

## Effet des biais cognitifs sur la satisfaction des objectifs de l'investisseur par le modèle HAMA semi-paramétrique

**Auteur :** Keutgen, Cédric

**Promoteur(s) :** Hübner, Georges

**Faculté :** HEC-Ecole de gestion de l'Université de Liège

**Diplôme :** Master en sciences de gestion, à finalité spécialisée en management général (Horaire décalé)

**Année académique :** 2024-2025

**URI/URL :** <http://hdl.handle.net/2268.2/24580>

---

### Avertissement à l'attention des usagers :

*Tous les documents placés en accès ouvert sur le site le site MatheO sont protégés par le droit d'auteur. Conformément aux principes énoncés par la "Budapest Open Access Initiative"(BOAI, 2002), l'utilisateur du site peut lire, télécharger, copier, transmettre, imprimer, chercher ou faire un lien vers le texte intégral de ces documents, les disséquer pour les indexer, s'en servir de données pour un logiciel, ou s'en servir à toute autre fin légale (ou prévue par la réglementation relative au droit d'auteur). Toute utilisation du document à des fins commerciales est strictement interdite.*

*Par ailleurs, l'utilisateur s'engage à respecter les droits moraux de l'auteur, principalement le droit à l'intégrité de l'oeuvre et le droit de paternité et ce dans toute utilisation que l'utilisateur entreprend. Ainsi, à titre d'exemple, lorsqu'il reproduira un document par extrait ou dans son intégralité, l'utilisateur citera de manière complète les sources telles que mentionnées ci-dessus. Toute utilisation non explicitement autorisée ci-avant (telle que par exemple, la modification du document ou son résumé) nécessite l'autorisation préalable et expresse des auteurs ou de leurs ayants droit.*

---



## **Effet des biais cognitifs sur la satisfaction des objectifs de l'investisseur par le modèle HAMA semi-paramétrique**

Promoteur :

M. Georges HÜBNER

Lecteur :

M. Gildas BLANCHARD

Travail de fin d'études présenté par

**Cédric KEUTGEN**

en vue de l'obtention du diplôme de

Master en sciences de gestion, à finalité spécialisée en management général (Horaire décalé)

Année académique 2024/2025

---

"The investor's chief problem, and even his worst enemy, is likely to be himself."  
— *Benjamin Graham (1949), The Intelligent Investor*

---

# Remerciements

Je souhaite tout d'abord exprimer ma profonde gratitude à mes proches pour leur soutien constant et leur encouragement tout au long de la réalisation de ce mémoire. Leur présence et leur patience ont été une source précieuse de motivation. J'adresse également mes sincères remerciements à mon promoteur, M. Georges Hübner, pour son suivi attentif, ses conseils éclairés et la qualité de son accompagnement qui ont grandement contribué à l'aboutissement de ce travail.

# Abstract

Cette thèse analyse l'impact des biais cognitifs sur l'allocation optimale de portefeuilles selon le modèle Horizon-Asymmetry Mental Accounting (HAMA) et évalue leurs performances à travers le critère GGBP. S'inscrivant dans la continuité des travaux en finance comportementale, l'étude met en évidence la manière dont le HAMA complète les cadres classiques en intégrant les horizons temporels et les préférences asymétriques des investisseurs, tandis que le GGBP fournit une mesure de performance cohérente avec ces considérations comportementales.

La méthodologie empirique repose sur une démarche exploratoire auprès d'investisseurs réels, ayant permis de constituer des univers d'investissement réalistes et sectoriellement diversifiés. L'allocation optimale selon HAMA est ensuite déterminée pour différents profils d'investisseurs, puis ses performances sont mesurées selon le critère GGBP. Les résultats montrent que, sous des contraintes fortes, les portefeuilles HAMA tendent à s'écarter de la frontière efficiente de Markowitz, et que les univers présentant les meilleures performances GGBP ne coïncident pas nécessairement avec ceux affichant les ratios de Sharpe les plus élevés. Un résultat marquant révèle que la substitution du S&P 500 par l'ETF MSCI World, reflétant une diversification géographique envisagée par un investisseur, a entraîné une forte dégradation de la couche protectrice des portefeuilles, tant en termes de rendement que de faisabilité selon le GGBP.

Ces conclusions ont des implications managériales importantes : il peut être utile aux gestionnaires de portefeuille d'adapter leurs allocations en fonction des horizons, des préférences comportementales et des biais des investisseurs en portant une attention particulière à la composition sectorielle et géographique des actifs. Sur le plan académique, cette recherche contribue à la littérature en mobilisant conjointement deux modèles récents et rigoureux, HAMA et GGBP, et propose un cadre complet pour analyser simultanément l'allocation comportementale et ses performances.

# Table des matières

1	Introduction	1
2	Revue de littérature	3
<b>2.1</b>	<b>Théories du choix sous risque</b>	<b>3</b>
2.1.1	Prospect Theory (PT) - Kahneman and Tversky (1979)	3
2.1.2	La théorie à deux facteurs (SP/A) – Lola Lopes (1987)	4
<b>2.2</b>	<b>Théories d’allocations optimales par comptes mentaux</b>	<b>6</b>
2.2.1	Behavioral portfolio theory (BPT) – Shefrin et Statman (2000)	6
2.2.2	Mental accounting theory (MA) – Das et al. (2010)	9
2.2.3	Horizon Mental Accounting (HMA) – Hübner et Lejeune (2017)	12
2.2.4	Horizon-Asymmetry Mental Accounting (HAMA) – Hübner et Lejeune (2017)	16
<b>2.3</b>	<b>La mesure de performance Global Goal-Based (GGBP)</b>	<b>19</b>
2.3.1	Méthodes de mesure	19
2.3.2	Étude opérationnelle de la GGBP	24
<b>2.4</b>	<b>Synthèse</b>	<b>25</b>
3	Méthodologie	27
4	Développements et résultats	28
<b>4.1</b>	<b>Définition des univers d’investissement</b>	<b>28</b>
4.1.1	Le facteur de foi comme prisme de construction mentale des univers	28
4.1.2	Démarche exploratoire	29
4.1.3	Univers d’investissement	31
<b>4.2</b>	<b>Traitement des données</b>	<b>33</b>
4.2.1	Test de Shapiro-Wilk	33
4.2.2	Pertinence des actifs et rôle potentiel dans un portefeuille HAMA	37
4.2.3	Calcul des moments centrés des portefeuilles	38
<b>4.3</b>	<b>Implémentation HAMA</b>	<b>39</b>
4.3.1	Validation du modèle	39
4.3.2	Ouverture vers l’analyse paramétrique	41
4.3.3	Variation du paramètre $\lambda m$	41
4.3.4	Variation du paramètre $Hm$	44
4.3.5	Variation du paramètre $\Omega m$	46
4.3.6	Variation du paramètre $\gamma m$	48
4.3.7	Cas particulier : appétence unitaire pour les gains extrêmes	50
4.3.8	Analyse de sensibilité de la probabilité de Shortfall	53
<b>4.4</b>	<b>Performances GGBP des portefeuilles HAMA</b>	<b>56</b>

4.4.1	Implémentation des indicateurs de performances	56
4.4.2	Évaluation GGBP des portefeuilles HAMA optimaux	59
5	Discussion	65
5.1	<b>Confrontation aux hypothèses et à la littérature</b>	<b>65</b>
5.2	<b>Rôle des actifs sectoriels « non rationnels »</b>	<b>65</b>
5.3	<b>Validation des hypothèses méthodologiques</b>	<b>66</b>
5.4	<b>Performances GGBP et allocation optimale</b>	<b>66</b>
6	Conclusion	67
7	Bibliographie	69
8	Annexes	71

# 1 Introduction

Le présent mémoire s'inscrit dans le champ de la finance comportementale, qui vise à comprendre comment les biais cognitifs influencent les décisions d'investissement dans des contextes incertains. L'actualité des marchés financiers, marquée par une forte volatilité, l'émergence de nouvelles classes d'actifs et des crises économiques successives, met en évidence les limites des modèles traditionnels fondés sur la rationalité parfaite et l'aversion au risque constante. Dans ce contexte, la question centrale de ce mémoire est de déterminer comment les biais cognitifs des investisseurs, conduisant parfois à l'intégration d'actifs « non rationnels » dans leurs univers d'investissement, modifient l'allocation optimale selon le modèle HAMA et influencent les performances mesurées par le critère GGBP.

L'évolution des théories de l'allocation d'actifs suit une progression logique depuis les modèles normatifs classiques jusqu'aux approches comportementales contemporaines. La théorie moyenne-variance de Markowitz (1952) a établi que les décisions d'allocation pouvaient être optimisées en fonction du couple rendement espéré–variance, sous l'hypothèse de rationalité et d'aversion au risque constante. Le modèle d'évaluation des actifs financiers de Sharpe (1964) a prolongé cette approche en introduisant le risque systématique (bêta) dans un marché supposé efficient. Bien que fondamentaux, ces modèles reposent sur des hypothèses restrictives : distribution normale des rendements, horizon unique, absence de biais cognitifs et préférence au risque homogène. Ces limites ont très rapidement conduit à des déviations entre les résultats attendus et empiriquement observés. Ces déviations ont alors motivé le développement de théories comportementales qui cherchent à rendre compte des décisions réelles des investisseurs.

La Prospect Theory de Kahneman et Tversky (1979) a introduit l'idée d'un point de référence et d'une aversion asymétrique aux pertes, rompant avec le paradigme de l'utilité espérée. La théorie à deux facteurs SP/A de Lola Lopes (1987) a ensuite complété ce cadre en distinguant la sécurité et le potentiel de gain comme dimensions psychologiques du risque, mettant en lumière l'arbitrage subjectif entre protection contre les pertes et recherche de gains élevés. Ces modèles ont ouvert la voie à la Behavioral Portfolio Theory de Shefrin et Statman (2000), qui formalise l'organisation des portefeuilles en comptes mentaux correspondant à des objectifs distincts, chacun avec sa propre tolérance au risque. Cette approche permet d'agréger des allocations différenciées selon les objectifs, en rupture avec le principe d'optimalité globale des modèles classiques.

Le modèle Mental Accounting de Das et al. (2010) a renforcé cette rigueur en introduisant des contraintes probabilistes sur les rendements associés à chaque compte mental, offrant aux investisseurs une manière plus intuitive d'exprimer leurs préférences sans recourir à un coefficient d'aversion au risque abstrait. Toutefois, il ne considérait pas explicitement l'horizon d'investissement, une dimension essentielle pour évaluer la tolérance au risque au fil du temps. Le modèle Horizon Mental Accounting (HMA) de Hübner et Lejeune (2017) a comblé cette lacune en intégrant l'horizon de placement, permettant d'exploiter le théorème central-limite qui fait tendre le rendement attendu des portefeuilles vers leur espérance lorsque la durée d'investissement augmente. Cette considération permet alors de pallier certaines limites des approches comportementales antérieures, notamment en incluant des portefeuilles plus volatiles dans les solutions optimales à horizon suffisamment grand. L'extension Horizon-Asymmetry Mental Accounting (HAMA) introduit en outre l'asymétrie gains–pertes, modélisant la sensibilité des investisseurs aux gains extrêmes, conformément aux observations de Kahneman et Tversky (1979). Le HAMA permet ainsi de combiner horizon, risque de perte et potentiel de gain dans un cadre cohérent, offrant une représentation réaliste et flexible des préférences hétérogènes des investisseurs.

L'association du HAMA avec le critère de performance GGBP de Hübner et François (2021), également récent, constitue un outil complet pour évaluer l'efficacité des portefeuilles en fonction des objectifs



comportementaux des investisseurs. Cette approche conjointe répond à un besoin à la fois académique et pratique : elle permet de combler une lacune dans la littérature scientifique sur les modèles comportementaux récents, tout en offrant aux gestionnaires un cadre pour mieux comprendre et anticiper les décisions réelles d'allocation d'actifs.

Le mémoire est structuré pour suivre un fil logique : après cette introduction, la revue de littérature présente les fondements des biais cognitifs, les modèles d'allocation comportementale et les spécificités du HAMA ainsi que du critère GGBP. La méthodologie empirique s'appuie sur une démarche exploratoire auprès d'investisseurs réels, visant à identifier des comportements et préférences variés, qui serviront de socle pour créer des univers d'investissement réalistes et distincts par leurs expositions sectorielles. Pour chacun de ces univers, l'allocation optimale selon le modèle HAMA sera ensuite étudiée à travers différents profils d'investisseurs, permettant de modéliser la manière dont les préférences temporelles et l'aversion aux pertes ou aux gains influencent la composition des portefeuilles. Enfin, la performance de ces allocations sera évaluée au moyen du critère GGBP. Cette approche permet d'illustrer le lien entre le modèle HAMA et le critère GGBP, tout en observant les effets des biais cognitifs différenciant les univers sur les performances qui en découlent. Les chapitres suivants détaillent les résultats, leur discussion ainsi que les implications pratiques et théoriques, avant de conclure sur les contributions et perspectives de recherche. Cette progression montre comment les enseignements tirés de la littérature ont guidé la conception de la méthodologie et permettent de répondre à la question centrale du mémoire<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>**Mention IA :** Cette thèse a été rédigée avec l'assistance d'un outil d'intelligence artificielle générative, utilisé uniquement pour la reformulation, la synthèse du texte et le débogage des codes Python. Aucune information non fournie par l'auteur n'a été intégrée, assurant un contrôle complet du contenu.

## 2 Revue de littérature

### 2.1 Théories du choix sous risque

#### 2.1.1 Prospect Theory (PT) - Kahneman and Tversky (1979)

Dans leur article fondateur de 1979, Kahneman et Tversky introduisent la théorie des perspectives (PT) comme une alternative descriptive à la théorie de l'utilité espérée (EUT), qui dominait jusqu'alors l'analyse de la décision sous risque. Ils ont fondé leur théorie à partir de divers questionnaires et problèmes de choix statistiques soumis à des étudiants et membres du personnel de leur université. Au moyen des résultats empiriques ainsi obtenus, les auteurs montrent que les choix réels des individus enfreignent de manière systématique les axiomes fondamentaux de l'EUT (Daniel Kahneman, Amos Tversky, 1979).

#### A. Formulation de la Prospect Theory

Face aux nombreuses anomalies empiriques incompatibles avec la théorie de l'utilité espérée (EUT), Kahneman et Tversky développent un modèle alternatif : la Prospect Theory (PT). Elle modélise le choix sous risque en deux phases distinctes, la phase d'édition et d'évaluation.

La phase d'édition vise à simplifier cognitivement les options afin de faciliter la prise de décision. Elle commence par un codage relatif, où les individus évaluent les résultats comme des gains ou des pertes par rapport à un point de référence, généralement leur patrimoine initial, plutôt que comme des niveaux absolus de richesse. Ensuite, les issues identiques sont regroupées et les composantes certaines sont isolées du risque, ce qui permet de clarifier les alternatives. Les éléments communs aux différentes options sont également éliminés, et les montants ou probabilités sont souvent arrondis pour rendre l'évaluation plus simple et intuitive. Enfin, les options clairement moins favorables sont éliminées grâce à la détection de dominance.

La phase d'évaluation repose sur deux fonctions fondamentales :

- **Fonction de valeur  $v(x)$**  : elle mesure la valeur des variations de richesse par rapport au point de référence. Elle est concave pour les gains (illustrant l'aversion au risque) et convexe pour les pertes (reflétant une préférence pour le risque), avec une sensibilité plus forte aux pertes qu'aux gains.
- **Fonction de pondération  $\pi(p)$**  : elle transforme les probabilités objectives en poids subjectifs, non linéaires et non additifs, reflétant la perception psychologique du risque.

Ainsi, la valeur subjective d'un prospect se calcule comme la somme pondérée de ses gains et pertes, généralisant l'EUT tout en expliquant des anomalies comportementales observées, comme l'effet de certitude ou l'effet de réflexion.

Pour une perspective régulière  $(x, p; y, q)$ , la valeur subjective est donnée par :

$$V(x, p; y, q) = \pi(p)v(x) + \pi(q)v(y) \quad (1)$$

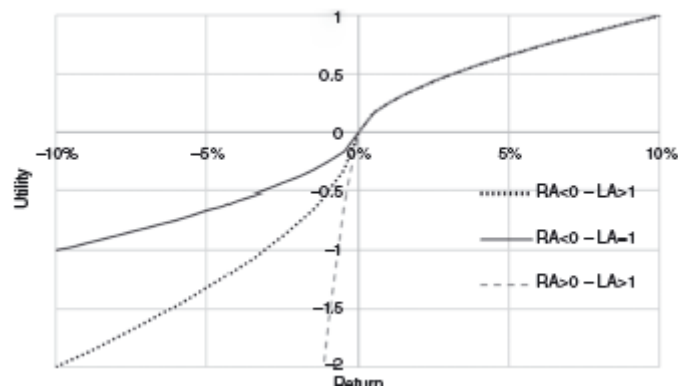


Figure 1 - Fonction de valeur hypothétique en fonction des coefficients d'aversion au risque et aux pertes (Georges Hübner, Pascal François, 2024).

### L'effet « house-money »

Une extension particulièrement intéressante du cadre de la Prospect Theory a été proposée par Barberis, Huang et Santos (2001). Ces auteurs introduisent la notion d'effet "house-money", selon laquelle l'aversion aux pertes d'un investisseur évolue dans le temps en fonction de ses gains ou pertes récents. Cette version dynamique de la théorie des perspectives se traduit par la spécification suivante (Barberis, Huang, Santos, 2001) :

$$U_{R,\lambda,\gamma}(R_t) = \begin{cases} (R_t - \bar{R})^{\gamma^+} & \text{si } R_t > \bar{R} \\ -\lambda_t(R_t - \bar{R})^{\gamma^-} & \text{si } R_t < \bar{R} \end{cases}$$

Où l'aversion aux pertes  $\lambda_t$  devient une fonction temporelle, reflétant l'idée que les investisseurs sont moins sensibles aux pertes après des gains récents, et inversement.

#### 2.1.2 La théorie à deux facteurs (SP/A) – Lola Lopes (1987)

La théorie SP/A (Security-Potential/Aspiration), proposée par Lola Lopes en 1987, constitue une contribution majeure à la psychologie économique en offrant une perspective psychologique sur la prise de décision sous incertitude, distincte des modèles normatifs fondés sur l'utilité espérée. Contrairement aux approches classiques, qui supposent des préférences stables et rationnelles, cette théorie considère que les choix des individus sont guidés par deux facteurs principaux, dispositionnel et situationnel, combinés à un niveau d'aspiration contextuel (Lopes, 1987).

**Le facteur dispositionnel** reflète la tendance d'un individu à privilégier soit **la sécurité**, c'est-à-dire à éviter les pertes et minimiser le risque, soit **le potentiel**, c'est-à-dire à rechercher des gains élevés même au prix d'un risque accru. Ces orientations expliquent pourquoi des individus confrontés à des options identiques peuvent adopter des comportements radicalement différents. Les personnes averses au risque accordent davantage de poids aux pires résultats, tandis que les amateurs de risque se concentrent sur les meilleures opportunités.

**Le facteur situationnel** est incarné par le niveau **d'aspiration**, qui fonctionne comme un seuil psychologique que l'individu souhaite atteindre. Ce niveau dépend à la fois des opportunités disponibles, des contraintes de l'environnement et des influences externes, comme la compétition ou la comparaison avec d'autres options. L'aspiration peut évoluer selon le contexte : une perte certaine peut inciter à prendre plus de risques pour compenser, tandis qu'un gain garanti peut renforcer la prudence. L'interaction entre aspiration et sécurité/potentiel permet d'expliquer la variabilité des comportements individuels face au risque.

Les études empiriques de Lola Lopes sur des participants confrontés à des loteries montrent que ceux orientés vers la sécurité privilégient les gains sûrs, tandis que ceux orientés vers le potentiel acceptent des risques élevés pour viser les gains extrêmes. Alors que les premiers sont averses au risque, les seconds le recherchent.

L'approche SP/A mène à des implications directes en finance comportementale. Elle explique pourquoi les investisseurs peuvent adopter des comportements apparemment irrationnels, tels que prendre plus de risques après une perte ou rechercher des actifs à distribution asymétrique positive. Elle met en évidence la dynamique des préférences : celles-ci ne sont pas fixes mais évoluent selon le contexte, les expériences passées et les motivations émotionnelles. Ainsi, la théorie SP/A offre un cadre pour comprendre l'arbitrage entre prudence et ambition, sécurité et espoir, et pour anticiper les réactions des individus face à des situations financières incertaines.

En résumé, la théorie SP/A de Lola Lopes combine une approche dispositionnelle, centrée sur la propension naturelle à rechercher sécurité ou potentiel, et une approche situationnelle, reflétée par le niveau d'aspiration, permettant de rendre compte de la complexité des décisions humaines sous risque et de leur variabilité selon le contexte. Trois comportements typiques peuvent être mis en évidence :

- **Recherche de loteries asymétriques** : l'attrait pour des actifs à distribution positive asymétrique peut s'expliquer par une forte orientation P.
- **Aversion asymétrique au risque** : les individus peuvent être à la fois averses au risque dans des contextes de perte et preneurs de risque dans des contextes de gains, selon la position du niveau d'aspiration A.
- **Rôle des aspirations dynamiques** : dans des environnements changeants tel qu'en période de haute volatilité des marchés, le niveau d'aspiration A peut se déplacer ce qui modifie les préférences de l'individu sans pour autant changer ses traits de personnalité.

## 2.2 Théories d'allocations optimales par comptes mentaux

### 2.2.1 Behavioral portfolio theory (BPT) – Shefrin et Statman (2000)

Dans la continuité des théories explorées lors des chapitres précédents, la *Behavioral Portfolio Theory* (Hersh Shefrin, Meir Statman, 2000) constitue une réponse aux limites normatives des modèles traditionnels de la finance, tels que la théorie moyenne-variance de Markowitz (1952) ou le MEDAF de Sharpe (1964). Alors que ces modèles postulent des investisseurs pleinement rationnels et guidés par la maximisation de l'utilité espérée, la BPT s'inscrit dans le courant de la finance comportementale, en intégrant les biais cognitifs, les préférences non linéaires et les émotions dans le processus de décision des investisseurs (Hersh Shefrin, Meir Statman, 2000).

#### A. Synthèse de la BPT

- *Théorie à deux facteurs de Lopes (1987)*  
Le lien entre la présence du risque et les choix opérés est basé sur la théorie à 2 facteurs établie par Lopes (Lopes, 1987). Les personnes averses au risque mettent l'accent sur le facteur de sécurité, alors que les adeptes du risque ont un facteur potentiel plus présent. Ces deux facteurs sont toutefois présents à des degrés différents au sein de chaque personne.
- *Les investisseurs perçoivent leurs portefeuilles comme des structures multicouches*  
Les investisseurs ne construisent pas de portefeuilles globalement optimaux selon la variance-covariance. Ils utilisent plutôt une allocation mentale par objectifs, où chaque objectif correspond à une "couche" distincte du portefeuille (par exemple, sécurité du capital, génération de rendement, spéculation). Chaque couche est évaluée indépendamment avec sa propre fonction d'utilité, basée sur la Prospect Theory.
- *Diversification optimale*  
Les investisseurs ne diversifient pas de manière optimale selon la variance-covariance, mais construisent leurs portefeuilles par objectifs psychologiques ou mentaux, parfois au détriment de l'efficacité au sens de Markowitz. Ainsi, la covariance entre différentes couches est ignorée (Shefrin, Hersh and Meir Statman, 2000). **Nous pouvons ici faire un lien avec les observations de la démarche exploratoire effectuée au chapitre 4.1.2.**

L'une des hypothèses de la BPT précitée est que les investisseurs cherchent à composer un portefeuille optimal, mais que leurs limites cognitives les empêchent souvent de prendre en compte les covariances entre actifs. Au lieu d'une construction globale basée sur la diversification moderne, ils allouent leur richesse totale  $W$  de manière incrémentale entre trois compartiments mentaux :  $C$  pour la consommation immédiate,  $D$  pour la protection contre les pertes (*downside protection layer*), et  $U$  pour le potentiel de gains élevés (*upside potential layer*). L'investisseur maximise une fonction d'utilité globale  $V$ , définie comme la somme pondérée des utilités issues de chacune de ces composantes :

$$V = V_C + \gamma_D V_D + \gamma_U V_U \quad (2)$$

Dans cette équation, les préférences individuelles face aux objectifs de sécurité et de potentiel de gain sont capturées par les paramètres  $\gamma_D$  et  $\gamma_U$ , qui reflètent la pondération subjective accordée à chaque composante du portefeuille. On remarque aisément dans cette équation la représentation mathématique de la théorie de Lopes (1987) qui dit que les dimensions de sécurité et de potentiels sont présentes au sein de chaque individu. Ainsi, un investisseur avec un ratio  $\gamma_D/\gamma_U$  élevé se trouvera

plus du côté de la sécurité et allouera une plus grande partie de sa richesse à la couche protectrice du portefeuille.

*Note : L'équation ci-dessus suggère une séparabilité forte entre les différentes couches du portefeuille. En pratique, il peut s'avérer que ce ne soit pas tout à fait le cas et que la propension face au risque dans la couche liée au potentiel soit dépendante des performances de la couche protectrice.*

## B. Sélection et allocation des titres dans un portefeuille comportemental

Dans la Behavioral Portfolio Theory (BPT), la sélection des titres ne repose pas sur une évaluation globale du portefeuille ni sur la prise en compte des covariances, comme dans l'approche moyenne-variance. L'investisseur comportemental choisit les titres de manière séquentielle, couche par couche, en maximisant une utilité spécifique à chaque objectif psychologique. Cette démarche repose sur l'idée que chaque dollar investi est affecté au titre qui maximise l'utilité marginale dans la couche considérée (Shefrin, Hersh and Meir Statman, 2000).

### Coûts de transaction et taille de l'allocation : effets sur la diversification

La BPT prédit que la composition de chaque couche est aussi influencée par les coûts de transaction fixes et le montant total alloué :

- **Coûts de transaction** : une composante fixe par opération (par opposition à un coût proportionnel) rend chaque titre additionnel moins rentable. Ce facteur influence donc directement le nombre de titres dans une couche en impactant directement l'utilité marginale liée à l'ajout d'un nouveau titre qui risque très vite de ne plus excéder le coût fixe (Shefrin, Hersh and Meir Statman, 2000).
- **Montant alloué** : une enveloppe budgétaire plus importante accroît mécaniquement le nombre de titres (Shefrin, Hersh and Meir Statman, 2000).

### Rôle des croyances et biais informationnels

Dans leur théorie de la BPT, Shefrin et Statman postulent que la perception de disposer d'une information "privilégiée" ou "interne" (réelle ou non) sur un titre peut aussi modifier l'allocation des ressources au sein du portefeuille. Un titre classé "top" suite à une information positive verra son poids augmenter, possiblement à un tel niveau que l'investisseur y concentrera beaucoup de ses ressources et négligera sa diversification. Les auteurs postulent également que ce biais est indépendant de la validité objective de l'information, en mentionnant qu'un investisseur convaincu d'être capable d'identifier une opportunité à partir de rumeurs inutiles se comporte de même qu'un investisseur recevant des informations internes du président d'une entreprise (Shefrin, Hersh and Meir Statman, 2000). Nous pouvons à nouveau faire un lien avec les observations de la démarche exploratoire effectuée au chapitre 4.1.2.

### Hypothèses d'effet de levier et de vente à découvert

Dans une perspective comportementale, l'achat sur marge et la vente à découvert créent un risque cognitif majeur en provoquant une « invasion » des couches mentales du portefeuille : les pertes ne restent pas confinées à la couche spéculative mais débordent sur les compartiments sécuritaires, générant une désutilité marginale extrême amplifiée par l'aversion aux pertes. L'achat sur marge expose l'investisseur à des appels de marge, l'obligeant à injecter des fonds ou liquider des actifs, tandis que la vente à découvert entraîne des pertes potentiellement illimitées si le prix du titre

augmente, forçant parfois la liquidation des couches de protection. Cette violation des repères mentaux établis rend ces positions particulièrement aversives, la vente à découvert étant encore plus redoutée en raison de l'absence de plancher de perte. Le caractère illimité des pertes menace non seulement la performance financière mais surtout l'intégrité psychologique de la structure pyramidale du portefeuille, expliquant la faible popularité de la vente à découvert et la prudence face à l'effet de levier chez les investisseurs individuels (Shefrin, Hersh and Meir Statman, 2000).

### **Étiquettes et perception du risque**

Les investisseurs se fient souvent aux catégories de titres ("action", "obligation", "étranger") pour simplifier leurs choix, mais ces étiquettes peuvent déformer leur perception. Par exemple, un titre étiqueté "action" peut être écarté de la couche de protection malgré son profil sécurisé, et les titres étrangers sont perçus comme plus risqués même à variance comparable, illustrant la distinction entre risque et incertitude (Lopes, 1984 ; Shefrin, Hersh & Statman, 2000).

### **« Home bias »**

Les investisseurs ont tendance à montrer une préférence pour les actifs domestiques, concentrant leurs investissements dans leur région, malgré les avantages de la diversification. Ce phénomène, appelé « Home bias », a été documenté par Huberman (1997) et confirmé par Glassman & Riddick (1996), qui ont observé que les Américains considèrent souvent les titres étrangers comme ayant une variance supérieure à leur valeur historique, influençant ainsi leurs décisions d'allocation.

### **Certitude et familiarité**

Les individus préfèrent les investissements qu'ils perçoivent comme certains ou familiers, même si le risque objectif est identique. Heath & Tversky (1991) ont montré que des parieurs choisissaient le sport plutôt que la politique, jugeant ce premier domaine plus familier et moins incertain.

## **C. Allocation d'actifs et violation de la séparation à deux fonds**

Dans le CAPM, tous les portefeuilles efficients se situent sur une droite de capitalisation, impliquant un rapport constant entre actions et obligations. L'attitude face au risque étant uniquement représentée par la proportion du titre sans risque. Pourtant, dans la pratique, les conseillers recommandent aux investisseurs plus agressifs d'augmenter ce ratio (Canner, Mankiw & Weil, 1997), ce qui est incompatible avec le CAPM, mais cohérent avec la BPT (Hersh Shefrin, Meir Statman, 2000).

L'allocation d'actif d'un investisseur comportemental ne suit pas la théorie de séparation à deux fonds mais bien l'importance relative de ses objectifs de sécurité et de potentiel au travers des paramètres  $(\gamma_U/\gamma_D; \alpha_U; \alpha_D)$ . Cette logique est renforcée par des heuristiques d'étiquetage : les obligations ont tendance à être mentalement exclues de la couche de potentiel, tandis que les actions sont exclues de celle de protection. Une réduction de la part allouée à la couche défensive entraîne ainsi une diminution des positions en obligations, une dynamique que la théorie MV ne peut expliquer (Hersh Shefrin, Meir Statman, 2000).

## 2.2.2 Mental accounting theory (MA) – Das et al. (2010)

### A. Introduction au cadre Mental Accounting (MA)

La théorie économique classique distingue depuis longtemps les décisions de production des décisions de consommation, une séparation à la base du principe d'avantage comparatif. De manière analogue, cette séparation est également centrale dans la théorie de portefeuille moyenne-variance (MVT) formulée par Markowitz (1952), qui modélise la production de portefeuilles comme la sélection d'un portefeuille efficient en termes de compromis entre espérance de rendement et risque, le risque étant mesuré par la variance du portefeuille. L'investisseur choisit ensuite, selon sa préférence, un portefeuille sur la frontière efficiente pour consommer un couple rendement-risque adapté à son utilité.

La formulation canonique du problème MVT est donnée par :

$$\min_{w \in \mathbb{R}^n} w^T \Sigma w \quad s.c. \quad w^T \mu = E; \quad w^T \mathbf{1} = 1 \quad (3)$$

Où  $w$  est le vecteur des pondérations d'un portefeuille composé de  $n$  actifs,  $\mu$  le vecteur des espérances de rendement,  $\Sigma$  la matrice de covariance,  $E$  le rendement espéré cible, et  $\mathbf{1}$  le vecteur unité. Ce problème génère, en faisant varier  $E$ , un ensemble de portefeuilles efficaces décrivant la frontière moyenne-variance.

Cependant, cette approche abstraite ne reflète pas la façon dont les investisseurs, notamment individuels, perçoivent leurs décisions d'investissement. Les investisseurs n'ont pas pour but final une combinaison abstraite de rendement et de volatilité, mais cherchent plutôt à atteindre des objectifs spécifiques (ex. retraite, financement des études, patrimoine), chacun avec sa propre tolérance au risque. Comme vu au chapitre précédent, cette idée est au cœur de la Behavioral Portfolio Theory (BPT) de Shefrin et Statman (2000), qui introduit la notion de comptes mentaux : les investisseurs allouent leurs actifs dans des sous-portefeuilles spécifiques à chaque objectif, chacun étant associé à un seuil cible de rendement  $H_i$  et à une tolérance au risque formulée comme une probabilité maximale d'échec  $\alpha_i$ .

Le cadre Mental Accounting (MA) développé par Das et al. (2010) s'inscrit dans cette lignée comportementale tout en conservant la rigueur d'un cadre d'optimisation. Dans ce modèle, le problème canonique devient :

$$\max_{w \in \mathbb{R}^n} w^T \mu \quad s.c. \quad \mathbb{P}(r(w) < H) \leq \alpha; \quad w^T \mathbf{1} = 1 \quad (4)$$

Où  $H$  est le seuil de rendement minimal jugé satisfaisant, et  $\alpha$  est le risque maximal acceptable de ne pas atteindre ce seuil. Sous l'hypothèse de distributions normales, cette formulation se rapproche conceptuellement des contraintes de type Value-at-Risk ( $\text{VAR}_\alpha = H$ ), traduisant le risque comme une probabilité d'échec plutôt qu'une dispersion des résultats. La frontière efficiente MA relie alors  $\mathbb{E}[r(w)]$  et  $\alpha$  pour un niveau de seuil fixé, définissant une famille de courbes paramétrées par  $H$ .

### B. Sous-portefeuilles et spécification comportementale

L'approche MA repose également sur deux hypothèses comportementales fortes : premièrement, les investisseurs sont meilleurs pour formuler leurs objectifs en termes de seuils et de probabilités, plutôt qu'en termes abstraits de coefficient d'aversion au risque (MVT). Deuxièmement, ils sont plus à l'aise pour spécifier des objectifs au niveau des sous-portefeuilles que pour leur portefeuille global. Cela se traduit par la décomposition de l'allocation en  $m$  comptes mentaux, chacun résolvant :

$$\max_{w_i \in \mathbb{R}^n} w_i^T \mu \quad s.c. \quad \mathbb{P}(r(w_i) < H_i) \leq \alpha_i; \quad w_i^T \mathbf{1} = 1 \quad (5)$$



Puis par agrégation de ces sous-portefeuilles pour constituer le portefeuille global. Dans leur article, les auteurs montrent que si les ventes à découvert sont autorisées, cette agrégation conserve l'efficacité MVT globale. En cas d'interdiction de ventes à découvert, une perte modérée d'efficacité peut survenir, mais reste inférieure à celle causée par une mauvaise spécification de l'aversion au risque dans MVT. Des simulations montrent que cette approche permet de concilier rigueur mathématique et réalisme comportemental, en construisant des portefeuilles mieux alignés avec les préférences réelles des investisseurs.

### C. L'optimisation canonique MVT

La formule analytique explicite suivante permet de tracer aisément la frontière efficiente en faisant varier le paramètre  $\gamma$ , chaque valeur correspondant à un portefeuille optimal différent selon l'aversion au risque. La démonstration se trouve en Annexe 5.

$$w = \frac{1}{\gamma} \Sigma^{-1} \left[ \mu - \left( \frac{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mu - \gamma}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}} \right) \mathbf{1} \right] \in \mathbb{R}^n \quad (6)$$

### D. Équivalence mathématique entre MA et MVT

Cette section établit une équivalence formelle entre le cadre classique de l'optimisation moyenne-variance (MVT) et celui des comptes mentaux (MA). Sous l'hypothèse de rendements normalement distribués, la contrainte  $\mathbb{P}(r(w) < H) \leq \alpha$  peut être exprimée de la manière suivante :

$$H \leq w(\gamma)^T \mu + \Phi^{-1}(\alpha) [w(\gamma)^T \Sigma w(\gamma)]^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

Où  $\Phi^{-1}$  est la fonction quantile de la loi normale standard. Le but de l'investisseur étant la recherche de l'optimalité, cette équation conduit à l'égalité suivante :

$$H = w(\gamma)^T \mu + \Phi^{-1}(\alpha) [w(\gamma)^T \Sigma w(\gamma)]^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

Avec,

$$w = \frac{1}{\gamma} \Sigma^{-1} \left[ \mu - \left( \frac{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mu - \gamma}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}} \right) \mathbf{1} \right] \in \mathbb{R}^n \quad (9)$$

En substituant l'équation (18) dans l'équation (17), il est aisé d'identifier un coefficient d'aversion au risque implicite  $\gamma$  directement fonction du couple  $(H, \alpha)$ . Le problème d'optimisation de portefeuille est ainsi entièrement défini par la connaissance de ce couple. Comme mentionné dans les chapitres précédents et au cœur de la théorie BPT, les investisseurs conçoivent leurs portefeuilles en différentes couches, chacune associée à un couple  $(H; \alpha)$  qui lui est propre. De cette manière, il définit en fait implicitement son coefficient d'aversion au risque  $\gamma$  vis-à-vis de l'univers des actifs  $(\mu; \Sigma)$ . Le coefficient d'aversion implicite peut alors être exprimé comme une fonction de mapping :

$$\gamma = \gamma(\mu, \Sigma; H, \alpha) \quad (10)$$

Cette fonction lie directement les préférences exprimées par l'investisseur sous forme de seuil et de tolérance à l'échec (MA) aux préférences exprimées sous forme d'aversion au risque dans le cadre productionniste MVT. L'existence d'une telle correspondance valide la compatibilité structurelle entre les deux approches.

## E. Compromis entre seuil et probabilités

Graphiquement, les frontières efficaces en MA sont représentées dans un espace où l'axe des abscisses indique  $\alpha$ , la probabilité de ne pas atteindre le seuil  $H$ , et l'axe des ordonnées le rendement espéré  $\mathbb{E}[r(p)]$ . La frontière efficace MA montre une relation croissante entre la probabilité d'échec et le rendement espéré, confirmant qu'un rendement plus élevé s'accompagne inévitablement d'une prise de risque accrue, comprise ici comme une tolérance plus grande à l'échec. Cette relation est généralement convexe, illustrant une accélération du rendement marginal à mesure que l'on accepte davantage de risque. Cette propriété est représentée à la Figure 2.

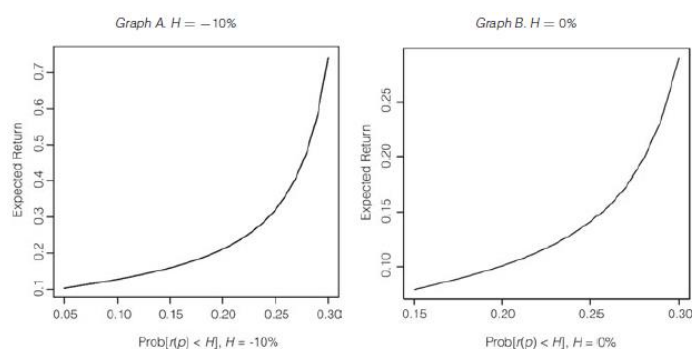


Figure 2 - Frontières efficaces MA.

Pour une analyse de la relation entre les paramètres  $\alpha$  et  $\gamma$  pour 4 niveaux de seuils différents, nous nous permettons de renvoyer le lecteur en Annexe 4.

## F. Faisabilité des portefeuilles dans le cadre Mental Accounting (MA) : Annexe 3

## G. Perte d'efficacité due à une mauvaise spécification de l'aversion au risque

Les auteurs Das et al. (2010) ont obtenu dans leur exemple que des erreurs de 10 à 30 % dans la spécification de  $\gamma$  peuvent entraîner des pertes de rendement de 2,5 à plus de 44 points de base, surtout pour les investisseurs peu averses au risque. Le modèle MA réduit cette inefficiency en permettant de définir plus précisément les préférences via les couples  $(H, \alpha)$  pour chaque objectif. La dégradation du rendement suivant une mauvaise spécification de  $\gamma$  est représentée en Figure 3.

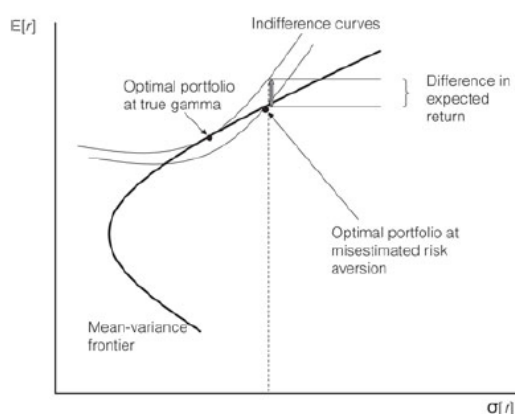


Figure 3 - Dégradation du rendement lors d'une mauvaise spécification du coefficient d'aversion au risque de l'investisseur.

### 2.2.3 Horizon Mental Accounting (HMA) – Hübner et Lejeune (2017)

#### A. Introduction au modèle HMA : une extension du cadre de la comptabilité mentale

La modélisation des préférences individuelles face au risque demeure un enjeu central en allocation d'actifs. Si la théorie de l'utilité espérée repose sur une aversion au risque constante, elle ne reflète pas la diversité des comportements réels. La *Prospect Theory* de Kahneman et Tversky (1979) met en évidence une aversion plus marquée aux pertes qu'un attrait aux gains équivalents, tandis que la théorie SP/A de Lola Lopes (1987) distingue entre la recherche de sécurité (S) et le potentiel de gains (P). Ces apports ont été intégrés dans la *Behavioral Portfolio Theory* (Statman, 2000), puis dans le modèle de *Mental Accounting* (MA) de Das et al. (2010), qui structure les portefeuilles en sous-comptes liés à des objectifs spécifiques, chacun défini par un seuil de rendement (H) et une probabilité maximale de shortfall ( $\alpha$ ). Cette approche permet d'inférer l'aversion au risque à partir de préférences déclarées, sans demander une estimation directe du paramètre d'aversion.

Cependant, le modèle MA présente deux limites : il ignore l'impact de l'horizon temporel sur l'aversion au risque, et adopte une vision unilatérale centrée sur l'évitement des pertes, négligeant la recherche de gains élevés. Le modèle *Horizon-Asymmetry Mental Accounting* (HAMA), proposé par Hübner et Lejeune (2017), répond à ces limites. Il **intègre l'horizon d'investissement**, montrant que l'aversion au risque diminue avec le temps, et **introduit un paramètre d'asymétrie gain-perte**. Inspiré par la théorie SP/A (Lopes, 1987), la Prospect Theory (Kahneman et Tversky, 1979), et la BPT (Statman, 2008), la théorie HAMA reconnaît que les investisseurs arbitrent entre sécurité et potentiel, et que certaines strates de couche mentales sont orientées vers des objectifs de richesse. Ce cadre enrichi offre ainsi une représentation plus réaliste et flexible des préférences individuelles face au risque.

#### B. Fondements et formalisation du modèle

Dans la lignée de Das et al. (2010), soit un univers composé de  $N$  actifs risqués (aucun actif sans risque n'est disponible). Un portefeuille  $p$  est défini par les poids  $w = (w_1, \dots, w_N) \in \mathbb{R}^n$  avec la contrainte d'investissement total  $\sum_{i=1}^N w_i = 1$ .

Les rendements bruts au temps  $t$  du portefeuille sont notés  $\tilde{R}_{p,t} = \sum_{i=1}^N w_i \tilde{R}_{i,t}$  et les rendements continûment composés (log) sont notés  $R_p = \log(\tilde{R}_p)$ .

Dans le cadre du Mental Accounting (MA), chaque objectif d'investissement est représenté par un compte mental  $m$ , associé à un seuil de rendement  $\rho_m$  et une probabilité maximale de non-atteinte  $\Omega_m$ . Le problème d'optimisation se formule comme suit :

$$\max_{w \in \mathbb{R}^n} \mathbb{E}[R_p] \quad \text{s. c.} \quad \mathbb{P}(R_p < \rho_m) \leq \Omega_m \quad (11)$$

Le cadre théorique du modèle HMA s'inscrit dans une lignée de contributions comportementales où l'investisseur cherche à limiter la probabilité de ne pas atteindre un objectif financier. Roy (1952) introduit cette approche dite « safety first », que Telser (1955) généralise en tolérant un niveau maximal de shortfall. Lopes (1987), via la SP/A theory, remplace le seuil de subsistance par un niveau d'aspiration, tandis que la Behavioral Portfolio Theory (BPT) de Shefrin et Statman (2000) formalise cette logique à travers des comptes mentaux, chacun lié à un objectif, un seuil de rendement et une probabilité de tolérance. Le modèle MA de Das et al. (2010) intègre ces éléments mais ne tient pas

compte de l'un des principes de la *Prospect Theory*, à savoir que les investisseurs considèrent des poids décisionnels distinct des probabilités objectives.

### C. Extension au cadre HMA : prise en compte de l'horizon d'investissement

L'extension du modèle de comptabilité mentale (MA) à l'horizon d'investissement constitue une avancée essentielle pour mieux refléter les décisions réelles des investisseurs. Le modèle HMA (Horizon Mental Accounting) repose sur l'idée que la probabilité de shortfall, c'est-à-dire de ne pas atteindre un rendement cible, dépend de l'horizon temporel associé à chaque objectif financier. Cette approche est motivée par le constat que les portefeuilles présentant des rendements espérés plus élevés mais également plus risqués peuvent devenir admissibles dès lors que l'horizon de placement est suffisamment long.

Pour s'en rendre compte, il suffit de jeter un œil au Tableau 1 ci-dessous qui illustre les probabilités de shortfall de 2 portefeuilles A et B aux distributions log-normales respectivement  $(\mu; \sigma) = (6.5\%; 6\%)$  pour A et  $(10\%; 15\%)$  pour B. Un investisseur au seuil de 2% ayant une tolérance de 5% investissant sur 5 ans ne considérera que le portefeuille A. Alors que s'il souhaite investir sur 10 ans, le portefeuille B devient admissible tout en proposant des rendements espérés plus élevés et sera donc choisi.

Portfolio A					
Horizon	$H_m \times E[R_p]$	$\sqrt{H_m} \times std$	$H_m \times \rho_m$	quantile $N(0,1)$	shortfall prob.
1	6.5%	6.0%	2.0%	-0.75	22.66%
5	32.5%	13.4%	10.0%	-1.68	4.68%
10	65.0%	19.0%	20.0%	-2.37	0.89%
30	195.0%	32.9%	60.0%	-4.11	0.00%
40	260.0%	37.9%	80.0%	-4.74	0.00%

Portfolio B					
Horizon	$H \times E[R_p]$	$\sqrt{H} \times std$	$H \times \rho_m$	quantile $N(0,1)$	shortfall prob.
1	10.0%	15.0%	2.0%	-0.53	29.69%
5	50.0%	33.5%	10.0%	-1.19	11.65%
10	100.0%	47.4%	20.0%	-1.69	4.58%
30	300.0%	82.2%	60.0%	-2.92	0.17%
40	400.0%	94.9%	80.0%	-3.37	0.04%

Tableau 1 – Évolution de la probabilité de shortfall ( $\rho_m = 2\%$ ) de 2 portefeuilles en fonction de l'horizon de temps.

Formellement, considérons un compte mental  $m$ , associé à un horizon  $H_m$ . Le rendement logarithmique annualisé du portefeuille est noté  $R_p$ , et  $\tilde{R}_{p,h}$  désigne les rendements sur chaque période  $h \in \{1, \dots, H_m\}$ . L'investisseur cherche à maximiser  $\mathbb{E}[R_p]$ , sous la contrainte que la probabilité que la moyenne des rendements sur  $H_m$  périodes soit inférieure à un seuil :

$$\max_p \mathbb{E}[R_p] \quad \text{s. c.} \quad \mathbb{P}(\bar{R}_p^{H_m} \leq \mathbb{E}[R_p] - \lambda_m) \leq \Omega_m \quad (12)$$

Où  $\bar{R}_p^{H_m} = H_m^{-1} \sum_{h=1}^{H_m} R_{p,h}$  est la moyenne des rendements sur l'horizon  $H_m$  et  $\lambda_m$  est un paramètre représentant la déviation tolérée en dessous de l'espérance.

Contrairement au seuil absolu  $\rho_m$  utilisé dans la formulation originale de Das et al. (2010), le paramètre  $\lambda_m$  représente une tolérance relative définie par rapport à l'espérance  $\mathbb{E}[R_p]$ . Cette formulation

repose sur l'hypothèse d'ergodicité <sup>2</sup> en moyenne des rendements, assurant que  $\bar{R}_p^{H_m} \rightarrow \mathbb{E}[R_p]$  lorsque  $H_m \rightarrow \infty$ .

Une conséquence majeure découle de cette hypothèse : plus l'horizon  $H_m$  est long, plus  $\bar{R}_p^{H_m} \rightarrow \mathbb{E}[R_p]$  rendant certains portefeuilles à l'espérance plus élevée mais plus risqué admissibles. L'espérance du portefeuille optimal est donc plus grande à mesure que l'horizon augmente. Cette reformulation<sup>3</sup> permet une modélisation plus souple, facilitant notamment l'introduction ultérieure de l'asymétrie gain/perte dans le modèle HAMA et mettant en avant l'augmentation des ambitions avec l'horizon d'investissement. Selon cette formulation, les investisseurs définissent leurs objectifs comme des VaR relatives ( $-\lambda_m$ ) et non plus absolues comme dans la théorie MA.

#### D. Correspondance avec le cadre moyenne-variance (MVT)

Le modèle HMA enrichit la cartographie du modèle MA en intégrant l'horizon d'investissement  $H_m$  dans le triplet de préférences  $(H_m; \lambda_m; \Omega_m)$ .

$$\frac{-\lambda_m \sqrt{H_m}}{\Phi^{-1}(\Omega_m)} \geq \sqrt{w(\Lambda)^T \Sigma w(\Lambda)} \quad \text{pour} \quad \Omega_m < 0,5 \quad (13)$$

La démonstration détaillée est disponible en Annexe 8.

Cette inégalité signifie que la volatilité du portefeuille  $\sqrt{w(\Lambda)^T \Sigma w(\Lambda)}$  doit rester inférieure à une borne supérieure déterminée par les préférences de l'investisseur. Si la volatilité est trop élevée, le portefeuille est jugé excessivement risqué et donc inéligible. À l'inverse, si elle est inférieure à cette borne, l'investisseur dispose d'une marge pour accroître l'exposition au risque et, potentiellement, le rendement attendu.

À l'optimum, cette contrainte est rencontrée : l'investisseur exploite entièrement sa tolérance au risque pour maximiser le rendement attendu. Cette borne permet ainsi d'inférer un coefficient d'aversion au risque (dans le cadre moyenne-variance) à partir du triplet  $(H_m; \lambda_m; \Omega_m)$ , rendant l'évaluation des préférences plus intuitive qu'une spécification directe du paramètre d'aversion au risque.

Enfin, cette relation met en évidence un effet fondamental du temps : plus l'horizon  $H_m$  est long, plus la borne sur la volatilité admissible est relâchée. Cela autorise des portefeuilles plus risqués et donc potentiellement plus rentables, ce qui se traduit par une aversion au risque implicite plus faible. En d'autres termes, dans le modèle HMA, l'horizon d'investissement est inversement corrélé au coefficient d'aversion au risque, une intuition que les auteurs Georges Hübner et Thomas Lejeune ont illustré par un exemple dans leur article (2017).

#### Exemple numérique

Au travers d'un exemple numérique, les auteurs de l'article ont pu mettre en avant les phénomènes suivants :

- **Diminution du Bond-to-Stock Ratio (BSR) avec l'horizon** : Une baisse systématique du ratio obligations/actions à mesure que l'horizon d'investissement s'allonge a été observée. Cette

<sup>2</sup> En mathématiques et en physique, une distribution ergodique fait référence à un processus ou un système où les propriétés statistiques moyennes, obtenues en observant un seul échantillon sur une longue période, sont équivalentes aux propriétés statistiques moyennes obtenues en observant plusieurs échantillons simultanément.

<sup>3</sup> Notons que les 2 formulations du problème donnent des allocations optimales identiques dans le cas où  $\rho_m = \mathbb{E}[R_p] - \lambda_m$ .

évolution reflète le fait que la contrainte de shortfall de l'équation (13) devient moins restrictive pour un même couple de préférences  $(\lambda_m; \Omega_m)$ . Ainsi, des portefeuilles plus exposés aux actions, et donc au risque, deviennent admissibles. Ce comportement permet au modèle HMA d'apporter une explication au « puzzle de l'allocation d'actifs » formulé par Canner et al. (1997), en contournant les limites du théorème de séparation des fonds selon lesquels tous les investisseurs devraient détenir le même BSR indépendamment de leur coefficient d'aversion au risque. Contrairement aux approches dynamiques fondées sur la couverture intertemporelle, l'HMA propose une explication statique, sans hypothèse de marché obligataire parfait.

- **Effets de la non-considération de l'horizon sur le risque** : Ignorer l'horizon spécifique d'un compte mental conduit à une surestimation du coefficient d'aversion au risque dans le cadre MPT. Bien que le portefeuille reste sur la frontière efficiente comme vu dans le chapitre sur la théorie MA, il n'est plus optimal au sens de l'utilité : il se situe sur une courbe d'indifférence inférieure à celle tangentielle au vrai niveau d'aversion, engendrant ainsi une perte d'utilité (Das, Markowitz, Scheid and Statman, 2010).
- **Convergence vers le portefeuille de croissance** : Lorsque l'horizon devient très long, le coefficient d'aversion implicite tend vers zéro, car le risque de shortfall disparaît. Dans cette limite, le problème d'optimisation se réduit à la maximisation du taux de croissance espéré du portefeuille  $\mathbb{E}[R_p]$ . L'allocation optimale devient alors purement orientée vers le rendement et indépendante du risque.

#### E. Flexibilité et absence d'hypothèse sur la fonction d'utilité

L'approche de Stutzer (2003) maximise le taux de décroissance de la probabilité de shortfall par rapport à un rendement cible, ce qui correspond à maximiser l'espérance d'une utilité puissance avec un coefficient d'aversion au risque implicite. Le modèle HMA reprend l'idée de contrainte de shortfall et d'inférence d'aversion au risque, mais se distingue par la prise en compte explicite d'un horizon d'investissement et l'absence de préférence implicite sur les moments supérieurs des rendements. Des exemples numériques montrent que HMA englobe la méthode de decay rate tout en offrant une plus grande flexibilité, permettant de spécifier indépendamment horizon, tolérance et aversion au risque. Bien que soutenant une fois de plus l'intérêt du modèle HMA.

Ce chapitre bien qu'utile pour justifier la pertinence du modèle HMA, n'est pas directement utile aux développements de cette thèse. Pour cette raison, nous renvoyons le lecteur avide de détail en annexe 7.

## 2.2.4 Horizon-Asymmetry Mental Accounting (HAMA) – Hübner et Lejeune (2017)

L'approche Horizon Mental Accounting (HMA) présentée précédemment repose sur des rendements indépendants et identiquement distribués et une distribution normale des log-rendements. Or, les distributions empiriques des rendements financiers sont souvent asymétriques et leptokurtiques (Badrinath S.G., Chatterjee, Sangit, 1988), et de nombreux actifs dérivés, tels que les options, induisent par construction des distributions non-gaussiennes. Cette observation justifie une extension du modèle vers un cadre plus réaliste : le Horizon-Asymmetry Mental Accounting (HAMA), qui incorpore à la fois l'asymétrie entre gains et pertes et les moments d'ordre supérieur des rendements.

Cette généralisation proposée par Georges Hübner et Thomas Lejeune (2017) répond à une critique importante du modèle MA : dans un monde gaussien, la volatilité est uniquement perçue comme un facteur de risque, alors qu'elle peut également être source d'opportunité. Empiriquement, certains investisseurs recherchent activement une augmentation du potentiel de gains extrêmes, quitte à accepter davantage de variance ou une moindre diversification (G. Hanoch, H. Levy, 1969). De sorte que certains portefeuilles qui ne sont pas efficient au sens moyenne-variance le deviennent dans un monde non-gaussien (Georges Hübner, Thomas Lejeune, 2017).

### A. Introduction du paramètre d'asymétrie gain-perte

Pour refléter la préférence hétérogène des investisseurs vis-à-vis des queues gauches et droites de distribution, le modèle HAMA introduit un paramètre  $\gamma_m \geq 0$  représentant la pondération accordée au potentiel de gain dans la contrainte de shortfall. Le problème d'optimisation devient alors :

$$\max_p \mathbb{E}[R_p] \quad \text{s.c.} \quad \mathbb{P}(\bar{R}_p^{H_m} \leq \mathbb{E}[R_p] - \lambda_m) - \gamma_m \mathbb{P}(\bar{R}_p^{H_m} \geq \mathbb{E}[R_p] + \lambda_m) \leq \Omega_m \quad (14)$$

Cette formulation capture l'intuition du prospect Theory de Kahneman et Tversky (1979) selon laquelle les investisseurs ne cherchent pas uniquement à éviter les pertes, mais aussi à s'exposer à des gains exceptionnels. Le paramètre  $\gamma_m$  module ce compromis :

- Pour  $\gamma_m = 0$ , on retrouve un comportement purement prudentiel de type "safety-first".
- Pour  $\gamma_m > 0$ , l'investisseur atténue son aversion aux pertes s'il peut espérer des gains significatifs.
- Pour  $\gamma_m = 1$ , l'évaluation des gains et pertes exceptionnels devient symétrique. Si la distribution est également symétrique, la contrainte se transforme en :  $\mathbb{P}(\bar{R}_p^{H_m} \leq \mathbb{E}[R_p] - \lambda_m) \leq \Omega_m / (1 - \gamma_m)$ . La borne supérieure converge vers l'infini, la contrainte est toujours respectée et le problème revient à la maximisation du taux de croissance de Kelly.

Ce paramètre varie suivant la nature de chaque compte mental : protection contre la pauvreté à la base, recherche de richesse au sommet.

### Conséquences dans le cadre moyenne-variance

La considération de ce coefficient d'asymétrie dans l'espace moyenne-variance modifie l'équation (13) comme suit :

$$\frac{-\lambda_m \sqrt{H_m}}{\Phi^{-1}\left(\frac{\Omega_m}{1 - \gamma_m}\right)} \geq \sqrt{w(\Lambda)^T \Sigma w(\Lambda)} \quad \text{pour} \quad \Omega_m < 0,5 \quad (15)$$

Cette relation montre que plus  $\gamma_m$  est élevé, plus la borne supérieure de volatilité admissible augmente. Autrement dit, l'asymétrie gain-perte permet l'accès à des portefeuilles plus risqués, et se traduit par une moindre aversion au risque implicite (baisse du paramètre  $(1 + \Lambda)$  de Markowitz).

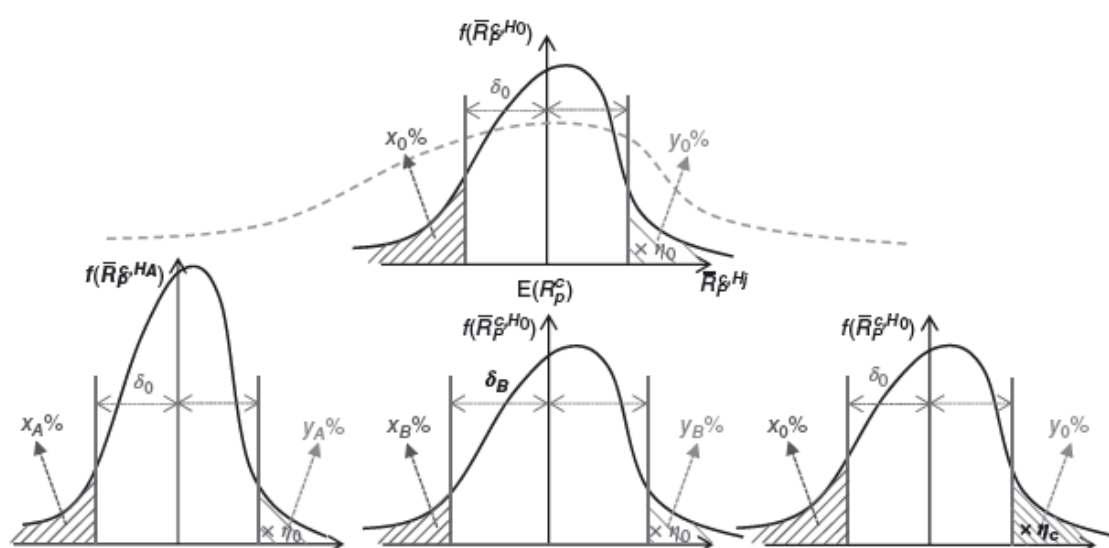
### Pertinence dans un monde non-gaussien

Dans des distributions non-normales, les moments d'ordre supérieur jouent un rôle crucial. Alors que l'asymétrie positive accroît la masse de probabilité à droite et donc le potentiel de gains, une kurtose élevée amplifie la probabilité d'événements extrêmes.

La Figure 4 ci-dessous résume comment les paramètres du modèle HAMA peuvent être modifiés pour tirer profit de ces moments et diminuer la probabilité de Shortfall du portefeuille. La partie supérieure de la figure illustre la situation initiale d'un investisseur envisageant un portefeuille dont la densité de probabilité des rendements est représentée par une courbe large en pointillés. En adoptant un horizon d'investissement  $H_0$ , la distribution des rendements moyens devient plus concentrée (courbe pleine plus étroite). L'investisseur tolère une déviation  $\delta_0$  autour du rendement espéré, générant une probabilité de perte  $x_0\%$  (queue gauche) et une probabilité de gain  $y_0\%$  (queue droite). Le compromis entre gains et pertes est modélisé par un coefficient d'asymétrie  $\eta_0 < 1$ , visuellement indiqué par un hachurage moins dense sur la queue droite. Cependant, le portefeuille s'avère trop risqué car la probabilité de perte ajustée,  $x_0\% - \eta_0 \cdot y_0\%$ , dépasse le seuil de tolérance  $\omega_0$ .

La partie inférieure de la figure présente trois solutions permettant de respecter la contrainte sans modifier le portefeuille :

1. **Allonger l'horizon d'investissement** (graphe de gauche) concentre davantage la distribution, réduisant la probabilité de perte  $x_A < x_0$ , avec une baisse modérée de la probabilité de gain  $y_A < y_0$ , ce qui permet de satisfaire  $x_A - \eta_0 y_A \leq \omega_0$ .
2. **Augmenter la tolérance**  $\delta_B > \delta_0$  (graphe central), ce qui élargit la zone de rendements acceptables et rend la probabilité de shortfall acceptable.
3. **Rehausser le coefficient d'asymétrie**  $\eta_C > \eta_0$  (graphe de droite), accordant plus d'importance aux gains, ce qui suffit à respecter la contrainte sans modifier l'horizon ni la tolérance :  $x_0 - \eta_C y_0 \leq \omega_0$ .





## B. Vers une modélisation semi-paramétrique

L'extension du cadre HAMA au cas non-gaussien nécessite une estimation de la probabilité de shortfall définie dans la contrainte d'allocation (équation 14). En l'absence de forme fonctionnelle connue pour la distribution des rendements, les auteurs Hübner et Lejeune proposent une approche semi-paramétrique fondée sur les moments empiriques (Georges Hübner, Thomas Lejeune, 2017).

### Hypothèses fondamentales

L'approche repose sur les hypothèses suivantes :

- Les rendements composés  $R_{p,t}$  de chaque portefeuille  $p$  sont i.i.d. selon une loi inconnue.
- Les moments centrés d'ordre 2, 3 et 4 de la distribution inconditionnelle des rendements ( $\mu_{2,p}$ ,  $\mu_{3,p}$ ;  $\mu_{4,p}$ ) existent et sont connus.

Pour des rendements périodiques i.i.d, les moments de la moyenne d'une séquence de  $n$  tirages de ces rendements,  $\bar{R}_p^n = n^{-1} \sum_{t=1}^n R_{p,t}$ , sont aisément obtenus par :

$$\mu_{2,p}^n = \frac{\mu_{2,p}}{n} ; \mu_{3,p}^n = \frac{\mu_{3,p}}{n^2} ; \mu_{4,p}^n = \frac{\mu_{4,p}}{n^3} + \frac{3(n-1)\mu_{2,p}^2}{n^3} \quad (16)$$

### Une borne supérieure à la probabilité de shortfall

Dans ce contexte, les auteurs exploitent une généralisation de l'inégalité de Chebyshev<sup>4</sup> proposée par (Mallows, 1956). Elle permet d'établir une borne supérieure semi-paramétrique pour la probabilité de déviation des rendements moyens, en incorporant les effets de l'asymétrie (skewness) et de l'aplatissement (kurtosis) que représentent les moments d'ordre 3 et 4.

Sous réserve d'existence et de connaissance de  $\mu_{3,p}$  et  $\mu_{4,p}$ , la contrainte de shortfall d'un portefeuille  $p$  pour un compte mental  $m$  est donnée par :

$$\pi_p(-\lambda_m; H_m) - \gamma_m \pi_p(\lambda_m; H_m) \leq \Omega_m \quad (17)$$

Où la fonction  $\pi_p(x; H)$  approxime la probabilité maximale que  $\bar{R}_p^H$  s'écarte de son espérance de plus de  $x$ . Elle s'écrit :

$$\pi_p(x; H) = \frac{\Delta_p}{Q_p^2(x) + \Delta_p \left( 1 + \frac{Hx^2}{\mu_{2,p}} \right)} \quad (18)$$

$$Q_p(x) = \frac{-Hx^2}{\mu_{2,p}} + \frac{\mu_{3,p}x}{\mu_{2,p}^2} + 1 \quad (19)$$

$$\Delta_p = \frac{1}{H} \left( \frac{\mu_{4,p}}{\mu_{2,p}^2} - \frac{\mu_{3,p}^2}{\mu_{2,p}^3} - 3 \right) + 2 \quad \text{s. c.} \quad \Delta_p > 0 \quad (20)$$

Les dérivées de  $\pi_p$  par rapport à  $|x|$  et  $H$  sont strictement négatives sur des intervalles appropriés  $[\varphi_p; \Phi_p]$ , ce qui garantit que plus  $x$  est grand, plus la probabilité de dépassement est faible. De même plus l'horizon  $H$  est grand et plus les rendements moyens sont concentrés autour de leur espérance, conduisant à une diminution de  $\pi_p$ .

<sup>4</sup> L'inégalité de Tchebychev, est un théorème de théorie des probabilités qui donne une borne supérieure à la probabilité qu'une variable aléatoire s'écarte de son espérance d'une certaine quantité

$$\frac{\partial \pi_p(x; H)}{\partial |x|} < 0 \quad \forall x \quad (21)$$

$$\frac{\partial \pi_p(x; H)}{\partial H} < 0 \quad \forall \varphi_p \leq H \leq \Phi_p \quad (22)$$

Avec

$$\varphi_p = \min \left[ \frac{(-x^2 \mu_{3,p}^2 + \mu_{3,p}^2 - \mu_{2,p} \mu_{4,p} - 3\mu_{2,p}^3 x^2 + 3\mu_{2,p}^3 + \mu_{2,p} \mu_{4,p} x^2)^2}{4\mu_{2,p}^3 x^2 \mu_{3,p}^2}, \frac{x^2 \mu_{3,p}^2}{\mu_{2,p}^3 (1-x^2)^2} \right] \quad (23)$$

$$\Phi_p = \max \left[ \frac{(-x^2 \mu_{3,p}^2 + \mu_{3,p}^2 - \mu_{2,p} \mu_{4,p} - 3\mu_{2,p}^3 x^2 + 3\mu_{2,p}^3 + \mu_{2,p} \mu_{4,p} x^2)^2}{4\mu_{2,p}^3 x^2 \mu_{3,p}^2}, \frac{x^2 \mu_{3,p}^2}{\mu_{2,p}^3 (1-x^2)^2} \right] \quad (24)$$

### Propriétés du programme HAMA non-gaussien

Le programme HAMA devient alors :

$$\max_p \mathbb{E}[R_p] \quad \text{s.c.} \quad \pi_p(-\lambda_m; H_m) - \gamma_m \pi_p(\lambda_m; H_m) \leq \Omega_m \quad (25)$$

Pour mettre en place cette théorie HAMA, l'investisseur doit donc caractériser chacun de ses comptes mentaux selon 4 paramètres que sont  $(H_m; \lambda_m; \gamma_m; \Omega_m) = (\text{Horizon d'investissement} ; \text{Dispersion} ; \text{Asymétrie gain/perte} ; \text{Tolérance de shortfall})$ .

Remarquons que cette formulation reste compatible avec le comportement de croissance optimale : si les préférences de l'investisseur sont peu restrictives de sorte que le portefeuille de Kelly fasse partie de l'univers des possibles, il sera retourné par le programme.

Dans le cas particulier où  $\gamma_m = 0$ , on revient à un investisseur « safety-first ». Pour ces profils, la convergence de la probabilité de shortfall couplée aux dérivées (21) et (22), assure que l'espérance du portefeuille optimal croît de manière monotone avec  $H_m$  et  $\lambda_m$ . En revanche, lorsque  $\gamma_m > 0$ , cette monotonie peut disparaître : un portefeuille optimal à horizon  $H_A$  peut devenir non admissible à horizon  $H_B > H_A$  en raison de vitesses de convergence différentes des probabilités de shortfall et de potentiels. Il n'est alors pas exclu que le portefeuille admissible en temps  $H_B$  ait une espérance de rendement plus faible que le portefeuille en  $H_A$ .

## 2.3 La mesure de performance Global Goal-Based (GGBP)

L'évaluation de la performance des portefeuilles d'investissement a donné lieu à une profusion d'indicateurs, parfois redondants, allant des ratios classiques (Sharpe, Treynor, alpha de Jensen) à des approches plus élaborées. Toutefois, ces mesures reposent généralement sur des hypothèses d'utilité rationnelle ou des cadres statistiques standards, souvent déconnectés des objectifs concrets des investisseurs.

Ce chapitre présente les fondements de la mesure GGBP, sa formulation mathématique, ses modalités d'estimation et son intérêt dans l'évaluation ex ante et ex post de portefeuilles construits autour d'objectifs spécifiques.

### 2.3.1 Méthodes de mesure

La mesure Global Goal-Based Performance (GGBP), introduite par Hübner et Lejeune (2021), propose une alternative alignée sur les principes du goal-based investing inspirés du mental accounting de

Thaler (1985). Elle vise à quantifier la probabilité de réalisation ou de dépassement des objectifs fixés par l'investisseur, en tenant compte d'un horizon d'investissement, d'une tolérance au risque et d'un bonus pour les résultats largement positifs. Cette approche est à la fois intuitive, comportementalement fondée et opérationnelle, car elle peut être calculée de manière historique ou paramétrique à partir de quelques moments statistiques (Georges Hübner, Pascal François, 2024).

$$GGBP_p^m = \frac{1}{1 + \gamma_m} \left( 1 - \mathbb{P}(\bar{R}_p^{c, H_m} \leq \rho_m - \lambda_m) - \gamma_m \mathbb{P}(\bar{R}_p^{c, H_m} \geq \rho_m + \lambda_m) \right) \quad (26)$$

Cette formulation intègre une pondération comportementale explicite. L'indicateur  $GGBP_p^m$  est borné entre 0 et 1, grâce à la normalisation par  $(1 + \gamma_m)$ , ce qui facilite son interprétation dans une perspective probabiliste. Il reflète un compromis entre la minimisation des probabilités de perte « grave » (sous le seuil  $(\rho_m - \lambda_m)$ ) et la maximisation des gains au-delà de  $(\rho_m + \lambda_m)$ , selon la sensibilité comportementale de l'investisseur.

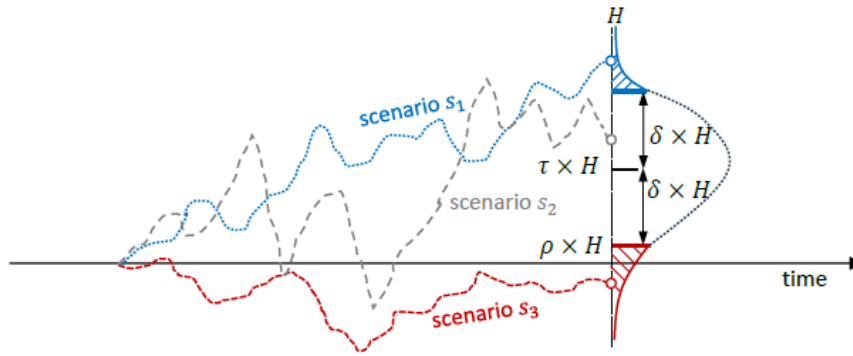


Figure 5 - Illustration de la performance GGBP (Georges Hübner, Pascal François, 2025).

Deux familles de méthodes permettent l'estimation pratique de cet indicateur : les approches historiques, qui s'appuient sur les rendements observés passés (cf. méthodes historiques pures, étendues ou bootstrappées), et les approches paramétriques, basées sur une hypothèse de distribution des rendements. Le choix entre ces méthodes dépendra du volume et de la fréquence des données disponibles, ainsi que de l'horizon  $H_m$  de l'investisseur.

#### A. Évaluation historique de la performance basée sur les objectifs

L'approche historique d'évaluation de la performance dans un cadre mental accounting repose sur l'analyse des rendements passés d'un portefeuille, en tenant compte de l'horizon d'investissement de l'investisseur. Cette estimation a posteriori se fonde sur la distribution des moyennes mobiles des rendements sur des fenêtres de taille égale à l'horizon  $H_m$ . Trois méthodes d'estimation sont proposées, selon que la taille de l'échantillon  $T$  est suffisante ou non pour couvrir plusieurs horizons.

##### 1. Estimation purement historique :

Lorsqu'on dispose d'un long historique  $H \gg H_m$ , on peut extraire  $H - H_m + 1$  sous-échantillons consécutifs, chacun couvrant exactement l'horizon  $H_m$ . On calcule alors la fréquence relative des cas où le rendement moyen tombe en dessous (déficit) ou au-dessus (surplus) d'un intervalle de tolérance  $[\rho_m - \lambda_m; \rho_m + \lambda_m]$ . Le score de performance ajusté à l'asymétrie gain/perte ( $\gamma_m$ ) est noté :

$$hGGBP_p^m = \frac{1}{1 + \gamma_m} \left( 1 - \frac{H_p^{-m}}{H - H_m + 1} + \gamma_m \frac{H_p^{+m}}{H - H_m + 1} \right) \quad (27)$$

Avec  $H_p^{-m} = \sum_{k=1}^{H-H_m+1} \mathbf{1}_{\{\bar{r}_{p,k}^{c,H_m} \leq \rho_m - \lambda_m\}}$  et  $H_p^{+m} = \sum_{k=1}^{H-H_m+1} \mathbf{1}_{\{\bar{r}_{p,k}^{c,H_m} \geq \rho_m + \lambda_m\}}$  qui représentent le nombre de fois où les sous-échantillonnages ont donné des shortfalls ou surplus finaux.

## 2. Estimation historique étendue :

Pour augmenter le nombre de sous-échantillons, on applique une méthode de « bloc circulaire », qui connecte la fin de l'échantillon au début afin de générer  $H$  sous-échantillons au total. Cette méthode permet une meilleure couverture statistique, mais introduit une forme d'artificialité temporelle au travers d'une hypothèse de périodicité, ce qui peut être problématique si les dépendances temporelles sont importantes. Le score de performance est alors noté :

$$h^*GGBP_p^m = \frac{1}{1 + \gamma_m} \left( 1 - \frac{H_p^{*-m}}{H} + \gamma_m \frac{H_p^{*+m}}{H} \right) \quad (28)$$

Avec  $H_p^{*-m} = \sum_{k=1}^H \mathbf{1}_{\{\bar{r}_{p,k}^{c,H_m} \leq \rho_m - \lambda_m\}}$  et  $H_p^{*+m} = \sum_{k=1}^H \mathbf{1}_{\{\bar{r}_{p,k}^{c,H_m} \geq \rho_m + \lambda_m\}}$ .

## 3. Estimation historique par rééchantillonnage (Bootstrap) :

Lorsque l'échantillon historique est trop court  $H \ll H_m$ , ni l'estimation pure ni la version étendue ne sont applicables. On utilise alors des techniques de bootstrap, en générant  $S$  trajectoires simulées de taille  $H_m$ , à partir d'échantillons tirés avec remise. Le score estimé est noté :

$$\hat{h}GGBP_p^m = \frac{1}{1 + \gamma_m} \left( 1 - \frac{S_p^{-m}}{S} + \gamma_m \frac{S_p^{+m}}{S} \right) \quad (29)$$

Avec  $S_p^{-m} = \sum_{s=1}^S \mathbf{1}_{\{\bar{r}_{p,s}^{c,H_m} \leq \rho_m - \lambda_m\}}$  et  $S_p^{+m} = \sum_{s=1}^S \mathbf{1}_{\{\bar{r}_{p,s}^{c,H_m} \geq \rho_m + \lambda_m\}}$ .

Chaque méthode présente des avantages et des limites. L'approche pure est statistiquement rigoureuse mais exige un long historique. La version étendue accroît l'exploitation des données au prix d'un artefact de circularité. Enfin, l'approche Bootstrap est la seule applicable dans le cas de petits échantillons, bien qu'elle rompe potentiellement la structure temporelle des données. Lorsque l'horizon  $H_m$  devient significativement supérieur à la longueur  $H$ , même le Bootstrap devient inefficace, ce qui justifie le recours à des méthodes paramétriques, notamment dans des contextes empiriques à données limitées. Dans le cadre de ce travail, les méthodes paramétriques ne seront cependant pas envisagées.

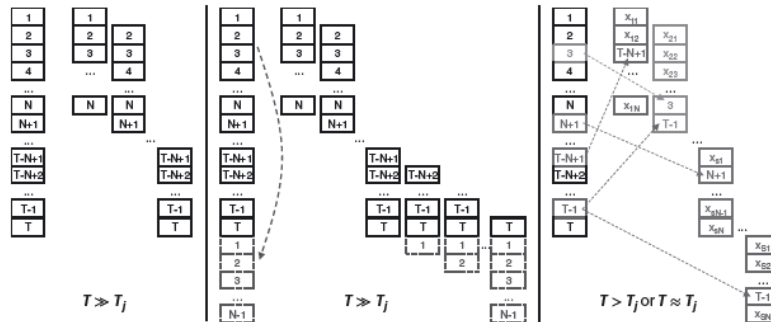


Figure 6 - Illustration des 3 techniques d'échantillonnage (pure, étendue et Bootstrap). (Georges Hübner, Pascal François, 2024).

## B. Évaluation paramétrique

L'évaluation de la performance comportementale d'un portefeuille selon la logique goal-based peut également se faire par une estimation paramétrique de la probabilité de réussite. Cette méthode repose sur la distribution des rendements moyens du portefeuille à horizon donné. En posant la fonction de probabilité cumulée  $F_D(x) = \mathbb{P}(\bar{R}_p^{c,H_m} \leq x)$  Le GGBP paramétrique, noté  $pGGBP_p^m$ , s'exprime comme suit en adaptant l'équation (26) :

$$pGGBP_p^m = \frac{1}{1 + \gamma_m} [1 - F_D(\rho_m - \lambda_m) + \gamma_m(1 - F_D(\rho_m + \lambda_m))] \quad (30)$$

La détermination d'une forme fiable pour la fonction de répartition  $F_D(x)$  représente un défi méthodologique important, car elle implique une caractérisation rigoureuse de la distribution des rendements moyens. En effet, sauf à supposer que les rendements périodiques du portefeuille sont indépendants, sans autocorrélation, et issus d'une distribution stable (comme une loi normale), il est extrêmement difficile d'inférer directement la loi des rendements moyens à partir de celle des rendements individuels. Cette approche directe devient alors difficilement exploitable. Une alternative consiste à adopter l'hypothèse de normalité des rendements et à intégrer, de manière plus souple, les effets d'asymétrie (skewness) et de kurtose (kurtosis) à travers des ajustements paramétriques modérés, comme ceux développés dans la suite (Georges Hübner, Pascal François, 2024).

### 1. Estimation paramétrique gaussienne :

Sous l'hypothèse de rendements composés continus  $R_{p,t}^c$  i.i.d. et suivant une loi normale  $\mathcal{N}(\mu_p; \sigma_p^2)$ , le rendement moyen du portefeuille sur un horizon  $H_m$  suit lui aussi une loi  $\mathcal{N}(\frac{\mu_p}{T_m}; \frac{\sigma_p^2}{T_m})$ . Avec  $T_m = \frac{H_m}{\Delta t}$ ,  $\Delta t$  étant l'intervalle de mesure des rendements. Dans ce cadre, les probabilités de sous-performance et de surperformance s'évaluent respectivement par :

$$\Phi\left(\frac{\rho_m - \lambda_m - \bar{R}_p^c}{\sigma_p/\sqrt{T_m}}\right) \text{ et } \Phi\left(\frac{\bar{R}_p^c - \rho_m - \lambda_m}{\sigma_p/\sqrt{T_m}}\right) \quad (31)$$

Où  $\bar{R}_p^c$  est le rendement moyen observé. En les insérant dans la formule (30), on obtient l'expression du GGBP gaussien sur un horizon  $m$  :

$$gGGBP_p^m = \frac{1}{1 + \gamma_m} \left[ 1 - \Phi\left(\frac{\rho_m - \lambda_m - \bar{R}_p^c}{\sigma_p/\sqrt{T_m}}\right) + \gamma_m \Phi\left(\frac{\bar{R}_p^c - \rho_m - \lambda_m}{\sigma_p/\sqrt{T_m}}\right) \right] \quad (32)$$

Lorsque l'objectif de rendement coïncide avec le rendement moyen observé ( $\rho_m = \bar{R}_p^c$ ), les deux percentiles sont symétriques autour de la moyenne et le  $gGGBP$  devient :

$$sGGBP_p^m = \frac{1}{1 + \gamma_m} \left[ 1 - (1 - \gamma_m) \Phi\left(\frac{-\lambda_m \sqrt{T_m}}{\sigma_p}\right) \right] \quad (33)$$

Cette version accorde une meilleure performance aux portefeuilles moins risqués. Toutefois, même sous normalité, il reste pertinent de considérer le potentiel de surperformance lorsque  $\bar{R}_p^c \neq \rho_m$ .

## 2. Estimation semi-paramétrique de Cornish-Fisher :

Lorsque les rendements composés continus  $R_{p,t}^c$  du portefeuille suivent une distribution  $\mathcal{D}(\mu_p; \sigma_p^2; m_{p,3}; m_{p,4})$  caractérisée par sa moyenne, sa variance, son asymétrie (skewness) et sa kurtose, la distribution du rendement moyen  $\bar{R}_p^{c,H_m}$  suit  $\mathcal{D}'\left(\mu_p; \frac{\sigma_p^2}{T_m}; \frac{m_{p,3}}{T_m^2}; \frac{m_{p,4}}{T_m^3} + \frac{3\sigma_p^2}{T_m^2}\right)$  qui diffère de  $\mathcal{D}$  de par les dépendances de ses troisième et quatrième moments centrés vis-à-vis de l'horizon. Le théorème central limite nous dit que  $\mathcal{D}'$  tend vers la normale lorsque l'horizon  $T_m$  est grand. On peut alors approximer les quantiles de la distribution de  $\bar{R}_p^{c,H_m}$  à l'aide du développement de Cornish-Fisher, afin d'ajuster les probabilités de sous-performance et de surperformance utilisées dans le calcul du GGBP. Au départ de l'équation (32), on obtient le critère de performance modifié (Georges Hübner, Pascal François, 2024) :

$$mGGBP_p^{m,1-x} = \frac{1}{1 + \gamma_m} \left[ 1 - \Phi\left(\frac{\rho_m - \lambda_m - \bar{R}_p^c}{m\sigma_p^{(x-)} / \sqrt{T_m}}\right) + \gamma_m \Phi\left(\frac{\bar{R}_p^c - \rho_m - \lambda_m}{m\sigma_p^{(x+)} / \sqrt{T_m}}\right) \right] \quad (34)$$

Où  $m\sigma_p^{(x-)} = \sigma_p \times \frac{z_{x-,p}^*}{z_x}$  et  $m\sigma_p^{(x+)} = \sigma_p \times \frac{z_{x+,p}^*}{z_x}$  sont les volatilités ajustées selon les quantiles de Cornish-Fisher pour les probabilités de surperformance et de shortfall. Leurs multiplicateurs s'expriment comme suit :

$$z_{x-,p}^* = z_x + (z_x^2 - 1) \frac{\mu_{p,3}}{6\sqrt{T_m}} + (z_x^3 - 3z_x) \frac{e\mu_{p,3}}{24T_m} - (2z_x^3 - 5z_x) \frac{\mu_{p,3}^2}{36T_m} \quad (35)$$

$$z_{x+,p}^* = z_x - (z_x^2 - 1) \frac{\mu_{p,3}}{6\sqrt{T_m}} + (z_x^3 - 3z_x) \frac{e\mu_{p,3}}{24T_m} - (2z_x^3 - 5z_x) \frac{\mu_{p,3}^2}{36T_m} \quad (36)$$

Avec  $\mu_{p,3} \equiv \frac{m_{p,3}}{\sigma_p^3}$  et  $e\mu_{p,4} \equiv \frac{m_{p,4}}{\sigma_p^4} - 3$  qui sont respectivement l'asymétrie et l'excès de kurtose des rendements continus du portefeuille.

Notons que la formule GGBP modifiée (34) est très similaire à la formule (32) du cas gaussien. La différence majeure entre les deux réside dans l'intégration de l'asymétrie et de l'aplatissement dans la volatilité au travers notamment des termes  $z_{x-,p}^*$  et  $z_{x+,p}^*$ . Dans le cas d'une asymétrie négative, le terme de volatilité modifiée  $m\sigma_p^{(x-)}$  augmente ce qui pénalise la probabilité de shortfall. Le terme  $m\sigma_p^{(x+)}$  va quant à lui diminuer et pénaliser également la probabilité de surperformance. L'intervalle de confiance 1-x choisi pour l'estimation des multiplicateurs de la volatilité conditionne l'importance donnée aux moments d'ordre supérieur dans l'estimation de ces derniers.

Enfin, pour des périodes très longues, les effets d'asymétrie et d'aplatissement de l'espérance tendent à disparaître. Ces moments sont par contre d'autant plus importants pour des horizons d'investissement restreints.

## 2.3.2 Étude opérationnelle de la GGBP

Dans le prolongement de la section précédente consacrée aux différentes approches de mesure de performance, cette sous-section se focalise sur la mise en œuvre concrète de la méthode Global Goal-Based Performance (GGBP), telle qu'opérationnalisée par (Georges Hübner, Pascal François, 2025).

### A. Comparaison mesures historiques et paramétriques

Les auteurs ont comparé l'estimation paramétrique de la performance GGBP à son équivalent historique obtenue par Bootstrap (10 000 simulations par fond) sur 468 fonds et sur la période 2001–2021 pour les 27 spécifications comportementales. L'objectif est d'évaluer dans quelle mesure la version paramétrique  $mGGBP_p^{m,1-x}$ , notamment via l'expansion de Cornish-Fisher, peut remplacer l'approche historique  $\hat{h}GGBP_p^m$ , plus coûteuse en données.

Trois calibrations de  $mGGBP_p^{m,1-x}$  ont été testées selon le niveau de confiance 95 %, 97,5 % et 99 %. Leurs écarts avec  $\hat{h}GGBP_p^m$  sont résumés dans le Tableau 2. Celui-ci montre que le niveau 97,5 % offre le meilleur compromis : un biais moyen modeste (-0,61 %) et une dispersion faible (écart-type de 1,45 %), très proches de la mesure de référence. À l'inverse, l'estimation totalement historique présente un biais deux fois plus élevé (-2,49 %) et une variabilité trois fois supérieure.

	C-F 95	C-F 97.5	C-F 99	Historical
average	-1.05%	-0.61%	-1.25%	-2.49%
std dev	1.51%	1.45%	1.58%	4.14%
min	-6.56%	-5.68%	-7.17%	-13.78%
Q5	-2.83%	-2.22%	-3.10%	-8.55%
Q25	-1.81%	-1.30%	-2.04%	-5.25%
median	-1.14%	-0.68%	-1.36%	-2.86%
Q75	-0.39%	-0.03%	-0.57%	0.01%
Q95	0.80%	1.00%	0.75%	4.42%
max	17.33%	19.13%	17.24%	16.04%

Tableau 2 – Tableau statistique récapitulatif des différences entre les estimations  $mGGBP_p^{m,1-x}$  et  $\hat{h}GGBP_p^m$  (Georges Hübner, Pascal François, 2025).

Sur ce tableau, il apparaît qu'une estimation paramétrique calibrée à 97,5 % a constitué dans le cadre de leur article, une alternative robuste, simple et économe en données pour mesurer la performance par objectif.

### B. Les dimensions qualitatives de la performance par objectif

Afin d'intégrer une dimension qualitative à l'évaluation de la performance par objectif, François et Hübner (2025) s'appuient sur la typologie de Brunel (2015), qui associe à chaque objectif une intensité émotionnelle (de « faible » à « très forte ») et un type (éviter, tenter, atteindre), chacun lié à un seuil minimal de probabilité de succès (cf. Tableau 3).

Priority	Type of objective			Success probability threshold
	Avoid	Attempt	Achieve	
Weak	Concerns	Desires	Dreams	55%
Moderate	Worries	Hopes	Wishes	70%
Strong	Fears	Anticipations	Wants	82.5%
Very Strong	Nightmares	Dreads	Needs	92.5%
<i>Gain/loss tradeoff</i>	<i>Low</i>	<i>Medium</i>	<i>High</i>	

Tableau 3 - Dimensions qualitatives de l'investissement par objectifs (Georges Hübner, Pascal François, 2025).

Toutefois, cette grille initiale ne tient pas compte de la pondération comportementale entre gains et pertes, introduite dans la GGBP via le facteur de bonus  $\gamma$ .

Les auteurs traduisent cette différence en ajustant les seuils de succès à l'aide de la formule empirique (37). Cette formule a été obtenue en faisant en sorte que la proportion de fonds dépassant le seuil de performance ajusté aux cas étudiés reste identique à celle observée dans le cas sans bonus ( $\gamma = 0$ ) :

$$\text{seuil}(H, \gamma) \approx \text{seuil}(H, 0) - 0,06 \times \sqrt{\gamma H} \quad (37)$$

Cela leur a permis de construire le Tableau 4 ci-dessous.

<i>Priority</i> ↓	<i>Objective</i> → <i>Horizon</i> ↓	<b>Avoid</b> ( $\eta = 0$ )	<b>Attempt</b> ( $\eta = 0.4$ )	<b>Achieve</b> ( $\eta = 0.8$ )
<b>Weak</b>	Short ( $H = 2$ )		50%	47%
	Medium ( $H = 5$ )	55%	47%	43%
	Long ( $H = 10$ )		43%	38%
<b>Moderate</b>	Short ( $H = 2$ )		65%	62%
	Medium ( $H = 5$ )	70%	62%	58%
	Long ( $H = 10$ )		58%	53%
<b>Strong</b>	Short ( $H = 2$ )		77%	75%
	Medium ( $H = 5$ )	82.5%	74%	71%
	Long ( $H = 10$ )		71%	66%
<b>Very Strong</b>	Short ( $H = 2$ )		87%	85%
	Medium ( $H = 5$ )	92.5%	84%	81%
	Long ( $H = 10$ )		81%	76%

Tableau 4 - Seuil de probabilités de succès ajustés par horizon et objectifs (Georges Hübner, Pascal François, 2025).

## 2.4 Synthèse

La revue de littérature présentée dans ce mémoire retrace de manière structurée l'évolution des théories de l'allocation d'actifs, depuis les modèles normatifs classiques jusqu'aux cadres comportementaux intégrant les préférences hétérogènes des investisseurs. Chaque modèle enrichit le précédent en tentant de surmonter ses limites structurelles, tout en offrant une représentation plus réaliste des décisions financières en environnement incertain.

Cette revue a démarré en montrant que les modèles normatifs classiques, tels que la théorie moyenne-variance de Markowitz (1952) et le MEDAF de Sharpe (1964), reposent sur des hypothèses strictes : rationalité parfaite, aversion constante au risque, distribution normale des rendements et horizon unique. Or, ces cadres ne tiennent pas compte des biais cognitifs observés chez les investisseurs, comme le « home bias », les biais d'étiquetage, les biais de certitude ou encore les biais informationnels, limitant leur capacité à représenter fidèlement les décisions financières réelles.

Les limites des modèles traditionnels ont conduit au développement de théories alternatives intégrant les préférences comportementales des investisseurs. La théorie SP/A Theory de Lola Lopes (1987) distingue sécurité, potentiel et inspiration, illustrant l'arbitrage subjectif des investisseurs entre protection contre les pertes et recherche de gains élevés. La Prospect Theory de Kahneman et Tversky (1979) met quant à elle en évidence que les investisseurs ont une vision asymétrique des gains et des pertes et définissent leurs succès comme une tolérance autour d'un seuil fixé. Enfin, la Behavioral Portfolio Theory (BPT) de Shefrin et Statman (2000) vient compléter ces travaux en mettant en avant comment les individus organisent leurs portefeuilles en comptes mentaux correspondant à des objectifs et aspirations différentes.

Le modèle Mental Accounting (MA) de Das et al. (2010) formalise l'approche de la BPT en transformant chaque compte mental en un problème d'allocation optimale avec contrainte probabiliste :



$$\max_{w_i \in \mathbb{R}^n} w_i^T \mu \quad s.c. \quad \mathbb{P}(r(w_i) < H_i) \leq \alpha_i; w_i^T \mathbf{1} = 1 \quad (5)$$

Ce cadre repose sur l'hypothèse de rendements log-normaux i.i.d. et permet, sous distribution normale ou utilité quadratique, de déduire un coefficient d'aversion au risque implicite à partir du couple  $(H_i, \alpha_i)$ . Contrairement aux approches classiques comme la MVT, où l'investisseur doit fournir un coefficient d'aversion au risque abstrait et difficilement interprétable, le MA permet alors l'expression des préférences des investisseurs via des objectifs concrets à atteindre avec une probabilité donnée, offrant ainsi une définition plus intuitive et opérationnelle de leurs attentes.

L'extension Horizon-Asymmetry Mental Accounting (HAMA) vient compléter le modèle MA en introduisant deux nouvelles dimensions comportementales jusque-là encore absente : l'horizon d'investissement et l'asymétrie gains-pertes formalisés par les paramètres  $H_m$  et  $\gamma_m \geq 0$ . Le problème d'allocation optimal s'exprime alors comme suit avec  $\lambda_m$  défini comme le seuil de tolérance autour de l'espérance de rendement :

$$\max_p \mathbb{E}[R_p] \quad s.c. \quad \mathbb{P}(\bar{R}_p^{H_m} \leq \mathbb{E}[R_p] - \lambda_m) - \gamma_m \mathbb{P}(\bar{R}_p^{H_m} \geq \mathbb{E}[R_p] + \lambda_m) \leq \Omega_m \quad (14)$$

Ce cadre permet de modéliser des investisseurs non uniquement orientés vers la minimisation du risque, mais également sensibles à la probabilité de gains extrêmes comme mentionné dans les travaux de Kahneman et Tversky (1979). À mesure que  $\gamma_m$  croît, la contrainte devient moins sévère et l'allocation optimale converge vers le portefeuille de croissance, correspondant au critère de Kelly. Le HAMA intègre donc des arbitrages entre rendement attendu, horizon, risque de perte et potentiel de gain, avec des préférences hétérogènes entre les comptes mentaux. Le mapping des paramètres HAMA dans l'univers MV est donné par la formule suivante :

$$\frac{-\lambda_m \sqrt{H_m}}{\Phi^{-1}\left(\frac{\Omega_m}{1 - \gamma_m}\right)} \geq \sqrt{w(\Lambda)^T \Sigma w(\Lambda)} \quad \text{pour} \quad \Omega_m < 0,5 \quad (15)$$

Cette relation met en exergue comment une augmentation de l'horizon permet à des portefeuilles plus volatiles de devenir plus optimaux. Un phénomène expliqué par le théorème central limite.

Enfin, l'extension non-gaussienne du modèle HAMA repose sur une approche semi-paramétrique fondée sur les moments d'ordre 2 à 4 (variance, skewness, kurtosis), selon l'inégalité de Mallows (1956). Elle permet d'estimer la contrainte de shortfall sans supposer de loi de probabilité particulière, ce qui est essentiel dans des marchés caractérisés par des queues épaisses et une asymétrie marquée. Sous ce cadre, l'horizon d'investissement joue un rôle d'autant plus important que les vitesses de convergence des probabilités de shortfall et de gains potentiels peuvent converger à des vitesses différentes. Ce qui peut, dans certains cas, conduire à un basculement du rendement du portefeuille optimal qui ne grandit plus nécessairement de manière monotone avec le coefficient  $\gamma_m$ . Ce raffinement renforce l'intérêt du HAMA comme outil général de modélisation des préférences individuelles.

L'indicateur GGBP, parfaitement cohérent avec la théorie sous-jacente au modèle HAMA, calcule ensuite la performance en intégrant les dimensions comportementales des investisseurs :

$$GGBP_p^m = \frac{1}{1 + \gamma_m} \left( 1 - \mathbb{P}(\bar{R}_p^{c, H_m} \leq \rho_m - \lambda_m) - \gamma_m \mathbb{P}(\bar{R}_p^{c, H_m} \geq \rho_m + \lambda_m) \right) \quad (26)$$

En somme, cette revue théorique établit une progression cohérente, depuis des modèles d'optimisation normative vers une approche comportementale enrichie, culminant avec le HAMA. Ce modèle flexible et fondé sur des dimensions empiriquement pertinentes (horizon, asymétrie, tolérance), constitue une base solide pour l'analyse empirique des comportements d'allocation d'actifs qui sera proposée dans la suite de ce mémoire.

### 3 Méthodologie

Le chapitre précédent a présenté la revue de littérature, mettant en évidence les principaux biais cognitifs et les mécanismes de compartimentalisation qui influencent la construction des portefeuilles d'investissement. Sur la base de ces enseignements, le présent chapitre a pour objectif de proposer une vision claire et structurée de la méthodologie adoptée dans cette thèse. Il vise à expliquer comment les choix méthodologiques qui ont été faits permettent de répondre à la question centrale : comprendre comment les biais cognitifs qui impactent la définition des univers d'investissement se reflètent dans les performances GGBP des portefeuilles construits selon le modèle HAMA.

Pour répondre à cette question, une méthodologie mixte a été adoptée, combinant une approche quantitative majoritaire avec une dimension qualitative complémentaire.

La dimension quantitative repose sur l'analyse statistique des performances d'ETF BlackRock, dont les rendements mensuels sont librement accessibles sur le site de l'entreprise. Cette approche permet de mesurer objectivement l'impact des caractéristiques des portefeuilles sur les indicateurs GGBP et d'évaluer la robustesse des résultats obtenus. Les avantages de cette méthode sont sa fiabilité, sa reproductibilité et sa capacité à traiter un volume suffisant de données pour établir des relations significatives entre variables. Ses limites, inhérentes aux études statistiques, concernent la quantité d'information disponible pour chaque ETF et leur respect des hypothèses statistiques d'ergodicité et d'indépendance temporelle.

En complément de cette analyse plus mathématique, une approche qualitative a été intégrée pour définir les univers d'investissement sujets à l'étude. Un questionnaire d'entretiens semi-directifs a été élaboré sur la base des enseignements de la revue de littérature, afin de comprendre quels actifs composent les univers d'investissement des individus, en quelle quantité et selon quels biais cognitifs. Deux entretiens ont été menés auprès d'investisseurs amateurs âgés de 25 ans. Bien que l'échantillon soit restreint et homogène, il remplit pleinement son rôle : fournir des informations contextuelles permettant de concevoir des univers réalistes et pertinents pour l'analyse quantitative des performances HAMA et GGBP.

Le questionnaire conçu pour les entretiens semi-directifs, disponible en Annexe 1, a été conçu pour garantir l'objectivité et la cohérence des réponses, tout en respectant les normes éthiques et légales, notamment le RGPD. Le consentement de chaque participant a été obtenu avant de retranscrire les informations obtenues dans ce travail. Concernant l'approche en elle-même, les questions ont été formulées de manière à éviter toute orientation vers une réponse spécifique et à explorer librement les motivations, préférences et biais cognitifs présents dans les univers d'investissement des participants.

Sur la base des données recueillies et des recommandations issues de la littérature, différents univers de portefeuilles ont été constitués, se distinguant par leurs expositions sectorielles et reposant exclusivement sur des ETF BlackRock. Cette combinaison de données qualitatives et quantitatives permet d'établir un lien direct entre les hypothèses comportementales observées chez les investisseurs et la performance des portefeuilles mesurée via les indicateurs GGBP.

Ainsi, la méthodologie choisie est pleinement justifiée par la question de recherche : elle permet à la fois d'analyser objectivement les performances des portefeuilles construits selon HAMA et d'assurer que les univers étudiés reflètent des pratiques réalistes d'investisseurs amateurs. Cette approche intégrée garantit la pertinence, la rigueur et la crédibilité des développements présentés dans les chapitres suivants.

## 4 Développements et résultats

### 4.1 Définition des univers d'investissement

Ce chapitre vise à formaliser les différents univers d'investissement analysés empiriquement dans ce mémoire. Chacun de ces univers est construit de manière à refléter des choix réalistes qu'un investisseur individuel ou institutionnel pourrait faire, suffisamment représentatifs d'un prisme d'allocation crédible et suffisamment restreint que pour permettre la résolution du problème d'optimisation du modèle HAMA. Pour cela, ces univers sont articulés autour de clés d'allocation différenciées : sectorielle, géographique, actions/obligations, ou thématique (ex. : ESG, cryptoactifs).

Dans une logique de finance comportementale, ces choix d'univers ne sont pas uniquement dictés par des critères statistiques objectifs, mais sont influencés par des préférences mentales, des biais cognitifs, et des croyances subjectives. Afin d'opérationnaliser ces éléments, nous introduisons le concept de facteur de foi qui constitue le cœur comportemental de cette typologie en agréant ces différents phénomènes. Ce facteur traduit la confiance personnelle ou collective qu'un investisseur accorde à certains secteurs ou actifs, et justifie la construction d'un univers biaisé mais cohérent autour de ses convictions.

#### 4.1.1 Le facteur de foi comme prisme de construction mentale des univers

C'est dans ce cadre qu'intervient le facteur de foi, défini comme une croyance comportementale forte, rationnelle ou non, qu'un secteur, un actif ou une zone géographique représente une opportunité d'investissement pertinente. Ce facteur peut naître :

- D'un **biais cognitif d'étiquetage**, comme le montre Shefrin : certains actifs sont considérés comme "sûrs" ou "risqués" uniquement en fonction de leur catégorie perçue ;
- Du **home bias** (Huberman, 1997), illustrant la tendance des investisseurs à surinvestir dans les actifs domestiques perçus comme "familiers", même lorsque la diversification exigerait l'inverse ;
- De la **préférence pour la certitude** (Heath, Tversky, 1991), selon laquelle les individus préfèrent parier sur des événements qu'ils estiment mieux connaître (comme le sport plutôt que la politique), même lorsque la probabilité est objectivement identique ;
- Ou encore **du biais d'information privilégiée** évoqué dans la BPT, selon lequel la perception d'avoir une information "supérieure", qu'elle soit justifiée ou non, renforce la confiance dans un titre donné et sa propension à être sélectionnée dans l'univers.

Ce facteur de foi influence donc la structure mentale du portefeuille, notamment la couche de "potentiel spéculatif", en justifiant un biais de concentration sur un thème particulier : croyance dans les biotech, foi dans l'or comme valeur refuge, optimisme sur le Bitcoin ou conviction sur les marchés émergents. En cela, il constitue une clé d'allocation comportementale, légitime dans une analyse fondée sur la méthode HAMA, puisque celle-ci vise précisément à maximiser les objectifs mentaux d'un investisseur (objectif, tolérance, horizon, asymétrie).

Il est important de souligner que le présent mémoire ne ni à approfondir l'analyse des biais cognitifs à l'origine du facteur de foi, ni à modéliser précisément les mécanismes psychologiques qui sous-tendent

le choix des univers d'investissement. L'introduction de ce concept s'inscrit simplement dans une logique de cohérence avec la littérature comportementale, afin de justifier la segmentation des portefeuilles étudiés dans les sections empiriques qui suivent. Le facteur de foi constitue ici un cadre narratif pour légitimer les différents profils d'allocations qui seront sujets à l'analyse comparative de performances.

#### 4.1.2 Démarche exploratoire

Dans le prolongement de l'introduction du facteur de foi comme clé de lecture comportementale des allocations d'actifs, une démarche exploratoire qualitative a été conduite afin de justifier empiriquement les univers d'investissement retenus dans ce mémoire. Deux entretiens semi-directifs ont été réalisés auprès d'investisseurs particuliers âgés de 25 et 26 ans, actifs sur les marchés financiers depuis moins de deux ans. Bien que non représentatifs statistiquement, ces entretiens offrent un éclairage pertinent sur la manière dont des investisseurs non-professionnels construisent leurs portefeuilles selon des logiques mentales, subjectives ou heuristiques, parfois éloignées des critères d'optimisation classiques. Ils permettent ainsi de valider la crédibilité comportementale des univers étudiés dans les chapitres suivants. Les questions posées ainsi que leurs réponses sont consultables en Annexe 1.

Les entretiens ont suivi une structure en huit questions, abordant la motivation initiale à investir, les sources d'information consultées, la composition actuelle du portefeuille, les préférences sectorielles et géographiques, les horizons d'investissement, les objectifs financiers, ainsi que l'usage (ou non) des performances historiques comme critère de sélection. Cette approche permet de faire émerger des facteurs de foi concrets : rejet de certains secteurs perçus comme instables (automobile, énergie fossile), conviction dans des zones ou technologies spécifiques (marchés émergents, IA, or), ou encore préférences et biais d'étiquetage de classes d'actifs considérées comme plus à risque en fonction de leur classe seulement (ETF, actions individuelles et obligations).

##### A. Investisseur A : approche active fondée sur la gestion active d'actions individuelles

L'investisseur A construit son portefeuille selon une logique active et sélective, orientée vers la recherche de surperformance par rapport aux indices de marché, tout en maintenant une part de stabilité via des ETF. Il détient actuellement 15 actifs : environ 5000 € en actions individuelles, essentiellement technologiques (NVIDIA, TSMC, Meta, Alphabet), 1150 € en ETF Nasdaq et S&P 500, un ETF Or de 250 €, et 400€ dans un fonds Berkshire Hathaway. Ses décisions sont fondées sur une analyse fondamentale des entreprises (croissance des bénéfices, marges, ratios financiers) et une logique de long terme (10+ ans), même s'il pratique une gestion active en éliminant les titres qu'il juge dégradé depuis plusieurs trimestres.

Le facteur de foi est clairement présent dans son rejet de certains secteurs : l'automobile est jugée trop incertaine à 10 ans, l'énergie renouvelable est quant à elle exclue car jugée trop dépendante du politique sans convictions personnelles de sa part. Le marché belge est lui évité pour de simples raisons fiscales (évitement de la taxe TOB). À l'inverse, il affiche une forte croyance dans le potentiel structurel de la tech, combinée à une confiance dans des valeurs refuges comme l'or. Son approche d'investissement repose sur des influences externes tels que des influenceurs YouTube à qui il attribue une certaine légitimité sur base de leurs performances passées. Il complète ensuite ses choix par une étude analytique des marges et ratios financiers des actifs qui l'intéressent, révélant une stratégie à mi-chemin entre l'analyse rationnelle et les biais comportementaux (certitude, information privilégiée).

## B. Investisseur B : stratégie passive structurée autour de la diversification long terme

L'investisseur B adopte une approche majoritairement passive, fondée sur la diversification géographique et sectorielle via 4 ETF principaux (Nasdaq, S&P 500, EuroStoxx, Emerging Markets), représentant environ 91 % de son portefeuille. Il complète cette base par des allocations plus opportunistes : cryptomonnaie (XRP) à visée spéculative (5 % du portefeuille) et une position en action individuelle (NVIDIA, 3 %), acquise de manière opportuniste à la suite d'une baisse de cours et également dans une optique de trading à moyen terme. Il considère les ETF S&P 500 et EuroStoxx comme des moyens de protéger son argent, l'ETF Nasdaq comme moyennement risqué et avec plus de rendement, et l'ETF Emerging Market comme un pari sur l'avenir. On voit ici, similairement à l'investisseur A, une logique de couche mentale au sens de Shefrin et Statman (2000), clairement établie entre des couches de protections et des tentatives de devenir riche.

L'investisseur B applique une stratégie de dollar cost averaging (DCA), en investissant automatiquement chaque mois via Trade Republic, sans modification de la proportion de ses actifs. Son objectif est strictement long terme (20+ ans), avec un retrait envisagé vers l'âge de 50 ans. Les ETF ont été choisis sur base de performances passées sur 20 ans et d'un pari sur des zones géographiques à potentiel (Inde, Chine, Japon). Il évite certains secteurs comme le luxe jugé trop imprévisible et dans lequel il estime manquer de connaissance, ou encore le pétrole qu'il juge obsolète à long terme. Il leur préfère la tech et les pays émergents, reflétant des croyances fortes sur l'évolution macroéconomique mondiale mais modéré par la proportion du portefeuille qu'il leur alloue.

## C. Comparaison : des objectifs communs, des comportements opposés

Malgré leurs différences de style, les deux investisseurs partagent plusieurs traits communs : une forte confiance dans le secteur technologique (notamment l'IA), une préférence marquée pour le marché américain perçu comme le plus porteur, ainsi qu'un rejet de certains secteurs jugés incertains ou obsolètes (énergie, automobile, pétrole, luxe). Leurs objectifs sont long-termistes (au-delà de 10 ans), peu formalisés, et centrés sur la protection du capital face à l'inflation, voire une retraite anticipée. Tous deux s'appuient sur des sources externes comme YouTube pour orienter leurs choix, complétées par leurs propres analyses simplifiées. Leurs portefeuilles sont concentrés, avec moins de six actifs majeurs, et leur approche reste intuitive, sans réelle formalisation analytique de la diversification ou des rendements espérés.

Leur allocation traduit aussi une forte influence de la perception de connaissance. L'investisseur A évite certains secteurs en raison d'un sentiment d'incertitude informationnelle (ex. : énergie renouvelable), tandis que l'investisseur B refuse d'investir dans des entreprises qu'il « ne connaît pas » (comme LVMH), mais investit en revanche dans NVIDIA qu'il identifie dans sa consommation quotidienne. Ce sentiment de contrôle ou d'information privilégiée rejoint les travaux de Heath & Tversky (1991) sur la préférence pour la certitude, ainsi que la Behavioral Portfolio Theory de Shefrin & Statman (2000), qui expliquent la surpondération d'actifs perçus comme familiers ou maîtrisables, indépendamment de leur profil objectif. Notons enfin que l'investisseur A se refuse le secteur du renouvelable par manque d'adhésion personnelle aux convictions qui y sont rattachés.

Enfin, leurs démarches d'investissement sont opposées. L'investisseur A adopte une stratégie active, fondée sur l'analyse fondamentale d'actions individuelles et la recherche de surperformance, avec des ajustements réguliers. L'investisseur B privilégie une méthode passive structurée, via des ETF choisis pour leur exposition géographique ou sectorielle, et investit selon une logique de régularité (DCA), sans chercher à battre le marché.

Ces deux profils permettent d'illustrer deux formes crédibles de construction comportementale de portefeuilles, fondées sur des croyances, des préférences et des heuristiques distinctes. Ils permettent

ainsi de légitimer la segmentation des univers d'allocation étudiés dans les chapitres suivants, en cohérence avec la notion de facteur de foi développée plus haut.

#### 4.1.3 Univers d'investissement

Dans la continuité de l'introduction du facteur de foi comme levier de construction mentale des portefeuilles et de la démarche exploratoire menée auprès de deux investisseurs particuliers, cette section présente les différents univers d'investissement retenus pour l'analyse empirique du présent mémoire. Ces univers ne visent pas à reproduire de manière exhaustive la diversité du marché, mais à illustrer des logiques d'allocation crédibles et différenciées, observables dans des pratiques réelles, tout en restant suffisamment restreints pour permettre la résolution optimale des portefeuilles via la méthode HAMA.

L'objectif poursuivi est double. D'une part, il s'agit d'analyser comment le facteur de foi, défini comme une croyance comportementale forte dans un actif, un secteur ou une zone géographique, influence les performances comportementales des portefeuilles à travers l'indicateur GBBP. D'autre part, le mémoire cherche à explorer dans quelle mesure une correction des biais liés à ce facteur, par l'élargissement ou la diversification de l'univers, peut améliorer les performances mentales perçues de l'investisseur.

##### A. Exclusion des actions individuelles

Initialement, l'inclusion d'actions individuelles semblait être une manière naturelle de traduire certaines croyances comportementales très spécifiques, comme la confiance dans une entreprise perçue comme « gagnante » ou « innovante ». Cette granularité est notamment observable dans les entretiens exploratoires, où les investisseurs expriment leur préférence pour des sociétés telles que NVIDIA ou TSMC, souvent justifiées par une connaissance perçue ou un lien personnel (usage des produits, actualité fréquente, réputation technologique). Les actions individuelles offrent donc une expression très directe du facteur de foi, à travers la sélection explicite de titres emblématiques.

Cependant, leur inclusion a été écartée pour des raisons méthodologiques. D'une part, le choix des actions individuelles repose sur une infinité de combinaisons possibles, rendant difficile la comparabilité rigoureuse entre univers d'investissement. D'autre part, l'analyse sectorielle ou géographique devient biaisée lorsqu'un seul titre est utilisé pour représenter un thème complexe. En intégrant uniquement des ETF, il est possible de capter l'exposition sectorielle ou régionale souhaitée tout en limitant l'individualisation des conclusions vis-à-vis des investisseurs.

##### B. Univers étudiés

La construction des univers suit donc une méthodologie rigoureuse visant à isoler et comparer différentes structures mentales d'allocation comme mentionné dans la Behavioral Portfolio Theory (Shefrin & Statman, 2000) et confirmée dans la démarche exploratoire précédente. Chaque portefeuille contient au moins un actif dit « de protection », soit un ETF large comme le MSCI World ou le S&P 500, reflétant une volonté de stabilité et de couverture contre les risques systémiques. S'ajoute à cela un actif « de croissance modérée », typiquement un ETF Nasdaq, traduisant une recherche de surperformance raisonnable. Enfin, un ou plusieurs ETF thématiques à plus fort risque complètent la structure, incarnant le facteur de foi, c'est-à-dire la tentative de « battre le marché » en misant sur une conviction sectorielle ou géographique forte.

Trois ETF thématiques ont été retenus pour structurer ces croyances :

- **iShares Global Clean Energy ETF (ICLN)** : reflétant une foi dans la transition énergétique et les énergies renouvelables,
- **iShares Nasdaq US Biotechnology ETF (IBB)** : incarnant la conviction dans les biotechnologies et l'innovation médicale,
- **iShares Future AI & Tech ETF (ARTY)** : traduisant la croyance dans l'essor de l'intelligence artificielle et des technologies disruptives.

Les caractéristiques statistiques des actifs étudiés sont représentées au Tableau 8. L'analyse de leur pertinence fait l'objet d'une discussion complète au chapitre 4.2.2. Sur cette base, 11 univers d'investissement ont été constitués et sont représentés au Tableau 5 qui suit.

Univers d'investissement	Composition (ETF)	Facteur de foi/biais cognitifs envisagés
<b>Tech-S&amp;P</b>	S&P 500, Nasdaq, ARTY	Foi dans l'innovation technologique (IA, big tech)
<b>Green-S&amp;P</b>	S&P 500, Nasdaq, ICLN	Croyance dans la transition énergétique
<b>Bio-S&amp;P</b>	S&P 500, Nasdaq, IBB	Confiance dans les biotechnologies et la santé
<b>Tech-World</b>	MSCI World, Nasdaq, ARTY	Idem, avec diversification géographique
<b>Green-World</b>	MSCI World, Nasdaq, ICLN	Idem, avec diversification géographique
<b>Bio-World</b>	MSCI World, Nasdaq, IBB	Idem, avec diversification géographique
<b>Tech + Green</b>	S&P 500, Nasdaq, ARTY, ICLN	Croyances combinées : technologie + transition énergétique
<b>Tech + Bio</b>	S&P 500, Nasdaq, ARTY, IBB	Croyances combinées : technologie + biotechnologie
<b>Green + Bio</b>	S&P 500, Nasdaq, ICLN, IBB	Croyances combinées : transition verte + santé
<b>All-sector</b>	S&P 500, Nasdaq, ARTY, ICLN, IBB	Diversification comportementale : dilution des biais sectoriels
<b>No-sector</b>	MSCI World, S&P 500, Euro Stoxx 50, Nasdaq	Univers « neutre » : diversification géographique et sectorielle sans thème spécifique

Tableau 5 - Univers étudiés et hypothèses sur les biais cognitifs.

Cette progression d'univers permet de tester empiriquement plusieurs hypothèses centrales à la littérature comportementale. En comparant les portefeuilles centrés sur une seule croyance avec ceux intégrant plusieurs thèmes (pan-sectoriel), il devient possible de mesurer si la réduction du biais d'étiquetage ou l'élargissement mental de l'univers d'investissement améliore la performance selon la métrique GBBP. Le dernier portefeuille, plus équilibré et neutre, servira ainsi de référence pour évaluer si une stratégie de diversification comportementale offre de meilleures performances mentales qu'un univers focalisé.

Enfin, ces univers traduisent directement les couches mentales identifiées dans la Behavioral Portfolio Theory (Shefrin & Statman, 2000). L'ETF large joue le rôle de la couche de protection (« sécurité »), le

Nasdaq celui de la croissance stable (« progression »), tandis que les ETF thématiques incarnent la couche spéculative (« espoir »). Cette structuration tripartite permet une lecture comportementale fidèle à la théorie et adaptée aux objectifs du présent mémoire.

## 4.2 Traitement des données

Afin de procéder à l'analyse empirique de la performance des portefeuilles optimisés par la méthode HAMA, ce chapitre vise à préparer rigoureusement les données financières nécessaires à leur implémentation. Dans le cadre de cette étude, les univers d'investissements sont exclusivement composés d'ETF cotés, comme présentés dans la section précédente.

Les rendements composés utilisés sont des rendements mensuels en USD<sup>5</sup> collectés manuellement depuis les fiches de performance publiées sur le site officiel de BlackRock pour chacun des ETF retenus. Une fois importées, ces données sont converties en log-rendements, conformément aux pratiques statistiques usuelles en finance, afin de garantir l'additivité temporelle des rendements et d'assurer une meilleure stabilité des moments.

Dans une seconde étape, un test de normalité est réalisé sur les log-rendements de chaque actif, à l'aide de méthodes statistiques classiques (test de Shapiro-Wilk et visualisation par histogrammes et Q-Q plot). L'objectif est d'évaluer l'adéquation des données empiriques avec l'hypothèse de distribution normale, condition sous-jacente au modèle HAMA classique. En cas de déviation significative de la normalité (asymétrie, kurtosis élevée, etc.), la méthode paramétrique non gaussienne HAMA sera privilégiée. Ce choix sera fait en parfaite adéquation avec l'analyse de la revue de littérature précédente, en présence de distributions réelles présentant des caractéristiques empiriques non normales.

### 4.2.1 Test de Shapiro-Wilk

Le test de Shapiro-Wilk constitue un outil statistique puissant pour évaluer la normalité d'un échantillon de données. Il repose sur la comparaison entre la distribution empirique des observations et celle attendue sous l'hypothèse nulle d'une loi normale, en comparant les différences entre les valeurs observées et les valeurs attendues dans une distribution normale. Le test produit une statistique de test,  $W = \frac{(\sum_{i=1}^n a_i x_i)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$  qui varie entre 0 et 1. Plus W se rapproche de 1, plus les données sont considérées comme normalement distribuées.

Dans le cadre de cette étude, le test de Shapiro-Wilk est appliqué individuellement aux séries de rendements logarithmiques mensuels de chaque ETF composant les univers d'investissement. Ce test est complété par une visualisation graphique par histogrammes de densité et Q-Q plots afin de mieux apprécier les éventuelles asymétries ou queues épaisses. Les résultats sont visibles en Figure 7 et Figure 8. Un seuil de signification de 5 % est retenu : une p-valeur inférieure à ce seuil suggère un écart significatif à la normalité, justifiant le recours à la version non gaussienne de la méthode HAMA. Cette étape est donc nécessaire pour statuer objectivement sur la distribution empirique des actifs, et d'adapter en conséquence le cadre méthodologique de l'allocation optimale à venir. Les résultats des moments mensuels de chaque actif ainsi que du test de Shapiro-Wilk sont représentés au Tableau 6. La matrice de corrélation est donnée au Tableau 7.

---

<sup>5</sup> Les données de l'ETF EuroStoxx sont quant à elles exprimées en Euro. L'impact de cette différence d'unité sur les rendements est toutefois jugé négligeable et ne sera pas sujette à une attention particulière au sein de cette étude



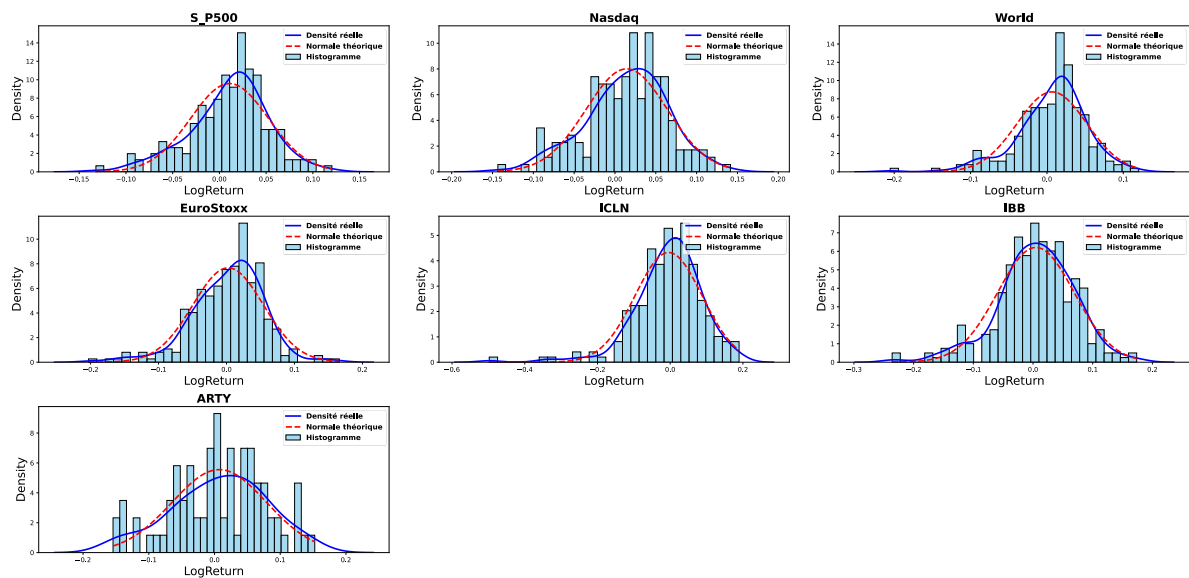


Figure 7 - Comparaison des histogrammes des log-rendements mensuels des actifs avec la loi gaussienne.

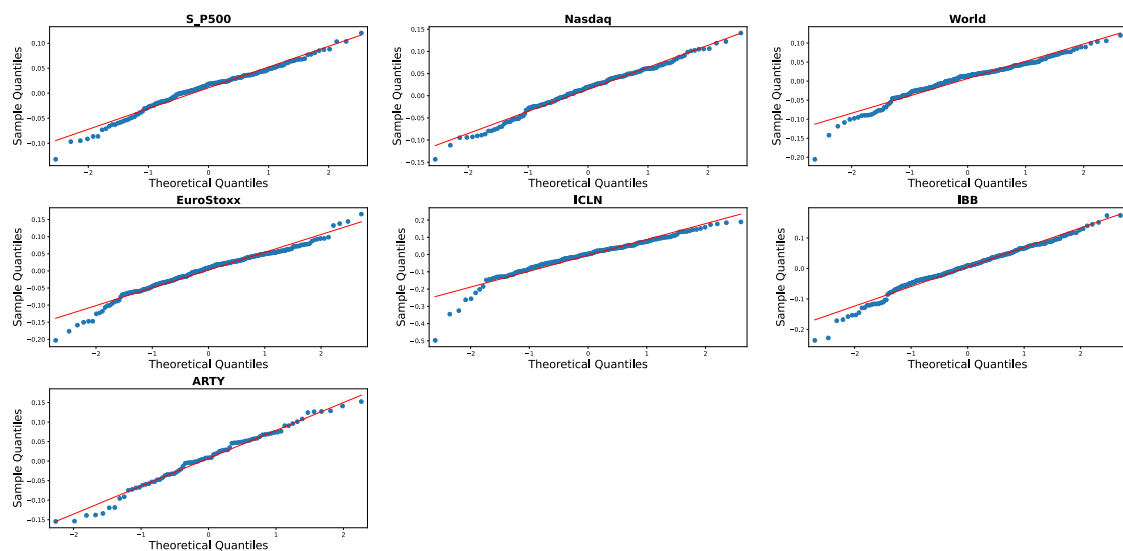


Figure 8 - Q-Q plots des log-rendements des actifs étudiés.

Actif/log-rendements mensuels	Mean	std	Skewness	Kurtosis	Shapiro Stat	p-valeur	Normalité
<b>S_P500</b>	1,09 %	4,16 %	-0,500	3,681	0,979	0.0090	Non normale
<b>Nasdaq</b>	1.43 %	4,98 %	-0.363	3,173	0,987	0.1165	Normale
<b>World</b>	0.66 %	4.56 %	-0.862	5,1105	0,957	0.0000	Non normale
<b>EuroStoxx</b>	0.24 %	5.20 %	-0.575	4,5147	0,971	0.0000	Non normale
<b>ICLN</b>	-0.44 %	9.22 %	-1.250	7,4574	0,932	0.0000	Non normale
<b>IBB</b>	0.48 %	6.43 %	-0.510	4,0757	0,978	0.0004	Non normale
<b>ARTY</b>	0.73 %	7.19 %	-0.283	2,683	0,982	0.2969	Normale

Tableau 6 - Statistiques descriptives et résultats des tests de Shapiro-Wilk pour les actifs étudiés.

**Matrice de  
corrélations/mensuelles**

	<i>S_P500</i>	<i>Nasdaq</i>	<i>World</i>	<i>EuroStoxx</i>	<i>ICLN</i>	<i>IBB</i>	<i>ARTY</i>
<b><i>S_P500</i></b>	100 %						
<b><i>Nasdaq</i></b>	92 %	100 %					
<b><i>World</i></b>	98 %	89 %	100 %				
<b><i>EuroStoxx</i></b>	77 %	68 %	86 %	100 %			
<b><i>ICLN</i></b>	61 %	58 %	75 %	62 %	100 %		
<b><i>IBB</i></b>	64 %	65 %	63 %	53 %	51 %	100 %	
<b><i>ARTY</i></b>	84 %	88 %	84 %	65 %	65 %	69 %	100 %

Tableau 7 - Matrice de corrélations des log-rendements mensuels des actifs étudiés.

Les moments annuels calculés à partir des log-rendements mensuels agrégés offrent une vision plus pertinente pour l'investisseur dans le cadre du modèle HAMA. Ce modèle suppose que les objectifs de l'investisseur sont exprimés en termes de déviation vis-à-vis de l'espérance de rendement annuel, ce qui rend indispensable une évaluation des caractéristiques statistiques des actifs sur cette même base temporelle. En se concentrant uniquement sur les années complètes, l'analyse garantit une cohérence dans l'estimation des moments, notamment la moyenne et la volatilité annuelle, qui jouent un rôle central dans la construction des préférences de rendement/risque de l'investisseur. De plus, l'examen de l'asymétrie et de l'aplatissement (skewness et kurtosis) permet de mieux apprécier les risques extrêmes, souvent négligés dans les modèles purement gaussiens. Ces résultats sont ainsi directement exploitables dans le cadre du modèle HAMA pour calibrer des portefeuilles qui répondent aux attentes réelles des investisseurs. Les résultats sont présentés en Figure 9 et Figure 10.

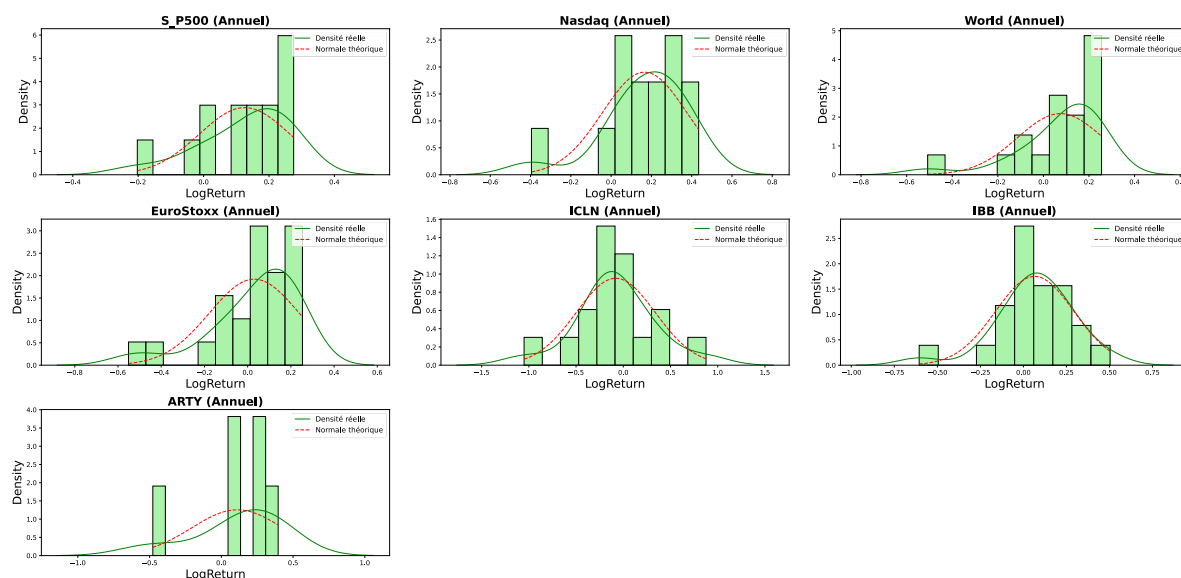


Figure 9 - Comparaison des histogrammes des log-rendements annuels des actifs avec la loi gaussienne.

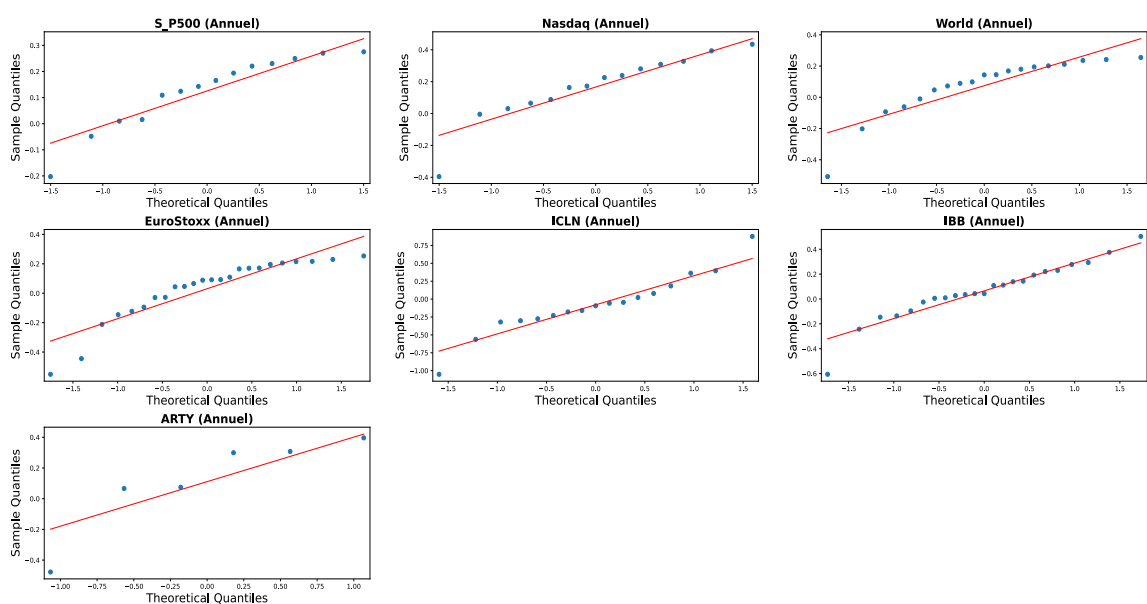


Figure 10 - Q-Q plots des log-rendements annuels des actifs étudiés.

Actif/log-rendements annuels	#Année (fin 2024)	Mean	std	Skewness	Kurtosis	Shapiro Stat	p-valeur	Normalité
<b>S&amp;P500</b>	14	12,55 %	13,34 %	-0,985	3,215	0,901	0,118	Normale
<b>Nasdaq</b>	14	16,63 %	20,20%	-1,267	4,725	0,896	0,099	Normale
<b>World</b>	19	7,42 %	18,30 %	-1,735	5,882	0,815	0,002	Non normale
<b>EuroStoxx</b>	24	3,05 %	20,34%	-1.383	4,385	0,851	0,002	Non normale
<b>ICLN</b>	17	-7,98 %	40,62%	0,023	4,070	0,955	0,546	Normale
<b>IBB</b>	23	6,57 %	22,29%	-0,819	4,737	0,947	0,256	Normale
<b>ARTY</b>	6	11,11 %	29,01%	-1,137	3,043	0,835	0,118	Normale

Tableau 8 - Moments statistiques des log-rendements annuels des actifs étudiés.

Matrice de corrélations/annuel	S_P500	Nasdaq	World	EuroStoxx	ICLN	IBB	ARTY
<b>S&amp;P500</b>	100 %						
<b>Nasdaq</b>	91 %	100 %					
<b>World</b>	98 %	90 %	100 %				
<b>EuroStoxx</b>	82 %	65 %	94 %	100 %			
<b>ICLN</b>	26 %	38 %	62 %	56 %	100 %		
<b>IBB</b>	50 %	50 %	52 %	61 %	55 %	100 %	
<b>ARTY</b>	86 %	98 %	89 %	54 %	44 %	86 %	100 %

Tableau 9 - Matrice de corrélation des log-rendements annuels des actifs étudiés.

#### 4.2.2 Pertinence des actifs et rôle potentiel dans un portefeuille HAMA

L'échantillon d'actifs retenus couvre intentionnellement un spectre large de profils rendement–risque et de comportements statistiques qui semblent parfois trivialement inintéressant au sens rationnel de la MV. Mentionnons par exemple le cas ICLN très volatile et d'espérance négative. Ce choix est toutefois effectué afin d'étudier comment le modèle HAMA mobilise l'ensemble de ses leviers (moyenne, variance, asymétrie et kurtosis) pour arbitrer entre croissance espérée et maîtrise du risque de shortfall. Ces actifs devraient ainsi permettre de mettre en avant l'apport du modèle par rapport aux théories plus classiques comme celle de Markowitz.

Cette section propose une analyse des propriétés statistiques de ces actifs, et les classes en fonction des couches mentales au sens de la BPT (Shefrin & Statman, 2000) et de Lola Lopes (1987) dans lesquelles ils devraient prépondérer.

##### 1. Couche de « de protection »

- **S&P 500** et **MSCI World** jouent le rôle de socle défensif. Le S&P 500, avec un rendement annuel moyen de 12,55 % et une volatilité modérée (13,34 %), présente une distribution proche de la normale, un skewness négatif mais limité, et une kurtosis modérée (3,215). Le MSCI World, moins performant (7,42 %) mais corrélé à 98 % avec le S&P 500, est plus volatil (18,30 %) et affiche des queues plus lourdes (kurtosis 5,882). Dans un contexte où les contraintes HAMA se resserrent, leur rôle devient central : leur ratio rendement–risque et leur stabilité statistique en font des amortisseurs face aux actifs thématiques plus extrêmes.

La substitution du S&P 500 par le MSCI World permettra d'étudier l'impact de biais cognitifs engendrés par une volonté de réduire l'exposition au marché américain, volonté mentionnée par l'investisseur B lors de la démarche exploratoire précédente.

##### 2. Couches de « potentiel »

- **Nasdaq** est le moteur de performance dans la majorité des scénarios peu contraints : rendement moyen le plus élevé (16,63 %), mais volatilité significative (20,20 %) par rapport au S&P500 et asymétrie négative marquée (skewness -1,267). Très corrélé au S&P 500 (91 %) et à ARTY (98 %), il bénéficie d'un profil attractif dans un cadre de maximisation du rendement, mais perd en intérêt relatif dès que la maîtrise des pertes extrêmes devient prioritaire.

##### 3. Actifs thématiques à forte conviction – couches de protection/aspiration

- **ARTY (IA & Tech)** : rendement élevé (11,11 %), volatilité importante (29,01 %), asymétrie négative, mais corrélation extrêmement forte avec le Nasdaq (98 %). Il apporte peu de diversification structurelle, mais amplifie l'exposition au facteur technologique lorsque ce dernier est recherché.
- **ICLN (énergies renouvelables)** : profil très différent avec rendement négatif sur la période (-7,98 %) et volatilité très élevée (40,62 %). Sa corrélation modérée avec les grands indices (26 % avec le S&P 500, 38 % avec le Nasdaq) en fait un potentiel diversificateur dans un univers où la corrélation est un facteur clé de réduction du shortfall. Sa part optimale devrait croître dans des scénarios où la prime de diversification compense sa performance historique faible.
- **IBB (biotechnologies)** : rendement moyen positif (6,57 %), volatilité élevée (22,29 %), skewness parmi les plus élevées ce qui en fait un actif de choix en matière de gestion de la probabilité de shortfall. Sa corrélation modérée avec les grands indices (~50 %), offrant un compromis intéressant entre diversification et potentiel de performance sectorielle.

#### 4.2.3 Calcul des moments centrés des portefeuilles

Dans le cadre de l'évaluation statistique d'un portefeuille, il est fondamental de caractériser la distribution de ses rendements au travers de ses moments centrés d'ordre 1 à 4. Soit  $R_p$  le rendement du portefeuille, exprimé comme une combinaison linéaire des rendements des actifs  $R_i$  pondérés par des poids  $w_i$ , tels que :

$$R_p = \sum_{i=1}^n w_i R_i \text{ avec } \sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (37)$$

L'espérance du portefeuille est calculée comme la moyenne pondérée des espérances individuelles : précisément à partir des moments des actifs et de leur matrice de covariance  $\Sigma = [\sigma_{ij}]$  :

$$\mu_{1,p} = \mathbb{E}[R_p] = \sum_{i=1}^n w_i \mu_{1,i} \quad (38)$$

La variance, ou moment d'ordre 2, est quant à elle calculée à l'aide de la matrice de covariance  $\Sigma = [\sigma_{ij}]$  des rendements :

$$\mu_{2,p} = \text{Var}(R_p) = \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w}$$

Où  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)^T$  est le vecteur des poids du portefeuille.

Pour les moments d'ordre 3 et 4, nécessaires à la modélisation des risques extrêmes, les calculs exacts nécessiteraient la prise en compte des moments croisés d'ordre supérieur, dont l'estimation est coûteuse en ressources numériques. Afin de limiter la complexité computationnelle, nous faisons ici l'hypothèse d'indépendance des actifs au-delà du second ordre. Sous cette hypothèse, les moments centrés non-réduits d'ordre 3 et 4 du portefeuille sont approchés comme suit :

$$\mu_{3,p} \approx \sum_{i=1}^n w_i^3 \mu_{3,i} ; \mu_{4,p} \approx \sum_{i=1}^n w_i^4 \mu_{4,i} \quad (39)$$

Cette simplification permet d'exploiter directement les moments d'ordre supérieur calculés au niveau individuel, en évitant la modélisation de dépendances numériquement fastidieuses. Ces moments sont les moments bruts du portefeuille comme demandés dans les équations (17) à (25) correspondant au modèle HAMA semi-paramétrique. En effet, ces équations intègrent déjà la normalisation au travers des variables  $\mu_{2,p}$ . Il n'est donc pas nécessaire de standardiser préalablement les moments du portefeuille par des puissances de l'écart-type.

Les grandeurs  $\mu_{3,p}$  et  $\mu_{4,p}$  normalisées respectivement par  $\sigma_p^3$  et  $\sigma_p^4$ , deviennent alors les moments centrés réduits appelés skewness et kurtosis. Ils permettent de caractériser la dissymétrie et l'épaisseur des queues de la distribution du portefeuille.

### 4.3 Implémentation HAMA

#### 4.3.1 Validation du modèle

Afin de tester le bon fonctionnement de l'implémentation du modèle HAMA, une série d'expériences numériques sur différents univers d'investissement a été menée. L'objectif était de résoudre, de manière exhaustive et paramétrique, le problème d'optimisation défini par la contrainte suivante :

$$\max_p \mathbb{E}[R_p] \quad s.c. \quad \pi_p(-\lambda_m; H_m) - \gamma_m \pi_p(\lambda_m; H_m) \leq \Omega_m \quad (25)$$

Où  $\pi_p(x, H)$  est une fonction bornant la probabilité de shortfall du portefeuille sur un horizon H, basée sur les quatre premiers moments centrés non réduits des log-rendements annuels empiriquement disponibles  $(\mu_{1,p}; \mu_{2,p}; \mu_{3,p}; \mu_{4,p})$ .

#### A. Portefeuille de Kelly

L'implémentation semi-paramétrique du modèle HAMA dans un cas presque non contraint a permis d'obtenir des portefeuilles optimaux cohérents avec les caractéristiques statistiques des actifs étudiés. Le Nasdaq est systématiquement privilégié, ce qui est bien en adéquation avec ses performances historiques attractives : un rendement annualisé le plus élevé de 16,63 %, associé à une volatilité plus faible que celles des actifs sectoriels ICLN, IBB ou ARTY. La sélection exclusive du Nasdaq témoigne ainsi de la capacité du modèle à capter le portefeuille de Kelly. Les résultats sont présentés au Tableau 10 qui sert de point de départ des analyses à venir.

$\lambda_m = 0.1 ; \gamma_m = 0.6 ; \Omega_m = 0.1$											
H = 5 ; 10 ; 15	Tech S&P	Green S&P	Bio S&P	Tech World	Green World	Bio World	Tech Green	Tech Bio	Green Bio	All Sector	No Sector
S&P500	0	0	0	-	-	-	0	0	0	0	0
WORLD	-	-	-	0	0	0	-	-	-	-	0
NASDAQ	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
EUROSTOXX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0
ARTY	0	-	-	0	-	-	0	0	-	0	-
ICLN	-	0	-	-	0	-	0	-	0	0	-
IBB	-	-	0	-	-	0	-	0	0	0	-
PORTFOLIO STATISTICS											
Mean	16.6%	16.6%	16.6%	16.6%	16.6%	16.6%	16.6%	16.6%	16.6%	16.6%	16.6%
Std	20.2%	20.2%	20.2%	20.2%	20.2%	20.2%	20.2%	20.2%	20.2%	20.2%	20.2%
Skew	-1.27	-1.27	-1.27	-1.27	-1.27	-1.27	-1.27	-1.27	-1.27	-1.27	-1.27
Kurt	4.72	4.72	4.72	4.72	4.72	4.72	4.72	4.72	4.72	4.72	4.72
HORIZON DEPENDENT CHARACTERISTICS											
	$\mathbb{P}(\leq \Omega_m)$	$\Delta_p$	SUCCESS	$\bar{R}_p^H$	Std ( $\bar{R}_p^H$ )	Skew ( $\bar{R}_p^H$ )	Kurt ( $\bar{R}_p^H$ )				
H = 5	3.26%	2.005	OK	16.6%	9.0%	-0.56	3.34				
H = 10	0.16%	2.001	OK	16.6%	6.4%	-0.40	3.17				
H = 15	0.03%	2.000	OK	16.6%	5.2%	-0.33	3.11				

Tableau 10 - Caractéristiques des portefeuilles optimaux HAMA construits pour des horizons H de 5, 10 et 15 ans.  $\lambda_m = 0,1$  ;  $\gamma_m = 0,6$  et  $\Omega_m = 0,1$ .

## B. Choix des paramètres de tests et rôle dans l'optimisation

Les paramètres du modèle  $\lambda_m = 0,1$ ,  $\gamma_m = 0,6$  et  $\Omega_m = 0,1$  ont été délibérément choisis avec des valeurs élevées, suffisamment lâches que pour explorer la limite supérieure des portefeuilles que le modèle peut générer. Cette approche présente plusieurs avantages clés :

- La probabilité de shortfall  $\mathbb{P}(\leq \Omega_m)$  obtenue est nettement inférieure au seuil fixé de 10 %, avec des valeurs autour de 3 % à 0,03 % selon l'horizon. Cela confirme que les contraintes imposées sont suffisamment larges pour ne pas restreindre excessivement l'optimisation et permet l'identification des bornes supérieures de ces contraintes.
- En conséquence, le résultat observé reflète la logique du portefeuille de Kelly déjà rencontré au chapitre 2.2.4.B, qui maximise la croissance espérée du capital lorsque les contraintes de risque sont peu restrictives. La probabilité empirique de shortfall, systématiquement bien inférieure à 10 %, confirme que la contrainte  $\Omega_m$  n'est pas saturée et le modèle renvoi ainsi une solution dictée avant tout par le critère de rendement.

Cette stratégie de paramétrage est particulièrement intéressante car elle permet de connaître la borne supérieure des performances et allocations du modèle HAMA, sans être entravée par des contraintes trop strictes qui pourraient biaiser les résultats.

### Intérêt pour les analyses ultérieures

Commencer par ce scénario quasiment non contraint fournit une référence utile pour toute la suite de cette étude.

D'une part, il établit la limite supérieure de performance et de concentration sectorielle que peut atteindre le modèle HAMA dans un cadre quasi non contraint. D'autre part, il offre une base claire pour mesurer l'impact des ajustements futurs de  $\lambda_m$ ,  $\gamma_m$  et  $\Omega_m$  : en resserrant progressivement ces paramètres, il sera possible d'observer précisément comment les portefeuilles s'écartent de cette configuration de référence et d'identifier les seuils à partir desquels le risque extrême commence à influencer significativement sur les allocations optimales. Cette méthodologie devra alors faire apparaître les différences entre les univers et les intérêts de chacun.

## C. Validation des caractéristiques temporelles

L'analyse selon l'horizon d'investissement  $H$  confirme la validité de l'implémentation et la cohérence avec les propriétés statistiques sous-jacentes :

- La probabilité de shortfall décroît rapidement avec l'allongement de l'horizon, illustrant l'effet de diversification temporelle et le théorème central limite.
- La volatilité annualisée diminue significativement, tandis que la skewness et la kurtosis tendent vers des valeurs plus proches de la normale, indiquant que les rendements annualisés du portefeuille deviennent plus symétriques et moins extrêmes à long terme.

Cette évolution valide non seulement l'implémentation numérique mais aussi la pertinence théorique du modèle HAMA dans un cadre dynamique. Pour des horizons plus longs, des portefeuilles plus volatiles peuvent devenir optimaux au sens HAMA.

#### 4.3.2 Ouverture vers l'analyse paramétrique

Ce premier scénario, établi dans un cadre quasi non contraint, sert de véritable point d'ancrage pour notre exploration du modèle HAMA. Il trace la limite haute des performances et des structures d'allocation envisageables lorsque la contrainte de shortfall est suffisamment souple que pour que la quête de rendement prenne le dessus sur toute autre considération. Dans la suite, nous plongerons dans l'analyse paramétrique pour observer comment les variations de  $H$ ,  $\lambda_m$ ,  $\gamma_m$  et  $\Omega_m$  transforment les portefeuilles optimaux. Il s'agira de mesurer la réaction du modèle lorsque le contrôle du risque se resserre, et de révéler les arbitrages implicites entre rendement attendu, tolérance au risque et orientation sectorielle ou géographique des allocations. L'objectif global : identifier les situations où chaque univers d'investissement révèle ses atouts et ses limites, notamment par sa capacité à satisfaire certaines contraintes en exploitant ses actifs spécifiques<sup>6</sup>.

##### A. Projection du modèle HAMA semi-paramétrique dans le cadre MV :

Avant d'aborder l'analyse empirique, il est utile d'établir une projection mathématique claire du modèle afin de guider l'interprétation des résultats. Cette projection permet de traduire la contrainte de shortfall dans le cadre moyenne-variance, en y intégrant les propriétés statistiques d'ordre supérieur des distributions de rendements. Au départ de l'équation (15), le quantile gaussien  $z_\beta = \Phi^{-1}(\beta)$  peut être remplacé par une expansion de Cornish-Fisher :

$$z_\beta^{CF} = z_\beta + \frac{S}{6}(z_\beta^2 - 1) + \frac{K}{24}(z_\beta^3 - 3z_\beta) - \frac{S^2}{36}(2z_\beta^3 - 5z_\beta) \quad \text{Avec} \quad \beta = \frac{\Omega_m}{1 - \gamma_m} \quad (40)$$

Où  $S$  et  $K$  sont respectivement l'asymétrie et l'excès de kurtose du portefeuille. La projection de la contrainte de shortfall dans le cadre moyenne variance s'écrit alors :

$\frac{-\lambda_m \sqrt{H_m}}{z_\beta^{CF}} \geq \sqrt{w(\Lambda)^T \Sigma w(\Lambda)} \quad \text{pour} \quad \Omega_m < 0,5 \quad (41)$
---

#### 4.3.3 Variation du paramètre $\lambda_m$

Après avoir exploré la cohérence de l'implémentation HAMA ainsi que la solution renvoyée en l'absence de contrainte, nous nous tournons désormais vers l'analyse de l'impact du paramètre  $\lambda_m$ , directement lié à l'exigence de maîtrise de la probabilité de shortfall. Ce paramètre joue un rôle déterminant dans le compromis entre sécurité et performance : des valeurs faibles imposent un contrôle strict du risque, limitant l'exposition aux actifs volatils mais potentiellement rémunérateurs, tandis que des valeurs élevées relâchent la contrainte et permettent au modèle d'orienter davantage l'allocation vers la maximisation du rendement attendu en autorisant la solution à s'écarter davantage de son espérance.

L'analyse s'articule en deux volets. Dans un premier temps, elle identifie, pour chaque univers d'investissement, le seuil minimal de  $\lambda_m$  à partir duquel un portefeuille HAMA admissible peut être construit. Dans un second temps, elle examine l'évolution de la composition et des caractéristiques statistiques des allocations optimales à mesure que la contrainte se relâche. Cette méthodologie

<sup>6</sup> Les données présentées ci-après sont obtenues en résolvant le problème HAMA par un algorithme multi-start s'appuyant sur le solveur « SLQP » de Python. Les solutions renvoyées pour un même problème peuvent alors parfois différer de quelques % dans les poids alloués aux actifs. Toutefois, cette tolérance n'a que peu d'impact sur les constats liés aux inclusions des actifs dans les portefeuilles.



permet l'identification des points forts et faiblesses de chaque univers en matière de rendement et gestion des risques. Les résultats sont reportés au Tableau 11.

#### A. Analyse des seuils minimaux de $\lambda_m$ pour l'admissibilité HAMA

L'examen des résultats montre que les univers d'investissement capables de satisfaire la contrainte la plus stricte ( $\lambda_m=4,9\%$ ) combinent systématiquement une exposition au S&P 500 et au secteur des biotechnologies via IBB. Cette combinaison repose sur deux profils statistiques complémentaires :

- **S&P 500** : rendement moyen de 12,55 %, volatilité modérée de 13,34 %, distribution globalement normale mais légèrement asymétrique à gauche (Skew=-0,98) qui permet de réduire la probabilité de shortfall.
- **IBB** : rendement individuel plus faible (6,57 %) et volatilité plus élevée (22,29 %), mais faible corrélation au S&P 500 (50 %) et kurtosis marqué (4,737), traduisant des comportements extrêmes plus fréquents. Son asymétrie fait également partie des plus élevées parmi les actifs considérés avec sa valeur de -0,82 et contribue de manière positive à réduire la probabilité de shortfall.

$H = 5 ; \gamma_m = 0.4 ; \Omega_m = 0.1$											
$\lambda_m = 4.9\%$	Tech S&P	Green S&P	Bio S&P	Tech World	Green World	Bio World	Tech Green	Tech Bio	Green Bio	All Sector	No Sector
S&P500	/	/	90.22	-	-	-	/	87.72	83.89	85.19	/
WORLD	-	-	-	/	/	/	-	-	-	-	/
NASDAQ	/	/	1.46	/	/	/	/	2.83	4.47	1.61	/
EUROSTOXX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	/
ARTY	/	-	-	/	-	-	/	0	-	0.75	-
ICLN	-	/	-	-	/	-	/	-	1.01	0	-
IBB	-	-	8.31	-	-	/	-	9.45	10.63	12.45	-
PORTFOLIO STATISTICS											
Mean	/	/	12.1%	/	/	/	/	12.1%	11.9%	11.8%	/
Std	/	/	13.3%	/	/	/	/	13.4%	13.5%	13.5%	/
Skew	/	/	-0.73	/	/	/	/	-0.66	-0.56	-0.60	/
Kurt	/	/	2.13	/	/	/	/	1.86	1.51	1.63	/
$\lambda_m = 5.01\%$	Tech S&P	Green S&P	Bio S&P	Tech World	Green World	Bio World	Tech Green	Tech Bio	Green Bio	All Sector	No Sector
S&P500	98.48	98.48	88.54	-	-	-	98.48	98.48	98.48	98.48	98.48
WORLD	-	-	-	/	/	/	-	-	-	-	0
NASDAQ	1.52	1.52	8.64	/	/	/	1.52	1.52	1.52	1.52	1.52
EUROSTOXX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0
ARTY	0	-	-	/	-	-	0	0	-	0	-
ICLN	-	0	-	-	/	-	0	-	0	0	-
IBB	-	-	2.82	-	-	/	-	0	0	0	-
PORTFOLIO STATISTICS											
Mean	12.6%	12.6%	12.7%	/	/	/	12.6%	12.6%	12.6%	12.6%	12.6%
Std	13.4%	13.4%	13.8%	/	/	/	13.4%	13.4%	13.4%	13.4%	13.4%
Skew	-0.92	-0.92	-0.63	/	/	/	-0.92	-0.92	-0.92	-0.92	-0.92
Kurt	2.95	2.95	1.75	/	/	/	2.95	2.95	2.95	2.95	2.95
$\lambda_m = 6.6\%$	Tech S&P	Green S&P	Bio S&P	Tech World	Green World	Bio World	Tech Green	Tech Bio	Green Bio	All Sector	No Sector
S&P500	27.71	27.71	27.71	-	-	-	27.71	27.71	27.71	27.71	27.71
WORLD	-	-	-	/	/	13.19	-	-	-	-	0
NASDAQ	72.29	72.29	72.29	/	/	63.89	72.29	72.29	72.29	72.29	72.29
EUROSTOXX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0
ARTY	0	-	-	/	-	-	0	0	-	0	-
ICLN	-	0	-	-	/	-	0	-	0	0	-
IBB	-	-	0	-	-	22.92	-	0	0	0	-

PORTFOLIO STATISTICS											
Mean	15.5%	15.5%	15.5%	/	/	13.1%	15.5%	15.5%	15.5%	15.5%	15.5%
Std	18.0%	18.0%	18.0%	/	/	18.4%	18.0%	18.0%	18.0%	18.0%	18.0%
Skew	-0.68	-0.68	-0.68	/	/	-0.46	-0.68	-0.68	-0.68	-0.68	-0.68
Kurt	2.04	2.04	2.04	/	/	1.18	2.04	2.04	2.04	2.04	2.04
$\lambda_m = 6.7\%$	<b>Tech S&amp;P</b>	<b>Green S&amp;P</b>	<b>Bio S&amp;P</b>	<b>Tech World</b>	<b>Green World</b>	<b>Bio World</b>	<b>Tech Green</b>	<b>Tech Bio</b>	<b>Green Bio</b>	<b>All Sector</b>	<b>No Sector</b>
S&P500	25.10	25.10	25.10	-	-	-	25.10	25.10	25.10	25.10	25.10
WORLD	-	-	-	50.15	50.15	9.65	-	-	-	-	0
NASDAQ	74.90	74.90	74.90	49.85	49.85	68.42	74.90	74.90	74.90	74.90	74.90
EUROSTOXX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0
ARTY	0	-	-	0	-	-	0	0	-	0	-
ICLN	-	0	-	-	0	-	0	-	0	0	-
IBB	-	-	0	-	-	21.92	-	0	0	0	-
PORTFOLIO STATISTICS											
Mean	15.6%	15.6%	15.6%	12.0%	12.0%	13.5%	15.6%	15.6%	15.6%	15.6%	15.6%
Std	18.2%	18.2%	18.2%	18.8%	18.8%	18.5%	18.2%	18.2%	18.2%	18.2%	18.2%
Skew	-0.73	-0.73	-0.73	-0.4	-0.4	-0.54	-0.73	-0.73	-0.73	-0.73	-0.73
Kurt	2.24	2.24	2.24	0.73	0.73	1.49	2.24	2.24	2.24	2.24	2.24

Tableau 11 - Tableau comparatif des portefeuilles optimaux HAMA.  $H = 5$  ;  $\gamma_m = 0.4$  ;  $\Omega_m = 0.1$  et  $\lambda_m = [4,9\% ; 5,01\% ; 6,6\% ; 6,7\%]$ .

En combinant l'analyse précédente avec les résultats exposés au

Tableau 11, il ressort que l'apport de l'exposition aux biotechnologies au travers de l'actif IBB se fait majoritairement au travers de sa matrice de corrélation. Sa faible corrélation avec l'actif cœur permet de réduire le risque combiné et de satisfaire des contraintes encore plus marquées. Au niveau de contrainte  $\lambda_m = 4,9\%$ , la probabilité de shortfall est maîtrisée grâce à l'effet combiné d'un indice large et robuste (S&P 500) et d'un secteur spécialisé faiblement corrélé (IBB). Dès que  $\lambda_m$  passe à  $5,1\%$ , le S&P 500 seul suffit à satisfaire la contrainte sur  $\Omega_m$  avec un compromis de seulement  $0,1\%$  sur le rendement, preuve de sa presque totale dominance sur l'ETF IBB.

Les univers dépourvus de S&P 500 montrent une plus grande rigidité : l'univers incluant IBB atteint l'admissibilité seulement à partir de  $\lambda_m = 6,6\%$ , tandis que les autres doivent attendre  $\lambda_m = 6,7\%$ . Bien que ce gain obtenu sur la contrainte soit encore une fois de seulement  $0,1\%$ , l'intérêt de l'ETF IBB s'illustre cette fois au travers d'un gain de  $1,5\%$  sur l'espérance de rendement. Ces univers (Tech World, Green World et Bio World) offrent toutefois des couples rendement/volatilité bien moins intéressant que les univers possédant le S&P500.

## B. Évolution des allocations suivant le relâchement de $\lambda_m$

L'assouplissement de  $\lambda_m$  entraîne une transformation progressive de la composition des portefeuilles HAMA. Dans la zone des contraintes les plus strictes, entre  $4,9\%$  et  $5,1\%$ , les allocations passent d'une maîtrise du risque au travers d'une combinaison ou S&P 500 – IBB coexistent à une prédominance du S&P 500.

Lorsque  $\lambda_m$  dépasse  $6,6\%$ , le MSCI World, présent dans certaines configurations intermédiaires et utilisé conjointement avec IBB pour réduire la probabilité de shortfall cède rapidement sa place au Nasdaq. Ce remplacement semble logique et cohérent avec le rendement supérieur du Nasdaq ( $16,63\%$ ) malgré une volatilité plus élevée ( $20,20\%$ ) de plus en plus acceptée. En règle générale, l'IBB jusqu'à utilisé pour sa réduction du risque, voit sa pondération décroître nettement au fur et à mesure que les contraintes s'assouplissent, au profit d'indices offrant un rendement brut plus élevé. Cette

substitution illustre la préférence du modèle, en contexte moins contraint, pour des couples rendement–risque plus directs et moins dépendants de la diversification extrême.

Dans l'ensemble, la structure optimale des portefeuilles HAMA sous forte contrainte repose sur un noyau S&P 500 enrichi ponctuellement par l'IBB, afin d'exploiter sa faible corrélation et ses propriétés de diversification. Toutefois, son apport en termes de  $\lambda_m$  reste limité, un gain d'à peine 0,1 % par rapport à des univers similaires sans IBB, ce qui réduit son intérêt dans une perspective purement centrée sur la contrainte. Sa véritable valeur apparaît plutôt en régime de contrainte modérée, où il permet à l'univers Bio World de surpasser de 1.5 % le rendement espéré des univers Tech World et Green World.

À l'inverse, l'EuroStoxx et les autres univers sectoriels testés ne se sont révélés pertinents dans aucun scénario. Leur combinaison de rendement, volatilité et corrélation ne permet ni d'améliorer la capacité à respecter des contraintes strictes, ni d'optimiser le rendement espéré dans un cadre plus libéral. L'IBB demeure donc un cas particulier où un actif sectoriel trouve une place justifiée dans l'architecture HAMA, mais rate un objectif comportemental apparu dans la démarche exploratoire. A savoir que certains individus s'exposent à certains secteurs pour satisfaire leur aspiration à devenir riche, au sens de Lola Lopes (Lopes, 1987).

#### 4.3.4 Variation du paramètre $H_m$

Après avoir étudié l'effet de l'augmentation de  $\lambda_m$  sur la faisabilité et la composition des portefeuilles HAMA, nous examinons désormais l'impact de l'horizon d'investissement  $H_m$ . L'analyse part du portefeuille obtenu lorsque  $\lambda_m = 4,9\%$  et cherche à comprendre dans quelle mesure un allongement de l'horizon permet à certains univers, initialement incapables de satisfaire la contrainte sur  $\Omega_m = 10\%$ , de devenir admissibles. Les résultats sont exposés au Tableau 12.

Le paramètre  $H_m$  influence directement les moments centrés du portefeuille selon au travers de l'équation (16) :

$$\mu_{2,p}^H = \frac{\mu_{2,p}}{H} \quad ; \quad \mu_{3,p}^H = \frac{\mu_{3,p}}{H^2} \quad ; \quad \mu_{4,p}^H = \frac{\mu_{4,p}}{H^3} + \frac{3(H-1)\mu_{2,p}^2}{H^3} \quad (42)$$

Avec  $\mu_{3,p}^H$  et  $\mu_{4,p}^H$  qui représentent respectivement le troisième et quatrième moment centrés du portefeuille p sur l'horizon H. On observe que l'allongement de l'horizon a un impact quadratique sur la réduction de l'asymétrie (S) et cubique sur l'excès de kurtose (K) du portefeuille. Ce constat mathématique traduit le fait que les fluctuations extrêmes se diluent sur des périodes plus longues.

La diminution des moments centrés se répercute directement dans l'équation (41) via le quantile ajusté de Cornish-Fisher :

$$z_\beta^{CF} = z_\beta + \frac{S}{6}(z_\beta^2 - 1) + \frac{K}{24}(z_\beta^3 - 3z_\beta) - \frac{S^2}{36}(2z_\beta^3 - 5z_\beta) \quad \text{Avec} \quad \beta = \frac{\Omega_m}{1 - \gamma_m} \quad (43)$$

D'un point de vue global, un horizon  $H_m$  plus long augmente la faisabilité du portefeuille non seulement par la racine  $\sqrt{H_m}$  au numérateur, mais aussi par la réduction de S et K ce qui abaisse le quantile corrigé  $z_\beta^{CF}$  au dénominateur. L'effet combiné favorise ainsi l'acceptation de portefeuilles MV qui seraient autrement jugés trop risqués à court terme, et autorise la sélection de couples rendements/risques plus agressifs.

#### A. Analyse des seuils minimaux de $H_m$ pour l'admissibilité HAMA

À  $H_m = 5$ , seuls quelques portefeuilles restreints parviennent à franchir le seuil de faisabilité, essentiellement dominés par le S&P 500 accompagné ponctuellement du Nasdaq ou de l'IBB. La contrainte demeure alors sélective, ne permettant pas aux univers non exposés au secteur biotechnologies par l'ETF IBB de constituer des solutions viables. Dès  $H_m = 6$ , la situation évolue radicalement : le couple S&P 500–Nasdaq devient systématiquement admissible, quelle que soit la composition sectorielle. L'allongement de l'horizon a donc un effet marqué, comparable à celui observé précédemment lors du relâchement de  $\lambda_m$ . Enfin, pour  $H_m = 7$ , les univers incluant le MSCI World parviennent également à satisfaire la contrainte, mais dans des configurations où ce dernier reste minoritaire face à la domination du Nasdaq. Ainsi, l'effet seuil lié à  $H_m$  se manifeste par une ouverture progressive des univers admissibles, avec un rythme plus rapide que dans le cas de  $\lambda_m$ .

## B. Évolution des allocations suivant l'augmentation de $H_m$

L'évolution des allocations confirme cette dynamique de concentration. À mesure que l'horizon d'investissement s'allonge, les portefeuilles tendent très rapidement à se recentrer sur un noyau constitué du S&P 500, du MSCI World et surtout du Nasdaq, qui devient la composante dominante dès  $H_m = 6$ . Les actifs sectoriels, voient leur rôle déjà très faible diminuer, à l'exception du portefeuille Bio World, où l'IBB demeure préféré à l'ETF MSCI World : il permet d'atteindre un rendement espéré supérieur de +0,8% (15,3% contre 14,5%) avec un écart-type légèrement inférieur (-0,3%), soulignant la valeur ajoutée de l'accroissement de l'exposition sectorielle sur la biotechnologie.

Comparativement à l'évolution observée lors de l'augmentation de  $\lambda_m$ , le processus est plus abrupt : là où  $\lambda_m$  induisait une substitution progressive (IBB vers S&P, puis S&P vers Nasdaq), l'augmentation de  $H_m$  conduit à une bascule beaucoup plus directe. Dès  $H_m = 6$ , l'univers optimal est essentiellement polarisé entre S&P 500 et Nasdaq, laissant très peu de place aux autres indices. Cette concentration accrue illustre une logique différente : alors que l'assouplissement de la contrainte sur l'écart par rapport au rendement espéré permettait un élargissement graduel des choix, l'allongement de l'horizon d'investissement privilégie immédiatement les actifs à fort rendement attendu, même au prix d'une volatilité plus élevée.

$\lambda_m = 4.9\% ; \gamma_m = 0.4 ; \Omega_m = 0.1$											
<b>H = 5</b>	Tech S&P	Green S&P	Bio S&P	Tech World	Green World	Bio World	Tech Green	Tech Bio	Green Bio	All Sector	No Sector
S&P500	/	/	90.22	-	-	-	/	87.72	83.89	85.19	/
WORLD	-	-	-	/	/	/	-	-	-	-	/
NASDAQ	/	/	1.46	/	/	/	/	2.83	4.47	1.61	/
EUROSTOXX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	/
ARTY	/	-	-	/	-	-	/	0	-	0.75	-
ICLN	-	/	-	-	/	-	/	-	1.01	0	-
IBB	-	-	8.31	-	-	/	-	9.45	10.63	12.45	-
PORTFOLIO STATISTICS											
Mean	/	/	12.1%	/	/	/	/	12.1%	11.9%	11.8%	/
Std	/	/	13.3%	/	/	/	/	13.4%	13.5%	13.5%	/
Skew	/	/	-0.73	/	/	/	/	-0.66	-0.56	-0.60	/
Kurt	/	/	2.13	/	/	/	/	1.86	1.51	1.63	/
<b>H = 6</b>	Tech S&P	Green S&P	Bio S&P	Tech World	Green World	Bio World	Tech Green	Tech Bio	Green Bio	All Sector	No Sector
S&P500	47.84	47.84	47.84	-	-	-	47.84	47.84	47.84	47.84	47.84
WORLD	-	-	-	/	/	/	-	-	-	-	0
NASDAQ	52.16	52.16	52.16	/	/	/	52.16	52.16	52.16	52.16	52.16
EUROSTOXX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0
ARTY	0	-	-	/	-	-	0	0	-	0	-
ICLN	-	0	-	-	/	-	0	-	0	0	-

IBB	-	-	0	-	-	/	-	0	0	0	-
<b>PORTFOLIO STATISTICS</b>											
Mean	14.7%	14.7%	14.7%	/	/	/	14.7%	14.7%	14.7%	14.7%	14.7%
Std	16.6%	16.6%	16.6%	/	/	/	16.6%	16.6%	16.6%	16.6%	16.6%
Skew	-0.38	-0.38	-0.38	/	/	/	-0.38	-0.38	-0.38	-0.38	-0.38
Kurt	0.84	0.84	0.84	/	/	/	0.84	0.84	0.84	0.84	0.84
<b>H = 7</b>	<b>Tech S&amp;P</b>	<b>Green S&amp;P</b>	<b>Bio S&amp;P</b>	<b>Tech World</b>	<b>Green World</b>	<b>Bio World</b>	<b>Tech Green</b>	<b>Tech Bio</b>	<b>Green Bio</b>	<b>All Sector</b>	<b>No Sector</b>
S&P500	17.79	17.79	17.79	-	-	-	17.79	17.79	17.79	17.79	17.79
WORLD	-	-	-	31.33	31.33	0.42	-	-	-	-	0
NASDAQ	82.21	82.21	82.21	68.67	68.67	79.36	82.21	82.21	82.21	82.21	82.21
EUROSTOXX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0
ARTY	0	-	-	0	-	-	0	0	-	0	-
ICLN	-	0	-	-	0	-	0	-	0	0	-
IBB	-	-	0	-	-	20.21	-	0	0	0	-
<b>PORTFOLIO STATISTICS</b>											
Mean	15.9%	15.9%	15.9%	13.7%	13.7%	14.5%	15.9%	15.9%	15.9%	15.9%	15.9%
Std	18.8%	18.8%	18.8%	19.2%	19.2%	18.9%	18.8%	18.8%	18.8%	18.8%	18.8%
Skew	-0.88	-0.88	-0.88	-0.52	-0.52	-0.78	-0.88	-0.88	-0.88	-0.88	-0.88
Kurt	2.88	2.88	2.88	1.33	1.33	2.46	2.88	2.88	2.88	2.88	2.88

Tableau 12 - Tableau comparatif des portefeuilles optimaux HAMA.  $\lambda_m = 4.9\%$  ;  $\gamma_m = 0.4$  ;  $\Omega_m = 0.1$  et  $H = [5 ; 6 ; 7]$ .

#### 4.3.5 Variation du paramètre $\Omega_m$

La contrainte de shortfall  $\Omega_m$  détermine la probabilité maximale que le rendement du portefeuille s'écarte négativement de plus de  $\lambda_m$  de son espérance. Dans le cadre HAMA, cette probabilité est diminuée par le goût des gains aussi extrêmes au travers du paramètre  $\gamma_m$ .

D'un point de vue mathématique, la contrainte  $\Omega_m$  intervient directement dans l'équation (41) qui projette la contrainte de shortfall dans le cadre moyenne-variance. Une augmentation de  $\Omega_m$  conduit à une élévation de la valeur de  $\beta = \frac{\Omega_m}{1-\gamma_m}$  et donc à un quantile de Cornish-Fisher  $z_\beta^{CF}$  moins contraignant. Cela permet d'abaisser le membre de gauche de l'équation et de permettre au modèle d'accepter des portefeuilles de plus grande volatilité, souvent associés à de meilleurs rendements. L'analyse qui suit examine l'impact de la relaxation  $\Omega_m$  sur la composition des portefeuilles obtenus. Les résultats sont présentés au Tableau 13.

##### A. Comportement des univers suivant la relaxation de $\Omega_m$

Les premiers univers qui admettent une solution admissible sont Green Bio et All Sector. Pour ces derniers, le niveau de contrainte  $\Omega_m = 4,9\%$  est respecté en concentrant le portefeuille sur les actifs S&P 500 et l'IBB avec une très faible contribution de l'actif à rendement négatif ICLN. Ce dernier est rendu utile par sa faible corrélation avec les autres actifs qui permet une légère amélioration du risque.

Les univers qui admettent le couple S&P500 et IBB mais pas l'actif ICLN ne trouvent eux une première solution que pour  $\Omega_m = 5,1\%$ . L'absence de ICLN ne coûte donc que 0,2 % de résilience sur la contrainte de shortfall sans pour autant détériorer le rendement obtenu qui reste autour des 12 %.

La relaxation de la contrainte de shortfall jusqu'à 5,25 % fait ensuite apparaître les univers Green S&P et Tech Green. Ces deux univers profitent de l'actif ICLN pour atteindre la contrainte désirée, mais l'absence de l'actif IBB leur coûte une augmentation de 0,35% de leur probabilité de shortfall comparée aux autres univers précités. Notons que la réduction du risque au travers de ICLN plutôt que de IBB

n'est pas sans impact sur le rendement espéré, qui se situe à 11,6 %. Soit en deçà de 0,9 % par rapport à l'univers Green Bio.

Les univers Tech World et Green World sont les derniers à devenir admissibles, trouvant leur première solution pour  $\Omega_m = 13,7\%$  soit un retard de 4,9 % sur les premières solutions trouvées. Ce retard est engendré par l'actif World qui performe beaucoup moins que le couple S&P 500 et IBB lorsqu'il s'agit d'abaisser la probabilité de shortfall. Puisque chaque univers utilise le Nasdaq pour augmenter son espérance de rendement, la convergence vers le portefeuille de croissance tend à faire disparaître rapidement les différences dans les ratios rendement/risque à mesure que la contrainte se relaxent. Ainsi plus  $\Omega_m$  augmente et moins les univers se démarquent les uns des autres.

$\lambda_m = 0.06 ; \gamma_m = 0.4 ; H_m = 5$											
$\Omega_m = 4.9\%$	Tech S&P	Green S&P	Bio S&P	Tech World	Green World	Bio World	Tech Green	Tech Bio	Green Bio	All Sector	No Sector
S&P500	/	/	/	-	-	-	/	/	85.47	85.51	/
WORLD	-	-	-	/	/	/	-	-	-	-	/
NASDAQ	/	/	/	/	/	/	/	/	0	0	/
EUROSTOXX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	/
ARTY	/	-	-	/	-	-	/	/	-	0	-
ICLN	-	/	-	-	/	-	/	-	0.69	0.76	-
IBB	-	-	/	-	-	/	-	/	13.84	13.73	-
PORTFOLIO STATISTICS											
Mean	/	/	/	/	/	/	/	/	11.6%	11.6%	/
Std	/	/	/	/	/	/	/	/	13.3%	13.3%	/
Skew	/	/	/	/	/	/	/	/	-0.63	-0.63	/
Kurt	/	/	/	/	/	/	/	/	1.74	1.74	/
$\Omega_m = 5.1\%$	Tech S&P	Green S&P	Bio S&P	Tech World	Green World	Bio World	Tech Green	Tech Bio	Green Bio	All Sector	No Sector
S&P500	/	/	90.85	-	-	-	/	85.64	84.29	79.21	/
WORLD	-	-	-	/	/	/	-	-	-	-	/
NASDAQ	/	/	1.84	/	/	/	/	2.70	4.87	5.60	/
EUROSTOXX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	/
ARTY	/	-	-	/	-	-	/	0.57	-	0	-
ICLN	-	/	-	-	/	-	/	-	1.03	0	-
IBB	-	-	7.30	-	-	/	-	11.09	9.81	15.19	-
PORTFOLIO STATISTICS											
Mean	/	/	12.2%	/	/	/	/	12.0%	12%	11.9%	/
Std	/	/	13.4%	/	/	/	/	13.5%	13.5%	13.6%	/
Skew	/	/	-0.74	/	/	/	/	-0.60	-0.57	-0.47	/
Kurt	/	/	2.18	/	/	/	/	1.652	1.53	1.17	/
$\Omega_m = 5.25\%$	Tech S&P	Green S&P	Bio S&P	Tech World	Green World	Bio World	Tech Green	Tech Bio	Green Bio	All Sector	No Sector
S&P500	/	94.66	83.04	-	-	-	94.69	75.4	85.68	86.4	/
WORLD	-	-	-	/	/	/	-	-	-	-	/
NASDAQ	/	0.73	7.96	/	/	/	0.72	8.96	6.89	6.55	/
EUROSTOXX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	/
ARTY	/	-	-	/	-	-	0	0	-	0	-
ICLN	-	4.62	-	-	/	-	4.59	-	0	0	-
IBB	-	-	9	-	-	/	-	15.64	7.43	7.04	-
PORTFOLIO STATISTICS											
Mean	/	11.6%	12.3%	/	/	/	11.6%	12.0%	12.5%	12.4%	/
Std	/	13.4%	13.7%	/	/	/	13.3%	13.8%	13.6%	13.6%	/
Skew	/	-0.83	-0.53	/	/	/	-0.83	-0.39	-0.58	-0.60	/
Kurt	/	2.56	1.37	/	/	/	2.56	0.91	1.59	1.65	/
$\Omega_m = 13.7\%$	Tech S&P	Green S&P	Bio S&P	Tech World	Green World	Bio World	Tech Green	Tech Bio	Green Bio	All Sector	No Sector
S&P500	25.12	25.12	25.12	-	-	-	25.12	25.12	25.12	25.12	25.12
WORLD	-	-	-	50.19	50.19	10.62	-	-	-	-	0

NASDAQ	74.88	74.88	74.88	49.81	49.81	68.38	74.88	74.88	74.88	74.88	74.88
EUROSTOXX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0
ARTY	0	-	-	0	-	-	0	0	-	0	-
ICLN	-	0	-	-	0	-	0	-	0	0	-
IBB	-	-	0	-	-	0.21	-	0	0	0	-
PORTFOLIO STATISTICS											
Mean	15.6%	15.6%	15.6%	12.0	12.0%	13.5%	15.6%	15.6%	15.6%	15.6%	15.6%
Std	18.2%	18.2%	18.2%	18.8%	18.8%	18.5%	18.2%	18.2%	18.2%	18.2%	18.2%
Skew	-0.73	-0.73	-0.73	-0.40	-0.40	-0.54	-0.73	-0.73	-0.73	-0.73	-0.73
Kurt	2.24	2.24	2.24	0.73	0.73	1.48	2.24	2.24	2.24	2.24	2.24

Tableau 13 - Tableau comparatif des portefeuilles optimaux HAMA.  $\lambda_m = 4.9\%$  ;  $\gamma_m = 0.4$  ;  $H = 5$  et  $\Omega_m = [4.9\% ; 5.1\% ; 13.7\% ; 13.7\%]$ .

#### 4.3.6 Variation du paramètre $\gamma_m$

Cette sous-section se charge cette fois d'étudier l'impact de l'augmentation du paramètre  $\gamma_m$ , paramètre reflétant le compromis intrinsèque que l'investisseur accepte pour chercher des gains extrêmes. En repartant une fois de plus de l'équation (41), l'augmentation de  $\gamma_m$  agit mécaniquement sur  $\beta$  en réduisant le dénominateur de  $\beta = \frac{\Omega_m}{1-\gamma_m}$ . L'effet est d'assouplir la contrainte et de rendre admissibles des portefeuilles moyenne-variance (MV) plus risqués mais aussi plus rémunérateurs. Autrement dit, le renforcement de l'attrait pour les gains pousse l'investisseur à accepter des allocations offrant des rendements attendus supérieurs au prix d'une exposition accrue à la volatilité et aux queues de distribution.

Pour comprendre l'intérêt de cette étude, il faut revenir légèrement en arrière dans les chapitres qui couvrent la théorie à deux facteurs de Lola Lopes (1987) et la Behavioral Portfolio Theory de Shefrin et Statman (2000). La première nous dit que les investisseurs sont faits de 3 composants intrinsèques, à savoir la protection, le potentiel et l'aspiration. La deuxième nous dit que ces caractéristiques individuelles se reflètent dans la manière dont les investisseurs composent leurs portefeuilles, alors constitués de diverses couches mentales. L'une étant attribuée à des fins de protection, l'autre à une tentative à devenir riche. Le paramètre  $\gamma_m$  s'inscrit naturellement dans la continuité de ces théories, sa valeur reflétant le ratio aspiration/sécurité et la couche mentale que l'investisseurs souhaite construire. Les résultats étudiés sont exposés au Tableau 14 ci-dessous.

##### A. Comportement des univers suivant l'augmentation de $\gamma_m$

Pour  $\gamma_m = 0,4$ , la logique d'investissement reste dominée par une mentalité de protection, au sens de Lola Lopes, où la couche de sécurité prime sur le potentiel de gains. Toutefois, le fait que  $\gamma_m > 0$  traduit déjà une aspiration modérée à accroître le rendement attendu. Dans la perspective de la théorie BPT de Shefrin et Statman, cette configuration correspond à la couche mentale protectrice, avec des portefeuilles centrés sur le S&P 500 et l'IBB.

Les résultats de l'étude paramétrique sont présentés au Tableau 14 ci-après. Notons l'impact de l'exclusion du S&P500 dans les univers qui lui substituent le MSCI World. Un investisseur se refusant une exposition au S&P500 serait alors obligé de revoir ses exigences. **Ce constat n'est pas sans importance au regard de la démarche exploratoire effectuée au début de ce chapitre.** Rappelons-nous que l'un des sujets de l'étude avait mentionné son intention de diminuer son exposition au marché américain et donc au S&P 500 qu'il percevait comme un actif protecteur à rendement modéré.

Si cette diversification se fait en lui substituant le MSCI World, ce même individu perdra en marge de manœuvre sur son contrôle du risque<sup>7</sup>.

Ce n'est qu'à partir de  $\gamma_m = 0,6$  que des portefeuilles HAMA sans S&P 500 deviennent admissibles. À ce stade, les investisseurs montrent un intérêt accru pour la queue droite de la distribution, c'est-à-dire les scénarios de gains exceptionnels. Toutefois, ces univers « sans S&P » apparaissent moins performants en termes MV, avec un rendement de 12,7 % contre 15,5 % pour les univers intégrant S&P 500 et Nasdaq. L'exposition accrue de l'univers Bio World au secteur des biotechnologies améliore son compromis rendement-risque, avec un gain supplémentaire de 0,9 % en espérance de rendement et une réduction de 0,5 % de volatilité par rapport aux autres univers World. Cette performance s'accompagne toutefois d'une asymétrie légèrement plus négative (-0,15) et d'une kurtose plus élevée (+0,7), illustrant un arbitrage classique entre gain de rendement, volatilité et exposition accrue aux queues de distribution.

Lorsque l'appétence au risque devient très prononcée ( $\gamma_m = 0,8$ ), tous les univers convergent vers des portefeuilles presque exclusivement investis dans le Nasdaq, rendant les allocations largement équivalentes. Dans une telle situation, on observe que l'ETF World atténue alors le risque de shortfall d'une manière similaire au S&P 500. Dans l'univers Tech World, l'actif ARTY se voit alors substitué à l'ETF MSCI World grâce à son asymétrie légèrement plus favorable et sa kurtose plus proche de la normale. Ces effets deviennent intéressants suivant l'augmentation de  $\gamma_m$  qui diminue la pénalisation de sa plus forte volatilité.

$H = 5 ; \lambda_m = 0.06 ; \Omega_m = 0.1$											
$\gamma_m = 0.4$	Tech S&P	Green S&P	Bio S&P	Tech World	Green World	Bio World	Tech Green	Tech Bio	Green Bio	All Sector	No Sector
S&P500	44.76	44.76	44.76	-	-	-	44.76	44.76	44.76	44.76	44.76
WORLD	-	-	-	/	/	/	-	-	-	-	0
NASDAQ	55.24	55.24	55.24	/	/	/	55.24	55.24	55.24	55.24	55.24
EUROSTOXX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0
ARTY	0	-	-	/	-	-	0	0	-	0	-
ICLN	-	0	-	-	/	-	0	-	0	0	-
IBB	-	-	0	-	-	/	-	0	0	0	-
PORTFOLIO STATISTICS											
Mean	14.8%	14.8%	14.8%	/	/	/	14.8%	14.8%	14.8%	14.8%	14.8%
Std	16.8%	16.8%	16.8%	/	/	/	16.8%	16.8%	16.8%	16.8%	16.8%
Skew	-0.42	-0.42	-0.42	/	/	/	-0.42	-0.42	-0.42	-0.42	-0.42
Kurt	0.97	0.97	0.97	/	/	/	0.97	0.97	0.97	0.97	0.97
$\gamma_m = 0.6$	Tech S&P	Green S&P	Bio S&P	Tech World	Green World	Bio World	Tech Green	Tech Bio	Green Bio	All Sector	No Sector
S&P500	26.07	26.07	26.07	-	-	-	26.07	26.07	26.07	26.07	26.07
WORLD	-	-	-	42.39	42.39	8.31	-	-	-	-	0
NASDAQ	73.93	73.93	73.93	57.61	57.61	69.12	73.93	73.93	73.93	73.93	73.93
EUROSTOXX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0
ARTY	0	-	-	0	-	-	0	0	-	0	-
ICLN	-	0	-	-	0	-	0	-	0	0	-
IBB	-	-	0	-	-	22.58	-	0	0	0	-
PORTFOLIO STATISTICS											
Mean	15.5%	15.5%	15.5%	12.7%	12.7%	13.6%	15.5%	15.5%	15.5%	15.5%	15.5%
Std	18.2%	18.2%	18.2%	19%	19%	18.5%	18.2%	18.2%	18.2%	18.2%	18.2%
Skew	-0.71	-0.71	-0.71	-0.41	-0.41	-0.56	-0.71	-0.71	-0.71	-0.71	-0.71
Kurt	2.16	2.16	2.16	0.84	0.84	1.54	2.16	2.16	2.16	2.16	2.16

<sup>7</sup> La validité de cette analyse repose sur le modèle utilisé dans le cadre de cette présente thèse. En réalité, l'impact de cette diversification géographique sur l'investisseur va bien évidemment dépendre de son propre univers d'investissement.



$\gamma_m = 0.8$	Tech S&P	Green S&P	Bio S&P	Tech World	Green World	Bio World	Tech Green	Tech Bio	Green Bio	All Sector	No Sector
S&P500	1.54	1.54	1.54	-	-	-	1.54	1.54	1.54	1.54	1.54
WORLD	-	-	-	0	1.54	1.54	-	-	-	-	0
NASDAQ	98.46	98.46	98.46	98.46	98.46	98.46	98.46	98.46	98.46	98.46	98.46
EUROSTOXX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0
ARTY	0	-	-	1.54	-	-	0	0	-	0	-
ICLN	-	0	-	-	0	-	0	-	0	0	-
IBB	-	-	0	-	-	0	-	0	0	0	-
PORTFOLIO STATISTICS											
Mean	16.6%	16.6%	16.6%	16.5%	16.5%	16.5%	16.6%	16.6%	16.6%	16.6%	16.6%
Std	20.0%	20.0%	20.0%	20.3%	20.1%	20.1%	20.0%	20.0%	20.0%	20.0%	20.0%
Skew	-1.23	-1.23	-1.23	-1.18	-1.22	-1.22	-1.23	-1.23	-1.23	-1.23	-1.23
Kurt	4.55	4.55	4.55	4.34	4.49	4.49	4.55	4.55	4.55	4.55	4.55

Tableau 14 - Tableau comparatif de portefeuilles optimaux HAMA.  $H = 5$  ;  $\lambda_m = 0.06$  ;  $\Omega_m = 0.1$  et  $\gamma_m = [0,4 ; 0,6 ; 0,8]$ .

Le Tableau 15 ci-dessous montre l'évolution de la probabilité de shortfall liés aux variations du coefficient d'aversion au risque. Lorsque  $\gamma_m = 0,9$ , l'attrait pour les gains extrêmes devient tel qu'il réduit l'évaluation de la probabilité de shortfall à un niveau inférieur à  $\Omega_m$ . Dans cette situation, la contrainte devient alors assez lâche que pour permettre au portefeuille maximisant le taux de croissance de faire partie de l'univers des solutions et les univers renvoient tous un portefeuille 100% investis dans le Nasdaq.

$H = 5$ ; $\lambda_m = 0.06$ ; $\Omega_m = 10\%$											
$\mathbb{P}(\leq \Omega_m)$	Tech S&P	Green S&P	Bio S&P	Tech World	Green World	Bio World	Tech Green	Tech Bio	Green Bio	All Sector	No Sector
$\gamma_m = 0.4$	10.0%	10.0%	10.0%	-	-	-	10.0%	10.0%	10.0%	10.0%	10.0%
$\gamma_m = 0.6$	10.0%	10.0%	10.0%	10.0%	10.0%	10.0%	10.0%	10.0%	10.0%	10.0%	10.0%
$\gamma_m = 0.8$	10.0%	10.0%	10.0%	10.0%	10.0%	10.0%	10.0%	10.0%	10.0%	10.0%	10.0%
$\gamma_m = 0.9$	7.97%	7.97%	7.97%	7.97%	7.97%	7.97%	7.97%	7.97%	7.97%	7.97%	7.97%

Tableau 15 - Tableau comparatif des probabilités de shortfall des portefeuilles HAMA.  $H = 5$  ;  $\lambda_m = 0.06$  ;  $\Omega_m = 0.1$  et  $\gamma_m = [0,4 ; 0,6 ; 0,8 ; 0,9]$ .

#### 4.3.7 Cas particulier : appétence unitaire pour les gains extrêmes

Le cas  $\gamma_m = 1$  représente un investisseur en quête de gains extrêmes. Bien que ce cas ne doive sans doute pas être fréquemment rencontré, son étude reste intéressante pour pousser un peu plus loin la compréhension du modèle HAMA. Dans une telle situation, la contrainte de shortfall pondère de manière symétrique les queues gauche et droite de la distribution des rendements du portefeuille :

$$\pi_p(-\lambda_m; H_m) - \gamma_m \pi_p(\lambda_m; H_m) \leq \Omega_m \quad (17)$$

Dans un cadre strictement gaussien et symétrique, cette formulation mènerait à un relâchement total de la contrainte en se transformant en  $\mathbb{P}(\bar{R}_p^{H_m} \leq \mathbb{E}[R_p] - \lambda_m) \leq \Omega_m / (1 - \gamma_m)$ . Le membre de droite tendant vers l'infini, le portefeuille de Kelly ici composé du seul actif Nasdaq serait renvoyé comme solution optimale.

Cette sous-section analyse comment la sortie de cette hypothèse de normalité au travers de la considération des moments d'ordre 3 et 4 impacte les caractéristiques des portefeuilles optimaux des différents univers et permet notamment l'inclusion d'actifs au rendement espéré négatif tels que l'ETF ICLN. Les résultats sujets à l'analyse sont reportés au Tableau 16.

$H = 5 ; \gamma_m = 1 ; \Omega_m = 0.01$											
$\lambda_m = 0.05$	Tech S&P	Green S&P	Bio S&P	Tech World	Green World	Bio World	Tech Green	Tech Bio	Green Bio	All Sector	No Sector
S&P500	0	53.94	53.96	-	-	-	0	0	55.1	5.74	55.87
WORLD	-	-	-	0	29.16	28.98	-	-	-	-	9.01
NASDAQ	74.93	36.67	35.08	74.93	54.90	38.85	74.93	74.93	34.37	69.11	35.12
EUROSTOXX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0
ARTY	25.07	-	-	25.07	-	-	25.07	25.07	-	25.07	-
ICLN	-	9.40	-	-	15.93	-	0	-	0	0	-
IBB	-	-	10.96	-	-	32.17	-	0	10.53	0	-
PORTFOLIO STATISTICS											
Mean	15.2%	12.1%	13.3%	15.2%	10.0%	10.7%	15.2%	15.2%	13.3%	15.0%	13.5%
Std	22.3%	15.9%	15.4%	22.3%	19.9%	17.8%	22.3%	22.3%	15.3%	21.8%	15.8%
Skew	-0.44	-0.22	-0.23	-0.44	-0.25	-0.21	-0.44	-0.44	-0.23	-0.44	-0.22
Kurt	1.04	0.37	0.37	1.04	0.51	0.35	1.04	1.04	0.38	1.04	0.35
$\lambda_m = 0.06$	Tech S&P	Green S&P	Bio S&P	Tech World	Green World	Bio World	Tech Green	Tech Bio	Green Bio	All Sector	No Sector
S&P500	46.6	56.8	56.8	-	-	-	41.6	41.8	56.8	34.2	56.8
WORLD	-	-	-	15.53	33.37	25.77	-	-	-	-	0
NASDAQ	46.8	43.2	43.2	51.7	49.8	45.3	48.2	48.1	43.2	49.5	43.2
EUROSTOXX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0
ARTY	6.6	-	-	32.8	-	-	10.2	10.0	-	16.3	-
ICLN	-	0	-	-	16.8	-	0	-	0	0	-
IBB	-	-	0	-	-	28.9	-	0	0	0	-
PORTFOLIO STATISTICS											
Mean	14.4%	14.3%	14.3%	13.4%	9.4%	11.3%	14.4%	14.4%	14.4%	14.3%	14.3%
Std	17.2%	15.9%	15.9%	22.4%	20.0%	17.9%	17.8%	17.8%	15.9%	18.8%	15.9%
Skew	-0.26	-0.31	-0.31	-0.22	-0.21	-0.24	-0.24	-0.24	-0.31	-0.22	-0.31
Kurt	0.49	0.59	0.59	0.32	0.41	0.43	0.45	0.45	0.59	0.40	0.59
$\lambda_m = 0.07$	Tech S&P	Green S&P	Bio S&P	Tech World	Green World	Bio World	Tech Green	Tech Bio	Green Bio	All Sector	No Sector
S&P500	44.0	44.0	44.0	-	-	-	44.0	44.0	44.0	44.0	44.0
WORLD	-	-	-	17.65	38.1	24.1	-	-	-	-	0
NASDAQ	56.0	56.0	56.0	54.4	51.9	55.5	56.0	56.0	56.0	56.0	56.0
EUROSTOXX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0
ARTY	0	-	-	28.0	-	-	0	0	-	0	-
ICLN	-	0	-	-	10.0	-	0	-	0	0	-
IBB	-	-	0	-	-	20.4	-	0	0	0	-
PORTFOLIO STATISTICS											
Mean	14.8%	14.8%	14.8%	13.5%	10.7%	12.3%	14.8	14.8%	14.8%	14.8%	14.8%
Std	16.8	16.8	16.8	21.9	19.4	18.2	16.8	16.8	16.8	16.8	16.8
	%	%	%	%	%	%	%	%	%	%	%
Skew	-0.43	-0.43	-0.43	-0.22	-0.28	-0.33	-0.43	-0.43	-0.43	-0.43	-0.43
Kurt	1.01	1.01	1.01	0.36	0.51	0.72	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01

Tableau 16 - Tableau comparatif des portefeuilles optimaux sous symétrisation de la contrainte de shortfall.  $H = 5 ; \gamma_m = 1 ; \Omega_m = 0,01 ; \lambda_m = [0,05 ; 0,06 ; 0,07]$ .

#### A. Exclusion du portefeuille de Kelly

Les rendements observés au Tableau 16 sont fortement non gaussiens, avec une asymétrie négative ( $-0,2$  à  $-0,4$ ) et une kurtosis ( $> 0,30$ ) sensiblement différente de la valeur de référence 3 pour une loi normale. Ces caractéristiques, queues épaisses et dissymétrie, entraînent la saturation de la contrainte de shortfall, même pour des valeurs élevées de  $\lambda_m$ . La masse de probabilité excédentaire dans la queue gauche rend impossible l'atteinte du portefeuille optimal de Kelly, et ce malgré une queue droite réduisant la pénalité qui y est associée.

Ainsi, les rendements moyens plafonnent en deçà de ceux qu'un Kelly non contraint produirait. Par exemple, dans l'univers *Tech* avec  $\lambda_m = 5\%$ , l'espérance atteint 15,24 % pour un écart-type de 22,29 %, alors qu'un monde gaussien symétrique, sans contrainte active, aurait conduit à un Nasdaq pur (16,63 % de rendement, 20,20 % de volatilité). La considération des moments d'ordre supérieur de cet actif, à savoir son asymétrie de -1,267 et kurtosis de 4,725, suffit à rendre cet actif seul incompatible avec la contrainte.

Ce résultat met en évidence la forte sensibilité du modèle HAMA aux propriétés empiriques des distributions, et souligne le rôle structurant des queues épaisses et de l'asymétrie dans la composition optimale des portefeuilles.

## B. Rôle d'ICLN dans les portefeuilles optimaux

Dans un cadre strictement rationnel moyenne-variance au sens de Markowitz, un actif présentant à la fois un rendement espéré négatif et une volatilité élevée ne serait jamais retenu dans la solution optimale : sa contribution dégrade simultanément l'espérance et le risque global, sans compensation possible par diversification. L'existence d'ICLN dans certains portefeuilles optimaux du modèle HAMA provient donc exclusivement de la nature distributionnelle des contraintes, et non d'une quelconque attractivité moyenne-variance. La représentation des portefeuilles HAMA vis-à-vis des frontières efficientes de Markowitz sont représentées par des étoiles jaunes à la Figure 11 ci-après.

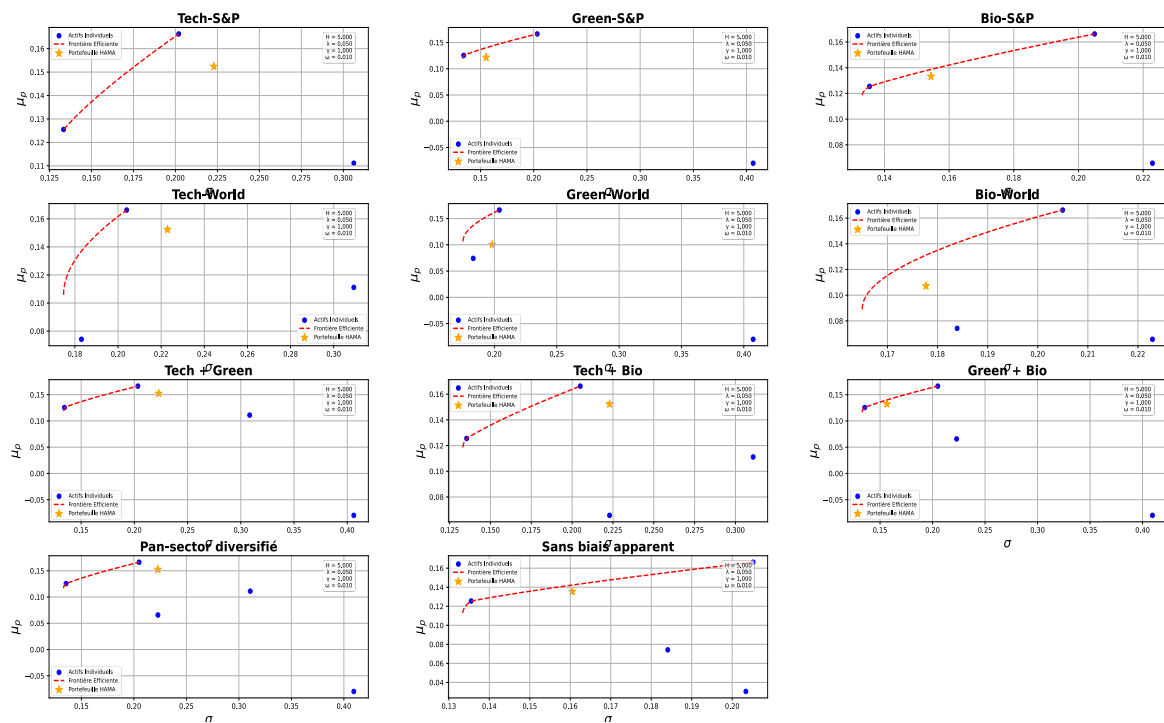


Figure 11 - Situation des portefeuilles HAMA optimaux (étoiles jaunes) par rapport aux frontières efficientes pour les paramètres  $H = 5$  ;  $\gamma_m = 1$  ;  $\Omega_m = 0,01$  et  $\lambda_m = 0,05$ .

L'inclusion de l'actif ICLN vient donc d'une particularité qui se trouve ailleurs : c'est le seul actif de l'univers étudié présentant une asymétrie positive ( $\mu_3 > 0$ ), bien que très proche de zéro. Alors qu'il semble évident que plus un portefeuille présente une asymétrie positive et plus la probabilité de gain

extrême l'emporte sur celle de pertes extrêmes, cette sous-section propose d'étudier la sensibilité de la contrainte de shortfall à une augmentation de l'asymétrie du portefeuille et sa dépendance aux autres paramètres du modèle. L'objectif étant de déterminer dans quelle mesure un actif qui semble peu attractif peut tout de même paraître intéressant d'un point de vue HAMA.

#### 4.3.8 Analyse de sensibilité de la probabilité de Shortfall

Dans la continuité du chapitre 4.3.7 précédent, ce chapitre propose une étude de sensibilité visant à comprendre comment des actifs à priori non rationnels au sens MV tels que ICLN et son rendement négatif, peuvent tout de même se retrouver dans des allocations optimales HAMA. Pour étudier son intérêt et comprendre les implications de chaque caractéristique du portefeuille dans le respect de la contrainte, revenons aux équations source (Eq. 18 à 20) du modèle HAMA :

$$\pi_p(x; H) = \frac{\Delta_p}{Q_p^2(x) + \Delta_p \left(1 + \frac{Hx^2}{\mu_{2,p}}\right)} \quad ; \quad \Delta_p = \frac{1}{H} \left( \frac{\mu_{4,p}}{\mu_{2,p}^2} - \frac{\mu_{3,p}^2}{\mu_{2,p}^3} - 3 \right) + 2 \quad \text{s.c.} \quad \Delta_p > 0$$

##### A. Effet de $\Delta_p$ sur $\pi_p$ (sous hypothèse $Q_p(x)$ constant) :

La dérivée partielle de  $\pi_p$  par rapport à  $\Delta_p$  est donnée par :

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial \Delta_p} = \frac{Q_p^2}{(Q_p^2(x) + \Delta_p C)^2} > 0 \quad \text{Avec} \quad C = 1 + \frac{Hx^2}{\mu_{2,p}} \quad (44)$$

Ainsi, en considérant  $Q_p(x)$  comme une constante, tout effet qui tend à augmenter  $\Delta_p$  accroît également  $\pi_p$ . Dans la contrainte de shortfall, cet effet est ainsi bénéfique pour la queue droite, négatif pour la queue gauche. Or,  $\Delta_p$  dépend négativement de  $\mu_{3,p}^2$  : si  $\mu_{3,p} \rightarrow 0$ , le terme négatif  $-\frac{\mu_{3,p}^2}{\mu_{2,p}^3}$  disparaît et  $\Delta_p$  augmente, ce qui tend, toutes choses égales, à augmenter la valeur de  $\pi_p$ . Toutefois, cette augmentation se produit simultanément pour  $\pi_p(\lambda_m; H)$  et  $\pi_p(-\lambda_m; H)$  puisque la distinction du signe de lambda ne se fait réellement ressentir que dans le terme  $Q_p(x)$  jusqu'ici considéré constant. Et dans le cas particulier où  $\gamma_m = 1$ , ces augmentations simultanées tendent à s'annuler. Remarquons également qu'une augmentation de la volatilité du portefeuille  $\mu_{2,p}$  a également pour effet d'augmenter la valeur de  $\Delta_p$  et donc de  $\pi_p$ .

##### B. Effet de $Q_p(x)$ sur $\pi_p$ :

Après avoir considéré l'effet de  $\Delta_p$  sur la fonction  $\pi_p$ , il est naturel d'étudier le rôle du terme  $Q_p(x) = \frac{-Hx^2}{\mu_{2,p}} + \frac{\mu_{3,p}x}{\mu_{2,p}^2} + 1$  sur la probabilité de shortfall. De façon analogue, la dérivée partielle de  $\pi_p$  par rapport à  $Q_p(x)$  est donnée par :

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial Q_p} = -\frac{\Delta_p Q_p}{(Q_p^2(x) + \Delta_p C)^2} \quad \text{Avec} \quad C = 1 + \frac{Hx^2}{\mu_{2,p}} \quad (45)$$

- Si  $Q_p(x) > 0$ , une augmentation de  $Q_p$  réduit  $\pi_p$ .
- Si  $Q_p(x) < 0$ , une augmentation de  $Q_p$  augmente  $\pi_p$ .

Pour savoir dans quel scénario le portefeuille se trouve, il suffit d'effectuer une simple étude de signe autour de paramètre  $\lambda$  (ou du paramètre  $\mu_{3,p}$  si l'on considère  $\lambda$  constant) en remarquant que

$Q_p(x)$  est une fonction quadratique concave de type  $ax^2 + bx + 1$  dans le premier cas, et affine dans le second. L'analyse ci-dessous montre ce que donne cette étude autour du paramètre  $\lambda$ .

$$\begin{cases} Q_p(x) > 0 \text{ pour } x \in (x_1; x_2) \\ Q_p(x) = 0 \text{ pour } x = x_1 \text{ ou } x_2 \\ Q_p(x) < 0 \text{ pour } x \notin (x_1; x_2) \end{cases} \quad \text{Avec} \quad x_{1,2} = \frac{\frac{\mu_{3,p}}{\mu_{2,p}} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu_{3,p}}{\mu_{2,p}}\right)^2 + 4H}}{2H} \quad (46)$$

Pour comprendre maintenant le signe de  $Q_p$ , il faut maintenant étudier comment évolue  $Q_p(x)$  en fonction des paramètres  $\mu_{2,p}$ ,  $\mu_{3,p}$  et  $x$ . La dérivée de  $Q_p$  par rapport à la skewness est assez triviale et donne  $\partial Q_p / \partial \mu_{3,p} = x / \mu_{2,p}^2$ .

- Pour la queue droite,  $x = +\lambda_m$  et la dérivée est positive. Une augmentation de  $\mu_{3,p}$  tend donc à augmenter  $Q_p$ .
- Pour la queue gauche,  $x = -\lambda_m$  et la dérivée est négative. Une augmentation de  $\mu_{3,p}$  tend donc à diminuer la valeur de  $Q_p$ .

L'effet ainsi généré est asymétrique. Intuitivement, une augmentation de l'asymétrie déplace le centre effectif de la distribution vers la droite et augmente la probabilité de gain tout en diminuant celle de pertes extrêmes. D'un point de vue général sur la contrainte de shortfall ; cet effet est d'autant plus ressenti lorsque  $\gamma_m \gg$ . Remarquons tout de même l'importance de la volatilité intervenant quadratiquement dans l'expression de la sensibilité. Un actif qui présente une asymétrie à peine plus grande mais une volatilité significativement plus élevée qu'un autre actif aura sans doute un impact moindre sur le respect des contraintes et ne sera pas sélectionné.

### C. Sensitivité de la contrainte globale à l'asymétrie du portefeuille :

Par la règle de la dérivée totale, l'évolution de  $\pi_p$  en fonction de la skewness peut être étudié comme suit :

$$\frac{d\pi_p(x; H)}{d\mu_{3,p}} = \frac{\partial \pi_p}{\partial Q_p} \frac{\partial Q_p}{\partial \mu_{3,p}} + \frac{\partial \pi_p}{\partial \Delta_p} \frac{\partial \Delta_p}{\partial \mu_{3,p}} \quad (47)$$

En résolvant cette équation on obtient la forme fermée de l'évolution de  $\pi_p$  en fonction de l'asymétrie du portefeuille :

$$\frac{d\pi_p(x; H)}{d\mu_{3,p}} = -\frac{2}{(Q_p^2 + \Delta_p C)^2} \left( \Delta_p \frac{Q_p x}{\mu_{2,p}^2} + \frac{Q_p^2 \mu_{3,p}}{H \mu_{2,p}^3} \right) \quad (48)$$

La contrainte HAMA sous  $\gamma = 1$  et à horizon constant s'écrit  $\mathcal{S}_p(\lambda) \equiv \pi_p(-\lambda_m) - \pi_p(+\lambda_m) \leq \Omega_m$ . L'impact d'une variation de l'asymétrie du portefeuille sur cette contrainte peut être formulée de la sorte :

$$\frac{d\mathcal{S}_p}{d\mu_{3,p}} = \frac{d\pi_p(-\lambda_m)}{d\mu_{3,p}} - \frac{d\pi_p(+\lambda_m)}{d\mu_{3,p}} \quad (49)$$

En substituant les expressions des dérivées de  $\pi_p$  par la formule obtenue plus haut, on obtient :

$$\frac{dS_p}{d\mu_{3,p}} = \frac{2}{(Q_{p-}^2 + \Delta_p C)^2} \left( \Delta_p \frac{Q_{p-} \lambda_m}{\mu_{2,p}^2} - \frac{Q_{p-}^2 \mu_{3,p}}{H \mu_{2,p}^3} \right) + \frac{2}{(Q_{p+}^2 + \Delta_p C)^2} \left( \Delta_p \frac{Q_{p+} \lambda_m}{\mu_{2,p}^2} + \frac{Q_{p+}^2 \mu_{3,p}}{H \mu_{2,p}^3} \right) \quad (50)$$

Afin d'améliorer la clarté et lisibilité de l'analyse, l'expression de la sensibilité de la contrainte vis-à-vis de l'asymétrie du portefeuille HAMA peut se réécrire de la manière suivante :

$\frac{dS_p}{d\mu_{3,p}} = 2 \frac{\Delta_p \lambda_m}{\mu_{2,p}^2} \left( \frac{Q_+}{D_+^2} + \frac{Q_-}{D_-^2} \right) + \frac{2 \mu_{3,p}}{H \mu_{2,p}^3} \left( \frac{Q_+^2}{D_+^2} - \frac{Q_-^2}{D_-^2} \right) \quad (51)$
---

Avec  $C = 1 + \frac{H\lambda^2}{\mu_{2,p}}$  et  $D_{\pm} \equiv Q_{\pm} + \Delta_p C$ . Cette formule met en évidence que la sensibilité de la contrainte de shortfall vis-à-vis d'une augmentation de l'asymétrie est modulée par 2 termes principaux : un premier, proportionnel à  $2 \frac{\Delta_p \lambda_m}{\mu_{2,p}^2}$ , lié à la kurtose et à la skewness au carré via  $\Delta_p$ , et un second, proportionnel à  $\frac{2 \mu_{3,p}}{H \mu_{2,p}^3}$ , qui reflète directement l'effet de la volatilité, de la skewness elle-même mais aussi de l'horizon sur la réduction de la sensibilité à une variation de  $\mu_{3,p}$ . Ce dernier dépend des moments du portefeuille et des seuils  $\pm \lambda_m$ , capturant l'impact différencié de la skewness sur les queues gauche et droite de la distribution des pertes. Un autre résultat intéressant qui ressort de cette expression concerne l'ambivalence de l'augmentation de la skewness dont les effets peuvent ne pas toujours être bénéfique. L'impact sur la contrainte peut en effet différer en fonction du signe des fonctions  $Q_{\pm}$  et de leur écart.

Lorsque  $\gamma_m = 1$  et neutralise les effets antagonistes sur  $\Delta_p$ , l'ajout d'ICLN abonde dans le sens d'une amélioration de la faisabilité de la contrainte de shortfall. Cela illustre que, contrairement à une approche moyenne-variance classique qui exclurait un actif à rendement moyen négatif et volatilité élevée, la nature distributionnelle et asymétrique du risque joue un rôle déterminant dans la sélection optimale lorsque le problème devient extrêmement contraint.

## 4.4 Performances GGBP des portefeuilles HAMA

L'évaluation des portefeuilles optimisés selon la méthode HAMA repose sur une conception comportementale de la performance, centrée sur l'atteinte d'un objectif de rendement perçu par l'investisseur, et non sur des ratios de performance rationnels tels que le ratio de Sharpe. Dans cette optique, l'analyse de performance doit refléter les préférences psychologiques asymétriques des agents économiques, conformément à la logique du goal-based investing et à la structure mentale incorporée dans le modèle HAMA.

Ce chapitre formalise l'implémentation empirique de l'analyse de performance, en explicitant les hypothèses statistiques, les choix méthodologiques retenus (Bootstrap vs. Paramétrique), et leur mise en œuvre concrète sur les distributions empiriques des portefeuilles étudiés.

Une étude comparative des performances des portefeuilles parcourus dans le chapitre précédent est ensuite proposée afin de mettre en lumière les effets des biais cognitifs des investisseurs lors de la définition des univers d'investissement sur les performances de leurs investissements. Deux types d'indicateurs seront étudiés. Tout d'abord deux indicateurs situés du côté de la rationalité au sens MV (Ratio de Sharpe + version modifiée par extension de Cornish-Fisher), ensuite 3 indicateurs liés à l'évaluation GGBP au travers des indicateurs GGBP historique étendu, bootstrappée et semi-paramétrique de Cornish-Fisher.

### 4.4.1 Implémentation des indicateurs de performances

#### A. Hypothèses générales de l'évaluation

L'évaluation comportementale de la performance qui suit repose sur les hypothèses suivantes :

- **Stationnarité statistique** des rendements annualisés : les moments empiriques (moyenne, variance, skewness, kurtosis) estimés à partir des log-rendements historiques sont supposés représentatifs du comportement futur du portefeuille.
- **Indépendance temporelle** des observations annuelles : chaque année est considérée comme une réalisation indépendante. Cette hypothèse, classique en Bootstrap non-paramétrique, permet de générer des trajectoires pseudo-réalistes de rendement.
- **Absence de structure conditionnelle dans les moments** : aucune hétéroscédasticité conditionnelle (GARCH) ni dynamique des moments n'est modélisée, en cohérence avec les limites de la méthode HAMA paramétrique développée en amont.
- **Indépendance des moments d'ordre 3 et 4** : Pour faciliter l'implémentation python du modèle et la résolution du problème HAMA, les tenseurs de co-skewness et co-kurtosis entre actifs n'ont pas été implémentés dans l'algorithme Python.

Ces hypothèses simplificatrices sont cohérentes avec le cadre comportemental adopté dans l'implémentation du modèle HAMA. Les effets de leur relaxation ne feront pas l'objet de cette étude et est laissé à des fins d'amélioration future.

#### B. Choix de l'indicateur de performance GGBP

L'indicateur retenu pour évaluer la performance des portefeuilles est le Global Goal-Based Performance (GGBP). Il mesure la probabilité ajustée d'atteindre un objectif de rendement annuel  $\rho_m$ , tout en tenant compte de l'asymétrie gain/pertes extrêmes via le coefficient d'aversion au risque  $\gamma_m$ ,

sur un horizon H donné. Cette métrique s’inspire directement de la logique de la contrainte HAMA, et permet une lecture ex post des performances sur base empirique.

### C. Définition des paramètres comportementaux de l’indicateur GGBP

Suivant la logique de Lola Lopes (1987) combinée aux structures mentales attendues des portefeuilles d’investissement définis dans la BPT de Shefrin et Statman (2000), les performances GGBP seront évaluées pour 2 profils d’investissement.

Le premier profil, celui de l’investisseur prudent, correspond à une prédominance de la dimension de sécurité comme définie par Lola Lopes. Ce profil sera caractérisé par un rendement espéré relativement faible, une variation autour de l’espérance relativement faible et une espérance de rendement de 10%, à mi-chemin entre les moyennes des ETF S&P500 et MSCI World de ces 14 dernières années tout en reflétant l’objectif long terme de l’investisseur B discuté en Annexe 1 et repris dans la démarche exploratoire du chapitre précédent.

Le second profil étudié sera celui d’un investisseur plus agressif, caractérisé par une prédominance de la dimension d’aspiration au sens de Lola Lopes (1987). Ce type d’investisseur est prêt à prendre plus de risques, mais possède des attentes plus hautes. Il visera ainsi un objectif court terme de 14%, se situant cette fois à mi-chemin entre le S&P500 et le Nasdaq.

Investisseur P (Prudent) :  $(\lambda_m ; \gamma_m ; \rho_m) = (\lambda_{HAMA} ; 0,4 ; 10 \%)$

Investisseur D (Déterminé) :  $(\lambda_m ; \gamma_m ; \rho_m) = (\lambda_{HAMA} ; 0,8 ; 14 \%)$

Pour une analyse plus fine de ces considérations des investisseurs, nous faisons référence aux travaux de Hübner et François (2025) présentés au Tableau 4 de la précédente revue de littérature. Ce tableau présente les seuils de probabilités de succès ajustés par horizon et objectifs.

Toutefois, les propriétés des univers étudiés sont telles qu’ils ne se distinguent en majorité que pour de très haut niveaux de contraintes de sorte que l’implémentation stricte des résultats de ce tableau ne conduise pas à des résultats intéressants. Pour cette raison,

### D. Implémentations GGBP historiques : blocs-circulaires et bootstrappées

L’évaluation empirique des performances GGBP repose principalement sur une simulation par Bootstrap non-paramétrique appliquée aux log-rendements annuels. Cette méthode présente plusieurs avantages : elle conserve fidèlement la distribution empirique des données observées, en intégrant les asymétries et queues épaisses présentes sur certains ETF comme l’ICLN ou l’IBB ; elle permet de dériver directement les probabilités de succès ou d’échec sans recourir à des hypothèses distributionnelles restrictives ; enfin, elle autorise une extrapolation des performances sur des horizons plus longs que ceux couverts par les séries historiques disponibles.

Concrètement, la procédure consiste à générer 10 000 trajectoires de rendement de portefeuille sur un horizon de H années, en tirant avec remise dans les séries historiques annuelles de chaque actif. Afin de préserver la logique sous-jacente à la matrice de corrélation, les tirages sont effectués uniquement sur les années communes aux actifs présents dans l’allocation optimale. Ainsi, si un portefeuille inclut le Nasdaq (14 années de données) et l’ETF ARTY (6 années seulement), les simulations ne se font que sur la fenêtre commune de 6 ans. Chaque trajectoire est ensuite pondérée par le vecteur  $\mathbf{w}$  issu de l’optimisation HAMA, et l’on calcule le rendement annualisé moyen sur H années :  $\bar{R}_p = \frac{1}{H} \sum_{t=1}^H R_{p,t}$ .



A partir de ces trajectoires, l'indicateur  $\hat{h}GGBP_p^m$  est ensuite estimé par :

$$\hat{h}GGBP_p^m = \frac{1}{1 + \gamma_m} \left( 1 - \frac{S_p^{-m}}{S} + \gamma_m \frac{S_p^{+m}}{S} \right) \quad (29)$$

Avec  $S_p^{-m} = \sum_{s=1}^S \mathbf{1}_{\{\bar{R}_{p,s}^{c,Hm} \leq \rho_m - \lambda_m\}}$  et  $S_p^{+m} = \sum_{s=1}^S \mathbf{1}_{\{\bar{R}_{p,s}^{c,Hm} \geq \rho_m + \lambda_m\}}$ .

Cette analyse par Bootstrap est complétée par une version historique étendue, qui permet d'examiner la sensibilité des résultats à la dépendance temporelle des rendements. Cette double approche, Bootstrap et historique par bloc circulaires, permet de voir l'impact de l'hypothèse d'indépendance temporelle des log-rendements annuels observés.

#### E. Implémentation GGBP semi-paramétrique de Cornish-Fisher

Lorsque la profondeur historique des données est limitée, comme c'est le cas pour certains ETF récents tels qu'ARTY, ou lorsque l'évaluation numérique historique devient numériquement trop coûteuse, il est souvent intéressant de mobiliser les atouts analytiques de l'approche semi-paramétrique.

Puisque l'analyse menée tout au long de cette thèse s'est rapidement affranchie du cadre strictement gaussien, l'approximation semi-paramétrique de Cornish-Fisher constitue l'outil privilégié pour l'évaluation des probabilités de shortfall. Cette approche permet d'ajuster les quantiles de la distribution afin de mieux capturer les asymétries et excès de kurtose observés dans les données financières, offrant ainsi une représentation plus fidèle du comportement empirique des rendements. Concrètement, elle repose sur la distribution théorique des rendements de portefeuille, caractérisée par ses quatre premiers moments empiriques  $(\mu_1; \mu_2; \mu_3; \mu_4)$  calculés à partir des pondérations optimales HAMA  $\mathbf{w}$ . Ces paramètres alimentent directement l'estimation du score, obtenu selon la formule suivante :

$$mGGBP_p^{m,1-x} = \frac{1}{1 + \gamma_m} \left[ 1 - \Phi \left( \frac{\rho_m - \lambda_m - \bar{R}_p^c}{m\sigma_p^{(x-)} / \sqrt{T_m}} \right) + \gamma_m \Phi \left( \frac{\bar{R}_p^c - \rho_m - \lambda_m}{m\sigma_p^{(x+)} / \sqrt{T_m}} \right) \right] \quad (34)$$

L'implémentation pratique en Python suit directement les équations (34), (35) et (36). Le score est calculé pour différents niveaux de confiance  $(1 - x) = [95\% ; 97,5\% ; 99\%]$ . Cette démarche permet d'examiner dans quelle mesure un ajustement paramétrique de la distribution offre une lecture cohérente avec les résultats historiques, et si certaines valeurs de  $x$  permettent d'améliorer l'alignement avec l'évaluation empirique issue du bootstrap.

#### F. Implémentation des ratios de Sharpe standards et ajustés par Cornish-Fisher

L'indicateur de référence le plus couramment mobilisé dans l'évaluation des portefeuilles est le ratio de Sharpe, défini comme le rapport entre le rendement excédentaire d'un portefeuille et sa volatilité. Ce ratio incarne parfaitement la logique du paradigme moyenne-variance (MV) : la performance est appréciée en termes d'efficacité, c'est-à-dire du gain obtenu par unité de risque. Dans cette optique, un portefeuille performant est celui qui maximise son rendement ajusté de la volatilité, indépendamment des préférences asymétriques des investisseurs. Ce critère repose implicitement sur l'hypothèse de normalité des rendements : lorsque la distribution est gaussienne, la volatilité suffit à caractériser le risque et le ratio de Sharpe s'impose comme un outil cohérent et synthétique d'évaluation.

Cependant, dans des environnements financiers où les distributions de rendements présentent des asymétries (skewness) et des queues épaisses (kurtose excédentaire), le ratio de Sharpe devient trompeur. Il tend en effet à sous-estimer le risque lié aux pertes extrêmes et à ignorer la valeur potentielle de rendements fortement positifs. Pour pallier cette limite, une extension paramétrique appelée le *Modified Sharpe Ratio (MSR)* a été proposée, en s'appuyant sur l'approximation semi-paramétrique de Cornish–Fisher. Celle-ci permet d'ajuster la mesure de risque en substituant à la volatilité classique une valeur de Value-at-Risk modifiée ( $VaR_{CF}(1-x)$ ), et se montre particulièrement cohérent avec la sortie de l'hypothèse de normalité. Les indicateurs SR et MSR se définissent comme suit :

$$SR = \frac{\mu_p - r_f}{\sigma_p} \quad \text{et} \quad SR = \frac{\mu_p - r_f}{VaR_{CF}(1-x)} ; VaR_{CF}(1-x) = -(\mu_p + \sigma_p Z_{1-x}^{CF}) \quad (52)$$

Où  $\mu_p$  désigne le rendement moyen du portefeuille,  $r_f$  le taux de référence (ici fixé à 10%), et  $VaR_{CF}(1-x)$  la Value-at-Risk modifiée au niveau de confiance (1-x) ici fixé arbitrairement à 97.5%, obtenue en exploitant l'expansion de Cornish–Fisher de l'équation (43).

Ainsi, alors que le Sharpe ratio mesure la performance relative par unité de volatilité et fournit un critère rationnel de comparaison entre univers d'investissement, le MSR affine cette évaluation en intégrant la non-normalité des distributions. La comparaison avec le Global Goal-Based Performance (GGBP) est particulièrement instructive : le GGBP ne se limite pas à ajuster la mesure du risque, mais capture la valeur subjective des allocations au regard des objectifs comportementaux des investisseurs. L'écart entre ces deux approches illustre la manière dont les biais cognitifs et les préférences asymétriques influencent l'évaluation de la performance au-delà du simple cadre moyenne-variance.

#### 4.4.2 Évaluation GGBP des portefeuilles HAMA optimaux

Dans la continuité de l'implémentation HAMA, ce chapitre propose une étude paramétrique des performances des portefeuilles HAMA optimaux du point de vue de l'indicateur GGBP. Ces performances sont également comparées avec les indicateurs plus classiques et rationnels au sens MV que sont le ratio de Sharpe (SR) et sa version modifiée par l'extension de Cornish-Fisher (MSR).

L'objectif est d'évaluer si une déviation des paramètres des constructions HAMA par rapport aux paramètres GGBP dégrade réellement la performance selon ce même indicateur. Cette démarche permettra d'investiguer la cohérence et le bon fonctionnement du modèle.

En complément, les différents univers étudiés seront systématiquement hiérarchisés pour voir lesquels d'entre eux offrent les meilleures performances GGBP, traduisant implicitement les effets des biais cognitifs sur la performance lors de la définition des univers.

##### A. Comparaison empirique entre indicateurs GGBP et Sharpe sous contraintes fortes

Ce chapitre analyse les résultats reportés au Tableau 17, relatif au cas très contraint où le paramètre  $\lambda_m = 4,9\%$ . Dans cette configuration, seuls les portefeuilles augmentant leur exposition au secteur des biotechnologies via l'actif IBB subsistent dans les univers admissibles.

Du point de vue des indicateurs traditionnels de performance, les résultats apparaissent sans ambiguïté : les ratios de Sharpe (SR) et leurs versions modifiées (MSR) atteignent leurs niveaux les plus élevés pour l'univers Bio S&P. Ce portefeuille combine une allocation majoritaire sur le S&P500 (90 %), une part résiduelle sur le Nasdaq (1 %) et une exposition significative à IBB (8,2 %). Remarquons

toutefois que ce résultat devrait également pouvoir être atteint dans d'autres univers intégrant ces mêmes actifs tel que le All Sector. La singularité observée provient ici des limites numériques de l'algorithme d'optimisation Python utilisé (20 points de départ, méthode *SLQP*), qui renvoie une solution locale. Loin de constituer un problème, cette particularité offre au contraire l'opportunité d'étudier comment différentes allocations HAMA, toutes compatibles avec la contrainte de shortfall, peuvent diverger en termes d'indicateurs de performance.

Si l'on considère maintenant les indicateurs fondés sur les composantes comportementales de la GGBP, la hiérarchie se renverse. Le score de Bootstrap le plus élevé revient cette fois à l'univers Tech Bio, qui combine une légère baisse de rendement espéré avec une asymétrie plus prononcée et une kurtose moins élevée que celles observées pour Bio S&P. Ces caractéristiques découlent de l'inclusion de l'actif ARTY, dont la présence modifie la structure des moments d'ordre supérieur et confère à Tech Bio une plus grande marge de manœuvre sur ses moments d'ordre supérieur.

Ainsi, la comparaison croisée des indicateurs met en lumière un résultat essentiel : alors que l'évaluation au sens classique MV désigne Bio S&P comme univers le plus performant, l'approche GGBP privilégie Tech Bio<sup>8</sup> lorsque la dépendance temporelle est ignorée, et All Sector lorsque les blocs circulaires sont pris en compte. Cette divergence illustre de manière concrète l'impact des biais cognitifs modélisés dans GGBP, qui peuvent conduire à recommander des portefeuilles différents de ceux suggérés par une analyse strictement rationnelle et dépendant des actifs inclus dans ces univers. Rappelons en effet que des investisseurs ayant choisi une réduction de leur exposition au marché américain en remplaçant le S&P500 par le MSCI World n'auraient même pas trouvé de solutions à ce problème HAMA. Ce qui pourrait se traduire par un score de 0.

$\lambda_m = 4.9\% ; \gamma_m = 0.4 ; \Omega_m = 0.1 ; H = 5$											
HAMA	Tech S&P	Green S&P	Bio S&P	Tech World	Green World	Bio World	Tech Green	Tech Bio	Green Bio	All Sector	No Sector
S&P500	/	/	90.37	-	-	-	/	85.42	83.84	78.92	/
WORLD	-	-	-	/	/	/	-	-	-	-	/
NASDAQ	/	/	1.37	/	/	/	/	2.79	4.49	5.06	/
EUROSTOXX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	/
ARTY	/	-	-	/	-	-	/	0.36	-	0	-
ICLN	-	/	-	-	/	-	/	-	1.03	0	-
IBB	-	-	8.25	-	-	/	-	11.43	10.64	16.02	-
PORTFOLIO STATISTICS											
Mean	/	/	12.1%	/	/	/	/	12%	11.9%	11.8%	/
Std	/	/	13.3%	/	/	/	/	13.5%	13.5%	13.6%	/
Skew	/	/	-0.73	/	/	/	/	-0.60	-0.56	-0.47	/
Kurt	/	/	2.15	/	/	/	/	1.64	1.51	1.16	/
GGBP	$(\lambda_{mggbp} ; \gamma_{ggbp} ; \rho_{ggbp} ; H_{ggbp}) = (4.9\% ; 0.4 ; 10\% ; 5)$										
$\hat{h}_{ggbp}$	/	/	73.7%	/	/	/	/	<b>74.4%</b>	73.7%	73.7%	/
$h^*_{ggbp}$	/	/	77.5%	/	/	/	/	76.2%	77.5%	<b>79.6%</b>	/
C-F 95	/	/	71.1%	/	/	/	/	71.1%	70.8%	70.8%	/
C-F 97.5	/	/	70.5%	/	/	/	/	70.5%	70.3%	70.4%	/
C-F 99	/	/	70.0%	/	/	/	/	70.0%	69.8%	69.9%	/
Sharpe											
SR	/	/	<b>16.7%</b>	/	/	/	/	16.3%	15.8%	15.5%	/
MSR	/	/	<b>7.2%</b>	/	/	/	/	6.9%	6.7%	6.4%	/

Tableau 17 - Comparatif des indicateurs de performances GGBP et Sharpe pour le portefeuille HAMA construit autour de  $\lambda_m = 4,9\%$  ;  $\gamma_m = 0,4$  ;  $\Omega_m = 0,1$  et  $H = 5$ .

<sup>8</sup> **Remarque** : l'univers Tech Bio n'exploite que les six années d'historique disponibles pour l'ETF ARTY, alors que les autres univers s'appuient sur quatorze années de données. Ces différences de profondeur historique impliquent des niveaux d'information distincts et doivent être gardées à l'esprit dans l'interprétation des résultats.

## B. Hiérarchisation des univers en situation de contraintes modérées

Lorsque l'investisseur accroît son niveau d'exigence en matière de rendement, il tend à se positionner au cœur de la distribution des performances offertes par les différents univers de portefeuilles. Dans le cas étudié au Tableau 18, les allocations optimales issues du modèle HAMA se situent dans une fourchette comprise entre 12 % et 15,6 % de rendement annualisé, pour une probabilité inférieure à 10 % de s'écarter de plus de 6,7 % de leur espérance sur un horizon de cinq ans. Cette contrainte intermédiaire traduit une situation où les portefeuilles demeurent relativement performants tout en étant exposés à un risque de shortfall plus strictement encadré.

Lorsque l'aspiration de l'investisseur se fixe à un niveau intermédiaire de 14 % de rendement espéré, la tolérance aux écarts s'élargit mécaniquement, et l'impact sur la hiérarchisation des univers se renforce. Ce cas d'école est intéressant à étudier car pour certains tels que les Worlds, satisfaire l'investisseur demande de se positionner dans la queue droite de leur distribution puisque leurs rendements espérés sont inférieurs aux attentes. Dans une telle situation, les différences de performance mesurées par le score historique en blocs circulaires s'accroissent, passant d'un écart de 10 % dans le cas contraint à environ 20 % dans ce scénario modéré.

En revanche, les ratios de Sharpe classiques demeurent inchangés, confirmant qu'ils ne captent pas les ajustements comportementaux intégrés dans l'approche GGBP. Cette divergence illustre à nouveau l'intérêt méthodologique de croiser une lecture traditionnelle fondée sur les critères moyenne-variance avec une évaluation prenant en compte les préférences comportementales. Elle permet de mieux cerner les arbitrages auxquels fait face l'investisseur en fonction de son niveau d'aspiration et de tolérance au risque.

Il convient également de souligner que les univers substituant le S&P 500 par le MSCI World dans l'optique de réduire le risque apparaissent non seulement moins performants du point de vue des scores GGBP, mais également défavorisés en termes de ratios de Sharpe. De surcroît, ces univers n'intègrent les solutions admissibles HAMA que lorsque les contraintes sont significativement relâchées. L'exposition MSCI World plutôt que S&P500 coûte non seulement de la performance mais aussi de la faisabilité.

Néanmoins, sa combinaison avec l'actif IBB permet une amélioration substantielle : dans chacune des deux configurations centrées autour du MSCI World, les scores GGBP progressent d'environ 6 % par rapport aux univers analogues moins exposés au secteur biotechnologique. Cet effet met en évidence le rôle structurant de certains actifs dans la construction d'univers performants, en particulier lorsque ceux-ci modifient de manière sensible les moments d'ordre supérieur de la distribution des rendements.

---

$$H = 5 ; \gamma_m = 0.4 ; \Omega_m = 0.1 ; \lambda_m = 6.7\%$$

---

HAMA	Tech S&P	Green S&P	Bio S&P	Tech World	Green World	Bio World	Tech Green	Tech Bio	Green Bio	All Sector	No Sector
S&P500	25.10	25.10	25.10	-	-	-	25.10	25.10	25.10	25.10	25.10
WORLD	-	-	-	50.15	50.15	9.65	-	-	-	-	0
NASDAQ	74.90	74.90	74.90	49.85	49.85	68.42	74.90	74.90	74.90	74.90	74.90
EUROSTOXX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0
ARTY	0	-	-	0	-	-	0	0	-	0	-
ICLN	-	0	-	-	0	-	0	-	0	0	-
IBB	-	-	0	-	-	21.92	-	0	0	0	-
PORTFOLIO STATISTICS											
Mean	15.6%	15.6%	15.6%	12.0%	12.0%	13.5%	15.6%	15.6%	15.6%	15.6%	15.6%
Std	18.2%	18.2%	18.2%	18.8%	18.8%	18.5%	18.2%	18.2%	18.2%	18.2%	18.2%
Skew	-0.73	-0.73	-0.73	-0.4	-0.4	-0.54	-0.73	-0.73	-0.73	-0.73	-0.73
Kurt	2.24	2.24	2.24	0.73	0.73	1.49	2.24	2.24	2.24	2.24	2.24
GGBP	$(\lambda_{m_{ggbp}}; \gamma_{ggbp}; \rho_{ggbp}; H_{ggbp}) = (6.7\%; 0.4; 10\%; 5)$										
$\hat{h}_{ggbp}$	80.6%	79.9%	79.8%	73.3%	73.9%	76.8%	80.6%	79.9%	80.1%	79.7%	80.3%
$h^*_{ggbp}$	85.7%	85.7%	85.7%	77.5%	77.5%	83.7%	85.7%	85.7%	85.7%	85.7%	85.7%
C-F 95	80.1%	80.1%	80.1%	69.9%	69.9%	74.4%	80.1%	80.1%	80.1%	80.1%	80.1%
C-F 97.5	79.7%	79.7%	79.7%	69.3%	69.3%	73.8%	79.7%	79.7%	79.7%	79.7%	79.7%
C-F 99	79.2%	79.2%	79.2%	68.7%	68.7%	73.2%	79.2%	79.2%	79.2%	79.2%	79.2%
Sharpe											
SR	34.8%	34.8%	34.8%	14.3%	14.3%	23.4%	34.8%	34.8%	34.8%	34.8%	34.8%
MSR	15.7%	15.7%	15.7%	6.5%	6.5%	10.7%	15.7%	15.7%	15.7%	15.7%	15.7%
GGB Perf	$(\lambda_{m_{ggbp}}; \gamma_{ggbp}; \rho_{ggbp}; H_{ggbp}) = (2\%; 0.4; 14\%; 5)$										
$\hat{h}_{ggbp}$	65.1%	65.2%	64.4%	52.3%	52.4%	59.5%	65.0%	65.0%	65.1%	64.3%	63.8%
$h^*_{ggbp}$	65.3%	65.3%	65.3%	46.9%	46.2%	60.2%	65.3%	65.3%	65.3%	65.3%	65.3%
C-F 95	62.0%	62.0%	42.7%	42.7%	51.5%	62.0%	62.0%	62.0%	62.0%	62.0%	62.0%
C-F 97.5	61.6%	61.6%	61.6%	42.4%	42.4%	51.1%	61.6%	61.6%	61.6%	61.6%	61.6%
C-F 99	61.3%	61.3%	61.3%	41.9%	41.9%	50.8%	61.3%	61.3%	61.3%	61.3%	61.3%
Sharpe											
SR	34.8%	34.8%	34.8%	14.3%	14.3%	23.4%	34.8%	34.8%	34.8%	34.8%	34.8%
MSR	15.7%	15.7%	15.7%	6.5%	6.5%	10.7%	15.7%	15.7%	15.7%	15.7%	15.7%

Tableau 18 – Impact des variations de  $\lambda_{ggbp}$  et  $\rho_{ggbp}$  sur les performances ggbp et Sharpe pour le portefeuille HAMA construit autour de  $H = 5$ ;  $\gamma_m = 0,4$ ;  $\Omega_m = 0,1$ ;  $\lambda_m = 6,7\%$ .

### C. Impact sur la performance d'une différence d'aversion aux risques entre HAMA et GGBP

L'analyse présentée dans cette section s'intéresse à l'effet d'une divergence entre le paramètre comportemental  $\gamma$  utilisé dans la construction des portefeuilles HAMA et celui mobilisé dans

l'évaluation des performances via l'indicateur GGBP. Les Tableau 19 et Tableau 20 permettent d'observer les conséquences de cette asymétrie en considérant deux configurations distinctes : d'une part un portefeuille HAMA construit avec  $\gamma_{HAMA} = 0,4$  évalué pour  $\gamma_{ggbp} = 0,4$  et  $\gamma_{ggbp} = 0,8$  ; et d'autre part un portefeuille HAMA construit avec  $\gamma_{HAMA} = 0,8$  et évalué selon  $\gamma_{ggbp} = 0,8$ .

Les résultats mettent en évidence que l'augmentation du coefficient de propension aux gains extrêmes dans l'évaluation GGBP induit deux effets notables. Premièrement, elle entraîne une hausse moyenne des performances d'environ 10 % pour l'ensemble des univers déjà admissibles, confirmant que la prise en compte d'une préférence accrue pour les gains élevés améliore la perception de la valeur de portefeuilles déjà viables. Deuxièmement, elle élargit le domaine des univers admissibles : de nouveaux portefeuilles apparaissent désormais comme solutions faisables. Ainsi, l'univers Tech S&P accède au champ des possibles grâce à cette quête accrue de gains extrêmes. Ses performances GGBP se révèlent proches de celles observées pour ses homologues, car la variation significative du paramètre  $\gamma_{HAMA}$  lui permet de réduire son niveau de risque de manière analogue aux autres univers. Dans le même esprit, l'univers Bio World devient également admissible, essentiellement en raison de l'intégration de l'actif IBB. Toutefois, malgré ce gain en faisabilité, ses scores GGBP demeurent en moyenne inférieurs de près de 5 % à ceux des autres univers atteignables et limitent son attractivité.

Cette analyse soulève une question de cohérence entre les paramètres  $\gamma$  mobilisés dans la construction des portefeuilles et dans leur évaluation. Bien que conceptuellement similaires,  $\gamma_{HAMA}$  et  $\gamma_{ggbp}$  ne se réfèrent pas exactement à la même notion : dans HAMA,  $\gamma$  traduit l'intensité de la quête de gains extrêmes autour de l'espérance de rendement du portefeuille, tandis que dans GGBP, la performance est mesurée relativement à des écarts de probabilité autour d'un seuil de rendement fixé (ici à 10 %).

Pour assurer une parfaite cohérence entre optimisation et évaluation, il serait nécessaire non seulement d'aligner les valeurs des paramètres  $\gamma$ , mais aussi de fixer  $\rho_m$  à l'espérance de rendement du portefeuille. Ce n'est qu'à cette condition que  $\lambda$  et  $\gamma$  conserveraient la même signification dans les deux cadres, garantissant ainsi une comparabilité stricte et une interprétation homogène des résultats.

$\lambda_m = 0.06 ; H = 5 ; \Omega_m = 5.25\%$											
$\gamma_m = 0.4$	Tech S&P	Green S&P	Bio S&P	Tech World	Green World	Bio World	Tech Green	Tech Bio	Green Bio	All Sector	No Sector
S&P500	/	94.66	83.04	-	-	-	94.69	75.4	85.68	86.4	/
WORLD	-	-	-	/	/	/	-	-	-	-	/
NASDAQ	/	0.73	7.96	/	/	/	0.72	8.96	6.89	6.55	/
EUROSTOXX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	/
ARTY	/	-	-	/	-	-	0	0	-	0	-
ICLN	-	4.62	-	-	/	-	4.59	-	0	0	-
IBB	-	-	9	-	-	/	-	15.64	7.43	7.04	-
PORTFOLIO STATISTICS											
Mean	/	11.6%	12.3%	/	/	/	11.6%	12.0%	12.5%	12.4%	/
Std	/	13.4%	13.7%	/	/	/	13.3%	13.8%	13.6%	13.6%	/
Skew	/	-0.83	-0.53	/	/	/	-0.83	-0.39	-0.58	-0.60	/
Kurt	/	2.56	1.37	/	/	/	2.56	0.91	1.59	1.65	/
GGB Perf	$(\lambda_{mggbp} ; \gamma_{ggbp} ; \rho_{ggbp} ; H_{ggbp}) = (0.06 ; 0.4 ; 10\% ; 5)$										
$\hat{h}_{ggbp}$	/	71.0%	71.2%	/	/	/	<b>71.4%</b>	71.3%	71.2%	71.2%	/
$h^*_{ggbp}$	/	71.4%	71.4%	/	/	/	71.4%	71.4%	71.4%	71.4%	/
C-F 95	/	71.3%	<b>71.5%</b>	/	/	/	71.3%	71.5%	71.5%	71.5%	/
C-F 97.5	/	71.2%	<b>71.4%</b>	/	/	/	71.2%	71.4%	71.4%	71.4%	/
C-F 99	/	71.1%	<b>71.3%</b>	/	/	/	71.1%	71.3%	71.4%	71.4%	/
Sharpe											
SR	/	12.4%	18.7%	/	/	/	12.2%	18.3%	<b>19.8%</b>	<b>19.8%</b>	/
MSR	/	5.53%	8.10%	/	/	/	5.5%	8.0%	<b>8.3%</b>	<b>8.3%</b>	/

GGB Perf	$(\lambda_{mggbp}; \gamma_{ggbp}; \rho_{ggbp}; H_{ggbp}) = (0.06; \mathbf{0.8}; 10\%; 5)$										
<b>ĥggbp</b>	/	61.9%	64.8%	/	/	/	62.1%	<b>64.8%</b>	<b>64.9%</b>	<b>65.0%</b>	/
h*ggbp	/	61.9%	61.9%	/	/	/	61.9%	<b>65.1%</b>	<b>65.1%</b>	<b>65.1%</b>	/
C-F 95	/	59.2%	61.8%	/	/	/	59.2%	<b>60.5%</b>	<b>61.9%</b>	<b>61.9%</b>	/
C-F 97.5	/	58.5%	61.2%	/	/	/	58.5%	59.9%	61.3%	61.3%	/
C-F 99	/	57.8%	60.4%	/	/	/	57.8%	59.2%	60.6%	60.6%	/
RATIONAL PERF											
SR	/	12.4%	18.7%	/	/	/	12.2%	18.3%	<b>19.8%</b>	<b>19.8%</b>	/
MSR	/	5.53%	8.10%	/	/	/	5.5%	8.0%	<b>8.3%</b>	<b>8.3%</b>	/

Tableau 19 – Comparaison des performances GGBP pour  $\gamma_{ggbp} = 0.4$  et  $\gamma_{ggbp} = 0.8$  pour des portefeuilles HAMA construits autour de  $H = 5$ ;  $\gamma_m = 0.4$ ;  $\Omega_m = 0.1$ ;  $\lambda_m = 6.7\%$ .

$\lambda_m = 0.06; H = 5; \Omega_m = 5.25\%$											
$\gamma_m = 0.8$	Tech S&P	Green S&P	Bio S&P	Tech World	Green World	Bio World	Tech Green	Tech Bio	Green Bio	All Sector	No Sector
S&P500	36.0	36.0	36.0	-	-	-	36.0	36.0	36.0	36.0	36.0
WORLD	-	-	-	/	/	21.27	-	-	-	-	0
NASDAQ	63.9	63.9	63.9	/	/	58.1	63.9	63.9	63.9	63.9	63.9
EUROSTOXX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0
ARTY	0	-	-	/	-	-	0	0	-	0	-
ICLN	-	0	-	-	/	-	0	-	0	0	-
IBB	-	-	0	-	-	21.3	-	0	0	0	-
PORTFOLIO STATISTICS											
Mean	15.2%	15.2%	15.2%	/	/	12.6%	15.2%	15.2%	15.2%	15.2%	15.2%
Std	17.4%	17.4%	17.4%	/	/	18.2%	17.4%	17.4%	17.4%	17.4%	17.4%
Skew	-0.54	-0.54	-0.54	/	/	-0.37	-0.54	-0.54	-0.54	-0.54	-0.54
Kurt	1.45	1.45	1.45	/	/	0.84	1.45	1.45	1.45	1.45	1.45
GGB Perf	$(\lambda_{mggbp}; \gamma_{ggbp}; \rho_{ggbp}; H_{ggbp}) = (0.06; \mathbf{0.8}; 10\%; 5)$										
<b>ĥggbp</b>	72.9%	73.2%	73.1%	/	/	68.4%	73.4%	73.2%	73.2%	73.3%	73.3%
h*ggbp	77.8%	77.8%	77.8%	/	/	71.4%	77.8%	77.8%	77.8%	77.8%	77.8%
C-F 95	72.3%	72.3%	72.3%	/	/	62.4%	72.3%	72.3%	72.3%	72.3%	72.3%
C-F 97.5	71.9%	71.9%	71.9%	/	/	61.8%	71.9%	71.9%	71.9%	71.9%	71.9%
C-F 99	71.5%	71.5%	71.5%	/	/	61.1%	71.5%	71.5%	71.5%	71.5%	71.5%
Sharpe											
SR	36.1%	36.1%	36.1%	/	/	19.0%	36.1%	36.1%	36.1%	36.1%	36.1%
MSR	15.3%	15.3%	15.3%	/	/	8.4%	15.3%	15.3%	15.3%	15.3%	15.3%

Tableau 20 - Comparaison des performances GGBP pour  $\gamma_{ggbp} = 0.8$  pour des portefeuilles HAMA construits autour de  $H = 5$ ;  $\gamma_m = 0.8$ ;  $\Omega_m = 0.1$ ;  $\lambda_m = 6,7\%$ .

## 5 Discussion

Ce chapitre propose une discussion synthétique des résultats obtenus précédemment, et les remet en perspective pour comprendre comment ils répondent à la question de recherches suivante : **dans quelle mesure les biais cognitifs intervenant lors de la définition de l'univers d'investissement influencent-ils les performances comportementales GGBP des portefeuilles construits sur le modèle semi-paramétrique HAMA au travers de l'inclusion d'actifs à priori « non rationnels » ?**

### 5.1 Confrontation aux hypothèses et à la littérature

La démarche exploratoire menée auprès de deux investisseurs amateurs a permis de renforcer la pertinence de la question de recherche en montrant que leurs univers d'investissement reposent sur des convictions personnelles et des croyances macroéconomiques, plutôt que sur un modèle mathématique global. Ces observations confirment les conclusions de la littérature comportementale sur les effets que peuvent avoir les biais cognitifs. Ces biais peuvent très bien concerner la classe d'actif utilisé au travers du biais d'étiquetage (Shefrin et Statman, 2000), la concentration géographique de l'univers au travers du Home Bias de Huberman (1997), mais aussi impacter des actifs plus particuliers au travers de la préférence pour la certitude décrite par Heath & Tversky (1991) ou encore par le biais d'information privilégiée identifiés par la Behavioral Portfolio Theory de Shefrin et Statman (2000). Pour voir comment l'ensemble de ces biais sont apparus lors de la démarche exploratoire, nous vous renvoyons au chapitre 4.1.

Ce chapitre a mis en évidence que les investisseurs l'un des points centraux de cette étude : En parfaite cohérence avec les hypothèses BPT, les deux investisseurs se représentaient leur portefeuille comme une couche de sécurité (S&P500) et une couche à potentiel (Nasdaq et actifs individuels) pour viser à protéger leur capital tout en maximisant l'espérance de rendement. Sur base de ces discussions, des univers composés des S&P500 ou du MSCI world à des fins de protection ont été construits et le Nasdaq leur a été inclus pour voir s'il remplissait son rôle d'augmentation du rendement. Chaque univers a ensuite été exposé à un ETF sectoriel différent pour voir les opportunités et effets que cela pouvait apporter.

L'implémentation HAMA a non seulement permis de prendre en compte cette conception mentale mais a aussi validé cette structuration : la relaxation des contraintes sur la couche de potentiel a conduit à une allocation entièrement concentrée dans le Nasdaq, maximisant le taux de croissance et du portefeuille et renvoyant le portefeuille de Kelly. À l'inverse, l'augmentation du ratio sécurité/potentiel, selon Lola Lopes (1987), a permis la création de la couche de sécurité : réduction de la contrainte de shortfall, baisse du coefficient de propension au risque ou diminution du paramètre  $\lambda$ , ont systématiquement orientés l'allocation vers le S&P500 ou le MSCI World combiné à l'actif IBB. Les résultats ont notamment montré que l'investisseur B, qui envisageait de remplacer son exposition S&P500 par l'ETF MSCI World, réduirait ainsi la performance attendue de sa couche de sécurité sous fortes contraintes, illustrant concrètement l'impact des choix d'actifs sur les performances comportementales.

### 5.2 Rôle des actifs sectoriels « non rationnels »

L'intégration de l'ETF iShares Nasdaq US Biotechnology (IBB) a permis d'augmenter le rendement et de diminuer le risque dans les univers reposant sur le MSCI World. Dans les univers centrés sur le



S&P500, IBB n'était alloué qu'en faible proportion lorsque les contraintes étaient fortes, n'apportant qu'un gain marginal très faible vis-à-vis du cas où il est absent. Son inclusion dans de telles situations provient principalement de sa faible corrélation et de son asymétrie positive, caractéristique unique et favorable par rapport au S&P500.

Ces observations confirment que les actifs sectoriels étudiés ne jouent pas leur rôle conceptuel de « tentative à devenir riche » anticipé par les biais cognitifs. Même pour des actifs à rendement élevé et forte volatilité, HAMA leur attribue une utilité uniquement sous contraintes strictes, tandis que les investisseurs réels les choisissent en fonction de leur espoir futur de performance sectorielle plutôt que sur des données historiques.

Il est à noter que les ETF ARTY et ICLN n'ont émergé de manière significative dans les portefeuilles optimaux que pour une propension unitaire au risque, configuration où la probabilité de shortfall évalue symétriquement pertes et gains. Bien que théoriquement intéressante, cette situation reste peu réaliste et conduit à l'allocation d'actifs tels qu'ICLN, pourtant marqué par une forte volatilité et un rendement négatif.

### 5.3 Validation des hypothèses méthodologiques

Les allocations HAMA ont mis en évidence l'importance des moments d'ordre 3 et 4 et la sortie du cadre gaussien, appuyée par les tests de Shapiro-Wilk sur les log-rendements annuels et l'analyse du cas  $\gamma = 1$ . L'asymétrie et la kurtose ont conduit à saturer les contraintes de shortfall, ce qui n'aurait pas été le cas dans un cadre normal symétrique. Les hypothèses d'ergodicité et d'indépendance temporelle des caractéristiques statistiques ont permis de calculer les performances historiques ex-post, mais sont toutefois très forte compte tenu des faibles échantillons historiques (6 à 14 années selon l'actif). Mentionnons également l'impact sur la volatilité de la déclaration par l'OMS du Covid-19 en mars 2020 qui pourrait nécessiter une implémentation GARCH(1,1) pour affiner le modèle.

### 5.4 Performances GGBP et allocation optimale

L'étude comparative a montré que, sous fortes contraintes, le portefeuille HAMA s'écarte de la frontière efficiente de Markowitz pour capturer des caractéristiques d'ordre supérieur d'actifs parfois hors de la frontière. Plus les contraintes se relâchent, plus les portefeuilles HAMA convergent vers la frontière efficiente et augmente à la fois les ratios de Sharpe et le critère GGBP. Ainsi il a été montré que en cas de contrainte prégnante, le portefeuille HAMA optimal au sens GGBP diffère du portefeuille optimal au sens purement rationnel MV en capturant les attentes comportementales de l'investisseur.

Puisque les modèles HAMA et GGBP reposent sur les mêmes concepts mentaux, il était attendu que les univers HAMA génèrent les meilleures performances GGBP lorsque les paramètres des deux approches coïncidaient. Les résultats confirment cette intuition : un gamma HAMA sous-estimé de 0,4 par rapport au gamma GGBP a conduit à une sous-performance d'environ 20 % de l'indicateur par rapport au cas où ces paramètres étaient alignés. Cette analyse comporte néanmoins une limite méthodologique : alors que le paramètre  $\lambda$  dans le modèle HAMA mesure la dispersion autour de l'espérance de rendement du portefeuille, ce même paramètre dans la formule GGBP pénalise les écarts par rapport à une aspiration fixée ex ante par l'investisseur (10 % pour le prudent, 14 % pour le déterminé). Dès lors, le paramètre gamma ne joue un rôle identique dans les deux modèles que lorsque l'aspiration est fixée à l'espérance de rendement du portefeuille HAMA. Une telle définition aurait toutefois biaisé la comparabilité inter-univers de l'indicateur GGBP.

## 6 Conclusion

La présente thèse a exploré l'impact des biais cognitifs sur l'allocation optimale de portefeuilles selon le modèle Horizon-Asymmetry Mental Accounting (HAMA) et leur performance mesurée par le critère GGBP. L'étude s'inscrit dans la continuité des travaux en finance comportementale, en intégrant les dimensions temporelles et asymétriques des préférences individuelles avec une mesure adaptée de la performance. La revue de littérature a montré comment le HAMA complète les modèles existants, offrant une représentation plus réaliste des choix des investisseurs hétérogènes et sensibles aux probabilités de gains extrêmes. La méthodologie empirique, fondée sur une démarche exploratoire auprès d'investisseurs réels, a permis de créer des univers d'investissement représentatifs et sectoriellement diversifiés, offrant un cadre concret pour analyser l'allocation optimale et ses performances selon différents profils.

Parmi les résultats marquants, l'exposition à l'ETF MSCI World, substitué au S&P 500 pour refléter une diversification géographique différente et envisagée par un investisseur de la démarche exploratoire, a conduit à une forte dégradation de la couche protectrice des portefeuilles. Cette dégradation s'est manifestée non seulement en termes de rendement mais également de performance GGBP et de faisabilité lorsque les contraintes se resserraient. Par ailleurs, lorsque les contraintes dominaient l'allocation optimale, le portefeuille HAMA tendait à s'écarter de la frontière efficiente de Markowitz, et il arrivait que les univers aux plus hautes performances GGBP ne coïncident pas avec ceux affichant le ratio de Sharpe le plus élevé. Ces observations illustrent la pertinence d'un cadre prenant en compte les préférences comportementales et la structure des contraintes pour comprendre la composition et la performance des portefeuilles.

Ces résultats ont des implications à la fois managériales et théoriques. Il peut être intéressant pour les gestionnaires d'adapter les allocations aux horizons et aux préférences asymétriques des investisseurs, en tenant compte de la sensibilité des portefeuilles aux biais cognitifs et à la composition sectorielle ou géographique des actifs. La segmentation des portefeuilles selon objectifs, tolérance au risque et exposition géographique peut améliorer la performance et réduire l'exposition aux pertes inattendues, tout en anticipant les écarts entre univers d'investissement. Sur le plan théorique, cette recherche enrichit la finance comportementale en combinant HAMA et GGBP, offrant un cadre pour étudier simultanément allocations comportementales et performances, et soulignant l'importance des biais, de l'horizon et de l'asymétrie gains-pertes dans la structuration des portefeuilles, tout en ouvrant des perspectives pour de futures études empiriques.

Cette étude ouvre les portes à plusieurs considérations futures. Les actifs considérés disposent d'un historique relativement court, ce qui limite la confiance dans la robustesse des résultats, et la domination du Nasdaq a concentré l'analyse sur la couche de sécurité, restreignant l'exploration du potentiel de croissance. Il serait intéressant d'inclure des actifs sectoriels surpassant le Nasdaq pour mieux évaluer l'impact des biais sur l'ensemble des strates des portefeuilles. Enfin, approfondir l'alignement des paramètres HAMA avec le critère GGBP et comparer ces allocations à d'autres modèles traditionnels permettrait de mieux comprendre la complémentarité de ces cadres et d'identifier des pistes d'amélioration pour la conception de portefeuilles optimisés. Le thème de cette thèse étant les biais cognitifs, un indicateur GGBP modifié pourrait enfin être développé pour traduire le fait le bonheur d'un investisseur peut être plus grand s'il atteint de mêmes performances GGBP au travers d'actifs spécifiques/en soutenant une cause qui lui tient à cœur.

En conclusion, cette thèse démontre que l'intégration des dimensions comportementales dans l'allocation d'actifs via le modèle HAMA et le critère GGBP constitue un levier essentiel pour comprendre et améliorer la performance des portefeuilles. Les résultats confirment que les biais cognitifs influencent significativement les choix d'investissement, et que leur prise en compte, tant dans la pratique managériale que dans la recherche académique, est cruciale pour développer des stratégies d'allocation robustes, adaptées aux préférences individuelles et aux horizons d'investissement.

## 7 Bibliographie

- Arrow, K. (1971). The Theory of Risk Aversion. *Essays in the Theory of Risk-Bearing*, 90-120.
- Badrinath S.G., Chatterjee, Sangit. (1988). On Measuring Skewness and Elongation in Common Stock Return Distributions: The Case of the Market Index. *The Journal of Business*, 451-472.
- Barberis, Huang, Santos. (2001). Prospect Theory and Asset Prices. *The Quarterly Journal of Economics*, vol 116, 1-53.
- Bollerslev, T. (1987). A Conditionally Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return. *The Review of Economics and Statistics*, 542-547.
- Canner, Mankiw & Weil. (1997). An Asset Allocation Puzzle. *American Economic Review*, 87, 181-191.
- Daniel Kahneman, Amos Tversky. (1979). Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk. *Econometrica*, Vol 47, 263-292.
- Das, Markowitz, Scheid and Statman. (2010). Portfolio Optimization with Mental Accounts. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 311-334.
- Eugene F. Fama and Kenneth R. French. (1992). The Cross-Section of Expected Stock Returns. *Journal of Finance* Vol.47, 427-465.
- F.Sharpe, W. (1964). CAPITAL ASSET PRICES: A THEORY OF MARKET EQUILIBRIUM UNDER CONDITIONS OF RISK. *The journal of Finance*, Vol 19, 425-442.
- G. Hanoch, H. Levy. (1969). The Efficiency Analysis of Choices Involving Risk. *Review of Economic Studies*, vol. 36, 335-346.
- Georges Hübner, Pascal François. (2024). *The complete guide to portfolio performance*. Liège: Wiley.
- Georges Hübner, Pascal François. (2025). Realized Goal-Based Performance for Investment Funds.
- Georges Hübner, Roland Gillet. (2019). *Le gestionn de portefeuille*, 3 ème édition. Louvain-la-Neuve: De Boeck Supérieur.
- Georges Hübner, Thomas Lejeune. (2017). *Mental Accounts with Horizon and Asymmetry Preferences*.
- Glassman, Debra a ; Riddick, Leigh A. (1996). Why empirical international portfolio models fail: evidence that model misspecification create home asset bias. *Journal of International Money and Finance*, vol 15, 275-312.
- Green R, Hollifield B. (1992). When Will Mean-Variance Efficient Portfolios Be Well Diversified? *The Journal of Finance*, Vol 47, 1785-1809.
- Hagen, O. (1991). Decisions under risk: A descriptive model and a technique for decision making. *European Journal of Political Economy*, Vol 7, 381-405.
- Heath, Tversky. (1991). Preference and belief: Ambiguity and competence in choice under uncertainty. *Journal of Risk and Uncertainty*, Vol 4, 5-28.

- Hersh Shefrin, Meir Statman. (2000). Behavioral Portfolio Theory. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 35, 127-151.
- Huberman, G. (1997). *Familiarity Breeds Investment*. Columbia: Columbia Business School.
- Lopes, L. (1984). Risk and distributional inequality. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 10, 465-485.
- Lopes, L. (1987). Between Hope and Fear: The Psychology of Risk. *Advances in Experimental Social Psychology*, Vol 20, 255-295.
- Luce, R. D. (1980). Several possible measures of risk. *Theory and Decision*, 12, 217-228.
- Mallows, C. L. (1956). Generalizations of Tchebycheff's Inequalities. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, vol 18, 139-168.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. Dans *The journal of Finance*, 7 (pp. 77-91). Wiley.
- Markowitz, H. (1952). The Utility of Wealth. *Journal of Political Economy*, Vol 60, 151-158.
- Niko Canner, N.Gregory Mankiw, David N. Weil. (1997). An Asset Allocation Puzzle. *The American Economir Review*, 181-191.
- Pollatsek, Alexander; Tversky, Amos. (1970). A theory of risk. *Journal of Mathematical Psychology*, 540-553.
- Ross, M. (1989). Relation of implicit theories to the construction of personal histories. *Psychological Review*, 96, 341-357.
- Shefrin, Hersh and Meir Statman. (2000). Behavioral portfolio theory. *The Journal of Finance and Quantitative Analysis* 35, 127-151.
- Stutzer, M. J. (2003). Portfolio Choice with Endogenous Utility: A Large Deviations Approach. *Journal of Econometrics*, vol 116, 365-386.

## 8 Annexes

### Annexe 1 : Entretiens semi-directifs d la démarche exploratoire

#### A. Questionnaire

- **Qu'est-ce qui vous a poussé à commencer à investir ? Y avait-il un objectif ou une motivation précise derrière cette décision ?**

*(Objectif : comprendre la genèse de leur démarche d'investissement, entre logique patrimoniale, curiosité, recherche de rendement ou influence extérieure.)*

- **Comment vous êtes-vous renseigné(e) pour faire vos premiers choix ? Avez-vous suivi une formation, consulté des sources spécifiques ou échangé avec d'autres investisseurs ?**

*(Objectif : identifier les canaux d'information utilisés et les biais engendrés dans le screening et le choix de l'univers d'investissement)*

- **Quels types d'actifs détenez-vous aujourd'hui dans votre portefeuille (actions, ETF, cryptoactifs, obligations, etc.) ? Et pourquoi ces choix ?**

*(Objectif : dresser une cartographie du portefeuille réel et comprendre les motivations, diversification, convictions, effet de mode...)*

- **Environ combien d'actifs différents possédez-vous actuellement ? Est-ce que vous modifiez encore souvent votre portefeuille ? Quand vous ajoutez des actifs, vous le faites en suivant une stratégie globale ou au compte-goutte ?**

*(Objectif : éclairer le degré de concentration du portefeuille, le nombre d'actifs et le domaine de l'univers.)*

- **Avez-vous une préférence naturelle pour certains secteurs (ex. : technologies, santé, énergie) ou certaines zones géographiques (ex. : Europe, US, émergents) ? Pourquoi ?**

*(Objectif : détecter la présence de croyances sectorielles ou géographiques, ainsi que de biais cognitifs comme le home bias ou la préférence pour la familiarité.)*

- **Quel est votre horizon d'investissement habituel ? Préférez-vous des placements de court, moyen ou long terme ?**

*(Objectif : préciser le cadre temporel d'optimisation mental des portefeuilles.)*

- **Quels sont vos objectifs lorsque vous investissez (ex. : générer un rendement annuel, préparer un projet, battre l'inflation, préserver votre capital) ?**

*(Objectif : identifier les seuils de réussite implicites ou explicites, en cohérence avec les paramètres de la méthode HAMA.)*

- **Dans quelle mesure vous basez-vous sur les performances passées des actifs pour prendre vos décisions ? Sur quelle période regardez-vous ces performances, et utilisez-vous des outils ou méthodes particulières (ex. : indicateurs, modèles, backtests) ?**

*(Objectif : capter la relation aux rendements historiques et à la modélisation, voir la rationalité de l'investisseur, approche intuitive ou analytique ?)*

#### A. Entretiens J.M. (26 ans)

- **Qu'est-ce qui vous a poussé à commencer à investir ? Y avait-il un objectif ou une motivation précise derrière cette décision ?**

(Objectif : comprendre la genèse de leur démarche d'investissement, entre logique patrimoniale, curiosité, recherche de rendement ou influence extérieure.)

L'investisseur A a débuté son parcours en 2025 avec une optique clairement long terme, excluant toute démarche spéculative de type trading. Son objectif principal est de réaliser un rendement au moins équivalent, voire supérieur, à celui du Nasdaq ou du S&P 500. Il privilégie la sélection active de titres pour tenter de battre le marché, et s'est initialement positionné avec un tiers de son portefeuille en ETF S&P 500 et le reste en actions individuelles.

- **Comment vous êtes-vous renseigné(e) pour faire vos premiers choix ? Avez-vous suivi une formation, consulté des sources spécifiques ou échangé avec d'autres investisseurs ?**

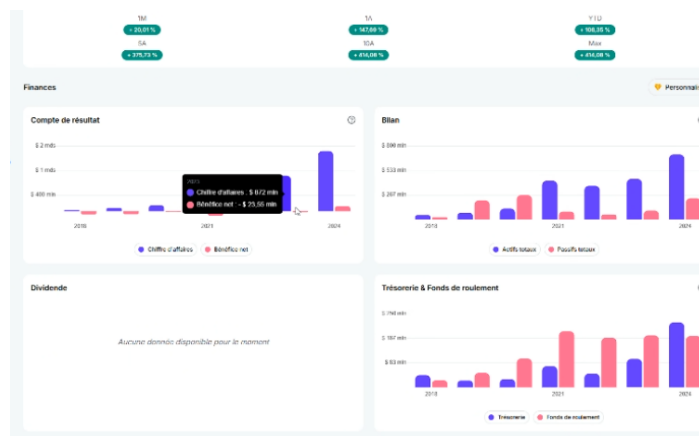
(Objectif : identifier les canaux d'information utilisés et les biais engendrés dans le screening et le choix de l'univers d'investissement)

Entièrement autodidacte, il s'est formé via Internet, notamment grâce à des contenus YouTube spécialisés. Il utilise régulièrement deux plateformes :

<https://invest.co/dashboard>: screener d'actions proposé par un influenceur français (gratuit pour les données annuelles), utilisé pour repérer des titres.

<https://www.zonebourse.com/>: pour des données plus détaillées (trimestrielles).

Il suit les recommandations vues en vidéo, mais les valide par une analyse personnelle des fondamentaux : évolution du chiffre d'affaires et des bénéfices sur 3 à 5 ans, progression des marges (brute et nette), et exclusion automatique des titres dont les marges déclinent. Certains secteurs sont évités, tels que l'énergie renouvelable ou l'automobile, jugés trop sensibles aux décisions politiques ou au contexte macroéconomique incertain.



- **Quels types d'actifs détenez-vous aujourd'hui dans votre portefeuille (actions, ETF, cryptoactifs, obligations, etc.) ? Et pourquoi ces choix ?**

(Objectif : dresser une cartographie du portefeuille réel et comprendre les motivations, diversification, convictions, effet de mode...)

Le portefeuille de l'investisseur A se compose de :

**400 € sur le fonds Berkshire Hathaway**, sélectionné pour la qualité perçue de la gestion.

**250 € sur un ETF or**, utilisé comme actif refuge en période d'instabilité économique.

**≈1 150 € en ETF** : 700 € sur le Nasdaq, 500 € sur le S&P 500 (qu'il envisage de remplacer pour éviter les redondances). Objectif : renforcer la base défensive du portefeuille.

**≈5 000 € en actions individuelles**, dont 2550 euro sur Nvidia et TSMC dans le secteur technologique et l'intelligence artificielle (Nvidia, TSMC, Meta, Alphabet), choisies pour leur potentiel de rendement et leur stabilité. Il choisit des grosses entreprises pour tenter de battre le marché car elles sont synonymes de stabilité.

Top 50 Berkshire Hathaway Holdings

Block	Company Name	% of Portfolio	Shares Owned	Value Owned	Latest Activity	Ownership Hist.	Average Buy Price	Price History	Date
AAPL	Apple Inc.	25.76%	300M	\$ 66.64B	0%		\$39.59 (+133.4%)		
AXP	American Express Co.	15.77%	151.61M	\$ 40.79B	0%		\$71.11 (+133.1%)		2025-03-31
KO	Coca Cola Co.	11.07%	400M	\$ 28.65B	0%		\$40.28 (+73.4%)		2025-03-31
BAC	Bank America Corp.	10.19%	631.57M	\$ 26.36B	-7.15% (-48.69M)		\$25.78 (+43.6%)		2025-03-31
CVX	Chevron Corp New	7.67%	118.61M	\$ 19.84B	0%		\$132.76 (+13.0%)		2025-03-31
OXY	Occidental Petroleum Corp.	5.06%	264.94M	\$ 13.08B	0.29% (+70.02M)		\$51.19 (+14.8%)		2025-03-31
MCO	Moody's Corp.	4.44%	24.67M	\$ 11.49B	0%		\$57.13 (+77.0%)		2025-03-31
KHC	Kraft Heinz Co.	3.83%	325.63M	\$ 9.91B	0%		\$77.86 (+64.3%)		2025-03-31
Remove Ads & Unlock Features for \$10/Month									
CB	Chubb Limited	3.16%	27.03M	\$ 8.16B	0%		\$219.19 (+25.1%)		2025-03-31
DVA	Davita Inc.	1.91%	33.80M	\$ 4.93B	-3.83% (-1.30M)		\$60.38 (+133.8%)		2025-03-27
KR	Kroger Co.	1.31%	50M	\$ 3.38B	0%		\$32.22 (+121.6%)		2025-03-31
VRSN	Verisign Inc.	1.30%	13.29M	\$ 3.37B	0.14% (+18.43M)		\$52.56 (+49.3%)		2025-03-31
V	Visa Inc.	1.12%	8.30M	\$ 2.91B	0%		\$50.31 (+183.8%)		2025-03-31
SIRI	SiriusXM Holdings Inc.	1.04%	119.78M	\$ 2.70B	1.96% (+3.31M)		\$26.95 (+12.6%)		2025-03-31
STZ	Constellation Brands Inc.	0.85%	12.01M	\$ 2.20B	113.52% (+5.38M)		\$219.63 (+22.3%)		2025-03-31
MA	Mastercard Incorporated	0.84%	3.99M	\$ 2.19B	0%		\$61.06 (+405.1%)		2025-03-31

Il recherche un compromis entre rendement, stabilité et opportunité à long terme.

- **Environ combien d'actifs différents possédez-vous actuellement ? Est-ce que vous modifiez encore souvent votre portefeuille ? Quand vous ajoutez des actifs, vous le faites en suivant une stratégie globale ou au compte-goutte ?**

(Objectif : éclairer le degré de concentration du portefeuille, le nombre d'actifs et le domaine de l'univers.)

Le portefeuille est composé de 15 actifs (11 actions, 3 ETF, 1 fonds). Il envisage une limite informelle de 20 actifs maximum, afin de limiter les frais de transaction.

L'ajout de nouvelles positions repose essentiellement sur l'analyse individuelle de titres attractifs, sans réelle approche top-down. Il évite cependant les doublons sectoriels directs en investissant simultanément sur des concurrents (ex. : pas d'AMD si Nvidia est déjà présent). Certaines exclusions sectorielles (automobile, renouvelable) découlent d'un mélange de convictions personnelles et de discours relayés par des influenceurs. Il évalue également la crédibilité de ces influenceurs selon leurs performances passées sur 3 à 4 ans. Il trie les investisseurs sur base de leur rendement annuel sur 3-4 ans. (légitimité).

- **Avez-vous une préférence naturelle pour certains secteurs (ex. : technologies, santé, énergie) ou certaines zones géographiques (ex. : Europe, US, émergents) ? Pourquoi ?**

(Objectif : détecter la présence de croyances sectorielles ou géographiques, ainsi que de biais cognitifs comme le home bias ou la préférence pour la familiarité.)



Préférence pour la tech car a le vent en poupe selon lui, il est aussi un peu exposé sur la santé (500 et 350EUR).

N'a pas d'actions belges du à la TOB (taxes sur les opérations boursières). Il aurait aimé acquérir des actions UCB etc mais touche pas au marché belge pour éviter la taxe.

Géographie : 80% des capitalisations sont basées aux USA donc il est largement exposé sur les USA. Il aimerait se diversifier juste en cas de crise aux US. Voit les US comme la performance (moyen d'atteindre de haut rendements) car ont les plus grandes entreprises et regarde ailleurs pour se diversifier en cas de soucis aux US. 4413 EUR aux US.

Il regarde sur l'Inde car émergent, grosse entreprise d'armement et conflit avec le Pakistan donc aimerait profiter de l'opportunité. Vient pas d'un influenceur mais de lui-même.

- **Quel est votre horizon d'investissement habituel ? Préférez-vous des placements de court, moyen ou long terme ?**

*(Objectif : préciser le cadre temporel d'optimisation mental des portefeuilles.)*

Envisage au minimum 10 ans. Vend parfois des actifs qu'il considère mal choisi (essai erreur) ou vendrait si action choisie a perdu de sa qualité (marges et bénéfices en baisse etc mais c'est jamais arrivé). Gestion active du portefeuille.

Objectif de retraite. Pas spécialement la maison.

ETF il va les garder plus longtemps possible et au sein des actions individuelles il envisagerait de vendre les actions les moins intéressantes. N'exclut pas non plus la possibilité de vendre l'entièreté du portefeuille pour acheter la maison etc.

- **Quels sont vos objectifs lorsque vous investissez (ex. : générer un rendement annuel, préparer un projet, battre l'inflation, préserver votre capital) ?**

*(Objectif : identifier les seuils de réussite implicites ou explicites, en cohérence avec les paramètres de la méthode HAMA.)*

Partir plusieurs années en retraite anticipé mais n'a pas d'objectifs claires définis. Veut faire fructifier son argent qui dort et le reste il verra. Il veut se protéger de l'inflation tout en optimisant son rendement.

- **Dans quelle mesure vous basez-vous sur les performances passées des actifs pour prendre vos décisions ? Sur quelle période regardez-vous ces performances, et utilisez-vous des outils ou méthodes particulières (ex. : indicateurs, modèles, backtests) ?**

*(Objectif : capter la relation aux rendements historiques et à la modélisation, voir la rationalité de l'investisseur, approche intuitive ou analytique ?)*

Actions individuelles : Marges et bénéfices, dettes, ... au niveau u niveaux trimestriel. Pour les ETF il regarde les rendement moyens de 20-30 ans. Regarde jamais les avis des analystes « acheter/vendre » mais regarde le PER, les ratios financiers pour savoir si action sous valorisé ou pas. Achète que les actions qui sont sous valorisées et rarement il achète aussi des action qu'il estime chère si il pense que elles vont percer. Il ajoute les actions indépendamment des performances de son portefeuille actuel tant qu'elles semblent performer. Au niveaux des ETF il pense pas dépasser 3 ETF dans son portefeuille.

Car trouve qu'on en fait vite le tour, et qu'elles se regroupes (ex : S&P à 80% dans le MSCI world ). Il est parti sur le Nasdaq que sur le MSCI world car meilleurs rendements.

Sur le site Invest.co on sait voir des portefeuilles publics de la communauté du gars qui a créé le site.

Portefeuille	Titre	Valeur (€)	Évolution (%)
Épargne Espèces	NVIDIA	1 378,54 €	▲ 24,87 %
	TSMC (ADR)	1 036,16 €	▲ 22,23 %
	NASDAQ100 USD (Acc)	684,35 €	▲ 4,00 %
	Novo Nordisk (ADR)	505,47 €	▼ 16,17 %
	Core S&P 500 USD (Acc)	476,38 €	▼ 4,91 %
	Costco	458,51 €	▼ 8,48 %
	Berkshire Hathaway (B)	401,84 €	▼ 11,29 %
	Hims & Hers Health	344,00 €	▼ 2,25 %
	Meta Platforms (A)	272,18 €	▲ 35,41 %
	Physical Gold USD (Acc)		▲ 2,76 %
Epargne Espèces	Costco	458,51 €	▼ 8,48 %
	Berkshire Hathaway (B)	401,84 €	▼ 11,29 %
	Hims & Hers Health	344,00 €	▼ 2,27 %
	Meta Platforms (A)	272,13 €	▲ 35,39 %
	Physical Gold USD (Acc)	257,92 €	▲ 2,76 %
	Alphabet (A)	239,13 €	▲ 18,97 %
	Dassault Aviation	192,08 €	▼ 9,24 %
	LVMH Moët Hennessy	187,37 €	▼ 4,78 %
	Amazon.com	171,83 €	▲ 14,55 %
	Blockchain Group	63,01 €	▼ 37,61 %

(Attention pas sûre que ce soient des vrais portefeuilles car peuvent encoder des portefeuilles virtuels).

## B. Entretiens V.P. (25 ans)

- **Qu'est-ce qui vous a poussé à commencer à investir ? Y avait-il un objectif ou une motivation précise derrière cette décision ?**

(Objectif : comprendre la genèse de leur démarche d'investissement, entre logique patrimoniale, curiosité, recherche de rendement ou influence extérieure.)

Début des investissements en novembre 2024. Pour pas laisser dormir l'argent. Voulait pas se faire grignoter par l'inflation. Argent de côté pour la retraite et peut-être pour la maison etc mais sait pas encore vraiment. Retirera l'argent vers ses 50 ans (20 ans minimum). Compte pas acheter une maison avec avant au moins 15 ans. Bût juste de pas laisser l'argent ne rien faire.

Il utilise la méthode DCA : Mettre que sur des ETF tout ceux qui lui plaisent et retirer l'argent dans 20 ans. Ça vient de ses livres sur la bourse et il l'a choisi car voulait une méthode en « pilote automatique » quitte à pas surpasser le marché. Chaque mois il a des versement s automatiques qui augmentent son capital investi dans les ETFs.

Au niveaux du choix des ETF, il a été voir des vidéos et des forums. Il considère que faut jamais regarder les résultats passés car veut rien dire pour le futur.

Il a en plus u peu d'argent en cash pour acheter des actions ou ETF qu'il considère sous évaluées sur le marché pour augmenter son patrimoine investi.

Rendements annuels et mensuels, technologies de l'ETF, toutes les infos sur Trade republic et plus de rapports mensuels à envoyer pour payer la TOB.

- **Comment vous êtes-vous renseigné(e) pour faire vos premiers choix ? Avez-vous suivi une formation, consulté des sources spécifiques ou échangé avec d'autres investisseurs ?**

*(Objectif : identifier les canaux d'information utilisés et les biais engendrés dans le screening et le choix de l'univers d'investissement)*

S'est renseigné avec des amis à lui qui ont investis et qui ont donné « la bourse pour les nuls » ainsi que d'autres livres sur la bourse et la financ. + Vidéos youtube de youtubeur spécialisés. Il achète tout sur trade republic. Premier achat c'était 4 ETF (MSCI world, S&P 500, Nasdaq et emerging market). Avec le MSCI world il voulait touché le monde entier pour deiversifier au maximum son argent et éviter le risque. Nasdaq et S&P pour s'exposer au marché américain « ler meilleurs marché pour investir en ce mompent » et emerging market pour miser sur la chine, l'inde, le japon, ... qui vont se développer.

MSCI world : diversifier et diminuer le risque. Sécuriser l'argent. Peu de chance de perdre beaucoup d'argent

S&P 500 : tenter d'aller chercher plus de performance en amérique et risque moyen.

Emerging market : pari pour l'avenir

Nasdaq (100 entreprises): Le considère plus risqué mais plus de rendement.

- **Quels types d'actifs détez-vous aujourd'hui dans votre portefeuille (actions, ETF, cryptoactifs, obligations, etc.) ? Et pourquoi ces choix ?**

*(Objectif : dresser une cartographie du portefeuille réel et comprendre les motivations, diversification, convictions, effet de mode...)*

Initialement (pendant 5 mois) :

MSCI world : diversifier et diminuer le risque. Sécuriser l'argent. Peu de chance de perdre beaucoup d'argent

S&P 500 : tenter d'aller chercher plus de performance en amérique et risque moyen.

Emerging market : pari pour l'avenir

Nasdaq (100 entreprises): Le considère plus risqué mais plus de rendement.

Maintenant (depuis 4 mois): modification pour diminuer l'exposition aux US

Plus le MSCI world car touchait déjà le monde entier et remplacé par le EURO Stoxx. Un peu moins performant mais au moins il a de l'investissement en Europe.

-4 ETFs (Nasdaq, S&P500, EuroStox, Emerging market)

-Cryptomonnaie (XRP) infos sur trade republic et revolute : Trading aussi. Garde entre 3 et 5 ans. Objectifs de réinvestissement. Investi pas beaucoup donc pense pas que ça va le rendre riche mais juste pour pas mettre tous ses œufs dans le même panier.

-NVIDIA (200 EUR) : Plus pour une logique de trading à très petit échelle. Va le garder moins de 5 ans. Argent investi dans cette action individuelle pourrait servir à acheter une maison par exemple.

Il considère NVIDIA et la crypto comme du bonus.

Il n'a pas regardé du côté des obligations et leur a préféré les ETFs qui sont un peu plus risqués. Compte en rajouter dans 10 ans car pour lui les obligations sont des actifs de vieux qui n'ont plus beaucoup de temps devant eux.

Considère les actions plus risqués que les ETFs et que les ETFs sont plus risqués que les obligations et que la crypto est le plus risqué de tous.

- **Environ combien d'actifs différents possédez-vous actuellement ? Est-ce que vous modifiez encore souvent votre portefeuille ? Quand vous ajoutez des actifs, vous le faites en suivant une stratégie globale ou au compte-goutte ?**

*(Objectif : éclairer le degré de concentration du portefeuille, le nombre d'actifs et le domaine de l'univers.)*

6 Actifs (4 ETF, Nvidia, Cryptomonnaie). Modifie plus son portefeuille, achètera peut-être des actions si il voit de bonne opportunités mais touchera pas aux ETFs. Va modifier la proportion investi dans les ETFs (ex : si plus tard la chine performe mieux que les US, augmentera la proportion dans la Chine) mais par ajout d'argent et pas par retrait dans d'autres ETF. Il a entendu dans des vidéos certains influenceurs dire que 4 ETF c'était bien et que plus ça ne servait à rien. Si il doit encore en prendre à l'avenir des ETFs ce serait sur l'or ou la crypto car pas sur des entreprises mais sur des produites.

Pour l'acquisition de nouveaux actifs, au cas par cas. Il a vu que NVIDIA avait baissé il a direct acheté. Investi que dans des entreprises qu'il connaît (il achète des produits NVIDIA et le voit passer dans l'actualité etc. Il considère qu'il a plus d'infos alors par exemple il connaît rien de LVMH donc achèterait pas.)

- **Avez-vous une préférence naturelle pour certains secteurs (ex. : technologies, santé, énergie) ou certaines zones géographiques (ex. : Europe, US, émergents) ? Pourquoi ?**

*(Objectif : détecter la présence de croyances sectorielles ou géographiques, ainsi que de biais cognitifs comme le home bias ou la préférence pour la familiarité.)*

Trouve que les secteurs de la tech fonctionne le mieux, pense que dans 20 ans la tech et l'IA seront encore porteurs. N'a pas de secteurs préférés en particulier mais compte jamais investir dans le luxe et le pétrol. Pas le pétrol car voué à disparaître et lui vise le très long terme. Et pas le luxe car connaît vraiment pas et trouve que y'a beaucoup trop d'imprévus sur le marché.

Actuellement fort exposés sur les US mais a remarqué que il n'avait pas beaucoup d'argent en Europe (MSCI world a 75% sur les US). Il s'en fout d'investir spécialement sur des entreprises européennes. Il le fait juste pour se diversifier.

- **Quel est votre horizon d'investissement habituel ? Préférez-vous des placements de court, moyen ou long terme ?**

*(Objectif : préciser le cadre temporel d'optimisation mental des portefeuilles.)*

Horizon très long terme pour les ETF. Pour les actions simples et crypto, moyen terme.

- **Quels sont vos objectifs lorsque vous investissez (ex. : générer un rendement annuel, préparer un projet, battre l'inflation, préserver votre capital) ?**

*(Objectif : identifier les seuils de réussite implicites ou explicites, en cohérence avec les paramètres de la méthode HAMA.)*

Il s'est basé sur le passé (combinaison des 4 EF sur les 20 dernières années qui ont donné 13% de rendement) et souhaiterait au moins 10% moyen de rendement annuel.

- Dans quelle mesure vous basez-vous sur les performances passées des actifs pour prendre vos décisions ? Sur quelle période regardez-vous ces performances, et utilisez-vous des outils ou méthodes particulières (ex. : indicateurs, modèles, backtests) ?

(Objectif : capter la relation aux rendements historiques et à la modélisation, voir la rationalité de l'investisseur, approche intuitive ou analytique ?)

Il a regardé au début les performances sur les 20 dernières années et a sélectionné les ETFs qui ont bien performé et qui étaient sur des secteurs qu'il connaissait un peu. Il s'est basé sur le passé (combinaison des 4 EF sur les 20 dernières années qui ont donné 13% de rendement) et souhaiterait au moins 10% moyen de rendement annuel.

47% sur le S&P 500

21% sur le EuroStoxx

11% sur le Emerging market

11% sur le Nasdaq

3% sur NVIDIA

5% en Crypto

Soit 91% d'ETF et 9% plutôt pour du moyen terme.

## Annexe 2 : Codes Python de l'implémentation HAMA et performances GGBP

### A. Exemple de sortie du code

```
Fichier Excel exporté avec succès : C:\Users\Cédric Keutgen\Desktop\TFE_HEC\Actifs_Data\ETF_log_returns.xlsx

===== Résultats des tests de normalité - Log-rendements mensuels =====
Actif  mu1  mu2  mu3  mu4  Shapiro Stat  p-valeur  Normalité
S_P500 0.0109 0.0017 -0.0000 0.0000 0.9795 0.0090 Non normale
Nasdaq 0.0143 0.0025 -0.0000 0.0000 0.9879 0.1165 Normale
World 0.0066 0.0021 -0.0001 0.0000 0.9576 0.0000 Non normale
EuroStoxx 0.0024 0.0027 -0.0001 0.0000 0.9714 0.0000 Non normale
ICLN 0.0044 0.0005 -0.0010 0.0005 0.9325 0.0000 Non normale
IBB 0.0040 0.0041 -0.0001 0.0001 0.9798 0.0004 Non normale
ARTY 0.0073 0.0051 -0.0001 0.0001 0.9822 0.2969 Normale

===== Moments et tests de normalité - Log-rendements ANNUELS (réels) =====
Actif  #Années  mu1  mu2  mu3  mu4  Shapiro Stat  p-valeur  (annuel)  Normalité  (annuel)
S_P500 14 0.1255 0.0178 -0.0023 0.0010 0.9014 0.1189 Normale
Nasdaq 14 0.1663 0.0068 -0.0104 0.0079 0.8980 0.8986 Normale
World 19 0.0742 0.0335 -0.0106 0.0066 0.8153 0.0019 Non normale
EuroStoxx 24 0.0305 0.0414 -0.0116 0.0075 0.8515 0.0023 Non normale
ICLN 17 -0.0798 0.1050 0.0016 0.1108 0.9553 0.5458 Normale
IBB 23 0.0657 0.0497 -0.0091 0.0117 0.9472 0.2562 Normale
ARTY 6 0.1111 0.0842 -0.0278 0.0216 0.8347 0.1178 Normale

=== Moments standards annuels ===
Actif  Mean  Std  Skewness  Kurtosis
S_P500 0.1255 0.1334 -0.9859 3.2150
Nasdaq 0.1663 0.2020 -1.2669 4.7254
World 0.0742 0.1830 -1.7354 5.8824
EuroStoxx 0.0305 0.2034 -1.3827 4.3855
ICLN -0.0798 0.4002 0.0233 4.0702
IBB 0.0657 0.2220 -0.8191 4.7377
ARTY 0.1111 0.2901 -1.1373 3.0433

=== Résultats optimisation HAMA ===
H  lambda  gamma  omega
5  0.06  0.8  0.0525

Univers  S_P500  World  Nasdaq  EuroStoxx  ARTY  ICLN  IBB  Espérance rendement  Volatilité approx  p_shortfall  Delta p  Optimisation OK  mu1_p  mu2_p  mu3_p  mu4_p  std  Skewness  Kurtosis
0  Tech-S&P 0.3606 - 0.6394 - 0.0 - 0.1516 0.1741 0.0525 1.9264 True 0.1516 0.0061 -0.0001 0.0001 0.1741 -0.5376 1.4483
1  Green-S&P 0.3606 - 0.6394 - - 0.0 - 0.1516 0.1741 0.0525 1.9264 True 0.1516 0.0061 -0.0001 0.0001 0.1741 -0.5376 1.4483
2  Bio-S&P 0.3606 - 0.6394 - - 0.0 - 0.1516 0.1741 0.0525 1.9264 True 0.1516 0.0061 -0.0001 0.0001 0.1741 -0.5376 1.4483
3  Tech-World - - - - - - - - False - - - - - - -
4  Green-World - - - - - - - - False - - - - - - -
5  Bio-World - 0.1551 0.5812 - - - 0.2637 0.1255 0.1821 0.0525 1.9092 True 0.1255 0.0066 -0.0001 0.0001 0.1821 -0.3731 0.8698
6  Tech + Green 0.3606 - 0.6394 - 0.0 0.0 - 0.1516 0.1741 0.0525 1.9264 True 0.1516 0.0061 -0.0001 0.0001 0.1741 -0.5376 1.4483
7  Tech + Bio 0.3606 - 0.6394 - 0.0 0.0 - 0.1516 0.1741 0.0525 1.9264 True 0.1516 0.0061 -0.0001 0.0001 0.1741 -0.5376 1.4483
8  Green + Bio 0.3606 - 0.6394 - - 0.0 0.0 - 0.1516 0.1741 0.0525 1.9264 True 0.1516 0.0061 -0.0001 0.0001 0.1741 -0.5376 1.4483
9  Pan-sector diversifié 0.3606 - 0.6394 - 0.0 0.0 0.0 - 0.1516 0.1741 0.0525 1.9264 True 0.1516 0.0061 -0.0001 0.0001 0.1741 -0.5376 1.4483
10 Sans biais apparent 0.3606 0.0 0.6394 0.0 - - - 0.1516 0.1741 0.0525 1.9264 True 0.1516 0.0061 -0.0001 0.0001 0.1741 -0.5376 1.4483
Univers "Tech-S&P" : 14 années communes.
Univers "Green-S&P" : 14 années communes.
```

```

Univers 'Green-S&P' : 14 années communes.
Univers 'Bio-S&P' : 14 années communes.
Univers 'Bio-World' : 14 années communes.
Univers 'Tech + Green' : 14 années communes.
Univers 'Tech + Bio' : 14 années communes.
Univers 'Green + Bio' : 14 années communes.
Univers 'Pan-sector diversifié' : 14 années communes.
Univers 'Sans biais apparent' : 14 années communes.

```

Paramètres d'optimisation HAMA :

```

- H : 5
- lambda : 0.06
- gamma : 0.8
- omega : 0.0525

```

Paramètres du calcul de performance (GGBP & Cornish-Fisher) :

```

- H : 5
- rho : 0.1
- delta : 0.06
- gamma : 0.4

```

Tableau des scores et ratios :

	hGGBP	CF_95	CF_97	CF_99	Historique étendue	SR	MSR
Univers							
Tech-S&P	0.793014	0.802849	0.799152	0.795266	0.857143	0.360628	0.152779
Green-S&P	0.800814	0.802849	0.799152	0.795266	0.857143	0.360628	0.152779
Bio-S&P	0.795514	0.802849	0.799152	0.795266	0.857143	0.360628	0.152779
Tech-World	-	-	-	-	-	-	-
Green-World	-	-	-	-	-	-	-
Bio-World	0.760586	0.721609	0.716429	0.710883	0.816327	0.183292	0.08089
Tech + Green	0.795729	0.802849	0.799152	0.795266	0.857143	0.360628	0.152779
Tech + Bio	0.789957	0.802849	0.799152	0.795266	0.857143	0.360628	0.152779
Green + Bio	0.7959	0.802849	0.799152	0.795266	0.857143	0.360628	0.152779
Pan-sector diversifié	0.797057	0.802849	0.799152	0.795266	0.857143	0.360628	0.152779
Sans biais apparent	0.7962	0.802849	0.799152	0.795266	0.857143	0.360628	0.152779

Génération des frontières efficaces pour chaque univers...

PS C:\Users\Cédric Keutgen\Desktop\TFE\_HEC\Python\_project> █

## A. Main.py

```

# Main.py

import pandas as pd
import numpy as np
import dateparser

from Import_returns import import_returns_from_folder
from Export_log_returns import export_log_returns_to_excel
from Moments import calculate_standard_moments
from Test_gaussien import test_normality_all_assets
from HAMA_optimization import optimize_multiple_universes
from GGBP import load_annual_log_returns_and_stats, compute_scores,
display_scores_table
from Markowitz import plot_all_efficient_frontiers

# ----- CONFIGURATION -----

FOLDER_PATH = r'C:\Users\Cédric Keutgen\Desktop\TFE_HEC\Actifs_Data'

```

```

OUTPUT_PATH = FOLDER_PATH + r'\ETF_log_returns.xlsx'

MAPPING = {
    'iShares_SP500 ETF': 'S_P500',
    'iShares_NASDAQ ETF': 'Nasdaq',
    'iShares_MSCI_World ETF': 'World',
    'iShares_EuroStoxx50 ETF': 'EuroStoxx',
    'iShares-Global-Clean-Energy-Transition-UCITS-ETF-USD-Dist_fund': 'ICLN',
    'iShares_Biotech ETF': 'IBB',
    'iShares_Future_IA_Tech__ETF': 'ARTY'
}

UNIVERSES = {
    "Tech-S&P": ['S_P500', 'Nasdaq', 'ARTY'],
    "Green-S&P": ['S_P500', 'Nasdaq', 'ICLN'],
    "Bio-S&P": ['S_P500', 'Nasdaq', 'IBB'],
    "Tech-World": ['World', 'Nasdaq', 'ARTY'],
    "Green-World": ['World', 'Nasdaq', 'ICLN'],
    "Bio-World": ['World', 'Nasdaq', 'IBB'],
    "Tech + Green": ['S_P500', 'Nasdaq', 'ARTY', 'ICLN'],
    "Tech + Bio": ['S_P500', 'Nasdaq', 'ARTY', 'IBB'],
    "Green + Bio": ['S_P500', 'Nasdaq', 'ICLN', 'IBB'],
    "Pan-sector diversifié": ['S_P500', 'Nasdaq', 'ARTY', 'ICLN', 'IBB'],
    "Sans biais apparent": ['World', 'S_P500', 'EuroStoxx', 'Nasdaq']
}

#Paramètres intéressant:
# Fait apparaître intérêt IBB: (5;0.06;0.1;0.08) et (5;0.06;0.1;0.07)
# Fait apparaitre intérêt ARTY: (5;0.06;0.7;0.1) et (5;0.06;0.8;0.1)
# Fait apparaitre intérêt ARTY et IBB: : (5;0.1;0.7;0.01) et (5;0.1;0.8;0.01)
et (5;0.1;0.9;0.01)
# Fait apparaitre intérêt ARTY et IBB et ICLN: : (5;0.05;1;0.01) et
(5;0.06;1;0.01) et (5;0.07;1;0.01)
# etude du paramètre gamma: (5;0.06;0.4;0.1) et (5;0.06;0.6;0.1) et
(5;0.06;0.8;0.1) et (5;0.06;0.9;0.1)
# etude du paramètre lambda: (5;0.049;0.4;0.1) et (5;0.0501;0.4;0.1)
>Apparition(Green S&P;TECH S&P) et (5;0.066;0.4;0.1) >Aparition bio world et
(5;0.067;0.4;0.1) > Aparition tech-world et grenn-world >>IBB meilleurs
compromis rendement/risque
# etude du paramètre H: (5;0.049;0.4;0.1) et (6;0.049;0.4;0.1) et
(7;0.049;0.4;0.1)
MENTAL_ACCOUNT_PARAMS = {
    'H': 5,
    'lambda': 0.06,
    'gamma': 0.8,
    'omega': 0.0525
}

PERFORMANCE_PARAMS = {
    'H': 5,

```

```

    'rho': 0.10,
    'delta': 0.06,
    'gamma': 0.4
}

# ----- MODULES -----

def prepare_data(folder_path, mapping):
    """
    Importe les rendements depuis les fichiers Excel,
    calcule les log-rendements, et nettoie les données.

    Args:
        folder_path (str): Chemin du dossier contenant les fichiers Excel.
        mapping (dict): Dictionnaire de correspondance fichier → nom d'actif.

    Returns:
        tuple: (données brutes importées, dictionnaire des DataFrames par
    actif)
    """
    data_dict = import_returns_from_folder(folder_path)
    locals_vars = {}

    for file_key, var_name in mapping.items():
        if file_key in data_dict:
            df = data_dict[file_key].copy()
            df['LogReturn'] = (df['Return'] / 100 + 1).apply(np.log)
            df['Date'] = df['Date'].astype(str).apply(lambda x:
dateparser.parse(x))
            df = df.set_index('Date')
            locals_vars[var_name] = df[['Return', 'LogReturn']]
        else:
            print(f" Clé '{file_key}' non trouvée dans les données.")

    return data_dict, locals_vars

def compute_annual_moments(locals_vars):
    """
    Calcule les moments statistiques annuels et les matrices de corrélation.

    Args:
        locals_vars (dict): Dictionnaire des DataFrames log-rendements.

    Returns:
        tuple: (dictionnaire moments annuels, matrice de corrélation annuelle)
    """
    df_monthly, df_annual, annual_corr_matrix = test_normality_all_assets(

```



```

        {name: df['LogReturn'] for name, df in locals_vars.items()}},
show_figures=False
    )

    annual_moments = {
        row["Actif"]: {
            "mu1": row["mu1"],
            "mu2": row["mu2"],
            "mu3": row["mu3"],
            "mu4": row["mu4"]
        }
        for _, row in df_annual.iterrows()
        if not pd.isnull(row["mu1"])
    }

    print("\n=== Moments standards annuels ===")
    print(f"{'Actif':<12} {'Mean':>10} {'Std':>10} {'Skewness':>12} {'Kurtosis':>12}")
    for actif, m in annual_moments.items():
        mu2 = m['mu2']
        std = np.sqrt(mu2)
        skew = m['mu3'] / (mu2 ** 1.5) if mu2 > 0 else np.nan
        kurt = m['mu4'] / (mu2 ** 2) if mu2 > 0 else np.nan
        print(f"{'actif':<12} {m['mu1']:10.4f} {std:10.4f} {skew:12.4f} {kurt:12.4f}")

    return annual_moments, annual_corr_matrix

def run_hama_optimization(universes, annual_moments, annual_corr_matrix,
params):
    """
    Lance l'optimisation HAMA sur plusieurs univers.

    Args:
        universes (dict): Dictionnaire univers → liste d'actifs.
        annual_moments (dict): Moments par actif.
        annual_corr_matrix (pd.DataFrame): Corrélation entre actifs.
        params (dict): Paramètres HAMA.

    Returns:
        pd.DataFrame: Résultats d'allocation optimale par univers.
    """
    results = optimize_multiple_universes(
        universes,
        annual_moments,
        annual_corr_matrix,
        H=params['H'],
        lam=params['lambda'],

```

```

        gamma=params['gamma'],
        omega=params['omega']
    )
    print("\n=== Résultats optimisation HAMA ===")
    print(" ".join(f"{k:>8}" for k in params))
    print(" ".join(f"{v:>8}" for v in params.values()))
    print(results)
    return results
# ----- MAIN -----

def main():
    """
    Fonction principale du script.
    Ordonne l'import, le traitement, l'analyse et l'optimisation
    des données de rendement d'actifs ETF.
    """
    # Étape 1 : Préparer les données
    data_dict, locals_vars = prepare_data(FOLDER_PATH, MAPPING)

    # Étape 2 : Export vers Excel
    export_log_returns_to_excel(locals_vars, data_dict, MAPPING, OUTPUT_PATH)

    # Étape 3 : Construire le DataFrame principal
    returns_df = pd.DataFrame({k: df['LogReturn'] for k, df in
locals_vars.items()}).sort_index()

    # Étape 4 : Calcul des moments
    annual_moments, annual_corr_matrix = compute_annual_moments(locals_vars)

    # Étape 5 : Optimisation HAMA
    df_results = run_hama_optimization(UNIVERSES, annual_moments,
annual_corr_matrix, MENTAL_ACCOUNT_PARAMS)

    # Étape 6 : Charger les retours annuels et stats descriptives depuis
l'export Excel
    annual_returns_df, stats_df =
load_annual_log_returns_and_stats(OUTPUT_PATH)

    # Étape 7 : Calcul des scores de performance avec GGBP
    df_results_with_scores = compute_scores(
        annual_returns_df,
        stats_df,
        df_results,
        H=PERFORMANCE_PARAMS['H'],
        rho=PERFORMANCE_PARAMS['rho'],
        lam=PERFORMANCE_PARAMS['delta'],
        gamma=PERFORMANCE_PARAMS['gamma']
    )

```

```

# Étape 8 : Affichage des paramètres et tableau résumé
print("\n Paramètres d optimisation HAMA :")
for key, value in MENTAL_ACCOUNT_PARAMS.items():
    print(f" - {key} : {value}")

print("\n Paramètres du calcul de performance (GGBP & Cornish-Fisher) :")
for key, value in PERFORMANCE_PARAMS.items():
    print(f" - {key} : {value}")

# Tableau des scores
display_scores_table(df_results_with_scores)

# Étape 9 : Calcul et tracé des frontières efficaces pour chaque univers
print("\n Génération des frontières efficaces pour chaque univers...")
# plot_all_efficient_frontiers(OUTPUT_PATH, UNIVERSES, df_results,
MENTAL_ACCOUNT_PARAMS)

if __name__ == '__main__':
    main()

```

#### B. Export\_log\_returns.py

```

import pandas as pd
import numpy as np
from scipy.stats import kurtosis, skew

def convert_date_column(df: pd.DataFrame, date_col: str = 'Date') ->
pd.DataFrame:
    """Convertit la colonne de dates en datetime."""
    df[date_col] = pd.to_datetime(df[date_col], errors='coerce')
    return df

def get_complete_years(df: pd.DataFrame, date_col: str = 'Date',
expected_months: int = 12) -> list:
    """Identifie les années complètes contenant exactement `expected_months`
mois."""
    df = convert_date_column(df, date_col)
    df['Year'] = df[date_col].dt.year
    counts = df.groupby('Year').size()
    return counts[counts == expected_months].index.tolist()

def calculate_annual_log_returns(df: pd.DataFrame, log_return_col: str =
'LogReturn',
                                year_col: str = 'Year', complete_years: list
= None) -> pd.Series:

```

```

    """Calcule les log-retours annuels uniquement pour les années
    complètes."""
    if complete_years is None:
        raise ValueError("La liste des années complètes doit être fournie.")
    return
df[df[year_col].isin(complete_years)].groupby(year_col)[log_return_col].sum()

def add_annual_info_columns(df: pd.DataFrame, date_col: str = 'Date',
log_return_col: str = 'LogReturn',
                                expected_months: int = 12) -> pd.DataFrame:
    """
    Ajoute deux colonnes au DataFrame :
    - 'CompleteYear' indiquant les années valides
    - 'AnnualLogReturn' contenant le retour annuel associé à cette année
    """
    df = convert_date_column(df.copy(), date_col)
    df['Year'] = df[date_col].dt.year

    complete_years = get_complete_years(df, date_col, expected_months)
    annual_log_return = calculate_annual_log_returns(df, log_return_col,
'Year', complete_years)

    df['CompleteYear'] = ''
    df['AnnualLogReturn'] = pd.NA

    for year in complete_years:
        first_idx = df.index[df['Year'] == year][0]
        df.at[first_idx, 'CompleteYear'] = year
        df.at[first_idx, 'AnnualLogReturn'] = annual_log_return.loc[year]

    return df.drop(columns=['Year'])

def compute_statistics(df: pd.DataFrame) -> pd.DataFrame:
    """
    Calcule les statistiques (moyenne, écart-type, skewness, kurtosis biaisés)
    pour chaque colonne du DataFrame, dans l'ordre souhaité.
    """
    stats = {}
    for col in df.columns:
        series = pd.to_numeric(df[col], errors='coerce').dropna()
        if not series.empty:
            stats[col] = [
                series.mean(),
                series.std(),
                skew(series, bias=True),
                kurtosis(series, fisher=False, bias=True),
            ]

```

```

        else:
            stats[col] = [pd.NA] * 4

        # Ordre personnalisé des lignes : skew avant kurtosis
        return pd.DataFrame(stats, index=['mean', 'std', 'biased_skew',
'biased_kurt'])

def build_combined_annual_table(annual_log_returns_dict: dict) ->
pd.DataFrame:
    """
    Concatène tous les log-retours annuels par actif en un seul tableau.
    """
    combined = pd.concat(annual_log_returns_dict.values(), axis=1,
keys=annual_log_returns_dict.keys())
    combined.index.name = 'Année'
    return combined.sort_index()

def export_log_returns_to_excel(locals_vars: dict, data_dict: dict, mapping:
dict, output_path: str):
    """
    Exporte les log-retours avec :
    - Une feuille Excel par actif avec les colonnes enrichies
    - Une feuille combinée avec log-retours annuels + statistiques
    descriptives
    """
    with pd.ExcelWriter(output_path, engine='xlsxwriter') as writer:
        annual_log_returns_dict = {}

        for var_name, df in locals_vars.items():
            sheet_name = var_name[:31] # max 31 caractères
            keys = [k for k, v in mapping.items() if v == var_name]
            if not keys:
                print(f"Clé introuvable dans mapping pour '{var_name}'.
Feuille ignorée.")
                continue

            file_key = keys[0]
            return_series = data_dict[file_key]['Return'].values

            df_final = df.reset_index().copy()
            df_final['Return'] = return_series
            df_final = add_annual_info_columns(df_final, date_col='Date',
log_return_col='LogReturn')

            ordered_cols = ['Date', 'Return', 'LogReturn', 'CompleteYear',
'AnnualLogReturn']
            df_final = df_final[ordered_cols]

```

```

        df_final.to_excel(writer, sheet_name=sheet_name, index=False)

        # Extraction des log-retours annuels
        annual_df = df_final[df_final['CompleteYear'] !=
        ''][['CompleteYear', 'AnnualLogReturn']].copy()
        annual_df.rename(columns={'CompleteYear': 'Year',
        'AnnualLogReturn': var_name}, inplace=True)
        annual_df['Year'] = annual_df['Year'].astype(int)
        annual_log_returns_dict[var_name] =
        annual_df.set_index('Year')[var_name]

        # Construction du tableau combiné + stats
        combined_df = build_combined_annual_table(annual_log_returns_dict)
        stats_df = compute_statistics(combined_df)

        # Ajout ligne vide pour séparation visuelle
        empty_row = pd.DataFrame([[pd.NA] * len(combined_df.columns)],
        columns=combined_df.columns)
        output_df = pd.concat([combined_df, empty_row, stats_df])
        output_df.index = output_df.index.astype(str) # pour éviter conflit
        d'index Excel

        output_df.to_excel(writer, sheet_name='AnnualLogReturns')

        print(f"\n☑ Fichier Excel exporté avec succès : {output_path}")

```

### C. Import\_returns.py

```

#Import_returns.py

import os
import pandas as pd

def import_returns_from_folder(folder_path, sheet_name='Performance',
skiprows=5):
    """
    Importe les rendements depuis tous les fichiers Excel d'un dossier.
    Retourne un dictionnaire avec les données brutes (Date, Return) pour
    chaque fichier.

    :param folder_path: chemin vers le dossier contenant les fichiers Excel.
    :param sheet_name: nom de la feuille Excel à lire.
    :param skiprows: nombre de lignes à ignorer au début du fichier Excel.
    :return: dict {nom_fichier_sans_extension: DataFrame(Date, Return)}
    """
    data_dict = {}

```

```

excel_files = [
    f for f in os.listdir(folder_path)
        if (f.endswith('.xlsx') or f.endswith('.xls')) and not
f.startswith('~$')
]

for file in excel_files:
    file_path = os.path.join(folder_path, file)
    print(f"Traitement du fichier : {file}")

    try:
        df = pd.read_excel(file_path, sheet_name=sheet_name,
skiprows=skiprows, header=None)
        df = df.iloc[:, :2] # garder seulement les deux premières
colonnes (Date, Return)
        df.columns = ['Date', 'Return']
        df = df.dropna(subset=['Date'])
        df['Return'] = df['Return'].astype(str).str.replace(',', '
.').astype(float)
        data_dict[os.path.splitext(file)[0]] = df
    except Exception as e:
        print(f"Erreur avec le fichier {file} : {e}")

return data_dict

```

#### D. Moments.py

```

import numpy as np
from scipy import stats

def calculate_raw_moments(series):
    """
    Calcule les 4 premiers moments centrés non réduits à partir d'une série.
    Renvoie la moyenne, variance, 3ème et 4ème moment centrés non réduits.
    """
    R = series.dropna().values
    if len(R) == 0:
        raise ValueError("La série est vide après suppression des NaN.")

    mu1 = np.mean(R)
    mu2 = np.mean((R - mu1) ** 2)
    mu3 = np.mean((R - mu1) ** 3)
    mu4 = np.mean((R - mu1) ** 4)

    return {
        'Moyenne': mu1,
        'Variance (raw)': mu2,
        'Moment 3 centré non réduit': mu3,

```

```

        'Moment 4 centré non réduit': mu4
    }

def calculate_standard_moments(series):
    """
    Calcule les moments statistiques classiques : moyenne, écart-type,
    skewness et kurtosis.
    Skewness et kurtosis sont corrigés du biais.
    """
    R = series.dropna().values
    if len(R) == 0:
        raise ValueError("La série est vide après suppression des NaN.")

    mu1 = np.mean(R)
    std = np.std(R, ddof=1) # écart-type non biaisé
    skewness = stats.skew(R, bias=False)
    kurtosis = stats.kurtosis(R, fisher=False, bias=False) # kurtosis=3 pour
normale

    return {
        'Moyenne': mu1,
        'Ecart-type': std,
        'Skewness': skewness,
        'Kurtosis': kurtosis
    }

```

#### E. Test\_gaussien.py

```

#file = Test_gaussien.py

import math
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
import numpy as np
import pandas as pd
import statsmodels.api as sm
from scipy import stats
import matplotlib.gridspec as gridspec

def calculate_moments_and_tests(series):
    """
    Calcule les moments statistiques et le test de Shapiro-Wilk sur une série.
    """
    x = series.dropna().values
    mu1 = np.mean(x)
    mu2 = np.mean((x - mu1) ** 2)
    mu3 = np.mean((x - mu1) ** 3) #Moment d'ordre 3 centré non réduit.

```



```

mu4 = np.mean((x - mu1) ** 4) #Moment d'ordre 4 centré non réduit.

stat, p_value = stats.shapiro(x)
normality = "Normale" if p_value > 0.05 else "Non normale"

return mu1, mu2, mu3, mu4, stat, p_value, normality

def plot_histogram_with_density(ax, series, mean, std, title, color_hist,
color_kde):
    """
    Trace un histogramme avec densité réelle et densité normale théorique.
    """
    sns.histplot(series, kde=False, stat='density', bins=30, color=color_hist,
linewidth=1.5, ax=ax)
    sns.kdeplot(series, color=color_kde, linewidth=2.5, ax=ax, label="Densité
réelle")
    x_vals = np.linspace(series.min(), series.max(), 200)
    normal_pdf = stats.norm.pdf(x_vals, loc=mean, scale=(std**(1/2)))
    ax.plot(x_vals, normal_pdf, 'r--', linewidth=2.5, label='Normale
théorique')
    ax.set_title(title)
    ax.legend(loc='upper right')

def plot_qqplot(ax, series, title):
    """
    Trace un Q-Q plot.
    """
    sm.qqplot(series, line='s', ax=ax)
    ax.set_title(title)

def aggregate_annual_log_returns(monthly_series):
    """
    Agrège des log-rendements mensuels en log-rendements annuels
    (en ne conservant que les années complètes).
    """
    if not isinstance(monthly_series.index, pd.DatetimeIndex):
        raise ValueError("L'index doit être un DatetimeIndex")

    monthly_series = monthly_series.sort_index()
    grouped = monthly_series.groupby(monthly_series.index.year)
    complete_years = [year for year, grp in grouped if len(grp) == 12]
    series_complete =
monthly_series[monthly_series.index.year.isin(complete_years)]
    annual_log_returns =
series_complete.groupby(series_complete.index.year).sum()
    return annual_log_returns

```

```

def print_correlation_matrix(corr_df):
    """
    Affiche une matrice de corrélation arrondie (%) sous forme triangulaire
    inférieure.
    """
    n = len(corr_df)
    names = corr_df.columns.tolist()
    header = " " + " ".join(f"{name:>10}" for name in names)
    print("\n===== Matrice de corrélation (%) entre actifs =====")
    print(header)
    for i in range(n):
        line = f"{names[i]:>6} "
        for j in range(n):
            if j > i:
                line += " " * 10
            elif i == j:
                line += " 100% "
            else:
                line += f" {int(round(corr_df.iat[i,j]*100)):>3d}% "
        print(line)

def test_normality_all_assets(log_returns_dict, show_figures=False):
    """
    Analyse complète des log-rendements : moments, tests de normalité,
    corrélations.

    Parameters:
    -----
    log_returns_dict : dict[str, pd.Series]
        Dictionnaire {nom_actif: log-rendements mensuels}
    show_figures : bool
        Affiche les graphiques si True.

    Returns:
    -----
    df_monthly : pd.DataFrame
    df_annual : pd.DataFrame
    """
    plt.rcParams.update({
        'axes.titlesize': 18,
        'axes.titleweight': 'bold',
        'axes.labelsize': 18,
        'legend.fontsize': 11,
        'xtick.labelsize': 10,
        'ytick.labelsize': 10,
    })

    n_assets = len(log_returns_dict)

```

```

n_cols = 3
n_rows = math.ceil(n_assets / n_cols)

# Figures pour les graphiques
fig_hist = plt.figure(figsize=(6 * n_cols, 4.5 * n_rows))
fig_hist.suptitle("Histogrammes mensuels avec densité réelle et normale",
fontsize=16)
gs1 = gridspec.GridSpec(n_rows, n_cols, figure=fig_hist)

fig_qq = plt.figure(figsize=(6 * n_cols, 4.5 * n_rows))
fig_qq.suptitle("Q-Q plots mensuels par actif", fontsize=16)
gs2 = gridspec.GridSpec(n_rows, n_cols, figure=fig_qq)

fig_hist_ann = plt.figure(figsize=(6 * n_cols, 4.5 * n_rows))
fig_hist_ann.suptitle("Histogrammes annuels avec densité réelle et
normale", fontsize=16)
gs3 = gridspec.GridSpec(n_rows, n_cols, figure=fig_hist_ann)

fig_qq_ann = plt.figure(figsize=(6 * n_cols, 4.5 * n_rows))
fig_qq_ann.suptitle("Q-Q plots annuels par actif", fontsize=16)
gs4 = gridspec.GridSpec(n_rows, n_cols, figure=fig_qq_ann)

results_monthly = []
results_annual = []
annual_log_returns_dict = {}

for i, (name, series) in enumerate(log_returns_dict.items()):
    # ===== MENSUEL =====
    mean, mu2, mu3, mu4, stat, p_value, normality =
calculate_moments_and_tests(series)

    ax_hist = fig_hist.add_subplot(gs1[i])
    plot_histogram_with_density(ax_hist, series, mean, mu2, f"{name}
(Mensuel)", "skyblue", "blue")

    ax_qq = fig_qq.add_subplot(gs2[i])
    plot_qqplot(ax_qq, series, f"{name} (Mensuel)")

    results_monthly.append({
        "Actif": name,
        "mu1": mean,
        "mu2": mu2,
        "mu3": mu3,
        "mu4": mu4,
        "Shapiro Stat": stat,
        "p-valeur": p_value,
        "Normalité": normality
    })

```

```

# ===== ANNUEL =====
annual_log_returns = aggregate_annual_log_returns(series)
n_years = len(annual_log_returns)

if n_years >= 2:
    mean_ann, mu2_ann, mu3_ann, mu4_ann, stat_ann, p_ann,
normality_ann = calculate_moments_and_tests(annual_log_returns)

    ax_hist_ann = fig_hist_ann.add_subplot(gs3[i])
    plot_histogram_with_density(ax_hist_ann, annual_log_returns,
mean_ann, mu2_ann, f"{name} (Annuel)", "lightgreen", "green")

    ax_qq_ann = fig_qq_ann.add_subplot(gs4[i])
    plot_qqplot(ax_qq_ann, annual_log_returns, f"{name} (Annuel)")

    annual_log_returns_dict[name] = annual_log_returns
else:
    mean_ann = mu2_ann = mu3_ann = mu4_ann = stat_ann = p_ann = np.nan
    normality_ann = "Données insuffisantes"

results_annual.append({
    "Actif": name,
    "#Années": n_years,
    "mu1": mean_ann,
    "mu2": mu2_ann,
    "mu3": mu3_ann,
    "mu4": mu4_ann,
    "Shapiro Stat (annuel)": stat_ann,
    "p-valeur (annuel)": p_ann,
    "Normalité (annuel)": normality_ann
})

# ===== Résultats =====
df_monthly = pd.DataFrame(results_monthly)
df_annual = pd.DataFrame(results_annual)

print("\n===== Résultats des tests de normalité – Log-rendements mensuels
=====")
print(df_monthly.round(4).to_string(index=False))

print("\n===== Moments et tests de normalité – Log-rendements ANNUELS
(réels) =====")
print(df_annual.round(4).to_string(index=False))

# ===== Matrice de corrélation mensuelle =====
df_returns = pd.DataFrame(log_returns_dict)
corr_matrix = df_returns.corr()
#print_correlation_matrix(corr_matrix)

```

```

# ===== Matrice de corrélation annuelle =====
if len(annual_log_returns_dict) >= 2:
    df_annual_returns = pd.DataFrame(annual_log_returns_dict)
    annual_corr_matrix = df_annual_returns.corr()
    #print("\n===== Matrice de corrélation (%) entre actifs (rendements
ANNUELS) =====")
    #print_correlation_matrix(annual_corr_matrix)
else:
    print("\n[Info] Données insuffisantes pour calculer la matrice de
corrélation annuelle.")

# Affichage conditionnel
if show_figures:
    fig_hist.tight_layout(rect=[0, 0, 1, 0.95])
    fig_qq.tight_layout(rect=[0, 0, 1, 0.95])
    fig_hist_ann.tight_layout(rect=[0, 0, 1, 0.95])
    fig_qq_ann.tight_layout(rect=[0, 0, 1, 0.95])
    plt.show()

return df_monthly, df_annual, annual_corr_matrix

```

#### F. HAMA\_optimization.py

```

import numpy as np
import pandas as pd
from scipy.optimize import minimize

#
# Fonctions Utilitaires
#

def pi_function(x, H, mu2_n, mu3_n, mu4_n):
    """
    Évalue la probabilité ajustée de shortfall en fonction des moments du
    portefeuille.
    """
    if mu2_n == 0:
        return np.inf

    Q = (-H * x**2) / mu2_n + (mu3_n * x) / (mu2_n**2) + 1
    Delta_p = (1 / H) * ((mu4_n / mu2_n**2) - (mu3_n**2) / mu2_n**3 - 3) + 2
    return Delta_p / (Q**2 + Delta_p * (1 + (H * x**2) / mu2_n))

def Portfolio_mean_moments(mu2, mu3, mu4, H):
    """

```

```

    Transforme les moments des rendements annuels en moments de l'espérance.
    """
    mu2_n = mu2 / H
    mu3_n = mu3 / H**2
    mu4_n = mu4 / H**3 + (3 * (H - 1) * mu2**2) / H**3
    return mu2_n, mu3_n, mu4_n

def compute_moments(weights, asset_names, moments_dict, corr_matrix=None):
    """
    Calcule les moments agrégés du portefeuille à partir des actifs.
    """
    weights = np.array(weights) / np.sum(weights)
    mu1 = sum(moments_dict[a]["mu1"] * w for a, w in zip(asset_names,
weights))

    if corr_matrix is not None:
        vars_ = np.array([moments_dict[a]["mu2"] for a in asset_names])
        corr_sub = corr_matrix.loc[asset_names, asset_names].values
        cov_matrix = corr_sub * np.outer(np.sqrt(vars_), np.sqrt(vars_))
        mu2 = weights.T @ cov_matrix @ weights
    else:
        mu2 = sum(moments_dict[a]["mu2"] * w**2 for a, w in zip(asset_names,
weights))

    mu3 = sum(moments_dict[a]["mu3"] * w**3 for a, w in zip(asset_names,
weights))
    mu4 = sum(moments_dict[a]["mu4"] * w**4 for a, w in zip(asset_names,
weights))

    return mu1, mu2, mu3, mu4

#
#
#
# Fonction Objectif avec Pénalités
#
#
#
def penalized_objective(weights, H, lam, gamma, omega, asset_names,
moments_dict, corr_matrix=None):
    """
    Fonction objectif pénalisée intégrant les contraintes sur le risque et la
forme de distribution.
    """
    weights = np.array(weights) / np.sum(weights)
    mu1, mu2, mu3, mu4 = compute_moments(weights, asset_names, moments_dict,
corr_matrix)
    mu2_n, mu3_n, mu4_n = Portfolio_mean_moments(mu2, mu3, mu4, H)

```

```

pi_minus = pi_function(-lam, H, mu2_n, mu3_n, mu4_n)
pi_plus = pi_function(lam, H, mu2_n, mu3_n, mu4_n)
p_shortfall = pi_minus - gamma * pi_plus
Delta_p = (1 / H) * ((mu4_n / mu2_n**2) - (mu3_n**2) / mu2_n**3 - 3) + 2

penalty = 0
if Delta_p < 0:
    penalty += 1e5 * abs(Delta_p)
if p_shortfall > omega:
    penalty += 1e3 * (1 + abs(p_shortfall - omega))

return -mu1 + penalty

#
# Optimisation Multi-Start
#

def generate_initial_weights(n_assets, n_samples):
    return [np.random.dirichlet(np.ones(n_assets)) for _ in range(n_samples)]

def optimize_portfolio_multi_start(asset_names, H, lam, gamma, omega,
moments_dict, corr_matrix=None, n_starts=100):
    """
    Lance une optimisation multi-start pour maximiser l'espérance sous
    contraintes.
    """
    n_assets = len(asset_names)
    bounds = [(0, 1)] * n_assets
    best_result = None
    best_value = np.inf
    initial_weights_list = generate_initial_weights(n_assets, n_starts)

    for w0 in initial_weights_list:
        result = minimize(
            penalized_objective,
            w0,
            args=(H, lam, gamma, omega, asset_names, moments_dict,
corr_matrix),
            method='SLSQP',
            bounds=bounds,
            constraints={'type': 'eq', 'fun': lambda w: np.sum(w) - 1},
            options={'disp': False, 'maxiter': 500}
        )

```

```

        if result.success and result.fun < best_value:
            best_result = result
            best_value = result.fun

    if best_result is None:
        return None, None, False

    weights = best_result.x / np.sum(best_result.x)
    mu1, mu2, mu3, mu4 = compute_moments(weights, asset_names, moments_dict,
corr_matrix)
    mu2_n, mu3_n, mu4_n = Portfolio_mean_moments(mu2, mu3, mu4, H)

    pi_minus = pi_function(-lam, H, mu2_n, mu3_n, mu4_n)
    pi_plus = pi_function(lam, H, mu2_n, mu3_n, mu4_n)
    p_shortfall = pi_minus - gamma * pi_plus
    Delta_p = (1 / H) * ((mu4_n / mu2_n**2) - (mu3_n**2) / mu2_n**3 - 3) + 2

    if Delta_p < 0 or p_shortfall > omega:
        return None, None, False

    vol_approx = np.sqrt(mu2)
    skew = mu3 / (mu2 ** 1.5)    #Rajouter _n pour afficher les moments de la
distirbition moyenne
    kurt = mu4 / (mu2 ** 2)      #Rajouter _n pour afficher les moments de la
distirbition moyenne
    std = mu2 ** 0.5             #Rajouter _n pour afficher les moments de la
distirbition moyenne

    df_weights = pd.DataFrame({'Actif': asset_names, 'Poids': weights})
    df_summary = pd.DataFrame({
        'p_shortfall': [p_shortfall],
        'Delta_p': [Delta_p],
        'mu1_p': [mu1],
        'mu2_p': [mu2_n],
        'mu3_p': [mu3_n],
        'mu4_p': [mu4_n],
        'std': [std],
        'Skewness': [skew],
        'Kurtosis': [kurt],
        'Espérance rendement': [mu1],
        'Volatilité approx': [vol_approx],
        'Optimisation OK': [True]
    })

    return df_weights, df_summary, True

```

#



```

# Optimisation pour Plusieurs Univers
#

def optimize_multiple_universes(universes, moments_dict, corr_matrix, H, lam,
gamma, omega, n_starts=20):
    """
    Applique l'optimisation à plusieurs univers d'actifs.
    """
    results_summary = []
    results_weights = []

    for universe_name, assets in universes.items():
        if not assets or not all(a in moments_dict for a in assets):
            print(f"[Alerte] Univers {universe_name} vide ou moments
manquants, ignoré.")
            df_summary = pd.DataFrame({
                'p_shortfall': [np.nan], 'Delta_p': [np.nan],
                'mu1_p': [np.nan], 'mu2_p': [np.nan],
                'mu3_p': [np.nan], 'mu4_p': [np.nan],
                'std': [np.nan], 'Skewness': [np.nan],
                'Kurtosis': [np.nan], 'Espérance rendement': [np.nan],
                'Volatilité approx': [np.nan], 'Optimisation OK': [False],
                'Univers': [universe_name]
            })
            results_summary.append(df_summary)
            continue

        df_weights, df_summary, success = optimize_portfolio_multi_start(
            asset_names=assets,
            H=H, lam=lam, gamma=gamma, omega=omega,
            moments_dict=moments_dict,
            corr_matrix=corr_matrix,
            n_starts=n_starts
        )

        if not success:
            df_summary = pd.DataFrame({
                'p_shortfall': [np.nan], 'Delta_p': [np.nan],
                'mu1_p': [np.nan], 'mu2_p': [np.nan],
                'mu3_p': [np.nan], 'mu4_p': [np.nan],
                'std': [np.nan], 'Skewness': [np.nan],
                'Kurtosis': [np.nan], 'Espérance rendement': [np.nan],
                'Volatilité approx': [np.nan], 'Optimisation OK': [False],
                'Univers': [universe_name]
            })
            results_summary.append(df_summary)
            continue

```

```

df_summary["Univers"] = universe_name
df_weights = df_weights.set_index("Actif").T
df_weights["Univers"] = universe_name

results_summary.append(df_summary)
results_weights.append(df_weights)

df_summary_final = pd.concat(results_summary).reset_index(drop=True)

if results_weights:
    df_weights_final = pd.concat(results_weights).reset_index(drop=True)
else:
    df_weights_final = pd.DataFrame(columns=["Univers"])

df_final = pd.merge(df_summary_final, df_weights_final, on="Univers",
how="left")

# Colonnes attendues
colonnes_actifs = ['S_P500', 'World', 'Nasdaq', 'EuroStoxx', 'ARTY',
'ICLN', 'IBB']
for col in colonnes_actifs:
    if col not in df_final.columns:
        df_final[col] = np.nan

ordre_colonnes = (
    ['Univers'] +
    colonnes_actifs +
    ['Espérance rendement', 'Volatilité approx',
    'p_shortfall', 'Delta_p', 'Optimisation OK',
    'mu1_p', 'mu2_p', 'mu3_p', 'mu4_p',
    'std', 'Skewness', 'Kurtosis']
)

return df_final[ordre_colonnes].round(4).fillna('-')

```

#### G. GGBP.py

```

import pandas as pd
import numpy as np
from scipy.stats import norm

#

# Chargement des données
#

def load_annual_log_returns_and_stats(filepath: str, sheet_name: str =
"AnnualLogReturns"):

```

```

df = pd.read_excel(filepath, sheet_name=sheet_name,
index_col=0).rename_axis("Année")
sep_index = df.index[df.isnull().all(axis=1)].tolist()
if sep_index:
    i = df.index.get_loc(sep_index[0])
    df_log_returns = df.iloc[:i].apply(pd.to_numeric, errors='coerce')
    df_stats = df.iloc[i + 1:].apply(pd.to_numeric, errors='coerce')
else:
    df_log_returns = df.apply(pd.to_numeric, errors='coerce')
    df_stats = pd.DataFrame()
return df_log_returns, df_stats

#

# Outils pour le Bootstrap GGBP
#

def get_common_years(df_log_returns, selected_assets):
    return df_log_returns[selected_assets].dropna().index

def ggbp_bootstrap(weights, annual_returns_df, years, H=15, rho=0.03,
lam=0.02, gamma=0.6, n_sim=10000):
    data = annual_returns_df.loc[years].dropna(how="any").values
    if len(data) == 0:
        raise ValueError("Aucune donnée disponible après filtrage des années communes.")
    sampled_scores = []
    for _ in range(n_sim):
        sampled = data[np.random.choice(len(data), H, replace=True)]
        sampled_scores.append((sampled @ weights).mean())
    sampled_scores = np.array(sampled_scores)
    s_minus = np.sum(sampled_scores <= (rho - lam))
    s_plus = np.sum(sampled_scores >= (rho + lam))
    return (1 / (1 + gamma)) * (1 - s_minus / n_sim + gamma * s_plus / n_sim)

def ggbp_extended_historical(weights, annual_returns_df, years, H=15,
rho=0.03, lam=0.02, gamma=0.6):
    data = annual_returns_df.loc[years].dropna(how="any").values
    if len(data) == 0:
        raise ValueError("Aucune donnée disponible après filtrage des années communes.")
    T = len(data)
    n_blocks = T
    subsample_means = []
    for start in range(n_blocks):

```

```

        idx = np.arange(start, start + H) % T
        block = data[idx]
        weighted_mean = (block @ weights).mean()
        subsample_means.append(weighted_mean)
        subsample_means = np.array(subsample_means)
        h_minus = np.sum(subsample_means <= (rho - lam))
        h_plus = np.sum(subsample_means >= (rho + lam))
        return (1 / (1 + gamma)) * (1 - h_minus / n_blocks + gamma * h_plus /
n_blocks)

#

# Cornish-Fisher approximation
#

def cornish_fisher_z(z, mu2, mu3, mu4, T, sign='+'):
    std = np.sqrt(mu2)
    skew = mu3 / (std ** 3)
    excess_kurt = mu4 / (mu2 ** 2) - 3
    term1 = (z**2 - 1) * skew / (6 * np.sqrt(T))
    term2 = (z**3 - 3 * z) * excess_kurt / (24 * T)
    term3 = (2 * z**3 - 5 * z) * (skew**2) / (36 * T)
    return z + term1 + term2 - term3 if sign == '+' else z - term1 + term2 -
term3

def ggbp_cf(mu1, mu2, mu3, mu4, H=15, rho=0.03, lam=0.02, gamma=0.6, x=0.05):
    std = np.sqrt(mu2)
    z = norm.ppf(1 - x)
    z_minus = cornish_fisher_z(z, mu2, mu3, mu4, H, sign='-')
    z_plus = cornish_fisher_z(z, mu2, mu3, mu4, H, sign='+')
    sigma_minus = std * (z_minus / z) / np.sqrt(H)
    sigma_plus = std * (z_plus / z) / np.sqrt(H)
    probb_shortfall = norm.cdf((rho - lam - mu1) / sigma_minus)
    probb_gain = norm.cdf((mu1 - rho - lam) / sigma_plus)
    return (1 / (1 + gamma)) * (1 - probb_shortfall + gamma * probb_gain)

#

# Modified Sharpe Ratio (MSR) via Cornish-Fisher
#

def modified_sharpe_ratio(mu1, mu2, mu3, mu4, rf=0.0, alpha=0.975):
    sigma = np.sqrt(mu2)
    if sigma <= 0:

```

```

        return np.nan
    skew = mu3 / sigma**3
    excess_kurt = mu4 / sigma**4 - 3
    z_alpha = norm.ppf(alpha)
    z_cf = (z_alpha
            + (1/6)*(z_alpha**2 - 1)*skew
            + (1/24)*(z_alpha**3 - 3*z_alpha)*excess_kurt
            - (1/36)*(2*z_alpha**3 - 5*z_alpha)*skew**2)
    var_cf = -(mu1 + sigma * z_cf)
    return (mu1 - rf) / abs(var_cf) if var_cf != 0 else np.nan

#
#
# Calculs principaux de scores
#
def compute_scores(df_log_returns, df_stats, df_results, H=15, rho=0.03,
lam=0.02, gamma=0.6, benchmark=0.10):
    df_results = df_results.copy()
    df_results["hGGBP"] = pd.NA
    df_results["Historique_étendue"] = pd.NA
    df_results["SR"] = pd.NA
    df_results["MSR"] = pd.NA
    confidence_levels = [0.05, 0.025, 0.01]
    for x in confidence_levels:
        df_results[f"CF_{int((1 - x) * 100)}"] = pd.NA

    for idx, row in df_results.iterrows():
        if not row.get("Optimisation OK", False):
            continue
        selected_assets = [a for a in df_log_returns.columns if a in row.index
and isinstance(row[a], (int, float)) and row[a] != 0]
        weights = [row[a] for a in selected_assets]
        if not weights:
            continue
        years = get_common_years(df_log_returns, selected_assets)
        print(f"Univers '{row.get('Univers', idx)}' : {len(years)} années
communes.")
        if len(years) == 0:
            continue
        try:
            df_results.at[idx, "hGGBP"] = ggbp_bootstrap(weights,
df_log_returns[selected_assets], years, H, rho, lam, gamma)
            df_results.at[idx, "Historique_étendue"] =
ggbp_extended_historical(weights, df_log_returns[selected_assets], years, H,
rho, lam, gamma)
        except Exception as e:

```

```

        print(f"Erreur GGBP pour {row.get('Univers', idx)} : {e}")

    try:
        mu1 = np.sum([row[a] * df_stats.at["mean", a] for a in
selected_assets])
        mu2 = np.sum([row[a]**2 * df_stats.at["std", a]**2 for a in
selected_assets])
        mu3 = np.sum([row[a]**3 * df_stats.at["biased_skew", a] *
df_stats.at["std", a]**3 for a in selected_assets])
        mu4 = np.sum([row[a]**4 * df_stats.at["biased_kurt", a] *
df_stats.at["std", a]**4 for a in selected_assets])
        sigma = np.sqrt(mu2)

        if sigma > 0:
            sharpe = (mu1 - benchmark) / sigma
            df_results.at[idx, "SR"] = sharpe
            df_results.at[idx, "MSR"] = modified_sharpe_ratio(mu1, mu2,
mu3, mu4, rf=benchmark, alpha=0.95)

            for x in confidence_levels:
                label = f"CF_{int((1 - x) * 100)}"
                df_results.at[idx, label] = ggbp_cf(mu1, mu2, mu3, mu4, H,
rho, lam, gamma, x)
            except Exception as e:
                print(f"Erreur moments/Sharpe pour {row.get('Univers', idx)} :
{e}")

    return df_results

#
# Affichage
#
def display_scores_table(df_results):
    """
    Affiche les scores GGBP et Cornish-Fisher pour chaque univers.

    Args:
        df_results (pd.DataFrame): Résultats enrichis avec les scores.

    Returns:
        pd.DataFrame: Tableau filtré contenant uniquement les scores, avec '-'
pour les valeurs manquantes.
    """
    score_cols = ["hGGBP", "CF_95", "CF_97", "CF_99", "Historique_étendue",
"SR", "MSR"]

    df_scores = (

```

```

        df_results.set_index("Univers")[score_cols]
        if "Univers" in df_results.columns
        else df_results[score_cols]
    )

df_scores = df_scores.round(4).fillna("-")

print("\n Tableau des scores et ratios :\n")
print(df_scores)

return df_scores

```

#### H. Markowitz.py

```

import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import minimize

def load_annual_returns_from_excel(excel_path, sheet_name="AnnualLogReturns"):
    df = pd.read_excel(excel_path, sheet_name=sheet_name, index_col=0)
    df = df.applymap(lambda x: str(x).replace(',', '.')) if pd.notnull(x) else
x)
    df = df.apply(pd.to_numeric, errors='coerce')
    stats_rows = ['mean', 'std', 'biased_skew', 'biased_kurt', 'median',
'max', 'min']
    df_clean = df.loc[~df.index.astype(str).str.lower().isin(stats_rows)]
    return df_clean.dropna(how='all')

def efficient_frontier_optimization(returns_df, points=100):
    mean_returns = returns_df.mean()
    N = len(returns_df)
    cov_matrix = returns_df.cov() * (N - 1) / N # version biaisée
    num_assets = len(mean_returns)

    def portfolio_variance(weights):
        return weights.T @ cov_matrix @ weights

    constraints = [{'type': 'eq', 'fun': lambda w: np.sum(w) - 1}]
    bounds = tuple((0, 1) for _ in range(num_assets))

    min_return = mean_returns.min()
    max_return = mean_returns.max()
    target_returns = np.linspace(min_return, max_return, points)

    raw_points = []

```

```

    for target in target_returns:
        constraints_with_return = constraints + [{'type': 'eq', 'fun': lambda
w, target=target: np.dot(w, mean_returns) - target}]
        x0 = np.ones(num_assets) / num_assets
        res = minimize(portfolio_variance, x0, method='SLSQP', bounds=bounds,
constraints=constraints_with_return)
        if res.success:
            w = res.x
            ret = np.dot(w, mean_returns)
            vol = np.sqrt(portfolio_variance(w))
            raw_points.append((vol, ret, w))

    raw_points.sort(key=lambda x: x[0])
    efficient_points = []
    max_ret = -np.inf
    for vol, ret, w in raw_points:
        if ret > max_ret:
            efficient_points.append((ret, vol, w))
            max_ret = ret

    efficient_returns, efficient_volatility, efficient_weights =
zip(*efficient_points) if efficient_points else ([], [], [])
    return {
        'returns': efficient_returns,
        'volatility': efficient_volatility,
        'weights': efficient_weights
    }

def plot_efficient_frontier(ax, returns_df, efficient_frontier,
title="Frontière efficiente", hama_point=None, hama_params=None):
    mean_returns = returns_df.mean()
    N = len(returns_df)
    cov_matrix = returns_df.cov() * (N - 1) / N # version biaisée
    risks = np.sqrt(np.diag(cov_matrix))
    assets_returns = mean_returns.values

    ax.scatter(risks, assets_returns, marker='o', color='blue', label='Actifs
Individuels')
    ax.plot(efficient_frontier['volatility'], efficient_frontier['returns'],
'r--', linewidth=2, label='Frontière Efficiente')

    if hama_point:
        ax.scatter(hama_point[0], hama_point[1], color='orange', marker='*',
s=120, label='Portefeuille HAMA')

    if hama_params:
        greek_map = {
            'lambda': 'λ',

```



```

        'gamma': 'γ',
        'omega': 'ω',
        'H': 'H' # garder 'H' ou adapter si besoin
    }
    # Construire un texte multi-lignes avec lettres grecques et
    arrondir à 3 décimales
    param_lines = [f"{greek_map.get(k, k)} = {v:.3f}" for k, v in
hama_params.items()]
    param_str = "\n".join(param_lines)

    # Positionner texte dans le coin supérieur droit, en coordonnées
    axes (0-1)
    ax.text(
        0.95, 0.95, param_str,
        transform=ax.transAxes,
        verticalalignment='top',
        horizontalalignment='right',
        fontsize=8,
        bbox=dict(boxstyle='round,pad=0.4', facecolor='white',
alpha=0.7, edgecolor='gray')
    )

    ax.set_xlabel(r"$\sigma$")
    ax.set_ylabel(r"$\mu_p$")
    ax.set_title(title)
    ax.legend(fontsize=8)
    ax.grid(True)

def plot_all_efficient_frontiers(excel_path, universes, hama_results_df,
hama_params, sheet_name="AnnualLogReturns"):
    returns_df = load_annual_returns_from_excel(excel_path,
sheet_name=sheet_name)
    n = len(universes)
    ncols = 3
    nrows = (n + ncols - 1) // ncols

    fig, axes = plt.subplots(nrows=nrows, ncols=ncols, figsize=(5 * ncols, 5 *
nrows))

    if nrows == 1 and ncols == 1:
        axes = np.array([axes])
    elif nrows == 1 or ncols == 1:
        axes = axes.reshape(-1)
    else:
        axes = axes.flatten()

    for i, (univ_name, assets) in enumerate(universes.items()):
        data_univ = returns_df[assets].dropna(how='all')

```

```

    ef = efficient_frontier_optimization(data_univ, points=100)

    hama_point = None
    hama_row = hama_results_df[hama_results_df["Univers"] == univ_name]

    if not hama_row.empty:
        try:
            mu = float(hama_row["Espérance rendement"].values[0])
            sigma = float(hama_row["Volatilité approx"].values[0])
            hama_point = (sigma, mu)
        except:
            pass

    plot_efficient_frontier(
        axes[i],
        data_univ,
        ef,
        title=univ_name,
        hama_point=hama_point,
        hama_params=hama_params
    )

for j in range(i + 1, len(axes)):
    fig.delaxes(axes[j])

plt.tight_layout()
plt.show()

```

### Annexe 3 : Faisabilité des portefeuilles dans le cadre Mental Accounting (MA)

Dans le cadre du modèle MA, la faisabilité d'un portefeuille repose sur la possibilité de satisfaire simultanément trois contraintes : un seuil de rendement  $H$ , une probabilité maximale d'échec  $\alpha$ , et une structure d'actifs caractérisée par le vecteur des rendements espérés  $\mu \in \mathbb{R}^n$  et la matrice de covariance  $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Le problème MA possède une solution atteignable quand l'inégalité suivante est respectée :

$$H \leq w^T \mu + \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{w^T \Sigma w} \quad (20)$$

Cette condition traduit l'exigence que la perte en excès du seuil  $H$  ne dépasse pas la probabilité maximale d'échec définie par l'investisseur. Un moyen de savoir si une solution atteignable existe est de maximiser le membre de droite de l'équation (20) et de vérifier s'il devient supérieur à  $H$  :

$$\max_w Q(w) = w^T \mu + \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{w^T \Sigma w} \quad s. c. \quad w^T \mathbf{1} = 1 \quad (21)$$

Le Lagrangien de ce problème d'optimisation est donné par :

$$\max_{w, \lambda} Q(w) = w^T \mu + \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{w^T \Sigma w} + \lambda [1 - w^T \mathbf{1}] \quad (22)$$

Ce problème admet les conditions de premier ordre suivante :

$$\frac{\partial Q}{\partial w} = \mu + \Phi^{-1}(\alpha)[w^T \Sigma w]^{-1/2} \Sigma w - \lambda \mathbf{1} = 0 \quad (23)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \lambda} = 1 - w^T \mathbf{1} = 0 \quad (24)$$

En prémultipliant chacun des termes de l'équation (23) par  $\Sigma^{-1}$  et en posant  $[w^T \Sigma w]^{-1/2} \equiv M$ , cette équation s'écrit :

$$\lambda \Sigma^{-1} \mathbf{1} = \Sigma^{-1} \mu + \Phi^{-1}(\alpha) M w \quad (25)$$

$$\lambda \mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1} = \mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mu + \Phi^{-1}(\alpha) M \mathbf{1}^T w \quad (26)$$

En tenant maintenant compte de la contrainte d'investissement total ( $\mathbf{1}^T w = 1$ ), l'expression de  $\lambda$  devient :

$$\lambda = \frac{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mu + \Phi^{-1}(\alpha) M}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}} \quad (27)$$

Cette expression de  $\lambda$  peut maintenant être substituée dans l'équation (25) afin d'obtenir une équation pour les poids du portefeuille :

$$w = \frac{1}{\Phi^{-1}(\alpha) M} \Sigma^{-1} \left[ \mu - \left( \frac{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mu + \Phi^{-1}(\alpha) M}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}} \right) \mathbf{1} \right] \quad (28)$$

Cependant, cette expression dépend implicitement de  $M$ , lui-même défini en fonction de  $w$  via  $M \equiv [w^T \Sigma w]^{-1/2}$ . L'équation (28) devient ainsi un système d'équations implicites non linéaires qu'il est nécessaire de résoudre numériquement.

Une fois les poids  $w$  obtenus, ils peuvent être insérés dans la fonction objectif  $Q \equiv w^T \mu + \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{w^T \Sigma w}$ . Le problème est alors faisable si et seulement si  $Q(w) > H$ . Dans le cas contraire, aucun portefeuille réalisable avec les actifs disponibles ne satisfait simultanément les contraintes de seuil et de probabilité fixées. L'investisseur doit alors soit réduire ses exigences en baissant  $H$  ou en augmentant  $\alpha$ , soit élargir son univers d'investissement.

#### Annexe 4 : relations MA entre les paramètres $\alpha$ et $\gamma$ pour 4 niveaux de seuils différents

Afin de saisir l'importance des paramètres et de mettre en exergue les portefeuilles efficients au sens MA, les auteurs de l'article (Das, Markowitz, Scheid and Statman, 2010) ont représentés les relations entre les paramètres  $\alpha$  et  $\gamma$  pour 4 niveaux de seuils différents (Figure 12).

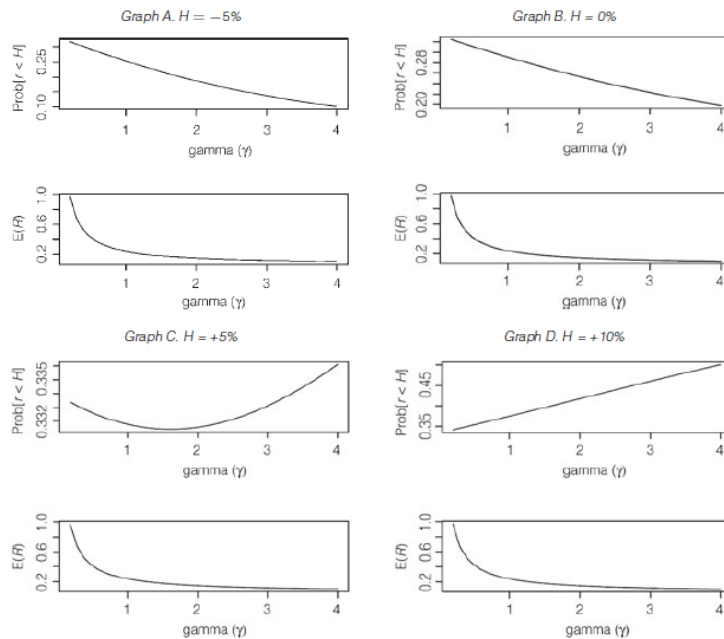


Figure 12 - Evolution de  $\alpha$  en fonction du coefficient  $\gamma$  pour les seuils de -5%, 0%, 5% et 10%.

Sur la Figure 12, il apparaît de manière claire que pour un seuil de -5%, tant la probabilité de ne pas atteindre le seuil fixé que l'espérance de rendement décroissent à mesure que le coefficient d'aversion au risque augmente. Un constat identique peut être fait pour le seuil de 0%. Dans le cas des 2 graphiques illustrant le seuil de 10%, une augmentation de  $\gamma$  mène à une augmentation de  $\alpha$  tout en diminuant l'espérance de rendement. Or du point de vue des investisseurs MA, une augmentation de la probabilité de ne pas atteindre le seuil doit être compensée par une augmentation du rendement espéré. Cette condition n'étant pas respectée, le portefeuille le plus à gauche du graphique domine tous les autres et est l'unique composant de la frontière efficiente. Vient enfin le cas du seuil de 5% pour lequel la probabilité de ne pas l'atteindre commence par décroître avec  $\gamma$  pour finalement réaugmenter. En suivant le même principe qu'énoncé au cas précédent, la frontière efficiente est composée de tous les portefeuilles pour lesquels la probabilité  $\alpha$  décroît avec lorsque le coefficient d'aversion augmente. Les portefeuilles sont en effet tous dominés.

La Figure 13 ci-dessous représente les frontières MA pour 3 niveaux de seuils différents. En abscisse se trouve la probabilités  $\alpha$  de ne pas atteindre le seuil fixé, et en ordonné l'espérance de rendement. 3 frontières sont représentées, liées à des seuils différents. A savoir de bas en haut : -5%, -10% et -15%. Plus le seuil est élevé, plus la frontière se déplace vers le haut. De plus l'espérance de gain augmente à mesure que la probabilité de ne pas atteindre le seuil grandit. Ainsi plus  $H$  diminue et plus la frontière se déplace vers la droite.

Les trois comptes mentaux obtenus dans ce chapitre ont ensuite été représentés sur ce graphique (Das, Markowitz, Scheid and Statman, 2010). Le point le plus à gauche sur la frontière intermédiaire représente le couple  $(H, \alpha) = (-10\% ; 0.05)$ . Le second point illustre le couple  $(H, \alpha) = (-5\% ; 0.15)$  et le troisième point le plus à droite le couple  $(H, \alpha) = (-15\% ; 0.20)$ . Soulignons que bien que ces portefeuilles résident sur des frontières MA distinctes du fait de seuils de rendement différenciés, nous avons vu précédemment qu'ils appartiennent tous à la frontière efficiente de Markowitz dans l'espace moyenne-variance. Cela révèle une correspondance de type « un-à-plusieurs » et vice-versa entre ces deux espaces. Pour illustrer ce phénomène plus numériquement, il suffit de se référer au **Error! Reference source not found.** Ce tableau montre par exemple que le portefeuille « éducation », qui

n'occupait qu'un seul emplacement sur la frontière efficiente MVT, est associée à une infinité de combinaison  $(H, \alpha)$ .

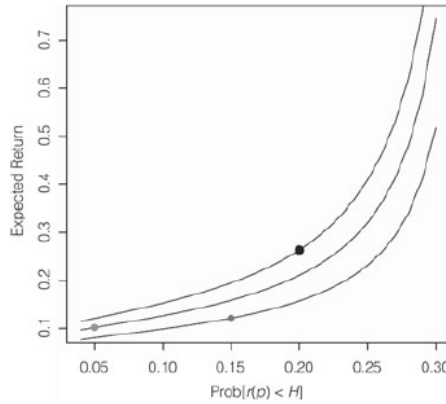


Figure 13 - Frontières MA pour les seuils suivants (de bas en haut) : -5% ; -10% et -15%.

## Annexe 5

### A. L'optimisation canonique MVT

Dans ce chapitre, les auteurs reformulent le problème canonique de Markowitz en remplaçant l'approche contrainte par une formulation équivalente faisant apparaître le coefficient d'aversion au risque  $\gamma$ . Plutôt que de minimiser la variance pour un niveau de rendement attendu donné, ils considèrent un problème équivalent suivant :

$$\max_{w \in \mathbb{R}^n} w^T \mu - \frac{\gamma}{2} w^T \Sigma w \quad s. c. \quad w^T \mathbf{1} = 1 \quad (14)$$

Où  $w \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur des poids du portefeuille (somme à 1),  $\mu \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur des espérances de rendement,  $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est la matrice de covariance des rendements,  $\gamma > 0$  est le coefficient d'aversion au risque,  $\mathbf{1}$  est le vecteur colonne de dimension  $n$  composé uniquement de 1.

La solution analytique de ce problème d'optimisation peut être obtenue au moyen de la méthode du Lagrangien. Ce qui mène à la solution suivante :

$$w = \frac{1}{\gamma} \Sigma^{-1} \left[ \mu - \left( \frac{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mu - \gamma}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}} \right) \mathbf{1} \right] \in \mathbb{R}^n \quad (15)$$

Cette formulation analytiquement explicite permet de tracer aisément la frontière efficiente en faisant varier le paramètre  $\gamma$ , chaque valeur correspondant à un portefeuille optimal différent selon l'aversion au risque.

### B. Équivalence mathématique entre MA et MVT

Cette section établit une équivalence formelle entre le cadre classique de l'optimisation moyenne-variance (MVT) et celui des comptes mentaux (MA). Sous l'hypothèse de rendements normalement distribués, la contrainte  $\mathbb{P}(r(w) < H) \leq \alpha$  peut être exprimée de la manière suivante :

$$H \leq w(\gamma)^T \mu + \Phi^{-1}(\alpha) [w(\gamma)^T \Sigma w(\gamma)]^{\frac{1}{2}} \quad (16)$$

Où  $\Phi^{-1}$  est la fonction quantile de la loi normale standard. Le but de l'investisseur étant la recherche de l'optimalité, cette équation rencontre l'égalité suivante :

$$H = w(\gamma)^T \mu + \Phi^{-1}(\alpha) [w(\gamma)^T \Sigma w(\gamma)]^{\frac{1}{2}} \quad (17)$$

Avec,

$$w = \frac{1}{\gamma} \Sigma^{-1} \left[ \mu - \left( \frac{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mu - \gamma}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}} \right) \mathbf{1} \right] \in \mathbb{R}^n \quad (18)$$

En substituant l'équation (18) dans l'équation (17), il est aisé d'identifier un coefficient d'aversion au risque implicite  $\gamma$  directement fonction du couple  $(H, \alpha)$ . Le problème d'optimisation de portefeuille est ainsi entièrement défini par la connaissance de ce couple. Comme mentionné dans les chapitres précédents et au cœur de la théorie BPT, les investisseurs conçoivent leurs portefeuilles en différentes couches, chacune associée à un couple  $(H; \alpha)$  qui lui est propre. De cette manière, il définit enfaite implicitement son coefficient d'aversion au risque  $\gamma$  vis-à-vis de l'univers des actifs  $(\mu; \Sigma)$ . Le coefficient d'aversion implicite peut alors être exprimé comme une fonction de mapping :

$$\gamma = \gamma(\mu, \Sigma; H, \alpha) \quad (19)$$

Cette fonction lie directement les préférences exprimées par l'investisseur sous forme de seuil et de tolérance à l'échec (MA) aux préférences exprimées sous forme d'aversion au risque dans le cadre productionniste MVT. L'existence d'une telle correspondance valide la compatibilité structurelle entre les deux approches.

## Annexe 6

### GARCH effects and extending the HMA to non i.i.d case

Le cadre HMA présenté jusqu'ici repose sur l'hypothèse de rendements i.i.d., facilitant le traitement analytique mais limitant la pertinence empirique. En pratique, de nombreux actifs financiers présentent une volatilité conditionnelle variable dans le temps et des effets GARCH<sup>9</sup> (Bollerslev, 1987).

Afin de généraliser le modèle HMA, considérons la dynamique de rendement suivante :

$$r_t = \mu + \varepsilon_t \quad \text{avec} \quad \varepsilon_t = \sqrt{h_t} \eta_t \quad \text{et} \quad \eta_t \sim \mathcal{N}(0,1) \text{ i. i. d.}$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}$$

Avec  $h_t$  la variance conditionnelle de rendement. L'espérance et la variance conditionnelle de rendement moyen sur n périodes se notent :

$$E_t(\bar{R}^n) = n^{-1} \sum_{i=1}^n E_t(r_{t+i}) = \mu$$

<sup>9</sup> GARCH(1,1) signifie Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity(1,1). Ce modèle est un cas particulier du modèle GARCH plus général, où "1,1" indique que la variance conditionnelle à un instant t est influencée par la variance conditionnelle du temps t-1 (un décalage) et le carré de l'erreur du temps t-1 (un autre décalage).

$$Var_t(\bar{R}^n) = n^{-2} \sum_{i=1}^n E_t(h_{t+i}) \quad \text{avec} \quad E_t(h_{t+i}) = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta) E_t(h_{t+i-1})$$

Sous la condition de stationnarité  $(\alpha_1 + \beta) < 1$ , la variance conditionnelle converge vers une valeur de long terme  $V_L = \alpha_0 / (1 - \alpha_1 - \beta)$  à mesure que  $n$  augmente, avec une vitesse déterminée par  $(\alpha_1 + \beta)$ . Suivant ces équations, la condition de shortfall du modèle HMA pour un actif financier suivant un modèle GARCH(1,1) peut être exprimée comme suit :

$$\mathbb{P}(\bar{R}^H \leq \mu - \lambda) \leq \Omega \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}\left(\frac{\bar{R}^H - \mu}{\sigma_H} \leq \frac{-\lambda}{\sigma_H}\right) \leq \Omega \quad (38)$$

Avec  $\sigma_H = Var_t(\bar{R}^H)^{1/2} = H^{-1} [\sum_{i=1}^H E_t(h_{t+i})]^{1/2}$  étant l'écart-type conditionnel du rendement moyen pour un horizon  $H$ . Si les rendements sont normalement distribués, le problème de l'horizon/risque de l'équation (38) se réduit à déterminer le plus petit horizon  $H$  qui est tel que

$$\mathbb{P}\left(\frac{\bar{R}^H - \mu}{\sigma_H} \leq \frac{-\lambda}{\sigma_H}\right) \leq \Omega \quad \Leftrightarrow \quad N^{-1}\left(\frac{-\lambda}{\sigma_H}\right) \leq \Omega \quad (39)$$

Le problème revient donc à résoudre une contrainte de shortfall HMA exprimée en termes de rendements normalisés par leur volatilité conditionnelle moyenne, ce qui est naturellement cohérent avec le traitement non-i.i.d.

### Illustration et impact sur le classement du risque

Considérons les deux portefeuilles déjà présentés au *Tableau 1*. Considérons maintenant des profils de rendement caractérisés par un modèle GARCH(1,1) avec une vitesse de convergence de  $\alpha_1 + \beta = 0,95$  (*lent*) pour le portefeuille A et 0,75 (*rapide*) pour le portefeuille B. La variance long terme est considérée est 0,005 et implique  $\alpha_0 = 0.00025$ . Le Tableau 21 ci-dessous met en évidence un renversement complet des préférences sur un horizon de 5 ans avec la probabilité de shortfall du portefeuille B maintenant plus faible que celle du portefeuille A (4,85% vs 5,44%).

Horizon	Portfolio A			Portfolio B		
	cond. vol of returns $\sqrt{h_t}$	cond. vol of mean returns $\sigma_{H_m,t}$	shortfall probability	cond. vol of returns $\sqrt{h_t}$	cond. vol of mean returns $\sigma_{H_m,t}$	shortfall probability
1	6.00%	6.00%	22.66%	15.00%	15.00%	29.69%
5	6.57%	2.81%	5.44%	7.29%	4.82%	4.85%
10	7.01%	2.08%	1.54%	7.07%	2.88%	0.28%
30	7.07%	1.26%	0.02%	7.07%	1.43%	0.00%
40	7.07%	1.10%	0.00%	7.07%	1.21%	0.00%

Tableau 21 - Evolution non-i.i.d des variances conditionnelles et des probabilités de shortfall pour les deux portefeuilles A et B sous un modèle GARCH(1,1).

Ce renversement de classement met en évidence l'intérêt d'introduire explicitement l'horizon dans l'analyse du risque : le même actif peut apparaître plus ou moins risqué selon le  $H$  considéré. Dans un contexte non-i.i.d., l'horizon devient un paramètre d'autant plus important dans la hiérarchisation des portefeuilles. Ainsi, l'extension du HMA au cas non-i.i.d. par un modèle GARCH démontre que la prise en compte de l'horizon est d'autant plus cruciale lorsque la volatilité est dynamique et négligé cet aspect reviendrait sans doute à une dégradation de l'utilité de l'investisseur.

## Annexe 7 : Mapping into the expected power utility criterion

Dans cette sous-section, nous comparons HMA à l'approche comportementale de sélection de portefeuille proposée par Stutzer (2003), connue sous le nom de *decay rate approach*, qui repose sur la minimisation de la probabilité de shortfall en dessous d'un taux de rendement cible  $r$ , avec une analogie formelle à la maximisation d'une fonction d'utilité sous forme de puissance (*expected power utility*).

L'approche de Stutzer repose sur l'idée que les investisseurs préfèrent les portefeuilles qui minimisent la probabilité que le taux de croissance logarithmique de leur richesse tombe en dessous d'un niveau cible  $\log(r)$ . En contexte de rendements i.i.d., cette probabilité de shortfall décroît exponentiellement avec l'horizon. Le critère proposé consiste donc à maximiser le taux de décroissance de cette probabilité, ce qui revient à résoudre :

$$\arg \max_p D_p(\log(r)) \equiv \arg \max_p \frac{1}{2} \left( \frac{E[R_p] - \log(r)}{\sqrt{\text{Var}[R_p]}} \right)^2 \quad (36)$$

Ce critère intègre de manière implicite un comportement horizon-indépendant, contrairement au modèle HMA où le shortfall est directement contraint à un horizon donné  $H_m$ . Ainsi, si HMA est conçu pour garantir une probabilité négligeable de shortfall à un horizon fini, le modèle de Stutzer optimise la vitesse à laquelle cette probabilité converge vers zéro à horizon infini.

Stutzer (2003) montre que l'optimisation du *decay rate* est mathématiquement équivalente à la maximisation de l'espérance d'une fonction d'utilité puissance endogène. Le coefficient d'aversion au risque implicite est obtenu au départ du portefeuille optimal via l'équation suivante (Stutzer, 2003) :

$$\text{Aversion au risque} \equiv 1 - \theta_{\max}(p) = 1 - \frac{\log(r) - E[R_p]}{\text{Var}[R_p]} \quad (37)$$

Où  $\theta_{\max}(p) < 0$  assure la convexité de l'utilité et reflète une préférence pour les distributions positivement asymétriques. Au contraire de la méthode HMA qui ne postule pas de préférence sur les moments.

### Comparaison avec HMA

Le modèle HMA partage plusieurs caractéristiques avec l'approche de Stutzer : il repose également sur une contrainte de shortfall et permet d'inférer un coefficient d'aversion au risque à partir de préférences intuitives. Toutefois, deux distinctions majeures subsistent :

- **Temporalité** : HMA modélise explicitement un horizon d'investissement  $H_m$ , et optimise sous contrainte probabiliste à cet horizon, alors que le *decay rate* optimise asymptotiquement sans horizon prédéfini.
- **Neutralité aux moments** : HMA reste agnostique sur les préférences en termes de moments supérieurs (asymétrie, kurtosis), contrairement à l'approche de Stutzer qui, par construction, induit une préférence pour les portefeuilles positivement asymétriques.

### Exemple numérique

Pour illustrer la relation entre le modèle HMA et le critère de *decay rate* de Stutzer (2003), considérons un univers d'investissement composé d'un actif risqué (rendement espéré de 15 %, volatilité de 25 %) et d'un actif sans risque (rendement de 3 %). L'investisseur cible un rendement de 5 %.



L'optimisation du taux de décroissance de la probabilité de shortfall conduit à un portefeuille optimal allouant 85,27 % à l'actif risqué (Figure 14). Ce portefeuille minimise la probabilité de ne pas atteindre 5 %, et ce à tout horizon. Par exemple, il faut environ 19 ans pour que cette probabilité descende sous un seuil de 10 %. Ce portefeuille est donc aussi sélectionné par un investisseur HMA ayant pour préférences  $(\Omega = 10\% ; \lambda = 5,78\% ; H = 19)^{10}$ , ce qui établit un mapping direct du paramètre  $r$  vers le triplet  $(\lambda ; H ; \Omega)$ . La solution optimale au sens Decay Rate sera également choisie pour un une tolérance de 5% sur un horizon de 30 ans. Ce résultat montre que pour un niveau cible de  $r = 5\%$ , il existe un unique  $\lambda^*$  et une infinité de couples admissibles  $(H^*, \Omega^*)$  pour lesquels le portefeuille optimal HMA coïncide avec celui issu du critère de Stutzer. La formule d'aversion au risque issue du modèle à utilité puissance donne ici un coefficient de 1,89 identique à l'ensemble de ces portefeuilles.

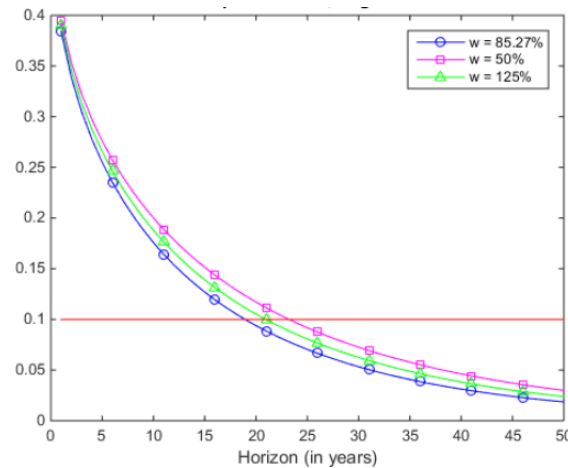


Figure 14 - Probabilités de shortfall pour un rendement de 5%

Cependant, la réciproque ne tient pas toujours. Prenons un investisseur HMA avec  $(\Omega = 10\%, \lambda = 4\%, H = 15)$ . Son portefeuille optimal implique une part de 52,56 % en actif risqué et un rendement log moyen de 8,16 %, soit une cible implicite  $r = 7,42\%^{11}$ . Or, l'optimisation par decay rate avec cette cible recommande une allocation bien plus risquée (126 % en actif risqué). Aucune combinaison  $(H, \Omega)$  compatible avec  $\lambda = 4\%$  ne permet de retrouver cette allocation dans le cadre de Stutzer (2003). Cette non-correspondance s'explique par le fait que dans HMA, les préférences en horizon et tolérance sont indépendantes. Contrairement au critère de décroissance.

Un second exemple confirme cette limitation. Un investisseur HMA avec  $(\Omega = 5\%, \lambda = 1\%, H = 10)$  détient seulement 8,36 % d'actif risqué. Son rendement log espéré est de 3,88 %, soit une cible  $r = 2,92\%$ , inférieure au taux sans risque. L'approche de Stutzer ne peut générer un tel portefeuille car son ensemble de portefeuilles admissibles est borné inférieurement par le rendement de l'actif sans risque (3 %). Ce qui n'est pas suffisant que pour couvrir l'ensemble des portefeuilles optimaux au sens HMA.

Ces exemples montrent que le modèle HMA **englobe** l'approche par decay rate, tout en offrant une **flexibilité supérieure**. Il permet de spécifier les préférences selon  $(H, \Omega, \lambda)$  sans reposer sur une quelconque fonction d'utilité. À l'inverse, l'approche de Stutzer repose sur une hypothèse implicite d'utilité puissance et ne permet pas de dissocier horizon et tolérance, limitant ainsi la diversité des allocations optimales qu'elle peut représenter.

<sup>10</sup>  $\lambda = E[R_p] - \log(r) = 5,78\%$ .

<sup>11</sup>  $r = \exp(E[R_p] - \lambda) - 1$

## Annexe 8 : HMA : Correspondance avec le cadre moyenne-variance (MVT)

L'une des forces du modèle de comptabilité mentale proposé par Das et al. (2010) réside dans sa capacité à établir un lien explicite entre les préférences comportementales des investisseurs et le cadre classique de Markowitz (1952), en particulier lorsque les rendements sont supposés normaux et que l'utilité est quadratique. Dans ce cadre, la contrainte de probabilité de shortfall définie sur chaque compte mental peut être réinterprétée comme une contrainte de variance, permettant ainsi une reformulation en termes de coefficient d'aversion au risque.

Le modèle HMA enrichit la cartographie du modèle MA cartographie en intégrant l'horizon d'investissement  $H_m$  dans le triplet de préférences  $(H_m; \lambda_m; \Omega_m)$ . Sous l'hypothèse d'une fonction d'utilité quadratique et de manière analogue aux développements opérés pour l'équation (28), la résolution du problème d'optimisation en passant par la méthode du Lagrangien donne la solution suivante pour les poids optimaux :

$$w = \frac{1}{1 + \Lambda} \Sigma^{-1} \left[ \mu + 0,5\Gamma - \left( \frac{\mathbf{1}^{T-1}[\mu + 0,5\Gamma] - (1 + \Lambda)}{\mathbf{1}^{T-1}\mathbf{1}} \right) \mathbf{1} \right] \quad (31)$$

Avec  $\Gamma$  un vecteur contenant les éléments diagonaux de  $\Sigma$  et  $(1 + \Lambda)$  le coefficient d'aversion au risque. La forme légèrement différente de l'équation (30) vis-à-vis de l'équation (29) provient de l'ajustement opéré pour travailler avec les rendements logarithmiques des portefeuilles.

Toujours de façon analogue au chapitre sur la théorie MA, l'hypothèse de normalité de la distribution des rendements logarithmiques permet d'écrire la contrainte de la manière suivante :

$$\rho_m \leq \mathbb{E}[R_p] + \Phi^{-1}(\Omega_m) \text{Var}[R_p] \quad (32)$$

$$\Leftrightarrow \rho_m \leq w(\Lambda)^T \mu + 0,5w(\Lambda)^T (\Gamma - \Sigma w(\Lambda)) + \Phi^{-1}(\Omega_m) \sqrt{w(\Lambda)^T \Sigma w(\Lambda)} \quad (33)$$

Connaissant le couple  $(\rho_m; \Omega_m)$ , il est ensuite possible de déterminer le coefficient d'aversion au risque implicite simplement en substituant l'équation (31) dans l'équation (33).

Considérons maintenant le cas spécifique du modèle HMA pour lequel la contrainte de shortfall s'exprime selon l'équation (30). L'équation (33) s'en trouve modifiée et un terme  $H_m^{-1/2}$  prémultipliant l'écart-type du rendement logarithmique du portefeuille.

$$\rho_m \equiv \mathbb{E}[R_p] - \lambda_m \leq w(\Lambda)^T \mu + 0,5w(\Lambda)^T (\Gamma - \Sigma w(\Lambda)) + \Phi^{-1}(\Omega_m) \mathbf{H}_m^{\frac{1}{2}} \sqrt{w(\Lambda)^T \Sigma w(\Lambda)} \quad (34)$$

Il convient de noter que ce résultat est obtenu en exploitant l'hypothèse d'ergodicité, à savoir que  $\mathbb{E}[\bar{R}_p^{H_m}] = \mathbb{E}[R_p]$ . Il est intéressant de remarquer que dans le cas particulier où  $H_m = 1$ , les équations (34) et (33) sont identiques et le coefficient d'aversion implicite est le même que dans le mapping MA.

Enfin, l'équation (34) peut à son tour est réarrangée pour obtenir :

$$\frac{-\lambda_m \sqrt{H_m}}{\Phi^{-1}(\Omega_m)} \geq \sqrt{w(\Lambda)^T \Sigma w(\Lambda)} \quad \text{pour} \quad \Omega_m < 0,5 \quad (35)$$

Cette inégalité signifie que la volatilité du portefeuille  $\sqrt{w(\Lambda)^T \Sigma w(\Lambda)}$  doit rester inférieure à une borne supérieure déterminée par les préférences de l'investisseur. Si la volatilité est trop élevée, le portefeuille est jugé excessivement risqué et donc inéligible. À l'inverse, si elle est inférieure à cette

borne, l'investisseur dispose d'une marge pour accroître l'exposition au risque et, potentiellement, le rendement attendu.

À l'optimum, cette contrainte est rencontrée : l'investisseur exploite entièrement sa tolérance au risque pour maximiser le rendement attendu. Cette borne permet ainsi d'inférer un coefficient d'aversion au risque (dans le cadre moyenne-variance) à partir du triplet  $(H_m ; \lambda_m ; \Omega_m)$ , rendant l'évaluation des préférences plus intuitive qu'une spécification directe du paramètre d'aversion au risque.

Enfin, cette relation met en évidence un effet fondamental du temps : plus l'horizon  $H_m$  est long, plus la borne sur la volatilité admissible est relâchée. Cela autorise des portefeuilles plus risqués et donc potentiellement plus rentables, ce qui se traduit par une aversion au risque implicite plus faible. En d'autres termes, dans le modèle HMA, l'horizon d'investissement est inversement corrélé au coefficient d'aversion au risque, une intuition que les auteurs Georges Hübner et Thomas Lejeune ont illustré par un exemple dans leur article (2017).