Mémoire

Auteur : Claes, Damien
Promoteur(s) : Leroy, Julien
Faculté : Faculté des Sciences
Diplôme : Master en sciences mathématiques, à finalité approfondie
Année académique : 2024-2025
URI/URL : http://hdl.handle.net/2268.2/23926

FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE

Des mots sturmiens et de leurs α-racines

Mémoire de fin d'études présenté en vue de l'obtention du titre de

Master en Sciences Mathématiques, à finalité approfondie

Année académique 2024-2025

Auteur :

Damien CLAES

Promoteur :

Julien LEROY

Introduction

En mathématiques, la combinatoire des mots est un domaine d'étude qui concerne principalement l'étude des patterns dans les suites de symboles que nous appelons mots. Dans ce mémoire, nous nous intéressons de près aux mots infinis dits sturmiens qui sont l'objet d'une étude approfondie depuis les travaux fondateurs de Marston Morse et Gustav Hedlund en 1940 (voir [1]). Ces mots ne sont pas seulement des outils théoriques et sont par exemple utilisés en cryptographie, notamment pour générer des nombres pseudo-aléatoires. L'objectif principal est d'étudier en détail la notion d'α-racine de mot sturmiens, introduite avec le cas particulier de la racine carrée, la 2-racine, par Markus Whiteland et Jarkko Peltomäki dans [2]. Leur contribution repose sur une observation importante de Kaale Saari (voir [3]) concernant le caractère 2-répétitif optimal des mots sturmiens et qui permet de bien définir la 2-racine. Concrètement, nous allons étudier si ces α-racines préservent le caractère sturmien et si oui, quelles en sont leurs propriétés combinatoires.

Ce travail est organisé de la manière suivante. Le premier chapitre consiste en une brève introduction à la combinatoire des mots : les premières définitions importantes avec un encart sur les morphismes de mots.

La notion de mots sturmiens, centrale dans ce mémoire, est introduite dans le deuxième chapitre. Il s'agit des mots infinis apériodiques de complexité factorielle minimale. Cette famille de mots est d'un premier intérêt notamment parce qu'elle admet plusieurs définitions alternatives équivalentes : plus précisément, nous introduisons les définitions des mots balancés et de rotation irrationnelle et nous montrons que ces trois définitions sont équivalentes. Ces différents points de vue expliquent entre autres l'importance de cette famille de mots en combinatoire et seront exploités tout au long du mémoire.

Une fois ces préliminaires établis, nous rentrons avec le chapitre 3 dans le cœur du sujet et abordons la notion de mot partout α-répétitif. Ce sont les mots infinis apériodiques qui, à chacune de leurs positions, commencent par une α-répétition : un mot fini qui se répète au moins α fois. Ces dits mots infinis peuvent donc être factorisés en une infinité d'α-répétitions minimales. Ce qui nous permettra d'introduire nous-mêmes la définition générique d'α-racine.

Ensuite nous développerons dans le chapitre 4 une préparation technique pour l'analyse de la 2-racine par J. Peltomäki [4] qui consiste en plusieurs caractérisations de la suite $(\{n\alpha\})_{n\in\mathbb{N}}$ sur le cercle $\mathbb{T}$.

Les α-racines, de prime abord, n'ont pas l'air de préserver une quelconque structure du mot d'origine. Et pourtant, nous verrons dans le chapitre 5 que la 2-racine, la racine carrée, nous offre une propriété remarquable. En prouvant d'abord qu'un sturmiens est carré-plein i.e. partout 2-répétitif, on découvre ensuite que la racine carrée est telle que :

$$\sqrt{S_{\alpha,\rho}} = S_{\alpha,\psi(\rho)}$$

Ainsi, non seulement la 2-racine préserve la propriété d'être sturmien, mais elle préserve aussi la pente de son mot. Et nous pourrons ensuite explorer diverses propriétés combinatoires sur la structure de la racine par rapport à son radicant.

Enfin, en partant de l'observation de Saari qu'un mot sturmien est également partout 2^+-répétitif ou chevauchement-plein, j'explore dans le chapitre 6 la possibilité d'une 2^+-racine ou racine chevauchième. Cependant, celle-ci ne préservera pas le caractère sturmien des mots infinis.

Pour conclure, j'ai d'abord décidé de tester la $\frac{3}{2}$-racine qui ne préserve pas non plus le fait d'être sturmien. Ainsi j'établis la conjecture suivante : les α-racines avec α non entier ne préservent pas le caractère sturmien des mots infinis. Et la dernière section de ce mémoire en est une preuve.

Remerciements

Premièrement, j'aimerais remercier M. Julien Leroy, en tant que promoteur, pour sa résilience face à mes aléas et en tant que professeur, pour m'avoir donné l'amour du bon mot et de la combinatoire. J'aimerais également remercier M. Naïm Zenaïdi pour son intérêt à ma réussite et le travail que nous avons mis à cet effet, et M. Markus Whiteland d'avoir découvert la 2-racine et d'avoir contribué à mon intérêt pour la combinatoire.

Je voudrais aussi remercier Mme Christine Gotti et Mme Catherine Badot de m'avoir inspiré à poursuivre des études de mathématiques.

Enfin, je remercie mes parents pour leur soutien indéfectible et m'avoir sorti de ma torpeur ; ma sœur qui a toujours été là quand il fallait me changer les idées ; mes amis et tout particulièrement Adrien et Romain pour avoir significativement amélioré ma vie et mon parcours scolaire.

Table des matières

Chapitre 1

De la combinatoire des mots

En mathématique, les mots s'appellent comme tels car leur structure est non sans rappeler les mots usuels que nous utilisons pour communiquer. Ces mots sont construits à partir de lettres, à la différence qu'ici, une lettre est un symbole qui se suffit à lui-même.

1.1 Des notions de base sur les mots

Commençons par désigner l'ensemble des symboles utilisés dans un cas particulier de la construction de mot, qui sera appelé, dans un souci de cohérence, un alphabet. Dans un cadre mathématique, un alphabet peut être fini ou infini. Cependant, le propos de ce mémoire concerne les mots sturmiens, qui sont construits sur un alphabet à deux symboles. Ainsi, nous considérerons ici uniquement le cas d'alphabets finis.

Ainsi, les alphabets littéraires ainsi que leurs sous-ensembles sont aussi des alphabets au sens mathématique du terme. Les chiffres sont aussi souvent utilisés comme "lettres" d'alphabet. Par exemple, le langage binaire utilise seulement les deux lettres 0 et 1. Et notons qu'utiliser l'alphabet $\{a, b\}$ serait tout à fait équivalent mathématiquement.

Les notions de bases sont reprises des cours de "Langages Formels"[5] et "Combinatorics on Words"[6] dispensés à l'Uliège.

Définition 1.1.1.
Soit A un alphabet fini et n un naturel :

i) Pour le cas particulier $n = 0$, on décrit le mot de longueur nulle ou mot vide par le symbole ε. Il est donc cohérent de ne jamais considérer ε comme étant une lettre de A.

ii) Un *mot fini de longueur* $n > 0$ est une suite finie $w : \{1, \cdots, n\} \to A$. Chaque mot est décrit par la position des lettres qui le composent, c'est-à-dire $(w(1), \cdots, w(n)) = (w_1, \cdots, w_n)$ ce que l'on note par convention $w_1 \cdots w_n$.

iii) Un *mot infini* est une suite $X : \mathbb{N} \to A$. Chaque mot est décrit par la position des lettres qui le composent, c'est-à-dire $X = x_1x_2x_3 \cdots$.

Remarque 1.1.2.
Nous prendrons ici les conventions de notation suivantes concernant le mot fini w sur un alphabet fini A :

i) On désigne la longueur de w par $|w|$.

ii) Le nombre $|w|_a$ désigne la quantité de a présents dans w i.e. $\#\{i \in \{1, \cdots, |w|\} : w_i = a\}$

Il est commun de définir des ensembles de mots sur un alphabet fini, aussi appelés langages. La définition suivante précise certains de ces langages qui sont indispensables pour l'étude de la combinatoire des mots.

Définition 1.1.3.
Soit A un alphabet fini.

i) Le langage des mots de longueur n sur A, noté A^n, est l'ensemble $\{w_1 \cdots w_n | w_i \in A \ \forall i \in \{1, \cdots, n\}\}$.

ii) Le langage des mots finis sur A, noté A^*, est l'ensemble $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^n$.

iii) Le langage des mots finis non vides sur A, noté A^+, est l'ensemble $A^* \setminus \{\varepsilon\}$.

iv) Le langage des mots infinis sur A, noté $A^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble $\{X = x_1x_2 \cdots | x_i \in A \ \forall i \in \mathbb{N}\}$.

Dans les langages de mots finis, il est important de définir deux opérations sur les mots.

Définition 1.1.4.
Soit A un alphabet fini.

i) La *concaténation* de mots est l'application binaire $A^* \times A^* \to A^* : (w_1 \cdots w_n, v_1 \cdots v_m) \mapsto w_1 \cdots w_n v_1 \cdots v_n$. Par convention, la concaténation de w et v est noté par le mot wv.

Remarquons que le mot vide ε est tel que $\forall w \in A^*, w\varepsilon = w = \varepsilon w$ ce qui correspond à la définition du neutre pour la concaténation.

ii) Le *miroir* est l'application unaire $\cdot^\sim : A^* \to A^* : w_1 \cdots w_n \mapsto w_n \cdots w_1$. Le miroir est donc une involution vu que $(\tilde{w})^\sim = w$

Ce deux opérations interagissent par la relation suivante.

Remarque 1.1.5.
Soit $w, v \in A^*$, alors $(wv)^\sim = \tilde{v}\tilde{w}$. En effet :

$$(wv)^\sim = (w_1 \cdots w_n v_1 \cdots v_m)^\sim = v_m \cdots v_1 w_n \cdots w_1 = \tilde{v}\tilde{w}$$

La concaténation permet de définir le concept de sous-mots ou facteurs qui, en fonction de leur configuration, sont dénotés de différentes façons.

Définition 1.1.6.
Soit A un alphabet fini, w un mot fini et X un mot infini sur A. Alors nous définissons :

a) Pour les mots finis :

   i) Le mot v est un *facteur* du mot w si il existe $s, t \in A^*$ tels que $w = tvs$.

   ii) Le mot v est un *préfixe (propre)* du mot w si il existe $s \in A^*$(resp. A^+) tel que $w = vs$.

iii) Le mot v est un *suffixe (propre)* du mot w si il existe $t \in A^*$(resp. A^+) tel que $w = tv$.

b) Pour les mots infinis :

i) Le mot fini v est un *facteur* de X si il existe $s \in A^*$ et $T \in A^{\mathbb{N}}$ tels que $X = svT$. Les facteurs de X peuvent également être vu comme la restriction de X à un intervalle donné. On notera alors que si $n < m$ sont deux entiers, alors $X_{[n,m[}$ est le mot $x_n \cdots x_{m-1}$ et $X_{[n,m]}$ est le mot $x_n \cdots x_m$.

Nous notons $\mathrm{Fac}(X)$ l'ensemble des facteurs distincts d'un mot infini X. Nous notons aussi pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble des facteurs de X de longueur n par $\mathrm{Fac}_n(X) = \mathrm{Fac}(X) \cap A^n$.

ii) Le mot fini v est un *préfixe* de X si il existe $S \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $X = vS$.

iii) Le mot infini V est un *suffixe* de X si il existe $t \in A^*$ tel que $w = tV$.

De plus, la concaténation permet aussi de définir la notion de puissance qui, par écho aux autres domaines des mathématiques, sera la répétition d'un même mot.

Définition 1.1.7.
Soient A un alphabet fini, m un naturel et $w \in A^m$. Les *puissances* du mot w sont définies par :

i) $w^0 = \varepsilon$.

ii) $\forall n \geq 1,\ w^n = w^{n-1}w$.

Si v n'est pas la puissance d'un mot w i.e. $(\exists v \in A^*, n \in \mathbb{N} : w = v^n) \to n = 1$, alors w est un mot dit *primitif*.

Un mot w est une $n^{\text{ième}}$ puissance dite *minimale* si w ne possède aucun préfixe qui serait une $n^{\text{ième}}$ puissance.

La périodicité est un autre concept qui généralise la notion de puissance et qui peut s'étendre aux mots infinis.

Définition 1.1.8.
Soit A un alphabet fini.

i) Un mot fini $w \in A^+$ est dit *périodique* si $\exists p \in A^+, s \in A^*$ avec s un préfixe de p tel que $w = pp \cdots ps$. Dans ce cas p est ce qu'on appelle une *période* de w.

ii) Le mot infini $X \in A^{\mathbb{N}}$ est dit *périodique* si $\exists w \in A^+$ tel que $X = www \cdots = w^\omega$ et *ultimement périodique* si il existe en plus $u \in A^+$ tel que $X = uw^\omega$

Une forme spécifique importante de mots périodiques est le chevauchement. Un mot w est un chevauchement s'il existe $a \in A$ et $v \in A^*$ tels que $w = avava$.

Exemples 1.1.9.
Soit l'alphabet $\{a, b, c\}$. Voici quelques exemples des définitions sur les mots que nous venons de voir.

i) $aab, aabcb, bb, acabacab, ccbb$. Ici, aab est un préfixe de $aabcb$ et bb est un suffixe de $ccbb$. On peut concaténer aab et bb pour faire $aabbb$, on peut aussi appliquer le miroir à $aabcb$ pour obtenir $bcbaa$.

ii) Si on considère le mot *abc*, son carré sera *abcabc* et son cube *abcabcabc*.

iii) On peut aussi comparer les carrés *abcabc* et *aabaab* car le premier est minimal alors que le second possède le carré *aa* comme préfixe.

iv) Enfin, on peut donner des exemples de mots infinis sur l'alphabet des chiffres comme :
Le mot $1414213562373095\cdots$, le développement décimale de $\sqrt{2}$, est apériodique (voir A).
Le mot $181258(1230)^{\omega}$ est un mot ultimement périodique de période 4.
Et le mot $(336)^{\omega}$ est un mot périodique de période 3.

Pour décrire certains langages plus efficacement, nous définissons deux opérations sur les langages.

Définition 1.1.10.
Soit $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ deux langages.

i) L'opérateur binaire $+$ est tel que : Si $w \in \mathcal{L}$ et $v \in \mathcal{L}'$ alors $w + v$ représente l'ensemble $\{w, v\}$.

ii) L'opérateur unaire *, dit *étoile de Kleen*, est tel que : Si $w \in \mathcal{L}$ alors $w^* = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \{w^n\}$

Ces définitions sont pertinentes car cela permet de décrire des langages par les mots eux-mêmes.

Exemple 1.1.11.
Imaginons sur l'alphabet $\{a, b, c\}$ le langage des mots qui commencent soit par a soit par bb, avec ensuite un nombre fini de c et qui se terminent par ab. Les premiers éléments de ce langage sont

$$\{aab, bbab, acab, bbcab, accab, bbccab, acccab, bbcccab, \cdots\}.$$

Sans nos nouvelles opérations, nous dénoterions ce langage par :

$$\mathcal{L} = \{w = vut | v \in \{a, bb\}, \exists n \in \mathbb{N} : u = c^n, t = ab\}.$$

Cependant, grâce à la définition 1.1.10, nous notons :

$$\mathcal{L} = (a + bb)c^*ab.$$

Ces opérations facilitent la lecture et la visualisation des langages.

1.2 Des morphismes de mots

Un autre concept dont nous aurons besoin est celui de morphisme, qui peut à la fois permettre de passer d'un alphabet à un autre, de renommer les lettres d'un mot, mais surtout de générer des mots infinis. Or, pour pouvoir avoir une définition propre de ce que sera un mot dit morphique, nous avons également besoin d'étendre les notions de distance et de limite aux mots infinis.

Commençons d'abord par définir notre concept de morphisme.

Définition 1.2.1.
Soit A et B deux alphabets.

Une application de $\phi : A^* \to B^*$ est un *morphisme* si pour tout $w, v \in A^*$:

$$\phi(wv) = \phi(w)\phi(v)$$

Un morphisme $\phi : A^* \to B^*$ est dit :

i) un *codage/renommage* si pour tout $a \in A, |\phi(a)| = 1$.

ii) *non effaçant* si pour tout $a \in A, \phi(a)$ est différent du mot vide.

iii) *prolongeable* en $a \in A$ si il existe $w \in A^+$ tel que $\phi(a) = aw$ et $|\phi^n(a)| \to \infty$.

Exemple 1.2.2.
Soit les alphabets $\{a, b, c\}$ et $\{0, 1, 2\}$, on peut imaginer l'exemple de morphisme suivant :

$$\psi : \{0,1,2\}^* \to \{a,b,c\}^* : \begin{cases} 0 \mapsto \varepsilon \\ 1 \mapsto ab \\ 2 \mapsto c \end{cases}$$

Qui s'applique, par exemple, sur 0121 comme suit : $\psi(0121) = \psi(0)\psi(1)\psi(2)\psi(1) = abcab$.

Remarque 1.2.3.
Généralisons l'exemple précédent. Soient A, B deux alphabets finis, $w \in A^*$ et ϕ un morphisme de A dans B. Par la définition 1.2.1 $\phi(w) = \phi(w_1) \cdots \phi(w_n)$. Ainsi, il est raisonnable de décrire ϕ par son application à chacune des lettres de A.

Ensuite avant de définir la notion de convergence, nous avons besoin de la distance entre mots infinis. Cette notion est reprise du cours [6].

Définition 1.2.4.
Soit A un alphabet fini. Définissons l'application sur les mots infinis $D : A^{\mathbb{N}} \times A^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R} : (X, Y) \mapsto 2^{-|\Lambda(X,Y)|}$, avec $\Lambda(X, Y)$ le plus long préfixe commun de X et Y et que si $X = Y$ alors $D(X, Y) = 0$ par la convention que $|\Lambda(X, Y)| = \infty$ et $2^{-\infty} = 0$.

Rappelons d'abord la définition de distance.

Définition 1.2.5.
Soit E un ensemble, $d : E \times E \to \mathbb{R}$ est une *distance* si pour tout e, f, g dans E :

i) d est positif : $d(e, f) \geq 0$

ii) d est séparé : $d(e, f) = 0 \iff e = f$

iii) d est symétrique : $d(e, f) = d(f, e)$

iv) d respecte l'inégalité triangulaire : $d(e, f) \leq d(e, g) + d(g, f)$

Parmi les distances, il y en a un sous-ensemble qui nous intéresse, celui des distances ultra-métriques.

Définition 1.2.6.
Soit E un ensemble, $d : E \times E \to \mathbb{R}$ est une distance *ultramétrique* si d est une distance et que :

$$\forall e, f, g \in E,\ d(e, f) \leq \max\{d(e, g), d(g, f)\}$$

Remarque 1.2.7.
Notons que si l'inégalité de 1.2.6 est respectée, alors l'égalité triangulaire l'est aussi. En effet, si d est une distance sur un ensemble E, alors pour tout $e, f, g \in E$:

$$d(e, f) \leq \max\{d(e, g), d(g, f)\} \leq \max\{d(e, g), d(g, f)\} + \min\{d(e, g), d(g, f)\} = d(e, g) + d(g, f)$$

Nous allons donc montrer que l'application D de 1.2.4 fait bien partie de cette catégorie.

Proposition 1.2.8.
L'application D est une distance ultramétrique.

Démonstration:
Soient A un alphabet fini et $X, Y, Z \in A^{\mathbb{N}}$:

i) $0 \leq D(X, Y) \leq 2$.
ii) $D(X, X) = 2^{-\infty} = 0$ et $X \neq Y \to |\Lambda(X, Y)| < \infty \to D(X, Y) \neq 0$.
iii) $D(X, Y) = 2^{-|\Lambda(X,Y)|} = 2^{-|\Lambda(Y,X)|} = D(X, Y)$.
iv) Si $N = \min\{n : x_n \neq y_n\}$ Alors soit $z_N \neq x_N$ soit $z_N \neq y_n$ et donc on obtient que $|\Lambda(X, Z)| \geq \min\{|\Lambda(X, Y)|, |\Lambda(Y, Z)|\}$. Ce qui donne $D(X, Z) \leq \max\{D(X, Y), D(Y, Z)\}$.

$\square$

Remarque 1.2.9.
Pour les mots finis, D peut rester une distance si $w = v \implies D(w, v) = 0$. En ignorant la convention d'égalité sur les mots infinis et simplement en considérant l'implication comme une des règles de la définition. Et ainsi, le domaine de D peut être étendu à $(A^* \cup A^{\mathbb{N}}) \times (A^* \cup A^{\mathbb{N}})$.

Ainsi, par exemple, sur $\{a, b, c\}^{\mathbb{N}}$, si $X = abacca(bcb)^\omega$ et $Y = (abacba)^\omega$, $\Lambda(X, Y) = abac$ et donc $D(X, Y) = 2^{-4} = 1/16$

Cette notion de distance permet d'établir la convergence entre mots infinis, mais aussi la convergence de mots finis vers un mot infini.

Définition 1.2.10.
Soient A un alphabet fini et $X \in A^{\mathbb{N}}$ un mot infini.

i) Une suite de mots infinis $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $A^{\mathbb{N}}$ converge dans $A^{\mathbb{N}}$ vers X si $D(X_n, X) \underset{n\to\infty}{\to} 0$.
ii) Une suite de mots finis $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A^* converge vers X si il existe un symbole $\boxtimes \notin A$ tel que la suite $(w_n\boxtimes^\omega)_n$ converge vers X dans $(A \cup \{\boxtimes\})^{\mathbb{N}}$.

Cette définition de convergence de mots finis vers un mot infini va donc nous permettre de générer des mots infinis à partir de morphismes. Nous avons besoin d'abord d'une dernière définition.

Définition 1.2.11.
Si ϕ est un morphisme de A^* vers B^* et que $X \in A^{\mathbb{N}}$, alors on définit l'application de ϕ à X par :

$$\phi(X) = \lim_{n\to\infty} (\phi(X_{[0,n[}))$$

Ceci est bien défini car la suite $(\phi(X_{[0,n[}))_n$ est de Cauchy et donc converge. En effet, si $n \in \mathbb{N}$, on obtient que $\Lambda(\phi(X_{[0,n[}), \phi(X_{[0,n+1[})) = \phi(X_{[0,n[})$ et donc que la longueur de ce préfixe commun tend vers l'infini avec n et que donc la distance tend vers 0.

Ainsi, la génération de mot infini à partir de morphisme, que nous appelons *mot morphique* peut se faire grâce au résultat suivant.

Proposition 1.2.12.
Soient A un alphabet fini. Si $\phi : A^* \to A^*$ un morphisme prolongeable en $a \in A$ alors :

i) La suite $(\phi^n(a))_n$ converge dans $A^{\mathbb{N}}$ vers un mot infini noté $\phi^\omega(a)$.

ii) Nous avons l'égalité $\phi^\omega(a) = \phi(\phi^\omega(a))$.

<u>*Démonstration:*</u>
Soient A un alphabet fini, $\boxtimes \notin A$ et $\phi : A^* \to A^*$ un morphisme prolongeable en $a \in A$ tel que $\phi(a) = aw$ avec $w \in A^*$.

i) Pour montrer la convergence, montrons que la suite des $\phi^n(a)$ est de Cauchy. Cependant comme D est ultramétrique, si on note $\phi^n(a)\boxtimes^\omega = P_n$, l'inégalité

$$D(P_p, P_q) \leq \max\{D(P_p, P_{p+1}), D(P_{p+1}, P_q)\}$$

nous permet de conclure si la distance entre deux termes successifs tend vers 0.
Soit n un naturel, notons d'abord que $\phi^n(a)$ est un préfixe de $\phi^{n+1}(a)$. En effet, $\phi^{n+1}(a) = \phi^n(aw) = \phi^n(a)\phi^n(w)$ ce qui implique que $|\Lambda(P_n, P_{n+1})| = |\phi^n(a)| \to \infty$ et que donc $D(P_n, P_{n+1}) \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

ii) Posons $X = \phi^\omega(a)$. Notons déjà que $(\phi(X_{[0,n[}))_n$ converge vers $\phi(X)$. De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, \phi^n(a)$ est un préfixe de X et donc $\phi(X_{[0,\phi^n(a)[}) = \phi^{n+1}(a)$ converge vers X. Or $(\phi(X_{[0,\phi^n(a)[}))_n$ est un sous-suite de $(\phi(X_{[0,n[}))_n$ ce qui implique qu'elles convergent toute deux vers le même mots. Et donc $\phi(X) = X$.

□

Exemple 1.2.13.
Un exemple extrêmement important pour la suite de ce travail est le morphisme dit de Fibonacci :

$$\varphi : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^* : \begin{cases} 0 \mapsto 01 \\ 1 \mapsto 0 \end{cases}$$

Ce mot est associé à Fibonacci notamment parce qu'en posant $f_0 = 0$, on obtient, du fait que φ soit prolongeable en 0, la suite $(\varphi^n(0) = f_n)_n$ dont les premiers éléments sont :

$f_0 = \varphi^0(0) = 0$ $\quad f_1 = \varphi^1(0) = 01$ $\quad f_2 = \varphi^2(0) = 010$
$f_3 = \varphi^3(0) = 01001$ $\quad f_4 = \varphi^4(0) = 01001010$ $\quad f_5 = \varphi^5(0) = 0100101001001$

Notons que dans cette suite , $\forall n \geq 2, f_n = \varphi(f_{n-1}) = f_{n-1}f_{n-2}$ et que $|f_n|$ est le $(n+1)$-ième nombre de la suite de Fibonacci.

On obtient l'égalité $f_n = \varphi(f_{n-1}) = f_{n-1}f_{n-2}$ par récurrence. En effet, $f_3 = \varphi(f_2) = \varphi(01) = 010 = f_2 f_1$ et $f_n = \varphi(f_{n-1}) \underset{HR}{=} \varphi(f_{n-2}f_{n-3}) = \varphi(f_{n-2})\varphi(f_{n-3}) = f_{n-2}f_{n-3}$.

Et nous pouvons donc définir le mot infini de Fibonacci comme étant :

$$F = \varphi^\omega(0) = 0100101001001010010100100101001 0\cdots \tag{1.1}$$

Ce mot nous servira d'exemple récurrent.

1.3 De la complexité des mots infinis

Parmi les mots infinis, il y en a une catégorie en particulier qui nous intéresse. Ce sont les mots sturmiens. Et pour comprendre leur définition, il est nécessaire de connaître les points suivants.

Définition 1.3.1.
Soit X un mot infini sur A un alphabet fini. La *complexité factorielle* de X est la fonction $p_X(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto |\mathrm{Fac}_n(X)|$

Proposition 1.3.2.
Soit X un mot infini sur A un alphabet fini. Sa fonction de complexité est monotone croissante.

Démonstration:
Soit X un mot infini sur A un alphabet fini. Pour tout n, $p_X(n)$ représente le nombre de facteurs distincts de taille n. Or, si on regarde le mot $w \in \mathrm{Fac}_n(X)$, $\exists a$ tel que $wa \in \mathrm{Fac}(X)$. Ainsi, par le fait que si $w \neq v$ alors $wa \neq va$, le nombre de facteurs de taille $n+1$ est au moins celui des facteurs de taille n. Et donc il en résulte bien que $p_X(n) \leq p_X(n+1)$. $\square$

Théorème 1.3.3.
Soit X un mot infini sur A un alphabet fini.

i) Si X est (ultimement) périodique alors $p_X(n)$ est borné.
ii) Si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $p_X(n) \leq n$ alors X est ultimement périodique.

Démonstration:

i) Soient X un mot infini sur A un alphabet fini et $x_k \cdots x_{k+n-1} \in \mathrm{Fac}_n(X)$. Si X est ultimement périodique alors $\exists u, v \in A^*$ tels que $X = uv^\omega$. De là, deux cas sont possible :
   a) Si $k < |u|$, alors il y a au plus $|u|$ possibilités de mots différents.
   b) Si $k \geq |u|$, étant donné que $\forall m \geq |u|, x_m = x_{m+|v|-1}$, il y a au plus $|v|$ possibilités de mots différents.

Ainsi $p_X(n)$ est borné car il y a au plus $|u| + |v|$ facteurs de tailles n différents dans X.

ii) Si $p_X(1) = 1$ alors $x_n = a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $a \in A$.

Supposons donc que $p_X(1) \geq 2$. La fonction $p_X(n)$ étant croissante, l'inégalité $p_X(n) \leq n$ ne peut se produire que si il existe $k \leq n$ tel que $p_x(k) = p_x(k+1)$. En effet, si il n'existe aucun tel k, alors $p_X(m)$ est strictement croissante sur $[1, n]$ et $p_X(n) \geq n + 1$ ce qui contredit nos hypothèses.

Soient $k < n$ tel que $p_x(k) = p_x(k+1)$ et $w \in \text{Fac}_k(X)$. Comme w est un facteur de X Il existe au moins une lettre a de A telle que $wa \in \text{Fac}(X)$. Or, vu que $p_x(k) = p_x(k+1)$, cette lettre est unique. Ainsi, si $\exists i, j \in \mathbb{N}$ tels que $X_{[i,i+k[} = X_{[j,j+k[}$, alors $x_{i+k} = x_{j+k}$. Et donc $\forall p \geq 0, x_{i+p} = x_{j+p}$ ce qui traduit que X est ultimement périodique de période $j - i$.

Pour conclure, de tels i et j existent car comme il ne peut exister que au plus $|A| * k$ mots de taille k sur A et que X est infini, alors un des facteurs devra se répéter.

$\square$

Grâce à ce théorème, il y a un type de mot infini particulier qui se profile naturellement. En effet, avec la négation du résultat, on en retire que si $p_X(n) > n$ pour tout n alors X est apériodique et on peut dès lors considérer les mots apériodiques de complexité minimale.

Chapitre 2

Des mots sturmiens et de leur facteurs

Comme nous l'avons démontré dans le résultat 1.3.3 de la section précédente, les mots ultimement périodiques sont précisément ceux dont la fonction de complexité factorielle est bornée. Les mots sturmiens qui sont au cœur de ce mémoire sont les mots apériodiques de complexité factorielle minimale. Nous présentons ci-dessous les rudiments de théorie les concernant et qui seront d'un usage constant dans la suite de ce travail. Ce chapitre débute de nouveau du cours de combinatoire des mots [6] [1] et est complété par deux livres considérés comme références [7] et [8].

2.1 Des préliminaires concernant les mots sturmiens

Définition 2.1.1.
Soit un mot infini $X \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Le mot X est dit *sturmien* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_X(n) = n+1$.

Remarque 2.1.2.
Dans la définition des mots sturmiens, préciser que ces mots sont construits sur un alphabet binaire peut être considéré comme superflu car pour ces mots, $p_X(1) = 2$. Cependant, notre définition des mots sturmiens permet de ne pas s'encombrer de mots construits sur des alphabets différents et de considérer tous les résultats à morphisme de renommage près. Ainsi, pour l'étude des mots sturmiens, nous allons donc désormais presque exclusivement travailler sur l'alphabet binaire $A = \{0,1\}$

Définition 2.1.3.
Soit un mot infini $X \in A^{\mathbb{N}}$, X est *récurrent* si $\forall w \in \mathrm{Fac}(X)$, w est un facteur de tout suffixe de X

Lemme 2.1.4.
Si X est un mot sturmien, alors il est récurrent.

Démonstration:
Soit X un mot sturmien et $w \in \mathrm{Fac}_n(X)$.

1. Ce travail étant un mémoire, les résultats vu en cours pour lesquels la structure de leur preuve n'est pas importante pour la suite ne seront pas prouvé et accompagné du symbole $(*)$

Par l'absurde, supposons qu'il existe Y un suffixe de X dans lequel $w \notin \mathrm{Fac}(Y)$. Or, dans ce cas, $p_Y(n) = p_X(n) - 1 = n$. Ce qui implique que Y et ainsi X sont tous deux ultimement périodiques. $\square$

Proposition 2.1.5.
Soit X un mot sturmien, alors $\mathrm{Fac}(X)$ contient exclusivement 00 ou 11.

Démonstration:
Soit X un mot sturmien. Le mot X est défini sur $\{0,1\}$, donc $p_X(1) = 2$. De plus, X étant récurrent et apériodique, les mots 01 et 10 sont dans $\mathrm{Fac}_2(X)$. En effet, le contraire impliquerait qu'une des lettres ne puisse être suivie que d'elle-même et donc que X serait ultimement périodique.

Ainsi, $p_X(2) = 3$ implique que, parmi les deux derniers mots possibles de taille 2 sur $\{0,1\}$ i.e. $\{00, 11\}$, il n'y en a qu'un seul qui est un élément de $\mathrm{Fac}_2(X)$. $\square$

2.2 Des caractérisations des mots sturmiens

Une autre particularité intéressante des sturmiens est qu'ils disposent de beaucoup de définitions équivalentes. Les 3 que nous verrons ici sont celles qui interviendront dans les preuves de la suite de ce travail.

2.2.1 Des facteurs spéciaux : une première caractérisation des mots sturmiens

La première caractérisation est celle par facteurs spéciaux et est un préambule indispensable lorsqu'on étudie les mots sturmiens.

Définition 2.2.1.
Soit $\mathcal{L}$ un langage sur un alphabet A.

i) Un mot $w \in \mathcal{L}$ est dit *spécial à droite* si $\forall a \in A, wa \in \mathcal{L}$.

ii) Un mot $w \in \mathcal{L}$ est dit *spécial à gauche* si $\forall a \in A, aw \in \mathcal{L}$.

Théorème 2.2.2.
Soit X un mot infini sur l'alphabet $\{0,1\}$. Le mot X est sturmien si et seulement si pour tout $n \geq 1$, il existe un unique facteur $w \in \mathrm{Fac}_n(X)$ qui est spécial à droite.

Démonstration:
Soit X un mot infini sur $\{0,1\}$.

- Considérons que $\forall n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathrm{Fac}_n(X)$ ne contienne qu'un unique facteur spécial à droite, noté w_n. L'existence de $w_0 = \varepsilon$ garantit $p_X(1) = 2$ par définition.

  De plus, le facteur spécial à droite w_n étant unique, on déduit qu'il y a $p_X(n) - 1$ facteurs de taille n qui s'étendent à droite de manière unique et un seul facteur qui s'étend de deux façons différentes. On obtient donc que

$$p_X(n+1) = p_X(n) - 1 + 2 = p_X(n) + 1.$$

Ainsi, on conclut par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, p_X(n) = n+1$ et que le mot X est donc sturmien.

- Considérons que X soit un mot sturmien et soient $w_1, \cdots, w_{n+1}$ les $n+1$ éléments distincts de $\text{Fac}_n(X)$. Vu que pour tout $i \in \{1, \cdots, n+1\}$, w_i est un facteur de X, il existe $a_i \in \{0, 1\}$ tel que $w_i a_i \in \text{Fac}(X)$.

  Nous procédons par l'absurde et traitons deux cas :

  (a) Si w_j et w_k sont deux facteurs spéciaux à droite de taille n, alors l'ensemble des facteurs de taille $n+1$ satisfait

  $$\left\{w_1 a_1, ., \widehat{w_j a_j}, ., \widehat{w_k a_k}, ., w_{n+1} a_{n+1}, w_j 0, w_j 1, w_k 0, w_k 1\right\} \subset \text{Fac}_{n+1}(X)$$

  Et ainsi contient au moins $n+3$ éléments.

  (b) Si $\text{Fac}_{n+1}(X)$ ne contient aucun facteur spécial à droite, alors $\text{Fac}_{n+1}(X)$ contient exactement le même nombre d'éléments que $\text{Fac}_n(X)$ car chaque élément de $\text{Fac}_n(X)$ s'étend de manière unique en un élément de $\text{Fac}_{n+1}(X)$.

  Chacun des deux arguments ci-dessus amène à un contradiction de la définition des mots sturmiens.

Il s'ensuit que X admet précisément un unique facteur spécial à droite de taille n quel que soit $n \in \mathbb{N}$. □

La notion de mots spéciaux permet de montrer que le mot de Fibonacci que l'on a décrit à (1.1) est un sturmien et que l'ensemble des mots sturmiens n'est donc pas vide.

Théorème 2.2.3 $(*)$**.**
Le mot de Fibonacci $F = \varphi^\omega(0)$ est un mot sturmien.

2.2.2 Des mots équilibrés

La deuxième caractérisation est celle par les mots équilibrés. Celle-ci nous permettra d'associer à chaque mot sturmien un nombre irrationnel : sa pente.

Définition 2.2.4.
On dit d'un ensemble E de mots finis sur $\{0, 1\}$ qu'il est *équilibré* si pour tout $x, y \in E$ de même taille $||x|_1 - |y|_1| \leq 1$.

Un mot infini X sur $\{0, 1\}$ est équilibré si $\text{Fac}(X)$ l'est.

La caractérisation des mots sturmiens par les mots équilibrés fait usage d'un résultat intermédiaire dans lequel nous utilisons les palindromes. Et, bien que la notion de palindrome colle avec celle de la langue française, nous allons la définir mathématiquement.

Définition 2.2.5.
Soit A un alphabet fini, un mot w de longueur n est un *palindrome* si :

$$\forall i \in \left\{1, \cdots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right\},\ w_i = w_{n-i+1}$$

Proposition 2.2.6 $(*)$.
Un mot $X \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas équilibré si et seulement s'il existe un palindrome $w \in \text{Fac}(X)$ tel que $0w0$ et $1w1$ soient dans $\text{Fac}(X)$.

Théorème 2.2.7 $(*)$.
Soit $X \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ un mot infini, X est sturmien si et seulement si X est apériodique et équilibré.

2.2.3 Des mots définis par leur pente

La propriété d'équilibre vue au point précédent est cruciale car c'est elle qui nous permet d'obtenir une nouvelle caractérisation des mots sturmiens. Celle-ci va faire le lien entre les sturmiens et les irrationnels de $[0,1]$ par l'intermédiaire de la fréquence des lettres dans nos mots.

Définition 2.2.8.
Soit w un mot fini de $\{0,1\}^+$. La pente de w est le réel $\pi(w) = \dfrac{|w|_1}{|w|}$ i.e. la proportion de 1 dans w.

Soit X un mot infini de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. La pente de X, si elle existe, est la limite

$$\lim_{n\to\infty} \pi(X_{[0,n[}) = \pi(X)$$

Grâce à cette notion, nous pouvons associer les ensembles équilibrés et donc les mots sturmiens avec leur pente.

Lemme 2.2.9.
Soit E un ensemble de mots finis sur $\{0,1\}$, E est équilibré si et seulement si, pour toute paire de mots non vides $w, v \in \text{Fac}(X)$, $|\pi(w) - \pi(v)| < \frac{1}{|w|} + \frac{1}{|v|}$.

<u>*Démonstration:*</u>

- Considérons d'abord que l'inégalité énoncée est vraie. Soient w, v deux mots de E de longueur n. Cela nous donne :

$$\left| \frac{|w|_1}{n} - \frac{|v|_1}{n} \right| < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \iff ||w|_1 - |v|_1| < 2$$

  Ce qui correspond à la définition d'être équilibré.

- Considérons maintenant que E est un ensemble équilibré. Soient $w, v \in E \setminus \{\varepsilon\}$. Si w et v sont de même longueur, le résultat tient par l'équivalence du point précédent. Supposons donc que $|w| > |v|$ et que $w = ut$ avec $|u| = |v|$.

Procédons par récurrence sur la taille de $|w| + |v|$. Le cas de base étant traité par le cas $|w| = 1 = |v|$, nous allons procéder à l'induction. Comme $|t| < |w|$, on obtient que

$$|\pi(t) - \pi(v)| < \frac{1}{|t|} + \frac{1}{|v|}$$

Et comme E est équilibré, $||u|_1 - |v|_1| \leq 1$ ce qui implique que $|\pi(u) - \pi(v)| \leq \frac{1}{|v|}$.
Et donc, on conclus par le fait que :

$$\begin{aligned}
\pi(w) - \pi(v) &= \frac{|u|_1 + |t|_1}{|w|} - \pi(v) = \frac{|u|}{|w|}\pi(u) + \frac{|t|}{|w|}\pi(t) - \pi(v)\left(\frac{|u| + |t|}{|w|}\right) \\
&= \frac{|u|}{|w|}(\pi(u) - \pi(v)) + \frac{|t|}{|w|}(\pi(t) - \pi(v)) \\
\implies |\pi(w) - \pi(v)| &< \frac{|u|}{|w|}\frac{1}{|u|} + \frac{|t|}{|w|}\left(\frac{1}{|v|} + \frac{1}{|t|}\right) = \frac{1}{|w|} + \left(\frac{|w| - |v|}{|w||v|} + \frac{1}{|w|}\right) = \frac{1}{|w|} + \frac{1}{|v|}
\end{aligned}$$

□

Ainsi, en considérant un mot infini X et la suite $(\pi(X_{[0,n[}))_n$ de la pente de ces préfixes, on obtient $\forall p, q \in \mathbb{N}, |\pi(X_{[0,p[}) - \pi(X_{[0,q[})| < \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Ce qui permet d'affirmer que la suite est de Cauchy et qu'elle converge donc vers une pente α. Nous allons donc montrer les caractéristiques de cette pente.

Proposition 2.2.10.
Soit X un mot infini équilibré de pente α. Si $w \in \mathrm{Fac}(X) \setminus \{\varepsilon\}$ alors $|\pi(w) - \alpha| \leq \frac{1}{|w|}$.

De plus, il est garanti d'avoir une des deux inégalités suivantes :

$$\alpha|w| - 1 < |w|_1 \leq \alpha|w| + 1, \forall w \in \mathrm{Fac}(X) \quad \text{ou} \quad \alpha|w| - 1 \leq |w|_1 < \alpha|w| + 1, \forall w \in \mathrm{Fac}(X)$$

Démonstration:
Soit X un mot infini équilibré, considérons la suite $(\pi(X_{[0,n[}))_n$. On obtient du lemme précédent que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|\pi(X_{[0,n[}) - \alpha| \leq \epsilon$ si $n > N$. Ainsi, de nouveau grâce au lemme, on récupère que :

$$|\pi(w) - \alpha| \leq |\pi(w) - \pi(X_{[0,n[})| + |\pi(X_{[0,n[}) - \alpha| < \frac{1}{|w|} + \frac{1}{n} + \epsilon \underset{\substack{n \to \infty \\ \epsilon \to 0}}{\to} \frac{1}{|w|}$$

Ensuite, si on suppose par l'absurde que les deux inégalité soit fausses, alors il existerait $w, v \in \mathrm{Fac}(X)$ tels que $\alpha|w| + 1 = |w|_1$ et $\alpha|v| - 1 = |v|_1$. Or cela impliquerait que :

$$|\pi(w) - \pi(v)| = \left|(\alpha + \frac{1}{|w|}) - (\alpha - \frac{1}{|v|})\right| = \frac{1}{|w|} + \frac{1}{|v|}$$

Ce qui contredis le lemme. □

Ce dernier résultat va permettre de rebondir sur une proposition qui fait intervenir la périodicité. Ceci mettra en lumière le caractère rationnel ou non de la pente d'un mot infini et permettra de conclure quant à la nature de la pente d'un mot sturmien.

Proposition 2.2.11.
Soit X un mot infini équilibré sur $\{0,1\}$. La pente α de X est rationnelle si et seulement si X est ultimement périodique.

Démonstration:

- Considérons d'abord qu'il existe $w, v \in \{0,1\}^*$ tels que $X = wv^\omega$. On retire de cette forme que :

  $$\pi(wv^n) = \frac{|wv^n|_1}{|wv^n|} = \frac{|w|_1 + n|v|_1}{|w| + n|v|} \underset{n\to\infty}{\to} \pi(v)$$

  Ainsi, la pente de X est égale à la pente du mot fini v qui est donc un rationnel.
- Considérons maintenant que la pente de X est rationnelle et puisse donc s'écrire $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}_0$. Supposons avoir l'inégalité de la proposition précédente : $\alpha|w| - 1 < |w|_1 \leq \alpha|w| + 1, \forall w \in \mathrm{Fac}(X)$. On obtient de cette égalité que si w est de longueur q, alors $p \leq |w|_1 \leq p+1$.

  De plus, le nombre de facteurs $w \in \mathrm{Fac}_q(X)$ avec $|w|_1 = p+1$ est fini. Sinon, il existerait un facteur $w = vut$ avec $|v| = q = |t|$ et $|v|_1 = q+1 = |t|_1$. Ce qui rend :

  $$2 + 2p + |u|_1 = |vut|_1 \leq 1 + \alpha(q + |u| + q) = 1 + 2p + \alpha|u| \implies |u|_1 \leq \alpha|u| - 1$$

  Ce qui contredit l'inégalité choisie. De plus, la conclusion reste identique avec l'autre inégalité de la proposition précédente au vu de la symétrie des deux.

  Ainsi, il existe un suffixe Y de X dans lequel tout les facteurs taille q sont tels qu'ils contiennent tous p fois la lettres 1. Soit $asb = r \in \mathrm{Fac}_{q+1}(Y)$ avec a, b deux lettres. On observe que $|as|_1 = |sb|_1$ et donc que $a = b$. Ceci exprime que pour tout $n \in \mathbb{N}, y_n = y_{n+q}$. Ainsi, Y est périodique et X est ultimement périodique

□

Théorème 2.2.12.
Soit X un mot sturmien, la pente de X existe et est irrationnelle.

Démonstration:
Soit X un mot sturmien. Étant donné que X est un mot infini équilibré, le résultat 2.2.9 garantit l'existence de sa pente. Et vu que X est apériodique, la proposition 2.2.11 nous indique que cette pente est irrationnelle. □

Exemple 2.2.13.
Reprenons le mot de Fibonacci F, et son morphisme $\varphi(.)$. Comme $\varphi(0) = 01$ et $\varphi(1) = 0$, on peut calculer que pour tout $n \geq 2$, $|f_n|_0 = |f_{n-1}|$ et $|f_n|_1 = |f_{n-1}|_0 = |f_{n-2}|$. Ainsi, la pente de

F qui existe au vu du théorème précédent est obtenue en calculant la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|f_n|_1}{|f_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|f_{n-2}|}{|f_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|f_n| - |f_{n-1}|}{|f_n|} = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{|f_{n-1}|}{|f_n|} = 1 - \frac{1}{\varphi} = \frac{\varphi^2 - \varphi}{\varphi^2} = \frac{1}{\varphi^2}$$

Ici φ représente également le nombre d'or. Et la valeur numérique de cette limite est obtenue comme suit.

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \implies \frac{f_{n+2}}{f_{n+1}} = 1 + \frac{f_n}{f_{n+1}} \underset{\lim n\to\infty}{\implies} a = 1 + \frac{1}{a} \implies a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Le théorème que nous venons de voir est important car c'est celui-là même qui pave la route vers l'intérêt de la racine carrée de mots sturmiens que nous étudierons plus tard. En effet, ce théorème attribue à chaque sturmien un irrationnel de $[0, 1]$. Cependant, un irrationnel n'est pas suffisant pour caractériser les sturmiens car si X est un mot sturmien de pente α alors au moins un des deux mots de $0X$ et $1X$ est aussi un mot sturmien de pente α. La pente va donc conditionner la répartition des lettres dans X mais c'est avec ce que nous appellerons l'origine que l'on va pouvoir distinguer les mots sturmiens de même pente.

2.2.4 Des mots mécaniques et de rotations

Définition 2.2.14.
Soit x un nombre réel

i) la partie entière de x, notée $[x]$, est l'entier défini par $\sup\limits_{n\in\mathbb{Z}, n\leq x} n$.

ii) la partie fractionnaire de x, noté $\{x\}$, est le réel défini par $x - [x]$.

Notons que la partie entière d'un nombre x est équivalente au plancher de ce nombre $\lfloor x \rfloor$. Et rappelons-nous aussi la notion de plafond de x, c'est-à-dire $\lceil x \rceil = \inf\limits_{n\in\mathbb{Z}, n\geq x} n$.

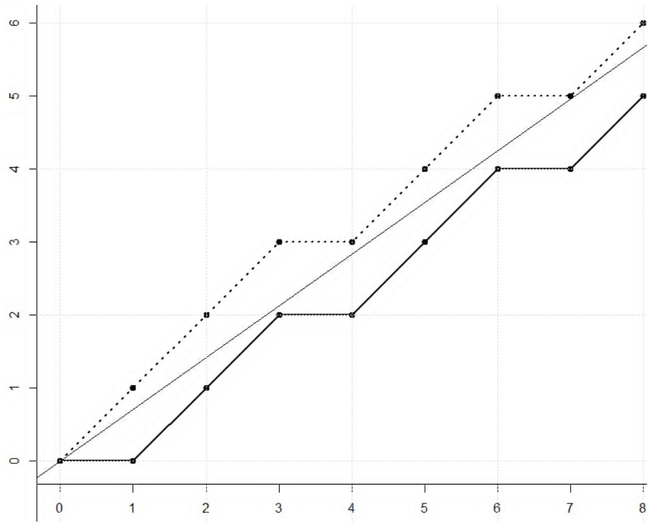
Définition 2.2.15.
Soit $\alpha \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$, et ρ un réel. On définit les deux mots suivants :

i) Le mot *mécanique inférieur* $S_{\alpha,\rho} : n \mapsto \lfloor \alpha(n + 1) + \rho \rfloor - \lfloor \alpha n + \rho \rfloor$.

ii) Le mot *mécanique supérieur* $S'_{\alpha,\rho} : n \mapsto \lceil \alpha(n + 1) + \rho \rceil - \lceil \alpha n + \rho \rceil$

Dans ces deux mots, nous nommerons donc α la pente et ρ l'origine. Cette terminologie vient de l'interprétation graphique des mots mécaniques.

Cette interprétation est comme suit. Si on considère les points $P_n = (n, \lfloor n\alpha \rfloor + \rho)$ et $P'_n = (n, \lceil n\alpha \rceil + \rho)$ et la droite $y = \alpha x + \rho$, on constate que les P_n sont les entiers les plus proches sous la droite et les P'_n par au-dessus. De plus, en reliant les couples P_n, P_{n+1} et P'_n, P'_{n+1}, les plateaux représentent la lettre 0 et les diagonales la lettre 1.



Les mots $S_{\frac{\sqrt{2}}{2},0} = 01101101\cdots$, $\quad S'_{\frac{\sqrt{2}}{2},0} = 11101101\cdots$ et la droite $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x$

Nous pouvons réduire l'ensemble de définition de ρ grâce à la remarque suivante : si les réels ρ et σ sont tels que $\{\rho\} = \{\sigma\}$ alors $S_{\alpha,\rho} = S_{\alpha,\sigma}$ et $S'_{\alpha,\rho} = S'_{\alpha,\sigma}$. En effet, si on dispose de tels ρ et σ alors $\sigma - \rho \in \mathbb{N}$ et

$$\begin{aligned}\lfloor \alpha(n+1)+\rho\rfloor - \lfloor \alpha n+\rho\rfloor &= \lfloor \alpha(n+1)+\rho\rfloor + (\sigma-\rho) - (\lfloor \alpha n+\rho\rfloor + (\sigma-\rho))\\ &= \lfloor \alpha(n+1)+\sigma\rfloor - \lfloor \alpha n+\sigma\rfloor\end{aligned}$$

Cette égalité vaut également pour les mots mécaniques supérieurs. Ainsi, nous pouvons considérer sans perte de généralité que ρ soit dans $[0,1[$.

Remarquons ensuite que pour des mêmes paramètres α et ρ les mots $S_{\alpha,\rho}$ et $S'_{\alpha,\rho}$ ne diffèrent que par un facteur de taille au plus 2. En effet, notons déjà que

$$\lfloor n\alpha+\rho\rfloor + 1 = \lceil n\alpha+\rho\rceil \iff n\alpha+\rho \notin \mathbb{N}$$

et que dans le cas contraire, $S_{\alpha,\rho}(n) = 0$ et $S'_{\alpha,\rho}(n) = 1$. Étant donné que α est irrationnel, il existe au plus un tel n. Et enfin, si $n > 0$, $S_{\alpha,\rho}(n-1) = 1$ et $S'_{\alpha,\rho}(n-1) = 0$.

Les mots mécaniques peuvent aussi être vus comme des rotations, et c'est cette définition qui nous sera centrale pour le reste de ce mémoire.

Prenons le tore de dimension 1, $\mathbb{T}^1$ que l'on identifie à $\mathbb{R}\,/\,\mathbb{Z}$ et à l'intervalle $[0,1[$. Soit α un angle, la rotation qui nous intéresse est l'application :

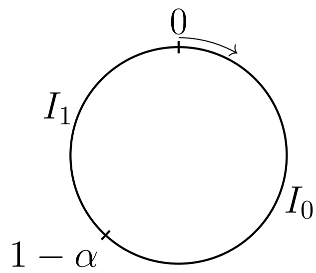
$$R_\alpha : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1 : x \mapsto x+\alpha \mod 1 = \{x+\alpha\}$$

Ensuite, remarquons que

$$
\begin{aligned}
& \lfloor \alpha(n+1)+\rho \rfloor = \lfloor \alpha n+\rho \rfloor + 1 \\
\iff & \lfloor \alpha(n+1)+\rho \rfloor = \lfloor \alpha n+\rho \rfloor + \{\alpha n+\rho\} - \{\alpha n+\rho\} + 1 \\
& \iff \{\alpha n+\rho\} = 1-\alpha+\alpha+\alpha n+\rho - \lfloor \alpha(n+1)+\rho \rfloor \\
& \iff \{\alpha n+\rho\} = 1-\alpha+\underbrace{\{\alpha(n+1)+\rho\}}_{\geq 0} \\
& \iff \{\alpha n+\rho\} \geq 1-\alpha
\end{aligned}
$$

En d'autres mots, $S_{\alpha,\rho}(n) = 1 \iff \{\alpha n+\rho\} \geq 1-\alpha$. De là, nous pouvons partitionner $[0,1[$ en deux intervalles :

$$I_0 = [0, 1-\alpha[\text{ et } I_1 = [1-\alpha, 1[$$



Le cercle de rotation d'angle $\frac{1}{\varphi^2}$ i.e. la pente du mot de Fibonacci

Ainsi, nous pouvons faire l'analogie entre les mots mécaniques et la notion suivante.

Définition 2.2.16.
Le *mot de rotations* $S_{\alpha,\rho}$ est défini de la façon suivante :

$$S_{\alpha,\rho}(n) = \begin{cases} 0 \text{ si } R_\alpha^n(\rho) \in I_0 \\ 1 \text{ si } R_\alpha^n(\rho) \in I_1 \end{cases}$$

Remarque 2.2.17.
Notons que pour la définition des mots de rotations, nous n'utilisons que $S_{\alpha,\rho}$. Cependant, nous avons vu que $S_{\alpha,\rho}$ et $S'_{\alpha,\rho}$ diffèrent à l'indice n uniquement si $n\alpha+\rho \in \mathbb{N} \iff \{n\alpha+\rho\} = 0$ et à l'indice $n-1$ si $n > 1$ ce qui implique que $\{(n-1)\alpha+\rho\} = 1-\alpha$. Ainsi, pour obtenir $S'_{\alpha,\rho}$, il suffit d'inverser le sens d'ouverture de I_0 et I_1. Il est donc important d'observer les deux cas pour considérer tous les mots sturmiens.

Théorème 2.2.18.
Soit X un mot infini sur $\{0,1\}$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

i) X est un mot sturmien,

ii) X est un mot équilibré apériodique,

iii) X est un mot mécanique à pente irrationnelle.

Démonstration:

Nous avons déjà démontré l'équivalence $(i) \iff (ii)$ dans le point 2.2.7. Avant de continuer, nous avons besoin d'un lemme en la formule de

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad y - x - 1 < \lfloor y \rfloor - \lfloor x \rfloor < y - x + 1 \tag{2.1}$$

Cette formule est vraie car $\lfloor y \rfloor - \lfloor x \rfloor = y - x \underbrace{- \{y\} + \{x\}}_{\in]-1,1[}$.

Pour montrer que (iii) implique (ii), nous avons besoin de $S_{\alpha,\rho}$ un mot mécanique inférieur avec $\alpha \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ et $\rho \in [0,1[$. Considérons aussi la fonction $h(\cdot)$ qui, à un facteur $w = S_{\alpha,\rho_{[n,n+q[}}$, associe l'entier $\lfloor \alpha(n+q) + \rho \rfloor - \lfloor \alpha n + \rho \rfloor$. Cet entier décrit le nombre d'unités franchies de la n à la $n+q$ rotation, c'est-à-dire le nombre de 1 dans w. Donc, grâce à (2.1), on récupère l'inégalité $\alpha q - 1 < h(w) < \alpha q + 1$. Cette inégalité implique que $\lfloor \alpha q \rfloor \leq h(w) \leq \lfloor \alpha q \rfloor + 1$ car $h(w)$ est un entier. Ainsi, on en déduit qu'à une longueur fixée q, le nombre de 1 dans un mot $w \in \mathrm{Fac}_{S_{\alpha,\rho}}(q)$ n'est compris qu'entre deux valeurs successives et que donc $S_{\alpha,\rho}$ est équilibré. On termine ce point par montrer que les deux concepts de pente coïncident. En effet, si on considère un préfixe $w \in \mathrm{Fac}_{S_{\alpha,\rho}}(q)$, on peut déduire que :

$$\begin{aligned}
\alpha q - 1 < h(w) < \alpha q + 1 \\
\iff -1 < h(w) - \alpha q < 1 \\
\iff \frac{-1}{q} < \frac{h(w)}{q} - \alpha < \frac{1}{q} \\
\iff \left| \frac{h(w)}{q} - \alpha \right| = \left| \frac{|w|_1}{|w|} - \alpha \right| < \frac{1}{q}
\end{aligned}$$

Ainsi, en faisant tendre q vers l'infini, on obtient que la pente des préfixes de X tend vers α et on peut donc affirmer que la pente de X, comme définie dans la section précédente, est α. Enfin, comme α est irrationnel, la proposition 2.2.11 nous indique que $S_{\alpha,\rho}$ est apériodique.

Pour compléter la caractérisation, prouvons que (ii) implique (iii). En effet, soit X un mot infini équilibré apériodique. Nous vîmes dans le théorème 2.2.12 que la pente de X existe et qu'elle est irrationnelle. Soient α cette pente et $(h_n)_n$ une suite telle que $h_n = |X_{[0,n[}|_1$. On obtient de cette suite que, pour tout réel σ :

$$h_n \leq \lfloor \alpha n + \sigma \rfloor \ \forall n \qquad \text{ou} \qquad h_n \geq \lfloor \alpha n + \sigma \rfloor \ \forall n$$

En effet, si on suppose le contraire par l'absurde, on aurait k et $k+l$ deux naturels tels que soit $h_k < \lfloor \alpha k + \sigma \rfloor$ et $h_{k+l} > \lfloor \alpha(k+l) + \sigma \rfloor$, soit $h_k > \lfloor \alpha k + \sigma \rfloor$ et $h_{k+l} < \lfloor \alpha(k+l) + \sigma \rfloor$. Le tout impliquant ensuite que soit $h_{k+l} - h_k \geq 2 + \lfloor \alpha(k+l) + \sigma \rfloor - \lfloor \alpha k + \sigma \rfloor > 1 + \alpha l$, soit $h_{k+l} - h_k < \alpha l - 1$. Ce qui est contradictoire avec l'équation (2.1) qui nous dit que $\alpha l - 1 < h_{k+l} - h_k < \alpha l + 1$.

Considérons à présent $\rho = \inf \{\sigma | h_n \leq \lfloor \alpha n + \sigma \rfloor \ \forall n\}$. On récupère de la proposition 2.2.10

que pour tout n, $\frac{h_n}{n} - \alpha < \frac{1}{n}$ et donc que $h_n < n\alpha + 1$. On peut donc supposer sans perte de généralité que $\rho < 1$

Ensuite, on observe que $h_n \leq \alpha n + \rho \leq h_n + 1$; sinon, il existerait un entier n_0 tel que $h_{n_0} + 1 < \alpha n_0 + \rho$ et en posant $\sigma := h_{n_0} + 1 - \alpha n_0$, on obtiendrait que $\sigma < \rho$ et que $\alpha n_0 + \sigma = h_{n_0} + 1 > h_{n_0}$ ce qui contredirait la minimalité de ρ.

Comme α est irrationnel, le réel $\alpha n + \rho$ ne peut être qu'un entier pour au plus une valeur de n. Ainsi, soit $h_n = \lfloor \alpha n + \rho \rfloor \, \forall n$ et $X = S_{\alpha,\rho}$, soit $\exists n_0, h_{n_0} + 1 = \alpha n + \rho$ et donc $h_n = \lceil \alpha n + \rho - 1 \rceil \, \forall n$ et $X = S'_{\alpha,\rho-1}$. □

2.3 Du langage des mots sturmiens et mots caractéristiques

2.3.1 Du langage des facteurs d'un mots sturmiens

Nous avons vu que dans les mots sturmiens, avoir la même pente ne garantit en rien que deux mots soient égaux. Cependant, les mots sturmiens de même pente partagent beaucoup de propriétés communes que nous allons explorer.

Proposition 2.3.1.
Soit X et Y deux mots sturmiens.

i) Si X et Y ont la même pente, alors $\mathrm{Fac}(X) = \mathrm{Fac}(Y)$.

ii) Si X et Y ont des pentes différentes alors l'ensemble $\mathrm{Fac}(X) \cap \mathrm{Fac}(Y)$ est fini.

Démonstration:
Soit X et Y deux mots sturmiens.

i) Soit α la pente commune de X et Y.

$$\forall w \in \mathrm{Fac}(X) : |\pi(w) - \alpha| < \frac{1}{|w|} \quad \text{et} \quad \forall v \in \mathrm{Fac}(Y) : |\pi(v) - \alpha| < \frac{1}{|v|}$$

On en déduit que l'ensemble $\mathrm{Fac}(X) \cup \mathrm{Fac}(Y) = E$ est équilibré car si w et v sont deux mots de cet ensemble :

$$|\pi(w) - \pi(v)| \leq |\pi(w) - \alpha| + |\alpha - \pi(v)| < \frac{1}{|w|} + \frac{1}{|v|}$$

Pour conclure, si on montre que $|E \cap \{0,1\}^n| \leq n+1$ pour tout n, alors on obtiendra que $\mathrm{Fac}(X) = E = \mathrm{Fac}(Y)$.

Montons donc, par récurrence, que $|E \cap \{0,1\}^n| \leq n+1 \; \forall n$. Pour $n = 0$, seul ε appartient au trois ensembles. Pour $n = 1$, seuls les deux lettres 0 et 1 appartiennent au trois ensemble. Et pour $n = 2$, vu que E est équilibré, 00 et 11 ne peuvent pas être tous deux dans E. Ensuite, pour l'induction, supposons par l'absurde que l'énoncé est faux, alors il existe n

tel que $|E \cap \{0,1\}^n| \leq n$ et $|E \cap \{0,1\}^{n+1}| > n+2$. Cependant, les éléments du premier ensemble sont chacun suffixes d'au moins un élément du deuxième. Par le principe des trous de pigeons, il doit donc exister deux mots distinct w, v dans $E \cap \{0,1\}^n$ tels que $1w, 0w, 1v, 0v \in E \cap \{0,1\}^{n+1}$ or si u est le préfixe commun de v et w alors les mots $1u1$ et $0u0$ sont dans E ce qui contredit le fait qu'il soit équilibré.

ii) Soient α la pente de X et β la pente de Y avec $\alpha < \beta$. Soit w un facteur de X tel que $(\beta - \alpha) \geq \frac{2}{|w|}$. Le mot w est aussi tel que $\pi(w) - \alpha > -\frac{1}{|w|}$ et donc on obtient :

$$|\pi(w) - \beta| = |\pi(w) - \alpha| + |\beta - \alpha| \geq \frac{-1}{|w|} + \frac{2}{|w|} = \frac{1}{|w|}$$

Ainsi, w ne peut pas être un facteur de Y. De façon symétrique, un facteur suffisamment grand de Y ne sera pas dans $\mathrm{Fac}(X)$.

□

Ce théorème nous permet de définir une nouvelle notation. Si α est un irrationnel de $[0,1]$, alors le langage $\mathcal{L}(\alpha)$ est le langage qui contient les facteurs des mots sturmiens de pente α.

Proposition 2.3.2.
Soit $\alpha \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$, $\mathcal{L}(\alpha)$ est clos par rapport à l'opération miroir.

Démonstration:
Soit $\tilde{L} = \{\tilde{w} : w \in \mathcal{L}(\alpha)\}$. L'ensemble $\tilde{L} \cup \mathcal{L}(\alpha)$ est équilibré du fait que pour tout mot w dans $\mathcal{L}(\alpha)$, $|w|_1 = |\tilde{w}|_1$. Ainsi, nous avons, identiquement au point (ii) de la proposition précédente, que $|(\tilde{L} \cup \mathcal{L}(\alpha)) \cap \{0,1\}^n| \leq n+1$. Or $|\tilde{L} \cap \{0,1\}^n| = n+1 = |\mathcal{L}(\alpha) \cap \{0,1\}^n|$, ce qui implique que $\mathcal{L}(\alpha) = \tilde{L}$. □

Nous allons maintenant observer les différences entre mots sturmiens de même pente mais d'origine différente et les liens que l'on peut faire entre ceux-ci.

Définition 2.3.3.
Sur l'ensemble des mots infinis sur $\{0,1\}$, nous définissons l'ordre lexicographique par la règle :

$$X < Y \text{ si } \exists n \in \mathbb{N} : x_i = y_i \forall i \in \{0, \cdots, n-1\} \text{ et } x_n = 0, y_n = 1.$$

Proposition 2.3.4.
Soit $\alpha \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$, si $0 \leq \rho, \rho' < 1$ sont deux réels, alors $S_{\alpha,\rho} < S_{\alpha,\rho'} \iff \rho < \rho'$.

Démonstration:
Par le lemme précédent, la suite $(\{\alpha n\})_n$ est dense dans $[0,1[$, et donc $\rho < \rho'$ si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}_0$ tel que $1 - \rho' < \{\alpha n\} < 1 - \rho$, ce qui est équivalent à $\lfloor \alpha n + \rho' \rfloor = 1 + \lfloor \alpha n + \rho \rfloor$. Si n est le plus petit naturel qui satisfait l'inégalité, alors $S_{\alpha,\rho}(n-1) = 0$ et $S_{\alpha,\rho'}(n-1) = 1$ et $S_{\alpha,\rho}(k) = S_{\alpha,\rho'}(k) \forall k < n$. □

Proposition 2.3.5.
Soient $0 < \alpha, \alpha' < 1$ deux irrationnels et ρ, ρ' deux réels, alors chacune de ces 3 égalités

$$S_{\alpha,\rho} = S_{\alpha',\rho'} \qquad S_{\alpha,\rho} = S'_{\alpha',\rho'} \qquad S'_{\alpha,\rho} = S'_{\alpha',\rho'}$$

implique que $\alpha = \alpha'$ et que $\rho \equiv \rho' \mod 1$.

<u>*Démonstration:*</u>
Soient α, α', ρ et ρ' tels qu'énoncés. Étant donné que deux mots égaux ont la même pente, toutes les égalités impliquent directement que $\alpha = \alpha'$.

De plus, par la proposition précédente et la définition 2.2.15, on déduit que $S_{\alpha,\rho} = S_{\alpha,\rho'}$ ou $S'_{\alpha,\rho} = S'_{\alpha,\rho'}$ implique que $\rho \equiv \rho' \mod 1$. Enfin, avec $S_{\alpha,\rho} = S'_{\alpha,\rho'}$, si $\alpha n + \rho'$ n'est pas un entier pour tout $n \geq 1$ alors $S'_{\alpha,\rho'} = S_{\alpha,\rho'}$ et la définition 2.2.15 permettent de conclure. Et s'il existe $n \geq 1$ tel que $\alpha n + \rho'$ soit un entier, alors $S'_{\alpha,\rho+(1+n)\alpha} = S_{\alpha,\rho'+(1+n)\alpha}$. Et donc on a bel et bien que $\rho \equiv \rho' \mod 1$ dans les 3 cas. □

Nous pouvons maintenant définir ce que l'on va appeler les mots caractéristiques. Ces mots sturmiens seront les modèles standards de mots d'une certaine pente.

Parmi les mots sturmiens de pente $\alpha \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$, ceux d'origine 0 sont le tremplin vers les mots caractéristiques. En effet, par leur définition 2.2.15 on remarque que

$$S_{\alpha,0}(0) = \lfloor \alpha 1 \rfloor - \lfloor \alpha 0 \rfloor = 0 \quad \text{et} \quad S_{\alpha,0}(0) = \lceil \alpha 1 \rceil - \lceil \alpha 0 \rceil = 1$$

Or, la remarque de cette même définition nous indique que $S_{\alpha,0}$ et $S'_{\alpha,0}$ ne diffèrent que par leur première lettre. On obtient donc que :

$$\left.\begin{aligned} S_{\alpha,0} &= 0S_{\alpha,\alpha} \\ S'_{\alpha,0} &= 1S'_{\alpha,\alpha} \end{aligned}\right\} \implies S_{\alpha,\alpha} = S'_{\alpha,\alpha}$$

Et nous allons donc utiliser ce mot particulier pour notre définition.

Définition 2.3.6.
Soit $\alpha \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$, le mot caractéristique de pente α est le mot sturmien

$$C_\alpha = S_{\alpha,\alpha} = S'_{\alpha,\alpha}.$$

Proposition 2.3.7.
Soit X un mot sturmien.

i) Soit $0X$ ou $1X$ est mot sturmien.

ii) Le mot X est caractéristique si et seulement si $0X$ et $1X$ sont des mots sturmiens.

<u>*Démonstration:*</u>
Soit X le mot sturmien de pente $\alpha \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ et d'origine ρ

i) Vu que $X = S_{\alpha,\rho}$, on obtient que $S_{\alpha,\rho-\alpha} = lX$ est également un mot sturmien pour une lettre $l \in \{0, 1\}$.

ii) - Considérons d'abord que X est le mot caractéristique $C_\alpha = S_{\alpha,\alpha} = S'_{\alpha,\alpha}$. On obtient que $0X = S_{\alpha,0}$ et que $1X = S'_{\alpha,0}$ sont tous deux des mots sturmiens.

- Considérons maintenant que $0X$ et $1X$ soient des mots sturmiens. Les mots $0X, 1X$ et X ont la même pente i.e. α. Notons les origines de respectivement $0X$ et $1X$ par ρ_0 et ρ_1. On déduit des suffixes $(0X)_{[1,\infty[} = X = (1X)_{[1,\infty[}$ que $\rho_0 + \alpha = \rho_1 + \alpha$ et donc, par la proposition précédente que $\rho_0 \equiv \rho_1 \mod 1$ et nous pouvons les fixer à $0 \leq \rho_0 = \rho_1 < 1$. Ainsi, on obtient que $0X = S_{\alpha,\rho_0}$ et $1X = S'_{\alpha,\rho_0}$. Supposons par l'absurde que $\rho_0 > 0$, On retire que :

  Dans $0X$, $0 = \lfloor \alpha + \rho \rfloor - \lfloor \rho \rfloor = \lfloor \alpha + \rho \rfloor$.

  Dans $1X$, $1 = \lceil \alpha + \rho \rceil - \lceil \rho \rceil = \lceil \alpha + \rho \rceil - 1$

  Et donc $\lfloor \alpha + \rho \rfloor = 0$ et $\lceil \alpha + \rho \rceil = 2$ implique que $1 > \alpha + \rho < 1$ ce qui est impossible.

  Ce qui nous donne que $\rho_0 = 0$ et $X = S_{\alpha,\alpha} = C_\alpha$.

□

Nous allons, grâce à cette proposition, lier les facteurs spéciaux à droite de n'importe quel mot sturmien avec son mot infini caractéristique associé.

Proposition 2.3.8.
Soit X un mot sturmien de pente α, l'ensemble des facteurs spéciaux à droite de X est exactement l'ensemble des miroirs des préfixes de C_α.

Démonstration:
Soit X un mot sturmien de pente α. par la proposition précédente. On sait que les mots infinis $0C_\alpha$ et $1C_\alpha$ sont sturmiens et ont α comme pente. De plus, par la proposition 2.3.1 sur les facteurs des sturmiens de même pente, on obtient que

$$\mathrm{Fac}(X) = \mathcal{L}(\alpha) = \mathrm{Fac}(C_\alpha) = \mathrm{Fac}(0C_\alpha) = \mathrm{Fac}(1C_\alpha).$$

Ainsi, pour chaque préfixe p de C_α, les mots $0p$ et $1p$ font partie de $\mathrm{Fac}(X)$. Et comme nous savons par la proposition 2.3.2 que $\mathcal{L}(\alpha)$ est clos sous l'application miroir, cela implique que $\tilde{p}$ est l'unique facteur spécial à droite de longueur p de $\mathrm{Fac}(X) = \mathcal{L}(\alpha)$. □

Revenons maintenant sur le préfixe du mot de Fibonacci.

Exemple 2.3.9.
Dans l'exemple [7, 2.1.1], on nous dit que dans F, pour tout n, le mot $\tilde{f_n}$ est spécial à droite. On obtient donc que f_n, qui est le préfixe de F, est spécial à gauche et donc que $\mathrm{Fac}(F) = \mathrm{Fac}(0F) = \mathrm{Fac}(1F)$. Ainsi, par le point (ii) de la proposition 2.3.7 , on déduit que F est le mot caractéristique de sa pente i.e.

$$F = C_{\frac{1}{\varphi^2}} = S_{\frac{1}{\varphi^2},\frac{1}{\varphi^2}}$$

2.3.2 D'un premier rappel sur les fraction continues : nombres irrationnels et (semi-)convergents

Bien que cette sous-section puisse sembler comme un encart hors de propos, la structure de la décomposition en fraction continue des nombres irrationnels conditionne également la totalité des résultats qui suivront. Il est donc primordial d'observer d'abord quelques premières propriétés de base.

Définition 2.3.10.
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ($a_0 \in \mathbb{Z}$ et $a_n \in \mathbb{N}$ $\forall n > 0$) une suite dit de *quotients partiels*. On construit ensuite la suite dite des *convergents* comme suit :

$$c_k = \frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_n}}}} \qquad (pgcd(p_n, q_n) = 1)$$

.

Et une fraction continue est définie par la limites, qui existe (voir 2.3.13), de ces convergents :

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}}$$

Lemme 2.3.11 (*).
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de quotients partiels, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Corollaire 2.3.12.
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de quotients partiels, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

i) on pose $p_{-1} = 1$ et $q_{-1} = 0$

ii) $p_{n+1} = a_{n+1}p_n + p_{n-1}$

iii) $q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}$

iv) $q_0 \leq q_1 < q_2 < \cdots$ et $\forall n \in \mathbb{N}_0, 2^{n-2} \leq q_n$

Proposition 2.3.13.
Pour toute suite de quotients partiels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la fraction continue $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \cdots]$ existe et est irrationnelle.

<u>*Démonstration:*</u>
Le lemme nous indique que $\begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et donc, en appliquant le déterminant, que $p_nq_{n-1} - q_np_{n-1} = (-1)^{n+1}$.

Donc, $\forall n \geq 1, \dfrac{p_n}{q_n} = \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}} + \dfrac{(-1)^n}{q_{n-1}q_n} \implies \dfrac{p_n}{q_n} = a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{(-1)^k}{q_k q_{k+1}}$ et ainsi la suite $(\dfrac{p_n}{q_n})_n$ converge

vers un réel x par le critère des séries alternées. En particulier, on dispose des inégalités :

$$c_0 < c_2 < \cdots < c_{2n} < \alpha < c_{2n+1} < \cdots < c_3 < c_1 \text{ et } \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{q_k q_{k+1}}\right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}$$

Ce qui peut aussi se traduire par $|q_n \alpha - p_n| < \frac{1}{q_n}$.

Supposons maintenant par l'absurde que $\alpha \in \mathbb{Q}$ i.e. $\alpha = \frac{c}{d}$ ($c \in \mathbb{N}$ et $d \in \mathbb{N}_0$). Cela implique que $|q_n \frac{c}{d} - p_n| < \frac{1}{q_n} \implies |q_n c - p_n d| < \frac{d}{q_n} \to 0$ (si $n \to \infty$). Or $q_n c - p_n d \in \mathbb{Z}$ et donc si n est suffisamment grand, alors $p_n d = q_n c \iff \frac{p_n}{q_n} = \frac{c}{d}$ ce qui est contradictoire vu que $q_n \to \infty$ et $pgcd(p_n, q_n) = 1$.

Et donc α appartient bien à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. □

Proposition 2.3.14 ($*$)**.**
Soit $(a_n)_n$ une suite de quotients partiels et $\alpha = \lim \frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \cdots]$. Alors, pour tout $n > 1$, $q \in \mathbb{N}_{\leq q_n}$ et $p \in \mathbb{N}$, si $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$:

i) $|q_n \alpha - p_n| < |q\alpha - p|$
ii) $|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| < |\alpha - \frac{p}{q}|$

Autrement dit, à dénominateur borné, les convergents sont la meilleur approximation de α.

En remplaçant les a_k par une variable $0 < l < a_k$ dans la définition des convergents, nous pouvons aussi définir les semi-convergents.

Définition 2.3.15.
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de *quotients partiels*, on définit les semi-convergents par :

$$\forall k \geq 2,\ 0 < l < a_k,\ c_{k,l} = \frac{p_{k,l}}{q_{k,l}} = \frac{p_{k-1}l + p_{k-2}}{q_{k-1}l + q_{k-2}}$$

Nous définissons également les ensembles $K(\alpha)$: les ensembles de paires (k, l) tels que $k \geq 2$ et $0 < l < a_k$. Mais aussi $K^+(\alpha)$ qui contient en plus les paires (k, a_k).

Nous pouvons apprendre de [9] que ces semi-convergents sont des fractions intermédiaires aux convergents pour approximer l'irrationnel dont ils sont issus.

Proposition 2.3.16.
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de quotients partiels et α la fraction continue qui en résulte, alors :

$$\forall (2k, l), (2k+1, h) \in K(\alpha) \text{ avec } k \geq 1,\ c_{2k-2} < c_{2k,l} < c_{2k} < \alpha < c_{2k+1} < c_{2k+1,h} < c_{2k-1}$$

Démonstration:
Soit $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \cdots]$ une fraction continue et soit $(k, l) \in K(\alpha)$. On calcule que

$$c_{k,l+1} - c_{k,l} = \frac{p_{k-1}(l+1) + p_{k-2}}{q_{k-1}(l+1) + q_{k-2}} - \frac{p_{k-1}l + p_{k-2}}{q_{k-1}l + q_{k-2}}$$

$$= \frac{(p_{k-1}(l+1) + p_{k-2})(q_{k-1}l + q_{k-2}) - (p_{k-1}l + p_{k-2})(q_{k-1}(l+1) + q_{k-2})}{(q_{k-1}(l+1) + q_{k-2})(q_{k-1}l + q_{k-2})}$$

$$= \frac{p_{k-1}q_{k-2} - p_{k-2}q_{k-1}}{(q_{k-1}(l+1) + q_{k-2})(q_{k-1}l + q_{k-2})}$$

$$= \frac{(-1)^k}{(q_{k-1}(l+1) + q_{k-2})(q_{k-1}l + q_{k-2})}$$

Ainsi le numérateur $(-1)^k$ nous indique que la suite

$$\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}, \frac{p_{k-1} + p_{k-2}}{q_{k-1} + q_{k-2}}, \frac{p_{k-1}2 + p_{k-2}}{q_{k-1}2 + q_{k-2}}, \cdots, \frac{p_{k-1}(a_k - 1) + p_{k-2}}{q_{k-1}(a_k - 1) + q_{k-2}}, \frac{p_k}{q_k}$$

est strictement croissante si k est paire et strictement décroissante si k est impaire. Ce qui nous permet de conclure. $\square$

Regardons l'exemple numérique de la pente de F.

Exemple 2.3.17.
Nous avons calculé précédemment que la pente du mot de Fibonacci est $\frac{1}{\varphi^2}$. De plus, comme $\varphi^2 = \varphi + 1$, on obtient que :

$$\frac{1}{\varphi^2} = \frac{1}{1+\varphi} = \frac{1}{1+1+\frac{1}{\varphi}} = \frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}}} = \cdots . = [0; 2, 1, 1, \cdots .] = [0, 2, \overline{1}]$$

Et donc on peut expliciter les premiers convergents :

$$c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{3}, c_3 = \frac{2}{5}$$

Et on peut remarque que, comme $a_n = 1$ pour tout $n \geq 2$ on obtient que $p_n = p_{n-1} + p_{n-2}$ et $q_n = q_{n-1} + q_{n-2}$ sont aussi des nombres de Fibonacci.

De plus dans ce cas particulier il n'y a pas de semi-convergent car pour tout $n \leq 2$, on obtient que $c_{n,1} = c_n$.

2.3.3 Des morphismes et mots standards

Dans cette section, le mot de Fibonacci est particulièrement important car nous allons prouver que tous les sturmiens sont obtenables par une suite de morphismes appliqués à F et par la même occasion définir les mots standards qui seront primordiaux dans la suite de ce travail.

Définition 2.3.18.
Notons les 3 morphismes suivants de $\{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$

$$\varphi : \begin{cases} 0 \mapsto 01 \\ 1 \mapsto 0 \end{cases} \quad , \quad E : \begin{cases} 0 \mapsto 1 \\ 1 \mapsto 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \theta_m : \begin{cases} 0 \mapsto 0^{m-1}1 \\ 1 \mapsto 0^{m-1}10 \end{cases} \quad (m \in \mathbb{N}_0)$$

Rappelons que φ est bien le morphisme de Fibonacci défini dans 1.2.13

Proposition 2.3.19.
Soit $m \in \mathbb{N}_0$, le morphisme θ_m est égal au morphisme $(\varphi \circ E)^{m-1} \circ E \circ \varphi \circ E$

Démonstration:
On peut initialement montrer que $\theta_1 = E \circ \varphi \circ E$. En effet,

$$E \circ \varphi \circ E : \begin{cases} 0 \mapsto 1 \mapsto 0 \mapsto 1 \\ 1 \mapsto 0 \mapsto 01 \mapsto 10 \end{cases} \quad = \theta_1$$

De plus, par récurrence, si $m \geq 2$ alors,

$$(\varphi \circ E)^{m-1} \circ E \circ \varphi \circ E = \varphi \circ E \circ \theta_{m-1} : \begin{cases} 0 \mapsto 0^{m-2}1 \mapsto 1^{m-2}0 \mapsto 0^{m-2}01 \\ 1 \mapsto 0^{m-2}10 \mapsto 1^{m-2}01 \mapsto 0^{m-2}010 \end{cases} \quad = \theta_m$$

□

Les morphismes définis ci-dessus interagissent de manière intéressante avec les mots sturmiens. Étudions maintenant leur impact sur la pente et l'origine de ces mots.

Lemme 2.3.20.
Soient $\alpha \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ et $0 \leq \rho < 1$ un réel. Alors $E(S_{\alpha,\rho}) = S'_{1-\alpha,1-\rho}$ et $E(S'_{\alpha,\rho}) = S_{1-\alpha,1-\rho}$.

Démonstration:
Soient $\alpha \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ et $0 \leq \rho < 1$ un réel. Soit $n \in \mathbb{N}_0$, étant donné que $\forall r \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{Z}$: $z + \lceil r \rceil = \lceil z + r \rceil$ et $-\lceil -r \rceil = \lfloor r \rfloor$ on obtient que :

$$\begin{aligned}
S'_{1-\alpha,1-\rho}(n) &= \lceil (1-\alpha)(n+1) + (1-\rho) \rceil - \lceil (1-\alpha)n + (1-\rho) \rceil \\
&= 1 + \lceil (1-\alpha)(n+1) - \rho \rceil - (1 + \lceil (1-\alpha)n - \rho \rceil) \\
&= (n+1) + \lceil -\alpha(n+1) - \rho \rceil - (n + \lceil -\alpha n - \rho \rceil) \\
&= 1 - (\lceil -\alpha n - \rho \rceil - \lceil -\alpha(n+1) - \rho \rceil) \\
&= 1 - (\lfloor \alpha(n+1) + \rho \rfloor - \lfloor \alpha n + \rho \rfloor) = 1 - S_{\alpha,\rho}(n)
\end{aligned}$$

L'autre égalité se prouve de façon symétrique. □

Proposition 2.3.21.
Soient $\alpha \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ et $0 \leq \rho < 1$. Alors $\varphi \circ E(s_{\alpha,\rho}) = S_{\frac{\alpha}{1+\alpha}, \frac{\rho}{1+\alpha}}$

<u>*Démonstration:*</u>
Soient $\alpha \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ et $0 \leq \rho < 1$. Soit un mot infini $X = a_0 a_1 \cdots a_n \cdots$. Notons la $k^{\text{ème}}$ occurrence de 1 à la position n pour laquelle $|a_0 \cdots a_n|_1 = k$ et $|a_0 \cdots a_{n-1}|_1 = k - 1$.

De là, si $X = S_{\alpha,\rho}$, alors $\lfloor \alpha(n+1) + \rho \rfloor = k$ et $\lfloor \alpha(n) + \rho \rfloor = k - 1$ et nous obtenons que

$$\begin{aligned} \alpha n + \rho < k \leq \alpha(n+1) + \rho \iff \alpha n < k - \rho \leq \alpha(n+1) \iff n < \frac{k-\rho}{\alpha} \leq n+1 \\ \iff n = \left\lceil \frac{k-\rho}{\alpha} - 1 \right\rceil \end{aligned}$$

Ensuite, posons $\varphi \circ E(S_{\alpha,\rho}) = b_0 b_1 \cdots b_m \cdots$. Comme chaque 1 de $S_{\alpha,\rho}$ est envoyé sur 01 et que les 0 restent inchangés, la $k^{\text{ème}}$ occurrence de 1 sera à b_{n+k}. Ainsi, dans $\varphi \circ E(s_{\alpha,\rho})$, par la transformation linéaire $(k,n) \mapsto (k, n+k)$, on obtient que :

$$\alpha(n+k) + \rho < k \leq \alpha(n+k+1) + \rho \iff n + k = \left\lceil \frac{k - \frac{\rho}{1+\alpha}}{\frac{\alpha}{1+\alpha}} - 1 \right\rceil$$

Et que donc $\varphi \circ E(s_{\alpha,\rho}) = S_{\frac{\alpha}{1+\alpha}, \frac{\rho}{1+\alpha}}$. □

Corollaire 2.3.22.
Soit $\alpha \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$, alors $E(C_\alpha) = C_{1-\alpha}$ et $\varphi \circ E(C_\alpha) = C_{\frac{\alpha}{1+\alpha}}$.

<u>*Démonstration:*</u>
Soit $\alpha \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$. Étant donné que $C_\alpha = S_{\alpha,\alpha} = S'_{\alpha,\alpha}$, on obtient que :

$$E(C_\alpha) = E(S_{\alpha,\alpha}) = S'_{1-\alpha,1-\alpha} = C_{1-\alpha} \quad \text{ et } \quad \varphi \circ E(C_\alpha) = \varphi \circ E(S_{\alpha,\alpha}) = S_{\frac{\alpha}{1+\alpha}, \frac{\alpha}{1+\alpha}} = C_{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

□

Proposition 2.3.23.
Soit $m \in \mathbb{N}_0$, alors $\theta_m(C_\alpha) = C_{\frac{1}{m+\alpha}}$.

<u>*Démonstration:*</u>
On obtient des résultats précédents que $E \circ \varphi \circ E(C_\alpha) = C_{1-\frac{\alpha}{1+\alpha}} = C_{\frac{1}{1+\alpha}}$. Et donc le cas $m = 1$ est vérifié.

Ensuite, par induction :

$$\varphi \circ E(C_{\frac{1}{m+\alpha}}) = C_{\frac{\frac{1}{m+\alpha}}{1+\frac{1}{m+\alpha}}} = C_{\frac{1}{\alpha+m+1}}$$

Et donc on conclut par récurrence. □

Corollaire 2.3.24.
Soit $\alpha, \beta \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ tels que $\alpha = [0; m_1, m_2, \cdots, m_i + \beta]$[2]. Alors $C_\alpha = \theta_{m_1} \circ \theta_{m_2} \circ \cdots \circ \theta_{m_i}(C_\beta)$

Remarque 2.3.25.
Nous avons vu dans la proposition 2.1.5 qu'un mot sturmien contenait exclusivement soit le facteur 00 soit le facteur 11. De plus, le corollaire 2.3.22 nous dit que le morphisme E, le codage qui inverse le rôle de 0 et 1 défini au point 2.3.18, agit sur C_α par $E(C_\alpha) = C_{1-\alpha}$.

La notion de pente d'un mot (2.2.8) étant la fréquence de 1 dans le mot, on infère que si $\alpha > \frac{1}{2}$ alors 11 est un facteur de C_α et si $\alpha < \frac{1}{2}$ alors 00 est un facteur de C_α. Dans la suite de ce travail, en accord avec la littérature [10, 4, 2], nous considérerons les mots sturmiens de pente $\alpha < \frac{1}{2}$ en sachant que tous les résultats tiennent en changeant le rôle de 0 et 1.

Un critère pour identifier si $\alpha = [0; a_1, a_2, \cdots] < \frac{1}{2}$ est de regarder si $a_1 > 1$. En effet, étant donné que si $\beta = [0; b_1, b_2, b_3, \cdots]$ et $\gamma = [0; b_2, b_3, \cdots]$ on obtient que $0 < \gamma < 1$ et donc que $\beta = \frac{1}{b_1 + \gamma} > \frac{1}{2} \iff b_1 + \gamma < 2 \iff b_1 = 1$.

Nous pouvons aussi noter que $[0; 1, a_2, a_3, \cdots] = 1 - [0; 1 + a_2, a_3, \cdots]$. En effet :

$$1 - [0; 1 + a_2, a_3, \cdots] = 1 - \frac{1}{1 + a_2 + \frac{1}{a_3 + \cdots}} = \frac{1 + a_2 + \frac{1}{a_3+\cdots} - 1}{1 + a_2 + \frac{1}{a_3+\cdots}} = \frac{a_2 + \frac{1}{a_3+\cdots}}{1 + a_2 + \frac{1}{a_3+\cdots}}$$
$$[0; 1; a_2, a_3, \cdots] = \frac{1}{1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3+\cdots}}} = \frac{a_2 + \frac{1}{a_3+\cdots}}{(a_2 + \frac{1}{a_3+\cdots}) + 1} = \frac{a_2 + \frac{1}{a_3+\cdots}}{1 + a_2 + \frac{1}{a_3+\cdots}}$$

Et donc à partir de maintenant les mots sturmiens auront leur pente α telle que $\alpha \in [0, \frac{1}{2}] \setminus \mathbb{Q}$ i.e. $\alpha = [0; a_1, a_2, \cdots]$ avec $a_1 \geq 2$. De plus, j'introduis la notation $\mathfrak{S}$ qui désigne *l'ensemble des mots sturmiens à majorité de 0* i.e. $X \in \mathfrak{S}$ si $X = S_{\alpha,\rho}$ avec $\alpha \in [0, \frac{1}{2}] \setminus \mathbb{Q}$ et $\rho \in [0, 1[$

Nous allons maintenant, en plusieurs étapes, montrer le lien entre les morphismes θ_m et la structure des mots caractéristiques, ce qui aboutira à la définition des mots finis standards comme fait dans [11, chapitre 9]. Et pour ce faire, nous posons comme notation, si $\alpha = [0; a_1, a_2, \cdots]$, que $\theta_n^\alpha = \theta_{a_1} \circ \theta_{a_2} \circ \cdots \circ \theta_{a_n}$ $(n \geq 1)$ et que $\theta_0^\alpha(0) = 0$ et $\theta_0^\alpha(1) = 1$.

Lemme 2.3.26.
Soit $\alpha = [0; a_1, a_2, \cdots] \in [0, \frac{1}{2}] \setminus \mathbb{Q}$, alors pour tout $n \geq 1$, $\theta_n^\alpha(1) = \theta_n^\alpha(0)\theta_{n-1}^\alpha(0)$.

2. Si $\alpha = [0; m_1, m_2, \cdots]$ et $\beta = [0; m_{i+1}, m_{i+2}, \cdots]$, alors nous faisons sens de la notation $\alpha = [0; m_1, \cdots, m_i + \beta]$

Démonstration:
Soient $\alpha = [0; a_1, a_2, \cdots]$ $(a_1 \geq 2)$ et $n \in \mathbb{N}_0$, calculons :

$$\begin{aligned}
\theta_n^\alpha(1) &= \theta_{a_1} \circ \theta_{a_2} \circ \cdots \circ \theta_{a_n}(1) \\
&= \theta_{a_1} \circ \theta_{a_2} \circ \cdots \circ \theta_{a_{n-1}}(\theta_{a_n}(1)) \\
&= \theta_{a_1} \circ \theta_{a_2} \circ \cdots \circ \theta_{a_{n-1}}(\theta_{a_n}(0)0) \\
&= (\theta_{a_1} \circ \theta_{a_2} \circ \cdots \circ \theta_{a_n}(0))(\theta_{a_1} \circ \theta_{a_2} \circ \cdots \circ \theta_{a_{n-1}}(0)) \\
&= \theta_n^\alpha(0)\theta_{n-1}^\alpha(0)
\end{aligned}$$

□

Théorème 2.3.27.
Soit $\alpha = [0; a_1, a_2, \cdots] \in [0, \frac{1}{2}] \setminus \mathbb{Q}$, alors $\theta_0^\alpha(0) = 0$, $\theta_1^\alpha(0) = 0^{a_1-1}1$ et pour tout $n \geq 2$, $\theta_n^\alpha(0) = (\theta_{n-1}^\alpha(0))^{a_n}(\theta_{n-2}^\alpha(0))$.

Démonstration:
Soit $\alpha = [0; a_1, a_2, \cdots]$ $(a_1 \geq 2)$. Les cas $n = 0, 1$ sont réglés par la définition 2.3.18 et celle de θ_0^α. Soit $n \geq 2$, et supposons par induction que le résultat soit vrai pour tout $m < n$. On en retire que :

$$\begin{aligned}
\theta_n^\alpha(0) &= \theta_{a_1} \circ \theta_{a_2} \circ \cdots \circ \theta_{a_n}(0) \\
&= \theta_{a_1} \circ \theta_{a_2} \circ \cdots \circ \theta_{a_{n-1}}(\theta_{a_n}(0)) \\
&= \theta_{a_1} \circ \theta_{a_2} \circ \cdots \circ \theta_{a_{n-1}}(0^{a_n-1}1) \\
&\underset{HR}{=} (\theta_{n-1}^\alpha(0))^{a_n-1}(\theta_{n-1}^\alpha(1)) \\
&\underset{2.3.26}{=} (\theta_{n-1}^\alpha(0))^{a_n-1}(\theta_{n-1}^\alpha(0))(\theta_{n-2}^\alpha(0)) \\
&= (\theta_{n-1}^\alpha(0))^{a_n}(\theta_{n-2}^\alpha(0))
\end{aligned}$$

□

Lemme 2.3.28.
Soit $\alpha = [0; a_1, a_2, \cdots] \in [0, \frac{1}{2}] \setminus \mathbb{Q}$, avec $\frac{p_n}{q_n} = [0; a_1, a_2, \cdots, a_n]$ on obtient :

i) $|\theta_n^\alpha(0)|_0 = q_n - p_n$ et $|\theta_n^\alpha(0)|_1 = p_n$

ii) $|\theta_n^\alpha(1)|_0 = q_n - p_n + q_{n-1} - p_{n-1}$ et $|\theta_n^\alpha(1)|_1 = p_n + p_{n-1}$

Démonstration:
Soient $\alpha = [0; a_1, a_2, \cdots] \in [0, \frac{1}{2}] \setminus \mathbb{Q}$, et $\frac{p_n}{q_n} = [0; a_1, a_2, \cdots, a_n]$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Cas $n = 0$: Vu que $\theta_0^\alpha(0) = 0$ et $\theta_0^\alpha(1) = 1$ et que par définition 2.3.11 $p_0 = 0 = q_{-1}$ et $p_{-1} = 1 = q_0$ on conclut.

Cas $n = 1$: Vu que $\theta_1^\alpha(0) = 0^{a_1-1}1$ et $\theta_1^\alpha(1) = 0^{a_1-1}10$ et que $p_1 = 1$ et $q_1 = a_1$, on conclut également.

Cas $n \geq 2$: Considérons que le résultat soit vrai pour tout $m < n$. Par le théorème précédent on sait que $\theta_n^\alpha(0) = (\theta_{n-1}^\alpha(0))^{a_n}(\theta_{n-2}^\alpha(0))$ et donc que :

$$|\theta_n^\alpha(0)|_0 = a_n|\theta_{n-1}^\alpha(0)|_0 + |\theta_{n-2}^\alpha(0))|_0 \underset{HR}{=} a_n(q_{n-1} - p_{n-1}) - (q_{n-2} - p_{n-2}) = q_n - p_n$$

$$|\theta_n^\alpha(0)|_1 = a_n|\theta_{n-1}^\alpha(0)|_1 + |\theta_{n-2}^\alpha(0))|_1 \underset{HR}{=} a_n p_{n-1} - p_{n-2} = p_n$$

Enfin, grâce au lemme 2.3.26, on sait que $\theta_n^\alpha(1) = \theta_n^\alpha(0)\theta_{n-1}^\alpha(0)$ et donc que :

$$|\theta_n^\alpha(1)|_0 = |\theta_n^\alpha(0)|_0 + |\theta_{n-1}^\alpha(0)|_0 = q_n - p_n + q_n - p_n$$

$$|\theta_n^\alpha(1)|_1 = |\theta_n^\alpha(0)|_1 + |\theta_{n-1}^\alpha(0)|_1 = p_n + p_{n-1}$$

□

Théorème 2.3.29.
Soit $\alpha = [0; a_1, a_2, \cdots] \in [0, \frac{1}{2}] \setminus \mathbb{Q}$. Alors, pour tout $n \geq 1$, le mot $\theta_n^\alpha(0)$ est le préfixe de C_α de taille q_n.

Démonstration:
Soient $\alpha = [0; a_1, a_2, \cdots] \in [0, \frac{1}{2}] \setminus \mathbb{Q}$ et $n \in \mathbb{N}_0$. Étant donné que, par le corollaire 2.3.24, on obtient qu'il existe $\beta \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ tel que $C_\alpha = \theta_n^\alpha(C_\beta)$. Or C_β commence soit par 0 soit par 1, donc soit $\theta_n^\alpha(0)$ soit $\theta_n^\alpha(1)$ est préfixe de C_α. Cependant, le lemme 2.3.26 montre que $\theta_n^\alpha(0)$ est un préfixe de $\theta_n^\alpha(1)$. Ainsi, dans les deux cas, on obtient que $\theta_n^\alpha(0)$ est un préfixe de C_α et le lemme précédent nous indique que c'est le préfixe de longueur q_n. □

Corollaire 2.3.30.
Soit $\alpha = [0; a_1, a_2, \cdots] \in [0, \frac{1}{2}] \setminus \mathbb{Q}$, alors $\lim_{n\to\infty} \theta_n^\alpha(0) = C_\alpha$.

Proposition 2.3.31.
Si C est un mot caractéristique et F le mot infini de Fibonacci, alors C est égal à la limite suivante :

$$C = \lim_{n\to\infty} g_1 \circ g_2 \circ \cdots \circ g_n(F) \qquad (g_i \in \{\varphi, E\} \ \forall i).$$

Démonstration:
Soit $\alpha = [0; a_1, a_2, \cdots]$ la pente de C, un irrationnel entre 0 et 1. On tire du théorème 2.3.29 que $C = \lim_{n\to\infty} \theta_{a_1} \circ \cdots \circ \theta_{a_n}(0)$. Or, vu que les θ_m sont des combinaisons de E et φ, on obtient donc que $C = \lim_{n\to\infty} g_1 \circ \cdots \circ g_n(0)$ $(g_i \in \{E, \varphi\})$. Et donc, étant donné que F commence par 0, on conclut que $C = \lim_{n\to\infty} g_1 \circ \cdots \circ g_n(F)$ □

La suite de résultats que nous venons de voir met en exergue une suite de mots finis intéressants, la suite $(\theta_n^\alpha(0))_{n\geq 1}$. Cette suite est intéressante car les termes sont tous des préfixes de C_α et qu'ils seront d'une grande utilité dans le chapitre sur la racine carrée. Nous allons donc les définir et les nommer proprement.

Définition 2.3.32.
Soit $\alpha = [0; a_1, a_2, \cdots] \in [0, \frac{1}{2}] \setminus \mathbb{Q}$, les *mots standards* s_n^α [3] sont les mots tels que :

$$s_{-1}^\alpha = 1, \quad s_0^\alpha = 0, \quad s_1^\alpha = 0^{a_1-1}1 \quad \text{et} \quad s_n^\alpha = (s_{n-1}^\alpha)^{a_n} s_{n-2}^\alpha \ (n \geq 2)$$

Les *mots semi-standards*, non sans rappeler les semi-convergents (cf. 2.3.15) sont les mots tels que :

$$s_{k,l}^\alpha = (s_{k-1}^\alpha)^l s_{k-2}^\alpha \ (k \geq 2 \text{ et } 1 \leq l < a_k)$$

L'ensemble des mots standards de pente α sera noté $St(\alpha)$ et l'ensemble des mots standards et semi-standards, décrits (semi-)standards, de pente α sera noté $St^+(\alpha)$.

Une petite propriété des mots standards qui nous sera utile plus tard est que deux mots standards successifs commutent "presque".

Proposition 2.3.33.
Soit $\alpha \in [0, \frac{1}{2}] \setminus \mathbb{Q}$, alors pour tout $k \geq 0$, $s_k s_{k+1} = \Gamma(s_{k+1} s_k)$ (avec Γ l'application qui échange les deux dernières lettres d'un mot suffisamment grand).

<u>*Démonstration:*</u>
Soit $\alpha \in [0, \frac{1}{2}] \setminus \mathbb{Q}$, on observe que :

$$s_0 s_1 = 00^{a_1-1}1 = \Gamma(0^{a_1-1}10) = \Gamma(s_1 s_0).$$

Ensuite, par récurrence sur k, on calcule que :

$$s_k s_{k+1} = s_k (s_k)^{a_{k+1}} s_{k-1} = (s_k)^{a_{k+1}} s_k s_{k-1} \underset{HR}{=} (s_k)^{a_{k+1}} \Gamma(s_{k-1 s_k}) = \Gamma((s_k)^{a_{k+1}} s_{k-1 s_k}) = \Gamma(s_{k+1} s_k).$$

□

3. Si il n'y a aucune ambiguïté sur α, alors nous noterons parfois les mots standards par simplement s_n

Chapitre 3

Des α-répétitions

Les α-répétitions [1] sont la première grande étape dans la construction des racines. En effet, le concept de racine ne peut exister que s'il existe la notion inverse de puissance. Et ces α-répétitions représentent donc ces puissances qui factoriseront les mots infinis, dont les sturmiens, en une suite infinie de mots finis périodiques avec une répétition commune auxquels nous appliquerons plus tard une racine. Ce chapitre est une exploration de la thèse de doctorat de K. Saari [3, Chapitre 5] et du papier publié qui en résulte [10] car ces deux références développent des détails différents.

3.1 Des mots partout α-répétitifs

Définition 3.1.1.
Soit A un alphabet fini et $w \in A^+$ un mot fini non vide de période p.

i) Le mot w est une *α-répétition* pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}^+$ si $\frac{|w|}{p} \geq \alpha$.

ii) Le mot w est une *α^+-répétition* pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}^+$ si $\frac{|w|}{p} > \alpha$ ou de façon équivalente si w est une $(\alpha + \epsilon)$-répétition pour un $\epsilon > 0$.

iii) Un mot w est une *α-répétition minimale* (resp. α^+) si c'est une α-répétition (resp. α^+) et qu'aucun préfixe propre de w n'est une α-répétition (resp. α^+).

iv) *Une répétition* d'un mot $w = \underbrace{t \cdots t}_{n \text{ fois}} s$ est le rationnel $\gamma = \frac{|w|}{|t|} = n + \frac{|s|}{|t|}$. Dans ce cas, on écrit $w = t^\gamma$

Dans la suite de ce travail, le qualificatif de α-répétition sera "α-répétitif".

Exemple 3.1.2.
Dans l'alphabet $\{0, 1\}$, les mots 101101 et 00010001 sont deux mots périodiques respectivement de période 3 et 4, mais ce sont tous deux des 2-répétitions (i.e. des carrés).

1. Les α des α-répétitions et les α des pentes de mots infinis n'ont rien à voir. Cependant ce clash de notations "usuelles" est peu important car ce chapitre est l'unique qui utilise les deux termes de façon générique en même temps. De plus, ce chapitre ne contient pas de résultat nécessitant de mentionner la pente.

Remarques 3.1.3.

i) Étant donné que la période d'un mot est plus petite que sa longueur, α sera toujours plus grand que 1.

ii) S'il existe deux réels $1 \leq \alpha < \beta$ tels qu'un mot w soit une β-répétition alors $\frac{|w|}{p} \geq \beta \geq \alpha$, et w est donc aussi par définition une α-répétition.

Définition 3.1.4.

Soit A un alphabet fini. Un mot infini $X \in A^{\mathbb{N}}$ est *partout α-répétitif* s'il existe un entier $N \geq 1$ tel que tout facteur de X de longueur N possède un préfixe α-répétitif.

Proposition 3.1.5.

Soit A un alphabet fini. Un mot infini $X \in A^{\mathbb{N}}$ est partout α-répétitif si et seulement si une α-répétition commence à chaque position de X et que parmi celles-ci, l'ensemble des α-répétitions minimales est fini.

Démonstration:

Soient A un alphabet fini et $X \in A^{\mathbb{N}}$.

- Considérons que X une α-répétition et soit N la longueur pour laquelle chaque facteur de taille N possède un préfixe α-répétitif.

  Si $m \in \mathbb{N}$ est tel que $u_m = X_{[m;m+N[}$, alors u_m possède un préfixe v_m α-répétitif. Ainsi, pour toute position m, soit $X_{[m;m+|v_m|[} = v_m$ une α-répétition minimale soit c'est un des préfixes de v_m qui sera minimal. De plus, l'ensemble des α-répétitions minimales est fini car il contient au plus $|A^N|$ éléments .
- Considérons maintenant qu'à chaque position de X, il commence une α-répétition. Et comme Λ, l'ensemble des α-répétitions minimales dans X est fini, cela implique que $N = \max_{u \in \Lambda} |u|$ est un entier qui convient à la définition de partout α-répétitif car chaque facteur démarre avec une α-répétition de longueur plus petite que N.

$\square$

Remarque 3.1.6.

Sans précisions, les définitions et la proposition que nous venons de voir peuvent sembler être ambiguës. En effet, par exemple, le mot 01010101 est de période 2 mais aussi de période 4 et donc la répétition de ce mot peut respectivement être 4 ou 2.

Cependant, si nous généralisons, on observe directement que si $p < q$ sont deux périodes d'un même mot $w = u^p = v^q$, alors pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $|v^r| < |u^r|$. Ainsi, si w est un mot α-répétitif alors l'α-répétition minimale sera toujours le plus petit multiple possible de la plus petite répétition de w. Ce constat nous amène à une nouvelle définition.

Définition 3.1.7.

Soit A un alphabet fini et $w \in A^+$ un mot fini non vide. La *répétition minimale* de w est celle pour laquelle la période est la plus petite parmi celle de w.

Ainsi, par abus de langage, nous dirons que LA répétition de w est en fait la répétition minimale.

Remarque 3.1.8.
En tant que notation, nous adresserons les mots partout 2-répétitifs en tant que carré-plein et les 2+ en tant que chevauchement-plein.

3.2 De la restrictions des valeurs de α

La nature même des mots infinis partout α-répétitifs va conditionner des restrictions sur les valeurs de α. Et ici, le nombre d'or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ va jouer un rôle pivot du fait que $\varphi^2 = \varphi + 1$ ce qui implique, vu que $\cdot^2$ est convexe sur $\mathbb{R}^+$, que :

$$\forall a < \varphi, a^2 < a + 1 \ \text{ et } \ \forall b > \varphi, b^2 > b + 1$$

Nous allons maintenant, en plusieurs résultats, montrer qu'un mot partout $\varphi + 1$-répétitif est ultimement périodique.

Lemme 3.2.1.
Soient A un alphabet fini, $q < p < |w|$ deux naturels et $w \in A^*$ tels que w soit périodique de périodes p et q. Alors le préfixe de taille $|w| - q$ du mot w est de période $p - q$.

Démonstration:
Soient A, p, q et w tels qu'énoncés. Vu que w est de période p, pour tout $1 \leq i \leq |w| - p$, $w_i = w_{i+p}$. Et du fait que $1 \leq i \leq |w| - p \implies 1 \leq i - q + p \leq |w| - q$ et que w est de période q, on obtient $w_{i+p} = w_{i+p-q}$ pour tout $i \leq |w| - p$. Ainsi,

$$w_i = w_{i+p-q} \quad \forall i \in \{1, \cdots, |w| - p\}$$

$\square$

Lemme 3.2.2.
Soient A un alphabet fini, $w, v \in A^+$ et $\rho, \sigma \in \mathbb{Q}_0^+$ tels que $\varphi < \rho < \sigma$. Si $w^\rho = v^\sigma$ alors $\exists u \in A^+, \varphi + 1 < \tau \in \mathbb{Q}_0^+$ tels que u^τ soit préfixe de w^ρ.

Démonstration:
Soient A, w, v, σ, ρ tels qu'énoncés. Dénotons $t = w^\rho = v^\sigma$.

Cas $\sigma \geq \rho + 1$: Dans ce cas, en posant $u = v$ et $\tau = \sigma$ et on obtient $\tau = \sigma \geq \rho + 1 > \varphi + 1$.
Cas $\sigma < \rho + 1$: En posant $|w| = p$ et $|v| = q$, notons d'abords que $\rho < \sigma$ implique que $q < p$. On obtient aussi que

$$|t| = p\rho = q\sigma < q(\rho + 1).$$

Ensuite, comme mentionné dans l'introduction de la section, $\rho > \varphi \implies \rho^2 > \rho + 1$. Ce qui nous amène au équivalence suivantes :

$$\begin{aligned}
&p\rho < q\rho^2 \\
\Longrightarrow\ &p - q\rho < 0 \\
\Longleftrightarrow\ &p - q\rho + (p\rho - q) < (p\rho - q) \\
\Longleftrightarrow\ &(p - q)(\rho + 1) < (p\rho - q)
\end{aligned}$$

Par définition, le mot t est périodique de périodes p et q et ainsi, par le lemme précédent, on obtient que s, le préfixe de taille $|t| - q$ de t est de période $p - q$. Ainsi, en posant τ comme étant la répétition de s, on obtient :

$$\begin{aligned}
\tau &= \frac{|u|}{p-q} = \frac{|t| - q}{p-q} = \frac{p\rho - q}{p-q} \\
&> \frac{(p-q)(\rho+1)}{p-q} = \rho + 1
\end{aligned}$$

Et donc, il existe $u \in A^+$ tel que $s = u^\tau$ est un préfixe de t avec $\tau > \varphi + 1$. $\square$

Proposition 3.2.3.
Soit A un alphabet fini. Si $X \in A^{\mathbb{N}}$ est un mot infini partout $(\varphi + 1)$-répétitif et que $r(i)$ est la période de la $(\varphi + 1)$-répétition minimale à la position i de X, alors on obtient l'inégalité

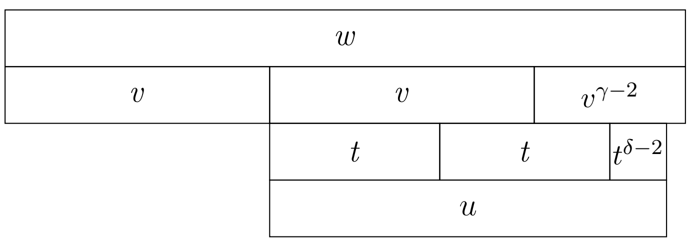
$$r(i + r(i)) \geq r(i).$$

Cette proposition nous indique que dans un mot infini partout $(\varphi + 1)$-répétitif, chaque $(\varphi + 1)$-répétition minimale qui démarre après la première période de la précédente est plus grande que celle-ci.

Démonstration:
Soient A un alphabet fini et $X \in A^{\mathbb{N}}$ un mot infini partout $(\varphi + 1)$-répétitif. Soit i un naturel et posons w la $(\varphi + 1)$-répétition minimale qui démarre à la position i dans X. Soient $v \in A^+$ et $\gamma > \varphi + 1$ tels que $w = v^\gamma$ et $|v| = r(i)$. L'inégalité $\gamma > \varphi + 1$ est stricte car la répétition d'un mot fini est rationnelle par la définition 3.1.1.

Posons u comme étant la $(\varphi + 1)$-répétition minimale qui démarre à la position $i + r(i)$ et soient $t \in A^+$ et $\delta > \varphi + 1$ tels que $u = t^\delta$ et $|t| = r(i + r(i))$.

Par minimalité, $\gamma, \delta < \varphi + 2$ car sinon on aurait que $v^{\gamma-1}$ et $t^{\delta-1}$ seraient aussi des $(\varphi + 1)$-répétitions. Ce qui est contradictoire.



Comme ils commencent à la même position (voir la figure) , soit v est préfixe de $t^{\delta-1}$ soit $t^{\delta-1}$ est préfixe de v. Or si v est un préfixe de $t^{\delta-1}$ alors v est également un préfixe propre de $u = t^{\delta}$ ce qui contredit la minimalité. Ainsi $t^{\delta-1}$ est préfixe de v et donc il existe un rationnel $\sigma < \delta$ tel que $v^{\gamma-1} = t^{\sigma}$.

Supposons maintenant par l'absurde que $r(i + r(i)) < r(i)$. Comme $\varphi < \gamma - 1 < \sigma < \delta$, par le lemme précédent, les mots v^{γ} et $v^{\gamma-1}$ ont un préfixe de la forme s^{τ} avec $\tau \geq 1+(\gamma-1) > \varphi+1$ ce qui contredit de nouveau la minimalité de w. □

Lemme 3.2.4 ([2]).
Soient A un alphabet fini, $X \in A^{\mathbb{N}}$ partout $(\varphi + 1)$-répétitif et G l'ensemble fini des $(\varphi + 1)$-répétitions minimales de X telles que si $g \in G$ alors $|g| \geq |h|$ pour toute $(\varphi + 1)$-répétition minimale h. Si p est un préfixe période de $w \in G$ alors p n'est préfixe d'aucun autre élément de G.

Démonstration:
Soient A, X, G, w et p tels qu'énoncés. Supposons qu'il existe $v \in G$ de préfixe période q tel que p soit aussi préfixe de v. Discutons de la longueur de q.

Cas $|p| = |q|$: On obtient que $w = v$ et on conclut.

Cas $|p| < |q|$: On obtient que si

$$\varphi + 1 \leq \frac{|v|}{|q|} = \frac{|w|}{(|q| - |p|) + |p|} < \frac{|w| - (|q| - |p|)}{|p|}$$

alors le préfixe de taille $|w| - (|q| - |p|)$ de w est également une $\varphi + 1$ répétition ce qui contredis la minimalité de w.

Montrons maintenant que la deuxième inégalité est vraie. En effet, si nous posons $\Delta = |q| - |p| \geq 1$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{|w|}{\Delta + |p|} < \frac{|w| - \Delta}{|p|} \\
\iff &|w||p| < |w||p| + |w|\Delta - |p|\Delta - \Delta^2 \\
\iff &0 < (|w| - |p|) - \Delta)\Delta \\
\iff &0 < |w| - |p| - \Delta = |v| - |p| - (|q| - |p|) = |v| - |q|
\end{aligned}$$

Ce qui est toujours vrai vu que v se répète au moins $\varphi+1 > 2$ fois et que donc $|v| > 2|q|$.

Cas $|p| > |q|$: Ce cas se règle comme le précédent en inversant les rôles de w et v.

□

Théorème 3.2.5.
Soit A un alphabet fini, si $X \in A^{\mathbb{N}}$ est partout $(\varphi + 1)$-répétitif alors X est ultimement périodique.

2. Ce lemme neuf clarifie un argument du théorème suivant non détaillé dans [3] et qui ne semble pas trivial.

Démonstration:
Soient A un alphabet fini et $X \in A^{\mathbb{N}}$ un mot infini partout $(\varphi+1)$-répétitif. On sait de la proposition 3.1.5 que l'ensemble des facteurs $(\varphi+1)$-répétitifs minimaux de X est fini. Dénotons le plus long de ces facteurs par w et sa période par N. Soit i la première position où w démarre, on obtient donc que $r(i) = N$. Par la proposition précédente, $r(i+kN) = r(i) = N$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ car il n'y a pas de $(\varphi+1)$-répétition plus grande parmi les facteurs de X. De plus, on peut écrire w comme étant v^ρ avec $|v| = N$ et $\rho > \varphi+1$ et ainsi, du fait que $\rho > 2$, la $\varphi+1$ répétition qui commence à la position $i+N$ possède v comme préfixe. Et donc le lemme précédent nous indique que cette $\varphi+1$ répétition est w. Nous concluons par induction car si w occurre à la position $i+kN$ alors il occurre aussi à la position $i+(k+1)N$ ce qui traduit le fait que X est un mot ultimement périodique de période v. $\square$

Nous savons donc qu'il n'existe aucun mot infini apériodique qui est une α-répétition pour tout $\alpha > \varphi+1$. Cependant, nous pouvons garantir l'existence de mots partout α-répétitifs "minimaux" pour tout $1 \leq \alpha < \varphi+1$. Nous allons donc d'abord expliciter ce nouveau concept de minimalité avant de prouver ce résultat.

Définition 3.2.6.
L'application $M(.) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{N}$ est celle qui associe à un α le plus petit $k \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe un mot infini apériodique et partout α-répétitif avec k distinctes α-répétition minimales.

Un mot infini partout α-répétitif est dit optimal s'il possède exactement $M(\alpha)$ α-répétition minimales distinctes.

Théorème 3.2.7.
Soit α un réel tel que $1 \leq \alpha < \varphi+1$. Il existe un mot infini partout α-répétitif optimal sur $A = \{0,1\}$.

Démonstration:
Soit X un mot infini partout α-répétitif apériodique sur un alphabet fini B. On peut considérer à codage près que $B \cap \{0,1\} = \emptyset$. Pour chaque $b \in B$ on définit le morphisme :

$$\tau_b : B^* \to \{0,1\}^* : a \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } a = b \\ 0 \text{ si } a \in B \setminus \{b\} \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $b \in B$, $\tau_b(X)$ est un mot infini dans $\{0,1\}$. Et comme τ_b est un codage, $\forall i,j \in \mathbb{N}, x_i = x_j \implies \tau_b(x_i) = \tau_b(x_j)$, ce qui implique que τ_b préserve la périodicité et que donc $\tau_b(X)$ est partout α-répétitif. De plus, le nombre d'α-répétitions minimales est au plus celui de X car plusieurs lettres sont envoyées sur 0.

Enfin, $\exists b \in B$ tel que $\tau_b(X)$ soit apériodique. Sinon, le plus petit commun multiple des périodes de tous les $\tau_b(X)$ serait la période de X lui-même, or X est apériodique. $\square$

3.3 De la définition générique des α-racines

En réfléchissant à la nature de la racine carrée des mots sturmiens, je me suis demandé si d'autres racines étaient possibles. Après exploration, ma conclusion étant oui, nous définissons donc les α-racines de façon générique.

Remarque 3.3.1.
Si X est un mot infini α-répétitif, alors sa décomposition en α-répétitions minimales est unique. En effet, si $X = X_1X_2X_3\cdots = Y_1Y_2Y_3\cdots$ et $|X_1| \neq |Y_1|$, alors l'un est préfixe de l'autre, ce qui contredit la minimalité. Et donc, de proche en proche, on obtient que la décomposition est unique.

Notons que le caractère optimal de X n'intervient pas dans la factorisation en produits d'α-répétitions minimales.

Définition 3.3.2.
Soit $1 \leq \alpha < \varphi + 1$. Si $w \in \{0,1\}^+$ est une α-répétition minimale i.e. $w = v^q$ avec $q \in \mathbb{Q}$ tel que $q \geq \alpha$ et $q|v| - 1 < \alpha|v|$, alors on définit l'α-racine finie de w par :

$$\sqrt[\alpha]{\cdot} : w \mapsto v$$

De plus, si $X = X_1X_2X_3\cdots$ est un mot infini partout α-répétitif et que les X_i représentent la décomposition de X en α-répétitions minimales, alors on définit l'α-racine infinie par :

$$\sqrt[\alpha]{X} = \sqrt[\alpha]{X_1}\,\sqrt[\alpha]{X_2}\,\sqrt[\alpha]{X_3}\cdots$$

Les deux prochains chapitres sont ainsi dédiés à l'étude du cas particulier de la 2-racine des mots sturmiens.

Chapitre 4

Des caractéristique des mots (semi-)standards comme facteurs de mots sturmiens

Ce chapitre est la dernière étape préparatoire à l'analyse de la racine carrée des mots sturmiens. En effet, ce chapitre, qui reprend principalement le papier [4], est le développement préambule de la série de résultats simplement énoncés dans [2, chapitre 2.2,3,4]. Ces résultats concernent la place des facteurs, et plus particulièrement des mots (semi-)standards, sur le cercle des mots de rotations de $\mathfrak{S}$.

4.1 De la distance sur le cercle $\mathbb{T}$

Dans cette section, nous allons nous attarder sur la façon dont interagissent les multiples de α sur le cercle $\mathbb{T} = [0, 1[$.

Définition 4.1.1.
Soient $\mathbb{T}^1$ le tore de dimension 1 et x un réel. On définit *la norme de x sur* $\mathbb{T}$ par l'égalité

$$||x|| = \min\left\{\{x\}, 1 - \{x\}\right\}.$$

Notons également, comme dit dans [12, Chapitre 1], que cette norme est égale à

$$\min_{z \in \mathbb{Z}} |x - z|$$

i.e. à prendre la valeur absolue de la différence avec l'entier le plus proche de x.

Définition 4.1.2.
Rappelons l'application de rotation d'angle $\alpha \in [0, \frac{1}{2}] \setminus \mathbb{Q}$ sur le cercle que l'on a définie dans la section 2.2.4 :

$$R_\alpha : [0, 1[\to [0, 1[: x \mapsto \{x + \alpha\}$$

Nous allons établir quelques terminologies :

En partitionnant le cercle par les intervalles $(0, \frac{1}{2})$ et $(\frac{1}{2}, 1)$, nous dirons de deux points $x, y \in [0, 1[$ qu'ils sont du même côté de 0 s'ils font partie du même intervalle. Et à l'inverse, qu'ils sont de part et d'autre de 0 s'ils ne sont pas dans le même intervalle.

Proposition 4.1.3.
Soit $\alpha \in [0, \frac{1}{2}] \setminus \mathbb{Q}$ et $k > 1$, alors les points $\{q_k\alpha\}$ et $\{q_{k+1}\alpha\}$ sont toujours de part et d'autre de 0.

Démonstration:
Soient $\alpha \in [0, \frac{1}{2}] \setminus \mathbb{Q}$, et $(\frac{p_k}{q_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ses convergents. Notons d'abord que $q_1 = a_1 \geq 2$. Nous savons de la proposition 2.3.14 que si $q_k \geq 2$ alors $|q_k\alpha - p_k| \leq |2\alpha - 1|$. On retire de ceci que si $q_k \geq 2$ alors $\|q_k\alpha\| \leq \frac{1}{2}$.

De plus, nous savons de la démonstration de la proposition 2.3.13 que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{p_{2k}}{q_{2k}} < \alpha < \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}$. Et ainsi, on obtient que si $k \geq 1$:

$$q_{2k}\alpha - p_{2k} > 0 \implies \{q_{2k}\alpha\} \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$$
$$q_{2k-1}\alpha - p_{2k-1} < 0 \implies \{q_{2k-1}\alpha\} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$$

□

Le cercle $\mathbb{T}$ va aussi nous permettre de représenter les mots finis sous forme d'intervalle. Cependant, le choix pendant de I_0 et I_1 et la structure que nous voulons mettre sur $\mathbb{T}$ nous oblige à introduire une nouvelle notation.

Définition 4.1.4.
Sur le cercle $\mathbb{T} = [0, 1[$, deux points de $\mathbb{R}$, $x \neq y$ avec $x, y \neq 0$ déterminent *l'intervalle d'arc*, noté $[\![x, y]\!]$, qui est l'intervalle semi-ouvert délimité par $\{x\}$ et $\{y\}$ et qui ne contient pas 0 comme point intérieur. L'ouverture se fera dans le même sens que les intervalles I_0 et I_1. Notons que même si $[\![x, y]\!] = [\![y, x]\!]$, si l'ordre de $\{x\}$ et $\{y\}$ est connu, on pose la convention d'écrire l'intervalle d'arc dans cet ordre.

On définit aussi le cas particulier $[\![0, x]\!]$ qui est le plus petit des deux intervalles semi-ouverts de $\mathbb{T}$ délimités par 0 et $\{x\}$. Cet intervalle est également ouvert du même côté que I_0 et I_1.

Maintenant, pour placer les mots finis sur le cercle, nous avons d'abord besoin d'associer un mot fini à un ensemble.

Définition 4.1.5.
Soit A un alphabet fini, le *cylindre* d'un mot $w \in A^*$, noté $[w]$ est l'ensemble :

$$\{X \in A^{\mathbb{N}} : X_{[0,|w|[} = w\}$$

Autrement dit, c'est l'ensemble des mots infinis de A qui commencent par w.

Définition 4.1.6.
Soit $\alpha \in [0,1[$ et $w = w_1 \cdots w_n \in \{0,1\}^*$. *L'intervalle du cylindre* $[w]$ par rapport à $\mathcal{L}(\alpha)$, noté $[w]_\alpha$ est l'intervalle défini comme suit :

$$I_{w_1} \cap (I_{w_2} - \alpha) \cap (I_{w_n} - (n-1)\alpha)$$

De ces définitions et de celle des mots de rotation (2.2.16), on obtient le résultat suivant.

Proposition 4.1.7.
Soient $S_{\alpha,\rho} \in \mathfrak{S}$ et $w \in \{0,1\}^*$. Alors $S_{\alpha,\rho} \in [w] \iff \rho \in [w]_\alpha$.

Démonstration:
Soient $S_{\alpha,\rho} \in \mathfrak{S}$ et $w = w_1 \cdots w_n \in \{0,1\}^*$. Comme $S_{\alpha,\rho}$ est un mot de rotation, on obtient pour tout $1 \leq i \leq n$ que :

$$S_{\alpha,\rho}(i) = w_i \iff \rho + (i-1)\alpha \in I_{w_i} \iff \rho \in (I_{w_i} - (i-1)\alpha)$$

Et on peut ainsi conclure que $S_{\alpha,\rho} \in [w] \iff \rho \in [w]_\alpha$. $\square$

Avec cette caractérisation, étant donné que le contexte $\mathcal{L}(\alpha)$ sera toujours présent, nous nous permettrons de confondre les notations $[w]$ et $[w]_\alpha$.

Avant de continuer, nous allons développer de petits résultats sur les cylindres qui serviront plus tard.

Proposition 4.1.8.
Soient $\alpha \in [0, \frac{1}{2}] \setminus \mathbb{Q}$ et $w, v \in \mathcal{L}(\alpha)$

i) Si w est spécial à droite alors $\{-(|w|+1)\alpha\} \in [w]$.

ii) Si w est un préfixe de v alors $[v] \subseteq [w]$.

iii) Si w est un suffixe de v alors $[v] \subseteq ([w] - (|v| - |w|)\alpha)$

Démonstration:
Soient $\alpha \in [0, \frac{1}{2}] \setminus \mathbb{Q}$ et $w, v \in \mathcal{L}(\alpha)$

i) Si w est spécial à droite, alors $w0, w1 \in \mathcal{L}(\alpha)$. Ce qui implique que $[w] \cap (I_0 - |w|\alpha) \neq \emptyset$ et $[w] \cap (I_1 - |w|\alpha) \neq \emptyset$ ce qui s'interprète sur le cercle par le fait que $\{1 - \alpha - |w|\alpha\}$ soit un point intérieur de $[w]$ et donc que $\{-(|w|+1)\alpha\} \in [w]$.

ii) Si w est un préfixe de v alors tout mot infini qui commence par v commence également par w et donc par définition $[v] \subseteq [w]$.

iii) Si $w = w_1 \cdots w_n$ est un suffixe de $v = v_1 \cdots v_m$, alors les $|w|$ dernières lettres de v coïncident avec celles de w. Ainsi l'intervalle $[v]$ peut s'écrire

$$\begin{aligned} & I_{v_1} \cap (I_{v_2} - \alpha) \cap \cdots \cap (I_{v_{m-n}} - (m-n-1)\alpha) \\ & \qquad \cap (I_{w_1} - (m-n)\alpha) \cap \cdots \cap (I_{w_n} - (m-1)\alpha) \\ & = I_{v_1} \cap (I_{v_2} - \alpha) \cap \cdots \cap (I_{v_{m-n}} - (m-n-1)\alpha) \cap ([w] - (m-n)\alpha) \end{aligned}$$

Et on conclus que $[v] \subseteq ([w] - (m-n)\alpha)$.

$\square$

Revenons maintenant aux distances sur $\mathbb{T}$.

Lemme 4.1.9.
Soit $\alpha = [0; a_1, a_2, \cdots]$. Alors, pour tout $k \geq 2$ et $0 < l \leq a_k$, nous disposons des égalités suivantes :

i)
$$\|q_{k,l}\alpha\| = (-1)^k(q_{k,l}\alpha - p_{k,l}) \tag{4.1}$$

ii)
$$\|q_{k,l}\alpha\| = \|q_{k,l-1}\alpha\| - \|q_{k-1}\alpha\| \tag{4.2}$$

iii)
$$\min_{0<n<q_k} \|n\alpha\| = \|q_{k-1}\alpha\| \tag{4.3}$$

Démonstration:
Soient $\alpha = [0; a_1, a_2, \cdots]$, $k \geq 2$ et $0 < l \leq a_k$.

i) Par définition, $\|q_{k,l}\alpha\| = \min_{z\in\mathbb{Z}} |q_{k,l}\alpha - z|$. Or, les (semi-)convergents étant la meilleure approximation à dénominateur fixé de α, on obtient que

$$\min_{z\in\mathbb{Z}} |q_{k,l}\alpha - z| = |q_{k,l}\alpha - p_{k,l}| = (-1)^k(q_{k,l}\alpha - p_{k,l})$$

ii) Grâce au point (i), et en se rappelant de la définition 2.3.15, on calcule que :

$$\begin{aligned}
\|q_{k,l}\alpha\| &= (-1)^k(q_{k,l}\alpha - p_{k,l}) \\
&= (-1)^k((q_{k,l-1} + q_{k-1})\alpha - (p_{k,l-1} + p_{k-1})) \\
&= (-1)^k(q_{k,l-1}\alpha - p_{k,l-1}) + (-1)^k(q_{k-1}\alpha - p_{k-1}) \\
&= \|q_{k,l-1}\alpha\| - (-1)^{k-1}(q_{k-1}\alpha - p_{k-1}) \\
&= \|q_{k,l-1}\alpha\| - \|q_{k-1}\alpha\|
\end{aligned}$$

iii) L'égalité est une réécriture de la proposition 2.3.14 avec la notion de norme.

$\square$

Grâce à la deuxième équation, nous pouvons, similairement à la proposition 4.1.3, donner les positions relatives des semi-convergents par rapport à leurs voisins.

Proposition 4.1.10.
Soit $\alpha \in [0, \frac{1}{2}] \setminus \mathbb{Q}$ et $k > 1$, alors les points $\{q_{k,l}\alpha\}$ avec $(k,l) \in K(\alpha)$ sont situés entre les points $\{q_k\alpha\}$ et $\{q_{k-2}\alpha\}$

Démonstration:
Soit $\alpha \in [0, \frac{1}{2}] \setminus \mathbb{Q}$ et $(\frac{p_k}{q_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ses convergents.

Par (4.2) on obtient que $\|q_k\alpha\| = \|q_{k,l}\alpha\| - (a_k - l)\|q_{k-1}\alpha\|$ et donc $\|q_k\alpha\| < \|q_{k,l}\alpha\|$.

Et par cette même équation on obtient que $\|q_{k,l}\alpha\| = \|q_{k,l-1}\alpha\| - \left\|q_{k-1,a_{k-1}-1}\alpha\right\| + \|q_{k-2}\alpha\|$ et donc $\|q_{k,l}\alpha\| < \|q_{k-2}\alpha\|$. □

Proposition 4.1.11.
Soit $\alpha \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$. Si n est un naturel tel que $0 < n < q_{k,l}$ avec $k \geq 2$ et $0 < l \leq a_k$ et que $||n\alpha|| < ||q_{k,l-1}\alpha||$, alors $n = mq_{k-1}$ pour un certain $1 \leq m \leq \min\{l, a_k - l + 1\}$.

<u>*Démonstration:*</u>
Soit $\alpha \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ et soit $n < q_{k,l}$ tel que $||n\alpha|| < ||q_{k,l-1}\alpha||$. Supposons par l'absurde que $\{n\alpha\}$ et $\{q_{k-2}\alpha\}$ soient du même côté de 0. L'inégalité $n < q_{k,l}$ implique que $n \neq q_{k,r}$ pour les $r \geq l$. De plus, par (4.2) et l'hypothèse que $\|n\alpha\| < \|q_{k,l-1}\alpha\|$, on récupère que $n \neq q_{k,r}$ pour $0 \leq r \leq l-1$. Ainsi $n \neq q_{k,r}$ $\forall 0 < r \leq a_k$.

Par (4.3), on sait que $\|n\alpha\| > \|q_k\alpha\|$ et donc que $\{n\alpha\}$ se trouve entre $\{q_{k,j}\alpha\}$ et $\{q_{k,j+1}\alpha\}$ pour un certain $0 < j \leq a_k$. On sait aussi que la distance entre $\{n\alpha\}$ et $\{q_{k,j}\alpha\}$ est inférieure à $\|q_{k-1}\alpha\|$. Or, cela impliquerait que $q_{k,j} \geq q_k$, ce qui est une contradiction de la définition 2.3.15.

Supposons par l'absurde que n ne soit pas un multiple de q_{k-1}. Alors le point $\{n\alpha\}$ se trouve entre les points $\{tq_{k-1}\alpha\}$ et $\{(t+1)q_{k-1}\alpha\}$ avec $0 < t < \left\lfloor \frac{1}{\|q_{k-1}\alpha\|} \right\rfloor$. Comme $\{n\alpha\}$ est du même côté de 0 que $\{q_{k-1}\alpha\}$, on obtient que $\|n\alpha\| > \|tq_{k-1}\alpha\|$ et rappelons par définition que $\|tq_{k-1}\alpha\| = t\|q_{k-1}\alpha\|$.

Ainsi, la distance entre $\|n\alpha\|$ et $\|tq_{k-1}\alpha\|$ étant inférieure à $\|q_{k-1}\alpha\|$, on obtient par (4.3) que $tq_{k-1} \geq q_k = a_kq_{k-1} + q_{k-2}$ et que donc $t > a_k$.

Avec la définition 2.3.15, on calcule que la distance entre $\{q_k\alpha\}$ et $\{q_{k-2}\alpha\}$ est de $a_k\|q_{k-1}\alpha\|$ et vu que $\|q_k\alpha\| < \|q_{k-1}\alpha\|$ on obtient que

$$\|q_{k,l-1}\alpha\| \leq \|q_{k-2}\alpha\| = a_k\|q_{k-1}\alpha\| + \|q_k\alpha\| < (a_k+1)\|q_{k-1}\alpha\|.$$

Ainsi, nous pouvons réécrire notre hypothèse n sur par

$$(a_k+1)\|q_{k-1}\alpha\| > \|q_{k,l-1}\alpha\| > \|n\alpha\| > t\|q_{k-1}\alpha\|$$

ce qui implique que $a_k \geq t$, or nous avons déjà que $t < a_k$ et donc une contradiction. Et donc on obtient que $n = mq_{k-1}$ ($m \in \mathbb{N}_0$).

Prouvons maintenant que $1 \leq m \leq \min\{l, a_k - l + 1\}$. Notons d'abord par la définition 2.3.15 que $mq_{k-1} < q_{k,l}$ exactement lorsque $m \leq l \leq a_k$. Ainsi, par (4.2) :

$$m\|q_{k-1}\alpha\| = \|mq_{k-1}\alpha\| < \|q_{k,l-1}\alpha\| = (a_k - (l-1))\|q_{k-1}\alpha\| + \|q_k\alpha\|.$$

Et donc on obtient que $m \leq a_k - l + 1$ et que donc $m \leq \min\{l, a_k - l + 1\}$. □

Remarque 4.1.12.
Avec l'inégalité $(a_k+1)\|q_{k-1}\alpha\| > \|q_{k,l-1}\alpha\|$ vue dans la preuve ci-dessus et par l'égalité (4.2),

on récupère que $a_k\|q_{k-1}\alpha\| < \|q_{k-2}\| < (a_k+1)\|q_{k-1}\alpha\|$ et donc on obtient l'égalité suivante :

$$a_k = \left\lfloor \frac{\|q_{k-2}\alpha\|}{\|q_{k-1}\alpha\|} \right\rfloor \tag{4.4}$$

4.2 Des (semi-)convergents et facteurs de mots sturmiens

Maintenant que nous avons établi le résultat 4.1.11, nous allons pouvoir nous en servir pour analyser les puissances présentes comme facteurs de mots sturmiens. Les résultats suivants sont quelque peu techniques mais d'une grande utilité pour l'étude combinatoire de la racine carrée des mots sturmiens.

Avant d'établir les résultats, nous avons besoin, parmi les opérations classiques sur les mots finis, de définir ce qu'on appelle les conjugués d'un mot.

Définition 4.2.1.
Soit A un alphabet fini. Les deux mots finis $w, v \in A^+$ sont *conjugués* s'il existe $x, y \in A^+$ tels que $w = xy$ et $v = yx$.

Nous définissons aussi l'opération de conjugaison cyclique :

$$C : A^+ \to A^+ : w = aw' \mapsto w'a.$$

L'ensemble des conjugués d'un mot w peut donc être décrit par $C_w = \{C^i(w) : 0 \leq i < |w|\}$

Proposition 4.2.2.
Soit $\alpha \in [0, \frac{1}{2}] \setminus \mathbb{Q}$. Si w est un mot non vide primitif tel que $w^2 \in \mathcal{L}(\alpha)$, alors soit $|w| = q_k$ $(k \geq 0)$ soit $|w| = q_{k,l}$ $((k,l) \in K(\alpha))$.

Démonstration:
Soient $\alpha \in [0, \frac{1}{2}] \setminus \mathbb{Q}$ et w primitif avec $w^2 \in \mathcal{L}(\alpha)$ et posons $|w| = n$.

Cas $n < q_1 = a_1$: Nous avons vu dans le théorème 2.3.27 que dans les mots sturmiens de pente α, $s_3^\alpha = ((0^{a_1-1}1)^{a_2}0)^{a_3}0^{a_1-1}1 \in \mathcal{L}(\alpha)$. Ce qui implique que pour tout facteur suffisamment grand, deux 1 sont toujours séparé par au moins $a_1 - 1$ fois la lettre 0. Ce qui implique que pour un mot de longueur n, si w^2 est dans $\mathcal{L}(\alpha)$ alors w ne peut être qu'une suite de 0. Et si w est primitif alors w doit être égal à $0 = s_0$. Et donc $|w| = q_0$.

Cas $n \geq q_1$: Posons $[w] = [\![-i\alpha, -j\alpha]\!]$ avec $0 \leq i, j \leq n$.

Si w n'est pas spécial à droite, alors w et w^2 s'étendent de manière unique et le mot $C(w) = w_2 \cdots w_n w_1$ est un mot de longueur n primitif avec $C(w)^2 \in \mathcal{L}(\alpha)$. Ci ce mot n'est pas spécial à droite alors on peut répéter le processus. Et si tout les mots de C_w ne s'étendent que de manière unique, alors tout les mots sturmiens de pente α serait ultimement périodique ce qui est contradictoire avec la définition des mots sturmiens. Ainsi, on doit avoir un conjugué de w qui soit spécial à droite. On peut ainsi supposer sans perte de généralité que se soit w lui-même qui soit spécial à droite. Ce qui implique par la propriété 4.1.8 que $\{-(n+1)\alpha\} \in [w]$. De plus , comme $[w^2] = [w] \cap ([w] - n\alpha) \neq \emptyset$, on obtient que soit $[w^2] = [\![-(i+n)\alpha, -j\alpha]\!]$ soit $[w^2] = [\![-i\alpha, -(j+n)\alpha]\!]$.

Par symétrie, supposons que $[w^2] = \llbracket -i\alpha, -(j+n)\alpha \rrbracket$ et montrons que nous avons $\{-(n+1)\alpha\} = \{-(n+j)\alpha\}$ i.e. que $j = 1$. Supposons par l'absurde que $j \neq 1$. Si $a = w_1$, et $b \neq a$, on obtient, comme w est spécial à droite, que $[w^2] \subset [wa]$, $[wa] = \llbracket -i\alpha, -(n+1)\alpha \rrbracket$ et $[wb] = \llbracket -(n+1)\alpha, -j\alpha \rrbracket$. Posons $\rho \in [w^2]$, $\sigma \in [wa] \backslash [w^2]$ et $u = \Lambda(S_{\alpha,\rho}, S_{\alpha,\sigma})$ (avec Λ qui rends le plus long préfixe commun de deux mots cf.1.2.4). Comme $[wa] \neq [w^2]$, on déduit que $|u| < 2|w|$. De plus, par définition de u, il est spécial à droite ce qui implique que w est un suffixe de u par la proposition 2.2.2. Cependant, w^2 est un préfixe de $S_{\alpha,\rho}$ et donc il y a au moins trois occurrences de w dans w^2 ce qui contredis sa primitivité.

Ainsi, nous obtenons que $j = 1$. Comme il n'y a aucun point $\{-m\alpha\}$ dans l'intervalle $\llbracket -(j+n)\alpha, -j\alpha \rrbracket = \llbracket -(n+1)\alpha, -\alpha \rrbracket$ si $m \leq n$, on obtient que $\{-n\alpha\}$ est le point le plus proche de 0. Et donc, si $q_1 \leq n < q_{2,1}$ alors $n = q_1$ ou alors il existe $k \geq 2$ tel que $q_{k,l} \leq n < q_{k,l+1}$ $(0 < l \leq a_k)$ et par la proposition 4.1.11 soit $n = q_{k-1}$ soit $n = q_{k,l}$.

□

Nous pouvons également prouver que de tels facteurs existent. En effet, les mots (semi-) standards et leur carré sont tous dans $\mathcal{L}(\alpha)$.

Lemme 4.2.3.
Soit $\alpha \in [0, \frac{1}{2}] \setminus \mathbb{Q}$, alors $s_0^2, s_1^2, s_{k,l}^2 \in \mathcal{L}(\alpha)$ pour tout $(k,l) \in K^+(\alpha)$.

<u>*Démonstration:*</u>
Soit $\alpha \in [0, \frac{1}{2}] \setminus \mathbb{Q}$. Étant donné que $s_4^\alpha = (((0^{a_1-1}1)^{a_2}0)^{a_3}0^{a_1-1}1)^{a_4}((0^{a_1-1}1)^{a_2}0) \in \mathcal{L}(\alpha)$, on observe directement que $s_0^2 = 00$ et $s_1^2 = (0^{a_1-1}1)^2$ sont tous deux dans $\mathcal{L}(\alpha)$.

De plus, comme vu dans la proposition 2.3.33, $s_k s_{k+1}$ et $s_{k+1} s_k$ n'ont que les deux dernière lettre qui diffèrent. Ainsi, on obtient que si $k \geq 2$ alors s_k^2 est un préfixe de $s_{k+1}s_k$ qui est un suffixe de s_{k+2} et donc $s_k^2 \in \mathcal{L}(\alpha)$.

Enfin, comme par définition, s_k est un préfixe de s_{k+1}, si $(k,l) \in K(\alpha)$ alors $s_{k,l} = s_{k-1}^l s_{k-2}$ est un préfixe et un suffixe de $s_k = s_{k-1}^{a_k} s_{k-2}$ et donc $s_{k,l}^2$ est un facteur de s_k^2 et donc on récupère bien que $s_{k,l}^2 \in \mathcal{L}(\alpha)$. □

Nous allons maintenant discuter de la longueur des intervalles des $\tilde{s}_{k,l}$ et de leurs conjugués. Et c'est ce théorème, ainsi que celui qui suivra, qui nous permettront de développer des critères sur la racine carrée de mots infinis.

Nous avons d'abord besoin du théorème classique dit "des trois distances". Nous allons ici développer une preuve inspirée de celle de Świerczkowski [13].

Posons d'abord le contexte, soient $\alpha \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$,$N \in \mathbb{N}$ et la suite finie sur $\mathbb{T}$: $(\{n\alpha\})_{1 \leq n \leq N}$. Étant donné que α est irrationnel, on peut affirmer que les éléments de cette suite sont tous distincts. Et donc, si on les ordonne, la suite

$$\{x_0\alpha\} = 0 < \{x_1\alpha\} < \{x_2\alpha\} < \cdots < \{x_N\alpha\} < 1$$

partitionne $\mathbb{T}$ en $N+1$ intervalles. Nous dirons que $\{x_j\alpha\}$ suit $\{x_i\alpha\}$ si $j = i+1$. Avec ces notations, on pose comme cas particulier que 0 suit $\{x_N\alpha\}$ et que $\{x_1\alpha\}$ suit 0.

Nous allons ensuite, pour tout $i \in \{0, \cdots, N\}$, poser $\delta_i = |\left[\{x_i\alpha\}, \{x_{i+1}\alpha\}\right[|$ et le cas particulier $\{x_{N+1}\alpha\} = 1 = 0$.

Théorème 4.2.4.
Soient $\alpha = [0; a_1, a_2, \cdots]$, $N \in N$ et $i \in \{0, \cdots, N\}$. L'écart δ_i ne prend sa valeur que parmi δ_0, δ_N ou $\delta_0 + \delta_N$.

Démonstration:
Soient α, n et i tels qu'énoncés. On décompose i de façon unique comme étant $i = hq_{k-1}+q_{k-2}+r$ avec $k \geq 2, 0 < h \leq a_k$ et $0 \leq r < q_{k-1}$.

Cas $x_N < x_1$: Dans ce cas, au vu des considérations de la sections précédente, on obtient que $x_N = q_{k-2}$ et $x_1 = q_{k-1}$ et donc que $\min_{n \leq N} \|n\alpha\| = \|q_{k-1}\alpha\| = \delta_0$

Sous cas $i < x_N$: Dans ce sous cas, on obtient que $i + x_1 - x_n \leq N$

Sous Sous Cas $i + x_1 \leq N$: Nous allons montrer que $\{(i + x_1)\alpha\}$ suit $\{i\alpha\}$. Supposons par l'absurde qu'il existe l tel que $\{i\alpha\} < \{l\alpha\} < \{(i + x_1)\alpha\}$. Ainsi, si $i < l$, du fait que $|\{i\alpha\} - \{l\alpha\}| < |\{i\alpha\} - \{i + x_1\alpha\}|$, on obtient que $\|(l - i)\alpha\| < \|x_1\alpha\|$. Et si $l < i$, du fait que $|\{l\alpha\} - \{(i + x_1)\alpha\}| < |\{i\alpha\} - \{i + x_1\alpha\}|$, on obtient que $\|(i + x_1 - l)\alpha\| < \|x_1\alpha\|$. Ce qui, dans les deux cas, est une contradiction. Et donc $\delta_i = \delta_0$

Sous Sous Cas $N < i + x_1$: Nous allons montrer que $\{(i + x_1 - x_N)\alpha\}$ suit $\{i\alpha\}$. Montrons d'abord que $x_1 - x_N = x_2$. En effet, sinon il existe j tel que $\{x_1\alpha\} < \{j\alpha\} < \{(x_1 - x_N)\alpha\}$. Ce qui implique que $0 < \{(j - x_1)\alpha < \{-x_N\alpha\}\}$ et donc que $\{x_N\alpha\} < \{(x_1 - j)\alpha\} < 0$ ce qui contredit le fait que 0 suit $\{x_N\alpha\}$.

Supposons par l'absurde qu'il existe l tel que $\{i\alpha\} < \{l\alpha\} < \{(i + x_1 - x_N)\alpha\}$. Ainsi, si $i < l$ alors on obtient que $\|(l - i)\alpha\| < \|(x_1 - x_N)\alpha\|$ et donc que $\|(l - i)\alpha\| < \|x_2\alpha\|$. Ainsi, on doit avoir que $l-i = x_1$ ce qui contredit $N < i+x_1$. Et si $l < i$ alors on obtient similairement que $\|(i - l + x_1 - x_N)\alpha\| < \|x_s\alpha\|$ et donc que $i - l + x_1 - x_n = x_1$ ce qui contredit $i < x_N$. Ainsi on obtient que $\delta_i = \delta_0 + \delta_N$

Sous Cas $x_N \leq i$: Nous allons montrer que $\{(i - x_N)\alpha\}$ suit $\{i\alpha\}$. Supposons par l'absurde qu'il existe l tel que $\{i\alpha\} < \{l\alpha\} < \{(i - x_N)\alpha\}$. Si $i < l$, alors on obtient que $|\left[\{(l - i + x_N)\alpha\}, 0\right[| < |\left[\{x_N\alpha\}, 0\right[|$ et si $l < i$ alors, $|\left[\{(i - l)\alpha\}, 0\right[| < |\left[\{x_N\alpha\}, 0\right[|$ ce qui dans les deux cas contredit que 0 suit $x_N\alpha$. Et donc on obtient que $\delta_i = \delta_N$

Cas $x_N > x_1$: Dans ce cas on obtient que $x_1 = q_{k-2}$ et $x_N = q_{k-1}$ et donc la démonstration est similaire avec les rôles de x_1 et x_N inversé.

□

Proposition 4.2.5.
Soient $\alpha \in [0, \frac{1}{2}] \setminus \mathbb{Q}$, $(k, l) \in K(\alpha)$ et $n = q_{k,l}$. Alors $\forall i \in \{0, \cdots, n-1\}$, $C^i(\tilde{s}_{k,l}) \in \mathcal{L}(\alpha)$.

De plus :

$$|[C^i(\tilde{s}_{k,l})]| = \begin{cases} \|q_{k,l-1}\alpha\| & \text{si} \quad i \in \{0, \cdots, q_{k-1}-1\} \\ \|q_{k-1}\alpha\| & \text{si} \quad i \in \{q_{k-1}, \cdots, n-1\} \end{cases}$$

Et l'intervalle du $n+1^{\text{ième}}$ facteur de longueur n de $\mathcal{L}(\alpha)$ est de taille $\|q_{k,l}\alpha\|$.

<u>*Démonstration:*</u>

Soient α, k, l, n et r tels qu'énoncés. On obtient de la proposition 4.1.11 que l'intervalle $J = [\![-q_{k,l-1}\alpha, 0]\!]$ possède uniquement $\{-n\alpha\}$ parmi les $\{-i\alpha\}$ comme point intérieur. Autrement dit, le point $-n\alpha$ sépare J en deux intervalles $K = [\![-q_{k,l-1}\alpha, -n\alpha]\!]$ et $L = [\![-n\alpha, 0]\!]$. Notons aussi que $\|q_{k,l-1}\alpha\| = |J| = |K| + |L| = \|q_{k-1}\alpha\| + \|q_{k,l}\alpha\|$. Ainsi, le théorème 4.2.4 des trois distances implique que ces trois normes représentent les longueurs de tous les intervalles de la partition par $0, \{\alpha\}\,\{2\alpha\}, \cdots, \{n\alpha\}$. De plus, on remarque que L est l'unique intervalle de longueur $\|q_{k,l}\alpha\|$.

Soit i le plus petit naturel tel que $(J - i\alpha)$ ne fasse plus partie de la partition. Comme les extrémités de $(J - i\alpha)$ sont toujours de la forme $m\alpha$, on obtient par (4.2) qu'il doit être l'union de deux intervalles de longueur respectivement $|K|$ et $|L|$. De plus, $|J|$ ne peut pas être un multiple de $|K|$ et pareillement $|K|$ n'est pas un multiple de $|L|$. Ainsi, du fait que L est l'unique intervalle de longueur $\|q_{k,l}\alpha\|$, on obtient que L doit faire partie de l'union. Vu l'irrationalité de α on obtient que $(J - i\alpha) \neq J$ et on récupère que $(J - i\alpha) = M \cup L$ avec $M = [\![-q_{k-1}\alpha, 0]\!]$. On obtient ainsi que la rotation d'angle $-i\alpha$ envoie l'extrémité 0 de L sur l'extrémité $-q_{k-1}\alpha$ de M et donc $i = q_{k-1}$. Comme $k \geq 2$, $i > 1$ et les intervalles $J, (J-\alpha), \cdots, (J-(i-1)\alpha)$ sont les q_{k-1} intervalles de longueur $\|q_{k,l-1}\alpha\|$. Et de nouveau, par le théorème des trois distances, les $n+1-q_{k-1}$ intervalles restants, à l'exception de L, sont ceux de longueur $\|q_{k-1}\alpha\|$

Nous allons maintenant établir le lien entre la partition des rotations et les conjugaisons de $\tilde{s}_{k,l}$. Soient w et v deux facteurs de $\mathcal{L}(\alpha)$ de taille $n = q_{k,l}$ tels que $[u] = M$ et $[v] = L$. Du fait que M et L sont de part et d'autre de 0, on récupère que $w = aw'$ et $v = bv'$ avec a et b deux lettres distinctes. Soient $x \in M$ et $y \in L$. Comme $i > 1$, nous pouvons observer l'intervalle $(J - (i-1)\alpha) = ((M \cup L) - \alpha)$ qui représente un mot u de longueur n. Nous obtenons de ceci que les deux mots sturmiens $S_{\alpha,x+\alpha}$ et $S_{\alpha,x+\alpha}$ possèdent tous deux u comme préfixe. Cela implique que au est préfixe de $S_{\alpha,x}$ et que bu est préfixe de $S_{\alpha,y}$. Le tout indique que u est un mot spécial à gauche de longueur $n = q_{k,l}$ i.e. $u = s_{k,l}$. Montrons que v n'est pas un conjugué de $s_{k,l}$. Notons que $k-1$ est impair si et seulement si $\{-q_{k-1}\alpha\} \in I_0$. Ainsi, la première lettre de v est 0 si et seulement si $k-1$ est impair et la dernière lettre de $s_{k,l}$ est 0 si et seulement si $k-1$ est pair et donc ces deux lettres sont toujours distinctes. Cependant, comme le suffixe de longueur $n-1$ de v est un préfixe de $s_{k,l}$, on en déduit que $|v|_b > |s_{k,l}|_b$ et donc que ces deux mots ne sont pas conjugués.

Posons maintenant z le mot tel que $(J - \alpha) = [z]$. Comme $\{-n\alpha\} \in J$, on obtient que $\{-(n+1)\alpha\} \in [z]$ ce qui traduit le fait que z soit spécial à droite et que donc $z = \tilde{s}_{k,l}$. Nous savons par le lemme 4.2.3 que $s_{k,l}^2 \in \mathcal{L}(\alpha)$ et que donc tous les conjugués de $s_{k,l}$ aussi ainsi leur miroir par 2.3.2. De plus notons que les conjugués de $\tilde{s}_{k,l}$ s'étendent de façon unique par la gauche avec leur dernière lettre.

Posons λ et μ deux facteurs de taille n tels que $\lambda \neq v$ et $([\lambda] - \alpha) = [\mu]$. Étant donné que $s_{k,l}$ ne satisfait pas à ces conditions on obtient que $\lambda \neq s_{k,l}$ et donc que λ s'étend à gauche de façon unique. Montrons que $C(\lambda) = \mu$. Si $\lambda = \lambda' c$ alors on peut écrire que $\mu = d\lambda'$ et on obtient que $\mu c = d\lambda' c = d\lambda \in \mathcal{L}(\alpha)$ et que $c = d$. On peut donc conclure que $C(\lambda) = \mu$. Ainsi on obtient que les facteurs $(J - \alpha), (J - 2\alpha), \cdots, (J - (i-1)\alpha)$ sont respectivement les facteurs $\tilde{s}_{k,l}, C(\tilde{s}_{k,l}), \cdots, C^{q_{k-1}-2}(\tilde{s}_{k,l}) = s_{k,l}$. De plus comme v n'est pas conjugué à $s_{k,l}$, on doit avoir $C(s_{k,l}) = u$. Les facteurs de taille n d'intervalle $[w] = L, (L-\alpha), \cdots, (L - (n - q_{k-1}))$ sont donc respectivement les facteurs $w, C(w), \cdots, C^{n-q_{k-1}}(w)$. Enfin, les dernières conjugaisons sont les intervalles manquant. Et nous avons donc que l'orbite de J sous la rotation d'angle $-\alpha$ décrit les intervalles des conjugués de $\tilde{s}_{k,l}$ du fait que $w = C(s_{k,l}) = C^{q_{k-1}-1}(\tilde{s}_{k,l})$. □

Pour exprimer que le carré d'un mot appartient à $\mathcal{L}(\alpha)$, il peut être utile d'utiliser comme outil intermédiaire le concept d'index de facteur sur lequel le résultat suivant porte. Nous allons donc d'abord définir cette nouvelle notion.

Définition 4.2.6.
Soient w un mot fini non vide de E un ensemble de mots sur A un alphabet fini. *L'index* de w est défini par $\text{ind}_E(w) = \sup\{n \in \mathbb{N} : w^n \in E\}$.

Remarque 4.2.7.
Similairement à la démonstration de la proposition 4.2.2, l'index d'un mot w dans $\mathcal{L}(\alpha)$ peut s'exprimer par $\sup\{t \in \mathbb{N} : (\{x\} - t|w|\alpha) \in [w]\}$ avec x qui est une des extrémités de $[w]$. En effet, vu que $[w^n] \subseteq [w]$ pour tout $n \geq 1$, dès que $\{x\} - t|w|\alpha$ n'est pas dans $[w]$ pour un certain t alors c'est que w^t n'est plus un facteur de $\mathcal{L}(\alpha)$. Et donc l'index d'un mot dépend seulement de sa taille et non de sa position. Ainsi, nous pouvons déduire que

$$\text{ind}_{\mathcal{L}(\alpha)}(w) = \gamma + \left\lfloor \frac{|[w]|}{\||w|\alpha\|} \right\rfloor \qquad \gamma = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |[w]| \neq \||w|\alpha\| \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{4.5}$$

Proposition 4.2.8.
Soit $\alpha = [0; a_1, a_2, \cdots] \in [0, \frac{1}{2}] \setminus \mathbb{Q}$. Si $k \geq 2$ alors pour les facteurs de taille n de $\mathcal{L}(\alpha)$ nous avons les possibilités suivantes :

i) Si $n < q_1$, l'index des conjugués de $0^{n-1}1$ est 1 et celui des 0^n restant est $\left\lfloor \frac{a_1}{n} \right\rfloor$.

ii) Si $n = q_1$, l'index des conjugués de $\tilde{s}_1$ est $a_2 + 1$ et celui des 0^{a_1} restant est 1.

iii) Si $n = q_k$, l'index des $q_{k-1} - 1$ premiers conjugués de $\tilde{s}_k$ est $a_{k+1} + 2$, l'index des $n + 1 - q_{k-1}$ autres conjugués est $a_{k+1} + 1$ et celui du facteur restant est 1.

iv) Si $n = q_{k,l}$ $(0 < l \leq a_k)$, l'index des $q_{k-1} - 1$ premiers conjugués de $\tilde{s}_{k,l}$ est 2 et celui des facteurs restant est 1.

<u>*Démonstration:*</u>
Soient $\alpha = [0; a_1, a_2, \cdots], k \geq 2$ et $n \in \mathbb{N}_0$. Notons d'abord que les sept cas sont mutuellement

exclusifs.

Cas (i) et (ii) : Les facteurs de tailles $n \leq q_1$ de $\mathcal{L}(\alpha)$ sont 0^n et les conjugués de $0^{n-1}1$. L'index de 0 étant a_1, on obtient que l'index de 0^n est donc $\lfloor \frac{a_1}{n} \rfloor$.

Ensuite notons d'abord que, étant donné que $\alpha q_1 < 1$, la longueur des intervalles des conjugués de $0^{n-1}1$ est de α. Si $n = 1$, l'index du mot 1 est 1 vu que $11 \notin \mathcal{L}(\alpha)$. Si $n \geq 1$ alors par 4.5 :

$$\mathrm{ind}_{\mathcal{L}(\alpha)}(w) = 1 + \left\lfloor \frac{\alpha}{\|n\alpha\|} \right\rfloor = \begin{cases} 1 + a_2 \text{ si } n = q_1 (cf.(4.4)) \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$$

Cas (iii) et (iv) : Soient $(k,l) \in K(\alpha)$ et $w \in \mathcal{L}(\alpha)$ un mot de longueur $s_{k,l}$.

Si $w = C^i(\tilde{s}_{k,l})$ $(i \leq q_{k-1} - 1)$: La proposition 4.2.5 nous dis que $|[w]| = \|q_{k,l-1}\alpha\|$ et donc par (4.2) et (4.5) on obtient que :

$$\mathrm{ind}_{\mathcal{L}(\alpha)}(w) = 1 + \left\lfloor \frac{\|q_{k,l-1}\alpha\|}{\|q_{k,l}\alpha\|} \right\rfloor = 1 + \left\lfloor \frac{\|q_{k,l}\alpha\| + \|q_{k-1}\alpha\|}{\|q_{k,l}\alpha\|} \right\rfloor = 2 + \left\lfloor \frac{\|q_{k-1}\alpha\|}{\|q_{k,l}\alpha\|} \right\rfloor$$

Si $l = a_k$ alors par (4.4) $\mathrm{ind}_{\mathcal{L}(\alpha)}(w) = 2 + a_{k+1}$ et si $l \neq a_k$, alors par (4.3) $\|q_{k,l}\alpha\| < \|q_{k-1}\alpha\|$ et donc $\mathrm{ind}_{\mathcal{L}(\alpha)}(w) = 2$

Si $w = C^i(\tilde{s}_{k,l})$ $(i > q_{k-1} - 1)$: On obtient que $|[w]| = \|q_{k-1}\alpha\|$ et donc, de manière équivalente à l'équation du sous-point précédent, que si $l = a_k$ alors $\mathrm{ind}_{\mathcal{L}(\alpha)}(w) = 1$ et si $l \neq a_k$ alors $\mathrm{ind}_{\mathcal{L}(\alpha)}(w) = 1 + a_{k+1}$.

Si $w \neq C^i(\tilde{s}_{k,l})$ pour tout i : on obtient que $|[w]| = \|q_{k,l}\alpha\|$ et donc de nouveau par (4.5) on obtient que $\mathrm{ind}_{\mathcal{L}(\alpha)}(w) = 1$

□

Nous pouvons donc maintenant énoncer le théorème qui nous servira dans la caractérisation de la racine carrée des mots sturmiens.

Théorème 4.2.9.

Soit $\alpha \in [0, \frac{1}{2}] \setminus \mathbb{Q}$. On dispose des quatre points suivants :

i) Le facteur $w \in \mathcal{L}(\alpha)$ de longueur q_k est un conjugué de s_k $(k \geq 0)$ si et seulement si $w^2 \in \mathcal{L}(\alpha)$.

ii) Si le mot w est un conjugué de $s_{k,l}$ $((k,l) \in K(\alpha))$. Alors $w^2 \in \mathcal{L}(\alpha)$ si et seulement si $[w]$ et $[s_{k,l}]$ sont des intervalles de même longueur.

iii) Si $n = q_0$,$n = q_1$ ou $n = q_{k,l}$ avec $((k,l) \in K(\alpha))$, que s est le mot (semi-)standard de longueur n et que $w \in \mathcal{L}(\alpha)$ est un mot de taille n. Alors, w est un conjugué de s si et seulement si $|w|_0 = |s|_0$.

iv) L'index du mot standard $s_k \in \mathcal{L}(\alpha)$ est $a_{k+1} + 2$ si $k \geq 2$ et $a_2 + 1$ si $k = 1$.

L'index du mot semi-standard $s_{k,l} \in \mathcal{L}(\alpha)$ est 2 $((k,l) \in K(\alpha))$.

Démonstration:

Soit $\alpha \in [0, \frac{1}{2}] \setminus \mathbb{Q}$.

i) Soient $k \in \mathbb{N}, w \in \mathcal{L}(\alpha)$ de longueur q_k et s_k. On calcule que w est un conjugué de s_k si et seulement si $\tilde{w}$ est un conjugué de $\tilde{s}_k$.

   De plus, par le point (iii) de la proposition 4.2.8, on obtient que $\mathrm{ind}_{\mathcal{L}(\alpha)}(w) \geq 2$. Ce qui est vrai si et seulement si w^2 est dans $\mathcal{L}(\alpha)$.

ii) Soient $(k, l) \in K(\alpha)$ et $w \in \mathcal{L}(\alpha)$ un conjugué de $s_{k,l}$.

   Les intervalles $[w]$ et $[s_{k,l}]$ sont de même longueur si et seulement si w est un des $q_{k-1} - 1$ premiers conjugués de $s_{k,l}$. Et le point (iv) de 4.2.8 nous dit donc que l'index de w est 2 et donc que $w^2 \in \mathcal{L}(\alpha)$.

iii) Soient $n = q_0, q_1$ ou $q_{k,l}$ $(k \geq 2, 0 < l \leq a_k)$, $s \in St^+(\alpha)$ et $w \in \mathcal{L}(\alpha)$ deux mots de taille n. Par le lemme 4.2.3, on sait que $s^2 \in \mathcal{L}(\alpha)$ et donc les n conjugués de s y sont également. Or, comme il existe un facteur spécial à droite de taille $n - 1$, il existe donc un unique v de taille n tel que $|v|_0 \neq |s|_0$ et qui donc n'est pas un conjugué de s.

   Ainsi on récupère que si $|w|_0 = |s|_0 \iff w \neq v$ si et seulement si w est un des conjugués de s.

iv) L'assertion est un cas particulier des points $(ii), (iii)$ et (iv) du théorème 4.2.8.

$\square$

Chapitre 5

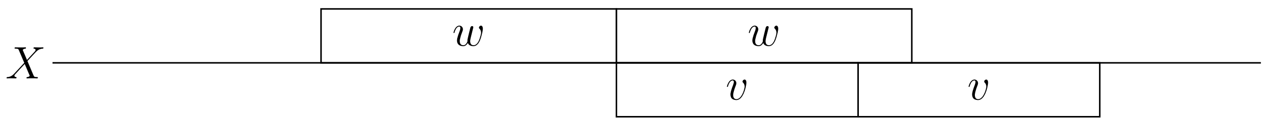
Des mots infinis carrés-pleins et de leur racine

Nous allons maintenant examiner les mots carrés-pleins et leurs liens avec les mots sturmiens car c'est à partir du moment où un mot infini est carré-plein qu'on peut le factoriser en une suite infinie de carrés et induire une définition de racine. La première partie de ce chapitre continue les travaux de K.Saari [10] et la seconde, à partir de la section 5.2, est le cœur de l'intérêt de ce travail, est l'exploration de M. Whiteland et J. Peltomäki de la racine carrée (cf. [2]).

Commençons par un lemme primordial qui sera la base de nombreux résultats.

Lemme 5.0.1 (Intrication des carrés)**.**
Soit X un mot infini carré-plein sur un alphabet fini A. Si ww est un carré minimal de $\mathrm{Fac}(X)$, alors w est le préfixe dans X d'un autre carré minimal vv.

Démonstration:
Soit $X \in A^{\mathbb{N}}$ un mot infini carré-plein, de cette propriété, on obtient que la première lettre du second w dans ww démarre un carré minimal vv. Et la minimalité de w implique que vv n'est pas préfixe de w. Ainsi, les possibilités sont $v = w$ ou w est préfixe de vv. Mais, comme X est apériodique, le second cas doit se produire car sinon on aurait $X = xw^{\omega}$. $\square$

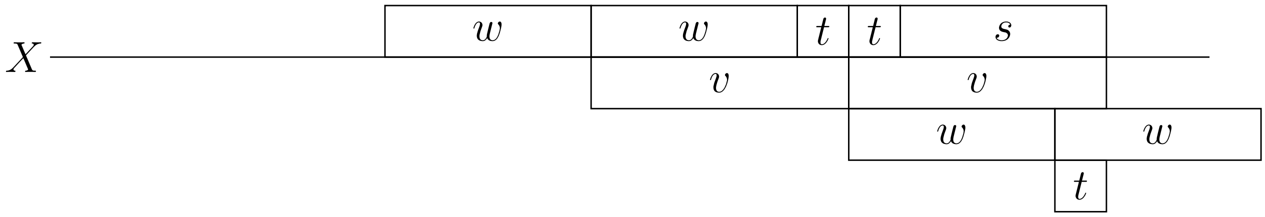


Lemme 5.0.2.
Soit X un mot infini carré-plein sur un alphabet fini A. Pour toute lettre $a \in \mathrm{Fac}(X)$, il existe au moins 3 carrés minimaux distincts commençant par a dans $\mathrm{Fac}(X)$.

Démonstration:
Soit $X \in A^{\mathbb{N}}$ un mot infini carré-plein et $a \in A$ une lettre qui appartient à $\mathrm{Fac}(X)$. Si ww est le plus petit carré minimal qui commence par a, par le lemme 5.0.1, il existe un autre carré minimal vv commençant par a. Par minimalité, on obtient l'inégalité $2|v| > 2|w|$ qui implique

que w est aussi un préfixe de v. Dénotons $wt = v$ pour un mot non vide t.

Supposons par l'absurde que ww et vv soient les deux seuls carrés minimaux commençant par a dans $\mathrm{Fac}(X)$. De nouveau par 5.0.1, il existe une position dans X où démarre v et ww car il n'y a aucune autre possibilité. Or, vv étant un carré minimal, on obtient que v est un préfixe de ww et que t est donc un préfixe propre de w. Ainsi, il existe un mot non vide s tel que $vv = wtts$. Or tt ou un de ces préfixes sera un carré minimal qui commence par a, ce qui est une contradiction. $\square$



Remarque 5.0.3.
On retire du lemme précédent que tout mot infini apériodique carré-plein sera composé d'au moins 6 carrés minimaux distincts. De plus, dans le mot de Fibonacci (1.1), chaque position démarre par un des 6 carrés minimaux suivants :

$$00, \quad 0101, \quad 010010, \quad 1010, \quad 100100, \quad 1001010010.$$

En effet, en observant les 11 facteurs de longueur 10 de F, on constate :

$$00 \text{ est préfixe de } \begin{cases} 0010010100 \\ 0010100100 \\ 0010100101 \end{cases}$$

$$0101 \text{ est préfixe de } \begin{cases} 0101001001 \\ 0101001010 \end{cases}$$

$$010010 \text{ est préfixe de } \begin{cases} 0100101001 \\ 0100100101 \end{cases}$$

$$1010 \text{ est préfixe de } \begin{cases} 1010010010 \\ 1010010100 \end{cases}$$

$$100100 \text{ est préfixe de } \begin{cases} 1001001010 \end{cases}$$

$$1001010010 \text{ est préfixe de } \begin{cases} 1001010010 \end{cases}$$

Ainsi, on obtient que 6 est une borne inférieure optimale et donc que $M(2) = 6$. Et cette borne indique également que qu'un mot carré-plein optimal est obligatoirement sur un alphabet à 2 lettres.

5.1 De la carrée-plénitude optimale et des mot sturmiens

Nous allons maintenant nous concentrer sur $A = \{0, 1\}$ et nous allons construire les mots carrés-pleins optimaux par leurs carrés minimaux et les lier aux mots sturmiens.

Rappelons que si $X \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ est un mot apériodique carré-plein optimal alors, $\mathrm{Fac}(X)$ contient exactement 6 carrés minimaux dont respectivement 3 qui commence par 0 et 3 par 1. L'apériodicité de X indique également qu'il existe des blocs de 0 d'au moins 2 tailles différentes et nous appellerons $0 < i < j$ les plus petits naturels tels que $10^i1, 10^j1 \in \mathrm{Fac}(X)$.

Lemme 5.1.1.
Soit X un mot infini carré-plein optimal sur $\{0, 1\}$ et posons i et j les plus petits naturels tels que $10^i1, 10^j1 \in \mathrm{Fac}(X)$. On obtient les résultats suivants :

i) Le mot 11 n'est pas un facteur X.

ii) Si $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ alors $10^n1 \in \mathrm{Fac}(X)$ si et seulement si $n = i$ or $n = j$.

iii) On dispose de l'égalité $i = j + 1$.

iv) Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $10^{i+1}(10^i)^n10^{i+1}$ si et seulement si $n = k$ ou $n = k + 1$.

<u>*Démonstration:*</u>
Soient $X \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$,$i$ et j tels qu'énoncés.

i) Par carré-plénitude, le facteur 10^i1 est préfixe d'au moins un carré minimal de X. Et comme $j > i$, par le lemme 5.0.1 d'intrication des carrés, on obtiens que 10^j est préfixe d'au moins deux carrés minimaux. Ainsi, en supposant que $11 \in \mathrm{Fac}(X)$, on obtiendrait 4 carrés minimaux qui commence par 1 ce qui n'est pas possible.

ii) Supposons par l'absurde que $10^n1 \in \mathrm{Fac}(X)$ pour un naturel n tel que $i < j < n$. De la même manière qu'au point (i), 10^i1 et 10^j1 sont préfixes d'un carré minimal et 10^n de 2 autres ce qui contredit à nouveau l'optimalité.

iii) Premièrement, le point (i) et la proposition 2.1.5 nous disent que 00 est un carré minimal de X. Ensuite comme 10^i1 est facteur X et 11 non, On obtient que $010^{i-1}010 \in \mathrm{Fac}(X)$. De plus, vu que 10^n1 n'est pas un facteur de X si $n \notin \{i, j\}$, on obtient que $010^{i-1}010^{i-1}$ un carré minimal dans X. Enfin, comme $010^{j-1} \in \mathrm{Fac}(X)$, ce mot est le préfixe d'un carré minimal de X. Et donc par le lemme 5.0.1 cela signifie que 010^{j-1} est également préfixe de 00 ou $010^{i-1}010^{i-1}$. Le premier cas est impossible et le second ne peut ce produire que si $j = i + 1$.

   Nous substituons donc dès à présent j par $i + 1$ dans les notations.

iv) Soit, $m \in \mathbb{N}$ la position du premier 1 dans X. Par les trois points précédents, nous pouvons factoriser $X_{[m,\infty[}$ en une suite infinie de (10^i) et (10^{i+1}). De plus, comme X est apériodique, $10^{i+1}(10^i)^n10^{i+1}$ doit apparaître pour au moins deux n distinct. Soient $l > k$ les deux plus petits naturel qui remplissent cette condition.

Pour montrer que $l = k+1$ nous procédons comme au point (iii). Notons d'abord que 10^i10^i et $10^{i+1}(10^i)^k10^{i+1}(10^i)^k$ sont dans $\mathrm{Fac}(X)$ et que les deux sont des carrés minimaux. De plus, comme $10^{i+1}(10^i)^l10^{i+1} \in \mathrm{Fac}(X)$, le lemme 5.0.1 indique qu'il existe deux carré minimaux avec $10^{i+1}(10^i)^l$ comme préfixe. Or le nombre de carrés minimaux étant 3, $10^{i+1}(10^i)^l$ doit être préfixe de $10^{i+1}(10^i)^k10^{i+1}(10^i)^k$ ce qui n'est possible que si $l = k+1$.

□

Proposition 5.1.2.
Soit $X \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ un mot infini carré-plein optimal. Il existe 2 naturels $i \geq 1$ et $k \geq 0$ qui déterminent ces carrés minimaux. Les racines de ces carrés sont :

$$S_1 = 0,\ S_2 = 010^{i-1},\ S_3 = 010^i,\ S_4 = 10^i,\ S_5 = 10^{i+1}(10^i)^k,\ S_6 = 10^{i+1}(10^i)^{k+1} \tag{5.1}$$

Démonstration:
Soit $X \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ carré-plein optimal. Par le lemme précédent, il existe $i \geq 1$ tel que 010^i10^i et $010^{i+1}10^i$ soient des facteurs de X et ces deux mots contiennent les facteurs 0^2, $(010^{i-1})^2$, $(010^i)^2$ et $(10^i)^2$. De plus, nous récupérons du point (iv) de 5.1.1 qu'il existe $k \geq 0$ tel que $(10^{i+1}(10^i)^k)^2$, $(10^{i+1}(10^i)^{k+1})^2$ soient des facteurs de X. L'optimalité de X permet de conclure vu que l'on dispose des 6 carrés nécessaires. □

Maintenant que l'on dispose des carrés, le fait que 11 ne soit pas un facteur de X va conditionner la forme de X. Nous allons utiliser cette forme pour décrire une famille de langages qui contient les mots carré-plein optimaux.

Théorème 5.1.3.
Soit $X \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ apériodique. X est carré-plein optimal si et seulement si, à un renommage près, $\exists i, k \in \mathbb{N}$ $(i \neq 0)$ tel que X fasse partie du langage :

$$0^* \cdot (10^i)^* \cdot (10^{i+1}(10^i)^k + 10^{i+1}(10^i)^{k+1})^\omega. \tag{5.2}$$

Démonstration:
Soit $X \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ apériodique.

i) Considérons que X soit carré-plein optimal. Décomposons donc X en wW avec W le suffixe de X qui commence avec le premier bloc 10^{i+1} de X. Ainsi, du point (iv) de 5.1.1 on obtient que W se factorise en une suite infinie de $10^{i+1}(10^i)^k$ et $10^{i+1}(10^i)^{k+1}$. La seule possibilité pour w est d'être de la forme $0^* \cdot (10^i)^*$ étant donné que le premier 1 de X induit le reste de la structure du mot.

ii) Considérons maintenant que X fasse parti du langage (5.2). Soit m un naturel et discutons de x_m.
Cas $x_m = 1$:
   1) Si $X_{[m,\infty[}$ démarre dans $(10^i)^*$, il a pour préfixe soit 10^i10^i soit 10^i10^{i+1} et donc aussi le carré minimal 10^i10^i.

2) Si $X_{[m,\infty[}$ démarre par un bloc $10^{i+1}10^i$ il a pour préfixe :

Soit $10^{i+1}(10^i)^k 10^{i+1}(10^i)^l$ qui commence par $10^{i+1}(10^i)^k 10^{i+1}(10^i)^k$ si l vaut k ou $k+1$.

Soit $10^{i+1}(10^i)^{k+1}10^{i+1}(10^i)^{k+1}$ qui est un carré.

Soit $10^{i+1}(10^i)^{k+1}10^{i+1}(10^i)^k 10^{i+1}$ qui commence par $10^{i+1}(10^i)^{k+1}10^{i+1}(10^i)^{k+1}$.

<u>Cas $x_m = 0$</u> :

1) Si $x_m x_{m+1} = 00$, la position commence bien par un carré.

2) Si $x_m x_{m+1} = 01$ alors $X_{[m,\infty[}$ a comme préfixe :

Soit 010^i et donc 010^i10^j. Qui commence par $010^{i-1}010^{i-1}$ si $j = i$ ou $j = i+1$. Soit 010^{i+1} et donc $010^{i+1}10^j$. Qui commence par 010^i010^i si $j = i$ ou $j = i+1$.

Ainsi, à chaque position $m \in \mathbb{N}$ de X, il commence par un carré minimal de (5.1) ce qui implique que X est carré-plein optimal. □

C'est cette famille de langages qui nous permet de faire le lien avec les mots sturmiens.

Théorème 5.1.4.
Si X est un mot sturmien, alors il est carré-plein optimal.

<u>*Démonstration:*</u>
Soit X un mot sturmien, quitte à renommer les lettres, supposons que $11 \notin \mathrm{Fac}(X)$. Soit i le plus naturel tel que $10^i1 \in \mathrm{Fac}(X)$ $(i \geq 1)$. Comme X est équilibré, $0^{i+2} \notin \mathrm{Fac}(X)$ et donc le plus grand j tel que $10^j1 \in \mathrm{Fac}(X)$ est $i+1$. En résumé, X appartient au langage $0^* \cdot (10^i + 10^{i+1})^\omega$. Considérons maintenant k le plus petit $n \in \mathbb{N}$ tel que $10^{i+1}(10^i)^n 10^{i+1} \in \mathrm{Fac}(X)$. Par équilibre, le plus grand n possible pour ces facteurs est $k+1$ car sinon $0^{i+1}(10^i)^k 10^{i+1}$ et $(10^i)^{k+2}1$ contredirait l'équilibre. Ainsi, le langage de X peut donc être affiné en : $0^* \cdot (10^i)^* \cdot (10^{i+1}(10^i)^k + 10^{i+1}(10^i)^{k+1})^\omega$ et donc le théorème 5.1.3 nous dit que X est carré-plein optimal. □

Pour décrire les carrés minimaux des mots sturmiens, non seulement nous disposons de l'existence de i et k mais en plus, la pente du mot va déterminer la valeur de ces deux naturels.

Théorème 5.1.5.
Soit X un mot sturmien de pente $\alpha = [0; a_1, a_2, \cdots] \in [0, \frac{1}{2}] \setminus \mathbb{Q}$. Alors les naturels i et k qui décrivent les carrés minimaux (5.1) de X sont tels que $i = a_1 - 1$ et $k = a_2 - 1$.

<u>*Démonstration:*</u>
Soit X un mot sturmien de pente $\alpha = [0; a_1, a_2, \cdots]$. Il existe $i \in \mathbb{N}_0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que les carrés minimaux de (5.1) soient ceux de X.

<u>$i = a_1 - 1$</u> : On récupère du point (*ii*) de 5.1.1 que 10^i1 et $10^{i+1}1$ sont les seuls de cette forme dans X. De là, on trouve que le mot 10^i est l'unique facteur spécial à droite de la forme 10^n vu que $10^i1, 10^{i+1} \in \mathrm{Fac}(X)$ et que $10^{i+2} \notin \mathrm{Fac}(X)$. Or le miroir du mot standard $\tilde{s}_1^\alpha = 10^{a_1-1}$ est aussi un facteur spécial à droite de X et donc $10^i = 10^{a_1-1}$.

<u>$k = a_2 - 1$</u> : On récupère du point (*iv*) de 5.1.1 que $10^{i+1}(10^i)^k$ et $10^{i+1}(10^i)^{k+1}$ sont les seuls de cette forme dans X. De là, on trouve que le mot $10^{i+1}(10^i)^{k+1}$ est l'unique

facteur spécial à droite de la forme $10^{i+1}(10^i)^n$ vu que $10^{i+1}(10^i)^{k+1}1$ et $10^{i+1}(10^i)^{k+1}0 = 10^{i+1}(10^i)^k10^{i+1}$ sont dans $\mathrm{Fac}(X)$ et que $10^{i+1}(10^i)^k0 = 10^{i+1}(10^i)^{k-1}10^{i+1} \notin \mathrm{Fac}(X)$. Ainsi, le suffixe $0(10^i)^{k+1}$ est l'unique facteur spécial à droite de la forme $0(10^i)^n$ or $\tilde{s}_2^\alpha = ((0^i1)^{a_2}0)^\sim = 0(10^i)^{a_2}$ est un facteur spécial à droite de X et donc $k+1 = a_2$.

□

Exemple 5.1.6.
On dispose d'une nouvelle façon de décrire les mots ayant la même pente que celui de Fibonacci i.e. $[0; 2, \overline{1}]$. On récupère ici que $i = 2-1 = 1$ et $k = 1-1 = 0$ et donc les mots sturmiens ayant la même pente font partie de l'ensemble :

$$0^*(10)^*(100 + 10010)^\omega$$

5.2 De la racine carrée de mots infinis

Dans le chapitre 2, nous avons appris que si X et Y étaient des mots sturmiens de même pente, alors ils disposent du même ensemble de facteurs. Et dans la section précédente, nous avons vu qu'ils partagent également les mêmes carrés minimaux. Nous arrivons donc à l'un des points centraux de ce mémoire qui est d'analyser les propriétés de la 2-racine ou racine carrée de mots carré-plein et notamment d'observer le résultat surprenant qui nous dit que si X est un mot sturmien, alors $\sqrt{X}$ est un mot sturmien de même pente.

Corollaire 5.2.1.
La 2-racine est bien définie sur l'ensemble $\mathfrak{S}$

Démonstration:
En effet, le théorème 5.1.4 nous dit que si $S \in \mathfrak{S}$ alors S est partout 2-répétitif (ou carré-plein) optimal. □

Nous pouvons donc poser comme rappel de 3.3 la définition du cas particulier de la 2-racine infinie.

Définition 5.2.2.
Soit $X \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ un mot infini carré-plein et soit $X_1^2X_2^2X_3^2X_4^2\cdots$. la décomposition de X en carrés minimaux. La racine carrée de $X = X_1^2X_2^2X_3^2X_4^2\cdots$. est définie par le mot

$$\sqrt{X} = X_1X_2X_3X_4\cdots$$

Exemple 5.2.3.
Regardons le début du mot F (1.1). On obtient :

$$\begin{aligned} F &= 0100101001001010010100100101001001010010100100 10\cdots \\ &= (010010)(100100)(1010)(0101)(00)(1001010010)(0101)(00)(1010)(010010)\cdots \\ \text{Et donc } \sqrt{F} &= (010)(100)(10)(01)(0)(10010)(01)(0)(10)(010)\cdots \\ &= 010100100101001001010010\cdots \end{aligned}$$

Pour lier un sturmien et sa racine, nous allons avoir besoin d'une fonction qui peut sembler simpliste, mais qui va être d'une importance capitale.

Définition 5.2.4.
Définissons

$$\psi : \mathbb{T} \to \mathbb{T} : \rho \mapsto \frac{\rho + (1-\alpha)}{2} \quad \text{avec} \quad \psi(0) = \begin{cases} \frac{(1-\alpha)}{2} \text{ si } I_0 = [0, 1-\alpha[\\ 1 - \frac{\alpha}{2} \text{ si } I_0 =]0, 1-\alpha] \end{cases}$$

Notons que le point $(1-\alpha)$ sera envoyé sur lui-même.

Cette fonction rapproche les points de $(1-\alpha)$, exactement en divisant cette distance par 2. De plus, cette fonction va nous permettre d'aboutir au résultat suivant : $\sqrt{S_{\alpha,\rho}} = S_{\alpha,\psi(\rho)}$.

Définition 5.2.5.
Soit $\alpha \in [0, \frac{1}{2}] \setminus \mathbb{Q}$. On dit d'un mot fini w tel que $w^2 \in \mathcal{L}(\alpha)$ qu'il *satisfait la condition* ψ-racine [1] si $\psi([w^2]) \subset [w]$.

Lemme 5.2.6.
Soit $\alpha \in [0, \frac{1}{2}] \setminus \mathbb{Q}$. Chaque carré minimal de pente α satisfait la condition ψ-racine et on dispose de l'égalité $\psi(\{\rho + 2|S_j|\alpha\}) = \{\psi(\rho) + |S_j|\alpha\}$ pour tout $\rho \in [S_j^2], j \in \{1, \cdots, 6\}$.

Démonstration:
Soit $\alpha \in [0, \frac{1}{2}] \setminus \mathbb{Q}$. Rappelons d'abord que $i = a_1 - 1$ et $k = a_2 - 1$. Caractérisons ensuite les différents $[S_j]$ et $[S_j^2]$:

1) $\underline{S_1 = 0}$: La définition 2.2.16 indique que $[S_1] = (0, 1-\alpha) = I_0$. Et vu que $S_1^2 = 00$, on déduit que $[S_1^2] = (0, 1-2\alpha)$.
2) $\underline{S_2 = 010^{i-1}}$: On calcule que

$$\begin{aligned} [S_2] &= I_0 \cap (I_1 - \alpha) \cap (I_0 - 2\alpha) \cap \cdots \cap (I_0 - a_1\alpha) \\ &= [\![0, 1-\alpha]\!] \cap [\![1-2\alpha, 1-\alpha]\!] \cap [\![1-2\alpha, 1-3\alpha]\!] \cap \cdots \cap [\![1-a_1\alpha, 1-(a_1+1)\alpha]\!] \\ &= [\![1-2\alpha, 1-\alpha]\!] \end{aligned}$$

En effet, par la définition 2.3.10 des fractions continues, on déduit que $a_1\alpha < 1 < (a_1+1)\alpha$

1. Dans [2, définition 10], cette condition est nommée *"square root condition"*. La traduction littérale "condition racine carré" étant, pour moi, peu satisfaisante et laissant à penser que l'on puisse directement pouvoir appliqué une racine carré. J'ai donc décidé de traduire cette condition par "condition ψ-racine"

et donc que $1-\alpha < \{-(a_1+1)\alpha\} < 1$. Ainsi, $[\![1-2\alpha, 1-\alpha]\!]$ est inclus dans tout les autres intervalles.

Et on calcule aussi que

$$\begin{aligned}
[S_2^2] &= [S_2] \cap ([S_2 - |S_2|\alpha]) = [S_2] \cap ([S_2 - a_1\alpha]) \\
&= [\![1-2\alpha, 1-\alpha]\!] \cap ([\![1-2\alpha, 1-\alpha]\!] - a_1\alpha) \\
&= [\![1-2\alpha, 1-\alpha]\!] \cap [\![1-(2+a_1)\alpha, 1-(1+a_1)\alpha]\!] \\
&= [\![1-(q_{2,1}+1)\alpha, 1-\alpha]\!]
\end{aligned}$$

On obtient la dernière égalité du fait que $1-2\alpha < 1-\{(a_1+2)\alpha\} < 1-\alpha$ et que $q_{2,1} = q_1 + q_0 = a_1 + 1$.

3) $\underline{S_3 = 010^i}$: On obtient donc que $[S_3] = [S_2] \cap [\![1-(a_1+1)\alpha, 1-(a_1+2)\alpha]\!] = [S_2]$ et ainsi $[S_3] = [\![1-2\alpha, 1-\alpha]\!]$.

Cependant, $|S_3| \neq |S_2|$ et nous avons donc besoin de calculer :

$$\begin{aligned}
[S_3^2] &= [S_3] \cap ([S_3 - |S_3|\alpha]) = [S_3] \cap ([S_3 - (a_1+1)\alpha]) \\
&= [\![1-2\alpha, 1-\alpha]\!] \cap ([\![1-2\alpha, 1-\alpha]\!] - (a_1+1)\alpha) \\
&= [\![1-2\alpha, 1-(q_{2,1}+1)\alpha]\!]
\end{aligned}$$

4) $\underline{S_4 = 10^i}$: On calcule similairement au point (2) que :

$$\begin{aligned}
[S_4] &= I_1 \cap (I_0 - \alpha) \cap \cdots \cap (I_0 - (a_1-1)\alpha) \\
&= [\![1-\alpha, 1]\!] \cap [\![1-\alpha, 1-2\alpha]\!] \cap \cdots \cap [\![1-(a_1-1)\alpha, 1-a_1\alpha]\!] \\
&= [\![1-\alpha, 1]\!]
\end{aligned}$$

De plus on obtient que :

$$\begin{aligned}
[S_4^2] &= [S_4] \cap ([S_4] - |S_4|\alpha) = [S_4] \cap ([S_4] - a_1\alpha) \\
&= [\![1-\alpha, 1]\!] \cap [\![1-(a_1+1)\alpha, 1-a_1\alpha]\!] \\
&= [\![1-q_{2,1}\alpha, 1]\!]
\end{aligned}$$

5) $\underline{S_5 = 10^{i+1}(10^i)^k}$: On calcule donc que :

$$\begin{aligned}
[S_5] &= [S_4] \cap (I_0 - (a_1+1)\alpha) \cap ([S_4] - q_{2,1}\alpha) \cap \cdots \cap ([S_4] - q_{2,k}\alpha) \\
&= [\![1-\alpha, 1]\!] \cap [\![1-a_1\alpha, 1-q_{2,1}\alpha]\!] \cap \\
&\qquad [\![1-(q_{2,1}+1)\alpha, 1-q_{2,1}\alpha]\!] \cap \cdots \cap [\![1-(q_{2,k}+1)\alpha, 1-q_{2,k}\alpha]\!] \\
&= [\![1-\alpha, 1-q_{2,1}\alpha]\!]
\end{aligned}$$

En effet, rappelons d'abord que les $\{-q_{2,l}\alpha\}$ et $\{-q_0\alpha\}$ sont tous du même coté de 0. On obtient ensuite, par (4.2), que pour tout $0 < l \leq a_2$, $\|q_{k,l}\alpha\| < \|q_{k,l-1}\alpha\|$. Ainsi, nous pouvons établir que $1-\alpha < 1-\{q_{2,1}\alpha\} < \cdots < 1-\{q_{2,k}\alpha\} < 1$ et donc obtenir l'égalité.

De plus, on calcule que :

$$\begin{aligned}[S_5^2] &= [S_5] \cap ([S_5] - |S_5|\alpha) = [S_5] \cap ([S_5] - q_{2,k+1}\alpha) = [S_5] \cap ([S_5] - q_2\alpha) \\ &= [\![1-\alpha, 1-q_{2,1}\alpha]\!] \cap [\![1-(q_2+1)\alpha, 1-(q_{3,1}+1)\alpha]\!] \\ &= [\![1-\alpha, 1-(q_{3,1}+1)\alpha]\!]\end{aligned}$$

En effet, de nouveau par (4.2), on sait que $\|q_{3,1}\alpha\| < \|q_{2,1}\|$, et comme $1-\{q_{3,1}\alpha\}$ et $1-\{q_{2,1}\alpha\}$ sont de part et d'autre de 0 on obtient donc que $1-\{(q_2+1)\alpha\} < 1-\alpha < 1-\{(q_{3,1}+1)\alpha\} < 1-\{q_{2,1}\alpha\}$ et donc l'égalité finale.

6) $\underline{S_6 = 10^{i+1}(10^i)^{k+1}}$: On calcule que :

$$\begin{aligned}[S_6] &= [S_5] \cap ([S_4] - q_2\alpha) \\ &= [\![1-\alpha, 1-q_{2,1}\alpha]\!] \cap [\![1-(q_2+1)\alpha, 1-q_2\alpha]\!] \\ &= [\![1-\alpha, 1-q_{2,1}\alpha]\!] = [S_5]\end{aligned}$$

En effet, la chaîne d'inégalité montrée au point (v) nous dit que $1-\{(q_2+1)\alpha\} < 1-\alpha < 1-\{q_{2,1}\alpha\} < 1-\{q_2\alpha\}$.

Enfin, on calcule que

$$\begin{aligned}[S_6^2] &= [S_6] \cap ([S_6] - |S_6|\alpha) = [S_6] \cap ([S_6] - q_{3,1}\alpha) \\ &= [\![1-\alpha, 1-q_{2,1}\alpha]\!] \cap [\![1-(q_{3,1}+1)\alpha, 1-(q_{3,1}+q_{2,1})\alpha]\!] \\ &= [\![1-(q_{3,1}+1)\alpha, 1-q_{2,1}\alpha]\!]\end{aligned}$$

En effet, de nouveau comme au point (v), on trouve que $1-\alpha < 1-\{(q_{3,1}+1)\alpha\} < 1-\{q_{2,1}\alpha\}$ et comme $|[S_6]| < \|\alpha\|$ on obtient l'égalité finale.

Nous pouvons ainsi montrer que les six carrés minimaux satisfont tous la condition ψ-racine. En effet, notons d'abord par définition que $[w^2] \subset [w]$ et que les S_j possèdent tous $1-\alpha$ comme extrémité. Posons $\rho \in [w^2]$. On obtient d'abord que $\rho \in [w]$ et donc que $[\![\rho, 1-\alpha]\!] \subset [w]$. Par la définition 5.2.4 de ψ, on obtient donc que $\rho < 1-\alpha \implies \rho < \psi(\rho) < 1-\alpha$ et $1-\alpha < \rho \implies 1-\alpha < \psi(\rho) < \rho$ et donc $\psi(\rho) \in [w]$.

Nous allons maintenant prouver la deuxième partie de l'énoncé ; c'est-à-dire que

$$\psi(\{\rho + 2|S_j|\alpha\}) = \{\psi(\rho) + |S_j|\alpha\} \text{ pour tout } \rho \in [S_j^2], j \in \{1, \cdots, 6\}.$$

Posons $\rho \in [S_i^2] \setminus \{0\}$ tel que $\rho + 2|S_i|\alpha \neq 0$ et que $\lfloor \rho + 2|S_i|\alpha \rfloor = 2r$ $(r \geq 0)$. On obtient dans ce cas que :

$$\psi(\{\rho+2|S_i|\alpha\}) = \frac{(\rho+2|S_i|\alpha-2r)+(1-\alpha)}{2} = \psi(\rho)+|S_i|\alpha - r = \{\psi(\rho)+|S_i|\alpha\} \quad (5.3)$$

Et il reste donc à vérifier que le plancher de $\rho+2|S_i|\alpha$ soit pair pour tout $\rho \in [S_i^2]$ et que le résultat soit vrai pour les potentiels points ρ tels que $\rho = 0$ et $\{\rho+2|S_i|\alpha\} = 0$.

Rappelons d'abord les équations suivantes $\|q_{k,l}\alpha\| = (-1)^k(q_{k,l}\alpha - p_{k,l})$ (4.1), $\|q_{k,l}\alpha\| = \|q_{k,l-1}\alpha\| - \|q_{k-1}\alpha\|$ (4.2), $\|q_n\alpha\| > \|q_{n+1}\alpha\|$ ($n \in \mathbb{N}$) (4.3) et $1-\alpha \geq \alpha + \|q_1\alpha\|$ (point (2) de la partie précédente).

1) $\underline{S_1 = 0}$: Soit $\rho \in [\![0, 1-2\alpha]\!]$. On calcule que :

$$2p_0 = 0 < 2\alpha \leq \rho+2\alpha \leq 1-2\alpha+2\alpha = 1 = 2p_0+1 \implies \lfloor \rho+2\alpha \rfloor = 2p_0$$

Si $\rho = 0$ alors $I_0 = [0, 1-\alpha[$ et on obtient que

$$\{\psi(\rho)+\alpha\} = \left\{\frac{1-\alpha}{2}+\alpha\right\} = \left\{\frac{1+\alpha}{2}\right\} = \psi(\{\rho+2\alpha\})$$

Et si $\{\rho+2\alpha\} = 0$ alors $\rho+\alpha = \{-\alpha\} \in I_0 =]0, 1-\alpha]$ et on obtient que

$$\psi(\{\rho+2\alpha\}) = \psi(0) = 1-\frac{\alpha}{2} = 1-\frac{\alpha}{2}+\{\rho+2\alpha\} = \{\psi(\rho)+\alpha\}$$

2) $\underline{S_2 = 010^{i-1}}$: Soit $\rho \in [\![1-(q_{2,1}+1)\alpha, 1-\alpha]\!]$. On calcule donc que :

$$\rho+2q_1\alpha \leq 1-\alpha+2q_1\alpha = 1-\alpha-2\|q_1\alpha\|+2p_1 < 1+2p_1$$

Et aussi que :

$$\begin{aligned}\rho+2q_1\alpha &\geq \|(q_{2,1}+1)\alpha\|+2q_1\alpha \\ &= 1-\alpha+\|q_{2,1}\|-2\|q_1\alpha\|+2p_1 \\ &\geq \alpha+\|q_1\alpha\|+\|q_{2,1}\alpha\|-2\|q_1\alpha\|+2p_1 \\ &\geq \|q_{2,1}\alpha\|+2p_1 \\ &> 2p_1\end{aligned}$$

Et donc $\lfloor \rho+2q_1\alpha \rfloor = 2p_1$. De plus, comme $\rho+2q_1\alpha$ n'est pas un entier pour tout $\rho \in [S_2^2]$ et que 0 n'est pas dans $[S_2^2]$, on peut conclure.

3) $\underline{S_3 = 010^i}$: Soit $\rho \in [\![1-2\alpha, 1-(q_{2,1}+1)\alpha]\!]$. On calcule donc que :

$$\rho+2q_{2,1}\alpha \geq 1-2\alpha+2q_{2,1}\alpha \geq \|q_1\alpha\|+2\|q_{2,1}\alpha\|+2p_{2,1} > 2p_{2,1}$$

Et aussi que :

$$\begin{aligned}\rho + 2q_{2,1}\alpha &\leq 2 - (q_{2,1}+1)\alpha + 2\|q_{2,1}\alpha\| + 2p_{2,1} \\ &= 1 - \alpha + \|q_{2,1}\alpha\| + 1 - q_{2,1}\alpha + \|q_{2,1}\alpha\| + 2p_{2,1} \\ &< 1 + 1 - q_{2,1}\alpha + \|q_{2,1}\alpha\| + 2p_{2,1} \\ &= 1 + 1 - p_{2,1} + 2p_{2,1} = 1 + 2p_{2,1}\end{aligned}$$

La première inégalité est due au fait que $(q_{2,1}+1)\alpha \in]1+\alpha, 1+2\alpha[$ et donc que la partie fractionnaire de $1-(q_{2,1}+1)\alpha$ s'obtient en rajoutant un tour de cercle.

Et donc $\lfloor \rho + 2q_{2,1}\alpha \rfloor = 2p_{2,1}$. De plus, comme $\rho + 2q_{2,1}\alpha$ n'est pas un entier pour tout $\rho \in [S_3^2]$ et que 0 n'est pas dans $[S_3^2]$, on peut conclure.

4) $\underline{S_4 = 10^i}$: Soit $\rho \in [\![1 - q_{2,1}\alpha, 1]\!]$. On calcule donc que :

$$\rho + 2q_1\alpha \leq 1 - 2\|q_1\alpha\| + 2p_1 < 1 + 2p_1$$

Et aussi que :

$$\rho + 2q_1\alpha \geq 1 - \alpha + \|q_1\alpha\| - 2\|q_1\alpha\| + 2p_1 \geq \alpha + 2p_1 > 2p_1$$

Et donc $\lfloor \rho + 2q_1\alpha \rfloor = 2p_1$. De plus, comme $\rho + 2q_1\alpha$ n'est pas un entier pour tout $\rho \in [S_4^2]$ et que 0 n'est pas dans $[S_4^2]$, on peut conclure.

5) $\underline{S_5 = 10^{i+1}(10^i)^k}$: Soit $\rho \in [\![1-\alpha, 1-(q_{3,1}+1)\alpha]\!]$. On calcule donc que :

$$\begin{aligned}\rho + 2q_2\alpha &\leq \|(q_{3,1}+1)\alpha\| + 2q_2\alpha \\ &= 1 - \alpha + \|q_{3,1}\alpha\| + 2p_2 + 2\|q_2\alpha\| \\ &= 1 - \alpha + \|q_1\alpha\| - \|q_2\alpha\| + 2p_2 + 2\|q_2\alpha\| \\ &= 1 - \alpha + \|q_1\alpha\| + \|q_2\alpha\| + 2p_2 \\ &\leq 2p_2 + 1\end{aligned}$$

Et aussi que :

$$\begin{aligned}\rho + 2q_2\alpha &\geq 1 - \alpha + 2q_2\alpha = 1 - \alpha + 2p_2 + 2\|q_2\alpha\| \\ &> \alpha + \|q_1\alpha\| + 2p_2 + 2\|q_2\alpha\| \\ &> 2p_2\end{aligned}$$

Et donc $\lfloor \rho + 2q_2\alpha \rfloor = 2p_2$. Si $\rho = \|(q_{3,1}+1)\alpha\|$ et $a_2 = 1$ alors on obtient $\{x + 2q_2\alpha\} = 0$.

Dans ce cas, $I_0 =]0, 1-\alpha]$ et $\psi(\{\rho + 2q_2\alpha\}) = \psi(0) = 1 - \frac{\alpha}{2}$. De plus,

$$\begin{aligned}\psi(\rho) + q_2\alpha &= \frac{(1-\alpha+\|q_{3,1}\alpha\| + 1 - \alpha)}{2} + p_2 + \|q_2\alpha\| \\ &= \frac{(1-\alpha+\|q_1\alpha\| - \|q_2\alpha\| + 1 - \alpha + 2\|q_2\alpha\|)}{2} + p_2 \\ &= 1 - \frac{\alpha}{2} + p_2\end{aligned}$$

Et donc, on obtient bien que $\{\psi(\rho) + q_2\alpha\} = \psi(\{\rho + 2q_2\alpha\})$. De plus, comme 0 n'est pas dans $[S_5^2]$ on peut conclure.

6) $\underline{S_6 = 10^{i+1}(10^i)^{k+1}}$: Soit $\rho \in [\![1-(q_{3,1}+1)\alpha, 1 - q_{2,1}\alpha]\!]$. On calcule donc que :

$$\begin{aligned}\rho + 2q_{3,1}\alpha &\leq \|q_{2,1}\alpha\| - 2\|q_{3,1}\alpha\| + 2p_{3,1} \\ &= 1 - \alpha + \|q_1\alpha\| - 2\|q_1\alpha\| + 2\|q_2\alpha\| + 2p_{3,1} \\ &< 1 - \alpha - \|q_1\alpha\| + 2\|q_1\alpha\| + 2p_{3,1} \\ &= 1 - \alpha + \|q_1\alpha\| + 2p_{3,1} \\ &< 1 + 2p_{3,1}\end{aligned}$$

Et aussi que :

$$\begin{aligned}\rho + 2q_{3,1}\alpha &\geq \|(q_{3,1}+1)\alpha\| - 2\|q_{3,1}\alpha\| + 2p_{3,1} \\ &= 1 - \alpha - \|q_{3,1}\alpha\| + 2p_{3,1} \\ &\geq \alpha + \|q_1\alpha\| - \|q_1\alpha\| + \|q_2\alpha\| + 2p_{3,1} \\ &= \alpha + \|q_2\alpha\| + 2p_{3,1} \\ &> 2p_{3,1}\end{aligned}$$

Et donc $\lfloor \rho + 2q_{3,1}\alpha \rfloor = 2p_{3,1}$. De plus, comme $\rho + 2q_{3,1}\alpha$ n'est pas un entier pour tout $\rho \in [S_6^2]$ et que 0 n'est pas dans $[S_6^2]$, on peut conclure.

$\square$

Théorème 5.2.7.
Soit $S_{\alpha,\rho}$ un Sturmien de pente $\alpha \in [0, \frac{1}{2}] \setminus \mathbb{Q}$ et d'origine $\rho \in [0, 1[$. Alors $\sqrt{S_{\alpha,\rho}} = S_{\alpha,\psi(\rho)}$. Plus particulièrement, $\sqrt{S_{\alpha,\rho}}$ est un mot sturmien de pente α.

Démonstration:
Dénotons $S_{\alpha,\rho}$ par sa factorisation en carrés minimaux : $X_1^2 X_2^2 X_3^2 X_4^2 \cdots$ ..

Comme X_1^2 satisfait la condition ψ-racine, par le lemme précédent, on récupère que $\psi(\rho) \in [X_1]$. Ainsi, les mots $S_{\alpha,\psi(\rho)}$ et $\sqrt{S_{\alpha,\rho}}$ commencent tous deux par X_1. De plus, pour tout $x \in [X_1^2]$, on sait du lemme précédent que $\psi(\{\rho + 2|X_1|\alpha\}) = \{\psi(\rho) + |X_1|\alpha\}$.

Ainsi, on obtient que $(S_{\alpha,\rho})_{[2|X_1|,\infty[}$ et $(S_{\alpha,\psi(\rho)})_{[|X_1|,\infty[}$ possèdent la même origine. Les suffixes de $S_{\alpha,\psi(\rho)}$ et de $\sqrt{S_{\alpha,\rho}}$ sur $[|X_1|, \infty[$ commencent donc par le même carré : X_2. On peut donc conclure de proche en proche que $S_{\alpha,\psi(\rho)} = \sqrt{S_{\alpha,\rho}}$. $\square$

Corollaire 5.2.8.
Soit X un mot sturmien de pente α. Le mot X est tel que $\sqrt{X} = X$ si et seulement si $X = 01c_\alpha$ ou $X = 10c_\alpha$, les deux mots d'origine $1-\alpha$.

Démonstration:
Soit X un sturmien de pente α et d'origine ρ. On calcule grâce à la fonction ψ que :

$$\psi(\rho) = \rho \iff \frac{\rho + (1-\alpha)}{2} = \rho \iff \rho = 1-\alpha$$

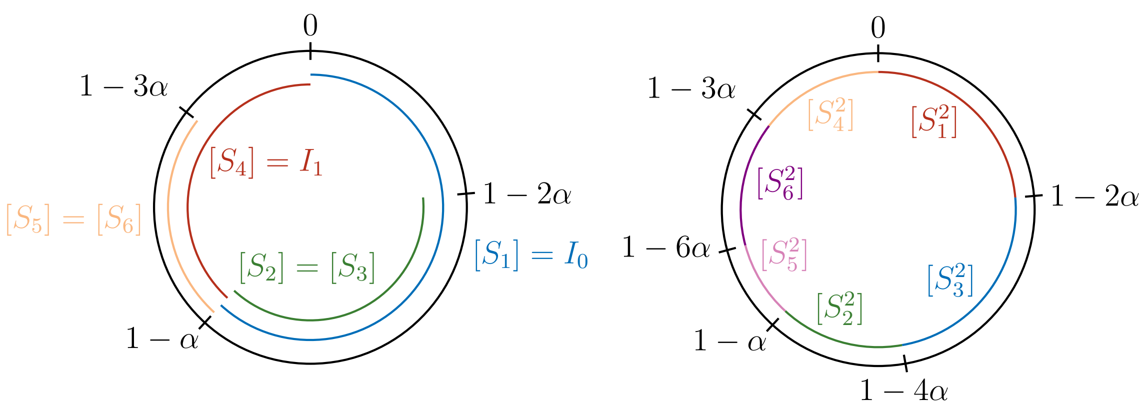
Or, étant donné que $C_\alpha = S_{\alpha,\alpha}$, en rajoutant un préfixe de deux lettres par rotation sur $\mathbb{T}$, on obtient les sturmiens $01C_\alpha$ et $10C_\alpha$ en fonction du choix de I_0 et I_1 concernant $(1-\alpha)$.

De plus, comme $\forall \rho \in \mathbb{R}, \lim\limits_{n\to\infty} \psi^n(\rho) = (1-\alpha)$, on déduit que toute suite de la forme $(\sqrt[2n]{S_{\alpha,\rho}})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $S_{\alpha,(1-\alpha)}$ ou $S'_{\alpha,(1-\alpha)}$. $\square$

Exemple 5.2.9.
Pour le mot de Fibonacci, on obtient donc que :

j	S_j	$[S_j]$	$[S_j^2]$
1	0	$(0, 1-\alpha)$	$(0, 1-2\alpha)$
2	01	$[\![1-2\alpha, 1-\alpha]\!]$	$[\![1-4\alpha, 1-\alpha]\!]$
3	010	$[\![1-2\alpha, 1-\alpha]\!]$	$[\![1-2\alpha, 1-4\alpha]\!]$
4	10	$[\![1-\alpha, 1]\!]$	$[\![1-3\alpha, 1]\!]$
5	100	$[\![1-\alpha, 1-3\alpha]\!]$	$[\![1-\alpha, 1-6\alpha]\!]$
6	10010	$[\![1-\alpha, 1-3\alpha]\!]$	$[\![1-6\alpha, 1-3\alpha]\!]$

Ce qui donne sur le cercle $\mathbb{T}$:



Représentations des $[S_j]$ et $[S_j^2]$ sur le cercle de rotation d'angle $\frac{1}{\varphi^2}$

5.3 Des propriétés de la racine carrée de mots sturmiens

Dans cette section, nous allons d'abord présenter des critères sur les mots finis qui satisfont la condition ψ-racine. Ensuite, nous aboutirons à des résultats qui caractérisent la structure de la racine carrée des mots sturmiens.

5.3.1 De la condition ψ-racine et des mots (semi-)standards

Dans la section 2.3.3 nous avons vu que la suite des mots standards de pente α convergeait vers le mot caractéristique de même pente. Le but de cette première section va être de montrer le lien entre les mots (semi-)standards et la condition ψ-racine.

Pour ce faire, rappelons-nous des deux ensembles définis dans 2.3.32, $St(\alpha)$ l'ensemble des mots standards et $St^+(\alpha)$ l'ensemble des mots (semi-)standards de pente α. Et posons comme nouvelle notation leur miroir :

$$StM(\alpha) = \{\tilde{w} : w \in St(\alpha)\} \text{ et } StM^+(\alpha) = \left\{\tilde{w} : w \in St^+(\alpha)\right\}$$

Nous allons aussi avoir besoin de l'opération L qui échange les deux premières lettres d'un mot de longueur au moins 2.

Lemme 5.3.1.
Soit $\alpha = [0; a_1, a_2, \cdots]$, si $n = q_1$ ou $n = q_{l,k}$ ($k \geq 2$ et $0 < l \leq a_k$) et si i est un entier entre 1 et n alors :

i) Si $\{-i\alpha\} \in I_0$ et $\{-(i+n)\alpha\} < \{-i\alpha\}$, alors $\psi(-(i+n)\alpha) > \{-i\alpha\}$.

ii) Si $\{-i\alpha\} \in I_1$ et $\{-(i+n)\alpha\} > \{-i\alpha\}$, alors $\psi(-(i+n)\alpha) < \{-i\alpha\}$.

<u>*Démonstration:*</u>
Soient $\alpha = [0; a_1, a_2, \cdots] \in [0, \frac{1}{2}] \setminus \mathbb{Q}$ et $n > 1$ un (semi-)convergent.

i) Considérons que $\{-i\alpha\} \in I_0$ et $\{-(i+n)\alpha\} < \{-i\alpha\}$. La distance entre $\{-(i+n)\alpha\}$ et $\{-i\alpha\}$ est $\|n\alpha\|$ qui est plus petite que $\|\alpha\| = \alpha$. Ce qui implique que $\{-n\alpha\}$ est dans I_1. Supposons par l'absurde que $\psi(-(i+n)\alpha) \leq \{-i\alpha\}$. En développant ψ, on obtient que $\{-(i+n)\alpha\} + \frac{1}{2}(\{1-\alpha\} - \{-(i+n)\alpha\}) \leq \{-i\alpha\}$. Cette inégalité implique, vu que $d(\{-(i+n)\alpha\}, \{-i\alpha\}) = d(1, \{-n\alpha\})$, que $\{-(i+n)\alpha\} = \{-i\alpha\} - (1 - \{-n\alpha\})$.

   Et l'inégalité supposé devient :

$$\begin{aligned}
&\{-(i+n)\alpha\} + \frac{1}{2}(\{1-\alpha\} - \{-(i+n)\alpha\}) \leq \{-i\alpha\} \\
\iff &\{-i\alpha\} - (1 - \{-n\alpha\}) + \frac{1}{2}(\{1-\alpha\} - (\{-i\alpha\} - (1 - \{-n\alpha\}))) \leq \{-i\alpha\} \\
\iff &\frac{1}{2}(\{1-\alpha\} - \{-i\alpha\} - (1 - \{-n\alpha\})) \leq 0 \\
\iff &\{1-\alpha\} - \{-i\alpha\} \leq (1 - \{-n\alpha\})
\end{aligned}$$

   Et du fait que $\{-n\alpha\} \in I_1$ on arrive à $||-(i-1)\alpha|| \leq ||-n\alpha||$.

Cas $n = q_{l,k}$ ($k \geq 2$ et $0 < l \leq a_k$) : Comme $i - 1 < n$ par la proposition 4.1.11, on obtient que $i - 1 = mq_{k-1}$ ($1 \leq m \leq \min\{l, a_k - l + 1\}$).

Et comme $\{-n\alpha\} \in I_1$, le point $\{-q_{k-1}\alpha\}$ doit se retrouver a l'opposé de 0 dans I_0 et donc que $\{-(i-1)\alpha\} \in I_0$. Or cela impliquerais que $\{-i\alpha\}$ se trouve dans I_1 ce qui contredit l'énoncé.

Cas $n = q_1$: Dès que i est plus grand que 1, l'inégalité $|| -(i-1)\alpha|| \leq || -n\alpha||$ ne tiens plus.

ii) le point (ii) est tout à fait symétrique.

□

Corollaire 5.3.2.
Si $w^2 \in \mathcal{L}(\alpha)$ avec w primitif satisfaisant la condition ψ-racine, alors $[w]$ possède $(1-\alpha)$ comme extrémité.

Démonstration:
Soit $w^2 \in \mathcal{L}(\alpha)$ avec w primitif. En posant $n = |w|$, la proposition 4.2.2, les possibilités pour n se réduisent à $n = q_0$,$n = q_1$ ou $n = q_{k,l}$ ($k \geq 2$ et $0 < l \leq a_k$)

Cas $n = q_0 = 1$: comme le seul carré de taille 2 de $\mathcal{L}(\alpha)$ est 00, on obtient immédiatement que $[0] = I_0 = [\![0, 1-\alpha]\!]$

Cas $n = q_1$ ou $n = q_{k,l}$: Posons $[w] = [\![-i\alpha, -j\alpha]\!]$, ainsi soit $[w^2] = [\![-i\alpha, -(j + |w|)\alpha]\!]$ soit $[w^2] = [\![-(i + |w|\alpha, -j\alpha]\!]$.

Sous-Cas $[w] \subseteq I_0$ Par symétrie, fixons $\{-i\alpha\} < \{-j\alpha\}$.

Sous-sous Cas $[w^2] = [\![-(i + |w|)\alpha, -j\alpha]\!]$: Si $j \neq 1$ on peut trouve un point x dans $[\![-i\alpha, -j\alpha]\!]$ proche de $\{-j\alpha\}$ avec $\psi(x) > \{-j\alpha\}$ et donc $\psi([w^2])$ ne sera pas inclus dans $[w]$. Donc on doit avoir $j = 1$.

Sous-sous Cas $[w^2] = [\![-i\alpha, -(j + |w|)\alpha]\!]$: Si $j \neq 1$ on sait par le lemme que $\psi(-(j+|w|)\alpha) > \{-j\alpha\}$ et que donc la condition ψ-racine de $[w^2]$ n'est pas respectée. et donc on doit également avoir $j = 1$.

Sous Cas $[w] \subseteq I_1$: Ce cas de fait de manière symétrique avec le deuxième point du lemme.

□

Proposition 5.3.3.
Soient $w, v \in \mathcal{L}(\alpha)$ deux mots de taille $n = q_1$ ou $n = q_{l,k}$ ($k \geq 2$ et $0 < l \leq a_k$) tels que $[w]$ et $[v]$ possèdent $1 - \alpha$ comme extrémité. Alors :

i) Il existe un mot u tel que $w = xyu$ et $v = yxu = L(w)$ ($x \neq y \in \{0, 1\}$)

ii) Soit w soit v est spécial à droite

iii) Le dit mot spécial a son carré dans $\mathcal{L}(\alpha)$

iv) L'autre mot a son carré dans $\mathcal{L}(\alpha)$ si et seulement si il appartient à $St(\alpha)$

Démonstration:

Soient w et v dans $\mathcal{L}(\alpha)$ deux mots de taille n tels que $[w]$ et $[v]$ possèdent $(1-\alpha)$ comme extrémité.

Cas $n = q_1$: Les facteurs w sont v sont identifiables par la caractérisation 5.2.6 des carrés minimaux de $\mathcal{L}(\alpha)$. En effet, être de longueur q_1 et avoir $1-\alpha$ en extrémité limite les possibilité pour w et v à $010^{a_1-2} = S_2$ et $10^{a_1-1} = S_4$. Notons que S_4 spécial à droite, $L(S_4) = S_2 \in St(\alpha)$ et $S_2^2, S_4^2 \in \mathcal{L}(\alpha)$.

Cas $n = q_{k,l}$: Par la proposition 4.1.11 , Nous savons que $\{-q_{k,l}\alpha\}$ est le point le plus proche de 0 dans le coté opposé à $\{-q_{k-1}\alpha\}$ et donc que $\{-(q_{k,l}+1)\alpha\}$ appartiens soit à $[w]$ soit à $[v]$. Posons par symétrie que $\{-(q_{k,l}+1)\alpha\} \in [w]$ i.e. que w soit spécial à droite et ainsi le point (ii) est vérifié.

Ensuite, l'extrémité de w qui n'est pas $1-\alpha$ doit, après rotation, être ensuite le points le plus proche de 0 opposé à $\{-q_{k-1}\alpha\}$. Et donc de nouveau par la proposition 4.1.11, on obtient que $[w] = [\![-(q_{k,l-1}+1)\alpha), 1-\alpha]\!]$ et $[v] = [\![1-\alpha, -(q_{k-1}+1)\alpha]\!]$.

Posons $x = \{-(q_{k,l-1}+1)\alpha\}$ et $y = \{-(q_{k-1}+1)\alpha\}$ deux points de part et d'autre de $1-\alpha$. Ces points sont tels que $\{x+\alpha\}$ et $\{y+\alpha\}$ sont de part et d'autre de 0. On obtient ainsi que w et v commencent par deux lettres opposées a et b.

Supposons par l'absurde que $w = abzcw'$ et $v = bazdv'$ avec c et d des lettres distincts et $|z| \leq n-3$. Cela implique que $x' = \{x + (|z|+2)\alpha\}$ est un point de $[c]$ et $y' = \{y + (|z|+2)\alpha\}$ est un points de $[d]$. Si les égalités $c = a$ et $d = b$ ne sont pas vraies, alors $x' - \alpha$ serait dans $[a]$ et $y' - \alpha$ serait dans $[b]$ ce qui rendrait caduque le choix de z. Et donc $c = a$ et $d = b$.

Comme $\alpha \notin \mathbb{Q}$, soit x' est plus proche de $1-\alpha$ que x soit y' est plus proche de $1-\alpha$ que y. Supposons que l'on soit dans le premier cas. Comme x et x' sont du même coté de $1-\alpha$ on obtient $||x'+\alpha|| = ||(q_{k,l-1} - |z| - 2)\alpha|| < ||q_{k,l-1}\alpha|| = ||x+\alpha||$. Du fait de $q_{k,l-1} - |z| - 2 < q_{k,l-1}$, par la proposition 4.1.11, on obtient que $q_{k,l-1} - |z| - 2 \leq 0$. Cependant comme $||q_{k,l-1}\alpha|| = ||-q_{k,l-1}\alpha||$, la proposition nous dit aussi que $|z| + 2 - q_{k,l-1} = mq_{k-1}$ $(m \geq 1)$. Donc $|z| + 2 \geq q_{k,l-1} + q_{k-1} = q_{k,l} = n$ ce qui contredis $|z| \leq n-3$.

Si par contre y' est plus proche de $1-\alpha$ que y, on obtient que $||y'+\alpha|| = ||(q_{k-1} - |z| - 2)\alpha|| < ||q_{k-1}\alpha|| = ||y+\alpha||$. Pareillement au point précédent, du fait que $q_{k-1} - |z| - 2 \leq 0$ et $|z| + 2 - q_{k-1} \geq q_k$, on arrive à la contradiction $|z| + 2 \geq q_{k-1} + q_k > n$.

Ainsi, nous avons prouvé le point (i) car $w = abu$ et $v = bau$. Du fait de $n = q_{k,l}$, le mot spécial à droite sera $\tilde{s}_{k,l}$. par la théorème 4.2.9 mots w et v sont des conjugués de $\tilde{s}_{k,l}$ et donc conjugués entre eux.

Si $l = a_k$ alors la proposition 4.2.2 indique que $w^2, v^2 \in \mathcal{L}(\alpha)$. Si maintenant $l \neq a_k$, le théorème 4.2.9 indique que $s_{k,l}^2$ est dans $\mathcal{L}(\alpha)$. Or $\mathcal{L}(\alpha)$ est miroir-invariant ce qui implique que $w^2 = \tilde{s}_{k,l} \in \mathcal{L}(\alpha)$. Et par la même proposition $||[w]|| = ||q_{k,l-1}\alpha|| = ||s_{k,l}||$.

De plus $[v] = [\![1-\alpha, -(q_{k-1}+1)\alpha]\!]$ et $||[v]|| = ||q_{k-1}\alpha|| \neq ||[u]||$ et donc $v^2 \notin \mathcal{L}(\alpha)$. Ce qui permet de conclure pour (iii) et (iv).

$\square$

Théorème 5.3.4.
Un carré $w^2 \in \mathcal{L}(\alpha)$ avec w primitif satisfait la condition ψ-racine si et seulement si

$$w \in StM^+(\alpha) \cup L(StM(\alpha))$$

<u>*Démonstration:*</u>
Soit w un mot primitif tel que $w^2 \in \mathcal{L}(\alpha)$.

- Considérons que w^2 satisfait la condition ψ-racine. Si $|w| = 1$, alors $w = 0 = \tilde{s}_0$. En supposant donc que $|w| > 1$. Par le corollaire 5.3.2, $[w]$ possède $1 - \alpha$ comme extrémité. Comme observé, $|w| = q_1$ ou $|w| = q_{k,l}$ ($k \geq 2$ et $0 < l \leq a_k$) et donc par la proposition ci-dessus, $w = \tilde{s}$ ou $w = L(\tilde{s})$ où s est le mot (Semi-)standard de longueur $|w|$. On sait aussi que $\tilde{s}^2 \in \mathcal{L}(\alpha)$ et que $L(\tilde{s})^2 \in \mathcal{L}(\alpha)$ si et seulement si $|w| = q_k$ ($k \geq 1$). Et donc $w \in StM^+(\alpha) \cup L(StM(\alpha))$
- Considérons maintenant que $w \in StM^+(\alpha) \cup L(StM(\alpha))$. Par le théorème 4.2.9, comme w et $L(w)$ contiennent le même nombre de chaque lettre, ces deux mots sont conjugués et $w^2 \in \mathcal{L}(\alpha)$. Soit u et v des facteurs de tailles $|w|$ avec $1 - \alpha$ comme extrémité. Par la proposition précédente, le mot u est spécial à droite et $v = L(u)$. Comme le facteur spécial de taille $|w|$ est unique, soit $w = u$ soit $L(w) = u$ et donc $[w]$ possède aussi $1 - \alpha$ comme extrémité ce qui implique que w^2 satisfait la condition ψ-racine.

$\square$

5.3.2 De la condition ψ-racine et équation de mot

Nous allons donc maintenant essayer d'étendre la caractérisation du théorème 5.3.4 de la section précédente.

Cette extension de la caractérisation des carrés de pente α qui satisfont la condition ψ-racine est donnée par les solutions à l'équation de mot de $\mathcal{L}(\alpha)$:

$$X_1^2 X_2^2 \cdots X_n^2 = (X_1 X_2 \cdots X_n)^2 \tag{5.4}$$

Nous nous intéresserons seulement aux carrés minimaux pour ensuite confondre la notion de racine carrée pour les mots infinis.

Définition 5.3.5.
Un mot w non vide est solution de (5.4) s'il peut s'écrire comme un produit de racines de carrés minimaux qui satisfont l'équation.

La solution $X_1 = X_2 = \cdots = X_n$ est dite triviale. Si w est un mot primitif, alors w est dit une solution primitive. Le mot w est également une solution dans $\mathcal{L}(\alpha)$ si w satisfait l'équation et que $w^2 \in \mathcal{L}(\alpha)$.

Remarques 5.3.6.
Les carrés minimaux de pente α sont des solutions triviales.

Un exemple de solution non triviale est $w = S_2S_1S_4$ dans le langage de Fibonacci ($\alpha = [0; 2, 1, 1, \cdots]$). En effet $w^2 = (01010)^2 = (01)^2 0^2 (10)^2 = S_2^2 S_1^2 S_4^2$.

Notons aussi que pareillement au mots infinis, la factorisation d'un mot fini en carré minimaux est unique. En effet si $X_1^2 \cdots X_n^2 = Y_1^2 \cdots Y_m^2$, soit X_1^2 est préfixe de Y_1^2 soit l'inverse, et donc par minimalité $X_1{=}Y_1$ et l'égalité s'obtient par récurrence.

Nous définissons maintenant deux nouveaux ensembles de langages pour exacerber les particularités de l'équation de mots (5.4).

Définition 5.3.7.
Le langage $\mathcal{L}(i, k)$ représente l'ensemble des facteurs des mots infinis du langage :

$$(10^{i+1}(10^i)^k + 10^{i+1}(10^i)^{k+1})^\omega = (S_5 + S_6)^\omega.$$

On observe par la proposition 5.1.3 que les facteurs de $\mathcal{L}(i, k)$ sont également facteurs d'un certain mot infini carré-plein optimal de paramètre i et k. De plus, si $\alpha = [0; i + 1, k + 1, \cdots]$ alors $\mathcal{L}(\alpha) \subseteq \mathcal{L}(i, k)$.

Définition 5.3.8.
Le langage $\Pi(i, k)$ est l'ensemble des facteurs non vides de $\mathcal{L}(i, k)$ qui peuvent s'écrire comme un produit de carrés minimaux.

C'est-à-dire, si $w \in \Pi(i, k)$, alors $w = X_1^2 \cdots X_n^2$. Et nous pouvons ainsi définir la racine carrée de ce mot fini.

$$\sqrt{\cdot} : w = X_1^2 \cdots X_n^2 \mapsto \sqrt{w} = X_1 \cdots X_n \tag{5.5}$$

Nous allons encore une fois avoir besoin de lemmes techniques sur la composition des mots pour pouvoir avancer.

Le premier lemme est un cas d'application qui permet de développer le deuxième, qui va permettre d'échanger certaines lettres distinctes consécutives dans des mots sans en impacter la racine carrée.

Lemme 5.3.9.
Soient $i, k \in \mathbb{N}$ et deux mots w et v tels que :

- w est un suffixe non vide de S_6.
- $|v| \geq |S_5S_6|$.
- v commence par deux lettres distinctes.
- wv et $L(v) \in \mathcal{L}(i, k)$.

Si il existe un carré minimal Z^2 tel que $|Z^2| > |w|$ et que Z^2 est un préfixe de wv ou $wL(v)$, alors il existe des carrés minimaux $Y_1^2, \cdots, Y_n^2$ tels que $Y_1^2 \cdots Y_n^2$ et Z^2 soient des préfixes de wv et $wL(v)$ et que $Z = Y_1 \cdots Y_n$.

Démonstration:

Soient $i, k \in \mathbb{N}$, w et v des mots finis tels qu'énoncés et Z^2 un carré minimal de paramètres i, k plus long que w. Supposons par symétrie que Z^2 soit un préfixe de wv. Cela implique que w est un préfixe de Z^2.

<u>Cas $Z = S_1 = 0$</u> : Comme w est un suffixe non vide de S_6 et $|Z^2| = 2 > |w|$ alors w ne peut être que 0. Le mot v doit aussi commencer par 0 et donc 01. De plus comme $v \in \mathcal{L}(a, b)$ et $|v| \geq |S_6|$, v vas donc commencer par soit 010^i10^i soit $010^{i+1}10^i$. Dans le deuxième cas, on aurait $L(v) \in \mathcal{L}(a, b)$ qui démarrerait par $10^{i+2}1$ ce qui contredis l'appartenance. Donc wv commence par $(0)(010^i10^i)$ c'est a dire $S_1^2S_4^2$. De plus, $wL(v)$ commence par $S_3^2 = 01^{i+1}10^i$. Et comme $S_3 = S_1S_4$, on peut conclure.

<u>Cas $Z = S_2 = 010^{i-1}$</u> : Si $w = 0$, alors v doit commencer par 10^i10^i et donc $010^{i-1}010^{i-1}$ serait un préfixe de $L(v)$ ce qui contredit l'appartenance à $\mathcal{L}(i, k)$

Ainsi, la seule possibilité pour w est $w = 010^i$ ce qui implique que v possède 10^i comme préfixe. Comme $L(v) \in \mathcal{L}(i, k)$, le mot $L(v)$ doit démarrer par 010^i et v par 10^{a+1}. Les mots wv et $wL(v)$ possèdent donc respectivement $S_2^2S_1^2$ et S_3^2 comme préfixe. Et l'égalité $S_3 = S_2S_1$ permet de conclure.

<u>Cas $Z = S_3 = 010^i$</u> : Similairement au cas précédent, soit $w = 0$ soit $w = 010^i$. Dans le premier cas, v commence par $10^{i+1}10^i$ et $L(v)$ par 010^i10^i et donc $S_1^2S_4^2$ est préfixe de $wL(v)$. Et le fait que wv possède $010^{i+1}10^i = S_3^2$ et $S_1S_4 = S_3$ permettent de conclure.

L'autre cas, $w = 010^i$ implique que $L(v)$ commence par 10^{i+1} ce qui donne que $wL(v)$ et wv disposent respectivement de $S_2^2S_1^2$ et S_3^2 comme préfixe et nous obtenons la conclusion par $S_2S_1 = S_3$.

<u>Cas $Z = S_4 = 10^i$</u> : La seule possibilité pour w est 10^i. Nous allons étendre progressivement le préfixe connu u de v. Comme $L(v) \in \mathcal{L}(i, k)$, le mot v doit commencer par 10^{i+1}. De plus , comme $|v| > |S_6|$, on obtient que v est au moins S_6. Si S_61 est un préfixe de v alors $L(v)$ aurait $(10^i)^{k+2}1$ comme facteur ce qui contredit l'appartenance à $\mathcal{L}(i, k)$. Donc, c'est le mot S_60 qui est préfixe de v et comme $v \in \mathcal{L}(i, k)$ et $|v| \geq |S_5S_6|$ on obtiens que $S_60(10^i)^{k+1} = S_5^210^i$ est un préfixe de v. Ainsi, on obtient que $wL(v)$ commence par S_6^2.

Pour conclure il faut maintenant discuter de la parité de k.

<u>Si k est impair</u> : Comme $0(10^i)^k10^{i+1}(10^i)^{k+1} = (S_2^2)^{\frac{k+1}{2}}S_1^2(S_4^2)^{\frac{k+1}{2}}$, on peut transformer le préfixe de wv comme suit : $10^iS_5^210^i = S_4^2(S_2^2)^{\frac{k+1}{2}}S_1^2(S_4^2)^{\frac{k+1}{2}}$. Et l'égalité $S_4(S_2)^{\frac{k+1}{2}}S_1(S_4)^{\frac{k+1}{2}} = S_6$ permet conclure.

<u>Si k est pair</u> : Comme $0(10^i)^k10^{i+1}(10^i)^{k+1} = (S_2^2)^{\frac{k}{2}}S_3^2(S_4^2)^{\frac{k}{2}}$, on obtient pareillement que $10^iS_5^210^i = S_4^2(S_2^2)^{\frac{k}{2}}S_3^2(S_4^2)^{\frac{k}{2}}$. Et le fait que $S_4(S_2)^{\frac{k}{2}}S_3(S_4)^{\frac{k}{2}} = S_6$ permet de conclure.

<u>Cas $Z = S_5 = 10^{i+1}(10^i)^k$</u> : Ici, soit $w = 10^i$ soit $w = 10^{i+1}(10^i)^{k+1}$. Dans le premier cas, v doit commencer par $0(10^i)^k10^{i+1}(10^i)^k$. Cependant, cela implique que $L(v)$ commencerait par $10^{i+1}(10^i)^{k-1}10^{i+1}(10^i)^k$ ce qui contredit l'appartenance à $\mathcal{L}(i, k)$.

Dans le deuxième cas, pour respecter l'énoncer, v démarre par $0(10^i)^k$ et $L(v)$ commence donc par $10^{i+1}(10^i)^{k+1}$. Donc, $wL(v)$ possède S_6^2 comme préfixe. Et comme v commence par $0(10^i)^{k+2}$, le mot wv possède $S_5^2S_4^2$ comme préfixe. Et on conclut car $S_5S_4 = S_6$.

Cas $Z = S_6 = 10^{i+1}(10^i)^{k+1}$: Comme au cas précédent, soit $w = 10^i$ soit $w = 10^{i+1}(10^i)^{k+1}$. Dans le premier cas v commencera par $0(10^i)^{k+1}10^{i+1}(10^i)^{k+1}$, wv par S_6^2 et $wL(v)$ par $S_4^2 0(10^i)^k 10^{i+1}(10^i)^{k+1} = 10^i S_5^2 10^i$. Ce qui est exactement la même situation qui aboutit à un discussion sur la parité de k du point $Z = S_4$.

Si maintenant $w = 10^{i+1}(10^i)^{k+1}$, v commence donc par $10^{i+1}(10^i)^{k+1}$. Ainsi, wv commence par S_6^2 et $wL(v)$ par $10^{i+1}(10^i)^{k+1}0(10^i)^{k+2} = S_5^2S_4^2$. Et l'égalité $S_6 = S_5S_4$ permet de conclure.

□

Lemme 5.3.10.

Soit $i, k \in \mathbb{N}$. Si un mot w est une solution primitive de (5.4) qui possède S_6 comme suffixe et telle que $w^2, L(w) \in \mathcal{L}(i,k)$, alors $wL(w) \in \Pi(i,k)$ et $\sqrt{wL(w)} = w$.

Démonstration:

Soit i, k et w tel qu'énoncé.

Si $w = |S_6|$ alors $wL(w) = S_5^2S_4^2$. Or, $w = S_5S_4$ et on conclut.

Considérons maintenant que S_6 est un suffixe propre de w. Le mot w est tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}_0$ $w^2 = X_1^2X_2^2\cdots X_n^2 = (X_1X_2\cdots X_n)^2$ et donc que $w = X_1\cdots X_n$ avec X_i pour $1 \leq i \leq n$ des carrés minimaux. Si $n = 1$, alors $w = X_1$ ce qui contredis le fait que S_6 soit un suffixe propre de w. On peut donc supposer que $n > 1$.

Par l'absurde, Supposons que $X_1 = S_1$. Comme X_1X_2 est un préfixe de w^2, 0 doit être préfixe de X_2. Et si $X_2 \neq S_1$, alors X_1X_2 doit démarrer par 001 et $X_1^2X_2^2$ par 000 ce qui est impossible vu qu'aucun des six carrés minimaux ne commence par 00. Ainsi on obtient obligatoirement que $X_2 = S_1$ et, de proche en proche, que $X_i = S_1\, \forall i$ ce qui n'est pas possible vu que $|S_6|_1 > 0$. Donc, si S_6 est suffixe propre de w, alors $X_1 \neq S_1$ et donc que w commence par soit 10 soit 01.

Montrons maintenant que $|X_1^2| < |w|$. Supposons par l'absurde d'avoir l'inverse , alors S_6 est un facteur de X_1^2 et les possibilités pour X_1 se réduisent à S_5, S_6 et S_3 si $k = 0$

Si $X_1 = S_5$: Alors $X_1^2 = 10^{i+1}(10^i)^k10^{i+1}(10^i)^k$ et donc S_6 y apparaît uniquement comme préfixe. Ceci contredit l'énoncé car S_6 ne peut donc pas être un suffixe propre de w.

Si $X_1 = S_6$: Alors $X_1^2 = S_6^2$. Or vu que $w \neq S_6$, on obtient obligatoirement que $w = X_1^2$ ce qui déroge à la primitivité de w.

Si $X_1 = S_3$ $(k = 0)$: Alors $S_6 = 10^{i+1}10^i$ est un suffixe de $S_3^2 = 010^{i+1}10^i$. Or, cela implique forcément que $w = X_1^2$ ce qui de nouveau contredit la primitivité de w.

Ainsi, $|X_1^2| < |w|$ et il existe $1 \leq r < n$ maximal tel que $X_1^2\cdots X_r^2$ soit un préfixe de w. De plus, $X_1^2\cdots X_r^2$ est un préfixe propre de w sinon $w^2 = (X_1^2\cdots X_r^2)^2$ et donc $w = (X_1\cdots X_r)^2$ ce qui contredis la primitivité de w. Donc en factorisant $wL(w)$ et w^2 en carré minimaux, on obtient que les r premiers carrés sont égaux. Soit v le mot non vide tel que $w = X_1^2\cdots X_r^2 v$. Par définition de r, v est un préfixe propre X_{r+1}^2.

Supposons par l'absurde que $|v| > |S_6|$, cela implique que S_6 est un suffixe propre de w. Ainsi on ne peut avoir que $X_{r+1} = S_5$ ou $X_{r+1} = S_6$. Mais le cas S_5 n'est pas possible car cela ne permettrais pas d'avoir S_6 en suffixe propre et le cas S_6 n'est pas possible car sinon r ne serait plus maximal. On obtient donc que $|v| \leq |S_6|$.

Montrons que $|w| \geq |S_5S_6|$. En effet, supposons que w commence par 0, vu que S_6 est un suffixe propre de w et que $w^2 \in \mathcal{L}(i,k)$, w doit commencer par $0(10^i)^{k+1}$. Si cette partie est entremêler avec le suffixe S_6, on obtient forcément que $w = 0(10^i)^k 10^{i+1}(10^i)^{k+1} = (0(10^i)^{k+1})^2$ ce qui contredit la primitivité de w. Si par contre ces deux partie de w sont distincts, alors $|S_5S_6| \leq |w|$. Supposons maintenant que w commence par 1, on obtient alors que w commence par $10^{i+1}(10^i)^{k+1}$ et donc nécessairement que $|w| \geq |S_5S_6|$.

Pour finir, nous pouvons appliquer le lemme précédent avec w, v et $X = X_{r+1}$, on sait donc qu'il existe $Y_1^2, \cdots, Y_m^2$ des carrés minimaux tel que $Y_1^2 \cdots Y_m^2$ soit préfixe de $vL(w)$ et $Y_1 \cdots Y_m = X_{r+1} \cdots X_{r+s}$ pour un certain s non nul. Ainsi :

$$wL(w) = X_1^2 \cdots X_r^2 Y_1^2 \cdots Y_m^2 X_{r+t+1}^2 \cdots X_n^2 \in \Pi(i,k) \quad \text{et} \quad w = X_1 \cdots X_r Y_1 \cdots Y_m X_{r+t+1} \cdots X_n.$$

□

Théorème 5.3.11.
Soit $\alpha \in [0, \frac{1}{2}] \setminus \mathbb{Q}$. Si $w \in StM^+(\alpha) \cap L(StM(\alpha))$, alors w est une solution primitive de (5.4).

Démonstration:
Soient $\alpha \in [0, \frac{1}{2}] \setminus \mathbb{Q}$ et $w \in StM^+(\alpha) \cap L(StM(\alpha))$. Par le théorème 4.2.9, on sait que $w^2 \in \mathcal{L}(\alpha)$.

Cas $|w| < |S_6|$: Étant donné que $S_6 = \tilde{s}_{3,1} = 10^{i+1}(10^i)^{k+1}$ et que les carrés minimaux de 1 à 5 sont solutions. Il nous reste donc les cas $w = \tilde{s}_{2,l} = 0(10^i)^l$ $(1 < l \leq k+1)$.

Sous-cas l pair : On obtient que $w^2 = (S_2^2)^{l/2} S_1^2 (S_4^2)^{l/2}$ et $w = (S_2)^{l/2} S_1 (S_4)^{l/2}$.

Sous-cas l impair : On obtient que $w^2 = (S_2^2)^{(l+1)/2} S_3^2 (S_4^2)^{(l+1)/2}$ et $w = (S_2)^{(l+1)/2} S_3 (S_4)^{(l+1)/2}$.

On dispose ainsi d'une solution à (5.4).

Cas $|w| \geq |S_6|$: Le carré S_6 est suffixe de w.

Par récurrence sur k, l : On récupère soit $w = \tilde{s}_{k,l}$ soit $L(w) = \tilde{s}_k$ $(k \geq 3$ et $0 < l \leq a_k)$.

Supposons que tout les mots plus petits que w qui satisfont l'hypothèse vérifient la preuve et montons la pour w.

Cas $w = \tilde{s}_{k,l}$: Comme $\tilde{s}_{k-1}\tilde{s}_{k-2} = L(\tilde{s}_{k-2})\tilde{s}_{k-1}$ on obtient que :

$$\begin{aligned} w^2 &= \tilde{s}_{k-2}\tilde{s}_{k-1}^l \tilde{s}_{k-2}\tilde{s}_{k-1}^l \\ &= \tilde{s}_{k-2}\tilde{s}_{k-1}^{l-1} L(\tilde{s}_{k-2}) \tilde{s}_{k-1}^{l-1} \tilde{s}_{k-1}^2 \\ &= \tilde{s}_{k,l-1} L(\tilde{s}_{k,l-1}) \tilde{s}_{k-1}^2 \end{aligned}$$

Le cas de base est vérifié car $\tilde{s}_{3,1} = S_6$ est un carré minimal. Ainsi on peut donc supposer que $k > 3$ ou $k = 3$ avec $l > 1$. Comme $\tilde{s}_{k-1}$ est une solution par hypothèse de récurrence on sait que $\tilde{s}_{k-1}^2 = X_1^2 \cdots X_n^2$ et $\tilde{s}_{k-1} = X_1 \cdots X_n$ avec les X_i des carrés minimaux.

Donc $\tilde{s}_{k-1}^2 \in \Pi(a,b)$ et $\sqrt{\tilde{s}_{k,l-1}L(\tilde{s}_{k,l-1})} = \tilde{s}_{k,l-1}$ et par le fait que $|\tilde{s}_{k,l-1}| \geq |S_6|$ nous pouvons appliquer le lemme précédent et obtenir que $\sqrt{w^2} = \sqrt{\tilde{s}_{k,l-1}L(\tilde{s}_{k,l-1})}\sqrt{\tilde{s}_{k-1}^2} = \tilde{s}_{k,l-1}\tilde{s}_{k-1} = w$ qui est donc solution de (5.4).

Cas $w = L(\tilde{s}_k)$: On sait que :

$$\begin{aligned} w^2 &= L(\tilde{s}_{k-2})\tilde{s}_{k-1}^{a_k}L(\tilde{s}_{k-2})\tilde{s}_{k-1}^{a_k} \\ &= L(\tilde{s}_{k-2})\tilde{s}_{k-1}\tilde{s}_{k-3}\tilde{s}_{k-2}^{a_{k-1}}\tilde{s}_{k-1}^{a_{k-1}}\tilde{s}_{k-2}\tilde{s}_{k-2}^{a_{k-1}} \\ &= L(\tilde{s}_{k-2})\tilde{s}_{k-1}\tilde{s}_{k-3}\tilde{s}_{k-2}^{a_{k-1}-1}\tilde{s}_{k,a_k-1}^2 \\ &= \tilde{s}_{k-1}\tilde{s}_{k-2}\tilde{s}_{k-3}\tilde{s}_{k-2}^{a_{k-1}-1}\tilde{s}_{k,a_k-1}^2 \\ &= \tilde{s}_{k-1}L(\tilde{s}_{k-1})\tilde{s}_{k,a_k-1}^2 \end{aligned}$$

Pareillement au cas précédent, si $k > 3$ on déduit que $|\tilde{s}_{k-1}| \geq |S_6|$ et que donc, par récurrence : $\tilde{s}_{k-1}L(\tilde{s}_{k-1}) \in \Pi(a,b)$. Et par le lemme précédent : $\sqrt{\tilde{s}_{k-1}L(\tilde{s}_{k-1})} = \tilde{s}_{k-1}$.

Ainsi, $\sqrt{w^2} = \sqrt{\tilde{s}_{k-1}L(\tilde{s}_{k-1})}\sqrt{\tilde{s}_{k,a_k-1}^2} = \tilde{s}_{k-1}\tilde{s}_{k,a_k-1} = w$.

Et pour pour le cas de base $k = 3$, si b est pair, on calcule que $\tilde{s}_{k-1}L(\tilde{s}_{k-1}) = (S_2^2)^{1+b/2}S_1^2(S_4^2)^{b/2}$ et que $\tilde{s}_{k-1} = (S_2)^{1+b/2}S_1(S_4)^{b/2}$.

Si b est impair alors $\tilde{s}_{k-1}L(\tilde{s}_{k-1}) = (S_2^2)^{(b+1)/2}S_3^2(S_4^2)^{(b-1)/2}$ et
$\tilde{s}_{k-1} = (S_2)^{(b+1)/2}S_3(S_4)^{(b-1)/2}$

Et donc w est bien solution de (5.4).

□

Remarque 5.3.12.
La proposition nous révèle donc qu'il existe des solutions arbitrairement longues dans $\mathcal{L}(\alpha)$ de l'équation $X_1^2X_2^2\cdots X_n^2 = (X_1X_2\cdots X_n)^2$.

On peut également en déduire que si $w \in L(StM^+(\alpha)) \setminus L(StM(\alpha))$, alors w est une solution mais qui n'appartient pas à $\mathcal{L}(\alpha)$.

Nous pouvons désormais étendre notre caractérisation de la condition ψ-racine :

Théorème 5.3.13.
Soit $w \in L(\alpha)$ avec w primitive. On dispose des équivalences suivantes :

i) w est une solution primitive de (5.4) dans $\mathcal{L}(\alpha)$.

ii) w satisfait la condition ψ-racine.

iii) $w \in StM^+(\alpha) \cup L(StM(\alpha))$.

Démonstration:
La bi-implication $(ii) \iff (iii)$ n'est en fait que le théorème 5.3.4 et l'implication $(iii) \implies (i)$ est donnée par le théorème 5.3.11.

Ainsi montrons donc que $(i) \implies (ii)$: Si w est une solution de (5.4) dans $\mathcal{L}(\alpha)$, on peut donc dire que $w^2 = X_1^2 \cdots X_n^2$. Soit $\rho \in [w^2]$, le mot $S_{\alpha,\rho}$ commence par $X_1^2 \cdots X_n^2$ et donc le théorème 5.2.7 nous dit que le mot $\sqrt{S_{\alpha,\rho}} = S_{\alpha,\psi(\rho)}$ commence par $X_1 \cdots X_n$ et donc que $\psi(\rho) \in [X_1 \cdots X_n] = [w]$. Ce qui montre que w satisfait la condition ψ-racine. □

5.3.3 De la caractérisation combinatoire de la racine carré des mots sturmiens

Grâce aux deux sous-sections précédentes, nous allons pouvoir caractériser l'application racine carrée un peu plus en détail, notamment par l'information de la position d'apparition des carrés.

Lemme 5.3.14.
Soient $\alpha \in [0, \frac{1}{2}] \setminus \mathbb{Q}$ et $\tilde{s}^{\alpha}_{k,l}$ un mot de $StM^+(\alpha)$ $(k \geq 2, 0 < l \leq a_k)$. L'ensemble $[\tilde{s}^{\alpha}_{k,l}] \setminus \{1-\alpha\}$ peut s'écrire comme étant :

$$\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{a_{k+2i}} [\tilde{s}^2_{k+2i,j}]\right) \setminus \bigcup_{i=1}^{l-1} [\tilde{s}^2_{k,i}]$$

Les ensembles $[\tilde{s}_0] \setminus \{1-\alpha\}$ et $[\tilde{s}_1] \setminus \{1-\alpha\}$ se décompose de manière similaire.

Démonstration:
Soient $\alpha \in [0, \frac{1}{2}] \setminus \mathbb{Q}$, $(k,l) \in K(\alpha)$ et $\tilde{s}^{\alpha}_{k,l} \in StM^+(\alpha)$. Dénotons l'ensemble

$$D = \left\{ |w| : w \in StM^+(\alpha) \wedge w_1 = (\tilde{s}_{k,l})_1 \right\}.$$

Nous pouvons ordonner une partie des éléments de D en une suite croissante $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $d_1 = q_{k,l-1}$. Posons $v_1 = \tilde{s}_{k,l}$ et $J_1 = [\![-(d_1+1)\alpha, 1-\alpha]\!]$. En observant le développement de la preuve de la proposition 5.3.3, on conclut que $[v_1] = J_1$. De l'égalité (4.2), notons que l'intervalle J_1 est séparé en deux par le point $\{-(q_{k,l}-1)\alpha\} = \{-(d_2+1)\alpha\}$.

Montons par l'absurde que $[v_1^2] = [\![-(d_1+1)\alpha, -(d_2+1)\alpha]\!]$. Supposons que $[v_1^2] = [v_1] \cap ([v_1] - d_2\alpha) = [\![-(d_2+1)\alpha, 1-\alpha]\!]$. Les points $\{-(d_1+d_2)\alpha\}$ et $\{-d_1\alpha\}$ sont donc de part et d'autre de 0. Notons aussi que sur $\mathbb{T}$, par (4.2), la distance entre $\{-d_1\alpha\}$ et $-\{-d_2\alpha\}$ est donnée par $\|-(d_1+d_2)\alpha\| = \|-q_{k-1}\alpha\|$. Ainsi, étant donné que $\{-q_{k-1}\alpha\}$ et $\{-d_1\alpha\}$ sont aussi de part et d'autre de 0, on obtient que $q_{k-1} = d_1 + d_2$, ce qui est impossible.

On obtient donc $J_1 = [v_1] = [\![-(d_1+1)\alpha, 1-\alpha]\!]$ et $[v_1^2] = [\![-(d_1+1)\alpha, -(d_2+1)\alpha]\!]$ et nous définissons alors $J_2 = J_1 \setminus [v_1^2] = [\![-(d_2+1)\alpha, 1-\alpha]\!]$ qui sera l'intervalle de v_2, l'unique mot de D de taille d_3.

La répétition de ce processus à l'étape $n > 1$ est comme suit. L'intervalle J_n est séparé par le point $\{-(b_{n+1}+1)\alpha\}$ et on obtient que $[v_n^2] = [\![-(b_n+1)\alpha, -(b_{n+1}+1)\alpha]\!]$. Et il existe ensuite un unique mot dans D, v_{n+1}, tel que $[v_{n+1}] = [\![-(b_{n+1}+1)\alpha, 1-\alpha]\!] = J_n \setminus [s_n^2]$. Et nous posons donc $J_{n+1} = [s_{n+1}]$. Par définition D, $(s_{n+1})_1 = (s_1)_1$ et donc $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bien définie d'intervalles emboîtés. De plus, comme $|J_n| \underset{n\to\infty}{\to} 0$, on obtient que

$$[\tilde{s}_{k,l}] = J_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} [v_n^2]$$

De plus, les ensembles $[v_n^2]$ sont disjoints par construction. Pour obtenir l'ensemble de l'énoncé, notons que, comme $s_{k,l} = s_{k-1}^l s_{k-2}$, en miroir, les $\tilde{s}_{k,l}$ qui commence par la par la même lettre ont un k de même parité. Les $\tilde{s}_{k,i}^2$ que l'on retire ensuite sont les mots plus petit qui n'interviennent pas dans le début de la démonstration. Et ainsi

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} [v_n^2] = \bigcup_{s_{k,l}\in D}^{\infty} [\tilde{s}_{k,l}^2] = \left(\bigcup_{i=0}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{a_{k+2i}} [\tilde{s}_{k+2i,j}^2] \right) \setminus \bigcup_{i=1}^{l-1} [\tilde{s}_{k,i}^2]$$

On retire ensuite le point $\{1-\alpha\}$ pour conserver le degré de liberté quand au choix du sens d'ouverture de I_0 et I_1.

Pour finir, regardons les cas particulier de $\tilde{s}_0$ et $\tilde{s}_1$.

$\underline{\tilde{s}_0}$: Nous savons du lemme 5.2.6 que $[\tilde{s}_0] = [S_1] = [0] = [\![0, 1-\alpha]\!]$ et que $[\tilde{s}_0^2] = [\![0, 1-2\alpha]\!]$. Ainsi on obtient que

$$[\tilde{s}_0] = [\tilde{s}_0^2] \cup [\![-(q_0+1)\alpha, 1-\alpha]\!] = [\tilde{s}_0^2] \cup [\tilde{s}_{2,1}]$$

Et on décompose $[\tilde{s}_{2,1}]$ comme ci-dessus pour conclure.

$\underline{\tilde{s}_1}$: De nouveau grâce au lemme 5.2.6, on sait que $[\tilde{s}_1] = [10^{a_1-1}] = [S_4] = [\![1-\alpha, 1]\!]$ et que $[\tilde{s}_1^2] = [\![1-q_{2,1}\alpha, 1]\!]$. On obtient donc que

$$[\tilde{s}_1] = [\tilde{s}_1^2] \cup [\![1-\alpha, 1-q_{2,1}\alpha]\!] = [\tilde{s}_1^2] \cup [\tilde{s}_{3,1}]$$

Et on décompose $[\tilde{s}_{3,1}]$ comme ci-dessus pour conclure.

$\square$

Lemme 5.3.15.

Si $w \in StM^+(\alpha)$ et $v \in StM^+(\alpha) \cup L(StM^+(\alpha))$, alors w^2 ne peut jamais être un préfixe propre de v^2.

Démonstration:

Soit $\alpha \in [0, \frac{1}{2}] \setminus \mathbb{Q}$ et $w \in StM^+(\alpha)$.

Cas $v \in StM^+(\alpha)$: On peut se limiter au cas $|w| < |v|$. Or, dans ce cas, par le lemme précédent, on sait que $[w^2]$ et $[v^2]$ sont disjoints et donc aucun de ces deux mots ne peut être préfixe de l'autre.

Cas $v \in L(StM^+(\alpha))$: Si $|v| \leq |\tilde{s}_1|$ alors v^2 est un carré minimal et donc w^2 ne peut pas en être préfixe. Si par contre $|v| = |\tilde{s}_{k,l}|$ $(k \geq 2, 0 < l \leq a_k)$, on obtient par la preuve de 5.3.3 que $[v] = [\![-(q_{k-1}+1)\alpha, 1-\alpha]\!]$. Si v et w commencent par la même lettre et que $|w| < |v|$, alors $|w| \leq \tilde{s}_{k-1}$. Ainsi, par le lemme précédent, on obtient que la distance entre $1-\alpha$ et les extrémités de $[w^2]$ est d'au moins $||q_{k-1}\alpha||$. Et donc, comme $[v]$ et $[w^2]$ sont disjoints, w^2 ne peut pas être préfixe de v^2.

$\square$

La proposition suivante nécessite un lemme ici réadapté de [7, 2.2.8].

Lemme 5.3.16.
Soit $\alpha \in [0, \frac{1}{2}] \setminus \mathbb{Q}$, alors pour tout $k \geq 1$ les mots standards successifs s_k^α et s_{k+1}^α sont tels qu'il existe $p, q, r \in \{0,1\}^*$ des palindromes tels que :

$$s_k^\alpha = qt_k \quad \text{et} \quad s_{k+1}^\alpha = pt_{k+1} = qr$$

avec $t_k = 01$ si k est impair et $t_k = 10$ si k est pair.

Démonstration:
Soit $\alpha \in [0, \frac{1}{2}] \setminus \mathbb{Q}$. Établissons d'abord le cas de base $k = 1$. Nous avons donc les mots $s_1^\alpha = 0^{a_1-1}1$ et $s_2^\alpha = (0^{a_1-1}1)^{a_2}0$ et donc :

$$s_1^\alpha = (0^{a_1-2})01.$$

De plus,

$$s_2^\alpha = (0^{a_1-1}1)^{a_2-1}(0^{a_1-1})10 = \begin{cases} (0^{a_1-1}1)^{\frac{a_2-1}{2}}(0^{a_1-1})(10^{a_1-1})^{\frac{a_2-1}{2}}10 \text{ si } a_2 \text{ est impair} \\ (0^{a_1-1}1)^{\frac{a_2-2}{2}}(0^{a_1-1}10^{a_1-1})(10^{a_1-1})^{\frac{a_2-2}{2}}10 \text{ si } a_2 \text{ est pair} \end{cases}$$

On dispose aussi de l'égalité

$$s_2^\alpha = (0^{a_1-2})(01(0^{a_1-1}1)^{a_2-2}(0^{a_1-1})10)$$

Ainsi les mots $q = 0^{a_1-2}$, $p = (0^{a_1-1}1)^{a_2-1}(0^{a_1-1})$ et $r = (01(0^{a_1-1}1)^{a_2-2}(0^{a_1-1})10)$ sont des palindromes qui satisfont l'énoncé.

Supposons maintenant qu'il existe p, q, r des palindromes tels que $s_l^\alpha = qt_l$ et $s_{l+1}^\alpha = pt_{l+1} = qr$. On calcule donc que

$$\begin{aligned} s_{l+2}^\alpha = (s_{l+1}^\alpha)^{a_{l+2}} s_l &= ((qr)^{a_{l+2}}q)t_l \\ &= p(t_{l+1}(qr)^{a_{l+2}-1}qt_l) \end{aligned}$$

Ainsi, les mots p, $((qr)^{a_{l+2}}q)$ et $(t_{l+1}(qr)^{a_{l+2}-1}qt_l)$ sont des palindromes qui satisfont l'énoncé et nous pouvons conclure par récurrence. $\square$

Proposition 5.3.17.
Soit $S_{\alpha,\rho}$ un mot sturmien de pente $\alpha \in [0, \frac{1}{2}] \setminus \mathbb{Q}$ et d'origine $\rho \in \mathbb{R}$. $S_{\alpha,\rho}$ possède comme préfixe w^2 avec $w \in StM^+(\alpha)$ si et seulement si $\rho \neq 1 - \alpha$.

Démonstration:
Soit $S_{\alpha,\rho}$ un mot sturmien

- Considérons que $\rho \neq 1-\alpha$, alors $\rho \in I_0 \setminus \{1-\alpha\} = [\tilde{s}_0] \setminus \{1-\alpha\}$ ou $\rho \in I_1 \setminus \{1-\alpha\} = [\tilde{s}_1] \setminus \{1-\alpha\}$. Ainsi, en appliquant le lemme 5.3.14 à ces deux ensembles, on obtient que $S_{\alpha,\rho}$ commence par un carré de $StM^+(\alpha)$.

- Considérons que $S_{\alpha,\rho}$ possède comme préfixe un carré w^2 tel que $w \in StM^+(\alpha)$. Supposons par l'absurde que $\rho = 1-\alpha$. Notons que $S_{\alpha,1-\alpha} \in \{01C_\alpha, 10C_\alpha\}$. Le lemme précédent nous indique que, pour tout $k \geq 1$, $s_{2k} = p_{2k}10$ et $s_{2k+1} = q_{2k+1}01$ pour des palindromes p_{2k} et q_{2k+1}. On obtient donc, comme $C_\alpha = \lim_k s_k$, que $01C_\alpha = \lim_k \tilde{s}_{2k}$ et $10C_\alpha = \lim_k \tilde{s}_{2k+1}$.

  Pour conclure nous allons exhiber la structure de $\tilde{s}_k$. En effet, commençons par adapter la proposition 2.3.33. On obtient que $\forall k \in \mathbb{N}$,

  $$s_k s_{k+1} = \Gamma(s_{k+1}s_k) \implies \Gamma(s_k s_{k+1}) = s_{k+1}s_k \implies \tilde{s}_k\tilde{s}_{k+1} = L(\tilde{s}_{k+1}\tilde{s}_k)$$

  De plus, vu que a_k est toujours plus grand que 1, $\tilde{s}_{k-2}\tilde{s}_{k-1}$ sera toujours un préfixe de $\tilde{s}_{k,l}$. Et donc si k est suffisamment grand, nous calculons que :

  $$\begin{aligned}
  \tilde{s}_{k-2}\tilde{s}_{k-1} &= L(\tilde{s}_{k-1})\tilde{s}_{k-2} \\
  &= L(\tilde{s}_{k-3}\tilde{s}_{k-2}^{a_{k-1}})\tilde{s}_{k-2} \\
  &= L(\tilde{s}_{k-3})\tilde{s}_{k-4}\tilde{s}_{k-3}^{a_{k-2}}\tilde{s}_{k-2}^{a_{k-1}} \\
  &= L(\tilde{s}_{k-3})L(\tilde{s}_{k-3})\tilde{s}_{k-4}\tilde{s}_{k-3}^{a_{k-2}-1}\tilde{s}_{k-2}^{a_{k-1}}
  \end{aligned}$$

  Ainsi, pour un k suffisamment grand, $L(\tilde{s}_{k-3})^2$ est un préfixe de $\tilde{s}_k$ et $L(\tilde{s}_{k-3}) \in L(StM^+)$. Or, le lemme 5.3.15 nous dit $L(\tilde{s}_{k-3})^2$ ne possède aucun préfixe v^2 avec $v \in StM^+$ et donc que $S_{\alpha,1-\alpha}$ ne possède également aucun tel préfixe ce qui contredis l'hypothèse d'énoncé.

$\square$

Remarque 5.3.18.
Nous pouvons observer avec la preuve du théorème précédent que si un sturmien $S_{\alpha,\rho}$ possède parmi ses préfixes une infinité de carrés qui sont solution de (5.4) alors $\rho = 1-\alpha$ et donc $S_{\alpha,1-\alpha} \in \{01c_\alpha, 10c_\alpha\}$.

Nous pouvons donc caractériser les mots sturmiens qui peuvent s'écrire comme une suite infinie de carrés de $StM^+(\alpha)$

Théorème 5.3.19.
Soit $\alpha \in [0, \frac{1}{2}] \setminus \mathbb{Q}$, $\rho \in \mathbb{R}$ et $S_{\alpha,\rho}$ un mot sturmien. Le mot $S_{\alpha,\rho}$ peut se réécrire en un unique produit de carrés de $StM^+(\alpha)$ si et seulement si $S_{\alpha,\rho}$ n'est pas de la forme $X_1^2X_2^2..X_n^2C$ avec $X_i \in StM^+(\alpha)$ pour $i \in \{1, \cdots, n\}$ et $C \in \{01c_\alpha, 10c_\alpha\}$.

Démonstration:
Soit $S_{\alpha,\rho}$ un mot sturmien.

- Considérons que $S_{\alpha,\rho}$ est une suite infini de carrés de $StM^+(\alpha)$ et supposons que $S_{\alpha,\rho}$ soit aussi de la forme $X_1^2 \cdots X_n^2 C$ comme énoncé. On obtient donc que C doit également s'écrire comme une suite infinie de carrés de $StM^+(\alpha)$ or, le lemme 5.3.17 nous dit que les mots $01C_\alpha$ et $10C_\alpha$ ne possèdent tout deux aucun carré de $StM^+(\alpha)$ comme préfixe, ce qui est donc contradictoire.

- Considérons que $S_{\alpha,\rho}$ soit de la forme $X_1^2 \cdots X_n^2 C$ comme énoncé et montrons que $S_{\alpha,\rho}$ n'est pas un produit infini de carré. En effet, comme C est un mot sturmien d'origine $1-\alpha$, il ne possède pas de carré de $StM^+(\alpha)$ comme préfixe et donc la suite de carrés est incomplète.

L'unicité de la décomposition vient du lemme 5.3.15. En effet, si $S_{\alpha,\rho}$ commence par un carré w^2 avec $w \in StM^+(\alpha)$ alors w^2 n'a pas de préfixe qui est un carré de StM^+. De plus, s'il existe un autre préfixe v^2 de $S_{\alpha,\rho}$ avec $|v| > |w|$ et $v \in StM^+(\alpha)$, alors w^2 ne peut pas être un préfixe de v^2 ce qui est contradictoire. On obtient donc que w est unique et que l'argument est réutilisable sur le mot $(S_{\alpha,\rho})_{[0,|w|[}$ et ainsi de suite. $\square$

Remarque 5.3.20.
Supposons qu'un mot sturmien $S_{\alpha,\rho} \notin \{01c_\alpha, 10c_\alpha\}$, on sait alors $S_{\alpha,\rho}$ ne possède qu'un nombre fini de carrés qui soient solution de (5.4) comme préfixe. Parmi ces carrés, celui de plus grande longueur sera appelé solution maximale. Notons que cette solution maximale n'est pas forcément primitive, vu que n'importe quelle puissance d'une solution en est une aussi.

Nous pouvons maintenant classer les mots sturmiens en 2 catégories distinctes, séparées par la structure de leur racine carrée.

Définition 5.3.21.
Considérons l'ensemble des mots sturmiens de pente $\alpha \in [0, \frac{1}{2}] \setminus \mathbb{Q}$.

Type A : Un mot sturmien X est dit de type A s'il s'écrit comme le produit de solutions maximales de (5.4) i.e. $X \in \text{TypeA}$ si $X = X_1^2 X_2^2 \cdots$ avec X_i la solution maximale de (5.4) pour laquelle son carré est un préfixe de $X_{[0,|X_1^2 \cdots X_{i-1}^2|[}$.

Type B : Un mot sturmien X est dit de type B s'il s'écrit comme le produit $X = X_1^2 \cdots X_n^2 C$ avec $C \in \{01c_\alpha, 10c_\alpha\}$ et X_i la solution maximale de (5.4) pour laquelle son carré est un préfixe de $X_{[0,|X_1^2 \cdots X_{i-1}^2|[}$.

Nous obtenons des quelques résultats précédents que les solutions maximales X_i définies ci-dessus sont uniquement déterminées et que leur racine primitive sont donc $StM^+(\alpha)$. Ainsi, ces solutions maximales sont toutes spéciales à droite. Donc, pour factoriser un mot sturmien X en un produit de solutions maximales, il est suffisant de trouver à chaque nouvelle position le plus petit carré de $StM^+(\alpha)$ qui est préfixe de X et de considérer sa plus grande puissance paire.

Nous définissons également deux suites de mots finis, $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ et $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ qui sont telles que :

- $\lambda_0 = \mu_0 = \epsilon$.

- Si $X \in$ TypeA alors $\forall k \geq 1$:

$$\mu_k = X_1^2 X_2^2 \cdots X_k^2 \quad \text{et} \quad \lambda_k = X_1 X_2 \cdots X_k$$

- Si $X \in$ TypeB alors pour $1 \leq k \leq n$

$$\mu_k = X_1^2 X_2^2 \cdots X_k^2, \quad \lambda_k = X_1 X_2 \cdots X_k,$$

$$\text{et} \quad \mu_{n+1} = X_1^2 \cdots X_{n+1}^2 C, \quad \lambda_{n+1} = X_1 \cdots X_{n+1} C.$$

Proposition 5.3.22.
Soit $S_{\alpha,\rho} \in \mathfrak{S}$. Si $S_{\alpha,\rho} \in$ TypeA alors λ_j est spécial à droite et est un suffixe de μ_j pour tout $j \geq 0$.

Démonstration:
Soit $S_{\alpha,\rho} \in \mathfrak{S}$ de Type A. Procédons par récurrence. Si $j = 0$. Comme $S_{\alpha,\rho}$ n'est pas constant, alors $\lambda_0 = \varepsilon$ est bien spécial à droite. et ε est bien un suffixe de $\mu_j = \varepsilon$.

Supposons maintenant que pour un $j \geq 0$, λ_j soit spécial à droite et suffixe de μ_j. Traduit en termes d'intervalle, l'hypothèse de récurrence se traduit par la proposition 4.1.8 en les deux conditions suivantes :

i) $\{-(|\lambda_k| + 1)\alpha\} \in [\lambda_k]$

ii) $[\mu_k] \subseteq ([\lambda_k] - |\lambda_k|\alpha)$

Étant donné que l'argument principal de cette preuve repose sur le fait que $\mu_j X_{j+1}^2 \in \mathcal{L}(\alpha)$ et non sur la structure de λ et μ, nous pouvons donc supposer que X_{j+1} est primitif et donc que $X_{j+1} \in StM^+(\alpha)$. On obtient alors qu'il existe $q \in \mathbb{N}_0$ tel que :

$$\begin{aligned}
&[X_{j+1}] = [\![-(q+1)\alpha, 1-\alpha]\!] \\
&[X_{j+1}^2] = [X_{j+1}] \cap ([X_{j+1}] - |X_{j+1}|\alpha) = [\![-(q+1)\alpha, -(|X_{j+1}| + 1)\alpha]\!] \,.
\end{aligned}$$

Soit $x = \{-(|\mu_j| + 1)\alpha\}$. Par hypothèse de récurrence on sait que $x \in ([\lambda_j] - |\lambda_j|\alpha)$ et que x est une extrémité de $([X_{j+1}] - |\mu_j|\alpha)$.

Soit $y = \{-(|\mu_j X_{j+1}| + 1)\alpha\}$. Le point y est une extrémité de $([X_{j+1}] - |\mu_j X_{j+1}|\alpha)$ et est un point intérieur de $([X_{j+1}] - |\mu_j|\alpha)$.

Supposons par l'absurde que $y \notin ([\lambda_j] - |\lambda_j|\alpha)$. Comme $1-\alpha \notin ([X_{j+1}] - |X_{j+1}|\alpha)$ on obtient que $x \notin ([X_{j+1}] - |\mu_j X_{j+1}|\alpha)$. Ceci implique que $([\lambda_j] - |\lambda_j|\alpha) \cap ([X_{j+1}] - |\mu_j X_{j+1}|\alpha) = \emptyset$.

Or, vu que $[\mu_{j+1}] = [\mu_j] \cap ([X_{j+1}] - |\mu_j|\alpha) \cap ([X_{j+1}] - |\mu_j X_{j+1}|\alpha)$, on récupère que $[\mu_{j+1}] \subseteq ([X_{j+1}] - |\mu_j X_{j+1}|\alpha)$ et par hypothèse de récurrence on obtient que $[\mu_{j+1}] \subseteq [\mu_j] \subseteq ([\lambda_j] - |\lambda_j|\alpha)$. Ainsi, $[\mu_{j+1}] \subseteq \emptyset$ ce qui est contradictoire et qui donc nous indique que $y \in ([\lambda_j] - |\lambda_j|\alpha)$.

Maintenant, regardons l'ensemble $([\lambda_j X_{j+1}] - |\lambda_j|\alpha) = ([\lambda_j] - |\lambda_j|\alpha) \cap ([X_{j+1}] - |\mu_j|\alpha)$. On sait que $y = \{-(|\mu_j X_{j+1}| + 1)\alpha\}$ se trouve dans cet ensemble et donc que $y + |\lambda_j|\alpha = \{-(|\lambda_j X_{j+1}| + 1)\alpha\} \in [\lambda_j X_{j+1}]$. Ce qui signifie que $\lambda_j X_{j+1}$ est spécial à droite.

Pour conclure que λ_{j+1} est bien un suffixe de μ_{j+1} nous devons discuter sur les longueurs d'intervalles

Cas $([X_{j+1}] - |\mu_j|\alpha) \nsubseteq ([\lambda_j] - |\lambda_j|\alpha)$: Posons $([\lambda_j X_{j+1}] - |\lambda_j|\alpha) = [\![x, z]\!]$ avec z une des extrémités de $([\lambda_j] - |\lambda_j|\alpha)$. Comme y est un point intérieur de ce $[\![x, z]\!]$, on peut écrire que $\{x - |X_{j+1}|\alpha\} = y$ et que $x \notin ([\lambda_j X_{j+1}] - |\lambda_j X_{j+1}|\alpha)$.

On obtient donc que $[\![y, z]\!] \subseteq ([\lambda_j X_{j+1}] - |\lambda_j X_{j+1}|\alpha)$. Et comme y est aussi un point intérieur de $([\lambda_k] - |\lambda_k|\alpha)$, on dispose en fait de l'égalité $[\![y, z]\!] = ([\lambda_j] - |\lambda_j|\alpha) \cap ([X_{j+1}^2] - |\mu_j|\alpha)$. Et ainsi :

$$\begin{aligned}
[\mu_{j+1}] &= [\mu_j] \cap ([X_{j+1}^2] - |\mu_j|\alpha) \\
&\subseteq ([\lambda_j] - |\lambda_j|\alpha) \cap ([X_{j+1}^2] - |\mu_j|\alpha) = [\![y, z]\!] \\
&\subseteq ([\lambda_j X_{j+1}] - |\lambda_j X_{j+1}|\alpha)
\end{aligned}$$

Ce qui montre que $\lambda_j X_{j+1} = \lambda_{j+1}$ est un suffixe de μ_{j+1}.

Cas $([X_{j+1}] - |\mu_j|\alpha) \subseteq ([\lambda_j] - |\lambda_j|\alpha)$: Ici, on obtient que $([\lambda_j X_{j+1}] - |\lambda_j|\alpha) = ([X_{j+1}] - |\mu_j|\alpha)$ et donc que $([\lambda_j X_{j+1}] - |\lambda_j X_{j+1}|\alpha) = ([X_{j+1}] - |\mu_j X_{j+1}|\alpha)$. Et comme $([X_{j+1}^2] - |\mu_j|\alpha) \subseteq ([X_{j+1}] - |\mu_j X_{j+1}|\alpha)$, on obtient que :

$$\begin{aligned}
[\mu_{j+1}] &= [\mu_j] \cap ([X_{j+1}^2] - |\mu_j|\alpha) \\
&\subseteq [\mu_j] \cap ([X_{j+1}] - |\mu_j X_{j+1}|\alpha) \\
&\subseteq [\mu_j] \cap ([\lambda_j X_{j+1}] - |\lambda_j X_{j+1}|\alpha)
\end{aligned}$$

Et donc, pareillement, λ_{j+1} est bien un suffixe de μ_{j+1}.

$\square$

Théorème 5.3.23.

Soit $S_{\alpha,\rho} \in \mathfrak{S}$.

A) Si $S_{\alpha,\rho} \in$ TypeA alors

$$\sqrt{S_{\alpha,\rho}} = \lim_{j\to\infty} (S_{\alpha,\rho})_{[|\lambda_j|,\infty[}$$

De plus, la première occurrence dans $S_{\alpha,\rho}$ du préfixe λ_{j+1} de $\sqrt{S_{\alpha,\rho}}$ est à la position $|\lambda_j|$ pour tout $j \geq 0$.

B) Si $S_{\alpha,\rho} \in$ TypeB alors il existe $n \in \mathbb{N}_0$ tel que

$$\sqrt{S_{\alpha,\rho}} = (S_{\alpha,\rho})_{[|\lambda_n|,\infty[}$$

De plus, la première occurrence dans $S_{\alpha,\rho}$ du préfixe λ_{j+1} de $\sqrt{S_{\alpha,\rho}}$ est à la position $|\lambda_j|$ pour tout $0 \leq j \leq n-1$.

Et la première occurrence dans $S_{\alpha,\rho}$ de tout les préfixes de longueur plus grande que $|\lambda_n|$

dans $\sqrt{S_{\alpha,\rho}}$ est à la position $|\lambda_n|$.

Cette preuve démontre d'une nouvelle façon que $\sqrt{S_{\alpha,\rho}}$ est un mot sturmien de pente α.

Démonstration:

Soit $S_{\alpha,\rho}$ un mot sturmien.

$S_{\alpha,\rho} \in$ TypeA : Soit $j \geq 0$. La proposition précédente nous dit que λ_j est un suffixe de μ_j. Et comme $2|\lambda_j| = |\mu_j|$, le mot $(S_{\alpha,\rho})_{[|\lambda_j|,\infty[}$ possède λ_j comme préfixe. Et donc nous obtenons que $\sqrt{S_{\alpha,\rho}} = \lim\limits_{k\to\infty}(S_{\alpha,\rho})_{[|\lambda_j|,\infty[}$.

Montrons maintenant par récurrence que les λ occurrent aux positions énoncées. Notons d'abord que $\lambda_1 = X_1$ apparaît à la position $|\lambda_0| = 0$ ce qui conclus le cas de base. Considérons donc que le résultat soit vrai pour λ_j avec $j > 0$ et regardons ce qu'il advient de λ_{j+1}.

Par l'absurde, supposons que λ_{j+1} démarre dans $S_{\alpha,\rho}$ à une position inférieure à $|\lambda_j|$. Comme λ_j est un préfixe de λ_{j+1}, on obtient par hypothèse de récurrence que λ_{j+1} ne peut pas apparaître avant la position $|\lambda_{j-1}|$. Ceci implique qu'il existe une occurrence de X_jX_{j+1} qui commence dans $S_{\alpha,\rho}$ à la position ν qui est telle que $|\mu_{j-1}| \leq \nu < |\mu_{j-1}X_j|$. Notons aussi que dans $S_{\alpha,\rho}$, à la position $|\mu_{k-1}|$, il y a une occurrence de X_j^2 et que $X_k = w^t$ pour un certain $t \in \mathbb{N}$ et $w \in StM^+(\alpha)$. Et donc, w étant primitif, on obtient que $\nu = |\mu_{j-1}| + r|w|$ avec $0 \leq r < t$. Ainsi, X_{j+1} apparaît dans $S_{\alpha,\rho}$ à la position $\nu + |X_j| = |\mu_{j-1}| + (r+t)|w|$. Et comme $r < t$, des mots w et X_{j+1}, un est préfixe de l'autre.

Cas w préfixe de X_{j+1} : Si $w = X_{j+1}$, alors dans $S_{\alpha,\rho}$, le préfixe $\mu_{j-1}X_j^2$ est suivi par w^2 et donc w^{2t+2} est une solution de (5.4) qui contredit le fait que le facteur X_j soit une solution maximale.

Supposons donc que $|w| < |X_{k+1}|$. Comme X_{j+1} apparaît à la position $|\mu_{j-1}| + (r+t)|w| < |\mu_j|$, on récupère que X_{j+1} commence par wa avec a la première lettre de w. De plus, comme $w^2 \in \mathcal{L}(\alpha)$ et que w est spécial à droite, on déduit que X_{j+1}^2 commence par w^2 ce qui montre encore que X_j n'est pas la solution maximale.

Cas X_{j+1} préfixe de w : Le mot X_{j+1} doit être primitif. En effet, sinon X_{j+1} et donc w aurait comme préfixe un carré de racine dans $StM^+(\alpha)$ ce qui contredit le lemme 5.3.15. Notons aussi que w et X_{j+1} possède la même première lettre.

Comme $w^2 \in \mathcal{L}(\alpha)$ et que w est spécial à droite, dans $S_{\alpha,\rho}$, il y a une occurrence de w après μ_j au même endroit que X_{j+1}^2. Donc, le lemme 5.3.15 nous dit que w doit être un préfixe propre de X_{j+1}^2 et comme X_{j+1} doit être un préfixe propre de w, les cas $w = 0 (= \tilde{s}_0)$ et $w = 10^i (= \tilde{s}_1)$ sont à écarter. On obtient donc que $w = \tilde{s}_{k,l}$ avec $k \geq 2$ et $0 < l \leq a_k$. Et vu que $|w| < 2|X_{k+1}|$, on obtient aussi que $|X_{j+1}| > |\tilde{s}_{k-2}|$. Ainsi la seule possibilité sera $X_{j+1} = \tilde{s}_{k,l'}$ avec $0 < l' < l$. Or on peut écrire que

$$X_{j+1}^2 = (\tilde{s}_{k-2}\tilde{s}_{k-1}^{l'})^2 = \tilde{s}_{k-2}\tilde{s}_{k-1}^{l'}L(\tilde{s}_{k-1})\tilde{s}_{k-2}\tilde{s}_{k-1}^{l'-1}$$

Et comme w est préfixe de X_{j+1}^2, on doit avoir que $\tilde{s}_{k-1} = L(\tilde{s}_{k-1})$ ce qui est impossible.

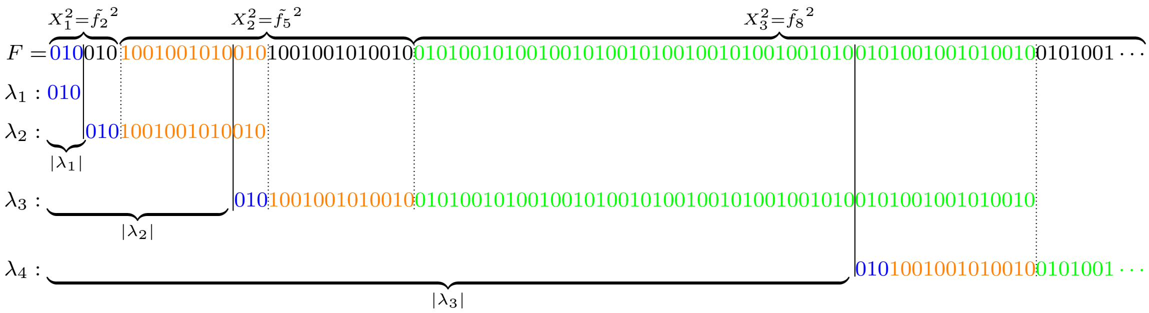
La conclusion est donc que λ_k n'apparaît pas avant la position $|\lambda_k|$.

$\underline{S_{\alpha,\rho} \in \text{TypeB}}$: Du corollaire 5.2.8, nous savons que $\sqrt{S_{\alpha,1-\alpha}} = S_{\alpha,1-\alpha}$. De plus les arguments de positionnement dans le cas $S_{\alpha,\rho} \in \text{TypeA}$ sont à l'ordre fini et sont donc applicable dans ce cas aussi. Ainsi, nous pouvons conclure.

$\square$

Revenons une fois de plus au mot de Fibonacci.

Exemple 5.3.24.
Comme $F = C_{\frac{1}{\varphi^2}}$, on obtient que $F \in \text{TypeB}$ et nous pouvons observer le début de sa décomposition en solutions maximales primitives :



Nous allons conclure ce chapitre sur quelques résultats concernant la structure des solutions maximales pour les mots sturmiens de Type A.

Lemme 5.3.25.
Soient $\alpha \in [0, \frac{1}{2}] \setminus \mathbb{Q}$ et $w, v \in St^+(\alpha)$ avec $|w| > |v|$. Si w est un préfixe d'une puissance de v alors $w = s_{k,l}$ et $v = s_{k-1}$ pour un $k \geq 2$ et $0 < l \leq a_k$.

Démonstration:
Soient α, w, v comme énoncés et notons $i = a_1 - 1$. Si $w = s_1 = 0^i 1$, alors il faut nécessairement que $v = s_0 = 0$. Or dans ce cas, w ne pourra jamais être préfixe d'une puissance de v. Supposons donc que $w = s_{k,l}$ avec $(k, l) \in K(\alpha)$.

$\underline{\text{Cas } k = 2}$: Ici, $w = (0^i 1)^l 0$ et $v = 0^i 1 = s_1$. En effet, w ne saurait pas être préfixe ni d'un multiple de $0 = s_0$ ni d'un multiple de $(0^i 1)^{l'} 0$ $(l' < l)$.

$\underline{\text{Cas } k > 2}$: Procédons par l'absurde en supposant que $v \neq s_{k-1}$.

$\underline{\text{Supposons } |v| > |s_{k-1}|}$: Vu que $|w| > |v|$, alors $v = s_{k,l'}$ $(l' < l)$. Comme w est préfixe d'un multiple de $|v|$, le mot $s_{k-1}^{l-l'} s_{k-2}$ est un préfixe de $s_{k-2} v^t$ $(t \in \mathbb{N}_0)$. On calcule donc que

$$s_{k-1}^{l-l'} s_{k-2} = s_{k-1} s_{k-2}^{a_{k-1}} s_{k-3} s_{k-1}^{l-l'-2} s_{k-2}$$

et donc que $s_{k-1} s_{k-2} = s_{k-2} s_{k-1}$, ce qui est faux.

$\underline{\text{Supposons } |v| < |s_{k-1}|}$: Le préfixe s_{k-1} de w est aussi un préfixe de v^t $(t \in \mathbb{N}_0)$, on ne peut donc avoir que $v = s_{k-2}$. Comme $w = (s_{k-2}^{a_{k-1}} s_{k-3})^l s_{k-2}$, on obtient que le mot

$u = s_{k-3}s_{k-2}$ est un préfixe d'un autre multiple de v. Ainsi on obtient que u se fini par un préfixe de s_{k-2} de taille $|s_{k-3}|$ qui est donc s_{k-3} lui même. Et donc on obtient que $s_{k-2}s_{k-3} = s_{k-3}s_{k-2}$, ce qui est faux.

Ainsi, la seule possibilité restante est $v = s_{k-1}$. Et cette solution fonctionne, ce qui nous permet de conclure.

□

Proposition 5.3.26.

Soit $S_{\alpha,\rho} = X_1^2X_2^2X_3^2\cdots$ un mot sturmien de TypeA. Si $|X_1| > |X_2|$, alors $X_1 = \tilde{s}_{k,l}$ ($k \leq 2$ et $0 < l < a_k$), la racine primitive de X_2 est $\tilde{s}_{k-1}$ et $|X_3| > |X_1|$.

Démonstration:

Soit $S_{\alpha,\rho} \in$ TypeA un mot sturmiens tel que $|X_1| > |X_2|$.

Cas X_1 primitif : Soit w la racine primitive de X_2. Les mots w et X_1 sont tous deux dans $StM^+(\alpha)$. Par hypothèse, on sait aussi que $|w| < |X_1|$. Le théorème 5.3.23 nous indique que le mot $\lambda_2 = X_1X_2$ est un suffixe de $\mu_2 = X_1^2X_2^2$ et donc que X_1 est un suffixe propre de X_1X_2.

Posons Z le mot tel que $ZX_1 = X_1X_2$. Cette égalité implique que pour tout naturel n, $Z^nX_1 = X_1X_2^n$ et donc qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que X_1 soit un suffixe propre de X_2^m. Ainsi, le mot $\tilde{X}_1$ est préfixe d'un multiple de $\tilde{w}$ et le lemme précédent nous dit donc que $\tilde{X}_1 = s_{k,l}$ et $\tilde{w} = s_{k-1}$ pour un $(k,l) \in K(\alpha)$.

Si $l = a_k$, alors le mot $X_1^2X_2^2$ possède le mot $\tilde{s}_{k-1}\tilde{s}_{k-2}\tilde{s}_{k-1}^{a_k+2}$ comme facteur. Ce qui implique que le mot $s_{k-1}^{a_k+2}s_{k-2}s_{k-1} \in \mathcal{L}(\alpha)$. Or, comme s_{k-1} est un préfixe de $s_{k-2}s_{k-1}$, on obtient que $s_{k-1}^{a_k+3} \in \mathcal{L}(\alpha)$ ce qui contredit le point (iv) du théorème 4.2.9. Ainsi on conclut que si $X_1 = \tilde{s}_{k,l}$ alors $k \geq 2$ et $0 < l < a_k$.

Cas X_1 non-primitif : Posons v la racine primitive de X_1 et $j \in \mathbb{N}$ tel que $X_1 = v^j$. Considérons le mot sturmien $(S_{\alpha,\rho})_{[(2j-2)|v|,\infty[} = v^2X_2^2X_3^2\cdots$ qui retombe dans le cas précédent, ce qui implique que $v = \tilde{s}_{k,l}$ avec $k \geq 2$ et $0 < l < a_k$ et que la racine primitive de X_2 est $\tilde{s}_{k-1}$. De plus, comme $l \neq a_k$, on obtient de nouveau par le point (iv) du théorème 4.2.9 que $v^3 \notin \mathcal{L}(\alpha)$ et donc que $j = 1$ et $X_1 = v = \tilde{s}_{k,l}$.

Montrons maintenant que $|X_1| < |X_3|$.

Supposons par l'absurde que $|X_1| \geq |X_3|$. Montrons d'abord que $|X_3| > |X_2|$. En effet, si $|X_3| < |X_2|$, le début de preuve nous dit que X_2 doit être le miroir d'un mot semi-standard. Or ici, X_2 est un multiple de $\tilde{s}_{k-1}$, ce qui est contradictoire. De plus, on ne peut pas avoir $|X_2| = |X_3|$ par maximalité de X_2. Posons $X_3 = u^t$ avec $u \in StM^+(\alpha)$ et $t \in \mathbb{N}_0$. Comme $|X_2| < |X_3| \leq |X_1|$, on obtient que $|\tilde{s}_{k-1}| < t|u| \leq |\tilde{s}_{k,l}|$.

Nous allons maintenant énumérer plusieurs contradictions grâce au point (iv) du théorème 4.2.9 qui nous renseigne sur l'index dans $\mathcal{L}(\alpha)$ des mots de $StM^+(\alpha)$ pour obtenir la conclusion. Supposons que $|u| < |s_{k-1}|$.

- Supposons que u soit le miroir d'un mot semi-standard, or vu que $X_3^2 = u^{2t} \in \mathcal{L}(\alpha)$ et l'index de u est 2, on récupère que $t = 1$ et donc que $|u|t < |s_{k-1}|$ ce qui est contradictoire. Ainsi, on sait u est le miroir d'un mot standard.

- Supposons que $u = \tilde{s}_0 = 0$. Alors l'inégalité $t|u| > |s_{k-1}| \geq |s_1|$ n'est plus vrai car l'index de 0 dans $\mathcal{L}(\alpha)$ est $a_1 + 1$. Ainsi, on sait que $u \neq \tilde{s}_0$
- Supposons que $u = \tilde{s}_{k-2}$. Comme $t|u| > |s_{k-1}| = a_{k-1}|s_{k-2}| + |s_{k-1}|$, on obtient que $t > a_{k-1}$. De plus, vu que $X_3^2 \in \mathcal{L}(\alpha)$, on obtient que $2t \leq a_{k-1}+2$ et donc que $a_{k-1}+2 \geq 2t > 2a_{k-1}$ ce qui n'est possible que si $a_{k-1} = 1$. Et dans ce cas, $a_{k-1} + 2$ est impair et donc $a_{k-1} + 2 > 2t > 2a_{k-1}$. Ce qui implique que $a_{k-1} < 1$ et donc une contradiction. Ainsi, on sait que $u \neq \tilde{s}_{k-2}$.
- Supposons que $u = \tilde{s}_{k-3}$. On calcule que

$$t|u| > |s_{k-1}| \geq |s_{k-2}s_{k-3}| = |s_{k-3}^{a_{k-2}} s_{k-4}s_{k-3}| > (a_{k-2} + 1)|s_{k-3}|$$

  et donc que $t > a_{k-2}+1$. Or l'index de X_3 implique que $2t \leq a_{k-2}+2$ et donc que, pareillement au point précédent, $a_{k-2} < 0$ ce qui est contradictoire. Ainsi, on sait que $u \neq \tilde{s}_{k-3}$.
- Supposons que $|u| < |s_{k-4}|$. On calcule que

$$|s_{k-1}| \geq (a_{k-2} + 1)|s_{k-3}| + |s_{k-4}| \geq 2|s_{k-3}| + |s_{k-4}| \geq (2a_{k-3} + 1)|s_{k-4}|$$

  et comme $2a_{k-3} + 1 \geq a_{k-3} + 2$, on obtient que $|s_{k-4}^{a_{k-3}+2}| < |s_{k-1}|$. L'index de u nous dit donc qu'il est impossible d'avoir $|t|u > |s_{k-1}|$ ce qui est une contradiction. Ainsi, on sait que $|u| > |s_{k-4}|$.

On obtient donc que si $|u| < |s_{k-1}|$ alors on obtient forcément que $t|u| < |s_{k-1}|$. Ce qui est une contradiction. Ainsi, on sait que $|u| \geq |s_{k-1}|$. De plus, par maximalité de X_2, on sait également que $u \neq \tilde{s}_{k-1}$ et donc que $|u| > |s_{k-1}|$.

Du fait que $|u| < |\tilde{s}_{k,l}|$, on sait donc que $u = \tilde{s}_{k,l'}$ pour un certain $0 < l' \leq l$. De plus, comme $l \neq a_k$, on obtient, comme ci-dessus, que $t = 1$. Par la proposition 5.3.22, on sait que $\lambda_3 = X_1X_2X_3$ est un suffixe de $\mu_3 = X_1^2X_2^2X_3^2$ et donc que $\tilde{s}_{k-2}\tilde{s}_{k-1}^{l+r} = \tilde{s}_{k-1}^{l+r-l'}\tilde{s}_{k-2}\tilde{s}_{k-1}^{l'}$ avec r le naturel tel que $X_2 = \tilde{s}_{k-1}^{r}$. Ce qui implique que les mots $\tilde{s}_{k-1}$ et $\tilde{s}_{k-2}$ commutent, ce qui est la contradiction finale qui permet de conclure que $|X_3| > |X_1|$.

$\square$

Corollaire 5.3.27.
Soit $S_{\alpha,\rho} = X_1^2X_2^2X_3^2\cdots$ un mot sturmien de TypeA. Alors $\liminf_{i\to\infty}|X_i| = \infty$.
<u>*Démonstration:*</u>
Soit $S_{\alpha,\rho} \in$ TypeA, par la proposition précédente on sait grâce au mot $(S_{\alpha,\rho})_{[|\mu_{i-1}|,\infty[}$ que si $|X_{i+1}| < |X_i|$ alors $|X_{i+2}| > |X_i|$. $\square$

Chapitre 6

Des mots infinis chevauchements-pleins

Maintenant que nous nous sommes familiarisés avec la racine carrée des mots sturmiens, une question pertinente que l'on est en droit de se poser est : Si un mot sturmien est partout α-répétitif optimale, l'α-racine associée préserve-t-elle le caractère sturmien et/ou la pente ?

En ce sens, nous allons nous concentrer sur les chevauchements et faire le lien avec les mots sturmiens.

Nous allons considérer dans cette section, pareillement aux mots carrés-pleins, que l'on travaille dans l'alphabet $A = \{0, 1\}$ et uniquement avec des mots infinis apériodiques.

6.1 De la chevauchement-plénitude optimale

Rappelons qu'un mot X est une 2^+-répétition ou un mot chevauchement-plein si un chevauchement commence à chacune de ses positions.

Lemme 6.1.1.
Si X est un mot infini chevauchement-plein, alors $\mathrm{Fac}(X)$ contient au moins 3 chevauchements minimaux distincts avec 01 comme préfixe.

Démonstration:
Soient X est un mot infini chevauchement-plein et $ww0$ le plus grand chevauchement minimal de X qui possède 01 comme préfixe. Avec la maximalité de w et le fait que X est apériodique, on obtient, en partant du deuxième w, qu'il existe un autre chevauchement minimal $vv0$ où v est préfixe de w, 01 est préfixe de v et w est un préfixe propre de vv.

Ensuite on sait qu'il existe u et t deux mots non vide tel que $w = vu$ et $v = ut$ avec t qui commence par 0. Et cela implique que u a 01 en préfixe car sinon cela contredirait la définition de v.

Ainsi, on obtient que $ww0 = vuutu0$ et donc que $uu0$ est un chevauchement et donc soit il est minimal, soit un de ces préfixes l'est et tous deux démarrent par 01. $\square$

Lemme 6.1.2.
Si X est un mot infini chevauchement-plein, alors $\mathrm{Fac}(X)$ contient au moins 3 chevauchements minimaux distincts avec 00 comme préfixe.

Démonstration:

Soient X un mot infini chevauchement-plein et $ww0$ le plus grand chevauchement minimal avec 001 comme préfixe. Comme pour le lemme précédent ; par maximalité, on dispose d'un chevauchement minimal qui commence au deuxième w i.e. on sait qu'il existe $vv0$ avec v qui est un préfixe de w, v qui commence par 001 et w qui est un préfixe propre de vv. Ainsi, on peut décomposer w et v avec deux mots non vides u et t qui commencent par 0 tels que $w = vu$ et $v = ut$.

Et donc $ww0 = vuutu0$ ce qui implique que $uu0$ est un chevauchement. Notons que le cas $u = 0$ est compté car dans ce cas $uu0 = 000$ possède 00 comme préfixe. Et si $|u| > 1$ alors soit $uu0$ soit un de ces préfixes sera le troisième chevauchement minimal. □

Lemme 6.1.3.

Si X est un mot infini chevauchement-plein, alors $\mathrm{Fac}(X)$ contient au moins 3 chevauchements minimaux distincts avec 10^i1 comme préfixe et au moins 3 avec 10^j1 comme préfixe $(i \neq j)$.

Démonstration:

Soit X un mot infini chevauchement-plein. Étant donné que X est apériodique, on sait qu'il doit exister, à renommage des lettres près, deux longueurs différentes i et j telles que 10^i1 et 10^j1 soient tous deux dans $\mathrm{Fac}(X)$.

Soit $ww1$ le plus grand chevauchement minimal avec 10^i1 comme préfixe. On doit avoir que 10^i1 soit un préfixe de w. En effet, sinon on obtient que $w = 10^i$ et par maximalité, chaque w doit relancer un chevauchement $ww1$ et donc X possède comme suffixe $(10^i)^\omega$ ce qui contredit l'apériodicité.

De nouveau du fait que $ww1$ soit le plus grand chevauchement minimal qui commence par 10^i1, il doit en exister un autre : $vv1$ avec v préfixe de w, w préfixe propre de vv et 10^i1 préfixe de $vv1$. Et aussi qu'il existe u, t non vides qui commencent par 1 tels que $w = vu$ et $v = ut$ et donc on obtient que $ww1 = vuutu1$.

Ainsi, le mot $uu1$ est un chevauchement de $\mathrm{Fac}(X)$ et montrons enfin que 10^i1 en est préfixe. Comme 10^i1 est un préfixe de $vv1$ et comme t commence par 1, on retire de $v = ut$ que 10^i est un préfixe de u. Donc soit $u = 10^i$, soit 10^i1 est préfixe de u. Ainsi, dans les deux cas, soit $uu1$ ou soit un de ces préfixes est le troisième chevauchement minimal de $\mathrm{Fac}(X)$ qui commence par 10^i1.

La preuve de ce lemme est strictement identique pour j. □

Théorème 6.1.4.

Si X est un mot infini chevauchement-plein, alors il possède au moins 12 chevauchements minimaux et cette borne est optimale.

Démonstration:

Soit X un mot infini chevauchement-plein. Par les trois lemmes précédents, on obtient qu'il existe pour respectivement 00, 01, 10^i1, 10^j1 $(i, j \in \mathbb{N})$ au moins trois chevauchements minimaux distincts qui commencent par les préfixes ici mentionnés.

Soit F le mot de Fibonacci. Nous observons que chacun de ces 28 facteurs de taille 27 commence par un chevauchement parmi 12 différents.

En effet on retrouve que :

$$\text{0010010 est préfixe de } \begin{cases} 001001010010010100101001001 \\ 001001010010100100101001001 \\ 001001010010100100101001010 \end{cases}$$

$$\text{00101001001010010 est préfixe de } \begin{cases} 001010010010100100101001010 \\ 001010010010100101001001010 \end{cases}$$

$$\text{00101001010 est préfixe de } \begin{cases} 001010010100100101001001010 \\ 001010010100100101001010010 \end{cases}$$

$$\text{0100100 est préfixe de } \begin{cases} 010010010100100101001010010 \\ 010010010100101001001010010 \end{cases}$$

$$\text{01001010010 est préfixe de } \begin{cases} 010010100100101001001010010 \\ 010010100100101001010010010 \\ 010010100101001001010010010 \\ 010010100101001001010010100 \end{cases}$$

$$\text{01010 est préfixe de } \begin{cases} 010100100101001001010010100 \\ 010100100101001010010010100 \\ 010100101001001010010010100 \\ 010100101001001010010100100 \end{cases}$$

$$\text{1001001 est préfixe de } \begin{cases} 100100101001001010010100100 \\ 100100101001010010010100100 \\ 100100101001010010010100101 \end{cases}$$

$$\text{10010100100101001 est préfixe de } \begin{cases} 100101001001010010010100101 \\ 100101001001010010100100101 \end{cases}$$

$$\text{10010100101 est préfixe de } \begin{cases} 100101001010010010100100101 \\ 100101001010010010100101001 \end{cases}$$

$$\text{10100100101001001 est préfixe de } \begin{cases} 101001001010010010100101001 \end{cases}$$

$$101001001010010100100101001 \text{ est préfixe de } \begin{cases} 101001001010010100100101001 \end{cases}$$

$$10100101001 \text{ est préfixe de } \begin{cases} 101001010010010100100101001 \\ 101001010010010100101001001 \end{cases}$$

Ces chevauchements sont des $\frac{27}{13}$-répétitions. Le mot de Fibonacci atteint donc la borne de 12 chevauchements minimaux. $\square$

Rappelons-nous de deux des morphismes vus dans la section 2.3.3

$$\varphi : \begin{cases} 0 \mapsto 01 \\ 1 \mapsto 0 \end{cases} \qquad \text{et} \quad E : \begin{cases} 0 \mapsto 1 \\ 1 \mapsto 0 \end{cases}$$

Nous avons vu avec la proposition 2.3.31 que n'importe quel mot caractéristique C_α peut être obtenu en appliquant une certaine suite infinie de morphismes φ et E au mot de Fibonacci. Nous allons maintenant montrer que ces deux morphismes préservent la chevauchement-plénitude optimale.

Proposition 6.1.5.
Si $X \in \mathfrak{S}$ est chevauchement-plein optimal, alors $E(X)$ et $\varphi(X)$ le sont aussi.

Démonstration:
Comme E est un codage et ne fait que renommer les lettres des mots, la conclusion est immédiate.

Ensuite, soit X un mot sturmien la proposition 2.3.21 et son lemme nous informe que $\varphi(X)$ est aussi un mot sturmien. Considérons les lettres de $X = x_0x_1x_2...$ et $\varphi(X) = p_0p_1p_2...$ $(x_i, p_i \in \{0,1\}\, \forall i)$. Soit $i, j \geq 0$ deux entiers tels que $p_j = 0$ et $p_jp_{j+1}... = \varphi(x_ix_{i+1}...)$. Comme X est carré-plein avec exactement 6 carrés minimaux, on obtient que $x_ix_{i+1}...$ commence par ww qui est un de ces carrés. Et donc, par définition de φ, le suffixe $p_jp_{j+1}...$ commence par $\varphi(ww)0$ qui est un chevauchement. On en déduit qu'a chaque occurrence de 0, il y a un chevauchement parmi un des 6 de la forme $\varphi(ww)0$ avec ww un carré minimal de X.

Ensuite, soit $k \geq 0$, $l \geq 1$ deux entier tels que $x_k = 0, p_l = 1$ et $0p_lp_{l+1}... = \varphi(x_kx_{k+1}...)$. Comme X est chevauchements-pleins optimal, on obtient que $x_kx_{k+1}...$ commence par un chevauchement minimal $0w0w0$ parmi 6 distincts. On obtient donc que $0p_lp_{l+1}...$ commence par $\varphi(0w0w0)$ et donc que $p_lp_{l+1}...$ commence par $1\varphi(w0w0)$ qui lui même est un chevauchement. Ainsi, chaque position qui commence par 1 dans $\varphi(X)$ commence aussi par un chevauchement parmi un des 6 de la forme $1\varphi(w0w0)$ (avec $0w0w0$ un chevauchement minimal de X).

Ainsi chaque position de $\varphi(X)$ commence par un chevauchement parmi 12 distincts. Si un des 12 n'est pas minimal, on peut le remplacer dans la liste par son préfixe qui l'est. De plus, comme $\varphi(X)$ est apériodique, on récupère du théorème 6.1.4 que $\varphi(X)$ est chevauchement-plein optimal. $\square$

Théorème 6.1.6.
Soit $S_{\alpha,\rho} \in \mathfrak{S}$, alors $S_{\alpha,\rho}$ est chevauchement-plein optimal.

<u>*Démonstration:*</u>
Soit $S_{\alpha,\rho} \in \mathfrak{S}$. Nous avons précédemment montré que :

(6.1.4) F, le mot de Fibonacci, est chevauchement-plein optimal.

(2.3.31) $C_\alpha = \lim_{n\to\infty} g_1 \circ ... \circ g_n(F)$ avec $g_i \in \{E, \varphi\}\, \forall i$.

(6.1.5) $\forall n, g_1 \circ ... \circ g_n(F)$ est chevauchement-plein optimal.

Ainsi, la limite d'une suite de mots sturmiens chevauchements-pleins optimaux, qui est C_α, est elle-même un mot sturmien chevauchement-plein optimal.

De plus, la définition 3.1.1 des mots 2^+-répétitifs nous qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que tout les facteurs de C_α de longueur plus petite que N possède un préfixe 2^+-répétitif. Ainsi, les facteurs de $S_{\alpha,\rho}$ et C_α étant les mêmes, on obtient que $S_{\alpha,\rho}$ est aussi chevauchement-plein. $\square$

6.2 De la racine chevauchième : une fausse bonne idée

Étant donné que pour tout mot $w \in \{0,1\}^*$ et $a \in \{0,1\}$, le mot $awawa$ est égal au mot $w'w'a$ avec $w' = aw$, la 2^+-racine finie du chevauchement $awawa$ est donc aw. Nous allons appeler cette racine racine étendue à gauche.

Définition 6.2.1.
Soient A un alphabet fini, $a \in A$ une lettre et $w \in A^*$ un mot, on définit alors la *racine chevauchième étendue à gauche* par :

$$\sqrt[cg]{\cdot} : awawa \mapsto aw$$

Et si $X \in A^{\mathbb{N}}$ est un mot infini chevauchement-plein alors on étend la définition par

$$\sqrt[cg]{X} = \sqrt[cg]{X_1}\,\sqrt[cg]{X_2}\,\sqrt[cg]{X_3}...$$

où la suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ représente la décomposition de X en chevauchements minimaux.

Malheureusement, cette racine ne préserve pas la propriété d'être sturmien. En effet, si l'on regarde le début du mot F, on obtient :

$F = 010010100100101001010010010100100101001010010010100101001001010010 0...$

$= 01001010010/01010/01010/01001010010/01010/01010/01001010010/1001001/0100100...$

et donc que

$\sqrt[cg]{F} = 01001/01/01/01001/01/01/01001/100/010...$

$= 01\underline{00}101010100101010100\underline{11}00010...$

Ainsi, comme 11 et 00 sont des facteurs de $\sqrt[cg]{F}$, ce mot n'est pas sturmien.

Cependant, au vu de la structure d'un chevauchement, la définition d'une racine n'a l'air, de prime abord, d'être univoque. En effet, nous pouvons considérer 3 autres possibilités raisonnables de racine.

Définition 6.2.2.
Soient A un alphabet fini, $a \in A$ une lettre et $w \in A^*$ un mot, nous définissons les 3 racines suivantes :

$$\begin{aligned} \text{la } \textit{racine chevauchième courte} : \ & \sqrt[cc]{\cdot} : awawa \mapsto w \\ \text{la } \textit{racine chevauchième étendue à droite} : \ & \sqrt[cd]{\cdot} : awawa \mapsto wa \\ \text{la } \textit{racine chevauchième longue} : \ & \sqrt[cl]{\cdot} : awawa \mapsto awa \end{aligned}$$

Et donc, si $X \in A^{\mathbb{N}}$ est un mot infini chevauchement-plein, on définit les racines :

$$X = X_1 X_2 X_3 ... \mapsto \begin{cases} \sqrt[cc]{X} = \sqrt[cc]{X_1}\,\sqrt[cc]{X_2}\,\sqrt[cc]{X_3} ... \\ \sqrt[cd]{X} = \sqrt[cd]{X_1}\,\sqrt[cd]{X_2}\,\sqrt[cd]{X_3} ... \\ \sqrt[cl]{X} = \sqrt[cl]{X_1}\,\sqrt[cl]{X_2}\,\sqrt[cl]{X_3} ... \end{cases}$$

où la suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ représente la décomposition de X en chevauchements minimaux.

Ces racines possèdent les mêmes limitations que la racine étendue à gauche. En effet, de nouveau avec le mot de Fibonacci, on obtient pour la racine étendue à droite que :

$$\begin{aligned} \sqrt[cd]{F} &= 10010/10/10/10010/10/10/10010/001/100... \\ &= 1\underline{00}101010100101010100100\underline{11}00 \end{aligned}$$

Pour la racine courte que :

$$\sqrt[cc]{01010} = 11 \quad \text{et} \quad \sqrt[cc]{01001010010} = 1001$$

Et pour la racine chevauchième longue que $\mathrm{Fac}_8(\sqrt[cl]{F}) \geq 10$ (cf. Annexe B).

Ainsi nous avons que toutes les racines chevauchièmes ne préservent pas le caractère sturmien des mots infinis.

Chapitre 7

Conclusion

7.1 De la $\frac{3}{2}$-racine de F

Nous avons dans le chapitre précédent que la 2^+-racine ne préservait pas le fait d'être sturmien. L'exemple qui suit est là pour nous aider à réaliser l'impact de la nature de α par rapport à cette propriété. Étant donné que les mots sturmiens sont tous partout 2-répétitifs, ils sont également partout $\frac{3}{2}$-répétitifs. Ainsi, la $\frac{3}{2}$-racine est bien définie pour les mots sturmiens.

Cependant, cette racine a le même problème que la racine chevauchième. Elle ne préserve pas le fait d'être sturmien.

En effet, si on reprend l'exemple du mot de Fibonacci, parmi les facteurs de taille 5 de F, on retrouve les $\frac{3}{2}$-répétitions minimales suivantes :

$$00 \text{ est préfixe de } \begin{cases} 00100 \\ 00101 \end{cases} \qquad 010 \text{ est préfixe de } \begin{cases} 01010 \\ 01001 \end{cases}$$

$$101 \text{ est préfixe de } \begin{cases} 10100 \end{cases} \qquad 10010 \text{ est préfixe de } \begin{cases} 10010 \end{cases}$$

Et donc les racines de ces répétitions sont :

$$\sqrt[1{,}5]{00} = 0, \quad \sqrt[1{,}5]{010} = 01, \quad \sqrt[1{,}5]{101} = 10 \quad \text{et} \quad \sqrt[1{,}5]{10010} = 100$$

Ainsi, on observe que

$$\sqrt[1{,}5]{F} = 010\underline{1\underline{1}\,\underline{0}0}.. \cdots$$

et donc que 11 et 00 sont tous les deux facteurs de $\sqrt[1{,}5]{F}$ et que ce mot n'est donc pas sturmien.

7.2 De la conclusion sur les α-racines

Parmi les α-racines de mot infini, nous pouvons nous interroger sur l'unicité de l'identité et de la 2-racine ou racine carrée pour préserver la propriété d'être sturmien. En effet, les n-racines avec $n \in \mathbb{N}$ préservent naturellement la pente d'un mot vu que pour chaque n-répétition w :

$$\pi(w) = \frac{|w|_1}{|w|} = \frac{|w|_1/n}{|w|/n} = \frac{|\sqrt[n]{w}|_1}{|\sqrt[n]{w}|} = \pi(\sqrt[n]{w})$$

Cependant, les autres α-racines, qui ne préservent pas la pente des mots, ne semblent pas jouir de la propriété de préserver le caractère sturmien des mots infinis. En effet, les deux exemples que l'on a étudiés : la 2^+-racine ou racine chevauchième (voir 6.2) et la $\frac{3}{2}$-racine (voir 7.1), nous poussent vers cette conclusion.

J'ai donc décidé d'entreprendre la preuve de cette conjecture. [1]

Avant de pouvoir s'attaquer au résultat. Notons que nous n'avons pas prouvé que tous les mots sturmiens sont α-répétitifs pour α de 2^+ à $1+\varphi$, ce qui n'entrave en rien la véracité du résultat suivant. Et même plus que ça, quand bien même il existerait $S \in \mathfrak{S}$ qui ne soit pas partout α-répétitif, alors l' α-racine n'est même plus bien définie et devient dépourvue de tout intérêt par rapport aux mots sturmiens.

Théorème 7.2.1.
Soit $1 \leq \alpha < \varphi + 1$, si $\alpha \notin \mathbb{N}$ alors l'α-racine associée ne préserve pas le caractère sturmien des mots infinis.

<u>*Démonstration:*</u>
Soit $1 \leq \alpha < \varphi + 1$.

<u>Cas $\alpha < 2$</u> : Soit $\gamma = [0; j+1, 2, \overline{1}]$ avec j tel que :

$$\frac{2j}{j+1} < \alpha \leq \frac{2j+2}{j+2} < \frac{2j+1}{j+1} \implies \begin{cases} 10^j10^{j-1} \\ 010^{j-1}010^{j-2} \\ 10^{j+1}10^{j-1} \\ 00 \end{cases} \quad \text{sont des } \alpha\text{-répétitions minimales}$$

Étant donné que $(S_6^\gamma)^2 \in \mathcal{L}(\gamma)$, il existe $\rho \in [0,1[$ tel que $S_{\gamma,\rho}$ soit tel que :

$$\begin{aligned} S_{\gamma,\rho} = 0S_4^2S_6\cdots &= 010^j10^j10^{j+1}10^j10^j\cdots \\ &= 010^{j-1}010^{j-2}/00/10^{j+1}10^{j-1}/010^j\cdots \\ \implies \sqrt[\alpha]{S_{\gamma,\rho}} &= 010^{j-1}/0/10^{j+1}/01\cdots \\ &= 010^j10^{j+2}1\cdots \end{aligned}$$

Ainsi, comme $|0^{j+2}|_1 = 0$ et $|10^j1|_1 = 2$, on obtient que $\sqrt[\alpha]{S}$ n'est pas équilibré et donc

1. Le cours, et surtout le calculateur de fraction continue de R.Knott [14] m'ont énormément aidé dans la phase exploratoire de cette conjecture.

pas sturmien.

Cas $2 < \alpha \leq \frac{5}{2}$: Soit $\delta = [0; 2, 2, \overline{1}]$.

Comme 0101 est un carré minimale et que 01010 est une $\frac{5}{2}$-répétition minimale, on obtient que 01010 est aussi une α-répétition minimale.

Étant donné que $(S_6^\delta)^2 \in \mathcal{L}(\delta)$, il existe $\sigma \in [0, 1[$ tel que $S_{\delta,\sigma}$ soit tel que :

$$\begin{aligned} S_{\delta,\sigma} = 0S_4^2 S_6 &= 010101001010\cdots \\ &= 01010/1001010\cdots \\ \implies \sqrt[\alpha]{S_{\delta,\sigma}} &= 01/1001\cdots \\ &= 011001 \end{aligned}$$

Ainsi, comme 11 et 00 sont tous deux des facteurs de $\sqrt[\alpha]{S_{\delta,\sigma}}$, ce mot n'est pas sturmien.

Cas $\frac{5}{2} < \alpha < 1 + \varphi$: Soit $\zeta = [0; 3, 2, \overline{1}]$.

Vu que 0010010 est une $\frac{7}{3}$-répétition minimale, 00100100 est une $8/3$-répétition minimale et que $\frac{7}{3} < \frac{5}{2} < \alpha < 1 + \varphi < \frac{8}{3}$, on obtient que 00100100 est aussi une α-répétition minimale.

Étant donné que $(S_6^\zeta)^2 \in \mathcal{L}(\zeta)$, il existe $\upsilon \in [0, 1[$ tel que $S_{\zeta,\upsilon}$ soit tel que :

$$\begin{aligned} S_{\zeta,\upsilon} = 00S_4^2 S_6 &= 001001001000100100\cdots \\ &= 00100100/1000100100\cdots \\ \implies \sqrt[\alpha]{S_{\zeta,\upsilon}} &= 001/10001\cdots \\ &= 00110001 \end{aligned}$$

Ainsi, comme 11 et 00 sont tous deux des facteurs de $\sqrt[\alpha]{S_{\zeta,\upsilon}}$, ce mot n'est pas sturmien.

$\square$

Ainsi, en mettant de côté le cas trivial de l'identité, nous savons donc que la racine carrée est la seule racine qui, dans le cadre des mots sturmiens, a un intérêt combinatoire profond car elle est la seule α-racine avec $\alpha \in]1, \varphi + 1[\cap \mathbb{N}$.

FIN

Annexe A

Du développement décimale de $\sqrt{2}$

Bien que les résultats suivants puissent être considérés comme basiques ou élémentaires, je considère qu'il est bon de les rappeler pour la bonne autosubsistance de ce mémoire.

Proposition A.0.1.
Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Démonstration:
Par l'absurde, considérons que $\sqrt{2}$ soit rationnel, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}_0$ tels que $pgcd(p,q) = 1$ et $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$. Dans ce cas,

$$\frac{p}{q} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2 \Leftrightarrow p^2 = 2q^2$$

Ce qui implique que 2 est un diviseur de p^2 et donc de p. Comme p est pair, il existe un entier r tel que $p = 2r$. Ainsi, on obtient que

$$\frac{p}{q} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{(2r)^2}{q^2} = 2 \Leftrightarrow 2r^2 = q^2$$

et donc que q est divisible par 2. Or cela implique que $pgcd(p,q) = 2$, ce qui est contradictoire à la définition de p et q. $\square$

Proposition A.0.2.
Soit $r \in \mathbb{R}$, si r est irrationnel alors son développement décimal est infini et apériodique.

Démonstration:
Soit $r \in \mathbb{R}$. Considérons que r soit irrationnel et supposons par l'absurde que son développement décimal soit fini. Alors il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $r = \frac{a}{10^n}$, ce qui contredit l'irrationalité. supposons maintenant que le développement décimal de r est ultimement périodique. On peut donc écrire $r = pa_1...a_i, b_1...b_j(c_1...c_k)^\omega$ avec $a_m, b_n, c_o \in \{0, 1, ..., 9\}$ $(1 \leq m \leq i, 1 \leq n \leq j, 1 \leq o \leq k)$ et $p \in \{+1, -1\}$. On calcule de cette écriture que la partie périodique est une série

géométrique. En effet, on obtient

$$0,\underbrace{0...0}_{j \text{ fois}}(c_1...c_k)^\omega = \frac{1}{10^j}\left(\frac{c_1...c_k}{10^k} + \frac{c_1...c_k}{10^{2k}} + \frac{c_1...c_k}{10^{3k}} + ...\right) = \frac{1}{10^j}\frac{\frac{c_1...c_k}{10^k}}{1-\frac{1}{10^k}} = \frac{c_1...c_k}{(10^k-1)10^j}$$

Ainsi, rassemblons toutes les parties de r :

$$r = \underbrace{pa_1...a_n}_{\in\mathbb{Z}} + \underbrace{\frac{b_1...b_j}{10^j}}_{\in\mathbb{Q}} + \underbrace{\frac{c_1...c_k}{(10^k-1)10^j}}_{\in\mathbb{Q}} \in \mathbb{Q}$$

ce qui est contradictoire vu que $r \notin \mathbb{Q}$. □

Annexe B

Des tests sur la racine chevauchième de F

Cette annexe contient le code en langage Python qui m'a amené aux conclusions sur la racine chevauchième.

```
#fib(n) rend la string f_n
def fib(n):
    a,b="0","01"
    for i in range(n-1):
        a,b = b,b+a
    return a

#racineC rend la racine chevauchième du préfixe F de Fibonacci
#dg[0]=1 étand la racine à gauche et dg[1]=1 étend la racine à droite
def racineC(F,dg=(0,0)):
    l=["0010010","00101001001010010","00101001010",
       "0100100","01001010010","01010","1001001",
       "10010100100101001","10010100101","10100100101001001",
       "1010010010100101001001010001","10100101001"]
    S,on="",True
    while on:
        on=False
        for j in l:
            if j==F[0:len(j)]:
                S,F,on = S+j[1-dg[0]:int(len(j)/2)+dg[1]], F[len(j):], True
                break
    return S

#FNX(F,n) rend la liste des facteurs de taille n du mot F
def FNX(mot,taille):
    facn=[]
    for i in range(len(mot)-taille):
        if mot[i:i+taille] not in facn:
```

```
            facn.append(mot[i:i+taille])
    return facn

#testgd() rend les racines chevauchièmes étendues à gauche et à droite
#du préfixe f_10 de Fibonacci
def testgd():
    F = fib(10)
    print("gauche -> " + racineC(F,(1,0)))
    print("droite -> " + racineC(F,(0,1)))

print(len(FNX(racineC(fib(11),(1,1)),8)))
#Cette instruction rend la taille de la liste des facteurs de taille 8
#de la racine chevauchième longue du préfixe f_{12} de F.
```

L'instruction finale rend l'Output 10 et la fonction 'testgd()' rend les mots présentés à la fin du chapitre 6.

Bibliographie

[1] Marston Morse and Gustav A. Hedlund. Symbolic dynamics ii. sturmian trajectories. *American Journal of Mathematics*, 62(1) :1–42, 1940.

[2] Jarkko Peltomäki and Markus Whiteland. A square root map on sturmian words. In Florin Manea and Dirk Nowotka, editors, *Combinatorics on Words*, pages 197–209, Cham, 2015. Springer International Publishing.

[3] Kalle Saari. *On the frequency and periodicity of infinite words*. PhD thesis, Turku Centre for Computer Science, 2008.

[4] Jarkko Peltomäki. Characterization of repetitions in sturmian words : A new proof. *Information Processing Letters*, 115(11) :886–891, 2015.

[5] Julien Leroy. Math2023-1 : Théorie des langages formels. Uliège, 2020-2021.

[6] Julien Leroy. Math0470-1 : Combinatorics on words. Uliège, 2021-2022.

[7] M. Lothaire. *Algebraic Combinatorics on Words*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 2002.

[8] N. Fogg, Valérie Berthé, Sebastien Ferenczi, Christian Mauduit, and A. Siegel. *Substitutions in Dynamics, Arithmetics and Combinatorics*. Springer Berlin, Heidelberg, 2002.

[9] A. Ya. Khinchin. *CONTINUED FRACTIONS*. University of Chicago Press, 1964.

[10] Kalle Saari. Everywhere α-repetitive sequences and sturmian words. In Volker Diekert, Mikhail V. Volkov, and Andrei Voronkov, editors, *Computer Science – Theory and Applications*, pages 362–372, Berlin, Heidelberg, 2007. Springer Berlin Heidelberg.

[11] Jean-Paul Allouche and Jeffrey Shallit. *Automatic Sequences : Theory, Applications, Generalizations*. Cambridge University Press, 2003.

[12] John William Scott Cassels. *An introduction to diophantine approximation*. Cambridge tracts in mathematics and mathematical physics. Cambridge University Press, 1957.

[13] S. Świerczkowski. On successive settings of an arc on the circumference of a circle. *Fundamenta Mathematicae*, 46(2) :187–189, 1958.

[14] Ron Knott. An introduction to continued fractions, 2023. `https://r-knott.surrey.ac.uk/Fibonacci/cfINTRO.html`.