

---

## Ensembles de Delone et de Meyer : complexité locale et entiers algébriques.

**Auteur** : Oliveira Mota, Tiago

**Promoteur(s)** : Leroy, Julien

**Faculté** : Faculté des Sciences

**Diplôme** : Master en sciences mathématiques, à finalité approfondie

**Année académique** : 2025-2026

**URI/URL** : <http://hdl.handle.net/2268.2/25236>

---

### *Avertissement à l'attention des usagers :*

*Tous les documents placés en accès ouvert sur le site le site MatheO sont protégés par le droit d'auteur. Conformément aux principes énoncés par la "Budapest Open Access Initiative"(BOAI, 2002), l'utilisateur du site peut lire, télécharger, copier, transmettre, imprimer, chercher ou faire un lien vers le texte intégral de ces documents, les disséquer pour les indexer, s'en servir de données pour un logiciel, ou s'en servir à toute autre fin légale (ou prévue par la réglementation relative au droit d'auteur). Toute utilisation du document à des fins commerciales est strictement interdite.*

*Par ailleurs, l'utilisateur s'engage à respecter les droits moraux de l'auteur, principalement le droit à l'intégrité de l'oeuvre et le droit de paternité et ce dans toute utilisation que l'utilisateur entreprend. Ainsi, à titre d'exemple, lorsqu'il reproduira un document par extrait ou dans son intégralité, l'utilisateur citera de manière complète les sources telles que mentionnées ci-dessus. Toute utilisation non explicitement autorisée ci-avant (telle que par exemple, la modification du document ou son résumé) nécessite l'autorisation préalable et expresse des auteurs ou de leurs ayants droit.*

---



FACULTÉ DES SCIENCES  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE

---

# Ensembles de Delone et de Meyer : complexité locale et entiers algébriques.

---

Promoteur : Julien Leroy

**Oliveira Mota Tiago**

Mémoire de fin d'études présenté en vue de l'obtention du titre de  
*Master en Sciences Mathématiques, à finalité approfondie.*

Année 2025-2026



# Remerciements

Tout d'abord, je souhaite exprimer ma plus sincère gratitude envers mon promoteur, M. Julien Leroy, pour la patience, l'aide et la disponibilité dont il a fait preuve tout au long de ce travail et de mes années universitaires.

J'aimerais également remercier Mme Émilie Charlier, M. Arnout Van Messem ainsi que M. Jean-Pierre Schneiders d'avoir accepté de composer le jury et de me consacrer de leur temps.

Je remercie également Thomas Lamby de m'avoir supervisé lors de mon travail de fin de bachelier et pour les moments passés lors de ces années.

Un merci tout particulier à mon ami Simon Martin pour sa relecture, son soutien, ses conseils et, surtout, pour avoir égayé toutes ces années d'études par sa bienveillance et son humour.

J'aimerais aussi prendre un instant pour remercier mes amis. Je remercie Pauline et Lindsay pour leur soutien indéfectible et pour les moments partagés à leurs côtés, ainsi que Quentin et Jonathan pour tous les instants passés ensemble et pour leur bonne humeur contagieuse. Un grand merci aussi à Robin Mélot pour sa bonne disposition permanente et pour tous les rires.

Mes derniers remerciements se tournent vers ma famille. À Avò et Avô, pour leur soutien assidu et leurs appels constants lors de cette aventure. À mon papa et ma maman, de m'avoir aidé quotidiennement et pour leur soutien inconditionnel. À mes deux frères, Fabio et Diogo pour leur présence constante et pour leur complicité.



# Introduction

Au fil des années, la perception scientifique vis-à-vis des cristaux a connu plusieurs bouleversements. L'histoire de la science des cristaux débute au 18<sup>ème</sup> siècle avec l'ouvrage intitulé « *Essai d'une théorie sur la structure des cristaux* » de l'abbé René-Just Haüy. Avant cela, sur les structures cristallines, il n'existait que l'idée avant-gardiste de Kepler qui hypothétisait un ordre interne des atomes. Dès le début, en cristallographie mathématique, la croyance était que l'ordre des atomes d'une structure cristalline était nécessairement le fruit d'un remplissage périodique de l'espace. Dès lors, les notions de périodicité et d'ordre deviennent synonymes, des propriétés interchangeables.

Un cristal est un solide tel que l'agencement d'atomes, d'ions ou de molécules, forme un motif qui se répète périodiquement dans les 3 dimensions de l'espace. On appelle *maille élémentaire* d'un cristal le plus petit volume permettant de reconstruire par translation l'entièreté du cristal. Puisque les mailles doivent être adjacentes les unes aux autres, celles-ci doivent paver l'espace. En particulier, cela implique que les symétries rotationnelles admises par le recouvrement de l'espace par les mailles élémentaires sont celles de 60°, 90°, 120° et 180° degrés. Autrement dit, les seules symétries rotationnelles admises sont celles d'ordre 2, 3, 4 et 6, cette propriété est connue sous le nom de *restriction cristallographique* et sera au coeur du Chapitre 1.

Quelques décennies plus tard, dans les années 1910, le prix Nobel de physique Max von Laue publia la découverte de la diffraction des rayons X par les cristaux. Cette nouveauté permet de développer des techniques qui déterminent la structure du cristal. L'idée est d'envoyer une importante quantité de faisceaux de rayons X sur un échantillon du cristal et cela va produire une image constituée de taches de diffraction bien définies (voir Figure 1). À partir du cliché obtenu, il est possible de déterminer la structure atomique d'un matériau, notamment celle des cristaux. C'est ainsi que les physiciens ont pu confirmer que la structure atomique d'un cristal est périodique, comme conjecturée initialement. Dès lors, plusieurs milliers de cristaux ont été testés et l'intégralité de ces cristaux présentent un diagramme de diffraction constitué de taches de diffraction, aussi appelé *pics de Bragg*, et ces clichés constitués de pics de Bragg sont devenus la signature de périodicité. Le cliché obtenu pour un matériau amorphe, c'est-à-dire un matériau dont les atomes ne sont pas ordonnés, le cliché obtenu ne présente pas de pics de Bragg mais ressemble à une zone floue et diffuse. À cette période, les matériaux sont classés en deux catégories : les matériaux amorphes et les matériaux cristallins.

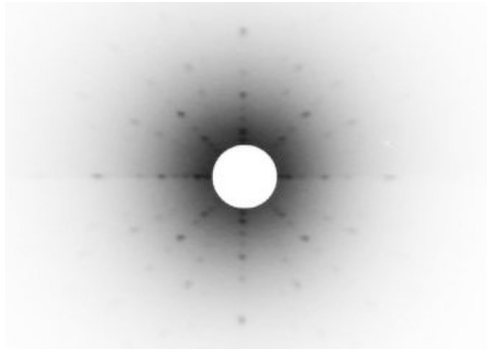


FIGURE 1 – Cliché d'un cristal cubique faisant apparaître un axe de rotation d'ordre 4.

En 1982, à l'occasion d'une année sabbatique à Washington, le physicien Dan Shechtman fit une découverte qui a remis en cause le lien entre la périodicité et les pics de Bragg. En effet, alors qu'il analysait plusieurs alliages métalliques<sup>1</sup>, il fit apparaître des pics de Bragg, synonyme de périodicité. Cependant, le diagramme de diffraction possédait une symétrie d'ordre 10 (voir Figure 2), une symétrie rotationnelle interdite par la cristallographie classique.

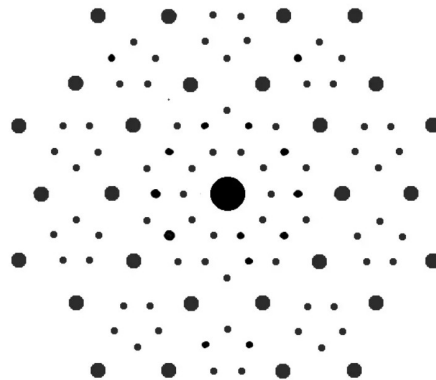


FIGURE 2 – Diagramme de diffraction ayant une symétrie rotationnelle d'ordre 10.

D.Shechtman en déduit alors que la présence de pics de Bragg n'est pas exclusivement due à la périodicité mais que celle-ci peut être due à un ordre à longue portée<sup>2</sup>, ce qui lui a valu le prix Nobel de chimie en 2011. En 1992, l'IUCr<sup>3</sup> change la définition du cristal : **Un cristal est tout solide possédant un diagramme de diffraction essentiellement discret.**

Dès lors, afin de trouver des modélisations mathématiques fidèles aux caractéristiques

---

1. Un *alliage métallique* est un mélange d'éléments chimiques dont le principal est métallique.  
 2. *L'ordre à longue portée*, en termes simples, est une mesure de corrélation entre les positions des atomes dans des régions éloignées du matériau. Autrement dit, la connaissance de la position d'un atome permet de prédire la position d'un autre atome très éloigné.  
 3. International Union of Crystallography.

des quasi-cristaux, la recherche s'est intensifiée. la recherche d'ensembles possédant un diagramme de diffraction composé de pics de Bragg et présentant des symétries rotationnelles non cristallographiques, c'est-à-dire des symétries d'ordre différent de 1, 2, 3, 4 et 6, s'est intensifiée. Afin de modéliser de telles structures, les ensembles de *Delone*, de *Delone de type fini* et de *Meyer* ont été méticuleusement étudiés depuis les années 1980. Bien que les quasi-cristaux n'aient été découverts qu'en 1984, les ensembles de Meyer avaient été introduits auparavant par le mathématicien Yves Meyer dans son livre [Mey72] publié en 1972, dans un contexte d'approximation diophantienne. On s'intéresse aux ensembles de Meyer dans le chapitre 2 et aux ensembles de Delone de type fini dans le chapitre 3.

Dans le Chapitre 2, comme mentionné ci-dessus, on introduit les ensembles de Meyer. On démontre, en particulier, qu'un ensemble de Meyer  $\Lambda$  est exactement un ensemble de Delone pour lequel il existe un ensemble fini  $F$  qui vérifie la relation :

$$\Lambda - \Lambda \subset \Lambda + F.$$

Cette propriété montre, en particulier, que les distances interatomiques ne peuvent pas s'accumuler de manière aléatoire. Cela prouve également que la position d'un atome influence également la position d'un autre atome quelconque. Cela témoigne d'un certain ordre au sein d'un ensemble de Meyer. On conclut le chapitre en introduisant une méthode de construction d'ensembles de Meyer appelée *méthode de coupe et projection*.

Dans le Chapitre 3, on étudie la classe des ensembles de Delone de type fini. Cette classe d'ensembles a également vu son intérêt grimper depuis la découverte de Shechtman. On démontre dans ce chapitre le lien entre les ensembles de Meyer/ensembles de Delone de type fini avec les fonctions adresses. Pour conclure, on montre le lien des entiers algébriques avec les ensembles de Delone et de Meyer possédant des symétries d'inflation.

La complexité locale des cristaux idéaux nous occupera dans le Chapitre 4. Pour ce faire, on y définit deux fonctions clés : la fonction de comptage de patches et la fonction de répétitivité. La première nous permet de mesurer quantitativement la complexité d'un ensemble, la deuxième détermine l'homogénéité et la récurrence spatiale des motifs. À partir de celles-ci, on établit des résultats qui déterminent si un ensemble de Delone est un cristal idéal. Pour finir, on présente des ensembles non-cristallins ayant une complexité locale proche de celle des cristaux idéaux.



# Table des matières

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| <b>1</b> | <b>Restriction cristallographique</b>                                  | <b>10</b>  |
| 1.1      | Quelques rappels géométriques et algébriques . . . . .                 | 10         |
| 1.2      | Premières définitions . . . . .  | 13         |
| 1.3      | Restriction cristallographique pour les réseaux . . . . .              | 16         |
| 1.4      | Restriction cristallographique pour les cristaux idéaux . . . . .      | 18         |
| <b>2</b> | <b>Ensembles de Delone et de Meyer</b>                                 | <b>24</b>  |
| 2.1      | Premières définitions . . . . .  | 24         |
| 2.2      | Caractérisation des ensembles de Meyer . . . . .                       | 29         |
| 2.3      | Méthode de coupe et projection . . . . .                               | 38         |
| <b>3</b> | <b>Ensemble de Delone de type fini et symétries d'inflation</b>        | <b>47</b>  |
| 3.1      | Ensembles de Delone de type fini . . . . .                             | 47         |
| 3.2      | Caractérisations par les fonctions adresses . . . . .                  | 52         |
| 3.3      | Symétries d'inflation et entiers algébriques . . . . .                 | 55         |
| <b>4</b> | <b>Étude de la complexité locale des ensembles de Delone.</b>          | <b>69</b>  |
| 4.1      | Rappels et définitions . . . . .                                       | 69         |
| 4.2      | Quelques lemmes techniques . . . . .                                   | 70         |
| 4.3      | Caractérisation des cristaux idéaux par la complexité locale . . . . . | 73         |
| 4.4      | Ensembles linéairement répétitifs . . . . .                            | 79         |
| 4.5      | Non-cristaux à basse complexité locale . . . . .                       | 82         |
| <b>A</b> | <b>Quelques notions sur les groupes</b>                                | <b>94</b>  |
| <b>B</b> | <b>Modules libres</b>  | <b>96</b>  |
| <b>C</b> | <b>Forme rationnelle canonique</b>                                     | <b>98</b>  |
| <b>D</b> | <b>Théorie de Galois</b>   | <b>101</b> |
| <b>E</b> | <b>Suites Sturmiennes</b>  | <b>102</b> |
| <b>F</b> | <b>Fractions continues</b>   | <b>106</b> |



# Chapitre 1

## Restriction cristallographique

Comme énoncé lors de l'introduction, la structure atomique d'un cristal ne peut posséder que certaines symétries rotationnelles, à savoir celles d'ordre 1, 2, 3, 4 et 6. Cette propriété est connue sous le nom de *restriction cristallographique*. Cette section est consacrée à la démonstration de la restriction cristallographique, d'abord pour les réseaux, puis pour les cristaux idéaux. La rédaction de cette première section est essentiellement basée sur les livres [BG13] et [Sen95].

### 1.1 Quelques rappels géométriques et algébriques

Dans cette sous-section, on rappelle quelques définitions et propriétés utiles concernant les isométries. Pour ce rappel, on se place dans l'espace euclidien.

**Définition 1.1.1.** Une application

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

est une *isométrie* si les distances sont préservées, i.e., si

$$\|x - y\| = \|T(x) - T(y)\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

**Remarque 1.1.2.** Grâce à la préservation des distances, une isométrie  $T$  est automatiquement injective. Si  $x, y \in \mathbb{R}^n$  tels que  $x \neq y$ , alors  $\|x - y\| \neq 0$ . Cela implique que  $\|T(x) - T(y)\| \neq 0$ , donc,  $T(x) \neq T(y)$  ce qui assure l'injectivité de  $T$ .

**Proposition 1.1.3.** *Toute isométrie de  $\mathbb{R}^n$  qui préserve l'origine préserve également la norme. En particulier, une telle isométrie préserve le produit scalaire.*

*Démonstration.* Considérons  $T$  une telle isométrie. On a

$$\|T(x)\| = \|T(x) - T(0)\| = \|x - 0\| = \|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Ainsi, on en tire que la norme est préservée. Afin de montrer que le produit scalaire est également préservé, il suffit d'utiliser la formule de polarisation :

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2).$$

□

**Proposition 1.1.4.** *Soit  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une isométrie. Alors  $T$  préserve l'origine si et seulement si  $T$  est linéaire.*

*Démonstration.* Considérons  $T$  une isométrie qui admet 0 comme point fixe et posons  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Par la Proposition 1.1.3,

$$\langle T(e_i), T(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Ainsi l'ensemble  $F = \{T(e_1), \dots, T(e_n)\}$  est une famille orthonormée de  $\mathbb{R}^n$ , donc une base de  $\mathbb{R}^n$ . En utilisant la Proposition 1.1.3, on a, pour tout  $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\langle T(x+z), T(y) \rangle = \langle x+z, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle = \langle T(x), T(y) \rangle + \langle T(z), T(y) \rangle = \langle T(x)+T(z), T(y) \rangle.$$

Posons  $x, z \in \mathbb{R}^n$ . Par linéarité du produit scalaire,

$$\langle T(x+z) - T(x) - T(z), T(y) \rangle = 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

En particulier,

$$\langle T(x+z) - T(x) - T(z), T(e_i) \rangle = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

De ce raisonnement, on en conclut que  $T(x+z) = T(x)+T(z)$ . De plus, pour tout  $x, y \in \mathbb{R}^n$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a

$$\langle T(\lambda x), T(y) \rangle = \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle = \lambda \langle T(x), T(y) \rangle = \langle \lambda T(x), T(y) \rangle,$$

ce qui implique que  $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ .

Réciproquement, considérons  $T$  une isométrie linéaire. On a

$$T(0) = T(0x) = 0T(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

et cela permet de conclure la démonstration. □

**Remarque 1.1.5.** Une isométrie linéaire  $T$  est représentée par une matrice orthogonale  $M$ . En effet, comme une telle isométrie préserve le produit scalaire, la composante  $(M^T M)_{i,j}$  est donnée par  $\langle T(e_i), T(e_j) \rangle = \delta_{ij}$ , où  $e_1, \dots, e_n$  est la base canonique. Ainsi, on en tire que  $M^T M = I_n$  et par unicité de l'inverse, on en tire que  $M^{-1} = M^T$ .

**Proposition 1.1.6.** *Toutes les valeurs propres d'une isométrie linéaire sont de module 1.*

*Démonstration.* Considérons  $T$  une isométrie linéaire et notons  $M$  la matrice représentant  $T$  dans la base canonique. De plus, par la Proposition 1.1.3, une telle isométrie préserve la norme. Pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , on a

$$\|Mx\| = \|x\|.$$

Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $T$ , il existe  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  tel que

$$Mx = \lambda x.$$

En particulier, on a

$$\|Mx\| = \|x\| \Leftrightarrow \|\lambda x\| = \|x\| \Leftrightarrow |\lambda| \|x\| = \|x\|.$$

Cela implique que  $|\lambda| = 1$ . □

**Remarque 1.1.7.** Si  $M$  est la matrice représentant une isométrie linéaire  $T$ , alors  $\det(M) = \pm 1$ . Cela découle de la Proposition 1.1.6 et de la relation suivante :

$$\det(M) = \prod_{i=1}^n \lambda_i,$$

où  $\lambda_i$  sont les valeurs propres de  $M$  répétées selon leur multiplicité.

**Définition 1.1.8.** On note  $GL(n, R)$  l'ensemble des matrices carrées réelles inversibles de dimension  $n$ . Autrement dit,

$$GL(n, R) = \{M \in \mathbb{R}_n^n : \det(M) \neq 0\}.$$

**Définition 1.1.9.** L'ensemble des isométries linéaires de  $\mathbb{R}^n$  forme le groupe orthogonal  $O(n)$ . En termes matriciels, le groupe orthogonal est l'ensemble

$$O(n) = \{M \in GL(n, R) : M^{-1} = M^T\}.$$

En particulier,  $O(n)$  est un sous-groupe de  $GL(n, R)$ . On note  $SO(n)$  l'ensemble des rotations pures, *i.e.* les rotations qui préservent l'orientation. On l'appelle le groupe orthogonal spécial et, en termes matriciels, il s'écrit

$$SO(n) = \{M \in O(n) : \det(M) = 1\}.$$

Présentons un dernier résultat pour conclure cette section sur les rappels.

**Proposition 1.1.10.** *Pour toute matrice  $M \in O(3) \setminus SO(3)$ , il existe  $N \in SO(3)$  tel que*

$$M^k = (-I_3)^k N^k, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

*où  $I_3$  est la matrice identité de dimension 3. En particulier, pour tout  $M \in O(3) \setminus SO(3)$ , il existe  $N \in SO(3)$  tel que  $M = (-I_3)N$ .*

*Démonstration.* Considérons  $M \in O(3) \setminus SO(3)$  et posons  $N := (-I_3)M$ . En utilisant la Remarque 1.1.7,  $\det(M) = -1$ , ainsi

$$\det(N) = \det((-I_3)M) = \det(-I_3)\det(M) = (-1)(-1) = 1$$

et  $N \in SO(3)$ . De plus, puisque  $(-I_3)$  est un multiple de l'identité, il commute avec toute matrice et il s'ensuit que

$$M^k = (-I_3)^k N^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

□

## 1.2 Premières définitions

Commençons par définir une multitude de notions.

**Définition 1.2.1.** Une partie  $\Lambda$  de  $\mathbb{R}^n$  est *un ensemble de points* si c'est une union dénombrable de singletons.

**Définition 1.2.2.** Soit  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble de points. On dit que  $\Lambda$  est *discret* si pour tout  $x \in \Lambda$ , il existe  $\varepsilon_x > 0$  tel que

$$B_x(\varepsilon_x) \cap \Lambda = \{x\}.$$

**Exemple 1.2.3.** Les ensembles  $\mathbb{N}$  et  $\mathbb{Z}$  sont des ensembles discrets.

**Définition 1.2.4.** Un ensemble de points  $\Lambda$  est dit *uniformément discret* s'il existe  $r > 0$  tel que toute boule de rayon  $r$  contient au plus un élément de  $\Lambda$ . Un ensemble  $\Lambda$  est dit  *$r$ -uniformément discret* si  $r$  est le plus grand rayon satisfaisant l'assertion précédente. Un tel  $r$  est aussi appelé *rayon de séparation*.

Tout ensemble uniformément discret est discret. La réciproque n'est pas vraie.

**Remarque 1.2.5.** Soit  $\Lambda$  un ensemble uniformément discret. Par définition, il existe un rayon  $r > 0$  tel que pour toute boule de rayon  $r$ , il existe au plus un élément de  $\Lambda$ . Ainsi, pour tout  $x \in \Lambda$ , on a

$$B(x, r) \cap \Lambda = \{x\}.$$

On en tire que tout ensemble uniformément discret est discret.

**Exemple 1.2.6.** Les ensembles  $\mathbb{N}$  et  $\mathbb{Z}$  sont également uniformément discrets. L'ensemble  $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}_0\}$  est discret mais pas uniformément discret. Pour chaque  $n \in \mathbb{N}_0$ , il suffit de considérer  $B(\frac{1}{n}, \frac{1}{n(n+1)})$  pour remarquer que  $A$  est un ensemble discret. De plus, pour tout  $r > 0$ , on peut trouver une boule qui contient au moins deux éléments de  $A$ . On en tire que  $A$  n'est pas uniformément discret.

Pour conclure, remarquons que l'ensemble  $A \cup \{0\}$  n'est pas discret. En effet, la suite  $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}_0}$  converge vers 0. Ainsi, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}_0$  tel que pour tout  $n \geq N$

$$\left\| \frac{1}{n} \right\| < \varepsilon,$$

ce qui contredit la définition d'ensemble discret. Le point 0 est un point d'accumulation.

Tout sous-ensemble d'ensemble uniformément discret hérite du caractère uniformément discret.

**Proposition 1.2.7.** *Soit  $\Lambda$  un ensemble uniformément discret et soit  $\Lambda' \subseteq \Lambda$ . Alors l'ensemble  $\Lambda'$  est uniformément discret également.*

*Démonstration.* Considérons un ensemble uniformément discret  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  et un sous-ensemble  $\Lambda' \subseteq \Lambda$ . Par définition, il existe  $r > 0$  tel que

$$\|\lambda - \lambda'\| \geq r, \quad \forall \lambda, \lambda' \in \Lambda, \lambda \neq \lambda'.$$

Puisque  $\Lambda' \subset \Lambda$ , le même réel  $r > 0$  permet de vérifier le caractère uniformément discret de  $\Lambda'$ .  $\square$

**Définition 1.2.8.** Un ensemble de points  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  est *localement fini*, si

$$|K \cap \Lambda| < \infty$$

pour tout compact  $K$ .

Le concept de réseau est primordial pour les cristaux, définissons-le.

**Définition 1.2.9.** Soient  $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}^n$  des vecteurs linéairement indépendants. L'ensemble

$$\Lambda = \mathbb{Z}b_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}b_n = \{a_1b_1 + \dots + a_nb_n : a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}\}$$

est un *réseau de rang  $n$* , ou, autrement dit, *réseau de rang maximal*. L'ensemble des vecteurs  $b_1, \dots, b_n$  forme ce que l'on appelle une base du réseau  $\Lambda$ .

**Exemple 1.2.10.** Un exemple classique de réseau dans l'espace  $\mathbb{R}^2$  est donné par l'ensemble  $\Gamma$  suivant

$$\Lambda = \{ae_1 + be_2 : a, b \in \mathbb{Z}\},$$

où  $e_1 = (1, 0)$  et  $e_2 = (0, 1)$ . Ce réseau est qualifié de réseau carré dû à la figure sous tendue par les deux vecteurs de base  $e_1$  et  $e_2$ .

**Proposition 1.2.11.** *Tout réseau de rang maximal  $\Lambda$  est un sous-groupe additif commutatif discret de  $\mathbb{R}^n$ .*

*Démonstration.* Considérons  $\Lambda$  un réseau et  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  une base de  $\Lambda$ . Par définition,  $\Lambda = \mathbb{Z}b_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}b_n$ .

De simples vérifications permettent de montrer que le réseau est un sous-groupe commutatif. Montrons que c'est discret.

Puisque tout réseau est un sous-groupe additif de  $\mathbb{R}^n$  et que la translation est un homéomorphisme, il suffit de montrer que 0 est un point isolé. Considérons

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i : 0 \leq \alpha_i < 1, \forall i \in \{1, \dots, n\} \right\} \quad \text{et} \quad p = \text{vol}(P) > 0.$$

On a  $\mathbb{R}^n = \sqcup_{\lambda \in \Lambda} (\lambda + P)$  et, pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , l'ensemble  $\lambda + P$  possède exactement un élément de  $\Lambda$ , à savoir  $\lambda$ . Considérons une suite  $(\lambda_j)_j$  de  $\Lambda$  qui converge vers 0. Quitte à retirer d'éventuels doublons, supposons que la suite est composée d'éléments distincts 2 à 2. Pour un rayon  $R > 0$ , il existe  $K$  tel que

$$\lambda_k \in \overline{B_0}(R), \quad \forall k \geq K.$$

Ainsi, pour  $k \geq K$ , on en tire que les translatés  $\lambda_k + P$  sont inclus dans  $\overline{B_0}(R) + \overline{P}$ . Or, puisque les translatés sont 2 à 2 disjoints et de volume  $p$ , il est impossible que  $\overline{B_0}(R) + \overline{P}$  possède une infinité d'éléments de  $\Lambda$ . Il s'en suit que  $\Lambda$  est localement fini. Posons  $r = \min\{\|\lambda\| : \lambda \in \overline{B_0}(1) \cap \Lambda, \lambda \neq 0\}$  si cet ensemble est non-vide et 1 sinon. On obtient alors que  $r > 0$  et que  $B_0(r) \cap \Lambda = \{0\}$ . Il s'ensuit que 0 est un point isolé et que  $\Lambda$  est discret.  $\square$

**Corollaire 1.2.12.** *Tout réseau  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  est uniformément discret.*

*Démonstration.* Par la Proposition 1.2.11, le point 0 est isolé dans  $\Lambda$ . Il s'ensuit que

$$r := \min\{\|y\| : y \in \Lambda \setminus \{0\}\} > 0.$$

Pour tous points distincts  $x, y \in \Lambda$ , la structure de groupe de  $\Lambda$  assure que  $x - y \in \Lambda$ . Ainsi,

$$\|x - y\| \geq r,$$

ce qui permet de conclure la démonstration.  $\square$

Dans un premier temps, nous allons démontrer que les réseaux de dimensions 2 et 3 n'admettent que des rotations d'ordre 1, 2, 3, 4 et 6 comme symétries possibles.

**Proposition 1.2.13.** *Si  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  est un réseau de rang maximal, alors le quotient  $\mathbb{R}^n / \Lambda$  est un groupe abélien compact.*

*Démonstration.* La commutativité de  $\mathbb{R}^n$  implique que tout sous-groupe est normal, en particulier,  $\Lambda$  est normal dans  $\mathbb{R}^n$ . Ainsi, par le Théorème A.0.4, il s'ensuit que  $\mathbb{R}^n / \Lambda$  est un groupe commutatif. Montrons que le groupe abélien  $\mathbb{R}^n / \Lambda$  est compact. Considérons la projection canonique

$$\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n / \Lambda : x \mapsto x + \Lambda,$$

et le parallélépipède

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^n p_i b_i : \forall i \in \{1, \dots, n\}, p_i \in [0, 1] \right\},$$

où  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  est une base du réseau  $\Lambda$ . Comme l'ensemble  $P$  est borné et fermé, on en déduit qu'il est compact. Par définition de la topologie quotient, la projection canonique est

continue. De plus, on a que  $\pi(P) = \mathbb{R}^n / \Lambda$ . L'inclusion  $\pi(P) \subset \mathbb{R}^n / \Lambda$  est directe. Montrons l'autre inclusion et considérons  $x \in \mathbb{R}^n$ . Celui-ci admet une décomposition dans la base  $B$ ,

$$x = \sum_{i=1}^n x_i b_i = \underbrace{\sum_{i=1}^n (x_i - [x_i]) b_i}_{:=p} + \underbrace{\sum_{i=1}^n [x_i] b_i}_{:=\lambda} = p + \lambda \in P + \Lambda.$$

De cette relation, on en tire que  $x + \Lambda = p + \Lambda$  et donc  $\pi(x) = \pi(p)$ . Ainsi, on obtient  $\pi(P) = \mathbb{R}^n / \Lambda$ . Étant l'image d'un compact par une application continue, il s'en suit que  $\mathbb{R}^n / \Lambda$  est compact également.  $\square$

**Remarque 1.2.14.** Les réciproques des Propositions 1.2.11 et 1.2.13 sont également vraies. On peut alors caractériser les réseaux étant comme les sous-groupes additifs discrets  $\mathbb{R}^n$  tels que  $\mathbb{R}^n / \Gamma$  soit compact. Pour plus de détails concernant la réciproque, on pourra consulter l'ouvrage [Cas96].

### 1.3 Restriction cristallographique pour les réseaux

Avant de démontrer le résultat pour les réseaux de dimension 2 et 3, démontrons deux lemmes.

**Lemme 1.3.1.** *Soient  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  un réseau et  $T \in O(n)$  telle que  $T\Lambda \subset \Lambda$ . Alors, on a*

$$T\Lambda = \Lambda$$

*Démonstration.* Dans cette démonstration, on utilisera la notation  $\Lambda_r := \Lambda \cap \overline{B_r(0)}$  pour tout  $r \geq 0$ . Posons  $T \in O(n)$  tel que  $T(\Lambda) \subset \Lambda$ . Par définition de  $O(n)$ ,  $T$  est une isométrie linéaire, par la Proposition 1.1.3,  $T$  préserve les normes. Puisque  $T(\Lambda) \subset \Lambda$ , on en tire la relation suivante

$$T(\Lambda_r) \subset \Lambda_r, \quad \forall r \geq 0.$$

Puisque  $\Lambda_r$  est uniformément discret, on en tire que  $\Lambda_r$  est fini. Ainsi, comme l'application  $T$  est injective, on obtient que  $|T(\Lambda_r)| = |\Lambda_r|$ , pour tout  $r \geq 0$ . Ainsi, on a prouvé que  $T(\Lambda_r) = \Lambda_r, \forall r \geq 0$ . Afin de conclure la démonstration, montrons que l'on a  $T\Lambda = \Lambda$ . Procédons par l'absurde, si  $T\Lambda \neq \Lambda$ , alors il existe  $x \in \Lambda \setminus T\Lambda$ . Or, pour un certain  $r \geq 0$ , on a  $x \in \Lambda_r = (T\Lambda)_r$ , ce qui est absurde.  $\square$

**Lemme 1.3.2.** *Soient  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  un réseau et  $T \in O(n)$  tel que  $T\Lambda = \Lambda$ . Le polynôme caractéristique  $P_\lambda = \det(T - \lambda \mathbb{1})$  ne possède que des coefficients entiers.*

*Démonstration.* Notons  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  une base du réseau  $\Lambda$ . Puisque  $T\Lambda = \Lambda$  par hypothèse, chaque vecteur formant la base  $B$  est envoyé sur un élément du réseau  $\Lambda$ . Par définition, le réseau  $\Lambda$  est de la forme suivante  $\Lambda = \mathbb{Z}b_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}b_n$ , donc, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$Tb_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_j,$$

où les coefficients  $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ . Posons  $A$  la matrice carrée définie par  $A_{ij} = a_{ij}$ . Au vu de ce que l'on a posé, on peut remarquer que l'on a la relation suivante

$$TB = BA,$$

où  $B$  est la matrice carrée dont les colonnes sont les vecteurs  $b_1, \dots, b_n$ . Puisque la matrice  $B$  est formée par des vecteurs linéairement indépendants, elle est inversible et on obtient la relation

$$T = BAB^{-1}.$$

Par définition, la matrice  $A$  est à coefficients entiers, et puisque les polynômes caractéristiques de  $T$  et de  $A$  sont identiques, on en tire que le polynôme caractéristique de  $T$  est à coefficients entiers.  $\square$

Désormais, nous sommes en mesure de démontrer que les seules rotations laissant un réseau de dimensions 2 et 3 invariant sont celles d'ordre 1, 2, 3, 4 ou 6. Commençons par démontrer le résultat concernant les réseaux à deux dimensions.

**Théorème 1.3.3.** *Si  $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$  est un réseau, alors les seules rotations qui peuvent laisser  $\Lambda$  invariant sont celles d'ordre 1, 2, 3, 4 ou 6.*

*Démonstration.* Considérons une rotation d'un angle  $\theta$  laissant le réseau  $\Lambda$  invariant et montrons qu'elle est d'ordre 1, 2, 3, 4 ou 6. Une telle rotation est décrite par une matrice de la forme suivante :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice vaut

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2 \cos(\theta)\lambda + 1.$$

Puisque  $R(\theta)$  laisse  $\Lambda$  invariant, en appliquant le Lemme 1.3.2, les coefficients de  $P(\lambda)$  sont des entiers. Ainsi,

$$2 \cos(\theta) \in \mathbb{Z} \implies \cos(\theta) \in \left\{ 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1 \right\}.$$

De cette relation, on en déduit que  $\theta$  est un angle de  $0^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$  ou  $180^\circ$ .  $\square$

En procédant de manière analogue, on peut étendre le résultat précédent à trois dimensions.

Pour cela, en faisant un choix de base judicieux, une rotation à trois dimensions d'angle  $\theta$  peut toujours être représentée par la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

**Théorème 1.3.4.** *Si  $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$  est un réseau, alors les seules rotations qui peuvent laisser  $\Lambda$  invariant sont celles d'ordre 1, 2, 3, 4 ou 6.*

*Démonstration.* Considérons une rotation laissant le réseau  $\Lambda$  invariant. Une telle rotation peut être représentée par la matrice (1.1) dont le polynôme caractéristique vaut  $P(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2 \cos(\theta)\lambda + 1)$ . En utilisant le Lemme 1.3.2 et en procédant similairement à la démonstration précédente, on conclut alors que les rotations laissant le réseau  $\Lambda$  invariant sont soit d'ordre 1, 2, 3, 4 ou 6.  $\square$

Nous avons démontré le résultat pour les réseaux, qui modélisent la périodicité présente au sein des structures cristallines. Toutefois, il existe des modèles mathématiques plus complets et plus fidèles à la réalité des cristaux, appelés *ensembles de points cristallographiques* ou *cristaux idéaux*. L'objectif actuel est d'étendre le résultat à ces ensembles. C'est l'objet de la section suivante.

## 1.4 Restriction cristallographique pour les cristaux idéaux

En général, le translaté d'un réseau  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  n'est pas un réseau. Par exemple, pour  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Lambda$ , considérons

$$\Lambda_x := \Lambda + x = \{\lambda + x : \lambda \in \Lambda\}.$$

Cet ensemble n'est pas fermé pour l'addition :

$$(\lambda + x) + (\lambda' + x) = \overbrace{\lambda + \lambda'}^{\notin \Lambda} + x + x \notin \Lambda + x.$$

Ainsi, la translation d'un réseau n'est jamais un réseau sauf si on le translate par l'un de ses éléments. C'est pour cette raison, que l'on introduit la notion *cristal idéal*, ou, autrement dit, *ensembles de points cristallographiques*.

**Définition 1.4.1.** Soit  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble de points non-vide. On dit que  $\Gamma$  est un *cristal idéal* s'il existe :

1. un réseau maximal  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  ;
2. un ensemble fini non vide  $F \subset \mathbb{R}^n$  ;

tel que

$$\Gamma = \Lambda + F = \bigcup_{f \in F} (\Lambda + \{f\}).$$

**Remarque 1.4.2.** Un cristal idéal  $\Gamma$  n'est, en général, pas muni d'une structure de groupe, mais il constitue une généralisation de la notion de réseau. Si on considère  $F = \{0\}$ , on retrouve  $\Gamma = \Lambda$  un réseau. De plus, bien que  $\Gamma$  soit obtenu par translation d'un réseau par un ensemble fini, il conserve la structure périodique héritée du réseau  $\Lambda$ .

En physique, les cristaux sont déterminés par la périodicité de sa structure atomique, d'où notre intérêt pour la définition suivante.

**Définition 1.4.3.** Soient  $p \in \mathbb{R}^n$  et  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ . L'élément  $p$  est une *période* de  $\Lambda$  si

$$\Lambda + p = \Lambda.$$

L'ensemble des périodes de  $\Lambda$  est

$$\text{per}(\Lambda) = \{p \in \mathbb{R}^n : \Lambda + p = \Lambda\}.$$

La dimension du sous-espace vectoriel engendré par  $\text{per}(\Lambda)$  est appelée le rang de  $\Lambda$ .

**Définition 1.4.4.** Soient  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $X \subset \mathbb{R}^n$ . On dit que  $x$  est un point d'accumulation de  $X$  si pour tout voisinage  $\Omega$  de  $x$ , on a

$$(\Omega \setminus \{x\}) \cap X \neq \emptyset.$$

**Exemple 1.4.5.** Considérons  $X = \{-1\} \cup [0, 1[$ . Le point 1 est un point d'accumulation de  $X$  car si on considère la suite définie par  $x_j = 1 - 1/j$ , pour tout  $j \in \mathbb{N}_0$ , celle-ci appartient à  $X$  et converge vers 1. En particulier, tout voisinage de 1 est d'intersection non-vide avec  $X$ . En revanche, il est clair que le point  $-1$  n'est pas un point d'accumulation de  $X$ .

**Remarque 1.4.6.** Tout ensemble discret  $X$  ne possède aucun point d'accumulation. Par définition, pour tout  $x \in X$ , il existe un ouvert  $\Omega_x$  tel que  $\Omega_x \cap X = \{x\}$ , donc  $x$  n'est pas un point d'accumulation.

**Lemme 1.4.7.** Soit  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  un réseau. L'ensemble des périodes de  $\Lambda$  est un sous-groupe discret de  $\mathbb{R}^n$ .

*Démonstration.* Il est immédiat que  $\text{per}(\Lambda)$  est un sous-groupe de  $\mathbb{R}^n$ , cela découle de la condition  $\Lambda + p = \Lambda$  est préservé pour l'addition et l'opposé.

Montrons que  $\text{per}(\Lambda)$  est discret. Par le Corollaire 1.2.12, l'ensemble  $\Lambda$  est uniformément discret, posons  $r > 0$  tel que

$$B_x(r) \cap \Lambda = \{x\}, \quad \forall x \in \Lambda.$$

Remarquons que, étant donné que  $\text{per}(\Lambda)$  est un sous-groupe, il suffit de montrer que 0 n'est pas un point d'accumulation.

Supposons que 0 est un point d'accumulation et considérons  $(p_j)_j$  une suite d'éléments distincts de  $\text{per}(\Lambda)$  qui converge vers 0. Soit  $\lambda \in \Lambda$ , par définition de  $\text{per}(\Lambda)$ , on a que, pour tout  $j \in \mathbb{N}$ ,

$$\lambda + p_j \in \Lambda. \tag{1.2}$$

Ainsi, puisque la suite  $(p_j)$  tend vers 0, il existe  $J$  tel que pour tout  $j \geq J$ , on a

$$\|(\lambda + p_j) - \lambda\| = \|p_j\| < r.$$

Or, comme  $\lambda + p_j \in \Lambda$  et  $\lambda \in \Lambda$ , cela contredit le caractère uniformément discret de  $\Lambda$ .  $\square$

**Définition 1.4.8.** Soit  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble de points. Si  $\dim(\langle \text{per}(\Lambda) \rangle) = 0$ , alors  $\Lambda$  est dit non-périodique. Sinon,  $\Lambda$  est dit périodique.

**Définition 1.4.9.** Un ensemble de points  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  est dit *cristallographique* si  $\text{per}(\Lambda)$  est un réseau de  $\mathbb{R}^n$ . On dit que  $\Lambda$  est *non-cristallographique* sinon.

On peut montrer que les ensembles cristallographiques localement fini sont exactement les cristaux idéaux.

**Théorème 1.4.10.** Soit  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble de points localement fini. Alors  $\Gamma$  est cristallographique si, et seulement si, il existe un réseau  $\Lambda$  et un ensemble fini  $F$  tel que

$$\Gamma = \Lambda + F.$$

*Démonstration.* Commençons par démontrer que la condition est suffisante.

Considérons  $\Lambda$  un réseau et  $F$  un ensemble fini tel que  $\Gamma = \Lambda + F$  et montrons que  $\Gamma$  est cristallographique. Pour tout  $p \in \Lambda$ , on a

$$\Gamma + p = \Lambda + F + p = F + \Lambda + p = F + \Lambda = \Gamma \quad (1.3)$$

où la dernière égalité est obtenue grâce à la structure de groupe de  $\Lambda$ . Ainsi, de la relation (1.3), on en tire que  $\Lambda \subset \text{per}(\Gamma)$ . Par la Proposition 1.4.7, l'ensemble  $\text{per}(\Gamma)$  est un sous-groupe discret de  $\mathbb{R}^n$ . De plus, comme  $\Lambda$  est de rang  $n$ , il en est de même pour  $\text{per}(\Gamma)$ . Pour montrer que le quotient  $\text{per}(\Gamma)/\Lambda$  est un groupe fini, prenons  $x \in \text{per}(\Gamma)$ . Par définition, on a  $x + \Lambda + F = \Lambda + F$ . De cette égalité, on en déduit que pour tout  $f \in F$ ,  $\lambda \in \Lambda$ , il existe  $f' \in F$ ,  $\lambda' \in \Lambda$  tels que

$$x + \lambda + f = \lambda' + f' \Leftrightarrow x + f = \underbrace{(\lambda' - \lambda)}_{\lambda_1} + f' = \lambda_1 + f'.$$

En particulier, on en tire que

$$x = f' - f \pmod{\Lambda}.$$

Ainsi, comme  $F$  est un ensemble fini, il s'ensuit qu'il n'existe qu'un nombre fini de classes de  $\text{per}(\Gamma)/\Lambda$ . Concluons la première partie de la démonstration en montrant la compacité de  $\mathbb{R}^n / \text{per}(\Gamma)$ . En utilisant le Théorème A.0.5, on obtient un isomorphisme

$$\phi : (\mathbb{R}^n / \Lambda) / (\text{per}(\Gamma) / \Lambda) \rightarrow \mathbb{R}^n / \text{per}(\Gamma).$$

Ainsi, on en déduit que le quotient  $\mathbb{R}^n / \text{per}(\Gamma)$  est compact également. On peut alors conclure que l'ensemble  $\text{per}(\Gamma)$  est un réseau de rang maximal et donc que l'ensemble  $\Gamma$  est cristallographique.

Passons à la condition nécessaire. Considérons  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  une base du réseau  $\Lambda = \text{per}(\Gamma)$  et

$$X = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i b_i : \forall i, a_i \in [0, 1[ \right\}.$$

Tout vecteur de  $v \in \mathbb{R}^n$  admet une décomposition de la forme

$$v = \sum_{i=1}^n v_i b_i = \underbrace{\sum_{i=1}^n (v_i - \lfloor v_i \rfloor) b_i}_{\in X} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \lfloor v_i \rfloor b_i}_{\in \Lambda},$$

on en déduit que  $\mathbb{R}^n = \bigsqcup_{l \in \Lambda} (l + X)$ , l'union est disjointe car  $\Lambda$  est un réseau. Posons  $F := \Gamma \cap X$ . On a la relation suivante

$$F = \Gamma \cap X \subset \Gamma \cap \overline{X}.$$

Comme l'ensemble  $\overline{X}$  est borné et fermé, il est compact et, par hypothèse, il s'ensuit que  $F$  est un ensemble fini. De plus si  $g \in \Gamma$ , par la partition, il existe  $l \in \Lambda = \text{per}(\Gamma)$  tel que  $g \in l + X$  et donc  $g - l \in X$ . On a aussi que  $g - l \in \Gamma$ . Ainsi,  $g - l \in X \cap \Gamma = F$ , ce qui implique l'existence de  $f \in F$  tel que  $g = l + f \in \Lambda + F$ . Par conséquent, on en déduit l'égalité

$$\Gamma = \Lambda \oplus F.$$

L'unicité de la décomposition découle du choix de  $X$ . □

Terminons ce premier chapitre par la démonstration de la restriction cristallographique pour les cristaux idéaux.

**Proposition 1.4.11.** *Soient  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble de points localement fini cristallographique,  $T \in O(n)$  et  $x \in \mathbb{R}^n$ . Si  $T\Lambda + a = \Lambda$ , alors l'isométrie linéaire  $T$  fixe  $\text{per}(\Lambda)$ , i.e  $T(\text{per}(\Lambda)) = \text{per}(\Lambda)$ .*

*Démonstration.* Considérons  $X_\Lambda = \text{per}(\Lambda)$  le réseau des périodes de  $\Lambda$ . Par le Théorème 1.4.10, il existe un ensemble fini  $F$  tel que  $\Lambda = F \oplus X_\Lambda$  et  $\Lambda = \bigsqcup_{f \in F} (f + X_\Lambda)$ . Puisque  $T(\Lambda) + a = \Lambda$  et que l'isométrie  $T$  est linéaire, posons l'ensemble

$$\Lambda_a = \Lambda - a = \bigsqcup_{f \in F} (T(f) + T(X_\Lambda)).$$

Comme les isométries préservent les distances, l'ensemble  $T(X_\Lambda)$  est encore un réseau. Pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , on a

$$\Lambda + x = \Lambda \Leftrightarrow \Lambda + x - a = \Lambda - a \Leftrightarrow \Lambda_a + x = \Lambda_a,$$

ainsi, on obtient  $\text{per}(\Lambda) = \text{per}(\Lambda_a)$ . Prenons  $x \in T(X_\Lambda)$  et montrons que  $x \in \text{per}(\Lambda_a)$ . Il existe  $y \in X_\Lambda$  tel que  $x = T(y)$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \Lambda_a + x &= \left( \bigsqcup_{f \in F} (T(f) + T(X_\Lambda)) \right) + T(y) = \bigsqcup_{f \in F} (T(f) + T(X_\Lambda) + T(y)) \\ &= \bigsqcup_{f \in F} (T(f) + T(X_\Lambda + y)) \\ &= \bigsqcup_{f \in F} (T(f) + T(X_\Lambda)) \\ &= \Lambda_a \end{aligned}$$

Finalement, on en déduit que

$$T(X_\Lambda) \subset \text{per}(\Lambda_a) = \text{per}(\Lambda) = X_\Lambda,$$

et, en utilisant le Lemme 1.3.1, il s'ensuit que  $T(X_\Lambda) = X_\Lambda$ .  $\square$

**Remarque 1.4.12.** En utilisant le Lemme 1.3.2, le polynôme caractéristique associé à  $T \in O(n)$  de la démonstration précédente est à coefficients entiers.

On conclut le premier chapitre par le résultat suivant.

**Corollaire 1.4.13.** *Soient  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble de points localement fini cristallographique,  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $T \in O(n)$  pour  $n \in \{2, 3\}$ . Si  $T\Lambda + x = \Lambda$  alors  $T$  est un générateur du groupe cyclique fini  $\mathcal{C}_k$  d'ordre  $k$ , pour  $k \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ .*

*Démonstration.* En utilisant le Théorème 1.4.10, on a  $\Lambda = \Gamma \oplus F$  où  $F$  est un ensemble fini et  $\Gamma = \text{per}(\Lambda)$ . De plus, puisque  $\Lambda$  est cristallographique, l'ensemble  $\Gamma$  est un réseau de  $\mathbb{R}^n$ . Par la proposition précédente, on a  $T(\Gamma) = \Gamma$ . Si  $T \in SO(n)$ , alors par le Théorème 1.3.3 (ou 1.3.4), il s'ensuit que  $T$  est d'ordre  $\{1, 2, 3, 4, 6\}$ . Pour conclure la démonstration, traitons le cas où  $T \notin SO(n)$ . Si  $n = 2$ , les éléments de  $O(2) \setminus SO(2)$  sont des réflexions. Pour  $T \in O(2) \setminus SO(2)$ , on a  $T^2 = I_2$  et  $T$  est d'ordre 2. Si  $n = 3$ , alors par la Proposition 1.1.10, il existe une matrice  $N \in SO(3)$  telle que

$$T^k = (-I_3)^k N^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Si  $N$  est d'ordre  $k$ , pour un nombre pair  $k$ , alors  $T^k = (-I_3)^k N^k = I_3$  et les ordres de  $O(3)/SO(3)$  sont les mêmes que ceux de  $SO(3)$ . Si  $k$  est impair, alors  $k \in \{1, 3\}$  et on a  $T^k = (-I_3)^k N^k = (-I_3)$ . Il s'ensuit que  $T^{2k} = I_3$  et qu'aucun nouvel ordre n'est ajouté.  $\square$



# Chapitre 2

## Ensembles de Delone et de Meyer

Dans un premier temps, l'objectif de ce deuxième chapitre est d'introduire les notions d'ensembles de Delone et de Meyer. Ensuite, deux caractérisations des ensembles de Meyer seront présentées et, pour conclure, en appliquant l'une de ces caractérisations, nous montrerons que la classe des ensembles de Meyer n'est pas exclusivement réservée aux quasi-cristaux mais qu'elle contient également les cristaux idéaux. Pour conclure ce chapitre, on présentera une méthode qui permet de construire des ensembles de Meyer, à savoir la méthode de coupe et projection. La majeure partie de ce chapitre a été rédigée grâce aux ouvrages [BG13] et [Lag96].

Dans ce chapitre, on notera  $B(x, r)$  les boules ouvertes de centre  $x$  et de rayon  $r > 0$ . Les boules fermées seront notées  $\overline{B}(x, r)$ .

### 2.1 Premières définitions

Dans ce qui suit, on se place dans l'espace  $\mathbb{R}^n$  muni de la topologie euclidienne. L'objectif de cette première section est de caractériser les ensembles de Meyer avec la notion d'ensembles de Delone. Pour ce faire, commençons par définir la densité relative.

**Définition 2.1.1.** Un ensemble de points  $\Lambda$  est *relativement dense* si il existe un compact  $K \subset \mathbb{R}^n$  tel que  $\Lambda + K = \mathbb{R}^n$ .

Caractérisons les ensembles relativement denses par une propriété plus pratique.

**Proposition 2.1.2.** *Un ensemble  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  est relativement dense si et seulement s'il existe  $R > 0$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\overline{B}(x, R) \cap \Lambda \neq \emptyset$ .*

*Démonstration.* Montrons que la condition est suffisante. Par hypothèse, il existe  $R > 0$  tel que

$$\overline{B}(x, R) \cap \Lambda \neq \emptyset, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , il existe  $\lambda \in \Lambda$  tel que

$$\|x - \lambda\| \leq R.$$

Puisque

$$x = \lambda + (x - \lambda) \in \Lambda + \overline{B}(0, R),$$

en considérant l'ensemble compact  $K = \overline{B}(0, R)$ , il s'ensuit que  $\Lambda$  est relativement dense.

Montrons que la condition est nécessaire. Par définition de la densité relative, il existe un ensemble compact  $K \subset \mathbb{R}^n$  tel que  $\Lambda + K = \mathbb{R}^n$ . Puisque l'ensemble  $K$  est compact, il est borné. Considérons  $R > 0$  tel que  $\|x\| \leq R$  pour tout  $x \in K$ . En particulier, on en déduit que  $K \subset \overline{B}(0, R)$  et que

$$\Lambda + \overline{B}(0, R) = \mathbb{R}^n.$$

Cela signifie que, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , il existe  $\lambda \in \Lambda$  et  $y \in \overline{B}(0, R)$  tels que

$$x = \lambda + y.$$

De cette relation, on en tire que

$$\lambda = x - y \in \overline{B}(x, R) \cap \Lambda.$$

ce qui conclut la démonstration. □

On dit également qu'un ensemble est  $R$ -relativement dense si  $R$  est le plus petit réel satisfaisant la condition de la Proposition 2.1.2. Pour un ensemble  $\Lambda$ , Un tel  $R$  est appelé *le rayon de recouvrement* de  $\Lambda$ .

Introduisons les ensembles de Delone. Bien que ces ensembles n'aient pas été introduits par le mathématicien russe Boris Nikolaïevitch Delaunay, celui-ci a posé les bases dans son article [B.D34] en 1934.

**Définition 2.1.3.** Un ensemble de points  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  est un *ensemble de Delone* si

- (1)  $\Lambda$  est uniformément discret ;
- (2)  $\Lambda$  est relativement dense.

Les ensembles de Delone ont pour objectif de représenter une structure atomique idéalisée d'un matériau à l'état solide. On impose la densité relative à un ensemble de Delone car on souhaite que les atomes, ici représentés par des points de l'espace  $\mathbb{R}^n$ , soient distribués de manière homogène afin d'éviter qu'il y ait des "trous" dans la structure. On exige également qu'un ensemble de Delone soit uniformément discret afin d'éviter que la distance interatomique ne soit trop faible. Ces deux contraintes traduisent des propriétés physiques essentielles des solides : une répartition régulière de la matière et des interactions interatomiques à portée finie.

**Remarque 2.1.4.** Si  $\Lambda$  est un ensemble de Delone, il existe  $r > 0$  tel que les boules ouvertes de rayon  $r$  ne contiennent au plus qu'un élément de  $\Lambda$ . Par la Proposition 2.1.2, il existe un  $R > 0$  tel que les boules fermées de rayon  $R$  contiennent au moins un élément de  $\Lambda$ . C'est pour cela qu'un ensemble de Delone est également appelé un *ensemble  $(r, R)$ -Delone*. On constate par ailleurs que  $0 < r \leq R$ .

**Proposition 2.1.5.** *Si  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  est un ensemble de Delone, alors  $\Lambda$  est infini dénombrable.*

*Démonstration.* Puisque l'ensemble  $\Lambda$  est relativement dense, par la Proposition 2.1.2, on peut considérer  $R > 0$  tel que

$$\overline{B}(x, R) \cap \Lambda \neq \emptyset, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Considérons également  $(x_j)_j$  une suite de  $\mathbb{R}^n$  telle que les boules  $\overline{B}(x_j, R)$  soient disjointes deux à deux. Par densité relative, chacune de ces boules contient au moins un point de  $\Lambda$ , et puisque boules sont disjointes, ces points sont tous distincts. Il s'ensuit que  $\Lambda$  est infini.

Pour tout  $k \in \mathbb{Z}^n$ , posons  $C_k = k + [0, 1]^n$ . Puisque les hypercubes  $(C_k)_{k \in \mathbb{Z}^n}$  recouvrent  $\mathbb{R}^n$ , on a

$$\Lambda = \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}^n} (C_k \cap \Lambda).$$

Puisque l'ensemble  $\Lambda$  est uniformément discret, il existe  $r > 0$  tel que

$$\|\lambda - \lambda'\| \geq r, \quad \forall \lambda, \lambda' \in \Lambda, \lambda \neq \lambda'.$$

Ainsi, pour tout  $k \in \mathbb{Z}^n$ , comme l'hypercube  $C_k$  est borné, il est de volume fini, donc l'ensemble  $C_k \cap \Lambda$  est fini car les points de  $\Lambda$  sont séparés par, au moins, une distance  $r$ . Comme il existe un nombre dénombrable d'ensembles  $C_k$ , il en est de même pour  $\Lambda$ .  $\square$

**Définition 2.1.6.** Un ensemble de points  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  est un *ensemble de Meyer* si

- (1)  $\Lambda$  est relativement dense ;
- (2)  $\Lambda - \Lambda$  est uniformément discret.

Les ensembles de Meyer jouent un rôle crucial dans la cristallographie. Les éléments d'un ensemble de Meyer  $\Lambda$  correspondent aux atomes d'une structure cristalline et l'ensemble  $\Lambda - \Lambda$  correspond à la distance interatomique et des restrictions sur cet ensemble engendrent de l'ordre à longue portée.

**Proposition 2.1.7.** *Tout sous-ensemble relativement dense d'un ensemble de Meyer est un ensemble de Meyer.*

*Démonstration.* Considérons  $\Lambda$  un ensemble de Meyer et  $\rho \subset \Lambda$  un sous-ensemble relativement dense. Il suffit de montrer que  $\rho - \rho$  est uniformément discret. Comme

$$\rho - \rho \subset \Lambda - \Lambda,$$

et que  $\Lambda - \Lambda$  est uniformément discret, il s'ensuit que  $\rho - \rho$  l'est également et on en tire que  $\rho$  est un ensemble de Meyer.  $\square$

**Exemple 2.1.8.** À l'aide de la Proposition 2.1.7, puisque l'ensemble des entiers  $\mathbb{Z}$  est un ensemble de Meyer, il s'ensuit que l'ensemble  $5\mathbb{Z} \cup \{1, 8, 17\}$  est de Meyer également.

**Lemme 2.1.9.** *Si  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  un groupe, alors  $\Lambda - \Lambda = \Lambda$ .*

*Démonstration.* Considérons  $\Lambda$  un groupe. Puisque  $0 \in \Lambda$ , pour tout  $x \in \Lambda$ , on a

$$x = x - 0 \in \Lambda - \Lambda.$$

Réciproquement, si  $x \in \Lambda - \Lambda$ , il existe  $y, z \in \Lambda$  tels que  $x = y - z$ . Comme

$$x = y - z = y + (-z) \in \Lambda + \Lambda$$

on peut conclure car l'opération est interne.  $\square$

Les réseaux de  $\mathbb{R}^n$  sont inclus dans la famille des ensembles de Meyer.

**Proposition 2.1.10.** *Tout réseau est un ensemble de Meyer.*

*Démonstration.* Soit  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  un réseau engendré par la base  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  et notons le parallélépipède  $P$  engendré par les vecteurs de la base  $B$

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^n p_i b_i : p_i \in [0, 1] \right\}.$$

Par la Proposition 1.2.11, l'ensemble  $\Lambda$  est muni d'une structure de groupe, de plus, par le Lemme 2.1.9, on a

$$\Lambda - \Lambda = \Lambda.$$

Il suffit alors de montrer que  $\Lambda$  est un ensemble de Delone. En appliquant le Corollaire 1.2.12, le réseau  $\Lambda$  est uniformément discret. Il ne reste plus qu'à prouver la densité relative.

Puisque l'ensemble  $P$  est fermé et borné, il est compact. Montrons que  $\Lambda + P = \mathbb{R}^n$  et posons  $x \in \mathbb{R}^n$ . L'élément  $x$  se décompose de manière unique dans la base  $B$  :

$$x = \sum_{i=1}^n (p_i + \lambda_i) b_i = \sum_{i=1}^n p_i b_i + \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i, \quad p_i \in [0, 1[, \lambda_i \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi  $x \in \Lambda + P$  et on en déduit la densité relative de  $\Lambda$ .  $\square$

**Lemme 2.1.11.** *Soit  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble de points. Si l'ensemble  $\Lambda - \Lambda$  est uniformément discret alors l'ensemble  $\Lambda$  est uniformément discret.*

*Démonstration.* Notons que 0 est toujours un élément de  $\Lambda - \Lambda$  et supposons que  $\Lambda - \Lambda$  est uniformément discret. Par définition, il existe  $r > 0$  tel que :

$$\|x - y\| \geq r, \quad \forall x, y \in \Lambda - \Lambda, x \neq y.$$

Procédons par l'absurde. Si  $\Lambda$  n'est pas uniformément discret, il existe deux éléments distincts  $\lambda, \lambda' \in \Lambda$  tels que

$$\|\lambda - \lambda'\| < r.$$

Or,  $\lambda - \lambda' \in \Lambda - \Lambda \setminus \{0\}$  et puisque

$$\|(\lambda - \lambda') - 0\| < r,$$

on obtient une contradiction, ce qui assure que l'ensemble  $\Lambda$  est uniformément discret.  $\square$

On peut, dès lors, démontrer que la classe des ensembles de Meyer est incluse dans la classe des ensembles de Delone.

**Théorème 2.1.12.** *Tout ensemble de Meyer est un ensemble de Delone.*

*Démonstration.* Supposons que  $\Lambda$  est un ensemble de Meyer. Par le Lemme 2.1.11, l'ensemble  $\Lambda$  est uniformément discret et donc de Delone.  $\square$

Comme illustré dans l'exemple suivant, en général, la réciproque du Théorème 2.1.12 est fausse.

**Exemple 2.1.13.** Considérons

$$\Lambda = \left\{ x_n := n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}_0 \right\}$$

et montrons que c'est un ensemble de Delone mais que ce n'est pas un ensemble de Meyer. Remarquons que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}_0}$  est strictement croissante. Pour deux points consécutifs, on a

$$x_{n+1} - x_n = (n+1) + \frac{1}{n+1} - n - \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}.$$

Puisque, pour tout  $n \in \mathbb{Z}_0$ ,

$$\left\| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right\| \in \left] 0, \frac{1}{2} \right],$$

Ainsi, les boules de rayon  $\frac{1}{4}$  et de rayon 2 permettent de montrer que l'ensemble  $\Lambda$  est uniformément discret et relativement dense, respectivement. Ainsi, l'ensemble  $\Lambda$  est un ensemble de Delone. En revanche, ce n'est pas un ensemble de Meyer. En effet, remarquons que

$$\left\{ \left( n+1 + \frac{1}{n+1} \right) - \left( n + \frac{1}{n} \right) : n \in \mathbb{Z}_0 \right\} = \left\{ \frac{n(n+1) - 1}{(n+1)n} : n \in \mathbb{Z}_0 \right\} \subset \Lambda - \Lambda.$$

Or,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+1) - 1}{(n+1)n} = 1.$$

Par conséquent, puisque l'ensemble  $\Lambda - \Lambda$  possède une suite convergente, celle-ci est de Cauchy. Ainsi, l'ensemble  $\Lambda - \Lambda$  ne peut être uniformément discret.

**Lemme 2.1.14.** *Soit  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble relativement dense. Alors, pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , l'ensemble translaté  $\Lambda - \{\lambda\}$  est également relativement dense.*

*Démonstration.* Considérons  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble relativement dense. Par définition, il existe  $R > 0$  tel que

$$\overline{B}(x, R) \cap \Lambda \neq \emptyset, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Posons  $\lambda \in \Lambda$  et montrons que

$$\overline{B}(x, R) \cap (\Lambda - \{\lambda\}) \neq \emptyset, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Posons  $x \in \mathbb{R}^n$ , et considérons la boule  $\overline{B}(x + \lambda, R)$ . Par densité relative de  $\Lambda$ , il existe  $x_\lambda \in \overline{B}(x + \lambda, R) \cap \Lambda$  et donc,

$$x_\lambda - \lambda \in \overline{B}(x, R) \cap (\Lambda - \{\lambda\})$$

Puisqu'on a choisi arbitrairement  $\lambda \in \Lambda$ , il en résulte que  $\Lambda - \{\lambda\}$  est relativement dense pour tout  $\lambda \in \Lambda$ .  $\square$

**Remarque 2.1.15.** Dans le Lemme 2.1.14, on démontre le résultat pour  $\lambda \in \Lambda$  mais le résultat est valide pour  $\lambda \in \mathbb{R}^n$  également.

**Lemme 2.1.16.** *Soit  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble de points. Si  $\Lambda$  est relativement dense alors  $\Lambda - \Lambda$  est relativement dense.*

*Démonstration.* Par le Lemme 2.1.14, l'ensemble  $\Lambda - \{\lambda\}$  est un ensemble relativement dense. Puisque

$$\Lambda - \{\lambda\} \subset \Lambda - \Lambda,$$

on en déduit que  $\Lambda - \Lambda$  est relativement dense.  $\square$

On peut démontrer la première caractérisation de ce chapitre.

**Théorème 2.1.17.** *Soit  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ , les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $\Lambda$  est un ensemble de Meyer
- (2)  $\Lambda$  est un ensemble de Delone et  $\Lambda - \Lambda$  est un ensemble de Delone

*Démonstration.* (2)  $\Rightarrow$  (1) : Un ensemble de Delone est uniformément discret et relativement dense, ainsi,  $\Lambda$  est un ensemble de Meyer.

(1)  $\Rightarrow$  (2) : Par hypothèse, les ensembles  $\Lambda$  et  $\Lambda - \Lambda$  sont relativement dense et uniformément discret, respectivement. Par le Lemme 2.1.16, l'ensemble  $\Lambda - \Lambda$  est également relativement dense, donc c'est un ensemble de Delone. De plus, par le Lemme 2.1.11,  $\Lambda$  est uniformément discret et de Delone également. Ainsi, la condition (2) est vérifiée.  $\square$

## 2.2 Caractérisation des ensembles de Meyer

Dans un contexte de géométrie cristallographique, la condition (2) du Théorème 2.1.17 est la définition *des ensembles quasi-réguliers* introduite en 1989 par le mathématicien russe R.V. Galiulin dans [Gal89].

Dans [Moo97], Le mathématicien Moody a, quant à lui, adopté et popularisé l'expression *ensembles de Meyer* pour désigner les ensembles de Delone  $\Lambda$  pour lesquels il existe un ensemble  $F$  fini tel que :

$$\Lambda - \Lambda \subset \bigcup_{f \in F} (\Lambda + \{f\}).$$

L'objectif de cette section est de démontrer l'équivalence entre les ensembles de Meyer de Moody et les ensembles quasi-réguliers de Galiulin. Cette caractérisation, due à J.C Lagarias, assouplit considérablement la notion de réseau. Rappelons que, si  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  est un réseau, en particulier, on a

$$\Lambda - \Lambda = \Lambda.$$

**Lemme 2.2.1.** *Si  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  est discret et  $F \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble fini, alors  $\Lambda + F$  est discret.*

*Démonstration.* Posons  $F = \{f_1, \dots, f_m\}$  et

$$\Lambda + F = \bigcup_{i=1}^m (\Lambda + \{f_i\}).$$

Puisque, par hypothèse,  $\Lambda$  est discret, pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , il existe  $\varepsilon_\lambda > 0$  tel que

$$B(\lambda, \varepsilon_\lambda) \cap \Lambda = \{\lambda\}.$$

De cette relation, on en déduit que, pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , on a

$$B(\lambda + f_i, \varepsilon_\lambda) \cap (\Lambda + f_i) = \{\lambda + f_i\},$$

pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Ainsi, chaque ensemble de la forme  $\Lambda + \{f_i\}$  est discret. Montrons que l'union de ces ensembles l'est également. Procédons par l'absurde et supposons qu'il existe  $x \in \mathbb{R}^n$  un point d'accumulation de  $\Lambda + F$ . Il existe

$$(x_n)_n = (\lambda_n + f_{i_n})_n$$

une suite de  $\Lambda + F$  qui converge vers  $x$ . Puisque l'ensemble  $F$  est fini, par le principe des tiroirs, il existe  $j \in \{1, \dots, m\}$  tel que  $f_j$  apparaît dans une infinité de termes de la suite  $(x_n)_n$ . En particulier, si on construit une sous-suite de  $(x_n)_n$  en ne considérant que les éléments où le terme  $f_j$  apparaît, on obtient une suite de  $\Lambda + \{f_j\}$  qui converge vers  $x$ . Cela implique alors que  $x$  est un point d'accumulation de  $\Lambda + \{f_j\}$ , ce qui contredit le caractère discret de cet ensemble. Il s'ensuit alors que l'ensemble  $\Lambda + F$  est également discret.  $\square$

**Remarque 2.2.2.** La finitude de l'ensemble  $F$  est essentielle dans le lemme précédent. Si on considère l'ensemble discret  $\Lambda = \mathbb{Z}$  et l'ensemble  $F = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$  infini dénombrable, alors tous les éléments de  $\mathbb{Z}$  sont des points d'accumulation de  $\Lambda + F$ . En effet, pour chaque  $n \in \mathbb{Z}$ , la suite de  $\Lambda + F$  définie par

$$x_j = n + \frac{1}{j}, \quad \forall j \geq 1$$

converge vers  $n$ .

**Théorème 2.2.3.** *Si  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  est un ensemble de Delone tel que  $\Lambda - \Lambda \subset \Lambda + F$ , où  $F$  est un ensemble fini, alors l'ensemble  $\Lambda$  est de Meyer.*

*Démonstration.* Montrons que la condition est suffisante.

Supposons que  $\Lambda$  est un ensemble de Delone et que  $F$  est un ensemble fini tel que

$$\Lambda - \Lambda \subset \Lambda + F.$$

Puisque, par hypothèse, l'ensemble  $\Lambda$  est de Delone, pour montrer que  $\Lambda$  est un ensemble de Meyer, il suffit de montrer que  $\Lambda - \Lambda$  est un ensemble de Delone. Par hypothèse, l'ensemble  $\Lambda$  est relativement dense, par le Lemme 2.1.16, il en résulte que l'ensemble  $\Lambda - \Lambda$  l'est également. Montrons que  $\Lambda - \Lambda$  est uniformément discret. Pour ce faire, il suffit de montrer que  $\Lambda + F$  est uniformément discret. En effet, comme

$$\Lambda - \Lambda \subset \Lambda + F,$$

on pourra conclure, par la Proposition 1.2.7, que l'ensemble  $\Lambda - \Lambda$  est également uniformément discret. Par le Lemme 2.2.1, on a que  $\Lambda + F$  est discret. Ainsi, il s'ensuit que  $\Lambda - \Lambda$  est discret. Supposons que  $\Lambda + F$  n'est pas uniformément discret. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $z \in \mathbb{R}^n$  tel que

$$|B(z, \varepsilon) \cap (\Lambda + F)| \geq 2.$$

On peut construire une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $(\Lambda + F) - (\Lambda + F)$  qui converge vers 0 et tels que tous les termes de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont différents. On peut construire une telle suite comme suit. Pour  $\varepsilon$ , puisqu'on a supposé que  $\Lambda + F$  n'est pas uniformément discret, il existe  $y_1, z_1 \in \Lambda + F$  tels que

$$\|y_1 - z_1\| < \varepsilon.$$

Posons  $d_1 = \|y_1 - z_1\| > 0$ , puisque  $\Lambda + F$  ne soit pas uniformément discret, il existe  $y_2, z_2 \in \Lambda + F$  tels que

$$\|y_2 - z_2\| < d_1.$$

En continuant de la sorte, on construit une suite  $(x_n)_n = (y_n - z_n)_k$  de  $\Lambda + F$  telle que

$$\|x_{n+1}\| = \|y_{n+1} - z_{n+1}\| < d_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

et  $(d_n)_n$  décroît vers 0.

Chaque élément de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  s'écrit de la manière suivante :

$$x_n = (\lambda_n + f_n) - (\lambda'_n + f'_n),$$

où  $\lambda_n, \lambda'_n \in \Lambda$  et  $f_n, f'_n \in F$ . Puisque  $F$  est fini, on peut extraire une sous-suite  $(x_{k(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  où le couple  $(f_n, f'_n)$  est constant, disons  $(f, f')$ . Considérons la suite  $(y_j)_{j \in \mathbb{N}}$  telle que

$$y_j = \lambda_j - \lambda'_j,$$

pour tout  $j \in \mathbb{N}$ . On a que  $(y_j)_{j \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f - f'$  et de plus, tous les éléments  $y_j$  sont distincts car tel est le cas pour les  $x_n$ . On peut en déduire que  $\Lambda - \Lambda$  n'est pas discret car  $(y_j)_{j \in \mathbb{N}}$  est une suite de  $\Lambda - \Lambda$  qui converge vers  $f - f'$  et qui atteint une infinité de valeurs distinctes. On atteint alors une contradiction, puisqu'on a prouvé que  $\Lambda + F$  était discret.  $\square$

On vient de démontrer un premier sens de la caractérisation que l'on souhaite présenter. Pour montrer le deuxième sens, on doit encore démontrer quelques lemmes techniques.

**Définition 2.2.4.** Un groupe  $G$  est dit finiment engendré s'il existe  $P \in \mathcal{P}(G)$  une partie génératrice finie. On note alors  $G = \langle P \rangle$ .

**Lemme 2.2.5.** Soit  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ . Si l'ensemble  $\Lambda$  est uniformément discret alors, pour tout  $r > 0$ , l'ensemble  $\Lambda \cap B(0, r)$  est fini.

*Démonstration.* Par hypothèse, il existe  $R > 0$  tel que pour tous points distincts  $x, y \in \Lambda$ , on a

$$\|x - y\| \geq R.$$

S'il existe  $r > 0$  tel que  $|\Lambda \cap B(0, r)| = \infty$ , alors  $B(0, r + \frac{R}{2})$  contiendrait une infinité de boules deux à deux disjointes de rayon  $\frac{R}{2}$ . Puisque le volume de  $B(0, r + \frac{R}{2})$  est fini,  $\Lambda \cap B(0, r)$  ne peut contenir qu'un nombre fini d'éléments.  $\square$

**Lemme 2.2.6.** Supposons que  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  est un ensemble  $(r, R)$ -Delone et que  $\Lambda - \Lambda$  est un ensemble  $(r', R')$ -Delone. On a

$$|(\Lambda - \Lambda) \cap B(0, 3R)| \leq \left( \frac{6R}{r'} + 1 \right)^n.$$

*Démonstration.* Posons  $P := (\Lambda - \Lambda) \cap B(0, 3R)$  et, pour tout  $x \in P$ , considérons la boule ouverte  $B(x, \frac{r'}{2})$ . Puisque  $\Lambda - \Lambda$  est uniformément discret de seuil  $r'$ , il s'ensuit que toutes les boules ouvertes  $B(x, \frac{r'}{2})$  sont deux à deux disjointes. Si  $x \in P$ , on a

$$B\left(x, \frac{r'}{2}\right) \subseteq B\left(0, 3R + \frac{r'}{2}\right)$$

De plus, on a les relations suivantes

$$\begin{aligned} \text{vol}\left(B\left(x, \frac{r'}{2}\right)\right) &= V_n \left(\frac{r'}{2}\right)^n, \\ \text{vol}\left(B\left(0, 3R + \frac{r'}{2}\right)\right) &= V_n \left(3R + \frac{r'}{2}\right)^n, \end{aligned}$$

où  $V_n$  est le volume de la boule unité de dimension  $n$ . Ainsi, de ces relations, on en déduit

$$|P| V_n \left(\frac{r'}{2}\right)^n \leq V_n \left(3R + \frac{r'}{2}\right)^n = V_n \left(\frac{r'}{2}\right)^n \left(\frac{6R}{r'} + 1\right)^n.$$

En divisant par  $V_n \left(\frac{r'}{2}\right)^n$ , on obtient

$$|P| \leq \left(\frac{6R}{r'} + 1\right)^n.$$

comme souhaité.  $\square$

Démontrons un dernier lemme technique avant de passer à la démonstration de la deuxième partie de la caractérisation.

**Lemme 2.2.7.** *Supposons que  $\Lambda$  est un ensemble  $(r, R)$ -Delone tel que  $\Lambda - \Lambda$  soit un ensemble  $(r', R')$ -Delone. Le groupe additif engendré par les éléments de  $\Lambda - \Lambda$  est finiment engendré.*

*Démonstration.* Considérons  $\Lambda$  un ensemble  $(r, R)$ -Delone et  $\Lambda - \Lambda$  un ensemble  $(r', R')$ -Delone. Montrons que le groupe additif  $\langle \Lambda - \Lambda \rangle_{\mathbb{Z}}$  est finiment engendré. D'après le Lemme 2.2.5, l'ensemble

$$P = (\Lambda - \Lambda) \cap B(0, 3R)$$

est fini.

Par le Lemme 2.2.6, il s'ensuit que

$$|P| \leq \left( \frac{6R}{r'} + 1 \right)^n.$$

Considérons le  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel engendré par  $P$  et notons le  $E := \langle P \rangle_{\mathbb{Q}}$ . Puisque  $P$  est de cardinalité finie, on obtient que

$$\dim(E) = m,$$

pour  $m \leq \left( \frac{6R}{r'} + 1 \right)^n$ . Soit  $B = \{b_1, \dots, b_m\}$  une partie de  $P$  qui forme une base de  $E$ . Pour tout  $p_i \in P$ , on a

$$p_i = \sum_{j=1}^m k_{ij} b_j,$$

où  $k_{ij} \in \mathbb{Q}$ . Comme il n'y a qu'un nombre fini d'éléments de  $P$  et que la dimension de  $E$  est finie, il est clair qu'il n'y a qu'un nombre fini de coefficients  $k_{ij}$ . Considérons  $D$  le plus petit commun multiple de tous les dénominateurs des  $k_{ij}$ . Ainsi, on a

$$k_{ij} = \frac{d_{ij}}{D},$$

pour  $d_{ij} \in \mathbb{Z}$ . Pour tout  $j \in \{1, \dots, m\}$ , considérons

$$b'_j = \frac{b_j}{D}.$$

On possède désormais une nouvelle base  $\{b'_1, \dots, b'_m\}$  pour laquelle tout élément de  $P$  peut s'écrire de la forme suivante

$$p_i = \sum_{j=1}^m d_{ij} b'_j,$$

où tous les  $d_{ij} \in \mathbb{Z}$ . On en tire que

$$P \subset \langle \{b'_1, \dots, b'_m\} \rangle_{\mathbb{Z}}.$$

Pour conclure la démonstration, il suffit de montrer que  $\Lambda - \Lambda \subset \langle \{b'_1, \dots, b'_m\} \rangle_{\mathbb{Z}}$ . Pour ce faire, fixons  $x \in \Lambda - \Lambda$  et posons  $\lambda, \lambda' \in \Lambda$  tel que  $x = \lambda' - \lambda$ . Pour tout  $k \in \left\{0, \dots, \left\lfloor \frac{\|x\|}{R} \right\rfloor\right\}$ , on définit

$$v_k = \lambda + kR \frac{x}{\|x\|}$$

et pour  $k' = \left\lfloor \frac{\|x\|}{R} \right\rfloor + 1$ , posons

$$v_{k'} = \lambda'.$$

Comme  $\Lambda$  est relativement dense, pour tout  $k \in \{0, \dots, k'\}$ , il existe  $u_k \in \Lambda$  tel que

$$\|v_k - u_k\| < R \quad (2.1)$$

Posons  $u_0 = v_0$  et  $u_{k'} = v_{k'}$ . En utilisant l'inégalité triangulaire et la relation (2.1), on en tire que

$$\begin{aligned} \|u_{k+1} - u_k\| &= \|u_{k+1} - v_{k+1} + v_{k+1} - v_k + v_k - u_k\| \\ &\leq \|u_{k+1} - v_{k+1}\| + \|v_{k+1} - v_k\| + \|v_k - u_k\| \\ &\leq 3R, \end{aligned}$$

pour tout  $k \in \{0, \dots, k' - 1\}$ . On conclut alors que, pour tout  $k \in \{0, \dots, k' - 1\}$ , on a  $u_{k+1} - u_k \in P \subset \langle \{b'_1, \dots, b'_m\} \rangle_{\mathbb{Z}}$ . En remarquant que,

$$x = \lambda' - \lambda = \sum_{i=0}^{k'-1} (u_{i+1} - u_i),$$

on en déduit que  $x \in \langle \{b'_1, \dots, b'_m\} \rangle_{\mathbb{Z}}$ . □

On peut désormais passer à la démonstration de la caractérisation. Afin de ne pas encombrer la preuve, on gardera les mêmes notations que celles présentes dans la démonstration du Lemme 2.2.7.

**Théorème 2.2.8.** *Si  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  est un ensemble de Meyer alors il existe un ensemble fini  $F$  tel que  $\Lambda - \Lambda \subset \Lambda + F$ .*

*Démonstration.* Supposons que  $\Lambda$  est un ensemble  $(r, R)$ -Delone et  $\Lambda - \Lambda$  un ensemble  $(r', R')$ -Delone. Cherchons un ensemble fini  $F$  tel que

$$\Lambda - \Lambda \subset \Lambda + F. \quad (2.2)$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que  $0 \in \Lambda$ . En effet, si  $0 \notin \Lambda$ , considérons  $\Lambda' = \Lambda - \{\lambda\}$  avec  $\lambda \in \Lambda$ . On a  $0 \in \Lambda'$ ,

$$\Lambda' - \Lambda' = (\Lambda - \{\lambda\}) - (\Lambda - \{\lambda\}) = \Lambda - \Lambda. \quad (2.3)$$

Si  $\Lambda - \Lambda \subset \Lambda + F$ , en posant  $F' = F + \{\lambda\}$ , on obtient

$$\Lambda' + F' = (\Lambda - \{\lambda\}) + (F + \{\lambda\}) = \Lambda + F. \quad (2.4)$$

En combinant, les équations (2.2), (2.3) et (2.4), il s'ensuit que  $\Lambda' - \Lambda' \subset \Lambda' + F'$ .

Par hypothèse,  $\Lambda - \Lambda$  est uniformément discret. Par le Lemme 2.2.7, le groupe  $\langle \Lambda - \Lambda \rangle_{\mathbb{Z}}$  est finiment engendré. En reprenant les notations de la démonstration précédente, posons les constantes suivantes :

$$C = \max_{i,j} |d_{ij}| + 1$$

$$C' = 2C \left( \frac{4R}{r'} + 1 \right)^n$$

et considérons l'ensemble suivant

$$F = \left\{ \sum_{i=1}^m c_i b'_i : |c_i| \leq C', c_i \in \mathbb{Z}, \forall i \right\}.$$

Puisque  $\dim(E) = m$  est fini, on en déduit que l'ensemble  $F$  est de cardinalité fini. On va montrer que  $\Lambda - \Lambda \subset \Lambda + F$ . Pour ce faire, posons  $x \in \Lambda - \Lambda$  et montrons que  $x \in \Lambda + F$ . Par définition, il existe  $\lambda, \lambda' \in \Lambda$  tels que  $x = \lambda' - \lambda$ . Par densité relative de  $\Lambda$ , il existe  $y \in \Lambda$  tel que

$$\|x - y\| \leq R. \quad (2.5)$$

On a montré que l'on peut supposer, sans perte de généralité, que  $0 \in \Lambda$ . Ainsi, en utilisant le Lemme 2.2.7, on a

$$\Lambda \subseteq \Lambda - \Lambda \subseteq \langle \{b'_1, \dots, b'_m\} \rangle_{\mathbb{Z}}.$$

Il en résulte que  $x, y \in \langle \{b'_1, \dots, b'_m\} \rangle_{\mathbb{Z}}$  et cela implique

$$x = \sum_{i=1}^m x_i b'_i, \quad y = \sum_{i=1}^m y_i b'_i$$

où  $x_i, y_i \in \mathbb{Z}$ . Pour prouver que  $x \in \Lambda + F$ , montrons qu'il existe  $f \in F$  tel que  $x = y + f$ . Remarquons que  $x = y + f$  si et seulement si

$$|x_i - y_i| \leq C', \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}. \quad (2.6)$$

Construisons une chaîne de vecteurs de  $P - P$  qui commencent en  $y = y - 0$  et termine en  $x = \lambda' - \lambda$  tels que chaque pas est constant de longueur  $R$ . Pour ce faire, considérons les vecteurs suivants :

$$x_k = kR \frac{\lambda}{\|\lambda\|} \quad \text{et} \quad x'_k = x_k + x$$

pour tout  $0 \leq k \leq k' = \left\lfloor \frac{\|\lambda\|}{R} \right\rfloor$ . En utilisant à nouveau la densité relative de  $\Lambda$ , pour tout  $1 \leq k \leq k'$ , il existe  $z_k, z'_k \in \Lambda$  tels que

$$\|x_k - z_k\| \leq R \quad \text{et} \quad \|x'_k - z'_k\| \leq R.$$

Posons  $z_0 = 0$  et  $z'_0 = y$ . On remarque que  $\|x_0 - z_0\| = \|0 - 0\| \leq R$  et que, grâce à la relation (2.5), on a également  $\|x'_0 - z'_0\| \leq R$ . Pour  $k' + 1$ , on pose

$$z_{k'+1} = \lambda \quad \text{et} \quad z'_{k'+1} = \lambda'.$$

Définissons, désormais, pour tout  $0 \leq k \leq k' + 1$ ,

$$w_k = z'_k - z_k.$$

On a

$$w_0 = y - 0 = y, \quad w_{k'+1} = \lambda' - \lambda = x.$$

Comme chaque  $w_k \in \Lambda - \Lambda$ , on en tire que

$$w_k = \sum_{j=1}^m a_{k,j} b'_j,$$

où  $a_{k,j} \in \mathbb{Z}$ , pour tout  $k \in \{0, \dots, k' + 1\}$  et pour tout  $j \in \{1, \dots, m\}$ . Montrons que pour tout  $k \in \{1, \dots, k' + 1\}$ , on a

$$w_k - w_{k-1} \in P - P.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on a

$$\|(z'_k - z'_{k-1})\| \leq \|z'_k - x'_k\| + \|x'_k - x'_{k-1}\| + \|x'_{k-1} - z'_{k-1}\| < 3R, \quad \forall k \in \{0, \dots, k' + 1\}.$$

On a également

$$\|(z_k - z_{k-1})\| \leq \|z_k - x_k\| + \|x_k - x_{k-1}\| + \|x_{k-1} - z_{k-1}\| < 3R, \quad \forall k \in \{0, \dots, k' + 1\}.$$

Vu que  $w_k - w_{k-1} = (z'_k - z'_{k-1}) - (z_k - z_{k-1})$ , on en déduit que  $w_k - w_{k-1} \in P - P$ . De plus, par définition de  $C$ , on en tire que

$$|a_{k,j} - a_{(k-1),j}| \leq |a_{k,j}| + |a_{(k-1),j}| \leq 2C, \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}. \quad (2.7)$$

Comme  $x = x'_j - x_j$ , on a

$$\|w_j - x\| = \|(z'_j - z_j) - (x'_j - x_j)\| \leq \|(z_j - x_j)\| + \|(z'_j - x'_j)\| \leq 2R.$$

Ainsi, tous les vecteurs  $w_j$  sont dans la boule  $B(x, 2R)$  et

$$|B(x, 2R) \cap (\Lambda - \Lambda)| \leq \left(\frac{4R}{r'} + 1\right)^n. \quad (2.8)$$

Supposons que la relation (2.6) n'est pas vérifiée et considérons la suite de vecteurs  $w_k$  telle que  $w_0 = y$  et que  $w_{k'+1} = x$  et pour aller de  $w_0$  à  $w_{k'+1}$ , on le fait en faisant des pas qui

respectent l'équation (2.7). Comme on a supposé que l'équation (2.6) n'était pas satisfaite, on en déduit l'existence d'une coordonnée  $k_0 \in \{1, \dots, m\}$  qui satisfait :

$$|x_{k_0} - y_{k_0}| > C' = 2C \left( \frac{4R}{r'} + 1 \right)^n .$$

Étant donné que la suite  $(w_k)$  effectue des pas d'une longueur au plus  $2C$ , on en déduit l'existence d'au moins  $(\frac{4R}{r'} + 1)^n + 1$  vecteurs distincts, ce qui est impossible au vu de (2.8). Ainsi, puisque l'on a atteint une contradiction, la relation (2.6) est vérifiée et celle-ci implique l'existence de  $f \in F$  tel que

$$x = y + f,$$

comme souhaité. □

En réunissant les Théorèmes 2.2.3 et 2.2.8, on en déduit la caractérisation suivante.

**Corollaire 2.2.9.** *Un ensemble  $\Lambda$  est de Meyer si et seulement si,  $\Lambda$  est un ensemble de Delone tel que*

$$\Lambda - \Lambda \subset \Lambda + F,$$

où  $F \subset \mathbb{R}^n$  est un ensemble fini.

**Remarque 2.2.10.** Dans certains ouvrages, les ensembles de Meyer (ou les quasi-cristaux) sont définis comme des ensembles de Delone satisfaisant la condition du corollaire précédent.

**Corollaire 2.2.11.** *Tout cristal idéal est un ensemble de Meyer.*

*Démonstration.* Considérons  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  un cristal idéal. Par définition, il existe un ensemble fini  $F \subset \mathbb{R}^n$  et un réseau complet  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  tel que

$$\Lambda = \Gamma + F.$$

Puisque l'ensemble  $\Gamma$  est relativement dense, l'ensemble  $\Lambda$  l'est également. De plus, par le Corollaire 1.2.12, l'ensemble  $\Gamma$  est uniformément discret, en particulier, l'ensemble  $\Gamma$  est localement fini. Posons  $x \in \mathbb{R}^n$  et considérons

$$\Lambda \cap \overline{B}(x, r) = \bigcup_{f \in F} ((\Gamma + f) \cap \overline{B}(x, r)),$$

pour  $r > 0$ . Puisque

$$(\Gamma + f) \cap \overline{B}(x, r) = \Gamma \cap (\overline{B}(x, r) - \{f\}),$$

l'ensemble  $\Gamma$  étant localement fini, il s'ensuit que chaque  $(\Gamma + f) \cap \overline{B}(x, r)$  est fini et, comme une union finie d'ensembles finis est finie, il s'ensuit que  $\Lambda \cap \overline{B}(x, r)$  est fini. Ainsi, l'ensemble  $\Lambda$  est localement fini et, par périodicité du réseau, on a que  $\Lambda$  est uniformément

discret et, donc, un ensemble de Delone. Pour conclure, il suffit de trouver un ensemble fini  $G$  tel que  $\Lambda - \Lambda \subseteq \Lambda + G$  et d'appliquer le Corollaire 2.2.9. On a

$$\Lambda - \Lambda = (\Gamma + F) - (\Gamma + F) = (\Gamma - \Gamma) + (F - F)$$

Comme le réseau  $\Gamma$  est muni d'une structure de groupe, par le Lemme 2.1.9, on a  $\Gamma - \Gamma = \Gamma$ . Ainsi,

$$(\Gamma - \Gamma) + (F - F) = \Gamma + (F - F) = \Lambda - F = \Lambda + G,$$

l'ensemble  $F$  est fini, il en est donc de même pour  $G = -F$ .  $\square$

## 2.3 Méthode de coupe et projection

Il existe différentes manières de construire des ensembles de Meyer ; la méthode de coupe et projection est l'une d'entre elles. Le principe de cette méthode a été envisagé dès les années 1920. En effet, le mathématicien Harald Bohr a développé la théorie des fonctions presque périodiques dans son article [Boh32], ses travaux ont permis de mieux comprendre des structures présentant un ordre sans périodicité stricte et ont inspiré, quelques décennies plus tard, l'élaboration de la méthode de coupe et projection. Cette méthode permet de créer des ensembles appelés *ensembles modèles* et ceux-ci possèdent des propriétés remarquables comme l'appartenance à la famille des ensembles de Meyer et l'absence de symétrie translationnelle.

L'objectif est de démontrer que les ensembles modèles sont, en particulier, des ensembles de Meyer.

Avant de passer à la méthode de coupe et projection, rappelons quelques définitions classiques de topologie.

**Définition 2.3.1.** Un espace topologique  $(X, \mathcal{T})$  est séparé si pour tous  $x, x' \in X$  distincts, il existe  $\Omega_x, \Omega_{x'} \in \mathcal{T}$  tels que  $x \in \Omega_x$ ,  $x' \in \Omega_{x'}$  et

$$\Omega_x \cap \Omega_{x'} = \emptyset.$$

**Définition 2.3.2.** Un espace topologique  $(X, \mathcal{T})$  est *localement compact* si pour tout  $x \in X$ , il existe un voisinage de  $x$  qui est compact.

**Définition 2.3.3.** Soit  $G$  un groupe et aussi un espace topologique, de topologie  $\mathcal{T}$ . On dit que  $G$  est un groupe *topologique* si les applications

$$\begin{aligned} + : G \times G &\rightarrow G : (x, y) \mapsto x + y \\ - : G &\rightarrow G : x \mapsto -x \end{aligned}$$

sont continues.

**Définition 2.3.4.** Un groupe  $G$  est *localement compact* si  $G$  est un groupe topologique dont la topologie est localement compact et séparée. De plus, si un tel groupe  $G$  est commutatif, on dit que  $G$  est un *groupe abélien localement compact*.

**Exemple 2.3.5.** L'ensemble  $\mathbb{R}$  muni de la topologie euclidienne est un groupe abélien localement compact. L'ensemble  $\mathbb{Z}$  muni de la topologie discrète en est un aussi.

**Définition 2.3.6.** Soit  $G$  un groupe muni d'une topologie  $\mathcal{T}$ . On dit qu'un sous-ensemble  $H \subseteq G$  est *dense* dans  $G$  si pour tout ouvert non-vide  $V \in \mathcal{T}$ , on a

$$V \cap H \neq \emptyset.$$

Puisqu'on l'utilisera à plusieurs reprises, rappelons le théorème de Tychonoff.

**Théorème 2.3.7.** Soit  $(X_j, \mathcal{T}_j)$ ,  $j \in J$ , une famille d'espaces topologiques. Tous les espaces  $X_j$  sont compacts si et seulement si  $\prod_{j \in J} X_j$  est compact.

Dans le Chapitre 1, la notion de réseau avait été introduite dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ . Cependant, il est nécessaire de généraliser la définition pour introduire la méthode de coupe et projection. Comme dans la Remarque 1.2.14, on définit un réseau  $\Lambda$  comme étant un sous-groupe discret dont le quotient est compact.

**Définition 2.3.8.** Soit  $G$  un groupe abélien localement compact. Un ensemble  $\tilde{L} \subset \mathbb{R}^n \times G$  est un *réseau* si  $\tilde{L}$  est un sous-groupe discret tel que  $(\mathbb{R}^n \times G)/\tilde{L}$  est compact.

**Exemple 2.3.9.** Considérons  $n = 1$ ,  $G = \mathbb{T}$  et  $\tilde{L} = \mathbb{Z} \times \{0\}$ . Montrons que  $\tilde{L}$  est un réseau. L'ensemble  $\mathbb{Z} \times \{0\}$  est bien un sous-groupe discret pour la somme. De plus, on a

$$(\mathbb{R} \times \mathbb{T})/(\mathbb{Z} \times \{0\}) \cong \mathbb{T} \times \mathbb{T},$$

où  $\mathbb{T}$  est le tore. Puisque le tore  $\mathbb{T}$  est compact, par Tychonoff, l'ensemble  $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$  l'est également. Ainsi, le quotient est compact et  $\tilde{L}$  est un réseau.

Un schéma de coupe et projection est la donnée d'une collection d'espaces et d'applications. Un tel schéma est résumé par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^n & \xleftarrow{\pi_1} & \mathbb{R}^n \times G & \xrightarrow{\pi_2} & G \\ & & \uparrow & & \\ & & \tilde{L} & & \end{array}$$

où  $G$  est un groupe abélien localement compact,  $\tilde{L}$  est un réseau de  $\mathbb{R}^n \times G$ . L'ensemble produit  $\mathbb{R}^n \times G$  est muni de la topologie produit. Les projections sont définies par

$$\begin{aligned} \pi_1 : \mathbb{R}^n \times G &\rightarrow \mathbb{R}^n : (x, g) \mapsto x \\ \pi_2 : \mathbb{R}^n \times G &\rightarrow G : (x, g) \mapsto g \end{aligned}$$

On impose que l'application  $\pi_1|_{\tilde{L}}$  est injective et que l'image  $\pi_2(\tilde{L})$  est dense dans  $G$ . On note  $L = \pi_1(\tilde{L})$ . L'espace  $\mathbb{R}^n \times G$  est appelé l'espace *ambient*,  $\mathbb{R}^n$  est l'espace *physique* et  $G$  est l'espace *interne*. Un triplet  $(\mathbb{R}^n, G, \tilde{L})$  satisfaisant les conditions ci-dessus est appelé un *schéma de coupe et projection*.

Considérons l'application suivante :

$$\star : L \rightarrow G : x \mapsto x^\star = \pi_2((\pi_1|_{\tilde{L}})^{-1}(x)).$$

L'application est bien définie car  $\pi_1$  est une bijection entre  $\tilde{L}$  et  $L$ . De plus, puisque l'application  $\star$  est la composition d'homomorphismes de groupes abéliens, alors  $\star$  est également un homomorphisme de groupes abéliens. Pour tout sous-ensemble  $W \subset G$ , on définit l'ensemble suivant

$$\Lambda(W) = \{\pi_1(x) : x \in \tilde{L}, \pi_2(x) \in W\} = \{x \in L : x^\star \in W\}. \quad (2.9)$$

L'ensemble  $W$  est appelé la *fenêtre d'acceptation*.

**Définition 2.3.10.** Soit  $(\mathbb{R}^n, G, \tilde{L})$  un schéma de coupe et projection. Si  $W \subset G$  est relativement compact et d'intérieur non vide, alors l'ensemble  $\Lambda(W)$  définie par (2.9) est un ensemble *modèle*.

Avant de passer aux résultats théoriques, donnons un exemple d'ensemble modèle.

**Exemple 2.3.11.** Notons  $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  le nombre d'or et  $\tau' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  son conjugué. Pour rappel, le nombre d'or est la plus grande racine du polynôme

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Posons  $G = \mathbb{R}$  et définissons le réseau

$$\tilde{L} := \{a(1, 1) + b(\tau, \tau') : a, b \in \mathbb{Z}\} = \{(a + b\tau, a + b\tau') : a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Le schéma de coupe et projection est le triplet  $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \tilde{L})$ . Puisque pour  $b_1 = (1, 1)$  et  $b_2 = (\tau, \tau')$ , on a

$$\tilde{L} = \mathbb{Z}b_1 \oplus \mathbb{Z}b_2$$

et cela correspond à la définition de réseau dans  $\mathbb{R}^2$ . Soient  $u, v \in \tilde{L}$ , alors  $u = (a + b\tau, a + b\tau')$  et  $u' = (a' + b'\tau, a' + b'\tau')$ . Si  $\pi_1(u) = \pi_1(v)$  alors

$$a + b\tau = a' + b'\tau \Leftrightarrow (a - a') + (b - b')\tau = 0.$$

Puisque  $\tau$  est irrationnel, l'équation est satisfaite si  $a = a'$  et  $b = b'$ . La projection  $\pi_1|_{\tilde{L}}$  est donc injective. De plus,  $\pi_2(\tilde{L}) = \{a + b\tau' : a, b \in \mathbb{Z}\}$  est un sous-groupe additif de  $\mathbb{R}$  et, puisque qu'il n'est pas de la forme  $m\mathbb{Z}$  pour  $m \in \mathbb{R}^+$ , il est dense dans  $\mathbb{R}$  par la Proposition A.0.6. En prenant l'ensemble relativement compact  $W = [-1, \tau - 1]$ , on obtient l'ensemble modèle

$$\Lambda(W) = \{a + b\tau : a, b \in \mathbb{Z}, -1 \leq a + b\tau' \leq \tau - 1\}.$$

Avant d'être en mesure de démontrer que tout ensemble modèle est un ensemble de Meyer, il est nécessaire d'établir de nouvelles définitions et d'énoncer quelques lemmes.

**Définition 2.3.12.** Soit  $\Lambda \subset G$  un ensemble de points. Tout ensemble de la forme  $K \cap \Lambda$  est appelé un *cluster* si  $K \subset G$  un ensemble compact. De plus, si  $K$  est convexe, l'ensemble  $K \cap \Lambda$  est un *patch*.

**Exemple 2.3.13.** Si  $G = \mathbb{R}^n$ , pour toute boule  $B$ , l'intersection  $\mathbb{R}^n \cap \overline{B}$  est un patch. De même, si on remplace la boule fermée par un parallélépipède fermée.

**Définition 2.3.14.** Soit  $G$  un groupe abélien localement compact. Un ensemble de points  $\tilde{L} \subset G$  a une *complexité locale finie* si, pour tout compact  $K$ , l'ensemble

$$\mathcal{P}_K = \{K \cap (\tilde{L} - x) : x \in \tilde{L}\}$$

est fini. Un tel ensemble est appelé un ensemble *FLC*

**Remarque 2.3.15.** Soit  $G$  un groupe abélien localement compact. Puisque  $\mathbb{R}^n$  est un groupe abélien localement compact et que le produit de deux groupes abéliens localement compacts est aussi un groupe abélien localement compact, il s'ensuit que la définition précédente est valable pour  $\mathbb{R}^n \times G$ .

**Lemme 2.3.16.** Soient  $G$  un groupe abélien localement compact et  $K_1, K_2 \subset G$  des ensembles compacts. Si  $K_1, K_2$  sont des ensembles compacts, alors  $K_1 - K_2$  et  $K_1 + K_2$  sont également compacts.

*Démonstration.* Considérons  $K_1, K_2$  des ensembles compacts de  $G$ . Puisque  $G$  est un groupe topologique, par définition, l'addition

$$+ : K_1 \times K_2 \rightarrow K_1 + K_2 : (x, y) \mapsto x + y$$

est continue. Par le Théorème 2.3.7, le produit fini de compacts est compact et que l'image continue d'un compact est compact également, il s'ensuit que

$$K_1 + K_2 = \{x + y : x \in K_1, y \in K_2\}$$

est compact.

Puisque  $K_2$  est compact, par continuité de l'application  $-$ , l'ensemble  $-K_2$  est compact également. Il s'ensuit que l'ensemble  $K_1 + (-K_2)$  est compact.  $\square$

Afin de démontrer que tout ensemble de complexité locale finie est uniformément discret, présentons une caractérisation des ensembles FLC.

**Proposition 2.3.17.** Un ensemble  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  est FLC si et seulement si l'ensemble  $\Lambda - \Lambda$  est localement fini.

*Démonstration.* Supposons que  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  est FLC et posons  $r > 0$ . Par hypothèse, il n'existe qu'un nombre fini de patches de la forme  $\overline{B}(t, r) \cap \Lambda$  pour  $t \in \Lambda$ . Ainsi,

$$\{\overline{B}(t, r) \cap \Lambda : t \in \Lambda\} = \{P_1, \dots, P_m\}.$$

pour  $m \in \mathbb{N}_0$ . Montrons d'abord que chaque patch  $P_i$  possède un nombre fini d'éléments. Supposons qu'il existe un patch  $P_i$  tel que

$$|P_i| = \infty.$$

Étant de volume fini, il existe une suite de Cauchy dans le patch  $P_i$ . L'existence d'une telle suite engendre une infinité de patches différents, à translation près, ce qui est absurde. Il s'ensuit que  $|P_i| < \infty$  pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Pour toute paire d'éléments  $x, y \in \Lambda$  telle que

$$\|x - y\| \leq r,$$

Ainsi le point  $x$  appartient à  $\Lambda \cap \overline{B}(y, r)$ . Cela implique que

$$(\Lambda - \Lambda \cap \overline{B}(0, r)) \subset \bigcup_{i=1}^m P_i.$$

Comme toute union finie d'ensembles finis est finie, il en résulte que l'ensemble  $(\Lambda - \Lambda \cap \overline{B}(0, r))$  est fini. Par conséquent, puisque le choix de  $r$  était arbitraire et que tout compact  $K$  est inclus dans  $\overline{B}(0, r)$  pour un certain  $r$ , alors  $\Lambda - \Lambda$  est localement fini.

Supposons désormais que l'ensemble  $\Lambda - \Lambda$  est localement fini. Par définition, pour tout  $r > 0$ , on a

$$|(\Lambda - \Lambda) \cap \overline{B}(0, r)| < \infty, \quad \forall r > 0.$$

On peut alors écrire que  $\Lambda - \Lambda = \{x_n : n \in \mathbb{N}_0\}$  tel que  $x_0 = 0$  et  $\|x_i\| \leq \|x_{i+1}\|$ . Ainsi, pour tout patch de

$$\Lambda \cap \overline{B}(0, r)$$

doit être de la forme  $\{y + x_i : i \in I\}$ , avec  $y \in \Lambda$  et  $I \subseteq \{i : \|x_i\| \leq r\}$ . Cet ensemble  $I$  est fini car  $\Lambda - \Lambda$  est localement fini. Il n'existe qu'un nombre fini de possibilités pour l'ensemble  $I$  et, comme  $r > 0$  est arbitraire, il s'ensuit que  $\Lambda$  est FLC. □

**Proposition 2.3.18.** *Si  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  est à complexité locale finie alors  $\Lambda$  est uniformément discret.*

La proposition suivante a déjà été montré au Chapitre 1. La définition de réseau étant différente ici, la démonstration donnée au Chapitre 1 ne s'applique plus.

*Démonstration.* Par la Proposition 2.3.17, l'ensemble  $\Lambda - \Lambda$  est localement fini. Pour  $r' > 0$ , l'ensemble  $B_r := \overline{B}(0, r') \cap (\Lambda - \Lambda)$  est fini. Ainsi, la valeur

$$r := \min\{\|x\| : x \in B_r \setminus \{0\}\} > 0$$

est finie et permet de vérifier que l'ensemble  $\Lambda$  est uniformément discret. □

**Proposition 2.3.19.** *Soit  $G$  un groupe abélien localement compact. Tout réseau  $\tilde{L} \subset \mathbb{R}^n \times G$  est FLC.*

*Démonstration.* Posons  $K \subset \mathbb{R}^n \times G$  un ensemble compact. Par définition, le réseau  $\tilde{L}$  est, en particulier, un sous-groupe discret. La famille des  $K$ -patches est

$$\mathcal{P}_K = \{(\tilde{L} - x) \cap K : x \in \tilde{L}\}.$$

Puisque pour tout  $x \in \tilde{L}$ , on a  $\tilde{L} - x = \tilde{L}$ , alors la famille des  $K$ -patches devient

$$\mathcal{P}_K = \{\tilde{L} \cap K : x \in \tilde{L}\}$$

et ne dépend plus de  $x$ . Ainsi

$$|\mathcal{P}_K| = 1,$$

ce qui permet de conclure puisqu'on a choisi  $K$  arbitrairement.  $\square$

**Lemme 2.3.20.** *Soient  $(\mathbb{R}^n, G, \tilde{L})$  un schéma de coupe et projection et  $\Omega \subset G$  un ouvert non vide. Alors, il existe un compact  $K \subset \mathbb{R}^n$  tel que*

$$\mathbb{R}^n \times G = \tilde{L} + (K \times \Omega).$$

*Démonstration.* Puisque  $\tilde{L} \subset \mathbb{R}^n \times G$  est un réseau, par définition,  $(\mathbb{R}^n \times G)/\tilde{L}$  est compact. Il existe alors un ensemble compact  $F \subset \mathbb{R}^n \times G$  tel que

$$\mathbb{R}^n \times G = \tilde{L} + F.$$

Les projections  $\pi_1, \pi_2$  sont continues et, comme toute image continue d'un ensemble compact est compact, on en tire que  $F_1 := \pi_1(F)$  et que  $F_2 := \pi_2(F)$  sont compacts. Puisque  $F \subset F_1 \times F_2$ , on obtient

$$\mathbb{R}^n \times G = \tilde{L} + F \subset \tilde{L} + (F_1 \times F_2) \subset \mathbb{R}^n \times G,$$

d'où

$$\mathbb{R}^n \times G = \tilde{L} + (F_1 \times F_2).$$

Par définition de schéma de coupe et projection, l'ensemble  $\pi_2(\tilde{L})$  est relativement dense dans  $G$ , donc, on obtient la relation suivante

$$\pi_2(\tilde{L}) + \Omega = \bigcup_{l \in \tilde{L}} (\pi_2(l) + \Omega) = G.$$

Puisque  $F_2 \subset G$ , il s'ensuit que  $F_2 \subset \bigcup_{l \in \tilde{L}} (\pi_2(l) + \Omega)$ . Chaque ensemble  $\pi_2(l) + \Omega$  est ouvert

et  $F_2$  est compact, il existe alors un ensemble fini  $A \subset \tilde{L}$  tel que

$$F_2 \subset \bigcup_{a \in A} (\pi_2(a) + \Omega).$$

Fixons  $x \in \mathbb{R}^n \times G$ . Il existe  $l \in \tilde{L}$  tel que  $x - l \in F_1 \times F_2$ . Puisque  $\pi_2(x - l) \in F_2$ , il existe  $a \in A$  tel que

$$\pi_2(x - l) - \pi_2(a) = \pi_2(x - l - a) \in \Omega.$$

De plus,

$$\pi_1(x - l - a) = \pi_1(x - l) - \pi_1(a) \in F_1 - \pi_1(A).$$

Comme l'ensemble  $A$  est fini, il est compact, il en résulte que l'ensemble  $\pi_1(A)$  est également compact. Dans  $\mathbb{R}^n$ , par le Lemme 2.3.16, la différence d'ensembles compacts est compact, on en déduit la compacité de  $K := F_1 - \pi_1(A)$ . Ainsi,

$$x = l + a + (x - l - a) \in \tilde{L} + (K \times \Omega).$$

Ayant choisi  $x$  arbitrairement, on en déduit l'égalité  $\mathbb{R}^n \times G = \tilde{L} + (K \times \Omega)$ .  $\square$

Pour les prochains résultats, on considère que le triplet  $(\mathbb{R}^n, G, \tilde{L})$  est un schéma de coupe et projection, que  $W \subset G$  est la fenêtre d'acceptation et on pose  $\Gamma = \Lambda(W) + t$  avec  $t \in \mathbb{R}^n$  et  $\Lambda(W)$  est l'ensemble défini par (2.9).

**Proposition 2.3.21.** *Si  $W$  est relativement compact, alors l'ensemble  $\Gamma$  est uniformément discret.*

*Démonstration.* Considérons un ensemble compact  $K \subset \mathbb{R}^n$ . Par hypothèse, l'ensemble  $\overline{W}$  est compact. Par le Théorème 2.3.7, l'ensemble produit  $K \times \overline{W}$  est compact également. Puisque  $\tilde{L}$  est un réseau de  $\mathbb{R}^n \times G$ , par la Proposition 2.3.19, l'ensemble  $\tilde{L}$  a une complexité locale finie, donc les compacts  $K \times \overline{W}$  ne possède qu'un nombre fini de patchs de  $\tilde{L}$ . En particulier,  $\tilde{L}$  est un sous-groupe discret et cela implique que l'intersection  $(K \times \overline{W}) \cap (\tilde{L} - x)$  ne possède qu'un nombre fini d'éléments de  $\tilde{L}$ , pour  $x \in \tilde{L}$ . Ainsi, on a que l'ensemble

$$\mathcal{P}_{K \times \overline{W}} = \{(K \times \overline{W}) \cap (\tilde{L} - l) : l \in \tilde{L}\}$$

est fini. Rappelons que, par définition, on a  $\Lambda(\overline{W}) = \{\pi_1(l) : l \in \tilde{L}, \pi_2(l) \in \overline{W}\}$ . Pour tout  $y \in \Lambda(\overline{W})$ , il existe  $l' \in \tilde{L}$  tel que  $y = \pi_1(l')$ . En projetant sur  $\mathbb{R}^n$ , puisque la projection  $\pi_1$  est injective, on obtient

$$(\Lambda(\overline{W}) - y) \cap K = \pi_1((\tilde{L} - l') \cap (K \times (\overline{W} - \pi_2(l')))). \quad (2.10)$$

Comme  $\overline{W} - \pi_2(l') \subset \overline{W} - \overline{W}$  et que  $\overline{W} - \overline{W}$  est compact par le Lemme 2.3.16, on a

$$\pi_1((\tilde{L} - l') \cap (K \times (\overline{W} - \pi_2(l')))) \subset \pi_1((\tilde{L} - l') \cap (K \times (\overline{W} - \overline{W}))). \quad (2.11)$$

Par les relations (2.10) et (2.11), on en tire que l'ensemble  $\Lambda(\overline{W})$  est FLC car  $\tilde{L}$  l'est. De plus, comme

$$\Gamma = \Lambda(W) + x \subset \Lambda(\overline{W}) + x,$$

l'ensemble  $\Gamma$  est également FLC. Par la Proposition 2.3.18, l'ensemble  $\Gamma$  est uniformément discret.  $\square$

**Proposition 2.3.22.** *Si la fenêtre d'acceptation  $W$  est d'intérieur non vide alors l'ensemble  $\Gamma$  est relativement dense.*

*Démonstration.* On cherche un ensemble compact  $K \subset \mathbb{R}^n$  tel que

$$\mathbb{R}^n = \Gamma + K.$$

Puisque l'intérieur de  $W$  est non-vide, il existe un ouvert  $\Omega \subset G$  tel que  $\Omega \subset -W$ . Remarquons que

$$\tilde{L} = \{(x, x^*) : x \in L\}.$$

Par le Lemme 2.3.20, il existe un compact  $C \subset \mathbb{R}^n$  tel que

$$\mathbb{R}^n \times G = \tilde{L} + (C \times \Omega).$$

Ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , il existe  $l \in \tilde{L}$ ,  $c \in C$  et  $\omega \in \Omega$  tels que

$$(x, 0) = (l, l^*) + (c, \omega).$$

De cette relation, on en tire que  $l^* = -\omega$  et  $-\omega \in W$  car  $\omega \in \Omega \subset -W$ . Puisque  $l^* \in W$ , on a  $l \in \Lambda(W)$ . Ainsi,  $x = l + c \in \Lambda(W) + C$ . On obtient alors  $\mathbb{R}^n = \Lambda(W) + C$  où  $C$  est un ensemble compact.  $\square$

**Proposition 2.3.23.** *Si la fenêtre d'acceptation  $W$  est relativement compact, alors*

$$\Lambda(W) - \Lambda(W) \subset \Lambda(W - W).$$

*En particulier, l'ensemble  $\Lambda(W) - \Lambda(W)$  est uniformément discret.*

*Démonstration.* Considérons  $z \in \Lambda(W) - \Lambda(W)$ . Il existe  $x, y \in L$  tels que  $z = x - y$  et  $x^*, y^* \in W$ . On souhaite montrer que  $z \in \Lambda(W - W)$ , pour cela, montrons que  $z \in L$  et que  $z^* \in W - W$ . Puisque  $L = \pi_1(\tilde{L})$ , il existe  $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{L}$  tels que  $z = \pi_1(\tilde{x}) - \pi_1(\tilde{y})$ . Comme  $\tilde{L}$  est un sous-groupe,  $\tilde{x} - \tilde{y} \in \tilde{L}$ . Ainsi,

$$z = x - y = \pi_1(\tilde{x}) - \pi_1(\tilde{y}) = \pi_1(\tilde{x} - \tilde{y}) \in \pi_1(\tilde{L}) = L.$$

De plus, l'application  $\star$  est un homomorphisme, ce qui implique que

$$z^* = (x - y)^* = x^* - y^* \in W - W.$$

Il s'ensuit que  $z \in \Lambda(W - W)$ .

Par le Lemme 2.3.16, l'ensemble  $W - W$  est relativement compact. Par la Proposition 2.3.21, l'ensemble  $\Lambda(W - W)$  est uniformément discret et  $\Lambda(W) - \Lambda(W)$  également.  $\square$

On peut alors conclure le chapitre en démontrant que tout ensemble modèle est de Meyer.

**Théorème 2.3.24.** *Tout ensemble modèle est un ensemble de Meyer.*

*Démonstration.* Considérons  $\Gamma = \Lambda(W) + x$  un ensemble modèle. Par la Définition 2.3.10, la fenêtre d'acceptation  $W \subset G$  est un ensemble relativement compact d'intérieur non vide. Par les Propositions 2.3.21 et 2.3.22, il s'ensuit que  $\Gamma$  est un ensemble de Delone. Par la Proposition 2.3.23, il s'ensuit que

$$\Lambda(W) - \Lambda(W) \subset \Lambda(W - W)$$

et que  $\Lambda(W) - \Lambda(W)$  est uniformément discret. Ainsi, l'ensemble  $\Gamma$  est de Meyer.  $\square$



# Chapitre 3

## Ensemble de Delone de type fini et symétries d'inflation

Rappelons que l'ordre au sein d'un matériau dépend des distances interatomiques. Afin de prendre cela en compte, on introduit une nouvelle classe d'ensembles dont l'apparition à été motivée par la découverte de D.Shechtman, à savoir les ensembles de Delone de type fini. Selon Lagarias, cette classe d'ensembles est la plus appropriée pour modéliser les structures quasicristallines, bien qu'elle possède des ensembles ne présentant un spectre ponctuel de diffraction. La source principale de la rédaction de ce chapitre est [Lag99].

Dans ce chapitre, sauf mention explicite du contraire, on note  $B(x, r)$  les boules ouvertes et  $\overline{B}(x, r)$  les boules fermées. Dans cette section, on se place dans l'espace  $\mathbb{R}^n$  muni de la norme euclidienne.

### 3.1 Ensembles de Delone de type fini

Commençons la section par la définition d'un ensemble de Delone de type fini.

**Définition 3.1.1.** Un ensemble de Delone  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  est *de type fini* si  $\Lambda - \Lambda$  est un sous-ensemble discret de  $\mathbb{R}^n$ , c'est-à-dire, si pour toute boule fermée  $B$  de  $\mathbb{R}^n$ , l'ensemble  $(\Lambda - \Lambda) \cap B$  est fini.

**Proposition 3.1.2.** *Tout ensemble de Meyer est également de Delone de type fini.*

*Démonstration.* Considérons  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble de Meyer et  $B$  une boule fermée de  $\mathbb{R}^n$ . Par définition, l'ensemble  $\Lambda$  est de Delone. De plus, par définition, l'ensemble  $\Lambda - \Lambda$  est uniformément discret, cela implique que l'ensemble  $(\Lambda - \Lambda) \cap B$  est fini et donc que l'ensemble  $\Lambda$  est de Delone de type fini.  $\square$

**Définition 3.1.3.** Soit  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble de Delone. Pour tout  $R > 0$ , on note

$$\mathcal{A}_\Lambda(R) = \{(\Lambda - \{\lambda\}) \cap \overline{B}(0, R) : \lambda \in \Lambda\}$$

l'ensemble de tous les  $R$ -patches de  $\Lambda$ . L'ensemble  $\mathcal{A}_\Lambda(R)$  est appelé le  $R$ -atlas.

Soit  $\Lambda$  un ensemble de Delone. On introduit la fonction

$$\mathcal{N}_\Lambda : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\} : R \mapsto \mathcal{N}_\Lambda(R) = \#\mathcal{A}_\Lambda(R)$$

qui permet de compter le nombre de motifs d'un ensemble de Delone. Cette fonction est appelée la *fonction de comptage de patches*.

**Définition 3.1.4.** Un ensemble de Delone est finiment engendré si le groupe abélien

$$\langle \Lambda - \Lambda \rangle_{\mathbb{Z}} = \left\{ \sum_{i=1}^k z_i(x_i - y_i) : k \in \mathbb{N}, z_i \in \mathbb{Z}, x_i, y_i \in \Lambda \right\}.$$

est finiment engendré.

Dans la suite, on notera  $\langle \Lambda \rangle$  pour parler de  $\langle \Lambda \rangle_{\mathbb{Z}}$ . Grâce à la proposition suivante, lorsque l'on parle d'ensemble  $\Lambda$  finiment engendré, on pourra travailler avec  $\langle \Lambda \rangle$ .

**Proposition 3.1.5.** *Un ensemble de Delone  $\Lambda$  est finiment engendré si et seulement si  $\langle \Lambda \rangle$  est finiment engendré.*

*Démonstration.* Considérons  $\Lambda$  un ensemble de Delone finiment engendré et posons  $v_1, \dots, v_m \in \Lambda - \Lambda$  une famille de générateurs de  $\langle \Lambda - \Lambda \rangle$ . Fixons  $\lambda' \in \Lambda$ . Puisque, pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , on a

$$\lambda = \lambda' + (\lambda - \lambda') \in \lambda' + \langle \Lambda - \Lambda \rangle,$$

alors, il s'ensuit que

$$\langle \Lambda \rangle = \langle \lambda' \rangle + \langle v_1, \dots, v_m \rangle = \langle \lambda', v_1, \dots, v_m \rangle.$$

Passons à la condition nécessaire. Supposons que  $\langle \Lambda \rangle$  est finiment engendré et montrons que  $\langle \Lambda - \Lambda \rangle$  l'est également. Soient  $v_1, \dots, v_m$  une famille de générateurs de  $\langle \Lambda \rangle$  et  $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ . On a

$$\lambda - \lambda' = \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i - \sum_{i=1}^m \lambda'_i v_i = \sum_{i=1}^m (\lambda_i - \lambda'_i) v_i \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle.$$

Il s'ensuit que  $\langle \Lambda - \Lambda \rangle \subset \langle v_1, \dots, v_m \rangle = \langle \Lambda \rangle$ . Tout sous-groupe d'un groupe abélien finiment engendré est finiment engendré.  $\square$

Considérons  $\Lambda$  un ensemble de Delone finiment engendré. En appliquant la Proposition 3.1.5, l'ensemble  $\langle \Lambda \rangle$  est finiment engendré. Posons  $m = \text{rang}(\Lambda)$ . Il existe alors  $v_1, \dots, v_m \in \Lambda$  tels que

$$\langle \Lambda \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^m x_i v_i : x_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

On définit la fonction associée à la base  $v_1, \dots, v_m$

$$\phi : \langle \Lambda \rangle \rightarrow \mathbb{Z}^m : x = \sum_{i=1}^m x_i v_i \mapsto (x_1, \dots, x_m).$$

La fonction  $\phi$  est appelée la *fonction d'adresse*. La famille des ensembles de Delone finiment engendré est la plus grande famille d'ensembles pour laquelle la fonction adresse  $\phi$  est bien définie. Cette famille est constituée d'un nombre d'ensembles bien trop élevé pour être la plus représentative des structures quasi-cristallines. Cependant, en appliquant des restrictions sur les fonctions d'adresses, on retombe sur la famille des ensembles de Delone de type fini. C'est la caractérisation que nous souhaitons démontrer pour clore cette première section.

**Remarque 3.1.6.** Les fonctions adresses sont  $\mathbb{Z}$ -linéaires mais pas  $\mathbb{R}$ -linéaires. Considérons  $\Lambda$  un ensemble de Delone finiment engendré de rang  $m$ , un élément  $\lambda \in \Lambda$ , une base  $B = (b_1, \dots, b_m)$  et  $\phi$  une fonction adresse de  $\Lambda$  associée à la base  $B$ . Pour tout  $z \in \mathbb{Z}$ , on a  $z\lambda \in \langle \Lambda \rangle$ . En revanche, pour  $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ , on a

$$r\lambda = r \sum_{i=1}^m \lambda_i b_i = \sum_{i=1}^m (r\lambda_i) b_i.$$

En général, les coefficients  $r\lambda_i$  ne sont pas entiers et donc  $r\lambda$  n'appartient pas à  $\langle \Lambda \rangle$ , ce qui empêche la fonction  $\phi$  d'être  $\mathbb{R}$ -linéaire.

**Définition 3.1.7.** Soient  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble de Delone et  $R \in \mathbb{R}^+$ . On définit l'application

$$D_\Lambda : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{N} : r \mapsto D_\Lambda(r) := \#((\Lambda - \Lambda) \cap \overline{B}(0, r)).$$

On l'appelle la *fonction de comptage des distances* de  $\Lambda$ .

Cette définition permet de mesurer le caractère discret de l'ensemble  $\Lambda - \Lambda$ , où  $\Lambda$  est un ensemble de Delone.

**Lemme 3.1.8.** Soit  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble  $(r, R)$ -Delone. Pour tout couple  $(\lambda, \lambda')$  de points de  $\Lambda$ , il existe une chaîne de points  $\lambda_0, \dots, \lambda_m$  de  $\Lambda$  tels que :

1.  $\lambda_0 = \lambda$  et  $\lambda_m = \lambda'$ ,
2.  $\|\lambda_i - \lambda_{i+1}\| \leq 2R, \forall i \in \{0, \dots, m-1\}$ .
3.  $m \leq \left(\frac{4R}{r}\right) \|\lambda - \lambda'\|$ .

*Démonstration.* Considérons  $\lambda, \lambda' \in \Lambda$  et construisons récursivement une telle chaîne de points. Posons  $\lambda_0 = \lambda$ . Si  $\|\lambda_0 - \lambda'\| < 2R$  alors, on peut s'arrêter puisque la chaîne souhaitée est directement obtenue. Sinon, considérons la boule

$$B_0 := \overline{B}\left(\lambda_0 + R \frac{\lambda' - \lambda_0}{\|\lambda' - \lambda_0\|}, R\right).$$

La boule  $B_0$  contient au moins un autre point de  $\Lambda$ . Pour montrer cela, considérons  $\varepsilon > 0$  et

$$B_0(\varepsilon) := \overline{B}\left(\lambda_0 + (R + \varepsilon) \frac{\lambda' - \lambda_0}{\|\lambda' - \lambda_0\|}, R\right).$$

Par hypothèse, l'ensemble  $\Lambda$  est relativement dense, donc il existe  $\lambda_\varepsilon \in B_0(\varepsilon)$  tel que  $\lambda_\varepsilon \neq \lambda_0$  puisque  $\lambda_0 \notin B_0(\varepsilon)$ . En particulier, pour tout  $k \in \mathbb{N}_0$ , la boule  $B_0(1/k)$  contient un élément  $\lambda_{\frac{1}{k}} \in \Lambda$  tel que  $\lambda_{\frac{1}{k}} \neq \lambda_0$ . Comme  $\Lambda$  est uniformément discret, il existe un élément parmi  $\{\lambda_{1/k} : k \in \mathbb{N}_0\}$  qui apparait une infinité de fois, notons le  $\lambda_1$ . De plus, cet élément appartient à  $B_0$ . En effet, puisque l'élément  $\lambda_1$  correspond à une infinité de points  $\lambda_{1/k}$ , il vérifie

$$d(\lambda_1, B_0) < \frac{1}{k},$$

pour une infinité de  $k$ . Par conséquent, l'élément  $\lambda_1 \in B_0$  puisque la boule  $B_1$  est fermée. De plus, on a

$$\|\lambda_1 - \lambda_0\| \leq 2R.$$

Supposons désormais que l'on possède  $\lambda_0, \dots, \lambda_i \in \Lambda$  tels que  $\lambda_0 = \lambda$  et

$$\|\lambda_j - \lambda_{j+1}\| \leq 2R, \quad \forall j \in \{0, \dots, i-1\}.$$

On procède de manière similaire. Si  $\|\lambda_i - \lambda'\| \leq 2R$ , on pose  $m = i + 1$  et on conclut. Sinon, on considère à nouveau

$$B_i := \overline{B} \left( \lambda_i + R \frac{\lambda' - \lambda_i}{\|\lambda' - \lambda_i\|}, R \right)$$

et

$$B_i(\varepsilon) := \overline{B} \left( \lambda_i + (R + \varepsilon) \frac{\lambda' - \lambda_i}{\|\lambda' - \lambda_i\|}, R \right).$$

En procédant comme ci-dessus, on extrait un élément  $\lambda_{i+1} \in \Lambda$  tels que  $\lambda_{i+1} \in B_i$  et

$$\|\lambda_i - \lambda_{i+1}\| \leq 2R.$$

Une telle construction prend fin à une certaine étape car l'ensemble  $\Lambda$  est uniformément discret et que la distance entre  $\lambda$  et  $\lambda'$  est finie. Notons  $\lambda_m = \lambda'$  le dernier élément d'une telle chaîne. Pour conclure, il faut vérifier qu'une telle chaîne satisfait le point (3). Par hypothèse, on a

$$\|\lambda_i - \lambda_{i+1}\| \geq r, \quad \forall i$$

Puisque  $\lambda_i$  est le point de  $B_i$  le plus éloigné de  $\lambda'$ , on en tire que

$$\|\lambda_{i+1} - \lambda'\| \leq \|\lambda_i - \lambda'\| - C \tag{3.1}$$

où  $C > 0$ . On peut prendre  $C = \frac{r^2}{4R}$ . En utilisant l'équation (3.1), on obtient

$$\begin{aligned} 0 = \|\lambda_m - \lambda'\| &\leq \|\lambda_{m-1} - \lambda'\| - C \\ &\leq \|\lambda_{m-2} - \lambda'\| - 2C \\ &\vdots \\ &\leq \|\lambda - \lambda'\| - mC \end{aligned}$$

d'où  $m \leq \|\lambda - \lambda'\| \frac{4R}{r^2}$ . □

**Lemme 3.1.9.** *Un ensemble de  $(r, R)$ -Delone  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  est de type fini si et seulement si  $D_\Lambda(2R)$  est fini.*

*Démonstration.* Considérons  $\Lambda$  un ensemble  $(r, R)$ -Delone de type fini. Puisque pour toute boule fermée  $B$ , l'ensemble  $(\Lambda - \Lambda) \cap B$  est fini, il s'ensuit que  $D_\Lambda(2R)$  est fini.

Supposons désormais que, pour  $R > 0$ ,  $D_\Lambda(2R)$  est fini et posons  $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ . Par le Lemme 3.1.8, il existe une chaîne de points  $\lambda_0, \dots, \lambda_m$  de  $\Lambda$  telle que

1.  $\lambda_0 = \lambda$  et  $\lambda_m = \lambda'$ ,
2.  $\|\lambda_i - \lambda_{i+1}\| \leq 2R, \forall i \in \{0, \dots, m-1\}$ .
3.  $m \leq \left(\frac{4R}{r^2}\right) \|\lambda - \lambda'\|$ .

Si  $\|\lambda - \lambda'\| \leq N$  alors, la chaîne est composée d'au plus  $CN$  éléments, où  $C = \left(\frac{4R}{r^2}\right)$ . Pour chaque palier  $\lambda_{i+1} - \lambda_i$ , il existe au plus  $D_\Lambda(2R)$  choix. Par conséquent, la fonction  $D_\Lambda(N)$  est finie, pour tout  $N > 0$ . Ainsi, il s'ensuit que l'ensemble  $\Lambda$  est de type fini.  $\square$

**Théorème 3.1.10.** *Un ensemble de Delone de type fini est finiment engendré. En particulier,*

$$\text{rang}(\Lambda) \leq D_\Lambda(2R).$$

*Démonstration.* Posons  $\lambda \in \Lambda$ . Pour tout  $\lambda' \in \Lambda$ , en appliquant le Lemme 3.1.8, il existe une chaîne de points satisfaisant les 3 assertions du lemme. En particulier, pour tout  $\lambda' \in \Lambda$ , on a

$$\lambda' - \lambda = \sum_{i=1}^m (\lambda_{i+1} - \lambda_i) \in \langle ((\Lambda - \Lambda) \cap \overline{B(0, 2R)}) \rangle,$$

où  $\lambda_i \in \Lambda$ , pour  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Cela implique alors que

$$\langle \Lambda \rangle \subset \langle \{\lambda\} \cup \{x : x \in (\Lambda - \Lambda) \cap \overline{B(0, 2R)}\} \rangle = \langle \{\lambda\} \cup ((\Lambda - \Lambda) \cap \overline{B(0, 2R)}) \rangle. \quad (3.2)$$

Puisque l'ensemble de Delone  $\Lambda$  est de type fini, il s'ensuit que  $(\Lambda - \Lambda) \cap \overline{B(0, 2R)}$  est fini. Cela implique que  $\langle \Lambda \rangle$  est finiment engendré. En appliquant la Proposition 3.1.5, il en résulte que l'ensemble  $\Lambda$  est finiment engendré également.

De plus, par la relation (3.2), on en déduit que

$$\text{rang}(\Lambda) \leq D_\Lambda(2R).$$

$\square$

**Remarque 3.1.11.** Dans cette première section, par la Proposition 3.1.2, on a démontré que la famille des ensembles de Meyer est incluse dans la famille des ensembles de Delone de type fini. De plus, par le Théorème 3.1.10, la famille des ensembles de Delone de type fini est incluse dans la famille des ensembles de Delone finiment engendrés.

## 3.2 Caractérisations par les fonctions adresses

Dans cette section, on présente, dans un premier temps, une caractérisation des ensembles de Delone de type fini par les fonctions adresses satisfaisant une condition de type Lipschitz. Ensuite, une caractérisation des ensembles de Meyer par les fonctions adresses presque linéaires.

**Théorème 3.2.1.** *Soit  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble  $(r, R)$ -Delone. Alors, l'ensemble  $\Lambda$  est de type fini si et seulement si,*

1.  $\Lambda$  est finiment engendré
2. Pour toute fonction adresse  $\phi$ , il existe  $C_\phi > 0$  tel que

$$\|\phi(\lambda) - \phi(\lambda')\| \leq C_\phi \|\lambda - \lambda'\|, \quad \forall \lambda, \lambda' \in \Lambda.$$

*Démonstration.* Commençons par la condition nécessaire et supposons que  $\Lambda$  est un ensemble  $(r, R)$ -Delone de type fini. Par le Théorème 3.1.10, le point 1 est vérifié et notons  $s = \text{rang}(\Lambda)$ . Considérons  $\phi$  une fonction d'adresse et trouvons une telle constante  $C_\phi$ . Considérons  $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ , par le Lemme 3.1.8, il existe une chaîne  $\lambda_0 = \lambda, \dots, \lambda_m = \lambda'$  de points de  $\Lambda$  telle que, pour tout  $i \in \{1, \dots, m-1\}$ ,

$$\|\lambda_i - \lambda_{i+1}\| \leq 2R$$

et

$$m \leq \left( \frac{r^2}{4R} \right) \|\lambda - \lambda'\|.$$

Posons

$$C_{\max} = \max_{x \in (\Lambda - \Lambda) \cap \overline{B}(0, 2R)} \|\phi(x)\|,$$

puisque l'ensemble  $(\Lambda - \Lambda) \cap \overline{B}(0, 2R)$  est fini, la constante  $C_{\max}$  est finie. En utilisant l'inégalité triangulaire et la linéarité de  $\phi$  sur  $\langle \Lambda \rangle$  vers  $\mathbb{Z}^s$ , on obtient

$$\begin{aligned} \|\phi(\lambda) - \phi(\lambda')\| &= \left\| \sum_{i=0}^{m-1} (\phi(\lambda_{i+1}) - \phi(\lambda_i)) \right\| \\ &\leq \sum_{i=0}^{m-1} \|\phi(\lambda_{i+1}) - \phi(\lambda_i)\| \\ &\leq \sum_{i=0}^{m-1} \underbrace{\|\phi(\lambda_{i+1} - \lambda_i)\|}_{\leq C_{\max}} \\ &\leq m C_{\max} \\ &= C_{\max} \frac{r^2}{4R} \|\lambda - \lambda'\|. \end{aligned}$$

On conclut la première partie de la preuve en posant  $C_\phi = C_{\max} \frac{r^2}{4R}$ .

Passons à la condition suffisante. Pour montrer que l'ensemble  $\Lambda$  est de type fini, en utilisant le Lemme 3.1.9, il suffit de montrer que  $(\Lambda - \Lambda) \cap \overline{B}(0, 2R)$  est fini. Considérons une fonction adresse  $\phi$  telle que

$$\|\phi(\lambda) - \phi(\lambda')\| \leq C_\phi \|\lambda - \lambda'\|, \quad \forall \lambda, \lambda' \in \Lambda,$$

où  $C_\phi > 0$ . Posons  $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ , si  $\|\lambda - \lambda'\| \leq 2R$ , alors, par hypothèse, on a

$$\|\phi(\lambda) - \phi(\lambda')\| \leq C_\phi \|\lambda - \lambda'\| \leq 2RC_\phi.$$

Par définition, la fonction  $\phi$  est à image dans  $\mathbb{Z}^s$ , donc l'ensemble  $\{\phi(x) : x \in (\Lambda - \Lambda) \cap \overline{B}(0, 2R)\}$  est bornée dans  $\mathbb{Z}^s$ . Ainsi, il n'existe qu'un nombre fini de  $\phi(\lambda - \lambda')$ . De plus, toute fonction adresse est injective. Par conséquent, il n'existe qu'un nombre fini de valeurs possibles pour  $\lambda - \lambda'$ .  $\square$

Avant de passer à la caractérisation des ensembles de Meyer, on introduit la notion de presque linéarité.

**Définition 3.2.2.** Soit  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble de Delone et soit  $f$  une application définie sur  $\langle \Lambda \rangle$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$ . On dit que l'application  $f$  est *presque linéaire* s'il existe

$$L_f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

une application linéaire et une constante  $C_f > 0$  telle que

$$\|f(\lambda) - L_f(\lambda)\| < C_f, \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

**Théorème 3.2.3.** Soit  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble discret. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $\Lambda$  un ensemble de Meyer
2.  $\Lambda$  est un ensemble de  $(r, R)$ -Delone finiment engendré et tout homomorphisme

$$\phi : \langle \Lambda \rangle \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad m \geq 1,$$

est presque linéaire sur  $\Lambda$ .

3.  $\Lambda$  est un ensemble  $(r, R)$ -Delone finiment engendré et toute application adresse  $\phi$  est presque linéaire.

*Démonstration.* 2)  $\Rightarrow$  3) Par hypothèse, l'ensemble  $\Lambda$  est finiment engendré. De plus, il est clair que toute application adresse  $\phi$  est un homomorphisme. Ainsi, toute application adresse est presque linéaire.

3)  $\Rightarrow$  1) Notons  $m = \text{rang}(\Lambda)$ . Considérons  $\phi$  la fonction adresse de  $\Lambda$  associée à la base  $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ . Par hypothèse, il existe une application linéaire

$$L_\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

et une constante  $C_\phi > 0$  telles que

$$\|\phi(\lambda) - L_\phi(\lambda)\| < \frac{C_\phi}{2}, \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

Posons  $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ . Puisque l'application  $\phi$  est un homomorphisme et que l'application  $L_\phi$  est linéaire, on en déduit que

$$\begin{aligned} \|\phi(\lambda - \lambda') - L_\phi(\lambda - \lambda')\| &= \|\phi(\lambda) - \phi(\lambda') - L_\phi(\lambda) + L_\phi(\lambda')\| \\ &\leq \|\phi(\lambda) - L_\phi(\lambda)\| + \|\phi(\lambda') - L_\phi(\lambda')\| \\ &< C_\phi \end{aligned}$$

L'ensemble  $\Lambda$  étant de Delone, il existe  $\lambda'' \in \Lambda$  tel que

$$\|\lambda'' - (\lambda - \lambda')\| < R,$$

où  $R > 0$  est le rayon de recouvrement de  $\Lambda$ . Ainsi, on a

$$\|\phi(\lambda'') - L_\phi(\lambda'')\| < C_\phi.$$

De plus, puisque l'application  $L_\phi$  est linéaire, on a

$$\|L_\phi(\lambda'' - (\lambda - \lambda'))\| \leq \overbrace{\|L_\phi\|_{op}}{:=M} \|\lambda'' - (\lambda - \lambda')\| < MR.$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \|\phi(\lambda'' - (\lambda - \lambda'))\| &= \|\phi(\lambda'') - \phi(\lambda - \lambda')\| \\ &= \|\phi(\lambda'') - L_\phi(\lambda'') + L_\phi(\lambda'') - \phi(\lambda - \lambda') - L_\phi(\lambda - \lambda') + L_\phi(\lambda - \lambda')\| \\ &\leq \|\phi(\lambda'') - L_\phi(\lambda'')\| + \|L_\phi(\lambda - \lambda') - \phi(\lambda - \lambda')\| + \|L_\phi(\lambda'') - L_\phi(\lambda - \lambda')\| \\ &< 2C_\phi + MR \end{aligned}$$

Considérons l'ensemble

$$F := \{\lambda \in \langle \Lambda \rangle : \|\phi(\lambda)\| < 2C_\phi + MR\} = \phi^{-1}(B(0, 2C_\phi + MR) \cap \mathbb{Z}^m).$$

Puisque l'application  $\phi$  est un isomorphisme entre  $\langle \Lambda \rangle$  et  $\mathbb{Z}^m$  et que l'image  $\phi(F)$  est borné dans le réseau  $\mathbb{Z}^m$ , on en déduit que l'ensemble  $F$  est fini car un réseau est localement fini. Pour conclure, on a montré pour tous  $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ , il existe  $\lambda'' \in \Lambda$  tel que l'élément  $\lambda'' - (\lambda - \lambda') \in \Lambda - \Lambda - \Lambda$  satisfait

$$\|\phi(\lambda'' - (\lambda - \lambda'))\| < 2C_\phi + MR.$$

Alors, l'élément  $(\lambda - \lambda') - \lambda'' \in F$  et on en déduit la relation suivante

$$\Lambda - \Lambda \subset \Lambda + F,$$

où  $F$  est un ensemble fini. Par le Corollaire 2.2.9, on en conclut que l'ensemble  $\Lambda$  est de Meyer.

1)  $\Rightarrow$  2) Pour les détails concernant cette implication, on pourra consulter [R.V. Moody, Meyer sets and their duals, in : The Mathematics of Long-Range Aperiodic Order]  $\square$

### 3.3 Symétries d'inflation et entiers algébriques

Les ensembles de Delone possédant une symétrie d'inflation ont un lien très étroit avec les entiers algébriques. Pour conclure ce chapitre, on met en lumière le lien entre les ensembles de Delone de type fini avec les nombres de Perron-Lind et celui entre les ensembles de Meyer avec les nombres de Salem-Pisot.

**Définition 3.3.1.** Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$ . On dit que  $\alpha$  est un *entier algébrique* s'il existe un polynôme monique non-nul  $P \in \mathbb{Z}[X]$  tel que

$$P(\alpha) = 0.$$

Le degré d'un entier algébrique  $\alpha$  est le degré minimal de tout polynôme monique non nul  $P \in \mathbb{Z}[X]$  tel que  $P(\alpha) = 0$ . Les autres racines du polynôme monique de degré minimal  $P$  sont appelées les conjugués de  $\alpha$ .

**Définition 3.3.2.** Soient  $\alpha$  un entier algébrique réel et  $\alpha_2, \dots, \alpha_n$  les conjugués de  $\alpha$ . On dit que  $\alpha > 1$  est un nombre de *Pisot-Vijayaraghavan* (ou de *Pisot*) si  $\alpha > 1$  et

$$\max\{|\alpha_2|, \dots, |\alpha_n|\} < 1. \quad (3.3)$$

Si on remplace la condition (3.3) par

$$\max\{|\alpha_2|, \dots, |\alpha_n|\} = 1,$$

alors, on dit que  $\alpha$  est un nombre de *Salem*

**Exemple 3.3.3.** Considérons le polynôme suivant :  $P(x) = x^2 - 2x - 1$ . Les racines de  $P(x)$  sont  $1 + \sqrt{2}$  et  $1 - \sqrt{2}$ . Étant donné que  $1 + \sqrt{2} > 1$  et que  $|1 - \sqrt{2}| < 1$ , on a que  $1 + \sqrt{2}$  est un nombre de Pisot.

**Définition 3.3.4.** Soient  $\alpha$  un entier algébrique réel et  $\alpha_2, \dots, \alpha_n$  les conjugués de  $\alpha$ . On dit que  $\alpha > 1$  est un nombre de *Perron* si  $\alpha > 1$  et

$$\max\{|\alpha_2|, \dots, |\alpha_n|\} < \alpha. \quad (3.4)$$

Si on remplace la condition (3.4) par

$$\max\{|\alpha_2|, \dots, |\alpha_n|\} = \alpha,$$

alors, on dit que  $\alpha$  est un nombre de *Lind*

**Remarque 3.3.5.** Puisque les conjugués d'un nombre de Salem ou Pisot sont de module inférieur ou égal à 1 et que  $\alpha > 1$ , tout nombre de Pisot et de Salem sont également des nombres de Perron.

**Définition 3.3.6.** Soit  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble de Delone. On dit que  $\Lambda$  possède une symétrie d'inflation de paramètre  $\gamma > 1$  si  $\gamma\Lambda \subseteq \Lambda$ .

Afin d'illustrer cette définition, continuons l'Exemple 2.3.11.

**Exemple 3.3.7.** Considérons l'ensemble modèle  $\Lambda(W) = \{a + b\tau : a, b \in \mathbb{Z}, -1 \leq a + b\tau' \leq \tau - 1\}$  où  $\tau$  est le nombre d'or et  $\tau' < 0$  son conjugué. Par le Théorème 2.3.24, l'ensemble  $\Lambda(W)$  est un ensemble de Meyer et donc de Delone. Montrons que  $\tau\Lambda(W) \subset \Lambda(W)$  et considérons  $x = a + b\tau \in \Lambda(W)$ . Puisque  $\tau^2 = \tau + 1$ , on en tire que

$$\tau(a + b\tau) = a\tau + b\tau^2 = a\tau + b(\tau + 1) = (a + b)\tau + b.$$

Comme  $\tau'^2 = \tau' + 1$ , en procédant de la même manière, on obtient

$$\tau'(a + b\tau') = (a + b)\tau' + b.$$

Rappelons que le nombre d'or vérifie les relations suivantes

$$\begin{aligned}\tau\tau' &= -1 \\ \tau + \tau' &= 1.\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant les relations ci-dessus et en multipliant les inégalités  $-1 \leq a + b\tau' \leq \tau - 1$  par  $\tau'$ , il en résulte que

$$\begin{aligned}-1 &\leq a + b\tau' \leq \tau - 1 \\ \Leftrightarrow -\tau' &\geq a\tau' + b\tau'^2 \geq \tau\tau' - \tau \\ \Leftrightarrow -\tau' &\geq a\tau' + b(\tau' + 1) \geq -1 - \tau' \\ \Leftrightarrow -\tau' &\geq (a + b)\tau' + b \geq -1 - \tau'.\end{aligned}$$

Ainsi, comme  $\tau' = 1 - \tau$  et  $-1 - \tau' \geq -1$ , on en déduit

$$-1 \leq -1 - \tau' \leq (a + b)\tau' + b \leq -1 - \tau' = \tau - 1.$$

Cela montre que  $\tau\Lambda(W) \subset \Lambda(W)$ , comme souhaité.

Comme mentionné au début de la section, l'objectif de cette section est de démontrer que les paramètres d'inflation d'un ensemble de Delone de type fini sont des nombres de Perron ou de Lind et ceux d'un ensemble de Meyer sont des nombres de Salem ou de Pisot. Puisque tout ensemble de Meyer est également un ensemble de Delone de type fini, il faut que les nombres de Salem et Pisot soient aussi des nombres soit de Perron soit de Lind. Par définition, les conjugués d'un nombre de Salem ou Pisot sont de module inférieur ou égal à 1 et que  $\alpha > 1$ , tout nombre de Pisot et de Salem sont également des nombres de Perron.

**Théorème 3.3.8.** *Si  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  est un ensemble de Delone finiment engendré possédant une symétrie d'inflation de paramètre  $\gamma$  alors  $\gamma$  est un entier algébrique. En particulier, le degré de  $\gamma$  divise  $\text{rang}(\Lambda)$ .*

*Démonstration.* Soient  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble de Delone finiment engendré et  $\gamma > 1$  tel que

$$\gamma\Lambda \subseteq \Lambda.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que  $0 \in \Lambda$ . En effet, si  $0 \notin \Lambda$ , alors  $\Lambda' = \Lambda \cup \{0\}$  est encore un ensemble de Delone tel que  $\gamma\Lambda' \subseteq \Lambda'$ . Posons  $r := \text{rang}(\Lambda)$  et considérons  $b_1, \dots, b_r \in \mathbb{R}^n$  des vecteurs indépendants sur  $\mathbb{Q}$  tels que

$$\langle \Lambda \rangle = \langle b_1, \dots, b_r \rangle.$$

Remarquons que  $r \geq n$ . En effet, si l'espace vectoriel engendré par  $\Lambda$  était de dimension strictement inférieure à  $n$  alors, on pourrait s'éloigner autant que souhaité de  $\Lambda$ , ce qui est absurde car  $\Lambda$  est relativement dense. Ainsi, l'espace vectoriel engendré par  $\Lambda$  est nécessairement de dimension  $n$  et le groupe abélien  $\langle \Lambda \rangle$  est donc de rang  $r \geq n$ .

Puisque  $\gamma\Lambda \subseteq \Lambda$ , on a

$$\gamma\langle \Lambda \rangle \subseteq \langle \Lambda \rangle.$$

Ainsi, il existe une matrice  $M \in \mathbb{Z}_r^r$  telle que

$$\gamma B = MB \tag{3.5}$$

où  $B = (b_1, \dots, b_r)^T$ . De l'équation (3.5), on en déduit que  $(\gamma I - M)B = 0$  et donc

$$(\gamma I - M)v_i = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

où  $v_i = (b_1^{(i)}, \dots, b_r^{(i)}) \in \mathbb{R}^r$ . Le réel  $\gamma$  est valeur propre de  $M$ , donc il annule le polynôme caractéristique de  $M \in \mathbb{Z}_r^r$

$$P_M(x) = \det(xI - M).$$

Le polynôme  $P_M \in \mathbb{Z}[x]$  étant monique à coefficients entiers, il s'ensuit que  $\gamma$  est un entier algébrique.

Pour conclure, il reste à démontrer que  $\deg(\gamma)$  divise  $r$ . Pour ce faire, considérons la forme rationnelle canonique de  $M$ . Pour plus de précisions sur ce type de matrice, on pourra se référer à l'Annexe C. Posons  $l = \deg(\gamma)$ . Par définition, il existe un polynôme monique  $P_\gamma$  à coefficients entiers et de degré  $l$  qui s'annule en  $\gamma$ . Il est de la forme

$$P_\gamma(x) = x^l + \sum_{i=0}^{l-1} a_i x^i.$$

En utilisant l'équation (3.5), on obtient que

$$\gamma^2 B = \gamma(\gamma B) = \gamma(MB) = M(\gamma B) = M^2 B.$$

En répétant ce raisonnement, il s'ensuit que

$$\gamma^k B = M^k B, \quad 1 \leq k \leq l. \tag{3.6}$$

Grâce à l'équation (3.6), on a

$$\begin{aligned}
P_\gamma(M)B &= (M^l + \sum_{i=0}^{l-1} a_i M^i)B \\
&= M^l B + \sum_{i=0}^{l-1} (a_i M^i B) \\
&= \gamma^l B + \sum_{i=0}^{l-1} (a_i \gamma^i B) \\
&= (\gamma^l + \sum_{i=0}^{l-1} a_i \gamma^i) B = \underbrace{P_\gamma(\gamma)}_{=0} B = 0
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\sum_{j=1}^r (P_\gamma(M))_{ij} b_j = 0, \quad 1 \leq i \leq r.$$

En particulier, pour toute ligne  $i \in \{1, \dots, r\}$ ,

$$(P_\gamma(M)B)_i = \sum_{j=1}^r (P_\gamma(M))_{ij} b_j = 0 \quad (3.7)$$

De plus, par définition de  $P_\gamma$ , les éléments de  $P_\gamma(M)$  sont des entiers, alors, puisque les vecteurs  $b_j$  sont indépendants sur  $\mathbb{Q}$ , il s'ensuit que

$$(P_\gamma(M))_{ij} = 0, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, r\}.$$

Le polynôme  $P_\gamma$  est irréductible, sinon, il existerait une décomposition en polynômes non-constants dont un de ces polynômes de degré inférieur à  $l$  annulerait  $\gamma$ , ce qui contredit

$$\deg(\gamma) = l.$$

Par (3.7), le polynôme minimal  $m_M$  de  $M$  divise  $P_\gamma$  et, puisque ce sont deux polynômes moniques, il en résulte que

$$m_M = P_\gamma. \quad (3.8)$$

Par (3.8), les facteurs invariants sont égaux à  $P_\gamma$ , on en déduit ainsi que la forme rationnelle canonique de  $M$  est une matrice blocs diagonales, où chaque bloc est la matrice compagnon  $C$  de  $P_\gamma$ . On a

$$P_M(x) = (P_\gamma(x))^k, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Par conséquent, on a

$$\deg(P_M) = r = kl = k \deg(P_\gamma)$$

et donc le degré de  $\gamma$  divise  $r = \text{rang}(\Lambda)$ , comme souhaité.  $\square$

Afin de démontrer que les paramètres d'inflation pour un ensemble de Delone de type fini sont soit des nombres de *Lind*, soit des nombres de *Perron*, commençons par démontrer les lemmes suivants.

**Lemme 3.3.9.** *Tout polynôme  $P \in \mathbb{Q}[x]$  irréductible sur  $\mathbb{Q}$  n'admet que des racines simples dans  $\mathbb{C}$ .*

*Démonstration.* Considérons  $P$  un polynôme irréductible sur  $\mathbb{Q}$  et notons  $P'$  la dérivée de  $P$ . Puisque  $P$  est irréductible, les seuls diviseurs de  $P$  sont 1 ou un multiple de  $P$ . Procédons par l'absurde et supposons que  $P$  possède une racine  $\alpha \in \mathbb{C}$  multiple. Par définition, le polynôme  $P'$  admet également  $\alpha$  comme racine, en particulier,

$$\text{pgcd}(P, P') = cP, \quad c \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}.$$

Or, puisque  $\text{car}(\mathbb{Q}) = 0$ , on a

$$\text{deg}(P') = \text{deg}(P) - 1 < \text{deg}(P).$$

Cela implique que  $P$  ne peut diviser  $P'$ . Ainsi,  $\text{pgcd}(P, P') = 1$  et  $P$  n'admet que des racines simples.  $\square$

**Remarque 3.3.10.** Dans la démonstration du Théorème 3.3.8, la matrice  $M \in \mathbb{Z}_r^r$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ . En effet, la forme rationnelle canonique de la matrice  $M$  est une matrice blocs diagonale où chaque bloc est la matrice compagnon  $C \in \mathbb{Z}_l^l$  de  $P_\gamma$ . De plus, par le Lemme 3.3.9, puisque le polynôme  $P_\gamma$  est irréductible dans  $\mathbb{Q}$ , il n'admet que des valeurs simples sur  $\mathbb{C}$ . En particulier, chaque bloc est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$  et il en est de même pour  $M$ .

**Lemme 3.3.11.** *Soit  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble de Delone et  $\gamma > 1$  un paramètre d'inflation de  $\Lambda$ . Alors  $\langle \Lambda \rangle$  est un  $\mathbb{Z}[\gamma]$ -module.*

*Démonstration.* Par définition, l'ensemble

$$\langle \Lambda \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^k a_i \lambda_i : k \in \mathbb{N}_0, a_i \in \mathbb{Z}, \lambda_i \in \Lambda, \forall i \right\}$$

est un  $\mathbb{Z}$ -module. Considérons  $\lambda \in \langle \Lambda \rangle$ . Il admet une décomposition de la forme :

$$\lambda = \sum_{i=1}^k a_i \lambda_i.$$

Alors,

$$\gamma \lambda = \gamma \left( \sum_{i=1}^k a_i \lambda_i \right) = \sum_{i=1}^k a_i (\gamma \lambda_i).$$

Par hypothèse d'inflation, on a  $\gamma\Lambda \subset \Lambda$ . Par conséquent, pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ , on obtient  $\gamma\lambda_i \in \Lambda$ , et cela implique que  $\gamma\lambda \in \langle \Lambda \rangle$ . Puisque  $\gamma\Lambda \subset \Lambda$ , alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}_0$ , on a

$$\gamma^n \Lambda \subset \Lambda.$$

Ayant choisi un élément quelconque de  $\langle \Lambda \rangle$ , le résultat est démontré.  $\square$

Puisque qu'on l'utilise dans la preuve qui suit, rappelons ce qu'est une norme hermitienne sur un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

**Définition 3.3.12.** Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. Une *norme hermitienne* sur  $E$  est une application  $\|\cdot\|$  qui satisfait les conditions suivantes :

1. pour  $u \in E$ ,  $\|u\| = 0$  si et seulement si  $u = 0$  ;
2. pour tous  $u \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ , on a  $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$ .
3. pour tous  $u, v \in E$ , on a  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ .

À partir d'une norme hermitienne  $\|\cdot\|$  sur un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $E$ , on définit la distance associée par

$$d(u, v) = \|u - v\|, \quad \forall u, v \in E.$$

Désormais, nous pouvons passer à la démonstration concernant les paramètres d'inflation des ensembles de Delone de type fini.

**Théorème 3.3.13.** *Si  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  est un ensemble de Delone de type fini possédant une symétrie d'inflation de paramètre  $\gamma$  alors  $\gamma$  est soit un nombre de Lind soit un nombre de Perron.*

*Démonstration.* Considérons  $\Lambda$  un ensemble de Delone de type fini,  $\gamma > 1$  un paramètre d'inflation et posons  $R > 0$  le rayon de recouvrement de  $\Lambda$ . Par le Théorème 3.1.10, l'ensemble  $\Lambda$  est finiment engendré et son rang est fini. Par le Théorème 3.3.8, le paramètre d'inflation  $\gamma$  est un entier algébrique de degré  $l$  qui divise le rang de  $\Lambda$ . Posons  $r = \text{rang}(\Lambda)$ ,  $p = \frac{r}{l}$  et posons l'ensemble

$$\mathbb{Z}[\gamma] := \mathbb{Z}[1, \gamma, \dots, \gamma^{l-1}] = \left\{ \sum_{i=0}^{l-1} n_i \gamma^i : n_i \in \mathbb{Z}, \forall i \right\}$$

est l'anneau engendré par  $\gamma$ . Par le Lemme 3.3.11, l'ensemble  $\langle \Lambda \rangle$  est un  $\mathbb{Z}[\gamma]$ -module. Cependant, rien ne nous garantit que l'ensemble  $\langle \Lambda \rangle$  est un  $\mathbb{Z}[\gamma]$ -module libre. En effet, pour que ce soit un  $\mathbb{Z}[\gamma]$ -module libre, par le Théorème B.0.4, il devrait exister une base, or, il se peut qu'un  $\mathbb{Z}[\gamma]$ -module ne possède pas de base. Il existe  $\langle G \rangle$  un  $\mathbb{Z}[\gamma]$ -module libre dans  $\mathbb{R}^n$  tel que

$$\langle \Lambda \rangle \subseteq \langle G \rangle = \langle g_1, \dots, g_p \rangle_{\mathbb{Z}[\gamma]} \quad \text{et} \quad [\langle G \rangle : \langle \Lambda \rangle] < \infty.$$

Construisons ce  $\mathbb{Z}[\gamma]$ -module libre  $\langle G \rangle$ . Pour ce faire, utilisons les objets mathématiques définis dans la démonstration Théorème 3.3.8. Considérons la matrice compagnon  $C \in \mathbb{Q}_i^l$

de  $P_\gamma$  et la matrice  $M$  qui était définie par  $\gamma B = MB$ . La matrice  $M$  représente l'action de  $\gamma$  sur la matrice  $B$  composée des vecteurs de la base. Notons  $H := \{h_1, \dots, h_r\}$  la base de  $\mathbb{Q}^r$  qui permet d'obtenir la forme rationnelle canonique de  $M$ . Dans la base  $H$ , la matrice  $M$  devient la matrice blocs diagonale

$$M' = \begin{pmatrix} C & & & & \\ & C & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & C \end{pmatrix}.$$

De plus, par (C.1), on a

$$\mathbb{Q}^r \cong \overbrace{\mathbb{Q}[x]/P_\gamma(x)}^{E_1} \oplus \dots \oplus \overbrace{\mathbb{Q}[x]/P_\gamma(x)}^{E_p},$$

puisque le seul facteur invariant est  $P_\gamma(x)$ . Puisque  $C \in \mathbb{Q}_l^l$  et que  $r = lp$ , la somme directe contient  $p$  termes. Comme mentionné dans l'Annexe C, chaque terme composant la somme directe est cyclique. Ainsi, pour tout  $i \in \{1, \dots, p\}$ , il existe  $g_i \in E_i$  tel que  $\mathcal{B}_i = \{g_i, \gamma g_i, \dots, \gamma^{l-1} g_i\}$  est une base de  $E_i$ . Posons désormais

$$\langle G \rangle = \mathbb{Z}[\gamma]g_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}[\gamma]g_p.$$

Par construction, l'ensemble  $\langle G \rangle$  est un  $\mathbb{Z}[\gamma]$ -module libre de rang  $p$  et on a

$$h_{i+(j-1)r} = \gamma^{i-1} g_j,$$

où  $i \in \{1, \dots, l\}$ ,  $j \in \{1, \dots, p\}$ .

Montrons que l'indice  $[\langle G \rangle : \langle \Lambda \rangle]$  est fini. Tout d'abord, les ensembles  $\langle G \rangle$  et  $\langle \Lambda \rangle$  sont de rang  $r$ . Comme la base de  $\langle G \rangle$  est une base de  $\mathbb{Q}^r$ , alors tous les éléments de  $\langle \Lambda \rangle$  se décomposent dans celle-ci. Par hypothèse, l'ensemble  $\langle \Lambda \rangle$  est finiment engendré et chacun de ses générateurs se décompose dans la base  $H$ . La décomposition de chacun de ses générateurs admettent un nombre fini de coefficients. On peut alors considérer  $D$  le PPCM de ses dénominateurs. Cela implique alors

$$\langle \Lambda \rangle \subseteq \frac{1}{D} \langle G \rangle.$$

Pour rappel, on a déjà utilisé un raisonnement similaire dans la démonstration du Lemme 2.2.7. Puisque les deux modules sont de même rang, il s'ensuit que l'indice est fini.

Procédons par contraposition. Supposons qu'il existe  $\gamma' \in \mathbb{C}$  un conjugué de  $\gamma$  tel que  $|\gamma'| > \gamma > 1$ . Posons

$$\langle G' \rangle = \mathbb{Z}[\gamma']g_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}[\gamma']g_p,$$

vu comme un sous-ensemble de  $\mathbb{C}^n$ . Pour mesurer les distances sur  $\mathbb{C}^n$ , on considère la distance associé à la norme hermitienne

$$\|c - c'\|_H^2 = \sum_{i=1}^n |c_i - c'_i|^2, \quad \forall c, c' \in \mathbb{C}^n.$$

Notons

$$\sigma : \mathbb{Z}[\gamma] \rightarrow \mathbb{Z}[\gamma'],$$

le morphisme de Galois tel que  $\sigma(\gamma) = \gamma'$ . Puisque pour tout  $x \in \langle G \rangle$ , on a

$$x = \sum_{j=1}^p a_j g_j,$$

pour  $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{Z}[\gamma]$ , on définit l'application

$$f : \langle G \rangle \rightarrow \langle G' \rangle$$

telle que

$$f(x) = f\left(\sum_{j=1}^p a_j g_j\right) = \sum_{j=1}^p \sigma(a_j) g_j.$$

Cette application est telle que

$$\begin{aligned} f(x + y) &= f(x) + f(y); \\ f(ax) &= \sigma(a)f(x), \end{aligned}$$

où  $x, y \in \langle G \rangle$  et  $a \in \mathbb{Z}[\gamma]$ .

Soit  $\lambda \in \Lambda$  tel que  $f(\lambda) \neq 0$  et posons  $v_k = \gamma^k \lambda - \lambda = (\gamma^k - 1)\lambda$ . On a

$$\begin{aligned} \|f(v_k)\|_H &= \|(\gamma^k - 1)f(\lambda)\|_H = |\gamma^k - 1| \overbrace{\|f(\lambda)\|_H}^{:=L_1} \\ &= L_1 |\gamma^k - 1| \\ &= L_1 |\gamma'|^k |1 - (\gamma')^{-k}| \end{aligned}$$

Puisque  $|\gamma'| > 1$ , lorsque  $k \rightarrow +\infty$

$$|1 - (\gamma')^{-k}| \rightarrow 1.$$

Ainsi, quitte à redéfinir  $L_1$ , on a

$$\|f(v_k)\|_H \geq L_1 |\gamma'|^k, \quad k \rightarrow +\infty \tag{3.9}$$

Par hypothèse, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a

$$\gamma^k \Lambda \subset \Lambda,$$

donc  $\gamma^k \lambda \in \Lambda$ . Fixons  $k \in \mathbb{N}$ . On peut alors construire une chaîne de points  $\lambda_0 = \lambda, \dots, \lambda_s = \gamma^k \lambda$  telle que  $s = \frac{\|(\gamma^k - 1)\lambda\|}{R}$  et

$$\|\lambda_i - \lambda_{i-1}\| < 3R, \quad \forall i \in \{1, \dots, s\}.$$

Pour obtenir une telle chaîne, considérons le segment joignant  $\lambda$  et  $\gamma^k \lambda$ . On commence par  $\lambda_0 = \lambda \in \Lambda$  et on considère le point  $y_1 = \lambda + R \frac{\gamma^k \lambda - \lambda}{\|\gamma^k \lambda - \lambda\|}$ . Par densité relative de  $\Lambda$ , il existe  $\lambda_1 \in \Lambda$  tel que

$$\|\lambda_1 - y_1\| < R.$$

Ainsi, en utilisant l'inégalité triangulaire, on a

$$\|\lambda_1 - \lambda_0\| = \|\lambda_1 - y_1 + y_1 - \lambda_0\| \leq \|\lambda_1 - y_1\| + \|y_1 - \lambda_0\| < 3R.$$

Pour  $m \in \mathbb{N}_0$ , supposons désormais avoir une chaîne de points  $\lambda_0 = \lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_m$  telle que

$$\|\lambda_j - \lambda_{j-1}\| < 3R, \quad j \in \{1, \dots, m\}.$$

et telle que

$$\|\lambda_j - y_j\| < R, \quad j \in \{1, \dots, m\},$$

où  $y_j = \lambda + jR \frac{\gamma^k \lambda - \lambda}{\|\gamma^k \lambda - \lambda\|}$  est un point du segment reliant  $\lambda$  et  $\gamma^k \lambda$ . Par densité relative, il existe  $\lambda_{m+1} \in \Lambda$  tel que

$$\|\lambda_{m+1} - y_{m+1}\| \leq R.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \|\lambda_{m+1} - \lambda_m\| &= \|\lambda_{m+1} - y_{m+1} + y_{m+1} - y_m + y_m - \lambda_m\| \\ &\leq \|\lambda_{m+1} - y_{m+1}\| + \|y_{m+1} - y_m\| + \|y_m - \lambda_m\| \\ &\leq 2R + \left\| \left( \lambda + (m+1)R \frac{\gamma^k \lambda - \lambda}{\|\gamma^k \lambda - \lambda\|} \right) - \left( \lambda + mR \frac{\gamma^k \lambda - \lambda}{\|\gamma^k \lambda - \lambda\|} \right) \right\| \\ &\leq 3R. \end{aligned}$$

De plus, puisque le segment joignant  $\lambda$  et  $\gamma^k \lambda$  est de longueur  $\|(\gamma^k - 1)\lambda\|$ , et que chaque  $y_j$  représente un pas de d'une longueur  $R$  sur ce segment, il est clair que

$$s = \left\lceil \frac{\|(\gamma^k - 1)\lambda\|}{R} \right\rceil.$$

De plus, puisque par hypothèse l'ensemble de Delone  $\Lambda$  est de type fini, l'ensemble  $(\Lambda - \Lambda) \cap \overline{B}(0, 3R)$  est fini et la constante

$$L_2 := \max\{\|f(x)\|_H : x \in (\Lambda - \Lambda) \cap \overline{B}(0, 3R)\}$$

est finie également. En utilisant la chaîne de points ci-dessus et la linéarité de  $f$ , on obtient

$$\begin{aligned} \|f(v_k)\|_H &= \left\| \sum_{i=1}^s f(\lambda_i - \lambda_{i-1}) \right\|_H \\ &\leq \sum_{i=1}^s \|f(\lambda_i - \lambda_{i-1})\|_H \end{aligned}$$

Par définition de la chaîne, pour tout  $i \in \{1, \dots, s\}$ ,

$$\lambda_i - \lambda_{i-1} \in (\Lambda - \Lambda) \cap \overline{B}(0, 3R),$$

donc

$$\sum_{i=1}^s \|f(\lambda_i - \lambda_{i-1})\|_H < L_2 s = L_2 \left( \frac{\|(\gamma^k - 1)\lambda\|}{R} + 1 \right).$$

Ainsi,

$$\|f(v_k)\|_H \leq L_2 \left( \frac{\|(\gamma^k - 1)\lambda\|}{R} \right) \leq L_3 \gamma^k, \quad .$$

Pour conclure, on a montré que

$$\|f(v_k)\|_H \geq L_1 |\gamma'|^k, \quad \|f(v_k)\|_H \leq L_3 \gamma^k, \quad k \rightarrow +\infty$$

et comme on a supposé que  $\gamma < |\gamma'|$ , on atteint une contradiction pour  $k$  suffisamment grand. Par conséquent, tous les conjugués  $\gamma'$  de  $\gamma$  vérifient

$$|\gamma'| \leq \gamma,$$

et donc  $\gamma$  est soit un nombre de Perron soit un nombre de Lind. □

Concluons ce chapitre par un résultat liant les ensembles de Meyer et les nombres de Salem et de Pisot. Yves Meyer fut le premier à mettre en évidence la connexion entre les ensembles de Meyer et ces entiers algébriques dans son ouvrage [Mey72].

**Théorème 3.3.14.** *Si  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  est un ensemble de Meyer possédant une symétrie d'inflation de paramètre  $\gamma$  alors  $\gamma$  est soit un nombre de Salem, soit un nombre de Pisot.*

*Démonstration.* Considérons  $\Lambda$  un ensemble de Meyer tel que  $\gamma\Lambda \subseteq \Lambda$  avec  $\gamma > 1$ . Par le Théorème 3.2.3, l'ensemble  $\Lambda$  est finiment engendré et, par le Théorème 3.3.8,  $\gamma$  est un entier algébrique. Notons  $r := \text{rang}(\Lambda)$ ,  $l := \text{deg}(\gamma)$  et posons  $B = (b_1, \dots, b_r)$  une base de  $\langle \Lambda \rangle$ . Par le Théorème 3.2.3, la fonction adresse  $\phi$  associée à  $\Lambda$  est presque linéaire. Il existe une constante  $C_\phi > 0$  et une application linéaire

$$L_\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$$

telles que

$$\|\phi(\lambda) - L_\phi(\lambda)\| < C_\phi, \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

Puisque  $\gamma\Lambda \subseteq \Lambda$ , en procédant de façon similaire à la démonstration du Théorème 3.3.8, on obtient à nouveau la relation

$$\gamma B = MB,$$

où  $M \in \mathbb{Z}_r^r$  et  $B = (b_1, \dots, b_r)^T$ . Considérons  $\lambda \in \langle \Lambda \rangle$ , on a  $\lambda = \sum_{i=1}^r \lambda_i b_i$  et  $\phi(\lambda) = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)^T$ , par définition de fonction adresse. Alors,

$$\begin{aligned} \gamma\lambda &= \gamma \sum_{j=1}^r \lambda_j b_j = \sum_{j=1}^r \lambda_j (\gamma b_j) \\ &= \sum_{j=1}^r \lambda_j \left( \sum_{i=1}^r M_{ij} b_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^r \left( \sum_{j=1}^r M_{ij} \lambda_j \right) b_i \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\phi(\gamma\lambda) = \left( \sum_{j=1}^r M_{1j} \lambda_j, \dots, \sum_{j=1}^r M_{rj} \lambda_j \right)^T = M\phi(\lambda) \quad (3.10)$$

Dans la démonstration du Théorème 3.3.8, on a également montré que le polynôme minimal de  $M$  est le polynôme monique irréductible  $P_\gamma \in \mathbb{Z}[x]$  telle que

$$P_\gamma(\gamma) = 0.$$

Notons

$$P_\gamma(x) = \prod_{i=1}^l (x - \gamma_i) = x^l + \sum_{i=0}^{l-1} a_i x^i,$$

où  $l = \deg(\gamma)$  et  $\gamma_1 = \gamma$ . De plus, par la Remarque 3.3.10, la matrice  $M$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ . Ainsi, on a

$$\mathbb{C}^r = G_1 + \dots + G_l \quad (3.11)$$

où, pour tout  $i \in \{1, \dots, l\}$ , l'ensemble  $G_i$  est le sous-espace propre associée à la valeur propre  $\gamma_i$ . Par le Lemme 3.3.9, toutes les racines de  $P_\gamma$  sont simples et puisque la matrice  $M$  possède  $\frac{r}{l}$  copies de  $C$ , la matrice compagnon de  $P_\gamma$ , on en tire que

$$\dim(G_i) = \frac{r}{l}, \quad \forall i \in \{1, \dots, l\}.$$

Pour chaque  $i \in \{1, \dots, l\}$ , par définition de  $G_i$ , on a

$$Mg_i = \gamma_i g_i, \quad \forall g_i \in G_i. \quad (3.12)$$

Considérons  $\lambda \in \Lambda$  tel que  $\phi(\lambda) \neq 0$ . Puisque  $\phi$  est injectif et que l'ensemble  $\Lambda$  est relativement dense, un tel  $\lambda$  existe. Par l'équation (3.11), il existe une décomposition unique de la forme

$$\phi(\lambda) = \sum_{i=1}^l g_i, \quad (3.13)$$

telle que  $g_i \in G_i$ , pour tout  $i \in \{1, \dots, l\}$ . Montrons que puisque  $\phi(\lambda) \in \mathbb{Z}^r \setminus \{0\}$ , alors

$$g_i \neq 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, l\}.$$

Notons  $G$  le groupe de Galois du polynôme  $P_\gamma$ . Comme le polynôme  $P_\gamma$  est irréductible, par la Proposition D.0.4, le groupe  $G$  est transitif. Pour  $i, j \in \{1, \dots, l\}$ , il existe alors un automorphisme  $\sigma$  tel que  $\sigma(\gamma_i) = \gamma_j$ . Cela implique que l'automorphisme  $\sigma$  engendre aussi une permutation des sous-espaces propres associées à  $\gamma_i$  et  $\gamma_j$ . En particulier, pour la relation (3.13),

$$\sigma(g_i) = g_j.$$

Si  $g_i = 0$ , alors  $0 = \sigma(g_i) = g_j$ . Au final, si une composante  $g_i = 0$ , alors tous les termes de (3.13) valent 0 et cela impliquerait que  $\phi(\lambda) = 0$ , ce qui est absurde.

En itérant l'équation (3.10) et en utilisant la décomposition de  $\phi(\lambda)$ , on obtient

$$M^j \phi(\lambda) = \sum_{i=1}^l \gamma_i^j g_i, \quad j \geq 1. \quad (3.14)$$

Pour  $j \geq 1$ , en utilisant le caractère presque linéaire de  $\phi$  et l'équation (3.10), on a

$$\|L_\phi(\gamma^j \lambda) - \phi(\gamma^j \lambda)\| = \|\gamma^j L_\phi(\lambda) - M^j \phi(\lambda)\| \quad (3.15)$$

De plus, par l'équation (3.14),

$$\begin{aligned} \|\gamma^j L_\phi(\lambda) - M^j \phi(\lambda)\| &= \|\gamma^j L_\phi(\lambda) - \sum_{i=1}^l \gamma_i^j g_i\| \\ &= \|\gamma^j (L_\phi(\lambda) - g_1) - \sum_{i=2}^l \gamma_i^j g_i\| \\ &\leq C_\phi. \end{aligned}$$

Pour conclure la démonstration, montrons que  $L_\phi(\lambda) = g_1$  et que  $|\gamma_i| \leq 1$  pour  $i \in \{2, \dots, l\}$ . Considérons le vecteur  $v_j$  tel que la  $i^{\text{ème}}$  composante

$$v_j^{(i)} = \sum_{k=1}^l g_{ki} (\gamma_k)^j$$

où le terme  $g_{1i}$  est la  $i^{\text{ème}}$  composante de  $(L_\phi(\lambda) - g_1)$  et le terme  $g_{ki}$  est la  $i^{\text{ème}}$  composante de  $-g_k$  pour  $k \geq 2$ . Par le raisonnement précédent, on a

$$|v_j^{(i)}| \leq C_\phi, \quad \forall i \in \{1, \dots, l\}. \quad (3.16)$$

Ainsi, pour  $|z|$  suffisamment petit, on a la relation suivante

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} v_j^{(i)} z^j &= \sum_{j=0}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^l g_{ki} (\gamma_k)^j \right) z^j \\ &= \sum_{k=1}^l g_{ki} \left( \sum_{j=0}^{\infty} (\gamma_k z)^j \right) \\ &= \sum_{k=1}^l \frac{g_{ki}}{1 - \gamma_k z}. \end{aligned}$$

Par l'équation (3.16), on obtient que la série converge lorsque  $|z| < 1$ . Puisque tous les éléments  $\gamma_k$  sont distincts, pour tout  $|\gamma_k| > 1$

$$g_{ki} = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, l\}.$$

En effet, si  $|\gamma_k| > 1$  pour  $k \in \{1, \dots, l\}$ , alors,

$$\frac{1}{|\gamma_k|} < 1$$

et le module de la variable  $z$  ne peut valoir  $\frac{1}{|\gamma_k|}$ . Cela implique que

$$g_{ki} = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, l\}.$$

Par hypothèse, on a  $\gamma_1 = \gamma > 1$ , d'où

$$g_{1i} = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, l\},$$

et  $L_\phi(\lambda) = g_1$ . De plus, pour  $k \geq 2$ , on a montré que  $g_k \neq 0$ , alors, pour chaque  $k \geq 2$ , il existe  $i \in \{1, \dots, l\}$  tel que  $g_{ki} \neq 0$  et cela implique que  $|\gamma_k| \leq 1$ . Par conséquent, tous les conjugués  $\gamma'$  de  $\gamma$  satisfont

$$|\gamma'| \leq 1,$$

il s'ensuit que  $\gamma$  est soit un nombre de Pisot, soit un nombre de Salem. □

**Exemple 3.3.15.** Dans l'Exemple 3.3.7, on affirme que l'ensemble  $\Lambda(W)$  est de Meyer et que  $\tau\Lambda(W) \subset \Lambda(W)$ . Ainsi, par le Théorème 3.3.14, il s'ensuit que le nombre d'or  $\tau$  est bien un nombre de Pisot ou de Salem.



# Chapitre 4

## Étude de la complexité locale des ensembles de Delone.

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la complexité locale des cristaux idéaux. En se basant sur le nombre de configurations locales ou sur l'hétérogénéité de leur distribution, on établira si un ensemble est un cristal idéal de  $\mathbb{R}^n$ .

Dans cette section, on se place à nouveau dans  $\mathbb{R}^n$  muni de la norme euclidienne. La rédaction de ce chapitre s'appuie principalement sur l'article [LP01] et a été complétée par des résultats de [Lag99, LP03].

### 4.1 Rappels et définitions

L'objectif de cette première section est de présenter une caractérisation des cristaux idéaux via leur nombre de patches.

Comme défini au Chapitre 1, un ensemble  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  est *non-périodique* si  $\text{per}(\Lambda) = \{0\}$  et *non-cristallin* si

$$0 \leq \dim(\langle \text{per}(\Lambda) \rangle) < n.$$

Un  $T$ -patch centré en  $\lambda \in \Lambda$  est l'ensemble de la forme :

$$P(\lambda, T) = \Lambda \cap \overline{B}(\lambda, T).$$

Notons  $\mathcal{P}_\Lambda(T)$  l'ensemble des  $T$ -patches de  $\Lambda$ .

Deux  $T$ -patches  $P(\lambda, T)$  et  $P(\lambda', T)$  sont équivalents si, pour  $t \in \mathbb{R}^n$ , on a

$$P(\lambda, T) = P(\lambda', T) + \lambda - \lambda'. \quad (4.1)$$

Autrement dit, ils sont équivalents s'ils sont égaux, à translation près. On note alors  $P(\lambda, T) \sim P(\lambda', T)$ .

**Proposition 4.1.1.** *La relation  $\sim$  définie par (4.1) est une relation d'équivalence.*

*Démonstration.* La relation  $\sim$  est réflexive : il suffit de considérer la translation nulle. Si  $P(\lambda, T) \sim P(\lambda', T)$ , alors

$$P(\lambda, T) = P(\lambda', T) + (\lambda - \lambda') \Leftrightarrow P(\lambda, T) - (\lambda - \lambda') = P(\lambda', T)$$

ce qui montre que la relation est symétrique. La transitivité découle directement de la composition de translations.  $\square$

Ainsi, on peut définir la fonction de comptage de patchs de la manière suivante. Cet outil permet de mesurer la complexité d'un ensemble de Delone à partir de sa structure locale.

**Définition 4.1.2.** Soit  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble de Delone. La fonction de comptage de patchs est la fonction définie par

$$N_\Lambda : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\} : T \mapsto \#\{[P]_\sim : P \in \mathcal{P}_\Lambda(T)\}.$$

On dit que l'ensemble  $\Lambda$  est à *complexité locale finie* (où est *FLC*) lorsque

$$N_\Lambda(T) < \infty, \quad \forall T > 0.$$

**Remarque 4.1.3.** Considérons l'ensemble  $(r, R)$ -Delone  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ . La fonction  $N_\Lambda$  est croissante. En effet, pour des rayons  $T > 0$  et  $T' > 0$  tels que  $T < T'$ , si deux  $T'$ -patchs sont équivalents, alors leur restrictions à  $T$  restent équivalentes, ce qui garantit la croissance. De plus, puisque la constante  $r$  garantit que

$$\|\lambda - \lambda'\| \geq r,$$

pour tous  $\lambda, \lambda' \in \Lambda$  distincts, il en résulte que  $N_\Lambda(T) = 1$  pour tout  $0 \leq T < \frac{r}{2}$ .

## 4.2 Quelques lemmes techniques

Dans cette section, on retrouve deux lemmes techniques qui nous seront utiles pour la suite. Le résultat qui suit est direct si  $s = 1$ . C'est pour cela que l'on considère  $s \geq 2$ .

**Lemme 4.2.1.** Soit  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble de Delone et soit un entier  $s \geq 2$ . S'il existe un sous-ensemble  $\Lambda_1 \subset \Lambda$  et des translations  $t_1, \dots, t_s \in \mathbb{R}^n$  (avec  $t_1 := 0$ ) tels que

$$\Lambda = \bigsqcup_{i=1}^s (\Lambda_1 + t_i),$$

alors l'ensemble  $\Lambda_1$  est également de Delone.

*Démonstration.* Puisque  $\Lambda_1 \subseteq \Lambda$  et que l'ensemble  $\Lambda$  est uniformément discret, il en est de même pour  $\Lambda_1$ . Montrons que l'ensemble  $\Lambda_1$  est relativement dense. Par densité relative de  $\Lambda$ , posons  $R > 0$  tel que

$$\overline{B}(x, R) \cap \Lambda \neq \emptyset, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

et  $t = \max_{i \in \{1, \dots, s\}} \|t_i\|$ . Fixons  $x \in \mathbb{R}^n$ , il existe  $\lambda \in \overline{B}(x, R) \cap \Lambda$ . Donc, il existe  $\lambda_1 \in \Lambda_1$  et  $i \in \{1, \dots, s\}$  tels que

$$\lambda = \lambda_1 + t_i \in \overline{B}(x, R) \cap \Lambda.$$

Ainsi, en utilisant l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned} \|\lambda_1 - x\| &= \|\lambda_1 - x + t_i - t_i\| \\ &\leq \|\lambda_1 - x + t_i\| + \|t_i\| \\ &\leq R + t. \end{aligned}$$

Ainsi, les boules de rayon  $R + t$  rencontrent toujours au moins un élément de  $\Lambda_1$ , il en résulte que l'ensemble  $\Lambda_1$  est relativement dense et donc de Delone.  $\square$

**Lemme 4.2.2.** *Soit  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble de Delone. Si*

$$M = \max\{N_\Lambda(T) : T \in \mathbb{R}^+\} < \infty,$$

*alors l'ensemble  $\Lambda$  est l'union de  $M$  classes latérales d'un réseau de  $\mathbb{R}^n$ . Autrement dit, si la fonction  $N_\Lambda$  est bornée, alors il existe  $\Lambda_1$  un réseau de  $\mathbb{R}^n$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_M$  des éléments de  $\mathbb{R}^n$*

$$\Lambda = \bigsqcup_{i=1}^M (\Lambda_1 + \lambda_i) = \Lambda_1 + \{\lambda_1, \dots, \lambda_M\}.$$

*Démonstration.* Pour tous  $\lambda, \lambda' \in \Lambda$  distincts, si

$$P_\Lambda(\lambda, T) \approx P_\Lambda(\lambda', T),$$

alors, on a

$$P_\Lambda(\lambda, T') \approx P_\Lambda(\lambda', T'), \quad \forall T \leq T'.$$

En effet, si les patches sont différents proches du centre, ils le restent si on augmente le rayon. Par hypothèse, comme la fonction  $N_\Lambda$  est croissante, bornée et à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , il existe  $T_{\max} \in \mathbb{R}^+$  tel que  $N_\Lambda(T_{\max}) = M$ . L'ensemble  $\Lambda$  possède alors exactement  $M$   $T_{\max}$ -patches. Puisque la fonction  $N_\Lambda$  est croissante, on a également

$$N_\Lambda(T') = M, \quad \forall T' \geq T_{\max}. \quad (4.2)$$

Il en résulte alors que

$$\Lambda = \bigcup_{i=1}^M \Lambda_i = \bigcup_{i=1}^M \{\lambda \in \Lambda : P_\Lambda(\lambda, T_{\max}) \sim \mathcal{P}_i\},$$

où, pour tout  $i \in \{1, \dots, M\}$ , chaque ensemble  $\mathcal{P}_i$  est un  $T_{\max}$ -patch et  $\mathcal{P}_i \neq \mathcal{P}_j$  si  $i \neq j$ . La famille d'ensembles  $(\Lambda_i)_{i \in \{1, \dots, M\}}$  forme une partition de  $\Lambda$ . En effet, pour chaque  $\lambda \in \Lambda$ , puisque

$$N_\Lambda(T_{\max}) = M,$$

le  $T_{\max}$ -patch centré en  $\lambda$  est égal, à translation près, à un des  $\mathcal{P}_i$ . De plus, chaque élément  $\lambda \in \Lambda$  ne peut appartenir qu'à un ensemble  $\Lambda_i$  car, sinon, il aurait deux  $T_{\max}$ -patches différents. Quitte à translater  $\Lambda$ , on peut supposer, sans perte de généralité, que  $0 \in \Lambda_1$  et montrons que l'ensemble  $\Lambda_1$  est un sous-groupe additif de  $\mathbb{R}^n$ . Pour tous  $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ , on a les deux relations suivantes

$$B(0, T_{\max}) \subseteq B(\lambda', T_{\max} + \|\lambda'\|) \quad (4.3)$$

et

$$B(\lambda - \lambda', T_{\max}) \subseteq B(\lambda, T_{\max} + \|\lambda'\|) \quad (4.4)$$

Montrons que les relations sont vérifiées. Si  $x \in B(0, T_{\max})$ , on a

$$\|x - \lambda'\| \leq \|x\| + \|\lambda'\| < T_{\max} + \|\lambda'\|,$$

ce qui permet de démontrer la première relation et, si  $y \in B(\lambda - \lambda', T_{\max})$

$$\|y - \lambda\| \leq \|y - \lambda + \lambda' - \lambda'\| < \|y - (\lambda - \lambda')\| + \|\lambda'\| \leq T_{\max} + \|\lambda'\|,$$

et la deuxième relation est également vérifiée. Si  $\lambda, \lambda' \in \Lambda_1$ , par définition de  $\Lambda_1$ , on a que les  $T_{\max}$ -patches de  $\lambda$  et  $\lambda'$  sont identiques, à translation près, à  $\mathcal{P}_1$ . Par l'équation (4.2), cela implique, en particulier, que les éléments  $\lambda$  et  $\lambda'$  ont les mêmes  $(T_{\max} + \|\lambda'\|)$ -patch. Ainsi, la translation

$$t_{\lambda' - \lambda} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : x \mapsto x + \lambda' - \lambda$$

envoie la boule  $B(\lambda, T_{\max} + \|\lambda'\|)$  sur  $B(\lambda', T_{\max} + \|\lambda'\|)$ . De plus, par les relations (4.3) et (4.4), on obtient, en particulier, que cette translation envoie les points de  $(B(0, T_{\max}) \cap \Lambda)$  sur  $(B(\lambda' - \lambda, T_{\max}) \cap \Lambda)$ . Puisque 0 est un élément de  $\Lambda_1$  et qu'il est envoyé sur  $\lambda' - \lambda$ , on en déduit que  $\lambda' - \lambda \in \Lambda$  par l'équivalence des patches. De plus, comme

$$P_\Lambda(0, T_{\max}) \sim P_\Lambda(\lambda' - \lambda, T_{\max}),$$

on a  $\lambda' - \lambda \in \Lambda_1$ . On obtient alors que pour tout élément  $\lambda \in \Lambda$ , on a  $-\lambda = 0 - \lambda \in \Lambda$  et que

$$\lambda + \lambda' = \lambda - (-\lambda') \in \Lambda, \quad \forall \lambda, \lambda' \in \Lambda.$$

comme l'ensemble  $\Lambda_1$  est stable pour l'addition et possède l'opposé de chacun de ses éléments, il en résulte que l'ensemble  $\Lambda_1$  est un sous-groupe additif de  $\mathbb{R}^n$ .

Afin de montrer que

$$\Lambda_1 + \Lambda_2 = \Lambda_2,$$

pour  $\lambda_2 \in \Lambda_2$ , considérons  $\lambda_1 \in \Lambda_1$  et  $\lambda_2 \in \Lambda_2$ . Par définition de  $\Lambda_1$ , on a

$$P_\Lambda(0, T_{\max} + \|\lambda_2\|) \sim P_\Lambda(\lambda_1, T_{\max} + \|\lambda_2\|).$$

Procédons de manière analogue mais avec la translation  $t_{\lambda_2}$  cette fois-ci. Cette translation envoie  $B(0, T_{\max} + \|\lambda_2\|)$  sur  $B(\lambda_2, T_{\max} + \|\lambda_2\|)$  et  $B(\lambda_1, T_{\max} + \|\lambda_2\|)$  sur  $B(\lambda_1 + \lambda_2, T_{\max} + \|\lambda_2\|)$ . Puisque les  $(T_{\max} + \|\lambda_2\|)$ -patches de centre de 0 et  $\lambda_1$  sont identiques, à translation près, il en est de même pour les  $T_{\max}$ -patches de centre  $\lambda_2$  et  $\lambda_1 + \lambda_2$ . Ainsi, on a

$$\mathcal{P}_2 \sim P_\Lambda(\lambda_2, T_{\max}) \sim P_\Lambda(\lambda_1 + \lambda_2, T_{\max})$$

De plus, puisque le point  $\lambda_2 \in \Lambda_2$ , il s'ensuit que  $\lambda_1 + \lambda_2 \in \Lambda$ . Ainsi, on a  $\lambda_1 + \lambda_2 \in \Lambda_2$  et

$$\Lambda_1 + \lambda_2 \subseteq \Lambda_2 \tag{4.5}$$

Pour montrer l'autre inclusion, considérons  $\lambda'_2 \in \Lambda_2$ , on a

$$P_\Lambda(\lambda_2, T_{\max} + \|\lambda_2\|) \sim P_\Lambda(\lambda'_2, T_{\max} + \|\lambda_2\|).$$

En procédant de manière analogue, en considérant la translation  $-\lambda_2$ , on obtient que  $\lambda'_2 - \lambda_2 \in \Lambda_1$ . Ainsi,

$$\Lambda_2 - \lambda_2 \subseteq \Lambda_1,$$

et par la relation (4.5), on a

$$\Lambda_1 + \lambda_2 = \Lambda_2.$$

On vient de démontrer que l'ensemble  $\Lambda_2$  est une classe latérale de  $\Lambda_1$  et en procédant de manière similaire, il en résulte que, pour tout  $i \in \{2, \dots, M\}$ , l'ensemble  $\Lambda_i$  est une classe latérale de  $\Lambda_1$ . On a alors démontré que

$$\Lambda = \bigsqcup_{i=1}^M \Lambda_i = \bigsqcup_{i=1}^M (\Lambda_1 + \lambda_i).$$

Ainsi, l'ensemble de Delone  $\Lambda$  est une union finie de translatés de  $\Lambda_1$ . Par le Lemme 4.2.1, il s'ensuit que l'ensemble  $\Lambda_1$  est de Delone. Pour conclure, montrons que l'ensemble  $\Lambda_1$  est un réseau complet. Pour ce faire, comme c'est un sous-groupe discret, il suffit de montrer que  $\dim(\langle \Lambda \rangle) = n$ . Par l'absurde, si  $\dim(\langle \Lambda \rangle) = k < n$ , alors il existe un vecteur  $v \in \mathbb{R}^n$  orthogonal à  $\langle \Lambda \rangle$  et, on pourrait, en parcourant le long de ce vecteur  $v$ , s'éloigner autant que souhaité de  $\Lambda$ , ce qui est absurde vu la densité relative de  $\Lambda$ . Ainsi, on en tire que  $\dim(\langle \Lambda \rangle) = n$  et que l'ensemble  $\Lambda_1$  est un réseau complet.  $\square$

### 4.3 Caractérisation des cristaux idéaux par la complexité locale

On peut passer à la caractérisation des cristaux idéaux par la complexité locale.

**Théorème 4.3.1.** *Si  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  est un ensemble de Delone, alors  $\Lambda$  est un cristal idéal si et seulement si la fonction  $N_\Lambda$  est bornée.*

*Démonstration.* Supposons que la fonction  $N_\Lambda$  est bornée et montrons que l'ensemble  $\Lambda$  est un cristal idéal. Par le Lemme 4.2.2, il existe un réseau  $\Lambda_1 \subset \mathbb{R}^n$  et des vecteurs  $\lambda_1, \dots, \lambda_M$  tels que

$$\Lambda = \Lambda_1 + \{\lambda_1, \dots, \lambda_M\},$$

il en résulte que l'ensemble  $\Lambda$  est un cristal idéal.

Supposons désormais que l'ensemble  $\Lambda$  est un cristal idéal et montrons que la fonction  $N_\Lambda$  est bornée. Par hypothèse, il existe un réseau  $\Lambda_1 \subset \mathbb{R}^n$  et un ensemble fini  $F$  tel que

$$\Lambda = \Lambda_1 + F.$$

Puisque l'ensemble  $\Lambda_1$  est un sous-groupe additif de  $\mathbb{R}^n$ , on a

$$\Lambda_1 \subseteq \text{per}(\Lambda) = \{p \in \mathbb{R}^n : p + \Lambda = \Lambda\}. \quad (4.6)$$

Par le Lemme 1.4.7, l'ensemble  $\text{per}(\Lambda)$  est un sous-groupe discret de  $\mathbb{R}^n$  et, vu la relation (4.6), on en déduit que  $\dim(\langle \text{per}(\Lambda) \rangle_{\mathbb{R}}) = n$ . Ainsi, l'ensemble  $\text{per}(\Lambda)$  est un réseau complet. Pour  $\lambda \in \Lambda$ , posons l'ensemble

$$\text{Orb}(\lambda) = \{\lambda + p : p \in \text{per}(\Lambda)\},$$

l'orbite de  $\lambda$  sous l'action des translations du groupe  $\text{per}(\Lambda)$ . Comme  $\Lambda = \Lambda_1 + F$ , il existe  $\lambda_1 \in \Lambda_1$  et  $f \in F$  tels que  $\lambda = \lambda_1 + f$ . Ainsi, comme l'ensemble  $\text{per}(\Lambda)$  est muni d'une structure de groupe, on a

$$\text{Orb}(\lambda) = \lambda_1 + f + \text{per}(\Lambda) = f + (\lambda_1 + \text{per}(\Lambda)) = f + \text{per}(\Lambda).$$

Donc, toutes les orbites sont de la forme  $\text{Orb}(\lambda) = f + \text{per}(\Lambda)$ . Ce sont exactement les classes latérales du réseau  $\text{per}(\Lambda)$ , il y en a au plus  $M := |F|$ . Pour montrer que la fonction  $N_\Lambda$  est bornée, montrons que les éléments d'une même classe latérale possèdent le même  $T$ -patch, à translation près, pour tout  $T > 0$ . Posons  $T > 0$ ,  $\lambda \in \Lambda$  et considérons  $\gamma \in \text{Orb}(\lambda)$ . Par définition de l'orbite, il existe  $p \in \text{per}(\Lambda)$  tel que  $\gamma = \lambda + p$ . En considérant les  $T$ -patches centrés en 0, on obtient

$$P(\gamma, T) = (B(\gamma, T) \cap \Lambda) - \gamma = (B(\gamma, T) \cap \Lambda) - \lambda - p$$

En translatant de  $-p$ , puisque  $p \in \text{per}(\Lambda)$ , on obtient

$$\begin{aligned} (B(\lambda, T) \cap (\Lambda - p)) - \lambda &= (B(\lambda, T) \cap \Lambda) - \lambda \\ &= P(\lambda, T). \end{aligned}$$

On a démontré qu'il y avait au plus  $|F|$  orbites et les éléments d'une orbite possèdent les mêmes  $T$ -patches. Par conséquent, la fonction de comptage de patches  $N_\Lambda$  est bornée par  $|F|$ .  $\square$

Illustrons ce théorème avec un exemple classique.

**Exemple 4.3.2.** Considérons  $\Lambda = (2\mathbb{Z}) + \{0, \frac{1}{2}\}$ . Puisque l'ensemble  $2\mathbb{Z}$  est un réseau et que l'ensemble  $\{0, \frac{1}{2}\}$  est fini, il s'ensuit que l'ensemble  $\Lambda$  est un cristal idéal. Pour  $0 \leq T < 1/2$ , on a  $N_\Lambda(T) = 1$  puisque

$$P_\Lambda(\lambda, T) = \{\lambda\}, \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

Si  $T \geq \frac{1}{2}$ , alors  $N_\Lambda(T) = 2$ . En effet, pour tout  $T \geq \frac{1}{2}$ , tous les  $T$ -patches des éléments  $\lambda \in 2\mathbb{Z}$  sont identiques à translation près. Il en est de même pour les éléments de  $2\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ . De plus, le  $T$ -patch centré en un élément  $\lambda$  de  $2\mathbb{Z}$  est bien distinct de celui centré en un élément  $\lambda'$  de  $2\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ . On a bien

$$N_\Lambda(T) \leq 2, \quad \forall T > 0,$$

comme l'affirme le théorème.

Le théorème permet également de déterminer si un ensemble de Delone est un cristal idéal.

**Exemple 4.3.3.** Considérons l'ensemble

$$\Lambda = \left\{ x_n := n + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0\} \right\}.$$

La densité relative  $\Lambda$  est vérifiée pour les intervalles de rayon 2, par exemple. Montrons que l'ensemble  $\Lambda$  est uniformément discret. Pour deux points consécutifs avec  $|n| \geq 2$ , on a

$$x_{n+1} - x_n = (n+1) + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} - \left( n + \frac{(-1)^n}{n} \right) = 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1)^n}{n}.$$

Puisque

$$\left| \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1)^n}{n} \right| \leq \frac{1}{|n+1|} + \frac{1}{|n|},$$

il s'ensuit que

$$x_{n+1} - x_n \geq 1 - \left( \frac{1}{|n+1|} + \frac{1}{|n|} \right).$$

Ainsi, pour  $|n| \geq 2$ , on a  $x_{n+1} - x_n \geq \frac{1}{6}$ . De plus, pour  $n = 1$ , on a

$$|x_2 - x_1| = \frac{5}{2}.$$

Ainsi, tous les éléments de  $\Lambda$  sont, au moins, séparés d'une distance  $\frac{1}{6}$ . Donc, l'ensemble  $\Lambda$  est de Delone. Montrons qu'il existe une infinité de  $T$ -patches pour  $T > 2$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}_0$ , chaque  $T$ -patch  $P_\Lambda(x_n, T)$  contient  $x_{n+1}$ . En particulier, chaque  $T$ -patch  $P_\Lambda(x_{2n}, T)$  possède  $x_{2n+1}$ . Comme

$$|x_{2n+1} - x_{2n}| = \left| 1 + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} - \frac{(-1)^{2n}}{2n} \right| = 1 - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n}$$

et que la fonction

$$f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R} : n \mapsto 1 - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n}$$

est strictement croissante, il en résulte que tous les  $T$ -patches recentrés en 0

$$P_\Lambda(x_{2n}, T) - x_{2n}$$

sont distincts deux à deux, pour  $n \in \mathbb{N}_0$ . Ainsi, il s'ensuit que la fonction  $N_\Lambda$  n'est pas bornée et, par le Théorème 4.3.1, il en résulte que l'ensemble  $\Lambda$  n'est pas un cristal idéal.

À partir des résultats présentés dans cette section, on peut en déduire une caractérisation analogue pour les translatés de réseau.

**Corollaire 4.3.4.** *Si  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  est un ensemble de Delone, alors  $\Lambda$  est le translaté d'un réseau si et seulement si*

$$N_\Lambda(T) = 1, \quad \forall T > 0.$$

*Démonstration.* La condition suffisante est directe par le Lemme 4.2.2.

Passons à la condition nécessaire. Dans la démonstration du Théorème 4.3.1, on a prouvé que si l'ensemble  $\Lambda = \Lambda_1 + F$  est un cristal idéal alors  $N_\Lambda(T) \leq |F|$ , pour tout  $T > 0$ . Ici, comme l'ensemble  $\Lambda$  est le translaté d'un réseau, on a

$$\Lambda = \Lambda_1 + F = \Lambda_1 + f,$$

où l'ensemble  $\Lambda_1$  est un réseau et  $f \in \mathbb{R}^n$ . On en déduit alors que la fonction  $N_\Lambda$  est bornée par 1. Puisqu'un ensemble de Delone est non-vide par densité relative, on obtient que

$$N_\Lambda(T) = 1, \quad \forall T > 0,$$

comme souhaité. □

Par le Théorème 4.3.1, on a montré que, pour tout cristal idéal  $\Lambda$ , la fonction  $N_\Lambda$  de comptage de patches est bornée. Pour clôturer cette section, montrons que le taux de croissance de toute fonction de comptage de patches associée à un ensemble de Delone qui n'est pas un cristal idéal admet une borne inférieure linéaire.

**Théorème 4.3.5.** *Soit  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble  $(r, R)$ -Delone. Si l'ensemble  $\Lambda$  n'est pas un cristal idéal, alors*

$$\frac{T}{2R} \leq N_\Lambda(T), \quad \forall T > 0.$$

Avant de passer à la démonstration de ce théorème, prouvons le lemme technique suivant.

**Lemme 4.3.6.** *Soit  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble  $(r, R)$ -Delone. S'il existe des constantes  $C > 0$  et  $D > C + 2R$  telles que  $N_\Lambda(C) = N_\Lambda(D)$ , alors*

$$N_\Lambda(T) = N_\Lambda(C), \quad \forall T \geq C$$

*En particulier, l'ensemble  $\Lambda$  est un cristal idéal.*

*Démonstration.* Considérons  $\lambda, \lambda' \in \Lambda$  tels que

$$P_\Lambda(\lambda, C) \approx P_\Lambda(\lambda', C).$$

Puisque ces deux patches de rayon  $C$  ne sont pas équivalents, si on augmente le rayon de ces patches, ils restent distincts. Par conséquent, on a

$$P_\Lambda(\lambda, C') \approx P_\Lambda(\lambda', C'), \quad \forall C' \geq C. \quad (4.7)$$

En particulier, la relation (4.7) reste vraie pour  $D$ . Comme la fonction  $N_\Lambda$  est croissante et que, par hypothèse,

$$N_\Lambda(C) = N_\Lambda(D),$$

il en résulte que le  $D$ -patch  $P_\Lambda(\lambda, D)$  est déterminé par le  $C$ -patch  $P_\Lambda(\lambda, C)$ . Prouvons que le  $(2D - C - 2R)$ -patch  $P_\Lambda(\lambda, 2D - C - 2R)$  est également déterminé par le  $C$ -patch  $P_\Lambda(\lambda, C)$ . Pour ce faire, posons  $\lambda_0 \in \Lambda$  et considérons  $c \in B := B(\lambda_0, 2D - C - 2R)$ . Puisque  $c \in B$ , il existe  $d \in B' := B(\lambda_0, D - C - R)$  tel que

$$\|d - c\| < D - R.$$

Prouvons l'existence d'un tel point  $d$ . Pour  $c \in B$ , on peut considérer

$$d = c - (D - R - \varepsilon_c) \frac{(c - \lambda_0)}{\|c - \lambda_0\|},$$

où la constante  $\varepsilon_c := \frac{2D - C - 2R - \|c - \lambda_0\|}{2}$  est la moitié de la distance entre la bordure de  $B$  et  $c$ . Puisque

$$\begin{aligned} \|d - \lambda_0\| &= \left\| c - (D - R - \varepsilon_c) \frac{(c - \lambda_0)}{\|c - \lambda_0\|} - \lambda_0 \right\| \\ &= \left\| (\|c - \lambda_0\| - (D - R - \varepsilon_c)) \frac{(c - \lambda_0)}{\|c - \lambda_0\|} \right\| \\ &= \left\| \|c - \lambda_0\| - \frac{2D - 2R - 2D + C + 2R + \|c - \lambda_0\|}{2} \right\| \\ &= \left\| \|c - \lambda_0\| - \frac{C + \|c - \lambda_0\|}{2} \right\| \\ &= \left\| \frac{\|c - \lambda_0\| - C}{2} \right\| \\ &< \left\| \frac{2D - C - 2R - C}{2} \right\| = D - C - R \end{aligned}$$

et que

$$\|c - d\| = \left\| c - c - (D - R - \varepsilon_c) \frac{(c - \lambda_0)}{\|c - \lambda_0\|} \right\| = D - R - \varepsilon_c < D - R,$$

on en déduit bien que  $d \in B'$  et que  $\|c - d\| < D - R$ . De plus, par densité relative de  $\Lambda$ , il existe  $x \in B(d, R) \cap \Lambda$ . Ainsi, on a que  $B(x, C) \subset B(\lambda_0, D)$  car si  $y \in B(x, C)$  alors,

$$\|\lambda_0 - y\| \leq \|\lambda_0 - x\| + \|x - y\| < D - C + C = D.$$

On a aussi  $c \in B(x, D)$  puisque

$$\|x - c\| \leq \|x - d\| + \|d - c\| < R + D - R = D.$$

Alors, il résulte que le patch  $P_\Lambda(\lambda_0, D)$  détermine le patch  $P_\Lambda(x, C)$  car  $B(x, C) \subset B(\lambda_0, D)$ , et par la première partie de la démonstration, le patch  $P_\Lambda(x, C)$  détermine le patch  $P_\Lambda(x, D)$ . Le choix du point  $c$  était arbitraire, donc

$$B(\lambda_0, 2D - C - 2R) \subset \bigcup_{x \in P_\Lambda(\lambda_0, D-C)} B(x, D).$$

Ainsi, on en tire que tous les points de  $B(\lambda_0, 2D - C - 2R)$  sont déterminés par  $P_\Lambda(\lambda_0, D)$ . Comme le choix  $\lambda_0$  dans  $\Lambda$  est également arbitraire, on obtient

$$N_\Lambda(2D - C - 2R) = N_\Lambda(D) = N_\Lambda(C).$$

Puisque la fonction  $N_\Lambda$  est croissante, en itérant le raisonnement que l'on vient de faire, on a

$$N_\Lambda(T) = N_\Lambda(C), \quad \forall T \geq C,$$

comme souhaité. De plus, comme la fonction  $N_\Lambda$  est bornée, par le Théorème 4.3.1, il s'ensuit que l'ensemble  $\Lambda$  est un cristal idéal.  $\square$

Passons à la démonstration du Théorème 4.3.5.

*Démonstration.* Considérons un ensemble  $\Lambda$  qui n'est pas un cristal idéal. La relation suivante est toujours vraie

$$N_\Lambda(T_0) \geq 1, \quad \forall T_0 > 0.$$

Par le Théorème 4.3.1, on obtient que la fonction  $N_\Lambda$  n'est pas bornée. Comme la fonction  $N_\Lambda$  est croissante, par la contraposée du Lemme 4.3.6,

$$N_\Lambda(2R + T_1 + T_0) > N_\Lambda(T_0), \quad \forall T_1 > 0.$$

Puisque la fonction  $N_\Lambda$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , il en résulte que

$$N_\Lambda(2R + T_1 + T_0) \geq 2, \quad \forall T_1, T_0 > 0.$$

En itérant ce raisonnement, on obtient que

$$N_\Lambda \left( 2jR + \sum_{i=0}^j T_i \right) \geq j + 1, \quad \forall j \geq 0, \quad (4.8)$$

où  $T_i > 0$ , pour tout  $i \in \{0, \dots, j\}$ . Puisque les paramètres  $T_0, \dots, T_j$  sont choisis arbitrairement, il s'ensuit alors que

$$N_\Lambda(2jR + \varepsilon) \geq j + 1, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (4.9)$$

Considérons  $T > 0$ . Il existe  $j \in \mathbb{N}$  tel que  $2jR < T \leq 2(j+1)R$ . Ainsi, en utilisant la croissance de  $N_\Lambda$ , on a

$$N_\Lambda(T) \geq N_\Lambda(2jR + \varepsilon) \geq j + 1,$$

pour  $\varepsilon > 0$  tel que  $2jR + \varepsilon \leq T$ . De plus, comme  $\frac{T}{2R} \leq j + 1$ , on a

$$N_\Lambda(T) \geq \frac{T}{2R}.$$

□

En considérant la contraposée du Théorème 4.3.5, on en déduit le corollaire suivant.

**Corollaire 4.3.7.** *Soit  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble  $(r, R)$ -Delone. Si l'ensemble  $\Lambda$  satisfait*

$$N_\Lambda(T) < \frac{T}{2R}, \quad T > 0,$$

*alors  $\Lambda$  est un cristal idéal.*

## 4.4 Ensembles linéairement répétitifs

Une notion faible d'ordre translationnel pour un ensemble de Delone est donnée par la répétitivité que l'on définit comme suit.

**Définition 4.4.1.** Soit  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble de Delone. L'ensemble  $\Lambda$  est *répétitif* si pour tout  $T > 0$ , il existe  $M_T > 0$  tel que toutes les boules fermées de rayon  $M_T$  contiennent le centre d'un translaté de chaque  $T$ -patch de  $\Lambda$ . Autrement dit, pour chaque  $T$ -patch  $P$ , chaque boule fermée  $B$  de rayon  $M_T$  possède un élément qui est le centre d'un translaté de  $P$ .

Un ensemble répétitif est telle que chacun de ses motifs ( $T$ -patches) apparaît une infinité de fois et la répétition d'un tel motif a lieu à une distance d'au plus  $M_T$ . Même si un tel ensemble peut ne pas être périodique, il possède une certaine régularité et ordre.

**Définition 4.4.2.** Un ensemble de Delone de type fini est *linéairement répétitif* si  $M_\Lambda(T) = O(T)$  lorsque  $T \rightarrow +\infty$ . Autrement dit, il existe  $k > 0$  et  $T' > 0$  tels que

$$M_\Lambda(T) \leq kT, \quad \forall T > T'.$$

On définit une fonction associée à cette notion de la manière suivante.

**Définition 4.4.3.** Soit  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble de Delone. La fonction de répétitivité  $M_\Lambda$  est la fonction qui, à tout  $T > 0$ , associe le plus petit rayon  $M_\Lambda(T)$  pour lequel chaque boule fermée de rayon  $M_\Lambda(T)$  contient le centre d'un translaté de chaque  $T$ -patch de  $\Lambda$ .

**Lemme 4.4.4.** Soit  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble de Delone. L'ensemble de Delone  $\Lambda$  est de type fini si et seulement si  $N_\Lambda(T) < \infty$  pour tout  $T > 0$ .

*Démonstration.* Dans la Proposition 2.3.17, on a démontré que l'ensemble  $\Lambda$  est FLC si et seulement si  $\Lambda - \Lambda$  est localement fini. Cela veut dire exactement que  $N_\Lambda(T) < \infty$  pour tout  $T > 0$  si et seulement si l'ensemble de Delone  $\Lambda$  est de type fini.  $\square$

**Proposition 4.4.5.** Tout ensemble de Delone répétitif est un ensemble de Delone de type fini.

*Démonstration.* Considérons  $\Lambda$  un ensemble de Delone répétitif et montrons que c'est un ensemble de Delone de type fini. Par le Lemme 4.4.4, il suffit de montrer que

$$N_\Lambda(T) < \infty, \quad \forall T > 0.$$

Par définition de la répétitivité, pour tout  $T > 0$ , il existe  $M_T > 0$  tel que les boules fermées de rayon  $M_T$  contiennent le centre d'un translaté de chaque  $T$ -patch. Posons  $x \in \mathbb{R}^n$  et considérons la boule fermée  $\overline{B}(x, M_T)$ . L'ensemble  $\Lambda$  étant de Delone, il est  $r$ -uniformément discret, cela implique que les points du  $M_T$ -patch

$$P_\Lambda(x, M_T) = \Lambda \cap \overline{B}(x, M_T)$$

sont séparés au moins d'une distance  $r > 0$ . En particulier, les points correspondant au centre d'un  $T$ -patch translaté sont également espacés de  $r$ . Le volume de la boule  $\overline{B}(x, M_T)$  étant fini et le  $M_T$ -patch  $P_\Lambda(x, M_T)$  contenant un représentant de chaque  $T$ -patch, il en résulte que

$$N_\Lambda(T) < \infty.$$

Comme  $T > 0$  est arbitraire, le résultat est vérifié pour tout  $T > 0$ .  $\square$

Présentons un résultat analogue au Corollaire 4.3.7 pour la fonction de répétitivité. Avant de passer à ce résultat, Montrons tout d'abord le lemme suivant.

**Lemme 4.4.6.** Soient  $T > 0$ ,  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  est un ensemble de Delone tel que  $0 \in \Lambda$  et  $C = \{\lambda \in \Lambda : P_\Lambda(\lambda, T) \sim P_\Lambda(0, T)\}$ . Si

$$M_\Lambda(T) < \frac{T}{3},$$

alors

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{y \in C} B\left(y, \frac{T}{3}\right).$$

*Démonstration.* Il suffit de montrer que

$$\mathbb{R}^n \subset \bigcup_{y \in C} B\left(y, \frac{T}{3}\right).$$

Considérons  $x \in \mathbb{R}^n$  et procédons par l'absurde. Supposons que

$$\|x - y\| \geq \frac{T}{3}, \quad \forall y \in C.$$

Cela implique qu'il n'existe aucun élément de  $C$  dans la boule ouverte de centre  $x$  et de rayon  $\frac{T}{3}$ . Cela contredit alors l'hypothèse  $M_\Lambda(T) < \frac{T}{3}$ .  $\square$

**Proposition 4.4.7.** *Soit  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble de Delone. Si*

$$M_\Lambda(T) < \frac{T}{3}, \quad \forall T > 0,$$

*alors l'ensemble  $\Lambda$  est un cristal idéal.*

*Démonstration.* Quitte à translater  $\Lambda$ , on peut supposer que  $0 \in \Lambda$ . Supposons que

$$M_\Lambda(T) < \frac{T}{3}, \quad \forall T > 0$$

et montrons que l'ensemble  $\Lambda$  est un cristal idéal. Pour ce faire, pour  $T > 0$ , posons  $\mathcal{P} := P_\Lambda(0, T) = B(0, T) \cap \Lambda$  et  $C_{\mathcal{P}} = \{\lambda \in \Lambda : P_\Lambda(\lambda, T) \sim \mathcal{P}\}$ . Remarquons que l'ensemble  $C_{\mathcal{P}}$  est non-vidé puisqu'il contient 0. Montrons que les éléments de  $C_{\mathcal{P}} \cap B(0, \frac{2T}{3})$  sont des périodes de  $\Lambda$ . Si  $x \in \mathcal{P}$  et si  $p \in C_{\mathcal{P}}$  alors

$$x + p \in \mathcal{P} + p = P_\Lambda(0, T) + p.$$

Comme  $p \in C_{\mathcal{P}}$ ,

$$x + p \in P_\Lambda(0, T) + p = P_\Lambda(p, T) \subset \Lambda. \quad (4.10)$$

En particulier, si  $x \in B(0, \frac{T}{3}) \cap \Lambda$  et  $p \in C_{\mathcal{P}} \cap B(0, \frac{2T}{3})$ , par la relation (4.10), on a

$$x + p \in \Lambda \cap B(0, T) = \mathcal{P}.$$

Ainsi, pour tout  $y \in C_{\mathcal{P}}$ , si  $x \in P_\Lambda(y, \frac{T}{3})$  alors

$$x + p \in P_\Lambda(y, T) \subset \Lambda.$$

Par hypothèse, on a que  $M_\Lambda(T) < \frac{T}{3}$ , par le Lemme 4.4.6, on a

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{y \in C_{\mathcal{P}}} B\left(y, \frac{T}{3}\right).$$

Pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , il existe  $y \in \mathcal{C}_P$  tel que  $\lambda \in B(y, \frac{T}{3})$ . On a montré que pour  $p \in \mathcal{C}_P \cap B(0, \frac{2T}{3})$ , on a

$$P_\Lambda \left( y, \frac{T}{3} \right) + p \subset \Lambda.$$

Il en résulte que  $p + \Lambda \subset \Lambda$ . L'autre inclusion se montre par symétrie du problème.

Pour conclure la démonstration, montrons que la boule  $B(0, \frac{2T}{3})$  contient  $n$  vecteurs linéairement indépendants de  $\mathcal{C}_P$ . Pour ce faire, considérons une boule  $B_1$  de rayon  $\frac{T}{3}$  telle que  $0 \in \overline{B_1} \setminus B_1$ . Puisque  $M_\Lambda(T) < \frac{T}{3}$ , il existe  $p_1 \in (\mathcal{C}_P \cap B_1) \setminus \{0\}$ . Supposons avoir construits  $k < n$  vecteurs  $p_1, \dots, p_k$  linéairement indépendants. Considérons une boule  $B_{k+1}$  telle que

$$\overline{B_{k+1}} \cap \langle p_1, \dots, p_k \rangle = \{0\}.$$

Il existe un vecteur  $p_{k+1} \in (\mathcal{C}_P \cap B_{k+1}) \setminus \{0\}$  tel que les vecteurs  $p_1, \dots, p_{k+1}$  sont linéairement indépendants. En faisant cela  $n$  fois, on obtient  $n$  vecteurs  $p_1, \dots, p_n$  linéairement indépendants tels que

$$p_i \in B_i \subset B \left( 0, \frac{2T}{3} \right), \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

□

## 4.5 Non-cristaux à basse complexité locale

L'objectif de cette dernière section est de montrer que les bornes du Corollaire 4.3.7 et du Théorème 4.4.7 sont optimales. Pour ce faire, commençons par définir la notion de pavage.

**Définition 4.5.1.** Soit  $I \subset \mathbb{N}$ . Un *pavage* de  $\mathbb{R}$  est une famille  $(T_i)_{i \in I}$  non vide de sous ensembles non vides de  $\mathbb{R}$  telle que

1. chaque ensemble  $T_i$  est fermé,
2.  $\forall i \in I$ , on a  $T_i^\circ \cap T_{i+1}^\circ = \emptyset$ ,
3.  $\cup_{i \in I} T_i = \mathbb{R}$ .

Considérons  $\Lambda := \{\lambda_n : n \in \mathbb{Z}\}$  un ensemble de  $(r, R)$ -Delone de type fini. Par définition, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on a

$$r \leq \|\lambda_{n+1} - \lambda_n\| \leq R.$$

De plus, puisque l'ensemble  $\Lambda$  est de type fini, pour tout compact  $K \subset \mathbb{R}$ , l'ensemble  $\Lambda - \Lambda \cap K$  est fini. En particulier, l'ensemble  $(\Lambda - \Lambda) \cap [r, R]$  est fini. Comme,

$$\{\lambda_{n+1} - \lambda_n : n \in \mathbb{Z}\} \subset (\Lambda - \Lambda) \cap [r, R],$$

il s'ensuit qu'il n'existe qu'un nombre fini de distances différentes entre points consécutifs. Ainsi, les intervalles de la forme

$$I_n = [\lambda_n, \lambda_{n+1}]$$

forment un pavage de  $\mathbb{R}$  et ceux-ci ne peuvent avoir qu'un nombre fini de longueurs différentes, notons  $l_1, \dots, l_m$  ses distances. En particulier, à chaque ensemble de Delone de type fini, on peut associer un pavage de  $\mathbb{R}$ .

De plus, l'assertion inverse est vraie également. En effet, considérons un pavage formé par des intervalles  $I_n$  de  $\mathbb{R}$  telles que les distances voisines prennent un nombre fini de valeurs  $l_1, \dots, l_m$ . Alors, tout élément de  $\Lambda - \Lambda$  est de la forme

$$\lambda_i - \lambda_j = \sum_{k=j}^{i-1} \overbrace{(\lambda_{k+1} - \lambda_k)}^{\in \{l_1, \dots, l_m\}},$$

où  $j < i$ . Cela implique que chaque élément de  $\Lambda - \Lambda$  est une somme finie composée d'éléments appartenant à  $L = \{\pm l_1, \dots, \pm l_m\}$ . Dans un intervalle compact de la forme  $[-M, M]$ , il n'existe qu'un nombre fini de combinaisons possibles composées d'éléments de  $L$ , cela implique que l'ensemble  $(\Lambda - \Lambda) \cap [-M, M]$  est fini et donc que l'ensemble  $\Lambda$  est un ensemble de Delone de type fini.

Un tel pavage est entièrement déterminé par la position  $\lambda_0$ , c'est-à-dire la borne inférieure de l'intervalle  $I_0$ , et par la donnée d'une expression symbolique de la forme

$$\mathcal{S}_\Lambda = (\dots, s_{-1}, s_0, s_1, \dots) \in \{l_1, \dots, l_m\}^{\mathbb{Z}},$$

où chaque élément  $s_i$  représente la longueur de l'intervalle  $[\lambda_i, \lambda_{i+1}]$ . Quitte à translater, on peut toujours supposer que  $\lambda_0 = 0$ . On va se restreindre au cas ayant seulement deux longueurs, à savoir 1 et  $\alpha$ . Dans ce contexte, une expression symbolique dans l'alphabet  $\{0, 1\}$  et la valeur de  $\alpha$  détermine l'ensemble de Delone de type fini  $\Lambda := \Lambda_\alpha(\mathcal{S})$ .

Dans le Chapitre 3, on a introduit le concept de presque linéarité pour les fonctions adresses d'un ensemble de Delone finiment engendré. De manière analogue, on définit cette notion pour les suites de symboles.

**Définition 4.5.2.** Soit  $\mathcal{S} = (\dots, s_{-1}, s_0, s_1, \dots) \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  une suite de symboles. On dit que l'expression symbolique  $\mathcal{S}$  est presque linéaire s'il existe un nombre  $\beta \in \mathbb{R}$  tel que pour les sommes partielles

$$\mathcal{S}_{n+1} = \sum_{i=0}^n s_i, \quad \mathcal{S}_{-n} = \sum_{i=1}^n s_{-i}, \quad n \geq 0$$

satisfont

$$|\mathcal{S}_n - \beta n| < C, \forall n \in \mathbb{Z}, \tag{4.11}$$

où  $C > 0$ .

Ainsi, pour toute suite symbolique  $\mathcal{S} \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ , on a que  $\Lambda_\alpha(\mathcal{S}) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{Z}\}$  où

$$\lambda_n = (n - \mathcal{S}_n) + \alpha \mathcal{S}_n.$$

**Lemme 4.5.3.** *Tout sous-ensemble de Delone d'un ensemble de Meyer est également un ensemble de Meyer.*

*Démonstration.* Soit  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble de Meyer et  $\Lambda' \subset \Lambda$  un ensemble de Delone. Pour conclure, il suffit de montrer que  $\Lambda' - \Lambda'$  est uniformément discret. Comme  $\Lambda' - \Lambda' \subset \Lambda - \Lambda$ , l'ensemble  $\Lambda' - \Lambda'$  hérite du caractère uniformément discret de  $\Lambda - \Lambda$ . Ainsi l'ensemble  $\Lambda'$  est de Meyer.  $\square$

**Théorème 4.5.4.** *Soit  $\mathcal{S} = (\dots, s_{-1}, s_0, s_1, \dots) \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  une suite de symboles. Si l'expression symbolique  $\mathcal{S}$  est presque linéaire, alors  $\Lambda_\alpha(\mathcal{S})$  est un ensemble de Meyer, pour tout  $\alpha \geq 0$ . Si  $\mathcal{S}$  n'est pas presque linéaire, alors  $\Lambda_\alpha(\mathcal{S})$  est un ensemble de Delone de type fini. Dans ce cas,*

1. si  $\alpha \in \mathbb{Q}$ , alors l'ensemble  $\Lambda_\alpha(\mathcal{S})$  est de rang 1 et est de Meyer
2. si  $\alpha \notin \mathbb{Q}$ , alors l'ensemble  $\Lambda_\alpha(\mathcal{S})$  est de rang 2 et n'est pas de Meyer.

*Démonstration.* Supposons que  $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ . Dans ce cas, pour toute expression symbolique  $\mathcal{S} \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ , l'ensemble  $\Lambda_\alpha(\mathcal{S})$  est de rang 1 car 1 et  $\alpha$  sont linéairement dépendants sur  $\mathbb{Q}$ . De plus, puisque

$$\Lambda_\alpha(\mathcal{S}) \subset \left(\frac{1}{q}\right)\mathbb{Z}$$

et que l'ensemble  $\left(\frac{1}{q}\right)\mathbb{Z}$  est de Meyer, par le Lemme 4.5.3, il en résulte que l'ensemble  $\Lambda_\alpha(\mathcal{S})$  est de Meyer également.

Traisons le cas où  $\alpha \notin \mathbb{Q}$ . Pour toute expression symbolique  $\mathcal{S} \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \setminus (\{0^{\mathbb{Z}}, 1^{\mathbb{Z}}\})$ , l'ensemble  $\Lambda_\alpha(\mathcal{S})$  est de rang 2 car les nombres 1 et  $\alpha$  sont linéairement indépendants sur  $\mathbb{Q}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , chaque élément  $\lambda_n$  de  $\Lambda$  est de la forme

$$\lambda_n = (n - \mathcal{S}_n) + \alpha \mathcal{S}_n.$$

Considérons la base  $b_1 = 1$  et  $b_2 = \alpha$ . Dans cette base, on a la fonction adresse définie par

$$\phi : \langle \Lambda_\alpha(\mathcal{S}) \rangle \rightarrow \mathbb{Z}^2 : \lambda_n \mapsto (n - \mathcal{S}_n, \mathcal{S}_n).$$

Par le Théorème 3.2.3, l'ensemble  $\Lambda_\alpha(\mathcal{S})$  est de Meyer si et seulement s'il existe une fonction linéaire  $L_\phi$  et  $C > 0$  tels que

$$\|\phi(\lambda_n) - L_\phi(\lambda_n)\| \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Disons que la fonction linéaire est définie par

$$L_\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : x \mapsto (\beta_1 x, \beta_2 x).$$

Ainsi, par définition de  $\phi$  et de  $L_\phi$ , on a

$$\|((1 - \beta_1)n + (-1 + \beta_1 - \alpha\beta_1)\mathcal{S}_n, -\beta_2 n + (-\beta_2\alpha + \beta_2 + 1)\mathcal{S}_n)\| \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (4.12)$$

De cette relation, comme

$$|x_i| \leq \|(x_1, x_2)\|, \quad \text{pour } i \in \{1, 2\}$$

il en résulte que chaque composante est bornée. De plus, au moins une des deux composantes permet d'obtenir une relation de la forme (4.11) pour  $\mathcal{S}_n$ . En effet, si tel n'était pas le cas, on aurait que les coefficients de  $\mathcal{S}_n$  sont nuls. Comme

$$(-\beta_2\alpha + \beta_2 + 1) = 0, \quad (-1 + \beta_1 - \alpha\beta_1) = 0$$

et que  $\alpha \notin \mathbb{Q}$ , cela implique que  $\beta_1, \beta_2 \notin \mathbb{Q}$ . On aurait alors les relations suivantes

$$|(1 - \beta_1)n| \leq C, \quad |\beta_2 n| \leq C \quad (4.13)$$

pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , ce qui est absurde. Ainsi, pour que l'ensemble  $\Lambda_\alpha(\mathcal{S})$  soit de Meyer, il faut que  $\mathcal{S}$  soit presque linéaire. Supposons désormais que l'expression  $\mathcal{S}$  est presque linéaire, il existe  $\beta \in \mathbb{R}$  et  $C > 0$  tels que

$$|\mathcal{S}_n - \beta n| \leq C.$$

En particulier, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , il existe  $c_n \in \mathbb{R}$  tel que  $|c_n| \leq C$  et

$$\mathcal{S}_n = \beta n + c_n. \quad (4.14)$$

Posons

$$\beta_1 = \frac{1 - \beta}{1 - \beta + \alpha\beta}, \quad \beta_2 = \frac{\beta}{1 - \beta + \alpha\beta},$$

Pour de telles constantes, on a la relation suivante

$$\beta_1 + \alpha\beta_2 = 1. \quad (4.15)$$

En utilisant les relations (4.14) et (4.15), la première composante de (4.12) devient

$$\begin{aligned} (1 - \beta_1)n + (-1 + \beta_1 - \alpha\beta_1)\mathcal{S}_n &= \alpha\beta_2 n + (-\alpha\beta_1 - \alpha\beta_2)\beta n + (-\alpha\beta_1 - \alpha\beta_2)c_n \\ &= (\alpha\beta_2 - (\alpha\beta_1 + \alpha\beta_2)\beta)n - (\alpha\beta_1 + \alpha\beta_2)c_n. \end{aligned}$$

De plus, en développant le coefficient de  $n$ , on obtient que

$$\begin{aligned} \alpha\beta_2 - (\alpha\beta_1 + \alpha\beta_2)\beta &= \left( \frac{\alpha\beta}{1 - \beta + \alpha\beta} - \left( \frac{\alpha - \alpha\beta + \alpha\beta}{1 - \beta + \alpha\beta} \right) \beta \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, la première composante vaut  $-(\alpha\beta_1 + \alpha\beta_2)c_n$ . En procédant de manière analogue, la deuxième composante vaut  $(\beta_1 + \beta_2)c_n$ . Ces deux composantes sont majorées par

$$\begin{aligned} |-(\alpha\beta_1 + \alpha\beta_2)c_n| &\leq |(\alpha\beta_1 + \alpha\beta_2)|C \\ |(\beta_1 + \beta_2)c_n| &\leq |\beta_1 + \beta_2|C. \end{aligned}$$

Comme  $\|(x_1, x_2)\| \leq |x_1| + |x_2|$ , il en résulte que la relation (4.12) est satisfaite et il s'ensuit que l'ensemble  $\Lambda_\alpha(\mathcal{S})$  est de Meyer.  $\square$

Pour tout ensemble  $\Lambda$   $(r, R)$ -Delone, on a les égalités suivantes :

$$N_\Lambda(T) = 1 = \frac{1}{2r}T, \quad M_\Lambda(T) = R = \frac{R}{2r}T,$$

lorsque  $T = 2r$ . On remarque ainsi que l'inégalité du Corollaire 4.3.7 devient une égalité si on remplace la constante  $\frac{1}{2R}$  par  $\frac{1}{2r}$  et que l'inégalité n'est plus vérifiée. Dans le théorème qui suit, on va construire des ensembles de Meyer apériodiques tels que  $\frac{R}{r}$  aussi proche que souhaité de 1. Cela impliquera que, en particulier,  $\frac{1}{2r}$  sera arbitrairement proche de  $\frac{1}{2R}$  et que  $\frac{R}{2r}$  de  $\frac{1}{2}$ .

Dans la démonstration du théorème qui suit, on exploite certaines propriétés des suites sturmiennes et des rotations irrationnelles. Une brève introduction à ces concepts est présentée dans l'annexe E.

**Théorème 4.5.5.** *Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\Lambda \subset \mathbb{R}$  un ensemble de Meyer apériodique et linéairement répétitif satisfaisant les assertions suivantes.*

1. *Il existe  $T' > 0$  tel que*

$$N_\Lambda(T') < \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) \frac{T'}{R}, \quad \text{et } M_\Lambda(T') < \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) T'.$$

2. *Il existe  $T_0 > 0$  tel que pour tout  $T > T_0$ ,*

$$N_\Lambda(T) < (1 + \varepsilon) \frac{T}{R}, \quad \text{et } M_\Lambda(T) < (\tau + 1 + \varepsilon) T,$$

où  $\tau$  est le nombre d'or.

*Démonstration.* Par le raisonnement ci-dessus, pour satisfaire le point 1, il suffit de construire un ensemble  $\Lambda$  tel que les constantes de Delone  $(r, R)$  associées satisfont

$$\frac{R}{r} < 1 + 2\varepsilon.$$

En effet, pour  $T' = 2r$ , on a  $N_\Lambda(T') = 1$ . Alors,

$$\begin{aligned} N_\Lambda(T') < (1 + \varepsilon) \frac{T'}{R} &\Leftrightarrow 1 < (1 + \varepsilon) \frac{2r}{R} \Leftrightarrow \frac{R}{r} < 1 + 2\varepsilon. \\ M_\Lambda(T') < \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) T' &\Leftrightarrow R < \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) 2r \Leftrightarrow \frac{R}{r} < 1 + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Posons l'ensemble

$$\Lambda = \{\lambda_m := m + \beta\langle m\alpha \rangle : m \in \mathbb{Z}\},$$

où  $\alpha \notin \mathbb{Q}$ ,  $|\beta| < \frac{1}{2}$  et  $\langle m\alpha \rangle = m\alpha - \lfloor m\alpha \rfloor$ . Montrons que l'ensemble  $\Lambda$  est de Delone. On a

$$\begin{aligned} \lambda_{m+1} - \lambda_m &= (m+1) + \beta(\langle (m+1)\alpha \rangle) - m + \beta(\langle m\alpha \rangle) \\ &= 1 + \beta(\langle (m+1)\alpha \rangle - \langle m\alpha \rangle), \end{aligned}$$

pour tout  $m \in \mathbb{Z}$ . De plus, comme la partie fractionnaire appartient toujours à  $[0, 1[$ , il s'ensuit que

$$\lambda_{m+1} - \lambda_m \in [1 - |\beta|, 1 + |\beta|], \quad (4.16)$$

et que l'ensemble  $\Lambda$  est de Delone. Pour tout  $m \in \mathbb{Z}$ , posons  $s_m := \lambda_{m+1} - \lambda_m = 1 + \beta(\langle(m+1)\alpha\rangle - \langle m\alpha\rangle)$ . Remarquons que si  $\langle m\alpha\rangle + \alpha < 1$ , alors on a  $\langle(m+1)\alpha\rangle = \langle m\alpha\rangle + \alpha$  et donc on a

$$\begin{aligned} s_m &= 1 + \beta(\langle(m+1)\alpha\rangle - \langle m\alpha\rangle) \\ &= 1 + \beta(\langle m\alpha\rangle + \alpha - \langle m\alpha\rangle) \\ &= 1 + \beta\alpha. \end{aligned}$$

Si  $\langle m\alpha\rangle + \alpha \geq 1$ , alors on a  $\langle(m+1)\alpha\rangle = \langle m\alpha\rangle + \alpha - 1$  et, dans ce cas, on obtient

$$s_m = 1 + \beta(\langle(m+1)\alpha\rangle - \langle m\alpha\rangle) = 1 + \beta(\alpha - 1).$$

Cela implique alors que la longueur des intervalles séparant deux points consécutifs de  $\Lambda$  vaut soit  $l_1 := 1 + \beta\alpha$ , soit  $l_2 = 1 + \beta(\alpha - 1)$ . De plus, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , la suite des sommes partielles  $\mathcal{S}_n = \sum_{i=0}^n (\lambda_i - \lambda_{i-1})$  correspond à la position de  $\lambda_n$ , on a

$$|\mathcal{S}_n - n| \leq |\lambda_n - n| < |\beta| < \frac{1}{2}.$$

Il en résulte que la suite symbolique  $\mathcal{S} = (\dots, s_{-1}, s_0, s_1, \dots) \in \{l_1, l_2\}^{\mathbb{Z}}$  où  $s_i$  représente la longueur de l'intervalle séparant  $\lambda_{i+1} - \lambda_i$  est presque linéaire. Ainsi, par le Théorème 4.5.4, l'ensemble  $\Lambda$  est de Meyer.

Montrons que l'ensemble  $\Lambda$  est apériodique. Procédons par l'absurde et supposons qu'il existe  $t \in \mathbb{R}$  tel que

$$\Lambda + t = \Lambda.$$

En particulier, cela implique que

$$s_m = s_{m+k},$$

pour un certain  $k \in \mathbb{Z}_0$ . Rappelons que si  $\langle m\alpha\rangle \in [0, 1 - \alpha[$ , alors  $s_m = l_1$  et si  $\langle m\alpha\rangle \in [1 - \alpha, 1[$ , alors  $s_m = l_2$ . On partitionne ainsi l'intervalle  $[0, 1[$  en deux zones  $Z_1 = [0, 1 - \alpha[$  et  $Z_2 = [1 - \alpha, 1[$ . Puisque la suite  $(s_m)_{m \in \mathbb{Z}}$  est périodique de période  $k$ , pour tout  $m \in \mathbb{Z}$ , on a

$$\langle m\alpha\rangle \in Z_i \Leftrightarrow \langle(m+k)\alpha\rangle \in Z_i, \quad i \in \{1, 2\}.$$

Par le Lemme E.0.2, la suite  $(\langle m\alpha\rangle)_{m \in \mathbb{Z}}$  est dense dans  $[0, 1]$ . Or, comme  $k\alpha \notin \mathbb{Z}$ , il existe des points de la forme  $\langle m\alpha\rangle$  dans l'intervalle  $[1 - \alpha - \langle k\alpha\rangle, 1 - \alpha[$ . Pour un tel point, on a que  $\langle m\alpha\rangle \in Z_1$  et que  $\langle(m+k)\alpha\rangle \in Z_2$ , ce qui est absurde.

Par la relation (4.16), le rayon d'empilement de  $\Lambda$  vérifie

$$r_\Lambda \geq \frac{1}{2}(1 - |\beta|)$$

et le rayon de recouvrement satisfait

$$R_\Lambda \leq \frac{1}{2}(1 + |\beta|).$$

En combinant les deux relations, on obtient

$$\frac{R_\Lambda}{r_\Lambda} \leq \frac{1 + |\beta|}{1 - |\beta|}.$$

Ainsi, on a

$$\frac{1 + |\beta|}{1 - |\beta|} \leq 1 + 2\varepsilon \Leftrightarrow |\beta| < \frac{1}{1 + \varepsilon}.$$

Comme pour tout  $0 < \varepsilon < 1$ , on a

$$\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon},$$

cela implique que  $\frac{R_\Lambda}{r_\Lambda} < 1 + 2\varepsilon$  lorsque  $|\beta| < \frac{\varepsilon}{2}$ , ce qui conclut le premier point.

Passons au point 2. Remarquons que la longueur du  $m^{\text{ème}}$  intervalle de  $\Lambda$  est donnée

$$1 + \beta(\langle(m + 1)\alpha\rangle - \langle m\alpha\rangle) = 1 + \beta\alpha - \beta([\!(m + 1)\alpha] - [m\alpha]).$$

Ainsi, il y a deux longueurs possibles pour les intervalles de  $\Lambda$ . L'agencement de ces longueurs d'intervalles correspond à l'agencement des termes de la suite sturmienne

$$\omega = \{[\!(m + 1)\alpha] - [m\alpha]\}.$$

Puisque cette suite est sturmienne, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$p_\omega(n) = n + 1 \tag{4.17}$$

Notons  $\mathcal{P}$  un  $T$ -patch de  $\Lambda$  pour  $T > 0$ . Puisque le  $T$ -patch est de longueur  $2T$ , le nombre d'intervalles  $[\lambda_m, \lambda_{m+1}]$  inclus dans  $\mathcal{P}$  ou qui chevauchent suffisamment pour déterminer le type d'intervalles est au plus  $2\lceil T + |\beta| \rceil$ . Cela découle du fait que  $|\lambda_m - m| < |\beta|$  et, donc les indices des intervalles qui apparaissent dans le  $T$ -patch sont les indices  $m \in [-T - |\beta|, T + |\beta|]$ . Ainsi, le nombre de  $T$ -patches différents est

$$N_\Lambda(T) \leq 2\lceil T + |\beta| \rceil + 1 \leq (1 + |\beta|)\frac{T}{R} + 1 + 2|\beta|, \quad \forall T > 0.$$

La première inégalité est justifiée par (4.17) et la deuxième par le fait que  $R \leq \frac{1}{2}(1 + |\beta|)$ . Notons  $\phi_\omega$  la fonction de récurrence associée à  $\omega$ , introduite dans l'annexe dédiée aux suites sturmiennes. Pour  $m \in \mathbb{Z}$ , la valeur  $\phi_\omega(m)$  correspond à la longueur minimale telle que tout facteur de  $\omega$  de longueur  $\phi(m)$  contient une copie de chaque facteur de longueur  $m$  de  $\omega$ . On a la relation suivante :

$$M_\omega(m) = \phi_\omega(m) - m + 1,$$

où est  $M_\omega(m)$  est l'écart maximal entre les premières lettres de deux occurrences successives du même facteur de longueur  $m$  de  $\omega$ . Remarquons que la fonction  $M_\omega$  est l'équivalent de la fonction de répétitivité  $M_\Lambda$  mais dans le cadre des suites symboliques. En effet, pour retrouver un  $T$ -patch de  $\Lambda$ , cela revient à trouver le facteur de  $\omega$  correspondant. Si  $M_\omega$  croît de manière linéaire alors  $M_\Lambda$  aussi. Notons  $\{q_k\}$  la suite des dénominateurs des convergents de  $\alpha$ . Par le Théorème E.0.10, si  $q_{k-1} \leq m < q_k$ , on a

$$M(m) = q_k + q_{k-1}.$$

De plus, si la fraction continue associée à  $\alpha$  possède des quotients partiels bornés, c'est le cas pour les irrationnels quadratiques comme énoncé dans l'annexe dédiée aux fractions continues, alors

$$q_k + q_{k-1} = a_k q_{k-1} + q_{k-2} + q_{k-1} \leq c q_{k-1} + q_{k-2} + q_{k-1} < (c+2)q_{k-1},$$

où  $c$  est un majorant des quotients partiels et car la suite  $(q_k)_k$  est strictement croissante. Au final, il en résulte que

$$M_\omega(m) = q_k + q_{k-1} < (c+2)q_{k-1} \leq (c+2)m,$$

car  $m \geq q_{k-1}$ . Ainsi, la suite symbolique est linéairement répétitive et l'ensemble  $\Lambda$  l'est également.

Pour conclure le point 2, choisissons  $\alpha = \tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . Comme montré en annexe, les quotients partiels du nombre d'or  $\tau$  sont  $[1; 1, 1, 1, \dots]$  et la suite de dénominateurs des convergents de  $\tau$  est la suite  $(F_k)_k$ , ainsi on peut prendre  $b = 1$  et  $q_k = F_k$  est le  $k^{\text{ème}}$  nombre de Fibonacci. Comme évoqué plutôt dans la démonstration, dans un  $T$ -patch de  $\Lambda$ , on peut reconnaître au plus  $2(\lfloor T + |\beta| \rfloor)$  intervalles. Ainsi, on a

$$2M_\Lambda(T) \leq F_k + F_{k-1} + |\beta|,$$

si  $F_{k-1} \leq 2(\lfloor T + |\beta| \rfloor) < F_k$ . Le terme  $|\beta|$  permet de prendre en compte le fait que la distance entre deux points de  $\Lambda$  diffère du nombre d'intervalles qui les séparent par au plus  $|\beta|$ . En utilisant le Théorème F.0.8

$$F_k = \tau F_{k-1} + \left(\frac{-1}{\tau}\right)^{k-1},$$

et les relations

$$F_{k-1} \leq 2(\lfloor T + |\beta| \rfloor) \quad \text{et} \quad \left(\frac{-1}{\tau}\right)^{k-1} \leq 1,$$

on obtient

$$M_\Lambda(T) \leq (\tau + 1)T + \left(\tau + \frac{3}{2}\right)\beta + \frac{1}{2}.$$

Choisissons  $|\beta| < \frac{\varepsilon}{2}$  et  $T_0 > 2(\frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon)$  et montrons que ces bornes sont valides. On souhaite avoir  $M_\Lambda(T) < (\tau + 1 + \varepsilon)T$ , c'est le cas si

$$\left(\tau + \frac{3}{2}\right)\beta + \frac{1}{2} < \varepsilon T.$$

En utilisant l'approximation  $\tau < 1.62$ , on obtient que

$$\left(\tau + \frac{3}{2}\right)\beta < 1.56\varepsilon.$$

On a

$$1.56\varepsilon + \frac{1}{2} < \varepsilon T \Leftrightarrow 1.56 + \frac{1}{2\varepsilon} < T,$$

or, pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1]$ , on a

$$T_0 = \frac{1.5}{\varepsilon} + 2\varepsilon > 1.56,$$

ce qui permet de conclure que les choix de  $T_0$  et de  $|\beta|$  sont valides.  $\square$

Grâce à ce théorème, on peut en déduire un résultat analogue en dimension  $n \in \mathbb{N}_0$ .

**Corollaire 4.5.6.** *Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble de Meyer non-cristallographique et linéairement répétitif satisfaisant les assertions suivantes.*

1. *Il existe  $T > 0$  tel que*

$$N_\Lambda(T) < \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)\frac{T}{R}, \quad \text{et } M_\Lambda(T) < \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)T.$$

2. *Il existe  $T_0 > 0$  tel que pour tout  $T > T_0$ ,*

$$N_\Lambda(T) < (1 + \varepsilon)\frac{T}{R}, \quad \text{et } M_\Lambda(T) < (\tau + 1 + \varepsilon)T,$$

*où  $\tau$  est le nombre d'or.*

*Démonstration.* Considérons l'ensemble

$$\Lambda = \Lambda' \times \eta \mathbb{Z}^{n-1},$$

où l'ensemble  $\Lambda'$  est celui construit dans le Théorème 4.5.5 et  $\eta > 0$  est suffisamment petit. Pour tout  $\eta$ , l'ensemble  $\Lambda$  est de dimension  $n$ . De plus, comme  $\eta \mathbb{Z}^{n-1}$  est un réseau, on a

$$\eta \mathbb{Z}^{n-1} - \eta \mathbb{Z}^{n-1} = \eta \mathbb{Z}^{n-1}$$

et, par le Théorème 4.5.5, l'ensemble  $\Lambda'$  est de Meyer, donc il existe  $F'$  un ensemble fini tel que

$$\Lambda' - \Lambda' = \Lambda' + F'.$$

En considérant  $F = F' \times \{0\}^{n-1}$ , on obtient que

$$\Lambda - \Lambda = \Lambda + F,$$

et donc que, par le Corollaire 2.2.9, il s'ensuit que  $\Lambda$  est également de Meyer. Par le Théorème 4.5.5, l'ensemble  $\Lambda'$  est linéairement répétitif, il existe  $C_1 > 0$  tel que

$$M_{\Lambda'}(T) \leq C_1 T.$$

L'ensemble  $\eta \mathbb{Z}^{n-1}$  est périodique, cela implique que chaque  $T$ -patch se répète à chaque maille, donc on obtient

$$M_{\eta \mathbb{Z}^{n-1}}(T) \leq T + \eta(\sqrt{n-1}),$$

où  $\eta(\sqrt{n-1})$  est le diamètre de la maille de  $\eta \mathbb{Z}^{n-1}$ . Ainsi, pour tout  $T \geq \eta(\sqrt{n-1})$ , il existe une constante  $C_2 > 0$  telle que

$$M_{\eta \mathbb{Z}^{n-1}}(T) \leq C_2 T.$$

Comme l'ensemble  $\Lambda$  est de Delone et que les composantes de  $\Lambda$  sont linéairement répétitives, il en résulte que  $\Lambda$  est également linéairement répétitif. Bien que l'ensemble  $\Lambda$  ne soit pas un ensemble cristallographique puisque l'ensemble  $\Lambda'$  est apériodique, il possède un réseau de périodes de dimension  $n-1$ . Comme, par le Corollaire 4.3.4, on a  $N_{\eta \mathbb{Z}^{n-1}}(T) = 1$  pour tout  $T > 0$ , il en résulte que

$$N_{\Lambda}(T) = N_{\Lambda'}(T). \quad (4.18)$$

On a, par Pythagore,

$$M_{\Lambda}(T)^2 \leq M_{\Lambda'}(T)^2 + M_{\eta \mathbb{Z}^{n-1}}(T)^2 \leq M_{\Lambda'}(T)^2 + \frac{1}{4}\eta^2(n-1), \quad \forall T > 0 \quad (4.19)$$

Si on prend  $T \leq \min(2r_{\Lambda}, \eta)$ , les  $T$ -patches de  $\Lambda'$  et  $\eta \mathbb{Z}^{n-1}$  sont des singletons, et par la relation (4.19), on obtient

$$R_{\Lambda}^2(T) \leq R_{\Lambda'}^2(T) + \frac{1}{4}\eta^2(n-1), \quad (4.20)$$

où  $R_{\Lambda}$  est le rayon de recouvrement de  $\Lambda$ . Les 3 relations (4.18), (4.19), (4.20) dépendent de  $\eta$ , ainsi, lorsque l'on fait tendre  $\eta \rightarrow 0$ , et au Théorème 4.5.5 on peut conclure. Par le point 1 du Théorème 4.5.5, il existe  $T' > 0$  tel que

$$N_{\Lambda'}(T') < \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) \frac{T'}{R_{\Lambda'}}.$$

Par la relation (4.19) et comme  $\frac{1}{R_{\Lambda}} \geq \frac{1}{R_{\Lambda'}}$ , on a

$$N_{\Lambda}(T') < \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) \frac{T'}{R_{\Lambda}}.$$

De plus, par (4.19), on a, lorsque  $\eta \rightarrow 0$ ,  $\lim_{\eta \rightarrow 0} M_{\Lambda'}(T) = M_{\Lambda}(T)$ , ainsi il existe  $\eta' \geq 0$  tel que pour tout  $\eta < \eta'$ , on a

$$M_{\Lambda}(T') < \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) T',$$

ce qui conclut le point 1. Pour le point 2, on procède de manière analogue en utilisant à nouveau le Théorème 4.5.5.  $\square$



# Annexe A

## Quelques notions sur les groupes

Cette annexe sert essentiellement de rappels et a été écrite à l'aide de [Ler22]. Procédons à des rappels sur les groupes quotients.

**Définition A.0.1.** Soient  $G$  un groupe et  $H$  un sous-groupe de  $G$ . Une classe latérale à gauche (resp. à droite) de  $H$  est un ensemble de la forme  $x + H$  (resp.  $H + x$ ) pour tout  $x \in G$ . On note  $(G/H)_g$  (resp.  $(G/H)_d$ ) l'ensemble des classes à gauche (resp. à droite) de  $H$ .

**Définition A.0.2.** Soient  $G$  un groupe et  $H$  un sous-groupe de  $G$ . On dit que  $H$  est un sous-groupe *normal* de  $G$  si  $x + H = H + x$  pour tout  $x \in G$ . Si  $H$  est un sous-groupe normal dans  $G$ , alors on a  $G/H = (G/H)_g = (G/H)_d$ .

**Remarque A.0.3.** Dans un groupe commutatif  $G$ , tout sous-groupe  $H$  de  $G$  est normal dans  $G$ .

**Théorème A.0.4.** Soient  $G$  un groupe et  $H$  un sous-groupe de  $G$ . L'opération

$$\circ : (G/H)_g \times (G/H)_g \rightarrow (G/H)_g, (x + H, y + H) \mapsto (x + y) + H$$

est bien définie si et seulement si  $H$  est normal dans  $G$ . De plus, dans ce cas, on a que  $(G/H, \circ)$  est un groupe de neutre  $H$  et dans lequel  $-(x + H) = (-x) + H$ .

**Théorème A.0.5** (3<sup>ème</sup> Théorème d'isomorphisme). Soient  $G$  un groupe et  $H, K$  des sous-groupes de  $G$  tels que  $K \leq H$ . Si  $H$  et  $K$  sont normaux dans  $G$  alors  $H/K$  est normal dans  $G/K$  et  $(G/K)/(H/K)$  est isomorphe à  $G/H$ .

La démonstration est tirée de [Per].

**Proposition A.0.6.** Les sous-groupes additifs de  $\mathbb{R}$  sont soit de la forme  $m\mathbb{Z}$  avec  $m \in \mathbb{R}^+$  soit denses dans  $\mathbb{R}$ .

*Démonstration.* Considérons  $G$  un groupe de  $\mathbb{R}$ . Pour  $G = \mathbb{R}$  ou  $G = 0$  le résultat est direct. Posons  $g \in G$ , sans perte de généralité, on peut supposer qu'il est strictement positif et notons

$$A = \{g \in G : g > 0\}.$$

Puisque  $A$  est minoré et non-vidé, il admet une borne inférieure que l'on note  $a$ . Si  $a = 0$ , alors  $G$  est dense dans  $\mathbb{R}$ . Considérons  $y \in \mathbb{R}$  et  $\varepsilon > 0$ . Puisque  $a = 0$ , alors il existe  $x \in ]0, \varepsilon[$  et  $y \in [nx, (n+1)x[$ . Cela implique que

$$0 \leq y - nx < x < \varepsilon.$$

Le sous-groupe  $G$  est donc dense dans  $\mathbb{R}$ .

Si  $a > 0$  alors montrons d'abord, par l'absurde, que  $a \in G$ . Si  $a \notin G$ . Par définition de  $a$ , il existe  $x \in G$  tel que

$$a < x < 2a.$$

À nouveau par définition de  $a$ , il existe  $y \in G$  tel que

$$a < y < x < 2a.$$

Or, comme  $0 < x - y < a$  et que  $x - y \in G$ , cela contredit la définition de la borne inférieure. Ainsi, on a que  $a \in G$  et cela implique que  $a\mathbb{Z} \subseteq G$ . Montrons l'autre inclusion et posons  $x \in G$ . Il existe  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $na \leq x < (n+1)a$  donc  $0 < x - na < a$ . On obtient que  $x - na \in G \cap \mathbb{R}^+$  et que  $x - na \notin G \cap \mathbb{R}_0^+$ , ce qui implique que  $x - na = 0$  et  $x = na \in a\mathbb{Z}$ .  $\square$

# Annexe B

## Modules libres

Cette partie est entièrement tirée de l'ouvrage [Bly18]. J'invite le lecteur désireux de plus de détails à consulter le livre mentionné.

**Définition B.0.1.** Soit  $A$  un anneau unitaire. Un  $A$ -module est la donnée d'un couple  $(M, \cdot_g)$  où  $M$  est un groupe abélien et  $\cdot_g : A \times M \rightarrow M$  est une action à gauche définie par  $\cdot_g(a, m) = am$  qui satisfait les conditions suivantes :

$$\begin{aligned}\mu(x + y) &= \mu x + \mu y; \\ (\lambda + \mu)x &= \lambda x + \mu x; \\ \lambda(\mu x) &= (\lambda\mu)x; \\ 1_A x &= x,\end{aligned}$$

pour tous  $x, y \in M$  et  $\mu, \lambda \in A$ . Si  $A$  est un champ, alors un  $A$ -module est un champ vectoriel sur  $A$ .

**Définition B.0.2.** Soit  $A$  un anneau unitaire et considérons  $X$  un ensemble non vide. Un  $A$ -module libre sur  $X$  est la donnée d'un couple  $(F, f)$  où

$$f : X \rightarrow F,$$

tel que pour tout  $A$ -module  $M$  et pour toute application

$$g : X \rightarrow M,$$

il existe un unique  $A$ -morphisme

$$h : F \rightarrow M,$$

tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & M \\ f \downarrow & \nearrow h & \\ F & & \end{array}$$

est commutatif.

**Définition B.0.3.** Une *base* d'un  $A$ -module  $M$  est un sous-ensemble linéairement indépendant de  $M$  qui génère  $M$ .

**Théorème B.0.4.** Soit  $A$  un anneau unitaire. Un  $A$ -module est libre si et seulement si il admet une base.

**Exemple B.0.5.** Tous les modules ne sont pas libres. Par exemple, l'ensemble des rationnels  $\mathbb{Q}$  est un  $\mathbb{Z}$ -module qui n'est pas libre. Il s'agit de simples vérifications pour montrer que  $\mathbb{Q}$  est un  $\mathbb{Z}$ -module. Montrons qu'il n'admet pas de base. Si  $\mathbb{Q}$  admet une base  $\mathcal{B}$ , celle-ci ne peut pas posséder qu'un élément. Si tel était le cas, alors  $\mathcal{B} = \{\frac{a}{b}\}$ , pour  $a, b \in \mathbb{Z}_0$ . Tout élément  $x \in \mathbb{Q}$  devrait s'écrire de la forme  $x = k\frac{a}{b}$  pour  $k \in \mathbb{Z}$ . L'élément  $y = \frac{a}{2b} = \frac{1}{2}\frac{a}{b}$  appartient à  $\mathbb{Q}$  mais n'admet de décomposition dans la base  $\mathcal{B}$  car  $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ .

Ainsi, s'il existe une base, celle-ci doit être composée d'au moins 2 éléments. Considérons  $\mathcal{B} = \{\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\}$ , où  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_0$ . Alors, puisque

$$bc\frac{a}{b} - ad\frac{c}{d} = ac - ac = 0,$$

il s'ensuit que  $\mathcal{B}$  est linéairement dépendants sur  $\mathbb{Z}$  et ne peut être une base. Ainsi l'ensemble des rationnels  $\mathbb{Q}$  n'est pas un  $\mathbb{Z}$ -module libre.

# Annexe C

## Forme rationnelle canonique

Dans la Section 3.3, afin de démontrer certains théorèmes, on a recours à la *forme rationnelle canonique* d'une matrice, ou autrement dit, à la *forme de Frobenius*. Ce concept est au coeur de cette annexe. Les définitions et résultats présents ci-dessous sont majoritairement tirés de [DF03].

Dans cette annexe, on considère que  $\mathbb{K}$  est un champ,  $E$  est un espace vectoriel de dimension  $n$  sur  $\mathbb{K}$  et que  $T$  une transformation linéaire de  $E$ . Posons  $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$  une base de  $E$  et  $M_T$  la matrice représentant  $T$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Muni de la transformation  $T$ , l'espace  $E$  peut être vu comme un  $\mathbb{K}$ -module par l'action

$$x \cdot v = T(v).$$

Rappelons la définition d'une transformation linéaire.

**Définition C.0.1.** Une *transformation linéaire*  $T$  est une application

$$T : V \rightarrow V$$

telle que, pour tout  $x, y \in V$  et  $\mu \in \mathbb{K}$  :

$$\begin{aligned} T(x + y) &= T(x) + T(y) \\ T(\mu x) &= \mu T(x) \end{aligned}$$

Puisque l'espace vectoriel  $E$  est finiment engendré sur  $\mathbb{K}$ , il est aussi finiment engendré en tant que  $\mathbb{K}$ -module. Cela implique que  $E$  est également finiment engendré en tant que  $\mathbb{K}[x]$ -module.

La forme rationnelle canonique de la transformation linéaire  $T$ . Par le Théorème 5 présent dans le livre [Dummit et Foote, Abstract Algebra], on a un isomorphisme

$$E \cong \mathbb{K}[x]/a_1(x) \oplus \mathbb{K}[x]/a_2(x) \oplus \dots \oplus \mathbb{K}[x]/a_k(x), \quad (\text{C.1})$$

où  $a_1(x), \dots, a_k(x)$  sont des polynômes de  $\mathbb{K}[x]$  de degré  $\geq 1$  et tels que

$$a_i(x) \mid a_{i+1}(x), \quad i \in \{1, \dots, k-1\}.$$

Les éléments  $a_i(x)$  sont appelés des *facteurs invariants* et on impose que ceux-ci sont moniques, c'est-à-dire que le coefficient dominant est 1. Les modules  $\mathbb{K}[x]/a_i(x)$  sont cycliques, c'est-à-dire, ces  $\mathbb{K}[x]$ -modules sont engendrés par un élément. En particulier, une base de  $\mathbb{K}[x]/a_i(x)$  est de la forme

$$\mathcal{B}_i = \{v, T(v), \dots, T^{l-1}(v)\},$$

où  $v \in \mathbb{K}[x]/a_i(x)$  et  $l = \deg(a_i)$ .

**Proposition C.0.2.** *Le polynôme minimal  $m_T$  de  $T$  est le plus grand facteur invariant de  $E$ . Tous les facteurs invariants de  $E$  divisent  $m_T$ .*

**Définition C.0.3.** Soit  $P(x) = x^m + \sum_{i=0}^{m-1} c_i x^i$ . La matrice compagnon de  $P(x)$  est la matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & -c_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & -c_1 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & -c_2 \\ 0 & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & -c_{m-1} \end{pmatrix}.$$

On note  $\mathcal{C}_P$  la matrice compagnon de  $P(x)$ .

**Définition C.0.4.** Une matrice  $M$  est une *forme rationnelle canonique* si c'est une somme directe de matrice compagnon de polynômes moniques  $a_1(x), \dots, a_k(x)$  de degré  $\geq 1$  et tels que

$$a_i(x) \mid a_{i+1}(x), \quad i \in \{1, \dots, k-1\}.$$

Les polynômes  $a_i(x)$  sont appelés les *facteurs invariants* de la matrice.

**Définition C.0.5.** Deux transformations linéaires  $T$  et  $T'$  sont dites *similaires* s'il existe une transformation linéaire inversible  $P$  telle que

$$T = P^{-1}T'P.$$

Deux matrices  $M$  et  $M'$  sont dites *similaires* s'il existe une matrice inversible  $P$  tel que  $M = P^{-1}M'P$ .

**Théorème C.0.6.** *Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  sur le champ  $\mathbb{K}$ . Pour toute transformation linéaire  $T$ , il existe une base  $\mathcal{B}$  telle que la matrice  $M_T$  représentant  $T$  dans la base  $\mathcal{B}$  est en forme rationnelle canonique. De plus, la forme rationnelle canonique est unique.*

**Théorème C.0.7.** *Soit  $M \in \mathbb{Q}_n^n$ . La matrice  $M$  est similaire à une matrice de forme rationnelle canonique  $M' \in \mathbb{Q}_n^n$ . De plus, la forme rationnelle canonique de  $M$  est unique.*

**Théorème C.0.8.** *Deux transformations linéaires  $T$  et  $T'$  sont similaires si et seulement si  $T$  et  $T'$  ont la mêmes forme rationnelle canonique.*

**Théorème C.0.9.** *Soit  $M \in \mathbb{K}_n^n$ .*

- 1. Le polynôme caractéristique de  $M$  est le produit de ses facteurs invariants.*
- 2. Le polynôme minimal de  $M$  divise le polynôme caractéristique de  $M$ .*
- 3. Le polynôme caractéristique de  $M$  divise une puissance du polynôme minimal de  $M$ .  
En particulier, ces deux polynômes possèdent les mêmes racines.*

Il existe un algorithme permettant de convertir une matrice  $M$  en sa forme rationnelle canonique, pour plus de détails, comme mentionné au début de cette annexe, je vous invite à consulter [DF03].

# Annexe D

## Théorie de Galois

Cette annexe a été produite à l'aide du livre [Ste89].

**Définition D.0.1.** Soit  $L : K$  une extension de champ, c'est-à-dire que  $K$  est un sous-corps du sous-corps  $L$  de  $\mathbb{C}$ . Un  $K$ -automorphisme de  $L$  est un automorphisme  $\phi$  de  $L$  tel que

$$\phi(k) = k, \quad \forall k \in K.$$

**Définition D.0.2.** Le groupe de Galois  $Gal(L : K)$  d'une extension de champ est le groupe de tous les  $K$ -automorphismes de  $L$ .

Le groupe de Galois d'un polynôme  $P$  est l'ensemble des bijections

$$\phi : L \rightarrow L$$

telles que, pour tous  $l, l' \in L$  et  $k \in K$

$$\begin{aligned}\phi(l + l') &= \phi(l) + \phi(l') \\ \phi(ll') &= \phi(l)\phi(l') \\ \phi(k) &= k.\end{aligned}$$

**Définition D.0.3.** Soit  $G$  un groupe de permutation, c'est-à-dire un sous-groupe du groupe de permutations. Le groupe  $G$  est dit *transitif* si pour tous  $s, s' \in S$ , il existe  $\alpha \in G$  tel que

$$\alpha(s) = s'.$$

**Proposition D.0.4.** *Tout groupe de Galois d'un polynôme irréductible est transitif sur l'ensemble des racines.*

# Annexe E

## Suites Sturmiennees

Le but de cette annexe est d'introduire la notion de suites sturmiennes qui est très utiles pour la démonstration du Théorème 4.5.5 notamment. Pour écrire cette section, les sources utilisées sont [Lot02, BR24].

**Définition E.0.1.** La fonction de complexité d'un mot  $\omega$  est définie :

$$p_\omega : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\} : n \mapsto \#\{u : u \in \text{Fac}_n(\omega)\},$$

où  $\text{Fac}_n(\omega)$  est l'ensemble des facteurs de longueur  $n$  de  $\omega$

Considérons  $\alpha \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap ]0, 1[$  et  $x \in \mathbb{R}$ . On définit la rotation d'angle  $\alpha$  par

$$R_\alpha : [0, 1[ \rightarrow [0, 1[ : x \mapsto (x + \alpha) \bmod 1.$$

L'orbite de  $x$  dans le cercle unité est l'ensemble

$$\text{Orb}(x) = \{R_\alpha^n(x) = \langle x + n\alpha \rangle : n \in \mathbb{N}\}.$$

Considérons la partition du cercle unité  $[0, 1[$  par les intervalles  $I_0 = [0, 1 - \alpha[$  et  $I_1 = [1 - \alpha, 1[$ . Le codage de l'orbite de  $x$  pour la rotation d'angle  $\alpha$  dans la partition  $I_0, I_1$  est la suite  $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  définie par :

$$\omega_n = j \Leftrightarrow R_\alpha^n(x) = \langle x + n\alpha \rangle \in I_j, \quad j \in \{0, 1\}.$$

Une *suite sturmienne* est une suite  $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  définie comme ci-dessus. Elle peut être vue comme le journal de bord de  $x$  sous l'effet d'une rotation irrationnelle  $\alpha$ .

Pour la suite de cette section, on pose  $\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite sturmienne obtenue à partir de  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap ]0, 1[$  et en considérant  $\{I_0, I_1\}$  comme partition du cercle unité.

Un *facteur de longueur  $m$*  de  $\omega$  est un mot  $u = u_0 \dots u_{m-1} \in \{0, 1\}^m$  tel que

$$u = \omega_k \dots \omega_{k+m-1},$$

pour  $k \in \mathbb{N}$ .

L'intervalle  $[0, 1[$  est en bijection avec le quotient  $\mathbb{R} / \mathbb{Z}$ . Sur  $\mathbb{R} / \mathbb{Z}$ , on utilise la topologie quotient et celle-ci est donnée par la distance suivante :

$$d(x, y) = \min\{|x - y|, 1 - |x - y|\}.$$

**Lemme E.0.2.** Soit  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . La suite  $(R_\alpha^n(0))_n$  est dense dans  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .

*Démonstration.* Pour ce faire, montrons que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$

$$0 < d(R_\alpha^n(0), 0) < \varepsilon.$$

Posons  $\varepsilon > 0$  et  $N$  tel que  $\frac{1}{N} < \varepsilon$ . Considérons la partition

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \bigcup_{i=0}^{N-1} \left[ \frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right[.$$

Ayant un nombre fini d'intervalles et une infinité d'éléments, par le principe du tiroir, il existe  $i < j$  tels que  $R_\alpha^i(0)$  et  $R_\alpha^j(0)$  appartiennent au même intervalle, disons  $J_k := \left[ \frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right[$  pour  $k \in \{0, \dots, N-1\}$ . Ainsi, on a

$$d(R_\alpha^j(0), R_\alpha^i(0)) < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

De plus, comme  $\alpha$  est irrationnel, on a également

$$d(R_\alpha^{j-i}(0), 0) > 0$$

car  $j - i > 0$ . □

**Théorème E.0.3.** Soit  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Alors, la suite sturmienne  $\omega$  d'angle  $\alpha$  vérifie

$$p_\omega(n) = n + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

La preuve de ce théorème requiert quelques résultats préliminaires, pour les lecteurs intéressés, je vous invite à consulter [Lot02].

**Lemme E.0.4.** Tout mot  $u$  de longueur  $m$  est facteur de  $\omega$  si et seulement s'il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que

$$\langle x + k\alpha \rangle \in I(u_0, \dots, u_{m-1}) = \bigcap_{j=0}^{m-1} R_\alpha^{-j}(I_{u_j})$$

*Démonstration.* Soit  $u$  un facteur de  $\omega$  de longueur  $m$ . Par définition, il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que

$$\omega_{k+j} = u_j.$$

Ainsi, on a

$$\omega_{k+j} = u_j \Leftrightarrow R_\alpha^{k+j}(x) \in I_{u_j}.$$

De plus, comme  $R_\alpha^{k+j}(x) = R_\alpha^j(R_\alpha^k(x))$ , on obtient

$$R_\alpha^k(x) \in R_\alpha^{-j}(I_{u_j}), \quad \forall j \in \{0, \dots, m-1\}.$$

Cela équivaut à dire :

$$\langle x + k\alpha \rangle = R_\alpha^k(x) \in \bigcap_{j=0}^{m-1} R_\alpha^{-j}(I_{u_j}).$$

□

**Définition E.0.5.** Une suite  $\omega$  est dite *uniformément récurrente* ou *minimale* si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que tout facteur de  $\omega$  de longueur  $m$  contient une copie de chaque facteur de longueur  $n$  de  $\omega$ .

On a l'équivalence suivante. Pour plus de détails concernant le résultat suivant, on pourra consulter [Lot02].

**Théorème E.0.6.** Soit  $(\Omega, T)$  un système dynamique topologique et  $\omega \in \Omega$ . La suite  $\omega$  est uniformément récurrente si et seulement si  $(\overline{\text{Orb}}(\omega), T)$  est minimal, c'est-à-dire,

$$\overline{\text{Orb}}(\omega) = \Omega, \quad \forall \omega \in \Omega.$$

**Définition E.0.7.** La fonction de récurrence  $\phi$  d'une suite minimale  $\omega$  est définie par

$$\phi(m) = \min\{n \in \mathbb{N} : \forall u \in \text{Fac}_n(\omega), \forall v \in \text{Fac}_m(\omega), v \in \text{Fac}(u)\}.$$

La fonction de récurrence de  $\omega$  est la taille minimale tel que chaque fenêtre de longueur  $\phi(m)$  contient tous les facteurs de longueur  $m$  de  $\omega$ .

Pour démontrer le Théorème souhaité, il est primordial d'avoir les deux résultats suivants.

**Lemme E.0.8.** Soient  $l_n$  la longueur minimale des intervalles non vides  $I(\omega_1, \dots, \omega_n)$ , où  $\omega_1, \dots, \omega_n \in \{0, 1\}$  et  $d_n$  l'écart maximal entre deux naturels succesifs tels que  $\langle k\alpha \rangle \in [0, l_n[$ . On a

$$\phi(n) = n - 1 + d_n.$$

*Démonstration.* Soit  $\omega$  une suite sturmiennne d'angle  $\alpha$ . On dit qu'un ensemble de points visite un intervalle  $I$  s'il contient un élément qui appartient à  $I$ . Tout ensemble de  $d_n$  points consécutifs de la suite  $(\langle k\alpha \rangle)_k$  visite tous les intervalles de longueur  $l_n$ . Pour vérifier cette affirmation, procédons par l'absurde. Considérons  $I$  un intervalle de longueur  $l_n$  tel qu'un ensemble de  $d_n$  points consécutifs de la suite  $(\langle k\alpha \rangle)_k$  ne le visite pas. Puisque la rotation préserve les longueurs, on peut ramener  $I$  sur  $[0, l_n[$ . On aurait alors une suite de  $d_n$  qui ne visite pas  $[0, l_n[$ , ce qui contredit la définition de  $d_n$ .

Notons  $X$  un ensemble de  $d_n$  points consécutifs de la suite  $(\langle k\alpha \rangle)_k$ . Par minimalité de  $l_n$ , l'ensemble  $X$  visite tous les intervalles de la forme  $I(\omega_1, \dots, \omega_n)$ .

Considérons  $u$  un facteur de  $\omega$  de longueur  $n - 1 + d_n$ . Il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que les  $n - 1 + d_n$  points correspondant au facteur  $u$  soient

$$\langle k\alpha \rangle, \dots, \langle (k + n + d_n - 2)\alpha \rangle.$$

Les  $d_n$  premiers éléments de  $(\langle j\alpha \rangle)_{j=k}^{k+n+d_n-2}$  visitent tous les intervalles non vide de la forme  $I(\omega_1, \dots, \omega_n)$ . Ainsi, tous les facteurs de  $\omega$  de longueur  $n$  sont également des facteurs de  $u$ . On a

$$\phi(n) \leq n - 1 + d_n$$

Montrons l'autre inégalité. Par le Lemme E.0.2, la suite  $(\langle k\alpha \rangle)_k$  est dense dans  $[0, 1]$ . Par définition de  $d_n$ , il existe une suite de  $d_n - 1$  éléments de  $(\langle k\alpha \rangle)_k$  qui ne visite pas

un intervalle de la forme  $I(\omega_1, \dots, \omega_n)$  de longueur  $l_n$ . Il existe alors un facteur  $u$  de  $\omega$  de longueur  $n + d_n - 2$  qui n'admet  $u$  comme facteur. Ainsi,

$$\phi(n) \geq n - 1 + d_n$$

□

Pour davantage de détails, on pourra en trouver dans [BR24].

**Lemme E.0.9.** *Soient  $(\{q_k\})_{k \in \mathbb{N}}$  la suite des dénominateurs des convergents de  $\alpha$  et  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $q_{k-1} \leq n < q_k$ . On a*

$$l_n = \eta_{k-1} = (-1)^{k-1}(q_{k-1}\alpha - p_{k-1}), \quad d_n = q_k + q_{k-1}.$$

Grâce aux deux lemmes, on peut désormais passer à la démonstration du théorème suivant.

**Théorème E.0.10.** *Soient  $\omega$  une suite sturmiennne d'angle  $\alpha$  et  $(\{q_k\})_{k \in \mathbb{N}}$  la suite des dénominateurs des convergents de  $\alpha$ . La fonction de récurrence  $\phi_\omega$  satisfait :*

$$\phi_\omega(m) = m - 1 + q_k + q_{k-1},$$

si  $q_{k-1} \leq m < q_k$ .

*Démonstration.* Considérons  $\omega$  une suite sturmiennne et  $m \in \mathbb{N}_0$ . Par définition, il existe  $x \in \mathbb{R}$  et  $\alpha \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap ]0, 1[$  tel que

$$\omega_k = j \Leftrightarrow \langle x + k\alpha \rangle \in I_j, \quad \forall j \in \{0, 1\}.$$

Par le Lemme E.0.4, un mot  $u = u_0 \dots u_{n-1}$  est facteur de  $\omega$  si et seulement si

$$I(u_0, \dots, u_{m-1}) = \bigcap_{j=0}^{m-1} R_\alpha^{-j}(I_{u_j}) \neq \emptyset.$$

De cette relation, on en tire que l'apparition d'un mot  $u$  dans  $\omega$  est indépendant de  $x$  puisque les ensembles  $R_\alpha^{-j}(I_{u_j})$  ne dépendent que de la partition et de l'angle  $\alpha$ . Il s'ensuit que toutes les suites sturmiennes d'angle  $\alpha$  possèdent les mêmes facteurs que  $\omega$  et appartiennent donc à  $\overline{\text{Orb}}(\omega)$ . Inversement, chaque élément de  $\overline{\text{Orb}}(\omega)$  est une suite sturmiennne d'angle  $\alpha$ . Ainsi, pour toute suite sturmiennne  $\omega'$ , l'ensemble  $\overline{\text{Orb}}(\omega')$  est égal à l'ensemble des suites sturmiennes de même angle. Il en résulte que toutes les suites sturmiennes d'angle  $\alpha$  possèdent la même fonction de récurrence. et on peut supposer, sans perte de généralité, que  $x = 0$ . En appliquant, successivement, les Lemmes E.0.8 et E.0.9, on obtient que

$$\phi(n) = n - 1 + q_k + q_{k-1}$$

si  $q_{k-1} \leq m < q_k$ .

□

# Annexe F

## Fractions continues

La majorité de cette annexe est tirée de [Ler24, MH40]. L'objectif de cette annexe est d'introduire les fractions continues et d'énoncer les résultats utiles à la démonstration du Théorème 4.5.5.

**Proposition F.0.1.** *Soient  $p \in \mathbb{N}$ ,  $q \in \mathbb{N}_0$ . Il existe  $a_0, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{N}$ , et  $r_1, \dots, r_{n+1} \in \mathbb{N}$  tels que*

$$\begin{aligned} p &= a_0q + r_1, & 0 \leq r_1 < q \\ q &= a_1r_1 + r_2 & 0 \leq r_2 < r_1 \\ r_1 &= a_2r_2 + r_3 & 0 \leq r_3 < r_2 \\ &\vdots \\ r_n &= a_{n+1}r_{n+1}. \end{aligned}$$

Ainsi, grâce à l'algorithme d'Euclide, on a

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} &= a_0 + \frac{r_1}{q} = a_0 + \frac{1}{\frac{q}{r_1}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_3}}}} \\ &\vdots \\ &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n+1}}}}} \end{aligned}$$

Pour de tels  $p \in \mathbb{N}$  et  $q \in \mathbb{N}_0$ , on note  $\frac{p}{q} = [a_0; a_1, \dots, a_{n+1}]$ . Si  $(a_n)_n \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}_0^{\mathbb{N}}$ , on note  $(p_n, q_n) \in \mathbb{N}^2$  tel que

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, \dots, a_n] \quad \text{et} \quad \text{pgcd}(p_n, q_n) = 1.$$

On note

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \dots] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots}}}$$

**Proposition F.0.2.** Soit  $(a_n)_n \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}_0^{\mathbb{N}}$ . Alors,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n}$  existe et est irrationnel.

Puisque le nombre d'or  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  satisfait la relation

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi},$$

la fraction continue de  $\phi$  est :

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}$$

De plus, comme  $\phi = \lim_k \frac{F_{k+1}}{F_k}$ , il s'ensuit que la suite des dénominateurs des convergents de  $\phi$  est  $(F_k)_k$  et les quotients partiels sont  $[1; 1, 1, 1, \dots]$ .

**Définition F.0.3.** Soit  $\alpha$  un irrationnel. Les termes  $\frac{p_n}{q_n}$  sont appelés les convergents de  $\alpha$  et les  $a_n$  sont appelés les quotients partiels.

**Définition F.0.4.** Un nombre irrationnel  $\alpha$  est mal approximable s'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{\varepsilon}{q^2}.$$

**Théorème F.0.5.** Un irrationnel  $\alpha$  est mal approximable si et seulement si la suite  $(a_n(\alpha))_n$  est bornée.

Le théorème qui suit est un résultat établi par Lagrange. La démonstration est technique, le lecteur pourra se référer au cours [Ler24] pour obtenir les détails de celle-ci.

**Théorème F.0.6.** Soit  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Alors, le réel  $\alpha$  est quadratique si et seulement si  $(a_n(\alpha))_n$  est ultimement périodique. En particulier, le réel  $x$  est mal approximable.

**Théorème F.0.7.** Le sous-shift sturmien associé à un nombre irrationnel  $\alpha$  est linéairement répétitif si et seulement si la suite  $(a_n(\alpha))_n$  est bornée.

La suite de Fibonacci est la suite  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  définie par

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \forall n \geq 2,$$

$F_1 = 1$  et  $F_0 = 0$ .

**Proposition F.0.8.** Pour tout  $k \geq 1$ , on a

$$F_k = \tau F_{k-1} + \left( -\frac{1}{\tau} \right)^{k-1}.$$

*Démonstration.* Procédons par récurrence. Pour  $k = 1$ , on a

$$1 = F_1 = F_0 + \left(-\frac{1}{\tau}\right)^{1-1} = 1.$$

Supposons que la relation est vérifiée pour  $k$  et pour le  $k + 1$  où  $k \in \mathbb{N}_0$ . On a

$$F_k = \tau F_{k-1} + \left(-\frac{1}{\tau}\right)^{k-1}.$$

En multipliant par  $\frac{1}{\tau}$  et comme  $\frac{1}{\tau} = \tau - 1$ , alors on a

$$\begin{aligned} (F_k - \tau F_{k-1}) \frac{-1}{\tau} &= \left(-\frac{1}{\tau}\right)^k \\ \Leftrightarrow \frac{-F_k}{\tau} + F_{k-1} &= \left(-\frac{1}{\tau}\right)^k \\ \Leftrightarrow -F_k(\tau - 1) + F_{k-1} &= \left(-\frac{1}{\tau}\right)^k \\ \Leftrightarrow -\tau F_k + F_k + F_{k-1} &= \left(-\frac{1}{\tau}\right)^k \end{aligned}$$

Puisque  $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ , on en tire que

$$F_{k+1} - \tau F_k = \left(-\frac{1}{\tau}\right)^k,$$

ce qui conclut la démonstration. □



# Bibliographie

- [B.D34] B.Delaunay. Sur la sphère vide. *Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS.*, (6) :793–800, 1934.
- [BG13] Michael Baake and Uwe Grimm. *Aperiodic Order*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 2013.
- [Bly18] Thomas Scott Blyth. *Module theory : an approach to linear algebra*. University of St Andrews, 2018.
- [Boh32] Harald Bohr. *Die Theorie der fastperiodischen Funktionen*, pages 26–77. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1932.
- [BR24] Valérie Berthé and Christophe Reutenauer. On the three-distance theorem. *The Mathematical Intelligencer*, 46(2) :183–188, 2024.
- [BY25] Valérie Berthé and Reem Yassawi. Meyer sets, pisot numbers, and self-similarity in symbolic dynamical systems, 2025.
- [Cas96] John William Scott Cassels. *An introduction to the geometry of numbers*. Springer Science and Business Media, 1996.
- [DF03] D.S. Dummit and R.M. Foote. *Abstract Algebra*. Wiley, 2003.
- [Ess25] Céline Esser. Topologie générale. Support de cours, 2024-2025. Cours de Topologie.
- [Fol15] Gerald B Folland. *A Course in Abstract Harmonic Analysis*. 2015.
- [Gal89] R.V Galiulin. Zonohedral delone systems. In *Collected Abstracts : Twelfth European Crystallographic Meeting, Moscow, USSR, August 20-29 1989*, 1989.
- [GQ23] Denis Gratias and Marianne Quiquandon. Cristallographie : les quasicristaux et Yves Meyer. In Société Mathématique de France, editor, *Yves Meyer, Selecta*. Société Mathématique de France, June 2023.
- [Har24] David Harari. Corps, théorie de galois. Notes de cours, Université Paris-Saclay, 2023-2024.
- [Lag96] Jeffrey Lagarias. Meyer's concept of quasicrystal and quasiregular sets. *Communications in Mathematical Physics*, 179, 08 1996.
- [Lag99] J. C. Lagarias. Geometric models for quasicrystals i. delone sets of finite type. *Discrete ; Computational Geometry*, 21(2) :161–191, 1999.
- [Ler22] Julien Leroy. Structures algébriques, 2022. Notes de cours, Université de Liège.

- [Ler24] Julien Leroy. Cours de théorie ergodique. Support de cours, 2024. Université de Liège.
- [Lif07] Ron Lifshitz. What is a crystal? *Zeitschrift für Kristallographie*, 222 :313—317, 2007.
- [Lot02] M. Lothaire. *Algebraic Combinatorics on Words*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 2002.
- [LP01] J. C. Lagarias and P. A. B. Pleasants. Local complexity of delone sets and crystallinity, 2001.
- [LP03] Jeffery C. Lagarias and Peter A. B. Pleasants. Repetitive delone sets and quasicrystals, 2003.
- [Mey72] Y. Meyer. *Algebraic Numbers and Harmonic Analysis*. North-Holland mathematical library. North-Holland Publishing Company, 1972.
- [MH40] Marston Morse and Gustav A Hedlund. Symbolic dynamics ii. sturmian trajectories. *American Journal of Mathematics*, 62(1) :1–42, 1940.
- [Moo97] Robert V. Moody. *Meyer Sets and Their Duals*, pages 403–441. NATO ASI Series C. 1997.
- [Per] Dorian Perrot. Sous-groupe de  $(r,+)$ . ENS Rennes. Support de cours.
- [Sen95] Marjorie Senechal. Quasicrystals and geometry. 1995.
- [Ste89] I. Stewart. *Galois Theory*. Springer Netherlands, 1989.