



UNIVERSITÉ DE LIÈGE – FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES
Année académique 2013 – 2014

Modélisation numérique de structures formées de poutres sous sollicitations extrêmes

Travail de fin d'études réalisé par

REGNIER Brice

en vue de l'obtention du grade de MASTER INGÉNIEUR CIVIL DES CONSTRUCTIONS

Composition du jury :

- DENOËL Vincent (promoteur)
- DEMONCEAU Jean-François
- MIHAYLOV Boyan
- KAISER François (membre extérieur)

Remerciements

Il ne faut pas considérer ce travail de fin d'études comme un travail purement personnel, car de nombreuses personnes ont contribué à son avancement et à sa réalisation.

Tout d'abord, le Professeur V. Denoël, le promoteur de ce travail, qui a su se rendre disponible et à l'écoute tout au long de la réalisation de ce mémoire. Malgré ses journées chargées et ses nuits courtes, il a toujours réussi à m'accorder du temps afin de faire avancer mes recherches le plus loin possible. Nous avons même eu l'occasion d'improviser une réunion dans le hall du CHU, lors d'un bref creux dans son agenda. Il s'est montré intéressé et motivé tout au long de ce travail. Je tiens donc à le remercier pour son suivi, ses nombreuses connaissances et surtout sa sympathie. En effet, le Professeur V. Denoël ne m'a pas uniquement apporté un soutien technique, il a également été un promoteur très cordial. Il m'a, par exemple, aidé l'année précédent ce travail lors de ma recherche de stage à l'étranger. Je le remercie également pour cette expérience inoubliable que j'ai passée en Floride.

Mes remerciements vont également au Professeur B. Mihaylov qui m'a donné de nombreuses pistes afin de rendre ce travail applicable aux éléments de structure en béton armé. Il a pris de son temps pour suivre l'avancée de ce travail. Sans son aide, les résultats obtenus pour les ouvrages en béton armé n'auraient pas été si précis.

Le Docteur J.-F. Demonceau lui aussi m'a offert de son temps afin d'orienter certaines de mes recherches. Il s'est montré enthousiaste et concerné par les avancées de mon travail. De plus, c'est également lui qui, lors de ses cours, a su me donner goût à la problématique de la robustesse des structures. Ce domaine particulier de l'ingénierie civile trouvera très certainement des applications futures à ce travail.

Enfin, je remercie ma famille et mes amis et plus particulièrement ceux qui ont passé de longues heures à décrypter ce travail à la recherche d'éventuelles fautes d'orthographe.

Énoncé : Modélisation de structures formées de poutres sous sollicitations extrêmes

Promoteur : *Vincent Denoël*

L'utilisation des outils de simulation numérique traditionnels, comme la méthode des éléments finis, est particulièrement mal adaptée à la modélisation des structures sous un chargement exceptionnel. Il existe cependant une famille de méthodes alternatives appelée méthode des éléments discrets qui permet de mieux représenter le démantèlement d'un ouvrage et les collisions entre différentes parties de structure entre elles, avec le sol, ou encore avec des bâtiments voisins. Plus particulièrement, la méthode des éléments appliqués, développée initialement dans le contexte de l'analyse sismique de structures, s'adapte particulièrement bien à une analyse dynamique rapide, comme dans le cas des explosions, impacts ou démolitions de bâtiments.

L'objectif de ce travail de fin d'études consiste en l'apprentissage de cette méthode et le développement d'un code de calcul qui la met en œuvre. Sur base d'exemples simples, les résultats que cette méthode fournit seront comparés à ceux obtenus par diverses méthodes analytiques.

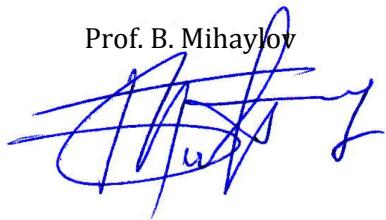
Prof. V. Denoël



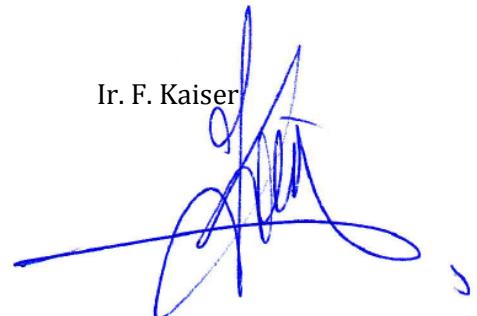
Dr. J.-F. Demonceau



Prof. B. Mihaylov



Ir. F. Kaiser



Résumé

L'analyse des structures se limite généralement à la vérification de la résistance et du respect des états limites de service. Les outils numériques traditionnels fournissent des résultats très précis dans ce domaine d'application. Cependant, peu de méthodes permettent de suivre le comportement de la structure une fois la ruine initiée. Ce travail présente et met en œuvre la méthode des éléments appliqués, une nouvelle méthode capable de modéliser le démantèlement de structures. Les principes de base de cette méthode sont assez faciles à comprendre. En effet, la structure est simplement divisée en différents blocs connectés entre eux par une série de ressorts.

En partant tout d'abord des cas simples, ce travail aborde ensuite des analyses de plus en plus complexes. Ainsi, le premier chapitre décrit les bases de la méthode des éléments appliqués. Des calculs de poutre simples sont également réalisés afin de valider la routine MATLAB encodée. Ensuite, le deuxième et le troisième chapitre présentent les modifications à effectuer pour que la méthode soit valable lors d'analyses de structures au second ordre. Enfin, le dernier chapitre se concentre sur la problématique des sollicitations dynamiques rapides.

Chaque chapitre apporte une nouvelle modification qu'il est donc nécessaire de valider. Chacune de ces progressions est donc vérifier sur base de solutions analytiques, d'essais en laboratoire ou sur des résultats numériques fiables.

Abstract

In the civil engineering field, the analysis of structures is generally limited to the verification of the limit states criteria. Traditional tools provide very accurate results in this application field. However, these methods are not able to predict the behavior of the structure after the initiation of the dismantling. This work presents and implements the applied element method, a new method capable of modeling the collapse of structures. This method is quite easy to understand. The structure is divided into different blocks which are connected by distributed springs in both normal and tangential directions.

Assuming firstly simple problem, then this work will approach more and more complex cases. Thus, the first chapter explains the basics of the applied element method. Moreover, simple beam calculations are also performed to validate the method. During the next chapters, the method will be adapted to perform second order analysis. Finally, the problem of dynamic loads is discussed during the last chapter.

Each chapter brings a new change that is necessary to confirm. Each of these progressions is checked on the basis of analytical solutions, laboratory tests or reliable numerical results.

Table des matières

Remerciements.....	3
Énoncé : Modélisation de structures formées de poutres sous sollicitations extrêmes	4
Résumé	5
Abstract	6
Table des matières	7
Table des figures.....	10
Introduction	12
1. Contexte.....	12
2. Etat de l'art	13
3. Plan du travail	14
Chapitre I - Concepts de base et calculs linéaires	15
1. Introduction	16
2. Concepts de la méthode	16
2.1. Principes de base.....	16
2.2. Matrice de raideur	18
2.3. Structure du code	22
3. Validation de la méthode.....	23
3.1. Poutre bi-appuyée	23
3.2. Poutre encastrée.....	25
4. Sensibilité au maillage	26
4.1. Discrétisation en blocs.....	27
4.2. Discrétisation en ressorts.....	28
5. Conclusions	29

Chapitre II - Non-linéarité géométrique.....	30
1. Introduction	31
2. Méthodes utilisées.....	31
2.1. Première méthode : pas incrémentale modifiée	32
2.2. Seconde méthode : utilisation du Jacobien.....	34
2.3. Structure du code	35
2.4. Discussion, comparaison et validation des méthodes	36
3. Contraintes internes.....	40
3.1. Méthode utilisée	40
3.2. Validation de la méthode	41
4. Sensibilité au maillage	43
5. Choix de la perturbation ϵ	44
6. Conclusions	45
Chapitre III - Non-linéarité matérielle	47
1. Introduction	48
2. Méthodes utilisées.....	48
2.1. Plastification et ruine d'un ressort.....	48
2.2. Lois de comportement	49
2.3. Structure du code	53
2.4. Validation de la méthode	54
3. Conclusions	60
Chapitre IV - Sollicitations dynamiques	61
1. Introduction	62
2. Principes de base	62
2.1. Matrices de masse et d'amortissement.....	63
2.2. Méthode de Newmark.....	65
2.3. Conditions initiales.....	66
2.4. Fréquences propres et modes propres	67
3. Méthodes utilisées.....	71
3.1. Résolution d'un système dynamique non-linéaire.....	71
3.2. Lois de comportement	71

3.3. Structure du code.....	73
4. Validation.....	74
4.1. Système non-linéaire à 1 DDL.....	74
4.2. Système MDDL élastique.....	76
4.3. Système MDDL non-linéaire	79
5. Conclusions	79
Conclusions	81
Bibliographie	83
Liens Internet.....	85
Annexes.....	86
Table des annexes	86
Annexe 1 : Matrice de raideur	87
Annexe 2 : Matrice de rotation.....	89
Routines Matlab	90
Annexe 3 : Calculs linéaires	90
Annexe 4 : Calculs non-linéaires.....	94
Annexe 5 : Calculs dynamiques.....	97

Table des figures

Figure 1 – Génération du maillage	17
Figure 2 – Représentation d'un élément liant deux blocs	18
Figure 3 – Raideur et degré de liberté d'un ressort	19
Figure 4 – Matrice de connectivité	19
Figure 5 – Cas 1, poutre bi-appuyée uniformément chargée	23
Figure 6 – Discrétisation de la poutre	23
Figure 7 – Déplacement de la poutre obtenu analytiquement et numériquement	24
Figure 8 – Cas 2, poutre encastrée chargée à son extrémité	25
Figure 9 – Discrétisation de la poutre	25
Figure 10 - Déplacement de la poutre obtenu analytiquement et numériquement	26
Figure 11 – Déplacement obtenu pour différents nombres de blocs N	27
Figure 12 - Erreur en fonction de la discrétisation	28
Figure 13 - Erreur sur une échelle logarithmique	28
Figure 14 - Déplacement obtenu pour différents nombres de ressorts Nr	28
Figure 15 – Erreur en fonction du nombre de ressorts	29
Figure 16 - Chargement incrémental	32
Figure 17 - Chargement incrémental modifié	33
Figure 18 - Notation de la solution analytique	36
Figure 19 - Configuration déformée de la poutre sous 50000 kNm	39
Figure 20 - Relation moment appliqué - déplacement	39
Figure 21 - Décomposition du déplacement	41
Figure 22 – Efforts dans la poutre	42
Figure 23 - Répartitions des contraintes	42
Figure 24 - Relation moment-déplacement pour différentes discrétisations	43
Figure 25 - Erreur en fonction de la discrétisation	44
Figure 26 - Erreur sur une échelle logarithmique	44
Figure 27 - Norme de la matrice de raideur en fonction de la perturbation appliquée	44
Figure 28 - Loi de comportement utilisée pour l'acier	49
Figure 29 - Comparaison des diagrammes contraintes-déformations	51
Figure 30 - Modélisation des armatures	52
Figure 31 - Paramètres de l'essai. Source : ACI Structural Journal [8]	54
Figure 32 - Résultats de l'essai. Source : ACI Structural Journal [8]	55

Figure 33 - Comparaison des résultats des essais et des résultats numériques.....	56
Figure 34 - Répartition de contraintes dans la section.....	57
Figure 35 – Caractéristiques du portique	58
Figure 36- Déplacement et plastification du portique.....	59
Figure 37 - Comparaison des relations force-déplacement.....	59
Figure 38 - Caractéristiques du portique	68
Figure 39 - Premiers modes propres et pulsations associées [$s - 1$]	68
Figure 40 – Modes et fréquences $s - 1$ propres pour des mécanismes de poutre et de panneau.....	69
Figure 41 - Fonction de transfert du portique	70
Figure 42 - Loi de comportement utilisée pour l'acier	72
Figure 43 - Caractéristiques du système	74
Figure 44 - Schématisation du système	75
Figure 45 - Spectre de choc	76
Figure 46 - Fonction de chargement	77
Figure 47 - Réponse de la structure.....	77
Figure 48 - Fonction de chargement	78
Figure 49 – Réponse de la structure.....	78
Figure 50 - Rapport entre la réponse dynamique maximale et la réponse statique	79

Introduction

1. Contexte

Le dimensionnement traditionnel d'une structure quelconque du génie civil est effectué pour lui conférer une résistance suffisante (ELU) et un comportement en service acceptable (ELS). Ainsi, l'Eurocode préconise différents cas de charge à utiliser afin que la probabilité d'atteinte d'un état limite soit minime et ce durant toute la vie de l'ouvrage. Cependant, un événement exceptionnel pourrait tout de même provoquer une dégradation voire la ruine de la structure.

C'est pour ce type de sollicitation que le travail présenté trouve ses applications. En effet, ce travail de fin d'études a pour but d'établir une méthode capable de modéliser le comportement des structures sous un chargement exceptionnel. De nombreuses applications peuvent découler de ce type d'analyse. Le domaine de la robustesse structurale, par exemple, a pour but d'éviter un endommagement disproportionné suite à une sollicitation exceptionnelle. Cette méthode pourrait constituer un bon outil d'analyse lorsqu'une étude a pour but d'assurer une certaine intégrité à un ouvrage. D'autres secteurs, comme celui de la démolition contrôlée, peuvent également trouver une utilité à l'étude du démantèlement d'un ouvrage.

Cependant, l'utilisation des outils de simulation numérique traditionnels, comme la méthode des éléments finis, ne se prête pas bien à ce type de problématique. En effet, ces techniques de résolution numériques ne sont pas capables de représenter adéquatement la séparation des éléments et ne sont pas utilisables lorsque la fissuration devient trop importante. Il existe toutefois une nouvelle méthode permettant de mieux représenter le démantèlement d'une structure. En effet, des résultats récents ont montré que la méthode des éléments appliqués ou applied element method (AEM) est particulièrement bien adaptée à cette problématique.

Cette nouvelle méthode permet aussi bien d'effectuer des calculs linéaires que de modéliser un effondrement ou une collision. Toutes les différentes phases, depuis l'initiation et la propagation des fissures jusqu'au délabrement total de l'ouvrage, peuvent être représentées. Dès lors, la méthode peut être utilisée pour procéder à une étude complète du comportement des structures.

La méthode des éléments appliqués offre de nombreux avantages qui seront présentés dans les différents chapitres de ce travail. Nous pouvons cependant déjà souligner qu'elle ne se limite bien sûr pas uniquement à des calculs sous sollicitations extrêmes. En effet, elle peut également être utilisée pour des cas de charge plus classiques ce qui permettra par exemple d'effectuer un dimensionnement de poutre ou de portique.

2. Etat de l'art

La méthode des éléments appliqués est relativement récente. En effet, elle a été abordée pour la première fois de 1995 à 1998, à l'université de Tokyo, dans la thèse de doctorat du Dr. Hatem Tagel-Din. ([17])

L'appellation « Applied element method » n'apparut cependant qu'en 1999 lors de la parution de nombreux articles publiés conjointement par le Dr. Tagel-Din et son superviseur de thèse, le Dr. Kimiro Meguro. Ils resteront tous deux les acteurs principaux du développement de la méthode. ([11], [12], [18], [19], ...)

Durant les années suivantes, le Dr. Tagel-Din et le Dr. Meguro collaborèrent avec d'autres scientifiques afin d'exploiter la méthode et d'étendre son domaine d'application. Ces coopérations menèrent à l'utilisation de la méthode dans des secteurs très variés comme, par exemple, aux éléments de maçonnerie ([9]), aux structures en acier ([5]), pour des simulations d'effondrements ([20]) et des études géotechniques ([16]).

En 2009, après six ans de recherches et de développement, le logiciel « *Extreme Loading Structure* » (ELS) fut commercialisé en tant que version complète et aboutie. ELS est un logiciel basé sur la méthode des éléments appliqués permettant la visualisation du démantèlement d'une structure ([22]). Il est distribué par la société « *Applied Science International* » ([24]) dont la place de directeur scientifique est occupée par le Dr. Tagel-Din.

Ce bref historique montre l'évolution fulgurante qu'a connue la méthode des éléments appliqués. Celle-ci est très prometteuse et les enjeux économiques associés sont immenses. Ceci engendre une certaine rétention d'information. Il devient dès lors très compliqué de trouver des informations ou de la documentation complète sur la méthode, ce qui n'a pas facilité la réalisation de ce travail.

3. Plan du travail

La méthode des éléments appliqués étant encore très méconnue, il est nécessaire de présenter clairement les bases et de procéder à une évolution naturelle et progressive du raisonnement à suivre. Afin d'être le plus clair possible, le travail est divisé en différents chapitres.

Le premier chapitre introduira tout d'abord les principes de base de la méthode des éléments appliqués et il présentera ensuite les premières modélisations numériques. De nombreuses hypothèses simplificatrices seront posées afin de rendre les premières études aussi simples que possible. Ceci permettra de valider la méthode lorsqu'elle est utilisée pour résoudre des problèmes linéaires. Les hypothèses seront progressivement retirées et la complexité des cas étudiés augmentera de chapitre en chapitre.

Dans le second chapitre, les calculs seront effectués au second ordre. Il faudra dès lors mettre au point une nouvelle technique de résolution capable de gérer les non-linéarités. La méthode qui sera retenue nécessite l'évaluation des forces hors équilibre et donc des contraintes internes. Ce chapitre permettra également de présenter la façon dont les forces intérieures sont obtenues.

Les deux premiers chapitres considèrent une loi de comportement linéaire parfaitement élastique. Le troisième chapitre, quant à lui, prendra en compte les non-linéarités matérielles. La modélisation intègrera une loi élasto-plastique pour l'acier ainsi qu'un comportement non-linéaire tiré d'une loi empirique pour le béton. A partir de ce chapitre, toutes les sources de non-linéarité sont donc prises en compte.

La plupart des sollicitations exceptionnelles ne peuvent pas être considérées comme des charges statiques. En effet, les tremblements de terre, les explosions, les impacts ou encore les vents importants sont des chargements dont l'intensité varie fortement dans un court intervalle de temps. Le quatrième et dernier chapitre abordera donc le problème des sollicitations dynamiques. Ce dernier changement nécessitera de nombreux apports et modifications au code existant.

Chapitre I - Concepts de base et calculs linéaires

Table des matières du Chapitre I

1.	Introduction	16
2.	Concepts de la méthode	16
2.1.	Principes de base.....	16
2.2.	Matrice de raideur	18
2.3.	Structure du code	22
3.	Validation de la méthode	23
3.1.	Poutre bi-appuyée	23
3.1.1.	Résultats obtenus	24
3.2.	Poutre encastrée.....	25
3.2.1.	Résultats obtenus	25
4.	Sensibilité au maillage	26
4.1.	Discrétisation en blocs	27
4.2.	Discrétisation en ressorts	28
5.	Conclusions	29

Chapitre I

Concepts de base et calculs linéaires

1. Introduction

Afin de familiariser le lecteur avec la méthode des éléments appliqués, ce premier chapitre présentera tout d'abord les concepts de base qui sont nécessaires à la compréhension de ce travail. Afin d'illustrer ces différents principes, des structures simples seront modélisées dans MATLAB. Pour ces premières applications, les hypothèses simplificatrices suivantes seront posées :

- Le chargement sera considéré comme statique,
- Les calculs seront faits au 1^{er} ordre,
- Le matériau étudié aura un comportement parfaitement élastique et une limite d'élasticité infinie,
- Les structures étudiées seront des structures 2D,
- Le maillage sera considéré comme uniforme.

Les résultats obtenus permettront alors de valider la méthode pour des calculs simplifiés. Au fur et à mesure des chapitres, ces simplifications seront supprimées et la complexité des cas étudiés augmentera pour enfin arriver à la résolution d'un problème complexe.

2. Concepts de la méthode

2.1. Principes de base

La méthode des éléments appliqués est assez simple à comprendre. En effet, contrairement aux méthodes les plus répandues, elle ne découle pas de l'intégration de nombreuses équations mais bien d'une réflexion sur les propriétés des matériaux et sur le sens physique de la mécanique des structures.

La première étape de la méthode consiste en la division de la structure en différents blocs rigides (Figure 1a). L'ensemble de ces éléments discrets sont connectés entre eux par une série de ressorts. Ainsi, l'interface entre deux blocs est complètement représentée par un ensemble de ressorts. En 2 dimensions, ces ressorts forment des paires composées d'un ressort dit normal et d'un autre représentant le cisaillement (Figure 1b). Ainsi, les blocs eux-mêmes sont subdivisés en zones caractérisées par un couple de ressorts définissant une certaine raideur volumique.

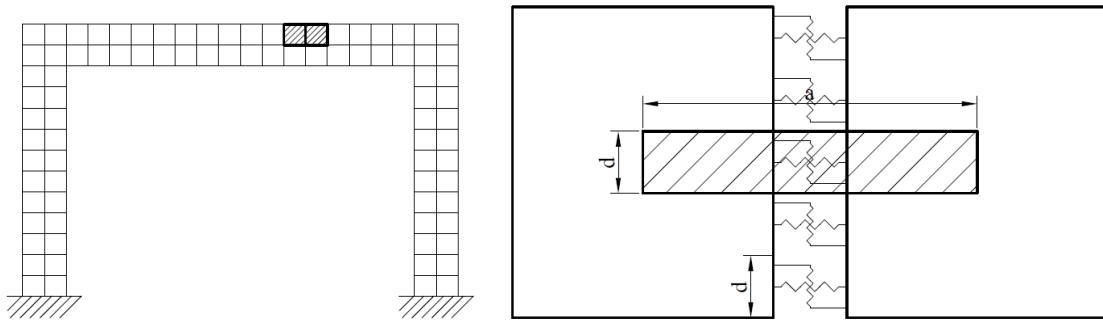


Figure 1 – (a) Génération du maillage (b) Distribution des ressorts et zone représentée par un couple de ressorts

La raideur normale et la raideur en cisaillement peuvent être calculées à l'aide des formules suivantes :

$$K_n = \frac{E \times d \times T}{a} \quad (1.1)$$

$$K_s = \frac{G \times d \times T}{a} \quad (1.2)$$

Avec,

- E : le module de Young,
- G : le module de cisaillement,
- d : la distance entre deux ressorts,
- T : l'épaisseur du bloc,
- a : la longueur de la zone (égale à la longueur d'un bloc pour un maillage uniforme).

En résumé, la méthode des éléments appliqués considère une structure constituée de blocs parfaitement rigides dans laquelle les déformations sont représentées aux interfaces. Il est à noter qu'une interpénétration des blocs est autorisée afin de pouvoir représenter les efforts de compression.

2.2. Matrice de raideur

Tout d'abord, il est important de préciser la signification du terme « élément » dans ce travail. En effet, l'interface de deux blocs est constituée d'une multitude de ressorts mais cette même interface ne sera modélisée que par un et un seul élément (en rouge sur la Figure 2). La raideur de cet élément est donc caractérisée par la somme des raideurs des différents ressorts. Cette notion d'élément est très importante et elle ne doit en aucun cas être confondue avec la notion de bloc ou de ressort.

Un élément est défini par 2 nœuds, généralement disposés aux centres des différents blocs. Etant donné que chaque nœud possède 3 degrés de liberté (2 en translation et 1 en rotation), un élément caractérisé par deux nœuds possédera par conséquent 6 degrés de liberté.

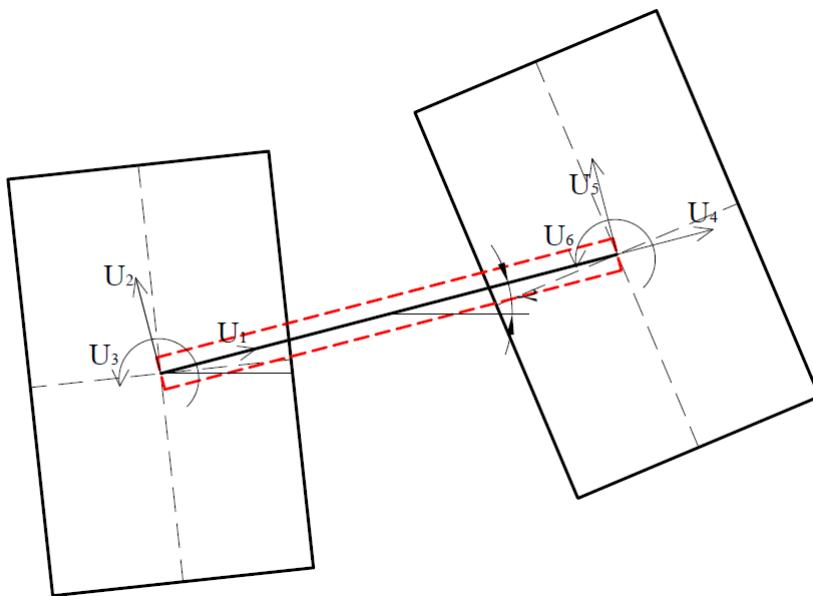


Figure 2 – Représentation d'un élément liant deux blocs

Afin de calculer la raideur de l'élément, il est nécessaire de connaître la raideur de chaque ressort de l'interface. La raideur d'un couple de ressorts peut être définie sous forme matricielle (Figure 3). Tout comme pour les contraintes ou les déplacements, une raideur doit être exprimée selon un certain système d'axe. Cette matrice de raideur est valable tant que l'on reste dans le repère relatif au degré de liberté du ressort (représenté à la Figure 3).

$$K_{ressort} = \begin{pmatrix} K_n & 0 & 0 & -K_n & 0 & 0 \\ 0 & K_s & 0 & 0 & -K_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K_n & 0 & 0 & K_n & 0 & 0 \\ 0 & -K_s & 0 & 0 & K_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

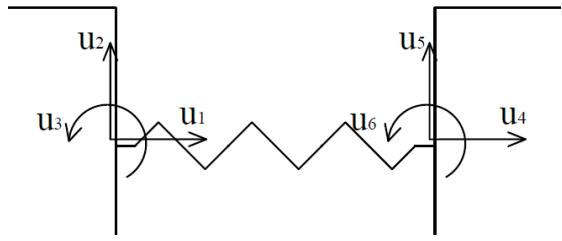


Figure 3 – Raideur et degré de liberté d'un ressort

Cependant, cette raideur devra être exprimée selon les degrés de liberté de l'élément. Les axes ne sont alors plus placés aux extrémités du ressort mais bien aux centres des blocs. La Figure 4 montre qu'avec ce changement de repère, un bras de levier apparaît et ce selon les deux directions. Ainsi, dans ce nouveau repère, un ressort aura une composante de raideur en rotation due au bras de levier. Ce changement de repère peut se faire à partir d'une matrice de connexion ([1]) contenant les bras de levier selon chaque direction (Figure 4).

Connec =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -L_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & L_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -L_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

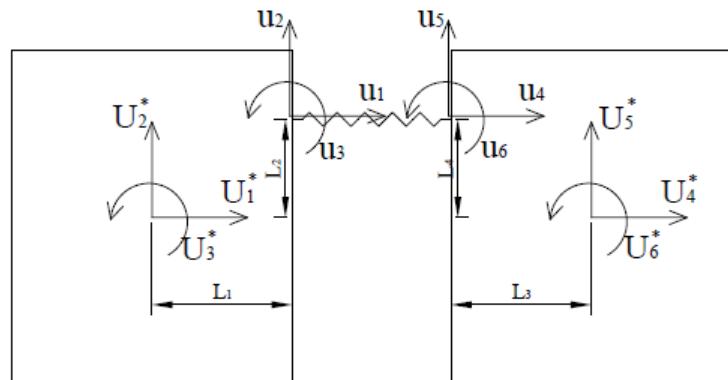


Figure 4 – Matrice de connectivité

Dans un état déformé, il est également possible que les axes de l'élément et ceux du ressort ne soient plus parallèles. Dans cette situation, il sera également nécessaire de faire appel à la matrice rotation suivante¹ :

$$Rot = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¹ Pour cette première partie, les calculs sont effectués au premier ordre. La matrice de raideur est donc déterminée dans l'état initial, la matrice de rotation sera dès lors une matrice identité.

Avec θ_1 , l'angle entre le premier bloc et l'élément et θ_2 , l'angle entre le second bloc et l'élément. Finalement, la matrice de raideur d'un ressort exprimée dans les axes de l'élément en état déformé est donné par :

$$K = Rot^T \times Connec^T \times K_{ressort} \times Connec \times Rot \quad (1.3)$$

La matrice résultante ainsi que les différents notations sont données en annexe (Annexe 1 : Matrice de raideur).

Des raisonnements et développements différents de cette matrice peuvent être retrouvés dans différents travaux ou articles. Ces méthodes mènent aux mêmes résultats. ([6], [11])

Jusqu'à présent, la raideur calculée est valable pour une seule paire de ressorts. Cependant, l'interface entre deux blocs comprend une multitude de ces ressorts. Dès lors, la matrice de raideur d'un élément est obtenue en sommant les matrices de raideur des différents ressorts. Elle aura donc la forme suivante :

		DDL relatifs au bloc 1			DDL relatifs au bloc 2			
		DDL	1	2	3	4	5	6
DDL relatifs au bloc 1	1	k_{11}	k_{12}	k_{13}	k_{14}	k_{15}	k_{16}	
	2	k_{21}	k_{22}	k_{23}	k_{24}	k_{25}	k_{26}	
	3	k_{31}	k_{32}	k_{33}	k_{34}	k_{35}	k_{36}	
	4	k_{41}	k_{42}	k_{43}	k_{44}	k_{45}	k_{46}	
	5	k_{51}	k_{52}	k_{53}	k_{54}	k_{55}	k_{56}	
	6	k_{61}	k_{62}	k_{63}	k_{64}	k_{65}	k_{66}	

Cette matrice est déterminée dans le système d'axe local de l'élément. Il va donc falloir la multiplier par une nouvelle matrice de rotation afin d'exprimer la raideur de l'élément dans un système d'axe global. Ainsi la raideur des éléments structure tout entière pourra être exprimé dans le même système d'axe. La matrice de rotation (Annexe 2 : Matrice de rotation) est uniquement fonction de l'angle γ de l'élément qui est facilement calculable :

$$\gamma = \text{atan} \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) \quad (1.4)$$

Avec,

- y_i : l'ordonnée du bloc i dans le système d'axe global,
- x_i : l'abscisse du bloc i dans le système d'axe global.

Comme pour la méthode des éléments finis, il sera ensuite nécessaire d'assembler ces différentes matrices (définissant la raideur des divers éléments) afin d'obtenir une nouvelle matrice de raideur globale (relative à la structure entière). La matrice globale reliera tous les degrés de liberté du problème entre eux par une raideur. Le vecteur déplacement pourra alors être trouvé à l'aide du système d'équation suivant :

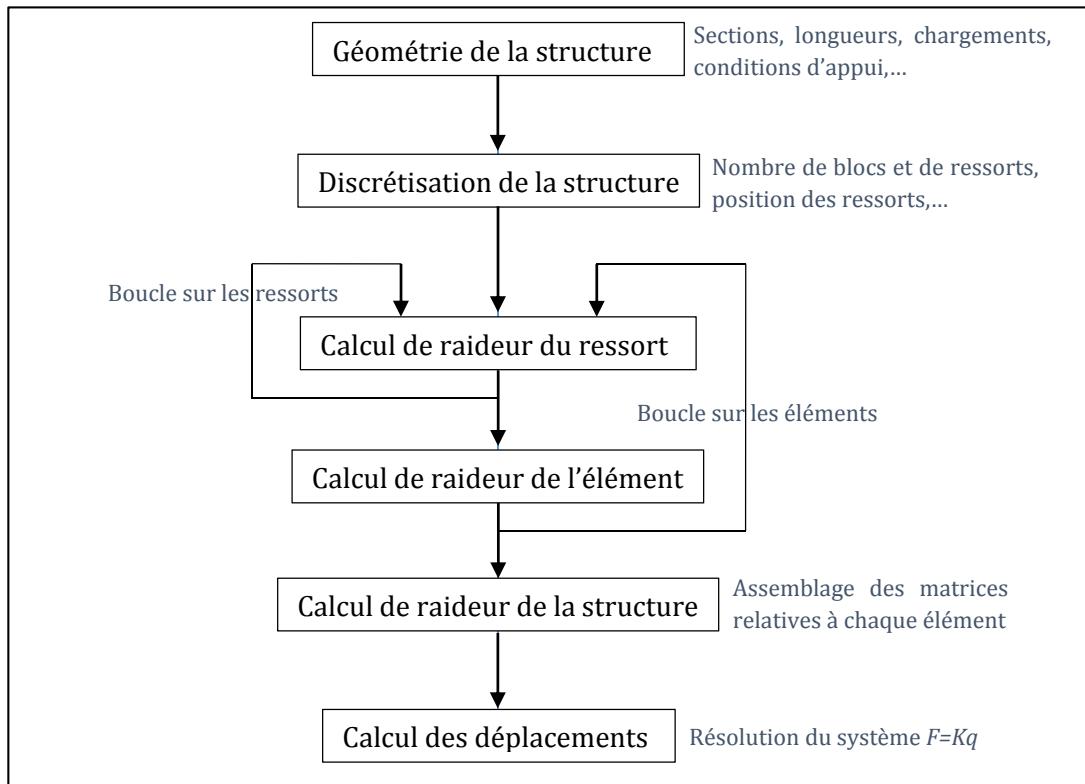
$$\bar{F} = \bar{K} \bar{q} \quad (1.5)$$

Avec, \bar{F} , le vecteur de chargement et \bar{q} , le vecteur déplacement. Avant de résoudre ce système, il faudra cependant réduire la matrice de raideur et le vecteur de chargement. C'est-à-dire qu'il sera nécessaire de retirer les lignes et les colonnes relatives aux degrés de liberté fixés par les conditions d'appui.

Cette méthode est valable pour un calcul statique au premier ordre. Dans la suite de ce travail, les méthodes utilisées varieront en fonction des cas étudiés.

2.3. Structure du code

La structure du code peut être schématisée comme ceci :



Pour ces cas simples, la raideur des ressorts est calculée dans l'état initial.

Ultérieurement, la matrice de raideur devra être calculée dans un état déformé. Il sera dès lors nécessaire de procéder à des itérations (car la matrice de raideur est dépendante du déplacement et le déplacement est dépendant de la raideur).

Au fur et à mesure des chapitres, il faudra ajouter des étapes à cette structure, comme, par exemple, la vérification de la résistance de chaque ressort.

3. Validation de la méthode

Afin de valider la méthode et de présenter le code, quelques cas simples sont maintenant étudiés. Rappelons également les hypothèses simplificatrices qui ont été posées :

- Le chargement est considéré comme statique,
- Les calculs sont faits au 1^{er} ordre,
- Le matériau étudié a un comportement parfaitement élastique et une limite d'élasticité infinie,
- Les structures étudiées sont des structures 2D,
- Le maillage est uniforme.

3.1. Poutre bi-appuyée

La première structure étudiée est une poutre simple dont les caractéristiques sont reprises ci-dessous :

- $L = 10 \text{ m}$
- $b = 20 \text{ cm}$
- $h = 20 \text{ cm}$
- $E = 210 \text{ MPa}$
- $\nu = 0,3$
- $q = 30 \text{ kN/m}$

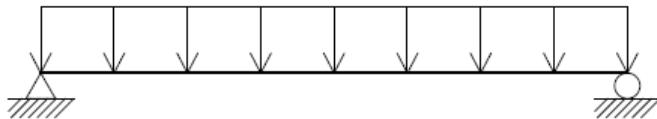


Figure 5 – Cas 1, poutre bi-appuyée uniformément chargée

La structure est discrétisée en 100 blocs et 10 ressorts sont placés à chaque interface. Une schématisation de cette séparation en bloc est donnée à la Figure 6. Il est à noter que la discrétisation doit être faite de sorte que les appuis soient disposés aux centres des blocs. Dans le cas d'une poutre, il faut prêter une attention toute particulière aux blocs situés aux extrémités. En effet, les nœuds se situent aux centres des différents blocs et aux appuis, il sera nécessaire de bloquer le déplacement. Les degrés de libertés de ces nœuds particuliers devront être retirés des différentes matrices afin de pouvoir résoudre le système.

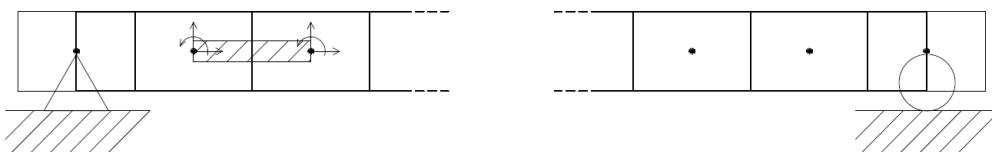


Figure 6 – Discrétisation de la poutre

Une fois la structure discrétisée, il faut calculer la raideur de chaque interface (qui est égale à la somme des raideurs de chaque ressort) et la matrice raideur de la poutre peut alors être assemblée.

3.1.1. Résultats obtenus

Les résultats obtenus sont comparés avec une solution analytique. Pour une poutre reposant sur deux appuis avec une charge uniforme, l'équation de la déformée est la suivante :

$$y(x) = \left(-\frac{x^4}{24} + \frac{Lx^3}{12} - \frac{L^3x}{24} \right) \left(\frac{q}{EI} \right) \quad (1.6)$$

La Figure 7 reprend le déplacement vertical obtenu avec l'équation analytique (en rouge) et avec la méthode des éléments appliqués (en bleu). De plus, la flèche maximale est de :

$$f_{\text{numérique}} = 13,83 \text{ cm}$$

$$f_{\text{analytique}} = 13,95 \text{ cm}$$

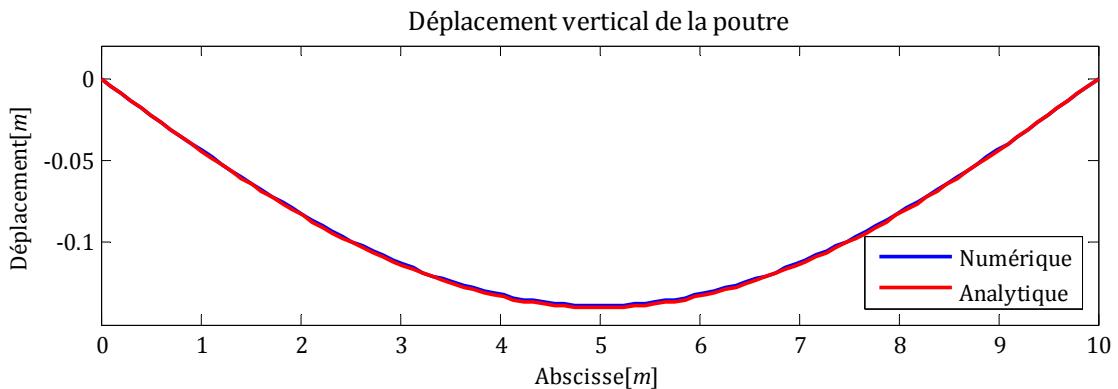


Figure 7 – Déplacement de la poutre obtenu analytiquement et numériquement

La forte similitude des résultats peut directement être observée. La différence maximale entre les deux courbes étant de 0,9%, la méthode peut être considérée comme valide pour calculer le déplacement d'une poutre bi-appuyée sous charge uniformément répartie.

3.2. Poutre encastrée

La seconde poutre étudiée est une poutre encastrée-libre dont les caractéristiques sont reprises ci-dessous :

- $L = 5 \text{ m}$
- $b = 20 \text{ cm}$
- $h = 20 \text{ cm}$
- $E = 210 \text{ MPa}$
- $\nu = 0,3$
- $P = 30 \text{ kN}$

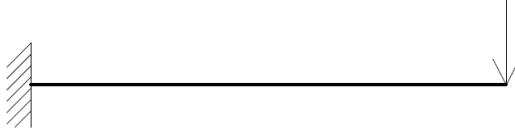


Figure 8 – Cas 2, poutre encastrée chargée à son extrémité

Dans ce nouveau cas, la poutre ne sera pas discrétisée uniquement selon l'axe x, mais selon les 2 directions. La structure sera discrétisée en 300 blocs (100 divisions selon x et 3 selon y). Une schématisation de cette séparation en blocs est donnée à la Figure 9.

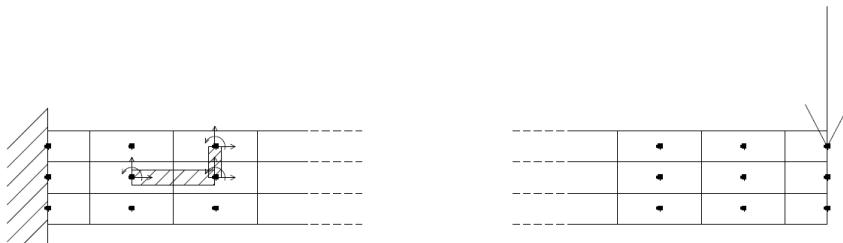


Figure 9 – Discrétisation de la poutre

Il est également à noter la présence d'éléments verticaux. La méthode reste identique à la différence près que la matrice de raideur de ces éléments doit être multipliée par une matrice de rotation relative à un angle de 90°.

Dans cette nouvelle configuration les 3 degrés de liberté relatifs aux nœuds encastrés doivent être supprimés des matrices.

3.2.1. Résultats obtenus

Les résultats obtenus sont comparés avec une solution analytique. Pour une poutre encastrée sous une charge concentrée, l'équation de la déformée est la suivante :

$$y(x) = \left(-\frac{x^4}{6} + \frac{L^2 x}{2} - \frac{L^3}{3} \right) \left(\frac{P}{EI} \right) \quad (1.7)$$

La Figure 10 reprend le déplacement vertical obtenu avec l'équation analytique (en rouge) et avec la méthode des éléments appliqués (en bleu). De plus, la flèche maximale est de :

$$f_{\text{numérique}} = 4,41 \text{ cm}$$

$$f_{\text{analytique}} = 4,46 \text{ cm}$$

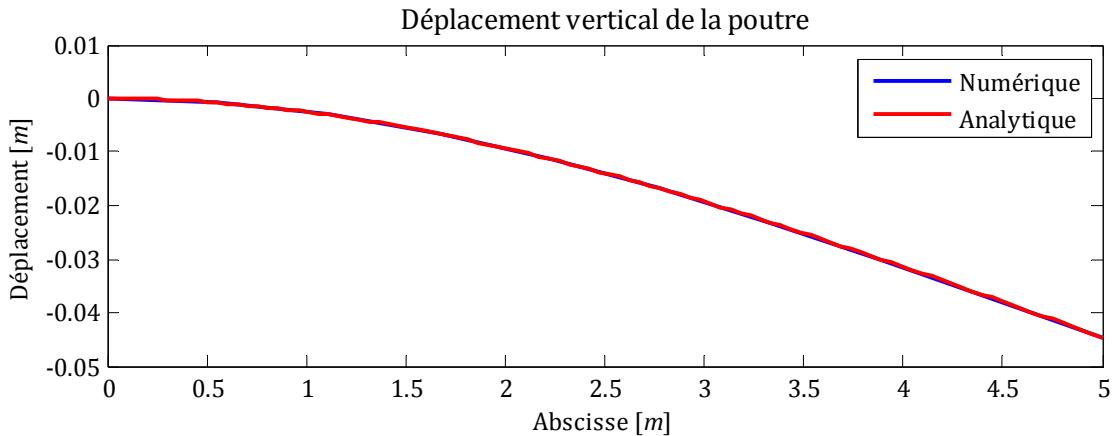


Figure 10 - Déplacement de la poutre obtenu analytiquement et numériquement

La forte similitude des résultats peut directement être observée. La différence maximale entre les deux courbes étant de 1,1%, la méthode peut être considérée comme valide pour calculer le déplacement d'une poutre encastrée.

4. Sensibilité au maillage

La validation de la méthode vient de se faire sur base d'une discrétisation très fine. Pour des structures simples comme des poutres, ce maillage n'induit pas de temps de calcul important. Cependant, lorsque les structures étudiées se complexifient, il sera nécessaire de choisir une discrétisation qui n'entraîne pas un temps de calcul trop important sans pour autant induire des erreurs non négligeables.

L'étude de la discrétisation se concentre sur deux éléments :

- Le nombre de blocs, qui constitue la discrétisation de la poutre,
- Et le nombre de ressorts, qui constitue la discrétisation des sections.

4.1. Discrétisation en blocs

L'étude de la discrétisation en blocs se fera à l'aide de la poutre bi-appuyée modélisée au point précédent. La modélisation sera réalisée avec différents maillages. Pour chaque maillage, la différence entre le résultat numérique et la solution analytique sera calculée. Les déplacements obtenus pour différentes discrétisations sont représentés à la Figure 11. Pour cette première analyse, le nombre de ressorts a été fixé à 30 par interface.

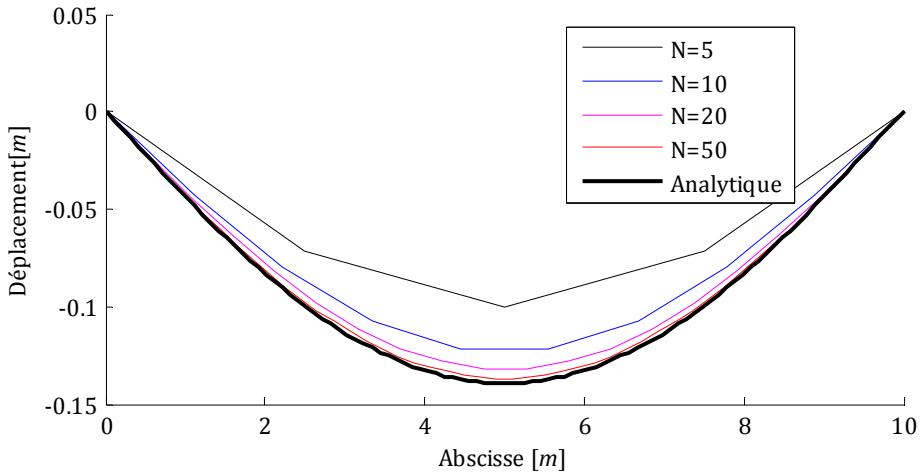


Figure 11 – Déplacement obtenu pour différents nombres de blocs N

L'erreur commise, quant à elle est, représentée à la Figure 12. En disposant cette erreur dans une échelle logarithmique (Figure 13), nous pouvons remarquer qu'elle peut être exprimée sous la forme :

$$\log(E) = m \times \log(N) + p \quad (1.8)$$

Ainsi, si l'erreur supposée admissible est fixée, il est possible de connaître le nombre de blocs minimum satisfaisant à cette condition. Par exemple, si l'erreur maximale autorisée est imposée à 2% :

$$m = -1,27$$

$$p = 2,55$$

$$N \geq 10^{\frac{\log(2)-2,55}{-1,27}} = 58,99$$

Il faudra dès lors discrétiser la poutre en 59 blocs ou plus pour satisfaire à cette condition.

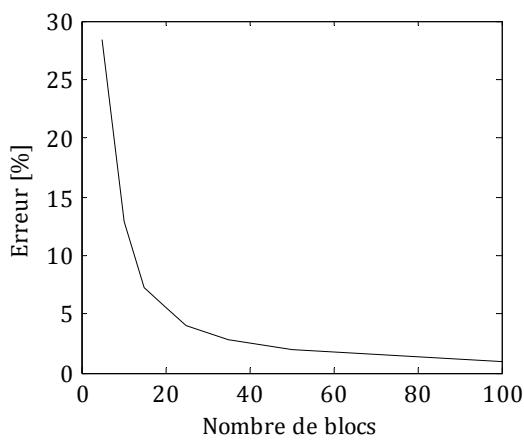


Figure 12 - Erreur en fonction de la discrétisation

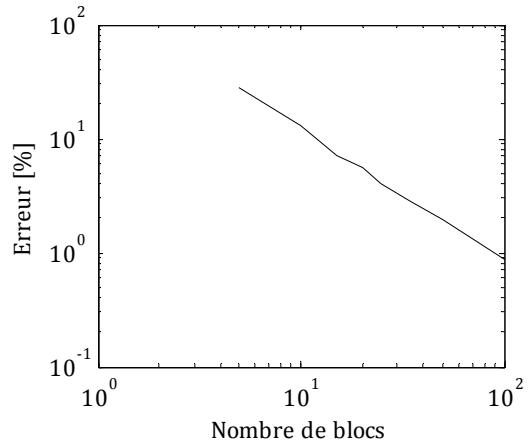


Figure 13 - Erreur sur une échelle logarithmique

4.2. Discrétisation en ressorts

L'étude de la discrétisation en ressorts se fera également sur base de la poutre bi-appuyée modélisée aux points précédents. Pour cette nouvelle analyse, le nombre de blocs sera fixé à 100, car cette discrétisation permet d'arriver à des erreurs négligeables. Les déplacements obtenus pour différentes discrétisations en ressorts sont représentés à la Figure 14.

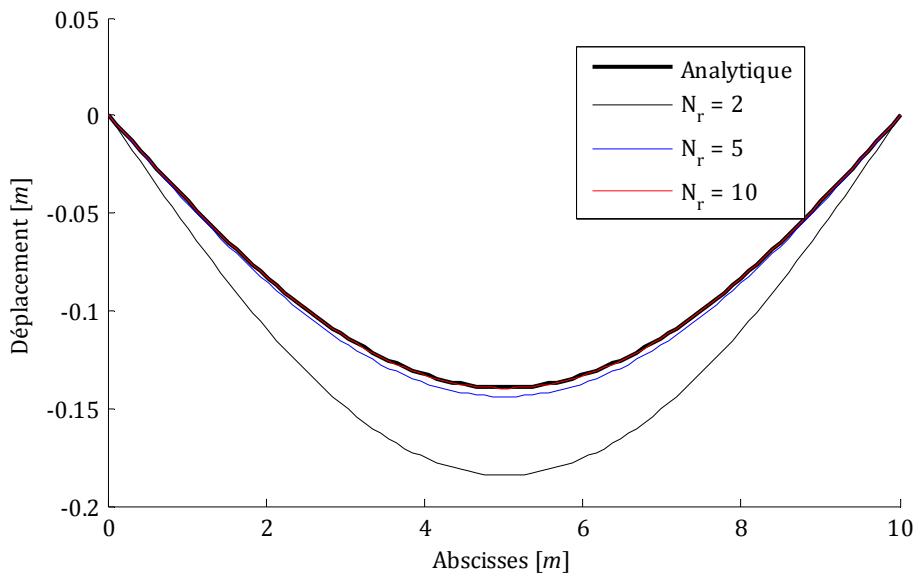


Figure 14 - Déplacement obtenu pour différents nombres de ressorts N_r

Sur la Figure 15, nous pouvons voir que l'erreur diminue assez rapidement lorsque le nombre de ressorts augmente. En effet, disposer 10 ressorts à l'interface permet de ne pas engendrer une erreur trop importante (due aux nombres de ressorts).

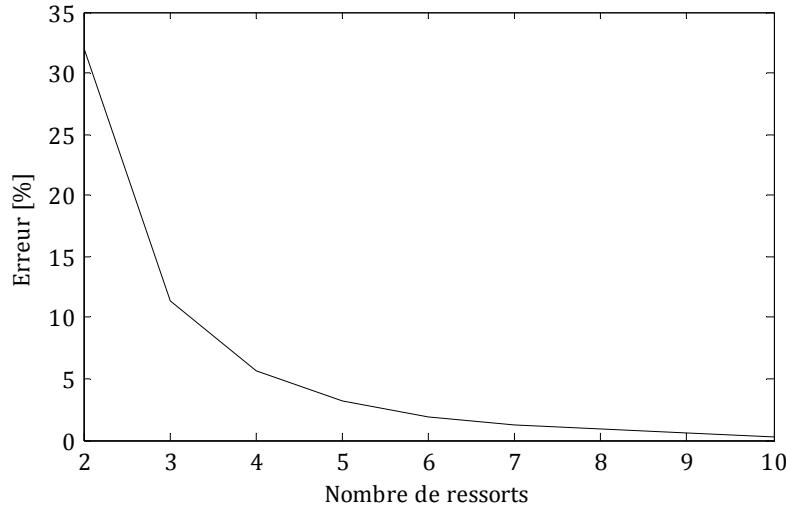


Figure 15 – Erreur en fonction du nombre de ressorts

5. Conclusions

Ce premier chapitre vient de poser les principes de base de la méthode des éléments appliqués. Il a également montré que, pour des cas simples, la méthode pouvait être très facilement mise en œuvre à l'aide d'une matrice de raideur. La comparaison des résultats avec des solutions analytiques a permis de souligner la précision à laquelle cette méthode pouvait arriver. Cependant, il est aisé de comprendre que la difficulté va croître avec les spécificités des matériaux et des structures.

Chapitre II - Non-linéarité géométrique

Table des matières du Chapitre II

1.	Introduction	31
2.	Méthodes utilisées.....	31
2.1.	Première méthode : pas incrémentale modifiée	32
2.2.	Seconde méthode : utilisation du Jacobien.....	34
2.3.	Structure du code	35
2.4.	Discussion, comparaison et validation des méthodes	36
2.4.1.	Petits déplacements	37
2.4.2.	Grands déplacements.....	37
3.	Contraintes internes	40
3.1.	Méthode utilisée	40
3.2.	Validation de la méthode	41
4.	Sensibilité au maillage	43
5.	Choix de la perturbation ϵ	44
6.	Conclusions	45

Chapitre II

Non-linéarité géométrique

1. Introduction

Sous sollicitations extrêmes, il ne serait pas judicieux de considérer le comportement des structures comme linéaire. En effet, sous un chargement important, les déplacements peuvent devenir conséquents. Dès lors, les efforts du second ordre ne peuvent pas être négligés.

Dans ce second chapitre, la non-linéarité géométrique sera prise en compte. Après un bref rappel théorique, les différentes méthodes utilisées seront exposées. De plus, le calcul des contraintes internes est indissociable de certaines méthodes. C'est pourquoi ce chapitre présentera également la façon dont ces contraintes sont calculées.

2. Méthodes utilisées

Lors d'un calcul linéaire, les efforts et les déplacements d'une structure sont déterminés à l'aide des caractéristiques de la structure dans une configuration non déformée. Cette approximation peut être faite sous l'hypothèse de petits déplacements. Or, le but de ce travail est d'étudier des structures sous sollicitations extrêmes. Il serait alors incorrect de ne pas considérer des grands déplacements.

Cependant, le problème à résoudre se complexifie grandement. En effet, les caractéristiques de la structure, comme par exemple sa matrice de raideur sont fonctions du déplacement. Or, le déplacement lui-même est fonction de ces différentes caractéristiques. Des méthodes spécifiques doivent alors être mises en œuvre. De plus, il sera montré ultérieurement que certaines de ces méthodes nécessitent le calcul des forces hors équilibre.

Dans ce travail, deux méthodes ont été étudiées de façon approfondie. Elles seront toutes deux décrites et comparées aux sections suivantes.

2.1. Première méthode : pas incrémentale modifiée

Comme mentionné précédemment, la matrice de raideur va dépendre de la configuration déformée de la structure. La raideur n'est donc plus considérée comme constante et la relation force-déplacement n'est plus une loi linéaire.

La méthode du chargement incrémentale traditionnelle consiste en une application progressive des charges. A chaque incrément de charge i , la matrice de raideur est calculée dans la configuration i de la structure afin de trouver la nouvelle configuration $i+1$ (Figure 16). Cette méthode à l'avantage d'être très facile à mettre en œuvre à l'aide de l'équation suivante :

$$D_{i+1} = D_i + K^{-1}(D_i) \times dF_i \quad (2.1)$$

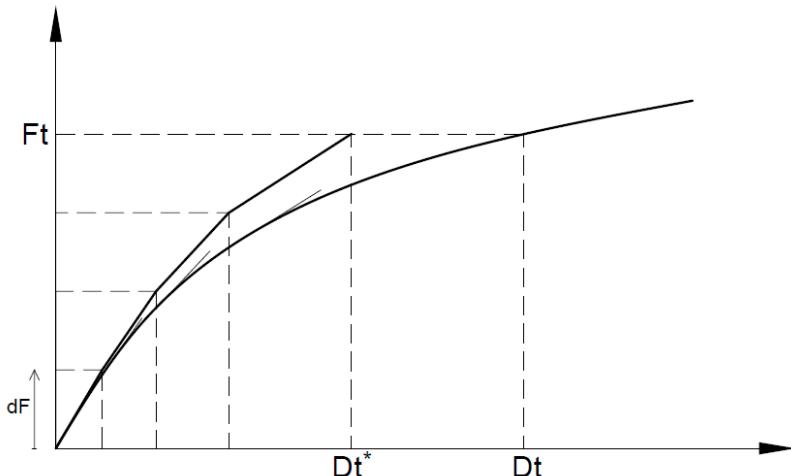


Figure 16 - Chargement incrémental

Cependant, pour chaque incrément de charge, le résultat obtenu s'éloigne de plus en plus de la solution réelle. Ce problème peut être contré de plusieurs façons. Par exemple, en choisissant un incrément de charge assez petit, il est possible de rendre négligeable l'erreur commise à chaque incrément. Cette solution engendre, néanmoins, un nombre important d'opérations à réaliser et augmente considérablement le temps de calcul du code.

La solution retenue consiste à réappliquer les forces hors équilibre lors de chaque incrément de charge. Ainsi, nous ne nous éloignons pas continuellement du comportement réel. En effet, lors d'un pas de chargement, les forces hors équilibre sont réappliquées, une nouvelle configuration intermédiaire est alors trouvée. Si cette configuration intermédiaire reste trop éloignée de la configuration intermédiaire réelle, les forces hors équilibre peuvent

à nouveau être calculées et réappliquées et ainsi de suite (Figure 17). Un critère d'arrêt a donc dû être imposé afin de savoir si les forces hors équilibre doivent à nouveau être appliquées ou si le code pouvait passer au pas de chargement suivant.

Notons qu'une astuce numérique permet de ne pas imposer un critère d'arrêt trop pénalisant. Lors d'un nouvel incrément de charge, la structure n'est pas chargée par l'incrément ΔF_{ext} mais par la charge totale appliquée à la structure lors de l'incrément, à laquelle, on soustrait les efforts intérieurs. Par exemple, à la Figure 17, le chargement se fait en deux incrémentes de charge ΔF_{ext} . Au premier incrément de force, les forces hors équilibre ne sont pas réappliquées. Cependant lors de l'incrément suivant, la force qui sera appliquée à la structure reprendra ces forces hors équilibre ($F_{ext\,tot} - F_{int} = \Delta F_{ext} + FHE$).

L'équation à résoudre est alors la suivante :

$$Dépl = Dépl_{ précédent } + K^{-1}(Dépl_{ précédent }) \times (F_{ext} - F_{int}) \quad (2.2)$$

Il est également intéressant de souligner que, dans le cas particulier où le chargement se fait en un seul pas, la méthode devient alors la méthode de Newton-Raphson.

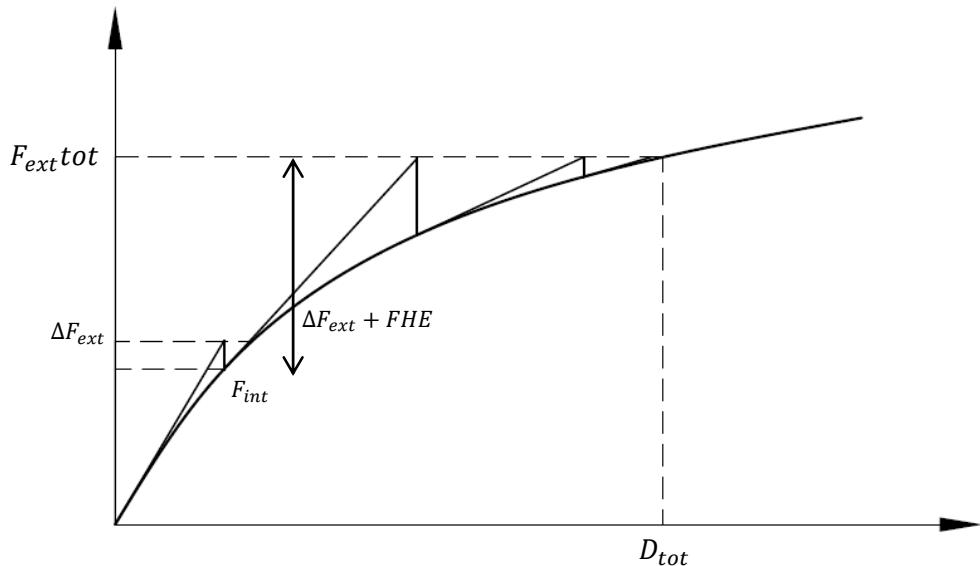


Figure 17 - Chargement incrémental modifié

Cette méthode présente l'avantage de suivre le comportement de la structure tout au long du chargement, ce qui n'est pas possible avec la méthode de Newton-Raphson traditionnelle.

2.2. Seconde méthode : utilisation du Jacobien

Nous verrons ultérieurement que la première méthode envisagée entraîne des problèmes de consistance. C'est pourquoi une seconde méthode a été étudiée. Le principe de cette méthode est identique celui de la précédente à l'exception près que la matrice de raideur est calculée différemment.

Jusqu'à présent, la matrice de raideur a été encodée manuellement à l'aide de l'expression calculée au Chapitre I. Cependant, cette nouvelle méthode n'utilise plus cette matrice. En effet, elle se base sur le calcul du Jacobien. Pour cela, une petite perturbation est imposée à chaque degré de liberté et les efforts résultants à cette perturbation seront enregistrés. Ainsi, la matrice de raideur peut être calculée de la façon suivante :

$$K_{ij} = \frac{\partial F_j}{\partial p_i} \quad (2.3)$$

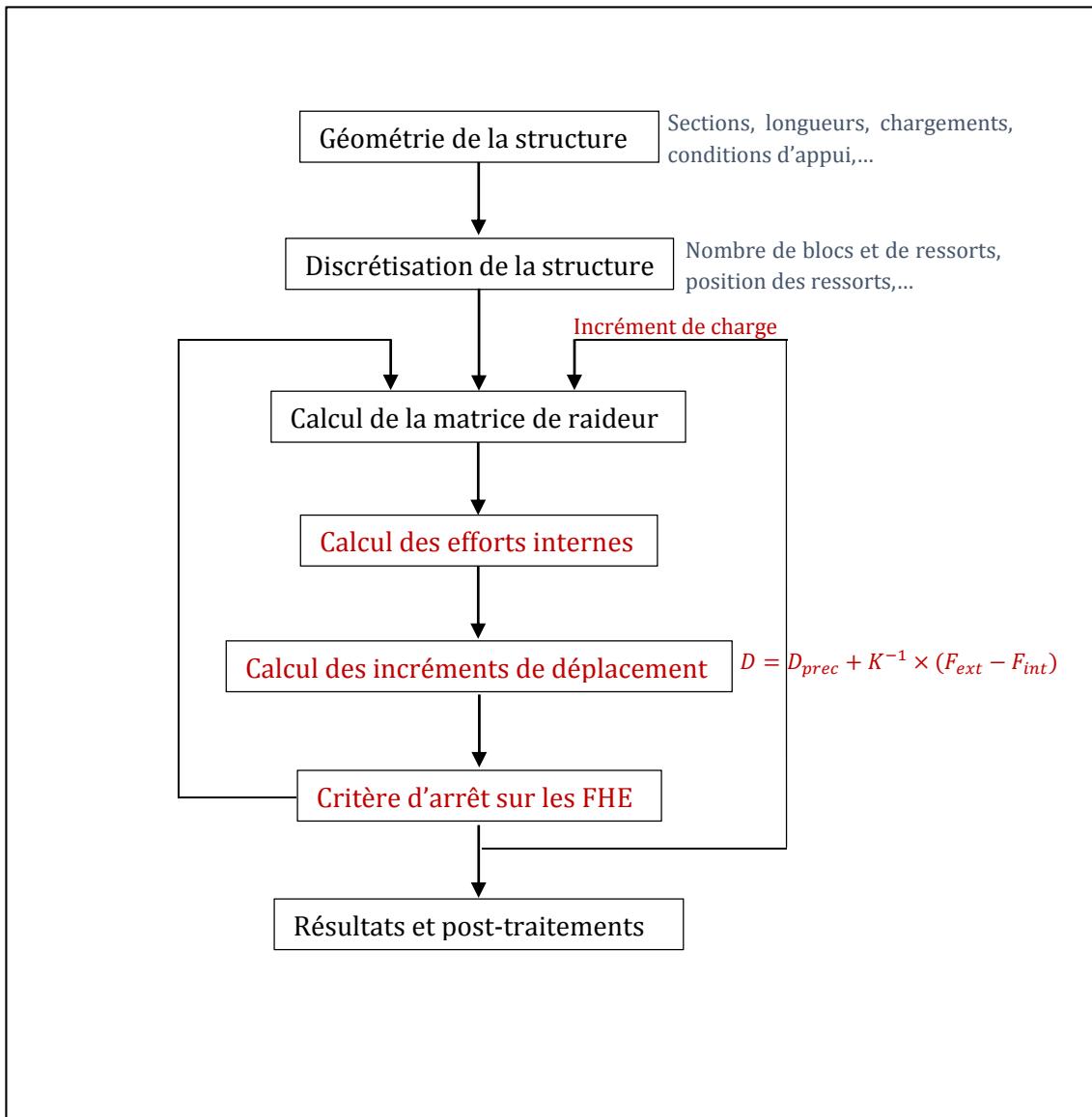
En pratique, on applique une perturbation ϵ à un des 6 degrés de liberté de l'élément. Les forces induites dans l'élément sont alors stockées dans un vecteur F_p qui sera comparé au vecteur F non perturbé. Nous obtenons alors la colonne de la matrice de raideur relative au degré de liberté perturbé. Par exemple, pour le premier degré de liberté d'un élément quelconque :

$$K_{1j} = \frac{F_p - F}{\epsilon} \quad (2.4)$$

Cette opération doit être effectuée sur chaque degré de liberté de l'élément afin d'obtenir chaque colonne de la matrice de raideur $K_{element}$.

2.3. Structure du code

La nouvelle structure du code peut maintenant être schématisée comme ceci :



Pour des questions de lisibilité, les nouveautés sont inscrites en rouge. De plus, cette structure a été grandement simplifiée. Cette structure se compliquera de plus en plus au fil des chapitres. C'est pourquoi des simplifications sont grandement requises. Cependant, les routines MATLAB complètes sont fournies en annexes.

2.4. Discussion, comparaison et validation des méthodes

Ces deux méthodes vont désormais être comparées avec un cas analytique simple mais fortement non-linéaire. Ce cas est celui d'une poutre encastrée libre soumise à un moment d'extrémité. La solution analytique est aisément calculable.

Pour ce type de chargement, le moment est constant tout au long de la poutre et est égal au moment d'extrémité. La courbure peut donc être connue :

$$\chi = \frac{M}{EI} \quad \text{et} \quad R = \frac{1}{\chi}$$

De plus, la longueur d'un arc est de :

$$L = \theta R$$

La longueur de la poutre étant constante, les relations suivantes peuvent être notées :

$$\theta = \frac{L}{R}$$

$$H = L - R \sin \theta$$

$$V = R(1 - \cos \theta)$$

Avec χ la courbure, R le rayon de courbure, θ l'angle sous-tendu, L la longueur de la poutre, E son module Young, I son inertie, H et V les déplacements verticaux et horizontaux en bout de poutre. Toutes ces notations sont reprises à la Figure 18.

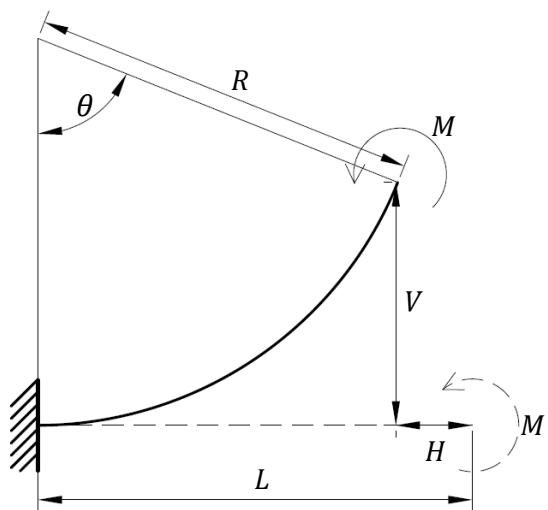


Figure 18 - Notation de la solution analytique

2.4.1. Petits déplacements

Pour des moments d'extrémités peu élevés, les déplacements restent petits et les effets du second ordre ne sont pas importants. Par exemple, pour la poutre caractérisée par les paramètres suivants :

- $L = 5 \text{ m}$
- $I = 2,25 \cdot 10^{-4} \text{ m}$
- $E = 210 \text{ MPa}$
- $\nu = 0,3$
- $M = 200 \text{ kNm}$
- $N_{bloc} = 100$
- $N_{ressort} = 10$

Les déplacements verticaux et horizontaux en bout de poutre sont les suivants :

	1 ^{ère} méthode	2 ^{nde} méthode	Analytique
V	5,5 cm	5,4 cm	5,4 cm
H	0,4 mm	0,4 mm	0,4 mm

Tableau 1 - Résultats pour des petits déplacements

Ces résultats confirment ceux obtenus au Chapitre I. En effet, les différences obtenues entre les solutions ne sont pas significatives et les deux méthodes sont valides lors d'un calcul quasi linéaire.

2.4.2. Grands déplacements

Pour des déplacements légèrement plus importants que ceux observés précédemment, des problèmes de stabilité apparaissent pour la première méthode. Ceci est dû à un problème de consistance. La matrice de raideur n'est pas calculée de la même façon que les contraintes internes. Or, il se trouve que ces deux méthodes ne sont pas compatibles, ce qui engendre une instabilité.

La seconde méthode, quant à elle, est stable et converge vers une solution. En effet, le calcul de la matrice de raideur se fait à partir des contraintes, le problème de consistance n'apparaît donc plus. Afin de le prouver, un nouveau cas de poutre simple est maintenant étudié. Cette poutre est caractérisée par les paramètres suivants :

- $L = 5 \text{ m}$
- $I = 2,25 \cdot 10^{-4} \text{ m}$
- $E = 210 \text{ MPa}$
- $\nu = 0,3$
- $M = 50000 \text{ kNm}$
- $N_{bloc} = 100$
- $N_{ressort} = 10$

Pour ce nouveau cas, les résultats obtenus aux différents pas de chargement seront enregistrés afin de pouvoir tracer la courbe de comportement de la poutre (Figure 20). La configuration déformée de la poutre sous un moment d'extrémité de 50000 kNm est représentée à la Figure 19. Cette figure est obtenue en utilisant la seconde méthode numérique.

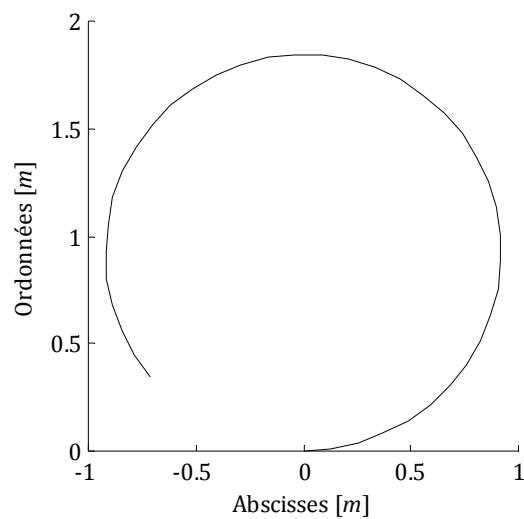


Figure 19 - Configuration déformée de la poutre sous 50000 kNm

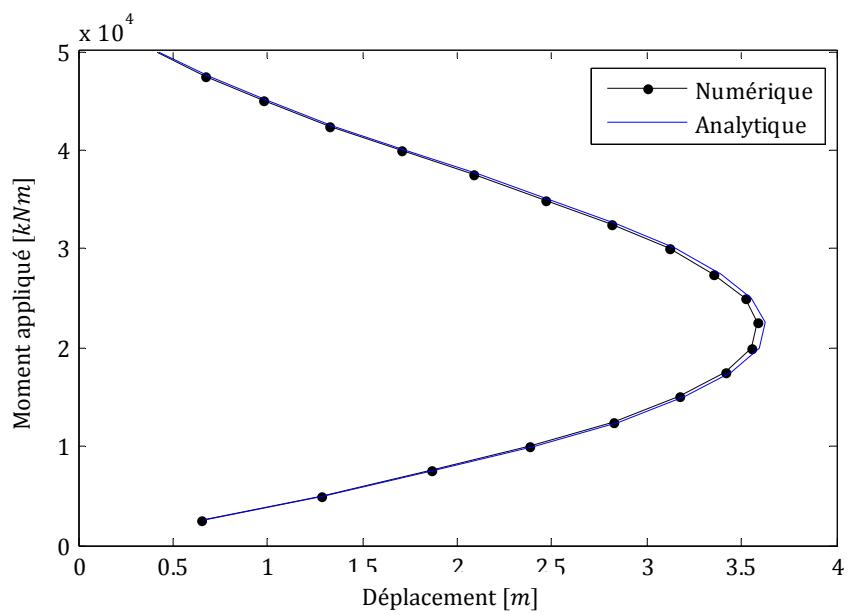


Figure 20 - Relation moment appliqué - déplacement

En analysant la configuration déformée obtenue avec la seconde méthode, nous pouvons observer que la courbure de la poutre est constante. En continuant le chargement, celle-ci finirait par former un cercle. En pratique, cette configuration déformée serait bien sûr difficilement observable. Il ne faut pas oublier que pour ces résultats, l'hypothèse de limite d'élasticité infinie est toujours d'actualité.

La seconde figure, quant à elle, permet de constater que les courbes obtenues analytiquement et numériquement ont une allure similaire. Une analyse de sensibilité au maillage sera faite ultérieurement sur base de cette figure.

La solution numérique est suffisamment proche de la solution analytique que pour considérer la seconde méthode comme valide.

3. Contraintes internes

Les points précédents ont montré l'importance de calculer correctement les forces hors équilibre et donc les forces intérieures. La méthode utilisée pour calculer les contraintes internes ne nécessite que de la configuration déformée de la structure.

Les contraintes dans l'élément pourraient être calculées à partir de la relation $F = Kq$. Cependant, il sera utile ultérieurement de pouvoir connaître les efforts non pas dans les éléments mais dans chaque ressort. La méthode qui va maintenant être présentée permettra de calculer les contraintes et ensuite les forces hors équilibre.

3.1. Méthode utilisée

La méthode utilisée est assez simple. Elle consiste à calculer le déplacement relatif entre deux blocs afin de connaître l'élongation ou le raccourcissement de chaque ressort. En effet, le déplacement horizontal et vertical de chaque bloc étant connu, il suffit alors de rajouter le déplacement supplémentaire des « bords » du bloc causé par la rotation. Une fois ce déplacement connu, il faut le décomposer en un déplacement normal et un déplacement tangentiel. Cette étape est représentée sur la Figure 21. Le déplacement relatif à un couple de ressorts (en rouge) est décomposé en une composante perpendiculaire et une composante parallèle à la bissectrice aux deux blocs.

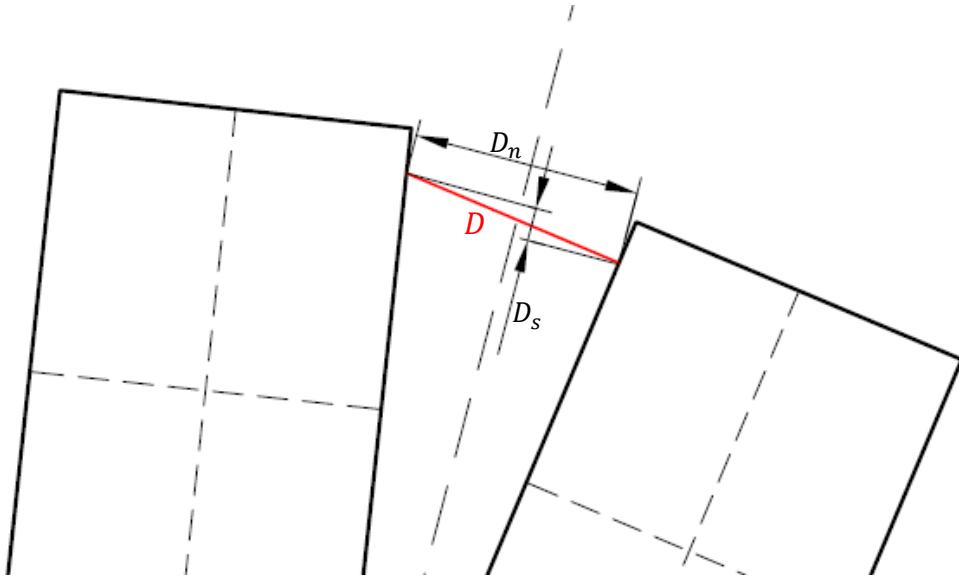


Figure 21 - Décomposition du déplacement

Afin de connaître les contraintes dans le couple de ressorts, il suffit désormais de multiplier les deux composantes du déplacement par la raideur correspondante. Une fois les efforts dans chaque ressort connus, il suffit de les reporter au centre des blocs afin d'obtenir l'effort normal, l'effort tranchant ainsi que le moment. Il est à noter que le moment est calculé en multipliant les efforts dans les ressorts et leurs bras de levier.

Les forces internes, quant à elles, sont obtenues en sommant les forces exercées par les ressorts de chaque interface.

3.2. Validation de la méthode

La méthode peut être validée en analysant les efforts dans des structures simples comme par exemple une poutre bi-appuyée et uniformément chargée. Pour une poutre de 5m de long soumise à une charge uniforme de 10kN/m, le moment en mi-travée est de :

$$M_{max} = \frac{pL^2}{8} = 31,25 \text{ kNm}$$

L'effort tranchant aux appuis est quant à lui de :

$$T_{max} = \pm \frac{pL}{2} = 25 \text{ kN}$$

Les résultats obtenus par voie numérique (Figure 22) sont en accords avec ces valeurs et avec l'allure des diagrammes de moment et d'effort tranchant de base.

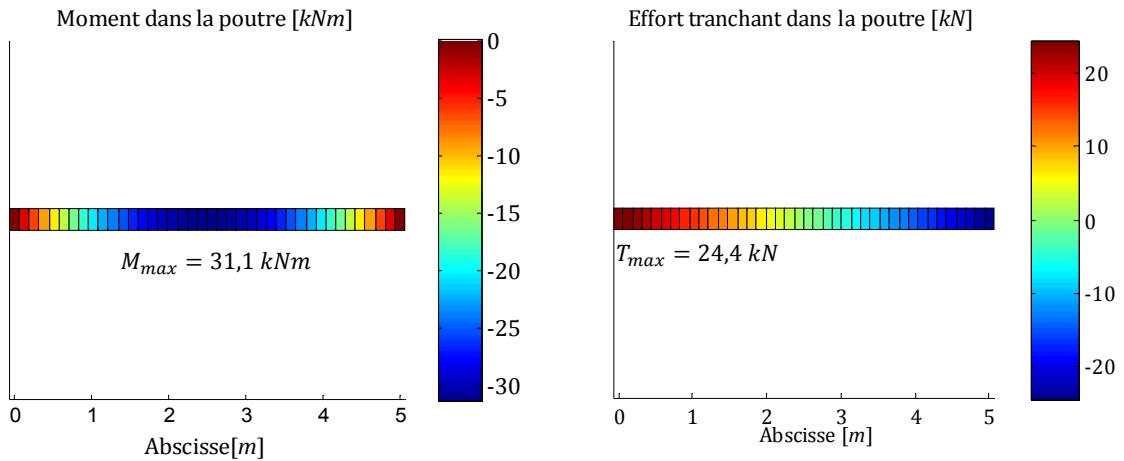


Figure 22 – Efforts dans la poutre

De plus, il peut être intéressant de connaître la répartition des contraintes dans une section précise. Pour ce faire, la force sollicitant un ressort est divisée par l'air de la section représentée par ce même ressort. Ainsi, les composantes normale et tangentielle permettront de calculer respectivement les contraintes σ et τ . Par exemple, si la poutre précédemment étudiée a une hauteur de 30cm et une largeur de 10cm, la contrainte σ maximale observée en mi travée sera de :

$$\sigma = \frac{My}{I} = 20,83 \text{ MPa}$$

La contrainte de cisaillement τ observée aux appuis sera quant à elle de :

$$\tau = \frac{T}{A} = 0,83 \text{ MPa}$$

Les résultats obtenus numériquement (Figure 23) sont également en accords avec les valeurs analytiques.

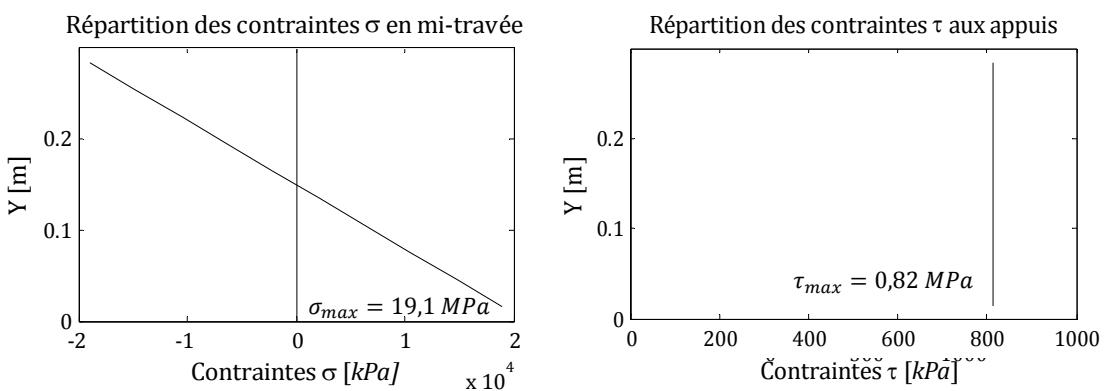


Figure 23 - Répartitions des contraintes

Les diagrammes obtenus à la Figure 23 sont cependant légèrement écrêtés et ce, dû à la discrétisation.

4. Sensibilité au maillage

L'étude de la sensibilité au maillage se fera sur base du cas étudié à la Figure 20. Cette poutre sera discrétisée de différentes façons et les erreurs engendrées seront comparées. La Figure 24 reprend les relations moment-déplacement obtenues avec diverses discrétisations. Le nombre de ressorts, quant à lui, est fixé à 10 par interface.

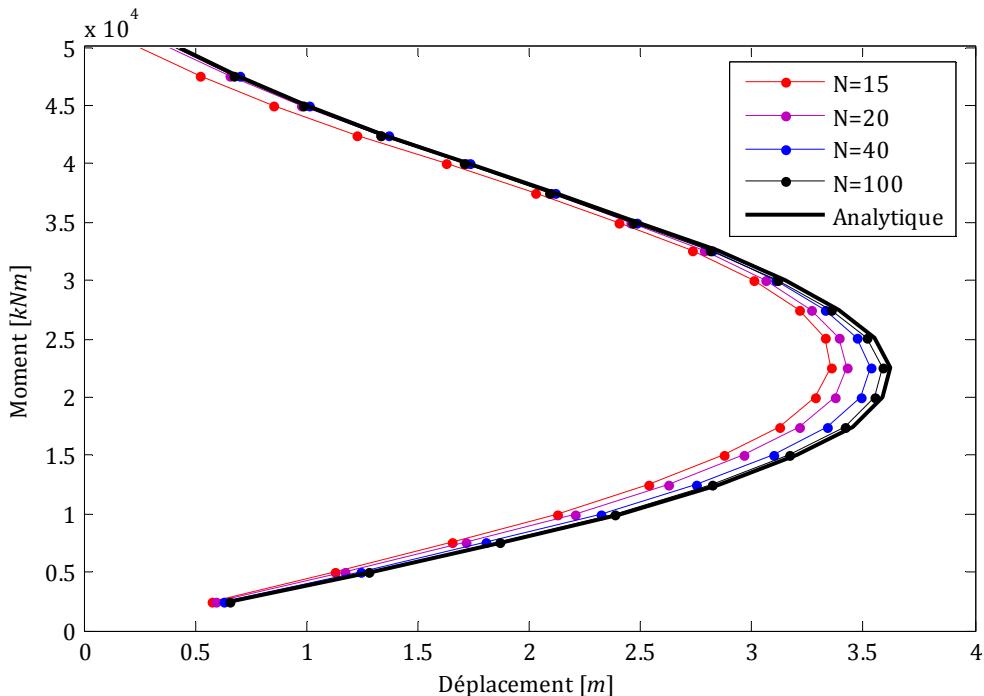


Figure 24 - Relation moment-déplacement pour différentes discrétisations

L'erreur est représentée à la Figure 25 et, comme lors d'un calcul linéaire, elle peut être représentée sur une échelle logarithmique. La relation obtenue est à nouveau linéaire. Toutes les remarques faites lors du Chapitre I restent donc valables. La comparaison peut même aller plus loin, car les deux courbes se superposent parfaitement.

La relation qui a été déterminée lors du premier chapitre est propre à la méthode. Elle peut donc être généralisée à toutes les analyses de poutre, qu'elles soient linéaires ou non.

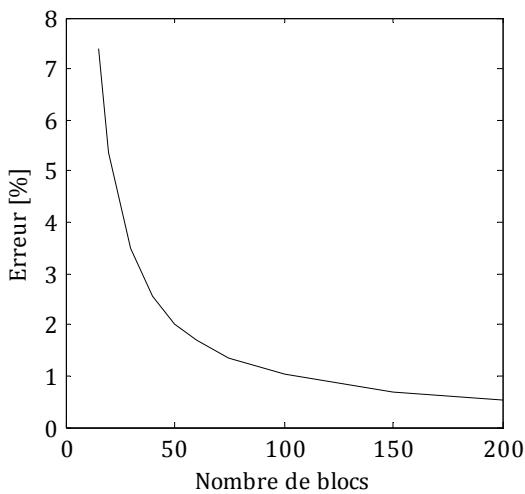


Figure 25 - Erreur en fonction de la discréétisation

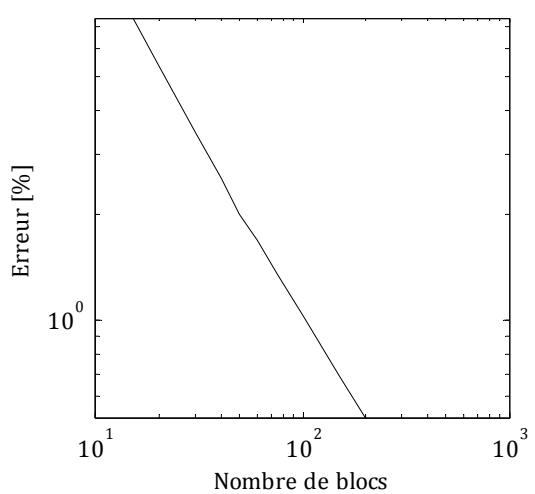


Figure 26 - Erreur sur une échelle logarithmique

5. Choix de la perturbation ϵ

La seconde méthode abordée pour la détermination de la matrice de raideur est basée sur la méthode du Jacobien. Cette méthode implique d'imposer une petite perturbation ϵ aux différents degrés de liberté. Ce paramètre ne doit bien sûr pas être fixé au hasard. Son effet a donc été étudié sur la matrice de raideur de la poutre encastrée modélisée précédemment. La Figure 27 reprend la norme de la matrice de raideur obtenue pour différentes perturbations.

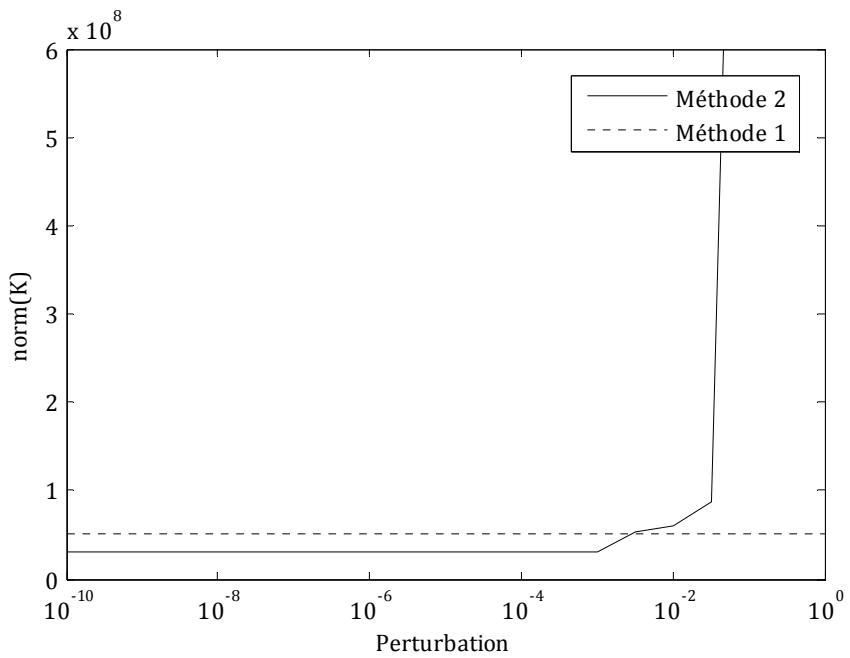


Figure 27 - Norme de la matrice de raideur en fonction de la perturbation appliquée

Sur cette figure, nous pouvons tout d'abord observer que, pour une perturbation inférieure à 10^{-3} , la norme de la matrice de raideur est constante. Nous pouvons donc considérer la matrice de raideur obtenue pour ces valeurs comme correcte. Par contre, pour des valeurs supérieures à cette borne, la norme de la matrice de raideur s'éloigne de plus en plus de la solution exacte.

Certaines remarques sont cependant à faire. En effet, si le problème à résoudre était parfaitement linéaire, la perturbation pourrait être très grande et la matrice de raideur obtenue serait tout de même exacte. Au contraire, pour un problème dans la non-linéarité serait plus importante, des matrices de raideurs incorrectes apparaîtraient pour une perturbation inférieure à 10^{-3} .

Dans le reste de ce travail, la perturbation sera fixée à 10^{-5} . En effet, il est préférable de ne pas choisir une perturbation trop petite qui pourrait engendrer des erreurs numériques (dues en partie au epsilon machine de MATLAB). Ce choix permet donc d'obtenir une matrice de raideur correcte tout en évitant les erreurs numériques. Cependant, pour certains cas, il sera peut être nécessaire de revoir la valeur de ce paramètre.

Sur la Figure 27, nous pouvons également observer la norme de la matrice de raideur obtenue avec la première méthode. Celle-ci est très éloignée du résultat considéré comme exact. Nous pouvons comprendre la raison pour laquelle des problèmes de consistance apparaissent pour cette méthode. Il est à noter que le calcul de ces différentes normes a été effectué dans une configuration légèrement déformée. En configuration initiale, les deux méthodes fournissent des matrices de raideur dont les normes sont assez proches.

6. Conclusions

La matrice de raideur déterminée lors du premier chapitre convenait pour un calcul au premier ordre. Cependant, pour un calcul non-linéaire, un problème de consistance a nécessité de trouver une autre voie pour déterminer la matrice de raideur. Désormais, la raideur est définie à l'aide de l'expression du Jacobien.

De plus, il a également fallu mettre en œuvre une méthode de résolution non-linéaire. Pour des questions de flexibilité, la solution choisie a été une combinaison entre la méthode du chargement incrémental et de Newton-Raphson.

Cette démarche demande de passer par le calcul des forces hors équilibre et donc par celles des forces intérieures. Par conséquent, ce second chapitre a été une bonne occasion de présenter la manière de calculer les efforts dans la structure.

En conclusion, une fois adaptée, la méthode permet de calculer assez précisément des problèmes dont la non-linéarité est due à la géométrie. Le prochain chapitre traitera les non-linéarités matérielles.

Chapitre III - Non-linéarité matérielle

Table des matières du Chapitre III

1. Introduction	48
2. Méthodes utilisées.....	48
2.1. Plastification et ruine d'un ressort.....	48
2.2. Lois de comportement	49
2.2.1. Acier	49
2.2.2. Béton.....	50
En compression	50
En traction.....	51
Représentation des armatures	51
Cisaillement.....	52
2.3. Structure du code	53
2.4. Validation de la méthode	54
2.4.1. Poutre en béton.....	54
Contraintes internes	57
2.4.2. Portique en acier.....	58
3. Conclusions	60

Chapitre III

Non-linéarité matérielle

1. Introduction

Jusqu'à présent, les matériaux ont toujours été considérés comme parfaitement résistants. Or, dans le domaine de la modélisation de structure sous sollicitations extrêmes, il serait aberrant de conserver l'hypothèse de limite d'élasticité infinie.

Lors de ce troisième chapitre, il sera nécessaire de représenter au mieux le comportement réel des matériaux. De plus, il faudra également s'assurer que les méthodes utilisées précédemment gèrent correctement cette nouvelle source de non-linéarité.

2. Méthodes utilisées

Dans le domaine de la construction, l'acier et le béton sont les deux matériaux très répandus pour des structures de grande envergure. Par conséquent, il est important de pouvoir représenter les phénomènes de plastification et de ruine d'une fibre.

2.1. Plastification et ruine d'un ressort

Dans le chapitre précédent, il a été mentionné que l'elongation ou le raccourcissement de chaque ressort est à calculer. En effet, afin de connaître les contraintes internes, il est nécessaire de calculer la déformée de chaque ressort. Désormais, il est nécessaire d'adapter cette étape afin de prendre en compte le comportement des matériaux. Ceci se fera à partir de critère à vérifier lors du calcul des contraintes.

Pour chaque matériau, il est désormais nécessaire de connaître sa limite d'élasticité ainsi que la déformation à la ruine. Si le déplacement reste dans l'intervalle élastique, le calcul des contraintes se fait comme précédemment à partir de la raideur. Cependant, si le déplacement dépasse la valeur limite avant la ruine, la contrainte dans le ressort sera dès lors imposé à

zéro. En ce qui concerne le domaine plastique, une discussion est à faire en fonction des lois de comportement.

2.2. Lois de comportement

Avant d'aborder les différentes lois de comportement utilisées il est important de souligner une simplification importante. En pratique, les efforts normaux et tangentiels sont liés. Or, la raideur normale et tangentielle sera considérée comme indépendante. Pour des matériaux comme l'acier, cette hypothèse ne porte pas trop à conséquence. Cependant, ce couplage n'est pas négligeable dans le béton. Il faudra donc revoir cette hypothèse si les résultats obtenus sont trop éloignés de la réalité.

2.2.1. Acier

En pratique, l'acier se comporte élastiquement jusqu'à l'apparition d'un palier plastique suivi d'un regain de raideur dû à l'écrouissage. Cependant, étant donné que la méthode fonctionne en force imposée, il est très difficile de représenter un palier plastique. En effet, une fois la contrainte de plasticité dépassée, il n'est plus possible de trouver un déplacement correspondant.

Afin de remédier à ce problème, une certaine pente est donnée à la loi de comportement lors de la plastification (Figure 28). Cet artifice numérique permet de trouver un déplacement pour une contrainte légèrement supérieure à la contrainte de plasticité. De plus, la raideur due à l'écrouissage de l'acier est également prise en compte.

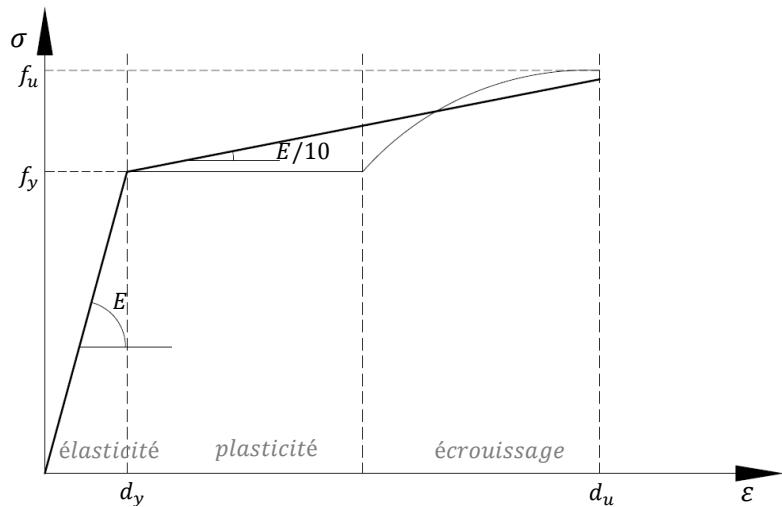


Figure 28 - Loi de comportement utilisée pour l'acier

Des détails additionnels relatifs à cette loi seront apportés dans le Chapitre IV.

Le comportement de l'acier en cisaillement est modélisé de la même manière à quelques différences près. Tout d'abord, le module de Young (E) est remplacé par module de cisaillement (G). De plus, la limite d'élasticité en cisaillement sera prise égale à $0,7 \times f_y$.

2.2.2. Béton

En compression

La loi de comportement du béton est plus compliquée à intégrer numériquement. Une solution simple consistant à considérer un comportement linéaire du béton et ce jusqu'à la rupture pourrait être envisagée. Cependant, afin de représenter au mieux le comportement réel et d'exploiter d'avantage les capacités de la méthode, la loi utilisée est tirée d'une expression analytique proposée par Popovics ([15]). D'après cet article, la contrainte σ engendrée par une déformation ε peut être exprimée comme ceci :

$$\frac{\sigma}{f'_c} = \frac{n(\varepsilon/\varepsilon'_c)}{n - 1 + (\varepsilon/\varepsilon'_c)^{nk}} \quad (3.1)$$

Avec,

- f'_c : contrainte maximum obtenue sur un essai effectué sur un cylindre ;
- ε'_c : déformation lorsque le pic est atteint ;
- $n = 0,8 + \frac{f'_c}{17}$ [MPa] ;
- $k = 0,67 + \frac{f'_c}{62}$ [MPa] .

Par exemple, pour un essai pratiqué sur cylindre et représenté en bleu sur la Figure 29, les paramètres à prendre en compte sont les suivants :

- $f'_c = 31,65$ MPa;
- $\varepsilon'_c = 0,0017$ %
- $n = 2,6618$ MPa ;
- $k = 1,1805$ MPa.

Et la courbe obtenue à l'aide de la formulation analytique est donnée à la Figure 29 (en rouge).

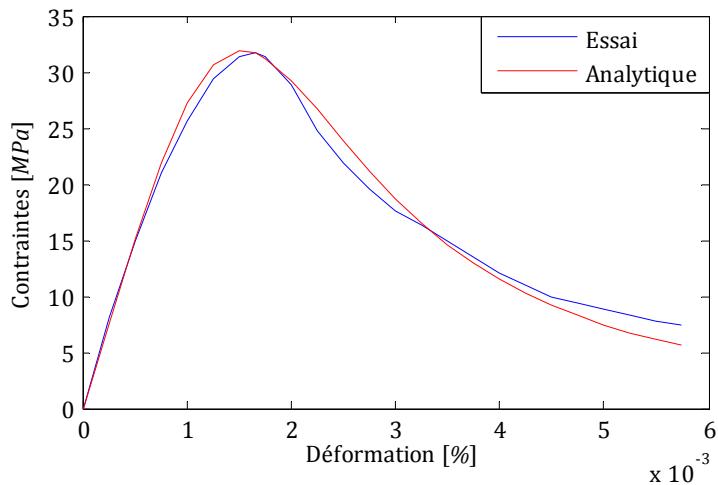


Figure 29 - Comparaison des diagrammes contraintes-déformations

La superposition des deux courbes montre que la formulation analytique représente assez fidèlement le comportement réel du béton.

En traction

Le comportement du béton en traction est pris en compte d'une façon plus traditionnelle. La raideur est considérée comme constante jusqu'à la résistance en traction du béton. Si cette valeur n'est pas clairement donnée, elle sera alors prise à :

$$f_{ct} = 0,3 f_c'^{2/3} \quad (3.2)$$

Avec f_{ct} , la résistance en traction et f_c' , la résistance en compression. Une fois la contrainte en traction maximale dépassée, la raideur est prise nulle. La relation contrainte déplacement dans le cas d'un ressort en béton sollicité en traction devient alors :

$$\sigma = \begin{cases} E_c \times \varepsilon & \text{si } \varepsilon \leq f_{ct}/E \\ 0 & \text{si } \varepsilon > f_{ct}/E \end{cases} \quad (3.3)$$

Représentation des armatures

Dans le cas du béton armé, les armatures doivent également être modélisées. Deux solutions sont envisageables. La première consiste en la discrétisation des armatures en blocs particuliers. Cependant, la méthode des éléments appliqués présente l'avantage de pouvoir simplifier la modélisation. En effet, en discrétisant la structure en bloc grossier, il est possible de représenter les armatures à l'aide de ressorts particuliers (Figure 30). Ainsi, le

maillage reste simple et le temps de calcul assez court, cependant, les armatures restent tout de même représentées précisément.

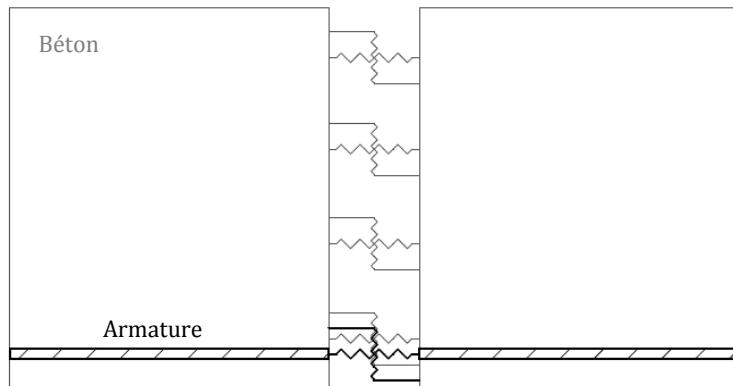


Figure 30 - Modélisation des armatures

Cette représentation des armatures comporte néanmoins une lacune, il n'est pas possible de représenter le glissement entre l'armature et le béton. Si le but de la modélisation est d'étudier la ruine par manque d'adhésion entre les armatures et le béton, il est dès lors nécessaire de modéliser les armatures par des blocs spécifiques. Ainsi, l'interface entre l'acier et le béton pourra être définie par des ressorts caractérisés pour ce type de problème.

Cisaillement

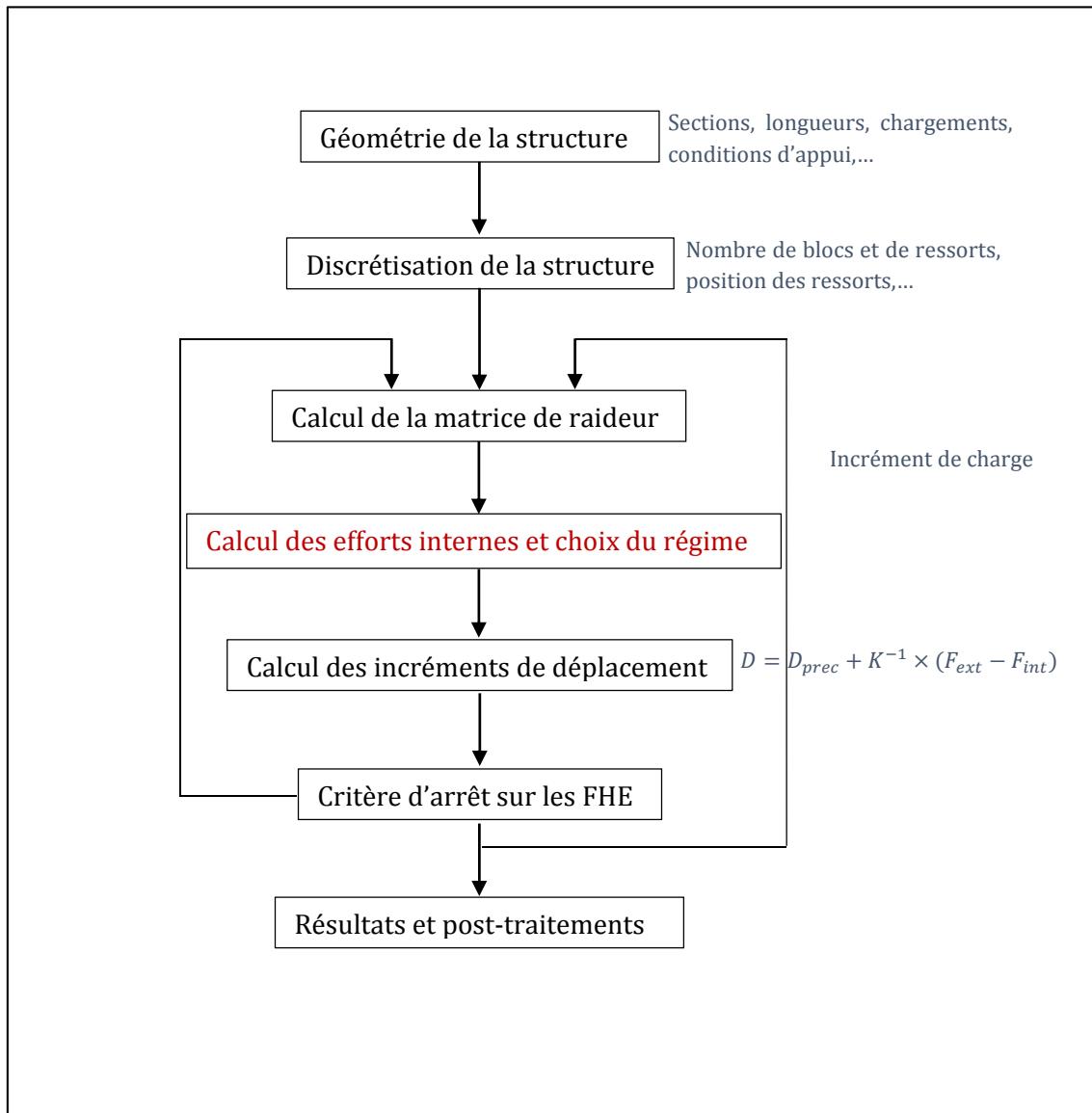
Le comportement en cisaillement est par contre fortement simplifié. Les effets réels du cisaillement sur un bloc de béton sont très complexes et dépassent le cadre de ce travail. Une des perspectives prioritaires consisterait à représenter avec précisions ces effets.

Dans ce travail, la ruine par cisaillement ne sera pas prise en compte. Le comportement sera considéré comme linéaire en conservant l'expression du K_n calculé lors du premier chapitre.

Les cas étudiés se limiteront à des poutres dont la ruine apparaît par excès d'effort normal, c'est-à-dire par flexion, traction ou compression.

2.3. Structure du code

La nouvelle structure du code peut maintenant être schématisée comme ceci :



Sur cette nouvelle schématisation le choix du régime est apparu. Ainsi, en fonction du déplacement trouvé, les contraintes seront calculées dans un régime élastique ou plastique. Si le déplacement est supérieur à la valeur limite, l'effort interne sera imposé à zéro.

2.4. Validation de la méthode

La validation de la méthode se fera sur deux cas pratiques, une poutre en béton ainsi qu'un portique en acier.

2.4.1. Poutre en béton

Le premier cas pratique de ce chapitre est une étude d'une poutre en béton. Afin d'obtenir une base comparative, la poutre en béton modélisée sera identique à celle étudiée lors d'un essai. Les données qui ont été collectées sont tirées de l'ACI Structural Journal ([8]). Les divers paramètres de la poutre sont les suivants.

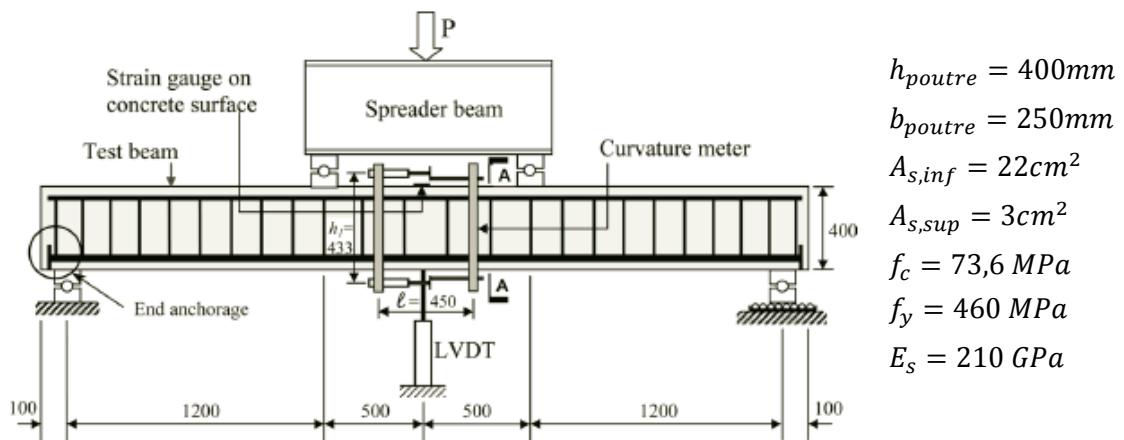


Figure 31 - Paramètres de l'essai. Source : ACI Structural Journal [8]

Le module de Young du béton, n'a pas été mesuré, cependant, il est conseillé dans l'article [8] d'utiliser la formule suivante [7] :

$$E_c = 8750(f'_c)^{0,33} = 36,15\text{ GPa} \quad (3.4)$$

Les paramètres de la modélisation du comportement du béton proposée par Popovics (Equation 3.1) sont les suivants :

- $n = 0,8 + \frac{f'_c}{17} = 5,129\text{ MPa}$;
- $k = 0,67 + \frac{f'_c}{62} = 1,857\text{ MPa}$.

De plus, dans son article Popovics donne également une expression permettant de calculer la déformation obtenue au pic de résistance :

$$\varepsilon'_c = \frac{f'_c}{E_c} \left(\frac{n}{n-1} \right) = 0,0025 \% \quad (3.5)$$

Les résultats obtenus lors de l'essai sont donnés à la Figure 32.

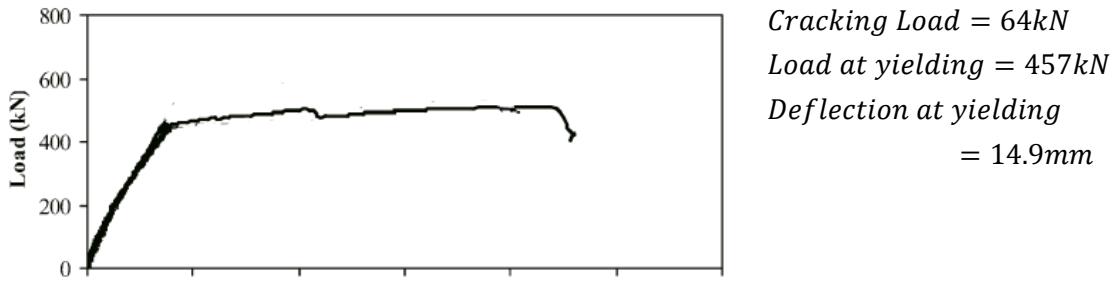


Figure 32 - Résultats de l'essai. Source : ACI Structural Journal [8]

Cette poutre est ensuite modélisée dans MATLAB en une discréétisation de 68 blocs (ce nombre a été choisi pour que les charges appliquées se retrouvent au centre des blocs). De plus, 12 ressorts sont disposés sur toute la hauteur des interfaces afin de représenter le béton et un ressort supplémentaire par interface est placé pour prendre en compte la présence des armatures inférieures. Les étriers et les armatures supérieures ne sont pas pris en compte dans la modélisation. Un chargement progressif est désormais appliqué comme défini dans Chapitre II. La relation force-déplacement obtenue est représentée à la Figure 33 qui reprend également les résultats de l'essai.

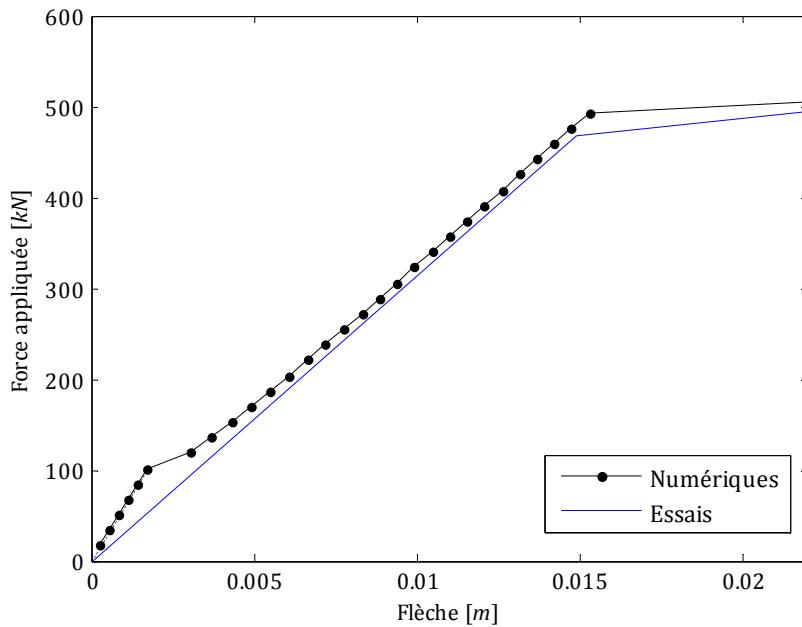


Figure 33 - Comparaison des résultats des essais et des résultats numériques

Lorsque la charge augmente, nous pouvons tout d'abord observer une première cassure de pente qui correspond à la charge de fissuration. Ensuite, le chargement continue à augmenter jusqu'à l'apparition d'un palier causé par la plastification de l'armature. Etant donné que la méthode fonctionne en force imposée, il n'est pas possible de représenter les pertes de résistances qui apparaissent après ce palier plastique lors d'un essai réel. Les différentes valeurs clés obtenues sont ensuite comparées aux résultats des essais (Tableau 2).

	Essais	Numériques	Differences
Cracking load	64 kN	100 kN	56%
Load at yielding	467 kN	493 kN	5,5%
Deflection at yielding	14,9 mm	15,3 mm	2,7%
Deflection at 467 kN	14,9 mm	14,5 mm	2,7%

Tableau 2 – Comparaison des résultats des essais et des résultats numériques

Nous pouvons tout d'abord remarquer que les valeurs obtenues sont assez proches les unes des autres. De plus, il est important de souligner que nous retrouvons bien les 3 phases de la courbe de comportement obtenue en laboratoire (section non fissurée, section fissurée et plastification de l'armature).

Il est fréquent d'observer des différences entre des prévisions numériques et les cas pratiques correspondants. Notons tout d'abord que, pour ce nombre de blocs, l'erreur attendue est de 1,7% (Figure 25). La différence obtenue peut également provenir du module de Young qui a été calculé à l'aide d'une formule empirique.

Cette comparaison souligne la similitude des résultats et nous considérons la méthode valide. Notons cependant la différence entre les charges de fissuration obtenues au Tableau 2. Dans le futur, il serait intéressant de revoir la loi de comportement utilisée pour le béton en traction par exemple en prenant en compte les phénomènes de « tension softening ».

Contraintes internes

Il peut également être intéressant d'analyser la répartition des contraintes dans la section. La Figure 34 illustre cette répartition de contraintes internes au pas de chargement qui précède la plastification de l'armature. Afin de rendre la figure plus claire, les échelles utilisées pour représenter les contraintes dans l'acier et dans le béton ne sont pas les mêmes.

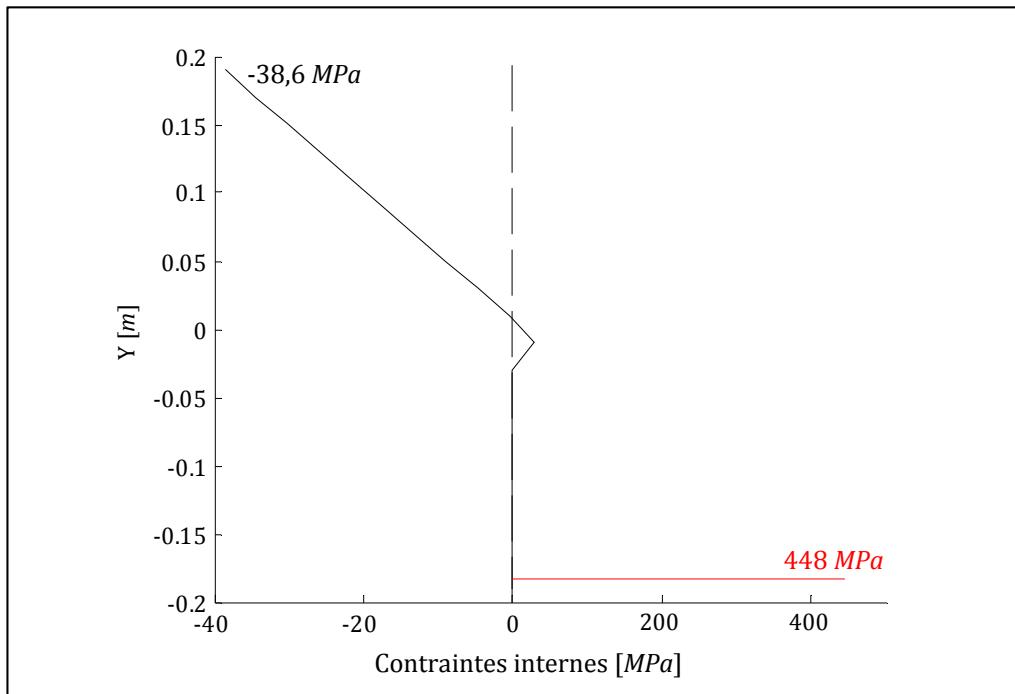


Figure 34 - Répartition de contraintes dans la section

Les résultats présentés à la Figure 34 sont en accord avec les principes de base de la construction en béton armé. Tout d'abord, le mode de ruine observé lors du chargement de

la poutre est confirmé. En effet, la section de poutre subit une plastification de l'armature avant que la zone comprimée du béton ne s'écrase.

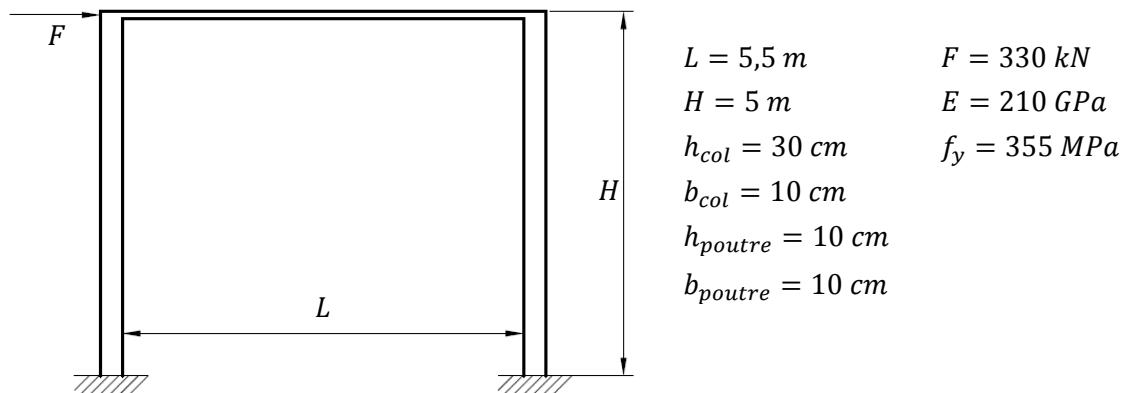
De plus, le béton travaille principalement en compression. La loi de comportement modélisée autorise cependant un léger effort de traction qui est bel et bien retrouvé dans le diagramme de contraintes.

Tous ces résultats semblent convaincants. Dans le reste de ce travail, nous considérerons donc la méthode comme valide lors de modélisation de poutre en béton armé.

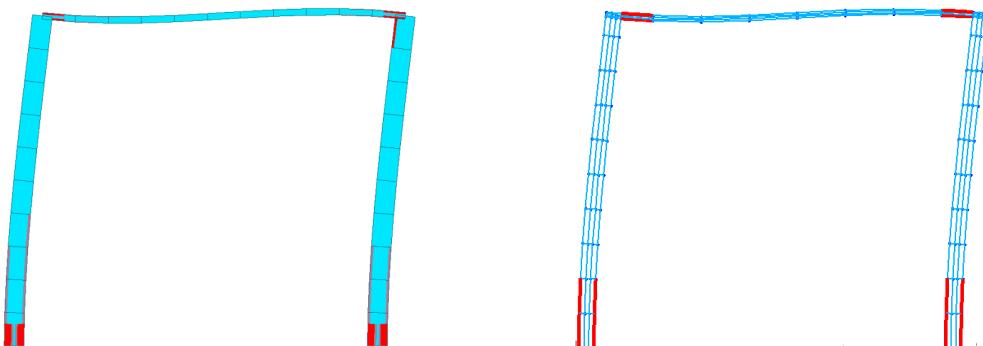
2.4.2. Portique en acier

Le second cas pratique étudié est un portique en acier soumis à une charge latérale. Pour cette nouvelle analyse, les résultats de référence seront obtenus à l'aide de FINELG, un programme ayant déjà fait ses preuves en termes de calcul non-linéaire. Il est utilisé par quelques bureaux d'études de renom et les résultats fournis par ce code peuvent être considérés comme fiables.

Les caractéristiques du portique étudié sont les suivantes :



Suite à ce chargement, le portique prend la déformée donnée à la Figure 36 (un facteur d'amplification $\times 3$ a été utilisé afin de rendre les résultats plus clairs). Les zones en rouge représentent la plastification du portique.



(a) FINELG

(b) AEM

Figure 36- Déplacement et plastification du portique

De plus, les déplacements mesurés en tête de portique sont repris dans le Tableau 3. Tout comme pour la poutre en béton, il est possible de réaliser une comparaison de la courbe force-déplacement obtenue avec la méthode des éléments appliqués et FINELG (Figure 37).

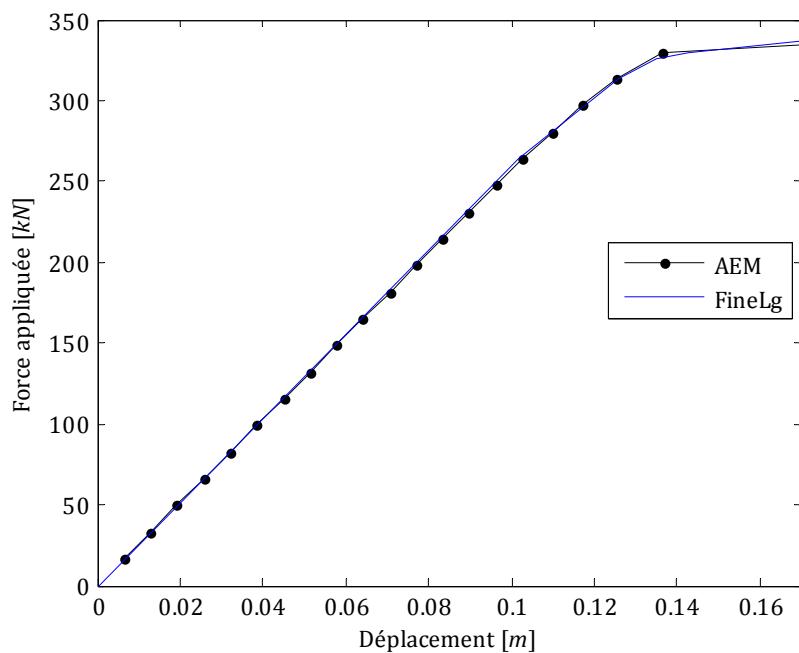


Figure 37 - Comparaison des relations force-déplacement

	FINELG	AEM	Différence
Déplacement en tête	14,2 cm	13,9 cm	2,1%

Tableau 3 - Déplacement en tête sous une charge de 330 kN

Les résultats, obtenus d'une part avec Finelg et d'autre part avec la méthode des éléments appliqués sont très proches. Cependant, FINELG représente avec plus de précision les zones plastifiées car, ce logiciel effectue de nouveaux calculs à l'intérieur même des éléments. Notons que les rotules plastiques apparaissent tout de même dans des zones similaires. De plus, les déplacements calculés en tête sont quasiment égaux.

D'autres cas de chargement ont été étudiés sur divers portiques comme, par exemple, à la Figure 40 (Chapitre IV). La méthode des éléments appliqués nous donne, à chaque étude de structure en acier, des résultats très précis et en concordance avec ceux rendus par FINELG.

3. Conclusions

Ce chapitre vient de montrer l'importance de modéliser correctement les lois de comportement des matériaux de construction. Les résultats qui ont été obtenus sont très proches aux cas de référence et ce même lorsque la loi de comportement est fortement simplifiée. Cependant, le repreneur de ce travail devra prêter une attention toute particulière à modéliser le plus fidèlement possible les matériaux. Par exemple, ce travail ne prend pas en compte le couplage entre les efforts normaux et le cisaillement. Or, pour certains matériaux comme le béton, ce couplage n'est pas négligeable.

De plus, ce chapitre a montré que les méthodes utilisées précédemment pour traiter les non-linéarités géométriques restent applicables aux problèmes dont la non-linéarité provient de la loi de comportement matérielle. La méthode est considérée comme valable lors d'un calcul non-linéaire géométrique et matériel.

Chapitre IV - Sollicitations dynamiques

Table des matières du Chapitre IV

1.	Introduction	62
2.	Principes de base	62
2.1.	Matrices de masse et d'amortissement.....	63
2.1.1.	Matrice de masse	64
2.1.2.	Matrice d'amortissement	64
2.2.	Méthode de Newmark.....	65
2.3.	Conditions initiales.....	66
2.4.	Fréquences propres et modes propres	67
2.4.1.	Analytiquement.....	67
2.4.2.	Numériquement.....	67
2.4.3.	Fonction de transfert	70
3.	Méthodes utilisées.....	71
3.1.	Résolution d'un système dynamique non-linéaire.....	71
3.2.	Lois de comportement	71
3.3.	Structure du code	73
4.	Validation	74
4.1.	Système non-linéaire à 1 DDL.....	74
4.1.1.	Spectre de choc.....	74
4.1.2.	Cas pratique étudié.....	75
4.2.	Système MDDL élastique.....	76
4.2.1.	Chargement progressif.....	77
4.2.2.	Impulsion	78
4.3.	Système MDDL non-linéaire	79
5.	Conclusions	79

Chapitre IV

Sollicitations dynamiques

1. Introduction

La plupart des sollicitations exceptionnelles ne peuvent pas être considérées comme des charges statiques. En effet, les tremblements de terre, les explosions, les impacts ou encore les vents importants sont des chargements dont l'intensité varie fortement dans un court intervalle de temps. L'étude de la résistance d'une structure sous chargement dynamique peut se faire à l'aide d'une charge statique équivalente. Cependant, afin de connaître le comportement réel de cette structure, il est indispensable de passer par une analyse dynamique.

De plus, lors d'une analyse statique, la rupture d'un élément peut engendrer un mécanisme et donc une matrice de raideur singulière qui empêcherait la résolution du problème. Or, l'un des objectifs de ce travail est de mettre au point une méthode permettant d'analyser le comportement des structures sous une sollicitation importante qui pourrait entraîner la ruine.

Ce chapitre permettra de comprendre comment ces diverses difficultés seront surmontées. Le premier point abordera les méthodes mises en œuvre ainsi que les principes théoriques de base à comprendre. Des cas pratiques seront ensuite implémentés afin de les comparer avec des prévisions analytiques.

2. Principes de base

L'équation de base qui régit les problèmes statiques exprime l'équilibre entre les forces intérieures et les forces extérieures (voir Chapitre I et II) :

$$Kq = F_{ext} \quad \text{ou} \quad F_{int} = F_{ext} \quad (4.1)$$

Lors d'une étude dynamique, un terme d'inertie et un terme de viscosité viennent s'ajouter à cette équation :

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) = F_{ext}(t) \quad \text{ou} \quad M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + F_{int}(t) = F_{ext}(t) \quad (4.2)$$

Avec :

- M : la masse,
- C : l'amortissement,
- K : la raideur,
- F_{int} : les forces intérieures,
- F_{ext} : les forces extérieures,
- q, \dot{q}, \ddot{q} : le déplacement, la vitesse et l'accélération.

Cette nouvelle équation exprime désormais l'équilibre entre les forces extérieures, les forces intérieures, les effets d'inertie et l'amortissement visqueux.

Lors d'un calcul statique, lorsque la structure atteint la ruine, la matrice de raideur devient singulière. Dès lors, le code n'est plus capable de résoudre le système d'équation. En dynamique, ce problème n'intervient plus. En effet, à la rupture, les forces extérieures ne sont plus contrebalancées par des efforts intérieurs mais par une mise en mouvement de la structure. Même avec une matrice de raideur dont le déterminant est nul, les effets d'inertie permettent au code de trouver une solution précise. Sans cette matrice de masse, la raideur deviendrait infiniment petite et les déplacements infinis.

Cependant, un problème dynamique est beaucoup plus complexe à résoudre qu'une simple analyse statique. Il faut tout d'abord déterminer les matrices de masse et d'amortissement. De plus, il est nécessaire de mettre au point une méthode numérique capable de gérer l'Equation (4.2).

2.1. Matrices de masse et d'amortissement

Comme nous venons de le mentionner, les matrices de masse et d'amortissement sont désormais nécessaires afin de résoudre l'Equation (4.2). De plus, la matrice de masse pourra être utilisée afin de déterminer le poids propre de la structure.

2.1.1. Matrice de masse

Un des principes de base de la méthode des éléments appliqués est sa discrétisation en blocs. Il est dès lors très simple de déterminer la matrice de masse de la structure qui sera simplement composée des matrices de masse relatives aux différents blocs.

La matrice de masse d'un bloc s'écrit comme ceci :

$$M_{node} = \begin{pmatrix} \rho V & 0 & 0 \\ 0 & \rho V & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho V}{12}(h^2 + l^2) \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Avec :

- ρ : la masse volumique du bloc,
- V : le volume du bloc,
- h : la hauteur du bloc,
- l : la longueur du bloc.

Les deux premiers termes de la diagonale de la matrice représentent la masse du bloc et le troisième terme, quant à lui, représente le moment d'inertie du bloc.

2.1.2. Matrice d'amortissement

L'amortissement utilisé est celui de Rayleigh. Cette méthode considère une combinaison linéaire des matrices de masse et de raideur :

$$C = \alpha M + \beta K \quad (4.4)$$

La détermination des coefficients α et β se fait de façon à fixer la valeur du taux d'amortissement pour deux modes.

$$\begin{cases} \xi_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta\omega_i}{2} \\ \xi_j = \frac{\alpha}{2\omega_j} + \frac{\beta\omega_j}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{2\omega_i\omega_j}{\omega_i^2 - \omega_j^2} (\omega_i\xi_j - \omega_j\xi_i) \\ \beta = \frac{2\omega_i\omega_j}{\omega_i^2 - \omega_j^2} \left(\frac{\xi_i}{\omega_i} - \frac{\xi_j}{\omega_j} \right) \end{cases}$$

Avec ω_i , la pulsation propre du mode i et ξ_i , le taux d'amortissement associé à ce mode.

2.2. Méthode de Newmark

La méthode de Newmark est une technique de résolution dite pas à pas. Elle consiste à découper le temps en intervalles Δt afin de calculer les déplacements, la vitesse, et l'accélération uniquement en un nombre limité d'instants. [2]

De plus, cette méthode présente l'avantage de pouvoir être applicable aux cas de structure non-linéaire. La méthode se base sur une approximation des intégrales suivantes :

$$\dot{q}_{t+\Delta t} = \dot{q}_t + \int_t^{t+\Delta t} \ddot{q}(t) dt \quad (4.5)$$

$$q_{t+\Delta t} = q_t + \int_t^{t+\Delta t} \dot{q}(t) dt \quad (4.6)$$

sous la forme :

$$\dot{q}_{t+\Delta t} = \dot{q}_t + [(1 - \delta)\ddot{q}_t + \delta\ddot{q}_{t+\Delta t}]\Delta t \quad (4.7)$$

$$q_{t+\Delta t} = q_t + \dot{q}_t \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{q}_t + \alpha \ddot{q}_{t+\Delta t} \right] \Delta t^2 \quad (4.8)$$

Ce système d'équation est ensuite complété par l'équation du mouvement discrétisé :

$$M\ddot{q}_{t+\Delta t} + C\dot{q}_{t+\Delta t} + Kq_{t+\Delta t} = F_{ext,t+\Delta t} \quad (4.9)$$

En pratique, ces différentes équations sont réorganisées de façon à tout d'abord calculer le déplacement. [1]

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\alpha \Delta t^2} M + \frac{\delta}{\alpha \Delta t} C + K \right) q_{t+\Delta t} \\ &= F_{ext,t+\Delta t} + M \left(\frac{1}{\alpha \Delta t^2} q_t + \frac{1}{\alpha \Delta t} \dot{q}_t + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{q}_t \right) \\ &+ C \left(\frac{\delta}{\alpha \Delta t} q_t + \left(\frac{\delta}{\alpha} - 1 \right) \dot{q}_t + \Delta t \left(\frac{\delta}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{q}_t \right) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Ce qui permet ensuite de calculer la vitesse et l'accélération.

$$\dot{q}_{t+\Delta t} = \frac{\delta}{\alpha \Delta t} (q_{t+\Delta t} - q_t) + \left(1 - \frac{\delta}{\alpha} \right) \dot{q}_t + \Delta t \left(1 - \frac{\delta}{2\alpha} \right) \ddot{q}_t \quad (4.11)$$

$$\ddot{q}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} (q_{t+\Delta t} - q_t) - \frac{1}{\alpha \Delta t} \dot{q}_t - \Delta t \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \ddot{q}_t \quad (4.12)$$

Cependant, le choix des paramètres α et β doit être fait judicieusement. En effet, pour que la méthode soit inconditionnellement stable, les relations suivantes doivent être vérifiées :

$$\begin{cases} \delta \geq 0,5 \\ \alpha \geq 0,25(0,5 + \delta)^2 \end{cases} \quad (4.13)$$

En posant la valeur des paramètres à $\alpha = 0,25$ et $\delta = 0,5$, ces critères sont vérifiés. Ce choix de paramètre correspond à la méthode de l'accélération constante qui est très régulièrement utilisée.

En résumé, afin de connaître le déplacement au temps $t + \Delta t$, il faut utiliser le déplacement, la vitesse et l'accélération obtenus au temps t dans l'Equation (4.10). Le résultat doit ensuite être inséré dans les Equations (4.11) et (4.12) afin de connaître la vitesse et l'accélération au temps $t + \Delta t$.

Cependant, au premier pas de temps, aucune donnée n'a encore été enregistrée étant donné qu'il n'y a pas de pas de temps précédent. Un déplacement, une vitesse ainsi qu'une accélération initiale doivent alors être utilisée.

2.3. Conditions initiales

Dans ce travail, deux types de conditions initiales seront utilisés. Premièrement, la structure peut être considérée comme non chargée, les conditions initiales sont alors les suivantes :

- $q = 0$,
- $\dot{q} = 0$,
- $\ddot{q} = 0$.

Cette première possibilité ne prend pas en compte le poids propre ou le chargement initial de la structure. Or, la masse des différents éléments est une donnée essentielle lors de la ruine. C'est pourquoi la seconde possibilité consiste tout d'abord à calculer les déplacements de la structure sous charge initiale et ce, à l'aide d'un calcul statique. Ces déplacements serviront de conditions initiales lors du calcul dynamique. Les conditions initiales sont alors les suivantes :

- $q \neq 0$,
- $\dot{q} = 0$,
- $\ddot{q} = 0$.

Si le poids propre n'est pas pris en compte de cette façon, la structure sera chargée subitement par sa masse au premier pas de temps, ce qui pourrait engendrer des aberrations.

2.4. Fréquences propres et modes propres

Lors d'une analyse dynamique, le calcul des fréquences propres et des modes propres de la structure comporte de nombreuses utilités. Par exemple, il est nécessaire de connaître les pulsations propres afin d'évaluer l'amortissement de Rayleigh. Il pourrait également être intéressant d'utiliser la méthode des éléments appliqués pour étudier des phénomènes de résonance d'ouvrage.

2.4.1. Analytiquement

Lors d'une oscillation libre non amortie d'une structure, l'Equation (4.2) devient :

$$M\ddot{q}(t) + Kq(t) = 0 \quad (4.14)$$

Il peut être démontré que les pulsations propres ω_i de la structure peuvent être déterminées en résolvant :

$$\det(K - M\omega^2) = 0$$

Le mode propre ϕ_i correspondant à une pulsation ω_i est obtenu en résolvant l'équation suivante :

$$(K - M\omega_i^2)\phi_i = 0$$

2.4.2. Numériquement

Numériquement, il est très aisés d'obtenir ces valeurs propres et ces vecteurs propres. Par exemple, dans MATLAB, la fonction `eig` peut être utilisée. Cette fonction renvoie une matrice V et un vecteur D contenant respectivement les modes propres et les valeurs de ω_i^2 .

$$[V, D] = eig(K, M)$$

Par exemple, pour le portique décrit à la Figure 38, les valeurs propres obtenues sont celles représentées à la Figure 39.

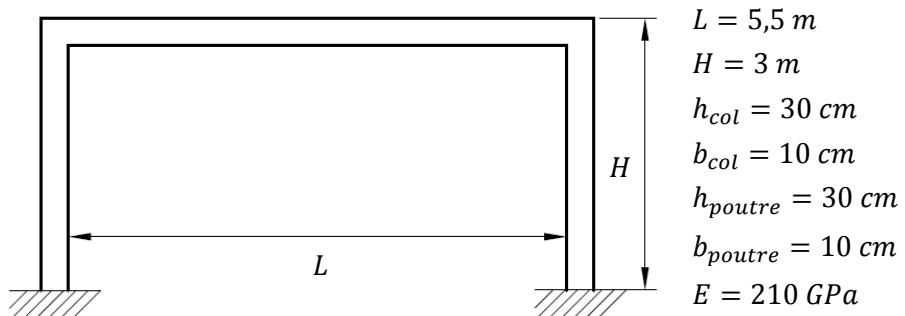


Figure 38 - Caractéristiques du portique

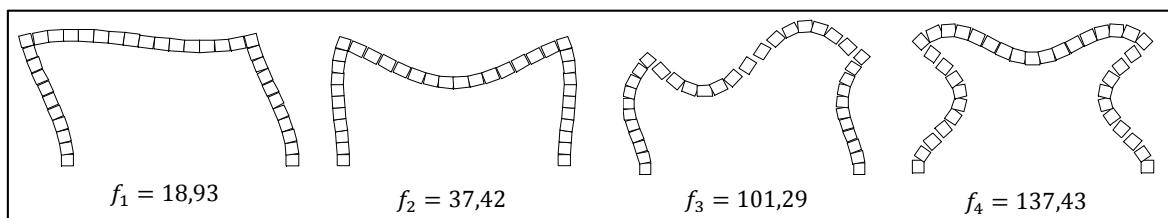


Figure 39 - Premiers modes propres et pulsations associées [s^{-1}]

Nous venons de voir que les modes propres et les fréquences propres dépendent directement de la matrice de raideur. Or, lors d'un calcul non-linéaire, la matrice de raideur va varier, ce qui aura également une influence sur les modes propres et les fréquences propres de la structure. Par exemple, pour le portique analysé précédemment, étudions le mécanisme de poutre et de panneau représenté à la Figure 40.

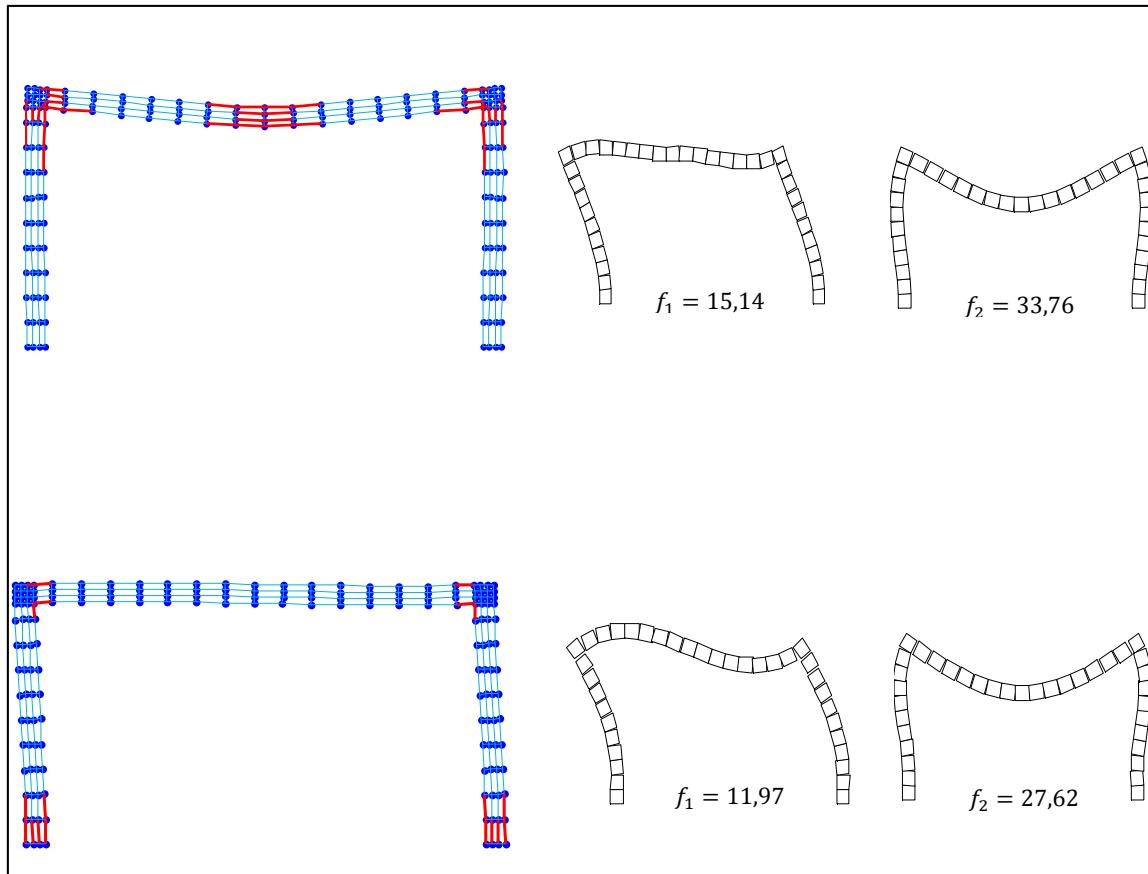


Figure 40 – Modes et fréquences [s^{-1}] propres pour des mécanismes de poutre et de panneau

Plusieurs observations peuvent être faites. Tout d'abord, l'allure des modes reste similaire à ceux observés initialement. Deuxièmement, les différentes rotules plastiques engendrent une diminution de raideur dans la structure, ce qui a pour effet de réduire les valeurs des fréquences propres.

Le choix du pas de temps qui sera fait ultérieurement est fonction des premières fréquences propres. Si cette variation de fréquence n'est pas prise en compte lorsque le pas

de temps est fixé, une perte de précision ou même des problèmes de stabilité pourraient apparaître.

2.4.3. Fonction de transfert

La fonction de transfert relative à la structure permet également d'obtenir les fréquences propres de la structure. En effet, la fonction de transfert permet de se faire une idée de l'amplitude de la réponse d'une structure sollicitée à une certaine fréquence. Plus la fréquence de la sollicitation se rapproche d'une des fréquences propres, plus la réponse sera élevée. La fonction de transfert s'obtient en appliquant la transformée de Fourier à l'Equation 4.2 et se note comme ceci :

$$\mathcal{H}(\omega) = (-M\omega^2 + i\omega C + K)^{-1}$$

Par exemple, pour le portique étudié précédemment, la fonction de transfert peut se représenter comme ceci :

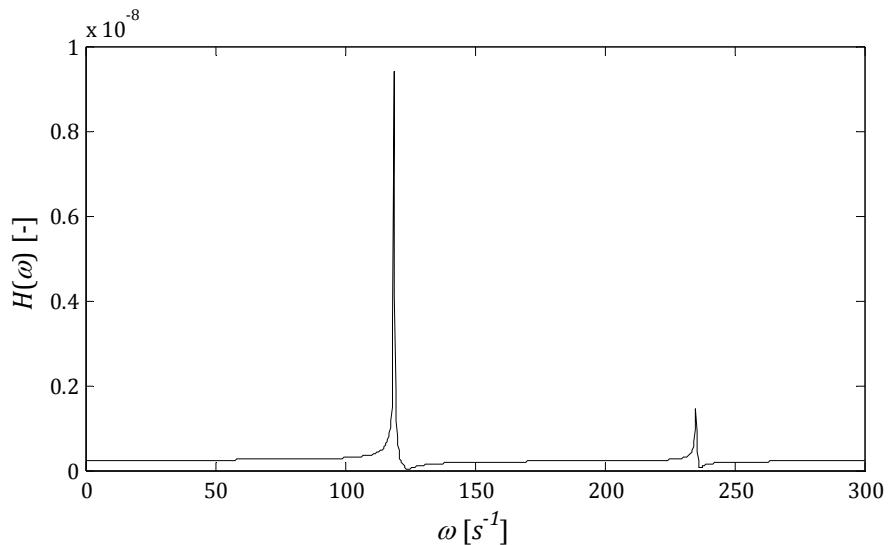


Figure 41 - Fonction de transfert du portique

Les pics de réponse observés sur la Figure 41 apparaissent pour des fréquences de :

$$f_1 = \frac{118,92}{2\pi} = 18,93 \text{ s}^{-1}$$

$$f_2 = \frac{235,13}{2\pi} = 37,42 \text{ s}^{-1}$$

Ces fréquences sont parfaitement identiques à celles calculées précédemment.

3. Méthodes utilisées

3.1. Résolution d'un système dynamique non-linéaire

La méthode qui est utilisée afin de calculer les déplacements, les vitesses et les accélérations comporte plusieurs étapes.

La première étape consiste à déterminer les conditions initiales de la structure. Pour ce faire, le déplacement sous poids propre est calculé dans des conditions statiques à l'aide des méthodes définies dans les chapitres précédents.

Ensuite, au temps t , une première approximation des déplacements, vitesses et accélérations est calculée en utilisant la méthode de Newmark (Equations 4.10, 4.11 et 4.12) et ce, avec une matrice de raideur relative aux déplacements obtenus au temps $t - dt$.

Afin d'obtenir les valeurs exactes des déplacements, vitesses et accélérations, les forces hors équilibre sont réappliquées à la structure à travers la méthode de Newmark. Dans le cas d'une analyse dynamique, les forces hors équilibre s'expriment comme ceci :

$$F_{HE}(t) = F_{ext}(t) - F_{int}(t) - C\dot{q}(t) - M\ddot{q}(t)$$

Cette étape est répétée jusqu'à ce que les forces hors équilibre soient suffisamment faibles. Cette méthode peut être comparée à celle présentée dans le Chapitre II (Figure 17).

3.2. Lois de comportement

Nous avons déjà souligné la difficulté d'intégrer précisément la loi de comportement du béton. Cette difficulté est encore accrue lors d'un chargement cyclique. C'est pourquoi, dans ce chapitre, seules des structures en acier ont été modélisées.

Sous un chargement dynamique, comme par exemple un tremblement de terre, il est fréquent que certaines fibres de la structure soient sollicitées successivement en traction et en compression. Afin de simplifier au maximum le problème à résoudre, l'endommagement progressif des ressorts sous sollicitations cycliques n'est pas pris en compte. Cependant, il serait intéressant de modéliser ce phénomène lors d'une éventuelle suite à ce travail.

Cette loi simplifiée est représentée à la Figure 42. Notons que la ruine est atteinte lorsque la somme du déplacement plastique en traction et en compression est supérieure à la limite ultime :

$$\sigma = 0 \quad si \quad |\varepsilon_{pl}^+| + |\varepsilon_{pl}^-| > \varepsilon_u$$

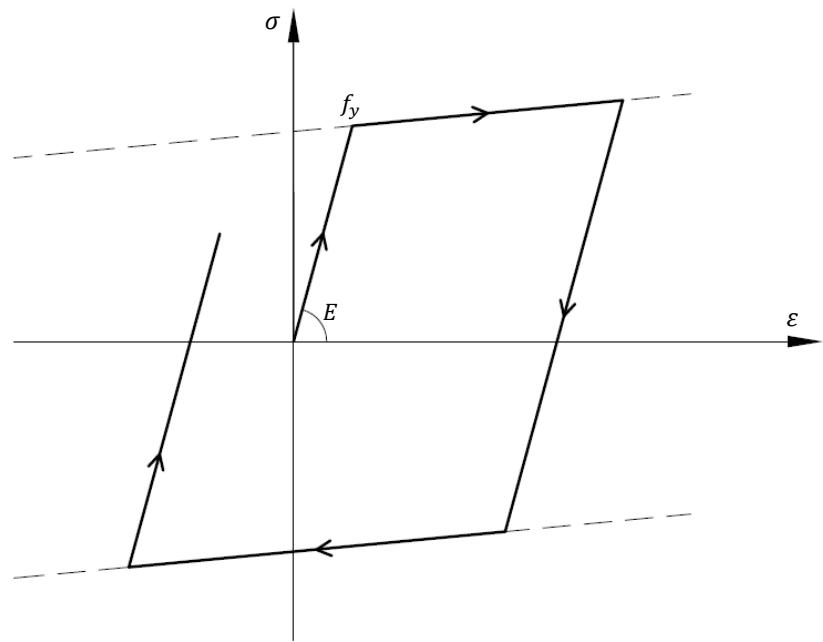
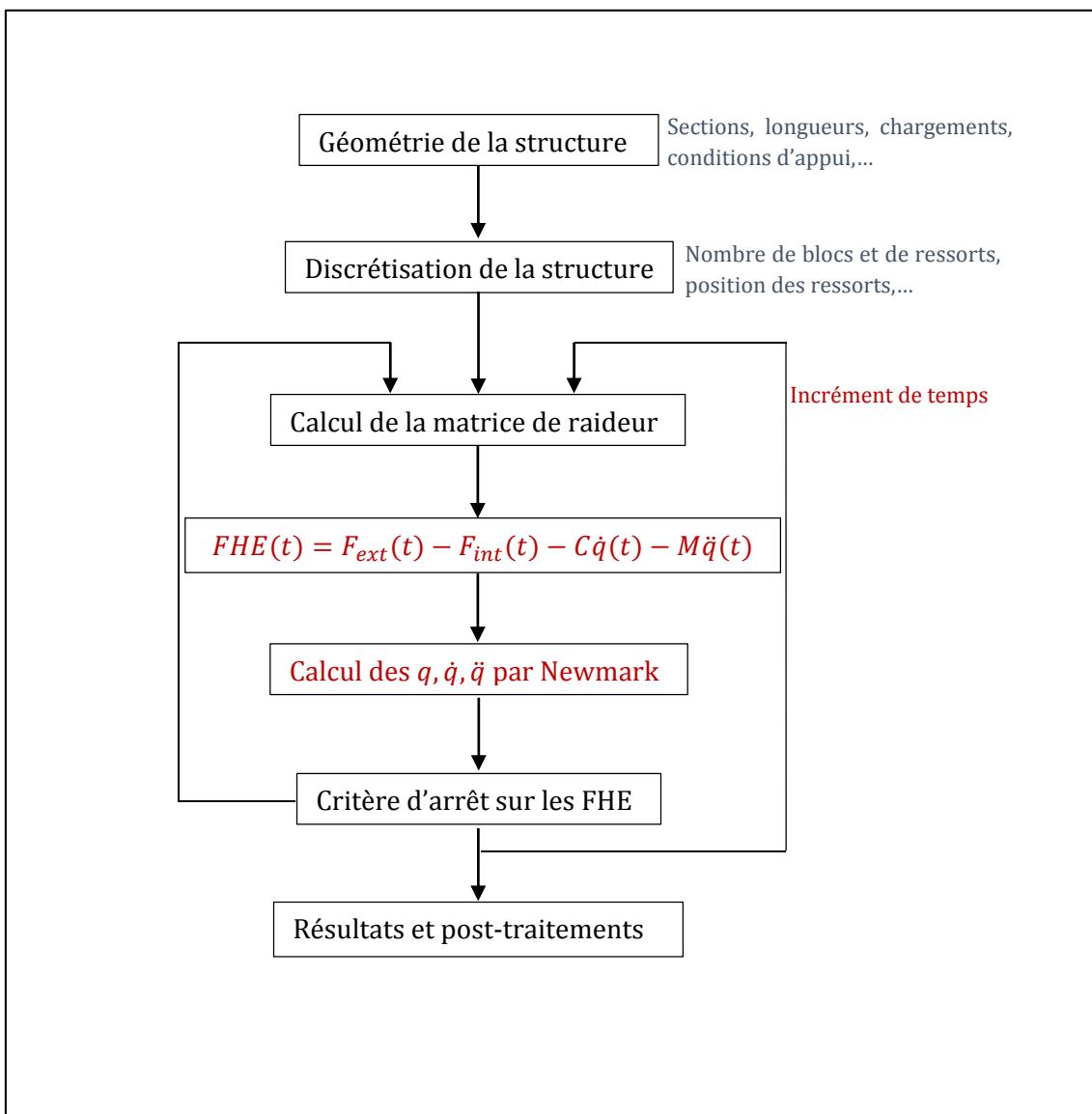


Figure 42 - Loi de comportement utilisée pour l'acier

3.3. Structure du code

La nouvelle structure du code peut maintenant être schématisée comme ceci :



4. Validation

Afin de valider le code, deux cas simples seront analysés. La première analyse consiste à élaborer le spectre de choc d'un système à un degré de liberté. Etant donné que ce spectre est connu et souvent utilisé dans la littérature, il sera possible de comparer les résultats obtenus.

La seconde analyse, quant à elle, étudiera un portique métallique soumis à différents cas de charge. Les réponses engendrées seront comparées à des prévisions théoriques.

4.1. Système non-linéaire à 1 DDL

4.1.1. Spectre de choc

Le dimensionnement des structures soumises à un chargement dynamique rapide comme une explosion se fait régulièrement à partir de l'analyse du spectre de choc. Ce spectre reprend le déplacement maximum d'un système à comportement élasto-plastique sous une charge rectangulaire. Les différentes caractéristiques de ce système sont reprises à la Figure 43.

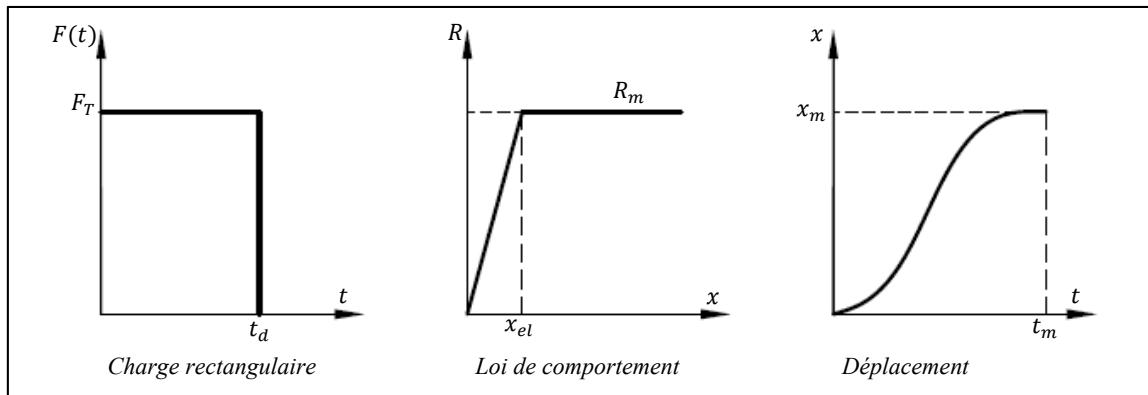


Figure 43 - Caractéristiques du système

La réponse du système sous un certain cas de charge est donnée sous forme de spectre de choc (Figure 45). Sur ce graphique, nous pouvons observer plusieurs courbes, chacune d'elles correspondant à une valeur de chargement F_t différente. Chaque courbe représente le déplacement maximum x_m obtenu pour une durée de charge t_d . Notons que les différentes caractéristiques sont rendues adimensionnelles. Ainsi, la durée du chargement est divisée par la période propre T du système et le rapport R_m/F_t est utilisé pour caractériser la charge. De plus, le déplacement maximum est comparé au déplacement élastique avant plastification. Cette valeur représente la ductilité :

$$\mu = x_m/x_{el}$$

Ce graphe peut être utilisé de plusieurs façons. Par exemple, il peut prédire la ductilité à conférer à une structure devant résister à un choc donné.

4.1.2. Cas pratique étudié

Afin de savoir si les différentes méthodes utilisées sont valides, un système à un degré de liberté sera modélisé. Ainsi, une poutre sera discrétisée en deux blocs. Les trois degrés de liberté du premier bloc seront fixés. La rotation ainsi que le déplacement vertical du second bloc seront également fixés. Désormais, seul un mouvement horizontal du second bloc est autorisé. Une schématisation est donnée à la Figure 44.

Les caractéristiques de cette poutre particulière sont les suivantes :

- $L = 1 \text{ m}$,
- $h = 20 \text{ cm}$,
- $b = 10 \text{ cm}$,
- $E = 210 \text{ GPa}$,
- $f_y = 355 \text{ MPa}$
- $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$

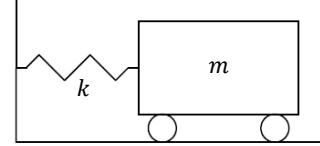


Figure 44 - Schématisation du système

La routine MATLAB calcule alors les données nécessaires à la résolution du problème :

$$k = \frac{E \times b \times h}{L} = 4,2 \times 10^6 \text{ kN/m}$$

$$m = \rho \times h \times b \times L/2 = 78 \text{ kg}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 8,49 \times 10^{-4} \text{ s}$$

$$R_m = b \times h \times f_y = 7100 \text{ kN}$$

$$x_{el} = \frac{R_m}{k} = 1,69 \text{ mm}$$

Afin de se rapprocher le plus possible de la solution exacte, la loi de comportement utilisée est la même que celle représentée à la Figure 43. C'est-à-dire une loi comportant un palier parfaitement plastique sans écrouissage. De plus, aucun facteur d'amortissement n'est pris en compte.

Le problème est ensuite modélisé avec différentes valeurs de F_t et de t_d . Les résultats obtenus sont représentés en traits discontinus sur la Figure 45.

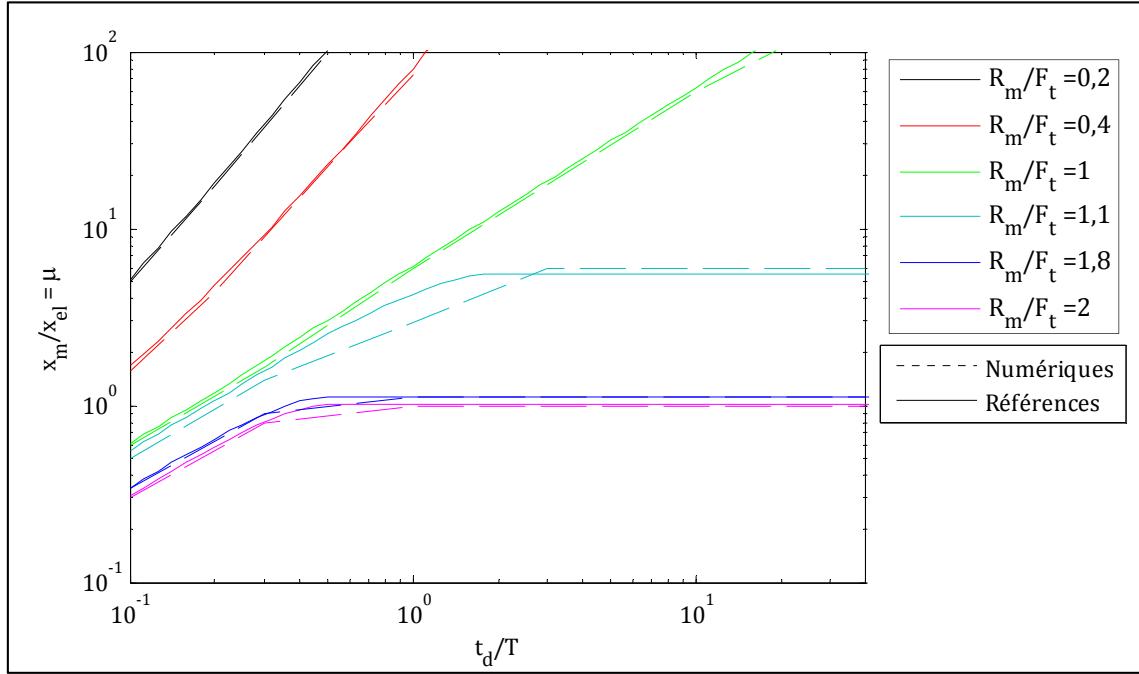


Figure 45 - Spectre de choc

Le spectre obtenu est très proche de la référence. Cependant, nous devons souligner que dans certains cas compris dans l'intervalle suivant :

$$R_m = [0,5 ; 1,5]$$

la routine mène quelques fois à des instabilités. Il a fallu, pour certains cas, faire varier le pas de temps et le critère de tolérance imposé sur les FHE (voir point 3.3. Structure du code) avant d'arriver à une solution convergée. Lors d'une suite éventuelle à ce travail, il serait intéressant de trouver l'origine de cette non-convergence afin de rendre le code le plus stable possible.

Malgré ce problème, les résultats obtenus à la Figure 45 sont suffisamment proches des résultats de référence. Nous pouvons dès lors considérer la méthode comme valide lors d'un calcul dynamique non-linéaire d'un système à un degré de liberté.

4.2. Système MDDL élastique

Dans la plupart des cas, les structures ne peuvent pas être assimilées à un système à un degré de liberté. Etant donné qu'il est compliqué de valider un système non-linéaire à

plusieurs degrés de liberté, nous allons commencer par étudier une structure à comportement élastique.

La structure déjà représentée à la Figure 38 constitue un bon exemple. Ce portique sera chargé en tête par une force de 100 kN. Cependant, plusieurs durées et fonctions de chargement seront utilisées. Tout d'abord, si la charge est appliquée statiquement, le déplacement horizontal en tête est de :

$$x_{st} = 4,16 \text{ mm}$$

Deux types de fonctions de chargement dynamique sont étudiés. Premièrement, la structure est chargée progressivement. Le second type de fonction est un chargement rectangulaire pour laquelle la durée variera.

4.2.1. Chargement progressif

Le chargement progressif considéré est représenté à la Figure 46. La force appliquée à la structure croît progressivement jusqu'à la valeur de 100 kN. Cette valeur maximale n'est atteinte qu'après un temps dix fois plus important que la période associée à un déplacement en tête. De cette façon, nous ne nous trouvons pas dans un cas de dynamique rapide qui sera abordé dans le prochain point. Pour rappel, les modes propres du portique étudié sont représentés à la Figure 39. La fréquence du mode correspondant au déplacement étudié étant de 18,93 Hz, la valeur maximale du chargement sera atteinte après :

$$10 \times \frac{1}{18,93} = 0,528 \text{ s}$$

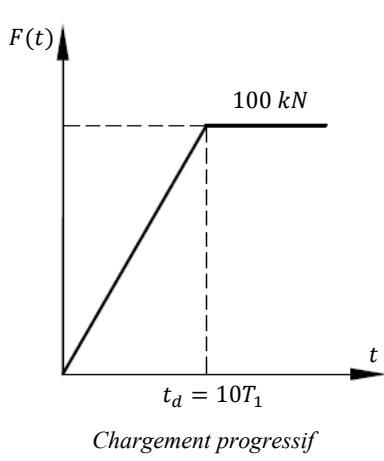


Figure 46 - Fonction de chargement

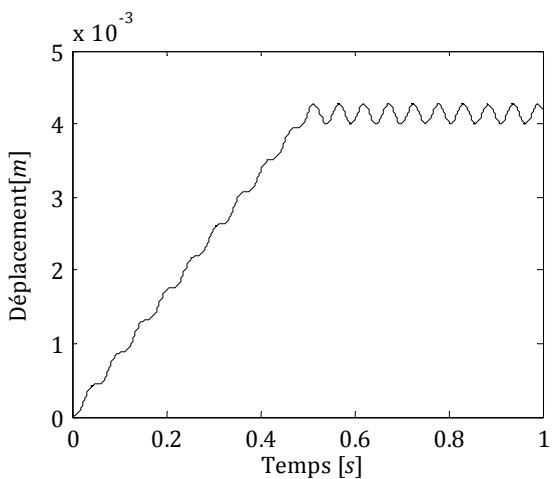


Figure 47 - Réponse de la structure

La réponse de la structure est donnée à la Figure 47. L'allure générale de la réponse correspond bel et bien à la fonction de chargement. En effet, le déplacement augmente jusqu'à ce que la force atteigne sa valeur maximale. Des oscillations sont également observables. Tout d'abord, nous pouvons noter que la période de ces oscillations est de $0,52\text{ s}$, ce qui correspond à la première période fondamentale du portique. De plus, une fois la valeur de la charge maximale atteinte, la position du portique oscille autour d'un déplacement de $4,13\text{ mm}$ qui devrait correspondre au déplacement statique calculé précédemment. La faible différence entre les deux solutions :

$$\frac{4,16 - 4,13}{4,16} = 0,7\%$$

et l'allure générale de la réponse nous permettent de dire que la méthode utilisée est valide lors d'un chargement progressif d'une structure parfaitement élastique.

4.2.2. Impulsion

Désormais, le chargement considéré sera une impulsion de durée t_d variable (Figure 48). Le déplacement maximal obtenu pour chaque durée sera représenté sur la Figure 50. Par exemple, pour une valeur de t_d égale à $T_1/2$, la réponse obtenue est donnée à la Figure 49 et le déplacement maximal obtenu est de $8,25\text{ mm}$.

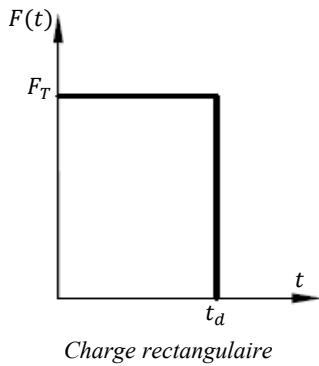


Figure 48 - Fonction de chargement

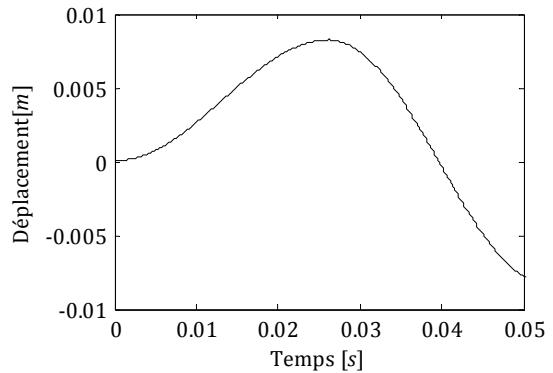


Figure 49 – Réponse de la structure

Les résultats obtenus sont comparés avec une courbe théorique très présente dans la littérature (Figure 50). Les deux courbes se superposent quasi parfaitement. Nous pouvons donc considérer la méthode valide lors d'une analyse dynamique élastique d'un système à plusieurs degrés de liberté comme, par exemple, un portique.

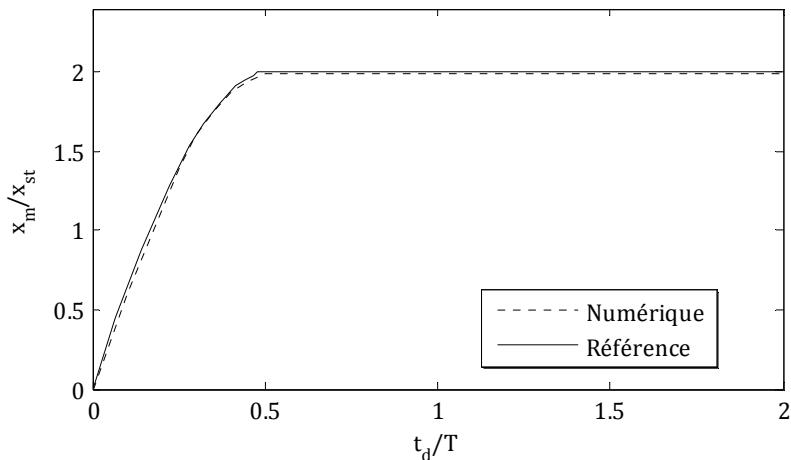


Figure 50 - Rapport entre la réponse dynamique maximale et la réponse statique

4.3. Système MDDL non-linéaire

Comme nous l'avons déjà mentionné, il est très complexe de valider des résultats provenant d'une analyse dynamique non-linéaire d'un système à plusieurs degrés de liberté. Même si les résultats sont plausibles, nous ne pouvons pas encore les considérer comme valides.

Tout un travail de fin d'études pourrait se consacrer à la validation de ce type de résultat. Par exemple, il serait intéressant d'analyser le comportement d'un immeuble multi-étage suite à la perte d'une colonne. Des recherches sont actuellement faites à l'Université de Liège dans ce domaine. Les résultats de cette méthode seront peut-être comparés avec ceux déjà obtenus.

5. Conclusions

Ce dernier chapitre a présenté les modifications à apporter à la méthode afin de pouvoir déterminer la réponse d'une structure sous une sollicitation dynamique. De nombreux apports ont dû être effectués comme, par exemple, les matrices de masse et d'amortissement. Suite à ces divers changements, la méthode a été validée pour un système à un degré de liberté non-linéaire.

Cependant, ce chapitre pourrait constituer un travail de plusieurs années à lui seul tellement les pistes à explorer sont nombreuses. Même si cette dernière partie constitue l'aboutissement de ce travail et l'atteinte des objectifs, le sujet n'est pas épuisé pour autant.

Par exemple, il serait très important de valider les résultats fournis par la méthode lors de l'analyse d'un démantèlement.

Conclusions

L'objectif principal de ce travail consistait à développer et mettre en œuvre la méthode des éléments appliqués pour des structures simples sous sollicitations extrêmes. Atteindre cet objectif n'a pas été simple. Plusieurs chapitres ont chacun apporté une ou plusieurs modifications afin d'obtenir un code de calcul de plus en plus complet mais aussi de plus en plus complexe.

Ma contribution personnelle au premier chapitre se limite au développement de la matrice de raideur et d'une routine MATLAB mettant en œuvre une version linéaire de la méthode des éléments appliqués. Compte tenu des résultats fournis par ce code de calcul, une analyse de la sensibilité au maillage a également permis de déterminer une loi reliant la discréétisation et l'erreur commise. Le reste de ce chapitre a principalement été composé d'un travail de recherche bibliographique et de synthèse permettant de présenter brièvement la méthode.

En ce qui concerne la suite de ce travail, quasiment aucune information n'était disponible ou existante. Les trois chapitres suivants constituent donc un travail personnel qui s'est fait avec la collaboration de quelques professeurs de l'Université de Liège.

Le second chapitre a proposé une méthode capable de procéder à une analyse non-linéaire. Sur base des cours suivis à l'Université de Liège, le code a été adapté pour prendre en compte les effets du second ordre. Des modifications importantes ont dû être faites comme, par exemple, une nouvelle technique de détermination de la matrice de raideur.

Afin de prendre en compte la non-linéarité matérielle dans l'analyse, il a été nécessaire d'intégrer à la méthode diverses lois de comportement de matériaux. Cette étude s'est consacrée exclusivement à la modélisation du comportement de l'acier et du béton. Suite à ces modifications, des phénomènes comme la plasticité de l'acier ou la fissuration du béton ont pu être pris en compte dans l'analyse. Ainsi, la modélisation d'une poutre en béton armé a montré que les résultats correspondaient à ceux obtenus lors d'essais réalisés en laboratoire. De plus, divers portiques en acier ont été étudiés d'une part avec la méthode des

éléments appliqués et d'autre part avec FINELG, ce qui a permis de souligner la forte concordance entre les divers résultats.

Enfin, les dernières modifications apportées à la méthode ont eu comme but de permettre une analyse dynamique des structures. Suite à de nombreux apports et changements, les résultats obtenus semblent très prometteurs. Des cas simplifiés, comme un système à un degré de liberté non-linéaire, ont pu être validés. Cependant, un travail de fin d'études n'est pas suffisant pour vérifier des résultats complexes à analyser comme, la ruine complète d'un ouvrage. L'objectif principal du travail, c'est-à-dire la mise en œuvre cette méthode, a bel et bien été atteint. Néanmoins, une éventuelle suite à ce travail pourrait être consacrée à la validation de la méthode lors de la modélisation d'un démantèlement.

De plus, si un cinquième chapitre avait été rédigé, il aurait été intitulé « Chocs et collisions ». En effet, lors de la ruine d'un ouvrage du génie civil, les collisions entre les éléments structuraux ne peuvent pas être négligées. Il est dès lors important de prendre ce phénomène en compte. Le choc transmis au sol et les vibrations engendrées peuvent également devenir un sujet très intéressant à étudier et facilement mis en œuvre à l'aide de la méthode développée dans ce travail.

La méthode des éléments appliqués est réputée être particulièrement stable et rapide. Une analyse et une comparaison de son temps de calcul permettraient de mettre en évidence cette rapidité. De plus, la modélisation a toujours été limitée à des structures en deux dimensions. En pratique, il sera indispensable d'adapter la méthode à la modélisation d'ouvrages en trois dimensions. Si les autres perspectives peuvent être réalisées assez aisément, celle-ci sera par contre très compliquée à développer.

Je clôture désormais ce travail de fin d'études qui aura apporté un complément considérable à notre formation. Tout d'abord, la réalisation de ce travail m'a conduit à me replonger dans la majorité des matières enseignées durant mon cursus, que ce soit le cours de méthodes numériques, de mécanique des structures, de sollicitations dynamiques, de robustesse structurelle ou encore de constructions métalliques et en béton. J'ai également dû découvrir une méthode qui m'était jusqu'alors complètement inconnue. Au cours ce travail, j'ai pu constater que notre cursus à l'Université de Liège nous a donné un bon bagage théorique ainsi qu'un état d'esprit d'ingénieur. En effet, la réalisation de ce mémoire a nécessité de l'initiative ainsi qu'une certaine capacité d'adaptation. Tous ces différents éléments font de ce travail de fin d'études un excellent exercice avant de rentrer dans la vie professionnelle.

Bibliographie

- [1] DENOEL V., 2002, *Analyse de structures soumises au vent turbulent : de l'approche stochastique fréquentielle au dynamique transitoire non linéaire*, Travail de fin d'études (DEA), Faculté des Sciences Appliquées, Université de Liège.
- [2] DENOEL V., 2010, *Analyse dynamique des structures du génie civil*, Notes de cours, Faculté des Sciences Appliquées, Université de Liège.
- [3] DE VILLE – DE GOYET V., 1989, *L'analyse statique non linéaire par la méthode des éléments finis des structures spatiales formées de poutres à section non symétrique*, Thèse de doctorat, Faculté des Sciences Appliquées, Université de Liège.
- [4] DE VILLE – DE GOYET V., 2010, *Problèmes non linéaires en génie civil*, Supports de cours, Faculté des Sciences Appliquées, Université de Liège.
- [5] ELKHOLY S., MEGURO K., 2004, *Numerical simulation of high-rise steel buildings using improved applied element method*, 13th World Conference on Earthquake Engineering, Vancouver, Canada.
- [6] KRINGS C., 2012, *Implementation of the applied element method in the framework of structural analysis*, Travail de fin d'études, Faculté des Sciences Appliquées, Université de Liège.
- [7] MANSUR M.A., RASHID M.A., PARAMASIVAM P., mai-juin 2002, *Correlations between mechanical properties of high strength concrete*, Journal of Materials in Civil Engineering, ASCE, p. 230-238, Vol. 14, No.
- [8] MANSUR M.A., RASHID M.A., mai-juin 2005, *Reinforced high-strength concrete beams in flexure*, ACI Structural Journal, p. 462-471, May-June 2005.
- [9] MAYORCA P., MEGURO K., 2003, *Modelling masonry structures using the applied element method*, Seisan-Kenkyu, p.581-584, Vol. 55, No. 6.
- [10] MEGURO K., TAGEL-DIN H., 1998, *A new simple and accurate technique for failure analysis of structures*, Bulletin of Earthquake Resistant Structure Research Center, IIS, University of Tokyo, p. 51-61, Vol. 17, No. 31.
- [11] MEGURO K., TAGEL-DIN H., avril 2000, *Applied element method for structural analysis: theory and application for linear materials*, Structural Eng./Earthquake Eng., Journal Society of Civil Engineering, p. 21-35, Vol. 17, No. 1.
- [12] MEGURO K., TAGEL-DIN H., octobre 2000, *Applied element method for dynamic large deformation analysis of structures*, Structural Eng./Earthquake Eng., Journal Society of Civil Engineering, p. 215-224, Vol. 17 No. 2.

- [13] MEGURO K., TAGEL-DIN H., 2001, *Applied element simulation of RC structures under cyclic loading*, Journal of Structural Engineering, p. 1295-1305, Vol. 127.
- [14] MEGURO K., TAGEL-DIN H., 2002, *Applied element method used for large displacement structural analysis*, Journal of Natural Disaster Science, p. 22-34, No. 1.
- [15] POPOVICS S., mars 1970, *A review of stress-strain relationships for concrete*, ACI Journal, p. 243-248, Vol. 67, No. 3.
- [16] RAMANCHARLA P.K., MEGURO K., 2006, *3D numerical modelling of faults for study of ground surface deformation using applied element method*, Current Science, p. 1026-1037, Vol. 91, No. 8.
- [17] TAGEL-DIN H., 1998, *A new method for nonlinear, large deformation and collapse analysis of structures*, Ph.D. thesis, Civil Eng. Dept., The University of Tokyo.
- [18] TAGEL-DIN H., MEGURO K., 1999, *Applied element method for collapse analysis of structures*, Bulletin of Earthquake Resistant Structure Research Center, s.p., No. 32.
- [19] TAGEL-DIN H., MEGURO K., 1999, *Simulation of buckling and post-buckling behavior of structure using Applied Element Method*, Bulletin of Earthquake Resistant Structure Research Center, p. 125-135, No. 32.
- [20] TAGEL-DIN H., RAHMAN N.A., 2006, *The applied element method: The ultimate analysis of progressive collapse*, Structure Magazine, p.30-33, April 2006.7
- [21] THORENFELDT E., TOMASZEWCZ A., JESSEN, J.J., juin 1987, Mechanical properties of high-strength concrete and application in design, Proceeding of the Symposium "Utilization of High Strength Concrete", p.149-159, Stavanger, Norway, Tapir, Trondheim.

Liens Internet

- [22] Applied Element Method, <http://www.appliedelementmethod.org/>, consulté en février 2014.
- [23] Applied Science International, <http://www.extremeloading.com/>, consulté en avril 2014.
- [24] Applied Science International, <http://www.appliedscienceint.com/>, consulté en avril 2014.

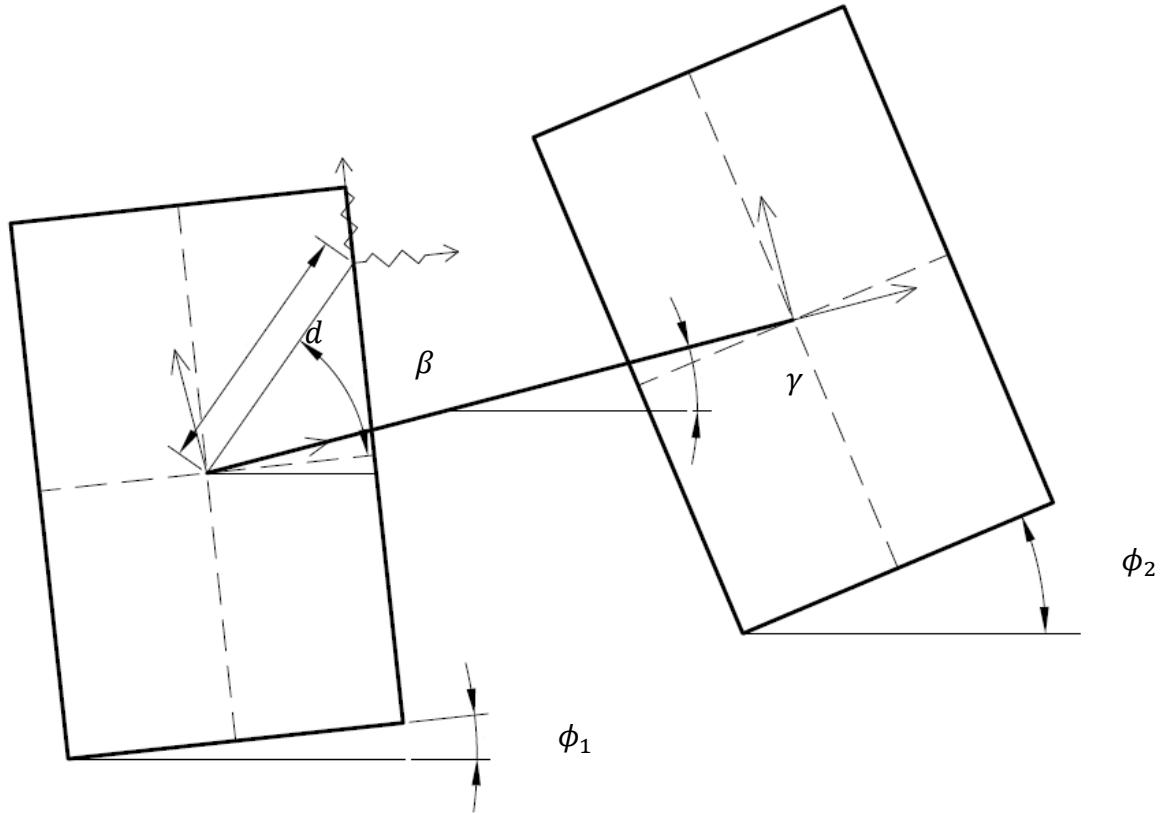
Annexes

Table des annexes

Annexe 1 : Matrice de raideur	87
Annexe 2 : Matrice de rotation.....	89
Routines Matlab	90
Annexe 3 : Calculs linéaires	90
Annexe 4 : Calculs non-linéaires.....	94
Annexe 5 : Calculs dynamiques.....	97

Annexe 1 : Matrice de raideur

La matrice de raideur fait référence aux angles suivants :



- L'angle ϕ_i est uniquement dépendant de la rotation du bloc i ,
- L'angle β est uniquement dépendant de la position du ressort,
- La distance d est uniquement dépendante de la position du ressort,
- L'angle γ représente la rotation de l'élément, elle est uniquement fonction du maillage et de la position des blocs.

Afin d'alléger la matrice de raideur, les notations suivantes seront utilisées :

$$\begin{aligned}
 \cos(\phi_1 - \gamma) &\rightarrow C_1 \\
 \cos(\phi_2 - \gamma) &\rightarrow C_2 \\
 \sin(\phi_1 - \gamma) &\rightarrow S_1 \\
 \sin(\phi_2 - \gamma) &\rightarrow S_2 \\
 \sin(\beta) &\rightarrow S_b \\
 \cos(\beta) &\rightarrow C_b
 \end{aligned}$$

$$K_{spring} = \begin{pmatrix} K_n C_1^2 + K_s S_1^2 & (K_n - K_s) C_1 S_1 & -K_n C_1 dS_b - K_s S_1 dC_b & -K_n C_1 C_2 - K_s S_1 S_2 & -K_n C_1 S_2 + K_s S_1 C_2 & K_n C_1 dS_b - K_s S_1 dC_b \\ (K_n - K_s) C_1 S_1 & K_n S_1^2 + K_s C_1^2 & -K_n S_1 dS_b + K_s C_1 dC_b & -K_n S_1 C_2 + K_s C_1 S_2 & -K_n S_1 S_2 - K_s C_1 C_2 & K_n S_1 dS_b + K_s C_1 dC_b \\ -K_n C_1 dS_b - K_s S_1 dC_b & -K_n S_1 dS_b + K_s C_1 dC_b & K_n d^2 S_b^2 + K_s d^2 C_b^2 & K_n C_2 dS_b + K_s S_2 dC_b & K_n S_2 dS_b - K_s C_2 dC_b & -K_n d^2 S_b^2 + K_s d^2 C_b^2 \\ -K_n C_1 C_2 - K_s S_1 S_2 & -K_n S_1 C_2 + K_s C_1 S_2 & K_n C_2 dS_b + K_s S_2 dC_b & K_n C_2 dS_b + K_s S_2 dC_b & K_n C_2 S_2 - K_s S_2 C_2 & -K_n C_2 dS_b + K_s S_2 dC_b \\ -K_n C_1 S_2 + K_s S_1 C_2 & -K_n S_1 S_2 - K_s C_1 C_2 & K_n S_2 dS_b - K_s C_2 dC_b & K_n C_2^2 + K_s S_2^2 & (K_n - K_s) C_2 S_2 & -K_n S_2 dS_b - K_s C_2 dC_b \\ K_n S_1 dS_b + K_s C_1 dC_b & K_n S_1 dS_b + K_s C_1 dC_b & -K_n d^2 S_b^2 + K_s d^2 C_b^2 & -K_n C_2 dS_b + K_s S_2 dC_b & K_n S_2^2 + K_s C_2^2 & -K_n S_2 dS_b - K_s C_2 dC_b \\ K_n C_1 dS_b - K_s S_1 dC_b & K_n C_1 dS_b - K_s S_1 dC_b & -K_n d^2 S_b^2 + K_s d^2 C_b^2 & -K_n S_2 dS_b - K_s C_2 dC_b & K_n d^2 S_b^2 + K_s d^2 C_b^2 & K_n d^2 S_b^2 + K_s d^2 C_b^2 \end{pmatrix}$$

Annexe 2 : Matrice de rotation

$$R_\gamma = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Avec γ l'angle en l'élément et l'horizontal.

Routines Matlab

Annexe 3 : Calculs linéaires

```
clear all
close all
clc

%% Caractéristiques de la poutre

beam.L = 5; %[m] Longueur de la poutre
beam.b = 0.2; %[m] Largeur de la section
beam.h = 0.2; %[m] Hauteur de la section
beam.I = beam.h^3*beam.b/12;% [m^4] Inertie de la section

Appuis = 2; % (1=biappuyée, 2=encastrée libre, )

loading=100; %[kN] Chargement concentré en bout de poutre
effortnormal = 0 ; %[kN] Charge axiale en bout de poutre

%% discrétisation

% discrétisation en blocs
bloc.Nx = 10; %[-] Nombre de blocs dans la direction X
bloc.Ny = 4; %[-] Nombre de blocs dans la direction Y

bloc.N=bloc.Nx*bloc.Ny;
bloc.X = beam.L/(bloc.Nx-1) ;%[m] Longueur d'un bloc
bloc.H = beam.h/(bloc.Ny); %[m] Hauteur d'un bloc

Nelement_horiz = (bloc.Nx-1)*bloc.Ny; % Nombre d'éléments horizontaux
Nelement_verti = bloc.Nx*(bloc.Ny-1); % Nombre d'éléments verticaux
Nelement = Nelement_verti + Nelement_horiz; % Nombre d'éléments total

% discrétisation en ressorts

spring.Nx = 10 ; % [-] Nombre de ressorts dans la direction X
spring.Ny = 10 ; % [-] Nombre de ressorts dans la direction Y

spring.posxx=ones(1,spring.Nx)*bloc.X/2;% calcul la position du ressort
spring.posxy=zeros(1,spring.Nx); % si le centre du bloc est
spring.posyx=ones(1,spring.Ny)*bloc.H/2;% consdéré comme l'origine
spring.posyy=zeros(1,spring.Ny);
spring.posxy(1)=bloc.H/2-bloc.H/spring.Nx/2;
for isp = 2 : spring.Nx
    spring.posxy(isp) = spring.posxy(isp-1)-bloc.H/spring.Nx;
end
spring.posyy(1)=bloc.X/2-bloc.X/spring.Ny/2;
for isp = 2 : spring.Ny
    spring.posyy(isp) = spring.posyy(isp-1)-bloc.X/spring.Ny;
end

%% matériau

E = 210000000; % [kN/m2] Module de Young
G=E/(2*(1+0.3)); % [kN/m2] Module de cisaillement
```

```

Knx = E*bloc.H/spring.Nx*beam.b/bloc.X; % raideur d'un ressort normal
Kny = E*bloc.X/spring.Ny*beam.b/bloc.H;
Ksx = G*bloc.H/spring.Nx*beam.b/bloc.X; % raideur d'un ressort en
cisiaissement
Ksy = G*bloc.X/spring.Ny*beam.b/bloc.H;

%% Position du centre des blocs

posibloc = zeros(bloc.N,2);

for ibl = 1 : bloc.N
    posibloc(ibl,2)= floor(ibl/bloc.Nx-ibl/bloc.Nx/100)*bloc.H;
    posibloc(ibl,1)= (ibl-posibloc(ibl,2)/bloc.H*bloc.Nx-1)*bloc.X;
end

%% Index éléments/noeuds correspondants

posielemh = zeros(Nelement_horiz,2);
posielemv = zeros(Nelement_verti,2);
posielem = zeros(Nelement,3);

for iel = 1 : Nelement_horiz
    posielemh(iel,1)= iel + floor(iel/(Nelement_horiz/bloc.Ny)-
(Nelement_horiz/bloc.Ny)/100000);
    posielemh(iel,2) = posielemh(iel,1)+1;
    posielem(iel,1)= posielemh(iel,1);
    posielem(iel,2) = posielemh(iel,2);
    posielem(iel,3) = 1;
end

for iel = 1 : Nelement_verti
    posielemv(iel,1)= iel;
    posielemv(iel,2)= iel + bloc.Nx;
    posielem(iel + Nelement_horiz,1)= posielemv(iel,1);
    posielem(iel+ Nelement_horiz,2) = posielemv(iel,2);
    posielem(iel+ Nelement_horiz,3) = 2;
end

%% Définition des degrés de liberté libres/bloqués

if Appuis ==1
    blocked = zeros(3,1);
    blocked(1) = 1;
    blocked(2) = 2;
    blocked(3) = 3*bloc.Nx -1;
elseif Appuis == 2
    blocked = zeros(3*bloc.Ny,1);
    for j = 1 : bloc.Ny
        blocked (3*j-2) = 3*((j-1)*bloc.Nx+1)-2;
        blocked (3*j-1) = 3*((j-1)*bloc.Nx+1)-1;
        blocked (3*j) = 3*((j-1)*bloc.Nx+1);
    end
end
freedof = setdiff(1:3*bloc.N,blocked);

```

```

%% allocation des matrices

displ.h = zeros(1, bloc.N) ;
displ.v = zeros(1, bloc.N) ;
displ.theta = zeros(1, bloc.N) ;
pente = zeros(1,Nelement);

%% Matrice de raideur

K_global = zeros((bloc.N)*3);

for element = 1:Nelement
    K_el=zeros(6);
    % si l'élément est horizontal
    if posielem(element,3)== 1
        pente(element) = atan( (displ.v(posielem(element,2))-displ.v(posielem(element,1)))/(displ.h(posielem(element,2))-displ.h(posielem(element,1))+bloc.X));
        rot = [...] % voir Annexe 2

        for str = 1:spring.Nx
            L = sqrt(spring.posxy(str)^2+spring.posxx(str)^2); %
            distance entre le centre du bloc et le ressort
            beta = atan(spring.posxy(str)/spring.posxx(str));
            t1 = displ.theta(posielem(element,1)) -pente(element) ;
            t2 = displ.theta(posielem(element,2)) - pente(element);
            c1 = cos(t1);
            s1 = sin(t1);
            c2 = cos(t2);
            s2 = sin(t2);
            ca = cos(beta);
            sa = sin(beta);
            Kn=Knx;
            Ks=Ksx;
            spring.K = [...] % voir Annexe 1
            K_el = K_el + spring.K;
        end
        % Si l'élément est vertical
        elseif posielem(element,3)== 2
            pente(element) = atan( (displ.h(posielem(element,2))-displ.h(posielem(element,1)))/(displ.v(posielem(element,2))-displ.v(posielem(element,1))+bloc.H));
            rot = [...] % voir Annexe 2

            for str = 1:spring.Ny
                L = sqrt(spring.posyy(str)^2+spring.posyx(str)^2); %
                distance entre le centre du bloc et le ressort
                beta = atan(spring.posyy(str)/spring.posyx(str));
                t1 = displ.theta(posielem(element,1)) -pente(element) ;
                t2 = displ.theta(posielem(element,2)) - pente(element);
                c1 = cos(t1);
                s1 = sin(t1);
                c2 = cos(t2);
                s2 = sin(t2);
                ca = cos(beta);

```

```

        sa = sin(beta);
        Kn=Kny;
        Ks=Ksy;
        spring.K = [...] % Voir Annexe 1
        K_el = K_el + spring.K;
    end
end

K_elg = rot'*K_el*rot; % matrice de raideur de l'élément dans le
systeme d'axe global
K_global = ...
end

%% Matrice de raideur réduite

K_red = K_global(freedof, freedof);

%% Matrice de chargement réduite

F=zeros(3*bloc.N,1);

F(3*bloc.N-1)= -loading;
F_red = F(freedof);

%% déformation

deplacement_red=K_red\F_red; % Résolution de l'eq F=Kq

deplacement=zeros(bloc.N*3,1);
deplacement(freedof)=deplacement_red;

for node=1:bloc.N
    displ.h(node)=deplacement(node*3-2);
    displ.v(node)=deplacement(node*3-1);
    displ.theta(node)=deplacement(node*3);
end

%% Résultats

x = 0:bloc.X:beam.L;
plot(x,displ.v(1:bloc.Nx))
defmax=max(abs(displ.v));

```

Annexe 4 : Calculs non-linéaires

```
clear all
close all
clc

%% Caractéristiques de la poutre
Voir Annexe 3
%% Caractéristiques du calcul

SecondOrdre = 1; % [0=1er ordre, 1=2nd ordre)
nombrepas =20; % si 2nd ordre, nombre de pas de chargement

%% discrétisation
Voir Annexe 3
%% matériau
Voir Annexe 3
%% Position du centre des blocs =~noeuds
Voir Annexe 3
%% Index éléments/noeuds correspondants
Voir Annexe 3
%% Définition degrés de liberté libres/bloqués
Voir Annexe 3
%% allocation des matrices
Voir Annexe 3
%% particularité méthode incrémentale

paschargement = concentreverti/nombrepas; % [kN]
paschargementM = momentconcentre/nombrepas; % [kNm]

for iteration= 1:nombrepas

    Charge = iteration*paschargement;

    DoNewtonRaphson=1;
    iNR=1;

    %% Matrice de chargement réduite

    F=zeros(3*bloc.N,1);
    F(3*bloc.N-1)= -iteration*paschargement; % charge verticale
    F(3*bloc.N)= iteration*paschargementM; % moment concentré
    F_red = F(freedof);
    Ftot=Ftot+F_red;

    while DoNewtonRaphson

        %% Efforts internes

        Fint=zeros(3*bloc.N,1);
```

```

for elem = 1:Nelement
    [F_int_el] = contraintes(...)
end
Fint_red = Fint(freedof);

%% Matrice de raideur

K_global = zeros((bloc.N)*3);

for element = 1:Nelement
    K_el=zeros(6);

    depel = deplacement(de l'élément)

    Fint_el = Fint(de l'élément)

    % Applications de la perturbation

    for ii=1:6
        depel_p = depel; depel_p(ii) = depel_p(ii)+1e-5;
        [F_int_el_p] = contraintes(...)
        DF = -(F_int_el_p-F_int_el)/1e-5;
        K_el(:,ii) = [DF(:,1); DF(:,2)];
    end

    K_global=[...]

end

%% Matrices réduites

K_red = K_global(freedof, freedof);

displprec_red=displprec(freedof);

%% deformations
% Résolution de l'Equation 2.2
DX = K_red\ (F_red+Fint_red);
deplacement_red = displprec_red + DX;
convcrit= norm(DX) / norm(deplacement_red);

deplacement(freedof)=deplacement_red;

displprec=deplacement;
iNR=iNR+1;
if convcrit < 1e-8
    DoNewtonRaphson = 0;
end

end

displend(iteration) = displ.v(end-1);
% fred(iteration) = F_red(end-1);
fred(iteration) = F_red(end);

```

```
figure(1);
plot(displend,fred, 'k.-')
drawnow
end
```

Annexe 5 : Calculs dynamiques

```
%% unité [m] [N] [s] [kg]
clear all
close all
clc

%% Caractéristiques poutre
Portee = 3.4; %[m]
NL = 34; %[-]
NT = 1; %[-]
Hpoutre = 0.2; %[m]
Bpoutre=0.1; %[m]

[XNOD,YNOD,FIXNOD,NNOD,ELEMNOA,ELEMNOB,NElem,SIZE,ORIENTATION] = ...
MaillagePoutre(Portee,NL,NT,Hpoutre);

%% Charge
Force =7100*1000;%[N]
DDLcharge =3*NL-2;% DDL sur lequel s'applique la force

%% Caractéristiques du calcul
Plastique = 2 ; % 0 = elasti, 1=elasto-plast, 2 = E-P + ruine

%% Caractéristiques temporelles
Tobs = 0.0027;%[s] durée de la modélisation
Tcharge =0.0027; %[s] durée d'application de la charge
dt=0.00005; %s
Nstep = Tobs/dt;

%% matériau
E = 21e10; % [N/m2] Module de Young
G=E/(2*(1+0.3)); % [N/m2] Module de cisaillement
fy = 355000000; % [N/m2] Limite d'élasticité
rho = 7800; %[kg/m3] masse volumique
xi = 0.00; % damping ratio

plasti= inf; ruine = inf ;cisai = inf; cisair = inf;
if plastique ~= 0 ;
plasti=fy/E;% [%] deformation élastique max
cisai = 0.7*fy/G;
end
if plastique == 2;
ruine = 0.03;% [%] deformation avant rupture
cisaip = cisai*ruine/plasti;
end
MECA=[plasti ruine cisai cisair];

%% discrétisation en ressorts
Voir Annexe 3
%% Définition degrés de liberté libres/bloqués
```

```

%% Matrice de Masse
M = zeros(NNOD*3);
for nod = 1:NNOD
    M_nod = [SIZE(nod,1)*SIZE(nod,2)*Bpoutre*rho 0 0;
              0 SIZE(nod,1)*SIZE(nod,2)*Bpoutre*rho 0;
              0 0
Bpoutre*rho*SIZE(nod,1)*SIZE(nod,2)*(SIZE(nod,1)^2+SIZE(nod,2)^2)/12];
    M(3*nod-2:3*nod,3*nod-2:3*nod) = M_nod;
end
M_red = M(freedof, freedof);

%% Vecteurs de chargement

Fext=zeros(NNOD*3,Nstep);

for t = 1:Nstep
    if t<=Tcharge/dt
        Fext (DDLcharge,t)=Force;
    end
end
Fext_red=Fext(freedof,:);

%% allocation des matrices

deplacement=zeros(NNOD*3,Nstep);
vit = deplacement; acc=vit;
vit_red=vit(freedof,:); acc_red = acc(freedof,:);
displ.h = zeros(NNOD,Nstep) ;
displ.v = zeros(NNOD,Nstep) ;
displ.theta = zeros(NNOD,Nstep) ;
deplacementprec = zeros(NNOD,1) ;

%% Boucle sur le temps

for t = 1 : Nstep

DoNewmark =1;

while DoNewmark

    %% Efforts internes
    Voir Annexe 4
    %% Matrice de raideur
    Voir Annexe 4
    %% Matrice d'amortissement

    if t==1
        [V, D]= eig(K_red(:,:,t),M_red);
        omega = sqrt(diag(D));
        [omega , tri]= sort(omega);
        f=omega/(2*pi);
        V=V(:,tri);
        alpha = (2*omega(1)*omega(2)*(omega(1) -
omega(2))*xi)/(omega(1)^2 - omega(2)^2);
        beta = (2*omega(1)*omega(2)*(1/omega(2) -
1/omega(1))*xi)/(omega(1)^2 - omega(2)^2);
    end
end

```

```

C_red = alpha*M_red + beta*K_red(:,:,t);
end

%% déformation

FHE=F_red+Fint_red-M_red*acc_red-C_red*vit_red;

[deplacement_red(:,:,t),vit_red(:,:,t),acc_red(:,:,t)]=NewmarkMDDL(...)

Dq= deplacement_red(:,:,t)-deplacementprec
convcrit= norm(Dq)/norm(deplacement_red);

deplacementprec= deplacement_red(:,:,t)

if convcrit < 1e-4
    DoNewmark = 0;
end

end
%% Résultats

for t=1:1:Nstep
    figure(1); clf;
    for nod = 1:NNOD
        R = [cos(displ.theta(nod,t)) -sin(displ.theta(nod,t));
        sin(displ.theta(nod,t)) cos(displ.theta(nod,t))];
        C1= R*[ -SIZE(nod,1)/2 ; -SIZE(nod,2) /2]; C2= R*[ SIZE(nod,1)/2 ; SIZE(nod,2) /2];
        C3= R*[ SIZE(nod,1)/2 ; SIZE(nod,2) /2]; C4= R*[ -SIZE(nod,1)/2 ; SIZE(nod,2) /2];
        X = [XNOD(nod)+Echelle*displ.h(nod,t)+C1(1) ;
        XNOD(nod)+Echelle*displ.h(nod,t)+C2(1) ;
        XNOD(nod)+Echelle*displ.h(nod,t)+C3(1);XNOD(nod)+Echelle*displ.h(nod,t)
        +C4(1)];
        Y = [YNOD(nod)+Echelle*displ.v(nod,t)+C1(2) ;
        YNOD(nod)+Echelle*displ.v(nod,t)+C2(2) ;
        YNOD(nod)+Echelle*displ.v(nod,t)+C3(2);
        ;YNOD(nod)+Echelle*displ.v(nod,t)+C4(2)];
        patch(X,Y,'w','LineWidth',1.3)
    end
    axis equal
    pause(0.1)
end

```

Test

