

Mémoire

Auteur : Devos, Thomas

Promoteur(s) : Loosveldt, Laurent; Esser, Céline

Faculté : Faculté des Sciences

Diplôme : Master en sciences mathématiques, à finalité approfondie

Année académique : 2024-2025

URI/URL : <http://hdl.handle.net/2268.2/22957>

Avertissement à l'attention des usagers :

Tous les documents placés en accès ouvert sur le site le site MatheO sont protégés par le droit d'auteur. Conformément aux principes énoncés par la "Budapest Open Access Initiative"(BOAI, 2002), l'utilisateur du site peut lire, télécharger, copier, transmettre, imprimer, chercher ou faire un lien vers le texte intégral de ces documents, les disséquer pour les indexer, s'en servir de données pour un logiciel, ou s'en servir à toute autre fin légale (ou prévue par la réglementation relative au droit d'auteur). Toute utilisation du document à des fins commerciales est strictement interdite.

Par ailleurs, l'utilisateur s'engage à respecter les droits moraux de l'auteur, principalement le droit à l'intégrité de l'oeuvre et le droit de paternité et ce dans toute utilisation que l'utilisateur entreprend. Ainsi, à titre d'exemple, lorsqu'il reproduira un document par extrait ou dans son intégralité, l'utilisateur citera de manière complète les sources telles que mentionnées ci-dessus. Toute utilisation non explicitement autorisée ci-avant (telle que par exemple, la modification du document ou son résumé) nécessite l'autorisation préalable et expresse des auteurs ou de leurs ayants droit.



FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE

Etude de la régularité et des ensembles de niveau de processus Gaussiens via les notions de temps local et de non-déterminisme local

Mémoire de fin d'études présenté en vue de l'obtention du titre de
Master en Sciences Mathématiques, à finalité approfondie

Année académique 2024-2025

Auteur :
Thomas DEVOS

Promoteurs :
Céline ESSER
Laurent LOOSVELDT

Introduction

L'étude des processus stochastiques occupe une place importante en probabilités et possède de nombreuses applications notamment en statistiques [19], en informatique [48], en finance [40, 64, 14], en biologie [63, 53, 29, 36] et bien d'autres domaines encore. Remarquons que ces applications nécessitent souvent l'utilisation d'outils statistiques afin d'évaluer la pertinence des modèles développés. Ainsi, toute une branche des statistiques s'intéresse à la construction d'estimateurs et de tests statistiques dans ce cadre [6, 7, 22, 39].

Une question d'intérêt consiste à déterminer la régularité des trajectoires d'un processus stochastique donné. Pour ce faire, le premier outil du probabiliste est sans nul doute le théorème de Kolmogorov-Centsov qui permet d'obtenir un minorant concernant la régularité de Hölder (uniforme) des trajectoires du processus considéré. Cependant, rien n'assure que ce minorant soit optimal et il est donc difficile de s'en contenter. Dans le cas de processus gaussiens par exemple, on sait que ce théorème possède un raffinement permettant d'obtenir un minorant plus grand.

Il est donc clair que, pour un processus stochastique donné, il est en général possible de faire mieux et cela amène plusieurs questions. Parmi ces questions, l'une nous paraît particulièrement importante : Peut-on obtenir un bon majorant pour la régularité de Hölder d'un processus stochastique donné ? L'intérêt de cette question est multiple. Premièrement, si ce majorant coïncide avec le minorant donné par le théorème de Kolmogorov-Centsov, alors nous sommes certains d'avoir obtenu la meilleure régularité possible pour les trajectoires du processus considéré. Deuxièmement, ce majorant permet bien souvent de prouver la non-dérivabilité des trajectoires.

L'un des principaux défis provient du fait qu'obtenir ce majorant revient à minorer des expressions de la forme

$$\frac{|X(t) - X(s)|}{|t - s|}$$

alors qu'il est en général plus simple de les majorer. Pour pallier à cette difficulté, nous aurons recours à l'outil principal du présent mémoire : le *temps local*. Le temps local peut être défini intuitivement comme le temps passé par un processus à un certain point pendant un moment donné. Ce qui nous intéressera tout particulièrement à propos du temps local a été énoncé et formalisé par S. Berman dans ses papiers sur le sujet [9, 10, 11, 12] et est maintenant connu sous le nom de *principe de Berman*. Ce principe s'énonce comme suit : "la régularité du temps local d'une fonction implique l'irrégularité de la fonction elle-même". Cette phrase représente notre principale motivation et se présentera sous bien des formes au fil des chapitres.

Un autre intérêt du temps local réside bien sûr dans l'étude des ensembles de niveau d'un processus stochastique. Nous nous intéresserons particulièrement au caractère fractal

des trajectoires de processus stochastiques à travers la notion de dimension de Hausdorff.

Le temps local possède bien d'autres applications notamment dans la résolution d'équations différentielles stochastiques [49]. Notons qu'il existe aussi des estimateurs pour le temps local permettant son utilisation en pratique [1, 30]. Nous n'explorerons pas ces aspects du temps local qui nécessitent des raisonnements bien différents de ceux développés ici.

De plus, nous nous détournerons bien vite des processus stochastiques généraux afin d'étudier plus spécifiquement les processus et champs gaussiens. Cette restriction nous permettra d'utiliser un second outil puissant mais qui, à notre connaissance, n'a été utilisé que pour des processus α -stables [61] qui peuvent être vus comme une généralisations des processus gaussiens. Ce concept nommé *non-déterminisme local* a été introduit par Berman [11] dans le but de généraliser certains de ses premiers travaux sur le temps local et a pris une place non-négligeable dans l'étude des processus gaussiens. L'idée derrière le non-déterminisme local est de regarder si la connaissance du processus stochastique étudié en quelques points du passé permet de prédire un point futur. En d'autres termes, le processus devient-il déterministe à la connaissance de quelques points ? Si on peut répondre à cette question par la négative, alors il est raisonnable de penser que les trajectoires possède un comportement erratiques et nous verrons que cette conjecture se vérifie notamment grâce aux travaux de Pitt [47]. Une question naturelle consiste à se demander pourquoi le non-déterminisme local n'est pas utilisé pour des processus plus généraux. Un élément de réponse réside dans les propriétés du conditionnement gaussien qui permettent en particulier à la variance conditionnelle d'être réduite à un nombre qui est évidemment plus facilement manipulable qu'une variable aléatoire.

Pour pouvoir aborder ce mémoire, il est nécessaire de maîtriser les bases des probabilités, de la théorie des processus et de l'analyse stochastiques, de la théorie de la mesure et de l'analyse harmonique. En particulier, les contenus des syllabi [8, 20, 37, 38, 44] sont considérés connus. Au vu de l'importance de la théorie des processus stochastiques pour ce document, nous rappelons quelques bases au Chapitre 0 sans aucune prétention que ce rappel ne soit complet. Il se veut néanmoins suffisant pour aborder la majorité des raisonnements des chapitres suivants.

Dans le Chapitre 1, nous présentons et étudions les propriétés du temps local. Nous commençons par une étude dans un cadre tout à fait déterministe (le temps local étant défini de façon trajectorielle) avant de passer à l'étude dans le cas aléatoire où nous nous concentrerons rapidement sur les processus gaussiens. Des critères d'existence pour le temps local notamment via la transformée de Fourier seront donnés ainsi que de nombreux théorèmes de régularité mettant en lumière le principe de Berman. Ce chapitre se base en grande partie sur l'article exhaustif de Geman et Horowitz [26] et sur les nombreux travaux de Berman que nous avons déjà cités. Nous avons essayé autant que possible de remonter aux sources initiales des théorèmes présentés dont on reprendra alors la démonstration que nous prendrons le soin de détailler.

Le Chapitre 2 s'intéressera dans un premier temps aux processus gaussiens localement non-déterministes et se basera sur les travaux de Pitt [47] afin d'obtenir notamment la bicontinuité du temps local dans ce cadre. La seconde partie du chapitre s'intéresse quant à elle aux travaux de Xiao [60]. Nous donnons et démontrons notamment une *loi du logarithme itéré* dans le cas de processus gaussiens à accroissements stationnaires fortement localement non-déterministes. Les Théorèmes 2.4.17 et 2.5.1 sont certainement les deux résultats les plus importants de ce chapitre. Remarquons que ces théorèmes s'appliquent

notamment au mouvement Brownien fractionnaire.

Dans le Chapitre 3, nous développons des résultats similaires à ceux du chapitre précédent dans le cas du drap Brownien fractionnaire. Ce processus n'étant ni localement non-déterministe, ni à accroissements stationnaires, le but de ce chapitre est de montrer que, même dans ce cas, il est quand-même possible d'obtenir des résultats puissants. Nous mettons aussi en lumière le caractère trop restrictif du non-déterminisme local. En effet, il est possible d'affaiblir cette condition pour la remplacer par le *non-déterminisme local sectoriel*. Nous verrons aussi qu'il est possible de décomposer un processus non-localement déterministe afin d'obtenir une composante qui l'est. L'un de nos buts pour ce chapitre est de mettre en évidence les différences et surtout les similarités des raisonnements développés avec ceux traités au chapitre précédent. Nous incitons ainsi le lecteur à faire le parallèle autant que possible. Nous nous permettrons aussi de passer certaines démonstrations lorsque ces dernières n'apportent aucun élément nouveau et relèvent davantage du copiage des démonstrations du chapitre précédent.

Enfin, ce document comprend une annexe fournissant quelques rappels concernant la régularité de Hölder et la mesure de Hausdorff. Quelques notions plus avancées de théorie de la mesure seront aussi rappelées. Cependant, l'annexe la plus importante concerne la limite approximative et surtout les fonctions de Jarnik qui nous permettront d'exprimer la maximalité de la régularité de Hölder dans le Chapitre 1.

Remerciements

Mes premiers remerciements vont bien évidemment en premier lieu à Céline Esser et Laurent Loosveldt, mes promoteurs, pour m'avoir accompagné que ce soit dans l'écriture de ce mémoire ou dans mon projet de recherche. Je les remercie aussi pour m'avoir montré la richesse des raisonnements probabilistes que j'espère avoir l'occasion d'explorer plus en profondeur avec eux dans les années qui viennent.

Je tiens ensuite à remercier l'ensemble des professeurs et assistants qui m'ont donné cours ces cinq dernières années et m'ont permis d'entretenir cette passion pour les mathématiques.

Je remercie ensuite le département de mathématiques de m'avoir permis d'être moniteur SI-PASS pendant ces trois dernières années, ce qui fût une expérience enrichissante. Je tiens aussi à remercier Françoise Bastin de m'avoir fait confiance cette année pour donner les TP d'analyse harmonique notamment. Je tiens aussi à remercier tous les étudiants à qui j'ai pu donner ces sessions d'en avoir fait des premières expériences dont je garderais un très bon souvenir.

Je tiens ensuite à remercier mes amis, qui se reconnaîtront, pour tous les bons moments passés ensemble ces cinq dernières années. Je tiens en particulier à remercier Alvaro, Hugo et Simon avec qui j'ai pu avoir des conversations mathématiques enrichissantes et pour nos nombreuses péripéties notamment à Bruxelles pour assister à des conférences mathématiques.

Enfin, j'aimerais remercier ma famille pour m'avoir permis d'entreprendre ces études et pour leur soutien tout au long de ces dernières.

Notations

- Nous noterons \mathbb{R} l'ensemble des réels, \mathbb{N} l'ensemble des naturels $0, 1, 2, \dots, \mathbb{N}_0$ l'ensemble des naturels privés de 0, \mathbb{Q} l'ensemble des rationnels et \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes. Nous utiliserons aussi la notation \mathbb{R}_+ pour désigner les réels positifs ou nuls. Enfin, pour un ensemble A , on dénotera par A^d le produit cartésien de A avec lui-même d fois.
- Si $x_1, \dots, x_d \in \mathbb{R}^N$, nous noterons parfois \bar{x} pour dénoter le vecteur (x_1, \dots, x_d) de \mathbb{R}^{dn} .
- Soit E un ensemble muni d'une topologie. Nous noterons $\mathcal{B}(E)$ la σ -algèbre borélienne sur E . Si $E = \mathbb{R}^d$, on notera parfois \mathcal{B}^d pour $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.
- Nous dénoterons par λ_N la mesure de Lebesgue dans \mathbb{R}^N . Lorsque qu'aucune confusion n'est possible, on s'autorisera toutefois à omettre le N et écrirons simplement λ .
- Nous nous placerons toujours dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et noterons toujours $\mathbb{E}, \mathbb{V}, \text{Cov}$ pour l'espérance, la variance et la covariance respectivement.
- f dénotera toujours une fonction déterministe. Les lettres X, Y et Z dénoterons toujours des processus stochastiques (éventuellement à plusieurs dimensions), ou des variables aléatoires. Leur caractère aléatoire étant toujours présent, nous nous permettront de ne pas le mentionner dans nos écritures afin d'alléger nos notations.
- Nous dénoterons $\mu_A(\cdot)$ la mesure d'occupation sur A . Dans le cas aléatoire, nous pourrons parfois mentionner spécifiquement $\omega \in \Omega$, on écrira alors $\mu_A(\cdot, \omega)$.
- Nous dénoterons le temps local par $(x, A) \mapsto \alpha(x, A)$. Lorsque nous prenons une version qui est une mesure d'occupation, nous la noterons $\alpha(x, dt)$. Nous noterons aussi $\alpha(x, t) = \alpha_t(x) = \alpha(x, [0, t]^N)$. Dans le cas aléatoire, on pourra lorsque cela est nécessaire indiquer le caractère aléatoire en notant $\alpha(x, \omega, A)$ pour $\omega \in \Omega$.
- La transformée de Fourier moins d'une fonction f sera notée $\mathcal{F}f$ ou \hat{f} . Nous utiliserons la même convention pour la transformée de Fourier d'une mesure.
- Nous noterons $B(x, r)$ la boule ouverte de \mathbb{R}^d centrée en $x \in \mathbb{R}^d$ et de rayon $r > 0$. Nous spécifierons parfois la dimension de la boule en notant $B_d(x, r)$. Pour la boule fermée, on notera $\bar{B}(x, r)$. De manière plus générale, on notera \bar{E} l'adhérence de l'ensemble E .
- Nous dénoterons par c, c_1, c_2, \dots des constantes fixées. Nous pourrons avoir recours à C, K, A qui représentent des constantes dont la valeur peut varier de ligne en ligne au cours d'une démonstration sauf mention explicite du contraire. Nous veillerons toutefois à toujours préciser dans nos énoncés les dépendances éventuelles de ces constantes.

- Lorsqu'une fonction ou un processus stochastique admet un temps local, nous dirons qu'il/elle est (LT). Dans le cas des processus gaussien, nous noterons aussi (LND) pour dire que ce processus est localement non-déterministe.
- Si A est un ensemble, nous noterons $|A|$ le diamètre de A . Sans que cela ne pose de problème, nous noterons aussi $|M|$ le déterminant d'une matrice carrée M .
- Soit h une fonction de dimension. La mesure de Hausdorff associée à h sera notée \mathcal{H}^h .
- Soit μ une mesure borélienne et soit f une fonction μ -intégrable. Nous noterons $\int f \mu(dt)$, l'intégrale de f par rapport à μ .
- Soient μ, ν deux mesures définies sur une même σ -algèbre. Si μ est absolument continu par rapport à ν , nous noterons $\mu \ll \nu$.
- Si f est une fonction dérivable n fois, nous noterons $D^n f$ ou $f^{(n)}$ sa dérivée n –ième.
- si f est une fonction ϕ –Jarnik, on note (J_ϕ) . De plus, si $\phi(x) = x^r$, on écrira plus simplement f est (J_r) .

Table des matières

0	Introduction à la théorie des processus stochastiques	1
0.1	Sur les processus stochastiques généraux	1
0.2	Les processus gaussiens	2
0.3	Sur l'intégrale stochastique	4
1	Temps local	7
1.1	Généralités et premières propriétés	7
1.2	Condition d'existence	12
1.3	Condition de régularité d'une fonction à partir de son temps local	15
1.4	Ensembles de niveau	21
1.5	Temps local d'un processus stochastique	24
2	Non-déterminisme local	31
2.1	Introduction	31
2.2	Continuité et conditions de Hölder du temps local de processus LND	34
2.3	Exemple de processus LND	42
2.4	Loi du logarithme itéré	44
2.5	Ensembles de niveau	57
3	Le cas du drap Brownien fractionnaire	65
3.1	Introduction	65
3.2	Bicontinuité du temps local	69
3.3	Loi du log itéré et ensembles de niveau	77
	Annexes	82
A	Notions de régularité et de théorie de la mesure	83
A.1	Condition de Hölder et mesure de Hausdorff	83
A.2	Limite approximative et fonction de Jarnik	85
A.3	Dérivation de mesures et ensemble de Lebesgue	88

Chapitre 0

Introduction à la théorie des processus stochastiques

Ce chapitre a pour but principal de présenter ce qu'est un processus stochastique ainsi que des résultats "élémentaires" nécessaires pour aborder le contenu du présent mémoire. Le lecteur aguerri sur la théorie des probabilités et des processus stochastiques peut bien sûr se contenter de survoler ce chapitre. Ce chapitre se base essentiellement sur le livre de Ivan Nourdin [45] mais aussi sur les syllabi de Laurent Loosveldt [37, 38] (voir aussi [20]).

0.1 Sur les processus stochastiques généraux

Dans cette section, nous définissons la notion de processus stochastiques ainsi que certains résultats élémentaires. Nous en profitons pour poser certaines notations que nous utiliserons tout au long de ce document.

Nous supposerons toujours disposer d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et noterons $\mathcal{B}(A)$ la σ -algèbre de Borel sur l'ensemble A , nous noterons parfois plus simplement \mathcal{B}^d pour $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Nous noterons aussi λ_N la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^N . Lorsque la dimension est claire, nous écrirons λ pour λ_N .

Définition 0.1.1. Soit T un ensemble d'indexation. Un *processus stochastique* est une collection de variables aléatoires $(X_t)_{t \in T}$ définie sur un même espace probabilisé.

Remarque 0.1.2. Nous étudierons principalement des processus à temps continu, en particulier, nous utiliserons fréquemment $[0, 1]^N, \mathbb{R}^N$ ou encore \mathbb{R}_+^N comme ensemble d'indexation ($N \in \mathbb{N}_0$) et les processus que nous considérerons seront généralement à valeurs dans \mathbb{R}^d ($d \in \mathbb{N}_0$).

Notation 0.1.3. Nous utiliserons les notations $X : T \rightarrow \mathbb{R}^d$ ou $\{X(t) : t \in T\}$ pour dénoter un processus stochastique indiqué par \mathbb{R}^N et à valeurs dans \mathbb{R}^d . Le caractère aléatoire n'étant pas spécifié (mais bien présent) afin de ne pas alourdir les notations. Nous noterons parfois aussi $X_t(\omega)$ pour $X(t, \omega)$ ($t \in T, \omega \in \Omega$) ou plus simplement X_t ou $X(t)$, omettant le caractère aléatoire de nos écritures (et uniquement de nos écritures) lorsque cela ne porte pas à confusion.

Le but de ce mémoire consiste principalement à étudier la régularité d'un processus stochastique en fonction de $t \in T$ pour $\omega \in \Omega$ fixé. La fonction $t \rightarrow X_t(\omega)$ où $\omega \in \Omega$ est

fixé est appelée *trajectoire* du processus stochastique X . Bien sûr, même si $\omega \in \Omega$ est fixé, le caractère aléatoire garde toute son importance dans notre étude. Nous chercherons en effet à obtenir des résultats presque sûr, c'est-à-dire pour \mathbb{P} -presque toutes trajectoires. Cela motive la définition suivante.

Définition 0.1.4. Soient $(X_t)_{t \in T}$ et $(Y_t)_{t \in T}$ deux processus stochastiques définis sur le même ensemble d'indexation T et sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On dit que X et Y sont *versions* l'un de l'autre si

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$$

pour tout $t \in T$.

Remarque 0.1.5. Il est important de remarquer dans la définition précédente que le "pour tout t " est à l'extérieur de la probabilité. Il n'est en général pas possible de le "rentrer" dans la probabilité. Lorsque cela est possible, on parle de processus *indistinguables*.

Lorsque l'on souhaite étudier la régularité d'un processus stochastique, le premier théorème utilisé par un probabiliste est sans nul doute le théorème de *Kolmogorov-Centsov* aussi appelé théorème de *continuité de Kolmogorov*.

Théorème 0.1.6 (Kolmogorov-Centsov). *Soit $T \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Si $(X_t)_{t \in T}$ est un processus stochastique sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ pour lequel il existe $\alpha, \beta > 0$ et $C > 0$ tels que pour tous $s, t \in T$,*

$$\mathbb{E}[|X_t - X_s|^\alpha] < C|t - s|^{1+\beta}$$

alors le processus admet une version dont les trajectoires sont localement Höldériennes d'ordre γ pour tout $\gamma \in]0, \frac{\beta}{\alpha}[^.$

Ce théorème nous donne directement un minorant pour l'exposant de Hölder. Une question naturelle est alors de se demander si ce minorant est optimal. En d'autres termes, peut-on trouver un majorant pour la régularité de Hölder et si oui, ce majorant coïncide-t-il avec le minorant donné par le théorème de continuité de Kolmogorov ? Cette question sera centrale tout au long du présent mémoire.

0.2 Les processus gaussiens

Lorsque l'on travaille avec des variables aléatoires (ou même des vecteurs aléatoires), il est commun de définir les variables en présence via leur loi. Nous pouvons faire la même chose avec les processus stochastiques.

Définition 0.2.1. Soient $(X_t)_{t \in T}$ et $(Y_t)_{t \in T}$ deux processus stochastiques définis sur le même ensemble d'indexation T mais pas forcément sur le même espace probabilisé. On dit que X et Y sont de *même loi* si les vecteurs $(X_{t_1}, \dots, X_{t_d})$ et $(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_d})$ sont de même loi pour tout $d \in \mathbb{N}_0$ et tous $t_1, \dots, t_d \in T$.

Remarque 0.2.2. L'égalité en loi est plus faible qu'être version. Par exemple, si $(X_t)_{t \in T}$ est un processus stochastique dont les variables aléatoires X_t sont des lois normales indépendantes non-dégénérées et si $(Y_t)_{t \in T}$ est défini par $Y_t = -X_t$, il est clair que les deux processus sont égaux en loi mais ne sont pas versions l'un de l'autre.

La théorie que nous entreprenons de développer dans ce mémoire est vaste et s'intéresse à de nombreux processus stochastiques différents. Les plus étudiés sont très probablement les processus gaussiens qui seront les processus étudiés dans les chapitres 2 et 3.

Définition 0.2.3. Soit $X = (X_t)_{t \in T}$ un processus stochastique. On dit que X est *gaussien* si pour tout $d \in \mathbb{N}_0$ et tout $t_1, \dots, t_d \in T$, le vecteur $(X_{t_1}, \dots, X_{t_d})$ est gaussien. De plus, dans ce cas, on définit la fonction moyenne $\mu : T \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \mathbb{E}[X_t]$ et la fonction de variance-covariance $\Gamma : T^2 \rightarrow [0, +\infty[: (s, t) \mapsto \text{Cov}[X_s, X_t]$.

On sait qu'une variable aléatoire normale est entièrement définie par son espérance et sa variance. Ce résultat peut être étendu aux processus stochastiques.

Définition 0.2.4. Une fonction $\Gamma : T^2 \rightarrow [0, +\infty[$ est de *type positif* si elle est symétrique et si la matrice $(\Gamma(t_i, t_j))_{1 \leq i, j \leq d}$ est semi-définie positive pour tout $d \in \mathbb{N}_0$ et tous $t_1, \dots, t_d \in T$.

Proposition 0.2.5. *Deux processus gaussiens sont égaux en loi si et seulement si leurs fonctions moyenne et de variance-covariance sont respectivement égales. De plus, si on se donne $\mu : T \rightarrow \mathbb{R}$ et une fonction de type positif $\Gamma : T^2 \rightarrow [0, +\infty[$ alors il existe un processus stochastique gaussien de fonction moyenne μ et de fonction de variance-covariance Γ .*

Dans le cas de processus gaussiens, le théorème de continuité de Kolmogorov peut être amélioré.

Théorème 0.2.6 (Kolmogorov-Centsov gaussien). *Soit $T \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Si $(X_t)_{t \in T}$ est un processus stochastique gaussien sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ pour lequel il existe $\eta, C > 0$ tels que pour tous $s, t \in T$,*

$$\mathbb{E}[|X_t - X_s|^2] < C|t - s|^\eta$$

alors le processus admet une version dont les trajectoires sont localement Höldérienne d'ordre γ pour tout $\gamma \in]0, \frac{\eta}{2}[$.

Le processus stochastique le plus connu est sans nul doute le mouvement Brownien qui est un cas particulier des processus étudiés au chapitre 2.

Définition 0.2.7. Un mouvement Brownien $(B_t)_{t \in [0, +\infty[}$ est un processus gaussien centré¹ à trajectoires presque sûrement continues et d'opérateur de covariance donné par $\Gamma(s, t) = \min(s, t)$ pour $s, t \in [0, +\infty[$.

Le mouvement Brownien se généralise de plusieurs façons. Nous étudierons (et définirons) spécifiquement le cas du drap Brownien fractionnaire au chapitre 3. Le cas du mouvement Brownien fractionnaire, quant à lui, est aussi un cas particulier des développements établis au chapitre 2. Nous le définissons maintenant dans le cas réel.

Définition 0.2.8. Un mouvement Brownien fractionnaire $(B_t^H)_{t \in [0, +\infty[}$ d'indice de Hurst $H \in]0, 1[$ est un processus stochastique gaussien centré à trajectoires presque sûrement continues et de fonction de variance-covariance Γ donnée par

$$\Gamma(s, t) = \frac{1}{2}(s^{2H} + t^{2H} - |t - s|^{2H})$$

pour tous $t, s \in [0, +\infty[$.

1. C'est-à-dire de fonction moyenne nulle

Remarquons que si $H = 1/2$ dans la définition précédente, alors on retrouve la définition du mouvement Brownien.

Remarque 0.2.9. Vu le théorème de Kolmogorov-Centsov gaussien, on sait que le mouvement Brownien fractionnaire possède des trajectoires γ -Hölderiennes sur tout compact pour tout $\gamma \in]0, H[$.

Le mouvement Brownien fractionnaire possède de nombreuses propriétés, nous utiliserons essentiellement la stationnarité des accroissements.

Proposition 0.2.10. *Soit $(B_t^H)_{t \in [0, +\infty[}$ un mouvement Brownien fractionnaire d'indice de Hurst $H \in]0, 1[$. Pour tout $h > 0$, on a*

$$(B_{t+h}^H - B_t^H)_{h \in [0, +\infty[} = (B_h^H)_{h \in [0, +\infty[},$$

l'égalité étant à comprendre en loi.

0.3 Sur l'intégrale stochastique

Il n'est pas rare de recourir à des caractérisations d'un processus stochastique sous forme intégrale. Nous utiliserons particulièrement ces représentations pour désigner une classe générale de processus gaussiens au Chapitre 2 ainsi que pour obtenir certaines propriétés du drap Brownien fractionnaire² au Chapitre 3. Nous n'aurons cependant pas besoin d'utiliser des outils poussés sur cette théorie. Ainsi, nous nous focaliserons ici sur une approche plus intuitive mais suffisante pour aborder les développements des chapitres suivants.

Considérons un espace mesuré (X, \mathcal{A}, μ) où μ est une mesure σ -finie sans atome et X est un espace polonais (c'est-à-dire métrique complet et séparable). On définit le bruit blanc gaussien

$$\{W(A) : A \in \mathcal{A}, \mu(A) < +\infty\}$$

en imposant que

- Pour tout $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) < +\infty$, $W(A) \sim \mathcal{N}(0, \mu(A))$;
- Pour tous $A, B \in \mathcal{A}$ tels que $\mu(A), \mu(B) < +\infty$, on a $\mathbb{E}[W(A)W(B)] = \mu(A \cap B)$.

On peut voir W comme une mesure aléatoire (finiment additive) et puisqu'on a pris X polonais, on sait que les fonctions simples sont denses dans $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$. On peut donc définir une intégrale de la manière suivante. Considérons $h = \sum_{j=1}^J a_j \chi_{A_j}$ une fonction simple telle que pour tout $j \in \{1, \dots, J\}$, $a_j \in \mathbb{R}$, $\mu(A_j) < +\infty$ et si $j \neq k$, $A_j \cap A_k = \emptyset$. On pose alors

$$\int h(x) W(dx) = \sum_{j=1}^J a_j \mu(A_j).$$

En particulier, on vérifie aisément que si h et g sont deux fonctions simples, alors

$$\mathbb{E} \left[\int h(x) W(x) \int g(x) W(dx) \right] = \langle h, g \rangle_{L^2(X, \mathcal{A}, \mu)}.$$

2. Nous le définirons aussi au chapitre 3.

Si maintenant $h \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$, on sait qu'il existe une suite $(h_j)_j$ de fonctions simples qui converge vers h dans $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$. L'égalité précédente assure alors la convergence de la suite des intégrales associées dans $L^2(\Omega)$. On définit donc

$$\int h(x)W(dx) = \lim_j \int h_j(x)W(dx).$$

En particulier, si $h, g \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$, on obtient comme précédemment

$$\mathbb{E} \left[\int h(x) W(x) \int g(x) W(dx) \right] = \langle h, g \rangle_{L^2(X, \mathcal{A}, \mu)}. \quad (1)$$

Cette dernière égalité est appelée *isométrie de Wiener-Itô*.

Enfin, si on prend $X = \mathbb{R}$, \mathcal{A} la σ -algèbre des ensembles Lebesgue-mesurables et μ la mesure de Lebesgue, alors il est possible de montrer que $\{W([0, t])\}_{t \in \mathbb{R}}$ est un mouvement Brownien. La construction précédente permet alors de définir l'intégration par rapport au mouvement Brownien.

Chapitre 1

Temps local

Dans ce premier chapitre, nous présentons le concept principal de ce mémoire appelé *temps local*. Cet outil, bien qu'il puisse être défini dans un cadre complètement déterministe, est principalement utilisé pour l'étude de processus stochastiques. Nous nous intéresserons tout particulièrement au temps local comme outil pour étudier la régularité (de Hölder) des trajectoires d'un processus stochastique. Nous nous intéresserons aussi à la mesure de Hausdorff des ensembles de niveau de ces trajectoires.

Ce chapitre est structuré en deux parties principales. La première concerne l'étude du temps local dans un cadre tout à fait déterministe¹. Après avoir exploré les propriétés élémentaires du temps local d'une fonction f , nous donnerons de nombreuses conditions sur le temps local inférant des propriétés de régularité sur f . Notons en particulier le Corollaire 1.3.7 souvent utilisé en pratique. La deuxième partie concerne l'étude du temps local dans le cadre (principal de ce document) des processus stochastiques. Après avoir donné des équivalents pour les propositions élémentaires fournies dans le cadre déterministe, nous donnons des conditions souvent simples à vérifier impliquant (presque sûrement) les hypothèses des théorèmes de la première partie aux trajectoires du processus stochastique étudié. Une attention particulière sera portée aux processus gaussiens.

Sauf mention explicite du contraire, l'ensemble des résultats de ce chapitre sont tirés du papier de Geman et Horowitz [26]. Notons cependant que de nombreux résultats présentés ne sont pas attribués directement à ces auteurs (malgré leurs contributions non-négligeables sur la théorie développée ici) et que nous avons essayé, lorsque cela était possible, de remonter à la source originale dont nous reprenons alors les preuves que nous détaillons. Ainsi, de nombreux résultats sont dûs par exemple à Berman (voir par exemple [12] dont les principaux résultats sont reproduits à la section 1.2).

1.1 Généralités et premières propriétés

Définition 1.1.1. Soit $f : [0, 1]^N \rightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction borélienne. La *mesure d'occupation* de f sur A est la mesure $\mu_A(B) = \lambda_N(\{A \cap f^{-1}(B)\})$ où λ_N désigne la mesure de Lebesgue dans \mathbb{R}^N , $A \in \mathcal{B}([0, 1]^N)$, $B \in \mathcal{B}^d$. Lorsque $A = [0, 1]^N$, nous noterons simplement $\mu = \mu_A$ pour dénoter la mesure d'occupation.

Définition 1.1.2. Dans les mêmes conditions, supposons que $\mu_A \ll \lambda_d$ pour tout

1. Chaque trajectoire d'un processus étant une fonction déterministe, cette étude est primordiale même si le temps local est rarement utilisé dans un cadre déterministe.

$A \in \mathcal{B}([0, 1]^N)$. Dans ce cas, on définit le *temps local* $\alpha(\cdot, A)$ de f comme étant la dérivée de Radon-Nikodym de sa mesure d'occupation sur A . En d'autres termes,

$$\mu_A(B) = \int_B \alpha(x, A) dx,$$

pour tout $A \in \mathcal{B}([0, 1]^N)$ et $B \in \mathcal{B}^d$.

Si la condition $\mu_A \ll \lambda_d$ pour tout $A \in \mathcal{B}([0, 1]^N)$ est satisfaite, on dit que f est (LT). Comme pour la mesure d'occupation, si $A = [0, 1]^N$, nous noterons $\alpha(\cdot) = \alpha(\cdot, A)$ le temps local de f .

Remarque 1.1.3. Pour qu'une fonction f soit (LT), il suffit de vérifier que $\mu_{[0,1]^N} \ll \lambda_d$ puisque $\mu_{[0,1]^N}(B) \geq \mu_A(B)$ pour tout ensemble borélien B de \mathbb{R}^d et tout ensemble borélien A de $[0, 1]^N$.

Remarque 1.1.4. Dans les définitions précédentes et dans tous les résultats de cette section, l'ensemble $[0, 1]^N$ peut-être remplacé par n'importe quel intervalle compact de \mathbb{R}^N . Cette restriction à $[0, 1]^N$ n'existant que pour simplifier les notations.

De plus, le temps local peut être défini de manière analogue en remplaçant $[0, 1]^N$ par un ensemble borélien quelconque (en particulier par \mathbb{R}^N). Cependant les résultats qui suivent pourraient ne plus être vrai dans ce cadres.

Hypothèses générales : Dans la suite de ce chapitre, sauf mention explicite du contraire, nous supposerons toujours disposer d'une fonction $f : [0, 1]^N \rightarrow \mathbb{R}^d$ qui est (LT). De plus, nous noterons toujours $\alpha = \alpha(\cdot, [0, 1]^N)$ une version du temps local de f .

Théorème 1.1.5. *Il est possible de choisir $(x, A) \mapsto \alpha(x, A)$ qui soit un noyau, c'est-à-dire*

- $\alpha(\cdot, A)$ est mesurable pour tout A fixé ;
- $\alpha(x, \cdot)$ est une mesure finie sur $\mathcal{B}([0, 1]^N)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

Une telle version de α est appelée un noyau d'occupation.

Démonstration. Nous partons d'une version quelconque du temps local $(x, A) \rightarrow \alpha(x, A)$ et allons construire la version de l'énoncé. Pour ce faire, commençons par remarquer que si $A_1, A_2 \in \mathcal{B}([0, 1]^N)$ sont tels que $A_1 \subset A_2$ alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$

$$\alpha(x, A_1) \leq \alpha(x, A_2).$$

En effet, on a pour tout $B \in \mathcal{B}^d$

$$\begin{aligned} \mu_{A_1}(B) &= \lambda(A_1 \cap f^{-1}(B)) \\ &\leq \lambda(A_2 \cap f^{-1}(B)) = \mu_{A_2}(B). \end{aligned}$$

Ainsi $\mu_{A_2} - \mu_{A_1}$ est une mesure telle que pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,

$$(\mu_{A_2} - \mu_{A_1})(B) = \int_B \alpha(x, A_2) - \alpha(x, A_1) dx.$$

En particulier $\alpha(\cdot, A_2) - \alpha(\cdot, A_1)$ est égal presque partout à une dérivée de Radon-Nikodym et est donc positive presque partout. Dans la suite, pour $r \in [0, 1]^N$, nous noterons $[0, r]$

pour dénoter l'intervalle $]0, r_1] \times \cdots \times]0, r_N]$. Soit E_1 l'ensemble négligeable tel que son complémentaire satisfait pour tout $r_1, r_2 \in [0, 1]^N \cap \mathbb{Q}^N$ tel que² $r_1 \leq r_2$ et tout $x \in E_1^c$

$$\alpha(x,]0, r_1]) \leq \alpha(x,]0, r_2]).$$

De plus, il existe un ensemble négligeable E_2 tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus E_2$ et tout $r \in [0, 1]^N \cap \mathbb{Q}^N$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha(x,]0, r + 1/n]) = \alpha(x,]0, r]) \quad (1.1)$$

où $r + 1/n = (r_1 + 1/n, \dots, r_N + 1/n)$ et

$$\alpha(x,]0, 1 - 1/n]) \rightarrow \alpha(x,]0, 1]) < +\infty, \quad \alpha(x,]0, 1/n]) \rightarrow 0. \quad (1.2)$$

En effet, on a pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_B \alpha(x,]0, r + 1/n]) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{]0, r + 1/n]}(B) = \mu_{]0, r]}(B) = \int_B \alpha(x,]0, r]) dx$$

où la limite est calculée en utilisant la continuité des mesures.

Puisque $|\alpha(x,]0, r + 1/n])| \leq |\alpha(x,]0, 1]^N)|$ presque partout, le théorème de la convergence dominée et ce qui précède impliquent que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha(x,]0, r + 1/n]) = \alpha(x,]0, r])$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus E_1$. Ce qui montre (1.1), (1.2) se montre de même.

Notons $E = E_1 \cup E_2$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus E$ et tout $s \in [0, 1]^N$, posons

$$F(x, s) = \inf\{\alpha(x,]0, r]) : r \in [0, 1]^N \cap \mathbb{Q}^N, r \geq s\}.$$

La fonction $s \rightarrow F(x, s)$ ainsi définie est croissante continue à droite et bornée. Elle définit donc une mesure de Lebesgue-Stieltjes (sur $\mathcal{B}([0, 1]^N)$) $\tilde{\alpha}(x, \cdot)$ qui est finie. De plus, on a

$$\tilde{\alpha}(x,]0, r]) = \alpha(x,]0, r]), \quad \forall r \in [0, 1]^N \cap \mathbb{Q}^N.$$

Si maintenant $x \in E$, on pose simplement $\tilde{\alpha}(x, \cdot) = 0$.

Montrons que $\tilde{\alpha}$ définit bien un noyau. Commençons par établir la mesurabilité. Pour tout $r \in [0, 1]^N \cap \mathbb{Q}^N$, on sait que

$$\tilde{\alpha}(x,]0, r]) = \alpha(x,]0, r])$$

presque partout. La mesurabilité de $x \mapsto \alpha(x,]0, r])$ implique alors la mesurabilité de $x \mapsto \tilde{\alpha}(x,]0, r])$. Remarquons que $\mathcal{A} = \{]0, r] : r \in [0, 1]^N \cap \mathbb{Q}^N\}$ est un π -système qui engendre $\mathcal{B}([0, 1]^N)$. De plus, l'ensemble

$$\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{B}([0, 1]^N) : x \mapsto \tilde{\alpha}(x, A) \text{ est mesurable}\}$$

est un λ -système qui contient \mathcal{A} . Le lemme de la classe monotone implique alors que $\mathcal{D} = \mathcal{B}([0, 1]^N)$, ce qui conclut concernant la mesurabilité.

2. on entend par cette inégalité que $(r_1)_j \leq (r_2)_j$ pour tout $j \in \{0, \dots, N-1\}$.

Pour finir le preuve, il nous reste à montrer que $\tilde{\alpha}(\cdot, A)$ est bien une dérivée de Radon-Nikodym de μ_A pour tout $A \in \mathcal{B}([0, 1]^N)$. Pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et tout $A \in \mathcal{A}$, on a

$$\int_B \tilde{\alpha}(x, A) dx = \int_B \alpha(x, A) dx = \mu_A(B).$$

Puisque les deux extrémités sont des mesures boréliennes finies (selon A)³ qui sont égales sur \mathcal{A} , elles doivent être égales⁴ sur $\mathcal{B}([0, 1]^N)$ pour tout $B \in \mathbb{R}^d$, ce qui suffit pour conclure. \square

Définition 1.1.6. Une version du temps local α qui satisfait les deux points du théorème précédent est appelée *noyau d'occupation*. Pour $x \in \mathbb{R}^d$ fixé, nous noterons $\alpha(x, dt)$ la mesure définie par le temps local au point x . En particulier, pour tout ensemble borélien $A \subset [0, 1]^N$, on a

$$\int_A \alpha(x, dt) = \alpha(x, A).$$

Le théorème suivant, bien que simple à obtenir, nous donne une formule qui sera très utile dans la suite. Il est parfois appelé "occupation density formula" dans la littérature.

Théorème 1.1.7. Soit α un noyau d'occupation de f . Pour toute fonction borélienne g positive sur $[0, 1]^N \times \mathbb{R}^d$, on a

$$\int_{[0,1]^N} g(t, f(t)) dt = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{[0,1]^N} g(t, x) \alpha(x, dt) dx.$$

En particulier, si $A \in \mathcal{B}([0, 1]^N)$, alors pour toute fonction borélienne positive g sur \mathbb{R}^d , on a

$$\int_A g(f(t)) dt = \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \alpha(x, A) dx.$$

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{B}([0, 1]^N)$ et $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, posons $g(t, x) = \chi_A(t) \chi_B(x)$. On a

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^N} g(t, f(t)) dt &= \int_{[0,1]^N} \chi_A(t) \chi_B(f(t)) dt \\ &= \mu_A(B) \\ &= \int_B \alpha(x, A) dx \\ &= \int_B \int_A \alpha(x, dt) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{[0,1]^N} g(t, x) \alpha(x, dt) dx. \end{aligned}$$

On conclut alors aisément par le théorème de la convergence monotone.

3. Il est clair que $A \mapsto \mu_A(B)$ est une mesure pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

4. Voir par exemple le Lemme 1.2.7 de [44].

Pour le cas particulier, en reprenant les notations de l'énoncé, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} g(x)\alpha(x, A) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} g(x) \int_A \alpha(x, dt) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{[0,1]^N} \mathbb{1}_A(t) g(x)\alpha(x, dt) dx \\ &= \int_A g(f(t)) dt\end{aligned}$$

où la dernière égalité est obtenue via la première égalité de l'énoncé. \square

Ce théorème permet de démontrer aisément certaines propriétés basiques du temps local. Nous avons par exemple la proposition suivante.

Proposition 1.1.8. *Pour tout $\varepsilon > 0$ et presque tout t , on a*

$$\alpha(f(t), B_N(t, \varepsilon)) > 0.$$

Démonstration. Il suffit de prendre, dans le théorème précédent, la fonction g qui vaut 0 si $\alpha(x, B_N(t, \varepsilon)) > 0$ pour tout $\varepsilon > 0$ et qui vaut 1 sinon. En effet, on obtient directement que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{[0,1]^N} g(t, x)\alpha(x, dt) dx = 0$$

et donc que $g(\cdot, f(\cdot)) = 0$ presque partout. \square

Nous verrons que l'existence ou non d'atomes pour la mesure donnée par le temps local $\alpha(x, dt)$ nous permettra d'obtenir des résultats intéressants (voir par exemple la Définition 1.3.3 et le Théorème 1.3.5). Nous avons le résultat suivant.

Proposition 1.1.9. *La mesure $\alpha(x, dt)$ est sans atome pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ si et seulement si $\alpha(f(t), \{t\}) = 0$ pour presque tout $t \in [0, 1]^N$.*

Démonstration. On a, par le Théorème 1.1.7,

$$\int_{[0,1]^N} \alpha(f(t), \{t\}) dt = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{[0,1]^N} \alpha(x, \{t\}) \alpha(x, dt) dx.$$

Dès lors, si $\alpha(x, dt)$ est sans atome pour presque tout x , alors le membre de droite est nul ce qui implique $\alpha(f(t), \{t\}) = 0$ pour presque tout t .

Si maintenant $\alpha(f(t), \{t\}) = 0$ pour presque tout t , soit A l'ensemble des x tels que $\alpha(x, \cdot)$ possède un atome. Pour un tel $x \in A$, on a

$$\int_{[0,1]^N} \alpha(x, \{t\}) \alpha(x, dt) \geq \alpha^2(x, \{t_0\}) > 0$$

pour un t_0 bien choisi (dépendant de x). On en tire alors que A est négligeable puisque, sinon,

$$\int_{[0,1]^N} \alpha(f(t), \{t\}) dt > 0,$$

ce qui est impossible. \square

1.2 Condition d'existence

Pour définir le temps local, nous avons vu qu'il était nécessaire que la mesure d'occupation soit absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. En général, il n'est pas toujours simple de prouver que cette condition est satisfaite. Nous donnons ici une condition d'existence à l'aide de la transformée de Fourier de la mesure d'occupation $\mu = \mu_{[0,1]^N}$, c'est-à-dire à partir de la fonction

$$\hat{\mu}(\theta) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\theta \cdot x} \mu(dx).$$

Le résultat suivant est une généralisation du résultat de Berman [12] qui est à l'origine de cette méthode.

Théorème 1.2.1. *Si*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{\mu}(\theta)|^2 d\theta < +\infty$$

alors μ est absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue et sa dérivée de Radon-Nikodym est de carré intégrable dans \mathbb{R}^d .

Démonstration. Définissons la fonctionnelle linéaire S sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ par

$$S(g) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(u) \hat{\mu}(-u) du.$$

On remarque directement que S est linéaire. En effet, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le théorème de Parseval impliquent directement qu'il existe une constante c telle que

$$|S(g)|^2 \leq c \|g\|_{L^2}^2 \|\hat{\mu}\|_{L^2}^2.$$

De plus, puisque $L^2(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Hilbert, le théorème de représentation de Riesz assure l'existence d'une fonction $\phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$S(g) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \phi(x) dx.$$

Supposons que g est la fonction indicatrice de produits d'intervalles bornés $\prod_{1 \leq i \leq d} [a_i, b_i]$.

On obtient

$$S(g) = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_d}^{b_d} \phi(x_1, \dots, x_d) dx_1 \dots dx_d = (2\pi)^d \mu\left(\prod_{1 \leq i \leq d} [a_i, b_i]\right).$$

La dernière égalité étant obtenue en appliquant l'isométrie de la transformée de Fourier⁵ dans la Définition de S . Il est donc clair que $\frac{1}{(2\pi)^d} \phi$ est une densité pour la mesure μ (par rapport à la mesure de Lebesgue) qui est de carré intégrable. On en tire directement la conclusion. \square

Le théorème suivant découle alors directement. Rappelons la notation

$$\alpha = \alpha(\cdot) = \alpha(\cdot, [0, 1]^N).$$

5. $\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = (2\pi)^d \langle f, g \rangle$ où $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 1.2.2. Une fonction f est (LT) avec son temps local $\alpha \in L^2(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{[0,1]^N} \int_{[0,1]^N} e^{i\theta \cdot (f(s) - f(t))} ds dt d\theta < \infty. \quad (1.3)$$

Démonstration. En utilisant le Théorème 1.1.7, on remarque directement que (1.3) se récrit

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{\mu}(\theta)|^2 d\theta.$$

Le théorème précédent implique alors la condition suffisante. Pour la condition nécessaire, il est clair au vu des hypothèses que $\alpha \in L^1 \cap L^2$, ce qui implique que sa transformée de Fourier est de carré intégrable, c'est-à-dire

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{[0,1]^N} \int_{[0,1]^N} e^{i\theta \cdot (f(s) - f(t))} ds dt d\theta < \infty.$$

□

Nous donnons maintenant une deuxième condition d'existence découlant directement de la définition d'une dérivée de Radon-Nikodym.

Pour ce faire, posons

$$V(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{c_d \varepsilon^d} \int_{[0,1]^N} \chi_{]0,\varepsilon[}(|f(s) - f(t)|) ds$$

cette expression étant bien définie par le Théorème A.3.2 (et potentiellement égale à l'infini) pour presque tout $t \in [0, 1]^N$ et où $\lambda(B_d(0, \varepsilon)) = c_d \varepsilon^d$.

Théorème 1.2.3. On a les équivalences suivantes :

- a) f est (LT) si et seulement si $V(t) < +\infty$ pour presque tout t .
- b) f est (LT) et son temps local α est de carré intégrable si et seulement si

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{-d} \int_{[0,1]^N} \int_{[0,1]^N} \chi_{]0,\varepsilon[}(|f(s) - f(t)|) dt ds < \infty.$$

De plus, sous ces conditions, on a $V(t) = \alpha(f(t))$ presque partout.

Démonstration. Commençons par montrer le point a). Si f est (LT), il est clair que $V(t) < +\infty$ pour presque tout t car dans ce cas, V est la dérivée de Radon-Nikodym de μ (par rapport à la mesure de Lebesgue). La réciproque découle directement du lemme suivant en remarquant que $\mu(B) = 0$ si et seulement si $f(t) \notin B$ pour presque tout $t \in [0, 1]^N$.

Pour le point b), il suffit de remarquer que

$$\int_{[0,1]^N} \alpha(f(t)) dt = \int_{\mathbb{R}^d} \alpha^2(x) dx.$$

□

Lemme 1.2.4. *Si ψ est une mesure borélienne finie sur \mathbb{R}^d , alors elle est dérivable⁶ (par rapport à la mesure de Lebesgue) presque partout. De plus, on a*

$$\psi \ll \lambda_d \text{ si et seulement si } \psi'(x) < +\infty$$

pour ψ -presque tout x , où ψ' est la dérivée de Radon-Nikodym de ψ .

Démonstration. L'existence de la dérivée est bien connue (voir le Théorème A.3.2 en annexe). Pour l'équivalence, si $\psi \ll \lambda_d$, montrons que $\psi'(x) < +\infty$ pour ψ -presque tout x . Pour ce faire, procérons par contraposition et supposons qu'il existe un ensemble borélien E tel que $\psi(E) > 0$ et $\psi'(x) = +\infty$ pour tout $x \in E$. On va montrer que dans ce cas, ψ n'est pas absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue. Notons $\psi = \psi^a + \psi^\perp$ où ψ^a est la partie absolument continue de μ et ψ^\perp la partie singulière de ψ (par rapport à la mesure de Lebesgue).

Remarquons que $\lambda_d(E) = 0$ sinon $\psi^a(E) = +\infty$ ce qui est impossible. En particulier, on en déduit $\psi^a(E) = 0$ et donc

$$0 < \psi(E) = \psi^a(E) + \psi^\perp(E) = \psi^\perp(E).$$

Ce qui permet de conclure. Si maintenant $\psi'(x) < +\infty$ pour ψ -presque tout x , montrons que $\psi \ll \lambda$. Pour ce faire, procérons par l'absurde et supposons que ψ n'est pas absolument continu par rapport à λ . Quitte à séparer les parties absolument continue et singulière, on peut supposer que $\psi \perp \lambda$ et on sait qu'il existe un ensemble borélien A tel que $\lambda(A) = 0$ et $\psi(A^c) = 0$. On va montrer que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\psi(B(x, r))}{\lambda(B(x, r))} = +\infty$$

pour ψ -presque tout $x \in A$, ce qui permettra de conclure.

Pour ce faire, fixons $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert O_ε tel que $A \subset O_\varepsilon$ et $\lambda(O_\varepsilon) < \varepsilon$. De là, pour tout $\delta > 0$, posons

$$A_\delta = \{x \in A : \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\psi(B(x, r))}{\lambda(B(x, r))} < \delta\}.$$

Pour tout $x \in A_\delta$, il existe $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x) \subset O_\varepsilon$ et $\frac{\psi(B(x, 5r_x))}{\lambda(B(x, 5r_x))} < c$. On peut alors utiliser le lemme de recouvrement de Vitali pour obtenir un ensemble dénombrable $D \subset A_\delta$ tel que les boules $B(x, r_x)$ ($x \in D$) soient deux à deux disjointes et $A_\delta \subset \bigcup_{x \in D} B(x, 5r_x)$. On en tire que

$$\begin{aligned} \psi(A_\delta) &\leq \sum_{x \in D} \psi(B(x, 5r_x)) \\ &\leq c \sum_{x \in D} \lambda(B(x, 5r_x)) \\ &\leq c5^d \sum_{x \in D} \lambda(B(x, r_x)) \\ &\leq c5^d \lambda(O_\varepsilon) < c5^d \varepsilon. \end{aligned}$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient que $\psi(A_\delta) = 0$ pour tout δ et la conclusion découle. \square

6. Voir la Définition A.3.1.

1.3 Condition de régularité d'une fonction à partir de son temps local

Pour aborder cette section, il est nécessaire de maîtriser la notion de régularité de Hölder et celle de fonction de Jarnik. Nous renvoyons à l'Annexe A pour plus d'informations sur ces notions. Nous allons en effet donner des majorants pour la régularité de Hölder via la notion de fonction de Jarnik.

1.3.1 Régularité en fonction de $\alpha(x, \cdot)$

Nous allons donner des conditions qui limiteront la régularité (au sens de Hölder) de la fonction f . Pour ce faire, considérons deux fonctions ϕ et ψ définies sur $[0, +\infty[$, continues, croissantes et telles que $\phi(0) = \psi(0) = 0$. Nous avons le théorème suivant.

Théorème 1.3.1. *Supposons qu'il existe une fonction réelle positive et localement intégrable $g : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty[$ telle que pour toute boule B de centre et de rayon rationnels,*

$$\alpha(x, B) \leq g(x)\psi(\lambda_N(B))$$

presque partout. Si

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon^{-N/d} \phi(\varepsilon) \psi^{1/d}(c_N \varepsilon^N) = 0$$

où $c_N = \lambda_N(B_N(0, 1))$, alors pour presque tout t (et pour tout t si g est continue),

$$ap - \lim_{s \rightarrow t} \frac{|f(s) - f(t)|}{\phi(|s - t|)} = \infty$$

où $ap - \lim$ désigne la limite approximative (voir annexe A).

En d'autres termes, f est ϕ -Jarnik.

Démonstration. Soit L l'ensemble de Lebesgue⁷ de g . Si g est continue, on a $L = \mathbb{R}^d$ et dans tous les cas, $\lambda_d(L^c) = 0$. On en déduit donc que $f(t) \in L$ pour presque tout $t \in [0, 1]^N$ (partout si g est continue) puisqu'on a, par définition du temps local,

$$\lambda_N(\{t \in [0, 1]^N : f(t) \notin L\}) = \int_{L^c} \alpha(x, [0, 1]^N) dx = 0.$$

Soient $t \in f^{-1}(L)$ et $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ une suite décroissante vers 0. Considérons une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ de points de \mathbb{R}^n à coefficients rationnels et tels que $|t - t_n| < \varepsilon_n$ et soit $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ une suite de rationnels décroissant vers 0 et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, $2\varepsilon_n \leq \delta_n \leq 3\varepsilon_n$. Pour tout $q > 0$ et $n \in \mathbb{N}_0$, On a

$$\varepsilon_n^{-N} \lambda_N(\{s \in B_N(t, \varepsilon_n) : |f(s) - f(t)| \leq q\phi(|s - t|)\}) \quad (1.4)$$

$$\leq \varepsilon_n^{-N} \lambda_N(\{s \in B_N(t_n, \delta_n) : |f(s) - f(t)| \leq q\phi(\varepsilon_n)\}) \quad (1.5)$$

$$= \varepsilon_n^{-N} \int_{B_d(f(t), q\phi(\varepsilon_n))} \alpha(x, B_N(t_n, \delta_n)) dx \quad (1.6)$$

$$\leq \varepsilon_n^{-N} \psi(c_N \delta_n^N) \cdot \int_{B_d(f(t), q\phi(\varepsilon_n))} g(x) dx. \quad (1.7)$$

7. Voir Définition A.3.4

Puisque $f(t) \in L$, on sait que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{c_d q^d (\phi(\varepsilon_n))^d} \int_{B_d(f(t), q\phi(\varepsilon_n))} |g(x) - g(f(t))| dx = 0.$$

On en déduit donc directement que l'intégrale de (1.7) est un $O((\phi(\varepsilon_n))^d)$. On conclut alors en remarquant que (1.7) est bornée par

$$C(\delta_n/3)^{-N} \psi(c_N \delta_n^N) (q\phi(\delta_n))^d$$

où C est une constante et il est clair, vu nos hypothèses, que l'expression converge vers 0. \square

Le théorème suivant découle alors directement

Théorème 1.3.2. *Si f est (LT) avec $\alpha \in L^2$ (resp. α est essentiellement borné) alors f n'est pas γ -Hölder pour tout $\gamma > N/d$ presque partout.*

Démonstration. Il suffit de prendre $\psi = 1$, $g(x) = \alpha(x)$ et $\phi(\varepsilon) = \varepsilon^\gamma$ dans le théorème précédent. \square

Nous donnons maintenant une tout autre condition pour qu'une fonction soit (J_γ) appelée condition [AC- p]. Cette notion est due à Geman et provient de [25].

Définition 1.3.3 (Conditions [AC- p]). On dit que f satisfait la *condition [AC-0]* si son temps local $\alpha(x, dt)$ est sans atome pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$. Si $p \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, f satisfait la condition *[AC- p]* si pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\alpha(x, A_p \times A_{N-p}) = \int_{A_p} \beta(s, x, A_{N-p}) ds$$

pour tout $A_p \in \mathcal{B}([0, 1]^p)$ et tout $A_{N-p} \in \mathcal{B}([0, 1]^{N-p})$ où $\beta(s, x, A)$ est un noyau d'occupation⁸ sur $[0, 1]^p \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{B}([0, 1]^{N-p})$ qui est sans atome pour presque tout (s, x) .

Remarque 1.3.4. Dans la Définition précédente, nous avons fixé les p premières composantes par simplicité d'écriture mais nous aurions pu choisir n'importe quel ensemble de p composantes.

Théorème 1.3.5. *Si f est [AC- p], alors f est (J_γ) pour $\gamma = (N-p)/d$.*

Démonstration. Nous traitons ici le cas $p > 0$, le cas $p = 0$ est un cas particulier dont la démonstration s'obtient facilement en adaptant le raisonnement ci-dessous. Nous reprenons aussi les notations de la Définition précédente.

Sans perte de généralité, on peut supposer que $\beta(s, x, \{t\}) = 0$ pour tous s, x, t .

Posons ensuite \mathcal{H} l'ensemble des rectangles à bord rationnels de $[0, 1]^{N-p}$ et posons $f_J(s, y) = \beta(s, y, J) \in L^1([0, 1]^p \times \mathbb{R}^d)$ pour tout $J \in \mathcal{H}$. On a alors

$$f_J(s, y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda(B((s, y), \varepsilon^{N/(d+p)}))} \int_{B((s, y), \varepsilon^{N/(d+p)})} f_J d\lambda$$

pour presque tout (s, y) .

8. voir la Définition 1.1.6

Considérons maintenant une famille dénombrable d'ensembles boréliens (de $[0, 1]^p \times \mathbb{R}^d$) E_J , $J \in \mathcal{H}$ telle que $\lambda(E_J^c) = 0$ et l'égalité précédente est réalisée pour tout $(s, y) \in E_J$. On a alors directement que $(f(t), t_1, \dots, t_p) \in E_J$ pour tout $J \in \mathcal{H}$ pour presque tout $t \in [0, 1]^N$. Pour un tel t et $q > 1$, on obtient

$$\begin{aligned} & \lambda \left(\left\{ s \in B_N(t, \varepsilon) : \frac{|f(t) - f(s)|}{|s - t|^{N-p}} \leq q \right\} \right) \\ & \leq \int_{B_N(t, \varepsilon)} \chi_{[0, q\varepsilon^{N-p}]}(|f(s) - f(t)|) ds \\ & \leq \int_{B(f(t), q\varepsilon^{(N-p)})} \alpha(y, \prod_{i=1}^N [t_i - \varepsilon, t_i + \varepsilon]) dy \\ & \leq \int_{\prod_{i=1}^p [t_i - \varepsilon, t_i + \varepsilon]} \int_{B(f(t), q\varepsilon^{(N-p)})} f_J(s, y) dy ds \\ & \leq \int_{B((f(t), t_1, \dots, t_k), q\varepsilon^{N/(d+p)})} f_J(s, y) dy ds \end{aligned}$$

pour tout ε suffisamment petit si $(t_{k+1}, \dots, t_N) \in J \in \mathcal{H}$.

On obtient alors

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{-N} \lambda \left(\left\{ s \in B_N(t, \varepsilon) : \frac{|f(t) - f(s)|}{|s - t|^{N-p}} \leq q \right\} \right) \\ & \leq C \beta((t_1, \dots, t_p), f(t), J) \end{aligned}$$

pour tout $J \in \mathcal{H}$ qui contient (t_{p+1}, \dots, t_N) . Il suffit alors de faire tendre J vers $\{(t_{p+1}, \dots, t_N)\}$ et d'utiliser le fait que $\beta(s, x, \{t\}) = 0$ pour conclure. \square

Remarque 1.3.6. Il est clair qu'il est impossible de prendre $p = N$ dans le théorème précédent. En effet, on montrera plus tard que $\alpha(x, dt)$ prend ses valeurs dans l'ensemble de niveau M_x qui est de mesure de Lebesgue nulle (voir Proposition 1.4.3).

Le corollaire suivant découle alors directement. Ce corollaire est particulièrement important et est une formulation courante du *principe de Berman*.

Corollaire 1.3.7. *Si $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est (LT) et si $\alpha_t(x) = \alpha(x, [0, t])$ est continu en tout (t, x) alors f est (J_1) . En particulier, f est dérivable au plus sur un ensemble négligeable.*

Démonstration. Il suffit de prendre $p = 0$ dans le théorème précédent. \square

On pourrait alors se demander si toute fonction de Jarnik est (LT). Il a été montré dans [13] que ce n'était pas le cas.

1.3.2 Régularité en fonction de $\alpha(., B)$

Dans cette section, nous donnons d'autres conditions sur α qui nous permettront une étude locale de la régularité de f .

Soit $B \in \mathcal{B}([0, 1]^N)$ ouvert et considérons $t_0 \in B$ et $\xi = f(t_0)$. Nous supposons aussi que $\alpha(\xi, B) = 0$. Considérons alors $\phi : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ une fonction positive, strictement croissante s'annulant en 0 et posons

$$\psi(u) = \text{ess.sup}_{x \in \bar{B}_d(\xi, u)} |\alpha(x, B) - \alpha(\xi, B)|.$$

On a alors le résultat suivant.

Théorème 1.3.8. *Supposons que*

$$\int_0^\delta \psi(u) (\phi^{-1}(u))^{-N} u^{d-1} du < \infty$$

et

$$\liminf_{u \rightarrow 0} \phi^{-1}(q^{-1}u)/\phi^{-1}(u) > 0, \text{ pour tout } q > 0.$$

Alors f est $(J_\phi(t_0))$.

Démonstration. On doit montrer que

$$\varepsilon^{-N} \lambda_N(\{s \in B_N(t_0, \varepsilon) : |f(s) - f(t_0)| \leq q\phi(|s - t_0|)\})$$

tend vers 0 pour tout $q > 0$.

On a

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{-N} \lambda_N(\{s \in B_N(t_0, \varepsilon) : |f(s) - f(t_0)| \leq q\phi(|s - t_0|)\}) \\ & \leq \int_{B_N(t_0, \varepsilon)} |s - t_0|^{-N} \chi_{]0, q[} \left(\frac{|f(s) - f(t_0)|}{\phi(|s - t_0|)} \right) ds \\ & \leq \int_{B_N(t_0, \varepsilon)} (\phi^{-1}(q^{-1}|f(s) - f(t_0)|))^{-N} ds. \end{aligned}$$

Pour montrer que cette dernière expression tend vers 0 si ε tend vers 0, il suffit d'établir que

$$\int_B (\phi^{-1}(q^{-1}|f(s) - \xi|))^{-N} ds < \infty.$$

On a

$$\begin{aligned} & \int_B (\phi^{-1}(q^{-1}|f(s) - \xi|))^{-N} ds \\ & = \int_{\mathbb{R}^d} (\phi^{-1}(q^{-1}|x - \xi|))^{-N} \alpha(x, B) dx \\ & \leq \int_{B_d(\xi, \delta)} (\phi^{-1}(q^{-1}|x - \xi|))^{-N} \psi(|x - \xi|) dx + \int_{B_d(\xi, \delta)^c} \alpha(x, B) dx (\phi^{-1}(q^{-1}\delta))^{-N} \\ & \leq \int_0^\delta u^{d-1} \phi^{-1}(u) \psi(u) du + (\phi^{-1}(q^{-1}\delta))^{-N} \lambda_N(B) \end{aligned}$$

où $\delta > 0$. La dernière inégalité est obtenue en effectuant un changement de variable en coordonnées polaires pour la première intégrale et en majorant la deuxième par $\lambda_N(B)$.

On conclut alors en utilisant l'intégrabilité du premier terme vu nos hypothèses. \square

On obtient le corollaire immédiat suivant

Corollaire 1.3.9. *Si $\alpha(x, B)$ admet une condition de Hölder d'ordre β en ξ , alors pour tout $\gamma > N/(d + \beta)$, f est $(J_\gamma(t_0))$.*

Jusqu'à la fin de cette section, nous nous restreignons à l'étude d'une fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ qui est (LT). Les résultats qui suivent proviennent de Berman [10] et nous seront particulièrement utile dans l'étude des trajectoires d'un processus gaussien.

Lemme 1.3.10. *Soit $I \subset [0, 1]$ un intervalle et posons*

$$c = \text{ess. sup}_I f, \quad b = \text{ess. inf}_I f, \quad |f(I)| = c - b.$$

Pour tout naturel m et tout $\varepsilon \in [0, 1[$, on a

$$|f(I)|^{2m+\varepsilon+1} \geq \frac{C\lambda^2(I)}{\int_{\mathbb{R}} |u|^{2m+\varepsilon} |\hat{\mu}(u)|^2 du}$$

où C est une constante strictement positive et $\hat{\mu}(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iuf(t)} dt$.

Démonstration. On peut bien sûr supposer b et c fini. On a d'une part, par la formule d'inversion de Fourier pour les mesures⁹,

$$\lambda(I) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-iuc} - e^{-iub}}{-2\pi iu} \hat{\mu}(u) du \quad (1.8)$$

et d'autre part, puisque α est nulle en dehors de $[b, c]$,

$$\lambda(I) = \mu([b, c]) = \int_b^c \alpha(x) dx.$$

Commençons par traiter le cas $m = 0$. L'intégrale (1.8) est majorée par

$$\int_{\mathbb{R}} |u|^{-\varepsilon/2} \frac{|e^{-iuc} - e^{-iub}|}{2\pi|u|} |\hat{\mu}(u)| |u|^{\varepsilon/2} du.$$

On obtient alors directement par l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$\lambda(I)^2 \leq \int_{\mathbb{R}} |u|^{-\varepsilon} \frac{|e^{-iuc} - e^{-iub}|^2}{4\pi^2|u|^2} du \int_{\mathbb{R}} |\hat{\mu}(u)|^2 |u|^\varepsilon du \leq C(c-b)^{1+\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\mu}(u)|^2 |u|^\varepsilon du.$$

La dernière égalité étant obtenue en effectuant la substitution $t = (c-b)u$ dans la première intégrale.

Traitons maintenant le cas $m > 0$. On peut bien évidemment supposer l'intégrale de l'énoncé finie, le résultat étant évident sinon. En particulier cela implique¹⁰ que α et ses m premières dérivées existent et sont de carrés intégrables. On obtient alors en intégrant par parties que

$$\int_b^c \alpha(x) dx = \frac{(-1)^m}{m!} \int_b^c (x-b)^m D^m \alpha(x) dx$$

9. Voir par exemple le théorème 16.1.1 de [24].

10. Voir par exemple le théorème 68 de [56].

puisque par continuité, α et ses $m - 1$ premières dérivées s'annulent en b et c et où D est l'opérateur de dérivation. En appliquant la relation de Parseval, on obtient alors directement que

$$\int_b^c \alpha(x) dx = \frac{(-i)^m}{2\pi m!} \int_{\mathbb{R}} \int_b^c e^{iux} (x-b)^m dx u^m \hat{\mu}(u) du.$$

On conclut alors comme dans le cas $m = 0$ en faisant apparaître $|u|^{\varepsilon/2}$ et $|u|^{-\varepsilon/2}$ et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. \square

Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, considérons $I_{n,k}$, $k \in \{1, \dots, 2^n\}$, un découpage de I en intervalles de longueur 2^{-n} et posons $\mu_{n,k}$ la transformée de Fourier de $\alpha(\cdot, I_{n,k})$. Le résultat suivant exploite la notion de γ -variation que nous définissons maintenant.

Définition 1.3.11. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, la γ -variation de f ($\gamma > 1$) est définie par

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{0 \leq t_1 < \dots < t_n \leq 1} \sum_{j=1}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)|^\gamma.$$

Remarque 1.3.12. La limite de la définition existe bien (mais est éventuellement égale à $+\infty$). En effet, il est clair que la suite

$$\left(\sup_{0 \leq t_1 < \dots < t_n \leq 1} \sum_{j=1}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)|^\gamma \right)_{n \geq 2}$$

est croissante.

Proposition 1.3.13. Si $m \in \mathbb{N}_0$ et $\varepsilon > 0$ sont tels que

$$\liminf_n \sum_{k=1}^{2^n} \int_{\mathbb{R}} |u|^{2m+\varepsilon} |\mu_{n,k}(u)|^2 du = 0$$

alors la γ -variation de f est infinie pour $\gamma = 2m + \varepsilon + 1$.

Démonstration. Par le Lemme 1.3.10 et en se rappelant que la moyenne harmonique est toujours inférieure ou égale à la moyenne arithmétique, on obtient l'inégalité

$$\sum_k |f(I_{n,k})|^{2m+\varepsilon+1} \geq \frac{C}{\sum_k \int_{\mathbb{R}} |u|^{2m+\varepsilon} |\mu_{n,k}(u)|^2 du}.$$

L'hypothèse permet alors de conclure. \square

Nous pouvons obtenir un résultat similaire pour la condition de Hölder. Commençons par énoncer le résultat suivant qui ne nécessite pas l'utilisation du temps local.

Lemme 1.3.14. Supposons que f satisfait la condition de Hölder d'ordre $\theta > 0$ en x_0

$$|f(x) - f(x_0)| \leq c|x - x_0|^\theta$$

pour $|x - x_0| < \delta$. Si I est un intervalle de longueur $|I|$ (strictement positive) inférieure à δ qui contient x_0 alors

$$|f(I)| \leq 2|I|^\theta c.$$

Démonstration. Soient $x, y \in I$. On peut supposer x, y, x_0 distinct sinon le résultat est évident. On obtient directement par l'inégalité triangulaire que

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|I|^\theta} \leq \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^\theta} \frac{|x - x_0|^\theta}{|I|^\theta} + \frac{|f(y) - f(x_0)|}{|y - x_0|^\theta} \frac{|y - x_0|^\theta}{|I|^\theta}$$

et le résultat annoncé en résulte. \square

On en tire le corollaire suivant

Corollaire 1.3.15. *Si*

$$\limsup_n 2^{n\theta} \min_k |f(I_{n,k})| = +\infty$$

alors f ne satisfait pas de condition de Hölder d'ordre θ en un point de $[0, 1]$.

Ce corollaire nous mène alors à un résultat similaire à la Proposition 1.3.13 pour la condition de Hölder.

Proposition 1.3.16. *Si $m \in \mathbb{N}_0$ et $\varepsilon > 0$ sont tels que*

$$\liminf_n \sum_{k=1}^{2^n} \int_{\mathbb{R}} |u|^{2m+\varepsilon} |\mu_{n,k}(u)|^2 du = 0$$

alors f ne satisfait nulle part une condition de Hölder d'ordre $p = 2/(2m + \varepsilon + 1)$.

Démonstration. On obtient facilement à partir du Lemme 1.3.10 que

$$\min_k |f(I_{n,k})|^{2m+1+\varepsilon} \geq \frac{C}{2^{2n} \sum_{k=1}^{2^n} \int_{\mathbb{R}} |u|^{2m+\varepsilon} |\mu_{n,k}(u)|^2 du}.$$

On tire alors vu l'hypothèse que $\limsup_n 2^{2n} \min_k |f(I_{n,k})|^{2m+1+\varepsilon} = +\infty$ et on peut donc conclure par le corollaire précédent. \square

Les Propositions 1.3.13 et 1.3.16 ne semblent pas pratiques à utiliser à première vue puisque leur hypothèse ne paraît pas simple à vérifier. Nous verrons cependant qu'elles le sont (notamment pour les processus gaussiens) sous une hypothèse d'intégrabilité de la fonction de covariance.

1.4 Ensembles de niveau

Dans cette section, nous nous intéressons aux ensembles de niveau d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui est (LT).

Définition 1.4.1. L'*ensemble de niveau* de f en $x \in \mathbb{R}$ est l'ensemble

$$M_x = \{t \in [0, 1]^N : f(t) = x\}$$

On définit aussi l'ensemble

$$L_t = M_{f(t)}$$

pour $t \in [0, 1]^N$.

On obtient la propriété immédiate suivante liant M_x à α .

Proposition 1.4.2. *Pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\alpha(x, M_x^c) = 0$.*

Démonstration. Considérons la fonction $g : [0, 1]^N \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $g(t, x) = 0$ si $t \in M_x$ et 1 sinon. Par le Théorème 1.1.7, on obtient

$$\int_{[0,1]^N} g(t, f(t)) dt = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{M_x^c} \alpha(x, dt) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \alpha(x, M_x^c) dx.$$

Il suffit alors de remarquer que la première intégrale est nulle puisque $g(t, f(t)) = 0$ quel que soit t . \square

La propriété suivante est aussi immédiate

Proposition 1.4.3. *Si f est (LT), alors pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a*

$$\lambda(M_x) = 0.$$

Démonstration. On a $\lambda(M_x) = \mu_{[0,1]^N}(\{x\}) = 0$ car μ est absolument continu par rapport à λ . \square

Dans la suite de cette section, nous nous restreignons à l'étude de fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont (LT). Nous donnons maintenant quelques résultats sur la cardinalité des ensembles M_x et L_t .

Théorème 1.4.4. *Supposons que f soit [AC – 0] et continu, alors pour presque tout $t \in [0, 1]$, L_t est indénombrable.*

Démonstration. Rappelons que l'on peut définir le support d'une mesure comme étant le complémentaire du plus grand ouvert de mesure nulle. De plus, par hypothèse, on sait que, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, le support de $\alpha(x, dt)$ est soit vide soit indénombrable, cette seconde possibilité apparaissant lorsque $\alpha(x, [0, 1]) > 0$. Or on sait que pour presque tout $t \in [0, 1]$, $\alpha(f(t), [0, 1]) > 0$, ce qui implique que le support de $\alpha(f(t), dt)$ est indénombrable pour presque tout t . On conclut alors en se rappelant que le support de $\alpha(x, dt)$ est inclus dans M_x . \square

Le résultat suivant est dû à Berman [12].

Théorème 1.4.5. *Si $(x, t) \mapsto \alpha_t(x) = \alpha(x, [0, t])$ est continu en tout (t, x) , alors $\{x : M_x \text{ est dénombrable}\}$ n'est nulle part dense dans l'image de f .*

Avant de passer à la preuve, nous énonçons un résultat de théorie de la mesure appelé *théorème de Lusin*. Le résultat est par exemple montré dans [44].

Théorème 1.4.6. *Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset [0, 1]$ tel que $\lambda([0, 1] \setminus K) < \varepsilon$ et tel que f est continu sur K (pour la topologie induite sur K).*

Démonstration du Théorème 1.4.5. On va en fait montrer que l'ensemble $\{x : \alpha(x) = 0\}$ n'est nulle part dense dans l'image de f . Pour ce faire, par le théorème de Lusin, il suffit d'établir le résultat pour f continu.

Soit alors I l'image de f . Il est clair que I est un intervalle fermé. Puisque l'ensemble des zéros de α est fermé (par continuité), il suffit d'établir que tout intervalle ouvert Ω inclus dans I n'est pas inclus dans $\{x : \alpha(x) = 0\}$. Procérons par l'absurde et supposons qu'il existe un intervalle ouvert $\Omega \subset I \cap \{x : \alpha(x) = 0\}$. L'ensemble $f^{-1}(\Omega)$ est de mesure nulle (puisque le temps local de f est nul sur Ω). On en tire que $f^{-1}(\Omega)$ est vide car, par continuité, cet ensemble est un intervalle ouvert (de mesure nulle). Or cela implique que I n'est pas connexe, ce qui est absurde. \square

Nous nous intéressons maintenant à la dimension de Hausdorff (notée \dim_H) des ensembles de niveau de f . Pour une introduction à la mesure de Hausdorff, nous renvoyons à l'annexe A. Pour rappel, la dimension de Hausdorff permet de caractériser et de classer les ensembles fractales. Le théorème suivant est dû à Berman [9].

Théorème 1.4.7. *Supposons que f est continu et que $(x, t) \mapsto \alpha_t(x)$ est continu en (x, t) et satisfait une condition de Hölder uniforme en t d'ordre β i.e. il existe $C > 0$ et $h_0 > 0$ tels que*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}, t \in [0, 1]} |\alpha_{t+h}(x) - \alpha_t(x)| \leq C|h|^\beta$$

pour tout $h \leq h_0$. On a alors

$$\{x : \dim_H M_x < \beta\} \subset \{x : \alpha(x) = 0\}.$$

Avant de passer à la preuve, rappelons que nous avons montré à la Proposition 1.1.8 que $\alpha(f(t)) > 0$ pour presque tout $t \in [0, 1]$.

Démonstration. Puisque $(x, t) \mapsto \alpha_t(x)$ est continu, il s'agit d'une fonction croissante et bornée en t pour tout x . De plus, par continuité de f , on sait que le support de $t \rightarrow \alpha_t(x)$ est inclus dans M_x . De là, si cet ensemble est de dimension inférieure à β , alors, vu le lemme suivant, on a $\alpha(x, M_x) = 0$ et donc $\alpha(x) = \alpha(x, [0, 1]) = 0$. \square

Lemme 1.4.8. *Si G est une fonction bornée et croissante sur un intervalle I et satisfaisant une condition de Hölder uniforme d'ordre $\gamma < 1$ et si $B \subset I$ est de dimension de Hausdorff $\beta < \gamma$, alors*

$$\int_B dG(t) = 0$$

où l'intégrale est à comprendre au sens de Lebesgue-Stieltjes.

Démonstration. Rappelons que nous notons $|I|$ le diamètre de l'ensemble I . Par définition de la mesure de Hausdorff, pour tout δ tel que $\beta < \delta < \gamma$ et pour tout $n > 0$, il existe un recouvrement de B par des ouverts $I_{n,k}$ $k \in \mathbb{N}_0$ tels que

- $|I_{n,k}| \leq 1/n$ pour tout k .
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} |I_{n,k}|^\delta < +\infty$.

On en tire alors directement l'existence de recouvrements satisfaisant ces propriétés et tels que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} |I_{n,k}|^\gamma = 0.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \int_B dG(t) &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{I_{n,k}} dG(t) \\ &\leq C \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} |I_{n,k}|^\gamma = 0. \end{aligned}$$

□

1.5 Temps local d'un processus stochastique

Nous nous attaquons maintenant au temps local d'un processus stochastique qui constitue la partie principale de ce document. En effet, le temps local est bien plus utilisé en pratique pour l'étude de processus stochastiques. Dans toute cette partie, nous supposons toujours disposer d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1.5.1 Existence et généralités

Dans cette sous-section, nous généralisons les énoncés des sections 1.1 et 1.2 à l'étude de processus stochastiques.

Définition 1.5.1. Soit $X : [0, 1]^N \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d : (t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$ un processus stochastique mesurable. Pour tout $\omega \in \Omega$, la *mesure d'occupation* de $t \mapsto X_t(\omega)$ sur A est la mesure $\mu_A(B, \omega) = \lambda_N(\{A \cap X(\omega)^{-1}(B)\})$, $A \in \mathcal{B}([0, 1]^N)$, $B \in \mathcal{B}^d$.

Définition 1.5.2. Dans les mêmes conditions, supposons que $\mu_A(\cdot, \omega) \ll \lambda_d$ pour tout $A \in \mathcal{B}([0, 1]^N)$ presque sûrement. Dans ce cas, on définit le *temps local* $\alpha(\cdot, \omega, A)$ de X comme étant la dérivée de Radon-Nikodym de sa mesure d'occupation sur A . En d'autres termes,

$$\mu_A(B, \omega) = \int_B \alpha(x, \omega, A) dx,$$

pour tout $A \in \mathcal{B}([0, 1]^N)$ et $B \in \mathcal{B}^d$.

Dans ce cas, on dit que X est (LT).

Dans ce qui suit, on se permettra d'omettre ω dans nos écritures pour plus de lisibilité lorsque cela ne crée pas de confusion.

Comme dans le cas déterministe, on peut obtenir l'existence du temps local via la transformée de Fourier. Le résultat suivant découle directement du Théorème 1.2.2.

Théorème 1.5.3. *Si*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{[0,1]^N} \int_{[0,1]^N} \mathbb{E}[e^{i\theta \cdot (X_s - X_t)}] ds dt d\theta < \infty,$$

alors X est (LT) avec son temps local $\alpha(\cdot, \omega) \in L^2(\mathbb{R}^d)$ presque sûrement.

Démonstration. On a, par le théorème de Fubini,

$$\mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}^d} \int_{[0,1]^N} \int_{[0,1]^N} e^{i\theta \cdot (X_s - X_t)} ds dt d\theta \right] < \infty.$$

En effet, comme au Théorème 1.2.2, cette dernière expression implique¹¹

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}[|\hat{\mu}(\theta)|^2] d\theta < +\infty.$$

Le théorème de Fubini s'applique donc bien et on en tire presque sûrement,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{[0,1]^N} \int_{[0,1]^N} e^{i\theta \cdot (X_s - X_t)} ds dt d\theta < \infty.$$

On conclut alors directement par le Théorème 1.2.2. \square

Ce théorème admet une réécriture utilisant la densité (si elle existe) de $X_t - X_s$.

Corollaire 1.5.4. *Si pour tous $s, t \in [0, 1]^N$,*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbb{E}[e^{i\theta \cdot (X_t - X_s)}]| d\theta < \infty,$$

alors la densité $x \mapsto p(x; t, s)$ de la variable aléatoire $X_t - X_s$ existe et est continue.

En particulier, les hypothèses du théorème précédent sont équivalentes à

$$\int_{[0,1]^N} \int_{[0,1]^N} p(0; t, s) ds dt < +\infty.$$

Démonstration. La première assertion découle du théorème d'inversion des fonctions caractéristiques. En effet, si la fonction caractéristique ϕ d'une variable aléatoire Y est L^1 , on peut considérer sa transformée de Fourier

$$p_Y : x \mapsto \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot \theta} \phi(\theta) d\theta.$$

On obtient alors, pour tout θ ,

$$\phi(\theta) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\theta \cdot x} p_Y(x) dx.$$

On en tire alors, par caractérisation de la loi d'une variable aléatoire par sa fonction caractéristique, que Y admet p_Y comme fonction de densité.

La seconde assertion est alors évidente puisque, pour tout s, t ,

$$p(0; t, s) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i0 \cdot \theta} \mathbb{E}[e^{i\theta \cdot (X_t - X_s)}] d\theta.$$

\square

11. nous avons pû inverser les intégrales sur $[0, 1]^N$ avec l'espérance par le théorème de Fubini, puisque la fonction à intégrer est continue et de module 1, ce dernier théorème s'applique bien.

Nous pouvons aussi donner l'existence du temps local via une limite. Les résultats qui suivent sont des analogues au Théorème 1.2.3 dans le cas déterministe.

Théorème 1.5.5. *Si*

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-d} \int_{[0,1]^N} \mathbb{P}(|X(t) - X(s)| \leq \varepsilon) \, ds < +\infty$$

pour presque tout t , alors X est (LT).

Démonstration. Il suffit de se référer au Théorème 1.2.3 dans lequel on a pris l'espérance de V et appliqué le lemme de Fatou. \square

On peut même se contenter d'une condition locale pour obtenir le résultat.

Théorème 1.5.6. *Soient $T_n \nearrow [0, 1]^N$ et $\Gamma_n \nearrow \mathbb{R}^d$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $t \in T_n$,*

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-d} \int_{T_n} \mathbb{P}(|X(t) - X(s)| \leq \varepsilon, X(s) \in \Gamma_n, X(t) \in \Gamma_n) \, ds < +\infty,$$

alors X est (LT).

Enfin, nous pouvons obtenir l'analogue de la condition b) du Théorème 1.2.3.

Théorème 1.5.7. *Le processus X est (LT) avec $\alpha \in L^2(\lambda_d \times \mathbb{P})$ si et seulement si*

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-d} \int_{[0,1]^N} \int_{[0,1]^N} \mathbb{P}(|X(s) - X(t)| \leq \varepsilon) \, ds \, dt \leq +\infty.$$

Les résultats obtenus dans le cas déterministe peuvent se transposer au cas aléatoire. On a les résultats suivants donnant des conditions pour qu'un processus soit $[AC - p]$.

Théorème 1.5.8. *Soit Γ_n une suite d'ensemble croissante telle que $\Gamma_n \nearrow \mathbb{R}^d$ et pour tout n ,*

$$\int_{[0,1]^N} \sup_{\varepsilon > 0} \varepsilon^{-d} \mathbb{P}(\{|X_s - X_t| \leq \varepsilon, X_s \in \Gamma_n, X_t \in \Gamma_n\}) \, ds < +\infty$$

pour presque tout t . Alors X est (LT) et pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\alpha(x, dt)$ est sans atome (i.e. X est $[AC - 0]$).

Démonstration. L'existence de α découle directement du Théorème 1.5.6. Posons c_d la mesure de la boule unité de \mathbb{R}^d , on a clairement si $B \in \mathcal{B}([0, 1]^N)$ que, pour presque tout t ,

$$\mathbb{P}(\alpha(X(t), B \cap X^{-1}(\Gamma_n)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{c_d \varepsilon^d} \int_B \chi_{\Gamma_n}(X_s) \chi_{]0, \varepsilon[}(|X(t) - X(s)|) \, ds) = 1.$$

On obtient alors, par le lemme de Fatou, pour presque tout $t \in [0, 1]^N$,

$$\mathbb{E}[\alpha(X(t), B \cap X^{-1}(\Gamma_n)) \chi_{\Gamma_n}(X(t))] \leq \frac{1}{c_d} \int_B \sup_{\varepsilon > 0} \varepsilon^{-d} \mathbb{P}(|X(s) - X(t)| \leq \varepsilon, X(s) \in \Gamma_n, X(t) \in \Gamma_n) \, ds.$$

En particulier, cette dernière égalité est vraie pour presque tout t simultanément pour tous les intervalles B à bords rationnels. Pour un tel t , on peut alors choisir une suite (B_j) de tels ensembles telle que $B_j \searrow \{t\}$. On obtient alors

$$\mathbb{E}[\alpha(X(t), \{t\}) \chi_{\Gamma_n}(X(t))] = 0.$$

En faisant tendre Γ_n vers \mathbb{R}^d , on a finalement

$$\mathbb{P}(\alpha(X(t), \{t\}) = 0) = 1$$

presque partout, ce qui suffit pour obtenir que α est sans atome presque sûrement presque partout et on conclut par la Proposition 1.1.9. \square

Ce théorème admet une extension pour des conditions $[AC - p]$ avec $p > 0$.

Théorème 1.5.9. *Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $0 < p < N$ et supposons que*

$$\int_{[0,1]^{N-p}} \sup_{\varepsilon > 0} \varepsilon^{-d} \mathbb{P}(\{|X(t_1, \dots, t_p, s_1, \dots, s_{N-p}) - X(t_1, \dots, t_N)| \leq \varepsilon\}) \lambda_{N-d}(ds) < +\infty$$

pour presque tout $t \in [0, 1]^N$.

Alors X est (LT) et satisfait la condition $[AC - p]$.

Démonstration. Posons $t^* = (t_1, \dots, t_p)$ et remarquons que $s \in [0, 1]^{N-p} \mapsto X(t^*, s)$ est (LT) et admet comme temps local $\alpha(t^*; x, A)$ ($A \in \mathcal{B}([0, 1]^{N-p})$). Il est clair que ce processus est [AC-0] vu la démonstration du théorème précédent.

Considérons alors les boréliens de $[0, 1]^N$ de la forme $B_p \times B_{N-p}$ où B_p est un borélien de $\mathcal{B}([0, 1]^p)$. On a

$$\int_{B_p \times B_{N-p}} \chi_{\Gamma}(X(t)) dt = \int_{\Gamma} \int_{B_p} \alpha(t^*; x, B_{N-p}) dt^* dx$$

ce qui prouve que X est (LT) et satisfait la condition [AC- p]. \square

1.5.2 Quelques mots sur les processus Gaussien

Nous nous attaquons maintenant à l'étude du temps local des processus et champs gaussiens. Pour rappel, un processus est dit gaussien si toutes ses lois fini-dimensionnelles sont des vecteurs gaussiens. Dans ce cas, le processus est entièrement caractérisé par sa fonction moyenne μ et son opérateur de covariance K .

Avant d'étudier le temps local de tels processus, nous pouvons déjà donner une condition suffisante d'existence de ce dernier via le Corollaire 1.5.4.

Proposition 1.5.10. *Soit X un champ gaussien. Si*

$$\int_{[0,1]^N} \int_{[0,1]^N} \Delta(s, t)^{-1/2} ds dt < +\infty$$

où $\Delta(s, t)$ est le déterminant de la matrice de variance-covariance du vecteur aléatoire $X_s - X_t$, alors X est (LT).

On peut utiliser une intégrale du même type afin de prouver un résultat plus important dans le cas $N = d = 1$. Le théorème suivant provient de Berman [10].

Théorème 1.5.11. *Soit X_t ($t \in [0, 1]$) un processus gaussien réel et soient $m \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon \in [0, 1[$. Posons $p = 2m + \varepsilon$ et supposons que*

$$\int_{[0,1]} \int_{[0,1]} \Delta(s, t)^{-(p+1)/2} ds dt < +\infty, \quad (1.9)$$

où Δ a été défini à la Proposition 1.5.10. Alors

- les trajectoires ne satisfont pas de condition de Hölder d'ordre $2/(p+1)$ presque sûrement;
- Les trajectoires ont une γ -variation infinie pour $\gamma = p+1$ presque sûrement.

Démonstration. Supposons d'abord sans perte de généralité que le processus est centré. Vu les Propositions 1.3.13 et 1.3.16 dont on reprend les notations, il suffit d'établir que

$$\liminf_n \sum_{k=1}^{2^n} \int_{\mathbb{R}} |u|^{2m+\varepsilon} |\mu_{n,k}(u)|^2 du = 0$$

presque sûrement.

Pour ce faire, posons $I = [0, 1]$ commençons par remarquer que

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}} |u|^p |\mu(u)|^2 du \\ &= \int_{\mathbb{R}} |u|^p \int_I \int_I \mathbb{E}[e^{iu(X(t)-X(s))}] ds dt du \\ &= \int_{\mathbb{R}} |u|^p \int_I \int_I e^{-\frac{1}{2}u^2 \mathbb{E}[(X(t)-X(s))^2]} ds dt du \\ &= C(p) \int_I \int_I \mathbb{E}[(X(s) - X(t))^2]^{-(p+1)/2} ds dt \end{aligned}$$

pour tout $p \geq 0$ où $C(p)$ est une constante dépendant de p et la dernière égalité est obtenue via le changement de variable $v^2 = u^2 \mathbb{E}[(X(s) - X(t))^2]$. La dernière intégrale obtenue étant finie par hypothèse.

Puisque la mesure de $I_{n,k}$ vaut 2^{-n} et puisque $\mathbb{E}[(X(s) - X(t))^2]$ est intégrable, on obtient

$$\lim_n \sum_{k=1}^{2^n} \int_{I_{n,k}} \int_{I_{n,k}} \mathbb{E}[(X(s) - X(t))^2]^{-(p+1)/2} ds dt = 0$$

ce qui implique directement

$$\liminf_n \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{2^n} \int_{\mathbb{R}} |u|^{2m+\varepsilon} |\mu_{n,k}(u)|^2 du \right] = 0.$$

Le lemme de Fatou permet alors de conclure. □

Nous avions montré précédemment que si α est L^2 , alors, presque sûrement, les trajectoires ne satisfont pas de condition de Hölder d'ordre supérieures à N/d presque partout. Le résultat précédent est donc un raffinement de ce premier résultat dans le cas $N = d = 1$. En particulier si m est au moins égal à 1, on a que, presque sûrement, les trajectoires du processus gaussien ne sont nulle part dérivables.

Pour le résultat suivant, nous nous restreignons à l'étude des processus gaussiens réels à valeurs réelles (c'est-à-dire $N = d = 1$). Nous allons donner une réécriture du temps local d'un processus gaussien sous une forme intégrale faisant penser au théorème de Fourier. La proposition suivante provient de [12].

Proposition 1.5.12. *Si X est un processus gaussien tel que l'intégrale (1.9) existe et est finie, alors son temps local existe et peut s'écrire sous la forme*

$$\alpha(x, [0, 1]) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-iux} \int_0^1 e^{iuX_t} dt du.$$

Démonstration. Pour tout n naturel non nul, posons

$$\psi_n(x, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n e^{-iux} \int_0^1 e^{iuX(t, \omega)} dt du.$$

Commençons par montrer que sous nos hypothèses, il existe une variable aléatoire $\psi(x)$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[|\psi_n(x) - \psi(x)|^2] = 0$$

uniformément en x . Si $n > m$, on a

$$\psi_n(x) - \psi_m(x) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-n}^{-m} e^{-iux} \int_0^1 e^{iuX(t)} dt du + \int_m^n e^{-iux} \int_0^1 e^{iuX(t)} dt du \right)$$

et en utilisant l'inégalité $|x + y|^2 \leq 2|x|^2 + 2|y|^2$ ($x, y \in \mathbb{C}$), on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|\psi_n(x) - \psi_m(x)|^2] &\leq 2 \mathbb{E} \left[\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{-m} e^{-iux} \int_0^1 e^{iuX(t)} dt du \right|^2 \right] \\ &\quad + 2 \mathbb{E} \left[\left| \frac{1}{2\pi} \int_m^n e^{-iux} \int_0^1 e^{iuX(t)} dt du \right|^2 \right]. \end{aligned}$$

Le premier terme est majoré par

$$\frac{2}{(2\pi)^2} \int_{-n}^{-m} \int_{-n}^{-m} \int_0^1 \int_0^1 |\mathbb{E}[e^{iuX(s) - ivX(t)}]| ds dt du dv$$

qui converge uniformément vers 0 si $n, m \rightarrow +\infty$ par intégrabilité (vu l'hypothèse). En procédant de manière analogue avec le second terme, on obtient que $(\psi_n)_n$ forme une suite uniformément de Cauchy, ce qui suffit.

Il nous faut maintenant établir que la fonction ψ correspond bien au temps local $\alpha(\cdot, [0, 1])$. Pour ce faire, nous allons montrer que ψ est intégrable sur tous les intervalles bornés de \mathbb{R} et que

$$\int_a^b \psi(x) dx = \mu_{[0,1]}([a, b])$$

où μ est la mesure d'occupation de X . Puisque ψ_n est continu, l'intégrale

$$\int_a^b \psi_n(x) dx$$

est bien définie ($a \leq b$) et puisque μ est sans atome, la formule d'inversion des fonctions caractéristiques donne directement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_n(x) dx = \mu_{[0,1]}([a, b]).$$

Il nous reste donc à montrer que la limite peut "rentrer" dans l'intégrale. Puisque ψ_n est à la fois continu et borné (par n/π), on obtient, par le théorème de la convergence monotone, que $x \mapsto \mathbb{E}[|\psi_n(x)|^2]$ est continu. On en déduit que $x \mapsto \mathbb{E}[|\psi(x)|^2]$ est aussi continu (par convergence uniforme). On obtient donc l'intégrabilité de cette dernière expression sur tous les intervalles bornés et le théorème de Tonelli-Fubini implique alors que ψ est de carré intégrable presque sûrement et donc absolument intégrable sur tous les intervalles bornés de \mathbb{R} presque sûrement. Il nous reste alors à montrer que cette intégrale vaut bien la mesure d'occupation de l'intervalle sur lequel on intègre. On a

$$\begin{aligned} & \left| \mu_{[0,1]}([a, b]) - \int_a^b \psi(x) dx \right| \\ & \leq \left| \mu_{[0,1]}([a, b]) - \int_a^b \psi_n(x) dx \right| + \int_a^b |\psi(x) - \psi_n(x)| dx. \end{aligned}$$

Vu ce qui précède, on sait déjà que le premier terme converge vers 0 si n tend vers l'infini. Pour le second terme, on tire de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que son espérance est majorée par la racine carrée de

$$|b - a| \int_a^b \mathbb{E}[|\psi(x) - \psi_n(x)|^2] dx$$

qui converge vers 0 si n tend vers l'infini. Ainsi, par le théorème de Fubini, on en tire que

$$\int_a^b \psi(x) dx = \mu_{[0,1]}([a, b])$$

pour presque tous $a, b \in \mathbb{R}$ presque sûrement. On étend le résultat à tous $a, b \in \mathbb{R}$ presque sûrement par (absolue) intégrabilité de ψ et absolue continuité de μ . \square

Chapitre 2

Non-déterminisme local

Dans ce chapitre, nous présentons la notion de non-déterminisme local et mettons en évidence la puissance de cette propriété associée au temps local. Nous commençons ce chapitre en remontant à la genèse de ce concept dû à Berman [11] dans le cadre de processus gaussien réels à valeurs réelles. Nous étendons ensuite pas à pas la définition pour des processus de dimensions arbitraires (qui devient bien moins intuitive). Une fois le concept posé, nous nous attaquons à la reproduction des résultats de Pitt [47] qui montre notamment la bicontinuité du temps local dans ce cas et des conditions de régularités de Hölder précises. Ensuite, nous donnons un exemple de processus localement non-déterministe et montrons en particulier que le mouvement Brownien fractionnaire l'est.

Nous développons ensuite les résultats de Xiao [60] dans le cadre de processus fortement localement non-déterministes. Plus précisément, nous présentons la loi du logarithme itéré (qui raffine la régularité de Hölder) et étudions les ensembles de niveau en déterminant leur fonction de dimension (de Hausdorff).

2.1 Introduction

Nous nous attaquons maintenant au concept de non-déterminisme local (LND). Ce concept introduit par Berman en 1973 [11] pour généraliser ses précédents papiers sur le temps local de processus gaussiens joue maintenant un rôle central dans l'étude du temps local. Nous introduisons d'abord le non-déterminisme en suivant les pas de Berman.

Considérons $X(t)$, $t \in \mathbb{R}$ un processus gaussien (réel) centré. On sait que la meilleure manière d'estimer la future valeur $X(t+h)$ pour $h > 0$ sachant $X(s)$, $s \leq t$ est donné par l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[X(t+h)|X(s), s \leq t]$. L'erreur de prédiction est alors donnée par la variance conditionnelle $\mathbb{V}[X(t+h)|X(s), s \leq t]$ et le processus est non-déterministe si cette dernière quantité est strictement positive pour $h > 0$.

Soit alors $J \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. Supposons qu'il existe $d > 0$ tel que

- (1) $\mathbb{V}[X(t) - X(s)] > 0$ si $t, s \in J$ et $0 < |t - s| \leq d$;
- (2) $\mathbb{V}[X(t)] > 0$ pour tout $t \in J$.

Considérons alors $m \geq 2$ points arbitraires $t_1, \dots, t_m \in J$ tels que

$$t_1 < \dots < t_m.$$

Comme précédemment, on peut estimer la valeur de $X(t_m)$ via $\mathbb{E}[X(t_m)|X(t_1), \dots, X(t_{m-1})]$ et l'erreur de prédiction est toujours donnée par la variance conditionnelle

$\mathbb{V}[X(t_m)|X(t_1), \dots, X(t_{m-1})]$. Cette dernière quantité est bien sûr égale à

$$\mathbb{V}[X(t_m) - X(t_{m-1})|X(t_1), \dots, X(t_{m-1})].$$

On aimera mesurer l'impact du conditionnement sur la variabilité de $X(t_m) - X(t_{m-1})$. Pour ce faire, définissons l'erreur de prédiction relative

$$V_m = \frac{\mathbb{V}[X(t_m) - X(t_{m-1})|X(t_1), \dots, X(t_{m-1})]}{\mathbb{V}[X(t_m) - X(t_{m-1})]}.$$

Il est clair que $0 \leq V_m \leq 1$. De plus, si $V_m = 1$ alors l'incrément est complètement imprévisible puisque l'ajout de l'information $X(t_1), \dots, X(t_{m-1})$ n'impacte pas la variance. Au contraire, si $V_m = 0$ alors l'incrément est complètement prévisible. On en tire la définition suivante

Définition 2.1.1. Soit X un processus gaussien centré et réel et soit $J \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Supposons que X satisfait les conditions (1) et (2). Le processus X est *localement non-déterministe* (LND) sur J si

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{t_m - t_1 \leq \varepsilon} V_m > 0$$

pour tout entier $m \geq 2$ et tous $t_1, \dots, t_m \in J$ tels que $t_1 < \dots < t_m$.

Remarque 2.1.2. Il est clair que V_m ne peut que décroître si on augmente le nombre de variables dans le conditionnement. Dès lors, une condition suffisante pour être (LND) est donnée par

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{t-u \leq \varepsilon} \frac{\mathbb{V}[X(t) - X(s)|X(v), u \leq v \leq s]}{\mathbb{V}[X(t) - X(s)]} > 0 \quad (2.1)$$

pour $u, s, t \in J$ tels que $u < s < t$.

Il n'est pas clair de savoir si cette condition est aussi nécessaire pour être (LND). Dans son papier [11], Berman écrit¹ "nous n'avons pas été capables de déterminer si cette condition est nécessaire ou non pour le non-déterminisme local".

Il existe de nombreuses conditions pour qu'un processus gaussien réel soit (LND), nous référons à [11] pour une étude plus approfondie. Nous nous attaquons maintenant à une généralisation du non-déterminisme local aux processus gaussiens à plusieurs dimensions. Cette généralisation est due à Pitt [47] et est aussi abordée dans [26] et [2].

Nous commençons par donner la version de Ayache [2] dont la formulation se rapproche de celle de Berman.

Définition 2.1.3. Soit $X(t), t \in I \subset \mathbb{R}^n$, un processus gaussien centré à valeurs réelles. On dit que X est *localement non déterministe* (LND) sur l'intervalle compact I si

$$\inf_{t \in I} \mathbb{V}(X(t)) > 0$$

et s'il existe $\delta > 0$ tel que

1. $\mathbb{V}(X(t_1) - X(t_2)) \neq 0$ pour tout $t_1, t_2 \in I$ tels que $|t_1 - t_2| \leq \delta$;

1. Nous avons pris le soin de traduire cette citation de l'anglais.

2. pour tout $n \geq 2$ naturel, il existe $c \in]0, 1[$ tel que

$$\mathbb{V}[X(t_n)|X(t_1), \dots, X(t_{n-1})] \geq c \mathbb{V}[X(t_n) - X(t_{n-1})] \quad (2.2)$$

pour tous $t_1, \dots, t_n \in I$ tels que

$$|t_{j+1} - t_j| \leq |t_{j+1} - t_i| \leq \delta$$

pour $1 \leq i \leq j < n$.

Si de plus la constante c peut être choisie indépendamment de n alors le processus est dit *fortement localement non-déterministe*.

Remarque 2.1.4. A ce stade, il est naturel de se demander s'il existe des processus LND. Nous montrerons que le mouvement brownien fractionnaire est fortement LND. Des exemples de processus qui ne sont pas localement non-déterministes sont donnés par Xiao dans [60].

Le lemme suivant est dû à Ayache [2] et nous sera particulièrement utile puisqu'il lie la matrice de variance-covariance à la variance conditionnelle qui interviennent dans la définition du non-déterminisme local.

Lemme 2.1.5. *Soit un naturel $p \geq 2$ et $Z = (Z_1, \dots, Z_p)$ un vecteur gaussien centré. On a*

$$\det(\mathbb{V}(Z)) = \mathbb{V}(Z_1) \prod_{n=2}^p \mathbb{V}(Z_n|Z_1, \dots, Z_{n-1})$$

Démonstration. Posons $\tilde{Z} = (Z_1, \dots, Z_{p-1})$ et considérons le vecteur colonne (déterministe) R de taille $p-1$ telle que

$$\mathbb{E}[Z_p|\tilde{Z}] = R\tilde{Z}.$$

Posons alors

$$Q = \begin{pmatrix} I_{p-1} & 0 \\ -R & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $*$ dénote la transposée, on a

$$\mathbb{V}(QZ) = \mathbb{E}[QZ(QZ)^*] = Q \mathbb{E}[ZZ^*] Q^* = Q \mathbb{V}[Z] Q^*.$$

En remarquant que \tilde{Z} et $Z_p - \mathbb{E}[Z_p|\tilde{Z}]$ sont indépendants, on obtient aussi

$$QZ = (\tilde{Z}, Z_p - \mathbb{E}[Z_p|\tilde{Z}])$$

et donc

$$\mathbb{V}(QZ) = \begin{pmatrix} \mathbb{V}(\tilde{Z}) & 0 \\ 0 & \mathbb{V}(Z_p|\tilde{Z}) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, en remarquant que $\det Q = 1$, on obtient

$$\det(\mathbb{V}(Z)) = \det(\mathbb{V}(QZ)) = \mathbb{V}(Z_p|Z_1, \dots, Z_{p-1}) \det(\mathbb{V}(\tilde{Z})).$$

Une simple récurrence permet alors de conclure. □

2.2 Continuité et conditions de Hölder du temps local de processus LND

Nous nous attaquons maintenant à la reproduction des principaux résultats de Pitt[47]. Pour commencer, nous donnons une formulation équivalente (et s'étendant aux processus à valeurs dans \mathbb{R}^d) du non-déterminisme local qui met davantage en évidence l'idée d'accroissements orthogonaux cachée derrière ce concept.

Nous aurons besoin de la notation suivante. Pour $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}^n$, notons

$$\begin{aligned}\sigma_j^2 &= \mathbb{V}(X(t_j) - X(t_{j-1})), \quad j = 2, \dots, k \\ \sigma_1^2 &= \mathbb{V}(X(t_1)).\end{aligned}$$

De plus, on notera σ_j la matrice qui multipliée à sa transposée rend σ_j^2 .

Définition 2.2.1. Soit $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ un processus gaussien centré. On dit que X est *localement non-déterministe* (LND) sur $I \subset \mathbb{R}^n$ s'il existe une partition (finie) $(I_i)_{i=1}^N$ mesurable de I telle que pour tout $k \geq 2$ naturel et tout $\beta \in \{1, \dots, N\}$, on a

$$\mathbb{V} \left[\sum_{j=2}^k \langle u_j, \sigma_j^{-1}(X(t_j) - X(t_{j-1})) \rangle + \langle u_1, \sigma_j^{-1}X(t_1) \rangle \right] \geq c \sum_{j=1}^k |u_j|^2 \quad (2.3)$$

pour une constante $c > 0$ et pour $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^d$ arbitraires et $t_1 \dots t_k \in I_\beta$ arbitraires tels que

$$|t_{j+1} - t_j| \leq |t_{j+1} - t_i|$$

pour $1 \leq i \leq j < k$.

Proposition 2.2.2. Soit $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un processus gaussien centré. Alors X est (LND) au sens de la Définition 2.2.1 si et seulement si X est (LND) au sens de la Définition 2.1.3.

Pour aborder cette preuve, nous aurons besoin d'utiliser les propriétés du conditionnement gaussien. Le lecteur n'étant pas familier avec ces notions est invité à consulter le chapitre de [20] y attenant.

Démonstration. Commençons par remarquer que (2.3) se récrit dans ce cas

$$\mathbb{V} \left[\sum_{j=2}^k u_j \sigma_j^{-1}(X(t_j) - X(t_{j-1})) + u_1 \sigma_j^{-1}X(t_1) \right] \geq c \sum_{j=1}^k |u_j|^2$$

De plus, quitte à effectuer des mises en évidence et à renormaliser, on peut supposer que $u_k = \sigma_k$ et $\sum_{j=1}^{k-1} |u_j|^2 = 1$. Cela permet de simplifier encore l'expression (2.3) pour obtenir

$$\mathbb{V} \left[(X_{t_k} - X_{t_{k-1}}) + \sum_{j=2}^{k-1} u_j \sigma_j^{-1}(X(t_j) - X(t_{j-1})) + u_1 \sigma_j^{-1}X(t_1) \right] \geq c(1 + \sigma_k^2). \quad (2.4)$$

On a

$$\mathbb{V}[X(t_k)|X(t_1), \dots, X(t_{k-1})] = \mathbb{V}[X(t_k) - X(t_{k-1})|X(t_1), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_{k-2}) - X(t_{k-1})].$$

Puisqu'on travaille avec des variables aléatoires gaussiennes, on sait qu'il existe $a_1, \dots, a_{k-1} \in \mathbb{R}$ tels que

$$\mathbb{E}[X(t_k) - X(t_{k-1}) | X(t_1), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_{k-2}) - X(t_{k-1})] = \sum_{j=2}^{k-1} a_j (X(t_j) - X(t_{j-1})) + a_1 X(t_1).$$

On sait aussi que l'espérance conditionnelle, dans ce cas, correspond à la projection sur le sous-espace V de $L^2(\Omega)$ formé par les variables aléatoires par lesquels on conditionne. En particulier,

$$X(t_k) - X(t_{k-1}) - \mathbb{E}[X(t_k) - X(t_{k-1}) | X(t_1), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_{k-2}) - X(t_{k-1})]$$

correspond à la projection sur l'orthogonal de V dans $L^2(\Omega)$. Dès lors, on a

$$\begin{aligned} & \mathbb{V}[X(t_k) - X(t_{k-1}) | X(t_1), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_{k-2}) - X(t_{k-1})] \\ &= \mathbb{V}[X(t_k) - X(t_{k-1}) - \sum_{j=2}^{k-1} a_j (X(t_j) - X(t_{j-1})) - a_1 X(t_1)] \end{aligned}$$

De là, si X satisfait les conditions de la Définition 2.1.3, cette dernière expression est minorée par $c\sigma_k^2$ où c est une constante positive, ce qui permet d'obtenir (2.4) et donc (2.3). De manière similaire, il est clair que (2.3) implique (2.2), ce qui permet de conclure. \square

Notre objectif est de montrer qu'un processus gaussien LND admet un temps local continu. Pour se faire, nous allons poser deux conditions plus générales puis montrer que, sous ces conditions, nous avons bien les résultats recherchés. Nous montrerons ensuite que tout processus gaussien LND satisfait les conditions posées. Dans la suite, on supposera toujours avoir un processus $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$. Posons quelques notations qui nous serons utiles. Pour $\bar{t} = (t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^{nk}$ et un ensemble borélien $B \subset \mathbb{R}^{dk}$, posons

$$P_k(\bar{t}; B) = \mathbb{P}(\{(X(t_1), \dots, X(t_k)) \in B\}). \quad (2.5)$$

Il est clair que P_k est mesurable en \bar{t} . Pour $I \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble borélien et borné, définissons $V_k(I, B) = V_k(B)$ par

$$V_k(I, B) = \int_{I^k} P_k(\bar{t}, B) d\bar{t}. \quad (2.6)$$

De plus, nous supposerons toujours que pour $t_1, \dots, t_k \in I$ distincts, la mesure $P_k(\bar{t}, \cdot)$ est absolument continue. Nous noterons alors sa densité $p_k(\bar{t}, \cdot)$. On en tire alors que $V_k(I, \cdot)$ est absolument continu et admet comme densité

$$v_k : \bar{x} \mapsto \int_{I^k} p_k(\bar{t}, \bar{x}) d\bar{t}.$$

Remarquons déjà que $V_k(I, \cdot)$ est lié à l'espérance de la mesure d'occupation.

Proposition 2.2.3. *Pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, on a*

$$\mathbb{E}[(\mu_I(B))^k] = V_k(I, B^k).$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(\mu_I(B))^k] &= \mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^k \int_I \chi_B(X(t_j)) dt_j\right] \\
&= \int_{I^k} \mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^k \chi_B(X(t_j))\right] d\bar{t} \\
&= \int_{I^k} P_k(\bar{t}; B^k) d\bar{t}.
\end{aligned}$$

□

Dans toute la suite de cette section, nous considérons un ouvert $U \subset \mathbb{R}^d$. Les conditions suivantes nous permettront d'assurer l'existence et la continuité du temps local sur U .

Définition 2.2.4. Le processus X satisfait la *condition A_k* sur I pour $k \in \mathbb{N}_0$ s'il existe une fonction mesurable $\ell_k \geq 0$ définie sur I^k et telle que

$$\int_{I^k} \ell_k(t) dt < +\infty$$

et telle que pour $t_1, \dots, t_k \in I$ distincts et $\bar{t} = (t_1, \dots, t_k)$,

$$p_k(\bar{t}, \bar{x}) \leq \ell_k(\bar{t})$$

pour presque tout $\bar{x} \in U^k$.

Pour aborder la définition suivante, nous aurons besoin de la notation suivante. Soit $x, y \in \mathbb{R}^d$, on pose

$$\theta_j f(\bar{x}) = f(x_1, \dots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \dots, x_k) - f(x_1, \dots, x_{j-1}, y, x_{j+1}, \dots, x_k)$$

et on définit θ_{j_1, \dots, j_l} de manière analogue en remplaçant les composantes j_1, \dots, j_l par x et y dans le premier et second terme de la différence respectivement.

Définition 2.2.5. Le processus X satisfait la *condition B_k* si pour $t_1, \dots, t_k \in I$ distincts, la densité $p_k(\bar{t}, \bar{x})$ est continue en $\bar{x} \in U^k$ et satisfait une inégalité de la forme

$$|\theta_{\{1, \dots, k\}} p_k(\bar{t}, \bar{x})| \leq m_k(\bar{t}) |x - y|^{d+\beta}$$

où $\beta > 0$ et m_k est une fonction positive et intégrable sur I^k .

Ces notations étant posées, nous avons le théorème suivant traitant de l'existence et des moments d'ordre k du temps local.

Théorème 2.2.6. *Supposons que la condition A_k est satisfaite pour un $k > 1$. Alors le temps local $\alpha(\cdot, J)$ existe pour tout $J \subset I$ mesurable. De plus, on peut choisir une version du temps local qui est mesurable en (ω, x) et telle que*

$$\mathbb{E} \int_K |\alpha(x, J)|^k dx < +\infty$$

pour tout compact $K \subset U$.

Démonstration. L'idée de la preuve est de construire une suite $\alpha_n(\cdot, J) = \alpha_n(\cdot)$ telle que $\alpha_n(\cdot) \rightarrow \alpha(\cdot, J)$ presque partout presque sûrement dans $L^k(K)$ pour tout compact $K \subset U$. Pour ce faire, définissons les σ -algèbres \mathcal{B}_n sur \mathbb{R}^d définies par les partitions de \mathbb{R}^d via les cubes dyadiques $Q =]j/2^n, (j+1)/2^n]$ où $j = (j_1, \dots, j_d)$ est un multi-indice ($j_1, \dots, j_d \in \mathbb{Z}$) et $1 = (1, \dots, 1)$. Définissons alors

$$\alpha_n(x) = 2^{nd} \mu_J(Q), \quad x \in Q \in \mathcal{B}_n.$$

Il est alors clair que $(\alpha_n, \mathcal{B}_n)_n$ forme une martingale (dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, $\omega \in \Omega$ fixé) puisque, pour tout $B \in \mathcal{B}_n$,

$$\int_B \alpha_{n+1}(x) dx = \int_B \alpha_n(x) dx.$$

De plus, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \alpha_n(x) dx = \mu_I(\mathbb{R}^d).$$

Par la théorie des martingales (voir par exemple [20]), si $K \subset U$ est un compact appartenant à \mathcal{B}_m alors α_n convergera dans $L^k(K)$ si et seulement si

$$\sup_n \int_K |\alpha_n(x)|^k dx < +\infty.$$

Or, si $n \geq m$ alors $\int_K |\alpha_n(x)|^k dx$ est croissant et il suffit donc de vérifier que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \int_K |\alpha_n(x)|^k dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_K \mathbb{E}[|\alpha_n(x)|^k] dx < +\infty.$$

Or, on a

$$\mathbb{E}[\alpha_n(x)^k] = 2^{ndk} V_k(J, Q_n^k)$$

où Q_n est le plus petit cube dyadique dans \mathcal{B}_n contenant x . En utilisant la condition A_k , on obtient alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\alpha_n(x)^k] &= \int_{J^k} \int_{Q_n^k} 2^{ndk} p(\bar{t}, \bar{x}) dx d\bar{t} \\ &\leq \int_{J^k} \ell_k(\bar{t}) d\bar{t} < +\infty. \end{aligned}$$

Puisque K est de mesure finie, on obtient la conclusion. Il suffit alors de poser $\alpha(x, J) = \liminf_n \alpha_n(x)$ et il est clair sous ces conditions que α est mesurable en (ω, x) . \square

La proposition suivante a pour but d'étudier plus en profondeur la limite des α_n .

Proposition 2.2.7. *Si la condition A_k est satisfaite pour un naturel pair non-nul k et si $p_k(\bar{t}, \bar{x})$ est continu en \bar{x} pour $t_1, \dots, t_k \in I$ distincts, alors pour tout $x \in U$ et tout ensemble borélien $J \subset I$,*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n(\cdot) = \alpha(\cdot, J)$$

existe dans $L^k(\Omega)$.

Démonstration. En reprenant les notations de la preuve du théorème précédent, soit $Q_n(x)$ le plus petit cube de \mathcal{B}_n contenant x et posons $\chi_{n,x}$ la fonction caractéristique de $Q_n(x)$. On a, vu la définition de α_n , pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$ et tous $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}[(\alpha_n(x) - \alpha_m(y))^k] = \int_U \prod_{j=1}^k (2^{nd} \chi_{n,x}(x_j) - 2^{md} \chi_{m,y}(x_j)) V_k(J, d\bar{x}). \quad (2.7)$$

On aimerait passer à la limite pour $n, m \rightarrow \infty$ dans l'expression précédente. Pour ce faire, montrons que $v_k(J, \bar{x}) = \int_{J^k} p_k(\bar{t}, \bar{x}) d\bar{t}$ est continu. On a

$$|v_k(J, \bar{x}) - v_k(J, \bar{y})| \leq \int_{J^k} |p_k(\bar{t}, \bar{x}) - p_k(\bar{t}, \bar{y})| d\bar{t} \rightarrow 0$$

lorsque $x \rightarrow y$ car p_k est continu en \bar{x} et le théorème de la convergence dominée s'applique puisque

$$|p_k(\bar{t}, \bar{x}) - p_k(\bar{t}, \bar{y})| \leq 2\ell_k(\bar{t})$$

par la condition A_k . On peut alors passer à la limite dans l'équation (2.7), on a

$$\lim_{n,m \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[(\alpha_n(x) - \alpha_m(y))^k] = \theta_{1,\dots,k} v_k(J, \bar{x}).$$

Il suffit alors de prendre $x = y$ pour constater que $\alpha_n(x)$ converge dans $L^k(\Omega)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. \square

Pour la suite, nous aurons besoin du lemme de Garsia [23] que nous introduisons maintenant.

Lemme 2.2.8. *Soit un cube $T \subset \mathbb{R}^d$ et soient ρ et ψ deux fonctions positives et croissantes sur $[0, +\infty[$ telles que*

$$\lim_{u \rightarrow 0} \rho(u) = 0 \text{ et } \lim_{u \rightarrow +\infty} \psi(u) = +\infty.$$

Si de plus, ψ est convexe, $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable et il existe une constante $C > 0$ telle que

$$C(T, f) = \int_T \int_T \psi \left(\frac{|f(x) - f(y)|}{\rho(|x - y|/\sqrt{d})} \right) dx dy \leq C,$$

alors, quitte à modifier f sur un ensemble au plus négligeable, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq 8 \int_0^{|x-y|} \psi^{-1} \left(\frac{C}{u^{2d}} \right) \rho(du), \quad x, y \in T.$$

Nous pouvons alors obtenir le théorème suivant donnant une condition de Hölder sur le temps local.

Théorème 2.2.9. *Si $k \geq 2$ est pair et si les conditions A_k et B_k sont satisfaites alors pour tout $J \subset I$ mesurable, $x \mapsto \alpha(x, J)$ est presque sûrement continu et satisfait une condition de Hölder locale*

$$|\alpha(x, J) - \alpha(y, J)| \leq C|x - y|^\delta$$

pour tout $\delta < \beta/k$, où C est une constante strictement positive et β est défini par la condition B_k .

Démonstration. L'idée de la preuve est d'utiliser une version généralisée du théorème de Kolmogorov-Centsov. Nous cherchons donc à montrer une inégalité de la forme

$$\mathbb{E}[(\alpha(x, J) - \alpha(y, J))^k] \leq C|x - y|^{d+\beta}$$

pour $x, y \in U$ et où C ne dépend que de k et J .

Des preuves de la proposition 2.2.7 et du théorème 2.2.6, on sait que la continuité de $p_k(\bar{t}, \bar{x})$ avec la condition A_k implique la continuité de $v_k(J, \bar{x})$ et qu'une version du temps local sur U existe et satisfait

$$\mathbb{E}[(\alpha(x, J) - \alpha(y, J))^k] = \theta_{1,\dots,k} v_k(J, \bar{x}).$$

Or, par la condition B_k , on a

$$\begin{aligned} |\theta_{1,\dots,k} v_k(J, \bar{x})| &= \left| \int_{J^k} \theta_{1,\dots,k} p_k(\bar{t}, \bar{x}) d\bar{t} \right| \\ &\leq \int_{J^k} m_k(\bar{t}) d\bar{t} |x - y|^{d+\beta}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Dans le cas où $d = 1$, le théorème de continuité de Kolmogorov permet de conclure. Si $d > 1$, posons $M_k(J)$ l'expression intégrale (2.8). La conclusion découle alors du lemme de Garsia. En effet, en reprenant les notations de ce lemme, posons $\psi(u) = u^k$ et $\rho(u) = u^\gamma$ pour $\gamma = (2d)/k + \delta$ avec $0 < \delta < C/k$. On a alors pour tout cube $T \subset U$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[C(T, \alpha(\cdot, J))] &= \mathbb{E} \left[\int_T \int_T \psi \left(\frac{|\alpha(x, J) - \alpha(y, J)|}{\rho(|x - y|/\sqrt{d})} \right) dx dy \right] \\ &\leq M_k(J) D e(T)^{d+\beta-k\delta} < +\infty \end{aligned}$$

où $D > 0$ est une constante ne dépendant que de d, k et β et où $e(T)$ est la longueur des bords de T .

On tire alors du lemme de Garsia que, presque sûrement,

$$|\alpha(x) - \alpha(y)| \leq C' C(T, \alpha)^{1/k} |x - y|^\delta.$$

Puisque ce raisonnement est valide pour tout cube $T \subset U$ et que U est ouvert, la conclusion découle. \square

On peut de plus montrer le théorème suivant

Théorème 2.2.10. *Dans les mêmes conditions que le théorème précédent, $(x, t) \in U \times \mathbb{R}^N \mapsto \alpha(x, [0, t])$ est presque sûrement continu.*

Nous nous contentons de donner une idée de la preuve. Sans perte de généralité, on peut supposer $I \subset [0, 1]^N$. L'idée est de poser pour tout nombre rationnel s

$$\alpha_j(x, s) = \alpha(x, I \cap \{t : t_j \leq s\}), \quad j = 1, \dots, N$$

puis de montrer que pour tout cube fermé $T \subset U$ et tout j , $s \mapsto \alpha_j(\cdot, s)$ défini une application continue entre les rationnels de $[0, 1]$ et l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ muni de sa norme usuelle. Cette continuité se prouve essentiellement via une application du lemme de Garsia. Pour les détails, nous renvoyons vers [47].

Nous nous attaquons maintenant à montrer que les résultats précédents s'appliquent dans le cas d'un processus LND.

Théorème 2.2.11. Soit $X : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^d$ un processus gaussien centré et pour tout $k \geq 2$ et tout $\bar{t} \in \mathbb{R}^{Nk}$, soit $D_k(\bar{t})$ le déterminant de la matrice de variance-covariance du vecteur aléatoire de \mathbb{R}^{dk} $(X(t_1), \dots, X(t_k))$. Si pour un $k \geq 2$,

$$\int_{I^k} \frac{1}{\sqrt{D_k(\bar{t})}} d\bar{t} < +\infty,$$

alors le temps local existe sur \mathbb{R}^d pour tout $J \subset I$ mesurable et

$$\mathbb{E} \left[\int_K \alpha^k(x) dx \right] < +\infty$$

pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^d$.

Démonstration. Notons $\Sigma_k(\bar{t})$ la matrice de variance-covariance de $(X(t_1), \dots, X(t_k))$, ce vecteur admet la densité

$$p_k(\bar{t}, \bar{x}) = (2\pi)^{-kd/2} |D_k(\bar{t})|^{-1/2} \exp \left(-\frac{1}{2} \langle \bar{x}, \Sigma_k^{-1}(\bar{t}) \bar{x} \rangle \right), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^{dk}.$$

Il est clair que le maximum de $p_k(\bar{t}, \cdot)$ est atteint en $\bar{x} = 0$ et que la condition A_k est alors satisfaite avec $U = \mathbb{R}^d$ si et seulement si

$$\int_{I^k} \frac{1}{\sqrt{D_k(\bar{t})}} d\bar{t} < +\infty.$$

On en tire alors directement la conclusion en appliquant le Théorème 2.2.6. □

Remarque 2.2.12. Le cas $k = 2$ du théorème précédent est particulièrement important en théorie du potentiel qui étudie notamment les fonctions harmoniques à travers le Laplacien. Pour plus de détails, nous renvoyons à [47].

La proposition suivante donne une condition nécessaire simple pour obtenir la condition B_k dans le cas gaussien.

Proposition 2.2.13. Soit $X : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^d$ un processus gaussien. Si $k \geq 2$ est pair et si $1 > \gamma > d/k$, posons

$$m_k(\bar{t}) = \int_{\mathbb{R}^{dk}} \prod_{j=1}^k |u_j|^\gamma \exp \left(-\frac{1}{2} \mathbb{V} \left[\sum_{j=1}^k \langle u_j, X(t_j) \rangle \right] \right) d\bar{u}.$$

Si $m_k(\bar{t})$ est intégrable sur I^k alors la condition B_k est satisfaite pour $U = \mathbb{R}^d$ et $\beta = k\gamma - d$.

Démonstration. Commençons par remarquer que la transformée de Fourier de $p_k(\bar{t}, \bar{x})$ est donnée par

$$\hat{p}_k(\bar{t}, \bar{u}) = \exp \left(-\frac{1}{2} \mathbb{V} \left[\sum_{j=1}^k \langle u_j, X(t_j) \rangle \right] \right).$$

Par le théorème de Fourier, on obtient alors pour tout $\gamma \in]0, 1[$

$$\begin{aligned} \theta_{1,\dots,k} p_k(\bar{t}, \bar{x}) &= (2\pi)^{-\frac{kd}{2}} \int_{\mathbb{R}^{dk}} \prod_{j=1}^k [e^{-iu_j \cdot x} - e^{-iu_j \cdot y}] \hat{p}_k(\bar{t}, \bar{u}) d\bar{u} \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^{dk}} \prod_{j=1}^k |e^{-iu_j \cdot (x-y)} - 1| \hat{p}_k(\bar{t}, \bar{u}) d\bar{u} \\ &\leq C' \int_{\mathbb{R}^{dk}} \prod_{j=1}^k |u_j|^\gamma \hat{p}_k(\bar{t}, \bar{u} d\bar{u}) |x-y|^{k\gamma} \end{aligned}$$

où C et C' sont des constantes strictement positives. La dernière inégalité étant obtenue en remarquant que $|e^{iz} - 1| \leq K_\gamma |z|^\gamma$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ où $K >_\gamma 0$ est une constante bien choisie (dépendant de γ). \square

Nous en arrivons au résultat principal de [47] donnant une condition de Hölder sur le temps local d'un processus gaussien LND.

Théorème 2.2.14. *Soit $X : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^d$ un processus gaussien LND sur $I \subset \mathbb{R}^N$. Supposons qu'il existe $\delta \in]0, 2[$ tel que*

$$\int_I \frac{1}{\sqrt{|\mathbb{V}(X(t))|^{1+\delta}}} dt < +\infty$$

et

$$\sup_{s \in I} \int_I \frac{1}{\sqrt{|\mathbb{V}(X(t) - X(s))|^{1+\delta}}} dt < +\infty$$

où $|\cdot|$ dénote le déterminant. Alors, pour tout $J \subset I$, le temps local $\alpha(\cdot, J)$ existe et est continu sur \mathbb{R}^d mesurable et satisfait une condition de Hölder locale : pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$|\alpha(x, J) - \alpha(y, J)| \leq C|x-y|^{\delta'}, \text{ pour tout } \delta' < \delta/2.$$

Démonstration. Sans perte de généralité (puisque on regarde une condition locale), on peut supposer que l'inégalité (2.3) est satisfaite pour des points $t_1, \dots, t_k \in I$ tels que

$$|t_{j+1} - t_j| \leq |t_{j+1} - t_i|, \quad 1 \leq i \leq j < k.$$

En reprenant les notations de (2.3), posons $u_k = v_k$ et $v_j = u_j + v_{j+1}$ pour $j \in \{1, 2, \dots, k-1\}$, on a alors

$$\sum_{j=1}^k \langle u_i, X(t_j) \rangle = \langle v_1, X(t_1) \rangle + \sum_{j=2}^k \langle v_j, X(t_j) - X(t_{j-1}) \rangle.$$

On tire alors de la définition du non-déterminisme local que

$$\mathbb{V} \left[\sum_{j=1}^k \langle u_j, X(t_j) \rangle \right] \geq c \sum_{j=1}^k |\sigma_j v_j|^2$$

où $\sigma_j^2 = \mathbb{V}(X(t_j) - X(t_{j-1}))$ si $j \in \{2, \dots, k\}$ et $\sigma_1^2 = \mathbb{V}(X(t_1))$.

De plus, en utilisant le fait que $|x - y|^\gamma \leq |x|^\gamma + |y|^\gamma$ pour $0 < \gamma < 1$, on peut majorer $\prod_{j=1}^k |u_j|^\gamma$ par une somme de termes de la forme $\prod_{j=1}^k |v_j|^{\varphi_j \gamma}$ où φ_j peut prendre les valeurs 0, 1 ou 2. En considérant la fonction m_k de la proposition précédente, on obtient

$$m_k(\bar{t}) \leq c' \int_{\mathbb{R}^{dk}} \prod_{j=1}^k |\sigma_j^{-1} w_j|^{\varphi_j \gamma} \exp\left(-\frac{c}{2} \|\bar{w}\|^2\right) \prod_{j=1}^k |\sigma_j|^{-1} d\bar{w}$$

où on a posé $w_j = \sigma_j v_j$ et où $|\sigma_j|$ dénote le déterminant de σ_j . Remarquons alors que $(s, t) \rightarrow \mathbb{V}(X(t) - X(s))$ est continu sur le compact I^2 et est donc borné. On en tire en particulier que $|\sigma_j^{-1} w_j| \leq c'' |w_j| |\sigma_j^{-1}|$ sur I^2 . On en tire alors

$$m_k(\bar{t}) \leq c_3 \prod_{j=1}^k |\sigma_j^{-1}|^{1+2\gamma} \int_{\mathbb{R}^{dk}} \prod_{j=1}^k |w_j|^{\varphi_j \gamma} \exp\left(-\frac{c}{2} \|\bar{w}\|^2\right) d\bar{w}.$$

En remarquant que l'intégrale précédente est finie, on obtient alors, pour tout $\bar{t} \in I^k$,

$$m_k(\bar{t}) \leq c_4 \prod_{j=1}^k |\sigma_j^{-1}|^{1+2\gamma}.$$

En posant $\gamma = \delta/2$ et en utilisant la finitude des intégrales de l'énoncé, on obtient

$$\int_{I^k} m_k(\bar{t}) d\bar{t} \leq c_6 \int_{I^k} \frac{1}{\sqrt{\mathbb{V}(X(t_1)) \prod_{j=2}^k \mathbb{V}(X(t_j) - X(t_{j-1}))^{1+\delta}}} d\bar{t} < +\infty.$$

On en tire que la condition A_k est satisfaite. De plus, pour $k > d/\gamma$, la proposition précédente permet d'affirmer que la condition B_k est satisfaite pour $\beta = k\gamma - d$. Il suffit alors de faire tendre k vers $+\infty$ et d'utiliser le Théorème 2.2.9 pour obtenir la conclusion. \square

2.3 Exemple de processus LND

Nous nous attelons maintenant à donner un exemple de processus LND.

Considérons un processus gaussien centré et continu $X : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ d'opérateur de covariance

$$\rho(t, s) = \mathbb{E}[X(t)X(s)] = \frac{c}{2}(|s|^\alpha + |t|^\alpha - |t - s|^\alpha) \quad (2.9)$$

où $c > 0$ et $\alpha \in]0, 2[$. En particulier, si on pose $\alpha = 2H$, $N = 1$ et $c = 1$ alors X est un mouvement brownien fractionnaire d'indice de Hurst H .

Commençons par le lemme suivant traitant de la variance conditionnelle du processus.

Lemme 2.3.1. *Il existe une constante strictement positive C ne dépendant que de N, α et c telle que pour tout $t \in \mathbb{R}^N$ et tout $r \leq |t|$ strictement positif, on a*

$$\mathbb{V}[X(t)|X(s) : |t - s| \geq r] = Cr^\alpha.$$

Démonstration. Le cas $t = 0$ est évident. Si $t \neq 0$ et $r \leq |t|$ est fixé, posons $h = (r/|t|)t$. On a

$$\mathbb{V}[X(t)|X(s) : |t-s| \geq r] = \mathbb{V}[X(t) - X(t-h)|X(s) - X(s-h) : |s-t| \geq r, |\sigma-t| \geq r].$$

Puisque X est à accroissements stationnaires, cette dernière expression est encore égale à

$$\mathbb{V}[X(h) - X(0)|X(s) : |s-h| \geq r = |h|]. \quad (2.10)$$

Posons alors $Y(t) = |h|^{\alpha/2}X(|h|^{-1}t)$. Alors, Y possède la même fonction de variance-covariance que X et on peut montrer que

$$\rho(t, s) = c_1 \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(e^{it\cdot\lambda} - 1)(e^{-is\cdot\lambda} - 1)}{|\lambda|^{N+\alpha}} d\lambda.$$

L'expression (2.10) est alors égale à

$$\mathbb{V}[Y(h)|Y(s) : |s-h| \geq r = |h|] = |h|^\alpha \mathbb{V}[X(|h|^{-1}h)|X(s) : |s-|h|^{-1}h| \geq 1] = C|h|^\alpha$$

pour une constante $C \geq 0$, puisque pour tout s fixé et pour tous u_1, u_2 tels que $|u_1| = |u_2|$, $\rho(s, u_1) = \rho(s, u_2)$. Montrons que $C > 0$. Sinon $C = 0$ et pour tout $h \in \mathbb{R}^N$, il existe une suite de variables aléatoires Y_n de la forme $\sum_j a_j(n)X(t_j)$ avec $|t_j - h| \geq |h|$ telle que

$$\mathbb{E}[|X(h) - Y_n|^2] \rightarrow 0.$$

Cependant, vu la forme intégrale de ρ , cela implique que $f_n(\lambda) := \sum_j a_j(n)(e^{it_j\cdot\lambda} - 1)$ converge vers $(e^{ih\cdot\lambda} - 1)$ dans $L^2(\mathbb{R}^N, \frac{d\lambda}{|\lambda|^{N+\alpha}})$. Soit une fonction à décroissance rapide non-nulle ϕ dont la transformée de Fourier est à support dans $\{t : |t| < \frac{1}{3}|h|\}$. On a alors que $(f_n(\lambda) + 1)\phi(\lambda)$ converge vers $e^{ih\cdot\lambda}\phi(\lambda)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n, d\lambda)$ puisque ϕ est à décroissance rapide. En particulier, la transformée de Fourier de $(f_n(\lambda) + 1)\phi(\lambda)$ converge vers la transformée de Fourier de $e^{ih\cdot\lambda}\phi(\lambda)$. On a

$$\mathcal{F}(f_n(\cdot) + 1)\phi(\cdot)(t) = \sum_j a_j(n)(\hat{\phi}(t_j + t) + \hat{\phi}(t)).$$

Son support est inclus dans $\{t : |t + h| > \frac{2}{3}|h|\}$. En effet, on a par exemple

$$|t_j - h + h + t| < \frac{1}{3}|h|$$

vu le support de $\hat{\phi}$, en appliquant l'inégalité triangulaire inversée et en se rappelant que $|t_j - h| \geq |h|$, on obtient $|t + h| > \frac{2}{3}|h|$. On procède de la même manière pour montrer que $|t| < \frac{1}{3}|h|$ implique $|t + h| > \frac{2}{3}|h|$.

Cela étant, on a aussi

$$\mathcal{F}(e^{ih\cdot t}\phi(t)) = \hat{\phi}(t + h)$$

qui est à support dans $\{t : |t + h| < \frac{1}{3}|h|\}$.

En particulier les supports des deux transformées de Fourier sont disjoints, ce qui est absurde vu la convergence dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. On en tire alors que $C > 0$. \square

Nous pouvons alors montrer que X est LND.

Proposition 2.3.2. *Pour tout $\varepsilon > 0$, X est localement non-déterministe sur*

$$I = \{t \in \mathbb{R}^N : \varepsilon \leq |t| \leq \varepsilon^{-1}\}.$$

Démonstration. Procémons par l'absurde. Si X n'est pas LND alors il existe un naturel $k \geq 2$, des réels non tous nuls u_1, \dots, u_k et une suite $\{t_1^{(n)}, \dots, t_k^{(n)}\}_n$ telle que $t_j^{(n)} \in I$ et $|t_{j+1}^{(n)} - t_j^{(n)}| \leq |t_{j+1}^{(n)} - t_i^{(n)}|$ pour $1 \leq i \leq j < k$ et

$$\mathbb{V} \left[\sum_{j=1}^k u_j \frac{X(t_j^{(n)}) - X(t_{j-1}^{(n)})}{|t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}|^{\alpha/2}} \right]$$

converge vers 0 si $n \rightarrow \infty$, où on a posé $t_0^{(n)} = 0$. De plus, supposons que k est minimal. En particulier, $u_k \neq 0$. On a

$$\begin{aligned} & \mathbb{V} \left[\sum_{j=1}^k u_j \frac{X(t_j^{(n)}) - X(t_{j-1}^{(n)})}{|t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}|^{\alpha/2}} \right] \\ & \geq \frac{u_k^2}{|t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}|^\alpha} \mathbb{V}[X(t_k^{(n)}) | X(s) : |t_k^{(n)} - s| \geq \min\{|t_k^{(n)}|, |t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}|\}] \\ & \geq \frac{u_k^2}{|t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}|^\alpha} C \min\{|t_k^{(n)}|, |t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}|\}^\alpha. \end{aligned}$$

Puisque $u_k \neq 0$ et $|t_k^{(n)}| \geq \varepsilon$, cette dernière expression est minoré par une constante strictement positive, ce qui est absurde. On en tire alors que X est LND. \square

Remarque 2.3.3. Dans le théorème précédent, il est nécessaire de prendre un ensemble I qui ne contient pas 0. Cette condition peut être omise si l'on modifie légèrement la Définition 2.2.1 du non-déterminisme local pour imposer la condition supplémentaire $|t_k| \geq |t_j|$ si $1 \leq j \leq k$. Dans ce cas, le théorème précédent est vrai pour $I = \mathbb{R}^N$. Notons aussi que les autres théorèmes de cette section restent vrai avec cette condition supplémentaire.

La proposition suivante est alors immédiate.

Proposition 2.3.4. *Si I est compact et s'il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\sup_{s \in I} \int_I \frac{1}{|t - s|^{\alpha/2 + \delta}} dt < +\infty$$

alors le temps local $\alpha(\cdot, I)$ de X existe et est continu sur \mathbb{R}^d .

2.4 Loi du logarithme itéré

Le but de cette section est d'obtenir, pour les processus LND, la loi du logarithme itéré bien connue dans le cas du mouvement Brownien. Les développements qui suivent sont dûs à Xiao [60]. Notons que ces résultats sont d'une grande importance, en effet, la loi

du log itéré donne des conditions fines de régularité des trajectoires d'un processus. Notre objectif est notamment d'obtenir un résultat du type² :

Pour tout $\tau \in \mathbb{R}^N$, presque sûrement, il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\liminf_{r \rightarrow 0} \sup_{s \in B(\tau, r)} \frac{|X(s) - X(\tau)|}{\sigma(r/(\log(\log(1/r)))^{1/N})} \geq K.$$

De même, pour tout rectangle $T \subset \mathbb{R}^N$, presque sûrement, il existe $K > 0$ tel que

$$\liminf_{r \rightarrow 0} \inf_{\tau \in T} \sup_{s \in B(\tau, r)} \frac{|X(s) - X(\tau)|}{\sigma(r/(\log(1/r))^{1/N})} \geq K.$$

Ici, X est un processus gaussien fortement LND à accroissements stationnaires et σ est une fonction bien choisie que nous spécifions dans les développements ci-dessous. Remarquons que le résultat nous donne un minorant, ce qui est en général plus compliqué à obtenir qu'un majorant. Cela montre toute la force du temps local, ce dernier permettant dans bien des cas de transformer des minorations en majorations et inversement via le principe de Berman comme l'illustre la démonstration du Théorème 2.4.17.

Nous commençons par poser le cadre dans lequel nous travaillerons tout au long de cette section. Considérons $Y(t)$ ($t \in \mathbb{R}^N$) un processus gaussien centré tel que $Y(0) = 0$. Supposons de plus que le processus possède des accroissements stationnaires et sa fonction de variance-covariance peut s'écrire sous la forme

$$K(t, s) = \int_{\mathbb{R}^N} (e^{i\langle t, \lambda \rangle} - 1) (e^{-i\langle s, \lambda \rangle} - 1) \Delta(d\lambda)$$

où Δ est une mesure symétrique sur $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\lambda|^2}{1 + |\lambda|^2} \Delta(d\lambda) < +\infty.$$

En particulier³, il existe une mesure centrée, complexe et gaussienne W telle que

$$Y(t) = \int_{\mathbb{R}^N} (e^{i\langle t, \lambda \rangle} - 1) W(d\lambda)$$

et pour tout $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$

$$\mathbb{E} \left(W(A) \overline{W(B)} \right) = \Delta(A \cap B)$$

et $W(-A) = \overline{W(A)}$.

On en tire directement que

$$\mathbb{E}[(Y(t+h) - Y(t))^2] = 2 \int_{\mathbb{R}^N} (1 - \cos(\langle h, \lambda \rangle)) \Delta(d\lambda).$$

2. Ce résultat et d'autres du même type sont présentés et démontrés à la Sous-section 2.4.2.

3. Voir par exemple le chapitre 1 de [2]

Nous imposons de plus à Y d'être fortement localement non-déterministe dans un sens que nous précisons maintenant. Nous aurons besoin d'une fonction auxiliaire $L : [0, \delta_0[\rightarrow [0, +\infty[$ ($\delta_0 > 0$) qui peut être représentée par

$$L(s) = \exp \left(\eta(s) + \int_s^a \frac{\varepsilon(t)}{t} dt \right) \quad (2.11)$$

où $\eta : [0, \delta_0] \rightarrow \mathbb{R}$ et $\varepsilon :]0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ sont mesurables, bornées et telles que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \eta(s) = c \in \mathbb{R}; \quad \lim_{s \rightarrow 0} \varepsilon(s) = 0.$$

Définition 2.4.1. Soit une fonction croissante continue σ telle qu'il existe $\kappa \in]0, 1[$ tel que $\sigma(s) = s^\kappa L(s)$. On dit que Y est *fortement σ -localement non déterministe* s'il existe des constantes $\delta_0 > 0$, $0 < c_1 \leq c_2 < +\infty$ et pour tout $t, h \in \mathbb{R}^N$ avec $|h| \leq \delta_0$

$$\mathbb{E}[Y(t+h) - Y(t)]^2 \leq c_1 \sigma^2(|h|);$$

et si pour tout $t \in \mathbb{R}^N$ et tout r tel que $0 < r \leq \min\{|t|, \delta_0\}$

$$\mathbb{V}[Y(t)|Y(s) : r \leq |s-t| \leq \delta_0] \geq c_2 \sigma^2(r).$$

Remarque 2.4.2. En particulier, le processus défini à la section précédente (voir notamment (2.9)) satisfait ces conditions vu le Lemme 2.3.1 et la Proposition 2.3.2.

Remarque 2.4.3. On dit que la fonction L que nous avons définie est varie lentement à l'origine dans le sens de Karamata. De plus, dans le cas qui nous occupe, nous supposerons toujours $\eta = 0$ sans que cela ne représente une réelle restriction⁴. Nous considérerons aussi que L est C^∞ au voisinage de 0 et que

$$\frac{s^n L^{(n)}(s)}{L(s)} \rightarrow 0 \quad (2.12)$$

lorsque $s \rightarrow 0$ pour tout $n \geq 1$ où $L^{(n)}$ représente la n^{e} dérivée de L . Cette condition supplémentaire est en fait toujours assurée, nous renvoyons à la section 2 de [60] pour plus de détails.

Remarque 2.4.4. Cette nouvelle définition est bien sûr plus forte que le non-déterminisme local tel que défini à la Définition 2.2.1. Cela se montre de manière analogue à la Proposition 2.3.2.

Enfin, nous définissons $X : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^d$ un champs gaussien décrit par

$$X(t) = (X_1(t), \dots, X_d(t)) \quad (2.13)$$

où X_1, \dots, X_d sont des copies indépendantes de Y .

4. Nous n'utilisons en effet L qu'au travers de σ , on récupère alors toutes les fonctions σ possible en modifiant les constantes c_1 et c_2 de la définition précédente.

2.4.1 Quelques lemmes

Les bases étant posées, nous aurons besoin d'établir de nombreux lemmes avant de pouvoir démontrer la loi du logarithme itéré dans le cas des processus X définis par (2.13). Nous noterons toujours $\sigma(s) = s^\kappa L(s)$ la fonction intervenant dans la Définition 2.4.1 pour les composantes de X . Afin de ne pas trop s'éparpiller, nous admettrons un certain nombre de résultats lorsque leur preuve nous paraît peu intéressante soit parce qu'elle relève d'un calcul direct et fastidieux, soit parce qu'elle ne fait pas rentrer en jeu les concepts qui nous intéressent ici.

Nous commençons cette section par quelques lemmes permettant de mieux comprendre le comportement de σ . Ensuite, nous donnons des majorations pour les moments d'ordre $n \in \mathbb{N}_0$ du temps local faisant intervenir σ . Cela nous permettra de calculer, via l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, certaines probabilités liant le temps local et σ . Ces probabilités nous permettront enfin d'obtenir à la sous-section suivante les théorèmes attenant à la loi du log itéré.

Lemme 2.4.5. *Pour tout $\beta > 0$, posons*

$$\tau_\beta(s) = \frac{s}{\sigma(s^{1/N})^\beta}.$$

Si $\kappa\beta < N$, alors il existe $\delta > 0$ tel que τ_β est concave sur $]0, \delta[$.

Démonstration. La preuve découle d'un calcul direct en utilisant (2.12). \square

Le lemme suivant provient de [15].

Lemme 2.4.6. *Si $N > \kappa\beta$ alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, on a*

$$\int_0^1 \frac{s^{N-1}}{(\sigma(rs))^\beta} ds \leq C(\sigma(r))^{-\beta}.$$

Nous acceptons aussi les deux lemmes suivants.

Lemme 2.4.7. *Soient $\beta > 0$ avec $\kappa\beta < N$, $0 < r < \delta$ et $s \in \mathbb{R}^N$. Alors pour tout naturel $n \geq 1$ et tout $t_1, \dots, t_n \in B(s, r)$ distincts, on a*

$$\int_{B(s,r)} \frac{dt}{(\sigma(\min\{|t - t_j|, j \in \{1, \dots, n\}\})^\beta)} \leq K \frac{r^N}{(\sigma(rn^{-1/N}))^\beta},$$

où K est une constante strictement positive ne dépendant que de n, d et σ .

Lemme 2.4.8. *Soient Z_1, \dots, Z_n des variables aléatoires normales centrées linéairement indépendantes et supposons que*

$$\int_{\mathbb{R}} g(u) e^{-\varepsilon u^2} du < +\infty$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(v_1) \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbb{V} \left[\sum_{j=1}^n v_j Z_j \right] \right) dv = \frac{(2\pi)^{n-1}}{\Delta^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{v}{\sigma_1}\right) e^{-v^2/2} dv,$$

où $\sigma_1^2 = \mathbb{V}[Z_1 | Z_2, \dots, Z_n]$ et $\Delta = \det \text{Cov}(Z_1, \dots, Z_n)$.

Le lemme suivant provient de [26] et découle essentiellement des raisonnements de la section 2.2 dont nous reprenons les notations⁵. Rappelons aussi que l'existence du temps local dans le cas qui nous occupe est assurée par la Proposition 1.5.10.

Lemme 2.4.9. *Soient $x, y \in \mathbb{R}^d$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et un naturel $n \geq 1$, on a*

$$\mathbb{E}[(\alpha(x, B))^n] = (2\pi)^{-nd} \int_{B^n} \int_{\mathbb{R}^{nd}} \exp\left(-i \sum_{j=1}^n \langle u_j, x \rangle\right) \mathbb{E}\left[\exp\left(i \sum_{j=1}^n \langle u_j, X(t_j) \rangle\right)\right] d\bar{u} d\bar{t}.$$

Si de plus n est pair, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\alpha(x+y, B) - \alpha(x, B))^n] &= (2\pi)^{-nd} \int_{B^n} \int_{\mathbb{R}^{nd}} \prod_{j=1}^n (\exp(-i\langle u_j, x+y \rangle) - \exp(-i\langle u_j, x \rangle)) \\ &\quad \cdot \mathbb{E}\left[\exp\left(i \sum_{j=1}^n \langle u_j, X(t_j) \rangle\right)\right] d\bar{u} d\bar{t}. \end{aligned}$$

Ces formules nous permettent d'obtenir quelques inégalités utiles sur les moments d'ordre n du temps local.

Lemme 2.4.10. *Supposons $N > \kappa d$. Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $r \in]0, \delta[$, $B = B(0, r)$, $x, y \in \mathbb{R}^d$, tout naturel pair $n \geq 2$ et tout $\gamma \in]0, \min\{1, (N/\kappa - d)/2\}$, on a*

$$\mathbb{E}[(\alpha(x, B))^n] \leq \frac{K^n r^{Nn}}{\prod_{j=1}^n (\sigma(rj^{-1/N}))^d}$$

et

$$\mathbb{E}[(\alpha(x+y, B) - \alpha(x, B))^n] \leq \frac{K^n |y|^{n\gamma} r^{Nn}}{\prod_{j=1}^n (\sigma(rj^{-1/N}))^{d+\gamma}} (n!)^{2\gamma} \prod_{j=1}^n \left(\frac{L(r)}{L(rj^{-1/N})}\right)^\gamma$$

où $K > 0$ est une constante ne dépendant que de n, d et σ .

Démonstration. Dans toute cette preuve, K définira une constante strictement positive dont la valeur pourra changer de ligne en ligne et ne dépendant que de N, d et σ . Commençons par démontrer la première inégalité. Puisque X_1, \dots, X_d sont iid de même loi que Y , on obtient en utilisant les formules du lemme précédent

$$\mathbb{E}[(\alpha(x, B))^n] \leq (2\pi)^{-nd} \int_{B^n} \prod_{k=1}^d \left[\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbb{V}\left(\sum_{j=1}^n u_j^k Y(t_j)\right)\right) dU^k \right] d\bar{t}$$

où $U^k = (u_1^k, \dots, u_n^k) \in \mathbb{R}^n$. Notons alors $R(t_1, \dots, t_n)$ la matrice de variance-covariance de $(Y(t_1), \dots, Y(t_n))$. De plus, pour $t_1, \dots, t_n \in B \setminus \{0\}$, soit (Z_1, \dots, Z_n) un vecteur gaussien centré de matrice de variance-covariance $R^{-1}(t_1, \dots, t_n)$. La densité de (Z_1, \dots, Z_n) est alors donnée par

$$U \mapsto (2\pi)^{-n/2} (\det(R(t_1, \dots, t_n)))^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} U R(t_1, \dots, t_n) U'\right)$$

5. Ce lemme reste vrai pour n'importe quel champs gaussiens qui est (LT).

où $U = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ et U' est la transposée de U . On en tire pour tout $1 \leq k \leq d$ que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp \left(-\frac{1}{2} \mathbb{V} \left(\sum_{j=1}^n u_j^k Y(t_j) \right) \right) dU^k = \frac{(2\pi)^{n/2}}{(\det(R(t_1, \dots, t_n)))^{1/2}}.$$

On déduit alors

$$\mathbb{E}[(\alpha(x, B))^n] \leq (2\pi)^{n/2} \int_{B^n} \frac{1}{(\det(R(t_1, \dots, t_n)))^{1/2}} d\bar{t}$$

puisque

$$\{\bar{t} : \exists i, j : t_i \neq t_j, i \neq j\}$$

est de mesure de Lebesgue nulle. De plus, on sait que⁶

$$\det(R(t_1, \dots, t_n)) = \mathbb{V}(Y(t_1)) \prod_{j=2}^n \mathbb{V}(Y(t_j) | Y(t_i) : i = 1, 2, \dots, j-1). \quad (2.14)$$

On en tire alors en utilisant le non-déterminisme local de Y que

$$\mathbb{E}[(\alpha(x, B))^n] \leq K^n \int_{B^n} \prod_{j=1}^n \frac{1}{(\sigma(\min\{|t_j - t_i|, 0 \leq i \leq j-1\}))^d} d\bar{t}$$

où on a posé $t_0 = 0$. Enfin, puisque $N > \kappa d$, la conclusion découle du Lemme 2.4.7.

Passons maintenant à la démonstration de la seconde inégalité. En remarquant que $|e^{iu} - 1| \leq 2^{1-\gamma} |u|^\gamma$ ($u \in \mathbb{R}, \gamma \in]0, 1[$) et en utilisant le lemme précédent, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\alpha(x + y, B) - \alpha(x, B))^n] &\leq (2\pi)^{-nd} 2^{(1-\gamma)n} |y|^{n\gamma} \\ &\quad \cdot \int_{B^n} \int_{\mathbb{R}^{nd}} \prod_{j=1}^n |u_j|^\gamma \exp \left(-\frac{1}{2} \mathbb{V} \left(\sum_{j=1}^n \langle u_j, X(t_j) \rangle \right) \right) d\bar{u} d\bar{t} \\ &= (2\pi)^{-nd} 2^{(1-\gamma)n} |y|^{n\gamma} r^{Nn} \sigma(r)^{-n(d+\gamma)} \\ &\quad \cdot \int_{B(0,1)^n} \int_{\mathbb{R}^{nd}} \prod_{j=1}^n |u_j|^\gamma \exp \left(-\frac{1}{2} \mathbb{V} \left(\sum_{j=1}^n \langle u_j, X(rt_j) / \sigma(r) \rangle \right) \right) d\bar{u} d\bar{t}. \quad (2.15) \end{aligned}$$

La dernière égalité étant obtenue en effectuant le changement de variable $t_j = rt'_j$ et $u_j = \sigma(r)^{-1} u'_j$, $j = 1, \dots, n$.

Afin de simplifier les notations, posons

$$Z(t) = \frac{Y(rt)}{\sigma(r)} \text{ et } \xi(s) = \frac{\sigma(rs)}{\sigma(r)} = s^\kappa \ell(s).$$

Alors Z est aussi LND où σ est remplacé par ξ et ℓ possède les mêmes propriétés que L . En particulier, le Lemme 2.4.7 est toujours vrai si on remplace σ et $B(s, r)$ par ξ et $B(s, 1)$.

6. voir le Lemme 2.1.5.

Posons alors $\tilde{Z}(t) = (Z_1(t), \dots, Z_d(t))$, où Z_1, \dots, Z_d sont des copies indépendantes de Z . Puisque $|a+b|^\gamma \leq |a|^\gamma + |b|^\gamma$ ($\gamma \in]0, 1[$), on a⁷

$$\prod_{j=1}^n |u_j|^\gamma \leq \sum_{k \in \{1, \dots, d\}^n} \prod_{j=1}^n |u_j^{k_j}|^\gamma.$$

Fixons alors $k = (k_1, \dots, k_n) \in \{1, \dots, d\}^n$ et considérons

$$J = \int_{\mathbb{R}^{nd}} \prod_{j=1}^n |u_j^{k_j}|^\gamma \exp \left(-\frac{1}{2} \mathbb{V} \left(\sum_{j=1}^n \langle u_j, \tilde{Z}(t_j) \rangle \right) \right) d\bar{u}.$$

De plus, pour $t_1, \dots, t_n \in B(0, 1) \setminus \{0\}$ distincts, on sait que $Z_l(t_j)$ ($l \in \{1, \dots, d\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$) sont linéairement indépendants (car LND). A l'aide de l'inégalité de Hölder et du Lemme 2.4.8, on obtient

$$\begin{aligned} J &\leq \prod_{j=1}^n \left[\int_{\mathbb{R}^{nd}} |u_j^{k_j}|^{n\gamma} \exp \left(-\frac{1}{2} \mathbb{V} \left(\sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^d u_j^l Z_l(t_j) \right) \right) d\bar{u} \right]^{1/n} \\ &= \frac{(2\pi)^{nd-1}}{(\det(\text{Cov}(Z_l(t_j), 1 \leq l \leq d, 1 \leq j \leq n)))^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} |v|^{n\gamma} \exp \left(-\frac{v^2}{2} \right) dv \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sigma_j^\gamma} \\ &\leq \frac{K^n (n!)^\gamma}{(\det(\text{Cov}(Z(t_1), \dots, Z(t_n))))^{d/2}} \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sigma_j^\gamma} \end{aligned}$$

où $\sigma_j^2 = \mathbb{V}[Z_{k_j}(t_j) | Z_l(t_i) : l \neq k_j \text{ ou } l = k_j, i \neq j]$, la dernière inégalité étant alors obtenue grâce à la formule de Stirling. En effet, l'intégrale vaut (à une constante près)

$$2^{n\gamma/2} \Gamma\left(\frac{n\gamma+1}{2}\right) = 2^{1-n\gamma/2} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(n\gamma)}{\Gamma(n\gamma/2)}$$

En utilisant la formule de Stirling, cette dernière expression est majorée par

$$K^n \Gamma(n\gamma) \leq K^n \Gamma(n)^\gamma \leq K^n (n!)^\gamma.$$

En utilisant l'indépendance de Z_1, \dots, Z_n et le non-déterminisme local, on obtient

$$\sigma_j^2 \geq c_2 \min\{\xi^2(|t_j - t_i|) : i = 0 \text{ ou } i \neq j\}$$

où on a posé $t_0 = 0$.

Nous allons maintenant ordonner les t_j afin d'utiliser la monotonie de ξ . Pour ce faire, définissons la permutation π par

$$|t_{\pi(1)}| = \min\{|t_i|, i = 1, \dots, n\}$$

et

$$|t_{\pi(j)} - t_{\pi(j-1)}| = \min \{ |t_i - t_{\pi(j-1)}|, i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{\pi(1), \dots, \pi(j-1)\} \}, \quad j = 2, \dots, n.$$

7. Où on note $u_j = (u_j^1, \dots, u_j^d)$.

On obtient alors (en se rappelant de (2.14))

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^n \frac{1}{\sigma_j^\gamma} &\leq K^n \prod_{j=1}^n \frac{1}{\min\{(\xi(|t_{\pi(j)} - t_i|))^\gamma : i = 0 \text{ ou } i \neq \pi(j)\}} \\
&\leq K^n \prod_{j=1}^n \frac{1}{\min\{(\xi(|t_{\pi(j)} - t_{\pi(j-1)}|))^\gamma, (\xi(|t_{\pi(j)} - t_{\pi(j+1)}|))^\gamma\}} \\
&\leq K^n \prod_{j=1}^n \frac{1}{(\xi(|t_{\pi(j)} - t_{\pi(j-1)}|))^{2\gamma}} \\
&\leq K^n \prod_{j=1}^n \frac{1}{(\mathbb{V}(Z(t_{\pi(j)})|Z(t_{\pi(i)}), i = 1, \dots, j-1))^\gamma} \\
&\leq \frac{K^n}{(\det(\text{Cov}(Z(t_1), \dots, Z(t_n))))^\gamma}. \tag{2.16}
\end{aligned}$$

La quatrième inégalité étant obtenue en utilisant la première inégalité de la définition du non-déterminisme local :

$$\mathbb{E}[(Z(t+h) - Z(t))^2] \leq c_1 \xi^2(|h|).$$

On a en effet

$$\mathbb{V}(Z(t_{\pi(j)})|Z(t_{\pi(i)}), i = 1, \dots, j-1) \leq \mathbb{E}[(Z(t_{\pi(j)} + (t_{\pi(j-1)} - t_{\pi(j)})) - Z(t_{\pi(j)}))^2] \leq c_1 \xi^2(|t_{\pi(j-1)} - t_{\pi(j)}|).$$

On tire alors de (2.16) que

$$\begin{aligned}
J &\leq \frac{K^n (n!)^\gamma}{(\det(\text{Cov}(Z(t_1), \dots, Z(t_n))))^{d/2+\gamma}} \\
&\leq \frac{K^n (n!)^\gamma}{\prod_{j=1}^n (\xi(\min\{|t_j - t_i|, 0 \leq i \leq j-1\}))^{d/2+\gamma}}
\end{aligned}$$

Considérons alors

$$0 < \gamma < \min \left\{ 1, \frac{1}{2} \left(\frac{N}{\kappa} - d \right) \right\}.$$

En réinjectant J dans (2.15) et en utilisant le Lemme 2.4.7 avec $\beta = d + 2\gamma$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(\alpha(x+y, B) - \alpha(x, B))^n] &\leq K^n |y|^{n\gamma} (n!)^\gamma r^{Nn} \sigma(r)^{-n(d+\gamma)} \\
&\quad \cdot \int_{\mathcal{B}(0,1)^n} \prod_{j=1}^n \frac{1}{(\xi(\min\{|t_j - t_i|, 0 \leq i \leq j-1\}))^{d+2\gamma}} d\bar{t} \\
&\leq K^n |y|^{n\gamma} (n!)^\gamma r^{Nn} \sigma(r)^{-n(d+\gamma)} \cdot \prod_{j=1}^n \frac{1}{(\xi(j^{-1/N}))^{d+2\gamma}} \\
&\leq \frac{K^n |y|^{n\gamma} r^{Nn}}{\prod_{j=1}^n (\sigma(rj^{-1/N}))^{d+\gamma}} (n!)^{2\gamma} \prod_{j=1}^n \left(\frac{L(r)}{L(rj^{-1/N})} \right)^\gamma.
\end{aligned}$$

□

Ce lemme nous permet d'obtenir immédiatement le résultat suivant, puisque X est à accroissements stationnaires.

Lemme 2.4.11. *Pour tout $\tau \in \mathbb{R}^N$, soit $B = B(\tau, r)$ avec $r \in]0, \theta[$. Alors pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$, tout naturel pair $n \geq 2$ et tout $0 < \gamma < \min\{1, (N/\kappa - d)/2\}$, on a*

$$\mathbb{E}[(\alpha(x + X(\tau), B))^n] \leq \frac{K^n r^{Nn}}{\prod_{j=1}^n (\sigma(rj^{-1/N}))^d}$$

et

$$\mathbb{E}[(\alpha(x + y + X(\tau), B) - \alpha(x + X(\tau), B))^n] \leq \frac{K^n |y|^{n\gamma} r^{Nn}}{\prod_{j=1}^n (\sigma(rj^{-1/N}))^{d+\gamma}} (n!)^{2\gamma} \prod_{j=1}^n \left(\frac{L(r)}{L(rj^{-1/N})} \right)^\gamma.$$

Nous pouvons alors prouver le lemme suivant.

Lemme 2.4.12. *Avec les notations du lemme précédent, pour tout $c > 0$, il existe une constante $A > 0$ (ne dépendant que de N, d et σ) telle que pour tout $u > 0$ suffisamment petit,*

$$\mathbb{P} \left(\alpha(x + X(\tau), B) \geq \frac{Ar^N}{(\sigma(ru))^d} \right) \leq \exp(-c/u^N)$$

et

$$\mathbb{P} \left(|\alpha(x + y + X(\tau), B) - \alpha(x + X(\tau), B)| \geq \frac{Ar^N |y|^\gamma}{(\sigma(ru))^{d+\gamma} u^{2N\gamma}} \right) \leq \exp(-c/u^N).$$

Démonstration. Nous nous contentons de prouver la première inégalité, la seconde étant analogue. Posons

$$\Lambda = \frac{\alpha(x + X(\tau), B)}{r^N} \text{ et } u_n = \frac{1}{n^{1/N}}.$$

Par l'inégalité de Markov et le lemme précédent, on a

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\alpha(x + X(\tau), B) \geq \frac{Ar^N}{(\sigma(ru))^d} \right) \\ & \leq \frac{\mathbb{E}[\Lambda^n] (\sigma(ru_n))^{nd}}{A^n} \\ & \leq \left(\frac{K}{A} \right)^n (\sigma(ru_n))^{nd} \prod_{j=1}^n \frac{1}{(\sigma(rj^{-1/N}))^d} \\ & = \left(\frac{K}{A} \right)^n \left(\frac{r}{n^{1/N}} \right)^{n\kappa d} L \left(\frac{r}{n^{1/N}} \right)^{nd} \prod_{j=1}^n \left(\frac{j^{1/N}}{r} \right)^{\kappa d} L \left(\frac{r}{j^{1/N}} \right)^{-d}. \end{aligned}$$

Cette dernière expression peut encore être majorée à l'aide de la formule de Stirling par

$$\left(\frac{K}{A} \right)^n \exp \left(-\frac{\kappa d}{N} n \right) (2\pi n)^{\kappa d/(2N)} L \left(\frac{r}{n^{1/N}} \right)^{nd} \prod_{j=1}^n L \left(\frac{r}{j^{1/N}} \right)^{-d}.$$

En utilisant la représentation sous forme intégrale de L (voir équation (2.11) avec $\eta = 0$ comme nous l'avons remarqué), on obtient

$$\begin{aligned}
& L \left(\frac{r}{n^{1/N}} \right)^{nd} \prod_{j=1}^n L \left(\frac{r}{R} j^{1/N} \right)^{-d} \\
&= L \left(\frac{r}{n^{1/N}} \right)^{nd} \exp \left(-nd \int_{\frac{r}{n^{1/N}}}^a \frac{\varepsilon(t)}{t} dt + d \sum_{j=1}^{n-1} \int_{\frac{r}{n^{1/N}}}^{\frac{r}{j^{1/N}}} \frac{\varepsilon(t)}{t} dt \right) \\
&= \exp \left(d \sum_{j=1}^{n-1} j \int_{\frac{r}{(j+1)^{1/N}}}^{\frac{r}{j^{1/N}}} \frac{\varepsilon(t)}{t} dt \right) \\
&\leq \exp \left(\frac{\delta d}{N} \sum_{j=1}^{n-1} j \log \left(1 + \frac{1}{j} \right) \right) \\
&\leq \exp \left(\frac{\delta d}{N} \left(n - \frac{1}{2} \log(n) - \frac{1}{2} \log(2\pi) \right) \right)
\end{aligned}$$

où $\delta = \sup_{t \leq r} |\varepsilon(t)| < \kappa/2$ si r suffisamment petit. La dernière inégalité étant encore une fois obtenue via la formule de Stirling en remarquant que

$$\prod_{j=1}^n \left(1 + \frac{1}{j} \right)^j \leq \frac{n^n}{n!}$$

pour n suffisamment grand. En rassemblant les morceaux, on obtient que pour tout $c > 0$, il existe une constante $A > K$ et un naturel n_0 suffisamment grand tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} (\Lambda \geq A / (\sigma(ru_n))^d) \\
&\leq \exp \left(n \left(\log \left(\frac{K}{A} \right) - \frac{(\kappa - \delta)d}{2N} \right) + \frac{(\kappa - \varepsilon)d}{2N} (\log(n) + \log(2\pi)) \right) \\
&\leq \exp(-2cn) = \exp(-2c/u_n^N).
\end{aligned}$$

Cela étant, pour $u > 0$ suffisamment petit, il existe $n > n_0$ tel que

$$u_{n+1} \leq u < u_n.$$

Dès lors, en utilisant l'inégalité

$$\frac{n}{n+1} \geq 1/2 \quad (n \geq 1),$$

on obtient finalement

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} (\Lambda \geq A / (\sigma(ru))^d) \leq \mathbb{P} (\Lambda \geq A / (\sigma(ru_n))^d) \\
&\leq \exp(-2c/u_n^N) \leq \exp(-2c/u_{n+1}^N) \\
&\leq \exp(-c/u^N).
\end{aligned}$$

□

Nous énonçons enfin le lemme suivant dû à Talagrand [54] que nous avons pris le soin de spécifier pour le cas qui nous occupe ici.

Lemme 2.4.13. *Soit $Y : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^d$ un processus gaussien satisfaisant $Y(0) = 0$ et*

$$\mathbb{E}[Y(t+h) - Y(t))^2] \leq c_1 \sigma^2(|h|)$$

pour une constante $c_1 > 0$ et $|h|$ suffisamment petit. Pour tout $r > 0$ suffisamment petit et $u \geq K\sigma(r)$, on a

$$\mathbb{P} \left(\sup_{|t| \leq r} |Y(t)| \geq u \right) \leq \exp \left(- \frac{u^2}{K\sigma^2(r)} \right).$$

2.4.2 Présentation des théorèmes

Nous énonçons et démontrons maintenant les théorèmes donnant la loi du log itéré des processus fortement LND à accroissement stationnaires. Pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, posons $\alpha^*(B) = \sup_x \alpha(x, B)$.

Théorème 2.4.14. *Soit X défini par (2.13) et supposons $N > \kappa d$. Alors il existe une constante strictement positive K telle que pour tout $\tau \in \mathbb{R}^N$ presque sûrement*

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\alpha^*(B(\tau, r))}{\phi_1(r)} \leq K$$

où

$$\phi_1(r) = \frac{r^N}{\sigma (r(\log(\log(1/r)))^{-1/N})^d}.$$

Démonstration. Fixons $\tau \in \mathbb{R}^N$ et posons $B_n = B(\tau, 2^{-n})$, $n \in \mathbb{N}_0$. Par le Lemme 2.4.13 et puisque X est à accroissements stationnaires, on sait que

$$\mathbb{P} \left(\sup_{t \in B_n} |X(t) - X(\tau)| \geq \sigma(2^{-n}) \sqrt{2K \log(n)} \right) \leq n^{-2}.$$

Ainsi par le lemme de Borel-Cantelli, on sait qu'il existe presque sûrement n_1 (dépendant de ω) tel que, pour tout $n \geq n_1$,

$$\sup_{t \in B_n} |X(t) - X(\tau)| \leq \sigma(2^{-n}) \sqrt{2K \log(n)}. \quad (2.17)$$

Posons $\theta_n = \sigma(2^{-n}/(\log \log 2^n)^{1/N}) (\log \log(2^n))^{-2}$ et

$$G_n = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leq \sigma(2^{-n}) \sqrt{2K \log(n)}, \quad x = \theta_n p \text{ pour un } p \in \mathbb{Z}^d\}.$$

Pour n suffisamment grand, il est clair que la cardinalité de G_n satisfait

$$\#G_n \leq K(\log(n))^{3d+1}.$$

Par le Lemme 2.4.12, on obtient

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\alpha(x + X(\tau), B_n) \geq A\phi_1(2^{-n}) \text{ pour un } x \in G_n) \\ & \leq K(\log(n))^{3d+1} \exp(-2 \log(\log(2^n))) \\ & \leq K(\log(n))^{3d+1} n^{-2}. \end{aligned}$$

Comme précédemment, via le lemme de Borel-Cantelli, on obtient presque sûrement l'existence de n_2 (dépendant de ω) tel que pour tout $n \geq n_2$,

$$\sup_{x \in G_n} \alpha(x + X(\tau), B_n) \leq A\phi_1(2^{-n}). \quad (2.18)$$

Fixons n tel que $n^2 > 2^d$, pour $h \geq 1$ naturel et $x \in G_n$, posons

$$F(n, h, x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^d : y = x + \theta_n \sum_{j=1}^h \varepsilon_j 2^{-j}, \quad \varepsilon_j \in \{0, 1\}^d \right\}.$$

Si $y_1, y_2 \in F(n, h, x)$, on dira que y_1 et y_2 forment une paire liée si $y_2 - y_1 = \theta_n \varepsilon 2^{-h}$ pour un $\varepsilon \in \{0, 1\}^d$. Encore une fois, par le Lemme 2.4.12, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|\alpha(y_1 + X(\tau), B_n) - \alpha(y_2 + X(\tau), B_n)| \geq \frac{A2^{-nN} |y_1 - y_2|^\gamma (h \log \log 2^n)^{2\gamma}}{(\sigma(2^{-n}/(h \log \log 2^n)^{1/N}))^{d+\gamma}}) \\ \text{pour } x \in G_n, h \geq 1 \text{ et une paire liée } y_1, y_2 \in F(n, h, x)) \\ \leq \#G_n \sum_{h=1}^{+\infty} 2^{hd} \exp(-2h \log(n)) \\ \leq K(\log(n))^{3d+1} \frac{2^d/n^2}{1 - 2^d/n^2}. \end{aligned}$$

Puisqu'il s'agit du terme général d'une série absolument convergente, par Borel-Cantelli, il existe presque sûrement n_3 tel que pour tout $n \geq n_3$,

$$|\alpha(y_1 + X(\tau), B_n) - \alpha(y_2 + X(\tau), B_n)| \leq \frac{A2^{-nN} |y_1 - y_2|^\gamma (h \log \log 2^n)^{2\gamma}}{(\sigma(2^{-n}/(h \log \log 2^n)^{1/N}))^{d+\gamma}} \quad (2.19)$$

pour tout $x \in G_n, h \geq 1$ et une paire quelconque liée $y_1, y_2 \in F(n, h, x)$.

Posons alors $\Omega_0 \subset \Omega$ l'évènement tel que (2.17), (2.18) et (2.19) se réalisent (pour n suffisamment grand). On a alors directement $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$. Pour $\omega \in \Omega_0$, soient $n \geq n_4 = \sup\{n_1, n_2, n_3\}$ et $y \in \mathbb{R}^d$ tel que $|y| \leq \sigma(2^{-n})\sqrt{2K \log(n)}$. Posons alors $y_0 = x$ et

$$y_h = x + \theta_n \sum_{j=1}^h \varepsilon_j 2^{-j} \quad (\varepsilon_j \in \{0, 1\}^d)$$

pour un $x \in G_n$ tels que $y = \lim_{h \rightarrow +\infty} y_h$. Remarquons que y_{h-1} et y_h forment une paire liée, en utilisant la continuité de α et (2.19), on obtient

$$\begin{aligned} & |\alpha(y + X(\tau), B_n) - \alpha(x + X(\tau), B_n)| \\ & \leq \sum_{h=1}^{+\infty} \frac{A2^{-nN} |\theta_n 2^{-h}|^\gamma (h \log \log 2^n)^{2\gamma}}{(\sigma(2^{-n}/(h \log \log 2^n)^{1/N}))^{d+\gamma}} \\ & \leq K2^{-Nn} \theta_n^\gamma \sum_{h=1}^{+\infty} 2^{-h\gamma} h^{2\gamma + \kappa(d+\gamma)/N} \frac{(h \log \log 2^n)^{2\gamma}}{(\sigma(2^{-n}/(\log \log 2^n)^{1/N}))^{d+\gamma}} \\ & \leq K2^{-Nn} \theta_n^\gamma \frac{(h \log \log 2^n)^{2\gamma}}{(\sigma(2^{-n}/(\log \log 2^n)^{1/N}))^{d+\gamma}} \\ & = K\phi_1(2^{-n}). \end{aligned}$$

On tire de cette dernière inégalité et de (2.18) que presque sûrement pour $n \geq n_4(\omega)$

$$\alpha(y + X(\tau), B_n) \leq K\phi_1(2^{-n})$$

pour tout $y \in \mathbb{R}^d$ tel que $|y| \leq \sqrt{2K \log(n)}$. De là, en se rappelant de la Proposition 1.4.2, on obtient presque sûrement, pour tout $n \geq n_4$,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \alpha(x, B_n) = \sup_{x \in \overline{X(B_n)}} \alpha(x, B_n) \leq K\phi_1(2^{-n}).$$

Pour conclure, pour tout $r > 0$ suffisamment petit, il existe $n \geq n_4$ tel que $2^{-n} \leq r < 2^{-n+1}$ donc

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \alpha(x, B(\tau, r)) \leq K\phi_1(r).$$

□

Le théorème suivant est du même type mais s'intéresse aux rectangles et non plus aux boules. Sa démonstration s'obtient par une suite d'arguments similaires à ceux de la preuve précédente, nous ne la développerons donc pas. Le lecteur intéressé par une preuve est néanmoins invité à consulter [60] p145-146.

Théorème 2.4.15. *Soit X défini par (2.13) et supposons $N > \kappa d$. Alors pour tout rectangle $T \subset \mathbb{R}^N$, il existe une constante strictement positive K telle que, presque sûrement,*

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \sup_{\tau \in T} \frac{\alpha^*(B(\tau, r))}{\phi_2(r)} \leq K$$

où

$$\phi_2(r) = \frac{r^N}{\sigma(r(\log(1/r))^{-1/N})^d}.$$

Le corollaire suivant est alors immédiat en prenant $\sigma(t) = t^H$ et en se rappelant du Lemme 2.3.1.

Corollaire 2.4.16. *Soit $X : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^d$ un mouvement Brownien fractionnaire d -dimensionnel d'indice de Hurst $H \in]0, 1[$. Si $N > Hd$, alors pour tout $\tau \in \mathbb{R}^N$ presque sûrement*

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\alpha^*(B(\tau, r))}{r^{N-Hd}(\log(\log(1/r)))^{Hd/N}} \leq K,$$

et pour tout rectangle $T \subset \mathbb{R}^N$, presque sûrement

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \sup_{t \in T} \frac{\alpha^*(B(t, r))}{r^{N-Hd}(\log(1/r))^{Hd/N}} \leq K.$$

Les théorèmes précédents permettent d'obtenir des informations sur la régularité des trajectoires de X .

Théorème 2.4.17. *Soit X défini par (2.13). Pour tout $\tau \in \mathbb{R}^N$, il existe une constante $K > 0$ telle que, presque sûrement,*

$$\liminf_{r \rightarrow 0} \sup_{s \in B(\tau, r)} \frac{|X(s) - X(\tau)|}{\sigma(r/(\log(\log(1/r)))^{1/N})} \geq K.$$

De même, pour tout rectangle $T \subset \mathbb{R}^N$,

$$\liminf_{r \rightarrow 0} \inf_{t \in T} \sup_{s \in B(\tau, r)} \frac{|X(s) - X(\tau)|}{\sigma(r / (\log(1/r))^{1/N})} \geq K$$

presque sûrement.

En particulier, X est presque sûrement dérivable nulle part sur \mathbb{R}^N .

Démonstration. Il est clair qu'il suffit d'établir le cas $d = 1$. Pour toute boule ou tout rectangle $Q \subset \mathbb{R}^N$,

$$\lambda(Q) = \mu_Q(\mathbb{R}^d) = \int_{\overline{X(Q)}} \alpha(x, Q) dx \leq \alpha^*(Q) \sup_{s, t \in Q} |X(s) - X(t)|$$

où μ est la mesure d'occupation associée à X .

On conclut alors aisément à l'aide des théorèmes précédents. \square

Selon Xiao [60], il est aussi possible de montrer (avec beaucoup plus de travail) le théorème suivant qui vient compléter le théorème précédent. Il ne donne cependant pas de preuve de cette affirmation qui nous paraît loin d'être évidente⁸.

Théorème 2.4.18. *Soit X défini par (2.13). Pour tout $\tau \in \mathbb{R}^N$, il existe une constante $K > 0$ telle que*

$$\liminf_{r \rightarrow 0} \sup_{s \in B(\tau, r)} \frac{|X(s) - X(\tau)|}{\sigma(r / (\log(\log(1/r))^{1/N}))} \leq K$$

presque sûrement.

2.5 Ensembles de niveau

Pour terminer ce chapitre, nous nous attardons sur la mesure de Hausdorff⁹ des ensembles de niveaux du processus X défini par (2.13). Cette section est encore une fois basée sur [60]. Nous avons le résultat suivant.

Théorème 2.5.1. *Soit X le processus défini par (2.13) avec la condition supplémentaire sur Y suivante :*

$$\mathbb{E}[(Y(t+h) - Y(t))^2] = \sigma^2(|h|) \quad (2.20)$$

et $N > \kappa d$. Si T est un cube fermé de $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, alors il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ fixé,

$$\mathbb{P}(K\alpha(x, T) \leq \mathcal{H}^{\phi_1}(X^{-1}(x) \cap T) < +\infty) = 1,$$

où ϕ_1 a été défini au Théorème 2.4.14.

Nous nous attaquons à la démonstration de ce résultat. Pour ce faire, nous aurons besoin de quelques propositions intermédiaires. Considérons $T \subset \mathbb{R}^N$ un cube fermé.

8. Nous soupçonnons que la preuve revient à tenter de mimer les résultats précédents en remplaçant le temps local par le processus.

9. Pour rappel, à l'Annexe A se trouve une introduction à la mesure de Hausdorff. Nous reprendrons librement les notations s'y trouvant.

Lemme 2.5.2. Soit μ_ω une mesure aléatoire sur T et soit $(t, \omega) \rightarrow f_k(t, \omega) = f_k(t)$ une suite de fonctions positives aléatoires. S'il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $n, k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E} \left[\int_T [f_k(t)]^n \mu_\omega(dt) \right] \leq K^n \frac{2^{-nNk}}{\prod_{j=1}^n \sigma(2^{-k} j^{-1/N})^d}.$$

Alors

$$\mathbb{P} \left(\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{f_k(t)}{\phi_1(2^{-k})} \leq K \text{ pour } \mu_\omega \text{ presque tout } t \in T \right) = 1,$$

où ϕ_1 a été défini au Théorème 2.4.14.

Démonstration. Soit une constante $A > 0$, posons

$$A_k(\omega) = \{t \in T : f_k(t) \geq A\phi_1(2^{-k})\}.$$

Par hypothèse, on obtient alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mu_\omega(A_k)] &\leq \frac{\mathbb{E} \left[\int_T (f_k(t))^n \mu_\omega(dt) \right]}{(A\phi_1(2^{-k}))^n} \\ &\leq \left(\frac{K}{A} \right)^n \sigma(2^{-k} (\log \log 2^k)^{-1/N})^{nd} \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sigma(2^{-k} j^{-1/N})^d} \\ &\leq \left(\frac{K}{A} \right)^n (\log k)^{-n\kappa d/N} n^{n\kappa d} L (2^{-k} (\log k)^{1/N})^{nd} \prod_{j=1}^n \frac{1}{L(2^{-k} j^{-1/N})^d}. \end{aligned}$$

En posant $n = \log k$ et en procédant comme à la démonstration du Lemme 2.4.12, on obtient, pour tout A suffisamment grand,

$$\mathbb{E}[\mu_\omega(A_k)] \leq k^{-2}.$$

En particulier

$$\mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \mu_\omega(A_k) \right] < +\infty.$$

Une application du lemme de Borel-Cantelli permet alors de conclure. \square

Proposition 2.5.3. Soit X le processus défini par (2.13) et supposons $N > \kappa d$. Soit $x \in \mathbb{R}^d$ fixé et considérons une version de $\alpha(x, \cdot)$ qui soit une mesure¹⁰ à support dans $X^{-1}(x)$. Alors, presque sûrement pour $\alpha(x, \cdot)$ presque tout $t \in T$

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\alpha(x, B(\tau, r))}{\phi_1(r)} \leq K,$$

où $K > 0$ est une constante qui ne dépend pas de x .

Démonstration. Posons $f_k(t) = \alpha(x, B(t, 2^{-k}))$ et pour tout borélien $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$,

$$\mu_\omega(B) = \alpha(x, B \cap T).$$

10. C'est-à-dire un noyau d'occupation.

Par un raisonnement similaire à la preuve de la Proposition 2.2.7, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\int_T [f_k(t)]^n \alpha(x, dt) \right] \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{(n+1)d} \int_T \int_{B(t, 2^{-k})^n} \int_{\mathbb{R}^{(n+1)d}} \exp \left(-i \sum_{j=1}^{n+1} \langle x, u_j \rangle \right) \\ & \quad \times \mathbb{E} \left[\exp \left(i \sum_{j=1}^{n+1} \langle u_j, X(s_j) \rangle \right) \right] d\bar{u} d\bar{s} \end{aligned}$$

où $\bar{u} \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $\bar{s} \in T \times B(t, 2^{-k})^n$.

En procédant comme dans la preuve du Lemme 2.4.10, on obtient alors

$$\mathbb{E} \left[\int_T [f_k(t)]^n \alpha(x, dt) \right] \leq K^n \frac{2^{nNk}}{\prod_{j=1}^n \sigma(2^{-k} j^{-1/N})^d}.$$

Le lemme précédent permet de conclure. \square

Théorème 2.5.4. *Soit X le processus défini par 2.13 et supposons $N > \kappa d$. Si $T \subset \mathbb{R}^N$ est un cube fermé alors il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,*

$$\mathbb{P}(\mathcal{H}^{\phi_1}(X^{-1}(x) \cap T) \geq K\alpha(x, T)) = 1.$$

Démonstration. Posons l'ensemble borélien

$$D = \left\{ t \in T : \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\alpha(x, B(t, r))}{\phi_1(r)} > K \right\}$$

où K est la constante de la Proposition 2.5.3. Par cette même proposition, on sait que $\alpha(x, D) = 0$ presque sûrement. Il découle alors de Théorème A.1.9 (voir annexe) que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{\phi_1}(X^{-1}(x) \cap T) & \geq \mathcal{H}^{\phi_1}(X^{-1}(x) \cap (T \setminus D)) \\ & \geq K\alpha(x, T \setminus D) = K\alpha(x, T). \end{aligned}$$

Ce qui suffit. \square

Il nous reste à obtenir la borne supérieure pour démontrer le Théorème 2.5.1. Dans la suite, nous nous placerons toujours dans les hypothèses de ce théorème, sauf mention explicite du contraire.

Considérons un cube fermé $T \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et posons $\varepsilon = \min_{t \in T} \sigma(|t|)$. En particulier, on a $\varepsilon > 0$ et puisque $\sigma(0) = 0$ et σ est une fonction continue, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $0 < h < \eta$, $\sigma(h) < \varepsilon/2$. Il est clair que T peut-être recouvert par un nombre fini de boule fermée de rayon η . Si $\{\bar{B}(t_j, \eta) : j = 1, 2, \dots, M\}$ est un recouvrement de T , il suffit de prouver que

$$\mathcal{H}^{\phi_1}(X^{-1}(x) \cap \bar{B}(t_j, \eta)) < +\infty$$

presque sûrement pour tout $j \in \{1, 2, \dots, M\}$ pour obtenir

$$\mathcal{H}^{\phi_1}(X^{-1}(x) \cap T) < +\infty.$$

On peut alors supposer sans perte de généralité que $T = \overline{B}(t_0, \eta)$ où $t_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Pour simplifier les notations qui suivent, posons de plus

$$Z(t) = \mathbb{E}[X(t)|X(t_0)] \text{ et } S(t) = X(t) - Z(t). \quad (2.21)$$

Il est clair que ces deux processus sont indépendants. Avant d'énoncer le prochain lemme, rappelons que σ est de la forme

$$\sigma(s) = s^\kappa L(s)$$

où L est défini par (2.11).

Lemme 2.5.5. *Pour tous $s, t \in T$,*

$$|Z(s) - Z(t)| \leq K|s - t|^\gamma |X(t_0)|$$

où $\gamma = 2\kappa$ si $\kappa \leq 1/2$, $\gamma = 1$ si $\kappa > 1/2$ et $K > 0$ est une constante dépendant de N, σ, t_0 et η .

Démonstration. Il est suffisant de considérer le cas $d = 1$. Par les propriétés du conditionnement gaussien¹¹, on obtient

$$|Z(s) - Z(t)| = \frac{|\mathbb{E}[(X(s) - X(t))X(t_0)]|}{\mathbb{E}[X^2(t_0)]} |X(t_0)|.$$

En utilisant (2.20), remarquons que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X(s)X(t_0)] &= \frac{1}{2} \mathbb{E}[(X(s) - X(t_0))^2 - X^2(s) - X^2(t_0)] \\ &= \frac{1}{2} (\sigma^2(|s - t_0|) - \sigma^2(|s|) - \sigma^2(|t_0|)). \end{aligned}$$

On en tire

$$|Z(s) - Z(t)| = \frac{|\sigma^2(|s|) - \sigma^2(|t|) + \sigma^2(|t - t_0|) - \sigma^2(|s - t_0|)|}{2\sigma^2(|t_0|)} |X(t_0)|.$$

De plus, puisque L est infiniment continument dérivable, on a pour tout $s, t \in T$

$$\begin{aligned} |\sigma^2(|s|) - \sigma^2(|t|)| &\leq |s|^{2\kappa} - |t|^{2\kappa} |L^2(|s|) + |t|^{2\kappa} |L^2(|s|) - L^2(|t|)| \\ &\leq K|s - t|^\gamma \end{aligned}$$

où γ est pris comme dans l'énoncé. La conclusion découle alors. \square

Nous accepterons le lemme suivant¹², sa preuve étant fort longue et nécessitant plusieurs résultats intermédiaires.

Lemme 2.5.6. *Il existe une constante $\delta_1 > 0$ telle que pour tout $0 < r_0 \leq \delta_1$, on a*

$$\mathbb{P} \left(\exists r \in [r_0^2, r_0] : \sup_{|t| \leq 2\sqrt{Nr}} |X(t)| \leq K\sigma \left(r \left(\log \log \frac{1}{r} \right)^{-1/N} \right) \right) \geq 1 - \exp \left(- \left(\log \frac{1}{r_0} \right)^{1/2} \right).$$

11. Voir, par exemple, [20] p158-159.

12. Voir [59] Proposition 3.1 pour une preuve.

Le résultat suivant, que nous admettons également pour des raisons similaires, est tiré de [54].

Lemme 2.5.7. *Soit $(Z(t))$ un processus gaussien défini sur un ensemble S . Notons $N_d(S, \varepsilon)$ le nombre minimal de boules ouvertes de rayon ε nécessaires pour recouvrir S . Si, de plus, D est le diamètre de S , on a*

$$\mathbb{P} \left(\sup_{s,t \in S} |Z(s) - Z(t)| \geq K \left(u + \int_0^D \sqrt{\log N_d(S, \varepsilon)} \, d\varepsilon \right) \right) \leq \exp \left(-\frac{u^2}{D} \right).$$

Nous pouvons alors obtenir la borne supérieure recherchée. On a le théorème suivant.

Théorème 2.5.8. *Dans les conditions du Théorème 2.5.1, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ fixé, on a*

$$\mathbb{P} (\mathcal{H}^{\phi_1}(X^{-1}(x) \cap T) < +\infty) = 1.$$

Démonstration. Il est clair qu'il suffit d'établir l'existence d'une constante $K > 0$ telle que

$$\mathbb{E}[\mathcal{H}^{\phi_1}(X^{-1}(x) \cap T)] \leq K.$$

Nous commençons par définir plusieurs évènements qui nous seront utiles plus tard dans la preuve. Pour $k \geq 1$, posons

$$R_k = \left\{ t \in T : \exists r \in [2^{-2k}, 2^{-k}] : \sup_{|t-s| \leq 2\sqrt{Nr}} |X(t) - X(s)| \leq K\sigma \left(r \left(\log \log \frac{1}{r} \right)^{-1/N} \right) \right\}.$$

Par le lemme précédent, on a directement

$$\mathbb{P}(t \in R_k) \geq 1 - \exp(-\sqrt{k/2}). \quad (2.22)$$

En posant

$$\Omega_{k,1} = \left\{ \omega : \lambda_N(R_k) \geq \lambda_N(T) \left(1 - \exp(-\sqrt{k/4}) \right) \right\},$$

on obtient par (2.22), l'inégalité de Markov et le théorème de Fubini que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\Omega_{k,1}^c) < +\infty.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Omega_{k,1}^c) &= \mathbb{P} \left(\lambda_N(T \setminus R_k) \geq \lambda_N(T) \exp(-\sqrt{k/4}) \right) \\ &\leq \frac{\mathbb{E}[\lambda_N(T \setminus R_k)]}{\lambda_N(T) \exp(-\sqrt{k/4})} \\ &= \frac{1}{\lambda_N(T) \exp(-\sqrt{k/4})} \int_T \mathbb{P}(t \in R_k^c) \, dt \\ &\leq \frac{1}{\lambda_N(T) \exp(-\sqrt{k/4})} \int_T \exp(-\sqrt{k/2}) \, dt \\ &= \exp(\sqrt{k/4} - \sqrt{k/2}). \end{aligned}$$

Considérons

$$\begin{aligned}\Omega_{k,2} = \{\omega : \text{pour tout cube dyadique } C \text{ d'ordre } k \text{ tel que } C \cap T \neq \emptyset, \\ \text{on a } \sup_{s,t \in C} |X(s) - X(t)| \leq K\sigma(2^{-k})\sqrt{k}\}.\end{aligned}$$

Il découle alors du Lemme 2.5.7 que pour $K > 0$ suffisamment grand, on a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\Omega_{2,k}^c) < +\infty.$$

Considérons maintenant $\beta > 0$ tel que $\kappa + \beta < \gamma = \min(2\kappa, 1)$ et posons¹³

$$\Omega_{k,3} = \{\omega : |X(t_0)| \leq 2^{k\beta}\}.$$

Il est clair que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\Omega_{k,3}^c) < +\infty.$$

En effet, il suffit de majorer une intégrale du type

$$\int_{2^{k\beta}}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx$$

par le terme général d'une série convergente. Pour k suffisamment grand, puisque $x \mapsto e^{-x^2/2}$ est à décroissance rapide, on peut majorer l'intégrant par la fonction $x \mapsto 1/x^3$ et un rapide calcul permet d'obtenir la convergence annoncée. Enfin, posons¹⁴

$$R'_k = \left\{ t \in T : \exists r \in [2^{-2k}, 2^{-k}] : \sup_{|t-s| \leq 2\sqrt{N}r} |S(t) - S(s)| \leq K\sigma \left(r \left(\log \log \frac{1}{r} \right)^{-1/N} \right) \right\}$$

et

$$\Omega_{k,4} = \left\{ \omega : \lambda_N(R'_k) \geq \lambda_N(T) \left(1 - \exp(-\sqrt{k}/4) \right) \right\}.$$

Il découle alors du Lemme 2.5.5 que $\Omega_{k,1} \cap \Omega_{k,3} \subset \Omega_{k,4}$ et donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\Omega_{k,4}^c) < +\infty.$$

Cela étant, soit $x \in \mathbb{R}^d$, construisons un recouvrement de $X^{-1}(x) \cap T$. Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ et $t \in T$, notons $C_n(t)$ le cube dyadique d'ordre n contenant t . Nous dirons que $C_n(t)$ est un bon cube dyadique si

$$\sup_{u,v \in C_n(t) \cap T} |S(u) - S(v)| \leq K\sigma(2^{-n}(\log \log 2^n)^{-1/N}).$$

Si $t \in R'_k$, alors il existe $n \in [k, 2k]$ tel que t appartient à un bon cube dyadique d'ordre n . Ainsi,

$$R'_k \subset V = \bigcup_{n=k}^{2k} V_n$$

13. Rappelons que nous avons précédemment fixé $T = \overline{B}(t_0, \eta)$.

14. Rappelons que S est défini par (2.21)

où V_n est une union de bons cubes dyadiques C_n d'ordre n . Posons $\mathcal{A}_1(k)$ l'ensemble des cubes dyadiques de V . Remarquons aussi que $T \setminus V$ est inclus dans une union de cubes dyadiques d'ordre $q = 2k$ disjoints de R'_k . Notons $\mathcal{A}_2(k)$ l'ensemble de ces cubes dyadiques. Si $\Omega_{k,4}$ se produit, alors $\mathcal{A}_2(k)$ contient au plus

$$2^{Nq} \lambda_N(T \setminus V) \leq K \lambda_N(T) 2^{Nq} \exp(-\sqrt{k}/4)$$

cubes. Enfin, posons $\mathcal{A}(k) = \mathcal{A}_1(k) \cup \mathcal{A}_2(k)$ et remarquons que $\mathcal{A}(k)$ ne dépend que du processus S . Si $A \in \mathcal{A}(k)$ est un cube dyadique d'ordre n , on pose

$$r_A = \begin{cases} K\sigma(2^{-n}(\log \log 2^n)^{-1/N}) & \text{si } A \in \mathcal{A}_1(k) \\ K\sigma(2^{-n})\sqrt{n} & \text{si } A \in \mathcal{A}_2(k) \end{cases}.$$

Pour tout $A \in \mathcal{A}(k)$, soient $v_A \in A \cap T$ et

$$\Omega_A = \{|X(v_A) - x| \leq 2r_A\}.$$

Posons encore

$$\mathcal{U}(k) = \{A \in \mathcal{A}(k) : \Omega_A \text{ se réalise}\}$$

et $\Omega_k = \Omega_{k,2} \cap \Omega_{k,3} \cap \Omega_{k,4}$. En particulier, on a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\Omega_k^c) < +\infty.$$

Par le lemme de Borel-Cantelli, on sait que presque sûrement pour k suffisamment grand, Ω_k se réalise. Posons $D = \liminf_k \Omega_k$. Il est clair que $\mathbb{P}(D) = 1$. Notons de plus $\mathcal{A} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \mathcal{A}(k)$ et remarquons que \mathcal{A} ne dépend que de la σ -algèbre Σ générée par le processus $S(t)$, $t \in T$. Nous pouvons alors affirmer¹⁵ que

1. Pour k suffisamment grand, sur Ω_k , $\mathcal{U}(k)$ recouvre $X^{-1}(x) \cap T$;
2. Pour tout $A \in \mathcal{A}$,

$$\mathbb{P}(\Omega_A | \Sigma) \leq K r_A^d,$$

où $K > 0$ est une constante ne dépendant pas de A .

Pour k suffisamment grand, il découle alors du deuxième point que¹⁶

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\chi_{\Omega_{k,4}} \sum_{A \in \mathcal{U}(k)} \phi_1(|A|) \right] &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left(\chi_{\Omega_{k,4}} \sum_{A \in \mathcal{U}(k)} \phi_1(|A|) | \Sigma \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\chi_{\Omega_{k,4}} \sum_{A \in \mathcal{A}(k)} \mathbb{E}(\chi_{\{A \in \mathcal{U}(k)\}} | \Sigma) \phi_1(|A|) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\chi_{\Omega_{k,4}} \sum_{A \in \mathcal{A}(k)} \mathbb{P}(\{A \in \mathcal{U}(k)\} | \Sigma) \phi_1(|A|) \right] \\ &\leq K \mathbb{E} \left[\chi_{\Omega_{k,4}} \sum_{A \in \mathcal{A}(k)} |A|^N \right] \leq K \lambda_N(T). \end{aligned}$$

15. Voir le lemme suivant pour la démonstration

16. Rappelons que $|A|$ dénote le diamètre de A

En utilisant le lemme de Fatou, on obtient alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathcal{H}^{\phi_1}(X^{-1}(x) \cap T)] &= \mathbb{E}[\chi_D \mathcal{H}^{\phi_1}(X^{-1}(x) \cap T)] \\
&\leq \liminf_k \mathbb{E} \left[\chi_{\Omega_{k,4}} \sum_{A \in \mathcal{U}(k)} \phi_1(|A|) \right] \\
&\leq K \lambda_N(T),
\end{aligned}$$

ce qui suffit pour conclure. \square

Nous montrons maintenant les deux affirmations laissées en suspens dans la preuve précédente dont nous reprenons les notations.

Lemme 2.5.9. *On a*

1. *Pour k suffisamment grand, sur Ω_k , $\mathcal{U}(k)$ recouvre $X^{-1}(x) \cap T$;*
2. *Pour tout $A \in \mathcal{A}$,*

$$\mathbb{P}(\Omega_A | \Sigma) \leq K r_A^d,$$

où $K > 0$ est une constante ne dépendant pas de A .

Démonstration. Nous commençons par établir le premier point. Pour tout $t \in X^{-1}(x) \cap T$, on a $X(t) = x$. Commençons par supposer que t appartient à un cube dyadique A d'ordre n de $\mathcal{A}_1(k)$. Pour $\omega \in \Omega_k$, le Lemme 2.5.5 implique¹⁷

$$\begin{aligned}
|X(v_A) - x| &\leq |S(v_A) - S(t)| + |Z(v_A) - Z(t)| \\
&\leq r_A + K 2^{-n\gamma} 2^{\beta k} \leq 2r_A,
\end{aligned}$$

où nous rappelons que $n \in [k, 2k]$. On en tire que $A \in \mathcal{U}(k)$. De même, si A appartient maintenant à $\mathcal{A}_2(k)$, en se rappelant de la définition de $\Omega_{k,3}$, on obtient directement

$$|X(v_A) - x| = |X(v_A) - X(t)| \leq r_A$$

Passons maintenant à la démonstration du deuxième point. Il suffit d'établir que pour tout $v \in T$ et tout $y \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathbb{P}(|Z(v) - y| \leq r) \leq K r^d.$$

Cela découle directement du fait que les composantes $Z_j(v)$ de $Z(v)$ sont des variables aléatoires gaussiennes centrées et de variance donnée par

$$\frac{(\sigma^2(|v|) + \sigma^2(|t_0|) - \sigma^2(|v - t_0|))^2}{4\sigma^2(t_0)} \geq K > 0.$$

\square

Pour terminer cette section, nous énonçons un théorème de Baraka et Mountford [5] qui raffine le Théorème 2.5.1 dans le cas du mouvement Brownien fractionnaire.

Théorème 2.5.10. *Soit $\{X(t) : t \in \mathbb{R}^N\}$ un mouvement Brownien fractionnaire à valeurs dans \mathbb{R}^d et d'indice de Hurst H . Il existe une constante $c > 0$ dépendant seulement de N, d et H telle que pour tout intervalle compact $I \subset \mathbb{R}^N$,*

$$\mathbb{P}(\mathcal{H}^{\phi_4}(X^{-1}(0) \cap I) = c \alpha(0, I)) = 1$$

où $\phi_4(x) = x^{N-dH} (\log \log 1/x)^{dH/N}$.

17. Rappelons les notations (2.21)

Chapitre 3

Le cas du drap Brownien fractionnaire

Dans le chapitre précédent, nous nous sommes intéressés aux processus gaussiens (formellement) LND à accroissements stationnaires. Nous nous attaquons maintenant à un processus n'ayant pas ces propriétés. Ce chapitre reprend principalement les résultats obtenus par Ayache, Wu et Xiao dans [3].

3.1 Introduction

Nous commençons par définir le drap Brownien fractionnaire.

Définition 3.1.1. Soit $H = (H_1, \dots, H_N) \in]0, 1[^N$, un *drap Brownien fractionnaire à valeurs réelles* $B_0^H = \{B_0^H(t) : t \in \mathbb{R}_+^N\}$ d'indice H est un processus gaussien centré dont la fonction de variance-covariance est donnée par

$$\mathbb{E}[B_0^H(s)B_0^H(t)] = \prod_{j=1}^N \frac{1}{2}(s_j^{2H_j} + t_j^{2H_j} - |s_j - t_j|^{2H_j}), \quad s, t \in \mathbb{R}_+^N.$$

Considérons B_1^H, \dots, B_d^H des copies indépendantes de B_0^H . Le (N, d) -drap Brownien fractionnaire d'indice H est alors défini par

$$B^H(t) = (B_1^H(t), \dots, B_d^H(t)), \quad t \in \mathbb{R}^N.$$

Remarque 3.1.2. Remarquons que le drap Brownien (fractionnaire) possède une structure en mailles. En particulier, il n'est pas isotrope et ses accroissements ne sont pas stationnaires. C'est la différence principale avec le mouvement Brownien fractionnaire $W : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^d$ que nous avons considéré au chapitre précédent défini en remplaçant la norme de \mathbb{R} dans la Définition 0.2.8 par une norme de \mathbb{R}^N .

Nous utiliserons quelques propriétés élémentaires de ce processus que nous énonçons maintenant. Ces propriétés proviennent de [3].

Proposition 3.1.3. *Le drap Brownien fractionnaire à valeurs réelles B_0^H admet la représentation*

$$B_0^H(t) = \kappa_H^{-1} \int_{-\infty}^{t_1} \cdots \int_{-\infty}^{t_N} \prod_{j=1}^N g_{H_j}(t_j, s_j) W(\mathrm{d}s),$$

où $W(s)$, $s \in \mathbb{R}^N$ est un drap brownien à valeurs réelles et pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$,

$$g_{H_j}(t_j, s_j) = ((t_j - s_j)_+)^{H_j - 1/2} - ((-s_j)_+)^{H_j - 1/2}.$$

De plus, κ_H est la constante de normalisation donnée par

$$\kappa_H^2 = \int_{-\infty}^1 \cdots \int_{-\infty}^1 \left[\prod_{j=1}^N g_{H_j}(1, s_j) \right]^2 ds.$$

Dans la suite, nous noterons toujours g l'intégrant

$$(t, s) \mapsto \prod_{j=1}^N g_{H_j}(t_j, s_j).$$

Proposition 3.1.4. *Le drap Brownien fractionnaire B^H est anisotrope¹ (si H_1, \dots, H_N ne sont pas égaux) et satisfait la propriété d'auto similarité suivante :*

Si A est une matrice diagonale de taille N telle que $A_{j,j} = a_j > 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$ alors

$$\{B^H(At), t \in \mathbb{R}_+^N\} \stackrel{(d)}{=} \left\{ \prod_{j=1}^N a_j^{H_j} B^H(t), t \in \mathbb{R}_+^N \right\}$$

où $\stackrel{(d)}{=}$ signifie que les deux processus sont égaux en loi.

L'intérêt du présent chapitre est d'obtenir des résultats similaires à ceux du chapitre précédent pour un processus n'ayant pas la propriété de non-déterminisme local. La proposition suivante a pour but de montrer que le drap brownien fractionnaire n'est en effet pas LND.

Proposition 3.1.5. *Le drap brownien fractionnaire B_0^H n'est pas localement non-déterministe.*

Démonstration. Par simplicité, nous considérons le cas $N = 2$ et le drap Brownien ($H_1 = H_2 = 1/2$) sur l'intervalle $[0, 1]^2$. Pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, considérons un intervalle $T \subset I$ dont la longueur des côtés est ε . Soit t le point supérieur droit de T et s^1, s^2 et s^3 les trois autres extrémités de T . Par un calcul élémentaire d'espérance conditionnelle dans le cas gaussien, on obtient

$$\mathbb{V}[B_0^H(t) | B_0^H(s^1), B_0^H(s^2), B_0^H(s^3)] = \varepsilon^2.$$

Or, on a $|t - s^j| \geq \varepsilon$ pour $j = 1, 2, 3$. Cela assure que B_0^H ne peut être localement non-déterministe. \square

Nous introduisons aussi un processus auxiliaire qui nous sera utile dans les développements de ce chapitre.

Définition 3.1.6. Un drap fractionnaire de Liouville de paramètre $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in]0, +\infty[^N$ est un processus gaussien centré $X_0^\alpha = \{X_0^\alpha(t), t \in \mathbb{R}_+^N\}$ défini par

$$X_0^\alpha(t) = \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_N} \prod_{j=1}^N (t_j - s_j)^{\alpha_j - 1/2} W(ds), \quad t \in \mathbb{R}_+^N,$$

où W est un drap Brownien.

1. C'est-à-dire que ses propriétés varient en fonction de la direction.

La proposition suivante découle de la Proposition 3.1.3

Proposition 3.1.7. *Le drap Brownien fractionnaire se décompose de la manière suivante*

$$B_0^H(t) = \kappa_H^{-1} X_0^H(t) + \kappa_H^{-1} \int_{]-\infty, t] \setminus [0, t]} \prod_{j=1}^N g_{H_j}(t_j, s_j) W(ds).$$

De plus, les deux processus du membre de droite sont indépendants.

Cette proposition permet également d'obtenir l'inégalité suivante. Pour tous $n \geq 2$, $t^1, \dots, t^n \in \mathbb{R}_+^N$ et $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{V} \left(\sum_{j=1}^n u_j B_0^H(t^j) \right) \geq \kappa_H^{-2} \mathbb{V} \left(\sum_{j=1}^n u_j X_0^H(t^j) \right). \quad (3.1)$$

Nous nous attelons maintenant à décomposer le processus X_0^H . Soit $\varepsilon > 0$, pour tout $t \in [\varepsilon, +\infty[^N$, on décompose le rectangle $[0, t]$ en l'union disjointe suivante :

$$[0, t] = [0, \varepsilon]^N \cup \bigcup_{j=1}^N R_j(t) \cup \delta(\varepsilon, t),$$

où $R_j(t) = R_j(\varepsilon, t) = \{r \in [0, t]^N : 0 \leq r_i \leq \varepsilon \text{ si } i \neq j, \varepsilon < r_j \leq t_j\}$ et $\delta(\varepsilon, t)$ peut être écrit comme une union de $2^N - N - 1$ rectangles. On obtient pour tout $t \in [\varepsilon, +\infty[^N$

$$X_0^H(t) = \int_{[0, \varepsilon]^N} g(t, r) W(dr) + \sum_{j=1}^N \int_{R_j(t)} g(t, r) W(dr) + \int_{\delta(\varepsilon, t)} g(t, r) W(dr) \quad (3.2)$$

$$=: X(\varepsilon, t) + \sum_{j=1}^N Y_j(t) + Z(\varepsilon, t). \quad (3.3)$$

En particulier, les processus $\{X(\varepsilon, t), t \in [\varepsilon, +\infty[^N\}$, $\{Y_j(\varepsilon, t), t \in [\varepsilon, +\infty[^N\}$ ($j \in \{1, \dots, N\}$) et $\{Z(\varepsilon, t), t \in [\varepsilon, +\infty[^N\}$ sont des champs gaussiens indépendants puisqu'ils sont définis via une intégrale par rapport au mouvement brownien sur des ensembles disjoints.

Un élément qui sera crucial dans la suite est le non-déterminisme local de Y_j (dans la j -ème direction) que nous démontrons maintenant.

Lemme 3.1.8. *Soit $j \in \{0, 1, \dots, N\}$ et soit un intervalle $I = [a, b] \subset]0, +\infty[^N$. Pour tout $n \geq 2$ naturel et tous $t^1, \dots, t^n \in [a, b]$ tels que*

$$t_j^1 \leq \dots \leq t_j^n,$$

on a l'inégalité suivante :

$$\mathbb{V} (Y_j(t^n) | Y_j(t^k) : 1 \leq k \leq n-1) \geq K |t_l^n - t_l^{n-1}|^{2H_l},$$

où $K > 0$ est une constante ne dépendant que de ε, I et H .

Démonstration. Comme nous travaillons avec des variables aléatoires gaussiennes, il est suffisant d'établir qu'il existe $K > 0$ tel que pour tout $a_k \in \mathbb{R}, k \in \{1, \dots, n-1\}$,

$$\mathbb{E} \left[\left(Y_j(t^n) - \sum_{k=1}^{n-1} a_k Y_j(t^k) \right)^2 \right] \geq K |t_j^n - t_j^{n-1}|^{2H_j}.$$

En se rappelant que le membre de gauche est minimal lorsque les coefficients a_j sont tels que l'expression à l'intérieur de l'espérance correspond à la projection de $Y_j(t^n)$ sur le complémentaire de la σ -algèbre engendrée par $\{Y_j(t^k), k \in \{1, \dots, n-1\}\}$, on remarque en "séparant" $R_j(t^n)$ en deux ensembles disjoints et en utilisant l'indépendance que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(Y_j(t^n) - \sum_{k=1}^{n-1} a_k Y_j(t^k) \right)^2 \right] &\geq \mathbb{E} \left[\left(\int_{R_j(t^n) \setminus R_j(t^{n-1})} g(t^n, r) X(\mathrm{d}r) \right)^2 \right] \\ &= \int_0^\varepsilon \cdots \int_{t_j^{n-1}}^{t_j^n} \cdots \int_0^\varepsilon \prod_{k=1}^N (t_k^n - r_k)^{2H_k-1} \mathrm{d}r \\ &\geq K |t_j^n - t_j^{n-1}|^{2H_j}, \end{aligned}$$

où l'égalité est obtenue via les isométries habituelles². \square

Nous montrons maintenant une inégalité similaire à (3.1).

Lemme 3.1.9. *Soit $I = [a, b] \subset]0, +\infty[^N$. Pour tout naturel $n \geq 2$, $t^1, \dots, t^n \in [a, b]$ et $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}$, on a*

$$\mathbb{V} \left(\sum_{k=1}^n u_k B_0^H(t^k) \right) \geq \kappa_H^{-2} \sum_{j=1}^N \mathbb{V} \left(\sum_{k=1}^n u_k Y_j(t^k) \right).$$

De plus, pour tout $\ell \in \{1, \dots, N\}$ et tous nombres positifs $p_1, \dots, p_\ell \geq 1$ tels que $\sum_{j=1}^\ell p_j^{-1} = 1$, on a

$$\frac{1}{(\det \text{Cov}(B_0^H(t^1), \dots, B_0^H(t^n)))^{1/2}} \leq \prod_{j=1}^\ell \frac{K^n}{(\det \text{Cov}(Y_j(t^1), \dots, Y_j(t^n)))^{1/(2p_j)}}.$$

Démonstration. La première inégalité découle directement de (3.1) et de l'indépendance des processus intervenant dans la décomposition de X_0^H .

Pour la seconde inégalité, rappelons que pour toute matrice carrée semi-définie positive Σ de dimension n , on a

$$\frac{1}{\det(\Sigma)^{1/2}} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp \left(-\frac{1}{2} x' \Sigma x \right) \mathrm{d}x$$

2. voir (1).

où x' est la transposée de x . L'inégalité de Hölder généralisée donne alors

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(\det \text{Cov}(B_0^H(t^1), \dots, B_0^H(t^n)))^{1/2}} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left(-\frac{1}{2} \mathbb{V} \left(\sum_{k=1}^n u_k B_0^H(t^k) \right) \right) du_1 \dots du_n \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left(-c \sum_{j=1}^N \mathbb{V} \left(\sum_{k=1}^n u_k Y_j(t^k) \right) \right) du_1 \dots du_n \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \prod_{j=1}^k \left(\int_{\mathbb{R}^n} \exp \left(-c \mathbb{V} \left(\sum_{k=1}^n u_k Y_j(t^k) \right) \right) du_1 \dots du_n \right)^{1/p_j} \\
&\leq \prod_{j=1}^{\ell} \frac{K^n}{(\det \text{Cov}(Y_j(t^1), \dots, Y_j(t^n)))^{1/(2p_j)}}.
\end{aligned}$$

□

3.2 Bicontinuité du temps local

Les éléments de base étant posés, nous nous attaquons maintenant à montrer que le temps local du drap Brownien fractionnaire est bicontinu³. Plus précisément, nous cherchons à démontrer le théorème suivant.

Théorème 3.2.1. *Soit $B^H = \{B^H(t) : t \in \mathbb{R}_+^N\}$ un drap Brownien fractionnaire à valeurs dans \mathbb{R}^d et d'indice $H = (H_1, \dots, H_N) \in]0, 1[^N$. Si $d < \sum_{j=1}^N \frac{1}{H_j}$, alors pour tous les intervalles fermés $I \subset]0, +\infty[^N$, B^H admet un temps local $(x, t) \in \mathbb{R}^d \times I \mapsto \alpha(x, t) = \alpha(x, [\inf I, t])$ continu sur $\mathbb{R}^d \times I$ presque sûrement.*

Pour démontrer ce résultats, nous aurons besoin de quelques lemmes. Le premier lemme consiste à montrer que le drap Brownien fractionnaire satisfait une propriété similaire (bien que plus faible) au non-déterminisme local. Cette propriété porte le nom de *non-déterminisme local sectoriel* et a été démontrée par Wu et Xiao dans [58]. Leur preuve reposant sur une autre représentation stochastique du drap Brownien fractionnaire que celle que nous avons présentée, nous ne ferons pas la démonstration ici.

Lemme 3.2.2. *Soit B_0^H un drap brownien fractionnaire à valeurs réelles d'indice $H = (H_1, \dots, H_N)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K > 0$ tel que pour tout naturel $n \geq 2$ et tous $t^1, \dots, t^n \in [\varepsilon, +\infty[^N$,*

$$\mathbb{V}[B_0^H(t^n) | B_0^H(t^j), j \neq n] \geq K \sum_{k=1}^N \min\{|t_k^n - t_k^j|^{2H_k}, 0 \leq j \leq n-1\},$$

où $t_k^0 = 0$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$.

3. Rappelons que la bicontinuité implique la non-dérivabilité (presque sûre) des trajectoires au vu du Corollaire 1.3.7.

Remarque 3.2.3. Contrairement au non-déterminisme local, le non-déterminisme local sectoriel "sépare" les directions. C'est ce qui rend cette propriété plus faible que le non-déterminisme local classique. Il n'est donc pas étonnant d'avoir le non-déterminisme local sectoriel du drap Brownien fractionnaire (qui "sépare" lui aussi les directions) mais pas le non-déterminisme local.

Nous nous attaquons maintenant à l'estimation des moments du temps local, nous commençons par le lemme suivant.

Lemme 3.2.4. *Pour tout $q \in [0, \sum_{j=1}^N H_j^{-1}[$, soit $\tau \in \{1, \dots, N\}$ tel que*

$$\sum_{j=1}^{\tau-1} \frac{1}{H_j} \leq q < \sum_{j=1}^{\tau} \frac{1}{H_j}.$$

Alors il existe une constante positive $\delta_{\tau} \leq 1$ dépendant de (H_1, \dots, H_N) uniquement telle que, pour tout $\delta \in]0, \delta_{\tau}[$, il existe τ nombres réels $p_j \geq 1$ ($1 \leq j \leq \tau$) satisfaisant :

$$\sum_{j=1}^{\tau} \frac{1}{p_j} = 1, \quad \frac{H_j q}{p_j} < 1, \forall j \in \{1, \dots, \tau\} \quad (3.4)$$

et

$$(1 - \delta) \sum_{j=1}^{\tau} \frac{H_j q}{p_j} \leq H_{\tau} q + \tau - \sum_{j=1}^{\tau} \frac{H_{\tau}}{H_j}. \quad (3.5)$$

De plus, si on note $\alpha_{\tau} := \sum_{j=1}^{\tau} \frac{1}{H_j} - q > 0$, alors pour tout nombre positif $\rho \in]0, \frac{\alpha_{\tau}}{2\tau}[$, il existe un indice $j_0 \in \{1, \dots, \tau\}$ tel que

$$\frac{H_{j_0} q}{p_{j_0}} + 2H_{j_0} \rho < 1.$$

Remarque 3.2.5. Il découle de la preuve qu'on peut toujours prendre $\delta_{\tau} = 1$ sauf dans le cas où $\tau = 2$.

Démonstration. Commençons par supposer que l'hypothèse est vérifiée pour $\tau = 1$. Pour tout $0 < \delta < 1$, il suffit de prendre $p_1 = 1$ pour obtenir la conclusion. Procédons alors par récurrence pour prouver le résultat dans le cas $\tau \geq 2$. Commençons par traiter le cas $\tau = 2$. Dans un premier temps, supposons avoir $H_1 = H_2$, dans ce cas, on a $H_1^{-1} \leq q < 2H_1^{-1}$. Choisissons $\eta > 0$ tel que

$$\eta < \frac{(2 - H_1 q) H_1 q}{H_1 q - 1}$$

et sans restriction si $q = H_1^{-1}$. Il suffit alors de poser

$$p_1 = H_1 q + \eta \text{ et } \frac{1}{p_2} = 1 - \frac{1}{p_1}.$$

En effet, on a alors directement $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1$, $H_1 q / p_1 < 1$ et

$$(1 - \delta) \left(\frac{H_1 q}{p_1} + \frac{H_2 q}{p_2} \right) = (1 - \delta) H_1 q \leq H_1 q = H_2 q + 2 - \frac{H_1}{H_2} - \frac{H_2}{H_2}.$$

Pour obtenir $H_2q/p_2 < 1$, il suffit d'écrire

$$\frac{H_2}{p_2} = H_1q\left(1 - \frac{1}{H_1q + \eta}\right)$$

puis de majorer η et de simplifier l'expression pour obtenir 1.

Supposons maintenant avoir $H_1 \neq H_2$. Sans perte de généralité, on peut supposer $H_1 < H_2$. Puisque $q < H_1^{-1} + H_2^{-1}$, on peut trouver⁴ $\delta_2 > 0$ tel que pour tout $\delta \in]0, \delta_2[$

$$H_1H_2q(H_2 - H_1 + \delta H_1) < (H_2 - H_1)(H_2 + H_1 - \delta H_1).$$

Les inégalités recherchées s'obtiennent alors comme précédemment en posant

$$\frac{1}{p_1} = \frac{1}{1-\delta} \frac{1}{H_1q} - \frac{\delta}{1-\delta} \frac{H_2}{H_2 - H_1} \text{ et } \frac{1}{p_2} = 1 - \frac{1}{p_1}.$$

Considérons alors le résultat vérifié pour $\tau = n \in \{2, \dots, N-1\}$ et considérons $\tau = n+1$. On a

$$\sum_{j=2}^n \frac{1}{H_j} \leq q - \frac{1}{H_1} < \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{H_j}.$$

Par hypothèse de récurrence, soit alors $\delta \in]0, 1[$ fixé et posons $\delta' \in]0, \min(\delta, \delta_n)$. Il existe n constante $p'_j \geq 1$ ($j = 2, \dots, n+1$) telles que

$$\sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{p'_j}, \quad \frac{(q - 1/H_1)H_j}{p'_j}$$

et

$$(1 - \delta') \sum_{j=2}^{n+1} \frac{H_j(q - 1/H_1)}{p'_j} \leq H_{n+1}(q - \frac{1}{H_1}) + n - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{H_{n+1}}{H_j}.$$

Choisissons alors $\eta > 0$ suffisamment petit tel que

$$(1 - \frac{1}{qH_1} + \eta) \frac{qH_j}{p'_j} < 1$$

et

$$\frac{(1 - \delta)(1 + (H_1q\eta)/(H_1q - 1))}{1 - \delta'} \leq 1.$$

De là, on peut définir p_j ($j \in \{1, \dots, n+1\}$) par

$$\frac{1}{p_j} = \frac{1}{p'_j} \left(1 - \frac{1}{H_1q} + \eta\right), \quad \forall j \in \{2, \dots, n+1\}$$

et

$$\frac{1}{p_1} = \frac{1}{H_1q} - \eta.$$

Quelques calculs élémentaires similaires à ceux faits précédemment permettent alors de conclure.

4. il suffit de le choisir tel que $q < H_1^{-1} + H_2^{-1} - \frac{\delta_2}{H_2 - H_1 + \delta_2 H_1}$

Il nous reste à établir la dernière affirmation de l'énoncé. Pour tout $j \in \{1, \dots, \tau\}$, il existe $\varepsilon_j \in]0, 1[$ tel que $\frac{H_j q}{p_j} = 1 - \varepsilon_j$. On en tire que

$$\sum_{j=1}^{\tau} \frac{\varepsilon_j}{H_j} = \sum_{j=1}^{\tau} \frac{1}{H_j} - \sum_{j=1}^{\tau} \frac{q}{p_j} = \sum_{j=1}^{\tau} \frac{1}{H_j} - q = \alpha_{\tau} > 0.$$

En particulier, il existe $j_0 \in \{1, \dots, \tau\}$ tel que $\varepsilon_{j_0} \geq \frac{H_j \alpha_{\tau}}{\tau}$. De là, si $\rho \in]0, \frac{\alpha_{\tau}}{2\tau}[$, on a

$$2H_{j_0}\rho < \frac{H_{j_0}\alpha_{\tau}}{\tau} \leq \varepsilon_{j_0}.$$

On en tire

$$\frac{H_{j_0}q}{p_{j_0}} + 2H_{j_0}\rho = 1 - \varepsilon_{j_0} + 2H_{j_0}\rho < 1,$$

ce qui suffit pour conclure. \square

Le lemme suivant donne des majorations utiles sur des intégrales du même type que celle intervenant dans la Définition 3.1.6.

Lemme 3.2.6. *Pour tout naturel $n \geq 1$ et tous nombres positifs a, r et $0 < b_j < 1$ ($j \leq n$) et un nombre arbitraire $s_0 \in [0, a/2]$, on a*

$$\int_{a \leq s_1 \leq \dots \leq s_n \leq a+r} \prod_{j=1}^n (s_j - s_{j-1})^{-b_j} ds_1 \dots ds_n \leq K^n (n!)^{(1/n) \sum_{j=1}^n b_j - 1} r^{n - \sum_{j=2}^n b_j},$$

où $K > 0$ est une constante dépendant des nombres a et b_j uniquement. En particulier, si $b_j = \alpha$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, alors

$$\int_{a \leq s_1 \leq \dots \leq s_n \leq a+r} \prod_{j=1}^n (s_j - s_{j-1})^{-\alpha} ds_1 \dots ds_n \leq K^n (n!)^{\alpha - 1} r^{n(1 - (1 - 1/n)\alpha)}.$$

La preuve étant classique, nous l'omettrons. Pour le lecteur intéressé, il suffit de faire apparaître la fonction eulérienne β par changement de variable et intégration successifs puis d'utiliser les liens existant avec la fonction eulérienne Γ et de conclure grâce au comportement asymptotique décrit par la formule de Stirling.

Nous en arrivons aux estimations des moments recherchées. A partir de maintenant, nous supposons que $d < \sum_{j=1}^N \frac{1}{H_j}$ et fixons un intervalle $I \subset [0, +\infty[^N$. De plus, par simplicité de notation, on assumera aussi avoir

$$0 < H_1 \leq \dots \leq H_N < 1.$$

Lemme 3.2.7. *Soit $B^H = \{B^H(t), t \in \mathbb{R}_+^N\}$ un drap Brownien fractionnaire à valeurs dans \mathbb{R}^d et d'indice $H = (H_1, \dots, H_N)$. Si pour un entier $\tau \in \{1, \dots, N\}$, on a*

$$\sum_{j=1}^{\tau-1} \frac{1}{H_j} \leq d < \sum_{j=1}^{\tau} \frac{1}{H_j},$$

alors il existe une constante $K > 0$ dépendant de N, d, H et I uniquement telle que pour tout intervalle⁵ $T = [a, a+r] \subset I$ dont les bords sont de longueur $r \in]0, 1[$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tous entiers $n \geq 1$, on a

$$\mathbb{E}[\alpha(x, T)^n] \leq K^n (n!)^{N-\beta_\tau} r^{n\beta_\tau},$$

avec $\beta_\tau = N - \tau - H_\tau d + \sum_{j=1}^\tau \frac{H_j}{H_j}$.

Remarque 3.2.8. Le lecteur attentif aura remarqué qu'un résultat du même type avait été obtenu dans le cas des processus LND à accroissements stationnaires au chapitre 2. La preuve qui suit possède d'ailleurs de nombreuses similarités avec la preuve du Lemme 2.4.10 et nous invitons le lecteur à les mettre en parallèles. Aussi nous autoriserons-nous à omettre certains détails lorsque les raisonnements sont identiques.

Démonstration. Fixons un intervalle fermé arbitraire $T = \prod_{j=1}^N [a_j, a_j + r_j] \subset I$. Par le Lemme 2.4.9 et puisque B_1^H, \dots, B_d^H sont des copies indépendantes de B_0^H , on a pour tout nombre naturel $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}[\alpha(x, T)^n] \leq (2\pi)^{-nd} \int_{T^n} \prod_{k=1}^d \left(\int_{\mathbb{R}^d} \exp \left[-\frac{1}{2} \mathbb{V} \left(\sum_{j=1}^n u_k^j B_0^H(t^j) \right) \right] dU_k \right) d\bar{t}$$

où $U_k = (u_k^1, \dots, u_k^n) \in \mathbb{R}^n$ et où la notation \bar{t} a été définie à la Section 2.2. Soit $k \in \{1, \dots, d\}$, notons l'intégrale à l'intérieur dans l'expression précédente par J_k . Par le Lemme 3.1.9, on a⁶

$$\begin{aligned} J_k &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left[-\frac{1}{2} \kappa_H^{-2} \sum_{\ell=1}^N \mathbb{V} \left(\sum_{j=1}^n u_k^j Y_\ell(t^j) \right) \right] dU_k \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left[-\frac{1}{2} \kappa_H^{-2} \sum_{\ell=1}^\tau \mathbb{V} \left(\sum_{j=1}^n u_k^j Y_\ell(t^j) \right) \right] dU_k. \end{aligned}$$

On peut appliquer le Lemme 3.2.4 avec $\delta = 1/n$ et $q = d$ et on obtient des nombres $p_1, \dots, p_\tau \geq 1$ satisfaisant (3.4) et (3.5).

Par l'inégalité de Hölder généralisée et en se rappelant de la densité d'un vecteur gaussien, on obtient

$$\begin{aligned} J_k &\leq \prod_{\ell=1}^\tau \left(\int_{\mathbb{R}^N} \exp \left[-\frac{p_\ell}{2} \kappa_H^{-2} \mathbb{V} \left(\sum_{j=1}^n u_k^j Y_\ell(t^j) \right) \right] dU_k \right)^{1/p_\ell} \\ &= K^n \prod_{\ell=1}^\tau [\det \text{Cov}(Y_\ell(t^1), \dots, Y_\ell(t^n))]^{-1/(2p_\ell)}. \end{aligned}$$

En utilisant les Lemmes 2.1.5 et 3.1.8, on obtient que pour tout $\ell \in \{1, \dots, \tau\}$ et tous $t^1, \dots, t^n \in T$, il existe une permutation π_ℓ de $\{1, \dots, N\}$ telle que

$$a_\ell \leq t_\ell^{\pi_\ell(1)} \leq \dots \leq t_\ell^{\pi_\ell(n)} \leq a_\ell + r_\ell$$

5. où pour un nombre réel r , on considère l'abus de notation $r = (r, \dots, r)$

6. Remarquons que dans la deuxième inégalité, nous avons arrêté la première somme à τ et plus à N .

et

$$\det \text{Cov}(Y_\ell(t^1), \dots, Y_\ell(t^n)) \geq K^n \prod_{j=1}^n (t_\ell^{\pi_\ell(j)} - t_\ell^{\pi_\ell(j-1)})^{2H_\ell}$$

où on a posé $t_\ell^{\pi_\ell(0)} = \varepsilon < \frac{1}{2} \min\{a_\ell, 1 \leq \ell \leq N\}$ de telle sorte à pouvoir appliquer le Lemme 3.2.6. On obtient alors en utilisant ce lemme

$$\begin{aligned} & \int_{[a_\ell, a_\ell + r_\ell]^n} [\det \text{Cov}(Y_\ell(t^1), \dots, Y_\ell(t^n))]^{-d/(2p_\ell)} dt_\ell^1 \dots dt_\ell^n \\ & \leq \sum_{\pi_\ell \in \mathcal{S}_n} K^n \int_{a_\ell \leq t_\ell^{\pi_\ell(1)} \leq \dots \leq t_\ell^{\pi_\ell(n)} \leq a_\ell + r_\ell} \prod_{j=1}^n \frac{1}{(t_\ell^{\pi_\ell(j)} - t_\ell^{\pi_\ell(j-1)})^{H_\ell d/p_\ell}} dt_\ell^1 \dots dt_\ell^n \\ & \leq K^n (n!)^{H_\ell d/p_\ell} r_\ell^{n(1-(1-1/n)H_\ell d/p_\ell)} \end{aligned}$$

où \mathcal{S}_n représente l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\}$. On en tire

$$\mathbb{E}[\alpha(x, T)^n] \leq K^n (n!)^{\sum_{\ell=1}^{\tau} H_\ell d/p_\ell} \prod_{\ell=1}^{\tau} r_\ell^{n(1-(1-1/n)H_\ell d/p_\ell)} \times \prod_{\ell=\tau+1}^N r_\ell^n.$$

Considérons maintenant que $T = [a, a + r]$, en d'autre termes, $r_1 = \dots = r_N = r$. L'inégalité précédente et (3.5) appliquée avec $\delta = n^{-1}$ et $q = d$ donnent

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\alpha(x, T)^n] & \leq K^n (n!)^{\sum_{\ell=1}^{\tau} H_\ell d/p_\ell} r^{n(N-(1-1/n)\sum_{\ell=1}^{\tau} H_\ell d/p_\ell)} \\ & \leq K^n (n!)^{N-\beta_\tau} r^{n\beta_\tau}. \end{aligned}$$

□

Remarque 3.2.9. Dans la preuve précédente, si on avait appliqué l'inégalité de Hölder sur l'intégrale

$$\prod_{\ell=1}^{\tau} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \exp \left[-\frac{p_\ell}{2} \kappa_H^{-2} \mathbb{V} \left(\sum_{j=1}^n u_k^j Y_\ell(t^j) \right) \right] dU_k \right)^{1/p_\ell}$$

et non sur cette même intégrale où la somme est arrêtée à τ puis procédé de la même manière dans la suite de la preuve, on aurait obtenu en choisissant p_1, \dots, p_N tels que

$$p_\ell = \sum_{i=1}^N \frac{H_\ell}{H_i}$$

l'inégalité

$$\mathbb{E}[\alpha(x, T)^n] \leq K^n (n!)^{N\nu} \lambda_N(T)^{n(1-\nu)}$$

pour tout intervalle $T \subset I$ où $\nu = d/(\sum_{\ell=1}^N H_\ell^{-1}) \in]0, 1[$.

Le lemme suivant donne une majoration sur les accroissements du temps local. La Remarque 3.2.8 reste valable pour ce résultat.

Lemme 3.2.10. Soit $B^H = \{B^H(t), t \in \mathbb{R}_+^N\}$ un drap Brownien fractionnaire à valeurs dans \mathbb{R}^d et d'indice $H = (H_1, \dots, H_N)$. Si pour un entier $\tau \in \{1, \dots, N\}$, on a

$$\sum_{j=1}^{\tau-1} \frac{1}{H_j} \leq d < \sum_{j=1}^{\tau} \frac{1}{H_j},$$

alors il existe une constante $K > 0$ dépendant de N, d, H et I uniquement telle que pour tout intervalle $T = [a, a+r] \subset I$ dont les bords sont de longueur $r \in]0, 1[$ et pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$ tels que $|x - y| \leq 1$, tout entier pair $n \geq 2$ et tout $\gamma \in]0, \min(1, \frac{\alpha\tau}{2\tau})[$, on a

$$\mathbb{E}[(\alpha(x, T) - \alpha(y, T))^n] \leq K^n (n!)^{N-\beta_\tau+(1+H_\tau)\gamma} |x - y|^{n\gamma} r^{n(\beta_\tau - H_\tau\gamma)},$$

avec $\beta_\tau = N - \tau - H_\tau d + \sum_{j=1}^\tau \frac{H_\tau}{H_j}$.

Démonstration. La preuve étant une combinaison d'arguments des preuves du lemme précédent et du Lemme 2.4.10, nous nous contentons de donner les idées principales et omettrons certains calculs.

Soit $\gamma \in]0, \min(1, \frac{\alpha\tau}{2\tau})[$. Par des inégalités élémentaires, on obtient facilement que pour tous $u^1, \dots, u^n, x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$\prod_{j=1}^n |e^{-i\langle u^j, x \rangle} - e^{-i\langle u^j, y \rangle}| \leq 2^{(1-\gamma)n} |x - y|^{n\gamma} \sum_{k \in \{1, \dots, d\}^n} \prod_{j=1}^n |u_{k_j}^j|^\gamma.$$

En utilisant de plus le Lemme 2.4.9 et les inégalités de Hölder, on obtient comme dans la preuve du Lemme 2.4.10

$$\mathbb{E}[(\alpha(x, T) - \alpha(y, T))^n] \leq K^n |x - y|^{n\gamma} \quad (3.6)$$

$$\times \sum_{k \in \{1, \dots, d\}^n} \int_{t^n} \prod_{m=1}^n \left(\int_{\mathbb{R}^{nd}} |u_{k_m}^m|^{n\gamma} \exp \left[-\frac{1}{2} \mathbb{V} \left(\sum_{j=1}^n \langle u^j, B^H(t^j) \rangle \right) \right] d\bar{u} \right)^{1/n} dt. \quad (3.7)$$

Choisissons un vecteur $k = (k_1, \dots, k_n) \in \{1, \dots, d\}^n$ et des points $t^1, \dots, t^n \in T$ tels que $t_\ell^1, \dots, t_\ell^n$ soient deux à deux distincts pour tout $\ell \in \{1, \dots, d\}$. On pose alors

$$M(\bar{t}) = M = \prod_{m=1}^n \left(\int_{\mathbb{R}^{nd}} |u_{k_m}^m|^{n\gamma} \exp \left[-\frac{1}{2} \mathbb{V} \left(\sum_{j=1}^n \langle u^j, B^H(t^j) \rangle \right) \right] d\bar{u} \right)^{1/n}.$$

Par le Lemme 3.2.2, les variables aléatoires $B_\ell^H(t^j)$, $(1 \leq \ell \leq N, 1 \leq j \leq n)$ sont linéairement indépendantes et le Lemme 2.4.8, on obtient en procédant une fois de plus comme au Lemme 2.4.10

$$\int_{\mathbb{R}^{nd}} |u_{k_m}^m|^{n\gamma} \exp \left[-\frac{1}{2} \mathbb{V} \left(\sum_{j=1}^n \langle u^j, B^H(t^j) \rangle \right) \right] d\bar{u} \leq \frac{K^n (n!)^\gamma}{[\det \text{Cov}(B_0^H(t^1), \dots, B_0^H(t^n))]^{d/2}} \frac{1}{\sigma_m^{n\gamma}}$$

où $\sigma_m^2 = \mathbb{V}(B_{k_m}^H(t^m) | B_i^H(t^j), i \neq k_m \text{ ou } (i = k_m \text{ et } (j \neq m))$.

On en tire que

$$M \leq \frac{K^n (n!)^\gamma}{[\det \text{Cov}(B_0^H(t^1), \dots, B_0^H(t^n))]^{d/2}} \prod_{m=1}^n \frac{1}{\sigma_m^\gamma}.$$

Nous souhaitons maintenant utiliser le Lemme 3.2.4. Pour ce faire, soit $\delta = 1/n$, $q = d$ et p_ℓ ($\ell \in \{1, \dots, \tau\}$) des constantes définies comme dans ce lemme. Puisque $\gamma \in]0, \frac{\alpha\tau}{2\tau}[$, il existe $\ell_0 \in \{1, \dots, \tau\}$ tel que

$$\frac{H_{\ell_0} d}{p_{\ell_0}} + 2H_{\ell_0} \gamma < 1.$$

Ainsi, en utilisant le Lemme 3.1.9, on obtient

$$M \leq K^n (n!)^\gamma \prod_{\ell=1}^{\tau} \frac{1}{[\det \text{Cov}(Y_\ell(t^1), \dots, Y_\ell(t^n))]^{d/(2p_\ell)}} \prod_{m=1}^n \frac{1}{\sigma_m^\gamma}.$$

Nous tentons maintenant de majorer le second produit. Du non-déterminisme local secto-riel de B^H , on obtient que

$$\sigma_m^2 \geq K \sum_{\ell=1}^N \min\{|t_\ell^m - t_\ell^j|^{2H_\ell} : j \neq m\}.$$

Pour les points $t^1, \dots, t^n \in T$, définissons les permutations π_1, \dots, π_N de $\{1, \dots, n\}$ telles que pour tout $\ell \in \{1, \dots, N\}$,

$$t_\ell^{\pi_\ell(1)} \leq \dots \leq t_\ell^{\pi_\ell(n)}.$$

On obtient alors directement (en procédant comme dans la preuve du Lemme 2.4.10) que

$$\prod_{m=1}^n \frac{1}{\sigma_m^\gamma} \leq K^{-n} \prod_{m=1}^n \frac{1}{(t_{\ell_0}^{\pi_{\ell_0}(m)} - t_{\ell_0}^{\pi_{\ell_0}(m-1)})^{q_{\ell_0}^m H_{\ell_0} \gamma}}$$

où $(q_{\ell_0}^1, \dots, q_{\ell_0}^n) \in \{0, 1, 2\}^n$ est tel que $\sum_{m=1}^n q_{\ell_0}^m = n$ et $q_{\ell_0}^1 = 0$.

Cela étant, le reste de la preuve est assez similaire à la preuve du lemme précédent. On a

$$\begin{aligned} \int_{t^n} M(\bar{t}) d\bar{t} &\leq K^n (n!)^\gamma \\ &\times \int_{T^n} \prod_{\ell=1}^{\tau} (\det \text{Cov}(Y_\ell(t^1), \dots, Y_\ell(t^n)))^{-d/(2p_\ell)} \prod_{m=1}^n (t_{\ell_0}^{\pi_{\ell_0}(m)} - t_{\ell_0}^{\pi_{\ell_0}(m-1)})^{-q_{\ell_0}^m H_{\ell_0} \gamma} d\bar{t}. \end{aligned}$$

Commençons par intégrer dans la direction ℓ_0 . Par les Lemmes 3.2.6 et 3.1.8, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_{[a_{\ell_0}, a_{\ell_0} + r_{\ell_0}]^n} (\det \text{Cov}(Y_{\ell_0}(t^1), \dots, Y_{\ell_0}(t^n)))^{-d/(2p_{\ell_0})} \prod_{m=1}^n (t_{\ell_0}^{\pi_{\ell_0}(m)} - t_{\ell_0}^{\pi_{\ell_0}(m-1)})^{-q_{\ell_0}^m H_{\ell_0} \gamma} dt_{\ell_0}^1 \dots dt_{\ell_0}^n \\ &\leq K^n (n!)^{H_{\ell_0} d/p_{\ell_0} + H_{\ell_0} \gamma} r_{\ell_0}^{n[1 - (1 - 1/n)H_{\ell_0} d/p_{\ell_0} - H_{\ell_0} \gamma]} \end{aligned}$$

où on a posé, comme dans la preuve précédente, $t_{\ell_0}^{\pi_{\ell_0}(0)} = \varepsilon$.

Considérons maintenant l'intégration dans les directions $\ell \leq \tau$ ($\ell \neq \ell_0$). Comme à la preuve précédente, on a

$$\begin{aligned} &\int_{[a_\ell, a_\ell + r_\ell]^n} (\det \text{Cov}(Y_\ell(t^1), \dots, Y_\ell(t^n)))^{-d/(2p_\ell)} dt_\ell^1 \dots dt_\ell^n \\ &\leq K^n (n!)^{H_\ell d/p_\ell} r_\ell^{n(1 - (1 - 1/n)H_\ell d/p_\ell)}. \end{aligned}$$

Il reste alors à intégrer dans les directions $\ell = \tau + 1, \dots, N$ (ce qui est direct puisque M est constant dans ces directions). On obtient en rassemblant les morceaux que

$$\begin{aligned} \int_{T^n} M(\bar{t}) d\bar{t} &\leq K^n (n!)^{\sum_{\ell=1}^{\tau} H_\ell d/p_\ell} r_{\ell_0}^{n(1 - (1 - 1/n)H_{\ell_0} d/p_{\ell_0} - H_{\ell_0} \gamma)} \\ &\times \prod_{\ell=1, \ell \neq \ell_0}^{\tau} r_\ell^{n(1 - (1 - 1/n)H_\ell d/p_\ell)} \prod_{\ell=\tau+1}^N r_\ell^n. \end{aligned}$$

Pour obtenir la conclusion, il suffit alors de poser $r_1 = \dots = r_N = r \leq 1$ et d'utiliser la majoration de l'intégrale de M dans (3.7) tout en se rappelant que $H_{\ell_0} \leq H_\tau$. \square

Nous pouvons maintenant démontrer le Théorème 3.2.1.

Démonstration. Pour simplifier les écritures, supposons avoir $I = [\eta, 1]$. Par le lemme précédent et le Lemme 2.2.8, on obtient que pour tout intervalle $T \subset I$, B^H possède un temps local dont une version est presque sûrement continue pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Considérons alors $x, y \in \mathbb{R}^d$ et $s, t \in I$, on a⁷

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[(\alpha(x, [\eta, s]) - \alpha(y, [\eta, t]))^n] \\ & \leq 2^{n-1} (\mathbb{E}[(\alpha(x, [\eta, s]) - \alpha(x, [\eta, t]))^n] + \mathbb{E}[(\alpha(x, [\eta, t]) - \alpha(y, [\eta, t]))^n]) \end{aligned}$$

où n est un nombre naturel pair quelconque. On remarque facilement que le premier terme peut être majoré à l'aide du Lemme 3.2.7 et de la Remarque 3.2.9 et que le second peut être majoré en utilisant le Lemme 3.2.10. En particulier, on obtient

$$\mathbb{E}[(\alpha(x, [\eta, s]) - \alpha(y, [\eta, t]))^n] \leq K^n (|x - y| + |s - t|)^{n\gamma}$$

pour un naturel pair non nul n et $\gamma \in]0, 1[$ suffisamment petit. Le Lemme 2.2.8 permet alors d'obtenir la conclusion. \square

3.3 Loi du log itéré et ensembles de niveau

Nous nous intéressons maintenant à la loi du logarithme itéré et à la mesure de Hausdorff des ensembles de niveau de B^H . Les raisonnements et les preuves étant analogues à celles des Sections 2.4.2 et 2.5, nous les omettons. Le lecteur intéressé est néanmoins invité à consulter [3] p742-747.

Théorème 3.3.1. *Supposons que $d < \sum_{\ell=1}^N \frac{1}{H_\ell}$ et soit $\tau \in \{1, \dots, N\}$ un entier comme dans le Lemme 3.2.4. Considérons aussi un intervalle $I \subset [0, +\infty[^N$ et considérons une version du temps local α de B^H qui soit une mesure à support dans l'ensemble de niveau $(B^H)^{-1}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ (c'est-à-dire un noyau d'occupation). Dans ce cas, il existe une constante $K > 0$ indépendante de x telle que, presque sûrement,*

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\alpha(x, B(t, r))}{\phi_3(r)} \leq K$$

pour $\alpha(x, \cdot)$ -presque tout $t \in I$ où⁸ $\phi_3(r) = r^{\beta_\tau} (\log \log(1/r))^{N-\beta_\tau}$.

Ce premier théorème permet d'obtenir un résultat sur la mesure de Hausdorff des ensembles de niveau de B^H de manière analogue au théorème 2.5.1.

Théorème 3.3.2. *Dans les mêmes conditions qu'au théorème précédent, il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,*

$$\mathcal{H}^{\phi_3}((B^H)^{-1}(x) \cap I) \geq K \alpha(x, I)$$

presque sûrement.

7. Rappelons que $(a - b)^n \leq 2^{n-1}(a^n + b^n)$

8. Rappelons que β_τ a été défini au Lemme 3.2.7.

Le théorème suivant est l'analogue des Théorèmes 2.4.14 et 2.4.15.

Théorème 3.3.3. *Soit $B^H = \{B^H(t), t \in \mathbb{R}_+^N\}$ un drap Brownien fractionnaire à valeur dans \mathbb{R}^d d'indice de Hurst $H = (H_1, \dots, H_N)$. Supposons qu'il existe $\tau \in \{1, \dots, N\}$ tels que $H_1 = \dots = H_\tau$ et $H_1 d < \tau$. Alors il existe des constantes $K_1, K_2 > 0$ telles que presque sûrement, pour tout $s \in I$,*

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \alpha(x, [s-r, s+r])}{r^{N-H_1d} (\log \log 1/r)^{H_1d}} \leq K_1$$

et

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \sup_{s \in I} \frac{\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \alpha(x, [s-r, s+r])}{r^{N-H_1d} (\log 1/r)^{H_1d}} \leq K_2.$$

De manière similaire à ce qui a été fait au chapitre précédent, ce dernier théorème permet d'obtenir facilement des informations sur la régularité du drap brownien fractionnaire.

Théorème 3.3.4. *Soit B^H un (N, d) -drap Brownien fractionnaire et soit $I \subset [0, +\infty[^N$. Il existe une constante $K > 0$ telle que presque sûrement, pour tout $s \in I$,*

$$\liminf_{r \rightarrow 0} \sup_{t \in B(s, r)} \frac{|B^H(t) - B^H(s)|}{r^{H_1} (\log \log 1/r)^{-H_1}} \geq K$$

et

$$\liminf_{r \rightarrow 0} \inf_{s \in I} \sup_{t \in B(s, r)} \frac{|B^H(t) - B^H(s)|}{r^{H_1} (\log 1/r)^{-H_1}} \geq K.$$

En particulier, les trajectoires de B^H sont presque sûrement nulle part dérивables dans $[0, +\infty[^N$.

Remarque 3.3.5. Les résultats que nous avons présentés tout au long de ce chapitre peuvent encore être étendus à une classe plus grande de processus satisfaisant le non-déterminisme local sectoriel. Ces résultats sont développés par Lee dans [35].

Pour aller plus loin

Nous avons exploré la théorie du temps local en ayant comme principal objectif d'étudier la régularité (presque sûre) des trajectoires de processus gaussiens. Cependant, le temps local possède d'autres applications. D'un point de vue théorique, le temps local (en particulier celui de mouvement Brownien) est utilisé pour résoudre certaines équations différentielles stochastiques. Pour ce faire, il est nécessaire de développer des théorèmes bien différents de ceux présents dans ce mémoire, les plus importants étant la formule de Tanaka et les théorèmes de Ray-Knights.

En effet, la formule de Tanaka apporte une représentation, via l'intégrale stochastique, du temps local du mouvement Brownien⁹ [34, 41, 49, 62, 32].

Les théorèmes de Ray-Knights, quant à eux, permettent de caractériser le temps local du mouvement Brownien arrêté par un temps d'arrêt [34, 41, 49, 62, 32]. Nous faisons une mention spéciale à [42] qui développe ces théorèmes dans un cadre plus général (et en développe d'autres du même type).

Mentionnons aussi que le temps local possède des applications dans des modélisations de marché en finance. Une telle application est développée dans [14] pour le temps local du mouvement Brownien fractionnaire.

9. Notons que cette formule est établie par plusieurs auteurs dans le cas plus générale d'une semi-martingale.

Annexes

Annexe A

Notions de régularité et de théorie de la mesure

A.1 Condition de Hölder et mesure de Hausdorff

Nous rappelons ici les notions de condition de Hölder et de mesure de Hausdorff qui nous seront utiles pour décrire le comportement de processus stochastique. Cette section provient principalement de [21].

A.1.1 Mesure de Hausdorff

Définition A.1.1. Le *diamètre* d'un ensemble A non vide de \mathbb{R}^n est donné par

$$|A| = \sup\{|x - y| : x, y \in A\}$$

où $|\cdot|$ est la norme euclidienne usuelle. De plus, on pose $|\emptyset| = 0$.

Définition A.1.2. Une collection dénombrable d'ensemble $(A_i)_{i \in I}$ de \mathbb{R}^n est un δ -recouvrement d'un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ si pour tout $i \in I$, $|A_i| \leq \delta$ et si $E \subset \bigcup_{i \in I} A_i$.

Définition A.1.3. Soient E un ensemble de \mathbb{R}^n et $s \geq 0$. Pour tout $\delta > 0$, posons

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |A_i|^s : (A_i) \text{ est un } \delta\text{-recouvrement de } E \right\}.$$

On définit alors la s -mesure de *Hausdorff* par

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(E).$$

La limite existant vu la croissance de $\mathcal{H}_\delta^s(E)$ lorsque δ décroît.

Proposition A.1.4. Soient $s, t \in \mathbb{R}$ tels que $0 \leq s < t$ et soit $E \subset \mathbb{R}^n$, on a

$$\mathcal{H}^s(E) < \infty \Rightarrow \mathcal{H}^t(E) = 0$$

Démonstration. Soit $\delta < 1$, il est clair que \mathcal{H}_δ^s est décroissant par rapport à s .

Considérons un δ -recouvrement $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de E . On a alors

$$\sum_{i=0}^{\infty} |A_i|^t = \sum_{i=0}^{\infty} |A_i|^{t-s} |A_i|^s \leq \delta^{t-s} \sum_{i=0}^{\infty} |A_i|^s.$$

En prenant la borne inférieure, on obtient directement $\mathcal{H}_\delta^t(E) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s(E)$. Il suffit alors de prendre la limite pour δ qui tend vers 0^+ pour conclure. \square

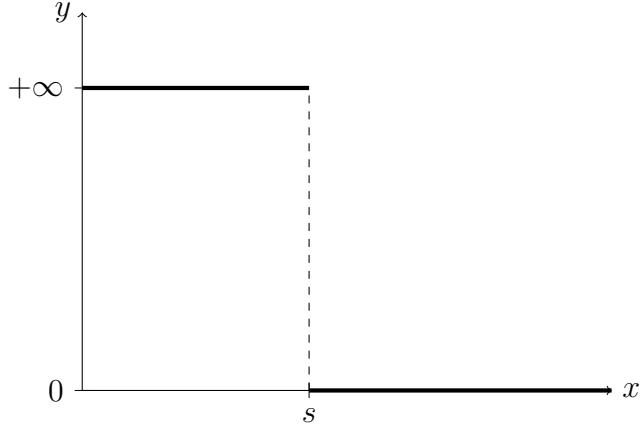


FIGURE A.1 – Illustration de la Proposition A.1.4 et de la Définition A.1.6.

Remarque A.1.5. Dans la figure précédente, la valeur en $\mathcal{H}^s(E)$ n'est pas clairement fixée. En effet, la dimension de E représente le point de passage entre $+\infty$ et 0 mais ne donne aucune information sur la valeur de $\mathcal{H}^s(E) \in [0, +\infty]$.

Définition A.1.6. La *dimension de Hausdorff* d'un ensemble E de \mathbb{R}^n (notée $\dim_{\mathcal{H}}(E)$) est donnée par

$$\dim_{\mathcal{H}}(E) = \inf\{s : \mathcal{H}^s(E) = 0\} = \sup\{s : \mathcal{H}^s(E) = \infty\}$$

où on pose $\sup \emptyset = 0$.

Nous pouvons raffiner cette notion en utilisant une fonction de dimension.

Définition A.1.7. Soit $h : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($b > 0$) une fonction croissante et continue à droite telle que $h(0) = 0$ ¹ et soit $\delta \in]0, b[$. Posons

$$\mathcal{H}_\delta^h(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} h(|E_i|) : (E_i) \text{ est un } \delta\text{-recouvrement de } E \right\}.$$

La *mesure de Hausdorff* selon h est alors définie par

$$\mathcal{H}^h(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^h(E).$$

1. h est appelée une fonction de dimension.

Il est parfois utile de recourir à des mesures intermédiaires pour calculer la mesure de Hausdorff d'un ensemble. C'est l'objet de la définition et du théorème suivants.

Définition A.1.8. Soit h une fonction de dimension et soit μ une mesure borélienne finie sur \mathbb{R}^n . La h -densité supérieure de μ en $x \in \mathbb{R}^n$ est définie par

$$\overline{D}_h^\mu(x) = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B(x, r))}{h(r)}.$$

Nous terminons cette section en énonçant le "upper density theorem" de Rogers et Taylor [50] (voir aussi le Théorème 2.1 de [55] ou le Lemme 2.1 de [35]).

Théorème A.1.9. Soit h une fonction de dimension et soit μ une mesure borélienne finie sur \mathbb{R}^n . Pour tout ensemble borélien $B \subset \mathbb{R}^n$, on a

$$\mu(B) \leq \mathcal{H}^h(B) \sup_{x \in B} \overline{D}_h^\mu(x).$$

A.1.2 Condition de Hölder

Définition A.1.10. Une fonction localement bornée f appartient à l'espace de Hölder $\Lambda^\alpha(x_0)$ avec $\alpha \in]0, 1[$ s'il existe un voisinage V_{x_0} de x_0 et une constante $C > 0$ tels que, pour tout $x \in V_{x_0}$,

$$|f(x_0) - f(x)| \leq C|x_0 - x|^\alpha.$$

L'exposant de Hölder de f en x_0 est alors défini par

$$\sup\{\alpha \in]0, 1[: f \in \Lambda^\alpha(x_0)\}.$$

Remarquons que les espaces de Hölder sont emboités (i.e. $\Lambda^{\alpha+\varepsilon}(x_0) \subset \Lambda^\alpha(x_0)$ pour tout α et ε tels que $0 < \alpha < \alpha + \varepsilon < 1$) ce qui permet d'interpréter l'exposant de Hölder comme la régularité maximale de la fonction f .

Comme pour la mesure de Hausdorff, nous pouvons remplacer l'exposant de Hölder par une fonction de Hölder.

Définition A.1.11. Soit $h : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($b > 0$) une fonction strictement croissante telle que $h(0) = 0$. Une fonction localement bornée f appartient à l'espace de Hölder $\Lambda^h(x_0)$ s'il existe un voisinage V_{x_0} de x_0 et une constante $C > 0$ tels que, pour tout $x \in V_{x_0}$,

$$|f(x_0) - f(x)| \leq Ch(|x_0 - x|).$$

h est appelée une fonction de Hölder de f en x_0 .

A.2 Limite approximative et fonction de Jarnik

A.2.1 Limite approximative

Nous développons ici une notion de limite qui nous sera d'intérêt pour définir les fonctions de Jarnik. les résultats de cette section proviennent essentiellement de [26] (voir aussi [51]).

Commençons par rappeler la notion de point de densité de Lebesgue.

Définition A.2.1. Soient $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ et $x \in \mathbb{R}^k$. Posons

$$g(\varepsilon) = \frac{\lambda_k(B_k(x, \varepsilon) \cap A)}{\lambda_k(B_k(0, 1))\varepsilon^k}.$$

Alors x est un *point de densité* (resp. de *dispersion*) de A si $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(\varepsilon)$ existe et est égal à 1 (resp. 0).

Nous rappelons aussi la proposition suivante qui permet de donner plus d'intuition à cette notion.

Proposition A.2.2. Si A un ensemble borélien alors presque tout $x \in A$ est un point de densité de A et presque tout $x \in A^c$ est un point de dispersion de A .

Cela étant, nous pouvons maintenant introduire la notion de limite approximative.

Définition A.2.3. Soit f une fonction borélienne à valeurs réelles définie sur $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ et soit t un point de densité de E .

On définit la *limite approximative supérieure* par

$$ap - \limsup_{s \rightarrow t} f(s) = \inf\{a \in \mathbb{R} : t \text{ est un point de dispersion de } \{s \in E : f(s) > a\}\}.$$

De même, On définit la *limite approximative inférieure* par

$$ap - \liminf_{s \rightarrow t} f(s) = \sup\{a \in \mathbb{R} : t \text{ est un point de dispersion de } \{s \in E : f(s) < a\}\}.$$

Enfin, la *limite approximative* existera et vaudra L si et seulement si

$$ap - \limsup_{s \rightarrow t} f(s) = ap - \liminf_{s \rightarrow t} f(s) = L.$$

On note $ap - \lim_{s \rightarrow t} f(s) = L$.

Remarque A.2.4. Dans la définition précédente, l'existence de a n'est pas garantie, les conventions usuelles s'appliquent alors.

Nous allons essayer de donner, au travers des propositions qui suivent, une meilleure intuition de cette notion.

Proposition A.2.5. Soient f une fonction borélienne à valeurs réelles définie sur $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$, t un point de densité de E et L un nombre réel. On a $ap - \lim_{s \rightarrow t} f(s) = L$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, t est un point de densité de $\{s \in E : |f(s) - L| < \varepsilon\}$.

Démonstration. Posons $A_1(a) = \{s \in E | f(s) > a\}$ et $A_2(a) = \{s \in E | f(s) < a\}$. Posons aussi, pour tout $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon = \{s \in E | |f(s) - L| < \varepsilon\}$.

Montrons que la condition est nécessaire. Commençons par montrer que $L = \inf\{a \in \mathbb{R} | t \text{ est un point de dispersion de } A_1(a)\}$. Si $a > L$, alors $f(s) > a > L$ implique qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|f(s) - L| > \varepsilon$ et donc $A_1(a) \subset B_\varepsilon^c$. Ainsi t est un point de dispersion de $A_1(a)$ pour tout $a > L$. On remarque de plus que si $a < L$, alors $A_1(a) \supset B$. On en déduit alors que $ap - \limsup_{s \rightarrow t} f(s) = L$.

On montre de manière similaire que $ap - \liminf_{s \rightarrow t} f(s) = L$.

Montrons que la condition est suffisante. Soit $\varepsilon > 0$. On remarque aisément que $B_\varepsilon = A_1(L - \varepsilon) \cup A_2(L + \varepsilon)$ et que le membre de droite admet t comme point de densité, ce qui permet de conclure. \square

Les résultats suivants lient les limites approximatives aux limites classiques.

Proposition A.2.6. *On a toujours*

$$-\infty \leq \liminf_{s \rightarrow t} f(s) \leq ap - \liminf_{s \rightarrow t} f(s) \leq ap - \limsup_{s \rightarrow t} f(s) \leq \limsup_{s \rightarrow t} f(s) \leq \infty.$$

En particulier si la limite existe alors la limite approximative aussi² et les deux limites auront la même valeur.

Démonstration. Montrons l'inégalité des limites supérieures. Le cas des limites inférieures se traitant de même. Il suffit de remarquer que

$$\limsup_{s \rightarrow t} f(s) = \inf\{a | t \text{ n'est pas adhérent à } \{s \in E | f(s) > y\}\}.$$

□

Théorème A.2.7. *On a $ap - \lim_{s \rightarrow t} f(s) = L$ si et seulement si il existe un ensemble borélien $G \subset E$ dont t est un point de densité tel que*

$$\lim_{s \rightarrow t; s \in G} f(s) = L.$$

Démonstration. La condition suffisante est évidente. Montrons la condition nécessaire dans le cas où L est fini et supposons, sans perte de généralité, que $t = 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, posons

$$A_n = \{s \in E : L - 1/n < f(s) < L + 1/n\}.$$

Il est clair que A_n est borélien et que 0 est un point de densité de A_n . posons $c_k = \lambda_k(B_k(0, 1))$ et soient $(\alpha_n)_n$ une suite croissante vers c_k et $(\delta_n)_n$ une suite décroissante vers 0. On construit une suite $(\varepsilon_n)_n$ décroissante vers 0 et telle que :

- $\lambda_k(B_k(0, \varepsilon) \cap A_n) \geq \alpha_n \varepsilon^k$ pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon_n$,
- $\varepsilon_{n+1}^k \leq \alpha_n \delta_n \varepsilon_n^k$.

Posons alors

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap (B_k(0, \varepsilon_n) \setminus B_k(0, \varepsilon_{n+1}))).$$

Il est alors clair que $\lim_{s \rightarrow t; s \in G} f(s) = L$ et il ne nous reste qu'à montrer que 0 est un point de densité de G . Soit $\varepsilon_n < \varepsilon < \varepsilon_{n+1}$, on a

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-k} \lambda_k(B_k(0, \varepsilon) \cap G) &= \varepsilon^{-k} \lambda_k(B_k(0, \varepsilon_n) \cap G) + \varepsilon^{-k} \lambda_k((B_k(0, \varepsilon) \setminus B_k(0, \varepsilon_n)) \cap G) \\ &\geq \varepsilon^{-k} \lambda_k(B_k(0, \varepsilon_n) \cap A_n) - \varepsilon^{-k} \lambda_k(B_k(0, \varepsilon_{n+1}) \cap A_n) \\ &\quad + \varepsilon^{-k} \lambda_k(B_k(0, \varepsilon) \cap A_{n-1}) - \varepsilon^{-k} \lambda_k(B_k(0, \varepsilon_n) \cap A_{n-1}) \\ &\geq \varepsilon^{-k} (\alpha_n \varepsilon_n^k - c_k \alpha_n \delta_n \varepsilon_n^k + \alpha_{n-1} \varepsilon^k - c_k \varepsilon_n^k) \\ &= \alpha_{n-1} - (\varepsilon_n / \varepsilon \varepsilon)^k (c_k + c_k \alpha_n \delta_n - \alpha_n) \rightarrow c_k (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

□

2. La réciproque n'est pas vraie comme en atteste l'existence des fonctions de Jarnik.

A.2.2 Fonction de Jarnik

On sait que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, l'ensemble des points t tels que

$$\lim_{s \rightarrow t} \frac{|f(s) - f(t)|}{|s - t|} = \infty$$

est négligeable. Ce résultat est par exemple démontré par Saks dans [51]. Cependant cette affirmation n'est plus vraie si on remplace la limite par une limite approximative comme l'a montré Jarnik³ [31]. Cela mène naturellement à la définition suivante

Définition A.2.8. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction boréienne. f est dite de *Jarnik* si

$$ap - \lim_{s \rightarrow t} \frac{|f(s) - f(t)|}{|s - t|} = \infty$$

pour presque tout t .

Nous allons établir un lien entre la propriété de Jarnik et les espaces de Hölder. Pour ce faire, nous allons généraliser la définition précédente en appliquant une fonction au dénominateur.

Définition A.2.9. Soit ϕ une fonction réelle définie sur $[0, +\infty[$ continue et croissante s'annulant en 0 et soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction boréienne. f est dite ϕ -*Jarnik* si

$$ap - \lim_{s \rightarrow t} \frac{|f(s) - f(t)|}{\phi(|s - t|)} = \infty$$

pour presque tout t . Dans ce cas, on dit que f est (J_ϕ) et si $\phi(x) = x^r$, on écrit (J_r) .

Remarque A.2.10. Il est clair que la propriété de Jarnik donne un majorant sur l'exposant de Hölder. En effet, si $f \in \Gamma^\gamma(x)$ ($\gamma \in]0, 1[$), alors il existe une constante positive C telle que

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\gamma$$

pour tout y au voisinage de x .

En particulier,

$$ap - \lim_{y \rightarrow x} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\gamma} \neq \infty.$$

Cela n'est possible que sur un ensemble négligeable au plus si f est (J_γ) .

Obtenir un majorant pour l'exposant de Hölder se révèle très pratique dans l'étude de la régularité des processus stochastiques. En effet, montrer que les trajectoires d'un processus satisfont la propriété de Jarnik pour un exposant β nous donne un majorant pour l'exposant de Hölder pendant que le théorème de Kolmogorov-Centsov⁴ nous affirme qu'une version de ce même processus possède des trajectoires au moins γ -Hölder.

A.3 Dérivation de mesures et ensemble de Lebesgue

Nous rappelons ici quelques notions avancées de théorie de la mesure. Les résultats proviennent essentiellement de [44].

3. Il a notamment montré qu'il existait des fonctions continues qui satisfont la propriété de Jarnik.

4. Voir par exemple [38]

A.3.1 Sur la dérivation de mesure

Considérons

$$\mathcal{C} = \left\{ \prod_{j=1}^d [a_j, b_j] : 0 < b_j - a_j = b_k - a_k < \infty, \forall j, k \in \{1, \dots, d\} \right\}$$

et posons $(C) = b_1 - a_1$ si $C \in \mathcal{C}$.

Définition A.3.1. Soit μ une mesure borélienne finie de \mathbb{R}^d . Les *dérivées supérieure et inférieure* de μ en x sont respectivement définies par

$$\overline{D}\mu(x) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\mu(C)}{\lambda(C)} : C \in \mathcal{C}, x \in C \text{ et } (C) < \epsilon \right\}$$

et

$$\underline{D}\mu(x) = \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\mu(C)}{\lambda(C)} : C \in \mathcal{C}, x \in C \text{ et } (C) < \epsilon \right\}.$$

De plus, on dira que μ est dérivable en $x \in \mathbb{R}^d$ si $\overline{D}\mu(x) = \underline{D}\mu(x)$ et, dans ce cas, on note $D\mu(x)$ ou μ' la dérivée de μ est x .

La dérivée d'une mesure est particulièrement liée à la dérivée de Radon-Nikodym de sa partie absolument continue.

Théorème A.3.2. Soit μ une mesure borélienne finie sur \mathbb{R}^d . μ est dérivable presque partout et la fonction définie par

$$x \mapsto \begin{cases} D\mu(x) & \text{si } \mu \text{ est dérivable en } x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est la dérivée de Radon-Nikodym de la partie absolument continue de μ .

A.3.2 Sur les ensembles de Lebesgue

La notion de point de Lebesgue repose sur le résultat suivant

Proposition A.3.3. Soit $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Lebesgue-mesurable. Pour presque tout $t \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda(B(t, \epsilon))} \int_{B(t, \epsilon)} |g(x) - g(t)| x = 0. \quad (\text{A.1})$$

Cela mène à la définition suivante.

Définition A.3.4. Dans les conditions de la proposition précédentes, on dit que $t \in \mathbb{R}^d$ est un point de Lebesgue de g si (A.1) est vérifiée en t . De plus, on appelle *ensemble de Lebesgue* de g , l'ensemble des points de Lebesgue de g .

Bibliographie

- [1] C. Amorino, A. Jaramillo et M. Podolskij, *Optimal estimation of the local time and the occupation time measure for an α -stable Lévy process*, Mod. Stoch. Theory Appl. **11** (2024), n° 2, p. 149-168, disponible via l'URL <<https://doi.org/10.15559/24-vmsta243>>.
- [2] A. Ayache, *Multifractional stochastic fields*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2019, Wavelet strategies in multifractional frameworks.
- [3] A. Ayache, D. Wu et Y. Xiao, *Joint continuity of the local times of fractional Brownian sheets*, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. **44** (2008), n° 4, p. 727-748.
- [4] D. Baraka, T. Mountford et Y. Xiao, *Hölder properties of local times for fractional Brownian motions*, Metrika **69** (2009), n° 2-3, p. 125-152.
- [5] D. Baraka et T. S. Mountford, *The exact Hausdorff measure of the zero set of fractional Brownian motion*, J. Theoret. Probab. **24** (2011), n° 1, p. 271-293.
- [6] J.-M. Bardet et C. A. Tudor, *A wavelet analysis of the Rosenblatt process : chaos expansion and estimation of the self-similarity parameter*, Stochastic Process. Appl. **120** (2010), n° 12, p. 2331-2362.
- [7] Jean-Marc Bardet et Pierre R. Bertrand, *A non-parametric estimator of the spectral density of a continuous-time Gaussian process observed at random times*, Scand. J. Stat. **37** (2010), n° 3, p. 458-476, disponible via l'URL <<https://doi.org/10.1111/j.1467-9469.2009.00684.x>>.
- [8] F. Bastin, *Introduction à l'analyse harmonique*, notes de cours destinées aux étudiants de troisième bachelier en sciences mathématiques de l'université de Liège, disponible via l'URL <<http://www.ifo.ulg.ac.be/fb/ens/AnHarm/20-23/index.php>>.
- [9] S. M. Berman, *Gaussian sample functions : Uniform dimension and Hölder conditions nowhere*, Nagoya Math. J. **46** (1972), p. 63-86.
- [10] S. M. Berman, *Harmonic analysis of local times and sample functions of Gaussian processes*, Trans. Amer. Math. Soc. **143** (1969), p. 269-281, disponible via l'URL <<https://doi.org/10.2307/1995248>>.
- [11] S. M. Berman, *Local nondeterminism and local times of Gaussian processes*, Indiana Univ. Math. J. **23** (1973), p. 69-94.
- [12] S. M. Berman, *Local times and sample function properties of stationary Gaussian processes*, Trans. Amer. Math. Soc. **137** (1969), p. 277-299.

- [13] J. Bertoin, *Sur la mesure d'occupation d'une classe de fonctions self-affines. (On the occupation measure of a class of self-affine functions)*, Japan J. Appl. Math. **5** (1988), n° 3, p. 431-439.
- [14] F. Biagini *et al.*, *Stochastic calculus for fractional Brownian motion and applications*, Probability and its Applications (New York), Springer-Verlag London, Ltd., London, 2008.
- [15] N. H. Bingham, C. M. Goldie et J. L. Teugels, *Regular variation*. Vol. 27, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [16] S. Cohen et G. Samorodnitsky, *Random rewards, fractional Brownian local times and stable self-similar processes*, Ann. Appl. Probab. **16** (2006), n° 3, p. 1432-1461.
- [17] M. Csörgő et P. Révész, *How big are the increments of a Wiener process ?*, Ann. Probab. **7** (1979), n° 4, p. 731-737.
- [18] J. Cuzick, *Some local properties of Gaussian vector fields*, Ann. Probab. **6** (1978), n° 6, p. 984-994.
- [19] J. L. Doob, *Heuristic approach to the Kolmogorov-Smirnov theorems*, Ann. Math. Statistics **20** (1949), p. 393-403.
- [20] C. Esser, *Probabilités*, notes de cours destinées aux étudiants de bachelier en sciences mathématiques de l'université de Liège, année académique 2022-2023.
- [21] K. Falconer, *Techniques in fractal geometry*, Chichester : John Wiley & Sons, 1997.
- [22] Patrick Flandrin, *Wavelet analysis and synthesis of fractional Brownian motion*, IEEE Trans. Inform. Theory **38** (1992), n° 2, p. 910-917.
- [23] A. M. Garsia, *Continuity properties of Gaussian processes with multidimensional time parameter*, Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (Univ. California, Berkeley, Calif., 1970/1971), Vol. II : Probability theory, Univ. California Press, Berkeley, CA, 1972, p. 369-374.
- [24] H. Geiss et S. Geiss, *Measure, probability and functional analysis*, Universitext, Springer, Cham, 2025, disponible via l'URL <https://doi.org/10.1007/978-3-031-84067-8>.
- [25] D. Geman, *On the approximate local growth of multidimensional random fields*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Geb. **38** (1977), p. 237-251.
- [26] D. Geman et J. Horowitz, *Occupation densities*, Ann. Probab. **8** (1980), n° 1, p. 1-67.
- [27] D. Geman et J. Horowitz, *Occupation-times for functions with countable level sets and the regeneration of stationary processes*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete **35** (1976), n° 3, p. 189-211.
- [28] D. Geman et J. Horowitz, *Smooth perturbations of a function with a smooth local time*, Trans. Amer. Math. Soc. **267** (1981), n° 2, p. 517-530.
- [29] C. Hoang *et al.*, *A stochastic framework for evaluating CAR T cell therapy efficacy and variability*, Math. Biosci. **368** (2024), Paper No. 109141, 15, disponible via l'URL <https://doi.org/10.1016/j.mbs.2024.109141>.

- [30] J. Ivanovs et M. Podolskij, *Optimal estimation of the supremum and occupation times of a self-similar Lévy process*, Electron. J. Stat. **16** (2022), n° 1, p. 892-934, disponible via l'URL <<https://doi.org/10.1214/21-ejs1928>>.
- [31] V. Jarník, *Sur les nombres derives approximatifs*, Fundam. Math. **22** (1934), p. 4-16.
- [32] O. Kallenberg, *Foundations of modern probability*, Third. Vol. 99, Probability Theory and Stochastic Modelling, Springer, Cham, 2021.
- [33] H. Kesten, *An iterated logarithm law for local time*, Duke Math. J. **32** (1965), p. 447-456.
- [34] J. Le Gall, *Brownian motion, martingales, and stochastic calculus*, French. Vol. 274, Graduate Texts in Mathematics, Springer, [Cham], 2016.
- [35] C. Y. Lee, *The Hausdorff measure of the range and level sets of Gaussian random fields with sectorial local nondeterminism*, Bernoulli **28** (2022), n° 1, p. 277-306.
- [36] C. Li et J. Fang, *Stochastic processes and their applications in medical science* (2015), p. 1339-1378.
- [37] L. Loosveldt, *Analyse stochastique*, notes de cours destinées aux étudiants de master en sciences mathématiques de l'université de Liège, année académique 2024-2025.
- [38] L. Loosveldt, *Processus stochastiques*, notes de cours destinées aux étudiants de master en sciences mathématiques de l'université de Liège, année académique 2023-2024.
- [39] Laurent Loosveldt et Ciprian A. Tudor, *Modified wavelet variation for the Hermite processes*, Electron. J. Stat. **19** (2025), n° 1, disponible via l'URL <<https://doi.org/10.1214/25-ejs2390>>.
- [40] Y. Malevergne, D. Sornette et R. Wei, *A model of financial bubbles and drawdowns with non-local behavioral self-referencing*, Quant. Finance **25** (2025), n° 4, p. 591-616, disponible via l'URL <<https://doi.org/10.1080/14697688.2025.2479633>>.
- [41] R. Mansuy et M. Yor, *Aspects of Brownian motion*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [42] M. B. Marcus et J. Rosen, *Markov processes, Gaussian processes, and local times*. Vol. 100, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [43] D. Monrad et H. Rootzén, *Small values of Gaussian processes and functional laws of the iterated logarithm*, Probab. Theory Related Fields **101** (1995), n° 2, p. 173-192.
- [44] S. Nicolay, *Théorie de la mesure*, notes de cours destinées aux étudiants de deuxième bachelier en sciences mathématiques de l'université de Liège, disponible via l'URL <<http://www.afaw.ulg.ac.be/mesure/mesure.pdf>>.
- [45] I. Nourdin, *Selected aspects of fractional Brownian motion*. Vol. 4, Bocconi & Springer Series, Springer, Milan ; Bocconi University Press, Milan, 2012, disponible via l'URL <<https://doi.org/10.1007/978-88-470-2823-4>>.
- [46] I. Nourdin, G. Peccati et S. Seuret, *Sojourn time dimensions of fractional Brownian motion*, Bernoulli **26** (2020), n° 3, p. 1619-1634.
- [47] L. D. Pitt, *Local times for Gaussian vector fields*, Indiana Univ. Math. J. **27** (1978), n° 2, p. 309-330.

- [48] Carl Edward Rasmussen et Christopher K. I. Williams, *Gaussian processes for machine learning*, Adaptive Computation and Machine Learning, MIT Press, Cambridge, MA, 2006.
- [49] D. Revuz et M. Yor, *Continuous martingales and Brownian motion*, Third. Vol. 293, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [50] C. A. Rogers et S. J. Taylor, *Functions continuous and singular with respect to a Hausdorff measure*, Mathematika **8** (1961), p. 1-31.
- [51] S. Saks, *Theory of the integral. 2nd, revised ed. Engl. translat. by L. C. Young. With two additional notes by Stefan Banach*. Vol. 7, Monogr. Mat., Warszawa, PWN - Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1937.
- [52] D. N. Sarkhel, *On metric density of functions*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **16** (1971), p. 965-976.
- [53] Z. Shi et D. Jiang, *Stochastic modeling of SIS epidemics with logarithmic Ornstein-Uhlenbeck process and generalized nonlinear incidence*, Math. Biosci. **365** (2023), Paper No. 109083, 15.
- [54] M. Talagrand, *Hausdorff measure of trajectories of multiparameter fractional Brownian motion*, Ann. Probab. **23** (1995), n° 2, p. 767-775.
- [55] S. J. Taylor et C. Tricot, *Packing measure, and its evaluation for a Brownian path*, Trans. Amer. Math. Soc. **288** (1985), n° 2, p. 679-699.
- [56] E. C. Titchmarsh, *Introduction to the theory of Fourier integrals*, Second, Clarendon Press, Oxford, 1948.
- [57] H. F. Trotter, *A property of Brownian motion paths*, Illinois J. Math. **2** (1958), p. 425-433.
- [58] D. Wu et Y. Xiao, *Geometric properties of fractional Brownian sheets*, J. Fourier Anal. Appl. **13** (2007), n° 1, p. 1-37.
- [59] Y. Xiao, *Hausdorff measure of the sample paths of Gaussian random fields*, Osaka J. Math. **33** (1996), n° 4, p. 895-913.
- [60] Y. Xiao, *Hölder conditions for the local times and the Hausdorff measure of the level sets of Gaussian random fields*, Probab. Theory Related Fields **109** (1997), n° 1, p. 129-157.
- [61] Y. Xiao, *Properties of local-nondeterminism of Gaussian and stable random fields and their applications*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **15** (2006), n° 1, p. 157-193.
- [62] J. Yen et M. Yor, *Local times and excursion theory for Brownian motion*. Vol. 2088, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Cham, 2013, A tale of Wiener and Itô measures.
- [63] Y. Yuan et L. J. S. Allen, *Stochastic models for virus and immune system dynamics*, Math. Biosci. **234** (2011), n° 2, p. 84-94, disponible via l'URL <<https://doi.org/10.1016/j.mbs.2011.08.007>>.
- [64] A. Zlatniczki et A. Telcs, *Application of portfolio optimization to achieve persistent time series*, J. Optim. Theory Appl. **201** (2024), n° 2, p. 932-954, disponible via l'URL <<https://doi.org/10.1007/s10957-024-02426-1>>.