

Impact de l'intégration ESG sur la performance des fonds de pension

Auteur : Dolhain, Morgane

Promoteur(s) : Van Messem, Arnout

Faculté : Faculté des Sciences

Diplôme : Master en sciences mathématiques, à finalité didactique

Année académique : 2025-2026

URI/URL : <http://hdl.handle.net/2268.2/25519>

Avertissement à l'attention des usagers :

Tous les documents placés en accès ouvert sur le site le site MatheO sont protégés par le droit d'auteur. Conformément aux principes énoncés par la "Budapest Open Access Initiative"(BOAI, 2002), l'utilisateur du site peut lire, télécharger, copier, transmettre, imprimer, chercher ou faire un lien vers le texte intégral de ces documents, les disséquer pour les indexer, s'en servir de données pour un logiciel, ou s'en servir à toute autre fin légale (ou prévue par la réglementation relative au droit d'auteur). Toute utilisation du document à des fins commerciales est strictement interdite.

Par ailleurs, l'utilisateur s'engage à respecter les droits moraux de l'auteur, principalement le droit à l'intégrité de l'oeuvre et le droit de paternité et ce dans toute utilisation que l'utilisateur entreprend. Ainsi, à titre d'exemple, lorsqu'il reproduira un document par extrait ou dans son intégralité, l'utilisateur citera de manière complète les sources telles que mentionnées ci-dessus. Toute utilisation non explicitement autorisée ci-avant (telle que par exemple, la modification du document ou son résumé) nécessite l'autorisation préalable et expresse des auteurs ou de leurs ayants droit.

UNIVERSITÉ DE LIÈGE



FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE

Impact de l'intégration ESG sur la performance des fonds de pension

*Mémoire de fin d'études présenté en vue de l'obtention du titre de
Master en Sciences Mathématiques, à finalité didactique*

AUTEUR : MORGANE DOLHAIN

PROMOTEUR : PROF. ARNOUT VAN MESSEM

CO-PROMOTEUR : FABIEN BONIVER

ANNÉE ACADÉMIQUE 2025–2026

Abstract

Ce mémoire étudie l'impact de l'intégration des critères ESG sur la performance des portefeuilles de fonds de pension. Sur le plan théorique, il étend les modèles classiques de Markowitz et du MEDAF, ainsi que les mesures de performance et le modèle d'attribution. Sur le plan méthodologique, plusieurs stratégies d'intégration sont comparées afin d'évaluer leurs effets sur la performance et son attribution. L'étude empirique, réalisée sur un ensemble de portefeuilles de fonds de pension belges entre 2018 et 2025, analyse différentes mesures de performance et le modèle BHB. Les résultats montrent que les stratégies combinant des titres ESG et des titres non notés à rendement élevé ont tendance à augmenter la performance ajustée du risque, tandis que les approches de filtrage strict la réduisent. L'étude met en évidence l'hétérogénéité des résultats et montre que l'impact ESG dépend fortement de la méthode d'intégration retenue.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma gratitude à mon promoteur, Arnout Van Messem, pour tout le temps qu'il a consacré à ce mémoire, non seulement pour la relecture, mais aussi pour m'avoir guidée ces deux années de master. Je suis très reconnaissante pour son accompagnement, ses conseils et la qualité de son encadrement.

Je remercie également mon co-promoteur, Fabien Boniver, de m'avoir proposé ce sujet de mémoire ainsi que pour ses nombreux conseils.

Je remercie également ma maître de stage, Dominique Xhonneux, ainsi que l'ensemble de son équipe, pour l'accueil, leur disponibilité, et leur aide précieuse dans la réalisation de l'étude empirique.

Enfin, je souhaite remercier ma famille, en particulier mes grands-parents et mon papa, pour leur soutien durant toutes ces années universitaires. Je remercie tout spécialement mon papa, Stéphane, pour son appui constant, même dans les moments difficiles, ainsi que mes grands-parents, Jacques et Mariette, pour avoir relu ce mémoire. Enfin, je souhaite remercier ma famille, en particulier mes grands-parents et mon papa, pour leur soutien durant toutes ces années universitaires. Je remercie tout spécialement mon papa, Stéphane, pour son appui constant, même dans les moments difficiles, ainsi que mes grands-parents, Jacques et Mariette, pour avoir relu ce mémoire.

Table des matières

Table des matières	III
Introduction	1
1 Théorie moderne du portefeuille	3
1.1 Introduction à la gestion de portefeuille	3
1.2 Définitions fondamentales	4
1.3 Fondements de la théorie moderne du portefeuille	5
1.3.1 Fonction d'utilité et courbes d'indifférence	6
1.3.2 Risque, aversion au risque et frontière efficiente	8
1.3.3 Formulation du problème de Markowitz	10
1.4 Modèle d'Équilibre Des Actifs Financiers	23
1.4.1 Contexte	24
1.4.2 Droite de marché des capitaux	24
1.4.3 Théorie de l'équilibre	26
1.4.4 Hypothèses, formulation et démonstration du MEDAF	27
1.4.5 Modifications du MEDAF	31
2 Analyse de la performance	33
2.1 Mesures de performance et leur évaluation	33
2.1.1 Ratio de Sharpe	34
2.1.2 Ratio de Treynor	37
2.1.3 Alpha de Jensen	40
2.2 Attribution de performance	43
2.2.1 Le modèle de Brinson, Hood et Beebower	43
3 Les Institutions de Retraite Professionnelle	49
3.1 Cadre juridique et réglementaire	49
3.1.1 European Insurance and Occupational Pensions Authority	50
3.1.2 Directive IORP II	50
3.1.3 Autorité des Services et Marchés Financiers	51
3.1.4 Lois belges relatives aux pensions complémentaires	51
3.2 Contraintes et risques spécifiques	52

3.2.1	Contraintes	52
3.2.2	Principaux risques	55
4	Les critères ESG	59
4.1	Cadre réglementaire	59
4.1.1	Taxonomie européenne	60
4.1.2	Sustainable Finance Disclosure Regulation	60
4.1.3	Corporate Sustainability Reporting Directive	61
4.1.4	UN Principles for Responsible Investment	63
4.2	Décomposition E, S et G	63
4.2.1	Critères et indicateurs ESG	64
4.2.2	Environnement	64
4.2.3	Social	64
4.2.4	Gouvernance	65
4.3	Scores ESG	65
4.3.1	Définition et échelles des scores	65
4.3.2	Méthodes de construction	66
4.4	Intégration de l'ESG dans la gestion de portefeuille	67
4.4.1	Méthodes d'intégration	67
5	Impact de l'intégration ESG sur la performance des portefeuilles	69
5.1	Impact de l'intégration ESG sur la théorie moderne du portefeuille	69
5.1.1	Théorie de Markowitz avec intégration ESG	70
5.1.2	MEDAF modifié	73
5.1.3	Espérance et variance du rendement d'un portefeuille ESG	80
5.2	Impact de l'intégration ESG sur les mesures de performance	83
5.2.1	Impact sur le ratio de Sharpe	84
5.2.2	Impact sur l'alpha de Jensen et le bêta	87
5.2.3	Impact sur le ratio de Treynor	90
5.2.4	Impact des mesures de performance selon les profils d'investisseurs	92
5.3	Impact de l'intégration ESG sur l'attribution de performance	96
6	Étude empirique de l'impact de l'intégration ESG sur les Institutions de Retraite Professionnelle belges	101
6.1	Base de données	102
6.1.1	Construction de la base de données	102
6.1.2	Intégration du benchmark	104
6.2	Construction des portefeuilles ESG	105
6.3	Interprétation des résultats	106
6.3.1	Volatilité	107
6.3.2	Ratio de Sharpe	109
6.3.3	Alpha de Jensen	111
6.3.4	Ratio de Treynor	112

6.3.5 Synthèse générale des mesures de performance	114
6.4 Implémentation et interprétation du modèle BHB	115
Conclusion	121
Annexes	123
Annexe 1	123
Annexe 2	145
Annexe 3	147
Table des figures	152

Introduction

Au cours des deux dernières décennies, la gestion de portefeuille a connu un développement marqué. Longtemps perçue comme une activité secondaire, elle est progressivement devenue un pilier central de l'industrie financière moderne. Cette évolution s'explique notamment par de nouvelles contraintes réglementaires. Parmi celles-ci, l'intégration des critères environnementaux, sociaux et de gouvernance (ESG) occupe aujourd'hui une place incontournable, en particulier pour les investisseurs institutionnels tels que les fonds de pension.

Cette évolution soulève une question centrale : dans quelle mesure l'intégration des critères ESG modifie-t-elle les modèles financiers classiques tels que Markowitz ou le Modèle d'Équilibre Des Actifs Financiers (MEDAF), et quelles implications cela présente-t-il pour la performance des portefeuilles, notamment ceux de fonds de pension ?

Répondre à cette question nécessite de combiner une réflexion théorique, méthodologique et empirique, afin d'évaluer comment les modèles fondamentaux de la finance moderne se transforment lorsqu'ils sont confrontés à des préférences extra-financières, comme les préférences ESG.

L'objectif de ce mémoire est double. D'une part, il s'agit d'examiner comment l'intégration ESG transforme les modèles de construction de portefeuilles, les mesures de performance et les méthodes d'attribution. D'autre part, il s'agit d'évaluer empiriquement l'impact de ces transformations sur des portefeuilles réels de fonds de pension, en analysant différentes stratégies d'intégration et leurs conséquences sur le couple rendement-risque.

Afin de répondre à cette problématique, ce mémoire se décompose en six chapitres, dont chacun joue un rôle précis dans la progression logique de l'analyse.

Le **premier chapitre** pose les bases conceptuelles nécessaires à la compréhension de l'ensemble du mémoire. Il introduit les notions essentielles de gestion de portefeuille, les différentes classes d'actifs, les approches passive et active, ainsi que les outils de mesure, d'évaluation et d'attribution de performance.

Il présente également les deux modèles fondamentaux de ce mémoire, à savoir le modèle de Markowitz, qui est un modèle qui repose uniquement sur le rendement et le risque d'un portefeuille. Le deuxième modèle suppose l'hypothèse d'équilibre du marché et est appelé

le Modèle d'Equilibre Des Actifs Financiers (MEDAF).

Le **deuxième chapitre** approfondit les outils permettant de mesurer et d'interpréter la performance d'un portefeuille. Il présente trois mesures de performance classiques : le ratio de Sharpe, le ratio de Treynor et l'alpha de Jensen. Ensuite, le modèle d'attribution de performance de Brinson, Hood et Beebower (BHB) est introduit. Ces outils seront alors utilisés dans le cadre de l'intégration ESG et dans l'analyse empirique.

Le **troisième chapitre** se concentre sur les Institutions de Retraite Professionnelle (IRP), communément appelées fonds de pension en Belgique. Il décrit leur cadre juridique et réglementaire, leurs contraintes d'investissement et les risques auxquels ils sont exposés. Cette analyse permet de comprendre pourquoi l'intégration ESG est particulièrement pertinente pour ce type d'investisseurs.

Le **quatrième chapitre** introduit les critères Environnementaux, Sociaux et de Gouvernance (ESG), leur cadre réglementaire, les scores ESG et les principales méthodes d'intégration. Il constitue la transition naturelle entre les modèles financiers classiques et leur extension dans un cadre durable.

Le **cinquième chapitre** analyse l'impact de l'intégration ESG sur les modèles présentés en Chapitre 1, ainsi que les mesures de performance et le modèle BHB présentés en Chapitre 2. Il examine comment les critères ESG modifient les mesures de performance, les modèles d'attribution et les modèles de construction de portefeuille. Il constitue la partie théorique centrale du mémoire.

Le **sixième chapitre** propose une étude empirique basée sur des données réelles de portefeuilles de fonds de pension. Il décrit la construction de la base de données ESG, les différentes stratégies d'intégration, les implémentations des mesures de performance et du modèle BHB, ainsi que l'interprétation des résultats. Cette analyse permet d'évaluer concrètement l'impact de l'intégration ESG sur la performance des portefeuilles de fonds de pension.

Nous pouvons à présent introduire les notions fondamentales de la gestion de portefeuille, qui constituent la base théorique indispensable à l'ensemble du mémoire.

Chapitre 1

Théorie moderne du portefeuille

1.1 Introduction à la gestion de portefeuille

Cette section repose sur la référence [1].

La gestion de portefeuille occupe aujourd'hui une place centrale dans l'industrie financière moderne. Elle regroupe l'ensemble des décisions visant à constituer et à faire évoluer une combinaison linéaire d'actifs financiers afin d'atteindre les objectifs de rendement de l'investisseur, tout en respectant ses contraintes en termes de risque et d'allocation d'actifs. Avant d'aborder les modèles fondamentaux de la théorie moderne du portefeuille, il est nécessaire de préciser les notions essentielles qui structurent la gestion de portefeuille. Un *portefeuille* est une combinaison linéaire d'actifs financiers, pondérés selon les choix de l'investisseur. Ces actifs appartiennent généralement à trois grandes classes :

- **les actions** : ce sont des titres représentant une part de société ;
- **les obligations** : ce sont des titres représentant un emprunt ;
- **les produits monétaires** : ce sont des prêts ou des emprunts de court terme qui permettent de gérer les liquidités d'un portefeuille.

Ces classes d'actifs peuvent ensuite être subdivisées selon des caractéristiques communes : secteur d'activité, capitalisation boursière, maturité, entre autres.

On distingue principalement deux approches de gestion :

- La gestion passive, qui consiste à ne pas anticiper les tendances du marché et laisser le portefeuille suivre passivement l'évolution du marché ;
- La gestion active dont l'objectif est d'obtenir une performance supérieure à la performance du marché, ou d'un benchmark choisi comme référence.

La gestion de portefeuille s'appuie sur un ensemble d'outils issus de l'analyse financière. Celle-ci vise à comprendre, mesurer et expliquer la performance financière d'un portefeuille. Elle repose classiquement sur trois étapes complémentaires :

- **la mesure de performance**, qui consiste à quantifier le rendement obtenu par le portefeuille sur une période donnée ;

- **l'évaluation de performance**, qui analyse si cette performance est satisfaisante au regard du risque pris ou d'un portefeuille de référence ;
- **l'attribution de performance**, qui décompose la performance en différentes sources (allocation d'actifs, sélection de titres, etc.).

Ces notions seront approfondies dans le Chapitre 2, lorsqu'il sera question d'évaluer la performance d'un portefeuille.

1.2 Définitions fondamentales

Les définitions présentées ci-dessous, issues de [1], [9], [19] et [17], permettent de formaliser les concepts utilisés dans la suite de ce mémoire. Elles constituent le vocabulaire de base nécessaire à la compréhension des modèles de Markowitz et du MEDAF.

- Rendement d'un actif : Mesure de variation d'un actif entre deux dates. Il représente le gain ou la perte d'un investisseur sur une période donnée.
- Rendement d'un portefeuille : Somme pondérée des rendements des actifs du portefeuille.
- Portefeuille diversifié : Portefeuille composé d'actifs différents selon certains critères : le secteur d'activité, le type d'actifs, la situation géographique, etc.
- Risque d'un actif : Dispersion des rentabilités de l'actif autour de leur valeur moyenne. Le risque est généralement représenté par les indicateurs statistiques suivant : Variance (σ^2) ou Écart-type (σ).
- Portefeuille efficient : Portefeuille qui maximise le rendement pour un risque donné, ou minimise le risque pour un rendement donné.
- Frontière efficiente : Ensemble des portefeuilles efficients. Elle constitue l'enveloppe convexe de tous les portefeuilles réalisables.
- Portefeuille de marché : Portefeuille qui contient tous les actifs disponibles sur le marché, pondérés par leur capitalisation boursière.
- Actif risqué : Actif dont le rendement futur est incertain.
- Actif sans risque : Actif qui permet d'obtenir un revenu, de façon certaine, connu à l'avance.
- Portefeuille tangent : Portefeuille qui, combiné avec l'actif sans risque, maximise la combinaison rendement-risque. Il correspond au point de tangence entre la frontière efficiente des actifs risqués et la droite partant de l'actif sans risque.
- Benchmark : Portefeuille de référence, utilisé pour analyser la performance d'un portefeuille.
- Taux sans risque : Rendement, fixe, d'un actif sans risque. Ce taux sans risque est noté R_f .

- **Fonction d'utilité** : Fonction qui permet de caractériser les choix d'un investisseur et de définir ses préférences en associant les valeurs de risque et de rendement d'un portefeuille. Chaque investisseur possède donc sa propre fonction d'utilité.
- **Courbes d'indifférences** : Ensemble des couples risque-rendement donnant un même niveau d'utilité.
- **Risque systématique**, aussi appelé **risque non-diversifiable** : Il mesure la covariance entre les actifs et l'économie relativement au risque du marché. Il s'écrit β_i , pour un actif risqué i , et est donné par la formule : $\beta_i = \frac{\text{Cov}(R_i, R_M)}{\sigma_M^2}$, où R_i est le rendement de l'actif i , R_M le rendement du portefeuille de marché M et σ_M^2 sa variance.
- **Risque non systématique**, aussi appelé **risque diversifiable** : Risque indépendant de l'économie.
- **Risque total** : Le risque total est la somme du risque systématique et du risque non systématique.
- **Prime de risque** : Quantité supplémentaire de rentabilité que l'investisseur exige par rapport au taux sans risque pour investir dans l'actif risqué. Elle est donnée, pour un portefeuille P , par la formule $\mu_P - R_f$ où μ_P est l'espérance de rendement du portefeuille P et R_f le taux sans risque.
- **Marché parfait** : Marché financier sans taxes, ni coûts de transaction. Les actifs sont tous négociés et divisibles à l'infini.

La gestion de portefeuille existe depuis plusieurs décennies, mais s'est particulièrement développée ces vingt dernières années. Bien avant cette période, les économistes s'intéressaient à la diversification des portefeuilles. Cependant, c'est en 1952, grâce aux travaux de Harry Markowitz, que naît véritablement ce que nous appelons aujourd'hui *théorie moderne du portefeuille* ou *théorie de Markowitz*.

1.3 Fondements de la théorie moderne du portefeuille

La section suivante repose majoritairement sur la référence [1]. Dans son article fondateur [26], Markowitz introduit ce qui deviendra *la théorie moderne du portefeuille*, connue internationalement sous le nom de *Modern Portfolio Theory*. Le principe central de cette théorie repose sur la diversification du portefeuille : un investisseur cherche à répartir ses investissements entre plusieurs actifs afin de réduire le risque global de son portefeuille. Cette approche s'appuie sur deux hypothèses fondamentales concernant le comportement de l'investisseur :

- l'investisseur souhaite diversifier son portefeuille, et
- l'investisseur cherche à maximiser son rendement espéré.

A partir de ces hypothèses, Markowitz développe une théorie dite *moyenne-variance*, ou *espérance-variance* : l'investisseur cherche à maximiser son espérance de rendement tout en minimisant la variance, qui constitue la mesure du risque.

Dans son article, Markowitz introduit également la notion de *frontière efficiente*, que nous détaillerons dans la suite de la section.

Plus tard, en 1959, il publie un ouvrage [27] dans lequel il approfondit et formalise davantage sa théorie du portefeuille.

Nous présentons maintenant les éléments essentiels de cette théorie.

1.3.1 Fonction d'utilité et courbes d'indifférence

Cette section s'appuie principalement sur [1] et [39].

Le comportement de l'investisseur étudié par Markowitz s'inscrit dans le cadre de la théorie de l'*utilité espérée*, développée par Von Neumann et Morgenstern [39]. Cette théorie fournit un ensemble d'axiomes permettant de représenter les préférences d'un individu confronté à des choix incertains.

Dans le cadre de cette théorie, une *loterie* désigne une situation aléatoire offrant plusieurs résultats possibles, chacun associé à une probabilité. Les axiomes de rationalité portent sur les préférences de l'investisseur entre ces différentes loteries. Selon [38], ces axiomes sont les suivants :

- **(Comparabilité)** : Pour deux loteries p et q , l'investisseur est toujours capable d'exprimer une préférence ou une indifférence ;
- **(Transitivité)** : Si l'investisseur préfère p à q et q à r , alors il préfère également p à r ;
- **(Indépendance forte)** : La préférence, ou l'indifférence, entre deux loteries reste inchangée lorsqu'elles sont mélangées de la même manière avec une troisième loterie ;
- **(Valeur intermédiaire)** : Si une loterie q se situe entre deux autres loteries p et r dans l'ordre de préférence, alors il existe un mélange de p et r qui est équivalent à q ;
- **(Dominance)** : Si une loterie p est préférée à une loterie q , alors tout mélange donnant plus de poids à p qu'à q sera également préféré.

Remarques 1.3.1.

1. Les deux premiers axiomes (comparabilité et transitivité) définissent une structure de préordre total des préférences.
2. On note $p \succ q$ si l'investisseur préfère la loterie p à la loterie q .
3. On note $p \sim q$ si l'investisseur est indifférent entre les deux loteries p ou q .

Ces axiomes garantissent l'existence d'une fonction capable de représenter les préférences de l'investisseur. On note X l'ensemble des résultats possibles. Nous pouvons alors introduire le concept de *fonction d'utilité*.

Définition 1.3.1. (Fonction d'utilité)

Une **fonction d'utilité** décrivant un préordre de préférence est une fonction U :

$$U : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

qui représente les préférences de l'investisseur, au sens où :

- $x \succ y \Leftrightarrow U(x) > U(y)$
- $x \sim y \Leftrightarrow U(x) = U(y)$

Cette fonction associe à chaque résultat un niveau de satisfaction, de sorte que l'ordre des préférences de l'investisseur se traduise simplement par l'ordre des valeurs prises par U . Ainsi, si un résultat x est préféré à un résultat y , alors $U(x) > U(y)$, tandis que l'indifférence entre deux résultats se traduit par l'égalité $U(x) = U(y)$, et inversement. Une fonction d'utilité permet ainsi de quantifier la satisfaction d'un investisseur face à différents choix d'investissements.

Dans le cadre de la théorie de l'utilité espérée, un investisseur cherche à maximiser l'espérance de son utilité finale. Si W représente la richesse finale d'un investisseur, alors :

$$\mathbb{E}[U(W)] = \sum_i p_i U(w_i)$$

où

- p_i est la probabilité d'obtenir une richesse égale à w_i à la fin de la période considérée ;
- i est l'indice de toutes les issues possibles.

Remarque 1.3.1. La période correspond à l'horizon d'investissement retenu (par exemple un mois, un trimestre ou une année).

La théorie de Markowitz repose sur une approche espérance-variance : seules l'espérance et la variance des rendements sont prises en compte dans les décisions des investisseurs. L'approche espérance-variance de Markowitz est cohérente avec cette maximisation de l'utilité espérée dans deux situations particulières :

- **lorsque la fonction d'utilité est quadratique** : Dans ce cas, la fonction d'utilité d'un niveau de richesse W s'écrit, par exemple,

$$U(W) = aW - bW^2, \quad b > 0.$$

Ainsi, l'utilité espérée est donnée par

$$\mathbb{E}[U(W)] = a\mathbb{E}[W] - b(\sigma^2[W] + (\mathbb{E}[W])^2)$$

Cette expression ne dépend que des deux premiers moments de la distribution.

- **lorsque les rendements suivent une loi normale** : Une loi normale est entièrement caractérisée par son espérance et sa variance. Ainsi, l'utilité espérée ne dépend que de ces deux paramètres.

Dans ces deux cas, les préférences des investisseurs peuvent être représentées par le couple (espérance, variance). Les *courbes d'indifférence* regroupent l'ensemble des couples (espérance, variance) donnant un même niveau d'utilité. Chaque courbe correspond à un niveau d'utilité donné : plus l'espérance est élevée et la variance faible, plus le niveau d'utilité sera important.

Face à un ensemble de portefeuilles réalisables, l'investisseur compare ses courbes d'indifférence aux couples (espérance, variance) accessibles. Il choisit alors le portefeuille situé sur la courbe d'indifférence la plus élevée parmi celles qui sont atteignables.

Comme la fonction d'utilité reflète des préférences individuelles, elle n'est pas unique : chaque investisseur possède sa propre fonction d'utilité et, par conséquent, son propre portefeuille optimal.

1.3.2 Risque, aversion au risque et frontière efficiente

Cette section repose sur [1].

Dans la théorie de Markowitz, le *risque d'un actif* est mesuré par la variance (ou l'écart-type) de son rendement. De même, le risque d'un portefeuille correspond à la variance (ou l'écart-type) du rendement du portefeuille : plus cette dispersion autour de la moyenne est élevée, plus l'incertitude est importante. Dans la suite, nous utiliserons l'écart-type comme mesure du risque, car il s'exprime dans la même unité que le rendement, ce qui facilite l'interprétation économique.

Un investisseur est dit *averse au risque* lorsque sa fonction d'utilité est concave. Une manière classique de caractériser l'aversion au risque consiste à considérer la différence

$$U[\mathbb{E}(W)] - \mathbb{E}[U(W)]$$

représentant la différence entre l'utilité de la richesse espérée et l'espérance de l'utilité de la richesse.

Cette quantité est positive pour un investisseur averse au risque, nulle pour un investisseur neutre et négative pour un investisseur amateur du risque. Les trois cas suivants permettent de distinguer les attitudes possibles de l'investisseur face au risque :

1. $U[\mathbb{E}(W)] > \mathbb{E}[U(W)]$: l'investisseur est averse au risque ;
2. $U[\mathbb{E}(W)] < \mathbb{E}[U(W)]$: l'investisseur aime le risque ;
3. $U[\mathbb{E}(W)] = \mathbb{E}[U(W)]$: l'investisseur est neutre face au risque.

La mesure d'aversion au risque présentée ci-dessus est distincte de la relation entre risque et rendement exigé illustrée à la Figure 1.1. Celle-ci représente la relation entre le niveau de risque et la rentabilité exigée pour différents types d'investisseurs.

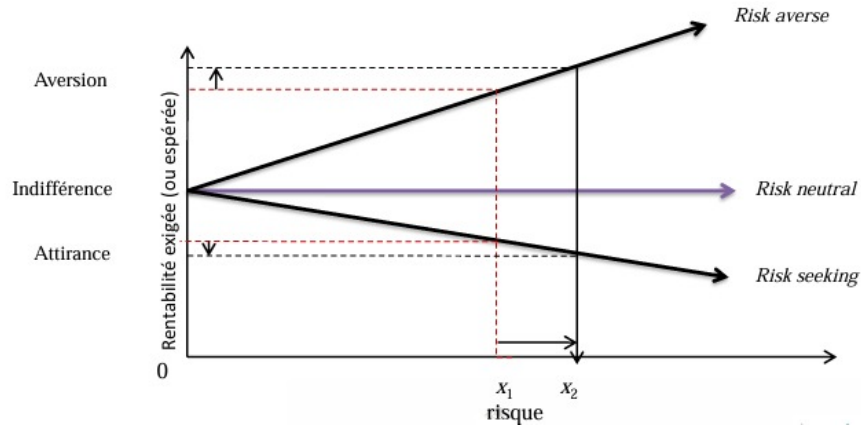


FIGURE 1.1 – Illustration de l'aversion au risque. Source : [19].

Un investisseur averse au risque exige une rentabilité plus élevée lorsque le risque augmente : la courbe est croissante. Un investisseur neutre face au risque exige la même rentabilité indépendamment du niveau de risque : la courbe est constante. Enfin, un investisseur amateur du risque accepte une rentabilité plus faible lorsque le risque augmente : la courbe est décroissante. Ainsi, pour deux niveaux de risque $x_1 < x_2$, un investisseur averse au risque exigera une rentabilité plus élevée pour x_2 que pour x_1 . À l'inverse, un investisseur amateur du risque exigera une rentabilité plus faible pour x_2 que pour x_1 .

Chaque investisseur possède sa propre aversion au risque, déterminée par la concavité de sa fonction d'utilité. Dans le cadre de Markowitz, cette attitude face au risque influence la rentabilité exigée pour accepter un niveau de risque donné. La relation entre risque et rentabilité exigée joue un rôle central dans la construction de la frontière efficiente. Celle-ci représente l'ensemble des portefeuilles réalisables offrant le meilleur compromis entre espérance et variance. Le portefeuille optimal d'un investisseur correspond au point de tangence entre sa courbe d'indifférence la plus élevée et la frontière efficiente. Il dépend donc de son aversion au risque : chaque investisseur choisit le portefeuille qui maximise son utilité, c'est-à-dire celui qui correspond le mieux à ses préférences entre rendement et risque.

La *frontière efficiente* est l'ensemble des portefeuilles efficients. Un portefeuille est dit efficient lorsqu'il maximise le rendement pour un niveau de risque donné, ou lorsqu'il minimise le risque pour un niveau de rendement donné.

Grâce à la frontière efficiente et aux courbes d'indifférence, chaque investisseur peut déterminer son portefeuille optimal. Le portefeuille optimal n'est donc pas unique : il dépend de l'aversion au risque de l'investisseur.

La frontière efficiente permet également d'identifier le *portefeuille de variance minimale*, c'est-à-dire le portefeuille efficient ayant la variance la plus faible.

Pour aller plus loin, il est nécessaire de formaliser mathématiquement ce cadre. La formulation du problème de Markowitz permet en effet de traduire ces considérations éco-

nomiques en un problème d'optimisation bien défini, fondé sur l'espérance et la variance des rendements. C'est cette étape qui rend possible la construction explicite de la frontière efficiente et du portefeuille de variance minimale.

1.3.3 Formulation du problème de Markowitz

La compréhension de l'aversion au risque, des courbes d'indifférence et de la frontière efficiente permet de saisir l'intuition économique derrière la théorie moderne du portefeuille. Nous pouvons à présent passer de cette approche conceptuelle à une formulation mathématique rigoureuse du problème étudié par Markowitz.

La théorie de Markowitz repose sur les hypothèses suivantes :

1. Les investisseurs cherchent à maximiser l'utilité espérée de leur richesse finale : $\max_W \mathbb{E}[U(W)]$;
2. Les investisseurs sont averses au risque : $U[\mathbb{E}(W)] > \mathbb{E}[U(W)]$, cela signifie que leur fonction d'utilité est croissante et concave : $U'(W) > 0$, $U''(W) < 0$;
3. Seuls les deux premiers moments de la distribution des rendements sont utilisés, à savoir l'espérance et la variance ;
4. La richesse finale correspond au rendement du portefeuille ;
5. Seuls les portefeuilles efficients sont considérés.

Nous pouvons à présent formaliser mathématiquement l'espérance et la variance d'un portefeuille, éléments centraux de la théorie de Markowitz.

Étant donné la définition d'un portefeuille, il suffit de définir mathématiquement l'espérance et la variance du rendement d'un actif.

Définition 1.3.2. (Rendement d'un actif)

Le **rendement** d'un actif i entre les dates $t-1$ et t est modélisé par la variable aléatoire $R_{i,t}$ définie par :

$$R_{i,t} = \frac{P_{i,t} - P_{i,t-1} + D_{i,t}}{P_{i,t-1}}$$

où

- $P_{i,t}$ est le prix de l'actif i à l'instant t ,
- $P_{i,t-1}$ est le prix de l'actif i à l'instant $t-1$,
- $D_{i,t}$ est le dividende versé à l'instant t .

On note R_i la variable aléatoire représentant le rendement de l'actif i sur une période donnée.

Définition 1.3.3. (Espérance du rendement d'un actif)

L'**espérance théorique du rendement** de l'actif i est définie par $\mu_i := \mathbb{E}[R_i]$.

A partir d'un échantillon de rendements observés $(R_{i,1}, \dots, R_{i,T})$, l'**estimateur de l'espérance de rendement** est défini comme la moyenne empirique :

$$\hat{\mu}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_{i,t}$$

où T est le nombre de sous-périodes considérées.

L'estimateur $\hat{\mu}_i$ peut également s'écrire sous forme matricielle :

$$\hat{\mu}_i = \frac{1}{T} \mathbf{1}_T^\top \mathbf{R},$$

où

• $\mathbf{1}_T$ est le vecteur unitaire $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^T$ et

• $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_{i,1} \\ R_{i,2} \\ \vdots \\ R_{i,T} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^T$.

Lorsque nous souhaitons calculer le rendement moyen d'un actif sur une longue période, celle-ci est découpée en sous-périodes régulières. Le rendement est calculé sur chacune d'elles, puis la moyenne de ces rendements fournit une estimation du rendement espéré par sous-période.

De la même manière, nous pouvons définir la variance (et donc l'écart-type) du rendement d'un actif.

Définition 1.3.4. (Variance du rendement d'un actif)

La **variance théorique du rendement** d'un actif i est définie par :

$$\sigma_i^2 := \mathbb{E} [(R_i - \mu_i)^2]$$

où $\mu_i = \mathbb{E}[R_i]$ est l'espérance théorique du rendement.

A partir d'un échantillon de rendements observés $(R_{i,1}, \dots, R_{i,T})$, l'**estimateur empirique de la variance** est donné par :

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_{i,t} - \hat{\mu}_i)^2$$

où

- $R_{i,t}$ est le rendement de l'actif i entre les dates $t - 1$ et t ;
- $\hat{\mu}_i$ est la moyenne empirique des rendements ;
- T est le nombre de sous-périodes.

Remarque 1.3.2. Dans la pratique, certains auteurs utilisent $\frac{1}{T-1}$ afin d'avoir un estimateur sans biais.

L'estimateur $\hat{\sigma}_i^2$ peut également s'exprimer sous forme matricielle :

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{T} (\mathbf{R} - \hat{\mu}_i \mathbf{1}_T)^\top (\mathbf{R} - \hat{\mu}_i \mathbf{1}_T),$$

où

- $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_{i,1} \\ R_{i,2} \\ \vdots \\ R_{i,T} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^T$ est le vecteur des rendements observés ;

- $\mathbf{1}_T$ est le vecteur unitaire $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^T$;

- $\hat{\mu}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_{i,t}$ est l'estimateur de l'espérance de rendement.

Comme un portefeuille est une combinaison linéaire d'actifs, nous pouvons à présent définir son espérance et sa variance à partir de celles des actifs qui le composent.

Définition 1.3.5. (Espérance du rendement d'un portefeuille)

Soit un portefeuille P composé de n actifs, de poids $w_1, \dots, w_n$ tels que

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1.$$

Le **rendement du portefeuille** P est la variable aléatoire :

$$R_P = \sum_{i=1}^n w_i R_i.$$

L'**espérance théorique du rendement du portefeuille** P est :

$$\mu_P := \mathbb{E}[R_P] = \sum_{i=1}^n w_i \mu_i.$$

A partir d'un échantillon de rendements observés, l'**estimateur empirique de l'espérance de rendement du portefeuille** P est

$$\hat{\mu}_P = \sum_{i=1}^n w_i \hat{\mu}_i$$

où $\hat{\mu}_i$ est l'estimateur empirique de l'espérance du rendement de l'actif i , μ_i .

Définition 1.3.6. (Variance du rendement d'un portefeuille)

La **variance théorique du rendement du portefeuille** P est :

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \text{Cov}(R_i, R_j)$$

où $\text{Cov}(R_i, R_j)$ est la covariance entre les rendements de l'actif i et de l'actif j .

A partir d'un échantillon de rendements observés, l'**estimateur empirique de la variance du rendement du portefeuille** P est

$$\hat{\sigma}_P^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \widehat{\text{Cov}}(R_i, R_j)$$

où $\widehat{\text{Cov}}(R_i, R_j)$ est l'estimateur empirique de $\text{Cov}(R_i, R_j)$.

En notation matricielle, les expressions théoriques s'écrivent :

$$\mu_P = \mathbf{W}^\top \boldsymbol{\mu},$$

où

$$\bullet \mathbf{W} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ et}$$

$$\bullet \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Et la variance :

$$\sigma_P^2 = \mathbf{W}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{W}$$

où

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \text{Cov}(R_1, R_2) & \cdots & \text{Cov}(R_1, R_n) \\ \text{Cov}(R_2, R_1) & \sigma_2^2 & \cdots & \text{Cov}(R_2, R_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(R_n, R_1) & \text{Cov}(R_n, R_2) & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

En pratique, ces quantités sont remplacées par leurs estimateurs :

$$\hat{\mu}_P = \mathbf{W}^\top \hat{\boldsymbol{\mu}}$$

où

$$\bullet \mathbf{W} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ et}$$

$$\bullet \hat{\boldsymbol{\mu}} = \begin{pmatrix} \hat{\mu}_1 \\ \hat{\mu}_2 \\ \vdots \\ \hat{\mu}_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Et la variance :

$$\hat{\sigma}_P^2 = \mathbf{W}^\top \hat{\boldsymbol{\Sigma}} \mathbf{W}$$

où

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_1^2 & \widehat{\text{Cov}}(R_1, R_2) & \cdots & \widehat{\text{Cov}}(R_1, R_n) \\ \widehat{\text{Cov}}(R_2, R_1) & \hat{\sigma}_2^2 & \cdots & \widehat{\text{Cov}}(R_2, R_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{\text{Cov}}(R_n, R_1) & \widehat{\text{Cov}}(R_n, R_2) & \cdots & \hat{\sigma}_n^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Comme la variance d'un portefeuille dépend non seulement des variances individuelles des actifs, mais aussi de leurs covariances, la diversification consiste à combiner des actifs dont

les rendements ne sont pas parfaitement corrélés. Ainsi, pour réduire le risque du portefeuille, il s'agit de choisir des poids w_i qui diminuent la contribution des covariances élevées. Autrement dit, un portefeuille est mieux diversifié s'il combine des actifs faiblement corrélés.

C'est précisément cette idée que formalise Markowitz : parmi tous les portefeuilles offrant un même niveau d'espérance de rendement, il sélectionne ceux dont la variance est minimale. Ces portefeuilles sont dits *efficaces*, et l'ensemble de ces solutions forment la *frontière efficace*. Minimiser la variance pour un rendement donné revient donc à rechercher la combinaison d'actifs la plus diversifiée possible.

Nous pouvons à présent donner le modèle de Markowitz.

Proposition 1.3.1. (*Modèle de Markowitz*)

Soient $R_1, \dots, R_n$ les rendements de n actifs risqués et notons $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_n)^\top$. Nous supposons les variables aléatoires R_i linéairement indépendantes. Notons

$$\mathbb{E}[\mathbf{R}] = \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix},$$

et $\boldsymbol{\Sigma}$ la matrice de variance-covariance des rendements, supposée symétrique et définie positive.

Pour un rendement fixé $E \in \mathbb{R}$, considérons l'ensemble des portefeuilles P de poids

$$\mathbf{W} = (w_1, \dots, w_n)^\top$$

satisfaisant

$$\begin{cases} \mathbf{W}^\top \boldsymbol{\mu} = E \\ \mathbf{1}_n^\top \mathbf{W} = 1 \end{cases}$$

où $\mathbf{1}_n$ désigne le vecteur unitaire de dimension n .

Le **modèle de Markowitz** consiste à déterminer le portefeuille optimal P^* solution du problème d'optimisation

$$\min_P \sigma_P^2 = \min_{\mathbf{W}} \mathbf{W}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{W}$$

sous les contraintes ci-dessus.

La démonstration de ce modèle se fait aisément dans le cas sans contraintes, c'est ce que nous allons montrer. En revanche, lorsque des contraintes supplémentaires sont imposées sur les poids des actifs, le problème ne peut plus être résolu analytiquement. Il devient alors nécessaire de recourir à des méthodes numériques de programmation. Markowitz a proposé, dès les années 1950, un algorithme spécifique pour résoudre ce problème : l'algorithme de la ligne critique [26]. Dans les années 1970, Sharpe en a fourni une description détaillée.

Cet algorithme constitue la plus ancienne méthode de résolution permettant de déterminer la frontière efficiente en présence de contraintes.

La démonstration suivante repose sur [1] et [28]. La démonstration présentée diffère de la version traditionnelle. Dans la littérature mentionnée précédemment, la preuve du modèle de Markowitz est donnée sous forme scalaire, en manipulant les poids un par un. Afin d'assurer une cohérence avec les notations utilisées dans l'ensemble du mémoire, nous avons choisi de reformuler cette démonstration en notation matricielle. Ce choix présente plusieurs avantages. D'une part, elle permet d'exprimer le problème d'optimisation de façon compacte, directement compatible avec les outils numériques actuels. D'autre part, elle met en évidence la structure linéaire et quadratique du modèle, ce qui facilite la généralisation à un nombre arbitraire d'actifs. Enfin, la notation matricielle rend la démonstration plus lisible et plus rigoureuse, en évitant les manipulations terme à terme.

Démonstration. Afin de minimiser la variance, nous allons construire la frontière efficiente des portefeuilles et sélectionner le portefeuille avec la variance minimale pour un rendement donné.

La frontière efficiente peut être décrite comme l'ensemble des portefeuilles qui satisfont le problème de minimisation

$$\min_P \frac{1}{2} \sigma_P^2 = \min_{\mathbf{W}} \frac{1}{2} \mathbf{W}^\top \Sigma \mathbf{W} \quad (1.1)$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} E = \mathbf{W}^\top \boldsymbol{\mu} \\ 1 = \mathbf{1}_n^\top \mathbf{W} \end{cases} \quad (1.2)$$

Comme nous avons un problème d'optimisation sous contrainte, nous pouvons utiliser les multiplicateurs de Lagrange pour réécrire le problème (1.1). Nous obtenons ainsi l'expression suivante :

$$\min_{\mathbf{W}} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{W}^\top \Sigma \mathbf{W} + \gamma_1 (E - \mathbf{W}^\top \boldsymbol{\mu}) + \gamma_2 (1 - \mathbf{1}_n^\top \mathbf{W}) \right\}, \quad (1.3)$$

où γ_1 et γ_2 sont les multiplicateurs de Lagrange.

Notons L le Lagrangien, la fonction à minimiser suivante :

$$L(\mathbf{W}, \gamma_1, \gamma_2) = \frac{1}{2} \mathbf{W}^\top \Sigma \mathbf{W} + \gamma_1 (E - \mathbf{W}^\top \boldsymbol{\mu}) + \gamma_2 (1 - \mathbf{1}_n^\top \mathbf{W}).$$

Nous avons donc les conditions du premier ordre suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial w_k} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \gamma_1} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \gamma_2} = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

Calculons les dérivées partielles du système (1.4). Nous avons, pour tout $k = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial w_k} &= \frac{\partial}{\partial w_k} \left[\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n w_k \Sigma_{kj} w_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i \Sigma_{ik} w_k + \gamma_1 (E - w_k \mu_k) + \gamma_2 (1 - w_k) \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \Sigma_{kj} w_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Sigma_{ik} w_i + \gamma_1 (-\mu_k) + \gamma_2 (-1) \\ &= \sum_{i=1}^n \Sigma_{ik} w_i - \gamma_1 \mu_k - \gamma_2 \quad (\text{car la matrice } \Sigma \text{ est symétrique}) \\ &= (\Sigma \mathbf{W})_k - \gamma_1 \mu_k - \gamma_2. \end{aligned}$$

La deuxième dérivée vaut

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma_1} = E - \mathbf{W}^\top \boldsymbol{\mu}.$$

Et la troisième

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma_2} = 1 - \mathbf{1}_n^\top \mathbf{W}.$$

Le système (1.4) se réécrit :

$$\begin{cases} (\Sigma \mathbf{W})_k - \gamma_1 \mu_k - \gamma_2 = 0, & k = 1, \dots, n \\ E - \mathbf{W}^\top \boldsymbol{\mu} = 0 \\ 1 - \mathbf{1}_n^\top \mathbf{W} = 0 \end{cases}. \quad (1.5)$$

Les w_k qui satisfont ces 3 conditions minimisent la variance et sont uniques, vu la non singularité de Σ .

La première équation du système (1.5) peut se réécrire sous forme vectorielle de la façon suivante

$$\Sigma \mathbf{W} - \gamma_1 \boldsymbol{\mu} - \gamma_2 \mathbf{1}_n = 0.$$

Pour trouver w_k , il suffit d'isoler $\mathbf{W}$ et de sélectionner la $k^{\text{ème}}$ composante :

$$\begin{aligned} \Sigma \mathbf{W} &= \gamma_1 \boldsymbol{\mu} + \gamma_2 \mathbf{1}_n \\ \Leftrightarrow \Sigma^{-1} \Sigma \mathbf{W} &= \gamma_1 \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} + \gamma_2 \Sigma^{-1} \mathbf{1}_n \\ \Leftrightarrow \mathbf{W} &= \gamma_1 \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} + \gamma_2 \Sigma^{-1} \mathbf{1}_n. \end{aligned}$$

Ainsi, la $k^{\text{ème}}$ composante vaut

$$w_k = \gamma_1 (\Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu})_k + \gamma_2 (\Sigma^{-1} \mathbf{1}_n)_k. \quad (1.6)$$

Nous cherchons à trouver la variance d'un portefeuille efficient en fonction de son rendement espéré, afin de trouver l'équation de la frontière efficiente.

Pour exprimer la contrainte sur le rendement du portefeuille, l'Equation (1.6) est multipliée par μ_k et sommée sur $k = 1, \dots, n$. Nous obtenons

$$\sum_{k=1}^n w_k \mu_k = \gamma_1 \sum_{k=1}^n ((\Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu})_k \mu_k) + \gamma_2 \sum_{k=1}^n ((\Sigma^{-1} \mathbf{1}_n)_k \mu_k).$$

Et sous forme matricielle, en utilisant la symétrie de la matrice Σ^{-1} , l'expression devient

$$\mathbf{W}^T \boldsymbol{\mu} = \gamma_1 \boldsymbol{\mu}^T \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} + \gamma_2 \boldsymbol{\mu}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}_n. \quad (1.7)$$

Pour exprimer la contrainte de normalisation des poids, nous sommons (1.6) sur $k = 1, \dots, n$. Nous avons

$$\mathbf{1}_n^T \mathbf{W} = \gamma_1 \mathbf{1}_n^T \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} + \gamma_2 \mathbf{1}_n^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}_n. \quad (1.8)$$

Pour simplifier les notations, nous définissons les constantes suivantes à partir des équations (1.7) et (1.8) :

$$\begin{aligned} A &= \boldsymbol{\mu}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}_n \\ B &= \boldsymbol{\mu}^T \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} \\ C &= \mathbf{1}_n^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}_n \end{aligned}$$

La matrice de variance-covariance Σ étant définie positive, Σ^{-1} l'est aussi. Dès lors, B et C sont strictement positives puisqu'il s'agit de formes quadratiques associées à Σ^{-1} .

Nous pouvons à présent réécrire les contraintes (1.2) avec ces constantes

$$\begin{aligned} E &= \gamma_1 B + \gamma_2 A \\ 1 &= \gamma_1 A + \gamma_2 C \end{aligned}$$

Résolvons ce système pour trouver les expressions de γ_1 et γ_2

$$\begin{aligned} \begin{cases} E = \gamma_1 B + \gamma_2 A \\ 1 = \gamma_1 A + \gamma_2 C \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} E = \gamma_1 B + \gamma_2 A \\ \gamma_1 = \frac{1 - C\gamma_2}{A} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} E = B \left(\frac{1 - C\gamma_2}{A} \right) + \gamma_2 A \\ \gamma_1 = \frac{1 - C\gamma_2}{A} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} E = \gamma_2 \left(\frac{A^2 - BC}{A} \right) + \frac{B}{A} \\ \gamma_1 = \frac{1 - C\gamma_2}{A} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma_2 = \frac{B - AE}{BC - A^2} \\ \gamma_1 = \frac{BC - A^2}{BC - A^2} \end{cases} \end{aligned}$$

Maintenant que nous avons les expressions de γ_1 et γ_2 , nous pouvons les remplacer dans l'Equation (1.6).

$$w_k = \frac{(CE - A)(\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu})_k + (B - AE)(\Sigma^{-1}\mathbf{1}_n)_k}{BC - A^2} \quad k = 1, \dots, n.$$

Multiplions à présent la première expression du système (1.5) par w_k et sommons sur $k = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n (\Sigma \mathbf{W})_k w_k - \sum_{k=1}^n \gamma_1 \mu_k w_k - \sum_{k=1}^n \gamma_2 w_k = 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{k=1}^n w_k (\Sigma \mathbf{W})_k - \gamma_1 \sum_{k=1}^n w_k \mu_k - \gamma_2 \sum_{k=1}^n w_k = 0 \\ \Leftrightarrow & \mathbf{W}^\top \Sigma \mathbf{W} - \gamma_1 \mathbf{W}^\top \boldsymbol{\mu} - \gamma_2 \mathbf{1}_n^\top \mathbf{W} = 0 \\ \Leftrightarrow & \mathbf{W}^\top \Sigma \mathbf{W} = \gamma_1 \mathbf{W}^\top \boldsymbol{\mu} + \gamma_2 \mathbf{1}_n^\top \mathbf{W}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Vu la définition de σ_P^2 et les contraintes (1.2), cette expression peut se réécrire sous la forme :

$$\sigma_P^2 = \gamma_1 E + \gamma_2.$$

Substituons γ_1 et γ_2 dans cette expression :

$$\sigma_P^2 = \frac{CE^2 - 2AE + B}{BC - A^2}.$$

Cette expression est la variance d'un portefeuille efficient en fonction de son rendement espéré.

Nous pouvons à présent définir l'équation de la frontière efficiente en fonction de l'espérance et de la variance. Vu l'expression de la variance, cette frontière est une parabole dans le plan (μ, σ^2) .

Nous cherchons à minimiser la fonction. Pour cela, il suffit de calculer les dérivées première et seconde de la variance pour montrer que cette fonction est strictement convexe.

Ensuite, le minimum sera déterminé par $\frac{\partial \sigma_P^2}{\partial E} = 0$.

Calculons cette expression :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_P^2}{\partial E} &= \frac{1}{BC - A^2} \left(\frac{\partial}{\partial E} (CE^2 - 2AE + B) \right) \\ &= \frac{1}{BC - A^2} (2CE - 2A) \end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial \sigma_P^2}{\partial E} = 0 \Leftrightarrow 2CE - 2A = 0 \Leftrightarrow E = \frac{A}{C}.$$

La dérivée seconde est

$$\frac{\partial^2 \sigma_P^2}{\partial E^2} = \frac{2C}{BC - A^2}.$$

En considérant l'espace vectoriel muni du produit scalaire

$$\langle x, y \rangle = x^\top \Sigma^{-1} y,$$

nous pouvons réécrire A, B et C sous la forme :

$$A = \langle x, y \rangle,$$

$$B = \langle x, x \rangle,$$

$$C = \langle y, y \rangle,$$

avec $x = \mu$ et $y = \mathbf{1}_n$. Ainsi, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$A^2 = \langle x, y \rangle^2 < \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle = BC.$$

L'inégalité étant stricte car les vecteurs x et y ne sont pas colinéaires. Ainsi, $BC - A^2 > 0$ et $\frac{2C}{BC - A^2} > 0$, ce qui implique que la fonction est strictement convexe.

Le graphique de cette fonction est donc une parabole convexe et le minimum est en $(\mu_{\min}, \sigma_{\min}^2)$.

De plus, nous savons que $\mu_{\min} = E = \frac{A}{C}$. Trouvons l'autre composante de ce point.

$$\sigma_{\min}^2 = \frac{C \frac{A^2}{C^2} - 2A \frac{A}{C} + B}{BC - A^2} = \frac{A^2 - 2A^2 + BC}{C(BC - A^2)} = \frac{BC - A^2}{C(BC - A^2)} = \frac{1}{C}.$$

Ce portefeuille est le portefeuille de variance minimale.

Pour représenter la frontière efficiente dans le plan (σ_P, μ_P) , il suffit d'exprimer μ_P en fonction de σ_P . Pour cela, il faut simplement résoudre l'équation suivante :

$$C\mu_P^2 - 2A\mu_P + (B - (BC - A^2)\sigma_P^2) = 0.$$

Il s'agit d'une équation du second degré en μ_P . Donc les solutions suivantes sont directement obtenues :

$$\mu_P = \frac{A}{C} \pm \frac{1}{C} \sqrt{(BC - A^2)(C\sigma_P^2 - 1)} = \frac{A}{C} \pm \frac{1}{C} \sqrt{(BC - A^2)C(\sigma_P^2 - \frac{1}{C})},$$

ce qui donne une hyperbole.

La frontière efficiente est uniquement définie par la partie supérieure de cette hyperbole. L'expression de la frontière efficiente peut être réécrite à l'aide du portefeuille de variance minimale :

$$\mu_P = \mu_{\min} + \frac{1}{C} \sqrt{(BC - A^2)C(\sigma_P^2 - \sigma_{\min}^2)}.$$

Nous venons donc de trouver l'expression de la frontière efficiente ainsi que le point de cette frontière qui possède la variance minimum.

Ce qui conclut la preuve. $\square$

Nous cherchons à présent à illustrer la frontière efficiente ainsi que le portefeuille de variance minimale. Cette situation est illustrée à la Figure 1.2.

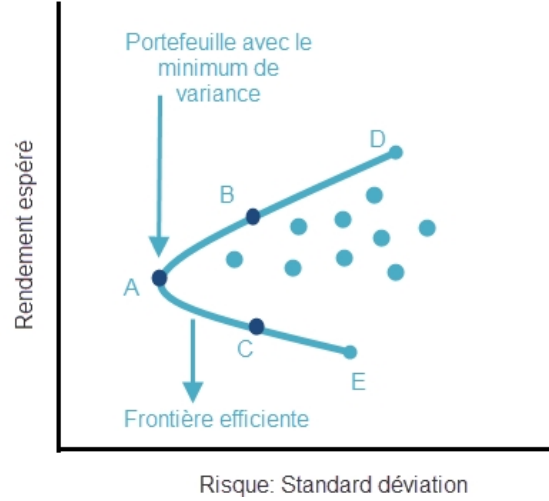


FIGURE 1.2 – Illustration de la frontière efficiente et du portefeuille de variance minimale. Source : [2].

Le point A représente le portefeuille de variance minimale. Les portefeuilles B, C, D et E sont situés sur la frontière, ce qui signifie que ce sont des portefeuilles efficaces. L'ensemble des autres points représente des portefeuilles non efficaces, car il existe toujours des portefeuilles offrant un meilleur rendement pour un même niveau de risque.

La formulation du modèle de Markowitz présentée précédemment, fondée sur la minimisation de la variance sous contrainte de rendement fixé, peut également être exprimée sous la forme d'un problème de maximisation d'utilité quadratique. Les deux modèles sont équivalents : ils génèrent le même ensemble de portefeuilles efficaces, simplement paramétrés différemment. Cette équivalence est établie dans la proposition suivante.

La formulation de ce nouveau modèle est introduite dans [17] et les justifications mathématiques sont tirées de [6].

Proposition 1.3.2. (*Équivalence entre les deux modèles de Markowitz*)

Le modèle de Markowitz décrit dans la Proposition 1.3.1 est équivalent au problème de maximisation d'utilité quadratique suivant :

$$\max_{\mathbf{W}} \mathbf{W}^T \boldsymbol{\mu} - \frac{\gamma}{2} \mathbf{W}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{W}$$

sous la contrainte : $\mathbf{1}_n^T \mathbf{W} = 1$, où $\gamma > 0$ est un paramètre d'aversion au risque.

Autrement dit, pour tout niveau de rendement E fixé réalisable, il existe un paramètre $\gamma > 0$ tel que les solutions optimales des deux modèles coïncident, et réciproquement.

Démonstration. Nous montrons que les solutions optimales des deux modèles s'écrivent sous la même forme.

Commençons par trouver la solution optimale du modèle de Markowitz introduit à la Proposition 1.3.1, à savoir le modèle

$$\min_W \mathbf{W}^\top \Sigma \mathbf{W}, \quad (1.10)$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} \mathbf{W}^\top \boldsymbol{\mu} = E \\ \mathbf{1}_n^\top \mathbf{W} = 1 \end{cases}.$$

En reprenant les résultats de la preuve de la Proposition 1.3.1, le Lagrangien s'écrit :

$$L(\mathbf{W}, \gamma_1, \gamma_2) = \mathbf{W}^\top \Sigma \mathbf{W} + \gamma_1(E - \mathbf{W}^\top \boldsymbol{\mu}) + \gamma_2(1 - \mathbf{1}_n^\top \mathbf{W}).$$

Les conditions du premier ordre donnent

$$\begin{cases} \Sigma \mathbf{W} - \gamma_1 \boldsymbol{\mu} - \gamma_2 \mathbf{1}_n = 0 \\ E - \mathbf{W}^\top \boldsymbol{\mu} = 0 \\ 1 - \mathbf{1}_n^\top \mathbf{W} = 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

Ainsi, nous obtenons la solution

$$\mathbf{W}^* = \gamma_1 \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} + \gamma_2 \Sigma^{-1} \mathbf{1}_n. \quad (1.12)$$

Calculons à présent la solution optimale du modèle de maximisation d'utilité quadratique

$$\max_W \mathbf{W}^\top \boldsymbol{\mu} - \frac{\gamma}{2} \mathbf{W}^\top \Sigma \mathbf{W}$$

sous la contrainte $\mathbf{1}_n^\top \mathbf{W} = 1$.

Le Lagrangien est

$$L(\mathbf{W}, \lambda) = \mathbf{W}^\top \boldsymbol{\mu} - \frac{\gamma}{2} \mathbf{W}^\top \Sigma \mathbf{W} + \lambda(1 - \mathbf{1}_n^\top \mathbf{W}).$$

Les conditions du premier ordre donnent

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mu} - \gamma \Sigma \mathbf{W} - \lambda \mathbf{1}_n = 0 \\ 1 - \mathbf{1}_n^\top \mathbf{W} = 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

Ainsi, la solution de ce modèle est

$$\mathbf{W}^* = \frac{1}{\gamma} \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} - \frac{\lambda}{\gamma} \Sigma^{-1} \mathbf{1}_n. \quad (1.14)$$

La seconde condition du premier ordre, $1 - \mathbb{1}_n^\top \mathbf{W} = 0$, est ensuite utilisée pour déterminer la valeur de λ de sorte que la solution (1.14) vérifie bien la contrainte de normalisation.

Ainsi, les expressions obtenues par les Equations (1.12) et (1.14) ont la même structure : une combinaison linéaire de $\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}$ et de $\Sigma^{-1}\mathbb{1}_n$.

En posant

$$\gamma_1 = \frac{1}{\gamma}$$

et

$$\gamma_2 = -\frac{\lambda}{\gamma},$$

nous voyons que les solutions des deux problèmes coïncident pour des choix appropriés de (γ_1, γ_2) et (γ, λ) . Réciproquement, pour tout couple (γ_1, γ_2) réalisant un portefeuille efficient dans le modèle de Markowitz, il existe un $\gamma > 0$ et un λ tels que la solution du problème d'utilité quadratique soit identique.

Cela montre l'équivalence des deux formulations. $\square$

Remarque 1.3.3. Le paramètre γ doit être strictement positif. Si $\gamma = 0$, le problème de maximisation d'utilité devient linéaire :

$$\max_{\mathbf{W}} \mathbf{W}^\top \boldsymbol{\mu}$$

sous la contrainte $\mathbb{1}_n^\top \mathbf{W} = 1$, ce qui n'est plus équivalent au problème de Markowitz.

Si $\gamma < 0$, la fonction à maximiser devient strictement croissante en fonction de la variance, ce qui rend le problème non borné.

Ainsi, seule la condition $\gamma > 0$ garantit une fonction objective strictement concave et une solution unique, et permet de garantir l'équivalence avec le problème de Markowitz donné à la Proposition 1.3.1.

L'équivalence entre les deux formulations de Markowitz étant établie, nous pouvons désormais passer à l'extension naturelle du modèle : l'introduction d'un actif sans risque, qui conduit au Modèle d'Équilibre Des Actifs Financiers (MEDAF).

1.4 Modèle d'Équilibre Des Actifs Financiers

La section suivante repose principalement sur l'ouvrage [1].

Dans sa formulation initiale, la théorie de Markowitz n'utilise que des actifs risqués. Or, dans la pratique financière, il existe des actifs considérés comme sans risque. L'intégration de cet actif conduit au *Modèle d'Équilibre Des Actifs Financiers* (MEDAF), connu internationalement sous le nom de *Capital Asset Pricing Model* (CAPM). Cette théorie constitue une extension directe du cadre de Markowitz.

1.4.1 Contexte

Le MEDAF est un modèle introduit par Sharpe dans les années 1960 [32], puis formalisé par plusieurs auteurs. Alors que Markowitz étudie un investisseur ne disposant que d'actifs risqués, nous introduisons à présent un actif sans risque.

Un *actif sans risque* est un actif dont le rendement est certain, c'est-à-dire égal à sa valeur espérée avec une probabilité égale à 1. Grâce à cet actif sans risque, l'investisseur peut combiner un portefeuille risqué efficient A avec l'actif sans risque. Si l'actif sans risque a un poids w dans le portefeuille combiné, alors, par normalisation des poids, le portefeuille risqué A a un poids $1 - w$. L'espérance de rendement du portefeuille combiné P est :

$$\mu_P = \mathbf{W}^\top \boldsymbol{\mu} \quad (1.15)$$

où

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} w \\ 1 - w \end{pmatrix}$$

et

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} R_f \\ \mu_A \end{pmatrix},$$

R_f désigne le rendement de l'actif sans risque et w le poids de cet actif dans le portefeuille P .

La variance du portefeuille P s'écrit :

$$\begin{aligned} \sigma_P^2 &= w^2 \sigma_f^2 + (1 - w)^2 \sigma_A^2 + 2\text{Cov}(wR_f, (1 - w)R_A) \\ &= (1 - w)^2 \sigma_A^2. \end{aligned}$$

Par définition de l'actif sans risque, sa variance est nulle et comme son rendement est constant, sa covariance avec tout actif risqué est également nulle. Ainsi, le risque associé au portefeuille P est donné par son écart-type :

$$\sigma_P = (1 - w)\sigma_A. \quad (1.16)$$

Les Equations (1.15) et (1.16) montrent que tout portefeuille combinant l'actif sans risque et un portefeuille risqué efficient s'inscrit sur une droite dans le plan (σ_P, μ_P) . Nous pouvons à présent caractériser cette droite.

1.4.2 Droite de marché des capitaux

Nous avons vu que les Equations (1.15) et (1.16) dépendent toutes deux du poids w investi dans l'actif sans risque. En exprimant ce paramètre en termes de risques, il est possible d'obtenir une relation directe entre μ_P et σ_P . Cette relation est linéaire et définit la *droite de marché des capitaux*, connue internationalement sous le nom de *Capital Market*

Line (CML).

Pour l'établir, isolons d'abord w dans l'équation (1.16) :

$$\begin{aligned} (1.16) &\Leftrightarrow 1 - w = \frac{\sigma_P}{\sigma_A} \\ &\Leftrightarrow w = 1 - \frac{\sigma_P}{\sigma_A}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Ainsi, en remplaçant w dans l'Equation (1.15) par l'expression précédente, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mu_P &= \left(1 - \frac{\sigma_P}{\sigma_A}\right) R_f + \frac{\sigma_P}{\sigma_A} \mu_A \\ &= R_f + \left(\frac{\mu_A - R_f}{\sigma_A}\right) \sigma_P. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Dans le repère (σ_P, μ_P) , cette équation correspond à une droite d'ordonnée à l'origine R_f et de pente $\left(\frac{\mu_A - R_f}{\sigma_A}\right)$.

Ainsi, pour chaque portefeuille risqué efficient, il est possible de construire une droite issue du taux sans risque R_f . Parmi toutes ces droites, celle qui est tangente à la frontière efficiente joue un rôle particulier : elle correspond à la combinaison de l'actif sans risque avec le portefeuille risqué efficient permettant d'atteindre les rendements les plus élevés pour un niveau de risque donné. Le point de tangence de ces deux droites est appelé *portefeuille tangent* et est noté M . La droite issue de R_f et passant par le portefeuille tangent M représente l'ensemble des combinaisons possibles entre l'actif sans risque et ce portefeuille risqué optimal. Elle constitue la frontière efficiente dans un univers où un actif sans risque est disponible. Cette droite est la CML. La Figure 1.3 illustre cette droite, ainsi que le portefeuille tangent M , point de tangence entre la CML et la frontière efficiente des actifs risqués.

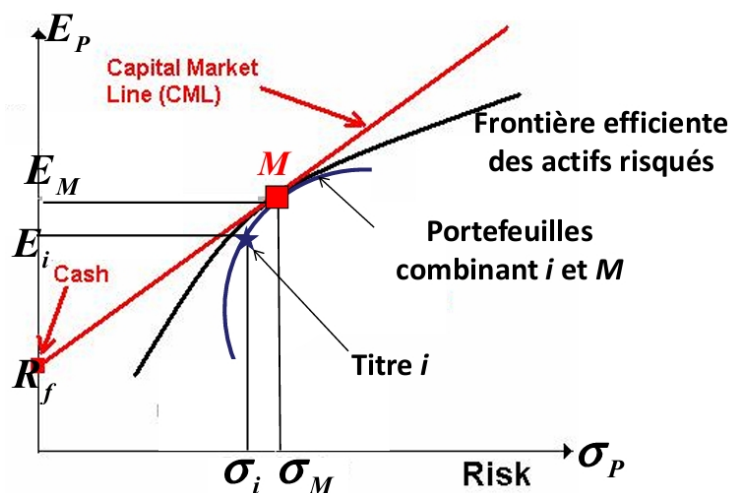


FIGURE 1.3 – Illustration de la CML. Source : [23].

Comme précédemment, l'investisseur choisira un portefeuille situé sur cette droite, en fonction de son aversion au risque. La CML décrit les choix optimaux des investisseurs en présence d'un actif sans risque.

Pour passer d'une analyse individuelle à une analyse de marché, il est nécessaire d'introduire une situation d'équilibre dans laquelle les portefeuilles détenus par les investisseurs sont compatibles avec l'offre totale des actifs. C'est dans ce cadre que s'inscrit la théorie de l'équilibre, qui conduit au MEDAF.

1.4.3 Théorie de l'équilibre

Nous avons jusqu'ici analysé le comportement d'un investisseur en présence d'un actif sans risque. Passons maintenant à une analyse de marché, en considérant l'ensemble des investisseurs. Nous supposons que ceux-ci partagent les mêmes anticipations : ils attribuent les mêmes valeurs de rendement, de variance, de covariance et disposent donc de la même frontière efficiente. Dans ces conditions, tous choisissent de répartir leur investissement entre l'actif sans risque et le même portefeuille risqué efficient, M , le portefeuille tangent.

Un marché est à l'équilibre lorsque l'offre totale d'actifs disponibles est égale à la demande agrégée des investisseurs. Autrement dit, lorsque le marché est à l'équilibre, tous les actifs disponibles sont détenus par des investisseurs. Or, si tous les investisseurs détiennent une part, déterminée selon leur aversion au risque, du même portefeuille risqué M , alors ce portefeuille doit contenir l'ensemble des actifs risqués disponibles sur le marché, pondérés selon leur capitalisation respective. Autrement dit, sous l'hypothèse d'équilibre du marché, le portefeuille tangent coïncide avec le portefeuille de marché.

Dans ce cadre, la frontière efficiente commune à tous les investisseurs, est simplement la CML donnée par :

$$\mu_P = R_f + \left(\frac{\mu_M - R_f}{\sigma_M} \right) \sigma_P, \quad (1.19)$$

où P est le portefeuille optimal de chaque investisseur, M le portefeuille de marché et R_f le rendement de l'actif sans risque.

Dans le repère (σ_P, μ_P) , cette équation correspond à une droite passant par le point $(0, R_f)$ et de pente $\frac{\mu_M - R_f}{\sigma_M}$.

La théorie de l'équilibre permet ainsi d'associer le portefeuille tangent au portefeuille de marché. Pour déterminer la relation entre le rendement espéré d'un actif et son risque systématique, il est nécessaire d'introduire les hypothèses supplémentaires qui caractérisent l'environnement du MEDAF.

1.4.4 Hypothèses, formulation et démonstration du MEDAF

Après avoir introduit l'intuition, la droite de marché des capitaux et la théorie de l'équilibre, nous pouvons à présent démontrer rigoureusement le MEDAF.

Le MEDAF s'intéresse aux titres individuels. Contrairement aux portefeuilles efficients, les titres pris isolément ne se situent pas sur la CML. Ainsi, leur rendement n'est pas entièrement déterminé par le risque total. En effet, seule une partie du risque d'un actif est pertinente pour l'investisseur : la composante qui ne peut pas être éliminée par la diversification.

Sous un ensemble d'hypothèses, nous allons montrer que le rendement espéré d'un actif individuel est entièrement caractérisé par son risque systématique, c'est-à-dire par sa contribution au risque du portefeuille de marché.

Hypothèses

Comme le MEDAF découle du modèle de Markowitz, certaines hypothèses sont communes aux deux modèles. Les hypothèses de base sont :

1. Les investisseurs sont averses au risque.
2. Les investisseurs maximisent leur fonction d'utilité.
3. Les investisseurs fondent leurs décisions uniquement sur les deux premiers moments de la distribution des rendements, c'est-à-dire l'espérance et la variance.

Afin de garantir l'existence d'un portefeuille de marché et d'assurer l'équilibre, des hypothèses supplémentaires sont introduites :

4. Tous les investisseurs planifient sur une même période d'investissement.
5. Les investisseurs peuvent emprunter et prêter au taux sans risque, sans limitation.
6. Les investisseurs attribuent les mêmes prédictions, au niveau de l'espérance de rendement, de la variance et de la covariance et ce, pour tous les actifs.
7. Les marchés sont parfaits.

Ces hypothèses garantissent que tous les investisseurs détiennent une combinaison de l'actif sans risque et du même portefeuille risqué efficient. En équilibre, ce portefeuille correspond au portefeuille de marché.

Démonstration du MEDAF

Nous pouvons à présent formaliser mathématiquement le MEDAF et en établir la démonstration.

Proposition 1.4.1. (*Modèle d'Équilibre Des Actifs Financiers*)

Supposons les 7 hypothèses citées précédemment vérifiées.

Soient n actifs risqués avec $\mu_1, \dots, \mu_n$ leur espérance de rendement, R_f le rendement d'un actif sans risque, M le portefeuille de marché et μ_M son espérance de rendement.

Alors, pour tout $i = 1, \dots, n$, le rendement espéré de l'actif i se caractérise par :

$$\mu_i = R_f + \beta_i(\mu_M - R_f),$$

avec β_i le risque systématique de l'actif i , défini par $\beta_i = \frac{\text{Cov}(R_i, R_M)}{\sigma_M^2}$.

Cette expression est l'équation d'une droite appelée *droite de marché des titres*, connue internationalement sous le nom *Security Market Line* (SML).

Il est important de souligner que cette relation constitue une prédiction théorique du ME-DAF en situation d'équilibre. Elle ne décrit pas nécessairement les rendements observés, mais le rendement que le modèle attribue à un actif compte tenu de son risque systématique.

La preuve suivante repose sur [9].

Démonstration. Soit le portefeuille P composé d'un actif risqué i de poids w et du portefeuille de marché M de poids $1 - w$.

Ainsi, le portefeuille P se décompose comme :

$$P = wi + (1 - w)M.$$

Son espérance de rendement vaut :

$$\mu_P = w\mu_i + (1 - w)\mu_M,$$

et son écart-type :

$$\sigma_P = (w^2\sigma_i^2 + (1 - w)^2\sigma_M^2 + 2w(1 - w)\text{Cov}(R_i, R_M))^{1/2}.$$

Par définition du portefeuille de marché M , la proportion de l'actif i détenue dans M est fixée par sa valeur de marché. A l'équilibre, M est un portefeuille efficient. Ainsi, la pente locale de la relation rendement-risque au point M doit être égale à la pente de la droite de marché des capitaux. Pour obtenir cette pente locale, nous considérons les variations de l'espérance et de l'écart-type du portefeuille P lorsque le poids w de l'actif i varie. Donc, le changement de l'espérance et de l'écart-type de P par rapport aux proportions du portefeuille, w , investie dans l'actif i est déterminée par les dérivées partielles par rapport à w . On a :

$$\frac{\partial \mu_P}{\partial w} = \mu_i - \mu_M \tag{1.20}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_P}{\partial w} = & \frac{1}{2} (w^2\sigma_i^2 + (1 - w)^2\sigma_M^2 + 2w(1 - w)\text{Cov}(R_i, R_M))^{-1/2} \cdot \\ & (2w\sigma_i^2 - 2(1 - w)\sigma_M^2 + 2\text{Cov}(R_i, R_M) - 4w\text{Cov}(R_i, R_M)). \end{aligned} \tag{1.21}$$

Vu l'hypothèse d'équilibre de marché, le portefeuille M représente l'ensemble agrégé de tous les portefeuilles des investisseurs. Toute déviation par rapport à cette composition correspondrait à une demande excessive pour l'actif i . A l'équilibre, cette demande excessive doit être nulle, ce qui revient à dire que le poids w de l'actif i dans le portefeuille P doit être évalué en $w = 0$.

Ainsi, l'analyse à l'équilibre doit être menée au point $M(\sigma_M, \mu_M)$.

Les Equations (1.20) et (1.21) évaluées en $w = 0$ donnent :

$$\left. \frac{\partial \mu_P}{\partial w} \right|_{w=0} = \mu_i - \mu_M$$

et

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \sigma_P}{\partial w} \right|_{w=0} &= \frac{1}{2} (\sigma_M^2)^{-1/2} (-2\sigma_M^2 + 2\text{Cov}(R_i, R_M)) \\ &= \frac{1}{2} \frac{(2\text{Cov}(R_i, R_M) - 2\sigma_M^2)}{(\sigma_M^2)^{1/2}} \\ &= \frac{\text{Cov}(R_i, R_M) - \sigma_M^2}{\sigma_M}. \end{aligned}$$

Ainsi, la pente de la courbe risque-rendement au point M , sous l'hypothèse de l'équilibre de marché, est donnée par :

$$\left. \frac{\frac{\partial \mu_P}{\partial w}}{\frac{\partial \sigma_P}{\partial w}} \right|_{w=0} = \frac{(\mu_i - \mu_M)\sigma_M}{\text{Cov}(R_i, R_M) - \sigma_M^2}.$$

Vu l'unicité de la CML, la pente de la droite ainsi trouvée doit être égale à la pente de la CML.

Par l'Equation (1.19), nous savons que la pente de la CML est donnée par :

$$\frac{\mu_M - R_f}{\sigma_M}.$$

Ainsi, nous obtenons l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\mu_M - R_f}{\sigma_M} &= \frac{(\mu_i - \mu_M)\sigma_M}{\text{Cov}(R_i, R_M) - \sigma_M^2} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{\mu_M - R_f}{\sigma_M} \right) (\text{Cov}(R_i, R_M) - \sigma_M^2) \frac{1}{\sigma_M} &= \mu_i - \mu_M \\ \Leftrightarrow \frac{(\mu_M - R_f)\text{Cov}(R_i, R_M)}{\sigma_M^2} - \mu_M + R_f &= \mu_i - \mu_M \\ \Leftrightarrow \mu_M + \frac{(\mu_M - R_f)\text{Cov}(R_i, R_M)}{\sigma_M^2} - \mu_M + R_f &= \mu_i \\ \Leftrightarrow R_f + \frac{(\mu_M - R_f)\text{Cov}(R_i, R_M)}{\sigma_M^2} &= \mu_i. \end{aligned}$$

De plus, en posant le risque systématique $\beta_i = \frac{\text{Cov}(R_i, R_M)}{\sigma_M^2}$, nous avons

$$\mu_i = R_f + \beta_i(\mu_M - R_f).$$

□

Nous cherchons à présent à illustrer graphiquement ce modèle. Pour cela, nous avons fixé le taux sans risque à 0.02. Ainsi, la Figure 1.4 illustre les résultats obtenus.

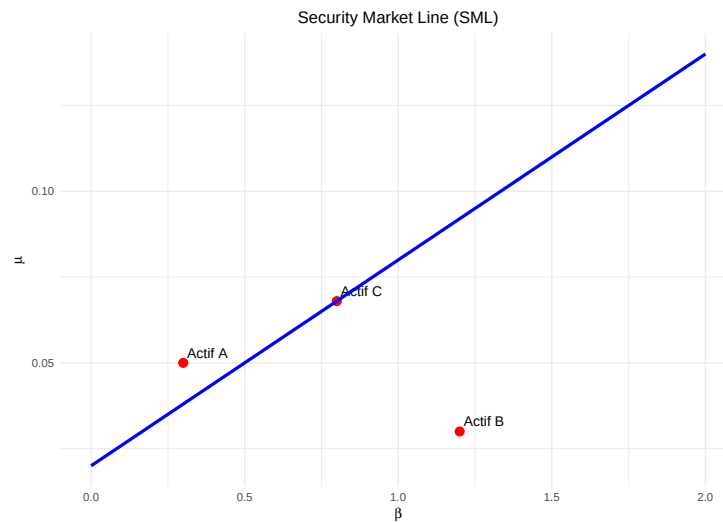


FIGURE 1.4 – Illustration de la SML.

La SML est donc représentée par une droite dans le repère (β, μ) où l'ordonnée à l'origine, le point $(0; 0.02)$, correspond au taux sans risque R_f et la pente vaut 0.06. Trois actifs sont représentés sur le graphique :

- **Actif A** : Il se situe au-dessus de la SML. Cela signifie que l'actif est sous-évalué. Autrement dit, son espérance de rendement prédite par le MEDAF est plus faible que son espérance de rendement réellement observée ;
- **Actif B** : Il est sous la SML, il est donc surévalué. Son espérance de rendement prédite par le MEDAF est plus élevée que l'espérance de rendement observée ;
- **Actif C** : Il se situe sur la SML, il est correctement évalué. L'espérance de rendement prédite par le MEDAF coïncide avec l'espérance de rendement observée.

La relation du MEDAF repose donc essentiellement sur l'existence d'un actif sans risque et sur la possibilité d'emprunter et de prêter à ce taux. Or, cette hypothèse est souvent critiquée, tant pour des raisons théoriques que pratiques. Plusieurs auteurs ont dès lors proposé des généralisations du modèle lorsque cette condition n'est plus satisfaite.

1.4.5 Modifications du MEDAF

Les hypothèses du MEDAF étant relativement restrictives, plusieurs auteurs se sont intéressés à celles-ci afin de généraliser le modèle même lorsque l'une ou plusieurs hypothèses d'origine ne sont plus respectées. Parmi ces extensions, le modèle développé par Black dans les années 1970 [5], également appelé *modèle zéro-bêta*, constitue l'alternative la plus utilisée lorsque l'actif sans risque n'est pas disponible. C'est pourquoi il sera analysé en détail.

Proposition 1.4.2. (*Modèle Zéro-Bêta de Black*)

Si aucun actif sans risque n'est disponible sur le marché et que l'hypothèse 5. donnée à la Section 1.4.4, n'est pas respectée, le modèle du MEDAF peut être généralisé. Dans ce cas, pour tout actif i , le modèle devient :

$$\mu_i = \mu_Z + \beta_i (\mu_M - \mu_Z)$$

où

- μ_i est l'espérance de rendement de l'actif risqué i ,
- M est le portefeuille de marché et μ_M son espérance de rendement,
- β_i est le risque systématique, et
- Z est le portefeuille zéro-bêta et μ_Z son espérance de rendement.

Remarques 1.4.1.

- Les six autres hypothèses du MEDAF, données à la Section 1.4.4, restent vérifiées, seule l'hypothèse 5. est remise en question.
- Le portefeuille zéro-bêta est un portefeuille efficient vérifiant $\beta_Z = 0$, c'est-à-dire avec un risque systématique nul.
- Dans ce modèle, le portefeuille Z joue un rôle analogue à celui de l'actif sans risque.

La preuve est similaire à celle de la Proposition 1.4.1.

En l'absence de l'hypothèse 5., la droite de marché des capitaux ne peut plus être construite, car il n'existe plus un portefeuille tangent unique reliant un actif sans risque à la frontière efficiente.

Black montre cependant que la structure du MEDAF peut être préservée. En effet, même sans actif sans risque, il existe un portefeuille efficient Z tel que $\beta_Z = 0$. Ce portefeuille, appelé *portefeuille zéro-bêta*, est défini comme le portefeuille efficient dont la covariance avec le marché est nulle. Il joue un rôle analogue à celui de l'actif sans risque. Le modèle suppose que tous les portefeuilles zéro-bêta peuvent être déterminés et donc qu'ils ont tous la même espérance de rendement μ_Z car ils possèdent tous le même risque systématique $\beta_Z = 0$. De plus, dans ce modèle, le portefeuille Z devient l'ordonnée à l'origine de la SML et la pente de la SML est donnée par $\mu_M - \mu_Z$.

La relation entre rendement espéré et risque systématique reste linéaire. Ainsi, le modèle de

Black conserve la structure du MEDAF tout en supprimant l'hypothèse la plus restrictive du modèle original.

Afin d'illustrer visuellement les différences entre le MEDAF et le modèle de Black, nous comparons les deux SML obtenues à partir de paramètres simulés. Le MEDAF est représenté avec une ordonnée à l'origine $R_f = 0.02$ et une pente de 0.06, tandis que le modèle de Black utilise une ordonnée à l'origine $\mu_Z = 0.03$ et une pente de 0.05.

La Figure 1.5 présente les deux SML ainsi obtenues.

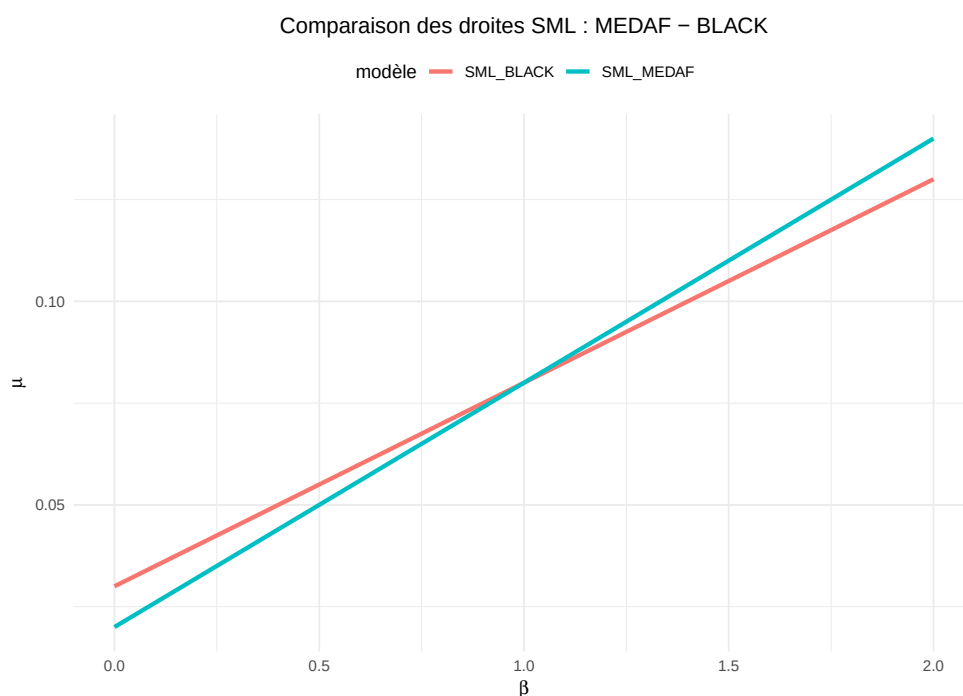


FIGURE 1.5 – Comparaison de la SML : MEDAF - modèle de Black.

Les deux droites s'intersectent en $\beta = 1$, point correspondant au portefeuille de marché, dont le rendement espéré μ_M est identique dans les deux modèles. En revanche, pour les actifs dont le bêta diffère de 1, les rendements prédits divergent : le modèle de Black implique un rendement plus élevé pour les actifs de faible bêta et un rendement plus faible pour les actifs de bêta élevé, comparativement au MEDAF classique.

Chapitre 2

Analyse de la performance

Le chapitre suivant repose sur [1] et [17].

L'analyse de la performance regroupe l'ensemble des méthodes utilisées permettant d'étudier, d'expliquer et d'évaluer les résultats obtenus dans la gestion de portefeuille. Elle se structure classiquement en trois catégories complémentaires :

- **La mesure de performance** : elle consiste à quantifier le rendement réalisé par le portefeuille sur une période donnée, ainsi que le risque associé, au moyen d'indicateurs tels que le rendement simple ou la volatilité ;
- **L'évaluation de la performance** : elle analyse si la performance obtenue est satisfaisante en comparaison avec un indice de référence ou au regard du risque pris. Elle identifie également des facteurs de surperformance ou sous-performance ;
- **L'attribution de la performance** : elle décompose le rendement en différentes sources (allocation, sélection, attribution) afin d'identifier la contribution exacte de chaque décision de gestion dans la performance globale.

Ces trois dimensions permettent d'obtenir une vision complète et rigoureuse de la performance d'un portefeuille. Dans ce chapitre, nous présentons successivement chacune d'entre elles.

2.1 Mesures de performance et leur évaluation

Cette section aborde les principales mesures de performance utilisées dans la gestion de portefeuille ainsi que leur interprétation.

La mesure de performance repose avant tout sur le calcul des rendements. Plusieurs formules existent selon que l'on tienne compte ou non des flux financiers ou d'autres contraintes. Dans ce qui suit, nous présentons uniquement la formule de base¹, applicable lorsque la composition du portefeuille reste constante durant la période d'évaluation.

1. Pour une présentation détaillée des autres formules, veuillez consulter l'ouvrage [1].

Définition 2.1.1. (Rendement d'un portefeuille : formule de base)

Le **rendement d'un portefeuille** est donné par la formule :

$$R_{P,t} = \frac{V_t - V_{t-1} + D_t}{V_{t-1}}$$

où

- V_{t-1} est la valeur du portefeuille au début de la période ;
- V_t est la valeur du portefeuille à la fin de la période ;
- D_t est le flux versé par le portefeuille durant la période d'évaluation.

Cette expression peut également s'écrire comme une combinaison linéaire des rendements individuels :

$$R_{P,t} = \sum_{i=1}^n w_{i,t} R_{i,t}.$$

La composition du portefeuille étant constante durant la période considérée, le rendement du portefeuille correspond à la somme pondérée des rendements des actifs qui le composent, ce qui est directement lié à la Définition 1.3.5.

Cependant, la seule mesure de rendement ne suffit pas pour évaluer la performance d'un portefeuille. Deux portefeuilles peuvent avoir le même rendement sans pour autant avoir été exposés au même niveau de risque. Il est donc nécessaire d'introduire une mesure du risque, ce risque dépend à la fois de la composition du portefeuille et de l'évolution des marchés.

Pour quantifier la performance de manière plus complète, nous utilisons différents ratios de performance, combinant rendement et risque. Certains reposent sur le risque total, comme le ratio de Sharpe, d'autres sur le risque systématique défini dans le cadre du MEDAF, comme le ratio de Treynor ou l'alpha de Jensen.

Enfin, l'évaluation de la performance passe souvent par une comparaison avec un portefeuille de référence, appelé *benchmark*. Cette comparaison permet de mesurer la surperformance ou la sous-performance du portefeuille par rapport au marché.

2.1.1 Ratio de Sharpe

Parmi les ratios de performance tenant compte du risque total, le plus connu est le *ratio de Sharpe*.

Nommé d'après William Sharpe, dans son article en 1966 [33], ce ratio mesure l'excédent du rendement d'un portefeuille par rapport au taux sans risque, ajusté en fonction de son risque total.

Ce ratio s'appuie directement sur les notions de rendement espéré et de risque, définis dans le Chapitre 1. Le rendement excédentaire correspond à la différence entre l'espérance de rendement du portefeuille et le taux sans risque, tandis que le risque total est mesuré par l'écart-type du portefeuille.

Définition 2.1.2. (Ratio de Sharpe)

Le **ratio de Sharpe** d'un portefeuille P est défini par :

$$S_P = \frac{\mu_P - R_f}{\sigma_P},$$

avec

- μ_P l'espérance de rendement du portefeuille P ;
- R_f le taux sans risque ;
- σ_P l'écart-type des rendements du portefeuille P .

En pratique, le ratio de Sharpe est calculé grâce à l'estimation empirique de μ_P , noté $\hat{\mu}_P$, et de σ_P , noté $\hat{\sigma}_P$.

Prenons le portefeuille de marché M comme benchmark. Le ratio de Sharpe de ce portefeuille s'écrit :

$$S_M = \frac{\mu_M - R_f}{\sigma_M}.$$

Nous avons vu dans le Chapitre 2 que cette expression correspond à la pente de la droite du marché des capitaux (CML). A l'équilibre, le portefeuille tangent coïncide avec le portefeuille de marché M .

Si un portefeuille P appartient à cette droite, autrement dit, s'il peut être décrit comme une combinaison linéaire de l'actif sans risque et du portefeuille de marché M , alors les deux ratios de Sharpe sont égaux :

$$S_P = S_M.$$

Tous les portefeuilles situés sur la CML partagent donc la même pente dans le plan (σ, μ) , et par conséquent le même ratio de Sharpe. A l'équilibre, le ratio de Sharpe maximal est donc donné par la pente de la CML.

Lorsque le portefeuille P n'appartient pas à la CML, deux situations peuvent se produire : soit $S_P > S_M$, soit $S_P < S_M$. Analysons ces deux situations.

Cas 1 : $S_P > S_M$.

Dans ce cas, nous analysons la situation où le portefeuille P présente un ratio de Sharpe supérieur à celui du portefeuille de marché M . Cela signifie que le portefeuille P offre un rendement excédentaire par unité de risque supérieur à celui du portefeuille de marché. Autrement dit, P domine strictement M en termes de performance ajustée du risque.

Pour illustrer cette configuration, nous représentons ci-dessous la CML issue du taux sans risque, fixé à 0.02, qui passe par le portefeuille de marché M . La Figure 2.1 montre que le portefeuille P est situé au-dessus de la CML.

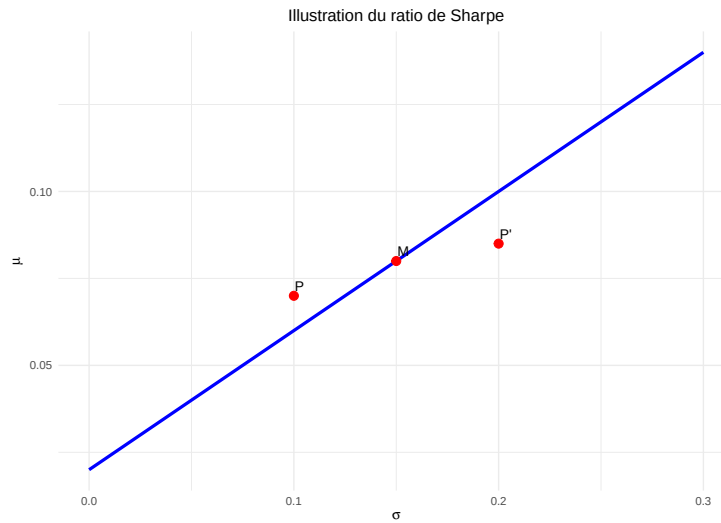


FIGURE 2.1 – CML et ratio de Sharpe sans l'hypothèse d'équilibre.

Une telle situation est incompatible avec l'équilibre du MEDAF. Si le portefeuille P offre un ratio de Sharpe supérieur à celui du marché, cela signifie que pour un même niveau de risque, le rendement excédentaire est supérieur pour le portefeuille P que pour M . Tous les investisseurs seraient alors incités à reproduire le portefeuille P . Pour ce faire, ils achèteraient les actifs surpondérés dans P , dont la demande augmenterait, ce qui ferait monter leur prix, et vendraient les actifs sous-pondérés, dont la demande diminuerait, ce qui ferait baisser leur prix. Ces variations de prix modifient les rendements attendus des actifs : une hausse des prix réduit le rendement futur attendu, tandis qu'une baisse de prix l'augmente. Ce processus d'ajustement se poursuit jusqu'à ce que le portefeuille de marché M redevienne le portefeuille tangent à la frontière efficient, c'est-à-dire celui qui maximise le ratio de Sharpe. Ainsi, la situation $S_P > S_M$ ne peut pas persister si le marché est à l'équilibre.

Cas 2 : $S_{P'} < S_M$.

Dans ce cas, nous analysons la situation où le portefeuille P' présente un ratio de Sharpe inférieur à celui du portefeuille de marché M . Cela signifie que le portefeuille P' offre un rendement excédentaire par unité de risque inférieur à celui du portefeuille de marché. Autrement dit, P' est strictement dominé par M en termes de performance ajustée du risque. La Figure 2.1 montre que le portefeuille P' est situé sous la CML.

Si le portefeuille P' offre un ratio de Sharpe inférieur à celui du marché, cela signifie que pour un même niveau de risque le rendement excédentaire est supérieur pour le portefeuille de marché M que pour P' . Dans ce cas, aucun investisseur rationnel n'a d'intérêt de détenir le portefeuille P' , puisqu'il existe une alternative, une combinaison de R_f et M offrant un rendement supérieur pour un risque identique. Les investisseurs se dirigent donc exclusivement vers des portefeuilles situés sur la CML, en particulier vers le portefeuille de marché M . Ainsi, un portefeuille se situant sous la CML ne peut pas être optimal et ne

peut pas être détenu à l'équilibre. La situation $S_{P'} < S_M$ ne peut donc pas persister si le marché est à l'équilibre.

Le ratio de Sharpe est une mesure de performance ajustée au risque total. Cependant, le risque total d'un portefeuille se décompose en un risque systématique et un risque non systématique, ce dernier pouvant être éliminé par la diversification. Seul le risque systématique, mesuré par le coefficient β_P , est rémunéré sur les marchés. Il est donc pertinent d'introduire une mesure de performance ne tenant compte que de cette composante du risque, c'est-à-dire du risque qui ne peut pas être diversifié. Dans cette optique, nous introduisons le ratio de Treynor.

2.1.2 Ratio de Treynor

Contrairement au ratio de Sharpe, qui utilise le risque total du portefeuille σ_P , le ratio de Treynor ne tient compte que du risque systématique β_P . Jack Treynor, dans son article de 1965 [36], introduit le concept du *ratio de Treynor* afin de mesurer la performance d'un portefeuille relativement au risque systématique qu'il supporte.

Ce ratio mesure l'excédent du rendement d'un portefeuille par rapport au taux sans risque, ajusté en fonction de son risque systématique.

Définition 2.1.3. (Ratio de Treynor)

Le **ratio de Treynor** d'un portefeuille P est défini par :

$$T_P = \frac{\mu_P - R_f}{\beta_P},$$

avec

- μ_P l'espérance de rendement du portefeuille P ;
- R_f le taux sans risque ;
- β_P le risque systématique du portefeuille P , défini par $\beta_P = \frac{\text{Cov}(R_P, R_M)}{\sigma_M^2}$.

En pratique, le ratio de Treynor est calculé grâce aux estimateurs empiriques de μ_P , noté $\hat{\mu}_P$, et β_P , noté $\hat{\beta}_P$.

Ce ratio est particulièrement pertinent lorsque le portefeuille est bien diversifié, car il ne tient compte que du risque systématique, β , risque non éliminable avec la diversification.

Prenons à nouveau le portefeuille de marché M comme benchmark. Le ratio de Treynor de ce portefeuille s'écrit :

$$T_M = \frac{\mu_M - R_f}{\beta_M}.$$

Or, $\beta_M = \frac{\text{Cov}(R_M, R_M)}{\sigma_M^2} = \frac{\sigma_M^2}{\sigma_M^2} = 1$. Ainsi, le ratio de Treynor du portefeuille de marché est simplement :

$$T_M = \mu_M - R_f.$$

Par la Proposition 1.4.1, nous avons :

$$\mu_i = R_f + \beta_i(\mu_M - R_f).$$

Si $\beta_i \neq 0$, cette expression se réécrit :

$$\frac{\mu_i - R_f}{\beta_i} = \mu_M - R_f. \quad (2.1)$$

Dans le cas particulier où $\beta_i = 0$, le MEDAF impose $\mu_i = R_f$. L'actif ne présente alors aucun risque systématique et le ratio de Treynor n'est pas défini.

Dans la suite, nous nous plaçons dans le cas $\beta_i \neq 0$, ce qui correspond aux portefeuilles risqués considérés ici. Le ratio de Treynor étant pertinent pour des portefeuilles bien diversifiés, c'est-à-dire pour lesquels $\beta_P > 0$, le cas où $\beta_i = 0$ pour tous les actifs i du portefeuille ne peut pas se produire.

L'Equation (2.1) appliquée à un portefeuille P donne :

$$\frac{\mu_P - R_f}{\beta_P} = \mu_M - R_f.$$

Ainsi, grâce au MEDAF, nous obtenons :

$$T_P = T_M.$$

Sous les hypothèses du MEDAF, et en particulier sous l'hypothèse d'équilibre du marché, les ratios de Treynor sont identiques pour tous les portefeuilles situés sur la Security Market Line (SML).

Graphiquement, la SML est la droite issue du point $(0, R_f)$, de pente $\mu_M - R_f$, correspondant au ratio de Treynor du portefeuille de marché. Tous les portefeuilles à l'équilibre se situent sur cette droite.

Nous illustrons graphiquement cette situation où R_f a été fixé à 0.02. La Figure 2.2 présente cette situation.

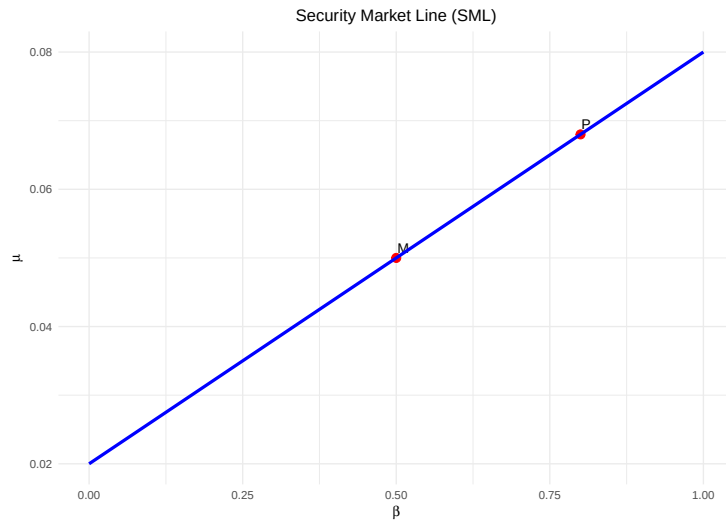


FIGURE 2.2 – SML et ratio de Treynor à l'équilibre.

Les portefeuilles P et M , situés sur la même droite, possèdent le même ratio de Treynor, c'est-à-dire $T_P = T_M$, ce qui confirme l'hypothèse d'équilibre. Plus précisément, dans le plan (β, μ) , le ratio de Treynor d'un portefeuille P correspond à la pente de la droite reliant le point $(0, R_f)$ au point $P(\beta_P, \mu_P)$.

Sans les hypothèses du MEDAF, deux situations peuvent se produire. Soit $T_P > T_M$, soit $T_P < T_M$. Analysons ces deux cas.

Pour illustrer ces situations, nous représentons ci-dessous la SML issue du taux sans risque, fixé à 0.02, passant par le portefeuille de marché M . La Figure 2.3 montre un portefeuille P , situé au-dessus de la SML et un portefeuille P' , situé en-dessous.

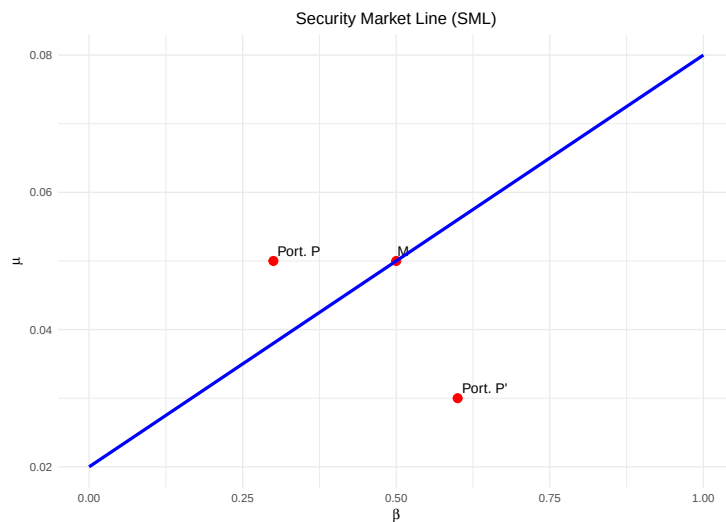


FIGURE 2.3 – SML et ratio de Treynor sans l'hypothèse d'équilibre.

Cas 1 : $T_P > T_M$.

Dans ce cas, le portefeuille P offre un rendement excédentaire par unité de risque systématique supérieur à celui du portefeuille de marché.

Une telle situation est incompatible avec l'équilibre du MEDAF. Si le portefeuille P offre un ratio de Treynor supérieur à celui du marché, cela signifie que, pour un même niveau de risque systématique, le rendement excédentaire de P est plus élevé que celui de M . Le portefeuille P domine donc strictement le portefeuille de marché en termes de performance ajustée du risque systématique. Dans un tel contexte, les investisseurs rationnels seraient incités à reproduire la composition du portefeuille P . Pour ce faire, ils achèteraient les actifs surpondérés dans P , ce qui augmenterait leur demande et donc leur prix, et vendraient les actifs sous-pondérés, ce qui ferait diminuer leur prix. Ces variations de prix modifient les rendements attendus des actifs : une hausse des prix réduit le rendement futur attendu, tandis qu'une baisse de prix l'augmente. Ainsi, la situation $T_P > T_M$ ne peut pas persister si le marché est à l'équilibre. Les ajustements de prix ramènent nécessairement le portefeuille P sur la SML, rétablissant l'équilibre du marché.

Cas 2 : $T_{P'} < T_M$.

Dans ce cas, le portefeuille P' offre un rendement excédentaire par unité de risque systématique inférieur à celui du portefeuille de marché.

Une telle situation est également incompatible avec l'équilibre du MEDAF. Si le portefeuille P' présente un ratio de Treynor inférieur à celui du marché, cela signifie que, pour un même niveau de risque systématique, son rendement excédentaire est plus faible que celui de M . Le portefeuille P' est donc dominé par M en termes de performance ajustée du risque systématique. Dans ce cas, aucun investisseur rationnel n'a d'intérêt de détenir le portefeuille P' , puisqu'il existe une alternative, une combinaison de R_f et M offrant un rendement supérieur pour un risque systématique identique. Les investisseurs se dirigent donc exclusivement vers des portefeuilles situés sur la SML, en particulier vers le portefeuille de marché M . Ainsi, un portefeuille se situant sous la SML ne peut pas être optimal et ne peut pas être détenu à l'équilibre. La situation $T_{P'} < T_M$ ne peut donc pas persister si le marché est à l'équilibre.

Le ratio de Treynor permet ainsi d'évaluer la performance d'un portefeuille relativement au risque systématique qu'il supporte. Toutefois, les deux mesures que nous venons de présenter ne renseignent pas sur l'écart éventuel entre la performance observée d'un portefeuille et celle prédite par le MEDAF. C'est précisément ce qu'évalue l'alpha de Jensen, qui quantifie la surperformance ou la sous-performance d'un portefeuille par rapport à la SML.

2.1.3 Alpha de Jensen

L'alpha de Jensen, introduit par Michael Jensen en 1968 dans son article [24], est une mesure de performance, qui comme le ratio de Treynor, repose sur le risque systématique. Cependant, contrairement aux ratios de Sharpe et de Treynor, cette mesure est une me-

sure d'écart à l'équilibre et non plus un ratio. L'alpha de Jensen compare l'espérance de rendement d'un portefeuille avec le rendement théorique prédit par le MEDAF.

Définition 2.1.4. (Alpha de Jensen)

L'alpha de Jensen d'un portefeuille P est défini par :

$$\alpha_P = \mu_P - [R_f + \beta_P(\mu_M - R_f)]$$

avec

- μ_P le rendement espéré du portefeuille P ;
- R_f le taux sans risque ;
- β_P le risque systématique du portefeuille P , défini par $\beta_P = \frac{\text{Cov}(R_P, R_M)}{\sigma_M^2}$;
- μ_M le rendement espéré du portefeuille de marché M .

Nous savons que l'expression $R_f + \beta_P(\mu_M - R_f)$ est le rendement espéré prédit par le MEDAF, donné à la Proposition 1.4.1, noté μ_P^{MEDAF} . Ainsi, l'alpha de Jensen théorique peut se réécrire :

$$\alpha_P = \mu_P - \mu_P^{\text{MEDAF}}.$$

En pratique, l'alpha de Jensen est estimé à l'aide d'une régression linéaire fondée sur la relation d'équilibre du MEDAF. L'idée est de confronter le rendement observé du portefeuille au rendement théorique prédit par le modèle.

Nous considérons donc le modèle de régression suivant :

$$R_P - R_f = \hat{\alpha}_P + \hat{\beta}_P(R_M - R_f) + \varepsilon_P$$

où ε_P est un terme d'erreur vérifiant $\mathbb{E}[\varepsilon_P] = 0$. Dans cette régression, $\hat{\alpha}_P$ correspond à l'ordonnée à l'origine de la régression et est l'estimateur empirique de α_P , tandis que $\hat{\beta}_P$ est l'estimateur empirique du risque systématique du portefeuille.

La définition théorique de α_P permet de définir la notion de surperformance ou de sous-performance par rapport au rendement prédit du MEDAF. Cependant, cet alpha théorique n'est pas observable, en pratique, l'analyse repose sur son estimateur empirique $\hat{\alpha}_P$ obtenu par régression. C'est donc le signe de $\hat{\alpha}_P$ qui est interprété économiquement. Trois situations peuvent se produire :

- $\hat{\alpha}_P = 0$: le rendement espéré prédit par le MEDAF est égal au rendement espéré du portefeuille P ;
- $\hat{\alpha}_P > 0$: le rendement espéré du portefeuille P est plus grand que le rendement prédit par le MEDAF, ce qui peut s'interpréter comme une surperformance du portefeuille ;
- $\hat{\alpha}_P < 0$: le rendement espéré du portefeuille P est plus petit que le rendement prédit par le MEDAF, ce qui correspond à une sous-performance du portefeuille.

Le bêta sert, dans le MEDAF, à prédire la valeur du rendement espéré. Ensuite, l'alpha mesure l'écart entre le rendement observé et ce rendement prédit. L'interprétation du alpha ne dépend pas de celle du bêta, mais celui-ci joue un rôle essentiel dans la construction du rendement théorique.

Graphiquement, dans le repère (β, μ) , l'alpha de Jensen est la distance verticale entre le point $P(\beta_P, \mu_P)$ et la SML.

Cette distance peut donc être nulle, positive ou négative et influencera la position du portefeuille P par rapport à la SML. Analysons ces trois cas :

- $\alpha_P = 0$: la distance verticale entre le portefeuille P et la SML est nulle, ainsi P se situe sur la SML ;
- $\alpha_P > 0$: la distance verticale entre le portefeuille P et la SML est positive, ainsi P se situe au-dessus de la SML ;
- $\alpha_P < 0$: la distance verticale entre le portefeuille P et la SML est négative, ainsi P se situe en dessous de la SML.

Nous pouvons ainsi représenter ces trois situations sur la Figure 2.4.

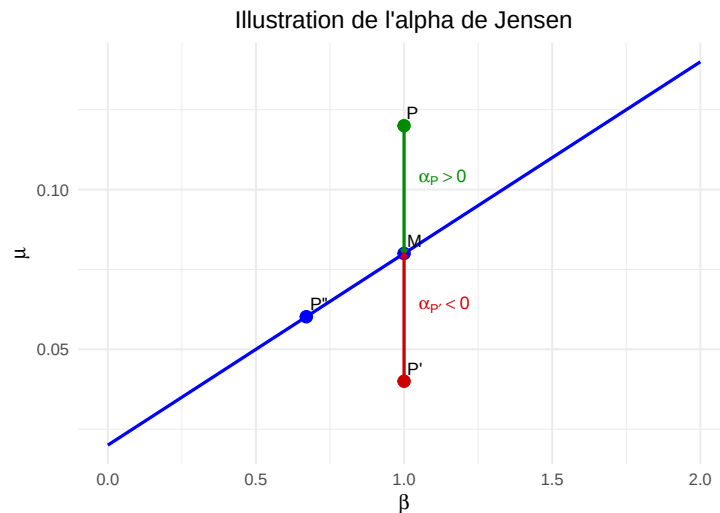


FIGURE 2.4 – Illustration des différents alpha de Jensen possibles.

Les mesures de performance présentées précédemment permettent d'évaluer la performance d'un portefeuille en la rapportant à son niveau de risque. Toutefois, ces indicateurs ne renseignent pas sur l'origine de cette performance, ils mesurent un résultat mais n'en expliquent pas la source. Pour comprendre d'où provient la performance d'un portefeuille, il est nécessaire de recourir à une approche d'attribution.

2.2 Attribution de performance

L'attribution de performance vise à déterminer la contribution des différentes décisions de gestion à la performance globale d'un portefeuille. Elle permet ainsi de passer d'une logique d'évaluation à une logique d'explication.

De manière générale, cette attribution distingue deux sources principales de performance : l'allocation des actifs et la sélection des titres. A ces deux sources s'ajoute un effet d'interaction, qui reflète l'impact simultané des décisions d'allocation et de sélection. En pratique, cet effet est souvent isolé ou interprété comme un terme résiduel et n'est pas systématiquement présenté dans les reportings.

2.2.1 Le modèle de Brinson, Hood et Beebower

Le modèle le plus utilisé pour réaliser cette attribution de performance est le modèle de Brinson, Hood et Beebower, noté BHB [7]. Ce modèle consiste à calculer le rendement excédentaire du portefeuille par rapport au benchmark puis à décomposer cet écart de performance en trois composantes :

- **Effet allocation** : l'impact des pondérations du portefeuille et du benchmark ;
- **Effet sélection** : l'impact du choix des titres ;
- **Effet interaction** : l'impact combiné de l'allocation et de la sélection.

Nous reviendrons plus en détail sur ces notions dans la suite de la section.

Pour que cette décomposition ait un sens, il convient de travailler au niveau le plus fin d'agrégation d'actifs pour lequel une différence de rendement entre le portefeuille et le benchmark peut être observée. Nous définissons K catégories distinctes, appelées segments, par exemple des classes d'actifs ou des secteurs, présents dans le portefeuille.

Supposons disposer de N actifs, chaque actif i ($i = 1, \dots, N$) appartenant à un seul segment k ($k = 1, \dots, K$).

Le rendement du portefeuille P et du benchmark peuvent alors s'écrire en fonction des segments :

$$R_{B,t} = \sum_{k=1}^K w_{B,k,t} R_{B,k,t},$$

$$R_{P,t} = \sum_{k=1}^K w_{P,k,t} R_{P,k,t}$$

où

- $w_{B,k,t} = \sum_{i \in k} w_{B,i,t}$ est le poids du segment k dans le benchmark ;
- $w_{P,k,t} = \sum_{i \in k} w_{P,i,t}$ est le poids du segment k dans le portefeuille P ;
- $R_{B,k,t} = \frac{\sum_{i \in k} w_{B,i,t} R_{i,t}}{w_{B,k,t}}$ est le rendement du benchmark dans le segment k ;

- $R_{P,k,t} = \frac{\sum_{i \in k} w_{P,i,t} R_{i,t}}{w_{P,k,t}}$ est le rendement du portefeuille P dans le segment k .

L'écriture matricielle du modèle BHB permet de mettre en évidence la structure linéaire de la décomposition et facilite son implémentation numérique. Pour une période donnée t , nous définissons les vecteurs suivants :

$$\mathbf{W}_B = \begin{pmatrix} w_{B,1} \\ w_{B,2} \\ \vdots \\ w_{B,K} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^K, \quad \mathbf{W}_P = \begin{pmatrix} w_{P,1} \\ w_{P,2} \\ \vdots \\ w_{P,K} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^K$$

et

$$\mathbf{R}_B = \begin{pmatrix} R_{B,1} \\ R_{B,2} \\ \vdots \\ R_{B,K} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^K, \quad \mathbf{R}_P = \begin{pmatrix} R_{P,1} \\ R_{P,2} \\ \vdots \\ R_{P,K} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^K.$$

Ainsi, nous avons

$$R_{B,t} = \mathbf{W}_B^\top \mathbf{R}_B \quad \text{et} \quad R_{P,t} = \mathbf{W}_P^\top \mathbf{R}_P,$$

où $\mathbf{W}_B$ (resp. $\mathbf{W}_P$) est le vecteur des poids des actifs du benchmark (resp. du portefeuille P) et $\mathbf{R}_B$ (resp. $\mathbf{R}_P$) est le vecteur des rendements des actifs du benchmark (resp. du portefeuille P).

Cette notation permet de décomposer le rendement excédentaire du portefeuille P par rapport au benchmark selon les segments.

Pour calculer le rendement excédentaire du portefeuille P , il suffit de calculer la différence entre le rendement du portefeuille P et celui du benchmark :

$$R_{P,t} - R_{B,t} = \sum_{k=1}^K w_{P,k,t} R_{P,k,t} - \sum_{k=1}^K w_{B,k,t} R_{B,k,t}.$$

Sous forme matricielle, nous avons

$$R_{P,t} - R_{B,t} = \mathbf{W}_P^\top \mathbf{R}_P - \mathbf{W}_B^\top \mathbf{R}_B.$$

Le modèle BHB décompose ensuite cet écart de performance, sur une période donnée t , en quatre cadrans. Ces cadrans sont présentés sous forme scalaire et vectorielle dans la Table 2.1.

Allocation	Sélection	
	Passif	Actif
Passif	Cadran 1 Benchmark $R_{B,t} = \sum_{k=1}^K w_{B,k,t} R_{B,k,t}$ $R_{B,t} = \mathbf{W}_B^\top \mathbf{R}_B$	Cadran 3 Benchmark et Sélection $R_{P,t}^{sel} = \sum_{k=1}^K w_{B,k,t} R_{P,k,t}$ $R_{P,t}^{sel} = \mathbf{W}_B^\top \mathbf{R}_P$
Actif	Cadran 2 Benchmark et Allocation $R_{P,t}^{all} = \sum_{k=1}^K w_{P,k,t} R_{B,k,t}$ $R_{P,t}^{all} = \mathbf{W}_P^\top \mathbf{R}_B$	Cadran 4 Portefeuille $R_{P,t} = \sum_{k=1}^K w_{P,k,t} R_{P,k,t}$ $R_{P,t} = \mathbf{W}_P^\top \mathbf{R}_P$

TABLE 2.1 – Cadrons du modèle BHB.

Cette structure en quatre cadrans permet d'isoler les effets liés à l'allocation et à la sélection, ce qui renvoie directement à la distinction entre gestion passive et gestion active. La *gestion passive* est une méthode qui consiste à ne pas anticiper les évolutions du marché. Elle repose sur l'hypothèse d'efficience des marchés, selon laquelle les informations susceptibles d'influencer les prix des actifs sont immédiatement intégrées dans les cours. A l'inverse, la *gestion active* de portefeuille cherche à surperformer le benchmark, notamment en anticipant les fluctuations du marché.

Le processus de gestion d'un portefeuille se compose généralement de trois phases :

- **Phase 1 : Allocation stratégique d'actifs.** Elle consiste à déterminer la répartition des actifs dans le portefeuille, en tenant compte des objectifs et des contraintes de l'investisseur. Cette allocation stratégique correspond généralement à la structure du benchmark ;
- **Phase 2 : Allocation tactique.** Elle consiste à effectuer des ajustements dans le portefeuille pour tenir compte d'opportunités de court terme, en essayant de rester proche de l'allocation stratégique définie à la phase 1 ;
- **Phase 3 : Sélection des titres.** Des gérants spécialisés sélectionnent de manière optimale les titres à l'intérieur de chaque catégorie d'actifs du portefeuille.

Ainsi, la performance d'un portefeuille dépend principalement des décisions d'allocation d'actifs et de sélection des titres.

Le modèle de Brinson, Hood et Beebower permet de quantifier précisément l'impact de ces deux décisions sur la performance d'un portefeuille.

Nous pouvons à présent calculer la contribution active d'un gérant à la performance du portefeuille pour chaque étape du processus de gestion.

Ainsi, le rendement actif qui provient de l'allocation tactique est simplement la différence entre le cadran 2 et le cadran 1. Nous cherchons à faire varier l'effet allocation sans modifier

l'effet sélection. Nous obtenons :

$$\mathcal{A}_{\mathcal{P}} = R_{P,t}^{all} - R_{B,t} = \sum_{k=1}^K (w_{P,k,t} - w_{B,k,t}) R_{B,k,t}.$$

L'effet d'allocation peut être réécrit sous forme matricielle de la façon suivante :

$$\mathcal{A}_{\mathcal{P}} = (\mathbf{W}_{\mathbf{P}} - \mathbf{W}_{\mathbf{B}})^{\top} \mathbf{R}_{\mathbf{B}}.$$

Nous utilisons le même raisonnement pour le rendement actif provenant de la sélection des titres, il suffit de faire la différence entre le cadran 3 et le cadran 1. Cette fois, nous faisons varier l'effet sélection sans modifier l'effet allocation. Nous obtenons :

$$\mathcal{S}_{\mathcal{P}} = R_{P,t}^{sel} - R_{B,t} = \sum_{k=1}^K w_{B,k,t} (R_{P,k,t} - R_{B,k,t}).$$

Et sous forme matricielle,

$$\mathcal{S}_{\mathcal{P}} = \mathbf{W}_{\mathbf{B}}^{\top} (\mathbf{R}_{\mathbf{P}} - \mathbf{R}_{\mathbf{B}}).$$

Enfin, nous calculons le terme d'interaction entre l'allocation tactique et la sélection des titres. Pour ce faire, nous additionnons le cadran 1 et le cadran 4 et soustrayons les cadrans 2 et 3. Nous cherchons ici à faire varier les deux effets en même temps. Le cadran 4 est simplement la somme du cadran 1 avec l'allocation tactique, la sélection des titres et l'interaction entre les deux. Ainsi, pour trouver l'effet interaction il suffit de soustraire l'effet allocation, l'effet sélection et le cadran 1 au cadran 4. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\mathcal{P}} &= R_{P,t} - R_{B,t} - \mathcal{A}_{\mathcal{P}} - \mathcal{S}_{\mathcal{P}} \\ &= R_{P,t} - R_{B,t} - R_{P,t}^{all} + R_{B,t} - R_{P,t}^{sel} + R_{B,t} \\ &= R_{P,t} + R_{B,t} - R_{P,t}^{all} - R_{P,t}^{sel} \\ &= \sum_{k=1}^K w_{B,k,t} R_{B,k,t} + \sum_{k=1}^K w_{P,k,t} R_{P,k,t} - \sum_{k=1}^K w_{B,k,t} R_{P,k,t} - \sum_{k=1}^K w_{P,k,t} R_{B,k,t} \\ &= \sum_{k=1}^K w_{B,k,t} (R_{B,k,t} - R_{P,k,t}) + \sum_{k=1}^K w_{P,k,t} (R_{P,k,t} - R_{B,k,t}) \\ &= \sum_{k=1}^K (w_{P,k,t} - w_{B,k,t}) (R_{P,k,t} - R_{B,k,t}). \end{aligned}$$

Et sous forme matricielle,

$$\mathcal{I}_{\mathcal{P}} = (\mathbf{W}_{\mathbf{P}} - \mathbf{W}_{\mathbf{B}})^{\top} (\mathbf{R}_{\mathbf{P}} - \mathbf{R}_{\mathbf{B}}).$$

Le rendement actif total est simplement la différence entre le cadran 4 et le cadran 1, c'est-à-dire la différence entre le rendement du portefeuille et le rendement du benchmark. Nous avons :

$$C4 - C1 = R_{P,t} - R_{B,t}.$$

Cette différence correspond à la somme des trois effets calculés précédemment car :

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}_{\mathcal{P}} + \mathcal{S}_{\mathcal{P}} + \mathcal{I}_{\mathcal{P}} \\ &= C1 + C2 - C1 + C3 - C1 + C4 + C1 - C2 - C3 \\ &= C4 - C1. \end{aligned}$$

Ainsi, le rendement actif peut être décomposé en trois effets : l'effet d'allocation $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$, l'effet de sélection $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$ et l'effet d'interaction $\mathcal{I}_{\mathcal{P}}$. Cette décomposition s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{aligned} R_{P,t} - R_{B,t} &= \mathcal{A}_{\mathcal{P}} + \mathcal{S}_{\mathcal{P}} + \mathcal{I}_{\mathcal{P}} \\ &= (\mathbf{W}_{\mathbf{P}} - \mathbf{W}_{\mathbf{B}})^{\top} \mathbf{R}_{\mathbf{B}} + \mathbf{W}_{\mathbf{B}}^{\top} (\mathbf{R}_{\mathbf{P}} - \mathbf{R}_{\mathbf{B}}) + (\mathbf{W}_{\mathbf{P}} - \mathbf{W}_{\mathbf{B}})^{\top} (\mathbf{R}_{\mathbf{P}} - \mathbf{R}_{\mathbf{B}}). \end{aligned}$$

Ainsi, le modèle BHB fournit une décomposition claire du rendement actif en trois composantes, permettant d'identifier précisément les sources de surperformance ou de sous-performance d'un portefeuille par rapport au benchmark.

Chapitre 3

Les Institutions de Retraite Professionnelle

Les informations suivantes reposent sur [34].

En Belgique, le système de pension repose sur trois piliers complémentaires :

- **Pilier 1 : la pension légale.** Calculée sur la base de la carrière professionnelle, elle constitue le droit fondamental de tout citoyen ayant travaillé en Belgique ;
- **Pilier 2 : la pension complémentaire.** Il s'agit d'un avantage extralégal mis en place par certains employeurs ou secteurs professionnels. Le travailleur y constitue, tout au long de sa carrière, un capital auprès d'un organisme spécialisé, tel qu'une *Institution de Retraite Professionnelle* (IRP) ou une compagnie d'assurances. Ce capital vient s'ajouter à la pension légale au moment du départ à la retraite ;
- **Pilier 3 : l'épargne-pension.** Cette épargne individuelle et volontaire permet de se constituer un complément financier en vue de la retraite.

Dans ce chapitre, nous nous concentrons uniquement sur le deuxième pilier, qui constitue le cadre des fonds de pension.

3.1 Cadre juridique et réglementaire

La section et les sous-sections suivantes reposent sur [21] et [16].

Les *Institutions de Retraite Professionnelle* (IRP) sont soumises à la fois à une réglementation européenne mais également nationale propre à chaque pays. Dans le contexte de ce mémoire, nous nous concentrons sur la Belgique, afin de comprendre plus en détail les règles qui encadrent la gestion et la supervision de ce type de fonds.

Au niveau européen, le cadre applicable est principalement défini par la directive Institutions for Occupational Retirement Provision II (IORP II), dont la mise en oeuvre et la supervision sont gérées par l'European Insurance and Occupational Pensions Authority (EIOPA).

En Belgique, la supervision des Organismes de Fonds de Pension (OFP) relève de l'Autorité

des Services et Marchés Financiers (FSMA), cette organisation est chargée de contrôler le respect des lois et des règlements nationaux applicables aux IRP.

Dans cette section, nous présentons ces différentes institutions ainsi que les principales lois qui structurent le fonctionnement des OFP en Belgique.

3.1.1 European Insurance and Occupational Pensions Authority

L'European Insurance and Occupational Pensions Authority (EIOPA) a été créée en 2011, dans un contexte de crise économique. La mise en place de ces autorités a permis d'instaurer une approche plus harmonisée de la réglementation et de la surveillance des assurances et des pensions au sein de l'Union européenne.

Le but de l'EIOPA est double : d'une part, garantir une protection forte et cohérente des intérêts des consommateurs dans l'ensemble de l'Union européenne, et d'autre part, renforcer la stabilité et la viabilité des secteurs de l'assurance et des pensions professionnelles. Ces objectifs se déclinent en trois domaines stratégiques : l'intégration du marché unique, le renforcement de la résilience face aux risques et, l'amélioration de la réglementation au service de la supervision.

Parmi les grandes réglementations supervisées par l'EIOPA figure la directive IORP II, présentée dans la section suivante.

3.1.2 Directive IORP II

Une des missions principales de l'EIOPA concernant les fonds de pension est de contribuer à un niveau de réglementation et de supervision solide, efficace et cohérent. La directive Institutions for Occupational Retirement Provision (IORP) II a été adoptée par le Parlement Européen et le Conseil en 2016, mais n'est entrée en vigueur qu'en 2019, remplaçant ainsi l'ancienne directive IORP I. Cette directive vise à garantir la solidité des OFP et à renforcer la protection des membres des régimes de pensions et de leurs bénéficiaires. Pour ce faire, elle introduit de nouvelles exigences en matière de gouvernance, impose l'utilisation d'un dépositaire, renforce les règles relatives à l'évaluation des risques propres aux IRP et accroît les pouvoirs des autorités de supervision.

Cette directive poursuit trois objectifs principaux :

- améliorer la gouvernance des OFP ;
- renforcer la transparence des informations destinées aux épargnants ;
- clarifier les procédures de transferts et d'activités transfrontalières.

La mise en oeuvre de la directive IORP II relève toutefois des autorités nationales de supervision. En Belgique, cette mission est assurée par l'Autorité des Services et Marchés Financiers (FSMA), présentée dans la section suivante.

3.1.3 Autorité des Services et Marchés Financiers

L'EIOPA est l'autorité européenne chargée de promouvoir une supervision cohérente des assurances et des IRP au sein de l'Union européenne. Toutefois, chaque Etat membre conserve sa propre autorité nationale pour la supervision des IRP. En Belgique, cette mission relève de l'Autorité des Services et Marchés Financiers (FSMA).

La FSMA, organisme public autonome créé en 2011, contrôle le secteur financier belge au côté de la Banque Nationale Belge. Elle exerce six compétences :

- la supervision des marchés financiers et le contrôle de l'information financière publiée par les entreprises ;
- le contrôle des règles de conduite imposées aux acteurs financiers ;
- le contrôle des produits financiers disponibles au public ;
- le contrôle des prestataires des services financiers et des différents intermédiaires ;
- le contrôle des pensions complémentaires (pilier 2) ;
- la contribution à une meilleure éducation financière au public.

Dans ce cadre, la FSMA veille également au respect des lois belges encadrant les pensions complémentaires. Nous en présentons quelques-unes dans la section suivante.

3.1.4 Lois belges relatives aux pensions complémentaires

Cette section repose sur les textes juridiques [4] et [3].

Plusieurs lois encadrent le fonctionnement des organismes de fonds de pensions en Belgique. Une fois la loi promulguée, la FSMA en assure l'application et la supervision. Parmi ces textes de lois, certains jouent un rôle prépondérant dans l'organisation et le contrôle des IRP.

La *loi du 27 octobre 2006* constitue le cadre juridique principal applicable aux IRP. Entrée en vigueur début 2007, elle définit le statut des IRP de droit belge, fixe leurs conditions d'exercice ainsi que leur contrôle prudentiel. Elle vise à protéger les droits des affiliés et des bénéficiaires des régimes de retraite, tout en garantissant la stabilité et la solidité des IRP.¹

Un second texte joue un rôle essentiel dans l'organisation des pensions complémentaires en Belgique : la loi du 28 avril 2003.

La *loi du 28 avril 2003* concerne principalement le régime fiscal des pensions complémentaires. Elle est entrée en vigueur début 2004, elle définit les relations entre les différents acteurs concernés : employeur, organisateur, travailleur, affilié et ses ayants droit, organisme de pension et personne morale en charge de l'exécution de l'engagement de solidarité. Elle fixe également les règles applicables à l'instauration, la modification ou l'abrogation d'un régime de pension complémentaire au sein d'une entreprise ou d'un secteur. Cette loi vise

1. Pour plus de renseignements concernant cette loi, veuillez consulter la source [3].

à protéger les droits et les réserves de pension constitués pour les affiliés et leurs ayants droit, tout en renforçant la transparence des informations fournies aux travailleurs.²

Les exigences spécifiques liées aux critères ESG ne relèvent pas de la législation belge propre aux pensions complémentaires, mais proviennent principalement du cadre réglementaire européen lié à ces critères, dont nous reparlerons dans le prochain chapitre.

3.2 Contraintes et risques spécifiques

Cette section présente l'ensemble des contraintes auxquelles les OFP sont soumises en vertu de la directive IORP II, avant d'examiner les principaux risques associés à leur activité.

3.2.1 Contraintes

Les contraintes applicables aux OFP découlent de la directive IORP II [14]. Les articles contenus dans les titres II, III, IV et V fixent respectivement les exigences quantitatives, les contraintes de gouvernance, les obligations de transparence et les règles de surveillance prudentielle auxquelles les OFP doivent se conformer. Les principales catégories de contraintes sont analysées ci-dessous.³

Exigences quantitatives

Les exigences quantitatives du titre II portent sur cinq éléments essentiels :

- **Article 13 : Provisions techniques** : les OFP doivent calculer et maintenir des provisions techniques suffisantes pour couvrir l'ensemble de leurs engagements, sur base de méthodes actuarielles prudentes ;
- **Article 14 : Financement des provisions techniques** : les provisions techniques doivent être entièrement couvertes par des actifs appropriés et suffisants. En cas d'insuffisance, un plan de redressement doit être établi ;
- **Article 15 : Fonds propres réglementaires** : lorsque une IRP décide de couvrir elle-même les risques biométriques, elle doit détenir des actifs supplémentaires afin de se créer un coussin de sécurité ;
- **Article 16 : Marge de solvabilité disponible** : les IRP concernées ont l'obligation de détenir une marge de solvabilité suffisante, calculée selon des formules prévues par la directive ;
- **Article 19 : Règles de placement** : les actifs doivent être investis selon le principe de prudence et conformément aux règles définies par la directive.

2. Pour plus de renseignements concernant cette loi, veuillez consulter la source [4].

3. Pour une présentation plus complète de la directive, veuillez consulter [14]

Contraintes de gouvernance

Les contraintes de gouvernance du titre III reposent sur huit articles :

- **Article 20 : Responsabilité de l'organe de gestion ou de surveillance** : l'organe de gestion de surveillance est responsable du respect de l'ensemble des dispositions législatives, réglementaires et administratives applicables aux IRP ;
- **Article 21 : Exigences générales en matière de gouvernance** : les IRP doivent mettre en place un système de gouvernance efficace, intégrant notamment les facteurs environnementaux, sociaux et de gouvernance liés aux actifs de placement lors des décisions ;
- **Article 22 : Exigences en matière d'honorabilité et de compétence de la gestion** : les gérants des IRP doivent satisfaire les exigences de compétence et d'honorabilité ;
- **Article 23 : Politique de rémunération** : les IRP doivent adopter une politique de rémunération saine pour les personnes qui les gèrent et qui exercent des fonctions clés ;
- **Article 24 : Dispositions générales des fonctions clés** : les IRP doivent mettre en place une fonction de gestion des risques, une fonction d'audit interne et, lorsque c'est possible, une fonction actuarielle ;
- **Article 25 : Gestion des risques** : les IRP doivent mettre en place une fonction de gestion des risques efficace afin de faciliter le fonctionnement du système de gestion des risques ;
- **Article 26 : Fonction d'audit interne** : les IRP doivent mettre en place une fonction d'audit interne efficace comportant notamment une évaluation de l'adéquation et de l'efficacité du système de contrôle interne ;
- **Article 27 : Fonction actuarielle** : les IRP concernées ont l'obligation de prévoir une fonction actuarielle efficace.

Contraintes de transparence

Les contraintes de transparence du titre IV reposent sur dix articles :

- **Article 36 : Principes généraux** : les IRP doivent fournir aux affiliés et aux bénéficiaires des informations claires et compréhensibles concernant le fonctionnement du régime de retraite ;
- **Article 37 : Informations générales relatives au régime de retraite** : les IRP doivent communiquer les caractéristiques essentielles du régime, notamment les droits, obligations et risques associés ;
- **Article 38 : Dispositions générales des relevés des droits à retraite** : les IRP doivent remettre à leurs affiliés un document concis intitulé « relevé des droits à retraite », présentant les informations essentielles sur leurs droits, conformément aux règles sociales, fiscales et du travail du régime concerné ;

- **Article 39 : Relevé des droits à retraite** : le relevé des droits à retraite doit fournir à chaque affilié ses données personnelles, l'identification du régime, les garanties éventuelles, les projections de retraite, les droits et cotisations accumulés, les frais supportés et le niveau de financement du régime ;
- **Article 40 : Informations supplémentaires** : le relevé des droits à retraite doit préciser où et quand obtenir des informations supplémentaires ;
- **Article 41 : Informations à fournir aux affiliés potentiels** : les IRP doivent informer les affiliés potentiels, avant ou immédiatement après leur affiliation, selon qu'elle soit volontaire ou automatique, des options disponibles, des caractéristiques du régime, de la prise en compte éventuelle des facteurs environnementaux, sociaux et de gouvernance. Ainsi que l'accès à des informations complémentaires et, lorsque l'affilié supporte le risque d'investissement, des performances passées et des coûts du régime ;
- **Article 42 : Informations à fournir aux affiliés au cours de la phase précédant la retraite** : les IRP fournissent, avant l'âge de la retraite ou à la demande, les options pour obtenir le versement de leur prestation de retraite ;
- **Article 43 : Informations à fournir aux bénéficiaires au cours de la phase de versement** : les IRP doivent informer régulièrement les bénéficiaires des prestations dues, les avertir rapidement de toute réduction de prestations, au plus tard trois mois avant son application. Lorsqu'ils supportent un risque d'investissement pendant la phase de versement, leur fournir des informations appropriées sur ce risque ;
- **Article 44 : Informations supplémentaires à fournir sur demande aux affiliés et aux bénéficiaires** : les IRP doivent fournir sur demande les comptes et rapports annuels, la déclaration de politique de placement, ainsi que les hypothèses utilisées pour établir les projections de retraite.

Contraintes de surveillance prudentielle

Les contraintes de surveillance prudentielle du titre V visent à protéger les droits des affiliés et des bénéficiaires. Ces contraintes doivent aussi assurer la stabilité et la solidité des IRP :

- **Article 46 : Portée de la surveillance prudentielle** : les IRP doivent être soumises à une surveillance prudentielle couvrant les éléments repris dans la directive ;
- **Article 47 : Principes généraux de la surveillance prudentielle** : la surveillance prudentielle est assurée par l'autorité compétente de l'Etat membre d'origine, selon une approche prospective et fondée sur les risques. Elle combine contrôles sur pièces et inspections sur place, exercée de manière proportionnelle à la taille et à la complexité de l'IRP, et tenant compte de l'impact potentiel des décisions de supervision sur la stabilité financière de l'Union ;
- **Article 48 : Pouvoirs d'intervention et devoirs des autorités compétentes** : les autorités compétentes exigent que chaque IRP dispose d'une organisation administrative, comptable et de contrôle interne adéquate. Elles publient sans délai

les sanctions ou mesures administratives prononcées, sauf lorsque la divulgation de l'identité est disproportionnée ou compromet la stabilité financière ou une enquête en cours ;

- **Article 49 : Processus de contrôle prudentiel** : les autorités compétentes doivent disposer des pouvoirs nécessaires pour examiner les stratégies, processus et procédures d'information des IRP afin de vérifier leur conformité à la directive, en tenant compte de la taille, de la nature, de l'ampleur et de la complexité de leurs activités ;
- **Article 51 : Transparence et obligation de rendre des comptes** : les autorités compétentes doivent exercer leurs missions de supervision de manière transparente et indépendante, tout en garantissant la protection des informations confidentielles ;

Les articles 52 à 59, relatifs au secret professionnel et à l'échange d'informations, ne sont pas détaillés ici, le lecteur intéressé peut les trouver dans [14].

Après avoir présenté les exigences quantitatives, les contraintes de gouvernance, de transparence et de surveillance prudentielle imposées aux OFP, il convient d'examiner les différents risques auxquels ces institutions sont exposées.

3.2.2 Principaux risques

L'EIOPA publie, environ chaque trimestre, un tableau de bord des risques liés aux IRP. Les catégories de risques présentées ci-dessous sont basées sur le tableau de bord publié en janvier 2026, selon la source [20]. Pour chacune d'entre elles, une explication, ainsi que les tendances et prévisions associées, sont proposées sur la base des informations issues de ce tableau de bord.

Notons que le risque relatif à l'ESG est apparu pour la première fois dans le tableau de bord lors du deuxième trimestre de 2021 [22]. Ce qui signifie qu'avant 2021, les critères ESG ne représentaient pas un risque spécifique pour les fonds de pension.

Les principaux risques identifiés par l'EIOPA pour les IRP sont présentées ci-dessous, selon la structure du tableau de bord.

Risques macroéconomiques

Les risques macroéconomiques correspondent aux évolutions de l'environnement économique global susceptibles d'affecter le secteur des IRP. Ils regroupent des variables macroéconomiques utilisées dans le suivi macroprudentiel, telles que la croissance du PIB, l'inflation, le taux de chômage ou les tensions géopolitiques.

La tendance observée au cours des trois mois précédant janvier 2026 est restée globalement stable, maintenant ce risque à un niveau moyen. Par ailleurs, les prévisions pour janvier 2027 indiquent une augmentation du niveau de risque.

Risques de crédit

Les risques de crédit évaluent la vulnérabilité des IRP face à la capacité des émetteurs des actifs dans lesquels ils investissent à honorer leurs engagements financiers. Cette catégorie repose sur la combinaison entre l'exposition des IRP aux classes d'actifs sensibles au crédit et les métriques de risque pertinentes applicables à ces actifs.

La tendance observée au cours des trois mois précédant janvier 2026 est restée globalement stable, maintenant ce risque à un niveau moyen. Les prévisions pour janvier 2027 confirment cette tendance.

Risques de marché et de rendement des actifs

Les risques de marché et de rendement des actifs renvoient aux principales expositions des IRP aux fluctuations du marché ainsi qu'à l'évolution des rendements et des coûts. Leur évaluation repose généralement sur deux éléments :

- l'exposition des IRP aux investissements, qui permet d'évaluer la vulnérabilité suite à des évolutions défavorables ;
- un indicateur de risque propre à chaque classe d'actif, correspondant souvent à la volatilité des rendements des indices correspondants, reflète le niveau de risque au moment considéré.

La tendance observée au cours des trois mois précédant janvier 2026 est restée globalement stable, maintenant ce risque à un niveau moyen. Par ailleurs, les prévisions pour janvier 2027 indiquent une augmentation du niveau de risque.

Risques de liquidité

Les risques de liquidité sont définis comme la possibilité pour une institution de ne pas pouvoir respecter ses obligations de paiement en temps voulu ou de ne pouvoir le faire qu'en générant des coûts excessifs.

La tendance observée au cours des trois mois précédant janvier 2026 est restée globalement stable, maintenant ce risque à un niveau moyen. Les prévisions pour janvier 2027 confirment cette tendance.

Risques de réserve et de financement

Les risques de réserve et de financement servent à évaluer le niveau des fonds propres des IRP ainsi que la solidité de leurs provisions techniques. Cette catégorie n'est pertinente que pour des IRP à prestations définies.

La tendance observée au cours des trois mois précédant janvier 2026 a considérablement baissé, ramenant ce risque à un niveau faible. De plus, les prévisions pour janvier 2027 indiquent une stabilité du niveau de risque.

Risques de concentration

Les risques de concentration correspondent aux expositions des IRP à des investissements trop fortement regroupés au sein de leurs portefeuilles. Ils servent à évaluer dans quelle mesure les placements sont concentrés dans un même secteur d'activités ou dans une même classe d'actifs par exemple. Une concentration excessive tend donc à réduire la diversification.

La tendance observée au cours des trois mois précédant janvier 2026 est restée globalement stable, maintenant ce risque à un niveau moyen. Les prévisions pour janvier 2027 confirment cette tendance.

Risques relatifs aux ESG

Le risque ESG est brièvement présenté ici dans le cadre du tableau de bord de l'EIOPA. Une analyse plus détaillée de l'intégration des critères ESG dans la gestion des fonds, et donc des fonds de pension, sera développée dans le chapitre suivant, consacré aux critères ESG.

Les risques ESG correspondent à l'exposition des IRP face aux risques environnementaux, sociaux et de gouvernance. La tendance observée au cours des trois mois précédant janvier 2026 est restée globalement stable, maintenant ce risque à un niveau moyen. Les prévisions pour janvier 2027 confirment cette tendance.

Depuis son apparition dans le tableau de bord en 2021, le risque se maintient à un niveau moyen, restant relativement stable. Toutefois, les prévisions publiées par l'EIOPA indiquent régulièrement une tendance à la hausse dans les 12 mois suivant la publication du tableau de bord. Ce qui montre que ce risque, bien qu'il soit récent, gagne progressivement de l'importance dans l'évaluation des risques liés au secteur des IRP. Cette dynamique justifie pleinement l'analyse de l'intégration ESG dans la gestion des fonds, dont les fonds de pension, présenté dans le chapitre suivant.

Risques de digitalisation et cyber

Les risques liés à la digitalisation et au cyber renvoient au suivi des menaces susceptibles d'affecter la stabilité financière, en raison d'une digitalisation croissante. Ils couvrent notamment les risques associés à la résilience opérationnelle numérique, tels que les risques de cybersécurité.

La tendance observée au cours des trois mois précédant janvier 2026 est restée globalement stable, maintenant ce risque à un niveau moyen. Les prévisions pour janvier 2027 confirment cette tendance.

Chapitre 4

Les critères ESG

Les critères environnementaux, sociaux et de gouvernance (ESG) occupent une place croissante dans l'analyse financière actuelle. Initialement développés comme outils d'évaluation extra-financière, ces critères sont désormais intégrés dans les processus de gestion de portefeuille et d'évaluation des risques ainsi que dans les rapports réglementaires. Dans un contexte marqué par le développement des investissements durables et à impact, le cadre réglementaire s'est progressivement renforcé afin d'améliorer la transparence des pratiques d'investissements. Par ailleurs, des initiatives internationales telles que les UN Principles for Responsible Investment (UN PRI) ont contribué à diffuser des pratiques communes en matière d'investissement responsable.

Les critères ESG tendent aujourd'hui à être quantifiés sous forme de scores, permettant leur intégration dans les modèles financiers. Cette quantification soulève plusieurs enjeux notamment en termes de construction, de pondération et de comparabilité des scores entre agences.

L'objectif de ce chapitre est de présenter les critères ESG, leur cadre réglementaire ainsi que la construction des scores ESG. La fin du chapitre portera sur les différentes méthodes d'intégration de ces critères dans la gestion de portefeuille.

4.1 Cadre réglementaire

Bien que les critères ESG existent depuis plusieurs décennies, leur prise en compte s'est fortement renforcée à partir des années 2020, notamment sous le cadre réglementaire européen. Celui-ci vise à améliorer la transparence, lutter contre le greenwashing et intégrer des facteurs de durabilité dans les décisions d'investissement.

Les principales initiatives sont :

- la taxonomie européenne ;
- le Sustainable Finance Disclosure Regulation (SFDR) ;
- la Corporate Sustainability Reporting Directive (CSRD) ;

- ainsi que des initiatives internationales telles que les UN PRI.

4.1.1 Taxonomie européenne

Les informations suivantes sont issues de [13].

La *taxonomie européenne*, introduite par le règlement européen adopté en 2020, est un système de classification définissant des critères. Ces critères permettent d'identifier des activités économiques considérées comme durables. Ils sont alignés avec une trajectoire de neutralité carbone d'ici 2050 et avec un ensemble d'objectifs environnementaux plus larges.

Le règlement identifie six objectifs climatiques et environnementaux principaux auxquels les activités économiques doivent contribuer :

1. Atténuation du changement climatique ;
2. Adaptation du changement climatique ;
3. Utilisation durable et protection de l'eau et des ressources sous-marines ;
4. Transition vers une économie circulaire ;
5. Prévention et contrôle de la pollution ;
6. Protection et restauration de la biodiversité et des écosystèmes.

Ces objectifs visent à orienter les investissements vers les activités économiques les plus importantes pour la transition écologique, conformément au Pacte Vert pour l'Europe. Selon [35], ce dernier a pour but de réduire les émissions d'au moins 55% d'ici 2030 et à rendre juridiquement contraignant l'objectif de neutralité de 2050 via la *loi européenne sur le climat*. Cette loi sur le climat est un accord ayant pour but de réduire les émissions d'au moins 55% d'ici 2030, tandis qu'un objectif de réduction de 90% pour 2040 a été proposé.

4.1.2 Sustainable Finance Disclosure Regulation

La section suivante repose sur [12].

Le *Sustainable Finance Disclosure Regulation* (SFDR), ou règlement sur la publication d'informations en matière de finance durable, constitue un cadre réglementaire visant à encadrer la transparence des informations non financières, notamment celles relatives à la durabilité. Entré en vigueur en 2021, il est complété par les normes techniques applicables depuis 2023. Ce règlement impose aux acteurs des marchés financiers, l'obligation de publier des annexes aux rapports périodiques et aux informations précontractuelles, comprenant les informations de la taxonomie européenne, ainsi que les informations relatives au développement durable sur leur site web.

Afin d'harmoniser la communication sur la durabilité, le SFDR comporte un ensemble d'articles définissant les obligations de transparence applicables aux acteurs financiers. Parmi ceux-ci, les articles 6, 8 et 9 jouent un rôle central : ils définissent une classification des produits financiers selon leur niveau d'ambition en matière de durabilité. Les autres

articles du règlement portent notamment sur les principales incidences négatives, les politiques de rémunération ou sur les obligations de publication. Les définitions complètes des articles figurent dans le document [15].

Les trois catégories principales sont les suivantes :

- **Article 6** : Les produits financiers classés dans l'article 6 correspondent à une classification dite par défaut. Ils peuvent prendre en compte les risques liés à la durabilité dans leurs décisions d'investissement, sans promouvoir des caractéristiques environnementales ou sociales, ni poursuivre un objectif d'investissement durable. Ces produits traduisent un niveau de durabilité nul, ce sont les produits non ESG ;
- **Article 8** : Les produits classés dans l'article 8 regroupent les produits financiers qui promeuvent des caractéristiques environnementales ou sociales. Ces produits traduisent un niveau de durabilité intermédiaire, ils intègrent des critères ESG, mais sans viser un objectif d'investissement durable au sens strict du règlement ;
- **Article 9** : Les produits relevant de l'article 9 se caractérisent par un objectif d'investissement durable. Ces produits traduisent un niveau de durabilité élevé, ils poursuivent explicitement un objectif durable mesurable et vérifiable.

4.1.3 Corporate Sustainability Reporting Directive

La section suivante repose sur le rapport [31].

La *Corporate Sustainability Reporting Directive* (CSRD), ou directive européenne sur la publication d'informations en matière de durabilité, constitue un cadre réglementaire visant la transparence des informations relatives aux impacts environnementaux et sociaux. Depuis février 2025, ces directives ont été affinées et les entreprises sont maintenant dans l'obligation de transmettre leurs informations sur les critères ESG. Le rapport de durabilité exigé par la CSRD doit être intégré dans le rapport de gestion de l'entreprise. Il décrit la manière dont les enjeux environnementaux, sociaux et de gouvernance influencent la stratégie, le développement, la performance et la situation globale de l'entreprise.

La directive poursuit plusieurs finalités pour les entreprises :

1. intégrer les enjeux de durabilité au sein de leur stratégie ;
2. se différencier de la concurrence ;
3. favoriser un dialogue avec les parties prenantes afin de consolider leur collaboration et leur engagement ;
4. anticiper les risques potentiels liés à la durabilité et les transformer en nouvelles opportunités.

La mise en oeuvre de cette directive s'appuie également sur plusieurs principes structurants :

- **Double matérialité** : les entreprises doivent analyser les impacts de leurs activités sur l'environnement et la société, ainsi que les impacts du monde extérieur ;

- **Chaîne de valeur** : le reporting doit couvrir non seulement les activités propres à l'entreprise mais aussi les impacts, risques et opportunités présents à chacune des étapes de leur activité ;
- **Neutralité climatique** : les entreprises doivent présenter leur stratégie de transition climatique en cohérence avec l'Accord de Paris¹ ;
- **Fiabilité et qualité de l'information** : les données publiées dans les rapports doivent être pertinentes et présentées de manière fidèle et comparable.

Pour garantir l'harmonisation du rapport, la CSRD s'appuie sur les European Sustainability Reporting Standards (ESRS). Ces normes définissent un cadre commun pour structurer les informations de durabilité publiées par les entreprises européennes. Elles partagent un langage et une architecture uniforme, facilitant la comparaison des données ESG entre entreprises et secteurs.

Les ESRS comprennent douze normes, réparties en deux catégories :

- les normes transversales, applicables à toutes les entreprises ;
- les normes thématiques, couvrant les enjeux environnementaux, sociaux et de gouvernance.

La Figure 4.1 présente cette répartition.

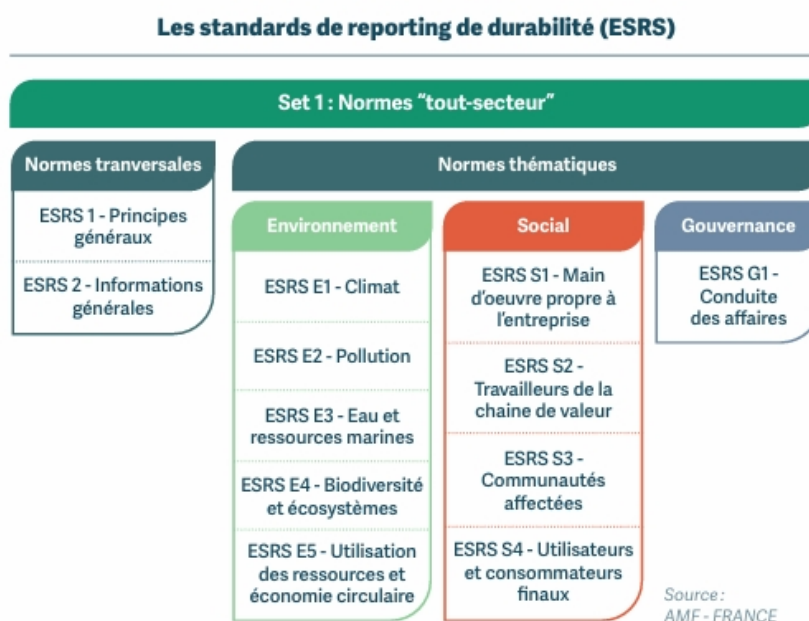


FIGURE 4.1 – Standards de reporting de durabilité (ESRS). Source : [31].

1. L' Accord de Paris [37], entré en vigueur en novembre 2016, est un traité international juridiquement contraignant consacré à la lutte contre le changement climatique. Il a été approuvé par 196 Parties lors de la COP21. Son objectif central est de limiter le réchauffement planétaire à un niveau nettement inférieur à 2°C par rapport à l'ère préindustrielle, tout en poursuivant les efforts nécessaires pour contenir cette hausse autour de 1,5°C.

4.1.4 UN Principles for Responsible Investment

Cette section repose sur [30].

Les UN PRI, pour United Nations Principles for Responsible Investment, désigne les Principes pour l'Investissement Responsable soutenus par les Nations Unies. Il s'agit d'une organisation internationale lancée en 2005, avec l'appui de l'ONU et de grands investisseurs institutionnels. Son objectif est de promouvoir et de faire progresser les pratiques d'investissement durable, notamment via l'intégration de critères environnementaux, sociaux et de gouvernance dans les décisions d'investissement.

Aujourd'hui, l'organisme compte plus de 5000 signataires parmi lesquels des propriétaires d'actifs tels que les fonds de pensions, les compagnies d'assurance ou certaines fondations. On y retrouve également des *investments managers*, c'est-à-dire des gestionnaires d'actifs tels que les gérants de fonds, ou les gestionnaires de mandats. Enfin, les UN PRI comptent aussi des prestataires de services, notamment des cabinets de conseils ou des firmes d'audit et d'assurance. L'adhésion des signataires repose sur différents critères définis par l'organisation.

L'organisme a défini six principes qui servent de cadre aux signataires pour intégrer les facteurs ESG dans leurs décisions d'investissement. En adhérant aux UN PRI, les investisseurs s'engagent à mettre en œuvre ces principes et à progresser vers une pratique d'investissement plus responsable, afin de contribuer à faire du développement durable un élément central du fonctionnement des marchés financiers.

Les six principes sont les suivants :

1. L'intégration des enjeux ESG dans l'analyse d'investissement et les prises de décisions ;
2. Être un propriétaire actif et intégrer les enjeux ESG dans les politiques et les pratiques d'actionnariat ;
3. Une divulgation adéquate des enjeux ESG ;
4. Promouvoir l'acceptation et l'implémentation des principes au sein de l'industrie d'investissement ;
5. Collaborer pour améliorer l'efficacité de la mise en œuvre des principes ;
6. Rendre compte des activités et des progrès réalisés dans la mise en œuvre des principes.

4.2 Décomposition E, S et G

Les critères ESG regroupent trois dimensions complémentaires : environnementale, sociale et de gouvernance, qui permettent d'appréhender les impacts extra-financiers d'une entreprise.

Bien que ces trois dimensions ne forment qu'un score unique, chacun des trois piliers a

des enjeux spécifiques, mobilise des indicateurs distincts et repose sur des règles d'évaluation propres. Leur décomposition est donc essentielle pour comprendre la construction des scores ESG présentés ultérieurement, ainsi que les limites méthodologiques associées.

4.2.1 Critères et indicateurs ESG

Cette section et les sous-sections suivantes repose sur [10] et [12].

Les *critères ESG* sont des domaines qualitatifs que l'entreprise doit intégrer dans sa stratégie globale. Ils définissent les orientations qualitatives liées à l'environnement, au social et à la gouvernance. Ces critères sont généralement traduits en objectifs généraux permettant de guider les décisions.

Les *indicateurs ESG* sont des mesures opérationnelles, quantitatives ou qualitatives, permettant d'évaluer la performance réelle de l'entreprise sur base des critères définis précédemment.

Afin d'illustrer clairement la différence entre critères et indicateurs, un exemple pour chaque pilier E, S et G est présenté dans leur section respective.

4.2.2 Environnement

La dimension environnementale concerne les aspects de l'entreprise affectant l'environnement, que ce soit positivement ou négativement, ainsi que les risques liés à l'environnement. Elle inclut notamment la lutte contre le changement climatique, la gestion des déchets et des ressources, la prévention de la pollution ainsi que la protection de la biodiversité.

Un critère pourrait être la lutte contre le changement climatique et un indicateur associé serait d'analyser le pourcentage d'énergies renouvelables généré par l'entreprise.

4.2.3 Social

La dimension sociale englobe les aspects liés à la communauté, comme la manière dont l'entreprise interagit avec ses clients, ainsi que les aspects liés au lieu de travail. Parmi les critères sociaux, nous avons notamment le respect des droits humains, les conditions de travail et le dialogue social, la diversité et l'inclusion ainsi que la protection des données et le respect de la vie privée.

Par exemple, un critère social pourrait être l'égalité et la diversité et, un indicateur pertinent serait l'écart salarial entre les femmes et les hommes.

4.2.4 Gouvernance

La dimension de gouvernance repose sur la qualité de la gestion, de la culture, le profil de risque ainsi que d'autres caractéristiques d'une entreprise. Elle inclut notamment la lutte contre la corruption et les pratiques frauduleuses, la transparence et l'équité dans les rémunérations des dirigeants ainsi que la gouvernance équilibrée et la prise de décision.

Un critère de gouvernance pourrait être la transparence et la gouvernance et un indicateur associé serait de mesurer le pourcentage d'administrateurs indépendants.

4.3 Scores ESG

Lors de la politique d'intégration ESG, des scores ESG sont attribués aux actifs afin de pouvoir les classer et comprendre leur impact environnemental, social et de gouvernance. Cependant, ces scores ne sont pas universels et dépendent de la société choisie ainsi que de sa méthode de construction.

4.3.1 Définition et échelles des scores

La section suivante repose sur [25].
D'après [11], le *score ESG* peut être défini comme une mesure de l'exposition de l'entreprise aux risques ESG spécifiques à cette entreprise.

Les scores ESG jouent un rôle croissant dans les processus de décisions des acteurs économiques.

D'une part, ils constituent un outil d'aide à la décision en matière d'investissement. Les investisseurs tendent à privilégier les entreprises présentant de bonnes performances ESG, celles-ci étant généralement perçues comme plus durables et moins exposées aux risques à long terme.

D'autre part, les scores ESG interviennent également dans les politiques d'achats responsables et dans la gestion des chaînes d'approvisionnement. Les entreprises intègrent de plus en plus des critères de responsabilité sociétale (RSE) dans la sélection de leurs partenaires, en s'appuyant notamment sur les notations ESG. Cette intégration présente plusieurs avantages. Elle permet tout d'abord de répondre aux exigences réglementaires croissantes en matière de durabilité et d'améliorer l'image de marque des entreprises. Elle contribue également à une meilleure gestion des risques liés à la chaîne d'approvisionnement, les entreprises ayant de bonnes performances ESG étant généralement mieux préparées à faire face à des risques tels que le changement climatique, les conflits sociaux ou les scandales.

Les scores ESG sont ensuite classés du moins bon au meilleur. Il n'existe pas de standardisation des scores ESG, ni en termes d'échelle, ni en termes de méthodologie.

En raison de cette absence, il est nécessaire de se référer à une méthodologie particulière. Dans le cadre de ce travail, nous nous appuyons sur les notations proposées par l'agence

Morgan Stanley Capital International (MSCI), largement utilisées par les acteurs du marché.

Cette agence attribue des scores ESG selon une échelle qualitative allant de CCC à AAA, comme représenté à la Figure 4.2.



FIGURE 4.2 – Echelle des scores ESG, selon l'agence MSCI. Source : [11].

4.3.2 Méthodes de construction

Les scores ESG peuvent être représentés mathématiquement par une somme pondérée des différents indicateurs E, S et G. Ainsi, le score ESG d'un actif i peut être modélisé de la façon suivante :

$$ESG_i = w_E E_i + w_S S_i + w_G G_i,$$

où E_i , S_i et G_i sont les scores environnementaux, sociaux et de gouvernance de l'actif i et w_E , w_S , w_G leur poids respectif.

Cette représentation ne reproduit pas la méthodologie exacte de l'agence, mais sert simplement à formaliser le score.

En pratique, ces scores sont calculés par des agences de notation, comme MSCI, et simplement utilisés par les entreprises.

La construction des scores ESG suit généralement un processus en plusieurs étapes, qui reste similaire quelle que soit l'agence de notation choisie, même si chacune utilise sa propre méthodologie.

Dans ce mémoire, nous avons choisi de suivre la méthodologie proposée dans la source [25] décomposée en quatre étapes.

1. La collecte des informations

La première étape consiste à collecter toutes les données pertinentes. Les agences se basent d'une part sur les informations fournies par l'entreprise, incluant ses politiques, ses programmes, ses rapports et documents relatifs à la durabilité. D'autre part, elles analysent également des sources externes fiables, comme des rapports d'ONG ou d'organismes spécialisés dans le suivi environnemental et social. Les certifications et normes reconnues sont également prises en compte, tout comme les conclusions d'audits réalisés par des tiers sur la conformité aux critères ESG.

2. L'évaluation

Ensuite, l'agence examine la performance de l'entreprise selon les dimensions environnementales, sociales et de gouvernance. Cette étape permet de juger de l'efficacité des politiques mises en place et de la cohérence des pratiques observées.

3. La pondération et la notation

Après l'évaluation, chaque indicateur ESG se voit attribuer un poids spécifique. Cette pondération reflète la pertinence relative de chaque critère, en tenant compte du secteur d'activité et des particularités de l'entreprise.

4. La production du score final

Enfin, toutes les composantes sont agrégées pour produire un score ESG global. Ce score peut être présenté sous différentes formes selon l'agence : échelle de notation qualitative (AAA à CCC) ou score numérique (par exemple de 0 à 100).

Ainsi, la méthodologie combine à la fois des données quantitatives, comme des mesures environnementales ou statistiques sociales, et des évaluations qualitatives, telles que la qualité de la gouvernance ou l'efficacité des politiques. Cela permet aux agences de fournir des scores ESG comparables et exploitables pour la gestion des investissements.

4.4 Intégration de l'ESG dans la gestion de portefeuille

L'intégration de l'ESG dans la gestion de portefeuille consiste à utiliser les informations extra-financières, critères, indicateurs et scores ESG, pour orienter les décisions d'investissement. Après avoir présenté les scores ESG, nous montrons comment ces données peuvent être intégrées dans l'analyse financière. Les principales approches utilisées par les investisseurs sont présentées dans la section suivante.

4.4.1 Méthodes d'intégration

Les approches d'intégration ESG peuvent être regroupées en cinq grandes catégories, telles qu'elles apparaissent dans les principales classifications internationales. Pour ce mémoire, les informations s'appuient sur le rapport de 2024 de la « Global Sustainable Investment Alliance » [18] . Les différentes méthodes sont présentées ci-dessous.

Screening

Le screening consiste à appliquer des critères prédéfinis qui permettent de déterminer si un investissement peut être envisageable ou non.

On distingue trois formes de screening :

- **Screening fondé sur des normes** : C'est la sélection des investissements selon des normes minimales de pratiques commerciales ou d'émetteurs basées sur des normes internationales telles que celles émises par l'ONU, l'OIT, l'OCDE et les ONG comme par exemple Transparency International.

- **Screening négatif/exclusion** : Cette approche vise à exclure certains secteurs, entreprises, pays ou émetteurs dont les activités sont considérées comme incompatibles avec les valeurs ou les exigences d'un fonds ou d'un portefeuille.
Les critères d'exclusion peuvent porter, par exemple, sur des produits comme les armes ou le tabac, sur des pratiques d'entreprises comme les expérimentations animales, la corruption ou des controverses majeures.
- **Screening positif/« Best-in-class »** : Cette méthode privilégie des secteurs, entreprises ou projets ayant une performance ESG positive au sein de leur secteur, à condition qu'ils dépassent un seuil de qualité défini au préalable.

Intégration ESG

L'intégration ESG correspond à l'inclusion systématique des facteurs environnementaux, sociaux et de gouvernance dans l'analyse financière et dans le processus de décision, dans l'objectif d'améliorer le profil rendement-risque des investissements.

Investissement thématique

L'investissement thématique consiste à sélectionner des actifs exposés à une tendance ou un enjeu spécifique.

Stewardship

Le stewardship renvoie à l'utilisation, par les investisseurs, de leurs droits et de leur influence pour contribuer à la préservation et l'amélioration de la valeur durable des portefeuilles. Cette démarche inclut la prise en compte des ressources économiques, sociales et environnementales dont dépendent les intérêts des clients et des bénéficiaires.

Investissement à impact

L'investissement à impact vise à générer un impact social et/ou environnemental positif, mesurable et intentionnel, tout en recherchant un rendement financier.

Chapitre 5

Impact de l'intégration ESG sur la performance des portefeuilles

La performance financière des portefeuilles intègre désormais de manière croissante des considérations extra-financières, en particulier les critères ESG présentés dans le Chapitre 4. Cette évolution s'inscrit dans un mouvement plus large de la gestion d'actifs, où le rendement ne peut plus être dissocié de la prise en compte des enjeux environnementaux, sociaux et de gouvernance.

Le but de ce chapitre est d'apporter une réponse théorique à l'impact de l'intégration ESG sur la performance des portefeuilles. Nous analysons comment l'intégration ESG affecte les fondements de la théorie moderne du portefeuille.

Dans un premier temps, nous étudions l'impact de cette intégration sur les modèles classiques de Markowitz et du MEDAF, en montrant comment l'intégration des critères ESG modifie la frontière efficiente et l'équilibre des actifs. Dans un second temps, nous examinons les conséquences sur les différentes mesures de performance présentées en Chapitre 2, à savoir le ratio de Sharpe, le ratio de Treynor et l'alpha de Jensen. Enfin, nous étendons notre analyse à l'attribution de la performance.

L'entièreté de ce chapitre repose sur [17] et sur des apports personnels.

5.1 Impact de l'intégration ESG sur la théorie moderne du portefeuille

L'intégration de critères ESG modifie les fondements de la théorie moderne du portefeuille. En pratique, cela revient à ajuster la fonction objective ou les contraintes du modèle classique. Alors que le modèle classique repose sur le couple rendement-risque, l'introduction d'un critère supplémentaire crée une nouvelle dimension dans l'optimisation.

L'objectif de cette section est d'examiner comment l'ajout de ce critère affecte les résultats fondamentaux de Markowitz et du MEDAF. Nous analysons successivement la modification de la frontière efficiente, du portefeuille tangent et des relations d'équilibre, avant d'étudier les conséquences sur les mesures et l'attribution de la performance.

5.1.1 Théorie de Markowitz avec intégration ESG

L'intégration des critères ESG dans la théorie de Markowitz peut être abordée de deux manières complémentaires : soit en ajoutant une contrainte supplémentaire à l'optimisation, soit en incluant une préférence explicite pour l'ESG dans la fonction d'utilité. Nous présentons d'abord la version « contrainte ».

Proposition 5.1.1. *(Modèle de Markowitz sous contrainte ESG)*

Soient $R_1, \dots, R_n$ les rendements de n actifs risqués tel que $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_n)^\top$ et que les R_i soient linéairement indépendants. De plus, la matrice de variance-covariance des rendements Σ est symétrique et définie positive.

Considérons $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^n$ le vecteur des scores ESG des actifs et G un seuil minimal imposé au score ESG du portefeuille, représentant le niveau ESG minimal exigé par l'investisseur.

Pour un rendement fixé $E \in \mathbb{R}$, considérons l'ensemble des portefeuilles d'actifs P satisfaisant

$$\begin{cases} \mathbf{W}^\top \boldsymbol{\mu} = E \\ \mathbf{1}_n^\top \mathbf{W} = 1 \\ \mathbf{W}^\top \mathbf{g} \geq G \end{cases}$$

où $\mathbf{W}$ est le vecteur des poids des actifs du portefeuille et $\mathbf{1}_n$ est le vecteur unitaire de dimension n .

Le **modèle de Markowitz sous contrainte ESG** consiste à déterminer le portefeuille optimal P^* solution du problème d'optimisation

$$\min \sigma_P^2 = \min_{\mathbf{W}} \mathbf{W}^\top \Sigma \mathbf{W}$$

sous les contraintes ci-dessus.

Par la Proposition 1.3.2, ce modèle est équivalent à une formulation en termes de préférence, où l'investisseur attribue une valeur positive à la dimension ESG.

Proposition 5.1.2. (Modèle de Markowitz avec préférence ESG)

Soient $R_1, \dots, R_n$ les rendements de n actifs risqués tel que $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_n)^\top$. De plus, la matrice de variance-covariance Σ est symétrique et définie positive.

Soient $\delta \geq 0$ un coefficient de préférence ESG, $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^n$ le vecteur des scores ESG et $\gamma > 0$ un paramètre d'aversion au risque.

Le ratio $\frac{\delta}{\gamma}$ représente l'aversion du marché pour les actifs bruns, c'est-à-dire les actifs ayant un faible score ESG.

Soit un portefeuille P , μ_P son espérance de rendement et g_P son score ESG.

Le **modèle de Markowitz avec préférence ESG** consiste à résoudre

$$\max_P \left(\mu_P + \frac{\delta}{\gamma} g_P \right) - \frac{\gamma}{2} \sigma_P^2 = \max_W \left(\mathbf{W}^\top \boldsymbol{\mu} + \frac{\delta}{\gamma} \mathbf{W}^\top \mathbf{g} \right) - \frac{\gamma}{2} \mathbf{W}^\top \Sigma \mathbf{W} \quad (5.1)$$

sous la contrainte $\mathbf{1}_n^\top \mathbf{W} = 1$.

Remarques 5.1.1.

- γ est un paramètre d'aversion au risque. Les modèles supposent que tous les investisseurs sont averses au risque, ainsi ce paramètre est strictement positif ;
- δ est un coefficient de préférence ESG. Le but de ce chapitre étant de considérer les investisseurs ayant une préférence pour l'ESG, ce coefficient est positif.

Les deux formulations conduisent au même ensemble de portefeuilles optimaux, simplement paramétrés différemment.

Cependant, la frontière efficiente n'est pas impactée de la même manière selon le modèle choisi. Nous analysons ici comment la frontière efficiente est modifiée selon le type de modèle choisi.

Analysons tout d'abord le modèle de Markowitz avec préférence ESG, donné à la Proposition 5.1.2.

Pour illustrer l'effet d'une préférence ESG sur le portefeuille optimal, nous nous appuyons sur la représentation proposée par Pederson, Fitzgibbons et Pomorski [29]. Cette figure représente la frontière ESG-SR, c'est-à-dire le ratio de Sharpe maximal atteignable, pour chaque niveau de score ESG. Les résultats sont présentés à la Figure 5.1.

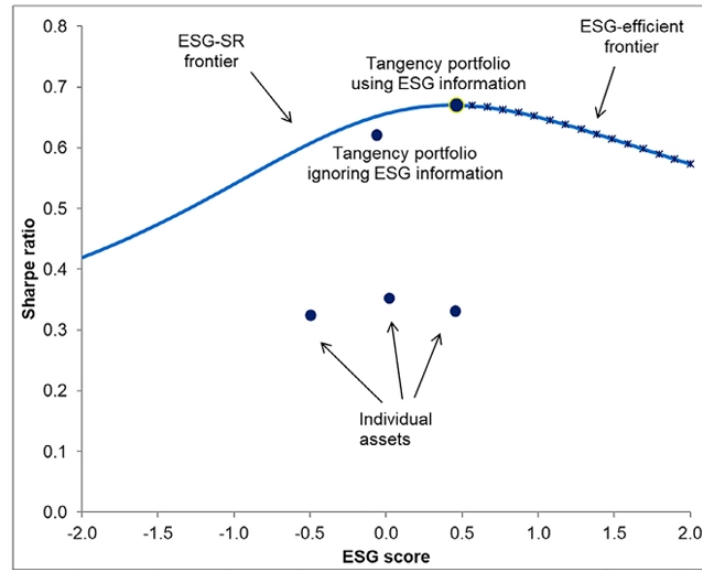


FIGURE 5.1 – Frontière ESG-SR et portefeuille tangent sous préférence ESG. Source : [29].

La courbe « ESG-SR frontier » indique, pour chaque score ESG, le ratio de Sharpe maximal qu'un investisseur peut atteindre. Lorsqu'un investisseur montre une préférence positive pour l'ESG, il souhaite investir dans des actifs ayant des scores ESG élevés. Ainsi, l'investisseur souhaite un score ESG élevé et maximiser une fonction d'utilité combinant le ratio de Sharpe et une préférence ESG. Pour respecter ces critères, le nouveau portefeuille tangent est décalé vers la droite de la courbe, c'est-à-dire vers des portefeuilles présentant un score ESG élevé. Ce portefeuille est représenté par le point « Tangency portfolio using ESG information ».

Ce déplacement montre qu'en intégrant l'ESG, l'investisseur obtient un ratio de Sharpe plus élevé, tout en choisissant des portefeuilles ayant un score ESG élevé. La préférence ESG ne modifie donc pas la forme de la frontière rendement-risque, mais elle modifie le portefeuille optimal pour intégrer des actifs plus verts, comme indiqué dans la Proposition 5.1.2.

Analysons à présent le modèle de Markowitz sous contrainte ESG, donné à la Proposition 5.1.1.

Pour illustrer l'effet d'une contrainte ESG sur la frontière efficiente, nous nous appuyons sur la représentation proposée par Pederson, Fitzgibbons et Pomorski [29]. Cette figure montre la frontière efficiente classique ainsi que la frontière obtenue en restreignant l'ensemble des portefeuilles à ceux ayant un score ESG fixé à un niveau donné. Les résultats sont présentés à la Figure 5.2.

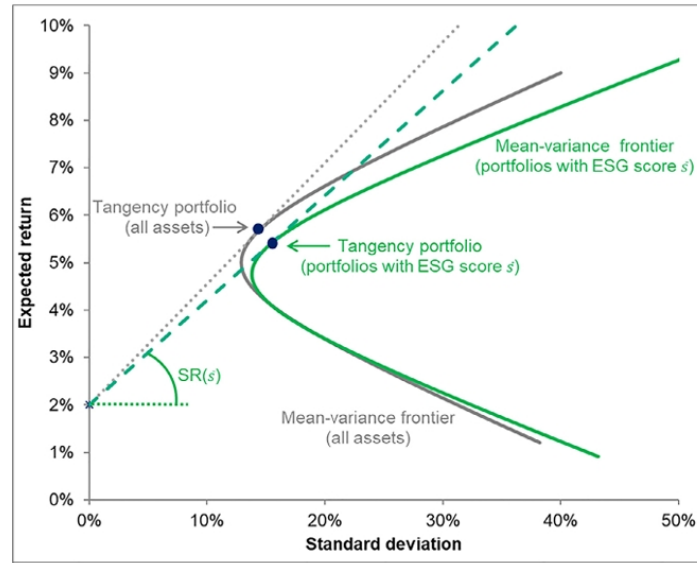


FIGURE 5.2 – Frontière efficiente classique et frontière sous contrainte ESG. Source : [29].

La courbe grise représente la frontière efficiente classique, obtenue à l'aide de l'ensemble des actifs. La courbe verte représente la frontière obtenue lorsque les portefeuilles dont le score ESG est fixé à un niveau donné. Cette courbe est à l'intérieur de la courbe grise, elle est déplacée vers la droite.

Nous savons que pour chaque frontière, nous pouvons trouver un portefeuille tangent, conformément à la définition donnée en Section 1.2. Le portefeuille tangent associé à la contrainte ESG présente un ratio de Sharpe plus faible que celui obtenu dans le cas classique.

Ainsi, comparé au modèle de Markowitz avec préférence ESG, qui se contente de modifier le portefeuille optimal, le modèle de Markowitz sous contrainte ESG modifie la forme de la frontière efficiente. Cette modification est due à la restriction de l'ensemble des portefeuilles admissibles, ce qui entraîne une frontière plus courte et un portefeuille tangent moins performant. Ce résultat est conforme à la Proposition 5.1.1, bien que la contrainte soit plus restrictive dans cette interprétation.

Dans la suite du chapitre, le modèle de Markowitz avec préférence ESG, donné la Proposition 5.1.2, sera utilisé afin de garder la cohérence des notations de la source [17].

5.1.2 MEDAF modifié

L'introduction d'un actif sans risque et d'une préférence ESG conduit naturellement à une modification du MEDAF classique. En effet, le MEDAF classique repose sur la tangence entre la SML et la frontière efficiente issue du modèle de Markowitz. Dès lors, l'ajout d'un critère ESG, qu'il soit formulé comme contrainte ou comme préférence, modifie la frontière efficiente et, par conséquent, la composition du portefeuille tangent. Cette modification se répercute sur la relation d'équilibre entre rendement attendu et risque systématique. Cette

section établit comment l'introduction d'un critère ESG affecte cet équilibre.

Pour établir le MEDAF modifié, nous passons désormais au modèle de Markowitz modifié avec actif sans risque. Ainsi, le portefeuille tangent coïncide avec le portefeuille de marché. Nous allons montrer la solution optimale de ce nouveau modèle.

Proposition 5.1.3. (*Modèle de Markowitz avec actif sans risque et préférence ESG*) Soient $R_1, \dots, R_n$ les rendements de n actifs risqués tel que $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_n)^\top$ et R_f le rendement d'un actif sans risque. De plus, la matrice de variance-covariance Σ est symétrique et définie positive.

Soient $\delta \geq 0$ un coefficient de préférence ESG, $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^n$ le vecteur des scores ESG des actifs risqués et $\gamma > 0$ un paramètre d'aversion au risque. Le ratio $\frac{\delta}{\gamma}$ représente l'aversion du marché pour les actifs ayant un faible score ESG.

Un portefeuille P est composé d'un actif sans risque de poids w_0 et de n actifs risqués de poids $\mathbf{W} = (w_1, \dots, w_n)^\top$, avec la contrainte

$$w_0 + \mathbf{1}_n^\top \mathbf{W} = 1.$$

Le modèle de Markowitz avec préférence ESG consiste à résoudre

$$\max_{w_0, \mathbf{W}} \left(w_0 R_f + \mathbf{W}^\top \boldsymbol{\mu} + \frac{\delta}{\gamma} \mathbf{W}^\top \mathbf{g} \right) - \frac{\gamma}{2} \mathbf{W}^\top \Sigma \mathbf{W}.$$

La solution optimale de ce modèle est donnée par

$$\mathbf{W}^* = \frac{1}{\gamma} \Sigma^{-1} \left(\boldsymbol{\mu} - R_f \mathbf{1}_n + \frac{\delta}{\gamma} \mathbf{g} \right).$$

Démonstration. Considérons un portefeuille P composé d'un actif sans risque de poids w_0 et de n actifs risqués de poids respectifs $\mathbf{W} = (w_1, \dots, w_n)^\top$ satisfaisant $w_0 + \mathbf{1}_n^\top \mathbf{W} = 1$. Ainsi, le rendement du portefeuille P s'écrit :

$$R_P = w_0 R_f + \mathbf{W}^\top \mathbf{R}.$$

D'où, le problème d'optimisation s'écrit :

$$\max_{w_0, \mathbf{W}} (w_0 R_f + \mathbf{W}^\top \boldsymbol{\mu} + \frac{\delta}{\gamma} \mathbf{W}^\top \mathbf{g}) - \frac{\gamma}{2} \mathbf{W}^\top \Sigma \mathbf{W}.$$

Le Lagrangien associé est

$$L(\mathbf{W}, w_0, \lambda) = w_0 R_f + \mathbf{W}^\top \boldsymbol{\mu} + \frac{\delta}{\gamma} \mathbf{W}^\top \mathbf{g} - \frac{\gamma}{2} \mathbf{W}^\top \Sigma \mathbf{W} + \lambda(1 - (\mathbf{1}_n^\top \mathbf{W} + w_0)).$$

Ainsi, les conditions du premier ordre sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{W}} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial w_0} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

En calculant les différentes dérivées partielles, nous obtenons

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{W}} = \boldsymbol{\mu} + \frac{\delta}{\gamma} \mathbf{g} - \gamma \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{W} - \lambda \mathbf{1}_n;$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_0} = R_f - \lambda;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 - (\mathbf{1}_n^\top \mathbf{W} + w_0).$$

Ainsi, le système (5.2) se réécrit :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mu} + \frac{\delta}{\gamma} \mathbf{g} - \gamma \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{W} - \lambda \mathbf{1}_n = 0 \\ R_f - \lambda = 0 \\ 1 - (\mathbf{1}_n^\top \mathbf{W} + w_0) = 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

Ainsi, la troisième équation nous rend simplement notre contrainte.

La deuxième équation nous donne $\lambda = R_f$, ainsi en remplaçant dans la première équation, nous avons

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu} + \frac{\delta}{\gamma} \mathbf{g} - \gamma \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{W} - R_f \mathbf{1}_n &= 0 \\ \Leftrightarrow \gamma \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{W} &= \boldsymbol{\mu} + \frac{\delta}{\gamma} \mathbf{g} - R_f \mathbf{1}_n \\ \Leftrightarrow \mathbf{W} &= \frac{1}{\gamma} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} + \frac{\delta}{\gamma^2} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{g} - \frac{1}{\gamma} R_f \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_n \\ \Leftrightarrow \mathbf{W} &= \frac{1}{\gamma} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \left(\boldsymbol{\mu} + \frac{\delta}{\gamma} \mathbf{g} - R_f \mathbf{1}_n \right). \end{aligned}$$

Ainsi, la solution optimale du modèle est donnée par

$$\mathbf{W}^* = \frac{1}{\gamma} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \left(\boldsymbol{\mu} + \frac{\delta}{\gamma} \mathbf{g} - R_f \mathbf{1}_n \right). \quad (5.4)$$

□

Nous pouvons à présent en déduire la prime de risque du marché.

Proposition 5.1.4. (*Prime de risque du marché ESG*)

La solution optimale $\mathbf{W}^*$ définie dans la Proposition 5.1.3 permet de calculer la **prime de risque du marché** suivante :

$$\mu_M - R_f = \gamma \sigma_M^2 - \frac{\delta}{\gamma} g_M$$

où $g_M = \mathbf{W}^{*\top} \mathbf{g}$ représente le score ESG agrégé du portefeuille de marché, obtenu comme moyenne pondérée des scores ESG des actifs.

Démonstration. Comme expliqué à la Section 1.4.3, le portefeuille tangent coïncide avec le portefeuille de marché. Par définition du portefeuille de marché donnée à la Section 1.2, il est simplement composé de tous les actifs disponibles pondérés par leur capitalisation. Vu les notations matricielles des Définitions 1.3.5 et 1.3.6, les caractéristiques du portefeuille de marché s'obtiennent simplement en évaluant ces formules au vecteur de poids $\mathbf{W}^*$:

$$\mu_M = \mathbf{W}^{*\top} \boldsymbol{\mu} \quad (5.5)$$

et

$$\sigma_M^2 = \mathbf{W}^{*\top} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{W}^*. \quad (5.6)$$

De plus, par définition de g_M , nous avons

$$g_M = \mathbf{W}^{*\top} \mathbf{g}. \quad (5.7)$$

En repartant de la solution optimale donnée à la Proposition 5.1.3, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^* &= \frac{1}{\gamma} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \left(\boldsymbol{\mu} + \frac{\delta}{\gamma} \mathbf{g} - R_f \mathbf{1}_n \right) \\ \Leftrightarrow \gamma \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{W}^* &= \boldsymbol{\mu} + \frac{\delta}{\gamma} \mathbf{g} - R_f \mathbf{1}_n \\ \Leftrightarrow \boldsymbol{\mu} - R_f \mathbf{1}_n &= \gamma \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{W}^* - \frac{\delta}{\gamma} \mathbf{g}. \end{aligned}$$

Le vecteur $\boldsymbol{\mu} - R_f \mathbf{1}_n$ représente les primes de risque individuelles. La prime de risque du marché est la moyenne pondérée de ces primes selon les poids optimaux $\mathbf{W}^*$.

Ainsi, en multipliant l'égalité précédente à gauche par $\mathbf{W}^{*\top}$, nous avons

$$\mathbf{W}^{*\top} (\boldsymbol{\mu} - R_f \mathbf{1}_n) = \gamma \mathbf{W}^{*\top} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{W}^* - \frac{\delta}{\gamma} \mathbf{W}^{*\top} \mathbf{g}.$$

Par l'hypothèse de normalisation des poids $\mathbf{W}^{*\top} \mathbf{1}_n = 1$ et vu les Equations (5.5), (5.6) et (5.7), la prime de marché vaut

$$\mu_M - R_f = \gamma \sigma_M^2 - \frac{\delta}{\gamma} g_M.$$

□

Seul le deuxième terme de la prime de risque du marché est nouveau. Nous avons supposé que δ et γ sont positifs, donc le signe de ce terme dépend uniquement du signe de g_M . Ainsi, si le portefeuille a un score ESG positif, $g_M > 0$, alors ce second terme est négatif et la prime de risque du marché est plus faible qu'en l'absence de préférence ESG. Les investisseurs ayant une préférence ESG positive sont prêts à accepter un rendement plus faible, qui est compensé par leur satisfaction de détenir des actifs verts. Autrement dit, la prime de risque financière diminue mais la prime de risque totale, financière et ESG, reste cohérente avec leurs exigences.

Dans la suite, nous supposons que $g_M = 0$, ce qui signifie, qu'en moyenne, les entreprises avec un score ESG élevé compensent les entreprises ayant un score ESG faible. Il s'agit d'une hypothèse standard dans les modèles financiers intégrant l'ESG. Dans un portefeuille de marché large et diversifié, les scores ESG extrêmes ont tendance à se neutraliser, de sorte que le marché peut être considéré comme globalement neutre du point de vue ESG.

Proposition 5.1.5. (*MEDAF avec préférence ESG*)

Supposons les 7 hypothèses citées en Section 1.4.4 vérifiées.

Soient n actifs risqués avec $R_1, \dots, R_n$ leur rendement, R_f le rendement d'un actif sans risque, M le portefeuille de marché et R_M son rendement.

De plus, considérons $\mathbf{g}$ le vecteur des scores ESG, $\delta \geq 0$ un coefficient de préférence ESG, $\gamma > 0$ un paramètre d'aversion au risque et le ratio $\frac{\delta}{\gamma}$ représentant l'aversion du marché aux actifs ayant un faible score ESG.

Alors, pour tout $i = 1, \dots, n$, le rendement espéré de l'actif i se caractérise par :

$$\mu_i = R_f + \beta_i(\mu_M - R_f) - \frac{\delta}{\gamma}g_i$$

avec β_i le risque systématique de l'actif i , défini par $\beta_i = \frac{\text{Cov}(R_i, R_M)}{\sigma_M^2}$ et g_i son score ESG.

La preuve suivante a une structure similaire à la preuve de la Proposition 1.4.1, adaptée à l'intégration de critères ESG.

Démonstration. Soit un portefeuille P composé d'un actif risqué i de poids w et du portefeuille de marché M de poids $1 - w$. Ce portefeuille s'écrit :

$$P = wi + (1 - w)M.$$

Soit g_P le score ESG du portefeuille P , il se décompose comme

$$g_P = wg_i + (1 - w)g_M,$$

où g_i est le score ESG de l'actif i et g_M est le score ESG agrégé du portefeuille de marché. De plus, nous avons supposé que $g_M = 0$, ainsi $g_P = wg_i$.

Dans le cadre de préférence ESG, comme vu à la Proposition 5.1.2, l'effet de l'ESG se traduit par un ajustement additif de l'espérance, tandis que le risque reste inchangé. Ainsi, l'espérance de rendement ajustée à l'ESG vaut :

$$\mu_P = w\mu_i + (1 - w)\mu_M + \frac{\delta}{\gamma}wg_i.$$

Le risque étant inchangé et caractérisé par l'écart-type des rendements, l'expression de l'écart-type est identique à celle donnée dans la Proposition 1.4.1, à savoir

$$\sigma_P = (w^2\sigma_i^2 + (1 - w)^2\sigma_M^2 + 2w(1 - w)\text{Cov}(R_i, R_M))^{1/2}.$$

Les dérivées partielles de l'espérance ajustée et de l'écart-type sont données par

$$\frac{\partial\mu_P}{\partial w} = \mu_i - \mu_M + \frac{\delta}{\gamma}g_i$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_P}{\partial w} &= \frac{1}{2} (w^2\sigma_i^2 + (1 - w)^2\sigma_M^2 + 2w(1 - w)\text{Cov}(R_i, R_M))^{-1/2} \\ &\quad (2w\sigma_i^2 - 2(1 - w)\sigma_M^2 + 2\text{Cov}(R_i, R_M) - 4w\text{Cov}(R_i, R_M)). \end{aligned}$$

A l'équilibre, tout investisseur détient une combinaison de l'actif sans risque et du portefeuille de marché. Ainsi, le portefeuille P coïncide avec le portefeuille de marché lorsque $w = 0$. Nous allons donc évaluer les dérivées partielles en $w = 0$, ainsi

$$\left. \frac{\partial\mu_P}{\partial w} \right|_{w=0} = \mu_i - \mu_M + \frac{\delta}{\gamma}g_i$$

et

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial\sigma_P}{\partial w} \right|_{w=0} &= \frac{1}{2} (\sigma_M^2)^{-1/2} (-2\sigma_M^2 + 2\text{Cov}(R_i, R_M)) \\ &= \frac{1}{2} \frac{(2\text{Cov}(R_i, R_M) - 2\sigma_M^2)}{(\sigma_M^2)^{1/2}} \\ &= \frac{\text{Cov}(R_i, R_M) - \sigma_M^2}{\sigma_M}. \end{aligned}$$

Ainsi, la pente de la courbe risque-rendement au point M , sous l'hypothèse d'équilibre de marché, est donnée par :

$$\left. \frac{\frac{\partial\mu_P}{\partial w}}{\frac{\partial\sigma_P}{\partial w}} \right|_{w=0} = \frac{\left(\mu_i - \mu_M + \frac{\delta}{\gamma}g_i \right) \sigma_M}{\text{Cov}(R_i, R_M) - \sigma_M^2}.$$

Par unicité de la SML, la pente obtenue au point M doit coïncider avec la SML-ESG, c'est-à-dire la SML intégrant la préférence ESG.

Rappelons que, dans le MEDAF classique, Proposition 1.4.1, la pente de la SML est donnée par :

$$\frac{\mu_M - R_f}{\sigma_M}.$$

Or, nous avons vu dans la Proposition 5.1.2, que l'introduction d'une préférence ESG n'affecte pas le risque d'un portefeuille, mais modifie uniquement son espérance de rendement. Celle-ci devient donc

$$\mu_M + \frac{\delta}{\gamma} g_M.$$

Ainsi, la pente de la SML-ESG s'obtient en remplaçant μ_M par cette nouvelle espérance dans l'expression classique, ce qui conduit à :

$$\frac{\mu_M + \frac{\delta}{\gamma} g_M - R_f}{\sigma_M}.$$

Mais nous avons supposé que $g_M = 0$, ainsi la SML-ESG est similaire à la SML classique. Ainsi, nous avons l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\mu_M - R_f}{\sigma_M} &= \frac{(\mu_i - \mu_M + \frac{\delta}{\gamma} g_i) \sigma_M}{\text{Cov}(R_i, R_M) - \sigma_M^2} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{\mu_M - R_f}{\sigma_M} \right) (\text{Cov}(R_i, R_M) - \sigma_M^2) \frac{1}{\sigma_M} &= \mu_i - \mu_M + \frac{\delta}{\gamma} g_i \\ \Leftrightarrow \frac{(\mu_M - R_f) \text{Cov}(R_i, R_M)}{\sigma_M^2} - \mu_M + R_f &= \mu_i - \mu_M + \frac{\delta}{\gamma} g_i \\ \Leftrightarrow R_f + \frac{(\mu_M - R_f) \text{Cov}(R_i, R_M)}{\sigma_M^2} - \frac{\delta}{\gamma} g_i &= \mu_i. \end{aligned}$$

De plus, en posant le risque systématique $\beta_i = \frac{\text{Cov}(R_i, R_M)}{\sigma_M^2}$, l'expression devient

$$\mu_i = R_f + \beta_i (\mu_M - R_f) - \frac{\delta}{\gamma} g_i.$$

□

Nous venons de montrer comment les modèles de Markowitz et du MEDAF sont modifiés par l'intégration ESG. Nous pouvons à présent montrer comment ces nouveaux modèles influencent l'espérance et la variance du rendement d'un portefeuille intégrant des contraintes ESG.

5.1.3 Espérance et variance du rendement d'un portefeuille ESG

Dans cette section, nous caractérisons l'espérance et la variance du rendement du portefeuille d'équilibre d'un investisseur j exprimant une préférence ESG. A partir des modèles de Markowitz et du MEDAF avec préférence ESG, donnés dans les Propositions 5.1.2 et 5.1.5, nous montrons que le portefeuille optimal de j ajoute une composante supplémentaire dans la direction ESG au portefeuille de marché. Sous les hypothèses usuelles ($\gamma_j = \gamma, g_M = 0$, normalisation $\mathbf{g}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{1}_n = 0$), nous montrons les expressions de $\mu_{P(j)}$ et de $\sigma_{P(j)}^2$, qui mettent en évidence le rôle central du coefficient de précision ESG ϕ_G .

Proposition 5.1.6. (*Espérance et variance du rendement d'un portefeuille ESG*)

Soit un investisseur j caractérisé par les coefficients γ_j et δ_j , son portefeuille d'équilibre global résultant a pour espérance de rendement et variance :

$$\mu_{P(j)} = \mu_M - \delta_{(j-M)} \left(\frac{\delta}{\gamma^3} \phi_G \right)$$

et

$$\sigma_{P(j)}^2 = \sigma_M^2 + \delta_{(j-M)}^2 \left(\frac{1}{\gamma^4} \phi_G \right)$$

où

- M est le portefeuille de marché, μ_M son espérance de rendement et σ_M son risque, caractérisé par l'écart-type de ses rendements ;
- $\delta_{(j-M)} = \delta_j - \delta$ est la différence entre la préférence ESG de l'investisseur et la préférence ESG moyenne du marché ;
- $\phi_G = \mathbf{g}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{g}$ est un coefficient de précision pondéré ESG, strictement positif lorsque Σ est définie positive et $\mathbf{g} \neq 0$.

Démonstration. Reprenons le modèle de Markowitz énoncé à la Proposition 5.1.2 et cherchons l'expression de l'espérance. Ce modèle était :

$$\max_{\mathbf{W}} \left(\mathbf{W}^\top \boldsymbol{\mu} + \frac{\delta}{\gamma} \mathbf{W}^\top \mathbf{g} \right) - \frac{\gamma}{2} \mathbf{W}^\top \Sigma \mathbf{W}$$

sous la contrainte $\mathbf{1}_n^\top \mathbf{W} = 1$.

Ainsi, le Lagrangien est donné par

$$L(\mathbf{W}, \lambda) = \mathbf{W}^\top \boldsymbol{\mu} + \frac{\delta}{\gamma} \mathbf{W}^\top \mathbf{g} - \frac{\gamma}{2} \mathbf{W}^\top \Sigma \mathbf{W} + \lambda (1 - \mathbf{1}_n^\top \mathbf{W}).$$

Les conditions du premier ordre sont données par

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{W}} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}. \quad (5.8)$$

Calculons les dérivées partielles :

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{W}} = \boldsymbol{\mu} + \frac{\delta}{\gamma} \mathbf{g} - \gamma \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{W} - \lambda \mathbf{1}_n$$

et

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 - \mathbf{1}_n^\top \mathbf{W}.$$

Ainsi, le système (5.8) se réécrit :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mu} + \frac{\delta}{\gamma} \mathbf{g} - \gamma \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{W} - \lambda \mathbf{1}_n = 0 \\ \mathbf{1}_n^\top \mathbf{W} = 1 \end{cases}. \quad (5.9)$$

Ainsi,

$$\boldsymbol{\mu} = \gamma \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{W} + \lambda \mathbf{1}_n - \frac{\delta}{\gamma} \mathbf{g}. \quad (5.10)$$

Ensuite, prenons un investisseur j et cherchons à maximiser sa fonction d'utilité

$$\mathbf{W}_j^\top \boldsymbol{\mu} + \frac{\delta_j}{\gamma_j} \mathbf{W}_j^\top \mathbf{g} - \frac{\gamma_j}{2} \mathbf{W}_j^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{W}_j$$

sous la contrainte $\mathbf{1}_n^\top \mathbf{W}_j = 1$. Ainsi, le Lagrangien de cette fonction est donné par

$$L(\mathbf{W}_j, \lambda) = \mathbf{W}_j^\top \boldsymbol{\mu} + \frac{\delta_j}{\gamma_j} \mathbf{W}_j^\top \mathbf{g} - \frac{\gamma_j}{2} \mathbf{W}_j^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{W}_j + \lambda (1 - \mathbf{1}_n^\top \mathbf{W}_j).$$

Les conditions du premier ordre sont donc

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{W}_j} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}. \quad (5.11)$$

Nous supposons que les investisseurs partagent la même contrainte budgétaire, ce qui se traduit par un multiplicateur de Lagrange λ identique dans les conditions d'optimalité. Ainsi, calculons les dérivées partielles :

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{W}_j} = \boldsymbol{\mu} + \frac{\delta_j}{\gamma_j} \mathbf{g} - \gamma_j \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{W}_j - \lambda \mathbf{1}_n$$

et

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 - \mathbf{1}_n^\top \mathbf{W}_j.$$

Ainsi, les conditions du premier ordre données par le Système (5.11) se réécrivent :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mu} + \frac{\delta_j}{\gamma_j} \mathbf{g} - \gamma_j \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{W}_j - \lambda \mathbf{1}_n = 0 \\ \mathbf{1}_n^\top \mathbf{W}_j = 1 \end{cases}. \quad (5.12)$$

Ainsi, l'espérance vaut

$$\boldsymbol{\mu} = \gamma_j \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{W}_j - \frac{\delta_j}{\gamma_j} \mathbf{g} + \lambda \mathbf{1}_n. \quad (5.13)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} (5.13) - (5.10) &= 0 \\ \Leftrightarrow \gamma_j \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{W}_j - \frac{\delta_j}{\gamma_j} \mathbf{g} + \lambda \mathbf{1}_n - \left(\gamma \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{W} + \lambda \mathbf{1}_n - \frac{\delta}{\gamma} \mathbf{g} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \gamma_j \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{W}_j - \frac{\delta_j}{\gamma_j} \mathbf{g} - \gamma \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{W} + \frac{\delta}{\gamma} \mathbf{g} &= 0 \\ \Leftrightarrow \gamma_j \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{W}_j &= \frac{\delta_j}{\gamma_j} \mathbf{g} + \gamma \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{W} - \frac{\delta}{\gamma} \mathbf{g} \\ \Leftrightarrow \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{W}_j &= \mathbf{g} \left(\frac{\delta_j}{\gamma_j^2} - \frac{\delta}{\gamma \gamma_j} \right) + \frac{\gamma}{\gamma_j} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{W} \\ \Leftrightarrow \mathbf{W}_j &= \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{g} \left(\frac{\delta_j}{\gamma_j^2} - \frac{\delta}{\gamma \gamma_j} \right) + \frac{\gamma}{\gamma_j} \mathbf{W}. \end{aligned}$$

En supposant que tous les investisseurs ont la même aversion au risque, $\gamma = \gamma_j$, l'expression précédente devient :

$$\mathbf{W}_j = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{g} \left(\frac{\delta_j - \delta}{\gamma^2} \right) + \mathbf{W}. \quad (5.14)$$

Nous cherchons à présent à calculer l'espérance. Nous savons que

$$\mu_{P(j)} = \mathbf{W}_j^\top \boldsymbol{\mu}.$$

Ainsi, en remplaçant $\mathbf{W}_j$ par son expression, nous avons

$$\begin{aligned} \mu_{P(j)} &= \left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{g} \left(\frac{\delta_j - \delta}{\gamma^2} \right) + \mathbf{W} \right)^\top \boldsymbol{\mu} \\ \Leftrightarrow \mu_{P(j)} &= \left(\frac{\delta_j - \delta}{\gamma^2} \right) \mathbf{g}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} + \mathbf{W}^\top \boldsymbol{\mu}. \end{aligned}$$

Or, nous savons que $\mathbf{W}^\top \boldsymbol{\mu} = \mu_M$.

Nous avons donc

$$\mu_{P(j)} = \left(\frac{\delta_j - \delta}{\gamma^2} \right) \mathbf{g}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} + \mu_M.$$

Concentrons-nous à présent sur l'expression de $\mathbf{g}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}$.

Par l'Equation (5.10), nous savons que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu} &= \gamma \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{W} - \frac{\delta}{\gamma} \mathbf{g} + \lambda \mathbf{1}_n \\ \Leftrightarrow \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} &= \gamma \mathbf{W} - \frac{\delta}{\gamma} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{g} + \lambda \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_n \\ \Leftrightarrow \mathbf{g}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} &= \gamma \mathbf{g}^\top \mathbf{W} - \frac{\delta}{\gamma} \mathbf{g}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{g} + \lambda \mathbf{g}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}_n. \end{aligned}$$

Or, $\mathbf{g}^\top \mathbf{W} = g_M = 0$.

En posant $\phi_G = \mathbf{g}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{g}$ et en imposant la normalisation $\mathbf{g}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{1}_n = 0$, nous obtenons

$$\mathbf{g}^\top \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} = -\frac{\delta}{\gamma} \phi_G.$$

En posant $\delta_j - \delta = \delta_{(j-M)}$ et en remplaçant l'expression précédente dans l'expression de $\mu_{P(j)}$, celle-ci devient

$$\mu_{P(j)} = \mu_M - \delta_{(j-M)} \left(\frac{\delta}{\gamma^3} \phi_G \right).$$

Passons à présent à l'expression de la variance. Nous savons que la variance de l'investisseur j est donnée par l'expression

$$\sigma_{P(j)}^2 = \mathbf{W}_j^\top \Sigma \mathbf{W}_j.$$

Ainsi, en remplaçant $\mathbf{W}_j$ par l'Equation (5.14), nous avons

$$\begin{aligned} \sigma_{P(j)}^2 &= \left(\Sigma^{-1} \mathbf{g} \left(\frac{\delta_{(j-M)}}{\gamma^2} \right) + \mathbf{W} \right)^\top \Sigma \left(\Sigma^{-1} \mathbf{g} \left(\frac{\delta_{(j-M)}}{\gamma^2} \right) + \mathbf{W} \right) \\ \Leftrightarrow \sigma_{P(j)}^2 &= \left(\Sigma^{-1} \mathbf{g} \left(\frac{\delta_{(j-M)}}{\gamma^2} \right) + \mathbf{W} \right)^\top \left(\left(\frac{\delta_{(j-M)}}{\gamma^2} \right) \mathbf{g} + \Sigma \mathbf{W} \right) \\ \Leftrightarrow \sigma_{P(j)}^2 &= \left(\frac{\delta_{(j-M)}}{\gamma^2} \right)^2 \mathbf{g}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{g} + \left(\frac{\delta_{(j-M)}}{\gamma^2} \right) \mathbf{W}^\top \mathbf{g} + \left(\frac{\delta_{(j-M)}}{\gamma^2} \right) \mathbf{g}^\top \mathbf{W} + \mathbf{W}^\top \Sigma \mathbf{W} \\ \Leftrightarrow \sigma_{P(j)}^2 &= \sigma_M^2 + \delta_{(j-M)}^2 \left(\frac{1}{\gamma^4} \phi_G \right). \end{aligned}$$

En posant $\phi_G = \mathbf{g}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{g}$ et en sachant que $\mathbf{W}^\top \Sigma \mathbf{W} = \sigma_M^2$, nous avons

$$\sigma_{P(j)}^2 = \left(\frac{\delta_{(j-M)}}{\gamma^2} \right)^2 \phi_G + \left(\frac{\delta_{(j-M)}}{\gamma^2} \right) (\mathbf{W}^\top \mathbf{g} + \mathbf{g}^\top \mathbf{W}) + \sigma_M^2.$$

De plus, nous savons que $\mathbf{W}^\top \mathbf{g} = \mathbf{g}^\top \mathbf{W} = 0$. Ainsi,

$$\sigma_{P(j)}^2 = \sigma_M^2 + \delta_{(j-M)}^2 \left(\frac{1}{\gamma^4} \phi_G \right).$$

□

5.2 Impact de l'intégration ESG sur les mesures de performance

Après avoir caractérisé l'espérance et la variance du rendement du portefeuille d'équilibre d'un investisseur j dans le cadre des modèles de Markowitz et du MEDAF intégrant une préférence ESG, nous pouvons désormais analyser les conséquences de ces résultats sur

les principales mesures de performance présentées au Chapitre 3.

Cette section examine comment l'introduction d'une préférence ESG modifie le ratio de Sharpe, l'alpha de Jensen, le risque systématique β et le ratio de Treynor. Nous montrons ensuite comment ces ajustements s'interprètent selon les trois profils d'investisseur issus de l'intégration ESG.

5.2.1 Impact sur le ratio de Sharpe

Sous les modèles de Markowitz et du MEDAF classiques, le ratio de Sharpe était donné par la formule suivante :

$$S_P = \frac{\mu_P - R_f}{\sigma_P}$$

où

- μ_P est l'espérance de rendement du portefeuille P ;
- R_f est le taux sans risque ;
- σ_P est l'écart-type des rendements du portefeuille P .

Dans le cadre des modèles de Markowitz et du MEDAF avec préférence ESG, nous avons vu que l'espérance et la variance du rendement du portefeuille optimal d'un investisseur j dépendaient d'un coefficient de précision ESG. Ainsi, le nouveau ratio de Sharpe pour un investisseur j est donné par la formule :

$$\tilde{S}_P^j = \frac{\mu_{P(j)} - R_f}{\sigma_{P(j)}}$$

où

- $\mu_{P(j)}$ est l'espérance du rendement du portefeuille optimal P d'un investisseur j ;
- R_f est le taux sans risque ;
- $\sigma_{P(j)}$ est l'écart-type des rendements du portefeuille optimal P d'un investisseur j .

En reprenant les résultats de la Proposition 5.1.6, nous pouvons écrire explicitement le ratio de Sharpe de la manière suivante :

$$\tilde{S}_P^j = \frac{\mu_M - \delta_{(j-M)} \left(\frac{\delta}{\gamma^3} \phi_G \right) - R_f}{\sqrt{\sigma_M^2 + \delta_{(j-M)}^2 \left(\frac{1}{\gamma^4} \phi_G \right)}}.$$

Nous cherchons à présent à regarder les effets de la préférence ESG δ et du coefficient de précision ESG ϕ_G sur ce nouveau ratio. Pour cela, nous avons fixé les paramètres du marché conformément aux hypothèses du modèle :

- $\mu_M - R_f = 0.06$;
- $\gamma = 2$, l'aversion au risque étant identique pour tous les investisseurs ;

- $\sigma_M = 0.15$.

Avec ces valeurs, le ratio de Sharpe classique donne

$$S_P = \frac{0.06}{0.15} = 0.4.$$

Le ratio de Sharpe ESG est ensuite calculé pour différentes combinaisons de δ et de ϕ_G . Nous avons choisi de représenter les valeurs du ratio de Sharpe ESG en fonction des valeurs de $\delta_{(j-M)}$. Ce choix permet d'isoler l'effet de la préférence ESG sur la performance ajustée au risque, car la variance ne dépend que de $\delta_{(j-M)}^2$. Les résultats sont à visualiser sur la Figure 5.3.

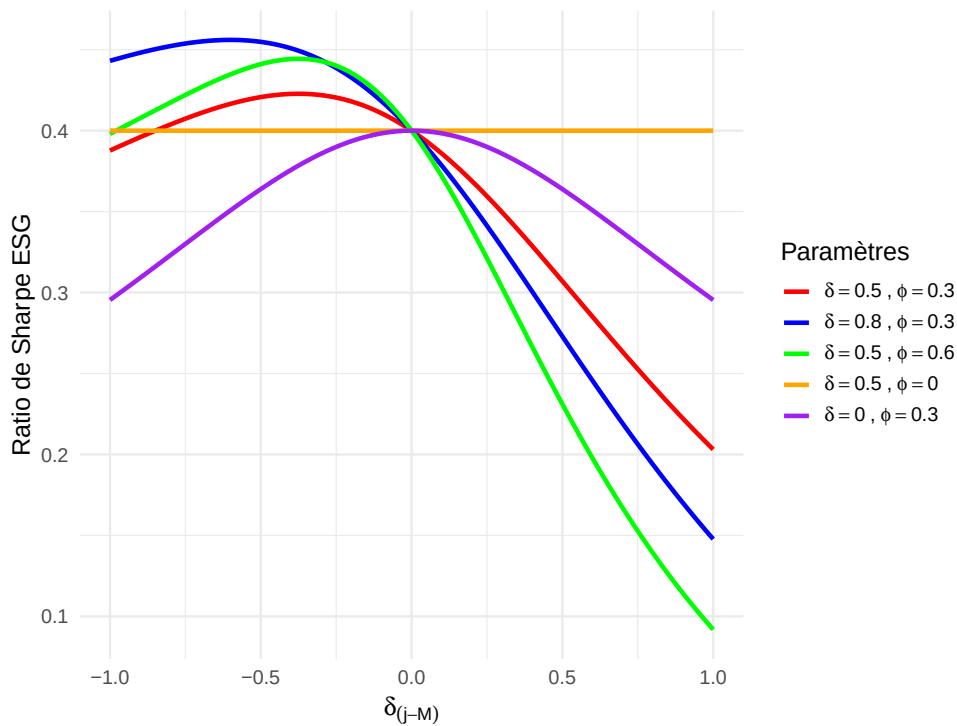


FIGURE 5.3 – Illustration du ratio de Sharpe modifié.

Analysons à présent la Figure 5.3.

Le point (0, 0.4) correspond à la valeur du ratio de Sharpe classique. Ce ratio de Sharpe est également obtenu dans le cadre ESG lorsque $\delta_{(j-M)} = 0$, puisque l'effet ESG disparaît dans ce cas, ce qui est confirmé sur le graphique.

Analysons à présent les cinq courbes représentées sur le graphique. Leur comportement peut être interprété selon deux dimensions : l'effet de la préférence ESG δ et l'effet du coefficient de précision ESG ϕ_G .

Dans un premier temps, une explication individuelle des cinq courbes est proposée. Dans un second temps, une conclusion générale synthétise les effets respectifs de δ et ϕ_G sur le

ratio de Sharpe ESG.

Analysons les cinq courbes :

- Courbe rouge ($\delta = 0.5, \phi = 0.3$) : La courbe représente un investisseur avec une préférence ESG modérée et avec un coefficient de précision ESG plus faible. Le ratio de Sharpe augmente lorsque $\delta_{(j-M)}$ est négatif et proche de 0 puis ne fait que diminuer lorsque $\delta_{(j-M)}$ est positif.
- Courbe bleue ($\delta = 0.8, \phi = 0.3$) : La courbe représente un investisseur avec une préférence ESG élevée et avec un coefficient de précision ESG identique à la courbe rouge. Le ratio de Sharpe est supérieur à la courbe rouge lorsque $\delta_{(j-M)} < 0$ et inférieur à la courbe rouge lorsque $\delta_{(j-M)} > 0$. L'écart entre ces deux courbes illustre l'effet de la préférence ESG pour un coefficient de précision ESG égal.
- Courbe verte ($\delta = 0.5, \phi = 0.6$) : La courbe représente un investisseur avec une préférence ESG identique à celle de la courbe rouge et avec un coefficient de précision ESG modéré. Le ratio de Sharpe est supérieur à la courbe rouge lorsque $\delta_{(j-M)} < 0$ et inférieur à la courbe rouge lorsque $\delta_{(j-M)} > 0$. L'écart entre ces deux courbes illustre l'effet du coefficient de précision ESG pour une préférence ESG similaire.
- Courbe orange ($\delta = 0.5, \phi = 0$) : La courbe représente un investisseur avec une préférence ESG modérée et avec un coefficient de précision ESG nul. Le ratio de Sharpe est constant. Lorsque $\phi_G = 0$, le terme dépendant de l'ESG disparaît et le ratio de Sharpe modifié correspond au ratio de Sharpe classique, ceci est donc cohérent avec la valeur du ratio de Sharpe classique trouvée précédemment.
- Courbe mauve ($\delta = 0, \phi = 0.3$) : La courbe représente un investisseur sans préférence ESG et avec un coefficient de précision ESG faible. Le ratio de Sharpe est représenté par une courbe présentant un maximum en $\delta_{(j-M)} = 0$ et symétrique par rapport à l'axe $\delta_{(j-M)} = 0$. Le numérateur est similaire au ratio de Sharpe classique, le dénominateur lui est modifié.

En résumé, les courbes sont croissantes lorsque $\delta_{(j-M)} < 0$ et décroissantes lorsque $\delta_{(j-M)} > 0$, et ce pour toutes les combinaisons de δ et ϕ_G . La préférence ESG δ influe principalement sur la valeur maximale du ratio, plus le δ est élevé, plus le ratio atteint un maximum élevé lorsque $\delta_{(j-M)} < 0$. A l'inverse, le coefficient de précision ESG ϕ_G agit sur la courbure de la courbe, plus ϕ_G est élevé, plus la variance augmente rapidement, ce qui accentue la décroissance de la courbe lorsque l'on s'éloigne de 0.

D'un point de vue économique, un investisseur dont la préférence ESG est moins importante que celle du marché, $\delta_{(j-M)} < 0$, voit son ratio de Sharpe augmenter. Lorsque l'investisseur accorde plus d'importance aux critères ESG que le marché $\delta_{(j-M)} > 0$, le ratio de Sharpe diminue fortement, ce qui peut se refléter par un manque de diversification du portefeuille. Le coefficient de précision ϕ_G amplifie ces effets, plus le coefficient est élevé, plus le ratio de Sharpe va diminuer rapidement.

5.2.2 Impact sur l'alpha de Jensen et le bêta

Nous analysons à présent l'impact de l'intégration ESG sur l'alpha de Jensen et le risque systématique, β .

Nous avons déjà vu comment l'intégration ESG modifie le MEDAF, via la Proposition 5.1.5. Ainsi, nous avons vu que le risque systématique n'était pas impacté par l'ESG, et restait donc le même que dans le modèle classique.

Pour rappel, l'alpha de Jensen estimé par le MEDAF est donné par la formule :

$$\alpha_P = \mu_P - [R_f + \beta_P(\mu_M - R_f)]$$

où

- μ_P est le rendement espéré du portefeuille P ;
- R_f est le taux sans risque ;
- β_P est le risque systématique du portefeuille P , défini par $\beta_P = \frac{\text{Cov}(R_P, R_M)}{\sigma_M^2}$;
- μ_M est le rendement espéré du portefeuille de marché M .

De plus, l'alpha de Jensen estimé par le MEDAF classique d'un investisseur j est donné par :

$$\alpha_{P(j)} = \mu_{P(j)} - [R_f + \beta_P(\mu_M - R_f)] .$$

Or, dans le cadre du MEDAF classique, c'est-à-dire sans préférence ESG, tous les investisseurs détiennent le portefeuille de marché, donc tous leurs portefeuilles sont proportionnels au portefeuille de marché. Ce qui implique que leurs espérances de rendement sont égales, autrement dit $\mu_{P(j)} = \mu_M$. Ainsi,

$$\alpha_{P(j)} = \mu_M - [R_f + \beta_P(\mu_M - R_f)] .$$

Passons maintenant au cadre ESG, l'alpha de Jensen d'un investisseur j devient :

$$\tilde{\alpha}_{P(j)} = \mu_{P(j)} - [R_f + \beta_P(\mu_M - R_f)]$$

où $\mu_{P(j)}$ est l'espérance du portefeuille d'équilibre d'un investisseur j .

En utilisant l'expression de l'espérance obtenue dans la Proposition 5.1.6, cet alpha devient :

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{P(j)} &= \mu_M - \delta_{(j-M)} \left(\frac{\delta}{\gamma^3} \phi_G \right) - [R_f + \beta_P(\mu_M - R_f)] \\ \Leftrightarrow \quad \tilde{\alpha}_{P(j)} &= \mu_M - [R_f + \beta_P(\mu_M - R_f)] - \delta_{(j-M)} \left(\frac{\delta}{\gamma^3} \phi_G \right) \\ \Leftrightarrow \quad \tilde{\alpha}_{P(j)} &= \alpha_P^{MEDAF} - \delta_{(j-M)} \left(\frac{\delta}{\gamma^3} \phi_G \right) . \end{aligned}$$

Cette expression peut être réécrite. Le terme $\delta_{(j-M)} \left(\frac{\delta}{\gamma^3} \phi_G \right)$ correspond à une pénalité ESG, qui peut être réexprimée comme $\pi_{ESG} \times g_{(P-M)}$ conformément à la source [17]. Ces

deux modèles sont donc équivalents.

L'alpha de Jensen estimé par le MEDAF avec préférence ESG est aussi donné par la formule

$$\tilde{\alpha}_P = \alpha_P^{MEDAF} - \pi_{ESG} \times g_{(P-M)}$$

où

- α_P^{MEDAF} est l'alpha de Jensen estimé par le MEDAF classique ;
- π_{ESG} est la prime de marché ESG ;
- $g_{(P-M)}$ est la différence entre le score ESG du portefeuille et celui du marché.

Nous cherchons à présent à analyser les effets de la préférence ESG δ et du coefficient de précision ESG ϕ_G sur ce nouvel alpha. Pour cela, nous avons fixé les paramètres du marché conformément aux hypothèses du modèle :

- $\mu_M - R_f = 0.06$ avec $\mu_M = 0.07$ et $R_f = 0.01$;
- $\beta_P = 1.2$, le risque systématique étant positif et le même pour tout le portefeuille ;
- $\gamma = 2$.

Avec ces valeurs, l'alpha de Jensen classique vaut

$$\alpha_P = 0.07 - (0.01 + 1.2 \times 0.06) = -0.012.$$

L'alpha de Jensen est ensuite calculé pour différentes combinaisons de δ et de ϕ_G .

Les résultats sont visibles sur la Figure 5.4.

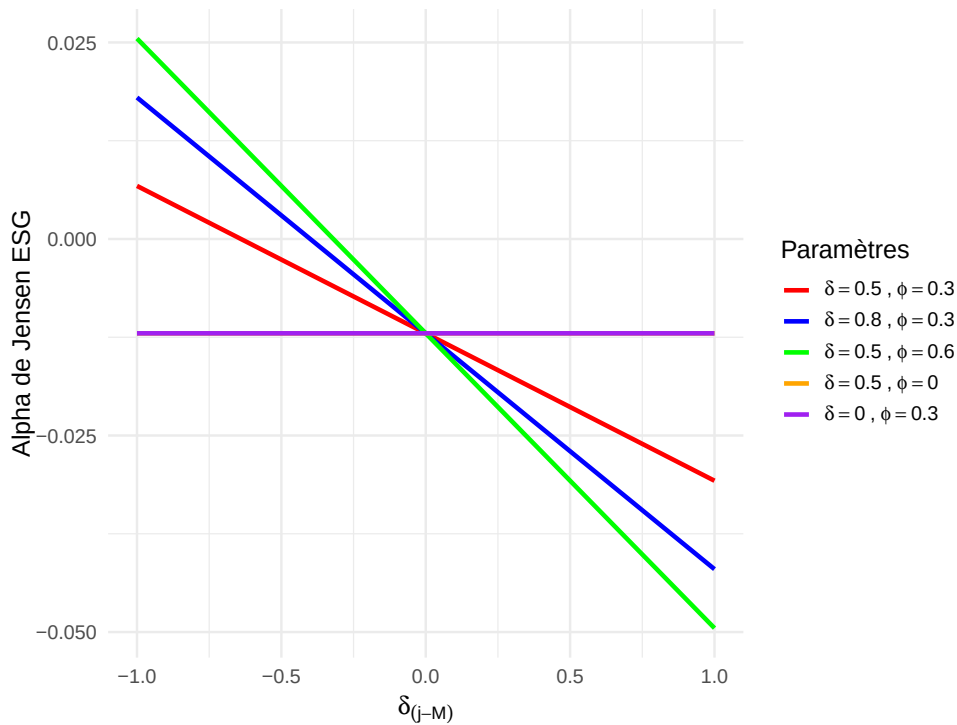


FIGURE 5.4 – Illustration de l'alpha de Jensen modifié. Les courbes orange et mauve coïncident.

Le point $(0, -0.012)$ représente la valeur de l'alpha de Jensen classique. Puisque l'effet ESG disparaît lorsque $\delta_{(j-M)} = 0$, cette mesure est bien égale à l'alpha de Jensen dans le cadre ESG dans ce cas-là.

Analysons les cinq droites représentées sur le graphique puis donnons une conclusion générale dépendant des comportements de δ et de ϕ_G .

- Droite rouge ($\delta = 0.5, \phi_G = 0.3$) : La droite représente un investisseur avec une préférence ESG modérée et un coefficient de précision ESG plus faible. L'alpha de Jensen est plus élevé lorsque $\delta_{(j-M)} < 0$ que lorsque $\delta_{(j-M)} > 0$;
- Droite bleue ($\delta = 0.8, \phi_G = 0.3$) : La droite représente un investisseur avec une préférence ESG élevée et un coefficient de précision ESG identique à celui de la droite rouge. Cette droite a une pente plus élevée que la droite rouge, l'alpha de Jensen a une valeur plus élevée que la droite rouge lorsque $\delta_{(j-M)} < 0$ et plus faible lorsque $\delta_{(j-M)} > 0$;
- Droite verte ($\delta = 0.5, \phi_G = 0.6$) : La droite représente un investisseur avec une préférence ESG identique à celle de la droite rouge, et un coefficient de précision ESG modéré également. Cette droite a une pente plus élevée que la droite rouge, l'alpha de Jensen a une valeur plus élevée que la droite rouge lorsque $\delta_{(j-M)} < 0$ et plus faible lorsque $\delta_{(j-M)} > 0$;
- Droite orange ($\delta = 0.5, \phi_G = 0$) : La droite représente un investisseur avec une préférence ESG modérée et un coefficient de précision ESG nul. Cette droite a un comportement graphique similaire à la droite mauve. L'alpha de Jensen est constant. Lorsque $\phi_G = 0$, le terme dépendant de l'ESG est nul et l'alpha de Jensen modifié est similaire à l'alpha de Jensen classique ;
- Droite mauve ($\delta = 0, \phi_G = 0.3$) : La droite représente un investisseur sans préférence ESG et un coefficient de précision ESG faible. L'alpha de Jensen est également constant. Lorsque $\delta = 0$, le terme dépendant de l'ESG est nul et l'alpha de Jensen modifié est donc similaire à l'alpha de Jensen classique.

Remarque 5.2.1. Sur la Figure 5.4, les droites orange et mauve coïncident parfaitement, cependant leur interprétation économique est différente. La droite orange correspond au cas où $\phi_G = 0$. Dans ce cas, le coefficient de précision est nul, impliquant que le terme dépendant de l'ESG dans l'alpha est nul. Ainsi, la préférence ESG de l'investisseur, quelle que soit sa valeur, n'a aucun impact sur l'alpha. La droite mauve correspond au cas où $\delta = 0$. Ici, l'investisseur est totalement indifférent à l'ESG, ainsi son portefeuille ne diffère pas du portefeuille de marché en fonction des critères ESG. Cette indifférence annule le terme dépendant de l'ESG dans l'alpha. Dans les deux cas, le terme ESG est nul, mais pour des raisons distinctes : absence d'un coefficient de précision pour la droite orange et absence de préférence ESG pour la droite mauve.

Toutes les droites sont décroissantes, ce qui s'explique par la forme de l'équation de l'alpha de Jensen. Les combinaisons des deux paramètres δ et ϕ_G influent sur la pente de la droite.

D'un point de vue économique :

- Si $\delta_{(j-M)} > 0$, l'investisseur accorde plus d'importance aux critères ESG que le marché. Cela réduit la diversification et la valeur de l'alpha de Jensen ;
- Si $\delta_{(j-M)} < 0$, l'investisseur accorde moins d'importance aux critères ESG que le marché. La valeur du alpha augmente.

5.2.3 Impact sur le ratio de Treynor

La dernière mesure de performance dont nous avons parlé dans le Chapitre 2, à la Section 2.1.2, était le ratio de Treynor.

Pour rappel, dans le cadre du MEDAF classique, le ratio de Treynor était donné par :

$$T_P = \frac{\mu_P - R_f}{\beta_P}$$

avec

- μ_P l'espérance de rendement du portefeuille P ;
- R_f le taux sans risque ;
- β_P le bêta du portefeuille P , défini par $\beta_P = \frac{\text{Cov}(R_P, R_M)}{\sigma_M^2}$.

Pour un investisseur j , nous avons donc

$$T_{P^{(j)}} = \frac{\mu_{P^{(j)}} - R_f}{\beta_P}$$

où $\mu_{P^{(j)}}$ est l'espérance du portefeuille d'équilibre d'un investisseur j .

Nous savons que β_P est identique sous le modèle du MEDAF classique et sous le MEDAF avec préférence ESG, ainsi en remplaçant $\mu_{P^{(j)}}$ par l'expression donnée dans la Proposition 5.1.6, nous avons :

$$\tilde{T}_{P^{(j)}} = \frac{\mu_M - \delta_{(j-M)} \left(\frac{\delta}{\gamma^3} \phi_G \right) - R_f}{\beta_P}.$$

Seul le numérateur est modifié par l'intégration ESG, autrement dit seul le rendement excédentaire est impacté par l'ESG, tandis que le risque systématique, β_P , reste inchangé. Le ratio de Treynor ESG dépend donc exclusivement de l'écart de préférence ESG, $\delta_{(j-M)}$, entre l'investisseur et le marché.

Plus précisément, le β_P étant strictement positif et constant pour un portefeuille donné, la valeur du ratio de Treynor dépend uniquement du signe de $\delta_{(j-M)}$.

- Si $\delta_{(j-M)} > 0$, cela signifie que l'investisseur j est plus sensible à l'ESG que le marché. Le rendement excédentaire se réduit et donc le ratio de Treynor diminue ;
- Si $\delta_{(j-M)} < 0$, cela signifie que l'investisseur j est moins sensible à l'ESG que le marché. Ainsi, le rendement excédentaire est plus élevé et donc le ratio de Treynor augmente.

Ainsi, le ratio de Treynor diminue en fonction de la sensibilité de l'investisseur à l'ESG, $\delta_{(j-M)}$, car ce terme ESG réduit le rendement excédentaire lorsque l'investisseur est plus sensible à l'ESG que le marché. Ainsi, l'intégration ESG agit uniquement sur l'espérance de rendement et non sur le risque systématique.

Nous cherchons à présent à illustrer les effets de la préférence ESG δ et du coefficient de précision ESG ϕ_G sur ce nouveau ratio. Pour cela, nous avons fixé les paramètres du marché conformément aux hypothèses, avec des valeurs similaires aux Figures 5.3 et 5.4.

Avec ces valeurs, le ratio de Treynor classique vaut

$$T_P = \frac{0.06}{1.2} = 0.05.$$

Le ratio de Treynor est ensuite calculé pour différentes combinaisons de δ et de ϕ_G . Les résultats obtenus sont visibles à la Figure 5.5

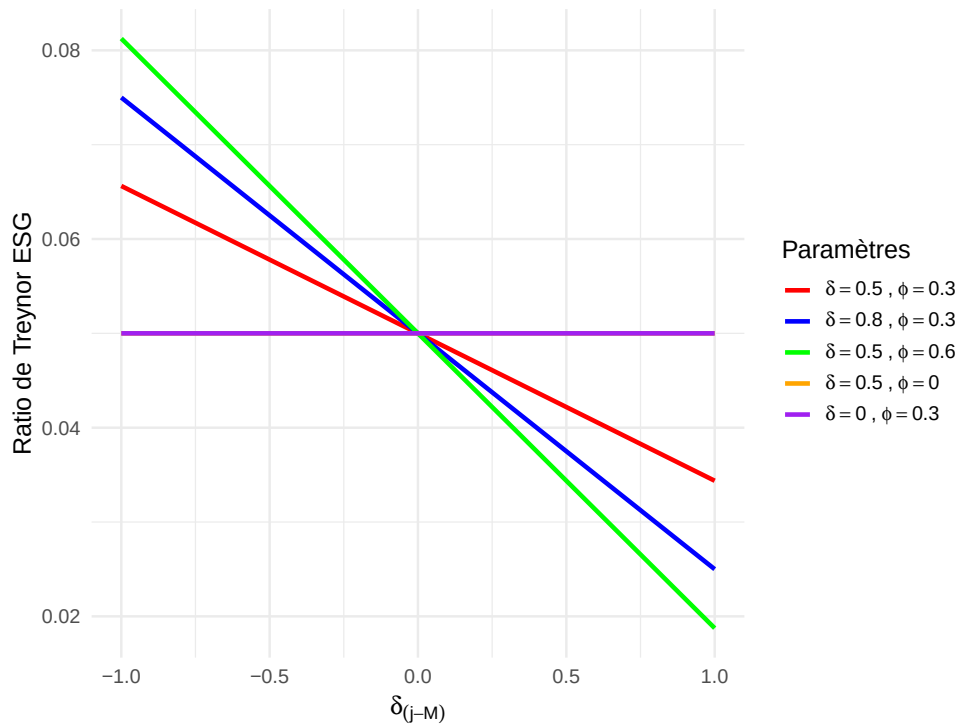


FIGURE 5.5 – Illustration du ratio de Treynor modifié. Les droites orange et mauve coïncident.

Le point $(0, 0.05)$ représente la valeur du ratio de Treynor classique. Puisque l'effet ESG disparaît lorsque $\delta_{(j-M)} = 0$, le ratio de Treynor est bien égal au ratio de Treynor ESG dans ce cas-là.

Analysons les cinq droites représentées sur le graphique puis donnons une conclusion générale dépendant des comportements de δ et de ϕ_G .

- Droite rouge ($\delta = 0.5, \phi_G = 0.3$) : La droite représente un investisseur avec une préférence ESG modérée et un coefficient de précision ESG plus faible. Le ratio de Treynor est plus élevé lorsque $\delta_{(j-M)} < 0$ que lorsque $\delta_{(j-M)} > 0$;
- Droite bleue ($\delta = 0.8, \phi_G = 0.3$) : La droite représente un investisseur avec une préférence ESG élevée et un coefficient de précision ESG identique à celui de la droite rouge. Cette droite a une pente plus élevée que la droite rouge, le ratio de Treynor a une valeur plus élevée que la droite rouge lorsque $\delta_{(j-M)} < 0$ et plus faible lorsque $\delta_{(j-M)} > 0$;
- Droite verte ($\delta = 0.5, \phi_G = 0.6$) : La droite représente un investisseur avec une préférence ESG identique à celle de la droite rouge, et un coefficient de précision ESG modéré également. Cette droite a une pente plus élevée que la droite rouge, le ratio de Treynor est plus élevé que celui de la droite rouge lorsque $\delta_{(j-M)} < 0$ et plus faible lorsque $\delta_{(j-M)} > 0$;
- Droite orange ($\delta = 0.5, \phi_G = 0$) : La droite représente un investisseur avec une préférence ESG modérée et un coefficient de précision ESG nul. Cette droite a un comportement graphique similaire à la droite mauve. Le ratio de Treynor est constant. Lorsque $\phi_G = 0$, le terme dépendant de l'ESG est nul et le ratio de Treynor modifié est similaire au ratio classique ;
- Droite mauve ($\delta = 0, \phi_G = 0.3$) : La droite représente un investisseur sans préférence ESG et un coefficient de précision ESG faible. Le ratio de Treynor est également constant. Lorsque $\delta = 0$, le terme dépendant de l'ESG est nul et le ratio de Treynor modifié est donc similaire au ratio classique.

Remarque 5.2.2. Sur la Figure 5.5, les droites orange et mauve coïncident parfaitement, bien que leur interprétation économique soit différente. La droite orange correspond au cas où $\phi_G = 0$. Dans ce cas, le coefficient de précision est nul, impliquant que le terme dépendant de l'ESG dans le ratio de Treynor est nul. Ainsi, la préférence ESG de l'investisseur, quelle que soit sa valeur, n'a aucun impact sur le ratio. La droite mauve correspond au cas où $\delta = 0$. Ici, l'investisseur est totalement indifférent à l'ESG, ainsi son portefeuille ne diffère pas du portefeuille de marché en fonction des critères ESG. Cette indifférence annule le terme dépendant de l'ESG dans le ratio. Dans les deux cas, le terme ESG est nul, mais pour des raisons distinctes : absence d'un coefficient de précision pour la droite orange et absence de préférence ESG pour la droite mauve.

Toutes les droites sont décroissantes, ce qui s'explique par la forme de l'équation du ratio de Treynor. Les combinaisons des deux paramètres δ et ϕ_G influent sur la pente de la droite.

5.2.4 Impact des mesures de performance selon les profils d'investisseurs

Cette section introduit les différents profils d'investisseurs définis par leur préférence ESG, tels qu'ils résultent de la modification de la théorie moderne du portefeuille. Ces pro-

ils permettront ensuite d'analyser trois configurations extrêmes du marché, correspondant chacune à une dominance d'un type d'investisseur, et d'examiner comment ces situations influencent le MEDAF avec préférence ESG.

Enfin, nous interpréterons les principales mesures de performance, Sharpe, alpha de Jensen et Treynor, selon ces profils, afin de comprendre comment les préférences ESG modifient l'évaluation du rendement ajusté au risque.

Explication des différents profils

La modification de la théorie moderne du portefeuille entraîne une répartition des investisseurs en trois catégories :

- **Investisseur de type « M » (motivé)** : il accorde une importance explicite aux critères ESG et considère que ceux-ci influencent la performance financière des entreprises. Sa préférence est positive ($\delta_{j-M} > 0$) ;
- **Investisseur de type « A » (averti)** : il reconnaît que l'ESG peut avoir un impact positif sur la performance, mais n'investit dans des actifs fortement notés ESG que si cela s'accompagne d'un avantage financier en termes de risque ou de rendement espéré ;
- **Investisseur de type « U » (non informé)** : il possède la même fonction d'utilité que l'investisseur de type « A », mais n'est pas conscient des effets potentiels de l'ESG sur la performance financière. Il n'intègre pas l'ESG dans ses décisions financières.

MEDAF avec préférence ESG selon ces profils

Nous examinons à présent comment ces différents profils influencent le MEDAF avec préférence ESG. Trois cas extrêmes sont considérés, selon que le marché est dominé par des investisseurs de type « A », « M » ou « U ». L'expression du MEDAF avec préférence ESG est alors formulée sous forme d'espérance conditionnelle, c'est-à-dire l'espérance de rendement conditionnelle au type d'investisseur représentatif du marché.

- Si les investisseurs de type « U » dominent le marché, ils fixent le prix à l'équilibre. Comme ils n'intègrent pas l'ESG dans leurs décisions financières, l'information ESG n'est pas reflétée dans les prix. Cependant, les investisseurs de type « A » et de type « M » restent conscients de l'impact potentiel de l'ESG sur la performance. Plus le score ESG d'une entreprise sera élevé, plus le rendement que son action offrira sera élevé, indépendamment de son risque systématique. L'ESG influence les rendements attendus mais pas les prix d'équilibre. Ainsi, le rendement espéré conditionnel est donné par

$$\mu_i|(g, u) = R_f + \beta_i(\mu_M - R_f) + \pi_u g_{(i-M)}$$

avec

- $\mu_i|(g, u)$ l'espérance de rendement de l'actif i conditionnelle à l'information ESG g et à la dominance des investisseurs de type « U » ;

- R_f le taux sans risque ;
 - β_i le risque systématique de l'actif i ;
 - μ_M l'espérance de rendement du portefeuille de marché M ;
 - π_u la rémunération du marché ($\pi_u > 0$) ;
 - $g_{(i-M)} = g_i - g_M$ la différence de score ESG entre l'actif i et le portefeuille de marché M .
- Si l'investisseur de type « M » domine le marché, tous les investisseurs sont bien informés du lien entre les critères ESG et la performance financière (factorisée dans l'équilibre des prix). Cependant, le groupe d'investisseurs le plus important est prêt à sacrifier des rendements espérés au profit d'investissements verts. Ce cas est structurellement équivalent au MEDAF avec préférence ESG. Ainsi, le rendement espéré conditionnel est donné par :

$$\mu_i|(g, m) = R_f + \beta_i^C(\mu_M|(g, m)) - \pi_m g_{(i-M)}$$

avec

- $\mu_i|(g, m)$ l'espérance de rendement de l'actif i conditionnelle à l'information ESG g et à la dominance des investisseurs de type « M » ;
 - R_f le taux sans risque ;
 - β_i^C le risque systématique de l'actif i conditionnel à l'information ESG g . Il se calcule de la même manière que β_i , il est simplement estimé par les rendements conditionnels ESG et pas par les rendements bruts ;
 - $\mu_M|(g, m)$ le rendement espéré du marché conditionnel à l'information ESG g et à la dominance des investisseurs de type « M » ;
 - π_m la rémunération du marché ($\pi_m > 0$) ;
 - $g_{(i-M)} = g_i - g_M$ la différence de score ESG entre l'actif i et le portefeuille de marché M .
- Si l'investisseur de type « A » domine le marché, tous les investisseurs sont informés du lien entre critères ESG et performance financière. Cependant, les investisseurs cherchent seulement à maximiser leur utilité espérée sans contrainte ESG. Ce cas correspond au MEDAF classique pour les rendements conditionnels :

$$\mu_i|(g, a) = R_f + \beta_i^C(\mu_M|(g, a) - R_f)$$

avec

- $\mu_i|(g, a)$ le rendement espéré de l'actif i conditionnel à l'information ESG g et à la dominance des investisseurs de type « A » ;
- R_f le taux sans risque ;
- β_i^C le risque systématique de l'actif i conditionnel à l'information ESG g . Il se calcule de la même manière que β_i , il est simplement estimé par les rendements conditionnels ESG et pas par les rendements bruts ;

- $\mu_M|(g, a)$ le rendement espéré du marché conditionnel à l'information ESG g et à la dominance des investisseurs de type « A ».

Ces trois cas mènent à une conclusion en trois points :

1. Pour les investisseurs informés (type « A » ou type « M »), le bêta d'un actif ou d'un portefeuille par rapport au portefeuille de marché n'est pas affecté par son score ESG. Le risque systématique reste donc identique à celui du MEDAF classique ;
2. Le rendement espéré conditionnel conserve la structure du MEDAF avec préférence ESG c'est-à-dire le MEDAF classique et un terme additionnel lié au score ESG de l'actif. Ce terme additionnel reflète la manière dont l'information ESG est intégrée ou non dans les prix ;
3. Le signe du terme additionnel ESG dépend du profil d'investisseur qui domine le marché.
 - Si les investisseurs de type « A » dominent le marché, les prix s'ajustent à l'information ESG, mais comme ces investisseurs n'ont pas vraiment de préférence ESG, la prime ESG est nulle. Ainsi, le MEDAF classique s'applique aux rendements conditionnels ;
 - Si les investisseurs de type « M » dominent le marché, les prix s'ajustent à l'information ESG et la prime associée est négative ;
 - Si les investisseurs de type « U » dominent le marché, l'information ESG n'est pas reflétée dans les prix et la prime associée est positive.

Analyse des mesures de performance selon ces profils

Les trois configurations extrêmes du marché influencent directement la manière dont les mesures de performance doivent être interprétées. Ces mesures reposent sur le rendement espéré, le risque et la prime de marché. Or, nous savons que la prime associée à l'ESG d'un actif dépend du type d'investisseur dominant le marché.

Nous analysons ainsi l'impact de chaque profil sur les trois mesures de performance.

Si l'investisseur de type « U » domine le marché, la prime de marché ESG, π_{ESG} , est strictement positive. Cette prime positive traduit le fait que le marché récompense les entreprises présentant un score ESG plus élevé en leur offrant une prime de rendement positive. Autrement dit, le marché sous-évalue les actifs verts. Ainsi, les préférences des investisseurs sur ce marché influencent les variations des mesures de performances.

- Sur ce marché, si un investisseur a une préférence ESG plus élevée que le marché, $\delta_{(j-M)} > 0$, cela signifie qu'il va détenir des actifs sous-évalués. Leur rendement va donc être supérieur au rendement espéré, ils vont surperformer et donc les mesures de performance seront plus élevées ;
- Sur ce marché, si un investisseur a une préférence ESG plus faible que le marché, $\delta_{(j-M)} < 0$, il va détenir des actifs surévalués. Leur rendement va être inférieur au rendement espéré, ils vont sous-performer et donc les mesures de performance seront plus faibles.

Au niveau du marché, la prime ESG positive indique que le marché surperforme par rapport au rendement prédit par le MEDAF, donc l'alpha de Jensen ESG va être plus faible que l'alpha de Jensen classique.

Si l'investisseur de type « M » domine le marché, la prime de marché ESG, π_{ESG} , est strictement négative. Ce qui signifie que les entreprises présentant un score ESG élevé sont pénalisées par une prime négative. Autrement dit, le marché surévalue les actifs verts. Les préférences des investisseurs sur ce marché influencent les variations de mesures de performance.

- Sur ce marché, si un investisseur a une préférence ESG plus élevée que le marché, $\delta_{(j-M)} > 0$, il va détenir des actifs surévalués. Ces actifs vont donc sous-performer et les mesures de performance vont diminuer ;
- Sur ce marché, si un investisseur a une préférence ESG plus faible que le marché, $\delta_{(j-M)} < 0$, il va détenir des actifs sous-évalués. Ces actifs vont surperformer et les mesures de performance vont augmenter.

Au niveau du marché, la prime ESG négative indique que le marché sous-performe par rapport au rendement prédit par le MEDAF, donc l'alpha de Jensen ESG va être plus élevé que l'alpha de Jensen classique.

Si l'investisseur de type « A » domine le marché, la prime de marché ESG, π_{ESG} , est nulle, donc aucune prime n'est générée. Les actifs verts ne sont ni surévalués ni sous-évalués. Les mesures de performance ESG coïncident avec les mesures de performance classiques.

5.3 Impact de l'intégration ESG sur l'attribution de performance

L'attribution de la performance classique repose sur le modèle de Brinson, Hood et Beebower, développé dans la Section 2.2.1, qui décompose le rendement excédentaire d'un portefeuille en trois composantes : l'effet d'allocation, l'effet de sélection et l'effet d'interaction. Cette approche suppose que le portefeuille et son benchmark partagent le même univers d'investissement.

Or, l'intégration de critères ESG modifie cet univers : les méthodes d'intégration ESG vues à la Section 4.4.1 réduisent l'ensemble des titres éligibles.

L'objectif de cette section est d'adapter la décomposition de Brinson, Hood et Beebower à un contexte où le benchmark est reconstruit pour refléter les contraintes ESG. Nous analysons ainsi comment distinguer la performance liée aux décisions actives du gérant de celle qui résulte uniquement de la restriction de l'univers d'investissement. Nous reprenons également la structure matricielle introduite dans la Section 2.2.1.

Nous commençons par construire le nouveau benchmark ESG.

Dans le modèle BHB classique, le rendement du benchmark s'écrit

$$R_{B,t} = \sum_{k=1}^K w_{B,k,t} R_{B,k,t}$$

où K désigne le nombre de segments du portefeuille.

Et, en reprenant les notations matricielles de la Section 2.2.1, ce rendement peut se réécrire :

$$R_{B,t} = \mathbf{W}_B^T \mathbf{R}_B.$$

Dans le cadre de l'intégration ESG, un portefeuille intermédiaire est construit. Ce portefeuille synthétise l'information contenue dans les restrictions ESG. Il constitue un sous-ensemble du benchmark initial en termes de composition, en raison de l'exclusion des titres, tout en restant neutre en termes d'allocation de segments. Autrement dit, l'allocation par segment de ces deux portefeuilles est identique.

Pour tout actif i ($i = 1, \dots, N$) appartenant au segment k , son poids dans le portefeuille ESG est défini par :

$$w_{ESG,i,t} = \begin{cases} \tilde{w}_{B,i,t} \times \phi_{k,t} & \text{si } i \in ESG_t \\ 0 & \text{si } i \notin ESG_t \end{cases}$$

où

- ESG_t est l'ensemble des titres éligibles dans le benchmark ;
- $\tilde{w}_{B,i,t} = \frac{w_{B,i,t}}{\sum_{j \in ESG_t} w_{B,j,t}}$ est le poids de l'actif i dans l'univers restreint des actifs éligibles ;
- $\phi_{k,t} = \frac{w_{B,k,t}}{\tilde{w}_{B,k,t}}$ est un coefficient de normalisation assurant la neutralité de l'allocation de segment entre le benchmark original et celui restreint ESG avec

$$\tilde{w}_{B,k,t} = \frac{\sum_{\substack{j \in ESG_t \\ j \in k}} w_{B,j,t}}{\sum_{j \in ESG_t} w_{B,j,t}}.$$

La prochaine étape consiste à distinguer la performance attribuable aux décisions actives de gestion de celle qui résulte exclusivement de la restriction de l'univers d'investissement imposées par les contraintes ESG. Cette séparation s'obtient en insérant un portefeuille intermédiaire, le benchmark ESG, entre le portefeuille P et le benchmark initial B . Nous obtenons alors la décomposition suivante :

$$R_{P,t} - R_{B,t} = (R_{P,t} - R_{ESG,t}) + (R_{ESG,t} - R_{B,t}) \quad (5.15)$$

où le premier terme mesure la performance liée aux décisions actives du gérant dans l'univers restreint, tandis que le deuxième isole l'effet attribuable aux restrictions ESG.

Pour ce premier terme, nous analysons la différence de performance entre le portefeuille P et le benchmark restreint ESG. Comme ce benchmark ESG joue ici le même rôle que le benchmark classique dans le modèle BHB, la décomposition peut être réalisée selon les 4 cadrans classiques du modèle BHB, donnés à la Table 2.1. Les cadrans 1 à 4 sont strictement identiques à ceux du modèle BHB classique, où seul le benchmark de référence est modifié, remplacé par le benchmark ESG.

Si nous posons les notations matricielles :

$$\mathbf{W}_{\text{ESG}} = \begin{pmatrix} \tilde{w}_{\text{ESG},1} \\ \tilde{w}_{\text{ESG},2} \\ \vdots \\ \tilde{w}_{\text{ESG},K} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^K, \quad \mathbf{R}_{\text{ESG}} = \begin{pmatrix} R_{\text{ESG},1} \\ R_{\text{ESG},2} \\ \vdots \\ R_{\text{ESG},K} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^K.$$

Nous obtenons, en utilisant les notations matricielles introduites à la Section 2.2.1 :

Allocation	Sélection	
	Passif	Actif
Passif	Cadran 1 Benchmark $R_{\text{ESG},t} = \sum_{k=1}^K w_{\text{ESG},k,t} R_{\text{ESG},k,t}$ $R_{\text{ESG},t} = \mathbf{W}_{\text{ESG}}^T \mathbf{R}_{\text{ESG}}$	Cadran 3 Benchmark et Sélection $R_{P,t}^{\text{sel}} = \sum_{k=1}^K w_{\text{ESG},k,t} R_{P,k,t}$ $R_{P,t}^{\text{sel}} = \mathbf{W}_{\text{ESG}}^T \mathbf{R}_P$
Actif	Cadran 2 Benchmark et Allocation $R_{P,t}^{\text{all}} = \sum_{k=1}^K w_{P,k,t} R_{\text{ESG},k,t}$ $R_{P,t}^{\text{all}} = \mathbf{W}_P^T \mathbf{R}_{\text{ESG}}$	Cadran 4 Portefeuille $R_{P,t} = \sum_{k=1}^K w_{P,k,t} R_{P,k,t}$ $R_{P,t} = \mathbf{W}_P^T \mathbf{R}_P$

TABLE 5.1 – Cadrans du modèle BHB avec benchmark ESG.

Il s'agit du même tableau que dans le cas classique, où le benchmark initial est remplacé par le benchmark restreint ESG. Les effets d'allocation, de sélection et d'interaction sont donc calculés de la même manière, mais relativement à l'univers d'investissement restreint par les contraintes ESG.

Ainsi, en combinant les deux termes de l'Equation (5.15), nous obtenons la décomposition suivante :

$$R_{P,t} - R_{B,t} = \mathcal{A}_P + \mathcal{S}_P + \mathcal{I}_P + \mathcal{S}_P^{\text{ESG}}.$$

Les trois premiers effets correspondent à l'attribution classique de Brinson, Hood et Beebower, réalisée cette fois relativement au benchmark restreint ESG. Ils s'obtiennent directement grâce aux cadrans de la Table 5.1, comme dans le cas classique.

L'effet d'allocation est donné par :

$$\mathcal{A}_P = R_{P,t}^{all} - R_{ESG,t} = \sum_{k=1}^K (w_{P,k,t} - w_{ESG,k,t}) R_{ESG,k,t}.$$

Et sous forme matricielle,

$$\mathcal{A}_P = (\mathbf{W}_P - \mathbf{W}_{ESG})^\top \mathbf{R}_{ESG}.$$

Ensuite, l'effet de sélection donne :

$$\mathcal{S}_P = R_{P,t}^{sel} - R_{ESG,t} = \sum_{k=1}^K w_{ESG,k,t} (R_{P,k,t} - R_{ESG,k,t}).$$

Sous forme matricielle, cet effet s'écrit :

$$\mathcal{S}_P = \mathbf{W}_{ESG}^\top (\mathbf{R}_P - \mathbf{R}_{ESG}).$$

Enfin, l'effet d'interaction est obtenu par :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_P &= R_{P,t} - R_{ESG,t} - \mathcal{A}_P - \mathcal{S}_P \\ &= \sum_{k=1}^K (w_{P,k,t} - w_{ESG,k,t}) (R_{P,k,t} - R_{ESG,k,t}). \end{aligned}$$

Sous forme matricielle, cet effet se réécrit :

$$\mathcal{I}_P = (\mathbf{W}_P - \mathbf{W}_{ESG})^\top (\mathbf{R}_P - \mathbf{R}_{ESG}).$$

Ainsi, ces trois effets conservent la même structure que les effets du modèle classique, où le benchmark initial est remplacé par le benchmark ESG.

Le quatrième effet est nouveau, il correspond à l'effet de sélection ESG, directement lié aux restrictions ESG. Cet effet n'existe pas dans le modèle initial car il suppose un univers d'investissement identique entre le portefeuille et le benchmark. Par construction du nouveau portefeuille ESG, nous avons la neutralité d'allocation au niveau des segments,

ce qui implique $w_{B,,k,t} = w_{ESG,k,t}$ pour tout k . Dès lors,

$$\begin{aligned}
 R_{ESG,t} - R_{B,t} &= \sum_{k=1}^K w_{ESG,k,t} R_{ESG,k,t} - \sum_{k=1}^K w_{B,k,t} R_{B,k,t} \\
 \Leftrightarrow R_{ESG,t} - R_{B,t} &= \sum_{k=1}^K w_{ESG,k,t} R_{ESG,k,t} - \sum_{k=1}^K w_{ESG,k,t} R_{B,k,t} \\
 \Leftrightarrow R_{ESG,t} - R_{B,t} &= \sum_{k=1}^K w_{ESG,k,t} (R_{ESG,k,t} - R_{B,k,t}) \\
 \Leftrightarrow R_{ESG,t} - R_{B,t} &= \sum_{k=1}^K w_{B,k,t} (R_{ESG,k,t} - R_{B,k,t}).
 \end{aligned}$$

Nous définissons alors l'effet de sélection ESG par

$$\mathcal{S}_P^{ESG} = \sum_{k=1}^K w_{B,k,t} (R_{ESG,k,t} - R_{B,k,t}).$$

Ce nouvel effet peut également se réécrire sous forme matricielle de la manière suivante :

$$\mathcal{S}_P^{ESG} = \mathbf{W}_B^\top (\mathbf{R}_{ESG} - \mathbf{R}_B).$$

En combinant la décomposition classique appliquée au nouveau portefeuille ESG avec l'effet supplémentaire de sélection ESG, nous obtenons la décomposition suivante :

$$\begin{aligned}
 R_{P,t} - R_{B,t} &= \mathcal{A}_P + \mathcal{S}_P + \mathcal{I}_P + \mathcal{S}_P^{ESG} \\
 &= (\mathbf{W}_P - \mathbf{W}_{ESG})^\top \mathbf{R}_{ESG} + \mathbf{W}_{ESG}^\top (\mathbf{R}_P - \mathbf{R}_{ESG}) + \\
 &\quad (\mathbf{W}_P - \mathbf{W}_{ESG})^\top (\mathbf{R}_P - \mathbf{R}_{ESG}) + \mathbf{W}_B^\top (\mathbf{R}_{ESG} - \mathbf{R}_B).
 \end{aligned}$$

En résumé, l'adaptation du modèle de Brinson, Hood et Beebower dans le cadre ESG repose sur l'introduction d'un benchmark restreint neutre en termes d'allocation de segments. La performance excédentaire totale se décompose alors en trois effets classiques, l'effet d'allocation, de sélection et d'interaction, calculés relativement à ce benchmark ESG, auxquels s'ajoutent un effet spécifique, l'effet de sélection ESG.

Chapitre 6

Étude empirique de l'impact de l'intégration ESG sur les Institutions de Retraite Professionnelle belges

Théoriquement, l'impact de l'intégration ESG sur la performance des portefeuilles a été analysé tout au long de ce mémoire, et plus particulièrement dans le chapitre précédent. Cependant, les hypothèses des modèles financiers restent souvent restrictives lorsqu'il s'agit de les appliquer à des données réelles. L'objectif de ce chapitre est donc d'examiner dans quelles mesures les résultats théoriques peuvent être observés empiriquement dans le cas des Institutions de Retraite Professionnelle (IRP) belges.

Ce chapitre présente l'analyse empirique réalisée, en prolongement direct du travail effectué durant un stage dans une entreprise d'assurance. Une première partie de cette analyse empirique a été réalisée. Il s'agissait principalement de collecter les données, de les nettoyer et de les traiter afin de pouvoir construire une base de données exploitable pour l'étude des OFP. La réflexion autour de la structure de la base de données, ainsi que le développement de plusieurs fonctions sur le logiciel R ont été réalisées, bien que optimisées par la suite.

Dans ce mémoire, nous avons approfondi le travail réalisé en stage afin de constituer une analyse empirique complète. Parmi les travaux effectués après ce stage, nous avons :

- La finalisation de la base de données : la structure définie en stage a été conservée, mais la construction de l'ensemble des portefeuilles trimestriels fut complétée par la suite ;
- Le calcul des mesures de performance : la volatilité et le ratio de Sharpe ont été réalisés en stage. Le code relatif à ces mesures a été optimisé, et les autres mesures ont été ajoutées ;
- L'application du modèle d'attribution BHB : non réalisé en stage, ce modèle constitue une vraie plus-value à l'étude empirique pour identifier les contributions d'allocation

et de sélection dans la performance des OFP ;

- L'analyse comparative de plusieurs stratégies d'intégration ESG : bien que les stratégies furent définies en stage, leur comparaison s'est réalisée dans le cadre de ce mémoire.

L'objectif de ce chapitre est donc d'évaluer empiriquement l'impact des critères ESG grâce à différentes stratégies d'intégration au sein des portefeuilles OFP.

6.1 Base de données

Dans cette section, nous expliquons comment la base de données a été construite, ainsi que sa structure. Nous abordons également le nettoyage de la base de données, avec notamment le traitement des données manquantes (NA).

6.1.1 Construction de la base de données

La base de données utilisée regroupe les OFP d'une entreprise d'assurance belge. Les observations s'étendent de janvier 2018 à septembre 2025. Pour chaque titre, la base contient l'ISIN (International Securities Identification Number), le portefeuille d'appartenance, le type, ainsi que les Dirty Values (DV) et les Nominal Values (NV) reportées mensuellement. Ces valeurs correspondent à la position totale détenue pour chaque ISIN en fin de mois, c'est-à-dire qu'elles regroupent l'ensemble des acquisitions réalisées au cours du mois. La structure de la base est trimestrielle et organisée par ISIN, ce qui permet de suivre l'évolution de chaque titre au fil du temps. Ces informations permettent de calculer les rendements mensuels puis les rendements cumulés par trimestre. Les scores ESG associés à chaque ISIN sont également fournis pour l'ensemble de la période, ce qui permet de suivre l'évolution de la performance financière et des scores ESG.

Notons que les rendements mensuels et trimestriels ont déjà été calculés dans le cadre du stage effectué dans cette entreprise et sont repris tels quels dans ce mémoire.

Structure de la base de données

La Table 6.1 présente les principales variables de la base de données ainsi qu'une description de chacune d'elles.

Variable	Description
CODE ID	ISIN de chaque titre
PORTFOLIO	Portefeuille d'appartenance du titre
PRODUCT TYPE SII	Catégorie du titre
DV	Dirty Value du titre
NV	Valeur Nominale du titre
RENDEMENT MENSUEL	Rendement du titre à la fin de chaque mois de la période
RENDEMENT	Rendement cumulé du titre par trimestre
ESG RATING	Score ESG associé au titre

TABLE 6.1 – Description des différentes variables de la base de données.

Remarque 6.1.1. Les Dirty Values (DV) et les Valeurs Nominales (NV) sont données pour les trois mois du trimestre ainsi que pour le mois précédent le trimestre, ce mois est nécessaire pour calculer le rendement mensuel du premier mois du trimestre.

Le rendement mensuel d'un titre est calculé à partir des Dirty Values, et normalisé par rapport aux Valeurs Nominales selon la formule

$$R_t = \frac{\frac{DV_t}{NV_t} - \frac{DV_{t-1}}{NV_{t-1}}}{\frac{DV_{t-1}}{NV_{t-1}}}$$

où DV_t et NV_t représentent respectivement la Dirty Value et la Valeur Nominale au temps t .

Les Dirty Values intégrant les intérêts courus et les coupons, les flux financiers sont implicitement pris en compte dans le calcul du rendement. La formule utilisée dans cette étude constitue ainsi une adaptation de la définition classique du rendement, à savoir la Définition 1.3.2. Cette base de données est le résultat de la fusion de trois bases de données distinctes, où seules les données nécessaires pour le mémoire ont été gardées. La première contenait la composition trimestrielle détaillée des portefeuilles, avec notamment les ISIN, les portefeuilles d'appartenance, les dates d'acquisition et les quantités détenues. La deuxième reprenait tous les scores ESG extraits de MSCI, de chaque titre qui en possédait un. La troisième base de données contenait les informations nécessaires au calcul des rendements, notamment les DV et les NV, pour l'ensemble des ISIN disponibles. Seules les données nécessaires à l'analyse de performance ont été conservées afin de construire la base de données utilisée dans ce mémoire.

La base de données finale a été construite en reliant les différentes bases à l'aide de l'ISIN et du portefeuille associé.

Nettoyage de la base de données

Certains titres ont fait l'objet de plusieurs acquisitions au cours de la période, ce qui explique que, dans la composition détaillée du portefeuille, un même ISIN puisse apparaître plusieurs fois avec des dates d'acquisition et des quantités différentes. Cependant, les données opérationnelles mises à disposition pour cette étude ne distinguent pas ces différentes acquisitions. En effet, les DV et les NV fournies correspondent à la valeur totale de la position à la fin de chaque mois, c'est-à-dire la somme de toutes les positions détenues sur un même ISIN à cette date. Ainsi, un ISIN acquis à plusieurs moments apparaît plusieurs fois dans la composition interne du portefeuille, mais les données des DV et des NV disponibles ne fournissent qu'une seule valeur agrégée par ISIN et par mois, ce qui ne permet pas de reconstituer les positions individuelles.

Par conséquent, la première étape du nettoyage a consisté à conserver une seule ligne par ISIN et par portefeuille, correspondant à la position agrégée. Les doublons stricts ont été supprimés, car ils représentaient la même DV et la même NV totale et non des positions distinctes.

La prochaine étape consiste à traiter les valeurs manquantes (NA), dans les rendements cumulés. Ces NA correspondent à des titres n'étant pas encore présents dans le portefeuille au début de la période considérée. Pour cela, il faut analyser les valeurs des DV. Trois cas peuvent se présenter :

- **Cas 1** : le titre est acquis le premier mois du trimestre. La DV n'est disponible qu'à partir du premier mois de la période. Le rendement mensuel ne peut donc être calculé qu'à partir du deuxième mois, faute de DV au mois précédent. Le rendement cumulé du trimestre est alors obtenu en composant les deux rendements mensuels disponibles.
- **Cas 2** : le titre est acquis le deuxième mois du trimestre. Dans ce cas, une seule paire de DV consécutive est disponible, entre le deuxième et le troisième mois. Un seul rendement mensuel peut donc être calculé et le rendement cumulé du trimestre est égal à ce rendement unique.
- **Cas 3** : le titre a été acquis le troisième mois de la période. Aucune paire de DV consécutive n'étant disponible pour le trimestre, aucun rendement mensuel ne peut être calculé. Le titre appartient néanmoins au portefeuille et ne peut donc pas être supprimé. Le rendement trimestriel est alors noté comme manquant (NA), et le calcul des rendements débute au trimestre suivant.

Dans tous les cas, les valeurs manquantes ne sont jamais remplacées par zéro, car elles correspondent à une absence de position et non à un rendement nul.

6.1.2 Intégration du benchmark

Lors du stage, une recherche de benchmarks ESG et non ESG avait été menée afin de permettre une comparaison correcte des performances. En l'absence de méthodologie

unique de construction des benchmarks ESG, il n'a pas été possible d'obtenir un benchmark ESG suffisamment représentatif pour cette étude. Nous gardons donc un benchmark classique, non ESG, comme référence pour l'évaluation de la performance.

Les rendements de ce benchmark ont été calculés lors du stage à l'aide du logiciel Excel, sur base de données extraites du logiciel Bloomberg. Dans ce mémoire, ces rendements sont directement importés dans le logiciel R et utilisés tels quels. Ces rendements étant disponibles pour la même période que celle utilisée pour les portefeuilles OFP, une comparaison des performances est cohérente.

Nous avons à présent toutes les données nécessaires pour réaliser l'analyse de performance. Tout d'abord, plusieurs constructions de portefeuilles intégrant des critères ESG sont présentées dans la section suivante. Ces constructions permettront une comparaison des différentes stratégies d'intégration ESG par rapport au benchmark retenu.

6.2 Construction des portefeuilles ESG

Afin d'intégrer les critères ESG dans l'analyse de performance, quatre portefeuilles ESG ont été construits selon différentes méthodologies de sélection. L'objectif est d'évaluer l'impact de plusieurs stratégies d'intégration ESG sur la performance financière des portefeuilles de fonds de pension.

Les scores ESG utilisés dans cette étude proviennent de MSCI et sont mis à jour trimestriellement. Les portefeuilles sont reconstruits chaque trimestre. Cependant, l'absence de données disponibles avant 2021 n'a pas permis de construire les portefeuilles pour les années antérieures.

Les portefeuilles ESG construits ne sont pas équipondérés. Les pondérations des titres sont déterminées à partir des DV afin de conserver une structure proche des portefeuilles réellement détenus par les OFP étudiés. Changer les pondérations et donc la structure des portefeuilles ESG par rapport aux portefeuilles initiaux influencerait les résultats de performance observés.

Premier portefeuille ESG

Le premier portefeuille est construit en sélectionnant uniquement les titres ayant un score ESG élevé. Plus précisément, seuls les titres ayant un score ESG égal à A, AA ou AAA, selon l'échelle MSCI présentée à la Figure 4.2, sont conservés. Ce portefeuille est noté Portefeuille 1 (Port.1).

Cette première construction correspond à une approche de filtrage ESG strict, où seuls les titres présentant une performance élevée d'un point de vue ESG sont inclus dans le portefeuille.

Cependant, certains titres ne possèdent pas de score ESG MSCI. Ces titres étant nombreux, ils seront inclus dans les portefeuilles suivants.

Deuxième portefeuille ESG

Le deuxième portefeuille reprend l'ensemble des titres du Portefeuille 1 auxquels sont ajoutés une sélection de titres ne possédant pas de score ESG. La méthodologie de sélection retenue est la suivante :

1. les titres ayant un score ESG égal à A, AA ou AAA sont sélectionnés et ajoutés au portefeuille ;
2. les titres ne possédant pas de score ESG sont classés selon leur rendement trimestriel cumulé, du plus élevé au plus faible ;
3. les meilleurs titres de ce classement sont ajoutés au portefeuille dans une proportion correspondant à 50% du nombre de titres ESG initialement sélectionnés.

Ce portefeuille est noté Portefeuille 2 (Port.2).

Troisième portefeuille ESG

La méthodologie de construction de ce portefeuille est similaire à la méthodologie du Portefeuille 2. La seule différence étant à la troisième étape, lors de l'ajout des titres non ESG ayant un rendement trimestriel cumulé élevé. Ces titres sont ajoutés à la même proportion que les titres ESG. Ainsi, le portefeuille final contient autant de titres ESG que de titres sans score ESG.

Ce portefeuille est noté Portefeuille 3 (Port.3) .

Quatrième portefeuille ESG

La méthodologie de construction de ce portefeuille est similaire à la méthodologie du Portefeuille 2. La seule différence étant à la troisième étape, lors de l'ajout des titres non ESG ayant un rendement trimestriel cumulé élevé. Ces titres sont ajoutés au double de la proportion des titres ESG. Ainsi, le portefeuille final contient plus de titres sans score ESG que de titres ESG.

Ce portefeuille est noté Portefeuille 4 (Port.4).

Ces quatre portefeuilles ainsi construits permettent d'étudier l'impact des critères ESG sur la performance financière des portefeuilles de fonds de pension. La section suivante présente les résultats obtenus et leur interprétation.

6.3 Interprétation des résultats

L'ensemble des analyses statistiques et des mesures de performance a été réalisé via le logiciel R, version 4.5.2. Le code est disponible à l'Annexe 1.

Cette section présente les résultats obtenus et leur interprétation à travers différents indicateurs de performance : la volatilité, le ratio de Sharpe, l'alpha de Jensen et le ratio de Treynor. L'objectif est d'évaluer la performance des stratégies ESG en tenant compte du

risque total et du risque systématique.

6.3.1 Volatilité

La volatilité mesure le risque total d'un portefeuille, c'est-à-dire la dispersion de ses rendements. Elle correspond à l'écart-type annuel des rendements et constitue la mesure de risque des portefeuilles. Les volatilités annuelles des portefeuilles de 2018 à 2025 sont présentées à la Figure 6.1. Les valeurs détaillées ayant permis de construire cette figure sont reprises à l'Annexe 2, Table A.1.

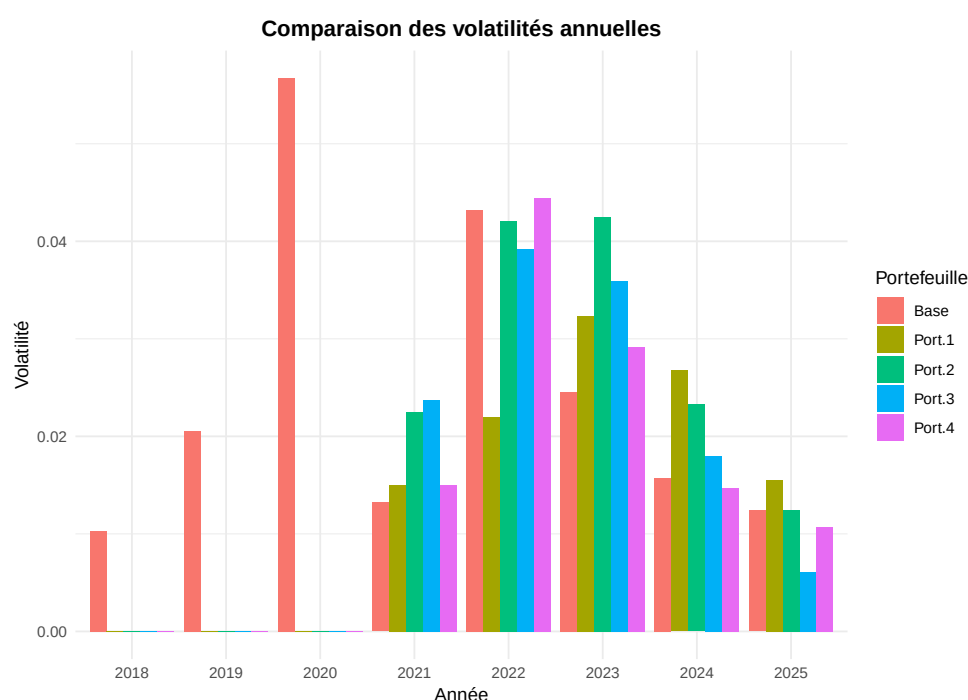


FIGURE 6.1 – Comparaison de la volatilité pour les différentes stratégies.

Les résultats montrent des niveaux de risque très contrastés selon les portefeuilles. Le portefeuille 1 est le plus volatil en 2024 et en 2025. Sa volatilité est généralement supérieure à celle du portefeuille initial, à l'exception de 2022 où il devient le portefeuille le moins risqué.

Le portefeuille 2 présente également une volatilité supérieure à celle du portefeuille initial, excepté en 2022, mais reste moins volatil que le portefeuille 1 en 2024 et 2025.

Le portefeuille 3 est globalement moins volatil que le portefeuille 2 sur l'ensemble de la période, sauf en 2021 où la tendance s'inverse.

Enfin le portefeuille 4 reste très proche du portefeuille initial sur l'ensemble de la période.

Les volatilités fluctuent fortement d’une année à l’autre. En 2021, le portefeuille initial est le moins volatil, tandis qu’en 2022 il devient l’un des plus risqués. Cette même année, c’est le portefeuille 1 qui présente la volatilité la plus faible alors qu’en 2024 et 2025, il est le plus risqué.

La Table 6.2 présente les écarts-types annuels du benchmark non ESG. Les valeurs ont été arrondies à la troisième décimale.

Année	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025
Ecart-type	0.008	0.024	0.057	0.010	0.255	0.040	0.022	0.017

TABLE 6.2 – Tableau présentant les écarts-types du benchmark non ESG.

Sur l’ensemble de la période, le portefeuille initial est moins volatil que le benchmark, sauf en 2018 et 2021. En 2020, les deux volatilités sont très proches. Comparés au benchmark non ESG, les portefeuilles présentent des comportements hétérogènes. Tous les portefeuilles sont plus volatils que le benchmark en 2021, tandis qu’en 2022 et en 2025 ils lui sont tous inférieurs. En 2023 et 2024, la situation est plus contrastée : le portefeuille 2 est plus volatil que le benchmark sur ces deux années, rejoint par le portefeuille 1 en 2024.

Synthèse des résultats

Sur l’ensemble de la période de 2018 à 2025, les stratégies présentent des niveaux de risque contrastés. Le portefeuille 1 apparaît comme le plus volatil, notamment en fin de période, tandis que le portefeuille 4 reste structurellement proche du portefeuille initial. Le portefeuille 2 est globalement plus risqué que le portefeuille initial, mais moins que le portefeuille 1 en fin de période. Le portefeuille 3 reste globalement moins risqué que le portefeuille 2, sauf en 2021.

La volatilité varie fortement d’une année à l’autre. En 2021, le portefeuille initial est le moins risqué, alors qu’en 2022 il devient l’un des plus volatils. Cette même année, le portefeuille 1 est le moins volatil, avant de devenir le plus risqué en 2024.

Comparés au benchmark non ESG, les portefeuilles présentent également des comportements hétérogènes. Certaines années, ils sont tous plus risqués, comme en 2021, d’autres tous moins risqués, comme en 2022 et en 2025, et certaines années présentent des comportements divergents selon la stratégie, comme en 2023 et 2024.

Dans l’ensemble, les stratégies ESG n’induisent pas une réduction systématique du risque. Certaines l’augmentent, comme les portefeuilles 1 et 2, d’autres restent proches du benchmark, comme le portefeuille 4, tandis que d’autres sont intermédiaires, comme le

portefeuille 3.

Ces différences de volatilité se répercutent directement sur les ratios de Sharpe, étant donné que ceux-ci ajustent la performance au risque total.

6.3.2 Ratio de Sharpe

Le ratio de Sharpe mesure la performance excédentaire d'un portefeuille par rapport au taux sans risque, ajustée par son risque total. Il est défini par :

$$S_P = \frac{\mu_P - R_f}{\sigma_P}$$

où

- μ_P est l'espérance de rendement du portefeuille P ;
- R_f est le taux sans risque ;
- σ_P est l'écart-type des rendements du portefeuille P .

Dans notre implémentation dans le logiciel R, le taux sans risque R_f a été fixé à 0 et l'écart-type σ_P correspond aux volatilités annuelles présentées dans la section précédente. Les ratios de Sharpe ont ensuite été calculés annuellement pour chaque portefeuille de 2018 à 2025. La Figure 6.2 illustre leur évolution. Les valeurs détaillées ayant permis de construire cette figure sont reprises à l'Annexe 2, Table A.2.

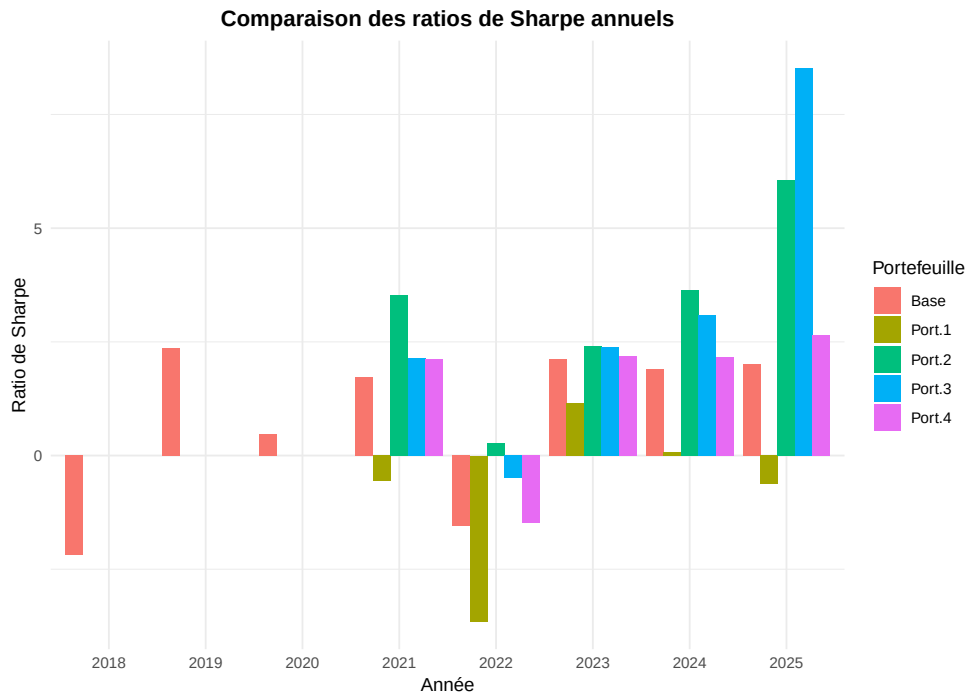


FIGURE 6.2 – Comparaison du ratio de Sharpe pour les différentes stratégies.

Les résultats montrent des performances ajustées au risque total très contrastées selon les stratégies. Le portefeuille 1 affiche systématiquement les ratios de Sharpe les plus faibles, ce qui traduit une rémunération du risque inférieure à celle du portefeuille initial sur l'ensemble de la période.

A l'inverse, le portefeuille 2 obtient les ratios les plus élevés pour la majorité des années, à l'exception de 2025, ce qui en fait la stratégie offrant la meilleure performance ajustée du risque total.

Le portefeuille 3 présente également des ratios supérieurs, ou moins négatifs, à ceux du portefeuille initial sur l'ensemble de la période, bien qu'inférieurs à ceux du portefeuille 2, sauf en 2025 où cette tendance s'inverse.

Enfin, le portefeuille 4 affiche des ratios proches de ceux du portefeuille initial, avec une proximité avec le portefeuille 3 en 2021.

La Table 6.3 présente les ratios de Sharpe annuels du benchmark de 2018 à 2025. Les valeurs ont été arrondies à la troisième décimale.

Année	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025
Ratio de Sharpe	−1.015	2.957	0.511	1.271	−0.434	2.312	0.318	−0.117

TABLE 6.3 – Tableau présentant les ratios de Sharpe du benchmark non ESG.

La comparaison avec le benchmark non ESG met de nouveau en évidence une forte hétérogénéité. De 2018 à 2020, le portefeuille initial sous-performe systématiquement le benchmark. En 2021, seul le portefeuille 1 affiche un ratio négatif et inférieur à celui du benchmark. En 2022, le portefeuille 2 est le seul à présenter un ratio positif et supérieur à celui du benchmark. En 2023, les portefeuilles 2 et 3 surperforment le benchmark, tandis que les autres stratégies restent proches, à l'exception du portefeuille 1. Enfin, en 2024 et 2025, tous les portefeuilles ont un ratio de Sharpe supérieur à celui du benchmark, excepté le portefeuille 1.

Synthèse des résultats

Sur l'ensemble de la période, les stratégies présentent des performances ajustées du risque total assez contrastées. Le portefeuille 1 est systématiquement le moins performant selon le ratio de Sharpe. Le portefeuille 2 est la stratégie la plus efficace, avec les meilleurs ratios, excepté en 2025. Le portefeuille 3 présente également des ratios supérieurs à ceux du portefeuille initial, bien qu'il reste inférieur au portefeuille 2, à l'exception de 2025. Le portefeuille 4 a un profil neutre, il présente les ratios de Sharpe les plus proches de ceux du portefeuille initial, bien que souvent légèrement supérieurs.

Comparés au benchmark non ESG, les portefeuilles ne suivent pas une tendance uniforme. De 2018 à 2020, le portefeuille initial sous-performe systématiquement le benchmark. A partir de 2021, les portefeuilles 2 et 3 affichent des ratios supérieurs à celui du benchmark, tandis que le portefeuille 1 reste inférieur. En 2024 et 2025, tous les portefeuilles

surperforment le benchmark, excepté le portefeuille 1.

Dans l'ensemble, les résultats indiquent que certaines stratégies ESG améliorent la performance ajustée du risque total, comme les portefeuilles 2 et 3, tandis que d'autres la dégradent, comme le portefeuille 1 ou restent proches du portefeuille initial, comme le portefeuille 4.

6.3.3 Alpha de Jensen

L'alpha de Jensen mesure l'écart entre le rendement observé du portefeuille et le rendement théorique prédit par le MEDAF, compte tenu de son risque systématique. Un alpha positif traduit une surperformance par rapport à la SML, tandis qu'un alpha négatif indique une sous-performance. Il est estimé à l'aide de la régression suivante :

$$R_P - R_f = \hat{\alpha}_P + \hat{\beta}_P(R_M - R_f) + \varepsilon_P$$

où $\hat{\alpha}_P$ représente l'estimateur empirique de l'alpha de Jensen et $\hat{\beta}_P$ l'estimateur du risque systématique du portefeuille. Les alphas annuels des différentes stratégies de 2018 à 2025 sont présentées à la Figure 6.3. Les valeurs détaillées ayant permis de construire cette figure sont reprises à l'Annexe 2, Table A.3.

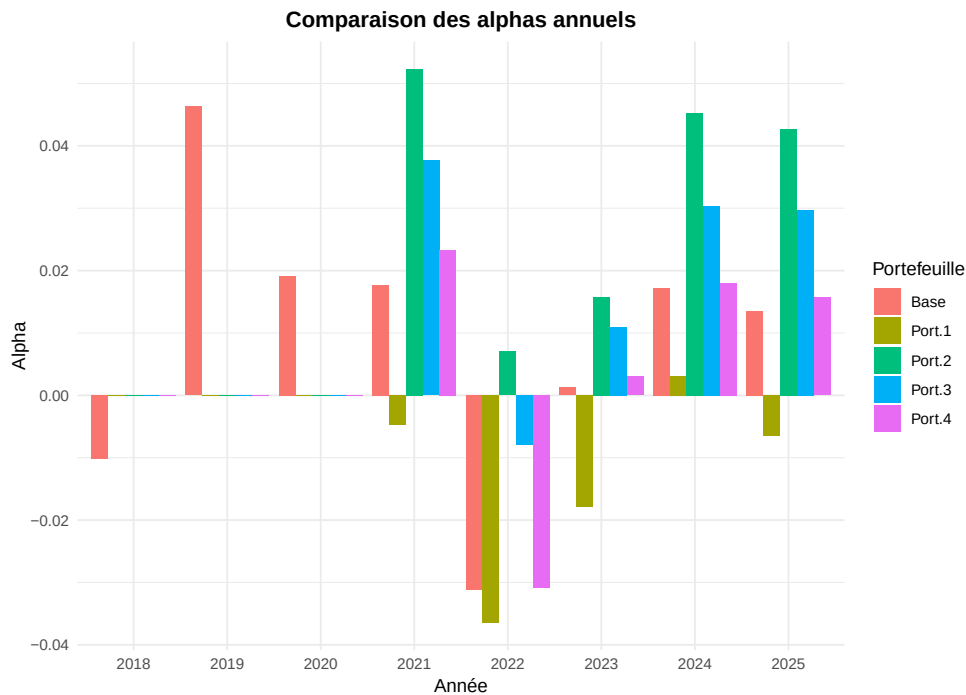


FIGURE 6.3 – Comparaison de l'alpha de Jensen pour les différentes stratégies.

Les résultats montrent des différences marquées entre les stratégies. Le portefeuille 1 affiche systématiquement des alphas négatifs, excepté en 2024, ce qui en fait la stratégie

la plus éloignée de l'équilibre du MEDAF de manière défavorable. Il sous-performe non-seulement le portefeuille initial, mais également toutes les autres stratégies sur l'ensemble de la période.

A l'inverse, le portefeuille 2 présente les alphas les plus élevés pour toute la période considérée. Toujours positifs, ces alphas indiquent une surperformance constante par rapport au rendement théorique prédit, ce qui fait du portefeuille 2 la stratégie la plus efficiente du point de vue du MEDAF.

Le portefeuille 3 présente également des alphas supérieurs à ceux du portefeuille initial, mais inférieurs à ceux du portefeuille 2. Cette stratégie peut être caractérisée comme intermédiaire, elle est meilleure que le portefeuille initial mais moins performante que le portefeuille 2.

Enfin, le portefeuille 4 affiche des alphas très proches de ceux du portefeuille initial, avec des écarts faibles. Il ne génère ni surperformance, ni sous-performance significative par rapport au benchmark.

Synthèse des résultats

Sur l'ensemble de la période étudiée, l'ordre de performance selon l'alpha de Jensen est le suivant :

1. Portefeuille 2;
2. Portefeuille 3;
3. Portefeuille 4;
4. Portefeuille initial;
5. Portefeuille 1.

Ces résultats montrent que certaines stratégies ESG créent une valeur excédentaire par rapport au MEDAF, comme le portefeuille 2, présentant un alpha toujours positif. D'autres stratégies, comme le portefeuille 1, semblent au contraire détruire de la valeur, tandis que certaines comme le portefeuille 4 restent proches du portefeuille initial. Comme l'alpha du benchmark est nul par construction, tout alpha positif surperforme le benchmark, tandis qu'un alpha négatif traduit une sous-performance.

6.3.4 Ratio de Treynor

Le ratio de Treynor mesure la performance excédentaire d'un portefeuille par rapport au taux sans risque, ajustée par son risque systématique. Il est donné par la formule :

$$T_P = \frac{\mu_P - R_f}{\hat{\beta}_P}$$

où $\hat{\beta}_P$ est le risque systématique estimé par régression linéaire.

Les ratios annuels des différentes stratégies de 2018 à 2025 sont présentés à la Figure 6.4.

Les valeurs détaillées ayant permis de construire cette figure sont reprises à l'Annexe 2, Table A.4.

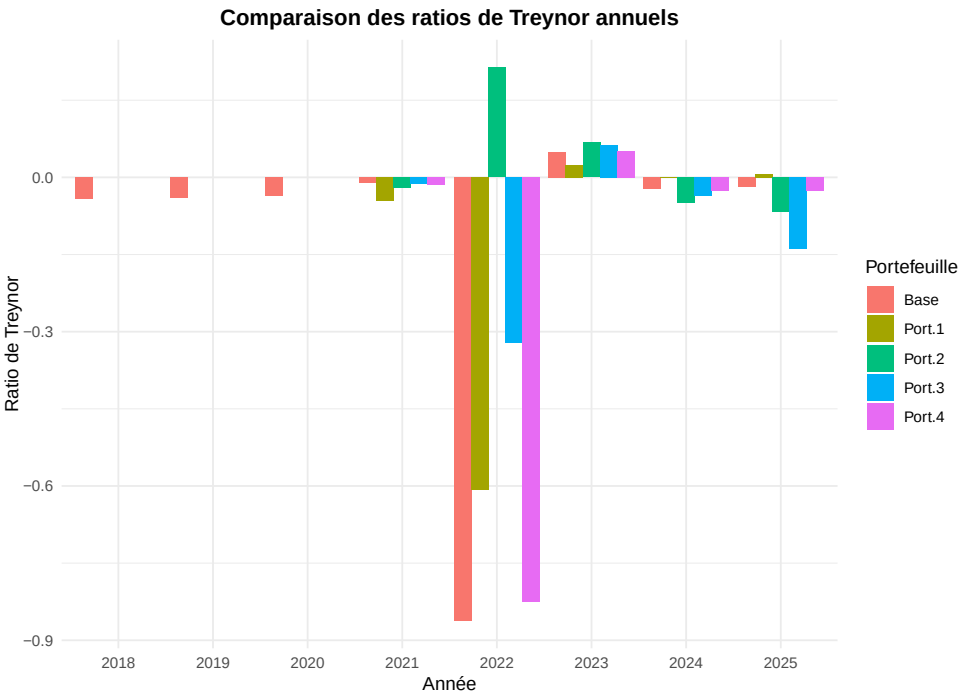


FIGURE 6.4 – Comparaison du ratio de Treynor pour les différentes stratégies.

Les résultats mettent en évidence des différences importantes entre les stratégies ESG. Le portefeuille 2 se distingue des autres, il obtient les ratios de Treynor les plus élevés en 2022 et 2023, et il est le seul à présenter un ratio positif en 2022. Cela indique qu'il est la stratégie offrant la meilleure rémunération du risque systématique sur ces années. Le portefeuille 3 présente également des ratios de Treynor supérieurs, ou moins négatifs, à ceux du portefeuille initial, sauf en 2024 et 2025. Cependant, ils sont inférieurs à ceux du portefeuille 2, sauf en 2021 et en 2024 où cette tendance s'inverse. Le portefeuille 4 affiche des ratios de Treynor proches de ceux du portefeuille initial. Enfin, le portefeuille 1 présente des résultats plus irréguliers, il sous-performe le portefeuille initial en 2021 et 2023, mais reste supérieur les autres années. En 2025, il est le seul portefeuille à présenter un ratio de Treynor positif.

La Table 6.4 présente les ratios de Treynor annuels du benchmark de 2018 à 2025. Les valeurs ont été arrondies à la troisième décimale.

Année	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025
Ratio de Treynor	−0.042	−0.039	−0.037	−0.011	−0.862	0.049	−0.023	−0.019

TABLE 6.4 – Tableau présentant les ratios de Treynor du benchmark non ESG.

La comparaison avec le benchmark non ESG confirme cette hétérogénéité. De 2018 à 2020, le portefeuille initial sous-performe systématiquement le benchmark. En 2021 et 2024, tous les portefeuilles affichent un ratio inférieur à celui du benchmark. En 2022, seul le portefeuille 2 dépasse nettement le benchmark. En 2023, seul le portefeuille 1 est inférieur au benchmark, tandis qu'en 2025 il est le seul à le dépasser.

Synthèse des résultats

L'analyse du ratio de Treynor montre que les stratégies ESG présentent des niveaux d'efficacité très différents en termes de rémunération du risque systématique. Le portefeuille 2 est la stratégie la plus performante en 2022, présentant le seul ratio positif, ainsi qu'en 2023. Le portefeuille 3 constitue une stratégie plus contrastée : il est moins performant que le portefeuille initial en 2021, 2024 et 2025 et plus performant en 2022 et 2023. Le portefeuille 1 présente également des résultats mitigés, offrant un meilleur ratio que le portefeuille initial en 2022, 2024 et 2025 et l'inverse les autres années. Le portefeuille 4 adopte un profil neutre, ses ratios sont proches de ceux du portefeuille initial.

Comparés au benchmark non ESG, les portefeuilles ne suivent pas une tendance uniforme, certaines années, tous sous-performent, comme en 2021 et 2024, d'autres montrent une forte dispersion, comme en 2022 ou en 2025.

Les résultats étant très contrastés, aucune stratégie ne ressort comme étant la plus performante au niveau du ratio de Treynor sur l'ensemble de la période considérée. Le portefeuille initial est le plus performant en 2021, le portefeuille 2 en 2022 et 2023, et le portefeuille 1 en fin de période.

6.3.5 Synthèse générale des mesures de performance

Sur l'ensemble de la période étudiée, les stratégies d'intégration ESG présentent des résultats contrastés selon les mesures de performance.

Le portefeuille 1, construit à partir d'un filtrage ESG strict, est globalement plus volatil que le portefeuille initial. Ses ratios de Sharpe et ses alphas de Jensen sont systématiquement les plus faibles.

Le portefeuille 2 apparaît comme plus volatil que le portefeuille initial, mais le surperforme systématiquement selon Sharpe et Jensen.

Le portefeuille 3 présente une volatilité globalement plus faible que le portefeuille 2 et surperforme le portefeuille initial selon Sharpe et Jensen.

Le portefeuille 4 adopte un profil neutre, proche du portefeuille initial pour l'ensemble des mesures.

Le ratio de Treynor présente des résultats très instables et ne permet pas d'identifier une tendance unique, les résultats varient fortement d'une année à l'autre.

Comparés au benchmark non ESG, les portefeuilles montrent également une forte hétérogénéité. Globalement, les résultats montrent que le portefeuille 2, combinant titres ESG et titres à rendement élevé, offre une meilleure performance ajustée au risque. Tandis que le portefeuille 1, portant sur un filtrage ESG strict, a tendance à la détériorer. La méthode d'intégration ESG influence donc la performance ajustée au risque.

6.4 Implémentation et interprétation du modèle BHB

Le modèle de Brinson, Hood et Beebower (BHB) présenté dans les chapitres précédents ne peut pas être appliqué dans sa forme initiale avec les données disponibles. Afin de conserver une logique de décomposition cohérente, une adaptation du modèle est proposée. Celle-ci consiste à considérer le portefeuille initial comme portefeuille de référence, et à comparer celui-ci avec les portefeuilles obtenus à l'aide des différentes stratégies ESG. Ainsi, pour chaque stratégie, la performance relative est décomposée selon trois effets :

- l'effet d'allocation, mesurant l'impact des différentes pondérations entre catégories d'actifs ;
- l'effet de sélection, mesurant la performance relative des actifs au sein des catégories ;
- l'effet d'interaction, capturant la variation simultanée de l'allocation et de la sélection.

La décomposition utilisée est celle du modèle BHB classique donné à la Section 2.2.1. Nous n'utilisons pas la version avec intégration ESG car l'effet de sélection ESG présenté dans le modèle de la Section 5.3 est déjà intégré implicitement lors de la construction des quatre portefeuilles. Ainsi, la décomposition est la suivante :

$$\begin{aligned} R_{P,t} - R_{B,t} &= \mathcal{A}_P + \mathcal{S}_P + \mathcal{I}_P \\ &= (\mathbf{W}_P - \mathbf{W}_B)^\top \mathbf{R}_B + \mathbf{W}_B^\top (\mathbf{R}_P - \mathbf{R}_B) + (\mathbf{W}_P - \mathbf{W}_B)^\top (\mathbf{R}_P - \mathbf{R}_B). \end{aligned}$$

Dans cette étude, les titres sont regroupés en cinq catégories d'actifs :

- **Catégorie 1** : Obligations gouvernementales ;
- **Catégorie 2** : Obligations corporate ;
- **Catégorie 3** : Actions ;
- **Catégorie 4** : Liquidités ;
- **Catégorie 5** : Autres.

Cette répartition permet de réduire la dimension du problème tout en conservant une interprétation économique cohérente des effets ESG sur l'allocation et la sélection.

L'analyse de ce modèle se concentre essentiellement sur les effets d'allocation et de sélection. Le terme d'interaction est non fourni et non interprété conformément à la pratique mentionnée en Chapitre 2.

L'interprétation des différents modèles sera donnée trimestriellement et annuellement. Pour rappel, l'allocation et la sélection peuvent être positives ou négatives. Voyons économiquement ce que cela signifie :

- Si l'effet d'allocation est positif, cela signifie que le portefeuille surpondère les segments qui ont mieux performé que le benchmark ;
- Si l'effet d'allocation est négatif, cela signifie que le portefeuille surpondère les segments qui ont moins performé que le benchmark ;
- Si l'effet de sélection est positif, les titres sélectionnés dans le portefeuille offrent un meilleur rendement que ceux sélectionnés dans le benchmark ;
- Si l'effet de sélection est négatif, les titres sélectionnés dans le portefeuille offrent un plus faible rendement que ceux sélectionnés dans le benchmark.

Premier modèle BHB

Ce modèle utilise le portefeuille initial comme benchmark et le portefeuille 1 comme portefeuille de comparaison. Les résultats détaillés sont donnés en Annexe 3, Table A.5. Globalement, nous constatons que l'effet de sélection est très proche de 0. Trimestriellement, le plus élevé est lors du dernier trimestre de 2023, avec une valeur de 0.011 et annuellement c'est également en 2023 que cet effet est le plus élevé avec une valeur de 0.019. Ce qui signifie que le rendement actif du portefeuille 1 dépend presque exclusivement de l'allocation des actifs. D'ailleurs, cet effet est relativement variable, passant de positif à négatif au cours de la période considérée.

Analysons plus en détail les années :

- **2018** : l'effet d'allocation est positif pour l'ensemble de l'année, l'effet de sélection est nul. Le total annuel est simplement l'effet d'allocation annuel et vaut 0.045. Ainsi, le portefeuille 1 a surperformé uniquement grâce à de bonnes décisions d'allocation ;
- **2019** : l'effet d'allocation est globalement négatif sur l'ensemble de l'année, l'effet de sélection est nul. Le total annuel est négatif et vaut -0.098 , ainsi le portefeuille 1 a sous-performé à cause d'une mauvaise pondération des actifs ;
- **2020** : l'effet d'allocation au premier trimestre était très positif avec une valeur égale à 0.066, cependant le reste de l'année cet effet est négatif, l'effet de sélection est nul. Le total annuel est négatif et vaut -0.055 , ainsi le portefeuille 1 a sous-performé à cause d'une mauvaise pondération des actifs ;
- **2021** : l'effet d'allocation est positif sur l'ensemble de l'année, l'effet de sélection est légèrement positif. Le total annuel vaut 0.018, deux tiers de ce total est expliqué par l'effet d'allocation et un tiers est expliqué par l'effet de sélection. C'est la première année où l'effet de sélection intervient dans le rendement du portefeuille 1. Le total étant positif, le portefeuille 1 a surperformé grâce à une bonne allocation et une bonne sélection ;
- **2022** : l'effet d'allocation et de sélection sont globalement proches de 0. Le total vaut 0.001, c'est une année relativement neutre. Le portefeuille 1 n'a ni surperformé, ni sous-performé ;

- **2023** : l'effet d'allocation est positif sur la période mais inférieur à l'effet de sélection. Le total annuel vaut 0.023, l'effet de sélection expliquant pratiquement toute cette surperformance ;
- **2024** : les effets d'allocation et de sélection sont très faibles, avec un total très proche de 0. Le portefeuille 1 a un rendement très proche de celui du benchmark ;
- **2025** : l'interprétation est similaire à l'année précédente.

Globalement, le portefeuille 1 a un effet de sélection très faible. La performance active est principalement générée par l'effet d'allocation, notamment en 2018 et en 2021. En revanche, les années 2019 et 2020 pénalisent fortement la performance globale. L'année 2023 montre une performance active principalement expliquée par l'effet de sélection. L'année 2022 ainsi que les deux dernières années montrent une performance assez similaire au benchmark.

Deuxième modèle BHB

Ce modèle utilise le portefeuille initial comme benchmark et le portefeuille 2 comme portefeuille de comparaison. Les résultats détaillés sont donnés en Annexe 3, Table A.6. L'effet de sélection est nul durant les trois premières années, de 2018 à 2020, mais connaît une nette progression les années suivantes. En 2022, l'effet de sélection est le plus élevé avec une valeur de 0.131. A partir de 2021, la performance active résulte des deux effets, avec une contribution de ces effets qui varie selon les années.

Les valeurs pour les années de 2018 à 2020 sont similaires au cas précédent, elles ne seront pas réécrites.

Analysons plus en détail les autres années :

- **2021** : l'effet d'allocation est positif sur l'ensemble de l'année, l'effet de sélection est positif également pour la première fois. Le total annuel vaut 0.113, environ deux tiers de ce total est expliqué par l'effet d'allocation et un tiers est expliqué par l'effet de sélection. Le total étant positif, le portefeuille 2 a surperformé grâce à une bonne allocation et une bonne sélection ;
- **2022** : l'effet d'allocation et de sélection sont positifs, l'effet de sélection étant le plus élevé avec une valeur égale à 0.131. Le total vaut 0.156, l'effet de sélection expliquant la majorité de ce total. Ainsi, le portefeuille 2 a surperformé grâce, notamment, à une très bonne sélection d'actifs ;
- **2023** : les effets d'allocation et de sélection sont relativement similaires, proches de 0.05. Le total vaut 0.099, expliqué de manière relativement égale par les deux effets. Ainsi, cette surperformance dépend d'une bonne allocation et d'une bonne sélection des titres ;
- **2024** : le total de l'année vaut 0.109, dont plus de deux tiers de la valeur est expliquée par l'effet de sélection. Ainsi, le portefeuille 2 surperforme notamment grâce à une meilleure sélection des titres que par une bonne allocation ;
- **2025** : l'interprétation est similaire à l'année précédente, avec un total égal à 0.087.

Globalement, le portefeuille 2 a un effet de sélection relativement élevé à partir de 2021. La performance active est principalement générée par l'effet d'allocation, notamment en 2018 et en 2021. En revanche, les années 2019 et 2020 pénalisent fortement la performance globale. En 2022, 2024 et 2025, l'effet de sélection explique mieux la performance globale que l'effet d'allocation. En 2023, les deux effets contribuent à une surperformance de manière relativement égale.

Troisième modèle BHB

Ce modèle utilise le portefeuille initial comme benchmark et le portefeuille 3 comme portefeuille de comparaison. Les résultats détaillés sont donnés en Annexe 3, Table A.7. L'effet de sélection est nul durant les trois premières années, de 2018 à 2020 et positif dans la suite. En 2022, l'effet de sélection est le plus élevé avec une valeur de 0.072. À partir de 2021, la performance active résulte des deux effets, avec une contribution de ces effets qui varie selon les années.

Les valeurs pour les années de 2018 à 2020 sont similaires au cas précédent, elles ne seront pas réécrites.

Analysons plus en détail les autres années :

- **2021** : l'effet d'allocation est positif sur l'ensemble de l'année, l'effet de sélection est positif également pour la première fois. Le total annuel vaut 0.056, environ deux tiers de ce total est expliqué par l'effet d'allocation et un tiers est expliqué par l'effet de sélection. Le total étant positif, le portefeuille 3 a surperformé grâce à une bonne allocation et une bonne sélection ;
- **2022** : l'effet d'allocation et de sélection sont positifs, l'effet de sélection étant le plus élevé avec une valeur égale à 0.072. Le total vaut 0.095, l'effet de sélection expliquant la majorité de ce total. Ainsi, le portefeuille 3 a surperformé grâce notamment à une très bonne sélection d'actifs ;
- **2023** : les effets d'allocation et de sélection sont relativement similaires, proches de 0.03. Le total vaut 0.068, expliqué de manière relativement égale par les deux effets. Ainsi, cette surperformance dépend d'une bonne allocation et d'une bonne sélection des titres ;
- **2024** : le total de l'année vaut 0.051, dont plus de deux tiers de la valeur est expliquée par l'effet de sélection. Ainsi, le portefeuille 3 surperforme notamment grâce à une meilleure sélection des titres que par une bonne allocation ;
- **2025** : le total vaut 0.046, l'effet d'allocation et de sélection étant tous les deux positifs. L'effet de sélection explique la majorité de la performance active avec une valeur égale à 0.039. Ainsi, la surperformance dépend majoritairement de la sélection des titres.

Globalement, le portefeuille 3 a un effet de sélection positif à partir de 2021. La performance active est principalement générée par l'effet d'allocation, notamment en 2018 et en 2021. En revanche, les années 2019 et 2020 pénalisent fortement la performance globale. En 2022, 2024 et 2025, l'effet de sélection explique mieux la performance globale que

l'effet d'allocation. En 2023, les deux effets contribuent à une surperformance de manière relativement égale.

Quatrième modèle BHB

Ce modèle utilise le portefeuille initial comme benchmark et le portefeuille 4 comme portefeuille de comparaison. Les résultats détaillés sont donnés en Annexe 3, Table A.8. L'effet de sélection est nul durant les trois premières années, de 2018 à 2020, et reste très proche de 0 lors des années suivantes, atteignant sa valeur maximale en 2023 avec 0.019. À partir de 2021, la performance active résulte des deux effets, avec une contribution de ces effets qui varie selon les années, hormis en 2022 où l'effet de sélection est de nouveau nul. Les valeurs pour les années de 2018 à 2020 sont similaires au cas précédent, elles ne seront pas réécrites.

Analysons plus en détail les autres années :

- **2021** : l'effet d'allocation est positif sur l'ensemble de l'année, l'effet de sélection est positif également pour la première fois. Le total annuel vaut 0.018, environ deux tiers de ce total est expliqué par l'effet d'allocation et un tiers est expliqué par l'effet de sélection. Le total étant positif, le portefeuille 4 a légèrement surperformé grâce à une bonne allocation et une bonne sélection ;
- **2022** : l'effet d'allocation est très faible et l'effet de sélection est nul, ce qui nous donne un total égal à 0.001. Ainsi, le portefeuille 4 n'a ni surperformé, ni sous-performé ;
- **2023** : l'effet de sélection est le plus élevé avec une valeur égale à 0.019, expliquant la majorité du total dont la valeur vaut 0.023. Ainsi, le portefeuille 4 a surperformé, notamment grâce à une bonne sélection des actifs ;
- **2024** : le total est assez proche de 0, avec une valeur égale à 0.004. Le portefeuille 4 n'a ni surperformé, ni sous-performé, les deux effets étant très faibles ;
- **2025** : l'interprétation est similaire à l'année précédente, avec un total égal à 0.006.

Globalement le portefeuille 4 offre une performance active proche de celle du benchmark, avec des effets d'allocation et de sélection faibles sur l'ensemble de la période considérée.

Synthèse des résultats des modèles BHB

L'analyse des quatre modèles BHB met en évidence plusieurs régularités. Tout d'abord, les portefeuilles présentent des comportements similaires entre 2018 et 2020, une surperformance en 2018 suivie de deux années négatives, principalement expliquées par des décisions d'allocation défavorables. De plus, aucun portefeuille ne génère de valeur via la sélection durant cette période.

Au regard des années observées, le portefeuille 2 est celui qui surperforme le plus le portefeuille initial. Cette surperformance s'explique majoritairement par l'allocation en 2018 et en 2021, puis par la sélection à partir de 2022. En 2023, cette surperformance s'explique

par des poids similaires des deux effets.

A partir de 2021, les portefeuilles commencent à présenter des contributions positives provenant des deux effets, contributions variables selon les stratégies. Le portefeuille 2 se distingue par une performance active élevée, 0.113, principalement expliquée par l'effet d'allocation.

En 2022, les portefeuilles 1 et 4 affichent une performance quasi nulle, indiquant une proximité très proche avec le benchmark. A l'inverse, le portefeuille 2 surperforme nettement grâce à une très bonne sélection.

L'année 2023 constitue un point commun entre toutes les stratégies, tous les portefeuilles surperforment, et cette surperformance provient majoritairement de la sélection des titres. Le portefeuille 2 fait exception, sa performance étant expliquée de manière plus équilibrée par les deux effets.

Enfin, en 2024 et 2025, les portefeuilles 1 et 4 restent très proches du benchmark, tandis que les portefeuilles 2 et 3 surperforment, principalement grâce à la sélection.

En résumé, les portefeuilles 1 et 4 restent structurellement proches du benchmark, de 2021 à 2025. Le portefeuille 2 est le plus performant. Le portefeuille 3 présente également une surperformance à partir de 2021.

Conclusion

Ce mémoire avait pour objectif d'évaluer dans quelle mesure l'intégration des critères ESG modifie les modèles financiers classiques et la performance des portefeuilles, en particulier dans le contexte des fonds de pension. A travers une approche théorique, méthodologique et empirique, il a permis d'analyser comment les préférences extra-financières influencent la construction de portefeuille, les mesures de performance et les méthodes d'attribution.

Sur le plan théorique, l'étude a montré que l'intégration ESG ne constitue pas une simple contrainte additionnelle, mais une transformation structurelle des modèles de Markowitz et du MEDAF. En modifiant l'univers d'investissement, les pondérations possibles et la perception du risque, les critères ESG affectent directement la frontière efficiente, les rendements espérés et la relation entre risque et rendement. De même, l'analyse des mesures de performance, ainsi que du modèle BHB a mis en évidence que l'intégration ESG modifie non seulement les résultats, mais aussi la manière d'interpréter la performance ajustée du risque et la contribution respective de l'allocation et de la sélection.

L'étude empirique menée sur des portefeuilles réels de fonds de pension confirme cette complexité. Les stratégies ESG ne produisent pas des résultats uniformes : certaines augmentent le risque, d'autres le stabilisent, et certaines améliorent la performance ajustée du risque tandis que d'autres la dégradent. Parmi les stratégies testées, la stratégie combinant deux tiers d'actifs ayant un score ESG égal à A, AA ou AAA et d'un tiers d'actifs offrant le meilleur rendement apparaît comme la stratégie la plus performante selon Sharpe et Jensen. A l'inverse, le portefeuille composé uniquement d'actifs ayant un score ESG égal à A, AA ou AAA présente une performance plus instable et souvent inférieure au portefeuille initial. L'analyse BHB montre que la performance active dépend fortement de la qualité de la sélection à partir de 2021, en particulier pour les portefeuille possédant au moins 50% de titres ESG et combiné avec des actifs offrant un rendement élevé. Cela suggère que les stratégies ESG les plus efficaces sont celles qui parviennent à sélectionner des titres de meilleure qualité que le portefeuille initial, plutôt que celles qui reposent uniquement sur des exclusions.

Il convient également de souligner que l'analyse empirique n'a pu intégrer des portefeuilles ESG qu'à partir de 2021, année où les données ESG deviennent disponibles de manière récurrente. Cette date coïncide avec l'apparition du risque ESG dans le tableau de bord de

l'EIOPA, qui le reconnaît pour la première fois comme risque pour les IRP. Cela renforce la pertinence de l'étude car l'intégration ESG dans les portefeuilles et la reconnaissance réglementaire du risque ESG apparaissent au même moment. Cela permet de pouvoir analyser l'impact des critères ESG dans un contexte où ils commencent réellement à influencer la gestion des IRP.

Les fonds de pension sont directement impactés par ces résultats. En tant qu'investisseurs institutionnels soumis à des contraintes réglementaires strictes et à des horizons de placement longs, ils doivent concilier performance financière, gestion du risque et exigences de durabilité. L'étude montre que l'intégration ESG peut améliorer la performance ajustée du risque, mais uniquement lorsque les stratégies reposent sur une sélection rigoureuse. Elle souligne également que les portefeuilles ESG ne sont pas nécessairement moins risqués, ce qui invite les gestionnaires à adopter une approche nuancée et fondée sur l'analyse empirique.

Comme toute étude empirique, ce travail présente des limites. La période étudiée est relativement courte et marquée par des chocs exceptionnels, notamment la pandémie de COVID-19. Les actifs ont été regroupés en cinq catégories, ce qui réduit la finesse de l'analyse. Les scores ESG utilisés reposent sur une méthodologie spécifique, susceptible d'influencer les résultats. Enfin, le benchmark unique ne permet pas d'explorer la sensibilité des conclusions à différents univers d'investissement.

Ces limites ouvrent plusieurs perspectives de recherche. Une première piste consisterait à étudier un horizon d'investissement plus long ou des données plus granulaires, afin de renforcer la robustesse des résultats. Une seconde piste serait d'étudier d'autres méthodologies d'intégration ESG sur la performance et le risque.

Enfin, les résultats doivent être replacés dans un contexte géopolitique et économique en pleine mutation. Comme le souligne Rothschild [8], les tensions internationales récentes, la montée des priorités liées à la défense et la politisation croissante de l'ESG ont entraîné une réorientation partielle des flux d'investissements. Le recul observé dans certains marchés, notamment aux Etats-Unis contraste avec le renforcement des exigences réglementaires en Europe et illustre la fragmentation croissante du paysage ESG. Parallèlement, les enjeux de sécurité énergétique, de souveraineté industrielle et de stabilité géopolitique redéfinissent les priorités des investisseurs institutionnels. Dans ce contexte, les arbitrages entre performance financière, gestion du risque et valeurs éthiques deviennent plus complexes. Une piste de recherche future consisterait à analyser la résilience des portefeuilles ESG lors de chocs politiques, afin d'évaluer si les préférences ESG demeurent compatibles avec les exigences de rendement et de gestion du risque dans un environnement plus incertain.

Ainsi, ce mémoire montre que l'intégration ESG transforme profondément la gestion de portefeuille, tant sur le plan théorique que pratique. Elle ouvre également la voie à de nouvelles interrogations, à la croisée de la finance et de la géopolitique, qui continueront de façonner les décisions d'investissement des fonds de pension dans les années à venir.

Annexes

Annexe 1 - Code relatif aux simulations

```
#### CODE RELATIF A L'ETUDE EMPIRIQUE ####
#####

### Importation des donnees ###

# Chargement du package permettant d'importer des fichiers Excel
library(readxl)

# Importation du fichier Excel
data_global<- lapply(excel_sheets("donnees_OFP_26-05-17(clean).xlsx",
read_excel,path = "donnees_OFP_26-05-17(clean).xlsx")

# Recuperation et attribution des noms des feuilles du fichier
Excel
sheets_names <- excel_sheets("donnees_OFP_26-05-17(clean).xlsx")
names(data_global)<-sheets_names

library(dplyr)

# Extraction des rendements trimestriels pour chaque portefeuille
# Chaque element de data_global correspond a un trimestre
rendements <- lapply(data_global, function(x) x$RENDEMENT)

### Benchmark non-ESG ###

# Rendements trimestriels du benchmark non-ESG
# (calculés en stage via Excel)
bench_2018 <- c(-0.0055131, 0.0028409,0.0012230,-0.0151572)
bench_2019 <- c(0.0441514,0.0444945,0.0514729,-0.0001446)
bench_2020 <- c(-0.0650976,0.0698240,0.0183121,0.0355704)
bench_2021 <- c(-0.0035755,0.0181408,0.0000558,0.0105883)
bench_2022 <- c(-0.0494185,-0.0729308,-0.3618399,0.2626424)
bench_2023 <- c(0.0967771,0.0298554,0.0022476,0.0578609)
```

```

bench_2024 <- c(0.0163739, -0.0082507, 0.0260448, -0.0205024)
bench_2025 <- c(-0.0146643, -0.0059617, 0.0172836)

# Vecteur unique compose de tous les rendements du benchmark non-
# ESG
# dans l'ordre chronologique inverse pour correspondre a l'ordre de
# data_global
bench <- c(bench_2025, bench_2024, bench_2023, bench_2022, bench_2021,
  bench_2020, bench_2019, bench_2018)

### Calcul des rendements trimestriels de chaque portefeuille ###
# Calcul des poids de chaque actif de chaque portefeuille grace aux
# DV
# Somme des DV du trimestre 3 (DV T3 = DV du 3e mois du trimestre)
somme_dv <- sapply(data_global, function(df){sum(df$'DV_T3', na.rm=
  TRUE)})

# Liste contenant les poids DV normalises pour chaque trimestre
wi = vector("list", length(data_global))
for (i in 1:length(data_global)){
  wi[[i]] <- data_global[[i]]$"DV_T3"/somme_dv[i]
}

# Calcul du rendement trimestriel des portefeuilles
rend_portefeuilles <- sapply(1:length(data_global), function(x){
  poids <- wi[[x]] # Vecteur de poids des actifs du
  portefeuille considere
  rendements <- data_global[[x]]$RENDEMENT # Vecteur des
  rendements de chaque actif du portefeuille considere
  # Retirer les valeurs problematiques (NA)
  valid <- is.finite(poids) & is.finite(rendements)
  poids <- poids[valid]
  rendements <- rendements[valid]
  # Nouvelle normalisation des poids, au cas ou certains titres
  seraient exclus
  poids <- poids/sum(poids)
  # Rendement trimestriel pondere
  sum(poids*rendements)
})

# Liste des rendements des 31 portefeuilles trimestriels consideres
rend_portefeuilles

# Liste associant chaque annee aux indices de data_global
# data_global est dans l'ordre chronologique inverse
annees <- list(

```

```

    "2018" = 28:31,
    "2019" = 24:27,
    "2020" = 20:23,
    "2021" = 16:19,
    "2022" = 12:15,
    "2023" = 8:11,
    "2024" = 4:7,
    "2025" = 1:3
  )

### Ecart-type = volatilité ###

# Calcul de l'écart-type annuel de chaque portefeuille
ecart_type <- sapply(names(annees), function(x){
  r <- rend_portefeuilles[annees[[x]]] # On sélectionne les
    trimestres correspondants à l'année considérée
  r<- r[is.finite(r)] # On supprime les valeurs non finies (NA)
  sd(r) # On calcule l'écart-type
})

# Liste des écarts-type annuels des portefeuilles
ecart_type

# L'écart-type du benchmark est calculé de manière similaire
# en considérant le dataset bench et plus data_global
ecart_type_bench <- sapply(names(annees), function(x){
  r <- bench[annees[[x]]]
  r<- r[is.finite(r)]

  sd(r)
})
ecart_type_bench

### Ratio de Sharpe ###
# Taux sans risque fixe à 0 (hypothèse dans l'étude)
Rf <- 0

# Ratio de Sharpe du Benchmark
ratio_sharpe_bench <- sapply(names(annees), function(x){
  r <- bench[annees[[x]]]
  r<- r[is.finite(r)]
  ((mean(r)-Rf)/sd(r))*sqrt(length(r)) #formule du ratio de
    Sharpe
})

```



```

# Liste des ratios de Sharpe annuels pour le Benchmark
ratio_sharpe_bench

# Ratio de Sharpe des portefeuilles
ratio_sharpe <- sapply(names(annees), function(x){
  r <- rend_portefeuilles[annees[[x]]]
  r <- r[is.finite(r)]
  (mean(r)-Rf)/sd(r)*sqrt(length(r))
})

# Liste des ratios de Sharpe annuels pour les portefeuilles
ratio_sharpe

### Construction et rendements du Portefeuille 1 ###
# Uniquement des titres ayant un score ESG egal A, AA ou AAA

# Definition des ratings ESG retenus (A, AA, AAA)
ratings_cibles <- c("A", "AA", "AAA")

# Fonction de selection des titres dans chaque trimestre
data_esg <- lapply(data_global, function(x){
  # Si la colonne "ESG RATING" n'existe pas, cela renvoie un
  dataframe vide
  if(!("ESG_RATING" %in% names(x))) return(x[0,,drop=FALSE])
  # Nettoyage des "ESG RATING"
  x[["ESG_RATING"]] <- trimws(as.character(x[["ESG_RATING"]]))
  # Ne selectionner uniquement les ESG RATING dans les ratings_
  cibles
  x[x[["ESG_RATING"]] %in% ratings_cibles,, drop=FALSE]
})

# Extraction des rendements trimestriels pour ce portefeuille
strict ESG
# Comme pour les portefeuilles de data_global
rendements_esg <- lapply(data_esg, function(x) x$RENDEMENT)

# On calcule les poids des actifs dans chaque portefeuille
# Comme pour les portefeuilles initiaux de data_global
somme_dv_esg <- sapply(data_esg, function(df){sum(df$'DV_T3', na.rm
=TRUE)})
wi_esg = vector("list", length(data_esg))
for (i in 1:length(data_esg)){
  wi_esg[[i]] <- data_esg[[i]]$"DV_T3"/somme_dv_esg[i]
}

```

```

# On calcule les rendements trimestriels de chaque portefeuille
# Comme pour les portefeuilles initiaux de data_global
rend_portefeuilles_esg <- sapply(1:length(data_esg), function(x){
  poids <- wi_esg[[x]]
  rendements <- data_esg[[x]]$RENDEMENT
  valid <- is.finite(poids) & is.finite(rendements)
  poids <- poids[valid]
  rendements <- rendements[valid]
  poids <- poids/sum(poids)
  sum(poids*rendements)
})
# Liste des rendements du Portefeuille 1 pour les 31 trimestres
rend_portefeuilles_esg

### Ecart-type = volatilité du Portefeuille 1 ###
# Meme fonction que pour les portefeuilles initiaux
ecart_type_esg <- sapply(names(annees), function(x){
  r <- rend_portefeuilles_esg[annees[[x]]]
  r<- r[is.finite(r)]
  sd(r)
})
ecart_type_esg

### Ratios de Sharpe du Portefeuille 1 ###
# Meme fonction que pour les portefeuilles initiaux
ratio_sharpe_esg <- sapply(names(annees), function(x){
  r <- rend_portefeuilles_esg[annees[[x]]]
  r<- r[is.finite(r)]

  ((mean(r)-Rf)/sd(r))*sqrt(length(r))      #formule du ratio de
      Sharpe
})
ratio_sharpe_esg

### Construction du portefeuille 2 ###
# Fonction de construction du portefeuille
data_66_33 <- function(df, pct_non_esg = 0.5, ratings_ESG = c("A", "
AA", "AAA")){
  # Selection des titres ESG
  esg_oblig <- df[df$"ESG_RATING" %in% ratings_ESG,]
  # Selection des titres non ESG, score ESG = 0
  non_esg_oblig <- df[df$"ESG_RATING" %in% "0",]
  # Nombre de titres ESG a ajouter, 50% du nombre de titres ESG
  N_non_esg <- round(nrow(esg_oblig)*pct_non_esg)
  # Si des titres non ESG existent et que N_non_esg > 0

```

```

if (nrow(non_esg_oblig) > 0 & N_non_esg > 0){
  # On selectionne les titres non ESG avec les meilleurs
  rendements
  N_non_esg_select <- min(N_non_esg, nrow(non_esg_oblig))
  non_esg_oblig <- non_esg_oblig[order(-non_esg_oblig$"RENDEMENT"
    ),][1 : N_non_esg_select,]
} else {
  # Aucun titre non ESG a ajouter
  non_esg_oblig <- data.frame()
}
# Construction du portefeuille final, avec titres ESG et non ESG
portfolio <- rbind(esg_oblig, non_esg_oblig)
return(portfolio)
}
# Application de la strategie a chaque trimestre
portfolios_66_33 <- lapply(data_global,function(df){
  data_66_33(df,pct_non_esg = 0.5)
})

### Rendements trimestriels des titres du Portefeuille 2 ###
rendements_esg_66_33 <- lapply(portfolios_66_33, function(x) x$
  RENDEMENT)

### Calcul des poids DV des titres pour le Portefeuille 2 ###
somme_dv_esg_66_33 <- sapply(portfolios_66_33, function(df){sum(df$
  'DV_T3', na.rm=TRUE)})
wi_esg_66_33 = vector("list",length(portfolios_66_33))
for (i in 1:length(portfolios_66_33)){
  wi_esg_66_33[[i]] <- portfolios_66_33[[i]]$"DV_T3"/somme_dv_esg_
    66_33[i]
}

### Calcul des rendements trimestriels du Portefeuille 2 ###
rend_portefeuilles_esg_66_33 <- sapply(1:length(portfolios_66_33),
  function(x){
    poids <- wi_esg_66_33[[x]]
    rendements <- portfolios_66_33[[x]]$RENDEMENT
    valid <- is.finite(poids) & is.finite(rendements)
    poids <- poids[valid]
    rendements <- rendements[valid]
    poids <- poids/sum(poids)
    sum(poids*rendements)
  })
rend_portefeuilles_esg_66_33

```

```

### Ecart-type = volatilité annuelle du Portefeuille 2 ###
ecart_type_esg_66_33 <- sapply(names(annees), function(x){
  r <- rend_portefeuilles_esg_66_33[annees[[x]]]
  r<- r[is.finite(r)]
  sd(r)
})
ecart_type_esg_66_33

### Ratios de Sharpe annuels du Portefeuille 2 ###
ratio_sharpe_esg_66_33 <- sapply(names(annees), function(x){
  r <- rend_portefeuilles_esg_66_33[annees[[x]]]
  r<- r[is.finite(r)]
  ((mean(r)-Rf)/sd(r))*sqrt(length(r))      #formule du ratio de
    Sharpe
})

ratio_sharpe_esg_66_33

### Construction du Portefeuille 3 ###
# Fonction de construction du Portefeuille 3
# Meme fonction que pour Portefeuille 2
# Mais pct_non_esg = 1 donc pas mis
data_50_50 <- function(df, ratings_ESG = c("A","AA","AAA")){
  esg_oblig <- df[df$"ESG_RATING" %in% ratings_ESG,]
  non_esg_oblig <- df[df$"ESG_RATING" %in% "0",]
  N_non_esg <- nrow(esg_oblig)
  if (nrow(non_esg_oblig) > 0 & N_non_esg > 0){
    N_non_esg_select <- min(N_non_esg, nrow(non_esg_oblig))
    non_esg_oblig <- non_esg_oblig[order(-non_esg_oblig$"RENDEMENT"
    ),][1 : N_non_esg_select,]
  } else {
    non_esg_oblig <- data.frame()
  }
  portfolio <- rbind(esg_oblig, non_esg_oblig)
  return(portfolio)
}
portfolios_50_50 <- lapply(data_global,function(df){
  data_50_50(df)
})

### Rendements trimestriels des titres du Portefeuille 3 ###
rendements_esg_50_50 <- lapply(portfolios_50_50, function(x) x$
  RENDEMENT)

### Calcul des poids DV des titres pour le Portefeuille 3 ###

```

```

somme_dv_esg_50 <- sapply(portfolios_50_50, function(df){sum(df$'DV
  T3', na.rm=TRUE)})
wi_esg_50 = vector("list",length(portfolios_50_50))
for (i in 1:length(portfolios_50_50)){
  wi_esg_50[[i]] <- portfolios_50_50[[i]]$"DV_T3"/somme_dv_esg_50[i
  ]
}

### Calcul des rendements trimestriels du Portefeuille 3 ###
rend_portefeuilles_esg_50 <- sapply(1:length(portfolios_50_50),
  function(x){
    poids <- wi_esg_50[[x]]
    rendements <- portfolios_50_50[[x]]$RENDEMENT
    valid <- is.finite(poids) & is.finite(rendements)
    poids <- poids[valid]
    rendements <- rendements[valid]
    poids <- poids/sum(poids)
    sum(poids*rendements)
  })
rend_portefeuilles_esg_50

### Ecart-type = volatilité annuelle du Portefeuille 3 ###
ecart_type_esg_50 <- sapply(names(annees), function(x){
  r <- rend_portefeuilles_esg_50[annees[[x]]]
  r<- r[is.finite(r)]
  sd(r)      #formule du ratio de Sharpe
})
ecart_type_esg_50

### Ratios de Sharpe annuels du Portefeuille 3 ###
ratio_sharpe_esg_50 <- sapply(names(annees), function(x){
  r <- rend_portefeuilles_esg_50[annees[[x]]]
  r<- r[is.finite(r)]
  ((mean(r)-Rf)/sd(r))*sqrt(length(r))      #formule du ratio de
  Sharpe
})
ratio_sharpe_esg_50

### Construction du Portefeuille 4 ###
# Fonction de construction du Portefeuille 4
# Meme fonction que pour Portefeuille 2
# Mais nombre de titres non esg = 2 x le nombre de titres ESG

data_33_66 <- function(df, ratings_ESG = c("A","AA","AAA")){
  esg_oblig <- df[df$"ESG_RATING" %in% ratings_ESG,]

```

```

non_esg_oblig <- df[df$"ESG_RATING" %in% "0",]
N_non_esg <- 2*nrow(esg_oblig)
if (nrow(non_esg_oblig) > 0 & N_non_esg > 0){
  N_non_esg_select <- min(N_non_esg, nrow(non_esg_oblig))
  non_esg_oblig <- non_esg_oblig[order(-non_esg_oblig$"RENDEMENT"
    ),][1 : N_non_esg_select,]
} else {
  non_esg_oblig <- data.frame()
}
portfolio <- rbind(esg_oblig, non_esg_oblig)
return(portfolio)
}
portfolios_33_66 <- lapply(data_global, function(df){
  data_33_66(df)
})

### Rendements trimestriels des titres du Portefeuille 4 ###
rendements_esg_33_66 <- lapply(portfolios_33_66, function(x) x$
  RENDEMENT)

### Calcul des poids DV des titres pour le Portefeuille 4 ###
somme_dv_esg_33_66 <- sapply(portfolios_33_66, function(df){sum(df$
  'DV_T3', na.rm=TRUE)})
wi_esg_33 = vector("list", length(portfolios_33_66))
for (i in 1:length(portfolios_33_66)){
  wi_esg_33[[i]] <- portfolios_33_66[[i]]$"DV_T3"/somme_dv_esg_33_
    66[i]
}

### Calcul des rendements trimestriels du Portefeuille 4 ###
rend_portefeuilles_esg_33 <- sapply(1:length(portfolios_33_66),
  function(x){
    poids <- wi_esg_33[[x]]
    rendements <- portfolios_33_66[[x]]$RENDEMENT
    valid <- is.finite(poids) & is.finite(rendements)
    poids <- poids[valid]
    rendements <- rendements[valid]
    poids <- poids/sum(poids)
    sum(poids*rendements)
  })
rend_portefeuilles_esg_33

### Ecart-type = volatilité annuelle du Portefeuille 4 ###
ecart_type_esg_33 <- sapply(names(annees), function(x){

```

```

    r <- rend_portefeuilles_esg_33[annees[[x]]]
    r<- r[is.finite(r)]
    sd(r)
  })
ecart_type_esg_33

### Ratios de Sharpe annuels du Portefeuille 4 ###

ratio_sharpe_esg_33 <- sapply(names(annees), function(x){
  r <- rend_portefeuilles_esg_33[annees[[x]]]
  r<- r[is.finite(r)]

  ((mean(r)-Rf)/sd(r))*sqrt(length(r))      #formule du ratio de
    Sharpe
})
ratio_sharpe_esg_33

### Graphique de comparaison des ratios de Sharpe des differentes
  strategies ###
# Vecteur des annees etudiees
annees <- 2018:2025

library(reshape2)

# Construction d'un data frame regroupant les ratios de Sharpe
# Pour le portefeuille initial et les 4 autres portefeuilles
  construits
df_sharpe <- data.frame(Annee = annees, Base = ratio_sharpe, Port.1
  = ratio_sharpe_esg, Port.2 = ratio_sharpe_esg_66_33,
    Port.3 = ratio_sharpe_esg_50, Port.4 =
    ratio_sharpe_esg_33)

# Passage au format long pour ggplot2
df_long_sharpe <- melt(df_sharpe, id.vars = "Annee", variable.name
  = "Portefeuille", value.name = "Sharpe")

library(ggplot2)

# Graphique en barres comparant les ratios de Sharpe annuels
ggplot(df_long_sharpe,
  aes(x = factor(Annee),
    y = Sharpe,
    fill = Portefeuille)) +
  geom_bar(stat = "identity",
    position = "dodge") +

```

```

  labs(
    title = "Comparaison des ratios de Sharpe annuels",
    x = "Annee",
    y = "Ratio de Sharpe"
  ) +
  theme_minimal() +
theme(
  plot.title = element_text(
    hjust = 0.5,
    face = "bold"
  )
)

### Graphique de comparaison des volatilités des différentes
strategies ###
# Construction d'un data frame regroupant les volatilités
# Pour le portefeuille initial et les 4 autres portefeuilles
construits
df_rend <- data.frame(Annee = annees, Base = ecart_type, Port.1 =
  ecart_type_esg, Port.2 = ecart_type_esg_66_33,
  Port.3 = ecart_type_esg_50, Port.4 = ecart_
    type_esg_33)
df_long_rend <- melt(df_rend, id.vars = "Annee", variable.name = "
  Portefeuille", value.name = "Volatilite")

# Graphique en barres comparant les volatilités annuelles
ggplot(df_long_rend,
  aes(x = factor(Annee),
    y = Volatilite,
    fill = Portefeuille)) +
  geom_bar(stat = "identity",
    position = "dodge") +
  labs(
    title = "Comparaison des volatilités annuelles",
    x = "Annee",
    y = "Volatilite"
  ) +
  theme_minimal() +
theme(
  plot.title = element_text(
    hjust = 0.5,
    face = "bold"
  )
)

```



```

### Alpha de Jensen et beta ###
# Estimation annuelle via une regression lineaire avec Rf = 0
# Portefeuille initial
# Creation des vecteurs annuels alpha et beta
alphas <- numeric(length(annees))
betas <- numeric(length(annees))
names(alphas) <- names(annees)
names(betas) <- names(annees)

# Estimation annuelle via une regression lineaire
for (x in names(annees)){
  rp <- rend_portefeuilles[annees[[x]]] # rendements du
    portefeuille pour l'annee x
  rb <- bench[annees[[x]]]             # rendements du benchmark pour l'
    annee x
  modele <- lm(rp ~ rb)                 # regression lineaire
  alphas[x] <- coef(modele)[1]          # alpha de Jensen de l'annee x
  betas[x] <- coef(modele)[2]           # beta de l'annee x
}
# Vecteurs des alphas de Jensen et des betas annuels
alphas
betas

# Portefeuille 1
# Meme construction des vecteurs alphas et betas
alphas_esg <- numeric(length(annees))
betas_esg <- numeric(length(annees))
names(alphas_esg) <- names(annees)
names(betas_esg) <- names(annees)

for (x in names(annees)){
  rp <- rend_portefeuilles_esg[annees[[x]]]
  rb <- bench[annees[[x]]]
  modele <- lm(rp ~ rb)
  alphas_esg[x] <- coef(modele)[1]
  betas_esg[x] <- coef(modele)[2]
}
alphas_esg
betas_esg

# Portefeuille 2
# Meme construction des vecteurs alphas et betas
alphas_66 <- numeric(length(annees))
betas_66 <- numeric(length(annees))

```

```
names(alphas_66) <- names(annees)
names(betas_66) <- names(annees)

for (x in names(annees)){
  rp <- rend_portefeuilles_esg_66_33[annees[[x]]]
  rb <- bench[annees[[x]]]
  modele <- lm(rp ~ rb)
  alphas_66[x] <- coef(modele)[1]
  betas_66[x] <- coef(modele)[2]
}
alphas_66
betas_66

# Portefeuille 3
# Meme construction des vecteurs alphas et betas
alphas_50 <- numeric(length(annees))
betas_50 <- numeric(length(annees))
names(alphas_50) <- names(annees)
names(betas_50) <- names(annees)

for (x in names(annees)){
  rp <- rend_portefeuilles_esg_50[annees[[x]]]
  rb <- bench[annees[[x]]]
  modele <- lm(rp ~ rb)
  alphas_50[x] <- coef(modele)[1]
  betas_50[x] <- coef(modele)[2]
}
alphas_50
betas_50

# Portefeuille 4
# Meme construction des vecteurs alphas et betas
alphas_33 <- numeric(length(annees))
betas_33 <- numeric(length(annees))
names(alphas_33) <- names(annees)
names(betas_33) <- names(annees)

for (x in names(annees)){
  rp <- rend_portefeuilles_esg_33[annees[[x]]]
  rb <- bench[annees[[x]]]
  modele <- lm(rp ~ rb)
  alphas_33[x] <- coef(modele)[1]
  betas_33[x] <- coef(modele)[2]
}
alphas_33
```

```

betas_33

### Graphique de comparaison des alphas annuels des differentes
    strategies ###
# Construction d'un data frame regroupant les alphas annuels
# Pour le portefeuille initial et les 4 portefeuilles construits
df_alpha <- data.frame(Annee = annees, Base = alphas, Port.1 =
    alphas_esg, Port.2 = alphas_66,
                        Port.3 = alphas_50, Port.4 = alphas_33)
df_long_alpha <- melt(df_alpha, id.vars = "Annee", variable.name =
    "Portefeuille", value.name = "Alpha")

library(ggplot2)
ggplot(df_long_alpha,
       aes(x = factor(Annee),
           y = Alpha,
           fill = Portefeuille)) +
  geom_bar(stat = "identity",
           position = "dodge") +
  labs(
    title = "Comparaison des alphas annuels",
    x = "Annee",
    y = "Alpha"
  ) +
  theme_minimal() +
theme(
  plot.title = element_text(
    hjust = 0.5,
    face = "bold"
  )
)

### Ratio de Treynor ###
# Rf = 0 et beta est estime par la regression precedente
# Portefeuille initial
# Fonction du ratio Treynor
ratio_treynor <- sapply(names(annees), function(x){
  r <- rend_portefeuilles[annees[[x]]] # Rendements trimestriels
    du portefeuille pour l'annee x
  r<- r[is.finite(r)]
  beta <- betas[[x]] # beta estime via la regression
    lineaire
  (mean(r)-Rf)/beta #formule du ratio de treynor
})
ratio_treynor

```

```

# Ratio de Treynor du benchmark
# Le benchmark a un beta = 1 par definition
# Meme construction que le portefeuille initial
ratio_treynor_bench <- sapply(names(annees), function(x){
  r <- bench[annees[[x]]]
  r<- r[is.finite(r)]
  (mean(r)-Rf)/1      #formule du ratio de treynor
})
ratio_treynor_bench

# Ratio de Treynor du Portefeuille 1
# Meme construction que le portefeuille initial
ratio_treynor_esg <- sapply(names(annees), function(x){
  r <- rend_portefeuilles_esg[annees[[x]]]
  r<- r[is.finite(r)]
  beta <- betas_esg[[x]]
  (mean(r)-Rf)/beta    #formule du ratio de treynor
})
ratio_treynor_esg

# Ratio de Treynor du Portefeuille 2
# Meme construction que le portefeuille initial
ratio_treynor_esg_66 <- sapply(names(annees), function(x){
  r <- rend_portefeuilles_esg_66_33[annees[[x]]]
  r<- r[is.finite(r)]

  beta <- betas_66[[x]]

  (mean(r)-Rf)/beta    #formule du ratio de treynor
})
ratio_treynor_esg_66

# Ratio de Treynor du Portefeuille 3
# Meme construction que le portefeuille initial
ratio_treynor_esg_50 <- sapply(names(annees), function(x){
  r <- rend_portefeuilles_esg_50[annees[[x]]]
  r<- r[is.finite(r)]
  beta <- betas_50[[x]]
  (mean(r)-Rf)/beta    #formule du ratio de treynor
})
ratio_treynor_esg_50

# Ratio de Treynor du Portefeuille 4
# Meme construction que le portefeuille initial

```

```

ratio_treynor_esg_33 <- sapply(names(annees), function(x){
  r <- rend_portefeuilles_esg_33[annees[[x]]]
  r<- r[is.finite(r)]
  beta <- betas_33[[x]]
  (mean(r)-Rf)/beta      #formule du ratio de treynor
})
ratio_treynor_esg_33

### Graphique de comparaison des ratios de Treynor ###
# Construction du data frame
df_treynor <- data.frame(Annee = anneer, Base = ratio_treynor, Port
  .1 = ratio_treynor_esg, Port.2 = ratio_treynor_esg_66,
                        Port.3 = ratio_treynor_esg_50, Port.4 =
                        ratio_treynor_esg_33)
df_long_treynor <- melt(df_treynor, id.vars = "Annee", variable.
  name = "Portefeuille", value.name = "Treynor")

library(ggplot2)
# Graphiques en barres
ggplot(df_long_treynor,
  aes(x = factor(Annee),
      y = Treynor,
      fill = Portefeuille)) +

  geom_bar(stat = "identity",
    position = "dodge") +

  labs(
    title = "Comparaison des ratios de Treynor annuels",
    x = "Annee",
    y = "Ratio de Treynor"
  ) +
  theme_minimal()+
theme(
  plot.title = element_text(
    hjust = 0.5,
    face = "bold"
  )
)

### Attribution de la performance ###
### Modele BHB ###
# ETAPES :
# 1. Creation des categories d'actifs
# 2. Calcul des poids et des rendements par categorie
# 3. Aligement des categories entre portefeuilles

```

```

# 4. Implementation du modele BHB (allocation + selection)
# 5. Modele BHB pour chaque strategie
-----
# 1. Creation des categories d'actifs
# On classe chaque titre selon PRODUCT_TYPE_SII
# GOV -> obligations gouvernementales
# OTB -> Obligations corporate
# EQU -> Actions
# DEP -> Liquidites
# Autres -> Autres
creer_categories <- function(data){
  lapply(data, function(df){
df$Categorie <- ifelse(grepl("GOV", df$PRODUCT_TYPE_SII),
                        "Obligations_gouvernementales",
                        ifelse(grepl("OTB", df$PRODUCT_TYPE_SII),
                              "Obligations_corporate",
                              ifelse(grepl("EQU", df$PRODUCT_TYPE_SII),
                                    "Actions",
                                    ifelse(grepl("DEP", df$PRODUCT_TYPE_SII),
                                          "Liquidites",
                                          "Autres"))))
  return(df)
})
}

# Application aux differents portefeuilles
categories_base <- creer_categories(data_global)
categories_esg <- creer_categories(data_esg)
categories_66_33 <- creer_categories(portfolios_66_33)
categories_50_50 <- creer_categories(portfolios_50_50)
categories_33_66 <- creer_categories(portfolios_33_66)

# 2. Calcul des poids et rendements par categorie
# Pour chaque trimestre :
# Poids categorie = somme DV T3 de la categorie / somme DV T3 de
# tous les actifs
# Rendement categorie = moyenne ponderee des rendements par DV
calcul_categories <- function(data_categories){
  lapply(data_categories, function(df){
    # On retire les lignes avec DV ou rendement non valide
    df <- df[is.finite(df[["DV_T3"]]) & is.finite(df[["RENDEMENT"
    ]]), ]
    # Si aucun titre, renvoyer un dataframe vide
    if(nrow(df) == 0){
      return(data.frame(

```

```

    Categorie = character(0),
    Poids = numeric(0),
    Rendement = numeric(0)
  ))
}
# Poids par categorie
total_dv <- sum(df[["DV_T3"]], na.rm = TRUE)
poids <- tapply(df[["DV_T3"]], df$Categorie, sum) / total_dv
# Rendement par categorie
num <- tapply(df[["RENDEMENT"]] * df[["DV_T3"]], df$Categorie,
  sum)
den <- tapply(df[["DV_T3"]], df$Categorie, sum)
rendement <- num / den
# Fusion des categories presentes
cats <- union(names(poids), names(rendement))
data.frame(
  Categorie = cats,
  Poids = as.numeric(poids[cats]),
  Rendement = as.numeric(rendement[cats])
)
})
}

# Application aux portefeuilles
categories_base <- calcul_categories(categories_base)
categories_esg <- calcul_categories(categories_esg)
categories_66_33 <- calcul_categories(categories_66_33)
categories_50_50 <- calcul_categories(categories_50_50)
categories_33_66 <- calcul_categories(categories_33_66)

# 3. Alignement des categories
# Le modele BHB exige que toutes les categories soient presentes
# dans chaque portefeuille
# meme si le poids = 0
# On cree donc une liste des categories observees
all_categories <- sort(unique(c(
  unlist(lapply(categories_base, function(x) unique(x$Categorie))),
  unlist(lapply(categories_esg, function(x) unique(x$Categorie))),
  unlist(lapply(categories_66_33, function(x) unique(x$Categorie))),
  ,
  unlist(lapply(categories_50_50, function(x) unique(x$Categorie))),
  ,
  unlist(lapply(categories_33_66, function(x) unique(x$Categorie)))
)))

```

```

# Fonction d'alignement
# Ajoute les categories manquantes avec un poids = 0
align <- function(df, all_cat){
  full <- data.frame(Categorie = all_cat)
  df <- merge(full, df, by = "Categorie", all.x = TRUE)
  df$Poids[is.na(df$Poids)] <- 0
  df$Rendement[is.na(df$Rendement)] <- 0
  df
}

# 4. Implementation du modele BHB
bhb <- function(p, b, all_cat){
  # Alignement des categories
  p <- merge(data.frame(Categorie = all_cat), p, by = "Categorie",
    all.x = TRUE)
  b <- merge(data.frame(Categorie = all_cat), b, by = "Categorie",
    all.x = TRUE)
  p[is.na(p)] <- 0
  b[is.na(b)] <- 0
  # Fusion pour faciliter les calculs
  df <- merge(p, b, by = "Categorie", suffixes = c("_p", "_b"))
  # Effet d'allocation
  allocation <- sum((df$Poids_p - df$Poids_b) * df$Rendement_b)
  # Effet de selection
  selection <- sum(df$Poids_p * (df$Rendement_p - df$Rendement_b))
  # Resultat final : renvoie une liste avec allocation, selection
  et total
  list(
    allocation = allocation,
    selection = selection,
    total = allocation + selection
  )
}

# Application du modele BHB aux differents portefeuilles
# Pour chaque portefeuille :
# 1. Application de la fonction bhb trimestre par trimestre
# 2. Construction d'un data frame des resultats
# 3. Extraction des annees a partir des dates
# 4. Agregation annuelle (somme des effets)
-----
# Portefeuille 1
# Application de la fonction bhb pour chaque trimestre
res_esg <- lapply(names(categories_esg), function(x){
  bhb(

```



```

        categories_esg[[x]],          # portefeuille 1 classe en
            categories
        categories_base[[x]],        # portefeuille initial classe en
            categories
        all_categories                # categories alignees
    )
})
# Attribution des noms (dates)
names(res_esg) <- names(categories_esg)
res_esg

# Construction du data frame avec les resultats trimestriels
res_df_esg <- data.frame(
    date = names(res_esg),
    allocation = sapply(res_esg, '[[', "allocation"),
    selection = sapply(res_esg, '[[', "selection"),
    total = sapply(res_esg, '[[', "total")
)

# Extraction de l'annee
res_df_esg$year <- as.integer(substr(as.character(res_df_esg$date),
    1, 4))

# Agregation annuelle (somme des effets trimestriels)
aggregate(res_df_esg[, c("allocation", "selection", "total")],
    by = list(year = res_df_esg$year),
    FUN = sum)

# Portefeuille 2
# Application de la fonction bhb pour chaque trimestre
res_66_33 <- lapply(names(categories_66_33), function(x){
    bhb(
        categories_66_33[[x]],
        categories_base[[x]],
        all_categories
    )
})

# Attribution des noms (dates)
names(res_66_33) <- names(categories_66_33)
res_66_33

# Construction du data frame avec les resultats trimestriels
res_df_66_33 <- data.frame(
    date = names(res_66_33),

```

```

    allocation = sapply(res_66_33, '[[', "allocation"),
    selection = sapply(res_66_33, '[[', "selection"),
    total = sapply(res_66_33, '[[', "total")
  )

# Extraction de l'annee
res_df_66_33$year <- as.integer(substr(as.character(res_df_66_33$
  date), 1, 4))

# Agregation annuelle (somme des effets trimestriels)
aggregate(res_df_66_33[, c("allocation", "selection", "total")],
  by = list(year = res_df_66_33$year),
  FUN = sum)

# Portefeuille 3
# Application de la fonction bhb pour chaque trimestre
res_50_50 <- lapply(names(categories_50_50), function(x){
  bhb(
    categories_50_50[[x]],
    categories_base[[x]],
    all_categories
  )
})

# Attribution des noms (dates)
names(res_50_50) <- names(categories_50_50)
res_50_50

# Construction du data frame avec les resultats trimestriels
res_df_50_50 <- data.frame(
  date = names(res_50_50),
  allocation = sapply(res_50_50, '[[', "allocation"),
  selection = sapply(res_50_50, '[[', "selection"),
  total = sapply(res_50_50, '[[', "total")
)

# Extraction de l'annee
res_df_50_50$year <- as.integer(substr(as.character(res_df_50_50$
  date), 1, 4))

# Agregation annuelle (somme des effets trimestriels)
aggregate(res_df_50_50[, c("allocation", "selection", "total")],
  by = list(year = res_df_50_50$year),
  FUN = sum)

```

```
# Portefeuille 4
# Application de la fonction bbb pour chaque trimestre
res_33_66 <- lapply(names(categories_33_66), function(x){
  bbb(
    categories_33_66[[x]],
    categories_base[[x]],
    all_categories
  )
})

# Attribution des noms (dates)
names(res_33_66) <- names(categories_33_66)
res_33_66

# Construction du data frame avec les resultats trimestriels
res_df_33_66 <- data.frame(
  date = names(res_33_66),
  allocation = sapply(res_33_66, '[[', "allocation"),
  selection = sapply(res_33_66, '[[', "selection"),
  total = sapply(res_33_66, '[[', "total")
)

# Extraction de l'annee
res_df_33_66$year <- as.integer(substr(as.character(res_df_33_66$
  date), 1, 4))

# Agregation annuelle (somme des effets trimestriels)
aggregate(res_df_33_66[, c("allocation", "selection", "total")],
  by = list(year = res_df_33_66$year),
  FUN = sum)
```

Annexe 2 - Résultats liés aux mesures de performance

La Table A.1 présente les écarts-types obtenus grâce au code fourni en Annexe 1. Les écarts-types sont donnés pour l'ensemble des stratégies et pour le benchmark pour les années de 2018 à 2025, s'ils existent. Les résultats sont arrondis à la troisième décimale.

Ecart-type	Année							
	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025
Benchmark	0.008	0.024	0.057	0.010	0.255	0.040	0.022	0.017
Portefeuille initial	0.010	0.021	0.057	0.013	0.043	0.025	0.016	0.012
Portefeuille 1	0.000	0.000	0.000	0.015	0.022	0.032	0.027	0.015
Portefeuille 2	0.000	0.000	0.000	0.022	0.042	0.042	0.023	0.012
Portefeuille 3	0.000	0.000	0.000	0.024	0.039	0.036	0.018	0.006
Portefeuille 4	0.000	0.000	0.000	0.015	0.045	0.029	0.015	0.011

TABLE A.1 – Tableau présentant les écarts-types des différentes stratégies et du benchmark.

La Table A.2 présente les ratios de Sharpe obtenus grâce au code fourni en Annexe 1. Les ratios sont donnés pour l'ensemble des stratégies et pour le benchmark pour les années de 2018 à 2025, s'ils existent. Les résultats sont arrondis à la troisième décimale.

Ratio de Sharpe	Année							
	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025
Benchmark	−1.015	2.957	0.511	1.271	−0.434	2.312	0.318	−0.117
Portefeuille initial	−2.185	2.373	0.483	1.726	−1.543	2.125	1.909	2.002
Portefeuille 1				−0.557	−3.649	1.144	0.072	−0.633
Portefeuille 2				3.522	0.265	2.398	3.636	6.052
Portefeuille 3				2.143	−0.490	2.397	3.088	8.515
Portefeuille 4				2.132	−1.489	2.192	2.169	2.656

TABLE A.2 – Tableau présentant les ratios de Sharpe des différentes stratégies et du benchmark.

La Table A.3 présente les alphas de Jensen obtenus grâce au code fourni en Annexe 1. Les valeurs sont données pour l'ensemble des stratégies et pour le benchmark pour les années de 2018 à 2025, s'ils existent. Les résultats sont arrondis à la troisième décimale.

Alpha de Jensen	Année							
	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025
Benchmark	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Portefeuille initial	−0.010	0.046	0.019	0.018	−0.031	0.001	0.017	0.014
Portefeuille 1	0.000	0.000	0.000	−0.005	−0.036	−0.018	0.003	−0.007
Portefeuille 2	0.000	0.000	0.000	0.052	0.007	0.016	0.045	0.043
Portefeuille 3	0.000	0.000	0.000	0.038	−0.008	0.011	0.030	0.030
Portefeuille 4	0.000	0.000	0.000	0.023	−0.031	0.003	0.018	0.016

TABLE A.3 – Tableau présentant les alphas de Jensen des différentes stratégies et du benchmark.

La Table A.4 présente les ratios de Treynor obtenus grâce au code fourni en Annexe 1. Les valeurs sont données pour l'ensemble des stratégies et pour le benchmark pour les années de 2018 à 2025, s'ils existent. Les résultats sont arrondis à la troisième décimale.

Ratio de Treynor	Année							
	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025
Benchmark	−0.004	0.035	0.015	0.006	−0.055	0.047	0.003	−0.001
Portefeuille initial	−0.042	−0.039	−0.037	−0.011	−0.862	0.049	−0.023	−0.019
Portefeuille 1				−0.046	−0.608	0.024	−0.002	0.007
Portefeuille 2				−0.020	0.214	0.068	−0.049	−0.067
Portefeuille 3				−0.013	−0.321	0.063	−0.037	−0.139
Portefeuille 4				−0.014	−0.826	0.052	−0.026	−0.027

TABLE A.4 – Tableau présentant les ratios de Treynor des différentes stratégies et du benchmark.

Annexe 3 - Résultats liés aux modèles BHB

La Table A.5 reprend les effets d'allocation et de sélection du modèle BHB ayant pour benchmark le portefeuille initial et comme portefeuille de comparaison le portefeuille 1. Les résultats sont donnés pour la période de 2018 à 2025, par trimestre et par année, et sont arrondis à la troisième décimale. Le total correspond simplement à l'effet d'allocation additionné avec l'effet de sélection.

La Table A.6 reprend les effets d'allocation et de sélection du modèle BHB ayant pour benchmark le portefeuille initial et comme portefeuille de comparaison le portefeuille 2. Les résultats sont donnés pour la période de 2018 à 2025, par trimestre et par année, et sont arrondis à la troisième décimale. Le total correspond simplement à l'effet d'allocation additionné avec l'effet de sélection.

La Table A.7 reprend les effets d'allocation et de sélection du modèle BHB ayant pour benchmark le portefeuille initial et comme portefeuille de comparaison le portefeuille 3. Les résultats sont donnés pour la période de 2018 à 2025, par trimestre et par année, et sont arrondis à la troisième décimale. Le total correspond simplement à l'effet d'allocation additionné avec l'effet de sélection.

La Table A.8 reprend les effets d'allocation et de sélection du modèle BHB ayant pour benchmark le portefeuille initial et comme portefeuille de comparaison le portefeuille 4. Les résultats sont donnés pour la période de 2018 à 2025, par trimestre et par année, et sont arrondis à la troisième décimale. Le total correspond simplement à l'effet d'allocation additionné avec l'effet de sélection.

Année	Effets		
	Effet d'allocation	Effet de sélection	Total
2018 T1	0.008	0.000	0.008
2018 T2	0.006	0.000	0.006
2018 T3	0.005	0.000	0.005
2018 T4	0.027	0.000	0.027
2018	0.045	0.000	0.045
2019 T1	−0.049	0.000	−0.049
2019 T2	−0.029	0.000	−0.029
2019 T3	−0.020	0.000	−0.020
2019 T4	0.001	0.000	0.001
2019	−0.098	0.000	−0.098
2020 T1	0.066	0.000	0.066
2020 T2	−0.063	0.000	−0.063
2020 T3	−0.016	0.000	−0.016
2020 T4	−0.042	0.000	−0.042
2020	−0.055	0.000	−0.055
2021 T1	0.004	−0.001	0.003
2021 T2	0.005	0.002	0.007
2021 T3	0.000	0.003	0.003
2021 T4	0.003	0.002	0.005
2021	0.012	0.007	0.018
2022 T1	−0.001	0.000	0.000
2022 T2	−0.001	0.000	−0.001
2022 T3	0.001	0.000	0.001
2022 T4	0.002	0.000	0.002
2022	0.001	0.000	0.001
2023 T1	0.002	0.006	0.008
2023 T2	0.002	0.003	0.005
2023 T3	0.000	0.000	0.000
2023 T4	0.001	0.011	0.011
2023	0.004	0.019	0.023
2024 T1	0.001	0.000	0.001
2024 T2	0.001	0.000	0.001
2024 T3	−0.001	0.000	−0.001
2024 T4	0.000	0.000	0.000
2024	0.001	0.003	0.004
2025 T1	0.000	0.001	0.001
2025 T2	0.000	−0.001	−0.001
2025 T3	0.001	0.001	0.002
2025	0.001	0.005	0.006

TABLE A.5 – Tableau présentant les effets d'allocation et de sélection du premier modèle BHB.

Année	Effets		
	Effet d'allocation	Effet de sélection	Total
2018 T1	0.008	0.000	0.008
2018 T2	0.006	0.000	0.006
2018 T3	0.005	0.000	0.005
2018 T4	0.027	0.000	0.027
2018	0.045	0.000	0.045
2019 T1	−0.049	0.000	−0.049
2019 T2	−0.029	0.000	−0.029
2019 T3	−0.020	0.000	−0.020
2019 T4	0.001	0.000	0.001
2019	−0.098	0.000	−0.098
2020 T1	0.066	0.000	0.066
2020 T2	−0.063	0.000	−0.063
2020 T3	−0.016	0.000	−0.016
2020 T4	−0.042	0.000	−0.042
2020	−0.055	0.000	−0.055
2021 T1	0.015	0.007	0.022
2021 T2	0.024	0.005	0.029
2021 T3	0.006	0.012	0.019
2021 T4	0.036	0.007	0.043
2021	0.081	0.032	0.113
2022 T1	0.002	0.040	0.042
2022 T2	0.013	0.038	0.051
2022 T3	0.001	0.019	0.019
2022 T4	0.009	0.035	0.043
2022	0.025	0.131	0.156
2023 T1	0.033	0.019	0.052
2023 T2	0.014	0.006	0.020
2023 T3	0.000	0.000	0.000
2023 T4	0.006	0.021	0.028
2023	0.053	0.046	0.099
2024 T1	0.026	0.012	0.040
2024 T2	0.000	0.009	0.009
2024 T3	0.006	0.011	0.017
2024 T4	−0.002	0.047	0.045
2024	0.030	0.079	0.109
2025 T1	0.001	0.031	0.032
2025 T2	0.011	0.013	0.024
2025 T3	0.013	0.018	0.031
2025	0.025	0.062	0.087

TABLE A.6 – Tableau présentant les effets d'allocation et de sélection du deuxième modèle BHB.

Année	Effets		
	Effet d'allocation	Effet de sélection	Total
2018 T1	0.008	0.000	0.008
2018 T2	0.006	0.000	0.006
2018 T3	0.005	0.000	0.005
2018 T4	0.027	0.000	0.027
2018	0.045	0.000	0.045
2019 T1	−0.049	0.000	−0.049
2019 T2	−0.029	0.000	−0.029
2019 T3	−0.020	0.000	−0.020
2019 T4	0.001	0.000	0.001
2019	−0.098	0.000	−0.098
2020 T1	0.066	0.000	0.066
2020 T2	−0.063	0.000	−0.063
2020 T3	−0.016	0.000	−0.016
2020 T4	−0.042	0.000	−0.042
2020	−0.055	0.000	−0.055
2021 T1	0.004	−0.001	0.003
2021 T2	0.014	0.009	0.023
2021 T3	0.002	0.005	0.007
2021 T4	0.016	0.007	0.023
2021	0.036	0.020	0.056
2022 T1	0.002	0.024	0.026
2022 T2	0.011	0.021	0.032
2022 T3	0.004	0.011	0.015
2022 T4	0.006	0.016	0.021
2022	0.023	0.072	0.095
2023 T1	0.021	0.011	0.032
2023 T2	0.010	0.005	0.015
2023 T3	0.000	0.000	0.000
2023 T4	0.003	0.019	0.021
2023	0.033	0.035	0.068
2024 T1	0.011	0.008	0.018
2024 T2	0.001	0.003	0.004
2024 T3	0.001	0.007	0.007
2024 T4	0.002	0.020	0.022
2024	0.015	0.036	0.051
2025 T1	0.001	0.025	0.026
2025 T2	0.002	0.008	0.010
2025 T3	0.005	0.006	0.011
2025	0.007	0.039	0.046

TABLE A.7 – Tableau présentant les effets d'allocation et de sélection du troisième modèle BHB.

Année	Effets		
	Effet d'allocation	Effet de sélection	Total
2018 T1	0.008	0.000	0.008
2018 T2	0.006	0.000	0.006
2018 T3	0.005	0.000	0.005
2018 T4	0.027	0.000	0.027
2018	0.045	0.000	0.045
2019 T1	−0.049	0.000	−0.049
2019 T2	−0.029	0.000	−0.029
2019 T3	−0.020	0.000	−0.020
2019 T4	0.001	0.000	0.001
2019	−0.098	0.000	−0.098
2020 T1	0.066	0.000	0.066
2020 T2	−0.063	0.000	−0.063
2020 T3	−0.016	0.000	−0.016
2020 T4	−0.042	0.000	−0.042
2020	−0.055	0.000	−0.055
2021 T1	0.004	−0.001	0.003
2021 T2	0.005	0.002	0.007
2021 T3	0.000	0.003	0.003
2021 T4	0.003	0.002	0.005
2021	0.012	0.007	0.018
2022 T1	−0.001	0.000	0.000
2022 T2	−0.001	0.000	−0.001
2022 T3	0.001	0.000	0.001
2022 T4	0.002	0.000	0.002
2022	0.001	0.000	0.001
2023 T1	0.002	0.006	0.008
2023 T2	0.002	0.003	0.005
2023 T3	0.000	0.000	0.000
2023 T4	0.001	0.011	0.011
2023	0.004	0.019	0.023
2024 T1	0.001	0.000	0.000
2024 T2	0.000	0.000	0.001
2024 T3	0.000	0.000	−0.001
2024 T4	0.000	0.003	0.003
2024	0.001	0.003	0.004
2025 T1	0.000	0.005	0.005
2025 T2	0.000	−0.001	0.000
2025 T3	0.001	0.001	0.002
2025	0.001	0.005	0.006

TABLE A.8 – Tableau présentant les effets d'allocation et de sélection du quatrième modèle BHB.

Table des figures

1.1	Illustration de l'aversion au risque. Source : [19].	9
1.2	Illustration de la frontière efficiente et du portefeuille de variance minimale. Source : [2].	21
1.3	Illustration de la CML. Source : [23].	25
1.4	Illustration de la SML.	30
1.5	Comparaison de la SML : MEDAF - modèle de Black.	32
2.1	CML et ratio de Sharpe sans l'hypothèse d'équilibre.	36
2.2	SML et ratio de Treynor à l'équilibre.	39
2.3	SML et ratio de Treynor sans l'hypothèse d'équilibre.	39
2.4	Illustration des différents alpha de Jensen possibles.	42
4.1	Standards de reporting de durabilité (ESRS). Source : [31].	62
4.2	Echelle des scores ESG, selon l'agence MSCI. Source : [11].	66
5.1	Frontière ESG-SR et portefeuille tangent sous préférence ESG. Source : [29].	72
5.2	Frontière efficiente classique et frontière sous contrainte ESG. Source : [29].	73
5.3	Illustration du ratio de Sharpe modifié.	85
5.4	Illustration de l'alpha de Jensen modifié. Les courbes orange et mauve coïn- cident.	88
5.5	Illustration du ratio de Treynor modifié. Les droites orange et mauve coïn- cident.	91
6.1	Comparaison de la volatilité pour les différentes stratégies.	107
6.2	Comparaison du ratio de Sharpe pour les différentes stratégies.	109
6.3	Comparaison de l'alpha de Jensen pour les différentes stratégies.	111
6.4	Comparaison du ratio de Treynor pour les différentes stratégies.	113

Bibliographie

- [1] Noël Amenc et Véronique Le Sourd, *Théorie du portefeuille et analyse de sa performance*, 2ème, Economica, Paris, 2003.
- [2] Andlil, *Gestion de portefeuille : la frontière efficiente de Markowitz*, Consulté le 23 mai 2026, 2015, disponible via l'URL <<https://www.andlil.com/le-portefeuille-efficient-selon-markowitz-144615.html>>.
- [3] Belgique, *27 OCTOBRE 2006. - Loi relative au contrôle des institutions de retraite professionnelle*, consulté le 06 avril 2026, 2006, disponible via l'URL <https://www.ejustice.just.fgov.be/eli/loi/2006/10/27/2006023149/justel#sw_sign>.
- [4] Belgique, *28 AVRIL 2003. - Loi relative aux pensions complémentaires et au régime fiscal de celles-ci et de certains avantages complémentaires en matière de sécurité sociale*, consulté le 12 avril 2026, 2003, disponible via l'URL <<https://www.ejustice.just.fgov.be/eli/loi/2003/04/28/2003022481/justel>>.
- [5] Fischer Black, *Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing*, The Journal of Business **45** (1972), n° 3, p. 444-455.
- [6] Stephen Boyd et Lieven Vandenbergh, *Convex optimization*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [7] G. Brinson, L. Hood et G. Beebower, *Determinants of Portfolio Performance*, Financial Analysts Journal **51** (1995), n° 1, p. 133-138.
- [8] Rothschild Co, *Perspectives ESG pour 2025 et au-delà*, consulté le 20 mai 2026, 2025, disponible via l'URL <<https://www.rothschildandco.com/fr/actualites/publications/2025/06/wealth-management-perspectives-esg-pour-2025-et-au-dela/>>.
- [9] T. Copeland et J. Weston, *Financial theory and corporate policy*, 3rd, Addison-Wesley Publishing Company, 1992.
- [10] Emma Duchesnes, *Comprendre les critères ESG et les mesurer pour les intégrer dans sa stratégie*, consulté le 27 mars 2026, disponible via l'URL <<https://www.greenscope.io/esg/criteres>>.
- [11] *ESG Ratings : Assess companies on their financially relevant sustainability risks and opportunities*, consulté le 20 novembre 2025, disponible via l'URL <<https://www.msci.com/data-and-analytics/sustainability-solutions/esg-ratings>>.

- [12] Ethias, *Politique d'intégration ESG*, consulté le 27 mars 2026, disponible via l'URL <https://www.ethias.be/content/dam/corporate/publications/sustainability/sustainability_invest/ESG_Integration.pdf>.
- [13] *EU taxonomy for sustainable activities*, consulté le 19 novembre 2025, 2025, disponible via l'URL <https://finance.ec.europa.eu/sustainable-finance/tools-and-standards/eu-taxonomy-sustainable-activities_en?prefLang=fr&etrans=fr>.
- [14] Union Européenne, *Directive (UE) 2016/2341 du Parlement Européen et du Conseil du 14 décembre 2016 concernant les activités et la surveillance des institutions de retraite professionnelles (IRP)*, consulté le 08 mai 2026, 2026, disponible via l'URL <<https://eur-lex.europa.eu/legal-content/FR/TXT/PDF/?uri=CELEX:32016L2341>>.
- [15] Union Européenne, *RÈGLEMENT (UE) 2019/2088 DU PARLEMENT EUROPÉEN ET DU CONSEIL du 27 novembre 2019 sur la publication d'informations en matière de durabilité dans le secteur des services financiers*, consulté le 21 mai 2026, 2026, disponible via l'URL <<https://eur-lex.europa.eu/legal-content/FR/TXT/PDF/?uri=CELEX:32019R2088>>.
- [16] Autorité des services et marchés financiers, *Site officiel de la FSMA*, consulté le 04 avril 2026, 2026, disponible via l'URL <<https://www.fsma.be/fr>>.
- [17] Pascal François et Georges Hübner, *The complete guide to portfolio performance : Appraise, analyse, act*, John Wiley Sons, 2024.
- [18] Global Sustainable Investment Alliance, *Global Sustainable Investment Review 2024*, GSIA, 2024, disponible via l'URL <<https://www.gsi-alliance.org/wp-content/uploads/2025/11/GSIR-2024-Main-Report.pdf>>.
- [19] Georges Hübner, *Marchés financiers*, Notes de cours, HEC Liège, 2021.
- [20] European Insurance et Occupational Pensions Authority, *Institutions for occupational retirement provision (IORPs) Risk Dashboard*, consulté le 12 avril 2026, 2026, disponible via l'URL <<https://nexteuropa-multisites.s3.eu-west-1.amazonaws.com/www.eiopa.europa.eu/assets/iorps-risk-dashboard/EIOPA-BoS-26-009%202026%20January%20IORP%20Risk%20Dashboard.html>>.
- [21] European Insurance et Occupational Pensions Authority, *Site officiel de l'EIOPA*, consulté le 03 avril 2026, 2026, disponible via l'URL <https://www.eiopa.europa.eu/index_en>.
- [22] European Insurance et Occupational Pensions, *Insurance Risk dashboards - Previous publications*, consulté le 08 mai 2026, 2026, disponible via l'URL <https://www.eiopa.europa.eu/tools-and-data/insurance-risk-dashboard/insurance-risk-dashboards-previous-publications_en#insurance-risk-dashboard--february-2017>.

- [23] Laurent Jean-Paul, *Cours de Finance (MEDAF)*, Consulté le 24 mai 2026, 2024, disponible via l'URL <<http://laurent.jeanpaul.free.fr/Enseignement/Cours%20M1%20Finance%202024-2025%20%287%29%20%E9daf.pdf>>.
- [24] Michael Jensen, *The performance of mutual funds in the period 1945-1964*, The Journal of Finance **23** (1968), n° 2, p. 389-416.
- [25] *Les notes ESG : Définition, cas d'utilisation, importance et moyens d'amélioration*, consulté le 20 novembre 2025, disponible via l'URL <<https://ecovadis.com/fr/glossary/esg-environmental-social-governance-investing/>>.
- [26] Harry Markowitz, *Portfolio Selection*, The Journal of Finance **7** (1952), n° 1, p. 77-91.
- [27] Harry M. Markowitz, *Portfolio selection : efficient diversification of investments*, John Wiley Sons, New York, 1959.
- [28] Robert C. Merton, *An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier*, The Journal of Financial and Quantitative Analysis **7** (1972), n° 4, p. 1851-1872.
- [29] Lasse Pederson, Shaun Fitzgibbons et Lukasz Pomorski, *Responsible investing : The ESG-efficient frontier*, Journal of financial economics **142** (2021), n° 2, p. 572-597.
- [30] PRI, *Principles for Responsible Investment*, consulté le 26 mars 2026, disponible via l'URL <<https://www.unpri.org>>.
- [31] Service Public de Wallonie, *De la stratégie au reporting de durabilité : un levier de différenciation, de performance et de résilience*, SPW, 2025, disponible via l'URL <https://www.wallonie.be/sites/default/files/2025-05/25-05-15-guide_csrdf-vf-2.pdf>.
- [32] William Sharpe, *Capital Asset Prices : A theory of market equilibrium under conditions of risk*, The Journal of finance **19** (1964), n° 3, p. 425-442.
- [33] William Sharpe, *Mutual Fund Performance*, The Journal of Business **39** (1966), n° 1, p. 119-138.
- [34] SPF Sécurité Sociale, *Tout ce que vous avez toujours voulu savoir sur la sécurité sociale*, consulté le 03 avril 2026, disponible via l'URL <<https://socialsecurity.belgium.be/sites/default/files/content/docs/fr/publications/tout-ce-que-securite-sociale-fr.pdf>>.
- [35] *The European Green Deal : Striving to be the first climate-neutral continent*, consulté le 19 mars 2026, disponible via l'URL <https://commission.europa.eu/strategy-and-policy/priorities-2019-2024/european-green-deal_en>.
- [36] Jack Treynor, *How to rate management of investment funds*, Harvard Business Review **43** (1965), n° 1, p. 63-75.
- [37] UNFCCC, *L'Accord de Paris*, consulté le 21 mai 2026, disponible via l'URL <<https://unfccc.int/fr/a-propos-des-ndcs/l-accord-de-paris>>.
- [38] Pascale Viala et Eric Briys, *Éléments de théorie financière*, Nathan, 1995.

- [39] John Von Neumann et Oskar Morgenstern, *Theory of games and economic behavior*, 2nd edition, Princeton University Press, Princeton, 1947.