

Université  
de Liège



Université de Liège - Faculté des Sciences Appliquées

# Contribution à l'étude de la robustesse des structures de bâtiments

Prise en compte de la plastification progressive de la  
partie de la structure "non directement affectée" par  
l'événement exceptionnel considéré

---

Travail de fin d'études réalisé par

**HUVELLE Clara**

en vue de l'obtention du grade de master Ingénieur Civil des Constructions

## Membres du jury

Jean-Pierre Jaspart (promoteur)

Jean-François Demonceau (co-promoteur)

André Plumier

Ludivine Comeliau

Louis-Guy Cajot

Année académique 2010-2011



*Je tiens tout d'abord à remercier mon promoteur, M. Jaspart, qui malgré un emploi du temps très chargé, a pu m'accorder le temps nécessaire à me guider dans ce travail de fin d'études. Merci à mon co-promoteur, M. Demonceau, qui lui aussi s'est toujours montré à l'écoute tout au long de ces derniers mois. Finalement, je remercie en particulier Ludivine Comelieu, pour le suivi quasi quotidien de ce travail de fin d'études, pour sa patience et sa totale disponibilité. Merci donc à eux trois, pour leurs conseils, et la confiance qu'ils m'ont accordée.*

*Je voudrais aussi remercier mes proches, et en particulier Michaël, pour le soutien qu'ils m'ont apporté au long de ces mois de recherche. Merci aussi pour leur aide dans la relecture de ce travail.*

Clara Huvelle

## **ENONCE**

**Titre du travail :** Contribution à l'étude de la robustesse des structures de bâtiments : prise en compte de la plastification progressive de la partie de la structure « non directement affectée » par l'événement exceptionnel considéré

Les Eurocodes intègrent les notions de ruine en chaîne, d'intégrité structurale et de robustesse dans le dimensionnement des structures du génie civil, en particulier dans celui des bâtiments. Il s'agit de concevoir des structures qui soient telles que la perte accidentelle de l'un de leurs éléments structuraux (par impact, explosion, incendie,...) ne provoque qu'une ruine "localisée" et n'engendre pas la ruine d'ensemble de la structure.

De nombreuses recherches voient actuellement le jour dans le domaine. Leur but est de fournir aux ingénieurs des stratégies en matière de conception « robuste » des structures ainsi que des règles simples permettant de rencontrer pratiquement cet objectif. A titre d'exemple, l'ULg étudie actuellement le comportement de portiques à plusieurs travées et à plusieurs niveaux dont la capacité portante de l'une des colonnes est supposée s'annuler suite à un événement accidentel non précisé. Il en résulte des redistributions d'efforts dans la structure, associées à des modes de comportement non initialement prévus. Suivant la façon dont la structure a été conçue, la perte de la colonne se soldera par une ruine locale ou globale de l'ossature. Des modèles de calcul relativement complexes ont été développés et validés, et le développement d'approches de calcul à caractère plus pratique est actuellement en cours.

Les études liégeoises ont été menées sur base d'hypothèses parfois simplificatrices. En particulier, la réponse de la partie de la structure « non directement affectée par l'impact ou l'explosion » est supposée être de type élastique-parfaitement plastique, ce qui conduit à négliger les pertes de rigidité consécutives au développement progressif de plasticité dans cette zone de la structure.

Le présent travail de fin d'études visera donc à juger de l'importance de ces pertes de rigidité sur la réponse globale de la structure, à les modéliser et à intégrer leurs effets dans les procédures de calcul à caractère pratique disponibles à l'ULg. Dans ce travail, l'étude de la plastification se fera dans le cadre restreint d'une analyse statique en deux dimensions. Le but ultime sera de mettre au point une méthode analytique simple permettant d'obtenir les différentes valeurs de rigidité au fur et à mesure de l'avancement de la plastification dans la partie indirectement affectée sous l'évènement exceptionnel, et de prédire les besoins supplémentaires, en termes de ductilité, induits par cette perte de restreinte.

## **Membres du jury :**

J.-P. JASPART (promoteur)



A. PLUMIER



J.-F. DEMONCEAU (co-promoteur)



L.-G. CAJOT



L. COMELIAU



## **Résumé**

Travail de fin d'études réalisé par Clara Huvelle, en vue de l'obtention du grade d'ingénieur civil des constructions (année académique 2010-2011)

**Titre du travail :** Contribution à l'étude de la robustesse des structures de bâtiments : prise en compte de la plastification progressive de la partie de la structure « non directement affectée » par l'événement exceptionnel considéré

La robustesse des structures devient une préoccupation particulière pour les bureaux d'études. En effet, après l'effondrement du Ronan Point en 1968 et les attentats du 11 septembre en 2001, les codes modernes ont introduit, dans leurs recommandations, des demandes spécifiques en termes d'intégrité structurale et de robustesse, pour certaines catégories de bâtiments soumis à un événement exceptionnel. Cependant, à l'heure actuelle, les outils permettant de répondre à ces demandes spécifiques sont souvent absents des codes.

Pour répondre à ce besoin, plusieurs recherches dans le domaine ont été menées. À l'Université de Liège, deux thèses ont été produites, l'une par J.-F. Demonceau, l'autre par L.N.N. Hai. Dans ces thèses, le comportement de portiques plans est étudié lorsque ceux-ci sont soumis à la perte d'une de leur colonne portante. Suite à la perte de cette colonne, les efforts dans la structure se redistribuent, d'une manière qui n'avait pas été initialement prévue. L'objectif est de retrouver un état final, certes très déformé, mais stable.

Ces deux thèses sont fondées sur des hypothèses simplificatrices. En particulier, la réponse de la partie de la structure « non directement affectée » par la perte de la colonne (partie reprenant l'ensemble des éléments structuraux ne se trouvant pas au-dessus de la colonne perdue) est supposée être infiniment élastique. En simplifiant la théorie, le rôle de cette partie indirectement affectée est de « retenir » latéralement la partie au-dessus de la colonne disparue, qui a tendance à s'affaisser. Si la partie indirectement affectée est considérée comme infiniment élastique, cela signifie qu'elle apporte une restrainte constante à la partie directement affectée, ce qui conduit à sous-évaluer les déformations de la structure, puisqu'en réalité, cette partie indirectement affectée est susceptible de perdre progressivement de sa raideur transversale au fur et à mesure de sa plastification éventuelle.

Dans un premier temps, l'objectif de ce travail de fin d'études sera de vérifier les théories déjà développées dans les deux thèses précitées, dans le cas où la partie indirectement affectée reste indéfiniment élastique. Pour cela, le modèle développé dans la thèse de L.N.N. Hai sera étudié, et ses faiblesses seront mises à jour. Une nouvelle méthode d'analyse de la partie indirectement affectée infiniment élastique sera développée.

Dans un second temps, ce travail visera à prendre en compte la plastification progressive de cette partie indirectement affectée. Une description générale des phénomènes sera réalisée, suivie ensuite du développement d'une méthode analytique permettant de calculer l'évolution de la raideur latérale de la partie indirectement affectée. Finalement, connaissant cette variation de raideur, le but final sera d'obtenir les déplacements verticaux des points situés juste au dessus de la colonne disparue, ces déplacements fixant les besoins en ductilité de la structure, dans le but d'atteindre un état final déformé stable.

## **Summary**

**Work title:** Contribution to the study of robustness of buildings structures: consideration of the progressive plasticization of the part of the structure “not directly affected” by the exceptional event

The robustness of structures becomes a particular concern for design offices. Indeed, since the collapse of the Ronan Point in 1968 and the terrorist attacks of 11 September 2001, modern design rules have introduced in their recommendations specific requests in terms of structural integrity and robustness, for some categories of buildings submitted to an exceptional event. However, for the moment, the tools to answer those specific requirements are often missing from the codes.

To meet this need, several investigations in this domain have been conducted. At the University of Liege, two PhD theses have been produced; one by J.-F. Demonceau, the other by L.N.N. Hai. In these theses, the behaviour of 2D-frames has been investigated when they were submitted to the loss of one of their supporting columns. Following the loss of this column, the forces have to be redistributed in the rest of the structure, in a way that was not initially expected. The aim is to reach a final state, very deformed, but stable.

These two theses are based on simplifying assumptions. In particular, the response of the indirectly affected part (which contains all the elements that are not directly above the lost column) is assumed to be indefinitely elastic. By simplifying the theory, the role of this indirectly affected part is to “hold” laterally the part of the structure that is just above the missing column, because this part of the structure tends to sag. If this indirectly affected part is assumed to stay in the elastic domain, it means that it provides a constant lateral restraint to the directly affected part (which is the part of the structure just above the missing column). This leads to underestimate the deformations of the whole structure, since in reality, this indirectly affected part can eventually plasticize, and loose progressively its lateral stiffness.

In a first part, the purpose of this master’s thesis will be to verify the models already developed in the two theses mentioned above, for the case of an indirectly affected part that remains elastic. The substructure developed by L.N.N. Hai will be studied and its weaknesses will be highlighted. A new analytical model for the study of the indirectly affected that remains elastic will be developed.

In a second part, this work will aim to take into account the progressive plasticization of this indirectly affected part. A general description of the phenomenon will first be achieved, then followed by the development of an analytical method allowing computing the successive values of the lateral stiffness of the indirectly affected part. Finally, knowing the evolution of this stiffness, the final goal will be to obtain the vertical displacements of the elements just above the lost column, because these are the displacements that determine the ductility that is needed to reach a final stable state.

# Table des matières

<b>TABLE DES NOTATIONS</b>	<b>4</b>
<b>1 ETAT DE LA QUESTION</b>	<b>6</b>
1.1 INTRODUCTION ET DEFINITIONS	6
1.2 REGLES DE DIMENSIONNEMENT	7
1.2.1 METHODES INDIRECTES	9
1.2.2 METHODES DIRECTES	9
1.2.2.1 « Key element method »	9
1.2.2.2 « Alternative load path method »	9
1.3 COMPORTEMENT GENERAL D'UN PORTIQUE SOUMIS A LA PERTE D'UNE DE SES COLONNES	10
1.3.1 SUBDIVISION DU PORTIQUE EN DEUX PARTIES	10
1.3.2 EVOLUTION PAS-A-PAS DE LA STRUCTURE	11
1.4 ETUDE DE LA PHASE 2	15
1.4.1 METHODE D'ANALYSE	16
1.4.2 ELEMENTS-CLES	17
1.5 ETUDE DE LA PHASE 3	18
1.5.1 METHODE ANALYTIQUE	18
1.5.2 MODES DE RUINE A VERIFIER	21
1.5.3 EVOLUTION DES EFFORTS DANS LA PARTIE INDIRECTEMENT AFFECTEE DURANT LA PHASE 3	21
1.5.4 DETERMINATION ANALYTIQUE DE $K$	25
1.5.4.1 Détermination des $k_s$	25
1.5.4.2 Détermination des raideurs	28
1.5.4.3 Assemblage des raideurs	28
1.5.5 DETERMINATION ANALYTIQUE DE $Frd$	30
1.5.5.1 Résistance d'une colonne seule	30
1.5.5.2 Résistance de l'étage endommagé	31
1.6 OBJECTIFS DU TRAVAIL DE FIN D'ETUDES	31
<b>2 PARTIE INDIRECTEMENT AFFECTEE RESTANT ELASTIQUE</b>	<b>32</b>
2.1 INTRODUCTION	32
2.2 DEFINITION DE LA STRUCTURE ETUDIEE	32
2.3 HYPOTHESES DE CALCUL PAR LE LOGICIEL FINELG	33
2.4 ETUDE PAR LA SOUS-STRUCTURE DE J.-F. DEMONCEAU	34
2.5 CALCUL DE $K_{EL}$ PAR LA METHODE DE L.N.N HAI	39
2.6 CALCUL DE $K_{EL}$ PAR UNE NOUVELLE METHODE	43
2.6.1 ETUDE DE 4 STRUCTURES	43
2.6.2 MISE AU POINT DE LA NOUVELLE METHODE	48
2.6.3 NOUVELLE SOUS-STRUCTURE DANS LA PARTIE DIRECTEMENT AFFECTEE	54
2.6.3.1 Mise en évidence du couplage	58
2.6.3.1.1 Définition des blocs	58

2.6.3.1.2	Assemblage des blocs	60
2.6.4	REMARQUE A PROPOS DES $KN$	61
2.6.4.1	Importance des $KN$	61
2.6.4.2	Détermination des $KN$	63
2.6.5	RÉSULTATS	69
<b>2.7</b>	<b>ETUDE D'AUTRES PORTIQUES</b>	<b>77</b>
2.7.1	DÉFINITION DES PORTIQUES ÉTUDIÉS	77
2.7.2	PORTIQUES 4 ET 5	78
2.7.3	PORTIQUE 2	81
<b>2.8</b>	<b>GENERALISATION DE LA METHODE ET PERSPECTIVES</b>	<b>83</b>
2.8.1	PORTIQUES A PLUS DE DEUX ETAGES	83
2.8.2	PERTE D'UNE COLONNE AILLEURS QU'AU REZ-DE-CHAUSSEE DU PORTIQUE	84
2.8.3	PERTE D'UNE COLONNE NON CENTRALE	85
2.8.4	ADAPTATION DE LA SOUS-STRUCTURE DE J.-F. DEMONCEAU	87
<b>2.9</b>	<b>CONCLUSION</b>	<b>89</b>
<b>3</b>	<b>PARTIE INDIRECTEMENT AFFECTEE POUVANT PLASTIFIER</b>	<b>90</b>
<b>3.1</b>	<b>INTRODUCTION</b>	<b>90</b>
<b>3.2</b>	<b>COMPORTEMENT GENERAL DE LA STRUCTURE</b>	<b>90</b>
3.2.1	MODES DE RUINE DANS LA PARTIE INDIRECTEMENT AFFECTÉE	90
3.2.2	COURBES $Q - \Delta A$ ET $Fh - \delta K$	92
3.2.3	COMPORTEMENT POST-FORMATION DU MÉCANISME PLASTIQUE DANS LA PARTIE INDIRECTEMENT AFFECTÉE	94
3.2.4	EFFORTS DANS LES POUTRES ET COLONNES DE LA PARTIE INDIRECTEMENT AFFECTÉE	96
3.2.4.1	Colonnes de l'étage endommagé	96
3.2.4.2	Poutre de l'étage endommagé	99
3.2.4.3	Colonne au dessus de la colonne disparue	100
3.2.5	COMPARAISON DES 4 PORTIQUES	101
<b>3.3</b>	<b>DIVISION DE L'ETUDE EN DEUX ETAPES</b>	<b>103</b>
<b>3.4</b>	<b>ETAPE 1 : CALCUL DE LA VARIATION DE LA RAIDEUR TRANSVERSALE DE LA PARTIE INDIRECTEMENT AFFECTEE</b>	<b>103</b>
3.4.1	INFORMATIONS NÉCESSAIRES AU PRÉALABLE À L'ÉTUDE ANALYTIQUE	103
3.4.1.1	Efforts en fin de phase 2	103
3.4.1.2	Moments résistants	103
3.4.2	INFLUENCE DE $F2$ ET $F1$	104
3.4.2.1	Sections-clés à observer	111
3.4.3	OBTENTION DE $F2$ EN FONCTION DE $F1$	113
3.4.3.1	Démarche générale	113
3.4.3.2	Valeurs de $KN$	114
3.4.4	RESULTATS	118
<b>3.5</b>	<b>ETAPE 2 : OBTENTION DE <math>N_{lost}</math> EN FONCTION DU DEPLACEMENT VERTICAL AU SOMMET DE LA COLONNE DISPARUE <math>\Delta A</math></b>	<b>125</b>
3.5.1	GÉNÉRALITÉS	125
3.5.2	DESCRIPTION DE LA MÉTHODE	127
3.5.3	RÉSULTATS	129



<b>3.6</b>	<b>CONCLUSION</b>	<b>131</b>
<b>4</b>	<b><u>CONCLUSION, PERSPECTIVES</u></b>	<b><u>132</u></b>
<b>4.1</b>	<b>DEMARCHE SUIVIE ET CONCLUSIONS</b>	<b>132</b>
<b>4.2</b>	<b>PERSPECTIVES</b>	<b>134</b>
	<b><u>ANNEXES</u></b>	<b><u>135</u></b>
<b>4.3</b>	<b>RESULTATS POUR LE PORTIQUE N°1</b>	<b>136</b>
<b>4.4</b>	<b>RESULTATS POUR LE PORTIQUE N°3</b>	<b>139</b>
<b>4.5</b>	<b>RESULTATS POUR LE PORTIQUE N°4</b>	<b>142</b>
	<b><u>BIBLIOGRAPHIE</u></b>	<b><u>145</u></b>

## Table des notations

### Caractères latins

$A$	Aire d'un profilé
$d_i$	Déplacement horizontal des étages de la partie indirectement affectée : $d_1$ est le déplacement horizontal au niveau de la poutre inférieure, $d_2$ celui au niveau de la poutre supérieure
$E$	Module d'élasticité du matériau (acier : $E = 210000 \text{ MPa}$ )
$ELS$	Etats-limites de service
$ELU$	Etats-limites ultimes
$F_{h,inf}$	Résultante horizontale des forces agissant à l'extrémité de la poutre membranaire ( $F_{h,inf}$ contient donc la composante horizontale de l'effort normal $N$ agissant dans cette poutre, mais aussi la composante horizontale de l'effort tranchant $T$ agissant au même endroit)
$F_{h,sup}$	Idem que $F_{h,inf}$ mais pour la poutre supérieure de la partie directement affectée
$F_1$	$= F_{h,inf}$ . Les deux notations sont équivalentes
$F_2$	$= F_{h,sup}$ . Les deux notations sont équivalentes
$F_{Rd}$	Effort maximal horizontal qui peut être supporté par la partie indirectement affectée avant la formation du mécanisme plastique
$f_y$	Limite d'élasticité du matériau
$K_N$	Raideur extensionnelle d'une rotule plastique formée dans la partie directement affectée
$K_i$	Raideur du ressort introduit dans la nouvelle sous-structure de la partie directement affectée, aux niveaux supérieur et inférieur: $K_i = \frac{\Delta F_i}{\Delta d_i}$ .
$K$	Terme générique pour la raideur transversale de la partie indirectement affectée, au niveau de la poutre membranaire ; en règle générale, $K = K_1$
$K_{el}$	Raideur transversale de la partie indirectement affectée, dans le domaine élastique
$L$ ou $L_i$	Longueur de la poutre en situation déformée : $L_i = L_0 + 2 * \delta_{Ni}$
$L_0$	Longueur initiale de la poutre, égale à la portée de cette dernière (7 m dans tous les cas traités dans ce travail de fin d'études)
$M_i$	Moments dans les rotules plastiques de la partie directement affectée, $M_1$ pour la poutre inférieure, $M_2$ pour la poutre supérieure, moments qui évoluent en fonction de $N_1$ et $N_2$
$M_p(N)$	Moment plastique de la section qui tient compte de la coexistence d'un effort normal $N$ dans la section
$M_{pl}$	Moment plastique de la section quand l'effort axial dans cette section est nul
$N_{up}$	Effort normal dans la colonne juste au dessus de la colonne qui disparaît
$\Delta N_{up}$	Correction qu'il faut apporter au résultat de la sous-structure ( $Q$ ) pour tenir compte de la variation de l'effort $N_{up}$ .
$N_{AB,normal}$	$= N_0$
$N_0$	Effort dans la colonne avant que celle-ci ne disparaisse. Cet effort est uniquement dû aux charges réparties agissant sur la structure ( $N_0 = N_{AB,normal}$ )

$N_{pl,lost}$	Valeur de $N_{lost}$ au moment où le mécanisme plastique est formé dans la partie directement affectée
$N_{lost}$	Force verticale, positive vers le bas, qui simule la perte de la colonne
$N$	Effort normal dans les poutres de la partie directement affectée ( $N_1$ pour la poutre inférieure, $N_2$ pour la poutre supérieure)
$PIA$	Partie directement affectée (par la perte de la colonne)
$PDA$	Partie indirectement affectée (par la perte de la colonne)
$Q$	$= N_{lost}$
$Q_i$	Partie de l'effort $Q$ repris par l'étage $i$ . Si une force $Q$ est appliquée à la structure, l'étage 1 reprend $Q_1$ , l'étage 2 $Q_2$ de sorte que $Q = Q_1 + Q_2$ et $Q_2 = N_{up}$
$s_{ij}$	Déplacement de l'étage n° $i$ lorsqu'une force de 1 kN est appliquée à l'étage $j$ . Elément de la matrice $\underline{\underline{S}}$
$\underline{\underline{S}}$	Matrice de souplesse de la partie indirectement affectée (inverse de la matrice de rigidité). Matrice composée des éléments $s_{ij}$
$T_i$	Effort tranchant au niveau d'une rotule plastique formée dans la partie directement affectée ( $T_i = \frac{2M_i}{L_0}$ )

#### Caractères grecs

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$	Coefficient, exprimé en $m/kN$ , qui caractérisent les souplesses des deux étages de la structure ( $\alpha = s_{11}, \beta = \delta = s_{12} = s_{21}, \gamma = s_{22}$ )
$\delta_K$	Allongement du ressort de la sous-structure de J.-F. Demonceau. Dans le cas symétrique, $\delta_K = 2 * d_1$
$\delta_N$	Allongement d'une rotule plastique soumise à un effort axial $N$
$\Delta_A$	Déplacement vertical du point situé au sommet de la colonne qui disparaît
$\theta$	Rotation subie par une rotule
$\lambda$	Multiplicateur de charge : $N_{lost} = \lambda * N_{AB,normal}$

#### Rappel :

$$Q = N_{lost} = \lambda N_0 = \lambda N_{AB,normal}$$

$$Q_2 = N_{up}$$

$$F_h = F_{h,inf} = F_1$$

$$F_{h,sup} = F_2$$

$$\delta_K = 2 * d_1$$

## 1 Etat de la question

### 1.1 Introduction et définitions

Sous des charges considérées comme « normales », un ingénieur doit dimensionner une structure de telle manière qu'elle respecte tant des considérations de flèches que de résistance. Ces charges considérées comme « normales » sont des charges dont la probabilité d'occurrence est non négligeable. Un exemple est la charge variable que représentent les employés dans un bâtiment de bureaux. La sécurité dans ce cas de chargement « normal » est prise en compte par des coefficients de sécurité  $\gamma$ , supérieurs à 1, qui soit, multiplient l'action caractéristique, soit divisent la résistance caractéristique. La dénomination « caractéristique » se base sur une certaine probabilité de dépassement de cette valeur. Les Eurocodes présentent bien évidemment toutes les règles de dimensionnement ainsi que les charges à considérer pour ce cas de chargement normal.

Il est aussi dit dans l'Eurocode 1990 [8] la chose suivante :

*« Une structure doit être conçue et exécutée de telle sorte qu'elle ne soit pas endommagée par des événements tels que :*

- *une explosion ;*
- *un choc ;*
- *les conséquences d'une erreur humaine*

*de façon disproportionnée par rapport à la cause initiale »*

Il faut ici définir les notions de charges exceptionnelles et accidentelles. Une charge exceptionnelle est une charge qui a une probabilité d'occurrence très faible. Un exemple simple est le cas d'une forte secousse sismique, de 0.4g. Cette charge est accidentelle. En Turquie, cette charge n'est pas exceptionnelle, car cette valeur d'accélération a une probabilité non négligeable d'apparaître sur la durée de vie de la structure. Cette valeur de secousse sismique rentrera donc dans le dimensionnement « normal », cette charge sera considérée dans le dimensionnement de base de la structure. Une telle secousse sismique sera considérée comme un chargement exceptionnel en Belgique, où, si une secousse sismique doit rentrer dans le dimensionnement normal, l'accélération sismique à prendre en compte est plutôt de l'ordre de 0.1g.

Ce que dit l'Eurocode, en introduisant le concept de « dommage disproportionné par rapport à la cause », c'est que, si la charge qui s'applique réellement à la structure dépasse un jour de peu la valeur considérée dans le dimensionnement « normal » de la structure, les dégâts devraient être peu importants. Par exemple, si la structure a été dimensionnée pour une accélération de 0.1g, en Belgique, et qu'un jour, une secousse de 0.15g survient, l'Eurocode voudrait que la structure soit toujours intègre. Par contre, le jour où cette structure est soumise à un séisme de 0.4g, l'Eurocode n'exige plus que la structure soit toujours debout. En effet, dans ce cas, la charge est beaucoup trop importante par rapport à la charge initialement prévue.

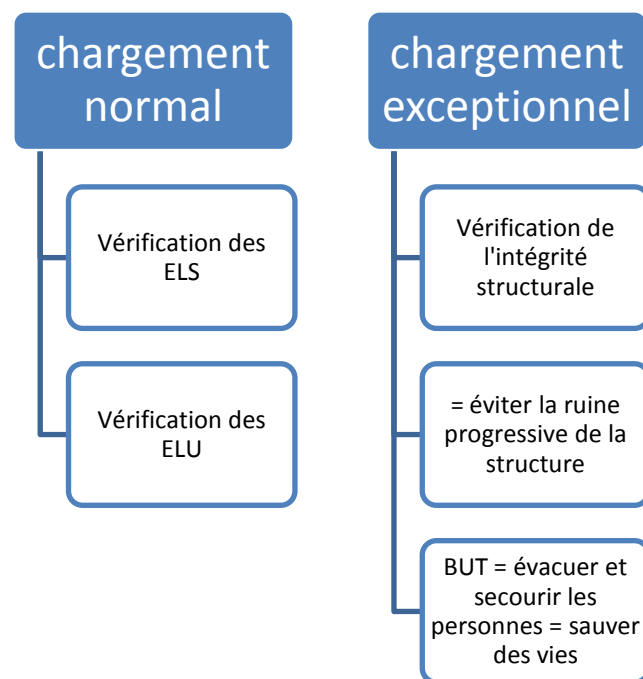
Il y a ici le concept d'intégrité structurale qui entre en jeu. Sous une charge exceptionnelle, il est demandé que la structure conserve son intégrité structurale. Considérons par exemple un portique qui, sous un événement exceptionnel non identifié (impact d'une voiture, feu localisé, ...), perd une de ses colonnes portantes. L'Eurocode demande que la structure, dans sa globalité, conserve une

certaine intégrité structurale, c'est-à-dire que la structure reste globalement stable. Il faut qu'elle retrouve, après la perte de sa colonne, un état, certes très déformé, mais stable.

L'exigence d'intégrité structurale est donc l'exigence de retrouver, après un événement exceptionnel, un nouvel état déformé stable. Ce que l'on cherche en réalité à éviter, c'est la ruine progressive (ou « en chaîne ») de la totalité de la structure, scénario dans lequel la perte de la colonne entraîne la ruine des poutres au dessus de celle-ci, entraînant à leur tour la ruine du plancher sur lequel elles tombent etc... Notons qu'il faut ici retrouver un état stable déformé, et que, sous les charges exceptionnelles, les ELS ne seront jamais vérifiés, contrairement au cas d'un dimensionnement sous charges normales (c'est-à-dire +/- fréquentes), pour lequel les ELS et les ELU doivent être vérifiés.

La notion de robustesse peut alors être définie comme étant la capacité d'une structure à conserver une certaine intégrité structurale sous un chargement exceptionnel, qui n'a pas été considéré dans le dimensionnement traditionnel de la structure.

Il faut finalement noter que le but principal d'un tel dimensionnement est bien entendu de permettre de sauver des vies, en diminuant le nombre de sinistrés et en permettant l'intervention des services d'urgence en toute sécurité.



## 1.2 Règles de dimensionnement

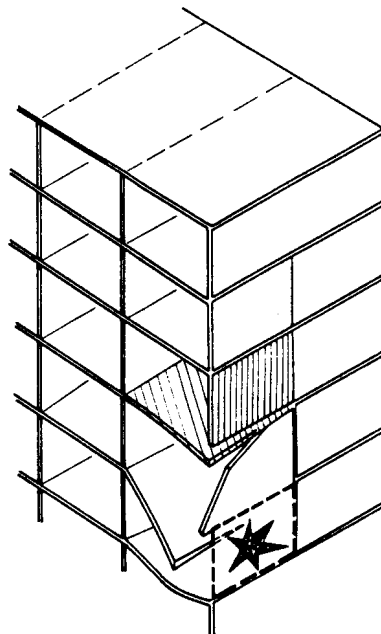
Les premières règles de dimensionnement sont apparues en Angleterre, après la catastrophe du Ronan Point, en 1968.

Le Ronan Point était un immeuble de 22 étages, situé à l'est de Londres. Sous l'effet d'une explosion de gaz dans le coin du 18<sup>ème</sup> étage, tout ce coin de l'immeuble s'est effondré.



**Figure 1 : Effondrement partiel du Ronan Point (image provenant de [http://en.wikipedia.org/wiki/Ronan\\_Point](http://en.wikipedia.org/wiki/Ronan_Point))**

Cet effondrement a été provoqué par le manque de connexion entre les planchers, ainsi qu'entre les planchers et les murs de l'immeuble : sous l'effet de l'explosion, les murs de l'appartement se sont écartés (Figure 2), et les éléments du plancher du dessus n'ayant plus de support, sont tombés à l'étage inférieur, qui n'a pas résisté à cette charge et ainsi de suite : la partie supérieure n'ayant plus de support, tombe, sur les éléments inférieurs, qui ne peuvent supporter une telle charge. Tout le coin de l'immeuble est détruit. C'est l'exemple type de la ruine en chaîne.



**Figure 2 : Mode de ruine du Ronan Point (schéma provenant du cours sur la robustesse donné par M. Jaspard lors de la semaine SUSCOS, à Coimbra, du 9 au 13 mai 2011)**

C'est après cet évènement, où un incident survenu à un étage mena à l'effondrement d'une partie beaucoup plus importante de l'immeuble que la zone directement concernée, que les premiers codes traitant de « robustesse » ont vu le jour, en Angleterre.

A l'heure actuelle, les informations disponibles dans l'Eurocode en terme de résistance aux charges exceptionnelles sont très similaires à ces codes anglais, les « British Standards ». Les méthodes qui y sont décrites sont de deux types : les méthodes indirectes, qui ne considèrent pas de scénarios particuliers et donnent des règles de dimensionnement à remplir, et les méthodes directes, pour lesquelles un scénario est défini, et contre lequel on cherche à se prémunir en particulier. Ce sont ces deux types de méthodes qui sont décrits dans la suite de ce paragraphe.

#### 1.2.1 Méthodes indirectes

Les méthodes indirectes sont donc des règles de dimensionnement, des règles prescriptives, sans scénario étudié en particulier.

Un exemple de méthode indirecte est la « tying force method » : chaque assemblage doit pouvoir reprendre une certaine force de traction. Cela signifie que les différents éléments d'une structure doivent être suffisamment liaisonnés les uns aux autres (exemple du Ronan Point où les planchers se sont détachés de leur support).

#### 1.2.2 Méthodes directes

Dans les méthodes directes, un scénario est défini, à partir d'une discussion entre le concepteur et le propriétaire du bâtiment, pour cerner exactement contre quels risques ce dernier veut se prémunir. Il est en effet illusoire d'imaginer un bâtiment qui pourrait résister par exemple à tous les scénarios d'attaques terroristes, il faut cibler les demandes du client.

Une fois ce scénario défini, deux méthodes de dimensionnement sont à la disposition de l'ingénieur : la « key element method » et l'« alternative load path method ».

##### 1.2.2.1 « Key element method »

Un « élément clé » est un élément tel que, s'il disparaît, les conséquences dans le reste de la structure ne sont pas considérées comme acceptables (le résultat est disproportionné par rapport à la cause). Les conditions qui définissent le caractère acceptable ou non d'un dégât, dû à la disparition d'un élément, sont basées sur la surface qui s'effondre lorsque cet élément disparaît : si la disparition de cet élément entraîne l'effondrement de plus de 15% de la surface du plancher, ou plus de 70 m<sup>2</sup> (le minimum de ces deux valeurs), alors cet élément est considéré comme un « élément clé ».

Il faut alors dimensionner cet élément clé de manière à ce qu'il résiste à l'évènement considéré dans le scénario choisi. La colonne par exemple doit pouvoir résister à un impact de camion, ou à une explosion.

##### 1.2.2.2 « Alternative load path method »

Dans ce cas, le but n'est pas de dimensionner un élément de telle sorte qu'il résiste à l'évènement exceptionnel considéré (= optique de la « key element method »), qui mène au renforcement, parfois coûteux, d'un élément, mais de regarder comment la structure se comporte une fois que cet élément est bel et bien disparu.

Le scénario qui est ici défini est, non pas de savoir comment une colonne disparaît (impact, incendie, ...), mais où cette colonne disparaît. Les différents scénarios correspondent chacun à la disparition d'une certaine colonne.

Le but de l'« alternative load path method » n'est pas de renforcer la structure, mais de voir si elle permet aux efforts qui précédemment passaient par la colonne disparue de se redistribuer autrement dans le reste des éléments.

**C'est dans cette optique d'observer les redistributions d'effort dans la structure, suite à la perte d'une colonne sous un évènement non défini, que prend place ce travail de fin d'études.**

### 1.3 Comportement général d'un portique soumis à la perte d'une de ses colonnes

Deux thèses ont été menées à l'ULg sur le sujet de la robustesse, celle de Jean-François Demonceau [2] et celle de Luu Nguyen Nam Hai [4]. Dans ces thèses ont été étudiés des portiques à plusieurs travées et plusieurs étages, dont une des colonnes portantes est supposée disparaître, après un évènement non précisé. L'évènement qui a mené à la perte de la colonne n'entre pas explicitement en compte dans l'étude. Le but de ces deux thèses était de fournir des méthodes analytiques faciles à mettre en œuvre, permettant de représenter correctement le comportement d'un portique soumis à la perte d'une de ses colonnes.

Les hypothèses sur lesquelles se sont basées ces deux thèses étaient les suivantes :

- Le portique est étudié dans une situation 2D, un seul portique est étudié, alors que le bâtiment est normalement composé de plusieurs portiques parallèles, qui peuvent être couplés entre eux via la prise en compte de la présence d'une dalle par exemple. Un travail de fin d'études a été réalisé sur ces aspects 3D en 2010 par Florence Lemaire
- La perte de la colonne est supposée se faire suffisamment lentement, de manière à pouvoir réaliser l'étude d'un cas statique. L'évènement qui cause la perte de la colonne est donc supposé être un phénomène lent, comme par exemple un incendie qui fait perdre progressivement ses capacités à la colonne. Un travail de fin d'études a été réalisé sur les aspects dynamiques en 2009 par Ludivine Comelieu [1]

#### 1.3.1 Subdivision du portique en deux parties

Dans les recherches qui ont été menées jusqu'ici, la structure soumise à la perte d'une de ses colonnes est divisée en deux parties distinctes :

- La partie directement affectée (PDA), en rouge sur la Figure 3, qui comprend les poutres et colonnes situées au-dessus de la colonne qui disparaît (colonne AB sur la Figure 3)
- La partie indirectement affectée (PIA), en bleu sur la Figure 3, qui n'est affectée par la perte de la colonne que via les efforts qui se développent dans la partie directement affectée au cours de la perte de la colonne



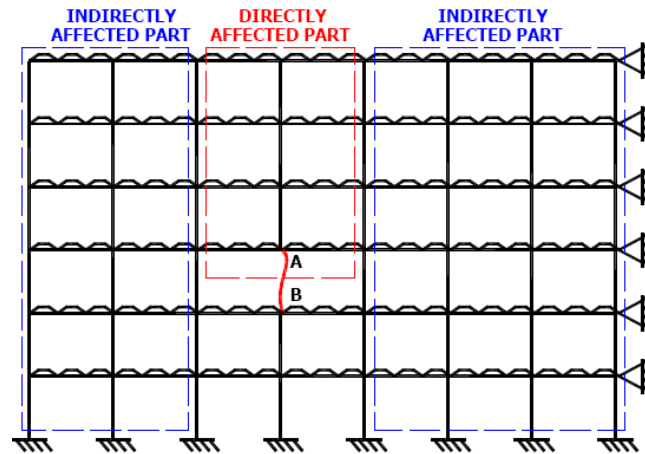


Figure 3 : Définition des parties directement et indirectement affectées (HAI [4])

### 1.3.2 Evolution pas-à-pas de la structure

Lors de la perte d'une des colonnes du portique, l'évolution de l'effort dans la colonne qui disparaît en fonction du déplacement au sommet de cette même colonne est donnée par le graphique suivant (les notations des points A et B sont en accord avec la Figure 3) :

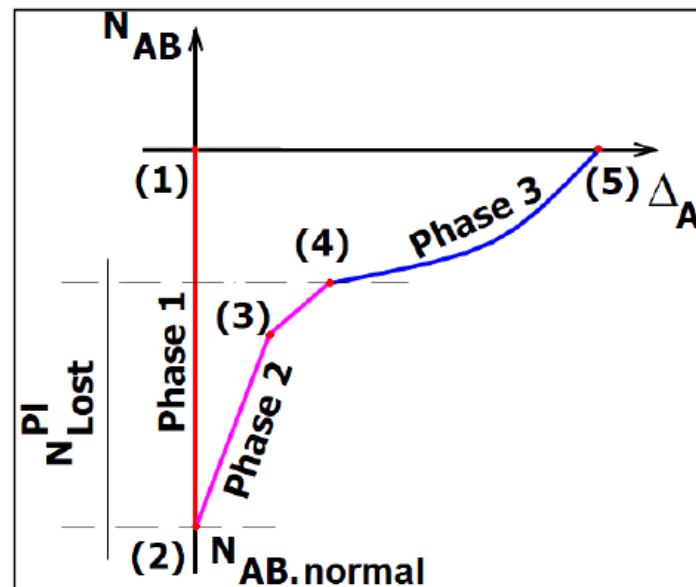


Figure 4 : Evolution du déplacement en sommet de colonne en fonction de l'effort dans celle-ci (MULLER [5])

Commentaires sur la Figure 4

#### PHASE 1

Au départ, la structure est au point (1), le portique, toujours entier pour l'instant, n'est pas encore chargé. Ensuite, le chargement « normal » est appliqué au portique (charges réparties permanentes et variables). L'effort dans la colonne AB augmente jusqu'à atteindre la valeur  $N_{AB,normal}$ , tandis que le déplacement vertical du point A, très faible pour l'instant, est considéré comme nul. La phase 1 correspond donc à la mise en charge du portique possédant toujours sa colonne. Tous les éléments du portique restent bien entendu élastiques durant cette phase.

Finalement, les deux situations ci-dessous sont équivalentes :

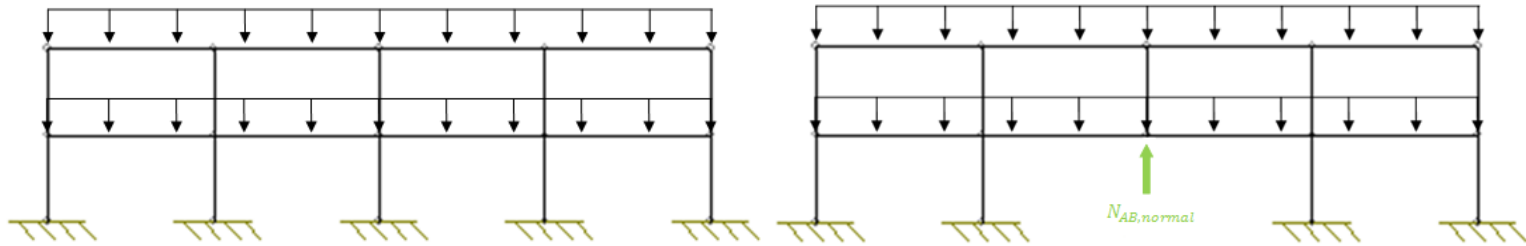


Figure 5 : Equivalence de chargement en fin de phase 1

## PHASE 2

A partir du point (2), la colonne commence à disparaître, ce qui se comprend bien puisque l'effort dans la colonne AB diminue. En effet, en plus de l'effort  $N_{AB,normal}$ , qui agissait de bas en haut sur la structure sans colonne, agit maintenant un effort supplémentaire,  $N_{lost}$ , qui agit de haut en bas :

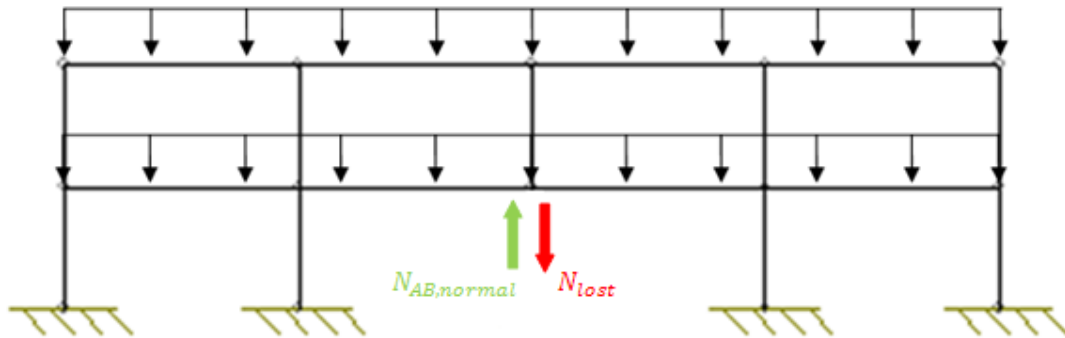


Figure 6 : Efforts agissant sur le portique, simulant la perte de la colonne

A la fin de la phase 1, cet effort  $N_{lost}$  était nul, et il commence à augmenter à partir de la phase 2. Finalement, lorsque la colonne aura totalement disparu,  $N_{lost}$  sera égal à  $N_{AB,normal}$ .

Ce cas de charge peut finalement être dissocié en deux autres cas :

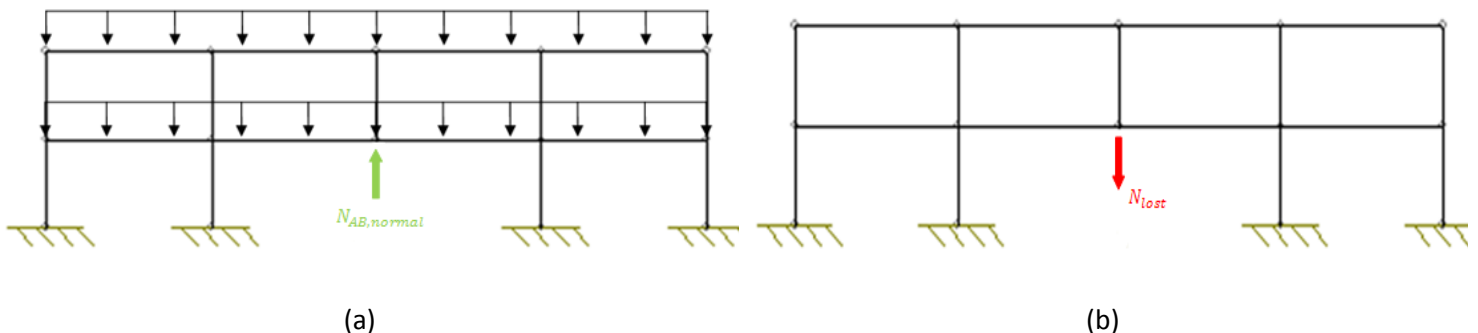


Figure 7 : Dissociation des cas de charges [(a) = charges permanentes – (b) = perte de la colonne]

On peut donc écrire :

$$N_{AB} = N_{AB,normal} - N_{lost}$$

C'est donc comme si l'on venait progressivement « tirer » sur le portique avec une force  $N_{lost}$ . Les éléments restent élastiques dans un premier temps, jusqu'à la formation de la première rotule dans la partie directement affectée. La structure est alors au niveau du point (3).

La charge  $N_{lost}$  continue d'augmenter sur une structure qui possède maintenant une rotule dans la partie directement affectée et qui possède donc une rigidité moindre, d'où le changement de pente dans le graphe  $N_{AB} - \Delta_A$ . Une nouvelle rotule est ensuite créée et ainsi de suite jusqu'à la formation d'un mécanisme plastique dans la partie directement affectée. La structure se trouve alors au point (4), qui marque la fin de la phase 2, et un mécanisme plastique est formé dans la partie directement affectée (Figure 8):

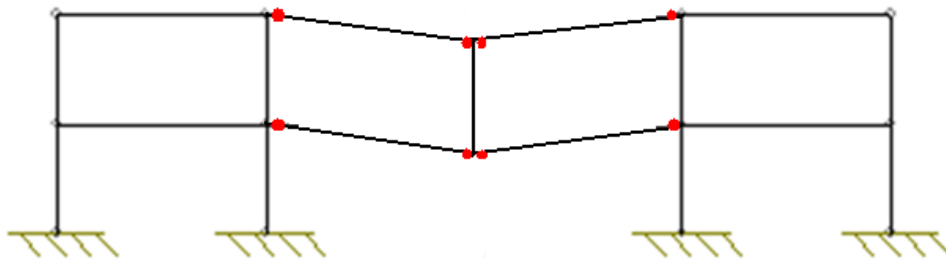


Figure 8 : Mécanisme plastique dans la partie directement affectée

Il faut remarquer que sur la Figure 4, il n'y a, durant la phase 2, qu'un seul changement de pente visible. C'est un cas simplifié, il y a en réalité autant de changement de pente qu'il y a de rotules à former dans la partie directement affectée avant de former le mécanisme plastique (dans le petit portique représenté à la Figure 8, il y aurait au total huit changements de pente).

L'effort  $N_{lost}$  qui correspond à l'atteinte du mécanisme plastique dans la partie directement affectée est appelé  $N_{pl,lost}$ .

Pour obtenir cet effort  $N_{pl,lost}$ , il faut écrire l'égalité des travaux intérieurs et extérieurs ( $n$  = nombre d'étages au dessus de la colonne perdue):

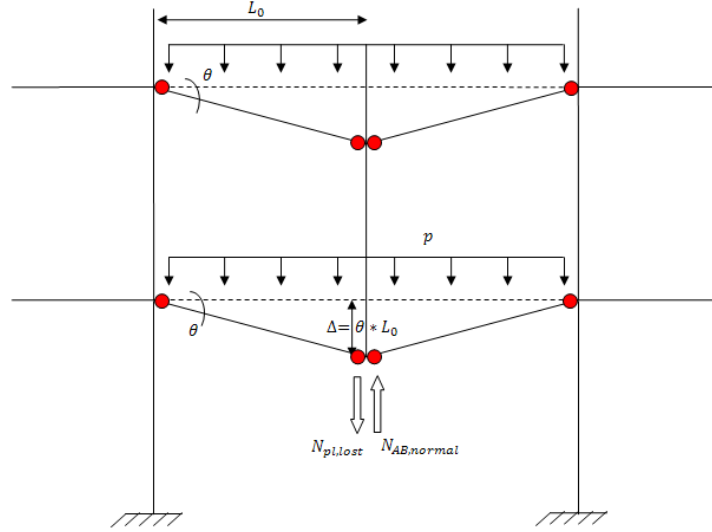


Figure 9 : Détermination de  $N_{pl,lost}$

$$n * 4\theta * M_{pl,poutre} = n * pL_0^2 * \theta + N_{pl,lost} * \theta * L_0 - N_{AB,normal} * \theta * L_0$$

$$n4M_{pl,poutre} = npL_0^2 + N_{pl,lost}L_0 - N_{AB,normal}L_0$$

En première approximation, on peut écrire :

$$N_{AB,normal} \sim npL_0$$

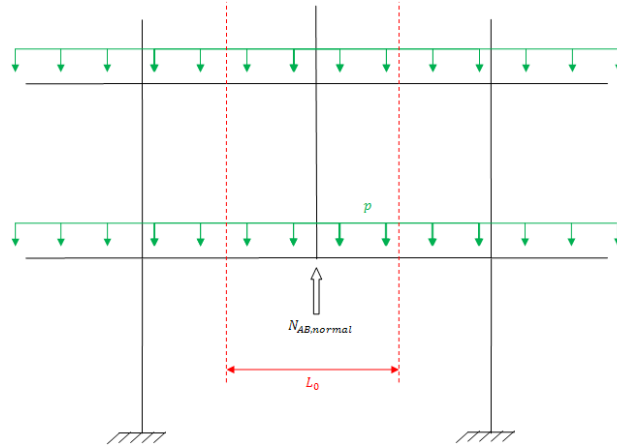


Figure 10 : Approximation de  $N_{AB,normal}$

Finalement, l'expression des travaux virtuels se simplifie et donne l'expression de  $N_{pl,lost}$ :

$$N_{pl,lost} \sim \frac{n * 4M_{pl,poutre}}{L_0}$$

### PHASE 3

La phase 3 commence lorsque le mécanisme plastique est formé dans la partie directement affectée.

L'effort  $N_{lost}$  continue d'augmenter (donc l'effort  $N_{AB}$  de diminuer) et le déplacement  $\Delta_A$  augmente beaucoup plus rapidement puisqu'il n'y a plus de rigidité au premier ordre. Sous l'effet de ces grands déplacements naissent des efforts membranaires dans la poutre inférieure de la partie directement affectée (aussi appelée « poutre membranaire »). Ce sont donc les effets du second ordre qui apportent une rigidité nouvelle au système. Voilà pourquoi la courbe  $N_{AB} - \Delta_A$ , après s'être incurvée vers le bas durant la phase 2 (=perte de rigidité due à la formation de rotules dans la partie directement affectée), s'incurve vers le haut durant la phase 3 (=nouvelle rigidité qui apparaît grâce aux efforts membranaires qui naissent dans la poutre inférieure).

Les phases 2 et 3 ont été étudiées de manière plus précise dans les deux thèses qui ont été réalisées à l'Université de Liège, par Messieurs Demonceau [2] et Hai [4]. Tandis que la thèse de L.N.N. Hai [4] se concentrait sur les phénomènes qui apparaissent dans la structure durant la phase 2, J.-F. Demonceau [2] s'est quant à lui concentré sur la phase 3. Les deux paragraphes suivants présentent rapidement les développements principaux de chacune de ces deux thèses.

#### 1.4 Etude de la phase 2

Pour étudier le comportement du portique durant la phase 2, L.N.N. Hai [4] a développé une sous-structure, qui permet l'étude de la partie directement affectée durant la phase 2. Cette sous-structure est décrite ci-dessous (Figure 11):

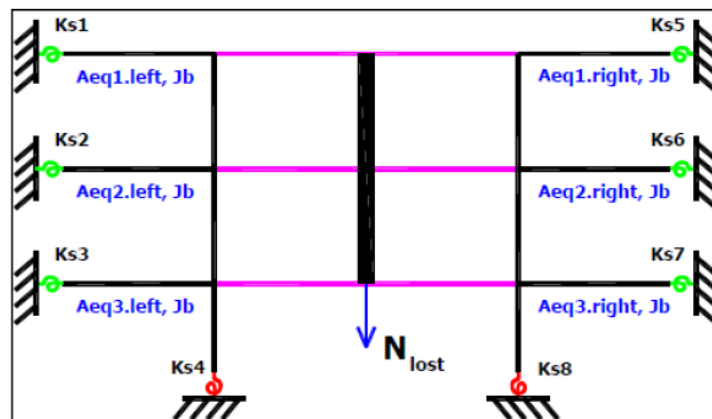


Figure 11 : Sous-structure pour l'étude de la phase 2 (HAI [4])

Les éléments à déterminer pour que tous les éléments de la sous-structure soient connus sont :

- Les ressorts rotationnels  $k_{si}$
- Les aires équivalentes  $A_{eq,i}$  (qui font office de ressorts horizontaux en réalité)

Des méthodes sont données dans la thèse de L.N.N. Hai [4] pour déterminer ces éléments. Nous ne reviendrons pas sur ces méthodes dans ce travail de fin d'études, elles ont été validées dans celui de François Muller [5], qui les a appliquées à plusieurs portiques.

### 1.4.1 Méthode d'analyse

Une fois la sous-structure définie, une analyse élastique-plastique, géométriquement linéaire est menée sur celle-ci. La démarche de l'analyse est la suivante :

- Faire agir une force unitaire ( $N_{lost} = 1 \text{ kN}$ ) sur la sous-structure
- Calculer les déplacements et efforts internes dans la sous-structure sous ce chargement. Ce calcul se fait via le logiciel OSSA2D, qui réalise une analyse élastique au premier ordre. Ce calcul, mené par un logiciel, pourrait être réalisé à la main en utilisant la méthode des déplacements
- Obtenir la charge  $N_{lost(1)}$ , c'est-à-dire la valeur de  $N_{lost}$  qui provoque la première rotule dans la sous-structure. Cela se fait aisément étant donné que les efforts en fin de phase 1 sont connus et que les efforts internes dus à  $N_{lost} = 1 \text{ kN}$  lui sont proportionnels
- Modifier la sous-structure : une rotule est insérée dans la sous-structure, là où la première rotule vient de se former
- Faire agir une force unitaire ( $N_{lost} = 1 \text{ kN}$ ) sur la nouvelle sous-structure, obtenir les efforts internes et déplacements via OSSA2D, déterminer  $N_{lost(2)}$ , effort pour lequel on crée la deuxième rotule, ...
- Ainsi de suite jusqu'à arriver à la formation du mécanisme plastique. Notons que l'on doit, à chaque étape, faire la somme des efforts internes

Remarque : Vu qu'à chaque étape, la rotule plastique formée est remplacée par une rotule parfaite dans la sous-structure, cela sous-entend que le moment dans cette rotule plastique sera toujours égal à  $M_{pl,beam}$ , qu'il ne diminuera pas. Cela sera le cas uniquement s'il n'y a pas d'interaction M+N au droit de cette rotule, ce qui devra être vérifié par la suite

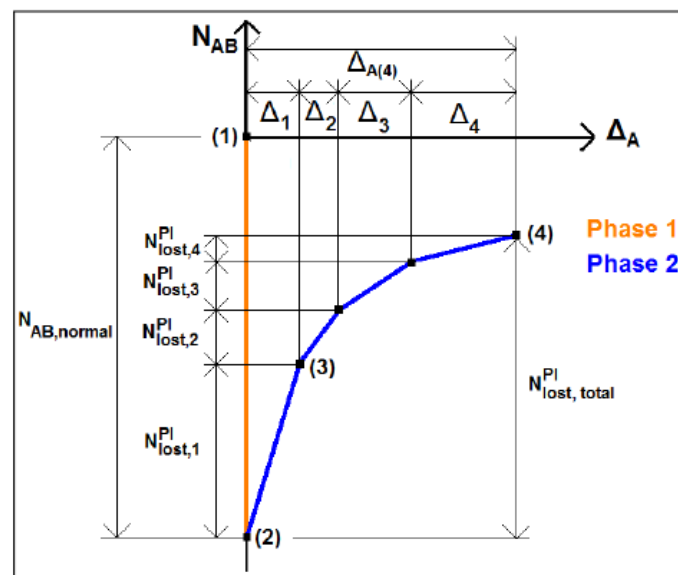


Figure 12 : Méthode d'analyse pour la phase 2 (MULLER [5])

### 1.4.2 Éléments-clés

Les éléments-clés à vérifier durant la phase 2 sont les suivants :

- La poutre supérieure
- La poutre inférieure
- Les colonnes adjacentes

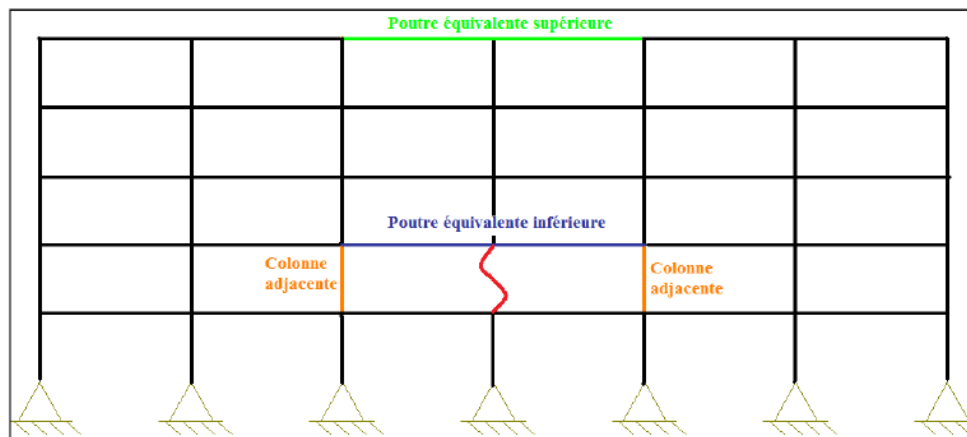


Figure 13 : Éléments-clés à vérifier durant la phase 2 (MULLER [5])

Les autres éléments de la structure sont supposés ne pas être très affectés par la perte de la colonne durant la phase 2.

- La poutre supérieure est mise en compression durant la phase 2. Cela est dû au développement d'un effet voûte dans le portique, sous l'effet des déplacements horizontaux de la partie indirectement affectée, qui vient « appuyer » sur la partie directement affectée
- La poutre inférieure est mise en traction durant la phase 2. C'est le corollaire de la mise en compression de la poutre supérieure
- Les colonnes adjacentes sont surcomprimées (les charges qui passaient auparavant dans la colonne qui disparaît sont redirigées vers ces colonnes) et subissent de plus des moments de flexion importants

Les modes de ruine qui sont à vérifier sont les suivants :

- Manque de ductilité des rotules plastiques : si elles se forment dans la poutre, la section de celle-ci doit avoir la classe de ductilité requise (classe 1) et si elles se forment dans les assemblages, ceux-ci doivent être dimensionnés de manière à pouvoir subir une rotation suffisante (en plus de pouvoir supporter les efforts qui leurs sont appliqués)
- Flambement de la poutre supérieure sous la charge de compression dû à l'effet voûte
- Résistance en traction de la poutre inférieure et de ses assemblages
- Flambement des colonnes adjacentes, soumises non seulement à un effort normal plus important, mais aussi à des moments non négligeables

**Dans le cadre de ce travail de fin d'études, il sera donc supposé que l'état de la structure est connu à la fin de la phase 2, c'est-à-dire que tant les efforts internes (M, N, T) que les déplacements ont été établis analytiquement de manière correcte.**

### 1.5 Etude de la phase 3

La phase 3 débute lorsque le mécanisme plastique dans la partie directement affectée s'est totalement formé et que les efforts membranaires dans la poutre inférieure apparaissent.

Dans sa thèse, J.-F. Demonceau [2] a mis au point une sous-structure qui permet d'obtenir la courbe  $Q - \Delta_A$  de la phase 3. Cette sous-structure ne contient que la poutre membranaire (Figure 14) :

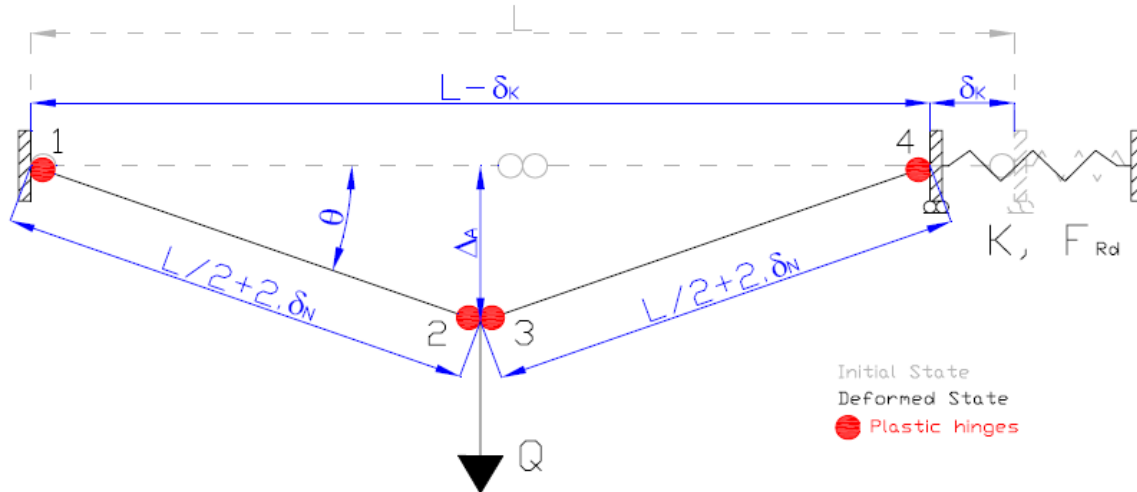


Figure 14 : Sous-structure pour l'étude de la phase 3 (DEMONCEAU [2])

Notons que les charges réparties qui agissent normalement sur cette poutre n'ont pas été représentées sur le schéma ci-dessus. J.-F. Demonceau [2] a en effet démontré que ces charges réparties pouvaient être négligées, sans que les résultats en soient grandement affectés.

La partie indirectement affectée, sur laquelle vient s'ancrer cette poutre en traction, est représentée dans la sous-structure par un ressort, dont les caractéristiques sont  $K$ , sa raideur (kN/m) et  $F_{Rd}$ , sa résistance (kN). Ces deux valeurs peuvent être déterminées analytiquement, comme nous le verrons par la suite.

D'autre part, sous l'effet de la traction qui naît dans cette poutre durant la phase 3, les rotules plastiques vont s'allonger. Leur raideur extensionnelle est notée  $K_N$ . Il faut noter que ce  $K_N$  est nettement inférieur à la valeur de  $EA/L$  de la poutre, puisque l'allongement total est principalement dû à l'allongement des rotules plastifiées, et très peu à l'allongement de la partie de la poutre restée élastique. Cette valeur de  $K_N$  ne peut pas encore à l'heure actuelle être déterminée analytiquement, et doit être extraite d'une modélisation numérique de la structure.

#### 1.5.1 Méthode analytique

J.-F. Demonceau [2] a mis au point dans sa thèse une méthode analytique permettant d'obtenir la courbe  $Q - \Delta_A$  au cours de la phase 3. Cette méthode est basée sur une analyse rigide-plastique, puisque nous ne sommes intéressés ici que par la partie de la courbe où toutes les rotules dans la partie directement affectée sont formées, il n'est pas intéressant d'observer la séquence de formation de ces rotules.



Equation 1 : équilibre des forces à l'extrémité de la poutre

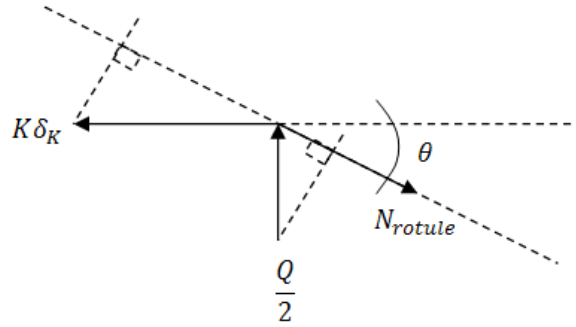


Figure 15 : Equilibre des forces à l'extrémité de la partie directement affectée

$$N_{rotule} = K\delta_K \cos \theta + \frac{Q}{2} \sin \theta$$

Equation 2 : compatibilité des déplacements :

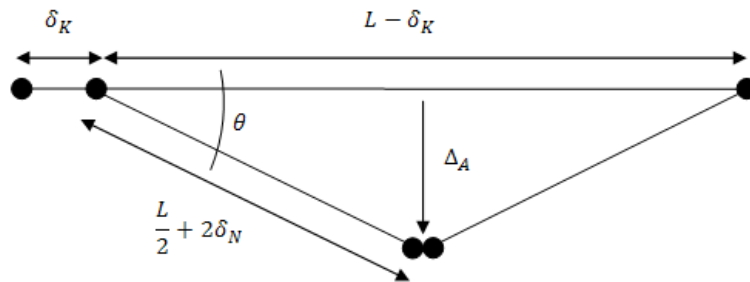


Figure 16 : Compatibilité des déplacements

$$L - \delta_K = 2 \cos \theta \left( \frac{L}{2} + 2\delta_N \right)$$

$$\delta_K = L(1 - \cos \theta) - 4\delta_N \cos \theta$$

Equation 3 : compatibilité des déplacements :

$$\Delta_A = \sin \theta \left( \frac{L}{2} + 2\delta_N \right)$$

Equation 4 : travaux virtuels

$$Q\Delta_A - K\delta_K^2 = 4\theta M_{rotule} + 4\delta_N N_{rotule}$$

$$Q = \frac{4\theta M_{rotule} + 4\delta_N N_{rotule} + K\delta_K^2}{\Delta_A}$$

Equation 5 : interaction  $M_{rotule} - N_{rotule}$

Les formules d'interactions ci-dessous proviennent de la thèse de M. Villette [6] :

*pour  $N_{rotule} < A_w f_y$*

$$M_{rotule} = M_{pl,beam} * \left( 1 - \left( \frac{N_{rotule}}{N_{pl}} \right)^2 \frac{1}{2 \left( \frac{h - t_f}{h - 2t_f} \right) \left( 1 - \frac{A_w}{A} \right) \frac{A_w}{A} + \left( \frac{A_w}{A} \right)^2} \right)$$

*pour  $N_{rotule} > A_w f_y$*

$$M_{rotule} = b t_f (h - t_f) f_y - \frac{1}{2} (N_{rotule} - A_w f_y) \left( h - 2t_f + \frac{N_{rotule} - A_w f_y}{2 b t_f} \right)$$

REMARQUE : dans la deuxième formule (pour  $N_{rotule} > A_w * f_y$ ), on ne tient pas compte de la présence des congés de raccordement présents dans le profilé en double T. Cela provoque une discontinuité dans le graphe d'interaction M-N (courbe en bleu sur la Figure 17). Pour tenir compte des congés de raccordement et de ce fait, supprimer la discontinuité dans le graphe d'interaction M+N, on modifie la courbe de manière à avoir M=0 quand on atteint le  $N_{pl}$  (courbe en rouge sur la Figure 17) :

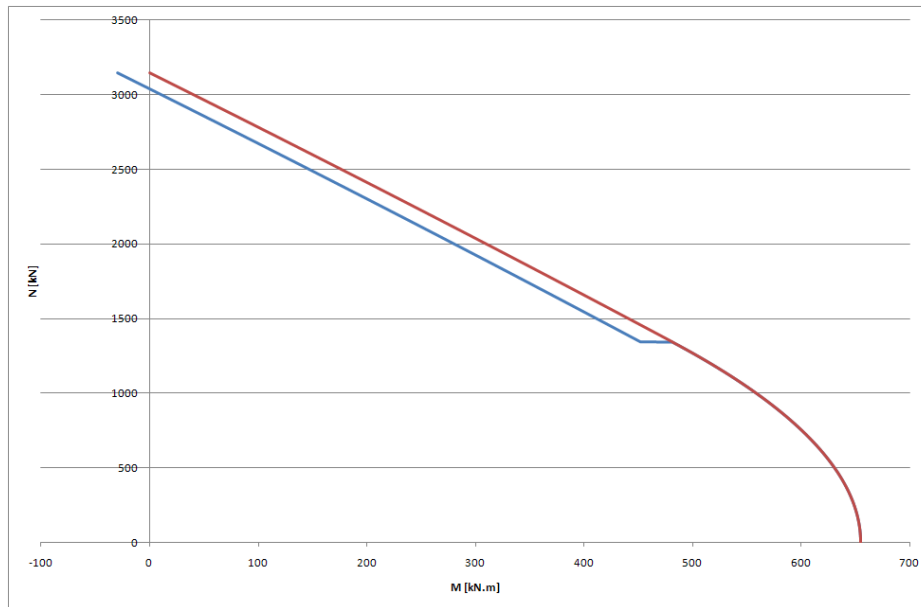


Figure 17 : Prise en compte des congés de raccordement dans le graphe M-N

Le principe de la méthode analytique est que, pour chaque valeur de  $\theta$ , on puisse déterminer les inconnues suivantes :  $Q$ ,  $N_{rotule}$ ,  $M_{rotule}$ ,  $\delta_K$  et enfin,  $\Delta_A$ . Les inconnues, pour un  $\theta$  donné, sont donc au nombre de 5. Nous disposons ci-dessus de 5 équations, le système peut donc être résolu (via un logiciel de résolution mathématique, comme Mathematica ou EES, qui sera détaillé plus loin dans ce travail de fin d'études).

### 1.5.2 Modes de ruine à vérifier

- Ductilité des rotules : la déformée continue de s'amplifier, il faut toujours vérifier que les rotules sont capables de reprendre cette déformation sans se rompre
- Résistance en traction de la poutre membranaire ainsi que de ses assemblages : en fonction de la raideur latérale de la partie indirectement affectée, l'effort de traction dans la poutre membranaire sera plus ou moins grand :
  - Si  $K$  est grand, les efforts dans la poutre membranaire seront importants, et le besoin en ductilité sera moindre puisque la poutre ne sera pas libre de se déformer comme elle l'entend
  - Si  $K$  est faible, la poutre membranaire ne dispose pas de suffisamment d'ancrages latéraux que pour voir se développer un effort de traction important. Le besoin en résistance est moindre, mais le besoin de ductilité est accru, puisque la poutre est libre de se déformer

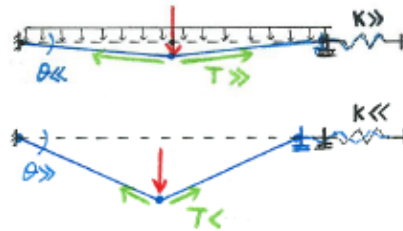


Figure 18 : Effort de traction dans la poutre membranaire fonction de la raideur  $K$  (COMELIAU [1])

- Formation d'un mécanisme plastique dans la partie indirectement affectée : si la partie indirectement affectée ne peut plus assurer son rôle d'ancrage pour la poutre membranaire, la structure ne dispose plus d'aucune rigidité et s'effondre

### 1.5.3 Evolution des efforts dans la partie indirectement affectée durant la phase 3

Comme dit dans la thèse de L.N.N. Hai [4], lors de la phase 3, c'est le niveau endommagé qui reprend les efforts horizontaux dus à la naissance d'effets membranaires dans la poutre inférieure. Le niveau endommagé est composé des colonnes situées au même niveau que la colonne disparue, et des poutres au-dessus et en-dessous de ces dites colonnes (Figure 19) :

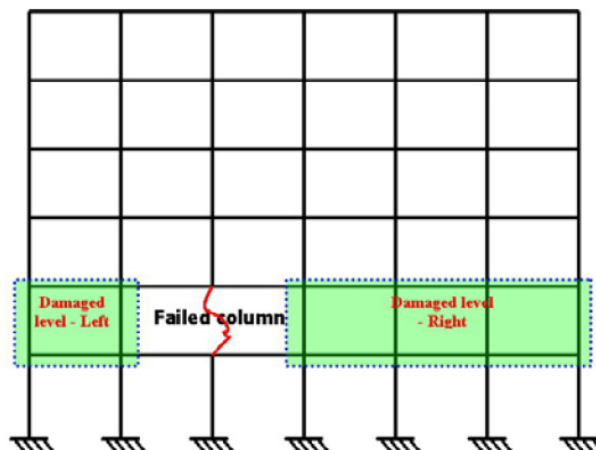


Figure 19 : Définition du niveau endommagé (HAI [4])

Les colonnes de l'étage endommagé sont classées selon 3 catégories (Figure 20) :

- La colonne adjacente (« beside column »): la plus proche de la partie directement affectée
- Les colonnes intermédiaires (« inter column »)
- La colonne extérieure (« side column ») : la plus éloignée de la partie directement affectée

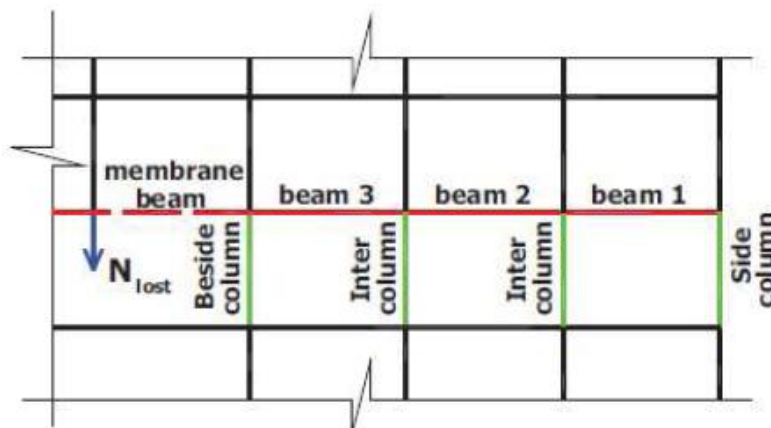


Figure 20 : Définition des colonnes extérieure, adjacente et intermédiaires (HAI [4])

L'évolution des efforts dans ces colonnes a été explicitée dans la thèse de L.N.N. Hai [4], et les résultats sont les suivants (Figure 21) :

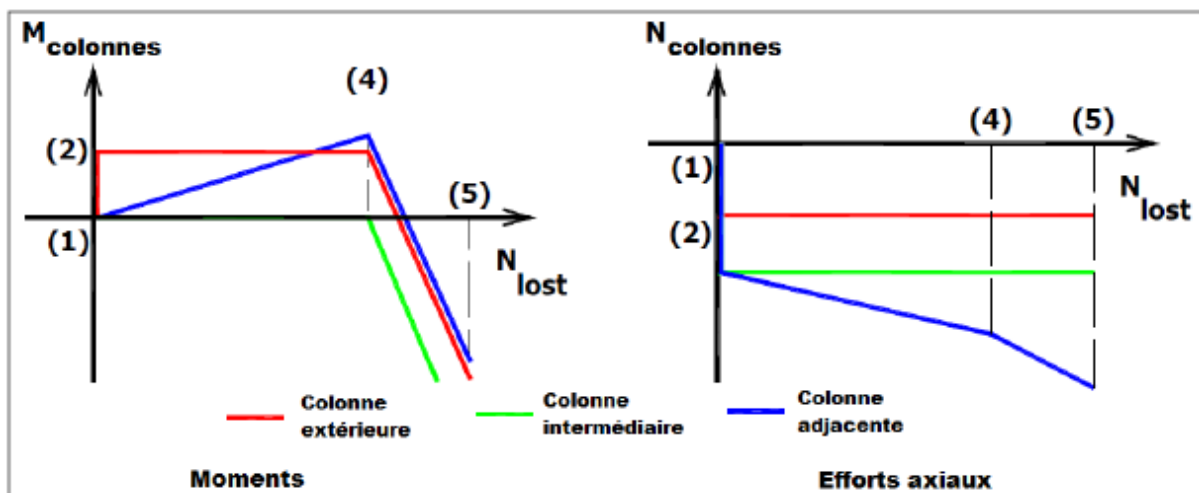


Figure 21 : Evolution des efforts dans les colonnes de l'étage endommagé (HAI [4])

Les notations (1), (2), (3), (4) et (5) de la Figure 21 se rapportent aux étapes définies à la Figure 4 ((2) = fin de la phase 1, (4) = fin de la phase 2, (5) = fin de la phase 3)

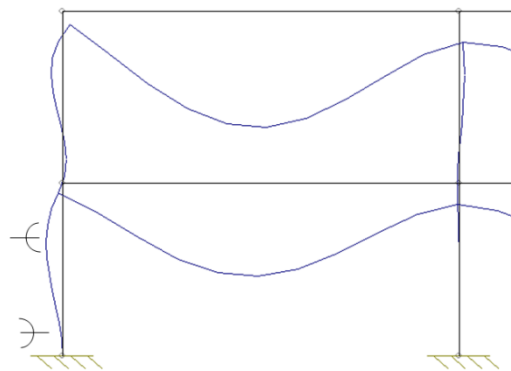
Quand la structure est normalement chargée (=point (2)), c'est dans la colonne extérieure que s'applique le moment le plus important. Le moment dans les autres colonnes peut être considéré comme nul à ce moment. Concernant l'effort normal, il semble logique qu'il soit plus faible dans la colonne extérieure que dans les colonnes intermédiaires et dans la colonne adjacente, puisque la colonne extérieure ne reprend qu'une moitié de portée de poutre tandis que les autres reprennent les charges réparties qui agissent sur une portée de poutre entière.

Durant la phase 2 (=du point (2) au point (4)), les efforts internes (tant effort normal que moment) dans les colonnes intermédiaires et dans la colonne extérieure restent constants, la seule colonne à être influencée par la phase 2 est la colonne extérieure. C'est pour cela qu'elle est la seule à rentrer dans la sous-structure définie par L.N.N. Hai [4] pour décrire la phase 2 (Figure 11).

A la fin de la phase 2, les efforts internes dans toutes les colonnes sont connus : pour la colonne extérieure et les colonnes intermédiaires, ils sont égaux à ceux en fin de phase 1, et pour la colonne adjacente, ils ont été calculés en étudiant la sous-structure de la phase 2 développée par L.N.N. Hai [4].

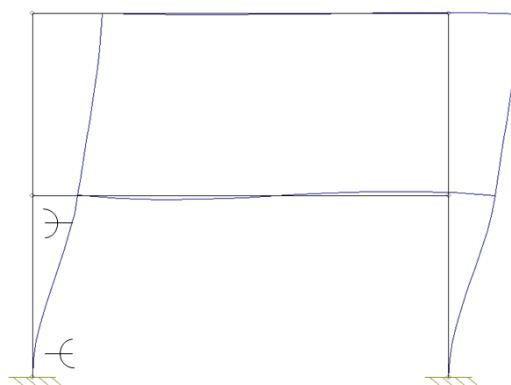
Durant la phase 3 (=du point (4) au point (5)), toutes les colonnes de la partie indirectement affectée voient leur moment modifié, puisqu'une force horizontale vient s'appliquer à leur sommet. Notons que les moments « s'inversent » dans les colonnes.

En effet, si l'on regarde par exemple la colonne extérieure, à la fin de la phase 1, sous les charges uniformément réparties, sa déformée est du type (Figure 22):



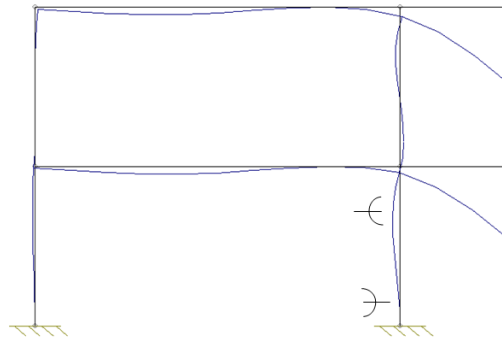
**Figure 22 : Déformée de la colonne extérieure sous charges réparties**

Par contre, sous une charge horizontale, sa déformée sera du type (Figure 23):



**Figure 23 : Déformée des colonnes sous charge horizontale**

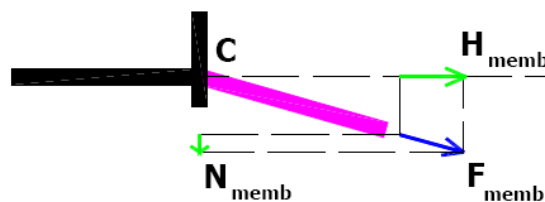
L'inversion de moment est alors bien compréhensible. Pour la colonne adjacente, l'idée est la même : durant la phase 2, la colonne adjacente se déforme comme suit (Figure 24):



**Figure 24 : Déformation de la colonne adjacente durant la phase 2**

Ensuite, durant la phase 3, sa déformée est similaire à celle décrite à la Figure 23. L'inversion de moment se comprend donc bien aussi pour ce cas-là.

Il est à noter que l'application de cette force horizontale au sommet des colonnes de l'étage endommagé durant la phase 3 ne modifie pas l'effort normal dans les colonnes intermédiaires et extérieures. Par contre, l'effort normal dans la colonne adjacente continue lui, d'augmenter. Cela est dû à la composante verticale de l'effort de traction qui naît dans la poutre inférieure de la partie directement affectée (Figure 25) :



**Figure 25 : Compression supplémentaire dans la colonne adjacente (HAI [4])**

#### 1.5.4 Détermination analytique de $K$

Nous exposons ici la théorie qui est développée dans la thèse de L.N.N. Hai [4].

Comme dit précédemment, L.N.N. Hai [4] expose dans sa thèse que le seul étage qui participe à la reprise de l'effort horizontal dû au développement d'efforts membranaires dans la poutre inférieure est l'étage endommagé, c'est-à-dire l'étage situé au niveau de la colonne qui disparaît. Cet étage est pour rappel composé des colonnes au même niveau que la colonne endommagée, et des poutres juste au-dessus de ces colonnes.

La sous-structure proposée par L.N.N. Hai [4] pour déterminer la raideur transversale  $K$  de la partie indirectement affectée est donc la suivante (Figure 26):

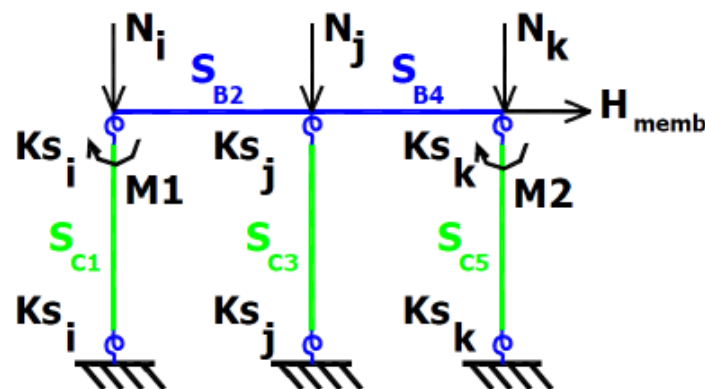


Figure 26 : Sous-structure pour la détermination de  $K$  (HAI [4])

La rigidité transversale de la partie indirectement affectée va donc être fonction :

- De la raideur transversale des colonnes de l'étage endommagé  $S_{ci}$
- De la raideur extensionnelle des poutres de l'étage endommagé  $S_{Bi}$

Le reste de la partie indirectement affectée est prise en compte par l'intermédiaire des ressorts rotationnels aux extrémités des colonnes et par les efforts  $N_i$  qui s'appliquent sur cette sous-structure.

##### 1.5.4.1 Détermination des $k_s$

Les ressorts rotationnels représentent la restreinte apportée par le restant de la structure à l'étage endommagé. La démarche de détermination de ces  $k_s$  est identique à celle utilisée pour déterminer les valeurs des ressorts rotationnels aux extrémités de la sous-structure déterminée pour l'étude de la phase 2 (Figure 11).

Les éléments qui sont pris en compte dans la détermination du ressort rotationnel au point C (considéré ici comme l'extrémité droite de la poutre BC) sont représentés sur la Figure 27 et sont de deux types :

- Les éléments primaires, en bleu sur la figure : ce sont les éléments qui touchent directement le point C
- Les éléments secondaires, en vert sur la figure : ce sont ceux qui touchent l'autre extrémité des éléments primaires

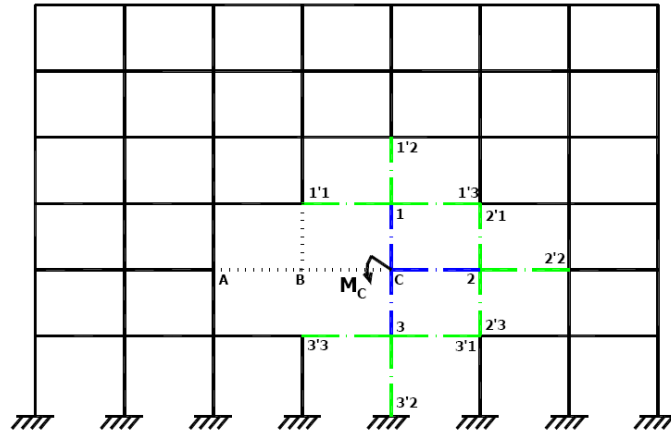


Figure 27 : Définition des éléments primaires et secondaires (extrémité d'une poutre) (HAI [4])

Si c'est une restrainte au sommet d'une colonne qui doit être déterminée, comme c'est le cas pour l'étude du niveau endommagé, les éléments qui doivent être pris en compte dans la détermination du  $k_s$  sont les suivants (Figure 28) :

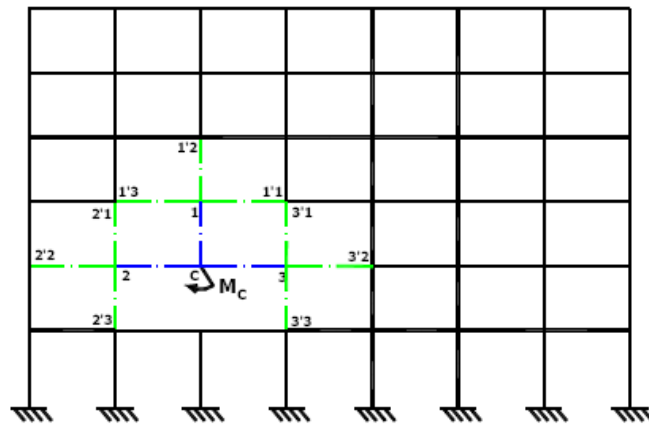


Figure 28 : Définition des éléments primaires et secondaires (sommet d'une colonne) (HAI [4])

Maintenant que les éléments qui interviennent dans cette restrainte rotationnelle sont connus, le calcul des  $k_s$  s'effectue de réduction en réduction. La Figure 29 représente la réduction pour le cas de la Figure 27.

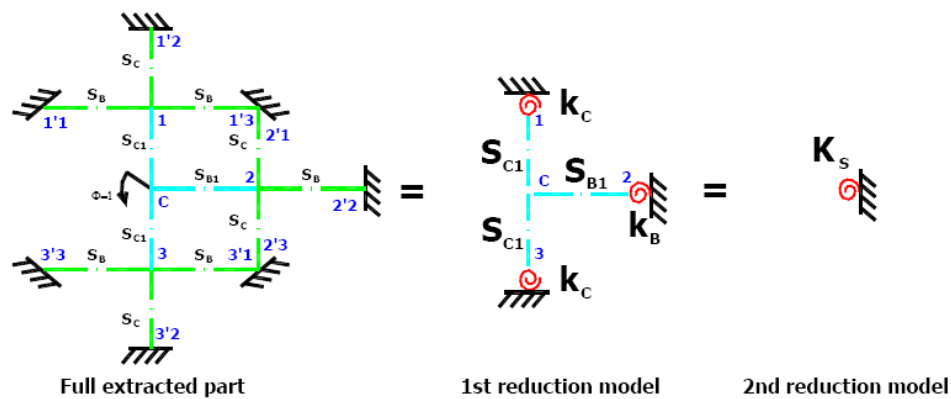


Figure 29 : Réductions pour le calcul de  $k_s$  (HAI [4])



Etapes du calcul de  $k_s$  :

Etape 1 : Calcul de la rigidité des éléments secondaire  $S_C$  et  $S_B$

Si les éléments secondaires sont supposés encastrés à une de leurs extrémités (l'autre étant connectée aux éléments primaires), alors la rigidité de l'élément secondaire est donnée par :

$$S_B = 4 * \frac{EI_B}{L_B}$$

Si les éléments secondaires sont supposés simplement appuyés à leur extrémité, cette rigidité devient :

$$S_B = 3 * \frac{EI_B}{L_B}$$

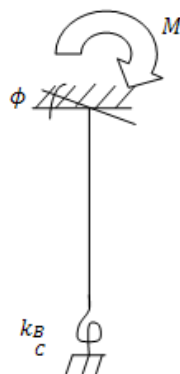
Etape 2 : Calcul des ressorts rotationnels  $k_C$  et  $k_B$  placés aux extrémités des éléments primaires, remplaçant les éléments secondaires

Ces ressorts sont calculés en additionnant les raideurs des éléments secondaires connectés à l'élément primaire étudié.

$$k_B = \sum_{i=1}^3 S_{B_i}$$

Etape 3 : Calcul de la rigidité des éléments secondaires  $S_{C1}, S_{B1}$ , en tenant compte de la présence des ressorts rotationnels à leur extrémité

$$S_{C1} = \frac{M}{\phi} = \frac{4EI}{L} \frac{Lk_B + 3EI}{Lk_B + 4EI}$$



**Figure 30 : Raideur flexionnelle d'un élément avec un ressort rotationnel à une extrémité**

Etape 4 : Calcul du ressort rotationnel  $k_s$

Il suffit maintenant de sommer les valeurs de  $S_{C1}$  qui entourent l'endroit du ressort.

#### 1.5.4.2 Détermination des raideurs

La raideur transversale d'une colonne qui possède des ressorts rotationnels à ses deux extrémités est donnée par :

$$K_{1st} = \frac{F}{d} = \frac{12EI}{L^2} \cdot \frac{Lk_1k_2 + (k_1 + k_2)EI}{L^2k_1k_2 + (k_1 + k_2)4EIL + 12E^2I^2}$$

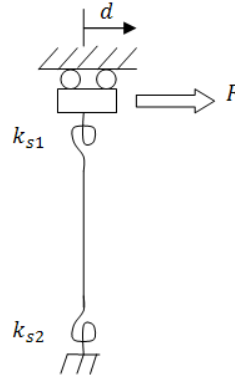


Figure 31 : Colonne avec ressorts rotationnels à ses deux extrémités

Pour tenir compte du fait que cette colonne peut être comprimée par un effort normal  $N$ , cette raideur transversale au premier ordre est réduite de la valeur  $N/L$  :

$$K_{2nd} = K_{1st} - \frac{N}{L}$$

Concernant la raideur extensionnelle des poutres, elle est simplement donnée par  $K_B = \frac{EA}{L}$ .

#### 1.5.4.3 Assemblage des raideurs

L'assemblage de ces différentes raideurs se fait ensuite comme suit (Figure 32 et Figure 33):

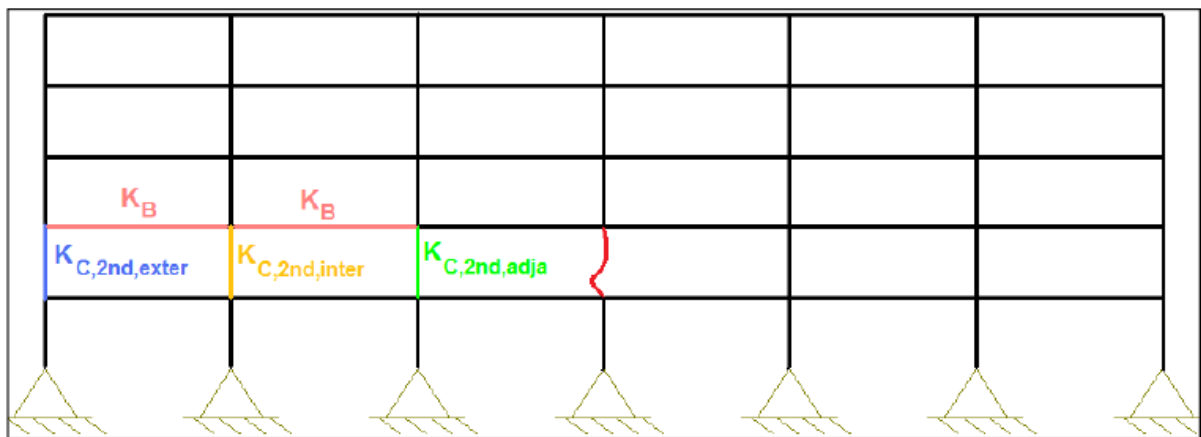


Figure 32 : Raideurs des différents éléments de l'étage endommagé (MULLER [5])

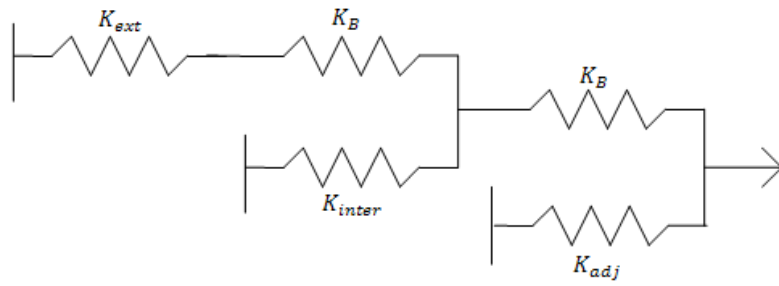


Figure 33 : Assemblage des raideurs

$$K_{gauche} = K_{adj} + \frac{1}{\frac{1}{K_B} + \frac{1}{K_{inter} + \frac{1}{\frac{1}{K_{ext}} + \frac{1}{K_B}}}}$$

L'assemblage peut être simplifié en considérant que l'allongement des poutres est négligeable vis-à-vis de la déformée transversale des colonnes:

$$K_{gauche} = \sum_{i=1}^n S_{Ci}$$

Il ne faut pas oublier de procéder de la même manière pour la partie droite, et la raideur totale  $K$  s'exprime alors comme suit (puisque le même effort passe par les ressorts  $K_{gauche}$  et  $K_{droite}$ , ils sont en série):

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_{gauche}} + \frac{1}{K_{droite}} \rightarrow K = \frac{K_{gauche} * K_{droite}}{K_{gauche} + K_{droite}}$$

### 1.5.5 Détermination analytique de $F_{rd}$

Nous reprenons ici les développements effectués dans le cadre de la thèse de L.N.N. Hai [4].

#### 1.5.5.1 Résistance d'une colonne seule

Une colonne soumise à une force horizontale en tête, ainsi qu'à un effort de compression, atteint la ruine soit par plastification de ses deux extrémités (courbe en trait plein sur la Figure 34), soit avant, par instabilité (couplage de l'effort de compression et des moments) (courbe en trait pointillés sur la Figure 34) :

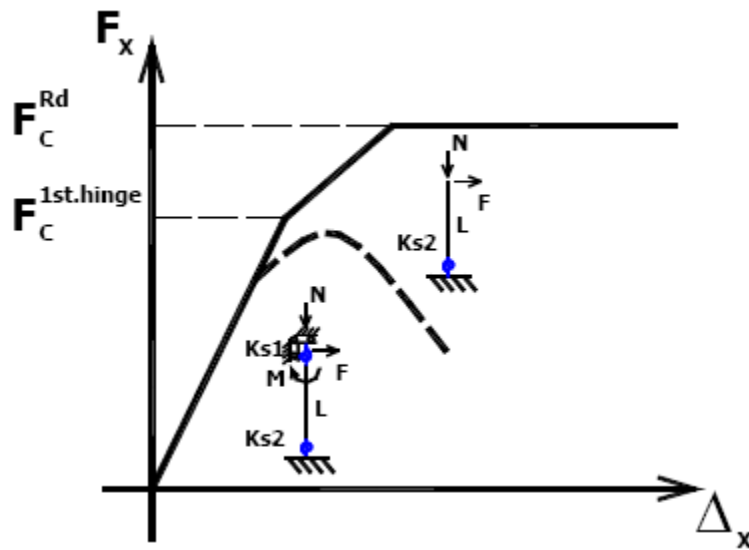


Figure 34 : Effort et déplacement en tête de colonne (HAI [4])

La formule donnée dans la thèse de L.N.N. Hai [4] pour définir  $F_C^{Rd}$  est la suivante :

$$F_C^{Rd} = \frac{(M_{p,1} + M_{p,2})K_{C,2nd}}{K_{C,2nd}L_C + N}$$

$M_{p,1}$  et  $M_{p,2}$  sont les moments plastiques résistants des deux extrémités de la colonne. Notons qu'ils doivent prendre en compte le fait que la colonne est comprimée, et que même si l'on arrive à plastifier la section, la valeur sera moindre que  $M_{pl}$ , à cause de l'interaction M+N. Si ces moments résistants sont supposés égaux, et en tenant compte du fait que  $K_{2nd} = K_{1st} - \frac{N}{L}$ , la formule devient :

$$F_{C,Rd} = \frac{2M_{pl,N}}{L} \cdot \frac{K_{C,2nd}}{K_{C,1st}} < \frac{2M_{pl,N}}{L}$$

Cette formule traduit donc le fait que l'effort  $N$  appliqué en tête de colonne, en induisant des effets du second ordre, d'une part, réduit la raideur au premier ordre, et d'autre part, réduit aussi la résistance de la colonne, qui devrait valoir, au premier ordre,  $\frac{2M_{pl,N}}{L}$ .

### 1.5.5.2 Résistance de l'étage endommagé

L'effort horizontal  $H_{memb}$  qui est appliqué sur la totalité de l'étage endommagé, se répartit entre les différentes colonnes au prorata des raideurs de ces dernières. Chaque colonne reprend une valeur  $F_i$ , fraction de cette force  $H_{memb}$  :

$$\frac{F_i}{H_{memb}} = \frac{K_C^i}{\sum K_C} \rightarrow F_i = H_{memb} \frac{K_C^i}{\sum K_C}$$

La colonne la plus à risque est celle dont le rapport  $\frac{F_{rd,i}}{F_i}$ , pour un  $H_{memb}$  donné, est le plus faible. Le cas limite se présente lorsque cette valeur vaut 1. Cela se produit pour un effort  $H_{memb} = H_{memb,max}$  :

$$\frac{F_{rd,weakest}}{F_{weakest}} = 1 = \frac{F_{rd,weakest}}{H_{memb,max}} \cdot \frac{\sum K_C}{K_{C,weakest}}$$
$$H_{memb,max} = F_{rd,weakest} \cdot \frac{\sum K_C}{K_{C,weakest}}$$

L.N.N. Hai [4] conclut de plus dans sa thèse que cette colonne la plus faible est souvent la colonne adjacente.

## 1.6 Objectifs du travail de fin d'études

Dans un premier temps, l'objectif de ce travail de fin d'études sera de vérifier les théories mises au point pour modéliser la phase 3, et cela lorsque la partie indirectement affectée reste indéfiniment élastique. Cela sera l'objet du chapitre 2.

La première partie du chapitre 2 étudiera le modèle de la sous-structure de L.N.N. Hai [4] ainsi que celui de la sous-structure de J.-F. Demonceau [2] et en fera apparaître les faiblesses respectives, tandis que la deuxième partie de ce chapitre sera consacrée au développement d'une nouvelle méthode de calcul de la raideur élastique de cette partie indirectement affectée, ainsi que de la réponse  $Q - \Delta_A$  en phase 3.

Une fois le cas de la partie indirectement élastique finalisé, le chapitre 3 se concentrera sur la plastification progressive de cette partie.

La première partie du chapitre 3 présentera le comportement général d'un portique dont la partie indirectement affectée peut plastifier, et les différents phénomènes qui s'y produisent.

La deuxième partie s'attachera à développer une méthode analytique permettant de déterminer l'évolution de la raideur de cette partie indirectement affectée, en y suivant pas-à-pas la formation des rotules.

Finalement, la troisième et dernière partie du chapitre 3 mènera au développement d'une méthode permettant, une fois connue cette évolution de raideur transversale de la partie indirectement affectée, de déterminer le déplacement vertical du point situé au sommet de la colonne disparue. En effet, c'est l'importance de ce déplacement qui fixe les besoins en ductilité des assemblages poutres-poteaux de la partie directement affectée.

## 2 Partie indirectement affectée restant élastique

### 2.1 Introduction

Dans ce deuxième chapitre, la partie indirectement affectée est supposée indéfiniment élastique. Sa raideur transversale,  $K = K_{el}$ , est constante. Le but de ce chapitre est de mettre au point une méthode analytique simple permettant d'obtenir la valeur de cette raideur élastique ainsi que la courbe  $Q - \Delta_A$  durant la phase 3.

Pour ce faire, la **première partie** de ce chapitre sera consacrée à l'étude des théories déjà en place pour l'étude de la phase 3 lorsque la partie indirectement affectée est supposée rester élastique. La sous-structure de J.-F. Demonceau [2] sera étudiée, ainsi que la sous-structure représentant l'étage endommagé, qui a été développée par L.N.N. Hai [4] dans sa thèse et qui permet de déterminer analytiquement la raideur transversale  $K_{el}$ . Pour tester ces différentes méthodes de calcul de la phase 3, un portique très simple sera étudié. Cette première partie mettra en évidence les faiblesses des méthodes de calcul analytiques établies jusqu'ici.

La **seconde partie** du chapitre s'attachera donc à développer une nouvelle méthode analytique permettant d'obtenir cette valeur de la raideur élastique  $K_{el}$ . Cette nouvelle méthode sera testée sur le même portique très simple qui aura servi précédemment à l'étude des modèles de L.N.N. Hai [4] et J.-F. Demonceau [2].

La **troisième et dernière partie** consistera à tester la nouvelle méthode de calcul de  $K_{el}$  sur d'autres portiques que celui étudié précédemment.

### 2.2 Définition de la structure étudiée

La première structure à être étudiée en détails est la suivante (Figure 35) :

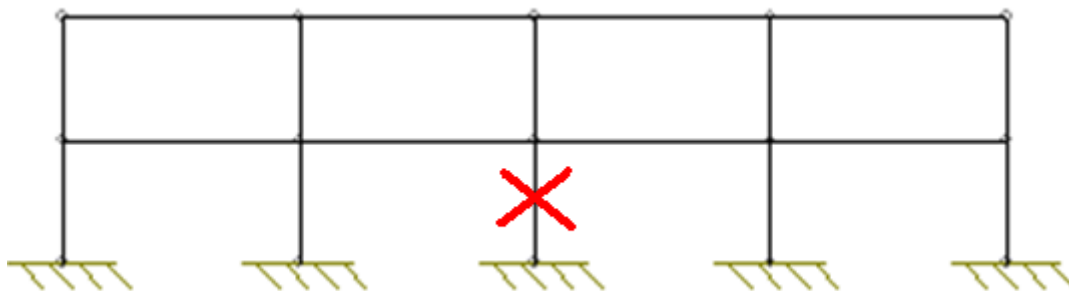


Figure 35 : Premier portique étudié

Ce portique est composé de 4 travées de 7 m de long, et de deux étages de 3,5 m de haut chacun. Les poutres sont des IPE550, les colonnes des HEB300. L'acier utilisé est du S235. La colonne qui disparaît est la colonne centrale du premier étage.

Ce portique est supposé, en réalité, faire partie d'un bâtiment, dont le système porteur est constitué de plusieurs portiques de ce type, distants les uns des autres de 5 m. Les charges appliquées sur ce bâtiment sont les suivantes :

- Le poids propre d'une dalle en béton :  $G = 6.25 \text{ kN/m}^2$
- Les charges variables :  $Q = 3 \text{ kN/m}^2$  (charge recommandée par l'Eurocode pour un bâtiment de bureaux)
- Le poids propre des éléments  $\left(7850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)$

En tenant compte du fait que l'espacement entre portiques est de 5 m, les charges réparties agissant sur un portique intérieur sont les suivantes :

$$(6.25 * 1.35 + 3 * 1.5) * 5 = 64.69 \text{ kN/m}$$

Sous ces charges réparties, l'effort de compression dans la colonne qui va disparaître est de 920.95 kN (Figure 36) :

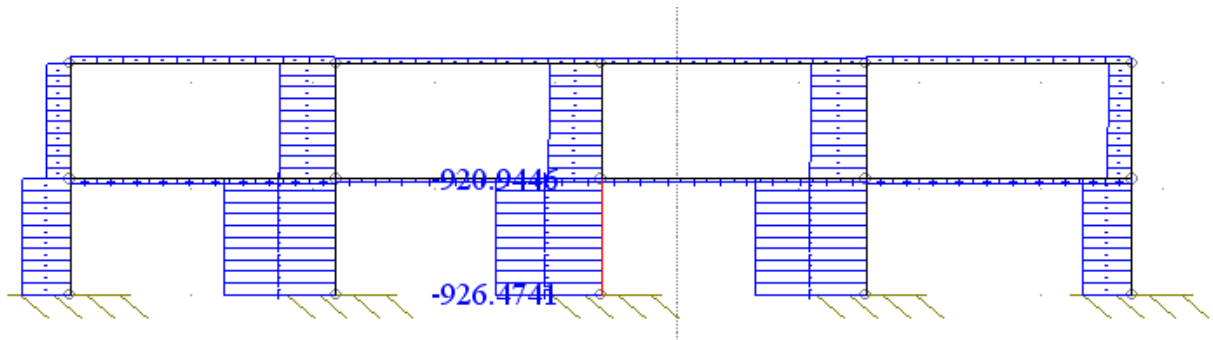


Figure 36 : Efforts N dans les éléments de la structure étudiée

### 2.3 Hypothèses de calcul par le logiciel FINELG

Dans l'ensemble de ce travail, les simulations numériques seront réalisées avec le logiciel FINELG. Les hypothèses de ce calcul sont les suivantes :

- Type d'analyse  
Analyse 2D, statique, complètement non linéaire (prise en compte des non-linéarités géométrique et matérielle).  
Puisque l'analyse est en 2D, le logiciel ne prend pas en compte les instabilités hors plan.
- Loi de matériaux  
Lorsque les éléments ne peuvent pas plastifier, si l'on veut qu'ils ne plastifient pas et restent indéfiniment élastiques (cas de la partie indirectement affectée dans le présent chapitre), la loi donnée au matériau est une loi élastique linéaire (Figure 37) :

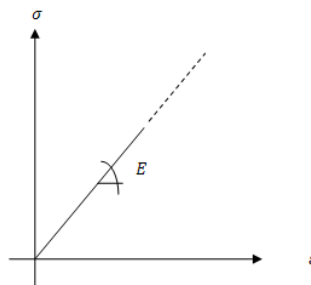


Figure 37 : Loi de matériau infiniment élastique

La seule caractéristique à fournir au logiciel est donc le module de Young du matériau,  $E$ .

Lorsque les éléments peuvent plastifier (cas des éléments de la partie directement affectée, ainsi que des éléments de la partie indirectement affectée, dans le chapitre 3 uniquement), la loi donnée au matériau est une loi élastique-parfaitement plastique, avec une ductilité supposée infinie (Figure 38) :

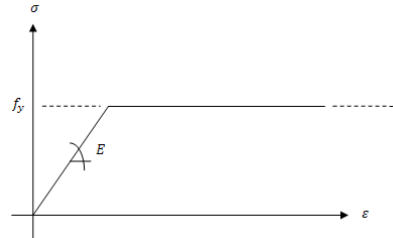


Figure 38 : Loi de matériau élastique parfaitement plastique avec ductilité infinie

Les caractéristiques à fournir au logiciel sont donc le module de Young du matériau  $E$ , mais aussi la limite d'élasticité  $f_y$ .

#### 2.4 Etude par la sous-structure de J.-F. Demonceau

Pour pouvoir utiliser le modèle de la sous-structure de J.-F. Demonceau [2], il faut connaître les valeurs de  $K$  et  $K_N$ . Ces valeurs ont été déterminées numériquement dans un premier temps, la détermination analytique du  $K$  sera discutée plus loin dans ce chapitre (le  $K_N$  pour rappel ne peut encore à l'heure actuelle être déterminé analytiquement).

Le  $K$  représente la raideur latérale de la partie indirectement affectée :  $K = \frac{dF_h}{d\delta_K}$

- $\delta_K$  vaut en réalité 2 fois le déplacement horizontal du point  $P$  (référence à la Figure 39), puisque, dans le modèle de J.-F. Demonceau [2], la partie indirectement affectée n'est représentée que par un seul ressort et que l'on est ici dans un cas symétrique.
- $F_h$  est la résultante horizontale des forces s'appliquant sur la partie indirectement affectée, au niveau de la poutre inférieure (au niveau du point  $P$ ). Pour la déterminer correctement, en n'omettant pas de considérer d'une part, l'inclinaison de l'effort normal de traction dans la poutre membranaire, et d'autre part, l'effort tranchant qui coexiste avec l'effort  $N$ , l'effort  $F_h$  est déterminé par équilibre des forces au nœud  $P$  (Figure 39) :

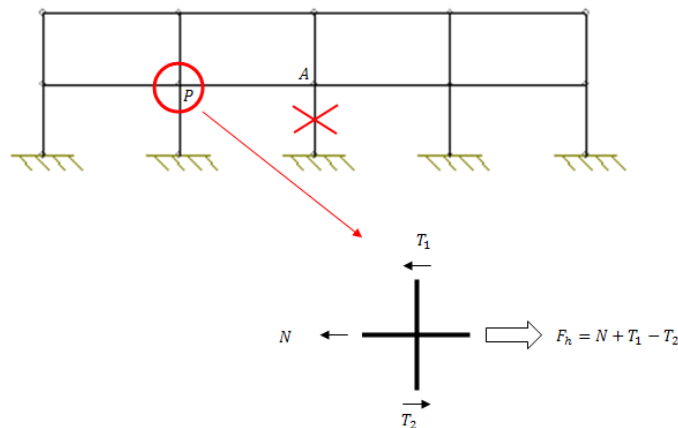


Figure 39 : Extraction de  $F_h$



Le  $K_N$  représente quant à lui la raideur axiale de la poutre possédant deux rotules plastiques à ses extrémités :  $K_N = \frac{dN}{d\delta_N}$

- $N$  est l'effort de traction dans la poutre membranaire
  - $\delta_N$  est l'allongement d'une rotule plastique
- Pour déterminer ce  $\delta_N$ , les développements s'appuient sur les déplacements des deux points extrémités de la poutre (Figure 40) (les notations A et P sont en accord avec la Figure 39):

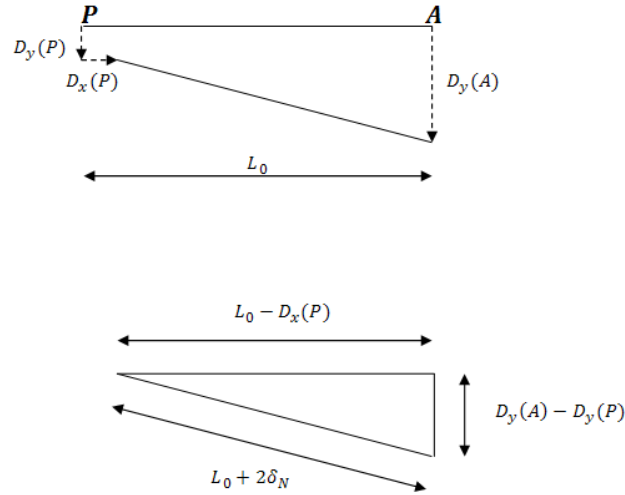


Figure 40 : Extraction de  $\delta_N$

$$L_0 + 2\delta_N = \sqrt{(L_0 - D_x(P))^2 + (D_y(A) - D_y(P))^2}$$

$$\delta_N = \frac{1}{2} \left( -L_0 + \sqrt{(L_0 - D_x(P))^2 + (D_y(A) - D_y(P))^2} \right)$$

Finalement, les résultats sont les suivants (Figure 41, Figure 42) :

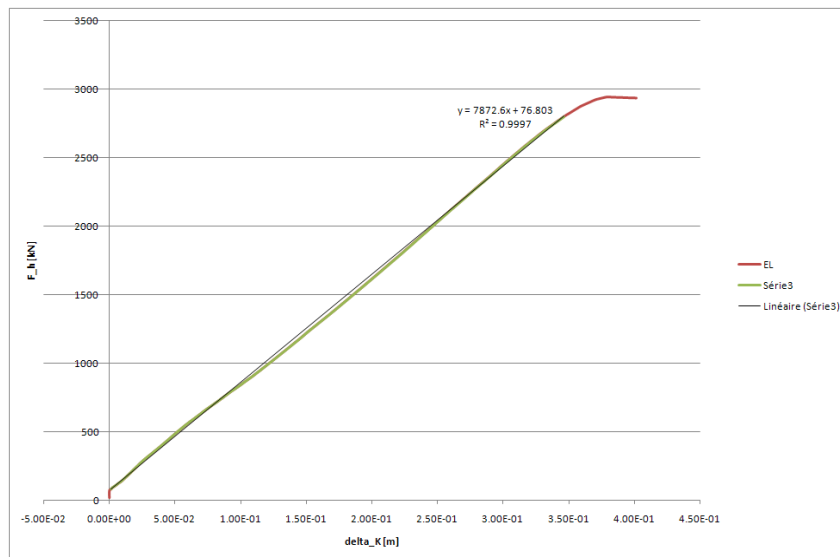


Figure 41 :  $F_h$  en fonction de  $\delta_K$

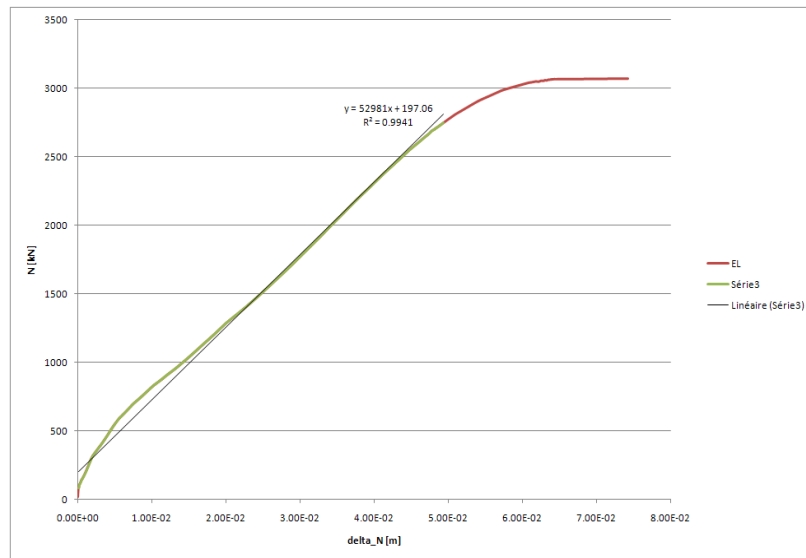


Figure 42 :  $N$  en fonction de  $\delta_N$

$$K = 7873 \text{ kN/m}$$

$$K_N = 52981 \text{ kN/m}$$

Avec ces valeurs, déterminées numériquement dans un premier temps, les équations analytiques mises au point par J.-F. Demonceau [2] sont résolues et le résultat obtenu est représenté par la courbe en bleu sur la figure suivante (Figure 43) :

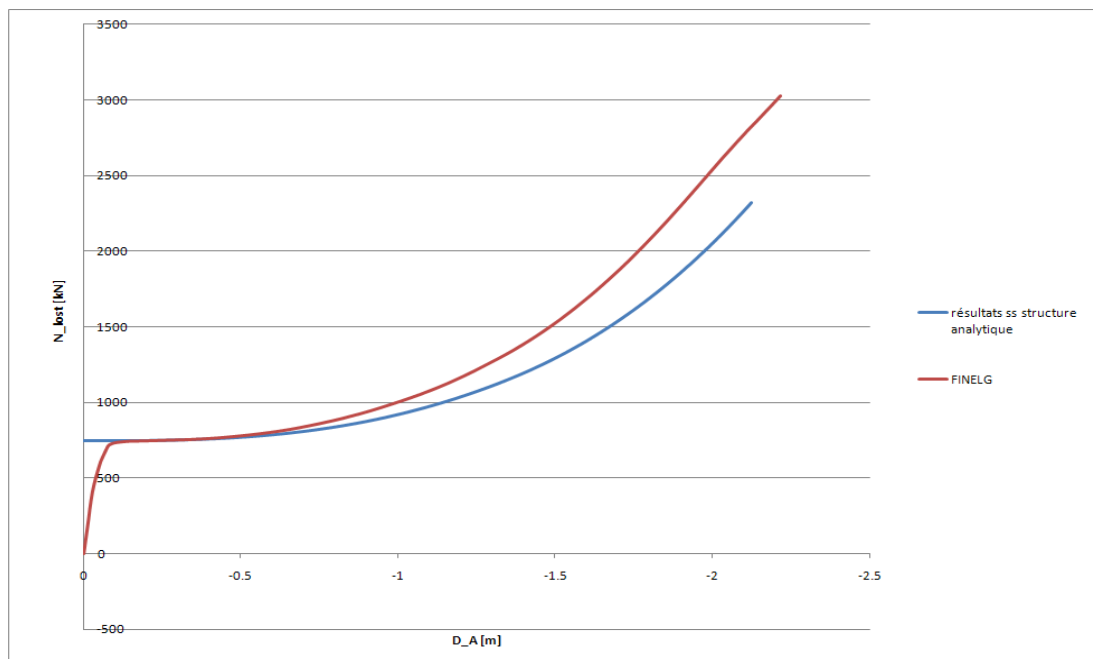
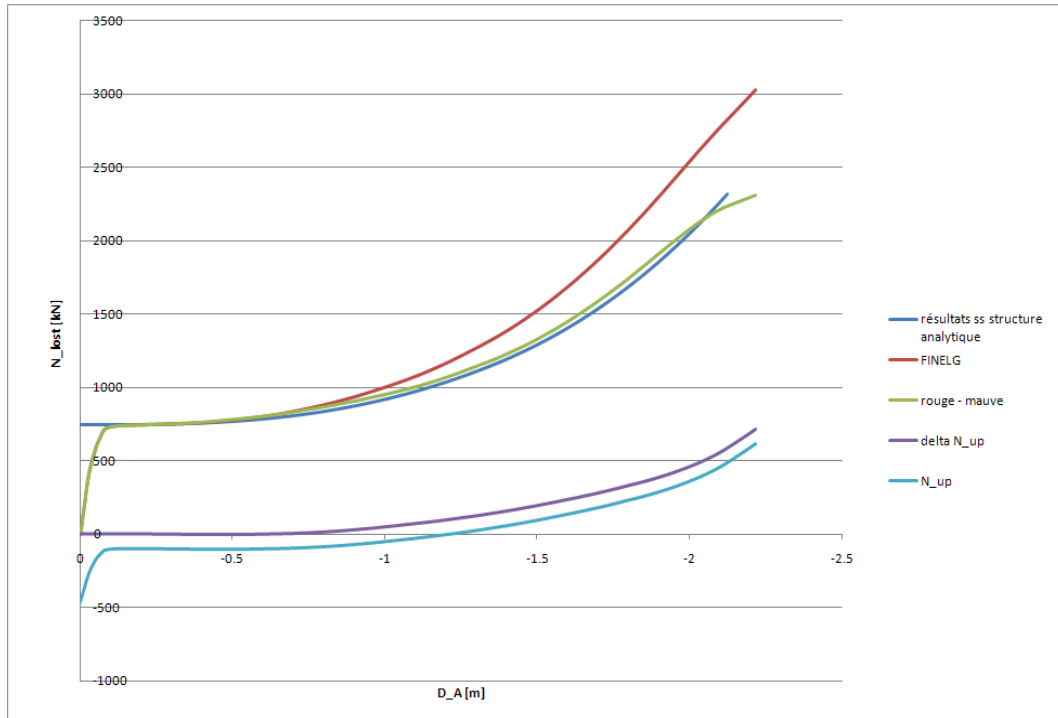


Figure 43 : Comparaison des résultats FINELG et des résultats obtenus par la sous-structure de la phase 3

La courbe déterminée par la sous-structure ne colle pas à la courbe numérique donnée par FINELG. Cela est dû à la variation de l'effort normal dans la colonne juste au-dessus de la colonne perdue,  $N_{up}$ . En effet, le modèle de J.-F. Demonceau [2] n'est applicable que si  $N_{up}$  est supposé constant durant toute la phase 3. J.-F. Demonceau [2] avait fait cette hypothèse dans le développement de sa

sous-structure car L.N.N. Hai [4] avait établi dans sa thèse que cet effort  $N_{up}$  pouvait être supposé constant au long de la phase 3. Ce n'est manifestement pas le cas ici (la courbe en bleu clair sur le graphique ci-dessous (Figure 44) représente le  $N_{up}$ ) :



**Figure 44 : Prise en compte de la variation de l'effort  $N_{up}$**

Pour que la sous-structure déterminée par J.-F. Demonceau [2] fournisse les bons résultats, il faut que la variation de cet effort  $N_{up}$  durant la phase 3 soit prise en compte. Pour cela, un  $\Delta N_{up}$  est calculé. Ce  $\Delta N_{up}$  vaut 0 durant la phase 2, et augmente durant la phase 3. En considérant que la fin de la phase 2 se produit pour un multiplicateur de charge égal à 0.8, le  $\Delta N_{up}$  durant la phase 3 est donné par :

$$\Delta N_{up}(mult < 0.8) = 0$$

$$\Delta N_{up}(mult > 0.8) = N_{up}(mult > 0.8) - N_{up}(mult = 0.8)$$

En soustrayant la valeur  $\Delta N_{up}$  (courbe en mauve) à la courbe de FINELG (courbe en rouge), la courbe en vert est obtenue, et elle colle beaucoup mieux à la courbe déterminée analytiquement.

Il faut de plus noter que la plastification en traction de la poutre inférieure est maintenant visible (sur la courbe verte) et se marque par un changement de pente dans la courbe  $Q - \Delta_A$ . La sous-structure pour l'étude de la phase 3 ne considère pas que la poutre puisse plastifier en traction, le changement de pente n'est pas visible dans la courbe analytique. L'équation de cette partie de la courbe  $Q - \Delta_A$ , après plastification en traction de la poutre inférieure, a été établie par L. Comeliau [1] dans son travail de fin d'études (Figure 45):

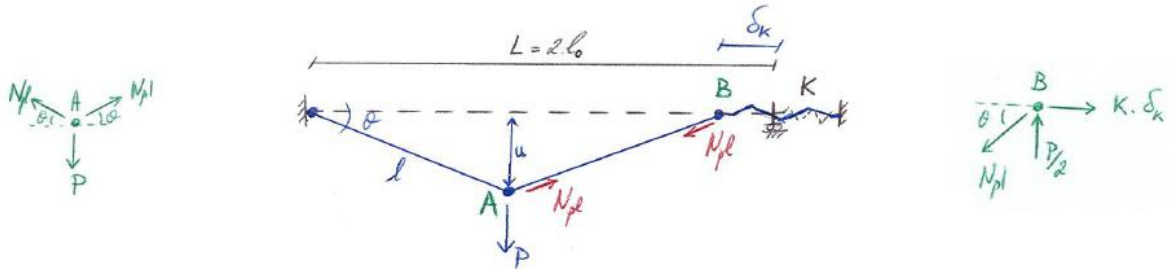


Figure 45 : Sous-structure et équilibres aux nœuds après plastification en traction de la poutre membranaire ( $P \equiv Q$  et  $u \equiv \Delta_A$ ) (COMELIAU [1])

$$\Delta_A = Q \left( \frac{L_0}{2N_{pl} \sqrt{1 - \left( \frac{Q}{2N_{pl}} \right)^2}} - \frac{1}{4K} \right)$$

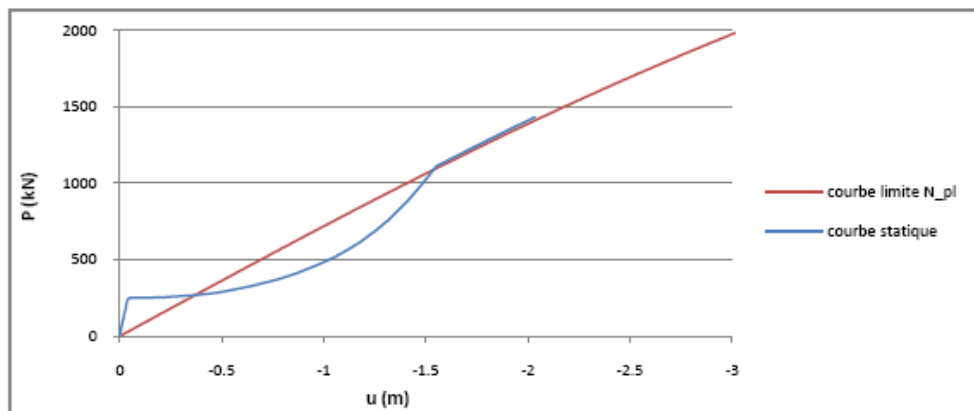


Figure 46 : Courbe limite ( $P \equiv Q$  et  $u \equiv \Delta_A$ ) : courbes tracées par L. Comeliau [1] dans son travail de fin d'études

## 2.5 Calcul de $K_{e1}$ par la méthode de L.N.N Hai

Pour rappel, dans la sous-structure définie par L.N.N. Hai [4], la poutre n'est prise en compte que via sa raideur longitudinale,  $EA/L$ . La sous-structure peut donc être représentée comme suit (Figure 47) :

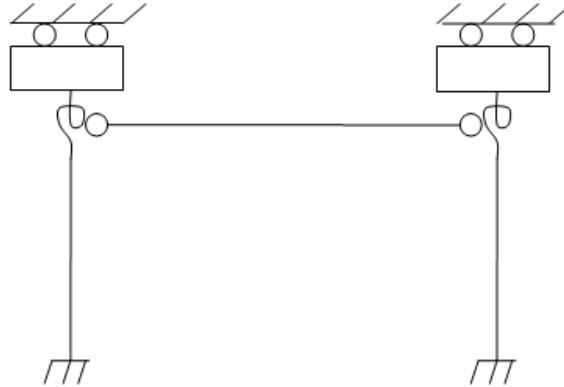


Figure 47 : Sous-structure définie par L.N.N. Hai [4]

Pour que cette sous-structure soit complètement définie, il faut définir la valeur des ressorts rotationnels à placer au sommet des colonnes.

La détermination de ces valeurs  $k_s$  se base sur la détermination d'éléments primaires (en orange sur la Figure 48 et la Figure 49) et secondaires (en vert sur ces mêmes figures). Il faut noter ici que la rigidité flexionnelle des poutres de la partie directement affectée n'est pas considérée puisque les extrémités de ces poutres sont totalement plastifiées en début de phase 3 (les éléments en pointillés sur la figure ne rentrent donc pas dans le calcul des  $k_s$ ) :

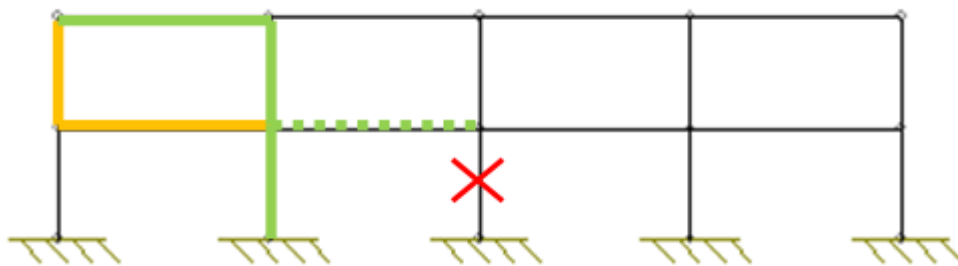


Figure 48 : Détermination du ressort rotationnel à placer au sommet de la colonne extérieure

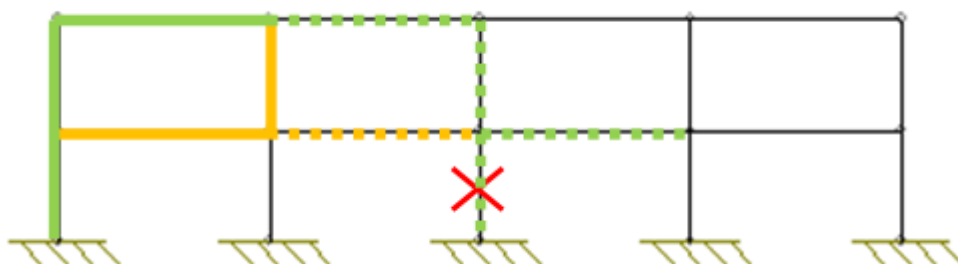


Figure 49 : Détermination du ressort rotationnel à placer au sommet de la colonne adjacente

Au vu des schémas ci-dessus, les ressorts rotationnels aux extrémités des deux colonnes (extérieure et adjacente), sont calculés comme étant égaux.

Les conditions d'appuis aux extrémités des éléments secondaires qui ont été considérées dans le calcul des  $k_s$  sont les suivantes (Figure 50) :

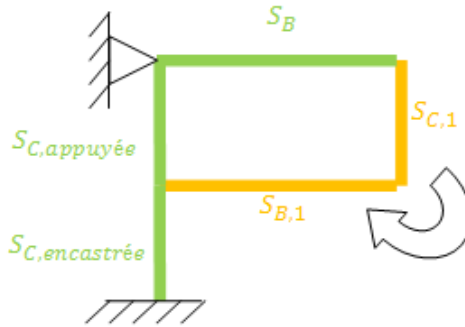


Figure 50 : Eléments primaires et secondaires pris en compte dans le calcul de  $k_s$

Etape 1 : Calcul de la rigidité des éléments secondaires

$$S_{C,encastree} = \frac{4EI_{col}}{L_{col}} = 60408 \text{ kN.m/rad}$$

$$S_{C,appuyee} = \frac{3EI_{col}}{L_{col}} = 45306 \text{ kN.m/rad}$$

$$S_B = \frac{3EI_{poutre}}{L_{poutre}} = 60408 \text{ kN.m/rad}$$

Etape 2 : Calcul des ressorts rotationnels à placer aux extrémités des éléments primaires

$$k_{C1} = S_B = 60408 \text{ kN.m/rad}$$

$$k_{B1} = S_{C,encastree} + S_{C,appuyee} = 105714 \text{ kN.m/rad}$$

Etape 3 : Calcul de la rigidité des éléments primaires

$$S_{C,1} = \frac{4EI_{col}}{L_{col}} \frac{L_{col}k_{C1} + 3EI_{col}}{L_{col}k_{C1} + 4EI_{col}} = 52857 \text{ kN.m/rad}$$

$$S_{B,1} = \frac{4EI_{poutre}}{L_{poutre}} \frac{L_{poutre}k_{B1} + 3EI_{poutre}}{L_{poutre}k_{B1} + 4EI_{poutre}} = 71836.5 \text{ kN.m/rad}$$

Etape 4 : Calcul de la rigidité rotationnelle  $k_s$

$$k_s = S_{C,1} + S_{B,1} = 124693.54 \text{ kN.m/rad}$$

Les deux  $k_s$  sont identiques et valent  $124\,693.54\text{ kN.m/rad}$ . On peut donc maintenant calculer la raideur transversale de chaque colonne (Figure 51) :

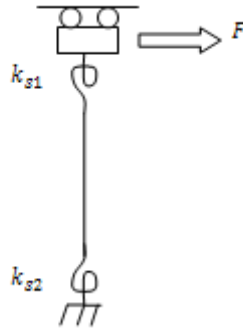


Figure 51 : Raideur transversale d'une colonne avec deux ressorts rotationnels aux extrémités

(ici,  $k_{s2}$  tend vers l'infini puisque la colonne est encastrée en base)

$$K_{1st\ order} = \frac{F}{d} = \frac{12EI}{L^2} \cdot \frac{Lk_1k_2 + (k_1 + k_2)EI}{L^2k_1k_2 + (k_1 + k_2)4EIL + 12E^2I^2} = 11172.8\text{ kN/m}$$

Colonne extérieure :

$$N = N_{fin\ de\ phase\ 1} = 428.2\text{ kN}$$

$$K_{2nd} = K_{1st\ order} - \frac{N}{L} = 11050.5\frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Colonne adjacente :

$$N = N_{fin\ de\ phase\ 2} = 1430\text{ kN}$$

$$K_{2nd} = K_{1st\ order} - \frac{N}{L} = 10764.2\frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

La dernière raideur à déterminer est la raideur axiale de la poutre :

$$\frac{EA}{L} = 402000\frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

L'assemblage des raideurs se fait ensuite comme suit (Figure 52) :

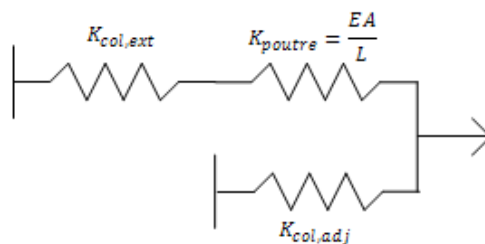


Figure 52 : Assemblage des raideurs

$$K_{tot} = K_{col,adj} + \frac{1}{\frac{1}{K_{col,ext}} + \frac{1}{K_{poutre}}} = 21519.1 \text{ kN/m}$$

Cette valeur ne correspond qu'à la partie gauche de la partie indirectement affectée, il faut aussi considérer la partie droite, ces deux parties étant identiques, la raideur totale se calcule facilement :

$$K = \frac{21519.1}{2} = 10759.5 \text{ kN/m}$$

Il y a donc 36% d'erreur par rapport au  $K$  numérique, de 7880 kN/m.



## 2.6 Calcul de $K_{el}$ par une nouvelle méthode

Comme vu au paragraphe précédent, il semble y avoir un problème dans la méthode de calcul du  $K_{el}$  développée par L.N.N. Hai [4].

Le présent paragraphe, avant de s'atteler au développement d'une nouvelle méthode de calcul du  $K_{el}$ , va tenter de trouver la source de l'erreur.

Pour cela, 4 structures vont être considérées, pour essayer de mieux appréhender les liens entre la partie directement affectée et la partie indirectement affectée.

### 2.6.1 Etude de 4 structures

Structure 1 :

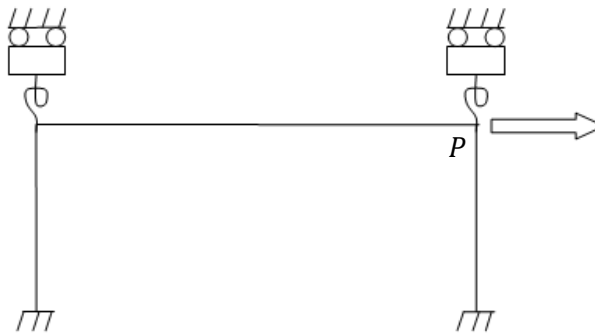


Figure 53 : Structure 1

La valeur des ressorts rotationnels présents dans cette sous-structure est calculée en considérant les éléments primaires (en orange sur la Figure 54) et secondaires (en vert sur la Figure 54) suivants :



Figure 54 : Eléments primaires et secondaires pour le calcul des  $k_s$

Les valeurs obtenues après calcul sont :  $k_{s,gauche} = k_{s,droite} = 53935 \text{ kN.m/rad}$

Structure 2 :

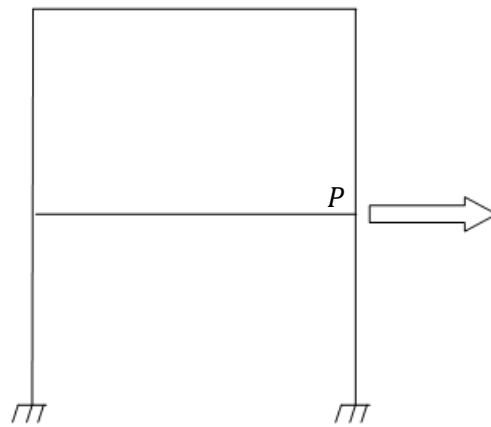


Figure 55 : Structure 2

Structure 3 :

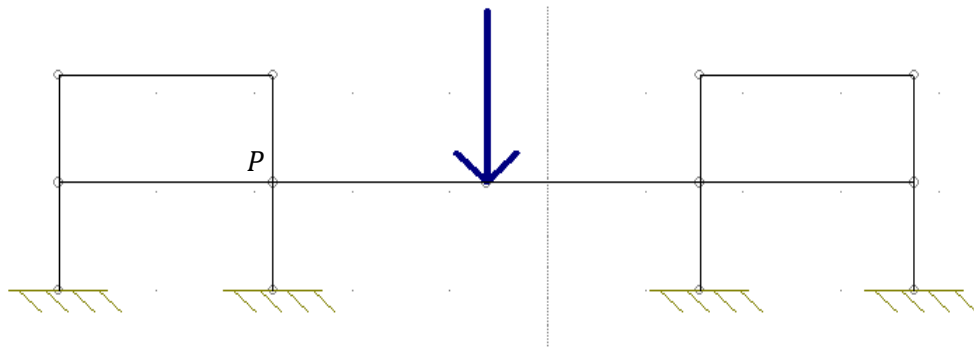


Figure 56 : Structure 3

Structure 4 :

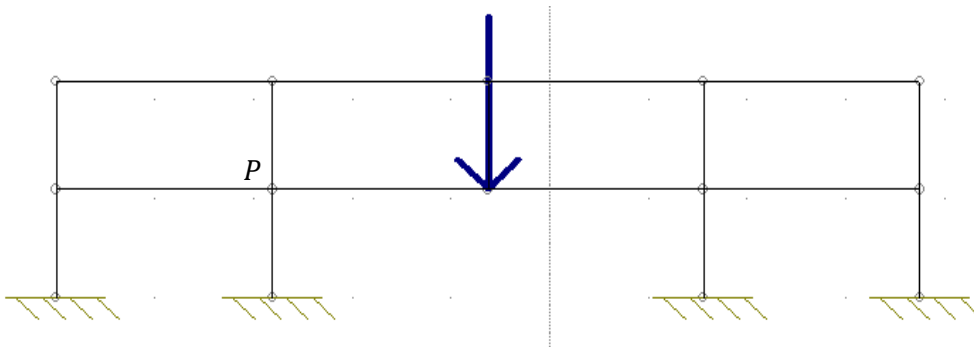


Figure 57 : Structure 4

## Analyse des résultats

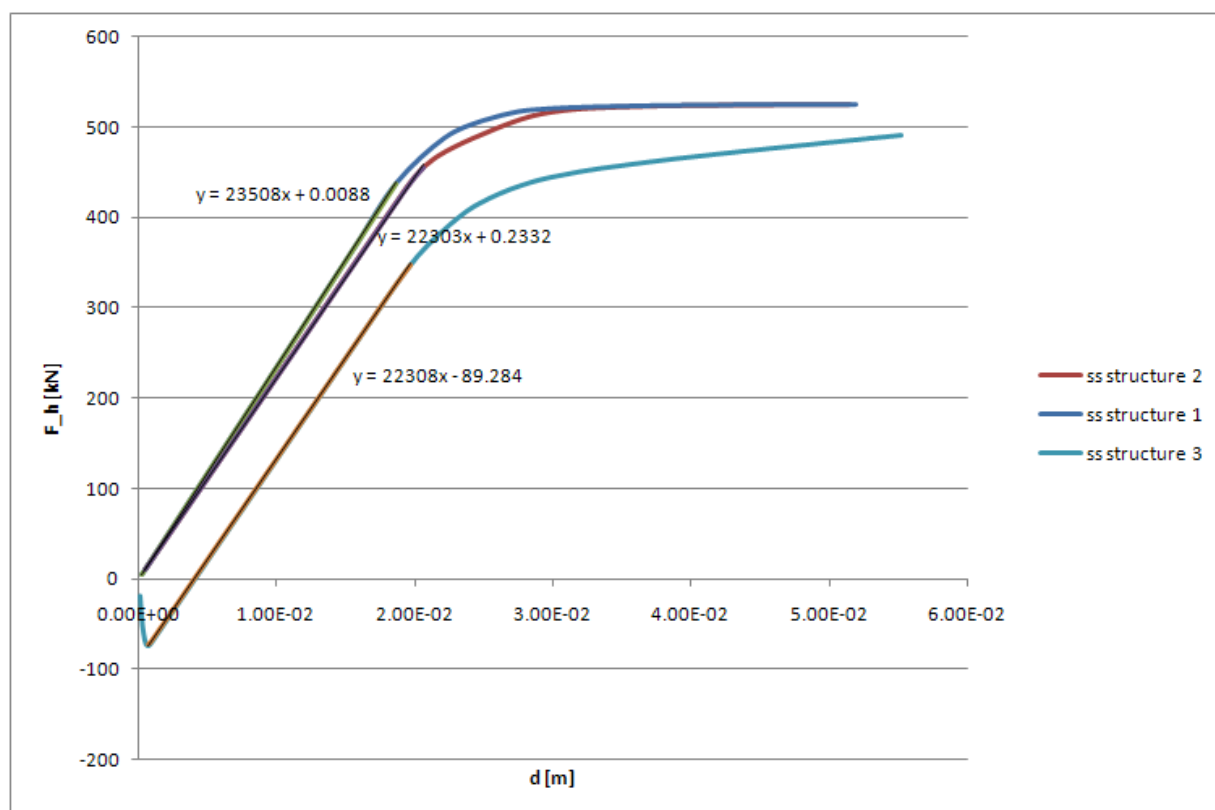


Figure 58 :  $F_h$  en fonction de  $d$  pour les 3 premières structures

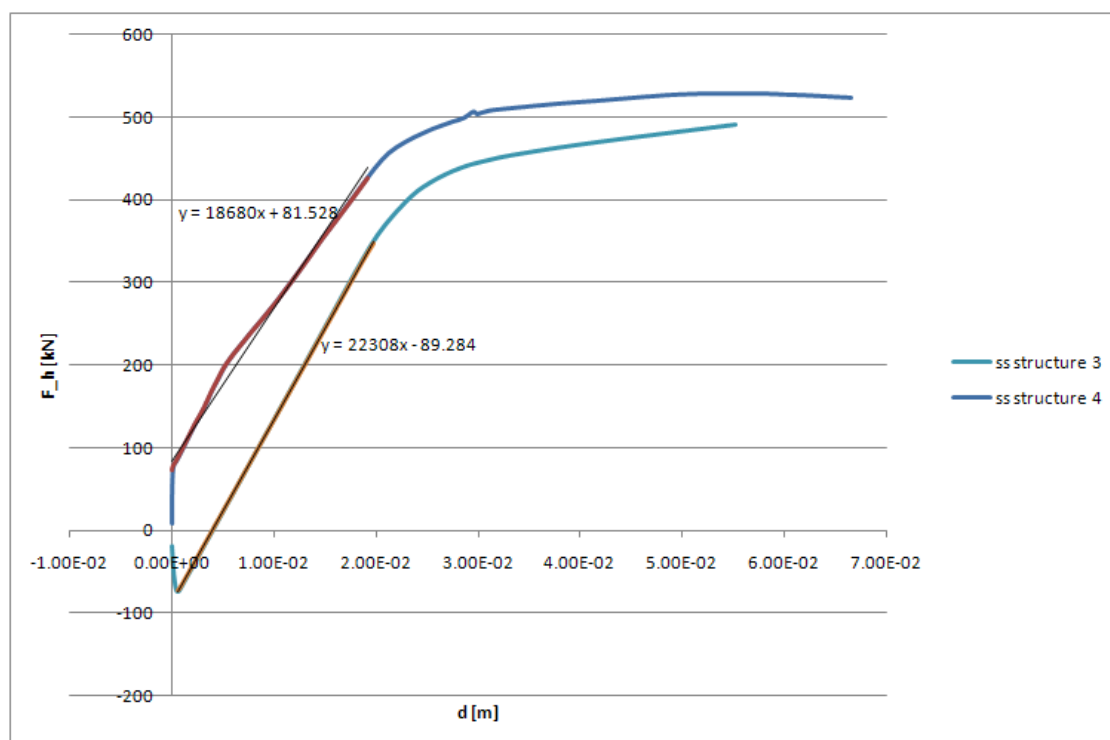


Figure 59 :  $F_h$  en fonction de  $d$  pour les 2 dernières structures

Les valeurs de la raideur transversale élastique  $K_{el}$ , obtenue par résolution de ces différentes structures dans FINELG, sont reportées dans le tableau ci-dessous. Il faut noter que les valeurs reportées sont telles que  $K_{el} = 2 * \frac{dF_h}{d\delta_K} = 2 * \frac{dF_h}{d(2*\delta_P)} = \frac{dF_h}{d\delta_P}$ .

	Structure 1	Structure 2	Structure 3	Structure 4
$K_{el} \left[ \frac{kN}{m} \right]$	23508	22303	22308	18680

Commentaires :

Les trois premières structures montrent des raideurs transversales assez semblables, de l'ordre de 22300 kN/m.

La différence entre la première structure et les deux suivantes (qui est de l'ordre de 5%) peut s'expliquer par la surestimation des  $k_s$  introduits dans la structure 1. En effet, ils ont été calculés en considérant l'extrémité de l'élément secondaire (en vert) comme encasté (Figure 60) :

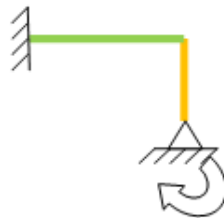


Figure 60 : Calcul de  $k_s$  si extrémité encastée

Le résultat fourni par la structure 1 serait certainement plus proche de la valeur de 22300 trouvée dans les structures 2 et 3 si l'on considérait plutôt cette extrémité comme simplement appuyée (Figure 61) :

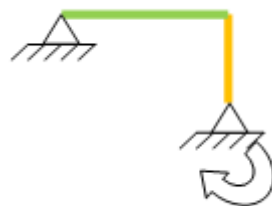


Figure 61 : Calcul de  $k_s$  si extrémité appuyée

Cette raideur transversale élastique de 22300 kN/m peut être comparée avec la raideur déterminée en suivant le modèle de L.N.N. Hai [4]. Pour rappel, la valeur obtenue était de  $2 * 10759.5 = 21519$  kN/m. Cette valeur est proche (3,6 % d'erreur) de la valeur de 22300 kN/m vers laquelle semblent pointer les analyses des trois premières structures. La structure de L.N.N. Hai [4] représente donc correctement ces trois premières structures dans le domaine élastique.

De ces 4 structures étudiées, la structure 4 est celle qui affiche la raideur transversale la plus faible. Cela pourrait sembler cohérent si la poutre supérieure, jusqu'ici absente des structures 1, 2 et 3, était

en traction et tendait à « emporter » la partie indirectement affectée, comme le fait la poutre inférieure.

Pour vérifier cette hypothèse, il faut observer, en fonction du multiplicateur de charge, la valeur de  $F_{h,inf}$  et  $F_{h,sup}$ . Pour rappel, ces valeurs sont les résultantes des forces horizontales, au niveau de la poutre inférieure et au niveau de la poutre supérieure de la partie directement affectée (Figure 62):

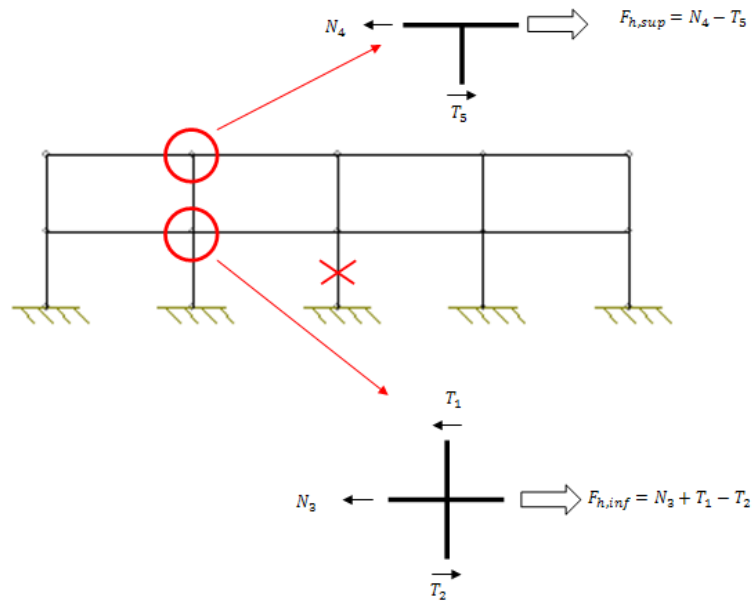


Figure 62 : Extraction de  $F_{h,sup}$  et  $F_{h,inf}$

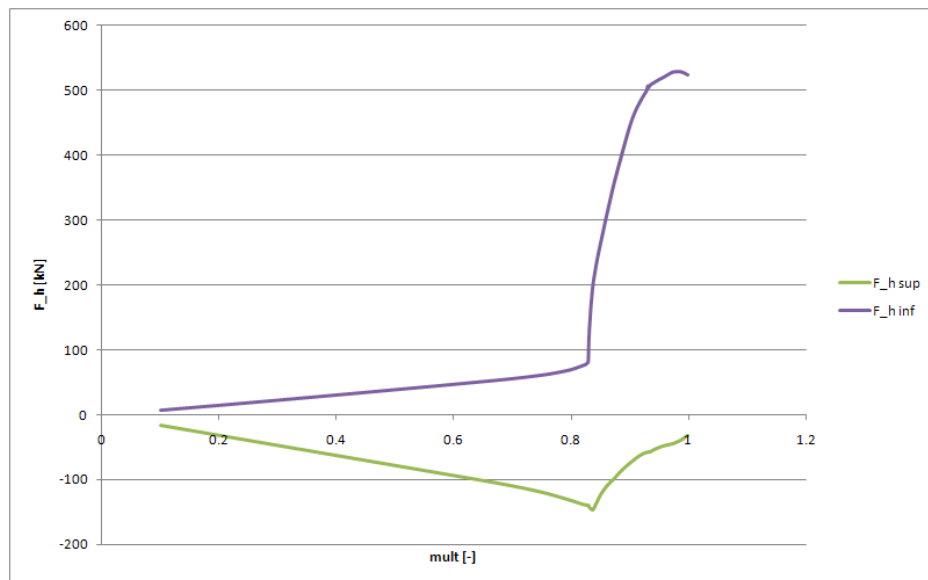


Figure 63 : Evolution de  $F_{h,sup}$  et  $F_{h,inf}$  en fonction du multiplicateur de charge

La phase 2 se termine quand le multiplicateur de ruine vaut 0.83. Ensuite, l'effort  $F_{h,sup}$  augmente, cela signifie que la poutre supérieure, en compression à la fin de la phase 2, a tendance à se décompresser durant la phase 3, mais reste toujours en compression. La poutre supérieure ne passe donc jamais en traction.

La situation est alors la suivante : la poutre inférieure de la partie directement affectée « tire » sur la partie indirectement affectée, la poutre supérieure de la partie directement affectée quant à elle, « pousse », « retient » la partie indirectement affectée, et la raideur transversale de la partie indirectement affectée est plus faible que lorsque la poutre supérieure n'est pas présente (la structure 4 est en effet plus souple que la structure 3).

Lorsque l'on réalise une coupe entre la partie directement affectée et la partie indirectement affectée, 4 efforts susceptibles d'influencer la rigidité transversale de cette partie indirectement affectée sont libérés :  $F_{sup}$ ,  $M_{sup}$ ,  $F_{inf}$  et  $M_{inf}$ . Les efforts tranchants ne sont pas considérés comme pouvant avoir une influence sur la raideur transversale. Après avoir réalisé des tests sur lesquels de ces 4 efforts étaient réellement significatifs, la conclusion a été que les moments, tant supérieur qu'inférieur, ne jouaient pas de rôle (il était déjà apparu que le moment au niveau de la poutre inférieure ne jouait aucun rôle puisque la raideur transversale de la structure 3 était bien identique à celle de la structure 2).

Il apparaît donc que, pour évaluer correctement la raideur transversale de la partie indirectement affectée, il faut non seulement considérer l'effort agissant au niveau de la poutre inférieure, mais aussi, l'effort agissant au niveau de la poutre supérieure.

Le modèle de L.N.N. Hai [4] ne prend en compte que la force au niveau inférieur comme vu précédemment, puisque la raideur déterminée par la modèle de L.N.N. Hai [4] était très proche de la raideur des structures 1, 2 et 3.

### 2.6.2 Mise au point de la nouvelle méthode

De l'étude des 4 structures précédentes, il est apparu qu'il était nécessaire de considérer les forces agissant au niveau supérieur et au niveau inférieur de la partie indirectement affectée. La sous-structure qui va être étudiée est donc la suivante (Figure 64) :

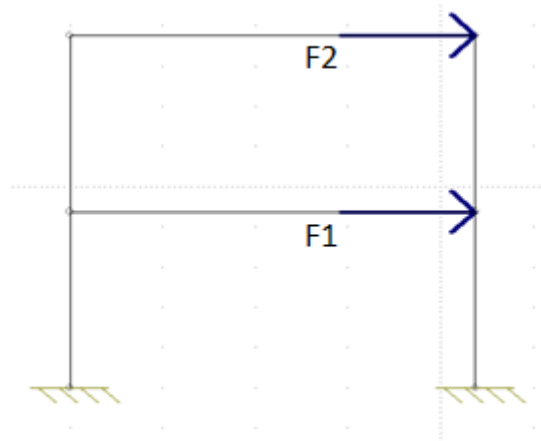


Figure 64 : Sous-structure contenant la totalité de la partie indirectement affectée

Cette sous-structure contient en réalité la totalité de la partie indirectement affectée, et les efforts  $F_1$  et  $F_2$  qui agissent sur celle-ci proviennent de la partie directement affectée (Figure 65) :

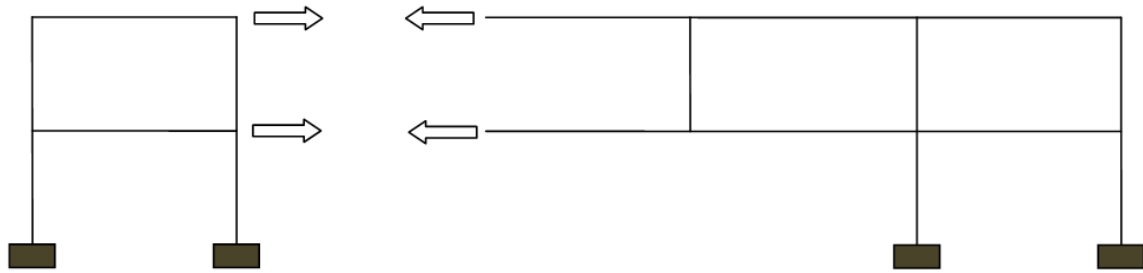


Figure 65 : Coupe entre la partie directement affectée et la partie indirectement affectée

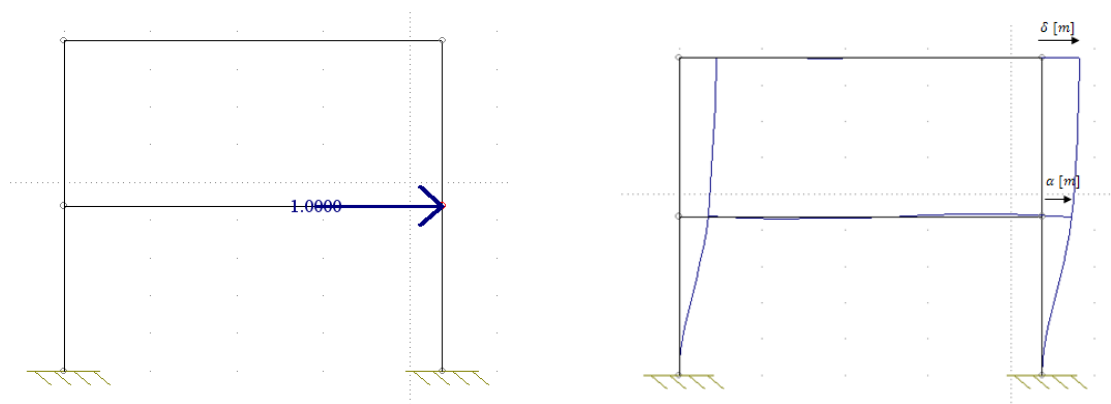
Il faut ici noter que, d'un point de vue notation, dans la suite de ce travail,  $F_1 = F_{h,inf}$  et  $F_2 = F_{h,sup}$ . Ce sont les forces horizontales résultantes agissant au niveau de la poutre inférieure et supérieure, à la frontière entre la partie directement affectée et la partie indirectement affectée. Les notations  $F_1 - F_{h,inf}$  sont équivalentes, de même pour  $F_2 - F_{h,sup}$ . D'autre part, sur la Figure 64, c'est bien la partie à gauche de la partie directement affectée qui est considérée, et cela en sera ainsi dans le reste de ce travail chaque fois que l'on représentera la partie indirectement affectée.

Si l'indice « 1 » est utilisé pour tout ce qui se réfère au niveau inférieur, et l'indice « 2 » pour le niveau supérieur, on peut écrire :

$$\begin{cases} d_1 = \alpha F_1 + \beta F_2 \\ d_2 = \gamma F_2 + \delta F_1 \end{cases}$$

$$\underline{d} = \underline{S} \underline{F}$$

Les coefficients  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$  représentent les déformabilités des étages vis-à-vis des forces  $F_1$  et  $F_2$  (exprimés en  $m/kN$ ). Ils sont donc exprimés en  $\frac{m}{kN}$  et sont calculés en utilisant OSSA2D (il faut noter que, chaque fois qu'OSSA2D est utilisé, un calcul manuel pourrait être effectué en utilisant la méthode des déplacements).



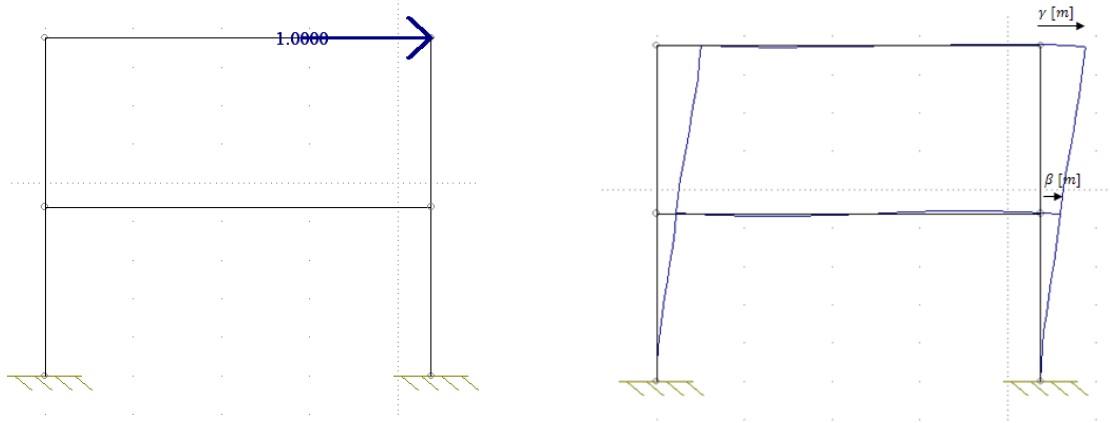


Figure 66 : Détermination des  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

Dans ce cas (IPE550 de 7 m de long et HEB300 de 3,5 m de haut), les coefficients sont les suivants :

$$\alpha = 0.0000448 \text{ m/kN}$$

$$\beta = 0.0000558 \text{ m/kN}$$

$$\gamma = 0.0001264 \text{ m/kN}$$

$$\delta = \gamma$$

Il faut ici remarquer que la matrice « de souplesse »  $\underline{\underline{S}}$  de la structure est bien symétrique, puisque  $\delta = \gamma$ . La raideur que l'on recherche est la raideur au niveau inférieur  $K_1 = \frac{\Delta F_1}{\Delta d_1} = K = K_{el}$  :

$$\frac{1}{K_1} = \frac{\Delta d_1}{\Delta F_1} = \alpha + \beta \cdot \frac{\Delta F_2}{\Delta F_1}$$

$$K_1 = \frac{1}{\alpha + \beta \cdot \frac{\Delta F_2}{\Delta F_1}}$$

$F_2$  est négatif au début de la phase 3 (effet de voûte dans la partie directement affectée durant la phase 2). Si  $F_2$  a tendance à augmenter, c'est-à-dire lorsque la phase 3 a tendance à décompresser la poutre supérieure et à la mettre en tension, alors le  $\Delta F_2$  est positif, tout en ayant une poutre toujours en compression, donc un  $F_2$  toujours négatif. Or, si le  $\Delta F_2$  est positif, le dénominateur de l'expression ci-dessus est supérieur à  $\alpha$ , et  $K_1$  est donc inférieur à  $1/\alpha$ , sa valeur « normale », c'est-à-dire lorsque  $F_2$  est, soit nul, soit constant.

De la même manière, si durant la phase 3, la poutre supérieure a tendance à se comprimer d'avantage (ce qui est possible si la partie indirectement affectée se « laisse aller » plus vite que la partie directement affectée), le  $\Delta F_2$  sera négatif et la valeur de  $K_1$  serait alors plus importante que  $1/\alpha$ .

Dans le cas présent,  $\alpha$  vaut  $0.0000448 \text{ m/kN}$ , donc  $\frac{1}{\alpha} = 22321 \text{ kN/m}$ . C'est bien cette valeur qui était donnée d'une part, par l'analyse de la sous-structure de L.N.N. Hai [4], et d'autre part, par l'analyse des structures 1, 2 et 3.



Si l'on considère de nouveau la structure étudiée précédemment (c'est-à-dire la structure 4 mais chargée par des forces uniformément réparties), et que l'on observe la valeur de  $\Delta F_2/\Delta F_1$ , les résultats sont les suivants (pour rappel, d'un point de vue notation,  $F_1 = F_{h,inf}$  et  $F_2 = F_{h,sup}$ ) :

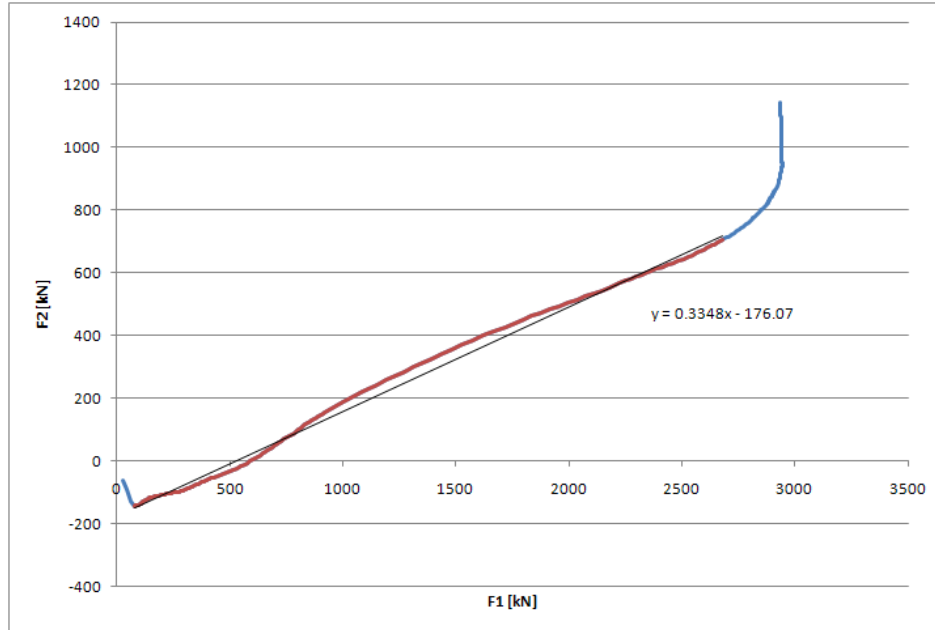


Figure 67 : Evolution de  $F_2$  en fonction de  $F_1$

Cette variation de  $F_2$  en fonction de  $F_1$  ne doit être observée qu'entre la fin de la phase 2 et la plastification de la poutre inférieure en traction. Puisque FINELG donne une valeur de  $\frac{\Delta F_2}{\Delta F_1}$  de 0.3348 dans la zone concernée, la valeur de  $K_1$  calculée est de :

$$K_1 = \frac{1}{\alpha + \beta \cdot \frac{\Delta F_2}{\Delta F_1}} = \frac{1}{0.0000448 + 0.0000558 * 0.3348} = 15752,5 \text{ kN/m}$$

Cette valeur est à comparer à la valeur de  $2 * 7878 = 15756 \text{ kN/m}$  donnée par FINELG (confer §2.4). L'erreur est de 0.02%.

En conclusion, il est nécessaire de connaître la variation de  $F_2$  en fonction de  $F_1$  pour connaître la raideur  $K_1$  de la partie indirectement affectée.

Il faut remarquer d'autre part que l'analyse de cette structure très simple, décrite à la Figure 64, ne contenant que la partie indirectement affectée soumise à deux forces horizontales, aux niveaux supérieur et inférieur, peut mener au développement d'autres relations que celle liant  $K_1$  à  $\frac{\Delta F_2}{\Delta F_1}$  :

$$\begin{cases} d_1 = \alpha F_1 + \beta F_2 \\ d_2 = \gamma F_2 + \delta F_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta d_1 = \alpha \Delta F_1 + \beta \Delta F_2 \\ \Delta d_2 = \gamma \Delta F_2 + \delta \Delta F_1 \end{cases}$$

Lien entre  $K_1$  et  $\frac{\Delta F_2}{\Delta F_1}$  :

$$\frac{\Delta d_1}{\Delta F_1} = \alpha + \beta \frac{\Delta F_2}{\Delta F_1}$$

$$K_1 = \frac{1}{\alpha + \beta \frac{\Delta F_2}{\Delta F_1}}$$

Lien entre  $K_2$  et  $K_1$  :

$$\frac{1}{K_1} = \alpha + \beta \frac{\Delta F_2}{\Delta F_1}$$

$$\frac{\Delta F_2}{\Delta F_1} = \frac{\frac{1}{K_1} - \alpha}{\beta} \rightarrow \frac{\Delta F_1}{\Delta F_2} = \frac{\beta}{\frac{1}{K_1} - \alpha}$$

$$\frac{1}{K_2} = \frac{\Delta d_2}{\Delta F_2} = \gamma + \delta \frac{\Delta F_1}{\Delta F_2} = \gamma + \frac{\delta \beta}{\frac{1}{K_1} - \alpha}$$

$$K_2 = \frac{1}{\gamma + \frac{\delta \beta}{\frac{1}{K_1} - \alpha}}$$

Lien entre  $\frac{\Delta F_2}{\Delta F_1}$  et  $\frac{\Delta d_2}{\Delta d_1}$  :

$$\frac{\Delta d_2}{\Delta d_1} = \frac{\gamma \Delta F_2 + \delta \Delta F_1}{\alpha \Delta F_1 + \beta \Delta F_2} = \frac{\gamma \frac{\Delta F_2}{\Delta F_1} + \delta}{\alpha + \beta \frac{\Delta F_2}{\Delta F_1}}$$

$$\frac{\Delta d_2}{\Delta d_1} \left( \alpha + \beta \frac{\Delta F_2}{\Delta F_1} \right) = \gamma \frac{\Delta F_2}{\Delta F_1} + \delta$$

$$\frac{\Delta F_2}{\Delta F_1} \left( \beta \frac{\Delta d_2}{\Delta d_1} - \gamma \right) = \delta - \alpha \frac{\Delta d_2}{\Delta d_1}$$

$$\frac{\Delta F_2}{\Delta F_1} = \frac{\delta - \alpha \frac{\Delta d_2}{\Delta d_1}}{\beta \frac{\Delta d_2}{\Delta d_1} - \gamma}$$

Lien entre  $K_1$  et  $\frac{\Delta d_2}{\Delta d_1}$  :

$$K_1 = \frac{1}{\alpha + \beta \frac{\Delta F_2}{\Delta F_1}} = \frac{1}{\alpha + \beta \frac{\delta - \alpha \frac{\Delta d_2}{\Delta d_1}}{\beta \frac{\Delta d_2}{\Delta d_1} - \gamma}} = \frac{\beta \frac{\Delta d_2}{\Delta d_1} - \gamma}{\alpha \left( \beta \frac{\Delta d_2}{\Delta d_1} - \gamma \right) + \beta \left( \delta - \alpha \frac{\Delta d_2}{\Delta d_1} \right)} = \frac{\beta \frac{\Delta d_2}{\Delta d_1} - \gamma}{\beta \delta - \alpha \gamma}$$

$$K_1 = \frac{\gamma - \beta \frac{\Delta d_2}{\Delta d_1}}{\alpha \gamma - \beta \delta}$$

De ces équations, il peut être conclu qu'il est nécessaire, pour connaître  $K_1$  et  $K_2$ , de connaître soit  $\frac{\Delta F_2}{\Delta F_1}$ , soit  $\frac{\Delta d_2}{\Delta d_1}$ .

Par exemple, FINELG donne, pour la structure étudiée, une valeur de  $\frac{\Delta d_2}{\Delta d_1}$  de 1.538 :

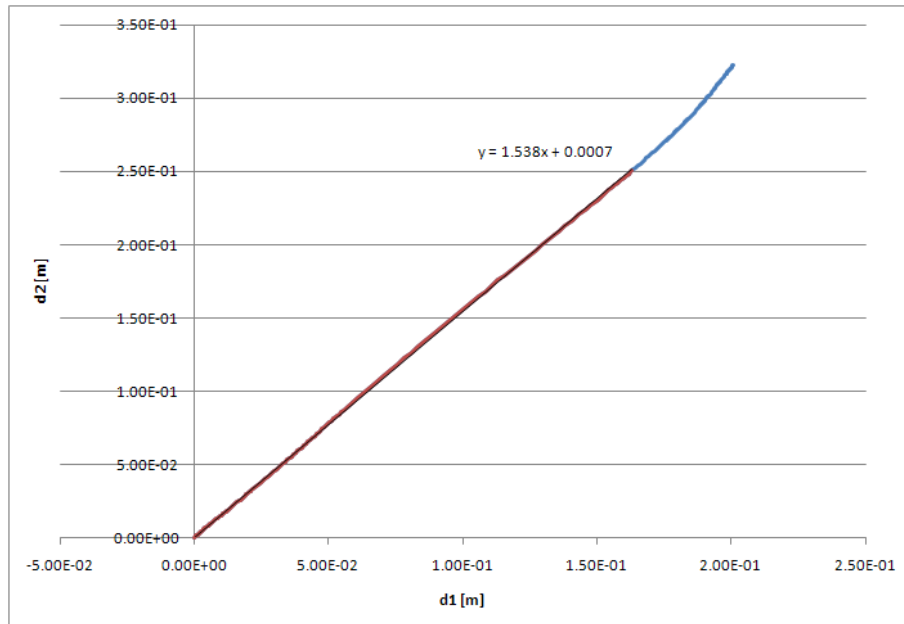


Figure 68 : Evolution de  $d_2$  en fonction de  $d_1$

Avec cette valeur de  $\frac{\Delta d_2}{\Delta d_1}$ , calculons  $K_1$ ,  $K_2$  et  $\Delta F_2/\Delta F_1$  :

	Formules analytiques	FINELG	Erreur relative
$K_1$	15919.3	$2 * 7878 = 15756$	1.04 %
$K_2$	3342	3425	2.4%
$\Delta F_2/\Delta F_1$	0.323	0.3348	3,5%

De la même manière, si l'on suppose connaître  $\frac{\Delta F_2}{\Delta F_1} = 0.3348$ , les résultats sont :

	Formules analytiques	FINELG	Erreur relative
$K_1$	15752.5	$2 * 7878 = 15756$	0.022%
$K_2$	3412.2	3425	0.37%
$\Delta d_2 / \Delta d_1$	1.546	1.538	0.52%

Pour obtenir l'un des rapports  $\Delta F_2 / \Delta F_1$  ou  $\Delta d_2 / \Delta d_1$ , il faut retourner observer ce qui se passe dans la partie directement affectée.

### 2.6.3 Nouvelle sous-structure dans la partie directement affectée

Puisqu'il faut connaître la variation de  $F_2$  en fonction de  $F_1$  (ou de  $d_2$  en fonction de  $d_1$ ) pour pouvoir évaluer correctement la raideur transversale de la partie indirectement affectée, et que ces efforts  $F_1$   $F_2$  (ainsi que les déplacements  $d_1$  et  $d_2$ ) sont en relation avec la partie directement affectée, il faut retourner à l'étude de cette dernière.

La sous-structure déterminée par J.-F. Demonceau [2] dans sa thèse n'est pas suffisante ici, puisqu'elle ne prend en compte que la poutre inférieure. La nouvelle sous-structure qui va être étudiée est donc constituée des poutres de tous les étages de la structure, ici en l'occurrence 2, et non plus de la poutre inférieure seule. La sous-structure étudiée est donnée à la Figure 69, avec en vert, la situation non déformée, et en noir, la situation déformée :

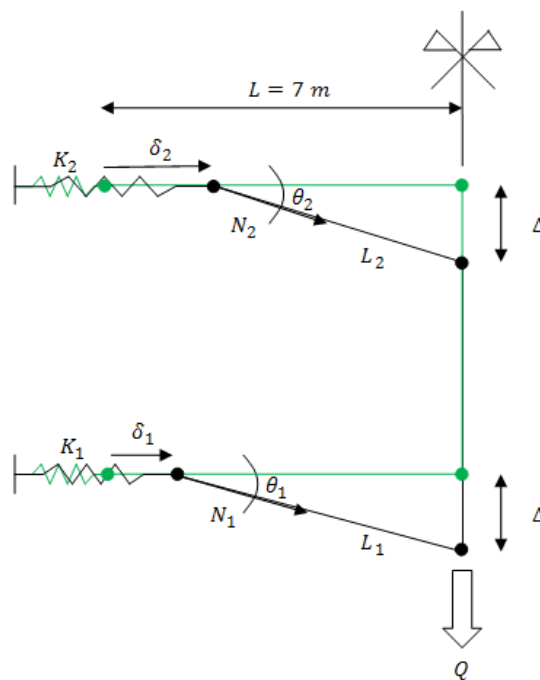


Figure 69 : Nouvelle sous-structure dans la partie directement affectée

Commentaires sur la sous-structure de la Figure 69 :

- Cette sous-structure est parfaitement symétrique : à chaque extrémité de poutre se trouve un ressort. Pour une même poutre, les raideurs des ressorts aux deux extrémités de la poutre sont égales et valent respectivement  $K_1$  pour la poutre inférieure et  $K_2$  pour la poutre supérieure.  
C'est un cas particulier, puisque l'on considère ici le cas de la perte d'une colonne centrale. Il faudra, dans la suite des recherches, généraliser cette sous-structure au cas de la perte d'une colonne non centrale.
- Les charges réparties qui agissent normalement sur les poutres de la partie directement affectée ne sont pas prises en compte. Cette simplification s'appuie sur le fait que J.-F. Demonceau [2] a démontré dans sa thèse que, pour la sous-structure qui ne contenait que la poutre membranaire, cette simplification était valable. Cette simplification est extrapolée ici au cas de la prise en compte de toutes les poutres de la partie directement affectée.
- Le déplacement vertical  $\Delta$  au centre de la partie directement affectée est supposé identique au niveau supérieur et au niveau inférieur ( $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$ ). Cela revient à négliger la variation de longueur de la colonne située juste au dessus de la colonne disparue. Cette simplification a été vérifiée sur base des résultats FINELG.

Set d'équations venant de la partie directement affectée :

Commentaire général : les numéros, en vert et entre parenthèses, sont les numéros des équations (dénombrement).

- Equilibre de forces :
- Au centre de la partie directement affectée (1, 2, 3)

$$Q = Q_1 + Q_2$$

$Q_1$  est la partie de  $Q$  reprise par la poutre du bas,  $Q_2$  par la poutre du haut

$$Q_1 = 2N_1 \sin \theta_1 + 2T_1 \cos \theta_1$$

$$Q_2 = 2N_2 \sin \theta_2 + 2T_2 \cos \theta_2$$

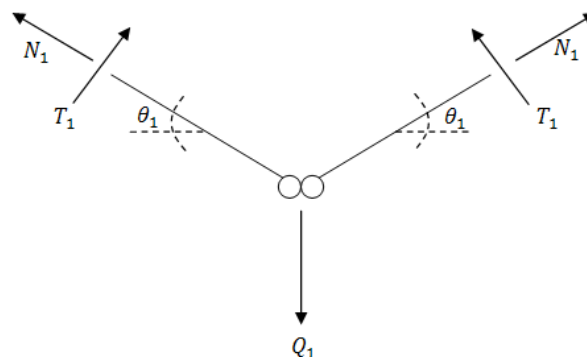


Figure 70 : Equilibre des forces au centre de la sous-structure

Les efforts tranchants  $T_1$  et  $T_2$  sont liés aux moments  $M_1$  et  $M_2$  agissant dans les rotules de la partie directement affectée (Figure 71) :

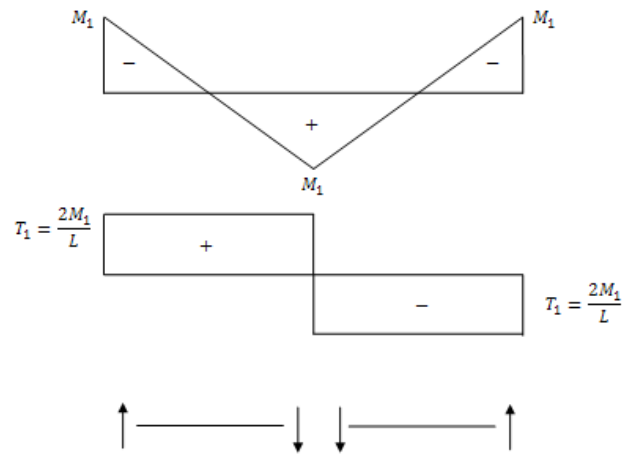


Figure 71 : Lien entre effort tranchant et moment

- A l'extrémité de la partie directement affectée (4, 5)

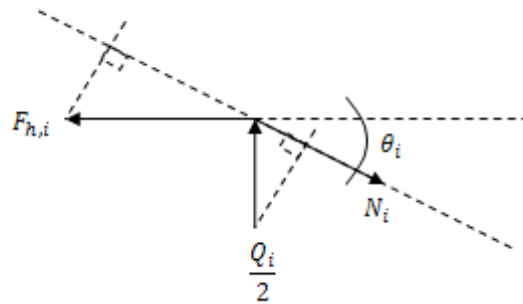


Figure 72 : Equilibre des forces à l'extrémité de la sous-structure

$$N_i = F_{hi} \cos \theta_i + \frac{Q_i}{2} \sin \theta_i = \delta_i K_i \cos \theta_i + \frac{Q_i}{2} \sin \theta_i$$

$$\rightarrow \delta_i = \frac{\frac{N_i}{\cos \theta_i} - \frac{Q_i}{2} \tan \theta_i}{K_i}$$

- Compatibilité des déplacements : (6, 7, 8, 9, 10, 11)

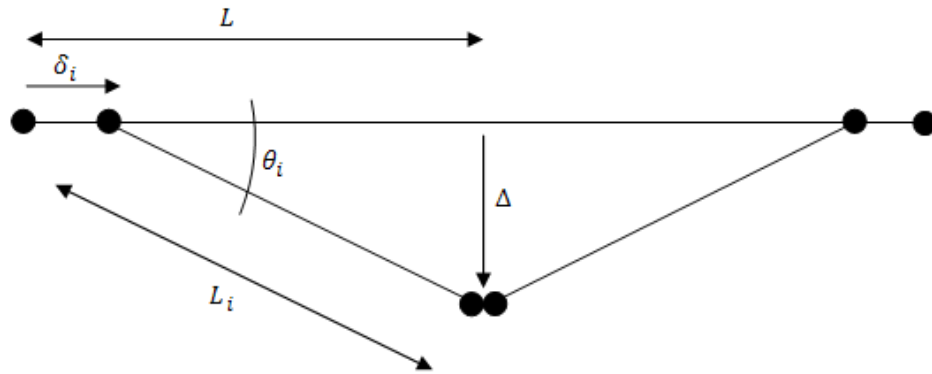


Figure 73 : Compatibilités des déplacements (3 équations)

$$\tan \theta_i = \frac{\Delta}{L - \delta_i} \rightarrow \theta_i = \text{atan} \frac{\Delta}{L - \delta_i}$$

$$L_i = \sqrt{(L - \delta_i)^2 + \Delta^2}$$

$$L_i = L + 2\delta_{Ni} = L + 2 \cdot \frac{N_i}{K_{Ni}}$$

- Interaction M+N dans les rotules : (12, 13)

Ces formules sont identiques à celles utilisées dans la sous-structure de J.-F. Demonceau [2], et proviennent toujours de la thèse de M. Villette [6] :

*pour  $N_i < A_w f_y$*

$$M_i = M_{pl,beam} * \left( 1 - \left( \frac{N_i}{N_{pl}} \right)^2 \frac{1}{2 \left( \frac{h - t_f}{h - 2t_f} \right) \left( 1 - \frac{A_w}{A} \right) \frac{A_w}{A} + \left( \frac{A_w}{A} \right)^2} \right)$$

*pour  $N_i > A_w f_y$*

$$M_i = bt_f(h - t_f)f_y - \frac{1}{2}(N_i - A_w f_y) \left( h - 2t_f + \frac{N_i - A_w f_y}{2bt_f} \right)$$

Set d'équations venant de la partie indirectement affectée (14, 15)

$$d_1 = \alpha F_1 + \beta F_2$$

$$d_2 = \gamma F_2 + \delta F_1$$

### Comptabilisation des équations et des inconnues :

Inconnues, pour un $Q$ donné	Equations
<ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>\theta_1</math> et <math>\theta_2</math></li> <li>- <math>N_1, M_1</math> et <math>N_2, M_2</math></li> <li>- <math>L_1</math> et <math>L_2</math></li> <li>- <math>\delta_1</math> et <math>\delta_2</math></li> <li>- <math>\Delta</math></li> <li>- <math>K_1</math> et <math>K_2</math></li> <li>- <math>Q_1</math> et <math>Q_2</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- 1 au centre de la PDA (<math>Q = Q_1 + Q_2</math>)</li> <li>- 2 au centre de la PDA (<math>Q_i = 2N_i \sin \theta_i + 2T_i \cos \theta_i</math>)</li> <li>- 2 aux extrémités de la PDA (<math>=2*1</math>)</li> <li>- 6 compatibilités des déplacements (<math>=2*3</math>)</li> <li>- 2 pour l'interaction M+N (<math>=2*1</math>)</li> <li>- <math>d_1 = \alpha F_1 + \beta F_2</math></li> <li>- <math>d_2 = \gamma F_2 + \delta F_1</math></li> </ul>
TOTAL = 15 inconnues	TOTAL = 15 équations

Puisque le nombre d'équations est égal au nombre d'inconnues, le système peut être résolu. Il est résolu en utilisant le logiciel EES (Engineering Equation Solver) : pour chaque valeur de  $Q$  fixée, le logiciel résout toutes les équations et fournit les valeurs des différentes inconnues.

EES est un logiciel de calcul mathématique, développé par William A. Beckman et Sanford A. Klein, tous deux de l'Université du Wisconsin. Ce logiciel fournit la solution numérique d'un set d'équations algébriques. L'avantage est que ces équations peuvent être entrées dans n'importe quel ordre, le logiciel les réarrange automatiquement (pour plus d'informations : <http://www.mhhe.com/engcs/mech/eess/whatisees.html>).

#### 2.6.3.1 Mise en évidence du couplage

##### 2.6.3.1.1 Définition des blocs

Les équations qui ont été développées au point précédent mettent en évidence un couplage entre la partie directement affectée et la partie indirectement affectée, par l'intermédiaire des  $d_i$  et  $F_i$ . Ce couplage peut être mis en évidence en considérant des « blocs » composant le portique. Dans le cas présent, 2 blocs distincts peuvent être étudiés (Figure 74) :

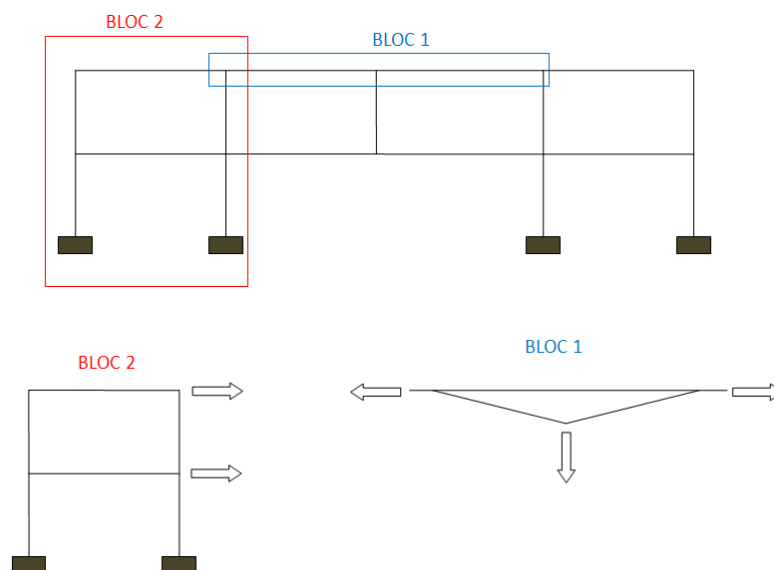


Figure 74 : Définition des blocs à étudier



## BLOC 1

Le bloc 1 est le bloc élémentaire constituant la partie directement affectée. C'est de ce bloc qu'est constituée la sous-structure de J.-F. Demonceau [2] (à la différence près que la sous-structure de J.-F. Demonceau [2] ne contient qu'un seul ressort, ici il y en a deux, identiques, un à chaque extrémité de la partie directement affectée).

Le bloc 1 est un morceau seulement de la partie directement affectée, celle-ci étant composée d'autant de blocs de type 1 qu'il y a de poutres au-dessus de la colonne perdue.

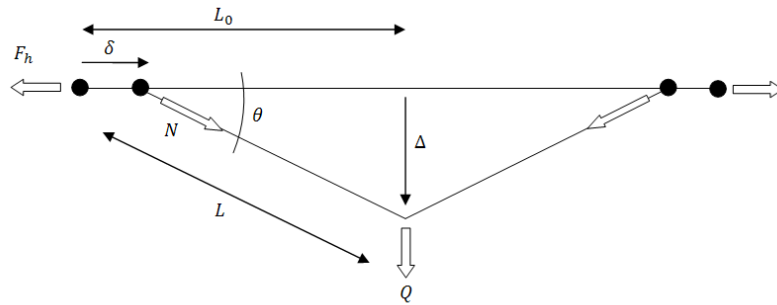


Figure 75 : Bloc 1

Si  $K = \frac{F_h}{\delta}$  ainsi que  $K_N = \frac{N}{\delta_N} = \frac{N}{\frac{L-L_0}{2}}$  sont supposés connus, et sont considérés comme des données du problème, alors les inconnues et les équations pour un  $Q$  donné sont :

Inconnues (7)	Equations (7)
<ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>\Delta</math></li> <li>- <math>\delta</math></li> <li>- <math>\theta</math></li> <li>- <math>L</math></li> <li>- <math>N, M</math></li> <li>- <math>F_h</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- 1 équilibre de forces au centre</li> <li>- 1 équilibre de forces à l'extrémité</li> <li>- 3 compatibilités des déplacements</li> <li>- 1 interaction M+N</li> <li>- <math>K = \frac{F_h}{\delta}</math></li> </ul>

Les équations dénombrées dans le tableau ci-dessus sont identiques à celles décrites au paragraphe 2.6.3., elles ne sont plus explicitées ici.

La raideur du bloc 1 est donc caractérisée par  $K_N$  ainsi que par  $K$ .

## BLOC 2

Le bloc 2 est le bloc qui constitue la partie indirectement affectée (le bloc 2 représente la totalité de la partie indirectement affectée). Les équations provenant du bloc 2 sont les suivantes :

$$d_1 = \alpha F_1 + \beta F_2$$

$$d_2 = \gamma F_2 + \delta F_1$$

La raideur du bloc 2 est donc ici caractérisée par les valeurs de  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ .

### 2.6.3.1.2 Assemblage des blocs

Il faut ensuite assembler ces blocs entre eux. Il y a deux types d'assemblage à faire :

- L'assemblage de différents blocs n°1, pour former la partie directement affectée
- L'assemblage de ces multiples blocs 1 déjà assemblés entre eux avec un bloc n°2

#### ASSEMBLAGE 1

Si l'on suppose toujours que, pour chaque bloc,  $K$  et  $K_N$  sont connus, les équations et inconnues dans la partie directement affectée, pour un  $Q$  donné, sont les suivantes :

Inconnues	Equations
<ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>Q_1, Q_2</math></li> <li>- <math>\Delta_1, \Delta_2</math></li> <li>- <math>\delta_1, \delta_2</math></li> <li>- <math>\theta_1, \theta_2</math></li> <li>- <math>L_1, L_2</math></li> <li>- <math>N_1, M_1, N_2, M_2</math></li> <li>- <math>F_{h1}, F_{h2}</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- 2 (=2*1) équilibres de forces au centre</li> <li>- 2 (=2*1) équilibres de forces aux extrémités</li> <li>- 6 (=2*3) compatibilités des déplacements</li> <li>- 2 (=2*1) interactions M+N</li> <li>- <math>K_1 = \frac{F_{h1}}{\delta_1}</math></li> <li>- <math>K_2 = \frac{F_{h2}}{\delta_2}</math></li> </ul> <p>Equations de compatibilité :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>Q = Q_1 + Q_2</math></li> <li>- <math>\Delta_1 = \Delta_2</math></li> </ul>
TOTAL = 16 inconnues	TOTAL = 16 équations

#### ASSEMBLAGE 2

L'assemblage n°1 permet de déterminer  $F_1, F_2, \delta_1, \delta_2$  lorsque l'on suppose  $K_1$  et  $K_2$  connus. Il faut que ces  $F_1, F_2, \delta_1, \delta_2$ , qui sont communs à la partie directement affectée et à la partie indirectement affectée, respectent, en plus des équations issues de la partie directement affectée, les deux expressions suivantes, provenant de la partie indirectement affectée :

$$d_1 = \alpha F_1 + \beta F_2$$

$$d_2 = \gamma F_2 + \delta F_1$$

Il faut donc libérer deux « degrés de liberté » du système, c'est-à-dire remplacer les deux valeurs fixées de  $K_1$  et  $K_2$  par les deux nouvelles équations provenant du bloc n°2.

### 2.6.4 Remarque à propos des $K_N$

Pour pouvoir résoudre les équations établies au point précédent, il nous faut connaître uniquement deux valeurs,  $K_{N1}$  et  $K_{N2}$  (en plus des coefficients  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ). Ce sont les valeurs des raideurs extensionnelles des rotules plastiques, au niveau de la poutre inférieure et au niveau de la poutre supérieure. Déterminer le  $K_N$  revient en réalité à étudier plus en détail le bloc 1.

#### 2.6.4.1 Importance des $K_N$

La valeur des  $K_N$ , tant pour la poutre supérieure que pour la poutre inférieure, revêt une importance non négligeable. Pour montrer cette influence sur la raideur latérale de la partie indirectement affectée, le système d'équations développé au paragraphe 2.6.3 a été résolu (toujours via le logiciel EES) pour différentes valeurs de  $K_{N1} = K_{N2} = K_N$ . Il faut noter que les  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$  sont constants, c'est uniquement le  $K_N$  qui varie. Les résultats sont les suivants (Figure 76) :

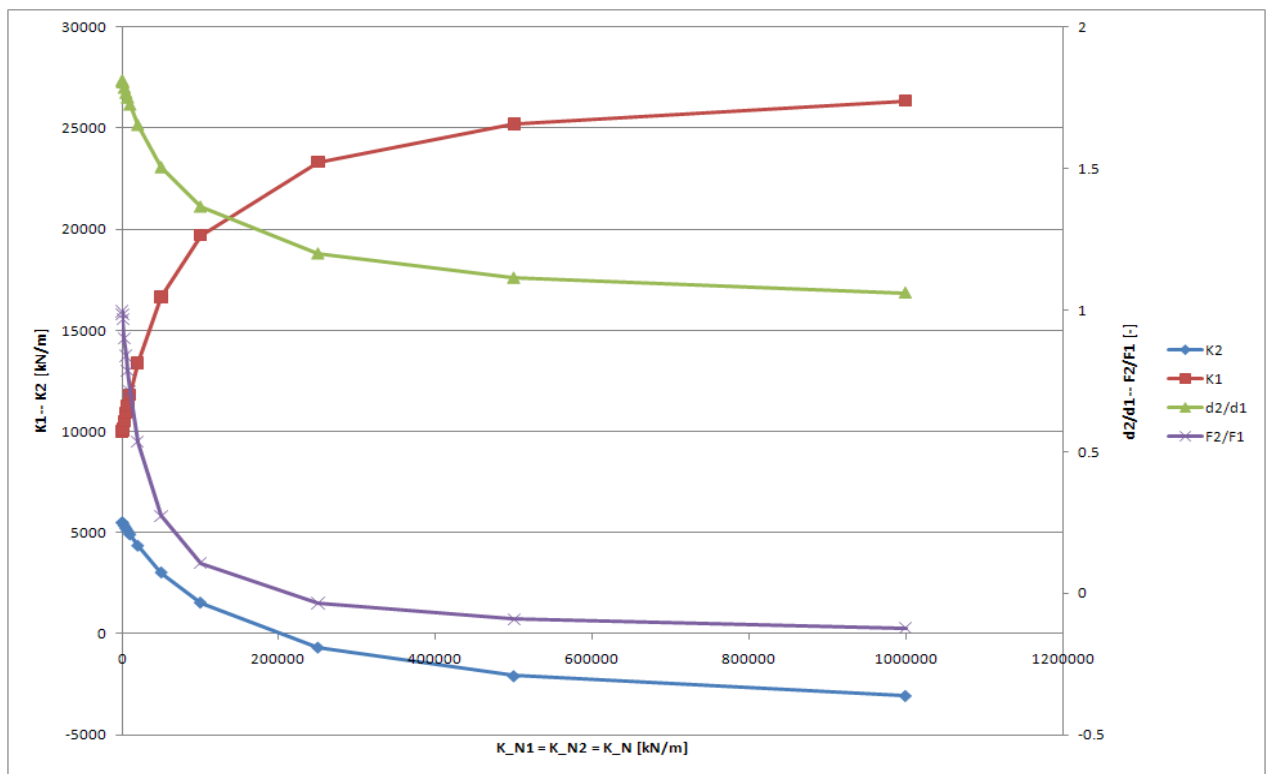


Figure 76 : Influence de la valeur de  $K_N$  sur  $K_1, K_2, \frac{\Delta d_2}{\Delta d_1}, \frac{\Delta F_2}{\Delta F_1}$

Les deux cas limites sont les suivants :

- $K_{N1} = K_{N2} \sim 0$

Pour ce cas limite, les valeurs de  $K_1, K_2, \frac{\Delta d_2}{\Delta d_1}, \frac{\Delta F_2}{\Delta F_1}$  semblent tendre vers les valeurs telles que  $\frac{\Delta F_2}{\Delta F_1} = 1$ .

En effet, lorsque une force verticale dirigée vers le bas est appliquée sur la partie directement affectée dont la raideur axiale des barres est quasiment nulle, la situation est quasiment analogue à :

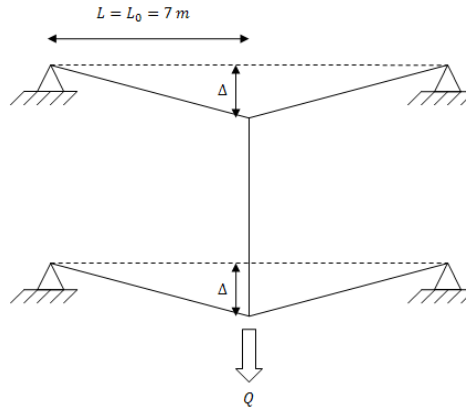


Figure 77 : Cas limite  $K_N \sim 0$

Les déplacements horizontaux de la partie indirectement affectée peuvent quasiment être considérés comme nuls dans ce cas, puisque toute la déformation se concentre dans la partie directement affectée. C'est en réalité comme si les ressorts  $K_N$  et  $K$  étaient mis en série : lorsque le ressort  $K_N$  vaut à peu près 0, toute la déformation du système provient de l'allongement des barres tandis que la déformation due à  $K$  (donc à la partie indirectement affectée) peut être considérée comme nulle.

Dans ce cas particulier, les efforts dans les barres sont bien identiques et  $F_1 = F_2$ . Les valeurs des différents paramètres tendent donc vers les valeurs suivantes :

$$K_1 = K_1 = \frac{1}{\alpha + \beta \frac{\Delta F_2}{\Delta F_1}} = \frac{1}{\frac{0.0448}{1000} + \frac{0.0558}{1000} * 1} = 9940.36 \text{ kN/m}$$

$$K_2 = \frac{1}{\gamma + \frac{\delta\beta}{K_1 - \alpha}} = \frac{1}{\frac{0.1264}{1000} + \frac{\frac{0.0558^2}{10^6}}{\frac{1}{9940.36} - \frac{0.0448}{1000}}} = 5488.5 \text{ kN/m}$$

$$\frac{\Delta d_2}{\Delta d_1} = \frac{\gamma - K_1(\alpha\gamma - \delta\beta)}{\beta} = \frac{0.1264 - \frac{9940.36}{1000}(0.0448 * 0.1264 - 0.0558^2)}{0.0558} = 1.8111 [-]$$

La valeur finie de  $\frac{\Delta d_2}{\Delta d_1}$  peut ici être vue comme une valeur limite de  $\frac{\Delta d_2}{\Delta d_1}$  lorsque  $d_2$  et  $d_1$  tendent tous les deux vers 0.

- $K_{N1} = K_{N2} \rightarrow \infty$

Comme les poutres de la partie directement affectée ne s'allongent ni ne se raccourcissent, les déplacements horizontaux des points 1 et 2 sont égaux, de telle sorte que  $\frac{\Delta d_1}{\Delta d_2} = 1$  :

$$\frac{\Delta F_2}{\Delta F_1} = \frac{\delta - \alpha \frac{\Delta d_2}{\Delta d_1}}{\beta \frac{\Delta d_2}{\Delta d_1} - \gamma} = \frac{0.0558 - 0.0448}{0.0558 - 0.1264} = -0.1558 [-]$$

$$K_1 = \frac{1}{\alpha + \beta \frac{\Delta F_2}{\Delta F_1}} = \frac{1000}{0.0448 + 0.0558 * (-0.1558)} = 27696 \text{ kN/m}$$

$$K_2 = \frac{1}{\gamma + \frac{\delta \beta}{K_1 - \alpha}} = \frac{1}{\frac{0.1264}{1000} + \frac{\frac{0.0558^2}{10^6}}{\frac{1}{27696} - \frac{0.0448}{1000}}} = -4513 \text{ kN/m}$$

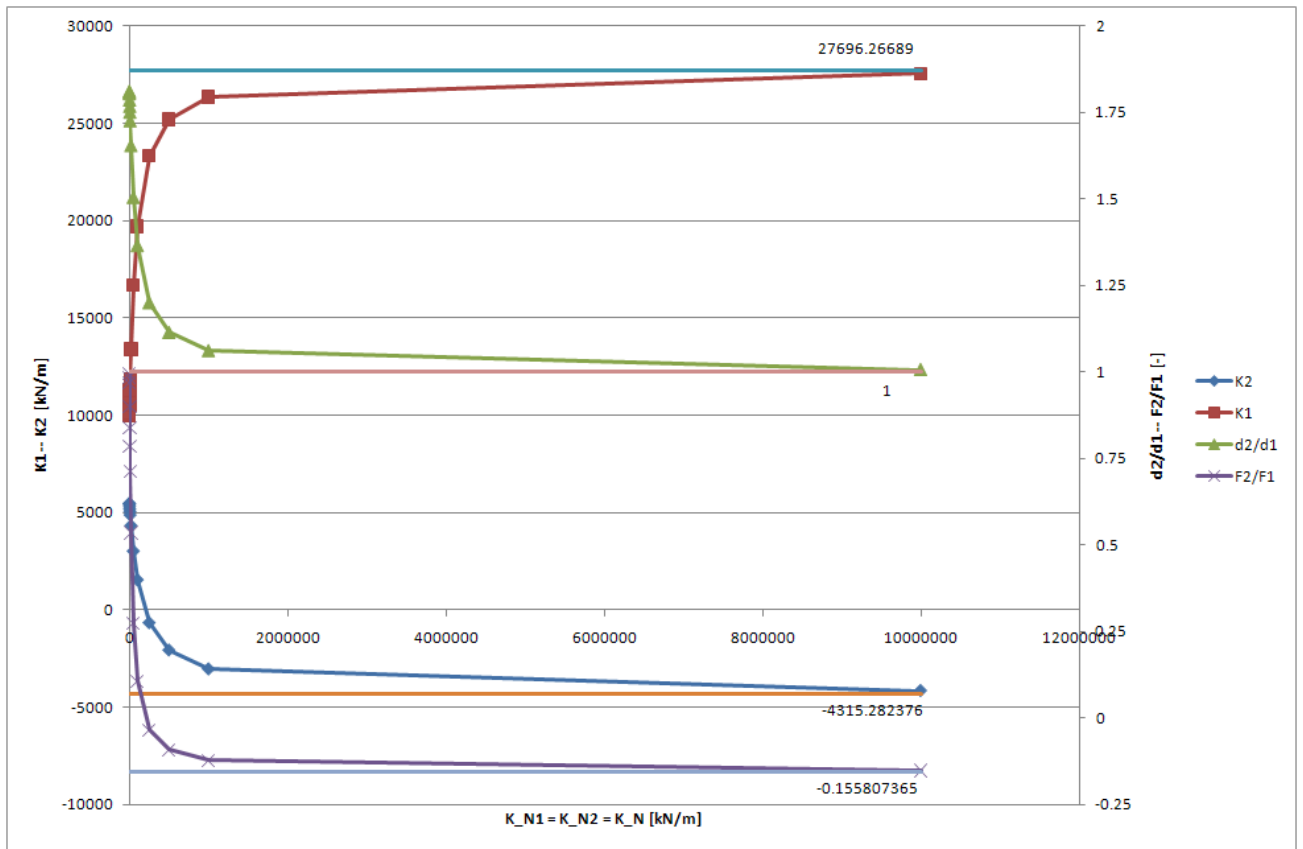


Figure 78 : Cas limite  $K_N \rightarrow \infty$

#### 2.6.4.2 Détermination des $K_N$

Ces valeurs doivent, dans l'état actuel de la théorie développée, être déterminées numériquement. Pour rappel, ces valeurs sont déterminées en considérant les déplacements des deux points extrémités de la poutre, en déduisant de ces déplacements la nouvelle longueur de la poutre  $L_{finale}$ , et en calculant ensuite  $\delta_N = \frac{L_{finale} - L_0}{2}$  (Figure 40). Cet allongement/raccourcissement est ensuite mis en relation avec l'effort normal qui agit dans la poutre étudiée.

Au niveau de la poutre inférieure, le lien entre  $N$  et  $\delta_N$  est le suivant (Figure 79):

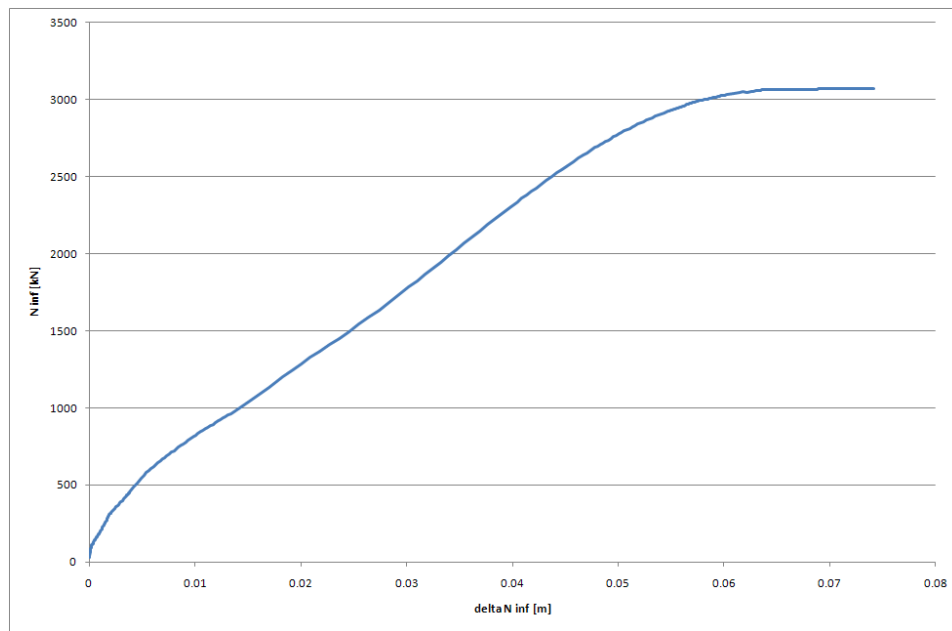


Figure 79 :  $N_{inf}$  en fonction de  $\delta_{N,inf}$

Pour la poutre supérieure, le résultat est le suivant (Figure 80):

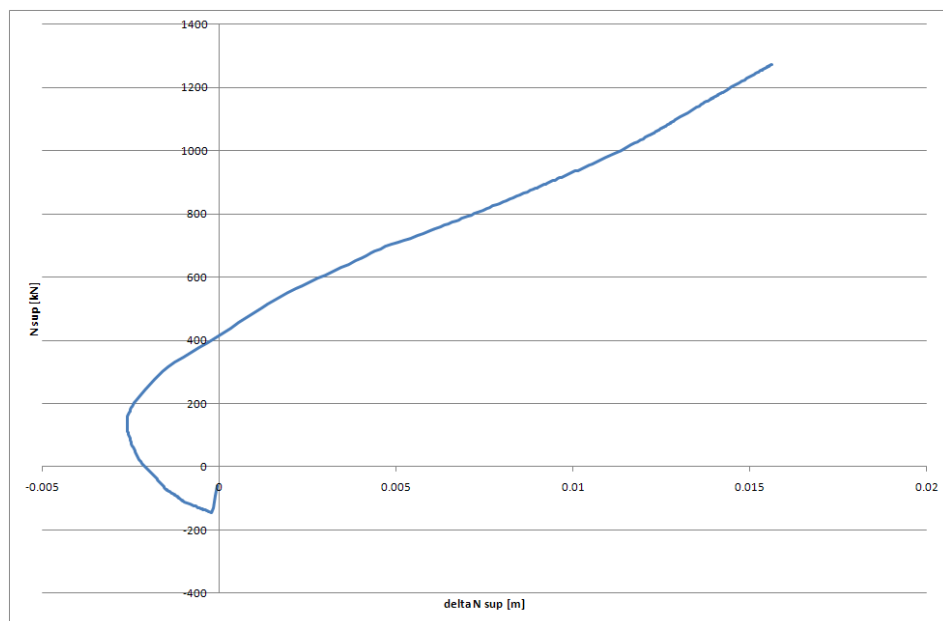


Figure 80 :  $N_{sup}$  en fonction de  $\delta_{N,sup}$

Les résultats obtenus pour cette poutre supérieure semblent incohérents : dans la première partie de la courbe, juste après la fin de la phase 2 (moment pour lequel  $\delta_{N,sup} \sim 0$  et  $N_{sup}$  est minimal), l'effort de compression dans la poutre supérieure diminue ( $N$  a tendance à devenir positif), pourtant,  $\delta_{N,sup}$  devient de plus en plus négatif, ce qui signifie que la poutre continue de se raccourcir.

Pour expliquer ce phénomène, il faut tout d'abord se rendre compte que les rotules dans la poutre supérieure ne se forment pas parfaitement aux extrémités des poutres, mais de manière légèrement décentrée. Cet excentrement des rotules provient du fait que la structure est initialement chargée avant l'application de  $N_{lost}$ , qui représente la disparition progressive de la colonne (Figure 81):

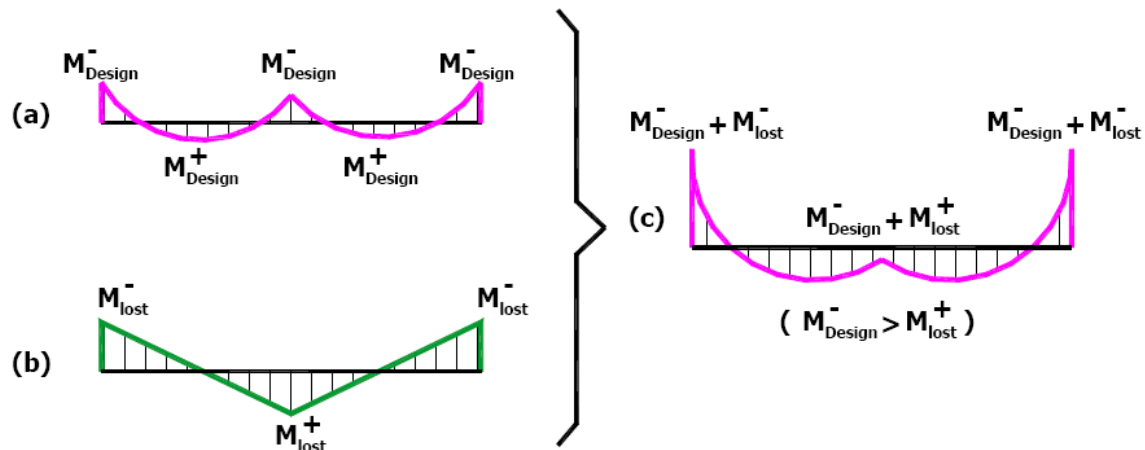


Figure 81 : Addition des moments dus aux charges initiales et des moments dus à l'application de  $N_{lost}$  (HAI [4])

Cet excentrement des rotules avait déjà été mis en évidence dans le travail de fin d'études de François Muller [5].

Comme les rotules ne se forment pas parfaitement aux extrémités des poutres mais légèrement à l'intérieur, la déformée d'une poutre de la partie directement affectée est la suivante (Figure 82):

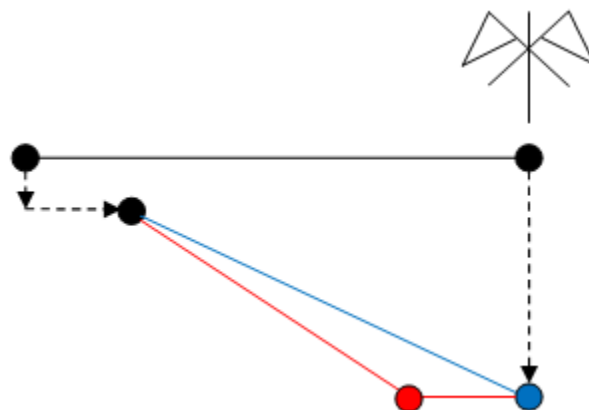


Figure 82 : Déformée d'une poutre de la partie directement affectée

La déformée réelle est la déformée représentée en rouge tandis que la déformée en bleu est celle considérée dans le modèle présenté dans ce travail de fin d'études, qui suppose les rotules situées parfaitement aux extrémités.

La méthode actuellement utilisée pour déterminer la valeur des  $K_N$  considère donc la variation de longueur de la corde, et non pas la variation de longueur sur l'entièreté de la poutre. En effet, sous un certain effort de traction, la poutre s'allonge alors que la corde, elle, peut se raccourcir.

C'est bien ce qui se passe ici. Pour illustrer le fait que la poutre s'allonge effectivement sous un effort de compression qui diminue, la méthode est la suivante : on relève dans le fichier .OUT fourni par FINELG les valeurs de l'effort normal  $N$  et de la déformation axiale  $\varepsilon$ , et cela pour chaque élément constituant la poutre, on en déduit finalement une valeur de  $\delta_N$  pour un certain  $N = N_{moyen}$  :

	$N$	$\varepsilon$	$L_{initiale}$	$L_{finale}$	
ELEMENT 1			0.25 m	$= L_{initiale,i} * (1 + \varepsilon_i)$	
...			0.5 m		
ELEMENT N			0.25 m		
	$N_{moyen} = \frac{\sum N_i}{n}$		$\sum L_{initiale,i}$ $= L_0 (7 \text{ m})$	$\sum L_{finale,i}$ $= L_{finale,TOT}$	$\delta_N$ $= \frac{L_{finale,TOT} - L_0}{2}$

On procède de la sorte en plusieurs pas, pour obtenir plusieurs points du graphe  $N - \delta_N$  :

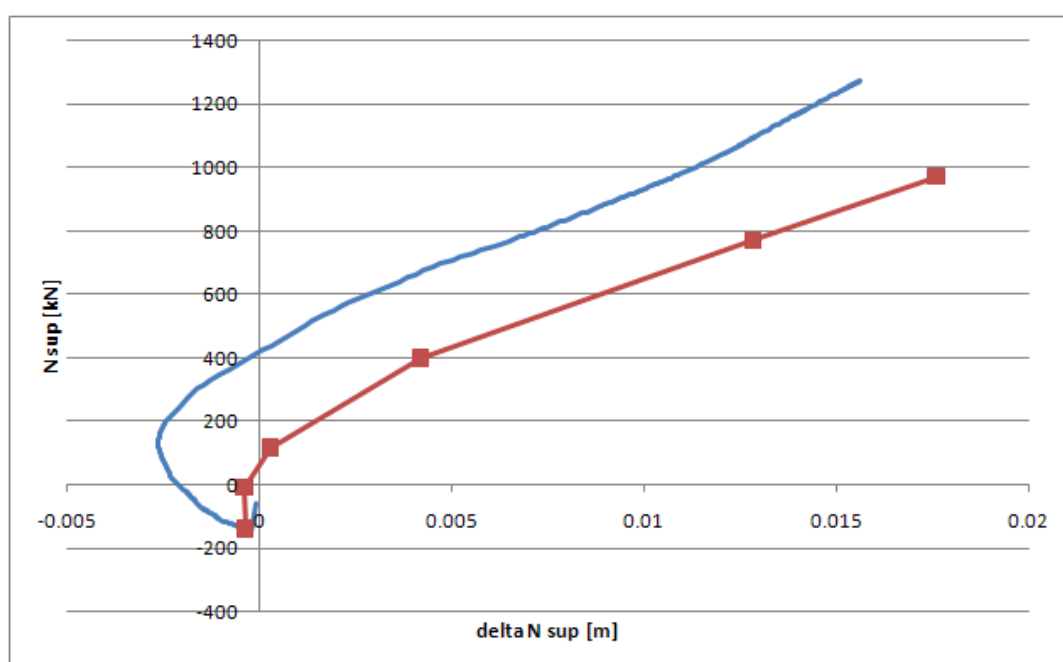


Figure 83 : Allongement de la corde comparé à l'allongement de poutre

La courbe en bleu est celle pour laquelle le  $\delta_N$  est calculé en fonction des déplacements des deux points extrémités de la poutre, autrement dit, c'est la courbe qui calcule la variation de longueur de la corde. La courbe en rouge quant à elle est celle pour laquelle le  $\delta_N$  est calculé en cumulant les valeurs des allongements tout le long de la poutre réelle.

La conclusion est donc la suivante : au début de la phase 3, la corde se raccourcit alors que la poutre s'allonge effectivement. La courbe rouge ne produit plus des valeurs négatives de  $\delta_N$ .



Une autre chose à expliquer est le changement de pente dans le graphique  $N_{sup} - \delta_{N,sup}$ . Il coïncide avec le moment où l'effort  $N_{up}$  se remet à augmenter (Figure 84):

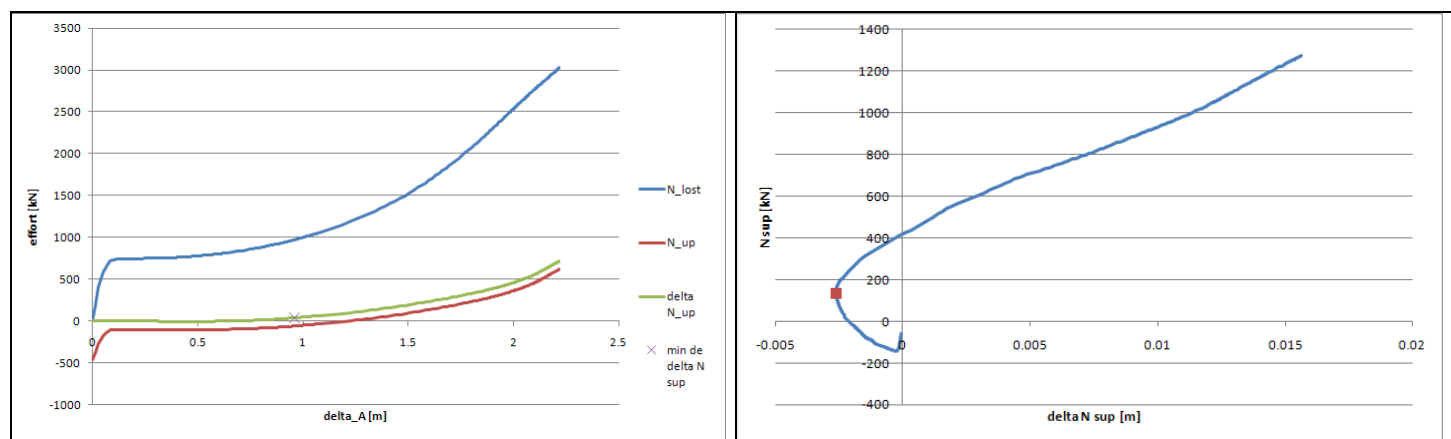


Figure 84 : Changement de pente dans  $N_{sup} - \delta_{N,sup}$  et diminution de  $N_{up}$

Au début de la phase 3, l'effort  $N_{up}$  est constant, et négatif : la colonne au dessus de la colonne disparue est toujours en compression, malgré le fait qu'une force  $N_{lost}$ , dirigée vers le bas, est appliquée à la structure. Cette colonne en compression sert donc d'appui à la poutre supérieure.

Lorsque l'effort  $N_{up}$  commence à diminuer, pour finalement passer en traction, cette poutre supérieure perd progressivement son appui central, ce qui peut expliquer le changement de pente.

Conclusion :

Dans le modèle qui a été développé précédemment, l'hypothèse a été faite que les rotules se formaient aux extrémités des poutres, il n'a pas été pris en compte qu'elles se formaient en réalité légèrement à l'intérieur des poutres. Dans ce modèle, c'est la variation de la corde que l'on cherche à obtenir, c'est donc bien la courbe dans laquelle on voit apparaître un  $K_{N,sup}$  négatif qu'il faudra exploiter.

Il faut noter que cette courbe  $N_{sup} - \delta$  a été déterminée en considérant un  $N$  au centre de la poutre :

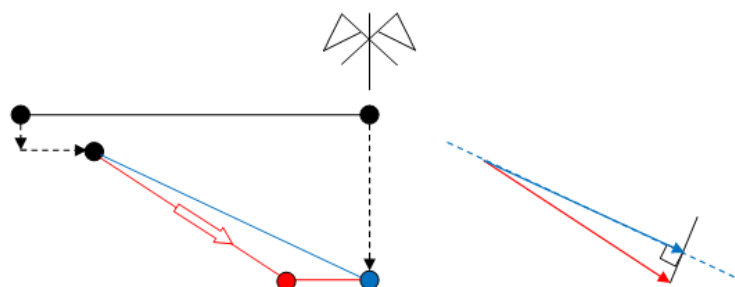


Figure 85 : Projection de  $N$  sur la corde

Or, ce que l'on cherche à définir, pour être parfaitement en accord avec la définition donnée au  $K_N$  dans le modèle développé, c'est un  $N$  dirigé selon la corde. Il faudrait donc, en toute rigueur, projeter ce  $N$  sur la corde. L'hypothèse est faite ici que l'angle entre ces deux configurations est assez faible que pour négliger cette différence.

Dans les courbes de  $N - \delta_N$ , 3 points importants peuvent être déterminés :

- (1) : fin de la phase 2
- (2) : minimum de  $\delta_{N,sup}$ , correspondant au moment où  $N_{up}$  recommence à augmenter
- (3) : plastification de la poutre inférieure en traction

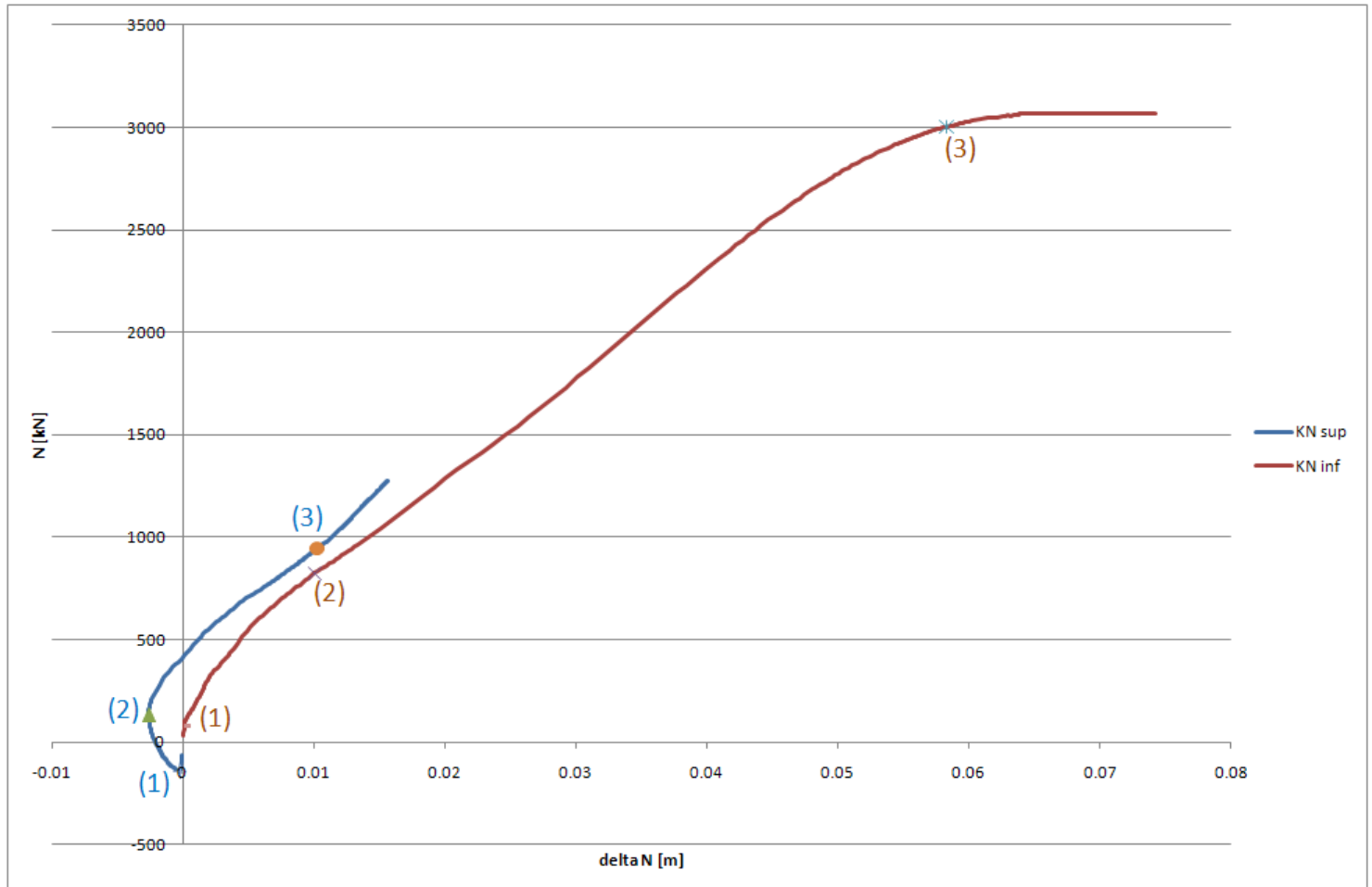


Figure 86 : Détermination des points (1), (2) et (3)

On s'intéresse ici à la phase 3, et les courbes ne doivent être considérées qu'après le point (1) et avant le point (3). Deux couples de  $K_N$  peuvent donc être déterminés : un couple entre les points (1) et (2) et un autre, entre les points (2) et (3) :

	$K_{N1}$	$K_{N2}$
Entre le point (1) et le point (2)	74 583.5 kN/m	-116 178 kN/m
Entre le point (2) et le point (3)	45 172.1 kN/m	63 154.6 kN/m

### 2.6.5 Résultats

Etant en possession de valeurs de  $K_N$ , ainsi que des valeurs des paramètres  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$ , le système d'équations peut être résolu. Les résultats qui sont présentés ici sont ceux obtenus avec le deuxième couple de valeurs de  $K_N$  ( $K_{N1} = 45\,172.1 \frac{kN}{m}$ ,  $63\,154.6 \frac{kN}{m}$ ) dans un premier temps.

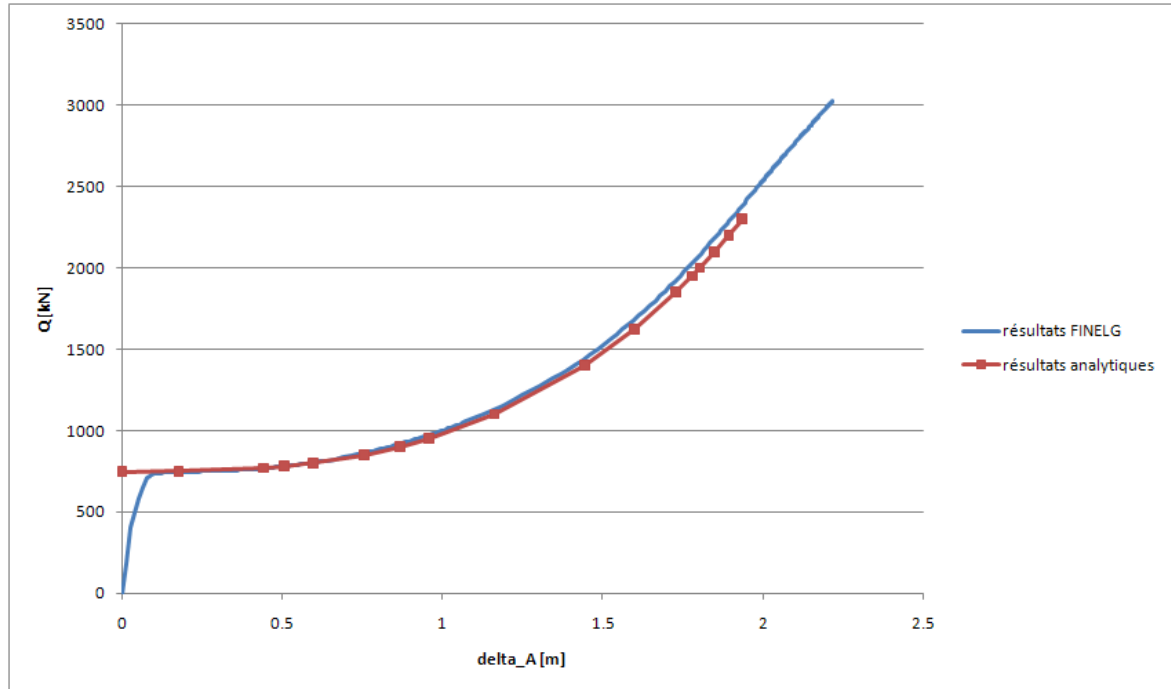


Figure 87 : courbe  $Q - \Delta_A$  : comparaison des résultats FINELG et analytique

Les résultats analytiques semblent très proches des résultats FINELG (différence maximale relative entre les déplacements pour une même valeur de  $Q$  de l'ordre de 2%). La courbe analytique colle ici directement à la courbe numérique, il n'y a pas besoin de faire une correction a posteriori, ce qui n'était pas le cas lors de l'étude par la sous-structure développée par J.-F. Demonceau [2]. En effet, dans cette nouvelle sous-structure, la variation de  $N_{up}$  est directement prise en compte.

La courbe analytique, basée sur une analyse rigide plastique comme celle utilisée par J.-F. Demonceau [2], commence en  $\Delta_A = 0$ , pour une valeur de  $Q$  égale à celle qui provoque le mécanisme plastique dans la partie directement affectée, c'est-à-dire  $Q = N_{pl,lost} = \frac{2 \cdot 4 \cdot M_{pl,IPE550}}{L} = \frac{8 \cdot 654.945}{7} = 748.5 \text{ kN}$ .

Si l'on s'intéresse maintenant à la répartition de cet effort  $Q$  entre les deux étages, il faut observer les valeurs  $Q_1$  et  $Q_2$ . Pour rappel,  $N_{lost} = Q$  est la charge appliquée à la structure, qui simule la perte de la colonne, tandis que  $N_{up}$  est l'effort axial dans la colonne juste au dessus de la colonne disparue. En reprenant les notations utilisées dans les équations du paragraphe 2.6.3, l'équivalence est donc la suivante :

$$Q \leftrightarrow N_{lost}$$

$$Q_1 \leftrightarrow N_{lost} - N_{up}$$

$$Q_2 \leftrightarrow N_{up}$$

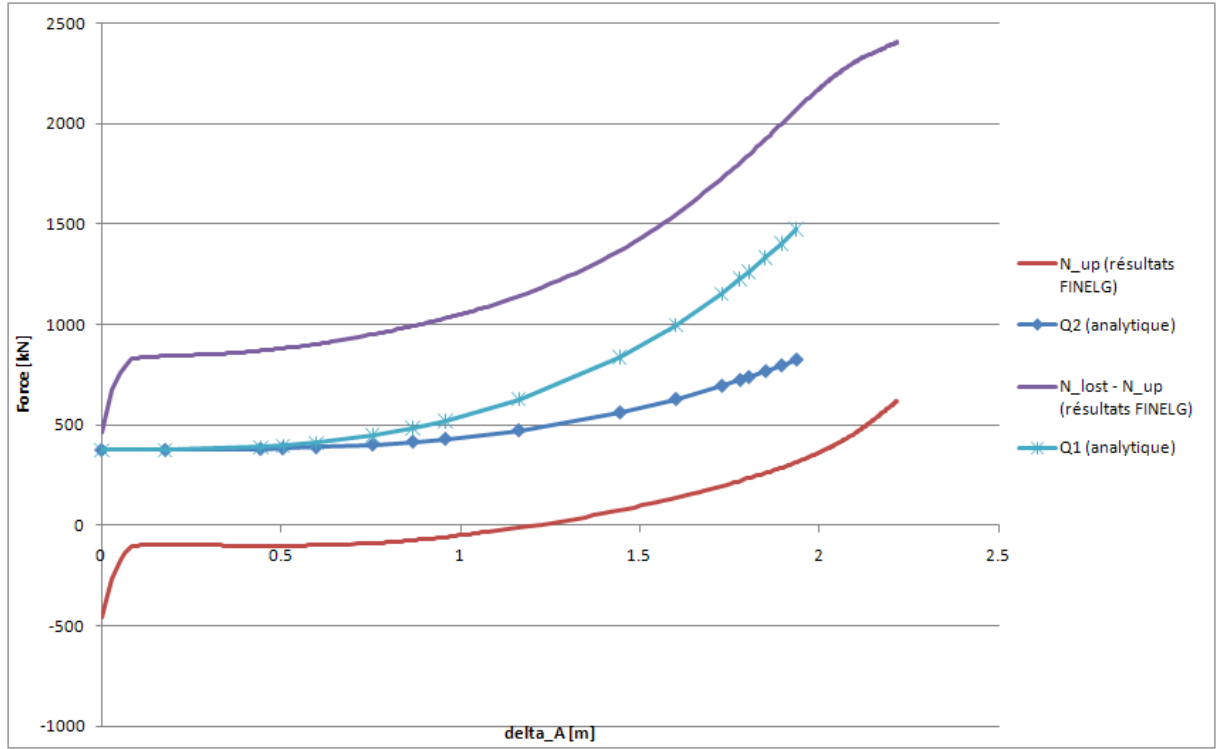


Figure 88 : courbes  $Q_i - \Delta_A$  : comparaison des résultats FINELG et analytiques

Pour les solutions analytiques, au départ,  $\Delta_A$  est nul et  $Q_1 = Q_2 = 374.25 \text{ kN}$ . En effet, les équations du modèle analytique sont les suivantes :

$$Q = Q_1 + Q_2$$

$$Q_i = 2 * N_i * \sin \theta_i + 4 * \frac{M_i}{L_0} * \cos \theta_i$$

Puisque, dans le modèle, au début de la phase 3,  $\Delta_A = \theta_i = 0$ , les valeurs initiales de  $Q_i$  sont bien égales à  $4 * \frac{M_i}{L_0} = 4 * \frac{M_{pl, IPE550}}{7} = \frac{N_{pl, lost}}{2} = 374.25 \text{ kN}$

Comme le graphique ci-dessus le montre, en réalité, les valeurs de  $Q_1$  et  $Q_2$  en début de phase 3 ne sont pas égales. Cela est dû au fait que l'effort de compression dans la colonne au-dessus de la colonne qui disparaît n'est pas nul en fin de phase 1 et vaut  $N_{up,0}$ . Il faudrait en tenir compte et modifier les équations comme suit :

$$Q = Q_1 + Q_2$$

$$Q_1 = 2 * N_1 * \sin \theta_1 + 4 * \frac{M_1}{L_0} * \cos \theta_1 + N_{up,0}$$

$$Q_2 = 2 * N_2 * \sin \theta_2 + 4 * \frac{M_2}{L_0} * \cos \theta_2 - N_{up,0}$$

Cette valeur de  $N_{up,0}$  est l'effort de compression dans la colonne au dessus de celle qui disparaît en fin de phase 1. Dans ce cas, cet effort vaut  $460 \text{ kN}$ . Cette valeur peut être retrouvée sur la Figure 88, en observant la courbe rouge pour  $\Delta_A \sim 0$ .

En introduisant cette correction, les courbes deviennent (Figure 89):

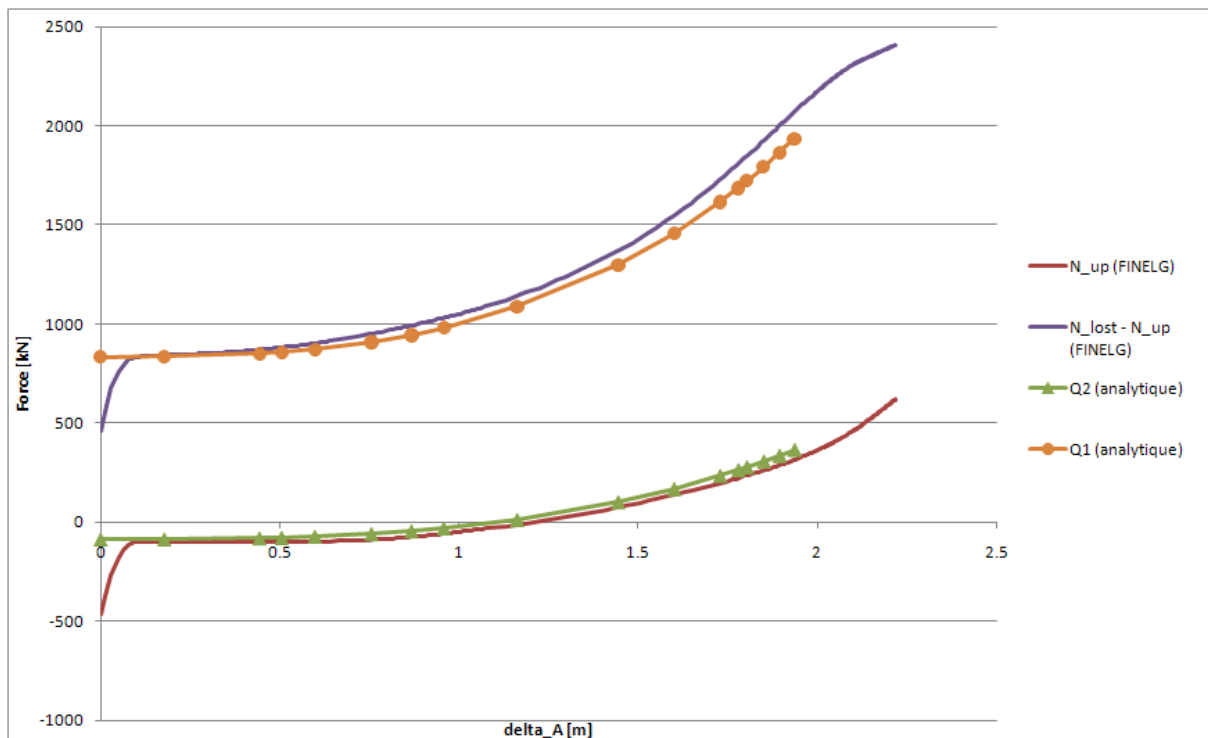


Figure 89 : Prise en compte de la valeur initiale de  $N_{up}$

Quand la partie indirectement affectée est élastique, certaines relations sont tout de même non linéaires :

- La relation entre  $Q$  et  $\Delta_A$ , qui vient d'être étudiée précédemment
- La relation entre  $Q$  et  $F_1$
- La relation entre  $F_1$  et  $\Delta_A$  (découle des deux premières)

Les deux dernières courbes sont représentées ci-dessous :

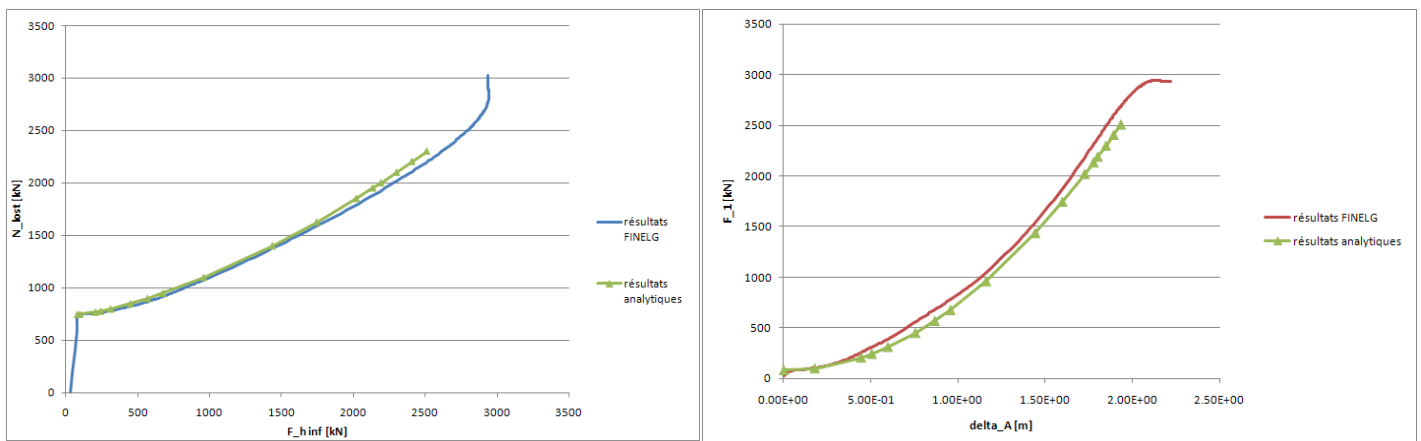


Figure 90 : Courbes  $N_{lost} - F_{h,inf}$  et  $F_{h,inf} - \Delta_A$  : Comparaison des résultats analytiques et FINELG

Concernant les différentes raideurs ( $K_1, K_2$ ) et les valeurs de  $\Delta d_2/\Delta d_1$  et  $\Delta F_2/\Delta F_1$ , les résultats sont les suivants (Figure 91):

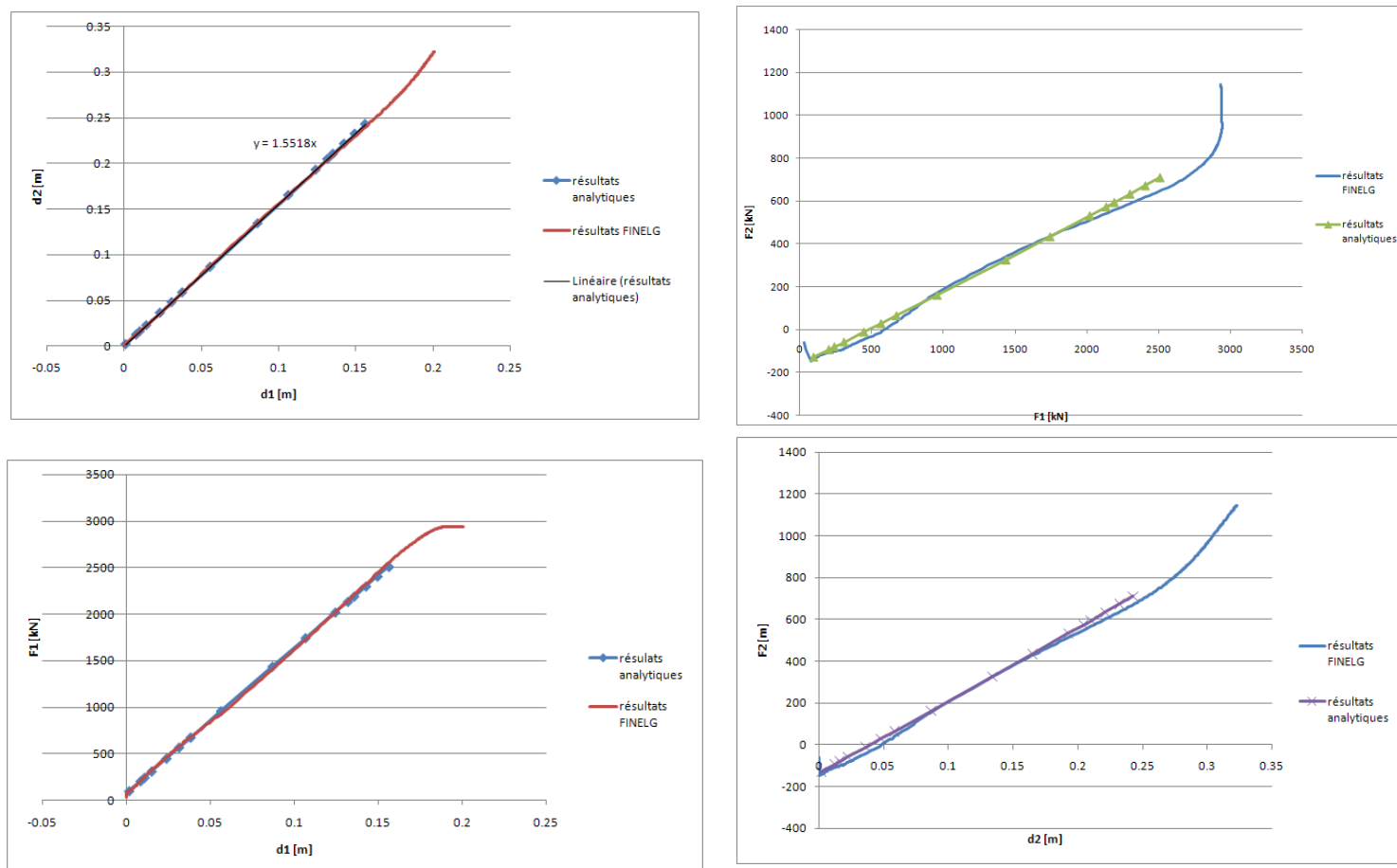


Figure 91 : Courbes  $d_2 - d_1, F_2 - F_1, F_1 - d_1, F_2 - d_2$

	$K_1$ [kN/m]	$K_2$ [kN/m]	$\Delta F_1/\Delta F_2$ [-]	$\Delta d_2/\Delta d_1$ [-]
Résultats FINELG	15726	3425	0.3345	1.5754
Résultats analytiques	15617.2	3468.6	0.34466	1.5518
Erreur relative (%)	0,88	1,27	3,04	1,5

Les erreurs restent donc très limitées (au maximum égale à 3%), les résultats fournis par l'analyse semblent assez proches de la réalité.

Pour rappel, les éléments-clés durant la phase 3 sont les poutres supérieure et inférieure de la partie directement affectée, ainsi que la colonne adjacente à la colonne perdue.

Les efforts normaux dans les deux poutres sont donnés directement par l'analyse de la sous-structure de la partie directement affectée puisque ces poutres font partie de la sous-structure (Figure 92):

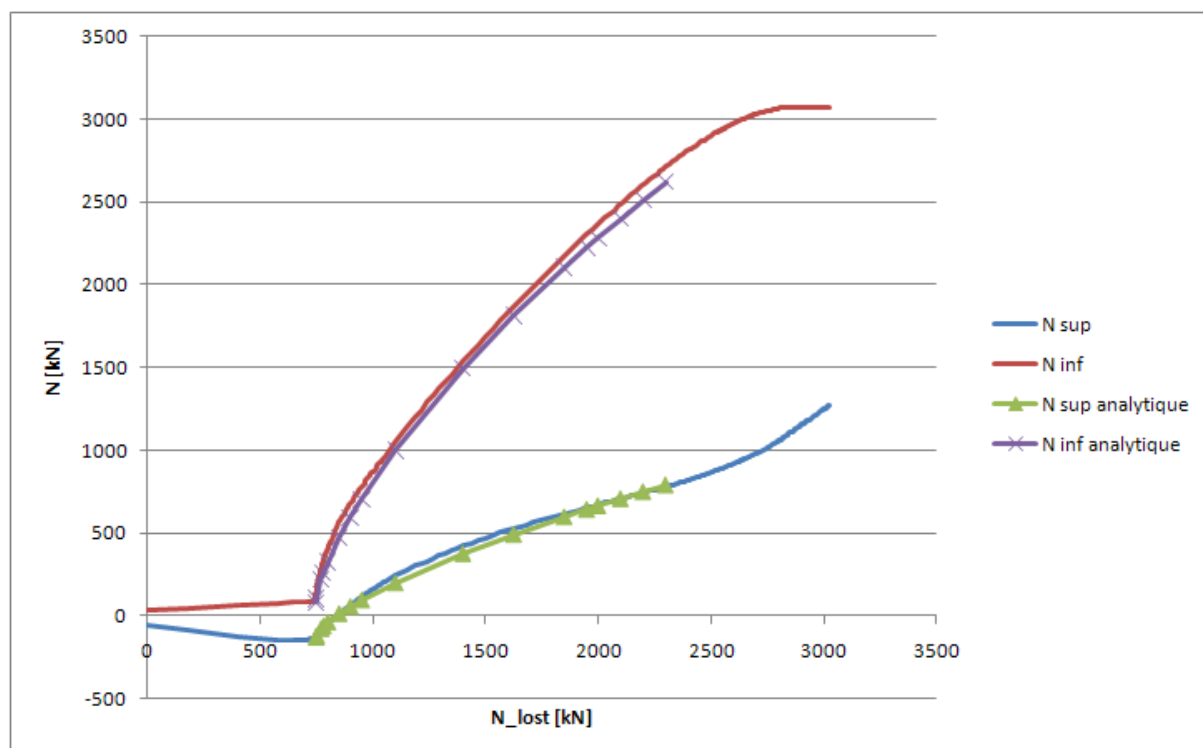


Figure 92 : Efforts normaux dans les poutres de la partie directement affectée au cours de la phase 3

L'effort dans la colonne adjacente, par contre, n'est pas directement fourni par l'analyse de la sous-structure puisque cette colonne n'en fait pas partie. Il faut utiliser les résultats fournis par la sous-structure pour calculer l'effort dans cette colonne.

Une fois la sous-structure résolue, les forces résultantes, verticales et horizontales, qui agissent aux niveaux supérieur et inférieur de la partie indirectement affectée sont connues (Figure 93):

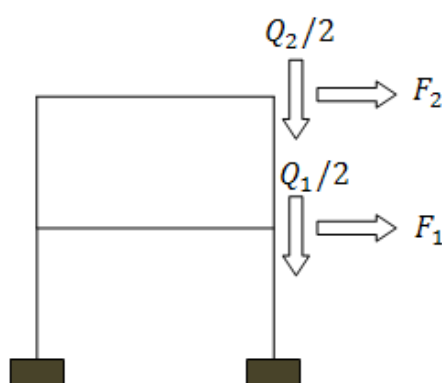


Figure 93 : Efforts résultants agissant sur la partie indirectement affectée

Chacun de ces efforts va induire une composante de compression dans la colonne adjacente (Figure 94):

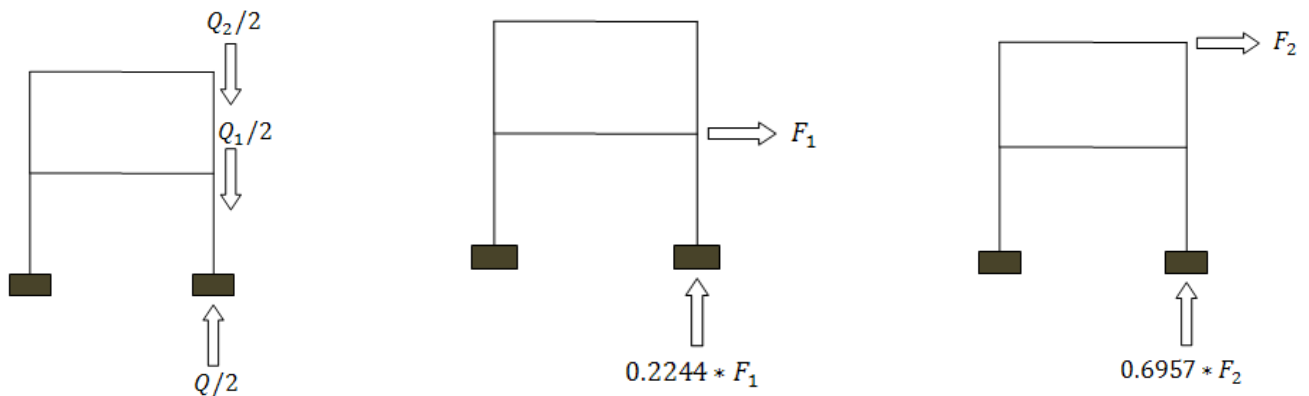


Figure 94 : Composantes de  $N_{colonne\ adjacente}$

De la Figure 94, on peut conclure que l'effort dans la colonne adjacente durant la phase 3 se compose des 3 termes suivants :

$$N_{adj} = 0,5 * Q + 0,2244 * F_1 + 0,6957 * F_2$$

Le résultat est donné à la figure suivante (Figure 95):

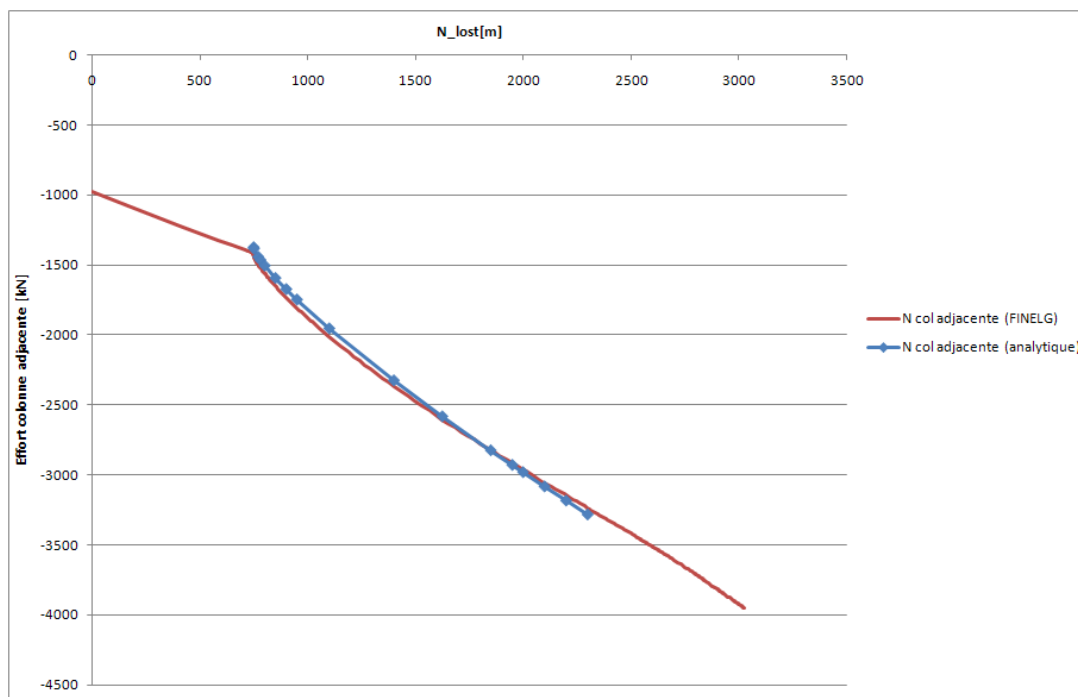


Figure 95 : Comparaison des résultats FINELG et analytiques pour le calcul de  $N_{adj}$



Si l'on considère maintenant le premier couple de valeurs de  $K_N$ , celui dont le  $K_{N2}$  est négatif ( $K_{N1} = 74\,583.5 \frac{kN}{m}$ ,  $K_{N2} = -116\,178 \frac{kN}{m}$ ), les résultats sont quasiment identiques à ceux obtenus avec le deuxième couple de  $K_N$ . Les résultats sont fournis aux Figure 96 et Figure 97.

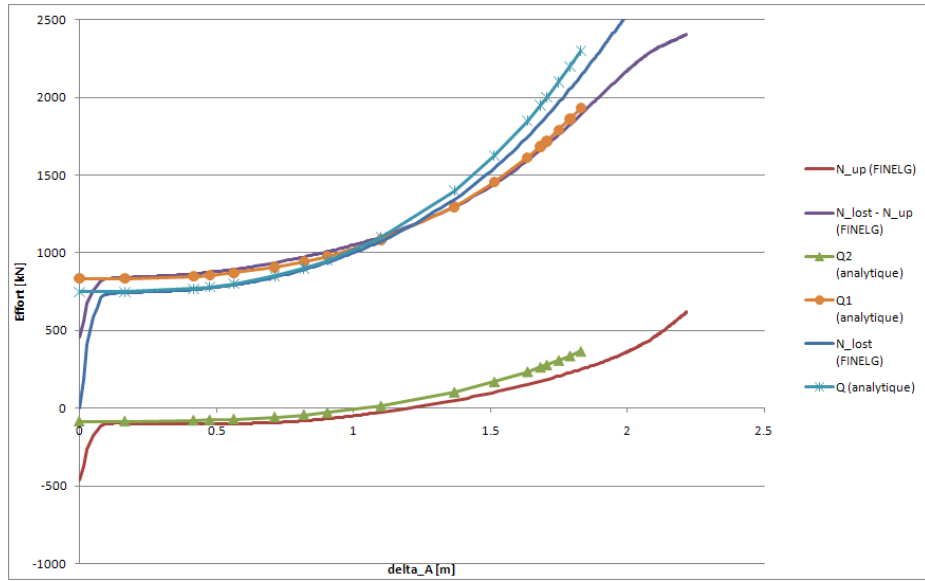


Figure 96 : Comparaison des résultats FINELG et analytiques pour  $Q$ ,  $Q_1$  et  $Q_2$

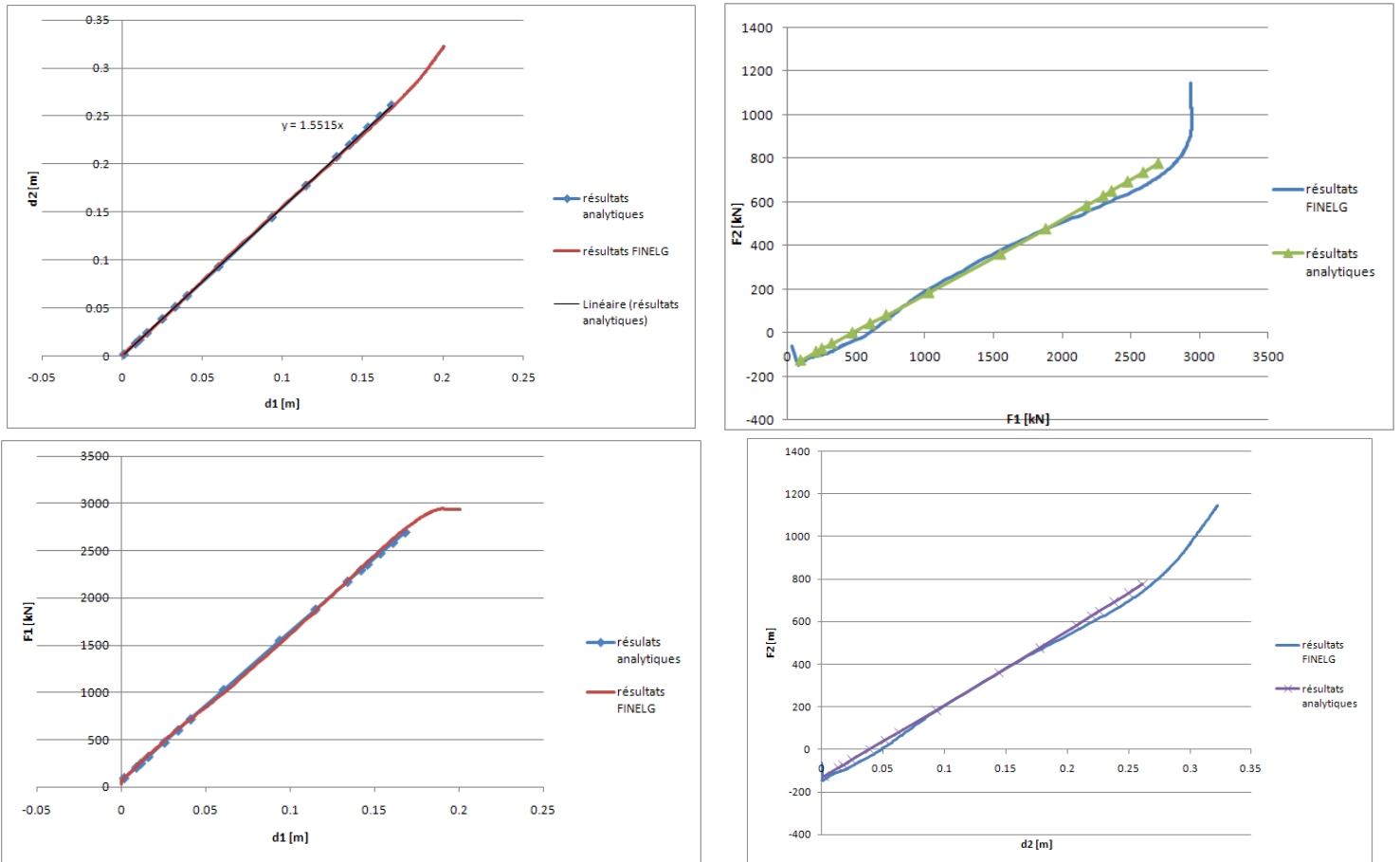


Figure 97 : Courbes  $d_2 - d_1$ ,  $F_2 - F_1$ ,  $F_1 - d_1$ ,  $F_2 - d_2$

	$K_1[kN/m]$	$K_2[kN/m]$	$\Delta F_1/\Delta F_2[-]$	$\Delta d_2/\Delta d_1[-]$
Résultats FINELG	15726	3425	0.3345	1.5754
Résultats analytiques	15623.8	3465.9	0.3442	1.5515
Erreur relative (%)	0.84	1.2	2.9	1.52

En conclusion: plusieurs couples de  $K_N$  mènent à la même solution. Le  $K_{N2}$  négatif ne doit pas être vu comme une aberration physique puisque le  $K_N$  qui est considéré pour coller au modèle n'a pas réellement de signification physique mais peut s'expliquer simplement comme suit : on observe la variation de la corde, qui peut se raccourcir alors que la poutre est en traction, par simple effet géométrique.

## 2.7 Etude d'autres portiques

### 2.7.1 Définition des portiques étudiés

Pour illustrer la méthode développée dans ce travail de fin d'études, plusieurs portiques ont été étudiés. Ils sont présentés ci-après.

#### PORTIQUES 1, 3, 4 ET 5

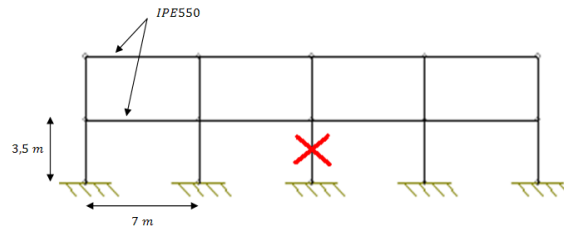


Figure 98 : Géométrie commune aux portiques 1, 3, 4 et 5

	Colonnes		Nuance d'acier de la partie indirectement affectée	
	HEB300	HEB400	S235	S355
PORTIQUE N°1	X		X	
PORTIQUE N°3	X			X
PORTIQUE N°4		X	X	
PORTIQUE N°5		X		X

Notons que ces 4 portiques ont en commun leur partie directement affectée, qui est toujours composée de poutres IPE550, faites d'acier S235. Cela signifie que les paliers plastiques de ces 4 portiques se produisent pour la même valeur de  $N_{pl,lost}$ . Les portiques 1 et 3, lorsque la partie indirectement affectée est élastique, sont identiques, de même que les portiques 4 et 5 sont identiques eux aussi dans ce cas, puisque la valeur de  $f_y$  n'entre pas en ligne de compte. Les résultats pour les portiques 1 et 3 ont déjà été exposés précédemment, au paragraphe 2.6.5.

#### PORTIQUE 2

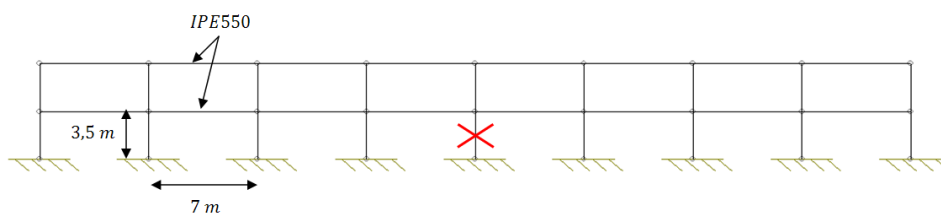


Figure 99 : Géométrie du portique 2

	Colonnes		Nuance d'acier de la partie indirectement affectée	
	HEB300	HEB400	S235	S355
PORTIQUE N°2	X		X	

La partie directement affectée de ce portique est identique à celle des portiques précédents (poutres IPE550 et S235)

### 2.7.2 Portiques 4 et 5

Pour ce portique, les courbes  $N - \delta_N$  sont les suivantes :

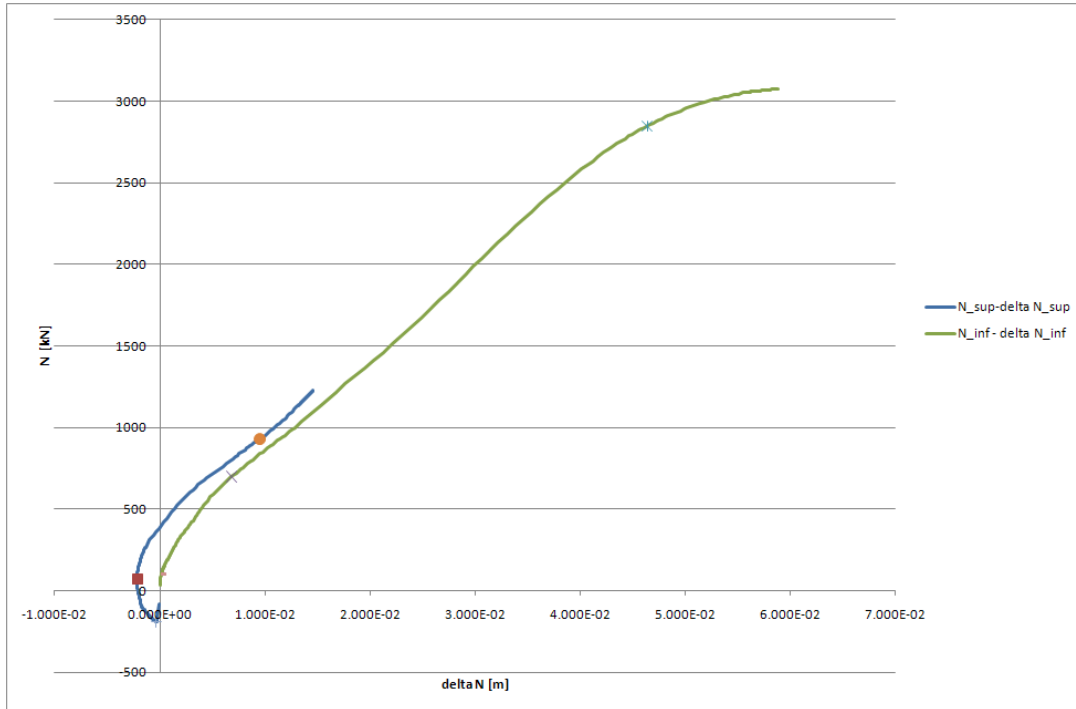


Figure 100 : Détermination de  $K_{N,inf}$  et  $K_{N,sup}$

Comme précédemment, deux couples de  $K_{N1} - K_{N2}$  sont déterminés :

	$K_{N1}$	$K_{N2}$
Entre le point (1) et le point (2)	88903.35 kN/m	-145105.75 kN/m
Entre le point (2) et le point (3)	54279.1 kN/m	73701.8 kN/m

Les valeurs de  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  pour ce nouveau portique sont les suivantes :

$$\begin{aligned}\alpha &= 0.0238/1000 \\ \beta &= 0.0337/1000 \\ \gamma &= 0.0823/1000 \\ \delta &= \beta\end{aligned}$$

Le système d'équations a été résolu pour ces valeurs de  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , ainsi que pour les deux couples de  $K_N$ . Les deux résultats, correspondants aux deux couples, sont, comme pour le portique précédent, quasiment identiques. Les résultats ne sont ici donnés que pour le deuxième couple de  $K_N$  (où  $K_{N1}$  et  $K_{N2}$  sont tous les deux positifs).

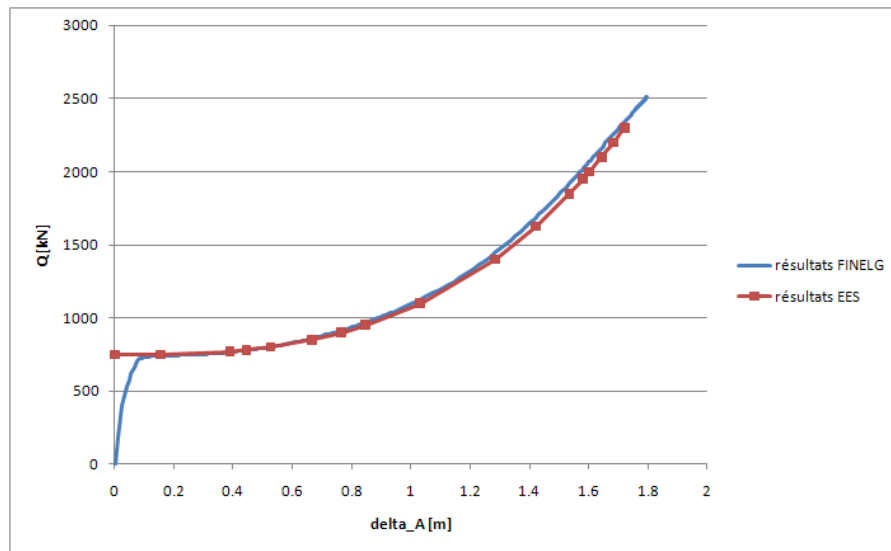


Figure 101 : Comparaison des résultats FINELG et analytiques pour  $Q - \Delta_A$

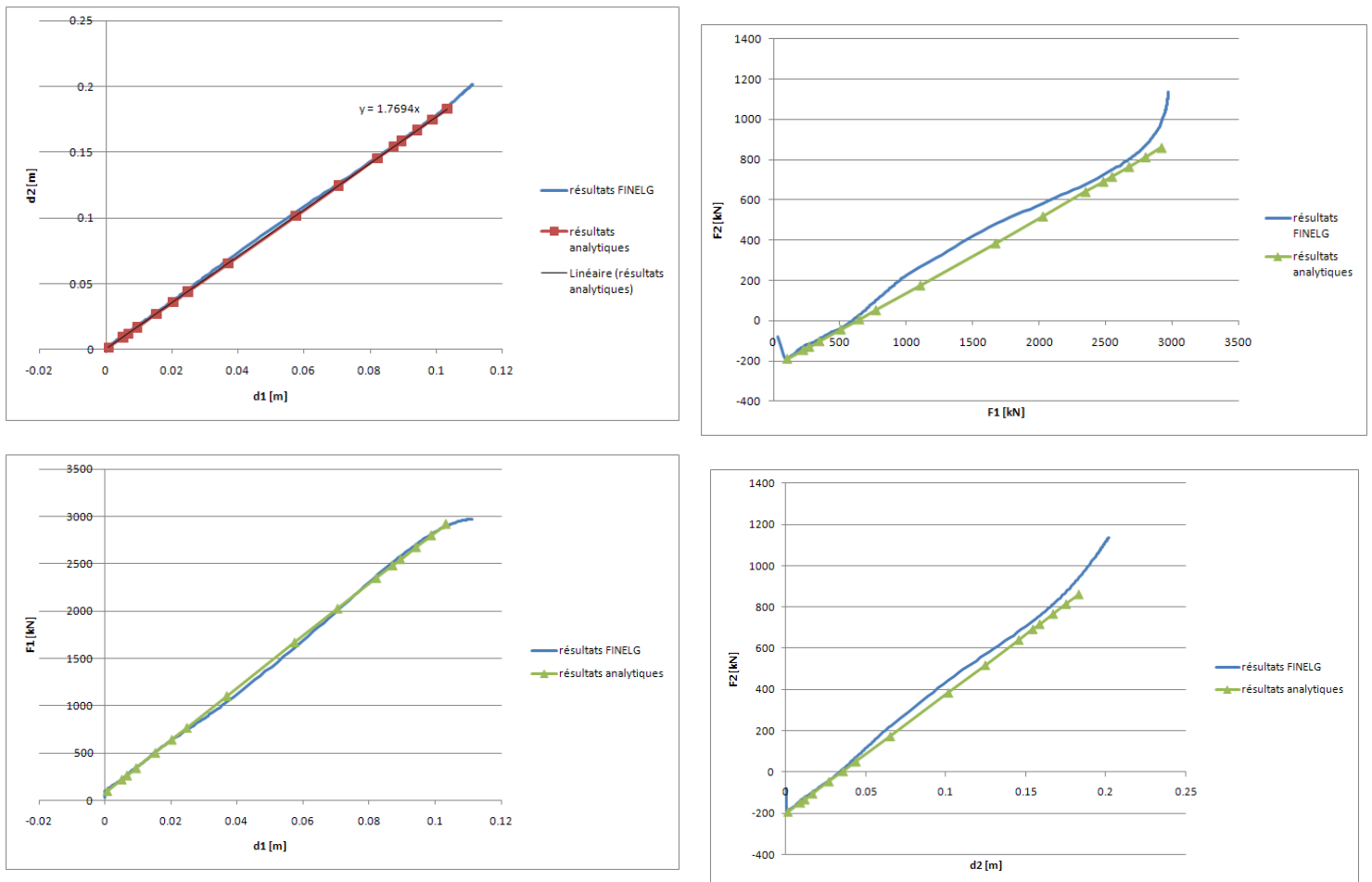


Figure 102 : Courbes  $d_2 - d_1, F_2 - F_1, F_2 - d_2$

	$K_1$ [kN/m]	$K_2$ [kN/m]	$\Delta F_1 / \Delta F_2$ [-]	$\Delta d_2 / \Delta d_1$ [-]
Résultats FINELG	27326	6096	0.3896	1.7986
Résultats analytiques	27545.4	5776.1	0.3710	1.7694
Erreur relative (%)	0.8	5.25	4.77	1.62

Le tableau suivant reprend les différentes valeurs de la raideur  $K = K_1$ , calculée par différentes méthodes :

$K = 1/\alpha$	$K (HAI)$	$K(analytique)$	$K (FINELG)$
$\frac{1000}{0.0238} = 42016.8 \text{ kN/m}$	$44578.4 \text{ kN/m}$	$27545.4 \text{ kN/m}$	$27326 \text{ kN/m}$

Comme pour le portique 1, la valeur déterminée par la méthode de L.N.N. Hai [4] est très proche de la valeur de  $1/\alpha$  (6% d'erreur relative), qui est la raideur du portique quand seulement une seule force lui est appliquée, au niveau inférieur (Figure 103) :

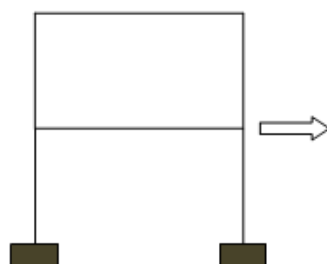


Figure 103 : Calcul de  $K = \frac{1}{\alpha} \approx K_{HAI}$

Cela va donc bien dans le sens des conclusions tirées pour le portique 1 : la méthode de L.N.N. Hai [4] néglige l'interaction entre les parties directement et indirectement affectées, et détermine la raideur de la partie indirectement affectée en n'appliquant qu'une force concentrée au niveau inférieur.

Concernant les efforts dans les éléments-clés, les efforts normaux dans les poutres sont donnés à la Figure 104 et l'effort dans la colonne (ici  $N_{col,adj} = 0,5 * Q + 0,2021 * F_1 + 0,6432 * F_2$ ) est donné à la Figure 105.

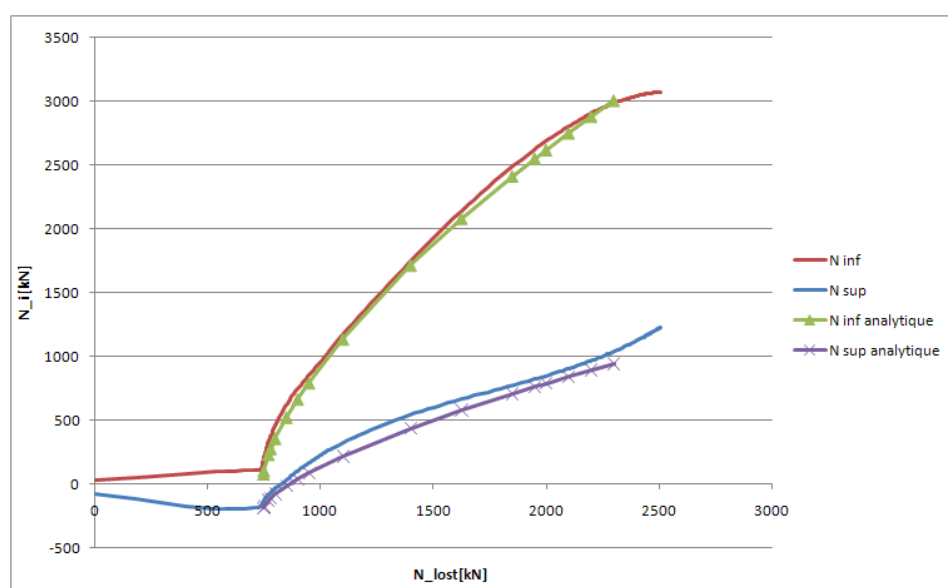


Figure 104 : Comparaison des résultats FINELG et analytiques pour les efforts normaux dans les poutres de la partie directement affectée

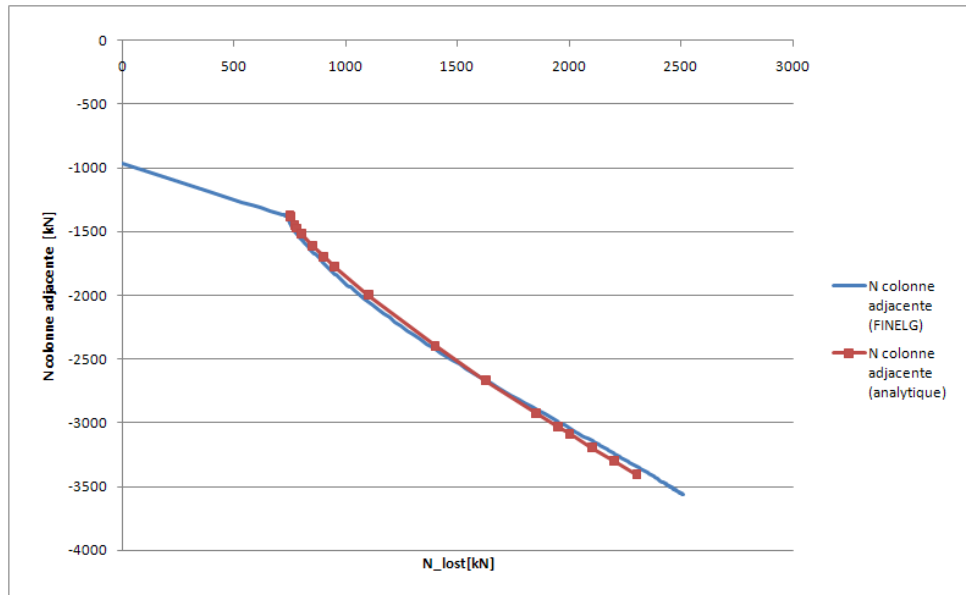


Figure 105 : Comparaison des résultats FINELG et analytiques pour l'effort de compression dans la colonne adjacente

### 2.7.3 Portique 2

L'allure des courbes  $N - \delta_N$  est identique aux cas des deux autres portiques. Comme précédemment, deux couples de  $K_N$  peuvent être déterminés, et les résultats pour ces deux couples sont quasiment identiques.

Les résultats sont présentés pour les valeurs suivantes des paramètres :

$$K_{N1} = 57094.874 \text{ kN/m}$$

$$K_{N2} = 63538.66$$

$$\alpha = 0.0229/1000$$

$$\beta = 0.0252/1000$$

$$\gamma = 0.0576/1000$$

$$\delta = \beta$$

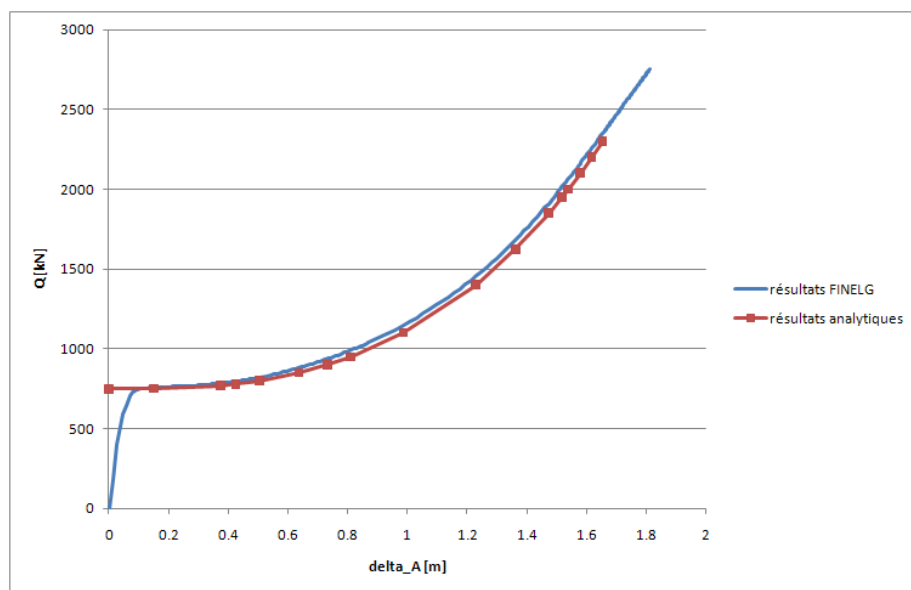


Figure 106 : Comparaison des résultats FINELG et analytiques pour  $Q - \Delta_A$

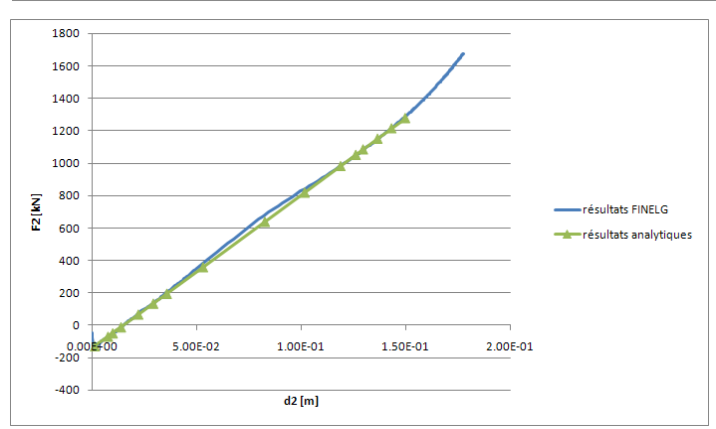
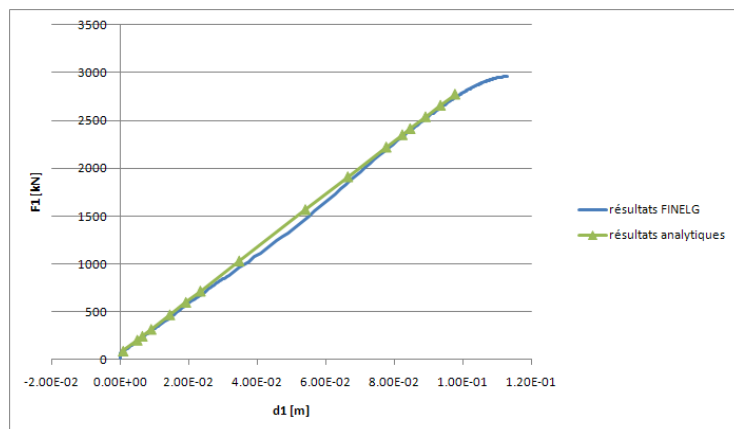
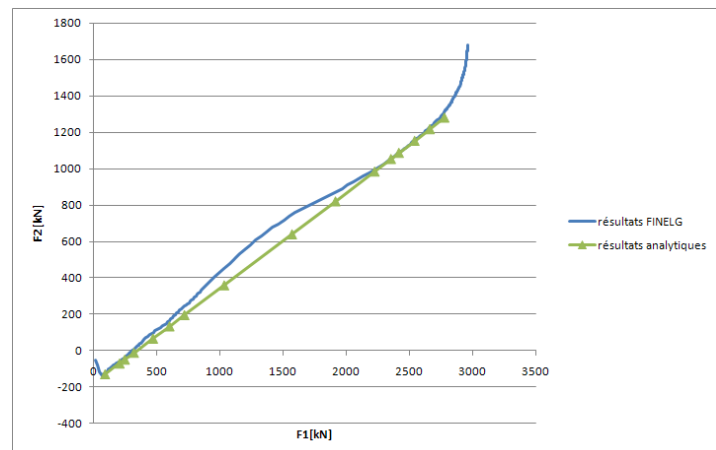
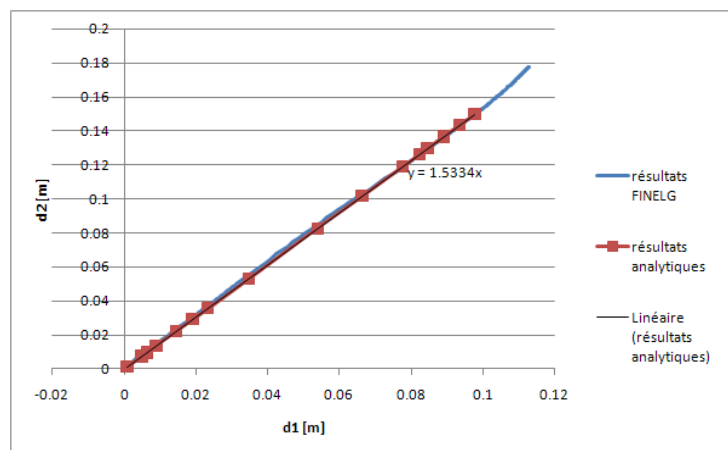


Figure 107 : Courbes  $d_2 - d_1, F_2 - F_1, F_1 - d_1, F_2 - d_2$

	$K_1$ [kN/m]	$K_2$ [kN/m]	$\Delta F_1 / \Delta F_2$ [-]	$\Delta d_2 / \Delta d_1$ [-]
Résultats FINELG	27570	9558.6	0.5243	1.5471
Résultats analytiques	27716.8	9453.1	0.523	1.5334
Erreur relative (%)	0.53	1.1	0.25	0.88



Le tableau suivant reprend les différentes valeurs de la raideur  $K = K_1$ , calculée par différentes méthodes :

$K = 1/\alpha$	$K (HAI)$	$K(analytique)$	$K (FINELG)$
$\frac{1}{\alpha} = \frac{1000}{0.0229} = 43668.1$	41762.6	27716.8	27570

Les conclusions sont les mêmes que pour les deux portiques précédents.

## 2.8 Généralisation de la méthode et perspectives

Dans ce paragraphe, des pistes vont être données pour mener à la généralisation de la méthode qui a été développée dans les paragraphes précédents. Il faut noter qu'aucun test n'a été mené pour vérifier ces pistes et qu'elles sont données ici à titre indicatif pour des recherches ultérieures.

### 2.8.1 Portiques à plus de deux étages

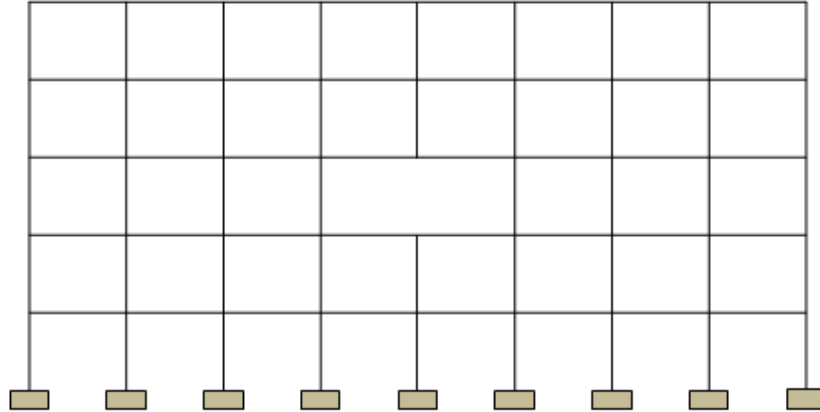
Dans le cas d'un portique à plus de 2 étages, où la colonne centrale du rez-de-chaussée est perdue, la démarche est la même, et les équations décrites au paragraphe 2.6.3 restent d'application. Si l'on considère le cas d'un portique à  $n$  étages, cela revient à assembler  $n$  blocs de type 1 et un bloc de type 2 :

Inconnues, pour un $Q$ donné	Equations
<ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>Q_i</math></li> <li>- <math>\theta_i</math></li> <li>- <math>N_i, M_i</math></li> <li>- <math>L_i</math></li> <li>- <math>\delta_i</math></li> <li>- <math>K_i</math></li> <li>- <math>\Delta</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- 1 au centre de la PDA (<math>Q = Q_1 + \dots + Q_n</math>)</li> <li>- <math>n</math> au centre de la PDA (<math>Q_i = f(N_i, T_i)</math>)</li> <li>- <math>n</math> aux extrémités de la PDA (<math>= n*1</math>)</li> <li>- <math>3 * n</math> compatibilités des déplacements</li> <li>- <math>n</math> interactions M+N (<math>= n*1</math>)</li> <li>- <math>d_1 = s_{11}F_1 + s_{12}F_2 + \dots + s_{1n}F_n</math></li> <li>- <math>d_2 = s_{21}F_1 + s_{22}F_2 + \dots + s_{2n}F_n</math></li> <li>- ...</li> <li>- <math>d_n = s_{n1}F_1 + s_{n2}F_2 + \dots + s_{nn}F_n</math></li> </ul>
TOTAL = $(7n + 1)$ inconnues	TOTAL = $(1 + n + n + 3n + n + n) = (7n + 1)$ équations

La matrice  $\underline{\underline{S}}$ , qui est maintenant une matrice  $n \times n$ , est toujours bien une matrice symétrique, et les éléments  $s_{ij}$  se déterminent toujours de la même manière que précédemment, en considérant une force appliquée à l'étage  $j$  et en observant le déplacement à l'étage  $i$ .

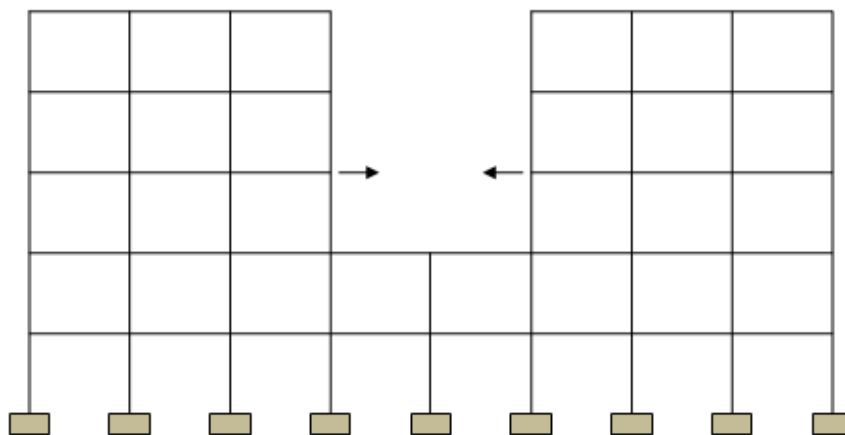
### 2.8.2 Perte d'une colonne ailleurs qu'au rez-de-chaussée du portique

Dans ce paragraphe, on considère le cas d'un portique à plus de 2 étages, où une colonne centrale située ailleurs qu'au rez-de-chaussée est perdue (Figure 108).



**Figure 108 : Cas d'un portique à plus de 2 étages, perte d'une colonne centrale, ailleurs qu'au rez-de-chaussée**

Il faut tenir compte de la partie du portique située sous l'étage endommagé dans le calcul des coefficients  $s_{ij}$  (anciennement  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  dans l'exemple traité au long de ce chapitre). En effet, quand une force de  $1\text{ kN}$  va être appliquée au niveau de la poutre membranaire par exemple, la partie située sous la partie directement affectée va apporter une raideur importante, qu'il faut prendre en compte (Figure 109):



**Figure 109 : Structure à étudier pour déterminer la matrice  $S$**

On ne peut se contenter d'étudier les parties latérales de la partie indirectement affectée, cela reviendrait à sous-estimer de manière importante la raideur transversale de cette partie.

### 2.8.3 Perte d'une colonne non centrale

Dans le cas d'un portique, de deux étages dans un premier temps, dans lequel une colonne non-centrale du rez-de-chaussée est perdue (Figure 110), les raideurs latérales à gauche et à droite ne sont plus identiques.

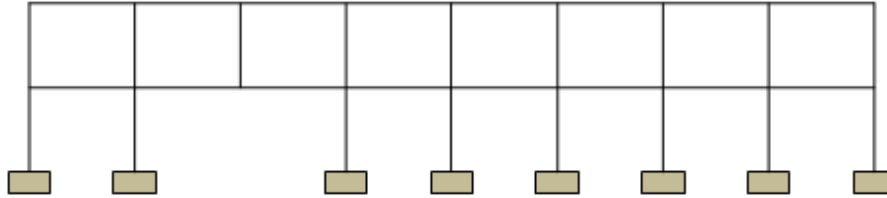


Figure 110 : Perte d'une colonne, cas dissymétrique

Jusqu'ici, la sous-structure dans la partie directement affectée était parfaitement symétrique, avec un ressort, identique, à chaque extrémité de poutre. Cela était correct puisque les deux cotés de la partie indirectement affectée étaient identiques. Ici, il faut tenir compte du fait que les coefficients  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  ne sont plus les mêmes à gauche et à droite (Figure 111):

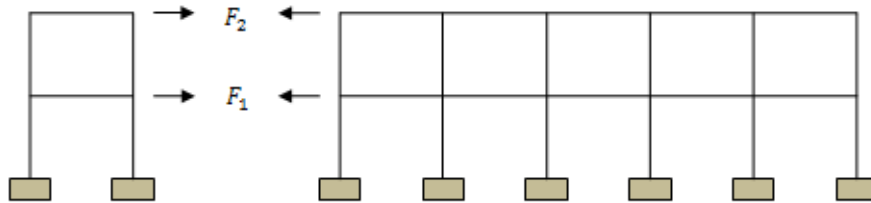


Figure 111 : Raideurs différentes de la partie gauche et de la partie droite

$$\begin{cases} d_{1g} = \alpha_g F_1 + \beta_g F_2 \\ d_{2g} = \gamma_g F_2 + \delta_g F_1 \end{cases} \quad \begin{cases} d_{1d} = \alpha_d F_1 + \beta_d F_2 \\ d_{2d} = \gamma_d F_2 + \delta_d F_1 \end{cases}$$

L'idée est ici de remplacer les deux ressorts du modèle par un seul ressort équivalent. Cela revient donc à redéfinir un nouveau bloc de type 1, qui est en réalité strictement équivalent à la sous-structure établie dans la thèse de J.-F. Demonceau [2] :

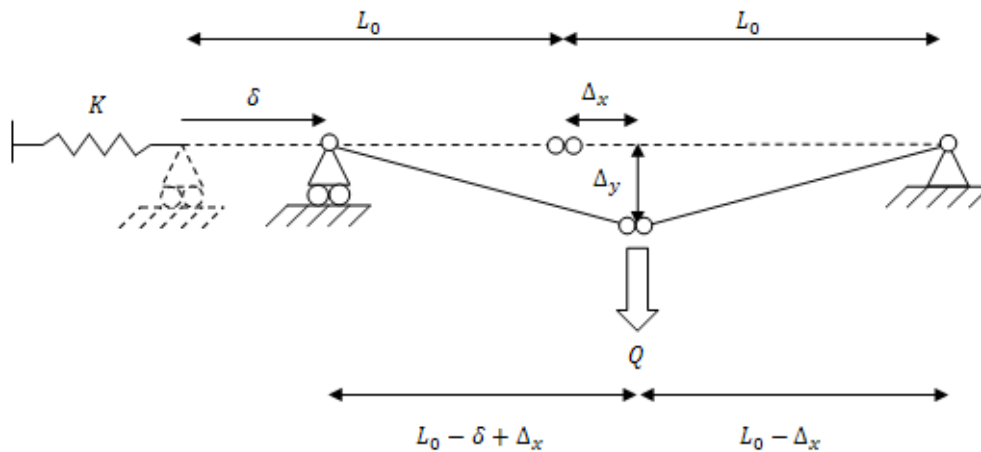


Figure 112 : Nouveau bloc de type 1

Les équations et inconnues sont les suivantes :

Inconnues	Equations
<ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>N</math></li> <li>- <math>M</math></li> <li>- <math>\theta</math></li> <li>- <math>\delta</math></li> <li>- <math>F_h</math></li> <li>- <math>L</math></li> <li>- <math>\Delta_x</math></li> <li>- <math>\Delta_y</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- 1 équilibre de force au centre de la partie directement affectée</li> <li>- 1 équilibre de force à l'extrémité de la partie directement affectée</li> <li>- 1 interaction M+N</li> <li>- 3 compatibilités des déplacements</li> <li>- <math>K = \frac{F_h}{\delta}</math></li> <li>- <math>L_0 - \delta + \Delta_x = L_0 - \Delta_x \rightarrow \Delta_x = \frac{\delta}{2}</math></li> </ul>
TOTAL = 8 inconnues	TOTAL = 8 équations

Cette sous-structure est donc facilement résolue lorsque les valeurs de  $K$  et  $K_N$  sont connues (données du bloc de type 1). C'est ce qui est fait dans la thèse de J.-F. Demonceau [2].

Ces nouveaux blocs de type 1 doivent ensuite être assemblés entre eux, et doivent ensuite être assemblés à deux blocs de type 2, qui représentent les deux cotés, gauche et droite, de la partie indirectement affectée. La sous-structure finale serait donc la suivante (Figure 113):

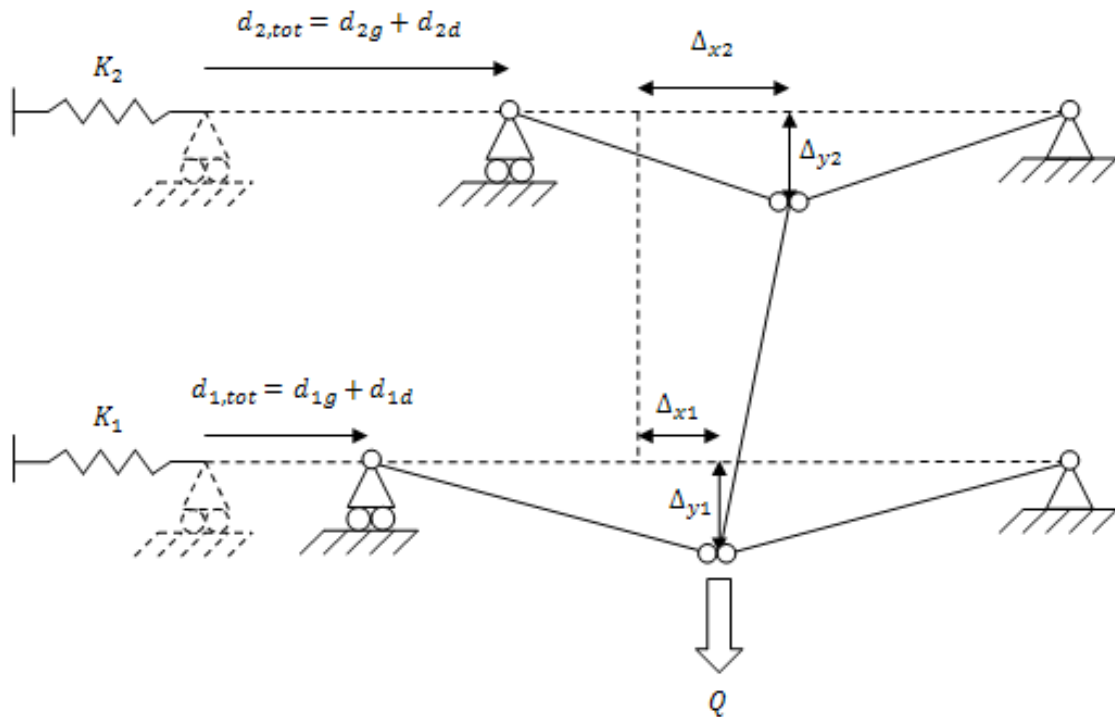


Figure 113 : Sous-structure avec extrémités fixes

Dans cette sous-structure les déplacements inférieurs et supérieurs valent :

$$\begin{cases} d_{1,tot} = d_{1g} + d_{1d} = (\alpha_g + \alpha_d)F_1 + (\beta_g + \beta_d)F_2 \\ d_{2,tot} = d_{2g} + d_{2d} = (\gamma_g + \gamma_d)F_2 + (\delta_g + \delta_d)F_2 \end{cases}$$

Les coefficients  $\alpha_g, \beta_g, \gamma_g, \delta_g$  et  $\alpha_d, \beta_d, \gamma_d, \delta_d$  sont déterminés comme précédemment, en appliquant successivement une charge de 1 kN au niveau inférieur (pour  $\alpha$  et  $\delta$ ) et au niveau supérieur (pour  $\gamma$  et  $\beta$ ).

La comptabilisation des équations et inconnues est la suivante :

Inconnues	Equations
<ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>8 * 2 = 16</math> inconnues</li> <li>- <math>Q_1 - Q_2</math></li> <li>- <math>K_1 - K_2</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>8 * 2 = 16</math> équations</li> <li>Compatibilité (assemblages des blocs 1 entre eux) :</li> <li>- <math>Q = Q_1 + Q_2</math></li> <li>- <math>\Delta_{y1} = \Delta_{y2}</math></li> <li>Compatibilité (assemblages des blocs 1 avec les blocs 2) :</li> <li>- <math>d_{1,tot} = (\alpha_g + \alpha_d)F_1 + (\beta_g + \beta_d)F_2</math></li> <li>- <math>d_{2,tot} = (\gamma_g + \gamma_d)F_2 + (\delta_g + \delta_d)F_2</math></li> </ul>
TOTAL = 20 inconnues	TOTAL = 20 équations

Il faut ici noter que l'on impose pas  $\Delta_{x1} = \Delta_{x2}$ . En effet, cette situation ne se produirait que si  $K_{N1}$  et  $K_{N2}$  tendaient tous les deux vers l'infini (poutres incompressibles). On suppose malgré tout que  $\Delta_{x1}$  et  $\Delta_{x2}$  ne sont pas suffisamment différents que pour devoir tenir compte de la composante horizontale du  $N_{up} = Q_2$ .

Cette généralisation au cas de la perte d'une colonne non centrale ne sera pas traitée plus en détail dans ce travail de fin d'études. Le but était de voir si la méthode précédemment développée pouvait se généraliser plus ou moins facilement, en comptabilisant le nombre d'inconnues et d'équations qui étaient à notre disposition.

#### 2.8.4 Adaptation de la sous-structure de J.-F. Demonceau

Au vu des résultats qui ont été obtenus jusqu'ici, c'est-à-dire la mise en évidence d'un couplage entre parties directement et indirectement affectées, il serait certainement possible de revenir à la sous-structure de J.-F. Demonceau [2], en faisant malgré tout apparaître ce couplage, c'est-à-dire finalement, en tenant compte de la variation de  $N_{up}$  dans la sous-structure de J.-F. Demonceau [2].

Pour expliquer cette perspective, le cas d'une sous-structure symétrique est considéré. Comme vu précédemment, cela peut se généraliser au cas non symétrique.

Si l'on se réfère à la Figure 114, le modèle qui est développé dans ce travail de fin d'études est celui présenté à la Figure 114 (a), où tous les étages sont représentés. La Figure 114 (b) est équivalente à la Figure 114 (a), les étages au-dessus de la poutre membranaire ayant été remplacés par un ressort  $K_v = \frac{dN_{up}}{d\Delta_A}$ . Le couplage qui existait auparavant entre le ressort  $K_1$  et le ressort  $K_2$  est remplacé ici par un lien entre le ressort  $K_1$  et le ressort  $K_v$ . Notons que, lorsque la partie indirectement affectée est élastique, le ressort  $K_1$  est linéaire. Ce n'est par contre pas le cas du ressort  $K_v$  puisque la pente du graphique  $N_{up} - \Delta_A$  n'est pas constante, comme vu précédemment à la Figure 44.

La Figure 114 (c) représente la sous-structure développée par J.-F. Demonceau [2] (l'équivalent à 2 ressorts). Pour qu'elle fournisse la bonne courbe  $Q - \Delta_A$ , il faudrait définir une nouvelle raideur de la partie indirectement affectée  $K^*$ , qui serait fictive, et supérieure à la raideur réelle  $K_1$ . Il faudrait en effet que la valeur fictive  $K^*$  tienne compte de la retenue qu'exercent les étages supérieurs, c'est-à-dire de la variation de l'effort  $N_{up}$ .

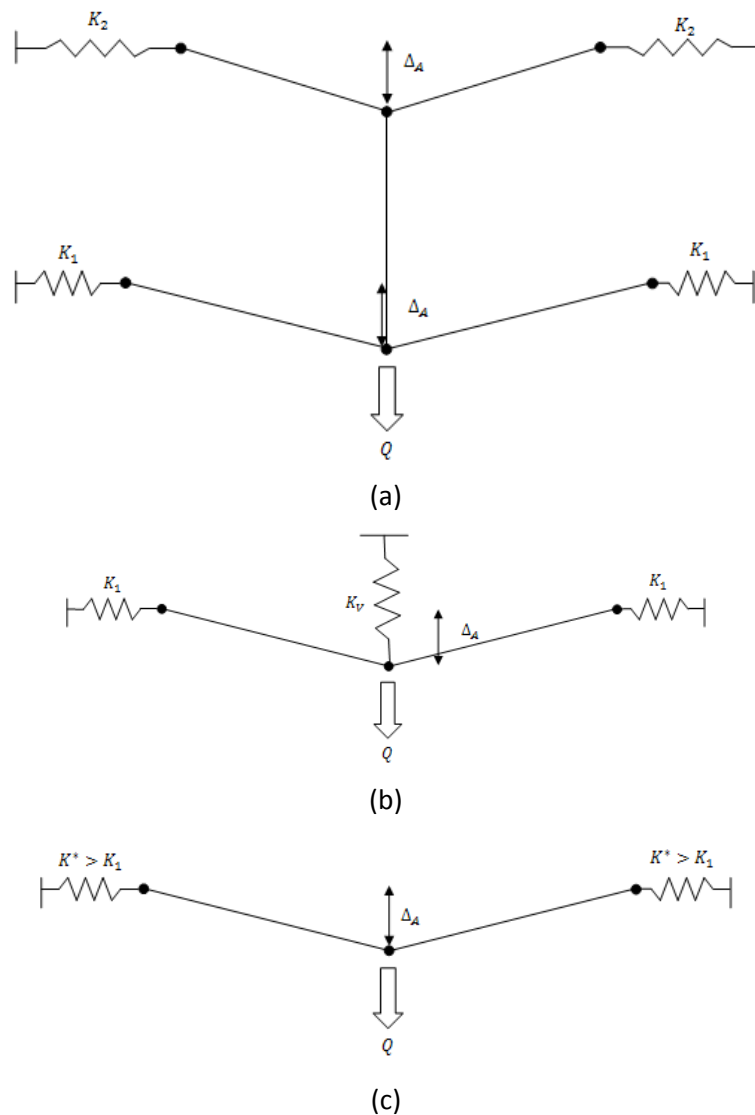


Figure 114 : Différentes sous-structures : [(a) : sous-structure complète, (b) : partie supérieure remplacée par un ressort, (c) : un seul ressort équivalent]

## 2.9 Conclusion

Dans ce chapitre, la partie indirectement affectée a été considérée comme étant indéfiniment élastique. Le but de ce chapitre était d'obtenir une méthode analytique facile à mettre en œuvre qui permette d'obtenir la valeur de la raideur latérale élastique de la partie indirectement affectée.

Dans la première partie de ce chapitre, les modèles de calcul déjà développés pour la phase 3 ont été étudiés. Les conclusions de cette étude sont les suivantes :

- Concernant la sous-structure développée par J.-F. Demonceau [2], qui permet de tracer la courbe  $Q - \Delta_A$  au cours de la phase 3, il a été mis en évidence l'influence de la variation de  $N_{up}$ , qui n'est pas considérée à l'heure actuelle dans ce modèle
- Concernant la sous-structure développée par L.N.N. Hai [4], qui permet de calculer une raideur  $K_{el}$  de la partie indirectement affectée, il a été mis en évidence que les erreurs provenaient de la « non-prise en compte » de l'effort horizontal appliqué au sommet de la structure. Plus précisément, les erreurs provenaient de la « non-prise en compte » de la variation de cet effort : si cet effort était constant, alors la méthode de calcul développée par L.N.N. Hai [4] fournirait les bons résultats de raideur  $K$ .

Au vu des faiblesses mises au jour, une nouvelle méthode de calcul de la phase 3 a été mise au point. Cette nouvelle méthode de calcul permet de résoudre les problèmes rencontrés précédemment, pour les raisons suivantes :

- La nouvelle sous-structure définie intègre tous les étages de la partie directement affectée, ce qui signifie qu'elle intègre directement la variation de  $N_{up}$  dans le modèle
- Puisque cette sous-structure intègre tous les étages de la partie directement affectée, elle tient compte de l'effort appliqué au sommet de la partie indirectement affectée

La nouvelle sous-structure permet donc de prendre en compte le couplage qui existe entre les parties directement et indirectement affectées par la perte de la colonne, couplage qui n'était jusqu'alors pas considéré dans les méthodes de calcul.

La difficulté qui a été rencontrée dans la mise au point de cette nouvelle sous-structure a été la détermination des valeurs des  $K_N$ , les raideurs extensionnelles des poutres (supérieure et inférieure) de la partie directement affectée, qui sont plastifiées à leurs extrémités. En effet, il est apparu que la position des rotules dans la partie directement affectée avait une influence non négligeable, qui rendait la compréhension des graphes  $N - \delta_N$  parfois mal aisée. Il a fallu comprendre que, pour être cohérent avec le modèle développé, il fallait effectivement prendre en compte la variation de longueur de la corde, et non de la poutre, et qu'alors, on pouvait se trouver face à des  $K_N$  négatifs.

Cette nouvelle méthode de calcul a finalement été testée sur 3 portiques différents, et les résultats obtenus ont été, pour chacun des portiques, comparés aux résultats obtenus par une simulation numérique menée par le logiciel FINELG. Il est apparu que les résultats analytiques étaient assez proches de la réalité (c'est-à-dire des résultats FINELG). L'ordre de grandeur de l'erreur sur les différentes valeurs telles que  $K_1, K_2, \Delta d_2/\Delta d_1$  et  $\Delta F_2/\Delta F_1$  ne dépassait pas les 5%.

### 3 Partie indirectement affectée pouvant plastifier

#### 3.1 Introduction

Le chapitre 2 s'est consacré à l'étude d'une partie indirectement affectée indéfiniment élastique. Il a permis de développer une nouvelle sous-structure, qui a été validée par l'étude de 3 portiques.

Dans ce chapitre 3, on s'intéresse au cas d'une partie indirectement affectée qui peut plastifier.

La **première étape** de ce chapitre sera d'observer le comportement général d'un portique dans lequel la restrainte latérale apportée par la partie indirectement affectée diminue au fur et à mesure de la formation des rotules dans cette dernière.

La **seconde étape** sera de développer une méthode analytique qui permettrait de déterminer les valeurs de ces différentes raideurs successives, ainsi que les moments auxquels les rotules se forment, c'est-à-dire le moment où l'on passe d'une raideur à l'autre.

Finalement, la **troisième et dernière étape** sera de pouvoir déterminer analytiquement, sur base des résultats établis à l'étape précédente, la courbe liant l'effort simulant la perte de la colonne et le déplacement en tête de cette même colonne (courbe  $N_{lost} - \Delta_A$ ).

#### 3.2 Comportement général de la structure

Les remarques générales sur le comportement d'un portique lorsque la partie indirectement affectée plastifie seront formulées pour l'étude du portique n°1.

##### 3.2.1 Modes de ruine dans la partie indirectement affectée

Lorsque la partie indirectement affectée peut plastifier, la formation d'un mécanisme plastique peut y être observée. Dans le portique étudié, c'est un mécanisme de panneau au niveau du premier étage qui mène à la ruine de la structure (Figure 115) :

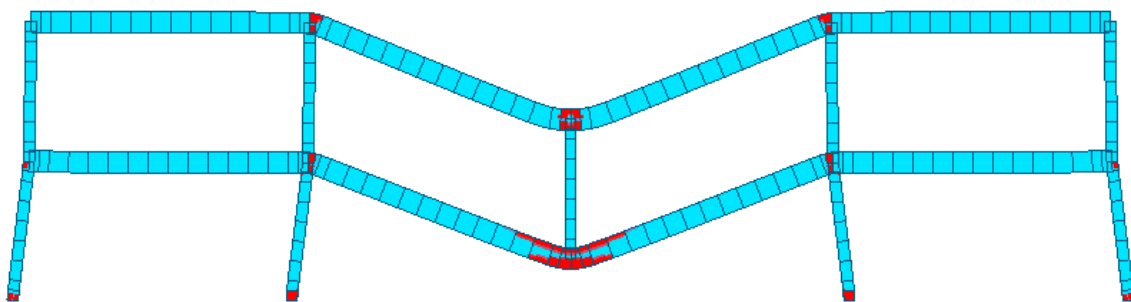
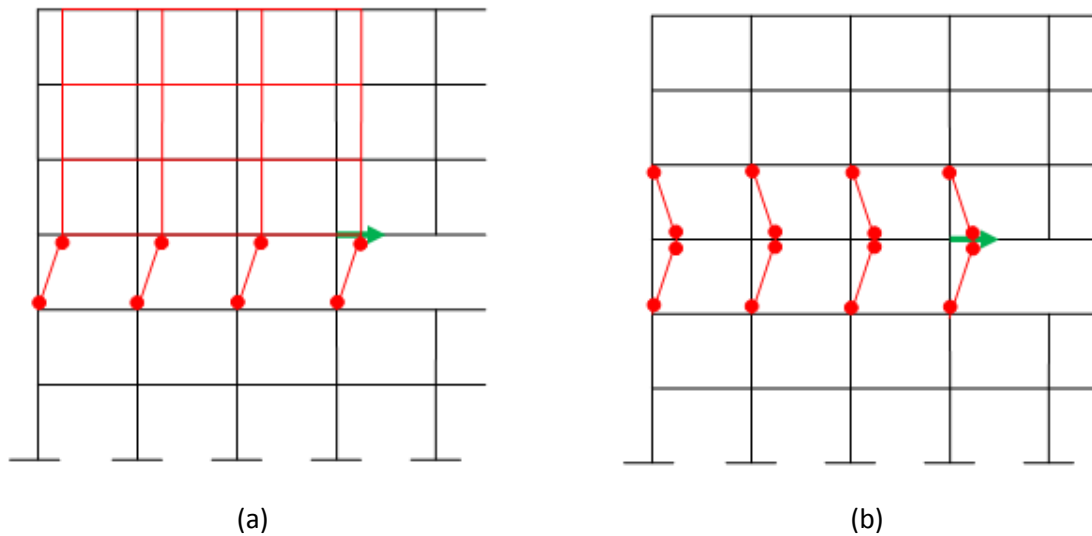


Figure 115 : Mécanisme de ruine de la partie indirectement affectée

Les zones rouges sur la Figure 115 représentent des zones plastifiées. On voit bien ici le mécanisme de poutre dans la partie directement affectée, et le mécanisme de panneau dans la partie indirectement affectée.



D'une manière générale, le mécanisme de ruine dans la partie indirectement affectée peut être de deux types (Figure 116) :



(a) (b)  
Figure 116 : Modes de ruine dans la partie indirectement affectée

Le mécanisme (b) apparaîtra lorsque la partie supérieure de la partie directement affectée résistera au mouvement de la partie indirectement affectée vers l'intérieur du portique, et les poutres supérieures de la partie directement affectée seront alors mises en compression.

Le modèle développé dans la suite de ce chapitre permet normalement de détecter quel type de mécanisme plastique se forme dans la partie indirectement affectée, car il tient compte de l'interaction entre les parties directement et indirectement affectées : en fonction du rapport des raideurs de ces parties, il détecte si les poutres supérieures sont mises en traction (cas (a) de la Figure 116 où toute la partie supérieure de la partie indirectement affectée est entraînée vers la partie directement affectée), ou si, au contraire, il se développe un effet d'arc, auquel cas les poutres supérieures sont mises en compression et résistent au mouvement de la partie indirectement affectée (cas (b) de la Figure 116).

### 3.2.2 Courbes $Q - \Delta_A$ et $F_h - \delta_K$

Au niveau de la courbe donnant la force verticale  $Q$  ( $= N_{lost} = \lambda N_0$ ), simulant la perte de la colonne, en fonction du déplacement vertical  $\Delta_A$  au sommet de la colonne disparue, les modifications suivantes sont observées (Figure 117) :

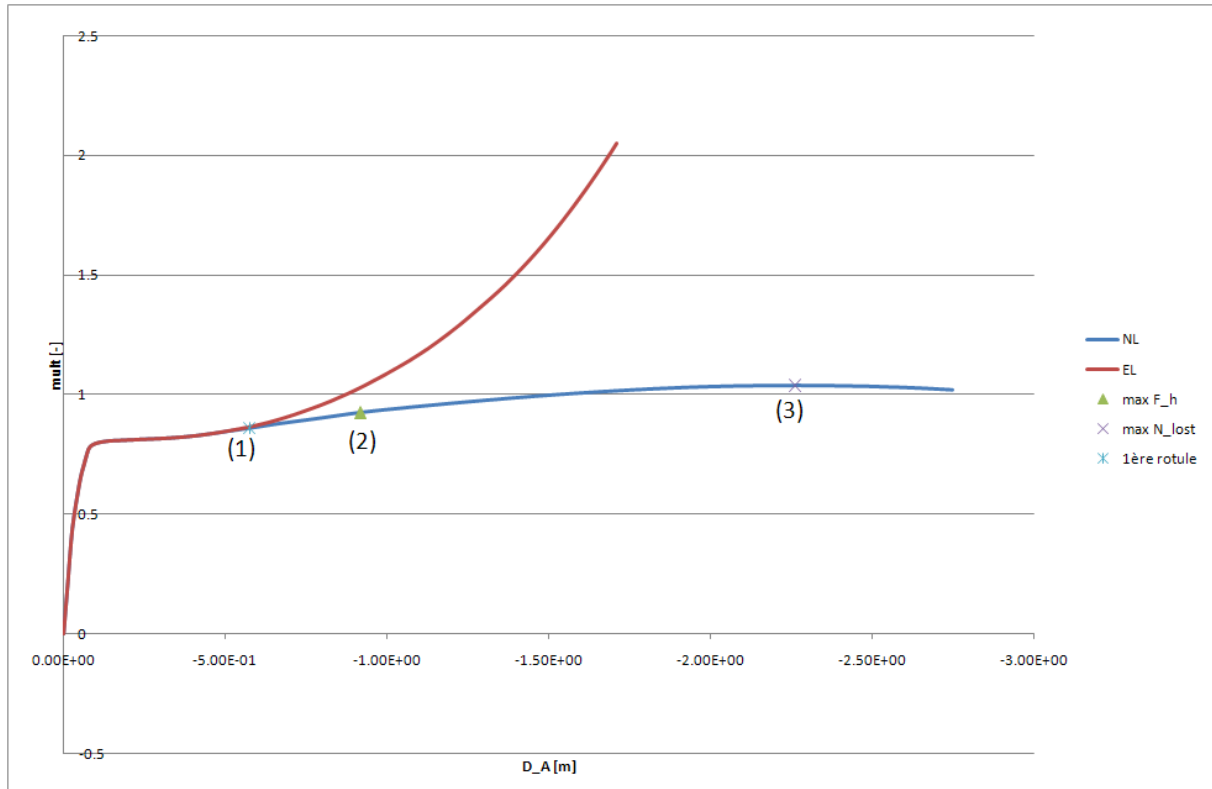


Figure 117 : Courbe  $Q - \Delta_A$

La courbe rouge sur la Figure 117 correspond au cas où la partie indirectement affectée reste indéfiniment élastique, donc à une raideur horizontale constante, tandis que la courbe bleue correspond à une partie indirectement affectée qui plastifie pas-à-pas, donc à une raideur latérale qui diminue.

Pour un même niveau de charge (c'est-à-dire un même  $Q$ ), le déplacement vertical du point A est plus important lorsque la partie indirectement affectée peut plastifier, ce qui nécessitera un besoin plus grand de ductilité des assemblages poutres-colonnes dans la partie directement affectée.

Le point (1) sur la Figure 117 correspond à la formation de la première rotule dans la partie indirectement affectée. C'est à partir de ce point que les deux courbes ne sont plus identiques.

Le point (2) correspond quant à lui à la formation du mécanisme plastique total dans la partie indirectement affectée.

Ces points (1) et (2) se retrouvent sur un graphe  $F_h$  en fonction de  $\delta_K$  (Figure 118). Pour rappel,  $\delta_K$  vaut deux fois le déplacement horizontal du niveau inférieur de la partie indirectement affectée ( $\delta_K = 2 * d_1$ ).

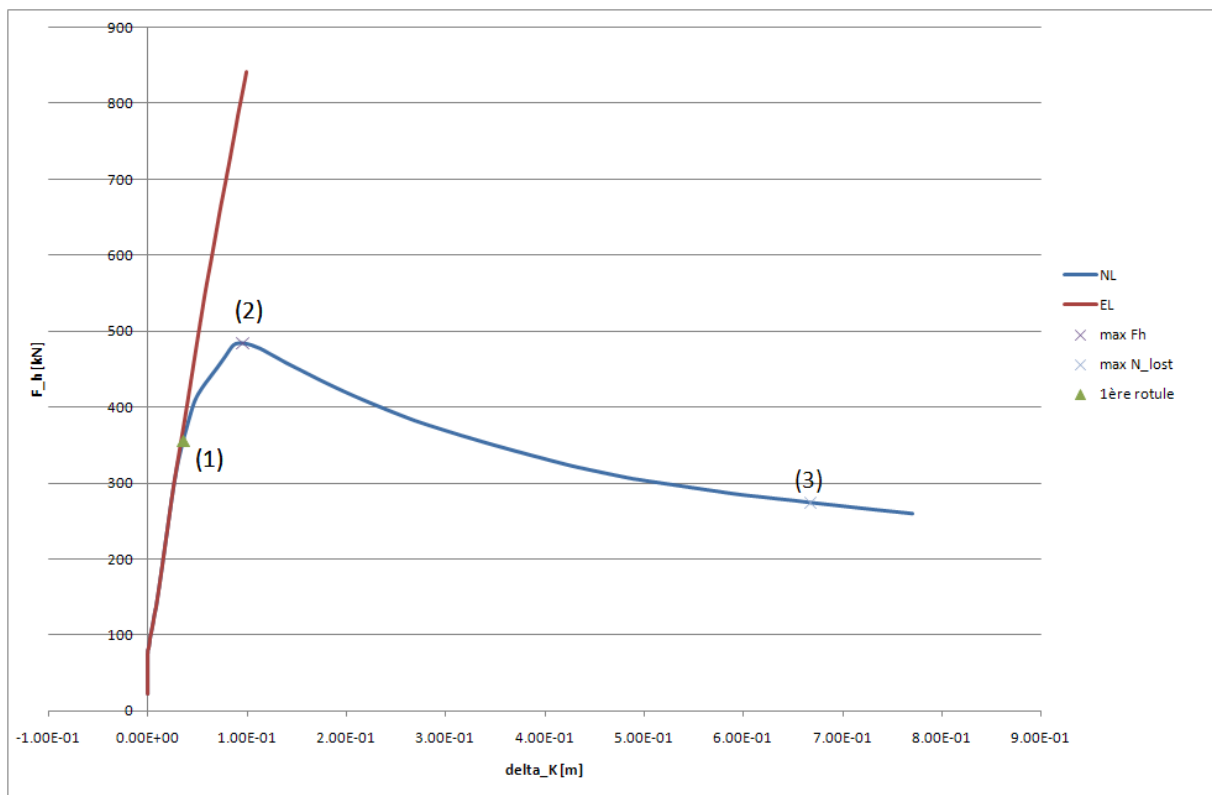


Figure 118 :  $F_h$  en fonction de  $\delta_K$

Comme précédemment, la courbe rouge sur la Figure 118 représente le cas de la partie indirectement affectée qui reste infiniment élastique, tandis que la courbe bleue correspond au cas de la partie indirectement affectée qui perd peu à peu de sa raideur.

Le point (1) est de nouveau le point auquel se forme la première rotule et à partir duquel les deux courbes se détachent l'une de l'autre. Le point (2) correspond à la formation du mécanisme plastique complet dans la partie indirectement affectée. Le point (2) correspond donc au sommet de la courbe  $F_h - \delta_K$ . Une fois le mécanisme formé, le déplacement horizontal  $\delta_K$  continue d'augmenter tandis que l'effort horizontal  $F_h$  diminue.

Cette diminution de  $F_h$  après la formation du mécanisme plastique dans la partie indirectement affectée est typique de la formation d'un mécanisme de panneau et est dû aux charges verticales appliquées à la partie indirectement affectée. Si la structure n'était pas chargée verticalement initialement, la courbe présenterait un plateau au lieu d'une courbe descendante.

### 3.2.3 Comportement post-formation du mécanisme plastique dans la partie indirectement affectée

Une fois le mécanisme plastique totalement formé dans la partie indirectement affectée, l'intuition voudrait qu'il n'y ait plus moyen d'encore augmenter la valeur de  $N_{lost} = Q = \lambda N_0$ . Or, les points (2) et (3) sur la Figure 117 et sur la Figure 118 sont bien distincts : le point (2) correspond à l'atteinte du mécanisme plastique dans la partie indirectement affectée (sommet de la courbe  $F_h - \delta_K$ ) tandis que le point (3) correspond au maximum de la charge  $N_{lost}$ .

Cette réserve de raideur/résistance après la formation du mécanisme plastique dans la partie indirectement affectée provient du fait que la poutre supérieure, au moment de la formation du mécanisme plastique dans la partie indirectement affectée, est toujours en compression. Elle prodigue alors encore un certain support à la structure, qui ne s'effondre pas directement après formation du mécanisme plastique dans la partie indirectement affectée (Figure 119) :

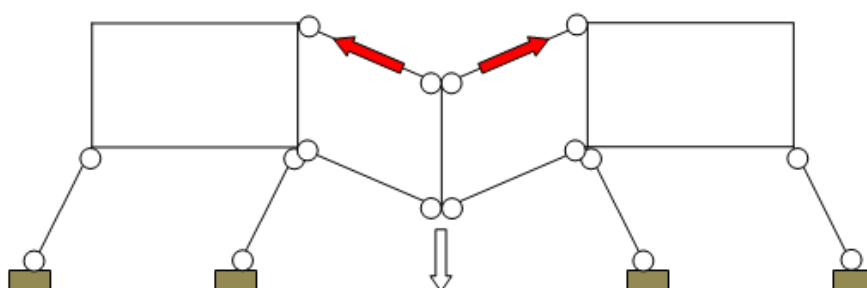


Figure 119 : Poutre supérieure retenant le portique après formation du mécanisme plastique dans la partie indirectement affectée

Si l'on observe la variation de l'effort dans la poutre supérieure en fonction du multiplicateur de charge (Figure 120) :

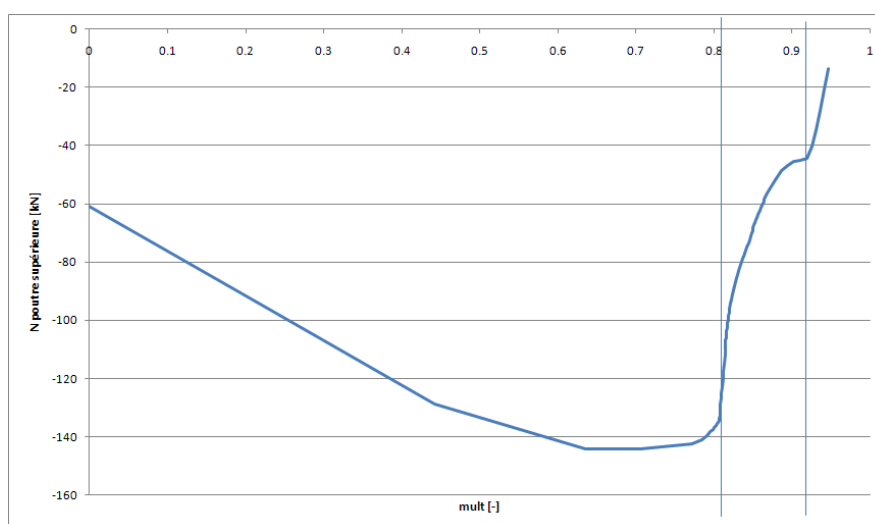


Figure 120 : Variation de l'effort de compression dans la poutre supérieure en fonction du multiplicateur de charge

La première ligne verticale sur la Figure 120 correspond à la fin de la phase 2, durant laquelle la poutre supérieure est mise en compression. Durant la phase 3, la poutre supérieure se décomprime, mais est toujours en compression lorsque le mécanisme plastique se forme dans la partie indirectement affectée (moment symbolisé par la deuxième ligne verticale).

Un graphe  $N_{lost}$  en fonction de  $F_h$  met bien en évidence le fait que les maxima de ces deux variables ne se produisent pas simultanément (Figure 121):

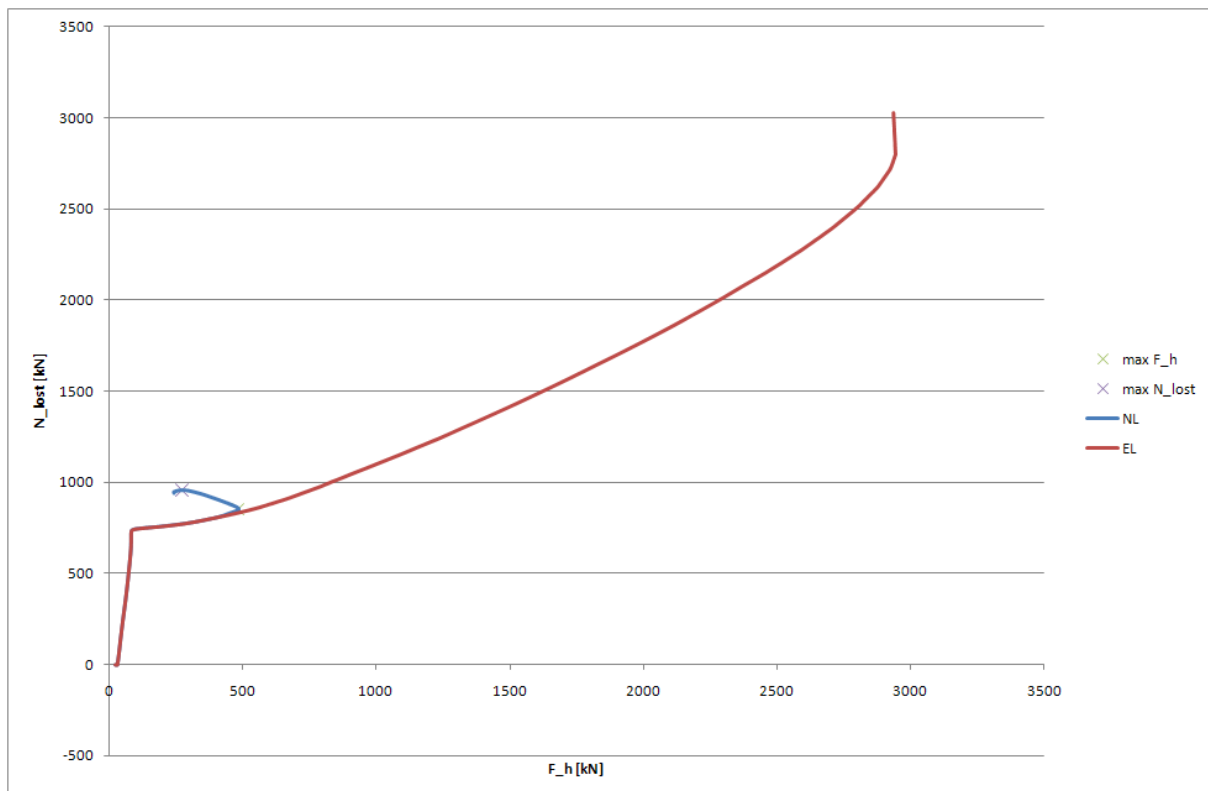


Figure 121 :  $N_{lost}$  en fonction de  $F_h$

La courbe en rouge sur la Figure 121 correspond au cas de la partie indirectement affectée infiniment élastique tandis que la courbe bleue représente le cas de la partie indirectement affectée qui plastifie. Après avoir atteint le maximum de  $F_h$ , la courbe fait « demi-tour », pour finalement atteindre le maximum de  $N_{lost}$ .

Il faut noter que, d'un point de vue convergence, il est très difficile d'amener FINELG à calculer jusqu'au sommet de la courbe  $Q - \Delta_A$ . En effet, après la formation du mécanisme plastique dans la partie indirectement affectée,  $Q$  n'augmente quasiment plus, alors que  $\Delta_A$  augmente très rapidement, la pente de la courbe  $Q - \Delta_A$  entre les points (2) et (3) est très faible (Figure 117). De plus, une fois que le mécanisme est formé dans la partie indirectement affectée, l'hypothèse peut être faite que l'effondrement total de la structure n'est plus très loin.

**Dans le cadre de ce travail de fin d'études, on se limitera à l'étude de la première partie, c'est-à-dire jusqu'à la formation du mécanisme plastique dans la partie indirectement affectée, en supposant que la ruine de la totalité de la structure se produit à ce moment-là.**

### 3.2.4 Efforts dans les poutres et colonnes de la partie indirectement affectée

Dans le but de mieux appréhender les phénomènes qui se déroulent dans la partie indirectement affectée, il est intéressant de regarder l'évolution des efforts dans les différents éléments. Seules les colonnes de l'étage endommagé ainsi que les poutres au-dessus de celles-ci sont étudiées dans un premier temps, puisque, selon la théorie développée dans la thèse de L.N.N. Hai [4], ce sont seulement ces éléments qui résistent durant la phase 3.

#### 3.2.4.1 Colonnes de l'étage endommagé

Le graphique suivant (Figure 122) représente l'interaction entre les efforts N et M dans les deux colonnes de la partie indirectement affectée, au sommet et à la base de chaque colonne (4 courbes) :

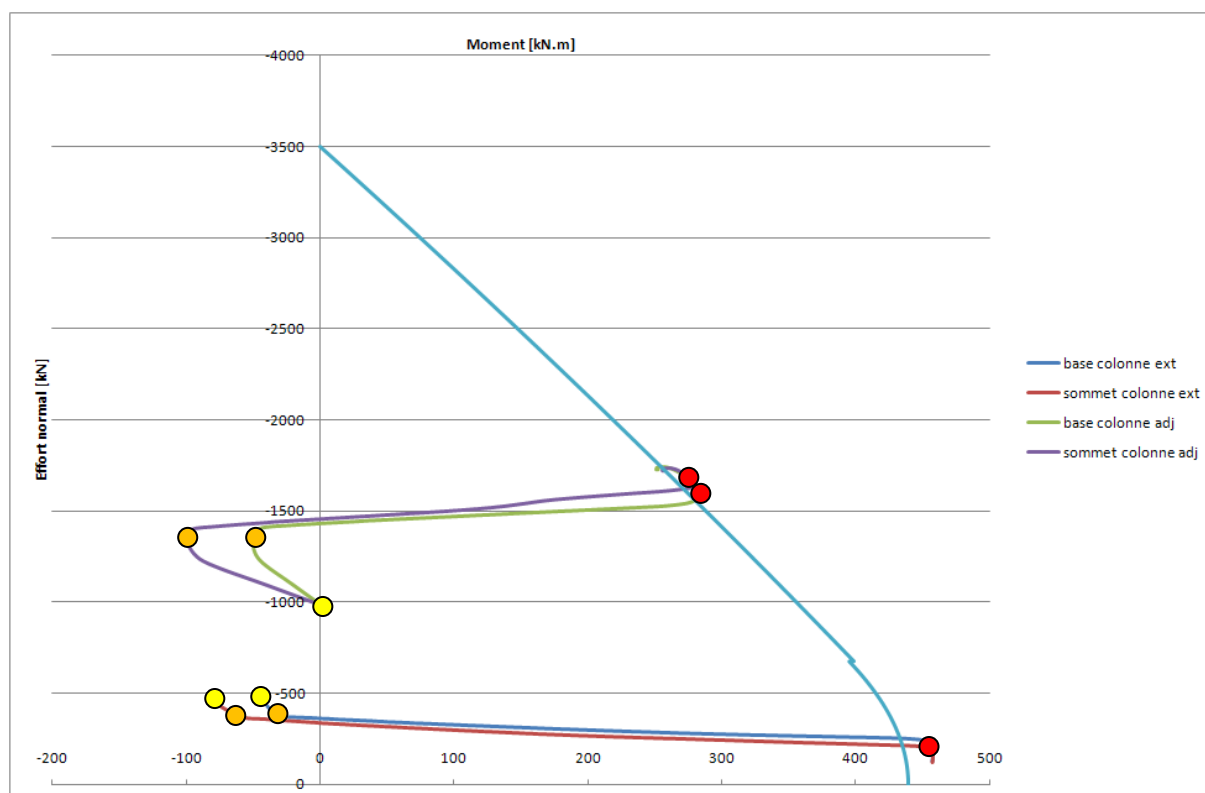


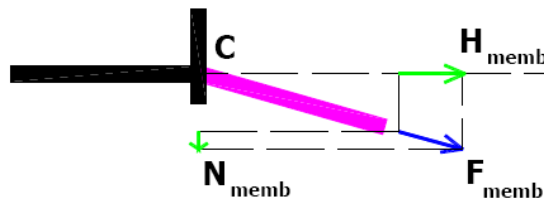
Figure 122 : Interaction M+N au sommet et en base des colonnes de l'étage endommagé

Le point jaune sur la Figure 122 correspond à la fin de la phase 1, c'est-à-dire au moment où le portique est chargé normalement et que la colonne est toujours présente.

Le point orange sur la Figure 122 correspond quant à lui à la fin de la phase 2, c'est-à-dire au moment où le mécanisme plastique dans la partie directement affectée est pleinement développé. Pour la colonne extérieure (c'est-à-dire les deux courbes du bas), les deux points (jaune et orange) coïncident quasiment. Cela s'explique facilement puisque la phase 2 n'influence que la colonne adjacente, la colonne extérieure n'est d'ailleurs pas prise en compte dans la sous-structure définie par L.N.N. Hai [4] pour l'étude de la phase 2. Les efforts en fin de phase 2 dans les deux colonnes sont donc connus : dans la colonne adjacente, grâce à l'étude de la sous-structure de L.N.N. Hai [4], et dans la colonne extérieure, parce qu'ils sont supposés égaux à ceux en fin de phase 1.

Finalement, le point rouge, toujours sur la Figure 122, signifie que la section observée a plastifié. Entre la fin de la phase 2 (point orange) et le moment où la section est plastifiée (point rouge), l'évolution des efforts internes est la suivante :

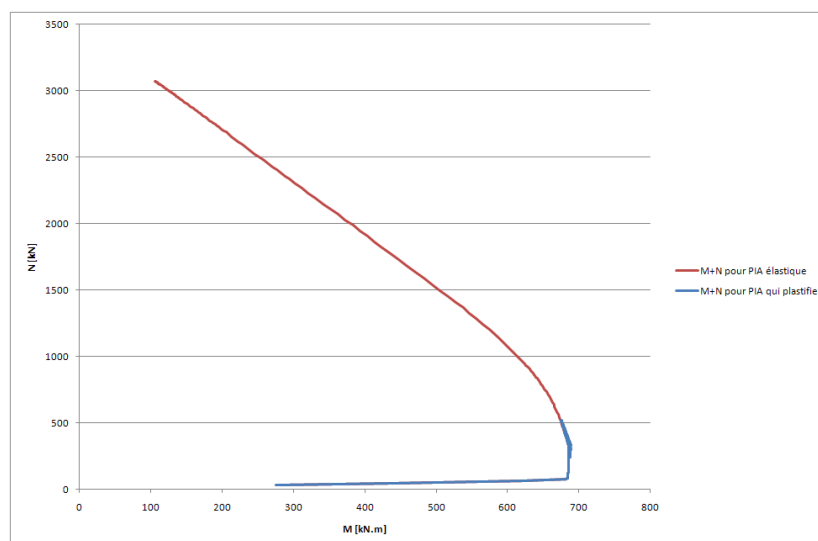
- Les moments sont fortement augmentés, et s'inversent, comme expliqué au paragraphe 1.5.3
- L'effort normal dans la colonne extérieure ne varie quasiment pas (il diminue légèrement, la colonne extérieure se décomprime légèrement). La colonne adjacente pourrait, elle, être soumise à une forte augmentation de l'effort de compression, dû à la composante verticale de l'effort de traction dans la poutre (Figure 123) :



**Figure 123 : Effort de compression supplémentaire dans la colonne adjacente due à la composante verticale de l'effort membranaire**

Dans le cas présent, on n'observe pas une grande variation de l'effort de compression dans la colonne adjacente car l'effort de traction qui naît dans la poutre membranaire reste limité. En effet, le mécanisme plastique dans la partie indirectement affectée se forme assez rapidement, de sorte que la poutre membranaire perd rapidement son ancrage latéral et ne peut plus développer des efforts de traction importants.

Pour illustrer ce phénomène, voici le graphe d'interaction  $M+N$  à l'extrémité de la poutre membranaire dans le cas où la partie indirectement affectée peut ou non plastifier (Figure 124) :



**Figure 124 : Interaction  $M+N$  dans la poutre membranaire**

On voit que lorsque la partie indirectement affectée peut plastifier, la courbe  $M + N$  ne « remonte » pas très loin dans les  $N$ , la poutre membranaire ne voit pas se développer d'importants efforts de traction.

Voici un tableau synthétisant les variations d'efforts dans les colonnes (Figure 125) :

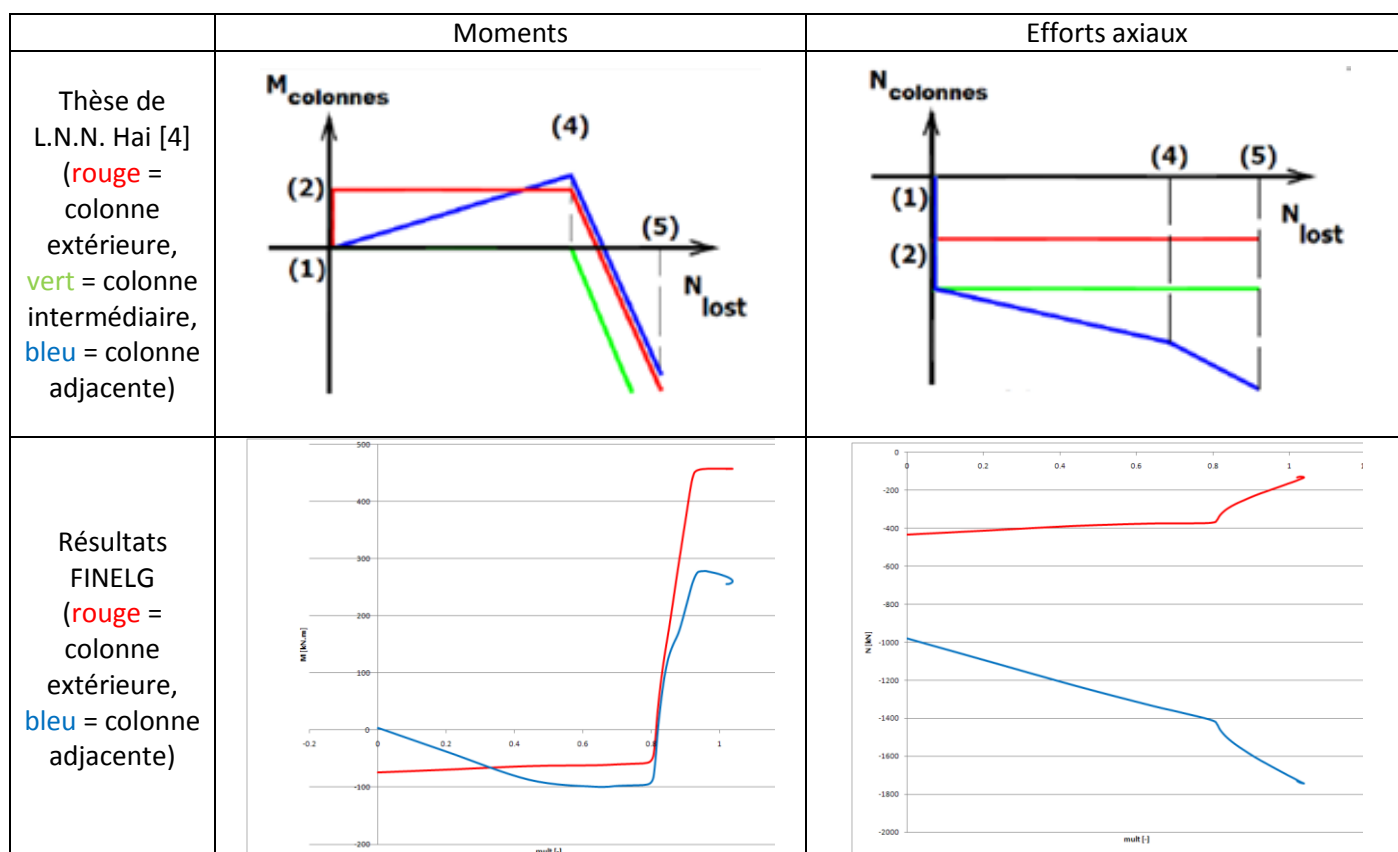


Figure 125 : Evolution des efforts dans les colonnes de l'étage endommagé (HAI [4] pour les deux images du dessus)

La seule différence par rapport aux prévisions qu'avait faites L.N.N. Hai [4] dans sa thèse, c'est que l'effort normal dans la colonne extérieure diminue durant la phase 3. Considérer cet effort constant est du côté de la sécurité.



### 3.2.4.2 Poutre de l'étage endommagé

Les deux extrémités de la poutre située juste au-dessus des colonnes de l'étage endommagé sont susceptibles elles aussi de plastifier au cours de la phase 3.

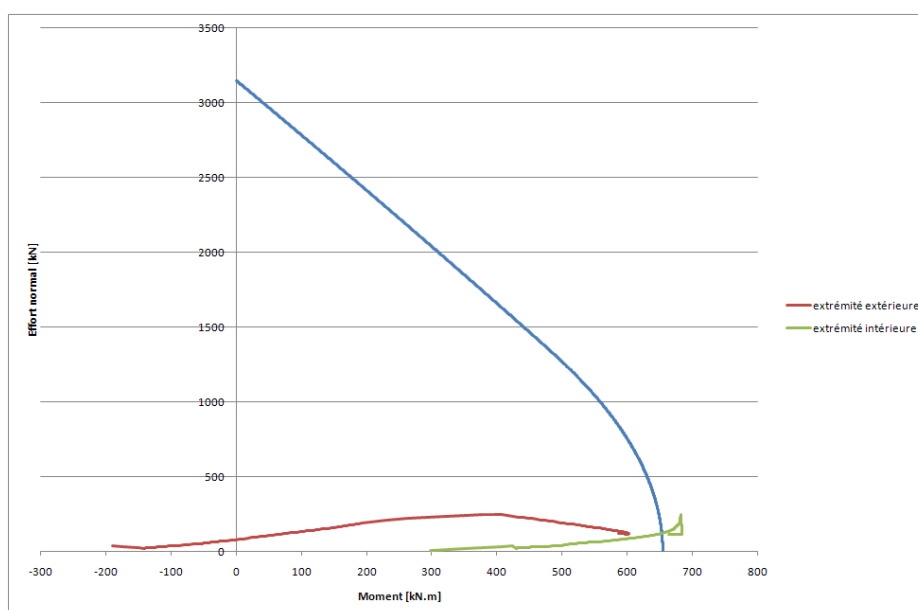


Figure 126 : Interaction M+N aux extrémités de la poutre de l'étage endommagé

Observations à propos de la Figure 126:

- L'effort normal dans la poutre reste limité. Il faut noter que, encore une fois, cela est dû au fait que l'effort de traction dans la poutre membranaire reste limité dans le cas observé. Le moment plastique est donc peu influencé par l'effort normal
- L'extrémité intérieure de la poutre (= celle la plus proche de la partie directement affectée) plastifie. Cela est dû au fait que la poutre est déjà initialement chargée par des charges uniformément réparties, et que les moments induits par cette charge s'additionnent avec les moments dus à l'application d'une charge horizontale, et cela uniquement à l'extrémité droite de la poutre (Figure 127) :

	Déformées	Diagrammes des moments
Sous charges réparties $p$		
Sous charge horizontale $H$		

Figure 127 : Addition des moments (sous  $p + H$ ) à l'extrémité intérieure de la poutre

### 3.2.4.3 Colonne au dessus de la colonne disparue

Il peut être intéressant d'observer la variation de l'effort  $N_{up}$  au cours de la phase 3. Pour rappel,  $N_{up}$  est l'effort axial dans la colonne juste au-dessus de la colonne qui disparaît (Figure 128) :

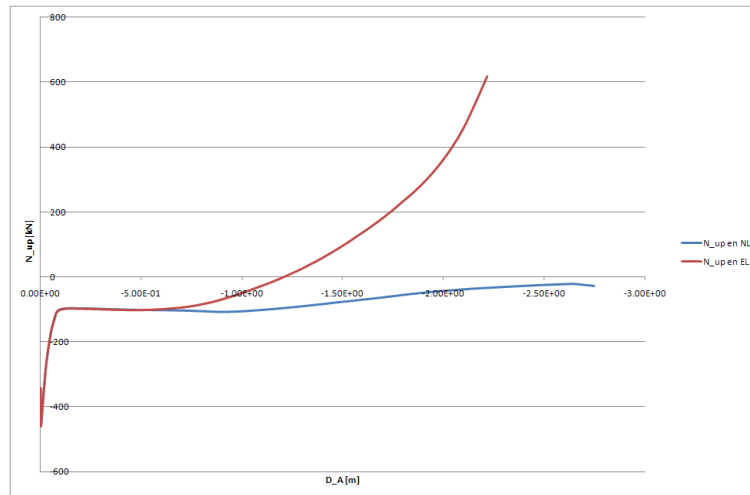


Figure 128 : Effort  $N_{up}$  dans le cas d'une partie indirectement affectée élastique et pouvant plastifier

La courbe en rouge sur la Figure 128 représente l'effort  $N_{up}$  lorsque la raideur de la partie indirectement affectée est supposée constante. La courbe en bleu sur cette même figure représente l'effort  $N_{up}$  lorsque cette raideur diminue. La variation de  $N_{up}$  est nettement réduite par rapport au cas où la partie indirectement affectée est élastique, et cet effort pourrait, en première approximation, être considéré comme constant le long de la phase 3. Encore une fois, ces observations pourraient être compromises dans le cas d'un portique dans lequel les rotules plastiques mettraient plus de temps à apparaître.

### 3.2.5 Comparaison des 4 portiques

Les 4 portiques décrits (n°1, 3, 4 et 5) au paragraphe 2.7.1 ont été choisis pour d'une part, faire varier la raideur de la partie indirectement affectée et d'autre part, en faire varier la résistance :

- Changement de limite d'élasticité des éléments de la partie indirectement affectée (passage du portique 1 au portique 3 et du portique 4 au portique 5) → variation de la résistance de la partie indirectement affectée uniquement, la raideur élastique étant identique.

Si l'on observe les courbes  $Q - \Delta_A$  des portiques 1 et 3 dont la partie indirectement affectée peut plastifier (respectivement, les courbes rouge et verte sur la Figure 129), en relation avec la courbe  $Q - \Delta_A$  de ces portiques dont la partie indirectement affectée ne peut plastifier (courbe identique pour les deux portiques, courbe en bleu sur la Figure 129), les résultats sont :

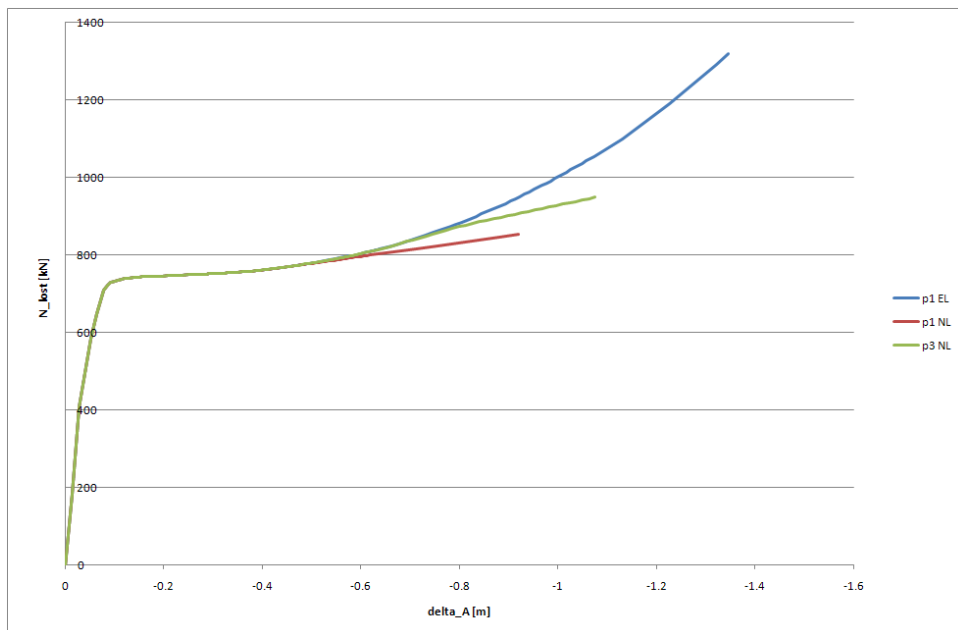


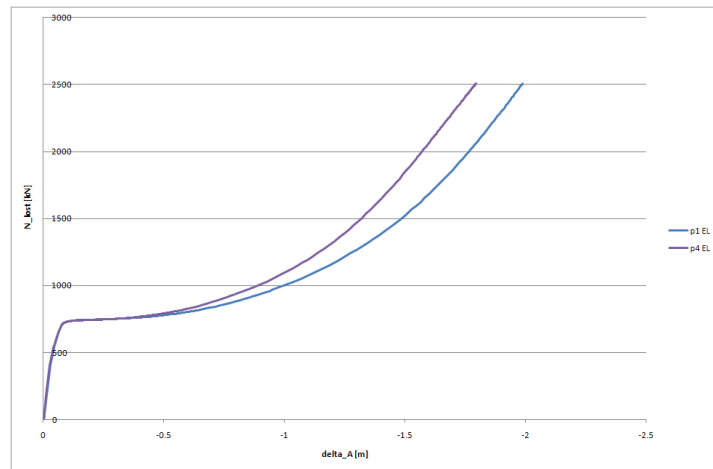
Figure 129 : Courbes  $Q - \Delta_A$  pour les portiques 1 et 3

Il est logique que la courbe correspondant au portique 3 décolle plus tard de la courbe élastique que ne le fait celle du portique 1 puisque la résistance de la partie indirectement affectée du portique 3 est plus grande, la première rotule s'y forme donc plus tard.

Le même raisonnement peut être suivi pour les portiques 4 et 5 : ils ont en commun la courbe  $Q - \Delta_A$  élastique, et le portique 5 décolle de cette courbe après le portique 4.

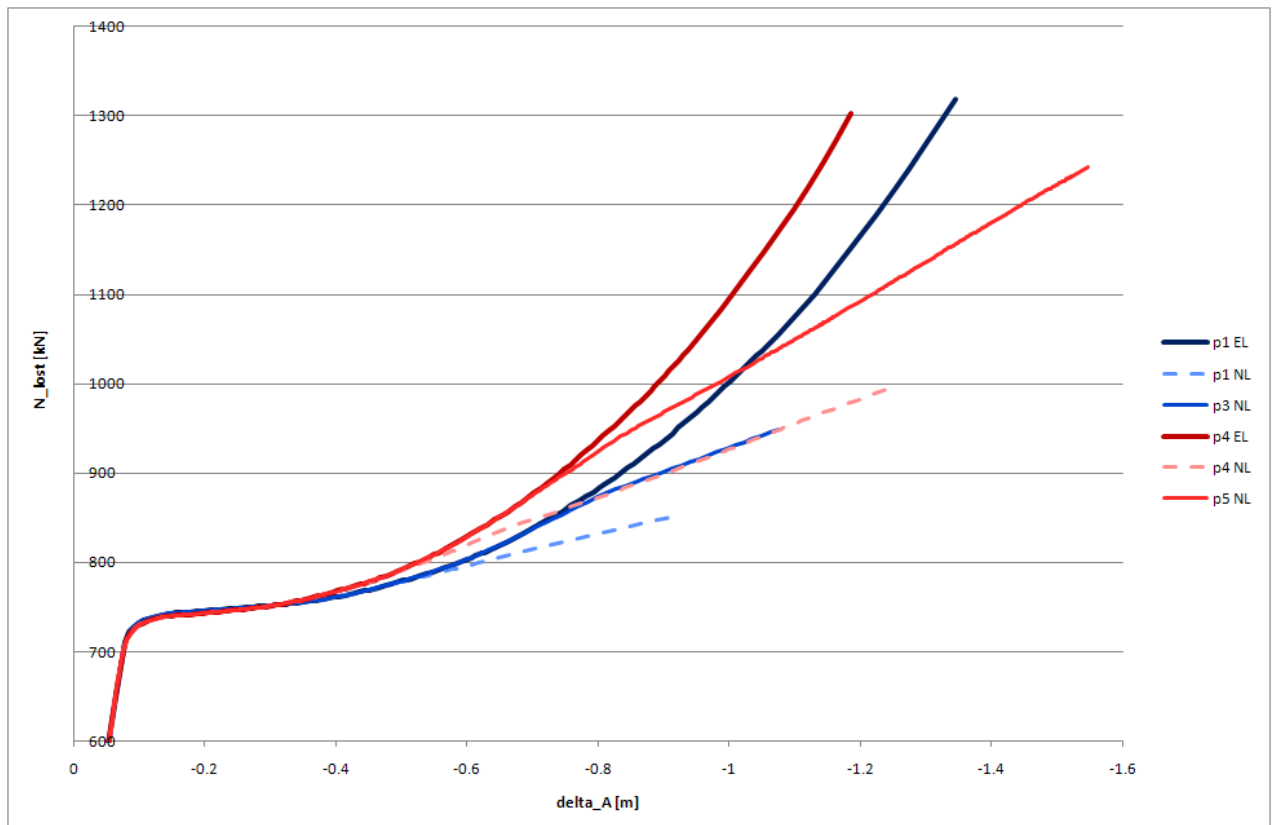
- Changement de profilé des colonnes de la partie indirectement affectée (passage du portique 1 au portique 4 et du portique 3 au portique 5) → variation de la raideur ET de la résistance de la partie indirectement affectée. Si l'on considère que la partie indirectement affectée ne peut pas plastifier, il n'y a alors que la raideur qui est modifiée, et l'on a :
  - Portique 1 = portique 3
  - Portique 4 = portique 5

Si l'on compare les courbes élastiques du portique 1 (= portique 3 dans ce cas, courbe en bleu sur la Figure 130) et du portique 4 (= portique 5 dans ce cas, courbe en mauve sur la Figure 130), le résultat est le suivant (Figure 130):



**Figure 130 : Courbes  $Q - \Delta_A$  pour les portiques 1 et 4, partie indirectement affectée élastique**

La Figure 131 résume ce qui vient d'être dit. En dégradé de rouge sont représentées les courbes relatives aux portiques 4 et 5 (courbe élastique, puis les deux courbes pour les cas où la partie indirectement affectée plastifie) et en dégradé de bleu, les 3 courbes relatives aux portiques 1 et 3.



**Figure 131 : Courbes  $Q - \Delta_A$  pour tous les portiques (1, 3, 4, 5)**

### 3.3 Division de l'étude en deux étapes

Le but de ce chapitre 3 est double :

- Obtenir les variations de la raideur latérale  $K$  de la partie indirectement affectée
- Obtenir les déplacements du point  $A$ , sommet de la colonne disparue, en fonction de la charge  $N_{lost}$  qui simule la perte de cette colonne

L'étude peut donc être divisée en deux étapes :

- ETAPE 1 : obtenir  $F_1$  en fonction de  $d_1$ , c'est-à-dire suivre l'évolution de la raideur transversale au fur et à mesure de la formation des rotules dans la partie indirectement affectée
- ETAPE 2 : obtenir  $Q$  en fonction de  $\Delta_A$ , c'est-à-dire prévoir les besoins de ductilité supplémentaires induits par cette perte progressive de rigidité de la partie indirectement affectée. Pour obtenir ce résultat, on verra qu'il faut tout d'abord connaître la variation de  $F_1$  en fonction de  $d_1$

L'étude de la partie indirectement affectée se limitera à l'atteinte du mécanisme plastique dans cette partie, il ne sera pas tenu compte du surplus de résistance éventuel de la structure après formation de ce mécanisme plastique (paragraphe 3.2.3).

### 3.4 ETAPE 1 : Calcul de la variation de la raideur transversale de la partie indirectement affectée

#### 3.4.1 Informations nécessaires au préalable à l'étude analytique

##### 3.4.1.1 *Efforts en fin de phase 2*

Tous les efforts sont supposés connus en fin de phase 2. En effet, selon l'élément étudié, les efforts internes sont égaux à ce qu'ils valaient en fin de phase 1, et, s'ils ont été influencés par la phase 2, les efforts internes peuvent être calculés en considérant la sous-structure développée dans la thèse de L.N.N. Hai [4].

##### 3.4.1.2 *Moments résistants*

Pour pouvoir suivre la plastification dans la partie indirectement affectée, il est nécessaire de connaître les moments auxquels les différentes sections étudiées plastifient.

En se référant aux graphes d'interaction M+N qui ont été tracés pour les colonnes et les poutres de l'étage endommagé, il peut être déduit, en première approximation, que :

- Le moment plastique des poutres peut être pris égal à celui tel que  $N \sim 0$
- Le moment plastique des colonnes peut être pris, en première approximation, égal au  $M_{pl}(N)$  correspondant au  $N$  en fin de phase 2. Il faut être conscient que ce n'est qu'une approximation, car l'effort de compression, dans la colonne adjacente, va encore augmenter légèrement durant la phase 3, et il va par contre diminuer dans la colonne extérieure

### 3.4.2 Influence de $F_2$ et $F_1$

Dans le chapitre 2, c'est-à-dire lorsque la partie indirectement affectée restait élastique tout au long de la phase 3, il a pu être mis en évidence l'influence importante qu'avait le rapport  $\Delta F_2/\Delta F_1$  sur la rigidité latérale de la partie indirectement affectée.

Tandis que dans le chapitre 2, le rapport  $\Delta F_2/\Delta F_1$  était constant tout au long de la phase 3, il varie ici à chaque formation de rotule. Si l'on suppose cette évolution de  $F_2$  en fonction de  $F_1$  connue, peut-on toujours en déduire l'évolution de la raideur  $K$  ?

Le portique 5 va servir d'exemple pour répondre à cette question. Pour ce portique, on suppose que l'on dispose de la variation de  $F_2$  en fonction de  $F_1$ , et celle-ci est approximée par deux droites dont les pentes sont les suivantes (Figure 132) :

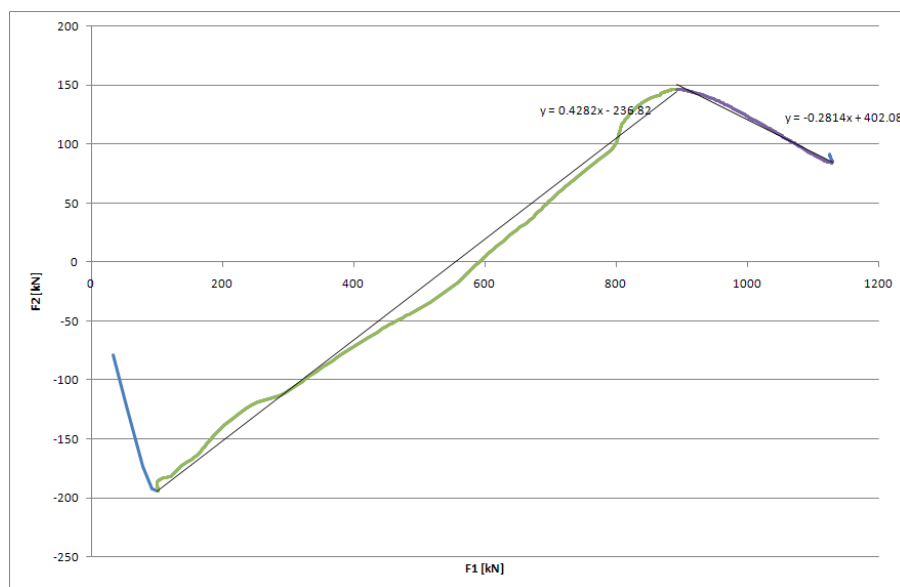


Figure 132 : Variation de  $F_2$  en fonction de  $F_1$

Les valeurs de  $\Delta F_2/\Delta F_1$  qui vont être utilisées dans la démarche analytique sont donc :

$$\frac{\Delta F_2}{\Delta F_1} = 0,4282[-] \text{ et } \frac{\Delta F_2}{\Delta F_1} = -0,2814[-]$$

## ETAPE 1

La partie indirectement affectée n'a encore aucune rotule. Dans OSSA2D, la structure suivante est résolue (Figure 133) :

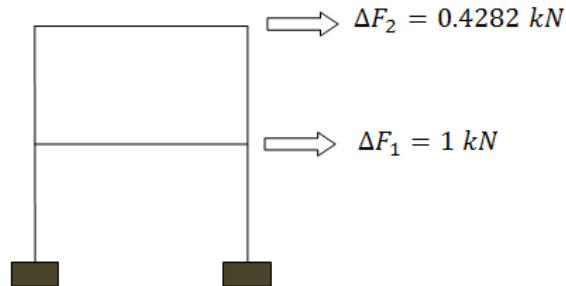


Figure 133 : Chargement de la partie indirectement affectée, ETAPE 1

Pour rappel, cette structure (Figure 133) représente la partie indirectement affectée (plus précisément, celle située à gauche de la partie directement affectée). Une fois cette structure résolue, les moments aux différents endroits-clés sont relevés. Ils sont appelés  $\Delta M$ . Pour chaque section-clé, un multiplicateur est calculé. C'est la quantité par laquelle il faudrait multiplier le cas de charge décrit à la Figure 133 pour que la rotule se forme dans cette section-clé. Les notations sont les suivantes :

- $M_0$  = moment qui agissait déjà dans la section-clé considérée avant l'application du cas de charge décrit à la Figure 133. Dans le cas de l'étape 1, c'est le moment agissant en fin de phase 2 dans la section étudiée
- $M_{pl}$  = moment résistant de la section-clé considérée.
- $\Delta M$  = moment dans la section-clé sous le chargement de la Figure 133

Finalement, le multiplicateur, en chaque section-clé, est calculé comme suit :

$$M_0 + \lambda * \Delta M = M_{pl} \rightarrow \lambda = \frac{M_{pl} - M_0}{\Delta M}$$

C'est dans la section-clé qui possède le multiplicateur minimal que se formera la première rotule.

Exemple numérique pour le cas étudié :

Section-clé	$M_0 [kN.m]$ = moments en fin de phase 2	$\Delta M [kN.m]$ = moments sous $\Delta F_1 = 1 \text{ kN}$ $\Delta F_2 = 0.4282 \text{ kN}$	$M_p [kN.m]$	$\lambda = \frac{M_{pl} - M_0}{\Delta M} [-]$
Base de la colonne extérieure	-50	1.5478	1200	807.597881
Sommet de la colonne extérieure	-100 = -50 * 2	0.8982	1200	1447.33912
Base de la colonne adjacente	-65	1.6068	1000	662.808066
Sommet de la colonne adjacente	-130 = -65 * 2	0.946	1000	1194.50317
Extrémité gauche de la poutre inférieure	-200	1.1264	1000	1065.34091
Extrémité droite de la poutre inférieure	400	1.1329	1000	529.614264
Extrémité droite de la poutre supérieure	430	0.5363	1000	1062.838

Pour rappel, tous les moments des colonnes sont choisis comme négatifs à la fin de la phase 2 puisque les moments aux extrémités des colonnes s'inversent durant la phase 3 par rapport à ce qu'ils valaient en fin de phase 2 (explication donnée au paragraphe 1.5.3) : tous les moments plastiques étant choisis positifs ( $M_p > 0$ ), il faut que les moments « initiaux » soient négatifs. Les seuls moments  $M_0$  positifs en fin de phase 2 sont ceux aux extrémités droites des poutres, pour les mêmes raisons que décrites au paragraphe 3.2.4.2.

Notons que l'extrémité droite de la poutre supérieure fait partie des sections-clés à étudier alors que cette poutre ne fait pas partie de l'étage endommagé. Ce point sera étudié plus en détail dans la suite de cet exemple.

Finalement, dans le cas étudié, le multiplicateur le plus faible est celui correspondant à l'extrémité droite de la poutre inférieure, et vaut 529.614 [–]. C'est donc à l'extrémité droite de la poutre inférieure que va se former la première rotule.

Les efforts à la fin de l'étape 1 sont calculés comme suit :

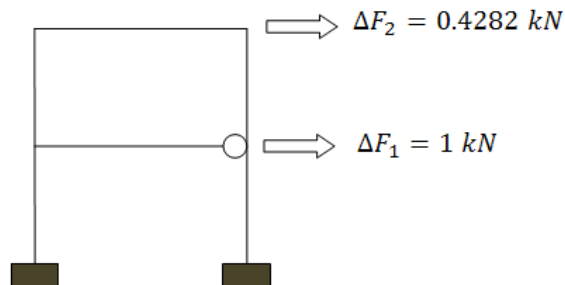
$$E_{fin} = E_0 + \Delta E * \lambda_{min}$$

	$E_0$	$\Delta E$	$E_{fin}$
$F_1 [kN]$	80	$\boxed{1 \text{ kN}}$	609.614264 kN
$d_1 [m]$	0	$\frac{1}{K_1} = \frac{\Delta d_1}{\Delta F_1} = \alpha + \beta * \frac{\Delta F_2}{\Delta F_1}$ $\Delta d_1 = \Delta F_1 * \left( \alpha + \beta * \frac{\Delta F_2}{\Delta F_1} \right)$ $\boxed{\Delta d_1 = 3.823 * 10^{-5} \text{ m}}$	0.02024733 m
$F_2 [kN]$	–190	$\frac{\Delta F_2}{\Delta F_1} = 0.4282$ $\boxed{\Delta F_2 = 0.4282 \text{ m}}$	36.780828 m
$d_2 [m]$	0	$\frac{1}{K_2} = \frac{\Delta d_2}{\Delta F_2} = \gamma + \frac{\delta \beta}{\frac{\Delta d_1}{\Delta F_1} - \alpha}$ $\boxed{\Delta d_2 = 6.894 * 10^{-5} \text{ m}}$	0.03651206 m
MOMENTS DANS LES SECTIONS-CLÉS			
Base de la colonne extérieure	–50	1.5478	769.736958
Sommet de la colonne extérieure	–100	0.8982	375.699532
Base de la colonne adjacente	–65	1.6068	785.9842
Sommet de la colonne adjacente	–130	0.946	371.015094
Extrémité gauche de la poutre inférieure	–200	1.1264	396.557507
Extrémité droite de la poutre inférieure	400	1.1329	1000
Extrémité droite de la poutre supérieure	430	0.5363	723.49987



## **ETAPE 2**

Une rotule est formée dans la partie indirectement affectée, à l'extrémité droite de la poutre inférieure. La structure à résoudre dans OSSA2D est modifiée et devient (toujours avec le même  $\Delta F_2/\Delta F_1$ , supposé constant et connu pour l'instant, valant 0.4282) (Figure 134) :



**Figure 134 : Chargement de la partie indirectement affectée, ETAPE 2**

La procédure est ensuite exactement similaire à celle qui a été explicitée pour l'étape 1 :

- calcul des  $\Delta M$  en chaque section-clé
- calcul d'un multiplicateur en chaque section-clé
- obtention du multiplicateur minimal
- calcul des efforts en fin d'étape 2. Notons que les efforts  $E_0$  de l'étape 2 sont maintenant les efforts  $E_{fin}$  déterminés en fin d'étape 1

Les étapes se succèdent ainsi jusqu'à la formation de la dernière des 4 rotules qui mènent au mécanisme de panneau, c'est-à-dire dans les sections en base et au sommet des deux colonnes inférieures.

Notons qu'à une certaine étape, lorsque le maximum de  $F_2$  est atteint, il faut que le  $\Delta F_2/\Delta F_1$  passe de la valeur de 0,4282 à la valeur de  $-0,2814$ .

Les résultats sont les suivants (de la Figure 135 à la Figure 140) :

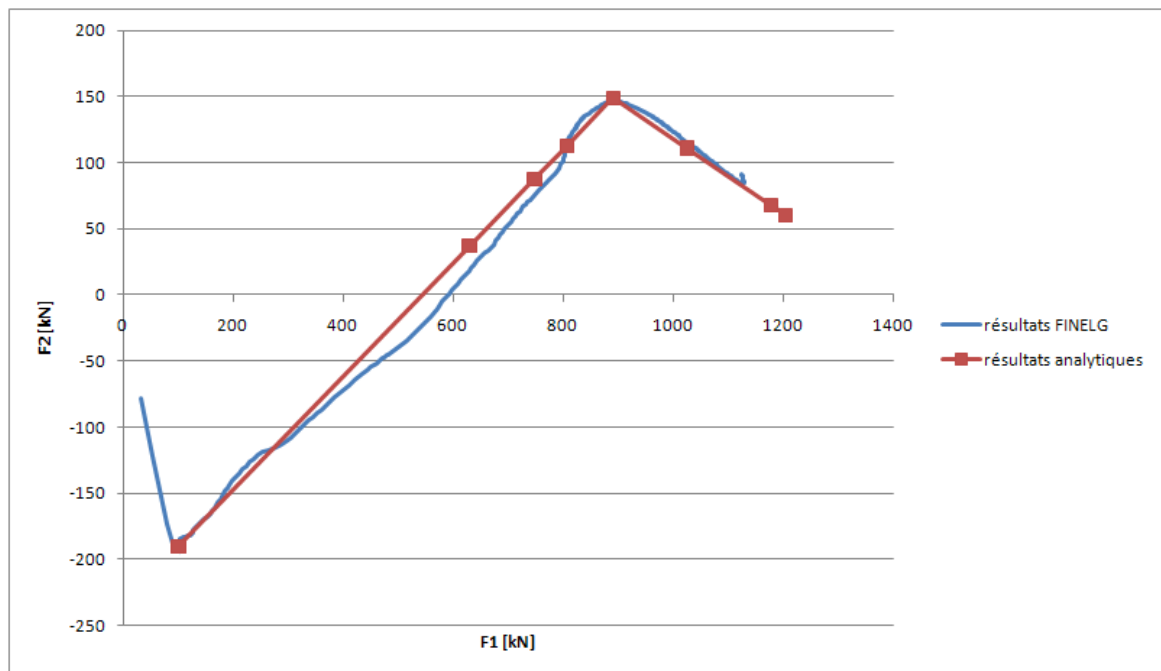


Figure 135 : Evolution de  $F_2$  en fonction de  $F_1$

Il est normal que les deux courbes de la Figure 135 (numérique et analytique) collent quasi parfaitement l'une à l'autre dans ce cas-ci puisque c'est cette donnée de  $\Delta F_2 / \Delta F_1$  qui a été supposée connue tout au long du calcul analytique.

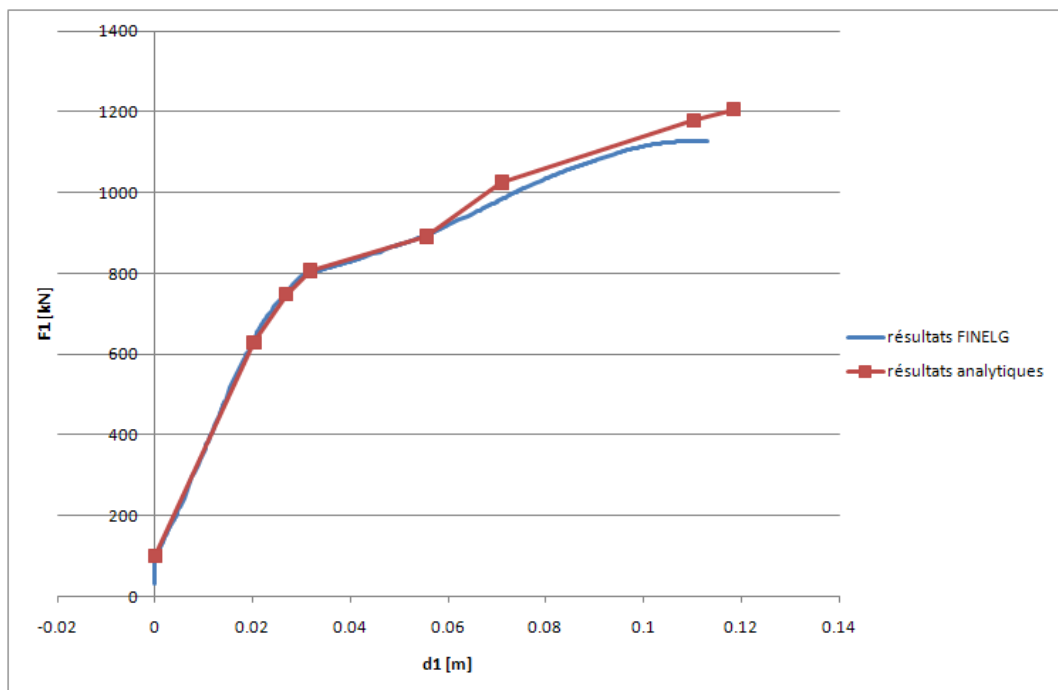


Figure 136 : Evolution de  $F_1$  en fonction de  $d_1$  (variation de  $K_1$ )

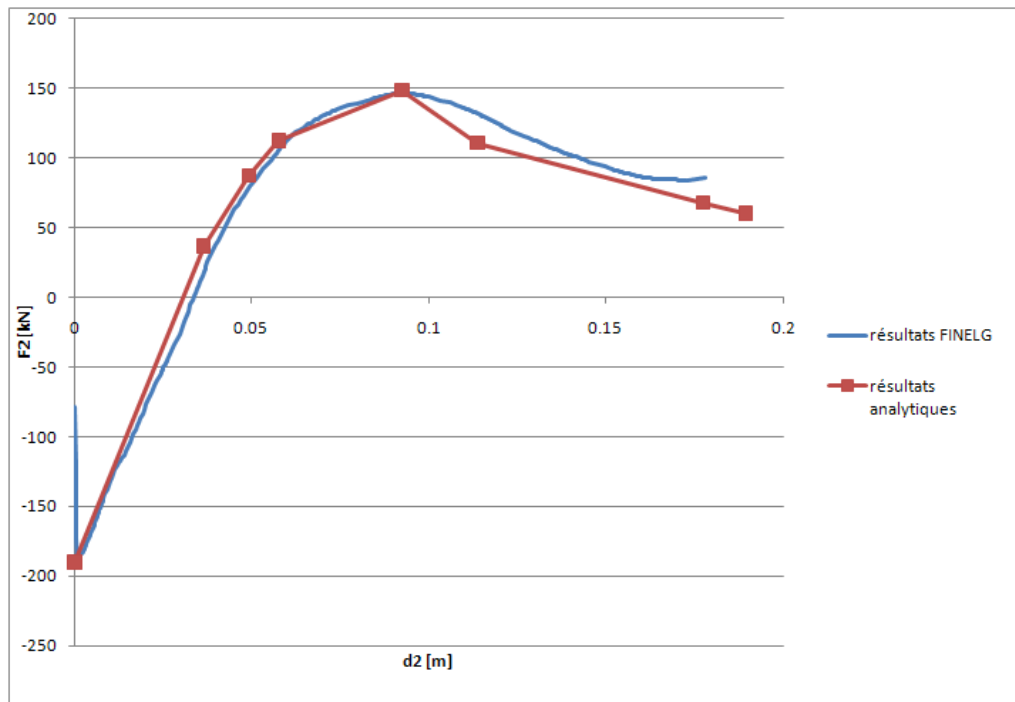


Figure 137 : Evolution de  $F_2$  en fonction de  $d_2$  (variation de  $K_2$ )

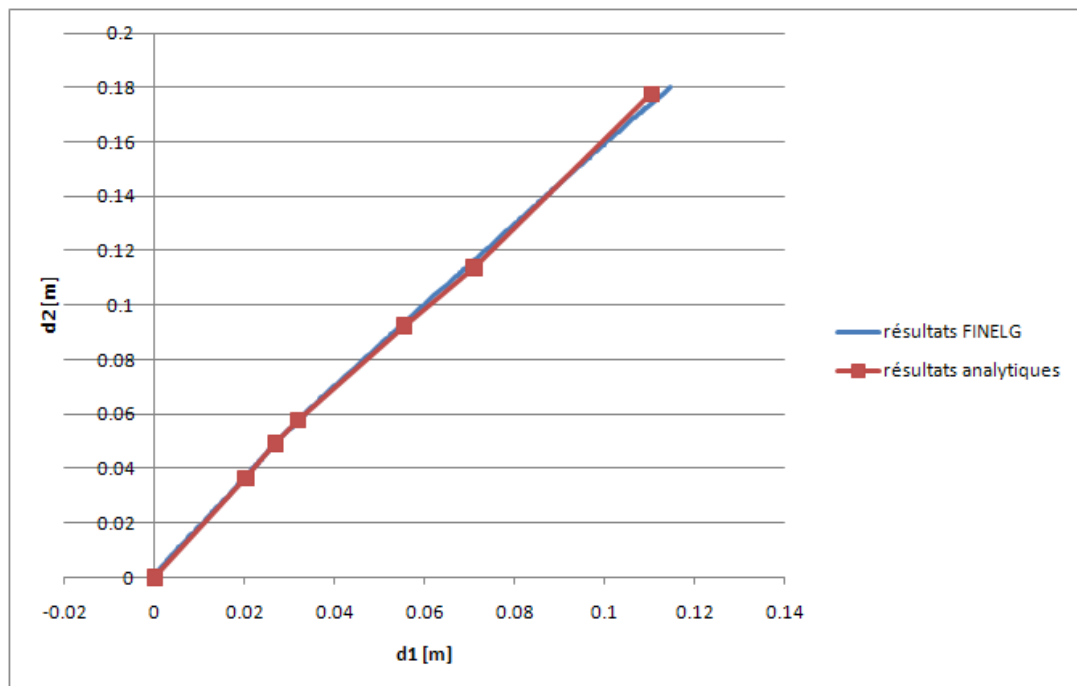


Figure 138 : Evolution de  $d_2$  en fonction de  $d_1$

Résultats détaillés pour le dernier point calculé (= formation complète du mécanisme plastique) :

	$F_1$	$d_1$	$F_2$	$d_2$
Résultats FINELG	1128.85 kN	0.1132 m	85.6 kN	0.1781 m
Résultats analytiques	1205.38 kN	0.1185 m	60.32 kN	0.1895 m
Erreur relative	6,8 %	4,7 %	29.5 %	6,4 %

L'évolution des moments dans les sections-clés peut aussi être tracée en fonction du déplacement  $d_1$  (Figure 139 et Figure 140) :

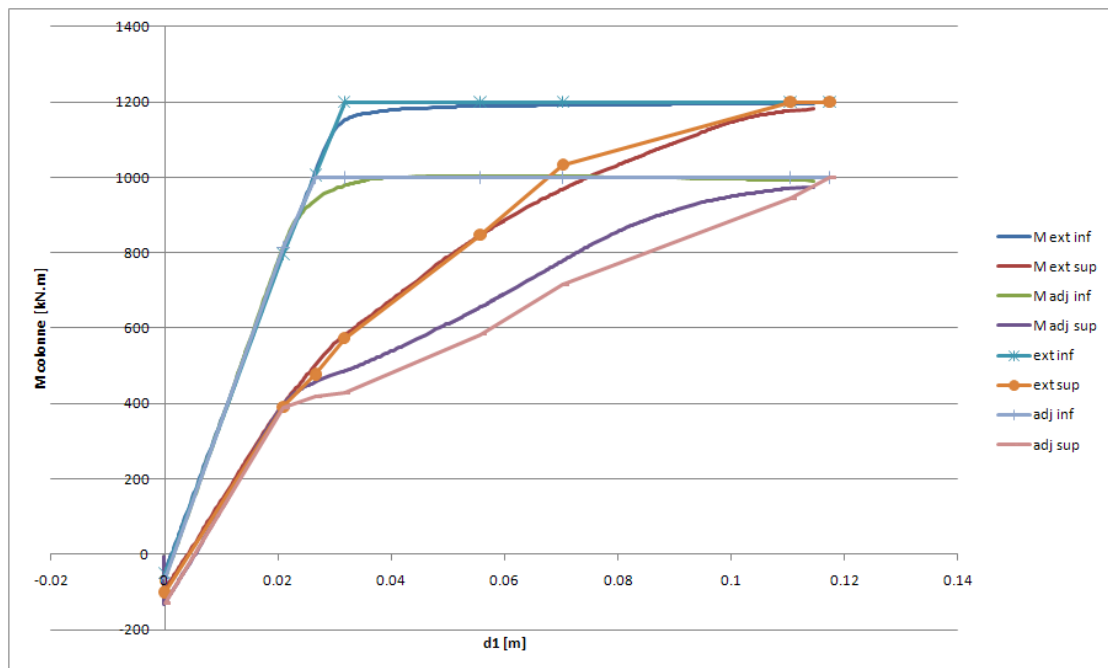


Figure 139 : Evolution des moments dans les colonnes

La dénomination « M ext inf » sur la Figure 139 renvoie au moment agissant en base de la colonne extérieure, tandis que « M adj sup » renvoie au moment agissant au sommet de la colonne adjacente.

Les courbes continues sont les courbes obtenues par FINELG tandis que les courbes faites de segments de droites sont les courbes obtenues analytiquement.

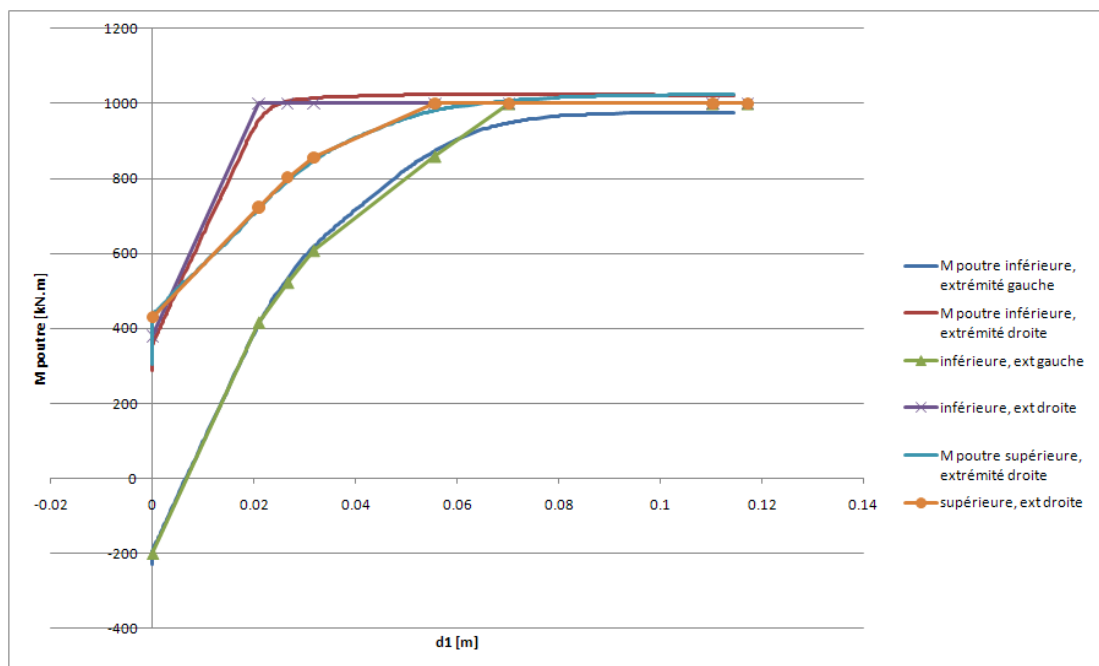
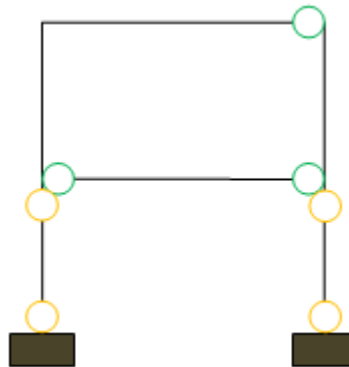


Figure 140 : Evolution des moments dans les poutres

### 3.4.2.1 Sections-clés à observer

Comme dit précédemment, lors de la description de la méthode analytique, uniquement certaines sections-clés sont observées. Dans les graphiques ci-dessus (Figure 139 et Figure 140), elles sont au nombre de 7 (4 dans les colonnes, 3 dans les poutres), et sont représentées sur le schéma ci-dessous (Figure 141) :



**Figure 141 : Sections-clés dans la partie indirectement affectée (à gauche de la partie directement affectée)**

Les 4 sections-clés dans les colonnes semblent naturelles : ce sont elles qui vont mener à la formation du mécanisme de panneau.

Pour ce qui est des sections-clés dans les poutres, les remarques suivantes sont d'application :

- Pour la poutre inférieure : cette poutre fait partie de l'étage endommagé, et les deux extrémités de cette poutre plastifient durant la phase 3. L'extrémité gauche, plus éloignée de la plastification que l'extrémité droite, finit quand même par atteindre  $M_{pl}$ .
- Pour la poutre supérieure : cette poutre ne fait pas partie de l'étage endommagé, et une de ses extrémités plastifie malgré tout.

De cette observation, il faut conclure que, pour être tout à fait exact, pour ne passer à côté d'aucune rotule formée dans la partie indirectement affectée, il faudrait normalement considérer comme sections-clés toutes les extrémités de tous les éléments de cette partie, et ne pas se limiter à l'étude des sections-clés se trouvant au niveau de l'étage endommagé.

Cette nécessité augmente de beaucoup le nombre de sections qu'il faudrait normalement considérer, et augmente donc la quantité d'informations qu'il faut relever à chaque étape ( $\Delta M$  en particulier).

Pour alléger la tâche de calcul dans ce cas-ci, et ne pas devoir observer toutes les sections de toute la partie indirectement affectée, une sélection a été opérée parmi ces sections-clés, et n'ont été observées que celles qui plastifiaient réellement. Cette simplification n'invalidé aucunement la méthode de calcul décrite précédemment, puisqu'il suffirait de prendre en compte toutes les sections-clés de la partie indirectement affectée pour arriver à la conclusion que seulement 7 d'entre elles plastifient.

Il faut de plus prendre conscience que la formation d'une rotule en dehors de l'étage endommagé a une influence non négligeable sur le comportement global de la structure. En effet, le moment où se forme la rotule dans la poutre supérieure coïncide avec le sommet de la courbe  $F_2 - F_1$ . A partir de ce moment, le signe de  $\Delta F_2 / \Delta F_1$  s'inverse (Figure 142) :

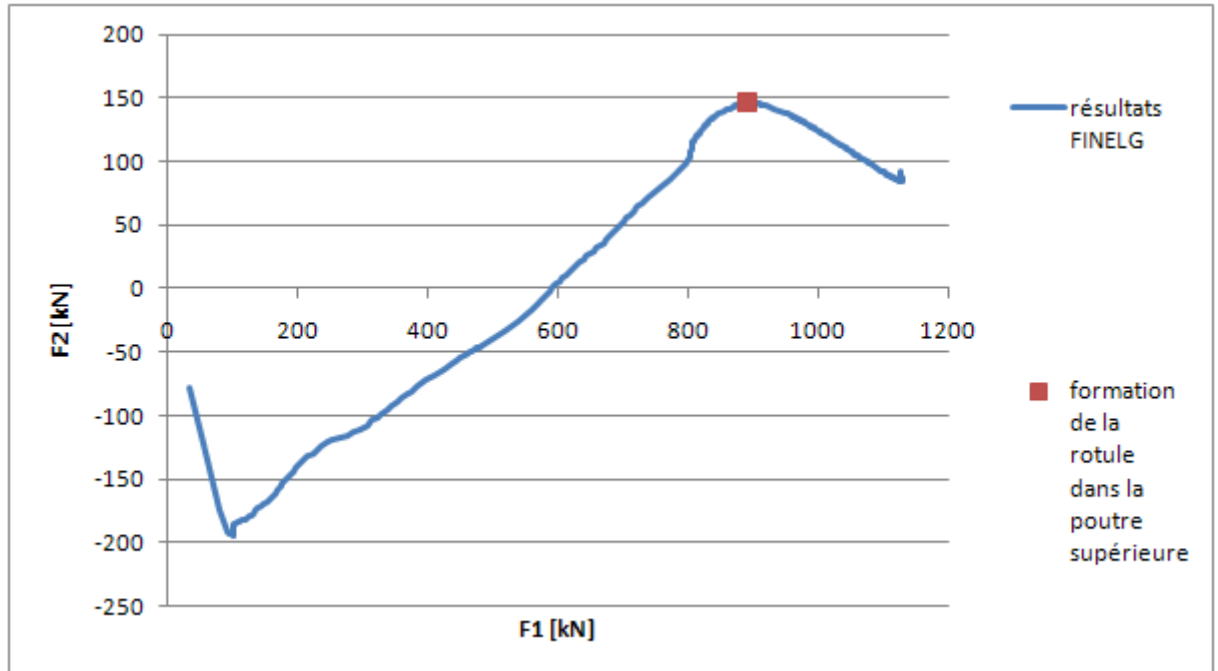


Figure 142 : Mise en évidence de la cause du changement de signe de  $\Delta F_2 / \Delta F_1$

L'explication physique de ce phénomène est la suivante :

- Dès le début de la phase 3, la poutre supérieure, qui avait vu sa compression augmenter durant la phase 2, commence à se décompresser. Cela est dû au fait que la partie indirectement affectée est suffisamment raide, l'étage supérieur de la partie indirectement affectée ne « s'affaisse pas » sur la partie directement affectée.  
Si cela était le cas, si la partie indirectement affectée était suffisamment souple, alors la compression dans la poutre supérieure de la partie directement affectée augmenterait durant la phase 3.  
Ce n'est pas le cas ici et  $\Delta F_2 / \Delta F_1$  est supérieur à 0 dès le début de la phase 3.
- Les rotules dans la partie inférieure de la partie indirectement affectée (=étage endommagé) se forment peu à peu.  
La partie supérieure de la partie indirectement affectée ne se laisse toujours pas « aller » suffisamment que pour augmenter l'effort de compression dans la poutre supérieure de la partie directement affectée.
- A un moment donné, une rotule se forme dans la poutre supérieure. Cette fois, la perte de rigidité se situe au niveau supérieur, et non plus au niveau inférieur de la partie indirectement affectée. La partie supérieure se laisse donc « aller » de manière plus significative et vient cette fois « appuyer » sur la poutre supérieure de la partie directement affectée : la partie indirectement affectée se déplace plus vite que la partie directement affectée. Cette poutre supérieure de la partie directement affectée, qui avait jusqu'alors

tendance à se décompresser, à passer en traction, parce que la partie indirectement affectée lui procurait assez de soutien latéral, va maintenant avoir tendance à se re-comprimer.

### 3.4.3 Obtention de $F_2$ en fonction de $F_1$

Comme montré au paragraphe précédent, si le rapport entre  $F_2$  et  $F_1$  est connu, alors il est possible de trouver analytiquement les courbes qui caractérisent la phase 3, en tenant compte de la plastification de la partie indirectement affectée.

Le but est donc maintenant de déterminer l'évolution de  $F_2$  en fonction de  $F_1$ . Cette détermination se fera de la même manière que présentée dans le chapitre 2, en utilisant la sous-structure de la partie directement affectée qui a été mise au point dans le chapitre 2.

La différence par rapport au cas où la partie indirectement affectée restait élastique est que le lien qui existait entre les ressorts  $K_1$  et  $K_2$  change à chaque fois qu'une nouvelle rotule se forme dans la partie indirectement affectée. Ce changement de lien entre  $K_1$  et  $K_2$  s'effectue via la variation des coefficients  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , qui augmentent au fur et à mesure de la formation des rotules, puisque ces coefficients représentent la souplesse de la partie indirectement affectée par rapport à des forces unitaires situées au deux étages.

#### 3.4.3.1 *Démarche générale*

ETAPE 0 : fin de phase 2, tous les efforts sont connus, les moments résistants des sections-clés sont déterminés

ETAPE 1 : pas de rotule

- Détermination des  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$
- Résolution des équations du paragraphe 2.6.3 par le logiciel EES
- Obtention de  $\Delta d_2 / \Delta d_1$ , ainsi que de  $\Delta F_2 / \Delta F_1$
- Résolution dans OSSA2D de la structure représentant la partie indirectement affectée sans rotule, soumise à une force de 1 kN au niveau inférieur ( $\Delta F_1 = 1 \text{ kN}$ ), et à une force de  $\Delta F_2$  au niveau supérieur
- Obtention des  $\Delta M$  dans les sections-clés de la partie indirectement affectée
- Calcul d'un multiplicateur de charge dans chaque section-clé
- Obtention du multiplicateur minimum
- Obtention des efforts en fin d'étape 1

A la fin de cette première étape, au moment où se forme la première rotule, les variables suivantes sont connues :

- $F_1$  et  $F_2$
- $d_1$  et  $d_2$
- Les moments dans toutes les sections-clés

## ETAPE 2 :

Une première rotule s'est formée dans la partie indirectement affectée. Les étapes sont de nouveaux les suivantes :

- Détermination des  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  : ils sont maintenant déterminés dans une structure qui contient une rotule
- Résolution des équations du paragraphe 2.6.3 par le logiciel EES
- Obtention de  $\Delta d_2/\Delta d_1$ , ainsi que de  $\Delta F_2/\Delta F_1$
- Résolution dans OSSA2D de la structure représentant la partie indirectement affectée, avec une rotule maintenant, soumise à une force de 1 kN au niveau inférieur ( $\Delta F_1 = 1 \text{ kN}$ ), et à une force de  $\Delta F_2$  au niveau supérieur
- Obtention des  $\Delta M$  dans les sections-clés de la partie indirectement affectée
- Calcul d'un multiplicateur de charge dans chaque section-clé
- Obtention du multiplicateur minimum
- Obtention des efforts en fin d'étape 2

ETAPE 3,... : ainsi de suite jusqu'à obtention d'un mécanisme dans la partie indirectement affectée

### 3.4.3.2 Valeurs de $K_N$

Pour rappel, les seules valeurs d'entrée à fournir à la sous-structure de la partie directement affectée, sont :

- Les coefficients  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$
- Les valeurs de  $K_{N1}$  et  $K_{N2}$

Au cours de ce travail de fin d'études, plusieurs méthodes ont été testées pour obtenir l'évolution du rapport  $F_2/F_1$ . Ces méthodes avaient en commun la démarche générale décrite ci-dessus, mais la différence résidait dans les valeurs considérées du  $K_N$ . La description des différentes méthodes est brièvement reprise ci-après :

#### Méthode n°1

La première méthode considérait un couple ( $K_{N1}, K_{N2}$ ) constant tout au long de la plastification de la partie indirectement affectée. Ces valeurs, constantes, étaient prises égales aux valeurs déterminées lorsque la partie indirectement affectée était élastique. Par exemple, pour le portique 5, les valeurs considérées étaient (référence au paragraphe 2.7.2) :

$$K_{N1} = 54279.1 \text{ kN/m}$$

$$K_{N2} = 73701.8 \text{ kN/m}$$

Cette hypothèse d'un  $K_N$  constant se basait sur le raisonnement physique suivant : la raideur extensionnelle d'une rotule plastique formée dans la partie directement affectée ne devrait pas se trouver affectée d'une quelconque manière par des plastifications dans la partie indirectement affectée. Le  $K_N$  était alors vu comme une caractéristique intrinsèque d'une section IPE550 plastifiée, et mise en traction, tout comme l'aire ou l'inertie sont des valeurs constantes relatives à la section IPE550. A chaque formation de rotule dans la partie indirectement affectée, les seuls éléments qui



variaient étaient donc les valeurs de  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , les  $K_{N,i}$  restant constants tout au long du calcul pas-à-pas. Cette méthode n°1 n'a pas donné de résultats satisfaisants, sur aucun des 4 portiques (n°1, 3, 4 et 5). Les résultats fournis ci-après concernent le portique n°5 (de la Figure 143 à la Figure 146):

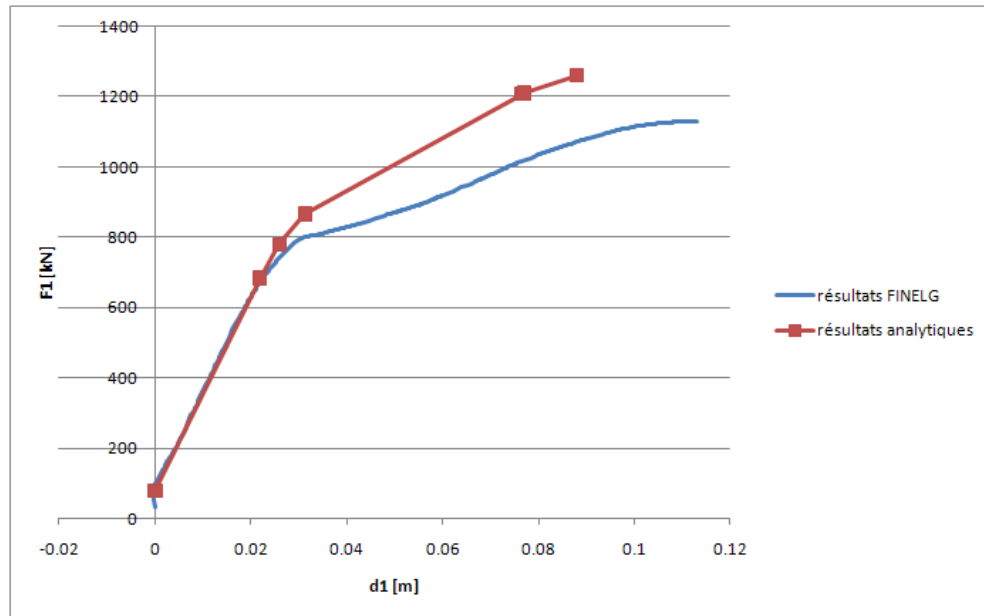


Figure 143 : Evolution de  $F_1$  en fonction de  $d_1$  (variation de  $K_1$ )

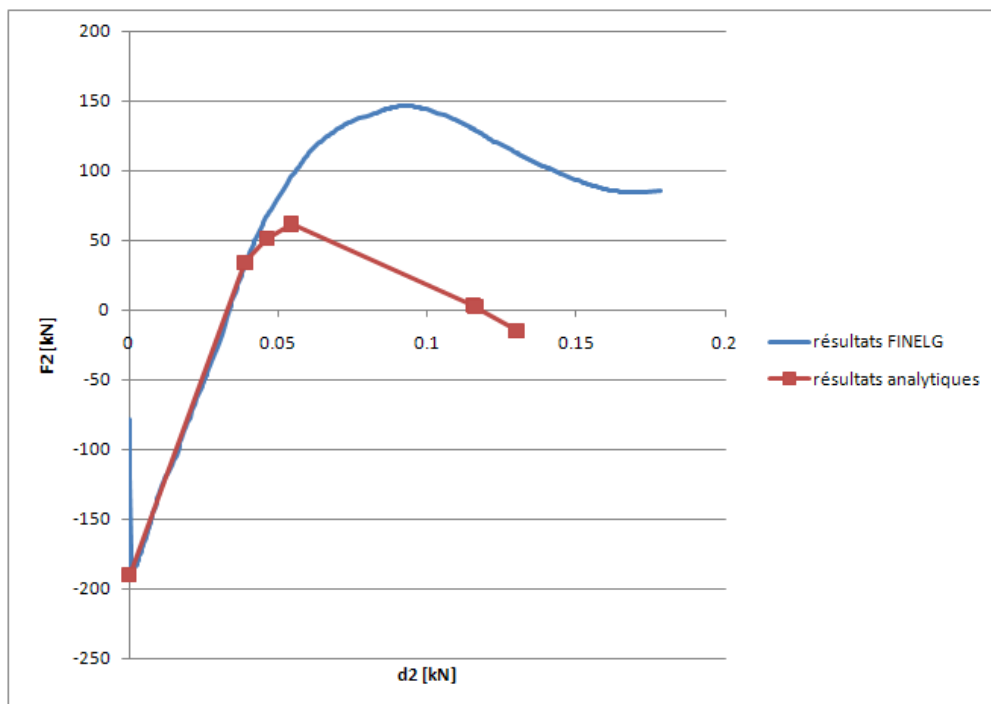


Figure 144 : Evolution de  $F_2$  en fonction de  $d_2$  (variation de  $K_2$ )

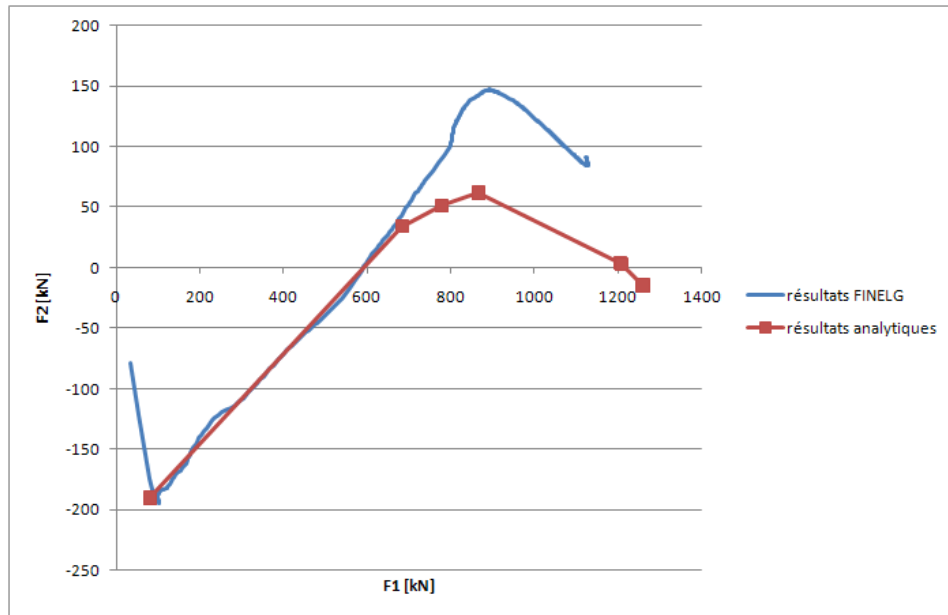


Figure 145 : Evolution de  $F_2$  en fonction de  $F_1$

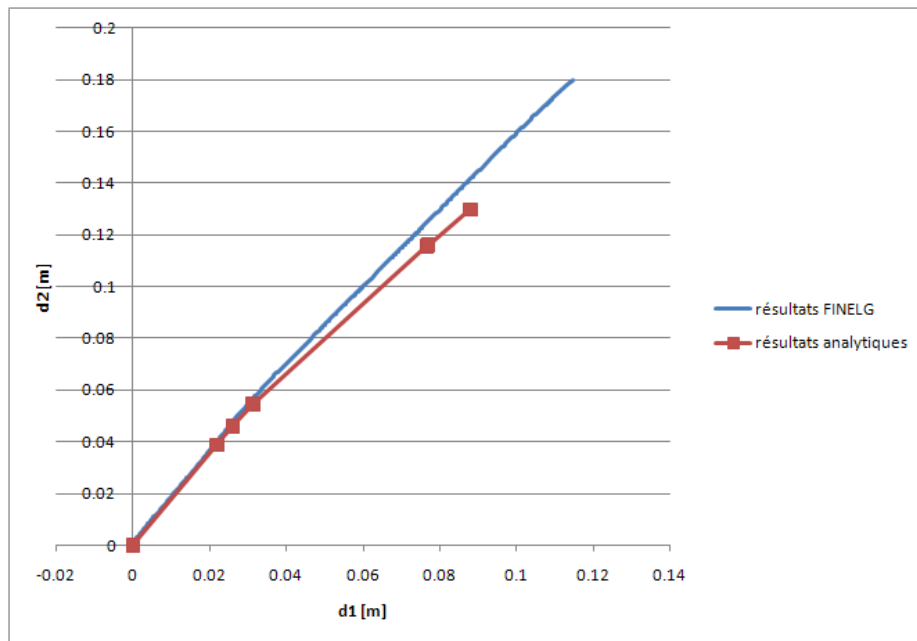


Figure 146 : Evolution de  $d_2$  en fonction de  $d_1$

Notons que ce même calcul pas-à-pas, réalisé en considérant comme  $K_{N,i}$  constants le premier couple de  $K_N$  élastiques (couple dont le  $K_{N,sup}$  était négatif), ne donne pas non plus des résultats satisfaisants.

## Méthode n°2

Dans cette deuxième méthode, on considère un couple de  $K_{N,i}$  variables.

On trace l'évolution de l'effort  $N$  dans la poutre en fonction de  $\delta_N$ , calculé comme précédemment, c'est-à-dire en considérant les déplacements des nœuds extrémités de la poutre (le  $\delta_N$  est alors bien la variation de longueur de la corde reliant les deux points extrémités de la poutre). Les résultats sont les suivants (Figure 147 pour la poutre inférieure et Figure 148 pour la poutre supérieure):

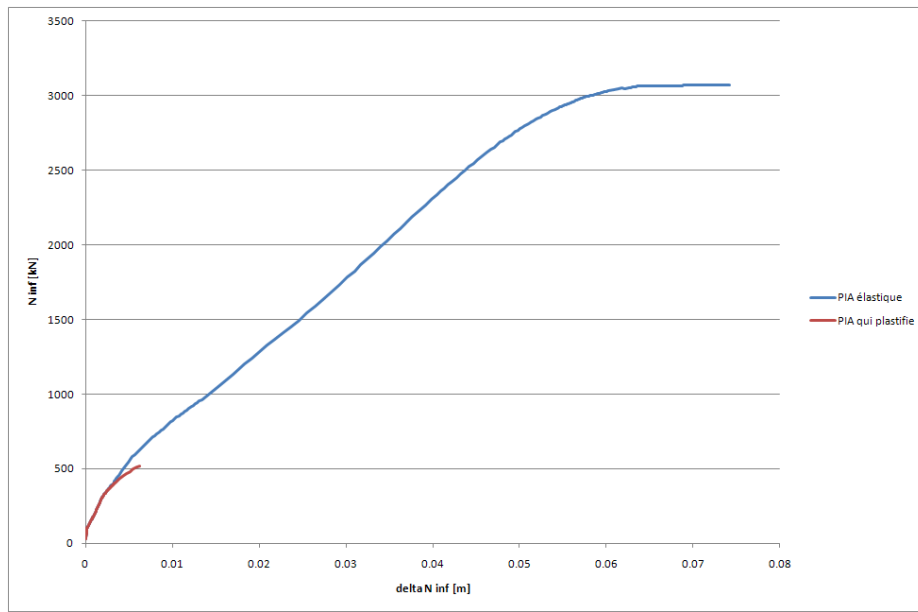


Figure 147 :  $N$  en fonction de  $\delta_N$ , pour la poutre inférieure, comparaison du cas « partie indirectement affectée élastique » et cas « partie indirectement affectée qui plastifie »

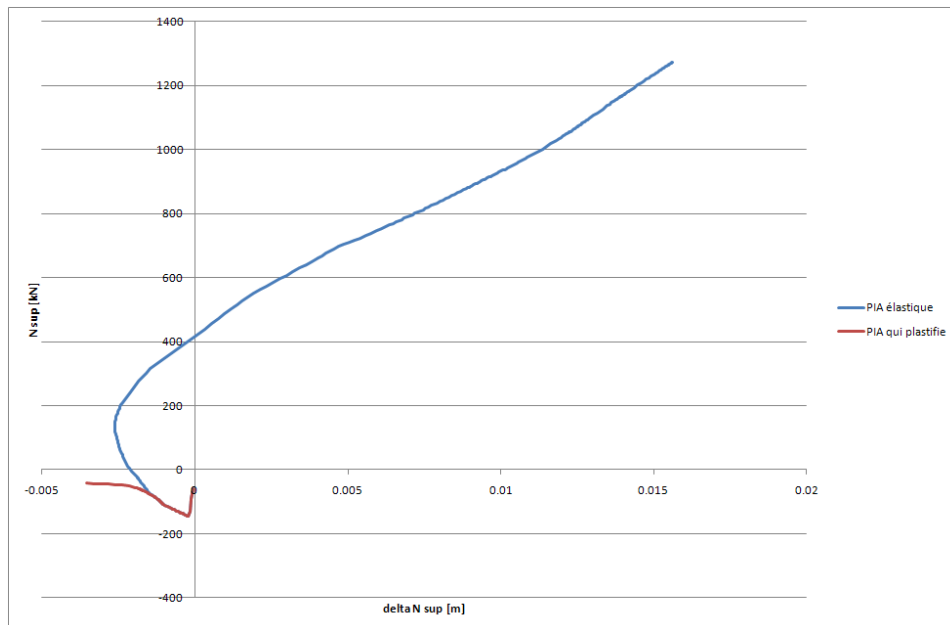


Figure 148 :  $N$  en fonction de  $\delta_N$ , pour la poutre supérieure, comparaison du cas « partie indirectement affectée élastique » et cas « partie indirectement affectée qui plastifie »

Les résultats ci-dessus sont ceux obtenus pour le portique n°1, mais l'allure des courbes est similaire pour les autres portiques.

Au vu de ces courbes, il est maintenant compréhensible que les résultats fournis par le modèle analytique qui considérait un couple de  $K_N$  constants, et égaux aux  $K_N$  élastiques, ne pouvaient pas être satisfaisant. En effet, les  $K_N$  élastiques positifs ont été déterminés dans une partie de la courbe qui n'est même pas atteinte lorsque la partie indirectement affectée peut plastifier.

Dans le cas où la partie indirectement affectée peut plastifier, le  $K_{N,sup}$  est toujours négatif. Cela signifie que la corde de la poutre se raccourcit constamment. La courbe obtenue avec la sommation des  $\varepsilon$  n'a pas été tracée dans ce cas, on ne sait pas si la poutre en réalité se raccourcit ou s'allonge. Cela finalement importe peu, c'est uniquement la corde qui est intéressante dans ce modèle.

Le fait que la courbe se raccourcisse tout au long de la phase 3 peut se comprendre en considérant que le  $N_{up}$  ne ré-augmente quasiment pas lorsque la partie indirectement affectée plastifie. Ce phénomène est visible sur la Figure 128, qui compare les  $N_{up}$  dans le cas d'une partie indirectement affectée élastique et qui plastifie, pour le portique n°1 toujours. La corde ne s'allonge donc jamais, elle n'en a pas le temps ici, contrairement au cas élastique, où la partie indirectement affectée exerçait une restrainte constante, et où la corde pouvait elle-même finalement s'allonger.

La méthode n°2 consiste donc à changer, à chaque formation de rotule, les valeurs des coefficients :

- $\alpha, \beta, \gamma, \delta$
- $K_{N1}, K_{N2}$

### 3.4.4 Résultats

Les résultats sont ici présentés pour le portique 5 car c'est lui qui est le plus particulier. Les résultats pour les portiques 1, 3 et 4 sont reportés en annexes.

Les graphes  $N - \delta_N$  pour la poutre inférieure et la poutre supérieure sont les suivants (Figure 149):

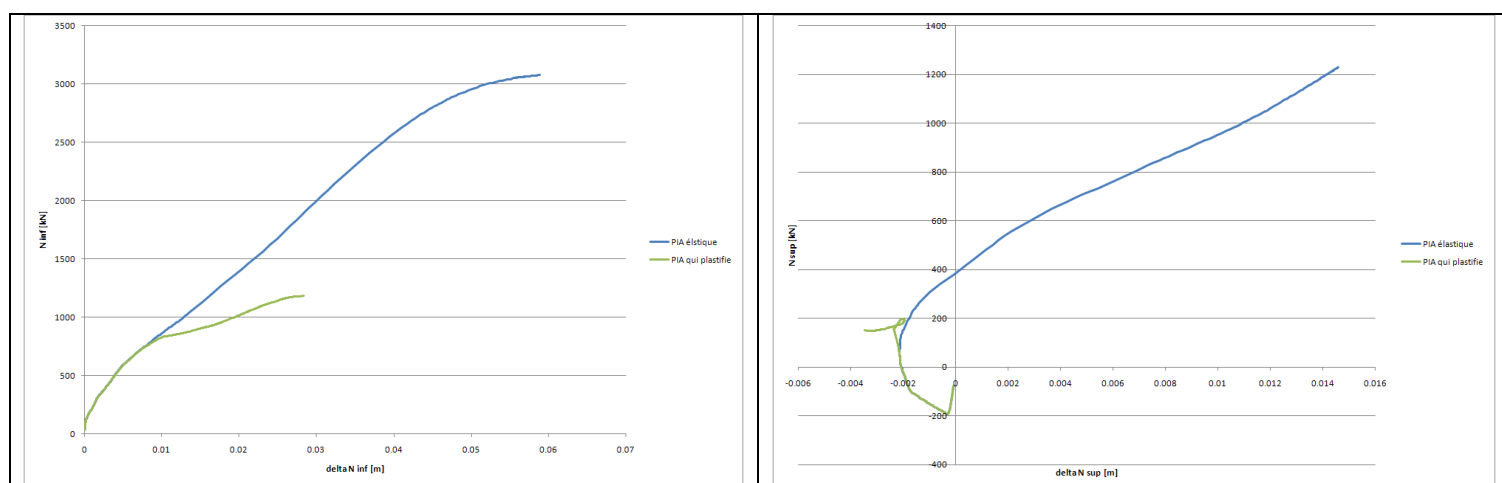


Figure 149 :  $N$  en fonction de  $\delta_N$ , portique 5

Le graphe  $N_{sup} - \delta_{N,sup}$  est très particulier : une boucle apparaît lorsque la partie indirectement affectée plastifie. Il faut noter que cette « boucle » n'apparaît pas dans les autres portiques.

Encore une fois, le but de ce travail de fin d'études n'était pas d'expliquer l'allure des courbes  $N - \delta_N$ , mais de les utiliser pour rentrer dans un modèle. L'explication et la détermination de ces  $K_N$  sort du cadre de ce travail de fin d'études, et fait partie des perspectives.

Pour déterminer les  $K_N$  à utiliser dans le modèle, la formation de chaque rotule a été située sur les graphes  $N - \delta_N$  et un couple de  $K_N$  a donc été déterminé entre chaque rotule (Figure 150 et Figure 151):

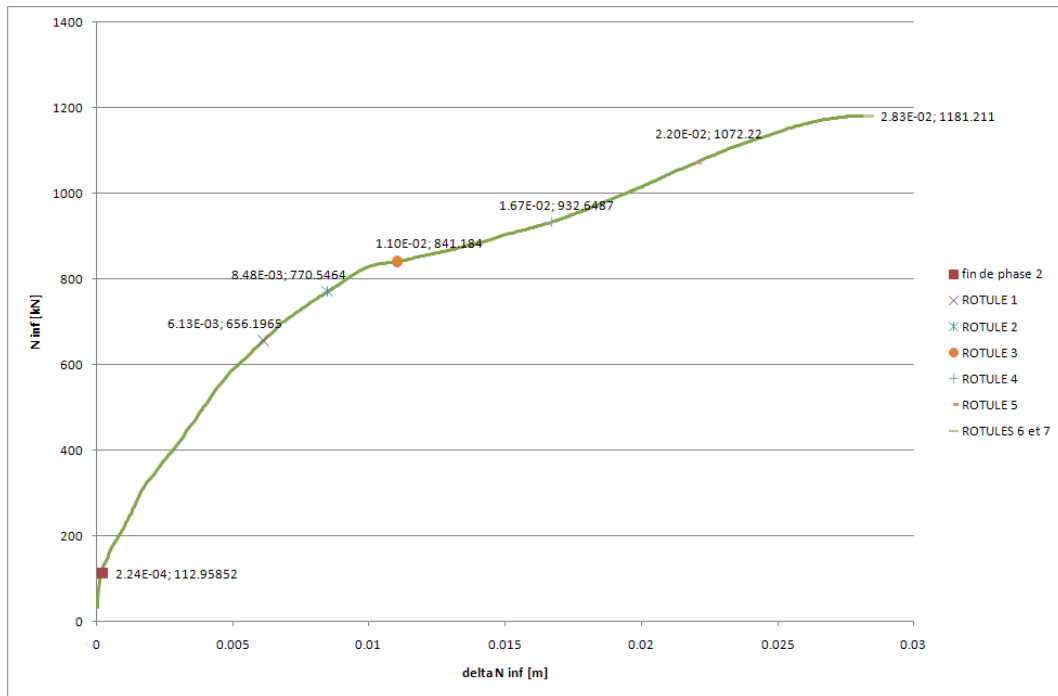


Figure 150 : Détermination des  $K_{N,inf}$  successifs entre rotules

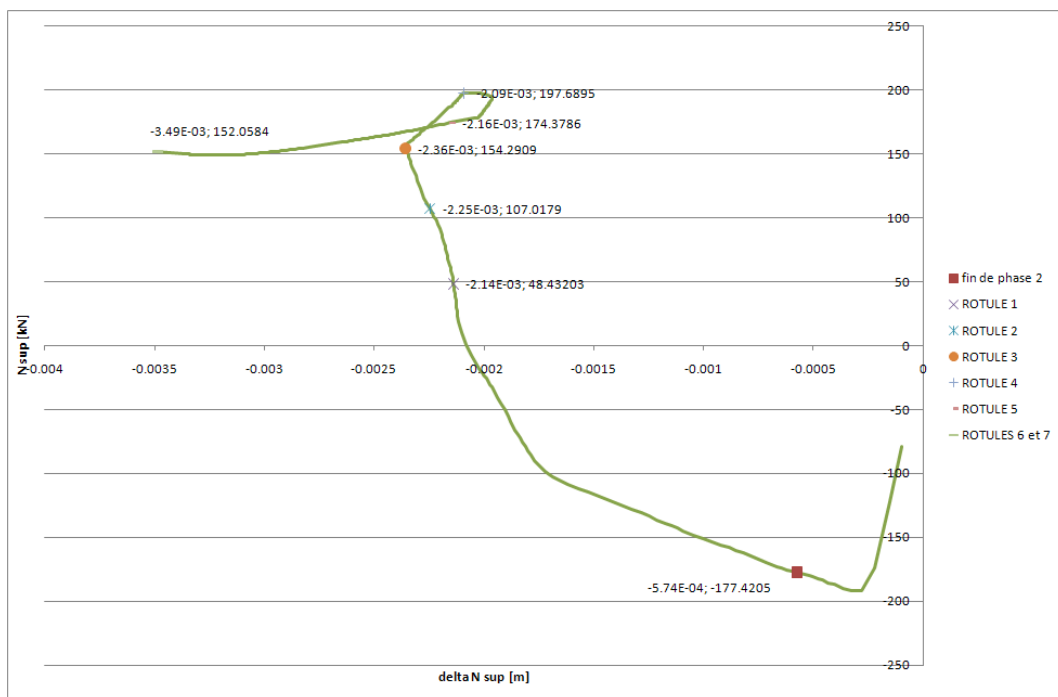


Figure 151 : Détermination des  $K_{N,sup}$  successifs entre rotules

Notons que l'on a situé « a priori » les rotules, on a supposé connus les moments où elles se formaient. Il faudra vérifier par après qu'elles ont été placées au bon endroit sur les courbes  $N - \delta_N$ .

Le tableau suivant reprend les valeurs déterminées à partir des deux graphiques précédents (NB : étape x = entre le moment où il y a x-1 rotules dans la partie indirectement affectée jusqu'à la formation de la x<sup>ème</sup> rotule) :

	ETAPE 1	ETAPE 2	ETAPE 3	ETAPE 4	ETAPE 5	ETAPE 6	ETAPE 7
$K_{N1}$	91980.7	48659.5	28030.8	16046.7	26333.96	17300.2	17300.2
$K_{N2}$	-105907.1	-532617.3	-429735.5	160735.2	333007.1	16738.2	16738.2

Les résultats sont les suivants (de la Figure 152 à la Figure 157):

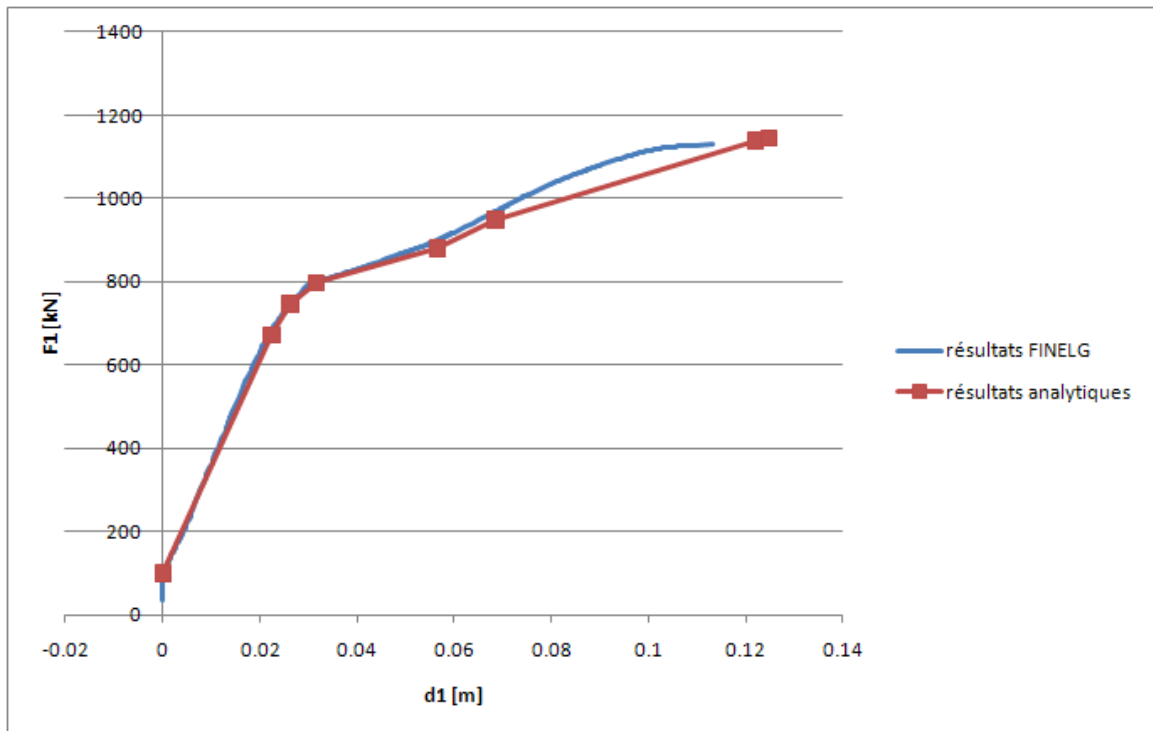


Figure 152 : Evolution de  $F_1$  en fonction de  $d_1$

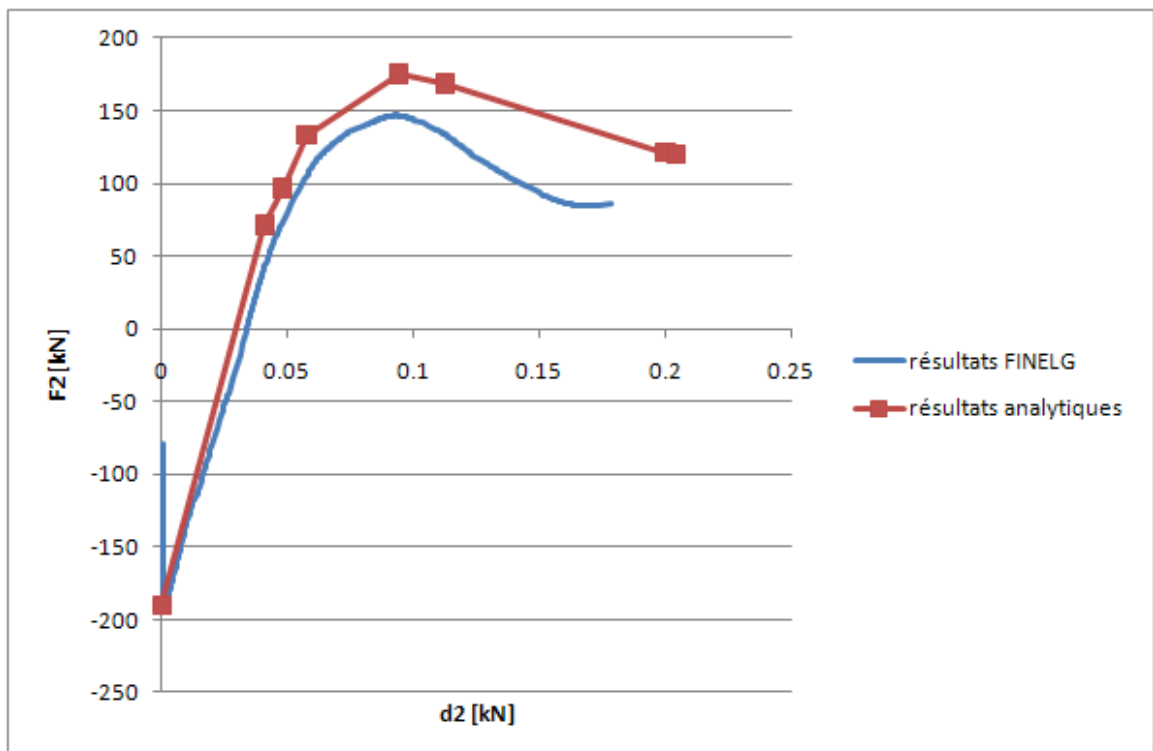


Figure 153 : Evolution de  $F_2$  en fonction de  $d_2$

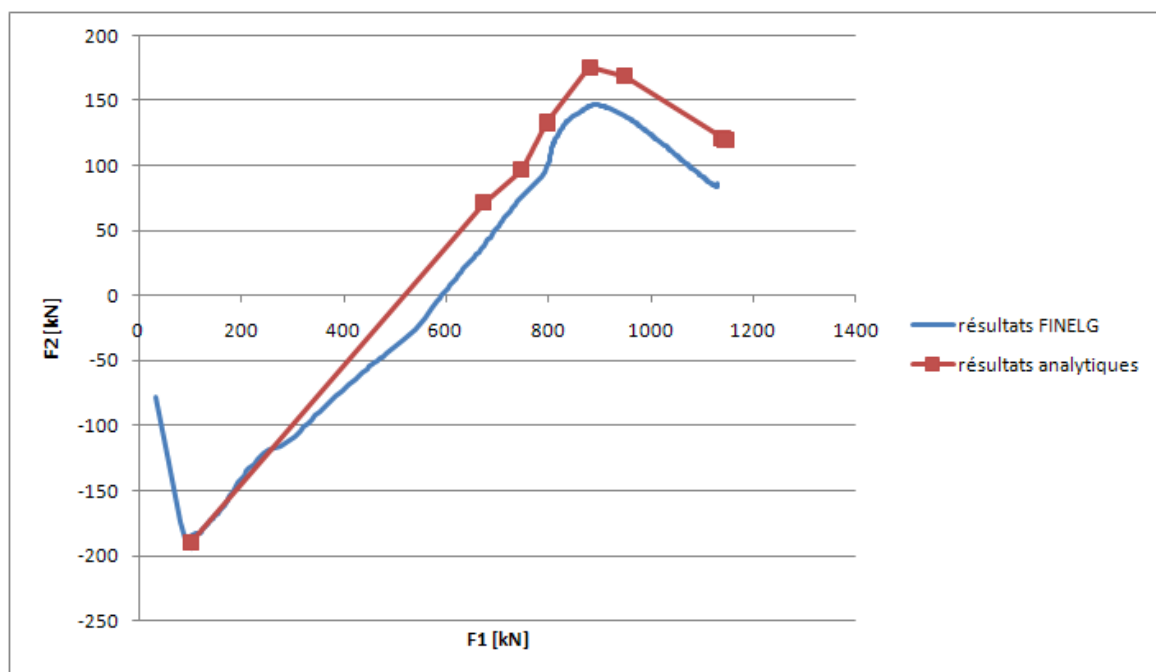


Figure 154 : Evolution de  $F_2$  en fonction de  $F_1$

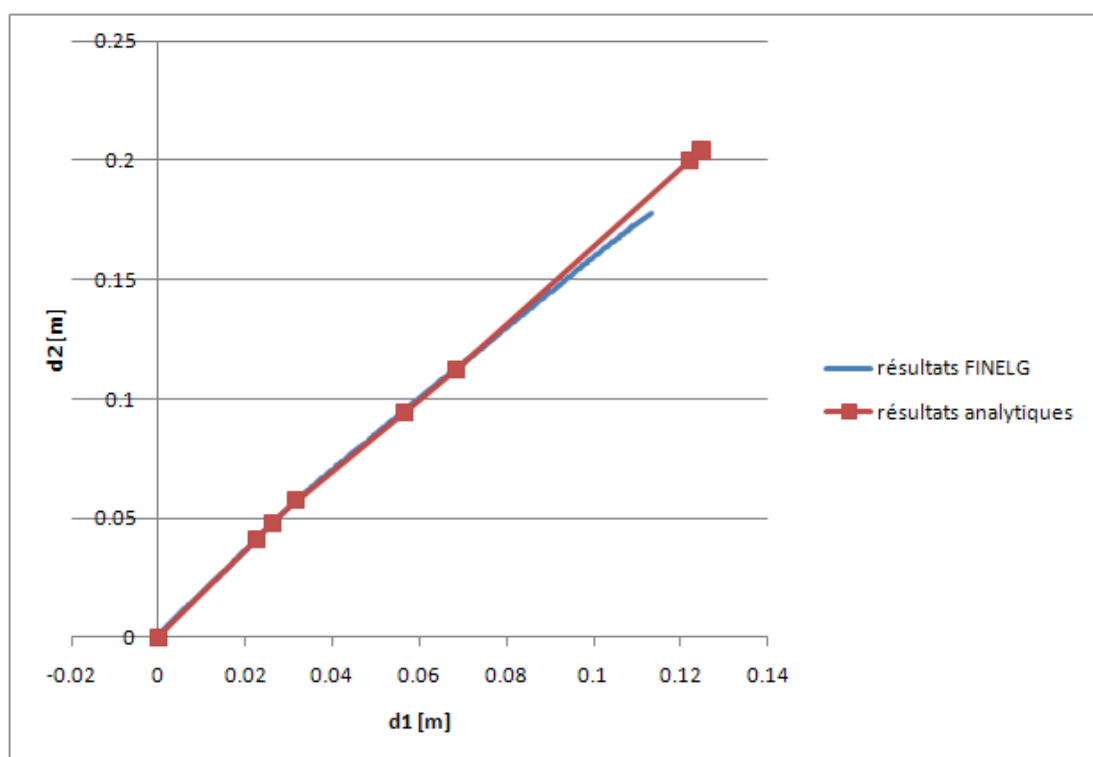


Figure 155 : Evolution de  $d_2$  en fonction de  $d_1$



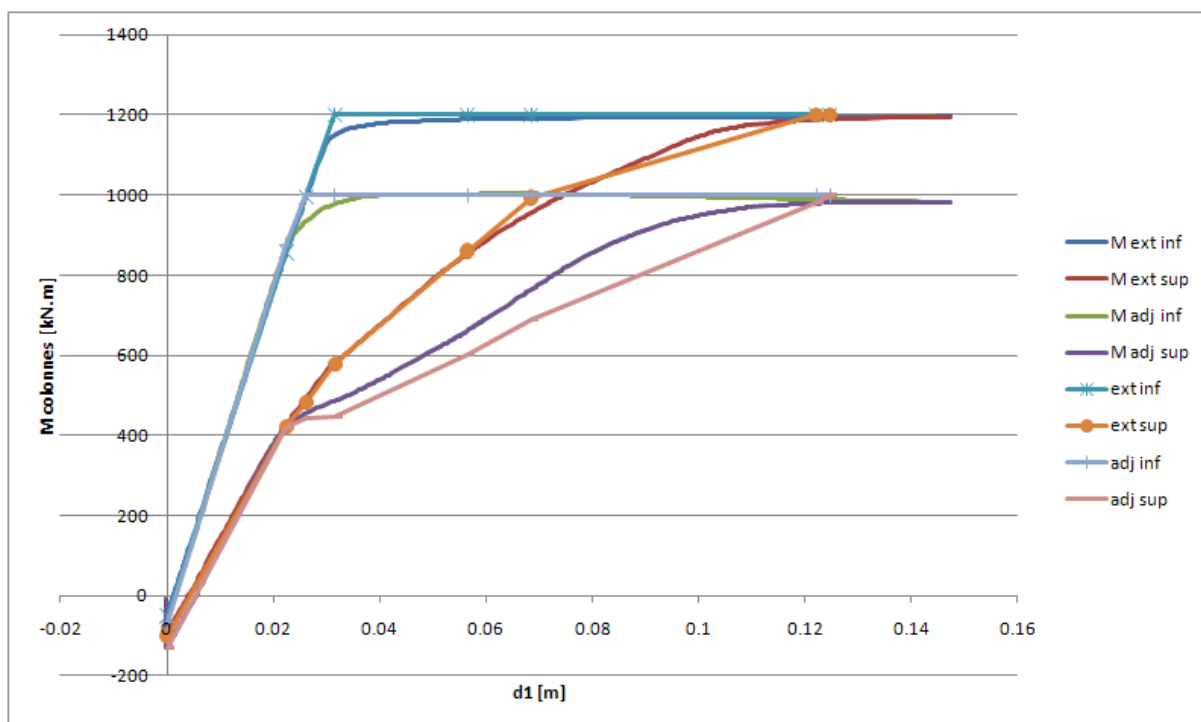


Figure 156 : Evolution des moments dans les colonnes de l'étage endommagé en fonction de  $d_1$

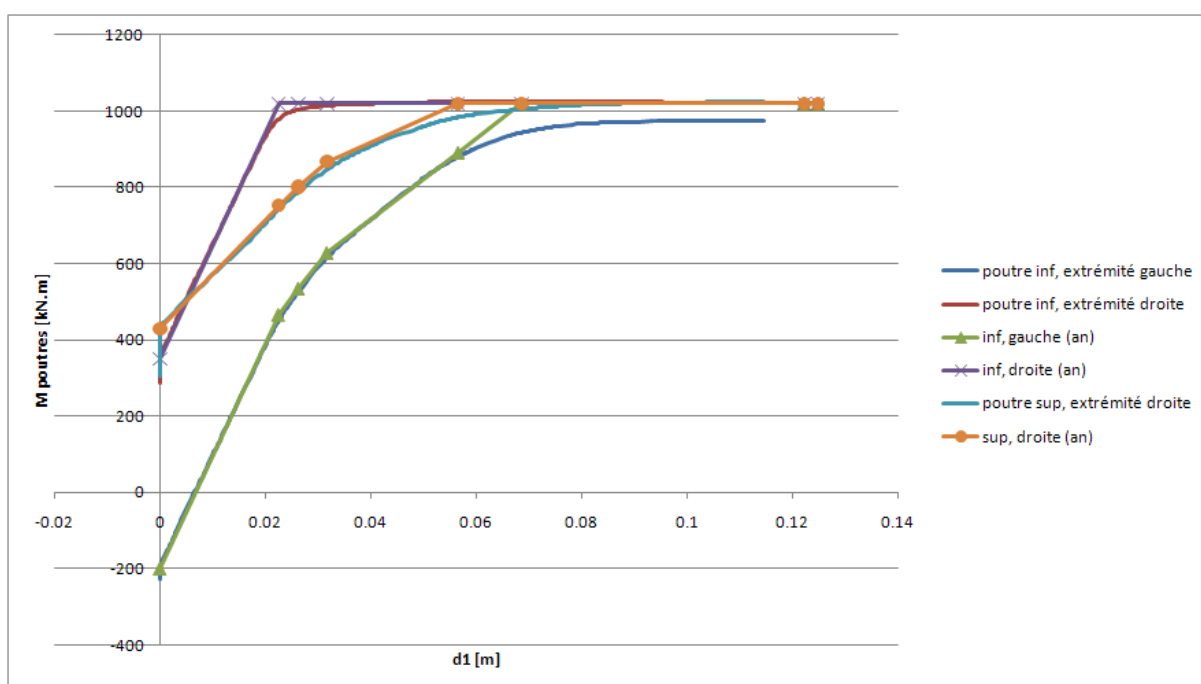


Figure 157 : Evolution des moments dans les poutres de la partie indirectement affectée, en fonction de  $d_1$

Résultats détaillés pour le dernier point (moment de la formation du mécanisme complet) :

	$F_1$	$d_1$	$F_2$	$d_2$
FINELG	1128.85182	0.1131784	85.60162	0.1780878
EES	1146.03581	0.12477366	119.670771	0.20399209
Erreur relative (%)	1.522254	10.2451139	39.7996566	14.5457971

Commentaires :

- L'allure générale des courbes est la bonne. En particulier, le sommet de  $F_2 - F_1$  coïncide bien avec la formation de la rotule dans la poutre supérieure de la partie indirectement affectée
- L'erreur sur  $F_1$  est très faible, et celle sur  $d_1$  ainsi que sur  $d_2$  est acceptable. Par contre, l'erreur sur  $F_2$  est beaucoup plus importante. Cela provient certainement du fait que, alors que la raideur du niveau inférieur arrive à être plus ou moins bien suivie (variation +/- régulière du  $K_{N1}$ ), la variation de  $K_{N2}$  est beaucoup plus difficile à approximer, le  $K_{N2}$  varie beaucoup entre les formations de rotules, ce qui n'est pas pris en compte dans le modèle, à l'heure actuelle. Le moment où l'approximation analytique devient moins bonne coïncide avec l'apparition de la boucle dans le  $K_{N,sup}$ , boucle qui n'est pas prise en compte dans le modèle.

En conclusion :

On dispose ici d'une méthode pas-à-pas qui se base sur une sous-structure de la partie directement affectée. Cette sous-structure est résolue à chaque nouvelle rotule qui apparaît dans la partie indirectement affectée, et cette sous-structure modifie pas-à-pas la relation qui existe entre les parties directement et indirectement affectées, en modifiant les coefficients  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ .

Le problème qui est rencontré ici, puisqu'il apparaît que cette méthode ne donne pas de résultats suffisamment satisfaisants, provient certainement de la variation des  $K_N$ , supérieur et inférieur. En effet, l'allure du  $K_{N,sup}$  en particulier (Figure 151) est très interpellante : une boucle apparaît dans le graphe, ce qui n'est pas très compréhensible physiquement...

Le but de ce travail de fin d'études n'était pas de déterminer l'évolution de ce  $K_N$ , mais il apparaît clairement que c'est un point important à explorer dans les recherches futures, puisqu'il semble être le dernier obstacle au développement d'une méthode analytique complète.

### 3.5 ETAPE 2 : Obtention de $N_{lost}$ en fonction du déplacement vertical au sommet de la colonne disparue $\Delta_A$

#### 3.5.1 Généralités

A cette étape, il faut supposer que la relation entre  $F_1$  et  $d_1$  est connue, et qu'elle peut être obtenue analytiquement.

Lorsque la partie indirectement affectée était considérée comme infiniment élastique, certaines relations étaient linéaires, tandis que d'autres, même dans ce cas élastique, étaient non linéaires :

- Linéaires : lien entre  $F_1$  et  $d_1$ , entre  $F_2$  et  $d_2$ , entre  $d_2$  et  $d_1$  et par conséquent, le lien entre  $F_2$  et  $F_1$
- Non linéaires : lien entre  $F_1$  et  $Q$ , entre  $Q$  et  $\Delta_A$  et par conséquent, le lien entre  $F_1$  et  $\Delta_A$

Jusqu'à présent, dans l'étape 1, c'est l'évolution du premier groupe de courbes qui a été recherchée. Dans cette deuxième étape, c'est l'évolution du second groupe qui est recherchée.

Le but de ce paragraphe est de développer une méthode analytique pour obtenir la courbe  $Q - \Delta_A$ , pour déterminer si les assemblages poutres-colonnes de la partie directement affectée peuvent supporter les rotations lorsque la colonne a entièrement disparu (c'est-à-dire lorsque  $N_{lost} = Q = N_{AB,normal}$ ),

Puisque, à la fin de l'étape 1, c'est l'évolution de  $F_h$  en fonction de  $\delta_K$  qui est connue, l'obtention de la courbe  $N_{lost} - \Delta_A$  passera par l'évaluation des courbes  $F_h - N_{lost}$  et  $F_h - \Delta_A$ . A chaque étape du calcul analytique réalisé pas-à-pas lors de l'étape 1, les courbes  $F_h - N_{lost}$ ,  $F_h - \Delta_A$  et  $N_{lost} - \Delta_A$  sont connues, grâce à la résolution du système d'équations du paragraphe 2.6.3. L'évolution de ces courbes, en fonction de la raideur latérale  $K$  de la partie indirectement affectée considérée comme élastique pour chaque  $K$ , est donnée à la Figure 158. Le code couleur se rapporte à la Figure 160.

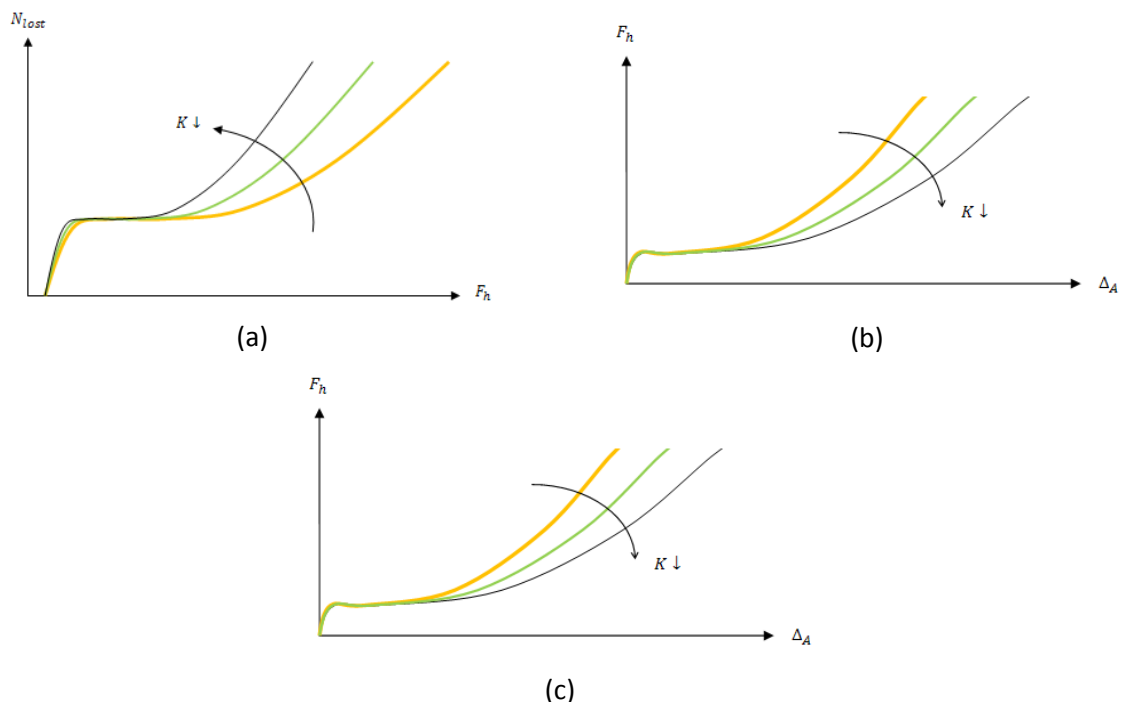


Figure 158 : Evolution de  $F_h - N_{lost}$ ,  $F_h - \Delta_A$  et  $N_{lost} - \Delta_A$  en fonction de  $K$

Pour un  $N_{lost}$  donné, la poutre membranaire, si elle a peu d'ancrages latéraux ( $K \ll$ ), ne peut développer de grands efforts de traction ( $F_h \ll$ ) (Figure 158 (a)), et le déplacement vertical sera important ( $\Delta_A \gg$ ) (Figure 158 (c)). Donc, pour voir apparaître un  $\Delta_A$  donné, plus la raideur latérale est grande et plus il faudra développer des efforts  $F_h$  importants (Figure 158 (b)).

A la figure suivante (Figure 159) sont représentées les évolutions des 3 graphes ( $Q - F_1$ ,  $F_1 - \Delta_A$ ,  $Q - \Delta_A$ ), en rouge, lorsque la partie indirectement affectée est indéfiniment élastique, et en bleu, lorsque cette dernière peut plastifier.

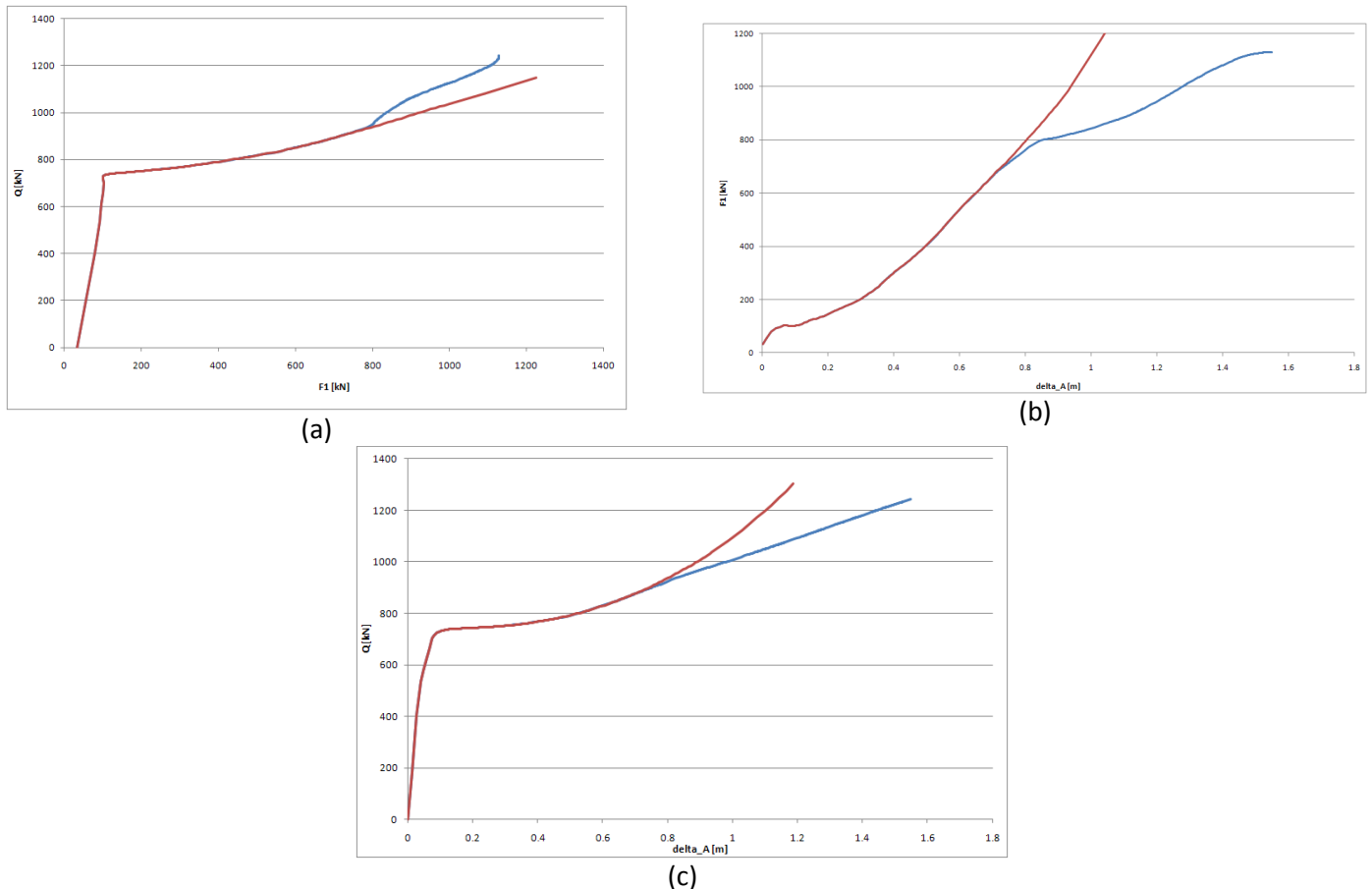


Figure 159 : Comparaison des courbes  $F_h - N_{lost}$ ,  $F_h - \Delta_A$  et  $N_{lost} - \Delta_A$  lorsque la partie indirectement affectée peut ou non plastifier

Pour les deux derniers graphiques, la courbe bleue a effectivement tendance à « s'aplatir » tandis qu'elle se raidit pour le premier graphique, ce qui est bien la tendance décrite à la Figure 158.

### 3.5.2 Description de la méthode

La méthode est donc la suivante :

- La relation entre  $F_h$  et  $\delta_K$  est supposée connue (Figure 160) :

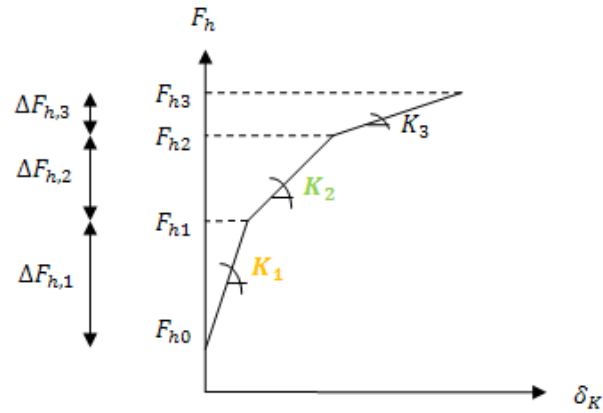


Figure 160 :  $F_h$  en fonction de  $\delta_K$ , résultat analytique

- Pour chaque valeur de  $K$  (les valeurs successives,  $K_1, K_2, K_3, \dots$ ), la relation entre  $F_h$  et  $\Delta_A$  ainsi que la relation entre  $F_h$  et  $N_{lost}$  peut être obtenue, par résolution du système d'équations habituel.
- Les valeurs successives de  $N_{lost}$  et  $\Delta_A$  sont calculées en considérant des incréments pour chaque  $\Delta F_{h,i}$  (Figure 161 et Figure 162):

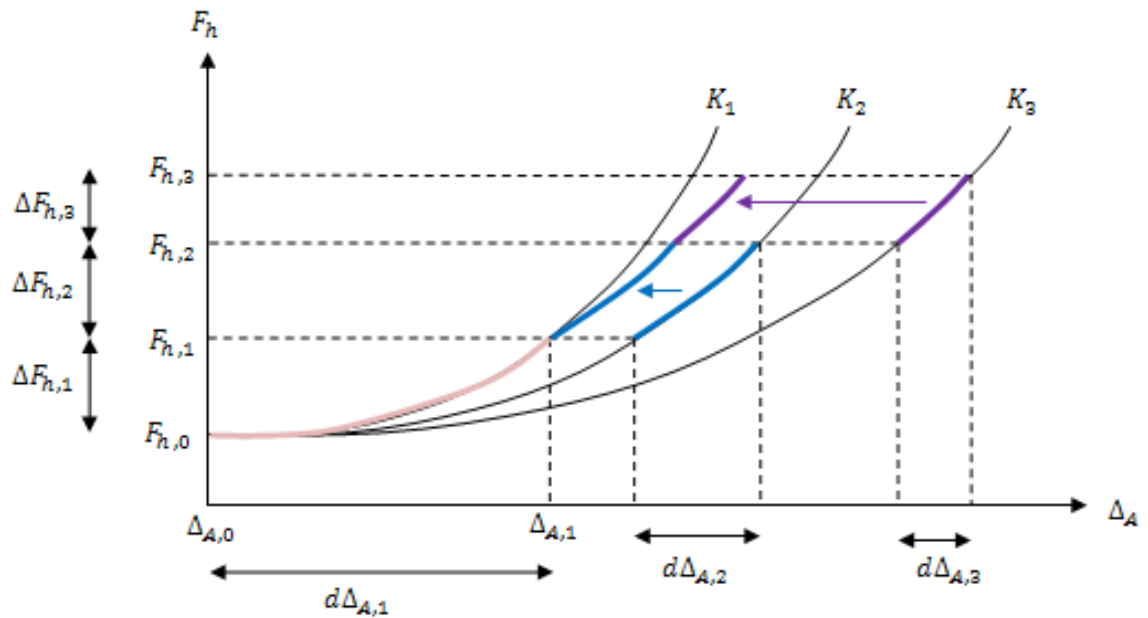


Figure 161 : Incréments de  $\Delta_A$

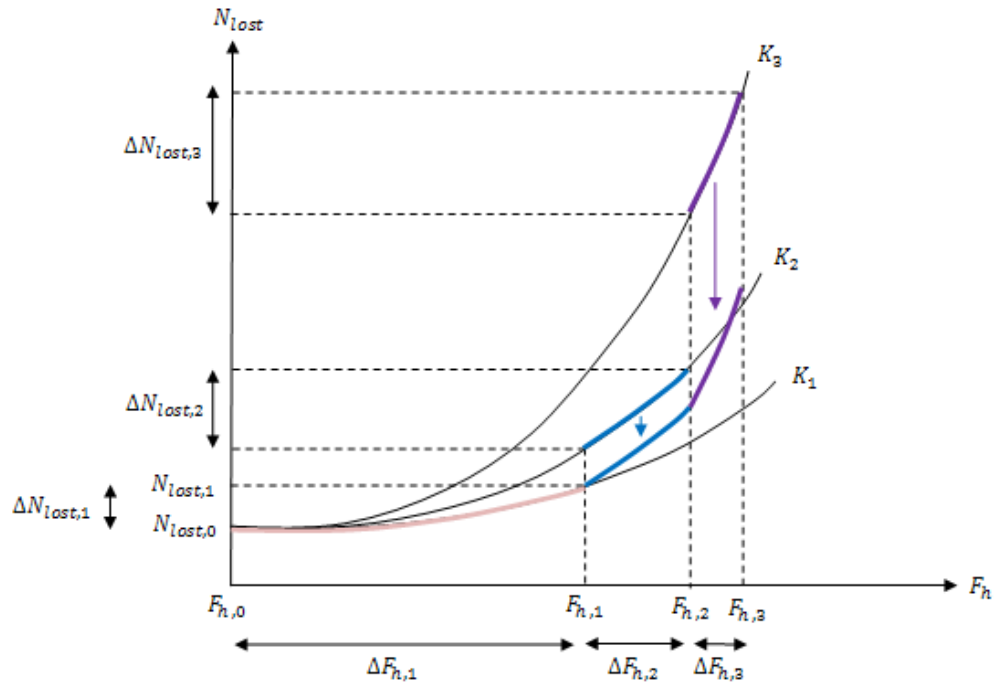


Figure 162 : Incréments de  $N_{lost}$

	$F_h$	$\Delta_A$	$N_{lost}$
Fin de phase 2	$F_{h0}$	$\Delta_{A,0}$	$N_{lost,0}$
Apparition de la 1 <sup>ère</sup> rotule	$F_{h,1} = F_{h,0} + \Delta F_{h,1}$	$\Delta_{A,1} = \Delta_{A,0} + d\Delta_{A,1}$	$N_{lost,1} = N_{lost,0} + \Delta N_{lost,1}$
Apparition de la 2 <sup>ème</sup> rotule	$F_{h,2} = F_{h,1} + \Delta F_{h,2}$	$\Delta_{A,2} = \Delta_{A,1} + d\Delta_{A,2}$	$N_{lost,2} = N_{lost,1} + \Delta N_{lost,2}$
...	$F_{h,3} = F_{h,2} + \Delta F_{h,3}$	$\Delta_{A,3} = \Delta_{A,2} + d\Delta_{A,3}$	$N_{lost,3} = N_{lost,2} + \Delta N_{lost,3}$

### 3.5.3 Résultats

Comme précédemment, c'est pour le portique 5 que les résultats sont présentés (de la Figure 163 à la Figure 165). Les résultats pour les portiques 1, 3 et 4 sont reportés en annexes.

Les courbes qui apparaissent sur les figures suivantes sont définies comme suit :

- En bleu, les résultats FINELG
- En vert, la courbe analytique obtenue avec la première valeur de  $K$ , c'est-à-dire la courbe élastique. Elle a été tracée jusqu'à l'apparition de la première rotule, qui est le premier point de la courbe rouge
- En rouge, la courbe analytique obtenue en suivant la méthode incrémentale décrite au paragraphe précédent

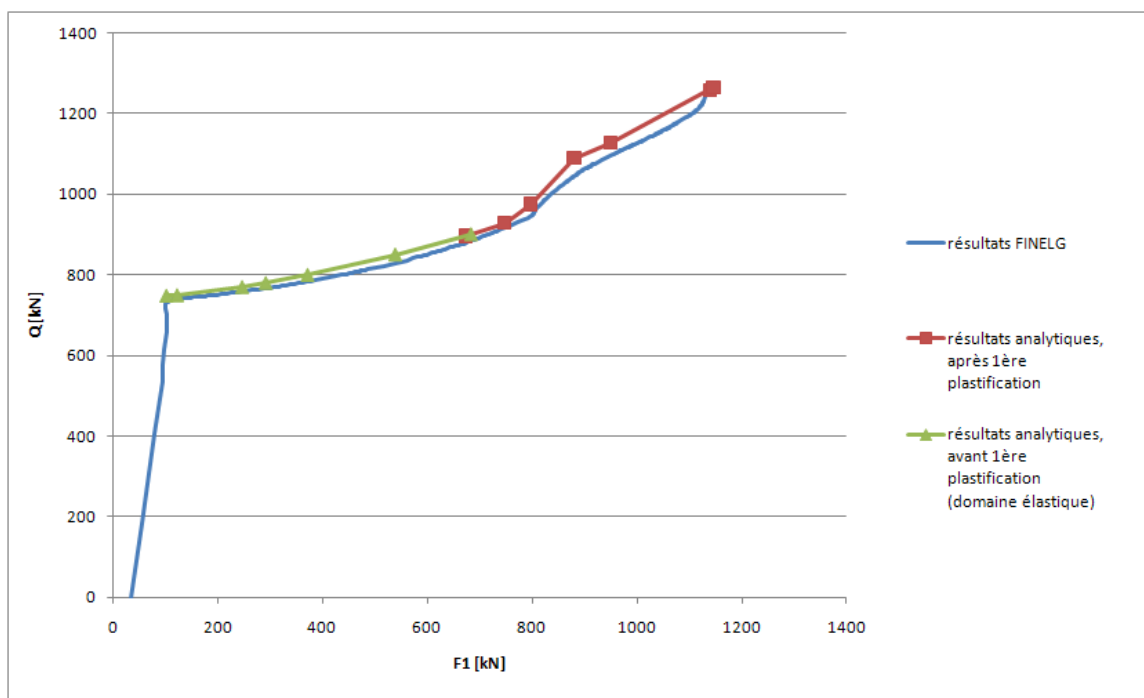


Figure 163 : Evolution de  $Q$  en fonction de  $F_1$

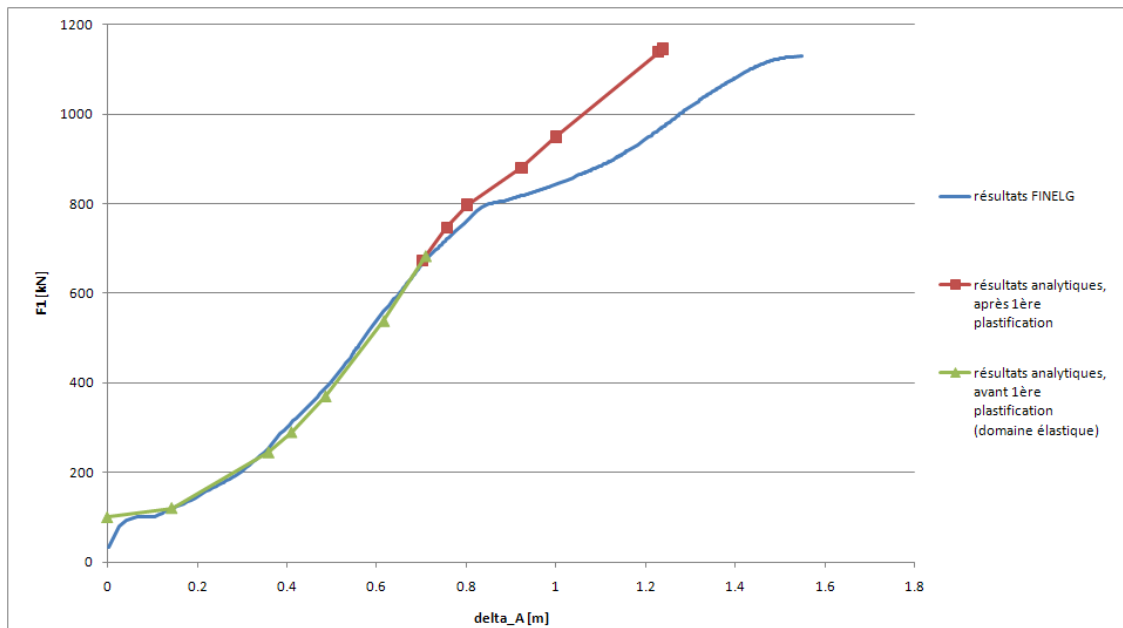


Figure 164 : Evolution de  $F_1$  en fonction de  $\Delta_A$

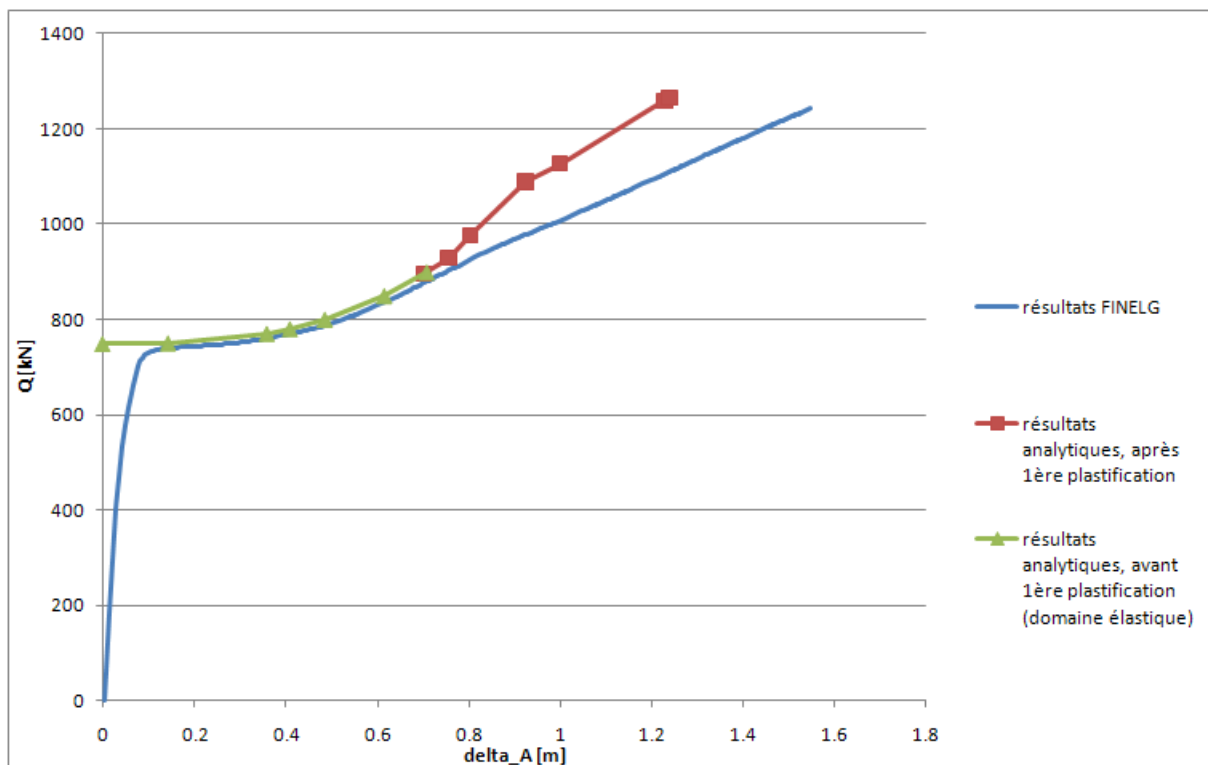


Figure 165 : Evolution de  $Q$  en fonction de  $\Delta_A$

Résultats détaillés pour le dernier point (formation du mécanisme complet) :

	$Q$	$\Delta_A$	$F_1$
Résultats analytiques	1264.68415	1.23874481	1146.03581
Résultats FINELG	1242.06685	1.548244	1128.85182
Erreur relative (%)	1.8209413	19.9903368	1.522254



Commentaires :

Les résultats de cette partie ne peuvent pas être bien meilleurs que ceux obtenus en fin d'étape 1 puisque les résultats de l'étape 2 sont établis sur base des résultats de l'étape 1.

De manière générale, pour chacun des portiques (se référer aux annexes), le graphe  $Q - F_1$  est bien approximé, l'erreur sur  $Q$  au moment de la formation du mécanisme plastique reste limitée (de l'ordre de 5 à 7 % maximum). L'erreur se trouve donc dans l'évaluation de  $\Delta_A$ , qui est sous-estimé par la méthode de détermination analytique, ce qui n'est pas du côté de la sécurité.

### 3.6 Conclusion

Dans ce chapitre 3, la partie indirectement affectée pouvait plastifier.

La première partie du chapitre a consisté en une description générale des phénomènes : le changement dans les courbes  $Q - \Delta_A$ ,  $F_h - \delta_K$ , l'évolution des efforts dans les différents éléments,...

La seconde partie s'est attelée à développer un modèle analytique qui permettrait de représenter l'avancement de la plastification dans la partie indirectement affectée. Le développement de ce modèle analytique a été divisé en deux étapes :

- ETAPE 1 : Obtenir la courbe  $F_1 - d_1$ , c'est-à-dire obtenir les différentes valeurs de la raideur latérale de la partie indirectement affectée, et les moments où l'on passe d'une raideur à une autre, c'est-à-dire le moment où se forme une nouvelle rotule
- ETAPE 2 : Obtenir la courbe  $N_{lost} - \Delta_A$ , pour pouvoir prédire les besoins en ductilité au moment où la colonne est totalement disparue ( $N_{lost} = N_{AB,normal}$ ). Pour cette deuxième étape, il était nécessaire de connaître les résultats de la première étape.

Pour l'étape 1, la sous-structure qui a été définie dans le chapitre 2 a été utilisée : les équations étaient résolues à chaque nouvelle rotule formée dans la partie indirectement affectée, en modifiant adéquatement les paramètres  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , ainsi que les  $K_{N1}$  et  $K_{N2}$ , puisqu'il est apparu que ces valeurs devaient elles aussi varier en fonction du développement de la plastification dans la partie indirectement affectée.

C'est justement à ce niveau que la difficulté se situe, dans la détermination de l'évolution des  $K_N$ . On a vu au paragraphe 3.4.4, et plus particulièrement à la Figure 149 que le  $K_{N,sup}$  évoluait d'une manière très particulière, et cette évolution entre rotules n'est pas encore considérée, et c'est probablement là la cause de ces résultats pas toujours satisfaisants (erreur d'à peu près 30% sur le  $F_2$ ).

Concernant les résultats de l'étape 2, puisqu'ils dépendent des résultats de l'étape 1, ils ne sont pas non plus parfaitement adéquats.

En conclusion, il a été mis à jour dans ce dernier chapitre l'importance qu'avaient les  $K_N$  dans le développement de la méthode analytique développée. C'est là une des grandes perspectives dans le domaine de la recherche : pouvoir tout d'abord expliquer les variations parfois assez étranges de  $K_N$ , et ensuite, pouvoir les déterminer analytiquement.

## 4 Conclusion, perspectives

### 4.1 Démarche suivie et conclusions

Dans ce travail de fin d'études, c'est la phase 3 qui était observée. Les efforts en fin de phase 2 étaient supposés connus et pouvant être obtenus analytiquement (par la sous-structure définie dans la thèse de L.N.N. Hai [4]). Dans les recherches précédemment menées sur la phase 3 (thèses de J.-F. Demonceau [2] et de L.N.N. Hai [4]), la partie indirectement affectée par la perte de la colonne (c'est-à-dire tous les éléments ne se trouvant pas directement au-dessus de la colonne disparue) était supposée indéfiniment élastique. L'objectif de ce travail était de prendre en compte le fait que cette partie indirectement affectée peut plastifier, cela induisant une diminution de la restrainte latérale que cette partie indirectement affectée apporte à la partie directement affectée.

La première étape de ce travail de fin d'études a consisté tout d'abord à prendre connaissance des modèles déjà développés pour le calcul de la phase 3, dans le cas où la partie indirectement affectée restait indéfiniment élastique. Ces modèles étaient au nombre de deux :

- La sous-structure développée par J.-F. Demonceau [2], qui contient la poutre inférieure de la partie directement affectée (aussi appelée poutre membranaire), et qui permet d'obtenir la courbe  $Q - \Delta_A$  au cours de la phase 3. Dans cette sous-structure, la partie indirectement affectée est représentée par un ressort de raideur  $K$
- La sous-structure développée par L.N.N. Hai [4], qui représente l'étage endommagé et permet de calculer une raideur élastique  $K$  de la partie indirectement affectée

Les conclusions de l'étude de ces deux sous-structures sont les suivantes :

- La sous-structure développée par J.-F. Demonceau [2] a été établie en considérant un  $N_{up}$  constant. Cela avait été démontré dans la thèse de L.N.N. Hai [4], thèse menée en parallèle à celle de J.-F. Demonceau [2]. Il est apparu que cette hypothèse de  $N_{up}$  constant n'était pas valable dans tous les cas, et que son influence sur la courbe  $Q - \Delta_A$  n'était pas négligeable (§ 2.4, Figure 43)
- La sous-structure permettant de calculer un  $K_{el}$ , développée par L.N.N. Hai [4], s'est avérée ne pas prendre en considération l'effort horizontal agissant à l'étage supérieur (§ 2.5). Or, un des résultats importants de ce travail a été de mettre en évidence l'importance qu'avait la variation de cet effort horizontal au niveau supérieur dans l'évaluation de la raideur transversale de la partie indirectement affectée (§ 2.6.2) : si la variation de cet effort horizontal au niveau supérieur était connue, en fonction de l'effort horizontal au niveau inférieur, alors, la raideur transversale de la partie indirectement affectée pouvait être calculée avec beaucoup de précision

Pour résoudre ces différents problèmes, une nouvelle sous-structure a été développée. Cette sous-structure contient toutes les poutres de la partie directement affectée, et non plus uniquement la poutre membranaire. Le fait de considérer tous les étages permet d'une part, de prendre en compte la variation de  $N_{up}$ , et d'autre part, de pouvoir considérer l'effort horizontal au niveau de l'étage supérieur.

En développant cette nouvelle sous-structure, un couplage entre les parties directement et indirectement affectées a donc été mis en évidence. Le problème qui se présentait dans le modèle de calcul de  $K$  développé par L.N.N. Hai [4] était en réalité lié au fait que ce couplage était négligé.

L'obstacle qui a été rencontré au cours du développement de cette nouvelle méthode a été la détermination des  $K_N$ , qui sont les raideurs extensionnelles des poutres de la partie directement affectée, supérieure et inférieure, dont les extrémités sont des rotules plastiques. On a vu apparaître dans les calculs des  $K_N$  négatifs, ce qui signifiait que la poutre se raccourcissait sous un effort de traction. L'explication de ce phénomène a été trouvée dans le fait que les rotules plastiques dans la partie directement affectée ne se formaient pas parfaitement aux extrémités des poutres, mais légèrement à l'intérieur. La méthode de calcul des  $K_N$  évalue donc la variation de longueur de la corde, ce qui est nécessaire pour être cohérent avec le modèle de calcul développé, qui suppose que les rotules sont parfaitement aux extrémités. Le fait d'avoir des  $K_N$  négatifs devenait donc possible et explicable.

Une fois la sous-structure au point pour le cas où la partie indirectement affectée était élastique, l'étude de la plastification de cette dernière pouvait commencer.

Comme pour le cas élastique, la première étape a été de confirmer que si le rapport entre les efforts horizontaux aux niveaux supérieur et inférieur était connu, alors la raideur (et ici plus précisément, la variation de raideur) de la partie indirectement affectée pouvait être calculée.

Une fois cette étape passée, il fallait donc obtenir la variation du rapport entre ces efforts horizontaux aux niveaux supérieur et inférieur. Cela s'est encore une fois fait en considérant la nouvelle sous-structure dans la partie directement affectée contenant tous les étages : les équations de cette sous-structure étaient résolues à chaque nouvelle formation de rotules, et les efforts étaient incrémentés pas-à-pas.

Encore une fois, le problème a été de déterminer les valeurs des paramètres  $K_N$  à rentrer dans la sous-structure.

Une première méthode a été de les considérer constants tout au long de la plastification dans la partie indirectement affectée, mais les résultats fournis par cette première méthode n'étaient pas satisfaisants. L'autre méthode a donc été de considérer un couple de  $K_N$  différents entre chaque formation de rotule. Mais, si l'évaluation de ces paramètres  $K_N$  était encore possible dans le cas d'une partie indirectement affectée indéfiniment élastique, cette évaluation des  $K_N$  dans le cas d'une partie indirectement affectée qui plastifie s'avère beaucoup plus compliquée : le  $K_N$  varie entre la formation des rotules, et les résultats rendus par cette deuxième méthode ne sont pas encore assez satisfaisants à ce stade.

En conclusion, une méthode pas-à-pas de calcul de la plastification dans la partie indirectement affectée a été mise au point, mais ses résultats ne sont pas encore suffisamment satisfaisants : ils sont en effet fortement dépendants de paramètres, les  $K_N$  aux niveaux supérieur et inférieur de la partie directement affectée, qui ne sont encore, ni expliqués physiquement, ni calculables facilement.

## 4.2 Perspectives

Tout comme la démarche s'est séparée en deux, en considérant d'abord une partie indirectement affectée indéfiniment élastique, et ensuite, en considérant cette même partie comme pouvant plastifier, les perspectives elles aussi vont être séparées comme suit.

Pour le cas de la partie indirectement affectée élastique, les perspectives sont les suivantes :

- Généraliser la méthode de calcul de la phase 3. En effet, on n'a considéré jusqu'ici que le cas d'un portique, de deux étages, perdant une colonne centrale, au niveau du rez-de-chaussée. Il faudrait pour bien faire considérer des cas non-symétriques, etc... (confer paragraphes 2.8.1, 2.8.2 et 2.8.3)
- Faire une étude sur l'influence des coefficients  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  qui caractérisent la rigidité de la partie indirectement affectée : voir comment se développe l'effet d'arc lorsque par exemple le premier ou le deuxième étage est contreventé, ce qui mènerait à des valeurs particulières des coefficients  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , etc...
- Retourner à la sous-structure de J.-F. Demonceau [2], en définissant une raideur transversale fictive  $K^*$  de la partie indirectement affectée, qui tiendrait compte de la variation de  $N_{up}$ , donc finalement du soutien supplémentaire apporté par les étages supérieurs (§ 2.8.4)
- Calculer les  $K_N$  de la poutre supérieure et de la poutre inférieure. C'est en effet le dernier obstacle au développement d'une méthode totalement analytique qui permettrait d'obtenir la réponse de la structure au cours de la phase 3.

Une idée qui pourrait faciliter les recherches dans ce domaine serait de modifier la sous-structure établie dans ce travail de fin d'études, en y intégrant le fait que les rotules ne se forment pas parfaitement aux extrémités de la poutre. Cela permettrait de donner un sens plus physique à ces paramètres  $K_N$ , et de ne plus voir apparaître des  $K_N$  négatifs.

Pour le cas d'une partie indirectement affectée qui peut plastifier, il faudrait, pour régler le problème des résultats fournis peu satisfaisants, s'intéresser de plus près à la variation des  $K_N$ . La méthode développée ne pourra rendre des résultats corrects que lorsque le problème des  $K_N$  sera résolu.

## **Annexes**

Dans ces annexes sont fournis les résultats analytiques obtenus par la méthode pas-à-pas lorsque la partie indirectement affectée plastifie.

Les résultats pour les portiques 1, 3 et 4 sont fournis, dans l'ordre suivant :

- $F_1 - d_1$
- $F_2 - d_2$
- $F_2 - F_1$
- $d_2 - d_1$
- $Q - F_1$
- $F_1 - \Delta_A$
- $Q - \Delta_A$

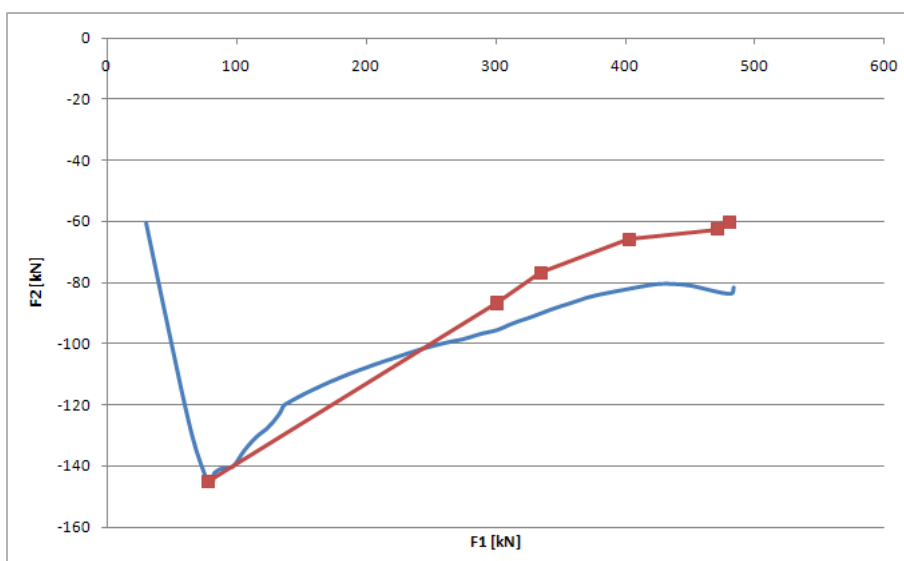
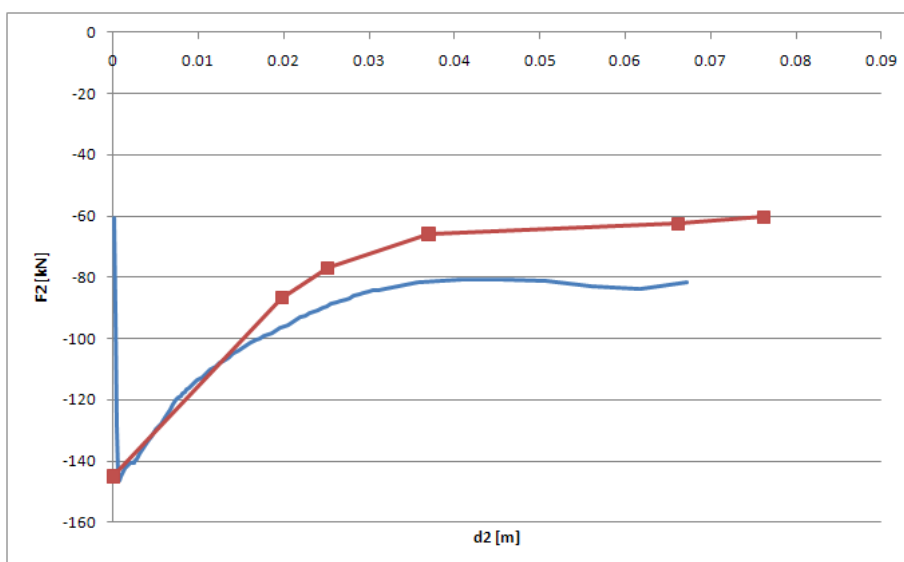
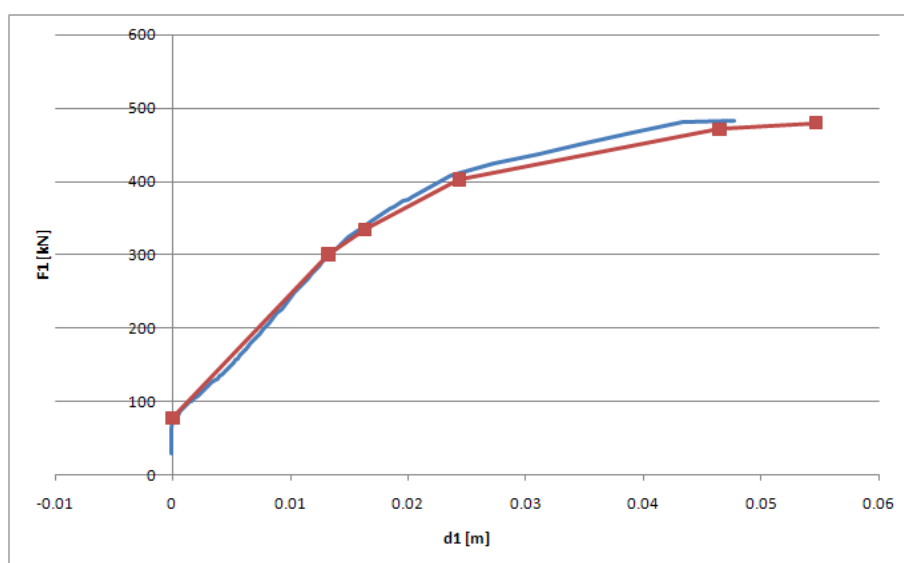
Pour les 4 premiers graphiques ( $F_1 - d_1$  ;  $F_2 - d_2$  ;  $F_2 - F_1$  ;  $d_2 - d_1$ ) :

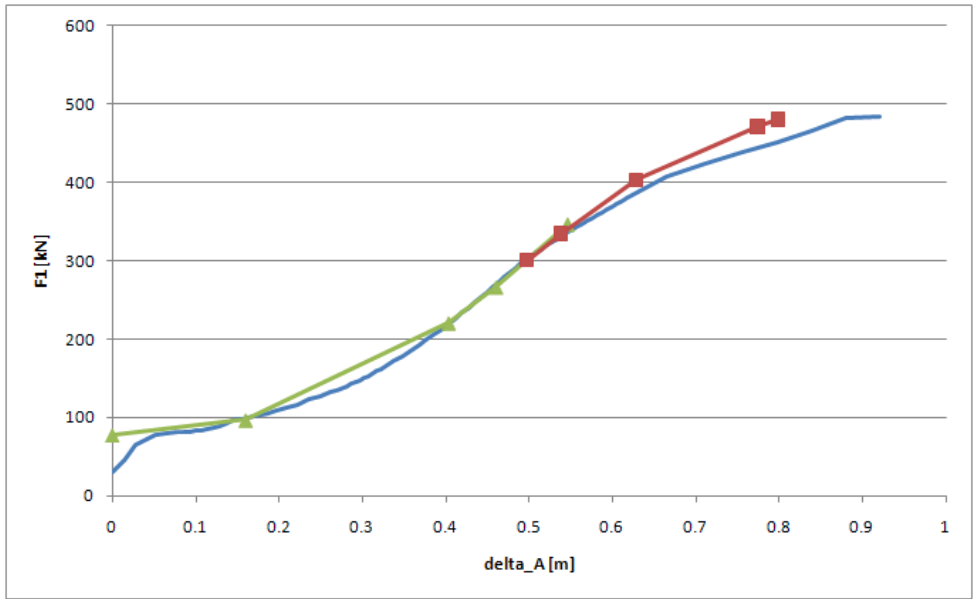
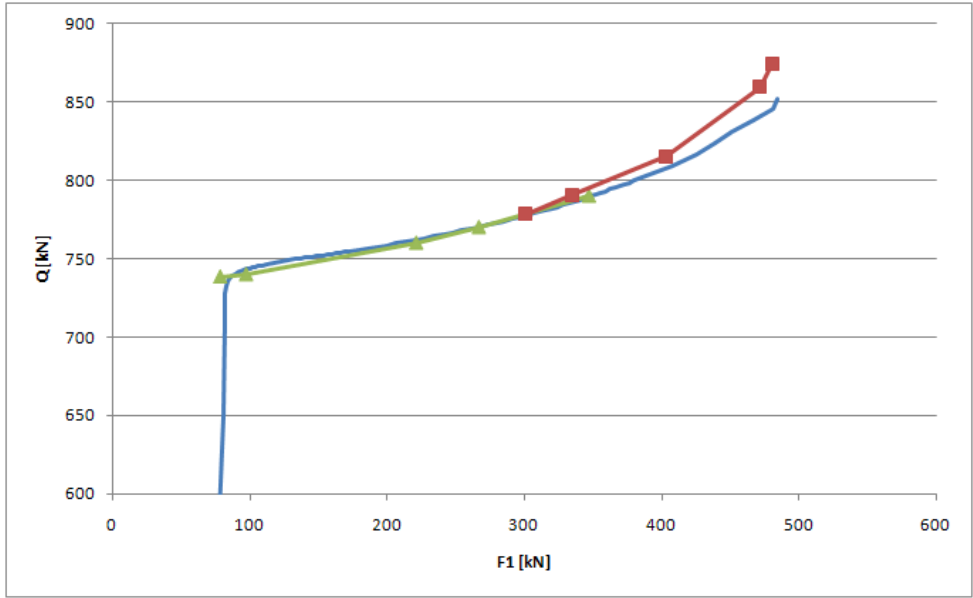
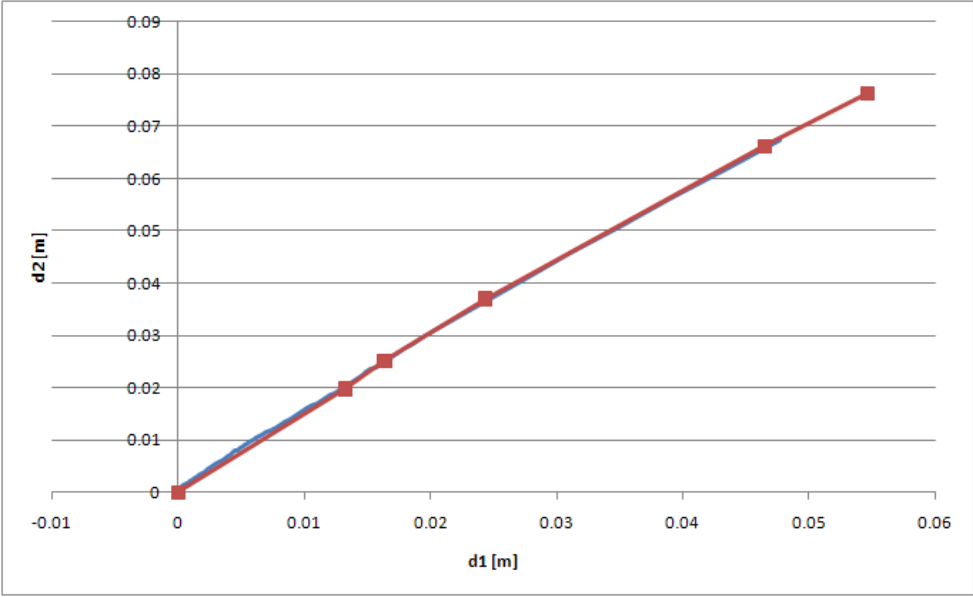
- Courbe bleue = résultats FINELG
- Courbe brisée rouge = résultats analytiques, chaque point représente la formation d'une rotule

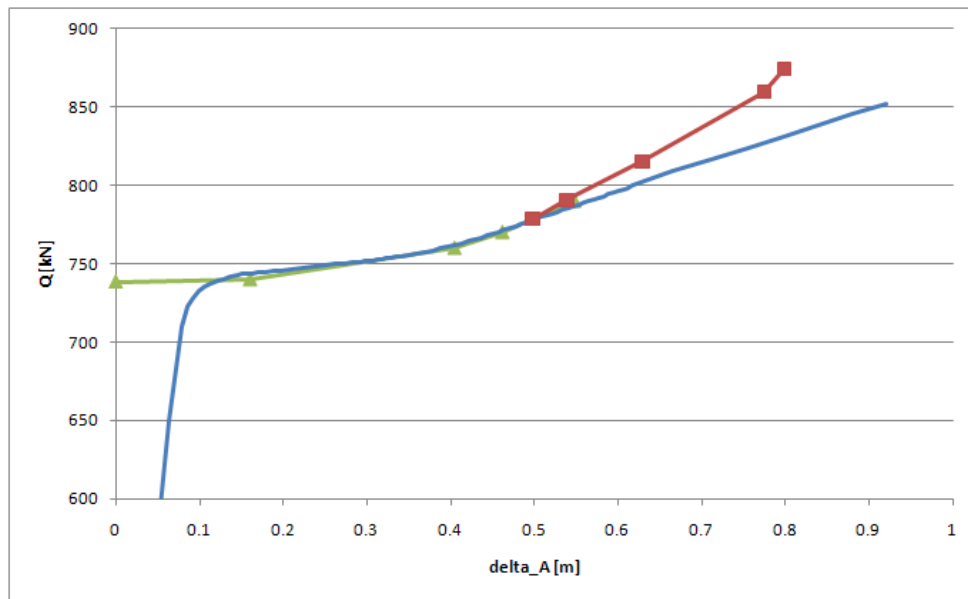
Pour les 3 derniers graphiques ( $Q - F_1$  ;  $F_1 - \Delta_A$  ;  $Q - \Delta_A$ ):

- Courbe bleue = résultats FINELG
- Courbe brisée verte = résultats analytiques avant la première plastification
- Courbe brisée rouge = résultats analytiques après la première plastification, chaque point représentant la formation d'une rotule

### 4.3 Résultats pour le portique n°1





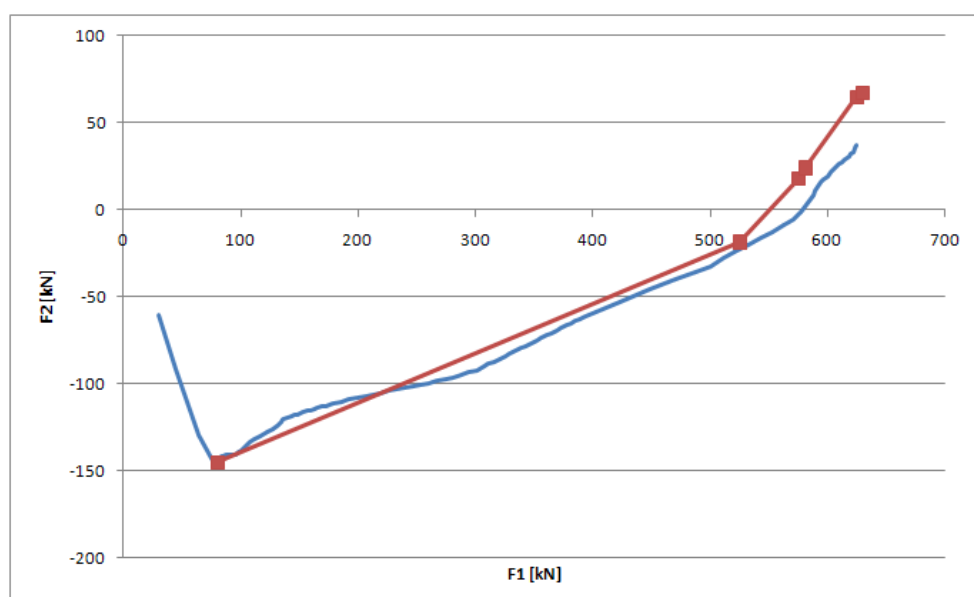
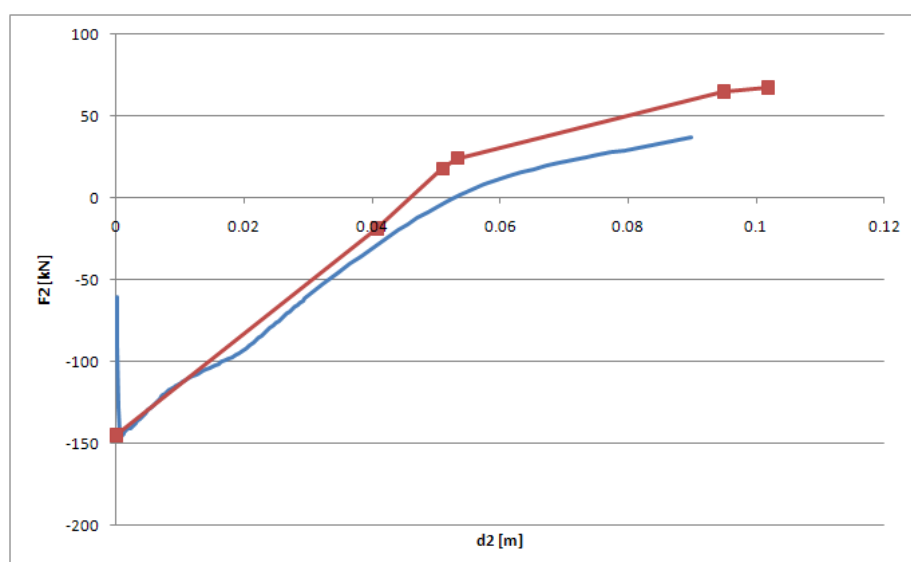
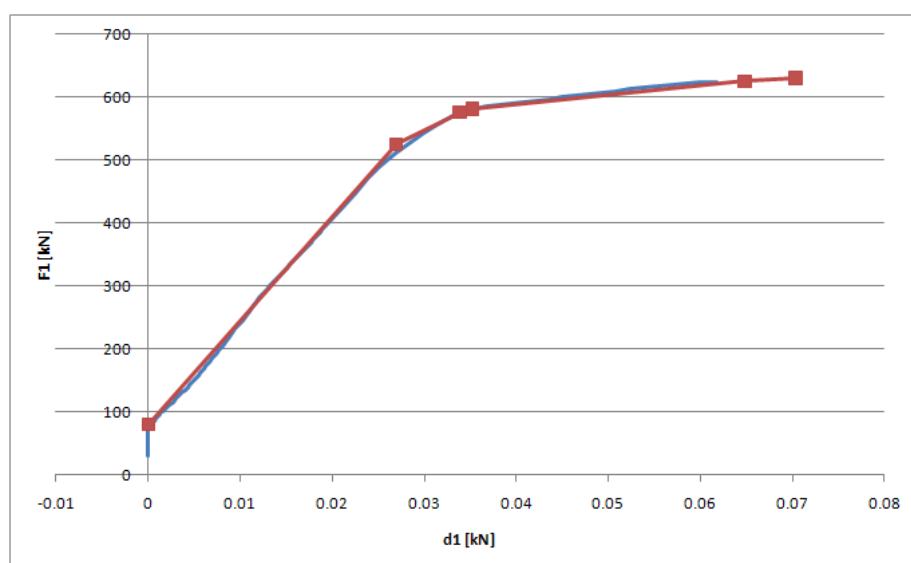


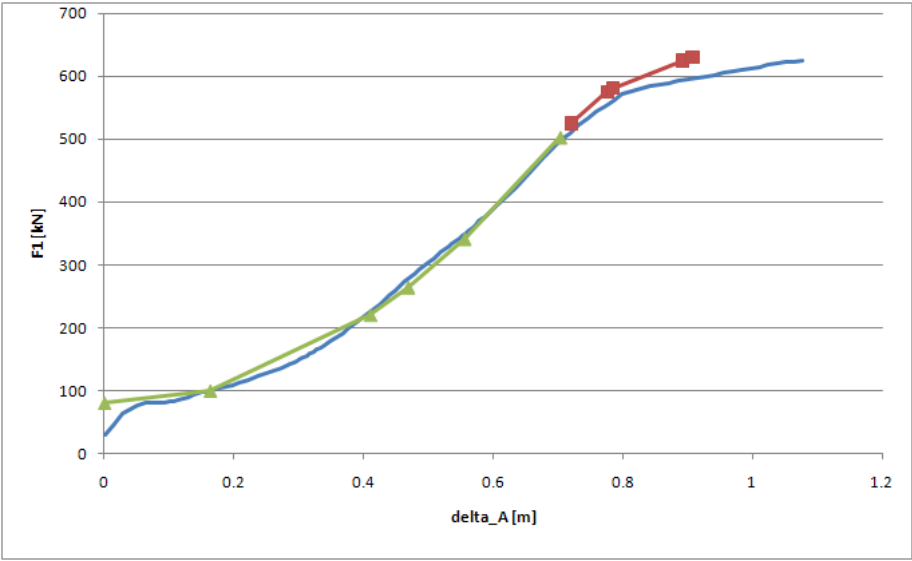
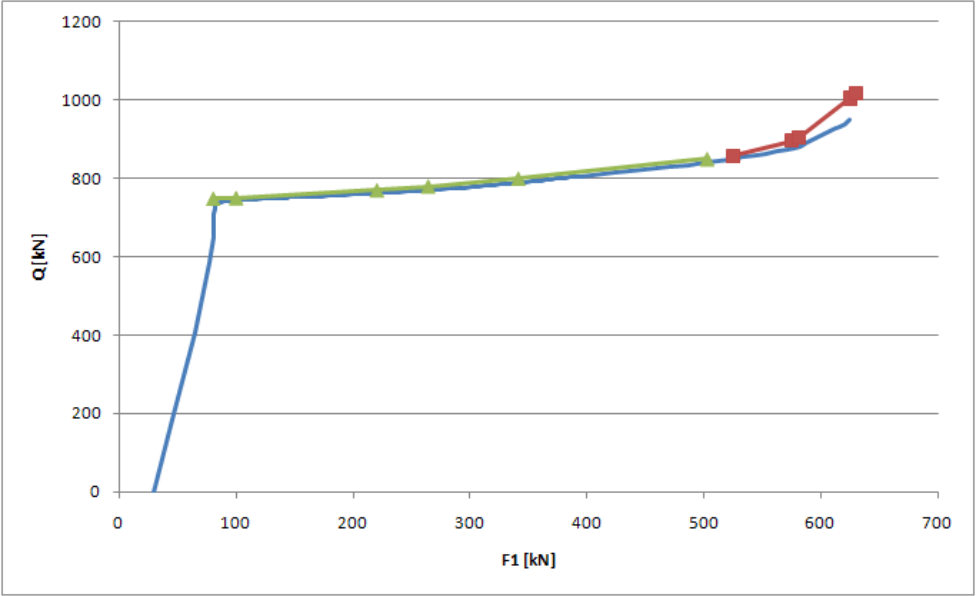
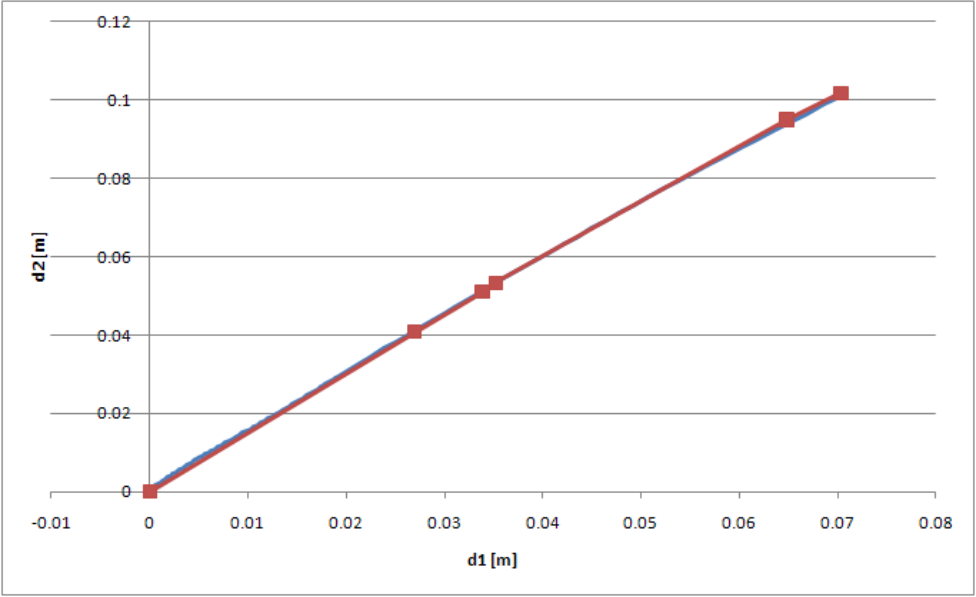
Résultats détaillés pour le dernier point, c'est-à-dire la formation du mécanisme complet dans la partie indirectement affectée :

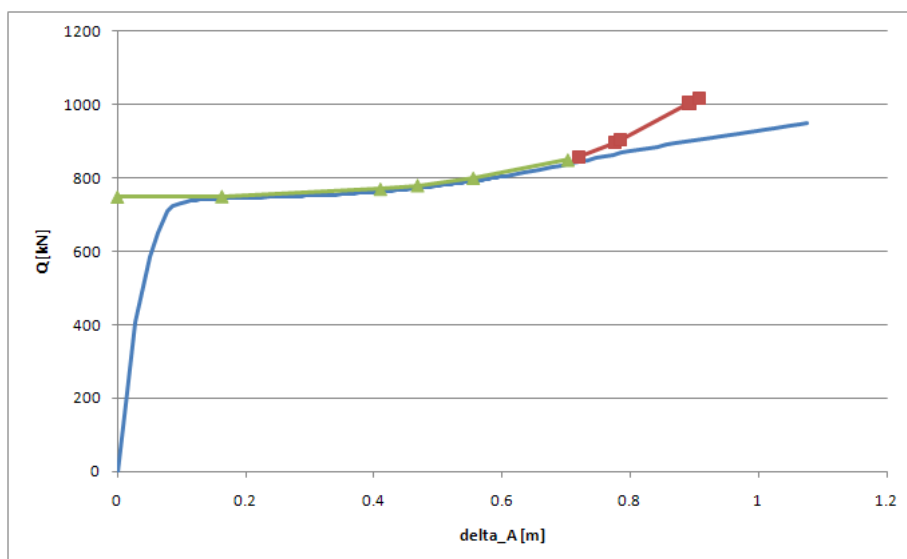
	$F_1$	$d_1$	$F_2$	$d_2$	$Q$	$\Delta_A$
Résultats FINELG	483.63035	0.04772671	-81.732877	0.0672397	852.371274	0.9198893
Résultats analytiques	480.16233	0.0546658	-60.3051493	0.07623037	874.110786	0.79829307
Erreur relative (%)	0.71708065	14.5392176	26.216779	13.3710812	2.55047444	13.2185718



#### 4.4 Résultats pour le portique n°3



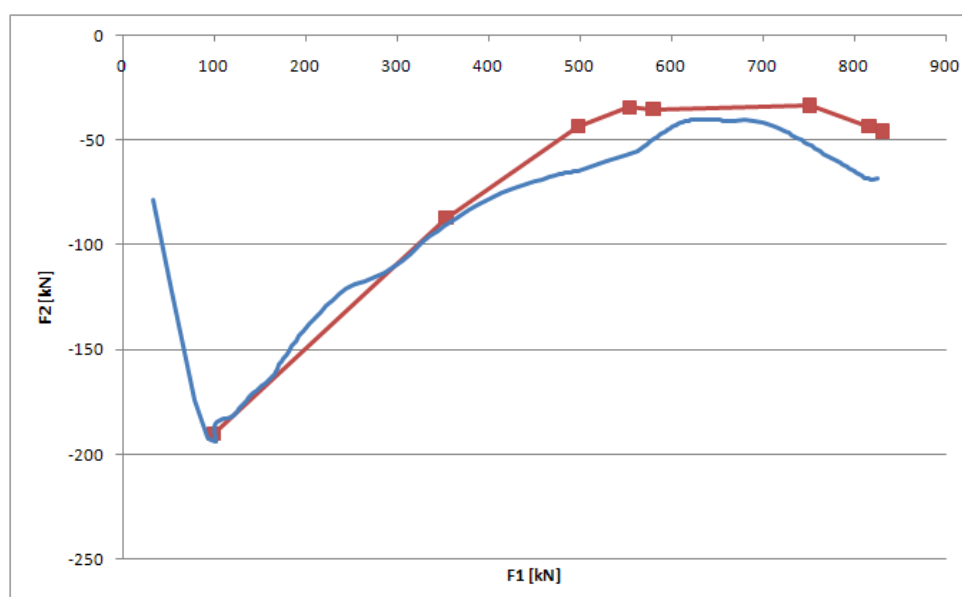
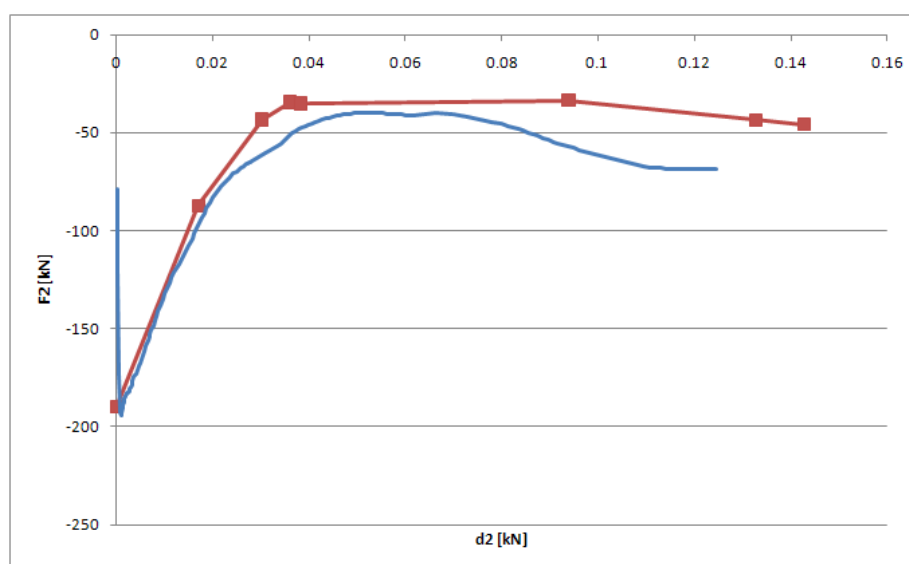
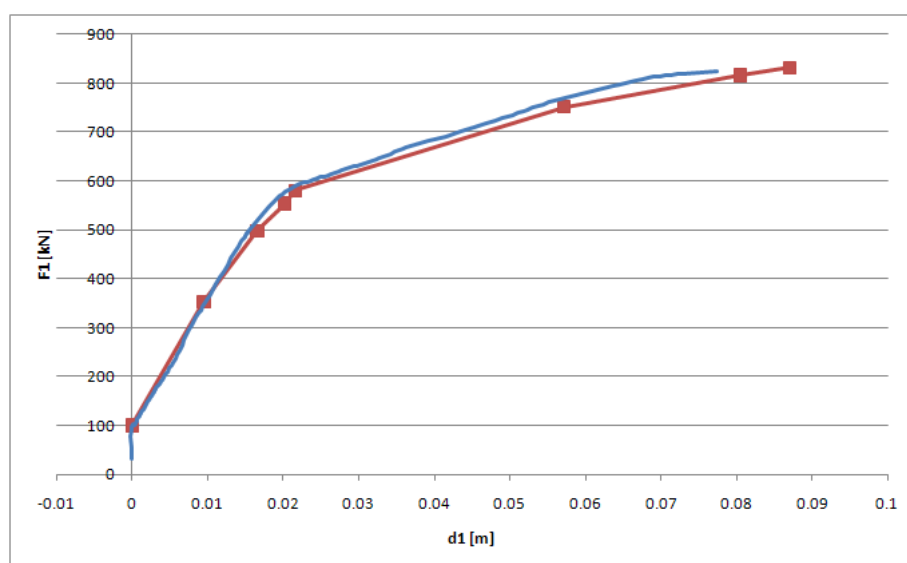


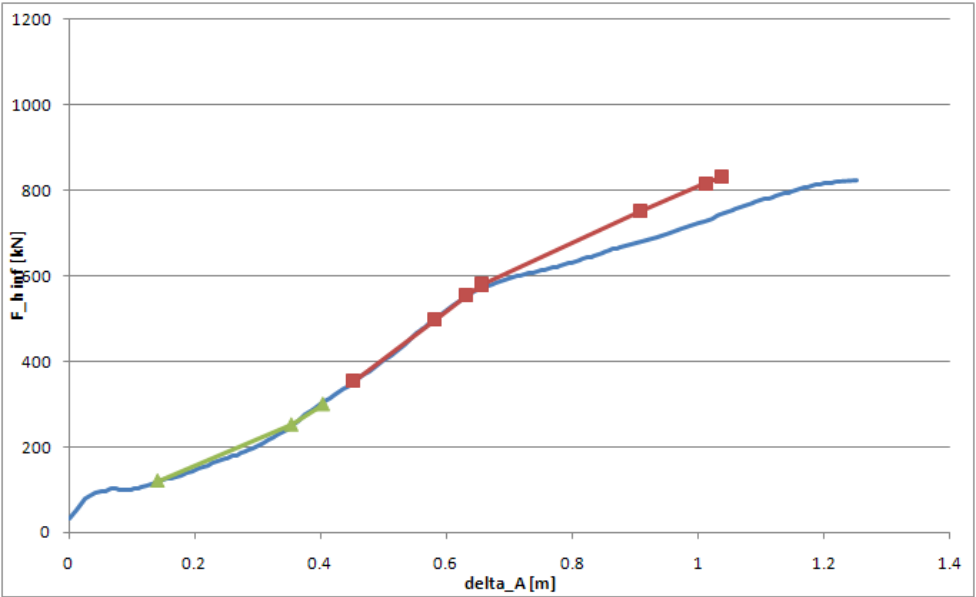
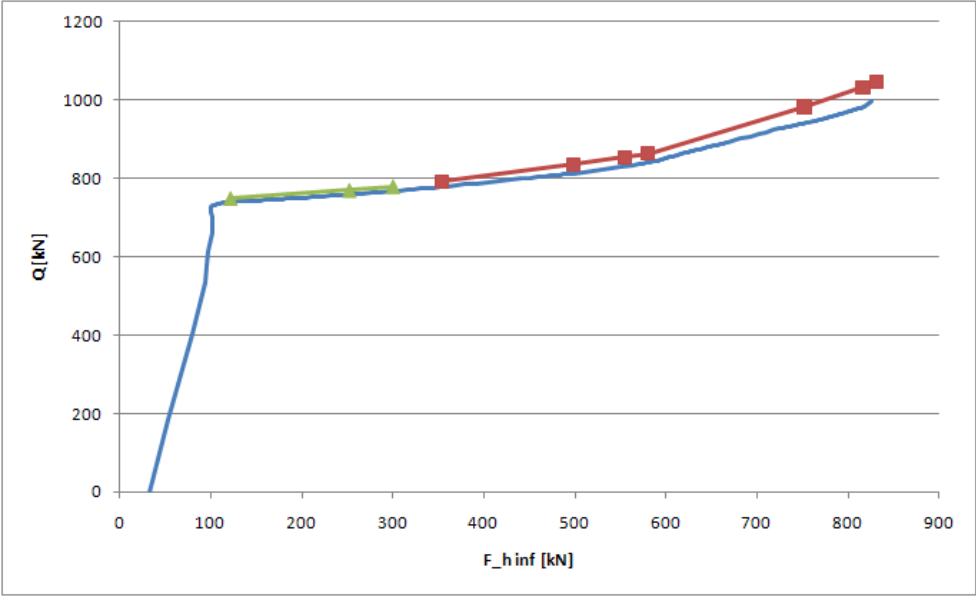
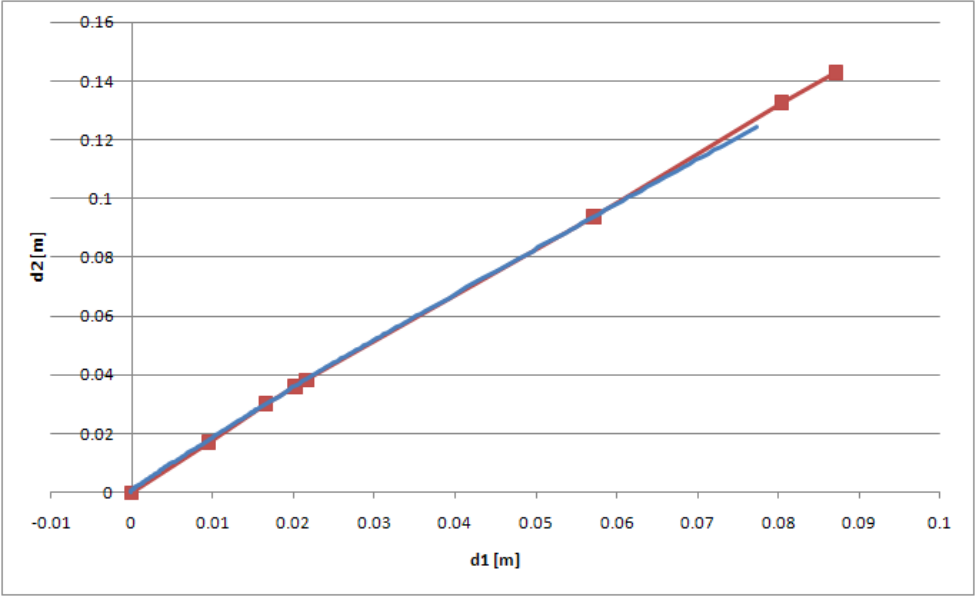


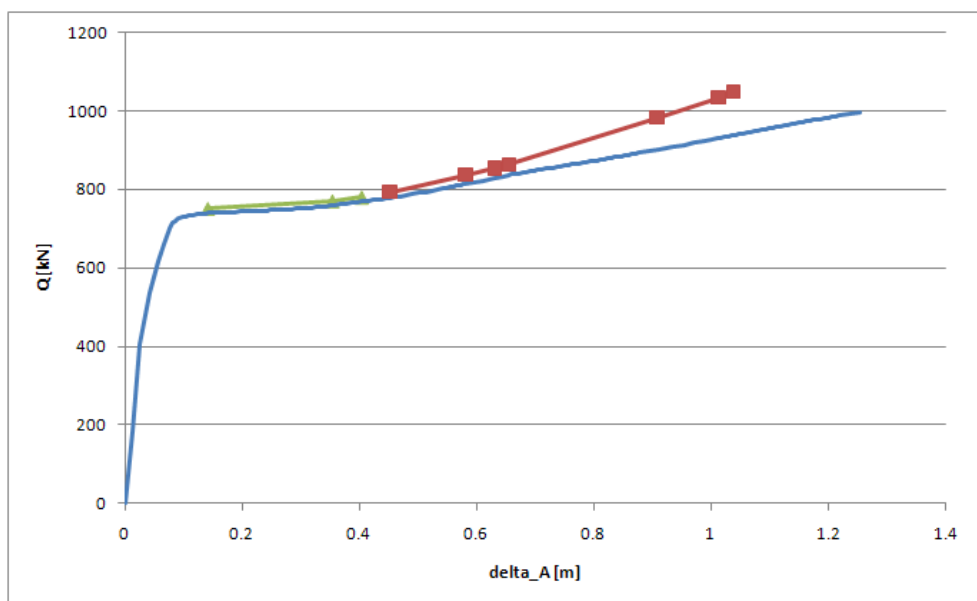
Résultats détaillés pour le dernier point, c'est-à-dire la formation du mécanisme complet dans la partie indirectement affectée :

	$F_1$	$d_1$	$F_2$	$d_2$	$Q$	$\Delta_A$
Résultats FINELG	624.09028	0.06173369	37.19022	0.08992135	949.130149	1.075753
Résultats analytiques	629.680257	0.07035042	67.3082995	0.10181222	1017.01192	0.90687348
Erreur relative (%)	0.89570006	13.9579094	80.9838703	13.2236361	7.15199849	15.6987267

#### 4.5 Résultats pour le portique n°4







Résultats détaillés pour le dernier point, c'est-à-dire la formation du mécanisme complet dans la partie indirectement affectée :

	$F_1$	$d_1$	$F_2$	$d_2$	$Q$	$\Delta_A$
Résultats FINELG	825.0735	0.07735781	-68.46644	0.1245552	997.116249	1.252048
Résultats analytiques	831.472575	0.0870625	-45.755116	0.14286104	1047.60717	1.03688675
Erreur relative (%)	0.77557636	12.5452002	33.1714692	14.6969662	5.06369434	17.1847443

## **Bibliographie**

- [1] L. Comeliau, « Effets du comportement dynamique des structures de bâtiments en acier suite à la ruine accidentelle de l'une des colonnes portantes », travail de fin d'études présenté à l'Université de Liège. Belgique, 2009
- [2] J.-F. Demonceau, « Steel and composite building frames : sway response under conventional loading and developpment of membrane effects in beams further to an exceptional action », PhD thesis presented at Liège University. Belgium, 2008
- [3] FINELG user's manual. Non linear finite element analysis program. Version 9.0, January 2003
- [4] L.N.N Hai, « Structural response of steel and composite building frames to an impact leading to the loss of a column », PhD thesis presented at Liège University. Belgium, 2008
- [5] F. Muller, « Application d'une approche globale d'étude des bâtiments en acier soumis à la perte d'une colonne », travail de fin d'études présenté à l'Université de Liège. Belgique, 2009
- [6] M. Villette, « Analyse critique du traitement de la barre comprimée fléchie et propositions de nouvelles formulations », thèse de doctorat présentée à l'Université de Liège. Belgique, 2004.
- [7] <http://www.mhhe.com/engcs/mech/ees/whatisees.html> : explications du logiciel EES
- [8] NBN EN 1990. Eurocodes Structuraux – Eurocodes : Bases de calcul des structures, 1<sup>ère</sup> édition, juillet 2002.
- [9] prEN 1991-1-7. Eurocode 1 – Actions on structures. Part 1-7 : General Actions – Accidental actions. Final Project Team Draft, 9 juillet 2004.