait pu attendre dans ce cas de figure. Leur prétention à compléter de manière rigoureuse la démonstration de Gauss semble donc à remettre en question, de ce point de vue-là, d'autant plus que certaines de leurs assertions ne sont pas justifiées complètement, et que les explications fournies ne suffisent pas toujours à combler ces lacunes. Nous avons tenté de remédier à ces différents problèmes dans la section précédente.

On peut se demander pourquoi Gauss n'avait pas développé les arguments mentionnés par Basu et Velleman. Une supposition plausible est que ces concepts, bien que connus et utilisés à son époque, n'étaient pas encore suffisamment formalisés pour être intégrés dans une démonstration rigoureuse. Il se pourrait également que Gauss ait perçu ces notions, mais qu'il ait choisi de ne pas les utiliser faute de formalisation adéquate.

---

9. Il est intéressant de noter que parmi les étudiants de Gauss figurent des figures fondatrices de la topologie Listing (1808-1882) et Riemann (1826-1866).

## Troisième partie

# A propos du caractère algébrique des preuves du TFA



# Chapitre 4

## Corps réels clos

### Introduction

Dans ce dernier chapitre, nous allons nous intéresser au caractère algébrique de la preuve du Théorème Fondamental de l'Algèbre. On pourrait se demander pourquoi ce théorème porte désormais le nom de Théorème Fondamental de l'Algèbre car nous ne savons pas si une démonstration exclusivement basée sur des principes algébriques permet de démontrer ce théorème. En effet, dans toutes les preuves que nous avons lues durant nos recherches pour ce travail, toutes font appel à des résultats issus de la topologie ou de l'analyse. On est alors amené à se poser la question suivante :

Existe-t-il une preuve purement algébrique du TFA ?

En prenant du recul et en réalisant des recherches pour tenter de répondre à cette question, une première réponse intéressante a été trouvée sur un forum de discussion mathématique<sup>1</sup> à laquelle il nous semblait intéressant de réfléchir :

*"Il n'existe pas de preuve purement algébrique du TFA car  $\mathbb{R}$  est lui-même un objet analytique."*

En effet, pour définir l'ensemble des nombres réels, nous devons recourir à l'analyse<sup>2</sup>. Cependant, il existe une preuve de Emil Artin et Otto Schreier [1] dont la première partie est totalement algébrique et la deuxième partie est elle par contre analytique. Cette preuve repose sur la notion de corps réel clos et démontre que l'adjonction de  $i$  à tout corps réel clos engendre un corps algébriquement clos. Cette partie de la preuve est purement algébrique. Pour conclure et obtenir le Théorème Fondamental de l'Algèbre, il restera à montrer que  $\mathbb{R}$  est un corps réel clos.

### 4.1 Corps réels clos et premières propriétés

Dans cette section, nous allons définir la définition de corps réels clos pour ensuite établir les premiers résultats de base de ces corps. La définition de corps réels clos et les différents résultats développés dans la section ci-dessous proviennent de [4].

Dans un premier temps, définissons la notion d'ordre total pour ensuite définir celle de corps totalement ordonné :

---

1. <https://les-mathematiques.net/vanilla/discussion/comment/641341>

2. Pour rappel, on dispose notamment des deux méthodes suivantes pour définir les nombres réels : celle de Dedekind via la notion de coupure et celle de Cantor via les suites de Cauchy. Voir, par exemple, [38].



**Definition 6.** Une relation binaire  $\leq$  sur un ensemble  $E$  est un ordre total si pour tous éléments  $x, y$  et  $z$  appartenant à  $E$ , on a les propriétés suivantes :

- réflexivité :  $x \leq x$  ;
- anti-symétrie : si  $x \leq y$  et  $y \leq x$ , alors  $x = y$
- transitivité : si  $x \leq y$  et  $y \leq z$ , alors  $x \leq z$
- totalité :  $x \leq y$  ou  $y \leq x$

Les trois premières propriétés impliquent que  $\leq$  est une relation d'ordre alors que la quatrième propriété fait de cet ordre un ordre total.

**Definition 7.** Un corps  $K$  est dit totalement ordonné si la condition d'être positif, pour les éléments de ce corps est définie par les propriétés suivantes :

1) Pour tout élément  $a$  de  $K$ , on a exactement l'une des relations suivantes :

$$a = 0, a > 0, -a > 0.$$

2) Si  $a > 0$  et  $b > 0$ , alors  $a + b > 0$  et  $a \cdot b > 0$ .

En particulier, si  $-a > 0$ , alors on dira que  $a$  est négatif.

**Exemple.** Le corps  $\mathbb{R}$  des réels, muni de la relation d'ordre habituelle, est un corps totalement ordonné, donc cela implique que tous ses sous-corps (comme par exemple le corps  $\mathbb{Q}$  des rationnels) l'est également (pour l'ordre induit).

Voici une proposition qui nous sera utile pour démontrer que l'adjonction de  $i$  à tout corps réel clos engendre un corps algébriquement clos dans le théorème de caractérisation des corps réels clos :

**Proposition 6.** Soit  $P = a_p X^p + \dots + a_0$  tel que  $a_p \neq 0$  un polynôme avec tous ses coefficients dans un champ ordonné  $F$ . Si  $|x|$  est plus grand que  $2 \sum_{0 \leq i \leq p-1} \frac{|a_i|}{|a_p|}$ , alors  $P(x)$  et  $a_p x^p$  sont de même signe.

*Démonstration.* Supposons que

$$|x| > 2 \sum_{0 \leq i \leq p-1} \left| \frac{a_i}{a_p} \right|,$$

ce qui implique  $|x| > 2$ . Puisque

$$P(x) = a_p x^p + \sum_{0 \leq i \leq p-1} a_i x^i,$$

nous pouvons écrire

$$\frac{P(x)}{a_p x^p} = 1 + \sum_{0 \leq i \leq p-1} \frac{a_i}{a_p} x^{i-p}.$$

Ainsi,

$$\frac{P(x)}{a_p x^p} \geq 1 - \left( \sum_{0 \leq i \leq p-1} \frac{|a_i|}{|a_p|} |x|^{i-p} \right).$$

Étant donné que  $|x| > 2 \sum_{0 \leq i \leq p-1} \frac{|a_i|}{|a_p|}$ , nous avons

$$\frac{P(x)}{a_p x^p} \geq 1 - \left( \sum_{0 \leq i \leq p-1} \frac{|a_i|}{|a_p|} \right) \left( |x|^{-1} + |x|^{-2} + \dots + |x|^{-p} \right).$$

Puisque  $|x| > 2$ , il s'ensuit que

$$\frac{P(x)}{a_p x^p} \geq 1 - \frac{1}{2} \left( 1 + |x|^{-1} + \dots + |x|^{-(p-1)} \right).$$

Cela peut être écrit comme

$$\frac{P(x)}{a_p x^p} \geq 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{1 - |x|^{-p}}{1 - |x|^{-1}} \right) > 0.$$

En effet, pour  $|x| > 2$ , on a  $0 < |x|^{-1} < \frac{1}{2}$ , donc  $1 - |x|^{-1} > \frac{1}{2}$ . De plus,  $1 - |x|^{-p}$  est toujours positif et inférieur à 1. Ainsi,  $\frac{1 - |x|^{-p}}{1 - |x|^{-1}}$  est une fraction positive et inférieure à 2 (car  $\frac{1 - |x|^{-p}}{1 - |x|^{-1}} < \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ ).

Donc,

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1 - |x|^{-p}}{1 - |x|^{-1}} \right) < 1.$$

Cela implique que :

$$1 - \frac{1}{2} \left( \frac{1 - |x|^{-p}}{1 - |x|^{-1}} \right) > 0.$$

Par conséquent, nous avons bien que :

$$\frac{P(x)}{a_p x^p} \geq 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{1 - |x|^{-p}}{1 - |x|^{-1}} \right) > 0.$$

Cela montre que  $\frac{P(x)}{a_p x^p}$  est positif, donc  $P(x)$  et  $a_p x^p$  sont de même signe sous les conditions données.  $\square$

Nous définissons à présent la notion de cône d'un corps qui nous sera utile afin de définir les corps réels clos et que l'on doit envisager comme un ensemble d'éléments non négatifs :

**Definition 8.** Un cône du corps  $F$  est un sous-ensemble  $C$  de  $F$  tel que :

- $x \in C, y \in C \Rightarrow x + y \in C$ ,
- $x \in C, y \in C \Rightarrow xy \in C$ ,
- $x \in F \Rightarrow x^2 \in C$ .

En particulier, un cône  $C$  est propre si, de plus,  $-1 \notin C$ .

**Definition 9.** Soit  $(F, \leq)$  un corps ordonné. Le sous-ensemble  $C = \{x \in F \mid x \geq 0\}$  est un cône, le cône positif de  $(F, \leq)$ .

**Notation 1.** Soit  $K$  un corps. Nous notons par  $K^{(2)}$  l'ensemble des carrés des éléments de  $K$  et par  $\sum K^{(2)}$  l'ensemble des sommes de carrés des éléments de  $K$ .

Nous sommes alors en mesure de définir un corps réel clos :

**Definition 10.** Un corps  $K$  est un corps réel si  $-1 \notin \sum K^{(2)}$ . Autrement dit, un corps est dit *réel* si dans ce corps,  $-1$  n'est pas représentable par une somme de carrés.

Avec ces outils en main, nous pouvons maintenant formuler la définition précise d'un corps réel clos.

**Definition 11.** Un corps réel clos  $R$  est un corps ordonné dont le cône positif est l'ensemble des carrés  $R^{(2)}$  et tel que tout polynôme de degré impair dans  $R[X]$  ait une racine dans  $R$ .

**Remarque 2.** Observons que la condition stipulant que le cône positif d'un corps réel clos  $R$  est  $R^{(2)}$  implique que  $R$  possède un ordre unique en tant que corps ordonné, car le cône positif de tout ordre doit nécessairement inclure  $R^{(2)}$ .

Avant d'être en mesure de pouvoir démontrer le théorème de caractérisation des corps réels clos, il nous faut d'abord définir de nouvelles notions et établir quelques nouveaux résultats à propos des polynômes symétriques :

**Definition 12.** Soit  $K$  un corps. Un polynôme  $Q(X_1, \dots, X_k) \in K[X_1, \dots, X_k]$  est symétrique si, pour toute permutation  $\mu$  de  $\{1, \dots, k\}$ ,

$$Q(X_{\mu(1)}, \dots, X_{\mu(k)}) = Q(X_1, \dots, X_k).$$

**Definition 13.** Pour  $i = 1, \dots, k$ , la  $i$ -ème fonction symétrique élémentaire est

$$E_i = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq k} X_{j_1} \cdots X_{j_i}.$$

Les fonctions symétriques élémentaires sont en relation avec les coefficients des polynômes de la manière suivante :

**Lemme 6.** Soient  $X_1, \dots, X_k$  des éléments d'un corps  $K$  et

$$P = (X - X_1) \cdots (X - X_k) = X^k + C_1 X^{k-1} + \cdots + C_k,$$

alors  $C_i = (-1)^i E_i$

*Démonstration.* Identifions le coefficient de  $X^i$  des deux côtés de

$$(X - X_1) \cdots (X - X_k) = X^k + C_1 X^{k-1} + \cdots + C_k.$$

En effet, pour chaque  $i$ , les termes du produit développé comprennent toutes les combinaisons des produits des  $X_j$  et des constantes 1 issues de chaque facteur  $(X - X_j)$ . En particulier :

1) Le coefficient de  $X^{k-1}$  est la somme des racines (en tenant compte des signes), c'est-à-dire :

$$C_1 = -(X_1 + X_2 + \cdots + X_k).$$

2) Le coefficient de  $X^{k-2}$  est la somme de tous les produits possibles de deux racines prises parmi  $X_1, X_2, \dots, X_k$ , c'est-à-dire :

$$C_2 = X_1 X_2 + X_1 X_3 + \cdots + X_{k-1} X_k.$$

3) Le coefficient de  $X^{k-3}$  est la somme de tous les produits possibles de trois racines prises parmi  $X_1, X_2, \dots, X_k$ , et ainsi de suite.

4) Enfin, le terme constant  $C_k$  est le produit des racines avec un signe alterné en fonction de  $k$  :

$$C_k = (-1)^k X_1 X_2 \cdots X_k.$$

Mais nous savons que les fonctions symétriques élémentaires sont définies comme suit :

$$E_i = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_i \leq k} X_{j_1} X_{j_2} \cdots X_{j_i}.$$

Pour  $i = 1, \dots, k$ , chaque  $E_i$  est la somme de tous les produits possibles de  $i$  racines distinctes parmi  $X_1, X_2, \dots, X_k$ .

Ainsi, en comparant les coefficients  $C_i$  avec les  $E_i$ , nous observons que chaque coefficient  $C_i$  est donné par  $(-1)^i$  multiplié par  $E_i$ . Plus formellement :

- $C_1$  est la somme des racines prises une à une, donc :

$$C_1 = -(X_1 + X_2 + \cdots + X_k) = -E_1.$$

- $C_2$  est la somme des produits des racines prises deux à deux, donc :

$$C_2 = X_1 X_2 + X_1 X_3 + \cdots + X_{k-1} X_k = E_2.$$

- En général,  $C_i$  est  $(-1)^i$  fois la somme des produits des racines prises  $i$  à  $i$ , c'est-à-dire :

$$C_i = (-1)^i E_i.$$

□

**Proposition 7.** Soit  $K$  un corps et soit

$$Q(X_1, \dots, X_k) \in K[X_1, \dots, X_k]$$

un polynôme symétrique. Il existe un polynôme

$$R(T_1, \dots, T_k) \in K[T_1, \dots, T_k]$$

tel que  $Q(X_1, \dots, X_k) = R(E_1, \dots, E_k)$ .

Pour démontrer la proposition 7, nous utilisons le concept d'ordre lexicographique gradué. Nous commençons par définir l'ordre lexicographique, qui est l'ordre alphabétique, afin de pouvoir ensuite introduire la notion d'ordre lexicographique gradué :

**Notation 2.** Nous désignons par  $M_k$  l'ensemble des monômes en  $k$  variables. Remarquons que  $M_k$  peut être identifié avec  $\mathbb{N}^k$  en posant  $X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \dots X_k^{\alpha_k}$ .

**Definition 14.** Soit  $(B, <)$  un ensemble totalement ordonné. L'ordre lexicographique  $<_{\text{lex}}$  sur les séquences finies de  $k$  éléments de  $B$  est l'ordre total  $<_{\text{lex}}$  défini par induction sur  $k$  par :

$$b <_{\text{lex}} b' \Leftrightarrow b < b'$$

$$(b_1, \dots, b_k) <_{\text{lex}} (b'_1, \dots, b'_k) \Leftrightarrow (b_1 < b'_1) \vee (b_1 = b'_1 \wedge (b_2, \dots, b_k) <_{\text{lex}} (b'_2, \dots, b'_k)).$$

**Definition 15.** L'ordre lexicographique gradué  $<_{\text{grlex}}$  sur l'ensemble des monômes dans  $k$  variables  $M_k$  est l'ordre total  $X^\alpha <_{\text{grlex}} X^\beta$  défini par :

$$X^\alpha <_{\text{grlex}} X^\beta \Leftrightarrow (\deg(X^\alpha) < \deg(X^\beta)) \vee (\deg(X^\alpha) = \deg(X^\beta) \wedge \alpha <_{\text{lex}} \beta),$$

avec  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ ,  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)$ ,  $X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \dots X_k^{\alpha_k}$ ,  $X^\beta = X_1^{\beta_1} \dots X_k^{\beta_k}$ .

Grâce à ces deux définitions, nous pouvons désormais démontrer la proposition 7 :

*Démonstration.* Étant donné que  $Q(X_1, \dots, X_k)$  est symétrique, cela signifie que pour toute permutation  $\mu$  des indices  $\{1, \dots, k\}$ ,

$$Q(X_{\mu(1)}, \dots, X_{\mu(k)}) = Q(X_1, \dots, X_k).$$

Considérons le monôme principal de  $Q$  dans l'ordre lexicographique gradué. Disons qu'il s'agit de  $c_\alpha X^\alpha = c_\alpha X_1^{\alpha_1} \dots X_k^{\alpha_k}$  où  $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_k$ .

Il existe une combinaison des fonctions symétriques élémentaires  $E_1, \dots, E_k$  telle que le monôme principal de cette combinaison dans l'ordre lexicographique gradué est exactement  $c_\alpha X^\alpha$ .

En particulier, pour les fonctions symétriques élémentaires, nous avons

$$E_i = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq k} X_{j_1} \dots X_{j_i}.$$

Les  $E_i$  sont des sommes de produits de variables, prises  $i$  à  $i$ .

Construisons alors un polynôme  $P(E_1, \dots, E_k)$  tel que son monôme principal correspond au monôme principal de  $Q$ . Supposons que le monôme principal de  $Q$  soit  $c_\alpha X_1^{\alpha_1} \dots X_k^{\alpha_k}$ . Nous trouvons un polynôme  $P(E_1, \dots, E_k)$  de la forme

$$P(E_1, \dots, E_k) = c_\alpha E_1^{\alpha_1 - \alpha_2} E_2^{\alpha_2 - \alpha_3} \dots E_k^{\alpha_k}.$$

Le monôme principal de ce polynôme est également  $c_\alpha X_1^{\alpha_1} \cdots X_k^{\alpha_k}$ .

Définissons un nouveau polynôme  $Q_1$  comme suit :

$$Q_1 = Q(X_1, \dots, X_k) - P(E_1, \dots, E_k).$$

Si  $Q_1 = 0$ , la démonstration est terminée. Sinon, le monôme principal de  $Q_1$  est strictement plus petit que  $X_1^{\alpha_1} \cdots X_k^{\alpha_k}$  dans l'ordre lexicographique gradué. Et nous répétons alors le processus avec  $Q_1$ . Puisque le processus de soustraction réduit le degré lexicographique à chaque étape, nous finirons par atteindre un polynôme nul après un nombre fini d'étapes.

Finalement, nous aurons exprimé  $Q(X_1, \dots, X_k)$  comme une combinaison finie des fonctions symétriques élémentaires  $E_1, \dots, E_k$ .

Ainsi, nous avons prouvé qu'il existe un polynôme  $R(T_1, \dots, T_k) \in K[T_1, \dots, T_k]$  tel que

$$Q(X_1, \dots, X_k) = R(E_1, \dots, E_k).$$

□

**Proposition 8.** *Soit  $P \in K[X]$ , de degré  $k$ , et  $x_1, \dots, x_k$  les racines de  $P$  (comptées avec leurs multiplicités) dans un corps algébriquement clos  $C$  contenant  $K$ . Si un polynôme  $Q(X_1, \dots, X_k) \in K[X_1, \dots, X_k]$  est symétrique, alors  $Q(x_1, \dots, x_k) \in K$ .*

*Démonstration.* Soient  $e_i$ , pour  $1 \leq i \leq k$ , les  $i$ -èmes fonctions symétriques élémentaires évaluées en  $x_1, \dots, x_k$ . Puisque  $P \in K[X]$ , d'après le lemme 6, on a  $e_i \in K$ . Par la proposition 7, il existe  $R(T_1, \dots, T_k) \in K[T_1, \dots, T_k]$  tel que

$$Q(X_1, \dots, X_k) = R(E_1, \dots, E_k).$$

Ainsi,  $Q(x_1, \dots, x_k) = R(e_1, \dots, e_k) \in K$ .

□

## 4.2 Caractérisation des corps réels clos

Après avoir établi les résultats fondamentaux dans la section précédente, nous pouvons à présent nous atteler à la démonstration du théorème de caractérisation des corps réels clos, en lien avec l'énoncé du Théorème Fondamental de l'Algèbre. Commençons par définir ce que l'on entend par la propriété des valeurs intermédiaires :

**Propriété 1.** Un corps  $R$  possède la propriété des valeurs intermédiaires si  $R$  est un corps ordonné tel que, pour tout  $P \in R[X]$ , s'il existe  $a \in R$  et  $b \in R$  avec  $a < b$  tels que  $P(a) \cdot P(b) < 0$ , alors il existe  $x \in (a, b)$  tel que  $P(x) = 0$ .

**Théorème 8.** *Si  $R$  est un corps, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- 1)  $R$  est réel clos.
- 2)  $R[i] = R[T]/(T^2 + 1)$  est un corps algébriquement clos.
- 3)  $R$  possède la propriété des valeurs intermédiaires.
- 4)  $R$  est un corps réel qui n'a pas d'extension algébrique réelle non triviale, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de corps réel  $R_1$  qui soit algébrique sur  $R$  et différent de  $R$ .

*Démonstration.*

1)  $a \Rightarrow b$ . Soit  $P \in R[X]$  un polynôme séparable<sup>3</sup> monique de degré  $p = 2^m n$  avec  $n$  impair. Nous montrons par induction sur  $m$  que  $P$  a une racine dans  $R[i]$ .

**Cas de base :** Lorsque  $m = 0$ , le polynôme  $P$  possède une racine dans  $R$  par définition, puisque  $R$  est réel clos et que  $p$  est impair.

**Induction :** Soit  $x_1, \dots, x_p$  les racines de  $P$  dans un corps algébriquement clos  $C$ . On introduit une nouvelle indéterminée  $Z$  et le polynôme monique  $Q(Z, Y)$  dont les racines sont  $x_i + x_j + Zx_i x_j$  pour  $i < j$  :

$$Q(Z, Y) = \prod_{i < j} (Y - (x_i + x_j + Zx_i x_j)).$$

Les coefficients de  $Q(Z, Y)$  sont calculés explicitement en termes des coefficients de  $P$ , en utilisant la proposition précédente 8, ce qui montre que  $Q(Z, Y) \in R[Z, Y]$ . Le degré de  $Q(Z, Y)$  en  $Y$  et  $Z$  est  $\frac{p(p-1)}{2}$ .

En ordonnant lexicographiquement les couples  $(i, j)$  avec  $i < j$ , nous définissons le discriminant de  $Q$  comme

$$\begin{aligned} D(Z) &= \prod_{i < j, k < \ell, (i, j) < (k, \ell)} ((x_i + x_j + Zx_i x_j) - (x_k + x_\ell + Zx_k x_\ell))^2 \\ &= \prod_{i < j, k < \ell, (i, j) < (k, \ell)} (\alpha_{i, j, k, \ell} + Z\beta_{i, j, k, \ell})^2, \end{aligned}$$

où  $\alpha_{i, j, k, \ell} = x_i + x_j - x_k + x_\ell$  et  $\beta_{i, j, k, \ell} = x_i x_j - x_k x_\ell$ . La proposition 8 implique que  $D(Z) \in R[Z]$ . Puisque les racines de  $P$  sont toutes distinctes, chaque facteur  $\alpha_{i, j, k, \ell} + Z\beta_{i, j, k, \ell}$  est non nul au vu de l'implication suivante :

$$i < j, k < \ell, (i, j) < (k, \ell), \quad x_i x_j = x_k x_\ell \Rightarrow x_i + x_j \neq x_k + x_\ell.$$

Donc chaque facteur  $\alpha_{i, j, k, \ell} + Z\beta_{i, j, k, \ell}$  est non nul, garantissant ainsi que  $D(Z)$  n'est pas identiquement nul.

En choisissant  $z \in \mathbb{N}$  tel que  $D(z) \neq 0$ , le polynôme  $Q(z, Y)$  est sans carré, car toutes ses racines sont distinctes.

Nous démontrons ensuite qu'il est possible d'exprimer rationnellement  $x_i + x_j$  et  $x_i x_j$  pour tout  $1 \leq i < j \leq p$  en termes de  $\gamma_{i, j} = x_i + x_j + zx_i x_j$ . Définissons les trois polynômes suivants à partir de  $Q$  :

$$\begin{aligned} F(Z, Y) &= \frac{\partial Q}{\partial Y}(Z, Y) = \sum_{i < j} \left( \prod_{k < \ell, (k, \ell) \neq (i, j)} (Y - (x_k + x_\ell + Zx_k x_\ell)) \right), \\ G(Z, Y) &= \sum_{i < j} (x_i + x_j) \left( \prod_{k < \ell, (k, \ell) \neq (i, j)} (Y - (x_k + x_\ell + Zx_k x_\ell)) \right), \\ H(Z, Y) &= \sum_{i < j} x_i x_j \left( \prod_{k < \ell, (k, \ell) \neq (i, j)} (Y - (x_k + x_\ell + Zx_k x_\ell)) \right). \end{aligned}$$

3. Un polynôme  $p \in K[X]$  est dit séparable si le plus grand diviseur commun de  $P$  et de sa dérivée est un élément de  $K \setminus \{0\}$ .

Or, d'après la proposition 8 ,  $F(Z, Y), G(Z, Y)$  et  $H(Z, Y)$  sont des éléments de  $R[Z, Y]$ . Ainsi, pour tout  $1 \leq i < j \leq p$ ,

$$F(z, \gamma_{i,j}) = \prod_{\substack{k < \ell \\ (k,\ell) \neq (i,j)}} (\gamma_{i,j} - \gamma_{k,\ell}),$$

$$G(z, \gamma_{i,j}) = (x_i + x_j) \prod_{\substack{k < \ell \\ (k,\ell) \neq (i,j)}} (\gamma_{i,j} - \gamma_{k,\ell}),$$

$$H(z, \gamma_{i,j}) = (x_i x_j) \prod_{\substack{k < \ell \\ (k,\ell) \neq (i,j)}} (\gamma_{i,j} - \gamma_{k,\ell}).$$

Il en découle que

$$x_i + x_j = \frac{G(z, \gamma_{i,j})}{F(z, \gamma_{i,j})}$$

$$x_i x_j = \frac{H(z, \gamma_{i,j})}{F(z, \gamma_{i,j})}$$

En d'autres termes, les racines du polynôme du second degré

$$F(z, \gamma_{i,j})X^2 - G(z, \gamma_{i,j})X + H(z, \gamma_{i,j})$$

sont des racines de  $P$ . Le polynôme  $Q(z, Y)$  est de degré  $\frac{p(p-1)}{2}$ , c'est-à-dire de la forme  $2^{m-1}n'$  avec  $n'$  impair. Par hypothèse d'induction, il possède une racine  $\gamma$  dans  $R[i]$ . Puisque la méthode classique pour résoudre les polynômes du second degré fonctionne dans  $R[i]$  lorsque  $R$  est réel clos, les racines du polynôme du second degré

$$F(z, \gamma)X^2 - G(z, \gamma)X + H(z, \gamma)$$

sont des racines de  $P$  qui appartiennent à  $R[i]$ . Nous avons donc prouvé que le polynôme  $P$  a une racine dans  $R[i]$ . Pour  $P = a_p X^p + \dots + a_0 \in R[i][X]$ , nous écrivons  $\bar{P} = \bar{a}_p X^p + \dots + \bar{a}_0$ . Puisque  $P\bar{P} \in R[X]$ ,  $P\bar{P}$  a une racine  $x$  dans  $R[i]$ . Ainsi  $P(x) = 0$  ou  $\bar{P}(x) = 0$ . Dans le premier cas, nous avons terminé et dans le second,  $P(\bar{x}) = 0$ .

- 2)  $b \Rightarrow c$ . Étant donné que  $C = \mathbb{R}[i]$  est un corps algébriquement clos, le polynôme  $P$  se factorise en facteurs linéaires sur  $C$ . Ainsi, si  $c + id$  est une racine de  $P$ , alors  $c - id$  est aussi une racine de  $P$ , car les facteurs irréductibles de  $P$  sur  $C$  sont soit linéaires, soit de la forme

$$(X - c)^2 + d^2 = (X - c - id)(X - c + id) \quad \text{avec } d \neq 0.$$

Si  $P(a)$  et  $P(b)$  ont des signes opposés, cela signifie que pour certains facteurs linéaires  $Q$  de  $P$ , les évaluations  $Q(a)$  et  $Q(b)$  ont également des signes opposés. Par conséquent, la racine de  $Q$  se trouve dans l'intervalle  $(a, b)$ .

- 3)  $c \Rightarrow a$ . Selon la proposition 6, si  $y$  est positif, le polynôme  $X^2 - y$  prend une valeur négative pour  $X = 0$  et une valeur positive pour  $X$  suffisamment grand. Par conséquent,  $X^2 - y$  possède une racine, qui est la racine carrée de  $y$ .

De manière analogue, un polynôme de degré impair avec des coefficients dans  $R$  (un corps réel clos) prend des valeurs de signe opposé pour des valeurs de  $X$  suffisamment grandes et négatives, et pour  $X$  suffisamment petites et négatives, en utilisant à nouveau la proposition 6. Ainsi, ce polynôme a une racine dans  $R$ .

- 4)  $b \Rightarrow d$ . Étant donné que  $R[i] = R[T]/(T^2 + 1)$  est un corps,  $T^2 + 1$  est irréductible sur  $R$ . Cela implique que  $-1$  n'est pas un carré dans  $R$ .

De plus, dans  $R$ , toute somme de carrés est elle-même un carré : pour  $a, b \in R$  et  $c, d \in R$  tels que  $a + ib = (c + id)^2$ , on a  $a^2 + b^2 = (c^2 + d^2)^2$ . Cela montre que  $R$  est un corps réel.

Enfin, puisque les seuls polynômes irréductibles de  $R[X]$  de degré supérieur à 1 sont de la forme

$$(X - c)^2 + d^2 = (X - c - id)(X - c + id), \quad \text{avec } d \neq 0,$$

et  $R[X]/((X - c)^2 + d^2) = R[i]$ , les seules extensions algébriques non triviales de  $R$  sont de la forme  $R[i]$ , qui n'est pas réelle.

- 5)  $d \Rightarrow a$ . Supposons que  $a \in R$ . Si  $a$  n'est pas un carré dans  $R$ , alors  $R[\sqrt{a}] = R[X]/(X^2 - a)$  est une extension algébrique non triviale de  $R$ , et donc  $R[\sqrt{a}]$  n'est pas réelle. Ainsi,

$$-1 = \sum_{i=1}^n (x_i + \sqrt{a}y_i)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + a \sum_{i=1}^n y_i^2 \in R.$$

Puisque  $R$  est réel,  $-1 \neq \sum_{i=1}^n x_i^2$  et donc  $y = \sum_{i=1}^n y_i^2 \neq 0$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned} -a &= \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{-1} \left( 1 + \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \\ &= \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{y_i}{y} \right)^2 \right) \left( 1 + \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \in \sum R^{(2)}. \end{aligned}$$

Cela montre que  $R^{(2)} \cup -\sum R^{(2)} = R$  et donc qu'il n'y a qu'un seul ordre possible sur  $R$  avec  $R^{(2)} = \sum R^{(2)}$  comme cône positif.

Il reste à montrer que si  $P \in R[X]$  a un degré impair, alors  $P$  a une racine dans  $R$ . Si ce n'est pas le cas, soit  $P$  un polynôme de degré impair  $p > 1$  tel que tout polynôme de degré impair  $< p$  a une racine dans  $R$ . Comme un polynôme de degré impair a au moins un facteur irréductible impair, nous supposons sans perte de généralité que  $P$  est irréductible. Le quotient  $R[X]/(P)$  est une extension algébrique non triviale de  $R$  et donc  $-1 = \sum_{i=1}^n H_i^2 + PQ$  avec  $\deg(H_i) < p$ .

Étant donné que le terme de plus haut degré dans l'expansion de  $\sum_{i=1}^n H_i^2$  a une somme de carrés comme coefficient et que  $R$  est réel,  $\sum_{i=1}^n H_i^2$  est un polynôme de degré pair  $\leq 2p - 2$ . Par conséquent, le polynôme  $Q$  a un degré impair  $\leq p - 2$  et donc a une racine  $x$  dans  $R$ . Mais alors  $-1 = \sum_{i=1}^n H_i(x)^2$ , ce qui contredit le fait que  $R$  est réel.

□

Ainsi, lorsque  $R = \mathbb{R}$ , l'implication de  $a \Rightarrow b$  dans le théorème 8 n'est rien d'autre qu'une preuve algébrique du Théorème Fondamental de l'Algèbre. En effet, au vu du cours d'analyse [32], nous savons que  $\mathbb{R}$  vérifie la propriété de la valeur intermédiaire. On a donc le point c) du théorème 8 ce qui implique donc que  $\mathbb{R}$  est réel clos vu la caractérisation. Et donc par le point b) on obtient directement que  $\mathbb{C}$  est algébriquement clos et donc l'énoncé du TFA. Dans cette démonstration, tout est algébrique, le seul recours à l'analyse se fait pour montrer que  $\mathbb{R}$  vérifie le théorème des valeurs intermédiaires.





## Quatrième partie

### Annexe



## Chapitre 5

# La thèse de Gauss (1799)

Dans le premier chapitre de l'annexe se trouve la thèse de Gauss intitulée "*Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reals primi vel secundi gradus resolvi posse*"<sup>1</sup>[22], datant de 1799.

Il est intéressant de noter que la thèse de Gauss, rédigée en latin, peut être facilement trouvée dans ses *Werke*. En effet, les œuvres mathématiques et scientifiques de Gauss sont rassemblées dans ses *Werke* [20], une collection exhaustive de ses publications. Les trois premiers travaux du troisième volume de cet opus sont précisément ses trois premières contributions à l'étude du TFA. Ce volume des *Werke* a été édité par le célèbre mathématicien Felix Klein, avec Alexander Ostrowski en tant que responsable de la troisième partie. Ces éditions offrent un aperçu précieux des travaux originaux de Gauss et de leur contexte historique.

On peut également trouver en ligne une traduction française non référencée (sans auteur ni bibliographie) des 29 premières pages, bien que la suite soit absente. Cette traduction partielle permet d'accéder à une partie de l'œuvre de Gauss, mais elle reste insuffisante pour une compréhension complète de son travail. Par ailleurs, une traduction anglaise a été réalisée par un enseignant retraité, Ernest Fandeyer [24]. Cette traduction, bien qu'elle ne soit pas officielle et n'ait pas été publiée, a été citée par des mathématiciens de renom.

Il est donc assez surprenant qu'un résultat aussi connu et important n'ait pas encore bénéficié d'une traduction rigoureuse et officielle dans plusieurs langues modernes. La preuve du Théorème Fondamental de l'Algèbre commence à la page 20 de sa thèse, les 19 premières pages étant une critique des preuves de ses prédécesseurs. En effet, Gauss a analysé les preuves antérieures et a souligné leurs failles avant de présenter la sienne, visant à prouver qu'elle était la première valide. Cependant, même sa démonstration s'est révélée incomplète.

---

1. Nouvelle démonstration du théorème : toute fonction algébrique entière d'une variable est décomposable en facteurs réels du premier ou du second degré.

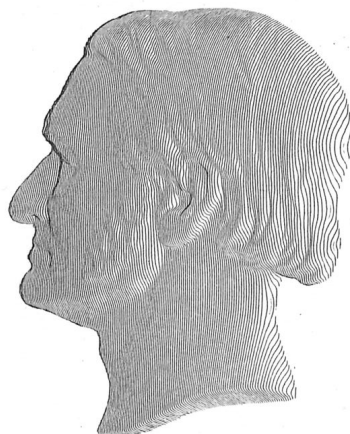


PATRIMOINE  
DE L'UNIVERSITÉ  
DE LIEGE

CARL FRIEDRICH GAUSS

WERKE

DRITTER BAND.



ZWEITER ABRUCK

HERAUSGEBEN

VON DER

KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU

GÖTTINGEN

1876.





DEMONSTRATIO NOVA  
THEOREMATIS  
OMNEM FUNCTIONEM ALGEBRAICAM  
RATIONALEM INTEGRAM

UNIUS VARIABILIS  
IN FACTORES REALES PRIMI VEL SECUNDI GRADUS

RESOLVI POSSE

QUAM PRO

OBTINENDIS SUMMIS IN PHILOSOPHIA HONORIBUS

INCLITO PHILOSOPHORUM ORDINI

ACADEMIAE IULIAE CAROLINAE

EXHIBUIT

CAROLUS FRIDERICUS GAUSS.

---

HELMSTADII

APUD C. G. FLECKEISEN. MDCCLXXXIX.



THE UNIVERSITY OF

CHICAGO

OFFICE OF THE DEAN

OF THE FACULTY

OF THE UNIVERSITY

OF CHICAGO

CHICAGO

1900

OFFICE OF THE DEAN

OF THE FACULTY

OF THE UNIVERSITY

*C. le Paige*

DEAN OF THE FACULTY

UNIVERSITY OF CHICAGO

CHICAGO, ILL.

DEMONSTRATIO NOVA THEOREMATIS

OMNEM FUNCTIONEM ALGEBRAICAM RATIONALEM INTEGRAM

UNIUS VARIABILIS

IN FACTORES REALES PRIMI VEL SECUNDI GRADUS RESOLVI POSSE.

1.

Quaelibet aequatio algebraica determinata reduci potest ad formam

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \text{etc.} + M = 0$$

ita ut  $m$  sit numerus integer positivus. Si partem primam huius aequationis per  $X$  denotamus, aequationique  $X = 0$  per plures valores inaequales ipsius  $x$  satisfieri supponimus, puta ponendo  $x = \alpha$ ,  $x = \beta$ ,  $x = \gamma$  etc., functio  $X$  per productum e factoribus  $x - \alpha$ ,  $x - \beta$ ,  $x - \gamma$  etc. divisibilis erit. Vice versa, si productum e pluribus factoribus simplicibus  $x - \alpha$ ,  $x - \beta$ ,  $x - \gamma$  etc. functionem  $X$  metitur: aequationi  $X = 0$  satisfiet, aequando ipsam  $x$  cuicunque quantitatam  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  etc. Denique si  $X$  producto ex  $m$  factoribus talibus simplicibus aequalis est (sive omnes diversi sint, sive quidam ex ipsis identici): alii factores simplices praeter hos functionem  $X$  metiri non poterunt. Quamobrem aequatio  $m^{\text{ti}}$  gradus plures quam  $m$  radices habere nequit; simul vero patet, aequationem  $m^{\text{ti}}$  gradus *pauciores* radices habere posse, etsi  $X$  in  $m$  factores simplices resolvable sit: si enim inter hos factores aliqui sunt identici, multitudo modorum diversorum aequationi satisfaciendi necessario minor erit quam  $m$ . Attamen concinnitatis caussa geometrae dicere maluerunt, aequationem in hoc quoque casu  $m$  radices habere, et tantummodo quasdam ex ipsis aequales inter se evadere: quod utique sibi permittere potuerunt.

## 2.

Quae hucusque sunt enarrata, in libris algebraicis sufficienter demonstrantur neque rigorem geometricum uspiam offendunt. Sed nimis praepropere et sine praevia demonstratione solida adoptavisse videntur analystae theorema, cui tota fere doctrina aequationum superstructa est: *Quamvis functionem talem ut  $X$  semper in  $m$  factores simplices resolvi posse*, sive hoc quod cum illo prorsus conspirat, *quamvis aequationem  $m^{\text{ti}}$  gradus revera habere  $m$  radices*. Quum iam in aequationibus secundi gradus saepissime ad tales casus perveniatur, qui theoremati huic repugnant: algebraistae, ut hos illi subiicerent, coacti fuerunt, fingere quantitatem quandam imaginariam, cuius quadratum sit  $-1$ , et tum agnoverunt, si quantitates formae  $a + b\sqrt{-1}$  perinde concedantur ut reales, theorema non modo pro aequationibus secundi gradus verum esse, sed etiam pro cubicis et biquadraticis. Hinc vero neutquam inferre licuit, admissis quantitatibus formae  $a + b\sqrt{-1}$  cuiusvis aequationi quinti superiorisve gradus satisfieri posse, aut uti plerumque exprimitur (quamquam phrasin lubricam minus probarem) radices cuiusvis aequationis ad formam  $a + b\sqrt{-1}$  reduci posse. Hoc theorema ab eo, quod in titulo huius scripti enunciatum est, nihil differt, si ad rem ipsam spectas, huiusque demonstrationem novam rigorosam tradere, constituit propositum praesentis dissertationis.

Ceterum ex eo tempore, quo analystae comperti sunt, infinite multas aequationes esse, quae nullam omnino radicem haberent, nisi quantitates formae  $a + b\sqrt{-1}$  admittantur, tales quantitates fictitiae tamquam peculiare quantitatum genus, quas *imaginarias* dixerunt, ut a *realibus* distinguerentur, consideratae et in totam analysin introductae sunt; quonam iure? hoc loco non disputo. — Demonstrationem meam absque omni quantitatum imaginariarum subsidio absolvam, etsi eadem libertate, qua omnes recentiores analystae usi sunt, etiam mihi uti liceret.

## 3.

Quamvis ea, quae in plerisque libris elementaribus tamquam demonstratio theorematis nostri afferuntur, tam levia sint, tantumque a rigore geometrico abhorreant, ut vix mentione sint digna: tamen, ne quid deesse videatur, paucis illa attingam. 'Ut demonstrent, quamvis aequationem

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \text{etc.} + M = 0$$

sive  $X = 0$ , revera habere  $m$  radices, suscipiunt probare,  $X$  in  $m$  factores simplices resolvi posse. Ad hunc finem assumunt  $m$  factores simplices  $x - \alpha$ ,  $x - \beta$ ,  $x - \gamma$  etc. ubi  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  etc. adhuc sunt incognitae, productumque ex illis aequale ponunt functioni  $X$ . Tum ex comparatione coefficientium deducunt  $m$  aequationes, ex quibus incognitas  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  etc. determinari posse aiunt, quippe quarum multitudo etiam sit  $m$ . Scilicet  $m - 1$  incognitas eliminari posse, unde emergere aequationem, quae, quam placuerit, incognitam solam contineat.' Ut de reliquis, quae in tali argumentatione reprehendi possent, taceam, quaeram tantummodo, unde certi esse possimus, ultimam aequationem revera ullam radicem habere? Quidni fieri posset, ut neque huic ultimae aequationi neque propositae ulla magnitudo in toto quantitatum realium atque imaginariarum ambitu satisficiat?— Ceterum periti facile perspicient, hanc ultimam aequationem necessario cum proposita *omnino identicam* fore, siquidem calculus rite fuerit institutus; scilicet eliminatis incognitis  $\beta$ ,  $\gamma$  etc. aequationem

$$\alpha^m + A\alpha^{m-1} + B\alpha^{m-2} + \text{etc.} + M = 0$$

prodire debere. Plura de isto ratiocinio exponere necesse non est.

Quidam auctores, qui debilitatem huius methodi percepisse videntur, tamquam *axioma* assumunt, quamvis aequationem revera habere radices, si non possibiles, impossibiles. Quid sub quantitibus possibilibus et impossibilibus intelligi velint, haud satis distincte exposuisse videntur. Si quantitates possibiles idem denotare debent ut reales, impossibiles idem ut imaginariae: axioma illud neutiquam admitti potest, sed necessario demonstratione opus habet. Attamen in illo sensu expressiones accipiendae non videntur, sed axiomatis mens haec potius videtur esse: 'Quamquam nondum sumus certi, necessario dari  $m$  quantitates reales vel imaginarias, quae alicui aequationi datae  $m^{\text{ti}}$  gradus satisficiant, tamen aliquantisper hoc supponemus; nam si forte contingeret, ut tot quantitates reales et imaginariae inveniri nequeant, certe effugium patebit, ut dicamus reliquas esse impossibiles.' Si quis hac phrasi uti mavult quam simpliciter dicere, aequationem in hoc casu tot radices non habituram, a me nihil obstat: at si tum his radicibus impossibilibus ita utitur tamquam aliquid veri sint, et e. g. dicit, summam omnium radicum aequationis  $x^m + Ax^{m-1} + \text{etc.} = 0$ , esse  $= -A$ , etiamsi impossibiles inter illas sint (quae expressio proprie significat, *etiamsi aliquae deficiant*): hoc neutiquam probare possum. Nam radices impossi-

biles, in tali sensu acceptae, tamen sunt radices, et tum axioma illud nullo modo sine demonstratione admitti potest, neque inepte dubitares, annon aequationes exstare possint, quae ne impossibiles quidem radices habeant?\*)

4.

Antequam aliorum geometrarum demonstrationes theorematis nostri recensam, et quae in singulis reprehendenda mihi videantur, exponam: observo sufficere, si tantummodo ostendatur, omni aequationi quantivis gradus

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \text{etc.} + M = 0$$

sive  $X = 0$  (ubi coëfficientes  $A, B$  etc. reales esse supponuntur) ad minimum uno modo satisfieri posse per valorem ipsius  $x$  sub forma  $a + b\sqrt{-1}$  contentum. Constat enim,  $X$  tunc divisibilem fore per factorem realem secundi gradus  $xx - 2ax + aa + bb$ , si  $b$  non fuerit  $= 0$ , et per factorem realem simplicem  $x - a$ , si  $b = 0$ . In utroque casu quotiens erit realis, et inferioris gradus quam  $X$ ; et quum hic eadem ratione factorem realem primi secundive gradus habere de-

---

\*) Sub quantitate imaginaria hic semper intelligo quantitatem in forma  $a + b\sqrt{-1}$  contentam, quamdiu  $b$  non est  $= 0$ . In hoc sensu expressio illa semper ab omnibus geometris primae notae accepta est, neque audiendos censeo, qui quantitatem  $a + b\sqrt{-1}$  in eo solo casu imaginariam vocare voluerunt, ubi  $a = 0$ , impossibilem vero quando non sit  $a = 0$ , quum haec distinctio neque necessaria sit neque ullius utilitatis. — Si quantitates imaginariae omnino in analysi retineri debent (quod pluribus rationibus consultius videtur, quam ipsas abolere, modo satis solide stabiliantur): necessario tamquam aequae possibiles ac reales spectandae sunt; quamobrem reales et imaginarias sub denominatione communi *quantitatum possibilium* complecti mallet: contra, *impossibilem* dicerem quantitatem, quae conditionibus satisfacere debeat, quibus ne imaginariis quidem concessis satisfieri potest, attamen ita, ut *phrasis* haec idem significet ac si dicas, talem quantitatem in toto magnitudinum ambitu non dari. Hinc vero genus peculiare quantitatum formare, neutiquam concederem. Quodsi quis dicat, triangulum rectilineum aequilaterum rectangulum impossibile esse, nemo erit qui neget. At si tale triangulum impossibile tamquam novum triangulorum genus contemplari, aliasque triangulorum proprietates ad illud applicare voluerit, ecquis risum teneat? Hoc esset verbis ludere seu potius abuti. — Quamvis vero etiam summi mathematici saepius veritates, quae quantitatum ad quas spectant possibilitatem manifeste supponunt, ad tales quoque applicaverint, quarum possibilitas adhuc dubia erat; neque abnuerim, huiusmodi licentias plerumque ad solam formam et quasi velamen ratiociniorum pertinere, quod veri geometrae acies mox penetrare possit: tamen consultius, scientiaeque, quae tamquam perfectissimum claritatis et certitudinis exemplar merito celebratur, sublimitate magis dignum videtur, tales libertates aut omnino proscribere, aut saltem parcius neque alias ipsis uti, nisi ubi etiam minus exercitati perspicere valeant, rem etiam absque illarum subsidio etsi forsitan minus breviter tamen aequae rigore absolvi potuisse. — Ceterum haud negaverim, ea quae hic contra impossibilem abusum dixi, quodam respectu etiam contra imaginarias obiici posse: sed harum vindicationem nec non totius huius rei expositionem uberiolem ad aliam occasionem mihi reservo.

beat, patet, per continuationem huius operationis functionem  $X$  tandem in factores reales simplices vel duplices resolutum iri, aut, si pro singulis factoribus realibus duplicibus binos imaginarios simplices adhibere mavis, in  $m$  factores simplices.

## 5.

Prima theorematis demonstratio illustri geometrae D'ALEMBERT debetur, *Recherches sur le calcul intégral, Histoire de l'Acad. de Berlin, Année 1746.* p. 182 sqq. Eadem extat in BOUGAINVILLE, *Traité du calcul intégral, à Paris 1754.* p. 47 sqq. Methodi huius praecipua momenta haec sunt.

Primo ostendit, si functio quaecunque  $X$  quantitatis variabilis  $x$  fiat  $= 0$  aut pro  $x = 0$  aut pro  $x = \infty$ , atque valorem infinite parvum realem positivum nancisci possit tribuendo ipsi  $x$  valorem realem: hanc functionem etiam valorem infinite parvum realem negativum obtinere posse per valorem ipsius  $x$  vel realem vel sub forma imaginaria  $p + q\sqrt{-1}$  contentum. Scilicet designante  $\Omega$  valorem infinite parvum ipsius  $X$ , et  $\omega$  valorem respondentem ipsius  $x$ , asserit  $\omega$  per seriem valde convergentem  $a\Omega^\alpha + b\Omega^\beta + c\Omega^\gamma$  etc. exprimi posse, ubi exponentes  $\alpha, \beta, \gamma$  etc. sint quantitates rationales continuo crescentes, et quae adeo ad minimum in distantia certa ab initio positivae evadant, terminosque, in quibus adsint, infinite parvos reddant. Iam si inter omnes hos exponentes nullus occurrat, qui sit fractio denominatoris paris, omnes terminos seriei reales fieri tum pro positivo tum pro negativo valore ipsius  $\Omega$ ; si vero quaedam fractiones denominatoris paris inter illos exponentes reperiantur, constare, pro valore negativo ipsius  $\Omega$  terminos respondentes in forma  $p + q\sqrt{-1}$  contentos esse. Sed propter infinitam seriei convergentiam in casu priori sufficere, si terminus primus (i. e. maximus) solus retineatur, in posteriori ultra eum terminum, qui partem imaginariam primus producat, progredi opus non esse.

Per similia ratiocinia ostendi posse, si  $X$  valorem negativum infinite parvum ex valore reali ipsius  $x$  assequi possit: functionem illam valorem realem positivum infinite parvum ex valore reali ipsius  $x$  vel ex imaginario sub forma  $p + q\sqrt{-1}$  contento adipisci posse.

Hinc secundo concludit, etiam valorem aliquem realem finitum ipsius  $X$  dari, in casu priori negativum, in posteriori positivum, qui ex valore imaginario ipsius  $x$  sub forma  $p + q\sqrt{-1}$  contento produci possit.

Hinc sequitur, si  $X$  sit talis functio ipsius  $x$ , quae valorem realem  $V$  ex valore ipsius  $x$  reali  $v$  obtineat, atque etiam valorem realem quantitate infinite parva vel maiorem vel minorem ex valore reali ipsius  $x$  assequatur, eandem etiam valorem realem quantitate infinite parva atque adeo finita vel minorem vel maiorem quam  $V$  (resp.) recipere posse, tribuendo ipsi  $x$  valorem sub forma  $p + q\sqrt{-1}$  contentum. Hoc nullo negotio ex praec. derivatur, si pro  $X$  substitui concipitur  $V + Y$ , et pro  $x$ ,  $v + y$ .

Tandem affirmat ill. D'ALEMBERT, si  $X$  totum intervallum aliquod inter duos valores reales  $R$ ,  $S$  percurrere posse supponatur (i. e. tum ipsi  $R$ , tum ipsi  $S$ , tum omnibus valoribus realibus intermediis aequalis fieri), tribuendo ipsi  $x$  valores semper in forma  $p + q\sqrt{-1}$  contentos; functionem  $X$  quavis quantitate finita reali adhuc augeri vel diminui posse (prout  $S > R$  vel  $S < R$ ), manente  $x$  semper sub forma  $p + q\sqrt{-1}$ . Si enim quantitas realis  $U$  daretur (inter quam et  $R$  supponitur  $S$  iacere), cui  $X$  per talem valorem ipsius  $x$  aequalis fieri non posset, necessario valorem *maximum* ipsius  $X$  dari (scilicet quando  $S > R$ ; *minimum* vero, quando  $S < R$ ), puta  $T$ , quem ex valore ipsius  $x$ ,  $p + q\sqrt{-1}$ , consequeretur, ita ut ipsi  $x$  nullus valor sub simili forma contentus tribui posset, qui functionem  $X$  vel minimo excessu propius versus  $U$  promoveret. Iam si in aequatione inter  $X$  et  $x$  pro  $x$  ubique substituatur  $p + q\sqrt{-1}$ , atque tum pars realis, tum pars, quae factorem  $\sqrt{-1}$  implicet, hoc omisso, cifrae aequentur: ex duabus aequationibus hinc prodeuntibus (in quibus  $p$ ,  $q$  et  $X$  cum constantibus permixtae occurrent) per eliminationem duas alias elici posse, in quarum altera  $p$ ,  $X$  et constantes reperiantur, altera a  $p$  libera solas  $q$ ,  $X$  et constantes involvat. Quamobrem quum  $X$  per valores reales ipsarum  $p$ ,  $q$  omnes valores ab  $R$  usque ad  $T$  percurrerit, per praec.  $X$  versus valorem  $U$  adhuc propius accedere posse tribuendo ipsius  $p$ ,  $q$  valores tales  $\alpha + \gamma\sqrt{-1}$ ,  $\epsilon + \delta\sqrt{-1}$  resp. Hinc vero fieri  $x = \alpha - \delta + (\gamma + \epsilon)\sqrt{-1}$ , i. e. adhuc sub forma  $p + q\sqrt{-1}$  esse contra hyp.

Iam si  $X$  functionem talem ut  $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \text{etc.} + M$  denotare supponitur, nullo negotio perspicitur, ipsi  $x$  tales valores reales tribui posse, ut  $X$  totum aliquod intervallum inter duos valores reales percurrat. Quare  $x$  valorem aliquem sub forma  $p + q\sqrt{-1}$  contentum talem etiam nancisci poterit, unde  $X$  fiat  $= 0$ . Q. E. D. \*)

\*) Observare convenit, ill. D'ALEMBERT in sua huius demonstrationis expositione considerationes geome-

## 6.

Quae contra demonstrationem D'ALEMBERTIANAM obiici posse videntur, ad haec fere redeunt.

1. Ill. D'A. nullum dubium movet de *existentia* valorum ipsius  $x$ , quibus valores dati ipsius  $X$  respondeant, sed illam supponit, solamque *formam* istorum valorum investigat.

Quamvis vero haec obiectio per se gravissima sit, tamen hic ad solam dictionis formam pertinet, quae facile ita corrigi potest, ut illa penitus destruat.

2. Assertio,  $\omega$  per talem seriem qualem ponit semper exprimi posse, certo est falsa, si  $X$  etiam functionem quamlibet transscendentem designare debet (uti D'A. pluribus locis innuit). Hoc e. g. manifestum est, si ponitur  $X = e^{\frac{1}{x}}$ , sive  $x = \frac{1}{\log X}$ . Attamen si demonstrationem ad eum casum restringimus, ubi  $X$  est functio algebraica ipsius  $x$  (quod in praesenti negotio sufficit), propositio utique est vera. — Ceterum D'A. nihil pro confirmatione suppositionis suae attulit; cel. BOUGAINVILLE supponit,  $X$  esse functionem algebraicam ipsius  $x$ , et ad inventionem seriei parallelogrammum NEWTONIANUM commendat.

3. Quantitatibus infinite parvis liberius utitur, quam cum geometrico rigore consistere potest aut saltem nostra aetate (ubi illae merito male audiunt) ab analysta scrupuloso concederetur, neque etiam saltum a valore infinite parvo ipsius  $\Omega$  ad finitum satis luculenter explicavit. Propositionem suam,  $\Omega$  etiam valorem aliquem finitum consequi posse, non tam ex possibilitate valoris infinite parvi ipsius  $\Omega$  concludere videtur quam inde potius, quod denotante  $\Omega$  quantitatem valde parvam, propter magnam seriei convergentiam, quo plures termini seriei accipiantur, eo propius ad valorem verum ipsius  $\omega$  accedatur, aut, quo plurium partium summa pro  $\omega$  accipiatur, eo exactius aequationi, quae relationem inter  $\omega$  et  $\Omega$  sive  $x$  et  $X$  exhibeat, satisfactum iri. Praeterea quod tota haec argumentatio nimis vaga videtur, quam ut ulla conclusio rigorosa inde colligi possit: observo, utique dari series, quae quantumvis parvus valor quantitati,

tricas adhibuisse, atque  $X$  tamquam abscissam,  $x$  tamquam ordinatam curvae spectavisse (secundum morem omnium geometrarum primae huius saeculi partis, apud quos notio functionum minus usitata erat). Quia vero omnia ipsius ratiocinia, si ad ipsorum essentiam solam respicis, nullis principiis geometricis, sed pure analyticis innituntur, et curva imaginaria, ordinataeque imaginariae expressiones duriores esse lectoremque hodieum facilius offendere posse videntur, formam repraesentationis mere analyticam hic adhibere malui. Hanc annotationem ideo adieci, ne quis demonstrationem D'ALEMBERTIANAM ipsam cum hac succincta expositione comparans aliquid essentielle immutatum esse suspicetur.



secundum cuius potestates progrediuntur, tribuatur, nihilominus semper divergant, ita ut si modo satis longe continentur, ad terminos quavis quantitate data maiores pervenire possis\*). Hoc evenit, quando coëfficientes seriei progressionem hypergeometricam constituunt. Quamobrem necessario demonstrari debuisset, talem seriem hypergeometricam in casu praesenti provenire non posse.

Ceterum mihi videtur, ill. d'A. hic non recte ad series infinitas confugisse, hasque ad stabiliendum theorema hoc fundamentale doctrinae aequationum haud idoneas esse.

4. Ex suppositione,  $X$  obtinere posse valorem  $S$  neque vero valorem  $U$ , nondum sequitur, inter  $S$  et  $U$  necessario valorem  $T$  iacere, quem  $X$  attingere sed non superare possit. Superest adhuc alius casus: scilicet fieri posset, ut inter  $S$  et  $U$  limes situs sit, ad quem accedere quidem quam prope velis possit  $X$ , ipsum vero nihilominus numquam attingere. Ex argumentis ab ill. d'A. allatis tantummodo sequitur,  $X$  omnem valorem, quem attigerit, adhuc quantitate finita superare posse, puta quando evaserit  $= S$ , adhuc quantitate aliqua finita  $\Omega$  augeri posse; quo facto, novum incrementum  $\Omega'$  accedere, tunc iterum augmentum  $\Omega''$  etc., ita ut quotcunque incrementa iam adiecta sint, nullum pro ultimo haberi debeat, sed semper aliquod novum accedere possit. At quamvis *multitudo* incrementorum possibilium nullis limitibus sit circumscripta: tamen utique fieri posset, ut si incrementa  $\Omega, \Omega', \Omega''$  etc. continuo decrescerent, nihilominus summa  $S + \Omega + \Omega' + \Omega''$  etc. limitem aliquem nunquam attingeret, quotcunque termini considerentur.

Quamquam hic casus occurrere non potest, quando  $X$  designat functionem algebraicam integram ipsius  $x$ : tamen sine demonstratione, hoc fieri non posse, methodus necessario pro incompleta habenda est. Quando vero  $X$  est functio transscendens, sive etiam algebraica fracta, casus ille utique locum habere potest, e. g. semper quando valori cuidam ipsius  $X$  valor infinite magnus ipsius  $x$  respon-

---

\*) Hacce occasione obiter adnoto, ex harum serierum numero plurimas esse, quae primo aspectu maxime convergentes videantur, e. g. ad maximam partem eas, quibus ill. EULER in parte poster. *Inst. Calc. Diff.* Cap. VI. ad summam aliarum serierum quam proxime assignandam utitur p. 441—474 (reliquae enim series p. 475—478 revera convergere possunt), quod, quantum scio, a nemine hucusque observatum est. Quocirca magnopere optandum esset, ut dilucide et rigorose ostenderetur, cur huiusmodi series, quae primo citissime, dein paullatim lentius lentiusque convergunt, tandemque magis magisque divergunt, nihilominus summam proxime veram suppeditent, si modo non nimis multi termini capiantur, et quousque talis summa pro exacta tuto haberi possit?

det. Tum methodus D'ALEMBERTIANA non sine multis ambagibus, et in quibusdam casibus nullo forsitan modo, ad principia indubitata reduci posse videtur.

Propter has rationes demonstrationem D'ALEMBERTIANAM pro satisfaciendo habere nequeo. Attamen hoc non obstante verus demonstrationis nervus probandi per omnes obiectiones neutiquam infringi mihi videtur, credoque eidem fundamento (quamvis longe diversa ratione, et saltem maiori circumspicientia) non solum demonstrationem rigorosam theorematis nostri superstrui, sed ibinde omnia peti posse, quae circa aequationum *transscendentium* theoriam desiderari queant. De qua re gravissima alia occasione fusius agam; conf. interim infra art. 24.

## 7.

Post D'ALEMBERTUM ill. EULER disquisitiones suas de eodem argumento promulgavit, *Recherches sur les racines imaginaires des équations*, *Hist. de l'Acad. de Berlin A.* 1749, p. 223 sqq. Methodum duplicem hic tradidit: prioris summa continetur in sequentibus.

Primo ill. E. suspicit demonstrare, si  $m$  denotet quamcunque dignitatem numeri 2, functionem  $x^{2m} + Bx^{2m-2} + Cx^{2m-3} + \text{etc.} + M = X$  (in qua coëfficiens termini secundi est  $= 0$ ) semper in duos factores reales resolvi posse, in quibus  $x$  usque ad  $m$  dimensiones ascendat. Ad hunc finem duos factores assumit,

$$x^m - ux^{m-1} + \alpha x^{m-2} + \beta x^{m-3} + \text{etc.}, \text{ et } x^m + ux^{m-1} + \lambda x^{m-2} + \mu x^{m-3} + \text{etc.}$$

ubi coëfficientes  $u, \alpha, \beta$  etc.  $\lambda, \mu$  etc. adhuc incogniti sunt, horumque productum aequale ponit functioni  $X$ . Tum coëfficientium comparatio suppeditat  $2m-1$  aequationes, manifestoque demonstrari tantummodo debet, incognitis  $u, \alpha, \beta$  etc.  $\lambda, \mu$  etc. (quarum multitudo etiam est  $2m-1$ ) tales valores reales tribui posse, qui aequationibus illis satisfaciant. Iam E. affirmat, si primo  $u$  tamquam cognita consideretur, ita ut multitudo incognitarum unitate minor sit quam multitudo aequationum, his secundum methodos algebraicas notas rite combinatis omnes  $\alpha, \beta$  etc.  $\lambda, \mu$  etc. rationaliter et sine ulla radicum extractione per  $u$  et coëfficientes  $B, C$  etc. determinari posse, adeoque valores reales nancisci, simulac  $u$  realis fiat. Praeterea vero omnes  $\alpha, \beta$  etc.  $\lambda, \mu$  etc. eliminari poterunt, ita ut prodeat aequatio  $U = 0$ , ubi  $U$  erit functio integra solius  $u$  et coëfficientium cognitorum. Hanc aequationem ipsam per methodum eliminationis vulgarem evolvere, opus immensum foret, quando aequatio proposita  $X = 0$  est gradus ali-

quantum alti; et pro gradu indeterminato, plane impossibile (iudice ipso E. p. 239). Attamen hic sufficit, unam illius aequationis proprietatem novisse, scilicet quod terminus ultimus in  $U$  (qui incognitam  $u$  non implicat) necessario est negativus, unde sequi constat, aequationem ad minimum unam radicem realem habere, sive  $u$  et proin etiam  $\alpha$ ,  $\beta$  etc.  $\lambda$ ,  $\mu$  etc. ad minimum uno modo realiter determinari posse: illam vero proprietatem per sequentes reflexiones confirmare licet. Quum  $x^m - ux^{m-1} + \alpha x^{m-2} + \text{etc.}$  supponatur esse factor functionis  $X$ : necessario  $u$  erit summa  $m$  radicum aequationis  $X = 0$ , adeoque totidem valores habere debebit, quot modis diversis ex  $2m$  radicibus  $m$  excerpti possunt, sive per principia calculi combinationum  $\frac{2m \cdot 2m-1 \cdot 2m-2 \cdot \dots \cdot m+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot m}$  valores. Hic numerus semper erit impariter par (demonstrationem haud difficilem supprimo): si itaque ponitur  $= 2k$ , ipsius semissis  $k$  impar erit; aequatio  $U = 0$  vero erit gradus  $2k^{\text{ti}}$ . Iam quoniam in aequatione  $X = 0$  terminus secundus deest: summa omnium  $2m$  radicum erit 0; unde patet, si summa quarumcunque  $m$  radicum fuerit  $+p$ , reliquarum summam fore  $-p$ , i. e. si  $+p$  est inter valores ipsius  $u$ , etiam  $-p$  inter eosdem erit. Hinc E. concludit,  $U$  esse productum ex  $k$  factoribus duplicibus talibus  $uu - pp$ ,  $uu - qq$ ,  $uu - rr$  etc., denotantibus  $+p$ ,  $-p$ ,  $+q$ ,  $-q$  etc. omnes  $2k$  radices aequationis  $U = 0$ , unde, propter multitudinem imparem horum factorum, terminus ultimus in  $U$  erit quadratum producti  $pqr$  etc. signo negativo affectum. Productum autem  $pqr$  etc. semper ex coefficientibus  $B$ ,  $C$  etc. rationaliter determinari potest, adeoque necessario erit quantitas realis. Huius itaque quadratum signo negativo affectum certo erit quantitas negativa. Q. E. D.

Quum hi duo factores reales ipsius  $X$  sint gradus  $m^{\text{ti}}$  atque  $m$  potestas numeri 2: eadem ratione uterque rursus in duos factores reales  $\frac{1}{2}m$  dimensionum resolvi poterit. Quoniam vero per repetitam dimidiationem numeri  $m$  necessario tandem ad binarium pervenitur, manifestum est, per continuationem operationis functionem  $X$  tandem in factores reales secundi gradus resolutam haberi.

Quodsi vero functio talis proponitur, in qua terminus secundus non deest, puta  $x^{2m} + Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + \text{etc.} + M$ , designante etiamnum  $2m$  potestatem binariam, haec per substitutionem  $x = y - \frac{A}{2m}$  transibit in similem functionem termino secundo carentem. Unde facile concluditur, etiam illam functionem in factores reales secundi gradus resolubilem esse.

Denique proposita functione gradus  $n^{\text{ti}}$ , designante  $n$  numerum, qui non

est potestas binaria: ponatur potestas binaria proxime maior quam  $n$ ,  $= 2m$ , multipliceturque functio proposita per  $2m - n$  factores simplices reales quoscunque. Ex resolubilitate producti in factores reales secundi gradus, nullo negotio derivatur, etiam functionem propositam in factores reales secundi vel primi gradus resolubilem esse debere.

## 8.

Contra hanc demonstrationem obiici potest

1. Regulam, secundum quam E. concludit, ex  $2m - 1$  aequationibus  $2m - 2$  incognitas  $\alpha, \beta$  etc.  $\lambda, \mu$  etc. omnes rationaliter determinari posse, neutiquam esse generalem, sed saepissime exceptionem pati. Si quis e. g. in art. 3. aliqua incognitarum tamquam cognita spectata, reliquas per hanc et coefficientes datos rationaliter exprimere tentat, facile inveniet, hoc esse impossibile, nullamque quantitatum incognitarum aliter quam per aequationem  $m - 1^{\text{ti}}$  gradus determinari posse. Quamquam vero hic statim a priori perspicui potest, illud necessario ita evenire debuisse: tamen merito dubitari posset, annon etiam in casu praesenti pro quibusdam valoribus  $m$  res eodem modo se habeat, ut incognitae  $\alpha, \beta$  etc.  $\lambda, \mu$  etc. ex  $u, B, C$  etc. aliter quam per aequationem gradus forsitan maioris quam  $2m$  determinari nequeant. Pro eo casu, ubi aequatio  $X = 0$  est quarti gradus, E. valores rationales coefficientium per  $u$  et coefficientes datos eruit; idem vero etiam in omnibus aequationibus altioribus fieri posse, utique explicatione ampliori egebat. — Ceterum operae pretium esse videtur, in formulas illas, quae  $\alpha, \beta$  etc. rationaliter per  $u, B, C$  etc. exprimant, profundius et generalissime inquirere; de qua re aliisque ad eliminationis theoriam (argumentum haudquaquam exhaustum) pertinentibus alia occasione fusius agere suscipiam.

2. Etiamsi autem demonstratum fuerit, cuiusvis gradus sit aequatio  $X = 0$ , semper formulas inveniri posse, quae ipsas  $\alpha, \beta$  etc.  $\lambda, \mu$  etc. rationaliter per  $u, B, C$  etc. exhibeant: tamen certum est, pro valoribus quibusdam determinatis coefficientium  $B, C$  etc. formulas illas *indeterminatas* evadere posse, ita ut non solum impossibile sit, incognitas illas rationaliter ex  $u, B, C$  etc. definire, sed adeo revera quibusdam in casibus valori alicui reali ipsius  $u$  nulli valores reales ipsarum  $\alpha, \beta$  etc.  $\lambda, \mu$  etc. respondeant. Ad confirmationem huius rei brevitatis gratia ablego lectorem ad diss. ipsam E., ubi p. 236 aequatio quarti gradus fusius explicata est. Statim quisque videbit, formulas pro coefficientibus  $\alpha, \beta$  indeter-

minatas fieri, si  $C = 0$  et pro  $u$  assumatur valor 0, illorumque valores non solum sine extractione radicum assignari non posse, sed adeo ne reales quidem esse, si fuerit  $BB - 4D$  quantitas negativa. Quamquam vero in hoc casu  $u$  adhuc alios valores reales habere, quibus valores reales ipsarum  $\alpha, \beta$  respondeant, facile perspicui potest: tamen vereri aliquis posset, ne huius difficultatis enodatio (quam E. omnino non attigit) in aequationibus altioribus multo maiorem operam facessat. Certe haec res in demonstratione exacta neququam silentio praeteriri debet.

3. Ill. E. supponit tacite, aequationem  $X = 0$  habere  $2m$  radices, harumque summam statuit  $= 0$ , ideo quod terminus secundus in  $X$  abest. Quomodo de hac licentia (qua omnes auctores de hoc argumento utuntur) sentiam, iam supra art. 3 declaravi. Propositio, summam omnium radicum aequationes alicuius coefficienti primo, mutato signo, aequales esse, ad alias aequationes applicanda non videtur, nisi quae radices habent: iam quum per hanc ipsam demonstrationem evinci debeat, aequationem  $X = 0$  revera radices habere, haud permissum videtur, harum existentiam supponere. Sine dubio ii, qui huius paralogismi fallaciam nondum penetraverunt, respondebunt, *hic non demonstrari, aequationi  $X = 0$  satisfieri posse* (nam hoc dicere vult expressio, eam habere radices), *sed tantummodo, ipsi per valores ipsius  $x$  sub forma  $a + b\sqrt{-1}$  contentos satisfieri posse; illud vero tamquam axioma supponi.* At quum aliae quantitatum formae, praeter realem et imaginariam  $a + b\sqrt{-1}$  concipi nequeant, non satis luculentum videtur, quomodo id, quod demonstrari debet, ab eo, quod tamquam axioma supponitur, differat; quin adeo si possibile esset adhuc alias formas quantitatum excogitare, puta formam  $F, F', F''$  etc.: tamen sine demonstratione admitti non deberet, cuius aequationi per aliquem valorem ipsius  $x$  aut realem, aut sub forma  $a + b\sqrt{-1}$ , aut sub forma  $F$ , aut sub  $F'$  etc. contentum satisfieri posse. Quamobrem axioma illud alium sensum habere nequit quam hunc: Cuivis aequationi satisfieri potest *aut* per valorem realem incognitae, *aut* per valorem imaginarium sub forma  $a + b\sqrt{-1}$  contentum, *aut* forsitan per valorem sub forma alia hucusque ignota contentum, *aut* per valorem, qui sub nulla omnino forma continetur. Sed quomodo huiusmodi quantitates, de quibus ne ideam quidem fingere potes — vera umbrae umbra — summarum aut multiplicari possint, hoc ea perspicuitate, quae in mathesi semper postulatur, certo non intelligitur\*).

\*) Tota haec res multum illustrabitur per aliam disquisitionem sub prelo iam sudantem, ubi in argu-

Ceterum conclusiones, quas E. ex suppositione sua elicuit, per has obiectiones haudquaquam suspectas reddere volo; quin potius certus sum, illas per methodum neque difficilem neque ab EULERIANA multum diversam ita comprobari posse, ut nemini vel minimus scrupulus superesse debeat. Solam *formam* reprehendo, quae quamvis in *inveniendis* novis veritatibus magnae utilitatis esse possit, tamen in *demonstrando*, coram publico, minime probanda videtur.

4. Pro demonstratione assertionis, productum  $pqr$  etc. ex coefficientibus in  $X$  *rationaliter* determinari posse, ill. E. nihil omnino attulit. Omnia, quae hac de re in aequationibus *quarti gradus* explicat, haec sunt (ubi  $a, b, c, d$  sunt radices aequationis propositae  $x^4 + Bxx + Cx + D = 0$ ):

‘On m’objectera sans doute, que j’ai supposé ici, que la quantité  $pqr$  était une quantité réelle, et que son carré  $ppqqrr$  était affirmatif; ce qui était encore douteux, vu que les racines  $a, b, c, d$  étant imaginaires, il pourrait bien arriver, que le carré de la quantité  $pqr$ , qui en est composée, fut négatif. Or je réponds à cela que ce cas ne saurait jamais avoir lieu; car quelque imaginaires que soient les racines  $a, b, c, d$ , on sait pourtant, qu’il doit y avoir  $a + b + c + d = 0$ ;  $ab + ac + ad + bc + bd + cd = B$ ;  $abc + abd + acd + bcd = -C^*$ ;  $abcd = D$ , ces quantités  $B, C, D$  étant réelles. Mais puisque  $p = a + b$ ,  $q = a + c$ ,  $r = a + d$ , leur produit  $pqr = (a + b)(a + c)(a + d)$  est déterminable *comme on sait*, par les quantités  $B, C, D$ , et sera par conséquent réel, tout comme nous avons vu, qu’il est effectivement  $pqr = -C$ , et  $ppqqrr = CC$ . On reconnaîtra aisément de même, que dans les plus hautes équations cette même circonstance doit avoir lieu, et qu’on ne saurait me faire des objections de ce côté.’ Conditionem, productum  $pqr$  etc. *rationaliter* per  $B, C$  etc. determinari posse, E. nullibi adiecit, attamen semper subintellexisse videtur, quum absque illa demonstratio nullam vim habere possit. Iam verum quidem est in aequationibus quarti gradus, si productum  $(a + b)(a + c)(a + d)$  evolvatur, obtineri  $a(a + b + c + d) + abc + abd + acd + bcd = -C$ , attamen non satis perspicuum videtur, quomodo in omnibus aequationibus superioribus productum *rationaliter*

mento longe quidem diverso, nihilominus tamen analogo, licentiam similem prorsus eodem iure usurpare potuissem, ut hic in aequationibus ab omnibus analystis factum est. Quamquam vero plurium veritatum demonstrationes adiumento talium fictionum paucis verbis absolvere licuisset, quae absque his perquam difficiles evadunt et subtilissima artificia requirunt, tamen illis omnino abstinere malui, speroque, paucis me satisfactorum fuisse, si analystarum methodum imitatus essem.

\*) E. per errorem habet  $C$ , unde etiam postea perperam statuit  $pqr = C$ .

per coëfficientes determinari possit. Clar. DE FONCENEX, qui primus hoc observavit (*Miscell. phil. math. soc. Taurin.* T. I. p. 117), recte contendit, sine demonstratione rigorosa huius propositionis methodum omnem vim perdere, illam vero satis difficilem sibi videri confitetur, et quam viam frustra tentaverit, enarrat\*). Attamen haec res haud difficulter per methodum sequentem (cuius summam addigitare tantummodo hic possum) absolvitur: Quamquam in aequationibus quarti gradus non satis clarum est, productum  $(a+b)(a+c)(a+d)$  per coëfficientes  $B, C, D$  determinabile esse, tamen facile perspici potest, idem productum etiam esse  $= (b+a)(b+c)(b+d)$ , nec non  $= (c+a)(c+b)(c+d)$ , denique etiam  $= (d+a)(d+b)(d+c)$ . Quare productum  $pqr$  erit quadrans summae  $(a+b)(a+c)(a+d) + (b+a)(b+c)(b+d) + (c+a)(c+b)(c+d) + (d+a)(d+b)(d+c)$ , quam, si evolvatur, fore functionem rationalem integram radicum  $a, b, c, d$  talem, in quam omnes eadem ratione ingredientur, nullo negotio a priori praevideri potest. Tales vero functiones semper rationaliter per coëfficientes aequationis, cuius radices sunt  $a, b, c, d$ , exprimi possunt. — Idem etiam manifestum est, si productum  $pqr$  sub hanc formam redigatur:

$$\frac{1}{2}(a+b-c-d) \times \frac{1}{2}(a+c-b-d) \times \frac{1}{2}(a+d-b-c)$$

quod productum evolutum omnes  $a, b, c, d$  eodem modo implicaturum esse facile praevideri potest. Simul periti facile hinc colligent, quomodo hoc ad altiores aequationes applicari debeat. — Completam demonstrationis expositionem, quam hic apponere brevitatis non permittit, una cum uberiori disquisitione de functionibus plures variables eodem modo involventibus ad aliam occasionem mihi reservo.

Ceterum observo, praeter has quatuor obiectiones, adhuc quaedam alia in demonstratione E. reprehendi posse, quae tamen silentio praetereo, ne forte censor nimis severus esse videar, praesertim quum praecedentia satis ostendere videantur, demonstrationem in ea quidem forma, in qua ab E. proposita est, pro completa neutiquam haberi posse.

Post hanc demonstrationem, E. adhuc aliam viam theorema pro aequationibus, quarum gradus non est potestas binaria, ad talium aequationum resolutionem reducendi ostendit: attamen quum methodus haec pro aequationibus quarum

\*) In hanc expositionem error irrepsisse videtur, scilicet p. 118. l. 5. loco characteris  $p$  (on choisissait seulement celles où entrant  $p$  etc.), necessario legere oportet, *une même racine quelconque de l'équation proposée*, aut simile quid, quum illud nullum sensum habeat.

gradus est potestas binaria, nihil doceat, insuperque omnibus obiectionibus praeced. (praeter quartam) aequae obnoxia sit ut demonstratio prima generalis: haud necesse est illam hic fusius explicare.

## 9.

In eadem commentatione ill. E. theorema nostrum adhuc alia via confirmare annexus est p. 263, cuius summa continetur in his: Proposita aequatione  $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2}$  etc. = 0, hucusque quidem expressio analytica, quae ipsius radices exprimat, inveniri non potuit, si exponens  $n > 4$ ; attamen certum esse videtur (uti asserit E.), illam nihil aliud continere posse, quam operationes arithmeticas et extractions radicum eo magis complicatas, quo maior sit  $n$ . Si hoc conceditur, E. optime ostendit, quantumvis inter se complicata sint signa radicalia, tamen formulae valorem semper per formam  $M + N\sqrt{-1}$  repraesentabilem fore, ita ut  $M, N$  sint quantitates reales.

Contra hoc ratiocinium obiici potest, post tot tantorum geometrarum labores perexiguam spem superesse, ad resolutionem generalem aequationum algebraicarum umquam perveniendi, ita ut magis magisque verisimile fiat, talem resolutionem omnino esse impossibilem et contradictoriam. Hoc eo minus paradoxum videri debet, *quum id, quod vulgo resolutio aequationis dicitur, proprie nihil aliud sit quam ipsius reductio ad aequationes puras*. Nam aequationum purarum solutio hinc non docetur sed supponitur, et si radicem aequationis  $x^m = H$  per  $\sqrt[m]{H}$  exprimis, illam neutiquam solvisti, neque plus fecisti, quam si ad denotandam radicem aequationis  $x^n + Ax^{n-1} +$  etc. = 0 signum aliquod excogitares, radicemque huic aequalem poneres. Verum est, aequationes puras propter facilitatem ipsarum radices per approximationem inveniendi, et propter nexum elegantem, quem omnes radices inter se habent, prae omnibus reliquis multum praestare, adeoque neutiquam vituperandum esse, quod analystae harum radices per signum peculiare denotaverunt: attamen ex eo, quod hoc signum perinde ut signa arithmetica additionis, subtractionis, multiplicationis, divisionis et evectionis ad dignitatem sub nomine *expressionum analyticarum* complexi sunt, minime sequitur, cuiusvis aequationis radicem per illas exhiberi posse. Seu, missis verbis, sine ratione sufficienti supponitur, cuiusvis aequationis solutionem ad solutionem aequationum purarum reduci posse. Forsan non ita difficile foret, impossibilitatem iam pro quinto gradu omni rigore demonstrare, de qua re alio loco disquisitiones meas fusius proponam.



Hic sufficit, resolubilitatem generalem aequationum, in illo sensu acceptam, adhuc valde dubiam esse, adeoque demonstrationem, cuius tota vis ab illa suppositione pendet, in praesenti rei statu nihil ponderis habere.

## 10.

Postea etiam clar. DE FONCENEX, quum in demonstratione prima EULERI defectum animadvertisset (supra art. 8 obiect. 4), quem tollere non poterat, adhuc aliam viam tentavit et in comment. laudata p. 120 in medium protulit\*). Quae consistit in sequentibus.

Proposita sit aequatio  $Z = 0$ , designante  $Z$  functionem  $m^{\text{ti}}$  gradus incognitae  $z$ . Si  $m$  est numerus impar, iam constat, aequationem hanc habere radicem realem; si vero  $m$  est par, clar. F. sequenti modo probare conatur, aequationem ad minimum unam radicem formae  $p + q\sqrt{-1}$  habere. Sit  $m = 2^n i$ , designante  $i$  numerum imparem, supponaturque  $zz + uz + M'$  esse divisor functionis  $Z$ . Tunc singuli valores ipsius  $u$  erunt summae binarum radicum aequationis  $Z = 0$  (mutato signo), quamobrem  $u$  habebit  $\frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} = m'$  valores, et si  $u$  per aequationem  $U = 0$  determinari supponitur (designante  $U$  functionem integram ipsius  $u$  et coefficientium cognitorum in  $Z$ ), haec erit gradus  $m^{\text{ti}}$ . Facile vero perspicitur,  $m'$  fore numerum formae  $2^{n-1} i'$ , designante  $i'$  numerum imparem. Iam nisi  $m'$  est impar, supponatur iterum,  $uu + u'u + M''$  esse divisorem ipsius  $U$ , patetque per similia ratiocinia,  $u'$  determinari per aequationem  $U' = 0$ , ubi  $U'$  sit functio  $\frac{m' \cdot m' - 1}{1 \cdot 2}$ ti gradus ipsius  $u'$ . Posito vero  $\frac{m' \cdot m' - 1}{1 \cdot 2} = m''$ , erit  $m''$  numerus formae  $2^{n-2} i''$ , designante  $i''$  numerum imparem. Iam nisi  $m''$  est impar, statuatur  $u'u' + u''u' + M'''$  esse divisorem functionis  $U'$ , determinabiturque  $u''$  per aequationem  $U'' = 0$ , quae si supponitur esse gradus  $m'''$ ti,  $m'''$  erit numerus formae  $2^{n-3} i'''$ . Manifestum est, in serie aequationum  $U = 0$ ,  $U' = 0$ ,  $U'' = 0$  etc.  $n^{\text{tam}}$  fore gradus imparis adeoque radicem realem habere. Statuamus brevitatis gratia  $n = 3$ , ita ut aequatio  $U'' = 0$  radicem realem  $u''$  habeat, nullo enim negotio perspicitur, pro quovis alio valore ipsius  $n$  idem ratiocinium valere. Tunc coefficientem  $M'''$  per  $u''$  et coefficientes in  $U'$  (quos fore functiones integras coefficientium in  $Z$  facile intelligitur), sive per  $u''$  et coefficientes in

\*) In tomo secundo eorundem *Miscellaneorum* p. 337 dilucidationes ad hanc commentationem continentur: attamen hae ad disquisitionem praesentem non pertinent, sed ad logarithmos quantitatum negativarum, de quibus in eadem comm. sermo fuerat.

$Z$  rationaliter determinabilem fore assertit clar. de F., et proin realem. Hinc sequitur, radices aequationis  $u'u' + u''u' + M'' = 0$  sub forma  $p + q\sqrt{-1}$  contentas fore; eadem vero manifesto aequationi  $U' = 0$  satisfaciunt: quare dabitur valor aliquis ipsius  $u'$  sub forma  $p + q\sqrt{-1}$  contentus. Iam coëfficiens  $M'$  (eodem modo ut ante) rationaliter per  $u'$  et coëfficientes in  $Z$  determinari potest, adeoque etiam sub forma  $p + q\sqrt{-1}$  contentus erit; quare aequationis  $uu + u'u + M'$  radices sub eadem forma contentae erunt, simul vero aequationi  $U = 0$  satisfaciunt, i. e. aequatio haec habebit radicem sub forma  $p + q\sqrt{-1}$  contentam. Denique hinc simili ratione sequitur, etiam  $M$  sub eadem forma contineri, nec non radicem aequationis  $zz + uz + M = 0$ , quae manifesto etiam aequationi propositae  $Z = 0$  satisfaciet. Quamobrem quaevis aequatio ad minimum unam radicem formae  $p + q\sqrt{-1}$  habebit.

11.

Obiectiones 1, 2, 3, quas contra EULERI demonstrationem primam feci (art. 8), eandem vim contra hanc methodum habent, ea tamen differentia, ut obiectio secunda, cui EULERI demonstratio tantummodo in quibusdam casibus specialibus obnoxia erat, praesentem in omnibus casibus attingere debeat. Scilicet a priori demonstrari potest, etiamsi formula detur, quae coëfficientem  $M'$  rationaliter per  $u'$  et coëfficientes in  $Z$  exprimat, hanc pro pluribus valoribus ipsius  $u'$  necessario indeterminatam fieri debere; similiterque formulam, quae coëfficientem  $M''$  per  $u''$  exhibeat, indeterminatam fieri pro quibusdam valoribus ipsius  $u''$  etc. Hoc luculentissime perspicietur, si aequationem quarti gradus pro exemplo assumimus. Ponamus itaque  $m = 4$ , sintque radices aequationis  $Z = 0$ , hae  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ . Tum patet, aequationem  $U = 0$  fore sexti gradus ipsiusque radices  $-(\alpha + \beta), -(\alpha + \gamma), -(\alpha + \delta), -(\beta + \gamma), -(\beta + \delta), -(\gamma + \delta)$ . Aequatio  $U' = 0$  autem erit decimi quinti gradus, et valores ipsius  $u'$  hi

$$\begin{aligned} &2\alpha + \beta + \gamma, 2\alpha + \beta + \delta, 2\alpha + \gamma + \delta, 2\beta + \alpha + \gamma, 2\beta + \alpha + \delta, 2\beta + \gamma + \delta, \\ &2\gamma + \alpha + \beta, 2\gamma + \alpha + \delta, 2\gamma + \beta + \delta, 2\delta + \alpha + \beta, 2\delta + \alpha + \gamma, 2\delta + \beta + \gamma, \\ &\alpha + \beta + \gamma + \delta, \alpha + \beta + \gamma + \delta, \alpha + \beta + \gamma + \delta \end{aligned}$$

Iam in hac aequatione, quippe cuius gradus est impar, subsistendum erit, habebitque ea revera radicem realem  $\alpha + \beta + \gamma + \delta$  (quae primo coëfficienti in  $Z$  mutato signo aequalis adeoque non modo realis sed etiam rationalis erit, si coëfficien-

tes in  $Z$  sunt rationales). Sed nullo negotio perspicui potest, si formula detur, quae valorem ipsius  $M'$  per valorem respondentem ipsius  $u'$  rationaliter exhibeat, hanc necessario pro  $u' = \alpha + \epsilon + \gamma + \delta$  indeterminatam fieri. Hic enim valor *ter* erit radix aequationis  $U' = 0$ , respondebuntque ipsi tres valores ipsius  $M'$ , puta  $(\alpha + \epsilon)(\gamma + \delta)$ ,  $(\alpha + \gamma)(\epsilon + \delta)$  et  $(\alpha + \delta)(\epsilon + \gamma)$ , qui omnes irrationales esse possunt. Manifesto autem formula rationalis neque valorem irrationalem ipsius  $M'$  in hoc casu producere posset, neque tres valores diversos. Ex hoc specimine satis colligi potest, methodum clar. DE FONCENEXII neququam esse satisficientem, sed si ab omni parte completa reddi debeat, multo profundius in theoriam eliminationis inquiri oportere.

## 12.

Denique ill. LA GRANGE de theoremate nostro egit in comm. *Sur la forme des racines imaginaires des équations, Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin 1772*, p. 222 sqq. Magnus hic geometra imprimis operam dedit, defectus in EULERI demonstratione prima supplere et revera praesertim ea, quae supra (art. 8) obiectionem secundam et quartam constituunt, tam profunde perscrutatus est, ut nihil amplius desiderandum restet, nisi forsitan in disquisitione anteriori super theoria eliminationis (cui investigatio haec tota innititur) quaedam dubia superesse videantur. — Attamen obiectionem tertiam omnino non attingit, quin etiam tota disquisitio superstructa est suppositioni, quamvis aequationem  $m^{\text{ti}}$  gradus revera  $m$  radices habere.

Probe itaque iis, quae hucusque exposita sunt, perpensis, demonstrationem novam theorematis gravissimi ex principiis omnino diversis petitam peritis haud ingratis fore spero, quam exponere statim aggredior.

## 13.

LEMMA. Denotante  $m$  numerum integrum positivum quemcunque, functio  $\sin \varphi \cdot x^m - \sin m\varphi \cdot r^{m-1}x + \sin(m-1)\varphi \cdot r^m$  divisibilis erit per  $xx - 2 \cos \varphi \cdot rx + rr$ .

*Demonstr.* Pro  $m = 1$  functio illa fit  $= 0$  adeoque per quemcunque factorem divisibilis; pro  $m = 2$  quotiens fit  $\sin \varphi$ , et pro quovis valore maiori quotiens erit  $\sin \varphi \cdot x^{m-2} + \sin 2\varphi \cdot r x^{m-3} + \sin 3\varphi \cdot r r x^{m-4} + \text{etc.} + \sin(m-1)\varphi \cdot r^{m-2}$ . Facile enim confirmatur, multiplicata hac functione per  $xx - 2 \cos \varphi \cdot rx + rr$ , productum functioni propositae aequale fieri.

14.

LEMMA. Si quantitas  $r$  angulusque  $\varphi$  ita sunt determinati, ut habeantur aequationes

$$r^m \cos m\varphi + Ar^{m-1} \cos (m-1)\varphi + Br^{m-2} \cos (m-2)\varphi + \text{etc.} \\ + Krr \cos 2\varphi + Lr \cos \varphi + M = 0 \quad . \quad . \quad [1]$$

$$r^m \sin m\varphi + Ar^{m-1} \sin (m-1)\varphi + Br^{m-2} \sin (m-2)\varphi + \text{etc.} \\ + Krr \sin 2\varphi + Lr \sin \varphi = 0 \quad . \quad . \quad [2]$$

functio  $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \text{etc.} + Kxx + Lx + M = X$  divisibilis erit per factorem duplicem  $xx - 2 \cos \varphi . rx + rr$ , si modo  $r \sin \varphi \neq 0$ ; si vero  $r \sin \varphi = 0$ , eadem functio divisibilis erit per factorem simplicem  $x - r \cos \varphi$ .

Demonstr. I. Ex art. praec. omnes sequentes quantitates divisibiles erunt per  $xx - 2 \cos \varphi . rx + rr$ :

$$\begin{array}{lll} \sin \varphi . r x^m & - \sin m \varphi . r^m x & + \sin (m-1) \varphi . r^{m+1} \\ A \sin \varphi . r x^{m-1} & - A \sin (m-1) \varphi . r^{m-1} x + A \sin (m-2) \varphi . r^m & \\ B \sin \varphi . r x^{m-2} & - B \sin (m-2) \varphi . r^{m-2} x + B \sin (m-3) \varphi . r^{m-1} & \\ & \text{etc.} & \text{etc.} \\ K \sin \varphi . r x x & - K \sin 2 \varphi . r r x & + K \sin \varphi . r^3 \\ L \sin \varphi . r x & - L \sin \varphi . r x & * \\ M \sin \varphi . r & * & + M \sin (-\varphi) . r \end{array}$$

Quamobrem etiam summa harum quantitatum per  $xx - 2 \cos \varphi . rx + rr$  divisibilis erit. At singularum partes primae constituunt summam  $\sin \varphi . r X$ ; secundae additae dant 0, propter [2]; tertiarum vero aggregatum quoque evanescere, facile perspicitur, si [1] multiplicatur per  $\sin \varphi$ , [2] per  $\cos \varphi$  productumque illud ab hoc subducitur. Unde sequitur, functionem  $\sin \varphi . r X$  divisibilem esse per  $xx - 2 \cos \varphi . rx + rr$ , adeoque, nisi fuerit  $r \sin \varphi = 0$ , etiam functionem  $X$ . Q. E. P.

II. Si vero  $r \sin \varphi = 0$ , erit aut  $r = 0$  aut  $\sin \varphi = 0$ . In casu priori erit  $M = 0$ , propter [1], adeoque  $X$  per  $x$  sive per  $x - r \cos \varphi$  divisibilis; in posteriori erit  $\cos \varphi = \pm 1$ ,  $\cos 2 \varphi = +1$ ,  $\cos 3 \varphi = \pm 1$  et generaliter  $\cos n \varphi = \cos \varphi^n$ . Quare propter [1] fiet  $X = 0$ , statuendo  $x = r \cos \varphi$ , et proin functio  $X$  per  $x - r \cos \varphi$  erit divisibilis. Q. E. S.

15.

Theorema praecedens plerumque adiumento quantitatum imaginariarum demonstratur, vid. EULER *Introd. in Anal Inf.* T. I. p. 110; operae pretium esse duxi, ostendere, quomodo aequae facile absque illarum auxilio erui possit. Manifestum iam est, ad demonstrationem theorematis nostri nihil aliud requiri quam ut ostendatur: *Proposita functione quacunq̄ue X formae  $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \text{etc.} + Lx + M$ , r et  $\varphi$  ita determinari posse, ut aequationes [1] et [2] locum habeant.* Hinc enim sequetur, X habere factorem realem primi vel secundi gradus; divisio autem necessario producet quotientem realem inferioris gradus, qui ex eadem ratione quoque factorem primi vel secundi gradus habebit. Per continuationem huius operationis X tandem in factores reales simplices vel duplices resolvetur. Illud itaque theorema demonstrare, propositum est sequentium disquisitionum.

16.

Concipiatur planum fixum infinitum (planum tabulae, fig. 1), et in hoc recta fixa infinita GC per punctum fixum C transiens. Assumta aliqua longitudine pro unitate, ut omnes rectae per numeros exprimi possint, erigatur in quovis puncto plani P, cuius distantia a centro C est r angulusque GCP =  $\varphi$ , perpendiculum aequale valori expressionis

$$r^m \sin m\varphi + Ar^{m-1} \sin(m-1)\varphi + \text{etc.} + Lr \sin \varphi$$

quem brevitatis gratia in sequentibus semper per T designabo. Distantiam r semper tamquam positivam considero, et pro punctis, quae axi ab altera parte iacent, angulus  $\varphi$  aut tamquam duobus rectis maior, aut tamquam negativus (quod hic eodem redit) spectari debet. Extremitates horum perpendiculorum (quae pro valore positivo ipsius T supra planum accipiendae sunt, pro negativo infra, pro evanescente in plano ipso) erunt ad superficiem curvam continuam quaquaversum infinitam, quam brevitatis gratia in sequentibus *superficiem primam* vocabo. Prorsus simili modo ad idem planum et centrum eundemque axem referatur alia superficies, cuius altitudo supra quodvis plani punctum sit

$$r^m \cos m\varphi + Ar^{m-1} \cos(m-1)\varphi + \text{etc.} + Lr \cos \varphi + M$$

quam expressionem brevitatis gratia semper per U denotabo. Superficiem vero hanc, quae etiam continua et quaquaversum infinita erit, per denominationem

*superficie secundae* a priori distinguam. Tunc manifestum est, totum negotium in eo versari, ut demonstretur, ad minimum unum punctum dari, quod simul in plano, in superficie prima et in superficie secunda iaceat.

17.

Facile perspici potest, superficiem primam partim supra planum partim infra planum iacere; patet enim distantiam a centro  $r$  tam magnam accipi posse, ut reliqui termini in  $T$  prae primo  $r^m \sin m\varphi$  evanescant; hic vero, angulo  $\varphi$  rite determinato, tam positivus quam negativus fieri potest. Quare planum fixum necessario a superficie prima secabitur; hanc plani cum superficie prima intersectionem vocabo *lineam primam*; quae itaque determinabitur per aequationem  $T = 0$ . Ex eadem ratione planum a superficie secunda secabitur; intersectio constituet curvam per aequationem  $U = 0$  determinatam, quam *lineam secundam* appellabo. Proprie utraque curva ex pluribus ramis constabit, qui omnino seiuncti esse possunt, singuli vero erunt lineae continuae. Quin adeo linea prima semper erit talis, quam complexam vocant, axisque  $GC$  tamquam pars huius curvae spectanda; quicumque enim valor ipsi  $r$  tribuatur,  $T$  semper fiet  $= 0$ , quando  $\varphi$  aut  $= 0$  aut  $= 180^\circ$ . Sed praestat complexum cunctorum ramorum per omnia puncta, ubi  $T = 0$ , transeuntium tamquam unam curvam considerare (secundum usum in geometria sublimiori generaliter receptum), similiterque cunctos ramos per omnia puncta transeuntes, ubi  $U = 0$ . Patet iam, rem eo reductam esse, ut demonstretur, ad minimum unum punctum in plano dari, ubi ramus aliquis lineae primae a ramo lineae secundae secetur. Ad hunc finem indolem harum linearum propius contemplari oportebit.

18.

Ante omnia observo, utramque curvam esse algebraicam, et quidem, si ad coordinatas orthogonales revocetur, ordinis  $m^{\text{ti}}$ . Sumto enim initio abscissarum in  $C$ , abscissisque  $x$  versus  $G$ , applicatis  $y$  versus  $P$ , erit  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ , adeoque generaliter, quidquid sit  $n$ ,

$$r^n \sin n\varphi = nx^{n-1}y - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-3}y^3 + \frac{n \cdot \dots \cdot n-4}{1 \cdot \dots \cdot 5} x^{n-5}y^5 - \text{etc.}$$

$$r^n \cos n\varphi = x^n - \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} x^{n-2}yy + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^{n-4}y^4 - \text{etc.}$$

Quamobrem tum  $T$  tum  $U$  constabunt ex pluribus huiusmodi terminis  $ax^a y^b$ ,

denotantibus  $\alpha, \beta$  numeros integros positivos, quorum summa, ubi maxima est, fit  $= m$ . Ceterum facile praevideri potest, cunctos terminos ipsius  $T$  factorem  $y$  involvere, adeoque lineam primam proprie ex recta (cuius aequatio  $y = 0$ ) et curva ordinis  $m-1$ <sup>ti</sup> compositam esse; sed necesse non est ad hanc distinctionem hic respicere.

Maioris momenti erit investigatio, an linea prima et secunda crura infinita habeant, et quot qualiaque. In distantia infinita a puncto  $C$  linea prima, cuius aequatio  $\sin m\varphi + \frac{A}{r} \sin(m-1)\varphi + \frac{B}{r^2} \sin(m-2)\varphi$  etc.  $= 0$ , confundetur cum linea, cuius aequatio  $\sin m\varphi = 0$ . Haec vero exhibet  $m$  lineas rectas in puncto  $C$  se secantes, quarum prima est axis  $CGG'$ , reliquae contra hanc sub angulis  $\frac{1}{m}180, \frac{2}{m}180, \frac{3}{m}180$  etc. graduum inclinatae. Quare linea prima  $2m$  ramos infinitos habet, qui peripheriam circuli radio infinito descripti in  $2m$  partes aequales dispertuntur, ita ut peripheria a ramo primo secetur in concursu circuli et axis, a secundo in distantia  $\frac{1}{m}180^\circ$ , a tertio in distantia  $\frac{2}{m}180^\circ$  etc. Eodem modo linea secunda in distantia infinita a centro habebit asymptotam per aequationem  $\cos m\varphi = 0$  expressam, quae est complexus  $m$  rectarum in puncto  $C$  sub aequalibus angulis itidem se secantium, ita tamen, ut prima cum axe  $CG$  constituat angulum  $\frac{1}{m}90^\circ$ , secunda angulum  $\frac{2}{m}90^\circ$ , tertia angulum  $\frac{3}{m}90^\circ$  etc. Quare linea secunda etiam  $2m$  ramos infinitos habebit, quorum singuli medium locum inter binos ramos proximos lineae primae occupabunt, ita ut peripheriam circuli radio infinite magno descripti in punctis, quae  $\frac{1}{m}90^\circ, \frac{2}{m}90^\circ, \frac{3}{m}90^\circ$  etc. ab axe distant, secent. Ceterum palam est, axem ipsum semper duos ramos infinitos lineae primae constituere, puta primum et  $m+1$ <sup>tum</sup>. Luculentissime hic ramos situs exhibetur in fig. 2, pro casu  $m = 4$  constructa, ubi rami lineae secundae, ut a ramis lineae primae distinguantur, punctati exprimuntur, quod etiam de figura quarta est tenendum\*). — Quum vero hae conclusiones maximi momenti sint, quantitatesque infinite magnae quosdam lectores offendere possint: illas etiam absque infinitorum subsidio in art. sequ. eruere docebo.

## 19.

**THEOREMA.** *Manentibus cunctis ut supra, ex centro  $C$  describi poterit circulus,*

\*) Figura quarta constructa est supponendo  $X = x^2 - 2xx + 3x + 10$ , in qua itaque lectores disquisitionibus generalibus et abstractis minus assueti situm respectivum utriusque curvae in concreto intueri poterunt. Longitudo lineae  $CG$  assumpta est  $= 10$  ( $CN = 1,26255$ ).

in cuius peripheria sint  $2m$  puncta, in quibus  $T = 0$ , totidemque, in quibus  $U = 0$ , et quidem ita, ut singula posteriora inter bina priorum iaceant.

Sit summa omnium coefficientium  $A, B$  etc.  $K, L, M$  positive acceptorum  $= S$ , accipiaturque  $R$  simul  $> S\sqrt{2}$  et  $> 1$  \*): tum dico in circulo radio  $R$  descripto ea, quae in theoremate enunciata sunt, necessario locum habere. Scilicet designato brevitatis gratia eo puncto huius circumferentiae, quod  $\frac{1}{m}45$  gradibus ab ipsius concursu cum laeva parte axis distat, sive pro quo  $\varphi = \frac{1}{m}45^\circ$ , per (1); similiter eo puncto, quod  $\frac{3}{m}45^\circ$  ab hoc concursu distat, sive pro quo  $\varphi = \frac{3}{m}45^\circ$ , per (3); porro eo, ubi  $\varphi = \frac{5}{m}45^\circ$ , per (5) etc. usque ad  $(8m-1)$ , quod  $\frac{8m-1}{m}45$  gradibus ab illo concursu distat, si semper versus eandem partem progredieris, (aut  $\frac{1}{m}45^\circ$  a parte opposita), ita ut omnino  $4m$  puncta in peripheria habeantur, aequalibus intervallis dissita: iacebit inter  $(8m-1)$  et (1) unum punctum, pro quo  $T = 0$ ; nec non sita erunt similia puncta singula inter (3) et (5); inter (7) et (9); inter (11) et (13) etc., quorum itaque multitudo  $2m$ ; eodemque modo singula puncta, pro quibus  $U = 0$ , iacebunt inter (1) et (3); inter (5) et (7); inter (9) et (11), quorum multitudo igitur etiam  $= 2m$ ; denique praeter haec  $4m$  puncta alia in tota peripheria non dabuntur, pro quibus vel  $T$  vel  $U$  sit  $= 0$ .

*Demonstr.* I. In puncto (1) erit  $m\varphi = 45^\circ$  adeoque

$$T = R^{m-1} \left( R\sqrt{\frac{1}{2}} + A \sin(m-1)\varphi + \frac{B}{R} \sin(m-2)\varphi + \text{etc.} + \frac{L}{R^{m-2}} \sin \varphi \right)$$

summa vero  $A \sin(m-1)\varphi + \frac{B}{R} \sin(m-2)\varphi$  etc. certo non poterit esse maior quam  $S$ , adeoque necessario erit minor quam  $R\sqrt{\frac{1}{2}}$ : unde sequitur, in hoc puncto valorem ipsius  $T$  certo esse positivum. A potiori itaque  $T$  valorem positivum habebit, quando  $m\varphi$  inter  $45^\circ$  et  $135^\circ$  iacet, i. e. a puncto (1) usque ad (3) valor ipsius  $T$  semper positivus erit. Ex eadem ratione  $T$  a puncto (9) usque ad (11) positivum valorem ubique habebit, et generaliter a quovis puncto  $(8k+1)$  usque ad  $(8k+3)$ , denotante  $k$  integrum quemcunque. Simili modo  $T$  ubique inter (5) et (7), inter (13) et (15) etc. et generaliter inter  $(8k+5)$  et  $(8k+7)$  valorem negativum habebit, adeoque in omnibus his intervallis nullibi poterit esse  $= 0$ . Sed quoniam in (3) hic valor est positivus, in (5) negativus: necessario alicubi inter (3) et (5) erit  $= 0$ ; nec non alicubi inter (7) et (9); inter (11) et (13) etc.

\*) Quando  $S > \sqrt{\frac{1}{2}}$ , conditio prima secundam; quando vero  $S < \sqrt{\frac{1}{2}}$ , secunda primam implicabit.



usque ad intervallum inter  $(8m-1)$  et  $(1)$  incl., ita ut omnino in  $2m$  punctis habeatur  $T = 0$ . Q. E. P.

II. Quod vero praeter haec  $2m$  puncta, alia, hac proprietate praedita, non dantur, ita cognoscitur. Quum inter  $(1)$  et  $(3)$ ; inter  $(5)$  et  $(7)$  etc. nulla sint, aliter fieri non posset, ut plura talia puncta exstent, quam si in aliquo intervallo inter  $(3)$  et  $(5)$ , vel inter  $(7)$  et  $(9)$  etc. ad minimum duo iacerent. Tum vero necessario in eodem intervallo  $T$  alicubi esset *maximum* vel *minimum*, adeoque  $\frac{dT}{d\varphi} = 0$ . Sed  $\frac{dT}{d\varphi} = mR^{m-2}(R\cos m\varphi + \frac{m-1}{m}A\cos(m-1)\varphi + \text{etc.})$  et  $\cos m\varphi$  inter  $(3)$  et  $(5)$  semper est negativus et  $> \sqrt{\frac{1}{2}}$ . Unde facile perspicitur, in toto hoc intervallo  $\frac{dT}{d\varphi}$  esse quantitatem negativam; eodemque modo inter  $(7)$  et  $(9)$  ubique positivam; inter  $(11)$  et  $(13)$  negativam etc., ita ut in nullo horum intervallorum esse possit  $0$ , adeoque suppositio consistere nequeat. Quare etc. Q.E.S.

III. Prorsus simili modo demonstratur,  $U$  habere valorem negativum ubique inter  $(3)$  et  $(5)$ , inter  $(11)$  et  $(13)$  etc. et generaliter inter  $(8k+3)$  et  $(8k+5)$ ; positivum vero inter  $(7)$  et  $(9)$ , inter  $(15)$  et  $(17)$  etc. et generaliter inter  $(8k+7)$  et  $(8k+9)$ . Hinc statim sequitur,  $U = 0$  fieri debere alicubi inter  $(1)$  et  $(3)$ , inter  $(5)$  et  $(7)$  etc., i. e. in  $2m$  punctis. In nullo vero horum intervallorum fieri poterit  $\frac{dU}{d\varphi} = 0$  (quod facile simili modo ut supra probatur): quamobrem plura quam illa  $2m$  puncta in circuli peripheria non dabuntur, in quibus fiat  $U = 0$ . Q. E. T. et Q.

Ceterum ea theorematis pars, secundum quam plura quam  $2m$  puncta non dantur, in quibus  $T = 0$ , neque plura quam  $2m$ , in quibus  $U = 0$ , etiam inde demonstrari potest, quod per aequationes  $T = 0$ ,  $U = 0$  exhibentur curvae  $m^{\text{ti}}$  ordinis, quales a circulo tamquam curva secundi ordinis in pluribus quam  $2m$  punctis secari non posse, ex geometria sublimiori constat.

20.

Si circulus alius radio maiori quam  $R$  ex eodem centro describitur, eodemque modo dividitur: etiam in hoc inter puncta  $(3)$  et  $(5)$  iacebit punctum unum, in quo  $T = 0$ , itemque inter  $(7)$  et  $(9)$  etc., perspicieturque facile, quo minus radius huius circuli a radio  $R$  differat, eo propius huiusmodi puncta inter  $(3)$  et  $(5)$  in utriusque circumferentia sita esse debere. Idem etiam locum habebit, si circulus radio aliquantum minori quam  $R$ , attamen maiori quam  $S\sqrt{2}$  et  $1$ , describitur. Ex his nullo negotio intelligitur, circuli radio  $R$  descripti circumferen-

tiam in eo puncto inter (3) et (5), ubi  $T = 0$ , revera *secari* ab aliquo ramo lineae primae; idemque valet de reliquis punctis, ubi  $T = 0$ . Eodem modo patet, circumferentiam circuli huius in omnibus  $2m$  punctis, ubi  $U = 0$ , ab aliquo ramo lineae secundae secari. Hae conclusiones etiam sequenti modo exprimi possunt: Descripto circulo debitae magnitudinis e centro  $C$ , in hunc intrabunt  $2m$  rami lineae primae totidemque rami lineae secundae, et quidem ita, ut bini rami proximi lineae primae per aliquem ramum lineae secundae ab invicem separantur. Vid. fig. 2, ubi circulus iam non infinitae sed finitae magnitudinis erit, numerique singulis ramis adscripti cum numeris, per quos in art. praec. et hoc limites certos in peripheria brevitatis causa designavi, non sunt confundendi.

## 21.

Iam ex hoc situ relativo ramorum in circulum intrantium tot modis diversis deduci potest, intersectionem alicuius rami lineae primae cum ramo lineae secundae intra circulum necessario dari, ut, quaenam potissimum methodus prae reliquis eligenda sit, propemodum nesciam. Luculentissima videtur esse haec: Designemus (fig. 2) punctum peripheriae circuli, ubi a laeva axis parte (quae ipsa est unus ex  $2m$  ramis lineae primae) secatur, per 0; punctum proximum, ubi ramus lineae secundae intrat, per 1; punctum huic proximum, ubi secundus lineae primae ramus intrat, per 2, et sic porro usque ad  $4m - 1$ , ita ut in quovis puncto numero pari signato ramus lineae secundae in circulum intret, contra ramus lineae secundae in omnibus punctis per numerum imparem expressis. Iam ex geometria sublimiori constat, quamvis curvam algebraicam (sive singulas cuiusvis curvae algebraicae partes, si forte e pluribus composita sit) aut in se redeuntem aut utrimque in infinitum excurrentem esse, adeoque si ramus aliquis curvae algebraicae in spatium definitum intret, eundem necessario ex hoc spatio rursus alicubi exire debere\*). Hinc concluditur facile, quodvis punctum numero pari signa-

\*) Satis bene certe demonstratum esse videtur, curvam algebraicam neque alicubi subito abrumpi posse (uti e. g. evenit in curva transcendente, cuius aequatio  $y = \frac{1}{\log x}$ ), neque post spiras infinitas in aliquo puncto se quasi perdere (ut spiralis logarithmica), quantumque scio, nemo dubium contra hanc rem movit. Attamen si quis postulat, demonstrationem nullis dubiis obnoxiam alia occasione tradere suscipiam. In casu praesenti vero manifestum est, si aliquis ramus e. g. 2, ex circulo nullibi exiret (fig. 3), te in circulum inter 0 et 2 intrare, postea circa totum hunc ramum (qui in circuli spatio se perdere deberet) circummeare, et tandem inter 2 et 4 rursus ex circulo egredi posse, ita ut nullibi in tota via in lineam primam incidere. Hoc vero absurdum esse, inde patet, quod in puncto, ubi in circulum ingressus es, superficiem

tum (seu, brevitatis caussa, *quodvis punctum par*) per ramum lineae primae cum alio puncto pari intra circulum iunctum esse debere, similiterque quodvis punctum numero impari notatum cum alio simili puncto per ramum lineae secundae. Quamquam vero haec binorum punctorum connexio secundum indolem functionis  $X$  perquam diversa esse potest, ita ut in genere determinari nequeat, tamen facile demonstrari potest, *quaecunque demum illa sit, semper intersectionem lineae primae cum linea secunda oriri.*

## 22.

Demonstratio huius necessitatis commodissime apagogice repraesentari posse videtur. Scilicet supponamus, iunctionem binorum quorumque punctorum parium et binorum quorumque punctorum imparium ita adornari posse, ut nulla intersectio rami lineae primae cum ramo lineae secundae inde oriatur. Quoniam axis est pars lineae primae, manifesto punctum 0 cum puncto  $2m$  iunctum erit. Punctum 1 itaque cum nullo puncto ultra axem sito, i. e. cum nullo puncto per numerum maiorem quam  $2m$  expresso iunctum esse potest, alioquin enim linea iungens necessario axem secaret. Si itaque 1 cum puncto  $n$  iunctum esse supponitur, erit  $n < 2m$ . Ex simili ratione, si 2 cum  $n'$  iunctum esse statuitur, erit  $n' < n$ , quia alioquin ramus  $2 \dots n'$  ramum  $1 \dots n$  necessario secaret. Ex eadem caussa punctum 3 cum aliquo punctorum inter 4 et  $n'$  iacentium iunctum erit, patetque, si 3, 4, 5 etc. iuncta esse supponantur cum  $n''$ ,  $n'''$ ,  $n''''$  etc.,  $n''''$  iacere inter 5 et  $n''$ ,  $n''''$  inter 6 et  $n'''$  etc. Unde perspicuum est, tandem ad aliquod punctum  $h$  perventum iri, quod cum puncto  $h+2$  iunctum sit, et tum ramus, qui in puncto  $h+1$  in circulum intrat, necessario ramum puncta  $h$  et  $h+2$  iungentem secabit. Quia autem alter horum duorum ramorum ad lineam primam, alter ad secundam pertinebit, manifestum iam est, suppositionem esse contradictoriam, adeoque necessario alicubi intersectionem lineae primae cum linea secunda fieri.

---

primam supra te habuisti, in egressu, infra; quare necessario alicubi in superficiem primam ipsam incidere debuisti, sive in punctum lineae primae. — Ceterum ex hoc ratiocinio principiis geometriae situs innixo, quae haud minus valida sunt, quam principia geometriae magnitudinis, sequitur tantummodo, si in aliquo ramo lineae primae in circulum intres, te alio loco ex circulo rursus egredi posse, semper in linea prima manendo, neque vero, viam tuam esse lineam continuam in eo sensu, quo in geometria sublimiori accipitur. Sed hic sufficit, viam esse lineam continuam in sensu communi, i. e. nullibi interruptam sed ubique cohaerentem.

Si haec cum praecedentibus iunguntur, ex omnibus disquisitionibus explicatis colligetur, theorema, *quamvis functionem algebraicam rationalem integram unius indeterminatae in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse*, omni rigore demonstratum.

## 23.

Ceterum haud difficile ex iisdem principiis deduci potest, non solum unam sed ad minimum  $m$  intersectiones lineae primae cum secunda dari, quamquam etiam fieri potest, ut linea prima a pluribus ramis lineae secundae in eodem puncto secetur, in quo casu functio  $X$  plures factores aequales habebit. Attamen quum hic sufficiat, unius intersectionis necessitatem demonstravisse, fusius huic rei brevitate causa non immoror. Ex eadem ratione etiam alias harum linearum proprietates hic uberius non persequor, e. g. intersectionem semper fieri sub angulis rectis; aut si plura crura utriusque curvae in eodem puncto conveniant, totidem crura lineae primae affore, quot crura lineae secundae, haecque alternatim posita esse, et sub aequalibus angulis se secare etc.

Denique observo, minime impossibile esse, ut demonstratio praecedens, quam hic principiis geometricis superstruxi, etiam in forma mere analytica exhibeatur: sed eam repraesentationem, quam hic explicavi, minus abstractam evadere credidi, verumque nervum probandi hic multo clarius ob oculos poni, quam a demonstratione analytica expectari possit.

Coronidis loco adhuc aliam methodum theorema nostrum demonstrandi ad-digitabo, quae primo aspectu non modo a demonstratione praecedente, sed etiam ab omnibus demonstrationibus reliquis supra enarratis maxime diversa esse videbitur, et quae nihilominus cum D'ALEMBERTIANA, si ad essentiam spectas, proprie eadem est. Cum qua illam comparare, parallelismumque inter utramque explorare peritis committo, in quorum gratiam unice subiuncta est.

## 24.

Supra planum figurae 4 relative ad axem  $CG$  punctumque fixum  $C$  descriptas suppono superficiem primam et secundam eodem modo ut supra. Accipe punctum quodcumque in aliquo ramo lineae primae situm sive ubi  $T = 0$ , (e. g. quodlibet punctum  $M$  in axe iacens), et nisi in hoc etiam  $U = 0$ , progredere ex hoc puncto in linea prima versus eam partem, versus quam magnitudo abso-

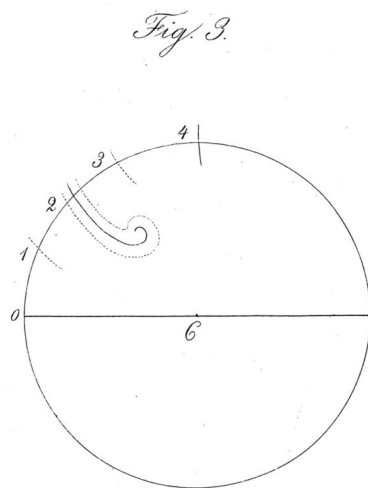
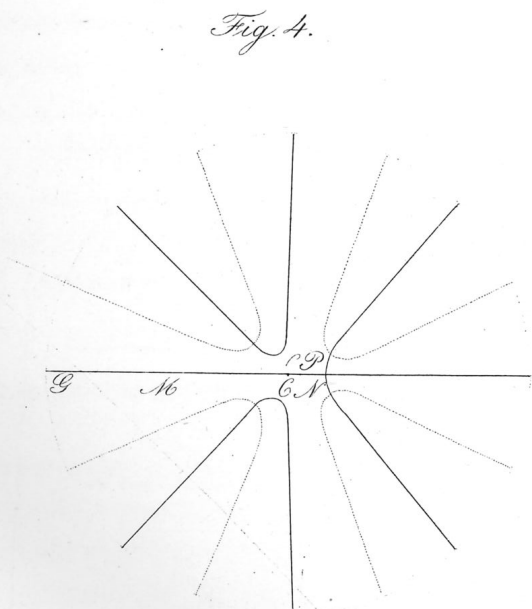
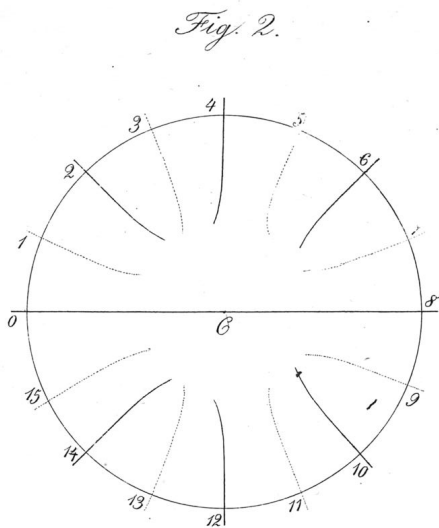
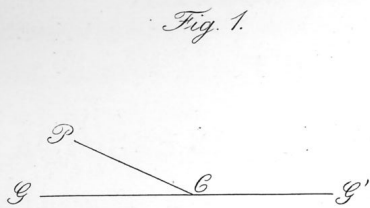
luta ipsius  $U$  decrescit. Si forte in puncto  $M$  valor absolutus ipsius  $U$  versus utramque partem decrescit, arbitrium est, quorsum progrediari; quid vero faciendum sit, si  $U$  versus utramque partem crescat, statim docebo. Manifestum est itaque, dum semper in linea prima progrediari, necessario tandem te ad punctum perventurum, ubi  $U = 0$ , aut ad tale, ubi valor ipsius  $U$  fiat minimum, e. g. punctum  $N$ . In priori casu quod quaerebatur, inventum est; in posteriori vero demonstrari potest, in hoc puncto plures ramos lineae primae sese intersectare (et quidem multitudinem parem ramorum), quorum semissis ita comparati sint, ut si in aliquem eorum deflectas (sive huc sive illuc), valor ipsius  $U$  adhuc dum decrescere pergat. (Demonstrationem huius theorematis prolixiorum quam difficiliorum brevitate gratia suppressere debeo.) In hoc itaque ramo iterum progredi poteris, donec  $U$  aut fiat  $= 0$  (uti in fig. 4 evenit in  $P$ ), aut denuo minimum. Tum rursus deflectes, necessarioque tandem ad punctum pervenies, ubi sit  $U = 0$ .

Contra hanc demonstrationem obiici posset dubium, annon possibile sit, ut quantumvis longe progrediari, et quamvis valor ipsius  $U$  semper decrescat, tamen haec decreta continuo tardiora fiant, et nihilominus ille valor limitem aliquem nusquam attingat; quae obiectio responderet quartae in art. 6. Sed haud difficile foret, terminum aliquem assignare, quem simulac transieris, valor ipsius  $U$  necessario non modo semper rapidius mutari debeat, sed etiam *decrescere* non amplius possit, ita ut antequam ad hunc terminum perveneris, necessario valor 0 iam affuisse debeat. Hoc vero et reliqua, quae in hac demonstratione addigittare tantummodo potui, alia occasione fusius exsequi mihi reservo.

---

*Principia quibus haec demonstratio innititur deteximus Initio Octob. 1797.*

---





## Chapitre 6

# Les polynômes de Tchebychev

Dans ce deuxième chapitre de l'annexe, nous présentons un premier résultat concernant les polynômes de Tchebychev [34]. Nous y incluons également une définition des polynômes de Tchebychev de première et de deuxième espèce. Les polynômes de Tchebychev, dont le nom provient du mathématicien russe Pafnouti Tchebychev, sont définis de manière récurrente et possèdent des propriétés orthogonales remarquables sur l'intervalle  $[-1, 1]$  avec des poids appropriés. Nous avons remarqué dans le chapitre concernant l'analyse de la thèse de Gauss 2, ainsi que celui portant sur l'approche élémentaire de Basu et Velleman 3, que les polynômes de Tchebychev interviennent de manière substantielle dans les démonstrations. Il est d'ailleurs assez surprenant que Basu et Velleman ne les mentionnent pas explicitement dans leur travail, malgré leur présence implicite dans les techniques employées. Nous avons néanmoins décidé de nous intéresser à ces polynômes afin de faciliter la compréhension de leur démonstration dite élémentaire.

**Théorème 9.** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe  $T_n \in \mathbb{R}_n[x]$  de degré  $n$  et  $U_n \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$  de degré  $n - 1$  tels que*

$$\cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta)) \quad (6.1)$$

et

$$\sin(n\theta) = \sin(\theta)U_n(\cos(\theta)). \quad (6.2)$$

*Démonstration.* Il s'agit d'une démonstration par récurrence. Si  $n = 1$ , le résultat est direct : on a  $T_1(x) = x$  et  $U_1(x) = 1$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Supposons à présent qu'il existe  $T_n \in \mathbb{R}_n[x]$  de degré  $n$  et  $U_n \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$  de degré  $n - 1$  tels que

$$\cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta)) \quad (6.3)$$

et

$$\sin(n\theta) = \sin(\theta)U_n(\cos(\theta)). \quad (6.4)$$

Alors on obtient d'une part :

$$\begin{aligned} \cos((n+1)\theta) &= \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta) \\ &= T_n(\cos(\theta))\cos(\theta) - U_n(\cos(\theta))\sin^2(\theta) \\ &= T_n(\cos(\theta))\cos(\theta) - U_n(\cos(\theta))(1 - \cos^2(\theta)). \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \sin((n+1)\theta) &= \sin(n\theta)\cos(\theta) + \cos(n\theta)\sin(\theta) \\ &= \sin(\theta)U_n(\cos(\theta))\cos(\theta) + T_n(\cos(\theta))\sin(\theta) \\ &= \sin(\theta)(U_n(\cos(\theta))\cos(\theta) + T_n(\cos(\theta))). \end{aligned}$$



On déduit des développements précédents que

$$T_{n+1}(x) = T_n(x)x - U_n(x)(1 - x^2)$$

est un polynôme à coefficients réels de degré  $n + 1$  et que

$$U_{n+1}(x) = U_n(x)x + T_n(x)$$

est un polynôme de degré  $n$ . □

Il existe deux types principaux de polynômes de Tchebychev : ceux de premier type  $T_n(x)$  et ceux de second type  $U_n(x)$  dont voici une définition.

**Definition 16.** Les polynômes de Tchebychev de premier type sont définis par la relation de récurrence suivante :

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad \text{pour } n \geq 1$$

Ces polynômes sont définis pour  $x$  dans l'intervalle  $[-1, 1]$ .

**Exemple.** Les premiers polynômes de Tchebychev de la première espèce sont :

$$T_0 = 1$$

$$T_1 = x$$

$$T_2 = 2x^2 - 1$$

$$T_3 = 4x^3 - 3x$$

$$T_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_5 = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

$$T_6 = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$$

$$T_7 = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$$

$$T_8 = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1$$

$$T_9 = 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x$$

**Definition 17.** Les polynômes de Tchebychev de second type sont définis par la relation de récurrence suivante :

$$U_0(x) = 1$$

$$U_1(x) = 2x$$

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x) \quad \text{pour } n \geq 1$$

Ces polynômes sont définis pour  $x$  dans l'intervalle  $[-1, 1]$ .

**Exemple.** Les premiers polynômes de Tchebychev de la seconde espèce sont :

$$\begin{aligned}
U_0 &= 1 \\
U_1 &= 2x \\
U_2 &= 4x^2 - 1 \\
U_3 &= 8x^3 - 4x \\
U_4 &= 16x^4 - 12x^2 + 1 \\
U_5 &= 32x^5 - 32x^3 + 6x \\
U_6 &= 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1 \\
U_7 &= 128x^7 - 192x^5 + 80x^3 - 8x \\
U_8 &= 256x^8 - 448x^6 + 240x^4 - 40x^2 + 1 \\
U_9 &= 512x^9 - 1024x^7 + 672x^5 - 160x^3 + 10x
\end{aligned}$$

Nous pouvons utiliser les polynômes de Tchebychev pour démontrer les égalités suivantes qui nous sont utiles dans la démonstration de lemme 2 dans le chapitre 2.

**Proposition 9.** Pour tout  $\phi \in \mathbb{R}$ , on a les égalités

$$\cos(j\phi) = \sum_{\substack{k \in \{0, \dots, j\} \\ k \text{ pair}}} C_j^k (-1)^{\frac{k}{2}} \cos^{j-k}(\phi) \sin^k(\phi)$$

et

$$\sin(j\phi) = \sum_{\substack{k \in \{1, \dots, j\} \\ k \text{ impair}}} C_j^k (-1)^{\frac{k-1}{2}} \cos^{j-k}(\phi) \sin^k(\phi)$$

*Démonstration.* D'après le théorème 9, on sait qu'on a l'égalité suivante :

$$T_j(\cos(\phi)) = \cos(j\phi)$$

En utilisant la formule binomiale et les identités trigonométriques, on peut développer  $\cos(j\phi)$ . Sachant que

$$\cos(j\phi) = \Re((\cos(\phi) + i \sin(\phi))^j)$$

on peut écrire :

$$(\cos(\phi) + i \sin(\phi))^j = \sum_{k=0}^j C_j^k \cos^{j-k}(\phi) (i \sin(\phi))^k$$

En séparant la partie réelle, on a :

$$\cos(j\phi) = \Re \left( \sum_{k=0}^j C_j^k \cos^{j-k}(\phi) (i \sin(\phi))^k \right)$$

La partie réelle est obtenue en considérant les termes où  $k$  est pair, car pour ces termes  $(i^k) = (-1)^{k/2}$  et  $i^k$  est imaginaire pour  $k$  impair. Donc,

$$\cos(j\phi) = \sum_{\substack{k \in \{0, \dots, j\} \\ k \text{ pair}}} C_j^k \cos^{j-k}(\phi) (i^k) (\sin(\phi))^k$$

$$\cos(j\phi) = \sum_{\substack{k \in \{0, \dots, j\} \\ k \text{ pair}}} C_j^k (-1)^{k/2} \cos^{j-k}(\phi) \sin^k(\phi)$$

De la même manière, on sait que

$$\sin(j\phi) = \Im((\cos(\phi) + i \sin(\phi))^j).$$

En développant le binôme de Newton pour  $(\cos(\phi) + i \sin(\phi))^j$ , on obtient :

$$(\cos(\phi) + i \sin(\phi))^j = \sum_{k=0}^j C_j^k \cos^{j-k}(\phi) (i \sin(\phi))^k$$

La partie imaginaire de cette somme est donnée par les termes où  $k$  est impair. Plus précisément, pour  $k$  impair,  $i^k = i(i^2)^{(k-1)/2} = i(-1)^{(k-1)/2}$ .

Ainsi, on peut écrire :

$$\sin(j\phi) = \Im \left( \sum_{k=0}^j C_j^k \cos^{j-k}(\phi) (i \sin(\phi))^k \right)$$

En séparant les termes avec  $k$  impair, on a :

$$\sin(j\phi) = \sum_{\substack{k \in \{1, \dots, j\} \\ k \text{ impair}}} C_j^k \cos^{j-k}(\phi) i^k \sin^k(\phi)$$

Comme  $i^k = i(-1)^{(k-1)/2}$  pour  $k$  impair, on obtient :

$$\sin(j\phi) = \sum_{\substack{k \in \{1, \dots, j\} \\ k \text{ impair}}} C_j^k \cos^{j-k}(\phi) i(-1)^{(k-1)/2} \sin^k(\phi)$$

En prenant la partie imaginaire, on a :

$$\sin(j\phi) = \sum_{\substack{k \in \{1, \dots, j\} \\ k \text{ impair}}} C_j^k (-1)^{(k-1)/2} \cos^{j-k}(\phi) \sin^k(\phi)$$

□

# Chapitre 7

## Démonstration du TFA étudiée en premier bachelier

### Introduction

Dans ce troisième chapitre de l'annexe se trouve une preuve alternative du Théorème Fondamental de l'Algèbre, utilisant une approche différente de celle employée par Carl Friedrich Gauss dans sa première démonstration de 1799 [22], ayant recours quelque peu à l'analyse et la topologie de  $\mathbb{C}$ . Cette preuve, tirée du syllabus d'algèbre linéaire de Michel Rigo [33], n'a pas été étudiée dans son intégralité lors de la première année de bachelier. On peut remarquer que la démonstration qui est enseignée aujourd'hui est bien différente de la première démonstration du TFA.

Cette démonstration plus moderne, souvent enseignée aujourd'hui dans les cours d'algèbre, se distingue nettement par son élégance et sa rigueur, illustrant le développement des mathématiques depuis la fin du XVIIIe siècle. En comparant cette preuve contemporaine avec celle de Gauss, nous pouvons remarquer non seulement les progrès techniques, mais aussi l'évolution de la pensée mathématique. La démarche de Gauss en 1799, bien que révolutionnaire à son époque, apparaît aujourd'hui comme une première étape d'un long processus, menant à des outils analytiques et topologiques sophistiqués qui rendent la compréhension du théorème plus accessible et plus complète.

Ainsi, l'étude de cette preuve alternative non seulement enrichit notre compréhension du Théorème Fondamental de l'Algèbre, mais met également en lumière le chemin parcouru par les mathématiques au fil des siècles. La comparaison de cette approche avec celle de Gauss souligne l'importance des méthodes analytiques et topologiques dans la résolution des problèmes algébriques modernes et démontre la richesse et la profondeur des mathématiques contemporaines.

### 7.1 Rudiments concernant la théorie des polynômes

Cette section développe un résultat de base concernant les polynômes, utilisés par Gauss dans sa thèse et présenté dans le syllabus d'algèbre de M. Rigo [33]. En effet, Gauss a énoncé plusieurs théorèmes concernant les racines de polynômes dont les démonstrations étaient acceptées à son époque. Un théorème en particulier, que nous appellerons Théorème du Facteur, est important pour comprendre son argumentation. Voici une démonstration de ce résultat :

**Théorème 10.** (*Théorème du Facteur*) *Étant donné un polynôme  $X$  de degré  $m$ , si  $X$  s'annule en  $x = a$ , alors  $X$  peut être factorisé en un produit de  $x - a$  et d'un polynôme de degré  $m - 1$ .*

Ce théorème est une conséquence directe de la proposition suivante (voir [33]) :

**Proposition 10.** *Un nombre complexe  $z_0$  est un zéro  $\alpha$ -uple d'un polynôme  $P$  si et seulement s'il existe un polynôme  $Q$  tel que*

$$P(z) = (z - z_0)^\alpha Q(z) \text{ et } Q(z_0) \neq 0$$

*De plus, les zéros de  $P$  distincts de  $z_0$  sont les zéros de  $Q$  et la multiplicité d'un tel zéro de  $P$  est égale à la multiplicité de ce zéro en tant que zéro de  $Q$ .*

*Démonstration.* Soit  $P$  un polynôme de degré  $k$ .

Montrons que la condition est nécessaire et supposons que  $z_0$  est un zéro  $\alpha$ -uple de  $P$ . Par la formule de Taylor, il vient

$$P(z) = \sum_{i=\alpha}^k \frac{(D_z^i P)(z_0)}{i!} (z - z_0)^i = (z - z_0)^\alpha \left( \sum_{i=\alpha}^k \frac{(D_z^i P)(z_0)}{i!} (z - z_0)^{i-\alpha} \right)$$

où on pose que  $Q(z) = \sum_{i=\alpha}^k \frac{(D_z^i P)(z_0)}{i!} (z - z_0)^{i-\alpha}$

On conclut en remarquant que  $Q(z_0)$  diffère de zéro, car  $(D_z^\alpha P)(z_0) \neq 0$ .

Montrons maintenant que la condition est suffisante et supposons que

$$P(z) = (z - z_0)^\alpha Q(z) \text{ avec } Q(z_0) \neq 0.$$

Par la formule de Leibniz<sup>1</sup>, il s'ensuit que pour  $m \leq \alpha$ ,

$$D_z^m((z - z_0)^\alpha Q(z)) = \sum_{i=0}^m C_m^i D_z^i (z - z_0)^\alpha D_z^{m-i} Q(z).$$

Si on évalue cette dérivée en  $z_0$ , on trouve

$$D_z^m((z - z_0)^\alpha Q(z))(z_0) = \begin{cases} \alpha! & \text{si } m = \alpha \\ 0 & \text{si } 0 \leq m < \alpha. \end{cases}$$

car si  $0 \leq i < \alpha$ , alors  $(D_z^i (z - z_0)^\alpha)(z_0) = 0$ . Cela signifie ainsi que  $z_0$  est un zéro  $\alpha$ -uple de  $P$ . Passons à la seconde partie de la preuve. Tout d'abord, il est clair que les zéros de  $P$  distincts de  $z_0$  et les zéros de  $Q$  coïncident. Soit  $z_1$  un zéro de  $Q$  de multiplicité  $\beta$ . En appliquant encore une fois la formule de Leibniz, on a

$$D_z^m P(z) = \sum_{i=0}^m C_m^i D_z^{m-i} (z - z_0)^\alpha D_z^i Q(z).$$

Si  $m < \beta$ , alors  $(D_z^i Q)(z_1) = 0$  pour tout  $i \leq m$  et on en conclut que  $(D_z^m P)(z_1) = 0$ . Si  $m = \beta$ , alors

$$(D_z^\beta P)(z_1) = (z_1 - z_0)^\alpha (D_z^\beta Q)(z_1) \neq 0.$$

Cela signifie que  $z_1$  est un zéro  $\beta$ -uple de  $P$ . □

1. La formule de Leibniz est une formule permettant de calculer la dérivée d'ordre  $n$  d'un produit de deux fonctions. Soient  $f, g : I \rightarrow \mathbb{C}$  deux fonctions  $n$  fois dérivable sur  $I$ . Alors  $f \cdot g$  est  $n$  fois dérivable sur  $I$  et  $(f \cdot g)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}$ .

## 7.2 Lemmes et démonstration du TFA présentés par M.Rigo

La démonstration du TFA repose sur les deux lemmes suivants :

**Lemme 7** (Lemme de Gauss). *Soient  $\Omega$  un ouvert<sup>2</sup> de  $\mathbb{C}$  et  $P$  un polynôme à coefficients complexes de degré  $m \geq 1$ . Si  $z_0 \in \Omega$  est tel que*

$$|P(z_0)| = \inf_{z \in \Omega} |P(z)|,$$

alors  $z_0$  est un zéro de  $P$ .

*Démonstration.* Procédons par l'absurde et supposons que  $P(z_0) \neq 0$ . Puisque  $P$  est un polynôme de degré au moins un, il existe un entier  $k \geq 1$  tel que  $(D_z^k P)(z_0) \neq 0$ . On peut même supposer que  $k$  est le plus petit entier ayant cette propriété. Ainsi, pour tout  $l$  tel que  $l \in \{1, \dots, k-1\}$ , on a

$$(D_z^l P)(z_0) = 0.$$

En appliquant la formule de Taylor, on obtient

$$\begin{aligned} P(z) &= \sum_{i=0}^m \frac{(D_z^i P)(z_0)}{i!} (z - z_0)^i \\ &= P(z_0) + \frac{(D_z^k P)(z_0)}{k!} (z - z_0)^k + \sum_{i=k+1}^m \frac{(D_z^i P)(z_0)}{i!} (z - z_0)^i. \end{aligned}$$

Puisque  $P(z_0) \neq 0$ , en procédant à une mise en évidence, cela peut se réécrire de la manière suivante :

$$P(z) = P(z_0) \left( 1 + \frac{(D_z^k P)(z_0)}{k! P(z_0)} (z - z_0)^k + (z - z_0)^{k+1} Q(z) \right)$$

où  $Q$  est un polynôme. On pose  $\alpha$  un nombre complexe tel que

$$\alpha^k = -\frac{k! P(z_0)}{(D_z^k P)(z_0)}$$

Au vu de la formule précédente, pour tout  $t \in ]0, 1[$ , et en remplaçant  $z$  par  $z_0 + t\alpha$ , on obtient

$$P(z_0 + t\alpha) = P(z_0) \left( 1 + \frac{(D_z^k P)(z_0)}{k! P(z_0)} \alpha^k t^k + t^{k+1} \alpha^{k+1} Q(z_0 + t\alpha) \right).$$

Or vu la définition de  $\alpha$ , on a  $\frac{(D_z^k P)(z_0)}{k! P(z_0)} = \frac{-1}{\alpha^k}$  et donc  $\frac{(D_z^k P)(z_0)}{k! P(z_0)} \alpha^k = -1$ . Puisque  $t \in ]0, 1[$ , on a  $1 - t^k > 0$  et  $|1 - t^k| = 1 - t^k$ , ce qui implique que

$$|P(z_0 + t\alpha)| \leq (1 - t^k) |P(z_0)| + t^{k+1} |P(z_0) \alpha^{k+1} Q(z_0 + t\alpha)|.$$

Or, on a

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t \alpha^{k+1} Q(z_0 + t\alpha) = 0.$$

En effet,  $P(z_0)$  et  $\alpha^{k+1}$  ne dépendent pas de  $t$  et  $Q$  est une fonction polynomiale donc continue. Ainsi,  $\lim_{t \rightarrow 0^+} Q(z_0 + t\alpha) = Q(z_0)$ . En d'autres termes, cela signifie qu'il existe  $\epsilon$  tel que, si  $0 < t < \epsilon$ ,

$$z_0 + t\alpha \in \Omega \text{ et } t |\alpha^{k+1} Q(z_0 + t\alpha)| < 1$$

$\Omega$  étant un ensemble ouvert et  $z_0$  appartenant à  $\Omega$ .

Par conséquent, si  $0 < t < \epsilon$ , on a

$$|P(z_0 + t\alpha)| < (1 - t^k) |P(z_0)| + t^k |P(z_0)| = |P(z_0)|.$$

On vient de trouver un point  $z_0 + t\alpha$  de  $\Omega$  tel que le module de  $P$  évalué en ce point soit strictement inférieur à  $|P(z_0)| = \inf_{z \in \Omega} |P(z)|$ , ce qui est impossible.  $\square$

2. Un ensemble  $\omega$  est un ouvert si tout point de  $\omega$  est le centre d'une boule incluse dans  $\Omega$ .

**Lemme 8** (Lemme de d'Alembert). *Tout polynôme  $P$  de  $\mathbb{C}[z]$  de degré au moins un possède un zéro dans  $\mathbb{C}$ .*

*Démonstration.* Il faut montrer que tout polynôme  $P$  de degré au moins un possède au moins un zéro. D'une part on sait que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} P(z) = \infty.$$

Ainsi, il existe  $R > 0$  tel que

$$|z| \geq R \Rightarrow |P(z)| \geq |P(0)| + 1.$$

D'autre part, vu le théorème des bornes atteintes<sup>3</sup>, la borne inférieure de la fonction

$$z \mapsto |P(z)|$$

réelle et continue sur le compact  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$  est réalisée en un point  $z_0$ , i.e.,

$$|P(z_0)| = \inf_{z \in K} |P(z)|.$$

En particulier, 0 appartient à  $K$  et donc

$$|P(z_0)| \leq |P(0)|.$$

Par contraposition de  $|z| \geq R \Rightarrow |P(z)| \geq |P(0)| + 1$ , cela entraîne donc que  $|z_0| < R$  et donc  $z_0$  est un point de l'ouvert  $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$  tel que

$$|P(z_0)| = \inf_{z \in \Omega} |P(z)|.$$

Par le lemme 7 de Gauss, on peut conclure que  $z_0$  est un zéro de  $P$ . □

**Théorème 11** (Théorème Fondamental de l'Algèbre). *Tout polynôme  $P$  de degré  $k \geq 1$  possède exactement  $k$  zéros si on les compte avec leur multiplicité. Ainsi, si  $z_1, \dots, z_m$  sont les  $m$  ( $m \leq k$ ) zéros de  $P$  de multiplicité respective  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ , alors*

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_m = k,$$

et si  $c_k$  est le coefficient dominant de  $P$ , alors

$$P(z) = c_k \prod_{i=1}^m (z - z_i)^{\alpha_i}.$$

*Démonstration.* Procédons par récurrence sur  $k$ .

**Cas de base :** Si  $k = 1$ , le polynôme  $P$  est de la forme  $c_1 z + c_0$ ,  $c_1 \neq 0$ . Ainsi,  $-\frac{c_0}{c_1}$  est le seul zéro simple du polynôme  $P$ .

**Induction :** Supposons le résultat satisfait pour les polynômes de degré strictement inférieur à  $k$  et vérifions-le pour un polynôme  $P$  de degré  $k > 1$ . Par le lemme 8, le polynôme  $P$  possède au moins un zéro  $z_1$  de multiplicité  $\alpha_1 \geq 1$ .

---

3. Théorème des bornes atteintes : si la fonction  $f$  est réelle et continue sur le compact non vide  $K$  de  $\mathbb{R}^n$ , alors il existe  $x_0$  et  $y_0$  dans  $K$  tels que

$$f(x_0) = \inf_{x \in K} f(x) \text{ et } f(y_0) = \sup_{x \in K} f(x).$$

Pour une fonction continue définie sur un intervalle fermé, nous pouvons être certains qu'un point de minimum et qu'un point de maximum existe, mais il ne nous dit pas comment les trouver. Remarquons qu'on dit qu'une partie  $A$  d'un espace métrique est compact si toute suite de  $A$  possède une suite extraite convergente dans  $A$ . [32]

Ainsi<sup>4</sup>, on a

$$P(z) = (z - z_1)^{\alpha_1} Q(z)$$

avec  $Q(z)$  un polynôme tel que  $Q(z_1) \neq 0$ . On peut en déduire<sup>5</sup> que

$$\deg Q = \deg P - \alpha_1 < \deg P.$$

On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence au polynôme  $Q$ . Ce dernier polynôme possède des zéros  $z_2, \dots, z_m$  de multiplicité respective  $\alpha_2, \dots, \alpha_m$  tels que

$$\alpha_2 + \dots + \alpha_m = \deg Q = \deg P - \alpha_1$$

et

$$Q(z) = d \prod_{i=2}^m (z - z_i)^{\alpha_i}$$

où  $d$  est le coefficient dominant de  $Q$ . Or, on sait que les zéros de  $P$  distincts de  $z_1$  coïncident avec ceux de  $Q$  et possèdent la même multiplicité. Ainsi, les zéros de  $P$  sont  $z_1, z_2, \dots, z_m$  de multiplicité  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  et on a

$$\alpha_1 + (\alpha_2 + \dots + \alpha_m) = \alpha_1 + (\deg P - \alpha_1) = \deg P.$$

Il est clair que le coefficient dominant de  $Q$  est égal à celui de  $P$ , donc

$$P = d \prod_{i=1}^m (z - z_i)^{\alpha_i}.$$

□

En résumé, la preuve issue du syllabus M. Rigo est une preuve par récurrence, dont l'initialisation est triviale. Pour enclencher la récurrence, on utilise le lemme de d'Alembert 8 ainsi qu'une proposition concernant le degré d'un produit. La seconde moitié de la preuve repose sur une proposition relative à la multiplicité des racines d'un polynôme, ce qui permet de manipuler précisément les multiplicités des racines en jeu. Le lemme de d'Alembert 8 s'appuie quant à lui sur le lemme de Gauss 7, démontré par l'absurde en utilisant la formule de Taylor pour les polynômes et certaines propriétés analytiques de ces derniers. On constate directement que cette preuve est rigoureuse et bien structurée, reposant sur des outils mathématiques classiques et solides tout en illustrant l'interconnexion de différentes branches des mathématiques telles que l'algèbre et l'analyse.

---

4. On sait qu'un nombre complexe  $z_0$  est un zéro  $\alpha$ -uple d'un polynôme  $P$  si et seulement s'il existe un polynôme  $Q$  tel que

$$P(z) = (z - z_0)^\alpha Q(z) \text{ et } Q(z_0) \neq 0.$$

De plus, les zéros de  $P$  distincts de  $z_0$  sont les zéros de  $Q$  et la multiplicité d'un tel zéro de  $P$  est égale à la multiplicité de ce zéro en tant que zéro de  $Q$ .

5. Si on considère deux polynômes  $P = c_0 + \dots + c_k z^k$  et  $Q = d_0 + \dots + d_l z^l$ , alors, pour tous  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , on a

$$\deg(\alpha P + \beta Q) \leq \sup(\deg P, \deg Q).$$

Si  $P$  et  $Q$  sont non nuls, alors le produit de  $P$  et de  $Q$  est un polynôme et

$$\deg(PQ) = \deg P + \deg Q.$$



### 7.3 Contributions de d'Alembert

Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (1717-1783) est un mathématicien et physicien français dont les contributions ont été fondamentales pour le développement de la théorie des polynômes et de l'analyse complexe, deux domaines cruciaux pour comprendre le Théorème Fondamental de l'Algèbre. Son travail, bien que précédant la démonstration formelle du TFA par Carl Friedrich Gauss, a été essentiel pour préparer le terrain pour cette avancée théorique.

Le lemme de d'Alembert, un résultat important de ses recherches et présenté dans son mémoire "*Recherches sur le calcul intégral*" à l'Académie de Berlin le 6 décembre 1746 [9], affirme que tout polynôme à coefficients complexes de degré au moins 1 possède au moins une racine complexe. Ce lemme est un outil crucial pour démontrer l'existence des racines complexes des polynômes, ce qui est au cœur du TFA.

D'Alembert a également développé des méthodes analytiques influentes, comme le critère de d'Alembert pour la convergence des séries infinies. Ces méthodes ont joué un rôle clé dans l'étude des polynômes et ont contribué à l'avancement des connaissances en analyse complexe. Bien qu'il n'ait pas directement démontré le TFA, ses travaux ont fortement influencé les développements ultérieurs dans ce domaine.

Ainsi, les idées de d'Alembert ont eu un impact durable sur la théorie des polynômes. Le Théorème Fondamental de l'Algèbre, démontré par Gauss, a bénéficié des bases mathématiques établies par d'Alembert et ses contemporains, soulignant l'importance de ses contributions dans ce domaine fondamental des mathématiques. Celles-ci sont développées plus en détails dans le quatrième chapitre de cette annexe concernant les perspectives historiques du TFA 8.5.

### 7.4 Comparaison des différentes démonstrations

La preuve présentée par M. Rigo dans le cours d'algèbre, étudiée en première année de bachelier, présente une approche beaucoup plus simple et rigoureuse du Théorème Fondamental de l'Algèbre comparée à la première preuve de Gauss de 1799. En effet, cette dernière souffre de plusieurs difficultés liées à la langue et au vocabulaire qui rend difficile sa lecture. Le manque de définitions précises et la rigueur mathématique moins développée à cette époque rend la compréhension et l'interprétation de la preuve plus complexes et sujettes à des ambiguïtés. De plus, Gauss ne disposait pas des nombreux théorèmes et outils mathématiques que nous avons aujourd'hui, ce qui compliquait davantage ses démonstrations.

Cependant, la preuve présentée par M. Rigo est basée sur la quatrième preuve de Gauss, bien plus aboutie et enrichie par des concepts développés après la première preuve de 1799. Cette version est considérablement simplifiée grâce à la disponibilité de nouveaux théorèmes et outils mathématiques, tels que les formules de Newton, Taylor et Leibniz, qui n'étaient pas accessibles à Gauss. Cette preuve bénéficie également d'une rigueur accrue selon les standards modernes, avec chaque étape clairement définie et justifiée, réduisant ainsi les ambiguïtés et augmentant la précision de la démonstration.

La comparaison entre la première preuve de Gauss et celle présentée dans ce chapitre met en évidence l'évolution significative des mathématiques au fil des siècles. Le chemin parcouru est immense, rendu possible grâce aux contributions de nombreux mathématiciens qui ont enrichi et perfectionné les outils mathématiques disponibles. Alors que la première preuve de Gauss était innovante et fondamentale, elle était entravée par les limitations de l'époque. En revanche, la preuve présentée par M. Rigo est plus accessible et compréhensible pour les étudiants d'aujourd'hui, démontrant ainsi le progrès remarquable réalisé dans le domaine des mathématiques.

En effet, l'étude de la première démonstration de Gauss met en avant la complexité de comprendre des textes mathématiques historiques qui souvent manquent de la structure pédagogique que l'on trouve dans les cours universitaires d'aujourd'hui. Cette analyse permet de percevoir l'écart significatif entre les premiers développements mathématiques, souvent bruts et dépourvus

de formalisme moderne, et les enseignements structurés que nous recevons aujourd'hui. Dans les textes historiques comme ceux de Gauss, il est fréquent de trouver des raisonnements qui ne sont pas explicitement détaillés ou qui reposent sur des connaissances tacites de l'époque. Cela contraste fortement avec les cours universitaires actuels, où chaque étape de la démonstration est soigneusement décomposée et expliquée, souvent avec des notations standardisées et une terminologie précise.



## Chapitre 8

# Introduction historique au TFA

Cette annexe permet de restituer le cadre historique dans lequel le TFA s'est développé et de retracer les grandes étapes de son histoire avant les travaux de Gauss en 1799. Les informations présentées dans ce chapitre proviennent essentiellement de l'article "*Sur l'histoire du Théorème Fondamental de l'Algèbre : théorie des équations et calcul intégral*" de Christian Gilain [25].

### 8.1 Ligne du temps

La ligne du temps suivante permet d'avoir une vue d'ensemble sur l'histoire du Théorème Fondamental de l'Algèbre et permet de retracer les grandes étapes de son évolution :

**1608** : En 1608, Peter Roth, un mathématicien allemand du seizième et dix-septième siècle, a avancé l'idée selon laquelle le nombre de solutions d'une équation polynomiale est limité par son degré. Cependant, lorsqu'il parle de "racine", il ne se réfère pas forcément aux racines de type  $a + ib$  [14]. C'est la première fois que cette idée est formulée dans des textes mathématiques, et cela survient après les travaux de François Viète [18], ayant remarqué qu'il était toujours possible de construire une équation ayant exactement  $n$  racines données.

**1629** : Dans son traité *Inventiones nouvelles en l'algèbre* datant de 1629, Albert Girard propose ensuite le premier énoncé correct mais non démontré : "Toutes les équations d'algèbre reçoivent autant de solutions que la dénomination de la plus haute quantité le démontre" [10].

**Entre 1630 et 1799** : Entre 1630 et 1799, on assiste à l'émergence des nombres complexes. Il a fallu plus d'un siècle pour que les notions de nombres imaginaires évoluent, considérés comme fictifs ou impossibles par Girard et Descartes, à la formalisation des nombres complexes sous la forme  $a + ib$ , où  $a$  et  $b$  sont des nombres réels. Progressivement, les mathématiciens commencent à comprendre et à maîtriser les nombres complexes. Pendant cette période, deux essais de démonstration sont présentés, l'un par Leonhard Euler et l'autre par Joseph-Louis Lagrange. Ces deux approches se succèdent, Lagrange cherchant à corriger les lacunes laissées par Euler. La démonstration d'Euler est solide pour le cas du degré 4, mais elle reste seulement esquissée pour le cas général. En revanche, celle de Lagrange repose sur des fonctions rationnelles qui restent invariantes sous ce qui est maintenant appelé un groupe de permutations des racines. D'autres tentatives similaires sont également entreprises par Foncenex et Laplace ainsi que d'Alembert [9].

**1799** : La première démonstration de Gauss, exposée en 1799 [22] et basée sur la structure de celle de d'Alembert [3], demeure toujours incomplète. Gauss critique la méthodologie peu rigoureuse de ses prédécesseurs, à l'exception de d'Alembert, qui utilise un raisonnement analytique d'une nature différente.

**1814** : En 1814, un mathématicien suisse du nom de Jean-Robert Argand propose une démonstration à la fois robuste et accessible, basée sur le modèle de raisonnement de d'Alembert [29].

**1815** : Gauss présente sa deuxième démonstration [21], s’inspirant des approches d’Euler et de Lagrange. Cette fois, il substitue les racines par des variables indéterminées, conduisant ainsi à une démonstration plus rigoureuse mais postérieure à celle d’Argand. Gauss énonce seulement deux hypothèses : premièrement, que toute équation algébrique de degré impair possède au moins une racine réelle ; deuxièmement, que toute équation quadratique à coefficients complexes possède deux racines complexes.

**1816** : Gauss propose sa troisième démonstration [20], qui concerne la localisation des zéros des fonctions polynomiales. Cette idée sera généralisée en 1862 aux fonctions holomorphes, connue maintenant sous le nom de théorème de Rouché.

**1849** : En 1849, Gauss présente sa quatrième démonstration, une variation de sa première approche, cette fois-ci en considérant des polynômes avec des coefficients complexes et s’autorisant l’utilisation des nombres complexes[13].

**1920** : La première démonstration de Gauss, bien que géométriquement élégante, reste incomplète. Elle interprète les zéros comme les points d’intersection des courbes réelles  $\Re P = 0$  et  $\Im P = 0$ . Les lacunes de cette première preuve ne seront comblées qu’en 1920, grâce à Ostrowski [23].

## 8.2 Distinction entre deux théorèmes : TFA et TFL

L’évolution de la compréhension du Théorème Fondamental de l’Algèbre peut être divisée en trois périodes marquantes :

- Début du *XVII*e siècle : Les premières formulations du théorème apparaissent, notamment avec Girard, mais sans démonstration.
- Entre le milieu du *XVIII*e siècle et la fin du *XIX*e : Argand exprime le besoin de démontrer le Théorème Fondamental de l’Algèbre et s’ensuit les premières tentatives de démonstration avec celles par exemple de D’Alembert et Euler mais qui restent insatisfaisantes.
- Fin du *XIX*e siècle : Gauss propose la première démonstration rigoureuse du théorème.

Néanmoins, cette présentation classique de l’histoire du Théorème Fondamental de l’Algèbre est incomplète car elle mélange des éléments appartenant en réalité à deux théorèmes distincts. Il est essentiel de différencier les deux théorèmes suivants :

- 1) Le Théorème Fondamental de l’Algèbre (TFA), également appelé théorème de D’Alembert ou de D’Alembert-Gauss.
- 2) Le théorème de factorisation linéaire (TFL), parfois connu sous le nom de théorème de Kronecker.

Le TFA énonce qu’un polynôme de degré  $n$  à coefficients complexes possède au moins une racine complexe, bien que cette idée puisse se formuler de plusieurs manières équivalentes. En revanche, le TFL affirme que tout polynôme de degré  $n$  peut être décomposé en un produit de  $n$  facteurs linéaires. Ces deux théorèmes sont indépendants l’un de l’autre et peuvent être démontrés séparément, bien que le TFL soit souvent utilisé dans les démonstrations du TFA.

Distinguer ces deux théorèmes est crucial pour comprendre l’évolution du TFA et de la théorie des équations algébriques. En 1629, Albert Girard, dans son ouvrage *Invention nouvelle en algèbre* [26], énonce un théorème qui préfigure le TFL, posant ainsi les bases de la théorie des équations algébriques générales. De même, en 1637, René Descartes, dans *La Géométrie* [11], avance que toute équation de degré  $n$  peut se décomposer en  $n$  facteurs linéaires. À cette époque, cette décomposition était considérée comme un principe fondamental sans démonstration formelle.

L’absence de définition précise des nombres imaginaires au *XVII*e siècle montre que les énoncés généraux sur la factorisation linéaire et le nombre de racines appartiennent au TFL, plutôt qu’au TFA. Cette distinction devient plus claire au *XVIII*e siècle, avec l’émergence du

problème spécifique du TFA, qui représente un progrès distinct par rapport aux énoncés de factorisation linéaire du siècle précédent.

### 8.3 Le Mémoire de 1702 de Leibniz

En 1702, un tournant décisif se produit dans le domaine émergent du calcul infinitésimal avec la publication par Gottfried Wilhelm Leibniz d'un mémoire sur l'intégration des différentielles rationnelles [30]. Bien qu'il reconnaisse les limitations des connaissances algébriques de son temps pour calculer précisément les racines, Leibniz s'appuie sur l'existence présumée de la factorisation linéaire, écrivant le dénominateur d'une fraction sous la forme  $l \cdot m \cdot n$  avec  $l = x + b$ ,  $m = x + c$ ,  $n = x + d$ , etc. Ainsi, il utilise implicitement le théorème de factorisation linéaire (TFL) tout au long de son travail.

Le mémoire de Leibniz présente un aspect paradoxal. D'une part, il énonce clairement le Théorème Fondamental de l'Algèbre (TFA), mais d'autre part, il refuse de l'accepter comme vrai. Cette dualité donne à son travail une importance cruciale dans l'histoire des équations algébriques. Pour la première fois, Leibniz pose de manière explicite le problème du TFA : tout polynôme à coefficients réels peut-il se décomposer en facteurs réels du premier ou du second degré ? Sa réponse négative révèle la distinction entre le TFL, qu'il considère comme incontestable, et le TFA, qu'il rejette. Ce contexte conduit à une reformulation plus précise du problème du TFA à travers le calcul intégral.

L'importance du mémoire de Leibniz ne réside pas tant dans sa remise en question du TFA que dans la clarté avec laquelle il formule le problème. Il pose la question fondamentale de la décomposition des polynômes en facteurs linéaires ou quadratiques réels, et bien que sa réponse soit négative, elle souligne la rupture entre cet énoncé et le principe de factorisation linéaire du *XVI*e siècle, qui continue d'exister parallèlement et inchangé.

Ainsi, le mémoire de 1702 de Leibniz marque le début de la préhistoire du TFA, ouvrant la voie à des recherches approfondies sur la décomposition réelle des polynômes. Ces investigations se concrétiseront au milieu du *XVIII*e siècle avec les travaux d'Euler et de D'Alembert, aboutissant à un consensus parmi les mathématiciens sur la validité du TFA.

### 8.4 Euler et l'Évolution du Théorème Fondamental de l'Algèbre

Dans les années 1740, le calcul intégral voit émerger un problème central : l'intégration des équations différentielles linéaires d'ordre  $n$  à coefficients constants, sans second membre, soulevant ainsi la question du Théorème Fondamental de l'Algèbre (TFA). Leonhard Euler aborde ce défi dans son mémoire *De integratione aequationum differentialium altiorum graduum*, publié en 1743 [15]. Cependant, la validité de ses résultats en calcul intégral dépend étroitement de l'exactitude du TFA. Euler exploite la capacité d'apparier les racines imaginaires de manière à produire des résultats réels, une technique cruciale dans ses démonstrations.

Dans une lettre datée du 15 septembre 1739 à Jean Bernoulli, Euler pose pour la première fois une affirmation générale du TFA, exprimant sa conviction que tout polynôme peut être décomposé en facteurs réels du premier ou du second degré. Cette affirmation est renforcée dans une lettre à Nicolas Bernoulli datée du 1er septembre 1742, où Euler reformule sa position en soulignant que même les racines imaginaires, si elles apparaissent dans le dénominateur, peuvent être appariées de manière à produire un résultat réel. Malgré ces affirmations, Euler reconnaît dans une correspondance ultérieure, notamment dans une réponse à Nicolas Bernoulli datée du 24 octobre 1742, qu'il n'a pas encore trouvé une démonstration générale du TFA. Nicolas Bernoulli conteste cette universalité en présentant le polynôme  $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 4$  comme un contre-exemple, démontrant que ses racines imaginaires ne peuvent pas être appariées en facteurs quadratiques réels. Euler persiste dans sa conviction du TFA, comme en témoigne sa réponse à Nicolas Bernoulli le 10 novembre 1742, où il affirme avoir une démonstration rigoureuse pour

les polynômes jusqu'au quatrième degré. Avec l'aide de Nicolas Bernoulli, Euler développe les fondements de sa démonstration du TFA, qu'il publiera en 1751 dans son mémoire *Recherches sur les racines imaginaires des équations* [16], bien que ce texte présente des lacunes mathématiques corrigées par Lagrange et critiquées par Gauss pour leur présupposition sur la nature des racines. En effet, une lacune de principe sera mise en évidence par Gauss : la démonstration d'Euler de la décomposition de tout polynôme en facteurs réels linéaires ou quadratiques suppose a priori l'existence de  $n$  racines et utilise des opérations algébriques sur ces racines, alors que leur nature est inconnue, ce qui constitue une véritable lacune logique de la démonstration selon Gauss.

Cela met en avant la dualité historique entre le TFA et le TFL. En effet, pendant que le TFA est sujet à des recherches intenses et à des controverses, le théorème de factorisation linéaire reste incontesté et non démontré à cette époque. Les contributions de Lagrange et de Laplace continuent de souligner cette dualité dans la théorie des équations, une dualité qui sera remise en question par Gauss à la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle.

Cette période marque ainsi une phase cruciale dans l'évolution des mathématiques, où le TFA devient un point central de débats et de recherches, anticipant des avancées significatives à venir.

## 8.5 L'apport de D'Alembert

D'Alembert aborde la démonstration du Théorème Fondamental de l'Algèbre dans son mémoire *Recherches sur le calcul intégral* présenté à l'Académie de Berlin le 6 décembre 1746 [9]. Son étude s'inscrit dans la résolution de l'intégration des fractions rationnelles et la généralisation de ces intégrales à la quadrature du cercle ou de l'hyperbole.

D'Alembert adopte une approche novatrice en démontrant la stabilité des quantités de la forme  $a + b\sqrt{-1}$  (où  $a$  et  $b$  sont réels) sous les opérations algébriques et analytiques. Il conclut que toute fonction de quantités du type  $x + y\sqrt{-1}$  peut toujours être exprimée sous la forme  $p + q\sqrt{-1}$ . À partir de cette base, il établit que toute racine imaginaire d'une équation peut être associée à une autre de la forme  $p - q\sqrt{-1}$ , affirmant ainsi que les équations dont les racines sont imaginaires peuvent se diviser en trinômes à coefficients réels.

Cependant, la démonstration de D'Alembert est critiquée pour avoir supposé que les racines des équations algébriques peuvent être trouvées explicitement à l'aide de fonctions élémentaires. On sait aujourd'hui, notamment pour les polynômes de degré 5 ou plus, qu'il n'existe pas de méthode générale utilisant uniquement les fonctions élémentaires pour trouver les racines. Malgré cette erreur, sa démonstration souligne l'importance des quantités imaginaires dans la théorie des équations algébriques.

Dans sa seconde démonstration du TFA, D'Alembert développe  $x$  en série de puissances fractionnaires par rapport à  $y$  autour de zéro, en utilisant une approche par l'absurde et en appliquant une propriété locale précédemment établie. Cette méthode montre qu'il existe au moins une racine parmi les quantités  $p + q\sqrt{-1}$ , pour tout  $y$  réel. Bien que cette démonstration comporte des lacunes mathématiques, elle pose le TFA comme un théorème d'existence des racines, contrairement à d'autres interprétations de son époque.

En fin de compte, D'Alembert donne au TFA un statut de théorème fondamental d'existence des racines à travers une approche analytique distincte. Sa méthode a ouvert la voie à des discussions critiques sur la nature des équations algébriques et des quantités imaginaires, jetant les bases pour des développements ultérieurs dans la théorie des équations. Malgré les critiques, son travail a contribué à élargir la perspective mathématique de son temps et à explorer de nouvelles voies dans la résolution des équations algébriques.

## 8.6 Travaux de Gauss de 1799

D'Alembert et Gauss, malgré des approches distinctes, partagent une organisation de la théorie des équations algébriques centrée exclusivement sur le Théorème Fondamental de l'Algèbre (TFA), en excluant l'énoncé autonome du Théorème Fondamental de l'Arithmétique (TFL). Ce choix fait du TFA le pilier fondamental et rigoureux de toute la théorie, souvent qualifié de "proposition fondamentale de l'algèbre" ou de "théorème fondamental de la théorie des équations", termes adoptés largement au *XIX*<sup>e</sup> siècle.

Précédemment, dans son mémoire de 1746 [9], D'Alembert utilise le TFA pour démontrer l'existence et les propriétés des racines des équations algébriques. Son approche, bien que critiquée pour ses limitations, pose les bases pour une réflexion approfondie sur la nature des problèmes liés aux équations algébriques. Mais en 1799, Gauss révolutionne la compréhension du TFA avec une démonstration plus rigoureuse et une critique pointue des approches antérieures. Il remet en question l'hypothèse d'une factorisation systématique des polynômes en racines linéaires, soulignant des erreurs logiques dans les démonstrations d'Euler et d'autres mathématiciens antérieurs. Cette approche marque un progrès significatif vers une compréhension plus profonde des fondements de la théorie des équations. Cette critique met en lumière l'importance de la rigueur logique dans le développement théorique. En effet, on constate à la fois sa pertinence et la nécessité de nuancer ses critiques. Elle est pertinente lorsqu'il remet en question la démonstration d'Euler selon laquelle il semble plus raisonnable de supposer que les racines d'une équation de degré supérieur à 4 ne peuvent généralement pas être exprimées à l'aide de radicaux. De même, Gauss pointe du doigt une erreur logique commune dans la première démonstration d'Euler ainsi que dans celles de Foncenex et de Lagrange, consistant à admettre a priori que l'équation de degré  $n$  se décompose en  $n$  facteurs linéaires, possédant ainsi  $n$  racines. Cependant, il va jusqu'à considérer leur raisonnement comme basé sur une véritable erreur de principe, comme si Euler ou Lagrange supposaient ce qu'ils sont censés démontrer. Ces remarques de Gauss soulignent cependant une préoccupation pour la rigueur logique.

Ainsi, bien que le TFA ait dominé la théorie des équations algébriques jusqu'au *XIX*<sup>e</sup> siècle, l'évolution moderne a progressivement intégré le TFL comme le théorème général d'existence des racines d'un polynôme. Cela reflète une dualité historique entre les deux énoncés, présente dès le *XVIII*<sup>e</sup> siècle avec Euler, Lagrange et Laplace, et dont les implications continuent de marquer la théorie moderne des équations.

En résumé, l'histoire du TFA peut être divisée en une "préhistoire" jusqu'à la fin du *XVIII*<sup>e</sup> siècle, suivie par une "histoire" proprement dite débutant avec le mémoire de Gauss de 1799. Cette évolution met en évidence une dualité essentielle entre les approches du TFL et du TFA dans l'histoire de la théorie des équations algébriques, influençant significativement notre compréhension contemporaine des problèmes d'existence des racines.

Dans le chapitre 2, nous avons exploré les origines de cette réflexion en examinant l'une des premières démonstrations du théorème, celle que Gauss a développée à l'âge de 20 ans et présentée comme sa thèse doctorale à l'université de Helmstedt en 1799. Le choix de l'analyse de cette démonstration se justifie dans le but de comprendre le contexte de la problématique et d'approfondir notre compréhension des démonstrations initiales qui ont façonné l'histoire des théorèmes enseignés aujourd'hui. De plus, cette démonstration est la première à formuler clairement et précisément le problème, explicitant tout ce qui était auparavant accepté de manière plus ou moins implicite.

Cette démonstration se trouve dans la dissertation de Gauss qui est un texte de 25 pages dont les deux tiers sont consacrés à la critique des démonstrations de ses prédécesseurs Euler, d'Alembert et Lagrange. Le titre de sa dissertation est le suivant [22] :

*Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reals primi vel secundi gradus resolvi posse.*<sup>1</sup>

---

1. Nouvelle démonstration du théorème : toute fonction algébrique entière d'une variable est décomposable en



## Gauss et les nombres complexes

Carl Friedrich Gauss, l'un des plus grands mathématiciens de son époque, a joué un rôle essentiel dans le développement de plusieurs domaines mathématiques. Bien qu'il ait eu une connaissance avancée des nombres complexes, il a choisi de ne pas les utiliser explicitement dans son mémoire de 1799, malgré leur présence dans d'autres de ses travaux. Cette volonté pourrait s'expliquer par une préférence pour la méthode géométrique et les outils algébriques plus traditionnels de son époque, et pour éviter une critique de ses contemporains qui n'ont pas encore confiance en cette nouvelle notion de nombres imaginaires.

Alors que Gauss précise explicitement qu'il n'utilisera pas les nombres complexes dans son mémoire de 1799, il semble qu'il ait quand même une parfaite connaissance de ceux-ci dans ses démonstrations. En effet, il est possible que Gauss avant de passer par un raisonnement géométrique soit auparavant passé par les complexes afin d'obtenir une idée générale de la preuve. En particulier, ses travaux sur les courbes algébriques et les surfaces montrent une utilisation implicite des nombres complexes, même s'il ne les formalisait pas dans ses écrits. Sa démarche consistait à visualiser les équations comme des fonctions de deux variables,  $r$  et  $\phi$ , utilisant des coordonnées polaires pour interpréter ces expressions.

### Interprétation Géométrique des Équations

Dans son mémoire, Gauss a adopté une approche visuelle pour interpréter les équations et définir les courbes algébriques. Il envisageait les expressions comme des fonctions de deux variables en coordonnées polaires. Ici,  $r$  représente la distance au centre  $C$  et  $\phi$  est l'angle mesuré par rapport à une direction fixe. La valeur de la fonction en chaque point  $(r, \phi)$  est interprétée comme la hauteur d'une surface au-dessus de ce point. En utilisant cette approche, Gauss pouvait représenter les équations de manière géométrique en considérant les surfaces formées par les différentes valeurs des fonctions.

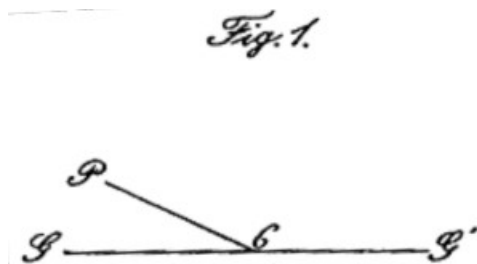


FIGURE 8.1 – Figure 1 de la thèse de Gauss 1977.

Il est intéressant de noter que l'orientation du plan de Gauss est différente de la nôtre. Pour Gauss, en considérant le plan en coordonnées polaires, le point  $(r, \phi)$  est le point dans le plan situé à une distance  $r$  du centre, avec un angle  $\phi$  mesuré dans le sens horaire à partir de l'axe horizontal gauche. Dans la figure de Gauss ci-dessus 8.1, le point  $C$  est l'origine, le point  $G$  se trouve sur l'axe des  $x$  positif ( $G'$  se trouve sur l'axe des  $x$  négatif), et le point  $P$  a pour coordonnées polaires  $(r, \phi)$  où  $\phi$  est un angle aigu. Voici comment Gauss a procédé pour définir les surfaces que nous avons renommées  $\mathcal{R}_P$  et  $\mathcal{I}_P$  dans le chapitre concernant l'analyse de son mémoire 2 :

---

facteurs réels du premier ou du second degré.

**Construction de la Première Surface :**

Gauss a construit ce qu'il nomme la première surface en partant d'un plan fixe infini et d'une droite fixe  $GC$  passant par un point fixe  $C$ . Pour chaque point  $P$  sur ce plan, à une distance  $r$  du centre  $C$  et à un angle  $\phi$  par rapport à  $GCP$ , Gauss érige une perpendiculaire de hauteur donnée par l'expression :

$$T = r^m \sin(m\phi) + Ar^{m-1} \sin((m-1)\phi) + \dots + Lr \sin(\phi).$$

Ici,  $T$  représente la valeur de la fonction en  $(r, \phi)$ . Les perpendiculaires élevées au-dessus du plan pour des valeurs positives de  $T$  et celles abaissées pour des valeurs négatives de  $T$  forment une surface courbe continue et infinie, que Gauss appelle la "*première surface*".

**Construction de la Seconde Surface :**

De manière similaire, Gauss définit une seconde surface en utilisant l'expression :

$$U = r^m \cos(m\phi) + Ar^{m-1} \cos((m-1)\phi) + \dots + Lr \cos(\phi) + M.$$

Cette surface, également continue et infinie dans toutes les directions, est distinguée de la première surface par Gauss comme la "*seconde surface*".

Il est remarquable que Gauss, dans ses travaux, se contente encore de tracer des perpendiculaires sans faire explicitement référence à la notion de graphe. Sa méthode est davantage ancrée dans une approche géométrique traditionnelle, sans recourir aux outils algébriques ou graphiques que nous utiliserions aujourd'hui. Cela témoigne de son profond engagement envers une visualisation concrète des mathématiques et de sa capacité à interpréter les équations en termes géométriques sans l'appui des notations modernes.

Ainsi, bien que Gauss ait évité d'utiliser directement les nombres complexes dans son mémoire, son travail montre une compréhension intuitive des concepts sous-jacents et une capacité à les appliquer de manière indirecte.



# Table des figures

|     |  |     |
|-----|--|-----|
| 1.1 | Procédure géométrique pour déterminer la longueur du côté d'un carré. . . . .                  | 12  |
| 1.2 | Représentation issue du livre <i>Les Éléments</i> d'Euclide. . . . .                           | 13  |
| 1.3 | Complétion du cube (I). . . . .  | 15  |
| 1.4 | Complétion du cube (II). . . . .   | 15  |
| 1.5 | Complétion du cube (III). . . . .  | 15  |
| 1.6 | Complétion du cube (IV). . . . .   | 16  |
| 2.1 | Représentation de $\mathcal{R}_P$ et $\mathcal{I}_P$ en coordonnées polaires. . . . .          | 30  |
| 2.2 | Représentation de $\mathcal{R}_P$ et $\mathcal{I}_P$ en coordonnées cartésiennes. . . . .      | 32  |
| 2.3 | Représentation des courbes $\Gamma_{R_P}$ et $\Gamma_{I_P}$ . . . . .                          | 33  |
| 2.4 | Représentation des courbes $\Gamma_{R_P}$ , $\Gamma_{I_P}$ et le cercle de rayon $R$ . . . . . | 38  |
| 2.5 | La figure 2 de la thèse de Gauss de 1799. . . . .  | 40  |
| 2.6 | La Figure 3 de la thèse de Gauss de 1799. . . . .  | 41  |
| 2.7 | La figure dans l'analyse de J.P. Friedelmeyer ([19]). . . . .                                  | 41  |
| 3.1 | Un rayon d'entrelacement du polynôme $P_0$ . . . . .   | 49  |
| 8.1 | Figure 1 de la thèse de Gauss 1977. . . . .  | 120 |



# Bibliographie

- [1] ARTIN, Emil et Otto SCHREIER. Construction algébrique d'un corps réel.
- [2] ARTIN, Michael. *Algebra. Algebra*. 2nd ed. (Pearson new international edition). Harlow : Pearson, 2014. ISBN 1292027665.
- [3] BALTUS, Christopher. D'alembert's proof of the fundamental theorem of algebra. *Historia mathematica*. 2004, 31 (4), p. 414-428. ISSN 0315-0860.
- [4] BASU, Saugata., Richard. POLLACK et Marie-Françoise. COSTE-ROY. *Algorithms in Real Algebraic Geometry*. 2nd ed. 2006. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2006. (Algorithms and Computation in Mathematics, 10). ISBN 3-540-33099-2.
- [5] BASU, Soham et Daniel J VELLEMAN. On gauss's first proof of the fundamental theorem of algebra. *The American mathematical monthly*. 2017, 124 (8), p. 688-694. ISSN 0002-9890.
- [6] BOLZANO, Bernard. *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*. Prag : Haase, 1817.
- [7] CARDANO, Gerolamo. *Ars Magna*. Germany : Ingolstadt, 1545.
- [8] CHACE, Arnold B. The rhind mathematical papyrus. introduction, transcription, translation and commentary. *Science*. 1924, 59 (1522), p. 215-216. ISSN 0036-8075.
- [9] D'ALEMBERT, Jean Le Rond. *Recherches sur le calcul integral : De l'intégration des fonctions rationnelles*. Histoire Académie des Sciences de Berlin, 1746.
- [10] DAHAN, Amy, Jeanne PEIFFER et Jean-Toussaint DESANTI. *Une histoire des mathématiques : routes et dédales. Une histoire des mathématiques : routes et dédales*. Paris : Éd. du Seuil, 1986. (Collection Points. Série Science ; 49). ISBN 9782020091381.
- [11] DESCARTES, René. *La Géométrie de René Descartes*. Paris : Paris, Chez Charles Angot, 1664.
- [12] DUVILLIÉ, Bernard. *Sur les traces de l'Homo mathematicus : les mathématiques avant Euclide : Mésopotamie - Égypte - Grèce. Sur les traces de l'Homo mathematicus : les mathématiques avant Euclide : Mésopotamie - Égypte - Grèce*. Paris : Ellipses, 1999. ISBN 2729859705.
- [13] EBBINGHAUS, Heinz-Dieter, John H. EWING, Hans HERMES, Friedrich HIRZEBRUCH, Klaus LAMOTKE et H. L. S ORDE. *Numbers*. New York ; Springer-Verlag, 1991. (Graduate texts in mathematics ; 123). ISBN 0387974970.
- [14] EBBINGHAUS, Heinz-Dieter, Hans HERMES et Friedrich HIRZEBRUCH. *Les nombres : leur histoire, leur place et leur rôle de l'Antiquité aux recherches actuelles*. Paris : Vuibert, 1999. ISBN 2711789012.
- [15] EULER, Leonhard. De integratione aequationum differentialium altiorum graduum. *In : Opera Omnia*. 1743, vol. 22, p. 108-124. (1).
- [16] EULER, Leonhard. Recherches sur les racines imaginaires des équations. *Mémoire de l'Académie de Berlin*. 1751, p. 222-288.

- [17] FLAMENT, Dominique. *Histoire des nombres complexes : Entre algèbre et géométrie*. CNRS Editions. Vol. 33. Paris : Elsevier Inc, 2003. ISSN 0315-0860.
- [18] François Viète (1540 [Fontenay-le-Comte] - 13 décembre 1603 [Paris]). Disponible via l'URL <<https://www.bibmath.net/bios/index.php?action=affiche&quoi=viete>> (consulté le 20 juin 2024).
- [19] FRIEDELMEYER, Jean-Pierre. La première démonstration de Gauss du théorème fondamental de l'algèbre. *In* : sous la dir. de STRASBOURG, IREM. 1995.
- [20] GAUSS, Carl Friedrich. *Carl Friedrich Gauss Werke. Carl Friedrich Gauss Werke*. Allemagne : Kaestner, 1876.
- [21] GAUSS, Carl Friedrich. Demonstratio nova altera theorematis omnem functionem atgebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse. *In* : *Werke III*. HELMSTADT, 1816, p. 31-56.
- [22] GAUSS, Carl Friedrich. Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse. *In* : *Werke III*. HELMSTADT, 1799, p. 1-30.
- [23] GAUSS, Carl Friedrich. Über den ersten und vierten gaussischen beweis des fundamental-satzes der algebra von alexander ostrowski. *In* : *Werke*, Cambridge University Press, 2011, p. 299-316.
- [24] GHYS, Etienne. A singular mathematical promenade. *arXiv (Cornell University)*. 2017. ISSN 2331-8422.
- [25] GILAIN, Christian. Sur l'histoire du théorème fondamental de l'algèbre : théorie des équations et calcul intégral. *Archive for history of exact sciences*. 1991, 42 (2), p. 91-136. ISSN 0003-9519.
- [26] GIRARD, Albert et Willem Jansz BLAEU. *Invention nouvelle en l'algèbre, par Albert Girard mathématicien. Tant pour la solution des équations, que pour reconnoître le nombre des solutions qu'elles reçoivent, avec plusieurs choses qui sont nécessaires à la perfection de cette divine science*. Amsterdam : A Amsterdam. Chez Guillaume Jansson Blaeuw. M.DC.XXIX, 1629.
- [27] GOVERS, Ophélie. *Des nombres complexes aux algèbres à composition*. Mém. de mast. Université de Liège. 2022. 102 p.
- [28] HAGEN, Sarah et Alan KAPPLER. *Gauss and the First "Rigorous" Proof of the Fundamental Theorem of Algebra*. Ursinus College, 2022.
- [29] KOUTEYNIKOFF, Odile. La démonstration par argand du théorème fondamental de l'algèbre. *Pour chercher et approfondir APMEP*. 2006, (462), p. 122-126.
- [30] LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm, Marc PARMENTIER et Michel SERRES. *La naissance du calcul différentiel : 26 articles des "Acta eruditorum". La naissance du calcul différentiel : 26 articles des "Acta eruditorum"*. Paris : J. Vrin, 1995. (Mathesis). ISBN 2711609979.
- [31] MATHONET, Pierre. *Géométrie Différentielle. Cours 2020-2021*. Université de Liège, 2021.
- [32] NICOLAY, Samuel. *Analyse mathématique : fonctions définies sur une partie de la droite réelle : cours avec exercices corrigés et exercices d'approfondissement. Analyse mathématique : fonctions définies sur une partie de la droite réelle : cours avec exercices corrigés et exercices d'approfondissement*. Paris : Ellipses, 2018. (Références sciences). ISBN 9782340024700.
- [33] RIGO, Michel. *Algèbre linéaire. Cours 2019-2020*. Université de Liège, 2009.
- [34] RIVLIN, Theodore J. *The Chebyshev polynomials. The Chebyshev polynomials*. New York : John Wiley, 1974. (Pure and applied mathematics). ISBN 047172470X.

- [35] SMALE, Steve. The fundamental theorem of algebra and complexity theory. *Bulletin (new series) of the American Mathematical Society*. 1981, 4 (1), p. 1-36. ISSN 0273-0979.
- [36] STILLWELL, John. *Mathematics and Its History*. 3rd ed. New York, NY : Springer Nature, 2010. (Undergraduate Texts in Mathematics). ISBN 1441960538. ISSN 0172-6056.
- [37] TIGNOL, Jean-Pierre. *Galois' theory of algebraic equations. Galois' theory of algebraic equations*. New Jersey : World Scientific, 2001. ISBN 9810245416.
- [38] TROESTLER, Christophe. *Analyse Mathématique I*. 2008.