Mémoire

Auteur : Ueten, Marie
Promoteur(s) : Balhan, Kevin; Massuir, Adeline
Faculté : Faculté des Sciences
Diplôme : Master en sciences mathématiques, à finalité didactique
Année académique : 2024-2025
URI/URL : http://hdl.handle.net/2268.2/23939

Faculté des Sciences
Département de Mathématique

Les nombres naturels entre praxéologie "modélisation" et praxéologie "déduction"

Mémoire de fin d'études présenté en vue de l'obtention du titre de
Master en Sciences Mathématiques, à finalité didactique

Année académique 2024-2025

Auteur :
Marie Ueten

Promoteur :
Kevin Balhan

Co-Promoteur :
Adeline Massuir

Remerciements

Je souhaite tout d'abord remercier tout particulièrement mon promoteur, Kevin Balhan, ainsi que ma co-promotrice, Adeline Massuir, pour leur disponibilité, leur suivi attentif et leurs précieux conseils tout au long de l'élaboration de ce mémoire.

Je tiens également à remercier les membres du jury, Julien Leroy, Jean-Pierre Schneiders et Arnout Van Messem, ainsi que le lecteur externe, Olivier Gilson, pour avoir accepté de lire ce travail et de participer à sa défense.

Je remercie aussi mes amis qui m'ont accompagnée durant mon parcours, notamment Alicia, Fanny et Joseph, pour leur aide, nos discussions ainsi que pour les bons moments partagés durant nos études.

Ma plus profonde gratitude va à ma famille : à ma sœur pour ses conseils, à ma mère pour ses relectures et mon père pour ses encouragements. Je n'aurais pas entrepris ces études sans eux et leur soutien et leur confiance m'ont permis de m'accrocher durant toutes ces années. Je ne les remercierai jamais assez pour cela.

Table des matières

-

Introduction

Dans le contexte de la RFIE (Réforme de la formation initiale des enseignants), où universités et hautes écoles interviennent ensemble dans la formation des futurs enseignants en maternelle, au primaire, et au secondaire inférieur et supérieur, le laboratoire de didactique des mathématiques de l'Université de Liège souhaite élargir son champ d'investigation à ces niveaux d'études. C'est dans le cadre de ce projet que s'intègre mon mémoire, dont le focus principal se situe au niveau de l'analyse de phénomènes d'apprentissage et d'enseignement liés aux usages des nombres à l'école maternelle.

Dans le premier chapitre, nous introduisons la *Théorie des Situations Didactiques* de Guy Brousseau dans son ancrage à la psychologie cognitive, comme théorie visant à rechercher les conditions minimales de fonctionnement du socio-constructivisme en situations scolaires. Cette théorie fournit des outils permettant l'analyse de leçons ordinaires et de pratiques professionnelles dominantes sur le terrain. Dans ce chapitre, nous nous bornerons aux exemples originels de la didactique bien qu'ils soient étrangers à l'apprentissage du nombre à l'école maternelle.

À la lumière de ces théories, une analyse menée dans le deuxième chapitre contrastera des dispositifs issus de la recherche avec des dispositifs issus des pratiques de terrain en Belgique francophone, observées dans une classe de deuxième année maternelle.

Dans le troisième chapitre, nous présenterons un modèle didactique de référence dans les travaux du laboratoire de didactique, appelé modèle épistémologique de référence (MER), construit sur un réseau conceptuel solidaire issu de la *Théorie des Situations Didactiques* de Guy Brousseau d'une part et la *Théorie Anthropologique du Didactique* d'Yves Chevallard d'autre part. Nous y proposerons un parcours déductif de l'arithmétique sur $\mathbb{N}$ dont la mise en place dans les classes reste à tester, à un niveau d'enseignement ultérieur (cela va de soi).

Chapitre 1

De la Théorie des Champs Conceptuels à la Théorie des Situations Didactiques

Ce chapitre est dédié aux cadres théoriques de la didactique dont nous ferons usage dans le deuxième chapitre de ce mémoire. A la secton 1.1, nous présenterons quelques éléments de la *Théorie des Champs Conceptuels* de Vergnaud (1990) pour son ancrage à la psychologie cognitive. A la section 1.2, nous développerons plus amplement quelques concepts de la *Théorie des Situations Didactiques* de Brousseau (1998), pour son regard sur les apprentissages et les obstacles liés d'ordre épistémologique et/ou didactique. Au chapitre 3, nous compléterons ce réseau conceptuel de concepts issus de la *Théorie Anthropologique du Didactique* de Chevallard (1999) qui lui sont solidaires, et qui nous permettront de mettre à plat un modèle didactique de référence de notre laboratoire de didactique des mathématiques.

1.1 La Théorie des Champs Conceptuels

Toute discipline scientifique en émergence est confrontée au questionnement des rapports qu'elle entretient avec d'autres disciplines scientifiques existantes. La didactique des mathématiques ne fait pas exception et c'est vers la psychologie du développement intellectuel qu'elle s'est tournée pour assurer des fondements scientifiques aux apprentissages scolaires.

Cette discipline, d'abord référente externe, a progressivement participé à l'étude des phénomènes didactiques. Jean Piaget pose un premier jalon décisif par la dimension épistémologique de son œuvre relevant d'une discipline nouvelle : l'épistémologie génétique, dont l'objet est d'étudier de quelle manière s'accroissent les connaissances, autrement dit, de quelle manière évoluent leurs organisations successives.

Les travaux de Gérard Vergnaud s'inscrivent dans le prolongement des travaux de Piaget en épistémologie génétique, tout en répondant à un double problème auquel s'est vue confrontée la psychologie cognitive :

> *"La psychologie cognitive est confrontée au double problème de tenir compte au plus près des savoirs sociétaux constitués (scientifiques, techniques, culturels, pratiques...) et en même temps de ne pas rester prisonnière de leur description actuelle, de manière à analyser au plus près la formation et le fonctionnement des connaissances des sujets individuels."* (Vergnaud, 1985, p. 251)

Pour Brun (1996), cela impose une double exigence de tout travail sur le cognitif en didactique. La première est de tenir compte des savoirs constitués, ce qui "*marque donc une première différence avec le point de vue strictement piagétien qui organisait les connaissances dans des* *structures logico-mathématiques générales*" (Brun 1996, p. 28). La seconde consiste à considérer "*[...] chez les sujets individuels une organisation des connaissances qui ne se laisse pas enfermer d'emblée dans les descriptions des savoirs, et qui, en plus, tienne compte des activités en cours du sujet connaissant dans des situations.*" (Brun 1996, p. 28). Avec sa "*Théorie des Champs Conceptuels*", Vergnaud (1990) va répondre, du moins en partie, à cette double exigence.

1.1.1 Les notions de concept et de champ conceptuel chez Vergnaud

A la lumière de cette double exigence mise en évidence par Brun (1996), un champ conceptuel s'explique alors par deux entrées, celle des concepts et des théorèmes d'une part, et celle des situations d'autre part. Pour Vergnaud (1990), on ne peut en effet réduire un concept à sa définition, à partir du moment où l'on s'intéresse à son apprentissage et à son enseignement :

> "*Un concept ne peut être réduit à sa définition, du moins si l'on s'intéresse à son apprentissage et à son enseignement. C'est à travers des situations et des problèmes à résoudre qu'un concept acquiert du sens pour l'enfant. Ce processus d'élaboration pragmatique est essentiel pour la psychologie et la didactique, comme il est d'ailleurs essentiel pour l'histoire des sciences. Parler d'élaboration pragmatique ne préjuge nullement de la nature des problèmes auxquels un concept nouveau apporte une réponse : ces problèmes peuvent être théoriques autant que pragmatiques.*" (Vergnaud, 1990, p. 135)

De plus, Vergnaud met au cœur de son analyse la forme que prend la connaissance dans l'action du sujet, ainsi que le langage et le symbolisme qu'il juge jouer un rôle essentiel dans la conceptualisation :

> "*Cela ne préjuge pas non plus de l'analyse du rôle du langage et du symbolisme dans la conceptualisation ; ce rôle est très important. Simplement, si l'on veut prendre correctement la mesure de la fonction adaptative de la connaissance, on doit accorder une place centrale aux formes qu'elle prend dans l'action du sujet. La connaissance rationnelle est opératoire ou n'est pas.*" (Vergnaud, 1990, pp. 135-136)

Il met ainsi l'accent sur trois plans qu'il faut, selon lui, étudier simultanément lorsque l'on étudie le développement et le fonctionnement d'un concept dans ses usages au cours de son apprentissage :

(1) l'ensemble S des situations qui donnent du sens au concept (la référence) ;

(2) l'ensemble I des invariants sur lesquels repose l'opérationnalité des schèmes (le signifié) ;

(3) l'ensemble $\mathcal{S}$ des formes langagières et non langagières, qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement.

Ce triplet (S, I, $\mathcal{S}$) est ce qui modélise un concept C dans la théorie des champs conceptuels. En gardant à l'esprit que l'on ne peut réduire le signifié ni aux signifiants ni aux situations, car il n'y a généralement pas de bijection entre ni signifiants et signifiés, ni entre invariants et situations.

1.1.2 Schèmes et invariants opératoires

Selon le regard de Vergnaud (1990), "concept" et "situation" entretiennent un lien étroit, puisque c'est à travers les situations qu'un concept acquiert du sens. Toutefois, un concept ne trouve pas sa signification dans une seule classe de situations, et une situation ne s'analyse pas à l'aide d'un seul concept. Cela a des conséquences car, cela nous conduit à questionner les découpages à réaliser dans le savoir :

> *"La première grande question concerne les choix à faire pour découper à bon escient les contenus de connaissance mathématique et en étudier de manière féconde la didactique et l'acquisition. Il n'est pas raisonnable d'étudier séparément l'acquisition de concepts (et de procédures) qui, dans les situations rencontrées et traitées par les élèves, sont difficilement dissociables."* (Vergnaud, 1981, p. 216)

C'est ce qui engage Vergnaud (1990) sur la voie de l'étude "des filiations et des ruptures" entre les connaissances exigées par la transformation des situations sur le long terme.

Comme unité de base de cette architecture de filiations et de ruptures, Vergnaud (1990) cherche à débusquer ce qui organise invariablement l'action du sujet pour une classe de situations données. C'est cette "*organisation invariante de la conduite pour une classe de situations données*" (Vergnaud, 1990, p. 136) que Vergnaud (1990) désigne par le mot "schème". Il donne du sens à la fois aux actions, aux situations et aux représentations symboliques qui les accompagnent. Pour en donner un exemple classique, considérons le cas du schème du dénombrement d'une collection d'objets :

> "*Ce schème* [du dénombrement] *comporte une organisation du parcours spatial de la main, du doigt et des yeux, en liaison avec les objets à dénombrer d'une part, avec l'émission à haute voix de la suite des nombres d'autre part, de manière à établir une correspondance biunivoque : principe d'exhaustivité (on les compte tous sans en oublier aucun) et principe d'exclusivité (on ne compte pas deux fois le même). Une autre caractéristique du schème concerne la marque énonciative de la cardinalisation : le dernier mot-nombre prononcé représente le cardinal de tout l'ensemble et non pas le dernier élément. Cette marque énonciative consiste soit dans la répétition* $(1, 2, 3, 4, 5...5)$*, soit dans l'accentuation* $(1, 2, 3, 4...$ **5**)." (Vergnaud, 1991, p. 80)

A travers cet exemple, on peut mettre en évidence certains éléments constitutifs d'un schème de manière générale : des règles d'action et d'anticipation, des invariants opératoires (théorème-en-acte et concept-en-acte) et des inférences-en-acte associées, indispensables à la mise en œuvre des schèmes. Un théorème-en-acte est un invariant modélisé par une "proposition", au sens d'un énoncé susceptible d'être tenu pour vrai, non pas dans un édifice mathématique, mais dans le fonctionnement même de l'activité. Par exemple : (quelle que soit la collection finie considérée) si chaque objet a été pointé une et une seule fois, le dernier mot-nombre énoncé permet de répondre à la question "combien ?". Chaque objet a été pointé une et une seule fois du doigt pour s'assurer que la prémisse est vérifiée (contrôle de l'action). On peut en conclure que le dernier mot-nombre prononcé est la réponse à la question "combien ?". Ces théorèmes-en-acte sont épinglés comme tels par le psychologue par la mise en correspondance d'un savoir mathématique issu du contexte mathématique abstrait, avec le comportement significatif d'un élève. Si ce comportement jugé significatif par le psychologue est suffisamment stable, il conclura alors qu'il y a bien théorème-en-acte. Quant aux concepts-en-acte, il s'agit d'invariants modélisés par des prédicats (propriétés ou relations), indispensables à la construction des propositions. Ils sont rarement explicités par les élèves mais ils sont construits par eux dans l'action.

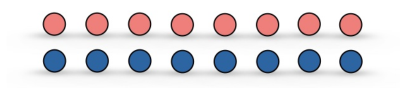
Dans l'approche de Vergnaud (1990), le couple "schème/situation" joue donc un rôle important. Le premier est un concept propre à la psychologie (déjà présente chez Piaget), dont la fonction est de permettre "*de comprendre ce que le sujet va faire dans une situation nouvelle. La situation est nouvelle, donc il ne sait pas comment s'y prendre. On a tous rencontré cela. Qu'est-ce qu'on peut faire d'autre que de puiser dans son répertoire de schèmes des ressources qui peuvent être décomposées et recomposées, avec en plus éventuellement une découverte en situation, de telle manière que finalement on va développer une forme d'organisation nouvelle*" (Vergnaud cité dans Dorier 2022, p. 47-48).

Le concept de situation est, lui, propre aux didacticiens dont l'objectif est de faire évoluer les conceptions et les compétences des élèves. Il fait l'objet de la section suivante.

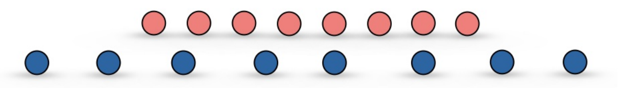
1.2 Théorie des Situations Didactiques

Les expérimentations menées par les psychologues n'ont pas manqué d'intéresser les didacticiens. En particulier, Guy Brousseau s'est intéressé à l'épreuve de conservation de Jean Piaget qui, en substance, est la suivante.

On demande à un enfant de 4 ou 5 ans de composer une collection de jetons bleus équivalente à une collection de 8 jetons rouges alignés. L'enfant met en correspondance les deux collections de jetons en plaçant un jeton bleu en face de chaque jeton rouge. La configuration obtenue est la suivante :



L'expérimentateur modifie alors la disposition de la collection de jetons bleus composée par l'enfant :



Il lui demande ensuite s'il y a toujours autant de jetons bleus que de jetons rouges. Ce dernier doit également justifier sa réponse.

Si, avant la modification de disposition, l'enfant juge évident qu'il y a autant de jetons bleus que de jetons rouges (il les a d'ailleurs lui-même mis en correspondance spatiale), ce même enfant affirme, après l'écartement des jetons par l'expérimentateur, qu'il y a désormais plus de jetons bleus que de jetons rouges. Il maintient même cette affirmation lorsque l'expérimentateur lui rappelle la situation initiale dans laquelle les jetons étaient en correspondance spatiale.

Trois arguments peuvent être avancés aux enfants pour les convaincre que les deux collections ont même quantité :

(1) "*On peut revenir comme c'était avant. Il n'y a donc pas plus de jetons bleus que de jetons rouges. C'est pareil.*"

(2) "*C'est plus long, mais c'est plus espacé.*"

(3) "*On n'a rien ajouté, on n'a rien enlevé.*"

Ces arguments, qui peuvent d'ailleurs être spontanément donnés par un enfant de 8 ans, par exemple, ne sont pas reçus par ce même enfant à 5 ans. Non pas seulement parce que cet enfant a grandi, mais parce qu'il a rencontré, entre temps, des situations qui l'ont fait évoluer cognitivement.

Dans l'épreuve de conservation décrite *supra*, le dispositif n'est pas l'objet d'étude du psychologue. Il n'est qu'un matériau pour révéler l'état des connaissances et des conceptions du sujet à un instant donné de son développement intellectuel. Ce dispositif n'indique pas non plus la raison pour laquelle c'est ce qui est conservé - la quantité -, et non ce qui est modifié

- l'espace occupé - qui doit inspirer la réponse de l'élève. La didactique va quant à elle se focaliser sur la construction de situations en mesure de déstabiliser les conceptions antérieures des élèves, d'une part, et de les amener à en appréhender de nouvelles, d'autre part. En outre, elle cherche pour chaque connaissance identifiée à déterminer au moins un dispositif d'usage et d'apprentissage qui lui est propre. Nous reviendrons dans le chapitre suivant sur les situations issues de la recherche en didactique relatives à l'apprentissage de la quantité.

1.2.1 Modèle d'apprentissage par adaptation

A la source de la *Théorie des Situations Didactiques* de Brousseau (1998), il y a, d'une part le constat que l'apprentissage des élèves ne se produit pas par simple transmission d'un discours "bien fait" de l'enseignant à l'élève, et qu'il faut dès lors contourner l'exposition du savoir :

> *"Les gens, les professeurs, les enseignants utilisaient tous les ressorts de la rhétorique pour convaincre les élèves, pour les éclairer, pour représenter... La compréhension était autre chose, [...]. On expliquait bien et l'enfant comprenait ou pas... On ne savait pas quoi faire avec l'incompréhension des élèves."* (Brousseau cité par Dorier 2022, p.49)

De nombreuses recherches sont venues attester du caractère erroné de cette idéologie répandue. Comme nous l'avons explicité ci-dessus, l'épreuve de conservation de Piaget avait déjà mis en évidence la non-réception par le sujet des arguments avancés par l'expérimentateur.

D'autre part, la *Théorie des Situations Didactiques* est également l'aboutissement d'une démarche scientifique qui consistait à chercher les conditions minimales de fonctionnement du socio-constructivisme [1] en situations scolaires, qui était alors dans les années 1970 le modèle d'enseignement dominant. Dans la lignée de la théorie psychogénétique piagétienne, pour Guy Brousseau, l'apprentissage résulte en partie d'un processus d'adaptation aux situations rencontrées :

> *"Dans la didactique moderne l'enseignement est la dévolution à l'élève d'une situation adidactique correcte, l'apprentissage est une adaptation à cette situation."* (Brousseau 1998, p.60)

Les situations adidactiques

Ces situations dites "*adidactiques*" sont bel et bien des situations à finalité didactique, mais dans lesquelles le professeur n'expose pas d'emblée le savoir aux élèves et leur renvoie la responsabilité de la construction de ce savoir, en abdiquant pour un temps et en apparence seulement toute intention d'enseigner :

> "*Situations à l'occasion desquelles le professeur peut abdiquer de son intention d'enseigner pour fonder l'apprentissage de l'élève sur une confrontation des actions de celui-ci avec un milieu [2]. Pour un temps, la question, le problème ne sont plus ceux du professeur, mais ceux de l'élève. C'est le processus de dévolution.*" (Brousseau, 1998)

Certaines conditions sont requises pour que la construction du savoir par les élèves puisse être dévoluée aux élèves dans une situation adidactique. Deux d'entre elles sont les conditions minimales nécessaires au fonctionnement du socio-constructivisme, identifiées par Guy Brousseau.

---

1. Théorie fondée sur l'interaction du sujet avec son environnement comme facteur de modification des connaissances, tout en tenant compte de leur inscription socio-culturelle.

2. Nous reviendrons sur ce concept. Disons pour l'instant qu'il s'agit d'un substitut à l'enseignant sur lequel ce dernier peut miser pour dévoluer le savoir aux élèves.

Elles feront l'objet de la section suivante.

Pour l'instant, nous nous contentons simplement de souligner que, pour donner prise à une telle situation, il faut que :

(1) les élèves disposent de connaissances antérieures et de procédures de base relatives au savoir qui est visé dans la situation, mais qui ne sont pas non plus le savoir que l'on veut leur enseigner à travers cette situation :

> *"Sans stratégie de base l'élève ne comprend pas le jeu, même si la consigne est claire."* (Brousseau 1988, p. 61)

Notons, par ailleurs, que si la réponse était déjà connue, il ne s'agirait même pas d'une situation d'apprentissage.

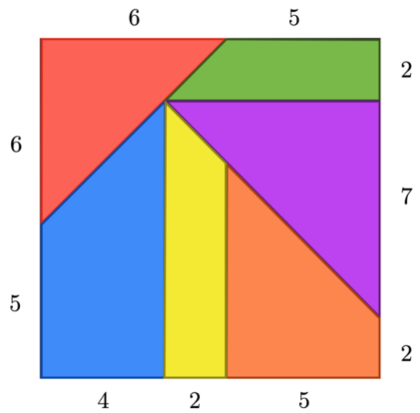
(2) les procédures mobilisées par les élèves doivent rapidement se révéler inefficaces ou insuffisantes pour contraindre l'élève à réaliser des accommodations, des modifications de son système de connaissances. Il doit, par voie de conséquence, y avoir incertitude de l'élève quant aux décisions à prendre.

(3) l'élève doit pouvoir remettre à l'épreuve ses procédures successives :

> *"L'apprentissage va consister à changer de stratégies et à changer les connaissances qui leur sont associées."* (Brousseau 1988, p. 61)

Afin d'illustrer ces différentes conditions, considérons un exemple originel d'une première situation d'étude des applications linéaires pour les élèves, donné par Brousseau (1987). Brousseau donne aux enfants des reproductions du puzzle que voici (les longueurs de quelques côtés de pièces sont indiquées sur sa représentation ci-dessous). Il leur demande alors de reproduire ce puzzle, mais avec une contrainte à respecter : le côté qui mesure 4cm doit mesurer 7cm dans la reproduction réalisée par les élèves. Brousseau répartit les enfants en groupes de 5 ou 6 élèves maximum, avec la consigne que chaque élève doit construire au moins 1 pièce :

> "*Voici des puzzles. Vous allez en fabriquer de semblables, plus grands que les modèles, en respectant la règle suivante : le segment qui mesure* 4 *cm sur le modèle devra mesurer* 7 *cm sur votre reproduction. Je donne un puzzle par équipe de* 5 *ou* 6*, mais chaque élève fait au moins* 1 *pièce ou un groupe de* 2 *en fait* 2*. Lorsque vous aurez fini, vous devez pouvoir reconstituer les mêmes figures qu'avec le modèle.*"



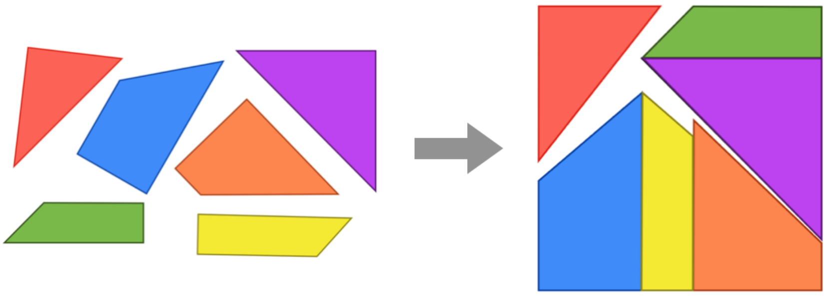
Les élèves se concertent, se séparent et forment les groupes. Le professeur affiche une reproduction plus grande du puzzle complet.

Peu ou proue, deux stratégies peuvent d'emblée être mobilisées par les élèves, bien qu'elles ne conduisent pas à une reproduction agrandie du puzzle :

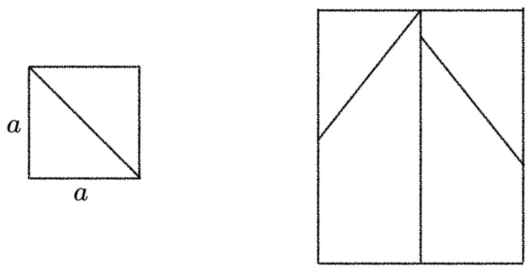
(1) la première consiste à (a) "ajouter 3 cm à chaque côté de chaque pièce", ou encore (b) "ajouter 3 cm aux côtés des angles droits" ;

(2) la seconde consiste à "multiplier la mesure de chaque côté par 2 puis à enlever 1 cm".

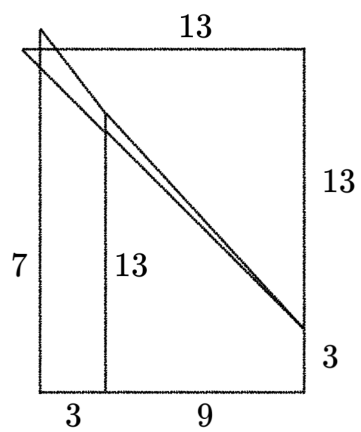
Certains élèves doutent de la première stratégie, mais ne parviennent pas à s'expliquer. *A fortiori*, ils ne parviennent pas à convaincre leurs partenaires à ce moment-là. Ils répondent donc à la consigne du professeur et construisent les pièces reproduites selon le modèle additif. Les pièces ne s'emboîtent pas, de façon indiscutable.



Notons toutefois que la stratégie (1b) possède un certain domaine de validité : l'ensemble des puzzles dans lesquels toutes les pièces sont composées de triangles isocèles rectangles de côtés a ; ensemble auquel s'ajoutent tous les puzzles de forme rectangulaire résultant de l'assemblage de pièces "à angle droit" avec au plus un "côté oblique", si l'on considère l'agrandissement valide dès que les différentes pièces s'agencent bien. La partie du puzzle initial constituée des pièces jaune, orange et mauve, est de ce type. On ajoute à la mesure de chaque côté du carré un même multiple de 3.



La seconde stratégie conduit également à un non-emboîtement des pièces mais celui-ci est moins flagrant visuellement.



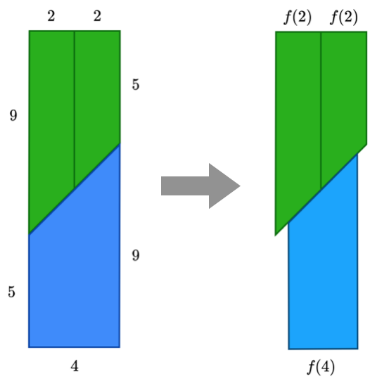
On assiste alors à des "débats", ou plutôt des disputes, entre les enfants : certains accusent leurs camarades d'avoir été imprécis ou peu soigneux lors des agrandissements et des découpes. Ce n'est donc pas le modèle (additif) qui est remis en cause par les enfants à ce stade mais plutôt le soin apporté à la réalisation de l'agrandissement.

Les élèves recommencent alors en faisant plus attention, et vérifient. Certains refont tous les morceaux. Pendant tout ce temps, l'attitude de l'enseignant est de n'intervenir que pour encourager les élèves et constater les faits, sans exigence particulière. Les élèves réitèrent donc mais les pièces ne s'emboîtent toujours pas.

Certains cherchent alors à colmater les brèches ; d'autres trichent en découpant un grand carré et découpent les pièces après. L'enseignant doit alors intervenir avant que les élèves, faute de moyen, se désengagent du problème. Il peut, d'une part, s'appuyer sur une mise en relation des mesures du puzzle initial et des mesures de la reproduction calculées par l'une ou l'autre des stratégies spontanées des élèves. Pour la stratégie (1a), par exemple :

$$\begin{array}{ccc} 2 & \longrightarrow & 2+3=5 \\ 4 & \longrightarrow & 4+3=7 \\ 6 & \longrightarrow & 6+3=9 \\ 2+4=6 & & 9 \neq 5+7 \end{array}$$

Cette mise en relation atteste du non-agencement des pièces de puzzles construites par leurs stratégies premières, et les engage à les rejeter. D'autre part, l'enseignant peut attirer l'attention des élèves sur un puzzle particulier (partie du puzzle initial) : une figure pour laquelle trois côtés a, b, c sont tels que $a + b = c$ dans le puzzle initial mais $f(a) + f(b) = f(c)$.



Ce puzzle particulier suggère aux élèves à la fois une règle de rejet et une condition nécessaire de linéarité : "si $a + b = c$ dans un puzzle initial, alors $f(a + b) = f(a) + f(b)$ dans la reproduction (sinon les pièces construites ne s'agenceront pas)". Et cela suffit pour que certains élèves, pas tous, mais quelques-uns, prennent conscience de cette condition à respecter pour parvenir à une reproduction fidèle dans laquelle les différentes pièces vont s'emboîter.

A partir de là, le modèle additif commence à être remis en cause et les enfants finissent par accepter qu'il doit exister un autre modèle qui, lui, respecte cette condition de linéarité. Les choses s'accélèrent, surtout si le professeur suggère de disposer les différentes longueurs de côtés des pièces dans un "tableau" numérique. Les élèves trouvent d'abord l'image de 8 et l'image de

12. Si 4 devient 7, alors 8 doit devenir 14 ; et 12=4+8 doit devenir 7+14 :

$$\begin{array}{rcl} 4 & \longrightarrow & 7 \\ 8 & \longrightarrow & 14 \\ 12 & \longrightarrow & 21 = 7 + 14 \end{array}$$

Curieusement, cette idée n'est pas contestée, comme si dès qu'un modèle est rejeté, l'autre s'imposait de lui-même. Mais ces images n'aident pas. Et les élèves finissent par exprimer qu' "*il faudrait l'image de 1 ; oui, ça permettrait de trouver toutes les autres. Pour cela, il faut partager* 4 *en* 4 *parties, il faut diviser* 7 *en* 4 *aussi.*" (un élève). A partir de là, certains enfants ajoutent à chaque dimension les $\frac{3}{4}$ de celle-ci.

$$\begin{array}{rcl} 1 & \longrightarrow & 1 + 1.\dfrac{3}{4} \\ 6 & \longrightarrow & 6 + 6.\dfrac{3}{4} \\ 11 & \longrightarrow & 11 + 11.\dfrac{3}{4} \\ a & \longrightarrow & a + a.\dfrac{3}{4} = a.\dfrac{7}{4} \end{array}$$

Ils ont en quelque sorte, non pas ajouté la différence de longueur 3 de manière absolue, mais après l'avoir relativisée grâce au rapport $\frac{1}{4}$ qui amène chaque dimension à l'unité.

Tâchons de mettre en évidence, dans les sections qui suivent, ce qui rend cette situation si singulière.

Le milieu

Le retrait de l'enseignant rend nécessaire l'existence d'un substitut auquel les élèves peuvent se référer afin d'évaluer les différentes stratégies qu'ils mettent en place. Le *milieu* joue ce rôle de substitut, dont on pourrait dire un peu rapidement qu'il est tout ce sur quoi peut s'appuyer le professeur pour dévoluer à l'élève la construction d'une part de savoir [3]. Il modélise dans la situation adidactique ce que l'élève ne contrôle pas mais qui modifie ses connaissances par des rétroactions [4] lui permettant de faire évoluer ses procédures et de s'assurer de la validité des nouvelles procédures qu'il construit.

Dans la situation précédente de l'agrandissement du puzzle, une fois la reproduction terminée, la même figure que celle du modèle doit pouvoir être reconstruite. Les différentes pièces construites jouent, dans cette situation, un rôle de validation ou d'invalidation des procédures d'agrandissement proposées par les élèves, à savoir une procédure additive consistant à ajouter 3 à toutes les dimensions. En effet, les morceaux du puzzle ainsi créé ne s'emboîtent pas. Cet exemple illustre le caractère "antagoniste" du milieu qui lui est intrinsèque et qui traduit l'idée de Brousseau selon laquelle : "*Pour agir, pour apprendre, l'élève doit trouver insuffisants ses moyens de contrôle, donc le sous-système avec lequel il négocie ne doit pas être pour lui un allié, mais un concurrent*".

3. Qui sera ultérieurement institutionnalisée comme telle. Nous y reviendrons

4. Par rétroaction, nous entendons une information fournie par le milieu et reçue par l'élève comme une sanction (positive ou négative) en réaction à une action de sa part. Elle lui permet d'ajuster son action, d'accepter ou de réfuter une hypothèse.

Ce système antagoniste modifie, dans la situation, l'état des connaissances de l'élève de façon non contrôlée par ce dernier. L'enseignant, quant à lui, va chercher à proposer une situation telle que les élèves construisent leur rapport à l'objet de connaissance ou modifie ce rapport comme réponse aux exigences du milieu et non au désir de l'enseignant. Pour cela, l'enseignant peut s'appuyer sur différentes facettes de ce milieu pouvant être nombreuses et multiples :

(a) matérielles : la situation et ses variables didactiques, une expérience de pensée, des technologies quelconques... ;

(b) sociales : les échanges entre élèves, les interventions du professeur, et l'évolution qu'ils permettent vers une validation intellectuelle... ;

(c) cognitives : les connaissances antérieures des élèves, obstacles...

Parmi les différentes composantes du milieu, il y en a une que l'enseignant peut contrôler plus que les autres ; c'est la facette matérielle et, plus particulièrement, ce que l'on appelle les variables didactiques. Celles-ci sont des choix réalisés par l'enseignant dans la situation selon son projet d'enseignement, dont la modification peut induire des processus de résolutions différents chez les élèves :

> *"Un champ de problèmes peut être engendré à partir d'une situation par la modification des valeurs de certaines variables qui, à leur tour, font changer les caractéristiques des stratégies de solution. [...] Seules les modifications qui affectent la hiérarchie des stratégies sont à considérer (variables pertinentes) et parmi les variables pertinentes, celles que peut manipuler un professeur sont particulièrement intéressantes : ce sont les variables didactiques. [...] Ces variables sont pertinentes à un âge donné dans la mesure où elles commandent des comportements différents. Ce seront des variables didactiques dans la mesure où, en agissant sur elles, on pourra provoquer des adaptations et des régulations : des apprentissages."* (Brousseau, 1982)

Il importe de les décrire pour comprendre la signification du savoir dans une situation particulière. En agissant sur ces variables didactiques, l'enseignant peut changer la "hiérarchie" des stratégies possibles, ou la stratégie "optimale" (et donc la signification du savoir visé).

Dans la situation du puzzle, l'enseignant peut, par exemple, modifier le rapport de proportionnalité entre les dimensions du puzzle initial et celles de sa reproduction :

- passer d'un côté de 4cm à un côté de 8cm conforte les élèves dans le modèle additif et les nombres entiers (la multiplication ayant pour signification à ce stade addition répétée) ;
- passer de 4cm à 6cm fait évoluer les élèves vers un modèle intermédiaire entre le modèle additif et le modèle linéaire : "4 plus la moitié de 4". Néanmoins, dans le contexte, ce modèle intermédiaire reste en apparence plus proche du modèle additif "on ajoute la moitié de 4" qui est un entier ;
- passer de 4cm à 7cm rend inefficace le modèle additif, mais peut, comme nous l'avons vu, être perçu comme "2 fois 4 - 1" ;
- passer de 3cm à 7cm ne permet aucune relation de ce type. Il contraint à adopter un nouveau modèle au détriment du modèle additif et l'usage des entiers.

Les différentes valeurs de cette variable didactique modifient le sens donné à la multiplication. Elles jouent sur le passage d'une multiplication par un entier comme addition répétée, liée au modèle additif sous-jacent, à une multiplication par un rationnel non décimal, liée à un modèle multiplicatif et à l'image par une application linéaire.

Nous pourrions nous étendre plus largement sur de multiples variables didactiques d'autres natures, comme celles constitutives du caractère adidactique de la situation, ou relatives aux connaissances antérieures des élèves. Nous nous contenterons ici d'avoir souligné celles qui sont relatives au savoir visé.

Le caractère fondamental

Outre le milieu, ce qui rend la situation du puzzle si singulière est que, pour venir à bout de cette situation, les élèves sont contraints de prendre conscience de la condition de linéarité qui est précisément le savoir visé par l'enseignant : percevoir les nombres rationnels en tant qu'opérateurs linéaires. En *Théorie des Situations Didactiques* ne sont considérés comme de véritables problèmes que ceux qui ne peuvent faire l'économie du savoir visé pour être résolus.

Au sein de cette théorie, "problème" et "savoir" constituent dès lors un couple indissociable. D'une part, ces problèmes ont pour fonction de caractériser un savoir par le fait qu'il n'est pas possible de s'en dispenser pour les résoudre. D'autre part, le sens qui est donné à un savoir est notamment situé par sa fonction d'outil "optimal" de résolution d'un ensemble de problèmes. C'est là que réside le caractère dit fondamental des situations.

Nous définirons donc une situation fondamentale d'un savoir comme un ensemble de problèmes auxquels le savoir apporte une solution "optimale", au sens où ce savoir visé est l'unique réponse à ces problèmes ou du moins la plus économique. Il s'agit là de l'instrument-clé de cette théorie de modélisation des savoirs mathématiques :

> *"Pour toute connaissance, il est possible de construire un jeu formel, communicable sans utiliser cette connaissance, et dont elle détermine pourtant la stratégie optimale."* (Brousseau, 1986)

Il s'agit là d'un problème épistémologique, reposant sur l'hypothèse qu'

> *"[...] il existe pour tout savoir une famille de situations susceptibles de lui donner un sens correct."* (Brousseau, 1986)

Nous reviendrons au chapitre trois sur cette hypothèse qui est à relativiser institutionnellement, ce dont Brousseau est déjà conscient puisqu'il précise d'ailleurs que le sens à donner à ce savoir est correct par rapport à l'histoire du concept, au contexte social et à la communauté scientifique.

1.2.2 Dévolution et institutionnalisation

La section précédente a mis en évidence les conditions nécessaires à l'acte de dévolution par lequel l'enseignant fait accepter à l'élève la responsabilité d'une situation d'apprentissage adidactique, conditions dans lesquelles le professeur s'interdit d'enseigner et l'élève assume sa part de responsabilité dans la construction du savoir. La visée de ces situations adidactiques est l'apprentissage par adaptation, les apprentissages des élèves se faisant sans apport extérieur de connaissances mais par la confrontation des élèves avec un milieu antagoniste.

> *"Nous savons que le seul moyen de «faire» des mathématiques, c'est de chercher et résoudre certains problèmes spécifiques et, à ce propos, de poser de nouvelles questions. Le maître doit donc effectuer non la communication d'une connaissance, mais la dévolution du bon problème. Si cette dévolution s'opère, l'élève entre dans le jeu et s'il finit par gagner, l'apprentissage s'opère."* (Brousseau)

Cependant, dans cette situation, le professeur reste le seul détenteur du savoir pouvant attester que l'apprentissage visé a bien été réalisé par les élèves. Pour que les élèves identifient cet apprentissage comme connaissance nouvelle à leur tour, il est alors nécessaire que l'enseignant intervienne et transforme leurs réponses et connaissances en savoirs reconnus comme tels par une institution, de mathématiciens par exemple. Cette phase de transformation de connaissances en savoirs est le processus dit d'*institutionnalisation* :

> "*[...] les conditions sociales d'un apprentissage par adaptation, en rejetant le principe de l'intervention des connaissances d'un tiers pour produire la réponse, tendent à rendre impossible l'identification de cette réponse comme une nouveauté, donc comme correspondant à une acquisition de connaissances. Le sujet banalise la question dont il connaît les réponses dans la mesure où il n'a pas les moyens de savoir si d'autres se la sont posée avant lui, ou si personne n'a su y répondre, ou encore si d'autres questions lui ressemblent ou lui sont liées par le fait qu'elles pourront recevoir une réponse grâce à celle-ci ... etc. Il faut donc que quelqu'un d'extérieur vienne pointer ses activités et identifie celles qui ont un intérêt, un statut culturel. Cette institutionnalisation est en fait une transformation complète de la situation [...]. Ce travail culturel et historique diffère totalement de ce qui semblait devoir être laissé à la charge de l'élève et il revient à l'enseignant. Il n'est donc pas le résultat d'une adaptation de l'élève.*" (Brousseau 1998, pp. 93-94)

Cette phase d'institutionnalisation relève d'un processus d'acculturation par l'entrée dans les pratiques d'une institution : le professeur y épingle dans la connaissance produite par les élèves un caractère universel, pointe son statut culturel et en fait un savoir réutilisable, applicable à d'autres problèmes que celui de la situation adidactique initiale.

Dévolution et institutionnalisation sont ainsi deux processus complémentaires, le premier permettant au professeur de convertir un savoir à enseigner en une connaissance chez l'élève, le second étant de reconnaître certaines connaissances engagées par les élèves comme des savoirs qui ont un statut social.

Pour modéliser les interactions en jeu entre enseignant et élèves, que ce soit au sein des situations adidactiques ou non, Brousseau (1998) introduit le concept de "*contrat didactique*". Ce dernier rend compte des phénomènes de communication du savoir y compris dans des leçons ordinaires.

1.2.3 Le contrat didactique

Par "contrat", Brousseau entend l'ensemble des comportements attendus des élèves par l'enseignant et l'ensemble des comportements attendus du professeur par les élèves. Comme il le dit lui-même :

> "*Dans toutes les situations didactiques, [....] ce contrat fonctionne comme un système d'obligations réciproques qui détermine ce que chaque partenaire, l'enseignant et l'enseigné, a la responsabilité de gérer, et dont il sera d'une manière ou d'une autre, responsable devant l'autre.*" (Brousseau 1998)

Quant au terme "didactique" qui lui est associé, celui-ci renvoie au savoir en jeu que professeur et élèves sont censés étudier ensemble :

> "*Ce système d'obligations réciproques ressemble à un contrat. Ce qui nous intéresse ici est le contrat didactique, c'est-à-dire la part de ce contrat qui est spécifique du "contenu" : la connaissance visée.*" (Brousseau 1998)

Le contrat didactique désigne donc l'ensemble des règles qui partagent et limitent les responsabilités des élèves, d'une part, et de l'enseignant, d'autre part, relativement au savoir mathématique qu'ils étudient ensemble.

Toutefois, ce contrat didactique ne peut être explicite à 100% ni détaillé en toute généralité. D'une part, parce que l'objet de la transaction est le savoir en jeu, le contrat est donc différent selon le savoir qu'enseignant et élèves étudient ensemble. D'autre part, l'objet de la transaction (le savoir), n'est connu que d'un seul des deux partis : l'enseignant. L'élève, lui, ignore tout ou presque de ce savoir, ce qui est incompatible avec une relation contractuelle :

> "*Le maître souhaite que l'élève veuille ne tenir la réponse que de lui-même mais en même temps il veut, il a le devoir social de vouloir, que l'élève donne la bonne réponse. Il doit donc communiquer ce savoir sans avoir à le dévoiler, ce qui est incompatible avec une relation contractuelle.*" (Brousseau, 1998)

Ce qui est attendu, permis, interdit relativement à l'acquisition du savoir étudié par les élèves et l'enseignant repose donc sur un ensemble de règles implicites. Brousseau (Ib.) met en évidence que lorsqu'un enseignement échoue ou rencontre des difficultés, chaque parti se comporte comme si un contrat avait été rompu.

C'est sur ce concept de contrat didactique que Brousseau s'appuie pour expliquer l'échec électif [5] en mathématiques. L'hypothèse de Brousseau est la suivante : ces élèves échoueraient non pas en raison de leur inaptitude à apprendre mais plutôt en raison de contrats didactiques spécifiques à tels ou tels savoirs mathématiques empêchant certains élèves d'entrer dans un processus d'apprentissage de ces savoirs. Ils manifesteraient alors des stratégies d'évitement, qui se manifestent par le refus par l'enfant, consciemment ou non, d'accepter sa part de responsabilités dans l'acte de décider en situation didactique.

Au cours de l'enseignement d'un savoir, les interactions entre un enseignant et ses élèves sont régies par des règles qui ne sont pas figées, et qui font l'objet de négociations successives. Ce processus de négociation est soumis à un certain nombre de paradoxes. En effet, plus on prend en charge l'apprentissage des élèves, et moins ils apprennent :

> "*Le professeur a l'obligation sociale d'enseigner tout ce qui est nécessaire à propos du savoir. L'élève - surtout lorsqu'il est en échec - le lui demande. Ainsi donc, plus le professeur cède à ces demandes et dévoile ce qu'il désire, plus il dit précisément à l'élève ce que celui-ci doit faire, plus il risque de perdre ses chances d'obtenir et de constater objectivement l'apprentissage qu'il doit viser en réalité.*" (Brousseau, 1998)

C'est ce qui conduit à des effets "pervers" du contrat didactique, dont les effets "Jourdain" et "Topaze" en sont, à titre d'exemple, deux manifestations. Le premier traduit une situation au cours de laquelle l'élève rencontre une difficulté et le professeur la surmonte à sa place, d'une manière ou d'une autre. Le second survient lorsqu'un comportement banal de l'élève est considéré comme trace d'une connaissance.

Les effets de contrat "Topaze" et "Jourdain"

Brousseau décrit ces manifestations en faisant allusion à deux personnages conceptuels célèbres. Le premier, "Topaze", tiré de l'œuvre de Marcel Pagnol du même nom, où Topaze, qui est professeur, essaie désespérément d'obtenir une orthographe correcte de la part d'un mauvais élève et dicte de manière un peu trop suggestive.

Topaze dicte à un élève en se promenant : "*Des moutons... des moutons... étaient en sûreté... dans un parc, dans un parc.*" Il se penche au-dessus de l'épaule de l'élève et constate

5. Terme utilisé pour désigner l'échec d'élèves qui réussissent dans toutes les disciplines sauf en mathématiques

qu'il n'a pas obtenu le comportement qu'il attendait de lui, à savoir : mettre un "s" à "mouton" puisque ce mot est au pluriel [6]. La réaction de Topaze est alors de reprendre et de prononcer le "s" avec insistance, allant même jusqu'à pointer du doigt l'endroit où ce "s" se fait absent et où l'élève doit le rajouter. Il réitère avec la conjugaison du verbe "être" à l'imparfait [7]. Topaze a fini par prendre à sa charge la dictée à la place de l'élève, ne parvenant pas à obtenir la bonne orthographe de sa part.

C'est en ce sens que Brousseau commente : le professeur obtient "à la baisse" le comportement qu'il attendait de l'élève :

> "*Devant les échecs répétés, Topaze mendie une marque d'adhésion et négocie à la baisse les conditions dans lesquelles l'élève finira par mettre ce "s". On devine qu'il pourrait continuer en exigeant la récitation de la règle, puis en la faisant copier un certain nombre de fois. L'effondrement complet de l'acte d'enseignement est représenté par un simple ordre : mettez un "s" à "moutons" : le professeur a fini par prendre à sa charge l'essentiel du travail.*" (Brousseau, 1998)

Cet effet "Topaze" s'accompagne presque toujours d'un effet "Jourdain", allusion issue du "Bourgeois gentilhomme" de Molière, où, non content d'avoir déjà obtenu le comportement attendu de l'élève à la baisse, le professeur - pour éviter le débat ou ne pas avoir à avouer l'échec de son enseignement - accepte de reconnaître dans le comportement de l'élève obtenu à la baisse une trace d'apprentissage du savoir qu'il voulait lui enseigner.

La métaphore de Brousseau renvoie au *Bourgeois Gentilhomme* de Molière où un maître de philosophie accepte de reconnaître une création littéraire en prose [8]. dans les élucubrations de Monsieur Jourdain :

> "*Le professeur, pour éviter le débat de connaissance avec l'élève et éventuellement le constat d'échec, admet de reconnaître l'indice d'une connaissance savante dans les comportements ou dans les réponses de l'élève, bien qu'elles soient en fait motivées par des causes et des significations banales.* " (Brousseau 1998, p. 35)

Tout enseignement d'un nouvel objet de savoir provoque des ruptures de contrat par rapport à des objets de savoir anciens et la renégociation de nouveaux contrats : l'apprentissage de l'élève se fait au prix de ces ruptures que l'enseignant doit négocier.

6. Règle1 : le pluriel des noms s'inscrit normalement en ajoutant "s" au singulier.
7. Règle2 : conjugaison de l'imparfait de l'indicatif à connaître par cœur.
8. Prose : manière de s'exprimer qui n'est pas soumise aux règles de la versification (opposé à poésie). Versification : Technique du vers propre à un poète.

Chapitre 2

Analyses de situations didactiques autour de l'usage du nombre à l'école maternelle

Dans ce chapitre, nous présentons dans un premier temps des situations didactiques visant l'apprentissage du nombre à l'école maternelle issues de la recherche, en nous focalisant principalement sur le "caractère fondamental" et le "milieu" de ces situations, au sens donné par Brousseau (1998). Ces situations sont issues de l'ouvrage intitulé "*Le nombre à l'école maternelle*" de Claire Margolinas et Floriane Wozniak. Dans un second temps, nous retranscrivons et analysons une leçon ordinaire à laquelle nous avons assisté dans une classe de deuxième maternelle dans un établissement scolaire de Belgique francophone.

2.1 L'apprentissage du nombre à l'école maternelle Margolinas et Wozniak (2012)

Chaque chapitre présente une série de situations qui visent l'apprentissage de différents aspects des nombres naturels à travers les usages que l'on en fait pour répondre à des problèmes donnés. L'un des aspects des nombres entiers naturels intervient dans la désignation de la quantité d'une collection d'objets. La section 2.1.1. étudie des situations dont l'enjeu est de rencontrer, de produire, de faire usage, et de désigner de différentes façons la quantité, et, *in fine*, de définir le cardinal en s'appuyant sur les situations rencontrées. La section 2.1.2. aborde la grandeur, et plus particulièrement la longueur, dans la manière de construire un objet d'une longueur donnée, de comparer deux longueurs d'objets et de communiquer une longueur, tout ceci résultant en la création d'une règle. La section 2.1.3. entreprend de faire découvrir aux élèves l'aspect ordinal du nombre via des situations où ils peuvent en faire usage et utiliser leurs différentes désignations. Tout cela résulte en la définition de l'ordinalité. A la section 2.1.4., des situations pour découvrir des techniques d'énumération sont proposées.

2.1.1 De la quantité au nombre entier : la cardinalité

La première étape vise l'émergence de la quantité définie par les auteurs comme suit : *Deux collections d'objets ont même quantité si, à chaque objet d'une collection, on peut associer exactement un objet de l'autre collection, et réciproquement. Cette association est appelée la correspondance terme à terme.* Elle y apparaît donc comme une propriété des collections d'objets mise en jeu dans ces situations d'appariement. Pour ce faire, un procédé expérimental, la mise en correspondance terme à terme, a été conçu. Il permet, à terme, de définir deux collections équipotentes comme deux collections ayant la même quantité d'objets. A l'issue de cette première étape, un nouveau type de situations peut alors prendre appui dessus : le tri de différentes collections d'objets selon leur quantité, reposant sur la transitivité de la relation "avoir même quantité que", et, *fine*, définir le cardinal de la collection d'objets.

Émergence de la quantité à travers des situations d'appariement

Les premières situations que l'enfant rencontre à l'école maternelle où les nombres apparaissent de manière fonctionnelle sont celles de dénombrement. Selon les auteurs, le dénombrement n'est jamais que "*la conclusion d'un long processus d'apprentissage qui passe par la connaissance d'une caractéristique essentielle des collections d'objets : leur quantité* " (Margolinas et Wozniak 2012, p.11).

La situation et ses enjeux

La situation suivante est génératrice de nombreuses situations d'apprentissage de la quantité comme une caractéristique essentielle des collections d'objets :

> " *Voici des coquetiers* [posés sur un plateau]. *Vous ne devez pas toucher aux coquetiers ni les utiliser avant d'avoir rempli votre panier. Pour gagner, il faut mettre dans le panier juste assez d'œufs pour pouvoir mettre un œuf dans chaque coquetier. Il ne doit pas rester d'œuf dans le panier. Quand vous aurez rempli votre panier, nous vérifierons si vous avez gagné ou perdu.*" (Margolinas et Wozniak 2012, p. 19)

Elle peut se décliner selon plusieurs aspects, mais ces déclinaisons doivent toutes viser la construction d'une collection équipotente [1] à une collection donnée, et contraindre l'élève à prendre en charge la construction de deux collections de même quantité. Ici, pour une collection de coquetiers posée sur le plateau, il faut donc dévoluer à l'élève la constitution d'une collection d'œufs dans le panier de telle sorte qu'une mise en correspondance terme à terme entre les coquetiers du plateau et les œufs du panier puisse être réalisée, et qu'il y ait suffisamment d'œufs pour en mettre un dans chaque coquetier tout en ayant épuisé les œufs du panier. A l'issue de cette mise en correspondance, s'il y a un œuf dans chaque coquetier et que le panier est vide, l'élève gagne; si le panier est vide et que l'un des coquetiers l'est également, ou s'il y a un œuf dans chaque coquetier et qu'il reste des œufs dans le panier, l'élève perd.

La quantité peut alors, dans cette situation, trouver une définition-en-acte (par analogie au théorème-en-acte de Vergnaud, 1990) comme caractéristique commune entre deux collections d'objets, celle des coquetiers et celle des œufs, par un appariement [2] de chacun des objets de ces deux collections, de sorte que tout œuf de sa collection est apparié avec un unique coquetier, et réciproquement. D'autre part, la quantité peut être construite en situation à partir de connaissances relatives à celle-ci, tout d'abord implicites, puis formulées, validées, et institutionnalisées.

Le milieu de la situation et ses obstacles

À ce stade, les connaissances antérieures des élèves sont très variables. En effet, l'expérience passée de ces derniers dépend presque exclusivement de l'environnement familial. Certains seront en mesure de réciter la comptine numérique "*un, deux, trois...*", peut-être jusque 20; d'autres auront manipulés en certaines circonstances des dés en jouant en famille à des jeux

1. Deux collections sont équipotentes lorsqu'il est possible de réaliser une mise en correspondance terme à terme de chacun de leurs éléments, de sorte que tout élément de l'une est apparié à un unique élément de l'autre, et réciproquement.
2. Cet appariement revient à effectuer une "mise en correspondance" des coquetiers avec les œufs.

de société. A cet âge, il est donc préférable que l'enseignant mise uniquement sur la capacité commune des enfants à distinguer *un* de *rien* et *un* de *plusieurs* d'une part, et à discriminer de petites quantités : de 1 à 3.

De plus, une difficulté constitutive de la quantité pour l'enfant réside dans le fait que celle-ci n'est pas la caractéristique d'un objet, à l'instar de la couleur, aisée à distinguer par simple perception, mais elle est la caractéristique d'une collection d'objets. Cela implique pour l'enfant de comprendre avant tout ce que peut être "*une collection qui unifie plusieurs objets distincts et conduit à regarder la pluralité comme une entité* [...] *qui réunit des unités éparses en un tout pour former, ensemble, un nouvel objet*". (Margolinas et Wozniak 2012, p. 13)

Néanmoins, pour dévoluer à l'élève la construction de ce procédé de mise en correspondance terme à terme, l'enseignant peut miser sur plusieurs autres éléments constitutifs du milieu qui permettent l'engagement des élèves dans la situation.

Certains portent sur la nature même des objets des collections choisies. Ici, les auteures font le choix de deux collections d'objets déplaçables, homogènes (chacune constituée d'objets identiques), et dont l'appariement entre objets des deux collections n'est possible qu'entre deux objets un à un. Le caractère déplaçable des objets permet une mise en correspondance physique des objets des deux collections, tandis que cette dernière ne peut se faire qu'indirectement par un lien symbolique si les objets ne sont pas déplaçables. Le caractère homogène des collections choisies permet de faciliter l'identification des deux collections distinctes, et l'identification de l'appartenance à l'une ou l'autre des deux collections. De plus, le choix matériel "œufs - coquetiers" ne permet pas l'appariement d'un coquetier avec plus d'un œuf ou inversement. Ce choix oblige et valide ainsi l'appariement : si la collection d'œufs est épuisée, c'est que chaque œuf est dans un coquetier, et s'il n'y a plus de coquetier vide, c'est qu'un œuf a été associé à chacun d'eux.

Parmi les variables didactiques, le choix du nombre d'objets a également un impact sur les possibilités offertes par le milieu. D'une part, une reconnaissance visuelle immédiate suffit pour reconnaître que l'on a bien deux collections de même quantité si le nombre de coquetiers est inférieur à quatre ou cinq. *A contrario*, un nombre de coquetiers supérieur à douze, et un élève peut ne pas s'apercevoir qu'un coquetier est vide.

En outre, le milieu ne se réduit pas aux objets en jeu. Il se compose également des mots, expressions et actions qui permettent le jeu. Il s'agit alors pour l'enseignant de présenter aux élèves le matériel qu'ils vont manipuler avec des mots connus par tous les élèves de la classe. De plus, il doit également s'assurer que chaque élève comprend que la tâche consistant à mettre un œuf dans chaque coquetier n'est pas réalisée si un coquetier reste vide.

Tous ces éléments rendent le milieu allié pour permettre aux élèves de s'engager dans la situation, mais il doit également présenter une dimension antagoniste pour qu'il y ait un jeu, sans lequel il n'y aurait rien à apprendre. Il faut nécessairement contraindre l'élève à s'engager sur l'égalité des quantités avant la validation de son action. Dans le cas contraire, l'élève pourrait ajouter ou retirer des œufs du panier ou le remplir ou le vider à sa guise, il n'y aurait plus d'enjeu.

Situation d'action

Une première situation d'action est celle décrite *supra* dans laquelle, pour un plateau de 4 à 12 coquetiers, un stock d'œufs est déposé à proximité du plateau de coquetiers, sans ajouter de restriction à l'usage du panier pour constituer la collection d'œufs.

Plusieurs actions sont possibles pour l'élève. Une première consiste à laisser le hasard décider : l'élève dépose une quantité d'œufs quelconque dans le panier puis les apparie un à un avec les coquetiers. Une deuxième action consiste à recourir à sa seule perception en cherchant à vue à prendre la bonne quantité d'œufs. Ces deux "stratégies" aboutissent la plupart du temps à un échec et sont invalidées par le milieu dans la situation. Elles ne gagnent pas à tous les coups, en particulier la seconde stratégie lorsque le nombre coquetiers est supérieur à 6.

Elles doivent donc être délaissées au profit d'une autre stratégie gagnante à tous les coups, elle, consistant à réaliser la mise en correspondance terme à terme des œufs avec les coquetiers. Toutefois, l'action de déposer un œuf dans un coquetier est interdite. Cette mise en correspondance reste cependant possible, soit en déposant un œuf en face de chaque coquetier avant de les réunir dans le panier, soit en les passant en revue du regard ou en les pointant du doigt un à un et en déposant simultanément un œuf dans le panier à chaque coquetier passé en revue jusqu'à l'épuisement de la collection de coquetiers. Cette stratégie revient à considérer les deux collections de coquetiers et d'œufs comme étant ce qui doit être mis en relation, indépendamment de l'action physique à réaliser :

> "*En réunissant les œufs dans le panier, l'élève détruit en effet l'organisation physique qu'il a effectuée et réalise, en acte, la conservation de la quantité indépendamment de l'organisation spatiale de cette collection. Il s'agit, comme l'ont montré les travaux piagétiens, d'une étape importante dans l'acquisition du nombre.*" (Margolinas et Wozniak 2012, p. 20)

De plus, l'action de pointer simultanément les éléments de la collection de coquetiers et ceux de la collection d'œufs met en jeu une organisation temporelle, dans laquelle la collection des coquetiers est parcourue comme une liste. Cette série d'actions successives laisse entrevoir que les deux collections mises en correspondance peuvent être envisagées indépendamment de leurs propriétés spatiales.

Situations de formulation

Afin de faire évoluer les procédures des élèves au-delà de la première procédure élémentaire de mise en correspondance directe terme à terme, il faut maintenant empêcher l'efficacité de celle-ci, en jouant sur l'éloignement des collections dans l'espace et/ou dans le temps. Cela a pour impact de contraindre les élèves à procéder par mise en correspondance indirecte en s'appuyant sur la construction de premières collections intermédiaires.

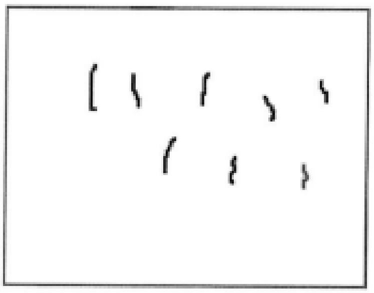
Une situation de formulation avec éloignement dans l'espace qui resterait proche de la situation fondamentale initiale consisterait à laisser fixe la collection de coquetiers tout en éloignant la collection d'œufs, et d'ajouter la consigne suivante "ramener dans le panier, en une seule fois, juste assez d'œufs pour pouvoir mettre un œuf dans chaque coquetier". Ces deux contraintes supplémentaires imposent de mettre en place d'une manière ou d'une autre un moyen de transporter l'information sur la quantité de coquetier avant d'aller chercher les œufs. En outre, l'ajout de cette consigne empêche le stockage d'œufs dans le panier avec lequel l'élève pourrait, au fur et à mesure des allers-retours, ajuster la quantité d'œufs nécessaire. On se retrouverait alors dans la situation précédente.

Ce transport d'informations se fait d'une manière ou d'une autre par le biais d'une collection intermédiaire. L'élève peut, par exemple, se servir d'une collection intermédiaire d'objets à sa disposition (jetons, billes, par exemple), associer à chaque coquetier un objet de cette collection, transporter la collection qu'il s'est constituée et associer terme à terme cette collection à celle des œufs. Si le nombre de coquetiers est inférieur ou égal à dix, les doigts des mains peuvent servir de collection intermédiaire en attribuant un doigt différent à chaque coquetier, gardé levé lors du déplacement vers les œufs, que l'élève baisse ensuite un à un à chaque œuf posé dans le panier. L'élève pourrait encore faire usage de la comptine numérique mémorisée ("*un, deux, trois...*") pour associer un mot à chaque coquetier, et associer un œuf à cette même collection de mots. La comptine numérique elle-même sert alors de collection intermédiaire équipotente, entre les collections d'œufs et de coquetiers, permettant le transport d'informations d'une première collection vers la deuxième. Une fois que l'élève perçoit cette fonction de collection intermédiaire de la comptine numérique, il peut alors comprendre qu'il suffit de se souvenir du dernier mot prononcé dans la récitation de la comptine pour déterminer la quantité de la collection de coquetiers.

Les situations de formulation avec éloignement dans le temps impose quant à elles l'élaboration de connaissances faisant usage de ressources écrites. Le problème qui se pose en effet dans ces situations est l'enregistrement de l'information de manière pérenne, contrairement aux situations de formulation avec éloignement dans l'espace qui ne nécessitaient pas la mémorisation. La durée imposée entre la prise d'information et sa restitution peut rendre inopérante les stratégies précédemment mises en place. Par exemple, on peut rendre la collection de coquetiers disponibles aux élèves uniquement en arrivant le matin à l'école, et ne rendre la collection d'œufs disponible qu'en fin de journée. Les élèves ne pouvant décemment pas garder leurs doigts levés toute la journée, cela rend caduque la deuxième procédure évoquée ci-dessus. Par contre, la troisième ayant recours à l'usage de la comptine numérique résiste si l'élève est en mesure d'utiliser le dernier mot prononcé comme un résumé de toute la liste et s'en souvenir. Là encore, la durée imposée entre la disponibilité des collections peut être ajustée : du jour au lendemain, éloignement d'une semaine dans le temps...

Il ne reste qu'un pas pour forcer l'évolution des élèves vers une stratégie qui nécessiterait le recours à une procédure écrite. D'une part, rendre le recours à une collection intermédiaire d'objets du type "jetons" inefficace, soit de manière directe en interdisant le recours à des objets par l'ajout d'une nouvelle consigne, soit en fournissant ces objets en quantité insuffisante.

L'écrit devient alors une ressource nécessaire et efficace pour conserver en mémoire la quantité de coquetiers. Tous ne l'utilisent pas d'emblée efficacement, restant en outre focalisés sur la nature des objets de la collection plutôt que sur la quantité qui n'est toujours pas perçue comme une information importante. Une étape importante dans la symbolisation de la quantité est franchie lorsque l'élève est capable de produire la bonne quantité de signe arbitraire, indépendamment ou non de la nature des objets en jeu.



L'écriture standardisée par les usages sociaux n'est pas la seule réponse possible dans la situation, elle n'est qu'une réponse possible parmi d'autres.

Situation de formulation à autrui

Jusqu'ici, les stratégies mises en place par un élève ne devaient être compréhensibles que par lui-même. Rien ne garantissait qu'une personne extérieure puisse les comprendre. La situation suivante a pour but de remédier à cela et de pousser l'enfant à construire une gamme variée de techniques pour communiquer :

> "*Envisageons à présent une situation qui oblige à communiquer à autrui : un élève dispose de l'information sur les coquetiers, tandis qu'un autre élève, un "marchand", peut donner des œufs mais n'a aucune information directe sur les coquetiers.*" (Margolinas et Wozniak 2012, p.32)

L'enjeu est ici que les deux élèves parviennent à communiquer afin que l'élève "marchand" puisse donner à son camarade la bonne quantité d'œufs.

Pour y parvenir, l'enseignant peut compter sur plusieurs variables didactiques. La première jouant un rôle dans la communication porte sur la nature de la communication elle-même, qui peut favoriser ou empêcher certaines procédures que les élèves ont rencontrées jusque-là dans des situations d'auto-formulation. Elle peut être orale, gestuelle ou écrite. La seconde consiste à jouer sur le fait que, des deux élèves en jeu, celui qui détient l'information sache à qui il va la transmettre. En effet, si celui qui doit transmettre l'information connaît par avance l'élève à qui il doit la communiquer, des implicites peuvent fonctionner entre les deux, ou ils peuvent se mettre d'accord à l'avance sur une façon de communiquer l'information sur la quantité d'œufs. Dans le cas contraire, l'élève qui doit fournir la quantité d'œufs désirée doit nécessairement avoir dans son répertoire des techniques variées : écriture symbolique du nombre ou schématisations diverses de la quantité par un ensemble de traits alignés ou éparses, ou encore des organisations spatiales conventionnelles comme des points sur les faces d'un dé, par exemple.

Un intérêt de cette situation est qu'elle permet, en multipliant les situations et les partenaires, de découvrir de nouvelles stratégies et d'en tester l'efficacité directement *in situ*.

Pour encourager les élèves à établir un code commun, on transforme la situation initiale en séparant les élèves en deux équipes, en leur laissant le temps d'établir un code commun, en choisissant deux "champions" dans chaque équipe et en reprenant la situation initiale en imposant toutefois une communication écrite.
L'enjeu est ici d'être la première équipe à construire une collection d'œufs équipotente à celle des coquetiers.

> "*La situation du partage d'informations, qui sont ici des procédures, est une situation de formulation dans chacune des équipes. Elle vise à la constitution et au partage d'un code commun ainsi qu'à la stabilisation des procédures de communication de la quantité. Les écritures les plus rapides à produire et les plus fiables à lire sont les plus efficaces : c'est alors, que le schéma de la quantité,s'il n'est pas organisé, apparaîtra moins efficace qu'un schéma organisé en groupes réguliers (cinq par exemple) ou une écriture symbolique.*" (Margolinas et Wozniak 2012, p. 34)

Le cardinal

Après toutes ces situations, l'élève a appris à construire une collection équipotente à une autre et à déterminer si deux collections sont équipotentes. Il reste à lui faire comprendre la notion de quantité et qu'elle n'est en fait qu'une caractéristique d'une collection donnée, peu importe les éléments qui la composent. On construit une nouvelle situation pour permettre la définition du cardinal.

La situation et ses enjeux

> "*Supposons que l'on dispose de plusieurs collections de différentes quantités : petits sachets transparents d'œufs, de voitures, de bâtonnets, de jetons, etc. Les sachets sont transparents pour permettre à chacun de s'assurer de la quantité des collections et contiennent des objets différents d'un sachet à l'autre, pour rendre tangible le fait que la quantité est une propriété de la collection, donc indépendante de la nature des objets qui la constituent. [...] Supposons également que l'on dispose de boîtes opaques, comme des boîtes à chaussures, disposant d'une ouverture assez grande pour laisser passer un sachet mais trop petite pour voir commodément tout son contenu. Il s'agit de ranger les sachets de manière à ce que :*
>
> - *dans un boîte donnée ne se trouvent que des sachets de même quantité ;*
> - *chaque sachet est rangé dans une boîte ;*
> - *chaque boîte contient des sachets d'une quantité différente de celle des autres boîtes.*
>
> " (Margolinas et Wozniak 2012, pp. 37-38)

Le milieu de la situation et ses obstacles

Les situations travaillées *a priori* permettent aux enfants de déterminer si les collections contenues dans deux sachets sont équipotentes ou pas.
Un autre élément allié concerne les principales variables didactiques de cette situation, qui sont la possibilité ou non d'ouvrir les boîtes avant de ranger un sachet, et la cardinalité des collections contenues dans les sachets. Enfin, le caractère fondamental de cette situation réside dans le fait que, par le procédé de mise en correspondance et grâce à la possibilité d'ouvrir les boîtes, l'enfant peut vérifier directement en comparant deux sachets si les collections impliquées ont même quantité ou pas.

Situations d'action

La première situation d'action est celle décrite *supra*. Le cheminement de l'élève pour trier le sachet est alors le suivant : si un sachet se trouve déjà dans une boîte (A), il faut ouvrir cette boîte pour comparer les cardinalités du sachet de la boîte avec celui qu'on cherche à ranger. Si elles sont les mêmes, on peut ranger le nouveau sachet dans la boîte (A). Sinon, il faut le ranger dans une nouvelle boîte (B). Pour ranger le troisième sachet, il faut d'abord ouvrir la boîte (A), comparer les cardinalités et décider si on peut y ranger le nouveau sachet. Si les cardinalités sont différentes, on passe à la comparaison avec la boîte (B) et on répète cette procédure jusqu'à avoir rangé tous les sachets.

Remarquons que cette première situation peut faire apparaître la propriété de transitivité de la relation "avoir même quantité" : si on avait rangé le deuxième sachet dans la boîte (A) et que le troisième sachet avait la même cardinalité que l'un des sachets de cette boîte, il est superflu de comparer les quantités avec le second sachet de la boîte. Le rôle du professeur est ici crucial pour les élèves qui ne réaliseraient pas cette propriété. Il pourrait, par exemple, l'aider par des questions telles que "Tu es sûr ? Pourtant, tu n'as pas vérifié avec le sachet des jetons..."

à chaque fois que l'élève l'applique.

Si cette situation n'évolue pas, il ne sera pas possible de définir le cardinal d'une collection. On modifie alors la consigne en empêchant d'ouvrir les boîtes afin de comparer les quantités des sachets présents à l'intérieur.
L'élève est alors obligé de trouver un moyen de mémoriser la quantité des collections présentes dans les sachets présents dans une boîte donnée. Pour cela, il peut par exemple dessiner autant de traits qu'il y a d'objets présents dans un sachet de la boîte ou encore user de dessins d'une constellation (dé, domino, carte).

À l'issue de cette situation, il est possible de définir le cardinal comme *"un représentant de la quantité de toutes les collections contenues dans la même boîte. Le nom que l'on convient socialement de donner à une telle boîte est ce mot-nombre"* (Margolinas et Wozniak 2012, p. 40).

2.1.2 De la grandeur aux nombres

La seconde étape cherche à faire émerger le concept de grandeur définie par Brousseau comme *"un type de variables mathématiques, physiques, biologiques, psychologiques sociologiques, économiques, etc. dites de même espèce, c'est-à-dire comparables entre elles"* (Brousseau cité par Margolinas et Wozniak 2012, p. 44).

Ce chapitre vise à démontrer que la construction du nombre entier à partir de la quantité suit un processus analogue à celui permettant d'appréhender le nombre en tant que mesure d'une grandeur.
Concernant le concept de grandeur, il s'obtient par la résolution de problèmes de comparaison. On cherche à déterminer si deux objets ont "même grandeur", il faut donc les comparer et conclure à une égalité. Dans le cas de comparaisons directes, le procédé expérimental pour y parvenir dans le cas de la longueur est la juxtaposition. Ensuite, les comparaisons deviennent indirectes et font intervenir des objets intermédiaires en mesure de garder en mémoire la grandeur en question. Cet "objet marqué" permet d'établir de façon biunivoque une marque à une longueur. La nécessité du recours aux nombres ne provient que des situations impliquant une formulation à distance, dans l'espace, le temps ou dans le cadre d'une communication avec autrui. Selon Brousseau, la notion de grandeur repose sur l'existence d'un ordre total garantissant l'unicité de la chaîne produite. Cette unicité rend alors possible le transfert de la relation entre les objets vers une relation entre les nombres : au lieu d'ordonner plusieurs collections d'objets par correspondance terme à terme, méthode coûteuse et donc sujette aux erreurs, il suffit de comparer leur cardinaux en utilisant par exemple la comptine numérique.

Émergence de la grandeur à travers des situations de comparaison

Les situations dans lesquelles l'enfant découvre la grandeur sont des situations de comparaison. Il cherche, par exemple, à déterminer qui est l'élève le plus grand ou encore quel objet est le plus lourd.
En se basant sur la définition donnée par Brousseau et reprise ci-dessus, les auteurs reformulent cette définition comme *"une caractéristique d'un objet qui permet des comparaisons ordonnées entre objets"*(Brousseau cité par Margolinas et Wozniak 2012, p.44).

La situation et ses enjeux

Pour générer différentes situations d'apprentissage de la grandeur comme caractéristique d'un objet, on met en place la situation suivante : *reconnaître ou construire un objet de même longueur qu'un objet donné* (Margolinas et Wozniak 2012, p.46). Pour ce faire, on peut donner aux élèves un bâton servant de référence ainsi qu'un moule de ce bâton. Pour gagner, ils doivent trouver un autre bâton qui rentre dans le moule de telle sorte qu'il ne reste pas d'espace vide.

Comme dans le cas de la quantité, plusieurs variations de cette situation sont possibles mais toutes doivent avoir pour but de pousser l'enfant à trouver ou construire un objet de même longueur qu'un objet donné. Dans notre cas, on dévolue à l'élève de trouver un objet de telle sorte qu'en le plaçant dans un moule de l'objet voulu, on puisse conclure que les objets ont même longueur. Si l'objet choisi par l'élève rentre dans le moule et qu'il ne reste pas d'espace vide à l'intérieur, l'enfant a gagné. Dans le cas contraire, il a perdu. Toutefois, le moule permettant la validation de l'objet ne sera rendu disponible qu'au moment de la validation, afin de permettre la mise en place du procédé de juxtaposition.

Dans cette situation, la longueur peut être définie en acte de manière analogue à la quantité, cette fois grâce à la juxtaposition : la longueur de deux bâtons est identique si leurs extrémités se correspondent exactement. De plus, la notion de longueur peut être directement construite à partir de ces situations grâce aux caractéristiques qui lui sont associées, encore une fois d'abord implicites puis qui seront formulées, validées et enfin institutionnalisées.

Le milieu de la situation et ses obstacles

Une des difficultés liées à cette situation est que, pour conclure que deux objets ont la même longueur, il est d'abord nécessaire de les comparer puis de conclure à une égalité. Toutefois, que signifie "comparer" dans notre situation ? Brousseau fait la remarque suivante : *«n'allons pas trop vite et remarquons que l'enjeu de notre situation doit s'imposer au sujet de façon implicite car elle présente un défaut majeur : la compréhension de la consigne «trouver le plus "grand" objet »suppose chez le sujet la connaissance préalable de la grandeur en question... alors qu'on cherche à la lui faire définir ! »* (Brousseau cité par Margolinas et Wozniak 2012, p. 45).

Une seconde difficulté vient s'ajouter à la première dans le cas de la construction d'un objet de la même longueur qu'un objet donné. L'enfant peut avoir du mal en raison de maîtrise graphique à reproduire un segment sur une bande, par exemple.

Pour pallier à celles-ci et permettre à l'enfant de construire lui-même le procédé de juxtaposition, le professeur peut compter sur de nombreux éléments contenus dans le milieu ainsi que sur un travail géométrique sur la construction de représentations dessinées.
L'un d'eux est le choix des objets à comparer. En effet, les objets sont tridimensionnels, dès lors comment parler de *la* longueur d'un objet ? De ce fait, l'utilisation de bâtons, semblables à des segments, permet de définir plus facilement la longueur de cet objet car elle est plus "visible". Une autre variable didactique est la longueur des objets à comparer. Plus les différences de longueurs sont importantes et plus la comparaison visuelle est aisée. Remarquons que le cas des comparaisons de longueurs apporte une difficulté supplémentaire : les longueurs ont un caractère continu, contrairement à la quantité qui a un caractère discret. De ce fait, après juxtaposition, il pourrait rester "un tout petit bout". Si une telle situation arrive où les élèves sont en désaccord sur l'égalité de deux longueurs, il ne faut pas éviter cette discussion essentielle à l'éducation scientifique des enfants. Comme le disent les auteures : "*l'égalité de deux longueurs*

ne se constate pas expérimentalement, on peut seulement décider qu'elles sont suffisamment proches pour être considérées comme égales dans une situation donnée." (Margolinas et Wozniak 2012, p.48)

Ajoutons que, comme dans le cas de la quantité, tout le vocabulaire et toutes les actions utilisés font également partie du milieu. Il est également important de noter que, bien qu'on pourrait s'attendre à ce qu'un vocabulaire plus vague soit plus familier aux élèves (et donc plus pertinent à utiliser), ce n'est pas le cas. Ce qui serait gagné en rapidité serait perdu face à l'incompréhension des enfants face aux changements de sens de ces mots vagues. En effet, comment un bâton rouge et un autre blanc pourraient-ils être "*pareils*" si leur couleur diffère ? De plus, le professeur doit également vérifier la compréhension de la tâche par chacun des élèves et des conditions d'accomplissement de la tâche.

Tous ces éléments font du milieu un allié qui permet aux enfants de s'engager dans la tâche. Le caractère antagoniste est constitué par les conditions pour une juxtaposition réussie : faire correspondre l'une des extrémités des objets.

Situations d'action

Contrairement au premier chapitre sur la quantité où les auteures présentaient à la fois des stratégies possibles mais non gagnantes et des stratégies gagnantes, dans les situations qui suivront, seules les stratégies gagnantes seront exposées.

Une première situation est de trouver un bâton de même longueur qu'un bâton donné.
Dans ce cas, la stratégie gagnante consiste à juxtaposer les deux bâtons en faisant correspondre l'une de leurs extrémités. Si les autres extrémités sont également alignées, alors les deux bâtons sont de même longueur. Cette stratégie repose sur la notion d'*origine* : *"Toute opération sur des grandeurs suppose en effet une origine, ce qui se traduit du point de vue de l'action par des techniques"* (Margolinas et Wozniak 2012, p. 46). Dans notre cas, la technique est la juxtaposition des extrémités.

Une seconde situation est de fournir à l'enfant une bande rouge ainsi que plusieurs bandes blanches, des ciseaux ainsi que du matériel d'écriture, et de lui demander de construire une bande blanche de la même longueur que la bande rouge.
Encore une fois, c'est la juxtaposition "bout à bout" des bandes qui est la procédure gagnante dans cette situation.

Une troisième situation est de demander à l'enfant d'ordonner deux objets suivant leur longueur. Les techniques pour résoudre ce type de tâches est similaires à celles employées précédemment. En effet, comparer deux bâtons par juxtaposition permet deux conclusions possibles : soit les longueurs sont les mêmes, soit elles sont différentes. Dans ce deuxième cas, on observe que "il y a un bout qui dépasse" et on conclut que le bâton avec le bout qui dépasse est le plus long et, réciproquement, que l'autre bâton est le plus court. Cette réciprocité doit être construite par les élèves et cette construction sera d'autant plus simple que les relations "plus long que" et "moins long que" seront claires. Cette clarté est obtenue grâce à la répétition de situations de comparaison directe en choisissant "celui qui a un bout qui dépasse" ou "celui qui est dépassé".

Remarquons qu'on ne parle pas d'un objet "grand" ou "petit" puisque ces adjectifs sont relatifs : un objet est grand par rapport à un autre. Cependant, des livres destinés aux enfants tels que "Boucle d'or et les trois ours" utilisent ces adjectifs en perdant cette relativité : tout ce qui est petit appartient au bébé, ce qui est moyen à la maman et ce qui est grand au papa. Si ce conte peut servir d'introduction et de moyen de mémorisation au vocabulaire, il est important de ne pas en rester là et d'insister sur la relation d'ordre mathématique qui se cache derrière.

Maintenant que l'élève sait ordonner des baguettes deux à deux, on peut lui proposer une dernière situation d'action : ordonner six baguettes de manière qu'il puisse déterminer le plus rapidement possible l'ordre entre deux baguettes quelconques. "*Ordonner est une façon d'organiser la collection des baguettes, il faut donc qu'une telle organisation soit efficace dans l'action*" (Margolinas et Wozniak 2012 p. 52).

La stratégie gagnante est ici d'ordonner les baguettes dans l'ordre croissant, organisation que le professeur nommera du plus petit au plus grand, ou dans l'ordre décroissant, du plus grand au plus petit. Comment un élève peut-il mettre cette stratégie en place de lui-même ? Cette situation permet de mettre en évidence la transitivité des relations "est plus petit que" et "est plus grand que". En effet, comme l'élève sait comparer deux baguettes entre elles, il pourrait donc effectuer les quinze comparaisons entre les six baguettes deux à deux mais il s'agit d'un procédé inefficace. Toutes les comparaisons ne sont pas nécessaires puisque, si une baguette a est plus petite qu'une baguette b qui est elle même plus petite qu'une baguette c, alors la baguette a doit être plus petite que la baguette c. Une méthode efficace pour ordonner les baguettes est de les poser sur une table et de repérer celle qui "dépasse toutes les autres". Après avoir retiré cette baguette, on répète à nouveau cette recherche de la baguette la plus grande parmi celles qui restent. Ainsi, on détermine l'ordre décroissant des baguettes. De manière symétrique, on construit l'ordre croissant en recherchant la baguette "qui se fait dépasser par toutes les autres".

Notons que c'est notre bonne perception des longueurs qui permet d'utiliser cette stratégie et que si, on devait ordonner des objets selon leur masse, il ne serait plus possible d'utiliser un tel raccourci.

Situations de formulation

Comme dans le chapitre sur la quantité, on cherche à améliorer les techniques employées par les élèves plus loin que la procédure de juxtaposition en comparaison directe. Pour ce faire, encore une fois comme pour la quantité, on peut utiliser l'éloignement dans l'espace, le temps et la communication avec autrui. L'effet produit est la création d'un objet intermédiaire (un gabarit) afin de transporter l'information et de réemployer la juxtaposition en comparaison directe ou la création d'une mesure ou encore d'une règle.

Dans le cas d'une situation de formulation avec éloignement dans l'espace, pour rester proche de la situation fondamentale initiale, on pourrait dessiner deux segments représentant la longueur de deux objets et les accrocher à deux endroits de la pièce, de sorte qu'on ne puisse pas les voir simultanément. La consigne serait alors *"Ces deux segments, ces deux traits, ont-ils la même longueur ?"* (Margolinas et Wozniak 2012, p. 54). Avec cette contrainte, l'élève a deux options possibles. Si les deux longueurs sont suffisamment différentes, la perception visuelle peut lui permettre de conclure que les deux traits ont des longueurs différentes. Dans le cas contraire, il doit trouver un moyen de transporter l'information de la première longueur d'un segment pour la comparer avec la longueur du second trait. Il peut, par exemple, construire une bande de la longueur du premier trait puis se déplacer avec cette bande afin de faire la comparaison.

Une différence avec la situation d'action dans laquelle l'élève devait construire une bande d'une longueur donnée est que le but n'est plus ici de construire un tel objet pour respecter la consigne, mais bien de s'en servir afin de répondre à la question. Ce gabarit devient un savoir permettant de résoudre la tâche.

Une dernière remarque par rapport à cette situation est que l'utilisation d'un gabarit est une technique utilisée également par les adultes, que ce soit une personne utilisant une ficelle pour déterminer si une table passera par une porte ou un menuisier utilisant une fausse équerre afin de reporter un angle.

Pour la seconde situation de formulation, de la même manière qu'après avoir su comparer deux bâtons, on a demandé à l'élève d'en comparer plusieurs, on lui demande de comparer plusieurs bâtons disposés à différents endroits et non déplaçables. La même stratégie que pour la situation précédente est envisageable mais, au plus le nombre de bâtons augmente, et au plus elle devient fastidieuse. Pour guider les élèves vers une autre solution, on peut leur mettre à disposition du matériel d'écriture ainsi qu'au moins une bande plus longue que tous les bâtons. Ils pourront alors marquer d'un trait la longueur de chaque bâton à partir de la même origine sur la bande. Cette bande devient alors un objet marqué qui permet d'ordonner les objets suivant leur longueur.

Cette nouvelle technique constitue une première entrée dans l'écrit pour ce chapitre. Elle est caractérisée par un code, par exemple un code couleur, pour associer à une marque un bâton. De plus, la même origine doit être conservée sous peine de conduire à des erreurs. Pour éviter cette difficulté, on peut marquer l'origine d'un signe arbitraire. Une dernière difficulté est cette fois liée à l'objet marqué en lui-même. Une bande de papier, à force d'être utilisée, peut voir ses bords s'abîmer conduisant à une utilisation de plus en plus difficile. Pour y remédier sans choisir un matériau plus résistant, on peut marquer l'origine non pas sur un bord mais en traçant un trait sur la bande, de la même manière que les règles en plastique ont leur origine décalée par rapport au bord de la règle.
Remarquons que cette situation conduit à un premier contact avec la notion d'origine.

Concernant les situations de formulation avec éloignement dans le temps, où les objets à comparer (qu'il y en ait deux ou plus) ne seraient pas disponibles simultanément, la stratégie gagnante est exactement la même que pour les situations de formulation avec éloignement dans l'espace.

Pour faire évoluer une nouvelle fois les connaissances des élèves à propos de la longueur, on considère une situation de formulation à autrui dans laquelle un élève (A) dispose d'un bâton et l'autre (B) d'un ensemble de bâtons dont l'un de même longueur que celui de A. Ils doivent trouver un moyen de communiquer afin que B trouve le bâton de même longueur que celui de A. Sans imposer de contrainte supplémentaire, A peut construire un gabarit comme précédemment et le transmettre à B afin qu'il puisse faire les comparaisons avec les bâtons à sa disposition et trouve le bâton adéquat. Cette situation reste semblable aux situations d'éloignement dans le temps et/ou l'espace. Toutefois, si on impose aux élèves de ne communiquer qu'oralement, et en ayant le dos tourné pour éviter les désignations directes par gestes, ou si on empêche la transmission de la bande, alors la transmission du gabarit devient inutile. On peut cependant mettre à disposition de B certains objets et en informer A. Dès lors, A peut donner à B une approximation de la longueur de son bâton en mettant bout à bout ces objets. Par exemple, il pourrait dire "Mon bâton a la même longueur que six cubes à peu près."

Par cette action d'associer à une grandeur un nombre, l'élève crée en fait une mesure. Toutefois, le caractère continu de la grandeur montre rapidement l'inefficacité des nombres entiers dans la transmission des mesures, nécessitant alors l'utilisation de sous-unités si on veut se limiter à utiliser des nombres entiers. Ainsi, une mesure de bâton possible serait "six gros cubes et trois petits cubes". Par l'utilisation de la longueur d'un côté d'un cube comme unité de mesure, l'élève utilise en fait un étalon.
De là, il ne reste qu'un pas vers la création d'une règle. Si on suppose que le nombre de cubes servant d'unités disponibles pour mesurer le bâton est insuffisant et que l'élève dispose de matériel d'écriture ainsi que d'une bande, il n'aura d'autre choix que de reporter sur la bande la longueur des cubes et de marquer le nombre correspondant à ces reports. Cette stratégie n'est possible que si les enfants ont bien compris l'utilisation d'objets intermédiaires pour créer une mesure car, comme pointe Vergnaud (1981, pp. 95-96), *"on ne comprendrait pas cette fonction des instruments de mesure si on ne voyait pas qu'elle s'appuie fondamentalement sur la fonction d'objet intermédiaire"*.

Notons que la création d'une règle permet également de donner un sens au zéro. Il s'agit de l'origine de la règle, l'endroit que l'on doit aligner avec l'une des extrémités de l'objet à mesurer. Comme dans le cas de la situation de formulation avec éloignement dans l'espace et/ou le temps avec la création d'un objet pour marquer plusieurs mesures d'objets, cette origine ne doit pas nécessairement coïncider avec le bord de la règle mais peut en être décalée.

2.1.3 De la position au nombre entier

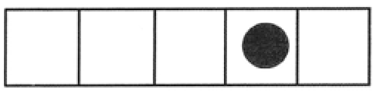
Dans ce chapitre, l'ordinal apparaît comme outil pour garder en mémoire la position et on montre qu'il se construit de la même manière que le cardinal en tant mémoire de la quantité. Le procédé expérimental mis en place est la comparaison de collections ordonnées. Une fois la notion d'ordinalité introduite, de nouvelles situations sont introduites : le tri de pistes selon la position de d'un élément, qui repose sur la transitivité de la relation "même position que".

Émergence de l'ordinal à travers des situations de comparaisons de collections ordonnées

À l'école, les enfants doivent couramment se mettre en rang. Dans cette situation, que signifie "occuper la même position" pour deux enfants dans des files distinctes ? Pour répondre à cette question, on fait se tenir la main les premiers enfants de chaque file, puis les seconds et ainsi de suite. Deux élèves occupent alors la même position s'ils se tiennent la main. On reconnaît le principe de correspondance terme à terme découvert dans l'apprentissage de la quantité mais cette correspondance se déroule dans un certain ordre.

La situation et ses enjeux

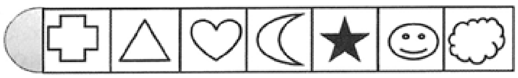
Pour la situation fondamentale, on considère une piste (une ligne structurée par des cases délimitant une position) et une gommette ronde. La gommette est placée dans l'une des cases de la piste modèle et on demande à l'élève de *"coller la gommette sur la piste dans la même position que sur le modèle" (Margolinas et Wozniak 2012, p. 63).*



On peut modifier cette situation suivant plusieurs paramètres mais toutes ces variations visent à ce que l'élève mette en correspondance sa piste avec la piste modèle. On lui dévolue le problème du repérage. Après que l'élève ait placé sa gommette, on juxtapose les deux pistes en faisant coïncider l'une de leurs extrémités. La tâche est accomplie si les cases comportant les gommettes se correspondent terme à terme.

Le milieu de la situation et ses obstacles

Pour un enfant, la position d'un objet est d'abord définie par rapport à son espace propre. L'objet peut être devant lui et atteignable en tendant le bras, ou encore derrière lui et donc invisible. De plus, cet espace peut être ordonné par la distance de l'enfant à l'objet. Toutefois, la distance ne peut caractériser le position d'un objet. Celle-ci se donne dans un système de trois axes. On ne peut évidemment pas aborder un tel repère directement avec des élèves de maternelle, sa construction doit se faire de manière progressive, en commençant avec un espace à une seule dimension, comme une ligne par exemple.
Si on considère l'image ci-dessous, le triangle vient avant le cœur pour un adulte car il associe un ordre (de gauche à droite, l'ordre de lecture) à l'image de par sa raison graphique. Cet ordre est encore à acquérir pour les enfants en liant le temps et l'espace grâce à la notion de déplacement.



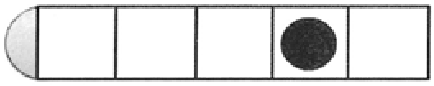
Pour acquérir le procédé de comparaisons de collections ordonnées, l'enseignant peut modifier plusieurs éléments du milieu.
Deux de ces éléments sont l'emplacement de la gommette et le nombre de cases sur la piste. En effet, certaines positions telles que la première case sont facilement reconnaissables visuellement. Dans le même ordre d'idée, une piste comportant un nombre de quatre cases ou moins permet une reconnaissance visuelle.
Comme précédemment, toutes les interactions verbales et non-verbales ont également une influence, et il est du devoir de l'enseignant de s'assurer de la compréhension de la tâche par tous les élèves.

De plus, pour assurer le caractère antagoniste du milieu et permettre l'engagement des élèves dans la tâche, on crée une anticipation en empêchant la proximité de la piste de l'élève et de la piste modèle avant la vérification.

Situation d'action

La première situation d'action est décrite *supra*, où on fournit à l'élève une piste et une gommette, et où il doit coller sa gommette dans la même position que sur la piste modèle.
Plusieurs stratégies sont possibles suivant le nombre de cases de la piste. En effet, si la piste comporte quatre cases, retenir si la gommette se trouve sur une case du bord ou du milieu suffit à résoudre la tâche. Imaginons que la gommette se trouve sur la troisième case. L'élève retient alors l'information *milieu*. Une fois devant sa piste, il a alors deux possibilités : la deuxième case ou la troisième. Même s'il se trompait, il gagnerait puisqu'en retournant sa piste, la deuxième case devient la troisième.
En ajoutant une case, cette stratégie est mise en échec. L'enfant doit alors déterminer trois zones : le bord, la case du milieu et les deux autres cases. De manière générale, plus le nombre de cases augmente, et plus le nombre de configurations possibles augmente également.

Pour la deuxième situation, on utilise une piste orientée (et donc asymétrique) afin d'empêcher l'élève de retourner sa piste et d'augmenter ainsi ses chances de gagner.



De plus, pour éviter la reconnaissance visuelle des configurations telles que "la dernière case", la piste de l'élève ne comportera plus nécessairement le même nombre de cases que la piste modèle.

Si l'enfant ne dispose pas d'une collection témoin lui permettant d'établir une correspondance terme à terme (par exemple, des perles enfilées sur un fil ou ses doigts si la position est inférieure à dix), la seule stratégie efficace devient alors l'utilisation de la comptine numérique afin de nommer chaque case de la piste par un mot-nombre.

Situations de formulation

Avec les stratégies évoquées précédemment, l'élève peut réajuster l'emplacement s'il perçoit que sa gommette est mal positionnée. Il est nécessaire d'empêcher cette perception afin de permettre la conceptualisation. Pour ce faire, on peut fixer à la fois la piste modèle et la piste des élèves de sorte que la perception continue ne soit plus possible. Il s'agit là d'une étape intermédiaire avant les situations de formulation. L'élève a encore la possibilité de compter sur sa perception de façon limitée en multipliant les allers- retours entre sa piste et la piste modèle. Toutefois, cette stratégie sera encore mise en échec si le nombre de cases devient trop important ou si le nombre de trajets est limité. À ce moment-là, la numérotation des cases devient alors indispensable.

Comme pour l'apprentissage de la quantité, le passage à l'écrit ne devient nécessaire que lors d'une situation de formulation avec éloignement dans le temps. On pourrait imaginer laisser à l'élève une piste vierge ainsi que du matériel pour écrire. Il pourrait alors marquer l'emplacement de sa gommette afin de pouvoir la placer plus tard. Cette situation est cependant trop proche de la situation d'action ; elle ne permet dès lors pas encore l'apprentissage d'une nouvelle connaissance. Elle sert davantage à permettre à l'élève de s'engager dans la tâche avant de lui dévoluer le problème par la suite.

Le but de la situation de formulation avec éloignement dans le temps est que l'enfant schématise la situation et ses caractéristiques. On lui fournit donc non pas une piste mais une feuille blanche. Au début, il ne représentera que l'élément qui l'intéresse, à savoir la gommette, ou des cases dont le nombre et la configuration ne s'accordent pas avec la piste modèle. À force d'échecs, de la réussite de certains élèves et de l'observation de leurs représentations, l'élève apprendra de ses erreurs afin d'évoluer progressivement vers la représentation des éléments pertinents dans la situation.

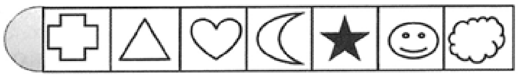
Si on veut engager une évolution des connaissances relatives à la position et en particulier au vocabulaire qui y est relié, il est nécessaire de concevoir une situation de formulation à autrui. On confie à un élève la piste modèle, et on lui demande de communiquer avec un autre enfant muni d'une piste vierge ainsi que d'une gommette, pour que celui-ci trouve où positionner sa gommette.

Le choix du type de communication a, comme auparavant, une influence sur les stratégies qui seront employées. Dans le cas d'une communication écrite, bien que la même technique que dans la situation de formulation avec éloignement dans le temps puisse fonctionner, elle présente la difficulté d'être compréhensible par les deux parties, alors que la formulation à soi-même peut s'adapter de quelques imprécisions. Concernant la communication orale, choix qui nous intéresse ici puisque le but de cette situation est de développer le vocabulaire des enfants, elle est l'occasion de pousser les élèves à faire usage d'un lexique spécifique. La position de la piste a ici une grande influence puisque l'enfant pourra employer des mots tels que "bas" et "haut" si elle est placée verticalement.

Une dernière remarque par rapport à cette situation est que, bien que le professeur ait pu utiliser des termes tels "extrémité", "milieu" ou encore "centre" dans les situations d'action, il n'est pas sûr que l'élève en fasse lui-même l'usage dans cette situation.

L'ordinal

Après ces situations, l'enfant a appris à déterminer la position d'un objet sur une piste et à communiquer cette position à autrui. Il lui reste à comprendre la notion d'ordinalité si la piste ne comporte pas un unique élément. Pour cela, on lui présente une nouvelle situation : on lui fournit plusieurs pistes où chaque case présente une image dont une est une étoile.



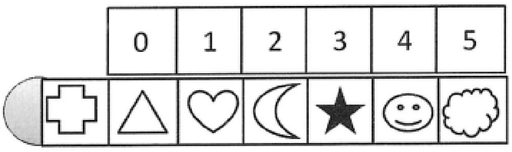
Avec les situations précédentes, il a appris à comparer deux pistes et il est donc capable de déterminer si les deux étoiles sont à la même position. On peut alors lui proposer de ranger ensemble dans une boîte opaque toutes les pistes dont la position de l'étoile est identique. Cette situation est identique à celle ayant pour objectif l'apprentissage de la quantité et dans laquelle on demandait à l'enfant de trier ensemble des sachets dont les collections avaient la même quantité. Dans le cas qui nous occupe, plusieurs solutions sont possibles pour mémoriser la position des étoiles d'une boîte donnée : coller sur celle-ci un représentant des pistes qui s'y trouvent (par exemple, une piste avec le dessin de l'étoile à la bonne position), ou encore écrire le nombre correspondant à position de l'étoile.

Dans toutes les situations précédentes, le choix de l'utilisation d'une piste n'était pas anodin. Les usages sociaux l'associent au déplacement, et la situation qui va suivre utilise ce déplacement pour associer cette fois un nombre à une position relative. Jusqu'à présent, on pouvait associer le numéro d'une case à sa position par rapport à l'origine. On va dorénavant associer un nombre à une position relative (à une autre case).
En démarrant de la case de départ et en avançant de deux, on se retrouve sur la case du triangle. Si on avance à nouveau de deux, on tombe alors sur la lune. Ce "2" représente un déplacement et est relatif à une position initiale et non pas le numéro d'une case de la piste.

Une difficulté liée à cette situation est que l'enfant, en voulant compter les cases durant son déplacement, énonce "un" pour la case où il se trouve déjà. Cette erreur vient du fait qu'il désire dénommer cette case de la même manière qu'il dénommera les cases qui constitueront son déplacement. Il s'agit là d'une occasion d'aborder la notion d'origine afin de donner un sens au zéro.

Afin de faire évoluer cette situation fondamentale, on peut considérer la situation d'action où on demande à l'élève d'anticiper la case sur laquelle il se trouvera à la fin de son déplacement : *"Mon pion est sur la case triangle et il doit avancer de deux cases. Sur quelle case va-t-il se trouver au final ?* (Margolinas et Wozniak 2012, p. 72)

L'une des variables didactiques de cette situation est que l'on peut laisser ou pas à l'élève une bande numérique démarrant à zéro pour l'aider.



Que l'on utilise la suite orale des nombres ou la règle, l'enjeu est d'anticiper que le pion, partant de la case triangle, doit arriver sur la case lune en se déplaçant de deux, ou sur la case nuage en se déplaçant de cinq. (Margolinas et Wozniak 2012, p.73)

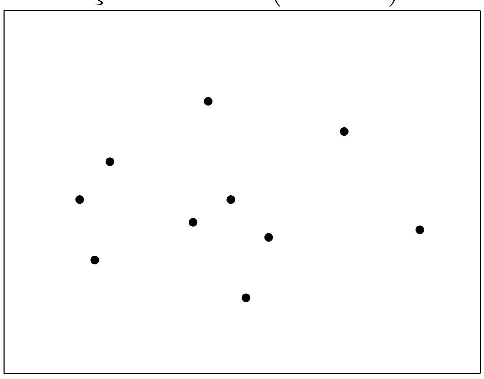
"*À la fin de l'école maternelle ou bien au début de l'école élémentaire, en utilisant non plus une piste figurative mais une bande numérique, il est possible d'anticiper qu'en partant de la case 2 et en avançant de 3, on arrivera sur la case 5.*" (Margolinas et Wozniak 2012, p.73)

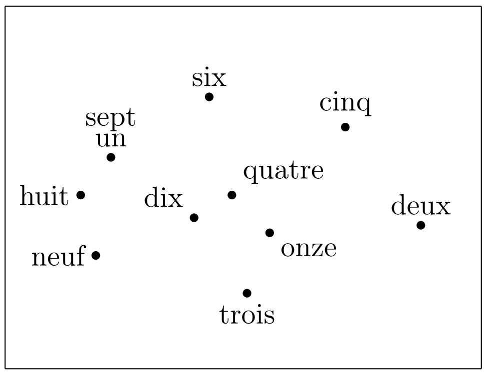
2.1.4 Enumération : des connaissances qui interviennent dans le dénombrement

Dénombrer nécessite de savoir énumérer, ce qui pour, les auteures, consiste à "*traiter chaque élément d'une collection une fois et une seule, ce qui revient à produire un ordre total permettant d'identifier chaque élément une fois et une seule*" (Margolinas et Wozniak 2012, p. 80). Toutefois, bien que la didactique des mathématiques reconnaisse en l'énumération un savoir à enseigner, l'école n'en fait pas de même. De ce fait, les techniques d'énumération sont parfois inconnues aux élèves, et ce manque peut les conduire à des erreurs lors de certaines tâches.

Émergence de l'énumération à travers des situations de tri et de dénombrement

Les connaissances d'énumération interviennent, parfois de manière implicite, dans les tâches de dénombrement, de tri et d'organisation d'une collection.
Par exemple, si on demande à un élève de compter les points ci-dessous (à gauche), il pourrait le faire de la façon suivante (à droite).





On remarque ici que l'enfant compte deux fois un même élément, ce qui le conduit à commettre une erreur dans le dénombrement des points. Il n'a pas réussi à distinguer les points déjà comptés des autres.

Un autre exemple d'exercice où la non connaissance de techniques d'énumération a conduit des enfants à une erreur est la suivante :
Lors d'une expérience réalisée par Margolinas, Wozniak, Canivenc, De Redon et Rivière (2007) (citée par Margolinas et Wozniak 2012), les élèves ont été répartis en deux équipes. On leur a demandé de ramasser le plus de ballons et de les placer dans le bidon de leur équipe. Pour déterminer l'équipe gagnante, un élève a été désigné pour compter les ballons devant la classe.

> "*Il sort un ballon du bidon, énonce "un", garde le ballon dans ses bras ; il prend un autre ballon, dit "deux", il a alors deux ballons dans ses bras ; au moment de saisir un nouveau ballon dans le bidon, un des ballons qu'il avait dans les bras tombe dans le bidon. L'élève continue imperturbablement, énonce "trois" et s'apprête à prendre un nouveau ballon sans qu'aucun élève ne proteste (même dans l'équipe adverse) quand le professeur l'arrête : "ça ne va pas".*" (Margolinas et Wozniak 2012).

Cette fois, l'enfant n'a pas réussi à retirer correctement les éléments qu'il a déjà comptés afin de les éloigner de ceux restant à dénombrer.

Les situations et leurs enjeux

Les auteures distinguent deux types de situations selon le type d'objets à traiter.
Dans le cas d'objets déplaçables, elles considèrent des situations de tri et, *a contrario*, dans le cas de ce qu'elles appellent des configurations non modifiables, elles les abordent via des situations de dénombrement.
Ces deux types de tâches sont souvent travaillées avec les enfants à l'école. On leur demande par exemple de trier des jetons selon leur couleur ou leur forme.

Pour la première situation, on donne aux élèves des objets et on leur demande de les trier suivant un certain critère.
Le choix des objets et du critère de tri permettent de nombreuses déclinaisons de cette situation, l'enjeu étant que l'élève construise deux espaces distincts, l'un contenant les objets respectant le critère et l'autre le reste des objets.

La deuxième situation requiert des élèves de dénombrer des objets dans des configurations non modifiables.
On dévolue ici à l'élève de trouver une partition des objets afin de pouvoir les dénombrer.

Le milieu des situations et leurs obstacles

Dans la première situation, le critère de tri peut poser des difficultés à l'enfant. Il peut être visible directement ou n'être visible qu'après manipulation de l'objet, par exemple. Dans ce dernier cas de figure, l'enfant pourrait éprouver plus de difficultés. Par exemple, il pourrait reposer, parmi les objets non traités, un objet déjà traité mais ne correspondant pas au critère.

Pour faciliter la dévolution de la construction des différents espaces durant le tri, le professeur peut compter sur d'autres éléments du milieu. La nature des objets, leur nombre ainsi que la place disponible pour effectuer le tri sont certains de ces éléments. Pour des objets qui roulent, qui sont trop petits ou trop grands, l'utilisation de contenants pourrait être nécessaire afin de toujours pouvoir distinguer les différents espaces de tri. L'utilisation d'un moyen tel qu'un tapis, pour distinguer les différents espaces, peut également faciliter le travail de l'élève. Concernant le nombre d'objets, s'ils sont nombreux, l'enfant sera peut-être forcé de les manipuler afin de vérifier le critère, même s'il est directement visible. En outre, toutes les interactions entre élèves et/ou avec le professeur font également partie du milieu. Pour reprendre la difficulté citée précédemment dans le cas du critère non visible directement, le professeur pourrait interroger l'élève sur la raison qui le pousse à replacer un objet déjà examiné parmi d'autres, non analysés, et lui faire réaliser qu'il risque d'oublier les éléments qui ont déjà été reconnus comme ne répondant pas au critère de ceux pour lesquels il n'a pas encore la réponse.

Concernant la seconde situation, l'élève pourrait éprouver des difficultés à cause du caractère non déplaçable des objets en jeu. Afin de s'assurer de son engagement dans la tâche et de la dévolution de la création d'une partition pour dénombrer les objets en jeu, l'enseignant peut miser sur les éléments suivants. Tout d'abord, le nombre d'objets peut permettre une reconnaissance visuelle directe s'ils sont peu nombreux.

La similarité de cette situation par rapport à celle du chapitre 1 est également un élément favorable à l'engagement de l'élève. En effet, on peut imaginer donner à l'élève une boîte d' œufs, placer certains objets représentant des œufs à l'intérieur sans lui donner le droit de les déplacer, et lui demander d'aller chercher juste assez d'œufs que pour pouvoir compléter la boîte.

Ce cas particulier met en lumière un autre élément pouvant faciliter ou pas le travail de l'élève : l'organisation spatiale ou graphique des objets. La boîte d'œufs permet de structurer le dénombrement car l'élève peut partitionner la boîte suivant les lignes ou les colonnes. Dans l'exemple des points à dénombrer, une telle structure n'était pas visible, ce qui a compliqué le dénombrement. Cet élément particulier rend le milieu antagoniste puisque c'est la non visibilité d'une partition "claire" (au sens où l'organisation des objets dirige vers une telle partition) qui va contraindre l'élève à devoir s'assurer qu'il a bien inclus chacun des éléments dans exactement un sous-ensemble de la partition.

Situations d'action pour le tri

Pour la première situation d'action, on demande à l'élève de trier les jetons bleus parmi un ensemble d'une vingtaine de jetons colorés. La stratégie gagnante consiste alors à prendre progressivement les jetons bleus visibles afin de les écarter du reste des jetons, puis d'étaler le reste des jetons afin de vérifier s'il reste des jetons bleus. Dans cette situation, l'élève crée un espace dédié aux éléments respectant le critère (les jetons bleus) et un autre, contenant les objets non traités, et qui devient progressivement l'espace des objets ne correspondant pas au critère.

Afin de pousser l'élève à créer trois espaces distincts (l'un pour les objets traités correspondant au critère, un autre pour les objets traités n'y répondant pas et le dernier pour les objets non traités), on fait évoluer le critère de tri. Pour ce faire, on va donner à l'enfant des jetons unicolores mais dont certains possèdent une gommette sur l'une de leur face, rendant ainsi le critère de tri non directement visible.

Au départ, l'élève va appliquer la même stratégie que précédemment et écarter les jetons dont la gommette est visible. Ce qui va la mettre en échec est le réflexe de l'élève de prendre un jeton pour vérifier s'il a une gommette puis de le reposer parmi les autres s'il n'en a pas. Afin de réussir la tâche qui lui est demandée, il doit créer un troisième espace dédié aux jetons qu'il a vérifiés et qui ne présentent pas de gommette.

Les situations précédentes travaillaient les techniques d'énumération mais ne faisaient pas uniquement intervenir les connaissances relatives à l'énumération. Une situation dans laquelle seules celles-ci sont en jeu est la suivante : on confie à l'élève une trentaine de bâtonnets et une vingtaine de boîtes identiques et fermées, disposant d'un petit trou sur le côté. On lui demande de placer exactement un bâtonnet dans chacune des boîtes. La stratégie gagnante consiste ici à séparer les boîtes dans lesquelles il a déjà placé un bâtonnet des autres, par exemple en les empilant.

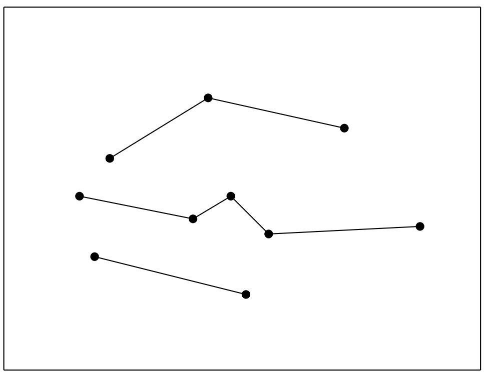
Situations d'action pour le dénombrement

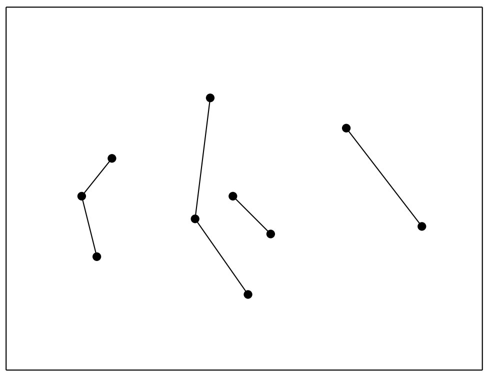
Pour la première situation, on confie à l'enfant une boîte d'une vingtaine d'œufs où quelques emplacements ont été remplis par des objets représentant des œufs qu'il n'a pas le droit de bouger. On lui demande d'aller chercher juste assez d' œufs pour remplir la boîte. La stratégie gagnante dans cette situation est de suivre les lignes ou les colonnes afin de compter les emplacements vides. D'autres stratégies sont également possibles. On s'intéresse ici aux lignes et aux colonnes car cette méthode est plus générale et toujours disponible. L'élément qui permet à cette technique de fonctionner est le parallélisme des lignes entre elles et des colonnes entre elles.

Pour forcer l'élève à une stratégie nécessitant l'usage de l'écrit, on considère la situation suivante. On lui demande de dénombrer des points sur une feuille et il est autorisé à écrire sur la feuille.

La stratégie gagnante consiste ici à marquer d'une certaine manière les objets déjà dénombrés en les barrant ou en les soulignant, par exemple. Cette stratégie est parfois mise en doute par rapport à sa légitimité par les élèves, et n'est dès lors pas spontanée pour eux. Ils doutent du fait de pouvoir écrire sur la feuille autrement que pour écrire leur réponse. Néanmoins, elle est utile dans de nombreuses situations, parfois extérieures à l'exercice mathématique. Prenons, par exemple, le cas d'un texte à trous. Pour garder en mémoire les mots déjà utilisés, cette stratégie est nécessaire.

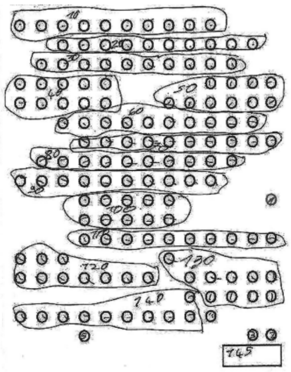
Une autre méthode possible serait de tracer des lignes "quasi-parallèles" afin de construire la partition, comme dans le cas de la boîte d' œufs. L'élève pourrait, par exemple, effectuer les tracés suivants :





Une dernière possibilité serait d'effectuer des groupements. L'élève pourrait alors les compter tour à tour, par exemple en cachant deux groupements avec ses mains puis en les déplaçant afin de pouvoir dénombrer chacun des groupements.
L'efficacité de cette technique est améliorée dès que l'élève commence à posséder des connaissances en calcul.

Remarquons que cette stratégie est encore employée par les adultes qui, pour dénombrer de grandes quantités, effectuent des groupements par paquets de dix, afin de pouvoir dénombrer les dizaines.



2.2 Observations dans une classe de maternelle

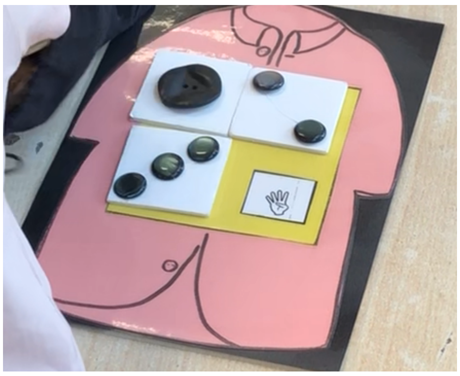
Dans cette section, nous présentons les données empiriques recueillies dans une classe de deuxième maternelle, liées aux usages des nombres naturels à ce niveau d'étude. Les élèves y sont âgés de 4 à 5 ans. Les différentes situations auxquelles les élèves se voient confrontés durant cette séance sont présentées ci-dessous. Il ne s'agit pas de situations d'introduction aux nombres. La séance a lieu en fin d'année scolaire, et les élèves ont déjà rencontré des situations dans lesquelles ils devaient en faire usage. En outre, ils connaissent déjà tous la comptine numérique au moins jusqu'au mot-nombre "six". Ils ont également déjà rencontré les notations standardisées des nombres 1 à 6, ainsi des représentations analogiques liées telles que des points disposés comme sur les faces d'un dé.

Situation 1 : Une première situation s'appuie sur le fonctionnement d'un tableau à double entrée. Les colonnes y désignent des formes : triangle, cercle et rectangle ; et les lignes des nombres : de 1 à 5. À la fin de l'activité, il est attendu des enfants qu'ils puissent compléter eux-mêmes un tel tableau avec les mêmes entrées. Il est alors demandé aux enfants de compléter seuls un tableau similaire, chaque enfant disposant d'une feuille distincte des autres.

Situation 2 : Une deuxième situation de tri d'images, dans laquelle les élèves disposent d'images représentant de un à six produits de magasin, et de boîtes étiquetées par des représentations abstraites et figurées de nombres. L'enseignant demande que chaque élève lance un dé dont les faces sont les nombres de 1 à 6. Il doit alors trouver une image dont la cardinalité de la collection des objets représentés est le nombre obtenu au lancer du dé, puis placer l'image dans la boîte étiquetée par le nombre correspondant.

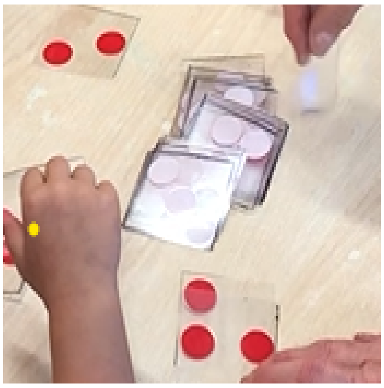
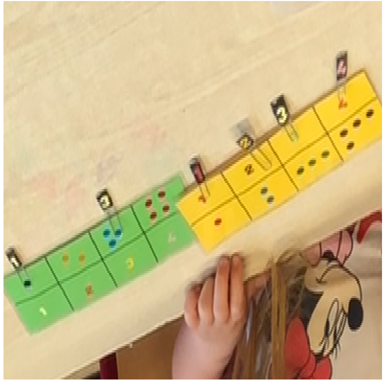
Situation 3 : Dans une troisième situation, les élèves ont chacun une boîte vide de six œufs représentant un wagon d'un train, des bouchons de liège représentant des passagers et ils partagent un dé à six faces. Les élèves doivent lancer le dé et prendre autant de bouchons que le nombre indiqué par ce dernier, puis les placer dans leur boîte jusqu'à la remplir. Si la boîte est remplie, l'élève donne alors les passagers qu'il a en trop à un autre élève. Cette situation permet de travailler la cardinalité ainsi que les configurations des représentations figurées des nombres, la décomposition en somme.

Situation 4 : Une quatrième situation met en scène un manteau à boutons. Chaque élève dispose de l'image d'un manteau auquel il doit rajouter des boutons. Ceux-ci se trouvent en relief sur des cartes placées dans un sac dont les élèves ne peuvent voir le contenu. Ils doivent alors retrouver par le toucher le bon nombre de boutons, indiqué par un idéogramme : une main avec des doigts levés. Cette situation permet de travailler la représentation figurée des nombres.



Situation 5 : Une cinquième situation porte sur les décompositions de nombres en sommes en nombres inférieurs, ainsi que deux autres sur l'association d'un nombre à ses représentations figurées.

Les retranscriptions complètes de ces situations sont reprises dans l'annexe de ce mémoire. Les situations 2 à 5 se déroulaient en groupes, et l'enregistrement ne nous a pas permis de récolter suffisamment d'observations pour pouvoir analyser les réactions et les productions

des élèves. Aussi, nous ne présentons ici que la retranscription de la première situation qui rassemblait autour d'elle l'ensemble des élèves de la classe.

2.2.1 Retranscription de la situation 1

Dans un premier temps, l'enseignante s'assure que tous les élèves sont en mesure d'identifier les différentes formes qui désigneront les entrées des colonnes, et elle établit un vocabulaire commun. En particulier, elle insiste sur la distinction entre "cercle" et "disque" ainsi que la différence entre "rectangle" et "carré".

La professeure place une grande feuille sur le sol et prend une boîte. Elle l'ouvre.
Élève : *C'est des formes.*
Professeure : *C'est des formes quoi ?*
E : *De châ-* (petite pause) *-teau ?*
P : *De château, oui parce qu'on est beaucoup dans les châteaux pour le moment.*
La professeure sort un triangle jaune de la boîte.
P : *C'est quelle forme ça ?*
E : *Triangle !*
Autres élèves : *Triangle !*
P : *Je te le donne.*
Elle sort un disque bleu de la boîte.
E : *Rond !*
Autres élèves : *Rond !*
P en grimaçant : *C'est rond mais quand on l'a en main...* (elle se fait interrompre)
E : *Cercle !*
P : *Cercle, c'est comme un cerceau. On peut faire le tour.* Elle dessine un cercle dans l'air. *Là c'est quoi ?*
E : *Aimant !*
P : *Non. Ah, c'est comme un aimant, oui. C'est quoi ?*
Plusieurs élèves à tour de rôle : *Cercle.*
P : *Allez, on a vu le petit mot.* Elle montre la forme et en fait le tour avec son doigt. *Quand on a ...* (elle se fait interrompre).
E : *Cercle !*
P : *Le cercle, c'est ce qui est autour, le cercle.* Elle fait le tour de la forme avec son doigt. *Quand je dessine, quand vous contournez autour...* (elle se fait interrompre).
E : *Un rond.*
P : *Et c'est rond, c'est la forme : rond. Là, c'est triangle* (elle mime un triangle avec ses doigts). *C'est un ...*
E : *Triangle !*

E : *Rond.*
La professeure montre sa bouche.
P : *Lisez un peu sur mes lèvres.* En murmurant : *Disque.*
Élèves : *Disque.*
P : *Un disque. Ça va ? Mais c'est vrai que c'est un rond. Alors, attention. Plus difficile, celui-là. Ne vous trompez pas et réfléchissez bien.* Elle sort un rectangle jaune.
E : *Un rectangle !*
Autre élèves : *Rectangle !*
P : *Aah yes ! Vous ne m'avez pas sorti le...* Elle cherche dans la boîte. *Qu'est-ce que vous me sortez souvent ?*
E : *Un carré.*
La professeure sort un petit carré rouge.
P : *Aah ! Et comment est-ce qu'on les reconnaît ?*
E : *Un carré.*
E : *Parce que...*
P : *Parce que ?*
E : *Parce qu'il y a pas quatre côtés.*
Autre élève : *Ben si il y a quatre côtés mais c'est plus grand les lignes.*
La professeure sort un grand carré jaune.
P : *Aah, il y a quatre côtés. On va les compter. Il y a quatre côtés.*
Ensemble : *Un, deux, trois, quatre.*
P : *Mais les côtés, ils sont comment ? Ils sont les... De la même ...* Elle mime la longueur d'un côté. *... Longueur* (elle entame le mot et les enfants terminent avec elle). *Oui ? On verra si... On, on fera, on fera la fois prochaine, on mesurera, on mettra de la peinture comme ça* (elle passe son doigt sur les côtés du carré). *Et puis, on fera cloup, cloup, cloup* (elle pose le carré successivement sur ses côtés sur la feuille blanche). *Et on verra que c'est...* Elle se fait interrompre.
E : *Comme des roues.*
P : *On le fera, d'accord ? Rappelez-le moi. Vous me le rappellerez ?*

Le geste de l'enseignante renvoie à la comparaison visuelle des traces de peinture laissées par chacun des côtés de la figure peinte. Les élèves pourraient alors, par comparaison directe des deux traces réalisées côte à côte, se prononcer sur l'égalité ou non de leurs longueurs. Ne disposant pas de peinture à l'instant, elle mime alors l'égalité des longueurs avec des parties de ses bras et encourage les élèves à faire de même.

P : *Et là, comme tu as dit, il est plus long. Il y a deux... Allez, on va faire avec ses mains.* Elle met ses avant-bras verticalement devant elle. *Et on va faire un rectangle. Allez, on a les deux côtés.* Elle reprend le rectangle et place ses mains sur les deux largeurs. *Ils sont un peu plus courts. D'accord ? Et puis, on va faire les deux longs avec ses bras.* Elle place ses avant-bras l'un au-dessus de l'autre horizontalement devant elle. *Comme ça. D'accord ? Alors, comme vous êtes binômes, par deux, vous allez essayer avec vos deux côtés, les deux petits et les deux grands...* (elle remime les côtés faits avant) *... de me réaliser un rectangle. Allez, allez-y un peu.*
Les enfants remiment les gestes des côtés du rectangle.
P : *À deux, il faut vous mettre par deux. Vous avez besoin de quatre bras puisqu'il y a quatre côtés, un, deux, trois, quatre.* Elle compte les côtés en les montrant sur la forme. *Comment est-ce qu'on va faire ça ? Aaah ! Magnifique ! Regardez* (en pointant un duo) ! *Rachelle, elle a fait les deux longs et Kyara, elle a fait les deux plus courts.* À une autre élève : *Allez, complète un peu la forme géométrique de ta copine. Qu'est-ce que tu dois faire ? Ah, ça c'est plus ou moins un carré parce que vous avez pris chacun vos deux petites mains. Toi, tu peux faire les*

longs côtés et toi, tu peux faire les petits, les courts. Regarde, et là, tu as plus ou moins un rectangle. Elle place les bras des enfants puis elle passe à un autre binôme. *Plus ou moins, regarde. Tu fais deux longs et Vadim, il fait les deux plus courts. Voilà, comme ça.* Elle place encore une fois les bras des enfants. *C'est subjectif hein, on le fera...* Elle se fait interrompre.
E : *Madame, regarde !*
P : *Voilà, vous avez trouvé !* Elle se tourne vers un autre binôme : *Ça aussi, c'est valable. Oui, c'est juste, vous avez raison. Vous avez raison, vous l'avez fait avec les mains et les plus petites, les courtes. Magnifique. On fera ça, on fera ça lundi.*

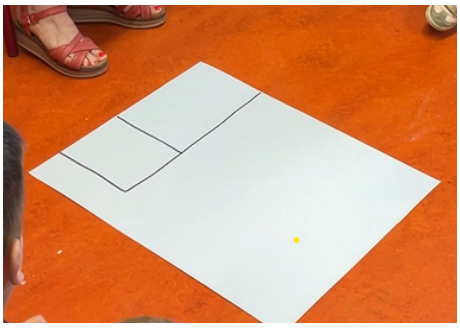
Une fois assurée qu'elle peut miser sur la reconnaissance visuelle des différentes figures par les élèves, elle distribue différentes pièces de la boîte à chaque élève.

P : *C'est bon, allez parce que c'est pas le but du jeu ici. Venez, venez, venez, venez. Alors, je vais donner. Allez. Une forme à chacun. Peu importe. Peu importe.* Elle distribue des formes à chaque élève. *C'est pas grave. C'est pas grave. Je vous en donne. Voilà, voilà, voilà.*
E (à un autre élève) : *On n'a pas la même couleur.*
P : *Si tu peux, elle ne va pas te manger, hein. Elle ne peut mal de te manger. Je la distribue. Je pense que je me suis trompée, euh Simon. Tiens, choupet. Tu en as une toi ?*
E : *Non.*
P : *Et tu veux quoi ?*
E : *Euh... un carré.*
E : *Et Vadim aussi il en a pas.*
P : *Oh, un carré, tu veux un carré ? Tiens, voilà. C'est sûr que c'est ce que je t'ai donné ?*
E : *Oui.*
P : *Ok. Alors, chacun en a une ?*
E : *Non, Vadim non.*
P : *Oulala, pardon Vadim. Voilà, alors. Vous avez des formes mais elles sont ...* Elle s'interrompt pour entamer le mot avec les enfants.
Ensemble : *Différentes.*

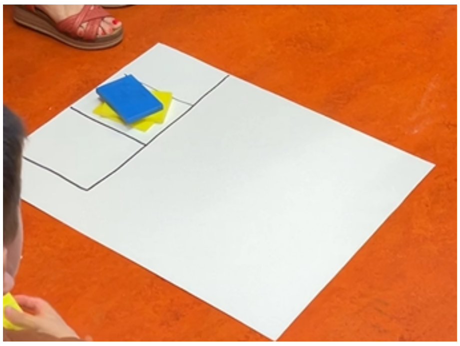
L'enseignante engage alors les élèves à catégoriser ces différentes formes. Certains souhaitent les classer par couleurs, d'autres par formes, d'autres encore par formes de même couleur.

P : *Alors, comment est-ce qu'on pourrait déjà les ranger ?*
E : *Rholala.*
E : *Ben... On peut les mettre en ordre.*
P : *En ordre, c'est-à-dire comment en ordre ? Vas-y, explique-toi chou.*
E : *Ben on le fait bien.*
P : *On pourrait...* (elle se fait interrompre)
E : *Les jaunes avec les jaunes, les carrés avec les carrés.*
P : *Ah et ben on fait ça ! Attends, parce que tu me dis plusieurs choses hein. Tu dis quoi ?*
E : *Les carrés jaunes avec les carrés jaunes. Les rectangles bleus avec les rectangles bleus.*
P : *Alors, tu veux mettre tous les rectangles ? Tu veux mettre par forme ou par couleur ? On va choisir.*
E : *Les deux.*
P : *Les deux, oulala.* (rires) *On est déjà dans les ensembles. D'accord, on fera les ensembles après mais retiens l'idée. Alors, on va d'abord peut-être faire les formes ? Parce qu'aujourd'hui, c'est les formes et je te promets qu'on fera les formes et les couleurs bientôt. Ça va ?*
E : *On a les mêmes formes moi et Owen.*
P : *Voilà, ben on va déjà s'apercevoir de ça. Donc, on a, attention, on a, vous m'avez dit, des*

rectangles. Venez un peu. Qui est-ce qui a des rectangles ? Elle dessine une case sur la feuille pour y déposer les rectangles des élèves.



Plusieurs élèves se lèvent : *Moi.*
P : *Et ben, on va, les rectangles. Allez, allez-y, on va les mettre tous ensemble. Allez vas-y tu les mets dans la petite... Vas-y, vas-y. Non, on va les mettre là, regarde. On peut les mettre les uns sur les autres, hein. Ils ne se disputent pas. Ah ben si tu décides de les mettre là, on y va. Allez, on met tous les rectangles.*
E : *Moi, c'est un disque que j'ai.*
P : *C'est un disque.*
E : *Moi c'est un triangle.*
P : *C'est un triangle ça ? C'est quoi ça ?*
E : *Non, c'est un rectangle mais en plus petit.*
P : *Mais c'est toujours un rectangle, on est bien d'accord ?*
E : *Oui.*
Un élève pose son rectangle dans une autre case sur la feuille.
P : *Heu, les rectangles.*



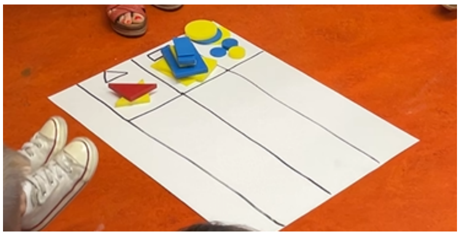
E : *Moi, j'ai un carré.*
P : *Attends.* À un autre élève : *Et toi ? Et ben vas-y. Attends, si tu ne veux pas le mettre maintenant, c'est pas grave. Attention. Donc là, c'est les rectangles.* Elle dessine un rectangle en haut de la case. *On est bien d'accord ?* Elle dessine un triangle en haut de la case à gauche de celle des rectangles. *Là, on aimerait bien avoir...* (deux élèves se lèvent pour déposer leur triangle) *...les triangles. On les superpose, hein.*
E : *Il y en a que deux.*
P : *Vous êtes... Il y en a que deux ?*
E : *Ben non, il y a encore... Ah non.*
E : *Moi c'est un rond.*
P : *Il y en a que deux ?*
E : *Oui.*
P : *Sûrs ?*

E : *Ah non, il y a ...*
P : *Ah ben voilà.* Elle fait signe à une élève de se rasseoir. *Ne te laisse pas influencer.* Elle dessine un cercle sur la case à droite de celle des rectangles. *Après, attention, ça c'est quoi que j'ai dessiné ?*
Élèves : *Un rond.* Plusieurs élèves se lèvent.
P : *Attendez ! Attendez ! Attendez ! C'est un cercle, vous me demandiez tantôt un cercle. C'est un cercle, c'est rond, oui ? Le, le disque, voilà quand il y a la surface. Qu'est-ce qu'il faudrait faire pour que ce soit un disque ? Il faudrait que je le colorie.* Elle colorie le disque. *Parce qu'alors, quand c'est la surface pleine... Ça c'est très difficile, je vous le dis. Mais c'est très difficile, on va partir que c'est rond. D'accord, on est d'accord ?*
Élèves : *Oui.*
P : *Allez, on y va, on les range. On les superpose hein. Voilà. Alors, pourquoi est-ce qu'il y en a qui ont gardé les petites formes en main ?*
E : *Parce que, parce que, parce que vous m'avez pas fait.*
Autre élève : *Ben oui, parce qu'il y a les carrés, là ...* (en pointant la feuille) *... il y a pas.*
P : *Ah il y a pas là les carrés.*
E : *Et en plus il y en a deux qui ...* Il se fait interrompre.
P : *Et pourquoi est-ce que... Et pourquoi est-ce que Rachelle, non pas Rachelle, attends, je... Je me trompe.*
E : *Alice.*
P : *Alice, Louise et Simon, pourquoi est-ce qu'ils ... Regardez les copains, ils ont mis.* Elle pointe un disque. *C'est un disque. Que je sois grand ou petit. Je suis toujours un disque, je suis toujours rond. Est-ce que vous n'avez pas des petits rectangles, vous ?* Les trois élèves se lèvent pour poser leur rectangle dans la bonne case. *Alors on pourrait les mettre dans les rectangles.*
E : *Mais par contre, il y a pas beaucoup de triangles.*
P : *Ah, est-ce qu'il y a des petits, des triangles ?*
E : *Euh, non.*
P : *Non, il y avait que des ...*
E : *Grands.*
P : *Grands. D'accord, je vous ai distribué... Mais c'est pas grave... du tout. Ok ?*
E : *Mais moi, j'ai un carré.*
P : *Ah le carré, est-ce qu'on en a besoin ?* (elle désigne la feuille)
E : *Non.*
P : *Alors viens, on va l'échanger. Viens, on va faire secrètement. On va échanger ta forme.*
E : *Rachelle aussi.*

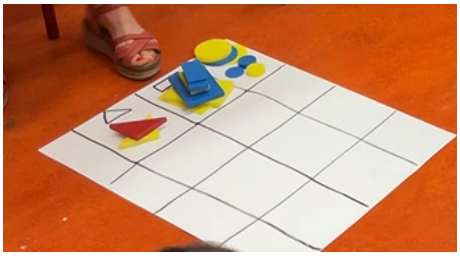
L'enseignante reprend progressivement la main pour continuer la constitution du tableau à double entrée.

P : *Mais tu ne dis...* Elle s'interrompt. *Toi aussi, tu avais un carré ?* En murmurant : *Allez, viens, viens. Je vais vous donner... Chut, chut. Je vais vous donner en secret... Attendez...* Elle donne une forme au premier élève. *Garde-le bien, hein. Ne dis rien à personne, hein.* Elle donne une forme à la deuxième élève. *Garde-le bien, ne le dis à personne, hein. Allez, vas-y, voilà.* Elle s'adresse à l'ensemble des enfants. *Attention, les amis.* Elle pointe la feuille où sont déposées des formes.

Là, on a des formes. On a des formes. Attention, je vais descendre les longues colonnes. Elle prolonge les lignes séparant les cases contenant les formes pour en faire des colonnes. *Là, c'est comme si c'était le toit de la maison. Je descends mes colonnes.*



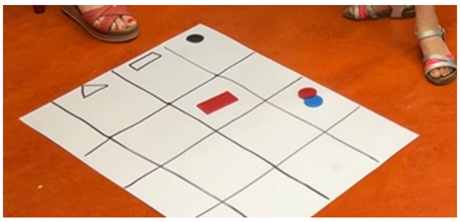
P : *Et attention, fermez les petits yeux, pas de tricheur.* Les élèves cachent ou ferment leurs yeux et elle trace des lignes sur la feuille.



P : *Pas de tricheur. Pas de tricheur. Coucou.* Les élèves ouvrent les yeux. *Qu'est-ce que j'ai bien pu faire ?*
E : *Les carrés !*
P : *J'ai fait des carrés, des damiers, oui.*
Un élève s'approche de la feuille.
P : *Quoi ? Qu'est-ce que tu veux faire ? Dis-moi, dis-moi.*
E en pointant les rectangles : *C'est pas juste ça.*
P : *Si hein, c'est des grands, des petits mais c'est toujours des car- des rectangles hein. C'est la même chose. Tu es bien d'accord, oui ?*
E : *Oui mais...* Il se fait interrompre par la professeure qui reprend à l'ensemble de la classe.

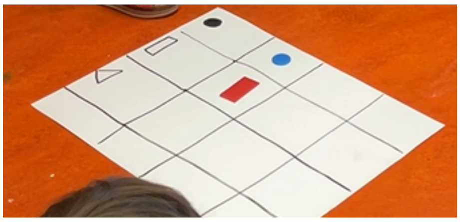
L'enseignante amorce alors une explication de lecture d'un tableau à double entrée, en multipliant les exemples de positions possibles où placer les différentes formes géométriques. Dans un premier temps, elle fixe l'entrée des colonnes.

P : *Qu'est-ce qu'il s'est passé ? Alors, attention...* Elle retire toutes les formes de la feuille. *J'ai besoin que vous fermiez vos yeux.* Les élèves ferment les yeux. *Et j'ai besoin de la forme de Rachelle et de Ben. Venez, ouvrez vos yeux hein pour marcher.* En murmurant à Rachelle : *Alors, tu me la donnes et on va la déposer là.* Elle dépose le rectangle rouge dans la première case en-dessous de la case des rectangles. En murmurant à Ben : *Tu me la donnes et on va la déposer là-bas.* Elle prend son rond rouge ainsi qu'un rond bleu et les dépose dans la deuxième case en-dessous de la case des ronds.

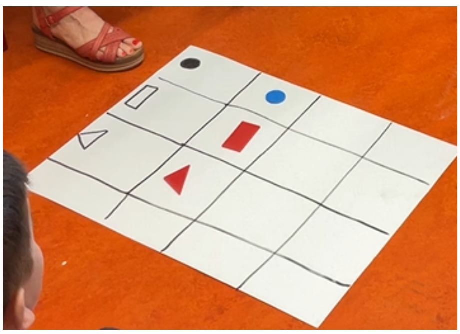


P : *Vas-y, tu peux aller t'asseoir. Vas-y. Vous avez vu ? Vas-y.* Au reste des élèves : *Coucou.* À Rachelle en murmurant : *Tu peux aller t'asseoir.* À l'ensemble de la classe : *Qu'est-ce qu'il*

s'est passé ?
E : *C'est pas juste !*
P : *Pourquoi est-ce que ce n'est pas juste ? Dis-moi.*
Autre élève en se levant : *Parce que...*
P : *Oh il n'y a pas besoin de se lever.*
Élève du "C'est pas juste" : *En fait, ça, ça le rond rouge, c'était mon.*
P : *Oui, mais ça c'est pas grave, il ne t'appartient pas, il appartient à tous les copains. Qu'est-ce qu'il s'est passé ?*
E : *Ça, ça doit aller là. Et ça, ça doit aller là.*
P : *Et pourquoi est-ce que je ne peux pas le mettre dans la colonne des rectangles ? Il est toujours en-dessous du rectangle.*
E : *Parce que c'est pas la même case.*
P : *C'est pas la même case... Et pour rester dans cette case-là, qu'est-ce que je devrais faire ?*
E : *Un rectangle.*
P : *Le dessiner là ?*
E : *Ben non ! Comme les lignes.*
E : *Comme les bras.*
P : *Comme les bras, comme les lignes, oui. Allez vous asseoir, vous verrez mieux. Attention, je suis d'accord avec vous, hein. Je suis tout à fait d'accord, oui. Attention, fermez les petits yeux.*
Les élèves ferment les yeux et elle enlève le rond rouge et remonte le rond bleu d'une case, à la même hauteur que le rectangle. *Allez, coucou.*



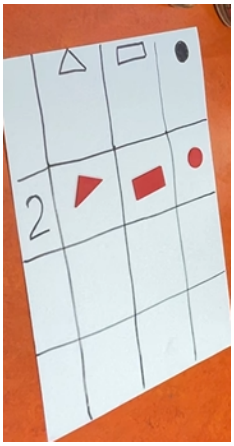
E : *Ah, t'as enlevé un rond !*
P : *J'en ai enlevé un.*
E : *Et t'as reculé.*
P : *Ah, je l'ai changé de place, pas forcément reculé parce que, pour les petits copains, c'est avancé.*
E : *Mais c'est pas juste.*
P : *Et pourquoi est-ce que ce n'est pas juste ?*
L'élève s'approche pour pointer la feuille.
P : *Allez, je vais encore vous perturber un peu plus. Fermez les... Fermez les petits yeux.*
E : *Ah, pas encore !*
P : *Il faut que je trouve ma petite forme. Ne bougez pas.* Elle place un triangle rouge dans la colonne des triangles, sur la même ligne que les deux autres formes. *Coucou.*



E : *Ah ben t'as mis un triangle !*
P : *Voilà, j'ai mis un triangle.*
E : *Et maintenant ils sont à côté de l'autre !*
P : *Ah, très ...* Elle se fait interrompre.
E : *Mais ils peuvent se toucher du coup.*
P : *Ah ben ils ne savent pas se toucher, regarde, ils sont séparés par une petite ligne.* Elle place son marqueur sur chacune des lignes pour montrer la démarcation.
P : *Regarde, c'était très intéressant ce que tu as dit. Ils sont chacun - ils sont bien dans leur bonne maison.*
Élèves : *Oui !*
E : *Mais il y a un problème !*
E : *Parce que ... Parce que...*
E : *Eux ! Eux deux, ils vont se mélanger !*
P : *Pourquoi est-ce qu'ils vont se mélanger ?*
E : *Parce qu'il y a un bleu et un rouge.*
P : *Ah, parce que c'est une question de couleur ? Moi, je veux bien. Je veux bien, voilà, je veux bien mettre des rouges. Il y a pas de souci.*
E : *Tu n'as pas fait comme les bras.*
P : *Oui mais non, ça, ça, ça, c'est autre chose. Allez un peu vous asseoir. Attention. Qu'est-ce qui se passe là ? Je vais, je vais vous faire une blague. Fermez les yeux.*
E : *Aah encore ! Pas possible !*

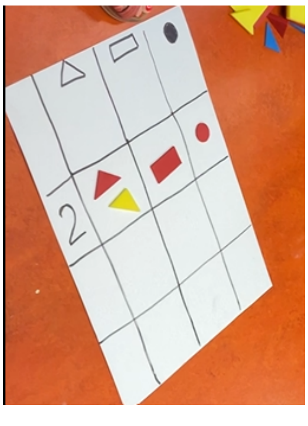
L'enseignante fixe alors l'entrée des lignes par une quantité allant de 2 à 5. Certains élèves tiennent compte de cette contrainte dans la lecture du tableau ; pour d'autres, la nouvelle contrainte "efface" la précédente. Ces derniers veulent alors enlever une des trois pièces présentes sur la feuille plutôt que d'en ajouter une dans chaque case. L'enseignante doit alors s'expliquer sur la manière dont il faut lire ce tableau.

P : *Heu, attention.* Elle écrit un "2" pour nommer la ligne contenant les formes. *Allez-y.*



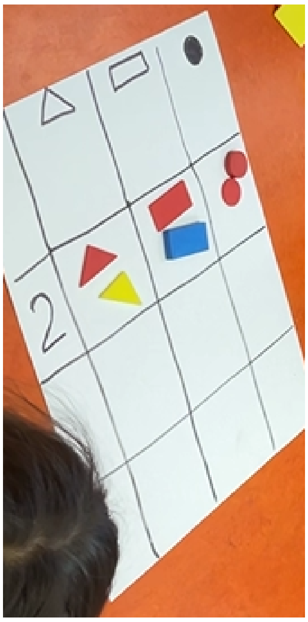
Élèves : *Mais ! Ah t'as mis deux !*
P : *Ah pour... Ne criez pas, ne criez pas. Vous faites les petits sots, là.*
E : *Mais c'est le chiffre un.*
E : *Il faut en enlever un.*
P : *Ah, attention. Attends. Comment ?*
E : *En enlever un.*
P : *Pourquoi est-ce qu'il faut en enlever un ?*
E : *Parce que c'est... Il y a un chiffre deux.*
E : *Mais oui, parce que on a un en plus.*

E : *Mais c'est...*
P : *Alors, il y en a qui veulent mettre en plus, il y en a qui veulent en enlever. Va falloir se mettre d'accord.*
E : *Ça, c'est trois.*
P : *C'est... Ah, là, il y en a trois. Un, deux, trois. Mais...* Elle se fait interrompre.
E : *Il faut y en avoir deux !*
E : *Pour en avoir deux, il faut en enlever un.*
P : *Il faut en enlever un pour avoir deux.*
E : *Non ! J'ai compris !*
P : *Et ben, vas-y. Viens, attends, on va d'abord faire Vadim. Viens en enlever un pour faire deux.* Vadim se lève pour enlever le rond.
E : *Mais on fait comme les bras.*
E : *Ah oui, c'est ce que je voulais faire : enlever celui-là.*
P : *Ah, tu veux l'enlever, celui-là. Vas-y.*
E : *Mais moi, je suis pas d'accord.*
P : *Moi... Et ben pourquoi est-ce que tu n'es pas d'accord ?*
E en pointant la case du triangle : *Alors, il faut en mettre deux là-bas.*
P (en parlant pour le rond) : *Parce que, moi le petit, je suis...*
P (en parlant à l'élève) : *Je t'écoute, hein. Reste bien là, je t'écoute.*
P (en parlant pour le rond) : *Regardez, moi, je suis un, un disque mais j'aimerais bien être dans la maison des disques aussi.*
P (en parlant pour le rectangle) : *Moi, je suis rectangle. Je suis content, j'y reste.*
P (en parlant pour le triangle) : *Moi, je suis triangle. Je suis content, j'y reste.*
P (en parlant à l'élève précédent) : *Et toi, tu as trouvé, je crois, la solution. Qu'est-ce que tu as dit ?*
E en pointant le triangle : *Mettre un deuxième comme ça.*
P : *Et pourquoi est-ce qu'il faut mettre un deuxième dans les triangles ?*
E : *Parce qu'il y en a un qui est triste.*
P : *Oui, il y en a un qui est triste aussi.*
E : *Et parce que vous avez ajouté un deux là.*
P : *Et ben, viens faire. Viens mettre un triangle. Euh, que ce soit petit ou grand, on s'en fout hein, chou. Regarde, voilà, je vais te mettre toutes les formes là, si tu veux, comme ça, tu les verras mieux. On s'en servira encore.* Elle renverse les formes sur le sol. *Voilà, allez, vas-y. Attention, on va voir. Est-ce que... mets-le bien comme ça, chou.*
L'élève pose le triangle dans la même case que l'autre.

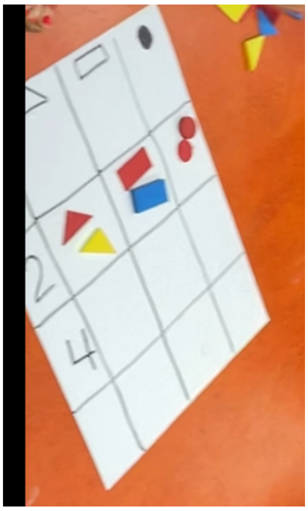


L'enseignante mime à nouveau sa lecture du tableau en parcourant du doigt la colonne des triangles, et vérifie que toutes les formes de cette colonne en sont, puis parcourt du doigt la ligne de l'entrée "2" et vérifie qu'il y a bien deux triangles. Elle demande à un élève de vérifier la case (2, rectangle). Un autre élève corrige la case (2, disque).

P : *Est-ce que là... Attention, on va lire. Est-ce que je suis bien dans les triangles ?* Elle parcourt du doigt la colonne des triangles.
Élèves : *Oui.*
P : *Est-ce que j'en ai bien deux ?* Elle montre le nombre deux noté sur la feuille.
Élèves : *Oui.*
P : *Alors, qu'est-ce qu'on va devoir faire, mademoiselle Juliette, dans les rectangles ? Qu'est-ce qu'on doit faire ?*
E : *Moi, je sais bien déjà.*
Juliette : *Mettre...*
P : *Dis-le.*
Juliette : *... un autre rectangle.*
P : *Dis.*
Juliette : *Mettre deux.*
P : *Tu vas en mettre deux ? Attention, il y en a déjà un. Vas-y. Il en faut deux. Que ce soit grand ou petit, c'est pas grave.*
Juliette prend un rectangle bleu.
P : *Voilà. Tu en as pris combien ?*
Juliette : *Un.*
P : *Un, et il y avait déjà un. Donc, un plus un, ça fait bien deux. Tu n'en as pas pris deux. Ça va ?*
E : *Moi, j'ai une idée.*
P : *Attention, et ben, viens si t'as l'idée. Viens. Allez, on y va. Attention.*
L'enfant prend un rond rouge et le place à côté de l'autre rond.



L'enseignante fixe l'entrée "4" pour la deuxième ligne, et demande aux élèves de compléter la ligne. Elle réinsiste sur la nécessité de tenir compte de l'information de chacune des deux entrées.
P : *Attention. Fermez les yeux parce que j'écris à l'envers.* Elle écrit un "4" pour la deuxième ligne.



Élève : *Quatre !*
P : *Oh oh, t'as triché ! Je n'ai pas dit coucou. Tu l'as dit avant. Coucou.*
E : *T'as mis quatre !*
P : *Le chiffre quatre. Alors, qu'est-ce qu'on va devoir faire ?*
E : *En mettre quatre.*
Élèves : *Quatre !*
P : *Attends, on va... Mettre quatre quoi ? On peut mettre euh quatre bics, vous me dites... on me dit quatre, moi, je mets quatre, hein.* Elle met quatre marqueurs en-dessous des deux triangles. *Mais c'est des bics... des marqueurs que je vais mettre ?*
Élèves : *Non.*
P ; : *C'est quoi ?*
E : *Des triangles.*
P : *Pourquoi ? Pourquoi est-ce qu'on va mettre des triangles ?*
E : *Parce que c'est la maison des triangles.*
P : *Voilà, bien, le mot est dit. C'est la maison des triangles. Et là, la petite porte, elle dit avant de rentrer, on est dans la maison des triangles, "Toc, toc, toc", il me faut quatre triangles. Allez, je vais demander à Kyara de venir chercher quatre triangles, ma chérie .*
E : *Mais il y en a déjà deux !*
P : *Il y en a déjà deux.*
E : *Il faut encore en mettre deux.*
P : *Aaah attends, attends, attends. Deux et ... Vous m'embarquez partout ... Deux et deux, ça fait quatre, je suis d'accord. Mais regarde ça, c'est dans la maison des deux. Là, on est dans dans la maison de quatre, cette maison-là, c'est de quatre. Ça, il faut les laisser, c'est dans la maison de deux. Ça va ? Allez, tu mets dans la maison de quatre, triangle. Ah, il y en a combien, là ?*
E : *Un.*
P : *Il m'en faut quatre hein. Attention, parce qu'après, vous allez devoir travailler tout seul. Ah, voilà, quatre.* Des élèves montrent quatre avec leurs doigts. *Montrez un peu quatre sur vos doigts. Trois plus un, super ! Comment est-ce qu'on peut faire en utilisant ses deux mains ?*
Kyara met les triangles manquants.
Kyara : *Voilà.*

L'enseignante en profite pour travailler sur la décomposition de "4" en somme de deux naturels.

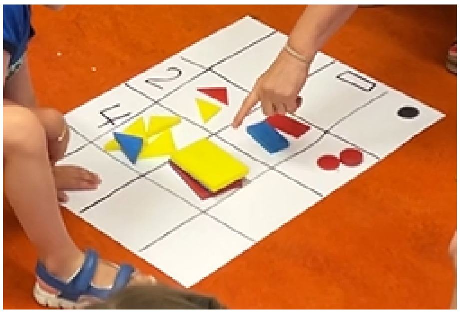
P : *Voilà. On peut faire deux et deux. Ou bien, on peut faire comment ? Allez, on met les deux mains. Avec deux mains, on fait quatre.*

E : *Un plus trois.*
P : *Un plus trois. Oh, ça fait quatre, ça ?* Juliette a levé ses deux petits doigts et un pouce. *Si je mets zéro... Oui, trois plus un. Et là ?* Elle montre ses mains avec l'une fermée et l'autre avec trois doigts levés. *Quatre, ça fait zéro doigt...* (elle secoue sa main fermée) *... plus quatre. D'accord ?*
Un élève lève ses deux pouces, son index gauche et son petit doigt droit).
E : *Et ça aussi, ça fait quatre.*
P : *Allez, on va aller vérifier parce que Kyara, elle a fini. Est-ce que c'est juste, ça ?*
Élèves : *Oui.*
E : *Mais moi, j'ai pas fait.*
P (à propos des triangles sur la feuille) : *Simon, est-ce qu'il y en a bien quatre, là ?*
Simon : *Oui.*
P : *Oui ? Un ,deux, trois, quatre. Attention. Fermez les petits yeux.* Elle écrit un "3" pour la dernière ligne.

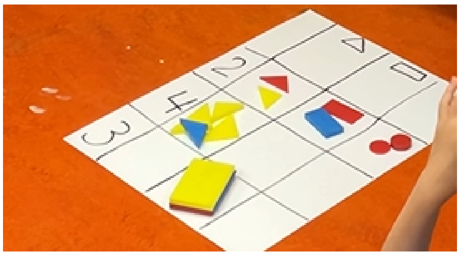
L'enseignante demande à un élève de remplir la case (3, rectangle). Il répond correctement à la demande orale : "trois rectangles", de l'enseignante, mais éprouve des difficultés à les positionner au bon endroit dans le tableau.

E : *C'est pas possible !*
P : *C'est... C'est pas possible, non, c'est pas possible de crier surtout. Attention. Coucou.*
Léandro : *C'est trois !*
P : *Léandro, mais, mais non. Chut. Allez, on va respirer. On va respirer très fort.* Les enfants lèvent les bras pour prendre une inspiration puis les baissent en expirant. *On va faire des petits mouvements.* Ils moulinent des bras devant eux. *On laisse tomber tout doucement les bras. Je n'ai pas dit des petits n'importe comment. On va se calmer. J'ai ajouté le chiffre "3", d'accord ? Attention. Je ne vais pas rester dans la maison des triangles mais je vais rester dans la petite porte qui dit trois et j'aimerais bien que, euh, Thomas vienne me mettre trois mais dans la maison des rectangles. Allez, viens. On va voir s'il ne se trompe pas. Des rectangles, des petits, des grands, comme on veut.*
Thomas prend trois rectangles.
P : *Voilà, tu en as déjà pris trois, c'est bien. Regardez bien. Dans la maison... Tu es, tu es dans la porte trois. Voilà.*
Thomas pose ses rectangles dans la ligne des trois, mais dans la colonne des triangles.

P : *Est-ce que tu es dans les triangles ?* Il fait non de la tête. *Est-ce que tu dois... Non, tu dois aller jusqu'aux rectangles. On déplace, on modifie. Allez, vas-y.* Il déplace ses rectangles dans la colonne des rectangles mais dans la ligne des quatre.



P : *Ah, tu es bien - Leandro- Tu es bien dans la maison des rectangles, mais est-ce que tu es dans le chiffre trois ?* Il fait non de la tête. *Qu'est-ce que tu vas faire ?* Il les remet dans leur première position. *Ah, tu es bien dans la maison trois mais tu es en-dessous du toit des triangles.*
E : *Il faut retirer deux !*
E : *Je suis pas d'accord.*
P : *Pourquoi est-ce que t'es pas d'accord ?*
E : *Parce que ça, ça doit pas aller là. Ça doit aller là.*
Il montre la case de la colonne des rectangles et de la ligne trois. Plusieurs élèves se lèvent pour montrer cette case.
P : *Ah, et ben on va, et ben, ah, attendez, allez un peu vous asseoir parce que... Tout ce que vous... Regarde. C'est pour avoir plus facile, et pour les autres. Je vais... Vous avez raison, je vais l'expliquer à Thomas.* Elle prend les rectangles de Thomas. *Là, tu en as bien pris trois. Un , deux, trois. Comme te disent tes copains, tu es dans la maison.* Elle place les rectangles dans la colonne des triangles et la ligne des trois. *Est-ce que je peux m'arrêter en-dessous du toit des triangles ?*
Élèves : *Non.*
P : *Mais je reste toujours dans les trois.* Elle déplace les rectangles vers la colonne des rectangles et la ligne des trois. *Est-ce que je peux m'arrêter dans la maison des rectangles ?*
Élèves : *Oui.*



P : *Oui, oui.* Elle déplace les rectangles vers la colonne des ronds et la ligne des trois. *Est-ce que je peux aller jusqu'aux disques ?*
Élèves : *Non.*
P : *C'est bon ? T'as compris ? Okay ? Alors, vous sortez vos appareils photo.* Les enfants miment un appareil photo. *Et on fait une photo de notre panneau. Clic. On rit, non c'est pas une photo, c'est pas un selfie. D'accord, voilà. Attention. Vous allez... Qu'est-ce que vous avez mis hier dans vos petits paniers ?*

L'explication terminée, l'enseignante explique aux élèves qu'ils vont chacun prendre une des fiches aimantées et étiquetées à leur prénom et la compléter seuls à l'aide de gommettes, comme ils viennent de le faire tous ensemble. Les élèves ne disposent pas des mêmes entrées dans les tableaux qui leur sont attribués.

E : *Des jouets !*
P : *Non, pas des jouets. Des petites formes. Vas un peu chercher un panier qui se trouve... Vas chercher un panier qui se trouve au magasin.* Une petite fille se lève pour aller chercher un panier. *Vas voir. Vas voir et il y a votre prénom dedans. Ça va ? Je vais vous expliquer, puis on lancera l'atelier après. Si on a le temps. Parce que vous avez... Hé, on a travaillé comme ça.* Elle fait un pouce vers le haut. *Je retiens bien ce que tu as dit, hein, avec les couleurs et le nombre et les formes. Ça va ? On jouera lundi avec ça.*
E : *Ouais.*
P : *Chut. Parce qu'il y a les... C'est vrai, les intersections. Voilà, on fera ça. On fera des mathématiques de très, très, très grands.*
La petite fille revient avec un panier et le donne à la professeure.
P : *Voilà, qu'est-ce qu'il y a dedans ?*
E : *Il y a rien.*
E : *Il y a des formes.*
E : *Ben il y a des gommettes.*
E : *Des gommettes de formes.*
P : *Des gommettes de formes. Des disques, des...*
E : *Carrés.*
P : *Rectangles, que ce soit comme ça ou comme ça, ça reste un rectangle, et il y a des petits....*
Élèves : *Triangles.*
P : *... Triangles. D'accord ? Des couleurs, peu importe la couleur. Ici, on regarde la forme.* Elle place ses mains sur sa tête et les enfants l'imitent. *Allez, on imprime. Je prends la forme : triangle, rectangle, disque. D'accord ?*
E : *D'accord.*
P : *Vous avez une feuille.* Elle montre des feuilles accrochées par des magnets. *Vous avez vu ? Vous avez été mettre votre feuille hier.*
Simon : *J'ai compris !*
P : *Qu'est-ce que... Allez, explique hein, si tu as compris.*
E : *On va mettre des signes.*
Simon : *Non, moi j'ai compris. On va mettre des ronds dans les ronds, des carrés dans les*

carrés et ainsi de suite.
P : *Et ainsi de suite, c'est très bien. Et ici, qu'est-ce qu'on fait ? Mais ainsi de suite, on doit bien respecter le nombre et la forme. Si je me trompe, est-ce que c'est grave ?*
Élèves : *Non.*
P : *Parce que ça peut se dé...*
Ensemble : *...coller.*
P : *D'accord ? Attention !*
E : *Très difficile.*
P : *Madame Sabine vous a fait des blagues. Vous n'avez pas...*
E : *Le même chiffre.*
P : *Tu as tout compris, c'est pour ça que je vous les ai faits accrocher. Pour que vous vous rendiez compte que vous n'avez pas les mêmes chiffres au même endroit. Et qu'est-ce qu'il y a aussi qui change ? Est-ce que les formes, elles sont mises dans le même ordre ? Au-dessus, regardez. Au-dessus de vos feuilles, vous les observerez. Là, chez Owen, on a le rectangle, le disque et le triangle. Et là, chez Rachelle, on a le rectangle, le triangle et le disque.*

E : *Oui !*
P : *Donc, les formes et le nombre, ils changent. Il va falloir faire très, très, très attention. Alors, ce que je vous propose... Je vais regarder l'heure parce que, Madame Sabine, elle s'emballe, elle s'emballe, pour savoir si vous avez le... Oui, on a le temps. Alors, votre prénom est sur votre feuille. Vous avez- euh Lou- vous avez votre...*
Élèves : *Prénom.*
P : *Attention. Je vous ai fait une blague sur la feuille mais peut-être, mais peut-être - mets-toi un peu convenablement- mais peut-être que dans votre petit pot, vous en aurez soit de trop...*
E : *Soit de pas trop.*
P : *Et comment est-ce qu'on dit de pas trop ? C'est quoi un autre mot ?*
E : *Pas assez.*
P : *Pas assez, voilà c'est juste. On en aura de trop ou on en aura pas assez. On en aura en plus ou alors il va vous en manquer. Je ne sais pas, je n'ai pas compté. C'est vous qui allez compter, d'accord ? Okay ? Allez, les... Pour ne pas que tout... Vous allez vous mettre par binôme, ça va ? On va travailler par binôme. Cette activité-là, elle peut montrer qu'on travaille par deux.*

Par la suite, la professeure envoie chaque binôme chercher son panier et sa feuille et l'activité commence. L'intégralité des échanges qui ont pu être enregistrés se trouve en annexe de ce mémoire. Nous ne reprenons ici que quelques extraits qui nous paraissent significatifs pour l'analyse de l'activité qui suivra.

P : *Ah ben, complète toujours ça, et je vais te donner la réserve. Allez, voilà. Les réserves, elles sont ici, je vais vous mettre un petit peu pour chacun. Il y a des triangles, il y a des* *rectangles. Je vais mettre les boîtes au magasin, comme ça vous pouvez venir chercher.*

Un élève vient vers elle. *Mais magnifique Ben, il y a juste le premier où il y a une petite erreur, mais je suis fière de toi.* Elle reprend pour tout le monde. *Regardez, voilà, comme on va faire ses courses. S'il vous en manque, vous allez au magasin chercher des feuilles.*

Elle retourne près d'un élève.

P : *Regarde, regarde un peu là. Combien est-ce qu'il y en a ? Compte.*

E : *Un, deux, trois, quatre, cinq.*

P : *Ah, et moi, je n'en veux que quatre. Tu as un de trop. Tu enlèves et tu peux le remettre là. Allez vas-y.*

Elle va vers la première élève à qui elle donne la bandelette ci-dessous pour l'aider à réaliser la tâche demandée.

Elle se retourne vers Aya : *Alors ici, écoute-moi, écoute. Ici, tu es dans les triangles. Tu as bien mis les formes, mais tu n'as pas mis le bon nombre. Regarde, ça dit combien ça ?*

A : *Cinq.*

P : *C'est pas cinq ce chiffre-là. Montre-moi un peu.* Elle prend la bandelette et lui montre le quatre. *C'est le même que ça. Il y a combien de doigts qui se sont dépliés ?*

A : *Un, deux, trois, quatre.*

P : *Quatre, c'est quatre. Ce chiffre-là, c'est quatre. Ça va ? Et là, tu en as combien ?*

A : *Un, deux, trois, quatre, cinq.*

La professeure en retire un.

P : *Allez ici, regarde, est-ce que tu en as quatre ? Allez regarde, tu as vu que quatre c'était quatre comme ça.* Elle pointe la case qu'elle a corrigée. *Mets un peu pour faire quatre* (dans les disques). *Quatre hein, fais attention, tu en as déjà collé un.* Elle se lève pour aller près d'une autre élève.

Pendant ce temps, Aya complète correctement sa case, et puis elle s'arrête.

L'enseignante retourne près de Manon.

P : *Allez, regarde un peu si tu en as cinq. Compte hein.*

Manon : *Un, deux, trois, quatre, cinq.* Elle s'arrête de compter alors qu'il lui en reste un.

P : *Ah, il y en a un de trop. Tu l'as vu. Allez, tu peux l'enlever.* Elle l'enlève pour Manon. *Regarde bien ma chérie, parce que tu es dans la maison de cinq. Compte-les maintenant.*

Manon : *Un, deux, trois, quatre, cinq.*

P : *Très bien, donc maintenant cinq, tu vas faire cinq rectangles.*

Après s'être occupée d'un autre élève, l'enseignante retourne à nouveau auprès de Manon.

P : *Regarde, tu es bien dans le chiffre trois, ma chérie. Là* (la colonne des disques), *je suis d'accord, mais là* (la colonne des rectangles) *? Est-ce que c'est des rectangles que tu as mis ?*

Manon fait non de la tête.

P : *C'est quoi que... Tu as mis des ronds. Mais c'est pas grave, tu avais mis le bon nombre* (pour la troisième ligne). *Trois, trois, trois, je suis d'accord. Mais c'est... il fallait quoi là ?* Elle montre la colonne des rectangles.

Manon : *Rectangles.*

P : *Des rectangles et des ?* Elle passe à la colonne des triangles.

Manon : *Triangles.*

P : *Triangles. Allez, va me chercher ça. Regarde, on fait comme si... Regarde, c'est ce qui est bien, c'est qu'on peut les déplacer et on peut corriger. Allez, vas-y. C'est parce que tu n'en avais plus dans ton pot ? Mais tu peux aller en chercher, hein, Manon. S'il vous manque quelque chose, vous pouvez aller en chercher.*

2.2.2 Analyse de la séance

La première situation proposée par l'enseignante repose sur une demande de sa part qui, en substance, pourrait être formulée ainsi : "complétez le tableau à double entrée suivant", mettant en jeu des formes (triangle, disque, rectangle) et des nombres (de 3 à 6). Chaque case du tableau doit être remplie par les élèves de gommettes de forme et en quantité déterminées par les entrées des lignes et des colonnes de ce tableau. On ne peut raisonnablement exiger des élèves qu'ils remplissent dûment un tel tableau sans connaître au préalable de quelle manière celui-ci se décode. Ce décodage ne pouvant raisonnablement être dévolué aux élèves, l'enseignante prend alors en charge l'explication de fonctionnement tout en souhaitant le "faire deviner" aux élèves. S'en suit alors une succession d'effets "Topaze" et "Jourdain", qui impactent aussi bien la catégorisation des formes géométriques que le dénombrement de celles-ci par les élèves dissimulés dans la fiction proposée par l'enseignante.

Ce jeu de devinettes s'instaure dès le début de la séance. En l'absence d'un milieu permettant les rétroactions avec les élèves, ces derniers tâchent de décoder dans l'attitude de l'enseignante ce qu'elle attend d'eux. Ce jeu débute avec le nom à attribuer au rond : "disque" ou "cercle", que les élèves comprennent devoir évincer ou adopter en fonction des gestes et des grimaces de l'enseignante à leurs propositions.

Mais ce jeu de devinettes impacte également la catégorisation des figures. La fiche que les élèves vont devoir compléter à l'issue des explications ne tient pas compte des couleurs : les formes y sont représentées par des "ombres" noires. S'il y a bien des gommettes noires fournies aux élèves pour compléter leur tableau celles-ci ne sont pas en quantité suffisante pour permettre aux élèves de réaliser le remplissage complet de leur tableau. Ils devront se servir de gommettes de couleurs différentes. Ainsi seront admises par l'enseignante toutes les formes identiques à celles désignées par les entrées des colonnes. La catégorisation doit donc se faire indépendamment des couleurs. Or, rien n'oblige l'élève dans la fiction imaginée par l'enseignante de privilégier une catégorisation selon la forme uniquement. L'enseignante trie alors arbitrairement les propositions des élèves pour ne garder que celles qui n'entravent pas le bon déroulement de la tâche à suivre, comme dans l'extrait suivant, par exemple.
P : *Alors, comment est-ce qu'on pourrait déjà les ranger ?*
E : *Les jaunes avec les jaunes, les carrés avec les carrés.*
P : *Ah et ben on fait ça ! Attends, parce que tu me dis plusieurs choses hein. Tu dis quoi ?*
E : *Les carrés jaunes avec les carrés jaunes. Les rectangles bleus avec les rectangles bleus.*
P : *Alors, tu veux mettre tous les rectangles ? <u>Tu veux mettre par forme ou par couleur ? On va choisir</u>.*
E : *Les deux.*
P : *<u>Les deux, oulala.</u>* (rires) *On est déjà dans les ensembles. D'accord, on fera les ensembles après mais <u>retiens l'idée</u>. Alors, <u>on va d'abord peut-être faire les formes ? Parce qu'aujourd'hui, c'est les formes et je te promets qu'on fera les formes et les couleurs bientôt</u>. Ça va ?*
E : *On a les mêmes formes moi et Owen.*
P : *<u>Voilà, ben on va déjà s'apercevoir de ça</u>. Donc, on a, attention, on a, vous m'avez dit, des rectangles. Venez un peu. Qui est-ce qui a des rectangles ?*
Toutefois, les élèves ne sauront jamais pour quelle raison ce sont les formes qui doivent être

privilégiées au détriment des couleurs, si ce n'est parce que leur enseignante leur demande. Dans la même logique, et *a contrario*, de la latitude est laissée aux élèves pour le bon déroulement ultérieur du remplissage de la fiche que recevra l'élève (les entrées n'étant pas les mêmes pour chaque élève) :
P : *Et ben, on va, les rectangles. Allez, allez-y, on va les mettre tous ensemble. Allez vas-y tu les mets dans la petite... Vas-y, vas-y. Non, on va les mettre là, regarde. On peut les mettre les uns sur les autres, hein. Ils ne se disputent pas. Ah ben si tu décides de les mettre là, on y va. Allez, on mets tous les rectangles.*

La "réussite" de ces moments de complicité entre enseignante et élèves est facilitée par le fait qu'ils reposent sur une perception visuelle directe des élèves, et non sur des critères mathématiques. De fait, les carrés sont exclus par l'enseignante de la catégorie des rectangles, les premiers n'ayant pas la même "silhouette" que les seconds en raison de "leurs côtés plus petits". Mis à part l'une ou l'autre erreur observée lors du collage, tous les élèves sélectionnent les pastilles adéquates pour répondre à la contrainte de "forme".

Mais il n'en va pas de même pour répondre à la contrainte du "nombre" : 3, 4, 5, ou 6. Pour les élèves en difficulté, l'enseignante injecte alors dans la situation la facette matérielle suivante : une bandelette sur laquelle figure les nombres de 1 à 10, représentés sous leur forme standardisée, une forme analogique (points), et un idéogramme renvoyant à un nombre correspondant de doigts levés.

Toutefois, l'usage de cette bandelette permet de contourner la technique de dénombrement visée au moyen d'une mise en correspondance terme à terme. De fait, les élèves peuvent alors dans un premier temps identifier le nombre indiqué dans la ligne du tableau avec le nombre indiqué sur la bandelette. Puis dans un second temps, prendre une pastille, la coller dans la case choisie pour chaque doigt (point) donné sur la bandelette, et réitérer le processus jusqu'à épuisement des doigts (points) indiqués sur celle-ci.

Les propos suivants de l'enseignante, recueillis lors de la séance, donnent également du crédit à cette hypothèse :

> *En général, il leur faut une case remplie parce qu'ils n'osent pas se lancer dans l'aventure. Mais une fois que c'est démarré, c'est démarré.*

C'est là un autre moyen de compléter adéquatement une ligne entière du tableau, par une mise en correspondance de pastilles avec celles déjà collées par ailleurs avec l'enseignante dans une première case du tableau, sans avoir à dénombrer.

Cette bandelette est utilisée dans trois des quatre activités suivantes. Dans le jeu du wagon, le nombre est représenté par la numération figurée des faces du dé. Cette même numération figurée est utilisée dans le jeu du tri d'images en plus des dessins des courses, même si on retrouve également la numération écrite sur l'un des côtés des boîtes. Dans le jeu du manteau, c'est la numération figurée des doigts de la main qui est utilisée. D'après l'analyse de Margolinas et Wozniak (2012), puisque l'élève a toujours la possibilité de réaliser la correspondance terme à terme grâce à ces numérations figurées, on ne peut affirmer que l'élève compte, même s'il énonce les mots-nombres de la comptine numérique.

Chapitre 3

Une praxéologie "déduction" autour du théorème fondamental de l'arithmétique

Dans ce chapitre, nous développerons quelques concepts de la *Théorie Anthropologique du Didactique* de Chevallard (1999), solidaires des concepts de la *Théorie des Situations Didactiques*, qui nous permettront de mettre à plat un modèle didactique de référence de notre laboratoire de didactique des mathématiques. Nous tracerons ensuite les grandes lignes d'un parcours d'étude lié à l'apprentissage des nombres naturels à la portée des élèves du secondaire.

3.1 La Théorie Anthropologique du Didactique

La *Théorie Anthropologique du Didactique* étend le champ d'investigation de la didactique en dehors de la classe et nous invite à étudier les rapports qu'entretiennent les individus aux objets de savoirs au sein de leur institution et les contraintes susceptibles de transformer les savoirs savants en savoirs enseignés.

Comme son nom l'indique, le parti pris épistémologique adopté et assumé par cette théorie est anthropologique :

> "*Le point crucial à cet égard, dont nous découvrirons peu à peu toutes les implications, est que la TAD situe l'activité mathématique, et donc l'activité d'étude en mathématiques, dans l'ensemble des activités humaines et des institutions sociales.*" (Chevallard 1999, p. 221)

Elle postule que toute activité humaine, y compris l'activité mathématique, relève d'une *praxéologie* :

> "*Toute activité humaine régulièrement accomplie peut être subsumée sous un modèle unique, que résume ici le mot praxéologie.*" (Chevallard 1999, p.1)

Chevallard (1999) en propose la modélisation suivante.

3.1.1 Le concept de praxéologie

La description du rapport institutionnel des individus à un objet de savoir s'ancre, en première approche, dans les tâches qu'ils sont amenés à accomplir au sein de leur institution et les techniques dont ils font usage pour y répondre :

> "*Le rapport institutionnel à un objet, pour une position institutionnelle donnée, est façonné et refaçonné par l'ensemble des tâches que doivent accomplir, par des techniques déterminées, les personnes occupant cette position. C'est ainsi l'accomplissement des différentes tâches que la personne se voit conduite à réaliser tout*

> *au long de sa vie dans les différentes institutions dont elle est le sujet successivement ou simultanément qui conduira à faire émerger son rapport personnel à l'objet considéré.*" (Bosch et Chevallard, 1999)

Toutefois, cette première approximation ne suffit pas à rendre compte de l'activité mathématique, et l'étymologie du mot "praxéologie" le critallise. En effet, celle-ci renvoie non seulement à la *praxis* (la pratique), c'est-à-dire aux techniques établies par les mathématiciens pour accomplir les tâches qu'ils se sont fixées ; mais elle renvoie également au *logos* (discours), autrement dit au discours sur cette pratique dont le rôle est de justifier la technique au regard de la tâche donnée. Par ces deux blocs, Chevallard (1999) définit le savoir-faire et le savoir constitutif d'une praxéologie :

> "*Autour d'un type de tâche T, on trouve ainsi, en principe un triplet formé d'une technique (au moins), τ, d'une technologie de τ, θ, et d'une théorie de θ, Θ. Le tout, noté $[T/\tau/\theta/\Theta]$, constitue une praxéologie ponctuelle, ce dernier qualificatif signifiant qu'il s'agit d'une praxéologie relative à un unique type de tâches, T. Une telle praxéologie - ou organisation praxéologique - est donc constituée d'un bloc pratico-pratique, $[T/\tau]$, et d'un bloc technologico-théorie, $[\theta/\Theta]$. En outre, ces techniques sont outillées par une manipulation de symboles propre aux mathématiques et nous y reviendrons. Le bloc $[\theta/\Theta]$ est ordinairement identifié comme un savoir, alors que le bloc $[T/\tau]$ constitue un savoir-faire.*" (Chevallard 1999, p. 228)

En dernière instance, on peut donc définir une praxéologie comme un quadruplet constitué, dans l'ordre :

(1) d'une tâche T à accomplir ;

(2) d'une technique τ permettant la réalisation de cette tâche ;

(3) d'une technologie θ qui justifie que la technique choisie permet bien d'accomplir la tâche considérée ; elle doit également rendre cette technique intelligible et en déterminer le champ d'opérationnalité ;

(4) et d'une théorie Θ qui offre un niveau supérieur de justification à la technique, en jouant un rôle technologique par rapport à la technologie alors envisagée comme technique de la tâche, qui consiste à justifier le couple (tâche, technique).

Le couple (tâche, technique) est appelé "bloc pratique" et correspond à un savoir-faire et le couple (technologie, théorie) est appelé "bloc logos" et correspond à un savoir. Ces deux blocs étant indissociables l'un de l'autre.

Illustrons ce concept de praxéologie sur l'exemple suivant dont la tâche consiste à démonter que

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n.(n+1)}{2}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}_0$. Une technique pour démontrer cette égalité peut consister en un raisonnement par récurrence permettant de pallier l'impossibilité de vérifier la propriété pour une infinité de naturels. Ce raisonnement admet diverses variantes mais, dans tous les cas, il comporte

(1) un argument de la récurrence : $\{P(n) \Rightarrow P(n+1)\}$, on se propose de démontrer une propriété $P(n+1)$ à partir d'une propriété $P(n)$ supposée vraie ;

(2) la vérification de conditions initiales : il suffit de vérifier $P(1)$ pour conclure.

La vérification de la condition initiale est essentielle afin d'éviter de démontrer un théorème vrai à partir d'une prémisse fausse.

Dans un premier temps, il s'agit donc de donner prise à l'argument de récurrence par une vérification "à la main" que la formule est vraie pour certains premiers naturels. Cette formule est vraie pour $n = 1$:

$$\frac{1.2}{2} = 1.$$

Dans un second temps, l'argument de récurrence consiste en une vérification que, lorsque la formule est vraie pour un naturel supérieur ou égal à un naturel pour lequel l'égalité a été vérifiée, alors elle est vraie pour le naturel suivant. On suppose que $= 1+2+3+....+n = \frac{n.(n+1)}{2}$ et on montre que :

$$1 + 2 + 3 + ... + n + (n + 1) = \frac{(n + 1).(n + 2)}{2},$$

pour $n \geq 1$. En substance :

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + ... + n + (n + 1) &= \frac{n.(n + 1)}{2} + (n + 1) \\ &= (n + 1).\left(\frac{n}{2} + 1\right) \\ &= \frac{(n + 1)(n + 2)}{2} \end{aligned}$$

Ce raisonnement par récurrence repose *in fine* sur l'assertion suivante, que l'on peut épingler comme étant sa technologie :

"*Soit un ensemble* $S \subseteq \mathbb{N}$*, si* $0 \in S$ *et* $n \in S \Rightarrow n + 1 \in S$ *alors* $S = \mathbb{N}$."

La théorie de la technique doit justifier cette technologie, en l'occurrence il faut alors justifier cette dernière assertion. Elle peut consister en :

- une axiomatique de $\mathbb{N}$ qui inclut cette assertion, c'est le choix qu'avait fait Peano :
  (1) L'élément appelé zéro, et noté 0, est un entier naturel.
  (2) Tout entier naturel n a un unique successeur, noté $S(n)$.
  (3) Aucun entier naturel n'a 0 pour successeur.
  (4) Deux entiers naturels ayant le même successeur sont égaux.
  (5) Si une propriété P est vraie pour 0 et qu'elle soit vraie pour n implique qu'elle soit vraie pour $S(n)$ alors elle est vraie pour tout n.
- une théorie qui démontrerait cette assertion technologique et reposerait alors d'une part sur deux propositions qui caractérisent totalement $\mathbb{N}$ parmi les ensembles totalement ordonnés non vides :
  (1) $\mathbb{N}$ est un ensemble totalement ordonné non vide ;
  (2) chaque entier naturel $n \neq 0$ est un successeur (autrement dit il est de la forme $n+1$) ;

  d'autre part, sur le *principe du bon ordre* :
  (3) chaque sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ admet un premier élément (c'est-à-dire un plus petit élément).

  Dans ce cas, l'assertion technologique n'est plus un axiome, comme chez Peano, mais un théorème. Dans cette théorie, l'assertion "$\mathbb{N}$ est bien ordonné" pourra trouver une justification ou être supposé évident.
- d'autres théories, comme celle de la *théorie des ensembles*, peuvent à leur tour repousser encore plus loin l'argument de l'évidence. L'axiome selon lequel $\mathbb{N}$ est bien ordonné peut alors devenir à son tour un théorème, et s'appuie alors sur d'autres "évidences" telles que "il existe un ensemble dont les éléments sont les entiers".

Nous donnons dans les sections qui suivent quelques ensemblistes possibles des nombres naturels.

3.1.2 La construction de Dedekind

Dans le contexte de l'époque où les fondements mêmes des mathématiques sont en pleine transformation, Dedekind opte pour une construction ensembliste des nombres naturels qui repose sur la notion de *chaîne* :

Définition 3.1.1. Un ensemble K est une chaîne s'il existe une application $\phi : K \to K$ telle que $\phi(K) \subset K$.

Définition 3.1.2. Soit un ensemble S. Pour tout $A \subset S$, on note

$$A_S := \bigcap_{K \text{ chaîne},\ A \subset K} K$$

la chaîne de l'ensemble A.

A_S est donc la chaîne minimale au sens de l'inclusion qui contient A. De là, on peut définir l'axiomatique de Dedekind ; le triplet $(\mathbb{N}, 0, S : \mathbb{N} \to \mathbb{N})$ satisfaisant aux axiomes suivants :

(D1) $0 \notin S(\mathbb{N})$

(D2) S est injective

(D3) $\mathbb{N} = \{0\}_{\mathbb{N}}$

L'ensemble $\mathbb{N}$ des naturels s'y exprime alors comme suit : $\{0, S(0), S(S(0)), S(S(S(0))), ...\}$. On reconnaît des similitudes entre les définitions axiomatiques de Peano et Dedekind.

La version moderne des axiomes de Peano (désignés ici sous le nom d'axiomes de Dedekind-Peano en raison des similitudes avec les axiomes originels de Peano) peut être comparée aux axiomes de Dedekind ci-dessus.

Axiomes de Dedekind-Peano : Le triplet $(\mathbb{N}, 0, S : \mathbb{N} \to \mathbb{N})$ satisfait les axiomes suivants :

(DP1) $0 \notin S(\mathbb{N})$

(DP2) S est injective

(DP3) (Induction) Si $M \subset \mathbb{N}$ est tel que

(i) $0 \in M$,

(ii) $\forall n, n \in M \Rightarrow S(n) \in M$,

alors $M = \mathbb{N}$.

Proposition 3.1.3. *Les axiomes de Dedekind-Peano sont équivalents aux axiomes de Dedekind.*

Démonstration. Il suffit de montrer que (D3) et (DP3) sont équivalents.
Supposons que le sous-ensemble M de $\mathbb{N}$ satisfasse (i) et (ii). Alors, par (i) M est une chaîne contenant 0 et par (ii) elle est minimale. On obtient donc $M = \mathbb{N}$ par (D3) et ainsi, M satisfait (DP3).
Supposons à présent que $M = \{0\}_{\mathbb{N}}$. On obtient directement (i) et (ii) donc $M = \mathbb{N}$ par (DP3) et ainsi M satisfait (D3). □

Au cours du développement des fondements des mathématiques, il apparaît évident que l'arithmétique ne suffit plus à en assurer la cohérence théorique globale. Celle-ci se voit progressivement intégrée dans la nouvelle fondation ensembliste qui, sous l'influence de Cantor, offrira un cadre plus large afin de conceptualiser les structures (notamment infinies).

3.1.3 La construction de Cantor

Comme Dedekind, Cantor base sa définition des nombres naturels sur la théorie naïve des ensembles. Pour lui, un ensemble est une "collection en un tout d'objets distincts de notre pensée", et une conception abstraite du cardinal qui en découle est la "puissance" d'un ensemble, à savoir ce qu'il reste de celui-ci une fois abstraction faite d'à la fois la nature de ses éléments, et de tout ordre éventuel. Ainsi, le cardinal d'un ensemble M est une représentation $\overline{\overline{M}}$ de l'ensemble, réduite à une collection d'"unités". Cette représentation est elle-même un ensemble. Deux ensembles sont dits équivalents, ce qui est noté $M\ M'$, s'il existe une bijection entre eux. Ils possèdent alors le même cardinal.

C'est à partir de cette définition du cardinal que Cantor va établir sa construction de l'ensemble des nombres naturels, en interprétant un nombre naturel comme le cardinal d'un ensemble fini. Il procède de la manière suivante : l'ensemble $E_0 = \{e_0\}$ correspond au cardinal que l'on note 1. On a donc $1 = \overline{\overline{E_0}}$. De là, pour un élément e_1 distinct de e_0, on considère l'ensemble $E_1 = E_0 \cup e_1$ auquel correspond un autre cardinal : $2 = \overline{\overline{E_0}}$. L'itération de cette construction définit les cardinaux finis (ou nombres naturels).
En complément des cardinaux, Cardan définit les ensembles (bien-)ordonnés via les définitions suivantes de relations, d'ordre total, et de sous-ensemble minimum.

Définition 3.1.4. Soit X un ensemble. Un ordre sur X est une relation $\leq$ qui est

1. réflexive : $\forall x \in X,\ x \leq x$
2. antisymétrique : $\forall x, y \in X, x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$
3. transitive : $\forall x, y, z \in X, (x \leq y \wedge y \leq z) \Rightarrow x \leq z$

Définition 3.1.5. Soit X un ensemble. Un ordre strict sur X est une relation $<$ qui est

1. irréflexive : $\forall x \in X,\ x \nless x$
2. transitive : $\forall x, y, z \in X, (x < y \wedge y < z) \Rightarrow x < z$

Définition 3.1.6. Un ordre $\leq$ sur X est total si $\forall x, y \in X, x \leq y \vee y \leq x$. On dit alors que $(X, \leq)$ est un ensemble ordonné.

Définition 3.1.7. Soit $(X, \leq)$ un ensemble totalement ordonné et $x \in X$. x est le minimum de X si $\forall y \in X, x \leq y$.

Définition 3.1.8. On dit que $(X \leq)$ est bien ordonné si tout sous-ensemble non vide Y de X admet un minimum.

À un ensemble ordonné M, Cantor associe le type ordinal $\overline{M}$ défini comme "le concept général qui résulte de M lorsque l'on fait abstraction de la nature des éléments m, mais que l'on conserve leur ordre de précédence". Un type ordinal est encore un ensemble ordonné formé d'unités abstraites et disposées selon le même ordre que dans M. Dès lors, Cantor qualifie deux ensembles M et N de *similaires*, ce qui est noté $M \simeq N$, s'il existe un isomorphisme d'ordre entre eux, i.e. une bijection qui respecte l'ordre. Dès lors, deux ensembles sont similaires si, et seulement si, ils ont le même type ordinal. Remarquons par ailleurs que deux ensembles similaires ont également le même cardinal.

3.1.4 La construction de Von Neumann

La théorie naïve des ensembles de Cantor mène toutefois à des paradoxes logiques tels que le paradoxe de Russel, à cause de l'idée intuitive qu'un ensemble peut être constitué de tous les éléments répondant à une propriété. Ceci conduit les mathématiciens à axiomatiser la théorie des ensembles, notamment la formation des ensembles. Ces axiomes, repris ci-dessous, sont nommés d'après les mathématiciens Zermelo et Fraenkel.

(ZF1) **Axiome d'extensionnalité** Deux ensembles sont égaux s'ils ont les mêmes éléments : $\forall A, B, (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Rightarrow A = B$

(ZF2) **Axiome de l'union** Si A est un ensemble, alors il existe B un ensemble dont les éléments sont les éléments des éléments de A : $\forall A, \exists B, \forall x, (x \in B \Leftrightarrow \exists y, (y \in A \wedge x \in y))$

(ZF3) **Axiome des parties** Si A est un ensemble, il exite B un ensemble dont les éléments sont les $x \subset A$: $\forall A, \exists B, \forall x, (x \in B \Leftrightarrow x \subset A$

(ZF4) **Schéma d'axiome de remplacement** Si φ définit une relation fonctionnelle et si X est un ensemble, alors il existe Y un ensemble dont les éléments sont les images des éléments de X par φ : $\forall X, \overline{x}, [\forall x, y_1, y_2, ((\varphi(x, y_1, \overline{x}) \wedge \varphi(x, y_2, \overline{x})) \Rightarrow y_1 = y_2] \Rightarrow \exists Y, \forall y, [y \in Y \Leftrightarrow \exists x', (x' \in X \wedge \varphi(x', y, \overline{x}))]$

(ZF5) **Axiome de l'infini** Il existe un ensemble infini qui contient l'ensemble vide et est fermé par l'opération successeur : $\exists X : (\emptyset \in X \wedge \forall y (y \in X \Rightarrow S(y) \in X))$

où une formule $\varphi(x, y, x_1, ..., x_n)$ est une relation fonctionnelle en un n-uplet d'ensembles $\overline{a} = (a_1, ..., a_n)$ si $\mathcal{U} \models \forall x, y_1, y_2, (\varphi(x, y_1, \overline{x}) \wedge \varphi(x, y_2, \overline{x})) \Rightarrow y_1 = y_2$.

Von Neumann se sert des quatre premiers axiomes pour définir un ordinal comme l'ensemble des ordinaux qui le précèdent.
Il part de l'ensemble vide (qu'on démontre exister grâce au fait que, pour un ensemble X, $\emptyset = \{x \in X | x \neq x\}$ est un ensemble et ne contient aucun élément) et, que pour tout ordinal α, on peut obtenir son successeur $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$. Il fait ensuite les identifications

$$\begin{array}{lll} 0 & = \emptyset & \\ 1 & = 0 \cup \{0\} & = \{\emptyset\} \\ 2 & = 1 \cup \{1\} & = \{\emptyset \{\emptyset\}\} \\ 3 & = 2 \cup \{2\} & = \{\emptyset \{\emptyset\}, \{\emptyset \{\emptyset\}\}\} \\ & ... & \end{array}$$

Si ces quatre axiomes suffisent pour définir les nombres naturels comme les premiers ordinaux finis, rien ne garantit l'existence d'un ensemble (infini) contenant tous ces ordinaux finis. C'est là le rôle du cinquième axiome. On note ω cet ensemble.

Dès lors, les nombres naturels ainsi construits sont équivalents à ceux construits précédemment via l'axiomatique de Dedekind-Peano :

Proposition 3.1.9. $(\omega, \emptyset, S : \alpha \mapsto \alpha \cup \{\alpha\})$ *vérifie les axiomes de Dedekind-Peano.*

Démonstration. (DP1) $\emptyset \notin S(\omega)$ car si $S(\alpha) = \emptyset$, alors $\alpha \in \emptyset$, ce qui est absurde.
(DP2) S est injective car si α et β sont des ordinaux tels que $S(\alpha) = S(\beta)$, alors on a $\alpha \in \beta \cup \{\beta\}$, ce qui signifie $\alpha = \beta$ ou $\alpha \in \beta$, et de manière symétrique, $\beta = \alpha$ ou $\beta \in \alpha$. Si $\alpha \neq \beta$, on doit alors avoir $\alpha \in \beta$ et $\beta \in \alpha$, ce qui est absurde par définition des ordinaux.
(DP3) Soit $M \subset \omega$ tel que $\emptyset \in M$ et $\forall \alpha \in M, S(\alpha) \in M$. Alors, $\omega \in M$ par l'axiome de l'infini et ainsi $M = \omega$. □

3.2 Deux niveaux de praxéologies : "modélisation" et "déduction"

Schneider (2008 et 2011) distingue, et ordonne, deux niveaux de praxéologies : les *praxéologies* de type *modélisation* et celles de type *déduction*, décrivant deux facettes de l'activité mathématique, mais cette chercheuse les considère également comme des produits de ces processus de modélisation et de déduction en termes d'organisations mathématiques, où la fin des processus de modélisation amorce le début des processus de déduction.

> "*Il s'agit de distinguer deux types de praxéologies, ce mot étant à comprendre à la fois en tant que processus et comme résultat de ce processus : d'une part, je cherche à traduire deux facettes de l'activité mathématique et, d'autre part, je décris les différents types d'organisations mathématiques auxquels conduisent respectivement ces deux facettes lesquelles peuvent être situées dans des institutions différentes : le premier type de praxéologie étant plus propre aux institutions d'enseignement, le second typique de l'activité mathématique professionnelle telle qu'elle se donne à voir dans les articles de recherche.*" (Schneider 2011, p.190)

Nous décrivons ici ces deux niveaux praxéologiques qui permettent une distinction nette entre technologie et théorie.

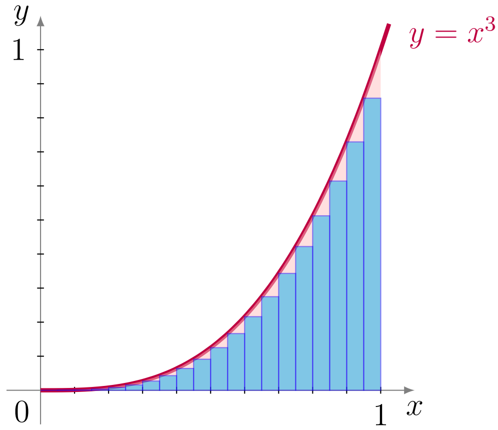
Les praxéologies de type "modélisation"

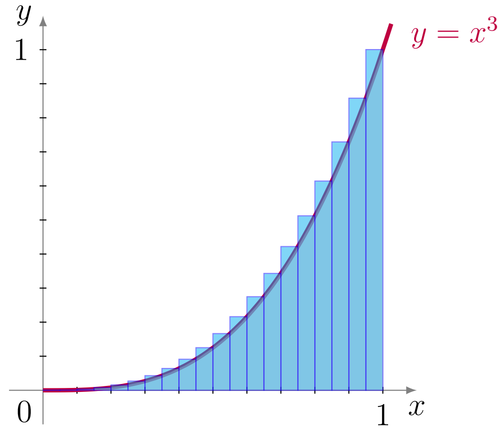
Au premier niveau praxéologique, on cherche à modéliser mathématiquement des systèmes *intra* ou *extra*-mathématiques. Les tâches que l'on se donne portent sur des objets préconstruits, au sens de Chevallard (1991), c'est-à-dire un objet qui :

> "*n'est pas construit mais présenté, par une deixis qui est un appel à la complicité dans la reconnaissance ontologique ; l'existence de l'objet apparaît alors comme évidente, non douteuse, plus justement non susceptible de doute ; l'objet est installé, par la monstration qui le désigne dans son existence entêtée, dans un état qui échappe au questionnement, parce que tout questionnement le suppose : il est un point d'appui inattaquable de la réflexion*" (Chevallard 1991, p. 91).

Ces objets préconstruits sont, par exemple, en analyse : des aires, des volumes, des vitesses variables, ou encore des tangentes en des points d'une courbe, qui ne sont pas encore définis par le biais du concept de limite. Il s'agit alors de répondre à la tâche que l'on s'est donnée par la construction d'une technique nouvelle : la limite, par exemple, ne serait-ce que sous forme embryonnaire.

Un exemple originel donné par Schneider (2008) est celui de la tâche consistant à calculer l'aire sous la courbe $y = x^3$ entre les bornes $x = 0$ et $x = 1$. Une technique pour accomplir cette tâche consiste en un encadrement de cette aire par des suites de sommes d'aires de rectangles $\frac{1}{4} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2}$ et $\frac{1}{4} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2}$, représentant respectivement des approximations par défaut et par excès (figures ci-dessous), puis en prendre la limite pour chacune des deux ou une seule. À ce stade, la limite est le résultat $\frac{1}{4}$ obtenu après avoir supprimé, dans les expressions $\frac{1}{4} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2}$ et $\frac{1}{4} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2}$, les termes où figure une puissance entière de $\frac{1}{n}$, n étant le nombre de subdivisions de l'intervalle [0,1] et ce, sans jeu de compensation. Le concept de limite y apparaît donc sous une forme embryonnaire, invoqué à partir de formes langagières telles que "aussi proche que l'on veut..." ou "à partir d'un certain rang".



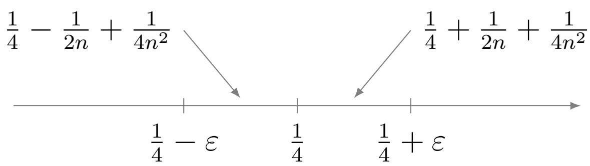


À ce stade, le *logos* ne peut être de l'ordre d'une théorie mathématique puisque, dans cette dernière, il n'y pas lieu de s'interroger sur la validité de cette technique, l'aire étant définie comme une intégrale. Dans ce cadre théorique, il s'agirait plutôt de montrer l'invariance du résultat quels que soient la subdivision et le point choisi dans les sous-intervalles de la subdivision.

> "*Comme ces objets n'existent pas encore comme objets d'une théorie et que le but est précisément de les constituer comme tels, le discours qui justifie ces techniques et les rend intelligibles eu égard à la tâche visée ne peut être théorique, au sens où l'entendraient des mathématiciens. Et, c'est ce qui rend nécessaire, me semble-t-il, l'existence d'un niveau de discours que Chevallard appelle discours technologique. Dans nos exemples, il s'agira de justifier qu'un calcul de limite fournit bien la valeur exacte d'une aire curviligne [...]*" (Schneider 2011, p.191).

Mais à ce niveau, les élèves doutent plutôt du fait que la technique construite détermine la mesure exacte de l'aire sous la courbe. La validation consiste alors à apporter de la crédibilité à cette nouvelle technique sujette à caution ; autrement dit, ce discours technologique consisterait ici à montrer que l'aire sous la courbe vaut exactement $\frac{1}{4}$. On peut alors concevoir une autre technologie consistant à prouver par l'absurde que l'aire cherchée vaut $\frac{1}{4}$ en jouant à la fois sur le fait que les suites $\frac{1}{4} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2}$ et $\frac{1}{4} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2}$ encadrent cette aire et le fait que $\frac{1}{4}$ est leur limite commune.

Supposons par exemple que cette aire soit strictement inférieure à $\frac{1}{4}$, soit égale à $\frac{1}{4} - \varepsilon$ avec ε. Comme $\frac{1}{4}$ est la limite, pour n tendant vers l'infini, de la suite $\frac{1}{4} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2}$, on peut rendre son terme général aussi proche que l'on veut de $\frac{1}{4}$ et donc compris entre $\frac{1}{4} - \varepsilon$ et $\frac{1}{4}$ à partir d'un certain rang. Mais cela signifie alors que les approximations par défaut correspondantes sont strictement supérieures à la valeur supposée de l'aire, soit $\frac{1}{4} - \varepsilon$, ce qui est contradictoire. Par raisonnement analogue, on peut également montrer que cette aire curviligne ne peut être strictement supérieure à $\frac{1}{4}$, soit égale à $\frac{1}{4} + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Elle ne peut donc valoir que $\frac{1}{4}$. On joue ici évidemment sur une intuition liée à la notion d'aire, à savoir que des surfaces emboîtées ont des aires dans un ordre donné.



Une fois ce niveau praxéologique exploré, le second niveau praxéologique peut prendre appui dessus.

Les praxéologies de type "déduction"

À ce niveau praxéologique, la tâche consiste à définir l'objet préconstruit à partir de la technique modélisée dans la première praxéologie, afin de donner prise au raisonnement déductif, en établissant ainsi une théorie au sens où pourrait l'entendre un mathématicien :

> "*Au terme de telles praxéologies* [modélisation]*, les préconstruits se constituent en concepts mathématiques par le truchement d'une définition pour se prêter à une théorie déductive : les aires sont définies comme intégrales définies, les vitesses comme des dérivées [...]. Entrent en jeu alors les praxéologies de type « déduction » dont les tâches diffèrent considérablement de celles des praxéologies « modélisation ». Elles sont en effet propres à la constitution d'une organisation déductive. Il s'agit de reformuler certains concepts pour en faire des « proof-generated concept » au sens de Lakatos, l'exemple typique étant celui du concept de limite, formulé en termes de quantificateurs et d'inégalités, et inspirant un modèle de preuve faisant officiellement abstraction de toute considération géométrique ou cinématique [...].*" (Schneider 2011, pp. 190-191)

La définition construite doit alors être suffisamment souple pour permettre la démonstration des propriétés conjecturées au premier niveau. Pour reprendre l'exemple précédent, à ce niveau praxéologique, l'aire curviligne doit maintenant être définie par la technique de limite qui avait permis de la déterminer. Ici, on définira la limite, par exemple, comme celle commune à toutes les sommes de Riemann. On attend de ce nouveau concept d'intégrale définie qu'il puisse modéliser des situations plus variées que celles où les fonctions sont positives et monotones sur l'intervalle étudié pour permettre les encadrements de l'intégrale $\int_a^b f(x)\, dx$, au moyen de sommes par défaut et par excès en se basant sur les images de f aux extrémités des intervalles d'une subdivision régulière de l'intervalle $[a, b]$. En outre, pour se prêter à la démonstration de propriétés comme celle d'additivité de l'intégrale, en toute généralité, y compris lorsque les intervalles d'intégration n'ont pas commune mesure.

En prenant comme modèle didactique de référence les deux niveaux praxéologiques de "modélisation" et "déduction" que nous venons de décrire, nous esquissons un parcours d'étude et de recherche de l'apprentissage de l'arithmétique de $\mathbb{N}$ dans la section suivante.

3.3 Proposition d'une praxéologie de l'arithmétique dans $\mathbb{N}$

Le premier niveau praxéologique consisterait en la rencontre de diverses tâches, que nous ne concevons qu'en termes de situations fondamentales. L'ensemble de ces situations et les milieux constitutifs de ces situations doivent alors, d'une part, conduire à la construction de techniques permettant d'accomplir ces tâches et de les valider, mais doivent, d'autre part, permettre la formulation d'axiomes et la conjecture de propriétés faisant partie du parcours scolaire des élèves. Une fois ce travail réalisé, la tâche que l'on se donne consiste alors à agencer déductivement ces propriétés épinglées autour des axiomes formulés.

Au chapitre précédent, nous avons décrit de telles situations de dénombrement sur lesquelles on peut s'appuyer pour, *in fine*, formuler un choix d'axiomes. Pour dénombrer la quantité d'une collection donnée, les enfants y faisaient usage de la comptine numérique comme collection équipotente dont les mots ordonnés sont mis en correspondance terme à terme avec les objets de la collection. Concrètement, cela se traduisait par le geste suivant :

(1) choisir un premier objet et lui associer le mot-nombre "un" ;

(2) désigner l'objet suivant parmi ceux qui n'ont pas encore été choisis et lui associer le mot-nombre "deux" ;

(3) réitérer cette opération jusqu'à l'épuisement des objets qui n'ont pas encore été choisis ;

(4) retenir le mot-nombre associé au dernier élément désigné ;

(5) associer ce dernier mot-nombre à la quantité dénombrée.

Un certain parallèle peut être fait entre ce geste qui accompagne le dénombrement d'une collection d'objets et les axiomes suivants dont l'arithmétique est le déploiement logique :

(P1) Il existe un nombre, noté 0, appartenant à $\mathbb{N}$;

(P2) Tout nombre $n \in \mathbb{N}$ admet un successeur unique, noté $\mathrm{s}(n)$. Deux nombres distincts ont des successeurs distincts ;

(P3) Le nombre 0 n'est le successeur d'aucun nombre ;

(P4) Si K est un ensemble tel que
- on a $0 \in K$
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \in K$, alors $\mathrm{s}(n) \in K$,

alors K contient $\mathbb{N}$.

En effet, le premier axiome (P1) découle du fait que les nombres utilisés en tant que cardinal doivent également pouvoir dénombrer le nombre d'éléments d'une collection vide. Le deuxième axiome (P2) traduit l'idée qu'une fois arrivé à une certaine étape du dénombrement, on ne peut pas avoir plusieurs manières de nommer l'élément suivant et qu'on ne peut réutiliser un mot déjà utilisé pour dénommer un nouvel élément. Le troisième axiome (P3) découle du fait qu'en dénombrement des éléments, on ne peut pas revenir sur l'élément de départ, sous peine de faire "une boucle". Le quatrième axiome (P4) est nécessaire pour donner prise à la récurrence.

A un certain stade du parcours scolaire des élèves, on peut raisonnablement les engager dans la construction d'un parcours déductif de propriétés de l'arithmétique : son théorème fondamental en outre, et d'autres résultats sur lesquels il repose : le principe de récurrence, les propriétés de l'addition et de la multiplication, le fait que l'ensemble des nombres naturels est bien ordonné par la relation $\leq$, la division euclidienne ainsi que le lemme d'Euclide, les démonstrations sont le déploiement des axiomes de Peano susmentionnés.

Étape 1 : La récurrence

L'idée derrière ce principe est que, si l'on sait démontrer un résultat pour une certaine étape et que l'on sait également démontrer que, à partir d'une étape, on sait passer à la suivante, alors le résultat doit être vrai pour chacune des étapes à partir de celle qu'on a su vérifier. Plus formellement, elle s'énonce ainsi : "Si une propriété $P(n)$ est vraie pour $n_0 \in \mathbb{N}$ et si $P(n+1)$ est vraie dès lors que $P(n)$ est vraie, alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$."
Pour $n_0 = 0$, on retrouve alors la récurrence :

Proposition 3.3.1. *Si pour tout nombre naturel n, on se donne une assertion $P(n)$, et si les conditions suivantes sont satisfaites :*

- *l'assertion $P(0)$ est vraie,*
- *pour tout n, si $P(n)$ est vrai, alors $P(\mathrm{s}(n))$ est vrai,*

alors, l'assertion $P(n)$ est vraie pour tout nombre naturel n.

Cette propriété ne repose que sur l'application de l'axiome (P4). En effet, en posant K comme l'ensemble des nombres naturels vérifiant la propriété P, les deux points de l'axiome sont vérifiés par hypothèse. On en conclut donc que K contient l'ensemble des nombres naturels et donc que la propriété P est vraie pour tous les nombres naturels.

Étape 2 : Les propriétés des opérations

La récurrence permet alors de définir l'addition. Cela n'a jamais été fait auparavant dans le parcours de l'élève. En effet, on lui apprend ce que l'addition de *chiffres* d'unités va donner puis on itère ce résultat aux chiffres des dizaines, des centaines, ... via l'addition par calcul écrit.
On peut définir l'addition de manière intuitive de telle sorte que "faire $+1$" fasse passer au nombre naturel suivant (au successeur).
Une autre manière serait de faire intervenir le successeur directement comme terme et non plus comme somme. Ainsi, on pourrait définir l'addition de a et c comme le successeur de la somme de a et le nombre b dont c est le successeur. Notons que cette définition utilise l'idée d'associativité : $a + (b + 1) = (a + b) + 1$. Il s'agira d'une propriété de l'addition. Cette définition a cependant deux problèmes : que faire s'il n'existe pas de nombre naturel b dont c est le successeur (si $c = 0$) et quand s'arrêter ? La solution à ces problèmes est de poser que la condition initiale que la somme de a et 0 est a. Ainsi, la définition récursive s'arrêtera au cas de base $c = 0$.

Définition 3.3.2. Pour tout $a \in \mathbb{N}$,

1. on pose $a + 0 = a$,
2. pour tout $b \in \mathbb{N}$, $a + \mathrm{s}(b) = \mathrm{s}(a + b)$.

À partir de cette définition, les élèves peuvent alors démontrer les propriétés d'associativité, de commutativité et d'existence du neutre 0, propriétés qu'ils n'ont jamais démontrées mais seulement illustrées dans leur cursus.

Proposition 3.3.3. *L'addition a les propriétés suivantes :*

1. *Elle est associative.*
2. *Elle admet 0 pour neutre.*
3. *Elle est commutative.*

Démonstration. On commence par montrer que 0 est neutre. Il l'est à droite par définition de l'addition et on montre qu'il l'est également à gauche par récurrence sur a. Le cas où a est nul est direct car 0 est neutre à droite. Si on suppose que $0 + a = a$, on montre que $0 + \mathrm{s}(a) = \mathrm{s}(a)$. On a $0 + \mathrm{s}(a) = \mathrm{s}(0 + a) = \mathrm{s}(a)$.
On passe à la commutativité et on montre que pour tous a et b, on a $a+b = b+a$ par récurrence sur b en fixant a. Le cas de base est vérifié car 0 est neutre. Pour l'induction, on suppose que $a + b = b + a$ et on montre que $a + \mathrm{s}(b) = \mathrm{s}(b) + a$. Pour cela, on montre par récurrence sur a que $\mathrm{s}(b) + a = \mathrm{s}(b + a)$. Encore une fois, le cas de base est vrai par neutralité de 0. Pour l'induction, on suppose que $\mathrm{s}(b) + a = \mathrm{s}(b + a)$ et on montre $\mathrm{s}(b) + \mathrm{s}(a) = \mathrm{s}(b + \mathrm{s}(a))$. On a $\mathrm{s}(b + \mathrm{s}(a)) = \mathrm{s}(\mathrm{s}(b + a)) = \mathrm{s}(\mathrm{s}(b) + a) = \mathrm{s}(b) + \mathrm{s}(a)$.
On passe à l'associativité que l'on prouve par récurrence sur c, a et b étant fixés. Le cas de base est vérifié car 0 est neutre. Concernant l'induction, on suppose que $(a + b) + c = a + (b + c)$ et on montre que $(a + b) + \mathrm{s}(c) = a + (b + \mathrm{s}(c))$. On a

$$(a + b) + \mathrm{s}(c) = \mathrm{s}((a + b) + c) = \mathrm{s}(a + (b + c)) = a + \mathrm{s}(b + c) = a + (b + \mathrm{s}(c)).$$

□

Ensuite, comme dit précédemment, il est possible de définir la multiplication sur les nombres naturels à partir de l'addition.
En effet, on peut utiliser la même idée que précédemment : comment multiplier a avec le successeur de b (comment calculer $a.(b+1)$) ? On voudrait distribuer cette multiplication ($a.b+a$), ce qui revient alors à demander que la multiplication soit égale à la somme du produit de a et b avec b. Encore une fois, cette définition est récursive et il faut alors trouver un cas de base. L'application successeur étant appliquée sur b, on va choisir la condition où le nombre par lequel on cherche à multiplier a est nul.

Définition 3.3.4. Pour tout $a \in \mathbb{N}$,

1. on pose a.0 = 0,
2. pour tout $b \in \mathbb{N}$, on pose $a.\,\mathrm{s}(b) = a.b + a$

On peut dès lors en démontrer les propriétés :

Proposition 3.3.5. *La multiplication a les propriétés suivantes :*

1. *Elle est associative.*
2. *Elle admet 1 pour neutre où on note* $1 = \mathrm{s}(0)$.
3. *Elle est commutative.*
4. *Elle distribue l'addition.*

Démonstration. On commence par prouver que 1 est neutre pour la multiplication.
On a $a \cdot 1 = a \cdot \mathrm{s}(0) = a \cdot 0 + a = a$. On montre par récurrence sur a que $1 \cdot a = a$. Concernant le cas de base où a est nul, la définition de la multiplication permet directement de conclure que le produit est nul. Si on suppose que $1 \cdot a = a$, alors on a $1 \cdot s(a) = a \cdot 1 + 1 = a + 1 = s(a)$.
Ainsi, 1 est bien neutre pour la multiplication. On passe à présent à la commutativité.
On fixe a et on procède par récurrence sur b.
On a bien que $a \cdot 0 = 0$ et on prouve par récurrence sur a que $0 \cdot a = 0$. Si a est nul, l'égalité est vraie par définition de la multiplication et si l'égalité est vraie pour a, on a $0 \cdot \mathrm{s}(a) = 0 \cdot a + 0 = 0$.
On remarque que l'on vient de prouver que 0 était absorbant pour la multiplication.
Si on suppose que $a \cdot b = b \cdot a$, pour tout a, on montre que $a \cdot \mathrm{s}(b) = \mathrm{s}(b) \cdot a$ pour tout a également. Pour cela, on procède par récurrence sur a. Le cas de base où a est nul est direct car $a \cdot \mathrm{s}(b) = a \cdot b + a = 0$ et $\mathrm{s}(b) \cdot a = 0$ par définition de la multiplication. Pour l'induction, on suppose que $a \cdot \mathrm{s}(b) = \mathrm{s}(b) \cdot a$ et on montre que $\mathrm{s}(a) \cdot \mathrm{s}(b) = \mathrm{s}(b) \cdot \mathrm{s}(a)$. Pour le membre de gauche, on $\mathrm{s}(a) \cdot \mathrm{s}(b) = \mathrm{s}(a) \cdot b + \mathrm{s}(a) = b \cdot \mathrm{s}(a) = a + 1 = b \cdot a + b + a + 1$. Pour le membre de droite, on a $\mathrm{s}(b) \cdot \mathrm{s}(a) = \mathrm{s}(b) \cdot a + \mathrm{s}(b) = a \cdot \mathrm{s}(b) + b + 1 = a \cdot b + a + b + 1$. Alors, on a bien l'égalité entre les deux membres. Concernant la distributivité, on fixe b et c et on montre par récurrence sur a que $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ et $(b+c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$. Grâce à la commutativité de la multiplication, il suffit de montrer seulement l'une des deux égalités. On montre donc la première.
Si a est nul, le résultat est bien vrai car 0 est absorbant.
Si le résultat est vrai pour a, on le montre pour son successeur $\mathrm{s}(a)$. On a $\mathrm{s}(a) \cdot (b + c) = a \cdot (b + c) + (b + c) = a \cdot b + a \cdot c + b + c = (a \cdot b + b) + (a \cdot c + c) = \mathrm{s}(a) \cdot b + \mathrm{s}(a) \cdot c$.
Pour finir, on montre l'associativité en fixant a et b et en procédant par récurrence sur c : $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. On a bien l'égalité si c est nul car 0 est absorbant. Concernant l'induction, on suppose avoir $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ et on montre que $(a \cdot b) \cdot \mathrm{s}(c) = a \cdot (b \cdot \mathrm{s}(c))$. On a $(a \cdot b) \cdot \mathrm{s}(c) = (a \cdot b) \cdot c) + a \cdot b = a \cdot (b \cdot c) + a \cdot b$. De plus, on a $a \cdot (b \cdot \mathrm{s}(c)) = a \cdot (b \cdot c + b) = a \cdot (b \cdot c) + a \cdot b$ et les deux membres sont donc bien égaux. $\square$

Étape 3 : $(\mathbb{N}, \leq)$ est bien ordonné

L'application successeur induit l'idée que certains éléments en précèdent ou suivent d'autres, et qu'il est possible d'ordonner les nombres naturels. Un nombre b serait alors supérieur à un autre nombre a s'il est possible d'obtenir b en appliquant un certain nombre c de fois l'application successeur, ou encore s'il existe un nombre naturel c tel que $b = a + c$. On notera alors $a \leq b$.
De plus, on a toujours $a \leq a$, $(a \leq b \wedge b \leq a) \Rightarrow a = b$ et $(a \leq b \wedge b \leq c) \Rightarrow a \leq c$. Ainsi, cette nouvelle relation est réflexive, antisymétrique et transitive, c'est donc un ordre.
On peut également prouver que deux éléments a et b sont toujours comparables, à savoir on a toujours $a \leq b$ ou $b \leq a$, ce qui en fait un ordre total.
Par ailleurs, si on considère un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$, on peut toujours en déterminer l'élément minimum puisque tous les éléments sont comparables deux à deux et qu'il n'existe aucun nombre naturel compris entre deux nombres naturels consécutifs. En effet, si on procède par contraposée en considérant un sous-ensemble E de $\mathbb{N}$ n'admettant pas de minimum, on peut montrer que cet ensemble est vide.
Pour cela, on montre la propriété "$P(n) : \forall i \leq n, i \notin E$" par récurrence sur n.
Le cas de base $n = 0$ revient à montrer que 0 n'est pas un élément de E. En procédant par l'absurde, en supposant que 0 appartient à l'ensemble E, on obtient que E admet un élément minimum car 0 est inférieur à tout nombre naturel, d'où une contradiction.
Si on suppose que la propriété $P(n)$ est vraie, on montre que $P(n + 1)$ est également vérifiée. Encore une fois, on procède par l'absurde en supposant que $P(n+1)$ n'est pas vérifiée. Dans ce cas, il existe un nombre i inférieur ou égal à $n + 1$ et appartenant à E. Comme $P(n)$ est vrai, on en déduit que i doit être strictement supérieur à n et donc que i est égal à $n + 1$.
De plus, comme aucun nombre inférieur ou égal à n n'appartient à E et que $\mathbb{N}$ est totalement ordonné, on en déduit que tous les éléments de E sont au moins égaux à $n + 1$. Donc, $n + 1$ est un minimum de E, ce qui conduit à une contradiction avec la définition de E. On a donc la proposition suivante :

Proposition 3.3.6. *L'ensemble ordonné* $(\mathbb{N}, \leq)$ *est bien ordonné.*

Étape 4 : La division euclidienne

Dès l'école primaire, les élèves ont appris à déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne d'un nombre par un autre. Cependant, ils n'ont jamais appris qu'il était toujours possible de déterminer ce quotient et ce reste et qu'ils étaient uniques. Prenons deux nombres naturels a et d avec d non nul et regardons s'il est toujours possible de trouver q et r tels que $a = q.d + r$ et $0 \leq r < d$. On peut procéder par récurrence sur a en fixant d. Si a est nul, alors $q = r = 0$ conviennent puisque $0 = 0.q + 0$. Si on suppose que la division existe pour a, on la montre pour $a + 1$. On a $a = qd + r$ avec $0 \leq r < d$. Donc $a + 1 = qd + r + 1$.
Si $r + 1 < d$, le couple $(q, r + 1)$ convient. Sinon, puisque r est strictement inférieur à d, on obtient $r + 1$ est égal à d. Alors, on a $a + 1 = qd + d = (q + 1)d$ et le couple $(q + 1, 0)$ convient.
On passe à présent à l'unicité. Si on suppose avoir deux couples (q, r) et (q', r'), on montre qu'ils sont égaux.
On commence par prouver que $q = q'$. Si ce n'est pas le cas, l'un est strictement supérieur à l'autre. On peut supposer sans perte de généralité $q' > q$. Alors, il existe un nombre naturel k non nul tel que $q' = q + k$. Dans ce cas, on a $qd + r = (q + k)d + r' \Leftrightarrow r = kd + r'$. On en déduit que r est supérieur ou égal à r' et que $r - r' = kd$. Or, on a $kd = r - r' \leq r < d$ et $kd \geq d$ puisque k vaut au moins 1. Ainsi, on ne peut pas avoir $q < q'$ ni, de manière symétrique, $q' < q$.
Dès lors, on obtient la nouvelle égalité $qd + r = qd + r'$ dont on déduit que r et r' sont égaux.
Ainsi, les deux couples sont bien égaux. On a donc obtenu le résultat suivant :

Proposition 3.3.7 (Division euclidienne)**.** *Soit a et d deux nombres naturels avec d non nul. Il existe des nombres q et r satisfaisant les conditions $a = qd + r$ et $0 \leq r < d$. De plus, le couple (q, r) est unique.*

Étape 5 : Le lemme d'Euclide

Une propriété des nombres premiers que les élèves ont vue mais n'ont jamais démontrée également est que, si un nombre premier divise un produit de deux nombres, alors il doit diviser l'un des deux.
En effet, si on procède par l'absurde en supposant qu'il existe deux nombres naturels a et b tels que p divise le produit ab mais p ne divise ni a ni b, on peut fixer un tel couple (p, a). Dès lors, on peut considérer l'ensemble E des nombres naturels tels que p divise le produit ab mais ne divise pas b.
E est non vide, donc admet un plus petit élément b_0 car l'ensemble des nombres naturels est bien ordonné. De plus, b_0 est non nul car tout nombre divise 0 et b_0 est différent de 1 car p ne divise pas a.
On montre par l'absurde que b_0 doit être inférieur à p. Si ce n'est pas le cas, en effectuant la division euclidienne de b_0 par p, on trouve des nombres naturels q et r_0 tels que $b_0 = qp + r_0$ avec $0 \leq r_0 < p$. Comme p ne divise pas b_0, on trouve que r_0 est non nul. De plus, puisque r_0 est strictement inférieur à p qui est lui-même inférieur ou égal à b_0, on obtient que r_0 est strictement inférieur à b_0. Ainsi, si on montre que r_0 est un élément de E, on obtiendra une contradiction de la minimalité de b_0 et on aura prouvé que b_0 est strictement inférieur à p.
Tout d'abord, on montre que p divise le produit ar_0. Puisque p divise le produit ab_0, il existe un nombre naturel q_0 tel que $ab_0 = q_0p$. Alors, $ar_0 = q_0p - aqp = (q_0 - aq)p$ et p divise bien ar_0.
De plus, p ne divise pas r_0. En effet, en effectuant la division euclidienne de r_0 par p, on obtient $r_0 = 0.p + r_0$ et r_0 est non nul.
Donc, r_0 est bien un élément de E, ce qui est impossible, donc b_0 est strictement inférieur à p.
En effectuant la division euclidienne de p par b_0, on trouve deux nombres naturels q_1 et b_1 tels que $p = q_1b_0 + b_1$ avec $0 < b_1 < b_0$.
Si on montre que b_1 est un élément de E, on aura une contradiction avec la minimalité de b_0, ce qui prouvera le résultat.
Tout d'abord, on a $ab_1 = ap - aq_1b_0 = ap - q_0q_1p = (a - q_0q_1)p$. Donc p divise le produit ab_1.
De plus, puisque p ne divise pas b_1 car b_1 est non nul et strictement inférieur à b_0, et donc à p.
Ainsi, on a démontré le résultat suivant :

Lemme 3.3.8 (Lemme d'Euclide)**.** *Si un nombre premier p divise le produit de deux nombres a et b, alors p divise a ou p divise b.*

Étape 6 : Le théorème fondamental de l'arithmétique

On peut déduire du lemme d'Euclide et des résultats évoqués précédemment que :

Théorème 3.3.9. *Tout nombre naturel au moins égal à 2 se décompose en un produit de facteurs premiers (éventuellement réduit à un seul facteur). La décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.*

Démonstration. On commence par l'existence et on procède par récurrence sur n.
Concernant le cas de base où n vaut 2, le théorème est vérifié car 2 est premier.
Si on suppose le théorème vrai pour tout nombre naturel inférieur ou égal à n, on montre qu'il reste vrai pour $n + 1$.
Deux cas se présentent : soit $n + 1$ est premier, soit il ne l'est pas. Le premier cas se règle de

manière directe comme le cas de base. Pour le second, par définition d'un nombre non premier, il existe deux nombres naturels a et b supérieurs ou égaux à 2 et inférieurs ou égaux à n tels que $k+1 = a.b$. Par hypothèse de récurrence, a et b se décomposent en un produit de facteurs premiers, donc $n+1$ aussi.
On passe à présent à l'unicité à l'ordre des facteurs près et on procède par l'absurde.
On suppose qu'il existe un nombre dont la décomposition en facteurs premiers n'est pas unique et on considère E, l'ensemble de tels nombres. Comme l'ensemble des nombres naturels est bien ordonné et que E est non vide, E admet un plus petit élément qu'on note k. On considère deux décompositions en facteurs premiers de k :

$$p_1...p_r = k = q_1...q_s.$$

Tous les p_i sont distincts des q_j, sinon le quotient de k par ce facteur commun serait un nombre qui contredirait la minimalité de k dans E.
De plus, comme p_1 divise k, il divise également le produit $q_1...q_s$. Par le lemme d'Euclide, on obtient alors qu'il existe un indice j tel que p_1 divise q_j. Comme q_j est premier, on trouve que p_1 vaut 1 ou q_j, ces deux cas étant impossibles. Donc, il n'existe pas de nombre admettant deux décompositions distinctes hormis à l'ordre de ses facteurs près. $\square$

Conclusion

Le premier chapitre a montré la nécessité, dès lors que l'on s'intéresse aux phénomènes d'apprentissages et d'enseignement de savoirs mathématiques, du développement de situations didactiques favorisant l'accroissement des connaissances des élèves. C'est l'un des créneaux de recherche du laboratoire (le *Ladimath*) de didactique des mathématiques de notre université, dont le modèle didactique de référence a été présenté au troisième chapitre en termes de praxéologies "modélisation" et "déduction", décrivant deux types distincts mais solidaires d'organisations mathématiques.

La première vise la modélisation par les élèves de techniques mathématiques permettant de répondre à des tâches mathématiques données et de s'assurer de la validité du modèle construit. Nous ne concevons les tâches de ce premier niveau d'organisations mathématiques qu'en termes de situations fondamentales. Le point de départ des organisations mathématiques déductives est alors alimenté par les techniques modélisées dans le praxéologies "modélisation". Ces techniques, moyennant quelques ajustements, fournissent l'axiomatique ou la définition de concepts qui donnent prise au raisonnement déductif. A ce niveau, la tâche que l'on se donne est alors la construction de cet édifice théorique dont on a conjecturé les propositions au premier niveau de type "modélisation". Le troisième chapitre en a tracé les grandes lignes autour du *théorème fondamental de l'arithmétique*. Cette proposition de parcours déductif reste à investiguer dans de futurs travaux du laboratoire.

Ce premier niveau est donc crucial pour l'apprentissage des élèves, non seulement en raison du travail qu'il permet sur les obstacles d'apprentissages, mais aussi parce qu'il permet d'engager les élèves dans une tâche de construction de mathématiques déductives. Toutefois, le deuxième chapitre a montré le contraste entre les situations développées dans les recherches en didactique concernant l'apprentissage du nombre à l'école maternelle et les pratiques dominantes sur le terrain de l'enseignement, qui semblent ne pouvoir se départir des effets pervers du contrat didactique.

Annexe : Retranscription d'activités en classe de deuxième année maternelle

Dans un premier temps, l'enseignante s'assure que tous les élèves sont en mesure d'identifier les différentes forment qui désigneront les entrées des colonnes, et elle établit un vocabulaire commun. En particulier, elle insiste sur la distinction entre "cercle" et "disque" ainsi que la différence entre "rectangle" et "carré".

La professeure place une grande feuille sur le sol et prend une boîte. Elle l'ouvre.
Élève : *C'est des formes.*
Professeure : *C'est des formes quoi ?*
E : *De châ-* (petite pause) *-teau ?*
P : *De château, oui parce qu'on est beaucoup dans les châteaux pour le moment.*
La professeure sort un triangle jaune de la boîte.
P : *C'est quelle forme ça ?*
E : *Triangle !*
Autres élèves : *Triangle !*
P : *Je te le donne.*
Elle sort un disque bleu de la boîte.
E : *Rond !*
Autres élèves : *Rond !*
P en grimaçant : *C'est rond mais quand on l'a en main...* (elle se fait interrompre)
E : *Cercle !*
P : *Cercle, c'est comme un cerceau. On peut faire le tour.* Elle dessine un cercle dans l'air. *Là c'est quoi ?*
E : *Aimant !*
P : *Non. Ah, c'est comme un aimant, oui. C'est quoi ?*
Plusieurs élèves à tour de rôle : *Cercle.*
P : *Allez, on a vu le petit mot.* Elle montre la forme et en fait le tour avec son doigt. *Quand on a ...* (elle se fait interrompre).
E : *Cercle !*
P : *Le cercle, c'est ce qui est autour, le cercle.* Elle fait le tour de la forme avec son doigt. *Quand je dessine, quand vous contournez autour...* (elle se fait interrompre).
E : *Un rond.*
P : *Et c'est rond, c'est la forme : rond. Là, c'est triangle* (elle mime un triangle avec ses doigts). *C'est un ...*
E : *Triangle !*
E : *Rond.*
La professeure montre sa bouche.
P : *Lisez un peu sur mes lèvres.* En murmurant : *Disque.*
Élèves : *Disque.*
P : *Un disque. Ça va ? Mais c'est vrai que c'est un rond. Alors, attention. Plus difficile, celui-là.*

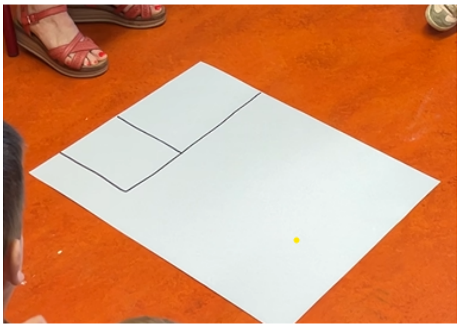
Ne vous trompez pas et réfléchissez bien. Elle sort un rectangle jaune.
E : *Un rectangle !*
Autre élèves : *Rectangle !*
P : *Aah yes ! Vous ne m'avez pas sorti le...* Elle cherche dans la boîte. *Qu'est-ce que vous me sortez souvent ?*
E : *Un carré.*
La professeure sort un petit carré rouge.
P : *Aah ! Et comment est-ce qu'on les reconnaît ?*
E : *Un carré.*
E : *Parce que...*
P : *Parce que ?*
E : *Parce qu'il y a pas quatre côtés.*
Autre élève : *Ben si il y a quatre côtés mais c'est plus grand les lignes.*
La professeure sort un grand carré jaune.
P : *Aah, il y a quatre côtés. On va les compter. Il y a quatre côtés.*
Ensemble : *Un, deux, trois, quatre.*
P : *Mais les côtés, ils sont comment ? Ils sont les... De la même ...* Elle mime la longueur d'un côté. *... Longueur* (elle entame le mot et les enfants terminent avec elle). *Oui ? On verra si... On, on fera, on fera la fois prochaine, on mesurera, on mettra de la peinture comme ça* (elle passe son doigt sur les côtés du carré). *Et puis, on fera cloup, cloup, cloup* (elle pose le carré successivement sur ses côtés sur la feuille blanche). *Et on verra que c'est...* Elle se fait interrompre.
E : *Comme des roues.*
P : *On le fera, d'accord ? Rappelez-le moi. Vous me le rappellerez ?*
Le mime de l'enseignante renvoie à la comparaison visuelle des traces de peinture laissées par chacun des côtés de la figure peinte. Les élèves pourraient alors par comparaison directe des deux traces réalisées côte à côte se prononcer sur l'égalité ou non de leurs longueurs.

Ne disposant pas de peinture à l'instant, elle mime alors l'égalité des longueurs avec des parties de ses bras et encourage les élèves à faire de même.
P : *Et là, comme tu as dit, il est plus long. Il y a deux... Allez, on va faire avec ses mains.* Elle met ses avant-bras verticalement devant elle. *Et on va faire un rectangle. Allez, on a les deux côtés.* Elle reprend le rectangle et place ses mains sur les deux largeurs. *Ils sont un peu plus courts. D'accord ? Et puis, on va faire les deux longs avec ses bras.* Elle place ses avant-bras l'un au-dessus de l'autre horizontalement devant elle. *Comme ça. D'accord ? Alors, comme vous êtes binômes, par deux, vous allez essayer avec vos deux côtés, les deux petits et les deux grands...* (elle remime les côtés faits avant) *... de me réaliser un rectangle. Allez, allez-y un peu.*
Les enfants remiment les gestes des côtés du rectangle.
P : *À deux, il faut vous mettre par deux. Vous avez besoin de quatre bras puisqu'il y a quatre côtés, un, deux, trois, quatre.* Elle compte les côtés en les montrant sur la forme. *Comment est-ce qu'on va faire ça ? Aaah !Magnifique ! Regardez* (en pointant un duo) ! *Rachelle, elle a fait les deux longs et Kyara, elle a fait les deux plus courts.* À une autre élève : *Allez, complète un peu la forme géométrique de ta copine. Qu'est-ce que tu dois faire ? Ah, ça c'est plus ou moins un carré parce que vous avez pris chacun vos deux petites mains. Toi, tu peux faire les longs côtés et toi, tu peux faire les petits, les courts. Regarde, et là, tu as plus ou moins un rectangle.* Elle place les bras des enfants puis elle passe à un autre binôme. *Plus ou moins, regarde. Tu fais deux longs et Vadim, il fait les deux plus courts. Voilà, comme ça.* Elle place encore une fois les bras des enfants. *C'est subjectif hein, on le fera...* Elle se fait interrompre.
E : *Madame, regarde !*
P : *Voilà, vous avez trouvé !* Elle se tourne vers un autre binôme : *Ça aussi, c'est valable. Oui,*

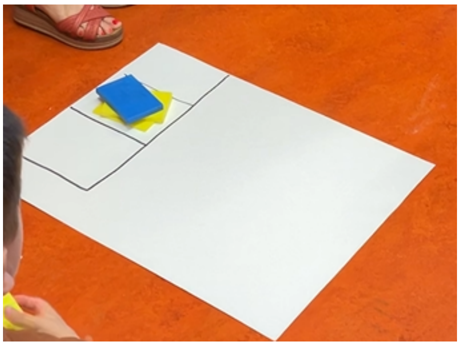
c'est juste, vous avez raison. Vous avez raison, vous l'avez fait avec les mains et les plus petites, les courtes. Magnifique. On fera ça, on fera ça lundi.

Une fois assurée qu'elle peut miser sur la reconnaissance visuelle des différentes figures par les élèves, elle distribue différentes pièces de la boîte à chaque élève.
P : *C'est bon, allez parce que c'est pas le but du jeu ici. Venez, venez, venez, venez. Alors, je vais donner. Allez. Une forme à chacun. Peu importe. Peu importe.* Elle distribue des formes à chaque élève. *C'est pas grave. C'est pas grave. Je vous en donne. Voilà, voilà, voilà.*
E (à un autre élève) : *On n'a pas la même couleur.*
P : *Si tu peux, elle ne va pas te manger, hein. Elle ne peut mal de te manger. Je la distribue. Je pense que je me suis trompée, euh Simon. Tiens, choupet. Tu en as une toi ?*
E : *Non.*
P : *Et tu veux quoi ?*
E : *Euh... un carré.*
E : *Et Vadim aussi il en a pas.*
P : *Oh, un carré, tu veux un carré ? Tiens, voilà. C'est sûr que c'est ce que je t'ai donné ?*
E : *Oui.*
P : *Ok. Alors, chacun en a une ?*
E : *Non, Vadim non.*
P : *Oulala, pardon Vadim. Voilà, alors. Vous avez des formes mais elles sont ...* Elle s'interrompt pour entamer le mot avec les enfants.
Ensemble : *Différentes.*

L'enseignante engage alors les élèves à catégoriser ces différentes formes. Certains souhaitent les classer par couleurs, d'autres par formes, d'autres encore par formes de même couleur.
P : *Alors, comment est-ce qu'on pourrait déjà les ranger ?*
E : *Rholala.*
E : *Ben... On peut les mettre en ordre.*
P : *En ordre, c'est-à-dire comment en ordre ? Vas-y, explique-toi chou.*
E : *Ben on le fait bien.*
P : *On pourrait...* (elle se fait interrompre)
E : *Les jaunes avec les jaunes, les carrés avec les carrés.*
P : *Ah et ben on fait ça ! Attends, parce que tu me dis plusieurs choses hein. Tu dis quoi ?*
E : *Les carrés jaunes avec les carrés jaunes. Les rectangles bleus avec les rectangles bleus.*
P : *Alors, tu veux mettre tous les rectangles ? Tu veux mettre par forme ou par couleur ? On va choisir.*
E : *Les deux.*
P : *Les deux, oulala.* (rires) *On est déjà dans les ensembles. D'accord, on fera les ensembles après mais retiens l'idée. Alors, on va d'abord peut-être faire les formes ? Parce qu'aujourd'hui, c'est les formes et je te promets qu'on fera les formes et les couleurs bientôt. Ça va ?*
E : *On a les mêmes formes moi et Owen.*
P : *Voilà, ben on va déjà s'apercevoir de ça. Donc, on a, attention, on a, vous m'avez dit, des rectangles. Venez un peu. Qui est-ce qui a des rectangles ?* Elle dessine une case sur la feuille pour y déposer les rectangles des élèves.



Plusieurs élèves se lèvent : *Moi.*
P : *Et ben, on va, les rectangles. Allez, allez-y, on va les mettre tous ensemble. Allez vas-y tu les mets dans la petite... Vas-y, vas-y. Non, on va les mettre là, regarde. On peut les mettre les uns sur les autres, hein. Ils ne se disputent pas. Ah ben si tu décides de les mettre là, on y va. Allez, on met tous les rectangles.*
E : *Moi, c'est un disque que j'ai.*
P : *C'est un disque.*
E : *Moi c'est un triangle.*
P : *C'est un triangle ça ? C'est quoi ça ?*
E : *Non, c'est un rectangle mais en plus petit.*
P : *Mais c'est toujours un rectangle, on est bien d'accord ?*
E : *Oui.*
Un élève pose son rectangle dans une autre case sur la feuille.
P : *Heu, les rectangles.*

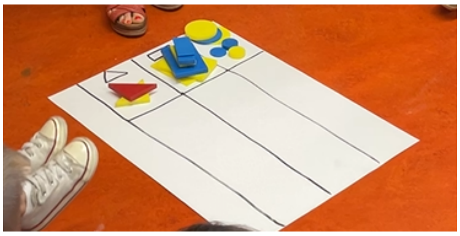


E : *Moi, j'ai un carré.*
P : *Attends.* À un autre élève : *Et toi ? Et ben vas-y. Attends, si tu ne veux pas le mettre maintenant, c'est pas grave. Attention. Donc là, c'est les rectangles.* Elle dessine un rectangle en haut de la case. *On est bien d'accord ?* Elle dessine un triangle en haut de la case à gauche de celle des rectangles. *Là, on aimerait bien avoir...* (deux élèves se lèvent pour déposer leur triangle) *...les triangles. On les superpose, hein.*
E : *Il y en a que deux.*
P : *Vous êtes... Il y en a que deux ?*
E : *Ben non, il y a encore... Ah non.*
E : *Moi c'est un rond.*
P : *Il y en a que deux ?*
E : *Oui.*
P : *Sûrs ?*
E : *Ah non, il y a ...*
P : *Ah ben voilà.* Elle fait signe à une élève de se rasseoir. *Ne te laisse pas influencer.* Elle dessine un cercle sur la case à droite de celle des rectangles. *Après, attention, ça c'est quoi que*

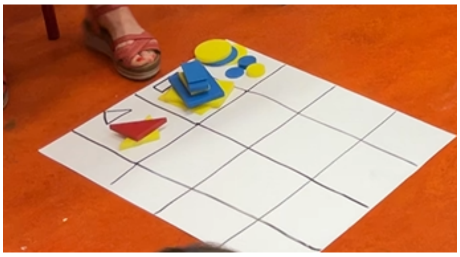
j'ai dessiné ?
Élèves : *Un rond.* Plusieurs élèves se lèvent.
P : *Attendez ! Attendez ! Attendez ! C'est un cercle, vous me demandiez tantôt un cercle. C'est un cercle, c'est rond, oui ? Le, le disque, voilà quand il y a la surface. Qu'est-ce qu'il faudrait faire pour que ce soit un disque ? Il faudrait que je le colorie.* Elle colorie le disque. *Parce qu'alors, quand c'est la surface pleine... Ça c'est très difficile, je vous le dis. Mais c'est très difficile, on va partir que c'est rond. D'accord, on est d'accord ?*
Élèves : *Oui.*
P : *Allez, on y va, on les range. On les superpose hein. Voilà. Alors, pourquoi est-ce qu'il y en a qui ont gardé les petites formes en main ?*
E : *Parce que, parce que, parce que vous m'avez pas fait.*
Autre élève : *Ben oui, parce qu'il y a les carrés, là ...* (en pointant la feuille) *... il y a pas.*
P : *Ah il y a pas là les carrés.*
E : *Et en plus il y en a deux qui ...* Il se fait interrompre.
P : *Et pourquoi est-ce que... Et pourquoi est-ce que Rachelle, non pas Rachelle, attends, je... Je me trompe.*
E : *Alice.*
P : *Alice, Louise et Simon, pourquoi est-ce qu'ils ... Regardez les copains, ils ont mis.* Elle pointe un disque. *C'est un disque. Que je sois grand ou petit. Je suis toujours un disque, je suis toujours rond. Est-ce que vous n'avez pas des petits rectangles, vous ?* Les trois élèves se lèvent pour poser leur rectangle dans la bonne case. *Alors on pourrait les mettre dans les rectangles.*
E : *Mais par contre, il y a pas beaucoup de triangles.*
P : *Ah, est-ce qu'il y a des petits, des triangles ?*
E : *Euh, non.*
P : *Non, il y avait que des ...*
E : *Grands.*
P : *Grands. D'accord, je vous ai distribué... Mais c'est pas grave... du tout. Ok ?*
E : *Mais moi, j'ai un carré.*
P : *Ah le carré, est-ce qu'on en a besoin ?* (elle désigne la feuille)
E : *Non.*
P : *Alors viens, on va l'échanger. Viens, on va faire secrètement. On va échanger ta forme.*
E : *Rachelle aussi.*

L'enseignante reprend progressivement la main pour continuer la constitution du tableau à double entrée.
P : *Mais tu ne dis...* Elle s'interrompt. *Toi aussi, tu avais un carré ?* En murmurant : *Allez, viens, viens. Je vais vous donner... Chut, chut. Je vais vous donner en secret... Attendez...* Elle donne une forme au premier élève. *Garde-le bien, hein. Ne dis rien à personne, hein.* Elle donne une forme à la deuxième élève. *Garde-le bien, ne le dis à personne, hein. Allez, vas-y, voilà.* Elle s'adresse à l'ensemble des enfants. *Attention, les amis.* Elle pointe la feuille où sont déposées des formes.

Là, on a des formes. On a des formes. Attention, je vais descendre les longues colonnes. Elle prolonge les lignes séparant les cases contenant les formes pour en faire des colonnes. *Là, c'est comme si c'était le toit de la maison. Je descends mes colonnes.*

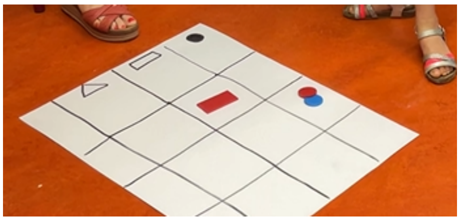


P : *Et attention, fermez les petits yeux, pas de tricheur.* Les élèves cachent ou ferment leurs yeux et elle trace des lignes sur la feuille.



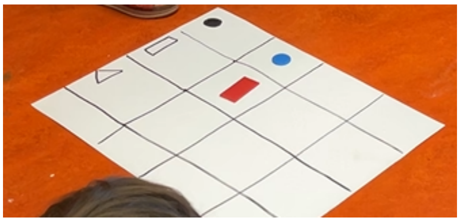
P : *Pas de tricheur. Pas de tricheur. Coucou.* Les élèves ouvrent les yeux. *Qu'est-ce que j'ai bien pu faire ?*
E : *Les carrés !*
P : *J'ai fait des carrés, des damiers, oui.*
Un élève s'approche de la feuille.
P : *Quoi ? Qu'est-ce que tu veux faire ? Dis-moi, dis-moi.*
E en pointant les rectangles : *C'est pas juste ça.*
P : *Si hein, c'est des grands, des petits mais c'est toujours des car- des rectangles hein. C'est la même chose. Tu es bien d'accord, oui ?*
E : *Oui mais...* Il se fait interrompre par la professeure qui reprend à l'ensemble de la classe.

L'enseignante amorce alors une explication de lecture d'un tableau à double entrée, en multipliant les exemples de positions possibles où placer les différentes formes géométriques. Dans un premier temps, elle fixe l'entrée des colonnes.
P : *Qu'est-ce qu'il s'est passé ? Alors, attention...* Elle retire toutes les formes de la feuille. *J'ai besoin que vous fermiez vos yeux.* Les élèves ferment les yeux. *Et j'ai besoin de la forme de Rachelle et de Ben. Venez, ouvrez vos yeux hein pour marcher.* En murmurant à Rachelle : *Alors, tu me la donnes et on va la déposer là.* Elle dépose le rectangle rouge dans la première case en-dessous de la case des rectangles. En murmurant à Ben : *Tu me la donnes et on va la déposer là-bas.* Elle prend son rond rouge ainsi qu'un rond bleu et les dépose dans la deuxième case en-dessous de la case des ronds.

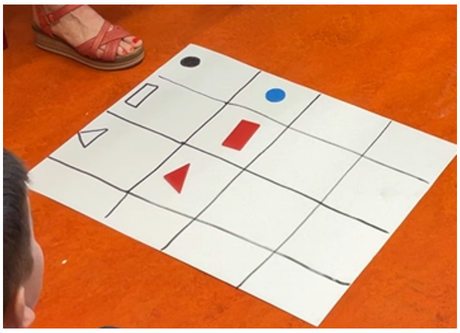


P : *Vas-y, tu peux aller t'asseoir. Vas-y. Vous avez vu ? Vas-y.* Au reste des élèves : *Coucou.* À Rachelle en murmurant : *Tu peux aller t'asseoir.* À l'ensemble de la classe : *Qu'est-ce qu'il s'est passé ?*
E : *C'est pas juste !*
P : *Pourquoi est-ce que ce n'est pas juste ? Dis-moi.*
Autre élève en se levant : *Parce que...*

P : *Oh il n'y a pas besoin de se lever.*
Élève du "C'est pas juste" : *En fait, ça, ça le rond rouge, c'était mon.*
P : *Oui, mais ça c'est pas grave, il ne t'appartient pas, il appartient à tous les copains. Qu'est-ce qu'il s'est passé ?*
E : *Ça, ça doit aller là. Et ça, ça doit aller là.*
P : *Et pourquoi est-ce que je ne peux pas le mettre dans la colonne des rectangles ? Il est toujours en-dessous du rectangle.*
E : *Parce que c'est pas la même case.*
P : *C'est pas la même case... Et pour rester dans cette case-là, qu'est-ce que je devrais faire ?*
E : *Un rectangle.*
P : *Le dessiner là ?*
E : *Ben non ! Comme les lignes.*
E : *Comme les bras.*
P : *Comme les bras, comme les lignes, oui. Allez vous asseoir, vous verrez mieux. Attention, je suis d'accord avec vous, hein. Je suis tout à fait d'accord, oui. Attention, fermez les petits yeux.* Les élèves ferment les yeux et elle enlève le rond rouge et remonte le rond bleu d'une case, à la même hauteur que le rectangle. *Allez, coucou.*



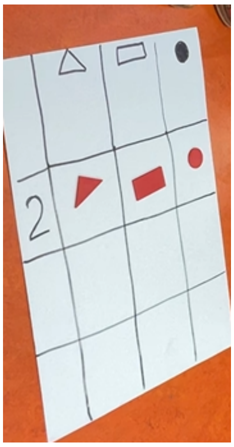
E : *Ah, t'as enlevé un rond !*
P : *J'en ai enlevé un.*
E : *Et t'as reculé.*
P : *Ah, je l'ai changé de place, pas forcément reculé parce que, pour les petits copains, c'est avancé.*
E : *Mais c'est pas juste.*
P : *Et pourquoi est-ce que ce n'est pas juste ?*
L'élève s'approche pour pointer la feuille.
P : *Allez, je vais encore vous perturber un peu plus. Fermez les... Fermez les petits yeux.*
E : *Ah, pas encore !*
P : *Il faut que je trouve ma petite forme. Ne bougez pas.* elle place un triangle rouge dans la colonne des triangles, sur la même ligne que les deux autres formes. *Coucou.*



E : *Ah ben t'as mis un triangle !*
P : *Voilà, j'ai mis un triangle.*
E : *Et maintenant ils sont à côté de l'autre !*
P : *Ah, très ...* Elle se fait interrompre.
E : *Mais ils peuvent se toucher du coup.*

P : *Ah ben ils ne savent pas se toucher, regarde, ils sont séparés par une petite ligne.* Elle place son marqueur sur chacune des lignes pour montrer la démarcation.
P : *Regarde, c'était très intéressant ce que tu as dit. Ils sont chacun - ils sont bien dans leur bonne maison.*
Élèves : *Oui !*
E : *Mais il y a un problème !*
E : *Parce que ... Parce que...*
E : *Eux ! Eux deux, ils vont se mélanger !*
P : *Pourquoi est-ce qu'ils vont se mélanger ?*
E : *Parce qu'il y a un bleu et un rouge.*
P : *Ah, parce que c'est une question de couleur ? Moi, je veux bien. Je veux bien, voilà, je veux bien mettre des rouges. Il y a pas de souci.*
E : *Tu n'as pas fait comme les bras.*
P : *Oui mais non, ça, ça, ça, c'est autre chose. Allez un peu vous asseoir. Attention. Qu'est-ce qui se passe là ? Je vais, je vais vous faire une blague. Fermez les yeux.*
E : *Aah encore ! Pas possible !*

L'enseignante fixe alors l'entrée des lignes par une quantité allant de 2 à 5. Certains élèves tiennent compte de cette contrainte dans la lecture du tableau ; pour d'autres, la nouvelle contrainte "efface" la précédente. Ces derniers veulent alors enlever une des trois pièces présentes sur la feuille plutôt que d'en ajouter une dans chaque case. L'enseignante doit alors s'expliquer sur la manière dont il faut lire ce tableau.
P : *Heu, attention.* Elle écrit un "2" pour nommer la ligne contenant les formes. *Allez-y.*

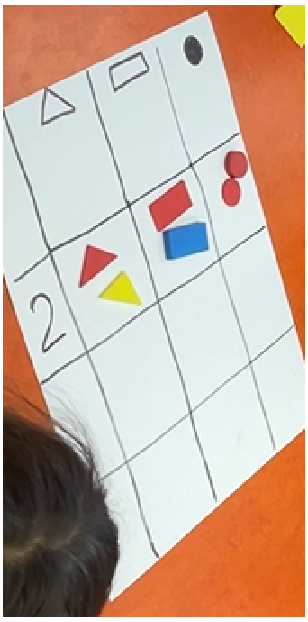


Élèves : *Mais ! Ah t'as mis deux !*
P : *Ah pour... Ne criez pas, ne criez pas. Vous faites les petits sots, là.*
E : *Mais c'est le chiffre un.*
E : *Il faut en enlever un.*
P : *Ah, attention. Attends. Comment ?*
E : *En enlever un.*
P : *Pourquoi est-ce qu'il faut en enlever un ?*
E : *Parce que c'est... Il y a un chiffre deux.*
E : *Mais oui, parce que on a un en plus.*
E : *Mais c'est...*
P : *Alors, il y en a qui veulent mettre en plus, il y en a qui veulent en enlever. Va falloir se mettre d'accord.*
E : *Ça, c'est trois.*
P : *C'est... Ah, là, il y en a trois. Un, deux, trois. Mais...* Elle se fait interrompre.
E : *Il faut y en avoir deux !*

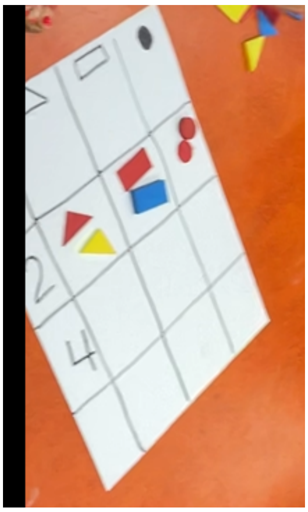
E : *Pour en avoir deux, il faut en enlever un.*
P : *Il faut en enlever un pour avoir deux.*
E : *Non ! J'ai compris !*
P : *Et ben, vas-y. Viens, attends, on va d'abord faire Vadim. Viens en enlever un pour faire deux.* Vadim se lève pour enlever le rond.
E : *Mais on fait comme les bras.*
E : *Ah oui, c'est ce que je voulais faire : enlever celui-là.*
P : *Ah, tu veux l'enlever, celui-là. Vas-y.*
E : *Mais moi, je suis pas d'accord.*
P : *Moi... Et ben pourquoi est-ce que tu n'es pas d'accord ?*
E en pointant la case du triangle : *Alors, il faut en mettre deux là-bas.*
P (en parlant pour le rond) : *Parce que, moi le petit, je suis...*
P (en parlant à l'élève) : *Je t'écoute, hein. Reste bien là, je t'écoute.*
P (en parlant pour le rond) : *Regardez, moi, je suis un, un disque mais j'aimerais bien être dans la maison des disques aussi.*
P (en parlant pour le rectangle) : *Moi, je suis rectangle. Je suis content, j'y reste.*
P (en parlant pour le triangle) : *Moi, je suis triangle. Je suis content, j'y reste.*
P (en parlant à l'élève précédent) : *Et toi, tu as trouvé, je crois, la solution. Qu'est-ce que tu as dit ?*
E en pointant le triangle : *Mettre un deuxième comme ça.*
P : *Et pourquoi est-ce qu'il faut mettre un deuxième dans les triangles ?*
E : *Parce qu'il y en a un qui est triste.*
P : *Oui, il y en a un qui est triste aussi.*
E : *Et parce que vous avez ajouté un deux là.*
P : *Et ben, viens faire. Viens mettre un triangle. Euh, que ce soit petit ou grand, on s'en fout hein, chou. Regarde, voilà, je vais te mettre toutes les formes là, si tu veux, comme ça, tu les verras mieux. On s'en servira encore.* Elle renverse les formes sur le sol. *Voilà, allez, vas-y. Attention, on va voir. Est-ce que... mets-le bien comme ça, chou.*
L'élève pose le triangle dans la même case que l'autre.

P : *Est-ce que là... Attention, on va lire. Est-ce que je suis bien dans les triangles ?* Elle parcourt du doigt la colonne des triangles.
Élèves : *Oui.*
P : *Est-ce que j'en ai bien deux ?* Elle montre le nombre deux noté sur la feuille.
Élèves : *Oui.*
P : *Alors, qu'est-ce qu'on va devoir faire, mademoiselle Juliette, dans les rectangles ? Qu'est-ce qu'on doit faire ?*
E : *Moi, je sais bien déjà.*
Juliette : *Mettre...*
P : *Dis-le.*

Juliette : *... un autre rectangle.*
P : *Dis.*
Juliette : *Mettre deux.*
P : *Tu vas en mettre deux ? Attention, il y en a déjà un. Vas-y. Il en faut deux. Que ce soit grand ou petit, c'est pas grave.*
Juliette prend un rectangle bleu.
P : *Voilà. Tu en as pris combien ?*
Juliette : *Un.*
P : *Un, et il y avait déjà un. Donc, un plus un, ça fait bien deux. Tu n'en as pas pris deux. Ça va ?*
E : *Moi, j'ai une idée.*
P : *Attention, et ben, viens si t'as l'idée. Viens. Allez, on y va. Attention.*
L'enfant prend un rond rouge et le place à côté de l'autre rond.



P : *Attention. Fermez les yeux parce que j'écris à l'envers.* Elle écrit un "4" pour la deuxième ligne.

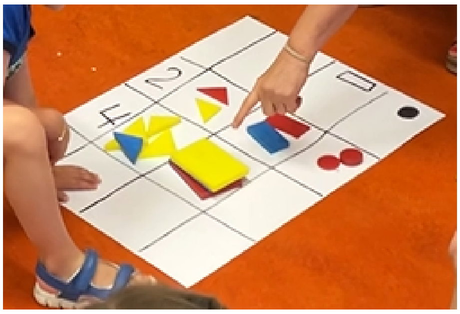


Élève : *Quatre !*
P : *Oh oh, t'as triché ! Je n'ai pas dit coucou. Tu l'as dit avant. Coucou.*

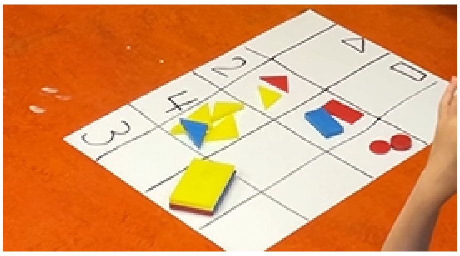
E : *T'as mis quatre !*
P : *Le chiffre quatre. Alors, qu'est-ce qu'on va devoir faire ?*
E : *En mettre quatre.*
Élèves : *Quatre !*
P : *Attends, on va... Mettre quatre quoi ? On peut mettre euh quatre bics, vous me dites... on me dit quatre, moi, je mets quatre, hein.* Elle met quatre marqueurs en-dessous des deux triangles. *Mais c'est des bics... des marqueurs que je vais mettre ?*
Élèves : *Non.*
P ; : *C'est quoi ?*
E : *Des triangles.*
P : *Pourquoi ? Pourquoi est-ce qu'on va mettre des triangles ?*
E : *Parce que c'est la maison des triangles.*
P : *Voilà, bien, le mot est dit. C'est la maison des triangles. Et là, la petite porte, elle dit avant de rentrer, on est dans la maison des triangles, "Toc, toc, toc", il me faut quatre triangles. Allez, je vais demander à Kyara de venir chercher quatre triangles, ma chérie .*
E : *Mais il y en a déjà deux !*
P : *Il y en a déjà deux.*
E : *Il faut encore en mettre deux.*
P : *Aaah attends, attends, attends. Deux et ... Vous m'embarquez partout ... Deux et deux, ça fait quatre, je suis d'accord. Mais regarde ça, c'est dans la maison des deux. Là, on est dans dans la maison de quatre, cette maison-là, c'est de quatre. Ça, il faut les laisser, c'est dans la maison de deux. Ça va ? Allez, tu mets dans la maison de quatre, triangle. Ah, il y en a combien, là ?*
E : *Un.*
P : *Il m'en faut quatre hein. Attention, parce qu'après, vous allez devoir travailler tout seul. Ah, voilà, quatre.* Des élèves montrent quatre avec leurs doigts. *Montrez un peu quatre sur vos doigts. Trois plus un, super ! Comment est-ce qu'on peut faire en utilisant ses deux mains ?*
Kyara met les triangles manquants.
Kyara : *Voilà.*
P : *Voilà. On peut faire deux et deux. Ou bien, on peut faire comment ? Allez, on met les deux mains. Avec deux mains, on fait quatre.*
E : *Un plus trois.*
P : *Un plus trois. Oh, ça fait quatre, ça ?* Juliette a levé ses deux petits doigts et un pouce. *Si je mets zéro... Oui, trois plus un. Et là ?* Elle montre ses mains avec l'une fermée et l'autre avec trois doigts levés. *Quatre, ça fait zéro doigt...* (elle secoue sa main fermée) *... plus quatre. D'accord ?*
Un élève lève ses deux pouces, son index gauche et son petit doigt droit).
E : *Et ça aussi, ça fait quatre.*
P : *Allez, on va aller vérifier parce que Kyara, elle a fini. Est-ce que c'est juste, ça ?*
Élèves : *Oui.*
E : *Mais moi, j'ai pas fait.*
P (à propos des triangles sur la feuille) : *Simon, est-ce qu'il y en a bien quatre, là ?*
Simon : *Oui.*
P : *Oui ? Un ,deux, trois, quatre. Attention. Fermez les petits yeux.*
Elle écrit un "3" pour la dernière ligne.

E : *C'est pas possible !*
P : *C'est... C'est pas possible, non, c'est pas possible de crier surtout. Attention. Coucou.*
Léandro : *C'est trois !*
P : *Léandro, mais, mais non. Chut. Allez, on va respirer. On va respirer très fort.* Les enfants lèvent les bras pour prendre une inspiration puis les baissent en expirant. *On va faire des petits mouvements.* Ils moulinent des bras devant eux. *On laisse tomber tout doucement les bras. Je n'ai pas dit des petits n'importe comment. On va se calmer. J'ai ajouté le chiffre "3", d'accord ? Attention. Je ne vais pas rester dans la maison des triangles mais je vais rester dans la petite porte qui dit trois et j'aimerais bien que, euh, Thomas vienne me mettre trois mais dans la maison des rectangles. Allez, viens. On va voir s'il ne se trompe pas. Des rectangles, des petits, des grands, comme on veut.*
Thomas prend trois rectangles.
P : *Voilà, tu en as déjà pris trois, c'est bien. Regardez bien. Dans la maison... Tu es, tu es dans la porte trois. Voilà.*
Thomas pose ses rectangles dans la ligne des trois, mais dans la colonne des triangles.

P : *Est-ce que tu es dans les triangles ?* Il fait non de la tête. *Est-ce que tu dois... Non, tu dois aller jusqu'aux rectangles. On déplace, on modifie. Allez, vas-y.* Il déplace ses rectangles dans la colonne des rectangles mais dans la ligne des quatre.



P : *Ah, tu es bien - Leandro- Tu es bien dans la maison des rectangles, mais est-ce que tu es dans le chiffre trois ?* Il fait non de la tête. *Qu'est-ce que tu vas faire ?* Il les remet dans leur première position. *Ah, tu es bien dans la maison trois mais tu es en-dessous du toit des triangles.*
E : *Il faut retirer deux !*
E : *Je suis pas d'accord.*
P : *Pourquoi est-ce que t'es pas d'accord ?*
E : *Parce que ça, ça doit pas aller là. Ça doit aller là.*
Il montre la case de la colonne des rectangles et de la ligne trois. Plusieurs élèves se lèvent pour montrer cette case.
P : *Ah, et ben on va, et ben, ah, attendez, allez un peu vous asseoir parce que... Tout ce que vous... Regarde. C'est pour avoir plus facile, et pour les autres. Je vais... Vous avez raison, je vais l'expliquer à Thomas.* Elle prend les rectangles de Thomas. *Là, tu en as bien pris trois. Un , deux, trois. Comme te disent tes copains, tu es dans la maison.* Elle place les rectangles dans la colonne des triangles et la ligne des trois. *Est-ce que je peux m'arrêter en-dessous du toit des triangles ?*
Élèves : *Non.*
P : *Mais je reste toujours dans les trois.* Elle déplace les rectangles vers la colonne des rectangles et la ligne des trois. *Est-ce que je peux m'arrêter dans la maison des rectangles ?*
Élèves : *Oui.*



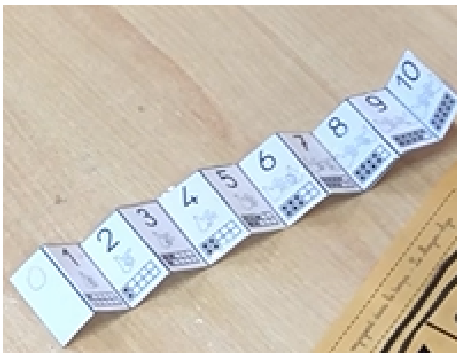
P : *Oui, oui.* Elle déplace les rectangles vers la colonne des ronds et la ligne des trois. *Est-ce que je peux aller jusqu'aux disques ?*
Élèves : *Non.*
P : *C'est bon ? T'as compris ? Okay ? Alors, vous sortez vos appareils photo.* Les enfants miment un appareil photo. *Et on fait une photo de notre panneau. Clic. On rit, non c'est pas une photo, c'est pas un selfie. D'accord, voilà. Attention. Vous allez... Qu'est-ce que vous avez mis hier dans vos petits paniers ?*
E : *Des jouets !*
P : *Non, pas des jouets. Des petites formes. Vas un peu chercher un panier qui se trouve... Vas chercher un panier qui se trouve au magasin.* Une petite fille se lève pour aller chercher un panier. *Vas voir. Vas voir et il y a votre prénom dedans. Ça va ? Je vais vous expliquer, puis on lancera l'atelier après. Si on a le temps. Parce que vous avez... Hé, on a travaillé comme ça.* Elle fait un pouce vers le haut. *Je retiens bien ce que tu as dit, hein, avec les couleurs et le nombre et les formes. Ça va ? On jouera lundi avec ça.*

E : *Ouais.*
P : *Chut. Parce qu'il y a les... C'est vrai, les intersections. Voilà, on fera ça. On fera des mathématiques de très, très, très grands.*
La petite fille revient avec un panier et le donne à la professeure.
P : *Voilà, qu'est-ce qu'il y a dedans ?*
E : *Il y a rien.*
E : *Il y a des formes.*
E : *Ben il y a des gommettes.*
E : *Des gommettes de formes.*
P : *Des gommettes de formes. Des disques, des...*
E : *Carrés.*
P : *Rectangles, que ce soit comme ça ou comme ça, ça reste un rectangle, et il y a des petits....*
Élèves : *Triangles.*
P : *... Triangles. D'accord ? Des couleurs, peu importe la couleur. Ici, on regarde la forme.* Elle place ses mains sur sa tête et les enfants l'imitent. *Allez, on imprime. Je prends la forme : triangle, rectangle, disque. D'accord ?*
E : *D'accord.*
P : *Vous avez une feuille.* Elle montre des feuilles accrochées par des magnets. *Vous avez vu ? Vous avez été mettre votre feuille hier.*
Simon : *J'ai compris !*
P : *Qu'est-ce que... Allez, explique hein, si tu as compris.*
E : *On va mettre des signes.*
Simon : *Non, moi j'ai compris. On va mettre des ronds dans les ronds, des carrés dans les carrés et ainsi de suite.*
P : *Et ainsi de suite, c'est très bien. Et ici, qu'est-ce qu'on fait ? Mais ainsi de suite, on doit bien respecter le nombre et la forme. Si je me trompe, est-ce que c'est grave ?*
Élèves : *Non.*
P : *Parce que ça peut se dé...*
Ensemble : *...coller.*
P : *D'accord ? Attention !*
E : *Très difficile.*
P : *Madame Sabine vous a fait des blagues. Vous n'avez pas...*
E : *Le même chiffre.*
P : *Tu as tout compris, c'est pour ça que je vous les ai faits accrocher. Pour que vous vous rendiez compte que vous n'avez pas les mêmes chiffres au même endroit. Et qu'est-ce qu'il y a aussi qui change ? Est-ce que les formes, elles sont mises dans le même ordre ? Au-dessus, regardez. Au-dessus de vos feuilles, vous les observerez. Là, chez Owen, on a le rectangle, le disque et le triangle. Et là, chez Rachelle, on a le rectangle, le triangle et le disque.*

E : *Oui !*
P : *Donc, les formes et le nombre, ils changent. Il va falloir faire très, très, très attention. Alors, ce que je vous propose... Je vais regarder l'heure parce que, Madame Sabine, elle s'emballe, elle s'emballe, pour savoir si vous avez le... Oui, on a le temps. Alors, votre prénom est sur votre feuille. Vous avez- euh Lou- vous avez votre...*
Élèves : *Prénom.*
P : *Attention. Je vous ai fait une blague sur la feuille mais peut-être, mais peut-être - mets-toi un peu convenablement- mais peut-être que dans votre petit pot, vous en aurez soit de trop...*
E : *Soit de pas trop.*
P : *Et comment est-ce qu'on dit de pas trop ? C'est quoi un autre mot ?*
E : *Pas assez.*
P : *Pas assez, voilà c'est juste. On en aura de trop ou on en aura pas assez. On en aura en plus ou alors il va vous en manquer. Je ne sais pas, je n'ai pas compté. C'est vous qui allez compter, d'accord ? Okay ? Allez, les... Pour ne pas que tout... Vous allez vous mettre par binôme, ça va ? On va travailler par binôme. Cette activité-là, elle peut montrer qu'on travaille par deux.*
Par la suite, la professeure envoie chaque binôme chercher son panier et sa feuille et l'activité commence.

3.4 Retranscription de l'activité du tableau à double entrée

L'activité a déjà commencé. La professeure donne une bandelette à une élève éprouvant des difficultés.



P : *Allez, voilà, regarde. Cherche le chiffre, le même que celui-là. Cherche-le.*
Elle s'éloigne vers un autre élève : *Alors, tu en as mis cinq, mais il faut les mettre dans la même ligne. Voilà, tu as compris.*
P : *Allez, tu vas mettre trois quoi, là ?*
E : *Triangles.*
P : *Voilà.*
E : *Madame, est-ce que c'est juste ?*
P : *C'est juste mais est-ce qu'il y en a quatre ? Compte un peu.* À une autre élève qui montrait sa feuille : *C'est magnifique, continue.*
Elle va près d'une autre élève.
P : *Allez, vas-y. Est-ce que tu sais me lire ce petit chiffre-là ?*
E : *Six.*
P : *Six, et ben vas-y, tu en mets six dans la petite case des triangles.* Elle regarde la feuille de l'élève à côté. *Bravo, tu en mis un, deux, trois, quatre. Nickel bleu ciel. Alors maintenant, tu peux aller à côté ou en-dessous. Comme tu veux, comme tu veux. Il y en a qui sont organisés. Alors, est-ce que tout le monde sait bien lire les premiers, les petits chiffres ? Allez, Vadim, il*

a besoin d'un petit coup de pouce. C'est les triangles et tu dois en mettre combien, choupet ?
E : *Trois.*
P : *Allez et toi, tu dois en mettre combien des rectangles, là ?*
E : *Quatre.*
P : *Quatre, allez, on va les compter ensemble et puis tu peux redémarrer. Un, deux, trois, quatre. Alors, là, tu vas mettre quoi, là ? Des ... ?* (réponse de l'élève incompréhensible) *Et tu vas en mettre ?*
E : *Madame, faut mettre dans les mêmes ?*
P : *Bah là, il t'en faut... Là, je suis d'accord, t'es dans les triangles comme moi. Et là, il t'en faut combien ?*
E :*Trois.*
P : *Bien*
Autre élève : *On met dans la même case ?*
P : *Ben, on a mis le bon nombre, là. Ça te perturbe le nombre, toi. Il t'en faut combien ?*
E : *Trois.*
P : *Ça peut être des couleurs différentes, peu importe. Il m'en faut trois, ça peut être les mêmes, ça peut être des couleurs différentes, comme tu veux. Est-ce que tu en as bien trois ?*
E : *Oui.*
P : *Est-ce que t'es bien dans les triangles ?*
E : *Oui.*
P : *Alors, tu vas faire quoi après ? Les rectangles, il t'en faut toujours trois. Allez, vas-y, tu as compris.*
Elle va vers une autre table.
P à une élève : *C'est magnifique.*
E : *C'est juste ?*
P : *Ah attention, attention.*
E : *J'en ai plus.*
P : *Ah ben, complète toujours ça, et je vais te donner la réserve. Allez, voilà. Les réserves, elles sont ici, je vais vous mettre un petit peu pour chacun. Il y a des triangles, il y a des rectangles. Je vais mettre les boîtes au magasin, comme ça vous pouvez venir chercher.*
Un élève vient vers elle. *Mais magnifique Ben, il y a juste le premier où il y a une petite erreur, mais je suis fière de toi.* Elle reprend pour tout le monde. *Regardez, voilà, comme on va faire ses courses. S'il vous en manque, vous allez au magasin chercher des feuilles.*
Elle retourne près d'un élève.
P : *Regarde, regarde un peu là. Combien est-ce qu'il y en a ? Compte.*
E : *Un, deux, trois, quatre, cinq.*
P : *Ah, et moi, je n'en veux que quatre. Tu as un de trop. Tu enlèves et tu peux le remettre là. Allez vas-y.*
Elle va vers la première élève à qui elle a donné une bandelette.
P : *Aya, quelles nouvelles ? Là, je suis pas d'accord.*
Elle se tourne vers une autre élève.
P : *Alors, mademoiselle Olivia ? Super Juliette. Allez, tu fais les ronds, les disques. Tu prends la première forme. Allez, c'est quoi que tu vas prendre ? Là, la forme ?*
Olivia : *Triangle.*
P : *Allez, vas-y, prends tes triangles.*
P à Aya : *Attends, on va corriger.*
P à Olivia : *Et tu dois en mettre combien dans la première petite case ?*
Olivia : *Quatre.*
P : *Allez.*
Elle se retourne vers Aya : *Alors ici, écoute-moi, écoute. Ici, tu es dans les triangles. Tu as bien*

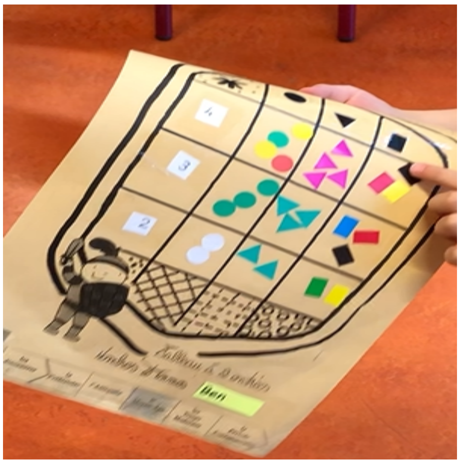
mis les formes, mais tu n'as pas mis le bon nombre. Regarde, ça dit combien ça ?
A : *Cinq.*
P : *C'est pas cinq ce chiffre-là. Montre-moi un peu.* Elle prend la bandelette et lui montre le quatre. *C'est le même que ça. Il y a combien de doigts qui se sont dépliés ?*
A : *Un, deux, trois, quatre.*
P : *Quatre, c'est quatre. Ce chiffre-là, c'est quatre. Ça va ? Et là, tu en as combien ?*
A : *Un, deux, trois, quatre, cinq.*
La professeure en retire un.
P : *Allez ici, regarde, est-ce que tu en as quatre ? Allez regarde, tu as vu que quatre c'était quatre comme ça.* Elle pointe la case qu'elle a corrigée. *Mets un peu pour faire quatre* (dans les disques). *Quatre hein, fais attention, tu en as déjà collé un.* Elle se lève pour aller près d'une autre élève.
P : *Alors, Manon. Tu en as bien un, deux, trois, quatre, cinq, six. Un, deux, trois, quatre, cinq. Il en manque.*
Pendant ce temps, Aya complète correctement sa case, et puis elle s'arrête.
La professeure va vers un petit garçon : *Est-ce que c'est cinq que tu devais mettre là ? Regarde, tu es dans la ligne des cinq, là ? C'est là que tu dois en mettre cinq, là, tu dois en mettre que trois. Un, deux, trois. C'est là cinq. Allez, corrige.*
Elle regarde la feuille d'une autre élève.
P (voir l'image ci-dessous) : *Alors, Rachelle. Quatre, Quatre. Ah, je ne suis pas tout à fait d'accord là.* Elle pointe la case de la deuxième ligne, deuxième colonnne. *Là, je suis d'accord, pas là : est-ce qu'il y en a cinq là ?* Elle pointe la case de la troisième ligne, deuxième colonne.

P : *Un, deux, trois, quatre.*
R : *Ah alors.*
P : *Alors, il en manque combien ?*
R : *Un.*
P : *Ah. Et là ?* Elle montre la case de la deuxième colonne et deuxième ligne. *C'est quel chiffre, ça ? C'est difficile hein, je vous en ai fait des difficiles. Est-ce que tu en as six ?*
Rachelle fait non de la tête.
P : *Allez, vas un peu corriger. Corrige, mais t'es capable.*
Elle regarde la feuille d'une autre élève.
P : *Alors quatre, quatre, quatre. Cinq, cinq, cinq. Trois, trois, trois. Ouais ! Tu peux aller mettre à ton aimant.*
Elle vérifie la feuille d'un autre élève.
P : *Cinq, cinq, cinq. Quatre, quatre, quatre. Trois, trois, trois.* Elle lui tend sa main pour qu'il tape dedans pour le féliciter. *Allez, tu peux aller remettre tes réserves au magasin pour les*

autres.
Elle regarde la feuille d'une autre élève.
P : *Alors, et ben c'est... Alice, t'es assise où ? Allez, viens.*
Autre élève : *Madame, j'ai un petit problème.*
P : *Attends, j'arrive si t'as un petit problème.*
Elle reprend avec Alice.
P : *Ici, tu as fait quatre : un, deux, trois, quatre. Un, deux, trois, quatre.*
Pendant qu'elle s'occupe d'Alice, on observe certains travaux repris ci-dessous : La professeure

(a) Travail de Juliette

(b) Travail de Aya

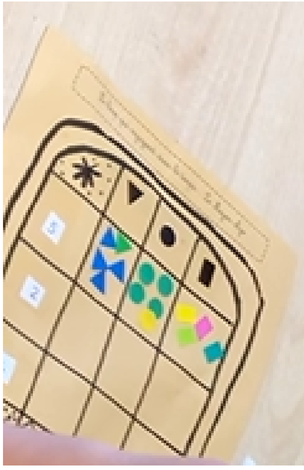


(c) Travail de Ben

(d) Travail de Manon

va vers l'élève qui avait un problème précédemment.
P : *Alors, c'est quoi ton petit problème ? Explique-moi.*
Ben (voir l'image ci-dessus) : *Et ben regarde, j'ai pas assez, j'avais pas assez ça...*
P : *Il t'en manque.*
Un autre élève arrive pour dire qu'il a trop de rectangles.
P : *Regarde, il en a. Demande s'il ne peut pas t'en passer. Complétez. Vas-y, tiens ta feuille, Ben.*
Elle retourne près de Manon.
P : *Allez, regarde un peu si tu en as cinq. Compte hein.*
Manon : *Un, deux, trois, quatre, cinq.* Elle s'arrête de compter alors qu'il lui en reste un.
P : *Ah, il y en a un de trop. Tu l'as vu. Allez, tu peux l'enlever.* Elle l'enlève pour Manon. *Regarde bien ma chérie, parce que tu es dans la maison de cinq. Compte-les maintenant.*
Manon : *Un, deux, trois, quatre, cinq.*
P : *Très bien, donc maintenant cinq, tu vas faire cinq rectangles.*

Après un moment à vérifier des feuilles, elle retourne près d'Olivia.



P : *Super, super, là, t'en as cinq. Là, t'es sûre ? Regarde un peu.*
Olivia : *Un, deux, trois, quatre.*
P : *Quatre.* Elle montre quatre doigts. *Et moi, j'en veux cinq. Il t'en manque combien ? Regarde.* Elle lui donne une bandelette.
Olivia : *Un.*
P : *Un, voilà. Allez, vas-y. Et puis, tu pourras faire la ligne qui dit... Qui dit quoi ?*
Olivia : *Qui dit deux.*
P : *Allez, c'est fastoche hein.*
Après un moment, elle va près de Manon.

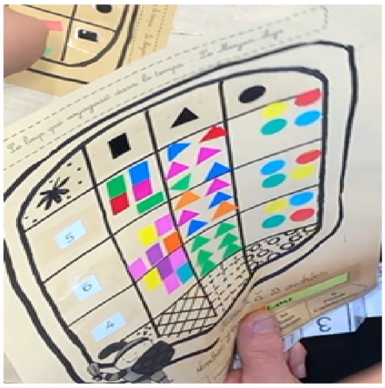
P : *Regarde, tu es bien dans le chiffre trois, ma chérie. Là* (la colonne des disques)*, je suis d'accord, mais là* (la colonne des rectangles) *? Est-ce que c'est des rectangles que tu as mis ?*
Manon fait non de la tête.
P : *C'est quoi que... Tu as mis des ronds. Mais c'est pas grave, tu avais mis le bon nombre* (pour la troisième ligne). *Trois, trois, trois, je suis d'accord. Mais c'est... il fallait quoi là ?* Elle montre la colonne des rectangles.
Manon : *Rectangles.*
P : *Des rectangles et des ?* Elle passe à la colonne des triangles.
Manon : *Triangles.*
P : *Triangles. Allez, va me chercher ça. Regarde, on fait comme si... Regarde, c'est ce qui est bien, c'est qu'on peut les déplacer et on peut corriger. Allez, vas-y. C'est parce que tu n'en avais plus dans ton pot ? Mais tu peux aller en chercher, hein, Manon. S'il vous manque quelque chose, vous pouvez aller en chercher.*

Après un moment, elle commence à faire ranger les élèves pour la récréation. Voici quelques travaux des élèves au moment de la pause.

(a) Travail d'Adèle

(b) Travail de Juliette

(c) Travail de Leandro



(d) Travail de Lou

(e) Travail de Louise

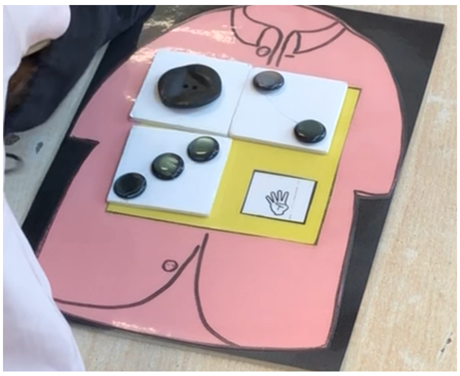
(f) Travail de Vadim

3.5 Retranscription de jeux en classe

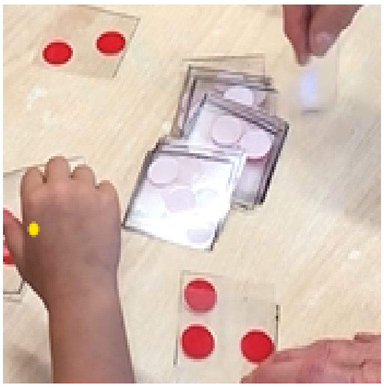
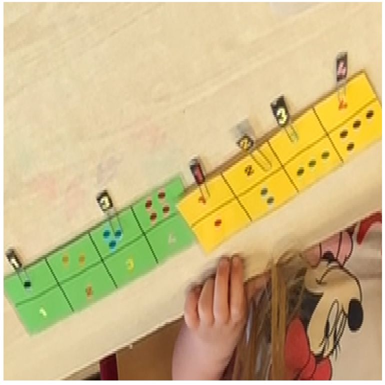
Les élèves sont répartis en groupes de quatre sur plusieurs tables. Chaque table joue à un jeu différent.
L'un des groupes dispose d'images représentant de un à six produits de magasin et de boîtes avec les représentations abstraites et figurées des nombres. Chaque élève lance un dé dont les faces sont les nombres de un à six, doit trouver une image dont la cardinalité des objets représentés est le nombre obtenu puis place l'image dans l'une des cinq boîtes. Nous appellerons ce jeu le "jeu du tri d'images".

Un autre groupe dispose de boîtes de six œufs vides représentant le wagon d'un train, d'un dé dont les faces représentent les nombres via des points, et de bouchons de liège représentant des passagers. Les élèves lancent le dé, prennent autant de bouchons que le nombre sur le dé et les placent dans leur boîte jusqu'à la remplir. Nous appellerons ce jeu le "jeu du wagon".

Dans le troisième groupe, chaque élève dispose de l'image d'un manteau auquel il doit rajouter des boutons. Ces boutons se trouvent en relief sur des cartes placées dans un sac. Les élèves doivent retrouver par le toucher le bon nombre de boutons. Nous appellerons ce jeu le "jeu du manteau aux boutons".



Le dernier groupe dispose de deux activités sur les décompositions de nombres en sommes d'autres nombres ainsi que deux activités sur l'association d'un nombre à ses représentations figurées. Nous appellerons ce jeu le "jeu des décompositions".
Les élèves feront deux tours, en changeant d'activité au changement de tour, et feront ainsi

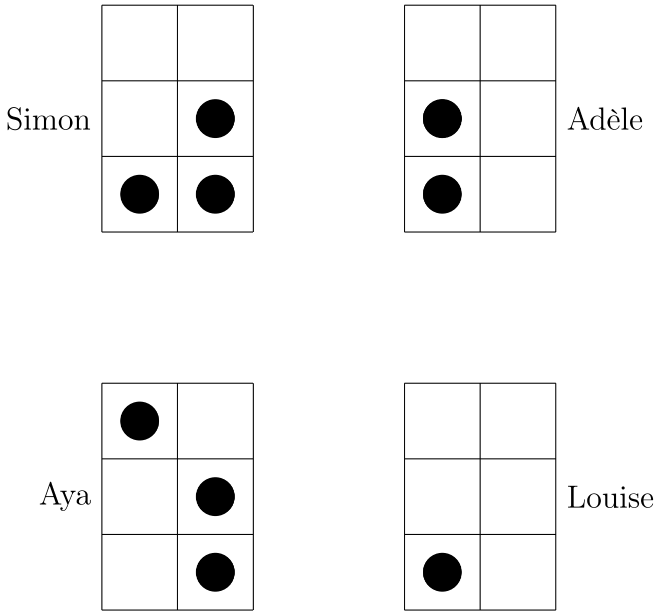




deux activités parmi les quatre jeux. La retranscription sera d'abord divisée suivant le tour et ensuite suivant l'activité réalisée.

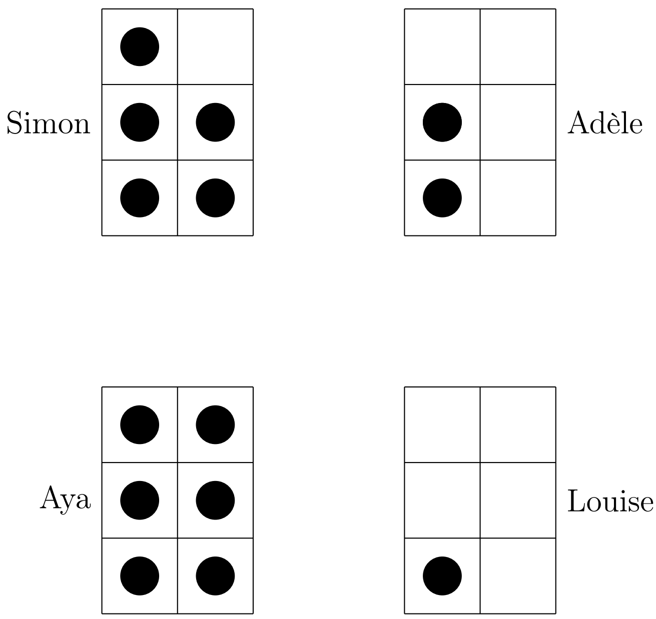
Tour 1 : Jeu du wagon

Le premier élève (Simon) lance le dé : *Un. J'ai un conducteur.* Il place un bouchon en haut à droite dans sa boîte.
La deuxième élève (Aya) lance le dé : *À moi. Trois.* Elle prend trois bouchons et les place en haut à gauche, en haut au milieu et en bas à droite.
Simon : *À Louise.*
La troisième élève (Louise) lance le dé : *Un.* Elle prend un bouchon et le place en bas à gauche.
Aya : *À moi. À moi Louise.*
Simon : *Non, Adèle, elle n'a pas joué !*
La quatrième élève (Adèle) lance le dé : *Trois.* Elle prend trois bouchons
La professeure arrive et place les boîtes contenant le matériel sur leur couvercle : *Vous pouvez mettre vos boîtes comme ça pour gagner un peu de- Euh, vous suivez- qui est-ce qui a commencé ?*
Simon : *Moi !*
P : *Ah, non, c'est elle* (Aya) *alors qui a commencé. Pourquoi est-ce que tu as déjà trois dedans ? Alors, attends, on va recommencer.*
Elle range tous les bouchons afin de les faire recommencer.
P : *Alors, si c'est Simon qui joue, après c'est Adèle, et puis toi, on ne lance pas n'importe comment. On suit son tour, ça va ? On tourne.*
Simon lance le dé : *Trois.* Il prend trois bouchons qu'il place en haut au milieu, en haut à droite et le dernier en bas à droite.
P : *Allez, on tourne. Allez, vas-y, à toi, Adèle.*
Adèle lance le dé et fait un deux.
P : *Combien vas-tu en prendre Adèle ?*
Adèle : *Deux.* Elle prend deux bouchons qu'elle place en haut à gauche et au milieu.
Louise lance le dé : *Un.* Elle prend un bouchon qu'elle place en haut à gauche.
Aya lance le dé et fait trois. Elle prend trois bouchons qu'elle place en haut à droite, en haut au milieu et en bas à gauche.
La professeure arrive et montre la boîte d'Aya : *Dîtes, vous êtes d'accord ? C'est toujours trois ça ?*
Aya : *Oui.*

P : *Oui ? Hi hi, je vous taquine hein. Parce que vous me faîtes la configuration- Allez, tournez.*
Configurations à la fin du tour :



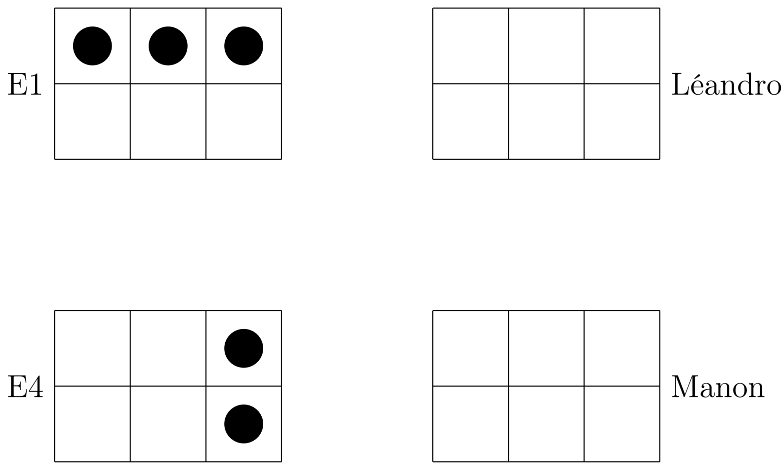
Simon lance le dé : *Deux.* Il prend deux bouchons qu'il place en bas au milieu et en bas à gauche. Il donne le dé à Louise. *Tiens.* Elle lance le dé.
Simon : *Cadeau. Tu donnes un à Louise.* Il prend l'un des bouchons d'Adèle pour le donner à Louise. Le bouchon roule sur la table vers Aya.
Aya : *C'est à qui ça ?* Adèle lève la main. *Alors, tu le mets dans ton pot.* Adèle remet le bouchon dans son pot. *Allez, lance le dé* (à Adèle).
Louise lance le dé.
Aya : *Louise, t'as fait un. Regarde, t'as fait un. Non, t'as fait un.*
Louise relance le dé et refait un.
Aya : *Louise, tu tournes.*
Louise donne le dé à Aya.
Interruption pour regarder une autre activité. À la reprise de l'observation de ce jeu, les configurations des boîtes sont :



Simon : *Elle a gagné !*
P à Aya : *T'as tout complété ?* Aya hoche la tête. *T'as fait trois et trois ? Trois et trois, tu l'as fait en deux fois, toi. Et ben, tu- vous continuez, vous remplissez votre petit wagon.* La professeure s'en va vers une autre activité, les enfants continuent à jouer un moment.
Une élève : *Il y a Simon qui a gagné !*
P : *Tu as- et et - tu en as- tu as tiré le bon chiffre ?*
Simon : *J'ai fait tomber sur deux.*
P : *Et il t'en fallait deux ?*
Simon : *Non. Il fallait une.*
P : *Il t'en fallait un. Et tu as donné à qui ?*
Simon : *À Adèle.*
P : *Ah et Adèle, il t'en reste combien maintenant à trouver, toi ?*
Adèle : *Trois.*
La professeure s'en va vers un autre groupe.

Tour 2 : Jeu du wagon

Au moment où l'observation commence, les dispositions sont les suivantes :



Léandro lance le dé : *Trois.* Il prend trois bouchons qu'il place à gauche en haut, au milieu et en bas.
Manon lance le dé.
E4 : *Ben non, t'as comme moi : deux.*
Manon place ses bouchons à gauche en haut et au milieu.
E4 : *Euh, c'est à moi de jouer parce qu'après Manon, c'est à moi.*
E1 : *Madame, il a fait cadeau.*
P : *T'as fait cadeau ? Oh.*
E1 : *Il a lancé puis il a fait cadeau.*
P : *Cadeau. Ben, il t'en manque combien ? Cadeau, c'est pour toi. Il t'en manque combien ?*
E4 réfléchit.
P : *Il t'en manque combien ?*
E1 fait un quatre avec ses doigts à E4.
P : *Quatre. Alors, tu te fais un cadeau. Quand ton train est presque plein, tu fais le cadeau de quelqu'un d'autre ou sinon tu complètes. Vas-y. Tu en prends combien ? Il t'en manque combien, dans ton train, pour faire six ?*
E4 : *Quatre.*
P : *Vas-y, quatre.*
E4 prend quatre bouchons pour compléter son train.

P : *Voilà, tu as complété. Donc, tu as fait deux plus quatre, ça fait six. Ça va ? À toi* (à E1).
E1 lance le dé : *Cadeau..*
P : *Cadeau, tu vas en prendre combien ?*
E1 : *Trois.*
P : *T'es sûre ?*
E1 prend trois bouchons pour compléter son train.
P : *Donc, trois plus trois, ça fait six.*
Manon lance le dé car Léandro est parti aux toilettes et fait trois.
P : *Combien vas-tu en prendre ?*
Manon : *Trois.*
P : *Allez, vas-y.*
Manon prend trois bouchons et Léandro revient.
P : *Allez Léandro, c'est à toi. Il t'en manque combien, choupette* (à Manon) *?*
Manon : *Un.*
P : *Un.*
Léandro lance le dé.
P : *Oh, cadeau. Oh non, pardon, c'est quoi ça ?*
E4 : *Passe ton tour.*
P : *Passe ton tour.*
Léandro s'apprête à donner le dé à Manon mais la professeure l'arrête.
P : *Vous êtes d'accord qu'il peut encore jouer ? Non, il passe son tour mais comme Manon avait joué avant toi, il passe son tour. C'est embêtant ça. Allez vas-y, c'est à toi* (à E4) *mais t'as fini* (elle passe à E1) *t'as fini,donc c'est à toi* (à Léandro).

Tour 1 : Jeu du tri d'images

P : *Là, on trie, hein. Okay ? Heu, on les met dans l'ordre ou pas, comme vous voulez. Je vais les mettre dans un bac, c'est plus facile.*
Ben : *Il faut attendre.*
P : *Alors, voilà vos courses. Vos deux bacs de courses.*
La professeure s'en va vers un autre groupe.
P : *Tu prends une image qui représente deux. Tu prends pas deux images. Tu prends une image qui dit deux.* Elle range l'image dans la bonne boîte. *Donc, c'est l'image qui dit deux.*
Les enfants continuent à jouer, la professeure va vers un autre groupe. Puis elle revient un peu plus tard.
P : *Allez, est-ce qu'on trie là ? Allez, en avant, tu lances le dé. Allez, on cherche. Allez, un. Tu prends une petite chose qui veut dire un. Un sac de croquettes, allez, mets-le dans tes courses. Allez, vas-y, Olivia.*
Olivia lance le dé.
P : *Ouh, six. Est-ce qu'on a une petite pancarte qui dit six ?* Elle fouille dans le bac. *Allez, vas-y, cherche. Cherche qui dit six, allez, on y va. Oulalalala. Tu peux toujours jouer.* Elle donne le dé à l'élève suivante (E3) pendant qu'elle continue de chercher avec Olivia.*On va continuer à chercher avec Olivia. Six.*
E3 lance le dé et fait tomber un des pots servant au tri.
P : *Oula, voilà les courses qui sont par terre. Bardi bardaf. Il y a peut-être pas* (en parlant de la carte avec six). *Allez, cherche un peu six... Qui dit six. Allez, en avant, on cherche. On cherche. Mais, on les a mélangés. Tu vois pourquoi il faut les trier.* Elle tend l'autre bac à E3. *Allez, vas-y, choupette. Allez, cherche un peu aussi avec Olivia, Ben. Six. Toi qui voulais un six.*
Ben à propos d'Olivia : *Elle a pris combien ?*
P : *Six.*

Ben : *Six.*
P : *Six, donc il faut six choses sur l'image. Ah oui.* L'élève après E3 (E4) lance le dé et fait un deux.
La professeure s'en va à l'appel d'un élève puis revient après un moment.
P à Olivia : *Tu n'as pas trouvé ton six, hein non choupette ?*
Ben : *Moi non plus.*
P : *Attends.* Elle s'assied à côté de Ben et Olivia. *Allez, en voilà quatre. Madame Sabine aurait dû les mettre un peu séparés.* Elle prend une partie des cartes et cherche après un six. *Je les ai récupérées hier. Je les avais passées- euh vendredi pardon. Attends. Ça, c'est combien ? Compte un peu.* Elle tend une carte à Olivia.
Olivia prend la carte : *Un, deux, trois, quatre.*
Ben : *Quatre.*
P toujours en train de chercher : *Ah, en voilà cinq. Il y a peut-être pas six. Si je te donne quatre, tu vas aller le ranger où ?*
Olivia : *Dans les quatre.*
P : *Dans les quatre. Allez, vas-y.*

Tour 2 : Jeu du tri d'images

Simon lance le dé et fait quatre.
P : *Alors là, on jette le dé et on trie. Ou alors, ce que vous pouvez... Regarde, c'est combien ça ? Combien est-ce qu'il y en a ?*
Simon : *Un, deux trois, quatre.*
P : *Quatre et ben, mets-le dans le bac de quatre. Comptez, triez parce qu'avec le dé, ça risque d'être plus long. Allez, vas-y. En avant, combien est-ce qu'il y en a ? Allez, on compte et on les trie pour faire les courses.* Elle donne une carte à chaque élève.
E : *Il y en a deux.*
P : *Allez, on est employé chez Colruyt, chez Delhaize et on compte. Allez, en avant. On va les trier parce que ce... Il y a peut-être pas cinq. Ça va être compliqué. On adapte.* Elle retire le dé de la table.
Adèle : *Deux.*
P : *Deux, ben allez, regardez où c'est. Allez hop, on met dans le rayon qui dit deux, dans le rayon qui dit quatre. Allez, on y va, on trie.*

Tour 1 : Jeu du manteau aux boutons

Les enfants avaient déjà commencé à jouer au moment de l'observation et de l'arrivée de la professeure.
E1 : *Madame, regarde !*
P : *Ah, il te manque combien ? Ah, il va falloir choisir, hein. Et toi, il t'en manque combien ?*
E2 : *Un.*
P : *Wouah, il te manque quel chiffre, toi ?*
E3 : *Quatre.*
P : *La valeur quatre, okay. Et toi* (à E4) *? Et pourquoi est-ce que tu n'en as que trois ? tu devrais en avoir deux. Tu as passé ton tour ?*
E3 : *C'est parce qu'il devait pêcher un deux et il a pris un mauvais.*
P : *Aah, tu avais pas pioché le bon. Bien vu, bien vu* (à E3).
E4 pioche une carte avec des boutons mais elle ne correspond pas à ce qu'il devait trouver. Il la remet alors dans le sachet. P : *Ah, il faut sentir, hein chou. Il faut pas les prendre et regarder.* La professeure s'en va vers un autre groupe. Les enfants continuent à jouer.

E1 : *Madame, j'ai ça, c'est normal ?*
P : *Et bah, compte combien il y en a. Tu as senti ? Ferme les petits yeux si tu veux.*
E1 : *Un, deux, trois.*
P : *Trois, et il t'en manque quoi ?* Il place la carte sur son manteau. *Voilà, ton manteau a tous ses boutons ! Allez, vas-y, au suivant.*

Tour 2 : Jeu du manteau à boutons

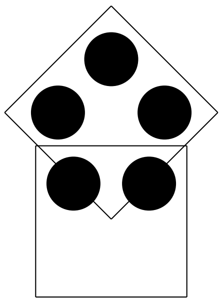
Un élève cherche à prendre une carte avec quatre boutons. Il en pioche une et pour vérifier qu'elle est correcte, il compte le nombre de boutons sur sa carte puis les doigts du pictogramme sur le manteau.
La professeure arrive une fois qu'ils ont fini : *Est-ce que c'est facile de sentir ?*
Élèves : *Oui.*
P : *Oui ? Et vous comptez dans votre petite tête ?*
Élèves : *Oui.*
P : *Oui ? Tu comptes dans ta petite tête ? Et vous ne regardez pas, vous ne faites pas de la triche ?*

Tour 1 : Jeu des décompositions

Ce jeu n'a pas été observé lors du premier tour.

Tour 2 : Jeu des décompositions

Ben : *Madame ! Regardez !*
P : *Super, Ben !*
Ben : *Si tu fais comme ça, ça fait cinq.*
P : *Montre un peu parce que de loin, je ne vois pas. Viens un peu. Ça fait cinq, mais normalement, il faut les superposer mais t'as raison. C'est comme une petite maison, tu vois.*
Reproduction de la superposition faite par Ben :



Ben retourne s'asseoir puis revient quelques minutes plus tard.
Ben : *Madame, regardez encore.*
P : *C'est quoi ça ? Combien ça fait en tout ?*
Ben : *Un, deux, trois, quatre.*
P : *T'as construit quatre.*

Bibliographie

[1] ARTIGUE, M., Guy BROUSSEAU, J. BRUN, Yves CHEVALLARD, F. CONNE et Gérard VERGNAUD. *Didactique des mathématiques : Textes de base en pédagogie.* Lausanne & Paris : Delachaux et Niestlé, 1996. Sous la dir. de BRUN, Jean.

[2] BACHELARD, Gaston. *La formation de l'esprit scientifique : contribution a une psychanalyse de la connaissance objective.* 10e éd. Paris : Librairie Philosophique J. Vrin, 1977. (Bibliothèque des textes philosophiques).

[3] BALACHEFF, N. Conceptions, propriété du système sujet/milieu. *In* : NOIRFALISE, Roland et Marie-Jeanne PERRIN-GLORIAN, éds, *Actes de la VII*[e] *École d'été de didactique des mathématiques*, Clermont-Ferrand : IREM de Clermont-Ferrand, 1995, p. 215-229.

[4] BALHAN, Kevin. *Cours de didactique spéciale en mathématiques.* 2025.

[5] BOSCH, M. et Yves CHEVALLARD. La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs : Objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 1999, 19 (1), p. 77-124.

[6] BOSCH, M. et J. GASCÓN. Fundamentación anthropológica de las organizaciones didácticas : de los "talleres de prácticas matemáticas" a los "recorridos de estudio e investigación". *In* : BRONNER, Anne *et al.*, éds, *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*, Montpellier : IUFM, 2010, p. 55-91.

[7] BROUSSEAU, Guy. Didactique fondamentale. *In* : *Didactique des mathématiques et formation des maîtres à l'école élémentaire. Actes de l'Université d'été*, Bordeaux : IREM de Bordeaux, 1988.

[8] BROUSSEAU, Guy. *Étude locale des processus d'acquisitions scolaires.* Bordeaux : IREM de Bordeaux, 1978. (Enseignement élémentaire des mathématiques; 18).

[9] BROUSSEAU, Guy. Ingénierie didactique : d'un problème à l'étude a priori d'une situation didactique. *In* : *Actes de la Deuxième École d'été de didactique des mathématiques*, INRP, 1982.

[10] BROUSSEAU, Guy. Le rôle du maître et de l'institutionnalisation. *In* : *Actes de la Troisième École d'été de didactique des mathématiques*, Olivet : INRP, 1984.

[11] BROUSSEAU, Guy. Les échecs électifs en mathématiques dans l'enseignement élémentaire. *Revue de Laryngologie, Otologie, Rhinologie.* 1980, 101 (3–4), p. 107-131.

[12] BROUSSEAU, Guy. Les objets de la didactique des mathématiques. *In* : *Actes de la Troisième École d'été de didactique des mathématiques*, Olivet : INRP, 1982.

[13] BROUSSEAU, Guy. *Théorie des situations didactiques : Didactique des mathématiques 1970-1990.* Grenoble : La Pensée Sauvage, 1998. (Recherches en didactique des mathématiques). ISBN 2859191348.

[14] BROUSSEAU, Guy. *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques.* Thèse d'État. Université Bordeaux I. Bordeaux, 1986.

[15] BROUSSEAU, Guy et Nadine BROUSSEAU. *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. Bordeaux : IREM de Bordeaux, 1987.

[16] BRUN, Jean. Évolution des rapports entre la psychologie du développement cognitif et la didactique des mathématiques. *In* : *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, Grenoble : La Pensée Sauvage, 1993.

[17] CHAACHOUA, H. *La praxéologie comme modèle didactique pour la problématique EIAH. Etude de cas : la modélisation des connaissances des élèves*. Grenoble : Université Joseph Fourier (Grenoble I), 2010. Habilitation à diriger des recherches.

[18] CHEVALLARD, Yves. L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 1999, 19 (2), p. 221-265.

[19] CHEVALLARD, Yves. *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné*. 2e édition revue et augmentée. Grenoble : La Pensée Sauvage, 1991.

[20] CHEVALLARD, Yves et Alain MERCIER. La notion de situation didactique. *In* : *Actes de la Troisième École d'été de didactique des mathématiques*, Olivet : INRP, 1984.

[21] DAMPHOUSSE, Pierre. *L'arithmétique ou l'art de compter. L'arithmétique ou l'art de compter*. Paris : Le Pommier, 2002 - 2002. (Quatre à quatre ; 5). ISBN 2746500914.

[22] DORIER, Jean-Luc. *L'héritage de Piaget dans la didactique des mathématiques* [Youtube]. Centre Jean Piaget, 2020-03-05. (consulté le 11 septembre 2024). Disponible via l'URL <https://www.youtube.com/watch?v=t9N8s8GQhGc>.

[23] DORIER, Jean-Luc. L'héritage de piaget en didactique des mathématiques. *ANAE. Approche neuropsychologique des apprentissages chez l'enfant*. 2022, (176), p. 45-52.

[24] GEORIS, Nicolas. *Définition des entiers naturels : vers une construction axiomatique*. 2025.

[25] KRYSINSKA, M. Peut-on manipuler les notations de leibniz en toute rigueur ? *Repères-IREM*. 2014, (95), p. 23-47. ISSN 1157-285X.

[26] LEROY, Julien. *Cours de logique mathématique et théorie des ensembles*. 2023.

[27] LEROY, Julien. *Cours de structures algébriques*. 2021.

[28] MARGOLINAS, Claire. De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques. *In* : VERGNAUD, Gérard, Michèle ARTIGUE, Régine DOUADY, Viviane DURAND-GUERRIER et Guy BROUSSEAU, éds, *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, Grenoble : La Pensée Sauvage, 1993.

[29] MARGOLINAS, Claire et Floriane WOZNIAK. Le nombre à l'école maternelle : Une approche didactique. *In* : *Le point sur... Pédagogie*, Bruxelles : de boeck, 2012, p. 130.

[30] MATHERON, Y. Analyser les praxéologies. quelques exemples d'organisations mathématiques. *Petit x*. 2000, 54, p. 51-78. ISSN 0759-9188.

[31] MATHERON, Yves. *Mémoire et étude des mathématiques : Une approche didactique à caractère anthropologique*. Rennes : Presses universitaires de Rennes, 2010. (Paideïa). ISBN 978-2-7535-0934-4.

[32] MATHONET, P. *Cours de mathématiques élémentaires*. 2018.

[33] MERCIER, Alain. *L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique*. Thèse de doct. Université de Bordeau I. 1992.

[34] NICOLAY, Samuel. Les nombres naturels. *In* : *Les nombres*. 2015, chap. 2, p. 67-98. ISBN 9791037013774.

[35] PIAGET, Jean. *L'équilibration des structures cognitives : problème central du développement. L'équilibration des structures cognitives : problème central du développement*. Paris : Presses Universitaires de France, 1975. (Etudes d'épistémologie génétique, 33).

[36] ROGALSKI, Marc. Mise en équation différentielle et mesure des grandeurs. un point de vue mathématique sur la collaboration avec la physique. *Repères-IREM*. 2006, (64). Publié en ligne le 9 janvier 2024.

[37] ROUCHIER, A. *Étude de la conceptualisation dans le système didactique en mathématiques et informatique élémentaires : proportionnalité, structures itéro-récursives, institutionnalisation*. Thèse d'État. Université d'Orléans, UFR Sciences Fondamentales et Appliquées. Orléans, 1991.

[38] SCHNEIDER, M. Ingénieries didactiques et situations fondamentales. quel niveau praxéologique ? *La Pensée Sauvage*. 2011. Disponible via l'URL HDL : `https://orbi.uliege.be/2268/177690`.

[39] SCHNEIDER, M. *Traité de didactique des mathématiques. La didactique par des exemples et contre-exemples*. D/2008/8886/20. Presses Universitaires de Liège, 2008. Disponible via l'URL HDL : `https://orbi.uliege.be/2268/34948`. (Si les mathématiques m'étaient contées). ISBN 978-2-87456-066-8.

[40] SCHUBAUER-LEONI, M.-L. Le contrat didactique dans une approche psycho-sociale des situations d'enseignement. *Interactions didactiques*. 1988, (8), p. 63-75.

[41] SCHUBAUER-LEONI, M.-L. *Maître-élève-savoir : analyse psycho-sociale du jeu et des enjeux de la relation didactique*. Thèse de doctorat. Université de Genève, Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation. Genève, 1986.

[42] SCHUBAUER-LEONI, M.-L. et A.-N. PERRET-CLERMONT. Interactions sociales et représentations symboliques dans le cadre de problèmes additifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 1980, 1 (3), p. 297-350.

[43] TONNELLE, J. *Le monde clos de la factorisation au premier cycle*. 1979. Mémoire de dea de didactique des mathématiques.

[44] VERGNAUD, Gérard. Activité et connaissance opératoire. *Bulletin de l'APM*. 1977, 307 (2), p. 52-65.

[45] VERGNAUD, Gérard. Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la représentation. *Psychologie française*. 1985, 30 (3,4), p. 245-252.

[46] VERGNAUD, Gérard. Epistemology and psychology of mathematics education. *In* : KILPATRICK, Jeremy et Pearla NESHER, éds, *Mathematics and Cognition : A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Cambridge : Cambridge University Press, 1990, (ICMI Study Series), p. 14-30.

[47] VERGNAUD, Gérard. Interactions sujet – situation. *In* : *Actes de la Troisième École d'été de didactique des mathématiques*, Olivet : INRP, 1984.

[48] VERGNAUD, Gérard. *L'enfant, la mathématique et la réalité : problèmes de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire*. Berne ; Francfort am Main : Peter Lang, 1981. (Exploration ; Série : Recherches en sciences de l'éducation). ISBN 3-261-04845-X.

[49] VERGNAUD, Gérard. La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 1990, 9 (3), p. 133-170.

[50] VERGNAUD, Gérard, André ROUCHIER, Serge DESMOULIÈRES, Claude LANDRÉ, Patrick MARTHE, Graciela RICCO, Renan SAMURÇAY, Janine ROGALSKI et André VIALA. Une expérience didactique sur le concept de volume en classe de cinquième (12 à 13 ans). *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 1983, 4 (1), p. 71-120.

[51] VYGOTSKI, L. S. *Langage et pensée.* Paris : Éditions Sociales Messidor, 1986. Traduit du russe.

[52] WALISER, B. *Systèmes et modèles.* Paris : Seuil, 1978.

[53] WALLON, Henri. *De l'acte à la pensée : essai de psychologie comparée.* Paris : Flammarion, 1942. (Bibliothèque de philosophie scientifique).

[54] WATZLAWICK, Paul, Janet Beavin BAVELAS et Don De Avila JACKSON. *Une logique de la communication.* Paris : Editions du Seuil, 1978. (Points. Essais ; 102). ISBN 9782757839997.

[55] WERMUS, H. Esquisse d'un modèle des activités cognitives. *Dialectica.* 1978, 32 (3-4), p. 317-338. ISSN 0012-2017.