Mémoire

Auteur : Bertrand, Hugo
Promoteur(s) : Nicolay, Samuel
Faculté : Faculté des Sciences
Diplôme : Master en sciences mathématiques, à finalité approfondie
Année académique : 2024-2025
URI/URL : http://hdl.handle.net/2268.2/22974

Faculté des Sciences
Département de Mathématique

Théorie des espaces d'interpolation généralisée par un paramètre fonctionnel

Mémoire de fin d'études présenté en vue de l'obtention du titre de
Master en Sciences Mathématiques, à finalité approfondie

Année académique 2024-2025

Auteur : Hugo Bertrand

Promoteur : Samuel Nicolay

Co-Promoteur : Thomas Lamby

Remerciements

Pour commencer, j'aimerais remercier Samuel Nicolay, mon promoteur, pour son soutien, ses conseils et ses relectures, aussi bien pour ce mémoire que pour mon projet de troisième bachelier. Merci à lui de m'avoir toujours proposé des sujets passionnants et de les avoir adaptés en fonction de mes envies. Merci également à Thomas Lamby, mon co-promoteur, pour ses conseils et pour m'avoir transmis le goût de la théorie des espaces d'interpolation.

Merci à tous les membres du B37. Aussi bien aux enseignants pour leurs cours captivants et leur passion, qu'aux étudiants pour leur amitié au fil de ces dernières années. Je remercie plus particulièrement les "4 fantastiques" pour le soutien et la joie qu'ils m'ont apportés.

Je remercie mes parents pour m'avoir toujours encouragé dans mes études et pour s'être toujours intéressés à ce que je faisais même si "les maths, c'est juste de la théorie".

Merci à mes grands-parents, Pierre et Marie-Claire, à qui j'aurais tant aimé montrer le fruit de mon travail. Merci à eux pour leur soutien et leur intérêt pour ce qui me passionne.

Finalement, merci à Tess Poulet pour tant de choses que je ne saurais toutes les citer. Merci à elle d'être à mes côtés et de m'avoir soutenu depuis notre rencontre. Je la remercie également de m'avoir fourni la majorité de mes feuilles quadrillées tout au long de mes études.

Table des matières

Introduction

Considérons $(A, \|\cdot\|_A)$ et $(B, \|\cdot\|_B)$ deux espaces vectoriels normés, si $T : A \to B$ est une application linéaire continue, alors il existe une constante $C > 0$ qui vérifie

$$\|T(a)\|_B \leq C\,\|a\|_A$$

quel que soit $a \in A$. La norme opérateur de T, notée $\|T\|_{A,B}$, désigne la plus petite constante qui vérifie cette propriété. Intéressons nous à cette notion dans un contexte spécifique donné par le théorème d'interpolation de Riesz-Thorin [3] :

Théorème 1. *Soient X et Y deux espaces mesurés et soient $p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1, +\infty]$ tels que $p_0 \neq p_1$ et $q_0 \neq q_1$; si $T : L_{p_0}(X) + L_{p_1}(X) \to L_{q_0}(Y) + L_{q_1}(Y)$ est une application linéaire qui vérifie*

* ⁎ *$T|_{L_{p_0}(X)} : L_{p_0}(X) \to L_{q_0}(Y)$ est continu de norme opérateur M_0,*
* ⁎ *$T|_{L_{p_1}(X)} : L_{p_1}(X) \to L_{q_1}(Y)$ est continu de norme opérateur M_1,*

alors pour tout $\theta \in [0, 1]$, l'application $T|_{L_p(X)} : L_p(X) \to L_q(Y)$ est continue et vérifie

$$\|T\|_{L_p(X), L_q(Y)} \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \tag{1}$$

avec $\frac{1}{p} = (1-\theta)\frac{1}{p_0} + \theta\frac{1}{p_1}$ et $\frac{1}{q} = (1-\theta)\frac{1}{q_0} + \theta\frac{1}{q_1}$.

En d'autres termes, si l'on considère les deux couples d'espaces $(L_{p_0}(X), L_{p_1}(X))$ et $(L_{q_0}(Y), L_{q_1}(Y))$, alors le théorème fourni deux espaces intermédiaires pour ces couples, à savoir $L_p(X)$ et $L_q(Y)$, qui conservent la continuité de l'application T tout en satisfaisant une inégalité reliant les différentes normes opérateur de T. La théorie des espaces d'interpolation généralise ce comportement à des couples d'espaces normés quelconques. Si les espaces obtenus vérifient une inégalité du type (1) pour tout opérateur ayant le même comportement que T, alors ils sont dit d'interpolation d'exposant θ. La théorie classique [1, 3, 14] fournit diverses méthodes pour construire de tels espaces.

Ce mémoire vise à introduire une version généralisée de la théorie des espaces d'interpolation en utilisant les fonctions de Boyd. Ces fonctions généralisent le comportement des fonctions puissances comme $t \mapsto t^{\theta}$ ou bien $t \mapsto t^{1-\theta}$. Ainsi, nous pourrons obtenir des espaces d'interpolation vérifiant des inégalités plus raffinées que (1) en remplaçant les fonctions puissances par des fonctions de Boyd. Nous parlerons alors d'espaces d'interpolation d'exposant φ avec φ une fonction de Boyd. Les énoncés des résultats principaux proviennent de [12] et les preuves, pour la plupart, ont été obtenues en adaptant celles du contexte classique [3].

Dans la première section, nous introduirons les fonctions de Boyd et leurs principales propriétés. Ensuite, nous présenterons la théorie des espaces d'interpolation avec un paramètre fonctionnel ainsi que quelques résultats généraux comme une adaptation du théorème d'Aronszajn-Gagliardo. La seconde section présentera deux méthodes pour construire des espaces d'interpolation pour un paramètre φ donné. Nous étudierons ensuite les propriétés des espaces obtenus et les éventuelles relations qui les lient. Dans la troisième section, nous introduirons une troisième méthode suivant un raisonnement bien différent des deux premières. Cette méthode n'ayant pas encore été généralisée à un paramètre fonctionnel, nous la présenterons dans le contexte classique [1, 3, 14] et énoncerons les récentes connexions avec la théorie généralisée [11]. Finalement, la dernière section mettra en pratique la théorie développée tout au long de ce mémoire en appliquant les méthodes introduites à des espaces fonctionnels spécifiques et en particulier, nous montrerons le théorème d'interpolation de Riesz-Thorin.

1 Théorie des espaces d'interpolation

1.1 Fonctions de Boyd

Les fonctions de Boyd généralisent le comportement des fonctions puissances

$$\psi_\alpha : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto x^\alpha$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Nous allons introduire les propriétés des fonctions de Boyd qui nous seront nécessaires pour généraliser la théorie des espaces d'interpolation. Les résultats présentés dans cette section proviennent de [13].

Définition 1.1.1. Une fonction $\varphi : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ est une fonction de Boyd si elle est continue, si $\varphi(1) = 1$, et si pour tout $x \in \mathbb{R}_0^+$, on a

$$\overline{\varphi}(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}_0^+} \frac{\varphi(xy)}{\varphi(y)} < +\infty.$$

On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des fonctions de Boyd.

Remarque 1.1.2. On remarque que $\overline{\varphi}$ est sous-multiplicative : si $x, y > 0$, alors $\overline{\varphi}(xy) \leq \overline{\varphi}(x)\,\overline{\varphi}(y)$. On en tire directement que $\frac{1}{\overline{\varphi}(1/x)} \leq \overline{\varphi}(x)$ pour tout $x > 0$.
On remarque également que $\overline{\varphi}$ est mesurable [1]. En effet, on a

$$\overline{\varphi} : x \mapsto \sup_{q \in \mathbb{Q}_0^+} f_q(x)$$

où $f_q : x \mapsto \varphi(xq)/\varphi(q)$ est une fonction continue et donc mesurable.

Exemple 1.1.3. Les fonctions puissances $\psi_\alpha : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ sont des cas triviaux de fonctions de Boyd. On remarque directement que l'on a $\overline{\psi_\alpha} = \psi_\alpha$ quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Définition 1.1.4. Soit φ une fonction de Boyd ; on définit les indices inférieur et supérieur de Boyd par les quantités

$$\underline{\mathrm{b}}(\varphi) = \sup_{x \in]0,1[} \frac{\ln(\overline{\varphi}(x))}{\ln(x)},$$

$$\overline{\mathrm{b}}(\varphi) = \inf_{x \in]1,+\infty[} \frac{\ln(\overline{\varphi}(x))}{\ln(x)}$$

respectivement.

Nous allons donner une définition équivalente de ces indices. Pour cela nous allons revenir sur le caractère sous-multiplicatif de $\overline{\varphi}$ et suivre le raisonnement de [5] en commençant par étudier les fonctions sous-additives [9] c'est à dire les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on a

$$f(x + y) \leq f(x) + f(y).$$

1. On entend ici mesurable pour la mesure de Lebesgue.

Lemme 1.1.5. *Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ une fonction sous-additive mesurable ; la fonction f est bornée sur tout intervalle compact ne contenant pas 0.*

Démonstration. Commençons par remarquer que si $a>0$, alors pour tout $x_1,x_2\in[0,a]$ tels que $a=x_1+x_2$, on a $f(a)\le f(x_1)+f(x_2)$ et donc si on pose

$$A=\left\{\ x\in[0,a]\mid f(x)\ge\frac{f(a)}{2}\ \right\}$$

alors on a $\mathcal{L}(A)\ge a/2$. En effet, si $x_1,x_2\in[0,a]$ sont tels que $a=x_1+x_2$ et $f(x_1)<f(a)/2$ alors $f(x_2)\ge f(a)/2$. En conséquence, $a-A^c\subset A$ et donc

$$\mathcal{L}\left(A^c\right)=\mathcal{L}\left(a-A^c\right)\le\mathcal{L}\left(A\right).$$

Au total, on a bien $a=\mathcal{L}([0,a])=\mathcal{L}(A)+\mathcal{L}(A^c)\le 2\mathcal{L}(A)$.
Montrons maintenant que f est bornée sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}_0^+$.
Soient $a,b>0$ tels que $a<b$; supposons par l'absurde que f n'est pas bornée sur $[a,b]$. On sait alors qu'il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $[a,b]$ telle que $f(x_n)\ge 2n$ quel que soit $n\in\mathbb{N}$. En utilisant le raisonnement fait en début de démonstration, on tire que pour tout n, on a

$$\mathcal{L}\left(\{\ x\in[0,b]\mid f(x)\ge n\ \}\right)\ge\frac{x_n}{2}\ge\frac{a}{2}.$$

De plus, la fonction f étant à valeurs finie, on en déduit que

$$\begin{aligned}0\ &=\mathcal{L}\left(\{\ x\in[0,b]\mid f(x)=+\infty\ \}\right)\\ &=\mathcal{L}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{\ x\in[0,b]\mid f(x)\ge n\ \}\right)\\ &=\lim_{n\to+\infty}\mathcal{L}\left(\{\ x\in[0,b]\mid f(x)\ge n\ \}\right)\\ &\ge\frac{a}{2}\end{aligned}$$

où l'avant dernière inégalité provient de la continuité à droite des mesures. L'inégalité entre les deux extrêmes étant absurde, on en conclut que f est bornée sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}_0^+$.
Pour montrer que f est bornée sur les intervalles compacts de $\mathbb{R}_0^-$, il suffit de considérer la fonction sous-additive $\tilde{f}:x\mapsto f(-x)$. On sait alors qu'elle est bornée sur tout intervalle $[a,b]$ si $0<a<b$ ce qui permet de conclure.

□

Proposition 1.1.6. *Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction sous-additive mesurable ; on a*

$$\inf_{x>0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\qquad\textit{et}\qquad\sup_{x<0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

Démonstration. Montrons la première égalité et supposons que $\inf_{x>0} \frac{f(x)}{x} = \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$; considérons $a > 0$ tel que $\frac{f(a)}{a} < \alpha + \varepsilon$. Si $x > a$ et si $n \in \mathbb{N}$ est tel que $(n+1)a < x \leq (n+2)a$, alors on a

$$\frac{f(x)}{x} \leq \frac{f(na)}{x} + \frac{f(x-na)}{x} \leq \frac{na}{x}\frac{f(a)}{a} + \frac{\sup_{y\in[a,2a]} f(y)}{x} \leq \frac{n}{n+1}(\alpha+\varepsilon) + \frac{\sup_{y\in[a,2a]} f(y)}{x}.$$

En appliquant le lemme précédent à $|f|$, on remarque que f est bornée sur $[a, 2a]$ et donc en faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient

$$\alpha \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \leq \alpha + \varepsilon.$$

L'inégalité entre les deux extrêmes ayant lieu quel que soit $\varepsilon > 0$, on conclut par passage à la limite.
Montrons maintenant la seconde égalité.
Considérons la fonction sous-additive $\tilde{f} : x \mapsto f(-x)$. On sait alors que

$$\inf_{x>0} \frac{\tilde{f}(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\tilde{f}(x)}{x}.$$

En multipliant les deux membres par -1, on obtient

$$\sup_{x>0} \frac{f(-x)}{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(-x)}{-x}$$

d'où la conclusion.

□

Nous pouvons maintenant donner une définition alternative des indices de Boyd :

Proposition 1.1.7. *Soit φ une fonction de Boyd ; on a*

$$\underline{\mathrm{b}}(\varphi) = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln(\overline{\varphi}(x))}{\ln(x)},$$

$$\overline{\mathrm{b}}(\varphi) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\overline{\varphi}(x))}{\ln(x)}.$$

Démonstration. Comme évoqué dans la remarque 1.1.2, on sait que la fonction $\overline{\varphi}$ est sous-multiplicative et donc la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln(\overline{\varphi}(e^x))$$

est sous-additive. De plus elle est mesurable car $\overline{\varphi}$ est mesurable par la remarque 1.1.2. On conclut en appliquant la proposition précédente à f.

□

Le résultat suivant justifie les appellations "supérieur et inférieur" et montre que toute fonction de Boyd possède des indices finis.

Corollaire 1.1.8. *Soit φ une fonction de Boyd ; on a*

$$-\infty < \underline{\mathrm{b}}(\varphi) \leq \overline{\mathrm{b}}(\varphi) < +\infty.$$

Démonstration. Les inégalités aux extrémités découlent directement de la définition. Pour conclure, la proposition précédente et la remarque 1.1.2 donnent que

$$\underline{\mathrm{b}}(\varphi) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\overline{\varphi}(1/x))}{\ln(1/x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\ln((\overline{\varphi}(1/x))^{-1})}{-\ln(x)} \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\overline{\varphi}(x))}{\ln(x)} = \overline{\mathrm{b}}(\varphi).$$

□

Ces indices permettent de majorer asymptotiquement $\overline{\varphi}$ et donc de caractériser les comportements asymptotiques de φ.

Proposition 1.1.9. *Si φ est une fonction de Boyd, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $R_1, R_2 > 0$ tels que*

$$\overline{\varphi}(x) \leq \begin{cases} x^{\underline{\mathrm{b}}(\varphi)-\varepsilon} & si\ x \in]0, R_1[\\ x^{\overline{\mathrm{b}}(\varphi)+\varepsilon} & si\ x \in]R_2, +\infty[\end{cases}.$$

En particulier, pour tous $\varepsilon, R > 0$, il existe $C > 0$ tel que

$$\overline{\varphi}(x) \leq \begin{cases} Cx^{\underline{\mathrm{b}}(\varphi)-\varepsilon} & si\ x \in]0, R] \\ Cx^{\overline{\mathrm{b}}(\varphi)+\varepsilon} & si\ x \in [R, +\infty[\end{cases}.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition 1.1.7. Par exemple pour le premier cas, on a pour $\underline{\mathrm{b}}(\varphi)$ que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $R_1 \in]0, 1[$ tel que

$$\underline{\mathrm{b}}(\varphi) - \frac{\ln(\overline{\varphi}(x))}{\ln(x)} < \varepsilon \qquad \forall x \in]0, R_1[.$$

Et donc $\overline{\varphi}(x) \leq x^{\underline{\mathrm{b}}(\varphi)-\varepsilon}$ pour tout $x \in]0, R_1[$.
Pour arriver au cas particulier il suffit de remarquer que si $R \geq R_1$, alors $\overline{\varphi}$ est bornée sur $[R_1, R]$. En effet, la fonction $x \mapsto \ln(\overline{\varphi}(x))$ est sous-additive et donc bornée sur le compact $[R_1, R]$ par le lemme 1.1.5.

□

Remarque 1.1.10. En appliquant la définition des indices de Boyd au lieu de la proposition 1.1.7, on obtient alors une minoration de $\overline{\varphi}$:

$$\overline{\varphi}(x) \geq \begin{cases} x^{\underline{\mathrm{b}}(\varphi)} & \text{si } x \in]0,1] \\ x^{\overline{\mathrm{b}}(\varphi)} & \text{si } x \in [1,+\infty[\end{cases}.$$

Corollaire 1.1.11. *Si φ est une fonction de Boyd, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $R_1, R_2 > 0$ tels que*

$$\begin{cases} x^{\overline{\mathrm{b}}(\varphi)+\varepsilon} < \varphi(x) < x^{\underline{\mathrm{b}}(\varphi)-\varepsilon} & \textit{si } x \in]0,R_1[\\ x^{\underline{\mathrm{b}}(\varphi)-\varepsilon} < \varphi(x) < x^{\overline{\mathrm{b}}(\varphi)+\varepsilon} & \textit{si } x \in]R_2,+\infty[\end{cases}.$$

En particulier, pour tous $\varepsilon, R > 0$ il existe $C > 0$ tel que

$$\begin{cases} C^{-1}x^{\overline{\mathrm{b}}(\varphi)+\varepsilon} < \varphi(x) < Cx^{\underline{\mathrm{b}}(\varphi)-\varepsilon} & \textit{si } x \in]0,R] \\ C^{-1}x^{\underline{\mathrm{b}}(\varphi)-\varepsilon} < \varphi(x) < Cx^{\overline{\mathrm{b}}(\varphi)+\varepsilon} & \textit{si } x \in [R,+\infty[\end{cases}.$$

Démonstration. On remarque que pour tout $x > 0$, on a

$$\overline{\varphi}(1/x) = \sup_{y \in \mathbb{R}_0^+} \frac{\varphi(y/x)}{\varphi(y)} \geq \frac{\varphi(x/x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{\varphi(x)}.$$

Et donc puisque $\varphi \leq \overline{\varphi}$, on a pour tout $x > 0$,

$$\frac{1}{\overline{\varphi}(1/x)} \leq \varphi(x) \leq \overline{\varphi}(x).$$

Il suffit alors d'appliquer la proposition précédente aux deux extrêmes pour conclure.
Le cas particulier est dû à la continuité de φ.

□

Proposition 1.1.12. *Soit φ une fonction de Boyd ; si $\underline{\mathrm{b}}(\varphi) > 0$, alors la fonction $\overline{\varphi}$ est croissante à une constante multiplicative près. Autrement dit, il existe $C > 0$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}_0^+$ tels que $x \leq y$, on a*

$$\overline{\varphi}(x) \leq C\,\overline{\varphi}(y).$$

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{R}_0^+$ tels que $x \leq y$; on a alors $x/y \leq 1$. Fixons $\varepsilon > 0$ tel que $\underline{\mathrm{b}}(\varphi) - \varepsilon > 0$, la sous-multiplicativité de $\overline{\varphi}$ et la proposition 1.1.9 nous assurent alors qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\overline{\varphi}(x) = \overline{\varphi}\left(\frac{x}{y}y\right) \leq \overline{\varphi}\left(\frac{x}{y}\right)\overline{\varphi}\,(y) \leq C\left(\frac{x}{y}\right)^{\underline{\mathrm{b}}(\varphi)-\varepsilon}\overline{\varphi}\,(y) \leq C\,\overline{\varphi}\,(y).$$

□

Un raisonnement identique au précédent permet d'arriver à un résultat analogue :

Proposition 1.1.13. *Soit φ une fonction de Boyd ; si $\overline{\mathrm{b}}(\varphi) < 0$, alors la fonction $\overline{\varphi}$ est décroissante à une constante multiplicative près.*

Définition 1.1.14. Soit φ une fonction de Boyd ; le complémentaire de φ est la fonction

$$\varphi_\star : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto x\varphi(\frac{1}{x}).$$

Proposition 1.1.15. *Soit φ une fonction de Boyd ; le complémentaire de φ est aussi une fonction de Boyd et on a même*

$$\overline{\varphi_\star}(x) = x\,\overline{\varphi}(\frac{1}{x})$$

quel que soit $x \in \mathbb{R}_0^+$.
En particulier, on a $\underline{\mathrm{b}}(\varphi_\star) = 1 - \overline{\mathrm{b}}(\varphi)$ et $\overline{\mathrm{b}}(\varphi_\star) = 1 - \underline{\mathrm{b}}(\varphi)$.

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence directe des définitions.

□

Remarque 1.1.16. L'utilité du complémentaire de φ est de généraliser la relation qu'il y a entre les fonctions $t \mapsto t^\theta$ et $t \mapsto t^{1-\theta}$ pour $\theta \in]0,1[$. On aurait donc pu introduire une autre fonction complémentaire

$$\varphi^\star : t \mapsto \frac{t}{\varphi(t)}$$

qui aurait joué un rôle similaire à $\varphi_\star$. En fait on a même $\overline{\varphi^\star} = \overline{\varphi_\star}$ et donc toute la théorie qui suit peut utiliser $\varphi^\star$ [12]. Le choix d'utiliser $\varphi_\star$ repose simplement sur le fait que la proposition 2.2.13 possède une écriture plus élégante dans ce cas.

Nous allons maintenant introduire un sous ensemble de $\mathcal{B}$ constitué de difféomorphismes de $\mathbb{R}_0^+$ vérifiant une certaine propriété d'élasticité. Nous allons ensuite montrer que les fonctions de Boyd qui nous intéresseront dans la suite sont équivalentes à des éléments de ce sous ensemble [15].

Définition 1.1.17. Soit $\varphi : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$; la fonction φ appartient à $\mathcal{B}'$ si elle est de classe C^1, si $\varphi(1) = 1$ et si elle vérifie

$$0 < \inf_{x>0} \frac{x|\varphi'(x)|}{\varphi(x)} \leq \sup_{x>0} \frac{x|\varphi'(x)|}{\varphi(x)} < +\infty.$$

On note $\underline{\mathrm{b}}'(\varphi) = \inf_{x>0} \frac{x|\varphi'(x)|}{\varphi(x)}$ et $\overline{\mathrm{b}}'(\varphi) = \sup_{x>0} \frac{x|\varphi'(x)|}{\varphi(x)}$.

Proposition 1.1.18. *Soit $\varphi \in \mathcal{B}'$; on a*

$$\varphi(x) \leq \begin{cases} x^{\underline{\mathrm{b}}'(\varphi)} & si\ x \in]0,1] \\ x^{\overline{\mathrm{b}}'(\varphi)} & si\ x \in [1,+\infty[\end{cases}.$$

Démonstration. On remarque que pour tout $x > 0$, on a

$$\frac{\underline{\mathrm{b}}'(\varphi)}{x} \leq (\ln \circ \varphi)' = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \leq \frac{\overline{\mathrm{b}}'(\varphi)}{x}.$$

On en tire que si $t \geq 1$, alors

$$(\ln \circ \varphi)(x) = \int_1^x (\ln \circ \varphi)'(t)\mathrm{d}t \leq \int_1^x \frac{\overline{\mathrm{b}}'(\varphi)}{t}\mathrm{d}t = \ln(x^{\overline{\mathrm{b}}'(\varphi)})$$

et si $t \leq 1$, alors

$$(\ln \circ \varphi)(x) = -\int_x^1 (\ln \circ \varphi)'(t)\mathrm{d}t \leq -\int_x^1 \frac{\overline{\mathrm{b}}'(\varphi)}{t}\mathrm{d}t = \ln(x^{\overline{\mathrm{b}}'(\varphi)}).$$

□

La proposition suivante est due à [7] :

Proposition 1.1.19. *Si $\varphi \in \mathcal{B}'$, alors φ est une fonction de Boyd. De plus, on a*

$$\underline{\mathrm{b}}(\varphi) \leq \underline{\mathrm{b}}'(\varphi) \quad \text{et} \quad \overline{\mathrm{b}}(\varphi) \leq \overline{\mathrm{b}}'(\varphi)$$

Démonstration. Soit $y > 0$; posons $\psi_y(x) = \varphi(xy)/\varphi(y)$ pour tout $x > 0$. On remarque que ψ_y est de classe C^1 et que pour tout $x > 0$, on a

$$\frac{x\psi_y'(x)}{\psi_y(x)} = \frac{xy\varphi'(xy)}{\varphi(xy)}.$$

On en déduit donc que $\psi_y \in \mathcal{B}'$ et que les indices $\underline{\mathrm{b}}'(\psi_y)$ et $\overline{\mathrm{b}}'(\psi_y)$ sont égaux à $\underline{\mathrm{b}}'(\varphi)$ et $\overline{\mathrm{b}}'(\varphi)$ respectivement. La proposition précédente nous permet alors d'affirmer que

$$\overline{\varphi}(x) = \sup_{y>0} \psi_y(x) \leq \max(x^{\underline{\mathrm{b}}'(\varphi)}, x^{\overline{\mathrm{b}}'(\varphi)}) < +\infty$$

quel que soit $x > 0$. Finalement, puisque $\underline{\mathrm{b}}'(\varphi) \leq \overline{\mathrm{b}}'(\varphi)$, on a par la proposition 1.1.7

$$\underline{\mathrm{b}}(\varphi) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(\overline{\varphi}(x))}{\ln(x)} \leq \frac{\ln(x^{\underline{\mathrm{b}}'(\varphi)})}{\ln(x)} = \underline{\mathrm{b}}'(\varphi).$$

L'inégalité concernant $\overline{\mathrm{b}}(\varphi)$ s'obtient de la même manière.

□

Définition 1.1.20. Soient f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$; ces fonctions sont dites équivalentes si il existe une constante $C > 0$ pour laquelle on a

$$C^{-1}f \leq g \leq Cf.$$

On note alors $f \sim g$.

Lemme 1.1.21. *Soit φ une fonction de Boyd telle que $0 < \underline{\mathrm{b}}(\varphi)$; si $a > \overline{\mathrm{b}}(\varphi)$, alors les fonctions*

$$t \mapsto \frac{\min(1,t^a)}{t}\,\overline{\varphi}\left(\frac{1}{t}\right) \quad , \quad t \mapsto \frac{\min(1,t^a)}{t\,\overline{\varphi}(t)} \quad \textit{et} \quad t \mapsto \frac{\min(1,t^{-a})}{t}\varphi(t)$$

sont intégrables.

Démonstration. La remarque 1.1.2 permet d'affirmer que toutes ces fonctions sont mesurables. Il suffit d'appliquer la proposition 1.1.9 pour la première fonction, la remarque 1.1.10 pour la seconde et le corollaire 1.1.11 pour la dernière. Par exemple, pour la première fonction, si on fixe $\varepsilon > 0$ tel que $0 < \underline{\mathrm{b}}(\varphi) - \varepsilon \leq \overline{\mathrm{b}}(\varphi) + \varepsilon < a$, alors on sait qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\frac{\min(1,t^a)}{t}\,\overline{\varphi}\left(\frac{1}{t}\right) \leq Ct^{a-1-\overline{\mathrm{b}}(\varphi)-\varepsilon}\chi_{]0.1]}(t) + \frac{C}{t^{1+\underline{\mathrm{b}}(\varphi)-\varepsilon}}\chi_{]1,+\infty[}(t)$$

et donc la première fonction est intégrable.

□

Remarque 1.1.22. Puisque la dérivée d'une fonction de $\mathcal{B}'$ n'est par définition jamais nulle, toute fonction de $\mathcal{B}'$ est une fonction de Boyd strictement monotone et est donc un difféomorphisme de $\mathbb{R}_0^+$ dans lui-même et on note $\mathcal{B}'_+$ et $\mathcal{B}'_-$ les élément strictement croissants et strictement décroissants de $\mathcal{B}'$ respectivement.

Théorème 1.1.23. *Soit φ une fonction de Boyd ;*

- ⁎ *si $\underline{\mathrm{b}}(\varphi) > 0$, alors il existe une fonction $\xi \in \mathcal{B}'_+$ telle que $\varphi \sim \xi$.*
- ⁎ *si $\overline{\mathrm{b}}(\varphi) < 0$, alors il existe une fonction $\xi \in \mathcal{B}'_-$ telle que $\varphi \sim \xi$.* [2]

Démonstration. Commençons par montrer le premier point.
Fixons $a > 0$ tel que $a - 1 > \overline{\mathrm{b}}(\varphi)$ et posons pour tout $x > 0$

$$\xi(x) = \frac{1}{C}\int_0^{+\infty} \min(1,(\frac{x}{t})^a)\varphi(t)\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

où $C = \int_0^{+\infty} \min(1,(\frac{1}{t})^a)\varphi(t)\frac{\mathrm{d}t}{t}$ est une constante finie par le lemme précédent. On remarque que $\xi(1) = 1$ et que

$$\xi(x) = \frac{1}{C}\int_0^{x} \varphi(t)\frac{\mathrm{d}t}{t} + \frac{x^a}{C}\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^a}\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

pour tout $x > 0$ ce qui montre que ξ est de classe C^1 et que l'on a

$$\xi'(x) = \frac{ax^{a-1}}{C}\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^a}\frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{a}{xC}\int_x^{+\infty} \min(1,(\frac{x}{t})^a)\varphi(t)\frac{\mathrm{d}t}{t} > 0$$

2. Il a été montré dans [13] que sous les mêmes hypothèses, on peut supposer la fonction ξ infiniment continument dérivable.

pour tout $x > 0$. On en tire que ξ est strictement croissant et que

$$\frac{x\xi'(x)}{\xi(x)} = a \cdot \frac{\int_x^{+\infty} \min(1, (\frac{x}{t})^a)\varphi(t)\frac{\mathrm{d}t}{t}}{\int_0^{+\infty} \min(1, (\frac{x}{t})^a)\varphi(t)\frac{\mathrm{d}t}{t}} \leq a$$

pour tout $x > 0$. De plus, puisque $\frac{\varphi(x)}{\overline{\varphi}(x/t)} \leq \varphi(t) \leq \varphi(x)\,\overline{\varphi}(t/x)$ quels que soient $t, x > 0$, on a

$$\frac{x\xi'(x)}{\xi(x)} \geq a \cdot \frac{\varphi(x)\int_x^{+\infty} \frac{\min(1,(x/t)^a)}{\overline{\varphi}(x/t)}\frac{\mathrm{d}t}{t}}{\varphi(x)\int_0^{+\infty} \min(1,(x/t)^a)\,\overline{\varphi}(t/x)\frac{\mathrm{d}t}{t}} = a \cdot \frac{\int_0^1 \frac{\min(1,u^a)}{\overline{\varphi}(u)}\frac{\mathrm{d}t}{t}}{\int_0^{+\infty} \min(1,u^a)\,\overline{\varphi}(1/u)\frac{\mathrm{d}t}{t}} > 0$$

pour tout $x > 0$ en prenant $u = x/t$ par le lemme précédent.
Au total, on a bien $\xi \in \mathcal{B}'$. Il ne reste plus qu'à montrer que $\xi \sim \varphi$. On procède comme au point précédent et on obtient que

$$\varphi(x)\int_0^1 \frac{\min(1,u^a)}{\overline{\varphi}(u)}\frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \xi(x) \leq \varphi(x)\int_0^{+\infty} \min(1,u^a)\,\overline{\varphi}(1/u)\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

quel que soit $x > 0$ et où les deux intégrales donnent bien des constantes strictement positives par le lemme précédent.
Pour le second point, il suffit de considérer la fonction $1/\varphi$. Pour tout $x > 0$, on a

$$\overline{\left(\frac{1}{\varphi}\right)}(x) = \sup_{y>0} \frac{\varphi(y)}{\varphi(xy)} = \sup_{y>0} \frac{\varphi(\frac{1}{x}y)}{\varphi(y)} = \overline{\varphi}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Cela nous donne que

$$\underline{\mathrm{b}}\left(\frac{1}{\varphi}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\overline{\varphi}(1/x))}{\ln(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\overline{\varphi}(x))}{-\ln(x)} = -\overline{\mathrm{b}}(\varphi) > 0.$$

On sait donc qu'il existe $\xi \in \mathcal{B}'_+$ tel que $1/\varphi \sim \xi$. On en tire que $\varphi \sim 1/\xi$ où $1/\xi \in \mathcal{B}'_-$ car pour tout $x > 0$, on a

$$\frac{x|(1/\xi)'(x)|}{(1/\xi)(x)} = \frac{x|\xi'(x)|}{\xi(x)}.$$

□

1.2 Catégories et foncteurs

Dans cet écrit, nous allons aborder la théorie des espaces d'interpolation du point de vue des catégories. Cela n'est pas obligatoire [1] mais cela permet d'amener de manière propre et élégante de nombreuses notions. Introduisons donc les rudiments de la théorie des catégories [17].

Définition 1.2.1. Une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée d'un couple (Ω, M) où Ω est un ensemble d'objets et M un ensemble dont les éléments sont des morphismes entre objets. Un morphisme entre objets est un triplet (T, A, B) avec $A, B \in \Omega$. Si $A, B \in \Omega$ et $(T, A, B) \in M$, on note $T : A \rightsquigarrow B \in M$ ou encore $T \in M$. Les ensembles Ω et M vérifient les deux condition suivantes.

* il existe un opérateur produit associatif $\cdot$ tel que si $T : A \rightsquigarrow B \in M$ et $S : B \rightsquigarrow C \in M$ alors
$$S \cdot T : A \rightsquigarrow C \in M,$$
* À tout $A \in \Omega$, on associe un morphisme neutre $I_A : A \rightsquigarrow A \in M$. Ces morphismes vérifient que pour tout $T : A \rightsquigarrow B \in M$, on a
$$T \cdot I_A = T = I_B \cdot T.$$

On se permet de noter ST au lieu de $S \cdot T$.
Si $\mathcal{C} = (\Omega, M)$ et $\mathcal{D} = (\Omega', M')$ sont deux catégories telles que $\Omega \subset \Omega'$ et $M \subset M'$, alors $\mathcal{C}$ est une sous catégorie de $\mathcal{D}$.

Dans un soucis de lisibilité, nous simplifierons le formalisme des catégories et noterons simplement $A \in \mathcal{C}$ au lieu de $A \in \Omega$ lorsqu'il est clair que A est un objet. Nous ferons de même pour $T : A \rightsquigarrow B \in M$ que nous noterons simplement $T : A \rightsquigarrow B \in \mathcal{C}$. Enfin lorsque le contexte est clair, nous ne préciserons même pas l'appartenance à la catégorie. C'est à dire que $T : A \rightsquigarrow B$ signifiera $T : A \rightsquigarrow B \in \mathcal{C}$ où $\mathcal{C}$ est la catégorie désignée par le contexte.

Notation 1.2.2. Dans cet écrit nous utiliserons particulièrement deux catégories : la première, notée $\mathcal{N}$, est celle dont les objets sont les espaces vectoriels normés et dont les morphismes sont les applications linéaires continues entre ces espaces c'est à dire que $T : A \rightsquigarrow B \in \mathcal{N}$ si $T : A \to B$ est une application linéaire continue. La seconde ,notée $\mathcal{B}$, est celle dont les objets sont les espaces de Banach et dont les morphisme sont les applications linéaires continues entre ces espaces. Pour ces catégories, l'opérateur produit entre morphismes est bien entendu la composition. On remarque que $\mathcal{B}$ est une sous-catégorie de $\mathcal{N}$.

L'exemple suivant montre que l'appellation morphisme dans la définition d'une catégorie peut porter à confusion. En effet, un morphisme n'a nullement besoin d'être une application entre objets [3].

Exemple 1.2.3. Posons $\Omega = \mathbb{N}$ et pour tout couple $m, n \in \mathbb{N}$ définissons un morphisme $(T_{m,n}, m, n)$. On pose alors $M = \{ (T_{m,n}, m, n) \mid m, n \in \mathbb{N} \}$. On définit ensuite l'opérateur produit $\cdot$ comme $T_{b,c} \cdot T_{a,b} = T_{a,c}$ pour tout $a, b, c \in \mathbb{N}$. Avec cette définition, on remarque que $I_n = T_{n,n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ convient pour que $\mathcal{C} = (\Omega, M)$ soit bien une catégorie. On remarque que nous n'avons pas eu besoin de définir les $T_{m,n}$ explicitement. Ils pourraient aussi bien être des applications que tout autre chose et n'ont même pas besoin de dépendre de m ou n.

Définition 1.2.4. Soient $\mathcal{C} = (\Omega, M)$ et $\mathcal{D} = (\Omega', M')$ deux catégories ; un foncteur [4] de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$ est une application F qui associe les objets et les morphismes de $\mathcal{C}$ à des objets et des morphismes de $\mathcal{D}$ respectivement et qui vérifie :

3. Dans notre cas, un morphisme désignera toujours une application mais pas nécessairement entre ses objets.

4. Pour être exact, il s'agit d'un foncteur convariant [17]. Nous nous permettons cet abus de langage étant donné que nous n'utiliserons que ceux-ci.

* si $T : A \rightsquigarrow B \in \mathcal{C}$ alors $F(T) : F(A) \rightsquigarrow F(B) \in \mathcal{D}$,
* si $S, T \in M$ [5] alors $F(ST) = F(S)F(T)$,
* si $A \in \Omega$ alors $F(I_A) = I_{F(A)}$.

Deux exemples de foncteurs sont donnés dans l'exemple 1.3.15 mais nous pouvons déjà donner un exemple simple : si $\mathcal{D}$ est une catégorie et que $\mathcal{C} = (\Omega, M)$ est une sous-catégorie de $\mathcal{D}$, l'application F qui est telle que $F(A) = A$ et $F(T) = T$ pour tout $A \in \Omega$ et tout $T \in M$ est un foncteur.

1.3 Espaces d'interpolation

Dans cette section, nous allons introduire les premières notions de la théorie des espaces d'interpolation. Nous nous intéresserons directement aux notions généralisées à un paramètre fonctionnel introduite dans [12]. La généralisation s'adapte proprement en partant du contexte classique présenté dans [3]. Nous ferons un parallélisme avec le contexte classique lorsque nous introduirons de nouvelles notions.

Dans cette écrit, nous travaillerons avec des couples d'espaces de la forme $\boldsymbol{A} = (\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1)$. Afin de simplifier la lecture, une lettre majuscule en gras $\boldsymbol{X}$ désignera toujours un couple d'espaces et nous ne préciserons pas toujours explicitement les deux espaces X_0 et X_1 du couple $\boldsymbol{X}$ avant de les utiliser.

Définition 1.3.1. Soient A et B deux espaces topologiques, on dit que A est continument inclus dans B si $A \subset B$ et si l'application

$$i : A \to B : a \mapsto a$$

est continue pour les topologies de A et B. On note alors $A \hookrightarrow B$.

Définition 1.3.2. Soit $\boldsymbol{A}$ un couple d'espaces vectoriels topologiques ; ces espaces sont dits compatibles si il existe un espace vectoriel topologique séparé $\mathcal{X}$ pour lequel A_0 et A_1 sont des sous espaces vectoriels tels que

$$A_0 \hookrightarrow \mathcal{X} \text{ et } A_1 \hookrightarrow \mathcal{X}$$

À partir de maintenant, lorsque l'on considérera un couple d'espaces compatibles, on considérera également implicitement un tel espace vectoriel topologique afin de pouvoir donner directement un sens à des expressions de la forme $f + g$ où $(f, g) \in A_0 \times A_1$ et où $+$ désigne l'opération sur $\mathcal{X}$.

Définition 1.3.3. Soit $\boldsymbol{A}$ un couple d'espaces compatibles de $\mathcal{N}$; on note $\Delta(\boldsymbol{A})$ l'espace $A_0 \cap A_1$ muni de la norme

$$\|a\|_{\Delta(\boldsymbol{A})} = \max(\|a\|_{A_0}, \|a\|_{A_1}).$$

5. Ici, nous n'explicitons pas les objets des morphismes qui ne feraient que nuire à la lisibilité.

Et on note $\Sigma(\boldsymbol{A})$ l'espace $A_0 + A_1$ muni de la norme

$$\|a\|_{\Sigma(\boldsymbol{A})} = \inf\left\{ \|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A_1} \mid (a_0, a_1) \in A_0 \times A_1,\ a_0 + a_1 = a \right\}.$$

Proposition 1.3.4. *Soit $\boldsymbol{A}$ un couple d'espaces de $\mathcal{N}$ et soit $k \in \{0,1\}$; les applications $\|\cdot\|_{\Delta(\boldsymbol{A})}$ et $\|\cdot\|_{\Sigma(\boldsymbol{A})}$ sont bien des normes sur leurs espaces et vérifient*

$$\Delta(\boldsymbol{A}) \hookrightarrow A_k \hookrightarrow \Sigma(\boldsymbol{A}).$$

De plus les espaces $\Delta(\boldsymbol{A})$ et $\Sigma(\boldsymbol{A})$ sont optimaux pour cette propriété. C'est à dire que si il existe un espace normé E tel que $E \hookrightarrow A_0$ et $E \hookrightarrow A_1$ (resp. $A_0 \hookrightarrow E$ et $A_1 \hookrightarrow E$) alors on a $E \hookrightarrow \Delta(\boldsymbol{A})$ (resp. $\Sigma(\boldsymbol{A}) \hookrightarrow E$).

Démonstration. Il est clair que $\|\cdot\|_{\Delta(\boldsymbol{A})}$ est bien une norme. Pour ce qui est de $\|\cdot\|_{\Sigma(\boldsymbol{A})}$, montrons que si $x \in \Sigma(\boldsymbol{A})$ est tel que $\|x\|_{\Sigma(\boldsymbol{A})} = 0$, alors $x = 0$.
Par définition, on sait qu'il existe $((a_0^{(n)}, a_1^{(n)}))_{n\in\mathbb{N}_0}$ une suite de $A_0 \times A_1$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, on a

$$a = a_0^{(n)} + a_1^{(n)} \quad \text{et} \quad \left\|a_0^{(n)}\right\|_{A_0} + \left\|a_1^{(n)}\right\|_{A_1} < \frac{1}{n}.$$

On en déduit donc que pour tout $k \in \{0,1\}$, la suite $(a_k^{(n)})_n$ converge vers 0 dans A_k et donc dans l'espace vectoriel séparé $\mathcal{X}$ associé à la compatibilité du couple $\boldsymbol{A}$. Au total, la suite $(a_0^{(n)} + a_1^{(n)})_n$ converge dans $\mathcal{X}$ vers a et 0 simultanément ce qui montre que $a = 0$.
Les autres propriétés de la norme et la suite de l'énoncé sont directes à vérifier.

□

Proposition 1.3.5. *Si $\boldsymbol{A}$ est un couple d'espaces de Banach, alors $\Delta(\boldsymbol{A})$ et $\Sigma(\boldsymbol{A})$ sont également de Banach.*

Démonstration. Si $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $\Delta(\boldsymbol{A})$, alors on a pour tout $j \in \{0,1\}$,

$$\|a_p - a_q\|_{A_j} \leq \|a_p - a_q\|_{\Delta(\boldsymbol{A})} \to 0 \text{ si } p, q \to +\infty.$$

Ce qui nous montre que la suite est de Cauchy dans A_0 et A_1 qui sont des espaces de Banach. On sait donc que la suite converge dans chacun de ceux-ci. On peut affirmer que les limites obtenues sont égale car A_0 et A_1 sont inclus continument dans un espace vectoriel topologique séparé.
Pour montrer que $\Sigma(\boldsymbol{A})$ est de Banach, nous allons nous servir du fait qu'un espace normé est complet si et seulement si toute série absolument convergente de cet espace converge [3]. Soit $\sum_j a_j$ une série absolument convergente de $\Sigma(\boldsymbol{A})$; on sait alors que pour tout $j \in \mathbb{N}$, il existe $(b_j, c_j) \in A_0 \times A_1$ tel que $b_j + c_j = a_j$ et tel que

$$\|b_j\|_{A_0} + \|c_j\|_{A_1} \leq 2\,\|a_j\|_{\Sigma(\boldsymbol{A})}.$$

Cette inégalité nous donne alors que les séries $\sum_j b_j$ et $\sum_j c_j$ convergent absolument dans A_0 et A_1 respectivement. Ces espaces étant de Banach, on sait qu'il existe $(b,c) \in A_0 \times A_1$ tel que

$$\left\| (\sum_{j=0}^{N} b_j) - b \right\|_{A_0} \to 0 \quad \text{et} \quad \left\| (\sum_{j=0}^{N} c_j) - c \right\|_{A_1} \to 0$$

si N tend vers $+\infty$. On vérifie aisément que pour tout $k \in \{0,1\}$, si $a \in A_k$ alors on a $\|a\|_{\Sigma(\boldsymbol{A})} \le \|a\|_{A_k}$ ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \left\| (\sum_{j=0}^{N} a_j) - (b+c) \right\|_{\Sigma(\boldsymbol{A})} &\le \left\| (\sum_{j=0}^{N} b_j) - b \right\|_{\Sigma(\boldsymbol{A})} + \left\| (\sum_{j=0}^{N} c_j) - c \right\|_{\Sigma(\boldsymbol{A})} \\ &\le \left\| (\sum_{j=0}^{N} b_j) - b \right\|_{A_0} + \left\| (\sum_{j=0}^{N} c_j) - c \right\|_{A_1}. \end{aligned}$$

Le dernier membre tendant vers 0 lorsque N tend vers l'infini, la série $\sum_j a_j$ converge dans $\Sigma(\boldsymbol{A})$.

□

Définition 1.3.6. Soit $\mathcal{C}$ une sous catégorie de $\mathcal{N}$; on définit $\overline{\mathcal{C}}$ comme la catégorie dont les objets sont les couples compatibles de $\mathcal{C}$ et dont les morphismes respectent la condition $T : \boldsymbol{A} \rightsquigarrow \boldsymbol{B} \in \overline{\mathcal{C}}$ si $T : \Sigma(\boldsymbol{A}) \to \Sigma(\boldsymbol{B})$ est une application linéaire et continue telle que

$$T|_{A_0} : A_0 \rightsquigarrow B_0 \in \mathcal{C} \text{ et } T|_{A_1} : A_1 \rightsquigarrow B_1 \in \mathcal{C}\ [6].$$

Définition 1.3.7. Soit $\mathcal{C}$ une sous catégorie de $\mathcal{N}$ et soient $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathcal{C}}$ et $\boldsymbol{B} \in \overline{\mathcal{C}}$; l'espace $A \in \mathcal{C}$ est un espace intermédiaire de $\boldsymbol{A}$ si on a

$$\Delta(\boldsymbol{A}) \hookrightarrow A \hookrightarrow \Sigma(\boldsymbol{A}).$$

Les espaces $A \in \mathcal{C}$ et $B \in \mathcal{C}$ sont des espaces d'interpolation par rapport à $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ respectivement pour $\mathcal{C}$ si ce sont des espaces intermédiaires de $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ respectivement et si de plus

$$T : \boldsymbol{A} \rightsquigarrow \boldsymbol{B} \in \overline{\mathcal{C}} \quad \Rightarrow \quad T|_A : A \rightsquigarrow B \in \mathcal{C}. \tag{2}$$

Remarque 1.3.8. La condition (2) peut être reformulée un peu moins formellement par : si T est une application linéaire et continue qui envoie continument A_0 sur B_0 et A_1 sur B_1 sous les contraintes de $\mathcal{C}$ alors elle envoie continument A sur B sous les contraintes de $\mathcal{C}$.

6. La notation $T|_A$ désigne la restriction de l'application T à l'ensemble A.

Remarque 1.3.9. On considère le cas particulier suivant : si A est une espace d'interpolation par rapport à $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ et que $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, alors A est dit être un espace d'interpolation de $\boldsymbol{A}$.

Si A et B sont des espaces d'interpolation par rapport à $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ respectivement et si $T : \boldsymbol{A} \rightsquigarrow \boldsymbol{B} \in \overline{\mathcal{C}}$ alors T possède une norme opérateur pour les couples d'espaces $(A_0, B_0), (A_1, B_1)$ et (A, B). Nous allons nous intéresser à différentes relations que peuvent avoir ces normes.

Définition 1.3.10. Soient $\mathcal{C}$ une sous catégorie de $\mathcal{N}$, $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \overline{\mathcal{C}}$ et soient $A, B \in \mathcal{C}$ des espaces d'interpolation par rapport à $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ respectivement pour $\mathcal{C}$; A et B sont dit

- uniformes si il existe $C > 0$ tel que pour tout $T : \boldsymbol{A} \rightsquigarrow \boldsymbol{B} \in \overline{\mathcal{C}}$, on a

$$\|T\|_{A,B} \leq C \max\{\|T\|_{A_0,B_0}, \|T\|_{A_1,B_1}\},$$

- d'exposant φ où φ est une fonction de Boyd si il existe $C > 0$ tel que pour tout $T : \boldsymbol{A} \rightsquigarrow \boldsymbol{B} \in \overline{\mathcal{C}}$ tel que $T \neq 0$, on a

$$\|T\|_{A,B} \leq C\, \overline{\varphi_\star}(\|T\|_{A_0,B_0})\, \overline{\varphi}(\|T\|_{A_1,B_1})$$

  avec $\varphi_\star(t) = \frac{t}{\varphi(t)}$ pour tout $t > 0$.

- exactement d'exposant φ où φ est une fonction de Boyd s'ils sont d'exposant φ avec $C = 1$.

Remarque 1.3.11. Dans la théorie classique des espaces d'interpolation [3], on définit les espaces d'interpolation d'exposant $\theta \in \mathbb{R}$. Cela correspond à être d'exposant $\psi_\theta : t \mapsto t^\theta$.

Remarque 1.3.12. Si φ et ψ sont des fonctions de Boyd telles que $\varphi \sim \psi$, alors des espaces d'interpolation sont d'exposant φ si et seulement si ils sont d'exposant ψ. Cela est dû au fait que dans ces conditions, on a $\varphi_\star \sim \psi_\star$ et $\overline{\varphi} \sim \overline{\psi}$.

De manière analogue, on peut définir les mêmes notions pour les foncteurs :

Définition 1.3.13. Soit $\mathcal{C}$ une sous catégorie de $\mathcal{N}$; un foncteur F de $\overline{\mathcal{C}}$ dans $\mathcal{C}$ est un foncteur d'interpolation sur $\mathcal{C}$ si pour tout $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \overline{\mathcal{C}}$, $F(\boldsymbol{A})$ et $F(\boldsymbol{B})$ sont des espaces d'interpolation par rapport à $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ respectivement pour $\mathcal{C}$; F est dit uniforme (resp. exact, d'exposant φ, exactement d'exposant φ) si pour tout $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \overline{\mathcal{C}}$, $F(\boldsymbol{A})$ et $F(\boldsymbol{B})$ sont des espaces d'interpolation uniformes (resp. exacts, d'exposant φ, exactement d'exposant φ) par rapport à $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ respectivement pour $\mathcal{C}$.

Remarque 1.3.14. On peut se contenter de ne préciser que l'image des couples d'espaces pour définir un foncteur d'interpolation. En effet, si on sait que pour $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \overline{\mathcal{N}}$, les espaces $F(\boldsymbol{A})$ et $F(\boldsymbol{B})$ sont des espaces d'interpolation par rapport à $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ respectivement, alors comme pour les deux exemples précédents, le foncteur qui à tout couple d'espaces $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathcal{N}}$ associe l'espace $F(\boldsymbol{A})$ et qui à tout morphisme $T : \boldsymbol{A} \rightsquigarrow \boldsymbol{B} \in \overline{\mathcal{N}}$ associe $T|_{F(\boldsymbol{A})} : F(\boldsymbol{A}) \rightsquigarrow F(\boldsymbol{B}) \in \mathcal{N}$ est un foncteur d'interpolation. Dans la suite, nous construirons des foncteurs d'interpolation sans préciser les images des morphismes lorsqu'ils suivent le comportement décrit dans cette remarque.

Exemple 1.3.15. Grâce à la remarque précédente, les applications $\boldsymbol{A} \mapsto \Delta(\boldsymbol{A})$ et $\boldsymbol{A} \mapsto \Sigma(\boldsymbol{A})$ définissent des foncteurs d'interpolation sur $\mathcal{N}$. La proposition 1.3.5 permet d'affirmer que ces applications définissent également des foncteurs d'interpolation sur $\mathcal{B}$.

1.4 Théorème d'Aronszajn-Gagliardo généralisé

Dans cette section, nous allons nous intéresser à la construction d'espaces d'interpolation d'exposant φ sur base d'autres espaces d'interpolation en suivant des constructions similaires à celle introduite dans le théorème d'Aronszajn-Gagliardo [2]. On va tout d'abord montrer qu'on peut agrandir un espace d'interpolation pour le rendre d'exposant φ.

Proposition 1.4.1. *Soient φ une fonction de Boyd telle que $0 < \underline{\mathrm{b}}(\varphi) \leq \overline{\mathrm{b}}(\varphi) < 1$, $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathcal{N}}$ et soit $A \in \mathcal{N}$ un espace d'interpolation de $\boldsymbol{A}$; on définit l'espace A_φ comme le plus grand sous espace de $\Sigma(\boldsymbol{A})$ tel que si $a \in A_\varphi$, alors*

- ⁕ *il existe une suite $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A et une suite d'applications $(T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ telle que $T_j : \boldsymbol{A} \rightsquigarrow \boldsymbol{A}$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ qui vérifient*

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} T_j(a_j) = a$$

la convergence ayant lieu dans $\Sigma(\boldsymbol{A})$. Une telle série est appelée une représentation de a.

- ⁕ *la valeur*

$$\|a\|_{A_\varphi} = \inf_{\sum_{j\in\mathbb{N}} T_j(a_j) = a} \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} \overline{\varphi_\star}(\|T_j\|_{A_0,A_0})\, \overline{\varphi}(\|T_j\|_{A_1,A_1})\, \|a_j\|_A \right)$$

est finie [7].

On munit l'espace A_φ de la norme définie ci-dessus. Si $A_\varphi \hookrightarrow \Sigma(\boldsymbol{A})$, alors A_φ est le plus petit espace d'interpolation d'exposant φ qui contient A.
De plus, si la fonction φ est croissante, alors l'espace A_φ est exactement d'exposant φ.

Démonstration. Montrons d'abord que l'on a $A \hookrightarrow A_\varphi$.
Soit $a \in A$; si id est l'application identité [8] sur $\Sigma(\boldsymbol{A})$, alors $\mathrm{id} : \boldsymbol{A} \rightsquigarrow \boldsymbol{A}$ et

$$\mathrm{id}(a) + \sum_{j\in\mathbb{N}_0} \mathrm{id}(0) = \mathrm{id}(a)$$

est une représentation de a. De plus

$$\|a\|_{A_\varphi} = \|\mathrm{id}(a)\|_{A_\varphi} \leq \overline{\varphi_\star}(\|\mathrm{id}\|_{A_0,A_0})\, \overline{\varphi}(\|\mathrm{id}\|_{A_1,A_1})\, \|a\|_A = \|a\|_A .$$

7. L'infimum est pris sur toutes les représentations de a.
8. On remarque que id correspond au morphisme $I_{\boldsymbol{A}} : \boldsymbol{A} \rightsquigarrow \boldsymbol{A}$ pour la catégorie $\overline{\mathcal{N}}$. Ici on utilise la notation id pour mettre en évidence le fait que c'est la fonction elle-même qui va nous intéresser et pas ses propriétés liées à la catégorie $\overline{\mathcal{N}}$.

Puisque A est un espace d'interpolation de $\boldsymbol{A}$, on a au total

$$\Delta(\boldsymbol{A}) \hookrightarrow A \hookrightarrow A_{\varphi} \hookrightarrow \Sigma(\boldsymbol{A})$$

et donc A_{φ} est un espace intermédiaire. Montrons maintenant que c'est un espace d'interpolation d'exposant φ.
Soit $T : \boldsymbol{A} \rightsquigarrow \boldsymbol{A}$, soit $a \in A_{\varphi}$ et soit $\varepsilon > 0$; on considère alors $\sum_{j\in\mathbb{N}} T_j(a_j)$ une représentation de a telle que $\sum_{j\in\mathbb{N}} \overline{\varphi_{\star}}(\|T_j\|_{A_0,A_0}) \overline{\varphi}(\|T_j\|_{A_1,A_1}) \|a_j\|_A < \|a\|_{A_{\varphi}} + \varepsilon$. L'application T étant continue sur $\Sigma(\boldsymbol{A})$, on a $T(a) = \sum_{j\in\mathbb{N}} TT_j(a_j)$ et donc par la proposition 1.1.12 on sait qu'il existe $C > 0$ tel qu'on a

$$\begin{aligned}
\|T(a)\|_{A_{\varphi}} &\leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \overline{\varphi_{\star}}(\|TT_j\|_{A_0,A_0}) \overline{\varphi}(\|TT_j\|_{A_1,A_1}) \|a_j\|_A \\
&\leq C^2 \sum_{j\in\mathbb{N}} \overline{\varphi_{\star}}(\|T\|_{A_0,A_0} \|T_j\|_{A_0,A_0}) \overline{\varphi}(\|T\|_{A_1,A_1} \|T_j\|_{A_1,A_1}) \|a_j\|_A \\
&\leq C^2 \overline{\varphi_{\star}}(\|T\|_{A_0,A_0}) \overline{\varphi}(\|T\|_{A_1,A_1}) \sum_{j\in\mathbb{N}} \overline{\varphi_{\star}}(\|T_j\|_{A_0,A_0}) \overline{\varphi}(\|T_j\|_{A_1,A_1}) \|a_j\|_A \\
&\leq C^2 \overline{\varphi_{\star}}(\|T\|_{A_0,A_0}) \overline{\varphi}(\|T\|_{A_1,A_1}) \Big(\|a\|_{A_{\varphi}} + \varepsilon\Big).
\end{aligned}$$

L'inégalité entre les deux extrêmes ayant lieu quel que soit ε, on conclut par passage à la limite que A_{φ} est bien d'exposant φ. On remarque que si la fonction φ est croissante, alors c'est aussi le cas de $\overline{\varphi}$. Cela nous permet dans la suite d'inégalité précédente de nous passer de la proposition 1.1.12 pour avoir $C = 1$.
Montrons finalement le caractère minimal de A_{φ}.
Soit $B \in \mathcal{N}$ un espace d'interpolation d'exposant φ de $\boldsymbol{A}$ contenant continument A et soit $a \in A_{\varphi}$; si $\sum_{j\in\mathbb{N}} T_j(a_j)$ est une représentation de a, alors $T_j|_B : B \to B$ et on a

$$\|a\|_B \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \|T_j(a_j)\|_B \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \|T_j\|_{B,B} \|a_j\|_B \leq C \sum_{j\in\mathbb{N}} \overline{\varphi_{\star}}(\|T_j\|_{A_0,A_0}) \overline{\varphi}(\|T_j\|_{A_1,A_1}) \|a_j\|_A$$

où la dernière inégalité provient du fait que B est d'exposant φ et que $A \hookrightarrow B$. L'inégalité entre les deux extrêmes étant vérifiée quel que soit la représentation de a considérée, on a au total

$$\|a\|_B \leq C \|a\|_{A_{\varphi}}$$

et donc $A_{\varphi} \hookrightarrow B$.

□

Nous pouvons maintenant passer à la généralisation du théorème d'Aronszajn-Gagliardo qui nous permet de construire un foncteur d'interpolation d'exposant φ sur base d'un espace d'interpolation du même exposant.

Théorème 1.4.2. *Soit φ une fonction de Boyd telle que $0 < \underline{\mathrm{b}}(\varphi) \leq \overline{\mathrm{b}}(\varphi) < 1$, $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathcal{N}}$ et soit $A \in \mathcal{N}$ un espace d'interpolation d'exposant φ de $\boldsymbol{A}$ tel que $A \neq \{0\}$; si $\boldsymbol{X} \in \overline{\mathcal{N}}$, on définit $F(\boldsymbol{X})$ comme le plus grand sous espace de $\Sigma(\boldsymbol{X})$ tel que si $x \in F(\boldsymbol{X})$, alors*

⁕ *il existe une suite* $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* A *et une suite d'applications* $(T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *telles que* $T_j : \boldsymbol{A} \rightsquigarrow \boldsymbol{X}$ *pour tout* $j \in \mathbb{N}$ *qui vérifient*

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} T_j(a_j) = x$$

la convergence ayant lieu dans $\Sigma(\boldsymbol{X})$*. Une telle série est appelée une représentation*[9] *de* x*.*

⁕ *la valeur*

$$\|x\|_{F(\boldsymbol{X})} = \inf_{\sum_{j\in\mathbb{N}} T_j(a_j) = x} \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} \overline{\varphi_\star}(\|T_j\|_{A_0,X_0})\, \overline{\varphi}(\|T_j\|_{A_1,X_1})\, \|a_j\|_A \right)$$

est finie. L'infimum étant pris sur toutes les représentations de x*.*

Si pour tout $\boldsymbol{X} \in \overline{\mathcal{N}}$*, on a* $F(\boldsymbol{X}) \hookrightarrow \Sigma(\boldsymbol{X})$*, alors* F *est un foncteur*[10] *d'interpolation d'exposant* φ *tel que* $F(\boldsymbol{A}) = A$*. De plus, si* G *est un foncteur d'interpolation d'exposant* φ *tel que* $G(\boldsymbol{A}) = A$*, alors* $F(\boldsymbol{X}) \hookrightarrow G(\boldsymbol{X})$ *quel que soit* $\boldsymbol{X} \in \overline{\mathcal{N}}$*.*
De plus, si la fonction φ *est croissante, alors le foncteur* F *est exactement d'exposant* φ*.*

Démonstration. Dans un premier temps, nous allons montrer que $F(\boldsymbol{X})$ est bien intermédiaire. Par hypothèse nous savons que $F(\boldsymbol{X}) \hookrightarrow \Sigma(\boldsymbol{X})$, il reste donc à montrer que $\Delta(\boldsymbol{X}) \hookrightarrow F(\boldsymbol{X})$.
Prenons $\alpha \in A$ tel que $\|\alpha\|_A = 1$, puisque $\Sigma(\boldsymbol{A})$ est séparé et non trivial, le théorème de Hahn-Banach permet d'affirmer qu'il existe une forme $f \in \Sigma(\boldsymbol{A})'$ telle que $f(\alpha) = 1$.
Soit $x_0 \in \Delta(\boldsymbol{X})\backslash\{0\}$; on considère l'application

$$T : \Sigma(\boldsymbol{A}) \to \Sigma(\boldsymbol{X}) : a \mapsto \frac{f(a)}{\|x_0\|_{\Delta(\boldsymbol{X})} \cdot \|f\|} \cdot x_0.$$

On a alors pour tout $k \in \{0,1\}$ et tout $a \in A_k$

$$\|T(a)\|_{X_k} = \frac{|f(a)|}{\|x_0\|_{\Delta(\boldsymbol{X})} \cdot \|f\|} \|x_0\|_{X_k} \le \frac{\|x_0\|_{X_k}}{\|x_0\|_{\Delta(\boldsymbol{X})}} \|a\|_{\Sigma(\boldsymbol{A})} \le \frac{\|x_0\|_{X_k}}{\|x_0\|_{\Delta(\boldsymbol{X})}} \|a\|_{A_k}$$

car f est continue et $A_k \hookrightarrow \Sigma(\boldsymbol{A})$. L'inégalité entre les deux extrêmes nous donne que $T : \boldsymbol{A} \rightsquigarrow \boldsymbol{X}$ et donc $T(\alpha)$ est une représentation de $\frac{x_0}{\|x_0\|_{\Delta(\boldsymbol{X})} \cdot \|f\|}$. De plus, on a $\|T\|_{A_k,X_k} \le 1$ quel que soit $k \in \{0,1\}$ et donc par la proposition 1.1.9, il existe $C > 0$ tel que

$$\begin{aligned}
\frac{\|x_0\|_{F(\boldsymbol{X})}}{\|x_0\|_{\Delta(\boldsymbol{X})} \cdot \|f\|} = \|T(\alpha)\|_{F(\boldsymbol{X})} &\le \overline{\varphi_\star}(\|T\|_{A_0,X_0})\, \overline{\varphi}(\|T\|_{A_1,X_1})\, \|\alpha\|_A \\
&\le C^2 \|T\|_{A_0,X_0}^{1-\overline{\mathrm{b}}(\varphi)-\varepsilon} \cdot \|T\|_{A_1,X_1}^{\mathrm{b}(\varphi)-\varepsilon} \|\alpha\|_A \\
&\le C^2 \|\alpha\|_A .
\end{aligned}$$

9. Puisque $0 \in A$, une représentation peut très bien être une somme finie.
10. La remarque 1.3.14 permet de construire un foncteur d'interpolation sans préciser l'image des morphismes.

Au total on a bien montré que $\Delta(\boldsymbol{X}) \hookrightarrow F(\boldsymbol{X})$. Montrons maintenant que F est un foncteur d'interpolation d'exposant φ.
Soient $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in \overline{\mathcal{N}}$, soit $T : \boldsymbol{X} \rightsquigarrow \boldsymbol{Y}$ et soit $x \in F(\boldsymbol{X})$; pour $\varepsilon > 0$, considérons $\sum_{j\in\mathbb{N}} T_j(a_j)$ une représentation de x pour $F(\boldsymbol{X})$ telle que

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \overline{\varphi_\star}(\|T_j\|_{A_0,X_0})\, \overline{\varphi}(\|T_j\|_{A_1,X_1})\, \|a_j\|_A < \|x\|_{F(\boldsymbol{X})} + \varepsilon.$$

L'application T étant continue sur $\Sigma(\boldsymbol{X})$, on a que $\sum_{j\in\mathbb{N}}(TT_j)(a_j) = T(x)$ est une représentation de $T(x)$ pour $F(\boldsymbol{Y})$ et donc par la proposition 1.1.12 on sait qu'il existe $C > 0$ tel qu'on a

$$\begin{aligned}
\|T(x)\|_{F(\boldsymbol{Y})} &\le \sum_{j\in\mathbb{N}} \overline{\varphi_\star}(\|TT_j\|_{A_0,Y_0})\, \overline{\varphi}(\|TT_j\|_{A_1,Y_1})\, \|a_j\|_A \\
&\le C^2 \sum_{j\in\mathbb{N}} \overline{\varphi_\star}(\|T\|_{X_0,Y_0}\, \|T_j\|_{A_0,X_0})\, \overline{\varphi}(\|T\|_{X_1,Y_1}\, \|T_j\|_{A_1,X_1})\, \|a_j\|_A \\
&\le C^2\, \overline{\varphi_\star}(\|T\|_{X_0,Y_0})\, \overline{\varphi}(\|T\|_{X_1,Y_1}) \sum_{j\in\mathbb{N}} \overline{\varphi_\star}(\|T_j\|_{A_0,X_0})\, \overline{\varphi}(\|T_j\|_{A_1,X_1})\, \|a_j\|_A \\
&\le C^2\, \overline{\varphi_\star}(\|T\|_{X_0,Y_0})\, \overline{\varphi}(\|T\|_{X_1,Y_1}) \left(\|a\|_{F(\boldsymbol{X})} + \varepsilon\right).
\end{aligned}$$

L'inégalité entre les deux extrêmes étant vérifiée quel que soit $\varepsilon > 0$ et quel que soit $x \in F(X)$, on a bien montré que

$$\|T\|_{F(\boldsymbol{X}),F(\boldsymbol{Y})} \le C^2\, \overline{\varphi_\star}(\|T\|_{A_0,A_0})\, \overline{\varphi}(\|T\|_{A_1,A_1}).$$

Si la fonction φ est croissante, alors le même raisonnement que dans la proposition précédente permet d'affirmer que $C = 1$. Montrons finalement le caractère minimal de F.
Si G vérifie les propriétés de l'énoncé, $\boldsymbol{X} \in \overline{\mathcal{N}}$, $x \in F(\boldsymbol{X})$ et si $\sum_{j\in\mathbb{N}} T_j(a_j)$ est une représentation de x, alors, puisque G est un foncteur d'interpolation, $T_j|_A : A \to G(\boldsymbol{X})$ est continue et on a

$$\|a\|_{G(\boldsymbol{X})} \le \sum_{j\in\mathbb{N}} \|T_j(a_j)\|_{G(\boldsymbol{X})} \le \sum_{j\in\mathbb{N}} \|T_j\|_{A,G(\boldsymbol{X})}\, \|a_j\|_A \le C \sum_{j\in\mathbb{N}} \overline{\varphi_\star}(\|T_j\|_{A_0,X_0})\, \overline{\varphi}(\|T_j\|_{A_1,X_1})\, \|a_j\|_A$$

où la dernière inégalité provient du fait que G est d'exposant φ. L'inégalité entre les deux extrêmes étant vérifiée quelle que soit la représentation de x considérée, on a au total

$$\|a\|_{G(\boldsymbol{X})} \le C\, \|a\|_{F(\boldsymbol{X})}$$

et donc $F(\boldsymbol{X}) \hookrightarrow G(\boldsymbol{X})$.

□

Remarque 1.4.3. Dans les deux résultats précédent, on remarque que l'on obtient le caractère exact en supposant que la fonction de Boyd considérée est croissante. Remarquons qu'il ne s'agit pas d'une réelle restriction. En effet, si l'on considère une fonction de Boyd φ telle que $0 < \underline{\mathrm{b}}(\varphi) \leq \overline{\mathrm{b}}(\varphi) < 1$, alors le théorème 1.1.23 nous fournit une fonction de Boyd croissante ξ qui est équivalente à φ. La remarque 1.3.12 quant à elle, montre que les notions d'espaces d'interpolation d'exposant φ et d'exposant ξ sont deux notions parfaitement équivalentes. Il en est donc de même pour les notions de foncteur d'exposant φ et ξ. En conclusion, la fonction ξ représente la même notion d'exposant que φ mais permet la construction d'espaces et de foncteurs exactement d'exposant ξ via les résultats précédents.

2 Méthodes d'interpolation réelles

Dans cette section, nous allons introduire deux types de foncteurs d'interpolation exactement d'exposant φ pour une fonction de Boyd φ qui vérifie $0 < \underline{\mathrm{b}}(\varphi) \leq \overline{\mathrm{b}}(\varphi) < 1$. La première méthode restreint l'espace somme $\Sigma(\boldsymbol{A})$ en définissant une norme tandis que la seconde étend l'espace intersection $\Delta(\boldsymbol{A})$ en considérant des suites d'éléments de cet espaces et leurs limites dans $\Sigma(\boldsymbol{A})$. Nous montrerons que ces méthodes s'avèrent en fait équivalentes.

2.1 Espaces L_q^*

Nous allons commencer par présenter les espaces L_q^* pour $q \in [1, +\infty]$, qui sont des espaces de Lebesgue particuliers. Ils nous seront très utiles pour introduire les méthodes d'interpolation réelles. Ce sont plus particulièrement le produit de convolution que l'on peut définir sur ces espaces et l'inégalité de Young associée qui nous seront utiles dans la suite. Nous présenterons les résultats liés aux espaces L_q^* sans preuve. Cependant le lecteur intéressé pourra retrouver une étude générale du produit de convolution dans [8].

Définition 2.1.1. Soient $q \in [1, +\infty]$ et $X \subset \mathbb{R}_0$; on note $L_q^*(X) = L_q(X, \frac{\mathrm{d}x}{x})$ l'espace de Lebesgue classique où l'on a remplacé la mesure de Lebesgue par la mesure

$$\nu : A \mapsto \int_A \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

On muni cet espace de la norme

$$\|\cdot\|_{L_q^*(X)} : f \mapsto \left(\int_X |f(x)|^q \frac{\mathrm{d}x}{x} \right)^{1/q}.$$

Lorsque $X = \mathbb{R}_0^+$, on note simplement L_q^* au lieu de $L_q^*(\mathbb{R}_0^+)$.

Proposition 2.1.2. *Soient $q \in [1, +\infty]$ et $X \subset \mathbb{R}_0$; l'espace $L_q^*(X)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{L_q^*(X)}$ est un espace de Banach.*

La mesure associée aux espaces L_q^* permet de faire certains changements de variables de manière plus simple qu'avec la mesure de Lebesgue :

Proposition 2.1.3. *Si $f \in L_1^*$ et si $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$, alors on a*

$$\int_0^{+\infty} f(x) \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_0^{+\infty} f(\lambda x) \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_0^{+\infty} f(\frac{1}{x}) \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Nous pouvons maintenant introduire le produit de convolution dans L_q^*.

Définition 2.1.4. Soit $q \in [1, +\infty]$; si f, g sont des fonctions mesurables de $\mathbb{R}_0^+$ dans $\mathbb{C}$, alors leur produit de convolution dans L_q^* est la fonction

$$f \star g : x \mapsto \int_0^{+\infty} f(\frac{x}{t}) g(t) \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

lorsqu'elle est bien définie.

La dernière proposition montre directement que le produit de convolution est commutatif. Nous allons maintenant introduire l'inégalité de Young. Nous n'utiliserons dans le suite que le cas particulier où $p = 1$ et donc $q = r$.

Théorème 2.1.5. *Soient f, g des fonctions de $\mathbb{R}_0^+$ dans $\mathbb{C}$ et $p, q, r \in [1, +\infty]$; on pose $\frac{1}{+\infty} = 0$. Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$, et si $(f, g) \in L_p^* \times L_q^*$, alors $f \star g$ est bien défini et appartient à L_r^*. De plus, on a*

$$\|f \star g\|_{L_r^*} \leq \|f\|_{L_p^*} \|g\|_{L_q^*} .$$

2.2 Méthode K

Introduisons maintenant la première méthode qui permet de construire un foncteur d'interpolations sur $\mathcal{N}$ d'un exposant donné.

Définition 2.2.1. Soit $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathcal{N}}$; si $a \in \Sigma(\boldsymbol{A})$ et si $t \in \mathbb{R}_0^+$, on définit la valeur

$$\mathrm{K}(t, a; \boldsymbol{A}) = \inf \left\{ \|a_0\|_{A_0} + t \|a_1\|_{A_1} \mid (a_0, a_1) \in A_0 \times A_1, a_0 + a_1 = a \right\}.$$

Lorsque le contexte est clair, on ne précisera pas le dernier argument de K.

Proposition 2.2.2. *Soit $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathcal{N}}$; pour tout $t, s \in \mathbb{R}_0^+$ et tout $a \in \Sigma(\boldsymbol{A})$, on a*

$$\min\left(1, \frac{t}{s}\right) \mathrm{K}(s, a) \leq \mathrm{K}(t, a).$$

En particulier, pour tout $a \in \Sigma(\boldsymbol{A})$, $\mathrm{K}(\,\cdot\,, a)$ est croissant et pour tout $t \in \mathbb{R}_0^+$, $\mathrm{K}(t, \,\cdot\,)$ est une norme sur $\Sigma(\boldsymbol{A})$ équivalente à celle précédemment définie.

Démonstration. Il s'agit de conséquences directes de la définition. □

Définition 2.2.3. Soient φ une fonction de Boyd, $q \in [1, +\infty[$ et soit $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathcal{N}}$; on définit l'espace $\mathrm{K}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})$ comme le plus grand sous espace de $\Sigma(\boldsymbol{A})$ tel que si $a \in \mathrm{K}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})$, alors

$$\|a\|_{\mathrm{K}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})} := \left\| \frac{\mathrm{K}(\,\cdot\,, a)}{\varphi(\,\cdot\,)} \right\|_{L_q^*} = \left(\int_0^{+\infty} \left(\frac{\mathrm{K}(t, a)}{\varphi(t)} \right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{1/q} < +\infty.$$

On muni l'espace $\mathrm{K}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})$ de la norme $\|\cdot\|_{\mathrm{K}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})}$

Lemme 2.2.4. *Soit φ une fonction de Boyd et soit $q \in [1, +\infty[$; si $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$, on pose*

$$\Phi_{\varphi,q}(f) = \left(\int_0^{+\infty} \left(\frac{f(t)}{\varphi(t)} \right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{1/q} .$$

L'opérateur $\Phi_{\varphi,q}$

- ⁎ *est croissant : si $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ et $g : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ sont tels que $f(x) \leq g(x)$ $\forall x$, alors $\Phi_{\varphi,q}(f) \leq \Phi_{\varphi,q}(g)$,*

⁎ *vérifie que pour tout* $r \in \mathbb{R}^+$ *et tout* $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$, $\Phi_{\varphi,q}(rf) = r\Phi_{\varphi,q}(f)$,

⁎ *vérifie que pour tout* $r \in \mathbb{R}_0^+$ *et tout* $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$

$$\Phi_{\varphi,q}(f) \le \overline{\varphi}(r)\Phi_{\varphi,q}\left(f\left(\frac{\cdot}{r}\right)\right)$$

Démonstration. Les deux premiers points sont évidents. Montrons le dernier.
Soit $r \in \mathbb{R}_0^+$ et soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$; par définition de $\overline{\varphi}$, on a pour tout $u > 0$ que $\varphi(ru) \le \overline{\varphi}(r)\varphi(u)$ et donc

$$\begin{aligned}
\Phi_{\varphi,q}\left(f\left(\frac{\cdot}{r}\right)\right) &= \left(\int_0^{+\infty}\left(\frac{f(t/r)}{\varphi(t)}\right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/q} \\
&= \left(\int_0^{+\infty}\left(\frac{f(u)}{\varphi(ru)}\right)^q \frac{\mathrm{d}u}{u}\right)^{1/q} \qquad (u = t/s) \\
&\ge \frac{1}{\overline{\varphi}(r)}\left(\int_0^{+\infty}\left(\frac{f(u)}{\varphi(u)}\right)^q \frac{\mathrm{d}u}{u}\right)^{1/q} \\
&= \frac{1}{\overline{\varphi}(r)}\Phi_{\varphi,q}(f).
\end{aligned}$$

□

Lemme 2.2.5. *Soit* φ *une fonction de Boyd telle que* $0 < \underline{\mathrm{b}}(\varphi) \le \overline{\mathrm{b}}(\varphi) < 1$ *et soit* $q \in [1, +\infty[$ *; en reprenant la notation du lemme précédent, on a*

$$\left(\int_0^{+\infty}\left(\frac{\min(1,t)}{\overline{\varphi}(t)}\right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/q} \le \Phi_{\varphi,q}(\min(1,\ \cdot\ )) < +\infty.$$

Démonstration. La première inégalité provient simplement du fait que $\varphi(t) \le \overline{\varphi}(t)$ pour tout $t > 0$. Montrons la seconde inégalité.
Puisque $\underline{\mathrm{b}}(\varphi), \overline{\mathrm{b}}(\varphi) \in]0,1[$, on considère $\varepsilon > 0$ tel que $\underline{\mathrm{b}}(\varphi) - \varepsilon, \overline{\mathrm{b}}(\varphi) + \varepsilon \in]0,1[$. Par le corollaire 1.1.11, on sait qu'il existe une constante $C > 0$ pour laquelle on a

$$\begin{aligned}
\Phi_{\varphi,q}(\min(1,\ \cdot\ )) &= \left(\int_0^{+\infty}\left(\frac{\min(1,t)}{\varphi(t)}\right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/q} \\
&= \left(\int_0^{1}\left(\frac{t}{\varphi(t)}\right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/q} + \left(\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{\varphi(t)}\right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/q} \\
&\le \left(\int_0^{1}\left(\frac{t}{C^{-1}t^{\overline{\mathrm{b}}(\varphi)+\varepsilon}}\right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/q} + \left(\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{C^{-1}t^{\underline{\mathrm{b}}(\varphi)-\varepsilon}}\right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/q} \\
&\le C\left(\int_0^{1}\frac{1}{t^{(\overline{\mathrm{b}}(\varphi)+\varepsilon-1)q+1}}\mathrm{d}t\right)^{1/q} + C\left(\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{(\underline{\mathrm{b}}(\varphi)-\varepsilon)q+1}}\mathrm{d}t\right)^{1/q}
\end{aligned}$$

où les deux fonctions intervenant dans le dernier membre sont bien intégrables.

□

Théorème 2.2.6. *Soient φ une fonction de Boyd telle que $0 < \underline{\mathrm{b}}(\varphi) \leq \overline{\mathrm{b}}(\varphi) < 1$ et soit $q \in [1, +\infty[$; l'application $\mathrm{K}_{\varphi,q}$ est un foncteur d'interpolation exactement d'exposant φ sur la catégorie $\mathcal{N}$.*
De plus, il existe $C > 0$ tel que pour tout $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathcal{N}}$, $s > 0$ et pour tout $a \in \mathrm{K}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})$

$$\mathrm{K}(s,a) \leq C\varphi(s) \, \|a\|_{\mathrm{K}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})} .$$

Démonstration. Soit $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathcal{N}}$; notons $A = \mathrm{K}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})$ et commençons par montrer que A est intermédiaire.
Si $a \in \Delta(\boldsymbol{A})$, on a quel que soit $t > 0$ que

$$K(t,a) \leq \min(\|a\|_{A_0}, t\, \|a\|_{A_1}) \leq \min(1,t) \, \|a\|_{\Delta(\boldsymbol{A})} .$$

Ce qui nous donne par le lemme 2.2.4 que

$$\|a\|_A = \Phi_{\varphi,q}(\mathrm{K}(\,\cdot\,,a)) \leq \Phi_{\varphi,q}(\min(1,\,\cdot\,)) \, \|a\|_{\Delta(\boldsymbol{A})} .$$

Le lemme précédent permet d'affirmer que $\Phi_{\varphi,q}(\min(1,\,\cdot\,)) < +\infty$ et on a bien au total $\Delta(\boldsymbol{A}) \hookrightarrow A$.
Montrons que $A \hookrightarrow \Sigma(\boldsymbol{A})$.
Soit $s > 0$ et soit $a \in A$; on a par la proposition 2.2.2 que $\min(1, \frac{t}{s})\,\mathrm{K}(s,a) \leq \mathrm{K}(t,a)$ pour tout $t > 0$ et donc par le lemme 2.2.4, on a

$$\Phi_{\varphi,q}\left(\min\left(1, \frac{\cdot}{s}\right)\right) \mathrm{K}(s,a) \leq \|a\|_A . \tag{3}$$

Or, puisque $\varphi(su) \leq \overline{\varphi}(u)\varphi(s)$ pour tout $u > 0$,

$$\begin{aligned}
\Phi_{\varphi,q}\left(\min\left(1, \frac{\cdot}{s}\right)\right) &= \left(\int_0^{+\infty} \left(\frac{\min(1,t/s)}{\varphi(t)}\right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/q} \\
&= \left(\int_0^{+\infty} \left(\frac{\min(1,u)}{\varphi(su)}\right)^q \frac{\mathrm{d}u}{u}\right)^{1/q} \qquad (u = t/s) \\
&\geq \frac{1}{\varphi(s)} \left(\int_0^{+\infty} \left(\frac{\min(1,u)}{\overline{\varphi}(u)}\right)^q \frac{\mathrm{d}u}{u}\right)^{1/q} \\
&= \frac{C'}{\varphi(s)}
\end{aligned}$$

où on a posé $C' = \left(\int_0^{+\infty} \left(\frac{\min(1,u)}{\overline{\varphi}(u)}\right)^q \frac{\mathrm{d}u}{u}\right)^{1/q}$. Par le lemme 2.2.5, on sait que $C' \in \mathbb{R}_0^+$. En revenant à l'inégalité (3), on a bien

$$\frac{C'}{\varphi(s)} \mathrm{K}(s,a) \leq \|a\|_A$$

ce qui nous donne $\mathrm{K}(s,a) \le C\varphi(s)\|a\|_A$ pour un $C>0$ et l'inégalité de l'énoncé est montrée. En particulier, pour $s=1$, on a $A \hookrightarrow \Sigma(\boldsymbol{A})$.
Il reste à montrer que $K_{\varphi,q}$ est d'exposant φ.
Soient $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in \overline{\mathcal{N}}$, soit $T : \boldsymbol{X} \rightsquigarrow \boldsymbol{Y}$ et soit $x \in X$; on pose $X = \mathrm{K}_{\varphi,q}(\boldsymbol{X})$, $Y = \mathrm{K}_{\varphi,q}(\boldsymbol{Y})$ et $M_j = \|T\|_{X_j,Y_j}$ pour $j \in \{0,1\}$. Soit $t>0$; on remarque que si le couple $(x_0,x_1) \in \boldsymbol{X}$ est tel que $x = x_0 + x_1$ alors $T(x_0)+T(x_1) = T(x)$ et

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}(t,T(x);\boldsymbol{Y}) &\le \|T(x_0)\|_{Y_0} + t\,\|T(x_1)\|_{Y_1} \\
&\le M_0\,\|x_0\|_{X_0} + tM_1\,\|x_1\|_{X_1} \\
&\le M_0\left(\|x_0\|_{X_0} + \frac{tM_1}{M_0}\,\|x_1\|_{X_1}\right).
\end{aligned}$$

L'inégalité entre les deux extrêmes étant vérifiée quel que soit la décomposition (x_0,x_1) considérée, on a

$$\mathrm{K}(t,T(x);\boldsymbol{Y}) \le M_0 \cdot \mathrm{K}\left(t\frac{M_1}{M_0}, x; \boldsymbol{X}\right).$$

quel que soit $t>0$. En applicant l'opérateur $\Phi_{\varphi,q}$ aux deux membres de l'inégalité, on obtient par les deux premiers points du lemme 2.2.4 que

$$\begin{aligned}
\|T(x)\|_Y &\le M_0\Phi_{\varphi,q}(\mathrm{K}(\,\cdot\,(M_1/M_0),x;\boldsymbol{X})) \\
&\le M_0\,\overline{\varphi}(M_1/M_0)\Phi_{\varphi,q}\left(\mathrm{K}\left(\frac{\cdot}{M_1/M_0}(M_1/M_0),x;\boldsymbol{X}\right)\right) \\
&= M_0\,\overline{\varphi}\left(\frac{M_1}{M_0}\right)\|x\|_X
\end{aligned}$$

où l'avant dernière inégalité provient du dernier point du lemme 2.2.4. Finalement, par la sous-multiplicativité de $\overline{\varphi}$ évoquée dans la remarque 1.1.2 et par la proposition 1.1.15, on a

$$M_0\,\overline{\varphi}\left(\frac{M_1}{M_0}\right) \le M_0\,\overline{\varphi}\left(\frac{1}{M_0}\right)\overline{\varphi}(M_1) = \overline{\varphi_\star}(M_0)\,\overline{\varphi}(M_1).$$

On montré que

$$\|T\|_{X,Y} \le \overline{\varphi_\star}(M_0)\,\overline{\varphi}(M_1)$$

et donc le foncteur $\mathrm{K}_{\varphi,q}$ est d'exposant φ.

□

Le foncteur $\mathrm{K}_{\varphi,q}$ admet également une définition discrète qui ne fait intervenir qu'un nombre dénombrable de réalisations de la fonction $t \mapsto \mathrm{K}(t,a)/\varphi(t)$.

Théorème 2.2.7. *Soit φ une fonction de Boyd, soit $q \in [1,+\infty[$ et soit $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathcal{N}}$; si $a \in \Sigma(\boldsymbol{A})$, alors $a \in \mathrm{K}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})$ si et seulement si*

$$\left(\frac{\mathrm{K}(2^n,a)}{\varphi(2^n)}\right)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_q.$$

De plus, l'application $a \mapsto \left\| \left(\frac{\mathrm{K}(2^n,a)}{\varphi(2^n)} \right)_{n\in\mathbb{Z}} \right\|_{\ell_q}$ *est une norme sur* $\mathrm{K}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})$ *équivalente à celle précédemment définie.*

Démonstration. Soit $a \in \Sigma(\boldsymbol{A})$, on remarque que

$$\|a\|_{\mathrm{K}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})} = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{2^n}^{2^{n+1}} \left(\frac{\mathrm{K}(t,a)}{\varphi(t)} \right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{1/q}.$$

De plus, si $2^n \leq t \leq 2^{n+1}$, alors

$$\mathrm{K}(2^n,a) \leq \mathrm{K}(t,a) \leq \mathrm{K}(2^{n+1},a) \leq 2\,\mathrm{K}(2^n,a). \tag{4}$$

On a aussi

$$\varphi(2^n) \leq \varphi\left(\frac{2^n}{t}\cdot t\right) \leq \overline{\varphi}\left(\frac{2^n}{t}\right)\varphi(t) \leq \sup\left(\varphi\left(\left[2^{-1},1\right]\right)\right)\varphi(t)$$

et

$$\varphi(t) \leq \varphi\left(\frac{t}{2^n}\cdot 2^n\right) \leq \overline{\varphi}\left(\frac{t}{2^n}\right)\varphi(2^n) \leq \sup\left(\varphi\left([1,2]\right)\right)\varphi(2^n).$$

En prenant $C = \sup\left(\varphi\left([2^{-1},2]\right)\right)$, on a

$$C^{-1}\varphi(2^n) \leq \varphi(t) \leq C\varphi(2^n).$$

Et donc en réutilisant l'inégalité (4), on obtient

$$C^{-1}\frac{\mathrm{K}(2^n,a)}{\varphi(2^n)} \leq \frac{\mathrm{K}(t,a)}{\varphi(t)} \leq 2C\frac{\mathrm{K}(2^n,a)}{\varphi(2^n)}$$

où C ne dépend que de φ.
Si on considère les fonctions

$$f : t \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{K}(2^n,a)}{\varphi(2^n)}\chi_{[2^n,2^{n+1}[}(t) \quad \text{et} \quad g : t \mapsto \frac{\mathrm{K}(t,a)}{\varphi(t)}$$

alors la suite d'inégalité précédente nous donne

$$C^{-1}f(t) \leq g(t) \leq 2Cf(t)$$

quel que soit $t > 0$. On a alors en applicant l'opérateur croissant $f \mapsto (\int_0^{+\infty}(f(t))^q\frac{\mathrm{d}t}{t})^{1/q}$,

$$C^{-1}\ln(2)\left\| \left(\frac{\mathrm{K}(2^n,a)}{\varphi(2^n)} \right)_{n\in\mathbb{Z}} \right\|_{\ell_q} \leq \|a\|_{\mathrm{K}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})} \leq 2C\ln(2)\left\| \left(\frac{\mathrm{K}(2^n,a)}{\varphi(2^n)} \right)_{n\in\mathbb{Z}} \right\|_{\ell_q}$$

ce qui permet de conclure.

□

Nous pouvons aussi faire prendre au paramètre q la valeur ∞. Les démonstrations sont similaires au cas où q est fini. Nous n'en donnerons donc que les grandes lignes.

Définition 2.2.8. Soient φ une fonction de Boyd et soit $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathcal{N}}$; on définit l'espace $\mathrm{K}_{\varphi,\infty}(\boldsymbol{A})$ comme le plus grand sous espace de $\Sigma(\boldsymbol{A})$ tel que si $a \in \mathrm{K}_{\varphi,\infty}(\boldsymbol{A})$, alors

$$\|a\|_{\mathrm{K}_{\varphi,\infty}(\boldsymbol{A})} = \left\| \frac{\mathrm{K}(\,\cdot\,, a)}{\varphi(\,\cdot\,)} \right\|_{L^*_\infty} = \sup_{t>0} \frac{\mathrm{K}(t,a)}{\varphi(t)} < +\infty.$$

On muni l'espace $\mathrm{K}_{\varphi,\infty}(\boldsymbol{A})$ de la norme $\|\cdot\|_{\mathrm{K}_{\varphi,\infty}(\boldsymbol{A})}$

Comme dans le cas précédent, on peut introduire un opérateur

$$\Phi_{\varphi,\infty} : f \mapsto \sup_{t>0} \frac{f(t)}{\varphi(t)}.$$

Cet opérateur vérifie les mêmes propriétés que dans le lemme 2.2.4 et une propriété analogue à celle du lemme 2.2.5, c'est à dire

$$\sup_{t>0} \frac{\min(1,t)}{\overline{\varphi}(t)} \leq \Phi_{\varphi,\infty}(\min(1,\,\cdot\,)) < +\infty.$$

Le problème principal auquel on fait face pour montrer ces propriétés est que l'on a pas nécessairement le même comportement de la part d'un changement de variable de $\mathbb{R}_0^+$ dans $\mathbb{R}_0^+$ lorsqu'on l'applique à un suprémum ou à une intégrale. Cependant, tous les changements de variables considérés ne sont que des dilatations qui ne font apparaitre aucun jacobien lorsqu'ils sont intégrés par rapport à la mesure $\mathrm{d}t/t$. Les démonstrations sont donc sensiblement similaires et même plus simples lorsque $q = \infty$ Par exemple, l'inégalité du type $\mathrm{K}(s,a) \leq C\varphi(s)\,\|a\|_{\mathrm{K}_{\varphi,\infty}(\boldsymbol{A})}$ découle directement de la définition et on a même $C = 1$. Les opérateurs $\Phi_{\varphi,q}$ et $\Phi_{\varphi,\infty}$ partageant les mêmes propriétés, on peut facilement adapter la démonstration du théorème 2.2.6 pour obtenir le résultat suivant :

Théorème 2.2.9. *Soit φ une fonction de Boyd telle que $0 < \underline{\mathrm{b}}(\varphi) \leq \overline{\mathrm{b}}(\varphi) < 1$; l'application $\mathrm{K}_{\varphi,\infty}$ est un foncteur d'interpolation exactement d'exposant φ sur la catégorie $\mathcal{N}$.*
De plus, pour tout $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathcal{N}}$, $s > 0$ et pour tout $a \in \mathrm{K}_{\varphi,\infty}(\boldsymbol{A})$

$$\mathrm{K}(s,a) \leq \varphi(s)\,\|a\|_{\mathrm{K}_{\varphi,\infty}(\boldsymbol{A})}.$$

Remarque 2.2.10. Dans la théorie classique des espaces d'interpolation [3], on définit pour $\theta \in]0,1[$ et $q \in [1,+\infty]$ le foncteur $\mathrm{K}_{\theta,q} = \mathrm{K}_{\psi_\theta,q}$ où $\psi_\theta : t \mapsto t^\theta$. Les résultats précédents montrent que ce foncteur est un foncteur d'interpolation d'exposant θ sur la catégorie $\mathcal{N}$. Les foncteurs d'exposant θ ont été introduits dans la remarque 1.3.11.

Théorème 2.2.11. *Soit φ une fonction de Boyd et soit $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathcal{N}}$; si $a \in \Sigma(\boldsymbol{A})$, alors $a \in \mathrm{K}_{\varphi,\infty}(\boldsymbol{A})$ si et seulement si*

$$\left(\frac{\mathrm{K}(2^n,a)}{\varphi(2^n)} \right)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_\infty.$$

De plus, l'application $a \mapsto \left\| \left(\frac{\mathrm{K}(2^n,a)}{\varphi(2^n)} \right)_{n\in\mathbb{Z}} \right\|_{\ell_\infty}$ est une norme sur $\mathrm{K}_{\varphi,\infty}(\boldsymbol{A})$ équivalente à celle précédemment définie.

Démonstration. Si l'on reprend les notations de la démonstration du théorème 2.2.7 on a

$$C^{-1}f(t) \le g(t) \le 2Cf(t)$$

quel que soit $t > 0$. Ce qui nous donne

$$C^{-1}\sup_{t>0} f(t) \le \sup_{t>0} g(t) \le 2C\sup_{t>0} f(t).$$

Or on a

$$\sup_{t>0} f(t) = \left\| \left(\frac{\mathrm{K}(2^n, a)}{\varphi(2^n)} \right)_{n\in\mathbb{Z}} \right\|_{\ell_\infty} \quad \text{et} \quad \sup_{t>0} g(t) = \|a\|_{\mathrm{K}_{\varphi,\infty}(\boldsymbol{A})}.$$

□

Maintenant que nous avons montré que $\mathrm{K}_{\varphi,q}$ est un foncteur d'interpolation exactement d'exposant φ, intéressons nous au lien qui relie les différents espaces obtenus avec ce foncteur lorsque l'on fait varier ses paramètres φ et q.

Proposition 2.2.12. *Soient $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathcal{N}}$, φ une fonction de Boyd telle que $0 < \underline{\mathrm{b}}(\varphi) \le \overline{\mathrm{b}}(\varphi) < 1$ et $p \in [1, +\infty]$; si $q \in [p, +\infty]$ alors*

$$\mathrm{K}_{\varphi,p}(\boldsymbol{A}) \hookrightarrow \mathrm{K}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A}).$$

De plus, si $i_q : \mathrm{K}_{\varphi,p}(\boldsymbol{A}) \to \mathrm{K}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})$ désigne l'inclusion continue entre ces deux espaces, alors la famille $(i_q)_{q\in[p,+\infty]}$ est équicontinue.

Démonstration. Remarquons d'abord que si $p = +\infty$, le résultat est trivialement démontré. Supposons donc que $p < +\infty$.
Soit $q \in [p, +\infty[$; on a alors par le théorème 2.2.6 qu'il existe une constante $C > 1$ telle que

$$\mathrm{K}(t, a) \le C\varphi(t)\,\|a\|_{\mathrm{K}_{\varphi,p}(\boldsymbol{A})} \tag{5}$$

quels que soient $t > 0$ et $a \in \mathrm{K}_{\varphi,p}(\boldsymbol{A})$. Si $a \in \mathrm{K}_{\varphi,p}(\boldsymbol{A})$, on a alors

$$\begin{aligned}
\|a\|_{\mathrm{K}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})} &= \left(\int_0^{+\infty} \left(\frac{\mathrm{K}(t,a)}{\varphi(t)} \right)^p \left(\frac{\mathrm{K}(t,a)}{\varphi(t)} \right)^{q-p} \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{1/q} \\
&\le \left(\left(\int_0^{+\infty} \left(\frac{\mathrm{K}(t,a)}{\varphi(t)} \right)^p \left(C\,\|a\|_{\mathrm{K}_{\varphi,p}(\boldsymbol{A})} \right)^{q-p} \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{1/p} \right)^{p/q} \\
&= C^{1-\frac{p}{q}}\,\|a\|_{\mathrm{K}_{\varphi,p}(\boldsymbol{A})}^{1-\frac{p}{q}}\,\|a\|_{\mathrm{K}_{\varphi,p}(\boldsymbol{A})}^{\frac{p}{q}} \\
&\le C\,\|a\|_{\mathrm{K}_{\varphi,p}(\boldsymbol{A})}
\end{aligned}$$

où la dernière inégalité provient du fait que $C > 1$ et où C ne dépend ni de a ni de q.
Si $q = +\infty$, alors l'inégalité (5) donne

$$\|a\|_{\mathrm{K}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})} = \sup_{t>0} \frac{\mathrm{K}(t,a)}{\varphi(t)} \leq C \|a\|_{\mathrm{K}_{\varphi,p}(\boldsymbol{A})}$$

quel que soit $a \in \mathrm{K}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})$.

□

Proposition 2.2.13. *Soient $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathcal{N}}$, φ une fonction de Boyd telle que $0 < \underline{\mathrm{b}}(\varphi) \leq \overline{\mathrm{b}}(\varphi) < 1$ et $q \in [1, +\infty]$; on a*

$$\mathrm{K}_{\varphi,q}(A_0, A_1) = \mathrm{K}_{\varphi_\star,q}(A_1, A_0)$$

où les deux espaces partagent la même norme.

Démonstration. Soient $a \in \Sigma(\boldsymbol{A})$ et $t > 0$; si le couple $(a_0, a_1) \in \boldsymbol{A}$ est tel que $a_0 + a_1 = a$ alors on a

$$\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1} = t \cdot \left(\|a_1\|_{A_1} + \frac{1}{t}\|a_0\|_{A_1} \right)$$

et donc

$$\mathrm{K}(t, a; (A_0, A_1)) = t\,\mathrm{K}\left(\frac{1}{t}, a, (A_1, A_0)\right).$$

Si $q < +\infty$, on a alors

$$\begin{aligned}
\|a\|^q_{K_{\varphi,q}(A_0,A_1)} &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{\mathrm{K}(t, a; (A_0, A_1))}{\varphi(t)} \right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\frac{t\,\mathrm{K}\left(\frac{1}{t}, a, (A_1, A_0)\right)}{\varphi(t)} \right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\frac{\mathrm{K}\left(t, a, (A_1, A_0)\right)}{\varphi_\star(t)} \right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= \|a\|_{K_{\varphi,q}(A_1,A_0)}
\end{aligned}$$

où l'avant dernière égalité provient du changement de variable $t \mapsto 1/t$. Le cas où $q = +\infty$ se traite de la même manière.

□

Proposition 2.2.14. *Soient $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathcal{N}}$, $\varphi, \varphi_0, \varphi_1$ trois fonctions de Boyd telles que $\overline{\mathrm{b}}(\varphi_0) < \underline{\mathrm{b}}(\varphi) \leq \overline{\mathrm{b}}(\varphi) < \underline{\mathrm{b}}(\varphi_1)$ et $q, q_0, q_1 \in [1, +\infty]$; on a*

$$\Delta\left(\mathrm{K}_{\varphi_0,q_0}(\boldsymbol{A}), \mathrm{K}_{\varphi_1,q_1}(\boldsymbol{A})\right) \hookrightarrow \mathrm{K}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A}).$$

Démonstration. Fixons $\varepsilon > 0$ tel qu'on a

$$\overline{\mathrm{b}}(\varphi_0) + \varepsilon < \underline{\mathrm{b}}(\varphi) - \varepsilon \quad \text{et} \quad \overline{\mathrm{b}}(\varphi) + \varepsilon < \underline{\mathrm{b}}(\varphi_1) - \varepsilon.$$

Par le corollaire 1.1.11, on sait qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\begin{cases} \dfrac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)} \leq C^2 \dfrac{x^{\underline{\mathrm{b}}(\varphi_1)-\varepsilon}}{x^{\overline{\mathrm{b}}(\varphi)+\varepsilon}} = C^2 x^{\alpha} & \text{si } x \in]0,1] \\ \dfrac{\varphi_0(x)}{\varphi(x)} \leq C^2 \dfrac{x^{\overline{\mathrm{b}}(\varphi_0)+\varepsilon}}{x^{\underline{\mathrm{b}}(\varphi)-\varepsilon}} = C^2 \dfrac{1}{x^{\beta}} & \text{si } x \in [1,+\infty[\end{cases}$$

où $\alpha, \beta > 0$. Cela montre que pour tout $r \in [1,+\infty]$, on a $\varphi_1/\varphi \in L^*_r(]0,1[)$ et $\varphi_0/\varphi \in L^*_r(]1,+\infty[)$.
Soit $q' \in [1,+\infty]$ tel que $q' \leq q, q_0, q_1$ et soit $a \in \Delta\left(\mathrm{K}_{\varphi_0,q_0}(\boldsymbol{A}), \mathrm{K}_{\varphi_1,q_1}(\boldsymbol{A})\right)$; par l'inégalité de Hölder, on sait alors que pour $r_0, r_1 \in [1,+\infty]$ vérifiant $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{r_1} = \frac{1}{q'} = \frac{1}{q_0} + \frac{1}{r_0}$, on a

$$\begin{aligned} \|a\|_{\mathrm{K}_{\varphi,q'}(\boldsymbol{A})} &\leq 2^{1/q'} \left(\left(\int_0^1 \left(\frac{\mathrm{K}(t,a)}{\varphi(t)} \right)^{q'} \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{1/q'} + \left(\int_1^{+\infty} \left(\frac{\mathrm{K}(t,a)}{\varphi(t)} \right)^{q'} \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{1/q'} \right) \\ &= 2^{1/q'} \left(\left\| \frac{\mathrm{K}(t,a)}{\varphi_1(t)} \cdot \frac{\varphi_1(t)}{\varphi(t)} \right\|_{L^*_{q'}} + \left\| \frac{\mathrm{K}(t,a)}{\varphi_0(t)} \cdot \frac{\varphi_0(t)}{\varphi(t)} \right\|_{L^*_{q'}} \right) \\ &\leq 2^{1/q'} \left(\left\| \frac{\mathrm{K}(\,\cdot\,,a)}{\varphi_1(\,\cdot\,)} \right\|_{L^*_{q_1}(]0,1[)} \left\| \frac{\varphi_1}{\varphi} \right\|_{L^*_{r_1}(]0,1[)} \right. \\ &\qquad \left. + \left\| \frac{\mathrm{K}(\,\cdot\,,a)}{\varphi_0(\,\cdot\,)} \right\|_{L^*_{q_0}(]1,+\infty[)} \left\| \frac{\varphi_0}{\varphi} \right\|_{L^*_{r_0}(]1,+\infty[)} \right). \end{aligned}$$

Il existe donc une constante $C' > 0$ pour laquelle on a

$$\begin{aligned} \|a\|_{\mathrm{K}_{\varphi,q'}(\boldsymbol{A})} &\leq C' \left(\|a\|_{\mathrm{K}_{\varphi_1,q_1}(\boldsymbol{A})} + \|a\|_{\mathrm{K}_{\varphi_0,q_0}(\boldsymbol{A})} \right) \\ &\leq 2C' \max\left(\|a\|_{\mathrm{K}_{\varphi_1,q_1}(\boldsymbol{A})}, \|a\|_{\mathrm{K}_{\varphi_0,q_0}(\boldsymbol{A})} \right) \\ &= 2C' \|a\|_{\Delta\left(\mathrm{K}_{\varphi_0,q}(\boldsymbol{A}), \mathrm{K}_{\varphi_1,q}(\boldsymbol{A})\right)}. \end{aligned}$$

Au total, puisque $q' \leq q$, la proposition 2.2.12 nous donne que

$$\Delta\left(\mathrm{K}_{\varphi_0,q}(\boldsymbol{A}), \mathrm{K}_{\varphi_1,q}(\boldsymbol{A})\right) \hookrightarrow \mathrm{K}_{\varphi,q'}(\boldsymbol{A}) \hookrightarrow \mathrm{K}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})$$

$\square$

Proposition 2.2.15. *Soient $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathcal{N}}$, φ_0, φ_1 deux fonctions de Boyd telles que $0 < \underline{\mathrm{b}}(\varphi_0) \leq \overline{\mathrm{b}}(\varphi_0) < \underline{\mathrm{b}}(\varphi_1)$ et $q \in [1, +\infty]$; si $A_1 \hookrightarrow A_0$, alors on a*

$$\mathrm{K}_{\varphi_1,q}(\boldsymbol{A}) \hookrightarrow \mathrm{K}_{\varphi_0,q}(\boldsymbol{A}).$$

Démonstration. Puisque $A_1 \hookrightarrow A_0$, on remarque que $A_0 + A_1 = A_0$ et on sait qu'il existe $C > 0$ tel que $\|\cdot\|_{A_0} \leq C \|\cdot\|_{A_1}$. Montrons que si $t \geq C$ et si $a \in A_0$, alors $\mathrm{K}(t,a) = \|a\|_{A_0}$. Soit $(a_0, a_1) \in \boldsymbol{A}$ tel que $a_0 + a_1 = a$; on a

$$\|a\|_{A_0} \leq \|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A_0} \leq \|a_0\|_{A_0} + C \|a_1\|_{A_1} \leq \|a_0\|_{A_0} + t \|a_1\|_{A_1}.$$

Ce qui montre bien que

$$\|a\|_{A_0} \leq \mathrm{K}(t,a) \leq \|a\|_{A_0} + \|0\|_{A_1} = \|a\|_{A_0}.$$

Fixons $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{\mathrm{b}}(\varphi_0) + \varepsilon < \underline{\mathrm{b}}(\varphi_1) - \varepsilon$ et considérons une constante $C_0 > 0$ telle que $x^{\underline{\mathrm{b}}(\varphi_1)-\varepsilon} \leq C_0 x^{\overline{\mathrm{b}}(\varphi_0)+\varepsilon}$, on sait alors par le corollaire 1.1.11 que, quitte à augmenter C_0, on a pour tout $x \in]0, C]$

$$\varphi_1(x) \leq C_0 x^{\underline{\mathrm{b}}(\varphi_1)-\varepsilon} \leq C_0^2 x^{\overline{\mathrm{b}}(\varphi_0)+\varepsilon} \leq C_0^3 \varphi_0(x). \tag{6}$$

On remarque alors que pour tout $j \in \{0,1\}$ et pour tout $a \in A_0$, on a

$$\|a\|^q_{\mathrm{K}_{\varphi_j,q}(\boldsymbol{A})} = \int_0^C \left(\frac{\mathrm{K}(t,a)}{\varphi_j(t)}\right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t} + \|a\|_{A_0} N_j$$

où $N_j = \int_C^{+\infty} \left(\frac{1}{\varphi_j(t)}\right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t}$ est une constante finie strictement positive qui ne dépend pas de a car $\underline{\mathrm{b}}(\varphi_j) > 0$. Au total, on a alors pour tout $a \in A_0$

$$\begin{aligned}
\|a\|_{\mathrm{K}_{\varphi_0,q}(\boldsymbol{A})} &= \int_0^C \left(\frac{\mathrm{K}(t,a)}{\varphi_0(t)}\right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t} + \|a\|_{A_0} N_0 \\
&\leq C_0^{3q} \int_0^C \left(\frac{\mathrm{K}(t,a)}{\varphi_1(t)}\right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t} + \frac{N_0}{N_1} \|a\|_{A_0} N_1 \\
&\leq \max(C_0^{3q}, \frac{N_0}{N_1}) \|a\|_{\mathrm{K}_{\varphi_1,q}(\boldsymbol{A})}
\end{aligned}$$

où la première inégalité provient de l'équation (6).

□

Pour conclure cette section sur la méthode K, nous allons montrer que le foncteur $\mathrm{K}_{\varphi,q}$ préserve la complétude.

Lemme 2.2.16. *Soit φ une fonction de Boyd et soit $q \in [1, +\infty[$; en reprenant les notations du lemme 2.2.4, si $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ et $g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, alors*

$$\Phi_{\varphi,q}(f+g) \leq \Phi_{\varphi,q}(f) + \Phi_{\varphi,q}(g).$$

Démonstration. Cela découle de l'inégalité triangulaire de la norme $\|\cdot\|_{L_q^*}$.

□

Proposition 2.2.17. *Soient $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathcal{B}}$, φ une fonction de Boyd telle que $0 < \underline{\mathrm{b}}(\varphi) \leq \overline{\mathrm{b}}(\varphi) < 1$ et $q \in [1, +\infty]$; l'espace $\mathrm{K}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})$ est de Banach.*
En particulier, $\mathrm{K}_{\varphi,q}$ est un foncteur d'interpolation exactement d'exposant φ sur la catégorie $\mathcal{B}$.

Démonstration. Posons $A = \mathrm{K}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})$. Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ une série absolument convergente de A ; par les théorème 2.2.6 et 2.2.9, on a $A \hookrightarrow \Sigma(\boldsymbol{A})$ et donc il existe $C > 0$ tel que $\|\cdot\|_{\Sigma(\boldsymbol{A})} \leq C\|\cdot\|_A$. Soit $M \in \mathbb{N}$; on a

$$\sum_{n=M}^{+\infty} \|a_n\|_{\Sigma(\boldsymbol{A})} \leq C \sum_{n\in\mathbb{N}} \|a_n\|_A < +\infty$$

et donc la série $\sum_{n=M}^{+\infty} a_n$ converge absolument dans $\Sigma(\boldsymbol{A})$ qui est un espace complet par la proposition 1.3.5. On sait donc qu'il existe $a_M \in \Sigma(\boldsymbol{A})$ tel que $\sum_{n=M}^{+\infty} a_n \to a_M$ dans $\Sigma(\boldsymbol{A})$. Puisque les normes $\mathrm{K}(t, \cdot)$ et $\|\cdot\|_{\Sigma(\boldsymbol{A})}$ sont équivalentes, pour tout $t > 0$, on a

$$\mathrm{K}(t, a_M) = \lim_{N\to+\infty} \mathrm{K}(t, \sum_{n=M}^{N} a_n) \leq \sum_{n=M}^{+\infty} \mathrm{K}(t, a_n).$$

Par le lemme de Fatou et le lemme précédent, on a alors

$$\begin{aligned}
\|a_M\|_A = \Phi_{\varphi,q}(\mathrm{K}(\cdot, a_M)) &\leq \Phi_{\varphi,q}(\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=M}^{N} \mathrm{K}(t, a_n)) \\
&\leq \liminf_{N\to+\infty} \Phi_{\varphi,q}(\sum_{n=M}^{N} \mathrm{K}(t, a_n)) \\
&\leq \liminf_{N\to+\infty} \sum_{n=M}^{N} \Phi_{\varphi,q}(\mathrm{K}(t, a_n)) \\
&= \sum_{n=M}^{+\infty} \|a_n\|_A < +\infty.
\end{aligned}$$

On en tire alors que $a_M \in A$ et on remarque que $\sum_n a_n \to a_0$ dans A car

$$\left\| a_0 - \sum_{n=0}^{M} a_n \right\|_A = \|a_M\|_A \leq \sum_{n=M}^{+\infty} \|a_n\|_A$$

où le dernier terme tend vers 0 lorsque M tend vers $+\infty$.

□

2.3 Méthode J

Dans cette section nous allons introduire la seconde méthode d'interpolation réelle. Nous allons, comme pour la méthode K, introduire une version discrète de la méthode J et montrer qu'elle est équivalente à l'originale. De plus, nous allons montrer que les méthodes K et J sont équivalentes. Pour cela, nous allons travailler en parallèle sur les deux résultats.

Pour commencer, nous avons besoins d'introduire une notion d'intégration pour des fonctions à valeurs dans un espace normé. Il s'agit d'une adaptation de ce que l'on peut trouver dans [16] qui considère des fonctions à valeurs dans un espace de Banach.

Définition 2.3.1. Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, E un espace vectoriel normé et soit $f : X \to E$; on note $\mathcal{B}(E)$ l'ensemble des boréliens de E. La fonction f est dite mesurable si quel que soit $B \in \mathcal{B}(E)$, on a $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. La fonction f est dite simple si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs distinctes.
Si f est une fonction simple mesurable, on définit l'intégrale de f par

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{y \in f(X)} y\mu\left(f^{-1}(\{y\})\right).$$

Définition 2.3.2. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et soit E un espace vectoriel normé ; une fonction mesurable $f : X \to E$ est intégrable si il existe une suite de fonctions simples $(f_n : X \to E)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\left(\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans E et telle que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_X \|f - f_n\|_E \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Dans ce cas, on définit l'intégrale de f par

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

La suite de fonctions simples intervenant dans la définition précédente n'ayant pas de raison d'être unique, le résultat suivant permet de justifier que la définition fait bien du sens :

Proposition 2.3.3. *Dans la définition précédente, la valeur de l'intégrale de la fonction f est indépendante de la suite de fonctions simples $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ considérée.*

Démonstration. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de fonctions simples vérifiant les conditions de la définition précédente ; puisque ce sont des fonctions simples, on peut vérifier sans mal que

$$\begin{aligned} \left\| \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu - \int_X f'_n \, \mathrm{d}\mu \right\|_E &= \left\| \int_X (f_n - f'_n) \, \mathrm{d}\mu \right\|_E \\ &\le \int_X \|f_n - f'_n\|_E \, \mathrm{d}\mu \\ &\le \int_X \|f_n - f\|_E \, \mathrm{d}\mu + \int_X \|f - f'_n\|_E \, \mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

où le membre de droite tend vers 0 quand n tend vers l'infini par définition.

□

Proposition 2.3.4. *Soient $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré, E un espace vectoriel normé et soit $f : X \to E$ une fonction intégrable ; on a*

$$\left\| \int_X f \mathrm{d}\mu \right\|_E \leq \int_X \|f\|_E \, \mathrm{d}\mu.$$

Démonstration. Considérons $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions simples telle que $\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu$ converge vers $\int_X f \, \mathrm{d}\mu$ dans E et telle qu'on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X \|f_n - f\|_E \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Puisqu'il s'agit d'une suite de fonctions simples, on vérifie aisément que

$$\left\| \int_X f \, \mathrm{d}\mu \right\|_E = \lim_{n\to+\infty} \left\| \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \right\|_E \leq \lim_{n\to+\infty} \int_X \|f_n\|_E \, \mathrm{d}\mu.$$

Pour conclure, il suffit d'utiliser l'inégalité triangulaire inversée pour remarquer que

$$\left| \int \|f_n\|_E \, \mathrm{d}\mu - \int \|f\|_E \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int \big| \|f_n\|_E - \|f\|_E \big| \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X \|f_n - f\|_E \, \mathrm{d}\mu$$

où le membre de droite tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

□

Définition 2.3.5. Soit $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathcal{N}}$; si $a \in \Delta(\boldsymbol{A})$ et si $t \in \mathbb{R}_0^+$, on définit la valeur

$$\mathrm{J}(t,a;\boldsymbol{A}) = \max\{\|a\|_{X_0}, t \cdot \|a\|_{X_1}\}.$$

Lorsque le contexte est clair, on ne précisera pas le dernier argument de J.

Proposition 2.3.6. *Soit $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathcal{N}}$; pour tout $t,s \in \mathbb{R}_0^+$ et tout $a \in \Delta(\boldsymbol{A})$, on a*

$$\min\left(1, \frac{t}{s}\right) \mathrm{J}(s,a) \leq \mathrm{J}(t,a) \qquad et \qquad \mathrm{K}(t,a) \leq \min\left(1,\frac{t}{s}\right)\mathrm{J}(s,a).$$

En particulier, pour tout $a \in \Delta(\boldsymbol{A})$, $\mathrm{J}(\,\cdot\,,a)$ est croissant et pour tout $t \in \mathbb{R}_0^+$, $\mathrm{K}(t,\,\cdot\,)$ est une norme sur $\Delta(\boldsymbol{A})$ équivalente à celle précédemment définie.

Démonstration. Il s'agit de conséquences directes de la définition. □

Définition 2.3.7. Soit $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathcal{N}}$; si $a \in \Sigma(\boldsymbol{A})$, on définit $\mathcal{S}(a)$ comme l'ensemble des fonctions $b : \mathbb{R}_0^+ \to \Delta(\boldsymbol{A})$ telles que

$$a = \int_0^{+\infty} b(t) \, \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

dans[11] $\Sigma(\boldsymbol{A})$.

Soit φ une fonction de Boyd et soit $q \in [1,+\infty[$; on définit l'espace $\mathrm{J}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})$ comme le plus grand sous espace de $\Sigma(\boldsymbol{A})$ tel que si $a \in \mathrm{J}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})$, alors

$$\|a\|_{\mathrm{J}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})} = \inf_{b\in\mathcal{S}(a)} \left\| \frac{\mathrm{J}(\,\cdot\,,b(\,\cdot\,))}{\varphi(\,\cdot\,)} \right\|_{L_q^*} = \inf_{b\in\mathcal{S}(a)} \left(\int_0^{+\infty} \left(\frac{J(t,b(t))}{\varphi(t)} \right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{1/q} < +\infty.$$

On muni l'espace $\mathrm{J}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})$ de la norme[12] $\|\cdot\|_{\mathrm{J}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})}$. On peut également définir l'espace

11. C'est à dire qu'on utilise la notion d'intégrale de la définition 2.3.2 en considérant que la fonction b est à valeurs dans $\Sigma(\boldsymbol{A})$.

12. On remarque que si $\mathcal{S}(a) = \varnothing$ alors on a directement $\|a\|_{\mathrm{J}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})} = +\infty$.

$\mathrm{J}_{\varphi,\infty}(\boldsymbol{A})$ en utilisant cette fois la norme

$$\|\cdot\|_{\mathrm{J}_{\varphi,\infty}(\boldsymbol{A})} : a \mapsto \inf_{b\in\mathcal{S}(a)} \left(\sup_{t>0} \frac{J(t,b(t))}{\varphi(t)} \right)$$

Introduisons maintenant la version discrète de la méthode J :

Définition 2.3.8. Soit $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathcal{N}}$; si $a \in \Sigma(\boldsymbol{A})$, on définit $\mathcal{S}'(a)$ comme l'ensemble des suites $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $\Delta(\boldsymbol{A})$ vérifiant

$$a = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n$$

dans $\Sigma(\boldsymbol{A})$.
Soit φ une fonction de Boyd et soit $q \in [1,+\infty]$; on définit l'espace $\widetilde{\mathrm{J}}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})$ comme le plus grand sous espace de $\Sigma(\boldsymbol{A})$ tel que si $a \in \widetilde{\mathrm{J}}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})$, alors

$$\|\cdot\|_{\widetilde{\mathrm{J}}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})} : a \mapsto \inf_{(b_n)_n\in\mathcal{S}'(a)} \left\| \left(\frac{\mathrm{J}(2^n,b_n)}{\varphi(2^n)} \right)_{n\in\mathbb{Z}} \right\|_{\ell_q} < +\infty.$$

On muni l'espace $\widetilde{\mathrm{J}}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})$ de la norme $\|\cdot\|_{\widetilde{\mathrm{J}}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})}$.

En vue de montrer les deux résultat annoncés au début de la section, nous aurons besoin de lemme fondamental de la théorie des espace d'interpolation qui lie la méthode K et la version discrète de la méthode J.

Lemme 2.3.9. *(Lemme fondamental de la théorie de l'interpolation) Soit $a \in \Sigma(\boldsymbol{A})$; si a vérifie*

$$\lim_{t\to 0} \mathrm{K}(t,a) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\mathrm{K}(t,a)}{t} = 0$$

alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de $\Delta(\boldsymbol{A})$ telle que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n = a$ dans $\Sigma(\boldsymbol{A})$ et telle que

$$\mathrm{J}(2^n,b_n) \le 3(1+\varepsilon)\,\mathrm{K}(2^n,a)$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, par définition de K, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe $(a_0^{(n)}, a_1^{(n)}) \in A_0 \times A_1$ tel que $a = a_0^{(n)} + a_1^{(n)}$ et tel que

$$\left\|a_0^{(n)}\right\|_{A_0} + 2^n \left\|a_1^{(n)}\right\|_{A_1} < (1+\varepsilon)\,\mathrm{K}(2^n,a).$$

On remarque que

$$\lim_{n\to-\infty} \left\|a_0^{(n)}\right\|_{A_0} \le (1+\varepsilon) \lim_{t\to 0} \mathrm{K}(t,a) = 0$$

et que

$$\lim_{n\to+\infty} \left\|a_1^{(n)}\right\|_{A_1} \le (1+\varepsilon) \lim_{t\to+\infty} \frac{\mathrm{K}(t,a)}{t} = 0.$$

Pour tout $k \in \{0,1\}$, puisque $A_k \hookrightarrow \Sigma(\boldsymbol{A})$, on a donc $a_k^{(n)} \to 0$ dans $\Sigma(\boldsymbol{A})$. On pose alors

$$b_n = a_0^{(n+1)} - a_0^{(n)} = a_1^{(n)} - a_1^{(n+1)} \in \Delta(\boldsymbol{A}).$$

De plus, si $N \in \mathbb{N}_0$, alors

$$\sum_{n=-N}^{0} b_n = \sum_{n=-N}^{0} a_0^{(n+1)} - a_0^{(n)} = a_0^{(1)} - a_0^{(-N)}$$

où le membre de droite tend vers $a_0^{(1)}$ dans $\Sigma(\boldsymbol{A})$ lorsque N tend vers $+\infty$. De même, on a

$$\sum_{n=0}^{N} b_n = \sum_{n=0}^{N} a_1^{(n)} - a_1^{(n+1)} = a_1^{(1)} - a_1^{(N+1)}$$

où le membre de droite tend vers $a_1^{(1)}$ dans $\Sigma(\boldsymbol{A})$ lorsque N tend vers $+\infty$. La série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n$ converge donc vers $a_0^{(1)} + a_1^{(1)} = a$ dans $\Sigma(\boldsymbol{A})$. De plus, si $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}(2^n, b_n) &\leq \max\left(\left\|a_0^{(n+1)}\right\|_{A_0} + \left\|a_0^{(n)}\right\|_{A_0}, 2^n\left(\left\|a_1^{(n)}\right\|_{A_1} + \left\|a_1^{(n+1)}\right\|_{A_1}\right)\right) \\
&\leq \left\|a_0^{(n+1)}\right\|_{A_0} + \left\|a_0^{(n)}\right\|_{A_0} + 2^n\left(\left\|a_1^{(n)}\right\|_{A_1} + \left\|a_1^{(n+1)}\right\|_{A_1}\right) \\
&\leq (1+\varepsilon)\,\mathrm{K}(2^n, a) + (1+\varepsilon)\,\mathrm{K}(2^{n+1}, a) \\
&\leq 3(1+\varepsilon)\,\mathrm{K}(2^n, a).
\end{aligned}$$

□

Remarque 2.3.10. Soient φ une fonction de Boyd telle que $0 < \underline{\mathrm{b}}(\varphi) \leq \overline{\mathrm{b}}(\varphi) < 1$ et $q \in [1,+\infty]$; on remarque que si $a \in \mathrm{K}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})$, alors a satisfait les hypothèses du lemme précédent. En effet, par le théorème 2.2.6, il existe $C > 0$ tel que

$$\mathrm{K}(t,a) \leq C\varphi(t)\,\|a\|_{\mathrm{K}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})}$$

quel que soit $t > 0$. On tire alors du corollaire 1.1.11 que

$$\lim_{t\to 0}\varphi(t) = 0 = \lim_{t\to+\infty}\frac{\varphi(t)}{t}.$$

Proposition 2.3.11. *Soit $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathcal{N}}$, soit φ une fonction de Boyd telle que $0 < \underline{\mathrm{b}}(\varphi) \leq \overline{\mathrm{b}}(\varphi) < 1$ et soit $q \in [1,+\infty]$; on a*

$$\widetilde{\mathrm{J}}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A}) \hookrightarrow \mathrm{J}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A}).$$

Démonstration. Supposons que $q < +\infty$, l'autre cas se traitant de manière identique. Soit $a \in \widetilde{\mathrm{J}}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})$, soit $\varepsilon > 0$ et soit $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{S}'(a)$ tel que

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{J(2^n,b_n)}{\varphi(2^n)}\right)^q\right)^{1/q} < \|a\|_{\widetilde{\mathrm{J}}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})} + \varepsilon.$$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, si $2^n \leq t < 2^{n+1}$, on pose $b(t) = b_n/\ln(2)$. On remarque alors que $b : \mathbb{R}_0^+ \to \Delta(\boldsymbol{A})$ et que

$$\int_0^{+\infty} b(t)\frac{\mathrm{d}t}{t} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{2^n}^{2^{n+1}} \frac{b_n}{\ln(2)}\frac{\mathrm{d}t}{t} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n = a$$

ce qui nous donne $b \in \mathcal{S}(a)$. De plus, si $2^n \leq t < 2^{n+1}$ et si $x \in \Delta(\boldsymbol{A})$, alors, on a $\frac{\varphi(2^n)}{\varphi(t)} \leq \overline{\varphi}(\frac{2^n}{t}) \leq \sup\overline{\varphi}\left(\left[\frac{1}{2},1\right]\right)$ et donc la proposition 2.3.6 nous donne

$$\frac{\mathrm{J}(t,x)}{\varphi(t)} \leq 2\sup\overline{\varphi}\left(\left[\frac{1}{2},1\right]\right)\frac{J(2^n,x)}{\varphi(2^n)}$$

avec $\sup\overline{\varphi}\left(\left[\frac{1}{2},1\right]\right) < +\infty$ par le lemme 1.1.5 appliqué à $\ln\circ\overline{\varphi}$. On a finalement

$$\begin{aligned}
\|a\|_{\mathrm{J}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})} &\leq \left(\int_0^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{J}(t,b(t))}{\varphi(t)}\right)^q\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/q} \\
&\leq \frac{1}{\ln(2)}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{2^n}^{2^{n+1}}\left(\frac{J(t,b_n)}{\varphi(t)}\right)^q\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/q} \\
&\leq \frac{2\sup\overline{\varphi}\left(\left[\frac{1}{2},1\right]\right)}{\ln(2)}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{2^n}^{2^{n+1}}\left(\frac{J(2^n,b_n)}{\varphi(2^n)}\right)^q\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/q} \\
&\leq 2\sup\overline{\varphi}\left(\left[\frac{1}{2},1\right]\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{J(2^n,b_n)}{\varphi(2^n)}\right)^q\right)^{1/q} \\
&\leq 2\sup\overline{\varphi}\left(\left[\frac{1}{2},1\right]\right)\left(\|a\|_{\widetilde{\mathrm{J}}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})}+\varepsilon\right).
\end{aligned}$$

L'inégalité entre les deux extrêmes ayant lieu quel que soit $\varepsilon > 0$, on conclut par passage à la limite.

□

Proposition 2.3.12. *Soit $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathcal{N}}$, soit φ une fonction de Boyd telle que $0 < \underline{\mathrm{b}}(\varphi) \leq \overline{\mathrm{b}}(\varphi) < 1$ et soit $q \in [1,+\infty]$; on a*

$$\mathrm{K}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A}) \hookrightarrow \widetilde{J}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A}).$$

En particulier, on a

$$\mathrm{K}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A}) \hookrightarrow \mathrm{J}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A}).$$

Démonstration. Soit $a \in \mathrm{K}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})$ et soit $\varepsilon > 0$; la remarque associée au lemme 2.3.9 nous assure l'existence de $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{S}'(a)$ tel qu'on a

$$\mathrm{J}(2^n,b_n) \leq 4\,\mathrm{K}(2^n,a)$$

quel que soit $n \in \mathbb{Z}$. De plus, par les théorèmes 2.2.7 et 2.2.11, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|a\|_{\tilde{\mathrm{J}}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})} \leq \left\| \left(\frac{\mathrm{J}(2^n, b_n)}{\varphi(2^n)} \right)_{n\in\mathbb{Z}} \right\|_{\ell_q} \leq 4 \left\| \left(\frac{\mathrm{K}(2^n, a)}{\varphi(2^n)} \right)_{n\in\mathbb{Z}} \right\|_{\ell_q} \leq 4C \|a\|_{\mathrm{K}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})}.$$

Le cas particulier résulte de la proposition précédente.

□

Théorème 2.3.13. *(Théorème d'équivalence) Soient φ une fonction de Boyd telle que $0 < \underline{\mathrm{b}}(\varphi) \leq \overline{\mathrm{b}}(\varphi) < 1$, $q \in [1, +\infty]$ et soit $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathcal{N}}$; on a*

$$\mathrm{J}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{K}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})$$

où l'égalité signifie que ces deux espaces contiennent les mêmes éléments et possèdent des normes équivalentes.
En particulier, l'application $\mathrm{J}_{\varphi,q}$ est un foncteur d'interpolation exact d'exposant φ pour la catégorie $\overline{\mathcal{N}}$.

Démonstration. Vu la proposition précédente, il suffit de montrer que $\mathrm{J}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A}) \hookrightarrow \mathrm{K}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})$. Soit $a \in \mathrm{J}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})$ et soit $t > 0$; si $b \in \mathcal{S}(a)$, alors pour tout $s > 0$, $b(s) \in \Delta(\boldsymbol{A})$ et donc

$$\mathrm{K}(t, b(s)) \leq \min(\|b(s)\|_{A_0}, t\|b(s)\|_{A_1}).$$

Puisque $\mathrm{K}(t, \cdot\,)$ est une norme sur $\Sigma(\boldsymbol{A})$ équivalente à celle précédemment définie, la proposition 2.3.4 nous donne que

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}(t,a) &= \mathrm{K}\left(t, \int_0^{+\infty} b(s)\frac{\mathrm{d}s}{s}\right) \\
&\leq \int_0^{+\infty} \mathrm{K}(t, b(s))\frac{\mathrm{d}s}{s} \\
&\leq \int_0^{+\infty} \min(\|b(s)\|_{A_0}, t\|b(s)\|_{A_1})\frac{\mathrm{d}s}{s} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(s)}{\varphi(s)} \min(\|b(s)\|_{A_0}, \frac{t}{s} s\|b(s)\|_{A_1})\frac{\mathrm{d}s}{s} \\
&\leq \int_0^{+\infty} \varphi(s) \min(1, \frac{t}{s})\frac{\mathrm{J}(s, b(s))}{\varphi(s)}\frac{\mathrm{d}s}{s}
\end{aligned}$$

Et puisque $\varphi(s)/\varphi(t) = \varphi(\frac{s}{t}\cdot t)/\varphi(t) \leq \overline{\varphi}(\frac{s}{t})$ pour tout $s > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{K}(t,a)}{\varphi(t)} &\leq \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(s)}{\varphi(t)} \min(1, \frac{t}{s})\frac{\mathrm{J}(s, b(s))}{\varphi(s)}\frac{\mathrm{d}s}{s} \\
&\leq \int_0^{+\infty} \overline{\varphi}(\frac{s}{t}) \min(1, \frac{t}{s})\frac{\mathrm{J}(s, b(s))}{\varphi(s)}\frac{\mathrm{d}s}{s} \\
&= \left(\overline{\varphi}(\frac{1}{\cdot}) \min(1, \,\cdot\,)\right) \star \left(\frac{\mathrm{J}(\,\cdot\,, b(\,\cdot\,))}{\varphi(\,\cdot\,)}\right)(t)
\end{aligned}$$

où la dernière inégalité désigne le produit de convolution dans $\mathrm{L}_q^\star$. Par le lemme 1.1.21, on sait que $x \mapsto \left(\overline{\varphi}(\frac{1}{x}) \min(1,x)\right) \in \mathrm{L}_1^\star$ et donc le théorème 2.1.5 nous donne que

$$\begin{aligned} \|a\|_{K_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})} &= \left\| \frac{\mathrm{K}(\,\cdot\,,a)}{\varphi(\,\cdot\,)} \right\|_{\mathrm{L}_q^\star} \\ &\leq \left\| \left(\overline{\varphi}(\frac{1}{\cdot}) \min(1,\,\cdot\,)\right) \star \left(\frac{\mathrm{J}(\,\cdot\,,b(\,\cdot\,))}{\varphi(\,\cdot\,)}\right) \right\|_{\mathrm{L}_q^\star} \\ &\leq \left\| \overline{\varphi}(\frac{1}{\cdot}) \min(1,\,\cdot\,) \right\|_{\mathrm{L}_1^\star} \cdot \left\| \frac{\mathrm{J}(\,\cdot\,,b(\,\cdot\,))}{\varphi(\,\cdot\,)} \right\|_{\mathrm{L}_q^\star}. \end{aligned}$$

L'inégalité entre les deux extrêmes étant valable quel que soit $b \in \mathcal{S}(a)$, on a montré qu'il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend que de φ telle que

$$\|a\|_{K_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})} \leq C \, \|a\|_{J_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})}.$$

□

Théorème 2.3.14. *Soit $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathcal{N}}$, soit φ une fonction de Boyd telle que $0 < \underline{\mathrm{b}}(\varphi) \leq \overline{\mathrm{b}}(\varphi) < 1$ et soit $q \in [1,+\infty]$; on a*

$$\widetilde{\mathrm{J}}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{J}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})$$

où l'égalité signifie que ces deux espaces contiennent les mêmes éléments et possèdent des normes équivalentes.

Démonstration. Vu la proposition 2.3.11, il suffit de montrer que $\mathrm{J}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A}) \hookrightarrow \widetilde{\mathrm{J}}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})$. Or, par le théorème précédent et la proposition 2.3.12, on a

$$\mathrm{J}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A}) \hookrightarrow \mathrm{K}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A}) \hookrightarrow \widetilde{\mathrm{J}}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A}).$$

□

On peut montrer que, comme pour la méthode K, la méthode J lie la fonction J et la norme sur ses espaces d'interpolation.

Proposition 2.3.15. *Soit $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathcal{N}}$, soit φ une fonction de Boyd telle que $0 < \underline{\mathrm{b}}(\varphi) \leq \overline{\mathrm{b}}(\varphi) < 1$ et soit $q \in [1,+\infty]$; il existe $C > 0$ tel que*

$$\varphi(t) \, \|a\|_{\mathrm{J}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})} \leq C \, \mathrm{J}(t,a)$$

quels que soient $t > 0$ et $a \in \Delta(\boldsymbol{A})$.

Démonstration. Supposons que $q < +\infty$, l'autre cas se traitant de manière identique. Soient $a \in \Delta(\boldsymbol{A})$ et $t > 0$; on pose

$$b : \mathbb{R}_0^+ \to \Delta(\boldsymbol{A}) : s \mapsto \frac{a}{\ln(2)} \chi_{[1,2]}(s).$$

On remarque que $b \in \mathcal{S}(a)$ et on a par la proposition 2.3.6 que

$$\begin{aligned}
\varphi(t)\,\|a\|_{\mathrm{J}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})} &\leq \left(\int_0^{+\infty}\left(\mathrm{J}(s,b(s))\frac{\varphi(t)}{\varphi(s)}\right)^q \frac{\mathrm{d}s}{s}\right)^{1/q} \\
&\leq \left(\int_1^{2}\left(\min(1,\frac{s}{t})\,\mathrm{J}(t,\frac{a}{\ln(2)})\,\overline{\varphi}(\frac{t}{s})\right)^q \frac{\mathrm{d}s}{s}\right)^{1/q} \\
&\leq \frac{1}{\ln(2)}\left(\int_0^{+\infty}\left(\min(1,\frac{s}{t})\,\overline{\varphi}(\frac{t}{s})\right)^q \frac{\mathrm{d}s}{s}\right)^{1/q}\mathrm{J}(t,a) \\
&= \frac{1}{\ln(2)}\left(\int_0^{+\infty}\left(\min(1,u)\,\overline{\varphi}(\frac{1}{u})\right)^q \frac{\mathrm{d}u}{u}\right)^{1/q}\mathrm{J}(t,a).
\end{aligned}$$

On peut montrer facilement en adaptant le raisonnement du lemme 1.1.21 que la fonction $u \mapsto \min(1,u)\,\overline{\varphi}(\frac{1}{u})$ appartient à L_q^*.

□

Bien que l'on ait montré que les méthodes K et J sont équivalentes, la méthode J apporte un nouveau point de vue qui permet de dégager de nouvelles propriétés comme par exemple des résultats de densité :

Proposition 2.3.16. *Soit φ une fonction de Boyd telle que $0 < \underline{\mathrm{b}}(\varphi) \leq \overline{\mathrm{b}}(\varphi) < 1$;*

- ⁕ *si $1 \leq q < +\infty$, alors l'espace $\Delta(\boldsymbol{A})$ est dense dans $K_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})$,*
- ⁕ *l'adhérence de $\Delta(\boldsymbol{A})$ dans $K_{\varphi,\infty}(\boldsymbol{A})$ est l'ensemble $\mathrm{K}^0_{\varphi,\infty}(\boldsymbol{A})$ constitué des éléments $a \in \Sigma(\boldsymbol{A})$ pour lesquels on a*

$$\lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{K}(t,a)}{\varphi(t)} = \lim_{t\to+\infty}\frac{\mathrm{K}(t,a)}{\varphi(t)} = 0.$$

Démonstration. Montrons d'abord le premier point.
Soit $a \in \mathrm{K}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})$; par le théorème 2.3.13, on sait que $a \in \mathrm{J}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})$ et donc par le théorème 2.3.14 on sait qu'il existe $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{S}'(a)$ telle que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\mathrm{J}(2^n,b_n)/\varphi(2^n))^q$ converge. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on pose alors

$$a_N = \sum_{n=-N}^{N} b_n \in \Delta(\boldsymbol{A}).$$

Puisque les normes $\|\cdot\|_{\mathrm{K}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})}$, $\|\cdot\|_{\mathrm{J}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})}$ et $\|\cdot\|_{\tilde{\mathrm{J}}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})}$ sont équivalentes, on sait qu'il existe une constante $C > 0$ pour laquelle on a pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$\|a - a_N\|_{\mathrm{K}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})} \leq C\left\|\sum_{|n|>N} b_n\right\|_{\tilde{\mathrm{J}}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})} \leq C\left(\sum_{|n|>N}\left(\frac{\mathrm{J}(2^n,b_n)}{\varphi(2^n)}\right)^q\right)^{1/q}$$

où le dernier terme tend vers 0 lorsque N tend vers l'infini. On a donc bien $a_N \to a$ dans $\mathrm{K}_{\varphi,q}(\boldsymbol{A})$.

Montrons le second point.
Tout d'abord, remarquons que l'on a bien $\mathrm{K}^0_{\varphi,\infty}(\boldsymbol{A}) \subset \mathrm{K}_{\varphi,\infty}(\boldsymbol{A})$. En effet, si $a \in \mathrm{K}^0_{\varphi,\infty}(\boldsymbol{A})$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$t \notin [C^{-1}, C] \Rightarrow \frac{K(t,a)}{\varphi(t)} < 1.$$

De plus, on sait que pour tout $t \in [C^{-1}, C]$, on a $\frac{1}{\varphi(t)} \le \overline{\varphi}(\frac{1}{t}) \le \sup \overline{\varphi}([C^{-1}, C]) < +\infty$ par le lemme 1.1.5 appliqué à $\ln \circ \overline{\varphi}$. On a donc

$$\|a\|_{\mathrm{K}_{\varphi,\infty}(\boldsymbol{A})} = \sup_{t>0} \frac{K(t,a)}{\varphi(t)} \le \max\big(1, \mathrm{K}(C,a) \sup \overline{\varphi}([C^{-1}, C])\big) < +\infty.$$

Montrons maintenant que l'adhérence de $\Delta(\boldsymbol{A})$ dans $\mathrm{K}_{\varphi,\infty}(\boldsymbol{A})$ est incluse dans $\mathrm{K}^0_{\varphi,\infty}(\boldsymbol{A})$. Soit a un élément de l'adhérence de $\Delta(\boldsymbol{A})$ dans $\mathrm{K}_{\varphi,\infty}(\boldsymbol{A})$; si $b \in \Delta(\boldsymbol{A})$, alors $a-b \in \mathrm{K}_{\varphi,\infty}(\boldsymbol{A})$ et le théorème 2.2.6 nous assure l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$\mathrm{K}(t,a) \le \mathrm{K}(t, a-b) + \mathrm{K}(t,b) \le C\varphi(t)\,\|a-b\|_{\mathrm{K}_{\varphi,\infty}(\boldsymbol{A})} + \min(1,t)\,\|b\|_{\Sigma(\boldsymbol{A})} \tag{7}$$

pour tout $t > 0$. Fixons $\varepsilon > 0$, par définition de l'adhérence, on sait qu'il existe $b_\varepsilon \in \Delta(\boldsymbol{A})$ tel que $\|a - b_\varepsilon\|_{\mathrm{K}_{\varphi,\infty}(\boldsymbol{A})} < \varepsilon/C$. La suite d'inégalités (7) nous donne alors que

$$\frac{K(t,a)}{\varphi(t)} \le \varepsilon + \frac{\min(1,t)}{\varphi(t)}\,\|b_\varepsilon\|_{\Sigma(\boldsymbol{A})}$$

quel que soit $t > 0$. Puisque $\mathrm{K}_{\varphi,\infty}(\boldsymbol{A}) \hookrightarrow \Sigma(\boldsymbol{A})$, on peut supposer, quitte à augmenter C, que

$$\|b_\varepsilon\|_{\Sigma(\boldsymbol{A})} \le C\,\|b_\varepsilon\|_{\mathrm{K}_{\varphi,\infty}(\boldsymbol{A})} \le C(\|a\|_{\mathrm{K}_{\varphi,\infty}(\boldsymbol{A})} + \varepsilon)$$

et on obtient

$$\frac{K(t,a)}{\varphi(t)} \le \varepsilon + C\frac{\min(1,t)}{\varphi(t)}(\|a\|_{\mathrm{K}_{\varphi,\infty}(\boldsymbol{A})} + \varepsilon)$$

pour tout $t > 0$. Finalement, le corollaire 1.1.11 permet d'affirmer que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\min(1,t)}{\varphi(t)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\min(1,t)}{\varphi(t)} = 0$$

ce qui nous donne bien $a \in \mathrm{K}^0_{\varphi,\infty}(\boldsymbol{A})$.
Pour conclure, montrons l'inclusion inverse.
Soit $a \in \mathrm{K}^0_{\varphi,\infty}(\boldsymbol{A})$; puisque $a \in \mathrm{K}_{\varphi,\infty}(\boldsymbol{A})$, la remarque associée au lemme 2.3.9 permet d'affirmer qu'il existe $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{S}'(a)$ tel que

$$\mathrm{J}(2^n, b_n) < 4\,\mathrm{K}(2^n, a)$$

quel que soit $n \in \mathbb{Z}$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on pose alors

$$a_N = \sum_{n=-N}^{N} b_n \in \Delta(\boldsymbol{A}).$$

On sait alors, comme pour le premier point de l'énoncé, qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\|a - a_N\|_{\mathrm{K}_{\varphi,\infty}(\boldsymbol{A})} \leq C \left\| \sum_{|n|>N} b_n \right\|_{\mathrm{J}_{\varphi,\infty}(\boldsymbol{A})} \leq C \sup_{|n|>N} \frac{\mathrm{J}(2^n, b_n)}{\varphi(2^n)} \leq 4C \sup_{|n|>N} \frac{\mathrm{K}(2^n, a)}{\varphi(2^n)}$$

où le dernier terme tend vers 0 lorsque N tend vers ∞ par définition de $\mathrm{K}^0_{\varphi,\infty}(\boldsymbol{A})$. La suite $(a_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge donc bien vers a dans $\mathrm{K}_{\varphi,\infty}(\boldsymbol{A})$.

□

2.4 Théorème de réitération

Les théorèmes 2.2.6, 2.2.9 et la proposition 2.3.15 nous montrent qu'il existe des relations entre la norme d'un espace d'interpolation obtenu avec la méthode K ou J et la fonction K ou J associée. Dans cette section, nous allons nous intéresser à différentes classes d'espaces d'interpolation en nous basant sur ces relations et étudier les espaces que l'on obtient en appliquant la méthode K à des éléments de ces classes.

Définition 2.4.1. Soient $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathcal{N}}$, φ une fonction de Boyd et soit A un espace intermédiaire de $\boldsymbol{A}$; on dit que

- ⁎ A appartient à la classe $\mathcal{C}_{\mathrm{K}}(\varphi, \boldsymbol{A})$ si il existe $C > 0$ tel que, quel que soient $t > 0$ et $a \in A$, on a
$$\mathrm{K}(t, a) \leq C\varphi(t) \|a\|_A$$
- ⁎ A appartient à la classe $\mathcal{C}_{\mathrm{J}}(\varphi, \boldsymbol{A})$ si il existe $C > 0$ tel que, quel que soient $t > 0$ et $a \in \Delta(\boldsymbol{A})$, on a
$$\varphi(t) \|a\|_A \leq C\,\mathrm{J}(t, a)$$
- ⁎ A appartient à la classe $\mathcal{C}(\varphi, \boldsymbol{A})$ si il appartient simultanément aux deux classes précédentes.

Proposition 2.4.2. *Soient $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathcal{N}}$, φ une fonction de Boyd et soit A un espace intermédiaire de $\boldsymbol{A}$;*

- ⁎ *A appartient à la classe $\mathcal{C}_{\mathrm{K}}(\varphi, \boldsymbol{A})$ si et seulement si on a $A \hookrightarrow \mathrm{K}_{\varphi,\infty}(\boldsymbol{A})$,*
- ⁎ *Si $0 < \underline{\mathrm{b}}(\varphi) \leq \overline{\mathrm{b}}(\varphi) < 1$ et si A est complet, alors A appartient à la classe $\mathcal{C}_{\mathrm{J}}(\varphi, \boldsymbol{A})$ si et seulement si on a $\mathrm{K}_{\varphi,1}(\boldsymbol{A}) \hookrightarrow A$.*

Démonstration. Pour le premier point, il suffit de remarquer que $A \hookrightarrow \mathrm{K}_{\varphi,\infty}(\boldsymbol{A})$ si et seulement si il existe $C > 0$ tel que

$$\frac{\mathrm{K}(t, a)}{\varphi(t)} \leq \|a\|_{K_{\varphi,\infty}(\boldsymbol{A})} \leq C \|a\|_A$$

quels que soient $t > 0$ et $a \in A$.
Pour le second point, montrons d'abord que la condition est nécessaire. Supposons que

$A \in \mathcal{C}_{\mathrm{J}}(\varphi, \boldsymbol{A})$ et montrons que $\widetilde{\mathrm{J}}_{\varphi,1}(\boldsymbol{A}) \hookrightarrow A$.
Soit $a \in \widetilde{\mathrm{J}}_{\varphi,1}(\boldsymbol{A})$, soit $\varepsilon > 0$ et soit $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{S}'(a)$ tel que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{J}(2^n, b_n)/\varphi(2^n) < \|a\|_{\widetilde{\mathrm{J}}_{\varphi,1}(\boldsymbol{A})} + \varepsilon$; puisque $A \in \mathcal{C}_{\mathrm{J}}(\varphi, \boldsymbol{A})$, on sait qu'il existe $C > 0$ tel que $\varphi(2^n)\,\|b_n\|_A \leq C\,\mathrm{J}(2^n, b_n)$ quel que soit $n \in \mathbb{Z}$. De plus, puisque A est complet, si la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|b_n\|_A$ converge, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n$ converge dans A et on a même

$$\|a\|_A = \left\|\sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n\right\|_A \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|b_n\|_A \leq C \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\mathrm{J}(2^n, b_n)}{\varphi(2^n)} < C(\|a\|_{\widetilde{\mathrm{J}}_{\varphi,1}(\boldsymbol{A})} + \varepsilon).$$

L'inégalité entre les deux extrêmes étant vérifiée quel que soit $\varepsilon > 0$, on a bien que $\widetilde{\mathrm{J}}_{\varphi,1}(\boldsymbol{A}) \hookrightarrow A$. Les théorèmes 2.3.14 et 2.3.13 nous donne finalement $\mathrm{K}_{\varphi,1}(\boldsymbol{A}) \hookrightarrow A$.
Montrons pour finir que la condition est suffisante.
Soit $a \in \Delta(\boldsymbol{A})$ et soit $m \in \mathbb{Z}$; on pose $b_n = 0$ si $n \neq m$ et $b_m = a$ et donc on sait qu'il existe $C_1 > 0$ tel que

$$\|a\|_A \leq C_1\,\|a\|_{K_{\varphi,1}(\boldsymbol{A})} \leq C_1 C_2\,\|(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}\|_{l_1} = C_1 C_2 \frac{\mathrm{J}(2^m, a)}{\varphi(2^m)}$$

où la deuxième inégalité et la constante C_2 proviennent des théorèmes 2.3.13 et 2.3.14. Au total, il existe $C > 0$ tel que pour tout $a \in \Delta(\boldsymbol{A})$ et tout $m \in \mathbb{Z}$, on a

$$\|a\|_A\,\varphi(2^m) \leq C\,\mathrm{J}(2^m, a).$$

Soit $t > 0$; considérons $m \in \mathbb{Z}$ tel que $2^m \leq t < 2^{m+1}$. On a alors $\varphi(t)/\varphi(2^m) \leq \overline{\varphi}(t/2^m)$ et donc

$$\|a\|_A\,\varphi(t) \leq \overline{\varphi}(t/2^m)\,\|a\|_A\,\varphi(2^m) \leq \overline{\varphi}(t/2^m)\,\mathrm{J}(2^m, a) \leq \overline{\varphi}(t/2^m)\,\mathrm{J}(t, a).$$

On conclut en remarquant que $\varphi(t/2^m) \in \overline{\varphi}([1, 2])$ qui est un ensemble borné par le lemme 1.1.5 appliqué à $\ln \circ \overline{\varphi}$.

□

Lemme 2.4.3. *Soit φ une fonction de Boyd telle que $\underline{\mathrm{b}}(\varphi) > 0$ ou $\overline{\mathrm{b}}(\varphi) < 0$ et soient f, g deux fonctions de $\mathbb{R}_0^+$ dans $\mathbb{R}_0^+$; si $f \sim g$, alors on a $\varphi \circ f \sim \varphi \circ g$.*

Démonstration. Supposons que $\underline{\mathrm{b}}(\varphi) > 0$, on sait alors par la proposition 1.1.12 qu'il existe $C > 0$ tel que $\varphi(x) \leq C\varphi(y)$ si $0 < x \leq y$. Quitte à augmenter la valeur de la constante C, on peut supposer qu'elle vérifie les inégalités de la relation d'équivalence $f \sim g$. Puisque $\frac{\varphi\circ(Cg)}{\varphi\circ g} \leq \overline{\varphi}(C)$, on a

$$\varphi \circ f \leq C\varphi \circ (Cg) \leq C\,\overline{\varphi}(C) \cdot (\varphi \circ g).$$

Un raisonnement similaire nous donne que $C^{-1}\,\overline{\varphi}(C)^{-1} \cdot (\varphi \circ g) \leq \varphi \circ f$.
Si $\overline{\mathrm{b}}(\varphi) < 0$, il suffit d'appliquer la proposition 1.1.13 et un raisonnement similaire.

□

Théorème 2.4.4. *(Théorème de réitération) Soient $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathcal{N}}$, $\varphi_0, \varphi_1, \varphi$ des fonctions de Boyd dont les indices inférieurs et supérieurs sont strictement compris entre 0 et 1 et*

$q \in [1,+\infty]$; si $X_k \in \mathcal{C}(\varphi_k, \boldsymbol{A})$ est complet pour tout $k \in \{0,1\}$ et si $\underline{\mathrm{b}}(\theta) > 0$ ou $\overline{\mathrm{b}}(\theta) < 0$ avec $\theta = \varphi_1/\varphi_0$, alors pour $\boldsymbol{X} = (X_0, X_1)$ et $\psi = (\varphi \circ \theta) \cdot \varphi_0$ on a

$$\mathrm{K}_{\varphi,q}(\boldsymbol{X}) = \mathrm{K}_{\psi,q}(\boldsymbol{A}).$$

En particulier, si $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathcal{B}}$ et si $q_0, q_1 \in [1,+\infty]$, alors

$$\mathrm{K}_{\varphi,q}(\mathrm{K}_{\varphi_0,q_0}(\boldsymbol{A}), \mathrm{K}_{\varphi_1,q_1}(\boldsymbol{A})) = \mathrm{K}_{\psi,q}(\boldsymbol{A}).$$

Démonstration. Par le théorème 1.1.23, on sait qu'il existe $x \in \mathcal{B}'$ un difféomorphisme pour lequel il existe une constante $C > 1$ qui vérifie

$$C^{-1}\xi \leq \theta \leq C\xi.$$

Commençons par montrer que $\mathrm{K}_{\varphi,q}(\boldsymbol{X}) \hookrightarrow \mathrm{K}_{\psi,q}(\boldsymbol{A})$.
Puisque $X_k \in \mathcal{C}(\varphi_k, \boldsymbol{A})$ pour tout $k \in \{0,1\}$, on peut supposer, quitte à augmenter C, que

$$\mathrm{K}(t, a; \boldsymbol{A}) \leq C\varphi_k(t) \|a\|_{X_k}$$

quel que soient $a \in X_k$ et $t > 0$ et quel que soit $k \in \{0,1\}$. On en tire que si $a \in \Sigma(\boldsymbol{X})$ et si $(a_0, a_1) \in X_0 \times X_1$ est tel que $a = a_0 + a_1$, alors pour tout $t > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}(t, a; \boldsymbol{A}) &\leq \mathrm{K}(t, a_0; \boldsymbol{A}) + \mathrm{K}(t, a_1; \boldsymbol{A}) \\
&\leq C\varphi_0(t) \|a_0\|_{X_0} + C\varphi_1(t) \|a_1\|_{X_1} \\
&= C\varphi_0(t) \left(\|a_0\|_{X_0} + \frac{\varphi_1(t)}{\varphi_0(t)} \|a_1\|_{X_1} \right).
\end{aligned}$$

Au total, on en déduit que

$$K(t, a; \boldsymbol{A}) \leq C\varphi_0(t)\, \mathrm{K}(\theta(t), a; \boldsymbol{X})$$

quel que soient $t > 0$ et $a \in \Sigma(\boldsymbol{X})$. On en tire que pour tout $a \in \mathrm{K}_{\varphi,q}(\boldsymbol{X})$, on a

$$\|a\|^q_{\mathrm{K}_{\psi,q}(\boldsymbol{A})} \leq C^q \int_0^{+\infty} \left(\frac{\varphi_0(t)\, \mathrm{K}(\theta(t), a; \boldsymbol{X})}{\psi(t)} \right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t} = C^q \int_0^{+\infty} \left(\frac{\mathrm{K}(\theta(t), a; \boldsymbol{X})}{\varphi \circ \theta(t)} \right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

On sait alors par le lemme 2.4.3 que $\varphi \circ \theta \sim \varphi \circ \xi$ et de nouveau, quitte à augmenter C, on suppose que C vérifie les inégalités associées à cette équivalence. On remarque alors que $\frac{\theta}{\xi} \leq C$ avec $C > 1$ et donc

$$\begin{aligned}
\|a\|^q_{\mathrm{K}_{\psi,q}(\boldsymbol{A})} &\leq C^{2q} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\max(1, \frac{\theta(t)}{\xi(t)})\, \mathrm{K}(\xi(t), a; \boldsymbol{X})}{\varphi \circ \xi(t)} \right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&\leq C^{3q} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\mathrm{K}(\xi(t), a; \boldsymbol{X})}{\varphi \circ \xi(t)} \right)^q \frac{\xi(t)}{t|\xi'(t)|} \cdot \frac{|\xi'(t)|\mathrm{d}t}{\xi(t)} \\
&\leq C^{3q}\, \underline{\mathrm{b}}'(\xi)^{-1} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\mathrm{K}(s, a; \boldsymbol{X})}{\varphi(s)} \right)^q \frac{\mathrm{d}s}{s}
\end{aligned}$$

où l'on a effectué le changement de variable $s = \xi(t)$ pour obtenir la dernière inégalité. Montrons maintenant que $\mathrm{K}_{\psi,q}(\boldsymbol{A}) \hookrightarrow \mathrm{K}_{\varphi,q}(\boldsymbol{X})$.
Si $t > 0$, alors les propositions 1.3.5 et 2.2.2 nous donnent que $\Sigma(\boldsymbol{X})$ muni de la norme $\mathrm{K}(\xi(t), \cdot\,; \boldsymbol{X})$ est de Banach. Si de plus, $a \in \widetilde{\mathrm{J}}_{\psi,q}(\boldsymbol{A})$ et si $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{S}'(a)$, alors, on sait que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n$ converge dans $\Sigma(\boldsymbol{X})$ si elle converge absolument dans cet espace et on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}(\xi(t), a; \boldsymbol{X}) &= \mathrm{K}\left(\xi(t), \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n; \boldsymbol{X}\right) \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{K}(\xi(t), b(s); \boldsymbol{X})
\end{aligned}$$

En imitant le raisonnement de la proposition 2.3.11, si on pose $b = \frac{1}{\ln(2)} \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n \chi_{[2^n, 2^{n+1}[}$, alors, en applicant la proposition 2.3.6, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}(\xi(t), a; \boldsymbol{X}) &\leq \int_0^{+\infty} \mathrm{K}(\xi(t), b(s); \boldsymbol{X}) \frac{\mathrm{d}s}{s} \\
&\leq \int_0^{+\infty} \min\left(1, \frac{\xi(t)}{\theta(s)}\right) \mathrm{J}(\theta(s), b(s); \boldsymbol{X}) \frac{\mathrm{d}s}{s}.
\end{aligned}$$

Puisque $X_k \in \mathcal{C}_{\mathrm{J}}(\varphi_k, \boldsymbol{A})$ pour tout $k \in \{0, 1\}$, on peut supposer, quitte à l'augmenter, que C vérifie les inégalités associées aux définitions pour obtenir

$$\mathrm{J}(\theta(s), b(s); \boldsymbol{X}) = \frac{1}{\varphi_0(s)} \max(\varphi_0(s) \|b(s)\|_{X_0}, \varphi_1(s) \|b(s)\|_{X_1}) \leq C \frac{\mathrm{J}(s, b(s); \boldsymbol{A})}{\varphi_0(s)}$$

quel que soit $s > 0$. Au total, on a

$$\mathrm{K}(\xi(t), a; \boldsymbol{X}) \leq C \int_0^{+\infty} \min\left(1, \frac{\xi(t)}{\theta(s)}\right) \frac{\mathrm{J}(s, b(s); \boldsymbol{A})}{\varphi_0(s)} \frac{\mathrm{d}s}{s}$$

pour tout $t > 0$. En utilisant le changement de variable $t = \xi(\sigma)$ puis l'inégalité précédente, on obtient

$$\begin{aligned}
\|a\|_{\mathrm{K}_{\varphi,q}(\boldsymbol{X})}^q &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{\mathrm{K}(t, a; \boldsymbol{X})}{\varphi(t)}\right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\frac{\mathrm{K}(\xi(\sigma), a; \boldsymbol{X})}{\varphi \circ \xi(\sigma)}\right)^q \frac{\sigma|\xi'(\sigma)|}{\xi(\sigma)} \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma} \\
&\leq \overline{\mathrm{b}}'(\xi) \int_0^{+\infty} \left(\frac{\mathrm{K}(\xi(\sigma), a; \boldsymbol{X})}{\varphi \circ \xi(\sigma)}\right)^q \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma} \\
&\leq C^q \overline{\mathrm{b}}'(\xi) \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\varphi \circ \xi(\sigma)} \int_0^{+\infty} \min\left(1, \frac{\xi(\sigma)}{\theta(s)}\right) \frac{\mathrm{J}(s, b(s); \boldsymbol{A})}{\varphi_0(s)} \frac{\mathrm{d}s}{s}\right)^q \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma} \\
&= C^q \overline{\mathrm{b}}'(\xi) \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\varphi \circ \theta(s)}{\varphi \circ \xi(\sigma)} \min\left(1, \frac{\xi(\sigma)}{\theta(s)}\right) \frac{\mathrm{J}(s, b(s); \boldsymbol{A})}{(\varphi \circ \theta)(s) \cdot \varphi_0(s)} \frac{\mathrm{d}s}{s}\right)^q \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma}.
\end{aligned}$$

En appliquant la définition de $\overline{\varphi}$, le changement de variable $\sigma' = \xi(\sigma)$ de la même façon que pour montrer l'inclusion continue précédente puis le changement de variable $\sigma'' = \frac{\sigma' s}{\theta(s)}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\|a\|^q_{\mathrm{K}_{\varphi,q}(\boldsymbol{X})} &\leq C^q\,\overline{\mathrm{b}}'(\xi)\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}\overline{\varphi}\left(\frac{\theta(s)}{\xi(\sigma)}\right)\min\left(1,\frac{\xi(\sigma)}{\theta(s)}\right)\frac{\mathrm{J}(s,b(s);\boldsymbol{A})}{\psi(s)}\frac{\mathrm{d}s}{s}\right)^q\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma}\\
&\leq C^q\,\underline{\mathrm{b}}'(\xi)^{-1}\,\overline{\mathrm{b}}'(\xi)\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}\overline{\varphi}\left(\frac{\theta(s)}{\sigma'}\right)\min\left(1,\frac{\sigma'}{\theta(s)}\right)\frac{\mathrm{J}(s,b(s);\boldsymbol{A})}{\psi(s)}\frac{\mathrm{d}s}{s}\right)^q\frac{\mathrm{d}\sigma'}{\sigma'}\\
&= C^q\,\underline{\mathrm{b}}'(\xi)^{-1}\,\overline{\mathrm{b}}'(\xi)\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}\overline{\varphi}\left(\frac{s}{\sigma''}\right)\min\left(1,\frac{\sigma''}{s}\right)\frac{\mathrm{J}(s,b(s);\boldsymbol{A})}{\psi(s)}\frac{\mathrm{d}s}{s}\right)^q\frac{\mathrm{d}\sigma''}{\sigma''}\\
&= C^q\,\underline{\mathrm{b}}'(\xi)^{-1}\,\overline{\mathrm{b}}'(\xi)\left\|\left(\overline{\varphi}(\frac{1}{\cdot})\min(1,\,\cdot\,)\right)\star\left(\frac{\mathrm{J}(\,\cdot\,,b(\,\cdot\,);\boldsymbol{A})}{\psi(\,\cdot\,)}\right)\right\|^q_{L^*_q}
\end{aligned}$$

Le lemme 1.1.21 nous montre que la fonction $t\mapsto\overline{\varphi}(\frac{1}{t})\min(1,t)$ appartient à L^*_1 et donc le théorème 2.1.5 nous donne directement que

$$\|a\|^q_{\mathrm{K}_{\varphi,q}(\boldsymbol{X})}\leq C^q\,\underline{\mathrm{b}}'(\xi)^{-1}\,\overline{\mathrm{b}}'(\xi)\left\|\overline{\varphi}(\frac{1}{\cdot})\min(1,\,\cdot\,)\right\|^q_{L^*_1}\left\|\frac{\mathrm{J}(\,\cdot\,,b(\,\cdot\,);\boldsymbol{A})}{\psi(\,\cdot\,)}\right\|^q_{L^*_q}.$$

Finalement, en poursuivant le raisonnement de la proposition 2.3.11, on sait qu'il existe une constante $C'>0$ ne dépendant pas de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\left\|\frac{\mathrm{J}(\,\cdot\,,b(\,\cdot\,);\boldsymbol{A})}{\psi(\,\cdot\,)}\right\|^q_{L^*_q}\leq C'\left\|\left(\frac{J(2^n,b_n;\boldsymbol{A})}{\psi(2^n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right\|^q_{\ell_q}$$

Au total, on a montré l'existence d'une constante $C''>0$ qui vérifie

$$\|a\|^q_{\mathrm{K}_{\varphi,q}(\boldsymbol{X})}\leq C''\left\|\left(\frac{J(2^n,b_n;\boldsymbol{A})}{\psi(2^n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right\|^q_{\ell_q}$$

quelle que soit la représentation $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathcal{S}'(a)$. Cela montre directement que

$$\mathrm{K}_{\psi,q}(\boldsymbol{A})=\widetilde{\mathrm{J}}_{\psi,q}(\boldsymbol{A})\hookrightarrow\mathrm{K}_{\varphi,q}(\boldsymbol{X}).$$

□

Remarque 2.4.5. Pour conclure cette section, nous allons faire un parallèle avec le théorème de réitération du contexte classique, ce dernier ayant été introduit dans les remarques 1.3.11 et 2.2.10. Ce parallèle permet de justifier la forme de ψ et de donner un exemple concret de réalisation de l'hypothèse sur θ dans le théorème général. L'énoncé du théorème classique est le suivant [3] :

Soient $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathcal{N}}$, $\theta_0, \theta_1, \Theta \in]0,1[$ tels que $\theta_0 \neq \theta_1$ et soit $q \in [1, +\infty]$; si $X_k \in \mathcal{C}(\theta_k, \boldsymbol{A})$ [13] est complet pour tout $k \in \{0,1\}$, alors pour $\boldsymbol{X} = (X_0, X_1)$ et $\eta = (1-\theta)\theta_0 + \theta\theta_1$ on a

$$\mathrm{K}_{\Theta,q}(\boldsymbol{X}) = \mathrm{K}_{\eta,q}(\boldsymbol{A}).$$

En particulier, si $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathcal{B}}$ et si $q_0, q_1 \in [1, +\infty]$, alors

$$\mathrm{K}_{\Theta,q}(\mathrm{K}_{\theta_0,q_0}(\boldsymbol{A}), \mathrm{K}_{\theta_1,q_1}(\boldsymbol{A})) = \mathrm{K}_{\eta,q}(\boldsymbol{A}).$$

Pour montrer ce résultat, commençons par poser $\psi_\alpha : t \mapsto t^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Il suffit alors d'appliquer le théorème général à $\psi_{\theta_0}, \psi_{\theta_1}$ et ψ_Θ dans les rôles de φ_0, φ_1 et φ respectivement. On remarque que l'hypothèse raisonnable $\theta_0 \neq \theta_1$ nous donne directement que $\underline{\mathrm{b}}(\psi_{\theta_1}/\psi_{\theta_0}) = \overline{\mathrm{b}}(\psi_{\theta_1}/\psi_{\theta_0}) = \theta_1 - \theta_0 \neq 0$ et donc l'hypothèse sur θ du théorème général est vérifiée. On remarque également que $\eta = \Theta(\theta_1 - \theta_0) + \theta_0$ ce qui montre bien que pour tout $t > 0$, on a

$$\left(\psi_\Theta \circ \frac{\psi_{\theta_1}}{\psi_{\theta_0}}\right)(t) \cdot \psi_{\theta_0}(t) = t^{\Theta(\theta_1 - \theta_0) + \theta_0} = \psi_\eta(t).$$

13. On dit que $X_k \in \mathcal{C}(\theta_k, \boldsymbol{A})$ si $X_k \in \mathcal{C}(\psi_{\theta_k}, \boldsymbol{A})$ avec $\psi_{\theta_k} : t \mapsto t^{\theta_k}$.

3 Méthode d'interpolation complexe

Dans cette section, nous allons introduire un foncteur d'interpolation dont la construction repose sur l'analyse complexe. Cette théorie n'ayant pas encore été généralisée à un paramètre fonctionnel, nous utiliserons les notions de la théorie classique présentées dans les remarque 1.3.11 et 2.4.5. Ce mémoire étant axé sur la théorie généralisée, nous ne présenterons ici que les rudiments de la méthode complexe. Le lecteurs intéressé pourra retrouver les principaux résultats de la méthode dans [3].

Dans cette section, nous procéderons en deux temps. Tout d'abord, nous présenterons la méthode complexe et le foncteur principal associé. Nous montrerons qu'il s'agit bien d'un foncteur d'interpolation en combinant les raisonnement de [3] et [14]. Ensuite, nous ferons un parallèle avec la théorie généralisée en énonçant deux résultat présentés dans [11].

3.1 Construction de la méthode

Pour commencer, nous avons besoin de la notion de fonction analytique pour des fonctions à valeurs dans un espace de Banach.

Définition 3.1.1. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, B un espace de Banach et soit $f : \mathbb{C} \to B$; la fonction f est dite analytique sur Ω si pour tout $z_0 \in \Omega$ il existe $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de B pour laquelle on a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n$$

sur un disque ouvert centré en z_0, la convergence de la série ayant lieu dans B.

On remarque que si $B = \mathbb{C}$, alors la notion d'analytique est la même que la notion d'holomorphie. Nous auront besoin d'une propriété des fonctions holomorphes dans la suite qui est le principe du maximum. Montrons que cette propriété est conservée pour les fonctions analytiques :

Théorème 3.1.2. *(Principe du maximum) Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, B un espace de Banach et soit $f : \mathbb{C} \to B$ une fonction analytique sur Ω et continue sur $\overline{\Omega}$; si $\partial\Omega$ désigne la frontière de Ω et est non vide, alors on a*

$$\sup_{z\in\Omega} \|f(z)\|_B = \sup_{z\in\overline{\Omega}} \|f(z)\|_B = \sup_{z\in\partial\Omega} \|f(z)\|_B .$$

Démonstration. Nous allons nous servir du principe du maximum quand $B = \mathbb{C}$. Soit $z \in \Omega$; par le théorème de Hahn-Banach, on sait qu'il existe $T_z \in B'$ tel que $\|T_z\|_{B,\mathbb{C}} \leq 1$ et tel que $T_z(f(z)) = \|f(z)\|_B$. Il est clair que la fonction $T \circ f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est continue sur $\overline{\Omega}$, remarquons qu'elle est également analytique sur Ω : si $z_0 \in \Omega$, alors, puisque f est analytique sur Ω, on sait qu'il existe $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de B pour laquelle on a

$$f(\zeta) = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n (\zeta - z_0)$$

pour tout ζ appartenant à un disque ouvert centré en z_0. Puisque $T_z \in B'$, on remarque directement que

$$(T_z \circ f)(\zeta) = \sum_{n \in \mathbb{N}} T_z(b_n)(\zeta - z_0)$$

sur le même disque.
L'application $T_z \circ f$ vérifie donc les hypothèses du principe de maximum classique et on a

$$\|f(z)\|_B \leq \sup_{\zeta \in \Omega} |(T_z \circ f)(\zeta)| = \sup_{\zeta \in \partial \Omega} |(T_z \circ f)(\zeta)| \leq \sup_{\zeta \in \partial \Omega} \|T_z\|_{B,\mathbb{C}} \|f(\zeta)\|_B \leq \sup_{\zeta \in \partial \Omega} \|f(\zeta)\|_B .$$

L'inégalité entre les deux extrêmes étant valide quel que soit $z \in \Omega$, on conclut.

□

Définition 3.1.3. Soit $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathcal{B}}$; On pose

$$S = \{ \ z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \Re(z) \leq 1 \ \}$$

Une fonction $f : S \to \Sigma(\boldsymbol{A})$ appartient à $\mathfrak{F}(\boldsymbol{A})$ si

- ⁎ elle est continue et bornée sur S,
- ⁎ elle est analytique sur S°,
- ⁎ pour tout $k \in \{0, 1\}$, on a $f(k + i\mathbb{R}) \subset A_k$,
- ⁎ pour tout $k \in \{0, 1\}$, la fonction définie sur les réels $t \mapsto f(k+it)$ est bornée et continue dans A_k,
- ⁎ pour tout $k \in \{0, 1\}$, on a

$$\lim_{t \to -\infty} \|f(k + it)\|_{A_k} = \lim_{t \to +\infty} \|f(k + it)\|_{A_k} = 0.$$

On muni $\mathfrak{F}(\boldsymbol{A})$ de la norme

$$\|f\|_{\mathfrak{F}(\boldsymbol{A})} = \max(\sup_t \|f(it)\|_{A_0}, \sup_t \|f(1 + it)\|_{A_1}).$$

Remarque 3.1.4. La proposition 1.3.5 nous donne que $\Sigma(\boldsymbol{A})$ est complet. Puisque $\partial S^\circ = i\mathbb{R} \cup (1 + i\mathbb{R})$, le principe du maximum et la proposition 1.3.4 nous donnent directement que si $f \in \mathfrak{F}(\boldsymbol{A})$, alors

$$\sup_{z \in S} \|f(z)\|_{\Sigma(\boldsymbol{A})} \leq \|f\|_{\mathfrak{F}(\boldsymbol{A})} .$$

On en tire que $\|f\|_{\mathfrak{F}(\boldsymbol{A})} = 0$ si et seulement si $f = 0$. Les autres propriétés de la norme étant directement vérifiées, $\| \cdot \|_{\mathfrak{F}(\boldsymbol{A})}$ est bien une norme sur $\mathfrak{F}(\boldsymbol{A})$.

Proposition 3.1.5. *Soit $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathcal{B}}$; l'espace $\mathfrak{F}(\boldsymbol{A})$ est de Banach.*

Démonstration. Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ une série absolument convergente de $\mathfrak{F}(\boldsymbol{A})$; la remarque précédente nous donne que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sup_{z\in S} \|f_n(z)\|_{\Sigma(\boldsymbol{A})} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{\mathfrak{F}(\boldsymbol{A})} < +\infty$$

et donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement sur S dans $\Sigma(\boldsymbol{A})$. En particulier, puisque $\Sigma(\boldsymbol{A})$ est de Banach par la proposition 1.3.5, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ converge vers un élément $f(x)$ dans $\Sigma(\boldsymbol{A})$ quel que soit $x\in S$. On en déduit que l'application $f : S \to \mathbb{C}$ est continue sur S et analytique sur S°. De plus, pour tout $k \in \{0,1\}$, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f_n(k+it)\|_{A_k} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{\mathfrak{F}(\boldsymbol{A})} < +\infty$$

et donc la série converge normalement sur $k+i\mathbb{R}$ dans A_k. Puisque $A_k \hookrightarrow \Sigma(\boldsymbol{A})$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément vers f sur $k+i\mathbb{R}$ dans A_k. Cela nous donne que les fonctions définies sur les réels $t \mapsto f(it)$ et $t \mapsto f(1+it)$ sont bornées et continues dans A_0 et A_1 respectivement. Au total, $f \in \mathfrak{F}(\boldsymbol{A})$ et on a pour tout $k\in\{0,1\}$ et pour tout $N\in\mathbb{N}$ que

$$\left\| f - \sum_{n=0}^{N} f_n \right\|_{\mathfrak{F}(\boldsymbol{A})} \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \|f_n\|_{\mathfrak{F}(\boldsymbol{A})}$$

où le membre de droite tend vers 0 lorsque N tends vers $+\infty$.

□

Définition 3.1.6. Soit $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathcal{B}}$ et soit $\theta \in [0,1]$; on note $\mathrm{C}_\theta(\boldsymbol{A})$ l'espace constitué des $a \in \Sigma(\boldsymbol{A})$ pour lesquels il existe une fonction $f \in \mathfrak{F}(\boldsymbol{A})$ telle que $f(\theta) = a$. On muni cet espace de la norme

$$\|a\|_{\mathrm{C}_\theta(\boldsymbol{A})} = \inf_{\substack{f\in\mathfrak{F}(\boldsymbol{A})\\ f(\theta)=a}} \|f\|_{\mathfrak{F}(\boldsymbol{A})} .$$

Théorème 3.1.7. *Soit $\theta \in [0,1]$; C_θ est un foncteur d'interpolation exactement d'exposant θ sur la catégorie $\mathcal{B}$.*

Démonstration. Soit $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathcal{B}}$; posons $A = \mathrm{C}_\theta(\boldsymbol{A})$ et montrons que A est un espace de Banach. On considère l'application

$$T : \mathfrak{F}(\boldsymbol{A}) \to \Sigma(\boldsymbol{A}) : f \mapsto f(\theta).$$

L'application T est clairement linéaire. De plus, elle est continue car si $f \in \mathfrak{F}(\boldsymbol{A})$, alors la remarque 3.1.4 nous donne que

$$\|T(f)\|_{\Sigma(\boldsymbol{A})} \leq \sup_{z\in S} \|f(z)\|_{\Sigma(\boldsymbol{A})} \leq \|f\|_{\mathfrak{F}(\boldsymbol{A})} .$$

On en tire que $\ker(T) = \{\, f \in \mathfrak{F}(\boldsymbol{A}) \mid f(\theta) = 0 \,\}$ est un sous espace fermé de $\mathfrak{F}(\boldsymbol{A})$. La proposition 3.1.5 nous donne alors que l'espace quotient $\mathfrak{F}(\boldsymbol{A})/\ker(T)$ est de Banach. Finalement, remarquons que les espaces $\mathfrak{F}(\boldsymbol{A})/\ker(T)$ et A sont isométriques par l'application

$$\widetilde{T} : \mathfrak{F}(\boldsymbol{A})/\ker(T) \to A : [f] \mapsto f(\theta).$$

Montrons maintenant que $\Delta(\boldsymbol{A}) \hookrightarrow A$.
Soit $a \in \Delta(\boldsymbol{A})$; on considère la fonction $f : z \mapsto e^{(z-\theta)^2}a$. Il est clair que $f \in \mathfrak{F}(\boldsymbol{A})$ et que $f(\theta) = a$. On peut aussi facilement montrer qu'il existe une constante $C > 0$ ne dépendant pas de a pour laquelle on a

$$\|a\|_A \leq \|f\|_{\mathfrak{F}(\boldsymbol{A})} \leq C\,\|a\|_{\Delta(\boldsymbol{A})}.$$

Montrons que A est intermédiaire.
Il ne reste plus qu'à montrer que $A \hookrightarrow \Sigma(\boldsymbol{A})$. Soit $a \in A$; pour $\varepsilon > 0$, considérons une fonction $f \in \mathfrak{F}(\boldsymbol{A})$ telle que $f(\theta) = a$ et telle que $\|f\|_{\mathfrak{F}(\boldsymbol{A})} < \|a\|_A + \varepsilon$. La remarque 3.1.4 nous donne directement que

$$\|a\|_{\Sigma(\boldsymbol{A})} = \|f(\theta)\|_{\Sigma(\boldsymbol{A})} \leq \|f\|_{\mathfrak{F}(\boldsymbol{A})} < \|a\|_A + \varepsilon.$$

L'inégalité entre les deux extrêmes étant valide quel que soit $\varepsilon > 0$, on conclut par passage à la limite.
Montrons finalement que C_θ est exactement d'exposant φ.
Soient $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \overline{\mathfrak{B}}$ et soit $T : \boldsymbol{A} \rightsquigarrow \boldsymbol{B}$; on pose $M_k = \|T\|_{A_k,B_k}$ pour $k \in \{0,1\}$. Si $a \in \mathrm{C}_\theta(\boldsymbol{A})$, alors pour $\varepsilon > 0$ fixé, considérons une fonction $f \in \mathfrak{F}(\boldsymbol{A})$ telle que $f(\theta) = a$ et telle que $\|f\|_{\mathfrak{F}(\boldsymbol{A})} < \|a\|_{\mathrm{C}_\theta(\boldsymbol{A})} + \varepsilon$. On considère alors la fonction

$$g : S \to \Sigma(\boldsymbol{B}) : z \mapsto M_0^{z-1} M_1^{-z} \cdot (T \circ f)(z).$$

Puisque $f \in \mathfrak{F}(\boldsymbol{A})$ et que T est linéaire et continue, il est clair que l'application g est continue sur S et analytique sur S°. Soit $k \in \{0,1\}$; puisqu'on a $T : \boldsymbol{A} \rightsquigarrow \boldsymbol{B}$, on sait que $T|_{A_k} : A_k \to B_k$ et donc il est clair qu'on a l'inclusion $g(k + i\mathbb{R}) \subset B_k$. De plus, si $t \in \mathbb{R}$, alors on a

$$\|g(k+it)\|_{B_k} = M_0^{k-1} M_1^{-k} \|T(f(k+it))\|_{B_k} \leq M_0^{k-1} M_1^{-k} M_k \|f(k+it)\|_{A_k} = \|f(k+it)\|_{A_k}.$$

On en déduit que $g \in \mathfrak{F}(\boldsymbol{B})$ et que $\|g\|_{\mathfrak{F}(\boldsymbol{B})} \leq \|f\|_{\mathfrak{F}(\boldsymbol{A})}$. Posons $C = M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$, il est clair que $Cg \in \mathfrak{F}(\boldsymbol{B})$ et que $Cg(\theta) = T(a)$. On a alors

$$\|T(a)\|_{\mathrm{C}_\theta(\boldsymbol{B})} \leq \|Cg\|_{\mathfrak{F}(\boldsymbol{B})} = C\,\|g\|_{\mathfrak{F}(\boldsymbol{B})} \leq C\,\|f\|_{\mathfrak{F}(\boldsymbol{A})} < C(\|a\|_{\mathrm{C}_\theta(\boldsymbol{A})} + \varepsilon).$$

L'inégalité entre les deux extrêmes étant valable quel que soit $\varepsilon > 0$, on conclut par passage à la limite.

□

3.2 Liens avec les méthodes réelles

La construction du foncteur C_θ fait intervenir le paramètre θ en tant que nombre réel et non plus en tant que fonction puissance ce qui rend la généralisation à un paramètre fonctionnel moins évidente. Cependant, on pourrait s'intéresser au résultat obtenu lorsqu'on applique les méthodes réelles généralisées à un couple d'espaces obtenu via la méthode complexe et inversement. Pour cela, introduisons le résultat suivant sans le démontrer [3].

Proposition 3.2.1. *Soit* $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathcal{B}}$ *et soit* $\theta \in [0,1]$ *; on a*

$$\mathrm{K}_{\theta,1}(\boldsymbol{A}) \hookrightarrow \mathrm{C}_{\theta}(\boldsymbol{A}) \hookrightarrow \mathrm{K}_{\theta,\infty}(\boldsymbol{A}).$$

Puisque l'espace $\mathrm{C}_{\theta}(\boldsymbol{A})$ est de Banach, la proposition 2.4.2 et la proposition précédente montrent directement que $\mathrm{C}_{\theta}(\boldsymbol{A})$ est de classe $\mathcal{C}(\theta,\boldsymbol{A})$. Le théorème de réitération nous permet directement d'arriver au résultat suivant.

Théorème 3.2.2. *Soit* $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathcal{B}}$ *et soient* $q \in [1,+\infty]$, $\theta_0, \theta_1 \in]0,1[$ *tels que* $\theta_0 \neq \theta_1$ *; si* φ *est une fonction de Boyd telle que* $0 < \underline{\mathrm{b}}(\varphi) \leq \overline{\mathrm{b}}(\varphi) < 1$ *et si on pose* $\psi(t) = \varphi(t^{\theta_1-\theta_0}) \cdot t^{\theta_0}$ *pour tout* $t > 0$, *alors on a*

$$\mathrm{K}_{\varphi,q}(\mathrm{C}_{\theta_0}, \mathrm{C}_{\theta_1}) = \mathrm{K}_{\psi,q}(\boldsymbol{A}).$$

Le dernier résultat de cette section, beaucoup moins direct, est disponible dans [11] et permet d'appliquer la méthode complexe à un couple d'espaces obtenus via la méthode réelle.

Théorème 3.2.3. *Soit* $\boldsymbol{A} \in \overline{\mathcal{B}}$ *et soient* $q_0, q_1 \in [1,+\infty]$, φ_0, φ_1 *deux fonctions de Boyd dont les indices sont strictement compris entre 0 et 1 ; si* $\theta \in]0,1[$, *si on pose* $\psi = \varphi_0^{1-\theta}\varphi_1^{\theta}$ *et si* $q \in [1,+\infty]$ *vérifie* $\frac{1}{q} = (1-\theta)\frac{1}{q_0} + \theta\frac{1}{q_1}$, *alors on a*

$$\mathrm{C}_{\theta}(\mathrm{K}_{\varphi_0,q}(\boldsymbol{A}), \mathrm{K}_{\varphi_1,q}(\boldsymbol{A})) = \mathrm{K}_{\psi,q}(\boldsymbol{A}).$$

4 Interpolations d'espaces fonctionnels

4.1 Espaces de Hölder

Dans cette section, nous allons nous intéresser à l'espace obtenu lorsque l'on applique la méthode K à un couple d'espaces de Hölder. Pour cela, nous allons suivre le raisonnement de [11] et d'abord appliquer la méthode K au couple spécifique (C_b^0, C_b^1). Ensuite, nous utiliserons le théorème de réitération pour obtenir un résultat général.

Définition 4.1.1. Soit φ une fonction de Boyd telle que $0 < \underline{\mathrm{b}}(\varphi) \leq \overline{\mathrm{b}}(\varphi) < 1$ et soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$; on a

- ⋇ $f \in C_b^0$ si f est continu et borné. On note alors $\|f\|_{C_b^0} = \|f\|_{L_\infty} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|$.
- ⋇ $f \in C_b^1$ si $f \in C_b^0$, si f est continument dérivable de dérivées bornées et si on a

$$\|f\|_{C_b^1} = \|f\|_{L_\infty} + \sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R}^n \\ x\neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} < +\infty.$$

- ⋇ $f \in C_b^\varphi$ si $f \in C_b^0$ et si on a

$$\|f\|_{C_b^\varphi} = \|f\|_{L_\infty} + \sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R}^n \\ x\neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{\varphi(|x-y|)} < +\infty. \text{[14]}$$

Remarque 4.1.2. Les espaces C_b^φ généralisent les espaces de Hölder C_b^θ (avec $0 < \theta < 1$) que l'on peut retrouver dans la littérature classique. On a en fait $C_b^\theta = C_b^{\psi_\theta}$ où $\psi_\theta : t \mapsto t^\theta$.

Lemme 4.1.3. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ une fonction continument dérivable ; si f est à support compact, alors pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, on a*

$$\int_{\mathbb{R}^n} D_k f(x) \mathrm{d}x = 0$$

où $D_k f$ désigne la dérivée de f par rapport à sa $k^{\text{ème}}$ composante.

Démonstration. Il est clair que f est intégrable sur $\mathbb{R}^n$ et donc le théorème de Fubini nous donne que

$$\int_{\mathbb{R}^n} D_k f(x) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} D_k f(x_1, ..., x_n) \mathrm{d}x_k \right) \mathrm{d}(x_1, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots, x_n).$$

Or on a

$$\int_{\mathbb{R}} D_k f(x_1, ..., x_n) \mathrm{d}x_k = \lim_{x_k \to +\infty} f(x_1, ..., x_n) - \lim_{x_k \to -\infty} f(x_1, ..., x_n) = 0$$

pour tout $(x_1, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

□

14. Dans la suite de cette section, on se permettra de ne plus préciser que $x, y \in \mathbb{R}^n$ dans le suprémum et de noter simplement $\sup\limits_{x\neq y}$.

Théorème 4.1.4. *Soit φ une fonction de Boyd telle que $0 < \underline{\mathrm{b}}(\varphi) \le \overline{\mathrm{b}}(\varphi) < 1$; on a*

$$\mathrm{K}_{\varphi,\infty}(C_b^0, C_b^1) = C_b^{\varphi}$$

où l'égalité signifie que les deux espaces possèdent les mêmes éléments et des normes équivalentes.

Démonstration. Commençons par montrer que $\mathrm{K}_{\varphi,\infty}(C_b^0, C_b^1) \hookrightarrow C_b^{\varphi}$.
Soit $a \in \mathrm{K}_{\varphi,\infty}(C_b^0, C_b^1)$; par définition de $\mathrm{K}(1, a; (C_b^0, C_b^1))$, on sait qu'il existe $(a_0, a_1) \in C_b^0 \times C_b^1$ qui vérifie $a = a_0 + a_1$ et

$$\|a_0\|_{C_b^0} + \|a_1\|_{C_b^1} \le 2\,\mathrm{K}(1, a).$$

On remarque alors que

$$\|a\|_{L_\infty} \le \|a_0\|_{L_\infty} + \|a_1\|_{L_\infty} + \sup_{x \neq y} \frac{|a_1(x) - a_1(y)|}{\varphi(|x-y|)} = \|a_0\|_{C_b^0} + \|a_1\|_{C_b^1} \le 2\frac{\mathrm{K}(1,a)}{\varphi(1)}. \tag{8}$$

De plus, si $x, y \in \mathbb{R}^n$ et si $x \neq y$, alors comme précédemment, il existe $(a_0', a_1') \in C_b^0 \times C_b^1$ qui vérifie $a = a_0' + a_1'$ et

$$\|a_0'\|_{C_b^0} + |x-y|\, \|a_1'\|_{C_b^1} \le 2\,\mathrm{K}(|x-y|, a).$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\frac{|a(x) - a(y)|}{\varphi(|x-y|)} &\le \frac{|a_0'(x) - a_0'(y)|}{\varphi(|x-y|)} + \frac{|a_1'(x) - a_1'(y)|}{\varphi(|x-y|)} \\
&\le \frac{2\,\|a_0'\|_{L_\infty}}{\varphi(|x-y|)} + 2\frac{|x-y|}{\varphi(|x-y|)} \frac{|a_1'(x) - a_1'(y)|}{|x-y|} + 2\frac{|x-y|}{\varphi(|x-y|)} \cdot \|a_1'\|_{L_\infty} \\
&\le \frac{2}{\varphi(|x-y|)} \left(\|a_0'\|_{L_\infty} + |x-y| \left(\|a_1'\|_{L_\infty} + \sup_{x \neq y} \frac{|a_1'(x) - a_1'(y)|}{|x-y|} \right) \right) \\
&\le 2\frac{\mathrm{K}(|x-y|, a)}{\varphi(|x-y|)}.
\end{aligned}$$

En utilisant (8) et l'inégalité précédente, la définition de la norme sur $\mathrm{K}_{\varphi,\infty}(C_b^0, C_b^1)$ nous donne que

$$\|a\|_{C_b^{\varphi}} = 2\frac{\mathrm{K}(1,a)}{\varphi(1)} + 2\sup_{x \neq y} \frac{\mathrm{K}(|x-y|, a)}{\varphi(|x-y|)} \le 4\,\|a\|_{\mathrm{K}_{\varphi,\infty}(C_b^0, C_b^1)}.$$

Montrons maintenant que $C_b^{\varphi} \hookrightarrow \mathrm{K}_{\varphi,\infty}(C_b^0, C_b^1)$.
Soit $a \in C_b^{\varphi}$; commençons par remarquer que puisque $0 < \underline{\mathrm{b}}(\varphi)$, le corollaire 1.1.11 nous donne que $\lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = +\infty$ et par définition de K, on a

$$\frac{\mathrm{K}(t,a)}{\varphi(t)} \le \frac{\|a\|_{C_b^0} + t\,\|0\|_{C_b^1}}{\varphi(t)} = \frac{\|a\|_{L_\infty}}{\varphi(t)}$$

quel que soit $t > 0$. On en tire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que si $t \geq C$, alors

$$\frac{\mathrm{K}(t, a)}{\varphi(t)} \leq \|a\|_{C_b^\varphi} . \tag{9}$$

Supposons donc que $t < C$ et considérons $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ une fonction continument dérivable, à support compact dans $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ et d'intégrale 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$a_0^{(t)}(x) = \frac{1}{t^n} \int_{\mathbb{R}^n} (a(x) - a(x-y)) f\left(\frac{y}{t}\right) \mathrm{d}y$$

et

$$a_1^{(t)}(x) = \frac{1}{t^n} \int_{\mathbb{R}^n} a(x-y) f\left(\frac{y}{t}\right) \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} a(y) f\left(\frac{x-y}{t}\right) \mathrm{d}y.$$

On remarque alors que $(a_0^{(t)}, a_1^{(t)}) \in C_b^0 \times C_b^1$ et que $a = a_0^{(t)} + a_1^{(t)}$. De plus, si on note $s_a = \|a\|_{C_b^\varphi} - \|a\|_{L_\infty}$, alors, par définition de $\overline{\varphi}$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ que

$$\begin{aligned}
|a_0^{(t)}(x)| &\leq \frac{1}{t^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|a(x) - a(x-y)|}{\varphi(|y|)} \varphi(|y|) f\left(\frac{y}{t}\right) \mathrm{d}y \\
&\leq \frac{s_a \varphi(t)}{t^n} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi}\left(\frac{|y|}{t}\right) f\left(\frac{y}{t}\right) \mathrm{d}y \\
&= s_a \varphi(t) \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi}\left(|y'|\right) f\left(y'\right) \mathrm{d}y'
\end{aligned}$$

où la fonction $y' \mapsto \overline{\varphi}\left(|y'|\right) f\left(y'\right)$ est bien intégrable car, par le lemme 1.1.5 appliqué à $\ln \circ \overline{\varphi}$, la fonction $\overline{\varphi}$ est bornée sur le support de f. Notons C' la valeur de cette intégrale pour le reste de la démonstration. En utilisant la première écriture de $a_1^{(t)}$ et ce qui vient d'être obtenu, on arrive à

$$\left\|a_1^{(t)}\right\|_{L_\infty} \leq \left\|a_0^{(t)}\right\|_{L_\infty} \leq C' s_a \varphi(t). \tag{10}$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ tels que $x \neq y$; par le théorème des accroissements finis, on sait qu'il existe $z_1, ..., z_n \in \mathbb{R}^n$ pour lesquels on a

$$|a_1^{(t)}(x) - a_1^{(t)}(y)| = \left|\sum_{j=1}^n D_j a_1^{(t)}(z_j) |x_j - y_j|\right| \leq \sum_{j=1}^n \left\|D_j a_1^{(t)}\right\|_{L_\infty} |x - y|. \tag{11}$$

Étudions donc les dérivées partielles de $a_1^{(t)}$: si $k \in \{1, ..., n\}$, alors le lemme précédent nous donne que

$$D_k a_1^{(t)}(x) = \frac{1}{t^{n+1}} \int_{\mathbb{R}^n} a(x-y) f\left(\frac{y}{t}\right) \mathrm{d}y = \frac{1}{t^{n+1}} \int_{\mathbb{R}^n} (a(x-y) - a(x)) f\left(\frac{y}{t}\right) \mathrm{d}y.$$

Le même raisonnement que pour majorer $a_0^{(t)}(x)$ nous donne

$$\left\| D_k a_1^{(t)} \right\|_{L_\infty} \le \frac{1}{t} C' s_a \varphi(t).$$

Au total, en appliquant les inégalités (10) et (11) puis l'inégalité précédente, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{K}(t,a)}{\varphi(t)} &\le \frac{1}{\varphi(t)} \left(\left\| a_0^{(t)} \right\|_{L_\infty} + t \left(\left\| a_1^{(t)} \right\|_{L_\infty} + \sup_{x \neq y} \frac{|a_1^{(t)}(x) - a_1^{(t)}(y)|}{|x-y|} \right) \right) \\
&\le (C' s_a + t C' s_a + C' n s_a) \\
&\le C'(1+t+n)(s_a + \|a\|_{L_\infty}) \\
&\le C'(1+C+n) \|a\|_{C_b^\varphi}
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que $t < C$ pour la dernière inégalité.
En utilisant (9), on a donc bien montré que

$$\|a\|_{\mathrm{K}_{\varphi,\infty}(C_b^0, C_b^1)} = \max\left(\sup_{0<t<C} \frac{\mathrm{K}(t,a)}{\varphi(t)}, \sup_{t \ge C} \frac{\mathrm{K}(t,a)}{\varphi(t)} \right) \le C'(1+C+n) \|a\|_{C_b^\varphi}.$$

□

Remarque 4.1.5. On peut faire le parallèle avec la théorie des espaces d'interpolation classique [3]. Le théorème précédent nous donne directement.
Soit $\theta \in]0,1[$; on a

$$\mathrm{K}_{\theta,\infty}(C_b^0, C_b^1) = C_b^\theta$$

où $\mathrm{K}_{\theta,\infty}$ est le foncteur d'interpolation présenté dans la remarque 2.2.10.

Le théorème de réitération nous permet d'appliquer facilement la méthode K à des espaces de Hölder généralisés C_b^φ :

Corollaire 4.1.6. *Soient $\varphi_0, \varphi_1, \varphi$ des fonctions de Boyd dont les indices inférieurs et supérieurs sont strictement compris entre 0 et 1 ; si $\underline{\mathrm{b}}(\theta) > 0$ ou $\overline{\mathrm{b}}(\theta) < 0$ avec $\theta = \varphi_1/\varphi_0$, alors pour $\psi = (\varphi \circ \theta) \cdot \varphi_0$ on a*

$$\mathrm{K}_{\varphi,\infty}(C_b^{\varphi_0}, C_b^{\varphi_1}) = C_b^\psi.$$

4.2 Espaces de Lorentz

Nous allons maintenant appliquer la méthode K à un couple d'espaces de Lorentz. Comme pour les espaces de Hölder, nous allons d'abord nous intéresser à un couple particulier, ici (L_1, L_∞), avant de conclure avec le théorème de réitération. Pour ce faire, nous allons adapter le raisonnement de [3] et d'abord calculer explicitement la valeur de la norme $\mathrm{K}(t, \cdot\,; (L_1, L_\infty))$ quel que soit $t > 0$. Nous conclurons cette section en montrant le théorème d'interpolation de Riesz-Thorin présenté dans l'introduction.

Définition 4.2.1. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et soit $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable ; on définit le réarrangement décroissant de f comme la fonction

$$f^* : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^+ : t \mapsto \inf\{ \, s > 0 \mid d_f(s) \leq t \, \}$$

où $d_f(s) = \mu(\{ \, x \in X \mid |f(x)| > s \, \})$.

Nous allons présenter les principales propriétés du réarrangement décroissant. Le lecteur intéressé pourra en retrouver les preuves dans la proposition 1.4.5 de [6].

Proposition 4.2.2. *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et soient $f : X \to \mathbb{C}$ et $g : X \to \mathbb{C}$ deux fonctions mesurables ; on a*

1. *la fonction f^* est décroissante*
2. *si $t_1, t_2 > 0$, alors $(f+g)^*(t_1 + t_2) \leq f^*(t_1) + g^*(t_2)$*
3. *si $k \in \mathbb{C}$, alors $(kf)^* = |k| f^*$*
4. *$d_f = d_{f^*}$*
5. *si $p \in [1, +\infty]$, alors $\|f\|_{L_p(X, \mathcal{A}, \mu)} = \|f^*\|_{L_p(\mathbb{R}_0^+, \mathrm{d}x)}$*

Définition 4.2.3. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré ; si φ est une fonction de Boyd telle que $0 < \underline{\mathrm{b}}(\varphi) \leq \overline{\mathrm{b}}(\varphi) < 1$ ou telle que $\varphi \in \{1, \mathrm{id}\}$ et si $q \in [1, +\infty]$, alors on définit l'espace $L_{\varphi,q}(X, \mathcal{A}, \mu)$ comme le l'espace des fonctions mesurables $f : X \to \mathbb{C}$ pour lesquelles la valeur

$$\|f\|_{L_{\varphi,q}(X, \mathcal{A}, \mu)} = \left\| \varphi \cdot f^* \right\|_{L_q^*}$$

est finie. Comme il est d'usage pour ce type de construction, le passage à l'espace quotient permet d'identifier les fonctions qui coïncident μ-presque partout. On muni cet espace de la quasi-norme [15] $\| \cdot \|_{L_{\varphi,q}(X, \mathcal{A}, \mu)}$.

Afin d'alléger les notations, fixons un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$ pour le reste de cette section et notons simplement $L_{\varphi,q}$ au lieu de $L_{\varphi,q}(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Proposition 4.2.4. *Soient φ est une fonction de Boyd telle que $0 < \underline{\mathrm{b}}(\varphi) \leq \overline{\mathrm{b}}(\varphi) < 1$ ou telle que $\varphi \in \{1, \mathrm{id}\}$ et $q \in [1, +\infty]$; l'application $\| \cdot \|_{L_{\varphi,q}}$ est une quasi-norme.*

Démonstration. Soient $f, g \in L_{\varphi,q}$; considérons $\varepsilon \in]0, 1[$. Le point 2 de la proposition 4.2.2 nous donne que pour tout $t > 0$, on a

$$(f+g)^*(t) \leq f^*((1-\varepsilon)t) + g^*(\varepsilon t).$$

15. Une quasi-norme vérifie les mêmes propriétés qu'une norme à l'exception de l'inégalité triangulaire qui est remplacée par $\|x + y\| \leq C(\|x\| + \|y\|)$ pour une constante $C \geq 1$ indépendante de x et de y.

On en déduit alors que

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{L_{\varphi,q}} &= \int_0^{+\infty} \varphi(t)(f+g)^*(t)\frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&\leq \int_0^{+\infty} \varphi(t) f^*((1-\varepsilon)t)\frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_0^{+\infty} \varphi(t) g^*(\varepsilon t)\frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(\frac{t}{1-\varepsilon})}{\varphi(t)}\varphi(t) f^*(t)\frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(\frac{t}{\varepsilon})}{\varphi(t)}\varphi(t) g^*(t)\frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&\leq \overline{\varphi}\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)\|f\|_{L_{\varphi,q}} + \overline{\varphi}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\|g\|_{L_{\varphi,q}}.
\end{aligned}$$

En prenant $\varepsilon = 1/2$, on obtient

$$\|f+g\|_{L_{\varphi,q}} \leq \overline{\varphi}(2)(\|f\|_{L_{\varphi,q}} + \|g\|_{L_{\varphi,q}}).$$

Les autres propriétés de découlent directement de la proposition 4.2.2.

□

Remarque 4.2.5. Les espaces $L_{\varphi,q}$ sont une généralisation des espaces de Lorentz $L_{p,q}$ (avec $1 \leq p,q \leq +\infty$) que l'on peut retrouver dans la littérature classique. On a en fait $L_{p,q} = L_{\psi_{1/p},q}$ où $\psi_{1/p} : t \mapsto t^{1/p}$ en prenant la convention que $\frac{1}{+\infty} = 0$. La proposition 4.2.2 nous donne alors que $L_{p,p} = L_p$ quel que soit $p \in [1,+\infty]$

Pour calculer explicitement la valeur de la norme $\mathrm{K}(t,\cdot\,;(L_1,L_\infty))$, nous auront besoins de la version intégrale de l'inégalité de Minkowski et d'une écriture alternative de la norme sur L_p [4].

Lemme 4.2.6. *Soit $p \in [1,+\infty]$ et soit $f \in L_p$; si q est le conjugué de Hölder*[16] *de p, alors on a*

$$\|f\|_{L_p} = \sup\left\{\ \|fg\|_{L_1}\ \mid g \in L_q \textit{ et } \|g\|_{L_q} = 1\ \right\}$$

où le suprémum est réalisé.

Démonstration. Commençons par remarquer que si $f = 0$, le résultat est trivialement vérifié et supposons donc que ce n'est pas le cas dans la suite de la preuve.
Soit $g \in L_q$ tel que $\|g\|_{L_q} = 1$; l'inégalité de Hölder nous donne que

$$\|fg\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_p} \cdot 1.$$

On a donc montré que

$$\|f\|_{L_p} \geq \sup\left\{\ \|fg\|_{L_1}\ \mid g \in L_q \text{ et } \|g\|_{L_q} = 1\ \right\}.$$

16. C'est à dire que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Montrons l'inégalité inverse pour conclure.
Remarquons que l'on a $p = q(p-1)$ et posons $g = f^{p-1}/\|f\|_{L_p}^{p-1}$. On a bien $\|g\|_{L_q} = 1$ et on a aussi

$$\|fg\|_{L_1} = \frac{\|f^p\|_{L_1}}{\|f\|_{L_p}^{p-1}} = \frac{\|f\|_{L_p}^p}{\|f\|_{L_p}^{p-1}} = \|f\|_{L_p}.$$

□

Proposition 4.2.7. *(Inégalité de Minkowski version intégrale) Soit $p \in [1, +\infty]$, soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{A}', \nu)$ deux espaces mesurés ; si $f : X \times Y \to \mathbb{R}^+$, alors on a*

$$\left\| \int_Y f(\,\cdot\,, y) \mathrm{d}\nu(y) \right\|_{L_p(X,\mathcal{A},\mu)} \le \int_Y \|f(\,\cdot\,, y)\|_{L_p(X,\mathcal{A},\mu)} \mathrm{d}\nu(y).$$

Démonstration. Par le lemme précédent, si q est le conjugué de Hölder de p, alors par le théorème de Tonelli, on a

$$\begin{aligned}
\left\| \int_Y f(\,\cdot\,, y) \mathrm{d}\nu(y) \right\|_{L_p(X,\mathcal{A},\mu)} &= \sup_{\|g\|_{L_q}=1} \left\| \int_Y f(\,\cdot\,, y) \mathrm{d}\nu(y) \cdot g(\,\cdot\,) \right\|_{L_1(X,\mathcal{A},\mu)} \\
&\le \sup_{\|g\|_{L_q}=1} \int_X \int_Y |f(x,y) g(x)| \, \mathrm{d}\nu(y) \mathrm{d}\mu(x) \\
&= \sup_{\|g\|_{L_q}=1} \int_Y \int_X |f(x,y) g(x)| \, \mathrm{d}\mu(x) \mathrm{d}\nu(y) \\
&\le \int_Y \sup_{\|g\|_{L_q}=1} \left(\int_X |f(x,y) g(x)| \, \mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\nu(y) \\
&= \int_Y \|f(\,\cdot\,, y)\|_{L_p(X,\mathcal{A},\mu)} \mathrm{d}\nu(y).
\end{aligned}$$

□

Dans notre cas, seule l'expression de la norme $\mathrm{K}(t, \,\cdot\,; (L_1, L_\infty))$ nous intéresse. Cependant, une estimation de la norme $\mathrm{K}(t, \,\cdot\,; (L_r, L_\infty))$ pour $r > 0$ est disponible dans [10]. Il est possible d'adapter le raisonnement de cette section en utilisant cette estimation [15] cependant, cela n'est utile que lorsque l'on s'intéresse aux espaces de Lorentz $L_{p,q}$ avec $0 < p < 1$ ou $0 < q < 1$. Ces espaces n'étant pas normés mais quasi-normés [6], ils sortent du cadre de ce mémoire bien que la théorie s'adapte bien au cas des espaces quasi-normés [3, 11, 12].

Lemme 4.2.8. *Soit $a \in \Sigma(L_1, L_\infty)$; on a*

$$\mathrm{K}(t, a; (L_1, L_\infty)) = \int_0^t a^*(s) \mathrm{d}s$$

quel que soit $t > 0$.

Démonstration. Soit $t > 0$; montrons d'abord que $\mathrm{K}(t, a; (L_1, L_\infty)) \leq \int_0^t a^*(s)\mathrm{d}s$.
Posons pour tout $x \in X$

$$a_0^{(t)}(x) = \begin{cases} a(x)\left(1 - \dfrac{a^*(t)}{|a(x)|}\right) & \text{si } |a(x)| > a^*(t) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et $a_1^{(t)}(x) = a(x) - a_0^{(t)}(x)$. Si on pose

$$E_t = \left\{ x \in X \mid a_0^{(t)}(x) \neq 0 \right\} = \left\{ x \in X \mid |a(x)| > a^*(x) \right\}$$

alors on a $\mu(E_t) = d_a(a^*(t)) \leq t < +\infty$ et

$$\left\| a_0^{(t)} \right\|_{L_1} = \int_{E_t} \left(|a(x)| - a^*(t)\right) \mathrm{d}\mu(x) = \int_{E_t} |a| \; \mathrm{d}\mu - \mu(E_t) \cdot a^*(t).$$

Notons $a_t = a\chi_{E_t}$, on a alors par définition de a^*, que $(a_t)^* = a^*\chi_{]0,\mu(E_t)[}$. Le point 5 de la proposition 4.2.2 nous donne que

$$\int_{E_t} |a| \; \mathrm{d}\mu = \int_X |a_t| \; \mathrm{d}\mu = \int_0^{+\infty} (a_t)^*(s) \; \mathrm{d}s = \int_0^{\mu(E_t)} a^*(s) \; \mathrm{d}s.$$

Remarquons que par définition de a^* et de E_t, la fonction a^* est constante sur $[\mu(E_t), t]$ et donc

$$\begin{aligned} \left\| a_0^{(t)} \right\|_{L_1} &= \int_0^{\mu(E_t)} a^*(s) \; \mathrm{d}s - \mu(E_t) \cdot a^*(t) \\ &= \int_0^{\mu(E_t)} a^*(s) \; \mathrm{d}s + \int_{\mu(E_t)}^t a^*(s)\mathrm{d}s - (t - \mu(E_t))a^*(t) - \mu(E_t) \cdot a^*(t) \\ &= \int_0^t a^*(s) \; \mathrm{d}s + t \cdot a^*(t). \end{aligned}$$

On vérifie directement que $\left\| a_1^{(t)} \right\|_{L_\infty} = a^*(t)$ et on obtient au total que

$$\mathrm{K}(t, a; (L_1, L_\infty)) \leq \left\| a_0^{(t)} \right\|_{L_1} + t \cdot \left\| a_1^{(t)} \right\|_{L_\infty} = \int_0^t a^*(s) \; \mathrm{d}s.$$

Montrons maintenant que $\int_0^t a^*(s)\mathrm{d}s \leq \mathrm{K}(t, a; (L_1, L_\infty))$.
Soit $(a_0, a_1) \in L_1 \times L_\infty$ tel que $a = a_0 + a_1$ et soit $\varepsilon > 0$; le point 2 de la proposition 4.2.2 nous donne que

$$\begin{aligned} \int_0^t a^*(s)\mathrm{d}s &= \int_0^t a^*((1-\varepsilon)s + \varepsilon s)\mathrm{d}s \\ &\leq \int_0^t (a_0)^*((1-\varepsilon)s)\mathrm{d}s + \int_0^t (a_1)^*(\varepsilon s)\mathrm{d}s \\ &\leq \frac{1}{1-\varepsilon} \left\| (a_0)^* \right\|_{L_1} + t \cdot \left\| (a_1)^* \right\|_{L_\infty}. \end{aligned}$$

Le point 5 de la proposition 4.2.2 nous permet d'affirmer que $\|(a_0)^\star\|_{L_1} = \|a_0\|_{L_1}$. Pour conclure, remarquons que $\|(a_1)^\star\|_{L_\infty} = \|a_1\|_{L_\infty}$: on pose $A = \left\{ x \in X \mid |a(x)| > \|a^*\|_{L_\infty} \right\}$. Si $\mu(A) > 0$, alors pour tout $t < \mu(A)$, on aurait $a^*(t) > \|a^*\|_{L_\infty}$.
Au total, on a

$$\int_0^t a^*(s)\mathrm{d}s \leq \frac{1}{1-\varepsilon}\|a_0\|_{L_1} + t \cdot \|a_1\|_{L_\infty}$$

quel que soit $\varepsilon > 0$ et quel que soit la décomposition $(a_0, a_1) \in L_1 \times L_\infty$.

□

Théorème 4.2.9. *Soit* φ *une fonction de Boyd telle que* $0 < \underline{\mathrm{b}}(\varphi) \leq \overline{\mathrm{b}}(\varphi) < 1$ *et soit* $q \in [1, +\infty]$ *; on a*

$$\mathrm{K}_{\varphi,q}(L_1, L_\infty) = L_{\varphi^\star,q}$$

où $\varphi^\star : t \mapsto t/\varphi(t)$ *a été introduit dans la remarque 1.1.16 et où l'égalité signifie que les deux espaces possèdent les mêmes éléments et les mêmes topologies.*

Démonstration. Commençons par montrer que $\mathrm{K}_{\varphi,q}(L_1, L_\infty) \hookrightarrow L_{\varphi^\star,q}$.
Soit $a \in \mathrm{K}_{\varphi,q}(L_1, L_\infty)$; si $t > 0$, alors par décroissance de a^*, on a $a(t) \leq a(s)$ quel que soit $s \in]0, t[$ et donc le lemme 4.2.8 nous donne

$$t \cdot a^*(t) = \int_0^t a^*(t)\mathrm{d}s \leq \int_0^t a^*(s)\mathrm{d}s = \mathrm{K}(t, a; (L_1, L_\infty)).$$

On a alors

$$\|a\|_{L_{\varphi^\star,q}} = \left\| \frac{\cdot\, a^*(\,\cdot\,)}{\varphi(\,\cdot\,)} \right\|_{L_q^*} \leq \left\| \frac{\mathrm{K}(\,\cdot\,, a; (L_1, L_\infty))}{\varphi(\,\cdot\,)} \right\|_{L_q^*} = \|a\|^q_{\mathrm{K}_{\varphi,q}(L_1,L_\infty)}.$$

Montrons maintenant que $L_{\varphi^\star,q} \hookrightarrow \mathrm{K}_{\varphi,q}(L_1, L_\infty)$.
Pour faciliter la lecture en travaillant avec des intégrales plutôt que des normes sur L_q^*, supposons que $q < +\infty$, l'autre cas se traitant de la même manière. Soit $a \in L_{\varphi^\star,q}$; par le lemme 4.2.8, on a

$$\mathrm{K}(t, a; (L_1, L_\infty)) = \int_0^t a^*(s)\mathrm{d}s = \int_0^1 t \cdot a^*(st)\mathrm{d}s.$$

quel que soit $t > 0$. La proposition 4.2.7 et le fait que $\frac{\varphi(st)}{\varphi(t)} \leq \overline{\varphi}(s)$ pour $s, t > 0$ nous donnent alors que

$$\begin{aligned}
\|a\|_{\mathrm{K}_{\varphi,q}(L_1,L_\infty)} &= \left(\int_0^{+\infty} \left(\int_0^1 \frac{t}{\varphi(t)} a^*(st)\mathrm{d}s \right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{1/q} \\
&\leq \int_0^1 \left(\int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{\varphi(t)} a^*(st) \right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{1/q} \mathrm{d}s \\
&\leq \int_0^1 \frac{\overline{\varphi}(s)}{s} \left(\int_0^{+\infty} \left(\frac{st}{\varphi(st)} a^*(st) \right)^q \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^{1/q} \mathrm{d}s \\
&= \int_0^1 \frac{\overline{\varphi}(s)}{s}\mathrm{d}s \cdot \|a\|_{L_{\varphi^\star,q}}
\end{aligned}$$

où la fonction $s \mapsto \frac{\overline{\varphi}(s)}{s}$ est bien intégrable puisque[17] $0 < \underline{\mathrm{b}}(\varphi) \leq \overline{\mathrm{b}}(\varphi) < 1$.

□

Le théorème de réitération nous permet maintenant d'appliquer la méthode K à des espaces de Lorentz :

Corollaire 4.2.10. *Soient $\varphi_0, \varphi_1, \varphi$ des fonctions de Boyd dont les indices inférieurs et supérieurs sont strictement compris entre 0 et 1 et soient $q_0, q_1, q \in [1, +\infty]$; si $\underline{\mathrm{b}}(\theta) > 0$ ou $\overline{\mathrm{b}}(\theta) < 0$ avec $\theta = \varphi_1/\varphi_0$, alors pour $\psi = \varphi_0/(\varphi \circ \frac{1}{\theta})$ on a*

$$\mathrm{K}_{\varphi,q}(L_{\varphi_0,q_0}, L_{\varphi_1,q_1}) = L_{\psi,q}.$$

Démonstration. Le théorème précédent nous donne que pour tout $k \in \{0, 1\}$, on a

$$L_{\varphi_k,q_k} = \mathrm{K}_{\varphi_k^\star,q_k}(L_1, L_\infty).$$

Puisque $\frac{\varphi_1^\star}{\varphi_0^\star} = \frac{\varphi_0}{\varphi_1} = \frac{1}{\theta}$, on a

$$\underline{\mathrm{b}}\left(\frac{\varphi_1^\star}{\varphi_0^\star}\right) = -\,\overline{\mathrm{b}}\,(\theta) \text{ et } \overline{\mathrm{b}}\left(\frac{\varphi_1^\star}{\varphi_0^\star}\right) = -\,\underline{\mathrm{b}}\,(\theta)\,.$$

Les hypothèses du théorème 2.4.4 sont donc vérifiées et on a

$$\mathrm{K}_{\varphi,q}(L_{\varphi_0,q_0}, L_{\varphi_1,q_1}) = \mathrm{K}_{\varphi,q}(\mathrm{K}_{\varphi_0^\star,q_0}(L_1, L_\infty), \mathrm{K}_{\varphi_1^\star,q_1}(L_1, L_\infty)) = \mathrm{K}_{\Psi,q}(L_1, L_\infty)$$

avec $\Psi = (\varphi \circ \frac{\varphi_1^\star}{\varphi_0^\star}) \cdot \varphi_0^\star = (\varphi \circ \frac{1}{\theta}) \cdot \varphi_0^\star$. Finalement, en appliquant de nouveau le théorème précédent, on obtient

$$\mathrm{K}_{\Psi,q}(L_1, L_\infty) = L_{\Psi^\star,q}$$

avec $\Psi^\star = \psi$.

□

Remarque 4.2.11. Grâce au résultat précédent, on peut remarquer que l'interpolation d'espaces L_p via la méthode K est un espace de Lorentz et donc que ces espaces sont complets par la proposition 2.2.17. De plus, pour un bon choix de paramètre, on peut obtenir à nouveau des espaces L_p.
Soient $p_0, p_1 \in [1, +\infty]$ tels que $p_0 \neq p_1$ et soit $\theta \in]0, 1[$; si $\frac{1}{q} = (1-\theta)\frac{1}{p_0} + \theta\frac{1}{p_1}$, alors on a

$$\mathrm{K}_{\psi_\theta,q}(L_{p_0}, L_{p_1}) = L_q$$

où $\psi_\theta : t \mapsto t^\theta$.
En particulier, si $1 \leq p_0 < p < p_1 \leq +\infty$, alors L_p est un espace d'interpolation de (L_{p_0}, L_{p_1}).

On déduit directement de cette remarque le théorème d'interpolation de Riesz-Thorin présenté en introduction. Le cas où $\theta \in \{0, 1\}$ étant trivial :

17. Il s'agit d'un raisonnement classique utilisé par exemple dans le lemme 1.1.21.

Théorème 4.2.12. *(Théorème d'interpolation de Riesz-Thorin) Soient X et Y deux espaces mesurés et soient $p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1, +\infty]$ tels que $p_0 \neq p_1$ et $q_0 \neq q_1$; si $T : L_{p_0}(X) + L_{p_1}(X) \to L_{q_0}(Y) + L_{q_1}(Y)$ est une application linéaire qui vérifie*

- ⁂ $T|_{L_{p_0}(X)} : L_{p_0}(X) \to L_{q_0}(Y)$ *est continu de norme opérateur M_0,*
- ⁂ $T|_{L_{p_1}(X)} : L_{p_1}(X) \to L_{q_1}(Y)$ *est continu de norme opérateur M_1,*

alors pour tout $\theta \in [0, 1]$, l'application $T|_{L_p(X)} : L_p(X) \to L_q(Y)$ est continue et vérifie

$$\|T\|_{L_p(X), L_q(Y)} \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$$

avec $\frac{1}{p} = (1-\theta)\frac{1}{p_0} + \theta\frac{1}{p_1}$ et $\frac{1}{q} = (1-\theta)\frac{1}{q_0} + \theta\frac{1}{q_1}$.

Liste des symboles

$\| \cdot \|_{A,B}$ norme opérateur, page 2

$\mathcal{B}$ l'ensemble des fonctions de Boyd, page 4

$\underline{\mathrm{b}}$, $\overline{\mathrm{b}}$ indices inférieur et supérieur de Boyd, page 4

$\varphi_\star$ complémentaire de la fonction de Boyd φ, page 9

$\varphi^\star$ notion alternative de complémentaire de la fonction de Boyd φ, page 9

$\mathcal{B}'$ ensemble de fonctions de Boyd régulière avec hypothèse d'élasticité, page 9

$\sim$ équivalence entre fonctions, page 10

$\mathcal{N}$ catégorie des espaces vectoriels normés, page 13

$\mathfrak{B}$ catégorie des espaces de Banach, page 13

$\hookrightarrow$ inclusion continue, page 14

$\Delta(\boldsymbol{A})$ espace intersection du couple $\boldsymbol{A}$, page 15

$\Sigma(\boldsymbol{A})$ espace somme du couple $\boldsymbol{A}$, page 15

$\overline{\mathcal{C}}$ catégorie des couples d'espaces compatibles de $\mathcal{C}$, page 16

L_q^* espace de Lebesgue muni de la mesure $\mathrm{d}x/x$, page 23

$f \star g$ produit de convolution dans L_q^*, page 24

$\mathrm{K}_{\varphi,q}$ foncteur d'interpolation suivant la méthode K, page 24

$\mathrm{J}_{\varphi,q}$ foncteur d'interpolation suivant la méthode J, page 37

$\mathcal{S}(a)$ ensemble des décompositions de a pour la méthode J, page 37

$\mathcal{S}'(a)$ ensemble des décomposition discrètes de a pour la méthode J, page 38

$\mathfrak{C}_{\mathrm{K}}, \mathfrak{C}_{\mathrm{J}}, \mathfrak{C}$ classes d'espaces intermédiaires, page 45

$\mathfrak{F}(\boldsymbol{A})$ ensemble des fonctions définissant la méthode complexe pour $\boldsymbol{A}$, page 51

C_θ foncteur d'interpolation suivant la méthode complexe, page 51

C_b^φ, C_b^θ espaces de Hölder, page 52

f^* réarrangement décroissant de f, page 56

$L_{\varphi,q}, L_{p,q}$ espaces de Lorentz, page 56

Références

[1] R. A. Adams et J. J. F. Fournier, *Sobolev spaces*, 2nd ed., Pure and applied mathematics ; 140, Academic Press, Amsterdam, 2003.

[2] N. Aronszajn et E. Gagliardo, *Interpolation spaces and interpolation methods*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **68** (1965), p. 51-117.

[3] J. Bergh et J. Löfström, *Interpolation spaces : an introduction*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, A Series of Comprehensive Studies in Mathematics ; 223, Springer, Berlin, 1976.

[4] R. E. Castillo et H. Rafeiro, *An introductory course in lebesgue spaces*, 1re éd., CMS Books in Mathematics, Springer Nature, Cham, 2016.

[5] F. Fehér, « Exponents of Submultiplicative Functions and Function Spaces », in : *General Inequalities 3 : 3rd International Conference on General Inequalities, Oberwolfach, April 26 – May 2, 1981* (E. F. Beckenbach et Wolfgang Walter, éds), Birkhäuser Basel, Basel, 1983, p. 471-482.

[6] L. Grafakos, *Classical fourier analysis*, 3rd ed. 2014. Vol. 249, Graduate Texts in Mathematics, Springer Nature, New York, NY, 2008.

[7] J. Gustavsson, *A function parameter in connection with interpolation of banach spaces*, Mathematica scandinavica **42** (1978), nº 2, p. 289-305.

[8] E. Hewitt et K. A. Ross, *Abstract harmonic analysis. volume i, structure of topological groups, integration theory, group representations*, 2e éd., Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete, 115, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[9] E. Hille, *Functional analysis and semi-groups*, American Mathematical Society Colloquium Publications, 31, American Mathematical Society, Providence, RI, 1948.

[10] P. Krée, *Interpolation d'espaces vectoriels qui ne sont ni normés ni complets. applications*, Annales de l'Institut Fourier **17** (1967), nº 2, p. 137-174.

[11] T. Lamby, *Generalized interpolation methods and pointwise regularity through continued fractions and diophantine approximations*, thèse de doct., Université de Liège, Faculté des Sciences, Liège, 2025.

[12] T. Lamby et S. Nicolay, *Interpolation with a function parameter from the category point of view*, Journal of Functional Analysis **286** (2024), nº 3.

[13] T. Lamby et S. Nicolay, *Some remarks on the Boyd functions related to the admissible sequences*, Z. Anal. Anwend. **41** (2022), nº 1-2, p. 211-227.

[14] A. Lunardi, *Interpolation theory*, 3rd ed. 2018 edition. Vol. 16, CRM Series, Springer Nature, Pisa, 2018.

[15] C. Merucci, *Applications of interpolation with a function parameter to lorentz, sobolev and besov spaces*, Interpolation spaces and allied topics in analysis (Michael Cwikel et Jaak Peetre, éds), Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1984, p. 183-201.

[16] J. Mikusiński, *The bochner integral*, Pure and applied mathematics, 77, Academic Press, New York, 1978.

[17] H. Simmons, *An introduction to category theory*, 1st ed., Cambridge University Press, Cambridge, 2011.