

The Fokker-Planck-Kolmogorov Equation Solved Through Smoothed Particle Hydrodynamics: A Computational and Applied Study

Auteur : Bertrand, Tom

Promoteur(s) : Boman, Romain; Denoël, Vincent

Faculté : Faculté des Sciences appliquées

Diplôme : Master en ingénieur civil physicien, à finalité approfondie

Année académique : 2024-2025

URI/URL : <http://hdl.handle.net/2268.2/23207>

Avertissement à l'attention des usagers :

Tous les documents placés en accès ouvert sur le site le site MatheO sont protégés par le droit d'auteur. Conformément aux principes énoncés par la "Budapest Open Access Initiative"(BOAI, 2002), l'utilisateur du site peut lire, télécharger, copier, transmettre, imprimer, chercher ou faire un lien vers le texte intégral de ces documents, les disséquer pour les indexer, s'en servir de données pour un logiciel, ou s'en servir à toute autre fin légale (ou prévue par la réglementation relative au droit d'auteur). Toute utilisation du document à des fins commerciales est strictement interdite.

Par ailleurs, l'utilisateur s'engage à respecter les droits moraux de l'auteur, principalement le droit à l'intégrité de l'oeuvre et le droit de paternité et ce dans toute utilisation que l'utilisateur entreprend. Ainsi, à titre d'exemple, lorsqu'il reproduira un document par extrait ou dans son intégralité, l'utilisateur citera de manière complète les sources telles que mentionnées ci-dessus. Toute utilisation non explicitement autorisée ci-avant (telle que par exemple, la modification du document ou son résumé) nécessite l'autorisation préalable et expresse des auteurs ou de leurs ayants droit.

**The Fokker-Planck-Kolmogorov Equation
Solved Through
Smoothed Particle Hydrodynamics:
A Computational and Applied Study**

Author: Tom BERTRAND
Section: Physics Engineering
Academic year: 2024–2025

Advisors:
Romain BOMAN
Vincent DENOËL

This Master's thesis investigates the resolution of the Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK) equation using the Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) method, with a focus on the design and implementation of a dedicated C++ solver that incorporates modern computational acceleration techniques.

The work begins with a didactic introduction to deterministic and stochastic modeling frameworks. Particular attention is given to the formulation of Itô Stochastic Differential Equations (SDEs) and their equivalence to FPK equations, as well as the conceptual distinctions between the two representations. The SPH method is then introduced from first principles, progressing from its mathematical foundations to specific algorithmic enhancements developed in this study. The intrinsic properties of SPH – such as positivity preservation, decay at infinity, and probability conservation – are highlighted as particularly well-suited for solving the FPK equation.

The implemented open-source solver⁽¹⁾ is applied to a set of academic test cases. These include the Duffing oscillator, the Lorenz system, and a Susceptible-Infected-Recovered-Deceased (SIRD) epidemiological model. The latter extends the problem dimensionality to six dimensions, where the solver succeeds in producing a first order approximation. Throughout the study, the performance and qualitative behavior of the SPH method are compared with those of the traditional Monte Carlo Simulation (MCS) approach.

In the final section, the thesis presents a scalability and performance profiling analysis, along with a user guide and an architectural overview of the solver, aimed at facilitating further research and practical application.

⁽¹⁾Available at <https://gitlab.uliege.be/structural-and-stochastic-dynamics/fpk-sph-solver>.