

Mémoire

Auteur : Ferenc, Sarah

Promoteur(s) : Mathonet, Pierre

Faculté : Faculté des Sciences

Diplôme : Master en sciences mathématiques, à finalité approfondie

Année académique : 2024-2025

URI/URL : <http://hdl.handle.net/2268.2/22978>

Avertissement à l'attention des usagers :

Tous les documents placés en accès ouvert sur le site le site MatheO sont protégés par le droit d'auteur. Conformément aux principes énoncés par la "Budapest Open Access Initiative"(BOAI, 2002), l'utilisateur du site peut lire, télécharger, copier, transmettre, imprimer, chercher ou faire un lien vers le texte intégral de ces documents, les disséquer pour les indexer, s'en servir de données pour un logiciel, ou s'en servir à toute autre fin légale (ou prévue par la réglementation relative au droit d'auteur). Toute utilisation du document à des fins commerciales est strictement interdite.

Par ailleurs, l'utilisateur s'engage à respecter les droits moraux de l'auteur, principalement le droit à l'intégrité de l'oeuvre et le droit de paternité et ce dans toute utilisation que l'utilisateur entreprend. Ainsi, à titre d'exemple, lorsqu'il reproduira un document par extrait ou dans son intégralité, l'utilisateur citera de manière complète les sources telles que mentionnées ci-dessus. Toute utilisation non explicitement autorisée ci-avant (telle que par exemple, la modification du document ou son résumé) nécessite l'autorisation préalable et expresse des auteurs ou de leurs ayants droit.



FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE

Représentations des groupes finis et dualité de Schur-Weyl

Mémoire de fin d'études présenté en vue de l'obtention du titre de
Master en Sciences Mathématiques, à finalité approfondie

Année académique 2024-2025

Auteur :
Sarah FERENC

Promoteur :
Pierre MATHONET

Introduction

La théorie des représentations des groupes vise à étudier les actions « linéaires » d'un groupe sur des espaces vectoriels, en ce sens qu'elle considère les actions d'un groupe G sur des espaces vectoriels V , où l'action de chaque élément du groupe G est une transformation linéaire de V .

Selon Weyl [9][29], la théorie des représentations des groupes a été en grande partie créée par Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917), dont la plus célèbre contribution fût d'introduire la théorie des caractères. Le caractère d'une représentation d'un groupe G est la fonction qui à tout élément $g \in G$, associe la trace de l'application linéaire correspondant à son action. Par après Issai Schur (1875-1941), dans la continuation du travail de Frobenius, et Robert Lee Burnside (1926-2005), indépendamment de ses travaux, ont trouvé une approche plus simple à la théorie en mettant l'emphasis sur les représentations matricielles des représentations de groupes plutôt que sur leurs caractères.

La théorie des caractères est très puissante pour l'analyse des représentations des groupes finis, et on peut se demander comment, à partir de la définition d'une représentation d'un groupe, on peut bien penser à s'intéresser à la trace des éléments de ce groupe. En fait, la théorie des représentations des groupes a d'abord été créée en termes de caractères, et comme le dit Hawkins [6][144], si la théorie des représentations avait été créée en termes de représentations matricielles, l'importance des caractères n'aurait peut-être pas été aussi facilement reconnue, alors que dans l'ordre historique de son développement, la notion de caractère était centrale, de sorte que son importance a été supposée dès le départ.

Dans ce mémoire, nous nous intéresserons particulièrement aux représentations du groupe symétrique S_p et du groupe général linéaire $GL(V)$. Dans ce contexte, on s'intéresse particulièrement aux représentations dites irréductibles, c'est-à-dire, les représentations pour lesquelles il n'est pas possible de trouver un sous-espace propre qui soit invariant sous l'action du groupe. Ces représentations peuvent être considérées comme les plus simples possibles, mais il s'avère qu'elles sont également des blocs de construction pour bon nombre de représentations, dites « complètement réductibles ».

Nous nous occuperons de décrire toutes les représentations irréductibles du groupe symétrique et de trouver celles qui se retrouvent dans les représentations tensorielles de $GL(V)$ (pour un espace vectoriel V de dimension finie), i.e. des représentations $V^{\otimes p}$ sur lesquelles $GL(V)$ agit sur chacun des facteurs. Le groupe symétrique agit naturellement sur $V^{\otimes p}$ et son action est compatible avec celle de $GL(V)$. Ce lien entre les actions de $GL(V)$ et S_p sur le produit tensoriel $V^{\otimes p}$ nous mènera à la dualité de Schur-Weyl, qui permet de décomposer le produit tensoriel en sous-représentations irréductibles pour S_p et $GL(V)$. Cette dualité est ainsi nommée après Issai Schur, qui la découvrit et Hermann Weyl qui la popularisa au travers de ses livres sur les groupes classiques et sur la mécanique quantique. Si on travaille avec un produit tensoriel $V \otimes V$, où V est complexe et de dimension finie, on peut le décomposer

$$V \otimes V = \text{Sym}^2 V \oplus \Lambda^2 V$$

en ses tenseurs symétriques et antisymétriques. Chacun des termes est stable et irréductible pour l'action de $GL(V)$ et a été construit à l'aide du groupe symétrique. Pour $p \geq 3$, cette décomposition n'est plus valable. Les puissances extérieures et symétriques sont bien en somme directe, mais leur somme ne recouvre pas tout le produit tensoriel. La dualité de Schur-Weyl permet de généraliser cette décomposition pour $p \geq 3$. L'explication de cette dualité est l'objectif final de ce mémoire, mais cette théorie est le point de départ pour l'étude des représentations tensoriels de $GL(V)$

et de ses sous-groupes. Elle est de nos jours activement utilisée en mécanique quantique, plus particulièrement en informatique quantique [1][10].

Le premier chapitre offre la définition du produit tensoriel entre espaces vectoriels, qu'il est essentiel de maîtriser si l'on veut s'intéresser aux représentations tensorielles du groupe général linéaire. La présentation suit principalement le livre de Greub [5]. On y présente ensuite les puissances extérieures et symétriques. Dans [5], elles sont introduites pour des espaces vectoriels sur des champs de caractéristique nulle, et dans [4], Fulton et Harris mentionnent que lorsque la caractéristique du champ sur laquelle on travaille est nulle, on peut les voir comme des sous-espaces des produits tensoriels. On a donc regardé où cette hypothèse intervient dans cette affirmation et la définition des puissances symétriques et extérieures est donnée pour des espaces vectoriels sur des champs de caractéristique quelconque. Ce premier chapitre se termine par une petite introduction aux modules sur des algèbres et au produit tensoriel de tels modules. On peut avec ce formalisme réexprimer la définition d'une représentation en termes de module sur une algèbre, et nous démontrerons la dualité de Schur-Weyl en ces termes.

Le second chapitre est consacré à poser les bases de la théorie des représentations. On y montre comment, à partir de deux représentations d'un groupe, on peut en construire d'autres. On montre également que toute représentation d'un groupe fini est complètement réductible, i.e. qu'on peut l'écrire comme somme directe de représentations irréductibles.

Dans le troisième chapitre, on s'attaque à la théorie des caractères. On montre que toute représentation d'un groupe fini est complètement déterminée par son caractère. Cette théorie établit un lien fort entre les représentations irréductibles d'un groupe et ses classes de conjugaison. Elle nous apprend que tout groupe fini possède un nombre fini de représentations irréductibles inéquivalentes, et nous permet de décomposer n'importe laquelle de ses représentations en une somme d'irréductibles (à condition de connaître les représentations irréductibles du groupe en question). On verra, sur l'exemple du groupe symétrique S_4 , que même si on ne connaît pas de prime abord toutes les représentations irréductibles d'un groupe, la connaissance qu'on a de certaines d'entre-elles combinée à la théorie des caractères nous permet de les trouver toutes.

Après avoir reformulé dans le quatrième chapitre la théorie des représentations en termes de modules, et étudié les représentations induites, on en vient, dans le chapitre 5, aux représentations irréductibles du groupe symétrique. Les tableaux et diagrammes de Young y jouent un rôle central pour la description des représentations irréductibles du groupe symétrique. Ils permettent de construire les symétriseurs de Young, qui à leur tour permettent de décomposer les puissances tensorielles en irréductibles pour l'action du groupe général linéaire. Ces constructions permettent d'exposer dans le dernier chapitre la dualité de Schur Weyl.

Remerciements

Je remercie MM. Mathonet et Bastin. M. Mathonet, pour avoir bien voulu encadrer un mémoire ayant des applications en physique (bien que je n'en aie fait aucune) et M. Bastin, pour nous avoir fourni le sujet de ce mémoire.

M. Mathonet, pour son soutien et ses précieux conseils tout au long de la rédaction de ce dernier, et pour la liberté qu'il m'a accordée.

Merci aussi à mes parents et ma famille — sait-on jamais qu'ils lisent ceci.

Table des matières

1	Éléments d'algèbre multilinéaire	7
1.1	Produit tensoriel	7
1.1.1	Définition	7
1.1.2	Existence	8
1.1.3	Unicité	10
1.1.4	Quelques propriétés	12
1.1.5	Produit tensoriel de plusieurs espaces vectoriels	14
1.1.6	Produit tensoriel d'application linéaires	14
1.1.7	Exemples	16
1.2	Puissances extérieures d'un espace vectoriel	18
1.2.1	Applications alternées et antisymétriques	18
1.2.2	Définition	19
1.2.3	La puissance extérieure comme sous-espace du produit tensoriel	21
1.3	Puissances symétriques d'un espace vectoriel	26
1.3.1	Définition	26
1.3.2	La puissance symétrique comme sous-espace du produit tensoriel	28
1.4	Algèbres et modules	31
1.4.1	Définitions	32
1.4.2	Indécomposabilité et idempotents	34
1.4.3	Produit tensoriel de modules	35
2	Représentations des groupes	39
2.1	Définitions	39
2.2	Constructions classiques de représentations	42
2.2.1	Somme directe de représentations	42
2.2.2	Produit tensoriel de représentations	42
2.2.3	Représentation duale	43
2.2.4	Représentation $\text{Hom}(V, W)$ sur les applications linéaires	44
2.3	Décomposition en irréductibles et lemme de Schur	44
2.3.1	Réductibilité complète	44
2.3.2	Lemme de Schur et unicité de la décomposition	46
3	Théorie des caractères	53
3.1	Sur les valeurs propres d'une représentation	53
3.2	Définition et premières propriétés	53
3.3	Formules de projection	56
3.4	Application à la représentation régulière de G	63

3.5	Le groupe symétrique S_4	64
4	Représentations comme $\mathbb{C}G$-modules et représentations induites	69
4.1	Représentations comme $\mathbb{C}G$ -modules	69
4.2	Représentations induites	72
5	Représentations irréductibles du groupe symétrique	77
5.1	Les classes de conjugaison de S_p	77
5.2	Diagrammes et tableaux de Young	78
5.3	Construction des représentations irréductibles de S_p	81
5.3.1	Exemples	82
5.3.2	Preuves	89
5.4	Décomposition de la représentation régulière	91
5.4.1	Tableaux Standards	92
5.4.2	Lemmes combinatoires	92
5.4.3	Décomposition de $\mathbb{C}S_p$	97
6	Représentations tensorielles du groupe linéaire	101
6.1	Représentation de $GL(V)$ sur $V^{\otimes p}$	101
6.2	Irréductibilité des modules de Schur	103
6.3	Dualité de Schur-Weyl	109

Chapitre 1

Eléments d'algèbre multilinéaire

Dans ce premier chapitre sont présentées des notions de base d'algèbre multilinéaire et de théorie des modules sur des algèbres. Le but est simplement de présenter les définitions du produit tensoriel, des puissances extérieures et symétriques et d'un module sur une algèbre afin de pouvoir s'en servir dans les chapitres suivants.

1.1 Produit tensoriel

Dans toute cette section, on considère des espaces vectoriels sur un champ \mathbb{K} quelconque.

1.1.1 Définition

Présentons la définition du produit tensoriel à partir de sa caractérisation par la propriété universelle suivante.

Définition 1.1.1. Soient E et F deux espaces vectoriels. Soient G un espace vectoriel et

$$\varphi : E \times F \rightarrow G$$

une application bilinéaire. Le couple (G, φ) , est un *produit tensoriel* pour E et F s'il permet de factoriser de manière unique toutes les applications bilinéaires définies sur le produit $E \times F$. Plus explicitement, si

$$\psi : E \times F \rightarrow H$$

est une application bilinéaire dans un espace vectoriel H quelconque, alors il existe une unique application linéaire

$$f : G \rightarrow H$$

telle que

$$\psi = f\varphi$$

i.e. telle que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} E \times F & \xrightarrow{\varphi} & G \\ \downarrow \psi & \swarrow f & \\ H & & \end{array}$$

commute.

Lorsque l'on part à la recherche d'un produit tensoriel, il peut s'avérer plus aisé de vérifier les deux conditions suivantes.

Proposition 1.1.2. Soient E , F et G trois espaces vectoriels et

$$\varphi : E \times F \rightarrow G$$

une application bilinéaire. Le couple (G, φ) est un produit tensoriel pour E et F si et seulement si

(T_1) $\text{Im}(\varphi) = G$;

(T_2) pour toute application bilinéaire

$$\psi : E \times F \rightarrow H$$

il existe $f : G \rightarrow H$ telle que $\psi = f\varphi$.

Démonstration. Si (G, φ) est un produit tensoriel, alors pour toute application bilinéaire

$$\psi : E \times F \rightarrow H$$

il existe une unique application linéaire $f : G \rightarrow H$ telle que $f\varphi = \psi$. Ainsi (T_2) est trivialement vérifié et puisque l'application f est unique, on doit avoir $G = \text{Im}(\varphi)$. En effet, dans le cas contraire, si $h : G \rightarrow H$ est une application non triviale s'annulant sur $\text{Im}(\varphi)$, alors $f + h$ permet également de factoriser ψ .

A l'inverse, si (G, φ) vérifie (T_1) et (T_2), soit

$$\psi : E \times F \rightarrow H$$

une application bilinéaire. Alors il existe $f : G \rightarrow H$ telle que

$$f\varphi = \psi$$

et cette condition détermine f de manière unique puisque $G = \text{Im}(\varphi)$. □

1.1.2 Existence

Soient E et F deux espaces vectoriels. Nous allons présenter deux constructions pour un produit tensoriel de E et F . Nous aurons besoin de la définition suivante.

Définition 1.1.3. Soit X un ensemble. On définit $\mathbb{K}X$ comme étant l'espace vectoriel des fonctions définies sur X et à valeurs dans \mathbb{K} de support fini. On peut alors considérer que X en est une base. Pour cela, pour tout $x \in X$ soit

$$\delta_x : X \rightarrow \mathbb{K} \quad y \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y \neq x \\ 1 & \text{si } y = x. \end{cases}$$

Alors $\mathbb{K}X = \langle \delta_x \mid x \in X \rangle$ et $\{\delta_x \mid x \in X\}$ est un ensemble de fonctions linéairement indépendantes, ce qui en fait une base de $\mathbb{K}X$. L'application

$$\delta : X \rightarrow \mathbb{K}X \quad x \mapsto \delta_x$$

est injective, et son image est la base $\{\delta_x \mid x \in X\}$ de $\mathbb{K}X$. Chaque élément δ_x de cette base peut alors être identifié à un unique $x \in X$. En termes de notation, si

$$f = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{x_i}$$

on notera parfois

$$f = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i.$$

A partir de bases pour E et F

Soient $(e_i)_{i \in I}$ et $(f_j)_{j \in J}$ des bases de E et F respectivement. Soit

$$\psi : E \times F \rightarrow H$$

une application bilinéaire. L'application ψ est entièrement déterminée par ses images sur les couples (e_i, f_j) , i.e. par ses images sur les éléments de l'ensemble

$$X = \{(e_i, f_j) \mid i \in I, j \in J\}.$$

Considérons alors l'espace vectoriel $\mathbb{K}X$. L'application

$$f : \mathbb{K}X \rightarrow H \quad (e_i, f_j) \mapsto \psi(e_i, f_j)$$

est linéaire et permet de factoriser ψ ; on a, si $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$ et $y = \sum_{j \in J} y_j f_j$

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= \sum_{i \in I, j \in J} x_i y_j \psi(e_i, f_j) \\ &= \sum_{i \in I, j \in J} x_i y_j f(e_i, f_j) \\ &= f \left(\sum_{i \in I, j \in J} x_i y_j (e_i, f_j) \right). \end{aligned}$$

Ainsi, l'application

$$\varphi : E \times F \rightarrow \mathbb{K}X \quad (x, y) \mapsto \sum_{i \in I, j \in J} x_i y_j (e_i, f_j)$$

est bilinéaire, telle que

$$f\varphi = \psi$$

et permet de factoriser ψ de manière unique au travers de $\mathbb{K}X$. Ceci fait de $(\mathbb{K}X, \varphi)$ un produit tensoriel pour E et F .

A partir de $\mathbb{K}(E \times F)$

On peut également construire un produit tensoriel pour E et F sans passer par des bases de ces derniers. Soit

$$\psi : E \times F \rightarrow H$$

une application bilinéaire. En utilisant la même logique que précédemment, on est tenté de considérer l'espace vectoriel $\mathbb{K}(E \times F)$ et de définir l'application linéaire

$$f : \mathbb{K}(E \times F) \rightarrow H \quad (x, y) \mapsto \psi(x, y)$$

afin de factoriser ψ . Cependant,

$$i : E \times F \rightarrow \mathbb{K}(E \times F) \quad (x, y) \mapsto (x, y)$$

n'est pas bilinéaire. On a par exemple,

$$i(x + x', y) = (x + x', y)$$

mais

$$i(x, y) + i(x', y) = (x, y) + (x', y).$$

En fait, $\mathbb{K}(E \times F)$ est trop gros. Si on veut considérer $(x, y) + (x', y)$ et $(x + x', y)$ comme étant égaux, et plus généralement que les vecteurs

$$(\lambda x + \mu x', y) \quad \text{et} \quad (x, \lambda y + \mu y')$$

soient égaux à

$$\lambda(x, y) + \mu(x', y) \quad \text{et} \quad \lambda(x, y) + \mu(x, y')$$

respectivement quels que soient $x, x' \in E$, $y, y' \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, il suffit de les projeter sur le quotient de $\mathbb{K}(E \times F)$ par $N(E \times F)$, le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}(E \times F)$ engendré par des vecteurs du type

$$(\lambda x + \mu x', \alpha y + \beta y') - \lambda \alpha(x, y) - \mu \alpha(x', y) - \lambda \beta(x, y') - \mu \beta(x', y')$$

avec $x, x' \in E$, $y, y' \in F$ et $\lambda, \mu, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Comme f s'annule sur $N(E \times F)$, on peut passer au quotient et définir l'application

$$\tilde{f} : \mathbb{K}(E \times F)/N(E \times F) \rightarrow H \quad \pi(x, y) \mapsto \psi(x, y).$$

Cette dernière est telle que

$$\psi(x, y) = \tilde{f} \pi i(x, y)$$

pour tous $x \in E$ et $y \in F$, avec $\pi : \mathbb{K}(E \times F) \rightarrow \mathbb{K}(E \times F)/N(E \times F)$ la projection sur le quotient et

$$i : E \times F \rightarrow \mathbb{K}(E \times F) \quad (x, y) \mapsto (x, y).$$

On vérifie que \tilde{f} est unique et πi bilinéaire. Ainsi $(\mathbb{K}(E \times F)/N(E \times F), \pi i)$ est un produit tensoriel pour E et F .

1.1.3 Unicité

On a unicité du produit tensoriel à isomorphisme près.

Proposition 1.1.4. Soient E et F deux espaces vectoriels et (G, φ) et (G', φ') deux produits tensoriels pour E et F . Il existe un isomorphisme $f : G \rightarrow G'$ tel que $f\varphi = \varphi'$.

Démonstration. Par définition, il existe $f : G \rightarrow G'$ tel que $f(\varphi(x, y)) = \varphi'(x, y)$ et $g : G' \rightarrow G$ tel que $\varphi(x, y) = g(\varphi'(x, y))$.

$$\begin{array}{ccc} E \times F & \xrightarrow{\varphi} & G \\ \downarrow \varphi' & \nearrow g & \\ G' & \xleftarrow{f} & \end{array}$$

Par unicité on a $gf = id_{G'}$ et $fg = id_G$. L'application recherchée est f . □

Définition 1.1.5. Soient E et F deux espaces vectoriels. Puisque le produit tensoriel pour E et F est unique à isomorphisme près, on peut définir le produit tensoriel de E et F . On le note $E \otimes F$ et

$$\otimes : E \times F \rightarrow E \otimes F$$

est l'application bilinéaire associée. Les éléments de $E \otimes F$ sont appelés *tenseurs* et ceux de la forme $x \otimes y$ pour $x, y \in E$ *tenseurs simples*.

La proposition suivante ramène les conditions (T_1) et (T_2) que doit vérifier un couple (G, φ) pour être un produit tensoriel en termes d'injectivité et surjectivité de l'application induite par φ sur le produit tensoriel.

Proposition 1.1.6. *Soient E et F deux espaces vectoriels et $E \otimes F$ leur produit tensoriel. Alors si G est un espace vectoriel et*

$$\varphi : E \times F \rightarrow G$$

une application bilinéaire, considérons $f : E \otimes F \rightarrow G$ l'application induite par φ . On a que

- (a) φ satisfait (T_1) si et seulement si f est surjectif;
- (b) φ satisfait (T_2) si et seulement si f est injectif.

Démonstration. (a) Si $\text{Im}(\varphi) = G$, montrons que f est surjectif. Soit $g \in G$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}_0$ et pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $x_i \in E$ et $y_i \in F$ tels que

$$\begin{aligned} g &= \sum_{i=1}^n \varphi(x_i, y_i) \\ &= \sum_{i=1}^n f(x_i \otimes y_i) \\ &= f\left(\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i\right). \end{aligned}$$

Donc f est surjectif. Pour montrer la réciproque il suffit de remonter les égalités.

- (b) Si φ satisfait (T_2) alors il existe une application $g : G \rightarrow E \otimes F$ telle que $\otimes = g\varphi$ et on a le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccc} E \times F & \xrightarrow{\otimes} & E \otimes F \\ \downarrow \varphi & \nearrow g & \\ G & \xleftarrow{f} & \end{array}$$

Alors, si $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in E \otimes F$ et

$$f\left(\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i\right) = 0$$

on a

$$\begin{aligned} 0 &= gf\left(\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n gf(x_i \otimes y_i) \\ &= \sum_{i=1}^n g(\varphi(x_i, y_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i. \end{aligned}$$

Et f est injectif. Maintenant supposons que f soit injectif. On peut définir $g : G \rightarrow E \otimes F$ en posant

$$g(\varphi(x, y)) = x \otimes y$$

sur $\text{Im}(\varphi)$ (pour les valeurs prises par g en dehors de $\text{Im}(\varphi)$, on peut par exemple poser $g = 0$ sur un supplémentaire de $\text{Im}(\varphi)$ pour que ce soit bien défini). Si donc $\psi : E \times F \rightarrow H$ est une application bilinéaire, on peut alors composer l'application induite par ψ sur $E \otimes F$ avec g pour factoriser ψ au travers de G .

□

1.1.4 Quelques propriétés

Proposition 1.1.7. *Soient E et F deux espaces vectoriels.*

- (a) *Si $x \in E \setminus \{0\}$ et $y \in F \setminus \{0\}$ alors $x \otimes y \neq 0$;*
- (b) *si $z \in E \otimes F$ et $z \neq 0$ alors z admet une décomposition*

$$z = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$$

avec $n \in \mathbb{N}$, $x_i \in E$ et $y_i \in F$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et où les vecteurs x_1, \dots, x_n (resp. y_1, \dots, y_n) sont linéairement indépendants dans E (resp. F) ;

- (c) *si $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i = 0$ et les vecteurs $y_1, \dots, y_n \in F$ sont linéairement indépendants alors $x_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.*

Démonstration. (a) Soient $x \in E$ et $y \in F$ non nuls. Si $x \otimes y$ est nul, alors pour quelque application linéaire définie sur $E \otimes F$ que ce soit, l'image de $x \otimes y$ sera nulle. Or x et y étant non nuls, on peut trouver une application bilinéaire définie sur $E \times F$ qui ne s'annule pas en (x, y) . Par exemple, en prenant des bases de E et F contenant x et y respectivement, l'application

$$\psi : E \times F \rightarrow \mathbb{K} \quad (e, f) \mapsto x^*(e)y^*(f)$$

où x^* et y^* sont les éléments associés à x et y dans les bases duales correspondantes est bilinéaire et non nulle en (x, y) . Ceci met à mal la propriété de factorisation du produit tensoriel.

- (b) Soit $z \in E \otimes F$ non nul. Par définition du produit tensoriel il existe $n \in \mathbb{N}$ et des vecteurs $x_i \in E$, $y_i \in F$ non nuls tels que

$$z = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i.$$

Prenons $n \in \mathbb{N}$ minimal et montrons que dans ce cas les vecteurs x_1, \dots, x_n et y_1, \dots, y_n sont linéairement indépendants. Si ce n'est pas le cas, par exemple s'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$ tels que

$$x_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i$$

alors on obtient

$$\begin{aligned}
z &= \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} x_i \otimes y_i + x_n \otimes y_n \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} x_i \otimes y_i + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i \right) \otimes y_n \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} x_i \otimes (y_i + \lambda_i y_n).
\end{aligned}$$

Ceci contredit la minimalité de n .

- (c) Soit $i \in \{1, \dots, n\}$ et montrons que $x_i = 0$. Les vecteurs y_1, \dots, y_n étant linéairement indépendants, on peut les compléter pour obtenir une base B de F . Si $x_i \neq 0$, il appartient à une base B' de E . Considérons alors l'application

$$\psi : E \times F \rightarrow \mathbb{K} \quad (e, f) \mapsto x_i^*(e)y_i^*(f)$$

où x_i^* et y_i^* sont les éléments correspondants à x_i et y_i dans les bases duales de E^* et F^* . Cette application est bilinéaire et telle que

$$\psi(x_j, y_j) = \delta_{ij}.$$

pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$. Alors si $f : E \otimes F \rightarrow \mathbb{K}$ est l'application linéaire induite par ψ sur le produit tensoriel, on obtient

$$\begin{aligned}
0 &= f\left(\sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^n f(x_j \otimes y_j) \\
&= \sum_{j=1}^n \psi(x_j, y_j) \\
&= 1
\end{aligned}$$

une contradiction. □

Proposition 1.1.8. *Si $(e_i)_{i \in I}$ et $(f_j)_{j \in J}$ sont des bases de E et F respectivement alors $(x_i \otimes y_j)_{i \in I, j \in J}$ est une base de $E \otimes F$.*

Démonstration. Cela se voit directement sur la construction du produit tensoriel donnée par $\mathbb{K}X$ présentée à la sous-section 1.1.2. On conclut alors par unicité du produit tensoriel avec la Proposition 1.1.4. □

Corollaire 1.1.9. Si E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie, on a

$$\dim(E \otimes F) = \dim(E) \dim(F).$$

Enonçons sans démonstration la propriété suivante qui établit la distributivité du produit tensoriel par rapport aux sommes directes.

Proposition 1.1.10. Soient $(E_\alpha)_{\alpha \in A}$, $(F_\beta)_{\beta \in B}$ deux familles d'espace vectoriels et pour tout $(\alpha, \beta) \in A \times B$ soit $E_\alpha \otimes F_\beta$ un produit tensoriel pour E_α et F_β . Alors si $E = \bigoplus_{\alpha \in A} E_\alpha$ et $F = \bigoplus_{\beta \in B} F_\beta$, on a $E \otimes F = \bigoplus_{\alpha \in A, \beta \in B} E_\alpha \otimes F_\beta$.

1.1.5 Produit tensoriel de plusieurs espaces vectoriels

On peut tout à fait définir le produit tensoriel de plusieurs espaces vectoriels. La définition et les constructions suivent les mêmes étapes que pour le produit tensoriel de deux espaces vectoriels.

Définition 1.1.11. Soient E_1, \dots, E_p ($p \geq 2$) des espaces vectoriels. Le produit tensoriel $E_1 \otimes \dots \otimes E_p$ de E_1, \dots, E_p est un espace vectoriel muni d'une application multilinéaire

$$\otimes : E_1 \times \dots \times E_p \rightarrow E_1 \otimes \dots \otimes E_p$$

telle que pour toute application multilinéaire

$$\psi : E_1 \times \dots \times E_p \rightarrow H$$

dans un espace vectoriel H quelconque, il existe une unique application linéaire

$$f : E_1 \otimes \dots \otimes E_p \rightarrow H$$

telle que $\psi = f \otimes$.

On a alors la propriété suivante, énoncée sans démonstration.

Proposition 1.1.12. Soient E_1, \dots, E_p des espaces vectoriels. Pour tout $i \in \{1, \dots, p-1\}$ il existe un unique isomorphisme

$$f : (E_1 \otimes \dots \otimes E_i) \otimes (E_{i+1} \otimes \dots \otimes E_p) \rightarrow E_1 \otimes \dots \otimes E_p$$

tel que

$$f((x_1 \otimes \dots \otimes x_i) \otimes (x_{i+1} \otimes \dots \otimes x_p)) = x_1 \otimes \dots \otimes x_p$$

et $(E_1 \otimes \dots \otimes E_i) \otimes (E_{i+1} \otimes \dots \otimes E_p)$ est un produit tensoriel pour E_1, \dots, E_p .

1.1.6 Produit tensoriel d'application linéaires

Soient E , E' , F et F' quatre espaces vectoriels. Nous allons montrer que si E et F sont de dimension finie, alors $\text{Hom}(E \otimes E', F \otimes F')$ est un produit tensoriel pour $\text{Hom}(E, F)$ et $\text{Hom}(E', F')$.

Définition 1.1.13. Soient $f \in \text{Hom}(E, E')$ et $g \in \text{Hom}(F, F')$. Alors l'application

$$E \times F \rightarrow E' \otimes F' \quad (x, y) \mapsto f(x) \otimes g(y)$$

est bilinéaire et induit une application linéaire sur le produit tensoriel $E \otimes F$. Cette application est appelée *produit tensoriel de f et g* et on la note $f \otimes g$. On a donc

$$f \otimes g : E \otimes F \rightarrow E' \otimes F' \quad x \otimes y \mapsto f(x) \otimes g(y).$$

Remarque 1.1.14. La notation et appellation de l'application $f \otimes g$ définie ci-dessus est abusive puisque il n'est pas dit que l'on puisse la considérer comme appartenant à $\text{Hom}(E, E') \otimes \text{Hom}(F, F')$.

Proposition 1.1.15. *Soit*

$$\beta : \text{Hom}(E, E') \times \text{Hom}(F, F') \rightarrow \text{Hom}(E \otimes F, E' \otimes F') \quad (f, g) \mapsto f \otimes g.$$

Alors β est bilinéaire l'application linéaire induite sur le produit tensoriel est injective.

Démonstration. Soit

$$\psi : \text{Hom}(E, E') \otimes \text{Hom}(F, F') \rightarrow \text{Hom}(E \otimes F, E' \otimes F')$$

l'application linéaire induite par β sur $\text{Hom}(E, E') \otimes \text{Hom}(F, F')$. Montrons que si $z \in \text{Hom}(E, E') \otimes \text{Hom}(F, F') \setminus \{0\}$ alors $\psi(z) \neq 0$. Par le second point de la Proposition 1.1.7 il existe $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ des applications $f_i \in \text{Hom}(E, E')$, $g_i \in \text{Hom}(F, F')$ linéairement indépendantes telles que

$$z = \sum_{i=1}^n f_i \otimes g_i.^1$$

Si $\psi(z) = 0$, on a pour tous $x \in E$ et $y \in F$

$$\begin{aligned} 0 &= \psi(z)(x \otimes y) \\ &= \sum_{i=1}^n \beta(f_i, g_i)(x \otimes y) \\ &= \sum_{i=1}^n f_i(x) \otimes g_i(y). \end{aligned}$$

Si on choisit alors $a \in E$ tel que $f_1(a)$ soit non nul, et si r est le plus grand nombre tel que $f_1(a), \dots, f_r(a)$ soient linéairement indépendants dans E , on obtient, pour tout $y \in F$,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n f_i(a) \otimes g_i(y) \\ &= \sum_{i=1}^r f_i(a) \otimes g_i(y) + \sum_{i=r+1}^n \left(\sum_{j=1}^r \lambda_{ij} f_j(a) \right) \otimes g_i(y) \\ &= \sum_{i=1}^r f_i(a) \otimes \left(g_i(y) + \sum_{j=r+1}^n \lambda_{ji} g_j(y) \right) \end{aligned}$$

où $\lambda_{ij} \in \mathbb{K}$ sont tels que $f_i(a) = \sum_{j=1}^r \lambda_{ij} f_j(a)$ pour tous $i \in \{r+1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, r\}$. Le dernier point de la proposition 1.1.7 implique alors que

$$g_i(y) + \sum_{j=r+1}^n \lambda_{ji} g_j(y) = 0$$

pour tous $i \in \{1, \dots, r\}$, $y \in F$ et par suite les applications g_i ($i \in \{1, \dots, n\}$) ne sont pas linéairement indépendantes, une contradiction. \square

1. Ici la notation $f_i \otimes g_i$ est réservée aux éléments de $\text{Hom}(E, E') \otimes \text{Hom}(F, F')$ et ne désigne pas $\beta(f_i, g_i)$. On conservera ces conventions dans le cadre de cette preuve.

Par la Proposition 1.1.6 et la précédente on obtient donc que l'espace vectoriel $(\text{Hom}(E \otimes F, E' \otimes F'), \beta)$ satisfait à (T_2) et on a les corollaires suivants.

Corollaire 1.1.16. *La paire $(\text{Im}(\beta), \beta)$ est un produit tensoriel pour $\text{Hom}(E, F)$ et $\text{Hom}(E', F')$.*

Corollaire 1.1.17. *Si E et F sont de dimension finie, on a l'égalité $\text{Im}(\beta) = \text{Hom}(E \otimes F, E' \otimes F')$ et $\text{Hom}(E \otimes F, E' \otimes F')$ est un produit tensoriel pour $\text{Hom}(E, F)$ et $\text{Hom}(E', F')$.*

Démonstration. Soient $f \in \text{Hom}(E \otimes F, E' \otimes F')$, $\{e_1, \dots, e_n\}$ et $\{f_1, \dots, f_p\}$ des bases de E et F respectivement. Alors pour tous $k \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \{1, \dots, p\}$ on peut écrire $f(e_k \otimes f_j)$ comme une combinaison linéaire

$$f(e_k \otimes f_j) = \sum_{i=1}^{p^{(k,j)}} x_i^{(k,j)} \otimes y_i^{(k,j)}$$

où $p^{(k,j)} \in \mathbb{N}$ et pour tout $i \in \{1, \dots, p^{(k,j)}\}$, $x_i^{(k,j)} \in E'$ et $y_i^{(k,j)} \in F'$. Dans ce cas si on pose

$$\varphi_i^{(k,j)} : E \rightarrow E' \quad e_{k_0} \mapsto \delta_{kk_0} x_i^{(k,j)}$$

et

$$\psi_i^{(k,j)} : F \rightarrow F' \quad f_{j_0} \mapsto \delta_{jj_0} y_i^{(k,j)}$$

pour tout $i \in \{1, \dots, p^{(k,j)}\}$ on obtient

$$f = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^{p^{(k,j)}} \beta(\varphi_i^{(k,j)}, \psi_i^{(k,j)}).$$

□

1.1.7 Exemples

Proposition 1.1.18. *Soit E un espace vectoriel. Alors*

$$E = \mathbb{K} \otimes E.$$

Démonstration. L'application bilinéaire \otimes est donnée par la multiplication scalaire

$$\otimes : \mathbb{K} \times E \rightarrow E \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda x.$$

On vérifie directement que (E, \otimes) est alors un produit tensoriel pour \mathbb{K} et E . Soit

$$\psi : \mathbb{K} \times E \rightarrow H$$

une application bilinéaire. Alors si

$$f : E \rightarrow H$$

est telle que $\psi = f \otimes$ on doit avoir

$$\begin{aligned} f(x) &= f(1 \otimes x) \\ &= \psi(1, x) \end{aligned}$$

pour tout $x \in E$. Ceci assure l'unicité de f et on vérifie que

$$f : E \rightarrow H \quad x \mapsto \psi(1, x)$$

est telle que

$$\begin{aligned} f(\lambda \otimes x) &= f(\lambda x) \\ &= \psi(1, \lambda x) \\ &= \psi(\lambda, x) \end{aligned}$$

pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$. □

Proposition 1.1.19. *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Alors*

$$\text{Hom}(E, F) = E^* \otimes F.$$

Démonstration. Soit $E^* \otimes F$ un produit tensoriel pour E^* et F . On va montrer que $E^* \otimes F$ et $\text{Hom}(E, F)$ sont isomorphes. Si $m = \dim(E)$ et $n = \dim(F)$ on a

$$\dim(\text{Hom}(E, F)) = \dim(E) \dim(F)$$

et

$$\dim(E^* \otimes F) = \dim(E^*) \dim(F) = \dim(E) \dim(F).$$

Ceci assure l'égalité des dimensions. Soit alors

$$E^* \times F \rightarrow \text{Hom}(E, F) \quad (\varphi, y) \mapsto (x \mapsto \varphi(x)y).$$

Cette application est bilinéaire et induit donc une application linéaire

$$\psi : E^* \otimes F \rightarrow \text{Hom}(E, F) \quad \varphi \otimes y \mapsto (x \mapsto \varphi(x)y).$$

L'application ψ est l'isomorphisme recherché. On peut par exemple montrer qu'elle est surjective. Soit $f \in \text{Hom}(E, F)$. Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de E et si $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ est la base duale associée, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\sum_{i=1}^n e_i^*(x)e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n e_i^*(x)f(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \psi(e_i^* \otimes f(e_i))(x) \end{aligned}$$

pour tout $x \in E$ et

$$f = \psi \left(\sum_{i=1}^n (e_i^* \otimes f(e_i)) \right).$$

□

1.2 Puissances extérieures d'un espace vectoriel

D'abord, on rappelle quelques propriétés sur les applications alternées et antisymétriques, ensuite on introduit la définition de la p^e puissance extérieure d'un espace vectoriel et finalement, on voit comment celle-ci peut-être considérée comme un sous-espace de $\otimes^p E$. Pour bien voir l'importance de certaines propriétés², on travaille avec des espaces vectoriels sur un champ \mathbb{K} quelconque même si dans les chapitres qui suivent nous ne considérerons que des espaces vectoriels sur \mathbb{C} .

1.2.1 Applications alternées et antisymétriques

Définition 1.2.1. Une application p -linéaire $\varphi : E \times \cdots \times E \rightarrow F$ est alternée si $\varphi(x_1, \dots, x_p) = 0$ dès qu'il existe $i \neq j$ tel que $x_i = x_j$.

Définition 1.2.2. Une application p -linéaire $\varphi : E \times \cdots \times E \rightarrow F$ est antisymétrique si $\sigma\varphi = \text{sign}(\sigma)\varphi$ pour tout $\sigma \in S_p$, où $(\sigma\varphi)(x_1, \dots, x_p) = \varphi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)})$.

Rappelons les quelques propriétés suivantes.

Lemme 1.2.3. Une application p -linéaire φ est antisymétrique si et seulement si $\tau\varphi = -\varphi$ pour toute transposition $\tau \in S_p$.

Démonstration. Puisque toute permutation se factorise en un produit de transpositions, il suffit de vérifier que

$$(\sigma\mu)\varphi = \sigma(\mu\varphi)$$

pour toutes permutations $\sigma, \mu \in S_p$. Si $x_1, \dots, x_p \in E$, nous avons

$$\begin{aligned} \sigma(\mu\varphi)(x_1, \dots, x_p) &= \mu\varphi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) \\ &= \mu\varphi(y_1, \dots, y_p) \\ &= \varphi(y_{\mu(1)}, \dots, y_{\mu(p)}) \end{aligned}$$

en posant $y_i = x_{\sigma(i)}$. Or $y_{\mu(i)}$ correspondant à $x_{\sigma(\mu(i))}$, on obtient

$$\sigma(\mu\varphi)(x_1, \dots, x_p) = \varphi(x_{\sigma\mu(1)}, \dots, x_{\sigma\mu(p)}),$$

ce qu'on voulait. □

Lemme 1.2.4. Toute application multilinéaire alternée est antisymétrique.

Démonstration. Soit $\varphi : E^p \rightarrow F$ une application multilinéaire alternée et $(i, j) \in S_p$ une transposition. Si $x_1, \dots, x_p \in E$, on a

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi(x_1, \dots, x_i + x_j, \dots, x_i + x_j, \dots, x_p) \\ &= \varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) + \varphi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_p), \end{aligned}$$

ce qui implique $(i, j)\varphi = -\varphi$. □

Lemme 1.2.5. Sur un champ de caractéristique différente de 2, une application est alternée si et seulement si elle est antisymétrique.

2. On pense à la caractéristique.

Démonstration. On sait déjà qu'une application alternée est antisymétrique, il reste à montrer la réciproque. Soit $\varphi : E^p \rightarrow F$ une application multilinéaire antisymétrique. Si $x_1, \dots, x_p \in E$ avec $x_i = x_j$ pour i différent de j , alors en considérant la transposition $\tau = (i, j)$, on obtient

$$\tau\varphi(x_1, \dots, x_p) = -\varphi(x_1, \dots, x_p)$$

puisque φ est antisymétrique et

$$\tau\varphi(x_1, \dots, x_p) = \varphi(x_1, \dots, x_p)$$

puisque $x_i = x_j$. Ceci implique

$$2\varphi(x_1, \dots, x_p) = 0,$$

ce qui nous permet de conclure puisque l'on travaille sur un champ de caractéristique différente de deux. \square

1.2.2 Définition

Définissons la p^e puissance extérieure d'un espace vectoriel E .

Définition 1.2.6. Soit E un espace vectoriel et $p \geq 2$. Le couple $(\Lambda^p E, \wedge^p)$, où $\Lambda^p E$ est un espace vectoriel et

$$\wedge^p : E \times \dots \times E \rightarrow \Lambda^p E$$

est une application p -linéaire alternée, est une p^e puissance extérieure de E si pour toute application p -linéaire alternée

$$\psi : E \times \dots \times E \rightarrow F$$

il existe une unique application linéaire $f : \Lambda^p E \rightarrow F$ telle que $\psi = f \wedge^p$. On notera $x_1 \wedge \dots \wedge x_p$ l'image de $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ par \wedge^p .

On a la propriété suivante qui est l'analogue de la proposition 1.1.2.

Proposition 1.2.7. Le couple $(\Lambda^p E, \wedge^p)$ est une puissance extérieure pour E si et seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées.

(E₁) Les éléments $x_1 \wedge \dots \wedge x_p$ génèrent $\Lambda^p E$;

(E₂) si $\psi : E \times \dots \times E \rightarrow F$ est une application multilinéaire alternée, il existe une application linéaire $f : \Lambda^p E \rightarrow F$ telle que $\psi = f \wedge^p$.

Proposition 1.2.8. Soit E un espace vectoriel et $p \geq 2$. Il existe une unique p^e puissance extérieure de E , à isomorphisme près.

Démonstration. L'unicité se montre comme pour le produit tensoriel. Pour l'existence, on va chercher un espace vectoriel au travers duquel on peut factoriser toute application multilinéaire alternée $\psi : E^p \rightarrow F$ de manière unique. On peut se servir du produit tensoriel $\otimes^p E$ qui nous permet de factoriser l'application ψ , celle-ci étant multilinéaire. Il existe donc $f : \otimes^p E \rightarrow F$ telle que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} E^p & \xrightarrow{\otimes^p} & \otimes^p E \\ \downarrow \psi & \swarrow f & \\ F & & \end{array}$$

est commutatif. Par contre

$$\otimes^p : E^p \rightarrow \otimes^p E$$

n'est pas nécessairement alterné. Utilisons alors le fait que ψ est alterné. On a

$$f(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) = 0$$

dès qu'il existe $i \neq j$ tel que $x_i = x_j$. Soit $N^p(E)$ le sous-espace de $\otimes^p E$ engendré par des éléments de la forme $x_1 \otimes \cdots \otimes x_p$ où $x_i = x_j$ pour au moins une paire (i, j) telle que $i \neq j$. Comme l'application f s'annule sur $N^p(E)$, elle induit une unique application \tilde{f} définie sur le quotient $\otimes^p E / N^p(E)$ telle que $f = \tilde{f}\pi$ où $\pi : \otimes^p E \rightarrow \otimes^p E / N^p(E)$ est la projection sur le quotient. Le diagramme suivant résume la situation.

$$\begin{array}{ccccc} E^p & \xrightarrow{\otimes^p} & \otimes^p E & \xrightarrow{\pi} & \otimes^p E / N^p(E) \\ & \searrow \varphi & \downarrow f & \swarrow \tilde{f} & \\ & & F & & \end{array}$$

Pour une application ψ alternée quelconque, il existe donc une unique application linéaire \tilde{f} définie sur le quotient $\otimes^p(E) / N^p(E)$ telle que $\varphi = \tilde{f}\pi \otimes^p$. De plus, comme π est linéaire et \otimes^p est multilinéaire, l'application $\pi \otimes^p$ est multilinéaire et elle est également alternée par définition de $N^p(E)$. Le couple $(\otimes^p(E) / N^p(E), \pi \otimes^p)$ est donc une puissance extérieure pour E . \square

On peut alors parler de la puissance extérieure d'un espace vectoriel. Terminons cette section en donnant une base de $\Lambda^p E$.

Proposition 1.2.9. *Soient E un espace vectoriel et $p \geq 2$. Si $(e_i)_{i \in I}$ est une base ordonnée pour E , i.e. telle que l'ensemble d'indices I est muni d'un bon ordre, alors l'ensemble*

$$B = \{e_{\nu_1} \wedge \cdots \wedge e_{\nu_p} \mid \nu_1 < \cdots < \nu_p, \nu_i \in I \forall i \in \{1, \dots, p\}\}$$

est une base de $\Lambda^p(E)$.

Démonstration. L'ensemble B étant une partie génératrice de $\Lambda^p E$, il nous reste à montrer qu'il s'agit également d'une partie libre. Notons J l'ensemble indiquant les éléments de base de B , i.e.

$$J = \{(\nu_1, \dots, \nu_p) \mid \nu_1 < \cdots < \nu_p, \nu_i \in I \forall i \in \{1, \dots, p\}\}.$$

Soit alors

$$\sum_{(\nu_1, \dots, \nu_p) \in H} \lambda_{\nu_1 \dots \nu_p} e_{\nu_1} \wedge \cdots \wedge e_{\nu_p} = 0$$

avec $H \subset J$ un sous-ensemble fini de J . Montrons que pour tout p -uplet $(j_1, \dots, j_p) \in H$, on a $\lambda_{j_1 \dots j_p} = 0$. Soit donc $(j_1, \dots, j_p) \in H$ et considérons

$$\psi^{j_1 \dots j_p} : E \times \cdots \times E \rightarrow \mathbb{K} \quad (x_1, \dots, x_p) \mapsto \det_{j_1 \dots j_p}([x_1]_B, \dots, [x_p]_B)$$

où $[x_i]_B$ est le vecteur des composantes de x_i dans la base B et où on sélectionne les lignes correspondant aux composantes sur e_{j_1}, \dots, e_{j_p} pour le calcul du déterminant.³ Cette application

3. On suppose donc que la dimension de E est supérieure ou égale à p . Dans le cas contraire, on a $\Lambda^p E = 0$ car toute application multilinéaire alternée sur E est alors nulle.

est multilinéaire et alternée, il existe donc une application linéaire $f^{j_1 \dots j_p} : \Lambda^p E \rightarrow \mathbb{K}$ telle que $\psi^{j_1 \dots j_p} = f^{j_1 \dots j_p} \wedge^p$. On a alors

$$\begin{aligned} 0 &= f^{j_1 \dots j_p} \left(\sum_{(\nu_1, \dots, \nu_p) \in H} \lambda_{\nu_1 \dots \nu_p} e_{\nu_1} \wedge \dots \wedge e_{\nu_p} \right) \\ &= \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_p) \in H} \lambda_{\nu_1 \dots \nu_p} f^{j_1 \dots j_p}(e_{\nu_1} \wedge \dots \wedge e_{\nu_p}) \\ &= \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_p) \in H} \lambda_{\nu_1 \dots \nu_p} \psi^{j_1 \dots j_p}(e_{\nu_1}, \dots, e_{\nu_p}) \\ &= \lambda_{j_1 \dots j_p} \end{aligned}$$

puisque la matrice utilisée pour calculer $\psi^{j_1 \dots j_p}(e_{\nu_1}, \dots, e_{\nu_p})$ comporte au moins une colonne nulle si $(\nu_1, \dots, \nu_p) \neq (j_1, \dots, j_p)$ et est l'identité sinon. \square

Définition 1.2.10. On pose $\Lambda^0 E = \mathbb{K}$ et $\Lambda^1 E = E$.

Corollaire 1.2.11. Si E est de dimension finie, $\dim(E) = n$, alors

$$\dim(\Lambda^p E) = \binom{n}{p}$$

si $0 \leq n \leq p$ et

$$\dim(\Lambda^p E) = 0$$

si $p > n$.

1.2.3 La puissance extérieure comme sous-espace du produit tensoriel

Vu la construction de p^e puissance extérieure présentée à la proposition 1.2.8, on sait que l'on peut projeter $\otimes^p E$ sur $\Lambda^p E$. Nous allons ici montrer que l'on peut considérer $\Lambda^p E$ comme un sous-espace vectoriel de $\otimes^p E$.

Proposition 1.2.12. Soient E un espace vectoriel et $p \geq 2$. L'application

$$h : E^p \rightarrow \otimes^p E \quad (x_1, \dots, x_p) \mapsto \sum_{\sigma \in S_p} \text{sign}(\sigma) x_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(p)}$$

est multilinéaire et alternée.

Démonstration. Soient $x_1, \dots, x_p \in E$ avec $x_i = x_j$ pour $i, j \in \{1, \dots, p\}$, $i \neq j$. Considérons H le sous groupe de S_p engendré par la transposition (i, j) , i.e. $H = \{(i, j), \text{id}\}$. Soit $J \subset S_p$ un ensemble de représentants des classes latérales à droite $H\sigma$, $\sigma \in S_p$. L'image par h de (x_1, \dots, x_p) peut donc s'écrire

$$\begin{aligned} h(x_1, \dots, x_p) &= \sum_{\sigma \in S_p} \text{sign}(\sigma) x_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(p)} \\ &= \sum_{\mu \in J} \sum_{\sigma \in H\mu} \text{sign}(\sigma) x_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(p)}. \end{aligned}$$

Or si $\mu \in J$, on a $H\mu = \{\mu, (i, j)\mu\}$. Ainsi $H\mu$ se compose de deux permutations de signature opposée et

$$h(x_1, \dots, x_p) = \sum_{\mu \in J} \text{sign}(\mu) (x_{\mu(1)} \otimes \dots \otimes x_{\mu(p)} - x_{(i,j)\mu(1)} \otimes \dots \otimes x_{(i,j)\mu(p)}) .$$

Montrons alors que

$$x_{\mu(1)} \otimes \dots \otimes x_{\mu(p)} - x_{(i,j)\mu(1)} \otimes \dots \otimes x_{(i,j)\mu(p)} \quad (1.1)$$

est nul pour tout $\mu \in J$. Ceci suffira pour montrer que $h(x_1, \dots, x_p) = 0$ et que h est alterné. Soit donc $\mu \in J$. Posons $k = \mu^{-1}(i)$ et $l = \mu^{-1}(j)$. On obtient alors que 1.1, i.e.

$$x_{\mu(1)} \otimes \dots \otimes x_{\mu(k)} \dots \otimes x_{\mu(l)} \otimes \dots \otimes x_{\mu(p)} - x_{(i,j)\mu(1)} \otimes \dots \otimes x_{(i,j)\mu(k)} \dots \otimes x_{(i,j)\mu(l)} \otimes \dots \otimes x_{(i,j)\mu(p)}$$

peut se réécrire comme

$$x_{\mu(1)} \otimes \dots \otimes x_i \otimes \dots \otimes x_j \otimes \dots \otimes x_{\mu(p)} - x_{(i,j)\mu(1)} \otimes \dots \otimes x_{(i,j)i} \dots \otimes x_{(i,j)j} \otimes \dots \otimes x_{(i,j)\mu(p)}$$

qui est bien nul puisque $x_i = x_j$. □

L'application h définie ci-dessus induit donc une application sur la p^e puissance extérieure de E . On montre que cette application est injective.

Proposition 1.2.13. *Soient E un espace vectoriel et $p \geq 2$. L'application linéaire*

$$i : \Lambda^p E \rightarrow \otimes^p E \quad x_1 \wedge \dots \wedge x_p \mapsto \sum_{\sigma \in S_p} \text{sign}(\sigma) x_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(p)} \quad (1.2)$$

est injective.

Démonstration. L'application i est, par la proposition précédente et définition de $\Lambda^p E$, bien définie. Montrons qu'elle est injective. Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base de E . Montrons que si $i(z) = 0$, alors $z = 0$. Par la proposition 1.2.9, on peut écrire

$$z = \sum_{(j_1, \dots, j_p) \in H} \lambda_{j_1 \dots j_p} e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_p}$$

où H est un ensemble fini de p -uplets (j_1, \dots, j_p) tels que $j_1 < \dots < j_p$ et $j_k \in I$ pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$. On a alors

$$\begin{aligned} 0 &= i(z) \\ &= i \left(\sum_{(j_1, \dots, j_p) \in H} \lambda_{j_1 \dots j_p} e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_p} \right) \\ &= \sum_{(j_1, \dots, j_p) \in H} \lambda_{j_1 \dots j_p} i(e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_p}) \\ &= \sum_{(j_1, \dots, j_p) \in H} \lambda_{j_1 \dots j_p} \left(\sum_{\sigma \in S_p} \text{sign}(\sigma) e_{j_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes e_{j_{\sigma(p)}} \right) . \end{aligned}$$

Or les éléments $e_{j_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes e_{j_{\sigma(p)}} ((j_1, \dots, j_p) \in H \text{ et } \sigma \in S_p)$ font partie d'une base de $\otimes^p E$ et sont tous différents (puisqu'on a pris $j_1 < \dots < j_p$). De là,

$$\lambda_{j_1 \dots j_p} = 0$$

pour tout $(j_1, \dots, j_p) \in H$ et $z = 0$. □

Définition 1.2.14. Soient E un espace vectoriel et $p \geq 2$. L'image de $\Lambda^p E$ par 1.2 est notée $X^p(E)$.

Corollaire 1.2.15. Soient E un espace vectoriel et $p \geq 2$. Le sous-espace vectoriel $X^p(E)$ de $\otimes^p E$ est la p^e puissance extérieure pour E .

Si on travaille sur un champ de caractéristique différente de 2, on peut caractériser $X^p(E)$ en termes de tenseurs antisymétriques.

Définition 1.2.16. Soient E un espace vectoriel et $p \geq 2$. Un tenseur $z \in \otimes^p E$ est *antisymétrique* si

$$\sigma z = \text{sign}(\sigma)z$$

pour tout $\sigma \in S_p$ et où l'action de $\sigma \in S_p$ sur $\otimes^p E$ est définie par

$$\sigma \cdot (x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) = x_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma^{-1}(p)}$$

pour tout $x_1, \dots, x_p \in E$.

Proposition 1.2.17. L'ensemble $X^p(E)$ est un ensemble de tenseurs antisymétriques. Sur un champ de caractéristique différente de 2, il s'agit de l'ensemble des tenseurs antisymétriques.

Démonstration. Soient $x_1, \dots, x_p \in E$ et $\sigma \in S_p$. Posons

$$z = \sum_{\mu \in S_p} \text{sign}(\mu) x_{\mu^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\mu^{-1}(p)},$$

un élément générateur de $X^p(E)$. On a

$$\begin{aligned} \sigma z &= \sigma \left(\sum_{\mu \in S_p} \text{sign}(\mu) x_{\mu^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\mu^{-1}(p)} \right) \\ &= \sum_{\mu \in S_p} \text{sign}(\mu) \sigma \mu (x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) \\ &= \text{sign}(\sigma) \sum_{\mu \in S_p} \text{sign}(\sigma \mu) \sigma \mu (x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) \\ &= \text{sign}(\sigma) z. \end{aligned}$$

Si maintenant on travaille sur un champ de caractéristique différente de 2, soit $z \in \otimes^p E$ tel que $\sigma z = \text{sign}(\sigma)z$ pour tout $\sigma \in S_p$. Regardons ce qu'il se passe sur les coefficients qui représentent z dans une base de $\otimes^p E$. Soient donc B une base de E et e_1, \dots, e_n les vecteurs de base qui apparaissent dans la décomposition de z . Autrement dit, il existe $\lambda_{i_1, \dots, i_p}$ ($i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, n\}$) des coefficients tels que

$$z = \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_p=1}^n \lambda_{i_1, \dots, i_p} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p}.$$

Pour toute permutation $\sigma \in S_p$, on peut donc écrire

$$\begin{aligned}\sigma z &= \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_p=1}^n \lambda_{i_1, \dots, i_p} \sigma(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p}) \\ &= \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_p=1}^n \lambda_{i_1, \dots, i_p} e_{i_{\sigma^{-1}(1)}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\sigma^{-1}(p)}} \\ &= \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_p=1}^n \lambda_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(p)}} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p}.\end{aligned}$$

Comme $\sigma z = \text{sign}(\sigma)z$, on a alors $\text{sign}(\sigma)\lambda_{i_1, \dots, i_p} = \lambda_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(p)}}$ pour tous $i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, n\}$ et $\sigma \in S_p$. Si donc on prend $i_k = i_l$ pour l et k différents, on a, en prenant la permutation (k, l)

$$\lambda_{i_1, \dots, i_p} = -\lambda_{i_1, \dots, i_p}$$

ce qui implique $\lambda_{i_1, \dots, i_p} = 0$.⁴ Au final, on peut écrire

$$\begin{aligned}z &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \sum_{\sigma \in S_p} \lambda_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(p)}} e_{i_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\sigma(p)}} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \sum_{\sigma \in S_p} \text{sign}(\sigma) \lambda_{i_1, \dots, i_p} e_{i_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\sigma(p)}} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \lambda_{i_1, \dots, i_p} \left(\sum_{\sigma \in S_p} \text{sign}(\sigma) e_{i_{\sigma^{-1}(1)}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\sigma^{-1}(p)}} \right)\end{aligned}$$

et $z \in X^p(E)$. □

Si on travaille sur un champ de caractéristique nulle, la proposition suivante nous donne un projecteur de $\otimes^p E$ sur $X^p(E)$.

Proposition 1.2.18. *Soient E un espace vectoriel sur un champ de caractéristique nulle et $p \geq 2$. L'application*

$$\pi_A : \otimes^p E \rightarrow X^p(E) \quad x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \mapsto \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \text{sign}(\sigma) x_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma^{-1}(p)}$$

est un projecteur dont le noyau est $N^p(E)$. On a alors $\otimes^p E = N^p(E) \oplus X^p(E)$ et l'isomorphisme entre $X^p(E)$ et $\otimes^p E / N^p(E)$ ⁵ est donné par le passage de π_A au quotient.

Pour démontrer cette proposition nous nous servirons du lemme suivant.

Lemme 1.2.19. *Soient $z \in \otimes^p E$ et $\sigma \in S_p$. Alors $z - \text{sign}(\sigma)\sigma z$ appartient à $N^p(E)$.*

Démonstration. Par linéarité, il suffit de démontrer le résultat pour des générateurs de $\otimes^p E$. On procède par récurrence sur le nombre de transpositions présentes dans la décomposition de σ . Soit $x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \in \otimes^p E$.

4. C'est ici qu'intervient l'hypothèse sur la caractéristique du champ.

5. Il s'agit des deux constructions de puissance extérieure présentées jusqu'à présent.

Si $\sigma = (i, j)$, on a

$$\begin{aligned} & x_1 \otimes \cdots \otimes x_i + x_j \otimes \cdots \otimes x_i + x_j \otimes \cdots \otimes x_p \\ &= x_1 \otimes \cdots \otimes x_i \otimes \cdots \otimes x_j \otimes \cdots \otimes x_p + x_1 \otimes \cdots \otimes x_i \otimes \cdots \otimes x_i \otimes \cdots \otimes x_p \\ & \quad + x_1 \otimes \cdots \otimes x_j \otimes \cdots \otimes x_j \otimes \cdots \otimes x_p + x_1 \otimes \cdots \otimes x_j \otimes \cdots \otimes x_i \otimes \cdots \otimes x_p, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} & x_1 \otimes \cdots \otimes x_p + (ij)x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \\ &= x_1 \otimes \cdots \otimes x_i \otimes \cdots \otimes x_j \otimes \cdots \otimes x_p + x_1 \otimes \cdots \otimes x_j \otimes \cdots \otimes x_i \otimes \cdots \otimes x_p \\ &= x_1 \otimes \cdots \otimes x_i + x_j \otimes \cdots \otimes x_i + x_j \otimes \cdots \otimes x_p \\ & \quad - x_1 \otimes \cdots \otimes x_j \otimes \cdots \otimes x_j \otimes \cdots \otimes x_p - x_1 \otimes \cdots \otimes x_i \otimes \cdots \otimes x_i \otimes \cdots \otimes x_p \end{aligned}$$

et cette dernière expression appartient bien à $N^p(E)$. On conclut par linéarité.

Si maintenant $\sigma = \tau\mu$, où $\tau, \mu \in S_p$ satisfont la propriété visée, on a

$$z - \text{sign}(\mu)\mu z \in N^p(E)$$

et

$$\text{sign}(\mu)\mu z - \text{sign}(\tau)\tau(\text{sign}(\mu)\mu z) \in N^p(E).$$

Ceci implique

$$z - \text{sign}(\sigma)\sigma z = (z - \text{sign}(\mu)\mu z) + (\text{sign}(\mu)\mu z - \text{sign}(\tau\mu)\tau\mu z) \in N^p(E).$$

□

Preuve de la proposition 1.2.18. L'application π_A est bien définie⁶ et à valeurs dans $X^p(E)$. Elle est surjective par définition de $X^p(E)$. Montrons que $\pi_A^2 = \pi_A$. Pour tout $z \in \otimes^p E$, on a

$$\begin{aligned} \pi_A^2(z) &= \pi_A \left(\frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \text{sign}(\sigma)\sigma z \right) \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \text{sign}(\sigma)\pi_A(\sigma z) \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \text{sign}(\sigma) \left(\frac{1}{p!} \sum_{\mu \in S_p} \text{sign}(\mu)\mu(\sigma z) \right) \\ &= \frac{1}{(p!)^2} \sum_{\sigma \in S_p} \sum_{\mu \in S_p} \text{sign}(\mu\sigma)(\mu\sigma)z \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \pi_A(z) \\ &= \pi_A(z). \end{aligned}$$

6. Il suffit de considérer l'application induite par $\frac{1}{p!}h$ sur le produit tensoriel, en reprenant les notations de la proposition 1.2.12.

Ainsi π_A est bien un projecteur de $\otimes^p E$ sur $X^p(E)$. Montrons que $\ker \pi_A = N^p(E)$. L'inclusion $N^p(E) \subset \ker \pi_A$ se montre aisément car si $x_1, \dots, x_p \in E$ avec $x_i = x_j$ pour une certaine paire (i, j) ($i \neq j$), on a

$$\pi_A(x_1 \otimes \dots \otimes x_p) = \frac{1}{p!} h(x_1, \dots, x_p) = 0$$

par la proposition 1.2.12. Pour montrer l'autre inclusion, soit $z \in \otimes^p(E)$ tel que $\pi_A(z) = 0$. On a alors

$$\begin{aligned} z &= z - \pi_A(z) \\ &= \frac{1}{p!} \left(\sum_{\sigma \in S_p} z \right) - \left(\sum_{\sigma \in S_p} \text{sign}(\sigma) \sigma z \right) \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} z - \text{sign}(\sigma) \sigma z \end{aligned}$$

et le lemme précédent nous permet de conclure. □

1.3 Puissances symétriques d'un espace vectoriel

Dans cette section on présente les p^e puissances symétriques d'un espace vectoriel E . Beaucoup de choses étant analogues à ce que l'on a déjà fait pour les puissances extérieures, on se permettra d'être plus bref.

1.3.1 Définition

Les p^e puissances extérieures sur un espace vectoriel E permettent de factoriser des applications multilinéaires symétriques définies sur $E \times \dots \times E$ de manière unique.

Définition 1.3.1. Une application p -linéaire $\psi : E \times \dots \times E \rightarrow F$ est symétrique si $\psi(x_1, \dots, x_p) = \psi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)})$ pour toute permutation $\sigma \in S_p$.

Définition 1.3.2. Soient E un espace vectoriel et $p \geq 2$. Le couple $(\text{Sym}^p E, \bullet^p)$, où $\text{Sym}^p E$ est un espace vectoriel et

$$\bullet^p : E \times \dots \times E \rightarrow \text{Sym}^p E$$

est une application p -linéaire symétrique est une p^e puissance symétrique de E si pour toute application p -linéaire symétrique

$$\psi : E \times \dots \times E \rightarrow F$$

il existe une unique application linéaire $f : \text{Sym}^p E \rightarrow F$ telle que $\psi = f \bullet^p$. On notera $x_1 \bullet \dots \bullet x_p$ l'image de $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ par \bullet^p .

Proposition 1.3.3. Soient E un espace vectoriel et $p \geq 2$. Il existe une unique p^e puissance symétrique pour E à isomorphisme près.

Démonstration. On esquisse la preuve. L'unicité se montre comme pour le produit tensoriel et pour l'existence, on montre que

$$\text{Sym}^p E = \otimes^p E / M^p(E)$$

où $M^p(E)$ est le sous-espace de $\otimes^p E$ engendré par des tenseurs de la forme

$$x_1 \otimes \cdots \otimes x_p - x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(p)}$$

avec $x_1, \dots, x_p \in E$ et $\sigma \in S_p$ muni de la projection sur le quotient convient. \square

Pour donner une base de $\text{Sym}^p E$, on va procéder comme pour les puissances extérieures. On aura besoin du pendant du déterminant pour les applications symétriques.

Définition 1.3.4. Soit $A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$ une matrice. Le *permanent* de A , noté $\text{perm}(A)$, est donné par

$$\text{perm}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Proposition 1.3.5. Soient E un espace vectoriel et $p \geq 2$. Si $(e_i)_{i \in I}$ est une base ordonnée pour E , i.e. telle que l'ensemble d'indices I est muni d'un bon ordre, alors l'ensemble

$$B = \{e_{\nu_1} \cdot \dots \cdot e_{\nu_p} \mid \nu_1 \leq \dots \leq \nu_p, \nu_i \in I \forall i \in \{1, \dots, p\}\}$$

est une base de $\text{Sym}^p(E)$.

Démonstration. L'ensemble B est une partie génératrice, montrons qu'elle est libre. Soit une combinaison linéaire nulle

$$\sum_{(\nu_1, \dots, \nu_p) \in H} \lambda_{\nu_1 \dots \nu_p} e_{\nu_1} \cdot \dots \cdot e_{\nu_p} = 0$$

où H est un sous-ensemble fini de

$$\{(\nu_1, \dots, \nu_p) \mid \nu_1 \leq \dots \leq \nu_p, \nu_i \in I \forall i \in \{1, \dots, p\}\}.$$

Prenons $(j_1, \dots, j_p) \in H$ et montrons que $\lambda_{j_1 \dots j_p} = 0$. On veut procéder comme pour la proposition 1.2.9 et trouver une application $\psi^{j_1 \dots j_p} : E^p \rightarrow \mathbb{K}$ multilinéaire et symétrique telle que

$$\psi^{j_1 \dots j_p}(e_{\nu_1}, \dots, e_{\nu_p}) = \begin{cases} 0 & \text{si } (\nu_1, \dots, \nu_p) \neq (j_1, \dots, j_p) \\ \neq 0 & \text{si } (\nu_1, \dots, \nu_p) = (j_1, \dots, j_p). \end{cases}$$

On est alors tenté de prendre

$$\psi^{j_1 \dots j_p} = \text{perm}_{j_1, \dots, j_p} : (x_1, \dots, x_p) \mapsto \sum_{\sigma \in S_p} [x_1]_{j_{\sigma(1)}} \cdots [x_p]_{j_{\sigma(p)}}$$

l'application qui calcule le permanent de la matrice dont la i^{e} colonne est formée des composantes de x_i sur les vecteurs de base e_{j_1}, \dots, e_{j_p} . On a alors bien

$$\psi^{j_1 \dots j_p}(e_{\nu_1}, \dots, e_{\nu_p}) = 0$$

si $(\nu_1, \dots, \nu_p) \neq (j_1, \dots, j_p)$. Par contre, si $(\nu_1, \dots, \nu_p) = (j_1, \dots, j_p)$, il ne s'agit pas toujours de calculer le permanent de la matrice identité puisqu'on peut avoir des égalités entre j_1, \dots, j_p , i.e. avoir des blocs de 1

$$\begin{array}{ccc} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{array}$$

sur la diagonale de la matrice dont on veut calculer le permanent. Sur un champ de caractéristique non-nulle, cela pourrait poser problème si on veut

$$\psi^{j_1 \dots j_p}(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) \neq 0.$$

Pour éviter cet écueil, on va modifier la définition de $\psi^{j_1 \dots j_p}$. Soit G le sous-groupe de S_p tel que $(j_{g(1)}, \dots, j_{g(p)}) = (j_1, \dots, j_p)$ pour tout $g \in G$. Pour n'importe quelle classe latérale $G\sigma$, $\sigma \in S_p$, on a

$$j_{\sigma'(i)} = j_{g\sigma(i)} = j_{\sigma(i)}$$

pour tout $\sigma' = g\sigma \in G\sigma$. Alors, si $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$, on peut définir

$$\psi^{j_1, \dots, j_p}(x_1, \dots, x_p) = \sum_{G\sigma \in G \backslash S_p} [x_1]_{j_{\sigma(1)}} \cdots [x_p]_{j_{\sigma(p)}}$$

en sommant sur les classes latérales à droites de G , i.e. en additionnant un seul terme par classe latérale, au lieu d'ajouter $|G|$ fois le même terme pour chaque classe latérale. L'application ψ^{j_1, \dots, j_p} ainsi définie est bilinéaire et symétrique. On a en effet, pour tout $\mu \in S_p$,

$$\begin{aligned} \psi^{j_1, \dots, j_p}(x_{\mu(1)}, \dots, x_{\mu(p)}) &= \sum_{G\sigma \in G \backslash S_p} [x_{\mu(1)}]_{j_{\sigma(1)}} \cdots [x_{\mu(p)}]_{j_{\sigma(p)}} \\ &= \sum_{G\sigma \in G \backslash S_p} [x_1]_{j_{\sigma\mu^{-1}(1)}} \cdots [x_p]_{j_{\sigma\mu^{-1}(p)}} \\ &= \sum_{G\sigma \in G \backslash S_p} [x_1]_{j_{\sigma(1)}} \cdots [x_p]_{j_{\sigma(p)}} \end{aligned}$$

car si $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ est un ensemble de représentants pour les classes latérales à droite de G , alors $\{\sigma_1\mu^{-1}, \dots, \sigma_k\mu^{-1}\}$ l'est aussi. Avec cette définition, on a alors

$$\psi^{j_1, \dots, j_p}(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) = 1$$

et on conclut comme dans la proposition 1.2.9 que $\lambda_{j_1, \dots, j_p} = 0$ en utilisant la propriété de factorisation de $\text{Sym}^p E$. \square

Définition 1.3.6. On pose $\text{Sym}^0 E = \mathbb{K}$ et $\text{Sym}^1 E = E$.

Corollaire 1.3.7. Si E est de dimension finie, $\dim(E) = n$, on a

$$\dim(\text{Sym}^p E) = \binom{n+p-1}{p}$$

pour tout $p \geq 0$.

1.3.2 La puissance symétrique comme sous-espace du produit tensoriel

On peut, comme pour la p^e puissance extérieure de E , considérer la p^e puissance symétrique de E comme sous-espace vectoriel de $\otimes^p E$. Là où pour $\Lambda^p E$ on a fait l'hypothèse de travailler sur un champ de caractéristique nulle à partir du moment où on cherchait un projecteur de $\otimes^p E$ sur $X^p(E)$ ⁷, on fera cette même hypothèse ici plus tôt : dès la description de $\text{Sym}^p E$ comme sous-espace de $\otimes^p E$.

7. Confer 1.2.18.

Proposition 1.3.8. Soient E un espace vectoriel et $p \geq 2$. L'application

$$s : E^p \rightarrow \otimes^p E \quad (x_1, \dots, x_p) \mapsto \sum_{\sigma \in S_p} x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(p)}$$

est multilinéaire et symétrique.

Proposition 1.3.9. Soient E un espace vectoriel sur un champ de caractéristique nulle et $p \geq 2$. L'application linéaire

$$i : \text{Sym}^p E \rightarrow \otimes^p E \quad x_1 \cdot \dots \cdot x_p \mapsto \sum_{\sigma \in S_p} x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(p)} \quad (1.3)$$

est injective.

La démonstration de la proposition 1.3.9 se fait comme pour la proposition 1.2.13 en faisant l'hypothèse supplémentaire de caractéristique nulle puisque dans la base de $\text{Sym}^p E$ donnée par la proposition 1.3.5, on peut répéter le même indice plusieurs fois.

Définition 1.3.10. Soient E un espace vectoriel sur un champ de caractéristique nulle et $p \geq 2$. L'image de $\text{Sym}^p E$ par 1.3 est noté $Y^p(E)$.

Corollaire 1.3.11. Soient E un espace vectoriel sur un champ de caractéristique nulle et $p \geq 2$. Le sous-espace vectoriel $Y^p(E)$ de $\otimes^p E$ est une p^{e} puissance symétrique pour E .

Définition 1.3.12. Soient E un espace vectoriel et $p \geq 2$. Un tenseur $z \in \otimes^p E$ est *symétrique* si

$$\sigma z = z$$

pour tout $\sigma \in S_p$.

Proposition 1.3.13. Soit E un espace vectoriel sur un champ de caractéristique nulle. L'ensemble $Y^p(E)$ est l'ensemble des tenseurs symétriques de $\otimes^p E$.

Proposition 1.3.14. Soient E un espace vectoriel sur un champ de caractéristique nulle et $p \geq 2$. L'application

$$\pi_S : \otimes^p E \rightarrow Y^p(E) \quad x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \mapsto \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} x_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma^{-1}(p)}$$

est un projecteur dont le noyau est $M^p(E)$. On a alors $\otimes^p E = M^p(E) \oplus Y^p(E)$ et l'isomorphisme entre $Y^p(E)$ et $\otimes^p E / M^p(E)$ ⁸ est donné par le passage de π_S au quotient.

Terminons cette section par une dernière proposition qui s'avérera être utile.

Proposition 1.3.15. Soit E un espace vectoriel sur un champ de caractéristique nulle et $p \geq 2$. Alors $Y^p(E)$ est engendré par

$$\{x \otimes \cdots \otimes x \mid x \in E\}.$$

8. Il s'agit des deux constructions de puissance extérieure présentées jusqu'à présent.

Démonstration. On a

$$\rangle \{x \otimes \cdots \otimes x \mid x \in E\} \langle \subset Y^p(E),$$

il reste à montrer l'autre inclusion. Pour cela, montrons la formule de polarization suivante :

$$\sum_{\sigma \in S_p} x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(p)} = \sum_{S \subset \{1, \dots, p\}} (-1)^{p-|S|} \left(\sum_{i \in S} x_i \right)^p \quad (1.4)$$

pour tous $x_1, \dots, x_p \in E$ et où la notation x^p désigne $x \otimes \cdots \otimes x$ si $x \in E$. On va montrer que le membre de droite de (1.4) correspond à son membre de gauche. Remarquons d'abord que chacun des termes

$$x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(p)}$$

du membre de gauche de (1.4) apparaît exactement une fois dans son membre de droite : lorsque l'on considère $S = \{1, \dots, p\}$ et que l'on développe

$$\left(\sum_{i=1}^p x_i \right) \otimes \cdots \otimes \left(\sum_{i=1}^p x_i \right).$$

Il reste donc à montrer que lorsque l'on développe le membre de gauche de (1.4), un tenseur simple apparaissant avec plusieurs indices répétés, par exemple un tenseur de la forme

$$x_1 \otimes \cdots \otimes x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_m \otimes \cdots \otimes x_m \otimes \dots,$$

a un coefficient nul. Soit donc z un tenseur simple, au sein duquel m vecteurs de $\{x_1, \dots, x_p\}$ apparaissent au moins deux fois⁹. Quitte à réindicer, on peut considérer que ce sont x_1, \dots, x_m qui apparaissent répétés dans z . Pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ notons k_i le nombre de fois que x_i est répété dans z . L'ordre des vecteurs apparaissant dans z n'important pas pour le raisonnement qui suit, on peut se représenter z comme

$$z = \underbrace{x_1 \otimes \cdots \otimes x_1}_{k_1} \otimes \underbrace{x_2 \otimes \cdots \otimes x_2}_{k_2} \otimes \cdots \otimes \underbrace{x_m \otimes \cdots \otimes x_m}_{k_m} \otimes \dots$$

Montrons alors que z apparaît dans le membre de droite de (1.4) avec un coefficient nul. Pour cela, calculons-le en considérons deux cas.

Cas 1 : $k_1 + \cdots + k_m = p$. Dans ce cas, il y a m indices différents apparaissant dans z , ainsi les sous-ensembles $S \subset \{1, \dots, p\}$ tels que le développement de

$$\left(\sum_{i \in S} x_i \right)^p$$

fait apparaître z doivent être tels que $|S| \in \{m, \dots, p\}$. Le coefficient apparaissant devant z dans le membre de gauche de (1.4) vaudra alors, au signe près,

$$\sum_{k=m}^p (-1)^k \sum_{\substack{\{1, \dots, m\} \subset S \subset \{1, \dots, p\} \\ |S|=k}} 1.$$

9. Le nombre m est le nombre total de tels vecteurs.

Si $k \in \{m, \dots, p\}$, on doit compter le nombre de sous-ensembles $S \subset \{1, \dots, p\}$ qui contiennent $\{1, \dots, m\}$ et tels que $|S| = k$. Comme S doit contenir $\{1, \dots, m\}$, on peut encore choisir $k - m$ indices parmi $\{1, \dots, p\} \setminus \{1, \dots, m\}$, i.e. parmi $p - m$ éléments. Ainsi

$$\sum_{\substack{\{1, \dots, m\} \subset S \subset \{1, \dots, p\} \\ |S| = k}} 1 = \binom{p-m}{k-m}$$

et, le coefficient devant z vaut (toujours au signe près)

$$\sum_{k=m}^p (-1)^k \binom{p-m}{k-m} = \pm \sum_{k=0}^{p-m} (-1)^k \binom{p-m}{k}.$$

Cas 2 : $k_1 + \dots + k_m < p$. Le tenseur z fait donc apparaître $m + (p - j)$ indices différents, où $j = k_1 + \dots + k_m$. De façon tout à fait similaire au premier cas, on doit compter, pour tout $k \in \{m + p - j, \dots, p\}$, le nombre de sous-ensembles $S \subset \{1, \dots, p\}$ qui contiennent les $m + p - j$ indices des éléments apparaissant dans z et tels que $|S| = k$. Pour construire un tel sous-ensemble, il reste donc à trouver $k - (m + p - j)$ indices parmi les $p - (m + p - j)$ n'apparaissant pas dans z , i.e. que le nombre cherché vaut

$$\binom{j-m}{k-m-p+j}$$

et le coefficient apparaissant devant z vaut alors (au signe près)

$$\sum_{k=m+p-j}^p (-1)^k \binom{j-m}{k-m-p+j} = \pm \sum_{k=0}^{j-m} (-1)^k \binom{j-m}{k}.$$

Dans les deux cas, on trouve que le coefficient devant z dans le membre de gauche de (1.4) est de la forme

$$\pm \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$$

pour $n \in \mathbb{N}_0$. Or on a, par le binôme de Newton,

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = (1 + (-1))^n = 0$$

et on conclut. □

1.4 Algèbres et modules

Il s'avérera commode dans le chapitre suivant de définir une représentation d'un groupe G au travers d'un homomorphisme d'algèbres (associatives et unitaires). Nous rappelons quelques définitions essentielles et définissons le produit tensoriel de modules sur une algèbre.

1.4.1 Définitions

Définition 1.4.1. Une algèbre¹⁰ est un espace vectoriel A muni d'une application bilinéaire $A \times A \rightarrow A$. L'application bilinéaire associée est appelée multiplication et le produit de deux éléments $a, b \in A$ est noté ab ou $a \cdot b$.

Une algèbre A est *unitaire* si elle possède une unité, c'est-à-dire un élément e tel que

$$ae = a = ea$$

pour tout $a \in A$.

Si la multiplication est associative on dira que A est une algèbre *associative*.

Une algèbre associative unitaire est donc en particulier un anneau.

Définition 1.4.2. Soient A et B deux \mathbb{K} -algèbres. Une application $\varphi : A \rightarrow B$ est un homomorphisme d'algèbres si φ est linéaire et préserve le produit (i.e. $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$). Si de plus A et B sont unitaires, on demande $\varphi(e_A) = e_B$.

Définition 1.4.3. Un idéal à gauche (resp. droite) $I \subset A$ est un sous-espace vectoriel de A tel que $a \cdot I \subset I$ (resp. $I \cdot a \subset I$) pour tout $a \in A$.

Par la suite toute algèbre sera sous-entendue comme étant associative et unitaire, elle possédera donc une structure d'anneau. Commençons par définir ce qu'est un module sur un anneau avant de présenter le cas particulier de module sur une algèbre.

Module sur un anneau

Pour présenter ce qu'est un module sur un anneau, on va faire l'analogie avec les espaces vectoriels. Pour rappel, voici la définition d'un espace vectoriel sur un champ \mathbb{K} .

Définition 1.4.4. Un espace vectoriel est un groupe abélien E muni d'une opération

$$\cdot : \mathbb{K} \times E \rightarrow E$$

telle que

- (1) $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$;
- (2) $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$;
- (3) $1 \cdot x = x$;
- (4) $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$.

Soit R un anneau et M un groupe abélien. Notre but est de munir M d'une multiplication scalaire donnée par les éléments de l'anneau R . Par analogie avec les espaces vectoriels, on va vouloir définir un R -module comme étant un groupe abélien M muni d'une multiplication

$$\cdot : R \times M \rightarrow M$$

et vérifiant les quatre points correspondants de la définition 1.4.4. Cependant, un champ est commutatif alors qu'un anneau ne l'est pas nécessairement. Ainsi, le point (4) de 1.4.4 qui est équivalent à

$$\mu \cdot (\lambda \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x \quad \forall \mu, \lambda \in \mathbb{K}, \quad x \in E$$

lorsqu'on travaille avec un champ \mathbb{K} , n'est plus valable lorsque l'on adapte les définitions à un anneau. En effet, les deux formulations suivantes

10. On écrira \mathbb{K} -algèbre s'il est nécessaire de préciser le champ sous-jacent.

1. $(r_1 r_2) \cdot m = r_1 \cdot (r_2 \cdot m) \quad \forall r_1, r_2 \in R, m \in M;$
2. $(r_1 r_2) \cdot m = r_2 \cdot (r_1 \cdot m) \quad \forall r_1, r_2 \in R, m \in M;$

ne sont pas nécessairement équivalentes si R n'est pas commutatif. Ceci nous invite donc à faire la distinction entre les deux et on parlera de R -module à gauche et à droite sur R , en fonction du cas qui nous occupe.

Définition 1.4.5. Soit R un anneau. Un R -module à gauche (resp. à droite) est un groupe abélien M muni d'une opération

$$\cdot : R \times M \rightarrow M$$

telle que

- (1) $r \cdot (m_1 + m_2) = r \cdot m_1 + r \cdot m_2;$
- (2) $(r_1 + r_2) \cdot m = r_1 \cdot m + r_2 \cdot m;$
- (3) $e \cdot m = m;$
- (4) $(r_1 r_2) \cdot m = r_1 \cdot (r_2 \cdot m)$ (resp. $(r_1 r_2) \cdot m = r_2 \cdot (r_1 \cdot m)$);

pour tous $m_1, m_2, m \in M; r_1, r_2, r \in R$ et où $e \in R$ est l'unité de l'anneau.

Remarque 1.4.6. Si M est un R -module à droite, on préférera parfois multiplier ses éléments à droite (d'où l'appellation) et définir les choses en notant

$$\cdot : M \times R \rightarrow R$$

la multiplication. Les quatre points de la définition 1.4.5 se réécrivent alors

- (1) $(m_1 + m_2) \cdot r = m_1 \cdot r + m_2 \cdot r$
- (2) $m \cdot (r_1 + r_2) = m \cdot r_1 + m \cdot r_2$
- (3) $m \cdot 1 = m$
- (4) $m \cdot (r_1 r_2) = (m \cdot r_1) \cdot r_2$

On va majoritairement préférer cette notation.

Module sur une algèbre

Si maintenant A est une algèbre unitaire et associative, on peut définir un module sur A comme on vient de le faire pour les anneaux, A en étant un. Cependant la structure d'algèbre est plus riche que celle d'anneau puisque une algèbre est en particulier un espace vectoriel, et un champ \mathbb{K} fait donc partie du décor. Si M est un A -module, on peut alors le munir d'une structure d'espace vectoriel, où la multiplication scalaire est donnée par

$$\mathbb{K} \times M \rightarrow M \quad (\lambda, m) \rightarrow (\lambda e) \cdot m.$$

On vérifie que la multiplication par des éléments de l'algèbre

$$\cdot : A \times M \rightarrow M$$

est une application bilinéaire, et on peut réécrire la définition d'un module sur une algèbre de la manière suivante.

Définition 1.4.7. Soit A une algèbre. Un A -module à gauche (resp. à droite) est un espace vectoriel M muni d'une opération bilinéaire

$$\cdot : A \times M \rightarrow M$$

telle que

- (1) $e \cdot m = m$;
- (2) $(ab) \cdot m = a \cdot (b \cdot m)$ (resp. $(ab) \cdot m = b \cdot (a \cdot m)$);

pour tous $a, b \in A$ et $m \in M$.

1.4.2 Indécomposabilité et idempotents

Dans ce qui suit on considère implicitement des modules à gauche. Les définitions s'adaptent naturellement pour des modules à droite.

Définition 1.4.8. Soient M, N deux A -modules. Un *morphisme* de modules $f : M \rightarrow N$ est une application linéaire telle que

$$f(a \cdot m) = a \cdot f(m)$$

pour tous $a \in A$ et $m \in M$. On dira parfois que f est *A -linéaire*.

Définition 1.4.9. Soit M un A -module. Un *sous-module* L de M est un sous-espace vectoriel de M tel que $a \cdot L \subset L$ pour tout $a \in A$. On dit que M est *irréductible* s'il a pour seuls sous-modules $\{0\}$ et M ; *indécomposable* si $M = M_1 \oplus M_2$ (M_1 et M_2 sont des sous-modules) implique $M_1 = 0$ ou $M_2 = 0$.

Remarque 1.4.10. On peut considérer A comme un A -module via la multiplication dans l'algèbre. Les notions d'irréductibilité et d'indécomposabilité s'adaptent donc aux idéaux de A , qui sont les sous-modules de A .

Définition 1.4.11. Un élément e d'une algèbre est idempotent si $e^2 = e$. On dira que e est quasi-idempotent s'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{K}$ telle que $e^2 = \lambda e$. Deux idempotents e_1, e_2 sont orthogonaux si $e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0$. Un idempotent e est primitif s'il ne peut pas s'écrire sous la forme $e = e_1 + e_2$ où e_1 et e_2 sont deux idempotents orthogonaux non nuls.

Proposition 1.4.12. Soit $e \in A$ idempotent. Il existe une bijection entre les décompositions de e en somme de deux éléments idempotents orthogonaux et celles de la sous-algèbre $Ae = \{ae \mid a \in A\}$ en somme directe de deux idéaux. En particulier e est primitif si et seulement si Ae est indécomposable.

Démonstration. Soient

$$\begin{aligned} f : \{(e_1, e_2) \mid e = e_1 + e_2\} &\rightarrow \{(I_1, I_2) \mid Ae = I_1 \oplus I_2\} \\ (e_1, e_2) &\mapsto (Ae_1, Ae_2) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g : \{(I_1, I_2) \mid Ae = I_1 \oplus I_2\} &\rightarrow \{(e_1, e_2) \mid e = e_1 + e_2\} \\ (I_1, I_2) &\mapsto (e_1, e_2) \text{ si } e = e_1 + e_2 \text{ (} e_1 \in I_1, e_2 \in I_2 \text{)}. \end{aligned}$$

Montrons que ces applications sont bien définies. Pour la première, si $e = e_1 + e_2$ où e_1 et e_2 sont orthogonaux et idempotents alors Ae_1 et Ae_2 sont des idéaux tels que $Ae_1 \cap Ae_2 = 0$. En effet, soit $c = ae_1 = be_2$ avec $a, b \in A$. On a

$$ce_1 = be_2e_1 = 0 \quad \text{et} \quad ce_1 = ae_1^2 = ae_1$$

ainsi $c = 0$. Ceci assure que Ae_1 et Ae_2 décomposent Ae en une somme directe d'idéaux.

Pour la seconde, on doit montrer que si $Ae = I_1 \oplus I_2$ et $e = e_1 + e_2$ avec $e_1 \in I_1$, $e_2 \in I_2$, alors e_1 et e_2 sont deux idempotents orthogonaux. Comme $e_1 \in Ae$, il existe $a \in A$ tel que $e_1 = ae$. Alors

$$e_1e = ae^2 = ae = e_1 \quad \text{et} \quad e_1e = e_1^2 + e_1e_2.$$

Ainsi $e_1e_2 = e_1^2 - e_1 \in I_1 \cap I_2$ ce qui implique $e_1e_2 = 0$ et $e_1^2 = e_1$. De même on montre que $e_2^2 = e_2$ et $e_2e_1 = 0$.

Pour terminer, montrons que ces applications sont inverses l'une de l'autre. On a clairement $gf = \text{id}$. Montrons que $fg = \text{id}$. Soit $Ae = I_1 \oplus I_2$ et $e = e_1 + e_2$ avec $e_1 \in I_1$, $e_2 \in I_2$. On a $Ae_1 = I_1$ et $Ae_2 = I_2$. En effet, $e_1 \in I_1$ donc $Ae_1 \subset I_1$. A l'inverse, si $x \in I_1 \subset Ae$ on a $x = ae_1 + ae_2$ et puisque $ae_1 \in I_1$, $ae_2 \in I_2$ cela implique $x = ae_1 \in Ae_1$. De même $Ae_2 = I_2$. \square

1.4.3 Produit tensoriel de modules

Soient A une algèbre et V, W des modules sur A (on précisera par la suite si on considère des A -modules à gauche ou à droite). Les modules V et W étant des espaces vectoriels, on peut construire leur produit tensoriel. Ce produit tensoriel permet de factoriser des applications bilinéaires et on va s'intéresser à construire un produit tensoriel $V \otimes_A W$ permettant de factoriser des applications qui en plus d'être bilinéaires, préservent d'une certaine manière la multiplication par des éléments de l'algèbre.

Applications A -équilibrées et bimodules

Dans cette section, on va définir l'analogue de la bilinéarité pour des applications définies sur un produit de A -modules. Soient U un autre A -module, et

$$\varphi : V \times W \rightarrow U$$

une application, et supposons travailler avec V, W et U des modules à gauche. Naturellement, on voudrait demander que φ vérifie

$$\begin{aligned} \varphi(a \cdot v, w) &= a \cdot \varphi(v, w) \\ \varphi(v, a \cdot w) &= a \cdot \varphi(v, w) \end{aligned}$$

pour tous $a \in A$, $v \in V$ et $w \in W$. Si on le demande, cela implique que pour tous $a, b \in A$, $w \in W$ et $v \in V$ on doit avoir

$$\varphi(a \cdot v, b \cdot w) = ab \cdot \varphi(v, w) = ba \cdot \varphi(v, w).$$

Or l'action de A sur U n'étant pas nécessairement commutative, on en demanderait beaucoup de φ . Pour en demander moins, on peut ignorer la structure de A -module sur U et introduire la notion d'application A -équilibrée. A nouveau pour des raisons de non-commutativité, cette notion est définie pour V un A -module à droite, et W un A -module à gauche.

Définition 1.4.13. Soient V un A -module à droite, W un A -module à gauche et

$$\varphi : V \times W \rightarrow U$$

L'application φ est *A-équilibrée* si elle est bilinéaire et

$$\varphi(v \cdot a, w) = \varphi(v, a \cdot w)$$

pour tous $a \in A$, $v \in V$ et $w \in W$.

Bien entendu on n'est pas obligé de refuser vérifier une sorte de bilinéarité vis-à-vis d'une structure de module sur U . On peut même imaginer munir U de deux structures de module commutant entre elles, sur des algèbres potentiellement différentes et ainsi pouvoir demander à φ d'être linéaire sur le premier facteur par rapport à une première structure, et sur le second par rapport à une seconde structure. Ceci amène la définition suivante.

Définition 1.4.14. Soient B et C deux algèbres. Un espace vectoriel M est un (B, C) -bimodule si M est un B -module à gauche et un C -module à droite tel que les actions sur M de B et C commutent, i.e.

$$(b \cdot m) \cdot c = b \cdot (m \cdot c)$$

pour tous $m \in M$, $b \in B$ et $c \in C$.

Finalement, si A , B et C sont trois algèbres, V un (B, A) -bimodule, W un (A, C) -bimodule et U un (B, C) -bimodule, soit

$$\varphi : V \times W \rightarrow U$$

une application bilinéaire. On peut demander qu'elle soit

- *A-équilibrée* : $\varphi(v \cdot a, w) = \varphi(v, a \cdot w) \quad \forall v \in V, w \in W, a \in A$;
- *B-linéaire sur le premier facteur* : $\varphi(b \cdot v, w) = b \cdot \varphi(v, w) \quad \forall v \in V, w \in W, b \in B$;
- *C-linéaire sur le second facteur* : $\varphi(v, w \cdot c) = \varphi(v, w) \cdot c \quad \forall v \in V, w \in W, c \in C$.

Construction du produit tensoriel

Soient A une algèbre, V un A -module à droite et W un A -module à gauche. On va s'intéresser à factoriser des applications A -équilibrées définies sur $V \times W$. Comme pour le produit tensoriel d'espaces vectoriels, on va vouloir trouver un espace vectoriel $V \otimes_A W$ et une application A -équilibrée

$$\otimes : V \times W \rightarrow V \otimes_A W$$

vérifiant la définition suivante.

Définition 1.4.15. Un produit tensoriel pour V et W est un couple $(V \otimes_A W, \otimes)$ où $V \otimes_A W$ est un espace vectoriel et $\otimes : V \times W \rightarrow V \otimes_A W$ est une application bilinéaire A -équilibrée tel que toute application bilinéaire et A -équilibrée $\psi : V \times W \rightarrow U$ dans un espace vectoriel U quelconque se factorise de manière unique $\psi = f \circ \otimes$ avec $f : V \otimes_A W \rightarrow U$ linéaire.

Soit donc

$$\varphi : V \times W \rightarrow U$$

une application A -équilibrée où U est un espace vectoriel. On cherche à factoriser φ . Pour cela, on peut commencer par se servir du produit tensoriel d'espaces vectoriels $V \otimes W$ qui permet de factoriser φ en tant qu'application bilinéaire. Ainsi, il existe une unique application

$$f : V \otimes W \rightarrow U$$

telle que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\otimes} & V \otimes W \\ \downarrow \varphi & \swarrow f & \\ U & & \end{array}$$

commute. A partir de là, comme φ est A -équilibrée, f s'annule sur le sous-espace vectoriel Q engendré par les éléments du type

$$v \cdot a \otimes w - v \otimes a \cdot w.$$

On peut alors passer au quotient et il existe une unique application

$$\tilde{f} : V \otimes W / Q \rightarrow U$$

telle que

$$f = \tilde{f}\pi$$

où $\pi : V \otimes W \rightarrow V \otimes W / Q$ est la projection sur le quotient. Alors le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\pi \otimes} & V \otimes W / Q \\ \downarrow \varphi & \swarrow \tilde{f} & \\ U & & \end{array}$$

est commutatif; l'application $\pi \otimes$ est A -équilibrée et φ se factorise au travers de $V \otimes W / Q$ de manière unique. Donc le couple $(V \otimes W / Q, \pi \otimes)$ est un produit tensoriel pour V et W ¹¹

Remarque 1.4.16. Comme pour le produit tensoriel d'espaces vectoriels, on peut montrer que le produit tensoriel de modules est unique à isomorphisme près.

Ici, puisqu'on a présenté la construction à partir du produit tensoriel $V \otimes W$, la notation \otimes désignait l'application

$$\otimes : V \times W \rightarrow V \otimes W.$$

De manière générale, lorsqu'on parlera du produit tensoriel de A -modules, noté $V \otimes_A W$, la notation \otimes désignera l'application

$$\otimes : V \times W \rightarrow V \otimes_A W$$

11. En tant que modules.

Produit tensoriel et bimodules

En fait, si on ajoute à V et W des structures de bimodules, i.e. si B et C sont deux autres algèbres, et V est un (B, A) module tandis que W est un (A, C) module, on peut faire du produit tensoriel $V \otimes_A W$ un (B, C) -module. En effet, pour tout $b \in B$ l'application

$$V \times W \rightarrow V \otimes_A W \quad (v, w) \mapsto bv \otimes w$$

est A -équilibrée car $b(va) \otimes w = (bv)a \otimes w = bv \otimes aw$. Elle induit donc une application sur le produit tensoriel

$$v \otimes w \mapsto bv \otimes w$$

et ce sont ces applications (pour tout $b \in B$) qui nous permettent de définir une structure de B -module gauche sur $V \otimes_A W$ via

$$b(v \otimes w) = bv \otimes w.$$

De même on définit une structure de C -module à droite sur $V \otimes_A W$. On vérifie alors que les structures de B et C -module sur $V \otimes_A A$ commutent puisque

$$b((v \otimes w)c) = bv \otimes wc = (b(v \otimes w))c$$

pour tous $v \in V$, $w \in W$, $b \in B$ et $c \in C$, ce qui fait de $V \otimes_A W$ un (B, C) -bimodule. Dans ce cas le produit tensoriel $V \otimes_A W$ permet de factoriser des applications A -équilibrées à valeurs dans des (B, C) -modules qui préservent ces structures.

Chapitre 2

Représentations des groupes

Ce chapitre constitue une introduction à la théorie des représentations des groupes finis. Les définitions essentielles sont posées et on montre que toute représentation d'un groupe fini est complètement réductible.

2.1 Définitions

Définition 2.1.1. Soit G un groupe. Une représentation de G est un couple (V, ρ) où V est un espace vectoriel de dimension finie (on le supposera toujours complexe) et $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ est un homomorphisme.

Par abus de langage, on dira que V est une représentation de G et on notera $g \cdot v$ ou même gv en lieu et place de $\rho(g)(v)$. Etant donnée une représentation (V, ρ) d'un groupe G , une première manière d'en trouver d'autres consiste à chercher des sous-espaces de V qui soient stables.

Définition 2.1.2. Soit (V, ρ) une représentation de G . Un sous-espace $W \subset V$ est stable si $g \cdot w \in W$ pour tous $w \in W$ et $g \in G$.

Ainsi si W est un sous-espace vectoriel stable de la représentation V , alors $(W, \rho|_W)$ est également une représentation de G , avec $\rho|_W(g) = \rho(g)|_W$ pour tout $g \in G$. On dit dans ce cas que $(W, \rho|_W)$ est une *sous-représentation* de (V, ρ) .

Définition 2.1.3. Une représentation est *irréductible* si elle n'admet aucun sous-espace stable propre. On parlera parfois de manière abrégée d'une irrep.

On peut d'ores et déjà présenter un exemple de représentation que tout groupe possède.

Exemple 2.1.4 (Représentation triviale). Tout groupe G possède une représentation de dimension 1, appelée *représentation triviale*. Il s'agit de l'espace vectoriel \mathbb{C} sur lequel tout élément de G agit comme l'identité.

Définition 2.1.5. Si (V, ρ) et (W, σ) sont deux représentations de G , une application linéaire $\varphi : V \rightarrow W$ est appelée *entrelacement* si $\varphi \rho(g) = \sigma(g) \varphi$ pour tout $g \in G$.

L'ensemble de tels entrelacements est noté $\text{Hom}_G(V, W)$. La notion d'entrelacement permet de comparer des représentations entre elles. Si V est une représentation du groupe G , n'importe quel espace de même dimension lui est isomorphe en tant qu'espace vectoriel et on peut aisément

en faire une représentation de G . En effet, si $\varphi : V \rightarrow W$ est un isomorphisme, il suffit de poser $g \cdot w = \varphi(g \cdot \varphi^{-1}(w))$ pour faire de W une représentation de G . C'est la seule structure de représentation sur W qui fait de φ un entrelacement.

Définition 2.1.6. Si V et W sont deux représentations de G entre lesquelles il existe un entrelacement bijectif, on dit qu'elles sont *équivalentes* et on note $V \sim W$.

Présentons maintenant quelques exemples.

Exemple 2.1.7 (Représentation de permutation). On remarque que la définition d'une représentation de groupe est assez proche de celle d'une action de groupe. En fait, une représentation est une action de groupe qui possède des propriétés supplémentaires. En effet, pour avoir une représentation d'un groupe G , il nous faut un espace vectoriel V sur lequel G agit afin de vérifier

$$\begin{aligned} g \cdot (h \cdot v) &= gh \cdot v \\ 1 \cdot v &= v \end{aligned}$$

pour tous $g, h \in G$ et $v \in V$.¹ Ce qu'on demande en plus pour avoir une représentation de G , c'est d'agir sur un espace vectoriel, en respectant sa structure.

Une représentation de groupe est donc une action de groupe, mais l'inverse n'est pas vrai. Par contre si G agit sur un ensemble fini X , on peut facilement construire une représentation de G via l'espace vectoriel $\mathbb{C}X$ engendré par X . En effet, il suffit de déterminer l'action de G sur les éléments de base e_x ($x \in X$) via

$$g \cdot e_x = e_{g \cdot x}$$

et étendre par linéarité à l'espace vectoriel $\mathbb{C}X$. Si $f \in \mathbb{C}X$, on a donc

$$g \cdot f : X \rightarrow \mathbb{C} \quad x \mapsto f(g^{-1} \cdot x).$$

Cette représentation de G est appelée la *représentation de permutation* associée à l'action de G sur X .

En considérant l'action d'un groupe sur lui-même, on peut alors définir la représentation de permutation associée à cette action.

Définition 2.1.8. Soit G un groupe fini. La *représentation régulière* est la représentation de permutation associée à l'action à gauche de G sur lui-même. On la note R ou $\mathbb{C}G$.

Lemme 2.1.9. Soit G un groupe fini. La représentation régulière est isomorphe à la représentation

$$G \times \mathbb{C}G \rightarrow \mathbb{C}G \quad (g, f) \mapsto (g \cdot f : G \rightarrow \mathbb{C} \quad h \mapsto f(hg))$$

Démonstration. La représentation régulière est celle qui à une fonction $f \in \mathbb{C}G$ associe la fonction

$$G \rightarrow \mathbb{C} \quad h \mapsto f(g^{-1}h).$$

Par soucis de clarté, notons $\rho(g)$ l'action de $g \in G$ correspondant à la représentation régulière, et $\sigma(g)$ celle correspondant à la représentation de l'énoncé. On cherche une application

$$\varphi : (\mathbb{C}G, \rho) \rightarrow (\mathbb{C}G, \sigma)$$

1. Ces hypothèses doivent être vérifiées pour qu'on ait un homomorphisme de groupe entre G et $\text{GL}(V)$.

qui soit un entrelacement bijectif. Si $f \in \mathbb{C}G$, on veut

$$\rho(g)f = \varphi^{-1}(\sigma(g)\varphi(f)).$$

Or on a

$$\rho(g)f(h) = f(g^{-1}h) = f((h^{-1}g)^{-1}).$$

Alors l'application φ de $\mathbb{C}G$ dans $\mathbb{C}G$ définie par $(\varphi(f))(h) = f(h^{-1})$ pour tout $f \in \mathbb{C}G$ et tout $h \in G$ convient. \square

Définition 2.1.10. Une représentation (V, ρ) est dite *fidèle* si l'homomorphisme ρ est injectif.

Lemme 2.1.11. Soit G un groupe fini. La représentation régulière (R, ρ) est fidèle.

Démonstration. C'est direct. Si $\rho(g) = \rho(h)$, alors

$$e_g = \rho(g)e_1 = \rho(h)e_1 = e_h$$

et $g = h$. \square

Présentons l'exemple suivant.

Exemple 2.1.12. On peut facilement trouver une représentation du groupe des matrices inversibles $GL(n, \mathbb{C})$ de taille $n \in \mathbb{N}_0$ sur le champ des complexes. En effet, dans n'importe quel espace vectoriel V de dimension n , on peut faire agir une matrice $A \in GL(n, \mathbb{C})$ sur V en se fixant une base B . Si $x \in V$ se représente dans cette base par le vecteur X , alors l'action de A sur x renvoie le vecteur y de composantes

$$AX.$$

Qui plus est cette représentation de $GL(n, \mathbb{C})$ est irréductible. Illustrons-le pour $n = 2$. Soit (\mathbb{C}^2, ρ) la représentation de $GL(2, \mathbb{C})$ telle que

$$\rho(A)X = AX$$

pour tous $A \in GL(2, \mathbb{C})$ et $X \in \mathbb{C}^2$. Si $W \subset \mathbb{C}^2$ est un sous-espace stable non trivial, on veut montrer que $W = \mathbb{C}^2$. Soit $X \in W \setminus \{0\}$. Il existe un vecteur Y tel que (X, Y) forme une base de \mathbb{C}^2 . Soit M la matrice de changement de base de (X, Y) vers la base canonique (e_1, e_2) . On a donc

$$\rho(M^{-1})X = e_1$$

et $e_1 \in W$. Soit

$$\begin{aligned} I : \quad e_1 &\mapsto e_2 \\ e_2 &\mapsto e_1 \end{aligned}$$

l'application qui inverse les éléments de la base canonique. Elle s'y représente par la matrice par

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a alors $\rho\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)e_1 = e_2$ et $e_2 \in W$. Ceci montre que $W = \mathbb{C}^2$.

2.2 Constructions classiques de représentations

Dans toute cette section, V et W sont deux représentations d'un groupe G . On va principalement ici définir différentes constructions de représentations de G à partir de celles données par V et W .

2.2.1 Somme directe de représentations

Définition 2.2.1. La somme directe $V \oplus W$ est une représentation de G via

$$G \times V \oplus W \rightarrow V \oplus W \quad g \cdot (v + w) \mapsto g \cdot v + g \cdot w.$$

Lemme 2.2.2. *Les injections et projections canoniques sont des entrelacements.*

Démonstration. C'est direct. Si $z = v + w \in V \oplus W$, en notant P la projection sur le sous-espace V , on a

$$P(g \cdot (v + w)) = P(g \cdot v) + P(g \cdot w) = g \cdot v = g \cdot P(z)$$

pour tout $g \in G$ car $gV \subset V$ et $gW \subset W$. De même, si $i : V \rightarrow V \oplus W$, on a

$$i(g \cdot v) = g \cdot v = g \cdot i(v).$$

pour tous $g \in G$ et $v \in V$. □

2.2.2 Produit tensoriel de représentations

Soit $g \in G$. L'application

$$g : V \times W \rightarrow V \otimes W \quad (v, w) \mapsto g \cdot v \otimes g \cdot w$$

est bilinéaire. Ainsi, il existe une application linéaire, que l'on notera abusivement g aussi, définie sur le produit tensoriel $V \otimes W$ et telle que

$$g \cdot (v \otimes w) = g \cdot v \otimes g \cdot w.$$

Définir de telles applications pour tout $g \in G$ nous donne alors une représentation de G .

Définition 2.2.3. Le produit tensoriel $V \otimes W$ est une représentation de G . Si $g \in G$, $v \in V$ et $w \in W$ on a

$$g \cdot (v \otimes w) = g \cdot v \otimes g \cdot w.$$

On peut bien entendu étendre cette définition au produit tensoriel de p ($p \geq 2$) représentations. En considérant p fois la même représentation, on peut également définir les puissances symétriques et extérieures de représentations.

Définition 2.2.4. Soit $p \geq 2$. Les puissances extérieures et symétriques $\Lambda^p V$ et $\text{Sym}^p V$ sont des représentations de G en tant que sous-espace stable de la représentation $V^{\otimes p}$.²

2. On peut bien considérer $\Lambda^p V$ et $\text{Sym}^p V$ comme des sous-espaces de $V^{\otimes p}$ car V est un espace vectoriel sur le corps de complexes, qui est de caractéristique nulle.

2.2.3 Représentation duale

Définition 2.2.5. La représentation duale V^* est celle définie par

$$g \cdot \varphi : V \rightarrow \mathbb{C} \quad v \mapsto \varphi(g^{-1}v)$$

pour tous $g \in G$ et $\varphi \in V^*$.

Lemme 2.2.6. La représentation duale respecte la dualité entre V^* et V donnée par

$$\langle \varphi, v \rangle = \varphi(v)$$

pour tous $\varphi \in V^*$ et $v \in V$, i.e. on a

$$\langle g \cdot \varphi, g \cdot v \rangle = \langle \varphi, v \rangle$$

pour tous $g \in G$, $\varphi \in V^*$ et $v \in V$.

Démonstration. Soient $g \in G$, $\varphi \in V^*$ et $v \in V$. On a

$$\begin{aligned} \langle g \cdot \varphi, g \cdot v \rangle &= g \cdot \varphi(g \cdot v) \\ &= \varphi(g^{-1} \cdot g \cdot v) \\ &= \varphi(v) \\ &= \langle \varphi, v \rangle. \end{aligned}$$

□

Lemme 2.2.7. Les représentation V et V^{**} sont isomorphes.

Démonstration. Soit

$$\psi : V \rightarrow V^{**} \quad v \mapsto (\varphi \mapsto \varphi(v))$$

l'isomorphisme entre V et V^{**} .³ Montrons qu'il s'agit d'un entrelacement. Soient $g \in G$ et $v \in V$. Alors $\psi(g \cdot v)$ est l'application qui à $\varphi \in V^*$ associe $\varphi(g \cdot v)$ et $g \cdot \psi(v)$ est celle qui à $\varphi \in V^*$ associe

$$\begin{aligned} (g \cdot \psi(v))(\varphi) &= \psi(v)(g^{-1} \cdot \varphi) \\ &= (g^{-1} \cdot \varphi)(v) \\ &= \varphi(g \cdot v) \end{aligned}$$

et ψ est bien un entrelacement.

□

Proposition 2.2.8. La représentation duale V^* associée à V est irréductible si et seulement si V l'est.

Démonstration. On montre par l'absurde que si V est irréductible, alors V^* l'est aussi. Sinon, soit $W \subset V^*$ un sous-espace stable propre de V . Alors le sous-espace

$$X = \{v \in V \mid \varphi(v) = 0 \quad \forall \varphi \in W\}$$

est un sous-espace vectoriel de V stable, car si $x \in X$, on a

$$\varphi(g \cdot x) = (g^{-1} \cdot \varphi)(x) = 0$$

puisque $g^{-1} \cdot \varphi \in W$ par stabilité. Ce sous-espace X est propre (il est de dimension $\dim(V) - \dim(W)$) et V n'est pas irréductible, une contradiction. Pour la réciproque, si V^* est irréductible, alors V^{**} aussi et on conclut par le lemme 2.2.7.

□

3. Dans notre définition d'une représentation, on suppose que V est de dimension finie.

2.2.4 Représentation $\text{Hom}(V, W)$ sur les applications linéaires

Définition 2.2.9. L'espace vectoriel $\text{Hom}(V, W)$ est une représentation de G définie par

$$g \cdot \varphi : V \rightarrow W \quad v \mapsto g \cdot \varphi(g^{-1}v).$$

Cette représentation correspond à celle donnée par $V^* \otimes W = \text{Hom}(V, W)$.

L'ensemble des entrelacements entre V et W est exactement l'ensemble des applications de $\text{Hom}(V, W)$ invariantes sous l'action de G .

Proposition 2.2.10. On a $\text{Hom}_G(V, W) = \{\varphi \in \text{Hom}(V, W) \mid g \cdot \varphi = \varphi \ \forall g \in G\}$.

Démonstration. Soit $\varphi \in \text{Hom}(V, W)$. On a

$$g \cdot \varphi = \varphi$$

pour tout $g \in G$ si et seulement si

$$g\varphi(g^{-1}v) = \varphi(v)$$

pour tous $g \in G$ et $v \in V$. C'est-à-dire si et seulement si φ est un entrelacement entre V et W . \square

2.3 Décomposition en irréductibles et lemme de Schur

On a défini la notion d'irréductibilité pour les représentations de groupes. On va montrer dans cette section que n'importe quelle représentation d'un groupe fini peut se décomposer en une somme directe d'irréductibles. Tout ce qui est dit dans cette section (à l'exception de la proposition 2.3.2 et du lemme de Schur) est valable pour des groupes finis.

2.3.1 Réductibilité complète

Définition 2.3.1. Une représentation V est complètement réductible si V peut s'écrire comme somme directe de sous-représentations irréductibles.

On a la caractérisation suivante.

Proposition 2.3.2. Une représentation V est complètement réductible si et seulement si tout sous-espace stable W de V admet un supplémentaire stable.

Démonstration. Supposons que V soit complètement irréductible, et montrons que si E est un sous-espace stable de V , il existe un sous-espace $F \subset V$ stable et tel que $E \oplus F = V$. Soit donc $\{V_i \mid i = 1, \dots, n\}$ un ensemble de sous-représentations irréductibles tel que

$$V = \oplus_{i=1}^n V_i.$$

Alors, $E \cap V_i$ est un sous-espace stable de V pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Comme $E \cap V_i \subset V_i$ et V_i est irréductible, l'intersection $V_i \cap E$ est soit nulle, soit égale à V_i . Si $E \cap V_i = V_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ alors $E = V$ et le résultat est immédiat. Sinon, il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $V_i \cap E = \{0\}$. Prenons alors un sous ensemble $\nu \subset \{1, \dots, n\}$ maximal tel que $E \cap \oplus_{i \in \nu} V_i = \{0\}$. Les sous-espaces E et $\oplus_{i \in \nu} V_i$ sont donc en somme directe. Montrons que

$$V = E \oplus (\oplus_{i \in \nu} V_i).$$

Pour cela on va montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $V_i \subset E \oplus (\oplus_{i \in \nu} V_i)$. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Si $i \in \nu$, c'est évident. Sinon, par maximalité de ν , on a

$$E \cap (\oplus_{j \in \nu} V_j \oplus V_i) \neq \{0\}.$$

Soit donc $e \in E \cap (\oplus_{j \in \nu} V_j \oplus V_i) \setminus \{0\}$. Alors

$$e = x + x_i$$

avec $x \in \oplus_{j \in \nu} V_j$ et $x_i \in V_i$. Comme $E \cap (\oplus_{j \in \nu} V_j) = \{0\}$, ceci implique $x_i \neq 0$. Ainsi,

$$V_i \cap E \oplus (\oplus_{i \in \nu} V_i) \neq \{0\}$$

et

$$V_i \cap E \oplus (\oplus_{i \in \nu} V_i) = V_i$$

puisque V_i est irréductible.

Si maintenant tout sous-espace de V stable admet un supplémentaire stable, il suffit de procéder par récurrence sur la dimension de V . \square

Avec cette caractérisation, il suffit de montrer que tout sous-espace stable d'une représentation d'un groupe fini admet un supplémentaire stable pour obtenir sa réductibilité complète.

Proposition 2.3.3. *Soit V une représentation d'un groupe fini G . Tout sous-espace stable de V possède un supplémentaire stable.*

Démonstration. Soit $E \subset V$ un sous-espace stable de V . Si $E = \{0\}$ ou V , c'est évident. Sinon, soit F un supplémentaire de E dans V et $\pi : V \rightarrow E$ le projecteur de V sur E parallèlement à F . Si $g\pi = \pi g$ pour tout $g \in G$, alors le sous-espace F est stable puisque dans ce cas⁴, si $f \in F = \ker \pi$, on a

$$\pi g f = g \pi f = 0$$

et $g f \in F$ pour tout $g \in G$. On n'a pas nécessairement $g\pi = \pi g$ pour tout $g \in G$. Par contre, pour tout $g \in G$, l'application $g\pi g^{-1}$ est un projecteur sur E . En effet, d'une part $g\pi g^{-1}$ est l'identité sur E : pour $x \in E$, $g^{-1}x \in E$, donc $\pi g^{-1}x = g^{-1}x$ et finalement $g\pi g^{-1}x = x$; d'autre part, l'image de $g\pi g^{-1}$ est incluse dans E car E est stable. En prenant alors

$$\pi_G = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} h \pi h^{-1}$$

la moyenne de tous ces projecteurs⁵, on a

$$\begin{aligned} g\pi_G &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} g h \pi h^{-1} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} h \pi h^{-1} g \\ &= \pi_G g \end{aligned}$$

et le noyau $\ker \pi_G$ est un sous-espace supplémentaire stable. \square

4. On sait que si F est stable, alors $g\pi = \pi g$ pour tout $g \in G$ (π est un entrelacement). On montre donc que la réciproque est également vraie.

5. Il est important de travailler sur un champ de caractéristique non nulle.

On aurait pu également montrer cette proposition en trouvant un supplémentaire stable à l'aide d'un produit scalaire G -invariant.

Définition 2.3.4. Un produit scalaire (\cdot, \cdot) est G -invariant si

$$(gv, gw) = (v, w)$$

pour tout $g \in G$.

Preuve de la proposition 2.3.3. Si $E \subset V$ est un sous-espace stable de V , et (\cdot, \cdot) est un produit scalaire sur V , on peut trouver un sous-espace supplémentaire pour E dans V en considérant le sous-espace orthogonal à E

$$\{x \in V : (x, y) = 0 \quad \forall y \in E\}.$$

Si (\cdot, \cdot) est G -invariant, ce sous-espace est stable. Pour obtenir un produit scalaire invariant à partir de (\cdot, \cdot) , on peut considérer le produit scalaire défini par

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (gx, gy)$$

pour tous $x, y \in V$. En prenant alors le sous-espace orthogonal à E vis-à-vis du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, on obtient ce qu'on cherchait. \square

Avec les deux propositions précédentes, on obtient donc le théorème suivant.

Théorème 2.3.5. *Tout représentation finie V d'un groupe fini peut s'écrire comme somme directe d'irréductibles.*

Si V est une représentation d'un groupe fini G , on regroupe ensemble les facteurs irréductibles équivalents apparaissant dans sa (un de ses) décomposition(s) pour écrire

$$V \cong V_1^{\oplus a_1} \oplus \dots \oplus V_n^{\oplus a_n}.^6$$

Dans cette écriture, les sous-représentations V_i ($i \in \{1, \dots, n\}$) sont toutes irréductibles et deux à deux inéquivalentes. On va maintenant se servir du lemme suivant⁷ pour montrer que les décompositions de V en somme directe d'irréductibles sont uniques à isomorphisme près.

2.3.2 Lemme de Schur et unicité de la décomposition

Lemme 2.3.6 (Lemme de Schur). *Soit $\varphi : V \rightarrow W$ un entrelacement entre deux représentations.*

- (a) *Si V est irréductible, φ est injectif ou nul ;*
- (b) *si W est irréductible, φ est surjectif ou nul ;*
- (c) *si V et W sont des représentations complexes⁸, équivalentes et irréductibles, alors $\dim(\text{Hom}_G(V, W)) = 1$.*

Démonstration. (a) Si φ est un entrelacement, son noyau $\ker(\varphi)$ est un sous-espace stable de V .

Ainsi, soit $\ker(\varphi) = \{0\}$, auquel cas φ est injectif, soit $\ker(\varphi) = V$, auquel cas φ est nul.

6. On écrira souvent = au lieu de \cong .

7. Qui n'a pas son importance qu'ici.

8. On a défini nos représentations sur des espaces vectoriels complexes. Insistons cependant sur l'importance de l'hypothèse qui permet ici de trouver une valeur propre au point (c).

- (b) L'image de V par φ est un sous-espace stable de W , φ étant un entrelacement. Ainsi, soit $\varphi(V) = \{0\}$, auquel cas φ est nul, soit $\varphi(V) = W$, auquel cas φ est surjectif.
- (c) Soit φ un entrelacement bijectif entre V et W . Si $f \in \text{Hom}_G(V, W)$, alors $f\varphi^{-1}$ est un entrelacement de W dans W . Puisque W est un espace vectoriel complexe, $f\varphi^{-1}$ possède une valeur propre λ . Considérons maintenant

$$g = f\varphi^{-1} - \lambda \text{id} : W \rightarrow W.$$

Cet entrelacement n'est pas injectif, puisque si $v \in W$ est vecteur propre de valeur propre λ , alors $gv = 0$. L'espace W étant irréductible, g est nul par le point (a). Et $f\varphi^{-1} = \lambda \text{id}$, ce qui implique $f = \lambda\varphi$ et

$$\text{Hom}_G(V, W) = \langle \varphi \rangle.$$

□

Si l'on s'intéresse aux entrelacements entre deux représentations V et W , le lemme de Schur nous permet de les caractériser à partir des décompositions en irréductibles pour V et W .

Proposition 2.3.7. *Soient V et W deux représentations d'un groupe fini G . Si*

$$V = \bigoplus_{i=1}^n V_i^{\oplus a_i} \quad \text{et} \quad W = \bigoplus_{j=1}^n V_j^{\oplus b_j}$$

sont leurs décompositions en somme d'irréductibles⁹, alors une base de $\text{Hom}_G(V, W)$ est donnée par

$$\{I_{i,l,k} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq a_i, 1 \leq l \leq b_i\}$$

avec

$$I_{i,l,k} = \iota_{i,l} P_{i,k}$$

la composée de la projection $P_{i,k} : V \rightarrow V_i$ sur le k^{e} facteur V_i de V avec $\iota_{i,l} : V_i \rightarrow W$ l'injection de V_i dans le l^{e} facteur V_i de W . On a les isomorphismes suivants

$$\text{Hom}_G(V, W) \cong \bigoplus_{i=1}^n \text{Hom}_G(V_i^{\oplus a_i}, V_i^{\oplus b_i}) \cong \bigoplus_{i=1}^n \text{Mat}(a_i \times b_i, \mathbb{C})$$

où $\text{Mat}(a_i \times b_i, \mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices $a_i \times b_i$ sur \mathbb{C} . De plus, si $W = V$, il s'agit d'isomorphismes d'algèbres.

Démonstration. On a un isomorphisme entre $\text{Hom}(V, W)$ et

$$\bigoplus_{i=1}^n \bigoplus_{j=1}^n \text{Hom}(V_i^{\oplus a_i}, V_j^{\oplus b_j})$$

donné par

$$\psi : f \mapsto \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{i,j}$$

avec

$$f_{i,j} = P_j f \iota_i$$

9. On suppose que les représentations irréductibles apparaissant dans la décomposition de V apparaissent dans celle de W et vice-versa, quitte à avoir des multiplicités nulles.

où $\iota_i : V_i^{\oplus a_i} \rightarrow V$ est l'injection de $V_i^{\oplus a_i}$ dans V et $P_j : W \rightarrow V_j^{\oplus b_j}$ est la projection de W sur $V_j^{\oplus b_j}$. Cet isomorphisme étant un entrelacement, on a également

$$\mathrm{Hom}_G(V, W) \cong \bigoplus_{i=1}^n \bigoplus_{j=1}^n \mathrm{Hom}_G(V_i^{\oplus a_i}, V_j^{\oplus b_j})$$

via le même isomorphisme ψ . De là, regardons de plus près $\mathrm{Hom}_G(V_i^{\oplus a_i}, V_j^{\oplus b_j})$. On a

$$\mathrm{Hom}_G(V_i^{\oplus a_i}, V_j^{\oplus b_j}) \cong \mathrm{Hom}_G(V_i, V_j)^{\oplus a_i b_j}$$

qui vaut 0 si $i \neq j$ ¹⁰ par le lemme de Schur. Si maintenant $i = j$, alors $\mathrm{Hom}_G(V_i, V_j)$ est de dimension 1. Soit $f \in \mathrm{Hom}_G(V, W)$. On a donc

$$\psi(f) = \sum_{i=1}^n f_{i,i}$$

et pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, il existe des coefficients $a_{i,l,k}$ tels que

$$\psi^{-1}(f_{i,i}) = \sum_{k=1}^{a_i} \sum_{l=1}^{b_j} a_{i,l,k} I_{i,l,k}.$$

Pour le voir, il suffit de regarder l'image de $f_{i,i}$ dans $\mathrm{Hom}(V_i, V_i)^{\oplus a_i b_i}$ et de voir que, par le lemme de Schur, c'est une somme directe de multiples de l'identité. Ceci montre alors que

$$\{I_{i,l,k} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq a_i, 1 \leq l \leq b_i\}$$

engendre $\mathrm{Hom}_G(V, W)$ et on vérifie sans peine qu'il s'agit d'une partie libre. On a alors, en tant qu'espace vectoriels, les isomorphismes annoncés.

Considérons maintenant le cas $V = W$. Il nous reste à montrer que les isomorphismes

$$\mathrm{Hom}_G(V, V) \cong \bigoplus_{i=1}^n \mathrm{Hom}_G(\bigoplus_{k=1}^{a_i} V_{i,k}, \bigoplus_{k=1}^{a_i} V_{i,k}) \cong \bigoplus_{i=1}^n \mathrm{Mat}(a_i \times a_i, \mathbb{C})$$

sont des isomorphismes d'algèbres. On va montrer que les produits entre éléments de base de ces trois espaces se comportent identiquement. Dans la base

$$\{I_{i,l,k} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq k, l \leq a_i\}$$

de $\mathrm{Hom}_G(V, V)$, on a

$$I_{i,l,k} I_{i',l',k'} = \delta_{i,i'} \delta_{k,l'} I_{i,l,k'} P_{i,k'}.$$

L'algèbre $\bigoplus_{i=1}^n \mathrm{Mat}(a_i \times a_i, \mathbb{C})$ possède l'ensemble suivant comme base

$$\{A_{i,l,k} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq k, l \leq a_i\}$$

où $A_{i,l,k}$ correspond à l'élément de $\bigoplus_{i=1}^n \mathrm{Mat}(a_i \times a_i, \mathbb{C})$ dont le i^{e} facteur est donné par la matrice ayant 1 en l^{e} ligne et k^{e} colonne, 0 partout ailleurs ; et dont les autres facteurs sont nuls. On vérifie alors que

$$A_{i,l,k} A_{i',l',k'} = \delta_{i,i'} \delta_{k,l'} A_{i,l,k'}.$$

10. C'est-à-dire si V_i et V_j sont inéquivalentes.

Ceci montre donc que l'isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_G(V, V) \cong \bigoplus_{i=1}^n \mathrm{Mat}(a_i \times a_i, \mathbb{C})$$

est bien un isomorphisme d'algèbres. La conclusion s'ensuit alors puisque par le même raisonnement les algèbres

$$\mathrm{Mat}(a_i \times a_i, \mathbb{C}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Hom}_G(\bigoplus_{k=1}^{a_i} V_{i,k}, \bigoplus_{k=1}^{a_i} V_{i,k})$$

sont isomorphes pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et donc les sommes directes

$$\bigoplus_{i=1}^n \mathrm{Mat}(a_i \times a_i, \mathbb{C}) \quad \text{et} \quad \bigoplus_{i=1}^n \mathrm{Hom}_G(\bigoplus_{k=1}^{a_i} V_{i,k}, \bigoplus_{k=1}^{a_i} V_{i,k})$$

aussi. □

Ceci nous permet d'assurer l'unicité de la décomposition en irréductibles d'une représentation.

Proposition 2.3.8. *Si $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i^{\oplus a_i} = \bigoplus_{i=1}^n V_i^{\oplus b_i}$ alors $a_i = b_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.*

Démonstration. Notons d'abord que dans les deux décompositions de V en irréductibles, on peut considérer que les mêmes sous-représentations apparaissent, quitte à ajouter des facteurs nuls. Considérons l'identité $\mathrm{id} : V \rightarrow V$. Comme id est un entrelacement, on a vu dans la proposition précédente que $\mathrm{id}(V_i^{\oplus a_i}) \subset V_i^{\oplus b_i}$. Ainsi $a_i \leq b_i$. De même on obtient $b_i \leq a_i$ et $a_i = b_i$. □

On peut également prouver l'unicité de la décomposition d'une représentation V en se servant non pas du lemme de Schur, mais de la proposition 2.3.2, en particulier de la construction menée dans la preuve de cette proposition. La proposition qui suit en constitue une seconde preuve.

Proposition 2.3.9. *Si $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i = \bigoplus_{j=1}^m V'_j$ alors $m = n$ et il existe $\mu \in S_n$ tel que V_i soit équivalent à $V_{\mu(i)}$.*

Démonstration. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on va associer à V_i un certain $V_{\mu(i)}$ pour $\mu(i) \in \{1, \dots, m\}$. Commençons par V_1 . Dans la proposition 2.3.2, on a montré comment trouver un supplémentaire stable pour n'importe quel sous-espace de

$$V = \bigoplus_{j=1}^m V'_j.$$

On sait que V_1 est un supplémentaire stable de $\bigoplus_{i=2}^n V_i$ dans V . Vu la construction présentée dans la proposition 2.3.2, il existe un supplémentaire de la forme

$$\bigoplus_{j \in \nu_1} V'_j$$

pour $\bigoplus_{i=2}^n V_i$ où ν_1 est un sous-ensemble de $\{1, \dots, m\}$. Ainsi,

$$V_1 \sim \bigoplus_{i=2}^n V_i.$$

Comme V_1 est irréductible, ceci implique $\nu_1 = \{\mu(1)\}$ pour un certain $\mu(1) \in \{1, \dots, m\}$. Si $\mu(1), \dots, \mu(k)$ ont été déterminés, pour trouver $\mu(k+1)$ on procède de la même manière pour V_{k+1} . Pour s'assurer que $\mu(k+1) \notin \{\mu(1), \dots, \mu(k)\}$, il suffit de considérer V_{k+1} comme étant un supplémentaire de

$$\left(\bigoplus_{i=1}^k V'_{\mu(i)} \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=k+2}^n V_i \right)$$

dans V . Ainsi, on finit par construire

$$\mu : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$$

injectif. Puisqu'on peut faire exactement la même chose pour les sous-espaces V'_j ($j \in \{1, \dots, m\}$), $m = n$ et on conclut. □

Définition 2.3.10. Soit V une représentation d'un groupe fini G . Si

$$V = V_1^{\oplus a_1} \oplus \dots \oplus V_n^{\oplus a_n},$$

où les sous-représentations V_i ($i \in \{1, \dots, n\}$) sont irréductibles et deux à deux équivalentes¹¹, on appelle a_i la *multiplicité* de V_i dans V et le facteur $V_i^{\oplus a_i}$ est appelé la *composante isotypique* de V_i dans V .

Terminons par quelques exemples.

Exemple 2.3.11. Commençons par traiter l'exemple général d'un groupe commutatif. Soit donc G un groupe commutatif. On va chercher ses représentations irréductibles. Si V est une représentation irréductible de G , avec

$$\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$$

l'homomorphisme associé, alors, comme G est commutatif on a, pour tous $g, h \in G$,

$$\rho(g)\rho(h) = \rho(h)\rho(g).$$

En particulier, pour tout $g \in G$, $\rho(g)$ est un entrelacement. Alors, par le lemme de Schur, pour tout $g \in G$, $\rho(g)$ est un multiple de l'identité. Ceci implique que tout sous-espace vectoriel de V est stable, et V doit donc être de dimension égale à 1.

Exemple 2.3.12. Traitons maintenant le cas du groupe symétrique S_3 . Comme pour tout groupe symétrique, il existe deux représentations irréductibles de dimension 1 : les représentations *triviale* et *alternée*. La représentation triviale, que l'on note U , a déjà été introduite à l'exemple 2.1.4 et quant à l'alternée, notée U' , elle est définie par

$$\rho(g) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad x \mapsto \text{sign}(g)x$$

pour tout $g \in G$. Ces deux représentations sont évidemment irréductibles, en existe-t-il d'autres ? Si on cherche à construire une représentation de S_3 , \mathbb{C}^3 en est une, où S_3 agit en permutant les facteurs

$$\sigma(g) : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3 \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_{g^{-1}(1)} \\ x_{g^{-1}(2)} \\ x_{g^{-1}(3)} \end{pmatrix}.$$

Cette représentation n'est pas irréductible, en effet, le sous espace F engendré par le vecteur

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

est stable (et isomorphe à la représentation triviale). On peut alors essayer de lui trouver un sous-espace supplémentaire stable. Le produit scalaire standard sur \mathbb{C}^3 donné par

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^3 \overline{x_i} y_i$$

11. On parlera de la décomposition de V en irréductibles.

pour tous

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

étant S_3 -invariant, le sous-espace

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

est un supplémentaire stable de F . Cette sous-représentation de \mathbb{C}^3 est appelée *représentation standard* et est irréductible. En effet, supposons que $W \subset V$ soit un sous-espace stable non trivial, et montrons que $W = V$. Comme W est non trivial, il existe $w \in W \setminus \{0\}$. Alors, si

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix},$$

comme $w_1 + w_2 + w_3 = 0$ et $w \neq 0$, il y a au moins deux coefficients de w non nuls et de signe opposé. On peut sans perte de généralité supposer que w_1 et w_2 sont ces coefficients. Si w_3 est nul alors w est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ -\lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

pour $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Comme W est stable, le vecteur

$$(1, 3)w = \begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$$

appartient à W et il forme avec w une base de V , donc $V = W$. Si w_3 est non nul, alors w est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ -\lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$

pour $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et dans ce cas, le vecteur

$$(1, 2)w = \begin{pmatrix} -\lambda \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$

appartient à W , forme avec w une base de V et $W = V$. On vient donc de recenser trois représentations irréductibles du groupe symétrique : les représentations triviale, alternée et standard. On verra, à l'aide de la théorie des caractères présentée au chapitre suivant, que ce sont les seules

Chapitre 3

Théorie des caractères

On va montrer que toute représentation d'un groupe fini est entièrement déterminée par son caractère et que le nombre de représentation irréductibles d'un groupe fini est non seulement fini, mais égal au nombre de classes de conjugaison de ce groupe. Insistons sur le fait que le point (3) de 2.3.6 sera central dans les développements présentés, ceux-ci ne seront donc valables que pour des représentations finies de groupes finis sur des champs *algébriquement clos*, ce qui est bien le cas pour \mathbb{C} . Passons en revue quelques premières propriétés.

3.1 Sur les valeurs propres d'une représentation

Proposition 3.1.1. *Soit (V, ρ) une représentation d'un groupe fini G . Pour tout $g \in G$,*

$$\rho(g) : V \rightarrow V$$

est diagonalisable et ses valeurs propres sont racines premières de l'unité.

Démonstration. Soit $g \in G$. Puisque G est un groupe fini, il existe $k \in \mathbb{N}_0$ tel que $g^k = 1$. Ainsi on a

$$\rho(g)^k - \text{id} = 0$$

et $\rho(g)$ est annulé par le polynôme

$$P(z) = z^k - 1.$$

Le polynôme minimum de $\rho(g)$ divisant P , toutes ses racines sont de multiplicité 1 et $\rho(g)$ est diagonalisable. De plus, le polynôme caractéristique et minimum de $\rho(g)$ possèdent les mêmes zéros, ainsi les valeurs propres de $\rho(g)$ sont des racines de l'unité. \square

3.2 Définition et premières propriétés

Définition 3.2.1. Le *caractère* d'une représentation (V, ρ) est la fonction

$$\chi_V : G \rightarrow \mathbb{C} \quad g \mapsto \text{tr}(\rho(g)).$$

Proposition 3.2.2. *Soient V et W deux représentations de G . On a*

- (a) $\chi_{V \oplus W}(g) = \chi_V(g) + \chi_W(g)$;
- (b) $\chi_{V \otimes W}(g) = \chi_V(g)\chi_W(g)$;

- (c) $\chi_{V^*}(g) = \overline{\chi_V}(g)$;
- (d) $\chi_{\text{Hom}(V,W)} = \overline{\chi_V} \chi_W$;
- (e) $\chi_{\Lambda^2 V}(g) = \frac{1}{2} (\chi_V(g)^2 - \chi_V(g^2))$;
- (f) $\chi_{\text{Sym}^2 V}(g) = \frac{1}{2} (\chi_V(g)^2 + \chi_V(g^2))$

pour tout $g \in G$.

Démonstration. Soit $g \in G$. Il suffit regarder les représentations matricielles à partir de bases de V et W . Soient $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ et $B' = \{f_1, \dots, f_m\}$ des bases de V et W dans lesquelles g se représente par une matrice diagonale. Soient

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_m \end{pmatrix}$$

ces matrices.

- (a) Dans la base $B \cup B'$ de $V \oplus W$, g se représente par la matrice

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

et $\chi_{V \oplus W}(g) = \chi_V(g) + \chi_W(g)$.

- (b) Une base de $V \otimes W$ est donnée par $\{b_1 \otimes f_1, \dots, b_1 \otimes f_m, \dots, b_n \otimes f_1, b_n \otimes f_m\}$. Dans cette base, g est représenté par

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \mu_1 & & & \\ & \lambda_1 \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \mu_m \end{pmatrix}.$$

Ainsi on a

$$\begin{aligned} \chi_{V \otimes W}(g) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_i \mu_j \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \left(\sum_{j=1}^m \mu_j \right) \\ &= \chi_V(g) \chi_W(g). \end{aligned}$$

- (c) Soit $\{b_1, \dots, b_n\}$ la base duale de V^* associée à B . La matrice

$$A^{-1} = \text{diag}(1/\lambda_1, \dots, 1/\lambda_n)$$

représente $g^{-1} : V \rightarrow V$ dans la base B , et on a

$$\begin{aligned}
(g \cdot b_j^*)(x) &= b_j^*(g^{-1} \cdot x) \\
&= b_j^*(g^{-1} \cdot \sum_{i=1}^n x_i b_i) \\
&= \sum_{i=1}^n x_i b_j^*(g^{-1} \cdot b_i) \\
&= \sum_{i=1}^n x_i b_j^*\left(\frac{1}{\lambda_i} b_i\right) \\
&= \frac{1}{\lambda_j} b_j^*(x).
\end{aligned}$$

La représentation matricielle de $g : V^* \rightarrow V^*$ est donc donnée par A^{-1} et comme les valeurs propres sont des racines de l'unité, on a

$$\begin{aligned}
\chi_{V^*}(g) &= \chi_V(g^{-1}) \\
&= \sum_{i=1}^n 1/\lambda_i \\
&= \sum_{i=1}^n \overline{\lambda_i} \\
&= \overline{\chi_V(g)}.
\end{aligned}$$

(d) Cela découle directement de

$$\text{Hom}(V, W) = V^* \otimes W.$$

(e) Dans la base $\{b_i \wedge b_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ de $\Lambda^2 V$, g se représente par une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont donnés par $\{\lambda_i \lambda_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\chi_{\Lambda^2 V}(g) &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j \\
&= \frac{1}{2} \left(\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} (\chi_V(g)^2 - \chi_V(g^2)).
\end{aligned}$$

(f) Finalement, dans la base $\{b_i \bullet b_j \mid 1 \leq i \leq j \leq n\}$ de $\text{Sym}^2 V$, on obtient $\{\lambda_i \lambda_j \mid 1 \leq i \leq j \leq n\}$ comme ensemble de valeurs propres pour g , et

$$\begin{aligned}
\chi_{\text{Sym}^2 V}(g) &= \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \lambda_i \lambda_j \\
&= \frac{1}{2} \left(\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right)^2 + \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} (\chi_V(g)^2 + \chi_V(g^2)).
\end{aligned}$$

□

Définition 3.2.3. Une application $\alpha : G \rightarrow \mathbb{C}$ est *centrale* si elle est constante sur les classes de conjugaison de G . L'ensemble de telles applications est noté $\mathbb{C}_{\text{class}} G$.

Lemme 3.2.4. Une application $\alpha : G \rightarrow \mathbb{C}$ est centrale si $\alpha(gh) = \alpha(hg)$ pour tous $g, h \in G$.

Démonstration. Si α est centrale, on a

$$\alpha(ghg^{-1}) = \alpha(h)$$

pour tous $g, h \in G$. Ainsi si $g, h \in G$ on obtient

$$\begin{aligned} \alpha(gh) &= \alpha(ghgg^{-1}) \\ &= \alpha(hg). \end{aligned}$$

On procède de même pour montrer la réciproque. □

Proposition 3.2.5. (a) Le caractère χ_V d'une représentation V est une fonction centrale.

(b) Deux représentations équivalentes ont même caractère.

Démonstration. Le premier point découle directement des propriétés de la trace. Si (V, ρ) et (W, σ) sont deux représentations équivalentes, il existe $\varphi : V \rightarrow W$ tel que $\varphi\rho(g) = \sigma(g)\varphi$, ou encore $\varphi\rho(g)\varphi^{-1} = \sigma(g)$ pour tout $g \in G$. Donc $\sigma(g)$ et $\rho(g)$ ont la même trace. □

3.3 Formules de projection

On vient de voir que deux représentations équivalentes ont même caractère, on va maintenant montrer que deux représentations ayant même caractère sont équivalentes. Pour cela, on va montrer que si $\{V_i \mid 1 \leq i \leq k\}$ est un ensemble de représentations irréductibles et inéquivalentes deux à deux, alors leurs caractères sont linéairement indépendants dans $\mathbb{C}_{\text{class}} G$. Si

$$\sum_{i=1}^k a_i \chi_{V_i} = 0$$

est une combinaison linéaire nulle de ces caractères, on peut facilement faire apparaître les caractères de $\text{Hom}(V_j, V_i)$ en multipliant l'équation par $\overline{\chi_{V_j}}$. Vu la proposition 2.2.10 et le lemme de Schur, on introduit la définition suivante pour V^G et on va s'intéresser à projeter $\text{Hom}(V_j, V_i)$ sur $\text{Hom}_G(V_j, V_i)$.

Définition 3.3.1. Soit V une représentation de G . On définit

$$V^G = \{v \in V \mid gv = v \ \forall g \in G\}.$$

Proposition 3.3.2. Si V est une représentation de G , l'application

$$\varphi = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g$$

est un projecteur de V sur V^G . En particulier $\dim(V^G) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g)$.

Démonstration. Si $v \in V^G$, on a

$$\begin{aligned}\varphi(v) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gv \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} v \\ &= v\end{aligned}$$

et $v \in \text{Im}(\varphi)$. Soient $v \in V$ et $h \in G$. On a

$$\begin{aligned}h\varphi(v) &= h \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gv \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (hg)v \\ &= \varphi(v).\end{aligned}$$

Ceci montre que $\text{Im}(\varphi) \subset V^G$ et on a bien $\text{Im}(\varphi) = V^G$. Finalement, si $v \in V$, on a

$$\underbrace{\varphi(\varphi(v))}_{\in V^G} = v$$

et φ est bien un projecteur de V sur V^G . En particulier,

$$\dim(V^G) = \text{tr}(\varphi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g).$$

□

Ceci nous permet de montrer la proposition annoncée.

Proposition 3.3.3. *Si $\{V_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ est un ensemble de représentations irréductibles deux à deux inéquivalentes, leurs caractères sont linéairement indépendants dans $\mathbb{C}_{\text{class}} G$.*

Démonstration. Soit

$$\sum_{i=1}^k a_i \chi_{V_i} = 0$$

une combinaison linéaire nulle des caractères $\{\chi_{V_i} \mid 1 \leq i \leq n\}$. Soit $j \in \{1, \dots, n\}$ et montrons que $a_j = 0$. En multipliant l'équation par $\overline{\chi_{V_j}}$, on obtient

$$\sum_{i=1}^k a_i \chi_{\text{Hom}(V_j, V_i)} = 0$$

et

$$\sum_{i=1}^k a_i \chi_{\text{Hom}(V_j, V_i)}(g) = 0$$

pour tout $g \in G$. De là, on peut écrire

$$\sum_{i=1}^k a_i \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\text{Hom}(V_j, V_i)}(g) \right) = 0$$

et par la proposition 3.3.2, on obtient

$$\sum_{i=1}^k a_i \dim(\text{Hom}_G(V_j, V_i)) = 0.$$

Finalement, on utilise le lemme de Schur pour conclure avec

$$0 = \sum_{i=1}^k a_i \dim(\text{Hom}_G(V_j, V_i)) = \sum_{i=1}^k a_i \delta_{ij} = a_j.$$

□

Corollaire 3.3.4. *Deux représentations ayant même caractère sont équivalentes.*

Démonstration. Soient

$$V = \bigoplus_{i=1}^k V_i^{\oplus a_i} \quad W = \bigoplus_{i=1}^k V_i^{\oplus b_i}$$

deux représentations et leur décomposition en irréductibles. Comme $\chi_W = \chi_V$, on a

$$b_1 \chi_{V_1} + \cdots + b_k \chi_{V_k} = a_1 \chi_{V_1} + \cdots + a_k \chi_{V_k}.$$

Les caractères étant linéairement indépendants on obtient $a_i = b_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$ et les représentations V et W sont équivalentes. □

Comme $\mathbb{C}_{\text{class}} G$ est de dimension égale au nombre de classes de conjugaison de G , on a également le corollaire suivant.

Corollaire 3.3.5. *Le nombre de représentations irréductibles inéquivalentes de G est plus petit ou égal au nombre de classes de conjugaison de G .*

En particulier, le nombre de représentations irréductibles d'un groupe fini est fini, et on peut répertorier leurs caractères dans une table.

Définition 3.3.6. Soit G un groupe fini. La *table des caractères* de G est un tableau dont les colonnes sont labellisées par les classes de conjugaison de G et les lignes par ses représentations irréductibles. Les cases du tableau contiennent les valeurs que prennent les caractères des représentations irréductibles de G sur ses classes de conjugaison.

Avant de passer à la suite, revenons à l'exemple du groupe symétrique S_3 .

Exemple 3.3.7. Pour le groupe symétrique, nous avons trouvé 3 représentations irréductibles : la représentation triviale U , la représentation alternée U' et la représentation standard V . Or le groupe symétrique possède exactement 3 classes de conjugaison :

$$C((1, 2)) = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}, \quad C(\text{id}) = \{\text{id}\} \quad \text{et} \quad C((1, 2, 3)) = \{(1, 2, 3), (2, 3, 2)\};$$

on peut donc conclure, par le corollaire 3.3.5 que ces trois représentations irréductibles de S_3 sont les seules. Calculons alors la table des caractères de S_3 . La ligne correspondant à la représentation triviale ne possède que des 1, et celle correspondant à la représentation alternée possède des 1 et des -1 , en fonction du signe des représentations dans la classe de conjugaison considérée. Pour la représentation standard, représentons $(1, 2)$ et $(1, 2, 3)$ dans la base de V formée par les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} .0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On a

$$(1, 2)v_1 = v_2 \quad \text{et} \quad (1, 2)v_2 = v_1,$$

ainsi la matrice représentant $(1, 2)$ vaut

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour la permutation $(1, 2, 3)$, on a

$$(1, 2, 3)v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -v_1 + v_2 \quad \text{et} \quad (1, 2, 3)v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -v_1.$$

La matrice représentant $(1, 2, 3)$ vaut alors

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a maintenant toutes les informations nécessaires pour calculer la table des caractères de S_3 .

S_3	id	$(1, 2)$	$(1, 2, 3)$
U	1	1	1
U'	1	-1	1
V	2	0	-1

On a montré que les caractères des représentations irréductibles de G étaient linéairement indépendants dans $\mathbb{C}_{\text{class}} G$. En fait, on peut montrer que si V et W sont deux représentations irréductibles, leurs caractères sont orthonormés par rapport au produit scalaire suivant.

Définition 3.3.8. On définit un produit scalaire sur $\mathbb{C}_{\text{class}(G)}$ ¹ par

$$(\cdot, \cdot) : \mathbb{C}_{\text{class}}(G) \times \mathbb{C}_{\text{class}}(G) \rightarrow \mathbb{C} \quad (\alpha, \beta) \mapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\alpha(g)} \beta(g).$$

Proposition 3.3.9. Soient V et W deux représentations irréductibles de G , on a

$$(\chi_V, \chi_W) = \begin{cases} 1 & \text{si } V \sim W \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Il s'agit du produit scalaire sur $\mathbb{C}G$ restreint à $\mathbb{C}_{\text{class}}(G)$ qui fait de la base standard de $\mathbb{C}G$ une base orthonormée.

Démonstration. On l'a presque démontré dans la proposition 3.3.3. En utilisant à nouveau la proposition 3.3.2 et le lemme de Schur, on obtient

$$(\chi_V, \chi_W) = \dim(\text{Hom}_G(V, W)) = \begin{cases} 1 & \text{si } V \sim W \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

□

On peut alors exprimer les multiplicités des irréductibles apparaissant dans la décomposition d'une représentation en termes de ce produit scalaire.

Proposition 3.3.10. *Soit*

$$V = V_1^{\oplus a_1} \oplus \dots \oplus V_k^{\oplus a_k}$$

une représentation. On a $a_i = (\chi_V, \chi_{V_i})$ et V est irréductible si et seulement si $(\chi_V, \chi_V) = 1$.

Démonstration. On a

$$(\chi_V, \chi_{V_i}) = \sum_{j=1}^k a_j (\chi_{V_j}, \chi_{V_i}) = a_i.$$

et

$$(\chi_V, \chi_V) = \sum_{i=1}^k a_i^2 = 1$$

si et seulement si V est irréductible.

□

On retrouve alors la proposition 2.2.8 (dans le cadre de représentations de groupes finis).

Corollaire 3.3.11. *Une représentation d'un groupe fini est irréductible si et seulement si la représentation duale qui lui est associée l'est.*

Démonstration. Soit V une représentation d'un groupe fini G . On a

$$\begin{aligned} (\chi_{V^*}, \chi_{V^*}) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_{V^*}(g)} \chi_{V^*}(g) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g) \overline{\chi_V(g)} \\ &= (\chi_V, \chi_V) \end{aligned}$$

et $(\chi_V, \chi_V) = 1$ si et seulement si $(\chi_{V^*}, \chi_{V^*}) = 1$.

□

Le corollaire 3.3.5 nous indique que les représentations irréductibles d'un groupe G sont en nombre inférieur au nombre de classes de conjugaison de G . On sait aussi que les caractères de ses représentations irréductibles sont linéairement indépendants dans $\mathbb{C}_{\text{class}} G$. On va montrer qu'ils en sont en fait une base et ainsi, le nombre de représentations irréductibles de G est exactement égal au nombre de classes de conjugaison de G . Nous aurons besoin du lemme suivant qui caractérise les éléments de $\mathbb{C}_{\text{class}} G$ en termes des représentations du groupe G .

Lemme 3.3.12. *Soit G un groupe. Pour tout $\alpha : G \rightarrow \mathbb{C}$ et toute représentation V de G , posons*

$$\varphi_{\alpha, V} : V \rightarrow V \quad v \mapsto \sum_{g \in G} \alpha(g) g \cdot v.$$

Alors $\alpha \in \mathbb{C}_{\text{class}} G$ si et seulement si $\varphi_{\alpha, V}$ est un entrelacement pour toute représentation V de G .

Démonstration. La condition est nécessaire. Si $\alpha \in \mathbb{C}_{\text{class}} G$ et V est une représentation de G , on a

$$\begin{aligned} h \cdot \varphi_{\alpha,V}(v) &= \sum_{g \in G} \alpha(g)(hg) \cdot v \\ &= \sum_{g \in G} \alpha(h^{-1}gh)(gh) \cdot v \\ &= \sum_{g \in G} \alpha(g)(gh) \cdot v \\ &= \varphi_{\alpha,V}(h \cdot v) \end{aligned}$$

pour tous $h \in G$, $v \in V$ et $\varphi_{\alpha,V}$ est un entrelacement. La condition est suffisante. Soit R la représentation régulière de G . Pour tous $g, h \in G$, on a

$$\begin{aligned} h \cdot \varphi_{\alpha,R}(e_g) &= \varphi_{\alpha,R}(h \cdot e_g) \\ \iff \sum_{t \in G} \alpha(t)e_{htg} &= \sum_{t \in G} \alpha(t)e_{thg} \\ \iff \sum_{t \in G} \alpha(g^{-1}t)e_{h g^{-1}tg} &= \sum_{t \in G} \alpha(tg^{-1})e_{t g^{-1}hg}. \end{aligned}$$

En regardant les termes correspondant à $e_{h g^{-1}hg}$ dans la dernière égalité ($t = h$ dans les deux sommes), on obtient $\alpha(g^{-1}h) = \alpha(hg^{-1})$ pour tous $g, h \in G$ et α est constante sur les classes de conjugaison de G . \square

Proposition 3.3.13. *L'ensemble des caractères des représentations irréductibles de G forme une base orthonormée de $\mathbb{C}_{\text{class}} G$. De manière équivalente, le nombre de représentations irréductibles de G correspond au nombre de classes de conjugaison de G .*

Démonstration. Notons $\{V_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ l'ensemble des représentations irréductibles de G . On sait déjà par la proposition 3.3.9 que l'ensemble $\{\chi_{V_i} \mid 1 \leq i \leq n\}$ est un ensemble d'éléments orthonormés de $\mathbb{C}_{\text{class}} G$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}_{\text{class}} G$. Montrons que si $(\alpha, \chi_V) = 0$ pour toute représentation irréductible V de G^2 , alors $\alpha = 0$. Cela suffit pour montrer que l'ensemble $\{\chi_{V_i} \mid 1 \leq i \leq n\}$ est une base puisque dans ce cas on peut écrire, quel que soit $\beta \in \mathbb{C}_{\text{class}} G$,

$$\beta = \sum_{i=1}^n (\beta, \chi_{V_i}) \chi_{V_i}.$$

En effet, avec

$$\alpha = \beta - \sum_{i=1}^n (\beta, \chi_{V_i}) \chi_{V_i},$$

on a, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned} (\alpha, \chi_{V_j}) &= (\beta - \sum_{i=1}^n (\beta, \chi_{V_i}) \chi_{V_i}, \chi_{V_j}) \\ &= (\beta, \chi_{V_j}) - \sum_{i=1}^n (\beta, \chi_{V_i}) (\chi_{V_i}, \chi_{V_j}) \\ &= (\beta, \chi_{V_j}) - (\beta, \chi_{V_j}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. Alors $(\alpha, \chi_V) = 0$ pour une représentation V quelconque.

et $\alpha = 0$. Soient $\alpha \in \mathbb{C}_{\text{class}} G$ tel que $(\alpha, \chi_{V_i}) = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \{1, \dots, n\}$. On sait, par le lemme 3.3.12 que

$$\varphi_{\alpha, V_j} = \sum_{g \in G} \alpha(g)g : V_j \rightarrow V_j$$

est un entrelacement. Par le lemme de Schur, il existe $\lambda_j \in \mathbb{C}$ tel que $\varphi_{\alpha, V_j} = \lambda_j \text{id}$. On a alors

$$\begin{aligned} \lambda_j &= \frac{1}{\dim V_j} \text{tr}(\varphi_{\alpha, V_j}) \\ &= \frac{1}{\dim V_j} \sum_{g \in G} \alpha(g) \chi_{V_j}(g) \\ &= \frac{|G|}{\dim V_j} (\alpha, \chi_{V_j^*}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ce qui implique $\varphi_{\alpha, V_j} = 0$. Comme toute représentation se décompose en une somme directe d'irréductibles, on a $\varphi_{\alpha, V} = 0$ quelle que soit la représentation V considérée. En particulier, pour la représentation R de G , si on évalue $\varphi_{\alpha, R}$ en e_1 on obtient $\sum_{g \in G} \alpha(g)e_g = 0$. Donc $\alpha(g)$ est nul pour tout $g \in G$ et $\alpha = 0$. \square

Proposition 3.3.14. *Soit*

$$V = V_1^{\oplus a_1} \oplus \dots \oplus V_n^{\oplus a_n}$$

une représentation. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, l'application

$$\varphi_i = \frac{\dim V_i}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_{V_i}(g)} g : V \rightarrow V$$

le projecteur de V sur $V_i^{\oplus a_i}$.

Démonstration. Par le lemme 3.3.12, φ_i est un entrelacement. Considérons la restriction de φ_i sur V_k ($k \in \{1, \dots, n\}$)

$$\frac{\dim V_i}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_{V_i}(g)} g|_{V_k} : V_k \rightarrow V_k.$$

Par le lemme de Schur, il existe $\lambda_k \in \mathbb{C}$ tel que $\varphi|_{V_k} = \lambda_k \text{id}$. On a alors

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \frac{\text{tr}(\varphi|_{V_k})}{\dim V_k} \\ &= \frac{\dim V_i}{\dim V_k |G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_{V_i}(g)} \chi_{V_k}(g) \\ &= \frac{\dim V_i}{\dim V_k} (\chi_{V_k}, \chi_{V_i}) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi $\varphi_i(v) = v$ si $v \in V_i$ et, puisque $g : V \rightarrow V$ est donné par

$$g|_{V_1^{\oplus a_1}} \oplus \dots \oplus g|_{V_n^{\oplus a_n}} : V \rightarrow V$$

on a $\varphi_i(v) \in V_i^{\oplus a_i}$ pour tout $v \in V$. \square

3.4 Application à la représentation régulière de G

La représentation régulière associée à un groupe G est un cas particulier de représentation de permutation (voir exemple 2.1.7). Pour de telles représentations, on peut lier le caractère et l'action de G .

Lemme 3.4.1. *Soit $\mathbb{C}X$ la représentation de permutation associée à l'action de G sur X un ensemble fini. Alors si χ est le caractère de $\mathbb{C}X$, $\chi(g)$ correspond au nombre d'éléments de X fixés par g .*

Démonstration. Dans la base $\{e_x \mid x \in X\}$, on a $g \cdot e_x = e_{g \cdot x}$. La matrice qui représente g est composée de colonnes dont tous les éléments sont nuls, sauf celui à la position $g \cdot x$, qui vaut 1. Cet élément se retrouvera sur la diagonale si et seulement si $g \cdot x = x$ et $\text{tr}(g) = \#\{x \in X \mid gx = x\}$. \square

En appliquant la proposition 3.3.10 à la représentation régulière R de G , on peut montrer que toutes les représentations irréductibles de G apparaissent dans la décomposition en somme directe d'irréductibles de R , ce qui nous fournit une manière de trouver les représentations irréductibles d'un groupe donné. Par ailleurs, R est irréductible si et seulement si $G = \{e\}$.

Proposition 3.4.2. *Soit R la représentation régulière associée à un groupe G . On a*

$$R = V_1^{\dim V_1} \oplus \dots \oplus V_n^{\dim V_n}$$

où la somme s'effectue sur toutes les représentations irréductibles de G . En particulier R est irréductible si et seulement si $G = \{e\}$.

Démonstration. Ecrivons

$$R = V_1^{\oplus a_1} \oplus \dots \oplus V_n^{\oplus a_n}$$

où $\{V_1, \dots, V_n\}$ est l'ensemble des représentations irréductibles de G , quitte à avoir des facteurs nuls. Par le lemme 3.4.1, on sait que le caractère $\chi_R(g)$ est donné par le nombre d'éléments de G fixés par g . Ici, comme $gh = h$ si et seulement si $g = e$ on a

$$\chi_R(g) = \begin{cases} |G| & \text{si } g = e \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En appliquant alors la proposition 3.3.10 on a

$$\begin{aligned} a_i &= (\chi_R, \chi_{V_i}) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \underbrace{\overline{\chi_R(g)}}_{=0 \text{ si } g \neq e} \chi_{V_i}(g) \\ &= \frac{1}{|G|} |G| \chi_{V_i}(e) \\ &= \dim V_i \end{aligned}$$

comme $e = id$. Comme le nombre de représentations irréductibles de G est égal au nombre de classes de conjugaison de G , si $G \neq \{e\}$, on en a au moins deux et R n'est pas irréductible. \square

Corollaire 3.4.3. Soit R la représentation régulière de G et $\{V_1, \dots, V_n\}$ l'ensemble des représentations irréductibles de celui-ci. On a

$$|G| = \dim(R) = \sum_{i=1}^n (\dim V_i)^2$$

et

$$\sum_{i=1}^n \dim V_i \cdot \chi_{V_i}(g) = 0$$

si $g \neq e$.

Démonstration. Puisque $\chi_R = \sum_{i=1}^n \dim V_i \cdot \chi_{V_i}$, on a

$$|G| = (\chi_R, \chi_R) = \sum_{i=1}^n (\dim V_i)^2$$

et, si $g \neq e$

$$0 = \chi_R(g) = \sum_{i=1}^n \dim V_i \cdot \chi_{V_i}(g).$$

□

3.5 Le groupe symétrique S_4

Terminons ce chapitre par un exemple. Pour le groupe symétrique S_3 , on avait déjà trouvé toutes ses représentations irréductibles avant de calculer ses caractères. Pour S_4 , on peut se servir de la théorie des caractères pour trouver toutes ses représentations irréductibles.

Exemple 3.5.1. Le groupe S_4 possède 5 classes de conjugaisons. En effet, chacune de ses classes de conjugaison est caractérisée par la longueur des cycles apparaissant dans la décomposition en cycles disjoints de ses éléments.³ On a donc les classes de conjugaison suivantes, dont on donne à chaque fois un représentant

décomposition en cycles	représentant
1 + 1 + 1 + 1	id = (1)(2)(3)(4)
2 + 2	(1, 2)(3, 4)
3 + 1	(1, 2, 3)
1 + 1 + 2	(1, 2)
4	(1, 2, 3, 4)

On sait donc que l'on doit chercher 5 représentations irréductibles pour S_4 . Comme pour le groupe S_3 , on peut déjà trouver 3 de ses représentations irréductibles : la représentation triviale, la représentation alternée et la représentation standard

$$V = \{x \in \mathbb{C}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}.$$

3. La preuve de cette affirmation est faite en détail au chapitre 5, proposition 5.1.1.

Les caractères pour ces trois représentations sont alors repris sur le tableau suivant.

S_4	id	(1, 2)(3, 4)	(1, 2, 3)	(1, 2)	(1, 2, 3, 4)
U	1	1	1	1	1
U'	1	1	1	-1	-1
V	3	-1	0	1	-1

Pour calculer le caractère χ_V de la représentation standard, on utilise $\chi_V = \chi_{\mathbb{C}^4} - \chi_U$ qui découle de $\mathbb{C}^4 = U \oplus V$, et pour calculer $\chi_{\mathbb{C}^4}$, on utilise le lemme 3.4.1. En effet, la représentation de S_4 sur \mathbb{C}^4 est donnée par la représentation de permutation sur les vecteurs de base canonique puisqu'on a

$$g \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{g^{-1}(1)} \\ x_{g^{-1}(2)} \\ x_{g^{-1}(3)} \\ x_{g^{-1}(4)} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^4 x_{g^{-1}(i)} e_i = \sum_{i=1}^4 x_i e_{g(i)}$$

pour tout $g \in S_4$. Pour chaque classe de conjugaison, il suffit donc de regarder le nombre d'éléments fixés par un représentant, et on a $\chi_{\mathbb{C}^4} = (4, 0, 1, 2, 0)$. Il nous manque alors deux représentations irréductibles. On sait, par le corollaire 3.4.3, que l'ordre de S_4 doit être égal à la somme des carrés de ses représentations irréductibles. On donc alors pouvoir écrire

$$24 - 1^2 - 1^2 - 3^2 = 13$$

comme la somme de deux carrés. On sait que les deux représentations manquantes sont donc de dimension 2 et 3 respectivement. Commençons par les chercher parmi les constructions classiques de représentations présentées au chapitre précédent. On trouve que la représentation de dimension 3

$$V \otimes U'$$

est irréductible. Pour le voir, on peut par exemple calculer son caractère et vérifier que

$$(\chi_{V \otimes U'}, \chi_{V \otimes U'}) = 1.$$

On a

$$\chi_{V \otimes U'} = \chi_V \chi_{U'} = (3, -1, 0, -1, 1)$$

et

$$(\chi_{V \otimes U'}, \chi_{V \otimes U'}) = \frac{1}{24}(3^2 + 3 \cdot (-1)^2 + 8 \cdot 0^2 + 6 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot 1^2) = 1.$$

Il nous reste alors à trouver une représentation irréductible pour S_4 , de dimension égale à 2. Notons-là W . Si on cherche à compléter la table des caractères de S_4 , on sait alors déjà que $\chi_W(\text{id})$ doit être égal à 2. Pour calculer les autres valeurs de χ_W , on sait par la proposition 3.3.9 que les caractères des représentations irréductibles doivent être orthonormés. On peut donc résoudre le système suivant

$$\begin{cases} 2 + 3b + 8c + 6d + 6e = 0 \\ 2 + 3b + 8c - 6d - 6e = 0 \\ 6 - 3b + 6d - 6e = 0 \\ 6 - 3b - 6d + 6e = 0 \end{cases}$$

où $(2, b, c, d, e) = \chi_W$. On trouve alors $\chi_W = (2, 2, -1, 0, 0)$ et au final, la table des caractères de S_4 est donnée par

S_4	id	$(1, 2)(3, 4)$	$(1, 2, 3)$	$(1, 2)$	$(1, 2, 3, 4)$
U	1	1	1	1	1
U'	1	1	1	-1	-1
V	3	-1	0	1	-1
$V \otimes U$	3	-1	0	-1	1
W	2	2	-1	0	0

A partir de cette table, on peut trouver W . Soit $\sigma = (1, 2)(3, 4)$. On a $\sigma^2 = \text{id}$, donc les zéros du polynôme caractéristique de σ valent 1 ou -1. Or on sait que $\chi_W(\sigma) = \text{tr}(\sigma) = 2$. Alors σ possède une valeur propre 1 de multiplicité 2, et σ agit comme l'identité sur W . De là, on va se servir du lemme suivant.

Lemme 3.5.2. *Si N est un sous groupe normal d'un groupe G , une représentation*

$$\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$$

est triviale sur N si et seulement si elle se factorise à travers le quotient

$$G \rightarrow G/N \rightarrow \text{GL}(V).$$

Démonstration. Supposons que $\rho(n) = \text{id}$ pour tout $n \in N$. Alors l'homomorphisme

$$\tilde{\rho} : G/N \rightarrow \text{GL}(V) \quad gN \mapsto \rho(g)$$

est bien défini. En effet, si $gN = g'N$, on a $g = g'n$ pour un certain $n \in N$ et

$$\rho(g) = \rho(g'n) = \rho(g')\rho(n) = \rho(g').$$

On peut donc définir une représentation de G/N à partir de celle de G , et celle-ci est telle que

$$\rho = \tilde{\rho}\pi$$

où $\pi = G \rightarrow G/N$ est la projection canonique. A l'inverse, si il existe une représentation

$$\tilde{\rho} : G/N \rightarrow \text{GL}(V)$$

de G/N telle que

$$\rho = \tilde{\rho}\pi,$$

on a, pour tout $n \in N$,

$$\rho(n) = \tilde{\rho}(N) = \rho(1) = \text{id}.$$

□

On sait que la représentation W est triviale sur le sous groupe normal

$$N = \{\text{id}, (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3)\}$$

de S_4 . Or le groupe quotient S_4/N est isomorphe à S_3 .

Lemme 3.5.3. *On a*

$$S_4/\{\text{id}, (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3)\} \cong S_3.$$

Démonstration. Considérons l'action de S_4 sur la classe de conjugaison

$$C = \{(1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3)\}$$

de $(1, 2)(3, 4)$, donnée par

$$\phi : S_4 \rightarrow S(C) \quad \sigma \mapsto (C \rightarrow C \quad x \mapsto \sigma x \sigma^{-1}).$$

Cette action est surjective. En effet, si on regarde l'action d'une transposition $\tau \in S_4$ sur $S(C) \cong S_3$, elle ne modifiera pas l'élément de C qui contient τ , mais échangera les deux autres. Ainsi, par l'action des transposition $(1, 2)$, $(1, 3)$ et $(1, 4)$ (on prend à chaque fois une des deux transpositions apparaissant dans chacun des éléments de C), on obtient les trois « transpositions » de $S(C) \cong S_3$. L'application ϕ étant un morphisme, on peut donc engendrer $S(C)$. Alors, par le premier théorème d'isomorphisme, on a

$$S_4/\ker(\phi) \cong S(C) \cong S_3$$

et $|\ker(\phi)| = 24/6 = 4$. Il suffit de montrer que $N \subset \ker(\phi)$ pour conclure. C'est évident puisque $N = C \cup \{\text{id}\}$. \square

On vient donc de montrer que $S_4/N \cong S_3$ et que W est une représentation de S_4 , de dimension égale à 2, qui se factorise au travers de $S_4/N \cong S_3$. On vérifie alors que W est irréductible pour S_4 si et seulement si W est irréductible pour $S_4/N \cong S_3$ et de là, on conclut que W correspond à la représentation standard de S_3 .

Chapitre 4

Représentations comme $\mathbb{C}G$ -modules et représentations induites

4.1 Représentations comme $\mathbb{C}G$ -modules

Soit G un groupe. On a défini une représentation V de G comme étant un homomorphisme de groupe entre G et $\text{GL}(V)$. On peut, et de manière équivalente, définir une représentation de G en termes d'homomorphismes d'algèbres.

Définition 4.1.1. Soit G un groupe. L'algèbre de G est l'espace vectoriel $\mathbb{C}G$ ¹. Elle est naturellement munie d'une structure d'algèbre via

$$e_g \cdot e_h = e_{gh}$$

pour tous $g, h \in G$, avec $\{e_g \mid g \in G\}$ la base canonique de $\mathbb{C}G$. On vérifie directement que l'algèbre $\mathbb{C}G$ est associative et unitaire, de neutre e_1 où 1 est le neutre de G .

Les propositions 4.1.2-4.1.6 qui suivent servent à traduire le vocabulaire, ainsi que quelques résultats, associés aux représentations d'un groupe en termes d'homomorphismes d'algèbre et $\mathbb{C}G$ -module.

Proposition 4.1.2. Une représentation V d'un groupe G est un homomorphisme d'algèbres

$$\rho : \mathbb{C}G \rightarrow \text{End}(V)$$

où V est de dimension finie. De manière équivalente, une représentation V d'un groupe G est un $\mathbb{C}G$ -module à gauche.

Démonstration. Tout d'abord, on vérifie que si V est un $\mathbb{C}G$ -module², alors

$$\rho : \mathbb{C}G \rightarrow \text{End}(V) \quad e_g \mapsto (V \rightarrow V \quad v \mapsto e_g \cdot v)$$

est un homomorphisme d'algèbres et qu'à l'inverse, si

$$\rho : \mathbb{C}G \rightarrow \text{End}(V)$$

1. Confer définition 1.1.3.

2. Confer définition 1.4.7.

est un homomorphisme d'algèbres, alors

$$\mathbb{C}G \times V \rightarrow V \quad (x, v) \mapsto \rho(x)v$$

munit V d'une structure de $\mathbb{C}G$ -module. Maintenant, si V est une représentation d'un groupe G , au sens de la définition 2.1.1, soit

$$\sigma : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$$

l'homomorphisme associé. L'application

$$\rho : \mathbb{C}G \rightarrow \mathrm{End}(V) \quad \sum_{g \in G} a_g e_g \mapsto \sum_{g \in G} a_g \sigma(g)$$

est alors un homomorphisme d'algèbres. De même, si

$$\rho : \mathbb{C}G \rightarrow \mathrm{End}(V)$$

est un homomorphisme d'algèbres, il suffit de poser

$$\sigma(g) = \rho(e_g)$$

pour obtenir une représentation au sens de la définition 2.1.1. □

Remarque 4.1.3. On se permettra dans ce qui suit d'omettre le qualificatif « à gauche » lorsque l'on parlera de $\mathbb{C}G$ -modules. Le qualificatif sera réintroduit lorsque la distinction (gauche vs. droite) sera nécessaire (on parlera plus loin de représentations « à droite »).

Proposition 4.1.4. *Soient V et W deux représentations d'un groupe G . Un entrelacement*

$$\varphi : V \rightarrow W$$

est un morphisme de $\mathbb{C}G$ -module.

Proposition 4.1.5. *Soit V une représentation d'un groupe G . Le sous-espace $W \subset V$ est une sous-représentation de V si W est un sous-module de V .*

La notion d'irréductibilité pour les représentations coïncide avec celle d'irréductibilité pour les $\mathbb{C}G$ -modules.³ De manière générale, un module indécomposable sur une algèbre n'est pas nécessairement irréductible. C'est par contre le cas pour les $\mathbb{C}G$ -modules, comme le montre la proposition suivante, qui est une traduction de 2.3.3.

Proposition 4.1.6. *Tout $\mathbb{C}G$ -module indécomposable est irréductible.*

Démonstration. Soit V un $\mathbb{C}G$ -module indécomposable. Si V n'est pas irréductible, il existe un sous-module propre W de V qui soit non nul. Par la proposition 2.3.3 On peut alors écrire $V = W \oplus W'$ où W' est un sous-module propre et non-nul de V . Alors V n'est pas indécomposable, une contradiction. □

On a dit qu'il s'agissait de la traduction de la proposition 2.3.3 en termes de $\mathbb{C}G$ -modules : si tout $\mathbb{C}G$ -module indécomposable est irréductible, alors toute représentation est complètement réductible.

3. Confer définition 1.4.9.

Remarque 4.1.7. La représentation régulière de G correspond évidemment à l'algèbre de groupe $\mathbb{C}G$, vue comme un module sur elle-même.

On va se servir de cette observation ainsi que de nos connaissances précédemment acquises sur la représentation régulière afin de caractériser les représentations irréductibles de G en termes d'idempotents primitifs de $\mathbb{C}G$.

Proposition 4.1.8. *Tout idéal à gauche de $\mathbb{C}G$ est de la forme $\mathbb{C}G \cdot e$ où e est un idempotent.*

Démonstration. Soit $V \subset \mathbb{C}G$ un idéal à gauche, i.e. une sous-représentation de la représentation régulière $\mathbb{C}G$. Par la proposition 2.3.3, il existe W un idéal de $\mathbb{C}G$ tel que $\mathbb{C}G = V \oplus W$. En considérant alors la projection de $\pi : \mathbb{C}G \rightarrow V$, on a

$$\begin{aligned} V &= \pi(\mathbb{C}G) \\ &= \pi(\mathbb{C}G \cdot e_1) \\ &= \mathbb{C}G \cdot \pi(e_1) \end{aligned}$$

puisque π est un entrelacement, et donc un morphisme de $\mathbb{C}G$ -modules. On vérifie que $\pi(e_1)$ est un idempotent, en effet on a $\pi(e_1)\pi(e_1) = \pi(\pi(e_1)e_1) = \pi(e_1)$. \square

Corollaire 4.1.9. *Les représentations irréductibles de G sont exactement celles de la forme $\mathbb{C}G \cdot e$ où e est un idempotent primitif de $\mathbb{C}G$.*

Démonstration. On sait que la représentation régulière $\mathbb{C}G$ se décompose en une somme directe d'idéaux,

$$\mathbb{C}G = R = \bigoplus_i V_i^{\oplus \dim V_i} \quad 4$$

Par la proposition 4.1.8, il existe alors e_i idempotent tel que $V_i = \mathbb{C}G \cdot e_i$, pour toute représentation irréductible V_i . En particulier V_i est indécomposable et par le lemme 1.4.12, e est primitif. \square

Remarque 4.1.10. Soit R la représentation régulière de G . On sait que

$$\frac{\dim V_i}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_{V_i}(g)} g$$

est la projection de $R = \mathbb{C}G$ sur $V_i^{\oplus \dim V_i}$. Ainsi

$$V_i^{\oplus \dim V_i} = \mathbb{C}G \cdot \left(\frac{\dim V_i}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_{V_i}(g)} e_g \right).$$

Proposition 4.1.11. *Les algèbres $\mathbb{C}G$ et $\bigoplus_i \text{End}(V_i)$ sont isomorphes.*

Démonstration. On sait que

$$\mathbb{C}G = R = \bigoplus_i V_i^{\oplus \dim V_i}.$$

Pour toute représentation irréductible V_i , soit $\varphi_i : \mathbb{C}G \rightarrow \text{End}(V_i)$ l'homomorphisme d'algèbres qui lui est associé et soit

$$\varphi : \mathbb{C}G \rightarrow \text{End}(\mathbb{C}G)$$

4. La somme porte sur toutes les représentations irréductibles de G .

l'homomorphisme associé à la représentation régulière. On a donc

$$\varphi_i : \mathbb{C}G \rightarrow \text{End}(V_i) \quad x \mapsto \varphi(x)|_{V_i}.^5 \quad (4.1)$$

De plus, l'homomorphisme φ est injectif ; en effet, si

$$\varphi \left(\sum_{g \in G} a_g e_g \right) = 0,$$

alors quel que soit $h \in G$, on obtient

$$\sum_{g \in G} a_g e_{gh} = 0$$

et $a_g = 0$ pour tout $g \in G$. Ceci implique que

$$\phi : \mathbb{C}G \rightarrow \bigoplus_i \text{End}(V_i) \quad x \mapsto \bigoplus_i \varphi_i(x).$$

est injectif, puisque si $\phi(x) = 0$, alors $\varphi_i(x) = 0$ pour toute représentation irréductible V_i , ce qui entraîne $\varphi(x) = 0$ vu (4.1). Comme φ est injectif, ceci implique bien $x = 0$. Le corollaire 3.4.3 permet alors de conclure, on a $\dim(\mathbb{C}G) = \dim(\bigoplus_i \text{End}(V_i))$ et ϕ est bijectif. \square

4.2 Représentations induites

Soient G un groupe fini et H un sous-groupe de G . Si on possède une représentation V de G , on en possède naturellement une pour H en l'y restreignant.

Définition 4.2.1. Si (V, ρ) est une représentation de G et H en est un sous-groupe, la représentation restreinte $\text{Res}_H^G V$ est la représentation de H donnée par la restriction de ρ à H . On note $\text{Res } V$ si le contexte est clair.

Si maintenant W est une représentation de H , on va en construire une pour G à partir de W . Donnons la définition suivante, où l'on considère une représentation V de G dont W est un sous-espace.

Définition 4.2.2. Soient V une représentation de G dont H est un sous-groupe et W un sous-espace vectoriel invariant pour H . On dit que V est *induite* par W si

$$V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} \sigma W$$

et on note $V = \text{Ind}_H^G W$ ou Ind_W si le contexte est clair.

Dans les conditions de la définition précédente, l'espace $\{g \cdot w \mid w \in W\}$ où g est un représentant de la classe latérale σ ne dépend pas du représentant g choisi, W étant stable pour sous l'action de H . La notation σW a donc bien un sens. Par ailleurs, la décomposition de V en tant que somme directe de ces sous-espaces n'est bien qu'une décomposition de V en somme directe d'espaces vectoriels seulement, les sous-espaces σW ne sont pas nécessairement des sous-représentations de V .

5. La restriction étant effectuée sur l'une des copies de V_i dans $\mathbb{C}G$.

Théorème 4.2.3. *Soit G un groupe fini. Si H est un de ses sous-groupes dont W est une représentation, il existe une unique représentation induite par W à isomorphisme près.*

Démonstration. Supposons que V soit une représentation de G telle que

$$V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} \sigma W.$$

Fixons un ensemble de représentants $\{g_\sigma \mid \sigma \in G/H\}$ des classes latérales de H . Alors, si $g \in G$ est tel que $gg_\sigma = g_\tau h$ avec $h \in H$, on doit avoir

$$g \cdot (g_\sigma w) = (gg_\sigma) \cdot w = (g_\tau h)w = g_\tau(hw).$$

Ceci invite à la construction suivante. On fixe un ensemble de représentants $\{g_\sigma \mid \sigma \in G/H\}$ des classes latérales de H et on définit V comme étant une somme directe

$$V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} W^\sigma$$

de $[G/H]$ copies de W . Si $v \in V$, on peut écrire

$$v = \sum_{\sigma \in G/H} g_\sigma w_\sigma$$

où $w_\sigma \in W$ pour tout $\sigma \in G/H$ et $g_\sigma w_\sigma$ est simplement une notation pour désigner l'image de w_σ par l'injection de W dans la σ^e copie W^σ de W dans V .⁶ Pour faire de V une représentation de G , si $g \in G$ et $\sigma \in G/H$, on pose

$$g \cdot (g_\sigma w_\sigma) = g_\tau (h \cdot w_\sigma)$$

où $\tau \in G/H$ et $h \in H$ sont tels que $gg_\sigma = g_\tau h$ avec $h \in H$. Montrons que cette action de G sur V définit bien une représentation de G . Pour cela, montrons que si g et g' appartiennent à G , leur action successive correspond à l'action de gg' . Soit $g_\sigma w \in W^\sigma$. Si $g'g_\sigma = g_\tau h'$ et $gg_\tau = g_\mu h$ alors $gg'g_\sigma = gg_\tau h' = g_\mu h h'$ et

$$\begin{aligned} g \cdot (g' \cdot (g_\sigma w)) &= g \cdot (g_\tau (h' \cdot w)) \\ &= g_\mu (h \cdot (h' \cdot w)) \\ &= g_\mu (hh' \cdot w) \\ &= gg' \cdot (g_\sigma w). \end{aligned}$$

Pour montrer que V est une représentation induite par W , il faut montrer que W en est un sous-espace et que

$$V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} \sigma W.$$

Montrons que W est un sous-espace de V en l'identifiant à

$$W \cong W^H,$$

6. On verra qu'avec la définition (prochaine) de l'action de G sur V , cette notation se justifie si on prend $g_H = 1$.

la copie de W^H correspondant à la classe latérale H . Soit $i : W \rightarrow V$ l'injection de W dans $W^H \subset V$. Les espaces W et W^H sont évidemment isomorphes via i , mais cette application n'est pas nécessairement un H -entrelacement. En effet, soient $h \in H$ et $w \in W$. On a $hg_H = g_H g_H^{-1} h g_H$ et

$$h \cdot i(w) = h \cdot g_H w = g_H (g_H^{-1} h g_H \cdot w) = i(g_H^{-1} h g_H \cdot w).$$

Il suffit alors de prendre la composée ig_H^{-1} pour avoir un H -entrelacement bijectif entre W et W^H . Enfin, si on montre que

$$W^\sigma = \sigma W^H,$$

cela suffira pour conclure que V est une représentation de G induite par H . Soient $w \in W$ et $\sigma \in G/H$. On a

$$g_\sigma \cdot (g_H w) = g_\sigma (g_H \cdot w) \in W^\sigma$$

ce qui montre que $\sigma W^H \subset W^\sigma$. Pour l'inclusion inverse, on a

$$g_\sigma w = g_\sigma (g_H \cdot (g_H^{-1} \cdot w)) = g_\sigma \cdot (g_H (g_H^{-1} \cdot w)).$$

et $W^\sigma \subset \sigma W^H$.⁷

Il reste à montrer l'unicité. La construction présentée ne dépendant que du choix des représentants, montrons que deux choix différents mènent à des représentations isomorphes. Soient donc $\{g_\sigma \mid \sigma \in G/H\}$ et $\{g'_\sigma \mid \sigma \in G/H\}$ deux ensembles de représentants pour les classes latérales de H . Pour tout $\sigma \in G/H$, il existe $h_\sigma \in H$ tel que $g'_\sigma = g_\sigma h_\sigma$. Alors l'application

$$\varphi : V \rightarrow V \quad \sum_{\sigma \in G/H} g'_\sigma w_\sigma \mapsto \sum_{\sigma \in G/H} g_\sigma (h_\sigma \cdot w_\sigma)^8$$

est un entrelacement bijectif. En effet, si $g \in G$, $\sigma \in G/H$ et $gg_\sigma = g_\tau h$ avec $h \in H$, on a

$$\begin{aligned} g \cdot \varphi(g'_\sigma w) &= g \cdot (g_\sigma (h_\sigma \cdot w)) \\ &= g_\tau (h \cdot (h_\sigma \cdot w)). \end{aligned}$$

Pour calculer $\varphi(g \cdot (g'_\sigma w))$, on a $gg'_\sigma = gg_\sigma h_\sigma = g_\tau h h_\sigma = g'_\tau h_\tau^{-1} h h_\sigma$ et

$$\begin{aligned} \varphi(g \cdot (g'_\sigma w)) &= \varphi(g'_\tau (h_\tau^{-1} h h_\sigma \cdot w)) \\ &= g_\tau (h_\tau \cdot (h_\tau^{-1} h h_\sigma \cdot w)) \\ &= g_\tau (h h_\sigma \cdot w) \end{aligned}$$

ce qui correspond bien à $g \cdot \varphi(g'_\sigma w)$. □

Définition 4.2.4. Si H est un sous-groupe d'un groupe fini G , et W en est une représentation on peut donc parler de la représentation de G induite par W .

La représentation induite satisfait à la propriété universelle suivante.

Proposition 4.2.5 (Propriété universelle). *Soient G un groupe fini dont H est un sous-groupe, W une représentation de H , U une représentation de G et $V = \text{Ind}_H^G W$. Tout H -entrelacement $\varphi : W \rightarrow \text{Res}_H^G U$ s'étend de manière unique en un G -entrelacement $\tilde{\varphi} : V \rightarrow U$. En d'autres termes, $\text{Hom}_H(W, \text{Res } U) \cong \text{Hom}_G(\text{Ind } W, U)$.*

7. Si on prend $g_H = 1$, on a $g_\sigma w = g_\sigma \cdot w$, ce qui justifie la notation.

8. Avec la notation $g_\sigma w_\sigma$ précédemment introduite, on a bien entendu $g'_\sigma w_\sigma = g_\sigma w_\sigma$. Primer g_σ sert simplement à distinguer les deux représentations de G .

Démonstration. Soit $\varphi : W \rightarrow U$ un H -entrelacement. La représentation V se décompose

$$V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} \sigma W.$$

Fixons $\{g_\sigma \mid \sigma \in G/H\}$ un ensemble de représentants des classes latérales de H . Si $\tilde{\varphi}$ étend φ alors

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(g_\sigma w) &= g_\sigma \tilde{\varphi}(w) \\ &= g_\sigma \varphi(w) \\ &= g_\sigma \varphi(g_\sigma^{-1} g_\sigma w). \end{aligned}$$

Ceci assure l'unicité et on pose $\tilde{\varphi} = g_\sigma \varphi g_\sigma^{-1}$ sur $\sigma W = \{g_\sigma w \mid w \in W\}$. Il reste à montrer que cette définition est indépendante des représentants choisis pour les classes latérales $\sigma \in G/H$. Si $g'_\sigma = g_\sigma h$ ($h \in H$) est un autre représentant de la classe latérale $\sigma \in G/H$, l'application φ étant un H -entrelacement, on a

$$g'_\sigma \varphi g'^{-1}_\sigma = g_\sigma h \varphi h^{-1} g_\sigma^{-1} = g_\sigma \varphi g_\sigma^{-1}.$$

□

Corollaire 4.2.6 (Réciprocité de Frobenius). *Si W est une représentation de H et U est une représentation de G , on a*

$$(\chi_{\text{Ind } W}, \chi_U)_G = (\chi_W, \chi_{\text{Res } U})_H$$

où $(\cdot, \cdot)_G$ (resp. $(\cdot, \cdot)_H$) est le produit scalaire de $\mathbb{C}_{\text{class } G}$ (resp. $\mathbb{C}_{\text{class } H}$).

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \dim(\text{Hom}_G(\text{Ind } W, U)) &= (\chi_{\text{Ind } W}, \chi_U)_G \quad \text{et} \\ \dim(\text{Hom}_H(W, \text{Res } U)) &= (\chi_W, \chi_{\text{Res } U})_H. \end{aligned}$$

Par la proposition précédente, $\dim(\text{Hom}_G(\text{Ind } W, U)) = \dim(\text{Hom}_H(W, \text{Res } U))$. □

Proposition 4.2.7. *Si W est une représentation de H , on a*

$$\chi_{\text{Ind } W}(g) = \sum_{\substack{\sigma \in G/H \\ g\sigma = \sigma}} \chi_W(g_\sigma^{-1} g g_\sigma)$$

où $\{g_\sigma \mid \sigma \in G/H\}$ est un ensemble de représentants des classes latérales.

Démonstration. Soit $\text{Ind } W = \bigoplus_{\sigma \in G/H} \sigma W$. Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de W , alors $B = \{g_\sigma e_1, \dots, g_\sigma e_n \mid \sigma \in G/H\}$ est une base de $\text{Ind } W$. Soit $g \in G$. La représentation matricielle de g est donnée par une matrice bloc

$$(A_{\mu\sigma})_{\mu, \sigma \in G/H}$$

où $A_{\mu\sigma}$ est la matrice dont les colonnes sont les composantes des images par g de $g_\sigma e_1, \dots, g_\sigma e_n$ sur les éléments $g_\mu e_1, \dots, g_\mu e_n$ de B . Soit $\sigma \in G/H$. Comme $g(\sigma W) = \sigma' W$ pour un certain $\sigma' \in G/H$, si $\mu \neq \sigma'$, on a $A_{\mu\sigma} = 0$. Pour $\mu = \sigma'$, il existe $h \in H$ tel que $g g_\sigma = g_{\sigma'} h$. On a alors $g g_\sigma w = g_{\sigma'} h w$ pour tout $g_\sigma w \in \sigma W$ et $A_{\sigma'\sigma}$ est la matrice représentant $h = g_{\sigma'}^{-1} g g_\sigma$ dans la base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de W . Pour calculer $\chi_{\text{Ind } W}(g)$, on doit donc sommer les traces des matrices $A_{\sigma\sigma}$ sur la diagonale, i.e.

$$\chi_{\text{Ind } W}(g) = \sum_{\substack{\sigma \in G/H \\ g\sigma = \sigma}} \chi_W(g_\sigma^{-1} g g_\sigma)$$

9. En tant qu'élément de H agissant sur W

puisque $A_{\sigma\sigma} = 0$ si $g(\sigma W) = \sigma' W$, avec $\sigma' \neq \sigma$.

□

Chapitre 5

Représentations irréductibles du groupe symétrique

Nous allons dans ce chapitre fournir une description complète des représentations irréductibles de S_p . Le chapitre précédent nous apprend qu'elles se trouvent toutes dans la représentation régulière $\mathbb{C}S_p$ de S_p ; qu'elles peuvent s'écrire sous la forme $\mathbb{C}S_p \cdot e$ pour un certain idempotent primitif $e \in \mathbb{C}S_p$ et qu'elles sont en nombre égal au nombre de classes de conjugaison de S_p . Un lien direct sera établi entre les classes de conjugaison du groupe symétrique et ses représentations irréductibles via les tableaux et diagrammes de Young.

5.1 Les classes de conjugaison de S_p

Proposition 5.1.1. *Les classes de conjugaison de S_p sont entièrement déterminées par le nombre et la longueur des cycles en lesquels leurs éléments se décomposent.*

Démonstration. Soit $\sigma \in S_p$ et $C(\sigma)$ la classe de conjugaison qui lui est associée. Si

$$\sigma = \mu_1 \dots \mu_k$$

est la décomposition de σ en k cycles disjoints μ_i de longueur l_i respectivement, on va montrer que $C(\sigma)$ est l'ensemble des permutations qui se décomposent en un produit de k cycles disjoints β_i de longueur l_i respectivement. Soit $\alpha \in S_p$ alors la décomposition de $\alpha\sigma\alpha^{-1}$ est donnée par $\beta_1 \dots \beta_k$ où β_i est le cycle

$$(\alpha(\mu_{i,1}), \dots, \alpha(\mu_{i,l_i}))$$

si $\mu_i = (\mu_{i,1}, \dots, \mu_{i,l_i})$. En effet, si $j = \alpha(\mu_{i,n}) \in \{1, \dots, p\}$ ($1 \leq i \leq k$ et $1 \leq n \leq l_i$) on a

$$\begin{aligned} \alpha\sigma\alpha^{-1}(j) &= \alpha\sigma\alpha^{-1}(\alpha(\mu_{i,n})) \\ &= \alpha\sigma(\mu_{i,n}) \\ &= \begin{cases} \alpha(\mu_{i,1}) & \text{si } n = l_i \\ \alpha(\mu_{i,n+1}) & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

De même, si $\lambda \in S_p$ se décompose en un produit de k cycles β_i de longueur l_i respectivement, alors la permutation

$$\alpha : \mu_{i,n} \mapsto \beta_{i,n}$$

est telle que $\alpha\sigma\alpha^{-1} = \lambda$ et $\lambda \in C(\sigma)$. □

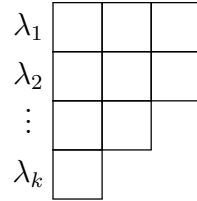
Définition 5.1.2. Si $p \in \mathbb{N}_0$, une partition λ de p est une décomposition de p en une somme d'entiers strictement positifs. Si $p = \sum_{i=1}^k \lambda_i$ ($\lambda_i > 0$), on écrit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ où la suite est ordonnée par ordre décroissant (i.e. $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k$) et on note $\lambda \vdash p$.

On voit donc qu'il existe une bijection entre les partitions de p et les classes de conjugaison de S_p . Si $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, on y associe la classe de conjugaison de S_p dont les éléments sont déterminés par une décomposition en produit de k cycles disjoints μ_i de longueur λ_i respectivement

5.2 Diagrammes et tableaux de Young

Dans toute cette section p est un naturel non nul. A chaque partition de p , on peut associer un diagramme de Young ainsi que plusieurs tableaux de Young. On verra dans la section suivante en quoi cette manière de représenter les partitions de p est utile pour caractériser les représentations irréductibles de S_p .

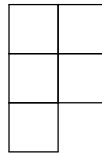
Définition 5.2.1. Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ une partition de p . A cette partition on associe le diagramme de Young



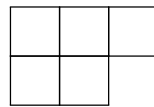
où la i^e ligne du diagramme a un nombre de cases égal à λ_i .¹

Définition 5.2.2. La partition conjuguée associée à $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ est la partition λ' dont le diagramme est celui composé de k colonnes, chacune ayant un nombre λ_i de cases. Autrement dit, si $\lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_r)$, λ'_i est le nombre de termes dans $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ supérieurs ou égaux à i .

Exemple 5.2.3. Le triplet $(2, 2, 1)$ partitionne 5 et le diagramme de Young qui lui est associé est



.La partition conjuguée λ' associée est celle donnée par le diagramme suivant



i.e. $\lambda' = (3, 2)$.

Définition 5.2.4. Si $\lambda \vdash p$, un *tableau de Young* ou λ -*tableau* correspond à une numérotation des cases du diagramme de Young associé à λ . Chaque case du tableau contient un nombre entre 1 et p et deux cases différentes ne peuvent pas contenir le même nombre.

Exemple 5.2.5. Le tableau suivant

1. Le diagramme représenté correspond à la partition $\lambda = (3, 3, 2, 1)$ de 9.

1	2	3
4	5	

est un tableau de Young associé à la partition $(3, 2)$.

Notons que pour chaque partition λ de p , il existe autant de λ -tableaux que de permutations dans S_p . Les éléments de base e_g ($g \in S_p$) de $\mathbb{C}S_p$ sont donc en bijection avec les tableaux de Young associés à une partition donnée. Le groupe symétrique agit sur l'ensemble des tableaux de Young en permutant les numéros des tableaux.

Définition 5.2.6. Soient T un tableau associé à $\lambda \vdash p$ et $\sigma \in S_p$. On note σT le tableau où le numéro d'une case est donné par $\sigma(i)$ si i était son numéro dans T .

$$\begin{array}{ccc} \vdots & & \vdots \\ \dots \boxed{i} \dots & \xrightarrow{\sigma} & \dots \boxed{\sigma(i)} \dots \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Exemple 5.2.7. En reprenant le tableau de Young

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline \end{array}$$

de l'exemple précédent, et avec la permutation $\sigma = (1, 3, 5)$ on obtient

$$(1, 3, 5) \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 2 & 5 \\ \hline 4 & 1 & \\ \hline \end{array}.$$

On voit également qu'au tableau de Young T , on peut associer deux sous-groupes de S_p : celui qui préserve l'ensemble des nombres contenus dans chaque ligne et celui qui préserve l'ensemble des nombres contenus dans chaque colonne. Si on note $P(T)$ l'un et $Q(T)$ l'autre, alors $P(T)$ est le sous-groupe de S_p engendré par les transpositions

$$\text{id}, (1, 2), (2, 3), (1, 3), (4, 5)$$

et $Q(T)$ celui engendré par

$$\text{id}, (1, 4), (2, 5).$$

Ceci amène la définition suivante.

Définition 5.2.8. Soit T un tableau de Young. On pose

$$\begin{aligned} P(T) &= \{g \in S_p \mid g \text{ fixe globalement chaque ligne}\} \\ Q(T) &= \{g \in S_p \mid g \text{ fixe globalement chaque colonne}\}. \end{aligned}$$

Par là on entend que si $g \in P(T)$ (resp. $Q(T)$) alors tout numéro apparaissant dans une certaine ligne (resp. colonne) de T apparaît dans la même ligne (resp. colonne) de gT .

Ces deux sous-groupes vont nous être utiles lorsque l'on va construire les représentations irréductibles de S_p . On peut d'ores et déjà remarquer que $P(T)$ et $Q(T)$ n'ont que l'identité en commun. En effet, si $\sigma \in P(T) \cap Q(T)$, alors $\sigma(i)$ est dans la même colonne et ligne que i ($i \in \{1, \dots, p\}$), donc dans la même case que i et $\sigma(i) = i$.

Lemme 5.2.9. Si $\mu \in S_p$, on a $P(\mu T) = \mu P(T)\mu^{-1}$ et $Q(\mu T) = \mu Q(T)\mu^{-1}$.

Démonstration. On le montre pour une transposition $\tau = (ij)$. Si i et j apparaissent sur la même ligne de T , on a $\tau \in P(T)$ et $P(\tau T) = P(T) = \tau P(T)\tau$. Sinon, i et j apparaissent sur des lignes différentes de T . Soit $\sigma \in P(T)$. Alors $\tau\sigma\tau$ va conserver les lignes de τT où i et j n'apparaissent pas et pour les deux lignes où ils apparaissent, i et j seront d'abord échangés par τ , puis comme $\tau(\tau T) = T$ et $\sigma \in P(T)$ la numérotation des lignes sera conservée sous l'action de σ et enfin τ va remettre i et j sur leur ligne initiale.

$$\begin{array}{ccccc} \tau T & & T & & \\ \dots j \dots & \xrightarrow{\tau} & \dots i \dots & \xrightarrow{\sigma} & \dots i \dots & \xrightarrow{\tau} & \dots j \dots \\ \dots i \dots & & \dots j \dots & & \dots j \dots & & \dots i \dots \end{array}$$

On a donc $\tau P(T)\tau \subset P(\tau T)$. Comme T est quelconque on a également $\tau P(\tau T)\tau \subset P(T)$ et $P(\tau T) = \tau P(T)\tau$. \square

Lemme 5.2.10. Soient T un tableau de Young, $\sigma \in S_p$ et $T' = \sigma T$. Alors $\sigma = \rho\pi$ avec $\rho \in P(T)$, $\pi \in Q(T)$ si et seulement si deux entiers apparaissant dans une même ligne de T apparaissent dans des colonnes différentes de T' .

Démonstration. La condition est nécessaire. Soit $\sigma = \rho\pi$ où $\rho \in P(T)$ et $\pi \in Q(T)$. Alors $T' = \rho\pi T = \rho\pi\rho^{-1}\rho T = \alpha\rho T$ avec $\alpha = \rho\pi\rho^{-1} \in Q(\rho T)$. Si i et j apparaissent dans une même ligne de T alors i et j restent sur la même ligne dans ρT , donc sont dans des colonnes différentes de ρT . Ainsi i et j sont dans des colonnes différentes de $T' = \alpha\rho T$, α préservant les colonnes de ρT .

La condition est suffisante. Puisque tous les éléments de la première ligne de T apparaissent dans des colonnes différentes de T' , il existe $\alpha_1 \in Q(T')$ tel que T et $\alpha_1 T'$ aient les mêmes éléments sur leur première ligne. Puisque $\alpha_1 \in Q(T')$, tous les éléments apparaissant dans la deuxième ligne de T apparaissent dans des colonnes différentes de $\alpha_1 T$. On peut alors trouver $\alpha_2 \in Q(\alpha_1 T') = Q(T')$ tel que T et $\alpha_2\alpha_1 T'$ aient les mêmes éléments sur leur deux premières lignes. En procédant de proche en proche, on construit $\alpha = \alpha_k \dots \alpha_1 \in Q(T')$ tel que les lignes de T et $\alpha T'$ contiennent les mêmes éléments. Il suffit alors de permuter les éléments sur les lignes de T avec $\rho \in P(T)$ pour que les tableaux ρT et $\alpha T'$ soient identiques. De là, puisque $T' = \sigma T$, on trouve $\rho = \alpha\sigma$ et en écrivant $\alpha = \sigma\pi\sigma^{-1}$ avec $\pi \in Q(T)$, on obtient $\sigma = \rho\pi^{-1}$. \square

Lemme 5.2.11. Soit T un tableau. Si $\sigma \notin P(T)Q(T)$ alors il existe deux transpositions $\pi \in Q(T)$ et $\rho \in P(T)$ telles que $\sigma = \rho\sigma\pi$.

Démonstration. Par le lemme précédent il existe deux entiers i et k dans une même ligne de T qui sont dans une même colonne de σT . Posons $\rho = (ik)$. Alors $\rho \in P(T) \cap Q(\sigma T)$. Donc il existe $\pi \in Q(T)$ tel que $\rho = \sigma\pi\sigma^{-1}$ et on a $\rho\sigma\pi = \sigma\pi\sigma^{-1}\sigma\pi = \sigma\pi\pi = \sigma$. \square

Définition 5.2.12. On munit les partitions de p de l'ordre lexicographique. Si $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ et $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_l)$ sont des partitions de p alors $\lambda > \mu$ si il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda_j = \mu_j$ pour tout $j \leq i$ et $\lambda_i > \mu_i$.

Lemme 5.2.13. Soient T^λ et T^μ deux tableaux associés à des partitions $\lambda \vdash p$ et $\mu \vdash p$. Si $\lambda \geq \mu$ et toute paire d'entiers sur une même ligne de T^λ se trouve dans des colonnes différentes de T^μ , alors $\lambda = \mu$ et il existe $\rho \in P(T^\lambda)$, $\pi \in Q(T^\lambda)$ tels que $T^\mu = \rho\pi T^\lambda$.

Démonstration. La preuve est similaire à celle du lemme 5.2.10. On doit avoir $\lambda_1 = \mu_1$ et on trouve $\beta_1 \in Q(T^\mu)$ tel que T^λ et $\beta_1 T^\mu$ aient les mêmes éléments sur leur première ligne. En procédant de proche en proche, on trouve $\lambda = \mu$ et $\beta \in Q(T^\mu)$ tel que T^λ et βT^μ aient les mêmes éléments sur leurs lignes. Alors il existe $\rho \in P(T^\lambda)$ tel que $\rho T^\lambda = \beta T^\mu$. Comme $\beta \in Q(T^\mu) = Q(\beta T^\mu) = Q(\rho T^\lambda)$ on écrit $\beta = \rho\pi\rho^{-1}$ avec $\pi \in Q(T^\lambda)$ et $T^\mu = \rho\pi^{-1}T^\lambda$. \square

5.3 Construction des représentations irréductibles de S_p

Pour construire les représentations irréductibles de S_p , on va à chaque partition $\lambda \vdash p$ (i.e. à chaque classe de conjugaison de S_p) associer une représentation irréductible V_λ via un λ -tableau.

Définition 5.3.1. Soient λ une partition de p et T un tableau sur le diagramme associé à λ . Définissons les éléments suivants dans $\mathbb{C} S_p$

$$a(T) = \sum_{g \in P(T)} e_g; \quad b(T) = \sum_{q \in Q(T)} \text{sign}(q) e_q \quad \text{et} \quad c(T) = a(T)b(T).$$

Le vecteur $c(T) \in \mathbb{C} S_p$ est appelé *symétriseur de Young*. Lorsque l'on travaille implicitement avec un tableau T fixé sur λ , on notera a_λ , b_λ et c_λ en lieu et place de $a(T)$, $b(T)$ et $c(T)$. De même, les ensembles $P(T)$ et $Q(T)$ seront notés P_λ et Q_λ . On définit également le sous-espace de $\mathbb{C} S_p$ suivant

$$V_\lambda = \mathbb{C} S_p \cdot c_\lambda.$$

Remarque 5.3.2. Soit $\lambda \vdash p$. La notation $V_\lambda = \mathbb{C} S_p \cdot c_\lambda$ est évidemment abusive, puisque la construction de c_λ dépend d'un λ -tableau. On montre cependant que toutes les constructions à partir d'une même partition λ sont isomorphes. Soient T et T' deux λ -tableaux. Montrons que

$$V_T = \mathbb{C} S_p \cdot c(T) \cong \mathbb{C} S_p \cdot c(T') = V_{T'}.$$

Soit $\sigma \in S_p$ tel que $T' = \sigma T$. On a

$$\begin{aligned} a(T') &= \sum_{g \in P(T')} e_g \\ &= \sum_{g \in \sigma P(T) \sigma^{-1}} e_g \\ &= e_\sigma \left(\sum_{g \in P(T)} e_g \right) e_{\sigma^{-1}} \\ &= e_\sigma a(T) e_{\sigma^{-1}}, \end{aligned}$$

et, de même,

$$b(T') = e_\sigma b(T) e_{\sigma^{-1}}.$$

Ainsi,

$$V_{T'} = \mathbb{C} S_p \cdot c(T') = \mathbb{C} S_p \cdot (e_\sigma c(T) e_{\sigma^{-1}}) = (\mathbb{C} S_p \cdot c(T)) \cdot e_{\sigma^{-1}} = V_T \cdot e_{\sigma^{-1}},$$

ce qui montre bien que

$$V_T \cong V_{T'}$$

via la multiplication à droite par $e_{\sigma^{-1}}$.

Nous allons montrer que $V_\lambda = \mathbb{C} S_p \cdot c_\lambda$ est une représentation irréductible de S_p et que toutes prennent cette forme. Avant de passer aux preuves, illustrons la construction sur quelques exemples.

5.3.1 Exemples

Commençons par le cas le plus simple, à savoir les représentations irréductibles de S_2 .

Exemple 5.3.3. On connaît déjà les représentations irréductibles de S_2 : il s'agit des représentations triviale et alternée. Essayons de voir comment elles se présentent dans $\mathbb{C}S_2$. Trouver la représentation triviale dans $\mathbb{C}S_2$ revient à trouver un vecteur $ae_{\text{id}} + be_{(1,2)} \in \mathbb{C}S_2$ qui nous permette d'engendrer un sous-espace de dimension 1 isomorphe à la représentation triviale. Pour rappel, la représentation régulière de S_2 est définie via

$$\begin{aligned}(1, 2)e_{\text{id}} &= e_{(1,2)} \\ (1, 2)e_{(1,2)} &= e_{\text{id}}\end{aligned}$$

et $\text{id} \in S_2$ agit sur $\mathbb{C}S_2$ par la transformation identique. On veut trouver des coefficients $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $(1, 2)$ soit l'identité sur $U = \langle ae_{\text{id}} + be_{(1,2)} \rangle$, i.e. tels que

$$ae_{(1,2)} + be_{\text{id}} = ae_{\text{id}} + be_{(1,2)}.$$

On doit donc avoir $a = b$ et U est engendré par

$$c = e_{\text{id}} + e_{(1,2)}.$$

Il nous reste à trouver l'idempotent qui engendre U , au sens de la proposition 4.1.8. On remarque que l'élément précédent c est tel que $U = \mathbb{C}S_2 \cdot c$. En effet, on a

$$U \subset \mathbb{C}S_2 \cdot c$$

puisque $U = \mathbb{C}c$ et

$$\mathbb{C}S_2 \cdot c \subset U$$

car U est une représentation (en particulier est stable sous l'action de S_2). Le vecteur c est quasi-idempotent puisque $c^2 = 2c$. Alors en posant

$$e = \frac{1}{2}(e_{\text{id}} + e_{(1,2)})$$

on obtient l'élément idempotent recherché.

Si on essaie maintenant d'établir un lien avec les symétriseurs de Young, on remarque que c est le symétriseur construit à partir de la partition (2) de 2. En effet, un tableau de Young² qui lui est associé est donné par

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

et on a

$$P_{(2)} = S_2; \quad Q_{(2)} = \{\text{id}\}; \quad c_{(2)} = (e_{\text{id}} + e_{(1,2)})e_{\text{id}} = c$$

On remarque en particulier que ce symétriseur de Young est quasi-idempotent, et on verra que c'est toujours vrai dans le cas général à la section suivante.

On peut faire exactement la même chose pour trouver la représentation alternée dans $\mathbb{C}S_2$, et montrer qu'elle correspond à $V_{(1,1)} = \mathbb{C}S_2 \cdot c_{(1,1)}$, où $c_{(1,1)} = e_{\text{id}} - e_{(1,2)}$ est construit via le tableau de Young suivant

2. Le choix du tableau de Young n'a aucune influence sur la construction dans le cas de S_2 .

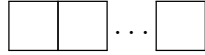
$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}.$$

En fait, pour $p \geq 2$ quelconque, comme les représentations alternée et triviale de S_p sont de dimension 1, elles se retrouvent avec une multiplicité 1 dans $\mathbb{C} S_p$ et on peut les trouver facilement.

Proposition 5.3.4. *Dans $\mathbb{C} S_p$, la représentation triviale est donnée par*

$$U = \sum_{g \in S_p} e_g \langle = \mathbb{C} S_p \cdot c_{(p)}$$

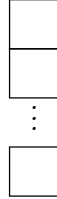
où $c_{(p)} = \sum_{g \in S_p} e_g$ est le symétriseur de Young associé à la partition $p = p$, de diagramme³



tandis que la représentation alternée est donnée par

$$A = \sum_{g \in S_p} \text{sign}(g) e_g \langle = \mathbb{C} S_p \cdot c_{(1, \dots, 1)}$$

où $c_{(1, \dots, 1)} = \sum_{g \in S_p} \text{sign}(g) e_g$ est le symétriseur de Young associé à la partition $p = 1 + 1 + \dots + 1$, de diagramme



Démonstration. Considérons la représentation alternée A . Si $\sum_{g \in S_p} \lambda_g e_g$ engendre A , on doit avoir pour tout $\sigma \in S_p$

$$\begin{aligned} \sigma \left(\sum_{g \in S_p} \lambda_g e_g \right) &= \text{sign}(\sigma) \left(\sum_{g \in S_p} \lambda_g e_g \right) \\ \iff \sum_{g \in S_p} \lambda_g e_{\sigma g} &= \sum_{g \in S_p} \text{sign}(\sigma) \lambda_g e_g \\ \iff \sum_{g \in S_p} \lambda_{\sigma^{-1}g} e_g &= \sum_{g \in S_p} \text{sign}(\sigma) \lambda_g e_g \\ \iff \lambda_{\sigma^{-1}g} &= \text{sign}(\sigma) \lambda_g \quad \forall g \in S_p. \end{aligned}$$

Comme $\text{sign}(\sigma) = \text{sign}(\sigma^{-1})$, ceci revient à demander

$$\lambda_{\sigma g} = \text{sign}(\sigma) \lambda_g$$

3. Ici comme tous les numéros entre 1 et p se retrouvent sur l'unique ligne du diagramme, la construction ne dépend pas d'un choix de tableau.

pour tous $\sigma, g \in S_p$. Si le coefficient λ_{id} est fixé, tous les autres le sont et A est engendré par

$$\sum_{g \in S_p} \text{sign}(g) e_g.$$

On vérifie que ce même élément est tel que

$$A = \left\langle \sum_{g \in S_p} \text{sign}(g) e_g \right\rangle = \mathbb{C} S_p \cdot \sum_{g \in S_p} \text{sign}(g) e_g$$

et qu'il correspond à $c_{(1, \dots, 1)}$ construit à partir de la partition $p = 1 + \dots + 1$. □

Traitions maintenant le cas du groupe S_3 .

Exemple 5.3.5. Si on veut maintenant essayer de trouver les représentations irréductibles de S_3 dans $\mathbb{C} S_3$, il nous reste à y chercher la représentation standard.⁴ On peut, comme on l'a fait pour les représentations alternée et triviale, essayer de trouver deux vecteurs de base $b_1, b_2 \in \mathbb{C} S_p$ qui engendrent la représentation standard dans $\mathbb{C} S_p$. Comme celle-ci est de dimension 2, elle s'y retrouve deux fois et il existe une infinité de choix possibles pour b_1 et b_2 . On va donc partager l'espace vectoriel $\mathbb{C} S_3$ en deux sous-espaces stables

$$\mathbb{C} S_3 = X \oplus Y$$

et chercher une paire de vecteurs de bases engendrant la représentation standard dans chacun des sous-espaces X et Y . Comme ceux-ci seront de dimension plus petite, il sera plus aisé d'y trouver nos vecteurs de base.

Afin d'établir un lien avec la définition des symétriseurs de Young, on va définir les sous-espaces X et Y comme vérifiant certaines propriétés de symétrie ou d'antisymétrie. Illustrons de telles propriétés dans un premier temps sur les représentations triviale et alternée.

La représentation triviale U est le sous-espace de $\mathbb{C} S_3$ le « plus symétrique » possible. En effet, comme

$$U = \mathbb{C} S_3 \cdot \sum_{g \in S_3} e_g,$$

on a $v\sigma = v$ pour toute permutation $\sigma \in \mathbb{C} S_3$ et tout vecteur $v \in U$.⁵ La représentation triviale est donc stable sous l'action à droite de S_3 , qui est le sous-groupe $P_{(3)}$ de S_3 qui préserve la numérotation du tableau

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}.$$

La représentation alternée est quant à elle caractérisée par le fait que $a\sigma = \text{sign}(\sigma)a$ pour tout $\sigma \in S_3 = Q_{(1,1,1)}$ et pour tout $a \in A$. On peut donc dire que A est l'espace « le plus antisymétrique possible », puisque ses éléments sont invariants, au signe près, sous l'action à droite de toute permutation de S_3 .

4. Confer exemple 2.3.12.

5. Dans le cas particulier de la représentation triviale on a également $\sigma v = v$ mais on n'aura pas l'équivalent d'une telle propriété pour la représentation standard.

Venons-en maintenant à la représentation standard V . Etant de dimension 2, elle se retrouve deux fois dans la représentation régulière de S_3 . On va décomposer $\mathbb{C} S_3$ en deux sous-espaces de même dimension X et Y et chercher au sein de ces deux espaces une copie de la représentation standard. Commençons par chercher les formes que peuvent prendre des vecteurs de base de V dans $\mathbb{C} S_3$.

Dans \mathbb{C}^3 , la représentation standard V est engendrée par les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Le groupe S_3 étant généré par les permutations $(1, 2)$ et $(1, 3)$, si on connaît leur action sur une base, on connaît l'action de n'importe quelle permutation sur V . Dans la base $\{v_1, v_2\}$, on a

$$(1, 2)v_1 = v_2, \quad (1, 2)v_2 = v_1, \quad (1, 3)v_1 = -v_1 \quad \text{et} \quad (1, 3)v_2 = -v_1 + v_2.$$

Comme la représentation standard apparait dans $\mathbb{C} S_3$, on doit pouvoir trouver des vecteurs $b_1, b_2 \in \mathbb{C} S_3$ qui vérifient les mêmes relations que les vecteurs v_1 et v_2 de \mathbb{C}^3 . On cherche donc des vecteurs

$$b_1 = \sum_{g \in S_3} \lambda_g e_g, \quad b_2 = \sum_{g \in S_3} \mu_g e_g$$

tels que

$$\begin{aligned} (1, 2) \sum_{g \in S_3} \lambda_g e_g &= \sum_{g \in S_3} \mu_g e_g \\ (1, 2) \sum_{g \in S_3} \mu_g e_g &= \sum_{g \in S_3} \lambda_g e_g \\ (1, 3) \sum_{g \in S_3} \lambda_g e_g &= - \sum_{g \in S_3} \lambda_g e_g \\ (1, 3) \sum_{g \in S_3} \mu_g e_g &= - \sum_{g \in S_3} \lambda_g e_g + \sum_{g \in S_3} \mu_g e_g. \end{aligned}$$

Ces relations induisent des contraintes sur les coefficients de b_1 et b_2 , qui doivent vérifier

$$\begin{cases} \lambda_{(1,2)} = \mu_{\text{id}} = -\mu_{(2,3)} = -\lambda_{(1,2,3)} \\ \lambda_{(2,3)} = \lambda_{\text{id}} - \mu_{\text{id}} = -\mu_{(1,3)} = -\lambda_{(1,3,2)} = \mu_{(1,2,3)} \\ \lambda_{(1,3)} = -\lambda_{\text{id}} = -\mu_{(1,2)} = \mu_{(1,3,2)}. \end{cases}$$

On obtient un système de 10 équations pour 12 inconnues. Si on paramétrise l'ensemble des solutions avec $a = \lambda_{\text{id}}$ et $\mu_{\text{id}} = b$, on obtient les expressions suivantes pour b_1 et b_2

$$b_1 = ae_{\text{id}} + be_{(1,2)} + (a - b)e_{(2,3)} - ae_{(1,3)} - be_{(1,2,3)} + (b - a)e_{(1,3,2)} \quad (5.1)$$

$$b_2 = be_{\text{id}} + ae_{(1,2)} - be_{(2,3)} + (b - a)e_{(1,3)} + (a - b)e_{(1,2,3)} - ae_{(1,3,2)}. \quad (5.2)$$

Cela fait beaucoup de possibilités et on aurait du mal à partir de là de retrouver les représentations standard construites à partir des symétriseurs de Young. On va donc restreindre notre recherche

à des sous-espaces de $\mathbb{C} S_3$ qui s'avéreront contenir la représentation standard.

On a vu, avec les représentations alternées et standard, que cela paraissait être une bonne idée de chercher des sous-espaces de $\mathbb{C} S_3$ possédant des propriétés d'(anti-)symétrie. Evidemment, si on demande à un sous-espace d'être (anti-)symétrique pour toutes les permutations de S_3 , on va d'office retomber sur une des représentations triviale ou alternée. On peut alors chercher des espaces de $\mathbb{C} S_3$ qui soient (anti-)symétriques pour un plus petit nombre de permutations. Traitons le cas des symétries, les raisonnements s'adaptent aisément pour les antisymétries. On peut facilement construire des sous-espaces stables de $\mathbb{C} S_3$ de la manière suivante. Si $H \subset S_3$ est un sous-groupe de S_3 , alors

$$\mathbb{C} S_3 \cdot \sum_{h \in H} e_h$$

est le sous-espace F de $\mathbb{C} S_3$ tel que

$$x \cdot h = x$$

pour tous $h \in H$ et $x \in F$. Cet espace possède alors pour base l'ensemble suivant

$$\left\{ \sum_{g \in \sigma H} e_g \mid \sigma H \in G/H \right\}.$$

Recensons les différents sous-groupes (propres) de S_3 que l'on peut considérer. Il y en a 4 ; il s'agit des trois sous groupes d'ordre 2 engendré par les permutations $(1, 2)$, $(2, 3)$ et $(1, 3)$ ainsi que du sous-groupe d'ordre 3 engendré par la permutation $(1, 2, 3)$. Le sous-groupe d'ordre 3 n'est pas très intéressant à considérer pour trouver la représentation standard. En effet, le sous-espace vectoriel

$$\mathbb{C} S_3 \cdot (e_{(1,3,2)} + e_{(1,2,3)} + e_{\text{id}})$$

est de dimension $3!/3 = 2$ et contient la représentation triviale.⁶ Il ne peut donc également contenir la représentation standard. On peut vérifier qu'il se décompose en la somme des représentations triviale et alternée. On a

$$\mathbb{C} S_3 \cdot (e_{(1,3,2)} + e_{(1,2,3)} + e_{\text{id}}) = e_{(1,3,2)} + e_{(1,2,3)} + e_{\text{id}}, e_{(1,2)} + e_{(1,3)} + e_{(2,3)},$$

dont une autre base est donnée par les vecteurs $(e_{\text{id}} + e_{(1,2)})(e_{(1,3,2)} + e_{(1,2,3)} + e_{\text{id}})$ et $(e_{\text{id}} - e_{(1,2)})(e_{(1,3,2)} + e_{(1,2,3)} + e_{\text{id}})$ qui sont ceux engendrant les représentations triviale et alternée, respectivement. Considérons alors un des trois sous-groupes restants d'ordre 2, prenons par exemple $\{\text{id}, (1, 2)\}$. Le sous-espace

$$X = \mathbb{C} S_p \cdot (e_{\text{id}} + e_{(1,2)})$$

est de dimension 3 et possède pour base

$$\{e_{\text{id}} + e_{(1,2)}, e_{(1,3)} + e_{(1,2,3)}, e_{(2,3)} + e_{(1,3,2)}\}.$$

Il contient la représentation triviale et étant de dimension 3, on peut donc s'attendre à y trouver la représentation standard (on peut le vérifier en calculant le caractère de la représentation). Avant de l'y chercher, cherchons un sous-espace $Y \subset \mathbb{C} S_3$ tel que

$$\mathbb{C} S_3 = X \oplus Y.$$

6. S'il contient les éléments de $\mathbb{C} S_3$ invariants sous l'action à droite du sous-groupe $\{(1, 2, 3), (1, 3, 2), \text{id}\}$, il contient ceux invariants sous l'action à droite de S_3 .

On peut prendre le pendant antisymétrique de ce que l'on vient de faire pour X , et en prenant par exemple le sous groupe $\{\text{id}, (1, 3)\}$ ⁷ le sous-espace

$$Y = \mathbb{C} S_3 \cdot (e_{\text{id}} - e_{(1,3)})$$

convient. En effet, il est de dimension 3 et est en somme directe avec X . Pour le voir, on sait que

$$x \cdot (1, 2) = x \quad \text{et} \quad y \cdot (1, 3) = -y$$

pour tous $x \in X$ et $y \in Y$. Ainsi, si z appartient à l'intersection $X \cap Y$, on a d'une part

$$z \cdot (2, 3) = z \cdot (1, 2)(1, 3)(1, 2) = -z$$

et d'autre part

$$z \cdot (2, 3) = z \cdot (1, 3)(1, 2)(1, 3) = z$$

ce qui implique $z = 0$.

On peut maintenant chercher une copie de la représentation standard dans chacun des sous-espaces X et Y . Pour cela, reprenons les équations trouvées 5.1 et 5.2 pour des vecteurs de base de la représentation standard. Pour trouver de tels vecteurs de base b_1 et b_2 dans X on doit avoir $b_1(1, 2) = b_1$ et $b_2(1, 2) = b_2$. Ceci impose comme condition sur les paramètres a et b que a doit être égal à b . On peut alors prendre comme vecteurs de base

$$\begin{aligned} b_1 &= e_{\text{id}} + e_{(1,2)} - e_{(1,3)} - e_{(1,2,3)} \\ b_2 &= e_{\text{id}} + e_{(1,2)} - e_{(2,3)} - e_{(1,3,2)} \end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned} b_1 &= (e_{\text{id}} - e_{(1,3)})(e_{\text{id}} + e_{(1,2)}) \\ b_2 &= (e_{\text{id}} - e_{(2,3)})(e_{\text{id}} + e_{(1,2)}) \end{aligned}$$

Si on cherche à écrire le sous-espace E engendré par ces deux vecteurs comme $\mathbb{C} S_3 \cdot c'$ pour un certain (quasi-)idempotent $c' \in \mathbb{C} S_3$, on peut prendre b_1 ou b_2 . En effet on a

$$\mathbb{C} S_3 \cdot b_i \subset E$$

car $b_i \in E$ ($i \in \{1, 2\}$) et E est un sous-espace stable. Et

$$E \subset \mathbb{C} S_3 \cdot b_i$$

pour $i \in \{1, 2\}$ car $b_2 = (1, 2)b_1$ et $b_1 = (1, 2)b_2$. On remarque alors que

$$E = \mathbb{C} S_3 \cdot b_{(2,1)} a_{(2,1)}$$

où $a_{(2,1)}$ et $b_{(2,1)}$ ont été construits sur le tableau⁸

7. On pourrait prendre n'importe lequel des sous-groupes d'ordre 2 de S_3 .

8. On aurait aussi pu prendre le tableau

2	1
3	

.

1	2
3	

Il ne s'agit pas du symétriseur de Young comme on l'a défini. En fait, on verra que $\mathbb{C} S_3 \cdot b_{(2,1)} a_{(2,1)} \cong \mathbb{C} S_3 \cdot a_{(2,1)} b_{(2,1)}$ et que symétriser ou antisymétriser en premier résulte d'une convention.

De même si on veut trouver des vecteurs b'_1 et b'_2 qui engendrent la représentation standard dans Y , on doit avoir $b'_1(1, 3) = -b'_1$ et $b'_2(1, 3) = -b'_2$. En reprenant les équations 5.1 et 5.2 (pour $b_1 \equiv b'_1$, $b_2 \equiv b'_2$), cela impose $2b = a$ comme condition sur les paramètres. On peut donc prendre

$$\begin{aligned} b'_1 &= 2e_{\text{id}} + e_{(1,2)} + e_{(2,3)} - 2e_{(1,3)} - e_{(1,2,3)} - e_{(1,3,2)} \\ b'_2 &= e_{\text{id}} + 2e_{(1,2)} - e_{(2,3)} - e_{(1,3)} + e_{(1,2,3)} - 2e_{(1,3,2)} \end{aligned}$$

comme base de la représentation standard $F \subset Y$. Prenons une autre base pour simplifier les expressions, à savoir

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{3}(b'_1 + b'_2) = e_{\text{id}} + e_{(1,2)} - e_{(1,3)} - e_{(1,3,2)} \\ f_2 &= \frac{1}{3}(2b'_1 - b'_2) = e_{\text{id}} + e_{(2,3)} - e_{(1,3)} - e_{(1,2,3)}. \end{aligned}$$

On a alors $(1, 3)f_1 = -f_2$ et $(1, 3)f_2 = f_1$ et ainsi

$$F = \mathbb{C} S_3 \cdot f_i$$

pour $i \in \{1, 2\}$. On a donc

$$F = \mathbb{C} S_3 \cdot a_{(2,1)} b_{(2,1)}$$

où on reprend les mêmes notations pour $a_{(2,1)}$ et $b_{(2,1)}$ que lorsque l'on a cherché la représentation standard dans $X = \mathbb{C} S_3 \cdot (e_{\text{id}} + e_{(1,2)})$.

Au final, on peut écrire

$$\begin{aligned} \mathbb{C} S_3 &= \overbrace{\mathbb{C} S_3 \cdot \left(\sum_{g \in S_3} e_g \right)}^{\mathbb{C} S_3 \cdot (e_{\text{id}} + e_{(1,2)})} \oplus \mathbb{C} S_3 \cdot b_{(2,1)} a_{(2,1)} \\ &\quad \oplus \underbrace{\mathbb{C} S_3 \cdot \left(\sum_{g \in S_3} \text{sign}(g) e_g \right)}_{\mathbb{C} S_3 \cdot (e_{\text{id}} - e_{(1,3)})} \oplus \mathbb{C} S_3 \cdot a_{(2,1)} b_{(2,1)}. \end{aligned}$$

Pour terminer cet exemple, remarquons que

$$\mathbb{C} S_3 \cdot b_{(2,1)} a_{(2,1)} \stackrel{\varphi}{\cong} \mathbb{C} S_3 \cdot a_{(2,1)} b_{(2,1)}$$

via φ qui est la multiplication à droite par $(e_{\text{id}} - e_{(1,3)})$ et dont l'inverse est la multiplication à droite par $\frac{1}{3}(e_{\text{id}} + e_{(1,2)})$.

5.3.2 Preuves

Passons maintenant aux démonstrations qui prouvent que les représentations de S_p construites à partir des symétriseurs de Young forment l'ensemble des représentations irréductibles de S_p . Les quatre lemmes suivants servent à démontrer la proposition 5.3.10 qui constitue l'énoncé principal de cette section.

Lemme 5.3.6. *La décomposition de tout élément de $P_\lambda Q_\lambda$ en un produit d'un élément de P_λ et d'un élément de Q_λ est unique. En particulier*

$$c_\lambda = \sum_{\substack{g \in P_\lambda Q_\lambda \\ g=pq}} \text{sign}(q) e_g.$$

Démonstration. Si $\sigma \in P_\lambda \cap Q_\lambda$, alors tout numéro associé à une case ne doit changer ni de ligne ni de colonne sous l'action de σ , autrement dit il doit rester dans la case dans laquelle il était. Ainsi $P_\lambda \cap Q_\lambda = \{\text{id}\}$. Et si $pq = p'q'$ avec $p, p' \in P_\lambda$ et $q, q' \in Q_\lambda$, on a $p'^{-1}p = q'q^{-1}$ donc $p'^{-1}p$ et $q'q^{-1}$ appartiennent à $P_\lambda \cap Q_\lambda$, d'où on tire $p = p'$ et $q = q'$. \square

Lemme 5.3.7. *On a*

- (a) $p \cdot a_\lambda = a_\lambda \cdot p = a_\lambda$ pour tout $p \in P_\lambda$;
- (b) $(\text{sign}(q)q) \cdot b_\lambda = b_\lambda \cdot (\text{sign}(q)q) = b_\lambda$ pour tout $q \in Q_\lambda$;
- (c) c_λ est l'unique élément de $\mathbb{C} S_p$ à multiplication par une constante complexe près tel que $p \cdot c_\lambda \cdot (\text{sign}(q)q) = c_\lambda$ pour tous $p \in P_\lambda$, $q \in Q_\lambda$.

Démonstration. Les premiers points sont immédiats au vu de la définition 5.3.1 et de la définition des actions à gauche et à droite de S_p sur $\mathbb{C} S_p$. Il en va de même pour la propriété de c_λ énoncée en (c). Montrons donc l'unicité. Soit $\sum_{g \in G} a_g e_g \in \mathbb{C} S_p$ vérifiant l'égalité de l'énoncé. On a

$$\begin{aligned} p \cdot \left(\sum_{g \in G} a_g e_g \right) \cdot (\text{sign}(q)q) &= \sum_{g \in G} a_g e_g \\ \Leftrightarrow \sum_{g \in G} \text{sign}(q) a_g e_{pgq} &= \sum_{g \in G} a_g e_g \end{aligned}$$

pour tous $p \in P_\lambda$, $q \in Q_\lambda$. On a donc $a_{pgq} = \text{sign}(q) a_g$ pour tous p, g, q et en particulier $a_{pq} = \text{sign}(q) a_1$, i.e. la composante de e_{pq} dans c_λ à un facteur a_1 près. Il suffit donc de montrer que $a_g = 0$ si $g \notin P_\lambda Q_\lambda$. Pour un tel g il existe, par le lemme 5.2.11, $p \in P_\lambda$ et $q \in Q_\lambda$ deux transpositions telles que $g = pgq$. Alors $\text{sign}(q) a_g = a_{pgq} = a_g$ et $a_g = 0$. \square

Lemme 5.3.8. *Soient $\lambda, \mu \vdash p$.*

- (a) *Si $\lambda > \mu$ alors pour tout $x \in \mathbb{C} S_p$ $a_\lambda \cdot x \cdot b_\mu = 0$. En particulier $c_\lambda c_\mu = 0$.*
- (b) *Pour tout $x \in \mathbb{C} S_p$ $c_\lambda \cdot x \cdot c_\lambda$ est multiple de c_λ . En particulier il existe $n_\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $c_\lambda c_\lambda = n_\lambda c_\lambda$.*

Démonstration. Montrons le point (a). Soient T^λ et T^μ les tableaux de Young associés aux partitions λ et μ qui ont été utilisés pour contruire a_λ et b_μ . Si $\lambda > \mu$, par le lemme 5.2.13 il existe i et j deux entiers qui sont dans une même ligne de T^λ et une même colonne de T^μ . Soit $\tau = (i, j)$. On a $\tau \in P_\lambda \cap Q_\mu$ et par le lemme précédent, $a_\lambda \tau = a_\lambda$ et $\tau b_\mu = -b_\mu$. Donc

$$a_\lambda \cdot b_\mu = a_\lambda \cdot \tau \cdot \tau \cdot b_\mu = -a_\lambda b_\mu$$

ce qui implique $a_\lambda b_\mu = 0$. Si maintenant $g \in S_p$, on aimerait calculer $a_\lambda e_g b_\mu$. On sait que $e_g b_\mu e_{g^{-1}}$ correspond à l'élément $\sum_{q \in Q(gT^\mu)} \text{sign}(q) e_q = b_\mu^{(g)}$ construit à partir du tableau gT^μ . En répétant le raisonnement précédent avec les tableaux T^λ et gT^μ on obtient $a_\lambda e_g b_\mu e_{g^{-1}} = a_\lambda b_\mu^{(g)} = 0$, ce qui implique $a_\lambda e_g b_\mu = 0$. On obtient le cas particulier en choisissant $x = b_\lambda a_\mu$.

Pour le point (b), soient $x \in \mathbb{C} S_p$ et $p \in P_\lambda$, $q \in Q_\lambda$. On a

$$p \cdot (c_\lambda \cdot x \cdot c_\lambda) \cdot (\text{sign}(q)q) = \underbrace{p \cdot a_\lambda}_{a_\lambda} \cdot b_\lambda \cdot x \cdot a_\lambda \underbrace{b_\lambda \cdot (\text{sign}(q)q)}_{b_\lambda} = c_\lambda \cdot x \cdot c_\lambda$$

et on conclut par le lemme précédent. \square

Lemme 5.3.9. *Soit $\lambda \vdash p$. On a $c_\lambda \cdot c_\lambda = n_\lambda c_\lambda$ avec $n_\lambda = \frac{p!}{\dim V_\lambda}$ et $V_\lambda = \mathbb{C} S_p \cdot c_\lambda$.*

Démonstration. Soit f la multiplication à droite par c_λ sur $\mathbb{C} S_p$

$$f : \mathbb{C} S_p \rightarrow \mathbb{C} S_p \quad x \mapsto x \cdot c_\lambda.$$

On a $\text{Im}(f) = V_\lambda$ et par le lemme précédent, il existe $n_\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $c_\lambda \cdot c_\lambda = n_\lambda c_\lambda$, i.e. tel que $f = n_\lambda \text{id}$ sur V_λ . Ainsi $\text{tr}(f) = n_\lambda \dim V_\lambda$. Maintenant regardons la représentation matricielle de f dans la base $\{e_g \mid g \in G\}$ de $\mathbb{C} S_p$. Pour tout $g \in G$ on a

$$e_g \cdot c_\lambda = \sum_{pq \in P_\lambda Q_\lambda} \text{sign}(q) e_{gpq}.$$

et la composante de $e_g \cdot c_\lambda$ sur e_g (i.e. l'élément qui se retrouve sur la diagonale) correspond au terme $pq = \text{id}$ dans la somme et vaut 1. Ainsi $\text{tr}(f) = p!$ et on conclut. \square

On a maintenant tout ce qu'il nous faut pour montrer que $\{V_\lambda \mid \lambda \vdash p\}$ constitue l'ensemble des représentations irréductibles de $\mathbb{C} S_p$.

Proposition 5.3.10. *Soient $\lambda, \mu \vdash p$.*

- (a) $V_\lambda = \mathbb{C} S_p \cdot c_\lambda$ est une représentation irréductible de S_p ;
- (b) si $\lambda \neq \mu$, V_λ et V_μ ne sont pas isomorphes.

Démonstration. Pour le point (a), soit $\tilde{c}_\lambda = c_\lambda / n_\lambda$. L'élément \tilde{c}_λ est donc un idempotent de $\mathbb{C} S_p$. Vu le corollaire 4.1.9, il suffit de montrer que \tilde{c}_λ est primitif. Supposons que $\tilde{c}_\lambda = e_1 + e_2$ avec $e_1, e_2 \in \mathbb{C} S_p$ deux idempotents orthogonaux entre eux. Par le lemme 5.3.8, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\tilde{c}_\lambda \cdot e_1 \cdot \tilde{c}_\lambda = \alpha \tilde{c}_\lambda$, i.e. tel que

$$\begin{aligned} (e_1 + e_2) \cdot e_1 \cdot (e_1 + e_2) &= \alpha(e_1 + e_2) \\ \iff e_1 &= \alpha(e_1 + e_2). \end{aligned}$$

Ceci implique $\alpha(e_1 + e_2) \cdot e_2 = \alpha e_2 = 0$. Donc soit α est nul, auquel cas e_1 l'est aussi, soit e_2 est nul. Et \tilde{c}_λ est primitif.

Montrons le point (b). Supposons $\lambda > \mu$. Si $V_\lambda \cong V_\mu$, alors $c_\lambda V_\lambda \cong c_\lambda V_\mu$. Or par le lemme 5.3.8, on a

$$c_\lambda V_\lambda = \mathbb{C} c_\lambda \neq 0 \quad \text{et} \quad c_\lambda V_\mu = 0$$

ce qui induit une contradiction. \square

Remarque 5.3.11. On a construit les représentations irréductibles du groupe symétrique à partir des symétriseurs de Young, que l'on a défini comme

$$c_\lambda = a_\lambda b_\lambda$$

pour un tableau de Young sur une partition $\lambda \vdash p$. On aurait très bien pu construire les représentations à partir de $b_\lambda a_\lambda$, en effet on a

$$\mathbb{C} S_p \cdot a_\lambda b_\lambda \cong \mathbb{C} S_p \cdot b_\lambda a_\lambda.$$

Pour le voir, on considère les applications

$$\phi : \mathbb{C} S_p \cdot a_\lambda b_\lambda \rightarrow \mathbb{C} S_p \cdot b_\lambda a_\lambda \quad x \mapsto x \cdot a_\lambda$$

et

$$\psi : \mathbb{C} S_p \cdot b_\lambda a_\lambda \rightarrow \mathbb{C} S_p \cdot a_\lambda b_\lambda \quad x \mapsto x \cdot b_\lambda$$

données par les multiplications à droite par a_λ et b_λ respectivement. Montrons que leurs composées sont des multiples de l'identité. Par le lemme 5.3.9, et en reprenant les mêmes notations, on a

$$(a_\lambda b_\lambda)^2 = n_\lambda (a_\lambda b_\lambda).$$

De là, pour tout $x \cdot a_\lambda b_\lambda \in \mathbb{C} S_p \cdot a_\lambda b_\lambda$, on a

$$\psi(\phi(x \cdot a_\lambda b_\lambda)) = \psi(x \cdot a_\lambda b_\lambda a_\lambda) = x \cdot (a_\lambda b_\lambda)^2 = n_\lambda (x \cdot a_\lambda b_\lambda)$$

et $\psi\phi = n_\lambda \text{id}$. Maintenant, il reste à montrer que $\phi\psi = n_\lambda \text{id}$. Il suffit de montrer que $(b_\lambda a_\lambda)^2 = n_\lambda (b_\lambda a_\lambda)$ et de procéder de même. Montrons-le. Soit

$$* : \mathbb{C} S_p \rightarrow \mathbb{C} S_p \quad \sum_{g \in G} a_g e_g \mapsto \sum_{g \in G} \overline{a_g} e_{g^{-1}}.$$

On vérifie que cette application est une involution, i.e. vérifie

$$(x^*)^* = x$$

pour tout $x \in \mathbb{C} S_p$ et que

$$(xy)^* = y^* x^*$$

pour tous $x, y \in \mathbb{C} S_p$. On vérifie alors que $a_\lambda^* = a_\lambda$ et $b_\lambda^* = b_\lambda$. Ceci implique

$$b_\lambda a_\lambda = b_\lambda^* a_\lambda^* = (a_\lambda b_\lambda)^*$$

et

$$(b_\lambda a_\lambda)^2 = ((a_\lambda b_\lambda)^*)^2 = ((a_\lambda b_\lambda)^2)^* = (n_\lambda (a_\lambda b_\lambda))^* = n_\lambda (b_\lambda a_\lambda)$$

puisque n_λ est réel.

5.4 Décomposition de la représentation régulière

Maintenant que l'on connaît les représentations irréductibles de S_p , on va montrer comment se décompose $\mathbb{C} S_p$ en irréductibles. On sait que toutes les représentations irréductibles de S_p peuvent se construire à partir de tableaux de Young sur un diagramme associé $\lambda \vdash p$. On sait également que V_λ apparaît dans $\mathbb{C} S_p$ avec une multiplicité égale à la dimension de V_λ . On va alors montrer quels tableaux de Young peuvent être choisis pour décomposer $\mathbb{C} S_p$ à partir d'une propriété sur ceux-ci : celle d'être standard.

5.4.1 Tableaux Standards

Définition 5.4.1. Soit $\lambda \vdash p$ et T un tableau de Young sur λ . Le tableau T est dit *standard* si sa numérotation est strictement croissante sur chaque ligne et chaque colonne.

Exemple 5.4.2. Voici quelques exemples de tableaux standards.

1	2	5
3	4	

1	3	4
2		

1	4	7
2	6	
3		
5		

Exemple 5.4.3. Voici quelques exemples de tableaux non standards.

1	4	7
2	6	
3	5	

1	3	2
4		

On définit alors l'ordre suivant sur les tableaux standards.

Définition 5.4.4. Soient T et T' deux tableaux standards associés à des partitions $\lambda, \mu \vdash p$ respectivement. Alors on définit $T > T'$ dans les deux cas suivants

1. $\lambda > \mu$;
2. $\lambda = \mu$ et la première case en laquelle T et T' diffèrent (dans l'ordre lexicographique) est telle que $T(i) < T'(i)$.

Lemme 5.4.5. L'ensemble des tableaux standards possédant p cases muni de l'ordre défini ci-dessus est total.

Exemple 5.4.6. Pour $p = 3$, on a

1	<	1	3	<	1	2	<	1	2	3
2		2		3						
3										

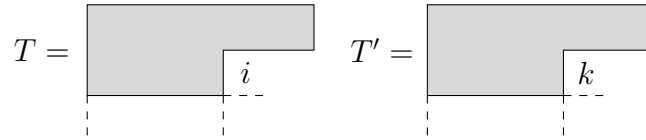
Pour pouvoir montrer la décomposition de $\mathbb{C} S_p$ en représentations irréductibles en termes de tableaux standards, nous aurons besoin de quelques lemmes combinatoires.

5.4.2 Lemmes combinatoires

Le premier lemme servira à montrer que les tableaux de Young choisis pour décomposer $\mathbb{C} S_p$ sont tels que les espaces V_λ associés sont en somme directe. Les deux suivants seront utilisés pour pouvoir avancer des arguments sur les multiplicités.

Lemme 5.4.7. Soient T et T' deux tableaux de Young standards possédant p cases. Alors si $T > T'$ on a $c(T')c(T) = 0$.

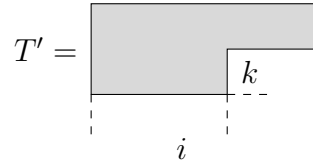
Démonstration. Si T et T' ne sont pas associés au même diagramme de Young, on conclut par le lemme 5.3.8. Sinon, soient i et k les numéros respectifs dans T et dans T' de la première case en laquelle ces tableaux diffèrent. Par définition, on a $i < k$ et le dessin suivant



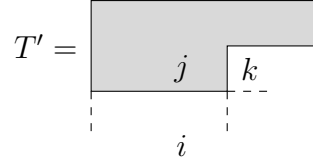
représente la situation, où la zone grise représente la zone du diagramme en laquelle T et T' sont égaux. On va alors chercher une transposition $(i, j) \in P(T) \cap Q(T')$ ainsi on pourra conclure comme dans le lemme 5.3.8 en écrivant

$$c(T')c(T) = c(T')e_{(i,j)}e_{(i,j)}c(T) = -c(T')c(T).$$

Comme T' est un tableau standard et que $i < k$, le numéro i se retrouve quelque part dans le tableau T' à gauche et en bas de k .



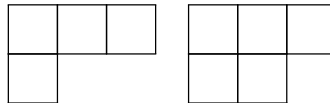
Comme T et T' portent les mêmes numéros sur la ligne contenant i et k respectivement, il suffit de prendre j le numéro qui se situe dans la case sur la même ligne que k et colonne que i dans T' .



On a alors bien $(i, j) \in P(T) \cap Q(T')$. □

Définition 5.4.8. Soient λ et μ deux partitions. On note $\mu \rightarrow \lambda$ si le diagramme associé à λ a été obtenu en ajoutant une (seule) case au diagramme associé à μ .

Exemple 5.4.9. Les diagrammes



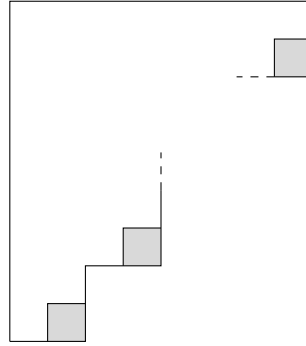
sont tels que $(3, 1) \rightarrow (3, 2)$.

Si on a un tableau standard sur $\lambda \vdash p$, on peut facilement en construire un pour une partition $\mu \vdash p - 1$ telle que $\mu \rightarrow \lambda$.

Lemme 5.4.10. Soit $\lambda \vdash p$. On a

$$\{T \mid T \text{ tableau standard sur } \lambda\} \cong \bigcup_{\mu \rightarrow \lambda} \{T \mid T \text{ tableau standard sur } \mu\}.$$

Démonstration. Soit T un tableau standard sur λ . Si $\lambda \vdash p$ alors la case comportant le p^e numéro se situe d'office à la fin d'une certaine ligne et colonne, comme T est standard.



Les cases grises du dessin ci-dessus représentent les cases pouvant contenir le numéro p . Il suffit alors de retirer cette case du tableau pour obtenir un tableau sur $\mu \vdash p - 1$. A l'inverse, si $\mu \rightarrow \lambda$ et T est un tableau de Young standard sur μ , il suffit de conserver la numérotation de T sur les cases communes à μ et λ et de faire porter à la case ajoutée à μ pour obtenir λ le numéro p . Ces deux opérations sont inverses l'une de l'autre et fournissent une bijection entre les deux ensembles de l'énoncé. \square

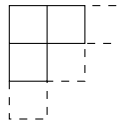
A l'inverse, on peut construire un tableau standard sur une partition $\lambda \vdash p$ telle que $\mu \rightarrow \lambda$ pour une partition $\mu \vdash p - 1$ donnée.

Lemme 5.4.11. Soit $\mu \vdash p - 1$. On a

$$\{T \mid T \text{ standard sur } \mu\} \times \{1, \dots, p\} \cong \bigcup_{\lambda: \mu \rightarrow \lambda} \{T \mid T \text{ standard sur } \lambda\}.$$

Avant de passer à la preuve, illustrons sur un exemple la raison pour laquelle la bijection se fait avec $\{T \mid T \text{ standard sur } \mu\} \times \{1, \dots, p\}$ et non pas $\{T \mid T \text{ standard sur } \mu\}$.

Exemple 5.4.12. Prenons par exemple $(2, 1) \vdash 3$ comme partition pour μ . Si on se donne une partition λ telle que $(2, 1) \rightarrow \lambda$ et un tableau standard sur $(2, 1)$, on sait très bien que l'on peut construire un tableau standard sur λ en mettant le numéro 4 dans la case ajoutée au diagramme de μ .



Par contre en procédant de la sorte, on ne peut pas atteindre tous les tableaux standard sur des partitions λ telles que $(2, 1) \rightarrow \lambda$. Par exemple, le tableau standard

1	2	3
4		

ne saurait être construit à partir du diagramme associé à $(2, 1)$ de cette manière. On peut par contre voir qu'en retirant la case portant le numéro 3 et en remplaçant 4 par 3 il peut être obtenu à partir du tableau

1	2
3	

sur $(2, 1)$. En recensant alors tous les tableaux standards possible sur des partitions λ telles que $(2, 1) \rightarrow \lambda$, on peut voir qu'il y a 8 possibilités

1	2	3
4		

1	2	4
3		

1	3	4
2		

1	2
3	4

1	3
2	4

1	2
3	
4	

1	3
2	
4	

1	4
2	
3	

et que chacune d'entre elles peut être contruite à partir d'un des deux tableaux standards

1	2
3	

1	3
4	

sur $(2, 1)$. Ceci suggère donc bien une bijection

$$\{T \mid T \text{ tableau sur } (2, 1)\} \times \{1, 2, 3, 4\} \cong \bigcup_{\lambda: (2,1) \rightarrow \lambda} \{T \mid T \text{ tableau sur } \lambda\}.$$

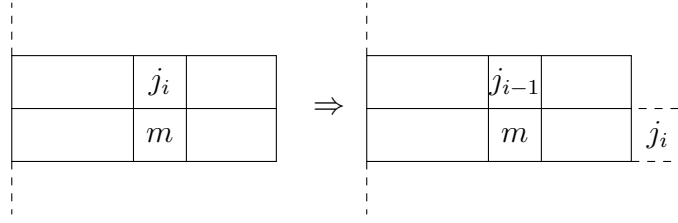
Preuve du lemme 5.4.11. Soit T un tableau standard sur μ et $j \in \{1, \dots, p\}$. On va construire un tableau standard pour une partition $\lambda \vdash p$ telle que $\mu \rightarrow \lambda$ en suivant l'algorithme dit « row-bumping ». Soit $j_0 = j$. D'abord, on ajoute 1 à chacune des cases de T portant un numéro supérieur ou égal à j . Ensuite, on commence une boucle dont la i^{e} itération se déroule de la manière suivante.

1. Si j_{i-1} est plus grand que chacun des numéros apparaissant dans la i^{e} ligne, on y ajoute en bout une case portant le numéro j_{i-1} et l'algorithme se termine.
2. Sinon, soit j_i le plus petit numéro de la i^{e} ligne tel que $j_i > j_{i-1}$. On renumérote alors la case portant le numéro j_i par j_{i-1} et on passe à l'itération suivante.

Montrons que cet algorithme permet bien d'obtenir un tableau standard sur une partition λ telle que $\mu \rightarrow \lambda$. Tout d'abord, il se termine. En effet, dans le pire des cas on arrive à la dernière ligne, on prend un dernier numéro j_k de cette ligne et on crée une nouvelle ligne portant ce seul numéro.

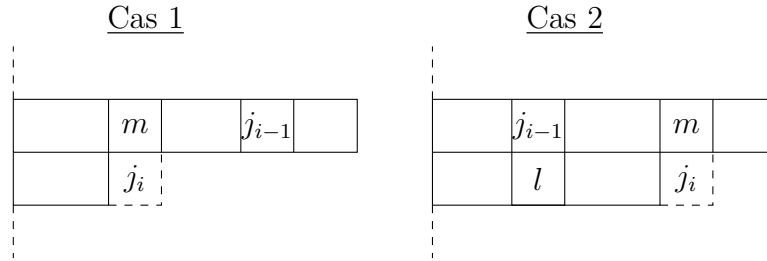
		j_{k-1}	
j_k			

Ensuite, il n'est pas possible de se retrouver dans une situation où on ajouterait une case de la manière suivante.



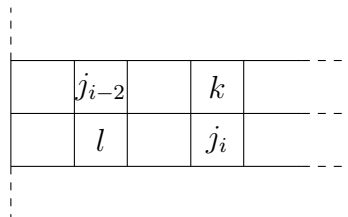
En effet, si on est à la $i + 1^{\text{e}}$ itération, la case portant le numéro j_{i-1} contenait dans le tableau T , qui est standard, le numéro j_i . Si, dans ce tableau T , la case en dessous porte le numéro m , alors $j_i < m$ et on n'ajoutera pas j_i au bout de la $i + 1^{\text{e}}$ ligne puisque dans ce cas j_i ne sera pas plus grand que tous les numéros de cette $i + 1^{\text{e}}$ ligne. Ceci nous assure que le tableau de Young obtenu sera bien sur une partition λ telle que $\mu \rightarrow \lambda$. Finalement, il nous reste à vérifier que le tableau obtenu est bien standard.

1. Si la case ajoutée l'est au bout de la première ligne de T , c'est évident. Sinon, la case ajoutée l'est en dessous d'une ligne.



Il faut alors vérifier que le numéro j_i de la case ajoutée est plus grand que m , le numéro de la case juste au-dessus. Pour le premier cas, puisque j_i était à la place de j_{i-1} dans T et que T est standard, on a bien $j_i > m$. Pour le second, par le même raisonnement on a $j_i < m$. Montrons alors que ce cas n'est pas atteignable (sinon le tableau n'est pas standard). Puisque j_i est dans T juste au dessus de l , on a $l > j_i$. Donc j_i n'est pas plus grand que chacun des numéros apparaissant dans la $i + 1^{\text{e}}$ ligne et on n'ajoute pas de case à cette itération. N'oublions pas de vérifier le cas intermédiaire où la case comportant j_i est ajoutée juste en dessous de j_{i-1} , i.e. $m = j_{i-1}$. Puisqu'on a choisi j_i tel que $j_i > j_{i-1}$, le tableau reste bien standard dans ce dernier cas.

2. La renumérotation des cases conserve le caractère standard du tableau. En effet, la numérotation croissante des lignes est conservée puisque l'on choisi j_i le plus petit tel que $j_i > j_{i-1}$. Ainsi les nombres à droite de j_i (dans T) sont plus grand que j_{i-1} et ceux à droite sont plus petits par minimalité de j_i . Montrons que la croissance sur les colonnes est également conservée. Si, à la i^{e} itération, j_i est le plus petit numéro sur la i^{e} ligne tel que $j_i > j_{i-1}$. Alors j_{i-1} est plus petit que les numéros des cases en dessous de j_i (dans T). Il reste à vérifier que j_{i-1} est plus grand que le numéro de la case au dessus de j_i (dans T). Soit k ce numéro. Procédons par l'absurde et supposons $k > j_{i-1}$.



Alors j_{i-1} était dans T à gauche de k (là où j_{i-2} a été placé à l'itération précédente) comme sur le dessin ci-dessus. Mais dans ce cas on obtient, en reprenant les notations du dessin, $j_{i-1} < l < j_i$ et cela contredit la minimalité de j_i .

On vient de montrer qu'à partir d'un tableau standard T sur μ et un nombre $j \in \{1, \dots, p\}$, on peut construire un tableau standard sur une partition λ telle que $\mu \rightarrow \lambda$. Il reste à montrer que cette construction est bijective. Pour cela, si on se donne un tableau standard sur λ tel que $\mu \rightarrow \lambda$, il suffit de remonter l'algorithme. Si la case ajoutée à μ pour obtenir λ est en k^{e} ligne, soit j_{k-1} le numéro de cette case. On retire la case ajoutée pour obtenir un tableau⁹ sur μ et pour tout $i \in \{1, \dots, k-1\}$

1. on pose j_{k-1-i} le plus grand nombre de la $k-i^{\text{e}}$ ligne tel que $j_{k-1-i} < j_{k-i}$;
2. on remplace j_{k-1-i} par j_{k-i} dans le tableau.

On se retrouve alors avec un tableau sur μ et un numéro $j_0 \in \{1, \dots, p\}$. En retirant alors 1 à tous les numéros du tableau strictement plus petits que j_0 , on obtient T un tableau standard sur μ et $j_0 \in \{1, \dots, p\}$ qui sont tels qu'en appliquant le « row-bumping » algorithme, on retombe sur le tableau standard sur λ que l'on s'était donné. \square

5.4.3 Décomposition de $\mathbb{C} S_p$

Nous allons maintenant montrer le théorème suivant.

Théorème 5.4.13. *On a*

$$\mathbb{C} S_p = \bigoplus_T \mathbb{C} S_p \cdot c(T) = \bigoplus_T V_T$$

où la somme s'effectue sur les tableaux standards pour des partitions $\lambda \vdash p$.

Si $\lambda \vdash p$, on sait que la représentation V_λ apparaît dans $\mathbb{C} S_p$ avec une multiplicité égale à $\dim V_\lambda$ et par le corollaire 3.4.3 on a

$$p! = \sum_{\lambda \vdash p} (\dim V_\lambda)^2.$$

On va alors montrer que les multiplicités de V_λ apparaissant dans

$$\bigoplus_T V_T$$

satisfont à la même relation.

Proposition 5.4.14. *Soit $p \geq 2$. Pour tout $\lambda \vdash p$, soit f_λ le nombre de tableaux standards sur λ . On a*

$$\sum_{\lambda \vdash p} f_\lambda^2 = p!$$

Démonstration. Procédons par récurrence sur p . Pour le cas de base $p = 2$, on n'a que deux tableaux de Young standards

9. On utilise ici le terme « tableau » dans un cadre plus large que celui de la définition 5.2.4 puisqu'on n'a pas nécessairement des numéros entre 1 et $p-1$.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

sur les partitions (2) et (1, 1) de 2. On obtient bien alors

$$1 + 1 = 2 = 2!.$$

Pour l'induction, si $\lambda \vdash p$ et $\mu \vdash p - 1$, on obtient par les deux lemmes 5.4.10 et 5.4.11 que

$$pf_\mu = \sum_{\lambda: \mu \rightarrow \lambda} f_\lambda$$

et

$$f_\lambda = \sum_{\mu \rightarrow \lambda} f_\mu.$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \vdash p} f_\lambda^2 &= \sum_{\lambda \vdash p} f_\lambda f_\lambda \\ &= \sum_{\lambda \vdash p} f_\lambda \left(\sum_{\mu \rightarrow \lambda} f_\mu \right) \\ &= \sum_{\lambda \vdash p} \sum_{\mu \rightarrow \lambda} f_\lambda f_\mu \\ &= \sum_{\mu \vdash p-1} \sum_{\lambda: \mu \rightarrow \lambda} f_\lambda f_\mu \\ &= \sum_{\mu \vdash p-1} pf_\mu f_\mu \\ &= p \sum_{\mu \vdash p-1} f_\mu^2 \\ &= p!. \end{aligned}$$

□

Avec ceci on peut alors passer à la démonstration du théorème 5.4.13.

Preuve du théorème 5.4.13. On veut montrer que

$$\mathbb{C} S_p = \bigoplus_T V_T.$$

Montrons d'abord que les sous-espaces vectoriels V_T où T est un tableau standard sur une partition de p sont en somme directe.¹⁰ Soit donc $0 = \sum_T x_T \cdot c(T)$. Si la somme n'est pas directe, il existe

10. En tant que somme directe interne dans $\mathbb{C} S_p$.

un tableau standard T tel que $x_T \cdot c(T) \neq 0$. Prenons T_0 le tableau standard maximal tel que $x_{T_0} \cdot c(T_0) \neq 0$. Alors par le lemme 5.4.7 on a

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \cdot c(T_0) \\ &= \sum_T x_T \cdot c(T) \cdot c(T_0) \\ &= x_{T_0} \cdot c(T_0)^2 \\ &= a x_{T_0} \cdot c(T_0) \end{aligned}$$

pour une certaine constante non nulle $a \in \mathbb{C}$, une contradiction. Ainsi

$$\bigoplus_T V_T \subset \mathbb{C} S_p$$

et on conclut avec un argument sur les dimensions. Pour tout $\lambda \vdash p$, la multiplicité de V_λ dans $\bigoplus_T V_T$ vaut f_λ et donc $f_\lambda \leq \dim V_\lambda$. Ainsi

$$\sum_T f_\lambda^2 \leq \sum_T (\dim V_\lambda)^2 = p!$$

par le corollaire 3.4.3. Or par la proposition 5.4.14 on a également

$$\sum_T f_\lambda^2 = p!$$

ce qui n'est possible que si $f_\lambda = \dim V_\lambda$ pour tout $\lambda \vdash p$. □

Chapitre 6

Représentations tensorielles du groupe linéaire

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser aux représentations irréductibles de $\mathrm{GL}(V)$ que l'on peut retrouver dans le produit tensoriel $V^{\otimes p}$ où V est un espace vectoriel de dimension finie et $p \geq 2$.

6.1 Représentation de $\mathrm{GL}(V)$ sur $V^{\otimes p}$

Définition 6.1.1. Soient V un espace vectoriel de dimension finie et $p \geq 2$. L'espace vectoriel $V^{\otimes p}$ est une représentation de $\mathrm{GL}(V)$ via l'homomorphisme

$$\rho : \mathrm{GL}(V) \rightarrow \mathrm{GL}(V^{\otimes p}) \quad \varphi \mapsto \varphi \otimes \cdots \otimes \varphi,$$

c'est-à-dire qu'on a

$$\varphi \cdot v_1 \otimes \cdots \otimes v_p = \varphi(v_1) \otimes \cdots \otimes \varphi(v_p)$$

pour tous $\varphi \in \mathrm{GL}(V)$ et $v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \in V^{\otimes p}$. Il s'agit de la *représentation tensorielle* de $\mathrm{GL}(V)$ sur $V^{\otimes p}$.

On va vouloir trouver la décomposition de $V^{\otimes p}$ en représentations irréductibles. On sait que S_p agit à droite¹ sur $V^{\otimes p}$. Par ailleurs, les actions de $\mathrm{GL}(V)$ et S_p sur $V^{\otimes p}$ commutent.

Lemme 6.1.2. Soit V un espace vectoriel et $p \geq 1$. Les actions de S_p et $\mathrm{GL}(V)$ sur $V^{\otimes p}$ commutent.

Démonstration. Soient $\varphi \in \mathrm{GL}(V)$ et $\sigma \in S_p$. On a

$$\begin{aligned} (\varphi \cdot (v_1 \otimes \cdots \otimes v_p)) \cdot \sigma &= (\varphi(v_1) \otimes \cdots \otimes \varphi(v_p)) \cdot \sigma \\ &= \varphi(v_{\sigma(1)}) \otimes \cdots \otimes \varphi(v_{\sigma(p)}) \\ &= \varphi \cdot (v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(p)}) \\ &= \varphi \cdot ((v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) \cdot \sigma). \end{aligned}$$

□

Considérons

$$B = \mathrm{End}_{S_p}(V^{\otimes p}) = \{\varphi \in \mathrm{End}(V^{\otimes p}) : \varphi(z \cdot \sigma) = \varphi(z) \cdot \sigma \quad \forall \sigma \in S_p, z \in V^{\otimes p}\}$$

l'ensemble des entrelacements de la représentation $V^{\otimes p}$ de S_p dans elle-même.² Naturellement

1. On considère ici l'action à droite car on considèrera plus loin le produit tensoriel $V^{\otimes p} \otimes_{\mathbb{C} S_p} \mathbb{C} S_p$.

2. Si l'on considère des représentations à droite.

$V^{\otimes p}$ est une représentation de B . On va alors se servir de la proposition suivante pour trouver les représentations irréductibles de $\mathrm{GL}(V)$ dans $V^{\otimes p}$ en cherchant celles de B .

Proposition 6.1.3. *Un sous-espace de $V^{\otimes p}$ est stable sous l'action de B si et seulement si il est stable sous l'action de $\mathrm{GL}(V)$.*

Démonstration. Soit

$$\rho : \mathrm{GL}(V) \rightarrow \mathrm{GL}(V^{\otimes p})$$

l'homomorphisme donné par la représentation de $\mathrm{GL}(V)$ sur $V^{\otimes p}$. Alors par le lemme précédent, $\rho(\varphi) \in B$ pour tout $\varphi \in \mathrm{GL}(V)$. Ainsi, si $W \subset V^{\otimes p}$ est un sous-espace stable sous l'action de B , il l'est également sous l'action de $\mathrm{GL}(V)$.

Pour montrer la réciproque, il est suffisant de montrer que B est engendré par l'image de $\mathrm{GL}(V)$ par ρ , i.e. $\langle \mathrm{Im}(\rho) \rangle = B$. Par le Corollaire 1.1.17, on a l'isomorphisme $\mathrm{End}(V^{\otimes p}) \cong \mathrm{End}(V)^{\otimes p}$ et B est l'ensemble des applications stables sous l'action à droite de S_p sur $\mathrm{End}(V)^{\otimes p}$, i.e.

$$B = \{ \varphi \in \mathrm{End}(V)^{\otimes p} \mid \varphi \cdot \sigma = \varphi \ \forall \sigma \in S_p \}.$$

En effet, montrons-le sur les éléments générateurs $\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_p$ avec $\varphi_i \in \mathrm{End}(V)$ pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$. Si $\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_p \in B$, alors pour tous $v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \in V^{\otimes p}$ et $\sigma \in S_p$ on a

$$\varphi_{\sigma(1)}(v_{\sigma(1)}) \otimes \cdots \otimes \varphi_{\sigma(p)}(v_{\sigma(p)}) = \varphi_1(v_{\sigma(1)}) \otimes \cdots \otimes \varphi_p(v_{\sigma(p)}).$$

Soit donc $\sigma \in S_p$ et $x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \in V^{\otimes p}$. En prenant $v_i = x_{\sigma^{-1}(i)}$ dans l'expression ci-dessus on obtient

$$(\varphi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \varphi_{\sigma(p)})(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) = (\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_p)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p)$$

et $(\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_p) \cdot \sigma = \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_p$. On procède de même pour l'inclusion inverse. Autrement dit, $B = \mathrm{Sym}^p(\mathrm{End}(V))$. Alors, par la proposition 1.3.15 on a

$$B = \langle \{ \varphi \otimes \cdots \otimes \varphi \mid \varphi \in \mathrm{End}(V) \} \rangle.$$

et on doit montrer que c'est égal à

$$\langle \mathrm{Im}(\rho) \rangle = \langle \{ \varphi \otimes \cdots \otimes \varphi \mid \varphi \in \mathrm{GL}(V) \} \rangle.$$

On utilise un argument topologique pour conclure. On sait que $\mathrm{GL}(V)$ est dense dans $\mathrm{End}(V)$ et comme le produit tensoriel est continu³ on obtient

$$\begin{aligned} \langle \{ \varphi \otimes \cdots \otimes \varphi \mid \varphi \in \mathrm{End}(V) \} \rangle &= \langle \{ \varphi \otimes \cdots \otimes \varphi \mid \varphi \in \overline{\mathrm{GL}(V)} \} \rangle \\ &\subset \langle \{ \varphi \otimes \cdots \otimes \varphi \mid \varphi \in \mathrm{GL}(V) \} \rangle \\ &= \overline{\langle \{ \varphi \otimes \cdots \otimes \varphi \mid \varphi \in \mathrm{GL}(V) \} \rangle} \\ &= \langle \{ \varphi \otimes \cdots \otimes \varphi \mid \varphi \in \mathrm{GL}(V) \} \rangle \end{aligned}$$

car tout sous-espace vectoriel de $\mathrm{End}(V)^{\otimes p}$ pour la topologie euclidienne est fermé. \square

On sait que S_p agit à droite sur $V^{\otimes p}$ et dans le chapitre précédent on a défini les symétriseurs de Young pour construire les représentations irréductibles de S_p . On peut alors définir les sous-espaces $\mathbb{S}_\lambda(V)$ de $V^{\otimes p}$ pour tout $\lambda \vdash p$.

3. Si on munit $\mathrm{End}(V)^{\otimes p}$ de la topologie euclidienne.

Définition 6.1.4. Soit $\lambda \vdash p$ une partition de p et c_λ un symétriseur de Young associé. Le *module de Schur* associé est

$$\mathbb{S}_\lambda(V) = V^{\otimes p} \cdot c_\lambda.$$

Il s'agit d'une sous-représentation de la représentation tensorielle de $\mathrm{GL}(V)$ car les actions de $\mathrm{GL}(V)$ et S_p commutent.

Nous allons montrer que les modules de Schur sont les représentations irréductibles de $\mathrm{GL}(V)$ qui se retrouvent dans $V^{\otimes p}$. On va donc d'abord montrer que ces représentations sont irréductibles.

6.2 Irréductibilité des modules de Schur

Pour se servir du fait que l'on connaît déjà la forme des représentations irréductibles de S_p , on va écrire

$$V^{\otimes p} \cong V^{\otimes p} \otimes_{\mathbb{C} S_p} \mathbb{C} S_p.$$

Ensuite, on va montrer que l'isomorphisme laisse passer les symétriseurs de Young, i.e. qu'on a

$$\mathbb{S}_\lambda(V) \cong V^{\otimes p} \otimes_{\mathbb{C} S_p} V_\lambda.$$

Finalement on se servira de l'irréductibilité de V_λ pour conclure à celle de $\mathbb{S}_\lambda(V)$. Commençons par montrer les deux isomorphismes annoncés.

Proposition 6.2.1. Soient A une algèbre associative et unitaire ; et U un A -module à droite. On a

$$U \cong U \otimes_A A$$

en tant que A -modules à droite.

Démonstration. Le produit tensoriel de modules étant unique à isomorphisme près⁴, il suffit de vérifier que U est un produit tensoriel pour U et A . L'application

$$\cdot : U \times A \rightarrow U \quad (u, a) \mapsto u \cdot a$$

est A -équilibrée. On va alors montrer qu'elle forme avec U un produit tensoriel. Soient V un espace vectoriel et

$$\varphi : U \times A \rightarrow V$$

une application A -équilibrée. Si

$$f : U \rightarrow V$$

est une application linéaire telle que

$$\varphi(u, a) = f(u \cdot a),$$

alors si e est l'unité de A , on doit avoir

$$f(u) = f(u \cdot e) = \varphi(u, e).$$

Cela assure l'unicité de la factorisation. En définissant alors

$$f : U \rightarrow V \quad u \mapsto \varphi(u, e)$$

4. Confer remarque 1.4.16.

on obtient

$$\varphi(u, a) = \varphi(u, a \cdot e) = \varphi(u \cdot a, e) = f(u \cdot a)$$

et (U, \cdot) est bien un produit tensoriel pour U et A □

Maintenant, mettons nous dans le contexte suivant.

- G est un groupe fini ;
- $A = \mathbb{C}G$;
- U est un A -module à droite ;
- $B = \text{Hom}_G(U, U) = \{\varphi : U \rightarrow U \mid \varphi(v \cdot g) = \varphi(v) \cdot g, \forall g \in G, v \in U\}$.

L'algèbre B agit sur U , et son action commute avec celle de $\mathbb{C}G$ ce qui fait de U un (B, A) -bimodule. A partir de la décomposition de A en A -sous-modules à gauche irréductibles⁵, on va fournir la décomposition de U en B -sous-modules à gauche irréductibles.

On a vu⁶ que tout A -sous-module à gauche de A était de la forme

$$A \cdot c$$

pour un certain $c \in A$. On va montrer qu'à partir de l'isomorphisme entre U et $U \otimes_A A$, on peut trouver un B -sous-module à gauche de U qui lui est isomorphe.

Lemme 6.2.2. *Pour tout $c \in A$, on a*

$$U \cdot c \cong U \otimes_A A \cdot c$$

en tant que B -modules à gauche.

Démonstration. Par la proposition 6.2.1, on a

$$U \otimes_A A \cong U$$

en tant que A -modules à droite. Comme U est également un (B, A) -bimodule, on peut faire du produit tensoriel de $U \otimes_A A = U$ un B -module à gauche et l'isomorphisme entre $U \otimes_A A$ et U est également B -linéaire. En effet, on fait de U (en tant que produit tensoriel de U et A) et $U \otimes_A A$ des B -modules via

$$b \cdot (u \cdot a) = (b \cdot u) \cdot a \quad \text{et} \quad b \cdot (u \otimes a) = b \cdot u \otimes a$$

pour tous $u \cdot a \in U$, $u \otimes a \in U \otimes_A A$ et $b \in B$. Et l'isomorphisme

$$\psi : U \otimes_A A \rightarrow U \quad u \otimes a \mapsto u \cdot a$$

vérifie bien

$$\psi(b \cdot (u \otimes a)) = \psi(b \cdot u \otimes a) = (b \cdot u) \cdot a = b \cdot (u \cdot a) = b \cdot \psi(u \otimes a)$$

pour tous $b \in B$, $u \otimes a \in U \otimes_A A$. On a alors

$$U \cdot c = \psi(U \otimes_A A \cdot c)$$

car

$$\psi(u \otimes ac) = u \cdot ac = (u \cdot a) \cdot c \in U \cdot c$$

pour tous $u \in U$, $a \in A$ et

$$u \cdot c = \psi(u \otimes c) = \psi(u \otimes ec) \in \psi(U \otimes_A A \cdot c)$$

pour tout $u \in U$. Ceci prouve l'isomorphisme de B -modules annoncé. □

5. Autrement dit de la décomposition de $\mathbb{C}G$ en représentations irréductibles.

6. Confer proposition 4.1.8.

On va maintenant montrer que le B -sous-module gauche $U \cdot c$ de U ainsi obtenu est irréductible si $A \cdot c$ l'est. Pour cela nous utiliserons la proposition suivante.

Proposition 6.2.3. *Soient V et W deux représentations de G . On peut faire de V^* un $\mathbb{C}G$ -module à droite et on a*

$$\text{Hom}_G(V, W) \cong V^* \otimes_{\mathbb{C}G} W.$$

Démonstration. On sait déjà que V^* est un $\mathbb{C}G$ -module à gauche en prenant la structure de $\mathbb{C}G$ -module donnée par la construction de la représentation duale à la section 2.2.3. Pour faire de V^* un $\mathbb{C}G$ -module à droite, il suffit de poser

$$f \cdot g = g^{-1} \cdot f,$$

i.e.

$$f \cdot g(v) = f(g \cdot v)$$

pour tous $g \in G$, $f \in V^*$ et $v \in V$. Ainsi, le produit tensoriel

$$V^* \otimes_{\mathbb{C}G} W$$

est bien défini. Partons de l'isomorphisme

$$\text{Hom}(V, W) = V^* \otimes W.$$

Pour plus de facilité, on va montrer que

$$(V^* \otimes W)^G \cong V^* \otimes_{\mathbb{C}G} W,$$

ce qui suffira puisque

$$\text{Hom}_G(V, W) = \text{Hom}(V, W)^G \cong (V^* \otimes W)^G$$

par la proposition 2.2.10. On définit naturellement ⁷

$$\Psi : (V^* \otimes W)^G \rightarrow V^* \otimes_{\mathbb{C}G} W \quad \varphi \otimes w \mapsto \varphi \otimes_G w$$

par la restriction à $(V^* \otimes W)^G$ de la projection de $V^* \otimes W$ sur $V^* \otimes_{\mathbb{C}G} W$. ⁸ Cherchons à définir une application $\Phi : V^* \otimes_{\mathbb{C}G} W \rightarrow (V^* \otimes W)^G$. On sait que si $\varphi \otimes w \in V^* \otimes W$ est une application linéaire, on peut la projeter sur $(V^* \otimes W)^G$ pour en faire un entrelacement où le projecteur est donné par la proposition 3.3.2. On est donc tenté de définir

$$\Phi : V^* \otimes_{\mathbb{C}G} W \rightarrow (V^* \otimes W)^G \quad \varphi \otimes_{\mathbb{C}G} w \mapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g\varphi \otimes gw.$$

Pour que cette définition soit licite, il faut vérifier que l'application

$$V^* \times W \rightarrow V^* \otimes W \quad (\varphi, w) \mapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g\varphi \otimes gw$$

7. Les notations $\varphi \otimes w$ et $\varphi \otimes_G w$ désignent des éléments de $V^* \otimes W$ et $V^* \otimes_{\mathbb{C}G} W$ respectivement.

8. Confer 1.4.3.

est $\mathbb{C}G$ -équilibrée. L'image de $(\varphi \cdot h, w)$, avec $\varphi \in V^*$, $h \in G$ et $w \in W$, par cette application est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g(\varphi h) \otimes gw &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g(h^{-1}\varphi) \otimes gw \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gh^{-1}\varphi \otimes gw \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g\varphi \otimes ghw \end{aligned}$$

et correspond bien avec celle de (φ, hw) par cette même application. Montrons alors que $\Psi\Phi = \text{id}$. Soit $\varphi \otimes_G w \in V^* \otimes_{\mathbb{C}G} W$. On a

$$\begin{aligned} \Psi(\Phi(v \otimes_G w)) &= \psi\left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g\varphi \otimes gw\right) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g\varphi \otimes_G gw \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g\varphi g \otimes_G w \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi \otimes_G w \\ &= \varphi \otimes_G w \end{aligned}$$

car $g\varphi g = \varphi$ pour tout $g \in G$. Il nous reste à montrer que $\Phi\Psi = \text{id}$. Soit $\sum_{i=1}^n \varphi_i \otimes w_i \in V^* \otimes W$ tel que $\sum_{i=1}^n g\varphi_i \otimes gw_i = \sum_{i=1}^n \varphi_i \otimes w_i$ pour tout $g \in G$. On a alors

$$\begin{aligned} \Phi\Psi\left(\sum_{i=1}^n \varphi_i \otimes w_i\right) &= \Phi\left(\sum_{i=1}^n \varphi_i \otimes_G w_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \Phi(\varphi_i \otimes_G w_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g\varphi_i \otimes gw_i \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{i=1}^n g\varphi_i \otimes gw_i \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{i=1}^n \varphi_i \otimes w_i \\ &= \sum_{i=1}^n \varphi_i \otimes w_i. \end{aligned}$$

□

Remarque 6.2.4. L'isomorphisme qu'on vient de montrer entre $\text{Hom}_G(V, W)$ et $V^* \otimes_{\mathbb{C}G} W$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels et également de représentations si on munit $V^* \otimes_{\mathbb{C}G} W$ de la structure triviale de $\mathbb{C}G$ -module à gauche. Cette structure de $\mathbb{C}G$ -module gauche n'est pas définie directement sur $V^* \otimes_{\mathbb{C}G} W$ à partir de la structure de $\mathbb{C}G$ -module à gauche de V^* comme on aurait pu espérer le faire si V^* était un $(\mathbb{C}G - \mathbb{C}G)$ -bimodule.⁹ Par contre, $V^* \otimes W$ possède une structure de $\mathbb{C}G$ -module et on peut définir à partir de celle-ci

$$g \cdot (f \otimes_G w) = g \cdot \pi(f \otimes w) = \pi(g \cdot (f \otimes w)) = gf \otimes_G gw$$

pour tous $g \in G$, $f \otimes_G w \in V^* \otimes_{\mathbb{C}G} W$ où $\pi : V^* \otimes W \rightarrow V^* \otimes_{\mathbb{C}G} W$ est la projection canonique. Alors pour tous $g \in G$, $f \otimes_G w \in V^* \otimes_{\mathbb{C}G} W$ on a

$$g \cdot (f \otimes_G w) = gf \otimes_G gw = gfg \otimes_G w = f \otimes w$$

et cette structure correspond bien à celle de $\mathbb{C}G$ -module gauche de $\text{Hom}_G(V, W)$.

Proposition 6.2.5. Soient W un $\mathbb{C}G$ -module gauche irréductible et U un $\mathbb{C}G$ -module droit. Alors

$$U \otimes_{\mathbb{C}G} W$$

est un B -module gauche irréductible, où $B = \text{Hom}_G(U, U)$.

L'espace vectoriel U est un $\mathbb{C}G$ -module droit. Quand on parle d'une représentation V d'un groupe G , on sous-entend que G agit à gauche sur V (c'est ainsi qu'on a défini une représentation). On aurait pu également travailler avec des actions de G à droite sur des espaces vectoriels et ainsi définir des représentations à droite de G . Avec ce vocabulaire, U est donc une représentation à droite de G . Tout ce qu'on a montré pour une représentation à gauche de G est également valable pour une représentation à droite de G . En particulier, U est complètement réductible. On peut également montrer, et la preuve est à quelques détails près identique à celle de 2.2.8 que V est une représentation gauche irréductible de G si et seulement si V^* est une représentation droite irréductible de G . On va se servir de cela pour démontrer la proposition 6.2.5.

Preuve de la proposition 6.2.5. Traitons d'abord le cas où U est irréductible. On peut écrire $U = V^*$ où V est une représentation gauche irréductible de G . Dans ce cas, on a

$$V^* \otimes_{\mathbb{C}G} W \cong \text{Hom}_G(V, W)$$

qui est de dimension égale à 1 ou 0 par le lemme de Schur, ce qui suffit pour conclure.

Supposons que U ne soit pas irréductible. Soit $\{V_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ l'ensemble des représentations gauches de G irréductibles et deux à deux inéquivalentes. Alors $\{V_i^* \mid 1 \leq i \leq n\}$ est l'ensemble des représentations droites de G irréductibles et deux à deux inéquivalentes et on peut écrire

$$U = \bigoplus_{i=1}^n (V_i^*)^{\oplus a_i} \quad \text{et} \quad W = V_j$$

où $a_i \in \mathbb{N}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \{1, \dots, n\}$. On a alors

$$\begin{aligned} U \otimes_{\mathbb{C}G} W &= \left(\bigoplus_{i=1}^n (V_i^*)^{\oplus a_i} \right) \otimes_{\mathbb{C}G} W \\ &\cong \bigoplus_{i=1}^n (V_i^* \otimes_{\mathbb{C}G} V_j)^{\oplus a_i} \\ &\cong \bigoplus_{i=1}^n (\text{Hom}_G(V_i, V_j))^{\oplus a_i} \end{aligned}$$

9. Confer 1.4.3.

par la proposition 6.2.3 et par le lemme de Schur, on obtient

$$\begin{aligned} \oplus_{i=1}^n (\operatorname{Hom}_G(V_i, V_j))^{\oplus a_i} &\cong \operatorname{Hom}_G(V_j, V_j)^{\oplus a_j} \\ &\cong \mathbb{C}^{a_j}. \end{aligned}$$

On obtient également, avec l'équivalent de la proposition 2.3.7 pour des représentations droites

$$\begin{aligned} B = \operatorname{Hom}_G(U, U) &\cong \oplus_{i=1}^n \operatorname{Hom}_G((V_i^*)^{\oplus a_i}, (V_i^*)^{\oplus a_i}) \\ &\cong \oplus_{i=1}^n \operatorname{Mat}(a_i \times a_i, \mathbb{C}). \end{aligned}$$

Maintenant, montrons que l'action (à gauche) de B sur $U \otimes_{\mathbb{C}G} V_j$ correspond à celle de $\oplus_{i=1}^n \operatorname{Mat}(a_i \times a_i, \mathbb{C})$ sur \mathbb{C}^{a_j} donnée par

$$(\oplus_{i=1}^n A_i) X = A_j X.$$

Cette dernière représentation étant irréductible¹⁰, cela suffira pour conclure. Par la proposition 2.3.7, on sait que la base de $\oplus_{i=1}^n \operatorname{Mat}(a_i \times a_i, \mathbb{C})$ donnée par

$$\{A_{i,l,k} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j, k \leq a_i\}$$

où $A_{i,l,k}$ est exclusivement non nul sur le i^{e} facteur, celui-ci étant donné par la matrice ayant 1 en position (j, k) et 0 partout ailleurs, correspond à celle de $\operatorname{Hom}_G(U, U)$ donnée par les applications $I_{i,l,k}$ ($i \in \{1, \dots, n\}$ et $j, k \in \{1, \dots, a_i\}$), où on reprend les même notations que la proposition 2.3.7. De même, la base canonique

$$\{e_k \mid 1 \leq k \leq a_j\}$$

de \mathbb{C}^{a_j} correspond à la base de $\operatorname{Hom}_G(\oplus_{i=1}^n V_i^{\oplus a_i}, V_j)$ donnée par les applications

$$J_k : \oplus_{i=1}^n V_i^{\oplus a_i} \rightarrow V_j$$

où J_k projète la k^{e} composante de $\oplus_{i=1}^n V_i^{\oplus a_i}$ isomorphe à V_j sur V_j .¹¹ Remontons maintenant le chemin des isomorphismes pour trouver la base correspondante dans $U \otimes_{\mathbb{C}G} V_j = (\oplus_{i=1}^n (V_i^*)^{\oplus a_i}) \otimes_{\mathbb{C}G} V_j$. Soit donc

$$\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_d\}$$

une base de V_j . Une base de $(V_j^*)^{\oplus a_j}$ est donc donnée par

$$\{e_{k,l}^* \mid 1 \leq l \leq d, 1 \leq k \leq a_j\}$$

où $e_{k,l}^*$ est l'élément dual de e_l et l'indice k sert à savoir dans quel facteur de $(V_j^*)^{\oplus a_j}$ on se trouve. Les applications J_k correspondent alors aux éléments

$$E_k = \sum_{l=1}^d e_{k,l}^* \otimes_G e_l$$

dans $(\oplus_{i=1}^n (V_i^*)^{\oplus a_i}) \otimes_{\mathbb{C}G} V_j$. Il reste à montrer que l'action de $I_{i,l,k}$ sur $E_{k'}$ correspond à celle de $A_{i,l,k}$ sur $e_{k'}$. D'une part, on a

$$A_{i,l,k} e_{k'} = \delta_{i,j} \delta_{k,k'} e_l.$$

10. Confer 2.1.12.

11. Ceci découle également de la proposition 2.3.7 et on a légèrement modifié les notations. En particulier, un seul indice est nécessaire pour désigner les éléments de base.

D'autre part,

$$\begin{aligned} I_{i,l,k} E_{k'} &= I_{i,l,k} \left(\sum_{m=1}^d e_{k',m}^* \otimes_G e_m \right) \\ &= \sum_{m=1}^d I_{i,l,k} e_{k',m}^* \otimes_G e_m \end{aligned}$$

et

$$I_{i,l,k} e_{k',m}^* = \delta_{k,k'} \delta_{i,j} e_{l,m}^*$$

car $I_{i,l,k}$ prend la projection de $e_{k',m}^*$ sur le k^e facteur de $(V_i^*)^{\oplus a_i}$ (qui vaut zéro si $i \neq j$ et $k \neq k'$) pour l'envoyer dans le l^e facteur de $(V_i^*)^{\oplus a_i}$. Ainsi on a

$$I_{i,l,k} E_{k'} = \delta_{k,k'} \delta_{i,j} \sum_{m=1}^d e_{l,m}^* \otimes_G e_m = \delta_{k,k'} \delta_{i,j} E_l$$

et la correspondance souhaitée est établie. \square

6.3 Dualité de Schur-Weyl

Proposition 6.3.1. *Soient V un espace vectoriel de dimension finie et $p \geq 2$. Les modules de Schur sont des représentations irréductibles de $\mathrm{GL}(V)$ et*

$$\mathbb{S}_\lambda V \cong V^{\otimes p} \otimes_{\mathbb{C} S_p} V_\lambda.$$

Démonstration. Cela découle de ce qui a été fait à la section précédente. \square

Théorème 6.3.2. *Soient V un espace vectoriel de dimension finie et $p \geq 2$. On a*

(a)

$$V^{\otimes p} \cong \bigoplus_{\lambda \vdash p} \mathbb{S}_\lambda V \otimes V_\lambda^*$$

où l'isomorphisme est un isomorphisme de représentations à gauche pour $\mathrm{GL}(V)$ et à droite pour S_p ;

(b) la décomposition en irréductibles pour S_p est donnée par

$$V^{\otimes p} = \bigoplus_{\lambda \vdash p} (V_\lambda^*)^{\dim \mathbb{S}_\lambda V};$$

(c) et celle pour $\mathrm{GL}(V)$ par

$$V^{\otimes p} = \bigoplus_{\lambda \vdash p} \mathbb{S}_\lambda V^{\dim V_\lambda}.$$

Démonstration. Par la proposition 4.1.11 on a

$$\mathbb{C} S_p \cong \bigoplus_{\lambda \vdash p} \mathrm{End}(V_\lambda)$$

en tant qu'algèbres. Cet isomorphisme est également un isomorphisme de $(\mathbb{C}G - \mathbb{C}G)$ -bimodule si on munit $\text{End}(V_\lambda)$ des structures de modules à droite donnée par

$$(\varphi \cdot g)(v) = \varphi(g \cdot v)$$

et à gauche¹² par

$$(g \cdot \varphi)(v) = g \cdot (\varphi(v))$$

pour tous $g \in G$, $\varphi \in \text{End}(V_\lambda)$ et $v \in V_\lambda$. On a également

$$\text{End}(V_\lambda) \cong V_\lambda \otimes V_\lambda^*$$

où l'isomorphisme est également un isomorphisme de $(\mathbb{C}S_p - \mathbb{C}S_p)$ -bimodule, avec

$$g \cdot (v \otimes \varphi) = g \cdot v \otimes \varphi$$

et

$$(v \otimes \varphi) \cdot g = v \otimes \varphi \cdot g$$

pour tous $g \in G$, $\varphi \in \text{End}(V_\lambda)$ et $v \in V_\lambda$. On a alors

$$\begin{aligned} V^{\otimes p} &\cong V^{\otimes p} \otimes_{\mathbb{C}S_p} \mathbb{C}S_p \\ &\cong V^{\otimes p} \otimes_{\mathbb{C}S_p} \left(\bigoplus_{\lambda \vdash p} \text{End}(V_\lambda) \right) \\ &\cong V^{\otimes p} \otimes_{\mathbb{C}S_p} \left(\bigoplus_{\lambda \vdash p} V_\lambda \otimes V_\lambda^* \right) \\ &\cong \bigoplus_{\lambda \vdash p} V^{\otimes p} \otimes_{\mathbb{C}S_p} (V_\lambda \otimes V_\lambda^*) \\ &\cong \bigoplus_{\lambda \vdash p} (V^{\otimes p} \otimes_{\mathbb{C}S_p} V_\lambda) \otimes V_\lambda^* \\ &\cong \bigoplus_{\lambda \vdash p} \mathbb{S}_\lambda V \otimes V_\lambda^*. \end{aligned}$$

Ceci montre le point (a) et les points (b) et (c) en découlent alors. □

12. A ne pas confondre avec la structure $\mathbb{C}G$ -module à gauche donnée par la construction de représentation sur $\text{End}(V_\lambda) = \text{Hom}(V_\lambda, V_\lambda)$ définie à la section 2.2.4.

Bibliographie

- [1] T. Bastin et J. Martin, *Permutationally invariant processes in arbitrary multiqubit systems*, 2023, arXiv : 2307.06141 [quant-ph], disponible via l'URL <<https://arxiv.org/abs/2307.06141>>, consulté le 25 mai 2025.
- [2] Tullio Ceccherini-Silberstein, Fabio Scarabotti et Filippo Tolli, *Representation theory of the symmetric groups : The okounkov-vershik approach, character formulas, and partition algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 2010.
- [3] Brian Conrad, *Bases of symmetric and exterior powers*, Differential Geometry handouts, Stanford University, disponible via l'URL <<https://virtualmath1.stanford.edu/~conrad/diffgeomPage/handouts/symmwebgebasis.pdf>>, consulté le 25 mai 2025.
- [4] William Fulton et Joe Harris, *Representation theory : A first course*, Springer New York, 2004.
- [5] Werner Greub, *Multilinear algebra*, Springer New York, 1978.
- [6] Thomas Hawkins, *The origins of the theory of group characters*, Archive for History of Exact Sciences **7** (1971), n° 2, p. 142-170, disponible via l'URL <<http://www.jstor.org/stable/41133320>>, consulté le 25 mai 2025.
- [7] Nathalie Pierret, *Représentations du groupe des permutations et représentations tensorielles du groupe linéaire*, Travail de fin d'études, Université de Liège, 1995.
- [8] Tim Seynnaeve, *Representation theory*, Lecture notes for the course on Representation theory, University of Bern, 2022, disponible via l'URL <https://people.cs.kuleuven.be/~tim.seynnaeve/misc/Rep_Theory_Notes.pdf>, consulté le 25 mai 2025.
- [9] Hermann Weyl, *The classical groups : Their invariants and representations*, Princeton University Press, 1997.
- [10] Han Zheng et al., *Speeding up learning quantum states through group equivariant convolutional quantum ansätze*, PRX Quantum **4** (2023), n° 2, disponible via l'URL <<http://dx.doi.org/10.1103/PRXQuantum.4.020327>>, consulté le 25 mai 2025.