



Université de Liège - Faculté des Sciences Appliquées

Année académique 2011-2012

## MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

CALCUL HYDRAULIQUE DE LA BATHYMETRIE DE  
COURS D'EAU À PARTIR DE LEVÉS DE LA SURFACE  
LIBRE

Co-promoteurs : Michel PIROTON, Benjamin DEWALS  
Jury : Pierre ARCHAMBEAU, Rolland BILLEN, Didier de THYSEBAERT

Mémoire de fin d'études présenté en vue de l'obtention du grade d'Ingénieur Civil des Constructions par  
**Christophe FRASELLE.**

## Énoncé

Actuellement, pour déterminer la bathymétrie d'un cours d'eau, il faut avoir recours à des méthodes telles que des bateaux équipés d'écho-sondeur. Après plusieurs passages, le niveau du fond du lit mineur est ainsi connu. La technique citée impose cependant la navigabilité du cours d'eau et prend beaucoup de temps. Dans les zones où la navigation est impossible, il est nécessaire de recourir à des techniques manuelles de relevé. L'obtention de la bathymétrie d'un cours d'eau peut donc s'avérer fort laborieuse.

L'objectif du travail consiste à proposer une méthode alternative de détermination du fond du lit mineur. La méthode repose sur un calcul hydraulique se basant sur la surface libre. En effet, contrairement à la bathymétrie, la surface libre peut facilement être accessible sur base d'images satellites ou de mesures par laser aéroporté (LiDAR). Une mesure laser permet d'acquérir avec une certaine précision le niveau de surface libre et la topographie du lit majeur. Le fond ne peut cependant pas être mesuré par le laser topographique suite à la réflexion des rayons sur la surface de l'eau. Partant de la surface libre, il est dès lors possible de résoudre les équations de l'hydraulique afin de pouvoir connaître la bathymétrie. De cette manière l'obtention de la bathymétrie serait facilitée. Le niveau du fond serait en effet déduit de la différence entre l'altitude de surface libre donnée et la hauteur d'eau calculée.

Dans le mémoire, la méthode sera tout d'abord mise au point pour des cas simples unidimensionnels. L'idée pour cette résolution étant simplement de suivre la même voie que pour la détermination des lignes d'eau, sauf qu'ici c'est la surface libre qui est la donnée et la bathymétrie l'inconnue. Cette première partie permettra d'évaluer et d'affiner la méthode de résolution, mais aussi d'obtenir des premières conclusions et informations sur le comportement de la solution.

Dans la suite, la méthode de résolution sera étendue au bidimensionnel afin de pouvoir traiter des cours d'eaux réels.

### Signatures des membres du jury :

**Michel PIROTON (Promoteur)**   **Benjamin DEWALS (Promoteur)**   **Pierre ARCHAMBEAU**

**Roland BILLEN**

**Didier DE THYSEBAERT**

## Remerciements

*Je remercie tout d'abord mes promoteurs pour le temps qu'ils m'ont accordé malgré leur charge de travail, ainsi que pour leurs conseils et aides apportés tout au long de l'année.*

*Je remercie monsieur Archambeau pour l'aide apportée pour la partie bidimensionnelle du travail.*

*Je remercie les membres du jury d'avoir accepté de lire mon travail.*

*Finalement mes remerciements vont à toutes les personnes qui d'une façon ou d'une autre m'ont permis de mener à bien ce travail.*

*Christophe Fraselle*

## Résumé

*Fraselle Christophe, Université de Liège, Faculté des Sciences Appliquées, année académique 2011-2012.*

**Titre du travail :** Calcul hydraulique de la bathymétrie de cours d'eau à partir de levés de la surface libre.

L'objectif du présent mémoire est d'apporter une alternative à certaines techniques classiques de mesure de la bathymétrie de cours d'eau. Les méthodes proposées s'appuient sur une modélisation hydraulique inverse. En effet, l'idée est de partir d'un levé de surface libre connu, sur base de levé LiDAR par exemple, et de résoudre les équations de l'hydraulique pour connaître la bathymétrie du cours d'eau.

Pour ce faire, la méthode est d'abord mise au point pour des configurations unidimensionnelles avant d'être étendue à des configurations bidimensionnelles. Il s'avère que le comportement mathématique des équations à la base de la résolution est tout à fait différent de celui des équations permettant l'établissement de la surface libre. En effet, le sens de propagation de l'information au sein du modèle numérique est toujours dirigé vers l'aval et il n'y a aucune influence de l'aval sur l'amont. Cet aspect est notamment utilisé afin de résoudre numériquement par une méthode orientée qui consiste à étendre le domaine de calcul au fur et à mesure de la résolution. La résolution repose sur la technique des volumes finis.

Après une série d'applications, il s'avère que la bathymétrie peut effectivement être déterminée mais la solution obtenue est fortement dépendante de la qualité de la connaissance de la surface libre. Toute perturbation de la surface libre conduit à des erreurs sur la bathymétrie, erreurs d'autant plus importantes que le nombre de Froude est faible. Cependant, des méthodes d'atténuation des effets du bruit existent. Finalement, la méthode doit encore être adaptée pour des configurations réelles, où les bords et les coins sont mal estimés par la méthode actuelle.

**Mots clés :** *modélisation hydraulique inverse, bathymétrie, LiDAR.*

## Abstract

*Fraselle Christophe, University of Liege, Faculty of Applied Sciences, academic year 2011-2012.*

**Title :** Hydraulic calculation of rivers bathymetry from free surface data.

The purpose of the present work is to provide an alternative to conventional techniques of bathymetry survey. The proposed methods rely on inverse hydraulic modelling. Indeed, the idea is to solve the hydraulic equations to deduce the bathymetry from free surface data, based on known LiDAR survey for example.

The method has first been developed for one-dimensionnal configurations and next extended for two-dimensional ones. It turns out that the mathematical behaviour of the bathymetric equations is different from free surface equations. Indeed, the direction of information is always directed towards downstream. This aspect has been particularly used to numerically solve the model by an oriented method, which consists in extending the computational domain during the resolution. The resolution is based on the technique of finite volume.

After a series of applications, it turns out that the bathymetry can actually be determined, but the solution is heavily dependent on the quality of the free surface data. Any disturbance of the free surface leads to errors on the bathymetry, and these errors are more important when the Froude number is lower. However, methods exist to attenuate these errors. Finally, the method needs further developments for real configurations, where the edges and corners are poorly estimated. The method must still be adapted to be able to deal with actual LiDAR surveys.

**Keywords :** *inverse hydraulic modelling, bathymetry, LiDAR.*

## Table des matières

<b>Énoncé</b>	i
<b>Remerciements</b>	ii
<b>Résumé</b>	iii
<b>Abstract</b>	iii
<b>Symboles</b>	1
<b>Introduction générale</b>	3
<b>I Principes du LiDAR</b>	6
<b>1 LiDAR topographique</b>	6
<b>2 LiDAR bathymétrique</b>	6
<b>II Détermination de la bathymétrie dans des configurations idéalisées unidimensionnelles</b>	9
<b>1 Ligne de sol</b>	9
1.1 Établissement de l'équation . . . . .	9
1.2 Résolution par différences finies . . . . .	11
1.2.1 Cas d'un bump . . . . .	12
1.2.2 Cas d'un fond sinusoïdal . . . . .	14
1.3 Conclusions intermédiaires . . . . .	14
<b>2 Méthode pseudo temporelle</b>	16
2.1 Établissement de l'équation de départ . . . . .	16
2.1.1 Recherche de la célérité . . . . .	18
2.1.2 Formulation en fonction de l'altitude du sol . . . . .	19
2.2 Modèle numérique . . . . .	20
2.2.1 Discrétisation par volumes finis . . . . .	20
2.2.2 Explication de la procédure . . . . .	20
2.3 Application de la méthode . . . . .	22
2.3.1 Fond plat . . . . .	23
2.3.2 Bump . . . . .	23
2.3.3 Fond sinusoïdal . . . . .	24
2.3.4 Trois pentes . . . . .	24
2.4 Conclusions intermédiaires . . . . .	29
<b>3 Résolution orientée</b>	31
3.1 Illustration de la méthode sur le cas du sinus . . . . .	31
3.2 Cas des trois pentes . . . . .	32
3.2.1 Premier exemple . . . . .	32
3.2.2 Second exemple . . . . .	32
3.3 Autres exemples . . . . .	34
3.4 Résolution de la même bathymétrie pour plusieurs surfaces libres . . . . .	34
3.4.1 Résolution en boucle pour le cas sinus . . . . .	34
3.4.2 Résolution en boucle pour le cas des trois pentes . . . . .	35

3.5	Conclusions intermédiaires . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Sensibilité</b>	<b>38</b>
4.1	Influence des données caractérisant l'écoulement . . . . .	38
4.1.1	Variation du coefficient de frottement . . . . .	38
4.1.2	Variation du débit . . . . .	39
4.1.3	Largeur d'écoulement . . . . .	39
4.1.4	Conclusions intermédiaires . . . . .	40
4.2	Surface libre arrondie . . . . .	40
4.2.1	Surface libre “quasi plane” . . . . .	41
4.2.2	Surface libre marquée, “inclinée” . . . . .	41
4.2.3	Conclusions intermédiaires . . . . .	43
<b>5</b>	<b>Bruitage de la surface libre</b>	<b>44</b>
5.1	Application du bruit sur différents cas . . . . .	44
5.1.1	Cas du sinus . . . . .	44
5.1.2	Cas trois pentes . . . . .	45
5.2	Erreur maximale mesurée . . . . .	47
5.2.1	Linéaire? . . . . .	47
5.2.2	Influence de la hauteur d'ondulation . . . . .	48
5.2.3	Influence de la hauteur d'eau . . . . .	48
5.2.4	Influence du pas spatial . . . . .	50
5.2.5	Influence du débit spécifique . . . . .	50
5.2.6	Influence du nombre d'onde cinématique . . . . .	51
5.2.7	Formulation adimensionnelle . . . . .	52
5.2.8	Recommandations pour la détermination de la bathymétrie . . . . .	55
5.3	Moyenne sur plusieurs simulations . . . . .	56
5.3.1	Cas du sinus . . . . .	56
5.3.2	Cas trois pentes . . . . .	56
5.4	Recherche de l'expression de l'erreur . . . . .	57
5.5	Conclusions intermédiaires . . . . .	58
<b>6</b>	<b>Atténuation des effets du bruit</b>	<b>60</b>
6.1	Détection du bruit? . . . . .	60
6.2	Pré-traitement . . . . .	61
6.3	Post-traitement . . . . .	62
6.4	Comparaison . . . . .	62
6.5	Possibilités de traitements . . . . .	64
6.6	Conclusions intermédiaires . . . . .	64
<b>7</b>	<b>Conclusions</b>	<b>66</b>
<b>III</b>	<b>Détermination de la bathymétrie dans des configurations réalistes bidimensionnelles</b>	<b>67</b>
<b>1</b>	<b>Établissement du système d'équations</b>	<b>67</b>
1.1	Recherche des célérités . . . . .	68
1.2	Résolution numérique . . . . .	69
1.2.1	Schéma numérique . . . . .	69
1.2.2	Exposé de la méthode de résolution . . . . .	70

<b>2 Applications sur des cas académiques bidimensionnels</b>	<b>73</b>
2.1 Écoulements unidirectionnels . . . . .	73
2.1.1 Fond plat . . . . .	73
2.1.2 Trois pentes . . . . .	76
2.2 Écoulements bidirectionnels . . . . .	79
2.2.1 Test du rétrécissement . . . . .	79
2.2.2 Test du coude . . . . .	80
<b>3 Applicabilité de la méthode sur un tronçon réel de cours d'eau</b>	<b>86</b>
<b>4 Conclusions</b>	<b>87</b>
<b>IV Conclusions générales</b>	<b>88</b>

## Table des figures

1	Principe du sonar multifaisceaux (Tiré de [2]) . . . . .	3
2	Mesure par laser aéroporté (gauche) acquisition près de la centrale nucléaire de Tihange (droite) (Tiré de [2, Dierickx]) . . . . .	4
3	Principe de fonctionnement du LiDAR bathymétrique (gauche), schéma du signal vert reçu en fonction du temps (Tiré et modifié de [1]) . . . . .	7
4	Variation du coefficient de pente pour un nombre de Froude compris entre 0,1 et 2. . . . .	11
5	Bathymétrie calculée par la résolution de l'équation de ligne de sol pour le cas d'un fond présentant un bump. . . . .	13
6	Comparaison entre la bathymétrie théorique et celle calculée par l'équation de ligne de sol dans le cas d'un fond présentant un bump. . . . .	13
7	Bathymétrie calculée par la résolution de l'équation de ligne de sol pour le cas d'un fond sinusoïdal. . . . .	15
8	Pente de surface libre pour le cas d'un fond sinusoïdal. . . . .	15
9	Bathymétrie calculée par la méthode pseudo temporelle pour le cas d'un fond plat. . . . .	23
10	Bathymétrie calculée par la méthode pseudo temporelle pour le cas d'un fond présentant un bump. . . . .	24
11	Comparaison entre la bathymétrie théorique et celle calculée par la méthode pseudo temporelle pour le cas d'un fond présentant un bump. . . . .	25
12	Comparaison des solutions obtenues dans le cas du bump, par la technique de ligne de sol et celle pseudo temporelle. . . . .	25
13	Bathymétrie calculée par la méthode pseudo temporelle pour le cas d'un fond sinusoïdal. . . .	26
14	Bathymétrie calculée par la méthode pseudo temporelle pour un fond en trois pentes. . . . .	27
15	Zoom au niveau du ressaut pour la bathymétrie calculée par la méthode pseudo temporelle dans le cas des trois pentes. . . . .	27
16	Bathymétrie calculée par la méthode pseudo temporelle pour le second exemple en trois pentes.	28
17	Bathymétrie calculée par la méthode pseudo temporelle avec utilisation du code "anti diver- gence" pour le second exemple en trois pentes. . . . .	29
18	Illustration de la méthode orientée sur le cas sinus, avec au-dessus un tiers du domaine résolu, au centre deux tiers et en-dessous tout le domaine. . . . .	32
19	Bathymétrie du premier exemple des trois pentes résolu par la méthode orientée. . . . .	33
20	Bathymétrie du second exemple en trois pentes résolu par la méthode orientée. . . . .	33
21	Variation du nombre de Froude en aval considérée pour le cas du sinus. . . . .	34
22	Bathymétries obtenues par la méthode orientée pour une résolution faite avec plusieurs débits pour le cas du sinus. . . . .	36
23	Variation du nombre de Froude en aval considérée pour le cas des trois pentes. . . . .	36
24	Bathymétries obtenues pour une résolution faite avec plusieurs débits par la méthode orientée.	37
25	Bathymétries obtenues par la méthode orientée pour le cas des trois pentes avec uniquement trois débits spécifiques. . . . .	37
26	Bathymétrie calculée par la méthode orientée pour le fond plat, avec le coefficient de frottement estimé à 95%, 100% et 105%. . . . .	39
27	Illustration sur le cas des trois pentes de la surestimation, sous-estimation et de la bathymétrie normalement obtenue. . . . .	40
28	Bathymétrie obtenue pour un exemple en trois pentes avec une surface libre "quasi plane" arrondie ou non arrondie. . . . .	42
29	Surfaces libres "quasi planes" arrondies pour le cas des trois pentes. . . . .	42
30	Bathymétrie obtenue pour un exemple en trois pentes avec une surface libre "inclinée" arrondie.	43
31	Bathymétrie calculée par la méthode orientée en partant d'une surface libre bruitée pour le cas du sinus. . . . .	45
32	Variation du nombre de Froude le long de l'écoulement pour le cas du sinus. . . . .	46
33	Bathymétrie calculée par la méthode orientée en partant d'une surface libre bruitée pour le cas en trois pentes. . . . .	46
34	Variation du nombre de Froude le long de l'écoulement pour le cas trois pentes. . . . .	47

35	Coefficient d'erreur maximal en fonction du nombre de Froude pour le cas sinus et pour 4 normes de bruits différentes. . . . .	48
36	Erreur maximale calculée pour 6 hauteurs d'ondulations différentes. . . . .	49
37	Erreur maximale calculée pour 3 hauteurs d'eau différentes. . . . .	49
38	Erreur maximale mesurée pour le cas sinus en fonction du pas spatial. . . . .	50
39	Influence du débit spécifique sur l'erreur maximale. . . . .	51
40	Configuration du cas sinus étudié (gauche) et du bump (droite). . . . .	52
41	Erreur maximale pour une même gamme de variation du nombre d'onde cinématique. . . . .	53
42	Bathymétrie obtenue pour un pas spatial de 500 m pour le cas du sinus sur base d'une surface libre bruitée. . . . .	55
43	Moyenne sur 10 000 simulations pour le cas du sinus. . . . .	56
44	Erreur et estimation de celle-ci pour la résolution en boucle du cas sinus. . . . .	58
45	Mise en évidence de la présence de bruit pour le cas du sinus par le calcul de la variation d'altitude de surface libre. . . . .	60
46	Pré-traitement par moyenne sur 3 points de la surface libre du cas sinus. . . . .	61
47	Détermination de la taille optimum de la fenêtre pour un pré-traitement par moyenne de la surface libre. . . . .	62
48	Pré-traitement par moyenne sur 9 points du cas sinus. . . . .	63
49	Détermination de la taille optimum de fenêtre pour un post-traitement par moyenne de la bathymétrie. . . . .	63
50	Post-traitement par moyenne sur 9 points du cas sinus. . . . .	64
51	Comparaison de l'erreur maximale restante en fonction de la taille de fenêtre considérée pour une moyenne faite en pré-traitement (rouge) ou en post-traitement (bleu). . . . .	65
52	Cas particuliers pour le choix de bord à conserver, où les vecteurs rouges représentent le débit spécifique perpendiculaire aux bords noirs. . . . .	71
53	Illustration de la bathymétrie obtenue pour l'exemple du fond plat. . . . .	74
54	Coupe à mi-largeur de la bathymétrie obtenue pour le fond plat. . . . .	74
55	Bathymétrie dans le cas du fond plat en partant d'une surface libre bruitée à 0,1 mm. . . . .	75
56	Bathymétrie dans le cas du fond plat en partant d'une surface libre bruitée à 0,1 mm et moyennée sur 9 mailles. . . . .	76
57	Représentation de la bathymétrie obtenue pour le premier exemple en trois pentes. . . . .	77
58	Comparaison entre la solution théorique et une coupe faite sur la longueur pour le premier exemple en trois pentes. . . . .	77
59	Représentation de la bathymétrie obtenue pour le second exemple en trois pentes. . . . .	78
60	Comparaison entre la solution théorique et une coupe faite sur la longueur pour le second exemple en trois pentes. . . . .	78
61	Schématisation du rétrécissement et de la distribution de débit. . . . .	80
62	Bathymétrie obtenue pour le cas du rétrécissement. . . . .	80
63	Géométrie et surface libre du coude étudié. . . . .	81
64	Bathymétrie obtenue pour la zone de 34 m en amont. . . . .	82
65	Surface libre de la zone amont avec zoom sur la partie entourée d'un cercle rouge où la bathymétrie s'éloigne de la solution théorique. . . . .	82
66	Bathymétrie calculée pour un domaine en aval de 85m. . . . .	84
67	Bathymétrie calculée pour un domaine en aval de 65m. . . . .	84
68	Bathymétrie calculée pour un domaine en aval de 45m. . . . .	85
69	Bathymétrie calculée pour un domaine en aval de 25m. . . . .	85

# Symboles

Dans la suite, les différents symboles suivants sont utilisés :

- $\mathbf{A}_x$  : la matrice jacobienne des flux selon  $x$ .
- $\mathbf{A}_y$  : la matrice jacobienne des flux selon  $y$ .
- $c$  : la célérité de l'information, la valeur propre de la matrice convective.
- $C$  : le contour du volume de contrôle.
- $Fr$  : le nombre de Froude.
- $F_1$  : une fonction de  $x$  et de  $y$
- $F_2$  : une fonction de  $x$  et de  $y$  :
- $\mathbf{F}_x$  : le vecteur de flux dans la direction  $x$ .
- $\mathbf{F}_y$  : le vecteur de flux dans la direction  $y$ .
- $g$  : l'accélération gravifique ( $9,81 \text{ m/s}^2$ ).
- $h$  : la hauteur d'eau.
- $h_0$  : la hauteur d'eau caractéristique.
- $h^*$  : la hauteur d'eau adimensionnelle.
- $h'$  : l'erreur sur la hauteur d'eau.
- $i$  : la pente de fond.
- $\mathbf{I}$  : la matrice identité.
- $J$  : la pente de frottement.
- $J_x$  : la pente de frottement selon  $x$ .
- $J_y$  : la pente de frottement selon  $y$ .
- $K$  : le coefficient de frottement.
- $k_0$  : le nombre d'onde cinématique.
- $l_0$  : la longueur caractéristique de l'écoulement.
- $\vec{n}$  : le vecteur de propagation de l'onde.
- $n_x$  : composante selon  $x$  du vecteur  $\vec{n}$
- $n_y$  : composante selon  $y$  du vecteur  $\vec{n}$
- $q$  : le débit spécifique.
- $R_h$  : le rayon hydraulique.
- $S$  : le terme source.
- $\mathbf{S}$  : le vecteur de termes source et puits.
- $t$  : le temps.
- $t_0$  : le temps caractéristique.

- $t^*$  : le temps adimensionnel.
- $u$  : la vitesse de l'écoulement selon l'axe  $x$ .
- $u_0$  : la vitesse caractéristique de l'écoulement selon l'axe  $x$ .
- $u^*$  : la vitesse adimensionnelle de l'écoulement selon l'axe  $x$ .
- $\mathbf{U}$  : le vecteur contenant les variables d'état de l'écoulement.
- $v$  : la vitesse de l'écoulement selon l'axe  $y$ .
- $V$  : le volume de contrôle.
- $x$  : l'axe des abscisses.
- $y$  : l'axe des ordonnées.
- $z_0$  : l'altitude caractéristique de la surface libre.
- $z_b$  : la bathymétrie.
- $z'_b$  : l'erreur faite sur la bathymétrie.
- $z_s$  : l'altitude de la surface libre.
- $z_s^*$  : l'altitude adimensionnelle de la surface libre.
- $z'_s$  : l'erreur faite sur l'altitude de la surface libre.

### Lettres grecques

- $\alpha$  : le coefficient dans la formulation de l'écoulement uniforme.
- $\beta$  : l'exposant de la vitesse dans la formulation de l'écoulement uniforme.
- $\gamma$  : l'exposant de la hauteur d'eau dans la formulation de l'écoulement uniforme.
- $\Delta t$  : le pas temporel.
- $\Delta x$  : le pas spatial selon  $x$ .
- $\Delta y$  : le pas spatial selon  $y$ .
- $\lambda$  : le coefficient pseudo temporel.
- $\theta$  : l'angle fait par le fond par rapport à l'horizontal.

# Introduction générale

Un cours d'eau se caractérise la plupart du temps par un lit mineur et un lit majeur. Par définition, le lit mineur est le lit permanent, le lit ordinaire du cours d'eau tandis que le lit majeur est qualifié d'inondable. Le lit mineur d'un cours d'eau se caractérise donc par le fait qu'il est en permanence sous-eau (sauf en période d'étiage), dès lors, l'allure que peut prendre le fond de la rivière, sa bathymétrie, n'est pas appréciable depuis la surface. Il n'est en effet pas possible de recourir à des opérations topographiques classiques depuis la terre ferme pour acquérir la bathymétrie. Il faut avoir recours à des mesures hydrographiques afin de mesurer la profondeur d'eau et ainsi pouvoir rattacher le levé topographique afin de connaître la bathymétrie.

Pour diverses raisons, la connaissance de la bathymétrie d'un cours d'eau est importante, le but est notamment d'assurer un suivi hydrographique des voies navigables [1] [2], que ce soit afin d'en connaître la navigabilité pour des raisons commerciales ou touristiques, la section de l'écoulement qui est indispensable aux modèles hydrauliques pour permettre la détermination de la hauteur d'eau en cas de crue, ou encore l'état de sédimentation et ainsi pouvoir estimer la quantité de boue à draguer, ...

Une des techniques actuelles de détermination de la bathymétrie consiste à sonder les cours d'eau à l'aide de bateaux équipés de sonar multifaisceaux [2] [4], lorsque que la navigabilité le permet.

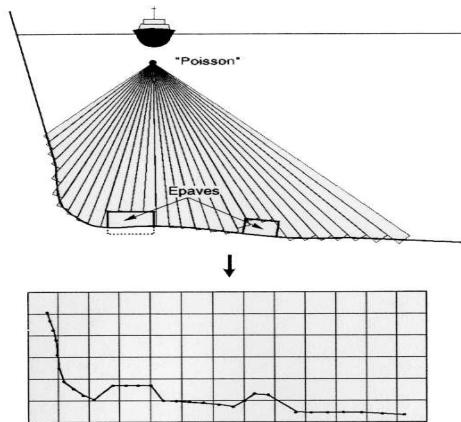


FIGURE 1 – Principe du sonar multifaisceaux (Tiré de [2])

La technique du sonar multifaisceaux, illustrée à la figure 1, est employée en mer depuis des années afin de pouvoir lever le fond marin. La méthode s'appuie sur l'emploi d'un sonar immergé pour la mesure du fond et par l'emploi de GPS et de système inertiel pour positionner exactement le levé du fond. Suite à la présence d'obstacles pour le GPS, les faibles profondeurs d'eau, les méandres ... la technologie a dû être adaptée pour effectuer des campagnes sur les cours d'eau notamment en Région wallonne.

Le fonctionnement reste le même, la mesure du temps mis par l'ultra-son pour atteindre le fond et se réfléchir jusqu'à la surface (l'écho) permet d'en déduire la profondeur. De cette manière, après plusieurs passages, suivant la portée de mesure de l'appareil, la bathymétrie est ainsi connue. Cependant, comme il vient d'être mentionné, cette technique suppose que le cours d'eau soit navigable. Dans le cas contraire, il faut recourir à des techniques manuelles de levé de la bathymétrie. Il est dès lors facile de comprendre, que le levé complet de la bathymétrie pour un cours d'eau nécessite des moyens techniques, du temps mais aussi et surtout de l'argent. Au final, suivant la facilité avec laquelle les données peuvent être acquises, l'établissement de la bathymétrie est un processus relativement lent et coûteux.

L'enjeu du travail réalisé est d'apporter une alternative dans l'établissement de la bathymétrie, avant tout pour des cas de figure où un levé complet par sonar n'est pas envisageable, le but de la méthode n'étant pas

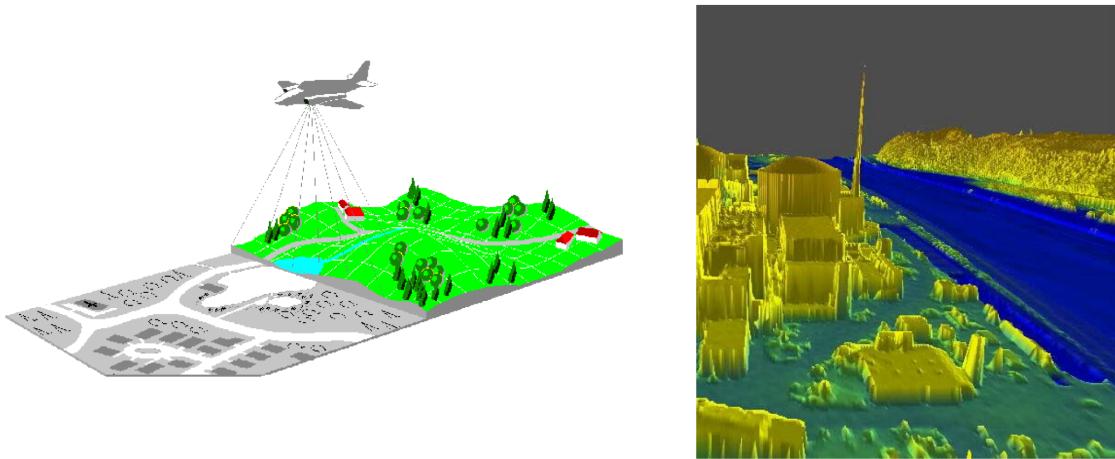


FIGURE 2 – Mesure par laser aéroporté (gauche) acquisition près de la centrale nucléaire de Tihange (droite) (Tiré de [2, Dierickx])

de se substituer au sonar. Partant du constat que la surface libre d'un cours d'eau est beaucoup plus facile à obtenir, l'idée est de réaliser cette fois un calcul hydraulique partant d'une surface libre connue pour un cours d'eau afin d'en établir la bathymétrie. En effet, contrairement à la bathymétrie, la surface libre peut plus facilement être accessible sur base d'images satellites ou par mesure laser aéroporté (LiDAR voir la figure 2). Une mesure laser permet d'acquérir avec une certaine précision et une très grande rapidité le niveau de surface libre et la topographie du lit majeur. Le fond, le lit mineur ne peut cependant pas être mesuré par le laser topographique suite à la réflexion des rayons sur la surface de l'eau. Partant de ce levé de la surface libre il est possible de résoudre les équations de l'hydraulique afin de pouvoir connaître la bathymétrie, *i.e.* établir une *modélisation hydraulique inverse*.

En somme, l'idée revient à effectuer le travail inverse de celui qui permet de déterminer une ligne d'eau. Pour l'établissement d'une ligne d'eau, l'allure du fond et certaines informations sur l'écoulement telles que le débit, la hauteur d'eau en un point, le coefficient de frottement ... sont connues et de là, la détermination de la hauteur d'eau peut être menée. Dans ce qui va suivre, les rôles sont inversés. En effet, cette fois la surface libre va être considérée comme une donnée du problème, alors que la bathymétrie sera l'inconnue à déterminer au terme de la résolution.

Le travail est organisé en quatre parties.

Dans un premier temps, le principe du LiDAR est brièvement exposé en distinguant la notion de LiDAR topographique et bathymétrique. Actuellement, il s'agit de la technologie qui permet une acquisition facile, rapide et précise des lits majeurs et de la surface libre.

Dans la seconde partie du mémoire, le travail va être focalisé sur des situations idéalisées unidimensionnelles. Le but étant de fixer les bases de résolutions, et de maîtriser les équations avant de passer à l'étape suivante. Dans un premier temps, l'équation dite de "ligne de sol" va être établie comme étant une modification de l'équation des lignes d'eau. Cette première équation va permettre de montrer l'établissement possible de la bathymétrie uniquement par une technique de construction faite de proche en proche par la technique des différences finies. Ensuite, la résolution va s'appuyer sur la résolution des équations de l'hydraulique mises sous la forme d'une équation de transport. Cet artifice permettant une résolution simple de l'équation. Finalement partant du comportement mathématique tout à fait différent de celui des lignes d'eau, la méthode va utiliser un schéma de résolution orienté. Cette partie sera complétée par une étude de la sensibilité de la solution lorsqu'une erreur affecte des paramètres caractérisant l'écoulement, et lorsque la surface libre se trouve elle-même affectée d'erreurs de mesure (bruitage). Des méthodes de pré et post-traitement seront

proposées pour estomper les effets d'un bruitage sur la résolution.

Dans la troisième partie du travail, la méthode de résolution sera étendue au bidimensionnel afin de pouvoir traiter des cours d'eaux réels. En effet, dans cette partie les surfaces libres étudiées seront des surfaces libres plus réaliste. Afin de permettre la résolution, dans un premier temps, le système d'équations bidimensionnel à la base de celle-ci va être mis au point. Une fois le modèle numérique réalisé, celui-ci pourra être testé sur des cas réels.

Enfin, les conclusions à tirer de ce travail sont présentées dans la dernière partie.

## Première partie

# Principes du LiDAR

LiDAR est l'acronyme de “*Light Detection And Ranging*” . Il s’agit de télédétection par laser, ce qui correspond à “une mesure optique basée sur l’analyse des propriétés d’une lumière laser renvoyée vers son émetteur” (Extrait de [8]). [1, 2, 9]

### Fonctionnement (Extrait de [9])

Une partie de la lumière est diffusée ou absorbée par l’environnement et l’autre partie est rétrodiffusée dans la direction de la source de rayonnement. L’intervalle de temps entre les signaux d’émission et de réception du signal permet de déterminer la distance parcourue, puisque la vitesse de la lumière est connue. Connaissant avec précision l’altitude de l’avion, il est alors possible de déterminer l’altimétrie (ou la bathymétrie) en chaque point ayant été isolé. Le système de télédétection comprend :

- un télémètre laser,
- un système optique permettant la mesure de l’intensité lumineuse rétrodiffusée,
- les composants électro-optiques et électroniques d’acquisition.

Le positionnement absolu du scanner laser est assuré grâce à un récepteur GPS et une centrale de navigation inertie (INS). Le système GPS est utilisé en cinématique différentielle, avec un récepteur à bord de l’avion et un ou plusieurs autres stationnés aux points de référence à terre. Le rôle du GPS dans une intégration du GPS et de l’INS de la trajectoire de l’avion est de fournir la position XYZ typiquement à une fréquence de 10 Hz. L’INS pour sa part enregistre l’attitude de l’avion à 100 Hz de fréquence. La combinaison du GPS et de l’INS permet de corriger les défauts respectifs de chaque système.

L’emploi de plusieurs technologies permet au final d’effectuer un levé complet de la zone survolée. Il existe deux types de LiDAR, ceux-ci sont expliqués dans la suite.

## 1 LiDAR topographique

Le LiDAR dont le laser est réfléchi par la surface libre est qualifié de *topographique*. Cette première variante utilise un rayon laser dans *l'infrarouge*, dans une gamme de longueur d’onde allant de 1047 à 1540 nm [9]. Cette technologie montée sur un avion permet de très rapidement lever un terrain et avec une très grande densité de points : plus d’un point par mètre carré.

Dans le cadre de l’acquisition du lit d’un cours d’eau, ce type de levé laser permet uniquement de connaître le lit majeur. Le rayon laser se fait réfléchir au niveau de la surface libre ce qui donne un levé de celle-ci. Pour connaître le lit complet, mineur et majeur, il est possible de combiner la technologie du sonar multifaxeaux pour le lit mineur et le laser aéroporté pour le lit majeur [2]. C’est ce que la Région wallonne a décidé de faire vers les années 2000. En effet dans le cadre d’un programme européen de lutte contre les inondations, le SPW (MET à l’époque) a acquis des modèles numériques de terrains (MNT) des lits mineurs et majeurs des principaux cours d’eau de la Région Wallonne. De telles données sont indispensables pour les simulations faites sur modèles hydrauliques 2D. L’acquisition de ces MNT a permis de déterminer les zones inondables en Région wallonne.

## 2 LiDAR bathymétrique

Contrairement au type précédent, le LiDAR bathymétrique permet de mesurer la bathymétrie directement sans besoin d’avoir recours à d’autres levés. Il permet de déterminer la profondeur d’eau en mesurant le temps de parcours de deux impulsions laser [1, 9]. En effet, *c'est l'utilisation du LiDAR infrarouge et vert qui permet de connaître la profondeur* :

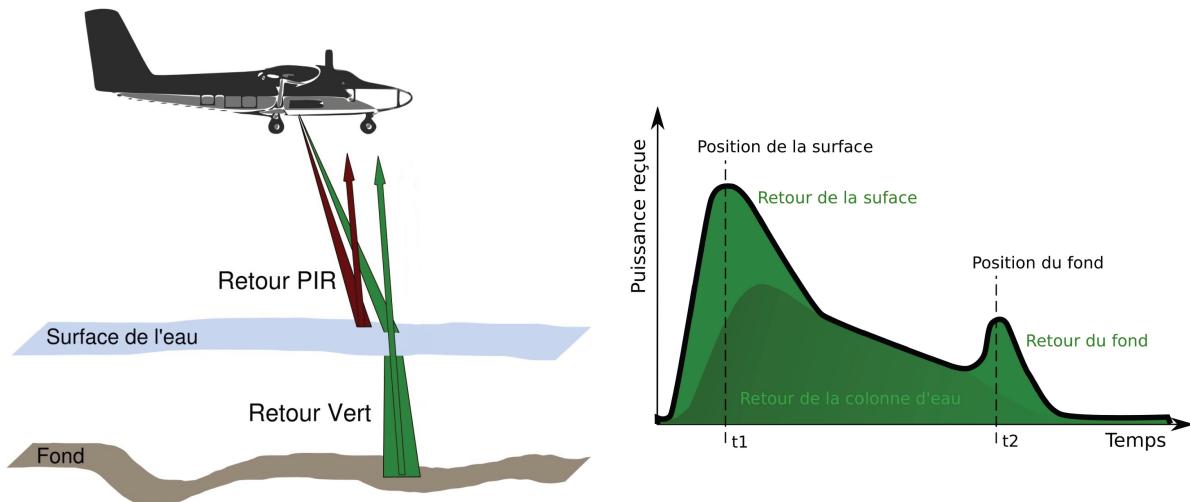


FIGURE 3 – Principe de fonctionnement du LiDAR bathymétrique (gauche), schéma du signal vert reçu en fonction du temps (Tiré et modifié de [1])

- l'infrarouge ne peut passer l'obstacle que présente l'eau, il est donc réfléchi, rétrodiffusé vers l'appareil de mesure par la surface libre,
- par contre le faisceau vert traverse l'obstacle air-eau puis est réfléchi au fond et donc rétrodiffusé vers l'appareil de mesure.

La différence entre les deux lasers vient de la longueur d'onde des rayons. L'infrarouge se caractérise par une longueur d'onde proche en général de 1064 nm ce qui ne permet pas une très grande pénétration dans l'eau et c'est pourquoi ce type de laser est utilisé pour détecter le sol et équipe les LiDAR topographiques. Le faisceau vert présente une longueur d'onde plus courte, en général elle est de 532 nm soit la moitié. Cette différence permet au faisceau de pénétrer l'eau avec le moins d'atténuation possible, c'est pourquoi il est utilisé pour la détection de la bathymétrie. Le principe de fonctionnement du laser bathymétrique se résume donc dans l'utilisation conjointe de deux types de faisceaux laser, celui-ci est illustré à la figure 3. La profondeur de l'eau est simplement déterminée en connaissant la vitesse de la lumière dans l'eau et dans l'air sur base de l'analyse du signal vert reçu en fonction du temps écoulé dont une schématisation est illustrée à la figure 3.

Les différentes énergies lumineuses sont recueillies par un télescope. Si l'énergie totale est représentée en fonction du temps cela donne le graphique de droite de la figure 3 qui est le *train d'onde retour* [1]. Le laser vert est dangereux pour les yeux qui sont sensibles à cette longueur d'onde, c'est pourquoi il faut donner une divergence suffisante au faisceau. Classiquement, le diamètre du rayon est de 1,5 à 2 m au niveau de la surface libre, ce qui par rapport au LiDAR topographique limite la quantité et la qualité des mesures.

La profondeur qu'il est possible de mesurer est fonction de la clarté de l'eau, la présence de sédiments en suspension, de la végétation et de la réflexion du sol. POPULUS précise même qu'en général, les systèmes LiDAR ne sont pas utilisables dans les zones de turbidité chronique modérée à élevée. Ce qui fait que cette technologie est surtout actuellement mise en pratique pour cartographier les zones côtières. [9, 10] Même pour les côtes, il faut attendre des conditions favorables avant de lancer des campagnes de levés.

Un projet du SHOM appelé Litto3D a étudié le Golfe du Morbihan pour démontrer l'utilisation de cette technique [10]. Ce test a notamment montré qu'il y a un fort taux d'échec de détection de la surface du fond pour les très faibles profondeurs, il y aussi la présence d'algues ainsi que la vase qui limitent les performances du système. Pour les très faibles profondeurs, le problème vient du fait que le pic de surface libre et de fond sont quasi confondus, d'où le fort taux d'échec. Cependant il a été montré par ALLOUIS et al [1] qu'il est possible de détecter les très faibles profondeurs en développant une nouvelle méthode de traitement des

formes d'ondes. Le but du travail de ALLOUIS et al était de montrer que la technologie du LiDAR peut être employée pour les très faibles profondeurs, l'idée étant de pouvoir appliquer la méthode pour les cours d'eau dans le futur.

HILDALE et RAFF [6] ont montré qu'il était possible de déterminer la bathymétrie de cours d'eau non navigables par cette technique sur 220 km de rivière aux USA. Mais la technologie doit encore être améliorée. Par exemple, les résultats obtenus montrent que la bathymétrie est affectée d'une erreur systématique qui place le niveau du sol trop haut par rapport à des levés classiques. Le fait que le fond soit trop haut s'explique par l'appareil de mesure qui enregistre la plus petite profondeur détectée suite au diamètre important du rayon pour des raisons de sécurité.

Cette technologie est très prometteuse mais ne peut toutefois pas être mise en pratique si le cours d'eau présente une turbidité trop élevée, ou si la végétation est trop importante car alors le signal lumineux émis ne peut pas atteindre le fond. [9]

**La technologie utilisée pour les levés LiDAR et le traitement des trains d'ondes ne permet pas actuellement de pouvoir complètement déterminer la bathymétrie d'un cours d'eau. C'est pourquoi le travail qui va suivre consiste à tenter de mettre au point une technique alternative de détermination de la bathymétrie s'appuyant cette fois sur un calcul hydraulique inversé dont une des données d'entrée est le levé de la surface libre obtenu sur base d'un levé LiDAR topographique.**

## Deuxième partie

# Détermination de la bathymétrie dans des configurations idéalisées unidimensionnelles

Dans cette partie, différentes méthodes de résolution vont être mises au point sur des configurations idéalisées unidimensionnelles. Ces premiers cas vont servir de cas tests avant de passer à une résolution plus proche de la réalité se basant sur des configurations bidimensionnelles.

Premièrement, partant de l'équation des lignes d'eau, l'équation de ligne de sol va être formulée. Le but de cette équation étant de pouvoir calculer de proche en proche et sans itération l'allure de la bathymétrie en connaissant uniquement la ligne d'eau ainsi qu'une condition de départ (hauteur d'eau en amont). Pour permettre la résolution, certaines caractéristiques du cours d'eau lors de la mesure de la ligne d'eau doivent être connues. Ces différentes caractéristiques sont le débit, la largeur et longueur du tronçon de cours d'eau ainsi que le coefficient de frottement.

Deuxièmement, sur base des équations de l'hydraulique, une équation permettant la détermination de la hauteur d'eau et donc de la bathymétrie va être mise au point en faisant apparaître dans les équations la surface libre. Le comportement mathématique de cette équation va être analysé. Ensuite une première version de solution numérique sera mise au point pour finalement tenir compte des informations apprises concernant le comportement mathématique, et opter pour un schéma de résolution orienté.

Finalement, des études seront faites sur la sensibilité de la résolution avant de proposer des pistes de solution pour limiter les effets d'un bruitage présent au niveau de la surface libre.

## 1 Ligne de sol

L'idée ici est de mettre au point une équation similaire à celle des lignes d'eau, appelée *équation de ligne de sol*, qui permet de connaître de façon directe l'allure du fond du cours d'eau dans des cas 1D.

### 1.1 Établissement de l'équation

Pour mettre au point l'équation, l'idée est de repartir de l'équation des lignes d'eau :

$$\frac{dh}{dx} = \frac{i - J}{1 - Fr^2} \quad (1)$$

où  $h$  est la hauteur d'eau,  $i$  la pente de fond,  $J$  la pente de frottement  $x$  l'abscisse en longueur et  $Fr$  le nombre de Froude. Il faut mettre en évidence le terme de sol  $z_b$  et ainsi obtenir une équation de ligne de sol. Pour ce faire, il faut faire apparaître le terme représentant la bathymétrie en se souvenant que :

$$i = -\frac{dz_b}{dx} \quad (2)$$

$$h = z_s - z_b \quad (3)$$

$z_s$  est l'altitude de la surface libre qui est connue sur base d'un levé laser par exemple. L'équation de ligne de sol prend alors la forme suivante :

$$\frac{d(z_s - z_b)}{dx} = \frac{\frac{dz_b}{dx} + J}{Fr^2 - 1} \quad (4)$$

Soit en isolant le terme représentant la bathymétrie :

$$\frac{dz_b}{dx} = \frac{Fr^2 - 1}{Fr^2} \frac{dz_s}{dx} - \frac{J}{Fr^2} \quad (5)$$

qui est l'équation de ligne de sol.

### Informations apportées par l'établissement de l'équation :

Cette équation permet de résoudre de proche en proche la bathymétrie d'un cours d'eau sur base de sa ligne d'eau. Contrairement à la détermination d'une ligne d'eau, cette équation est applicable pour un nombre de Froude unitaire. Cependant, pour un écoulement sans débit, caractérisé donc par un nombre de Froude nul, la résolution ne peut aboutir. Dans le cas d'un lac par exemple, il n'est pas possible de reconstruire la bathymétrie de celui-ci uniquement sur base de la mesure de la surface libre. En effet, il existe une infinité de bathymétries respectant la surface libre d'un lac à savoir un plan d'eau horizontal. Une information confirmée par cette équation est l'indétermination de la bathymétrie pour une surface libre ne présentant aucun écoulement.

Il était de toute façon évident, que là où il n'y a pas d'écoulement, la bathymétrie ne peut être déterminée par un calcul hydraulique. L'équation vient tout simplement prouver cette évidence. Par conséquent, la résolution de la bathymétrie d'un cours d'eau ne présentant aucun écoulement n'aurait pas de sens. Dans les cas tels que les lacs, le recours aux techniques traditionnelles d'acquisition de la bathymétrie est donc nécessaire.

Une seconde information apportée par cette équation est le coefficient devant la dérivée spatiale de la surface libre. Si le terme de pente de fond est négligé, une première approximation de la pente de fond est la suivante :

$$\frac{dz_b}{dx} \approx \underbrace{\frac{Fr^2 - 1}{Fr^2}}_{\text{Coefficient de pente}} \frac{dz_s}{dx} \quad (6)$$

En d'autres mots, une approximation de la pente de fond est un certain *coefficient de pente* fois la pente de surface libre. Il est intéressant de noter que le coefficient dont il est question varie fortement en fonction du régime de l'écoulement. Afin de s'en rendre compte à la figure 4 est représentée la valeur de ce coefficient pour une gamme de nombre de Froude comprise entre 0,1 et 2.

La figure permet de facilement visualiser le fait que lorsque l'écoulement sera caractérisé par des nombres de Froude très faibles, le peu de pente présent au niveau de la surface libre sera fortement amplifié pour traduire la pente de fond. Ce qui permet déjà de présager la forte sensibilité des résultats en fonction du type d'écoulement. Cet aspect sera abordé au point 5. Bruitage de la surface libre.

### Première vérification :

Pour un écoulement uniforme, il y a égalité entre la pente de fond et la pente de frottement, ce qui se traduit par une variation de hauteur d'eau nulle. En d'autres mots, la pente de fond et la pente de surface libre sont identiques quand l'écoulement est uniforme.

$$\frac{dh}{dx} = \frac{d(z_s - z_b)}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dz_s}{dx} = \frac{dz_b}{dx} \quad (7)$$

Dans l'équation (6), dans le cas d'un écoulement uniforme il faudrait logiquement trouver cette égalité entre les pentes. Ce qui est évidemment le cas. Étant face à un écoulement uniforme, la pente de frottement est simplement égale à la pente de surface libre ou encore la pente de frottement, dès lors il vient :

- La pente de frottement est égale à la pente de surface libre :

$$\frac{dz_b}{dx} = \frac{Fr^2 - 1}{Fr^2} \frac{dz_s}{dx} - \frac{1}{Fr^2} \frac{d(-z_s)}{dx} = \frac{dz_s}{dx} \left( \frac{Fr^2 - 1}{Fr^2} + \frac{1}{Fr^2} \right) = \frac{dz_s}{dx} \quad (8)$$

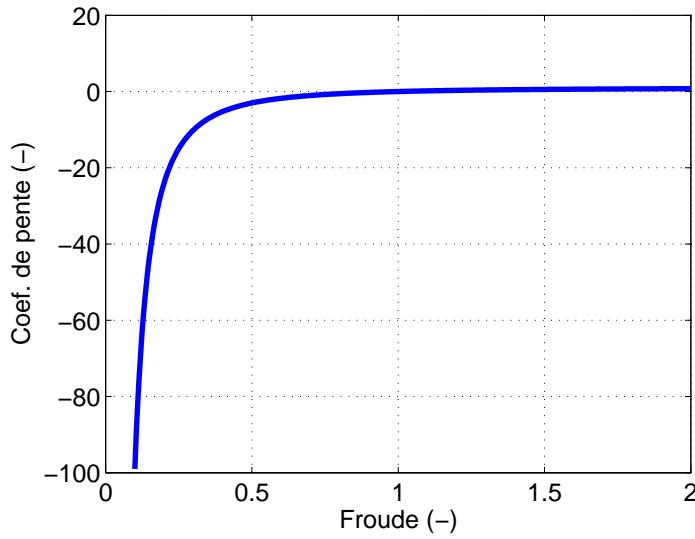


FIGURE 4 – Variation du coefficient de pente pour un nombre de Froude compris entre 0,1 et 2.

- La pente de frottement est égale à la pente de fond :

$$\frac{dz_b}{dx} = \frac{Fr^2 - 1}{Fr^2} \frac{dz_s}{dx} - \frac{1}{Fr^2} \frac{d(-z_b)}{dx} \quad (9)$$

$$\left(1 - \frac{1}{Fr^2}\right) \frac{dz_b}{dx} = \frac{Fr^2 - 1}{Fr^2} \frac{dz_s}{dx} \quad (10)$$

$$\frac{dz_b}{dx} = \frac{dz_s}{dx} \quad (11)$$

Les deux approches arrivent au même résultat. Cette première vérification de l'équation est donc concluante. Il reste maintenant à l'appliquer sur des exemples pratiques afin de voir s'il est possible d'établir la bathymétrie d'un cours d'eau sur base de la surface libre.

## 1.2 Résolution par différences finies

Considérant la loi de frottement de Manning-Strickler :

$$J = \frac{q^2}{K^2 h^2 R_h^{4/3}} \quad (12)$$

où  $q$  est le débit spécifique,  $K$  le coefficient de frottement et  $R_h$  le rayon hydraulique, il est possible de mettre l'équation sous la forme de différences finies, ce qui va permettre de montrer la détermination de la bathymétrie sur des exemples.

En suivant un schéma de résolution explicite il vient :

$$\frac{z_{b,i+1} - z_{b,i}}{\Delta x} = \frac{Fr_i^2 - 1}{Fr_i^2} \frac{z_{s,i+1} - z_{s,i}}{\Delta x} - \frac{J_i}{Fr_i^2} \quad (13)$$

$$z_{b,i+1} = z_{b,i} - \Delta x \left( \frac{Fr_i^2 - 1}{Fr_i^2} \frac{z_{s,i+1} - z_{s,i}}{\Delta x} - \frac{J_i}{Fr_i^2} \right) \quad (14)$$

Le schéma de résolution suivi est ici explicite afin de montrer qu'il est possible de suivre un schéma de résolution relativement simple. Par application de proche en proche, il est en effet possible de déterminer l'évolution de la bathymétrie. La méthode a été testée sur différents exemples, dans la suite deux de ces exemples sont présentés.

### 1.2.1 Cas d'un bump

L'exemple suivant considère un tronçon de rivière dont le fond est horizontal et caractérisé en un endroit par un bump. La démarche pour les exemples est la suivante :

- le fond à déterminer est utilisé comme donnée afin de déterminer la ligne d'eau pour un certain jeu de caractéristiques d'écoulement ;
- la ligne d'eau étant connue, celle-ci va maintenant servir de donnée de départ afin de rétablir la bathymétrie sur base du jeu de données caractérisant l'écoulement ;
- par application de la méthode de proche en proche, une estimation de la bathymétrie est ainsi connue.

Pour l'exemple, l'écoulement présente les caractéristiques suivantes :

- un débit de  $8 m^3/s$ ;
- une largeur de  $4 m$  ;
- un coefficient de frottement de  $25 m^{1/3}/s$  ;
- une longueur d'écoulement de  $50 m$  ;
- une hauteur d'eau en aval de  $2 m$ .

Les figures 5 et 6 représentent les résultats obtenus. La première des deux figures permet de voir que le résultat obtenu est fort proche de la bathymétrie théorique. Pour l'exemple considéré, le pas spatial est de  $0,5 m$ , cette discrétisation permet de reproduire le bump. Il faut noter que le bump se traduit au niveau de la ligne d'eau uniquement par un faible renflement. Ce renflement a pour effet de modifier la pente de surface libre, or l'information permettant la reconstruction du sol se trouve justement dans la pente de surface libre. Cet exemple montre bien ce qui a été décrit plus haut, à savoir que suivant la gamme d'écoulement, une modification de pente au niveau de la surface libre se traduit par une modification beaucoup plus grande au niveau de la bathymétrie.

Si l'attention est portée sur la bathymétrie déterminée par rapport à celle théorique, la figure 6 montre que de manière générale la bathymétrie déterminée est fidèle à celle théorique. Néanmoins, il existe certaines différences. Ces différences sont les plus fortes là où la courbure de surface libre est la plus forte, c'est-à-dire la zone où la pente de fond va se marquer le plus. Finalement, le résultat montre que la solution déterminée tend vers la solution théorique de façon asymptotique après le bump.

Pour expliquer les différences, il faut savoir que la façon de générer la ligne d'eau à la base de la résolution n'a pas été faite par une simple application de l'équation des lignes d'eau. La ligne d'eau a été calculée par la méthode des volumes finis et pas celle des différences finies. Si l'exemple est reconduit en générant cette fois la ligne d'eau par cette méthode les résultats sont parfaitement identiques. En effet, le schéma de résolution suivi ici pour déterminer la bathymétrie est similaire à celui suivi pour la génération d'une ligne d'eau, la seule différence étant le fait que les rôles joués par la surface libre et la bathymétrie sont inversés.

Finalement, ce premier exemple permet déjà de montrer que pour un cas simple, une détermination du sol de proche en proche permet de déterminer celui-ci de façon acceptable. Il est en effet possible de déterminer de nouvelles lignes d'eau par exemple pour des débits plus importants, et les lignes d'eau obtenues sont semblables à celles déterminées sur base de la véritable allure du sol.

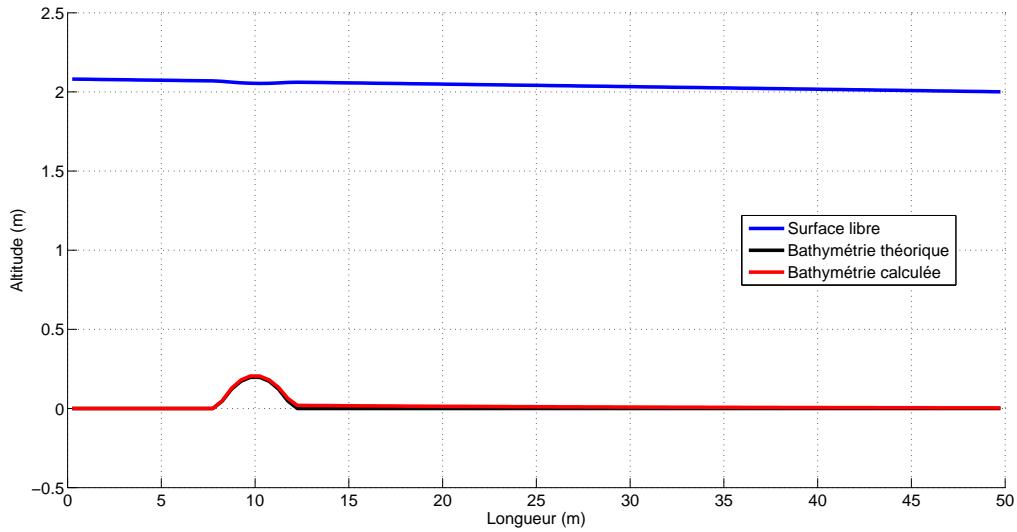


FIGURE 5 – Bathymétrie calculée par la résolution de l'équation de ligne de sol pour le cas d'un fond présentant un bump.

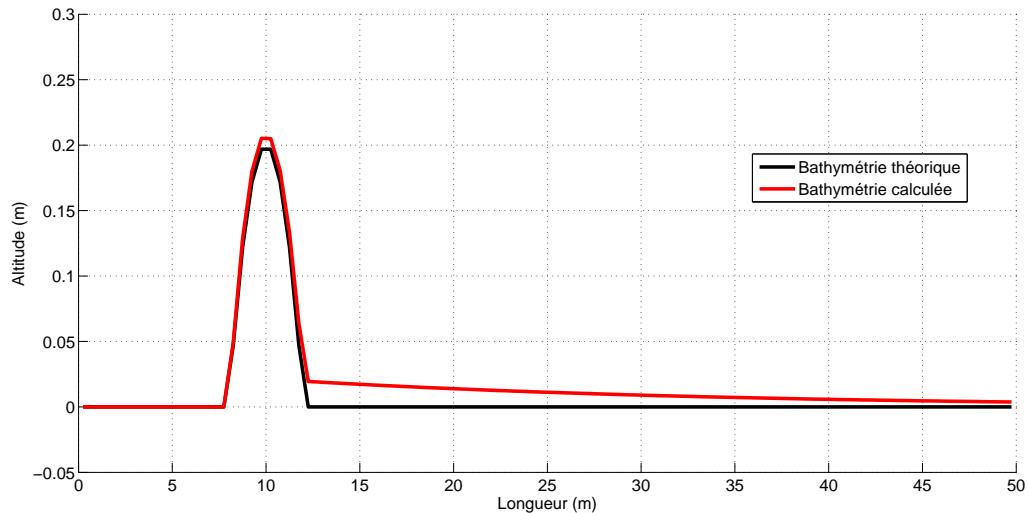


FIGURE 6 – Comparaison entre la bathymétrie théorique et celle calculée par l'équation de ligne de sol dans le cas d'un fond présentant un bump.

### 1.2.2 Cas d'un fond sinusoïdal

La méthode de résolution va maintenant être appliquée pour un fond présentant une forme sinusoïdale. Le but de ce second exemple est de voir si la méthode fonctionne pour un pas spatial beaucoup plus grand et pour des variations au sein de la bathymétrie plus faibles. En effet, dans l'exemple du bump, la variation du sol est telle qu'il y a une augmentation de  $0,2\text{ m}$  sur  $2\text{ m}$ . Or pour le fond sinusoïdal, la variation va être de  $0,25\text{ m}$  mais cette fois sur une longueur de  $1500\text{ m}$ .

Pour l'exemple, l'écoulement présente les caractéristiques suivantes :

- un débit de  $20\text{ m}^3/\text{s}$ ;
- une largeur de  $20\text{ m}$ ;
- un coefficient de frottement de  $25\text{ m}^{1/3}/\text{s}$ ;
- une longueur d'écoulement de  $30\,000\text{ m}$ ;
- une hauteur d'eau en aval de  $5\text{ m}$ ;
- un pas spatial de  $100\text{ m}$ .

La figure 7 montre que la bathymétrie déterminée est quasiment identique à celle ayant servi à calculer la ligne d'eau. Il persiste de légères différences.

Ce second exemple montre qu'une très faible variation au sein de la pente de surface libre permet de restituer la bathymétrie. Bien qu'au premier coup d'œil la ligne d'eau paraît rectiligne, celle-ci présente des oscillations traduisant un changement au sein de la bathymétrie. Afin de prouver que "*la pente de surface libre révèle la bathymétrie*", la figure 8 représente la variation de pente de surface libre le long de l'écoulement. Ce graphique permet directement de voir que la pente est très faible. Il faut cependant garder à l'esprit qu'il s'agit ici d'un exemple académique, une telle précision de mesure n'est en effet pas possible en pratique.

## 1.3 Conclusions intermédiaires

Cette première façon de résoudre la bathymétrie a permis d'introduire le problème de manière concrète. De plus il vient d'être montré que pour des cas simples tels que ceux d'un bump et d'un fond présentant une variation sinusoïdale, la bathymétrie pouvait être déterminée de façon appréciable.

Néanmoins, comme expliqué dans le cours d'hydraulique appliquée [4], et enseigné dans le cours de méthode numérique, le problème d'une résolution qui s'appuie sur les différences finies réside dans l'hypothèse sous-jacente de continuité de la solution. Or l'hydraulique à surface libre se caractérise par des phénomènes discontinus que sont les ressauts hydrauliques, phénomènes mal modélisés par une technique de différences finies. C'est pourquoi, une approche alternative est exposée ci-après.

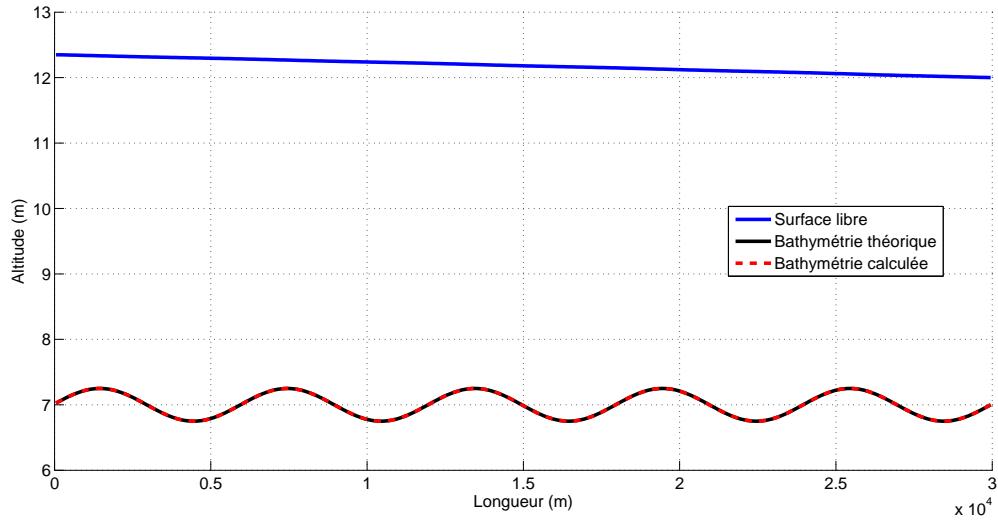


FIGURE 7 – Bathymétrie calculée par la résolution de l'équation de ligne de sol pour le cas d'un fond sinusoïdal.

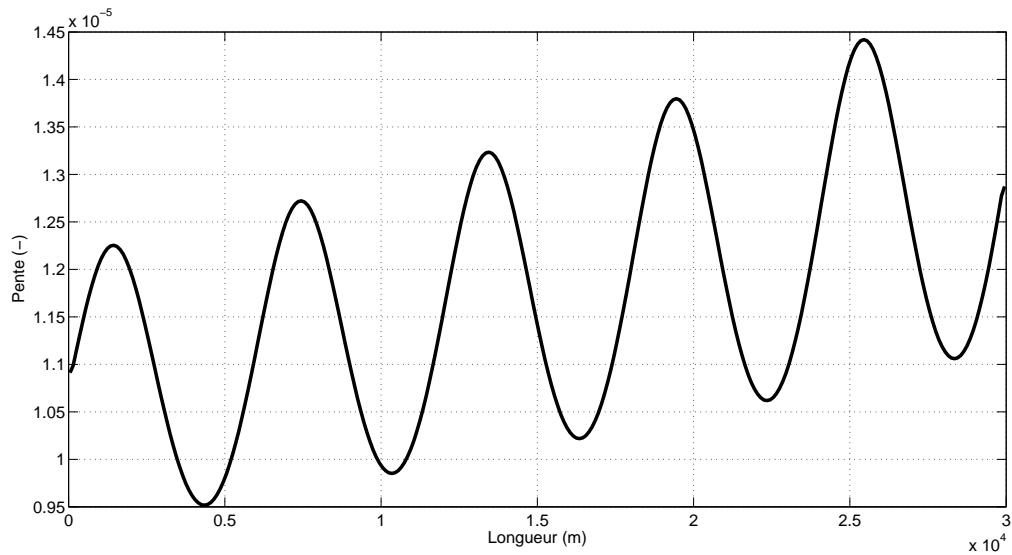


FIGURE 8 – Pente de surface libre pour le cas d'un fond sinusoïdal.

## 2 Méthode pseudo temporelle

Avec cette seconde méthode, les équations de l'hydraulique vont être résolues de façon itérative par la technique des volumes finis.

La philosophie de cette méthode de résolution est d'introduire un artifice au sein de l'équation qui va être établie afin de pouvoir résoudre le calcul dans un pseudo temps. Cet artifice consiste à résoudre le problème sous la forme d'une équation de transport. Il faut obtenir une combinaison entre le temps et l'espace. Pour ce faire, un terme d'inertie est introduit de manière à avoir la forme canonique de l'équation de transport, à savoir :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + c \frac{\partial h}{\partial x} = S \quad (15)$$

Dans cette formulation, exprimée ici en termes de hauteur d'eau, le  $S$  représente un terme source. Le terme devant la dérivée spatiale,  $c$  représente quant à lui la célérité du transport de l'information. Il s'agit d'une information très importante car elle nous renseigne sur le sens de propagation d'information. Cette information permet de choisir le type de décentrement adéquat lors de la résolution numérique mais aussi, le type de condition limite à imposer au problème afin d'en permettre la résolution.

### 2.1 Établissement de l'équation de départ

L'idée est de partir des équations de l'hydraulique de manière à déterminer la bathymétrie d'une rivière sur base de la connaissance du niveau de la surface libre. Pour ce faire, il faut tout d'abord adapter les équations de base de manière à faire apparaître le terme de surface libre.

Une première approche est de simplement considérer que comme la surface libre est connue, de manière à déterminer l'altitude du fond en tout point du cours d'eau, il suffit de résoudre les équations de l'hydraulique afin de déterminer la hauteur d'eau. Ensuite, la bathymétrie s'en déduit en se rappelant que celle-ci vaut simplement la différence entre la surface libre et la hauteur d'eau.

$$z_b = z_s - h \quad (16)$$

Les équations de base de l'hydraulique utilisées sont les principes de continuité et de conservation de la quantité de mouvement selon  $x$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \right) = gh(i - J) \end{cases} \quad (17)$$

dans le cas d'un cours d'eau à section rectangulaire constante. Dans ces équations,  $g$  représente l'accélération gravifique et  $q$  le débit spécifique.

Dans un premier temps, nous allons supposer que nous sommes face à un phénomène stationnaire, ce qui permet de simplifier toutes les dérivées temporelles. Le système s'écrit donc sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \right) = gh(i - J) \end{cases} \quad (18)$$

Le principe de conservation de la masse nous apprend que le débit spécifique est conservé en tout point de l'écoulement. Le principe de conservation de la quantité de mouvement selon  $x$  peut lui s'écrire :

$$\frac{\partial h}{\partial x} \left( \frac{-q^2}{h^2} + gh \right) = gh(i - J) \quad (19)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} (-u^2 + gh) = gh(i - J) \quad (20)$$

où  $u$  est la vitesse de l'écoulement supposée constante sur la hauteur d'eau.

Dans cette équation, nous allons mettre en évidence le terme d'altitude de la surface libre. Pour ce faire, la pente de fond est remplacée par l'expression suivante :

$$i = -\frac{\partial(z_b)}{\partial x} = -\frac{\partial(z_s - h)}{\partial x} \quad (21)$$

L'équation (20) devient :

$$\frac{\partial h}{\partial x} (-u^2 + gh) = gh \left( -\frac{\partial(z_s - h)}{\partial x} - J \right) \quad (22)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} (-u^2) = gh \left( -\frac{\partial(z_s)}{\partial x} - J \right) \quad (23)$$

Nous utilisons maintenant l'artifice décrit plus haut de manière à pouvoir résoudre le problème itérativement dans un *pseudo temps*. La dernière équation s'écrit donc :

$$\lambda \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} (-u^2) = gh \left( -\frac{\partial(z_s)}{\partial x} - J \right) \quad (24)$$

Le coefficient multipliant le terme pseudo temporel ( $\lambda$ ) est pris égal à  $-1$  de manière à vérifier la physique du problème, c'est-à-dire avoir une célérité positive, descendante. Cet aspect sera justifié au point 2.1.1.

L'équation qui va servir de base à la résolution du fond se présente donc sous la forme :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u^2 \frac{\partial h}{\partial x} = gh \left( \frac{\partial(z_s)}{\partial x} + J \right) \quad (25)$$

Seulement, pour la résolution, nous devons repartir de la forme conservative où aucune hypothèse de continuité n'est faite, en effet, actuellement, l'équation se présente sous une forme quasi linéaire. Cette forme est uniquement utilisée afin de comprendre les propriétés de l'équation, mais dès qu'il faut résoudre le problème numériquement la forme à adopter est la suivante :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{-q^2}{h} \right) = gh \left( \frac{\partial(z_s)}{\partial x} + J \right) \quad (26)$$

Lors de la résolution du problème, le terme pseudo temporel va s'annuler. Nous allons donc *converger vers la solution dans un pseudo temps*. Les solutions intermédiaires n'ont pas de sens physique, tandis que la solution après convergence représente l'allure de la topographie du fond de la rivière. De plus, étant donné qu'aucune hypothèse de continuité n'a été formulée, la résolution pourra aussi bien représenter les phénomènes continus que discontinus tels que les ressauts.

### Remarque

Il faut tout de même garder à l'esprit que cette technique de résolution suppose que l'écoulement se trouve dans un état stationnaire, c'est-à-dire dans un état tel qu'en un point les caractéristiques n'évoluent pas avec le temps. Il n'est dès lors pas permis de résoudre cette équation en partant d'une surface libre qui serait

instationnaire. La bathymétrie qui sortirait de cette résolution ne pourrait pas traduire la réalité. En effet la technique de résolution annule les dérivées temporelles, dérivées qui ne sont pas nulles pour un écoulement instationnaire.

### Information apportée

Pour la résolution numérique, la formulation non conservative de l'équation mise sous la forme d'une équation de transport montre que le terme de célérité est  $u^2$ . Ce qui signifie que l'information transite de l'amont vers l'aval, l'information est descendante. C'est pourquoi lors de la résolution la condition limite portant sur la hauteur d'eau devra être imposée en amont, et le choix de décentrement sera amont.

**N.B. :** Le terme de célérité est en fait égal à  $-u^2/\lambda$ . Afin de conserver une cohérence au point de vue des dimensions, lors de l'introduction du terme pseudo temporel les unités du coefficient  $\lambda$  sont celles d'une vitesse.

#### 2.1.1 Recherche de la célérité

Lors du choix du coefficient pseudo temporel, il vient d'être affirmé que la célérité du système devait être descendante. En effet si le cas du système instationnaire est considéré il vient :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \right) = gh \left( -\frac{\partial (z_s - h)}{\partial x} - J \right) \end{cases} \quad (27)$$

La seconde équation se simplifie et donne :

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q^2}{h} \right) = gh \left( -\frac{\partial z_s}{\partial x} - J \right) \quad (28)$$

De façon matricielle, le système rendu quasi linéaire s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} h \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -u^2 & 2u \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} h \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ gh \left( -\frac{\partial z_s}{\partial x} - J \right) \end{bmatrix} \quad (29)$$

Les valeurs propres de la matrice convective sont les racines du polynôme caractéristique :

$$\begin{vmatrix} 0 - c & 1 \\ -u^2 & 2u - c \end{vmatrix} = -2uc + c^2 + u^2 = (u - c)^2 = 0 \quad (30)$$

La mise sous forme quasi linéaire du système nous apprend donc que le système dans le cas général, instationnaire, présente des célérités confondues et égales à la vitesse,  $c = u$ . C'est ce qui justifie le fait que plus haut, le choix de  $\lambda$  a été fait de manière à garantir la physique du problème, c'est-à-dire une célérité descendante.

### Remarques sur les célérités

Il vient d'être montré que le système d'équation permettant l'établissement de la ligne d'eau est caractérisé par *une célérité double égale à la vitesse de l'écoulement*. Il en ressort donc un comportement mathématique tout à fait différent de celui du système d'équation donnant la ligne d'eau. En effet, dans le cas de la bathymétrie, peu importe le régime d'écoulement, l'information sera toujours descendante, il faudra dans les équations toujours adopter un décentrement amont afin de respecter ce sens de propagation de l'information. Or pour la génération d'une ligne d'eau, la théorie nous apprend que la célérité change de signe en fonction du régime d'écoulement :

- célérité descendante pour un régime supercritique;

- célérité montante pour un régime infracritique.

Cet aspect obligeant lors de calcul numérique un *splitting* au sein de la matrice convective. Or, pour l'établissement de la bathymétrie, il n'en est rien. Cet aspect sera mis à profit au point 3. Résolution orientée page 31.

### 2.1.2 Formulation en fonction de l'altitude du sol

La formule (26) permet de déterminer la bathymétrie d'une rivière en exprimant simplement que la différence entre la surface libre et la hauteur d'eau donne l'allure du fond. Cependant, l'expression peut être résolue non pas en termes de hauteurs d'eau mais en termes de bathymétrie.

Afin de mettre sous une forme fonction de  $z_b$  qui représente la bathymétrie, le plus simple est de repartir des équations de départ à savoir la continuité et la conservation de quantité de mouvement selon  $x$ .

Cependant, le résultat est identique en partant de l'équation (26) et exprimer le fait que :

$$h = z_s - z_b \quad (31)$$

Cela revient juste à poser un changement d'inconnue une fois l'équation établie, ce qui ne modifie en rien l'établissement de l'équation.

Soit :

$$\frac{\partial(z_s - z_b)}{\partial t} + u^2 \frac{\partial(z_s - z_b)}{\partial x} = gh \left( \frac{\partial(z_s)}{\partial x} + J \right) \quad (32)$$

Cependant, la résolution est ici faite pour un cas stationnaire, et  $z_s$  est considérée comme étant une donnée invariable dans le temps. Dès lors :

$$\frac{\partial(-z_b)}{\partial t} + u^2 \frac{\partial(-z_b)}{\partial x} = gh \left( \frac{\partial(z_s)}{\partial x} + J \right) \quad (33)$$

$$\frac{\partial(-z_b)}{\partial t} + u^2 \frac{\partial(-z_b)}{\partial x} = (gh - u^2) \frac{\partial(z_s)}{\partial x} + ghJ \quad (34)$$

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} + u^2 \frac{\partial z_b}{\partial x} = (u^2 - gh) \frac{\partial(z_s)}{\partial x} - ghJ \quad (35)$$

Cette équation apporte donc la même conclusion en ce qui concerne la célérité.

### Quelle formulation choisir ?

En théorie résoudre avec une où l'autre formulation devrait aboutir au même résultat. En effet résoudre le système en termes de hauteurs d'eau et puis simplement exprimer la bathymétrie comme étant la différence entre la surface libre et la hauteur déterminée, doit donner un résultat identique à la seconde approche qui détermine directement la bathymétrie. C'est en effet bien le cas.

L'équation venant d'être déterminée, doit être mise sous sa forme conservative afin de pouvoir être à la base de la résolution numérique. Pour ce faire, une partie du terme source doit revenir au sein du terme de flux.

L'équation à la base de la résolution mise sous sa forme conservative et exprimée en termes de bathymétrie prend la forme suivante :

$$\frac{\partial -z_b}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{-q^2}{z_s - z_b} \right) = gh \left( \frac{\partial(z_s)}{\partial x} + J \right) \quad (36)$$

Pour se convaincre que cette équation est bien identique à celle exprimée en termes de hauteur d'eau il suffit de se rappeler que la surface libre est une donnée dont la dérivée temporelle est nulle. Il est donc licite d'écrire que :

$$\frac{\partial(z_s - z_b)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{-q^2}{z_s - z_b} \right) = gh \left( \frac{\partial(z_s)}{\partial x} + J \right) \quad (37)$$

C'est en effet exactement le développement inverse de celui effectué quelques lignes plus haut.

Il est dès lors possible de conclure que résoudre avec l'une ou l'autre des équations mène au même résultat final de bathymétrie. Cela a été testé par voie numérique, et pour les différents exemples, les résultats étaient chaque fois identiques. Dans la suite, la formulation employée sera celle en termes de hauteur d'eau.

## 2.2 Modèle numérique

### 2.2.1 Discréétisation par volumes finis

Pour la résolution de l'équation de ligne de sol, la méthode employée était celle des différences finies. Cependant cette méthode souffre de lacunes pour représenter valablement les phénomènes discontinus de par le fait que la technique de résolution suppose la continuité de la solution. La méthode choisie cette fois pour la résolution est celle des volumes finis.

#### Choix de la méthode

Comme expliqué dans le cours d'Hydraulique Appliquée [4], la méthode des volumes finis s'appuie sur l'intégration des équations sur des volumes de contrôle, et donc engendre une solution faible du problème à résoudre. Comme il s'agit d'une solution faible, qui revient à vérifier en moyenne les équations sur le volume de contrôle, les discontinuités de l'écoulement sont prises en compte naturellement. Cette méthode de résolution va dès lors pouvoir être utilisée dans le cas de cours d'eau présentant des ressauts. Pour le vérifier, plus loin dans les exemples traités, un écoulement dit en trois pentes présentera un ressaut et permettra de voir si lors de la présence de tels phénomènes, la bathymétrie peut être déterminée.

#### Maillage et critère d'arrêt

Bien que la méthode des volumes finis permette de travailler avec un maillage quelconque, le choix est ici porté sur un maillage uniforme. De plus, les volumes de contrôles coïncident avec les mailles et les inconnues sont situées en leur centre. La taille d'un volume fini est  $\Delta x$ .

Pour rappel, lors de la résolution du problème, au fur et à mesure que nous allons boucler sur le pseudo temps, la valeur du terme pseudo temporel va diminuer jusqu'à devenir complètement négligeable. En d'autres mots, nous allons converger vers la bathymétrie après un certain pseudo temps. Notons que les solutions intermédiaires n'auront aucun sens physique, alors que la solution, après convergence (annulation du terme pseudo temporel), présentera l'allure du fond de la rivière. C'est l'annulation du terme de dérivée temporelle qui va servir de critère d'arrêt pour la résolution. En pratique, un seuil de convergence sera fixé tel que dès que cette valeur sera dépassée, la résolution sera considérée comme ayant convergé et le calcul pourra être stoppé.

### 2.2.2 Explication de la procédure

La méthode consiste à appliquer les lois de conservation sur chaque volume. C'est pourquoi lors de la détermination de l'équation, celle-ci a été écrite sous sa forme conservative. L'équation est donc intégrée sur chaque volume de contrôle ( $V$ ) :

$$\int_V \left( \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{-q^2}{h} \right) \right) dx = \int_V \left( gh \left( \frac{\partial(z_s)}{\partial x} + J \right) \right) dx \quad (38)$$

Ensuite, le théorème de Green [7] est appliqué afin de pouvoir exprimer le terme convectif comme étant une intégrale sur le contour du volume. Ce qui se traduit en unidimensionnel par une différence des termes de flux évalués sur les bords du volume. Ce qui permet d'aboutir à la forme suivante :

$$\int_V \frac{\partial h}{\partial t} dx + \left( \left. \frac{-q^2}{h} \right|_{droit} - \left. \frac{-q^2}{h} \right|_{gauche} \right) = \int_V \left( gh \left( \frac{\partial(z_s)}{\partial x} + J \right) \right) dx \quad (39)$$

Il faut encore pour pouvoir résoudre l'équation moyenner les termes temporel et source sur les volumes finis. Ce qui permet d'obtenir en considérant ici que tous les volumes finis sont de taille  $\Delta x$  :

$$\Delta x \frac{\partial h}{\partial t} + \left( \left. \frac{-q^2}{h} \right|_{droit} - \left. \frac{-q^2}{h} \right|_{gauche} \right) = \Delta x \left( gh \left( \frac{\partial(z_s)}{\partial x} + J \right) \right) \quad (40)$$

La dérivée temporelle est elle estimée de façon explicite :

$$\Delta x \frac{h_{t+1} - h_t}{\Delta t} + \left( \left. \frac{-q^2}{h} \right|_{droit} - \left. \frac{-q^2}{h} \right|_{gauche} \right) = \Delta x \left( gh \left( \frac{\partial(z_s)}{\partial x} + J \right) \right) \quad (41)$$

Grâce à cette expression, il est possible de déterminer la hauteur d'eau au pas suivant de façon explicite :

$$h_{t+1} = h_t + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ - \left( \left. \frac{-q^2}{h} \right|_{droit} - \left. \frac{-q^2}{h} \right|_{gauche} \right) + \Delta x \left( gh \left( \frac{\partial(z_s)}{\partial x} + J \right) \right) \right]_t \quad (42)$$

**N.B. :** Le terme de dérivée spatiale de la surface libre est volontairement exprimé de façon générale, car lors de l'application de la méthode sur différents cas, différents décentrements (amont, centré et aval) ont été testés. Il en est de même pour la hauteur d'eau se trouvant dans le terme source, celui-ci sera finalement pris égal à la moyenne de la hauteur d'eau avec la maille juste en amont.

### Détermination du pas de temps - Condition CFL

Le pas de temps ne peut pas être choisi de façon arbitraire. Il doit être fixé de manière à respecter le critère de stabilité exprimé par la condition de Courant–Friedrichs–Lowy (CFL). Les cours de méthodes numériques nous apprennent que le pas de temps doit être choisi inférieur à une certaine valeur de manière à éviter la génération de résultats incorrects.

La solution du problème est caractérisée par une onde se propageant à la vitesse de l'écoulement élevée au carré. C'est la célérité, la vitesse caractéristique qui a été déterminée lors de l'établissement de l'équation de transport qui va permettre de connaître la valeur à donner au pas de temps. Il faut considérer la célérité apparaissant dans l'équation de transport et non pas celle déterminée sur base des équations complètes. En effet la résolution numérique consiste à résoudre l'équation de transport et pas les équations complètes. La célérité à considérer est donc  $u^2$ . Il faut fixer le pas de temps de telle sorte qu'il soit plus petit que le laps de temps mis par l'onde la plus rapide pour parcourir le volume[5]. Il faut aussi tenir compte du fait que la célérité numérique peut être différente de celle théorique, une approche théorique montre que le rapport maximum entre les deux célérités est de 2. Ce qui donne :

$$\Delta t_{max} = \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{u_{max}^2} \quad (43)$$

En pratique, lors de la résolution, ce pas de temps pseudo temporel est évalué à chaque itération sur le temps. De plus, en raison de la non linéarité du modèle et de l'analyse linéaire sur laquelle repose le critère CFL, un coefficient de sécurité sur le pas de temps est considéré. Celui-ci consiste à considérer uniquement une fraction du pas de temps déterminé par (43), de manière à garantir la stabilité du système.

## Schéma de résolution dans MatLab

Le schéma suivi est le suivant, il consiste à boucler sur le pseudo temps, et pour chaque nouvelle itération temporelle il faut :

- déterminer le pas de temps;
- reconstruire les inconnues aux bords et choisir la valeur de bord à conserver ;
- évaluer les flux et termes sources ;
- calculer les bilans ;
- mettre à jour les inconnues au centre des volumes avant de passer au pas de temps suivant.

Lors de la résolution, il y a une détermination des valeurs au centre du volume sur base des valeurs aux bords.

La détermination des valeurs aux bords du volume se fait simplement par une *reconstruction constante*, qui revient à considérer que les valeurs des bords sont en fait égales à la valeur au centre du volume. Cependant, comme un bord est voisin de deux volumes, il y a deux valeurs qui sont déterminées et seule une de ces valeurs peut être affectée au bord. Le choix de la valeur à conserver se fait sur base du fait que l'information descend le cours d'eau. Donc la valeur du bord choisi est toujours prise par rapport au volume se trouvant en amont.

En ce qui concerne le traitement des conditions aux limites, il faut imposer une hauteur d'eau en amont ainsi que le débit spécifique. De façon à garantir la conservativité, les conditions sont imposées dans la valeur de flux au bord du domaine, il s'agit d'une *condition faible* car la valeur de la hauteur d'eau n'est pas imposée de façon directe.

Finalement, avant de lancer la résolution il faut partir d'une solution de départ, et c'est cette solution initiale qui au fur et à mesure de la résolution numérique va converger vers la bonne solution. Le choix de la solution de départ va jouer sur la convergence de la solution, en effet, plus la solution est proche au départ de celle finale, moins il faudra itérer pour converger. Pour la résolution, le choix s'est porté sur une bathymétrie simplement égale à la surface libre translatée de la hauteur d'eau mesurée en amont. Ce choix de solution permet de garantir que pour tout le domaine de calcul, la bathymétrie est bien sous la surface libre. Si cet aspect n'est pas respecté le calcul ne peut pas aboutir à une solution.

### 2.3 Application de la méthode

Pour tester le modèle, le principe est de générer avec un premier programme la surface libre de la rivière en connaissant les conditions aux limites ainsi que la topographie du fond. Ensuite, une fois la surface libre connue, celle-ci va servir de donnée dans le second programme qui va nous permettre de déterminer le fond. C'est ce second programme qui est décrit dans la suite.

Le fond déterminé pourra alors être comparé à celui originel. Ce qui permettra de tirer des conclusions sur le modèle.

Les points qui vont suivre illustrent l'application de la méthode de résolutions sur différents exemples. Le fait de traiter ces exemples a permis de solutionner quelques bugs dans le code MatLab écrit.

Par exemple, le fait de considérer un décentrement aval pour la dérivée de la pente ou un décentrement amont a pour effet de légèrement décaler la solution. C'est en optant pour un décentrement amont de la surface libre que les résultats sont les meilleurs. Simplement parce que c'est ce choix de décentrement qui permet de suivre le même schéma que celui servant à la génération de la ligne d'eau. Par contre, il faut rester conscient qu'en pratique, la surface libre est ce qu'elle est, il n'y a plus là de notion de schéma identique à suivre. Dans ce qui va suivre, seuls les résultats obtenus pour la dérivée spatiale de la surface libre calculée par un décentrement amont sont présentés.

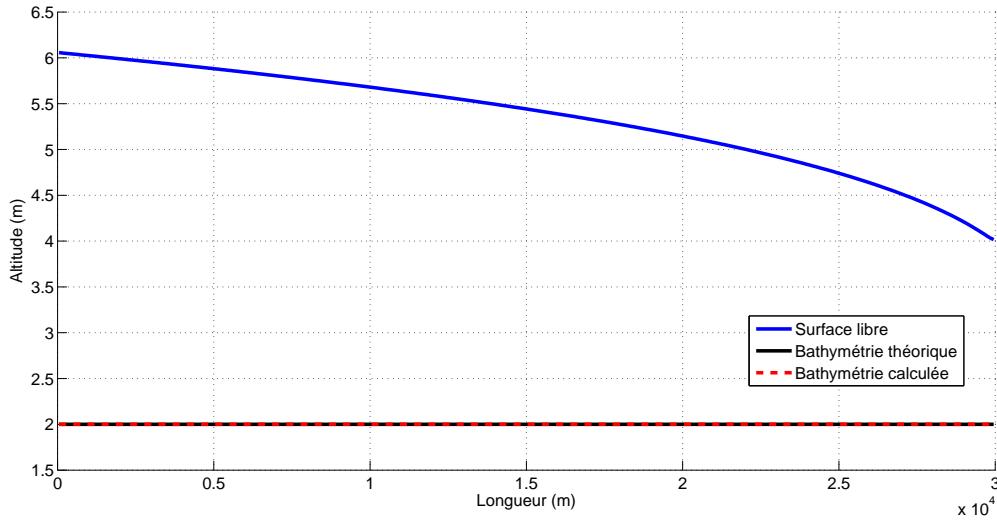


FIGURE 9 – Bathymétrie calculée par la méthode pseudo temporelle pour le cas d'un fond plat.

### 2.3.1 Fond plat

Le premier exemple considéré est un cours d'eau présentant un fond plat. Pour l'exemple, l'écoulement présente les caractéristiques suivantes :

- un débit de  $10 \text{ m}^3/\text{s}$ ;
- une largeur de  $10 \text{ m}$ ;
- un coefficient de frottement de  $25 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$ ;
- une longueur d'écoulement de  $30 000 \text{ m}$ ;
- une hauteur d'eau en aval de  $4 \text{ m}$ ;
- un pas spatial de  $100 \text{ m}$ .

La figure 9 représente le résultat obtenu et montre que la bathymétrie obtenue correspond à celle théorique. Les différences sont présentes au niveau des extrémités du domaine. En amont la condition sur la hauteur d'eau est imposée au niveau d'un bord du volume fini, ce qui en fait une condition faible. Comme il s'agit d'une condition faible, quand la valeur au centre est reconstruite, celle-ci peut légèrement différer de celle imposée au bord.

### 2.3.2 Bump

Pour l'exemple, l'écoulement présente les caractéristiques suivantes :

- un débit de  $8 \text{ m}^3/\text{s}$ ;
- une largeur de  $4 \text{ m}$ ;
- un coefficient de frottement de  $25 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$ ;
- une longueur d'écoulement de  $50 \text{ m}$ ;
- une hauteur d'eau en aval de  $2 \text{ m}$ ;
- un pas spatial de  $0,5 \text{ m}$ .

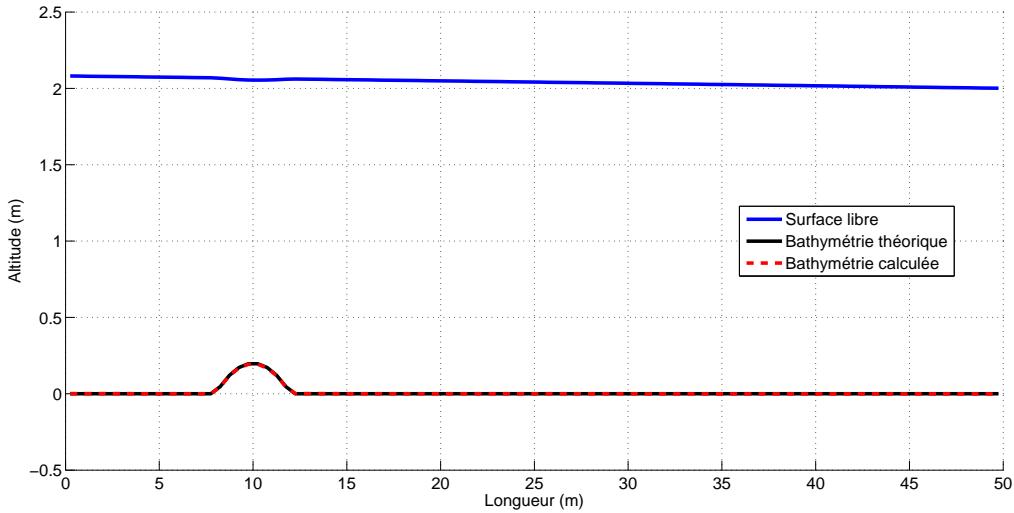


FIGURE 10 – Bathymétrie calculée par la méthode pseudo temporelle pour le cas d'un fond présentant un bump.

La figure 10 représente le résultat obtenu et montre une fois encore que la bathymétrie correspond bien à celle théorique.

Cet exemple est identique à celui traité par l'équation de ligne de sol. La figure 11 permet de voir que l'utilisation d'une méthode itérative a permis d'obtenir au final une bathymétrie plus proche de celle théorique. Afin de pouvoir comparer le résultat obtenu par les deux méthodes, la figure 12 représente la bathymétrie suivant les deux approches. Cette figure montre bien la meilleure approximation faite de la bathymétrie par la méthode itérative.

### 2.3.3 Fond sinusoïdal

Pour l'exemple, l'écoulement présente les caractéristiques suivantes :

- un débit de  $20 \text{ m}^3/\text{s}$ ;
- une largeur de  $20 \text{ m}$ ;
- un coefficient de frottement de  $25 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$ ;
- une longueur d'écoulement de  $30\,000 \text{ m}$ ;
- une hauteur d'eau en aval de  $5 \text{ m}$ ;
- un pas spatial de  $100 \text{ m}$ .

Le résultat obtenu est représenté à la figure 13. Ce résultat est similaire à celui obtenu par la première méthode. Cependant, comme pour le bump, une analyse des résultats permet de voir que l'approximation est une nouvelle fois meilleure par le procédé itératif.

### 2.3.4 Trois pentes

Cet exemple va permettre de voir comment se comporte la méthode de résolution face à des cassures de pentes au niveau de la bathymétrie et surtout face à un ressaut. En effet, jusqu'à présent les exemples traités sont tous caractérisés par un écoulement continu en régime infracritique.

Pour l'exemple, l'écoulement présente les caractéristiques suivantes :

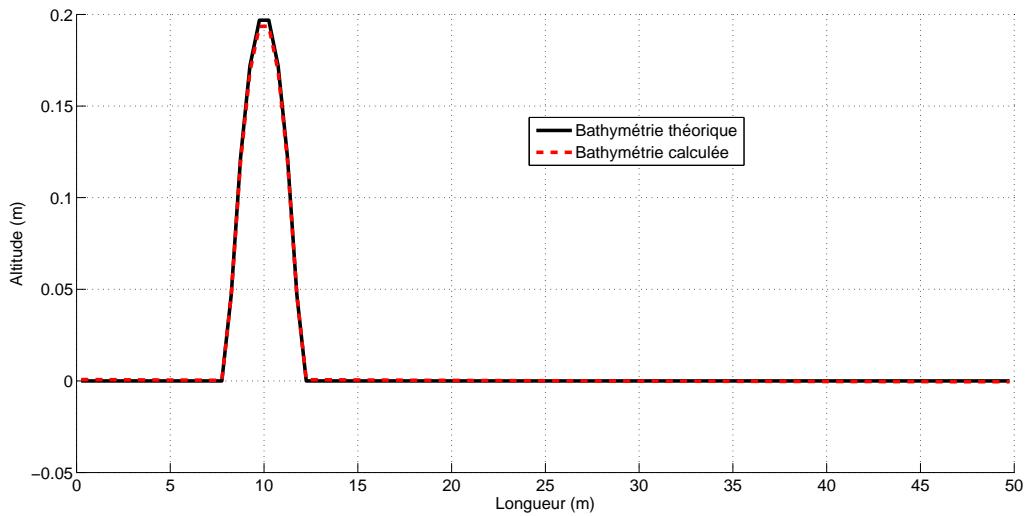


FIGURE 11 – Comparaison entre la bathymétrie théorique et celle calculée par la méthode pseudo temporelle pour le cas d'un fond présentant un bump.

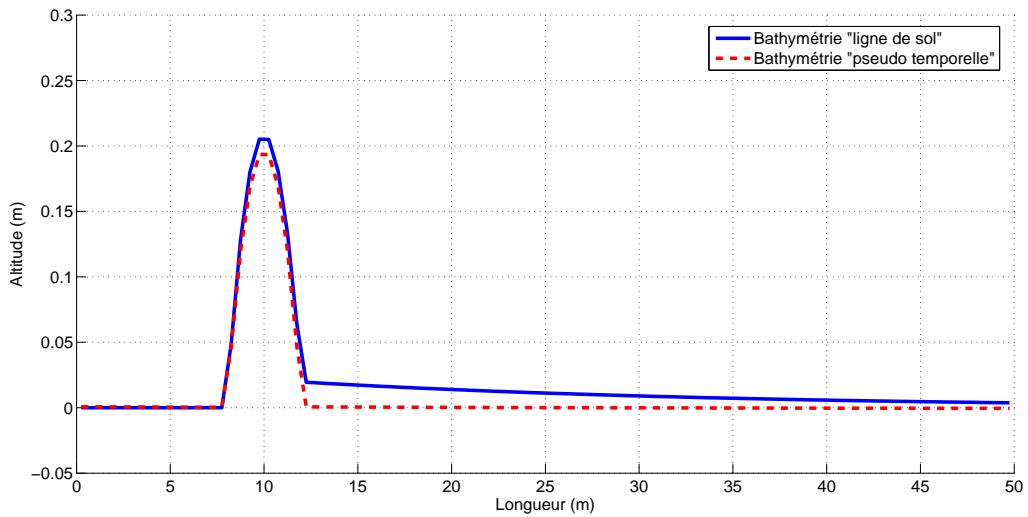


FIGURE 12 – Comparaison des solutions obtenues dans le cas du bump, par la technique de ligne de sol et celle pseudo temporelle.

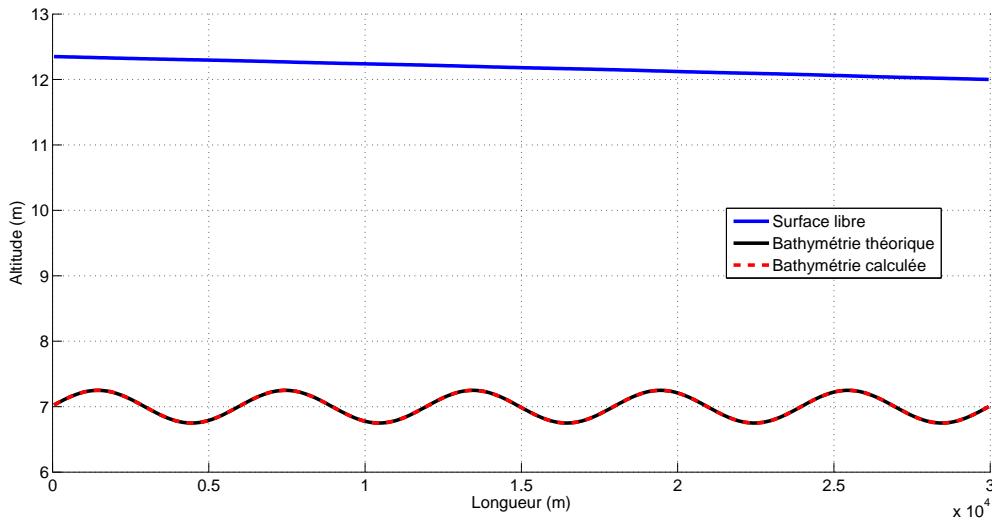


FIGURE 13 – Bathymétrie calculée par la méthode pseudo temporelle pour le cas d'un fond sinusoïdal.

- un débit de  $4 \text{ m}^3/\text{s}$ ;
- une largeur de  $4 \text{ m}$ ;
- un coefficient de frottement de  $25 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$ ;
- une longueur d'écoulement de  $300 \text{ m}$ ;
- une hauteur d'eau en aval de  $1 \text{ m}$ ;
- un pas spatial de  $1 \text{ m}$ .

La figure 14 représente le résultat obtenu. Il est heureux de voir que le résultat obtenu, malgré la présence de cassure de pente et le ressaut est très proche de la solution théorique. Cependant, la où est localisé le ressaut ainsi que la cassure de pente, la bathymétrie s'éloigne légèrement de la solution. La figure 15 représente un zoom de cette partie, où la différence se marque bien dès l'apparition du ressaut. Par la suite, comme cela avait été observé pour la méthode par la ligne de sol, la solution “se corrige” et tend de nouveau vers la solution théorique.

Il serait intéressant de traiter un exemple où les zones de ressaut et de cassure de pente ne sont pas quasiment confondues comme c'est le cas ici. Le nouvel exemple va donc être choisi de manière à obtenir un ressaut plutôt centré sur la seconde pente. Cet exemple est caractérisé par les différences suivantes :

- un débit de  $24 \text{ m}^3/\text{s}$ ;
- une hauteur d'eau en aval de  $6 \text{ m}$ .

Le résultat obtenu est représenté à la figure 16. Ce résultat montre que le calcul diverge sous le ressaut. Il semble que la première partie du domaine, en amont du ressaut ne pose pas de problème. Par contre, la zone où est localisée le ressaut est affectée par la résolution et s'éloigne de la solution au fur et à mesure du calcul ce qui a pour effet d'affecter le reste de l'aval. Au final, le calcul permet seulement de connaître la bathymétrie en amont du ressaut. Mais cela ne veut pas dire pour autant que la détermination de la bathymétrie après le ressaut est impossible. Dans la suite, des pistes de solutions vont être proposées.

#### 2.3.4.1 Comment remédier à ce problème ?

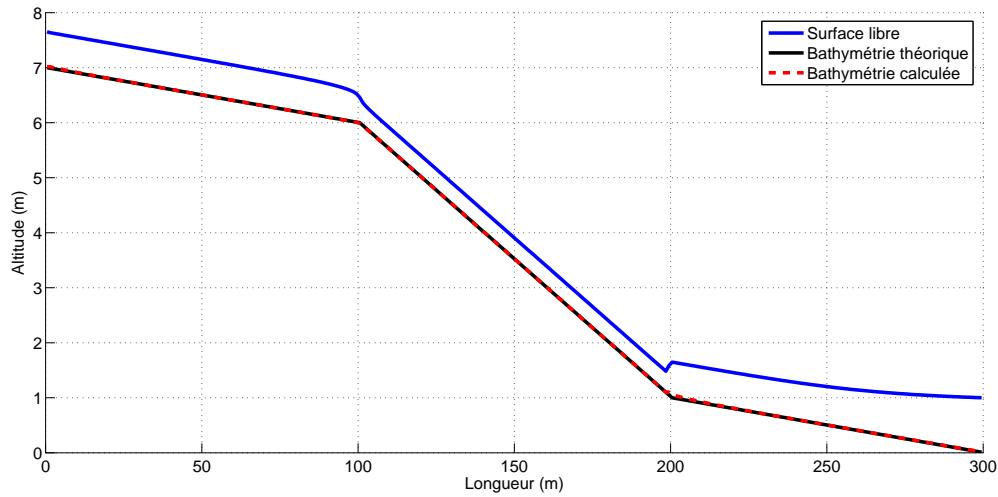


FIGURE 14 – Bathymétrie calculée par la méthode pseudo temporelle pour un fond en trois pentes.

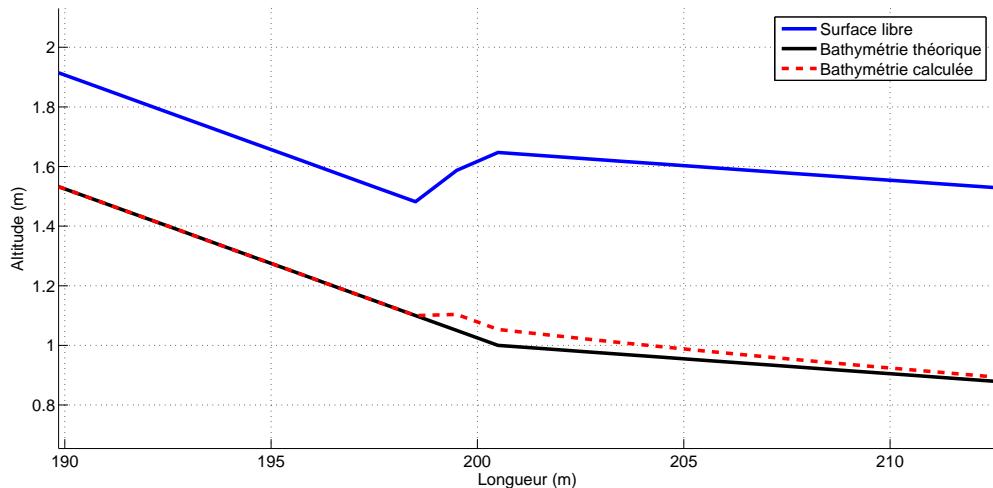


FIGURE 15 – Zoom au niveau du ressaut pour la bathymétrie calculée par la méthode pseudo temporelle dans le cas des trois pentes.

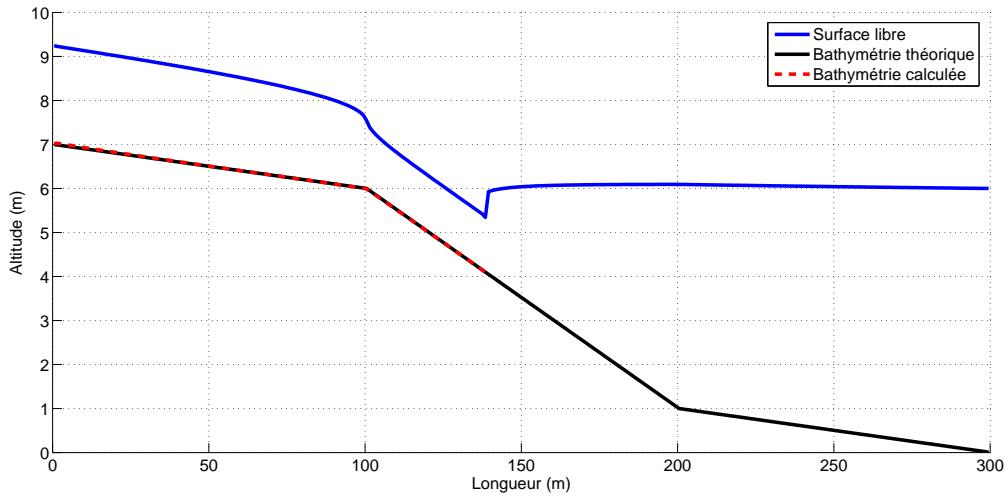


FIGURE 16 – Bathymétrie calculée par la méthode pseudo temporelle pour le second exemple en trois pentes.

### Le calcul serait-il influencé par la solution de départ donnée à la bathymétrie ?

En effet, il est légitime de penser que celle-ci peut influencer le résultat. Actuellement, cette solution de départ est simplement égale à la surface libre translatée de la condition limite de hauteur d'eau en amont. Cette manière de faire permet d'assurer qu'en tout point, lorsque le calcul est lancé, il n'y a pas de risque d'avoir une hauteur d'eau négative. Mais ici, cela signifie que dès que le calcul commence, la présence du ressaut engendre une singularité au niveau de la bathymétrie.

Différents tests ont été réalisés en modifiant la solution de départ donnée à la bathymétrie. Le seul cas ayant porté ses fruits est celui où la solution de départ est en fait égale à la solution théorique ou fort proche. Il est tout de même rassurant de voir que dans de tels cas la solution converge. Cependant, dans la pratique, cette bathymétrie n'est pas censée être connue, donc cette démarche n'est pas concluante.

### Réduire la taille du domaine considéré ?

L'idée est de se dire que tout le domaine est affecté par la résolution et de voir si elle est moins affectée en limitant la taille du domaine. Pour ce faire, la taille du domaine a été diminuée progressivement.

En pratique une partie de l'information de la surface libre était laissée de côté, les derniers mètres en aval, ce qui permettait de réduire le domaine de calcul. Cependant rien n'y a fait, le calcul divergeait toujours. Au final, en considérant comme domaine uniquement toute la partie en amont du ressaut et une seule mesure comprise dans celui-ci, le calcul divergeait toujours. Simplement dû au fait que dès les premiers calculs, la zone sous le ressaut commence à diverger. Dès lors, cette approche n'est pas non plus concluante.

### Utiliser un code “anti divergence”

Est-ce que le fait de *remettre la solution “sur le droit chemin” permet de passer le ressaut* ? En effet dans le code de résolution, il est possible d'ajouter un gardien dont le rôle est d'activer un morceau de code dès que la solution a commencé à diverger. L'idée est donc de placer une condition sur la bathymétrie telle que dès que celle-ci est vérifiée, la bathymétrie soit corrigée.

Le code utilisé consiste à détecter la présence d'un saut d'altitude entre deux points voisins, où une pente

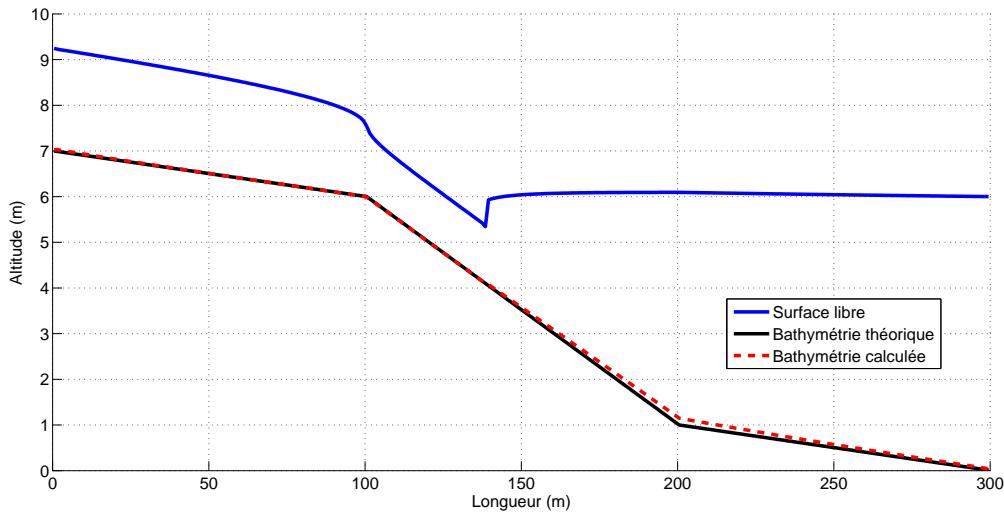


FIGURE 17 – Bathymétrie calculée par la méthode pseudo temporelle avec utilisation du code “anti divergence” pour le second exemple en trois pentes.

trop forte. Dès que la pente est supérieure à 100%, le point ayant divergé est remplacé par la valeur de la bathymétrie juste en amont.

Ce petit artifice permet donc de gommer une singularité se marquant dans la solution et puis de relancer le calcul.

La figure 17 représente le résultat obtenu par cet ajout de code.

Le résultat cette fois aboutit. Cependant, bien que de façon générale la bathymétrie soit bien restituée, le passage du ressaut affecte tout de même la résolution. Cet exemple permet entre autre de voir que la détermination de la bathymétrie est affectée par des conditions de l’écoulement directement en amont comme l’a montré l’analyse du comportement mathématique de l’équation. C’est ce qui va mener à la dernière piste de solution.

### Utiliser une résolution orientée ?

Cet aspect sera abordé plus en détail au point 3. Résolution orientée. Il consiste simplement à tirer profit du comportement mathématique de l’équation qui permet de faire une résolution de proche en proche en étendant le domaine vu que l’information vient toujours de l’amont. De cette façon, le calcul n’influence plus le restant du domaine.

## 2.4 Conclusions intermédiaires

L’équation mise au point et complétée d’un terme pseudo temporel a permis de déterminer la bathymétrie de divers exemples. Le fait de résoudre l’équation mise sous la forme d’une équation de transport permet cette fois de tirer avantage d’un processus itératif dont la convergence peut être contrôlée.

Sur les divers exemples traités, les bathymétries déterminées sont très proches de celles théoriques. C'est au niveau des cassures de pentes, des ressauts où au niveau des bords du domaine que les plus grandes différences se font sentir. Cependant, ces différences sont acceptables dans le sens où elles permettent d'avoir une estimation correcte de la bathymétrie. De cette estimation, il est par exemple possible dans la suite de déterminer des lignes d'eau pour des débits plus importants. Ainsi, la simple application de cette méthode

permet de connaitre la bathymétrie d'un cours d'eau et d'exploiter le résultat pour divers motifs.

Il faut tout de même constater qu'un exemple a posé problème. Dans le cas des trois pentes, pour certains jeux de données, la bathymétrie sous le ressaut s'éloigne de la solution théorique au fur et à mesure du calcul. En effet un des inconvénients de la technique de résolution qui vient d'être traitée est le fait que, à chaque pas de temps, l'entièreté du domaine est calculée. Donc, certaines mailles ayant déjà convergé sont recalculées, en soi cela pose juste un problème en ce qui concerne le temps de calcul. Mais le reste du domaine lui partant d'une solution de départ va se retrouver affecté par la résolution. Et comme pour l'exemple des trois pentes, il se peut que le domaine soit tellement perturbé que la solution diverge. La seule solution trouvée à ce stade pour pallier à ce problème est de remettre la solution sur le droit chemin en cours de calcul dès que celle-ci manifeste sa tendance à diverger. Ce simple artifice a permis d'obtenir un résultat satisfaisant.

L'étape suivante consiste maintenant à développer une nouvelle technique de résolution afin de voir s'il est possible de se passer de cet artifice.

### 3 Résolution orientée

La résolution de l'équation mise sous la forme d'une équation de transport vient d'être faite par une technique qui calcule tout le domaine en même temps. Le schéma de résolution suivi est tel qu'à chaque pas de temps tout le domaine est calculé. Le temps mis pour la résolution est donc fonction de la solution de départ considérée. De plus, il vient d'être mis en évidence que, dans certains cas, (exemple des trois pentes) le fait de travailler sur tout le domaine avait pour effet d'amplifier des estimations de la bathymétrie jusqu'à obtenir la divergence de la solution. C'est pourquoi une nouvelle technique de résolution va être mise au point.

#### Principe de la résolution orientée

L'idée est de se focaliser uniquement sur une partie du domaine, de résoudre cette partie et puis de passer à la suite du domaine. Cette technique de résolution s'apparente donc à la résolution faite pour l'équation de ligne de sol, la différence réside dans le fait qu'ici il y a itération jusqu'à convergence avant de passer au pas spatial suivant.

Cette façon de déterminer le problème permet de tirer avantage de ce qui a été appris concernant le comportement mathématique de l'équation. En effet il a été montré que la célérité était toujours descendante, la seule information nécessaire à la détermination de la bathymétrie vient uniquement de l'amont.

Partant de ce constat, il est donc possible et plus opportun de résoudre le domaine en partant de l'amont vers l'aval. Ce qui permet de focaliser la résolution sur un seul point, une seule maille à la fois. Et une fois qu'une partie de la bathymétrie est déterminée, celle-ci reste inchangée, le calcul n'affecte plus que la maille juste en aval du domaine déjà calculé.

En somme, cette façon de résoudre revient à appliquer la méthode précédente mais pour un domaine de résolution égal à une maille, et chaque fois considérer la maille voisine en aval après convergence.

Dans certaines circonstances, cette méthode de résolution va permettre de gagner en temps de calcul, grâce à la concentration des efforts sur une seule maille à la fois. Il y a en effet des cas où la résolution peut-être plus rapide si tout le domaine est considéré et que la solution initiale est proche de la solution finale par exemple.

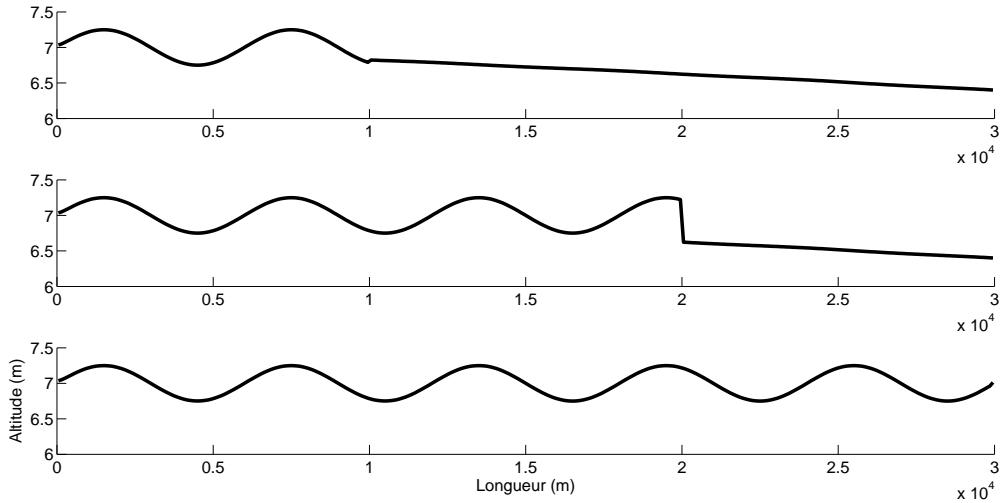
De plus, il est espéré que cette méthode de résolution va permettre de passer une discontinuité. Pour ce faire, la méthode va être testée sur le cas des trois pentes avec ressaut et par la suite sur le cas ayant posé problème pour la méthode précédente.

#### 3.1 Illustration de la méthode sur le cas du sinus

La méthode est tout d'abord testée sur le cas du sinus en guise d'illustration du fonctionnement de la méthode. L'exemple traité présente les mêmes caractéristiques que le cas sinus déjà traité.

La figure 18 permet bien de comprendre la philosophie de la méthode où seule la bathymétrie calculée à différents stades est représentée. Sur la figure du dessus, un tiers du domaine est seulement résolu, au centre les deux tiers et finalement l'entièreté du domaine. Comme pour les autres exemples, la solution de départ est toujours une translation de la surface libre. Sauf que pour accélérer la convergence de la solution, *la solution de départ d'une maille est fixée de telle manière à ce que la bathymétrie de la maille à calculer soit égale à celle qui vient d'être calculée*. Cette imposition de la solution de départ permet en effet d'éviter les sauts de bathymétrie qui doivent être corrigés par des itérations successives lors de la résolution avant de finalement converger vers la bonne solution.

Les résultats obtenus par cette méthode sont identiques à ceux précédents. La seule différence notable réside dans le temps de calcul qui est diminué. Cet exemple montre bien que l'information se trouvant en



1

FIGURE 18 – Illustration de la méthode orientée sur le cas sinus, avec au-dessus un tiers du domaine résolu, au centre deux tiers et en-dessous tout le domaine.

aval de la zone de calcul n'apporte rien à la résolution, seule l'information comprise en amont influence la détermination de la bathymétrie.

### 3.2 Cas des trois pentes

Cet exemple va permettre de voir s'il est possible de passer une discontinuité, un ressaut au sein de la surface libre, afin de déterminer la bathymétrie de proche en proche.

#### 3.2.1 Premier exemple

Afin de pouvoir comparer à la méthode précédente, cet exemple est identique à celui traité à la figure 14.

Le résultat obtenu par la méthode orientée est présenté à la figure 19. Le résultat obtenu est similaire à celui de l'autre méthode. Ce qui montre que la bathymétrie d'un cours d'eau présentant une transition infracritique supercritique peut être déterminée par une méthode de proche en proche en ayant recours à aucune information venant de l'aval.

Si un zoom est effectué au niveau de la cassure de pente où le ressaut est localisé, les observations sont identiques à la méthode précédente, c'est pourquoi la figure n'est plus représentée.

#### 3.2.2 Second exemple

Le second exemple est celui ayant posé problème, et nécessité le recours à un code anti divergence. Le souhait ici, est que l'exemple puisse être résolu, ce qui permettrait de ne plus avoir recours à l'artifice de correction.

La figure 20 représente le résultat obtenu. Cette fois, le calcul aboutit après le ressaut. Si cette figure est comparée à celle obtenue avec le code anti divergence, il s'avère que les deux résultats sont identiques. Ce qui signifie que par une méthode orientée, la transition ne pose plus de problème et il est donc possible de se passer de l'artifice de correction. Par contre, la zone du ressaut affecte toujours la résolution en aval. En effet, celle-ci est légèrement différente de la solution théorique en aval du ressaut. Cependant le résultat reste satisfaisant. En effet si une nouvelle ligne d'eau est calculée sur base de la bathymétrie déterminée, le résultat est identique à celui obtenu avec la bathymétrie théorique. Et c'est bien le but du travail, avoir une

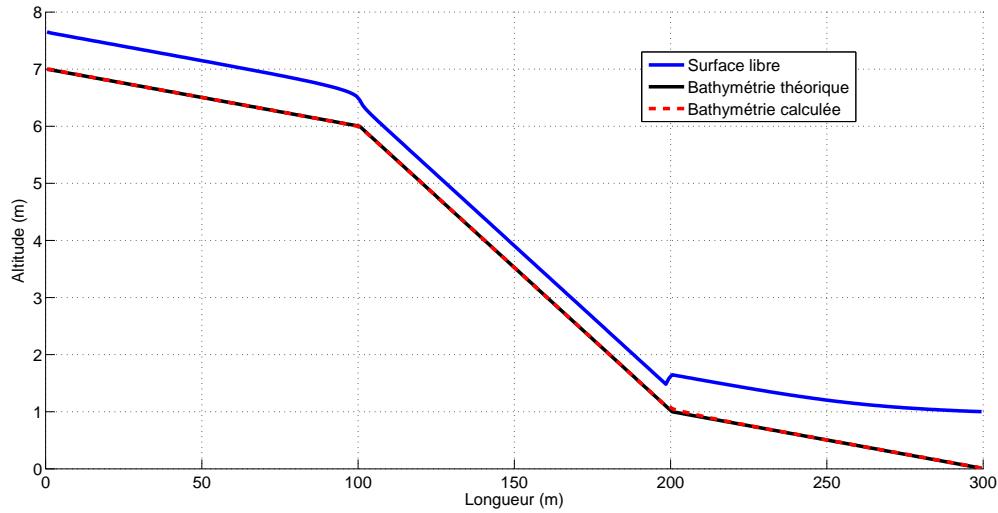


FIGURE 19 – Bathymétrie du premier exemple des trois pentes résolu par la méthode orientée.

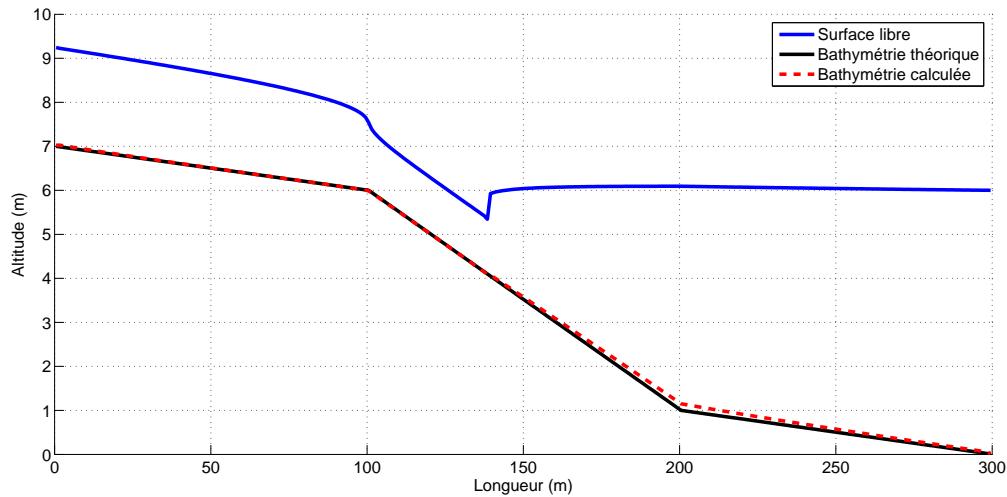


FIGURE 20 – Bathymétrie du second exemple en trois pentes résolu par la méthode orientée.

approximation de la bathymétrie qui soit exploitable, dans le sens où par exemple elle permet de déterminer des lignes d'eau pour des débits plus conséquents.

### 3.3 Autres exemples

Les autres exemples traités auparavant ont aussi été recalculés. Les résultats obtenus sont identiques à ceux précédents. C'est pour cette raison que ceux-ci ne sont pas retranscrits ici étant donné qu'ils n'apportent rien de nouveau. Ils prouvent juste que résoudre de manière orientée aboutit aux mêmes résultats que la méthode précédente où tout le domaine était calculé en même temps.

### 3.4 Résolution de la même bathymétrie pour plusieurs surfaces libres

Le but de ce point est de voir si la bathymétrie obtenue est identique lorsque les caractéristiques de l'écoulement changent. Pour ce faire, le cas du fond en forme de sinus et puis de celui en trois pentes vont être résolus pour une série de débits différents.

Les deux exemples qui vont suivre sont caractérisés par le fait que le débit spécifique a été pris dans une gamme entre 0,1 et  $30 \text{ m}^2/\text{s}$ . Dans un premier temps toutes les lignes d'eau sont calculées en fonction de tous les débits, ensuite toutes les bathymétries devant être identiques sont résolues en fonction de tous les débits.

#### 3.4.1 Résolution en boucle pour le cas sinus

Tout d'abord le cas du sinus. L'altitude de la surface libre a été imposée à 20 m en aval chaque fois, dès lors seul le débit spécifique a été modifié. La figure 21 permet de connaître les différents débits testés mais aussi la variation du nombre de Froude considérée lors de la résolution de l'exemple. Le nombre de Froude est calculé en aval du domaine.

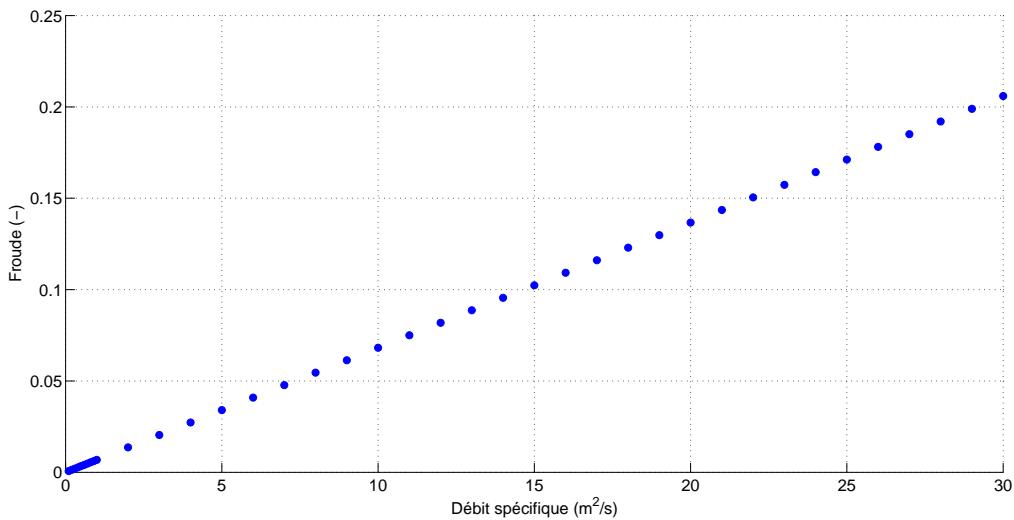


FIGURE 21 – Variation du nombre de Froude en aval considérée pour le cas du sinus.

La figure 22, représente les résultats obtenus lors de la résolution des différentes lignes d'eau. Les surfaces libres les plus hautes correspondent aux débits les plus importants. La bathymétrie obtenue pour les différents cas est similaire pour tous les cas. Il existe cependant des différences au niveau de la solution, la bathymétrie est trop basse lorsque le débit spécifique augmente. Les plus grandes différences sont marquées là où le gradient de surface libre est le plus important. Cette remarque est donc identique à celle faite auparavant pour le cas du bump.

### 3.4.2 Résolution en boucle pour le cas des trois pentes

Pour le cas des trois pentes, la variation de débit considérée est identique. Ici la surface libre a été imposée pour chaque établissement de la ligne d'eau à une altitude de 6 m en aval. La variation du nombre de Froude considérée pour l'exemple est représentée à la 23. La concentration est volontairement plus importante pour les faibles nombres de Froude afin de pouvoir mettre en évidence la différence de solution pour de faibles valeurs de nombre de Froude.

La figure 24 représente les résultats obtenus. Les lignes d'eau, surfaces libres supérieures correspondent aux débits les plus importants, tandis que ce sont les bathymétries les plus basses qui correspondent au débits les plus importants. Les résultats montrent dans ce cas que les meilleurs résultats sont obtenus pour les nombres de Froude les plus importants.

Par contre, les cas avec un faible débit spécifique et donc un faible nombre de Froude sont les cas dont le résultat s'éloigne le plus de la bathymétrie théorique. En fait, ces cas sont caractérisés par une surface libre en aval de la première cassure de pente qui est quasi plane et le passage du ressaut a aussi pour effet de perturber la résolution. Cette quasi horizontalité de la surface libre conduit à une mauvaise estimation de la bathymétrie. Ceci démontre une fois de plus que ce qui permet de déterminer la bathymétrie, c'est la pente qui existe au niveau de la surface libre. Si la pente est très faible les informations permettant la détermination de la bathymétrie le sont aussi. On peut en effet voir que lorsque la pente de la surface libre augmente, la bathymétrie est bien mieux estimée.

Afin de faciliter la lecture, et les observations, la figure 25 représente uniquement les résultats pour un débit spécifique de 0,1,1 et 10  $m^2/s$ . Cette figure montre clairement que pour le cas traité, la bathymétrie est mieux estimée lorsque le débit spécifique est plus important.

## 3.5 Conclusions intermédiaires

Le fait de résoudre, en employant un schéma de résolution orienté, permet de focaliser les efforts sur une seule maille à la fois. De plus, comme la bathymétrie est reconstruite en partant de l'amont, il est plus facile de contrôler la solution, étant donné que la bathymétrie est déterminée progressivement et non plus complètement en une fois.

Le grand avantage de cette méthode est donc une exploitation plus rapide des résultats vu qu'il est très facile de regarder la tendance de la bathymétrie au cours de la résolution. Ensuite, le calcul est dans certains cas rendu plus rapide. Il se peut toujours que l'autre méthode converge plus vite suivant la solution de départ considérée.

Ensuite, et c'est l'un des acquis les plus importants, il vient d'être montré qu'il est possible de passer une discontinuité et ce par une méthode de résolution orientée, faite de proche en proche. Et surtout, il n'y a plus besoin de faire appel à un artifice corrigeant la solution vu que plus aucune divergence n'est observée. Il est donc tout bénéfique de résoudre la bathymétrie de proche en proche, vu les avantages apportés par cette méthode qui exploite pleinement le comportement mathématique de l'équation.

Finalement, la méthode de résolution a été testée pour une même bathymétrie mais en modifiant la surface libre en faisant varier le débit spécifique caractérisant l'écoulement. La bathymétrie obtenue, sa qualité est liée à la nature de la surface libre. En effet, dans le cas des trois pentes, il s'avère que lorsque le débit spécifique augmente, la ligne d'eau "s'incline" plus et la bathymétrie déterminée est plus proche de celle théorique. En quelque sorte, le *résultat obtenu est sensible à la nature de la surface libre*.

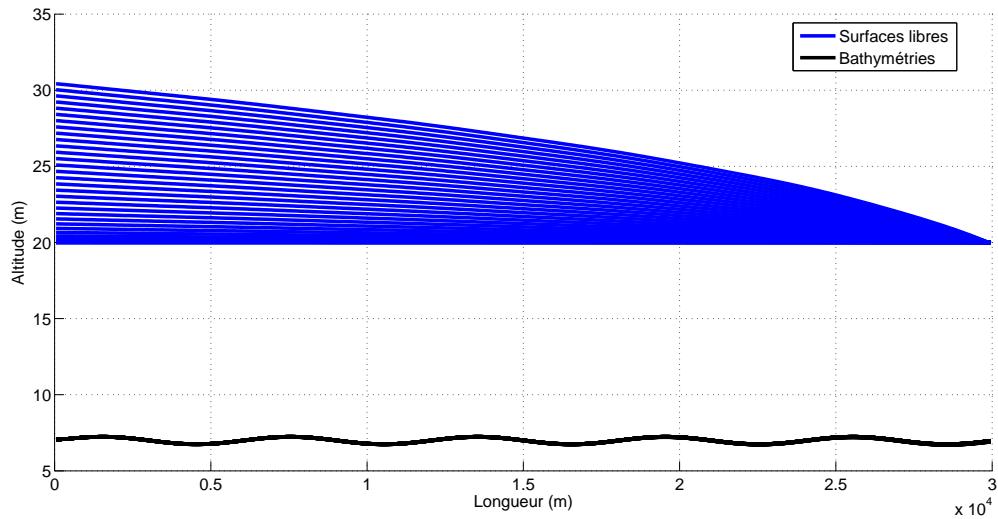


FIGURE 22 – Bathymétries obtenues par la méthode orientée pour une résolution faite avec plusieurs débits pour le cas du sinus.

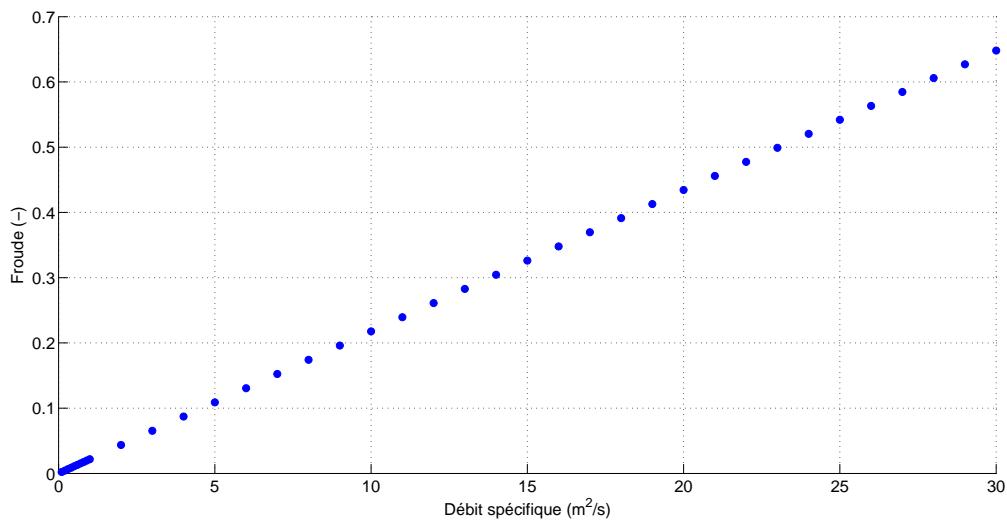


FIGURE 23 – Variation du nombre de Froude en aval considérée pour le cas des trois pentes.

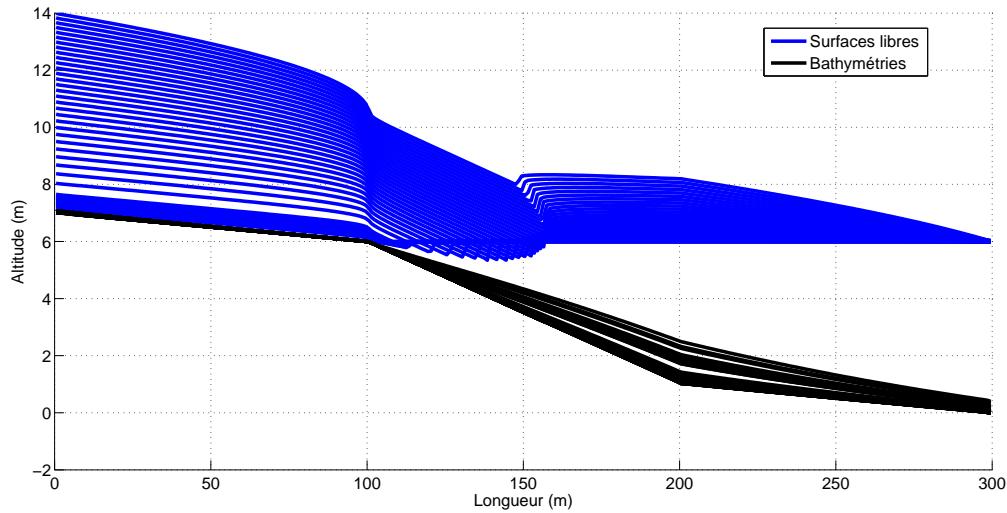


FIGURE 24 – Bathymétries obtenues pour une résolution faite avec plusieurs débits par la méthode orientée.

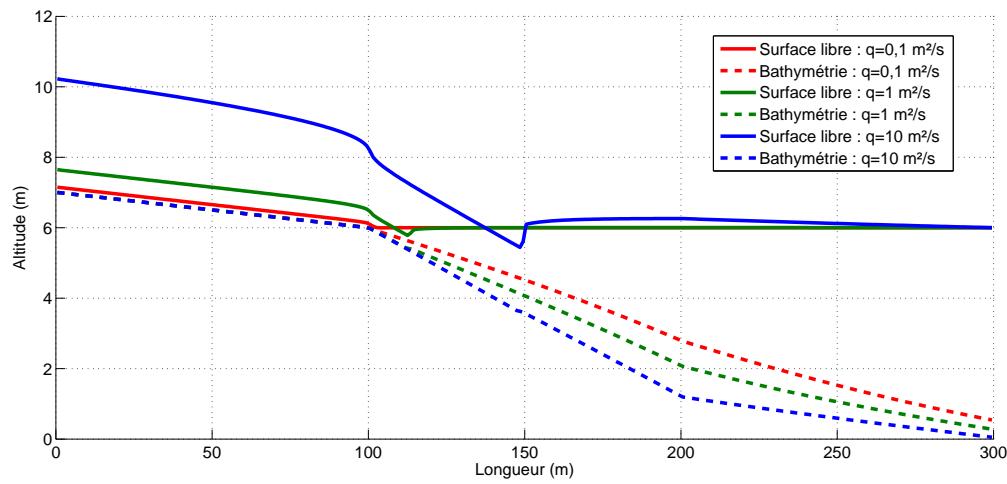


FIGURE 25 – Bathymétries obtenues par la méthode orientée pour le cas des trois pentes avec uniquement trois débits spécifiques.

## 4 Sensibilité

Dans cette partie, il va être montré l'influence sur la résolution d'une modification des données d'entrée ainsi que le fait que la surface libre soit connue avec une certaine précision. Dans un second temps, l'étude sera uniquement focalisée sur la surface libre en considérant cette fois que lors du levé, il peut y avoir du bruit au sein de la mesure, voir point 5. Bruitage de la surface libre à la page 44.

### 4.1 Influence des données caractérisant l'écoulement

Les différents cas qui viennent d'être traités sont tous caractérisés par le fait que les données caractérisant l'écoulement sont parfaitement connues. Cependant, pour un cas pratique, les données ne sont pas connues avec certitude. Il faut garder à l'esprit qu'il y a plusieurs paramètres, et ils sont pour la plupart issus d'une estimation ou d'une mesure, et donc sujets à erreurs. Dès lors, il est légitime de se poser la question suivante : *Comment évolue la bathymétrie si certaines données sont surestimées ou sous-estimées ?* Dans la suite, une même bathymétrie va être déterminée en affectant une légère erreur sur une donnée à la fois.

#### 4.1.1 Variation du coefficient de frottement

Considérons simplement une rivière pouvant être assimilée à une rivière unidimensionnelle, la surface libre est connue sur base d'un levé, ainsi que le débit mais le coefficient de frottement lui est estimé sur base de ce qui est habituellement considéré pour ce type de rivière ou autre. Si le coefficient de frottement ( $K$ ) est sous-estimé, alors le frottement considéré va être plus important que celui s'appliquant réellement au sein de l'écoulement.

Si l'exemple du fond plat est considéré, il est évident qu'une légère erreur faite sur le coefficient de frottement va avoir pour effet de perdre l'horizontalité du fond ou de le déplacer. Pour s'en convaincre, la figure 26 représente la bathymétrie obtenue si une erreur de 5% est faite sur le coefficient de frottement. Les résultats montrent bien la modification du résultat qui résulte d'une simple modification d'un des paramètres. La solution en début de domaine s'explique par l'imposition de la condition amont qui reste inchangée.

Considérer un coefficient de frottement  $K$  surestimé, revient à dire que le frottement pour une même hauteur d'eau provoque moins de perte au sein de l'écoulement. Donc lors de la résolution, comme le coefficient  $K$  est surestimé, afin de retrouver la bonne perte, il faut en somme que la vitesse de l'écoulement soit augmentée. Dès lors, la solution obtenue est telle que la bathymétrie est plus haute que celle théorique, ce qui se traduit par des hauteurs d'eau plus basses et donc des vitesses d'écoulements plus importantes.

Dans le cas d'un coefficient de frottement sous-estimé, la même logique de raisonnement permet d'arriver à la conclusion que la bathymétrie doit cette fois être plus basse afin d'obtenir des vitesses d'écoulement plus faibles.

La formulation utilisée pour la pente de frottement est la suivante :

$$J = \frac{q^2}{K^2 h^2 R_h^{4/3}} \quad (44)$$

qui peut être simplifiée en assimilant le rayon hydraulique de la rivière à sa hauteur d'eau soit :

$$J = \frac{q^2}{K^2 h^{10/3}} \quad (45)$$

La formulation permet de justifier que la hauteur d'eau doit diminuer si le coefficient de frottement augmente afin de conserver un frottement semblable. En résumé :

- si le coefficient de frottement est surestimé la bathymétrie sera aussi surestimée (hauteur d'eau sous-estimée) ;

- inversement, si le coefficient de frottement est sous-estimé la bathymétrie sera aussi sous-estimée (hauteur d'eau surestimée).

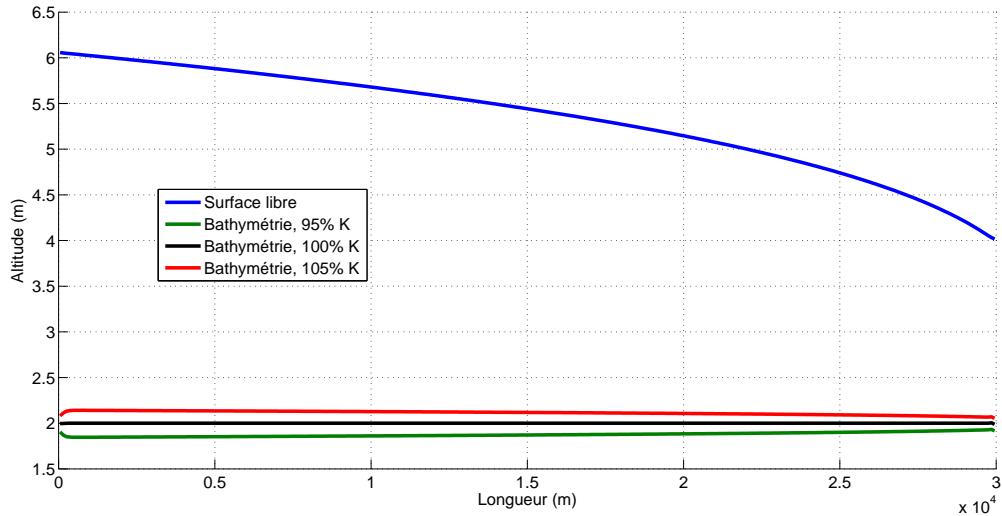


FIGURE 26 – Bathymétrie calculée par la méthode orientée pour le fond plat, avec le coefficient de frottement estimé à 95%, 100% et 105%.

#### 4.1.2 Variation du débit

Comme pour le coefficient de frottement, le débit peut être légèrement différent de celui existant lors du levé de la surface libre. Dès lors la résolution obtenue va être affectée. C'est pourquoi il faut garder à l'esprit que la résolution peut être faussée suite à une erreur de débit.

Pour une variation de débit la conclusion des exemples analysés est la suivante :

- si le débit est sous-estimé la bathymétrie sera surestimée (hauteur d'eau sous-estimée) ;
- inversement, si le débit est surestimé la bathymétrie sera sous-estimée (hauteur d'eau surestimée).

Le comportement est donc l'inverse de celui du coefficient de frottement  $K$ . Ce qui est en soi assez logique si l'explication de la modification de la bathymétrie est encore tirée d'une mauvaise approximation du frottement qui doit être corrigée en adaptant la hauteur d'eau.

#### 4.1.3 Largeur d'écoulement

La largeur de l'écoulement au sein de la résolution joue un rôle au niveau du calcul de la pente de frottement, via le rayon hydraulique. Logiquement, pour la largeur d'écoulement les exemples arrivent aux conclusions identiques à celles du coefficient de frottement à savoir :

- si la largeur de l'écoulement est surestimée la bathymétrie sera aussi surestimée (hauteur d'eau sous-estimée) ;
- inversement, si la largeur de l'écoulement est sous-estimée la bathymétrie sera aussi sous-estimée (hauteur d'eau surestimée).

Il faut noter qu'il s'agit d'une grandeur plus facile à obtenir et donc moins sujette à l'erreur.

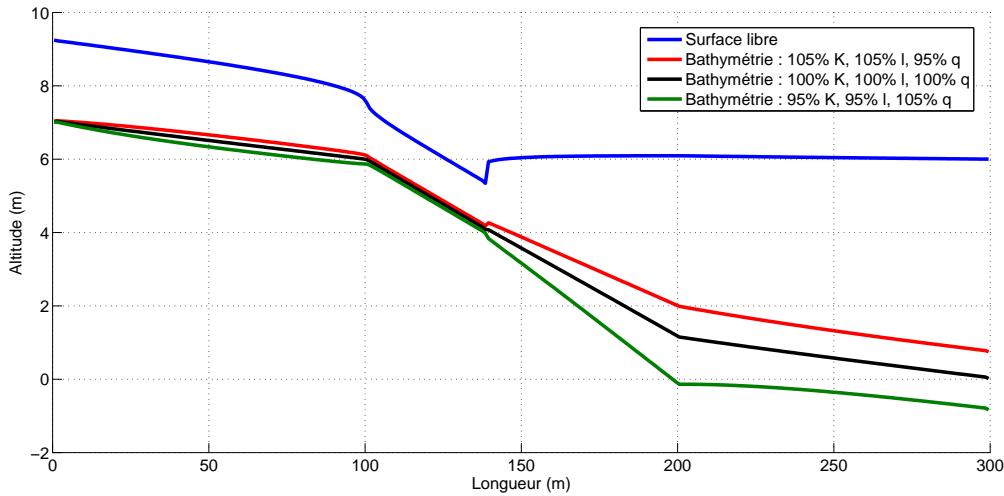


FIGURE 27 – Illustration sur le cas des trois pentes de la surestimation, sous-estimation et de la bathymétrie normalement obtenue.

#### 4.1.4 Conclusions intermédiaires

La résolution est donc dépendante du jeu de données, de la qualité d'estimation de ces données. Dans le cadre théorique suivi pour le moment cet aspect ne posait pas de problème car tout était considéré comme parfaitement connu. Mais en pratique ce n'est pas le cas, et la présence d'erreur n'est pas facilement décelable. De plus ici, seul un paramètre a été modifié à la fois.

À titre illustratif, la figure 27 permet de se rendre compte de l'erreur faite au niveau de l'évaluation de la bathymétrie si chacun des 3 paramètres est affecté pour observer la même modification de bathymétrie. Ce simple exemple des trois pentes (de caractéristiques identiques à celui de la figure 16) permet de facilement se rendre compte de la dépendance de la résolution par rapport aux données qui caractérisent l'écoulement. La courbe rouge est le cas où l'erreur de 5% sur les paramètres amène une surestimation de la bathymétrie soit : 105% de  $K$ , 105% de  $l$  et 95% de  $q$ . À l'inverse, la courbe verte amène une sous-estimation avec le jeu suivant : 95% de  $K$ , 95% de  $l$  et 105% de  $q$ . Finalement, la courbe noire est la bathymétrie obtenue si tous les paramètres sont pris à la bonne valeur.

## 4.2 Surface libre arrondie

Jusqu'à présent, tous les exemples ont été considérés en générant la ligne d'eau de manière théorique. Cependant, lors d'un levé une telle précision sur la surface libre ne pourra pas être possible. Dans cette partie, la surface libre va être considérée comme étant juste, non affectée par du bruit, mais arrondie à un certain degré de précision. Le but étant de voir si le fait de faire disparaître de l'information en arrondissant permet encore d'obtenir une bathymétrie comparable à celle théorique.

Avant toute simulation, il semble évident, sur base de ce qui a été appris lors de la résolution en boucle de la bathymétrie, que des surfaces libres "quasi horizontales" risquent de poser plus de problèmes qu'une surface libre fortement marquée. En effet, pour une surface quasi plane, l'information permettant de reconstruire le sol est tirée de variations de pente très faibles. Or ces variations vont fortement être affectées voire disparaître si seule une partie de l'information est conservée.

Le problème d'une surface libre arrondie va être traité pour deux types de surface libre : une presque horizontale, et une fortement marquée. Le fait de traiter ces deux cas va permettre de voir comment se comporte la bathymétrie obtenue en fonction de l'information restante au sein de la surface libre.

#### 4.2.1 Surface libre “quasi plane”

L'exemple pris est celui des trois pentes, avec une hauteur d'eau imposée en aval lors de la génération de la ligne d'eau telle qu'il n'y ait pas de ressaut. Les caractéristiques de l'écoulement sont pour cet exemple les suivantes :

- un débit de  $4 m^3/s$ ;
- une largeur de  $4 m$ ;
- un coefficient de frottement de  $25 m^{1/3}/s$ ;
- une longueur d'écoulement de  $300 m$ ;
- une hauteur d'eau en aval de  $10 m$ .

Ces caractéristiques ont permis de générer une surface libre. Ensuite, cette surface libre a été arrondie à la quatrième puis troisième décimale. Pour les deux surfaces libres arrondies, la bathymétrie a été déterminée. La figure 28 représente les résultats obtenus avec en rouge la surface libre arrondie à la quatrième décimale et en vert arrondie à la troisième. Les résultats montrent la présence d'une indentation au niveau de la bathymétrie qui est plus prononcée lorsque moins d'information est conservée. Sinon dans l'ensemble, la tendance générale qui se dessine permet de retrouver l'allure des trois pentes, bien que cela soit plus difficile dans le cas de la courbe verte.

Sur base des résultats obtenus, se pose la question des indentations, de leur origine. Pourquoi celles-ci se manifestent au niveau de la bathymétrie ? L'origine du problème vient (évidemment) du fait que la surface libre ait été arrondie. Si la surface libre une fois arrondie est tracée, il s'avère que celle-ci varie par tronçon. En effet, du fait de la quasi horizontalité, la surface libre une fois arrondie se caractérise par une succession de marches. Donc lors de la résolution, la pente de surface libre est nulle pendant une partie du domaine puis varie brusquement au niveau de la marche. C'est la variation en marches de la surface libre qui est à l'origine des indentations. Pour s'en convaincre, la figure 29 représente les surfaces libres arrondies considérées pour la résolution. Si la surface libre obtenue respectivement est mise en parallèle, il s'avère bien que les zones de variation de marches au sein de la surface libre se traduisent par des indentations au niveau de la bathymétrie.

Il est important de noter qu'ici la surface libre est arrondie au millimètre près, et de constater l'impact de cet arrondi sur la bathymétrie obtenue. Pourtant en pratique, il est illusoire de penser obtenir une surface libre précise au millimètre près. A titre informatif, lors d'un levé effectué par un laser topographique, on parle de topographie acquise à  $15 cm$  d'erreur près en absolu [2, 11]. Il paraît donc évident que pour une telle précision, il est très difficile d'obtenir une bathymétrie fidèle à la réalité.

#### 4.2.2 Surface libre marquée, “inclinée”

L'exemple considéré est encore celui des trois pentes mais cette fois, la condition en aval pour la génération de la ligne d'eau est telle que la surface libre présente un ressaut, et celle-ci est beaucoup plus inclinée. Les caractéristiques de l'écoulement sont les suivantes :

- un débit de  $8 m^3/s$ ;
- une largeur de  $4 m$ ;
- un coefficient de frottement de  $25 m^{1/3}/s$ ;
- une longueur d'écoulement de  $300 m$ ;
- une hauteur d'eau en aval de  $1 m$ .

La même démarche que précédemment est ensuite suivie. Sauf que cette fois, la surface libre est arrondie à la troisième et puis deuxième décimale. L'arrondi à la troisième décimale a été conservé afin d'avoir pour les deux exemples une même façon de traiter la surface libre.

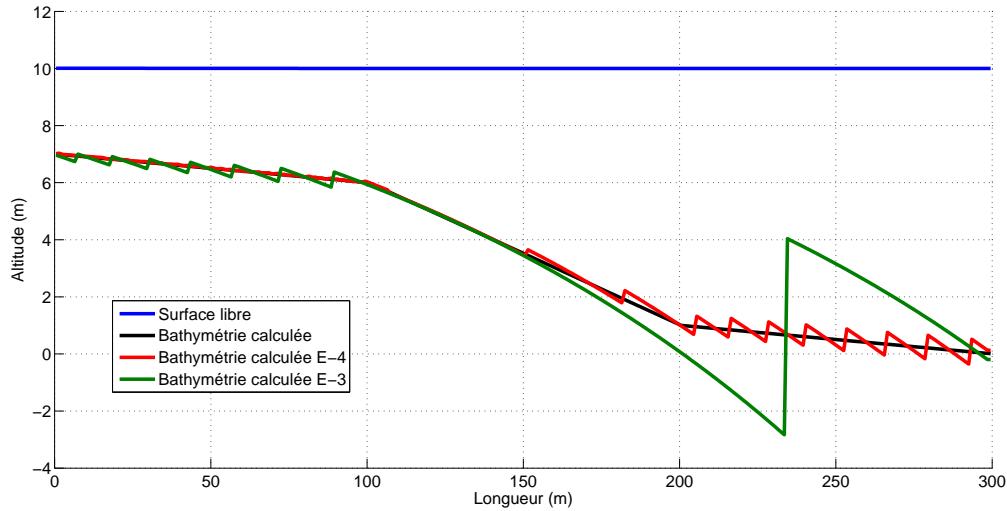


FIGURE 28 – Bathymétrie obtenue pour un exemple en trois pentes avec une surface libre “quasi plane” arrondie ou non arrondie.

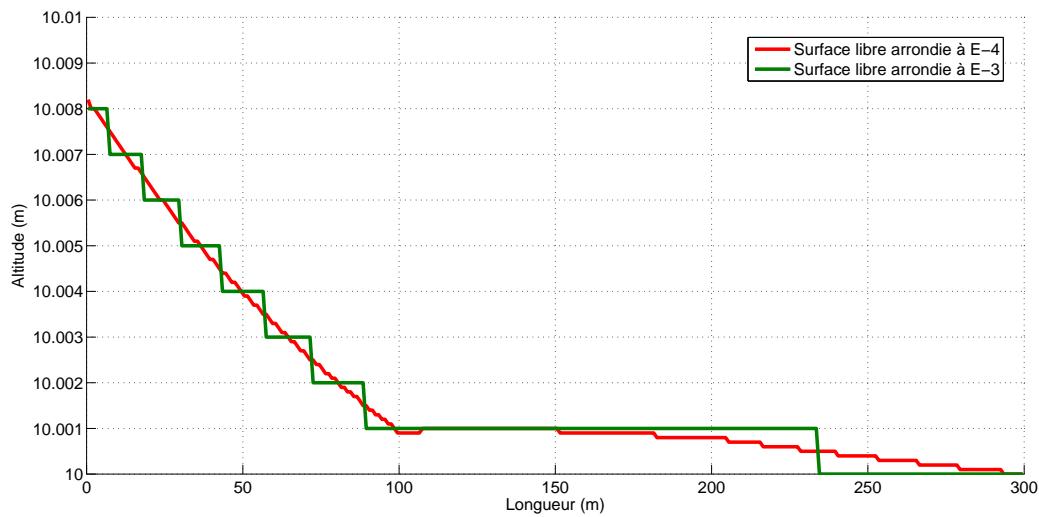


FIGURE 29 – Surfaces libres “quasi planes” arrondies pour le cas des trois pentes.

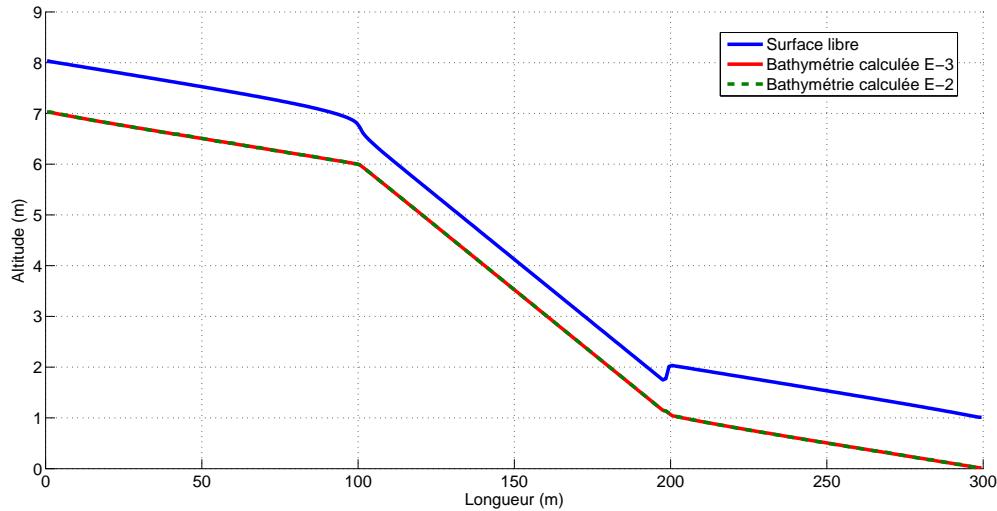


FIGURE 30 – Bathymétrie obtenue pour un exemple en trois pentes avec une surface libre “inclinée” arrondie.

Les différentes bathymétries obtenues sont représentées à la figure 30. Cette fois, comme expliqué avant la résolution, la pente de la surface libre est telle que l’opération qui consiste à arrondir n’engendre pas une perte d’information significative. Dès lors la bathymétrie finalement obtenue même en arrondissant au centimètre ne semble pas être vraiment affectée. Les indentations ne se manifestent plus ici car la surface libre même après avoir été arrondie continue à varier de façon linéaire et pas graduellement comme l’exemple précédent.

#### 4.2.3 Conclusions intermédiaires

Les deux applications qui viennent d’être analysées permettent d’une certaine façon de tenir compte de la limite de précision de l’appareil de mesure.

En conclusion, le fait de faire disparaître une partie de l’information en arrondissant permet encore d’obtenir une bathymétrie satisfaisante si la bathymétrie est fortement marquée. En effet, il vient d’être montré par un exemple que la perte d’information est minime du fait que la pente au niveau de la surface libre est élevée.

Par contre, l’exemple traité sur une surface quasi horizontale a bien illustré les craintes exposées avant la résolution. Si la surface libre présente une pente très faible, le fait d’arrondir va modifier très fortement la pente jusqu’à même l’annuler et finalement obtenir une surface libre variant par tronçons, graduellement amenant une indentation sur la bathymétrie.

En résumé une perte d’information causée par un arrondissement des données se révèle être problématique dans le cas où la surface libre présente une très faible pente, pour les écoulements lents.

## 5 Bruitage de la surface libre

Le dernier point traitait aussi de la surface libre en considérant qu'elle était parfaitement mesurée, mais que l'appareil était limité à une certaine précision. Ce nouveau point va plutôt s'intéresser à l'acquisition des données, en considérant que lors du levé les mesures présentent un risque d'être entachées de bruit. Le bruit résultant de l'appareil en lui même, des conditions atmosphériques, d'une mauvaise réflexion du signal, d'une erreur du GPS, de la végétation, d'une agitation en surface... [11].

Pour considérer cet aspect, différents cas vont être traités consistant à venir ajouter à la surface libre déterminée, un bruit généré aléatoirement par le programme MatLab. Le but étant de voir dans quelle mesure la résolution est affectée par la présence de ce bruit.

**N.B.** Pour réaliser cette partie, afin de pouvoir comparer les résultats de façon rigoureuse à la théorie la génération de la ligne d'eau a été modifiée. Cette modification était nécessaire afin de garantir le même schéma numérique suivi tant pour le calcul de la surface libre que pour celui de la bathymétrie. La génération de la ligne d'eau pour des écoulements infracritiques s'est faite en imposant les conditions en amont et en optant pour des décentrements amont, comme c'est le cas pour le calcul de la bathymétrie.

### 5.1 Application du bruit sur différents cas

Les cas traités vont être ceux du cas sinus et un exemple en trois pentes. L'exemple en trois pentes permettant d'avoir un écoulement qui s'établit pour des nombres de Froude plus importants.

Le bruit aléatoire ajouté est compris entre 0 et 1 mm. Pour chaque simulation, un vecteur de la taille du domaine est généré et ajouté à la surface libre déterminée. Ensuite, la résolution est lancée en considérant la surface libre bruitée. Les deux exemples qui vont être présentés permettent de simplement se rendre compte de l'influence ou non du bruitage sur la résolution.

#### 5.1.1 Cas du sinus

Les caractéristiques de l'écoulement considéré sont les suivantes :

- un débit de  $20 m^3/s$ ;
- une largeur de  $20 m$ ;
- un coefficient de frottement de  $25 m^{1/3}/s$ ;
- une longueur d'écoulement de  $60\,000 m$ ;
- une hauteur d'eau en aval de  $2,7 m$ ;
- un pas spatial de  $100 m$ .

La figure 31 illustre le résultat obtenu. Il s'avère que la bathymétrie est fortement affectée par le bruit. Non seulement, celui-ci se manifeste, mais il est fortement amplifié par rapport à l'intensité du signal considéré. Une analyse des résultats permet de voir que l'erreur maximale faite est de  $65,5 cm$  alors que l'erreur introduite au niveau de la surface libre est de maximum  $1 mm$ . L'amplification du bruit pour cet exemple est donc relativement conséquente.

Or, lors de l'établissement de l'équation de ligne de sol, une approximation faite avait permis d'arriver à la formulation suivante pour la pente de fond :

$$\frac{dz_b}{dx} \cong \frac{Fr^2 - 1}{Fr^2} \frac{dz_s}{dx} \quad (46)$$

Il avait été montré l'importance que prend le coefficient multipliant la pente de surface libre dans le cas d'un écoulement caractérisé par un petit nombre de Froude. Le résultat de la figure 31 semble en effet aller dans

ce sens.

La figure 31 nous montre une bathymétrie affectée par le bruit, cependant la manifestation du bruit va en diminuant plus on se rapproche de l'aval. En fait l'écoulement est accéléré lorsque l'on se rapproche de l'aval, ce qui se traduit par une augmentation du nombre de Froude dont la variation est illustrée à la figure 32. Le nombre de Froude augmentant, le coefficient lui diminue ce qui expliquerait la diminution de la manifestation du bruit.

Sur base de l'équation de ligne de sol, une approximation de l'erreur faite peut être la suivante :

$$z'_b \cong \frac{Fr^2 - 1}{Fr^2} z'_s \quad (47)$$

où  $z'_s$  est l'erreur faite sur la surface libre et  $z'_b$  l'approximation de l'erreur faite sur la bathymétrie. Si le calcul est fait pour la zone où l'erreur maximale se produit, en considérant que  $z'_s = 1\text{mm}$ , le nombre de Froude vaut 0,03328 ce qui donne au final  $z'_b = 902\text{mm}$ . L'erreur approximée est bien du même ordre de grandeur que celle mesurée.

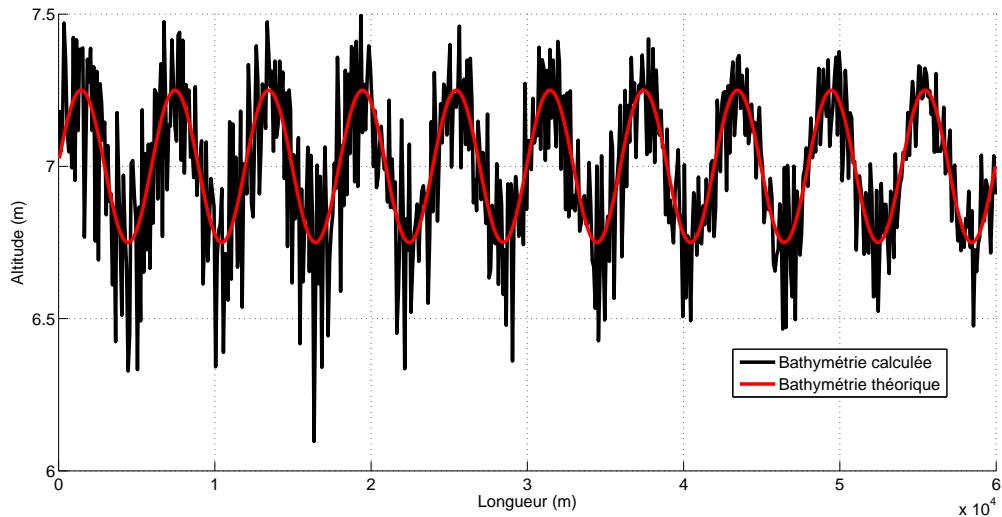


FIGURE 31 – Bathymétrie calculée par la méthode orientée en partant d'une surface libre bruitée pour le cas du sinus.

### 5.1.2 Cas trois pentes

Pour cet exemple, le nombre de Froude est relativement plus important. Dès lors, suite à l'approximation de l'erreur déterminée, les résultats obtenus devraient être moins sujets au bruitage. Cependant, l'exemple choisi est tel qu'il n'y a pas de ressaut, l'écoulement reste infracritique.

Voici les données caractérisant l'écoulement :

- un débit de  $24\text{ m}^3/\text{s}$ ;
- une largeur de  $4\text{ m}$ ;
- un coefficient de frottement de  $25\text{ m}^{1/3}/\text{s}$ ;
- une longueur d'écoulement de  $300\text{ m}$ ;
- une hauteur d'eau en aval de  $7,9\text{ m}$ ;

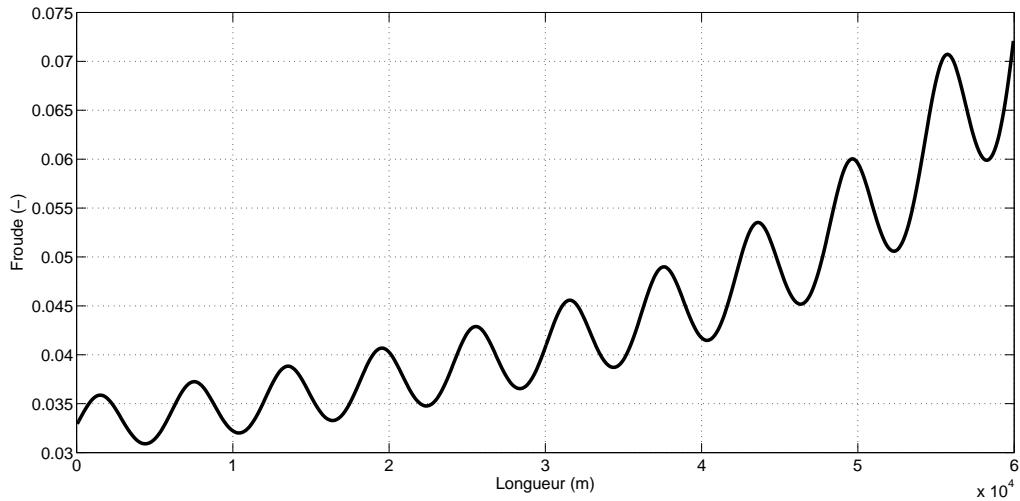


FIGURE 32 – Variation du nombre de Froude le long de l’écoulement pour le cas du sinus.

- un pas spatial de 1 m.

Dans un premier temps, l’exercice a été fait en conservant le bruit normé à 1 mm. La bathymétrie obtenue ne semblait pas être affectée par le bruit. Le graphique “n’apprenant rien”, celui-ci n’est pas présent dans le travail. Comme la résolution ne semblait pas être trop affectée par un bruit de 1 mm celui-ci a été augmenté à 1 cm afin de voir comment se comportait la solution pour un bruit beaucoup plus important.

La figure 33 représente le résultat obtenu pour un bruit de 1 cm, et la figure 34 représente le nombre de Froude le long de l’écoulement. Celle-ci confirme bien que lorsque le nombre de Froude est plus important, le bruitage se manifeste moins au niveau de la bathymétrie. Il ne faut pas pour autant conclure que le bruitage qui affecte la bathymétrie est simplement lié au nombre de Froude.

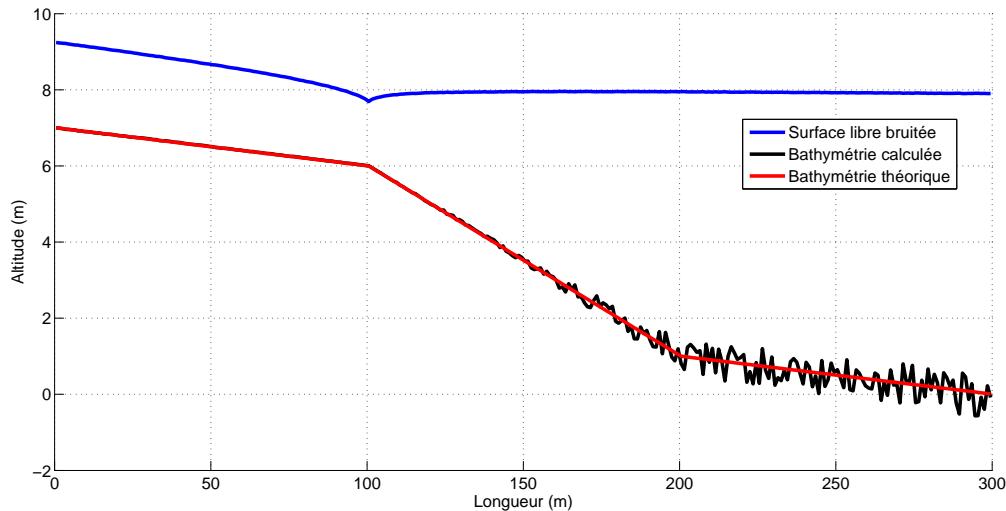


FIGURE 33 – Bathymétrie calculée par la méthode orientée en partant d’une surface libre bruitée pour le cas en trois pentes.

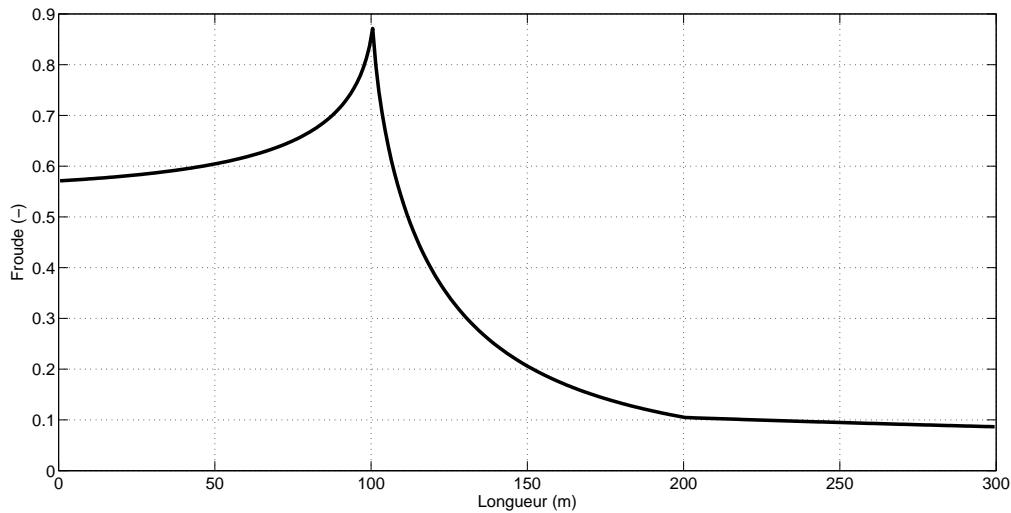


FIGURE 34 – Variation du nombre de Froude le long de l’écoulement pour le cas trois pentes.

Pour cet exemple, l’erreur maximale est de 62,5 cm, cet endroit de l’écoulement est caractérisé par un nombre de Froude égal à 0,0873 ce qui donne au final  $z'_s = 145$  cm. L’erreur approximée est bien du même ordre de grandeur que celle mesurée.

## 5.2 Erreur maximale mesurée

Afin de connaître l’erreur maximale mesurée, la résolution va être effectuée un grand nombre de fois en générant pour chaque résolution un nouveau bruit mais toujours normé de façon identique. Pour chaque résolution, la valeur maximale d’erreur est mise à jour pour toutes les mailles du domaine. Comme le paramètre semblant affecter la résolution est le nombre de Froude, qui apparaît dans l’approximation de l’erreur bathymétrique, les résultats obtenus seront représentés en fonction de ce paramètre.

Pour chaque résolution, de façon à mettre en évidence l’influence d’un paramètre, un seul à la fois sera modifié toute autre chose restante égale.

### 5.2.1 Linéaire ?

Comme le souhait est de pouvoir générer des résultats exploitables pour d’autres cours d’eau afin de savoir si la résolution peut être lancée pour un cours d’eau, un premier test est de voir si les résultats obtenus sur l’erreur sont fonction de la norme du bruitage. Pour ce faire, le cas du sinus a été résolu avec quatre normes de bruitage différentes. Pour chaque norme de bruit, 1000 bruitages différents ont été considérés, ceux-ci sont générés de façon aléatoire grâce à la fonction *rand* de MatLab.

La figure 35 représente les résultats obtenus. La norme pour le bruit est prise à 1/1000 de mm en rouge, 1/2000 de mm en mauve, 1/4000 de mm en bleu et finalement 1/8000 de mm en vert. Afin de pouvoir traiter avec des résultats rendus adimensionnels, les résultats graphiques sont présentés en termes de coefficient d’erreur mesuré, c’est-à-dire l’erreur maximale mesurée divisée par la norme du bruit introduit. Les résultats montrent que pour les quatre cas, l’allure est identique et semble être inversement proportionnelle au carré du nombre de Froude. La tendance montre que de façon générale le coefficient est linéaire avec la norme du bruit. Cependant, il semble tout de même que la linéarité se perd pour les très faibles nombres de Froude. Une figure identique a été générée pour des nombres de Froude plus élevés et celle-ci confirme la tendance linéaire.

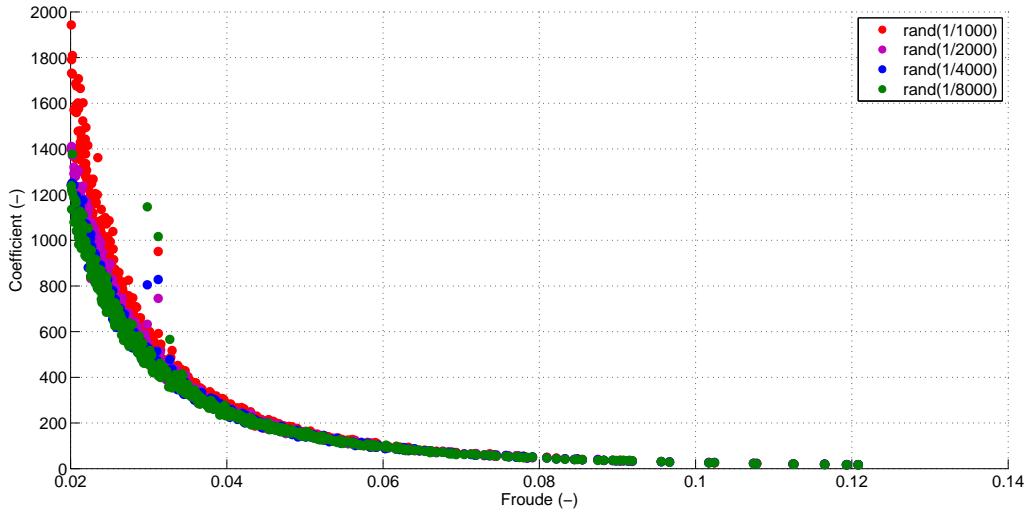


FIGURE 35 – Coefficient d'erreur maximal en fonction du nombre de Froude pour le cas sinus et pour 4 normes de bruits différentes.

### Remarque sur le graphique

Le graphique de la figure 35 montre que des points semblent se démarquer et ne pas suivre la même tendance. En fait, ces points correspondent au début du domaine. Lors de la résolution, en amont le fait d'ajouter le bruit perturbe plus la résolution car la condition amont fixée reste elle inchangée. Sur toutes les figures qui vont suivre, il y aura chaque fois une série de points s'écartant et correspondant à la zone amont du domaine.

#### 5.2.2 Influence de la hauteur d'ondulation

Lors de la résolution de la bathymétrie affectée par un bruitage, la hauteur de variation du sol, d'ondulation a-t-elle une influence sur l'erreur maximale ? Les précédents tests ont chaque fois été réalisés avec une hauteur d'ondulation de  $25\text{ cm}$  et un débit spécifique de  $1\text{ m}^2/\text{s}$ . Dès lors, un test a été réalisé en faisant varier la hauteur d'ondulation progressivement de  $0$  à  $1\text{ m}$ . Le cas part donc d'un fond parfaitement plat.

Le graphique 36 représente les résultats obtenus, l'erreur mesurée après introduction d'un bruit aléatoire normé à  $1\text{ mm}$  pour 6 cas (chaque cas est calculé pour 1000 bruits différents). Les résultats ne sont pas affectés par la hauteur d'ondulation. En effet, le fait de modifier l'ondulation a simplement pour effet de placer l'écoulement dans un régime un peu décalé, mais les points d'erreurs continuent à *suivre la même tendance*.

Il s'avère dès lors que la hauteur d'ondulation ne doit pas être considérée comme un paramètre de détermination de faisabilité de la méthode.

#### 5.2.3 Influence de la hauteur d'eau

À la place de faire varier la hauteur d'ondulation, il est aussi possible de faire varier la hauteur d'eau.

Le graphique de la figure 37 est généré en conservant le même débit spécifique de  $1\text{ m}^2/\text{s}$ , la hauteur d'eau en amont vaut successivement 4, 5 et  $6\text{ m}$ , la hauteur d'ondulation est elle de  $25\text{ cm}$ . Les résultats montrent une fois de plus que la tendance de distribution des points est respectée.

Il est intéressant de noter que si le graphique d'influence de la hauteur d'eau et celui de l'ondulation sont superposés, la disposition des points conserve la même allure. Au même titre que la hauteur d'ondulation, il s'avère donc que la hauteur d'eau n'est pas un paramètre à considérer pour savoir si la méthode est applicable.

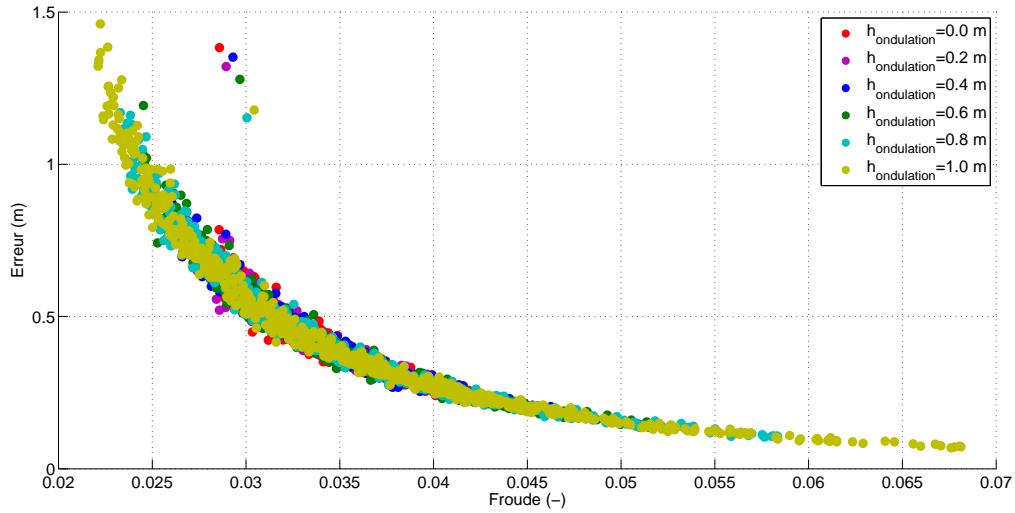


FIGURE 36 – Erreur maximale calculée pour 6 hauteurs d'ondulations différentes.

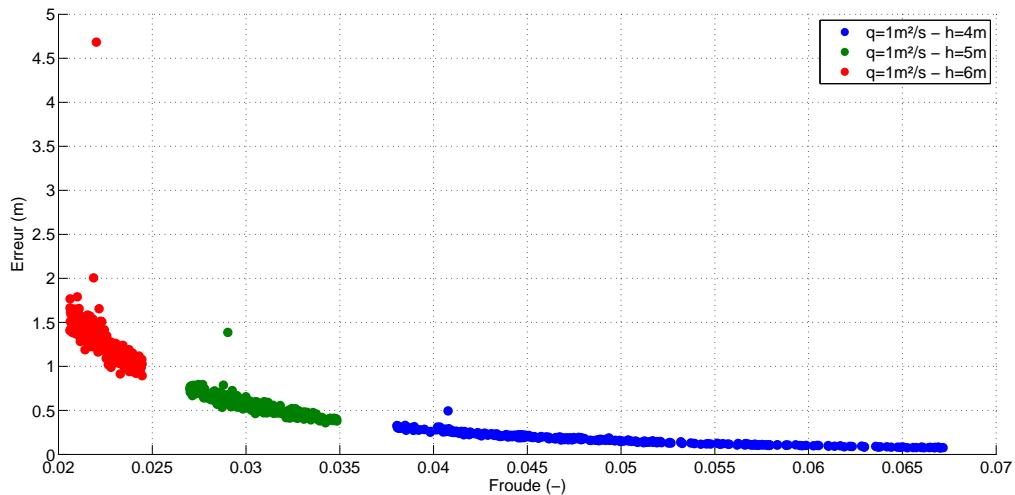


FIGURE 37 – Erreur maximale calculée pour 3 hauteurs d'eau différentes.

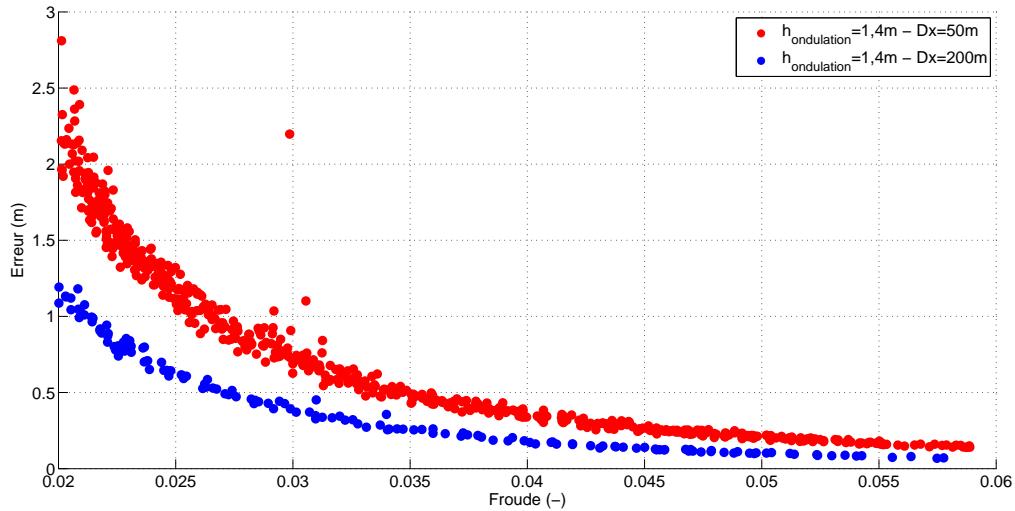


FIGURE 38 – Erreur maximale mesurée pour le cas sinus en fonction du pas spatial.

#### 5.2.4 Influence du pas spatial

La sensibilité de la résolution est très grande. En effet il a été montré dans le cas du sinus par exemple qu'une erreur de 1 mm au niveau de la surface libre se répercuteait par une erreur beaucoup plus grande au niveau de la bathymétrie. L'erreur commise doit cependant être fonction du pas spatial servant à la résolution. Il est effet logique de considérer que la perturbation d'information contenue dans la ligne d'eau est moins importante lorsque le pas spatial augmente.

Pour s'en convaincre il suffit de considérer le fait que doubler le pas spatial revient à diviser par deux la pente supplémentaire introduite au niveau de la pente de surface libre. Or, comme il a été montré dans la première partie, la détermination de la bathymétrie est entre autre fortement liée à la pente de surface libre (en fonction du régime d'écoulement).

La figure 38 représente l'erreur maximale mesurée en fonction du nombre de Froude et ce pour deux pas spatiaux différents pour le cas du sinus. Les résultats montrent très clairement que lorsque que le pas augmente l'erreur faite suite à l'ajout du bruit augmente, car l'erreur introduite dans la pente de surface libre est beaucoup plus faible. Cette constatation a été confirmée sur d'autres exemples.

#### 5.2.5 Influence du débit spécifique

Comment évolue l'erreur maximale si le débit spécifique change? Comme pour les autres points, le cas du sinus est toujours traité mais cette fois en faisant varier le débit. Pour la représentation des résultats la hauteur d'eau a aussi été variée.

La figure 39 représente les résultats obtenus pour un débit spécifique de  $3,4 m^2/s$  et une hauteur d'eau de 8 et 9 m en amont, ainsi que pour un débit spécifique  $1,7 m^2/s$  et une hauteur d'eau de 5 et 6 m. Il s'avère que comme pour le pas spatial, le débit influence la distribution des erreurs. L'erreur est en effet plus grande à nombre de Froude égal lorsque le débit spécifique augmente. En fait cet aspect avait déjà été constaté lors de la résolution en boucle du cas sinus où les bathymétries les plus éloignées de la solution théorique avaient été observées pour les débits les plus importants. Il est donc logique de retrouver ici la même influence du débit.

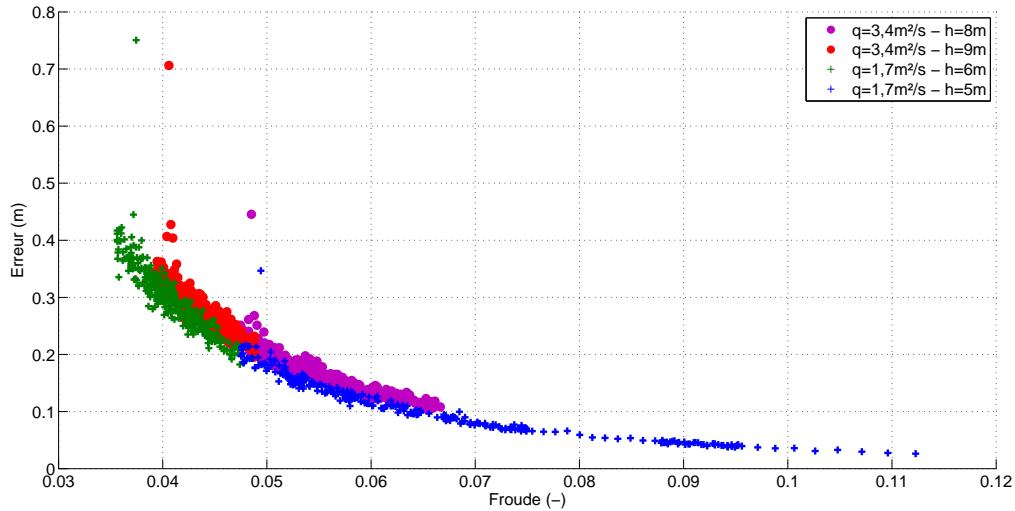


FIGURE 39 – Influence du débit spécifique sur l'erreur maximale.

### 5.2.6 Influence du nombre d'onde cinématique

Comme le pas spatial ainsi que le débit ont un impact sur le coefficient d'erreur, l'idée est de considérer un paramètre qui tient compte de ces deux aspects. Un paramètre faisant intervenir à la fois le débit et d'une certaine façon le pas spatial est le nombre d'onde cinématique  $k_0$ .

$$k_0 = \frac{gl_0 i}{u_0^2} \quad (48)$$

Ce nombre sera détaillé au point suivant. Mais au vu de sa formulation, celui-ci change chaque fois que le fond change. En outre, celui-ci prend une valeur nulle dès que la pente est nulle et ce peu importe la vitesse de l'écoulement ou encore sa longueur. Dans le contexte du travail, la longueur  $l_0$  correspond en quelque sorte au pas spatial, d'une certaine façon le pas spatial va être fixé par  $k_0$ .

Lors du travail, les essais effectués plus haut ont aussi été effectués pour d'autres configurations dont le cas d'un bump. Cependant, lors de la superposition des résultats, il s'avérait que la disposition des points ne se chevauchaient pas. Comme le cas du bump et celui du sinus étaient caractérisés par des pentes de fond et des pas spatiaux très différents il semblait logique que les points ne se superposent pas. Mais qu'en est-il si le nombre d'onde cinématique se situe dans la même gamme pour les deux cas ?

L'idée a donc été de générer des lignes d'eau pour le sinus et le bump variant dans une certaine gamme de nombres d'onde cinématique. L'essai a été fait pour les configurations suivantes :

- **SINUS** représenté à la figure 40(gauche) :

- un débit spécifique de  $1,5 m^2/s$ ;
- une largeur de  $20 m$ ;
- un coefficient de frottement de  $25 m^{1/3}/s$ ;
- une longueur d'écoulement de  $2000 m$ ;
- une hauteur d'eau en amont de  $4 m$ ;
- un pas spatial de  $40 m$ ;
- le nombre d'onde cinématique est compris entre et  $-13$  et  $17$ .

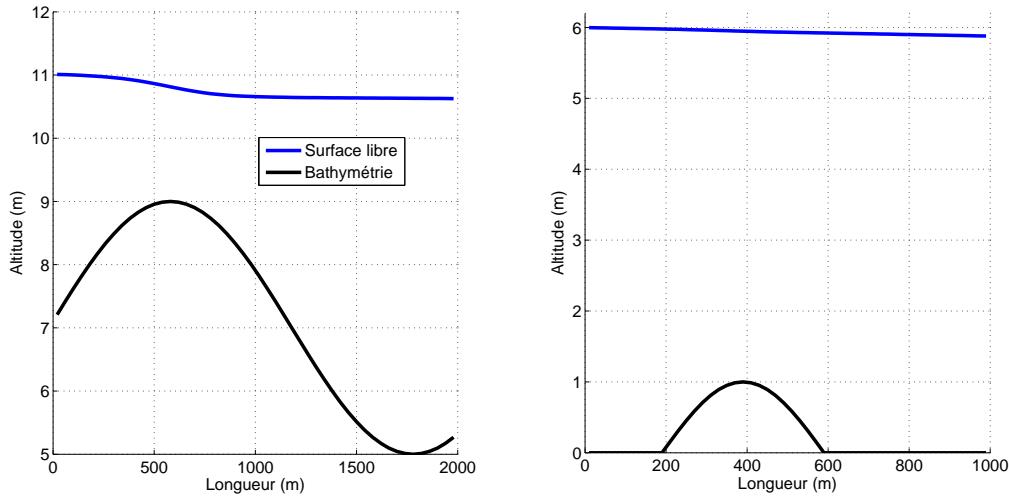


FIGURE 40 – Configuration du cas sinus étudié (gauche) et du bump (droite).

- **BUMP** représenté à la figure 40 (droite) :

- un débit spécifique de  $2 m^2/s$ ;
- une largeur de  $4 m$ ;
- un coefficient de frottement de  $25 m^{1/3}/s$ ;
- une longueur d'écoulement de  $1000 m$ ;
- une hauteur d'eau en amont de  $6 m$ ;
- un pas spatial de  $40 m$ ;
- le nombre d'onde cinématique est compris entre  $-13$  et  $13$ .

Les résultats sont représentés à la figure 41 qui montre une superposition des résultats. Encore une fois, il est normal de voir des points ne suivant pas la même allure. Pour rappel, ces points correspondent au début du domaine qui sont plus affectés par le bruit du fait que la condition amont de hauteur d'eau n'est pas modifiée.

Le choix du nombre d'onde cinématique comme paramètre bien que semblant prometteur au premier abord a du être écarté pour plusieurs raisons :

- Tout d'abord le souhait est d'obtenir un paramètre permettant de savoir si la méthode peut être appliquée, or ce paramètre fait appel à la pente de fond. La pente de fond est inconnue avant la résolution et doit justement être déterminée au terme du calcul.
- Ensuite les précédents résultats ont montré que la hauteur d'ondulation n'avait pas d'influence sur la distribution des erreurs. Or lorsque la hauteur d'ondulation change, le nombre d'onde cinématique change, et le graphique de la figure montre que la distribution d'erreur est la même. Sur base de ces raisons, le nombre d'onde cinématique a été mis de côté.

### 5.2.7 Formulation adimensionnelle

Au point précédent le nombre d'onde cinématique a été testé comme paramètre. En fait le nombre d'onde cinématique est un nombre adimensionnel apparaissant lors de la mise sous forme adimensionnelle des équations et donnant les modèles simplifiés [4].

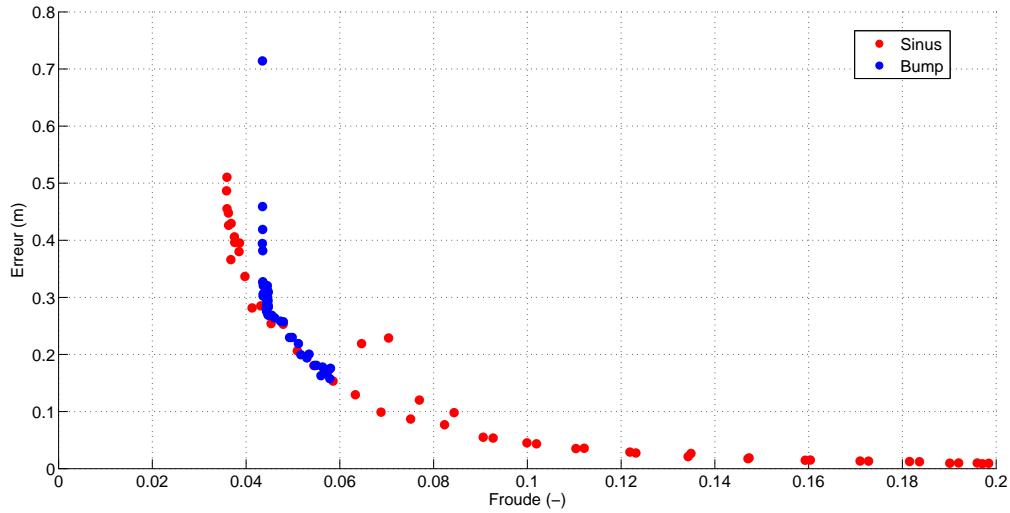


FIGURE 41 – Erreur maximale pour une même gamme de variation du nombre d’onde cinématique.

La mise sous forme adimensionnelle de la quantité de mouvement classique aboutit à l’expression suivante :

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{gh_0 \cos \theta}{u_0^2} \frac{\partial h^*}{\partial x^*} = \frac{\log \sin \theta}{u_0^2} \left( 1 - \frac{u^{*\beta}}{h^{*\gamma}} \right) \quad (49)$$

où apparaissent deux paramètres qui sont le nombre de Froude  $Fr$  et le nombre d’onde cinématique  $k_0$  :

$$Fr^2 = \frac{u_0^2}{gh_0 \cos \theta} \quad (50)$$

$$k_0 = \frac{\log \sin \theta}{u_0^2} \quad (51)$$

En fonction de la valeur prise par les paramètres, il existe trois approximations de l’équation dynamique ; l’onde cinématique, l’onde de gravité et l’onde diffusive [4]

C’est parce que le nombre d’onde cinématique apparaît lors de cette formulation que ce paramètre a été considéré. Cependant il serait intéressant de voir la forme que prend la formulation de l’équation dynamique avec la formulation faisant apparaître le terme de surface libre. C’est pourquoi le système d’équation à la base de la résolution de la bathymétrie va être mis sous une forme adimensionnelle, afin de voir les paramètres mis en évidence et si ceux-ci changent.

### Mise sous forme adimensionnelle

Le système d’équation en unidimensionnel considéré jusqu’ici est le suivant :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial u h}{\partial t} = 0 \quad (52)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = g \left( \frac{\partial(-z_s)}{\partial x} - J \right) \quad (53)$$

Les différentes expressions adimensionnelles des variables sont :

- $t^* = t/t_0$

- $x^* = x/l_0$
- $u^* = u/u_0$
- $h^* = h/h_0$
- $z^* = z/z_0$

Avec  $t_0$  le temps caractéristique,  $l_0$  la longueur caractéristique de l'écoulement,  $u_0$  la vitesse caractéristique de l'écoulement en  $l_0$ ,  $h_0$  la hauteur d'eau caractéristique en  $l_0$  et  $z_0$  l'altitude de référence de la surface libre. Le temps, la longueur et la vitesse sont liés par la formule suivante

$$t_0 = \frac{l_0}{u_0} \quad (54)$$

La forme adimensionnelle donne pour l'équation de conservation de masse :

$$\frac{\partial(h_0h^*)}{\partial(t_0t^*)} + \frac{\partial(u_0u^*h_0h^*)}{\partial(l_0x^*)} = \frac{h_0}{t_0} \frac{\partial h^*}{\partial t^*} + \frac{u_0h_0}{l_0} \frac{\partial u^*h^*}{\partial x^*} = 0 \quad (55)$$

sachant l'expression du temps caractéristique il vient

$$\frac{\partial h^*}{\partial t^*} + \frac{\partial u^*h^*}{\partial x^*} = 0 \quad (56)$$

Tandis que pour l'équation de conservation de quantité de mouvement selon  $x$ , où la pente de frottement est estimée par une formule identique à celle de l'écoulement uniforme il vient :

$$\frac{\partial(u_0u^*)}{\partial(t_0t^*)} + u_0u^* \frac{\partial(u_0u^*)}{\partial(l_0x^*)} = -g \left( \frac{\partial(z_0z^*)}{\partial(l_0x^*)} + \alpha \frac{(u_0u^*)^\beta}{(h_0h^*)^\gamma} \right) \quad (57)$$

$$\frac{u_0}{t_0} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{u_0^2}{l_0} u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} = -g \left( \frac{\partial(z_0z^*)}{\partial(l_0x^*)} + \alpha \frac{(u_0u^*)^\beta}{(h_0h^*)^\gamma} \right) \quad (58)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} = -\frac{gl_0}{u_0^2} \left( \frac{\partial(z_0z^*)}{\partial(l_0x^*)} + \alpha \frac{(u_0u^*)^\beta}{(h_0h^*)^\gamma} \right) \quad (59)$$

Le paramètre apparaissant ici est proche du nombre d'onde cinématique sauf que la pente de fond n'apparaît plus. De plus, le nombre de Froude a "disparu" suite au remplacement de la pente de fond. En réalité le paramètre qui vient d'être mis en évidence peut être exprimé en terme de nombre de Froude :

$$\frac{gl_0}{u_0^2} = \frac{gh_0}{u_0^2} \frac{l_0}{h_0} = \frac{1}{Fr^2} \frac{l_0}{h_0} \quad (60)$$

Finalement, si le nombre adimensionnel est très grand, alors on retombe sur l'onde cinématique, sur l'écoulement uniforme pour lequel il existe une relation univoque liant la hauteur d'eau et la vitesse qui s'adaptent de façon instantanée à toute modification du fond.

Ce nombre adimensionnel présente l'avantage de considérer les paramètres qui ont révélé un effet sur l'erreur maximale mesurée. Cependant, tout comme le nombre d'onde cinématique, il ne constitue pas un paramètre permettant d'obtenir au final une figure générale d'application de la méthode. En effet, si les résultats obtenus lorsque la hauteur d'ondulation a été variée sont analysés, il s'avère que la valeur prise par le paramètre varie dans des gammes très importantes de l'ordre de 8000 à 35000 et les résultats présentent la même distribution d'erreur. De plus lorsque le pas spatial change les gammes de variation changent tout en se chevauchant. Cela signifie que pour une même gamme du paramètre le comportement de l'erreur est différent. En conclusion ce paramètre ne peut pas non plus être utilisé.

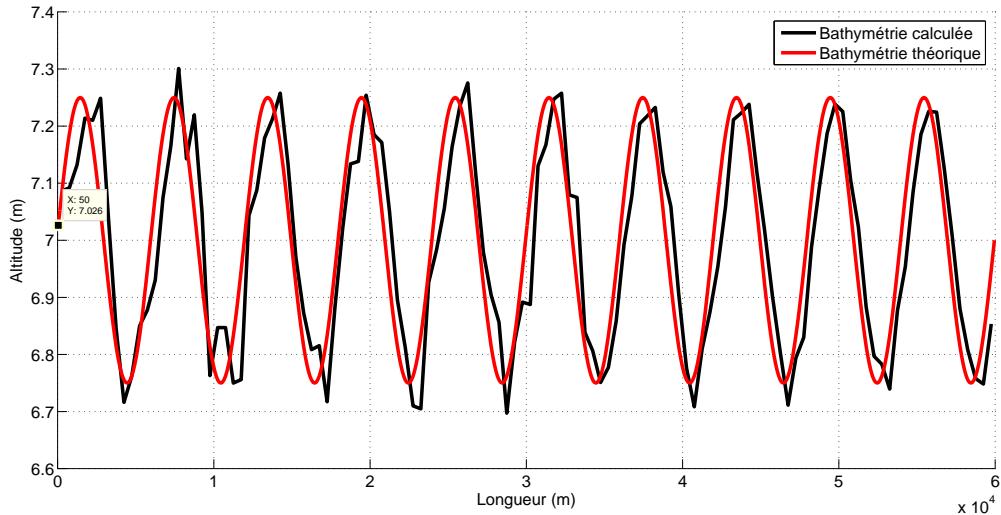


FIGURE 42 – Bathymétrie obtenue pour un pas spatial de 500 m pour le cas du sinus sur base d'une surface libre bruitée.

### 5.2.8 Recommandations pour la détermination de la bathymétrie

Bien que la généralisation par l'introduction d'un paramètre n'aboutit pas, des recommandations peuvent être émises sur base de tous les tests effectués. Ces recommandations sont pour des cas réels, c'est-à-dire une surface libre fournie par le LiDAR et donc précise à 15 cm près :

- **De ne pas appliquer la méthode si l'écoulement est très lent** ; car alors les erreurs à attendre sont très importantes, le coefficient d'erreur pouvant être estimé comme étant égal à l'inverse du nombre de Froude élevé au carré. À titre informatif pour un nombre de Froude de 0,1 cela correspond à un coefficient de 100 tandis que pour 0,3 il ne vaut plus que 10 environ.  
SMART et al [11] montrent que par une technique itérative de prédiction de la bathymétrie ils arrivent à des résultats présentant une grande précision lorsque le nombre de Froude est supérieur à 0,3. La méthode employée dans cet article consiste à prédire le sol et corriger la prédiction en comparant la surface libre obtenue par rapport au levé LiDAR.
- **Opter pour un pas spatial en adéquation avec la pente de surface libre** ; le fait de considérer un pas spatial plus grand permet de diminuer l'erreur faite, cependant cela se fait au détriment de la quantité d'information. En somme cela revient à analyser la surface libre, et décider de fixer le pas spatial de manière à garantir une variation suffisante d'altitude entre deux pas successifs. Ceci va être illustré sur le cas du sinus bruité qui avait donné la figure 31. Après observation de la surface libre, il s'avère que si un pas de 100 m est conservé alors la variation minimale d'altitude n'est que de 0,8 cm. Si maintenant le pas est égal à 500 m cette variation vaut alors 4 cm. Une variation plus grande va de pair avec une diminution de l'impact du bruit. La figure 42 représente la bathymétrie finalement obtenue simplement en décidant de laisser une partie de la surface libre de côté et en travaillant avec un pas cinq fois plus grand. Par rapport au graphique de la figure 31, il y a une diminution très nette du bruit. Certes l'augmentation du pas rend un résultat saccadé qui n'est pas parfait, mais ce résultat est bien plus comparable à celui théorique.
- **Les écoulements présentant un nombre de Froude élevé ne posent pas de problème pour les cas traités.**
- **Recourir aux traitements** présentés au point 6. Atténuation des effets du bruit à la page 60.

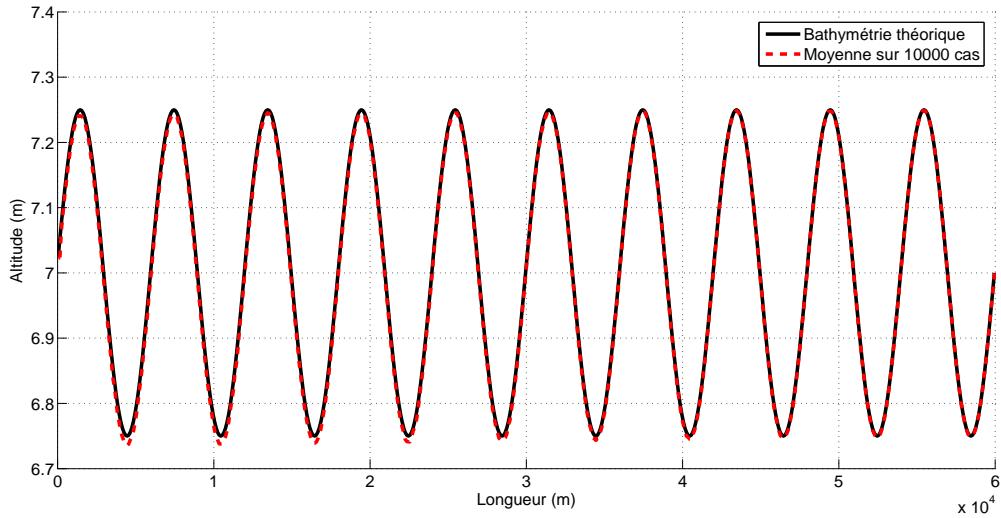


FIGURE 43 – Moyenne sur 10 000 simulations pour le cas du sinus.

### 5.3 Moyenne sur plusieurs simulations

Lorsque la surface libre est affectée par du bruit, il se manifeste au niveau de la bathymétrie avec une amplification liée au nombre de Froude. Que se passe-t-il si maintenant la bathymétrie est déterminée pour une série de bruits (différents mais normés de façon identique) et que la moyenne de toutes les bathymétries déterminées est considérée ?

#### 5.3.1 Cas du sinus

Pour répondre à cette question, la bathymétrie a été déterminée pour 10 000 bruits différents. Ensuite, la moyenne a été conservée comme résultat. La figure 43 représente le résultat obtenu qui est comparé à la bathymétrie théorique. Il s'avère que le fait de résoudre en boucle et puis de considérer la moyenne fait disparaître la notion du bruit. *En d'autre termes, le procédé de résolution rend bien un effet nul du bruit en moyenne.*

Cependant, il est plus logique de faire ce test en partant d'un signal qui est à l'origine déjà bruité et de voir si le fait d'affecter une série de nouveaux bruits permet de retrouver, grâce à une moyenne, la bonne bathymétrie au final. Il est en effet plus logique de faire le test en se disant que ce sont les mesures fournies par le levé laser qui sont affectées d'un bruit. La démarche a donc été tout à fait identique, la différence réside dans le fait que le signal est bruité à l'origine. Malheureusement, lorsque le signal d'origine est bruité, la bathymétrie moyenne obtenue au final est complètement bruitée. L'ajout du bruit a en moyenne un effet nul sur la bathymétrie, ce qui fait que le résultat obtenu correspond à la résolution du signal d'origine bruité. Des pistes d'atténuations des effets du bruit seront présentées dans la suite du travail.

#### 5.3.2 Cas trois pentes

Le but ici est de faire le même exercice pour un écoulement avec un nombre de Froude plus élevé.

L'application à cet exemple n'apporte pas d'informations supplémentaires. De plus, la bathymétrie obtenue pour uniquement une simulation était déjà fidèle à la bathymétrie théorique. Donc l'opération de moyenne sur plusieurs simulations l'est aussi tout naturellement.

## 5.4 Recherche de l'expression de l'erreur

Jusqu'à présent, une première estimation de l'erreur faite au niveau de la bathymétrie a été formulée sur base de l'équation de ligne de sol et prend la forme suivante :

$$z'_b \cong \frac{Fr^2 - 1}{Fr^2} z'_s \quad (61)$$

Partant du travail fait dans l'article de GUINOT V et al [3] il est possible d'exprimer le fait que l'équation à la base de la résolution est toujours vérifiée et d'exprimer la sensibilité du modèle à une variation d'un paramètre. Ici, nous allons considérer qu'il y a une erreur sur l'altitude de surface libre  $z'_s$  qui entraîne une erreur au niveau de la hauteur d'eau  $h'$ . L'équation est toujours vérifiée et prend maintenant la forme suivante :

$$\frac{\partial(h + h')}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{-q^2}{h + h'} \right) = g(h + h') \left( \frac{\partial(z_s + z'_s)}{\partial x} + J \right) \quad (62)$$

La pente de frottement est toujours notée comme avant. Les erreurs sont considérées comme infinitésimales.

Nous savons par la technique de résolution, qu'en réalité la dérivée temporelle est nulle. Pour rappel, l'introduction de la dérivée temporelle est juste un artifice utilisé pour résoudre l'équation sous forme d'une équation de transport.

Il faut maintenant développer l'équation dans le but d'essayer de mettre en évidence le comportement des erreurs introduites. Pour ce faire, les termes d'erreurs de second ordre dans les développements vont être négligés, l'équation va être linéarisée en termes d'erreurs.

Il vient :

$$\frac{q^2}{h^2 + 2hh'} \frac{\partial}{\partial x}(h + h') = ghJ + gh'J + gh \frac{\partial z_s}{\partial x} + gh \frac{\partial z'_s}{\partial x} + gh' \frac{\partial z_s}{\partial x} \quad (63)$$

De façon à simplifier, il est possible de faire apparaître l'équation 26 en effet :

$$\frac{q^2}{h^2} \left( 1 - \frac{2h'}{2h' + h} \right) \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{q^2}{h^2} \left( 1 - \frac{2h'}{2h' + h} \right) \frac{\partial h'}{\partial x} = \textcolor{red}{ghJ} + gh'J + \textcolor{red}{gh} \frac{\partial z_s}{\partial x} + gh \frac{\partial z'_s}{\partial x} + gh' \frac{\partial z_s}{\partial x} \quad (64)$$

$$\frac{q^2}{h^2} \left( -\frac{2h'}{h} \right) \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{q^2}{h^2} \left( 1 - \frac{2h'}{h} \right) \frac{\partial h'}{\partial x} = gh'J + gh \frac{\partial z'_s}{\partial x} + gh' \frac{\partial z_s}{\partial x} \quad (65)$$

$$\left( -\frac{2h'}{h} \right) \frac{\partial h}{\partial x} + \left( 1 - \frac{2h'}{h} \right) \frac{\partial h'}{\partial x} = \frac{gh^2 h'}{q^2} J + \frac{gh^3}{q^2} \frac{\partial z'_s}{\partial x} + \frac{gh^2 h'}{q^2} \frac{\partial z_s}{\partial x} \quad (66)$$

Il est alors possible de mettre le nombre de Froude en évidence :

$$\left( -\frac{2h'}{h} \right) \frac{\partial h}{\partial x} + \left( 1 - \frac{2h'}{h} \right) \frac{\partial h'}{\partial x} = \frac{1}{Fr^2} \left( \frac{h'}{h} J + \frac{\partial z'_s}{\partial x} + \frac{h'}{h} \frac{\partial z_s}{\partial x} \right) \quad (67)$$

La résolution de cette équation permet de connaître la sensibilité *i.e.* l'influence d'une erreur au niveau de la surface libre sur la hauteur d'eau. Un inconvénient de cette équation c'est qu'elle dépend de la hauteur d'eau  $h$ . Or, cette hauteur d'eau est considérée comme inconnue avant la résolution. L'expression de l'erreur doit pouvoir être estimée avant que la résolution ne soit effectuée pour en fait savoir si ça vaut la peine de lancer la résolution. Or ici, comme l'équation se présente elle ne permet pas de prédire l'erreur faite.

Si les termes en  $h'/h$  sont négligés, alors l'équation devient :

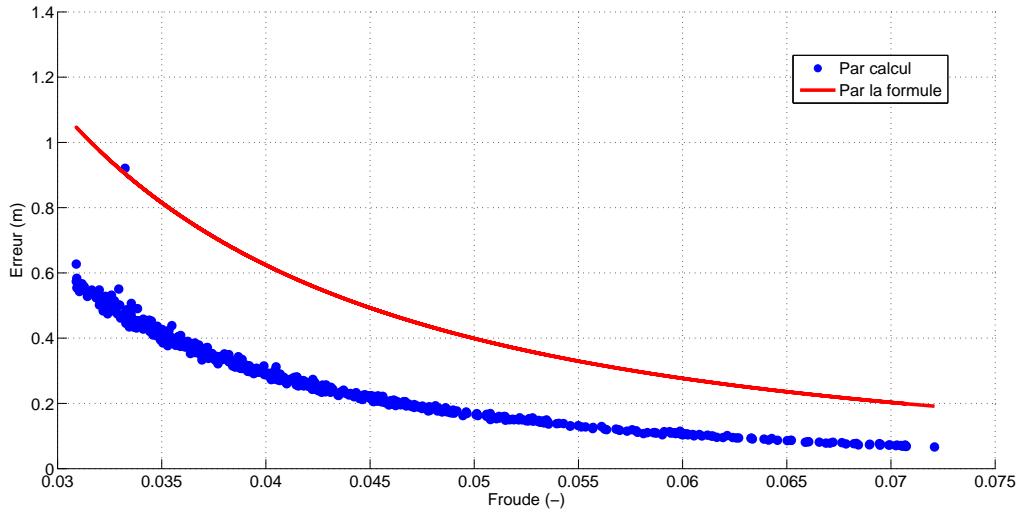


FIGURE 44 – Erreur et estimation de celle-ci pour la résolution en boucle du cas sinus.

$$\frac{\partial h'}{\partial x} = \frac{1}{Fr^2} \frac{\partial z'_s}{\partial x} \quad (68)$$

qui correspond à la première estimation faite sur base de l'équation de ligne de sol. *Sous cette forme, l'erreur peut être estimée avant toute résolution afin de connaître l'ordre de grandeur attendu de l'erreur.* Il est évident que l'évaluation du nombre de Froude demande la connaissance de la hauteur d'eau, qui doit de toute façon être connue en amont, où l'erreur peut donc être estimée. Toutefois, une lacune de cette formulation est l'indépendance vis-à-vis du pas spatial.

La figure représente l'erreur maximale mesurée en fonction du nombre de Froude lors du calcul des 10 000 surfaces libres bruitées permettant d'arriver à la figure 43. Sur cette figure, la courbe représente l'erreur telle qu'elle peut être estimée avant de lancer la résolution. L'estimation est plus importante que l'erreur faite mais l'ordre de grandeur est bien respecté.

## 5.5 Conclusions intermédiaires

Le fait de brouter la surface libre fait apparaître du bruit au niveau de la bathymétrie. Il y a donc une introduction d'erreur au niveau de l'estimation bathymétrique. Ces erreurs sont plus importantes lorsque l'écoulement est caractérisé par un faible nombre de Froude, mais aussi lorsque le pas spatial pris pour la résolution est plus faible. Ces résultats laissaient espérer que le nombre d'onde cinématique pourrait être un paramètre dictant l'erreur attendue, cependant il n'en est rien. Après une mise sous forme adimensionnelle des équations, un nombre adimensionnel a été mis en évidence, mais celui-ci ne permet pas non plus de dicter l'erreur.

Comme une généralisation du comportement n'a pas pu être établie, des recommandations, *i.e.* des règles de bonnes pratiques ont été formulées. Ces recommandations s'appuient sur les constatations et résultats obtenus pour tous les cas tests effectués lors du travail.

Comme sur base des essais aucun paramètre ne semblait se dégager, la loi de variation de l'erreur a été formulée. Seulement, celle-ci ne permet pas de prédire l'erreur. La version permettant de prédire l'erreur est la première estimation faite sur base de l'équation de ligne de sol, cette estimation est une simplification de la formule générale établie.

Jusqu'à présent, il a été montré que le bruit se manifeste au niveau de la bathymétrie et de façon très prononcée lorsque le nombre de Froude est faible. La seule technique actuelle trouvée pour limiter le bruit est d'opter pour un pas spatial en adéquation avec la surface libre. Des possibilités de traitements vont maintenant être présentées.

## 6 Atténuation des effets du bruit

Il vient d'être montré que la présence d'un bruitage au sein de la ligne d'eau engendrait un bruitage au niveau de la bathymétrie calculée. Partant du principe que le levé peut présenter du bruit, il va être montré comment il est possible d'atténuer les effets du bruit sur la bathymétrie déterminée.

### 6.1 Détection du bruit ?

La première question à se poser est : "Est-ce que le bruit potentiel peut être détecté ?" En effet, il ne serait pas très opportun d'appliquer un traitement alors que celui-ci est inutile.

Visuellement, le bruit n'est pas perceptible. Mais est-ce que le fait de réaliser une transformée de Fourier permettrait de faire apparaître le bruitage ? L'essai a été fait pour plusieurs configurations et dans tous les cas la transformée de Fourier ne permettait pas de mettre en évidence la présence du bruit. En fait, si la transformée de Fourier du bruit seul est déterminée, le résultat montre des pics de très faible intensité répartis sur tout le domaine fréquentiel.

Par contre pour le cas académique du sinus, si cette fois la transformée est faite sur la bathymétrie il est très facile de conserver les pics les plus importants et d'éliminer le bruit. Cependant, cela marche uniquement parce que le cas est académique. En effet, si le test est fait pour un fond présentant une simple pente, où des pentes multiples il n'est plus possible de facilement sélectionner les pics permettant l'approximation de la bathymétrie.

D'une certaine façon la présence du bruit existant au niveau de la surface libre est détectée par la résolution vu que celle-ci apparaît au niveau du sol. Ce qu'il faut alors c'est voir comment en limiter les effets.

Pour les écoulements lents, il s'avère qu'une façon très rapide permettant de mettre en évidence la présence du bruit est de représenter la différence d'altitude de surface libre. Comme l'écoulement est lent, les variations de surfaces libres sont faibles et donc il est facile de visualiser la présence de bruit. Voici par exemple à titre informatif à la figure 45 l'évolution de la différence de surface libre du cas du sinus exploité pour générer la figure 31. Cette figure montre bien la présence du bruit.

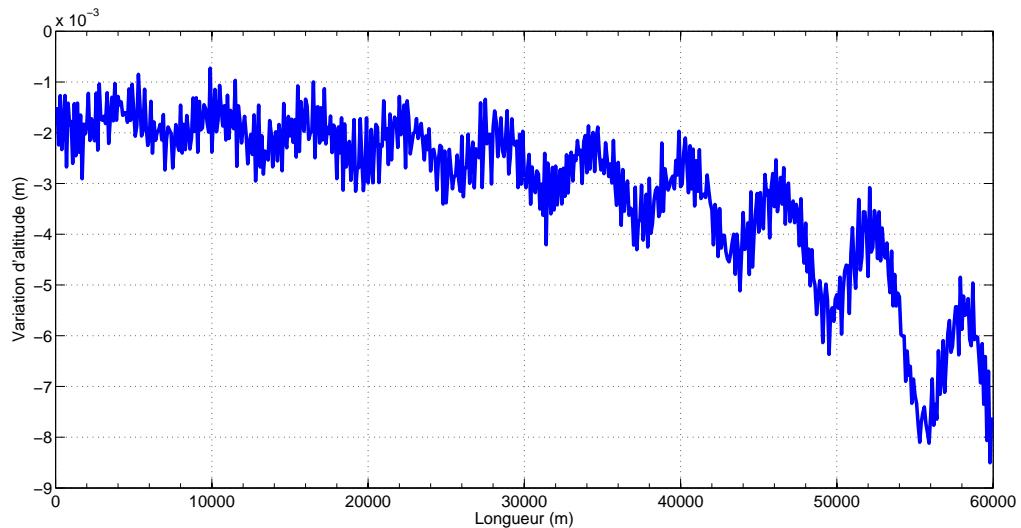


FIGURE 45 – Mise en évidence de la présence de bruit pour le cas du sinus par le calcul de la variation d'altitude de surface libre.

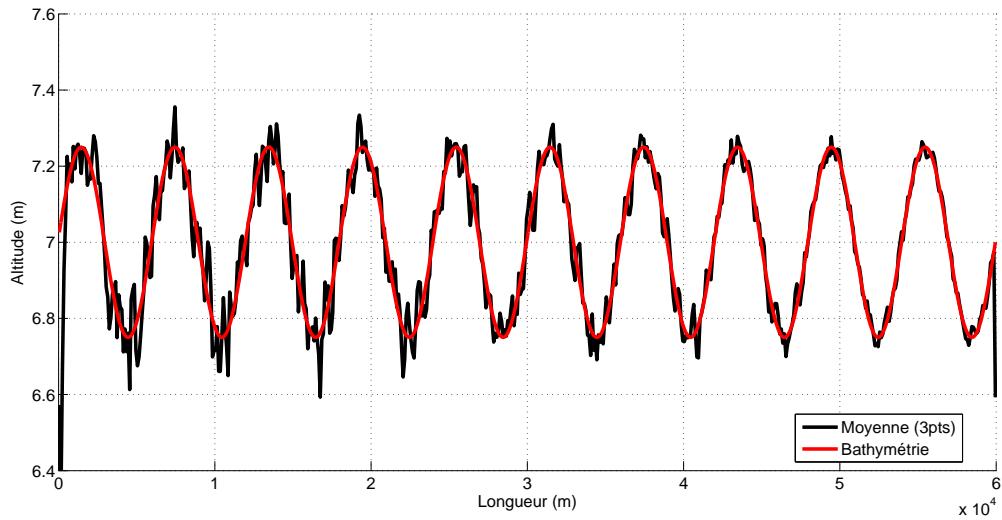


FIGURE 46 – Pré-traitement par moyenne sur 3 points de la surface libre du cas sinus.

## 6.2 Pré-traitement

Lors du test réalisé pour le cas du sinus avec un bruitage, il a été mis en évidence que de manière générale, la bathymétrie solution se devinait parmi le bruit.

Dès lors, afin de restituer la bathymétrie, serait-il possible de “*lisser*” la surface libre afin d’atténuer la présence du bruit, de façon à réduire sa manifestation au niveau de la bathymétrie ? Un filtre très simple à employer afin de lisser la surface libre est d’effectuer une moyenne glissante en faisant varier la taille de la fenêtre.

L’idée consiste à d’abord effectuer une moyenne de la surface libre, en faisant varier la taille de la fenêtre avant de lancer la résolution. Il faut noter que les extrémités du domaine présenteront des tailles de fenêtres différentes, ce qui fait que pour ces endroits, la moyenne ne sera plus centrée.

À la figure 46 il est possible de voir qu’une fenêtre de 3 points permet déjà de diminuer l’erreur commise. Pour l’exemple, le bruit est identique à celui qui a permis de générer la figure 31. Il y a cependant une dégradation de la solution au niveau des bords du domaine. Cette dégradation importante s’explique par le fait que moyenner modifie le comportement local de la surface libre et ce de façon plus importante au niveau des bords car la moyenne est décentrée.

Afin de fixer la taille de la fenêtre à considérer, mais aussi pour voir l’effet apporté par ce pré-traitement, la résolution de la bathymétrie a été effectuée en augmentant progressivement la taille de la fenêtre.

Afin de visualiser facilement la taille optimum pour l’exemple considéré, la figure 47 représente en bleu l’erreur maximale mesurée lorsque la taille de la fenêtre varie. Cependant, il faut constater que la moyenne sur les bords du domaine est différente et affecte la résolution. C’est pourquoi si on se focalise sur le centre du domaine l’erreur, est alors donnée sur la figure par les carrés rouges. Par centre du domaine, il faut comprendre le domaine où la moyenne est bien une opération centrée, c’est pourquoi une certaine partie des extrémités du domaine doit être écartée.

Ainsi, un des optimums est de considérer une moyenne sur 9 points afin de tout de même limiter les erreurs sur les bords du domaine. Le résultat obtenu pour une taille de fenêtre de 9 points est présenté à la figure 48. Pour pouvoir être comparé à la moyenne sur 3 points, le graphique est centré de façon identique en altitude. L’erreur importante faite au niveau des extrémités du domaine est bien visible. Par contre, le

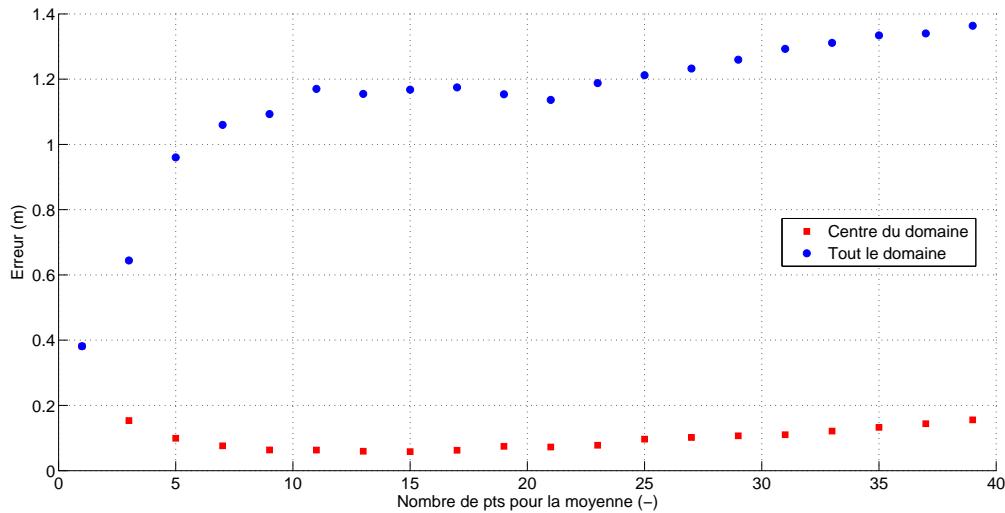


FIGURE 47 – Détermination de la taille optimum de la fenêtre pour un pré-traitement par moyenne de la surface libre.

centre du domaine est beaucoup moins affecté par le bruit qu'auparavant, l'erreur maximale passe en effet de 38 à 6 cm et ce tout simplement grâce à une moyenne.

### 6.3 Post-traitement

La méthode employée au point précédent a été qualifiée de pré-traitement car celle-ci est effectuée sur la surface libre avant de lancer la résolution. Cependant, l'opération peut être réalisée après la résolution. En effet, la même démarche peut s'appliquer à la bathymétrie solution bruitée afin de la lisser et non plus à la surface libre. Le fait de faire un post-traitement présente l'avantage de pouvoir décider si celui-ci est nécessaire. Et surtout, le choix du post-traitement optimum demande moins de temps de calcul vu qu'ici le traitement porte juste sur le résultat.

Comme pour le pré-traitement dans un premier temps, la taille optimum de fenêtre est déterminée en différenciant toujours le centre du domaine. La figure 49 représente le résultat obtenu. Il y a une différence qui se dégage des résultats, cette fois, l'allure des points est similaire que tout le domaine soit considéré ou simplement le centre. Les bords sont moins affectés par la moyenne car celle-ci est maintenant effectuée sur la bathymétrie. L'allure prise par les points montre bien qu'augmenter la taille de la fenêtre permet de diminuer l'erreur jusqu'à un certain point. Au delà, la taille de la fenêtre est telle que l'erreur se met à augmenter car le lissage devient trop important et celui-ci provoque une détérioration de la qualité du résultat.

Sur base du graphique, une moyenne sur 9 points est un bon compromis car elle permet de minimiser l'erreur faite sur les bords du domaine. Le résultat de post-traitement effectué par une moyenne sur 9 points est représenté à la figure 50. Le résultat montre ici que le bruit est atténué sur tout le domaine et les bords sont mieux estimés. Le fait de moyennner sur 9 points permet ici aussi de passer d'une erreur maximale de 38 à 6 cm sauf qu'ici tout le domaine est considéré.

### 6.4 Comparaison

Quelle est la technique la plus avantageuse : réaliser un pré ou un post-traitement ? Pour l'exemple considéré, il semble que l'une ou l'autre méthode apporte un résultat tout à fait similaire. Pour s'en convaincre, la figure 51 représente l'erreur maximale mesurée pour le centre du domaine lorsque la taille de la fenêtre change pour les deux méthodes. Il est facile de constater que les deux méthodes se valent.

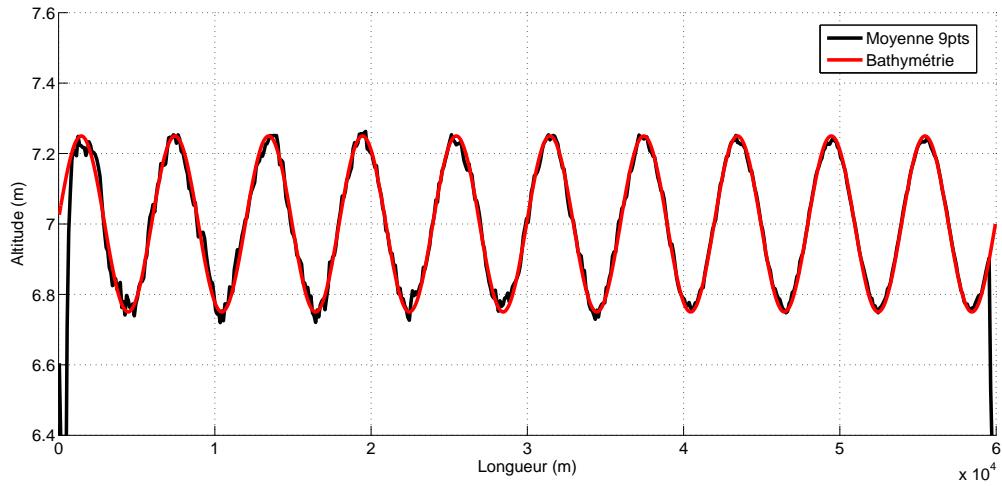


FIGURE 48 – Pré-traitement par moyenne sur 9 points du cas sinus.

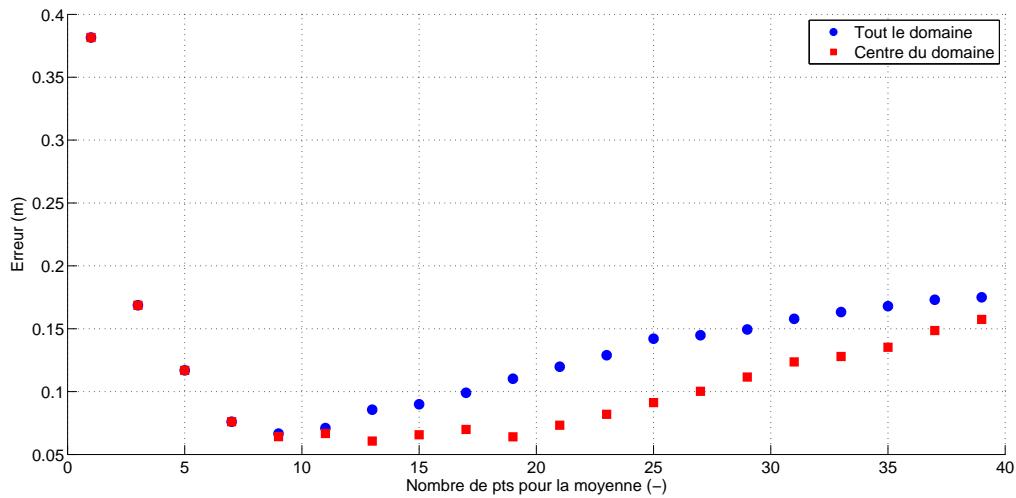


FIGURE 49 – Détermination de la taille optimum de fenêtre pour un post-traitement par moyenne de la bathymétrie.

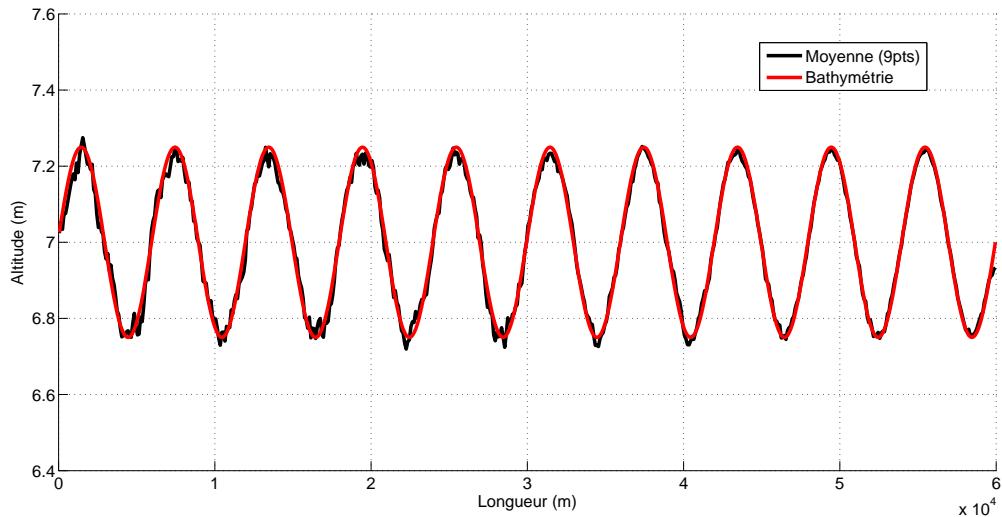


FIGURE 50 – Post-traitement par moyenne sur 9 points du cas sinus.

Cependant, si l'intérêt se porte sur l'entièreté du domaine alors le post-traitement est préférable car il a tendance à moins affecter les bords. De plus, il est plus économique au point de vue temps de calcul de réaliser un post-traitement. Pour finir, le post-traitement peut être activé si le bruit est détecté dans la solution, tandis que le pré-traitement doit être appliqué avant toute résolution. En conclusion, par sa facilité, les résultats obtenus et le fait qu'il peut être activé seulement après la manifestation du bruit, le post-traitement est préférable.

Toutefois, il faut noter qu'il existe des cas où si aucun pré-traitement n'est fait, la surface libre servant de donnée est tellement affectée par le bruit que la résolution n'aboutit pas. En effet, la résolution détermine une hauteur d'eau en accord avec la pente de surface libre. Pour ce cas de figure, il faut alors recourir à un pré-traitement, lancer la résolution et ensuite finalement décider de la nécessité d'un post-traitement.

## 6.5 Possibilités de traitements

Si pour un même cours d'eau, plusieurs levés de surface libre sont disponibles, pour des débits différents par exemple, il serait alors possible de déterminer autant de solutions qu'il y a de levés à disposition. Ensuite il suffirait de moyenner les résultats obtenus.

## 6.6 Conclusions intermédiaires

En pratique, la présence de bruit au sein du levé LiDAR est très grande, c'est pourquoi il était nécessaire de voir la possibilité de mettre en évidence le bruit. Par le procédé de résolution le bruit est mis en évidence, mais une façon rapide pouvant révéler la présence de bruit est l'analyse de la surface libre. En apparence, la surface libre peut se révéler être non affectée, mais la représentation graphique de la variation d'altitude entre les mesures peut mettre en évidence la présence du bruit comme cela a été montré à la figure 45.

Le bruit étant détecté ou pas il faut encore en diminuer les effets. Cela peut être réalisé par un pré ou un post-traitement voire les deux en même temps. Par une opération de moyenne, même sur une fenêtre de 3 points, les effets du bruit sont fortement diminués. Il est clair que dans ce qui vient d'être fait, le choix optimum du nombre de points à considérer est facilité par la connaissance de la véritable solution. Il n'y a pas de règle générale pour le nombre à considérer, l'optimum varie en fonction de la bathymétrie, mais dans tous les cas une moyenne sur 3 points atténue déjà le bruit de façon appréciable.

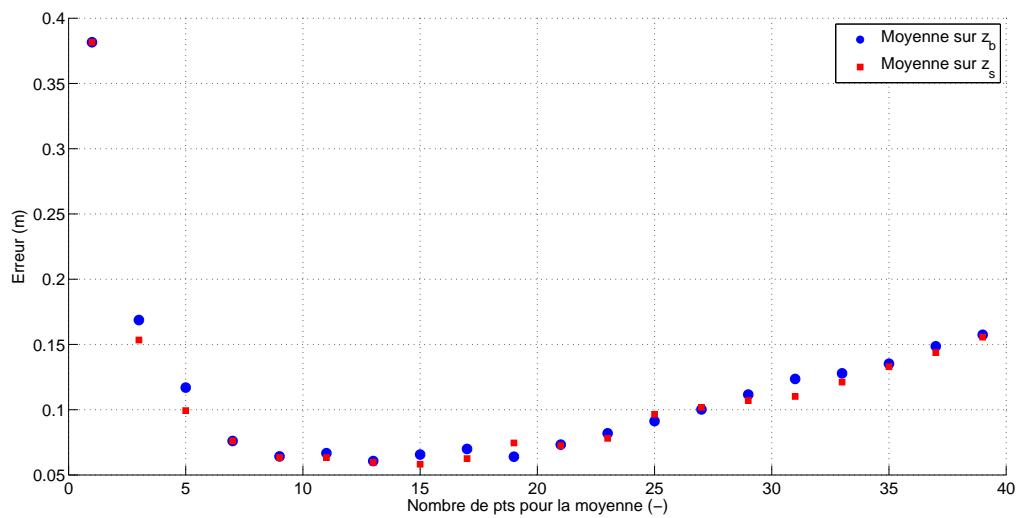


FIGURE 51 – Comparaison de l'erreur maximale restante en fonction de la taille de fenêtre considérée pour une moyenne faite en pré-traitement (rouge) ou en post-traitement (bleu).

## 7 Conclusions

Tout d'abord, l'équation de *ligne de sol* a montré que grâce à une résolution par la méthode des différences finies, il est possible de déterminer le fond d'un cours d'eau. Par sa formulation, l'équation montre que pour un écoulement sans débit, caractérisé donc par un nombre de Froude nul, la résolution ne peut aboutir. En effet, il existe une infinité de bathymétries respectant la surface libre d'un lac à savoir un plan d'eau horizontal. Une information apportée par cette équation est l'indétermination de la bathymétrie pour une surface libre ne présentant aucun écoulement. De plus, une simplification de l'équation permet de se rendre compte de la forte influence du régime de l'écoulement. C'est notamment cette simplification qui est de nouveau utilisée afin de pouvoir se donner une estimation de l'erreur attendue lorsque la surface libre est bruitée.

Ensuite, la méthode de résolution s'est appuyée sur la résolution du problème mis sous la forme d'une *équation de transport*. De cette façon, la résolution peut être faite dans un pseudo temps, et une fois que le calcul a convergé, les termes pseudo temporels sont nuls et donc la solution respecte bien l'équation de conservation de quantité de mouvement. Cette seconde technique a permis de déterminer diverses bathymétries. Le fait d'inverser la résolution, de partir de la surface libre pour trouver le sol a montré que l'équation possède un *comportement mathématique tout à fait différent*. La recherche de la bathymétrie est en effet seulement influencée par ce qui se passe en amont, aucune information venant de l'aval n'est nécessaire à la résolution. Alors que pour l'établissement d'une ligne d'eau, le sens de l'information est dicté par le régime d'écoulement. Finalement, le calcul ne se résume donc pas simplement en une inversion des rôles, car le schéma numérique doit aussi être adapté. Par rapport à la première méthode, la résolution se fait ici par la méthode des volumes finis de façon à mieux représenter les phénomènes discontinus. Cependant, il s'est avéré que pour certains jeux d'écoulement la présence d'un ressaut faisait diverger la solution. Divergence venant de la méthode de résolution qui considérait l'entièreté du domaine. C'est pourquoi, un artifice de correction a été introduit afin d'éviter la divergence.

Finalement, la méthode de résolution a légèrement été modifiée de façon à optimiser le calcul en tenant compte du comportement mathématique des équations. Celui-ci permet de considérer une résolution sur un domaine qui s'étend vers l'aval grâce à un *schéma de résolution orienté*. Le fait d'étendre progressivement le domaine a permis de se passer de l'artifice de correction. Le résultat le plus important est le fait qu'une discontinuité peut être traitée.

La *sensibilité de la résolution* a ensuite été mise en évidence. Celle-ci est en effet dépendante du jeu de données, de sa qualité d'estimation. Dans un cadre théorique, le problème ne se pose pas, mais bien en pratique, car rien ne peut garantir l'exactitude des données à cent pour cent.

Toujours pour mettre en évidence la sensibilité de la résolution mais aussi pour tenir compte de la limite de *précision des mesures*, une partie de l'information présente dans le levé bathymétrique a été écartée en arrondissant les mesures. Une fois de plus, l'influence sur la solution se marque beaucoup plus pour les écoulements à faible nombre de Froude, qui présentent une surface libre fortement horizontale.

Ensuite, l'impact de la précision du levé a été analysé en ajoutant du *bruit*. Il s'avère qu'il y a apparition d'une erreur au niveau de la bathymétrie, et celle-ci est plus importante lorsque le nombre de Froude diminue. Après plusieurs tentatives de mise en évidence de paramètres pouvant généraliser le comportement, des recommandations ont été formulées. Il s'agit en fait de règles de bonnes pratiques s'appuyant sur les constats établis lors des différents tests. De plus, l'erreur attendue en se donnant une erreur de surface libre peut être estimée uniquement sur base de la connaissance du nombre de Froude caractérisant l'écoulement.

Finalement, comme le bruit pose problème, des possibilités de *traitements permettant l'atténuation des effets du bruit* viennent d'être exposées.

Cette seconde partie du travail a donc permis de mettre au point des méthodes de résolution mais aussi de dégager des conclusions sur le comportement de l'équation et de sa solution. Ces informations sont essentielles pour la suite du travail.

## Troisième partie

# Détermination de la bathymétrie dans des configurations réalistes bidimensionnelles

La deuxième partie a permis de montrer que dans des configurations unidimensionnelles, la bathymétrie peut être déterminée même pour des configurations présentant des ressauts. Le stade suivant dans l'élaboration de la solution est l'application à des configurations bidimensionnelles en vue de pouvoir exploiter la méthode pour des cours d'eau réels.

Pour ce faire, les équations à la base de la résolution bathymétrique bidimensionnelle doivent être mises au point. C'est l'objet de la première section qui va suivre, où la méthode de résolution sera expliquée. Ensuite cette méthode sera appliquée sur des exemples tout d'abord unidirectionnels et puis bidimensionnels. Finalement, l'applicabilité de la méthode sur base de levés LiDAR réels sera discutée.

## 1 Établissement du système d'équations

La démarche consiste comme dans la partie 1D à faire apparaître le terme de surface libre dans les équations. Passant au 2D, les équations considérées sont la continuité ainsi que la conservation de la quantité de mouvement selon  $x$  et selon  $y$ . Ce système d'équation est le suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial hv}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( hu^2 + \frac{gh^2}{2} \right) + \frac{\partial huv}{\partial y} = -gh \left( \frac{\partial (z_s - h)}{\partial x} + J_x \right) \\ \frac{\partial hv}{\partial t} + \frac{\partial huv}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( hv^2 + \frac{gh^2}{2} \right) = -gh \left( \frac{\partial (z_s - h)}{\partial y} + J_y \right) \end{cases} \quad (69)$$

où les pentes de frottements sont données par la loi de Manning-Strickler :

$$J_x = \frac{u \sqrt{u^2 + v^2}}{K^2 h^{4/3}} \quad (70)$$

$$J_y = \frac{v \sqrt{u^2 + v^2}}{K^2 h^{4/3}} \quad (71)$$

Comme lors de l'établissement unidimensionnel, des termes se simplifient suite à la mise en évidence du terme de surface libre ce qui donne comme système :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial hv}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( hu^2 + \frac{gh^2}{2} \right) + \frac{\partial huv}{\partial y} = -gh \left( \frac{\partial z_s}{\partial x} + J_x \right) \\ \frac{\partial hv}{\partial t} + \frac{\partial huv}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( hv^2 + \frac{gh^2}{2} \right) = -gh \left( \frac{\partial z_s}{\partial y} + J_y \right) \end{cases} \quad (72)$$

Le système est ici sous sa forme conservative. Soit :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial y} = \mathbf{S} \quad (73)$$

où

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_x = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 \\ huv \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_y = \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh \left( \frac{\partial z_s}{\partial x} + J_x \right) \\ -gh \left( \frac{\partial z_s}{\partial y} + J_y \right) \end{pmatrix} \quad (74)$$

$\mathbf{U}$  est le vecteur contenant les variables d'état de l'écoulement. Le but de la résolution numérique qui va suivre est de déterminer ce vecteur pour chaque maille de l'écoulement.  $\mathbf{F}_x$  et  $\mathbf{F}_y$  sont les flux de  $\mathbf{U}$  dans la direction  $x$  et  $y$ . Finalement,  $\mathbf{S}$  correspond aux termes source et puits.

## 1.1 Recherche des célérités

Afin de mettre en évidence le comportement mathématique du système d'équations, les célérités qui le caractérisent, celui-ci va maintenant être écrit sous sa forme quasi linéaire. Le but étant d'obtenir une écriture générale se présentant sous la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{A}_y \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} = \mathbf{S} \quad (75)$$

où  $\mathbf{A}_x$  et  $\mathbf{A}_y$  sont les matrices jacobiniennes des flux. Pour ce faire, il faut exprimer les dérivées spatiales uniquement en termes de variables d'état. Soit :

$$\frac{\partial hu^2}{\partial x} = -u^2 \frac{\partial h}{\partial x} + 2u \frac{\partial hu}{\partial x} \quad (76)$$

$$\frac{\partial hv^2}{\partial y} = -v^2 \frac{\partial h}{\partial y} + 2v \frac{\partial hv}{\partial y} \quad (77)$$

$$\frac{\partial huv}{\partial x} = -uv \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial hu}{\partial x} + u \frac{\partial hv}{\partial x} \quad (78)$$

$$\frac{\partial huv}{\partial y} = -uv \frac{\partial h}{\partial y} + v \frac{\partial hu}{\partial y} + u \frac{\partial hv}{\partial y} \quad (79)$$

Les matrices jacobiniennes des flux s'écrivent :

$$\mathbf{A}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -u^2 & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ -v^2 & 0 & 2v \end{pmatrix} \quad (80)$$

Pour une onde se propageant selon  $\vec{n}$  ( $n_x; n_y$ ), il est possible de combiner les matrices jacobiniennes et finalement en tirer les valeurs propres qui nous intéressent [4] :

$$\det(\mathbf{A}_x n_x + \mathbf{A}_y n_y - c \mathbf{I}) = 0 \quad (81)$$

$$\begin{vmatrix} 0 - c & n_x & n_y \\ -u^2 n_x - uv n_y & 2un_x + vn_y - c & un_y \\ -uv n_x - v^2 n_y & vn_x & un_x + 2vn_y - c \end{vmatrix} = (c - un_x - vn_y)^3 = 0 \quad (82)$$

La mise sous forme quasi linéaire du système nous apprend donc que le système présente des célérités confondues et égales à la "vitesse de l'écoulement",  $c = un_x + vn_y$ .

Il est heureux de voir que la généralisation à deux dimensions conduit à la même conclusion en ce qui concerne le sens de propagation de l'information qui une nouvelle fois est descendante et "égale" à la vitesse de l'écoulement. Cet aspect va nous permettre de généraliser ce qui a été fait en 1D en adoptant cette fois encore un décentrement amont et une résolution qui suit la filière orientée.

## 1.2 Résolution numérique

### 1.2.1 Schéma numérique

Il faut discréteriser les trois équations par la méthode des volumes finis. La démarche est similaire à celle suivie pour le cas unidimensionnel

Pour l'établissement des trois équations, le théorème de Green va encore devoir être utilisé afin de pouvoir traiter les termes convectifs. La différence réside ici dans le fait qu'il faut remplacer une intégrale de surface par une intégrale sur le contour du volume. La formulation générale du théorème de Green [7] est la suivante :

$$\iint_V \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C (F_1 dx + F_2 dy) \quad (83)$$

où  $V$  est la surface dans l'espace  $xy$  délimitée par  $C$ , et l'intégration sur le contour  $C$  de  $V$  se fait de telle manière que l'aire de  $V$  est à gauche lorsqu'on parcourt  $C$ .

Les formulations explicites des trois équations vont maintenant être mises au point.

#### Principe de continuité

$$\iint_V \left( \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial hv}{\partial y} \right) dx dy = 0 \quad (84)$$

L'application du théorème de Green sur les termes convectifs donne :

$$\iint_V \left( \frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial hv}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C (hv dx - hu dy) = [hv \Delta x] + [hu \Delta y] \quad (85)$$

Les crochets expriment la différence entre le bord droit et gauche ou haut et bas. Dans cette formulation, le signe moins disparaît simplement parce que les dimensions de volumes finis sont considérées en valeurs absolues.

La formulation explicite de la hauteur d'eau est donc :

$$h_{t+1} = h_t - \frac{\Delta t}{\Delta x \Delta y} ([hv \Delta x] + [hu \Delta y])_t \quad (86)$$

#### Principe de conservation de la quantité de mouvement selon $x$

De façon analogue :

$$(hu)_{t+1} = (hu)_t - \frac{\Delta t}{\Delta x \Delta y} \left( [huv \Delta x] + [hu^2 \Delta y] + gh \left( \frac{\partial z_s}{\partial x} + J_x \right) \Delta x \Delta y \right)_t \quad (87)$$

#### Principe de conservation de la quantité de mouvement selon $y$

De façon analogue :

$$(hv)_{t+1} = (hv)_t - \frac{\Delta t}{\Delta x \Delta y} \left( [hv^2 \Delta x] + [huv \Delta y] + gh \left( \frac{\partial z_s}{\partial y} + J_y \right) \Delta x \Delta y \right)_t \quad (88)$$

### 1.2.2 Exposé de la méthode de résolution

La méthode de résolution employée ici se base aussi sur une discréétisation spatiale par la technique des volumes finis.

Partant d'une configuration connue au temps  $t$ , une évaluation des trois équations (86)-(88) permet de connaître la hauteur d'eau ainsi que les deux débits spécifiques au temps  $t + 1$ . Après avoir déterminé les valeurs à considérer au niveau des bords (expliqué dans la suite), il est possible de passer à l'itération suivante jusqu'à obtenir la convergence des 3 variables d'état. Une fois que le domaine de calcul a convergé, il est alors possible d'étendre le domaine de calcul.

Comme pour la méthode unidimensionnelle, le critère de convergence est l'annulation des variations temporelles. En pratique, dès que ces variations sont inférieures au critère de convergence fixé, le domaine peut être étendu. Cela signifie que uniquement des configurations stationnaires peuvent être traitées.

#### 1.2.2.1 Extension du domaine de calcul

La procédure de résolution diffère de la méthode unidimensionnelle par la façon d'étendre le domaine. En effet en 1D il faut simplement considérer la nouvelle maille voisine, et la nouvelle maille est toujours unique. Ici en 2D, il y a plusieurs mailles potentielles à considérer, et il faut effectuer un choix.

Une première technique se basait directement sur l'altitude de la surface libre. En fait, comme la résolution se fait de l'amont vers l'aval, l'idée était d'ajouter les mailles voisines de la maille présentant l'altitude la plus importante. Cependant cette façon de faire signifie que le chemin suivi lors de la résolution peut être établi avant même que la résolution ne soit effectuée. Mais surtout, les ressauts posaient problème. En effet, la zone en aval du ressaut est caractérisée par une altitude plus élevée, lorsque la résolution arrivait à un ressaut, la zone en aval du ressaut était d'abord résolue. Ce qui fait que uniquement en fin de résolution, le restant de la zone située dans le creux du ressaut était ajoutée à la résolution. C'est pourquoi, le critère d'altitude de surface libre a dû être abandonné.

Finalement *le critère de choix est la charge*, ce qui revient à ajouter les termes cinétiques à l'altitude de surface libre. Cette fois, le chemin suivi n'est plus connu avant la résolution, celui-ci s'établit au fur et à mesure des résultats.

Concrètement, lors de la résolution, une fois que le domaine de calcul a convergé, la charge de chaque maille est calculée, et les mailles sont triées en fonction de la charge. Il faut alors considérer la maille de plus grande charge qui n'a pas encore été choisie. Si plusieurs mailles présentent la même charge, comme le tout est trié suivant un algorithme propre à MatLab, il suffit de prendre la première maille de la série dans le vecteur de tri. Cependant, il se peut que toutes les voisines fassent déjà partie du domaine de calcul, il faut dès lors tester une autre maille remplissant toutes les conditions jusqu'à pouvoir étendre le domaine. Le calcul est alors relancé sur base du domaine étendu.

Finalement, tant que toutes les mailles n'ont pas été choisies pour en ajouter les voisines, le calcul se poursuit, ce qui évite de laisser des "trous" dans le domaine de résolution.

Il faut remarquer que la démarche suivie ici est orientée, mais elle présente une grande différence par rapport à la méthode unidimensionnelle, c'est le fait que *tout le domaine de calcul doit être recalculé*. En 1D, seule une maille est calculée car il est certain que le domaine amont calculé ne sera pas affecté par la résolution de la nouvelle maille. Or, ici il n'en est rien ! En effet, il faut tenir compte du fait que lorsqu'une maille est ajoutée, celle-ci va venir "perturber" les mailles voisines. Les valeurs reconstruites aux bords des mailles déjà calculées peuvent changer. Une autre raison serait simplement de la recirculation qui apparaît et modifie aussi les valeurs de bords à considérer. C'est pourquoi, bien que la méthode soit orientée par la façon d'étendre le domaine de résolution, tout le domaine de résolution est recalculé à chaque pas de temps.

Il faut noter que la résolution part d'une solution de départ qui est fidèle à la section amont connue de l'écoulement. Pour les mailles voisines ajoutées au domaine de calcul, les variables d'état sont initialisées sur base des valeurs prises par rapport à la maille choisie dont elles sont voisines. Le but étant d'éviter "des marches" dans la bathymétrie.

### 1.2.2.2 Détermination du pas de temps

Le pas de temps est déterminé de façon à respecter la condition CFL pour garantir la stabilité. Cette fois, la vitesse de l'information à considérer est égale à la somme des composantes de vitesses. Donc, après chaque itération, il faut déterminer la vitesse maximale de l'information de façon à choisir le pas de temps. En outre, un coefficient de sécurité est toujours utilisé, consistant à conserver uniquement une fraction du pas de temps calculé.

### 1.2.2.3 Calcul des valeurs aux bords et condition d'imperméabilité

Une fois le pas de temps déterminé, il faut alors reconstruire les inconnues aux bords et choisir la valeur de bord à conserver de façon à pouvoir évaluer les flux et termes sources. La reconstruction se fait toujours de façon constante. Pour chaque bord, comme le comportement mathématique montre que l'information vient toujours de l'amont, ce sont les valeurs amont qui sont conservées.

En pratique, ce sont donc les débits spécifiques qui sont analysés pour déterminer la valeur à conserver. Il faut toutefois tenir compte de cas particuliers lors du choix des valeurs à conserver :

- Si le bord correspond à une limite du domaine, il ne peut pas y avoir de flux qui traverse le bord, il faut imposer une *condition d'imperméabilité*. C'est pourquoi, la valeur du débit spécifique correspondant est annulée, les deux autres variables d'état ne sont pas concernées et conservent leurs valeurs.
- Lorsqu'il faut reconstruire les inconnues aux bords, il se peut que les valeurs obtenues soient telles qu'illustrées à la figure 52 à gauche. Dans un tel cas de figure, il n'est pas possible d'effectuer un choix unique, il faut alors considérer le débit spécifique le plus important et décentrer en amont par rapport à celui-là. Soit pour le cas de la figure : conserver le débit de droite.
- Une dernière configuration possible est celle illustrée à la figure 52 à droite. Cette fois, les débits sont tels qu'ils "s'éloignent" des bords. Dans une telle configuration, c'est la moyenne des valeurs qui est conservée.



FIGURE 52 – Cas particuliers pour le choix de bord à conserver, où les vecteurs rouges représentent le débit spécifique perpendiculaire aux bords noirs.

### 1.2.2.4 Calcul de la pente de surface libre

Lors de l'établissement des équations, les termes de dérivés spatiales de surface libre ont volontairement été exprimés de façon générale. La raison de ce choix vient du fait que la façon de considérer la surface libre a évolué lors de l'application sur différents exemples.

Dans un premier temps, l'ensemble des pentes de surface libre à considérer était calculé en début de résolution et celui-ci restait identique. Cependant, dans la suite du travail des configurations 2D vont être générées, et de façon à coller au schéma numérique d'établissement de la surface libre le calcul des pentes a été adapté.

Tout d'abord, pour suivre le même schéma qu'au sein de WOLF, la surface libre a été *décentrée aval* ce qui en soi ne pose pas de problème vu que la surface libre est une donnée, elle est donc connue pour tout le domaine de résolution. Par contre, le calcul ne pouvait plus être cette fois unique, car le signe pris par les débits spécifiques peut varier en cours de résolution. C'est pourquoi, comme pour les valeurs d'état, la surface libre a aussi été reconstruite au niveau des bords. La seule différence par rapport aux valeurs d'état est le décentrement aval.

Il faut remarquer que cette façon de faire annule la pente de surface libre pour les mailles de bord du domaine dont la valeur de débit se dirige vers le bord. En effet, pour de telles mailles, si le débit au centre de la maille se dirige vers le bord, cela signifie que la valeur de surface libre à choisir pour le bord est celle de la maille se trouvant en aval. Or, celle-ci n'existe pas. C'est pourquoi, c'est la valeur de surface libre en amont qui doit être considérée.

## 2 Applications sur des cas académiques bidimensionnels

### 2.1 Écoulements unidirectionnels

Avant de directement appliquer la méthode sur une rivière réelle, la résolution numérique va être testée sur des cas simples. Le but étant d'affiner la méthode, de voir si les choix faits s'avèrent judicieux, dans le but de voir si elle pourrait éventuellement être appliquée sur une rivière réelle au point 3. page 86.

Les premiers exemples ne présentent qu'un écoulement unidirectionnel, dans le but de voir si la solution trouvée annule bien les vitesses transversales d'écoulement. De plus, tous les fonds considérés sont plats en largeur, afin de pouvoir observer si la résolution finale redonne bien cette planéité. Ces premiers exemples permettent aussi de voir si la méthode bidimensionnelle permet bien de retrouver les solutions établies par la première méthode.

Les exemples qui vont suivre ont été générés en considérant une ligne d'eau étendue transversalement. La surface libre est donc établie de façon unidimensionnelle et considérée comme ne variant pas transversalement. La seule précaution à prendre est de considérer pour l'établissement, une largeur de cours d'eau très importante afin de ne pas tenir compte du frottement de bord qui n'est pas pris en compte ici dans la résolution. En effet, ici le rayon hydraulique utilisé lors de l'évaluation du frottement est pris égal à la hauteur d'eau. Or, le rayon hydraulique peut effectivement être estimé par cette hauteur si la largeur de l'écoulement est importante.

Les résultats obtenus pour deux des exemples traités vont maintenant être présentés.

#### 2.1.1 Fond plat

Le premier exemple est un fond plat à la cote 2 m. Les caractéristiques de l'écoulement pour la génération de la surface libre sont :

- un débit spécifique de  $2 \text{ m}^2/\text{s}$ ;
- un coefficient de frottement de  $25 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$ ;
- une longueur d'écoulement de 300 m;
- une hauteur d'eau en aval de 2 m;
- un pas spatial de 1 m ;
- un nombre de Froude compris entre 0,20 et 0,23.

De façon à tester le code, les choix de décentrement suivant les deux directions, cet exemple a été résolu dans quatre configurations différentes. Ces quatre configurations correspondant simplement à une rotation du domaine de calcul à  $90^\circ$  afin de pouvoir traiter les quatre sens d'écoulement. Pour ces quatre configurations, les résultats sont identiques.

Le résultat obtenu est identique latéralement, le fond trouvé est bien parfaitement plat sur la largeur de l'écoulement. La solution de départ considère déjà une même profondeur sur toute la largeur. Mais, si une perturbation est injectée dans la solution de départ de façon à ne plus partir d'une solution uniforme en largeur, la résolution gomme la perturbation et retombe au fur-et-à mesure des itérations sur la bonne bathymétrie.

En ce qui concerne le débit transversal, celui-ci est bien nul sur tout le domaine. Comme la surface libre est répétée en largeur, cela signifie que tous les termes de pentes de surface libre selon la largeur sont nuls. Par conséquent, lors de l'évaluation de l'équation de conservation de quantité de mouvement suivant la largeur, le terme source est toujours nul. Maintenant, que se passe-t-il si la solution de départ comporte une composante de débit transversal ? Alors, comme dans le cas de la hauteur d'eau, la perturbation introduite disparaît lors de la résolution pour retomber sur un débit nul. Le résultat final est donc identique, seul le

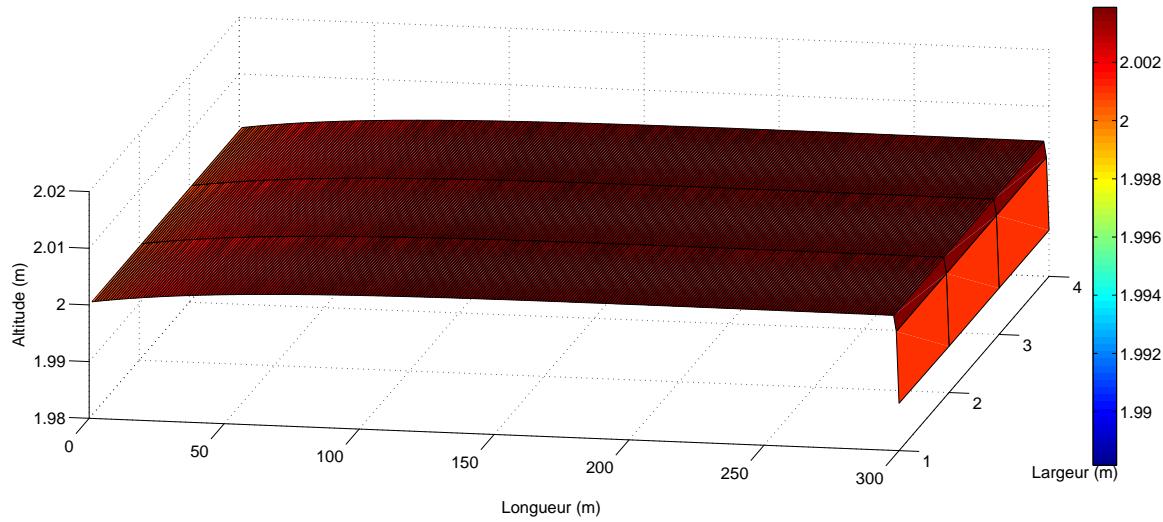


FIGURE 53 – Illustration de la bathymétrie obtenue pour l'exemple du fond plat.

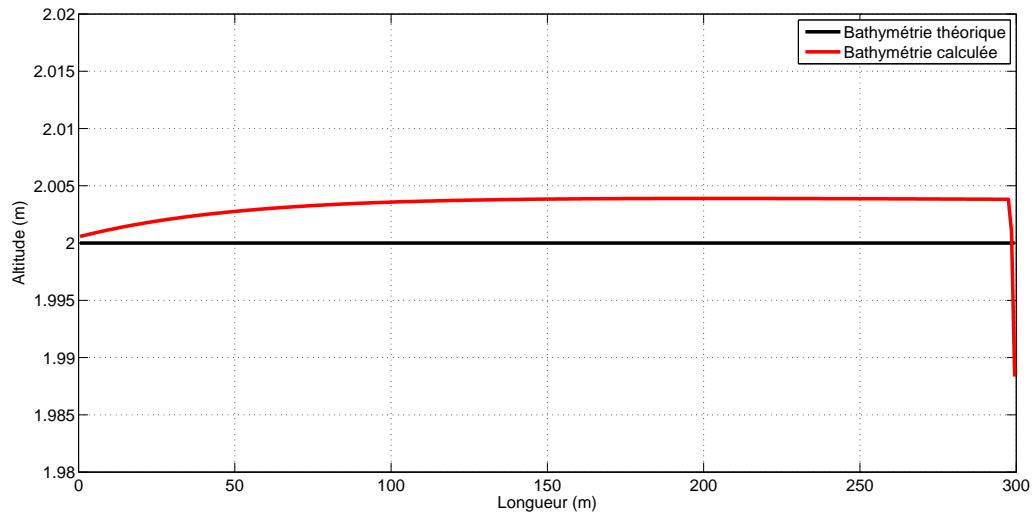


FIGURE 54 – Coupe à mi-largeur de la bathymétrie obtenue pour le fond plat.

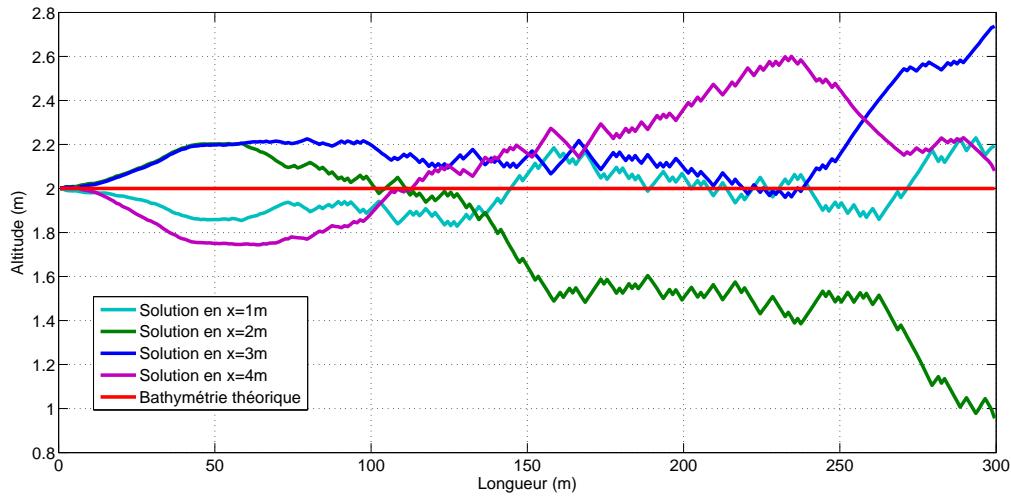


FIGURE 55 – Bathymétrie dans le cas du fond plat en partant d'une surface libre bruitée à 0,1 mm.

chemin de convergence suivi est différent.

La figure 53 représente le résultat obtenu. La bathymétrie obtenue est bien centrée sur les 2m d'altitude et les erreurs les plus importantes sont situées au niveau des extrémités du domaine. L'erreur maximale est légèrement supérieur à 1 cm ce qui est tout à fait acceptable. Il faut remarquer qu'ici l'écoulement étant unidirectionnel, l'extension du domaine de calcul est facilement prévisible.

**N.B. :** La figure en trois dimensions est là pour illustrer la solution, uniquement illustrer car la représentation est faussée. Les valeurs calculées sont des valeurs au centre des mailles, mais pour la génération de la figure ces valeurs sont placées au niveau des nœuds des mailles. Ce qui a pour effet de ne pas représenter exactement la solution. il en sera de même pour toutes les représentations 3D à venir.

Une représentation unidimensionnelle d'une coupe faite à mi largeur est représentée à la figure 54. Cette figure permet de mieux lire la bathymétrie et de voir la faible erreur faite. Partant de 2 m la solution se stabilise à 2,004 m. Il faut aussi remarquer une augmentation de l'erreur au niveau de l'extrémité aval. Augmentation localisée, mais sans conséquence véritable sur le résultat puisque cela excède à peine le centimètre. Cette erreur vient de la façon différente de considérer l'extrémité du domaine lors de l'établissement de la surface libre mais aussi lors de la résolution bathymétrique.

### Bruitage de la surface libre

Uniquement pour cet exemple, l'effet du bruitage va être testé. Comme le laissait prévoir les résultats obtenus en 1D la solution est toujours fortement affectée par le bruitage. Pour le mettre en évidence, un bruitage normé à 0,1 mm est introduit. Il faut remarquer que si le bruit est de 1 mm la résolution n'aboutit pas car elle passe à un moment par une hauteur d'eau quasi nulle qui fait apparaître des nombres infinis.

Le résultat obtenu est illustré à la figure 55. La présence du bruit se fait fortement sentir et l'erreur vaut au maximum 104 cm. Si maintenant le pré-traitement est adapté en faisant une moyenne sur 9 mailles la solution devient celle présentée à la figure 56. Cette fois, l'erreur n'est plus que de 67 cm. Si le post-traitement est appliqué en faisant uniquement la moyenne sur la largeur de l'écoulement alors la solution retombe à 1 cm près sur la solution théorique.

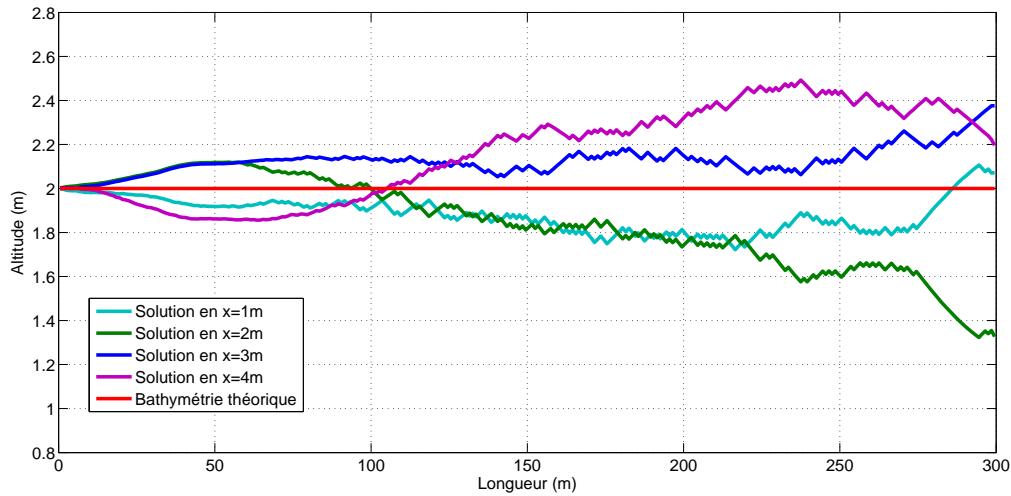


FIGURE 56 – Bathymétrie dans le cas du fond plat en partant d'une surface libre bruitée à  $0,1\text{ mm}$  et moyennée sur 9 mailles.

### 2.1.2 Trois pentes

#### Premier exemple

Le but de cet exemple est de voir comment se comporte la résolution en présence de cassures de pente et de ressaut. C'est notamment l'application à cet exemple qui a obligé de revoir la façon d'étendre le domaine de calcul.

Dans un premier temps, les caractéristiques de l'écoulement sont les suivantes :

- un débit spécifique de  $2\text{ m}^2/\text{s}$ ;
- un coefficient de frottement de  $25\text{ m}^{1/3}/\text{s}$ ;
- une longueur d'écoulement de  $300\text{ m}$ ;
- une hauteur d'eau en aval de  $1\text{ m}$ ;
- un pas spatial de  $1\text{ m}$ ;
- un nombre de Froude compris entre  $0,64$  et  $1,61$ .

Pour la géométrie du fond, il s'agit toujours des mêmes trois pentes qui sont de  $1\%$  sur  $100\text{ m}$ ,  $5\%$  sur  $100\text{ m}$  et finalement  $1\%$  sur les derniers  $100\text{ m}$ .

La même batterie de test concernant le sens de l'écoulement, la planéité transversale et le débit transversal a été effectuée. Les conclusions sont identiques à l'exemple précédent.

Le résultat de la bathymétrie est illustré à la figure 57. L'estimation de la bathymétrie est très proche de celle théorique, pour s'en convaincre, la figure 58 représente une coupe à mi largeur de la solution qui est comparée à la solution théorique. Cependant, il existe néanmoins des différences surtout au niveau des cassures de pente.

#### Second exemple

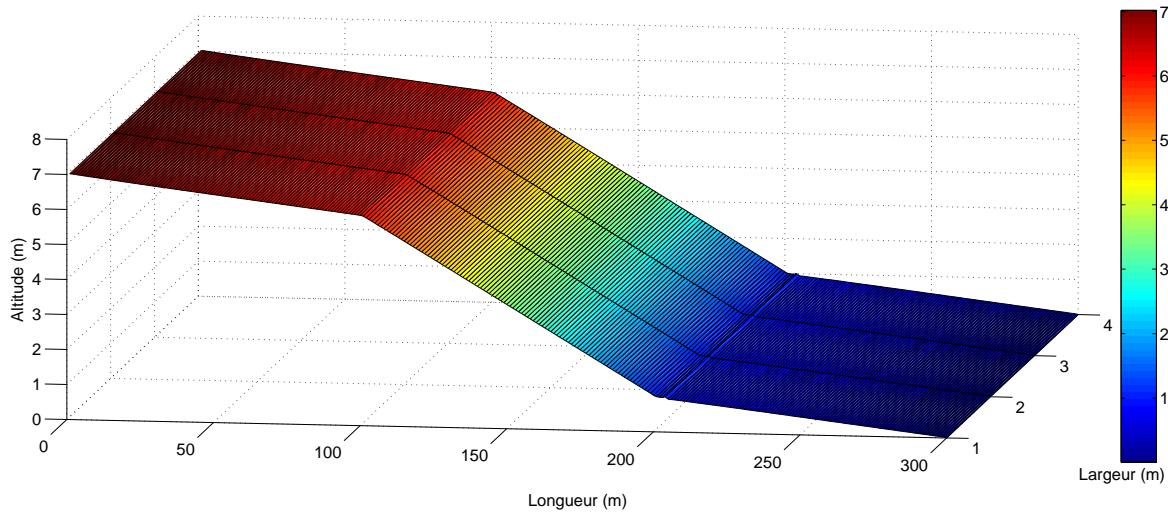


FIGURE 57 – Représentation de la bathymétrie obtenue pour le premier exemple en trois pentes.

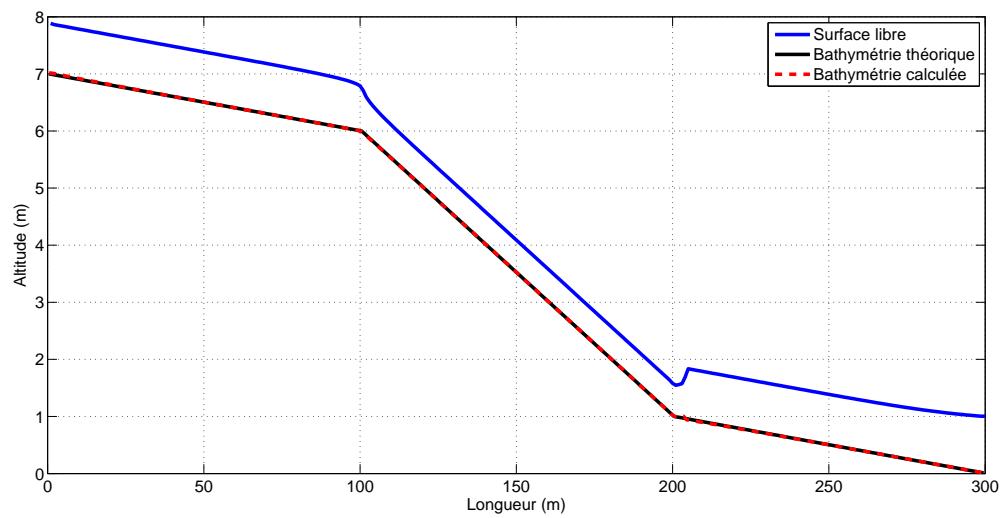


FIGURE 58 – Comparaison entre la solution théorique et une coupe faite sur la longueur pour le premier exemple en trois pentes.

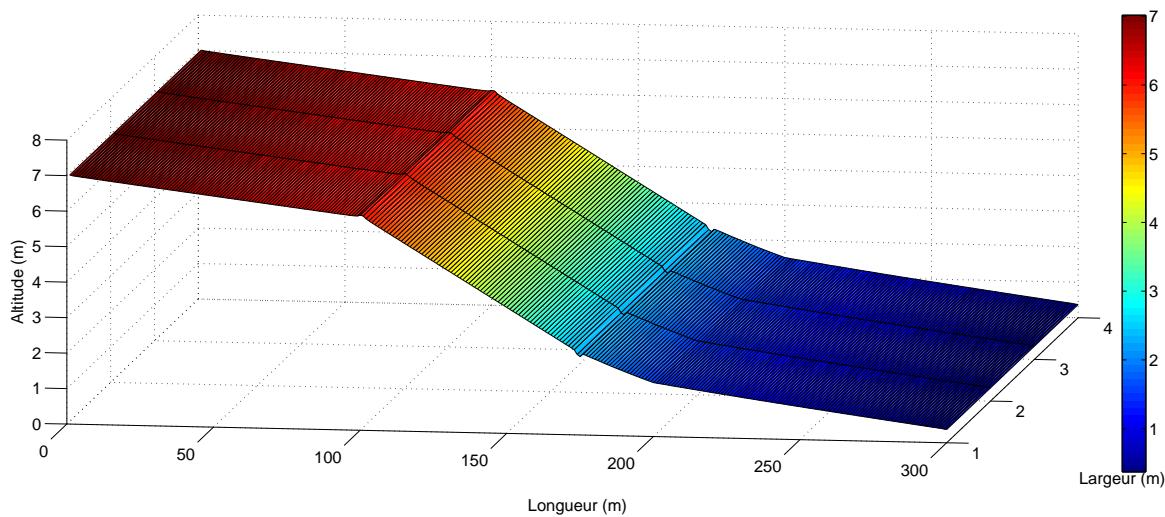


FIGURE 59 – Représentation de la bathymétrie obtenue pour le second exemple en trois pentes.

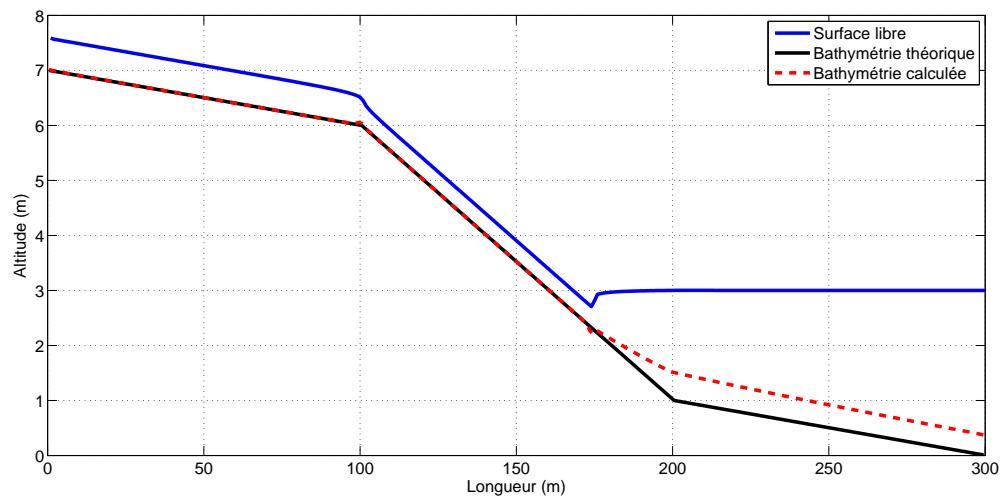


FIGURE 60 – Comparaison entre la solution théorique et une coupe faite sur la longueur pour le second exemple en trois pentes.

Comme pour les autres méthodes, un second exemple est considéré pour lequel le ressaut est plutôt centré sur la seconde pente. Par rapport à l'exemple précédent, seules les caractéristiques suivantes changent :

- un débit spécifique de  $1 m^2/s$ ;
- une hauteur d'eau en aval de  $3 m$ .
- un nombre de Froude compris entre 0,06 et 1,50.

La figure 59 représente le résultat obtenu. Cette figure permet bien de voir que le résultat est identique sur la largeur de l'écoulement. Pour mieux apprécier le résultat en longueur, une coupe est faite à mi largeur et comparée à la solution théorique à la figure 60. De cette figure, les mêmes conclusions que dans le cas 1D peuvent être tirées. En effet, la zone en aval du ressaut est toujours mal approximée et la solution s'éloigne légèrement au niveau de la première cassure de pente. Le fait de laisser calculer plus longtemps en modifiant le critère d'arrêt n'atténue pas ce comportement.

Une nouvelle fois, *l'influence de l'amont est clairement mise en évidence*. En effet, il suffit par exemple de considérer uniquement la zone en aval du ressaut et alors le résultat est beaucoup plus proche de celui théorique. Cependant, cela demande la connaissance de la hauteur d'eau en ce point, ce qui en pratique ne sera pas le cas. Néanmoins, pour le cas traité, il est facile d'interpoler l'allure prise par le fond et de relancer le calcul sur base de la hauteur supposée, ce qui permet d'avoir de meilleurs résultats.

## 2.2 Écoulements bidirectionnels

Maintenant que la méthode a été testée sur différents exemples unidirectionnels, elle peut être confrontée à des écoulements bidirectionnels. Le but étant cette fois de tenir compte de la présence de débits transversaux non nuls, mais aussi d'une contribution de pente transversale de surface libre. Pour ce faire l'exemple d'un coude a été considéré et sera exposé dans la suite. Suites aux problèmes rencontrés lors de la résolution de cet exemple, un cas beaucoup plus simple a été traité afin de corriger d'éventuels bugs dans le programme. Il s'agit d'une configuration en rétrécissement.

### 2.2.1 Test du rétrécissement

La configuration en rétrécissement est illustrée à la figure 61. Sur cette figure, une schématisation de la distribution de débit est illustrée. Les caractéristiques pour la résolution sont :

- un débit spécifique de  $2 m^2/s$ ;
- un coefficient de frottement de  $10 m^{1/3}/s$ ;
- une hauteur d'eau en amont de  $2,27 m$ ;
- un pas spatial de  $1 m$ ;
- un nombre de Froude compris entre 0,15 et 0,45.

La résolution de ce petit exemple simple a notamment permis de voir qu'il était nécessaire de calculer la pente de surface libre autrement de façon à coller à ce qui est fait dans le programme WOLF.

Par le programme WOLF, la surface libre est calculée et les différents débits spécifiques sont fournis afin de pouvoir comparer les résultats. Sur base des caractéristiques de l'écoulement et de la section amont, la bathymétrie est ensuite calculée. En comparant les résultats, il s'est avéré qu'il y avait des différences entre les deux approches. Ces différences venant de la prise en compte des termes de surface libre comme il a été expliqué à la page 71.

Les mailles qui posaient problèmes étaient celles caractérisées par un débit se dirigeant vers l'extérieur du domaine de calcul. Une schématisation de la distribution du débit est illustrée à la figure 80. Pour toutes ces mailles, la pente de surface libre était déterminée par un décentrement amont sur base des valeurs au centre

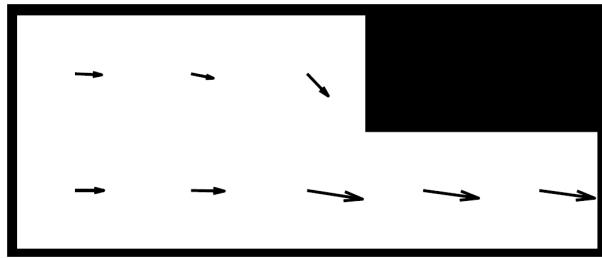


FIGURE 61 – Schématisation du rétrécissement et de la distribution de débit.

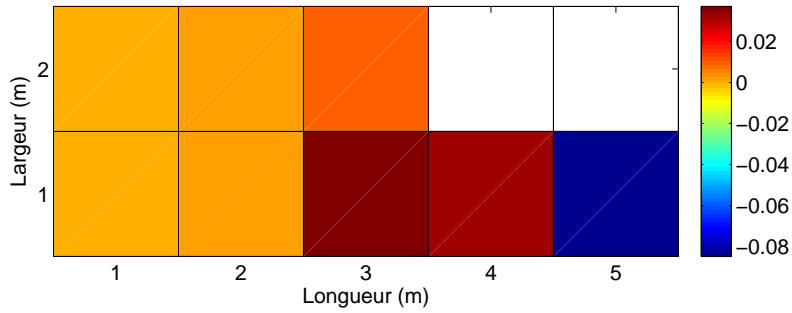


FIGURE 62 – Bathymétrie obtenue pour le cas du rétrécissement.

des mailles. Alors que finalement, après correction du calcul et le fait de reconstruire la surface libre sur les bords, toutes les pentes de surfaces libres incorrectes prennent maintenant une valeur nulle comme expliqué à la page 71.

La bathymétrie théorique se situe normalement à la cote 0 m, le résultat obtenu par la méthode est illustré à la figure 80. Cette solution est très proche de celle théorique. Il faut tout de même noter que la maille en extrémité aval du domaine est affectée d'une erreur de plus de 8 cm. Cette erreur peut s'expliquer par le fait que cette maille est celle dont le débit spécifique transversal est le plus éloigné de la solution fournie par WOLF.

### 2.2.2 Test du coude

Partant des corrections faites, l'exemple du coude a été recommencé. La configuration de ce coude est illustrée à la figure 81 qui reprend la surface libre fournie par WOLF. Sur cette figure, la section amont est en haut à gauche. Les caractéristiques de cet exemple sont les suivantes :

- un débit de  $100 \text{ m}^3/\text{s}$ ;
- un coefficient de frottement de  $35 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$ ;
- une hauteur d'eau en aval de 2 m;
- un pas spatial de 1 m ;
- un nombre de Froude compris entre 0,05 et 0,56.

Malheureusement, la résolution de cet exemple n'aboutit pas à une solution réaliste. En effet, au cours de la résolution la hauteur d'eau calculée est de plus en plus faible ce qui amène finalement la divergence de la solution suite à l'apparition de valeurs infinies. L'origine de ce problème n'a pas pu être mise en évidence.

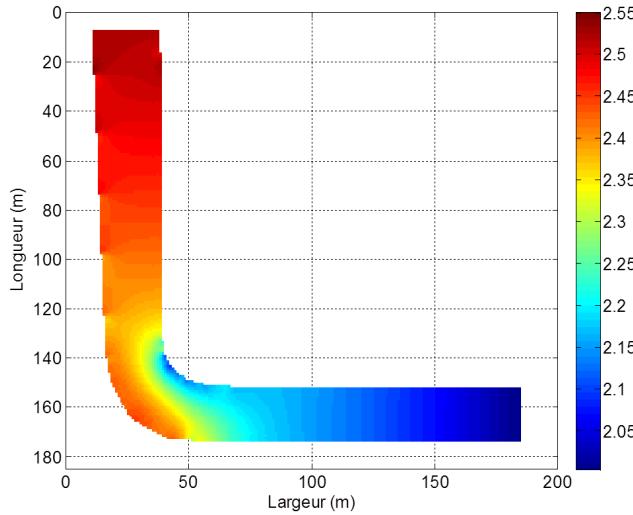


FIGURE 63 – Géométrie et surface libre du coude étudié.

Une des hypothèses est un problème au niveau du code de résolution. Cependant il y aussi une inadéquation entre les pentes de surface libre utilisées et celles “*nécessaires*”. En effet, via le programme WOLF, la hauteur d'eau ainsi que les débits spécifiques sont connus pour toutes les mailles. Si les trois équations à la base de la résolution bathymétrique sont vérifiées il vient :

- Le principe de continuité est bien vérifié.
- Par contre, pour ce qui est de la conservation de la quantité de mouvement, la pente de surface libre à utiliser pour que l'équation soit correcte est différente de celle calculée. Voici déjà une origine à la problématique, *il n'est pas possible de converger vers les solutions fournies étant données que les pentes de surface libres utilisées ne respectent pas le principe de conservation de quantité de mouvement*. Dès lors, la résolution converge vers une solution tout autre. Cette observation est surtout vérifiée au niveau des bords et des coins dans la résolution.

Comme aucun résultat ne peut être tiré quand tout le coude est considéré, dans la suite, l'intérêt va être porté sur certaines zones. Le but étant de pouvoir confronter la méthode de résolution à de véritables configurations bidimensionnelles.

#### 2.2.2.1 L'étude de la zone amont

De façon à pouvoir exploiter des résultats, la zone de calcul est limitée à une partie en amont de 34 m. Le résultat obtenu pour celle-ci est illustré à la figure 82. De façon générale, le centre du domaine de résolution converge bien vers une solution proche de 0 m. Par contre, au niveau des bords et surtout après l'élargissement la bathymétrie s'éloigne fortement de la solution avec des erreurs supérieures à 2 m. Il faut noter que la maille de coin qui présente la plus grande erreur se caractérise aussi par un très petit nombre de Froude de seulement 0,05. Or, il a été montré que l'erreur à attendre augmentait considérablement lorsque le nombre de Froude diminue, et c'est bien ce qui est observé ici.

Si la bathymétrie est analysée, il s'avère que 91% du domaine présente une erreur inférieure à 10 cm, et 73% une erreur inférieure à 1 cm. Donc, en grande partie, le domaine est bien estimé. La solution illustrée à la figure 82 montre que des oscillations apparaissent. Si la surface libre est analysée à cet endroit, il s'avère qu'il y a une légère oscillation de la surface libre, celle-ci est illustrée à la figure 82. Or dans la partie 1D, il a été montré la forte sensibilité de la solution à la surface libre et cela a été confirmé en 2D sur l'exemple du fond plat à la figure 55. Dès lors il n'est pas étonnant de voir la bathymétrie perturbée dans la zone illustrée à la figure 65

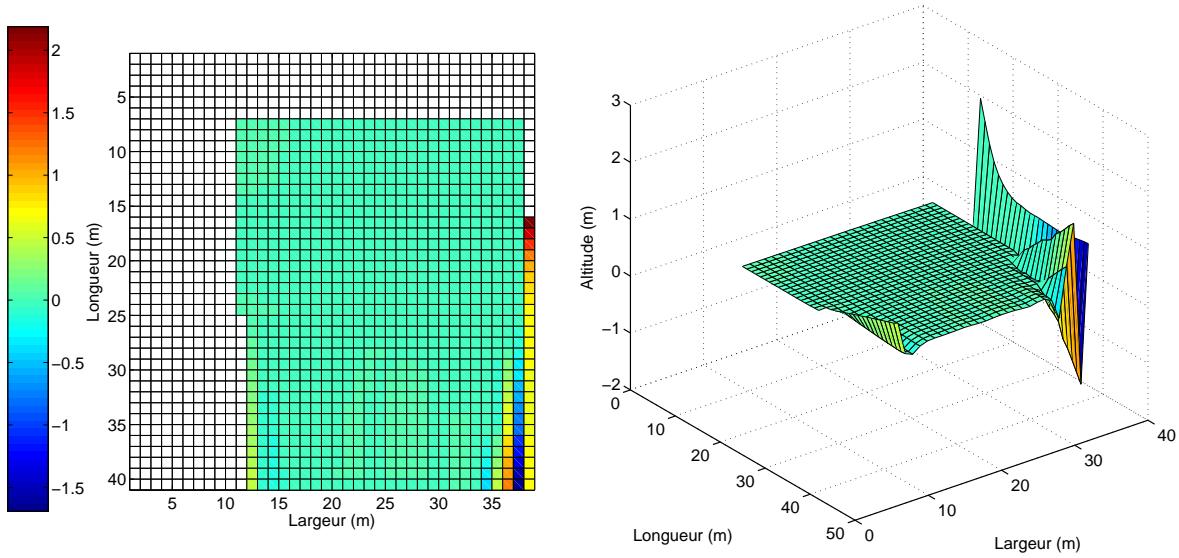


FIGURE 64 – Bathymétrie obtenue pour la zone de 34 m en amont.

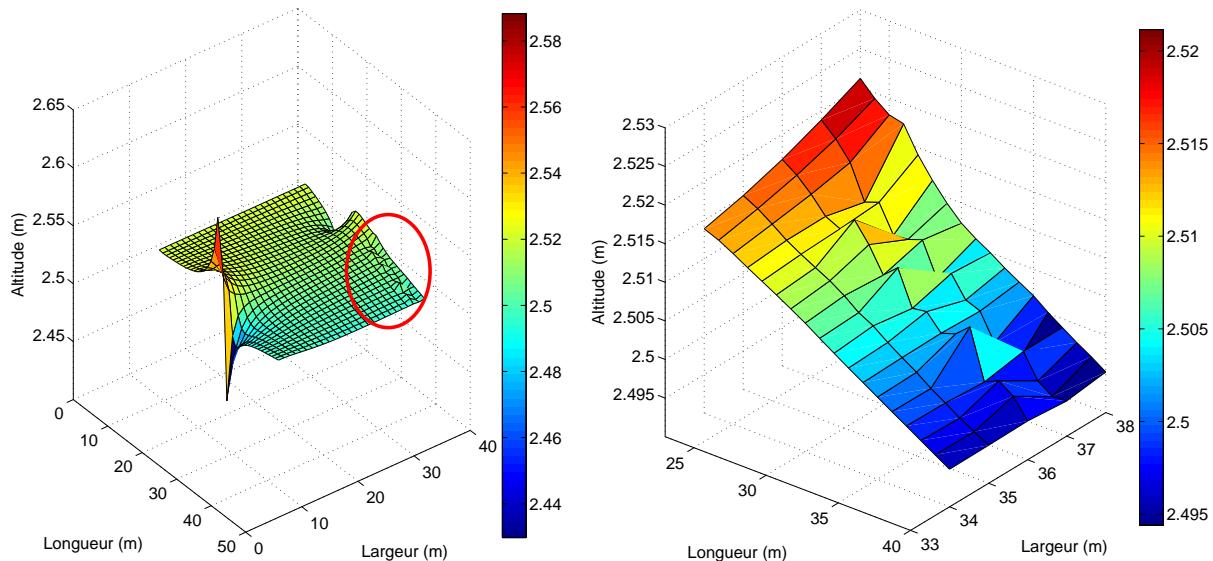


FIGURE 65 – Surface libre de la zone amont avec zoom sur la partie entourée d'un cercle rouge où la bathymétrie s'éloigne de la solution théorique.

### 2.2.2.2 L'étude de la zone du coude

Un travail similaire a été réalisé uniquement pour la partie en coude du virage. Malheureusement, la même conclusion que lorsque tout le domaine est considéré doit être tirée. Les zones problématiques sont toujours les angles présents et surtout ceux introduisant un élargissement. Ce qui fait qu'une nouvelle fois, aucun résultat exploitable ne peut être tiré de la résolution.

### 2.2.2.3 L'étude de la zone aval

La dernière zone étudiée est la zone aval. Cette zone se caractérise par le fait que la largeur y est constante, il n'y a donc plus les "effets indésirables" venant des angles. Le cas de la zone en aval va être étudié pour plusieurs longueurs différentes.

La longueur considérée a été prise à  $85\text{ m}$ ,  $65\text{ m}$ ,  $45\text{ m}$  et  $25\text{ m}$ . La bathymétrie obtenue dans les 4 cas est illustrée aux figures 66 67 68 et 69. L'échelle présente sur les différentes figures permet de se rendre compte de la différence entre les résultats. Le fait que tout dépend uniquement de l'amont se fait directement sentir au niveau du résultat en aval. Il s'avère en effet qu'en fonction de la taille du tronçon testé, le résultat obtenu n'est pas identique en aval. Le résultat est dépendant de la section de départ considérée. Plus la section de départ est proche du coude, moins bonne est la solution en général. Les résultats montrent surtout une dégradation de la bathymétrie au niveau des bords, et cette dégradation va en diminuant quand la section de départ est plus proche de l'aval. Pour le cas avec uniquement  $25\text{ m}$  la planéité transversale est quasi retrouvée. Le fait de partir d'une section plus en aval s'accompagne en fait d'une répartition du débit qui devient quasi uniforme et où la pente de surface libre transversale commence à s'annuler.

Si le pourcentage du domaine présentant une erreur inférieure à  $1\text{ cm}$  et puis  $10\text{ cm}$  est calculé il vient :

- Pour une longueur de  $85\text{m}$  : 17% inférieur à  $1\text{ cm}$  et 83% inférieur à  $10\text{ cm}$  ;
- Pour une longueur de  $65\text{m}$  : 57 inférieur à  $1\text{ cm}$  et 100% inférieur à  $10\text{ cm}$  ;
- Pour une longueur de  $45\text{m}$  : 91% inférieur à  $1\text{ cm}$  et toujours 100% inférieur à  $10\text{ cm}$  ;
- Pour une longueur de  $25\text{m}$  : 96% inférieur à  $1\text{ cm}$  et toujours 100% inférieur à  $10\text{ cm}$ .

Ce qui montre bien que plus la section de départ est proche de l'aval, meilleure est l'estimation bathymétrique. Il faut toutefois noter qu'avec plus de 83% du domaine estimé à  $10\text{ cm}$  près, le domaine de  $85\text{ m}$  est tout de même représentatif de la réalité. Mais, il faut garder à l'esprit que ce qui vient d'être effectué n'a été permis que parce que la hauteur d'eau ainsi que la distribution du débit étaient connues en tout point. En pratique tout le coude devrait être considéré et la résolution se stopperait de façon précoce.

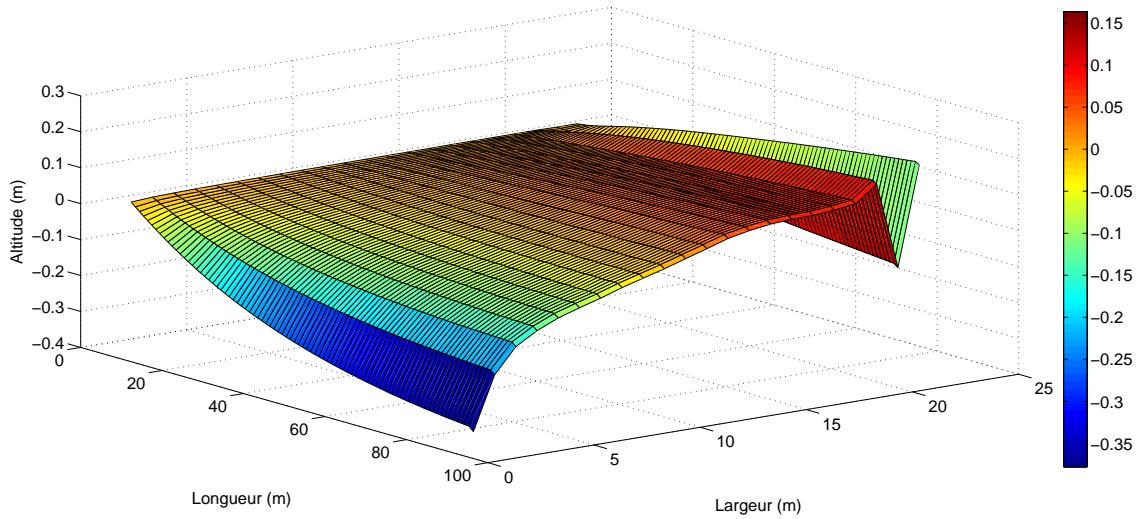


FIGURE 66 – Bathymétrie calculée pour un domaine en aval de 85m.

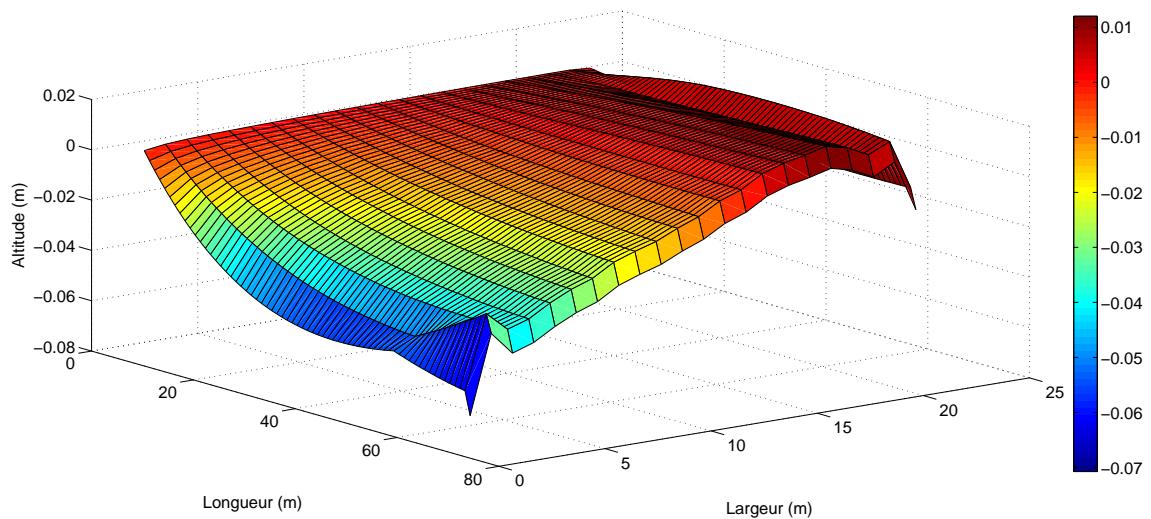


FIGURE 67 – Bathymétrie calculée pour un domaine en aval de 65m.

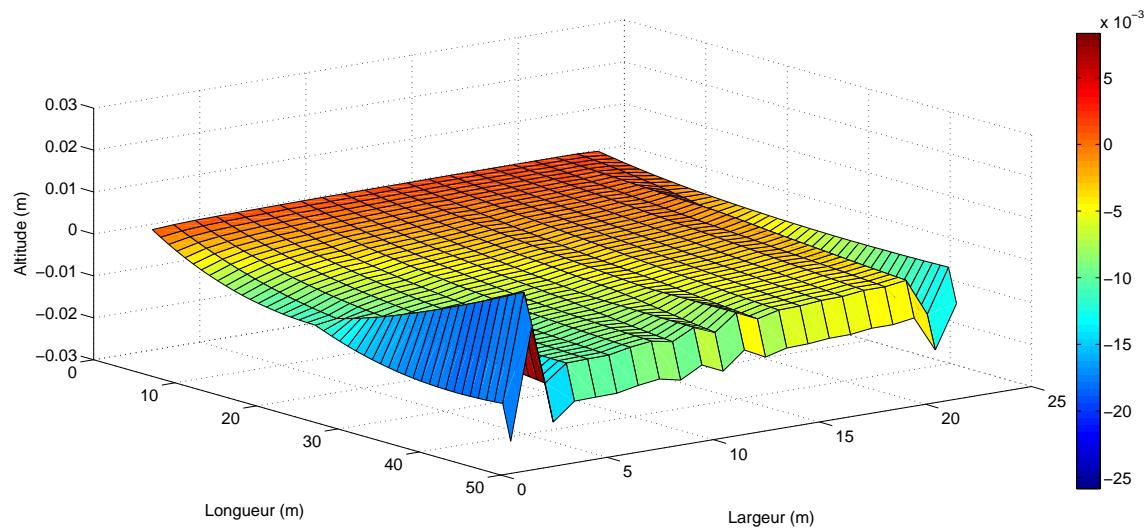


FIGURE 68 – Bathymétrie calculée pour un domaine en aval de 45m.

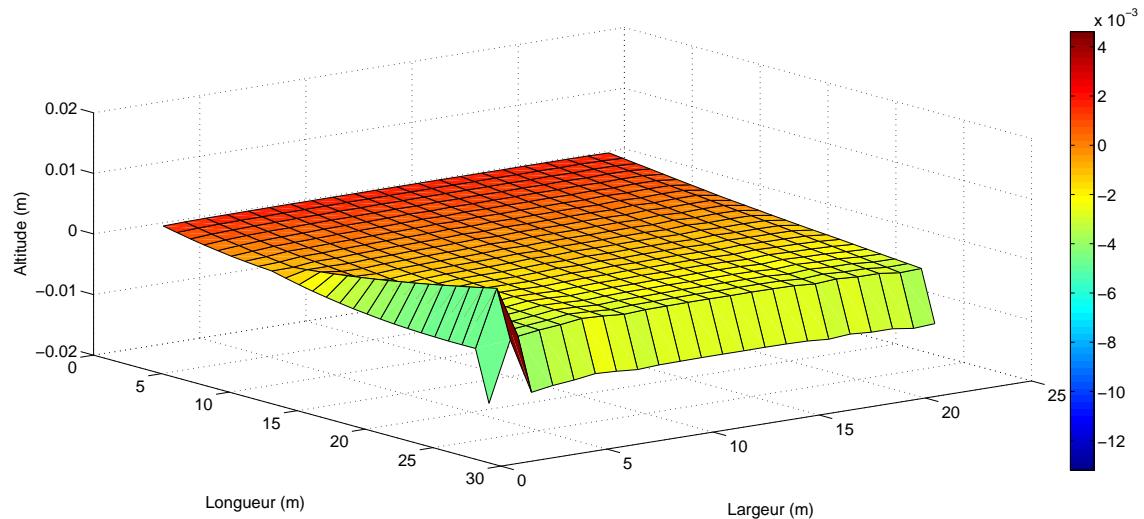


FIGURE 69 – Bathymétrie calculée pour un domaine en aval de 25m.

### 3 Applicabilité de la méthode sur un tronçon réel de cours d'eau

La méthode vient d'être testée sur le cas d'un coude, application qui s'est révélée problématique puisque aucun résultat exploitable ne peut être tiré de la résolution si tout le domaine est considéré.

Pour un levé réel de surface libre acquis par LiDAR la méthode n'a pas été testée. En effet la méthode devrait être adaptée afin de tenir compte des erreurs d'estimations faites sur les bords du domaine et surtout au niveau des angles. À cet aspect il faut ajouter la présence quasi certaine de bruitage, *i.e.* de perturbations au sein de la surface libre.

En vue de pouvoir appliquer la méthode à des cours d'eau réels, celle-ci doit être adaptée. Mais, même en adaptant la méthode, la forte sensibilité de la solution reste un aspect inévitable. Il faut en effet s'attendre à rencontrer des problèmes lorsque l'écoulement est lent, donc en présence de faible nombre de Froude.

Cet aspect a été confirmé par SMART et al [11]. Dans ce travail, ils utilisent une méthode prédictive qui consiste à partir d'une bathymétrie en se donnant une idée de la hauteur d'eau sur base de l'équation de Manning. Sur base de la bathymétrie estimée, ils calculent alors la surface libre correspondante. Et c'est en comparant la surface libre obtenue par rapport à celle du levée LiDAR qu'ils corrigent l'estimation faite de la bathymétrie. Dans le travail, la méthode est appliquée à une rivière de Nouvelle Zélande et le résultat est que :

“Le modèle hydraulique itératif prédit le niveau du lit avec une grande précision dans les endroits où le nombre de Froude est supérieur à 0,3. Dans ces conditions 41% des niveaux prédits du lit se situent à  $\pm 10\text{ cm}$  et 85% des niveaux prédits du lit se situent à  $\pm 30\text{ cm}$  du niveau du lit mesuré par GPS.”[11, Smart]

En conclusion, la méthode fonctionne pour le moment dans des configurations simples, où la surface libre est en adéquation avec la résolution faite. Pour ce qui est des configurations réelles la méthode doit être adaptée de façon à pouvoir traiter convenablement les bords et les coins en toutes circonstances. Finalement, suite à la forte sensibilité à toute perturbation, il semble indispensable de recourir à un traitement de façon à limiter les effets du bruit.

## 4 Conclusions

Dans un premier temps, les équations à la base de la résolution ont été mises au point. Le système d'équation présente un comportement similaire à celui observé dans le cas 1D, c'est-à-dire une information qui est toujours dirigée vers l'aval. Ensuite la méthode numérique de résolution a été présentée et testée.

Les applications sur des cas unidirectionnels montrent que la bathymétrie peut être estimée et est proche de celle théorique. La solution est cependant toujours dépendante de toute perturbation au sein de la surface libre. C'est pourquoi la nécessité de recourir à des traitements d'atténuation est évidente.

Ensuite, la méthode a été testée sur un cas plus réaliste d'écoulement, où cette fois l'écoulement est bidirectionnel. Il s'avère que la bathymétrie ne peut pas être déterminée suite aux fortes erreurs de l'estimation faite au niveau des bords et surtout des coins. Pour la partie en tronçon droit du coude, la méthode donne là des résultats exploitables. Résultat dont la précision est dépendante de doute erreur faite en amont, suite au fait que tout est déterminé en considérant les informations venant de l'amont.

Finalement l'applicabilité de la méthode à des levés de surface libre acquis par LiDAR a été discutée. Comme la méthode ne peut pas être appliquée pour une surface libre parfaitement maîtrisée, établie par un programme, il est évident que la méthode actuelle ne peut pas être directement appliquée à des levés réels. Pour cela, il faudrait trouver une façon de pouvoir traiter les bords et les coins, mais de toute évidence, le bruit présent, les perturbations de la surface libre continueront à poser problème.

## Quatrième partie

# Conclusions générales

L'objectif du présent mémoire était d'apporter une alternative à certaines techniques de mesure de la bathymétrie. Pour ce faire, une *modélisation hydraulique inverse* a été établie. Cette modélisation consiste à partir de la surface libre, beaucoup plus facile à connaître, afin de déterminer la bathymétrie. C'est pourquoi, la modélisation est qualifiée d'*inverse* vu que par rapport à ce qui est habituellement fait, les rôles sont inversés. Pour la surface libre, la méthode actuelle la plus adaptée est celle des levées LiDAR. Il faut noter que cette technique est très prometteuse pour l'obtention directe de la bathymétrie, mais des avancées s'avèrent encore nécessaires.

Dans un premier temps, le travail a été focalisé sur des configurations idéalisées unidimensionnelles. Cette partie du travail a permis de résoudre la bathymétrie tout d'abord sur base de *l'équation de ligne de sol*, puis, finalement sur base de la résolution d'une *équation de transport*. Une analyse du comportement mathématique a révélé le fait que l'information suit toujours le courant, elle est en permanence dirigée vers l'aval. Ce qui en soi constitue une grande différence par rapport aux équations de la surface libre. Cela montre notamment que la résolution ne peut pas se faire en inversant simplement les rôles joués, mais la méthode numérique doit aussi être adaptée. Finalement cette différence de comportement a permis d'opter pour une *méthode de résolution orientée*. Sur base des exemples théoriques traités, nous pouvons conclure que la bathymétrie peut être déterminée par cette méthode. Si le résultat est comparé à la théorie, des différences existent surtout s'il y a présence de cassures de pente au niveau du sol ou bien si l'écoulement présente des ressauts. Par contre, le fait de ne plus partir d'une surface libre parfaite pose des problèmes. Il est évident qu'en pratique la surface libre ne sera jamais acquise avec précision. Dans de tels cas, il s'est avéré que le régime dans lequel se trouvait l'écoulement jouait un rôle important. En effet, sur base des résultats, il apparaît que l'erreur à attendre est plus faible lorsque le nombre de Froude augmente. Cet aspect a été confirmé en exprimant une estimation de l'erreur sur base de l'équation de ligne de sol. Cependant, cette équation n'est pas parfaite car elle ne prend pas en compte des paramètres comme le pas spatial de résolution. Finalement, comme *la qualité de la surface libre influe sur la réponse*, des possibilités de traitements ont été proposées dans le but d'atténuer les effets des perturbations.

Dans un second temps, la méthode a été étendue pour des configurations bidimensionnelles. Le comportement mathématique reste inchangé. La méthode a tout d'abord été confrontée à des exemples unidirectionnels. Pour ces exemples, la bathymétrie peut être trouvée. De nouveau, la forte dépendance à la qualité de la surface libre de la solution a été mise en évidence. Ensuite, des exemples bidirectionnels ont été traités. Cette fois, la résolution n'aboutit pas toujours suite à une mauvaise estimation au niveau des bords du domaine et des coins. Une origine du problème à ces endroits vient du fait que la pente de surface libre considérée dans la résolution est différente de celle nécessaire pour converger vers la bonne bathymétrie. En absence d'angles, la méthode de résolution se comporte mieux et permet de trouver des résultats exploitables.

Finalement la méthode ne permet pas actuellement de déterminer la bathymétrie sur base de levés LiDAR suite à la forte sensibilité aux perturbations, et à la mauvaise estimation au niveau des bords et des angles. La méthode doit encore être adaptée mais il est évident que la solution sera toujours fortement dépendante de la qualité des données à la base de la résolution, celles-ci doivent en effet être les plus fidèles possible.

## Références

- [1] **ALLOUIS T., BAILLY J.-S., PASTOL Y., LE ROUX C.**, 2010, *Utilisation conjointe de trains d'ondes LiDAR vert et infrarouge pour la bathymétrie des eaux de très faibles profondeurs*, Revue Française de Photogrammétrie et de Télédétection, n°191, pp. 52-61.
- [2] **DIERICKX P.**, 2005, *Utilisation des techniques sonar et laser dans le cadre de la connaissance des zones d'inondations*, MET.
- [3] **GUINOT V., LEMÉNAGER M., CAPPELAERE B.**, 2007, *Sensitivity equations for hyperbolic conservation law-based flow models*. Advances in Water Resources 2007 ; 30 : 1943-1961.
- [4] **HACH**, *Hydraulique Appliquée Tome 1 et 2*, Université de Liège.
- [5] **HAMOUDA R.**, 2010, *Volumes finis Hyperboliques*. Université Paris 13.
- [6] **HILDALE R.C., RAFF D.**, 2007. *Assessing the ability of airborne LiDAR to map river bathymetry*. Earth Surface Processes and Landforms n°33, pp 1989-1996.
- [7] **KREYSZIG E.**, 2006, *Advanced Engineering Mathematics 9th edition*, Wiley International Edition, New York, p 439.
- [8] *Lidar*. <http://fr.wikipedia.org/wiki/Lidar>. Consulté en avril 2012.
- [9] **POPULUS J.**, 2008, *Utilisation du lidar pour la cartographie des habitats côtiers*. RFRC.
- [10] **SHOM**, *Le projet Litto3D*, Service Hydrographique et Océanographique de la Marine. [http://www.shom.fr/fr\\_page/fr\\_act\\_Litto3D/index\\_litto3D.htm](http://www.shom.fr/fr_page/fr_act_Litto3D/index_litto3D.htm). Consulté en avril 2012
- [11] **SMART G.M., BIND J., DUNCAN M.J.**, 2009. *River bathymetry from conventional LiDAR using water surface returns*. 18th World IMACS/MODSIM Congress.