

Contribution à l'étude du rapport d'élèves du secondaire à l'usage de tableaux de valeurs dans l'enseignement de la notion de

Auteur : Paternotre, Sarah

Promoteur(s) : Balhan, Kevin

Faculté : Faculté des Sciences

Diplôme : Master en sciences mathématiques, à finalité didactique

Année académique : 2025-2026

URI/URL : <http://hdl.handle.net/2268.2/25520>

Avertissement à l'attention des usagers :

Tous les documents placés en accès ouvert sur le site le site MatheO sont protégés par le droit d'auteur. Conformément aux principes énoncés par la "Budapest Open Access Initiative"(BOAI, 2002), l'utilisateur du site peut lire, télécharger, copier, transmettre, imprimer, chercher ou faire un lien vers le texte intégral de ces documents, les disséquer pour les indexer, s'en servir de données pour un logiciel, ou s'en servir à toute autre fin légale (ou prévue par la réglementation relative au droit d'auteur). Toute utilisation du document à des fins commerciales est strictement interdite.

Par ailleurs, l'utilisateur s'engage à respecter les droits moraux de l'auteur, principalement le droit à l'intégrité de l'oeuvre et le droit de paternité et ce dans toute utilisation que l'utilisateur entreprend. Ainsi, à titre d'exemple, lorsqu'il reproduira un document par extrait ou dans son intégralité, l'utilisateur citera de manière complète les sources telles que mentionnées ci-dessus. Toute utilisation non explicitement autorisée ci-avant (telle que par exemple, la modification du document ou son résumé) nécessite l'autorisation préalable et expresse des auteurs ou de leurs ayants droit.



FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE

Contribution à l'étude du rapport d'élèves du secondaire à l'usage des tableaux de valeurs dans l'enseignement de la notion de limite

Mémoire de fin d'études présenté en vue de l'obtention du titre de
Master en Sciences Mathématiques, à finalité didactique

Année académique 2025-2026

Auteur :
Sarah PATERNOTRE

Promoteur :
Kevin BALHAN

Co-Promoteur :
Pierre JOB

Mes premiers remerciements s'adressent à Monsieur Balhan et Monsieur Job, qui m'ont ouvert les portes de la didactique des mathématiques. Grâce à vous, j'ai découvert une discipline d'une richesse remarquable, qui n'a cessé de nourrir ma curiosité et ma réflexion, et qui a contribué à mon épanouissement. Je vous remercie pour votre accompagnement, votre disponibilité et votre confiance tout au long de ce travail. Et surtout, un grand merci pour nos nombreux échanges inspirants et passionnants, qui ont mené à l'aboutissement de ce mémoire.

Ensuite, je remercie mes amis, et en particulier mes amis du B37, pour leur soutien, leur écoute, leurs conseils, les moments de détente partagés qui m'ont permis de garder le cap et les fous rires qui ont rythmé ces années d'études.

J'adresse également mes remerciements à l'ensemble des professeurs et assistants que j'ai rencontrés durant mon parcours. Ils ont contribué à mon évolution au cours de ces années universitaires, par la qualité de leurs enseignements, leur exigence et leur passion.

Je tiens à remercier tout particulièrement Monsieur Haine pour m'avoir si bien accueillie dans sa classe. Merci pour le temps consacré à ma formation au métier d'enseignant, pour votre bienveillance et pour nos discussions enrichissantes.

Un grand merci également à Monsieur Wuidar et Madame Dispa, qui m'ont transmis, durant mes années de secondaire, un bagage mathématique solide et précieux et qui n'ont cessé de m'encourager par la suite.

Merci à mon parrain et sa famille pour leur présence, leur générosité et leur soutien indéfectible tout au long de mes études. Un merci particulier à Marido pour sa relecture minutieuse de dernière minute.

Merci à mon frère et à mes sœurs pour leur bonne humeur quotidienne, leurs encouragements et tous ces moments de complicité qui ont rendu ces années d'étude plus légères et plus belles.

Un immense merci à ma maman, sans qui rien de tout cela n'aurait été possible. Merci pour ton amour, ta patience et ton soutien inconditionnel tout au long de ce parcours. Je te suis infiniment reconnaissante pour tout ce que tu as fait pour moi.

Enfin, merci à toi, Endymion. Merci d'avoir toujours cru en moi, de m'avoir encouragée sans cesse et de m'avoir soutenue à travers toutes les épreuves. Tu as rendu ce parcours merveilleux.

Table des matières

Introduction	8
1 Cadre théorique	10
1.1 Introduction	10
1.2 La centralité du savoir en didactique : une double rupture épistémologique	11
1.3 Le questionnement du savoir : fondement du MER	12
1.4 Un premier ancrage de notre MER à la Théorie des Situations Didactiques (TSD)	17
1.4.1 Exemple d’une situation didactique fondamentale	17
1.4.2 Existence d’une situation fondamentale et situations fondamentales au sens large	25
1.5 Un deuxième ancrage de notre MER à la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD)	26
1.5.1 Le regard praxéologique de la TAD	28
1.6 Notre modèle épistémologique de référence (MER) : deux niveaux praxéologiques ordonnés	32
1.6.1 La praxéologie de type “modélisation”	32
1.6.2 La praxéologie de type “déduction”	33
1.6.3 Un exemple d’articulation de ces deux niveaux praxéologiques . . .	34
1.7 Les moments de l’étude comme cadre d’analyse des pratiques enseignantes	37
1.8 Conclusion	40
2 De l’Antiquité grecque à l’analyse standard	42
2.1 Introduction	42
2.2 Antiquité grecque	43
2.2.1 Les quadratures exactes et relatives	43
2.2.2 La commune mesure	45
2.2.3 La théorie des proportions	46
2.2.4 Archimède et le nombre pi	51
2.2.5 La méthode d’exhaustion	53
2.2.6 Quelques précisions et éclaircissements	53
2.3 Époque moderne : <i>Le Calculus</i>	55
2.3.1 Grégoire de Saint-Vincent (1584–1667)	57

2.3.2	Jean le Rond d'Alembert (1717–1783)	58
2.4	Époque contemporaine : L'analyse	61
2.5	Conclusion	63
3	Présentation d'un MER de la notion de limite	66
3.1	Introduction	66
3.2	Deux praxéologies fondamentales comme fondation du MER	67
3.2.1	Praxéologie de type “modélisation” : Constitution du <i>calculus</i>	68
3.2.2	Praxéologie de type “déduction” : Constitution de l'analyse	69
3.2.3	Articulation des deux praxéologies dans le MER de la notion de limite	70
3.3	Conclusion	71
4	Enseignement de la notion de limite	72
4.1	Introduction	72
4.2	Évolution de l'enseignement des mathématiques	73
4.3	Des référentiels “généraux” à des programmes d'étude “spécifiques”	77
4.4	Analyse du programme d'étude “Mathématiques pour scientifiques”	79
4.4.1	UAA3 : Asymptotes, limites et continuité	81
4.4.2	UAA2 : Suites	84
4.5	Des programmes d'étude à leur mise en œuvre dans les manuels scolaires et notes de cours des enseignants	86
4.5.1	Analyse du manuel scolaire “CQFD Maths 5 ^e ”	88
4.6	Synthèse	95
4.7	Analyse du dossier sur les suites étudié par les élèves ayant participé à l'expérimentation	96
5	Le rapport des élèves à la notion de limite	102
5.1	Avant-propos	102
5.2	Les objectifs de l'expérimentation	103
5.3	Public cible et contexte de l'expérimentation	104
5.4	Les outils d'analyse mobilisés : une approche issue de l'ingénierie didactique	104
5.5	Analyse <i>a priori</i>	107
5.5.1	Questionnaire soumis aux élèves	107
5.5.2	Effet de contrat au sens de Brousseau et cadre restreint de l'expéri- mentation	110
5.5.3	Allure générale des tableaux soumis aux élèves et leur implication pour l'identification de la notion de limite	111
5.5.4	Tableau 1	114
5.5.5	Tableau 2	116
5.5.6	Tableau 3	117
5.5.7	Tableau 4	118
5.5.8	Tableau 5	119

5.5.9	Tableau 6	120
5.5.10	Tableau 7 et Tableau 8	121
5.6	Méthodes de récolte des données	123
5.7	Analyse <i>a posteriori</i> de l'expérimentation	124
5.7.1	Grille de lecture de l'expérimentation	124
5.7.2	Conventions employées dans la transcription	132
5.7.3	Analyse <i>a posteriori</i> des productions des élèves	133
5.7.4	Tableau 1 : [00 : 11] → [06 : 14] ; [08 : 43] → [10 : 04]	133
5.7.5	Tableau 2 : [06 : 16] → [08 : 35] ; [10 : 08] → [13 : 36]	143
5.7.6	Tableau 3 : [13 : 40] → [16 : 14]	148
5.7.7	Tableau 4 : [16 : 20] → [18 : 14]	152
5.7.8	Tableau 5 : [18 : 16] → [22 : 42]	155
5.7.9	Tableau 6 : [22 : 46] → [26 : 56]	158
5.7.10	Tableau 7 : [27 : 04] → [30 : 02]	160
5.7.11	Tableau 8 : [30 : 14] → [33 : 13]	163
5.8	Conclusion	164
	Pistes de réflexion et conclusion	168
	Bibliographie	172
	A Expérimentation réalisée par les élèves	178
	B Transcription de l'enregistrement audio	188
	C CQFD Maths 5^e : 4 périodes/semaine (2016)	204

Introduction

La notion de limite occupe une place centrale dans l'enseignement de l'analyse standard, car elle est le point d'entrée vers des concepts fondamentaux tels que la continuité, la dérivée ou encore l'intégrale. De nombreuses recherches en didactique des mathématiques ont mis en évidence les difficultés et obstacles rencontrés par les élèves pour comprendre et s'approprier cette notion.

Dans les pratiques d'enseignement, la limite est fréquemment introduite et travaillée à travers des représentations variées, parmi lesquelles les tableaux de valeurs et les représentations graphiques occupent une place prépondérante. Dans ce travail, nous nous intéressons particulièrement aux tableaux de valeurs de fonctions, souvent utilisés pour faire émerger et illustrer la notion de limite d'une fonction.

En effet, cette utilisation, parfois encore omniprésente dans certains manuels et notes de cours, soulève des questions quant à sa pertinence et à son efficacité pour l'apprentissage de la notion de limite. Le présent mémoire se consacre ainsi à l'étude du rapport que les élèves entretiennent avec ces tableaux de valeurs, en particulier leur capacité à y reconnaître de manière autonome des éléments relevant de la notion de limite.

Afin d'analyser cette problématique, ce travail s'inscrit dans deux cadres théoriques de la didactique des mathématiques : la Théorie des Situations Didactiques (TSD) et la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD). Ces approches offrent des outils complémentaires pour questionner les savoirs mathématiques et les pratiques d'enseignement qui leur sont associées, et permettent l'élaboration de modèles épistémologiques de référence (MER). Un MER peut être défini comme une construction didactique visant à expliciter les caractéristiques épistémologiques d'un savoir jugées essentielles par le chercheur, afin de permettre une analyse critique des pratiques d'enseignement et d'apprentissage. Il constitue ainsi un outil de vigilance épistémologique, en ce qu'il permet d'évaluer dans quelle mesure ces pratiques sont en adéquation avec les exigences du savoir considéré, et de mettre en évidence d'éventuels écarts, obstacles ou malentendus. Dans le cadre de ce mémoire, nous présentons donc un MER de la notion de limite, construit à partir des apports de la TSD et de la TAD, qui servira de cadre d'analyse pour l'étude du rapport des élèves aux tableaux de valeurs.

Pour ce faire, le mémoire est rythmé par cinq chapitres distincts mais étroitement articulés, chacun contribuant, de manière complémentaire, à la compréhension globale de la problématique.

Le premier chapitre est consacré à la présentation du cadre théorique. Nous y introdui-

sons les concepts centraux de la TSD et de la TAD, en particulier les notions de situations fondamentales et de praxéologie, ainsi que les deux niveaux praxéologiques mobilisés dans notre MER pour la notion de limite.

Le deuxième chapitre propose un ancrage historique de la notion de limite, depuis l'Antiquité grecque jusqu'à l'analyse standard. Cette étude permet de mettre en lumière les différentes étapes d'émergence et de construction du concept et d'en dégager les éléments essentiels sur lesquels s'appuie notre MER.

Le troisième chapitre est dédié à la présentation du modèle épistémologique de référence de la notion de limite. Celui-ci est tiré de l'article "Quelques considérations relatives à la notion de modèle épistémologique de référence (MER) pour le calculus et l'analyse" (Job et Balhan, 2024).

Le quatrième chapitre analyse des ressources d'enseignement, notamment des manuels scolaires issus de différentes périodes ainsi que des notes de cours. Cette analyse met en évidence la place importante accordée aux tableaux de valeurs dans l'introduction et le traitement de la notion de limite, et précise le contexte dans lequel s'inscrit l'expérimentation.

Enfin, le cinquième chapitre présente l'expérimentation que nous avons menée en milieu scolaire dans le but d'apporter des éléments de réponse à la question : "Les élèves sont-ils spontanément capables d'identifier, à partir de tableaux de valeurs, des éléments relevant de la notion de limite d'une fonction, ou bien cette identification dépend-elle fortement de l'intervention de l'enseignant et de caractéristiques spécifiques des situations proposées?"

Ce travail vise ainsi à questionner le savoir "limite" à travers des analyses épistémologiques et didactiques, et à interroger la pertinence de certains choix pédagogiques répandus dans l'enseignement secondaire.

Chapitre 1

Cadre théorique

1.1 Introduction

Ce premier chapitre a pour objectif de présenter le cadre théorique dans lequel s’inscrit ce travail. Nous commençons par mettre en évidence la singularité de la didactique des mathématiques, qui se distingue des autres sciences de l’éducation par la place centrale qu’elle accorde aux savoirs mathématiques eux-mêmes. Cette spécificité conduit à interroger ces savoirs afin de mieux comprendre les phénomènes d’enseignement et d’apprentissage.

Une telle posture nous amène dès lors à introduire la notion de modèle épistémologique de référence (MER), qui constitue un outil central pour analyser les pratiques d’enseignement et d’apprentissage du point de vue des caractéristiques épistémologiques du savoir considéré. Nous présentons ensuite les deux cadres théoriques sur lesquels s’appuie le MER retenu dans ce mémoire, à savoir la Théorie des Situations Didactiques (TSD) et la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD), en insistant sur les concepts clés de chacune de ces approches et sur leur complémentarité dans la construction de notre MER.

Dans le cadre de la TSD, nous nous intéressons plus particulièrement à la notion de situation fondamentale, entendue comme un ensemble de problèmes auxquels un savoir apporte une réponse “optimale”. Du côté de la TAD, nous mobilisons la notion de praxéologie, qui permet de décrire l’activité mathématique à travers l’articulation entre types de tâches, techniques, technologies et théories. Le croisement de ces deux cadres nous conduit à introduire la notion de praxéologie fondamentale, qui est le cœur de notre MER. Nous distinguerons en particulier deux types de praxéologies fondamentales : une praxéologie de type “modélisation” et une praxéologie de type “déduction”.

Enfin, dans la continuité de ce MER, nous mobiliserons également les moments didactiques proposés par Chevallard afin de disposer d’un cadre d’analyse complémentaire pour l’étude des manuels scolaires et des notes de cours réalisée au chapitre 4.

1.2 La centralité du savoir en didactique : une double rupture épistémologique

En didactique des mathématiques, l'analyse du savoir mathématique à enseigner occupe une place centrale. Son importance capitale est d'emblée mise à l'avant-plan par les pionniers de la “Didactique des Mathématiques” tels que Guy Brousseau¹ pour définir l'objet de cette discipline scientifique :

« We label as “Didactique of Mathematics” the science of the specific conditions of (imposed) diffusion of useful mathematical knowledge to members and institutions of humanity. In other terms, it is the study of situations where the transmission of mathematical understanding and knowledge and the study of their effects on the protagonists and their products manifest themselves. » (Brousseau, 1994, p.3)

Le postulat de base de la didactique des mathématiques, formulé par Marianna Bosch et Yves Chevallard² (1999) exprime cette nécessité de questionner le savoir mathématique :

« [La] singularité originnaire [de la didactique] consiste à prendre comme objet premier à étudier (et donc à questionner, à modéliser et à problématiser selon les règles de l'activité scientifique), non pas le sujet apprenant ou le sujet enseignant, mais le savoir mathématique qu'ils sont censés étudier ensemble, ainsi que l'activité mathématique que leur projet commun d'étude les portera à réaliser. Pour expliquer les faits d'enseignement auxquels elle se voit confrontée, la didactique postule que le “mystère” est dans les mathématiques, et non pas dans les sujets qui ont à apprendre et à enseigner les mathématiques. » (Bosch et Chevallard, 1999, p.79)

On voit ainsi que la didactique, définie comme une science étudiant la transmission des connaissances mathématiques et leur impact sur les individus et les institutions, se distingue des autres sciences de l'éducation par sa focalisation sur l'analyse et le requestionnement des savoirs mathématiques eux-mêmes. La didactique des mathématiques ne se limite donc pas à analyser la manière dont les élèves apprennent ou la manière dont les enseignants enseignent, elle cherche d'abord à comprendre la nature du savoir mathématique étudié et les conditions de son étude car elle fait l'hypothèse que la spécificité des contenus joue un rôle déterminant dans les phénomènes d'enseignement et d'apprentissage (Bosch et Chevallard, 1999).

Cette posture des didacticiens entraîne ce que plusieurs auteurs décrivent comme une double rupture épistémologique. D'une part, la didactique se rapproche de l'épistémologie

1. Guy Brousseau (1933–2024), l'un des fondateurs de la didactique des mathématiques à travers la Théorie des Situations Didactiques.

2. Yves Chevallard (1946–2026), l'un des fondateurs de la didactique des mathématiques à travers la Théorie Anthropologique du Didactique.

des mathématiques en considérant les savoirs mathématiques comme des objets d'étude, des objets à questionner et à modéliser, comme un objet d'étude scientifique à part entière. Cette orientation constitue une première rupture importante avec d'autres approches des sciences de l'éducation, qui portent généralement leur attention sur les relations entre enseignants et élèves, entre les élèves eux-mêmes ou sur les conditions d'appropriation des connaissances sans tenir compte de la spécificité des savoirs étudiés. Cette première rupture correspond à l'abandon du paradigme où l'on étudiait surtout les capacités cognitives des élèves, leurs conceptions, leurs préconceptions et où le savoir mathématique était considéré comme intouchable, non problématique ou encore inquestionnable (Balhan, 2026 ; Bosch et Chevallard, 1999 ; Job et Balhan, 2024).

D'autre part, la didactique des mathématiques se rapproche des autres sciences de l'éducation, car elle ne vise pas seulement l'étude des savoirs mathématiques. En faisant l'hypothèse que la spécificité des contenus joue un rôle déterminant dans les phénomènes d'enseignement et d'apprentissage, la didactique s'intéresse à l'étude des conditions de leur enseignement et surtout, dans un cadre plus large, de leur diffusion dans l'ensemble des institutions de la société. Cette seconde rupture, par rapport aux sciences mathématiques cette fois, consiste à construire une véritable science des phénomènes didactiques, avec des modèles explicites, une mise à l'épreuve empirique et une forme d'épistémologie expérimentale, telle que le souligne Chevallard (1999) :

« La volonté d'élaborer une science de ces phénomènes [didactiques] constitue alors la seconde rupture, qui conduit à expliciter les modèles utilisés pour les soumettre à l'épreuve des faits, c'est-à-dire aux lois d'une véritable "épistémologie expérimentale". » (Bosch et Chevallard, 1999, p.80)

Autrement dit, la didactique ne se contente pas de commentaires pédagogiques : elle est une discipline scientifique qui modélise les phénomènes d'enseignement (Balhan, 2026 ; Bosch et Chevallard, 1999).

1.3 Le questionnement du savoir : fondement du MER

La didactique met ainsi en évidence la nécessité de questionner le savoir mathématique à enseigner. Toute analyse didactique débute donc par une enquête épistémologique dont l'étymologie renvoie au grec ancien *epistêmê*, "connaissance vraie, science" et *logos*, "discours". Le dictionnaire en ligne du Centre National de Ressources Textuelles et Lexicales³ (CNRTL) définit l'épistémologie comme une "*Partie de la philosophie qui a pour objet l'étude critique des postulats, conclusions et méthodes d'une science particulière, considérée du point de vue de son évolution, afin d'en déterminer l'origine logique, la valeur et la portée scientifique et philosophique*".

3. Consulté le 19 mars 2026 sur <https://www.cnrtl.fr/definition/%C3%A9pist%C3%A9mologie>

Le lien entre didactique et épistémologie apparaît dès lors naturel. La didactique des mathématiques considère en effet le savoir mathématique non comme un ensemble figé de connaissances à transmettre, mais comme une construction scientifique et culturelle dont il convient d'interroger la genèse, les fonctions et les modes d'élaboration. L'épistémologie fournit précisément des outils permettant d'analyser la manière dont les concepts mathématiques se sont constitués, les problèmes auxquels ils répondaient, les obstacles rencontrés au cours de leur développement ainsi que les formes de raisonnement qui les sous-tendent. Elle constitue dès lors un appui essentiel pour le didacticien, tant dans l'analyse des contenus à enseigner que dans la conception de situations d'apprentissage favorisant l'appropriation des savoirs mathématiques :

« On voit donc que l'épistémologie à l'œuvre dans le travail didactique doit inventer de nouveaux outils, se défier du seul fonctionnement des mathématiques savantes et investiguer de nouveaux territoires. De plus, le chercheur en didactique ne peut se contenter d'un point de vue interne au système d'enseignement, il analyse le processus complexe qui conduit de la production du savoir dans la communauté mathématique jusqu'à son enseignement, en replaçant l'enjeu de connaissance dans le contexte plus vaste de la constitution des savoirs. » (Dorier, 2015, p.109)

Toutefois, l'épistémologie n'a pas toujours recouvert une signification unique et stable. Au fil du temps, le terme a évolué : à certaines périodes, il désignait l'étude de la connaissance en général, tandis qu'à d'autres, il s'est recentré plus spécifiquement sur l'analyse des savoirs scientifiques. Cette évolution s'inscrit dans la diversité des approches philosophiques, chaque courant proposant sa propre conception de ce que doit être l'épistémologie (Dorier, 2015).

De nombreux penseurs se sont ainsi penchés sur ces questions et ont contribué à façonner les contours, tels que les philosophes des sciences Gaston Bachelard (1884–1962), Karl Popper (1902–1994), Thomas Kuhn (1922–1996), Imre Lakatos (1922–1974) ou encore Paul Feyerabend (1924–1994). Leurs travaux, parfois convergents mais souvent divergents, illustrent la pluralité des manières de concevoir la science et, par conséquent, de questionner les savoirs (Job et Balhan, 2024).

C'est toutefois l'œuvre de Bachelard, dans le domaine de la philosophie des sciences expérimentales, qui va retenir l'attention des didacticiens francophones des sciences et des mathématiques, notamment de Brousseau (1983 ; 1998), qui importe la notion d'obstacles épistémologiques dès les débuts de sa *Théorie des Situations Didactiques*, sur laquelle nous reviendrons dans la section suivante. Dans son ouvrage *La formation de l'esprit scientifique* (1934), Bachelard pose le problème de la connaissance scientifique en termes d'obstacles et met à l'avant-plan ceux qu'il appelle épistémologiques :

« Quand on cherche les conditions psychologiques des progrès de la science, on arrive bientôt à cette conviction que c'est en termes d'obstacles qu'il faut poser le problème de la connaissance scientifique. Et il ne s'agit

pas de considérer des obstacles externes, comme la complexité et la fugacité des phénomènes, ni d'incriminer la faiblesse des sens et de l'esprit humain : c'est dans l'acte même de connaître, intimement, qu'apparaissent, par une sorte de nécessité fonctionnelle, des lenteurs et des troubles. C'est là que nous montrerons des causes de stagnation et même de régression, c'est là que nous décèlerons des causes d'inertie que nous appellerons des obstacles épistémologiques. » (Bachelard, 1934, p.16)

Plus précisément, au sens de Bachelard (1934), un obstacle épistémologique est une connaissance antérieure :

« En fait, on connaît contre une connaissance antérieure, en détruisant des connaissances mal faites, en surmontant ce qui, dans l'esprit même, fait obstacle à la spiritualisation. » (Bachelard, 1934, p.17)

C'est ici selon nous que réside l'intérêt didactique de l'œuvre de Bachelard (1934). Selon lui, l'apprentissage ne s'accomplit pas par accumulation linéaire de connaissances venant combler un vide dans l'esprit de l'élève mais par une sorte de rupture avec des connaissances déjà acquises :

« L'idée de partir de zéro pour fonder et accroître son bien ne peut venir que dans des cultures de simple juxtaposition où un fait connu est immédiatement une richesse. Mais devant le mystère du réel, l'âme ne peut se faire, par décret, ingénue. Il est alors impossible de faire d'un seul coup table rase des connaissances usuelles. Face au réel, ce qu'on croit savoir clairement offusque ce qu'on devrait savoir. Quand il se présente à la culture scientifique, l'esprit n'est jamais jeune. Il est même très vieux, car il a l'âge de ses préjugés. Accéder à la science, c'est, spirituellement rajeunir, c'est accepter une mutation brusque qui doit contredire un passé. » (Bachelard, 1934, p.17)

C'est dans cette perspective que Brousseau importe le concept d'obstacle épistémologique développé par Bachelard en didactique des mathématiques. Un obstacle épistémologique, au sens de Brousseau (1983), ne doit pas être compris comme une simple erreur de l'esprit fatigué (distraction ou autre), un manque de connaissance ou une difficulté passagère, mais comme une véritable forme de connaissance qui possède un domaine de validité dans lequel elle fonctionne efficacement, ce qui explique qu'elle soit pertinente dans certains contextes :

« L'obstacle est constitué comme une connaissance, avec des objets, des relations, des méthodes d'appréhension, des prévisions, avec des évidences, des conséquences oubliées, des ramifications imprévues... Il va résister au rejet, il tentera comme il se doit, de s'adapter localement, de se modifier aux moindres frais, de s'optimiser sur un champ réduit, suivant un processus d'accommodation bien connu. » (Brousseau, 1983, p.175)

Ainsi, les obstacles épistémologiques ne sont pas de simples erreurs accidentelles, mais des constructions robustes, souvent structurées en réseaux, qui jouent un rôle actif dans l'élaboration des connaissances. De ce point de vue, ils apparaissent comme des éléments constitutifs du savoir lui-même :

« Les obstacles d'origine proprement épistémologique sont ceux auxquels on ne peut, ni ne doit échapper, du fait même de leur rôle constitutif dans la connaissance visée. On peut les retrouver dans l'histoire des concepts eux-mêmes. Cela ne veut pas dire qu'on doit amplifier leur effet ni qu'on doit reproduire en milieu scolaire les conditions historiques où on les a vaincus. » (Brousseau, 1998, p.125)

Il faut alors reconnaître le rôle structurant de ces obstacles, afin de mieux comprendre les processus d'apprentissage et les transformations nécessaires du savoir. Dans cette perspective, l'erreur prend un statut particulier. Elle ne relève pas du hasard, mais constitue la manifestation d'une conception sous-jacente. Les erreurs observées sont alors reproductibles et persistantes, car

« ces erreurs, chez un même sujet, sont liées entre elles par une source commune : une manière de connaître, une conception caractéristique, cohérente sinon correcte, une "connaissance" ancienne et qui a réussi dans tout un domaine d'actions. » (Brousseau, 1998, p.121)

Dès lors, l'erreur devient un indicateur pour le didacticien, révélant l'existence d'un obstacle épistémologique plutôt qu'un simple dysfonctionnement ponctuel.

Ce changement de regard conduit à considérer que l'apprentissage ne peut être réduit à une accumulation progressive de connaissances, mais qu'il implique le dépassement de ces obstacles. Les difficultés rencontrées par les élèves doivent ainsi être interprétées en termes de franchissement d'obstacles, certains d'entre eux étant constitutifs même des savoirs visés. En ce sens, ces obstacles ne peuvent être ni évités ni ignorés : ils doivent être pris en compte et travaillés, sous peine de réapparaître ultérieurement sous forme de conceptions erronées ou de difficultés persistantes.

Par ailleurs, ces obstacles ne sont pas propres aux élèves ; ils peuvent également intervenir dans l'activité de l'enseignant et participent plus largement à la construction du sens des connaissances. Leur identification constitue cependant une tâche complexe pour le didacticien, car tous les obstacles ne découlent pas de la même source et leur analyse nécessite des études fines, au cas par cas, afin de déterminer ceux qui sont véritablement constitutifs des savoirs enseignés.

Enfin, l'existence même des obstacles épistémologiques rappelle que le développement des connaissances, tant du point de vue historique que du point de vue de l'apprentissage, ne se fait pas sans résistances ni ruptures. Elle invite ainsi à penser l'enseignement non comme une simple transmission, mais comme un processus de transformation des connaissances antérieures (Balhan, 2026).

Comprendre les erreurs et difficultés des élèves nécessite dès lors de questionner les savoirs mathématiques eux-mêmes, ainsi que les savoirs mathématiques enseignés. Se pose alors la question de la méthode relative à ce questionnement, et c'est précisément ce qui conduit les didacticiens à introduire la notion de modèle épistémologique de référence (MER). Un MER peut être défini comme

« une construction didactique, un modèle, qui exprime sous une forme ou une autre les caractéristiques épistémologiques du savoir qui apparaissent centrales au chercheur pour notamment lui permettre de contrôler le sens et la cohérence des pratiques où interviennent le savoir. » (Job et Balhan, 2024, p.145)

Dans ce cadre, la fonction générique d'un MER est de permettre l'exercice d'une vigilance épistémologique (Chevallard et Joshua, 1991). Exercer une telle vigilance consiste à porter un jugement sur les pratiques faisant intervenir un savoir à l'aide de ce modèle. Il s'agit plus précisément d'interroger dans quelle mesure ces pratiques, qu'elles concernent les élèves, les enseignants, les manuels, les programmes ou encore les chercheurs, sont en adéquation avec les caractéristiques épistémologiques du savoir mises en évidence par le MER. Autrement dit, il s'agit d'évaluer leur légitimité du point de vue du cadre épistémologique adopté. Cet exercice, loin d'être trivial, permet de rendre intelligibles des pratiques qui autrement pourraient apparaître incohérentes et d'éviter ainsi de transformer les mathématiques en savoirs vidés de leurs substances. Il constitue ainsi un outil central pour analyser les écarts entre les pratiques effectives et les exigences épistémologiques du savoir, et pour mettre en évidence d'éventuels obstacles ou malentendus dans les processus d'enseignement et d'apprentissage (Job et Balhan, 2024).

Rappelons qu'il n'y a pas qu'une manière de questionner le savoir et qu'un MER d'un savoir n'est donc pas unique. Nous avons choisi les cadres de la *Théorie des Situations Didactiques (TSD)* et de la *Théorie Anthropologique du Didactique (TAD)* pour présenter notre MER, car elles sont parmi les approches les plus influentes en didactique des mathématiques et qu'elles ont toutes deux contribué de manière significative à la construction de MER pour différents savoirs mathématiques.

1.4 Un premier ancrage de notre MER à la Théorie des Situations Didactiques (TSD)

Au cœur de sa Théorie des Situations Didactiques (TSD), Brousseau (1998) caractérise les connaissances mathématiques par un instrument-clé : le concept de *situation fondamentale*, à partir duquel un MER doit être construit au sein de cette théorie. Une situation fondamentale d'un savoir mathématique est, au sens strict de la TSD, un ensemble de problèmes auxquels le savoir apporte une réponse "optimale". Le qualificatif "optimal" renvoie ici à l'unique réponse possible à la question posée, ou si ce n'est pas le cas, à la réponse la plus performante mathématiquement.

En TSD, le terme "problème" n'est donc pas utilisé de manière générique, renvoyant au sens commun du terme, mais il revêt un sens plus spécifique comme le précisent Job et Balhan (2024) :

« [...] ne sont considérés comme de véritables problèmes que ceux qui ne peuvent faire l'économie du savoir visé pour être résolus. Un problème n'est donc pas un problème en soi mais en lien avec un savoir et forment un couple. La fonction des problèmes est donc en TSD de caractériser un savoir par le fait qu'il n'est pas possible de s'en dispenser pour les résoudre. Ce caractère d'indispensabilité constitue un premier sens du qualificatif "optimal". De manière imagée, les problèmes jouent le rôle d'"équations" et le savoir est la solution de ce système d'"équations". » (Job et Balhan, 2024, p.147)

Pour illustrer ce caractère fondamental des situations didactiques, nous prendrons deux exemples issus des travaux de recherche de notre laboratoire⁴ de didactique.

1.4.1 Exemple d'une situation didactique fondamentale

Considérons un premier problème dit du "vase conique", tiré de l'ouvrage de Schneider, Balhan, Gerard et Henrothay (2016, p.22-26), qui illustre une situation permettant d'introduire le concept de dérivée, mais qui peut aussi servir à introduire le concept de limite dans le même temps.

L'enjeu de cette situation didactique est d'engager les élèves dans la construction de la détermination de la mesure d'une grandeur instantanée à partir de leur connaissance antérieure de taux de variation moyen, malgré les doutes qu'ils peuvent manifester *a priori* sur l'existence d'une telle grandeur.

4. Le LADIMATH est un laboratoire de recherche en didactique des mathématiques, rattaché au DIDACTIfen, une unité interfacultaire de l'Université de Liège réunissant des recherches portant sur la didactique ainsi que sur la formation des enseignants.

Une pompe alimente un vase conique. Elle est réglée de telle manière que le niveau de l'eau y monte régulièrement de 1cm/min. L'angle au sommet du cône vaut 90° . Jusqu'à quand le débit de la pompe sera-t-il inférieur à $100 \text{ cm}^3/\text{min}$?

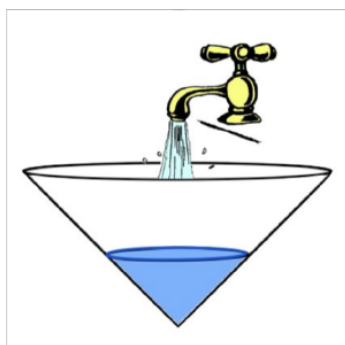


Figure 1.1 – Extrait de *Didactique spéciale en mathématiques* (Balhan, 2026, p.51).

Une première solution à ce problème consiste en un calcul de taux de variation instantané du volume d'eau déversé par la pompe. Il s'agit donc, dans un premier temps, de rechercher la fonction qui détermine le volume d'eau dans le vase conique à chaque instant.

On note $V(t)$ le volume d'eau dans le vase à l'instant t , $h(t)$ la hauteur de l'eau à l'instant t et $r(t)$ le rayon de la surface supérieure de l'eau à l'instant t . Le volume d'un cône de rayon r et de hauteur h est donnée par la formule $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Or, dans notre cas, l'angle au sommet du cône vaut 90° , ce qui implique que $r(t) = h(t)$. On peut alors réécrire la formule du volume de la manière suivante : $V(h) = \frac{1}{3}\pi h^3$. Cependant, pour répondre à la question posée, il faut déterminer l'expression du volume en fonction de t . Comme le niveau de l'eau monte régulièrement de 1cm/min, on peut écrire que $h = t$ et on trouve que $V(t) = \frac{1}{3}\pi t^3$. Dans un second temps, pour déterminer pendant combien de temps le débit est inférieur à $100 \text{ cm}^3/\text{min}$, il suffit de déterminer l'instant t pour lequel le débit de la pompe est égal à $100 \text{ cm}^3/\text{min}$ puisque que le vase est de plus en plus large et l'eau monte de manière régulière. Par conséquent, le débit de la pompe est variable et on va considérer la variation ΔV de volume versé sur des intervalles de temps $[t, t + \Delta t]$, c'est-à-dire $V(t + \Delta t) - V(t)$.

On calcule alors le débit moyen de la pompe sur cet intervalle de temps :

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta V}{\Delta t} &= \frac{V(t + \Delta t) - V(t)}{\Delta t} \\
 &= \frac{\frac{1}{3}\pi(t + \Delta t)^3 - \frac{1}{3}\pi t^3}{\Delta t} \\
 &= \frac{\pi(t + \Delta t)^3 - t^3}{3\Delta t} \\
 &= \frac{\pi t^3 + 3t^2\Delta t + 3t(\Delta t)^2 + (\Delta t)^3 - t^3}{3\Delta t} \\
 &= \frac{\pi \Delta t(3t^2 + 3t(\Delta t) + (\Delta t)^2)}{3\Delta t} \\
 &= \pi t^2 + \pi t\Delta t + \frac{\pi}{3}(\Delta t)^2
 \end{aligned}$$

Le débit instantané de la pompe à l'instant t est alors obtenu en annulant l'intervalle de temps Δt dans l'expression de ce débit moyen. Par conséquent, le débit instantané de la pompe est inférieur à $100 \text{ cm}^3/\text{min}$ tant que $\pi t^2 < 100$, c'est-à-dire, en supposant qu'on commence à remplir le vase en $t = 0$, on trouve que le débit de la pompe est inférieur à $100 \text{ cm}^3/\text{min}$ tant que $t < \frac{10}{\sqrt{\pi}}$.

Cette première solution touche précisément à l'enjeu didactique de la situation : le passage de la détermination de la mesure d'une grandeur moyenne à une grandeur instantanée, et *in fine* à la fonction dérivée.

Toutefois, il peut arriver que des élèves suggèrent une autre résolution plus "économique", basée sur une intuition physique. En considérant le débit constant sur de "courts" intervalles de temps Δt fixés, certains élèves expriment l'idée que le débit ne varie qu'en fonction de la surface à la base des cylindres d'eau sur lesquels ils ont supposé le débit constant :

« [...] le débit sera supérieur à $100 \text{ cm}^3/\text{min}$ lorsque l'aire de la base [du cône d'eau] dépassera 100 cm^2 »



il faut trouver la hauteur de sorte que la base ait une aire de 100 cm^2 .

$$\pi r^2 = 100 \text{ cm}^2 \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{100}{\pi}} \text{ » (Balhan, 2017, p.320)}$$

Cette situation n'a donc pas de caractère fondamental car il est possible de répondre à la question sans avoir recours aux savoirs visés : limite et dérivée.

Un second exemple de situation fondamentale pour la notion de dérivée et/ou de limite tirée du même ouvrage de Schneider, Balhan, Gerard et Henrothay (2016, p.10-14) est le suivant. L'enjeu didactique est le même que dans la première situation.

Considérons deux mobiles P_1 et P_2 .

Phase 1 : Les représentations graphiques suivantes sont celles des lois de position des mobiles P_1 et P_2 . À quels instants les deux mobiles possèdent-ils la même vitesse ?

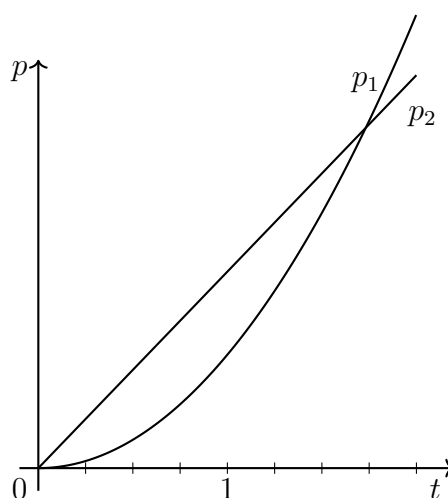


Figure 1.2 – Représentations graphiques des lois de position des mobiles P_1 et P_2 .

Phase 2 : Considérons que les expressions analytiques de ces deux lois de position sont : $p_1(t) = t^2$ et $p_2(t) = \sqrt{3}t$. À quels instants les deux mobiles possèdent-ils la même vitesse ?

Phase 3 : Considérons maintenant des lois de position différentes : $p_1(t) = t^3$ et $p_2(t) = \frac{3}{4}t$. Peut-on encore déterminer l'instant auquel les deux mobiles ont la même vitesse ?

La première phase de cette situation, qui demande une réflexion sur base d'une représentation graphique et de son interprétation cinématique, permet de faire émerger différentes idées chez l'élève sans être confronté à d'éventuelles difficultés algébriques, dans un premier temps.

Lors de la seconde phase, l'élève peut alors s'appuyer sur les idées qui ont émergé lors de la première phase et sur les expressions analytiques des fonctions pour déterminer le temps t exact recherché. Trois stratégies émergent des expérimentations menées dans les classes :

1. Déterminer l'abscisse du point de tangence à la courbe p_1 parallèle à la droite p_2 :

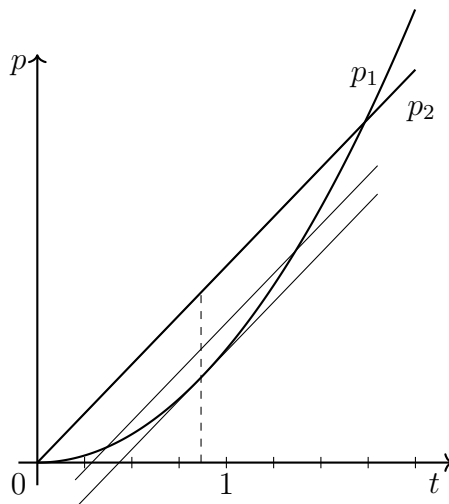


Figure 1.3 – Représentation de la première stratégie.

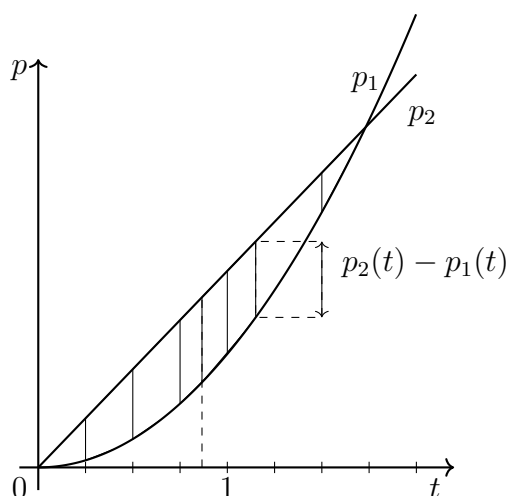
Deux raisonnements sont possibles. Le premier consiste à considérer parmi les parallèles à la courbe $p_2(t)$, c'est-à-dire les droites de pente $\sqrt{3}$, celles qui ne touchent la courbe $p_1(t)$ qu'en un seul point. Le second raisonnement consiste à effectuer le déplacement de la tangente le long de la courbe $p_1(t)$ jusqu'à trouver la position où elle est parallèle à la droite $p_2(t)$. Tous deux conduisent à la détermination de l'expression analytique de la droite cherchée :

$$p(t) = \sqrt{3}t + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

et il reste à déterminer l'unique solution de l'équation

$$t^2 = \sqrt{3}t + c \Leftrightarrow t^2 - \sqrt{3}t - c = 0$$

pour trouver l'instant où les deux mobiles ont la même vitesse, à savoir $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Celui-ci est déterminé aisément après avoir imposé que le réalisant soit nul.

2. Déterminer l'écart maximal entre les deux mobiles :**Figure 1.4** – Représentation de la deuxième stratégie.

Il s'agit de chercher l'écart maximal entre les positions des deux mobiles. En effet, en $t = 0$, les deux mobiles sont au même endroit. Ensuite, l'écart entre les deux croît, ce qui signifie que la vitesse de P_2 est supérieure à celle de P_1 , puis on observe l'inverse : l'écart décroît, ce qui signifie que la vitesse de P_1 est supérieure à celle de P_2 . En cherchant le moment où l'écart est maximal, on trouve alors le moment où les deux mobiles ont la même vitesse. Cela revient à chercher le maximum de la fonction du second degré $f(t) = \sqrt{3}t - t^2$. Il s'agit d'une fonction du second degré dont la représentation graphique est une parabole concave, dont l'axe de symétrie détermine l'abscisse de son maximum : $t = \frac{-\sqrt{3}}{-2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ce qui correspond à l'instant où les deux mobiles ont la même vitesse.

3. Par comparaison des contremarches d’“escaliers” :

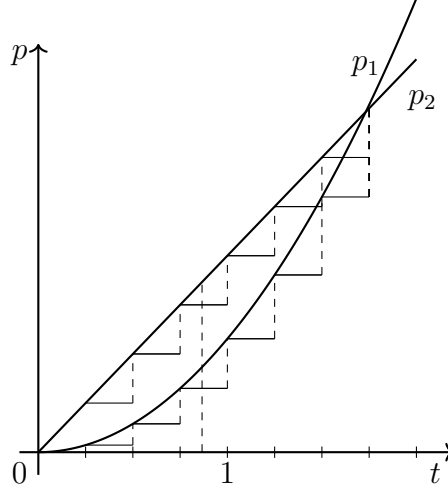


Figure 1.5 – Représentation de la troisième stratégie.

Cette stratégie consiste à observer le déplacement des deux mobiles sur des intervalles de temps identiques “de plus en plus petits”. L’instant cherché correspond au moment où les hauteurs des contremarches sont les mêmes pour un même intervalle de temps. Il reste ensuite à restreindre cet intervalle de temps pour trouver une meilleure approximation de l’instant où les deux mobiles ont la même vitesse.

Notons Δp_1 et Δp_2 les hauteurs des contremarches entre les instants t et $t + \Delta t$ pour les mobiles P_1 et P_2 respectivement. Cherchons le moment où ces hauteurs sont les mêmes :

$$\begin{aligned}
 \Delta p_1 &= \Delta p_2 \\
 \Leftrightarrow p_1(t + \Delta t) - p_1(t) &= p_2(t + \Delta t) - p_2(t) \\
 \Leftrightarrow (t + \Delta t)^2 - t^2 &= \sqrt{3}(t + \Delta t) - \sqrt{3}t \\
 \Leftrightarrow t^2 + 2t\Delta t + (\Delta t)^2 - t^2 &= \sqrt{3}t + \sqrt{3}\Delta t - \sqrt{3}t \\
 \Leftrightarrow 2t\Delta t + (\Delta t)^2 &= \sqrt{3}\Delta t \\
 \Leftrightarrow 2t + (\Delta t) &= \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

L’instant auquel les deux mobiles ont la même vitesse est obtenu en annulant l’intervalle de temps Δt dans cette dernière égalité :

$$2t = \sqrt{3} \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

De manière générale, la stratégie la plus utilisée par les élèves est la première. Cependant, la seule stratégie menant à l'émergence du concept de limite est la troisième.

Dans cette dernière situation, le caractère fondamental se situe au niveau de la troisième phase dans laquelle on remplace la fonction du second degré par une fonction du troisième degré. Dans cette phase, les deux premières stratégies évoquées plus haut ne permettent plus d'obtenir une réponse à la question posée. En effet, dans la deuxième phase, la stratégie des "droites parallèles" nécessite d'imposer un réalisant nul, ce qui n'est plus mobilisable pour résoudre une équation du troisième degré. Quant à la stratégie de "l'écart maximum", elle demande de chercher le maximum d'une fonction du troisième degré, ce qui est hors de portée des élèves à ce stade. Dès lors, seule la troisième stratégie, qui conduit à un calcul de taux de variation instantané, permet d'obtenir la réponse à la question posée. Le choix d'une expression du troisième degré conduit donc au caractère fondamental de la situation, le nouveau calcul construit devenant l'unique réponse à la question posée.

Toutefois, la deuxième phase reste nécessaire pour dissiper les doutes que peuvent formuler les élèves quant au fait que ce nouveau calcul apporterait la réponse à la question de la vitesse instantanée, car on divise les deux membres de l'égalité par Δt que l'on annule ensuite sans compensation dans l'autre membre. La deuxième phase met à l'épreuve la validité du nouveau calcul. Dans celle-ci, la réponse obtenue avec la troisième stratégie coïncide avec la réponse $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ obtenue avec les deux autres stratégies, déjà validées dans le cursus mathématique antérieur des élèves, tels que la résolution d'équations du second degré et la recherche du sommet d'une parabole. Nous verrons au chapitre 2 que cet argument de validation est à l'œuvre dans la validation par Fermat de sa méthode d'adégalité (premier calcul infinitésimal de l'histoire).

Ces deux situations ont été testées dans des classes de secondaire à maintes reprises, nous renvoyons le lecteur intéressé aux références suivantes (Balhan, 2017; Gantois et Schneider, 2012; Schneider, 2011b) pour consulter les données empiriques récoltées dans notre laboratoire de didactique.

Au vu de la spécificité attribuée au terme "problème" en TSD, il est important de souligner qu'une situation fondamentale ne se réduit pas à une situation-problème, mais qu'il s'agit bien d'une modélisation du savoir par un ensemble de problèmes auquel ce savoir apporte une réponse optimale (Job et Balhan, 2024). Ici, le nouveau calcul de dérivée est la réponse optimale à un ensemble de problèmes relatifs à la détermination d'une grandeur instantanée. Cependant, cette modélisation peut servir de base à l'articulation d'un projet d'enseignement par les didacticiens, comme l'ont fait Schneider, Balhan, Gerard et Henrothay (2016) avec l'exemple ci-dessus.

1.4.2 Existence d'une situation fondamentale et situations fondamentales au sens large

Certains chercheurs, à l'instar de Bosch et Chevallard (1999) font l'hypothèse que pour chaque connaissance mathématique, il existe une situation fondamentale car c'est

« la définition même de la connaissance mathématique que nous propose cette théorie [(la TSD)]. On décrit une connaissance en termes de situation ; une connaissance est une situation. » (Bosch et Chevallard, 1999, p.81)

Toutefois, la question de l'existence même d'une situation fondamentale pour chaque savoir mathématique est controversée dans la communauté des chercheurs. Brousseau (1986), dont s'inspirent Bosch et Chevallard (1999), postule qu'il existe, pour chaque savoir, au moins une situation fondamentale qui permettrait de modéliser ce savoir en préservant son sens. Ce postulat n'est cependant ni démontré ni unanimement accepté. Plusieurs chercheurs expriment des doutes à ce sujet, considérant l'existence d'une situation fondamentale comme une hypothèse forte et non comme une évidence. Les doutes viennent notamment du fait que certains savoirs mathématiques disposent d'un caractère unificateur et généralisateur, qui rend difficile la dévolution⁵ et donc l'identification d'une unique situation fondamentale pour ces savoirs (Job et Schneider, 2010 ; Schneider, 2011a).

Dans ce travail, nous rejoignons les positions de Bosch, Chevallard (1999), Schneider et Job (2010), qui se situe de manière nuancée, mais plutôt favorable à ce postulat. Pour ces derniers, la situation fondamentale doit être comprise comme une modélisation des savoirs mathématiques :

« [...], on est parfois tenté de considérer que, dans la théorie des situations, la notion de situation fondamentale sert, avant tout, à décrire et à fabriquer des situations d'enseignement, voire d'enseignement scolaire dans la classe. On oublie alors que cette notion constitue – aussi et surtout – l'instrument clé que propose cette théorie pour caractériser les connaissances mathématiques, [...] » (Bosch et Chevallard, 1999, p.80-81)

Ces chercheurs préfèrent ainsi parler de caractère fondamental d'une question, d'un problème ou d'une tâche plutôt que de situation fondamentale en tant que réalisation unique. Schneider (2011a) accepte l'idée de l'existence d'une situation fondamentale pour tout savoir mathématique, en s'appuyant sur une épistémologie socio-constructiviste. Selon cette perspective, les savoirs sont toujours des réponses à des projets humains, et il

5. La dévolution est le fait que l'élève accepte le problème comme étant le sien, s'engage activement dans la tâche et n'attend pas que la réponse vienne de l'enseignant. Il est donc attendu de ce dernier qu'il transfère la responsabilité du problème à l'élève. Pour cela, en fonction de la situation, l'enseignant va communiquer ou non certaines informations, évoquer ou non certaines questions, suggérer ou non certaines stratégies, etc.

doit donc être possible de modéliser ces projets sous forme de questions, de problèmes ou de tâches fondamentales qui caractérisent le savoir visé. Toutefois, elle reconnaît que cette existence n'est pas toujours facile à établir et que les "raisons d'être" d'un savoir peuvent fluctuer en fonction des institutions ou entre la construction historique d'un savoir et son usage contemporain. Cela nous conduit à distinguer des situations fondamentales au sens strict du terme, dans lesquelles le savoir est une solution optimale "absolue" à un ensemble de problèmes posés, de situations fondamentales au sens large où ce caractère "optimal" doit être envisagé relativement à l'institution dans laquelle la situation fondamentale prend place, conformément à la relativité institutionnelle mise en évidence par la théorie anthropologique du didactique (TAD) (Schneider, 2011b).

1.5 Un deuxième ancrage de notre MER à la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD)

Le caractère fondamental des situations n'est donc pas figé : il est susceptible de varier en fonction des institutions ou de l'évolution historique du savoir. Comme nous le verrons dans le chapitre 3, la notion de limite permet de doter le *calculus* d'une structure déductive dans le cadre de l'analyse standard, tandis que la notion d'infinitésimal joue un rôle analogue dans le cadre de l'analyse non standard. On ne peut donc pas considérer que le concept de limite constitue une solution "optimale" à la question de la "validation" du calcul infinitésimal au sens absolu du terme, mais seulement en un sens relatif à l'institution dans laquelle elle s'inscrit. Un couple "savoir-problème" peut donc être différent en fonction de l'institution dans laquelle on se place. Bien que cette relativité institutionnelle soit déjà présente dans les travaux de Brousseau, Chevallard va porter cette notion à l'avant-plan dans sa théorie anthropologique du didactique.

Par le terme "anthropologique", Chevallard (1998) spécifie qu'il considère les mathématiques et leur enseignement comme faisant partie intégrante des pratiques humaines. Selon lui, l'activité mathématique doit être comprise dans le cadre plus large des comportements et des institutions humaines. Chevallard précise ainsi ce parti pris épistémologique :

« [Il] conduit qui s'y assujettit à traverser en tous sens – ou même à ignorer – nombre de frontières institutionnelles à l'intérieur desquelles il est pourtant d'usage de se tenir, parce que, ordinairement, on respecte le découpage du monde social que les institutions établies, et la culture courante qui en diffuse les messages à satiété, nous présentent comme allant de soi, quasi naturel, et en fin de compte obligé. » (Chevallard, 1998, p.1)

Ceci renvoie à l'échelle des niveaux de codétermination didactique, que présente notamment Chevallard (2002) :

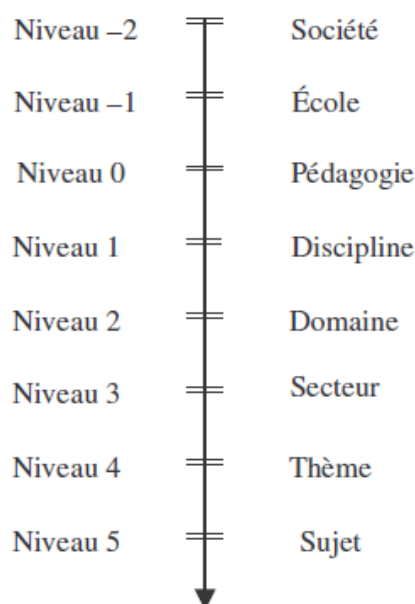


Figure 1.6 – Extrait de *Organiser l'étude. 3. Écologie et régulation* (2002, p.10).

Chevallard (2002) y distingue ainsi plusieurs niveaux emboîtés, allant des plus spécifiques aux plus généraux : le sujet d'étude, le thème, le secteur, le domaine, la discipline, auxquels s'ajoutent des niveaux encore plus larges tels que la pédagogie, l'École et la société, et va même jusqu'à un niveau -3 : la Civilisation ; et selon le principe de codétermination de cette échelle, ces neuf niveaux ne fonctionnent pas indépendamment les uns des autres, mais interagissent mutuellement. Les organisations didactiques, c'est-à-dire les manières dont les savoirs sont effectivement enseignés et étudiés, ne dépendent pas uniquement de choix locaux effectués en classe, mais sont contraintes et orientées par des niveaux plus globaux.

Ainsi, l'étude d'un contenu précis en classe (au niveau du sujet ou du thème) est toujours conditionnée par des choix et des contraintes situés à des niveaux supérieurs, et l'enseignement d'un savoir mathématique ne peut être pleinement compris si l'on ne prend pas en compte le domaine mathématique dans lequel ce savoir s'inscrit, ni même les choix curriculaires ou institutionnels qui déterminent la place de ce domaine dans le programme scolaire.

Cependant, Chevallard (2002) souligne que, dans la pratique, les enseignants tendent à se focaliser sur les niveaux les plus locaux (sujets et thèmes), laissant souvent de côté les niveaux supérieurs qui pourtant donnent sens aux objets étudiés. Cette focalisation conduit le plus souvent à une forme d'atomisation des savoirs, où les contenus sont abordés de manière fragmentée, sans lien explicite avec des problématiques plus larges. Or, ce sont précisément les niveaux supérieurs qui permettent de comprendre la fonction des savoirs, notamment en fournissant des tâches dites "motivantes", c'est-à-dire des situations qui donnent du sens aux procédures et aux concepts étudiés.

Ainsi, l'échelle de codétermination didactique permet de penser l'enseignement non comme une simple mise en œuvre de contenus, mais comme le résultat d'un système complexe d'interactions entre différents niveaux institutionnels et épistémologiques. Elle constitue, de ce point de vue, un outil central pour analyser et comprendre les contraintes qui pèsent sur les savoirs mathématiques à enseigner lorsqu'ils sont apprêtés à des fins d'enseignement en savoirs enseignés. Cette déformation des savoirs à enseigner en savoirs enseignés est épinglée par Chevallard (1991) sous le nom de *transposition didactique*. Son analyse nécessite une prise en compte de ces interactions mutuelles entre les différents échelons de l'échelle de codétermination.

C'est pourquoi l'analyse que nous mènerons dans la suite de ce mémoire ne se limitera pas à l'étude d'une seule institution, qu'il s'agisse de l'institution scolaire ou de celle des mathématiciens, mais consistera à prendre en compte plusieurs niveaux de l'échelle de codétermination didactique, en traversant leurs frontières institutionnelles afin de mieux comprendre les conditions de transformation des savoirs en jeu.

De plus, pour Chevallard (1992) “tout est objet” : les mathématiques, les élèves, les professeurs et les manuels sont considérés comme des objets. En TAD, un

« objet existe dès lors qu'une personne X ou une institution I reconnaît cet objet comme un existant (pour elle). [...] [De plus,] une institution peut être à peu près n'importe quoi. » (Chevallard, 1992, p.86, 88)

Ainsi, “l'analyse standard” et “l'analyse non standard” évoquées ci-dessus forment bien des institutions au sens de la TAD (Job et Balhan, 2024).

Afin de décrire n'importe quelle activité humaine au sein de ces institutions, en particulier l'activité mathématique et l'activité d'enseignement des mathématiques, cette théorie propose un modèle général qu'elle étiquette sous le nom de *praxéologie*, faisant l'objet de la section suivante.

1.5.1 Le regard praxéologique de la TAD

Ces organisations, appelées “praxéologies”, englobent donc les organisations mathématiques mais ne les distinguent pas immédiatement des autres pratiques humaines. Ce sera seulement plus tard que la spécificité des mathématiques devra être reconnue et explorée à travers ce cadre général, où l'étude des mathématiques est influencée par des facteurs génériques partagés avec d'autres disciplines, mais où une spécificité relative émerge à chaque niveau d'analyse (des mathématiques en général, jusqu'à des domaines spécifiques comme l'algèbre ou la géométrie) (Chevallard, 1998).

Le mot “praxéologie” nous vient du grec *praxis*, “action” et *logos*, “discours, étude”, et désigne l'étude des actions humaines en général. Une praxéologie se compose d'un bloc “pratique” et d'un autre recouvrant le “discours” sur cette pratique.

Le bloc “pratique” se compose des éléments suivants :

- ◆ De tâches t et de types de tâches T . En général, une tâche s’exprime par un verbe : *marcher* du B37 au B31, *calculer* la limite de, etc. On note $t \in T$ lorsque t relève d’un type de tâches T . Notons que “calculer” ou “marcher” est considéré comme un genre de tâche et non comme un type de tâche qui se doit d’être plus précis. Durant la scolarité, un genre, comme “calculer”, va s’être enrichi de différents types de tâches, par exemple, “calculer une limite” puis “calculer une dérivée”, etc.
- ◆ De techniques τ . À un type de tâches T , on associe τ qui représente la manière d’accomplir les tâches $t \in T$ et on forme ainsi un bloc pratico-technique noté $[T/\tau]$ représentant ce que l’on appelle couramment *un savoir-faire*. Notons qu’il n’est pas toujours possible d’accomplir les tâches du type T . Dans ce cas, on dit que la technique τ échoue sur $T \setminus P(\tau)$ où $P(\tau)$ est la portée de la technique, c’est-à-dire la partie sur laquelle τ réussit. Remarquons aussi qu’une technique est rarement de nature algorithmique. Par exemple, pour calculer $\lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{2^{-j}}{\sin(2^{-j}y)}$, il n’y a pas de résolution algorithmique, il faut simplement trouver une astuce, qui est ici de multiplier l’expression par $\frac{y}{y}$. De plus, il existe en général plusieurs techniques pour réaliser une même tâche, mais au sein d’une institution I donnée, une seule technique ou un petit nombre de techniques sont généralement reconnues et enseignées. Les sujets de I considéreront comme naturelles les techniques institutionnelles dans I et comme artificiel l’ensemble des techniques alternatives possibles.

Dans le traité de didactique des mathématiques, Schneider (2011b) illustre cette multiplicité des techniques pour une même tâche consistant à tracer le graphique de la fonction homographique définie par

$$f(x) = \frac{3x + 2}{2x - 5}$$

Une première technique consiste tout d’abord à écrire la fonction sous la forme

$$f(x) = \frac{3}{2} + \frac{\frac{19}{4}}{x - \frac{5}{2}}$$

à l’aide de la division euclidienne, puis à tracer la fonction au moyen de transformations successives du plan. Une seconde technique consiste à calculer les différentes caractéristiques de la fonction, telles que les limites en $+\infty$ et $-\infty$, les éventuelles asymptotes, les points d’intersection avec les axes, etc.

Le bloc “discours” sur la pratique se compose quant à lui des éléments suivants :

- ◆ De technologies θ . Une technologie désigne un discours rationnel sur la technique τ ayant pour objectif de justifier cette dernière et de vérifier qu’elle permet bien d’accomplir les tâches du type T . Le caractère “rationnel” varie généralement d’une

institution à l'autre et aussi au sein d'une même institution au fil du temps. De plus, une technologie permet d'expliquer et de rendre claire la technique. Enfin, une technologie a aussi une fonction de production de techniques.

- ♦ D'une théorie Θ . Celle-ci joue le même rôle que celui joué par la technologie vis-à-vis de la technique. La théorie a donc aussi trois fonctions : la justification, l'explication et la production de technologies. On forme ainsi un second bloc $[\theta, \Theta]$, appelé le bloc technologico-théorique, qui représente généralement *un savoir*. Il est courant au sein d'une institution de renvoyer à une autre institution lorsqu'on veut justifier une technologie, en mentionnant par exemple le fait que ça a été vu dans un autre cours : "On a vu en statistique que...".

On notera alors $[T/\tau/\theta/\Theta]$ une organisation praxéologique, c'est-à-dire une praxéologie relative à un type de tâche T .

Donnons un exemple d'un tel quadruplet :

- t : Calculer la limite de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{-x^2 + 3x - 1}{x + 2}$ en $+\infty$, du type de tâche : Calculer la limite d'une fonction rationnelle réelle en $+\infty$.
- τ : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 + 3x - 1}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$.
- θ : Justification de la technique.
La première égalité est justifiée par la proposition 1, la deuxième égalité est une simplification algébrique usuelle et la troisième égalité est justifiée par la proposition 2.

Proposition 1 : Soient P et Q deux polynômes de degrés respectifs n et m supérieurs ou égaux à 1. Alors,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \text{ où } a_n, b_m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Proposition 2 : Soit P un polynôme de degré $n \geq 1$. Alors,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n = a_n \cdot (+\infty) \text{ où } a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

- Θ : Justification de la technologie.
La technologie ci-dessus est justifiée par la théorie des limites, qui établit les règles et les propriétés des limites, ainsi que par d'autres résultats d'analyse, notamment des propriétés topologiques des réels telles que l'axiome d'Archimède.

Notons qu'un autre triplet $[\tau/\theta/\Theta]$ aurait pu être associé à ce même type de tâche T , par exemple, en utilisant la représentation graphique de la fonction et les limites fondamentales des fonctions de référence, bien que cela puisse paraître moins optimal. De plus, pour une

institution donnée, il est aussi possible d'avoir plusieurs tâches ou techniques associées à une même technologie, ou plusieurs technologies associées à une même théorie, etc.

Cette organisation se développe ainsi souvent en une organisation praxéologique locale $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$ où la technologie θ prend une place plus centrale, puis en une organisation praxéologique dite "régionale" $[T_{ij}/\tau_{ij}/\theta_j/\Theta]$, qui met davantage en relief la théorie Θ . En effet, une théorie Θ peut souvent justifier plusieurs technologies θ_j , lesquelles, à leur tour, soutiennent différentes techniques τ_{ij} . Cette progression vers des praxéologies plus complexes accroît la primauté du bloc technologico-théorique et reflète le fait que le bloc pratico-technique peut être considéré comme une conséquence du savoir $[\theta/\Theta]$ (Chevallard, 1998). Ces organisations régionales s'étendent ensuite, deviennent de plus en plus larges, jusqu'à former ce qu'on appellera "le savoir mathématique" (Bosch et Chevallard, 1999, p.87).

Comme le précise Chevallard (1998), les praxéologies vieillissent et de nouvelles font leur apparition au sein des institutions pour améliorer leur fonctionnement. Souvent, au lieu de produire une nouvelle praxéologie, les acteurs d'une institution I vont plutôt en "reproduire" une déjà présente dans une autre institution I' et dans laquelle son utilité a été prouvée. Remarquons qu'une institution I donnée possède une écologie qui lui est propre; en effet, chaque institution a ses propres conditions, contraintes et besoins qui influencent la manière dont elle adopte ou adapte des praxéologies et ces différentes caractéristiques rendent impossible une reproduction identique des praxéologies provenant d'autres institutions. On va donc parler de "transposition" de I' à I plutôt que de simple transfert. Ce processus de transposition améliore en général la praxéologie et augmente le nombre de praxéologies ainsi disponibles. De plus, selon l'institution dans laquelle on se situe, une technique peut être considérée comme une technologie, de même qu'une théorie peut être envisagée comme une tâche, car comme le précise Chevallard (1999),

« La distinction technique/technologie/théorie est fonctionnelle et doit toujours être référée au type de tâches que l'on prend comme point de référence. » (Bosch et Chevallard, 1999, p.86)

Ainsi, en TAD, la place du savoir se précise et sa vision s'élargit :

« La notion de savoir peut maintenant être reliée à ces nouveaux termes : un savoir renvoie à une organisation praxéologique particulière, douée d'une certaine "générativité" lui permettant de fonctionner comme appareil de production de connaissances, c'est-à-dire de nouvelles praxéologies. Cette vision des choses élargit le point de vue usuel qui tend à ne regarder comme un savoir que le couple technologie/théorie de l'organisation complète, lequel permet en effet, généralement, d'engendrer (ou de reconstruire) l'ensemble des techniques de la praxéologie, c'est-à-dire le "savoir-faire" correspondant. On se rappellera cependant que, génétiquement, ce sont fréquemment les besoins de la pratique, c'est-à-dire les besoins de techniques, qui sont à l'origine des praxéologies. » (Bosch et Chevallard, 1999, p.87)

Nous pouvons ainsi relier la notion de situation fondamentale au sens large d'un savoir S et d'une institution I , comme un ensemble de praxéologies pour lesquelles le savoir S est la solution jugée "optimale" par I pour les tâches de ces praxéologies, que l'on appellera alors "praxéologies fondamentales" (Job et Balhan, 2024, p.152).

C'est au sein de ce cadre théorique et sur base de ces praxéologies fondamentales que l'on se situera dans la suite de ce travail, pour construire notre MER qui fait l'objet de la section suivante. Notre MER de la notion de limite sera présenté au chapitre 3 et est élaboré sur base de celui-ci.

1.6 Notre modèle épistémologique de référence (MER) : deux niveaux praxéologiques ordonnés

Dans le cadre de l'ingénierie didactique⁶ en mathématiques, Schneider (2011a) distingue deux formes de praxéologie : la praxéologie de type "modélisation" et celle de type "déduction". Ces deux niveaux décrivent des approches complémentaires de l'activité mathématique, qu'elle traduit par des organisations mathématiques distinctes. Schneider (2011a) précise que ces deux types de praxéologies peuvent se situer dans des institutions savantes différentes.

1.6.1 La praxéologie de type "modélisation"

Ce premier niveau concerne la mise en œuvre de techniques pour résoudre des tâches liées à des objets préconstruits, c'est-à-dire perçus comme déjà établis, non remis en question dans l'institution où ils sont mobilisés :

« l'objet n'est pas construit mais présenté, par une deixis qui est un appel à la complicité dans la reconnaissance ontologique ; l'existence de l'objet apparaît alors comme évidente, non douteuse, plus justement non susceptible de doute ; l'objet est installé, par la monstration qui le désigne dans son existence entêtée, dans un état qui échappe au questionnement, parce que tout questionnement le suppose : il est un point d'appui inattaquable de la réflexion » (Chevallard et Joshua, 1991, p.91)

Ces objets existent à travers ce que nos sens nous livrent ou via des institutions. Dans le premier cas, ils existent car nous pouvons les percevoir, les sentir, les toucher, etc. Dans le second cas, leur existence est considérée comme allant de soi et non questionnée dans la culture établie de l'institution, comme c'est le cas par exemple de $\sqrt{2}$ à l'école secondaire :

« [...], $\sqrt{2}$ est manipulé depuis des générations par les élèves du secondaire. En Belgique francophone, aucun n'est en mesure de prouver son

6. L'ingénierie didactique est une méthodologie de recherche en accord avec les principes de la didactique des mathématiques et sera développée au chapitre 5.

existence au sens des mathématiques déductives en se référant à l'une ou l'autre construction des réels (Boniface, 2002). Malgré cela, quel élève accepterait de mettre en question cette existence, tant sa prégnance est grande dans les pratiques ordinaires des classes, hormis à avoir été poussé à une telle interrogation par le truchement d'une rencontre organisée spécifiquement à cet effet, rencontre basée par exemple sur une situation fondamentale ? » (Job et Balhan, 2024, p.155-156)

À ce stade, la justification des techniques employées repose sur un discours technologique qui ne peut être théorique puisque les objets traités ne sont pas encore des objets faisant partie d'une théorie, le but étant de les constituer comme tels :

« Au terme de telles praxéologies, les préconstruits se constituent en concepts mathématiques par le truchement d'une définition pour se prêter à une théorie déductive [...]. » (Schneider, 2011a, p.191)

Le discours peut alors inclure des éléments de validation dite “pragmatique” : par exemple, la technique est considérée comme valide si elle permet de retrouver un résultat déjà établi et justifié auparavant. Ce type de validation a beaucoup été utilisé durant la période du *calcul* comme nous le verrons au chapitre 3.

1.6.2 La praxéologie de type “déduction”

La seconde praxéologie prend alors appui sur la première afin de formaliser les objets qui y ont été introduits. Elle correspond à une activité mathématique de nature déductive, orientée vers la construction d'une organisation théorique constituée de définitions, d'axiomes et de propositions démontrées selon les règles de la logique mathématique. Dans ce cadre, les objets initialement préconstruits ou mobilisés de manière descriptive dans les praxéologies de premier type sont reformulés en objets définis rigoureusement, dont les propriétés et les usages doivent désormais être contrôlés par le seul raisonnement déductif.

Une telle activité peut notamment consister à définir déductivement de nouveaux objets, à démontrer ou reformuler certaines propositions, à généraliser des résultats ou encore à réorganiser une théorie afin d'en assurer la cohérence et l'efficacité déductive. Les propositions admises sans démonstration prennent alors le statut d'axiomes, tandis que les autres doivent être établies à partir des définitions, axiomes et résultats déjà démontrés, au moyen de règles d'inférence de la logique mathématique.

Le type de tâche est donc “concevoir une architecture déductive” mais la réponse à cette tâche n'est pas nécessairement unique. En effet, comme nous l'avons vu *supra* relativement à la validation du calcul infinitésimal, il peut y avoir plusieurs manières de mettre sous forme déductive un domaine donné.

Ensuite, si on s'intéresse au bloc technologico-théorique, on cherche des technologies et théories qui vont justifier, valider, la technique choisie :

« Quant à la théorie, il s'agit en quelque sorte d'une théorie des théories ou ce que Popper appelle "la logique de la connaissance scientifique" qui soulève des questions épistémologiques concernant la nature des concepts scientifiques, la falsifiabilité des théories, le problème méthodologique de la simplicité, la hiérarchie des disciplines scientifiques, le refus du mélange des genres dans l'établissement de la causalité,... On peut aussi y trouver la théorie des preuves et réfutations de Lakatos⁷. » (Schneider, 2011a, p.192)

1.6.3 Un exemple d'articulation de ces deux niveaux praxéologiques

Nous reprenons ici un exemple de Schneider (1988). Dans sa thèse, elle relate les productions de différents groupes d'élèves et met en évidence certaines difficultés rencontrées par ceux-ci. Parmi celles-ci figurent notamment les doutes émis par certains élèves quant à la possibilité de déterminer l'aire exacte sous une courbe par un calcul de limite sur une suite de sommes d'aires de rectangles, qu'ils formulent en substance ainsi : "Si nombreux soient les rectangles, si fins soient-ils, on aura toujours de l'aire en trop ou trop peu ; sauf à ce que les rectangles se réduisent à des segments mais ils ont alors une aire nulle et on voit mal comment obtenir une aire non nulle en additionnant des zéros". Ce problème, développé sous plusieurs facettes et pour illustrer plusieurs concepts, a ensuite été présenté plusieurs fois dans d'autres travaux du laboratoire, par Schneider elle-même, mais aussi par ses collaborateurs, notamment Balhan (2017), et sur lesquels nous allons nous appuyer pour illustrer les deux types de praxéologies⁸.

Dans un repère orthonormé, étant donné la courbe d'équation $y = x^3$, déterminer l'aire de la surface délimitée par la courbe avec les axes et la droite d'équation $x = 1$.

La tâche correspond donc ici au calcul de l'aire sous la courbe $y = x^3$ entre les bornes $x = 0$ et $x = 1$. Pour accomplir cette tâche, plusieurs techniques sont possibles. Nous faisons le choix de présenter la suivante : découper l'intervalle $[0, 1]$ en n sous-intervalles $[x_k; x_{k+1}] \forall k \in \{0, \dots, n-1\}$ où $x_0 = 0$ et $x_n = 1$, de même longueur, puis construire des rectangles dont la base correspond à la longueur de ces sous-intervalles et dont la hauteur correspond, $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}$,

1. à l'image du point x_k de chaque sous-intervalle par la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3$.

7. Lakatos est un logicien, épistémologue et philosophe des mathématiques. Nous en reparlerons au chapitre 3.

8. Dans la suite de ce travail, nous utiliserons parfois les termes "praxéologies de type I" et "praxéologies de type II" pour désigner respectivement les praxéologies de type "modélisation" et les praxéologies de type "déduction"

2. à l'image du point x_{k+1} de chaque sous-intervalle par la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3$.

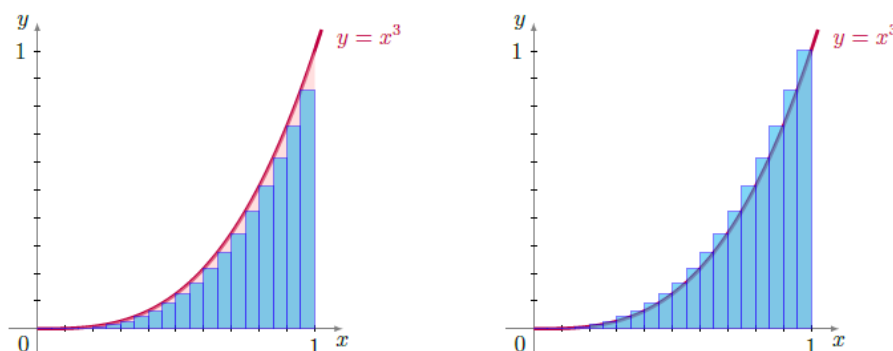


Figure 1.7 – Extrait de *Le théorème fondamental comme pierre de touche de l'enseignement et des apprentissages de l'analyse au secondaire* (Balhan, 2017, p.91).

La somme des aires de ces rectangles nous donne alors des approximations par défaut et par excès de l'aire cherchée, dont on construit les suites suivantes respectivement :

$$\underline{S}(n) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} \text{ et } \overline{S}(n) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2}.$$

En négligeant les termes dépendants de n par un passage à la limite, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \underline{S}(n) = \frac{1}{4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \overline{S}(n)$$

et on peut alors conclure que l'aire recherchée est égale à $\frac{1}{4}$.

La technologie, autrement dit le discours justifiant la technique, peut être formulée de la manière suivante :

Par l'absurde, supposons que l'aire recherchée soit différente de $\frac{1}{4}$. Alors, soit elle est plus petite que $\frac{1}{4}$, soit elle est plus grande que $\frac{1}{4}$. Dans le premier cas, supposons que l'aire soit égale à $\frac{1}{4} - \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$. Alors, il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, on a $\underline{S}(n) > \frac{1}{4} - \varepsilon$. Cela signifie alors que l'approximation par défaut serait plus grande que l'aire recherchée, ce qui est absurde. En raisonnant de manière similaire dans le second cas, on montre que l'aire ne peut être strictement supérieure à $\frac{1}{4}$. Par conséquent, l'aire recherchée ne peut être que $\frac{1}{4}$.

Ce discours technologique présenté ici ne peut être un discours théorique. En effet, à ce stade, l'aire n'est pas encore un objet mathématique formalisé, c'est un préconstruit, un objet qui est perçu comme existant de manière évidente, car perçu visuellement comme délimité par trois segments. La technique développée permet de déterminer la mesure

de cet objet à partir de l'intuition, en le coinçant entre une approximation par excès et une approximation par défaut. Le discours technologique justifie que cette technique apporte bien la réponse à la question posée, en répondant aux doutes formulés par les élèves qui “passent à la limite à vue” sur les rectangles eux-mêmes plutôt que sur les suites de sommes d'aires de rectangles. De plus, il s'agit d'un argument mathématique de rationalité d'un autre ordre que le discours théorique du mathématicien. En effet, chez les mathématiciens, l'aire est définie comme une intégrale et il ne serait dès lors pas nécessaire de se poser la question de son existence. Par contre, on devrait démontrer que toutes les suites d'approximations convergent vers la même limite, ce qui est hors de portée des élèves à ce stade.

Au terme de cette praxéologie de type “modélisation”, une praxéologie de type “déduction” peut prendre le relais pour formaliser l'aire curviligne qui était jusqu'ici un objet préconstruit et lui donner une définition rigoureuse, en s'appuyant sur la technique développée dans la praxéologie de type “modélisation”. Comme exprimé précédemment, il existe plusieurs manières de formaliser un même domaine pour donner prise au raisonnement déductif. Dans notre cas, on peut par exemple choisir de formaliser l'aire sous la courbe comme la limite commune de toutes les sommes de Riemann associées à la fonction sur l'intervalle considéré, lorsque le pas de la subdivision “tend vers” zéro, le pas étant le plus grand écart entre deux éléments consécutifs de la subdivision. Autrement dit, si toutes les sommes de Riemann construites à partir de subdivisions de $[0, 1]$ convergent vers une même valeur, cette valeur est définie comme l'intégrale de la fonction sur cet intervalle.

Le but de cette formalisation est de faire de cette définition un outil de démonstration souple permettant de se prêter à n'importe quelle situation, comme le souligne Balhan (2017) :

« l'interprétation de l'intégrale en termes d'aires doit être repensée afin qu'elle puisse être un outil de démonstration commode à certaines propriétés du concept d'intégrale définie qui font écho à nos intuitions. »
(Balhan, 2017, p.105)

Par exemple, au vu de l'interprétation de l'intégrale en terme d'aire, il paraît évident que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

pour tout c appartenant à $[a, b]$. Pourtant, il est nécessaire de démontrer rigoureusement cette propriété à partir de la définition de l'intégrale, en utilisant les propriétés des limites et des sommes de Riemann. Pour ce faire, on est amené à considérer des subdivisions irrégulières de l'intervalle $[a, b]$. En effet, si l'on considère l'intervalle $[1, 2 + \sqrt{2}]$ et que l'on introduit le point $c = 1 + \sqrt{2}$, on obtient deux sous-intervalles $[1, c]$ et $[c, 2 + \sqrt{2}]$ de longueurs respectives $\sqrt{2}$ et 1, qui ne sont pas commensurables.

Bien que les discours de validation soient différents, les deux types de praxéologies ne sont pas indépendants l'un de l'autre au niveau des tâches et des techniques. Tout d'abord,

les praxéologies de modélisation forment une base pour la formalisation des objets au sein des praxéologies de déduction, ces dernières permettant ensuite de nouvelles modélisations pratiques (les tâches des praxéologies de type 1 devenant des applications des théories qui résultent des praxéologies de type 2), et ainsi de suite. Elles forment ainsi un cycle que l'on détaillera pour la notion de limite au chapitre 3 (Job et Balhan, 2024).

Ce modèle épistémologique de référence qui articule praxéologies “modélisation” et “déduction” est un modèle didactique, construit sur la base d'analyses épistémologiques menées dans notre laboratoire de didactique. C'est à la lumière de ce MER que nous caractérisons par la suite le savoir à enseigner relatif au concept de limite. En outre, ce MER constitue un modèle didactique alternatif pour analyser les pratiques enseignantes et les transpositions didactiques habituellement rencontrées sur le terrain, que nous complétons avec un modèle d'analyse des pratiques enseignantes développées par Chevallard (1998).

1.7 Les moments de l'étude comme cadre d'analyse des pratiques enseignantes

Dans toute organisation didactique visant la construction d'une organisation mathématique, l'étude s'organise autour de types de tâches, de techniques, de technologies et de théories. Apparaissent alors nécessairement certains *types de situations*, que Chevallard (1998) nomme *moments de l'étude* ou *moments didactiques*.

Ce chercheur épingle six moments de l'étude dans un ordre arbitraire car, comme il le précise,

« *les moments didactiques sont d'abord une réalité fonctionnelle de l'étude, avant d'en être une réalité chronologique.* » (Chevallard, 1998, p.20)

- 1) Le premier moment didactique correspond à la première rencontre avec l'organisation O étudiée. Cette rencontre peut prendre plusieurs formes et se produit souvent à travers l'un des types de tâches qui constituent O . Notons que du point de vue de *l'organisateur* de l'étude, seulement certains objets méritent d'être introduits et les autres sont supposés s'introduire naturellement, silencieusement. En revanche, du point de vue de *l'observateur* chacun des objets peut s'avérer être une première rencontre. Il existe deux principales manières de structurer cette première rencontre :

1. Rencontre culturelle-mimétique : L'objet mathématique est d'abord présenté comme un élément culturel préexistant, à travers un récit qui en explique l'usage dans la société. Ensuite, les élèves imitent cette pratique, comme s'ils jouaient le rôle de mathématiciens ou autres professionnels, en manipulant l'objet. Chevallard (1998) épingle de la sorte deux sous-moments :

« *Ce sous-moment “culturel”, où l'objet n'existe encore qu'en effigie, de sorte que l'étudiant n'a avec lui que des rapports fic-*

tifs, est suivi d'un sous-moment "mimétique" où, par la manipulation effective de l'objet, l'étudiant est censé imiter le praticien » (Chevallard, 1998, p.20)

Cette rencontre peut alors conduire à se questionner sur les raisons d'être de l'objet. Comment s'est-il construit ? Pourquoi persiste-t-il dans la culture ? Une telle interrogation met alors en lumière un point d'attention essentiel :

« Mais les "raisons des choses" n'affleurent pas toujours nettement dans la culture. De là que la rencontre culturelle-mimétique puisse se dégrader en une parodie de la pratique, qui occulte les raisons de la pratique. » (Chevallard, 1998, p.20)

2. Rencontre en situation : Ici, l'élève découvre l'objet en résolvant des problèmes concrets, sans références explicites à une pratique sociale préexistante. La rencontre se réalise à travers des situations fondamentales dans lesquelles l'objet naît comme une réponse aux questions de la situation. L'objet prend ainsi forme dans l'expérience même de l'élève, au point que cette rencontre peut conduire à l'émergence d'une définition située de l'objet, distincte des définitions culturelles déjà établies :

« La rencontre en situation conduit ainsi à proposer, de facto et peut-être même de jure, une "définition" de l'objet rencontré qui ne se veut pas simple copie des définitions déposées dans la culture, mais qui, en bien des cas, apparaît a priori comme un véritable ajout à la culture – ajout dont il convient alors de montrer la compatibilité avec les définitions connues, pour autant du moins que cette "définition en situation" ne s'est pas déjà intégrée au patrimoine culturel. » (Chevallard, 1998, p.20)

Comme c'est le cas pour la rencontre culturelle-mimétique, la rencontre en situation peut aussi faire l'objet de dérives :

« En bien des cas, la définition de l'objet par un système de situations fondamentales se trouve subrepticement écartée au profit d'une mise en scène de l'objet dans des "activités qui, en dépit de quelques traits culturels conservés, n'ont qu'une relation assez relâchée avec ses raisons d'être les plus essentielles » (Chevallard, 1998, p.20)

Ces premières rencontres influencent fortement la manière dont l'élève se rapportera à l'objet tout au long de son apprentissage, même si elles ne le déterminent pas complètement :

« On notera enfin que si, à l'évidence, la première rencontre ne détermine pas entièrement le rapport à l'objet – lequel se construit et se remanie tout au long du processus d'étude –, elle joue cependant un rôle important dans l'économie de l'apprentissage, parce que, étant donné l'investissement institutionnel et personnel qu'elle impose (au double plan cognitif et libidinal), elle oriente en général fortement le développement ultérieur des rapports institutionnel et personnel à l'objet rencontré. » (Chevallard, 1998, p.21)

- 2) Le deuxième moment consiste à explorer un type de tâches T_i et à élaborer une technique τ_i correspondante. Contrairement à l'idée d'une activité mathématique héroïque où l'élève résoudrait chaque problème isolément, l'essence des mathématiques repose sur la création de techniques spécifiques pour résoudre des tâches récurrentes. L'élève, guidé par le professeur, développe petit à petit ces techniques à travers la résolution de problèmes spécifiques. Cela illustre une dialectique fondamentale : l'étude des problèmes permet de développer des techniques, et ces techniques rendent ensuite la résolution de problèmes similaires plus routinière.
- 3) Le troisième moment correspond à la constitution de l'environnement technologico-théorique $[\theta, \Theta]$ relatif à τ_i . Ce processus s'imbrique souvent avec les autres moments, car dès la première rencontre avec une tâche, il peut y avoir une référence à un environnement technologico-théorique préexistant. Cependant, dans les stratégies didactiques traditionnelles, ce troisième moment est généralement placé en amont, servant de cadre commun pour l'étude de plusieurs types de problèmes. Ensuite, ces problèmes sont résolus à l'aide des applications successives du bloc technologico-théorique constitué.
- 4) Le quatrième moment de l'étude est celui du travail de la technique qui consiste à l'améliorer afin de la rendre plus efficace et plus fiable. Ce travail permet aussi d'augmenter la maîtrise de la technique.
- 5) Le cinquième moment, celui de l'institutionnalisation, consiste à formaliser l'organisation mathématique construite durant l'étude. Ce processus distingue les éléments qui seront conservés de manière permanente dans cette organisation, et ceux qui, bien qu'utiles lors de la construction, seront écartés. L'institutionnalisation permet donc de séparer le "nécessaire" du "contingent". Cette phase officialise les savoirs validés, coupant ainsi la praxéologie mathématique de son contexte historique, pour l'intégrer dans la culture de l'institution éducative. Cependant, cette officialisation n'achève pas l'histoire des objets mathématiques : ceux-ci continuent d'évoluer à travers leur usage dans de nouvelles situations. Certaines notions, bien que formellement introduites, peuvent tomber en désuétude, mais la règle générale est que les rapports institutionnels se stabilisent et évoluent avec le temps. Finalement, ce moment d'institutionnalisation relance souvent l'étude en révélant des types de problèmes non

encore explorés ou insuffisamment étudiés, enrichissant ainsi continuellement l'organisation mathématique.

- 6) Le sixième moment, celui de l'évaluation, est étroitement lié à l'institutionnalisation, qu'il prolonge en tant que sous-moment. L'évaluation repose sur la comparaison des acquis personnels avec la norme institutionnelle établie lors de l'institutionnalisation. Il s'agit d'un processus de "vérédiction" : un moment de réflexion où l'on fait le point sur ce qui a été appris, et ce, indépendamment des critères ou du juge. Ce processus n'est pas exclusif au contexte scolaire, mais constitue un élément essentiel de toute activité humaine. De plus, l'évaluation ne se limite pas à juger les acquis des élèves, mais permet également d'examiner l'organisation mathématique elle-même. Il s'agit de voir si l'organisation théorique mise en place tient ses promesses, si elle fonctionne correctement et si elle mérite d'être conservée ou ajustée. Ce processus permet de vérifier la solidité et la pertinence de l'organisation mathématique élaborée, en confrontant les connaissances enseignées aux attentes institutionnelles et aux résultats obtenus. L'évaluation devient ainsi un moment critique de réflexion, non seulement sur les performances individuelles, mais aussi sur la validité des structures mathématiques construites.

Dans la suite de ce mémoire, nous nous focalisons essentiellement sur le premier moment de l'étude pouvant se faire, pour rappel, par l'entremise d'une situation fondamentale que nous situons pour notre part au sein de praxéologies "modélisation" et "déduction".

1.8 Conclusion

Au terme de ce premier chapitre, nous disposons désormais des principaux outils théoriques nécessaires à la présentation de notre modèle épistémologique de référence (MER) de la notion de limite au chapitre 3. Ce cadre théorique prend appui sur plusieurs notions emblématiques de la théorie des situations didactiques (TSD) et de la théorie anthropologique du didactique (TAD). Nous avons notamment mis en évidence l'importance de la notion de situation fondamentale et, plus particulièrement, des situations fondamentales au sens large qui, dans l'articulation entre TSD et TAD, conduisent à la notion de praxéologie fondamentale.

Toutefois, certains savoirs mathématiques, parmi lesquels la notion de limite, sont porteurs de plusieurs sens. Cette multiplicité de sens rend difficile l'identification d'une unique situation fondamentale et conduit à envisager un MER composé de plusieurs situations fondamentales. Par ailleurs, la prise en compte de la relativité institutionnelle des savoirs, mise en évidence par la TAD, conduit à considérer que les réponses jugées "optimales" à un ensemble de problèmes ainsi que les organisations mathématiques associées peuvent varier selon les institutions considérées. Dans ce cadre, la distinction entre praxéologies de type "modélisation" et de type "déduction" permet de rendre compte de deux dimensions complémentaires de l'activité mathématique.

Dans la suite de ce mémoire, l'enjeu sera de caractériser le concept de limite, notamment à l'aide du chapitre 2 qui viendra compléter ce cadre théorique par une étude des différentes étapes de l'émergence et de la formalisation de ce concept. Cette caractérisation sera située au sein de notre MER, qui sera donc constitué de deux praxéologies fondamentales de type "modélisation" et de type "déduction", articulées entre elles. Ce modèle constituera alors un outil permettant d'exercer la vigilance épistémologique nécessaire à l'analyse des ressources scolaires au chapitre 4, ainsi qu'à l'étude de l'expérimentation menée au chapitre 5.

Chapitre 2

De l'Antiquité grecque à l'analyse standard : un panorama historique de la notion de limite

2.1 Introduction

Ce chapitre a pour objectif de proposer un éclairage historique sur l'émergence et l'évolution de la notion de limite, depuis l'Antiquité grecque jusqu'à l'analyse standard. Cette démarche ne répond pas à une ambition historique exhaustive, mais s'inscrit dans une perspective didactique : il s'agit de mieux comprendre la nature du savoir "limite" tel qu'il s'est construit, afin d'éclairer les caractéristiques du modèle épistémologique de référence (MER) présenté au chapitre suivant.

En effet, la construction d'un MER suppose de questionner le savoir mathématique lui-même, en identifiant les problèmes auxquels il répond, les techniques qu'il mobilise et les formes de validation qui lui sont associées. L'étude historique constitue, à ce titre, un levier privilégié pour mettre en évidence certaines caractéristiques essentielles du concept de limite, notamment le fait qu'il ne s'est pas imposé d'emblée comme une évidence, mais qu'il résulte d'une longue évolution marquée par des tensions autour de l'infini, des modes de raisonnement et des exigences de rigueur.

Plus précisément, nous nous placerons dans le cadre de la TAD et distinguerons trois grandes institutions. Nous commencerons par examiner les pratiques mathématiques de l'Antiquité grecque, qui se concentrent sur des problèmes de mesure de grandeurs en utilisant des techniques qui évitent la notion d'infini. Nous étudierons ensuite le développement du calcul infinitésimal, qui reprend les tâches de la première institution et introduit de nouvelles techniques basées sur les infinitésimaux, au prix de certaines fragilités du point de vue de la justification. Enfin, nous aborderons l'institution "analyse standard", dans laquelle la notion de limite joue un rôle central dans la formalisation des résultats.

2.2 Antiquité grecque

Dans cette section, nous allons nous pencher sur les travaux des Grecs car les mathématiciens des époques suivantes se sont fortement appuyés sur leurs travaux (Job, 2011). Les résultats de cette section sont tirés du traité mathématique “Les Éléments” composé de 13 livres dont on attribue la paternité à Euclide¹.

2.2.1 Les quadratures exactes et relatives

Les géomètres grecs se sont confrontés aux problèmes de mesure de grandeurs (aires, volumes, longueurs, ...) et en sont venus à comparer des grandeurs de même type entre elles, par exemple l'aire d'un disque avec celle d'un carré. Ils cherchaient à savoir combien de fois une grandeur était contenue dans une autre. Cela les a conduits au problème emblématique de quadrature exacte qui consiste à construire un carré de même aire qu'une surface donnée (Dubussy et al., 2024). Il est relativement simple de découper un polygone en triangles et de construire un rectangle ayant même aire qu'un triangle donné. On peut donc facilement construire un rectangle ayant même aire qu'un polygone donné. La quadrature du rectangle consiste alors à construire un carré de même aire que ce rectangle. Cette construction² est réalisée dans le deuxième livre des Éléments d'Euclide :

Proposition XIV du livre II. « Construire un carré égal à une figure rectiligne donnée. » (Peyrard, 1804, p.105)

Cependant, nous savons aujourd'hui qu'avec les moyens de l'époque (construction à la règle et au compas), il était impossible de résoudre certains de ces problèmes, tels que la quadrature du cercle. Cela a mené les Grecs à considérer des problèmes de quadratures relatives. Dans les Éléments d'Euclide, on trouve une solution partielle au problème de quadrature exacte du cercle :

Proposition II du livre XII. « Les cercles sont entr'eux comme les carrés de leurs diamètres. » (Peyrard, 1804, p.376)

Voici comment Euclide démontre cette proposition. Le lecteur intéressé pourra trouver l'écriture moderne de cette démonstration à la section 2.2.3.

Démonstration. « Soient les cercles $ABCD$, $EFGH$ et que leurs diamètres soient BD , FH ; je dis que le cercle $ABCD$ est au cercle $EFGH$ comme le carré de BD est au carré de FH .

1. Trois sources différentes sont utilisées pour ce chapitre : Euclide (1632), Peyrard (1804) et Peyrard (1814). Pour chaque élément cité d'un des livres d'Euclide, les trois sources ont été analysées et le choix d'une plutôt qu'une autre est fait pour rester le plus proche de la version originale d'Euclide tout en étant lisible pour nos contemporains. Lorsque la source (Euclide, 1632) est choisie, nous nous permettons de moderniser certaines tournures et certains termes du français ancien afin d'en faciliter la lecture pour un lecteur contemporain.

2. Nous renvoyons le lecteur à Job (2011) pour une présentation commentée de la démonstration.

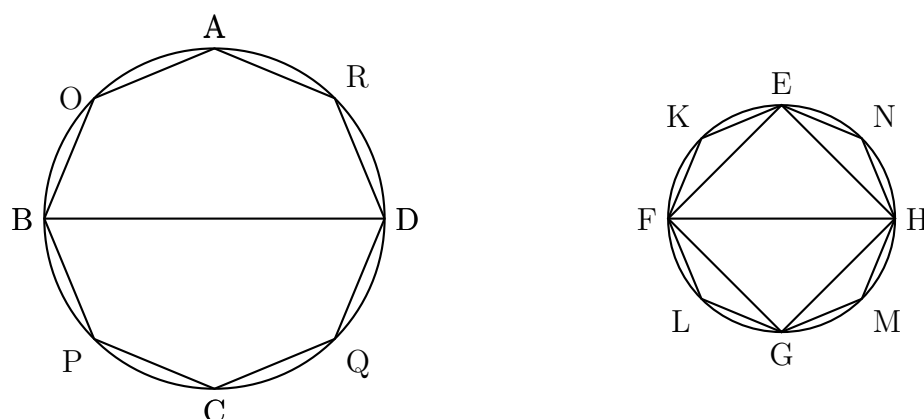


Figure 2.1 – Schéma de la proposition II du livre XII.

Si cela n'est point, le carré du diamètre BD sera au carré du diamètre FH comme le cercle $ABCD$ est à une surface plus grande ou à une surface plus petite que le cercle $EFGH$.

Supposons d'abord que cette surface soit plus petite et qu'elle soit S . Dans le cercle $EFGH$ décrivez le carré $EFGH$; le carré décrit dans ce cercle est plus grand que la moitié du cercle $EFGH$, parce que si par les points E, F, G, H nous menons des tangentes à ce cercle, le carré $EFGH$ sera la moitié du carré circonscrit : mais un cercle est plus petit que le carré circonscrit : donc le carré $EFGH$ est plus grand que la moitié du cercle $EFGH$. Partagez les arcs EF, FG, GH, HE en deux parties égales aux points K, L, M, N , et menez les droites $EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NF$. Chacun des triangles EKF, FLG, GMH, HNE est plus grand que la moitié du segment dans lequel il est placé ; parce que si par les points K, L, M, N nous menons des tangentes au cercle, et si sur les droites EF, FG, GH, HE et entre ces tangentes nous construisons des parallélogrammes, chacun des triangles EKF, FLG, GMH, HNE sera la moitié du parallélogramme dans lequel il est placé. Mais chaque segment est plus petit qu'un parallélogramme : donc chacun des triangles EKF, FLG, GMH, HNE est plus grand que la moitié du segment dans lequel il est placé. Si nous partageons ensuite les arcs restants en deux parties égales, et si nous joignons leurs extrémités par des droites, et si nous continuons toujours de faire la même chose, il nous restera certains segments de cercle dont la somme sera moindre que l'excès du cercle $EFGH$ sur l'espace S ; car nous avons démontré dans le premier théorème du dixième Livre que deux quantités inégales étant données, si l'on retranche de la plus grande quantité une partie plus grande que la moitié de cette quantité, si on retranche ensuite de ce qui reste une partie plus grande que la moitié de ce reste, et si l'on continue toujours de faire la même chose, il reste enfin une certaine quantité qui est moindre que la plus petite des quantités données. Supposons qu'on ait pour reste les segments du cercle $EFGH$ placés sur les cordes $EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE$, et que ces segments soient moindres que l'excès du cercle $EFGH$ sur l'espace S , il est évident que le polygone $EKFLGMHN$ sera plus grand que l'espace S . Décrivez dans le cercle $ABCD$ un polygone

$AOBPCQDR$ semblable au polygone $EKFLGMHN$; le carré de BD sera au carré de FH comme le polygone $AOBPCQDR$ est au polygone $EKFLGMHN$; mais par supposition que le carré de BD est au carré de FH comme le cercle $ABCD$ est à l'espace S : donc le cercle $ABCD$ est à l'espace S comme le polygone $AOBPCQDR$ est au polygone $EKFLGMHN$, et en échangeant les plans des moyens³, le cercle $ABCD$ est au polygone qui lui est inscrit comme l'espace S est au polygone $EKFLGMHN$; mais le cercle $ABCD$ est plus grand que le polygone qui lui est inscrit : donc l'espace S est plus grand que le polygone $EKFLGMHN$; mais, par supposition, il est au contraire plus petit, ce qui est impossible : donc le carré de BD n'est point au carré de FH comme le cercle $ABCD$ est à un espace quelconque plus petit que le cercle $EFGH$.

Nous démontrerons semblablement que le carré de FH n'est point au carré de BD comme le cercle $EFGH$ est à un espace quelconque plus petit que le cercle $ABCB$.

Je dis ensuite que le carré de BD n'est point au carré de FH comme le cercle $ABCD$ est à un espace quelconque plus grand que le cercle $EFGH$; car si cela est possible, supposons que le carré de BD soit au carré de FH comme le cercle $ABCD$ est à un espace plus grand, et supposons que S soit cet espace. En mettant les antécédents à la place des conséquents et les conséquents à la place des antécédents, le carré de FH sera au carré de BD comme l'espace S est au cercle $ABCD$; mais on démontrera plus bas que l'espace S est au cercle $ABCD$ comme le cercle $EFGH$ est à un espace quelconque plus petit que le cercle $ABCD$: donc le carré de FH est au carré de BD comme le cercle $EFGH$ est à un espace plus petit que le cercle $ABCD$, ce qui a été démontré impossible : donc le carré de BD n'est pas au carré de FH comme le cercle $ABCD$ est à un espace quelconque plus grand que le cercle $EFGH$.

Mais on a démontré que le carré de BD n'est point au carré de FH comme le cercle $ABCD$ est à un espace quelconque plus petit que le cercle $EFGH$: donc le carré de BD est au carré de FH comme le cercle $ABCD$ est au cercle $EFGH$.

Donc les cercles sont entr'eux comme les carrés des diamètres ; ce qu'il fallait démontrer. » $\square$

Cette démonstration fait intervenir de nombreux concepts et techniques sur lesquels nous allons nous attarder maintenant.

2.2.2 La commune mesure

Dans leur quête de comparaison de grandeurs, les Grecs ont introduit le concept de commune mesure.

Définition 1 du livre X. « Des grandeurs commensurables sont celles qui sont mesurées par une même mesure. » (Euclide, 1632, p.401)

3. Dans la source (Peyrard, 1804), il est fait mention d'«échanger les plans des moyens» mais cela n'est pas nécessaire pour arriver à la contradiction. La source (Euclide, 1632) ne mentionne d'ailleurs rien de tel et utilise simplement la proposition XIV du livre V comme cela est fait dans l'écriture moderne.

Définition 2 du livre X. « *Les grandeurs incommensurables sont celles qui n'ont aucune commune mesure.* » (Euclide, 1632, p.401)

Avec nos connaissances mathématiques actuelles, on écrit que deux grandeurs a et b sont commensurables si et seulement s'il existe une grandeur u de même type que a et b et s'il existe deux naturels n et m tels que $a = n \cdot u$ et $b = m \cdot u$. On note cela $\frac{a}{b} \approx \frac{n}{m}$ et on dit que $\frac{n}{m}$ est le facteur de proportionnalité entre a et b . Les anciens ne disposaient pas de toutes ces notations que nous avons aujourd'hui et ils notaient " a est à b comme n est à m " ou encore " a et b sont entre eux comme n et m ". En effet, les Grecs ne disposaient pas des nombres rationnels et encore moins des nombres irrationnels.

Ils développent cependant un arsenal de propriétés, similaire à celui des nombres rationnels, pour les grandeurs commensurables. Il est important de rappeler qu'à leur époque, ils n'ont jamais utilisé la notation en fraction que nous utilisons ici et que $\frac{a}{b}$ ne représente pas un nombre rationnel. De plus, les relations $\approx$ et $>$ ne sont pas des relations d'équivalence⁵ et d'ordre⁶ comme nous l'entendons aujourd'hui.

2.2.3 La théorie des proportions

La découverte de grandeurs incommensurables vient bousculer les pythagoriciens qui croyaient que tout pouvait s'exprimer par des rapports de nombres entiers. Cela a mené Eudoxe de Cnide à introduire la théorie des proportions prenant en compte les grandeurs incommensurables. Cette théorie est l'objet du livre V des Éléments d'Euclide et nous en présentons une partie ci-dessous :

Définition 3 du livre V. « *Raison, est une habitude de deux grandeurs de même genre, comparées l'une à l'autre selon la quantité.* » (Euclide, 1632, p.167)

Aujourd'hui nous utilisons le mot "rapport" à la place de "raison".

Définition 4 du livre V. « *Proportion, est une similitude de raison.* » (Euclide, 1632, p.171)

Les premières définitions de ce livre mettent en évidence l'absence des nombres rationnels chez les Grecs :

« *La définition d'un rapport (définition 3 du livre 5) donnée par Euclide est éloquente. [...] Euclide ne dit donc pas précisément ce qu'est*

4. L'utilisation de la notation $\approx$ est utilisée tout au long du document afin que le lecteur garde en tête que l'écriture d'égalité entre deux fractions est bien une écriture moderne et n'existait pas à l'époque d'Euclide.

5. Euclide vérifie uniquement le caractère transitif dans la proposition XI du livre 5. Les caractères réflexif et symétrique sont implicites dans la définition 6 du livre V.

6. Les Grecs posent une sorte d'ordre dans leur théorie des proportions mais ils ne vérifient pas en amont le caractère réflexif, antisymétrique et transitif de $>$, cela apparaît de manière implicite dans leurs comparaisons, d'ailleurs ils ne disposent pas non plus de la notion d'ensemble. Notre utilisation des notations $>$ et $\geq$ pour transcrire leur théorie est donc abusive.

un rapport. C'est juste un lien relatif à la mesure de deux grandeurs de même type. Or ce lien n'est pas seul contenu dans un rapport. Il n'apparaît qu'en connexion avec un second rapport c.-à-d. avec la définition de proportion. Un rapport n'a donc pas d'existence propre indépendamment d'un autre rapport. Ce n'est pas un objet à proprement parler sur lequel on peut opérer mais juste une appellation. On ne peut donc pas considérer un rapport comme le correspondant grec des nombres rationnels et donc encore moins des irrationnels. » (Job, 2011, p.117)

Définition 6 du livre V. « *Des grandeurs sont dites être en même raison, la première à la seconde, et la troisième à la quatrième, lorsque des équimultiples quelconques de la première et de la troisième, et d'autres équimultiples quelconques de la seconde et de la quatrième sont tels, que les premiers équimultiples surpassent, chacun à chacun, les seconds équimultiples, ou leur sont égaux à la fois, ou plus petits à la fois.* » (Peyrard, 1814, p.236)

Euclide définit ici l'égalité de deux rapports. Voici comment nous pouvons interpréter cette définition : Soient A et B deux grandeurs de même nature ainsi que C et D deux grandeurs de même nature. Alors $\frac{A}{B} \approx \frac{C}{D}$ lorsque pour tout $n, m \geq 1$,

- soit $nA > mB$ et $nC > mD$
- soit $nA = mB$ et $nC = mD$
- soit $nA < mB$ et $nC < mD$.

Définition 7 du livre V. « *Les grandeurs qui sont en même raison sont appelées proportionnelles.* » (Euclide, 1632, p.173)

Par exemple, si $A = 12, B = 8, C = 6$ et $D = 4$, alors il y a une même raison de A à B que de C à D donc les grandeurs sont dites proportionnelles. En particulier, deux rapports égaux sont dits proportionnels.

Définition 8 du livre V. « *Quand des équimultiples, celui de la première grandeur excède celui de la seconde, et le multiple de la troisième n'excède pas celui de la quatrième, alors il y aura plus grande raison de la première grandeur à la seconde, que de la troisième à la quatrième.* » (Euclide, 1632, p.173)

Cette définition est une manière ingénieuse d'établir une comparaison des proportions sans recourir aux fractions. Voici comment nous pouvons l'interpréter. La définition indique que s'il existe n, m des naturels tels que nA, mB, nC, mD sont des équimultiples de A, B, C, D alors si $nA > mB$ et si $nC \leq mD$, alors le rapport $\frac{A}{B}$ est plus grand que le rapport $\frac{C}{D}$.

À la suite de ces définitions, nous présentons quelques propositions du livre V qui sont mobilisées par Euclide pour démontrer la proposition II du livre XII :

Proposition X du livre V. « Des grandeurs ayant une raison avec une même grandeur, celle qui a une plus grande raison est la plus grande, et celle avec laquelle cette même grandeur a une plus grande raison est la plus petite. » (Peyrard, 1814, p.258)

Aujourd'hui, on dirait que si A, B et C sont des grandeurs de même type telles que $\frac{A}{C} < \frac{B}{C}$ alors $A < B$ et si $\frac{C}{A} < \frac{C}{B}$ alors $B < A$.

Proposition XI du livre V. « Les raisons qui sont les mêmes avec une même raison sont égales entr'elles. » (Peyrard, 1814, p.260)

Si A, B sont deux grandeurs de même type ainsi que C, D et E, F , et si $\frac{A}{B} \approx \frac{C}{D}$ et $\frac{C}{D} \approx \frac{E}{F}$ alors $\frac{A}{B} \approx \frac{E}{F}$. Euclide démontre ici la transitivité de la relation $\approx$.

Proposition XIII du livre V. « Si la première a la même raison avec la seconde que la troisième avec la quatrième, et si la troisième a avec la quatrième une raison plus grande que la cinquième avec la sixième, la première aura avec la seconde une raison plus grande que la cinquième avec la sixième. » (Peyrard, 1814, p.264)

En langage contemporain, si $\frac{A}{B} \approx \frac{C}{D}$ avec $\frac{C}{D} > \frac{E}{F}$ alors $\frac{A}{B} > \frac{E}{F}$.

Proposition XIV du livre V. « Si la première a avec la seconde la même raison que la troisième avec la quatrième, et si la première est plus grande que la troisième, la seconde sera plus grande que la quatrième; si la première est égale à la troisième, la seconde sera égale à la quatrième, et si la première est plus petite que la troisième, la seconde sera plus petite que la quatrième. » (Peyrard, 1814, p.266)

Supposons que $\frac{A}{B} \approx \frac{C}{D}$.

- Si $A > C$ alors $B > D$.
- Si $A = C$ alors $B = D$.
- Si $A < C$ alors $B < D$.

Proposition XVI du livre V. « Si quatre grandeurs sont proportionnelles, elles seront proportionnelles par permutation. » (Peyrard, 1814, p.269)

Ainsi, si $\frac{A}{B} \approx \frac{C}{D}$ alors $\frac{A}{C} \approx \frac{B}{D}$.

Revenons à la proposition II du livre XII. Avec nos notations actuelles, voici comment nous pouvons écrire la démonstration. Si on note C_1, C_2 les aires des cercles $ABCD$ et $EFGH$ alors on doit montrer que $\frac{C_1}{C_2} \approx \frac{|BD|^2}{|FH|^2}$. Sinon,

1. soit $\frac{C_1}{C_2} < \frac{|BD|^2}{|FH|^2}$
2. soit $\frac{C_1}{C_2} > \frac{|BD|^2}{|FH|^2}$

Commençons par traiter le premier cas.

1. Il existe une surface d'aire S telle que $\frac{C_1}{S} \approx \frac{|BD|^2}{|FH|^2}$. De plus, par la proposition XIII du livre V, on a $\frac{C_1}{C_2} < \frac{C_1}{S}$ et par la proposition X, $S < C_2$. Construisons le carré $EFGH$ inscrit au cercle $EFGH$. L'aire de ce carré est plus grande que la moitié de C_2 . En effet, si on construit le carré $E'F'G'H'$ circonscrit au cercle C_2 , on a

$$C_2 < \underbrace{\mathcal{A}(\text{carré}(E'F'G'H'))}_{2\mathcal{A}(\text{carré}(EFGH))} \Leftrightarrow \frac{1}{2}C_2 < \mathcal{A}(\text{carré}(EFGH))$$

À partir du carré $EFGH$, construisons l'octogone $EKFLGMHN$ inscrit dans le cercle C_2 . L'aire du triangle EKF est plus grande que la moitié de l'aire du segment EKF dans lequel il est inscrit. En effet, si on construit le rectangle dont un côté est EF et le côté opposé est tangent au cercle en K , on a

$$\mathcal{A}(\text{segment}(EKF)) < \underbrace{\mathcal{A}(\text{rectangle})}_{2\mathcal{A}(\text{triangle}(EKF))} \Leftrightarrow \mathcal{A}(\text{triangle}(EKF)) > \frac{1}{2}\mathcal{A}(\text{segment}(EKF))$$

De même pour les triangles FLG , GMH , HNE . En continuant de la sorte, on construit une suite de polygones réguliers $(P_n)_{n \geq 1}$ inscrits dans le cercle $EFGH$ telle que

- P_1 est le carré $EFGH$,
- P_2 est l'octogone $EKFLGMHN$,
- $\forall n \geq 2, P_{n+1}$ est le polygone régulier inscrit dans le cercle $EFGH$ obtenu en doublant les côtés de P_n .
- Il existe $n_0 \geq 1$ tel que $C_2 - \mathcal{A}(P_{n_0}) < C_2 - S \Leftrightarrow S < \mathcal{A}(P_{n_0})$.

Ce dernier point est démontré par la proposition I du livre X :

Proposition I du livre X. « *Étant proposées deux grandeurs inégales, si de la plus grande l'on retranche plus de la moitié, et du reste l'on retranche plus de la moitié, et qu'en continuant cela se fasse toujours ainsi, il demeurera enfin une grandeur plus petite que la plus petite des deux grandeurs proposées.* » (Euclide, 1632, p.404)

Dans notre cas, les deux grandeurs inégales sont C_2 et $C_2 - S$. En effet, on retranche de C_2 plus de la moitié et du reste plus de la moitié et ainsi de suite comme expliqué dans la preuve. Cela revient à retirer de C_2 l'aire d'un polygone dont le nombre de côtés tend vers l'infini⁷.

7. Notons que dans la démonstration faite par Euclide donnée à la section 2.2.1, il n'est pas question de considérer un nombre de côtés tendant vers l'infini, les Grecs évitant le passage à la limite. En effet, la proposition I du livre X telle que formulée par les Grecs sous-entend qu'il demeure une grandeur plus petite que la plus petite des deux grandeurs proposées après un nombre fini d'étapes.

Considérons à présent qu'on ait pour reste $R = C_2 - \mathcal{A}(EKFLGMHN)$ et que $R < C_2 - S$. Alors $\mathcal{A}(EKFLGMHN) > S$.

Ensuite, construisons le polygone $AOBPCQDR$ inscrit dans le cercle $ABCD$ tel que $AOBPCQDR$ soit semblable au polygone $EKFLGMHN$. Par la proposition suivante, on sait que $\frac{|BD|^2}{|FH|^2} \approx \frac{\mathcal{A}(AOBPCQDR)}{\mathcal{A}(EKFLGMHN)}$.

Proposition I du livre XII. « *Les polygones semblables inscrits dans des cercles sont entr'eux comme les carrés des diamètres.* » (Peyrard, 1804, p.374)

Or, on a supposé que $\frac{|BD|^2}{|FH|^2} \approx \frac{C_1}{S}$ donc, par la proposition XI du livre V, on a $\frac{C_1}{S} \approx \frac{\mathcal{A}(AOBPCQDR)}{\mathcal{A}(EKFLGMHN)}$. De plus, on a $C_1 > \mathcal{A}(AOBPCQDR)$ donc $S > \mathcal{A}(EKFLGMHN)$ par la proposition XIV du livre V. D'où la contradiction.

De la même manière, on montre qu'on ne peut pas avoir $\frac{|FH|^2}{|BD|^2} \approx \frac{C_2}{S}$ avec $S < C_1$.

2. Il existe une surface d'aire $S > C_2$ telle que $\frac{C_1}{S} \approx \frac{|BD|^2}{|FH|^2} \Leftrightarrow \frac{S}{C_1} \approx \frac{|FH|^2}{|BD|^2}$. Or, il existe une surface d'aire S' , avec $S' < C_1$ tel que $\frac{S}{C_1} \approx \frac{C_2}{S'}$. Ainsi, par la proposition XI du livre V, on a $\frac{|FH|^2}{|BD|^2} \approx \frac{C_2}{S'}$, ce qui est impossible.

Finalement, on a montré que les points 1 et 2 étaient impossibles, d'où la conclusion.

Les travaux des Grecs ne se résument pas aux Éléments d'Euclide. Le titre de “plus grand mathématicien de l'Antiquité” est souvent attribué à Archimède de Syracuse car on lui doit, entre autres, les quadratures de la parabole et de la spirale, le rapport (égal à $\frac{2}{3}$) du volume de la sphère à celui du cylindre tangent, la détermination de divers centres de gravité, etc.

Cette différence entre l'œuvre d'Euclide et celle d'Archimède est soulignée par plusieurs historiens des mathématiques :

« Dans l'ensemble des travaux scientifiques produits dans le monde gréco-hellénistique antique, ceux qui, bien connus par des textes avérés, nous apparaissent comme les plus novateurs sont dus au savant Archimède de Syracuse. Ses ouvrages appartiennent en effet, à la différence des Éléments d'Euclide, à une littérature que l'on qualifierait aujourd'hui “de recherche”, plutôt que “de diffusion” ou “d'enseignement”. » (Bessot et al., 1999, p.29)

Les travaux d'Archimède constituent la majeure partie des découvertes à caractère pré-infinitésimal réalisées par les Grecs.

2.2.4 Archimède et le nombre π

Dans un texte d'Archimède, intitulé “La Mesure du Cercle”, on retrouve une proposition concernant des rapports de proportionnalité au sein d'un cercle.

Proposition 1. « *Tout cercle est équivalent à un triangle rectangle dans lequel l'un des côtés de l'angle droit est égal au rayon du cercle et la base égale au périmètre du cercle.* » (Bessot et al., 1999, p.33)

Voici la démonstration donnée par Archimède :

Démonstration. « Que le cercle $ABCD$ soit au triangle E comme l'indique l'hypothèse ; je dis qu'il lui est équivalent.

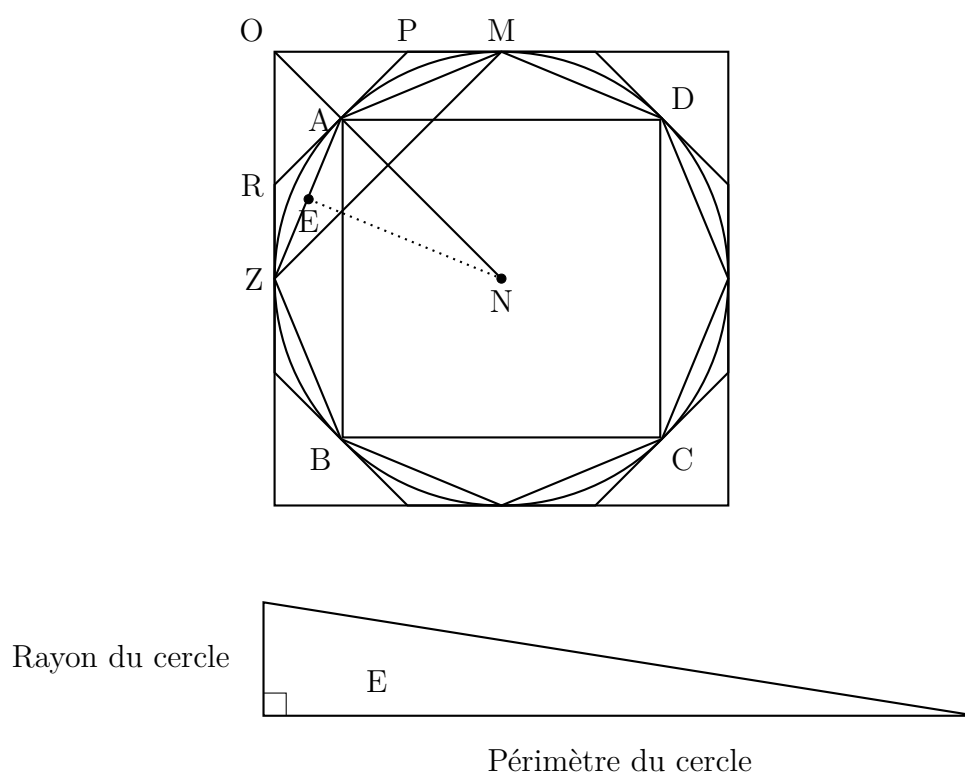


Figure 2.2 – Schéma de la proposition 1.

Que le cercle soit en effet, si possible, plus grand. Inscrivons-y le carré AC , et divisons en deux parties égales les arcs [admettant comme cordes les côtés du carré] ; que les segments de cercle aient à la fin [si on répète les opérations de division en deux parties égales] une somme inférieure à la différence entre l'aire du cercle et celle du triangle. La figure rectiligne sera donc encore plus grande que le triangle. Prenons le centre N et abaissons la perpendiculaire NE . NE sera donc inférieur au côté du triangle. Mais le périmètre de la figure rectiligne est à son tour plus petit que le côté restant, du moment qu'il est plus

petit que le périmètre du cercle. La figure rectiligne est par conséquent plus petite que le triangle E , ce qui est absurde.

Que le cercle soit, d'autre part, plus petit, si possible, que le triangle E ; circonscrivons-lui un carré, divisons les arcs en deux parties égales et menons des tangentes par les points [de division]. L'angle OAP est donc droit ; OP est par conséquent supérieur à MP , du moment que PM est égal à PA , et le triangle POR est plus grand que la moitié de la figure $OZAM$. Qu'il reste donc des segments tels que RZA , dont la somme soit inférieure à la différence entre l'aire du triangle E et celle du cercle $ABCD$. La figure rectiligne circonscrite est, par conséquent, encore inférieure au triangle E , ce qui est absurde ; elle est, en effet, plus grande, du moment que NA est égal à la hauteur du triangle, et que le périmètre est plus grand que la base du triangle. Il s'ensuit que le cercle est équivalent au triangle E . » $\square$

On peut voir dans cette proposition de nombreuses similitudes avec la proposition II du livre XII d'Euclide. Archimède utilise aussi la proposition I du livre X, bien qu'il ne vérifie pas les conditions d'application de cette proposition. Tout comme Euclide, il n'est pas question ici de considérer un polygone avec un nombre infini de côtés et donc un "passage à la limite" bien que nous voyons que ce concept est en train de germer.

Archimède apporte donc sa pierre à l'édifice dans la tentative de résolution de la quadrature du cercle en montrant que ce problème est équivalent au problème de rectification de la circonférence. En effet, Archimède donne ici un moyen de construire un carré de même aire que le cercle, la quadrature du triangle étant connue, à condition d'être capable de construire un segment égal à la circonférence du cercle. En combinant cette proposition à la proposition II du livre XII et en notant P_1, P_2 les périmètres des cercles et r_1, r_2 leurs rayons respectifs, on a

$$\frac{C_1}{d_1^2} \approx \frac{C_2}{d_2^2} \Leftrightarrow \frac{C_1}{r_1^2} \approx \frac{C_2}{r_2^2}$$

et

$$C_1 = \frac{P_1 \cdot r_1}{2} \text{ et } C_2 = \frac{P_2 \cdot r_2}{2}$$

vu la proposition d'Archimède. Ainsi, on obtient

$$\frac{C_1}{r_1^2} \approx \frac{C_2}{r_2^2} \approx \frac{P_1 \cdot r_1}{2r_1^2} \approx \frac{P_2 \cdot r_2}{2r_2^2} \approx \frac{P_1}{2r_1} \approx \frac{P_2}{2r_2}.$$

Bien sûr, en voyant ces rapports, on ne peut pas s'empêcher de penser au nombre π . Cependant, les Grecs n'en avaient pas connaissance mais Archimède a réussi à encadrer ces rapports en utilisant des polygones réguliers inscrits et circonscrits à un cercle. Il démontre que

$$3 + \frac{10}{71} < \frac{P}{d} < 3 + \frac{1}{7}$$

où P est le périmètre du cercle et d son diamètre⁸.

8. Pour plus de détails sur les travaux d'Archimède que nous venons de présenter, nous renvoyons à la lecture de Bessot et al. (1999).

2.2.5 La méthode d'exhaustion

Nous avons constaté une similitude dans les méthodes utilisées par Euclide et Archimède. Tout d'abord, ils utilisent la méthode de double réduction à l'absurde, qui consiste, comme son nom l'indique, à utiliser un raisonnement par l'absurde pour montrer qu'une grandeur A n'est pas plus petite qu'une grandeur B , puis pour montrer que A n'est pas plus grande que B , et ainsi pouvoir conclure que les deux grandeurs sont égales. De plus, ils utilisent tous deux la proposition I du livre X des Éléments d'Euclide, dont la démonstration s'appuie sur le principe aujourd'hui appelé "l'axiome d'Archimède" :

Définition 5 livre V. « *Des grandeurs sont dites avoir une raison entr'elles, lorsque ces grandeurs, étant multipliées, peuvent se surpasser mutuellement.* » (Peyrard, 1814, p.282)

La combinaison de ces deux méthodes, dont on attribue la paternité à Eudoxe de Cnide et qui est systématisée par Archimède, était très répandue chez les Grecs et celle-ci, bien que lourde et coûteuse, est restée de nombreux siècles considérée comme la seule méthode de démonstration vraiment rigoureuse. Cette combinaison de deux méthodes deviendra une unique méthode plusieurs siècles plus tard. Elle sera appelée "méthode d'exhaustion" par Grégoire de Saint-Vincent et reposera sur un processus infini (Bessot et al., 1999).

2.2.6 Quelques précisions et éclaircissements

Peut-on en conclure que la notion de limite émerge pour la première fois chez les Grecs ? Selon moi, la réponse est non. D'une part, la notion de limite n'est à aucun moment définie chez les Grecs. Les Grecs ont même élaboré la méthode d'exhaustion pour éviter de travailler avec la notion d'infini, leur rapport à l'infini étant compliqué⁹. D'autre part, leur procédure n'est pas systématique et chaque problème impose d'adapter l'argument à la figure géométrique en jeu ; il faut un véritable tour de force intellectuel à chaque nouveau problème considéré. La méthode d'exhaustion permet uniquement de valider des résultats géométriques, c'est-à-dire de réaliser la *synthèse* d'un résultat déjà trouvé par d'autres moyens, mais elle ne permet pas de trouver de nouveaux résultats. Le calcul de limite en revanche permet, au-delà de la validation, de trouver de nouveaux résultats et donc de réaliser l'*analyse-synthèse* (Job, 2011).

Comme nous le verrons dans la suite, le saut conceptuel du XIX^e siècle consiste précisément à quitter le registre géométrique pour se placer dans le registre numérique : on formalise le processus avec des suites, on en donne une définition unique, et l'unicité de la limite devient un théorème général. On n'a alors plus besoin, à chaque nouvelle démonstration, de s'adapter aux particularités du problème géométrique traité. Donc une avancée majeure est d'avoir réussi à s'extraire du géométrique pour aller vers le numérique et cette avancée a été rendue possible grâce aux travaux des mathématiciens du XVII^e et XVIII^e siècle.

9. Il faudrait distinguer deux visions de l'infini, potentielle et actuelle, et parcourir les travaux de Zénon et Aristote, entre autres, pour préciser quel était le rapport des Grecs à l'infini. Nous conseillons la lecture de Job (2011) à ce sujet.

Les travaux des Grecs contiennent quelques zones floues. Bourbaki (1984) fait remarquer que les Grecs croient disposer d'un système complet, en raison du fait qu'ils ne questionnent pas l'existence de la quatrième proportionnelle. En d'autres termes, étant donné trois grandeurs A, B, C , les Grecs considèrent qu'il existe toujours une quatrième grandeur D telle que $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$. La définition 6 du livre V d'Euclide permet de comparer deux rapports de grandeurs sans commune mesure. Elle repose sur un jeu de comparaisons entre multiples entiers de ces grandeurs, mais elle suppose que ces comparaisons sont toujours possibles et sans ambiguïté. En ce sens, elle fonctionne comme si le système de grandeurs était sans lacunes, c'est-à-dire complet au sens où l'entend aujourd'hui l'analyse réelle. Or, ils ne démontrent jamais cette complétude présupposée. C'est l'apparition de la notion de limite chez Cauchy et Weierstrass qui va permettre de formaliser cette notion de complétude (toute suite de Cauchy converge), les Grecs ne disposant pas des notions de suite et de limite. Certes, aujourd'hui, l'existence de la quatrième proportionnelle D est assurée par le fait que $\mathbb{R}$ est un champ, car si A est non nul, $D = \frac{B \cdot C}{A}$. Mais les Grecs ne travaillent pas avec $\mathbb{R}$ et n'ont pas de champ au sens moderne. Ils ne définissent ni l'addition ni la multiplication de rapports. Les Grecs travaillent avec des rapports de grandeurs incommensurables qui correspondent de nos jours aux irrationnels¹⁰, mais ils ne sont jamais définis comme une limite de rationnels, ce qu'on fait aujourd'hui via la complétude. Donc, même si la proportionnalité pure ne requiert pas la complétude, la vision continue du monde des grandeurs que les Grecs utilisent correspond dans notre monde moderne à l'idée que l'espace des rapports est complet (Bessot et al., 1999 ; Job, 2011).

Cette intuition grecque trouve un écho lointain dans la démarche de Dedekind au XIX^e siècle. En effet, dans son travail sur la construction de l'ensemble des réels, Dedekind introduit le concept de "coupure" dans les rationnels : une séparation de $\mathbb{Q}$ en deux sous-ensembles disjoints tels que tout élément du premier est strictement inférieur à tout élément du second. À titre d'anachronisme éclairant, on peut noter que la définition 8 du livre V d'Euclide met en œuvre une idée similaire en séparant implicitement les rationnels en deux classes selon que le rapport de deux grandeurs est inférieur ou supérieur à un rapport donné. Dedekind prolonge et formalise rigoureusement cette intuition, en définissant les nombres réels, y compris les irrationnels, comme ces coupures elles-mêmes, donnant ainsi une consistance et une existence propre aux grandeurs incommensurables qui échappaient jusque-là aux Grecs. Là où Euclide opérait ces distinctions sans notion explicite de nombre, Dedekind en fait le fondement même de la construction du continu numérique (Boniface, 2002).

10. Rappelons que pour les Grecs, un rapport de grandeurs ne correspond pas à un nombre directement.

2.3 Époque moderne : *Le Calculus*

Petit à petit, les mathématiciens se sont détachés de la méthode d'exhaustion, jugée trop exigeante, grâce au développement de nouvelles techniques infinitésimales. Ils ont commencé à avoir un autre regard sur l'infini et ont passé au second plan la validation par la méthode de double réduction à l'absurde si chère aux grecs. Ils se sont focalisés sur la création de nouveaux résultats et outils mathématiques. Au XVII^e siècle, les mathématiciens se sont passionnés pour les problèmes de tangentes et de quadratures. Pierre de Fermat (1607–1665) a produit une méthode générale de détermination des tangentes dans laquelle on voit apparaître la notion d'“infinitement petit” :

Des tangentes des lignes courbes¹¹. « Soit donnée, par exemple, la parabole BDN , de sommet D , de diamètre DC ; soit donnée sur elle le point B , par lequel il faut mener la droite BE tangente à la parabole et rencontrant le diamètre en E .

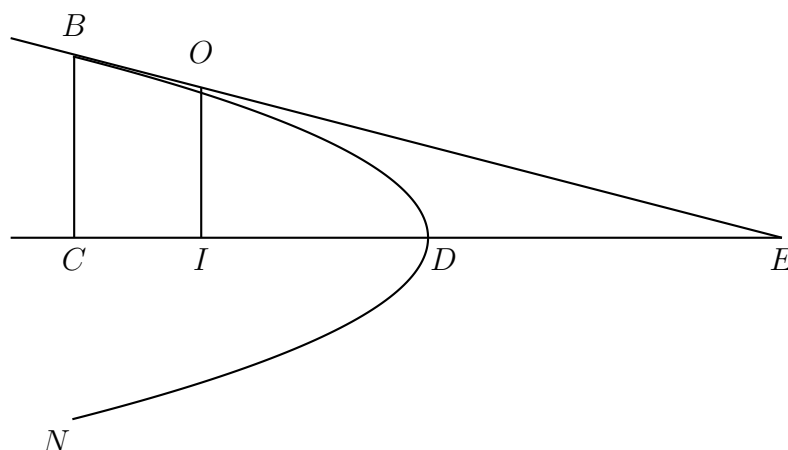


Figure 2.3 – Schéma de la proposition “Des tangentes des lignes courbes”.

Si l'on prend sur la droite BE un point quelconque O , dont on mène l'ordonnée OI , en même temps que l'ordonnée BC du point B , on aura : $\frac{CD}{DI} > \frac{BC^2}{OI^2}$ puisque le point O est extérieur à la parabole. Mais $\frac{BC^2}{OI^2} = \frac{CE^2}{IE^2}$, à cause de la similitude des triangles. Donc $\frac{CD}{DI} > \frac{CE^2}{IE^2}$.

Or le point B est donné, donc l'ordonnée BC , donc le point C , donc CD . Soit donc $CD = d$, donnée. Posons $CE = a$ et $CI = e$; on aura $\frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{a^2+e^2-2ae}$.

Faisons le produit des moyens et des extrêmes :

$$da^2 + de^2 - 2dae > da^2 - a^2e.$$

Adégalons donc, d'après la méthode précédente ; on aura, en retranchant les termes communs :

$$de^2 - 2dae \approx -a^2e,$$

11. Ceci est le nom donné par Fermat dans son œuvre.

ou, ce qui revient au même :

$$de^2 + a^2e \approx 2dae.$$

Divisez tous les termes par e :

$$de + a^2 \approx 2da$$

Supprimez de : il reste $a^2 = 2da$, donc : $a = 2d$.

Nous prouvons ainsi que CE est double de CD , ce qui est conforme à la vérité. » (Fermat, 1896, p.122-123)

Dans cette méthode de détermination de tangentes, Fermat utilise sa méthode d'adégalité, présentée juste avant dans son œuvre dans le cadre de la détermination des maxima et minima¹² :

« Plus précisément, deux quantités x et y sont dites adégales, ce qui est noté $x \approx y$, si x est infiniment proche de y . (Cette dernière notion n'est, quant à elle, pas formellement définie.) » (Dubussy et al., 2024, p.4)

Cette méthode d'adégalité, dans le cadre de la détermination des maxima et minima, traduit le fait que deux points d'une courbe autour de l'*extremum* ont des ordonnées très proches l'une de l'autre, "infiniment proches", ce qui amène Fermat à les égaier. Ce dernier n'est cependant pas dupe, car il utilise le symbole " $\approx$ ", mais il traite malgré tout l'expression comme une égalité par la suite. Il divise en effet par une quantité e les expressions de chaque côté du symbole " $\approx$ ". Ensuite, Fermat annule cette quantité e et on voit là en germe le concept de "passage à la limite".

Dans sa méthode de détermination des tangentes, Fermat use de cette méthode en considérant cette fois que pour deux points "infiniment proches", la distinction entre la tangente et la courbe est négligeable. En remplaçant donc l'égalité par l'adégalité, il considère que le point O est à la fois sur la tangente et sur la courbe. De nouveau, Fermat divise ensuite par une quantité e et annule cette quantité e pour trouver la solution. On voit donc que l'accroissement "infinitésimal" e a un double statut chez Fermat : d'abord non nul, puis nul. Ceci revient à donner un double statut à la tangente : d'abord, elle est considérée comme une droite possédant un unique point d'intersection avec la courbe puis comme ayant deux points d'intersections "infiniment proches" avec la courbe :

« Au niveau de la tangente, négliger e implique de la penser comme une sécante ayant en commun avec la courbe deux points "infiniment proches". Cette conception de la tangente a quelque chose d'"infinitésimal" qui préfigure la conception actuelle où la tangente est définie par le biais de sa pente qui est la limite de la "fonction taux d'accroissement". » (Balhan, 2017, p.48)

12. Nous renvoyons à la lecture de Balhan (2017) pour une analyse plus détaillée des travaux de Fermat.

Un dernier point qui attire notre attention est la validation “ce qui est conforme à la vérité”, qui est une validation pragmatique typique des praxéologies de type II, dont nous reparlerons au chapitre 3.

Newton (1642–1727) a quant à lui relié le problème de détermination des tangentes avec celui des quadratures à l'aide de quantités infinitésimales sans arriver à les définir rigoureusement. Leibniz a ensuite tenté de créer une algèbre des “infinitement petits” mais cela a suscité de nombreuses critiques car sa théorie manquait, elle aussi, de rigueur. Cependant, les avancées de Newton et Leibniz (1646–1716) sont colossales et on leur attribue généralement la paternité du *calculus*, le calcul différentiel et intégral.

Des écueils liés aux infinitésimaux persistent donc durant la période du *calculus* mais avec ces notions d'infinitement petit, on sent poindre la notion de limite. Voyons comment elle tend à apparaître avec les travaux de deux autres mathématiciens : Grégoire de Saint-Vincent et d'Alembert.

2.3.1 Grégoire de Saint-Vincent (1584–1667)

Nous nous intéressons à présent à une proposition de Grégoire de Saint-Vincent, car elle rend compte de l'évolution de la pensée mathématique entre les Grecs et le XVII^e siècle concernant l'infini.

Proposition CCXXXI. « Soit un triangle maximal ABC inscrit dans un segment de parabole ABC . Soient inscrits d'autre part les triangles maximaux des segments résiduels ; et qu'il en soit toujours ainsi. Je dis que la série de tous les triangles est égale au segment de parabole ABC » (Bessot et al., 1999, p.195-196)

Démonstration. « Si, en effet, elle n'est pas égale, alors elle est plus grande ou elle est plus petite. Tout d'abord, que le segment de parabole soit plus grand que la série de tous les triangles, et que l'excès de l'un sur l'autre soit posé égal à la quantité G . D'après le fait que le triangle ABC est maximal, parmi ceux qui peuvent être inscrits dans le segment de parabole, ce triangle sera donc plus grand que le demi-segment de parabole dans lequel il est inscrit (Proposition CCXXIX). Or ceci peut être poursuivi sans fin ; il restera du segment de parabole des quantités moindre que toute donnée donc, et plus petites que la quantité G (Proposition I du livre X d'Euclide) ; donc il n'y a pas d'excédent par lequel le segment de parabole excède la série des triangles ; et le segment de parabole n'est pas plus grand que la série des triangles. Qu'il soit vrai que ce segment ne soit pas plus petit que la série est manifeste. Comme la série de triangles est, par hypothèse, toujours prolongée à l'intérieur du segment de parabole, par conséquent la série, quelque augmentée qu'elle soit en grandeur, somme de plusieurs triangles, sera toujours et en fin de compte en défaut du segment de parabole. Donc, comme la série des triangles n'est, ni plus grande, ni plus petite que le segment de parabole, elle lui est nécessairement égale. » $\square$

On peut reconnaître là un texte d'Archimède mais avec certaines expressions plus modernes, car les conceptions de G . de Saint-Vincent sont alimentées par le calcul infinitésimal.

Archimède avait établi une quadrature exacte, celle de la parabole, en combinant la proposition I du livre X des Éléments d'Euclide (fondée sur un procédé fini) et la méthode de double réduction à l'absurde. G. de Saint-Vincent utilise aussi ces méthodes, qui peuvent être considérées comme le fondement du calcul infinitésimal, mais il s'autorise cette fois un processus infini, comme on peut le voir dans la première partie de la démonstration ci-dessus, où il ne précise pas qu'il s'arrête après un nombre fini d'étapes. Cette nouvelle manière de considérer l'infini¹³ l'amène également à affirmer qu'une série infinie peut être considérée comme possédant une somme et qu'elle définit une grandeur vers laquelle elle tend sans jamais nécessairement l'atteindre, ce qu'il appelle le "terme" de la progression :

« He stated more clearly than had anyone previously that an infinite series can be strictly considered as having a sum [...] that an infinite series defines in itself a magnitude which may be called the limit of the series. "The terminus of a progression is the end of the series to which the progression does not attain, even if continued to infinity, but to which it can approach more closely than by any given interval." » (rapporté par Boyer (1959) et repris dans (Job, 2011, p.151))

Avec ces différentes considérations de l'infini, on voit clairement apparaître la notion de limite et plus précisément notre concept moderne de "passage à la limite" (Bessot et al., 1999 ; Job, 2011).

2.3.2 Jean le Rond d'Alembert (1717–1783)

Chez d'Alembert, on retrouve plusieurs définitions et propriétés sur les limites très proches de celles que nous connaissons aujourd'hui. Dans son encyclopédie (Diderot et D'Alembert, 1751), il cite les travaux de Leibniz et Newton sur le calcul différentiel, réutilise les notions "d'infiniment petit" et incorpore même la notion d'infini dans son langage. D'Alembert raconte aussi la manière dont Newton traitait le calcul différentiel et l'exprime en utilisant le terme "limite" :

« Il n'a jamais regardé le calcul différentiel comme le calcul des quantités infiniment petites, mais comme la méthode des premières et dernières raisons, c'est-à-dire la méthode de trouver les limites des rapports. Aussi cet illustre auteur n'a-t-il jamais différencié des quantités, mais seulement des équations ; parce que toute équation renferme un rapport entre deux variables, et que la différenciation des équations ne consiste qu'à trouver les limites du rapport entre les différences finies des deux variables que l'équation renferme. » (Diderot et D'Alembert, 1751, p.985-986)

D'Alembert pointe le rôle central joué par la notion de limite dans le calcul différentiel, tel que Newton l'avait lui aussi mis en avant, mais il va plus loin en affirmant que le calcul différentiel repose sur la notion de limite :

13. Il y a de nouveau ici une distinction à faire entre l'infini potentiel et l'infini actuel pour laquelle nous renvoyons à Job (2011).

« Le calcul différentiel n'est autre chose que la méthode d'exhaustion des anciens, réduite à une analyse simple et commode ; c'est la méthode de déterminer analytiquement les limites des rapports » (Diderot et D'Alembert, 1751, p.256)

« La théorie des limites est la base de la vraie Métaphysique du calcul différentiel. » (Diderot et D'Alembert, 1751, p.542)

Voici à présent la définition de la limite donnée par d'Alembert :

« On dit qu'une grandeur est la limite d'une autre grandeur, quand la seconde peut approcher de la première plus près que d'une grandeur donnée, si petite qu'on la puisse supposer, sans pourtant que la grandeur qui approche, puisse jamais surpasser la grandeur dont elle approche ; en sorte que la différence d'une pareille quantité à sa limite est absolument inassignable. » (Diderot et D'Alembert, 1751, p.542)

Juste après cette définition, on retrouve un exemple très intéressant au vu de nos analyses précédentes du concept de limite dans l'Antiquité, à propos de l'inscription et la circonscription de polygones qu'on retrouve chez Euclide et Archimède. D'Alembert va ici s'autoriser à faire tendre le nombre de côtés d'un polygone vers l'infini pour obtenir un cercle. Il dit :

« Par exemple, supposons deux polygones, l'un inscrit et l'autre circonscrit à un cercle, il est évident que l'on peut en multiplier les côtés autant que l'on voudra ; et dans ce cas, chaque polygone approchera toujours de plus en plus de la circonférence du cercle, le contour du polygone inscrit augmentera, et celui du circonscrit diminuera ; mais le périmètre ou le contour du premier ne surpassera jamais la longueur de la circonférence, et celui du second ne sera jamais plus petit que cette même circonférence ; la circonférence du cercle est donc la limite de l'augmentation du premier polygone, et de la diminution du second. » (Diderot et D'Alembert, 1751, p.542)

Il ajoute ensuite une remarque intéressante :

« A proprement parler, la limite ne coïncide jamais, ou ne devient jamais égale à la quantité dont elle est la limite ; mais celle-ci s'en approche toujours de plus en plus, et peut en différer aussi peu qu'on voudra. Le cercle, par exemple, est la limite des polygones inscrits et circonscrits ; car il ne se confond jamais rigoureusement avec eux, quoique ceux-ci puissent en approcher à l'infini. » (Diderot et D'Alembert, 1751, p.542)

On peut aussi retrouver deux propriétés de la limite dans l'encyclopédie de d'Alembert.

Proposition 1. *« Si deux grandeurs sont la limite d'une même quantité, ces deux grandeurs seront égales entr'elles. » (Diderot et D'Alembert, 1751, p.542)*

Proposition 2. *« Soit $A \times B$ le produit des deux grandeurs A, B . Supposons que C soit la limite de la grandeur A , et D la limite de la quantité B ; je dis que $C \times D$, produit des limites, sera nécessairement la limite de $A \times B$, produit des deux grandeurs A, B . » (Diderot et D'Alembert, 1751, p.542)*

D'Alembert indique ensuite l'utilisation que l'on peut faire de ces propriétés dans le calcul de l'aire d'un cercle :

« Ces deux propositions, que l'on trouvera démontrées exactement dans les institutions de Géométrie, servent de principes pour démontrer rigoureusement que l'on a l'aire d'un cercle, en multipliant sa demi-circonférence par son rayon. » (Diderot et D'Alembert, 1751, p.542)

Bien que le concept de limite défini par d'Alembert semble proche de notre définition actuelle, l'usage qu'il propose d'en faire reste encore éloigné de celui qu'en fera Cauchy :

« Malgré ces propriétés, mettre le concept de limite à la base du calculus reste encore largement à l'état de déclaration de principe. Il ne mène pas lui-même à bien la ligne de conduite qu'il défend et laisse à d'autres le soin d'un tel travail. » (Job, 2011, p.154)

D'Alembert est en réalité intéressé par de nombreux autres domaines, il cherche avant tout à ouvrir des voies nouvelles plutôt qu'à systématiser et approfondir les méthodes qu'il introduit. De plus, convaincu que les raisonnements infinitésimaux peuvent toujours être ramenés à des calculs de limites, il laisse implicitement à d'autres le soin d'effectuer ce travail de refondation.

Cette situation permet de mieux mesurer l'importance du climat intellectuel dans lequel va s'inscrire Cauchy : d'un certain point de vue, tout semblait déjà à portée de main chez les prédécesseurs de ce dernier, mais aucun n'avait franchi le pas de fonder le *calculus* sur le concept de limite. On peut notamment remarquer que la limite de d'Alembert ne possède pas encore le caractère unificateur qu'elle prendra chez Cauchy : il ne propose ni de fonder le calcul intégral ni de définir la continuité à partir de ce concept. Même pour la dérivée, son approche demeure éloignée de la nôtre : il ne travaille pas avec le concept de fonction, reste dans un cadre fortement géométrique en travaillant sur des “équations entre quantités” et ne donne pas de définition générale de la dérivée fondée sur une limite (Job, 2011).

2.4 Époque contemporaine : L'analyse

La figure centrale de la transition entre le *calculus* et l'analyse est alors Augustin-Louis Cauchy (1789–1857). C'est le premier à mettre la notion de limite au centre et de s'en servir comme structure déductive de l'analyse, raison pour laquelle on lui attribue la paternité de l'analyse actuelle. Cependant, tout le monde ne s'accorde pas à ce propos, certains disent que Cauchy a lui aussi fondé ses résultats d'analyse sur des notions infinitésimales. Nous nous appuyerons ici sur les travaux de Judith Grabiner (2005), qui n'a pas simplement fait une biographie ou une analyse des travaux de Cauchy mais qui s'est attardée sur la manière dont les concepts de base de l'analyse et la notion de limite ont émergés chez Cauchy (Job, 2011).

Nous allons aussi rapidement parcourir ses cours d'analyse de l'école polytechnique (Cauchy, 1899). Avec l'introduction de son cours, on comprend que Cauchy a les mêmes objectifs que Lagrange, à savoir de se détacher de la géométrie et de la physique pour fonder l'analyse qui servira ensuite à fonder ces deux disciplines, mais contrairement à Lagrange qui se base sur le développement de Taylor, Cauchy va se baser sur la notion de limite. Venons-en ainsi à la définition de la limite donnée par Cauchy :

Définition de la limite de Cauchy. « Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres. Ainsi, par exemple, un nombre irrationnel est la limite des diverses fractions qui en fournissent des valeurs de plus en plus approchées. En géométrie, la surface d'un cercle est la limite vers laquelle converge les surfaces des polygones inscrits, tandis que le nombre de leurs côtés croît de plus en plus [...] » (Cauchy, 1899, p.13)

En lisant cette définition, on peut se demander pourquoi la paternité de l'analyse actuelle est attribuée à Cauchy. En effet, il y a une grande ressemblance entre sa définition et les définitions de ses prédécesseurs. De plus, il semble y avoir un écart important entre sa définition de limite et celle donnée par Weierstrass (reprise par Edwards (1982) et citée dans (Dubussy et al., 2024, p.10)) :

Définition de la limite de Weierstrass. « $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ lorsque étant donné $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que $|f(x) - L| < \varepsilon$ si $0 < |x - a| < \delta$. »

On reconnaît en effet ici notre définition actuelle de la limite. Weierstrass s'est débarrassé des considérations liées au mouvement ou à la géométrie.

La définition de limite proposée par Cauchy reste cependant bien la notion centrale de son analyse car il l'utilise pour définir le concept de dérivabilité ainsi que la notion d'infinitésimal, qu'il utilise par la suite pour définir la continuité. De plus, il utilise probablement les infinitésimaux à titre d'abréviation sous l'effet de la pression sociale de l'époque (Dubussy et al., 2024). Regardons de plus près quelle utilisation il fait de la limite dans le développement d'un de ses résultats :

Théorème d'inégalité de la moyenne de Cauchy. « Si, la fonction $f(x)$ étant continue entre les limites $x = x_0, x = X$, on désigne par A la plus petite, et par B la plus grande des valeurs que la fonction dérivée $f'(x)$ reçoit dans cet intervalle, le rapport aux différences finies

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0} \quad (4)$$

sera nécessairement compris entre A et B . » (Cauchy, 1899, p.44-45)

Démonstration. « Désignons par δ, ε deux nombres très petits, le premier étant choisi de telle sorte que, pour des valeurs numériques de i inférieures à δ , et pour une valeur quelconque de x comprise entre les limites x_0, X , le rapport

$$\frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

reste toujours supérieur à $f'(x) - \varepsilon$ et inférieur à $f'(x) + \varepsilon$. Si, entre les limites x_0, X , on interpose $n - 1$ valeurs nouvelles de la variable x , savoir

$$x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$$

de manière à diviser la différence $X - x_0$ en éléments

$$x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, X - x_{n-1}$$

qui, étant tous de même signe, aient des valeurs numériques inférieures à δ , les fractions

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \dots, \frac{f(X) - f(x_{n-1})}{X - x_{n-1}} \quad (5)$$

se trouvant comprises, la première entre les limites $f'(x_0) - \varepsilon, f'(x_0) + \varepsilon$, la seconde entre les limites $f'(x_1) - \varepsilon, f'(x_1) + \varepsilon, \dots$, seront toutes supérieures à la quantité $A - \varepsilon$, et inférieures à la quantité $B + \varepsilon$. D'ailleurs, les fractions (5) ayant des dénominateurs de même signe, si l'on divise la somme de leurs numérateurs par la somme de leurs dénominateurs, on obtiendra une fraction *moyenne*, c'est-à-dire comprise entre la plus petite et la plus grande de celles que l'on considère (voir l'*Analyse algébrique*, Note II, théorème XII). L'expression (4), avec laquelle cette moyenne coïncide, sera donc elle-même renfermée entre les limites $A - \varepsilon, B + \varepsilon$, et, comme cette conclusion subsiste quelque soit le nombre ε , on peut affirmer que l'expression (4) sera comprise entre A et B . » $\square$

En combinant cette inégalité avec le théorème des valeurs intermédiaires, on peut déduire le théorème des accroissements finis dans le cas où la dérivée de f en x est continue. Par la suite, on peut ainsi définir d'autres résultats importants de l'analyse et on voit alors apparaître le rôle majeur joué par cette inégalité dans l'architecture déductive que Cauchy met en place. L'utilisation d'un raisonnement en ε - δ dans la démonstration nous montre que la distance qui sépare Cauchy et Weierstrass quant à l'entendement qu'ils ont de leur définition de limite n'est pas si importante :

« [...] ; on several occasions when a proof required a limit, Cauchy translated his definition into the language of algebraic inequalities. And he proved harder propositions than those about the limit of a product. When the limit of a complicated expression was to be discussed, Cauchy occasionally – often enough to show us his clear understanding – actually worked out the delta or n corresponding to a given epsilon ; the superiority of Cauchy's limit concept over that of his predecessors does not lie in the explicit definition, but in the use he made of the concept in proofs. » (Grabiner, 2005, p.86)

La première partie de la preuve montre en effet que Cauchy a un entendement algébrique de sa définition de dérivée et donc de la notion de limite et il n'y a plus de connotations cinématiques et géométriques. Ce qui ressort du reste de la démonstration est que sa formulation algébrique de la définition de limite est utilisée comme un outil de preuve (Job, 2022). Cette utilisation que fait Cauchy de sa définition pour mener à bien ses démonstrations, lui vaudra la qualification de définition “lakatosienne”, dont nous détaillerons les caractéristiques dans le chapitre suivant.

À l'heure actuelle, suivant la région du monde dans laquelle on se trouve, la définition de limite est enseignée de manière différente. Par exemple, en France, on enseigne la définition que Cauchy utilise dans ses preuves et qui correspond à la limite pointée, tandis qu'en Angleterre, on enseigne la définition de Weierstrass, la limite épointée.

Soit $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R}$.

Limite pointée : Soit $a \in \overline{D}$. On dit que b est la limite de f pour x tendant vers a si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que, pour tout $x \in D$ vérifiant l'inégalité $|x - a| < \delta$ on a $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Limite épointée : Soit $a \in \overline{D \setminus \{a\}}$. On dit que b est la limite de f pour x tendant vers a si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que, pour tout $x \in D$ vérifiant l'inégalité $0 < |x - a| < \delta$ on a $|f(x) - b| < \varepsilon$.

2.5 Conclusion

L'histoire du concept de limite témoigne d'une lente maturation où s'articulent rigueur, intuitions et volonté de mise en forme déductive. Dès l'Antiquité grecque se manifeste un souci de rigueur dans le traitement des grandeurs. Les mathématiciens ont introduit des méthodes, telles que celle de l'exhaustion, permettant de traiter des rapports de grandeurs sans toutefois disposer d'un concept explicite de limite. Cependant, les Grecs ne disposaient pas des outils pour attribuer une mesure à tous les segments. Lorsqu'une longueur était irrationnelle, elle échappait à une expression numérique précise, car la notion de nombre

irrationnel n'était pas encore formalisée. C'est pourquoi ils restaient ancrés dans le monde strictement géométrique, manipulant des rapports de grandeurs plutôt que des nombres. Ce n'est que bien plus tard, avec la construction de l'ensemble des réels $\mathbb{R}$, qu'il deviendra possible d'attribuer une mesure à toute grandeur ; $\mathbb{R}$ réalise ainsi la symbiose entre le continu géométrique et le continu numérique, recherchée depuis l'Antiquité.

Au XVII^e siècle, avec Newton et Leibniz, on a assisté à l'émergence du calcul infinitésimal. Les infinitésimaux permettaient de résoudre des problèmes que la géométrie grecque laissait de côté, mais en s'appuyant sur des infiniment petits, dont le double statut : tantôt nul, tantôt non nul, continue de poser un problème de légitimité de leur calcul infinitésimal.

Au XIX^e siècle, une nouvelle étape s'ouvre avec l'entreprise de formalisation menée par Cauchy. Le qualificatif "formalisée" sera donné à l'analyse développée par Cauchy et désigne précisément cette volonté de donner au calcul infinitésimal une forme rigoureuse, en organisant déductivement ses concepts.

Ainsi, de la rigueur déductive des Grecs, à l'invention du calcul infinitésimal, jusqu'à l'entreprise de formalisation du XIX^e siècle, chaque période a contribué à préciser les conditions d'existence du concept de limite. C'est ce cheminement progressif qui a conduit à la définition actuelle de la limite, fondement de l'analyse moderne.

Chapitre 3

Présentation d'un MER de la notion de limite

3.1 Introduction

Nous disposons à présent de tous les éléments nécessaires pour la présentation du MER de la notion de limite élaboré par Job et Balhan (2024), que nous avons retenu pour ce travail. Le chapitre 1 expose en effet le cadre théorique dans lequel s'inscrit ce MER tandis que le chapitre 2 présente les différentes étapes de l'histoire du concept de limite, en mettant en lumière les conditions d'émergence de ce concept et les trois grandes institutions qui ont contribué à son développement.

Gascón (1993) souligne l'importance de ce type de modélisation pour la didactique des mathématiques en montrant qu'un tel modèle

« conditionne de façon décisive ce que l'on entendra par “enseigner et apprendre [le savoir en jeu]” » (Gascón, 1993, p.44)

Dans le cadre de ce travail, le MER de la notion de limite nous permet de caractériser ce qu'est le savoir mathématique relatif à cette notion. Rappelons qu'un MER d'un savoir n'est pas unique et que celui que nous présentons ici est une modélisation parmi d'autres possibles. Il s'agit d'une modélisation élaborée à partir de l'histoire du concept de limite et s'appuyant sur les travaux de Job (2011) et Schneider (2011a ; 2011b).

Au chapitre 1, nous avons abordé la question de l'existence d'une situation fondamentale, et le concept de limite, élément central de ce présent chapitre, illustre particulièrement bien la complexité de la mise en œuvre d'une telle situation. D'un point de vue épistémologique, la notion de limite dispose du caractère FUGS, c'est-à-dire qu'elle répond à des besoins de Formalisation, d'Unification, de Généralisation et de Structuration du savoir mathématique (Robert et Robinet, 1993). Ce caractère rend difficile l'identification d'une unique situation fondamentale. Néanmoins, des tentatives ont été faites pour concevoir de telles situations, mais au vu du nombre de pages qu'un mémoire peut raisonnablement

contenir, nous ne les détaillerons pas ici et renvoyons à la lecture de Job (2011) et Schneider (2011a) qui en exposent et proposent d'autres références à ce sujet.

Nous avons ainsi exprimé rejoindre la position de Schneider (2011a), qui plaide pour une approche praxéologique qui rende plus visibles les projets humains ayant conduit à la création du concept de limite. Il s'agirait alors de concevoir plusieurs niveaux de situations fondamentales, différenciés par les pratiques et les discours mathématiques mobilisés :

« [...] je défendrais l'idée qu'il convient de formuler ce qu'est une situation fondamentale du concept de limite à deux niveaux praxéologiques au moins, ceux-ci se différenciant tant par le bloc "logos" que par le bloc "praxis" pour que l'un soit adapté à l'autre. » (Schneider, 2011a, p.189)

3.2 Deux praxéologies fondamentales comme fondation du MER

Le MER de la notion de limite que nous présentons est donc constitué de deux praxéologies fondamentales, correspondant à deux périodes historiques différentes, le *calculus* et l'analyse standard, toutes deux considérées comme des institutions au sens de la TAD. Pour rappel, on appelle praxéologies fondamentales celles pour lesquelles un savoir donné constitue la technique jugée "optimale", au sein d'une institution, pour accomplir les tâches considérées.

La modélisation choisie par Job et Balhan (2024) pour l'élaboration du MER ne porte pas directement sur les objets mathématiques que constituent le *calculus* et l'analyse, mais sur les activités mathématiques qui ont conduit à leur émergence :

« La modélisation adoptée est particulière dans la mesure où ces deux praxéologies constituent des modèles de l'activité mathématique dont ces deux périodes sont les résultantes. De ce point de vue, le calculus et l'analyse sont donc considérés comme produits de ces deux processus. » (Job et Balhan, 2024, p.154-155)

Les praxéologies considérées décrivent ainsi des processus, c'est-à-dire des manières de faire des mathématiques, dont le *calculus* et l'analyse apparaissent comme les produits ou les résultantes historiques. Ce point de vue permet de mettre en évidence les pratiques et les logiques sous-jacentes à leur construction, plutôt que de considérer ces institutions comme des objets figés. Pour mettre en avant leur caractère de processus, les deux praxéologies fondamentales sont nommées "Constitution du *calculus*" et "Constitution de l'analyse" (Job et Balhan, 2024).

Ces deux praxéologies correspondent respectivement à une praxéologie de type "modélisation" et une praxéologie de type "déduction", dont l'objectif correspond bien à la modélisation de deux pans de l'activité mathématique, comme illustré au chapitre 1.

Nous présentons dans la suite les caractéristiques de ces deux praxéologies, en insistant sur les tâches, les techniques et les systèmes de validation qui leur sont associés.

3.2.1 Praxéologie de type “modélisation” : Constitution du *calculus*

Rappelons que les praxéologies de type I sont caractérisées par des tâches qui consistent à déterminer des objets préconstruits et dont le discours technologique n'est pas théorique, car les objets en question ne font pas encore partie d'une théorie.

Durant la période du *calculus*, on retrouve quatre grands objets préconstruits : tangente à une courbe, vitesse instantanée, aire et volume. Ces objets coïncident avec les grands problèmes de cette période, qui correspondent aux tâches de la praxéologie, à savoir : optimiser des grandeurs, déterminer des tangentes à des courbes, déterminer des vitesses instantanées et déterminer des aires de surfaces et des volumes de solides. Plusieurs techniques ont été mises en œuvre pour résoudre ces types de tâches, comme le calcul des limites, des calculs de dérivées, de primitives ou encore des méthodes faisant intervenir les infinitésimaux. On retrouve notamment chez Fermat la technique du calcul des limites dans une phase embryonnaire, qui consiste en la suppression de termes dans une expression algébrique *sans jeu de compensation*.

Comme nous l'avons vu au chapitre 2, Fermat utilise à la fin de son développement de détermination des tangentes une justification pragmatique : “ce qui est conforme à la vérité” (Fermat, 1896). Ce type de validation s'appuyant sur les travaux des Grecs est courante à cette époque et explique en partie pourquoi l'existence des objets préconstruits n'était pas remise en question, bien qu'ils ne soient pas définis de manière déductive ou via les limites au sens où nous l'entendons aujourd'hui :

« Ainsi la tangente en un point d'une courbe n'est pas définie algébriquement par une équation de la forme $y = ax + b$ ayant pour pente a une certaine dérivée, mais comme objet de la géométrie synthétique qui ne possède qu'un point en commun avec la courbe. L'aire sous une courbe n'est pas définie comme une intégrale mais déterminée par les objets géométriques qui en délimitent la surface. » (Job et Balhan, 2024, p.156)

En résumé, la première praxéologie fondamentale qui constitue notre MER de la notion de limite modélise l'activité “Déterminer des grandeurs” et les justifications sont ancrées dans les domaines géométrique et cinématique (Job et Balhan, 2024, p.155).

Comme exposé au chapitre 2, Cauchy effectuera la transition vers l'analyse, en se détachant de la géométrie et de la physique et en organisant de manière déductive les concepts de l'analyse à partir de la notion de limite. Cela nous amène ainsi à la seconde praxéologie fondamentale qui constitue le MER de la notion de limite.

3.2.2 Praxéologie de type “déduction” : Constitution de l'analyse

Les praxéologies de type II sont caractérisées par un type de tâches qui consistent à construire une architecture déductive d'un domaine mathématique ou extra-mathématique. Nous renvoyons au chapitre 1 pour plus de détails sur ces praxéologies et nous exposons à présent la praxéologie “Constitution de l'analyse”.

La tâche est ici la construction d'une architecture déductive du *calculus*, dont la notion de limite telle que définie par Cauchy constitue le pilier. Ce dernier a en effet fondé ses résultats sur cette notion, en s'appuyant sur les techniques et les objets du *calculus* afin d'établir les bases nécessaires à la formalisation de l'analyse. La limite devient le concept qui permet de définir les notions de dérivée, d'intégrale et de convergence de série, et ainsi de définir les objets préconstruits qui leur sont associés : les intégrales pour les aires, les dérivées pour les tangentes et les vitesses instantanées. Le concept de limite fait donc partie intégrante de la technique permettant la mise en forme déductive du *calculus*. De plus, il constitue un outil de preuve permettant de valider les résultats obtenus et, *in fine*, d'assurer la cohérence théorique de l'ensemble du *calculus*. C'est en ce sens que nous avons qualifié de “lakatosienne” la définition de limite donnée par Cauchy dans le chapitre précédent (Job et Balhan, 2024 ; Schneider, 2011a).

Nous donnons ici une explication succincte de ce qualificatif “lakatosienne” et nous conseillons la lecture de Job (2011) pour une analyse plus approfondie de la notion de limite au regard de l'épistémologie de Lakatos.

Pour Lakatos, les savoirs mathématiques ne sont pas découverts comme des vérités déjà là, mais construits à travers une dynamique de conjectures, de preuves et de réfutations. Une preuve n'est jamais un point final absolument indubitable : elle résulte d'un processus dialectique où des contre-exemples viennent tester, modifier et affiner à la fois les conjectures et les arguments qui les soutiennent. Les concepts qui émergent de ce processus sont dits *proof-generated*, c'est-à-dire “taillés pour fonctionner dans des preuves”. Une définition mathématique ne doit donc pas être vue comme un objet figé, mais comme un outil élaboré au cours de cette dialectique, indissociable des preuves qui l'ont fait naître et des problèmes qu'elle permet de résoudre (Job, 2011).

C'est précisément en ce sens que la définition de limite proposée par Cauchy peut être qualifiée de lakatosienne. Elle ne constitue pas une donnée immédiate ou achevée, mais le résultat d'un travail de reconstruction critique des mathématiques antérieures. Cauchy s'appuie sur les travaux de ses prédécesseurs, en identifie les limites, en extrait certains raisonnements prometteurs, puis élabore sa définition de manière à fournir une base solide pour l'analyse. Cette définition lui permet ensuite de structurer toute une architecture déductive : elle sert à définir des notions centrales comme la continuité, la dérivée, l'intégrale ou les séries convergentes, et à démontrer des théorèmes fondamentaux tels que le théorème des valeurs intermédiaires ou l'inégalité de la moyenne, notamment à l'aide de techniques de type ε - δ , comme nous l'avons montré au chapitre 2 (Job, 2011).

En résumé, cette seconde praxéologie modélise l'activité “Concevoir une architecture déductive” et la limite, vue comme un *proof-generated concept* au sens de Lakatos, a permis cette construction solide pour l'analyse, qui continue d'être enseignée et utilisée aujour-

d'hui (Job et Balhan, 2024, p.155). Nous considérons ainsi cette praxéologie comme une praxéologie fondamentale de la notion de limite pour l'institution "analyse standard", où la limite constitue la technique jugée optimale pour accomplir les tâches de cette institution.

3.2.3 Articulation des deux praxéologies dans le MER de la notion de limite

Notre MER de la notion de limite vise donc à identifier et à modéliser les conditions historiques, épistémologiques et didactiques d'émergence de la notion de limite. Il repose sur le cycle de la modélisation mathématique articulé autour de ces deux types de praxéologies fondamentales pour l'institution "analyse standard". La première période a permis l'émergence de la seconde, car sans les techniques et les objets du *calculus*, les fondations nécessaires à la formalisation n'auraient pas existé. Les quatre objets préconstruits se voient définis à partir des techniques du *calculus* qui les déterminent et prennent ainsi le statut de concepts mathématiques :

« [...] des techniques permettant de déterminer des objets "préconstruits" deviennent, par le biais du concept formalisé de limite, des procédés de définition de ces mêmes objets qui n'existent plus que par le truchement des définitions ainsi produites. » (Job et Schneider, 2010, p.620)

La transition vers la seconde praxéologie s'effectue alors :

*« Le modèle se met alors à vivre sa vie de manière autonome, c'est-à-dire sans référence au système qu'il modélise et c'est alors que commence l'étude d'une praxéologie d'une autre nature dont les tâches relèvent de l'organisation déductive dont la géométrie euclidienne, revue par David. Hilbert, constitue un modèle : démontrer un théorème, choisir un lot d'axiomes, reformuler un concept pour en faire un outil de preuve. Les techniques, sous-tendues par une "théorie des théories", sont alors celles qui permettent de démontrer, de conjecturer ou de réfuter : recourir au *modus ponens*, rechercher le "lemme coupable" au sens d'I. Lakatos, ... » (Job et Schneider, 2010, p.629)*

Cependant, une fois l'architecture déductive de l'analyse constituée, la première praxéologie ne disparaît pas. Dans le processus de création de la seconde, on continue de s'appuyer sur la première : les résultats obtenus de manière déductive peuvent se raccrocher aux intuitions et aux techniques antérieures. Il est par exemple possible d'établir une démonstration directement dans les termes du formalisme, mais à plusieurs endroits, la notion de limite nous renverra à des images plutôt typiques de la période du *calculus*, et bien souvent, nous continuerons d'utiliser ces images dans notre tête. Une fois la deuxième période établie, il faut vérifier si l'on retrouve bien les propriétés présentes dans la première période et, le cas échéant, on s'interroge sur les pertes éventuelles et leur importance. Enfin, même après le développement de la théorie formalisée, on ne se prive pas de mobiliser les techniques issues du *calculus* si elles peuvent nous aider à produire de nouveaux résultats.

3.3 Conclusion

Notre MER de la notion de limite est ainsi constitué de deux praxéologies fondamentales formant un cycle et correspondant à deux périodes historiques différentes, le *calculus* et l'analyse standard. La première praxéologie modélise l'activité "Déterminer des grandeurs" tandis que la seconde praxéologie modélise l'activité "Concevoir une architecture déductive". Le concept de limite est en germe dans la première praxéologie et est utilisé comme technique permettant la résolution de problèmes de détermination de grandeur. Cependant, la version moderne de la notion de limite n'y apparaît pas encore, tandis que dans la seconde praxéologie, elle constitue le pilier pour la construction de l'architecture déductive de l'analyse et devient un outil de preuve. La définition de limite telle que nous l'entendons aujourd'hui se situe donc dans la deuxième praxéologie, mais elle est indissociable de la première praxéologie qui sert d'appui au processus de formalisation.

Il est essentiel, pour dépasser les débats d'opinion, de disposer d'un tel MER, constituant un modèle alternatif aux pratiques enseignantes, afin d'évaluer la valeur épistémologique de ces pratiques et d'exercer ainsi une vigilance épistémologique telle que nous l'avons expliquée au chapitre 1.

Cette caractérisation du savoir "limite" va ainsi nous permettre d'évaluer, au chapitre suivant, les pratiques que l'on retrouve dans l'enseignement de cette notion et de cadrer l'analyse de l'expérimentation développée au chapitre 5.

Chapitre 4

Enseignement de la notion de limite en secondaire : analyse de référentiels, manuels et notes de cours

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous réalisons une analyse de l'enseignement de la notion de limite en secondaire à travers l'étude des référentiels officiels, de manuels scolaires et de notes de cours. L'objectif est de mettre en lumière les évolutions dans l'enseignement des mathématiques au fil du temps, ainsi que les différentes approches pédagogiques adoptées pour enseigner ce concept fondamental. Plus précisément, nous exposerons l'usage des tableaux de valeurs de fonctions dans l'enseignement de la notion de limite, car c'est en partie cette analyse qui nous a menés à réaliser l'expérimentation présentée dans le chapitre suivant. Enfin, nous nous intéresserons plus particulièrement au chapitre consacré aux suites, étudié par les élèves de cinquième secondaire ayant participé à l'expérimentation. Il est en effet important de comprendre le chemin parcouru par les élèves avant de réaliser l'expérimentation, afin de mieux interpréter les résultats obtenus et d'apporter du relief à nos analyses.

Le MER de la notion de limite présenté au chapitre précédent nous permettra de questionner certaines approches de l'enseignement de la notion de limite présentes dans les ressources institutionnelles. De plus, comme expliqué au chapitre 1, nous concentrerons nos analyses sur le premier moment de l'étude, à savoir le moment de la "première rencontre avec l'objet mathématique étudié", tel que défini par Chevallard (1998). Cette première rencontre joue un rôle crucial dans le rapport qu'entreprendront les élèves avec l'objet étudié.

4.2 Évolution de l'enseignement des mathématiques

Ce travail a débuté par l'analyse des chapitres consacrés à la continuité et aux limites de fonctions dans trois manuels scolaires issus de différentes époques. Cette analyse a permis de mettre en évidence certaines évolutions de l'enseignement des mathématiques. Les manuels en question sont les suivants :

1. La suite 52 (Broeckx, 1973)
2. Mathématique : Cours 5^e année : 7 heures par semaine (Werbrouck et Wambersie, 1984)
3. CQFD Maths 5^e : manuel : 6 périodes/semaine (Annoye et Van Eerdenbrugghe, 2013)

Le premier manuel s'inscrit dans la période dite des “Mathématiques Modernes” (1960–1980) qui a été marquée par une volonté de moderniser l'enseignement des mathématiques en introduisant des concepts plus abstraits dès l'école primaire. Inspiré par les travaux de Bourbaki, l'accent était mis sur les structures mathématiques, notamment la structure d'espace vectoriel, et la théorie des ensembles :

« On doit apprendre à compter et opérer en base 3 ou 5 avant de savoir réciter la comptine des nombres en base 10. Au colloque de Royaumont organisé en 1959 par l'Organisation européenne de coopération économique (future OCDE), Jean Dieudonné, un des fondateurs de Bourbaki, avait lancé son fameux “À bas Euclide!”. De fait, l'enseignement de la géométrie est totalement bouleversé, c'est le modèle de l'espace affine normé qui domine, précurseur des espaces vectoriels généraux enseignés au lycée et de l'analyse fonctionnelle enseignée à l'université. Les structures algébriques prennent le dessus et l'arithmétique disparaît. L'analyse est renforcée dès les premières classes des lycées dans une approche très formelle. Une profusion de nouvelles définitions et de nouveaux termes envahissent les mathématiques essentiellement abstraites, qui se détachent du réel pour mieux le modéliser. » (Dorier, 2018, p.67)

En analyse, les notions topologiques introduisaient les différents chapitres et les définitions étaient choisies selon des critères d'unification (Balhan, 2026). Dans le manuel étudié, on retrouve ces pratiques puisque le chapitre des limites débute avec les notions de voisinage, de bornes et de meilleures bornes supérieures et inférieures :

1. Borne supérieure et borne inférieure d'une partie de $\mathbf{R}$

Un nombre réel a est appelé une *borne supérieure* ou un *majorant* d'une partie P de $\mathbf{R}$, si

$$\forall x \in P: x \leq a.$$

Un nombre réel a est appelé une *borne inférieure* ou un *minorant* d'une partie P de $\mathbf{R}$, si

$$\forall x \in P: x \geq a.$$

EXEMPLE:

Si P est l'intervalle $[0, 5[$, les nombres 5, 6, 10 sont alors des bornes supérieures de P et les nombres 0, -2, -15 sont des bornes inférieures de P .

2. Meilleure borne supérieure et meilleure borne inférieure

Un nombre réel a est appelé *meilleure borne supérieure* ou *supremum* d'une partie P de $\mathbf{R}$, si P n'admet aucune borne supérieure plus petite que la borne supérieure a .

Un nombre réel a est appelé *meilleure borne inférieure* ou *infimum* d'une partie P de $\mathbf{R}$, si P n'admet aucune borne inférieure plus grande que la borne inférieure a .

Evidemment, P a *au plus une seule* meilleure borne supérieure et *au plus une seule* meilleure borne inférieure.

EXEMPLE:

La meilleure borne supérieure de l'intervalle $[0, 5[$ est 5, et sa meilleure borne inférieure est 0.

3. Théorème de la meilleure borne supérieure (*)

Toute partie P non vide de $\mathbf{R}$, qui possède une borne supérieure b , possède une meilleure borne supérieure.

(*) Le théorème de la *meilleure borne supérieure* a été démontré pour la première fois (1817) par l'Autrichien BOLZANO (1781-1848).

Figure 4.1 – Extrait de *La suite 52* (Broeckx, 1973, p. 55).

De plus, l'enseignement des mathématiques était organisé de manière déductive et très peu de liens avec des applications concrètes étaient faits (Balhan, 2026 ; Noël, 1993). Dans l'ouvrage analysé, on ne trouve aucun exercice du type de la résolution de problèmes ou d'exercices faisant échos à des situations concrètes. Seuls des exercices du type "Dessinez une représentation graphique de la fonction...", "Démontrez que...", "Calculez la limite..." et "Généralisez la propriété..." sont présents (Broeckx, 1973).

Le second manuel s'inscrit dans la période dite de la "Contre-réforme des mathématiques modernes" ou "la réforme de la réforme" (1980–1997) qui survient en réaction contre les mathématiques modernes jugées trop abstraites :

« Aux mathématiques modernes succède un enseignement de mathématiques voulu plus en prise avec le réel, [...], l'utilité des mathématiques dans la formation professionnelle se voit bouleversée par les avancées technologiques, dont la percée de l'informatique. » (Dorier, 2018, p.70)

Dans ce manuel, des exercices mêlant l'utilisation de la calculatrice et des algorithmes sont introduits, et les tableaux de valeurs de fonctions font leur apparition :

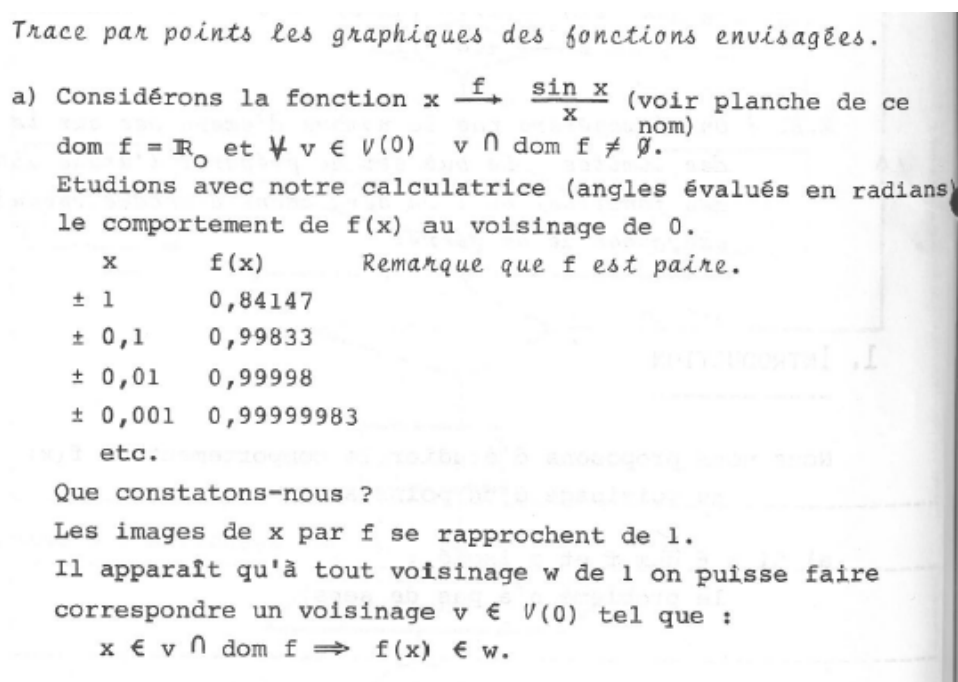


Figure 4.2 – Extrait de *Mathématique : Cours 5^e année : 7 heures par semaine* (Werbrouck et Wambersie, 1984, p. 54).

En revanche, on n'y trouve toujours aucun exercice de résolution de problèmes ni aucune application concrète (Werbrouck et Wambersie, 1984). Ce manuel ayant été rédigé au début de la période de la "Contre-réforme des mathématiques modernes", il ne reflète pas encore pleinement les évolutions qui se sont imposées progressivement : la résolution de problèmes devient peu à peu le moteur des apprentissages, on retrouve de moins en moins de notions topologiques, et des activités d'introduction apparaissent dans l'enseignement secondaire (Balhan, 2026 ; Noël, 1993).

La troisième période est celle de la "Réforme des Compétences" (1997–2014). En 1997, le décret "mission" (1997) marque un tournant considérable dans le système éducatif belge,

en introduisant une approche centrée sur les compétences. Voici quelques extraits du décret qui illustrent cette nouvelle orientation :

« amener tous les élèves à s'approprier des savoirs et à acquérir des compétences qui les rendent aptes à apprendre toute leur vie et à prendre une place active dans la vie économique, sociale et culturelle ; » (Communauté française de Belgique, 1997, p.24654, article 6)

« Pour atteindre les objectifs généraux visés à l'article 6, les savoirs et les savoir-faire, qu'ils soient construits par les élèves eux-mêmes ou qu'ils soient transmis, sont placés dans la perspective de l'acquisition de compétences. Celles-ci s'acquièrent tant dans les cours que dans les autres activités éducatives et, de manière générale, dans l'organisation de la vie quotidienne à l'école. » (Communauté française de Belgique, 1997, p.24655, article 8)

« Le Gouvernement détermine les socles de compétences et les soumet à la sanction du Parlement » (Communauté française de Belgique, 1997, p.24656, article 16)

À la suite de ce décret, de nouveaux référentiels ont été rédigés pour les différentes disciplines enseignées en secondaire, dont les mathématiques. Les référentiels “Socles de compétences” reprennent alors les compétences à atteindre de l'entrée dans l'enseignement fondamental à la fin de la deuxième année secondaire et les “Compétences terminales et savoirs requis” précisent les compétences à atteindre de la troisième à la fin de la sixième secondaire.

Cette troisième période est marquée par une volonté de rendre l'enseignement plus concret et plus proche des réalités des élèves, en introduisant des activités pratiques, des projets et des applications concrètes. L'enseignement déductif passe ainsi à l'arrière-plan au profit de la résolution de problèmes.

Le troisième manuel, qui s'inscrit dans cette période, débute par des activités d'exploration, se poursuit par des synthèses reprenant la théorie relative aux limites et se termine par des exercices divisés en trois sections :

1. Expliciter les savoirs et les procédures
2. Appliquer une procédure
3. Résoudre un problème

Ceci marque donc bien une scission avec les deux périodes précédentes, durant lesquelles les manuels étaient majoritairement organisés de manière déductive et ne proposaient pas encore d'applications concrètes (Balhan, 2026 ; Annoye et Van Eerdenbrughe, 2013).

Depuis le décret mission, l'enseignement a continué d'évoluer. En 2014, les référentiels des compétences terminales ont été réécrits dans le but de préciser, et de rendre les compétences à atteindre plus lisibles pour les enseignants. Pour cela, le référentiel "Compétences terminales et savoirs requis en mathématiques" a été découpé selon des unités d'acquis d'apprentissage (UAA) dans lesquelles on retrouve, pour chacune, les compétences à développer ; les processus classés selon les trois dimensions "Connaitre", "Appliquer", "Transférer" ; une liste des ressources reprenant les savoirs, savoir-faire et stratégies incontournables et enfin les stratégies transversales (Fédération Wallonie-Bruxelles, 2014). C'est donc sur base de ces référentiels organisés en UAA qu'ont été rédigés les manuels et les notes de cours entre 2015 et aujourd'hui.

Les "Socles de compétences" n'ont pas échappé à une réécriture colossale. En 2015, l'enseignement entre à nouveau dans une période de grands changements avec l'apparition du Pacte pour un Enseignement d'excellence défini par la Fédération Wallonie-Bruxelles comme

« un ensemble de réformes qui concerne tous les aspects de l'enseignement : le contenu des programmes, l'organisation des cours, la formation des enseignants, etc., de la maternelle à la fin du secondaire, avec comme objectif principal d'améliorer les résultats de tous les élèves de la Fédération Wallonie-Bruxelles » (Fédération Wallonie-Bruxelles, 2026)

Celui-ci a instauré un nouveau parcours d'apprentissage, le tronc commun, de la première maternelle à la troisième secondaire. Les "Socles de compétences", en vigueur depuis vingt ans, se voient donc remplacés, depuis 2018, par les référentiels du tronc commun. Aujourd'hui, ceux-ci sont en vigueur de la première maternelle à la sixième primaire et seront introduits en première secondaire à la rentrée 2026, puis en deuxième à la rentrée 2027 et enfin en troisième à la rentrée 2028 (Fédération Wallonie-Bruxelles, 2022).

Dans la suite de ce travail, nous analyserons principalement les "Socles de compétences" et les "Compétences terminales et savoirs requis" organisés en UAA car nous nous intéressons à l'enseignement du chapitre des limites qui se donne en cinquième secondaire. Or, les élèves actuellement en cinquième n'ont pas rencontré les référentiels du tronc commun dans leur parcours.

4.3 Des référentiels "généraux" à des programmes d'étude "spécifiques"

En Fédération Wallonie-Bruxelles, les écoles sont organisées selon leurs réseaux d'appartenance, à savoir l'enseignement officiel et l'enseignement libre. Chaque réseau est lui-même divisé en plusieurs sous-réseaux. Ainsi, l'enseignement officiel est divisé en deux sous-réseaux : l'officiel organisé et l'officiel subventionné. Quant à l'enseignement libre, il est également divisé en deux sous-réseaux : le réseau libre non confessionnel et le réseau

libre confessionnel (Wallonie-Bruxelles Enseignement, 2026). Toutes les écoles de ces différents réseaux sont tenues de suivre les référentiels. Cependant, si ceux-ci présentent les grandes lignes des compétences à développer et des savoirs à transmettre pour chaque année d'étude, ils laissent malgré tout une certaine marge de manœuvre (par exemple, ils ne précisent pas combien de temps consacrer à chaque UAA, comment pondérer les évaluations, etc.) (Fédération Wallonie-Bruxelles, 2014 ; Fédération Wallonie-Bruxelles, 2013) :

« [...] Le balisage des contenus évoqués ci-dessus laisse néanmoins suffisamment de champs aux pouvoirs organisateurs¹ pour y développer leur spécificité. » (FWB Enseignement, 2015a, p.6)

Chaque école va alors, selon son réseau d'appartenance, suivre un programme d'étude qui est plus détaillé que le référentiel.

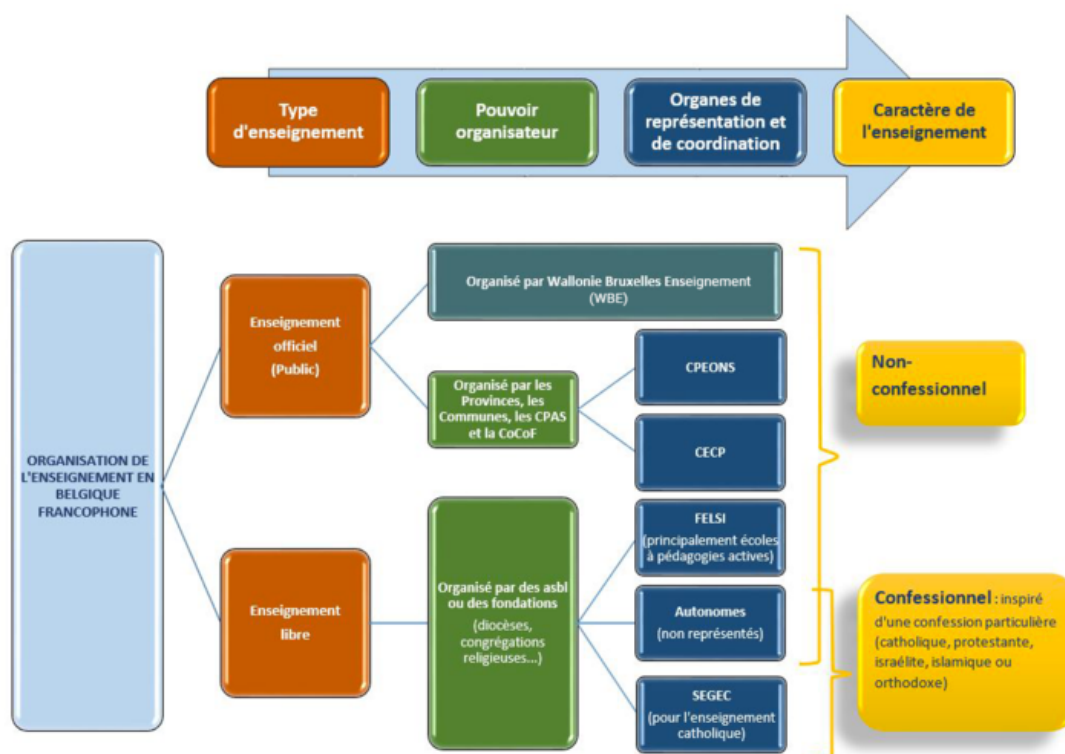


Figure 4.3 – Extrait de *L'organisation de l'enseignement en Wallonie et à Bruxelles* (Wallonie-Bruxelles Enseignement, 2026).

1. Wallonie-Bruxelles Enseignement définit le pouvoir organisateur ainsi : « Le pouvoir organisateur - en abrégé "PO" - d'un établissement d'enseignement est l'autorité, la ou les personne(s) physique(s) ou morale(s), publique(s) ou privée(s), qui en assume(nt) la responsabilité. C'est ce "PO" qui détermine notamment le choix des méthodes pédagogiques, le programme, l'engagement des enseignants, les valeurs principalement véhiculées, etc. » (Wallonie-Bruxelles Enseignement, 2026)

Dans ce mémoire, nous nous limiterons à la présentation du programme suivi par les élèves de cinquième secondaire ayant participé à l'expérimentation, à savoir celui du réseau officiel organisé par la Communauté française via Wallonie-Bruxelles Enseignement. Ce réseau propose en réalité trois orientations distinctes en mathématiques :

« Les unités d'acquis d'apprentissage du 2^e degré sont communes à tous les élèves. Celles du 3^e degré proposent trois orientations :

- les mathématiques de base, pour l'élève qui, outre le bénéfice apporté par cette forme de pensée, utilisera des mathématiques dans sa vie de "citoyen" ;*
- les mathématiques générales, pour l'élève qui, de plus, utilisera des mathématiques actives dans l'un ou l'autre domaine ;*
- les mathématiques pour scientifiques, pour l'élève qui oriente sa formation vers les sciences, la technologie, la recherche, domaines dans lesquels les mathématiques jouent un rôle essentiel. »*

(Fédération Wallonie-Bruxelles, 2014, p.6)

Les élèves ayant participé à l'expérimentation suivaient le programme d'étude "Mathématiques pour scientifiques" ; c'est donc ce dernier qui sera analysé dans la suite de ce chapitre.

4.4 Analyse du programme d'étude "Mathématiques pour scientifiques"

Dans cette section, nous allons analyser le programme d'étude "Mathématiques pour scientifiques" du réseau officiel organisé par la Communauté française (via Wallonie-Bruxelles Enseignement) pour les élèves du troisième degré. Celui-ci s'inscrit dans la période de la "Réforme des Compétences" car son écriture débute en 2014. La position vis-à-vis de la résolution de problèmes y est d'ailleurs explicitement mentionnée dans le programme d'étude et est en total accord avec la philosophie de cette période :

« 5. La place de la résolution de problèmes :

La compréhension et l'appropriation des notions mathématiques dépendent de l'activité de l'élève lors de situations créant problème. C'est alors qu'ils mobilisent des outils ou des techniques acquises, qu'ils élaborent de nouvelles stratégies et élargissent le champ de leurs connaissances.

Ces nouveaux programmes accordent beaucoup d'importance aux savoirs actifs et à la résolution de problèmes ; ils proposent donc un cadre propice à l'acquisition de compétences en mathématiques. » (FWB Enseignement, 2015a, p.7)

Le programme d'étude "Mathématiques pour scientifiques" a pour but de préciser les éléments repris par le référentiel, notamment en apportant des commentaires aux processus cités par ce dernier. Pour ce faire, il donne les compétences visées par l'UAA puis présente les objectifs et balises, le contexte, la situation d'apprentissage et les orientations méthodologiques :

« Les objectifs et balises exposent les buts poursuivis dans l'apprentissage des contenus et dans la mise en œuvre des processus de l'UAA. Ils précisent le domaine d'applicabilité de certaines ressources mais fixent également les limites à ne pas dépasser.

Le contexte établit les liens entre les apprentissages des années antérieures, ceux de l'année en cours ainsi que ceux des années qui suivent montrant ainsi une continuité et une progression spiralaire dans les apprentissages. Les liens entre UAA sont ainsi mis en évidence.

La situation d'apprentissage décrit le dispositif mis en place pour l'apprentissage.

La partie orientations méthodologiques reprend les ressources, les processus et les stratégies transversales du référentiel. Lorsque des informations, précisions et conseils sont nécessaires, ceux-ci sont explicitement détaillés. La pondération proposée, à titre indicatif, pour l'évaluation des processus a été établie en fonction des items repris sous les processus "connaître, appliquer et transférer". » (FWB Enseignement, 2015a, p.2)

Dans la suite, nous allons plus particulièrement nous intéresser à l'UAA consacrée aux limites, à la continuité et aux asymptotes, ainsi qu'à celle consacrée aux suites, car les élèves interrogés lors de l'expérimentation avaient déjà vu cette UAA. Dans ce travail, nous ne faisons pas d'analyse détaillée de tous les éléments présentés dans le programme d'étude, mais nous nous concentrons sur les éléments qui nous semblent les plus pertinents pour l'analyse des productions des élèves faite au chapitre 5, l'objectif étant d'apporter du relief et du recul à nos analyses.

4.4.1 UAA3 : Asymptotes, limites et continuité

Dans le référentiel des “Compétences terminales et savoirs requis”, voici ce qu’il est indiqué pour l’UAA consacrée aux limites, à la continuité et aux asymptotes :

Mathématiques pour scientifiques: 3 ^e degré de transition (5 ^e année)		
5S UAA3	Unité d'acquis d'apprentissage	Asymptotes, limites et continuité
Compétences à développer EXTRAIRE DES INFORMATIONS SUR CERTAINES PARTIES DU GRAPHIQUE D'UNE FONCTION À PARTIR DE SON EXPRESSION ANALYTIQUE S'APPROPRIER LE FORMALISME DE L'ANALYSE ARTICULER EXPRESSION ANALYTIQUE, REPRÉSENTATION GRAPHIQUE ET COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE D'UNE FONCTION		
Processus		Ressources
Appliquer - Déterminer, à partir de l'expression analytique d'une fonction, son domaine et les limites qui apportent des informations sur son graphique. - Calculer une limite et l'interpréter graphiquement - Traduire en termes de limites les comportements asymptotiques d'une fonction, à partir de son graphique - Rechercher l'équation d'une asymptote au graphique d'une fonction - Apparier des graphiques et des informations sur les limites et les asymptotes d'une fonction - Rechercher un zéro d'une fonction en utilisant la méthode de dichotomie - Utiliser le comportement asymptotique d'une fonction pour approcher sa valeur en un point	Transférer - Esquisser le graphique d'une fonction vérifiant certaines conditions sur les limites, la continuité et les asymptotes - Rechercher l'expression analytique d'une fonction répondant à certaines conditions relatives à ses limites et à ses asymptotes	Complétude de $\mathbb{R}$ Opérations sur les fonctions (y compris la composition) Adhérence du domaine d'une fonction Asymptotes et limites d'une fonction Limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient et de la composée de deux fonctions Continuité en un point Continuité sur un intervalle Fonction "Partie entière" Théorème des valeurs intermédiaires (sans démonstration)
Connaitre - Identifier dans l'expression analytique d'une fonction donnée les fonctions usuelles, les opérations et leur hiérarchie - Justifier les étapes d'un calcul de limite - Définir à l'aide des quantificateurs et illustrer graphiquement la limite d'une fonction (en un réel et en l'infini) - Définir la continuité d'une fonction - Montrer l'importance de l'hypothèse de continuité dans le théorème des valeurs intermédiaires - Donner un exemple de limite de fonction illustrant un cas d'indétermination		

Figure 4.4 – Extrait de *Compétences terminales et savoirs requis en mathématiques : Humanités générales et technologiques* (Fédération Wallonie-Bruxelles, 2014, p.51).

Stratégies transversales
Articuler les différents registres de représentation sémiotique d'un objet
Utiliser l'outil informatique
Prendre conscience de la diversité des outils et en choisir un de manière raisonnée
Respecter la rigueur de l'outil logique - Communiquer en respectant la syntaxe de la logique mathématique

Figure 4.5 – Extrait de *Compétences terminales et savoirs requis en mathématiques : Humanités générales et technologiques* (Fédération Wallonie-Bruxelles, 2014, p.52).

Le programme d'étude apporte des précisions supplémentaires et suggère notamment de consacrer 28 à 32 périodes de cours pour cette UAA et de la scinder en deux parties :

« Par exemple, la première concernerait les généralités sur les fonctions et les définitions relatives aux asymptotes, aux limites et à la continuité.

La seconde traiterait du calcul des limites et de la détermination des équations des asymptotes ainsi que du théorème des valeurs intermédiaires et de la méthode de dichotomie. » (FWB Enseignement, 2015a, p.22)

Il propose ensuite cette pondération pour l'évaluation sommative :

Processus	Connaitre	Appliquer	Transférer
Pourcentage (séquence 1)	50 %	40 %	10 %
Pourcentage (séquence 2)	10 %	60 %	30 %

Figure 4.6 – Extrait de *Programme d'études n° 470/2015/240 : Mathématiques pour les scientifiques* (FWB Enseignement, 2015a, p.27).

On peut donc constater que pour la première partie consacrée aux définitions, un poids important est accordé à l'axe "connaître" tandis que pour la deuxième partie, l'accent est mis sur l'axe "appliquer". Ceci renforce le raccourci souvent fait de placer les définitions dans la case "connaître" et les calculs dans la case "appliquer". Or, nous avons montré au chapitre 2 et 3 que la définition de limite donnée par Cauchy, ne se résume pas à une simple connaissance à acquérir, mais qu'elle est un outil permettant de réaliser des démonstrations et de résoudre, entre autres, des problèmes de détermination de grandeurs. Ce caractère d'"outil" a pourtant du mal à être perçu lorsque les définitions sont présentées comme des éléments à "connaître" tandis que les notions de la case "appliquer" vont plus vite être perçues comme des outils.

Ensuite, nous avons montré au chapitre 3 l'importance que revêt l'histoire de l'évolution du concept de limite dans notre MER de la notion de limite. Le feuilletage en deux niveaux praxéologiques que nous avons présenté peut servir de base à l'élaboration de projets d'enseignement, comme en témoignent les exemples tirés de l'ouvrage "Du calcul infinitésimal à l'analyse mathématique" de Schneider, Balhan, Gerard et Henrothay (2016). Les référentiels mentionnent d'ailleurs explicitement l'importance de l'histoire des concepts dans l'enseignement des mathématiques :

« Connaître le nom de quelques mathématiciens célèbres, la période à laquelle ils ont vécu et leur contribution fait partie intégrante du bagage humaniste de tout élève. La présentation de textes historiques aide à comprendre la genèse et l'évolution de certains concepts. » (Fédération Wallonie-Bruxelles, 2014, p.7)

Cependant, aucune place ne leur est laissée, ni dans le tableau exposé ci-dessus qui présente les processus et stratégies de cette UAA, ni dans le programme d'étude. On peut donc supposer que les enseignants qui vont se baser sur les tableaux des référentiels ou

sur le programme pour créer leurs notes de cours, vont passer à côté de cette dimension historique.

D'autre part, dans la case “connaître”, on voit apparaître une compétence relevant de la logique car il est indiqué :

« Définir à l'aide des quantificateurs et illustrer graphiquement la limite d'une fonction (en un réel et en l'infini) » (Fédération Wallonie-Bruzelles, 2014, p.51)

Le référentiel précise d'ailleurs que

« Les concepts et méthodes de la logique ne font pas l'objet d'un cours spécifique, mais prennent naturellement leur place dans la plupart des unités. » (Fédération Wallonie-Bruzelles, 2014, p.7)

Cependant, le programme n'apporte aucun détail supplémentaire sur la manière d'enseigner la logique². Il se contente simplement d'en rappeler l'importance dans les stratégies transversales :

« Respecter la rigueur de l'outil logique - Communiquer en respectant la syntaxe de la logique mathématique : dans la rédaction des définitions et démonstrations, l'utilisation adéquate des connecteurs logiques est indispensable ; dans le calcul des limites, le respect des conventions de notation s'impose. » (FWB Enseignement, 2015a, p.27)

Comme annoncé dans l'introduction, nous allons à présent mettre en avant la place laissée aux graphiques et aux tableaux de valeurs dans le programme. Le mot “graphique” (et son dérivé “graphiquement”) apparaît 22 fois dans le programme et le mot “tableau” apparaît une fois. On note donc une grande importance accordée aux graphiques dans l'enseignement de la notion de limite. De plus, la mention du “tableau de valeurs”, bien qu'unique, apparaît dans les stratégies transversales à pratiquer tout au long de l'UAA et est présentée au même titre que les graphiques et les expressions analytiques :

« Articuler les différents registres de représentation sémiotique d'un objet signifie, dans le cas présent, mettre en relation l'expression analytique, le graphique, un tableau de valeurs d'une même fonction. » (FWB Enseignement, 2015a, p.27)

Nous verrons dans la suite comment cela se traduit dans les manuels et notes de cours des enseignants et dans les activités proposées aux élèves.

2. Les référentiels et programmes mobilisent régulièrement les termes de “logique” ou de “logique mathématique”, mais sans toujours expliciter précisément les contenus visés. Dans les faits, il ne s'agit pas d'un apprentissage formel de la logique des prédicats tel qu'il pourrait être développé dans un cours universitaire de logique, mais plutôt d'une initiation à certaines de ses applications : usage des connecteurs logiques, manipulation des quantificateurs, compréhension d'implications ou d'équivalences, structuration de raisonnements, etc. C'est donc dans ce sens que nous utiliserons ces termes dans la suite de ce travail.

4.4.2 UAA2 : Suites

Nous nous intéressons à présent à l’UAA consacrée aux suites, car le cours sur les suites vu par les élèves avant de réaliser l’expérimentation a été rédigé sur base de cette UAA.

Dans le référentiel des “Compétences terminales et savoirs requis”, voici ce qui est indiqué pour l’UAA consacrée aux suites :

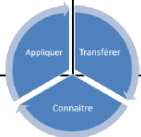
Mathématiques pour scientifiques: 3 ^e degré de transition (5 ^e année)		
5S UAA2	Unité d'acquis d'apprentissage	Suites
Compétences à développer MOBILISER LES PROPRIÉTÉS DES SUITES DANS DES SITUATIONS VARIÉES		
Processus		Ressources
Appliquer - Représenter graphiquement une suite - Trouver le terme général d'une suite - Rechercher un terme d'une suite - Conjecturer la limite d'une suite à l'aide d'un outil informatique - Vérifier la valeur de la limite d'une suite à l'aide de la définition - Déterminer la limite d'une suite arithmétique, géométrique - Calculer la somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique, géométrique - Calculer une somme infinie de termes consécutifs d'une suite géométrique - Trouver le taux, l'intérêt ou la durée d'un placement à intérêt simple ou à intérêt composé - Réaliser un tableau d'amortissement d'un prêt à l'aide de l'outil informatique	Transférer Résoudre un problème faisant intervenir des suites issues de différents contextes.	Suites - Définition en fonction du rang - Définition par récurrence - Limite d'une suite Suites arithmétiques, suites géométriques - Terme général - Somme des n premiers termes - Type de croissance - Convergence Intérêts simples, intérêts composés Tableau d'amortissement Somme infinie de termes d'une suite géométrique
 Connaître - Caractériser une suite de nombres: type de suite, type de croissance - Donner des exemples de suite convergente ou non convergente - Démontrer la formule donnant la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique, d'une suite géométrique - Générer une suite vérifiant certaines conditions - Définir la limite d'une suite et expliciter cette définition à l'aide d'un schéma		

Figure 4.7 – Extrait de *Compétences terminales et savoirs requis en mathématiques : Humanités générales et technologiques* (Fédération Wallonie-Bruxelles, 2014, p.49).

Stratégies transversales
Situer les apports mathématiques dans l'histoire et dans les différentes cultures Utiliser l'outil informatique Faire appel au raisonnement mathématique pour dépasser l'intuition Rédiger, argumenter, structurer, démontrer

Figure 4.8 – Extrait de *Compétences terminales et savoirs requis en mathématiques : Humanités générales et technologiques* (Fédération Wallonie-Bruxelles, 2014, p.50).

Le programme d’étude “Mathématiques pour scientifiques” suggère de consacrer 14 à 16 périodes de cours pour cette UAA et de la scinder en deux parties :

« La première traiterait des suites quelconques, des suites arithmétiques et géométriques. La seconde se focaliserait sur l'algèbre financière. »
(FWB Enseignement, 2015a, p.15)

La pondération proposée pour l'évaluation sommative est la suivante :

Processus	Connaitre	Appliquer	Transférer
Pourcentage s1	25 %	50%	25%
Pourcentage s2	0%	60%	40%

Figure 4.9 – Extrait de *Programme d'études n° 470/2015/240 : Mathématiques pour les scientifiques* (FWB Enseignement, 2015a, p.97).

On constate que la partie “connaitre” occupe une place très limitée dans cette UAA, l'accent étant principalement mis sur la partie “appliquer”. Par ailleurs, les 14 à 16 périodes paraissent relativement restreintes pour aborder la notion de suite, d'autant plus qu'une partie de ces périodes est consacrée à l'algèbre financière. Les suites y sont ainsi essentiellement mobilisées dans le cadre d'applications liées au domaine financier :

« Trouver le taux, l'intérêt ou la durée d'un placement à intérêt simple ou à intérêt composé.
Réaliser un tableau d'amortissement d'un prêt à l'aide de l'outil informatique » (FWB Enseignement, 2015a, p.19)

Pour cette séquence d'enseignement consacrée à l'algèbre financière, aucun élément n'est indiqué dans la partie “connaitre”, il est simplement mentionné que le vocabulaire financier sera “rencontré” :

« Les notions de taux mensuel, taux annuel, taux équivalents, annuités (constitution d'un capital et remboursement d'un emprunt), TAEG seront rencontrées et les calculs seront effectués à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice. » (FWB Enseignement, 2015a, p.18)

Il ressort de cette analyse que, dans l'UAA consacrée aux suites, peu de place est laissée à l'apprentissage des démonstrations. De plus, il n'est fait aucune mention de la logique mathématique dans cette UAA, hormis lors de la mention unique du mot “quantificateur” :

« L'élève doit donner la définition de la limite d'une suite à partir d'un schéma, l'exprimer par une phrase et la transcrire en langage mathématique à l'aide de quantificateurs » (FWB Enseignement, 2015a, p.18)

Cependant, aucune démonstration faisant intervenir la définition de la limite d'une suite et donc les quantificateurs n'est demandée dans les compétences à atteindre pour cette UAA. Ceci ne facilite donc pas l'apprentissage des définitions de limites de fonctions, bien qu'il soit indiqué dans le programme que, pour introduire celles-ci, la définition de la limite d'une suite peut être utilisée :

« Les définitions seront exprimées en français et aussi en termes de quantificateurs. Ces définitions se doivent d'être introduites progressivement à partir d'exemples. On pourra s'inspirer avantageusement de la définition de la limite d'une suite. » (FWB Enseignement, 2015a, p.24)

D'autre part, la représentation graphique revêt de nouveau une place importante dans l'enseignement de la définition de la limite d'une suite :

« La limite sera mise en évidence par une représentation graphique sur la droite des réels ou dans le plan. Cette représentation conduira aux définitions mathématiques des limites de suites $(+\infty, -\infty, \text{un réel})$. » (FWB Enseignement, 2015a, p.17)

Il ressort donc de l'analyse de ces deux UAA que les définitions de limites de fonctions et de suites sont présentées comme des éléments à "connaître" et que peu de place est laissée à l'apprentissage de la logique mathématique et à l'utilisation des définitions exprimées à l'aide de quantificateurs dans des démonstrations ou ailleurs. Or, comme nous l'avons expliqué au chapitre 3, la définition de limite donnée par Cauchy est un *proof-generated concept*, c'est-à-dire qu'elle est un outil permettant de réaliser des démonstrations. De plus, c'est cette définition qui a permis de fonder déductivement le *calculus* et de définir les notions de continuité, de dérivabilité et d'intégrabilité. Ainsi, selon notre MER de la notion de limite, l'apprentissage de cette définition doit se faire à travers des situations fondamentales qui s'inscrivent dans les praxéologies qui composent ce MER. Or, la place laissée à l'apprentissage de la définition de limite dans les référentiels et dans le programme d'étude ne semble pas favoriser la mise en place de telles situations.

4.5 Des programmes d'étude à leur mise en œuvre dans les manuels scolaires et notes de cours des enseignants

Durant ces deux années de travail sur le mémoire, j'ai eu l'occasion, au-delà de l'analyse des trois manuels présentés à la section 4.2, de parcourir les notes de cours d'enseignants de différentes écoles et de différents réseaux d'enseignement. J'ai ainsi pu constater que les chapitres dédiés à la notion de limite d'une fonction contiennent une grande quantité de graphiques et pour certains, un nombre non négligeable de tableaux de valeurs. Dans ce

mémoire, nous avons choisi de nous concentrer sur les tableaux de valeurs, dont l'utilisation est semblable dans les différents cours.

Voici un aperçu, très bref pour des raisons d'anonymat, des notes de cours que j'ai pu analyser :

	Province	Réseau d'enseignement	Nombre de tableaux de valeurs dans le chapitre consacré aux limites
1	Liège	Officiel organisé	1
2	Liège	Officiel organisé	10
3	Liège	Libre confessionnel	1
4	Liège	Libre confessionnel	32
5	Liège	Libre confessionnel	4
6	Liège	Libre confessionnel	1
7	Luxembourg	Libre confessionnel	1

Pour les cours ne présentant qu'un tableau de valeurs, il s'agit dans trois cas sur quatre d'un tableau de valeurs pour la fonction $\frac{\sin(x)}{x}$. On peut relier cette observation à la mention faite dans le programme d'étude concernant cette fonction, où il est précisé de considérer des suites de valeurs de x qui tendent vers 0 :

« À partir du graphique de la fonction $\frac{\sin(x)}{x}$ fourni par un logiciel et de suites de valeurs de x qui tendent vers 0, on peut faire découvrir l'existence d'une limite finie de cette fonction, alors qu'elle n'est pas définie en 0 [...]. » (FWB Enseignement, 2015a, p.23)

De plus, dans certains cours, les tableaux de valeurs ne sont pas directement intégrés dans les notes, mais sont réalisés en classe par les enseignants afin d'expliquer certaines notions, comme les limites à gauche et à droite, ou encore afin d'apporter une "preuve"³ à des élèves qui doutent de la valeur d'une limite.

Étant donné que dans le référentiel, une seule référence implicite aux tableaux de valeurs est faite, on peut se demander pourquoi certaines notes de cours des enseignants en contiennent tant dans leur chapitre consacré aux limites. Cela vient peut-être du fait que la mention est faite dans les stratégies transversales, pour lesquelles il est explicitement indiqué qu'il faut les travailler tout au long de l'UAA. Une autre hypothèse pourrait être que les enseignants se basent sur les manuels scolaires pour rédiger leurs notes de cours et si les manuels scolaires contiennent beaucoup de tableaux de valeurs, les enseignants vont naturellement en intégrer dans leurs notes de cours. C'est à cela que nous allons nous intéresser dans la section suivante, en analysant le manuel scolaire "CQFD Maths 5^e" destiné aux écoles de la Fédération Wallonie-Bruxelles.

3. Le mot "preuve" est placé entre guillemets, car un tableau de valeurs ne constitue en rien une preuve mathématique, mais c'est souvent comme cela qu'il apparaît aux yeux des élèves, à la suite de discours tels que "Tu vois bien là, on tend vers 5".

4.5.1 Analyse du manuel scolaire “CQFD Maths 5^e”

Dans le manuel scolaire “CQFD Maths 5^e”, 10 tableaux de valeurs apparaissent : 7 tableaux de valeurs de fonctions dans la partie “exploration” au début du chapitre consacré aux limites, 2 tableaux dans la partie “synthèse” et un tableau dans la partie exercice (Annoye et Van Eerdenbrugghe, 2013). De plus, il est demandé une fois de dresser un tableau de valeurs dans une des activités d’exploration et le premier exercice du chapitre demande explicitement d’en construire :

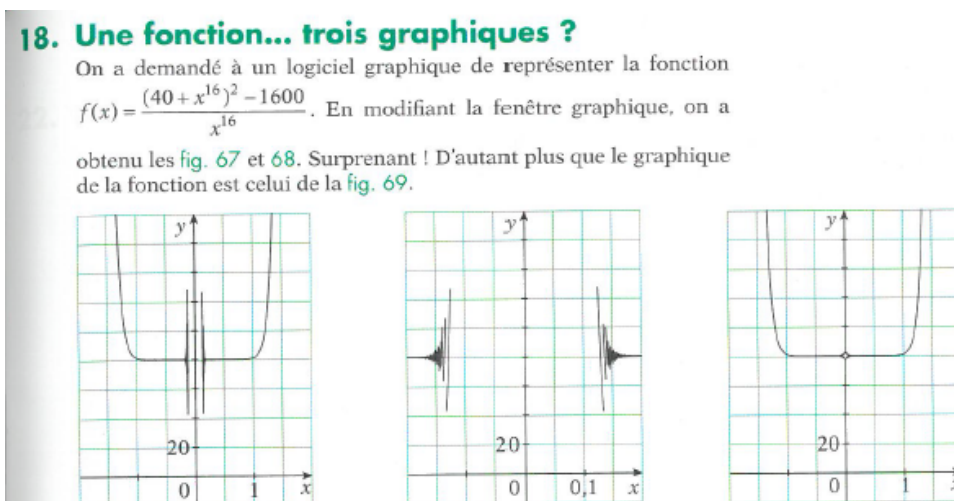
Tableaux de valeurs

Retrouver les limites suivantes à l’aide d’un tableau de valeurs.

a. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{5x-6}{x-2} = -\infty$	c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{(x+1)^2} = 0$
b. $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{3x}{(x+1)^2} = -\infty$	d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3}{(x+1)^3} = 3$

Figure 4.10 – Extrait de *CQFD Maths 5^e : manuel : 6 périodes/semaine* (Annoye et Van Eerdenbrugghe, 2013, p.130).

Il est intéressant de noter que dans les exercices, il est rarement demandé aux élèves de dresser des tableaux de valeurs de fonctions. Dans les notes de cours que j’ai analysées, aucun tableau de valeurs n’est indiqué ni demandé dans les exercices. Dans le manuel CQFD, il y a 22 exercices. Dans le premier, il est demandé de dresser des tableaux de valeurs, puis il n’en est plus fait mention avant le 18^e exercice, qui met en évidence qu’un tableau de valeurs peut être trompeur et qu’il peut nous amener à conjecturer une mauvaise limite :



- a. Utiliser la calculatrice pour compléter le tableau suivant et, d'après celui-ci, estimer la valeur de $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

x	Valeur approchée de $f(x)$	x	Valeur approchée de $f(x)$
0,6		- 0,6	
0,5		- 0,5	
0,4		- 0,4	
0,3		- 0,3	
0,2		- 0,2	
0,1		- 0,1	
0,01		- 0,01	

- b. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Quel est le résultat correct : celui qui vient d'être calculé, ou celui obtenu à partir du tableau ?

Figure 4.11 – Extrait de *CQFD Maths 5^e : manuel : 6 périodes/semaine* (Annoye et Van Eerdenbrugghe, 2013, p.143).

Le chapitre se finit donc sur une sorte de mise en garde contre les tableaux de valeurs, alors que tout le début du chapitre et certaines parties de théories ont été construites ou expliquées à l'aide de ces tableaux. Pour les élèves, un seul exercice sur 22, en fin de chapitre dans la section “résoudre un problème”, ne fait pas le poids face à l'utilisation massive des tableaux de valeurs au début du chapitre. Par ailleurs, à la suite de nombreuses discussions avec différents enseignants, il est souvent ressorti que ceux-ci n'avaient jamais le temps de voir tous les chapitres au complet, qu'ils devaient faire des choix dans les exercices proposés aux élèves et que leurs choix se portent souvent sur les exercices dits “de base” ou “essentiels”. Dans le cas du chapitre sur les limites, il s'agit par exemple d'exercices de calcul de limites à partir d'expressions analytiques, pour lesquels il faut appliquer des méthodes de calcul présentées en théorie. Un exercice tel que le 18^e exercice du manuel CQFD, qui met en garde contre les tableaux de valeurs, risque donc d'être laissé de côté, si du moins il est même présent dans les notes de cours des enseignants. Tout ceci pose malgré tout question. Pourquoi le manuel CQFD use-t-il autant des tableaux de valeurs pour introduire la notion de limite s'ils sont conscients, au vu de l'exercice 18, que les tableaux ne sont pas des outils fiables pour conjecturer la valeur d'une limite ? Une tentative de réponse est donnée à la fin de ce travail dans les pistes de réflexion.

Les tableaux de valeurs présents dans les notes de cours des enseignants sont semblables à ceux proposés dans le manuel scolaire CQFD. Voici les deux formes de tableaux de valeurs que l'on trouve dans le manuel :

x ($x < 0$)	$\frac{1}{x^3}$	x ($x > 0$)	$\frac{1}{x^3}$
-0,1		0,1	
-0,01		0,01	
-0,001		0,001	
-0,0001		0,0001	
-0,00001		0,00001	
-0,000001		0,000001	
...		...	
↓	↓	↓	↓
0^-		0^+	

Figure 4.12 – Extrait de *CQFD Maths 5^e : manuel : 6 périodes/semaine* (Annoye et Van Eerdenbrugghe, 2013, p.93).

x	$f(x)$	Nombre d'abonnés	Augmentation du nombre d'abonnés
1	4,75	475	
2	5,17	517	42
3			
4			
...			
...			

Figure 4.13 – Extrait de *CQFD Maths 5^e : manuel : 6 périodes/semaine* (Annoye et Van Eerdenbrugghe, 2013, p.105).

Les activités d'introduction utilisant ces tableaux de valeurs demandent explicitement aux élèves de déterminer la valeur de la limite d'une fonction à partir de ces tableaux :

- b.** Pour étudier empiriquement le comportement d'une fonction à proximité d'un réel qui n'appartient pas au domaine de définition, on peut procéder comme suit : si cela est possible, on construit une ou plusieurs suites de valeurs de x , appartenant au domaine et tendant vers ce réel, et on observe la suite de leurs images. On revient alors au problème de la limite d'une suite.

Compléter les tableaux ci-dessous (👉 [tab. 1](#) et [tab. 2](#)).

x ($x > 0$)	$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	x ($x < 0$)	$f_2(x) = \frac{1}{x^2}$	x ($x > 0$)	$f_2(x) = \frac{1}{x^2}$
0,1		-0,1		0,1	
0,01		-0,01		0,01	
0,001		-0,001		0,001	
0,0001		-0,0001		0,0001	
0,00001		-0,00001		0,00001	
0,000001		-0,000001		0,000001	
...		...		...	
↓	↓	↓	↓	↓	↓
0		0		0	

Figure 4.14 – Extrait de *CQFD Maths 5^e : manuel : 6 périodes/semaine* (Annoye et Van Eerdenbrugghe, 2013, p.93).

Ensuite, dans la synthèse, il est expliqué que cette méthode permet de trouver la valeur d'une limite :

Pour découvrir $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, on peut déterminer des suites de valeurs de x appartenant à $\text{dom } f$ qui convergent vers le réel a et examiner la suite de leurs images.

On peut construire

- une suite de réels appartenant à $\text{dom } f$ **inférieurs** à a ($x \rightarrow a^-$) dont le terme d'indice n est $a - \frac{1}{10^n}$,
- une suite de réels appartenant à $\text{dom } f$ **supérieurs** à a ($x \rightarrow a^+$) dont le terme d'indice n est $a + \frac{1}{10^n}$

et pour chacune de ces suites on observe la suite des images par f correspondantes.

Exemple

Soit $f(x) = \frac{2x-5}{(x-1)^2}$; $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

x ($x < 1$)	$\frac{2x-5}{(x-1)^2}$	x ($x > 1$)	$\frac{2x-5}{(x-1)^2}$
0,9	-320	1,1	-280
0,99	-30 200	1,01	-29 800
0,999	-3 002 000	1,001	-2 998 000
0,9999	-300 020 000	1,0001	-299 980 000
...	...	...	...
↓	↓	↓	↓
1^-	$-\infty$	1^+	$-\infty$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-5}{(x-1)^2} = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-5}{(x-1)^2} = -\infty$

Figure 4.15 – Extrait de *CQFD Maths 5^e : manuel : 6 périodes/semaine* (Annoye et Van Eerdenbrugghe, 2013, p.107).

3. Comment découvrir la limite d'une fonction en l'infini ?

Pour découvrir

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, on peut construire une suite de puissances de 10 et observer la suite de leurs images ;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, on peut construire une suite d'opposés de puissances de 10 et observer la suite de leurs images.

Pour des fonctions simples, cela permet généralement de trouver aisément la valeur d'une telle limite.

Figure 4.16 – Extrait de *CQFD Maths 5^e : manuel : 6 périodes/semaine* (Annoye et Van Eerdenbrugghe, 2013, p.109).

Utiliser les tableaux de valeurs pour introduire la notion de limite est une chose ; justifier cette méthode dans la partie consacrée à la théorie des limites en est une autre. En effet, les tableaux de valeurs ne permettent jamais de conclure sur la limite d'une fonction. D'une part, les valeurs figurant dans un tableau sont en nombre fini et il n'est donc pas possible de déterminer si les suites de valeurs qui y apparaissent convergent. D'autre part, même en supposant qu'on dispose d'un nombre infini de valeurs, examiner la convergence d'une ou de deux suites de valeurs pour x qui tend vers une valeur a ne permet pas de conclure sur la limite de la fonction en a . Il est nécessaire d'étudier la convergence via la fonction de toutes les suites convergentes vers a . La méthode théorique proposée par le manuel va donc à l'encontre des propriétés mathématiques du savoir "limite". Une remarque est tout de même faite dans le manuel à ce propos mais elle est incomplète au vu de ce que l'on vient d'expliquer :

« Le choix des suites de réels appartenant au domaine de définition de la fonction est arbitraire. Des choix de suites différentes amènent parfois des résultats différents. En tel cas, aucun de ces résultats n'est la limite de la fonction pour x tendant vers a . Il est donc nécessaire de construire une définition rigoureuse de la limite [...]. » (Annoye et Van Eerdenbrugghe, 2013, p.108)

Enfin, nous avons souhaité analyser deux manuels CQFD plus récents, celui de 2016 et celui de 2017 (la deuxième édition imprimée en 2022), afin d'examiner si les tableaux de valeurs y sont toujours présents et s'ils sont utilisés de la même manière. Notre analyse a révélé que 13 tableaux de valeurs sont présents dans ces deux manuels, soit plus que dans le manuel de 2013. De plus, une activité d'exploration et le même exercice que dans le manuel de 2013 demandent explicitement aux élèves de dresser un tableau de valeurs pour déterminer la valeur d'une limite. Les tableaux de valeurs occupent donc la même place dans les manuels CQFD imprimés entre 2013 et 2022. De légers éléments ont été modifiés d'un manuel à l'autre, mais les activités exploratoires, les synthèses et les exercices

restent globalement les mêmes⁴. Il y a cependant une légère modification qui a attiré notre attention. Dans le manuel de 2013, dans la partie consacrée à la théorie, comme nous pouvons le voir sur la figure 4.15, il est indiqué ceci :

« Pour découvrir $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, on peut déterminer des suites de valeurs de x appartenant à $\text{dom } f$ qui convergent vers le réel a et examiner la suite de leurs images. » (Annoye et Van Eerdenbrugghe, 2013, p.107)

Or, dans les manuels de 2016 et 2017, le déterminant “des” est devenu “une” :

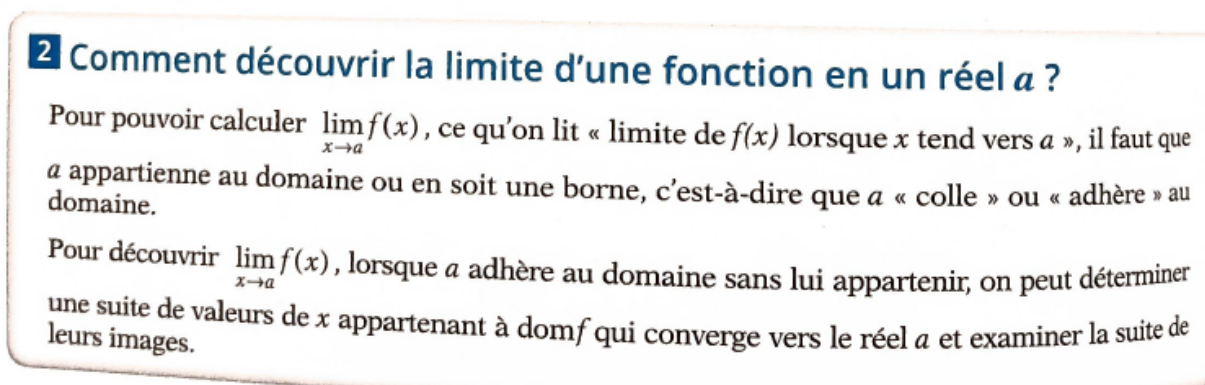


Figure 4.17 – Extrait de *CQFD Maths 5^e : manuel : 4 périodes/semaine* (Van Eerdenbrugghe et al., 2017, p.144).

Dans ce manuel, la remarque qui était faite dans la version de 2013 n'apparaît pas. En remplaçant “des” par “une”, cela ne laisse plus la possibilité de rendre compte que des choix de suites différents peuvent mener à des résultats différents. Cette différence peut être due à un choix des auteurs lors de la réécriture du manuel de 2013, à la suite de l'entrée en vigueur en 2015 des nouveaux référentiels de compétences terminales. Elle peut aussi s'expliquer par le choix de retirer cette remarque du manuel destiné aux élèves ayant quatre périodes de mathématiques par semaine. En effet, le manuel analysé de 2013 est destiné à des élèves ayant six périodes par semaine tandis que les manuels de 2016 et 2017 sont destinés à des élèves ayant quatre périodes par semaine. Malheureusement, nous ne disposons pas des manuels destinés aux élèves ayant six périodes de mathématiques par semaine pour les années 2016 et 2017 afin de vérifier si la remarque est présente ou non dans ces manuels. Quoi qu'il en soit, que la remarque soit présente ou non, les deux formulations dont nous rendons compte sont incorrectes au vu de ce que nous avons expliqué précédemment.

De plus, les activités d'exploration de ces manuels constituent les premières rencontres des élèves avec les définitions et propriétés des limites de fonctions. Rappelons que Chevallard (1998) présente deux types de rencontre : la rencontre culturelle-mimétique et la

4. Étant donné cette forte similitude entre les trois manuels, nous avons choisi de présenter le manuel de 2016 à l'annexe C. Le lecteur intéressé pourra y retrouver les éléments discutés dans ce chapitre et acquérir une vision plus globale de la manière dont la notion de limite est abordée dans ces manuels.

rencontre en situation. Les activités d'explorations des manuels CQFD ne correspondent pas à une rencontre en situation puisqu'elles ne sont pas des situations fondamentales au sens de la Théorie des Situations Didactiques. En effet, les activités ne sont pas dévolues aux élèves car elles sont divisées en sous-tâches qui orientent les élèves vers une réponse attendue. Cette démarche n'est pas celle d'une situation fondamentale, car la notion de limite n'apparaît pas comme la solution "optimale" à un ensemble de problèmes mais plutôt comme l'aboutissement d'un cheminement fortement orienté par l'activité proposée. De plus, les activités d'exploration proposées ne relèvent d'aucune praxéologie qui constitue notre MER de la notion de limite présenté au chapitre 3. En effet, au regard de notre MER, la notion de limite a d'abord permis de résoudre des problèmes de détermination de grandeurs tels que des calculs d'aires, de volumes et de vitesses. Ensuite, après l'entreprise de formalisation menée par Cauchy, elle a servi d'outil pour réaliser des démonstrations et a servi de fondation à l'élaboration des résultats d'analyse. Or, ces deux aspects ne ressortent pas des activités d'exploration proposées dans les manuels CQFD. Ces activités correspondent plutôt à une rencontre culturelle-mimétique au sens de Chevallard. Pour en rendre compte, nous allons analyser les activités 1, 2 et 4 du manuel CQFD de 2016, que vous pouvez retrouver aux pages 136-139 du manuel présenté dans l'annexe C.

D'une part, leur caractère culturel tient au fait que les pratiques proposées, telles que compléter des tableaux de valeurs, observer des comportements numériques ou graphiques, ou conjecturer une limite à partir d'un tableau ou d'un graphique, ne sont pas spécifiques à CQFD. Elles se retrouvent dans d'autres manuels tels que "Espace Math" (Adam et Loisberg, 2007) mais également dans les pratiques ordinaires de classe, comme nous avons pu l'observer durant nos heures passives et actives dans l'enseignement secondaire ainsi qu'à travers l'analyse des notes de cours. De plus, l'utilisation des graphiques et des tableaux fait partie des attendus des programmes, et pas uniquement dans les deux UAA que nous avons analysées, mais également dans d'autres UAA telles que l'UAA "Dérivée", ou encore l'UAA "Probabilités" (FWB Enseignement, 2015a).

D'autre part, ces activités présentent un caractère mimétique, dans la mesure où elles demandent essentiellement de reproduire un procédé déjà observé. Ainsi, dans l'activité 1, le point *b*) consiste à construire des suites convergeant vers un réel donné après avoir, au point *a*), identifié vers quels réels convergent plusieurs suites proposées : l'élève est alors conduit à imiter le schéma précédemment rencontré et n'est pas amené à se demander ce que signifie réellement la convergence. Le même phénomène apparaît dans les autres activités, où les sous-tâches guident progressivement vers la réponse attendue. Dans l'activité 2, l'élève doit compléter un tableau de valeurs, observer le comportement des images et en déduire une limite ; l'activité 4 reprend ensuite la même démarche dans le cas où x tend vers l'infini, invitant essentiellement à reproduire les observations et les raisonnements déjà effectués. La structure même des tâches favorise donc une logique d'imitation de procédures plutôt qu'une véritable problématisation de la notion de limite. En ce sens, ces activités illustrent ce que Chevallard décrit comme une possible dégradation de la rencontre culturelle-mimétique en "parodie de la pratique" : l'élève mime l'activité de l'enseignant sans que soient nécessairement explicitées les raisons mathématiques qui fondent ces pratiques. Dès lors, l'usage des tableaux de valeurs peut conduire à une compréhension essentiellement

procédurale et superficielle de la notion de limite, où la réussite de la tâche ne garantit pas l'appropriation effective du concept.

Enfin, le nombre de notes de cours auxquelles j'ai eu accès ne permet pas de tirer des conclusions statistiques générales sur l'utilisation des tableaux de valeurs dans l'enseignement de la notion de limite en cinquième secondaire en Fédération Wallonie-Bruxelles. Néanmoins, les documents analysés fournissent malgré tout une indication crédible de combien cette pratique est répandue. En effet, les tableaux de valeurs observés dans les notes de cours des enseignants présentent de fortes similitudes avec ceux proposés dans les manuels scolaires (Annoye et Van Eerdenbrugghe, 2013 ; Adam et Loisberg, 2007). Or, il est bien connu que ces manuels sont utilisés, soit tel quels dans certaines écoles, soit dans d'autres, les enseignants s'en inspirent pour élaborer leurs propres supports de cours. Nous savons d'ailleurs qu'au moins deux des cours auxquels nous avons eu accès ont été construits à partir du manuel CQFD.

Bien que nous ne disposions pas de données précises concernant le nombre d'écoles utilisant ces manuels ou s'en inspirant en Fédération Wallonie-Bruxelles, ces éléments tendent à montrer que l'usage des tableaux de valeurs constitue une pratique courante. Tant que de telles approches continueront d'être présentes dans les manuels scolaires, il est probable qu'elles se retrouvent également dans les notes de cours de nombreux enseignants. Une étude statistique à plus grande échelle pourrait toutefois être intéressante afin de mieux mesurer l'ampleur réelle de cette pratique.

4.6 Synthèse

À la suite de ces analyses, il apparaît que les tableaux de valeurs de fonctions prennent une place non négligeable dans l'enseignement de la notion de limite en cinquième secondaire en Fédération Wallonie-Bruxelles. Présents dans les manuels scolaires depuis les années 1980, ils sont majoritairement utilisés de manière "locale" : pour introduire de nouvelles notions, pour conjecturer la valeur d'une limite, conjecturer certaines propriétés ou encore fournir une "preuve" à des élèves qui doutent de la valeur d'une limite. Les tableaux de valeurs représentent ainsi souvent la première rencontre des élèves avec la notion de limite et ces rencontres relèvent souvent d'une approche culturelle-mimétique au sens de Chevallard. Les élèves sont alors amenés à reproduire certaines techniques sans que les fondements mathématiques qui les justifient soient véritablement mis en évidence. L'usage des tableaux de valeurs risque ainsi d'installer un rapport essentiellement opératoire à la notion de limite, dans lequel la réussite des tâches proposées ne garantit pas une compréhension approfondie du concept. Ce type de première rencontre ne s'inscrit donc pas dans le MER de la notion de limite que nous avons présenté.

Par ailleurs, l'analyse des référentiels, des programmes et des ressources d'enseignement montre que les définitions de limites de fonctions et de suites sont principalement présentées comme des éléments à "connaître". Peu de place est laissée à l'apprentissage de la logique mathématique et à l'utilisation des définitions formulées à l'aide de quantificateurs dans

des démonstrations. Or, puisque la définition de limite apparaît essentiellement comme un attendu parmi d'autres dans les parties consacrées aux savoirs à “connaître” et qu'elle n'est pratiquement pas mobilisée dans les parties “appliquer” et “transférer”, elle n'est jamais réellement retravaillée comme une technique de démonstration. Les raisons d'être du critère en $\varepsilon - \delta$ tendent alors à disparaître. Ainsi, la place accordée à l'apprentissage de la définition de limite dans les référentiels et les programmes ne semble pas favoriser la mise en œuvre de situations fondamentales permettant aux élèves d'en construire le sens au sein des praxéologies décrites dans notre MER de la notion de limite.

Nous avons dès lors mis en place une expérimentation dans une classe de cinquième secondaire afin d'étudier le rapport que les élèves entretiennent avec les tableaux de valeurs de fonctions. Cette expérimentation est présentée au chapitre 5. Nous finissons ce chapitre par une analyse du dossier sur les suites vu par les élèves quelques mois avant l'expérimentation.

4.7 Analyse du dossier sur les suites étudié par les élèves ayant participé à l'expérimentation

Nous allons à présent nous intéresser en détail au dossier sur les suites enseigné aux élèves de cinquième secondaire quelques mois avant l'expérimentation menée dans leur classe fin janvier 2026. Cette analyse est pertinente car le chapitre des suites est un prérequis au chapitre des limites de fonctions, et il nous permet donc de mettre en évidence les connaissances antérieures des élèves qui peuvent impacter leurs productions lors de l'expérimentation. De plus, les tableaux de valeurs repris dans l'expérimentation contiennent chacun deux suites et le chapitre des suites constitue leur seule et unique rencontre avec une définition de limite au sens des mathématiciens. Bien sûr, le chapitre des suites n'est pas le seul pertinent pour l'analyse des productions des élèves lors de l'expérimentation. Tout leur bagage mathématique acquis depuis leur plus jeune âge intervient dans leurs réflexions, mais il serait utopique de vouloir analyser tous les éléments de ce bagage au sein d'un seul mémoire.

Le dossier sur les suites que nous analysons est destiné à des élèves ayant deux, quatre ou six périodes de mathématiques par semaine. Les notions supplémentaires, destinées aux élèves suivant un cours de mathématiques à six périodes hebdomadaires, sont précédées d'une étoile. (Haine et Moitroux, 2025a).

Le chapitre 1 du fascicule constitue une introduction à la notion de suite numérique. Il est constitué de trois activités exploratoires portant sur des sujets variés, tels que la détermination du meilleur contrat d'assurance, les suites de formes géométriques fabriquées avec des allumettes, ou encore une anecdote sur le mathématicien Gauss. En classe, l'enseignant a profité de ces activités pour présenter le symbole sommatoire, quelques propriétés de ce dernier et la somme bien connue des n premiers naturels.

Le chapitre 2 est intitulé “Suites arithmétiques et géométriques” et débute avec deux définitions distinctes d’une suite numérique :

- Une *suite numérique* (u_n) est une liste ordonnée de réels notés u_o (éventuellement), $u_1, u_2, \dots, u_n \dots$. Les éléments de la liste sont appelés *termes*.
 u_n est appelé *terme général* de la suite.

- $(\star)$ Une *suite numérique* est une fonction définie sur $\mathbb{N}_0$ (ou $\mathbb{N}$) qui prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$.

La variable utilisée est n et le terme u_n ou $u(n)$ désigne l’image de n par la fonction.

Figure 4.18 – Extrait du fascicule de cours *Algèbre – Les suites* (Haine et Moitroux, 2025a, p.7).

La deuxième définition, dite “plus rigoureuse d’un point de vue mathématique” a donc été enseignée aux élèves qui participent à l’expérimentation étant donné qu’ils ont six périodes de mathématiques par semaine.

Ensuite, différents modes de génération d’une suite sont présentés, accompagnés d’un exemple et de quelques remarques. En classe, ces modes de génération ont été étudiés et un exercice consistant à écrire les premiers termes d’une suite définie par une relation de récurrence a été réalisé.

À la deuxième page du chapitre commence la section consacrée aux suites arithmétiques. Voici la définition qui est donnée :

- Une suite (u_n) est *arithmétique* si chaque terme (à partir du deuxième) est égal au précédent augmenté du même nombre r qui est appelé *raison* :

$$u_n = u_{n-1} + r, \text{ pour tout entier } n > 1 \text{ (ou } 2 \text{)}.$$

On pourrait aussi formuler cette définition autrement :

Une suite (u_n) est *arithmétique* de raison r si la différence entre deux termes consécutifs est égal à un réel r indépendant de n .

Figure 4.19 – Extrait du fascicule de cours *Algèbre – Les suites* (Haine et Moitroux, 2025a, p.8).

Ensuite, trois propriétés sont énoncées, dont les deux dernières sont destinées uniquement aux élèves ayant six périodes de mathématiques par semaine :

1. Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r ,
alors le terme d'indice n ($n \geq 1$) vaut

$$u_n = u_1 + (n - 1)r.$$
2. (*) Si u_n est une fonction du premier degré de n , alors (u_n) est une suite arithmétique
3. (*) Une suite est arithmétique ssi chaque terme est la moyenne arithmétique du terme qui le précède et du terme qui le suit.

Figure 4.20 – Extrait du fascicule de cours *Algèbre – Les suites* (Haine et Moitroux, 2025a, p.9).

Le chapitre se poursuit avec la propriété sur la valeur de la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique :

La somme des n premiers termes de la suite arithmétique (u_n) vaut

$$S_n = u_1 + \dots + u_n = \sum_{i=1}^n u_i = n \frac{u_1 + u_n}{2}, n \geq 1.$$

Figure 4.21 – Extrait du fascicule de cours *Algèbre – Les suites* (Haine et Moitroux, 2025a, p.10).

Toutes les propriétés ont été démontrées. Pour ce faire, les élèves ont appris à établir des équivalences en s'appuyant sur des outils élémentaires de logique mathématique. Plus précisément, ils ont été amenés à structurer leurs démonstrations en distinguant deux implications : d'une part, la condition nécessaire (montrer que $P \Rightarrow Q$), et d'autre part, la réciproque (montrer que $Q \Rightarrow P$). Cette démarche permet de conclure à une équivalence logique entre les deux propositions ($P \Leftrightarrow Q$). Les élèves ont également appris à faire des démonstrations par récurrence. De plus, chaque démonstration a été structurée de manière à indiquer clairement les "hypothèses", la "thèse" et ensuite la "démonstration".

En classe, six exercices sur les suites arithmétiques ont été réalisés et pour chacun d'entre eux, l'enseignant a structuré la démarche en indiquant clairement les "données", les "inconnues" et ensuite la "résolution".

Après quatre pages consacrées aux suites arithmétiques, le chapitre continue avec les suites géométriques, dont la définition donnée est la suivante :

- Une suite (u_n) est *géométrique* si chaque terme (à partir du deuxième) est égal au précédent multiplié par le même réel **non nul** q appelé raison :

$$u_n = u_{n-1} \cdot q, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \text{ (ou 1)}$$

sachant que le premier terme est non nul.

On pourrait aussi formuler cette définition autrement :

Une suite (u_n) est *géométrique* de raison $q \neq 0$

si le quotient de deux termes consécutifs est un réel q indépendant de n .

Figure 4.22 – Extrait du fascicule de cours *Algèbre – Les suites* (Haine et Moitroux, 2025a, p.12).

Les équivalents des quatre propriétés énoncées pour les suites arithmétiques sont ensuite présentés et démontrés, avec la même structure “hypothèses-thèse-démo” et les mêmes distinctions selon le nombre de périodes de mathématiques par semaine.

Sept exercices sur les suites géométriques ont été réalisés en classe avec la même structuration que pour les suites arithmétiques. Après deux exercices, l’enseignant a défini la racine n -ième d’un nombre réel et a présenté les propriétés de celle-ci. Ensuite, un exercice sur les suites arithmétiques et un exercice faisant intervenir la somme des n premiers naturels vue dans l’introduction du chapitre sont réalisés en classe. Pour finir cette section, quatre suites célèbres sont présentées.

La section 4 du chapitre est consacrée à l’étude de la convergence de suites. Une introduction à la notion de limite de suite est faite à l’aide d’un logiciel qui permet de faire des représentations graphiques de suites. La théorie suivante est alors présentée aux élèves :

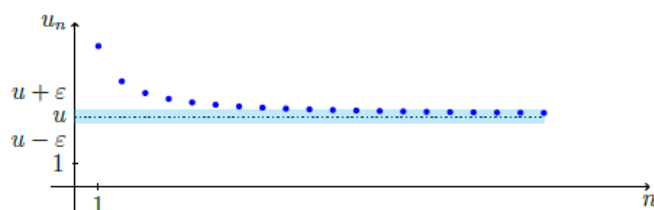
b) Convergence vers un réel u

Définitions

La suite (u_n) converge vers le nombre réel u si,

quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe un naturel M tel que $u - \varepsilon < u_n < u + \varepsilon$ ou encore $|u_n - u| < \varepsilon$ pour tout $n \geq M$.

Le nombre u est appelé *limite* de la suite (u_n) . On note $u_n \rightarrow u$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u$.

FIGURE II.6 – La suite (u_n) converge vers u

c) Convergence vers l'infini

Définitions

- La suite (u_n) tend vers $+\infty$ si, quelque soit $N > 0$, il existe un naturel M tel que $u_n > N$ pour tout $n \geq M$. On note $u_n \rightarrow +\infty$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- La suite (u_n) tend vers $-\infty$ si, quelque soit $N > 0$, il existe un naturel M tel que $u_n < -N$ pour tout $n \geq M$. On note $u_n \rightarrow -\infty$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

d) Remarques

- La limite d'une suite est unique.
- Toutes les suites n'ont nécessairement pas de limite.

Figure 4.23 – Extrait du fascicule de cours *Algèbre – Les suites* (Haine et Moitroux, 2025a, p.17).

Ensuite, le cas de la limite d'une suite géométrique vers un réel ainsi que celui de la limite de la somme des n premiers termes d'une suite géométrique sont étudiés. De plus, six exercices faisant intervenir le calcul d'une limite de la somme des n premiers termes d'une suite géométrique ont été réalisés en classe. Pour l'un d'eux, un rappel du périmètre du cercle a été fait et l'enseignant a introduit et défini le radian.

La suite du chapitre est consacrée à douze pages de séries d'exercices permettant aux élèves de s'entraîner de manière autonome ; les solutions sont proposées à la suite afin qu'ils puissent vérifier leurs réponses.

Pour finir, le chapitre 3 est consacré aux mathématiques financières et s'étend sur 18 pages. En classe, 24 exercices de ce chapitre ont été réalisés.

Le programme d'étude consacré à l'UAA portant sur les suites prévoyait entre 14 et 16 périodes, un volume horaire relativement restreint lorsqu'on voit la place importante qu'occupe la partie sur les mathématiques financières. Cela laisse ainsi peu de temps pour

l'apprentissage des suites numériques, des suites arithmétiques et géométriques, de leurs propriétés et de la notion de limite de suite. En outre, les réalités du terrain montrent que les enseignants ne peuvent se restreindre strictement aux contenus prévus par le référentiel et le programme d'étude. Dans le cours sur les suites que nous venons d'analyser, l'enseignant a introduit des éléments qui ne sont pas prévus dans le référentiel et le programme d'étude tels que le symbole sommatoire, la structuration des démonstrations, des méthodes de démonstration telles que les démonstrations par récurrence, la structuration des résolutions d'exercices en indiquant les données, les inconnues et la résolution, la définition et les propriétés de la racine n -ième d'un nombre réel ou encore le radian. Cependant, on voit difficilement comment l'on pourrait se passer de certaines de ces notions élémentaires en mathématiques. Certes, le programme prévoit uniquement de faire la démonstration de la formule donnant la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique et d'une suite géométrique. Toutefois, il paraît difficile d'envisager que les élèves puissent apprendre à démontrer sans être initiés à la structuration d'une démonstration ainsi qu'aux méthodes classiques de preuve, telles que le raisonnement par récurrence ou la démonstration d'une équivalence. De plus, le programme spécifie explicitement que la logique doit être travaillée à travers les différentes UAA et l'apprentissage, par exemple, de l'assertion logique " $P \Leftrightarrow Q$ " rentre complètement dans cet objectif. Tous ces éléments ne sont donc pas explicitement mentionnés dans les référentiels et les programmes, mais occupent une part non négligeable du temps consacré aux UAA.

On comprend dès lors pourquoi les enseignants sont parfois amenés à effectuer des choix et à traiter certaines notions plus rapidement. Il apparaît en effet impossible d'aborder l'ensemble des contenus de manière détaillée et approfondie. Ces choix doivent donc être opérés de façon réfléchie, en tenant compte notamment de l'importance de certaines notions pour la suite du cursus mathématique des élèves.

À la suite de toutes ces analyses, nous pouvons maintenant nous intéresser à l'expérimentation vécue par des élèves de cette classe et analyser les productions de ces élèves au regard de leurs connaissances antérieures sur les suites et les limites de suites.

Chapitre 5

Le rapport des élèves à la notion de limite : analyse d'une expérimentation menée en milieu scolaire

5.1 Avant-propos

Nous tenons avant tout à préciser que les intentions de ce chapitre ne sont ni de critiquer les pratiques enseignantes, ni de porter un jugement sur les enseignants ou les élèves concernés par l'expérimentation. Nous sommes conscients que les pratiques enseignantes sont influencées par de nombreux facteurs : référentiels officiels, manuels scolaires, contraintes temporelles, attentes institutionnelles, etc.

L'expérimentation présentée dans ce chapitre a vu le jour lors d'un de mes stages d'enseignement. Je remercie chaleureusement mon maître de stage de m'avoir permis d'enseigner le chapitre consacré aux limites de fonctions dans sa classe de cinquième secondaire, ainsi que d'avoir accepté que je débute celui-ci par une expérimentation visant à interroger le rapport que les élèves entretiennent avec les tableaux de valeurs de fonctions.

Cette introduction ne correspondait pas à la manière dont mon maître de stage envisageait habituellement d'aborder ce chapitre. Il partageait d'ailleurs largement les hypothèses que nous développerons dans ce chapitre. Il a néanmoins accepté de se prêter à cette expérimentation afin de contribuer, à travers sa classe, à une réflexion plus large en didactique des mathématiques sur le rapport d'élèves du secondaire à l'usage des tableaux de valeurs dans l'enseignement de la notion de limite.

5.2 Les objectifs de l'expérimentation

Le chapitre précédent met en évidence la place prépondérante accordée aux représentations graphiques et aux tableaux de valeurs dans l'enseignement de la notion de limite, tant dans les référentiels officiels que dans les manuels scolaires. Le chapitre 4 souligne également, à partir de notes de cours provenant de plusieurs enseignants issus d'établissements différents, la récurrence des tableaux de valeurs dans l'introduction ou l'illustration de la notion de limite. Une proportion significative de ces supports, dont nous préservons l'anonymat, mobilise en effet explicitement cet outil.

Bien qu'intéressante, l'utilisation des graphiques a déjà fait l'objet de multiples études, que ce soit ou non en lien avec la notion de limite (Schneider, 1988 ; Schneider, 2011b ; Krysinska, 2007). Dans ce mémoire, nous souhaitons nous polariser sur l'utilisation qui est faite des tableaux et développer les analyses initiales effectuées par Job (2011). Ces analyses mettent en évidence la faible pertinence épistémologique, sur laquelle nous reviendrons plus bas, avec laquelle les tableaux sont mis à contribution dans l'enseignement de la notion de limite.

Plus précisément, notre objectif est de déterminer dans quelle mesure les élèves sont à même d'identifier spontanément la notion de limite d'une fonction dans les tableaux qui leur sont soumis. Cette expérimentation cherche ainsi à interroger le rôle joué par les tableaux de valeurs dans l'identification de la notion de limite d'une fonction, ainsi que l'influence de l'intervention de l'enseignant et des caractéristiques des tableaux traditionnellement mobilisés dans l'enseignement de cette notion.

Il convient toutefois de souligner que cette approche expérimentale, centrée sur des tableaux de valeurs de fonctions, ne prétend pas épuiser la question du rapport des élèves à la notion de limite d'une fonction. Elle constitue un premier cadre d'analyse, volontairement restreint, permettant d'isoler certains phénomènes. De nombreuses expériences et recherches dans le domaine de l'analyse sont menées par des didacticiens des mathématiques depuis plusieurs décennies¹, et il serait illusoire de prétendre tout traiter en même temps. À cet égard, les propos de Brousseau rappellent la difficulté qu'il y a à dépasser le simple constat des erreurs des élèves :

« [...] les professeurs sont toujours intéressés par les rapports exposant les erreurs et les comportements des élèves, mais il reste tellement à faire pour comprendre les causes de ces erreurs et non pas se borner à les constater. » (Brousseau, 1998, p.339)

1. Voir notamment Balhan (2017), Job (2011) et Schneider et al. (2016).

5.3 Public cible et contexte de l'expérimentation

L'expérimentation a été menée fin janvier 2026 dans une école secondaire du réseau officiel de la région de Liège, en Belgique. Les trois élèves concernés étaient des étudiants de cinquième année du secondaire, âgés d'environ 16 ans et ayant huit périodes de cours de mathématiques par semaine (8 fois 50min). L'expérimentation a duré une période et a été présentée aux élèves comme une activité d'introduction à un nouveau chapitre, sans que la notion de limite ne soit mentionnée. Pour l'encadrer, leur enseignant, Kevin Balhan et moi-même étions présents.

À titre de contexte, en début d'année scolaire, les élèves ont vu le chapitre consacré aux suites que nous avons analysé au chapitre précédent. Celui-ci a occupé un certain nombre de périodes de cours mais nous n'avons pas accès au nombre exact. Cependant, il est important de souligner que les élèves ont été confrontés à la notion de limite de suite à travers ce chapitre, et ils ont réalisé plusieurs exercices faisant intervenir le calcul de limites de la somme des n premiers termes d'une suite géométrique.

Il convient d'ores et déjà de souligner que cette expérimentation ne constitue en rien un projet d'enseignement visant à apprendre la notion de limite d'une fonction aux élèves. Il s'agit plutôt d'une expérience qui s'inscrit dans le domaine de la recherche en didactique des mathématiques. Il importe dès lors de distinguer clairement les objectifs d'un projet d'enseignement de ceux d'une recherche en didactique qui consistent à étudier les phénomènes d'apprentissage et d'enseignement :

« La didactique des mathématiques étudie les processus de transmission et d'acquisition des différents contenus de cette science, particulièrement en situation scolaire ou universitaire. Elle se propose de décrire et d'expliquer les phénomènes relatifs aux rapports entre son enseignement et son apprentissage. Elle ne se réduit pas à chercher une bonne manière d'enseigner une notion fixée. » (Douady, 2026, p.1)

5.4 Les outils d'analyse mobilisés : une approche issue de l'ingénierie didactique

Pour effectuer l'analyse de l'expérimentation, nous suivons la méthodologie de l'ingénierie didactique, qui nous permet de structurer notre démarche d'analyse en plusieurs étapes. Nous ne réalisons pas ici un test statistique, l'analyse d'un groupe de trois élèves ne permettant pas de tirer des conclusions généralisables pour un statisticien, mais nous nous ancrons dans une méthodologie de recherche en accord avec les principes de la didactique des mathématiques :

« La méthodologie d'ingénierie didactique se caractérise aussi, par rapport à d'autres types de recherches basés sur des expérimentations en classe, par le registre dans lequel elle se situe et les modes de validation qui lui sont associés. En effet, les recherches ayant recours à des

expérimentations en classe se situent le plus souvent dans une approche comparative avec validation externe basée sur la comparaison statistique des performances de groupes expérimentaux et de groupes témoins. Ce paradigme n'est pas celui de l'ingénierie didactique qui se situe, à l'opposé, dans le registre des études de cas et dont la validation est essentiellement interne, fondée sur la confrontation entre analyse a priori et analyse a posteriori. » (Artigue, 1988, p.286)

L'ingénierie didactique se caractérise par une démarche en quatre phases :

- Première phase : Les analyses préalables, qui consistent en des analyses épistémologiques de la notion étudiée, des analyses de l'enseignement de cette notion, des analyses des conceptions, difficultés et obstacles des élèves, et de manière générale, l'analyse de la transposition² du savoir (Balhan, 2017).

À cet égard, les modèles épistémologiques de référence (MER), définis au chapitre 1, jouent un rôle important dans cette première phase. En effet, un MER constitue un outil de vigilance épistémologique permettant d'examiner dans quelle mesure les pratiques étudiées, qu'il s'agisse des pratiques d'enseignement, des ressources institutionnelles ou des activités proposées aux élèves, sont en adéquation avec les caractéristiques épistémologiques du savoir mises en évidence par ce modèle. Autrement dit, un MER sert de cadre d'analyse pour évaluer la légitimité épistémologique des pratiques observées et pour identifier les éventuels écarts entre ces pratiques et les exigences du savoir mathématique considéré.

- Deuxième phase : La conception et l'analyse *a priori* de la situation didactique qui sera expérimentée en classe.

L'analyse *a priori* s'appuie sur l'analyse du savoir réalisée dans la première phase et consiste à formuler des hypothèses relatives aux procédures et aux choix que les élèves pourraient faire, ainsi qu'aux obstacles que les élèves pourraient rencontrer lors de la réalisation des tâches proposées. Cette analyse vise à étudier la cohérence des choix didactiques et à anticiper les comportements susceptibles d'émerger lors de la troisième phase.

2. La transposition didactique désigne le processus de transformation d'un savoir entre son état de production savante et sa forme d'enseignement. Introduite par Chevallard (1991), cette notion vise à décrire les modifications qu'un savoir subit lorsqu'il passe du savoir savant au savoir à enseigner puis au savoir effectivement enseigné. À la suite de travaux ultérieurs, notamment dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD), cette perspective a été élargie. La transposition didactique ne renvoie dès lors plus uniquement à une simplification d'un savoir savant, mais plus largement aux transformations qu'imposent les contraintes institutionnelles, sociales et didactiques sur les savoirs enseignés et appris (Balhan, 2017).

- Troisième phase : L'expérimentation³.
- Quatrième phase : L'analyse *a posteriori* de l'expérimentation.

Celle-ci est fondée sur les données recueillies lors de la troisième phase et vise à confronter les résultats obtenus avec les hypothèses formulées lors de l'analyse *a priori*. Cette confrontation permet d'évaluer la validité des hypothèses, d'identifier les écarts entre les prévisions et les observations, et de tirer des conclusions sur le rapport qu'entretiennent les élèves au(x) savoir(s) mis en jeu dans la situation didactique expérimentée.

Dans notre cas, la première phase a été réalisée dans les chapitres précédents, notamment dans le chapitre 3 où nous avons présenté un MER de la notion de limite et dans le chapitre 4 où nous avons analysé l'enseignement de la notion de limite en secondaire à travers l'analyse des référentiels officiels, de manuels scolaires et de notes de cours. Les trois prochaines phases font l'objet de ce chapitre.

Enfin, la théorie de l'ingénierie didactique est bien plus vaste que ce que nous présentons ici, elle est notamment directement en lien avec la Théorie des Situations Didactiques (TSD) de Brousseau :

« [...] si la théorie constructiviste pose le principe de l'engagement de l'élève dans la construction de ses connaissances par l'intermédiaire d'interactions avec un certain milieu, la théorie des situations didactiques, qui sert de référence à la méthodologie d'ingénierie, a eu, dès son origine, l'ambition de se constituer comme une théorie du contrôle des rapports entre sens et situations. Notons que nous entendons ici cette théorie au sens large, y incluant, outre les constructions théoriques élaborées par G.Brousseau depuis plus de vingt ans — et l'on pourra par exemple, pour une des premières versions de la théorie, se référer à (Brousseau 1972) — celles élaborées en connexion plus ou moins étroite par divers chercheurs, notamment celles de R.Douady. » (Artigue, 1988, p.293-294)

Nous invitons le lecteur intéressé à se référer aux textes d'Artigue (1988) et de Balhan (2017) pour une présentation plus complète de cette méthodologie.

3. Artigue (1988) donne peu de précisions concernant cette troisième phase : « Je ne m'étendrai pas sur la phase 3 d'expérimentation qui est classique. ». Nous souhaitons néanmoins nuancer ce découpage en quatre phases. L'expérimentation, telle que nous la concevons dans ce travail, peut en effet être envisagée comme englobant l'ensemble du processus. Les première et deuxième phases correspondent alors à l'élaboration et à l'anticipation du déroulement attendu de l'expérimentation tandis que la troisième phase renvoie à son déroulement effectif. Il convient également de souligner que ces différentes phases ne sont pas toujours nettement dissociées et peuvent, dans la pratique, se chevaucher et s'entrelacer.

5.5 Analyse *a priori*

5.5.1 Questionnaire soumis aux élèves

Nous donnons ci-dessous une version contractée⁴ du questionnaire tel qu'il a été soumis aux élèves lors de l'expérimentation. Vous pouvez retrouver le questionnaire reçu et complété par les élèves dans l'annexe A. Il est constitué de huit tableaux de valeurs de fonctions, chacun d'entre eux étant accompagné d'une seule et même consigne que voici :

Les tableaux ci-dessous contiennent des informations obtenues à propos de différentes fonctions. À partir de chaque tableau, vous devez préciser les caractéristiques $C_1, C_2, C_3, \dots, D_1, D_2, D_3, \dots$ de la fonction correspondante qu'il vous semble pouvoir déduire du tableau. Par fonction, vous pouvez donner autant de caractéristiques que vous le souhaitez, n'hésitez pas à demander des feuilles supplémentaires. Donnez à chaque fois la définition précise des caractéristiques considérées. Une même caractéristique peut ou non être commune à plusieurs fonctions. Voici des exemples de caractéristiques :

- *Toutes les images de la fonction sont supérieures à 10^6 .*
- *Toutes les images sont des multiples de 3.*
- *La fonction est croissante.*

Ce sont des exemples pour vous aider à comprendre la question. On ne vous dit pas que ces caractéristiques sont forcément pertinentes pour les fonctions et tableaux donnés ci-dessous. À vous d'inventer des caractéristiques qui vous semblent raisonnables au vu des données fournies dans les tableaux.

Ensuite, le premier tableau était suivi de cette indication :

Caractéristiques de la fonction $f_1(x)$

- Caractéristique C_1 :
- Caractéristique C_2 :
- Caractéristique C_3 :
- Etc.

4. En classe, le questionnaire distribué aux élèves contenait un tableau par page au recto, le verso étant laissé vide afin de leur laisser suffisamment de place pour répondre à la question.

Cette même indication était donnée pour les sept autres tableaux, les fonctions correspondantes étant notées $f_2(x)$, $f_3(x)$, ... et les caractéristiques à identifier étant notées D_1 , D_2 , D_3 ; E_1 , E_2 , E_3 ; ...

Voici à présent les tableaux de valeurs de fonctions soumis aux élèves lors de l'expérimentation. Tous les tableaux présentés dans ce travail ont été générés à l'aide du logiciel Excel; les calculs numériques, arrondis et affichages de valeurs ont donc été réalisés avec ce logiciel. Le choix d'utiliser un tableur ne relève pas d'une volonté de mener un travail d'analyse numérique, mais s'inscrit dans le cadre des pratiques ordinaires de l'enseignement secondaire. Les programmes officiels préconisent en effet l'usage de tableurs dans plusieurs chapitres, notamment dans l'UAA consacrée aux suites :

« Utiliser l'outil informatique : l'utilisation d'un tableur et de ses fonctions élémentaires est recommandée pour faciliter les calculs, pour conforter éventuellement la perception intuitive d'une limite d'une suite. »
(FWB Enseignement, 2015a, p.19)

Nous avons dès lors choisi de produire des tableaux pouvant être directement réutilisés en classe et restant proches des outils effectivement mobilisés par les élèves et les enseignants.

Les huit tableaux proposés aux élèves sont présentés ci-dessous.

Tableau 1

x	$f_1(x)$
4,9000000000000000	11,4908401948657000
4,9900000000000000	11,4891270249537000
4,9990000000000000	11,4891252948081000
4,9999000000000000	11,4891252930778000
4,9999900000000000	11,4891252930761000
4,9999990000000000	11,4891252930761000
4,9999999000000000	11,4891252930761000
4,9999999900000000	11,4891252930761000
4,9999999990000000	11,4891252930761000
4,9999999999000000	11,4891252930761000
4,9999999999900000	11,4891252930761000
4,9999999999990000	11,4891252930761000
4,9999999999999000	11,4891252930761000
4,9999999999999900	11,4891252930761000
4,9999999999999990	11,4891252930761000
4,9999999999999999	11,4891252930761000

Tableau 2

x	$f_2(x)$
4,0906915661572000	12,2019673885118000
4,4199914401252600	11,7420109178072000
4,6277656141418200	11,5675864611620000
4,7588622552308700	11,5120767383103000
4,8415786437626900	11,4958432421529000
4,8937691566157200	11,4911785294694000
4,9266991440125300	11,4898038097767000
4,9474765614141800	11,4893755716291000
4,9605862255230900	11,4892311771347000
4,9688578643762700	11,4891775549302000
4,9740769156615700	11,4891554459627000
4,9773699144012500	11,4891453561218000
4,9794476561414200	11,4891403231561000
4,9807586225523100	11,4891376272010000
4,9815857864376300	11,4891361042516000

Tableau 3

x	$f_3(x)$
5,220027936200000	10,900000000000000
4,777607000360170	10,990000000000000
5,173909595686450	10,999000000000000
4,883781919351830	10,999900000000000
5,004283970801930	10,999990000000000
4,954040787040200	10,999999000000000
5,028682719891380	10,999999900000000
4,981678979311930	10,999999990000000
5,009951078491240	10,999999999000000
4,997683783669530	10,999999999900000
5,005182947983320	10,999999999990000
4,992329639018190	10,999999999999000
5,005081250109020	10,999999999999900
4,999917419969770	10,999999999999990
5,001869189388090	10,999999999999999

Tableau 4

x	$f_4(x)$
4,900000000000000	10,900000000000000
4,990000000000000	10,990000000000000
4,999000000000000	10,999000000000000
4,999900000000000	10,999900000000000
4,999990000000000	10,999990000000000
4,999999000000000	10,999999000000000
4,999999900000000	10,999999900000000
4,999999990000000	10,999999990000000
4,999999999000000	10,999999999000000
4,999999999900000	10,999999999900000
4,999999999990000	10,999999999990000
4,999999999999000	10,999999999999000
4,999999999999900	10,999999999999900
4,999999999999990	10,999999999999990

Tableau 5

x	$f_5(x)$
4,000000000000000	12,000000000000000
4,333333333333330	10,18350341907230
4,555555555555560	11,666666666666670
4,703703703703700	11,54433105395180
4,802469135802470	11,444444444444440
4,868312757201650	11,36288736930120
4,912208504801100	10,70370370370370
4,941472336534060	10,75807508713250
4,960981557689380	10,80246913580250
4,973987705126250	10,83871672475500
4,982658470084170	11,13168724279840
4,988438980056110	10,89247781650330
4,992292653370740	10,91220850480110
4,994861768913830	11,07168145566440
4,996574512609220	11,05852766346590

Tableau 6

x	$f_6(x)$
5,250000000000000	9,871598752346030
5,125000000000000	10,87123757201180
5,062500000000000	10,61552417083370
5,031250000000000	10,88945269111170
5,015625000000000	10,97437825477460
5,007812500000000	10,96753048417510
5,003906250000000	10,87114324786830
5,001953125000000	10,95736695532250
5,000976562500000	10,96281926937360
5,000488281250000	10,97049698381790
5,000244140625000	10,97483957831860
5,000122070312500	10,97826506560080
5,000061035156250	10,98775194558070
5,000030517578120	10,99957094120420
5,000015258789060	10,99878187188990

Tableau 7

x	$f_7(x)$
4,779972063800000	10,77340633871190
4,777607000360170	10,76666426130740
4,826090404313550	10,62098969558220
4,883781919351830	10,29355933764430
4,995716029198070	10,87700757394710
4,954040787040200	10,69021701256640
4,971317280108620	10,85308610293460
4,981678979311930	10,97121656567240
4,990048921508760	10,89421765531940
4,997683783669530	10,99641216272740
4,994817052016680	10,99225548433700
4,992329639018190	10,99232889046900
4,994918749890980	10,85952470539250
4,999917419969770	10,98191721181500
4,998130810611910	10,92048602765860

Tableau 8

x	$f_8(x)$
5,220027936200000	12,15160492136440
4,777607000360170	10,76666426130740
5,173909595686450	11,80285827562810
4,883781919351830	10,29355933764430
5,004283970801930	11,01647961482870
4,954040787040200	10,69021701256640
5,028682719891380	11,24917101302500
4,981678979311930	10,97121656567240
5,009951078491240	11,11362999741770
4,997683783669530	10,99641216272740
5,005182947983320	11,14660676821950
4,992329639018190	10,99232889046900
5,005081250109020	11,01225298143380
4,999917419969770	10,98191721181500
5,001869189388090	11,01069265235400

Les expressions analytiques des fonctions n'ont pas été données aux élèves car nous souhaitons étudier la manière dont ils s'emparent des tableaux en dehors de toute autre information. En classe, les consignes ont été expliquées oralement, mais aucun contexte ni même aucune information supplémentaire n'ont été donnés aux élèves.

5.5.2 Effet de contrat au sens de Brousseau et cadre restreint de l'expérimentation

Cette expérimentation s'inscrit dans une perspective didactique inspirée notamment des travaux de Brousseau, en particulier à travers la notion de contrat didactique⁵. Nous faisons l'hypothèse que, dans de nombreuses situations d'enseignement "classiques", l'identification de la notion de limite par les élèves relève en partie d'un effet de contrat : les élèves donnent les réponses attendues en fonction du contexte scolaire, en fonction du comportement de l'enseignant ou encore en fonction du contexte donné avec les questions, sans que la notion n'émerge spontanément comme réponse à un ensemble de problèmes.

Afin de limiter ces effets et de rompre, autant que possible, avec les implicites du contrat didactique, le dispositif expérimental a été conçu selon plusieurs choix méthodologiques. D'une part, les tableaux proposés sont volontairement abstraits, dépourvus de tout contexte concret susceptible d'orienter l'interprétation. D'autre part, aucune indication n'est fournie quant aux attentes ou aux notions visées. Enfin, il est explicitement précisé aux élèves que

5. Le contrat didactique désigne l'ensemble des attentes réciproques, le plus souvent implicites, qui structurent les relations entre l'enseignant et les élèves à propos d'un savoir à enseigner (Brousseau, 1998).

toutes leurs réponses sont recevables, dans le but de favoriser une exploration libre et de recueillir des productions reflétant leurs raisonnements spontanés.

Ces choix permettent de soutenir l'hypothèse selon laquelle les tableaux de valeurs ne constituent pas, en eux-mêmes, des supports intrinsèquement porteurs de la notion de limite. Plus précisément, lorsque certaines expressions typiques liées à cette notion apparaissent, celles-ci peuvent être mises en relation avec des caractéristiques spécifiques des tableaux ou avec l'intervention de l'enseignant, qui tendent à orienter, voire à contraindre, les interprétations des élèves.

Rappelons que cette expérimentation, volontairement restreinte afin de mettre en évidence certains éléments précis, ne prétend pas épuiser la question. Des prolongements pourront envisager l'introduction de contextes plus concrets, afin d'étudier leur influence sur les interprétations des élèves. La question du rôle du "concret" devra ainsi être examinée à la lumière des objectifs poursuivis par chaque dispositif expérimental.

5.5.3 Allure générale des tableaux soumis aux élèves et leur implication pour l'identification de la notion de limite

Afin de faciliter les discussions concernant les tableaux soumis aux élèves lors de l'expérimentation, il est nécessaire d'en présenter l'allure générale et de définir quelques notations. Les tableaux proposés ont été conçus à partir des pratiques observées dans les manuels scolaires et les notes de cours d'enseignants, analysés au chapitre 4. Bien que ces tableaux ne soient jamais strictement identiques, ils présentent de fortes similitudes dans leur structure et leur utilisation. Nous avons dès lors élaboré nos propres tableaux de manière à en restituer les caractéristiques générales et à les rendre aussi proches que possible des pratiques courantes observées dans l'enseignement secondaire.

Chacun des huit tableaux soumis aux élèves lors de l'expérimentation présente une structure similaire : ils sont constitués de deux colonnes contenant chacune une suite de valeurs numériques. La première colonne correspond à une suite de valeurs de x , tandis que la seconde colonne correspond à une suite de valeurs de $f(x)$. Les tableaux peuvent ainsi être représentés de manière générale de la façon suivante :

	Première suite $(u_n)_{n \geq 1}$		Seconde suite $(f(u_n))_{n \geq 1}$
	x		$f(x)$
1	u_1	1	$f(u_1)$
2	u_2	2	$f(u_2)$
3	u_3	3	$f(u_3)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Nous appellerons a la limite de la première suite $(u_n)_{n \geq 1}$ et b la limite de la seconde suite $(f(u_n))_{n \geq 1}$.

Il convient dès lors de souligner que nous sommes bien conscients que les seules valeurs données dans un tableau ne permettent jamais de conclure sur la limite d'une fonction. D'une part ces valeurs sont en nombre fini. Il n'est donc pas possible de déterminer si u_n converge vers a , ni même si $f(u_n)$ converge vers b . D'autre part, même en supposant qu'on dispose d'une infinité de valeurs, il ne s'agit que d'une seule suite u_n , alors qu'il faudrait étudier la convergence via f de toutes les suites convergentes vers a .

Malgré son caractère incongru, nous proposons néanmoins aux élèves la possibilité de "lire" la notion de limite dans un tableau, précisément parce qu'une telle pratique est répandue dans l'enseignement secondaire. Les tableaux observés dans les manuels scolaires et les notes de cours analysés font en effet majoritairement intervenir une seule suite u_n , ou parfois deux suites lorsque sont abordées les notions de limite à gauche et à droite. Nous avons donc choisi de reprendre une présentation proche de ces usages afin de mettre en évidence ce qui nous apparaît comme un usage déviant de ces tableaux : considérer que les élèves peuvent construire un usage idoine de la notion de limite d'une fonction par la seule observation de quelques tableaux de valeurs.

Toutes les suites présentes dans les tableaux soumis aux élèves sont des suites réelles convergentes. Afin de mieux comprendre le rapport des élèves à la notion de limite d'une fonction, nous avons sélectionné des suites et des fonctions exemplifiant différents modes de convergence que nous présentons ci-dessous. L'objectif n'est pas de développer de nouvelles notions mathématiques, mais d'identifier certaines caractéristiques des objets mathématiques mobilisés dans les tableaux susceptibles d'influencer positivement ou non, l'identification par les élèves de la notion de limite. Le choix de ces suites et fonctions ne repose donc pas uniquement sur des considérations théoriques : il s'appuie également sur des études menées auprès d'élèves autour de la notion de limite. Les résultats empiriques issues de ces travaux ont notamment orienté la sélection des différents types de suites retenus pour l'expérimentation⁶. On distingue :

1. La stricte monotonie de la suite des valeurs :

La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est strictement croissante, strictement décroissante ou non monotone. Il en va de même pour la suite $(f(u_n))_{n \geq 1}$.

2. La stricte monotonie de la suite des distances à la limite :

La suite des distances $(|u_n - a|)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante ou non monotone. Il en va de même pour la suite $(|f(u_n) - b|)_{n \geq 1}$.

3. La constance de la suite des valeurs à partir d'un certain rang.

Au regard des résultats mis en évidence dans la littérature, certains types de convergence semblent plus facilement identifiables par les élèves que d'autres. Il apparaît notamment que les suites monotones sont plus spontanément reconnues comme convergentes, indépendamment de la monotonie de la suite des distances à la limite. En revanche, les suites non

6. Nous conseillons la lecture de Job (2011) pour une synthèse sur le sujet.

monotones dont la suite des distances à la limite est strictement décroissante semblent déjà moins facilement associées à la notion de convergence, tandis que cette reconnaissance devient particulièrement rare pour les suites non monotones dont la suite des distances à la limite n'est pas strictement décroissante ainsi que pour les suites constantes.

Ces observations nous conduisent à formuler, pour notre expérimentation, l'hypothèse que les trois élèves participant à l'étude identifieront plus facilement la convergence des suites strictement monotones que celle des autres types de suites considérés. Nous faisons également l'hypothèse que, dans le cas des suites strictement monotones, une éventuelle reconnaissance de la convergence ne sera pas nécessairement privilégiée par les élèves par rapport à d'autres caractéristiques que ceux-ci pourraient formuler et qui ne renverraient pas directement à la notion de convergence.

Pour chaque tableau, nous avons choisi que la première suite ait pour limite 5 et que la seconde suite ait pour limite 11, à l'exception des tableaux 1 et 2, pour lesquels nous avons choisi une limite irrationnelle de partie entière égale à 11. Le choix de fixer les limites 5 et 11 pour presque tous les tableaux est dû à plusieurs raisons. Tout d'abord, nous ne disposons pas d'un effectif d'élèves suffisamment grand pour tester d'autres configurations. Ensuite, si l'on part du principe que les élèves pourraient identifier la convergence vers 5 et 11 des suites strictement monotones, en gardant 5 et 11 pour les autres tableaux, on pousse les élèves à se demander si ces limites restent valables dans un contexte non monotone.

De plus, nous avons choisi de présenter des suites dont le degré de "régularité visuelle" varie d'un tableau à l'autre. Par cette expression, nous désignons le fait que certaines suites laissent apparaître, à la simple lecture des valeurs numériques, une structure ou une évolution facilement perceptible. C'est par exemple le cas de suites telles que 4,9, 4,99, 4,999, 4,9999,... ou de suites dont les termes alternent entre des valeurs de partie entière égale à 4 et des valeurs de partie entière égale à 5, ou encore de suites arithmétiques et géométriques pour lesquelles la raison saute aux yeux. Nous pensons que les élèves vont être influencés par ces "régularités visuelles" et que celles-ci peuvent jouer un rôle dans leur identification de la convergence des suites.

Afin d'évaluer la capacité des élèves à identifier spontanément la notion de limite à partir de tableaux de valeurs de fonctions, nous serons attentifs aux différentes formulations qu'ils mobilisent. Dans le cadre des fonctions réelles de variable réelle considérées ici, nous examinerons notamment s'ils parviennent à produire une formulation en termes de suites, de voisinages ou encore en termes d' $\varepsilon - \delta$, suffisamment proche d'une définition ou d'une caractérisation mathématiquement acceptable de la notion de limite. Nous porterons également attention à l'apparition d'expressions plus informelles, mais caractéristiques de cette notion, telles que : " $f(x)$ est aussi proche de b que l'on veut lorsque x est suffisamment proche de a ".

Enfin, les tableaux sont structurés de telle sorte que la colonne des valeurs de x est à gauche alors que celle des valeurs de $f(x)$ est à droite. Or, en Belgique, on lit de gauche à droite et de haut en bas, donc la lecture "naturelle" du point de vue culturel consiste d'abord à lire la première colonne et ensuite pour une valeur de cette colonne de lire la valeur en regard dans la colonne des $f(x)$. Bien sûr, rien n'oblige un élève à lire absolument de cette manière, mais pourquoi ferait-il autrement (au moins dans un premier temps) en dehors

de toute considération qui lui permettrait d'éprouver la faillibilité d'une telle stratégie de lecture ? En outre, la colonne des x est choisie pour rendre visible la convergence vers une certaine valeur, dans notre cas la valeur 5, plus ou moins facilement identifiable grâce à la lecture du haut vers le bas. Cette lecture amènera probablement les élèves à donner des expressions plutôt covariantes à la notion de limite et non contravariantes si cette notion venait effectivement à émerger. Par "covariantes", nous désignons des expressions dont la structure est du type "Si... quelque chose sur x ... alors... quelque chose sur $f(x)$..." comme l'expression "Plus x se rapproche de a , plus $f(x)$ se rapproche de b " ou "Lorsque x est proche de a , $f(x)$ est proche de b ", tandis que par "contravariantes", nous désignons des expressions dont la structure est du type "Si... quelque chose sur $f(x)$... alors... quelque chose sur x ..." comme l'expression " $f(x)$ est aussi proche de b que l'on veut lorsque x est suffisamment proche de a ".

Nous pensons ainsi que les caractéristiques spécifiques des tableaux peuvent amener les élèves à faire émerger la notion de limite, ou au contraire empêcher cette émergence. De plus, nous pensons que l'ordre de présentation des tableaux aura une influence sur les caractéristiques identifiées par les élèves et sur les expressions utilisées pour rendre compte de ces caractéristiques. En effet, les élèves peuvent être amenés à faire des liens entre les tableaux précédemment analysés, à identifier des caractéristiques communes à plusieurs tableaux ou au contraire à identifier des différences entre certains tableaux. Ces différents aspects seront détaillés dans la suite, lors de l'analyse *a priori* de chaque tableau individuellement.

5.5.4 Tableau 1

La fonction f_1 qui a permis de générer le premier tableau est définie par

$$f_1(x) = \sqrt{132} + \frac{(5-x)^3}{1+(5-x)^2} \sqrt{3}$$

et les valeurs de x sont données par la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$u_n = 5 - \frac{1}{10^n} \text{ pour } n \in \{1, 2, \dots, 15\}.$$

La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers 5 et la fonction f_1 admet pour limite $\sqrt{132}$ en 5. Avec les notations introduites précédemment, on obtient le tableau suivant :

$(u_n)_{n \geq 1}$	$(f_1(u_n))_{n \geq 1}$	$ u_n - 5 $	$ f_1(u_n) - \sqrt{132} $
x	$f_1(x)$	$ x - 5 $	$ f_1(x) - \sqrt{132} $
4,9000000000000000	11,4908401948657000	0,1000000000000000	0,0017149017896720
4,9900000000000000	11,4891270249537000	0,0100000000000000	0,0000017318776191
4,9990000000000000	11,4891252948081000	0,0010000000000000	0,0000000017320492
4,9999000000000000	11,4891252930778000	0,0001000000000000	0,000000000017319
4,9999900000000000	11,4891252930761000	0,0000100000000000	0,0000000000000018
4,9999990000000000	11,4891252930761000	0,0000010000000000	0,0000000000000000
4,9999999000000000	11,4891252930761000	0,0000001000000000	0,0000000000000000
4,9999999900000000	11,4891252930761000	0,0000000100000000	0,0000000000000000
4,9999999990000000	11,4891252930761000	0,0000000010000000	0,0000000000000000
4,9999999999000000	11,4891252930761000	0,0000000001000000	0,0000000000000000
4,9999999999900000	11,4891252930761000	0,0000000000100000	0,0000000000000000
4,9999999999990000	11,4891252930761000	0,0000000000010000	0,0000000000000000
4,9999999999999000	11,4891252930761000	0,0000000000001000	0,0000000000000000
4,9999999999999900	11,4891252930761000	0,0000000000000100	0,0000000000000000
4,9999999999999990	11,4891252930761000	0,0000000000000010	0,0000000000000000

Les exposants 3 et 2 présents dans l'expression analytique de la fonction ont été choisis de sorte que la convergence soit suffisamment rapide pour donner l'impression d'une constance des images dans le tableau à partir d'un certain rang et de pouvoir ainsi analyser le rapport des élèves à la notion de convergence dans un tel cas. En effet, Excel donne 11,4891252930761000 comme estimation de $f_1(x)$ dès la cinquième ligne, c'est-à-dire à partir de $x = 4,99999$ (et au-delà). En réalité, avec 25 décimales, $\sqrt{132} \approx 11,4891252930760573197012229$.

Il est dès lors crédible que certains élèves pointent cette constance en envisageant une caractéristique telle que : “À partir d'un certain moment, quand on est suffisamment proche de 5, la fonction $f_1(x)$ devient constante”.

Cependant, il est peu probable que l'on rencontre des caractéristiques faisant allusion à une quelconque notion de convergence, par exemple du type “Plus x est proche de 5, plus $f_1(x)$ est proche de 11,4891252930761000”. En effet, dans des études antérieures⁷, il a été observé que les élèves avaient une compréhension “cinématique” de la notion de limite. Cela les pousse à rejeter le fait qu'une fonction ou une suite constante possède une limite car selon eux, cela doit “bouger” au niveau numérique, il doit y avoir un “mouvement” de rapprochement. D'ailleurs, si on demandait aux élèves de déterminer si la caractéristique “Plus x est proche de 5, plus $f_1(x)$ est proche de 11,4891252930761000” s'applique à $f_1(x)$, il est probable qu'ils réfutent en utilisant un argument comme “ $f_1(x)$ est déjà à 11,4891252930761000, elle ne s'en rapproche plus”.

Ce tableau en apparence anodin fait donc partie du dispositif pour montrer que les élèves n'identifient pas forcément de comportement limite dans un cas qui est pourtant considéré

7. Voir notamment Schneider (1988) et Kryszyska (2007)

comme trivial du point de vue mathématique : toute fonction constante jouit d'une limite. En revanche, les élèves seront plus à même d'identifier la convergence vers 5 de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ étant donné qu'elle est strictement monotone et que la suite $(|u_n - 5|)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante et il est donc plus probable d'obtenir des caractéristiques centrées sur la première colonne du tableau.

5.5.5 Tableau 2

La fonction f_2 qui a permis de générer le deuxième tableau est la même que pour le tableau 1, c'est-à-dire

$$f_2(x) = \sqrt{132} + \frac{(5-x)^3}{1+(5-x)^2} \sqrt{3}$$

et les valeurs de x sont données par la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$u_n = 4,983 - \left(\frac{1}{10^n}\right)^{0,2} \sqrt{2} + 0,017 \left[2 - \frac{256}{n+240}\right] \text{ pour } n \in \{1, 2, \dots, 15\}.$$

La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers 5 et la fonction f_2 admet pour limite $\sqrt{132}$ en 5. Avec les notations introduites précédemment, on obtient le tableau suivant :

$(u_n)_{n \geq 1}$	$(f_2(u_n))_{n \geq 1}$	$ u_n - 5 $	$ f_2(u_n) - \sqrt{132} $
x	$f_2(x)$	$ x - 5 $	$ f_2(x) - \sqrt{132} $
4,0906915661572000	12,2019673885118000	0,9093084338428030	0,7128420954357360
4,4199914401252600	11,7420109178072000	0,5800085598747350	0,2528856247311710
4,6277656141418200	11,5675864611620000	0,3722343858581810	0,0784611680859335
4,7588622552308700	11,5120767383103000	0,2411377447691300	0,0229514452342379
4,8415786437626900	11,4958432421529000	0,1584213562373100	0,0067179490768190
4,8937691566157200	11,4911785294694000	0,1062308433842810	0,0020532363933690
4,9266991440125300	11,4898038097767000	0,0733008559874735	0,0006785167006722
4,9474765614141800	11,4893755716291000	0,0525234385858182	0,0002502785530218
4,9605862255230900	11,4892311771347000	0,0394137744769134	0,0001058840586037
4,9688578643762700	11,4891775549302000	0,0311421356237309	0,0000522618541599
4,9740769156615700	11,4891554459627000	0,0259230843384284	0,0000301528866515
4,9773699144012500	11,4891453561218000	0,0226300855987480	0,0000200630457332
4,9794476561414200	11,4891403231561000	0,0205523438585820	0,0000150300800250
4,9807586225523100	11,4891376272010000	0,0192413774476918	0,0000123341249871
4,9815857864376300	11,4891361042516000	0,0184142135623730	0,0000108111754979

Les deux suites présentes dans ce tableau sont strictement monotones et les suites des distances à la limite sont strictement décroissantes. Les valeurs de x ne présentent pas de "régularité visuelle" aussi marquée que dans le tableau 1 et la convergence vers 5 est moins rapide et peut donc sembler moins évidente aux yeux des élèves. Cependant, la lecture de la convergence vers 5 pourrait être renforcée par la mémoire du premier tableau.

On a choisi $\sqrt{132}$ comme limite car il est peu probable que les élèves aient en mémoire les premières décimales, contrairement à $\pi = 3,141592\dots$ ou $\sqrt{2} = 1,414213\dots$. Dès lors, il semble crédible qu'ils ne soient pas à même de conjecturer $\sqrt{132}$ comme limite sur la seule base du tableau.

Il est possible, au vu de la convergence strictement monotone de $(f_2(u_n))_{n \geq 1}$, que certains élèves affirment que “La fonction se rapproche de plus en plus de 11,489, lorsque x se rapproche de 5 mais sans qu'on soit vraiment certains. Cela pourrait être 11,4891 ou peut-être même 11 mais il faudrait aller très loin dans la proximité à 5”. Dans tous les cas, le caractère irrationnel de la limite leur passera sans doute sous le nez ce qui est bien un objectif de cette variation.

5.5.6 Tableau 3

Pour le troisième tableau, les valeurs de x sont données par la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$u_n = 5 - \sqrt{|2^{-(n-1)}|} \left(\sqrt{|2^{-(n-1)}| + 1 + \sin\left(\frac{1}{2^{-(n-1)}}\right)} \right) (-1)^n \text{ pour } n \in \{5, 6, \dots, 19\}$$

et nous avons choisi les images correspondantes sans utiliser de fonction particulière.

La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers 5 et la limite de f_3 en 5, si elle existait, serait égale à 11. Avec les notations introduites précédemment, on obtient le tableau suivant :

$(u_n)_{n \geq 1}$	$(f_3(u_n))_{n \geq 1}$	$ u_n - 5 $	$ f_3(u_n) - 11 $
x	$f_3(x)$	$ x - 5 $	$ f_3(x) - 11 $
5,220027936200000	10,900000000000000	0,22002793620000500000	0,100000000000000
4,777607000360170	10,990000000000000	0,22239299963983300000	0,010000000000000
5,173909595686450	10,999000000000000	0,17390959568645100000	0,001000000000000
4,883781919351830	10,999900000000000	0,11621808064817100000	0,000100000000000
5,004283970801930	10,999990000000000	0,00428397080192955000	0,000010000000000
4,954040787040200	10,999999000000000	0,04595921295980340000	0,000001000000000
5,028682719891380	10,999999900000000	0,02868271989137660000	0,000000100000000
4,981678979311930	10,999999990000000	0,01832102068806930000	0,000000010000000
5,009951078491240	10,999999999000000	0,00995107849124199000	0,000000001000000
4,997683783669530	10,999999999900000	0,00231621633046686000	0,000000000100000
5,005182947983320	10,999999999990000	0,00518294798331809000	0,000000000010000
4,992329639018190	10,999999999999000	0,00767036098181251000	0,000000000001000
5,005081250109020	10,999999999999900	0,00508125010902472000	0,000000000000100
4,999917419969770	10,999999999999990	0,00008258003023353670	0,000000000000010
5,001869189388090	10,999999999999999	0,00186918938808667000	0,000000000000001

Le but de ce tableau est de tester l'impact, sur l'identification de la convergence par les élèves, d'une suite non monotone dans la première colonne du tableau, dont la suite des

distances à la limite n'est pas décroissante, tout en conservant dans la colonne de $f_3(x)$ une suite dont la convergence est *a priori* plus évidente. En effet, il est probable, soit que les élèves ne rendent pas compte de la convergence vers 5 de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ mais bien de la convergence vers 11 de la suite $(f_3(u_n))_{n \geq 1}$, soit qu'ils perçoivent les deux convergences, celle vers 5 par mimétisme des deux tableaux précédents. Quoi qu'il en soit, il est fort probable que les élèves ne fassent aucun lien entre les deux colonnes du tableau, les suites étant "visuellement très différentes", et donc qu'ils ne mentionnent pas la convergence de la fonction vers 11 lorsque x tend vers 5, ce qui serait pourtant fait par l'enseignant en classe pour illustrer la notion de limite.

5.5.7 Tableau 4

La fonction f_4 qui a permis de générer le quatrième tableau est définie par

$$f_4(x) = x + 6$$

et les valeurs de x sont données par la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$u_n = 5 - \frac{1}{10^n} \text{ pour } n \in \{1, 2, \dots, 15\}.$$

La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers 5 et la fonction f_4 admet pour limite 11 en 5. Avec les notations introduites précédemment, on obtient le tableau suivant :

$(u_n)_{n \geq 1}$	$(f_4(u_n))_{n \geq 1}$	$ u_n - 5 $	$ f_4(u_n) - 11 $
x	$f_4(x)$	$ x - 5 $	$ f_4(x) - 11 $
4,9000000000000000	10,9000000000000000	0,1000000000000000	0,1000000000000000
4,9900000000000000	10,9900000000000000	0,0100000000000000	0,0100000000000000
4,9990000000000000	10,9990000000000000	0,0010000000000000	0,0010000000000000
4,9999000000000000	10,9999000000000000	0,0001000000000000	0,0001000000000000
4,9999900000000000	10,9999900000000000	0,0000100000000000	0,0000100000000000
4,9999990000000000	10,9999990000000000	0,0000010000000000	0,0000010000000000
4,9999999000000000	10,9999999000000000	0,0000001000000000	0,0000001000000000
4,9999999900000000	10,9999999900000000	0,0000000100000000	0,0000000100000000
4,9999999990000000	10,9999999990000000	0,0000000010000000	0,0000000010000000
4,9999999999000000	10,9999999999000000	0,0000000001000000	0,0000000001000000
4,9999999999900000	10,9999999999900000	0,0000000000100000	0,0000000000100000
4,9999999999990000	10,9999999999990000	0,0000000000010000	0,0000000000010000
4,9999999999999000	10,9999999999999000	0,0000000000001000	0,0000000000001000
4,9999999999999900	10,9999999999999900	0,0000000000000100	0,0000000000000100
4,9999999999999990	10,9999999999999990	0,0000000000000010	0,0000000000000010

Ce tableau représente un cas de convergence "classique", un type de tableau couramment utilisé dans les cours de mathématiques pour illustrer la notion de limite. Les deux

suites présentes dans ce tableau sont strictement monotones et les suites des distances à la limite sont strictement décroissantes. De plus, les valeurs de x et de $f_4(x)$ présentent une “régularité visuelle” marquée que les élèves ont déjà rencontrée dans les tableaux 1 et 3. Il est dès lors crédible que les élèves identifient la convergence vers 5 de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ et la convergence vers 11 de la suite $(f_4(u_n))_{n \geq 1}$, et qu’ils fassent le lien entre les deux en exprimant une caractéristique du type “Plus x est proche de 5, plus $f_4(x)$ est proche de 11”. Il est aussi probable que les élèves déterminent l’expression analytique de la fonction f_4 à partir du tableau. Cependant, malgré la convergence évidente de la fonction en 5 pour les mathématiciens, il est peu probable que les élèves rendent compte de cette convergence en utilisant une expression contravariante, la lecture de gauche à droite du tableau les amenant à privilégier une expression covariante.

5.5.8 Tableau 5

La fonction f_5 qui a permis de générer le cinquième tableau est définie par

$$f_5(x) = 11 + (-1)^{\lfloor x^6 \rfloor} \sqrt{|5 - x|}$$

et les valeurs de x sont données par la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$u_n = 5 - (1, 5)^{-(n-1)} \text{ pour } n \in \{1, 2, \dots, 15\}.$$

La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers 5 et la fonction f_5 admet pour limite 11 en 5. Avec les notations introduites précédemment, on obtient le tableau suivant :

$(u_n)_{n \geq 1}$	$(f_5(u_n))_{n \geq 1}$	$ u_n - 5 $	$ f_5(u_n) - 11 $
x	$f_5(x)$	$ x - 5 $	$ f_5(x) - 11 $
4,0000000000000000	12,000000000000000	1,000000000000000	1,000000000000000
4,333333333333333	10,18350341907230	0,666666666666667	0,816496580927726
4,555555555555556	11,666666666666670	0,444444444444445	0,666666666666666
4,703703703703700	11,54433105395180	0,296296296296296	0,544331053951817
4,802469135802470	11,444444444444440	0,197530864197531	0,444444444444445
4,868312757201650	11,36288736930120	0,131687242798354	0,362887369301212
4,912208504801100	10,70370370370370	0,087791495198903	0,296296296296296
4,941472336534060	10,75807508713250	0,058527663465935	0,241924912867475
4,960981557689380	10,80246913580250	0,039018442310623	0,197530864197530
4,973987705126250	10,83871672475500	0,026012294873749	0,161283275244983
4,982658470084170	11,13168724279840	0,017341529915833	0,131687242798355
4,988438980056110	10,89247781650330	0,011561019943889	0,107522183496657
4,992292653370740	10,91220850480110	0,007707346629259	0,087791495198900
4,994861768913830	11,07168145566440	0,005138231086173	0,071681455664439
4,996574512609220	11,05852766346590	0,003425487390782	0,058527663465936

La convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ vers 5 est strictement monotone et sera probablement pointée du doigt par les élèves. Cependant, bien que la suite $(|f_5(u_n) - 11|)_{n \geq 1}$ soit

strictement décroissante, les élèves ne pointeront probablement pas la convergence vers 11 de $(f_5(u_n))_{n \geq 1}$ car celle-ci est non monotone et l’alternance des parties entières des valeurs entre 10, 11 et 12 est très irrégulière. Cette irrégularité les empêchera sans doute de percevoir la notion de limite d’une fonction.

5.5.9 Tableau 6

La fonction f_6 qui a permis de générer le sixième tableau est définie par

$$f_6(x) = 11 - \sqrt{|5 - x|} \left(\sqrt{|5 - x|} + 1 + \sin \left(\frac{1}{5 - x} \right) \right)$$

et les valeurs de x sont données par la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$u_n = 5 + 2^{-(n-1)} \text{ pour } n \in \{3, 4, \dots, 17\}.$$

La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers 5 et la fonction f_6 admet pour limite 11 en 5. Avec les notations introduites précédemment, on obtient le tableau suivant :

$(u_n)_{n \geq 1}$	$(f_6(u_n))_{n \geq 1}$	$ u_n - 5 $	$ f_6(u_n) - 11 $
x	$f_6(x)$	$ x - 5 $	$ f_6(x) - 11 $
5,2500000000000000	9,871598752346030	0,2500000000000000	1,128401247653970
5,1250000000000000	10,87123757201180	0,1250000000000000	0,128762427988161
5,0625000000000000	10,61552417083370	0,0625000000000000	0,384475829166266
5,0312500000000000	10,88945269111170	0,0312500000000000	0,110547308888339
5,0156250000000000	10,97437825477460	0,0156250000000000	0,025621745225401
5,0078125000000000	10,96753048417510	0,0078125000000000	0,032469515824944
5,0039062500000000	10,87114324786830	0,0039062500000000	0,128856752131691
5,0019531250000000	10,95736695532250	0,0019531250000000	0,042633044677519
5,0009765625000000	10,96281926937360	0,0009765625000000	0,037180730626375
5,0004882812500000	10,97049698381790	0,0004882812500000	0,029503016182138
5,0002441406250000	10,97483957831860	0,0002441406250000	0,025160421681379
5,0001220703125000	10,97826506560080	0,0001220703125000	0,021734934399225
5,0000610351562500	10,98775194558070	0,0000610351562500	0,012248054419292
5,0000305175781200	10,99957094120420	0,0000305175781250	0,000429058795802
5,0000152587890600	10,99878187188990	0,0000152587890630	0,001218128110068

La convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ vers 5 est strictement monotone et même strictement décroissante, ce qui est différent des tableaux précédents pour lesquels la convergence était, soit strictement croissante, soit non monotone. Les tableaux de valeurs sont couramment utilisés pour illustrer les limites à gauche et à droite, en parlant de “rapprochement par valeurs supérieures ou inférieures”, comme nous l’avons observé dans le manuel CQFD (Annoye et Van Eerdenbrugge, 2013). Cependant, nous pensons que les élèves ne vont pas marquer cette différence. Il est déjà peu probable que la notion de limite d’une fonction

émerge naturellement de la lecture de tableaux de valeurs et il est donc encore moins probable que la notion de limite à gauche ou à droite émerge.

Concernant la convergence de la suite $(f_6(u_n))_{n \geq 1}$ vers 11, elle est non monotone et la suite des distances à la limite n'est pas décroissante. Seulement, la non-monotonie est moins marquée que dans le tableau précédent car elle se joue au niveau des décimales. Il est probable que, par fatigue et par mimétisme des tableaux précédents, les élèves mentionnent la convergence vers 11 de la suite $(f_6(u_n))_{n \geq 1}$.

5.5.10 Tableau 7 et Tableau 8

La fonction f_7 qui a permis de générer le septième tableau est la même que f_6 , c'est-à-dire

$$f_7(x) = 11 - \sqrt{|5 - x|} \left(\sqrt{|5 - x|} + 1 + \sin \left(\frac{1}{5 - x} \right) \right)$$

et les valeurs de x sont données par la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$u_n = 5 - \sqrt{|2^{-(n-1)}|} \left(\sqrt{|2^{-(n-1)}|} + 1 + \sin \left(\frac{1}{2^{-(n-1)}} \right) \right) \text{ pour } n \in \{5, 6, \dots, 19\}.$$

La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers 5 et la fonction f_7 admet pour limite 11 en 5. Avec les notations introduites précédemment, on obtient le tableau suivant :

$(u_n)_{n \geq 1}$	$(f_7(u_n))_{n \geq 1}$	$ u_n - 5 $	$ f_7(u_n) - 11 $
x	$f_7(x)$	$ x - 5 $	$ f_7(x) - 11 $
4,779972063800000	10,77340633871190	0,220027936200005	0,226593661288126
4,777607000360170	10,76666426130740	0,222392999639833	0,233335738692572
4,826090404313550	10,62098969558220	0,173909595686451	0,379010304417838
4,883781919351830	10,29355933764430	0,116218080648171	0,706440662355732
4,995716029198070	10,87700757394710	0,004283970801930	0,122992426052917
4,954040787040200	10,69021701256640	0,045959212959803	0,309782987433579
4,971317280108620	10,85308610293460	0,028682719891377	0,146913897065369
4,981678979311930	10,97121656567240	0,018321020688069	0,028783434327638
4,990048921508760	10,89421765531940	0,009951078491242	0,105782344680650
4,997683783669530	10,99641216272740	0,002316216330467	0,003587837272601
4,994817052016680	10,99225548433700	0,005182947983318	0,007744515662994
4,992329639018190	10,99232889046900	0,007670360981813	0,007671109530989
4,994918749890980	10,85952470539250	0,005081250109025	0,140475294607503
4,999917419969770	10,98191721181500	0,000082580030234	0,018082788184966
4,998130810611910	10,92048602765860	0,001869189388087	0,079513972341392

La fonction f_8 qui a permis de générer le huitième tableau est définie par

$$f_8(x) = 11 - \sqrt{|5 - x|} \left(\sqrt{|5 - x|} + 1 + \sin \left(\frac{1}{5 - x} \right) \right) (-1)^{\lfloor x \rfloor}$$

et les valeurs de x sont données par la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$v_n = 5 - \sqrt{|2^{-(n-1)}|} \left(\sqrt{|2^{-(n-1)}| + 1 + \sin\left(\frac{1}{2^{-(n-1)}}\right)} \right) (-1)^n \text{ pour } n \in \{5, 6, \dots, 19\}.$$

La suite $(v_n)_{n \geq 1}$ converge vers 5 et la fonction f_8 admet pour limite 11 en 5. Avec les notations introduites précédemment, on obtient le tableau suivant :

$(v_n)_{n \geq 1}$	$(f_8(v_n))_{n \geq 1}$	$ v_n - 5 $	$ f_8(v_n) - 11 $
x	$f_8(x)$	$ x - 5 $	$ f_8(x) - 11 $
5,220027936200000	12,15160492136440	0,220027936200005	1,151604921364440
4,777607000360170	10,76666426130740	0,222392999639833	0,233335738692572
5,173909595686450	11,80285827562810	0,173909595686451	0,802858275628067
4,883781919351830	10,29355933764430	0,116218080648171	0,706440662355732
5,004283970801930	11,01647961482870	0,004283970801930	0,016479614828690
4,954040787040200	10,69021701256640	0,045959212959803	0,309782987433579
5,028682719891380	11,24917101302500	0,028682719891377	0,249171013025050
4,981678979311930	10,97121656567240	0,018321020688069	0,028783434327638
5,009951078491240	11,11362999741770	0,009951078491242	0,113629997417702
4,997683783669530	10,99641216272740	0,002316216330467	0,003587837272601
5,005182947983320	11,14660676821950	0,005182947983318	0,146606768219474
4,992329639018190	10,99232889046900	0,007670360981813	0,007671109530989
5,005081250109020	11,01225298143380	0,005081250109025	0,012252981433845
4,999917419969770	10,98191721181500	0,000082580030234	0,018082788184966
5,001869189388090	11,01069265235400	0,001869189388087	0,010692652354001

Les deux suites présentes dans ces tableaux sont non monotones et les suites des distances à la limite ne sont pas décroissantes. De plus, ces suites ne présentent aucune “régularité visuelle” hormis, dans le tableau 8, une alternance des parties entières des valeurs entre 4 et 5 pour la première colonne et entre 10 et 11 à partir de la deuxième ligne pour la deuxième colonne.

La dernière valeur de la première colonne du tableau 7 sera quand même probablement considérée comme “proche de 5” par les élèves et la lecture des six tableaux précédents pourrait renforcer la lecture de la convergence vers 5 de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$. Cependant, il est fort probable que les élèves ne perçoivent pas la convergence vers 11 de la suite $(f_7(u_n))_{n \geq 1}$, la dernière valeur de la colonne étant moins proche de 11 que les 8^e, 10^e, 11^e, 12^e et 14^e valeurs. Ceux-ci pourraient énoncer des caractéristiques du type “La fonction f_7 est presque constante autour d’une valeur légèrement inférieure à 11”. Pour le tableau 8, il est probable que les élèves ne mentionnent aucune caractéristique de convergence et qu’ils se contentent de faire des observations “d’alternance dans les valeurs de x et de $f_8(x)$ ” ou “d’irrégularité dans les valeurs de x et de $f_8(x)$ ”. Notons que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est la même que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ du tableau 3. Cependant, les élèves ne le remarqueront probablement pas, à moins qu’ils analysent le tableau 8 directement après le tableau 3.

Une autre possibilité est que les élèves ne prennent plus le temps de lire correctement les valeurs des tableaux 7 et 8 et qu'ils concluent directement de la convergence des suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ vers 5 et des suites $(f_7(u_n))_{n \geq 1}$ et $(f_8(v_n))_{n \geq 1}$ vers 11 par automatisme après l'avoir fait plusieurs fois dans les tableaux précédents, sans analyser réellement les valeurs des tableaux. Cela pourrait s'expliquer par la fatigue engendrée par la lecture de tableaux de valeurs, par le désintérêt progressif pour la tâche au fur et à mesure de l'avancement dans les tableaux, etc.

Nous avons ainsi formulé nos hypothèses relatives aux caractéristiques que les élèves pourraient produire à la lecture de chacun des huit tableaux. Nous allons dans la suite réaliser l'analyse *a posteriori* de l'expérimentation en confrontant les caractéristiques effectivement produites par les élèves à celles que nous venons de formuler *a priori*. Pour ce faire, nous présentons d'abord les méthodes qui nous ont permis de récolter les données, avant de présenter notre analyse des productions des élèves à la lumière de la grille de lecture que nous construirons à partir des MER relatifs aux notions de limite et de fonction.

5.6 Méthodes de récolte des données

L'objectif de l'expérimentation était de récolter des données sur ce que les élèves pensent, voient, comprennent et constatent à la lecture de tableaux de valeurs de fonctions. L'idéal aurait donc été d'avoir un accès direct à leur pensée. Cela n'étant pas possible, nous avons utilisé deux méthodes complémentaires pour tenter d'approcher au mieux cette pensée. Nous leur avons demandé de mettre par écrit leurs observations et nous avons enregistré les discussions de chacun des groupes. Cet accès à ce qu'ils disent et écrivent constitue une bonne base pour notre analyse mais il est important de garder à l'esprit que cela ne représente pas exactement leur pensée. En effet, les élèves se retiennent peut-être de dire certaines choses ou de les écrire, soit parce qu'ils ne pensent pas que cela soit pertinent, soit parce qu'ils ont peur d'être jugés ou de faire des erreurs, soit parce qu'ils n'ont pas les mots pour exprimer ce qu'ils pensent, etc. De plus, les élèves ont parfois des difficultés à exprimer clairement leurs idées, ce qui peut rendre l'interprétation de leurs propos plus difficile. Pour tenter de limiter ces effets et d'approcher au mieux leur pensée, nous avons essayé de créer un climat de confiance et de bienveillance dans lequel les élèves se sentaient à l'aise pour s'exprimer librement, sans crainte d'être jugés ou de faire des erreurs. Pour cela, nous avons regroupé trois élèves qui s'entendent bien et qui ont l'habitude de travailler ensemble pour différents travaux scolaires. De plus, nous avons insisté sur le fait qu'il n'y avait pas de bonnes et de mauvaises réponses, que tout ce qui leur passait par la tête était intéressant et valait la peine d'être écrit, qu'ils pouvaient ne pas être d'accord au sein du groupe et donc écrire des avis divergents, et qu'ils n'avaient pas le droit d'effacer afin que l'on garde une trace de leur cheminement de pensée. En passant dans les bancs, nous avons également encouragé les élèves à expliquer leurs raisonnements et à justifier leurs observations, afin d'obtenir des données plus riches et plus précises sur leur compréhension

des tableaux de valeurs de fonctions. Enfin, pour pallier le fait que nous n'avons pas un accès direct à la pensée des élèves, nous mettrons nos analyses en perspective à partir des différentes expériences menées dans les écoles, des discussions eues avec les enseignants, ainsi que des notes de cours et des référentiels présentés dans le chapitre précédent.

5.7 Analyse *a posteriori* de l'expérimentation

5.7.1 Grille de lecture de l'expérimentation

En regard de l'analyse *a priori* et de la constitution même de l'expérimentation, nous allons orienter notre analyse des productions des élèves sur deux aspects fondamentaux : d'une part, la manière dont les élèves évoquent la notion de limite, et plus spécifiquement celle de limite d'une fonction, et d'autre part, la manière dont ils mobilisent la notion de fonction dans leur analyse des tableaux de valeurs. En effet, notre objectif est bien de déterminer dans quelle mesure les élèves sont en capacité de nouer un rapport pertinent à la notion de limite d'une fonction à partir de tableaux de valeurs de fonctions, en dehors de toute intervention d'un enseignant. Or, pour que cela soit possible, il est nécessaire que les élèves aient une compréhension suffisante de la notion de fonction pour appréhender la notion de limite d'une fonction.

Dans le cadre de l'analyse *a posteriori* de notre expérimentation, nous mobilisons donc une grille de lecture fondée sur deux modèles épistémologiques de référence (MER), relatifs respectivement aux notions de limite et de fonction. Comme expliqué au chapitre 1, un MER constitue un outil permettant d'exercer une vigilance épistémologique en confrontant les pratiques observées, ici celles des élèves, aux caractéristiques fondamentales du savoir mathématique en jeu. L'objectif n'est pas d'évaluer les productions des élèves en termes de réussite ou d'échec. Il s'agit d'analyser si celles-ci témoignent d'un quelconque rapport à la notion de limite, et lorsque c'est le cas, de rendre compte de la nature de ce rapport.

Dans ce qui suit, nous rappelons d'abord notre MER relatif à la notion de limite, qui constitue le cadre principal de notre analyse, avant d'introduire celui relatif à la notion de fonction.

MER relatif à la notion de limite

Le MER de la notion de limite mobilisé dans cette étude est celui développé au chapitre 3. Il repose sur une modélisation en termes de praxéologies distinguant deux formes de l'activité mathématique : d'une part, une activité orientée vers la détermination de grandeurs, et d'autre part, une activité visant la construction d'une architecture déductive. Ces deux dimensions sont modélisées par deux praxéologies fondamentales que nous avons nommées respectivement "constitution du calculus" et "constitution de l'analyse".

Dans cette première praxéologie, le calcul de limite apparaît sous une forme embryonnaire, comme une technique pour déterminer les objets préconstruits, mais la notion de limite exprimée en $\varepsilon - \delta$ n'est pas encore présente. La validation des résultats est essentiellement pragmatique et repose sur des arguments de conformité avec des résultats obtenus

préalablement. De plus, les discours technologiques restent ancrés dans les registres cinématiques et géométriques.

La seconde praxéologie correspond à une transformation profonde de l'activité mathématique, marquée par la volonté de construire une architecture déductive du *calculus*. Dans ce cadre, la notion de limite, telle que définie par Cauchy, est le concept qui permet cette construction. La limite n'est donc plus ici un simple outil de calcul, mais un objet théorique structurant, mobilisé dans des démonstrations et inscrit dans un système de définitions et de théorèmes.

Dans notre expérimentation, la tâche donnée aux élèves ne relève d'aucune praxéologie constituant le MER. Ils ne doivent pas développer de concept structurant, ni déterminer des grandeurs. Au mieux peuvent-ils deviner la limite de certaines fonctions mais sans aucune assurance. Rappelons qu'il n'est en effet pas possible de se prononcer sur l'existence ou la valeur d'une limite à partir d'un nombre fini de valeurs, comme c'est le cas dans les tableaux. De plus, il faut que pour toutes les suites convergeant vers a , la suite des images converge vers b pour que la limite de la fonction en a soit égale à b . Or, les tableaux de valeurs soumis aux élèves ne contiennent qu'une seule suite convergeant vers a .

On mesure ainsi à quel point, à un niveau structurel, l'utilisation typique qui est faite des tableaux au secondaire est épistémologiquement problématique et s'inscrit dans le mouvement général de l'enseignement par ostension⁸, où la rencontre avec le savoir est essentiellement culturelle-mimétique au sens de Chevallard (1998) et ne peut que faire la part belle aux divers effets de contrat.

Soulignons à nouveau que nous ne cautionnons pas ce type d'enseignement. Notre objectif est d'étudier plus en profondeur la nature du rapport que peuvent nouer les élèves à la notion de limite sur base de tels tableaux.

La distinction entre ces deux praxéologies constitue ainsi un outil central pour l'analyse de notre expérimentation. Elle permet d'interroger la nature du rapport que les élèves entretiennent avec la notion de limite à partir des tableaux proposés.

Nous allons à présent introduire un MER relatif à la notion de fonction, qui nous permettra d'analyser la manière dont les élèves mobilisent cette notion dans leur lecture des tableaux de valeurs.

8. Bosch et Chevallard (1999) distinguent les objets *ostensifs*, c.-à-d. les objets qui possèdent une certaine "matérialité" tels que les sons, les gestes, les représentations graphiques ou encore les tableaux de valeurs, des objets *non-ostensifs*. Ceux-ci correspondent aux idées, intuitions et concepts « *[qui] existent institutionnellement – au sens où on leur attribue une existence – sans pourtant pouvoir être vus, dits, entendus, perçus ou montrés par eux-mêmes : ils ne peuvent qu'être évoqués ou invoqués par la manipulation adéquate de certains objets ostensifs associés.* » (Bosch et Chevallard, 1999, p.90). L'apprentissage par ostension désigne « *la pratique d'enseignement où le professeur se limite à montrer aux élèves un objet ostensif en croyant qu'il se créera spontanément un rapport adéquat à cet ostensif et, surtout, aux non-ostensifs auxquels il est censé renvoyer.* » (Bosch et Chevallard, 1999, p.92).

MER relatif à la notion de fonction

Nous n'avions pas introduit de MER relatif à la notion de fonction dans l'analyse *a priori* de notre expérimentation, car nous n'avions pas anticipé que cette notion constituerait une difficulté importante pour les élèves. C'est en effet à la lecture de leurs productions, et en constatant que la notion de fonction faisait obstacle à l'interprétation des tableaux de valeurs, qu'est apparue la nécessité de disposer d'éléments épistémologiques permettant d'analyser plus finement leurs raisonnements.

Il ne s'agit toutefois pas ici d'élaborer un MER de la notion de fonction dans toute son ampleur, comme nous l'avons fait pour la notion de limite. Notre objectif est plus modestement de dégager certains éléments épistémologiques essentiels relatifs à la notion de fonction, susceptibles d'exercer une vigilance épistémologique sur les productions des élèves et d'éclairer les difficultés observées lors de l'expérimentation. Dans cette perspective, nous nous appuyons principalement sur les travaux de Krysinska (2007) et de Schneider (1988). Une attention particulière sera portée à la manière dont les élèves identifient les variables et leur rôle, sur leur capacité à interpréter la relation de dépendance entre les deux colonnes du tableau et sur leur façon d'articuler cette relation avec la convergence observée dans les tableaux.

Pour les mathématiciens, une fonction est définie comme un triplet d'ensembles : l'ensemble de départ, l'ensemble d'arrivée et une partie du produit cartésien de ces deux ensembles dans laquelle il ne peut exister deux couples différents de même origine. Dans le cadre de notre expérimentation, les ensembles de départ et d'arrivée sont inclus dans l'ensemble des réels. Ce dernier est un ensemble ordonné pour la relation d'ordre "est inférieur (ou égal) à" et il est donc courant d'associer les termes "variation" et "variables" au concept de fonction. Dans ce cas, le mot "dépendance" est souvent utilisé aussi et Krysinska propose alors d'utiliser le terme "covariation" :

« Par ailleurs, associer l'idée de dépendance à celle de variation ne peut se concevoir sans l'existence d'une double variation concomitante : celle des deux variables dépendant l'une de l'autre. C'est pourquoi, nous rendrons compte de cette idée en utilisant le mot "covariation" plutôt que le mot "dépendance" » (Krysinska, 2007, p. 75)

Dans l'histoire, l'idée de "covariation" prend d'abord la forme d'une variation "temporelle" dans laquelle le temps est d'abord considéré comme une variable "transparente" avant d'être explicitement identifié comme variable indépendante. Par la suite, la notion de variable s'est progressivement détachée de toute référence au temps pour considérer des variables dépendant de variables indépendantes autres que le temps (Krysinska, 2007). Cela fait sens avec l'évolution historique des mathématiques, qui a d'abord été motivée par des problèmes de détermination de grandeurs et de vitesse instantanée, comme nous l'avons vu au chapitre 2. Cependant, à cette époque, le concept de variation n'était pas un objet mathématique à part entière. Il faudra attendre le XIV^e siècle pour que le concept de variation soit inclus au sein des mathématiques. À cette époque, le concept de variation

était associé aux notions de vitesse, de densité, d'intensité lumineuse, de chaleur mais pas à celles d'aire et de volume. C'est Newton, au XVII^e siècle, qui a été le premier à considérer l'aire et le volume comme des “quantités variables”. Schneider explique que les élèves vivent une difficulté semblable à celle rencontrée par les mathématiciens de l'époque :

« Les élèves que nous avons interrogés éprouvent, eux aussi, quelque peine à associer à une aire ou un volume ne fût-ce qu'une conception commune de “variabilité” et a fortiori le concept mathématique de fonction. » (Schneider, 1988, p.360)

Dès lors, il est intéressant de se demander comment la notion de fonction est introduite aux élèves afin de comprendre les difficultés qu'ils peuvent rencontrer avec ce concept. La découverte de la notion de fonction est prévue par le référentiel⁹ en troisième secondaire avec l'UAA3, intitulée “Approche graphique d'une fonction”. Les objectifs et stratégies associés à cette UAA sont les suivants :

« L'objectif de cette UAA est de faire émerger progressivement la notion de fonction en tant que processus faisant correspondre un nombre à un autre nombre et d'étudier ainsi les variations d'une grandeur en fonction d'une autre.

La recherche d'informations sur une fonction (domaine, ensemble-image, croissance, extrema, zéros, variations de signe) se fera uniquement à partir de sa représentation graphique et donnera l'occasion de fixer le vocabulaire et les notations propres aux fonctions.

Les exemples seront issus de situations concrètes ou choisis dans d'autres disciplines.

Pour atteindre l'objectif de cette UAA, l'enseignant entrainera les élèves à

- interpréter les observations faites sur le graphique et les formuler par des phrases écrites en langage usuel,*
- utiliser des quantificateurs pour formuler correctement les définitions et décrire précisément les résultats des exercices,*
- utiliser les symboles propres à la logique pour traduire les observations en langage mathématique.*

» (FWB Enseignement, 2015b, p.102)

Le programme d'études de mathématiques conseille aussi de définir la notion de fonction de la manière suivante :

« La définition de la notion de fonction fera référence à la notion de couple et au sens logique de l'expression “au plus un” ou encore, une fonction f sera définie comme une relation qui, à un nombre x , associe au plus un nombre noté $f(x)$. » (FWB Enseignement, 2015b, p.28)

9. Les référentiels et programmes évoqués ici sont présentés plus en détails dans le chapitre 4.

Les élèves qui ont participé à l'expérimentation ont revu la notion de fonction en cinquième année de la sorte :

- Une *fonction* f est une loi qui à tout réel x d'un ensemble D associe un seul nombre réel noté $f(x)$, x est appelé la *variable*.

Figure 5.1 – Extrait du fascicule de cours *Analyse – Prérequis* (2025c, p.7).

Il est important de souligner que la définition mathématique moderne de la notion de fonction est largement détachée de toute connotation cinématique, de mouvement ou de variation. La fonction y apparaît comme un objet “statique”, défini comme une relation entre ensembles. Pourtant, cette conception constitue l'aboutissement d'une longue évolution historique. Comme nous l'avons évoqué précédemment, l'idée de fonction s'est d'abord développée à partir de phénomènes de covariation entre grandeurs, dans lesquels la notion de variable était fortement liée au temps, qu'il soit réel ou mental, avant de s'en détacher progressivement.

La définition de fonction enseignée aux élèves ne correspond toutefois pas entièrement à cette définition mathématique moderne, dans la mesure où l'idée de dépendance entre deux variables y reste présente. Une relation entre les deux variables est ainsi plus visible dans les définitions enseignées en secondaire. Cependant, l'introduction de la notion de fonction par les représentations graphiques, comme le prévoit le référentiel, ne pose pas nécessairement la question de la covariation. Or, Schneider a montré que les élèves ont des difficultés à percevoir les graphiques de fonctions comme des représentations de covariation :

« [...] pour bon nombre d'entre eux les courbes représentatives des fonctions semblent avoir perdu toute valeur de représentation, [...]. La fonction ne serait plus, pour eux, une relation entre deux grandeurs x et y , une ordonnée positive $f(x)$ ne serait plus la longueur d'un segment figurant l'une ou l'autre grandeur. Le concept de fonction serait en quelque sorte réduit à l'image visuelle qu'imprime sur la rétine sa courbe représentative, l'expression analytique $y = f(x)$ qui lui est associée servant uniquement à désigner cette courbe, à l'identifier parmi d'autres de formes différentes, tout comme la coordonnée $(x, f(x))$ serait le nom de tel ou tel point particulier de la courbe. » (Schneider, 1988, p.352)

Les programmes et l'enseignement actuels de la notion de fonction peuvent ainsi être interrogés du point de vue de cette évolution historique. La perspective cinématique et temporelle de la fonction y est peu explorée, alors même qu'elle a historiquement constitué un point d'entrée fondamental pour la construction du concept. Les élèves sont souvent confrontés directement à des représentations graphiques ou à des définitions formelles, sans passer par un travail progressif sur des situations de covariation permettant de faire émerger la dépendance entre variables.

Or, l'histoire de la notion de fonction montre précisément que la vision moderne et “statique” de la fonction ne s'est pas imposée d'emblée, mais qu'elle constitue l'aboutissement

d'un long processus de conceptualisation. La compréhension de la fonction comme relation abstraite entre variables s'est construite progressivement à partir de l'étude de phénomènes de variation et de covariation.

L'importance de la notion de covariation dans la compréhension de la notion de fonction ressort dans la résolution de problèmes, qui obligent les élèves à dépasser la lecture ponctuelle de couples (x, y) pour considérer la relation de dépendance entre les variables. Un graphique seul ne suffit pas : l'élève doit comprendre comment une variation de la variable indépendante entraîne une variation correspondante de la variable dépendante. C'est précisément cette coordination des variations que Krysinska (2007) désigne par "covariation". Ainsi, les tâches les plus révélatrices sont celles où la fonction est pensée comme un processus de variation conjointe à travers des problèmes de complexité grandissante, jusqu'à s'en libérer pour aller en direction de la vision moderne "statique".

Cependant, le référentiel ne prévoit pas de faire travailler les élèves sur des problèmes de ce type dans cette UAA d'introduction au concept de fonction. Pour la partie "transférer", le référentiel ne prévoit que des problèmes centrés sur les graphiques :

*« Résoudre un problème nécessitant la recherche d'éléments caractéristiques du graphique d'une fonction.
Tracer le graphique d'une fonction qui répond aux conditions données. »
(FWB Enseignement, 2015b, p.30)*

De plus, Schneider (1988) a montré que le temps joue un rôle central dans la perception de la variation par les élèves à travers deux types de problèmes : le calcul d'un débit et le calcul d'une aire curviligne. Les élèves associent spontanément le terme "variation" au problème de débit, précisément parce qu'il met en jeu une évolution explicite dans le temps. Les grandeurs dépendant directement du temps, comme la vitesse, le débit ou la croissance, sont ainsi plus facilement identifiées comme variables. À l'inverse, lorsque la variable indépendante n'est plus temporelle, comme dans le cas du calcul d'une aire curviligne, les élèves éprouvent davantage de difficultés à interpréter la situation en termes de variation :

« L'idée même de variation s'impose généralement par le fait que les grandeurs changent pendant qu'on les observe ou qu'on les considère. On conçoit ainsi aisément que les grandeurs qui varient dans le temps sont variables, or ce n'est a priori pas le cas des aires, ni des volumes qui restent inchangés tout le temps de détermination de leur mesure. Et, même lorsqu'on les découpe en parties, chacune des parties est rapportée à l'ensemble de toutes les découpes qui constituent la grandeur, ne serait-ce qu'en additionnant leur mesure avec les autres. » (Balhan, 2017, p.139)

Toutefois, si cette perspective cinématique et temporelle constitue historiquement un point d'entrée naturel dans la compréhension de la notion de fonction, elle peut également

devenir un obstacle lorsque les élèves restent enfermés dans cette conception sans parvenir à s'en détacher progressivement pour accéder à la vision moderne de la fonction.

Cette propension à assimiler variation et temporalité constitue en effet un obstacle épistémologique, puisque la notion mathématique de fonction repose avant tout sur une relation de dépendance entre variables, indépendamment de toute référence au temps. Schneider explique cette prégnance d'une vision cinématique de la variable, dans laquelle celle-ci est pensée comme évoluant au cours du temps, de la manière suivante :

« Le temps n'est-il pas la seule “variable” qui se présente comme telle d'une manière inéluctable : toute autre quantité variable dans le temps, telle la vitesse ou le débit, peut-être constante dans l'un ou l'autre intervalle de temps, mais on ne peut arrêter, figer le temps ? Une vitesse constante n'en reste pas moins une vitesse, mais que veut dire un temps constant sinon un temps nul ? Et rien ne se passe en un temps nul : toute action requiert un minimum de temps. De plus, pour considérer une grandeur quelle qu'elle soit comme une “variable”, il faut la penser comme telle, c'est-à-dire lui attribuer mentalement une valeur, puis une autre,... Or, ce processus mental se déroule lui-même dans le temps. Quoi de plus normal, dès lors, que toute idée de variation renvoie à la variation temporelle et de là viendrait qu'on soit tenté instinctivement d'assimiler une variable quelconque à une variable temporelle. » (Schneider, 1988, p.371)

Cette analyse permet de mieux comprendre pourquoi cette conception devient un obstacle à la modélisation fonctionnelle. En effet, en réduisant implicitement la variation à une évolution dans le temps, les élèves peinent à envisager la fonction comme une relation abstraite entre deux variables quelconques. La temporalité tend alors à masquer l'idée essentielle de covariation.

Cette difficulté est renforcée par l'usage même du mot “variation” dans le langage courant, où il renvoie spontanément à une idée de changement ou de transformation. Or, en mathématiques, parler de variation ne suppose pas nécessairement une modification effective des valeurs : une fonction constante demeure une fonction, et peut parfaitement être étudiée dans le cadre des variations. Le terme conserve donc en mathématiques un sens plus large et plus formel que dans l'usage ordinaire, ce qui peut entretenir des ambiguïtés chez les élèves.

La notion de variable occupe donc une place centrale dans l'étude des fonctions, mais elle se caractérise par une ambiguïté épistémologique importante. Contrairement à la notion de fonction, la notion de variable ne fait pas l'objet d'une définition explicite dans le cadre de l'analyse à l'école secondaire. Cela se reflète dans certaines formulations, notamment dans la définition de la limite d'une variable de Verriest analysée par Kryszyska :

« Verriest (1956) définit la limite d'une variable à l'adresse de futurs chimistes, [d'une] manière qui n'est pas sans rappeler le langage des infi-

nitésimaux encore utilisé par Cauchy au XIX^e siècle : “Soit x une quantité variable ; on dit que x tend vers une limite déterminée si les valeurs successives de x se rapprochent d’un nombre fixé a , de telle sorte que la différence $x - a$ finisse par devenir et rester, en valeur absolue, inférieure à tout nombre positif donné ε , si petit qu’il soit. On dit alors que x a pour limite a et l’on écrit $\lim x = a$ ”. » (Krysinska, 2007, p.82)

Lorsque qu’il parle des “valeurs successives” d’une variable, il introduit implicitement une idée d’ordre, voire de parcours, qui renvoie à une forme de temporalité. Cette référence, souvent implicite, suggère que la variable “évolue” au fil du temps, ce qui contribue à installer une conception cinématique de la variable.

Dans le cadre de l’analyse standard, cette interprétation n’est pourtant pas fondée. En effet, la notion de limite est définie pour des fonctions, et non pour des variables en tant que telles. Nous rencontrons parfois des tentatives de définition formelle de la limite d’une variable mais celles-ci conduisent à des ambiguïtés, en dehors d’un cadre structuré comme celui des suites. Par exemple, une formulation du type $\forall \varepsilon > 0, |x - a| < \varepsilon$ ne permet pas de rendre compte d’une quelconque convergence, mais se réduit à l’égalité $x = a$.

Ainsi, l’ambiguïté de la notion de variable tient à la coexistence de plusieurs conceptions qui ne sont pas toujours explicitées ni distinguées dans les pratiques d’enseignement. Dans notre expérimentation, aucune référence explicite au temps n’est faite ce qui peut rendre plus difficile pour certains élèves la perception de la variation et, par conséquent, l’expression de caractéristiques de fonctions. Certains élèves pourraient alors être tentés de reconstruire implicitement un temps, en faisant une lecture dynamique du tableau, ce qui peut amener des expressions provenant du registre cinématique (“ça se rapproche”, “ça devient de plus en plus proche”, etc.). Cette référence implicite au temps peut impacter la compréhension de la notion de limite d’une fonction. Comprendre que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ne signifie pas que x “se déplace” vers a dans le temps, mais que les valeurs de $f(x)$ peuvent être rendues arbitrairement proches de b lorsque x est suffisamment proche de a , indépendamment de toute temporalité, constitue un enjeu conceptuel majeur. Comme nous l’avons déjà évoqué dans notre MER de la notion de limite, la persistance d’une vision cinématique de la convergence peut notamment empêcher les élèves de reconnaître la convergence d’une fonction constante.

Cette analyse permet ainsi d’éclairer certaines difficultés rencontrées par les élèves dans des situations où la variable indépendante n’est pas explicitement temporelle, comme c’est le cas des tableaux numériques proposés dans notre expérimentation. Nous porterons dès lors une attention particulière aux formulations mobilisées par les élèves afin de déterminer dans quelle mesure elles témoignent d’une perception de la covariation entre les deux variables.

Dans le questionnaire distribué aux élèves, il est explicitement demandé d’identifier des caractéristiques de fonctions. Pour un mathématicien, une affirmation telle que “les images de la fonction sont des multiples de 3” constitue bien, au sens strict, une caractéristique de

la fonction. Cependant, ce type d'observation ne rend pas compte de la covariation entre les deux variables. Dans l'analyse *a posteriori*, nous réserverons donc l'expression "caractéristique d'une fonction" aux énoncés qui témoignent d'une compréhension de la relation fonctionnelle entre les éléments de la première colonne et ceux de la seconde colonne d'un tableau. À l'inverse, nous utiliserons simplement le terme "caractéristique" pour désigner les observations portant uniquement sur l'une des deux colonnes, sans mise en relation explicite des deux variables.

Ainsi, ce MER de la notion de fonction, articulé avec celui de la limite, constitue un outil central pour analyser dans quelle mesure les élèves parviennent à construire un rapport cohérent à la notion de limite d'une fonction, ou au contraire rencontrent des obstacles liés à des conceptions inadaptées ou erronées.

5.7.2 Conventions employées dans la transcription

Dans le cadre de cette étude, les interactions orales entre les participants ont été intégralement transcrites selon un protocole homogène visant à garantir la lisibilité et la précision de l'analyse.

Chaque prise de parole est structurée selon le format suivant : un horodatage, un identifiant de locuteur, puis le contenu verbal. L'horodatage est indiqué entre crochets sous la forme [minute : seconde] et correspond au moment dans l'enregistrement où débute l'intervention. Il permet de situer les échanges dans la temporalité de la discussion.

Les locuteurs sont anonymisés et codés de la manière suivante : S1, S2 et S3 désignent les trois élèves participant à l'échange tandis que mes interventions sont désignées par S4. L'enseignant et Kevin Balhan étaient présents mais n'ont pas pris part aux échanges avec les élèves.

Chaque intervention est transcrite en respectant autant que possible les formulations orales, y compris les hésitations, répétitions ou reformulations, dans la mesure où elles peuvent être pertinentes pour l'analyse.

Un exemple de transcription est donné ci-dessous :

[20 : 11] **S2** : Je suis l'élève S2 et j'ai commencé à prendre la parole à 20 minutes et 11 secondes de l'enregistrement.

La transcription complète est disponible dans l'annexe B. Dans les parties d'analyse, les extraits de transcription sont présentés dans des encadrés spécifiques afin de les distinguer clairement du reste du texte. En voici un exemple :

[20:11] **S2** : Je suis l'élève S2 et j'ai commencé à prendre
la parole à 20 minutes et 11 secondes de
l'enregistrement.

Dans la suite, que les élèves soient des garçons ou des filles, nous utiliserons toujours le pronom masculin pour désigner les élèves afin de préserver leur anonymat.

5.7.3 Analyse *a posteriori* des productions des élèves

Nous réalisons à présent l'analyse *a posteriori* des productions des élèves. Pour ce faire, nous analysons chaque tableau les uns à la suite des autres, conformément à la méthodologie de l'ingénierie didactique décrite plus haut, en confrontant analyse *a priori* et *a posteriori*. Les échanges entre les élèves autour d'un tableau sont découpés en épisodes afin de mieux faire ressortir les éléments concernant le rapport des élèves aux notions de fonction et de limite. Enfin, les caractéristiques données par les élèves sont transcrites sous chaque tableau telles qu'elles ont été écrites par ceux-ci, sans reformulation ou correction (orthographique ou grammaticale).

5.7.4 Tableau 1 : $[00 : 11] \rightarrow [06 : 14] ; [08 : 43] \rightarrow [10 : 04]$

Productions écrites des élèves

x	$f_1(x)$
4,9000000000000000	11,4908401948657000
4,9900000000000000	11,4891270249537000
4,9990000000000000	11,4891252948081000
4,9999000000000000	11,4891252930778000
4,9999900000000000	11,4891252930761000
4,9999990000000000	11,4891252930761000
4,9999999000000000	11,4891252930761000
4,9999999900000000	11,4891252930761000
4,9999999990000000	11,4891252930761000
4,9999999999000000	11,4891252930761000
4,9999999999900000	11,4891252930761000
4,9999999999990000	11,4891252930761000
4,9999999999999000	11,4891252930761000
4,9999999999999900	11,4891252930761000
4,9999999999999990	11,4891252930761000

5

Caractéristiques de la fonction $f_1(x)$ données par les élèves :

- C_1 : toutes les images de la fonction sont constantes et identiques
- C_2 : (toutes les abscisses de la fonction sont identiques)
à partir de $x = 4,99999$, les images sont identiques
- C_3 : ~~les x sont une~~ toutes les unités des x sont entre 4,9 et 5

Épisode 1 : Rapport des élèves à la notion de limite d'une fonction

Pour ce premier tableau, à aucun moment les élèves n'évoquent le fait que la fonction f_1 admette une limite en 5. On pourrait s'en étonner, sachant que du point de vue mathématique les fonctions constantes ou localement constantes en un point a admettent trivialement une limite en ce point. Ce constat est pourtant en accord avec notre analyse *a priori* et notre MER, où nous avons relevé le fait que d'autres recherches montrent combien les élèves peuvent éprouver des difficultés à considérer qu'une fonction ou une suite constante admette une limite et même qu'une fonction ou qu'une suite puisse être constante, tant les connotations dynamiques associées à ces notions peuvent faire obstacle. La notion de limite d'une suite est par contre évoquée mais sans pourtant être considérée comme relevant d'une caractéristique de la fonction f_1 . Voyons plus en détails dans les échanges entre élèves de quoi il retourne.

Épisode 1.1

À différents moments, les élèves évoquent la notion de suite et de limite d'une suite concernant la première colonne du tableau. Après seulement 2 minutes et 11 secondes, un élève mentionne que les valeurs de x "se rapprochent de plus en plus de 5" :

[02:11] S1 : On se rapproche de plus en plus de 5.

On suppose que c'est à la suite de cette observation qu'ils ont indiqué le chiffre 5 en dessous de la première colonne du tableau. Un peu plus tard, l'élève S2 amène la notion de suite en s'interrogeant sur la nature de celle-ci :

[04:53] S2 : Non, en fait, parce que je pense que c'est plus... On peut dire que c'est une suite. C'est une caractéristique.
[05:02] S2 : C'est une suite... euh... géométrique non ?
[05:09] S1 : Moi, j'aurais dit arithmétique, à chaque fois, tu rajoutes... Ah non.
[05:13] S2 : Non, à chaque fois tu ne rajoutes pas la même chose.
[05:15] S1 : Parce que de là à là tu ne multiplies pas par euh...
[05:23] S2 : Mais à chaque fois, tu rajoutes un truc plus petit.
[05:27] S1 : Plus grand, non ?

[05:29] S1 : Ah oui, non, plus petit.
 [05:31] S1 : Et moi... si tu multiplies ça par 0,9 t'as pas 4, ...
 [05:37] S1 : Pour moi, c'est pas une suite, en fait.
 [05:39] S3 : Ah non ?
 [05:43] S2 : Mais, on l'avait vu avec les 0,989898 là. 0,9 puis 0,99.
 [05:49] S2 : On avait vu un truc comme ça.
 [05:51] S1 : Oui oui, mais avec les zéros, quand tu multiplies 0 par 0,9 ... bah... fin...
 [05:57] S2 : Là, tu multiplies 4, du coup.

On constate, à la suite de cet échange, que deux élèves ont des souvenirs du dossier sur les suites qui avait été vu quelques mois avant. Seulement, pour l'un d'entre eux (S1), une suite semble nécessairement être géométrique ou arithmétique et il n'a pas l'air de se souvenir de la définition d'une suite en toute généralité. Nous formulons dans la suite différentes hypothèses qui pourraient expliquer ce comportement.

Il est intéressant de noter que les élèves sont en réalité familiarisés avec l'idée de suites de nombres dès l'enseignement primaire. Les référentiels officiels mentionnent explicitement cette compétence : les Socles de compétences indiquent par exemple la capacité à “relever des régularités dans des suites de nombres” (P1 à P6 : sensibilisation à cette activité, S1–S2 : compétence certifiée) (Fédération Wallonie-Bruxelles, 2013). Cependant, au deuxième degré de l'enseignement secondaire (S3–S4), le terme même de “suite” n'apparaît plus dans le référentiel (Fédération Wallonie-Bruxelles, 2014). Ainsi, au cours des deux dernières années précédant l'expérimentation, les élèves n'ont plus été amenés à travailler explicitement cette notion. Dans ce contexte, le chapitre sur les suites étudié en début d'année constitue le seul moment récent où cette notion est réactivée dans leur cours de mathématiques. Par ailleurs, l'analyse des programmes montre que ce chapitre occupe une place relativement limitée dans l'ensemble du programme. Dans le cas présent, les élèves suivent le programme de mathématiques pour les scientifiques (six périodes par semaine). Celui-ci précise que l'unité d'apprentissage consacrée aux suites est prévue pour 14 à 16 périodes de cours et peut être organisée en deux séquences pédagogiques : la première portant sur les suites quelconques, les suites arithmétiques et les suites géométriques, et la seconde consacrée à l'algèbre financière (FWB Enseignement, 2015a).

La définition générale d'une suite a bel et bien été vue, elle a été introduite au début du chapitre 2 du dossier intitulé “Suites arithmétiques et géométriques”. Ensuite, l'enseignant s'est rapidement concentré sur l'étude des suites arithmétiques et géométriques, qui constituent l'essentiel du travail proposé aux élèves pour le reste du chapitre. Les exercices et les activités portent donc majoritairement sur ces deux types particuliers de suites, ce qui peut amener les élèves à assimiler la notion de suite exclusivement à ces deux formes spécifiques (Haine et Moitroux, 2025a). Ces réalités ne concernent pas uniquement ce cours sur les

suites, mais sont plutôt symptomatiques des injonctions des référentiels et programmes. En effet, comme expliqué au chapitre 4, consacrer 14 à 16 périodes de cours pour l'UAA2 portant sur les suites, s'avère relativement peu lorsqu'on sait qu'une partie de ce temps doit être consacré aux mathématiques financières. Par ailleurs, bien que la notion de suite soit effectivement réinvestie dans le cadre des mathématiques financières, ce réinvestissement demeure fortement contextualisé. Les élèves peuvent alors éprouver des difficultés à prendre de la hauteur sur la notion de suite elle-même et à l'envisager en dehors de ces cadres particuliers, de la même manière qu'ils tendent à assimiler les suites aux seules suites arithmétiques et géométriques.

De plus, l'enseignant a introduit de nombreux éléments qui ne sont pas mentionnés par le programme, comme des méthodes de démonstration, qui occupent une part non négligeable des périodes consacrées à ce chapitre, mais dont on n'imagine pas pouvoir se passer. À cela viennent s'ajouter les réalités de la vie scolaire, avec des heures de cours perdues pour des activités annexes (voyages, journées à thème, manifestations, grèves, etc.) et des choix pédagogiques basés notamment sur le nombre d'élèves en classe, leurs options et aspirations futures, qui peuvent amener les enseignants à consacrer plus de temps à certains chapitres au détriment d'autres.

Dans ces conditions, il n'est pas surprenant que les élèves associent principalement la notion de suite aux modèles arithmétique et géométrique, qui constituent les objets les plus fréquemment manipulés dans les exercices et les évaluations. Nous pouvons aussi supposer que si la suite de la première colonne du tableau avait été générée différemment, les élèves auraient peut-être passé moins de temps à discuter de la nature de cette suite.

Épisode 1.2

L'élève S2, qui introduit les termes "suite" et "tendre vers", insiste particulièrement sur ces interprétations et nous verrons dans la suite qu'il reviendra sur ces notions à plusieurs reprises. Cependant, les autres membres du groupe semblent hésiter quant à la pertinence de cette interprétation et ne s'y rallient pas clairement. Ils passent même à l'analyse du deuxième tableau et coupent court à la discussion en se contentant de seulement deux caractéristiques pour le tableau 1 :

[05:59] S3 : Au pire on met...un bête truc comme ça que toutes les images de la fonction sont supérieures à...
[06:03] S1 : Oui aussi on peut mettre
[06:06] S2 : Ou alors, on dit que ça tend vers 5, comme t'avais dit.
[06:08] S1 : Oui.
[06:10] S2 : Mais je sais pas si ça...
[06:12] S1 : On pire on en met que 2 et...
[06:14] S3 : Oui, c'est bon, on reviendra après.

Après avoir discuté quelques minutes du deuxième tableau, S2 demande pour revoir les exemples de caractéristiques données dans la consigne, propose l'écriture de la caractéristique C_3 pour le tableau 1 et revient à la charge avec l'idée que les valeurs de x "se rapprochent de 5". Mais l'élève qui introduit ces idées exprime lui-même un manque de confiance dans ses propositions, ce qui semble contribuer à l'abandon de cette piste de réflexion :

[09:21] S2 : Aussi on pouvait dire que ça se rapprochait de 5.
[09:22] S2 : Je sais pas. Comme vous voulez.
[09:27] S1 : Mais plus on avance des chiffres, plus nous avançons vers 5. Ça fait tellement...
[09:37] S2 : Ça tend vers 5.
[09:39] S1 : On met ça, mais ça fait vraiment pro et tout alors que...
[09:43] S2 : Tu trouves ? J'ai l'impression de dire de la merde.
[09:45] S1 : Ça fait un peu tu vois, "ça tend vers 5", je sais pas, ça fait un peu...
[09:50] S1 : Après à tout moment, ça ne tend pas du tout vers 5. Fin si je pense que ça tend vers 5 mais...
[09:54] S2 : Mais on arrive dans les suites, ça tend vers zéro, ça tend vers l'infini, ça tend vers 5.
[10:00] S3 : Non, c'est pas grave, on a déjà pas mal.

Finalement, ces notions ne sont pas reprises dans les caractéristiques écrites du tableau 1, à l'exception de la mention du nombre 5 sous la première colonne du tableau. Parmi toutes les caractéristiques crédibles de la fonction f_1 au départ du tableau, la notion de limite n'est donc pas privilégiée, même pas celle de limite d'une suite. Or, dans le cadre de l'usage qui est fait des tableaux dans les manuels et par certains enseignants, on a l'impression que la notion de limite d'une fonction ne peut qu'émerger par l'observation de tableaux de valeurs. Cela n'est manifestement pas le cas pour les élèves concernant le premier tableau.

Épisode 1.3

Bien que les élèves s'interrogent sur la convergence de la suite de la première colonne, ils semblent considérer que la suite donnée dans la seconde colonne n'admet pas de limite :

[00:23] S1 : Mais déjà, toutes les images et toutes les abscisses sont constantes, là.
[00:46] S3 : Les images... ouais.
[00:48] S2 : Mais oui, parce qu'il n'y a pas de limite. Donc euh...

Étant donné qu'ils considèrent que la suite de la seconde colonne n'est pas convergente, il n'est pas étonnant de ne pas voir émerger d'expression de type "Si la suite de la première colonne est convergente alors la suite de la seconde colonne est convergente".

Dans la grille de lecture de l'expérimentation présentée à la section 5.7.1, nous avons exprimé la nécessité pour les élèves de percevoir la covariation entre les deux colonnes du tableau afin de construire un rapport cohérent à la notion de limite d'une fonction. Or, dans ce premier tableau, comme nous allons le voir à l'épisode 2, les élèves ne semblent pas percevoir cette covariation, ce qui peut expliquer l'absence d'expression de la notion de limite d'une fonction.

Épisode 2 : Rapport des élèves à la notion de fonction

Aucune des caractéristiques écrites par les élèves ne rend compte d'une compréhension de la relation fonctionnelle entre les éléments de la première colonne et ceux de la seconde colonne du tableau. Les élèves décrivent essentiellement des comportements numériques observés séparément dans chaque colonne sans véritablement envisager la dépendance entre x et $f_1(x)$. Dans les échanges, nous allons voir que les allusions des élèves à la notion de fonction sont rares et mettent en évidence une compréhension limitée de cette notion.

Épisode 2.1

On pourrait penser que les élèves perçoivent la covariation entre les deux colonnes du tableau car à un moment donné, l'élève S2 explicite le lien fonctionnel :

[03:22] S2 : Mais juste le x c'est une suite, et ça c'est la f de x à chaque fois en fonction du x . C'est normal qu'il change.

Cependant, les échanges analysés dans les épisodes précédents montrent que les élèves raisonnent sur les éléments de chaque colonne de manière indépendante, sans établir de lien explicite entre celles-ci. Le rapport qu'ils entretiennent avec la notion de fonction est dès lors pour le moins questionnable, comme le confirmeront les épisodes suivants.

Épisode 2.2

La discussion du tableau dure un peu moins de huit minutes et durant les deux premières minutes, les élèves s'interrogent sur ce que représentent les deux colonnes du tableau. Ils mobilisent du vocabulaire tel que “abscisse”, “image”, “ordonnée”, “constant”, et discutent de l'allure des données du tableau :

[00:51] S1 : Bah, tout... les abscisses... de la fonction...
sont identiques.
[01:06] S2 : C'est pas toutes les ordonnées ? Parce qu'elle
est comme ça, du coup.
[01:09] S3 : C'est les x .
[01:10] S1 : Oui, c'est les x . Genre toutes les images et
toutes les...
[01:13] S1 : Ah mais non, attend.
[01:13] S1 : Si le x est tout le temps les mêmes... Si le x
est tout le temps le même et que le y est tout le
temps le même, c'est un point.

Cette discussion donne lieu à l'écriture de la caractéristique C_1 : “toutes les images de la fonction sont constantes et identiques”, ainsi qu'à l'énoncé C_2 : “toutes les abscisses de la fonction sont identiques”, qu'ils ont ensuite mis entre parenthèses pour montrer qu'ils s'étaient trompés. Cependant, ces deux caractéristiques portent uniquement sur les éléments d'une seule colonne à chaque fois.

Bien que le vocabulaire utilisé par les élèves se rapporte à celui d'une fonction, que S2 ait explicité le lien fonctionnel, et que la dernière remarque de S1 ci-dessus suggère une réflexion sur la représentation graphique possible des données du tableau, il n'en demeure pas moins que ces caractéristiques ne rendent pas compte d'une compréhension de la relation fonctionnelle entre les éléments de la première colonne et ceux de la seconde. Cette lecture dichotomique des deux colonnes du tableau se confirme avec la caractéristique C_3 : “toutes les unités des x sont entre 4,9 et 5”, ainsi qu'avec la discussion que nous présentons dans l'épisode suivant, dans laquelle les élèves se focalisent exclusivement sur les éléments de la première colonne du tableau, sans faire le lien avec les éléments de la seconde colonne.

Épisode 2.3

Plusieurs extraits mettent en évidence que les élèves se sont intéressés à la colonne des x indépendamment de celle des $f_1(x)$, notamment lorsqu'ils discutent de la nature des décimales des valeurs de la première colonne, qui sont toutes des 9 :

[02:16] S3 : Et non, à chaque fois, on rajoute un 9.
 [02:19] S2 : Ouais, ben, genre 9 sur 10, puis 9 sur 100 et puis, c'est une suite.
 [02:23] S3 : À chaque fois on rajoute un $9/10^e$.
 [02:25] S3 : Ou un $9/100^e$.
 [02:27] S2 : Mais du coup, les gars, moi, je suis pas d'accord.
 [02:29] S1 : Non, non, non, c'est pas ça.
 [02:34] S1 : On met la bonne truc.
 [02:36] S3 : Bah, mais que euh... le x ... augmente de... $1/9^e$, non, $9/10^e$?
 [02:45] S2 : Mais c'est $9/10^e$ puis $9/100^e$ puis $9/1000^e$.
 [02:46] S1 : C'est juste qu'à partir de là, c'est tout le temps la même chose.

D'autres extraits sont semblables à celui-ci dans la mesure où, au-delà de ne pas considérer la relation fonctionnelle entre les deux colonnes du tableau, les élèves ne mentionnent ni la notion de fonction, ni la notion de limite.

Épisode 3 : Rapport des élèves aux suites et fonctions constantes

Dans l'analyse *a priori* ainsi que dans notre grille de lecture, nous avons anticipé que la constance de la seconde suite à partir du rang 5 constituerait une difficulté pour les élèves. Nous allons voir que cela se confirme dans les échanges.

Épisode 3.1

Dans la caractéristique C_1 , les mots “constantes” et “identiques” sont utilisés ensemble, ce qui suggère qu'ils ont une signification différente pour les élèves. Cependant, dans la caractéristique C_2 , les élèves conservent uniquement le mot “identiques”. Aucune explication n'est donnée suite à l'utilisation du terme “constantes”, il apparaît plutôt comme faisant partie du vocabulaire courant des élèves pour parler de valeurs qui ne “changent” pas, sans que cela ne soit associé à une compréhension de la notion de suite ou de fonction constante. D'ailleurs, les élèves s'interrogent sur le fait que ce soit réellement identique ou pas, en parlant du fait que les valeurs “changent” ou “bougent” :

[01:24] S2 : Mais c'est pas tout le temps le même hein, regarde.
 [01:26] S2 : Dans les 0, ils changent. Ici aussi.
 [01:28] S3 : Oui, mais bon, après, c'est à l'œil nu, on va pas...
 [01:31] S2 : Ici, ça ne change pas du tout, on est d'accord.
 [01:34] S1 : Non, là, ça ne change pas.
 [01:35] S2 : Ah, si, si, si ça change.
 [01:36] S1 : Mais ça, c'est des...
 [01:38] S3 : Oui, c'est des mini trucs qu'on voit pas.
 [01:40] S2 : Mais justement, il bouge, du coup, il faut trouver l'expression de la constance, ça se trouve.
 [01:45] S2 : Ça, c'est $f(x)$, ça, c'est l'ordonnée.
 [01:46] S1 : C'est que la même chose tout le temps en fait .
 [01:48] S2 : C'est comme le y égal et genre c'est ça, tu vois.

De plus, dans l'extrait présenté à l'épisode 2.1, la phrase "C'est normal qu'ils changent" pose question :

[03:22] S2 : Mais juste le x c'est une suite, et ça c'est la f de x à chaque fois en fonction du x . C'est normal qu'il change.

Les élèves ont l'air de penser que lorsque les valeurs numériques de la première colonne changent, "bougent", les valeurs de la seconde colonne doivent changer aussi. Or, comme les élèves le remarquent, à partir de la cinquième ligne, les valeurs de la seconde colonne sont identiques, ce qui peut expliquer leur confusion. Comme nous l'avons montré dans les épisodes précédent, les élèves ne vont jamais mobiliser la notion de fonction adéquatement. Cela vient peut-être de cette conception cinématique des variables qui les empêche de faire le lien entre les éléments de la première colonne et ceux de la seconde colonne du tableau qui s'avèrent être constantes à partir d'un certain rang.

Bilan de l'analyse du tableau 1

Les notions de limite et de fonction sont finalement peu mobilisées par les élèves dans la discussion concernant le tableau 1. Le mot "limite" n'est d'ailleurs prononcé qu'une fois sur tout leur échange et c'est précisément pour nier l'existence d'une limite dans ce cas.

Durant les différentes interventions, le mot "fonction" n'est presque jamais prononcé. Ce constat peut paraître surprenant au regard de la formulation de la consigne. Le mot "fonction" apparaît à sept reprises dans l'énoncé et chaque tableau est suivi de l'intitulé "Caractéristiques de la fonction". Ces éléments semblaient donc orienter les élèves vers une lecture fonctionnelle.

Il convient toutefois de nuancer ce constat. Deux des trois exemples donnés dans la consigne portent uniquement sur les images de la fonction. Bien que ceux-ci correspondent, pour un mathématicien, à des caractéristiques de fonctions au sens strict, elles n'explicitent pas la covariation entre les deux colonnes du tableau. Nous sommes alors amenés à penser que pour les élèves, les trois exemples donnés représentent des descriptions des valeurs de $f(x)$ et ne correspondent pas à des caractéristiques de fonctions au sens où nous les avons définies dans notre MER de la notion de fonction.

L'analyse *a posteriori* de ce premier tableau confirme donc, dans l'ensemble, les hypothèses formulées dans l'analyse *a priori*. Nous avons anticipé que les élèves n'identifieraient pas spontanément de comportement limite dans ce tableau, précisément parce que la convergence rapide des valeurs de f_1 vers $\sqrt{132}$ crée une apparente constance dès la cinquième ligne, et parce que la conception cinématique de la limite, telle qu'expliquée dans notre grille de lecture, pousse les élèves à rejeter l'idée qu'une fonction constante puisse admettre une limite.

De même, nous avons prévu que les élèves seraient davantage sensibles à la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ vers 5 puisqu'elle est strictement monotone, et qu'ils ne s'interrogeraient pas sur la relation entre les variations de x et celles de $f_1(x)$. Nous verrons d'ailleurs que, sur toute la durée de l'expérimentation, ils ne se posent jamais cette question.

En revanche, dans l'analyse *a priori*, nous nous attendions à ce que les élèves ne formulent pas d'éléments faisant allusion à la convergence de la fonction, mais nous n'avons pas anticipé qu'ils rendraient si peu compte de la relation fonctionnelle entre les deux colonnes. Le tableau est vu comme deux séries de nombres juxtaposées.

L'analyse *a posteriori* de ce premier tableau a ainsi déjà mis en évidence de nombreux éléments permettant de mieux comprendre le rapport des élèves à la notion de limite d'une fonction. L'étude des sept tableaux suivants montrera que certaines observations formulées ici se confirment, tandis que de nouveaux aspects viendront compléter et affiner nos observations.

5.7.5 Tableau 2 : $[06 : 16] \rightarrow [08 : 35] ; [10 : 08] \rightarrow [13 : 36]$

Productions écrites des élèves

x	$f_2(x)$
4,0906915661572000	12,2019673885118000
4,4199914401252600	11,7420109178072000
4,6277656141418200	11,5675864611620000
4,7588622552308700	11,5120767383103000
4,8415786437626900	11,4958432421529000
4,8937691566157200	11,4911785294694000
4,9266991440125300	11,4898038097767000
4,9474765614141800	11,4893755716291000
4,9605862255230900	11,4892311771347000
4,9688578643762700	11,4891775549302000
4,9740769156615700	11,4891554459627000
4,9773699144012500	11,4891453561218000
4,9794476561414200	11,4891403231561000
4,9807586225523100	11,4891376272010000
4,9815857864376300	11,4891361042516000

5

11

Caractéristiques de la fonction $f_2(x)$ données par les élèves :

- D_1 : lorsque les ~~ima~~ x croient, les y décroient inversement proportionnels.
- D_2 : l'unité des x est 4 et l'unité des y est 11 sauf le 1^e.
- D_3 : par rapport au tableau 1, les décimales ne sont pas constantes.

Épisode 1 : Rapport des élèves à la notion de limite d'une fonction

Durant les 5 minutes et 47 secondes de discussion à propos du deuxième tableau, les élèves ne font aucune allusion à la notion de limite d'une fonction, ni même à la notion de suite. Les seuls éléments qui pourraient être interprétés comme des allusions à la notion de limite sont les nombres 5 et 11 écrits en dessous des deux colonnes du tableau. Cependant, aucun échange ne fait référence à ces nombres et nous ne disposons donc pas d'éléments permettant de les interpréter comme des allusions à la notion de limite. On peut supposer que les élèves ont inscrit ces nombres par mimétisme avec ce qu'ils avaient fait dans les autres tableaux. Les élèves avaient le choix de l'ordre dans lequel répondre car les huit tableaux leur ont été distribués en même temps. Ils pouvaient donc aussi revenir en arrière pour compléter des caractéristiques, ou par exemple, rajouter les nombres 5 et 11 en dessous des colonnes du tableau. L'enregistrement audio nous permet de retracer en partie l'ordre

dans lequel les élèves ont rédigé les différentes caractéristiques, mais il est possible que l'élève qui a inscrit les nombres 5 et 11 ait fait cela sans en parler à voix haute.

Cette absence d'allusions à la notion de limite rejoint en partie les éléments mis en évidence dans l'analyse *a priori*, notamment le fait que les valeurs de x ne présentent pas de "régularité visuelle" aussi marquée que dans le tableau 1 et que la convergence vers 5 soit moins rapide. De plus, pour la deuxième suite, nous avons expliqué que la détermination de la valeur limite s'avérerait plus difficile pour les élèves puisqu'elle vaut $\sqrt{132}$ qui est un nombre irrationnel. Il y a en effet un biais qui consiste à isoler une limite rationnelle dû à la très faible apparition des irrationnels dans leur cours de mathématiques. Dans les exercices du dossier des suites réalisés en classe par les élèves, aucun nombre irrationnel n'apparaît hormis lors du calcul d'un réalisant et d'un exercice faisant intervenir le radian. La majorité des exercices de calcul de limites réalisés en classe par les élèves ont comme réponse des nombres rationnels (Haine et Moitroux, 2025a). Cependant, nous pensions que les élèves exprimeraient malgré tout une caractéristique faisant allusion à "un rapprochement des valeurs vers un nombre dont on est pas sûr". Or, il n'en est rien et il est difficile de penser que l'inscription du nombre 11 intervient à la suite d'un tel raisonnement.

Au regard de notre grille de lecture, nous allons nous intéresser au rapport des élèves à la notion de fonction qui peut être la cause de l'absence d'expression de la notion de limite d'une fonction.

Épisode 2 : Rapport des élèves à la notion de fonction

De nouveau, deux caractéristiques sur trois ne reflètent pas une compréhension de la relation fonctionnelle entre les valeurs de x et de $f_2(x)$. En revanche, la caractéristique D_1 pourrait faire penser que les élèves ont perçu une covariation entre les deux colonnes du tableau, ce qui pourrait être interprété comme une allusion à la notion de fonction. Nous verrons comment cela se traduit dans les échanges.

Épisode 2.1

Au début de leur discussion, les élèves discutent de la croissance et de la décroissance des valeurs dans chaque colonne du tableau. Cependant, dans cet échange, les élèves ne font pas explicitement référence à une relation fonctionnelle entre les deux colonnes du tableau, ni même à la notion de fonction. Ils se contentent de décrire les comportements numériques observés dans chaque colonne, sans établir de lien entre celles-ci :

[06:27] S3 : Ah non, les x ils augmentent mais les images elles descendent.

[06:29] S1 : Là, on croît et là on décroît.

Épisode 2.2

La notion de croissance mobilisée par les élèves ne correspond pas à la conception mathématique de la croissance d'une fonction et est par la suite associée à une idée de "proportionnalité" :

[10:22] S2 : En fait, là, ça décroît de moins en moins quand même, faut se le dire.
 [10:26] S1 : Oui, c'est pas de manière proportionnelle. Fin, c'est pas... régulier.
 [10:30] S2 : Et là, est-ce que ça croît ou pas ?
 [10:32] S1 : Oui, ça croît.
 [10:34] S1 : C'est pas ouf, le mouvement est pas circulaire.
 [10:35] S2 : Et là, ça croît de... genre ça se... je sais pas comment expliquer...
 [10:40] S2 : Et là, ça croît de moins en moins et là, ça décroît de moins en moins.
 [10:42] S1 : Du coup, si eux ils croient et que eux ils décroient avec eux.
 [10:44] S1 : C'est proportionnel.
 [10:46] S3 : Ça croît et décroît proportionnellement.
 [10:49] S2 : Inversement proportionnel.

À la suite de cette discussion, les élèves écrivent la caractéristique D_1 : ils indiquent que lorsque les x croissent, les y décroissent de manière inversement proportionnelle. Cependant, ils n'ont pas vérifié que le produit des valeurs associées des deux colonnes était constant et ce n'est d'ailleurs pas le cas. Ils ont l'air de se souvenir que généralement, dans les situations inversement proportionnelles, l'augmentation de la valeur de l'une des variables entraîne une diminution de la valeur de l'autre variable mais ils ont oublié que cela doit se faire de façon proportionnelle.

Les élèves appliquent le terme de "croissance" ou "décroissance" à une seule colonne du tableau, indépendamment de l'autre, avant de relier les deux phénomènes à l'aide de la notion de proportionnalité. Les élèves établissent donc bien un lien entre les variations des deux colonnes du tableau, ce qui témoigne d'une certaine perception de la covariation. Néanmoins, cette dernière reste interprétée au moyen de la proportionnalité, sans prise en compte explicite de la relation fonctionnelle entre variable indépendante et variable dépendante. Finalement, les deux extraits présentés mettent en évidence que ce n'est pas la notion de limite d'une fonction qui apparaît comme centrale aux yeux des élèves mais bien celle de proportionnalité.

Nous nous sommes alors demandés d'où venait cette résurgence de la notion de proportionnalité. Nous avons interrogé un professeur de mathématiques du degré supérieur qui nous a indiqué qu'en quatrième et cinquième secondaire, ils ne parlaient jamais de proportionnalité. Le référentiel des Compétences terminales pour les mathématiques confirme

que la proportionnalité n'est jamais mobilisée de la 3^e secondaire à la 6^e secondaire, le mot "proportionnel" ou ses dérivés n'apparaissant pas une seule fois dans les compétences à atteindre pour les élèves de ces niveaux. En revanche, la proportionnalité est un thème récurrent du programme de mathématiques de l'enseignement fondamental et du premier degré de l'enseignement secondaire (Communauté française de Belgique, 2000). Dans les Socles de compétences, la proportionnalité est mentionnée dans la section des grandeurs à quatre reprises :

« La proportionnalité est travaillée à partir d'exemples de la vie quotidienne. On construit des tableaux et des graphiques qui montrent les relations entre les grandeurs. » (Fédération Wallonie-Bruxelles, 2013, p.30)

3.3.2. Opérer, fractionner

	I	II	III
Fractionner des objets en vue de les comparer.	Partager en deux et en quatre	C	E
Composer deux fractionnements d'un objet réel ou représenté en se limitant à des fractions dont le numérateur est un (par exemple, prendre le tiers du quart d'un objet).		↗	C
Additionner et soustraire deux grandeurs fractionnées.		C	E
Calculer des pourcentages.		C	E
Résoudre des problèmes simples de proportionnalité directe.	↗	C	E
Dans une situation de proportionnalité directe, compléter, construire, exploiter un tableau qui met en relation deux grandeurs.		Compléter uniquement C	C
Reconnaître un tableau de proportionnalité directe parmi d'autres.		↗	C
Déterminer le rapport entre deux grandeurs, passer d'un rapport au rapport inverse.		↗	C

Figure 5.2 – Extrait de *Socles de compétences : Enseignement fondamental et premier degré de l'enseignement secondaire* (Fédération Wallonie-Bruxelles, 2013, p.31).

On constate ainsi que, selon le référentiel, la proportionnalité doit être travaillée de la première primaire à la deuxième secondaire. Dans les programmes de la WBE pour les première et deuxième secondaire (Communauté française de Belgique, 2000), le mot proportionnalité apparaît dans la table des matières dans la section "Résoudre des problèmes - Représenter des données" sous ces termes :

- « Résoudre des problèmes mettant en œuvre des grandeurs directement proportionnelles, des pourcentages, la règle de trois. » (1^{re} sec, p.14)
- « Reconnaître si deux grandeurs sont directement proportionnelles et construire un tableau mettant en relation différentes valeurs de ces grandeurs. » (1^{re} sec, p.14)
- « Résoudre des problèmes conduisant à envisager la proportionnalité directe de deux suites de nombres, le rapport constant de deux valeurs correspondantes. » (2^e sec, p.19)
- « Etablir et utiliser la propriété fondamentale d'une proportion. » (2^e sec, p.19)
- « Mettre en évidence les propriétés de la proportionnalité qui sont liées à la linéarité et montrer leur utilité pour compléter un tableau. » (2^e sec, p.19)
- « La reproduction à l'échelle se fera en lien avec la proportionnalité. » (1^{re} sec, p.25)
- « Utiliser les propriétés de la proportionnalité et du parallélisme. » (2^e sec, p.32)

Il est donc probable que les élèves aient été exposés à cette notion de nombreuses fois durant huit années et qu'elle soit restée ancrée dans leur mémoire, même si elle n'a pas été réactivée depuis plusieurs années. Cependant, bien qu'ils aient des vagues souvenirs, il est clair qu'ils ne maîtrisent plus cette notion.

Épisode 3 : Sollicitation cognitive élevée pour la tâche

Enfin, certains éléments relevés dans l'enregistrement suggèrent également une fatigue cognitive liée à la tâche elle-même. Les élèves mentionnent notamment la difficulté de lire les tableaux et évoquent un certain mal de tête. Dans ces conditions, il est probable que leur motivation à mobiliser des connaissances plus “compliquées”, comme la définition formelle de la convergence d'une suite, soit limitée :

[07:38] S2 : Ça me donne mal à la tête tout ça.
 [07:39] S1 : Oui, moi aussi.
 [07:56] S1 : En fait, c'est embrouillant, je ne vois pas les virgules.
 [07:59] S1 : Est-ce que vous voulez que je mette la virgule en fluo ?
 [08:01] S2 : Est-ce que quoi ?
 [08:02] S1 : Vous voulez que je mette la virgule au fluo comme ça on la voit ?
 [08:04] S2 : Comme tu veux.
 [08:05] S1 : Ça me perturbe de pas la voir, en fait j'ai l'impression y'a trop de chiffres et j'arrive pas à...
 [08:06] S2 : Ça fait beaucoup pour le cerveau.

Bilan de l'analyse du tableau 2

Comme nous l'avions mentionné dans l'analyse *a priori*, les élèves ne sont pas parvenus à conjecturer la limite de la fonction puisque la seule indication qu'ils ont donnée à ce sujet est la mention du nombre 11 sous la colonne des images, sans jamais en parler. Ils n'ont en réalité même pas mobilisé les notions de suite et de limite bien que les convergences illustrées par ce tableau soient strictement monotones. Il ressort de cette discussion que le tableau de valeurs ne porte pas, en lui-même, la notion de limite, et que c'est l'intervention de l'enseignant qui, dans un enseignement "classique", confère à ce type de support une apparente transparence quant à la notion de limite.

5.7.6 Tableau 3 : $[13 : 40] \rightarrow [16 : 14]$

Productions écrites des élèves

x	$f_3(x)$
5,220027936200000	10,900000000000000
4,777607000360170	10,990000000000000
5,173909595686450	10,999000000000000
4,883781919351830	10,999900000000000
5,004283970801930	10,999990000000000
4,954040787040200	10,999999000000000
5,028682719891380	10,999999900000000
4,981678979311930	10,999999990000000
5,009951078491240	10,999999999000000
4,997683783669530	10,999999999900000
5,005182947983320	10,999999999990000
4,992329639018190	10,999999999999000
5,005081250109020	10,999999999999900
4,999917419969770	10,999999999999990
5,001869189388090	10,999999999999999

5

11

Caractéristiques de la fonction $f_3(x)$ données par les élèves :

- E_1 : les x tendent vers 5 et les y tendent vers 11.
- E_2 : les y sont identiques à une décimale près.
- E_3 : les x alternent entre 4 et 5.
- E_4 : les unités des images constantes

Épisode 1 : Rapport des élèves à la notion de limite

Pour la première fois, une des caractéristiques formulées par les élèves semble faire référence à la notion de limite de suite. Nous serons donc attentifs aux discussions que les élèves ont eues à propos de cette caractéristique E_1 pour tenter de mieux comprendre leur rapport à la notion de limite.

Épisode 1.1

C'est de nouveau l'élève S2 qui remet sur le tapis l'idée que les valeurs de chaque colonne s'approchent d'un nombre, en utilisant cette fois le terme "tendre vers" :

[13:50] S2 : Mais là aussi, ça tend vers 5 du coup.
[13:52] S1 : Hm ?
[13:54] S2 : Là aussi, ça tend vers 5.
[13:56] S1 : Là ça tend vers 11.
[13:58] S3 : Ouais.
[14:02] S3 : Ça veut dire quoi "ça tend" ?
[14:04] S1 : Genre "ça s'approche de"
[14:06] S2 : Ouais.
[14:08] S1 : Et... Ça s'approche de...
[14:14] S2 : Mais en vrai mets-le non ?
[14:16] S1 : Je mets ?
[14:18] S2 : Moi j'aurais mis... Genre les x ça tend vers 5 et les f de x , et les images tendent vers 11.

Dans cet échange, un élève tente d'expliquer la signification de l'expression "tendre vers" en la reformulant par "s'approcher de". Comme nous l'avons montré au chapitre 4, les élèves ont appris la définition formelle de la convergence d'une suite il y a quelques mois. Seulement, l'explication donnée par S1 n'atteste pas d'une réelle compréhension de la notion de convergence d'une suite, mais plutôt d'une idée intuitive de "proximité" entre les valeurs de la suite et une valeur limite. Plusieurs hypothèses peuvent être formulées pour expliquer cette situation. Tout d'abord, il est possible que les élèves aient simplement oublié la définition formelle de la convergence d'une suite, ce qui est compréhensible étant donné que celle-ci a été vue il y a plusieurs mois et qu'elle n'a pas été remobilisée depuis. De plus, il est possible que les élèves n'aient jamais réellement compris la définition formelle de la convergence d'une suite. Comme cela a été expliqué au chapitre 4 et à l'épisode 1.1 du tableau 1, l'enseignant ne disposait pas de beaucoup de temps pour voir toutes les notions liées aux suites. Il a présenté la définition de la convergence d'une suite vers un réel et son interprétation graphique mais celle-ci n'a pas fait l'objet de démonstrations ou d'exercices. Le cas de la limite d'une suite géométrique vers un réel et de la limite de la somme des n premiers termes d'une suite géométrique ont été étudiés mais sans utiliser la définition formelle (Haine et Moitroux, 2025a). Le programme ne prévoit d'ailleurs pas

de démontrer ces résultats, mais seulement de les utiliser pour calculer des limites (FWB Enseignement, 2015a). En résumé, les référentiels et programmes ne laissent pas beaucoup de place à l'apprentissage de la notion de convergence d'une suite, et les élèves n'ont donc pas eu l'occasion de manipuler beaucoup cette notion.

Quelques instants plus tard, les élèves évoquent explicitement les suites et les limites :

[15:22] S1 : J'ai peut-être une petite idée. Vous voyez les F, ils ont vu les suites d'une manière plus approfondie. Et à mon avis c'est...
[15:28] S3 : Oh non pas les suites encore
[15:29] S2 : Mais ils ont aussi vu les limites je pense.
[15:30] S1 : Oui, ils ont vu tout en même temps. Nous on a fait en deux fois, du coup je me dis peut-être...

Cependant, en réagissant à l'exaspération de S3, l'élève S2 semble dissocier les suites et les limites, ce qui suggère de nouveau que la notion de limite de suite n'est pas acquise par les élèves. Cela se confirme dans la suite de leur discussion :

[15:40] S2 : En tout cas, moi, je vois pas de suite là mais...
[15:42] S1 : Non, pas les suites mais du coup, les limites.
[15:46] S2 : Ah oui les limites oui, ça les limites, on les voit bien.
[15:48] S1 : Là ? Ouais.
[15:50] S2 : Genre là euh... voilà quoi. Ici aussi, ça se voit que... à chaque fois, ça fait des bonds entre 4 et 5. Genre vous voyez, le truc, il fait vraiment genre ça.
[16:00] S3 : Ouais, les x font des bonds, c'est bon
[16:02] S3 : Entre 4 et 5 qui alternent, je sais pas.

Il est intéressant de noter que les élèves n'ont travaillé jusqu'à présent que sur la convergence de suites, et donc sur les limites de suites. Dans ce contexte, le fait que S2 distingue les limites des suites est surprenant puisque que la notion de limite n'est définie que pour une suite. Cela indique que, pour cet élève, la notion de limite a une existence indépendamment du matériau "suite". De plus, S2 semble associer la notion de limite aux "bonds" qu'elle observe entre certaines valeurs du tableau, ce qui est difficilement interprétable mathématiquement, nous y reviendrons ultérieurement.

En tout cas, il est clair que la notion de limite d'une fonction ne ressort pas de la lecture du tableau, étant donné que les élèves discutent de chaque colonne du tableau séparément, sans établir de lien entre les deux.

Épisode 2 : Rapport des élèves aux suites et fonctions constantes

Dans la rédaction de la caractéristique E_2 , les élèves précisent que les images, dont l'écriture décimale est uniquement constituée de 9, sont identiques "à une décimale près". Cette précision n'apparaissait toutefois pas dans le tableau 1, alors même que les décimales des valeurs de x du tableau 1 sont identiques à celles de $f_3(x)$.

L'analyse de l'enregistrement audio n'apporte pas d'éclaircissement supplémentaire quant à la signification de l'expression "à une décimale près". Elle met cependant en évidence que cette formulation ne renvoie pas à la notion mathématique usuelle de fonction ou de suite constante. Les élèves semblent plutôt identifier une régularité dans les développements décimaux : d'une ligne à l'autre, un chiffre 9 supplémentaire apparaît dans les écritures décimales de $f_3(x)$. Ils décrivent néanmoins ce phénomène à l'aide du terme "constant", auquel ils ajoutent la précision "à une décimale près", combinaison dont l'interprétation peut paraître ambiguë. Nous verrons que les élèves parlent de nouveau de "constance à une décimale près" à propos du tableau 4 et nous apporterons du relief à cette expression dans nos commentaires.

Bilan de l'analyse du tableau 3

Dans l'analyse *a priori*, nous avons anticipé que les élèves ne formuleraient pas de caractéristiques faisant allusion à la convergence de la fonction mais il s'est avéré que les élèves n'ont même pas évoqué la relation fonctionnelle entre les deux colonnes. À la lecture des caractéristiques données par les élèves, il apparaît que le tableau est considéré comme deux séries de nombres indépendantes. Cependant, nous pensions que les élèves ne rendraient pas compte de la convergence vers 5 de la première suite étant donné que celle-ci n'est pas monotone et que la suite des distances à la limite n'est pas décroissante. Or, il s'est avéré que les élèves ont malgré tout perçu "un rapprochement des valeurs vers 5", sans que nous puissions toutefois affirmer que cela corresponde à une compréhension de la notion de convergence d'une suite.

Enfin, dans l'analyse *a priori*, nous n'avions pas fait l'hypothèse que les élèves rencontreraient des difficultés avec la suite $0,9; 0,99; 0,999; \dots$. D'ailleurs, ce type de suite est parmi les plus utilisés par les enseignants dans les tableaux de valeurs pour illustrer la notion de limite d'une fonction et la limite de ces suites est présentée comme une évidence.

5.7.7 Tableau 4 : $[16 : 20] \rightarrow [18 : 14]$

Productions écrites des élèves

x	$f_4(x)$
4,9000000000000000	10,9000000000000000
4,9900000000000000	10,9900000000000000
4,9990000000000000	10,9990000000000000
4,9999000000000000	10,9999000000000000
4,9999900000000000	10,9999900000000000
4,9999990000000000	10,9999990000000000
4,9999999000000000	10,9999999000000000
4,9999999900000000	10,9999999900000000
4,9999999990000000	10,9999999990000000
4,9999999999000000	10,9999999999000000
4,9999999999900000	10,9999999999900000
4,9999999999990000	10,9999999999990000
4,9999999999999000	10,9999999999999000
4,9999999999999900	10,9999999999999900
4,9999999999999990	10,9999999999999990

5

11

Caractéristiques de la fonction $f_4(x)$ données par les élèves :

- F_1 : les x et y sont constants à une réponses décimale près.
- F_2 : les décimales des x et y sont identiques ce qui impliquent un écart de 6 unités entre les x et y constamment.
- F_3 : les x tendent vers 5 et les y vers 11.
- F_4 : les unités de $x = 4$
- F_5 : les x et y croient proportionnellement à une décimale près

Épisode 1 : Rapport des élèves à la notion de limite

Pour ce tableau, la caractéristique F_3 est identique à la caractéristique E_1 du tableau 3. Voyons si les échanges concernant ce quatrième tableau permettent de mieux comprendre ce que cette caractéristique signifie pour les élèves.

Épisode 1.1

Dans l'extrait suivant, S2 propose de nouveau l'écriture d'une caractéristique en utilisant l'expression "tendre vers" :

[17:52] S2 : Et là, tu peux mettre... que les x tendent vers 5
et les f de x tendent vers 11. Ou ils sont entre
10,9 et 11 comme tu veux
[18:02] S1 : Je vais mettre tendent vers 5.

L'élève met sur le même plan deux idées distinctes : le fait qu'une valeur tende vers un nombre et le fait que des valeurs appartiennent à un intervalle numérique, ce qui est difficilement interprétable du point de vue mathématique. Bien sûr, un mathématicien penserait directement à une fonction sinusoïdale, dont les valeurs peuvent être comprises dans un intervalle fermé sans pour autant que la fonction possède une limite. Cette interprétation révèle une confusion entre différents phénomènes numériques, comme nous l'avons vu au tableau 3 avec l'association des "bonds" à la notion formelle de limite de suite. Nous apporterons du relief à cette confusion entre les notions de "tendre vers" et d'appartenance à un intervalle dans l'analyse du tableau 5.

Cet échange est très court, les élèves ne donnent aucune explication et rien ne semble témoigner d'une mobilisation effective de la notion de limite d'une fonction. En revanche, une plus longue discussion, qui a donné lieu aux caractéristiques F_1 et F_2 , a précédé cet extrait. Comme relevé dans notre grille de lecture, une mauvaise compréhension de la notion de fonction peut être à l'origine de l'absence d'expression de la notion de limite d'une fonction. Nous allons donc nous intéresser aux propos des élèves concernant les caractéristiques F_1 et F_2 .

Épisode 2 : Rapport des élèves aux suites et fonctions constantes

La caractéristique F_1 indique que "les x et y sont constants à une décimale près". L'élève S2 émet tout de même un doute sur la validité de cette caractéristique :

[16:20] S2 : Là, les deux sont constants à une décimale près.
En fait, je sais pas si c'est... c'est correct de
dire ça, mais...
[16:28] S1 : Il y a pas de réponses fausses.

Notons que le regard que l'on porte sur ces caractéristiques peut être différent selon le contexte. En statistique, cela paraîtrait moins absurde de parler de constance ou de croissance "presque partout". Cependant, dans notre contexte, on comprend que les élèves essaient de raccrocher ce qu'ils observent dans les tableaux à des notions qu'ils connaissent. Cette attitude peut être mise en relation avec certaines pratiques pédagogiques fréquemment rencontrées dans l'enseignement et même conseillées par les sciences de l'éducation (Fagnant, 2024) : en début de chapitre, les élèves sont souvent invités à exprimer leurs représentations initiales d'une notion, à formuler des intuitions ou à proposer des interprétations personnelles. Dans ce cadre, des réponses approximatives ou partiellement incorrectes peuvent être valorisées lorsqu'elles témoignent d'une proximité avec le concept visé,

l'objectif étant ensuite d'affiner progressivement ces premières représentations.

Remarquons aussi que, lors de la discussion concernant le tableau 1, l'élève S2 avait proposé une caractéristique du type "Les valeurs de x tendent vers 5" mais les élèves S1 et S3 n'avaient pas voulu l'écrire, car ils doutaient de la validité de cette caractéristique. Cependant, dans le cas du tableau 4, malgré le doute exprimé par S2, les élèves ont quand même décidé d'écrire la caractéristique F_1 . Pour S1 et S3, les caractéristiques portant sur les régularités observables dans les écritures décimales sont favorisées pour décrire les tableaux, ce qui montre de nouveau que la notion de limite d'une fonction n'apparaît pas comme centrale aux yeux des élèves.

À la suite de l'extrait précédent, les élèves discutent de la manière dont écrire la caractéristique F_2 :

[16:56] S1 : Et il y a le même nombre de décimales. Les décimales sont identiques ce qui fait qu'il y a 6 unités d'écart.
 [17:02] S2 : Oui, tout le temps, constamment.
 [17:04] S3 : "Constamment", c'est bien ça.
 [17:06] S1 : Ouais... les décimales... des y ... sont identiques... ce qui... crée ?
 [17:19] S3 : Ce qui donne ? Ouais, je sais pas, ouais.
 [17:20] S1 : Implique.
 [17:22] S3 : Qui implique...qu'il y a 6 unités... euh.
 [17:28] S1 : Un écart... de 6 unités.
 [17:34] S3 : Entre les x et y , constamment.
 [17:42] S1 : Constamment, c'est avec un e, ah ouais?
 [17:44] S3 : Ouais.
 [17:46] S3 : Ah non non, c'est un a.

Lors de cet échange, les élèves introduisent le terme "constamment" pour exprimer qu'il y a un écart de 6 unités entre les valeurs de x et les valeurs de $f_4(x)$ pour toutes les lignes du tableau. Cependant, bien qu'ils aient remarqué l'écart de 6 unités, les élèves ne formulent pas de caractéristiques de fonctions du type " $f_4(x) = x + 6$ " comme nous l'avions envisagé dans l'analyse *a priori*. Pour les caractéristiques F_1 et F_2 , ils ne mobilisent pas la notion de fonction pour expliquer ce qu'ils observent mais se contentent de décrire des observations numériques faites sur les valeurs de x et les valeurs de $f_4(x)$.

De plus, les élèves ont probablement ajouté les caractéristiques F_4 et F_5 plus tard. En effet, aucune allusion n'y est faite dans l'enregistrement audio correspondant à leur discussion du tableau 4, ni même dans leur discussion des tableaux suivants hormis cette mention :

[22:04] S3 : Après, on rajoutera des trucs si on a le temps.

Bilan de l'analyse du tableau 4

Comme mentionné dans l'analyse *a priori*, le tableau 4 est un tableau typiquement utilisé dans les notes de cours et manuels pour illustrer la notion de limite d'une fonction. Nous avons fait l'hypothèse que, pour ce tableau "classique", les élèves seraient plus à même de lier les deux convergences monotones des suites de valeurs en exprimant une caractéristique du type "Plus x est proche de 5, plus $f_4(x)$ est proche de 11". Cependant, il s'avère que, même pour ce tableau, les élèves ne perçoivent pas la notion de limite d'une fonction, ni même la relation fonctionnelle entre les deux colonnes du tableau.

5.7.8 Tableau 5 : [18 :16] $\rightarrow$ [22 :42]

Productions écrites des élèves

x	$f_5(x)$
4,0000000000000000	12,000000000000000
4,3333333333333330	10,18350341907230
4,5555555555555560	11,666666666666670
4,703703703703700	11,54433105395180
4,802469135802470	11,444444444444440
4,868312757201650	11,36288736930120
4,912208504801100	10,70370370370370
4,941472336534060	10,75807508713250
4,960981557689380	10,80246913580250
4,973987705126250	10,83871672475500
4,982658470084170	11,13168724279840
4,988438980056110	10,89247781650330
4,992292653370740	10,91220850480110
4,994861768913830	11,07168145566440
4,996574512609220	11,05852766346590

5

11

Caractéristiques de la fonction $f_5(x)$ données par les élèves :

- G_1 : les x croient progressivement à l'inverse les y ~~restent~~ alternent dans un intervalle de $]10; 12]$
- G_2 : la 1^e valeur de x et la 1^e valeur de y est ronde càd les décimales sont nulles.
- G_3 : les dernières décimales sont égales à 0.
- G_4 : l'unité des x est 4

Épisode 1 : Rapport des élèves à la notion de limite

Parmi les quatre caractéristiques données par les élèves, aucune ne fait référence aux notions de suite ou de limite. Cependant, l'enregistrement audio révèle malgré tout qu'un élève fait référence à ces notions, comme nous allons le voir dans l'épisode ci-dessous.

Épisode 1.1

L'élève S2 revient de nouveau sur l'idée que des valeurs de la deuxième colonne “tendent vers 11”. On remarque que ces mentions de “tendre vers”, “se rapprocher de”, “suite”, “limite”, sont toujours amenées par le même élève, ce qui suggère que pour les deux autres, ces notions ne sortent pas spontanément de la lecture de tableaux de valeurs de fonctions.

[19:38] S2 : Ça tend pas vers 11, non ?
 [19:41] S1 : Les y ...
 [19:40] S2 : Bah en fait, à chaque fois, les 10, ils se rapprochent des 11. À chaque fois, les 11 se rapprochent de 11.
 [19:46] S1 : Oui, à mon avis ça reste quand même dans un mini intervalle.
 [19:51] S2 : En vrai on peut le mettre.
 [19:52] S2 : Moi, je pense que le truc, c'est clairement sur les suites.

Dans cet échange, les élèves utilisent indifféremment les expressions “tendre vers”, “se rapprocher de” et “rester dans un intervalle”. Ces différentes idées sont à nouveau mobilisées sans distinction claire, ce qui témoigne d'une compréhension encore intuitive et peu formalisée des notions mathématiques évoquées. Étant donné que cette notion d'appartenance à un intervalle revient, on pourrait supposer que les élèves font référence à la visualisation graphique de la limite d'une suite qu'ils ont vu en cours. En effet, le discours qui accompagnait la représentation graphique était le suivant : « *On dit que la limite de la suite est égale à 0 si les points qui représentent les termes entrent et restent dans une bande de largeur 2ε centrée sur $y = 0$, quel que soit $\varepsilon > 0$* » (Haine et Moitroux, 2025b, p.2). L'élève a ainsi peut-être associé la convergence d'une suite à l'appartenance à une bande, et donc à un intervalle, en oubliant la condition essentielle “quel que soit $\varepsilon > 0$ ”. En effet, comme nous l'avons dit plus haut, le simple fait que les valeurs appartiennent à un intervalle fermé n'est pas suffisant pour dire qu'elles convergent vers une limite.

Finalement, aucun de ces termes n'apparaît dans les caractéristiques écrites par les élèves, seulement 5 et 11 sont inscrits sous les colonnes. Au vu de nos MER de la notion de limite d'une fonction et de la notion de fonction, cette absence de référence à la notion de limite d'une fonction peut s'expliquer par le fait que les élèves ne perçoivent pas la relation fonctionnelle entre les deux colonnes du tableau, et donc ne font pas le lien entre les deux suites de valeurs. Nous allons voir dans l'épisode 2 que les élèves ont une lecture

dichotomique des deux colonnes du tableau, ce qui confirme cette hypothèse.

Épisode 2 : Rapport des élèves à la notion de fonction

Dans l'écriture de la caractéristique G_1 , on constate de nouveau que les élèves ne mobilisent pas la notion de croissance d'une fonction mais regardent simplement la tendance des valeurs de chaque colonne du tableau indépendamment de l'autre :

[18:50] S3 : Tu peux mettre que les x ils croient...toujours.
 [18:52] S1 : Ouais.
 [18:54] S1 : Et ils croient progressivement, je peux mettre.
 [18:58] S3 : Ouais.
 [19:00] S3 : À l'inverse, y'a y qui qui...
 [19:08] S1 : Mais les y , ils peuvent pas bouger, quoi.
 [19:10] S1 : Les y , ils varient pas... fin si ils varient
 mais... 12, 10, 11, 11, 11, 10... tu vois
 c'est...
 [19:16] S3 : Ça un peu l'air...

Les quatre caractéristiques écrites pour ce tableau portent à chaque fois, soit sur les valeurs de la première colonne, soit sur les valeurs de la seconde colonne, sans jamais exprimer la covariation entre les deux. De plus, l'analyse de l'enregistrement audio montre que les élèves cherchent même explicitement des caractéristiques à écrire pour les valeurs de x uniquement :

[21:02] S2 : Et dans les x , on a rien d'autre à dire ?
 [21:04] S2 : Tu peux peut-être dire que les deux premières
 valeurs sont rondes. Vraiment rondes rondes... je
 sais pas.

On constate même que c'est l'élève S2 qui pousse pour trouver des caractéristiques à écrire pour les valeurs de x , alors que c'est lui qui avait été le plus convaincu que les tableaux portaient sur les suites et les limites et qui avait donné une explication de la relation fonctionnelle lors de la discussion du tableau 1.

Bilan de l'analyse du tableau 5

Cette analyse *a posteriori* du tableau 5 confirme que les élèves ne perçoivent pas la notion de limite d'une fonction. Cependant, nous avons émis l'hypothèse, lors de l'analyse *a priori*, que l'alternance irrégulière des parties entières des valeurs de $f_5(x)$ entre 10, 11 et 12 occulterait la convergence de la suite vers 11. Or, un élève a malgré tout perçu une tendance des valeurs de $f_5(x)$ à se rapprocher de 11, même si cette tendance n'est pas exprimée dans les caractéristiques écrites par les élèves.

5.7.9 Tableau 6 : $[22 : 46] \rightarrow [26 : 56]$

Productions écrites des élèves

x	$f_6(x)$
5,2500000000000000	9,871598752346030
5,1250000000000000	10,87123757201180
5,0625000000000000	10,61552417083370
5,0312500000000000	10,88945269111170
5,0156250000000000	10,97437825477460
5,0078125000000000	10,96753048417510
5,0039062500000000	10,87114324786830
5,0019531250000000	10,95736695532250
5,0009765625000000	10,96281926937360
5,0004882812500000	10,97049698381790
5,0002441406250000	10,97483957831860
5,0001220703125000	10,97826506560080
5,0000610351562500	10,98775194558070
5,0000305175781200	10,99957094120420
5,0000152587890600	10,99878187188990

5

11

Caractéristiques de la fonction $f_6(x)$ données par les élèves :

- H_1 : les x décroissent alors que les y croient sauf au 3 et 7, 14
- H_2 : les décimales des x sont une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$
- H_3 : les unités des x sont 5.

Épisode 1 : Rapport des élèves à la notion de limite

Les trois caractéristiques données par les élèves ne font pas référence à la notion de limite d'une fonction. Cependant, la caractéristique H_2 témoigne d'une certaine familiarité avec la notion de suite géométrique :

[25:48] S2 : Donc, c'est une suite géométrique.

[25:50] S1 : D'une décimale...

[25:52] S2 : De 1/5, de raison de 1/5, d'un demi pardon.

Les élèves identifient une structure de suite géométrique pour les décimales des valeurs de x du tableau. Comme nous l'avons dit précédemment, la majeure partie du dossier sur les suites vu par les élèves auparavant est consacré aux suites géométriques (Haine et Moitroux, 2025a). Ce n'est donc pas étonnant qu'ils essaient, pendant presque trois minutes,

de déterminer s'il s'agit bel et bien d'une suite géométrique et ensuite de déterminer la raison de cette suite.

Cependant, cette observation porte uniquement sur les valeurs de x et plus précisément sur leurs décimales. De nouveau, les élèves ne rendent pas compte du lien fonctionnel entre les deux colonnes du tableau.

Épisode 2 : Rapport des élèves à la notion de fonction

Dans un échange précédent qui mène à l'écriture de la caractéristique H_1 , les élèves s'interrogent sur la croissance ou la décroissance des valeurs de chaque colonne du tableau, en les opposants l'une à l'autre, comme s'il s'agissait de deux séries de valeurs indépendantes :

```
[22:46] S1 : Là, ça décroît par exemple.  
[22:48] S1 : Là, ça croît.  
[23:04] S3 : Bah en fait, là, il...  
[23:08] S2 : Y'en a un qui... ouais.  
[23:12] S1 : On peut mettre "sauf" au troisième et au...  
[23:16] S3 : Ouais, mets un petit numéro.
```

De plus, on retrouve aussi cette notion de “croissance presque partout” qui rejoint nos commentaires du tableau 4 sur la “constance à une décimale près”.

Bilan de l'analyse du tableau 6

Dans l'analyse *a priori*, nous avons anticipé que la notion de limite d'une fonction n'émergerait pas de la lecture du tableau. Les élèves ont de nouveau indiqué les nombres 5 et 11 sous les colonnes, mais aucun échange n'y fait référence. Il se peut donc, comme mentionné dans l'analyse *a priori*, que les élèves aient indiqué ces valeurs par mimétisme avec les tableaux précédents.

5.7.10 Tableau 7 : $[27 : 04] \rightarrow [30 : 02]$

Productions écrites des élèves

x	$f_7(x)$
4,779972063800000	10,77340633871190
4,777607000360170	10,76666426130740
4,826090404313550	10,62098969558220
4,883781919351830	10,29355933764430
4,995716029198070	10,87700757394710
4,954040787040200	10,69021701256640
4,971317280108620	10,85308610293460
4,981678979311930	10,97121656567240
4,990048921508760	10,89421765531940
4,997683783669530	10,99641216272740
4,994817052016680	10,99225548433700
4,992329639018190	10,99232889046900
4,994918749890980	10,85952470539250
4,999917419969770	10,98191721181500
4,998130810611910	10,92048602765860

5

11

Caractéristiques de la fonction $f_7(x)$ données par les élèves :

- I_1 : les unités de x sont 4
- I_2 : les unités de y sont 10
- I_3 : les décimales de x et y sont aléatoires. On a pas remarqué de liens entre celles-ci.

Épisode 1 : Rapport des élèves à la notion de limite

Les trois caractéristiques font de nouveau référence uniquement à des précisions visuelles sur les représentations des nombres. Ils mentionnent même avoir cherché quelque chose à dire sur les décimales des valeurs présentes dans le tableau (I_3). Au vu des analyses précédentes, on peut supposer que le “lien” dont ils parlent, c’est pour passer d’une ligne à l’autre et non pas un lien entre les valeurs de x et de $f_7(x)$.

Il apparaît donc clairement que les notions de suite et de limite ne ressortent pas naturellement de la lecture de ce tableau chez les élèves. On peut malgré tout supposer que ceux-ci se sont encore interrogés sur le potentiel rapprochement des valeurs vers 5 et 11 au vu des trois valeurs qu’ils ont entourées dans le tableau et des inscriptions “5” et “11” sous les colonnes. Ils semblent avoir pointé que certaines valeurs, qui ne sont pas celles des dernières lignes des colonnes, sont plus proches de 5 ou de 11 que d’autres¹⁰ :

10. Nous pouvons observer cela à la page 7 du questionnaire rempli par les élèves dans l’annexe A.

[27:22] S1 : Là ça augmente, là aussi.
 [27:25] S3 : Non là ça n'augmente pas.
 [27:28] S3 : C'est aléatoire.
 [27:31] S1 : En fait là ça diminue, là ça augmente, ça diminue, puis ça augmente, ça diminue, ça augmente, ça diminue, ouais.
 [27:34] S3 : Ouais, aléatoire.
 [27:34] S1 : Par contre là ça augmente hein, 7, 8, 9, 9, 9, 9, 5, 9, 9.
 [27:43] S1 : Ah non, 1, 0, 7, 4, 2, 4...
 [27:50] S3 : Mais je comprends pas pourquoi on a des virgules. Tu vois parce que pour de vrai sur le graphique là tu le vois pas ça

Enfin, dans les caractéristiques écrites ainsi que dans le discours oral, aucune mention du mot “suite”, “limite”, “tendre vers”, “se rapprocher de” n’est faite à l’exception d’une phrase :

[29:20] S2 : Je pense que avoir trouvé des suites et des limites là, je pense que c’est bien.

L’élève S2 se rassure d’avoir trouvé des suites et des limites dans les tableaux précédents, comme s’il justifiait l’écriture de caractéristiques plus “simples”, basées sur des caractéristiques visuelles. Cela rejoint aussi notre commentaire sur la fatigue cognitive liée à l’activité : cela demande plus d’effort de mobiliser les notions de suites vues quelques mois plus tôt, que d’écrire des constatations visuelles qui mobilisent peu de connaissances mathématiques. La fatigue se montre d’ailleurs dans leur discussion lorsqu’ils divaguent sur les couchers de soleil durant une minute. En voici un extrait :

[28:06] S2 : Hier le ciel était incroyable.
 [28:08] S3 : Ouais ouais le soir.
 [28:10] S2 : C’était tout orange, ça faisait ciel d’été je trouve.

Épisode 2 : Rapport des élèves à la notion de fonction

La dernière intervention de S3, dans le premier extrait présenté ci-dessus, semble indiquer que les élèves conservent implicitement l’idée qu’une fonction est avant tout associée à une représentation graphique :

[27:50] S3 : Mais je comprends pas pourquoi on a des virgules.
Tu vois parce que pour de vrai sur le graphique
là tu le vois pas ça.

La seule présence du terme “fonction” dans l’énoncé ou l’écriture de “ $f_7(x)$ ” paraît ainsi suffire à activer, chez les élèves, une référence spontanée au registre graphique.

Cette réplique suggère également que le niveau de précision numérique mobilisé dans le tableau entre en tension avec les représentations graphiques habituellement rencontrées en classe. Les élèves semblent considérer que les nombreuses décimales affichées ne constituent pas une information pertinente, notamment parce qu’un tel degré de précision n’est généralement pas perceptible sur les graphiques qu’ils manipulent dans le cadre scolaire. Dès lors, les écritures décimales détaillées paraissent perdre, à leurs yeux, une partie de leur signification mathématique.

Dans le cadre de ce mémoire, nous n’avons pas approfondi la question du rôle des représentations graphiques dans l’activité des élèves. Nous avons toutefois mis en évidence, dans notre MER de la notion de fonction, que l’introduction de cette notion est réalisée à l’aide de représentations graphiques. Cet élément peut contribuer à expliquer la tendance des élèves à associer spontanément toute fonction à une représentation graphique. Cette problématique a néanmoins déjà fait l’objet de nombreux travaux en didactique des mathématiques ; nous renvoyons notamment le lecteur à Schneider (1988 ; 2011b) et Kryszynska (2007).

Bilan de l’analyse du tableau 7

La non-monotonie des suites de valeurs présentes dans ce tableau semble avoir empêché les élèves de percevoir la notion de limite d’une fonction, comme nous l’avions anticipé dans l’analyse *a priori*. Nous pensions aussi qu’ils ne percevraient pas la convergence de la seconde suite vers 11. Les élèves ont néanmoins inscrit “11” sous la deuxième colonne, alors qu’ils avaient remarqué que les 10^e et 12^e valeurs étaient plus proches de 11 que la dernière valeur de la suite. Cela ne signifie toutefois pas nécessairement que les élèves aient identifié la convergence de la suite. L’inscription de “11” pourrait traduire la réactivation d’une habitude construite au fil des tableaux précédents plutôt qu’une véritable reconnaissance du comportement convergent de la suite, comme nous l’avons envisagé dans l’analyse *a priori*.

5.7.11 Tableau 8 : $[30 : 14] \rightarrow [33 : 13]$

Productions écrites des élèves

x	$f_8(x)$
5,220027936200000	12,15160492136440
4,777607000360170	10,76666426130740
5,173909595686450	11,80285827562810
4,883781919351830	10,29355933764430
5,004283970801930	11,01647961482870
4,954040787040200	10,69021701256640
5,028682719891380	11,24917101302500
4,981678979311930	10,97121656567240
5,009951078491240	11,11362999741770
4,997683783669530	10,99641216272740
5,005182947983320	11,14660676821950
4,992329639018190	10,99232889046900
5,005081250109020	11,01225298143380
4,999917419969770	10,98191721181500
5,001869189388090	11,01069265235400

5

11

Caractéristiques de la fonction $f_8(x)$ données par les élèves :

- J_1 : les unités x de varient entre 4 et 5 et les unités y varient entre $]10; 13[$
- J_2 : les x tendent vers 5
- J_3 : lorsque les x sont 4 les y sont 10 et lorsque les y sont 11 les x son 5.

Épisode 1 : Rapport des élèves à la notion de limite

Une dernière fois, les élèves associent les expressions “tendre vers” et “faire des bonds” comme ils l’avaient fait pour le tableau 3. Le lien entre une convergence et le fait que les valeurs soient comprises dans un intervalle pouvait être relié à l’interprétation graphique de la limite d’une suite. Cependant, nous n’avons pas d’hypothèses concernant le lien d’une possible convergence avec le phénomène de “faire des bonds”.

[31:26] S2 : Eux ils font encore des bonds, c’est ça ?
 [31:28] S2 : Bah, ils tendent vers euh...
 [31:32] S3 : Enfin x fait des bons avec un truc...
 [31:36] S3 : Ou alors remets les intervalles.

La dernière phrase de l’extrait ci-dessus n’est pas à relier avec la notion de tendre vers, cela fait référence au rajout de l’intervalle $]10; 13[$ dans la caractéristique J_1 .

Bilan de l'analyse du tableau 8

Ce dernier tableau vient confirmer les observations faites pour les tableaux précédents ainsi que nos hypothèses formulées dans l'analyse *a priori* : les élèves ne perçoivent pas la notion de limite d'une fonction à travers la lecture de tableaux de valeurs. Cependant, ils ont malgré tout écrit "5" et "11" sous les colonnes, mais cela ne témoigne pas forcément d'une identification de la convergence des suites, comme nous l'avons déjà mentionné précédemment.

5.8 Conclusion

Nous sommes à présent en mesure de répondre à la question de recherche formulée dans l'introduction de ce mémoire : "Les élèves sont-ils spontanément capables d'identifier, à partir de tableaux de valeurs, des éléments relevant de la notion de limite d'une fonction, ou bien cette identification dépend-elle fortement de l'intervention de l'enseignant et de caractéristiques spécifiques des situations proposées?". Notre réponse rejoint notre hypothèse formulée dans l'analyse *a priori* : les élèves ne sont pas spontanément à même d'identifier, à partir de tableaux de valeurs, des éléments relevant de la notion de limite d'une fonction. Notre expérience a ainsi montré que les tableaux de valeurs ne constituent pas, en eux-mêmes, des supports intrinsèquement porteurs de la notion de limite. C'est fondamentalement l'intervention de l'enseignant, couplée à certaines caractéristiques des tableaux employés dans de nombreux enseignements "classiques" de la notion de limite, qui donne l'illusion que les élèves l'ont identifiée.

En effet, malgré les mentions des notions de suites et de limites à plusieurs reprises, les caractéristiques écrites par les trois élèves, qui sont considérés comme de "bons élèves" par leur enseignant, n'y font presque jamais référence. De plus, lorsque l'expression "tend vers" est utilisée, rien n'indique que les élèves mobilisent réellement la notion mathématique de convergence derrière cette formulation. Il semble plus crédible d'affirmer qu'ils font appel à la fois à leur mémoire concernant les limites de suites et aux connotations dynamiques naïves associées à ce type d'expressions.

Lors de l'analyse *a priori*, nous avons formulé d'autres hypothèses, notamment celle selon laquelle les élèves identifieraient plus facilement la convergence de suites monotones que celle d'autres types de suites. L'analyse *a posteriori* confirme la difficulté des élèves à percevoir un phénomène de convergence pour les suites et fonctions constantes. En revanche, il n'est pas apparu clairement que les élèves aient identifié plus facilement la convergence des suites monotones que celle des suites non monotones. Ceci est peut-être dû au choix des tableaux, pour lesquels toutes les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ convergent vers 5 et toutes les suites $(f_n)_{n \geq 1}$ convergent vers 11 (hormis pour les tableaux 1 et 2), ce qui a pu favoriser une focalisation des élèves sur les valeurs 5 et 11, au détriment d'une analyse plus fine des propriétés spécifiques des suites considérées. Cependant, si nous changions ces valeurs 5 et 11 d'un tableau à un autre, les élèves n'identifieraient probablement ni plus ni moins la convergence des suites, car ils n'identifient déjà pas clairement la convergence lorsque

celle-ci est monotone.

De plus, nous avons fait l'hypothèse qu'une éventuelle reconnaissance de la convergence ne serait pas nécessairement privilégiée par les élèves par rapport aux autres caractéristiques qu'ils pourraient formuler à partir de la lecture des tableaux et ne renvoyant pas directement à la notion de convergence. L'analyse *a posteriori* confirme cette hypothèse : les élèves ont privilégié des caractéristiques visuelles ou numériques, telles que la “constance à une décimale près”, la “croissance (presque partout)”, les unités des valeurs présentes dans les tableaux, etc.

L'analyse des productions des élèves sur les huit tableaux met aussi en évidence une autre difficulté récurrente que nous n'avions pas anticipée. Les élèves décrivent prioritairement les colonnes des tableaux séparément, ils font une lecture dichotomique ou juxtaposée des variables plutôt qu'une lecture fonctionnelle. Dans l'analyse *a priori*, nous avons fait l'hypothèse que la lecture de gauche à droite amènerait probablement les élèves à donner des expressions plutôt covariantes à la notion de limite et non contravariantes si cette notion venait effectivement à émerger. Or, les élèves n'ont pas articulé les deux colonnes du tableau dans leurs caractéristiques écrites, ni même dans leur discours oral, et n'ont donc produit aucune expression covariante.

De plus, afin d'évaluer la capacité des élèves à identifier spontanément la notion de limite à partir de tableaux de valeurs de fonctions, nous avons mentionné que nous serions attentifs aux différentes formulations qu'ils mobilisent. L'analyse des productions des élèves et de l'enregistrement audio a révélé que ceux-ci n'ont produit aucune formulation en termes de suites, de voisinages ou encore en termes d' $\varepsilon - \delta$, suffisamment proche d'une définition ou d'une caractérisation mathématiquement acceptable de la notion de limite. De manière encore plus générale, on constate qu'à aucun moment les élèves ne formulent leurs caractéristiques en langage mathématique formel, alors même que cette compétence est explicitement mentionnée dans le programme du chapitre sur les suites.

Plusieurs éléments peuvent expliquer l'absence de ce type de formulation dans les productions des élèves. Tout d'abord, le temps consacré en classe à la présentation des définitions, notamment celle de la convergence d'une suite en termes $\varepsilon - \eta$ est limité comme nous l'avons expliqué au chapitre 4, ainsi que dans l'analyse *a posteriori* des tableaux 1 et 3. Ceci n'est pas un fait local mais bien une réalité commune qui touche toutes les écoles, comme l'analyse du programme le confirme. La définition formelle de la convergence apparaît comme un attendu parmi d'autres, mais elle ne représente qu'une petite partie des objectifs du chapitre. Le programme recommande d'ailleurs une pondération d'environ 25 % pour la catégorie “Connaître”, contre 75 % pour les catégories “Appliquer” et “Transférer” (FWB Enseignement, 2015a). Or, dans ces deux dernières dimensions, la définition formelle de la convergence à l'aide des quantificateurs n'est jamais mobilisée. Les élèves ne sont donc jamais amenés à l'utiliser dans les exercices, ce qui peut expliquer qu'ils ne la réinvestissent pas spontanément dans l'expérimentation.

Une autre explication possible tient au contexte particulier de l'expérimentation proposée. Il s'agissait d'une activité d'introduction réalisée en groupe, dans un cadre explicitement présenté comme non évaluatif. Les élèves savaient que l'activité ne serait pas cotée et qu'il n'y avait pas de “mauvaise réponse”. Dans ce type de situation, ils ont ten-

dance à adopter un registre d'expression plus spontané et moins formel, privilégiant des formulations intuitives plutôt que des formulations mathématiques rigoureuses.

Cette difficulté rencontrée par les élèves à utiliser le formalisme mathématique n'est pas une nouveauté. De nombreux travaux en didactique des mathématiques ont mis en évidence les obstacles que rencontrent les élèves pour mobiliser le langage formel. Nous renvoyons notamment le lecteur à Durand (2005), Krysinska (2007) et Simonis (en préparation), pour une analyse plus détaillée de cette problématique.

À l'issue de cette expérimentation, il nous paraît important de revenir sur ce que l'on pourrait légitimement attendre comme production pertinente des élèves concernant la notion de limite d'une fonction. Attendre d'eux des expressions telles que “je peux rendre $f(x)$ aussi proche que je veux de b , en prenant x suffisamment proche de a ” apparaît irréaliste en dehors d'une intervention de l'enseignant faisant appel à des effets de contrat.

Comme le montre le déroulement de cette expérience, lorsqu'on demande aux élèves de caractériser une fonction à partir d'un tableau, ils ont tendance à produire des caractéristiques de la colonne des x indépendamment de la colonne des y . Pourquoi produiraient-ils dès lors une expression articulant les deux, et, de surcroît, attribuant un rôle dissymétrique aux deux colonnes ?

Dans le contexte de tableaux de valeurs et d'un enseignement préalable des limites de suites, on pourrait au mieux s'attendre de la part des élèves à l'émergence d'expressions faisant appel aux suites, telles que “si une suite de valeurs de x a pour limite a , alors l'image de cette suite a pour valeur b ”. Cependant, même l'émergence d'une telle expression paraît peu probable, et ce pour plusieurs raisons. Tout d'abord, comme nous l'avons déjà souligné, les élèves ont tendance à considérer les deux colonnes du tableau de manière indépendante. Ensuite, même s'ils avaient davantage conscience de la nécessité de produire une caractéristique mettant explicitement en relation les deux colonnes, encore faudrait-il qu'ils aient l'idée de questionner l'exemple fourni par le tableau. Cela supposerait qu'ils en tirent une question plus générale, à laquelle le type d'expression attendue viendrait apporter une réponse : la seconde colonne étant construite à partir de la première, si je disposais d'une autre suite convergente vers a , son image serait-elle convergente vers b ? Une telle démarche supposerait ainsi de passer d'une juxtaposition de propriétés observées dans le tableau à une véritable relation d'implication entre les comportements des deux suites. Or, on connaît les difficultés persistantes rencontrées par les élèves, y compris à un niveau universitaire, dans la distinction entre conjonction et implication (Durand-Guerrier, 2005). En résumé, le seul matériau des tableaux n'est pas porteur par lui-même d'un questionnement auquel la notion de limite viendrait apporter une réponse.

Pistes de réflexion et conclusion

Les résultats que nous avons obtenus de l'expérimentation sont semblables à ce que j'ai pu observer durant mes heures passives et actives auprès des élèves et des enseignants, mais au-delà de ces résultats, un autre élément a également retenu mon attention. J'ai souvent observé un phénomène récurrent concernant l'utilisation des tableaux de valeurs dans l'enseignement en secondaire. Les élèves, guidés par leur enseignant, semblent souvent parvenir à identifier certaines tendances à la lecture de tableaux de valeurs, et à formuler des observations pouvant faire penser à la notion de limite, par exemple le fait que les valeurs "se rapprochent de 5" ou "tendent vers 3". Dans ces moments-là, ils ont l'impression de percevoir exactement ce que leur enseignant souhaite leur faire remarquer et se sentent en accord avec lui.

Cette situation produit souvent un sentiment de réussite chez des élèves qui éprouvent habituellement des difficultés en mathématiques. Certains expriment explicitement ce sentiment à travers des remarques telles que : "Pour une fois que je comprends quelque chose en math", ou encore "D'habitude je ne comprends rien en math, mais les tableaux j'ai compris". D'autres cherchent à s'assurer que cette compréhension partielle sera suffisante pour réussir une évaluation : "On est d'accord qu'à l'interro, si j'ai compris les tableaux, j'aurai au moins la moitié?". Il arrive également que certains élèves relativisent leur incompréhension de la suite du cours en déclarant par exemple : "Ce n'est pas grave si je ne comprends pas cette définition difficile, j'ai quand même compris le début avec les tableaux".

Ces réactions doivent être replacées dans un contexte plus large. À la suite de plusieurs discussions avec des élèves, des enseignants et des parents, il m'est revenu qu'une proportion importante d'élèves entretient un rapport difficile aux mathématiques. Certains échouent régulièrement dans cette discipline mais passent malgré tout dans l'année supérieure car il s'agit de leur seule matière en échec. D'autres suivent un cursus de mathématiques plus exigeant sous la pression de leurs parents. De plus, il me semble que de nombreux élèves sont présents en cours de mathématiques parce que cela est obligatoire, mais sans véritable engagement dans l'apprentissage¹¹.

Dans ce contexte, les tableaux de valeurs peuvent jouer un rôle ambivalent. Lorsqu'un élève, qui se sent habituellement en difficulté, parvient soudainement à comprendre quelque chose et à répondre correctement à une question, cela peut produire un effet de soulagement et de valorisation. Toutefois, cette réussite ponctuelle peut également conduire certains élèves à se replier sur cette compréhension illusoire, perçue comme accessible et rassurante,

11. Il serait intéressant de réaliser une étude statistique à ce sujet.

et à se détourner de la suite du chapitre, qui leur semble plus abstraite et plus exigeante.

Les dispositifs ou représentations utilisés par les enseignants, pour faciliter la compréhension ou la visualisation (tableaux, graphiques, analogies, exemples numériques) de certaines notions, peuvent parfois devenir une sorte de point d'arrêt dans l'apprentissage pour certains élèves. Au lieu de représenter une étape vers une compréhension plus rigoureuse, ils deviennent un substitut auquel les élèves se limitent, ce qui peut freiner l'accès aux concepts plus formels qui constituent pourtant l'objectif principal du chapitre.

Il faut également souligner que cette situation peut être perçue positivement du point de vue des enseignants. Lorsqu'un élève habituellement silencieux ou en difficulté participe soudainement et propose une réponse correcte lors d'une activité de lecture de tableaux, cela peut être vécu comme un moment encourageant. Ces situations donnent parfois l'impression que les élèves s'approprient enfin le contenu du cours et qu'ils participent davantage. Néanmoins, cette participation accrue ne garantit pas nécessairement une compréhension profonde des concepts mathématiques sous-jacents.

Nous pensons que c'est une des raisons qui explique que les tableaux de valeurs soient majoritairement présents dans les introductions comme nous l'avons vu dans le manuel CQFD : ils permettent une entrée "plus douce" dans la matière, en donnant l'impression aux élèves de comprendre quelque chose de concret et de visuel, ce qui peut être valorisant pour eux, avant de se retrouver face aux définitions en $\varepsilon - \delta$ qui ont la réputation d'être "difficiles". Cependant, il est important que les enseignants soient conscients de ce potentiel effet de point d'arrêt.

Concernant les perspectives de prolongement de ce travail, trois pistes de recherche nous semblent particulièrement intéressantes à explorer :

- Réaliser cette expérience dans plus de classes et d'établissements différents afin de pouvoir faire une analyse statistique et de pouvoir tester plus de configurations de tableaux.
- Interroger les enseignants sur leur perception des résultats que nous avons obtenus.
- Réfléchir aux conditions dans lesquelles les tableaux de valeurs pourraient être mobilisés pour amener les élèves à rencontrer notre MER de la notion de limite d'une fonction, à travers des situations fondamentales qui s'inscriraient dans les praxéologies fondamentales qui modélisent les activités "Déterminer des grandeurs" et "Concevoir une architecture déductive".

Ce parcours, du questionnement du savoir mathématique lui-même à l'analyse d'une expérimentation en milieu scolaire est constitué d'une succession d'étapes obligatoires pour mener à bien une recherche en didactique des mathématiques. Pour ce travail, nous avons suivi le parcours suivant.

La didactique des mathématiques place le savoir au centre de ses préoccupations, c'est pourquoi nous avons mis en avant la nécessité de questionner le savoir mathématique lui-même. Nous avons ensuite élaboré un outil nous permettant ce questionnement, à savoir

un modèle épistémologique de référence, à partir des éléments saillants de la Théorie des Situations Didactiques et de la Théorie Anthropologique du Didactique, comme les notions de situations fondamentales et de praxéologies. Nous nous sommes ensuite intéressés à l'élément central de ce mémoire, la notion de limite d'une fonction, notamment à travers l'histoire de ce concept. Cela nous a permis de caractériser le savoir "limite" au sein de notre MER de la notion de limite. Ce dernier nous a ensuite permis d'exercer une vigilance épistémologique des pratiques d'enseignement et de cadrer l'analyse de l'expérimentation. Ce cadre théorique est essentiel pour s'inscrire dans une démarche scientifique et pour dépasser les débats d'opinion.

Pour conclure, bien qu'il serait intéressant d'élargir la portée de notre expérimentation, les résultats obtenus ici sont déjà riches et permettent de rendre compte que les tableaux de valeurs ne sont pas intrinsèquement porteurs de la notion de limite d'une fonction.

Bibliographie

- [1] Arthur Adam et Francis Lousberg, *Espace Math 5^e/6^e : Théorie : tome 1 : trigonométrie – analyse : 6 périodes par semaine*, 2^e éd., Groupe De Boeck, Bruxelles, 2007, 2e tirage, 2009 ; avec la participation de René Bastin, Benoit Baudalet, Sabine Bouzette et Philippe Close.
- [2] Marc Annoye et Annick Van Eerdenbrugghe, *CQFD Maths 5e : manuel : 6 périodes/semaine*, De Boeck, 14 mai 2013.
- [3] Michèle Artigue, *Ingénierie didactique*, Recherches en didactique des mathématiques **9** (1988), n° 3, p. 281-308, disponible via l'URL <<https://revue-rdm.com/1988/ingenierie-didactique-2/>>.
- [4] Gaston Bachelard, *La formation de l'esprit scientifique. Contribution à une psychanalyse de la connaissance objective*, 5^e éd., Librairie philosophique J. Vrin, Paris, 1934, disponible via l'URL <https://classiques.uqac.ca/classiques/bachelard_gaston/formation_esprit_scientifique/formation_esprit_scientifique.html>, consulté le 19 mars 2026, Édition consultée en ligne : Les Classiques des sciences sociales.
- [5] Kevin Balhan, *Didactique spéciale en mathématiques*, Université de Liège, diapositives destinées aux étudiants, 2026.
- [6] Kevin Balhan, *Le théorème fondamental comme pierre de touche de l'enseignement et des apprentissages de l'analyse au secondaire*, Université de Liège, Liège, 2017.
- [7] Didier Bessot et al., *Aux origines du calcul infinitésimal : Comprendre les mathématiques par les textes historiques*, IREM - Histoire des Mathématiques, Ellipses, Paris, 1999.
- [8] Jacqueline Boniface, *Les constructions des nombres réels dans le mouvement d'arithmétisation de l'analyse*, IREM-Histoire des mathématiques, Ellipses, Paris, 2002.
- [9] Marianna Bosch et Yves Chevallard, *La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique*, Recherches en didactique des mathématiques **19** (1999), n° 1, p. 77-124, disponible via l'URL <<https://revue-rdm.com/1999/la-sensibilite-de-l-activite/>>.
- [10] Nicolas Bourbaki, *Eléments d'histoire des mathématiques*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, Paris, 1984.

- [11] Raymond Broeckx, *La suite 52*, De Nederlandsche Boekhandel, 1973, trad. par Fernand Burton.
- [12] Guy Brousseau, *Conference : Problems and results of Didactique of Mathematics*, Conférence à l'Université du Washington à Seattle, en Anglais, sur le sujet du groupe d'étude "ICMI Study 94 ; "What is Research in Mathematics Education and What Are Its Results?" Washington 1994, Seattle, 1994.
- [13] Guy Brousseau, *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques*, Recherches en Didactiques des Mathématiques **7** (1986), n° 2, p. 33-115.
- [14] Guy Brousseau, *Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques*, Recherches En Didactiques Des Mathématiques **4** (1983), n° 2, p. 165-198, disponible via l'URL <<https://revue-rdm.com/1983/les-obstacles-epistemologiques-et/>>, consulté le 20 mars 2026.
- [15] Guy Brousseau, *Théorie des situations didactiques : Didactique des mathématiques 1970-1990*, La Pensée sauvage, Grenoble, 1998 (Nicolas Balacheff et al., eds).
- [16] Augustin-Louis Cauchy, *Œuvres complètes d'Augustin Cauchy. Série 2, Tome 4 : Résumé des leçons données à l'École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal : Publiées sous la direction scientifique de l'Académie des Sciences et sous les auspices de M. le Ministre de l'Instruction publique*, Gauthier-Villars, Imprimeur-Libraire du Bureau des Longitudes, de l'École Polytechnique, Paris, 1899, Quai des Augustins 55.
- [17] Yves Chevallard, *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique*, Actes de l'université d'été : analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques (La Rochelle, 4-11 juillet 1998), Cours donné à l'université d'été de La Rochelle, IREM de Clermont-Ferrand, 1998, p. 91-120.
- [18] Yves Chevallard, *Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique*, Recherches en Didactique des Mathématiques **12** (1992), n° 1, p. 73-112.
- [19] Yves Chevallard, *Organiser l'étude. 3. Écologie et régulation*, Actes de la XIe école d'été de didactique des mathématiques, Corps, 21-30 août 2001, La Pensée Sauvage, Grenoble, 2002, p. 41-56.
- [20] Yves Chevallard et Marie-Alberte Johsua, *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné*, [2e édition revue et augmentée], Recherches en didactique des mathématiques, la Pensée sauvage, Grenoble, 1991.
- [21] Communauté française de Belgique, *Décret définissant les missions prioritaires de l'enseignement fondamental et de l'enseignement secondaire et organisant les structures propres à les atteindre*, Moniteur belge, Décret dit "décret missions", Bruxelles, 24 juillet 1997, p. 29-50.

- [22] Communauté française de Belgique, *Programme d'études du cours de mathématiques – Enseignement secondaire ordinaire de plein exercice, premier degré commun*, rapp. tech. 10/2000/240, Ministère de la Communauté française, Administration générale de l'enseignement et de la recherche scientifique, Belgique, 2000.
- [23] Diderot et D'Alembert, *Encyclopédie, ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers, par une Société de Gens de Lettres* (Classiques Garnier Numérique, éd.), Paris, 1751, disponible via l'URL <<https://num.classiques-garnier.com/index.php?module=App&action=FrameMain>>.
- [24] Jean-Luc Dorier, *Aperçu de l'histoire de l'enseignement des mathématiques*, Enseigner les mathématiques – didactique et enjeux de l'apprentissage, Préface de C. Villani, Belin, Paris, 2018.
- [25] Jean-Luc Dorier, *Dimension épistémologique de la didactique des mathématiques*, Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – actes du colloque EMF2015 (L. Theis, éd.), Alger, 2015, disponible via l'URL <<https://archive-ouverte.unige.ch/unige:84382>>.
- [26] Régine Douady, *Mathématiques (didactique des)*, *Encyclopædia Universalis*, 2026, disponible via l'URL <<https://www.universalis.fr/auteurs/regine-douady/>>, consulté le 7 mai 2026.
- [27] Christophe Dubussy, Pierre Job et Kevin Balhan, *Un parcours historique de la (des) définition(s) du concept de limite*, Losanges (2024), disponible via l'URL <<https://orbi.uliege.be/handle/2268/311599>>.
- [28] Viviane Durand-Guerrier, *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. Un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique. Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique*, Note de synthèse soutenue le 16 juin 2005, Habilitation à diriger des recherches en didactique des mathématiques, Université Claude Bernard Lyon 1, Lyon, 2005, disponible via l'URL <<https://theses.hal.science/tel-00201626v1>>.
- [29] Euclide, *Les quinze livres des éléments géométriques d'euclide*. Isaac Dedin, Paris, 1632, trad. du grec par D. Henrion.
- [30] Annick Fagnant, *Psychologie éducationnelle de l'adolescent et du jeune adulte*, Notes de cours pour AESS et masters à finalité didactique, Université de Liège, 2024.
- [31] Fédération Wallonie-Bruxelles, *Compétences terminales et savoirs requis en mathématiques : Humanités générales et technologiques*, Référentiel officiel, Annexe au décret du 4 décembre 2014, Fédération Wallonie-Bruxelles, Bruxelles, 4 décembre 2014, disponible via l'URL <<https://www.enseignement.be>>.

- [32] Fédération Wallonie-Bruxelles, *Pacte pour un Enseignement d'excellence*, 2026, disponible via l'URL <<https://pactepourunenseignementdexcellence.cfwb.be/le-pactepourunenseignementdexcellence/%5C#explications>>, consulté le 28 mars 2026.
- [33] Fédération Wallonie-Bruxelles, *Référentiel de mathématiques : Tronc commun*, Référentiel officiel, Pacte pour un Enseignement d'excellence, Fédération Wallonie-Bruxelles, Administration générale de l'Enseignement, Bruxelles, juin 2022, disponible via l'URL <<https://www.enseignement.be>>.
- [34] Fédération Wallonie-Bruxelles, *Socles de compétences : Enseignement fondamental et premier degré de l'enseignement secondaire*, Référentiel officiel, Référentiel de compétences, Fédération Wallonie-Bruxelles, Administration générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique, Bruxelles, 2013, disponible via l'URL <<https://www.enseignement.be>>.
- [35] Pierre de Fermat, *Œuvres de Fermat*. Vol. 3, Gauthier-Villars et fils, Paris, 1896, Édition publiée sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique (Paul Tannery et Charles Henry, eds), trad. par Paul Tannery.
- [36] FWB Enseignement, *Programme d'études n° 470/2015/240 : Mathématiques pour les scientifiques*, rapp. tech., Enseignement secondaire ordinaire, Humanités générales et technologiques, 3e degré, Fédération Wallonie-Bruxelles Enseignement, Bruxelles, 2015.
- [37] FWB Enseignement, *Programme d'études n° 467/2015/240*, rapp. tech., Enseignement secondaire ordinaire, Humanités générales et technologiques, 2e degré, Fédération Wallonie-Bruxelles Enseignement, Bruxelles, 2015.
- [38] Jean-Yves Gantois et Maggy Schneider, *Une forme embryonnaire du concept de dérivée induite par un milieu graphico-cinématique dans une praxéologie "modélisation"*, Recherches en Didactique des Mathématiques **32** (2012), n° 1, p. 57-99.
- [39] Josep Gascón, *Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'"arithmétique généralisée"*, Petit x **37** (1993), p. 43-63.
- [40] Judith V. Grabiner, *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus*, Dover Publications, Mineola, New York, 2005, Unabridged republication of the edition published by The MIT Press, 1981.
- [41] Pierre Job, *Étude du rapport à la notion de définition comme obstacle à l'acquisition du caractère lakatosien de la notion de limite par la méthodologie des situations fondamentales/adidactiques*, Université de Liège, 7 juin 2011, disponible via l'URL <<https://orbi.uliege.be/handle/2268/98996>>.
- [42] Pierre Job, *La notion de limite chez Cauchy : Quelques éléments historiques*, ICHEC Brussel Management School, Université de Perpignan, 18 novembre 2022.

- [43] Pierre Job et Kevin Balhan, *Quelques considérations relatives à la notion de modèle épistémologique de référence (MER) pour le calculus et l'analyse*, Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática **26** (2024), n° 3, p. 141-173, disponible via l'URL <<https://orbi.uliege.be/handle/2268/341167>>.
- [44] Pierre Job et Maggy Schneider, *Une situation fondamentale pour le concept de limite ? Question de langage, de culture ? Comment la TAD permet-elle de problématiser cette question ?*, Actes du 2ième congrès international sur la théorie anthropologique du didactique (TAD) : Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action (A. Bronner *et al.*, eds), Congrès tenu du 31 octobre au 3 novembre 2007, IUFM de l'académie de Montpellier, Uzès, France, 2010, p. 615-632.
- [45] Mariza Krysinska, *Emergence de modèles fonctionnels comme outil de catégorisation de phénomènes divers*, thèse de doct., Faculté Universitaires Notre-Dame de la Paix, Namur, 2007.
- [46] Eveline Moitroux et Yvan Haine, *Algèbre – Les suites*, Fascicule de cours, Athénée Royal Charles Rogier, 5e année, Mathématiques 6 h, Liège, 2025.
- [47] Eveline Moitroux et Yvan Haine, *Algèbre – Les suites : tableaux blancs*, Exportation PDF des tableaux interactifs du cours, Athénée Royal Charles Rogier, 5e année, Mathématiques 6 h, Liège, 2025.
- [48] Eveline Moitroux et Yvan Haine, *Analyse – Prérequis*, Fascicule de cours, Athénée Royal Charles Rogier, 5e année, Mathématiques 6 h, Liège, 2025.
- [49] Guy Noël, *Evolution de l'Enseignement des Mathématiques en Belgique francophone*, Plot **63** (1993), p. 36-41.
- [50] François Peyrard, *Les éléments de géométrie d'Euclide*, Louis, F., Rue de Savoie, 12, Paris, 1804, traduits littéralement, et suivis d'un Traité du Cercle, du Cylindre, du Cône et de la Sphère ; de la mesure des Surfaces et des Solides ; avec des Notes. Ouvrage approuvé par l'institut national.
- [51] François Peyrard, *Les œuvres d'Euclide, en grec, en latin et en français, d'après un manuscrit très-ancien qui était resté inconnu jusqu'à nos jours*. Patris, M., Rue de la Colombe, en la Cité, 4, Paris, 1814, Ouvrage approuvé par l'institut de France. Dédié au Roi. Tome Premier.
- [52] Aline Robert et Jacqueline Robinet, *Prise en compte du méta en didactique des mathématiques*, Cahier de DIDIREM, n° 21, IREM de Paris, Paris, 1993, disponible via l'URL <<https://hal.science/hal-02140979>>.
- [53] Maggy Schneider *et al.*, *Du calcul infinitésimal à l'analyse mathématique*, Si les mathématiques m'étaient contées, Presses Universitaires de Liège, 2016.

- [54] Maggy Schneider, *Ingénieries didactiques et situations fondamentales, quel niveau praxéologique ?*, La Pensée Sauvage (2011), p. 175-206, disponible via l'URL <<https://orbi.uliege.be/handle/2268/177690>>.
- [55] Maggy Schneider, *Traité de didactique des mathématiques : La didactique par des exemples et contre-exemples*, 2^e éd., Les Editions de l'Université de Liège, Liège, 2011.
- [56] Maggy Schneider-Gilot, *Des objets mentaux "aire" et "volume" au calcul des primitives*, Sous la direction de Nicolas Rouche, Thèse de doctorat en sciences, Université catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, 1988.
- [57] Ludovic Simonis, Thèse de doctorat en cours, Université de Liège, en préparation.
- [58] Annick Van Eerdenbrugghe *et al.*, *CQFD Maths 5e : manuel : 4 périodes/semaine*, 2^e éd., Éditions VAN IN / De Boeck, Mont-Saint-Guibert et Wommelgem, 2017, 5^e réimpression, 2022.
- [59] Wallonie-Bruxelles Enseignement, *L'organisation de l'enseignement en Wallonie et à Bruxelles*, 2026, disponible via l'URL <<https://www.wbe.be/wbe/wbe-pouvoir-organisateur/lorganisation-de-lenseignement-en-wallonie-et-a-bruxelles/>>, consulté le 28 avril 2026.
- [60] G. Werbrouck et P. Wambersie, *Mathématique : Cours 5^{ème} année : 7 heures par semaine*, AD. Wesmael-Charlier S.A., 1984.

Annexe A

Expérimentation réalisée par les élèves

Ce document présente l'expérimentation réalisée par les trois élèves le 23 janvier 2026. Celle-ci contient huit tableaux de valeurs de fonctions, accompagnés d'une consigne demandant aux élèves d'identifier des caractéristiques de ces fonctions à partir de l'observation des tableaux. Les élèves ont été invités à discuter entre eux pour formuler ces caractéristiques, puis à les écrire sur les feuilles. Les versos des feuilles avaient été laissés vierges pour ne pas restreindre les élèves sur le nombre de caractéristiques à trouver ou sur la manière de les formuler. Cependant, les élèves n'ont pas utilisé les versos et ont écrit leurs caractéristiques uniquement sur les rectos.

Vous trouverez les tableaux de valeurs ainsi que les caractéristiques écrites par les élèves pour chacun d'entre eux dans les pages suivantes. Les noms des élèves ont été anonymisés pour préserver leur confidentialité.

Activité d'introduction

Question 1

Les tableaux ci-dessous contiennent des informations obtenues à propos de différentes fonctions.

À partir de chaque tableau, vous devez préciser les caractéristiques $C_1, C_2, C_3, \dots, D_1, D_2, D_3, \dots$ de la fonction correspondante qu'il vous semble pouvoir déduire du tableau. Par fonction, vous pouvez donner autant de caractéristiques que vous le souhaitez, n'hésitez pas à demander des feuilles supplémentaires. Donnez à chaque fois la définition précise des caractéristiques considérées. Une même caractéristique peut ou non être commune à plusieurs fonctions. Voici des exemples de caractéristiques :

- Toutes les images de la fonction sont supérieures à 10^6 .
- Toutes les images sont des multiples de 3.
- La fonction est croissante.

Ce sont des exemples pour vous aider à comprendre la question. On ne vous dit pas que ces caractéristiques sont forcément pertinentes pour les fonctions et tableaux donnés ci-dessous. À vous d'inventer des caractéristiques qui vous semblent raisonnables au vu des données fournies dans les tableaux.

Tableau 1

x	$f_1(x)$
4,9000000000000000	11,4908401948657000
4,9900000000000000	11,4891270249537000
4,9990000000000000	11,4891252948081000
4,9999000000000000	11,4891252930778000
4,9999900000000000	11,4891252930761000
4,9999990000000000	11,4891252930761000
4,9999999000000000	11,4891252930761000
4,9999999900000000	11,4891252930761000
4,9999999990000000	11,4891252930761000
4,9999999999000000	11,4891252930761000
4,9999999999900000	11,4891252930761000
4,9999999999990000	11,4891252930761000
4,9999999999999000	11,4891252930761000
4,9999999999999900	11,4891252930761000
4,9999999999999990	11,4891252930761000
4,9999999999999999	11,4891252930761000

Caractéristiques de la fonction $f_1(x)$

- Caractéristique C_1 :
toutes les images de la fonction sont constantes et identiques
- Caractéristique C_2 :
(toutes les abscisses de la fonction sont identiques)
à partir de $x = 4,99999$, les images sont identiques.
- Caractéristique C_3 :
~~les x sont~~ toutes les unités des x sont entre 4, 9 et 5.
- Etc.

Tableau 2

x	$f_2(x)$
4,0906915661572000	12,2019673885118000
4,4199914401252600	11,7420109178072000
4,6277656141418200	11,5675864611620000
4,7588622552308700	11,5120767383103000
4,8415786437626900	11,4958432421529000
4,8937691566157200	11,4911785294694000
4,9266991440125300	11,4898038097767000
4,9474765614141800	11,4893755716291000
4,9605862255230900	11,4892311771347000
4,9688578643762700	11,4891775549302000
4,9740769156615700	11,4891554459627000
4,9773699144012500	11,4891453561218000
4,9794476561414200	11,4891403231561000
4,9807586225523100	11,4891376272010000
4,9815857864376300	11,4891361042516000

- 5

~

Caractéristiques de la fonction $f_2(x)$

- Caractéristique D_1 :
lorsque les ~~max~~ x croient, les y décroissent inversement proportionnelles.
- Caractéristique D_2 :
l'unité des x est 4 et l'unité des y est 11 soit le 11^e.
- Caractéristique D_3 :
par rapport au tableau 1, les décimales ne sont pas constantes.
- Etc.

Tableau 3

x	$f_3(x)$
5,220027936200000	10,900000000000000
4,777607000360170	10,990000000000000
5,173909595686450	10,999000000000000
4,883781919351830	10,999900000000000
5,004283970801930	10,999990000000000
4,954040787040200	10,999999000000000
5,028682719891380	10,999999900000000
4,981678979311930	10,999999990000000
5,009951078491240	10,999999999000000
4,997683783669530	10,999999999900000
5,005182947983320	10,999999999990000
4,992329639018190	10,999999999999000
5,005081250109020	10,999999999999900
4,999917419969770	10,999999999999990
5,001869189388090	10,999999999999999

$\underbrace{\hspace{10em}}_5 \quad \underbrace{\hspace{10em}}_n$

Caractéristiques de la fonction $f_3(x)$

- Caractéristique E_1 :
les x tendent vers 5 et les y tendent vers n .
- Caractéristique E_2 :
les y sont identiques à une décimale près.
- Caractéristique E_3 :
les x alternent entre 4 et 5.
- Etc. E_4 : les unités des images constantes

Tableau 4

x	$f_4(x)$
4,9000000000000000	10,9000000000000000
4,9900000000000000	10,9900000000000000
4,9990000000000000	10,9990000000000000
4,9999000000000000	10,9999000000000000
4,9999900000000000	10,9999900000000000
4,9999990000000000	10,9999990000000000
4,9999999000000000	10,9999999000000000
4,9999999900000000	10,9999999900000000
4,9999999990000000	10,9999999990000000
4,9999999999000000	10,9999999999000000
4,9999999999900000	10,9999999999900000
4,9999999999990000	10,9999999999990000
4,9999999999999000	10,9999999999999000
4,9999999999999900	10,9999999999999900
4,9999999999999990	10,9999999999999990

5 4

Caractéristiques de la fonction $f_4(x)$

- Caractéristique F_1 :
les x et y sont constants à une décimale près.
- Caractéristique F_2 :
les décimales des x et y sont identiques ce qui implique un écart de 6 unités entre les x et y .
- Caractéristique F_3 :
les x tendent vers 5 et les y vers 11.
- Etc.
 F_4 : les unités de $x = 4$

F_5 : les x et y varient proportionnellement à une décimale près

Tableau 5

x	$f_5(x)$
4,000000000000000	12,00000000000000
4,333333333333330	10,18350341907230
4,555555555555556	11,66666666666667
4,703703703703700	11,54433105395180
4,802469135802470	11,44444444444440
4,868312757201650	11,36288736930120
4,912208504801100	10,70370370370370
4,941472336534060	10,75807508713250
4,960981557689380	10,80246913580250
4,973987705126250	10,83871672475500
4,982658470084170	11,13168724279840
4,988438980056110	10,89247781650330
4,992292653370740	10,91220850480110
4,994861768913830	11,07168145566440
4,996574512609220	11,05852766346590

5

11

Caractéristiques de la fonction $f_5(x)$

- Caractéristique G_1 :

les x croissent progressivement à l'inverse les y ~~se tendent~~ ^{atteignent} dans un intervalle de $\mathbb{I} 10, 12 \mathbb{I}$

- Caractéristique G_2 :

la 1^{re} valeur de x et la 1^{re} valeur de y est ronde
c'est-à-dire les décimales sont nulles.

- Caractéristique G_3 :

les décimales sont égales à 0.
dernières

- Etc.

G_4 : L'unité des x est 4

Tableau 6

x	$f_6(x)$
5,250000000000000	9,871598752346030
5,125000000000000	10,87123757201180
5,062500000000000	10,61552417083370
5,031250000000000	10,88945269111170
5,015625000000000	10,97437825477460
5,007812500000000	10,96753048417510
5,003906250000000	10,87114324786830
5,001953125000000	10,95736695532250
5,000976562500000	10,96281926937360
5,000488281250000	10,97049698381790
5,000244140625000	10,97483957831860
5,000122070312500	10,97826506560080
5,000061035156250	10,98775194558070
5,000030517578120	10,99957094120420
5,000015258789060	10,99878187188990

5

11

Caractéristiques de la fonction $f_6(x)$

- Caractéristique H_1 :
les x de H_1 sont alors que les y valent sauf au 3 et 7,
- Caractéristique H_2 :
les décimales des x sont une suite géométrique que de raison $\frac{1}{2}$
- Caractéristique H_3 : $\frac{1}{2}$
les unités des x sont 5.
- Etc.

Tableau 7

x	$f_7(x)$
4,779972063800000	10,77340633871190
4,777607000360170	10,76666426130740
4,826090404313550	10,62098969558220
4,883781919351830	10,29355933764430
4,995716029198070	10,87700757394710
4,954040787040200	10,69021701256640
4,971317280108620	10,85308610293460
4,981678979311930	10,97121656567240
4,990048921508760	10,89421765531940
4,997683783669530	10,99641216272740
4,994817052016680	10,99225548433700
4,992329639018190	10,99232889046900
4,994918749890980	10,85952470539250
4,999917419969770	10,98191721181500
4,998130810611910	10,92048602765860

5

5

11

Caractéristiques de la fonction $f_7(x)$

- Caractéristique I_1 :
les unités de x sont 4
- Caractéristique I_2 :
les unités de y sont 10
- Caractéristique I_3 :
les décimales de x et y sont aléatoires. On a pas remarqué de liens entre celles-ci.
- Etc.

Tableau 8

x	$f_8(x)$
5,220027936200000	12,15160492136440
4,777607000360170	10,76666426130740
5,173909595686450	11,80285827562810
4,883781919351830	10,29355933764430
5,004283970801930	11,01647961482870
4,954040787040200	10,69021701256640
5,028682719891380	11,24917101302500
4,981678979311930	10,97121656567240
5,009951078491240	11,11362999741770
4,997683783669530	10,99641216272740
5,005182947983320	11,14660676821950
4,992329639018190	10,99232889046900
5,005081250109020	11,01225298143380
4,999917419969770	10,98191721181500
5,001869189388090	11,01069265235400

5

n

Caractéristiques de la fonction $f_8(x)$

- Caractéristique J_1 :
les x de varient entre 4 et 5 et les y varient entre 10, 13 et 15
- Caractéristique J_2 :
les x tendent vers 5
- Caractéristique J_3 :
lorsque les x sont 4 les y sont 10 et lorsque les y sont 11 les x sont 5.
- Etc.

Annexe B

Transcription de l'enregistrement audio

Dans cette annexe figure la transcription de l'enregistrement audio des discussions des élèves lors de l'expérimentation.

- [00 : 00] S1 : Du coup, en gros on a juste à donner des caractéristiques de la fonction.
- [00 : 04] S1 : Genre ça c'est une première caractéristique, une deuxième caractéristique, une troisième caractéristique, etc... de la fonction, en fonction de ça.
- [00 : 11] S1 : Pour moi, elle est constante hein.
- [00 : 13] S2 : Mais caractéristiques euh...
- [00 : 15] S1 : Genre par exemple, des caractéristiques, c'est toutes les images de la fonction supérieures, comme 10 exposant 6, ou des images... ou des multiples de 3.
- [00 : 23] S1 : Mais déjà, toutes les images et toutes les abscisses sont constantes, là.
- [00 : 26] S1 : Je peux mettre ça.
- [00 : 27] S2 : Mais je pense, au pire au crayon.
- [00 : 30] S3 : Non, elle a dit c'est pas grave si c'est faux.
- [00 : 32] S2 : Ah oui, c'est vrai il faut mettre en parenthèses elle a dit.
- [00 : 35] S1 : C'est des images.
- [00 : 35] S2 : Je peux le mettre ça comme ça.
- [00 : 43] S1 : Elles sont constantes et identiques, du coup.
- [00 : 46] S3 : Les images... ouais.
- [00 : 48] S2 : Mais oui, parce qu'il n'y a pas de limite. Donc euh...
- [00 : 51] S1 : Bah, tout... les abscisses... de la fonction... sont identiques.
- [01 : 06] S2 : C'est pas toutes les ordonnées ? Parce qu'elle est comme ça, du coup.
- [01 : 09] S3 : C'est les x .
- [01 : 10] S1 : Oui, c'est les x . Genre toutes les images et toutes les...

- [01 : 13] S1 : Ah mais non, attend.
- [01 : 13] S1 : Si le x est tout le temps les mêmes... Si le x est tout le temps le même et que le y est tout le temps le même, c'est un point.
- [01 : 20] S2 : Mais oui.
- [01 : 23] S3 : Mais oui.
- [01 : 24] S2 : Mais c'est pas tout le temps le même hein, regarde.
- [01 : 26] S2 : Dans les 0, ils changent. Ici aussi.
- [01 : 28] S3 : Oui, mais bon, après, c'est à l'œil nu, on va pas...
- [01 : 31] S2 : Ici, ça ne change pas du tout, on est d'accord.
- [01 : 34] S1 : Non, là, ça ne change pas.
- [01 : 35] S2 : Ah, si, si, si ça change.
- [01 : 36] S1 : Mais ça, c'est des...
- [01 : 38] S3 : Oui, c'est des mini trucs qu'on voit pas.
- [01 : 40] S2 : Mais justement, il bouge, du coup, il faut trouver l'expression de la constance, ça se trouve.
- [01 : 45] S2 : Ça, c'est $f(x)$, ça, c'est l'ordonnée.
- [01 : 46] S1 : C'est que la même chose tout le temps en fait .
- [01 : 48] S2 : C'est comme le y égal et genre c'est ça, tu vois.
- [01 : 51] S1 : En fait, juste uhm...
- [01 : 53] S1 : Non, mais pour moi, on met des décimales, mais... fin.
- [01 : 58] S3 : En fait, je comprends pas ce qu'on doit faire.
- [02 : 00] S2 : Non, mais sinon c'est trop facile, les gars.
- [02 : 01] S1 : Ouais, non, mais du coup, c'est que... tu vois, là, il y a une ligne de 9... qui se... tu vois, tout ça.
- [02 : 03] S3 : C'est où ?
- [02 : 08] S2 : À chaque fois, c'est plus...
- [02 : 09] S1 : La ligne.
- [02 : 11] S1 : On se rapproche de plus en plus de 5.
- [02 : 14] S2 : Ouais
- [02 : 15] S3 : Ouais
- [02 : 16] S3 : Et non, à chaque fois, on rajoute un 9.
- [02 : 19] S2 : Ouais, ben, genre 9 sur 10, puis 9 sur 100 et puis, c'est une suite.
- [02 : 23] S3 : À chaque fois on rajoute un $9/10^e$.
- [02 : 24] S1 : Ouais.
- [02 : 25] S3 : Ou un $9/100^e$.
- [02 : 27] S2 : Mais du coup, les gars, moi, je suis pas d'accord.
- [02 : 29] S1 : Non, non, non, c'est pas ça.
- [02 : 34] S1 : On met la bonne truc.
- [02 : 36] S3 : Bah, mais que euh... le x ... augmente de... $1/9^e$, non, $9/10^e$?
- [02 : 45] S2 : Mais c'est $9/10^e$ puis $9/100^e$ puis $9/1000^e$.
- [02 : 46] S1 : C'est juste qu'à partir de là, c'est tout le temps la même chose.

- [02 : 48] S4 : Okay tout le monde, juste un tout petit commentaire, une petite précision. Pour la première fonction, on appelle les caractéristiques C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 , etc... ça va.
- [02 : 58] S4 : Pour la deuxième fonction, les caractéristiques s'appellent D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 , etc... pour chaque fonction, ça va, c'est chaque fois une autre lettre pour que chaque caractéristique ait une lettre différente, ça va.
- [03 : 09] S4 : Donc la lettre C pour la première fonction, la lettre D pour la deuxième, mais c'est écrit sur vos feuilles, ça va. Donc vous continuez juste la numérotation par lettre.
- [03 : 19] S3 : Je comprends vraiment pas ce qu'on..., fin c'est bizarre un peu.
- [03 : 22] S2 : Mais juste le x c'est une suite, et ça c'est la f de x à chaque fois en fonction du x . C'est normal qu'il change.
- [03 : 29] S1 : Mais là c'est le même tout le temps, à partir de là c'est tout le temps le même.
- [03 : 37] S1 : Soit t'as un 7, mais...
- [03 : 38] S2 : Ouais, c'est vrai. À partir de là, du coup...
- [03 : 40] S1 : Ouais, c'est tout le temps le même.
- [03 : 42] S2 : Du coup, à partir de x ...
- [03 : 45] S2 : Bah jusqu'à là quoi, du coup c'est...
- [03 : 48] S1 : Ça je le mets hein, je peux le mettre, c'est une caractéristique, non ?
- [03 : 50] S2 : Ouais, à partir du x égal... nanana la fonction ne change pas.
- [04 : 01] S1 : Maintenant, il y a quatre 9, hein. Après, c'est bon on a compris.
- [04 : 04] S2 : Je crois qu'il y en a 5, c'est...
- [04 : 08] S1 : Ah, ben oui parce que du coup...
- [04 : 10] S2 : Oui.
- [04 : 14] S1 : Les images... sont...
- [04 : 25] S1 : Ok.
- [04 : 26] S3 : En fait, c'est pas grave, si on n'a pas trois caractéristiques.
- [04 : 30] S1 : Ah oui, surtout que...
- [04 : 33] S3 : On va faire ça pour euh...
- [04 : 34] S1 : Est-ce qu'on met, genre, du coup, toutes les images sont multiples de... Ben, c'est toutes les images, c'est 11 quoi, fin.
- [04 : 42] S1 : C'est pas des multiples, la fonction est croissante.
- [04 : 44] S1 : Oui.
- [04 : 45] S2 : Mais en fait, c'est...
- [04 : 47] S1 : Non.
- [04 : 49] S2 : En fait, c'est 4,9 fois 10 exposant.
- [04 : 53] S2 : Non, en fait, parce que je pense que c'est plus... On peut dire que c'est une suite. C'est une caractéristique.
- [05 : 02] S2 : C'est une suite... euh... géométrique non ?
- [05 : 09] S1 : Moi, j'aurais dit arithmétique, à chaque fois, tu rajoutes... Ah non.

- [05 : 13] S2 : Non, à chaque fois tu ne rajoutes pas la même chose.
[05 : 15] S1 : Parce que de là à là tu ne multiplies pas par euh ...
[05 : 19] S1 : Moi, tu rajoutes...
[05 : 23] S2 : Mais à chaque fois, tu rajoutes un truc plus petit.
[05 : 27] S1 : Plus grand, non ?
[05 : 29] S1 : Ah oui, non, plus petit.
[05 : 31] S1 : Et moi... si tu multiplies ça par 0,9 t'as pas 4, ...
[05 : 37] S1 : Pour moi, c'est pas une suite, en fait.
[05 : 39] S3 : Ah non ?
[05 : 43] S2 : Mais, on l'avait vu avec les 0,989898 là. 0,9 puis 0,99.
[05 : 49] S2 : On avait vu un truc comme ça.
[05 : 51] S1 : Oui oui, mais avec les zéros, quand tu multiplies 0 par 0,9 ... bah... fin...
[05 : 57] S2 : Là, tu multiplies 4, du coup.
[05 : 59] S3 : Au pire on met...un bête truc comme ça que toutes les images de la fonction sont supérieures à...
[06 : 03] S1 : Oui aussi on peut mettre
[06 : 06] S2 : Ou alors, on dit que ça tend vers 5, comme t'avais dit.
[06 : 08] S1 : Oui.
[06 : 10] S2 : Mais je sais pas si ça...
[06 : 12] S1 : On pire on en met que 2 et...
[06 : 14] S3 : Oui, c'est bon, on reviendra après.
[06 : 16] S1 : Ça joue vraiment à des minuscules chiffres.
[06 : 21] S2 : Bah là, ça change clairement tout le temps, ici.
[06 : 23] S1 : Oui.
[06 : 25] S1 : Même là, ça change tout le temps.
[06 : 27] S3 : Ah non, les x ils augmentent mais les images elles descendent.
[06 : 29] S1 : Là, on croît et là on décroît.
[06 : 31] S2 : Ça tu peux le dire.
[06 : 33] S1 : Donc les...
[06 : 35] S2 : Lorsque les images... Non, lorsque les abscisses...
[06 : 39] S3 : Met les x , c'est bon.
[06 : 45] S2 : Les images diminuent.
[06 : 47] S1 : Je mets diminuent ou décroît ?
[06 : 49] S2 : Comme tu veux.
[06 : 53] S1 : OK.
[06 : 55] S1 : Attendez, en fait je regarde... c'est tout le temps dans les... Ah oui... c'est pas tout le temps 9 et... fin, 5.
[07 : 04] S1 : C'est tout le temps 4 et 11, quoi.
[07 : 09] S4 : Est-ce que ça va ?
[07 : 11] S3 : Oui.
[07 : 12] S4 : Oui ? C'est plutôt clair ?
[07 : 15] S3 : Oui, la consigne, oui, oui ça on a compris.

- [07 : 16] S4 : Ça va.
- [07 : 17] S2 : Mais c'est juste un peu hard.
- [07 : 19] S3 : C'est quoi t'as dit ?
- [07 : 21] S2 : Un peu hard.
- [07 : 28] S1 : Ok, uhm.
- [07 : 38] S2 : Ça me donne mal à la tête tout ça.
- [07 : 39] S1 : Oui, moi aussi.
- [07 : 41] S1 : C'est comme... vous voyez le tableau.
- [07 : 46] S3 : Le tableau de ?
- [07 : 48] S1 : Le tableau en histoire, vous voyez la synthèse ?
- [07 : 49] S2 : Ah, oui.
- [07 : 51] S1 : Ça me fait mal à la tête ce truc. Tout les textes et tout.
- [07 : 54] S3 : Ouais, c'est tout petit.
- [07 : 56] S1 : En fait, c'est embrouillant, je ne vois pas les virgules.
- [07 : 59] S1 : Est-ce que vous voulez que je mette la virgule en fluo ?
- [08 : 01] S2 : Est-ce que quoi ?
- [08 : 02] S1 : Vous voulez que je mette la virgule au fluo comme ça on la voit ?
- [08 : 04] S2 : Comme tu veux.
- [08 : 05] S1 : Ça me perturbe de pas la voir, en fait j'ai l'impression y'a trop de chiffres et j'arrive pas à...
- [08 : 06] S2 : Ça fait beaucoup pour le cerveau.
- [08 : 07] S1 : Ça écrit pas. Il n'y a que celui-ci.
- [08 : 11] S3 : Même pas le noir ?
- [08 : 13] S1 : Non.
- [08 : 15] S3 : Même pas le vert ?
- [08 : 17] S1 : Le vert, si il écrit.
- [08 : 21] S2 : Tu vas pas écrire en vert non ?
- [08 : 22] S3 : Ben c'est pas grave.
- [08 : 26] S3 : Comme ça, vous pouvez continuer de travailler.
- [08 : 26] S2 : Pourquoi est-ce que tu écris penché comme ça ?
- [08 : 27] S2 : Il faut qu'on fasse avec toi.
- [08 : 28] S3 : Mais comme ça, vous continuez à travailler.
- [08 : 31] S2 : Mais c'est pas pour 2 secondes.
- [08 : 32] S3 : Mais... pas en même temps.
- [08 : 35] S3 : Allez. Ok.
- [08 : 43] S2 : Y'a quoi comme... Tu veux bien remonter les exemples de caractéristique.
- [08 : 47] S1 : Pardon, je t'ai écrit, je pense.
- [08 : 49] S2 : C'est pas grave, c'est pas grave.
- [08 : 53] S2 : Déjà, toutes les images sont des multiples de 3.
- [08 : 55] S2 : Ici, on peut dire que toutes les images sont des..., des décimales de 4.
- [09 : 01] S1 : Toutes les unités des... des images sont 4.
- [09 : 08] S2 : Oui

- [09 : 09] S3 : Et les 10^e que des 9
[09 : 11] S2 : Ouais voilà.
[09 : 13] S2 : Même entre 4,9 et 5 en fait, on peut dire.
[09 : 18] S2 : Toutes les unités sont dans 4,9 et 5.
[09 : 21] S2 : Aussi on pouvait dire que ça se rapprochait de 5.
[09 : 22] S2 : Je sais pas. Comme vous voulez.
[09 : 23] S1 : Et 5.
[09 : 27] S1 : Mais plus on avance des chiffres, plus nous avançons vers 5. Ça fait tellement...
[09 : 37] S2 : Ça tend vers 5.
[09 : 39] S1 : On met ça, mais ça fait vraiment pro et tout alors que...
[09 : 43] S2 : Tu trouves ? J'ai l'impression de dire de la merde.
[09 : 45] S1 : Ça fait un peu tu vois, "ça tend vers 5", je sais pas, ça fait un peu...
[09 : 50] S1 : Après à tout moment, ça ne tend pas du tout vers 5. Fin si je pense que ça tend vers 5 mais...
[09 : 54] S2 : Mais on arrive dans les suites, ça tend vers zéro, ça tend vers l'infini, ça tend vers 5.
[10 : 00] S3 : Non, c'est pas grave, on a déjà pas mal.
[10 : 04] S1 : Attendez j'avais un truc à dire...Quand je suis là, on est...
[10 : 08] S1 : Mais là, j'avoue, déjà euh... les ordonnées et tout, c'est pas trop les mêmes choses.
[10 : 14] S1 : Là, c'est pas...
[10 : 16] S1 : Là, on a un 12 au-dessus.
[10 : 18] S1 : Là on..., c'est...
[10 : 20] S1 : En fait le truc c'est que là ça croît.
[10 : 22] S2 : En fait, là, ça décroît de moins en moins quand même, faut se le dire.
[10 : 26] S1 : Oui, c'est pas de manière proportionnelle. Fin, c'est pas... régulier.
[10 : 30] S2 : Et là, est-ce que ça croît ou pas ?
[10 : 32] S1 : Oui, ça croît.
[10 : 34] S1 : C'est pas ouf, le mouvement est pas circulaire.
[10 : 35] S2 : Et là, ça croît de... genre ça se...je sais pas comment expliquer...
[10 : 39] S1 : Ça se...
[10 : 40] S2 : Et là, ça croît de moins en moins et là, ça décroît de moins en moins.
[10 : 42] S1 : Du coup, si eux ils croient et que eux ils décroient avec eux.
[10 : 44] S1 : C'est proportionnel.
[10 : 46] S3 : Ça croît et décroît proportionnellement.
[10 : 49] S2 : Inversement proportionnel.
[10 : 50] S3 : Ouais
[10 : 52] S3 : Ouf on est complexe...
[10 : 58] S3 : Elle va voir ça et elle va se dire ouh.
[11 : 00] S1 : C'est comment après, ça se... stabilise ?
[11 : 02] S2 : Euh ouais.

- [11 : 05] S3 : Mets en caractéristique 2.
[11 : 06] S1 : Oui.
[11 : 12] S1 : Inversement proportion-... inversement proportionnellement, non ?
[11 : 14] S2 : Proportionnel.
[11 : 16] S3 : Ouais, c'est ça, comme ça.
[11 : 18] S2 : Du coup, avec un S.
[11 : 20] S3 : J'étais pas sûre qu'on met un S. On met un S du coup. Inversement proportionnels, c'est bizarre, ok.
[11 : 24] S2 : Oui, c'est vrai c'est chelou mais...
[11 : 26] S1 : C'est un peu bizarre la manière euh...
[11 : 28] S2 : Au pire, on ne mise pas sur le français.
[11 : 30] S1 : Bah c'est mon point faible.
[11 : 32] S1 : Après on a français justement.
[11 : 34] S1 : Ça fait tellement longtemps.
[11 : 36] S3 : Ça me manque pas.
[11 : 37] S3 : Moi non plus.
[11 : 46] S4 : Ça va ? Vous réfléchissez beaucoup ?
[11 : 47] S1 : Oui.
[11 : 48] S4 : Ok.
[11 : 52] S4 : Tout ce à quoi vous pensez c'est bon hein, vous pouvez l'écrire.
[11 : 55] S1 : En fait on pense pas
[11 : 56] S4 : Vous pensez à rien ? Ça vous parle pas ?
[11 : 58] S3 : Je pense on parle trop... On cherche trop loin.
[12 : 00] S4 : Vous cherchez trop loin, vous pensez ?
[12 : 02] S1 : Je sais pas, juste, on voit ça mais on sait pas trop euh...
[12 : 04] S4 : Et pour vous, vous voyez quoi ? Qu'est-ce que vous voyez ?
[12 : 07] S1 : Des chiffres.
[12 : 08] S4 : Des chiffres, oui.
[12 : 10] S2 : Déjà, on voit que des 4 pour les unités.
[12 : 12] S1 : Et pratiquement que des 11 là.
[12 : 13] S4 : Ok ! Vous pouvez l'écrire.
[12 : 14] S2 : Ah oui ?
[12 : 15] S4 : Oui, vous pouvez l'écrire.
[12 : 20] S1 : Je mets...
[12 : 22] S3 : Bah que les x sont dans les 4 et...
[12 : 20] S1 : Je mets les unités de x .
[12 : 30] S4 : Et puis bon, vous voyez ça, et puis après quoi ? Vous voyez d'autres choses ou c'est la seule chose que vous voyez ?
[12 : 34] S3 : Bah oui, on a vu que ici ça croit. Et ici, ça décroît.
[12 : 38] S4 : Ok, donc ça, vous l'avez noté ?
[12 : 40] S2 : On a mis inversement proportionnel. Parce que...
[12 : 42] S4 : Ok. Des beaux mots, c'est bien. Ok, autre chose ?

- [12 : 52] S1 : On voit que c'est pas ultra constant comme... là.
- [12 : 54] S4 : Ah bah vous pouvez noter, vous pouvez faire une comparaison. Vous pouvez dire par rapport au tableau 1...
- [13 : 00] S3 : C'est moins constant.
- [13 : 02] S4 : Oui, parce que moi, j'ai les tableaux, donc je sais aller voir de quel tableau vous parlez, ça va ?
- [13 : 05] S3 : Ok.
- [13 : 06] S4 : Chaque fois, le numéro de tableau est noté donc.
- [13 : 12] S1 : On met les décimales.
- [13 : 16] S2 : Ouais, les décimales sont moins constantes.
- [13 : 36] S1 : C'est bon, non ?
- [13 : 36] S3 : Ouais.
- [13 : 41] S1 : Là, c'est la même chose que avant. Et là, c'est...
- [13 : 44] S2 : Là, ça varie tout le temps entre 5, 4, 5, 4.
- [13 : 46] S1 : Ouais. Ça fait claque claque claque.
- [13 : 50] S2 : Mais là aussi, ça tend vers 5 du coup.
- [13 : 52] S1 : Hm ?
- [13 : 54] S2 : Là aussi, ça tend vers 5.
- [13 : 56] S1 : Là ça tend vers 11.
- [13 : 58] S3 : Ouais.
- [14 : 00] S1 : Tu vas noter les prénoms ?
- [14 : 02] S3 : Ça veut dire quoi "ça tend" ?
- [14 : 04] S1 : Genre "ça s'approche de"
- [14 : 06] S2 : Ouais.
- [14 : 08] S1 : Et... Ça s'approche de...
- [14 : 14] S2 : Mais en vrai mets-le non ?
- [14 : 16] S1 : Je mets ?
- [14 : 18] S2 : Moi j'aurais mis... Genre les x ça tend vers 5 et les f de x , et les images tendent vers 11.
- [14 : 30] S3 : On peut dire que les images...
- [14 : 33] S1 : On peut dire que les images sont... constantes.
- [14 : 38] S3 : Ouais, elles sont presque constantes.
- [14 : 39] S1 : À une décimale près, à chaque fois.
- [14 : 47] S1 : En fait, quand nous on avait mis... Quand on avait mis que les images de la fonction... sont identiques. Après, on a changé.
- [14 : 58] S1 : Ok. Du coup, les y ils sont...
- [15 : 02] S3 : Identiques, à chaque fois.
- [15 : 04] S1 : À une décimale près.
- [15 : 10] S1 : Ça, c'est un dossier par heure ou c'est... ?
- [15 : 14] S3 : Je sais pas.
- [15 : 18] S2 : Je me demande bien à quoi ça va mener ça.
- [15 : 20] S3 : Je pense ça va être bien dur je pense

- [15 : 22] S1 : J'ai peut-être une petite idée. Vous voyez les F, ils ont vu les suites d'une manière plus approfondie. Et à mon avis c'est...
- [15 : 28] S3 : Oh non pas les suites encore
- [15 : 29] S2 : Mais ils ont aussi vu les limites je pense.
- [15 : 30] S1 : Oui, ils ont vu tout en même temps. Nous on a fait en deux fois, du coup je me dis peut-être...
- [15 : 32] S3 : Ah non, non.
- [15 : 34] S1 : C'est des fonctions.
- [15 : 36] S3 : C'est vraiment un cauchemar.
- [15 : 40] S2 : En tout cas, moi, je vois pas de suite là mais...
- [15 : 42] S1 : Non, pas les suites mais du coup, les limites.
- [15 : 46] S2 : Ah oui les limites oui, ça les limites, on les voit bien.
- [15 : 48] S1 : Là ? Ouais.
- [15 : 50] S2 : Genre là euh... voilà quoi. Ici aussi, ça se voit que... à chaque fois, ça fait des bonds entre 4 et 5. Genre vous voyez, le truc, il fait vraiment genre ça.
- [16 : 00] S3 : Ouais, les x font des bonds, c'est bon
- [16 : 02] S3 : Entre 4 et 5 qui alternent, je sais pas.
- [16 : 14] S1 : OK. C'est bon ?
- [16 : 20] S1 : Là, les deux sont...
- [16 : 20] S2 : Là, les deux sont constants à une décimale près. En fait, je sais pas si c'est... c'est correct de dire ça, mais...
- [16 : 28] S1 : Il y a pas de réponses fausses.
- [16 : 30] S2 : Voilà.
- [16 : 32] S3 : Et à chaque fois, seulement, c'est identique les cadres. Tu vois ?
- [16 : 38] S1 : Ouais. À une réponse près, les décimales sont identiques.
- [16 : 44] S3 : À une réponse ?
- [16 : 46] S1 : Bah... merde.
- [16 : 48] S3 : Bah, les x et y à chaque fois, il y a 5...
- [16 : 52] S3 : Non, pas 5.
- [16 : 54] S3 : 6 unités d'écart.
- [16 : 56] S1 : Et il y a le même nombre de décimales. Les décimales sont identiques ce qui fait qu'il y a 6 unités d'écart.
- [17 : 02] S2 : Oui, tout le temps, constamment.
- [17 : 04] S3 : "Constamment", c'est bien ça.
- [17 : 06] S1 : Ouais... les décimales... des y ... sont identiques... ce qui... crée ?
- [17 : 19] S3 : Ce qui donne ? Ouais, je sais pas, ouais.
- [17 : 20] S1 : Implique.
- [17 : 22] S3 : Qui implique...qu'il y a 6 unités... euh.
- [17 : 28] S1 : Un écart... de 6 unités.
- [17 : 34] S3 : Entre les x et y , constamment.
- [17 : 42] S1 : Constamment, c'est avec un e, ah ouais ?

- [17 : 44] S3 : Ouais.
[17 : 46] S3 : Ah non non, c'est un a.
[17 : 48] S1 : J'ai dis oui.
[17 : 52] S2 : Et là, tu peux mettre... que les x tendent vers 5 et les f de x tendent vers 11. Ou ils sont entre 10,9 et 11 comme tu veux
[18 : 02] S1 : Je vais mettre tendent vers 5.
[18 : 11] S1 : C'est bon ?
[18 : 11] S3 : Oui.
[18 : 11] S1 : On est très minimaliste, en vrai mais bon.
[18 : 14] S1 : OK.
[18 : 16] S3 : Ça c'est moche, ça c'est beau.
[18 : 18] S1 : Ça, oui, ça me fait mal au yeux. Ça, autant ça fait un peu mal au yeux, mais pas trop, ça mes yeux ils...
[18 : 24] S2 : On est vraiment des filles.
[18 : 26] S1 : Mais non, mais là euh.
[18 : 26] S2 : Attendez y'a combien de tableaux ?
[18 : 28] S1 : Il y en a 8. Du coup, là, il en reste 4. On a fait la moitié déjà.
[18 : 34] S1 : Là par exemple...
[18 : 38] S2 : Les deux premiers, déjà, ils sont... vachement grands.
[18 : 40] S1 : Il y a beaucoup d'écart.
[18 : 42] S1 : En fait genre ça va, là ça varie vraiment de 11, 10, 12.
[18 : 45] S3 : Ah oui, c'est vrai.
[18 : 48] S2 : En fait c'est... attends, 1, 2, 3... ouais non y'a pas de...
[18 : 50] S3 : Tu peux mettre que les x ils croient...toujours.
[18 : 52] S1 : Ouais.
[18 : 54] S1 : Et ils croient progressivement, je peux mettre.
[18 : 58] S3 : Ouais.
[19 : 00] S3 : À l'inverse, y'a y qui qui...
[19 : 08] S1 : Mais les y , ils peuvent pas bouger, quoi.
[19 : 10] S1 : Les y , ils varient pas... fin si ils varient mais... 12, 10, 11, 11, 11, 10... tu vois c'est...
[19 : 16] S3 : Ça un peu l'air...
[19 : 18] S2 : Peut-être faut regarder s'ils font des bonds aussi, comme avant mais moins clair.
[19 : 22] S1 : Là il y'a en a 3, il y en a 4, là il y en a 1, il y en a 1, il y en a 1, puis il y en a 2.
[19 : 28] S2 : Du coup si on essaie de tracer... Après ça, après ça...
[19 : 31] S3 : Les y varient entre 10 et 11.
[19 : 32] S1 : Ouais, il y a quand même un 12 au début quoi mais...
[19 : 34] S1 : Du coup je pense qu'il faut le mettre à l'inverse.
[19 : 38] S2 : Ça tend pas vers 11, non ?
[19 : 41] S1 : Les y ...

- [19 : 40] S2 : Bah en fait, à chaque fois, les 10, ils se rapprochent des 11. À chaque fois, les 11 se rapprochent de 11.
- [19 : 46] S1 : Oui, à mon avis ça reste quand même dans un mini intervalle.
- [19 : 51] S2 : En vrai on peut le mettre.
- [19 : 52] S1 : Oui.
- [19 : 52] S2 : Moi, je pense que le truc, c'est clairement sur les suites.
- [19 : 56] S1 : On parie ? C'est enregistré les gars.
- [20 : 00] S1 : On ne peut pas mentir.
- [20 : 02] S1 : À tout moment, ce n'est pas du tout sur ça. Ok.
- [20 : 04] S1 : Reste dans... un intervalle... de 10, 11. Parce que le 12, c'est... 11,99999 quoi.
- [20 : 18] S2 : Et au pire, tu dis 12 compris, voilà.
- [20 : 20] S3 : Avec 12 au début.
- [20 : 24] S1 : Ça, c'est bien, ça montre que... enfin on ne va pas mettre 11,9 quoi.
- [20 : 28] S1 : On voit que c'est... très mathématique, ok.
- [20 : 32] S2 : Là, à la limite, tu peux même mettre un crochet ouvert. Parce que c'est jamais égal à 10.
- [20 : 36] S1 : Ah ouais ?
- [20 : 40] S1 : Elle a dit de ne pas barrer. On ne barre pas.
- [20 : 46] S1 : Du coup, là, on met...
- [20 : 48] S1 : Ben déjà... les décimales ne sont jamais euh... ne sont pas identiques les unes aux autres.
- [20 : 52] S1 : Donc il n'y a jamais deux chiffres, même de décimales.
- [20 : 54] S3 : Une décimale si.
- [20 : 56] S1 : Oui, mais jamais les mêmes euh... tu vois les... Aucun qui a toutes les mêmes combinaisons.
- [21 : 02] S2 : Et dans les x , on a rien d'autre à dire ?
- [21 : 04] S2 : Tu peux peut-être dire que les deux premières valeurs sont rondes. Vraiment rondes rondes... je sais pas.
- [21 : 12] S2 : Parce que je trouve que ça tape un peu dans l'œil...
- [21 : 14] S1 : La première... valeur de x est...
- [21 : 25] S1 : est ronde.
- [21 : 26] S1 : C'est-à-dire...
- [21 : 30] S1 : les décimales... sont nulles.
- [21 : 38] S3 : Ah bah si, entier.
- [21 : 42] S1 : J'avais fait ça.
- [21 : 44] S3 : Ah ouais, t'as vu ?
- [21 : 46] S2 : Ok.
- [21 : 50] S1 : Bon.
- [21 : 52] S1 : On peut dire du coup que les décimales ne sont jamais...
- [21 : 54] S3 : Les derniers chiffres se terminent par zéro.
- [21 : 56] S1 : À chaque fois, mais ça c'est vrai hein.

- [22 : 00] S3 : Après, euh, elle a dit, on s'en fout, autant mettre plein de trucs comme ça.
- [22 : 04] S3 : Après, on rajoutera des trucs si on a le temps.
- [22 : 06] S1 : Oui, oui.
- [22 : 08] S2 : Soit tu dis ça, soit tu dis bah l'unité de x est toujours 4.
- [22 : 11] S2 : Comme tu veux.
- [22 : 14] S1 : On peut mettre plusieurs trucs hein.
- [22 : 15] S2 : Ouais, possible.
- [22 : 17] S2 : En fait, on a carrément plein de trucs à dire les gars.
- [22 : 19] S3 : Oui.
- [22 : 20] S1 : On met...
- [22 : 24] S1 : Les... l'unité... des x ... 4.
- [22 : 30] S1 : Après, là, ça...
- [22 : 33] S3 : Ouais à mon avis après ça va...
- [22 : 34] S1 : Mais le tableau ne le montre pas.
- [22 : 36] S1 : Donc, je vais mettre...
- [22 : 40] S1 : Bah c'est bon ?
- [22 : 42] S2 : Ouais.
- [22 : 46] S1 : Là, ça décroît par exemple.
- [22 : 48] S1 : Là, ça croît.
- [22 : 50] S2 : Oui.
- [23 : 04] S3 : Bah en fait, là, il...
- [23 : 08] S2 : Y'en a un qui... ouais.
- [23 : 10] S1 : Ah oui.
- [23 : 12] S1 : On peut mettre "sauf" au troisième et au...
- [23 : 16] S3 : Ouais, mets un petit numéro.
- [23 : 18] S1 : Vas-y, mets les numéros en vert comme ça...
- [23 : 22] S1 : Et après, tu pourras les mettre ici.
- [23 : 23] S3 : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8... ouais.
- [23 : 26] S1 : Tu peux les mettre là en vert, comme ça.
- [23 : 28] S1 : Parce que du coup, j'ai un bic bleu.
- [23 : 32] S1 : Tu fais tes trois dans ce sens-là ?
- [23 : 34] S3 : Non, mais juste là je sais pas, ma main est comme ça.
- [23 : 36] S1 : Non, mais c'était juste pour savoir.
- [23 : 38] S3 : Non, je fais comme ça d'habitude.
- [23 : 46] S1 : Quoi d'autre ?
- [23 : 48] S2 : Bah là ça fait... ah non j'ai rien dit.
- [23 : 52] S1 : Oui, là, ça fait 25, 125.
- [23 : 54] S2 : Ici ça décroît avec l'avant-dernier et le dernier.
- [23 : 56] S1 : Oui.
- [23 : 58] S1 : Vous voyez là, ça fait 25, puis 125. Après, 625, je sais pas si c'est des carrés, genre c'est fois 5.

- [24 : 04] S3 : Je mets là ou là ?
- [24 : 06] S2 : Ah ouais, t'as raison.
- [24 : 08] S1 : Ou entre les deux.
- [24 : 10] S1 : Mais là, on le multiplie par 5, non ? Ou on divise par 5, en fait non, on multiplie par $1/5$...du coup ça fait divisé par 5.
- [24 : 19] S2 : Remontre.
- [24 : 22] S2 : Oui, oui t'as raison.
- [24 : 23] S1 : Tu vois ce que je veux dire ?
- [24 : 25] S1 : En fait on multiplie là.
- [24 : 26] S3 : C'est tout le temps un multiple de 5.
- [24 : 28] S2 : Oui, c'est ça, c'est fois 0,2. Oui du coup, c'est plutôt un demi.
- [24 : 32] S1 : Essaye un peu à la calculatrice.
- [24 : 34] S1 : Bah je sais pas en fait.
- [24 : 40] S1 : Concrètement, là, on fait fois 5.
- [24 : 42] S1 : Après, là...
- [24 : 43] S3 : C'est un peu...
- [24 : 44] S1 : Je sais pas, chaque fois c'est des multiples de 5, quoi.
- [24 : 46] S1 : Sauf là.
- [24 : 48] S2 : Je fais zéro virgule...
- [24 : 50] S1 : Fais un peu 125 fois 5, 625 fois 5. Mais oui, c'est ça. C'était fois 5.
- [24 : 56] S1 : Après, fais un peu 3125 fois 5.
- [25 : 00] S1 : Oui, c'est juste, hein. On fait tout le temps fois 5.
- [25 : 02] S3 : Ouais mais à la fin c'est bizarre.
- [25 : 03] S2 : Mais du coup, je mets fois un demi, fois 0,5.
- [25 : 06] S2 : Regarde, ça fait 0,0...
- [25 : 08] S1 : Ah bah voilà. Après attend fais un peu...
- [25 : 10] S3 : Fois un demi, encore, fois un demi, fois un demi, fois un demi...
- [25 : 12] S1 : Ouais, fois un demi.
- [25 : 14] S2 : Ok, du coup, là euh... c'est une suite géométrique.
- [25 : 18] S1 : Ouais.
- [25 : 20] S1 : Mais sauf qu'après, à un moment donné là, je sais pas pourquoi ça...
- [25 : 24] S3 : Mais fais ça fois ça...
- [25 : 25] S1 : Ouais, fais un peu... Je te dis des chiffres, ok ?
- [25 : 28] S1 : 1, 2, 2, 0, 7, 0, 3, 1, 2, 5... bah du coup fois euh...
- [25 : 38] S3 : Fois 5.
- [25 : 40] S1 : Non, fois un demi.
- [25 : 42] S1 : Est-ce que c'est la même chose ?
- [25 : 44] S1 : Dicte-moi, 6103...
- [25 : 46] S2 : Ouais, c'est bon, c'est bon.
- [25 : 48] S2 : Donc, c'est une suite géométrique.
- [25 : 50] S1 : D'une décimale...
- [25 : 52] S2 : De $1/5$, de raison de $1/5$, d'un demi pardon.

- [26 : 04] S1 : C'est de raison... ah oui ?
[26 : 12] S1 : Voilà.
[26 : 14] S1 : Est-ce qu'on met un petit exemple ?
[26 : 16] S3 : Non.
[26 : 18] S1 : Fais un peu 25 fois un demi.
[26 : 22] S1 : Tu vois, là, ça va pas. C'est juste au début que ça va.
[26 : 24] S3 : Si, ça va.
[26 : 25] S4 : Ça va ?
[26 : 26] S1 : Ah oui oui, ça va.
[26 : 28] S1 : Mais là après, on passe à 25 et là c'est 125.
[26 : 32] S2 : Mais oui, c'est 1, 2, 5.
[26 : 36] S3 : Juste là t'as pas mis 0,25.
[26 : 38] S1 : Ah oui.
[26 : 40] S1 : Ok. Bah c'est bon.
[26 : 43] S3 : Là on peut mettre... un truc bête genre unité...
[26 : 46] S1 : On peut mettre ça hein.
[26 : 46] S3 : Bah oui, comme ça...
[26 : 57] S1 : Ok.
[26 : 59] S3 : Parfait.
[27 : 04] S1 : Tu veux commencer par lequel ?
[27 : 06] S3 : Ouais, euh... l'avant-dernière.
[27 : 12] S1 : Ok.
[27 : 22] S1 : Là ça augmente, là aussi.
[27 : 25] S3 : Non là ça n'augmente pas.
[27 : 28] S3 : C'est aléatoire.
[27 : 31] S1 : En fait là ça diminue, là ça augmente, ça diminue, puis ça augmente, ça diminue, ça augmente, ça diminue, ouais.
[27 : 34] S3 : Ouais, aléatoire.
[27 : 34] S1 : Par contre là ça augmente hein, 7, 8, 9, 9, 9, 9, 5, 9, 9.
[27 : 43] S1 : Ah non, 1, 0, 7, 4, 2, 4...
[27 : 50] S3 : Mais je comprends pas pourquoi on a des virgules. Tu vois parce que pour de vrai sur le graphique là tu le vois pas ça.
[27 : 57] S2 : Oh y'a un beau euh...
[28 : 00] S1 : Ouais.
[28 : 02] S3 : Hier il y avait un trop beau coucher de soleil
[28 : 04] S1 : Même le lever de soleil. Mercredi, j'ai vu, c'était rose, c'était trop beau. Comme on commençait à 9h j'avais vu.
[28 : 06] S2 : Hier le ciel était incroyable.
[28 : 08] S3 : Ouais ouais le soir.
[28 : 10] S2 : C'était tout orange, ça faisait ciel d'été je trouve.
[28 : 12] S1 : À quelle heure ?
[28 : 14] S2 : 17h30, je pense.

- [28 : 16] S3 : Ça a démarré de 16h50 à 17h00.
[28 : 20] S2 : Ouais, j'étais à la muscu les gars.
[28 : 22] S3 : Moi, j'étais en train de courir.
[28 : 26] S2 : Trop bien.
[28 : 28] S3 : Il y avait un arc-en-ciel !
[28 : 30] S1 : Ah ouais ? Il pleuvait ?
[28 : 32] S3 : Oui, il a plu genre... 5 min.
[28 : 34] S2 : Moi, j'ai pas vu.
[28 : 36] S1 : Ils font l'interrogation.
[28 : 38] S1 : Ah du coup, on le fait en physique, on fait le truc à l'étude ?
[28 : 40] S2 : Oui.
[28 : 42] S3 : Enfin s'ils veulent bien hein.
[28 : 44] S2 : Bien sûr qu'elle va bien vouloir.
[28 : 46] S2 : On va la forcer hein.
[28 : 48] S1 : Les gars oui hein, y'a pas le choix.
[28 : 52] S1 : Ok.
[28 : 56] S3 : On est forts mais, ouais mais... on ne dit rien de toute façon.
[28 : 58] S2 : On est un peu distraits hein. On doit focus maths.
[29 : 02] S1 : Déjà, il nous en reste plus que deux. Du coup là on est...
[29 : 04] S1 : Déjà encore les x sont, les unités de x sont 4, les unités de y sont...
[29 : 08] S2 : Ouais.
[29 : 10] S3 : Ouais, voilà.
[29 : 12] S2 : Ça, c'est très bien.
[29 : 18] S3 : C'est un peu aléatoire.
[29 : 20] S2 : Je pense que avoir trouvé des suites et des limites là, je pense que c'est bien.
[29 : 26] S3 : Ouais.
[29 : 30] S1 : Les décimales... de x et de y sont...
[29 : 43] S3 : Aléatoires.
[29 : 44] S1 : J'ai mis... on n'a pas remarqué de liens.
[30 : 01] S1 : C'est bon, hein.
[30 : 02] S3 : Ouais.
[30 : 14] S1 : Oh là là, ça c'est horrible.
[30 : 16] S3 : Bah chaque fois, ça fait 5, 4, 5, 4. Et là 10, 11, 10, 11.
[30 : 18] S1 : Bah oui mais avec le 12... mais ça on l'avait déjà mis non ?
[31 : 20] S1 : Ok, du coup, on met...
[31 : 22] S1 : Les x ...
[31 : 24] S3 : et y ... euh
[31 : 26] S2 : Eux ils font encore des bonds, c'est ça ?
[31 : 28] S2 : Bah, ils tendent vers euh...
[31 : 32] S3 : Enfin x fait des bons avec un truc...
[31 : 36] S3 : Ou alors remets les intervalles.

- [31 : 40] S1 : Et ça je mets comme ça parce que je ne sais pas pourquoi. Et $y...$
- [32 : 00] S1 : Même 12 même 13 hein.
- [32 : 02] S1 : Parce que là on est au-dessus.
- [32 : 05] S3 : Ou alors on met 12 euh ouvert, enfin.
- [32 : 07] S1 : J'ai mis fermé mais du coup je vais mettre 13 ouvert.
- [32 : 10] S3 : Oui.
- [32 : 22] S1 : Bah en soi... les décimales ça fait...
- [32 : 25] S2 : Mais tu peux dire qu'ils tendent non ?
- [32 : 27] S1 : Quoi ?
- [32 : 28] S2 : Tu peux dire qu'ils tendent vers 5.
- [32 : 30] S1 : Non, mais ça ça fai un peu...
- [32 : 33] S1 : Ouais si tu veux je peux mettre.
- [32 : 36] S3 : Mais quand c'est 4, c'est 10, quand c'est 5, c'est 11.
- [32 : 43] S1 : Ça on peut mettre hein.
- [32 : 51] S1 : Les x sont 4, les y sont...
- [33 : 13] S1 : Ok. C'est bon ?

Annexe C

**CQFD Maths 5^e : 4
périodes/semaine (2016)**

Annick **VAN EERDENBRUGGHE**

Anne **BOUSSON**

Anne-France **MAUCLET**

Françoise **VAN DIEREN**

Sabine **HAUSMANN**

Go! 5^e MATHS

4 PÉRIODES / SEMAINE

> manuel



de boeck

Avant-propos

Chaque fois que l'on arrive au bout d'une démonstration, on écrit : CQFD (« Ce Qu'il Fallait Démontrer ») !

Faire des mathématiques, c'est s'appuyer sur des arguments pour **Démontrer**, mais c'est aussi **Découvrir, Décrire, Définir, Développer, Démystifier**. Au fil des pages de la collection « CQFD », selon les contenus et les contextes, ces compétences alternent, se complètent...

Cette **nouvelle édition** du manuel *CQFD 5^e (4 périodes/semaine)* intègre les compétences et les ressources telles qu'elles sont décrites dans le document « Compétences terminales et savoirs requis en mathématiques : humanités générales et technologiques », diffusé par la Fédération Wallonie-Bruxelles, référentiel appliqué progressivement depuis septembre 2015.

Les ressources et compétences énumérées dans les cinq **unités d'acquis d'apprentissage (UAA)** des « Mathématiques générales » en classe de 5^e année sont développées dans les sept chapitres de ce manuel. Le tableau des pages IV-V indique les correspondances.

Dans chaque chapitre, un parcours identique structure les apprentissages :

- l'introduction situe la nouvelle matière dans le parcours scolaire et/ou dans l'histoire,
- l'exploration fournit des informations et des pistes de travail pour l'apprentissage des nouvelles notions,
- la synthèse, organisée en questions-réponses, permet de structurer et de fixer les concepts ; elle énonce des définitions, propose des exemples, explicite des procédures ...
- les exercices, classés par compétences (Connaître, Appliquer, Transférer), testent les connaissances, développent l'habileté calculatoire ou procédurale ainsi que la capacité à résoudre des problèmes.

Dans un monde où les technologies sont en constante évolution, on ne peut passer sous silence l'apport de l'outil informatique dans l'apprentissage. Dans quelques chapitres, une rubrique « Outils numériques » développe quelques pistes d'utilisation de logiciels en rapport avec le contenu du chapitre, soit pour l'illustrer, soit pour résoudre l'un ou l'autre exercice.

Des tableaux et des graphiques figurant dans le manuel doivent être complétés par l'élève ; ils sont indiqués par le symbole  et peuvent être téléchargés gratuitement par le professeur via Udiddit.

La sélection des activités présentées vise à développer, chez l'élève, de multiples compétences : maîtriser ses connaissances, conjecturer, vérifier, argumenter avec un langage propre aux mathématiques, produire et analyser un graphique, un tableau, résoudre un problème.

Nous espérons que les élèves qui utilisent ce livre développeront un réel intérêt pour les mathématiques !

Les auteurs

Limites et asymptotes

6

On a tous une idée intuitive de ce que signifie « atteindre une limite » : aller le plus loin possible, se rapprocher de plus en plus d'un moment de rendez-vous, s'approcher de plus en plus d'un record de vitesse, observer une flèche qui se rapproche de plus en plus d'une cible en comptant indéfiniment le nombre de points qu'elle franchit...

Dans le **chapitre 2**, on a constaté que les résultats obtenus en augmentant indéfiniment le nombre de termes des suites sont assez variés :

- une suite arithmétique tend vers « plus l'infini » ou « moins l'infini »,
- une suite géométrique tend vers zéro ou vers l'infini,
- le « nombre d'or » est associé à la suite de Fibonacci...

On s'est aussi rendu compte que, dans certains cas, les résultats mathématiques ne confirment pas l'intuition première.

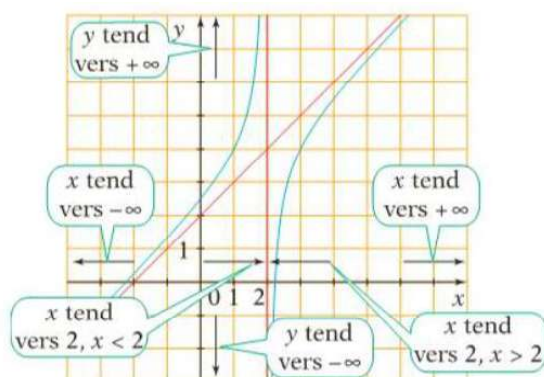


fig. 1



Dans ce chapitre, on précise la signification de « **tendre vers** » dans le cadre de l'étude des fonctions. On utilise ce qu'on sait des suites infinies pour étudier certaines fonctions, analyser leur comportement lorsque x tend vers l'infini ou lorsque y tend vers l'infini (fig. 1) et comprendre comment se comporte une fonction aux bornes de son domaine.

Exploration

1 Suites de nombres

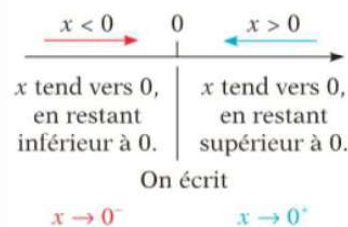
- a. Vers quel nombre converge chacune des suites ci-dessous ?
- 1) 1,1 ; 1,01 ; 1,001 ; 1,0001 ; ...
 - 2) 0,9 ; 0,99 ; 0,999 ; 0,9999 ; ...
 - 3) 7,4 ; 7,49 ; 7,499 ; 7,4999 ; ...
 - 4) -2,9 ; -2,99 ; -2,999 ; -2,9999 ; ...
 - 5) -7,1 ; -7,01 ; -7,001 ; -7,0001 ; ...
- b. Trouver deux suites de nombres qui convergent vers le réel a , l'une par valeurs inférieures et l'autre par valeurs supérieures à ce réel,
- 1) si $a = 0$.
 - 2) si $a = -2,5$.
 - 3) si $a = 11$.

2 Tendre vers un réel

- a. Les fonctions définies par $f_1(x) = \frac{1}{x}$, $f_2(x) = \frac{1}{x^2}$, $f_3(x) = \frac{1}{x^3}$ sont-elles partout définies ?
- b. Pour étudier le comportement d'une fonction à proximité d'un réel qui n'appartient pas au domaine, on construit une suite de valeurs de x , appartenant au domaine et tendant vers ce réel, et on observe la suite de leurs images. On revient alors au problème de la limite d'une suite.

Utiliser un tableau pour compléter le tableau (☞ tab. 1).

x ($x < 0$)	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^3}$	x ($x > 0$)	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^3}$
-0,1				0,1			
-0,01				0,01			
-0,001				0,001			
-0,0001				0,0001			
-0,00001				0,00001			
-0,000001				0,000001			
...				...			
↓ 0^-	↓	↓	↓	↓ 0^+	↓	↓	↓



tab. 1

À partir de ce tableau, on constate que la suite des images par la fonction $f_1 : x \rightarrow \frac{1}{x}$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers 0 en restant inférieur à 0.

On dit que la limite de $f_1(x) = \frac{1}{x}$ lorsque x tend vers 0, en restant inférieur à 0, est $-\infty$ et on écrit

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Compléter : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \dots$

- c. Quelles sont les limites lorsque x tend vers 0 (0^+ , 0^-) des fonctions

$$f_2 : x \rightarrow \frac{1}{x^2} \text{ et } f_3 : x \rightarrow \frac{1}{x^3} ?$$

- d. Associer chacune des fonctions f_1, f_2, f_3 à son graphique.

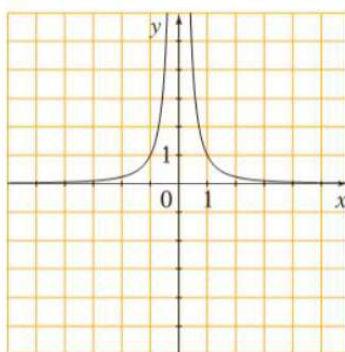


fig. 2

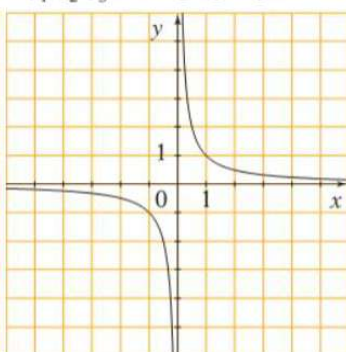


fig. 3

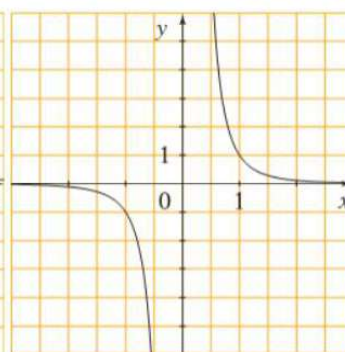


fig. 4

- e. Voici trois graphiques de fonctions (fig. 5 à 7). Dans chaque cas, écrire en termes de limites le comportement de la fonction lorsque x est proche du réel a .

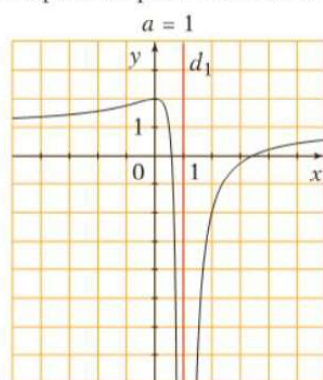


fig. 5

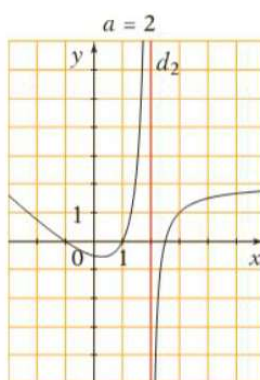


fig. 6

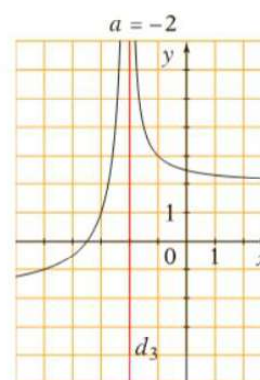


fig. 7

- f. Les droites d_1, d_2, d_3 sont appelées **asymptotes verticales** (AV). Quelles sont les équations de ces asymptotes ?

3 Un graphique qui saute

Certaines fonctions présentent des « sauts » dans leur graphique, pour des réels qui appartiennent à leur domaine de définition.

En voici un exemple. Les tarifs de parking d'un centre commercial sont donnés dans le tableau qui suit.

- Tracer le graphique de la fonction P donnant le prix à payer en fonction de la durée t de parking.
- Écrire, en termes de limites, le comportement de la fonction quand t tend vers 2, quand t tend vers 4.



Durée (t) en heures	Prix $P(t)$
1 ^{er} quart d'heure	gratuit
≤ 1 heure	1,50 €
≤ 2 heures	3 €
≤ 3 heures	4,20 €
≤ 4 heures	4,70 €
≤ 5 heures	5,20 €

Synthèses 1 à 3
Exercices 1 et 2

4 Tendre vers l'infini

- Comment se comportent les fonctions $f_1 : x \rightarrow x^2$, $f_2 : x \rightarrow x^3$, $f_3 : x \rightarrow \frac{1}{x^2}$ et $f_4 : x \rightarrow \frac{1}{x^3}$ lorsque x tend vers l'infini ? Compléter le tableau (☞ tab. 2).

x	x^2	x	x^2	x	x^3	x	x^3	x	$\frac{1}{x^2}$	x	$\frac{1}{x^2}$	x	$\frac{1}{x^3}$	x	$\frac{1}{x^3}$
10		-10		10		-10		10		-10		10		-10	
100		-100		100		-100		100		-100		100		-100	
1000		-1000		1000		-1000		1000		-1000		1000		-1000	
10^4		-10^4		10^4		-10^4		10^4		-10^4		10^4		-10^4	
10^6		-10^6		10^6		-10^6		10^6		-10^6		10^6		-10^6	
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
$+\infty$	...	$-\infty$	...	$+\infty$	...	$-\infty$	...	$+\infty$	...	$-\infty$	...	$+\infty$	...	$-\infty$	...

tab. 2

- Quelles sont les limites en « $+\infty$ » et en « $-\infty$ » des fonctions définies par $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x^3$, $f_3(x) = \frac{1}{x^2}$ et $f_4(x) = \frac{1}{x^3}$?

- c. Choisir, parmi les graphiques (fig. 8 et 9) qui suivent, celui qui traduit le comportement en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions définies par $f_5(x) = \frac{1}{x^4}$ et $f_6(x) = \frac{1}{x^7}$.

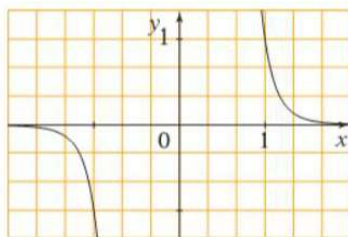


fig. 8

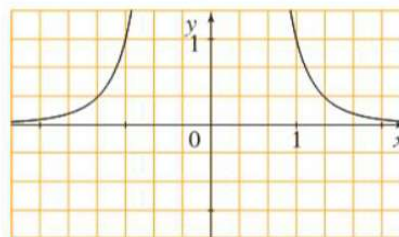


fig. 9

- d. Voici deux graphiques de fonctions (fig. 10 et 11). Dans chaque cas, écrire en termes de limites le comportement de la fonction en $+\infty$ et $-\infty$.

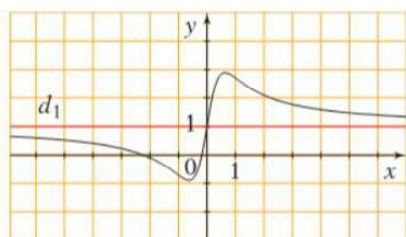


fig. 10

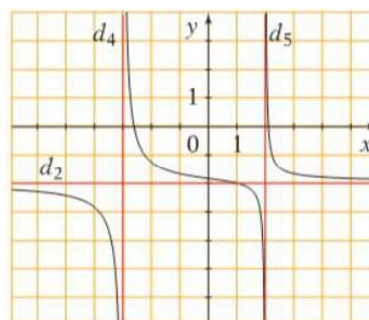


fig. 11

- e. Les droites d_1 et d_2 sont appelées **asymptotes horizontales** (AH). Quelles sont les équations de ces asymptotes ?
- f. Quelles sont les équations des asymptotes verticales du graphique de la fig. 11 ?

Synthèses 4 et 5
Exercices 3, 8 et 9

5 Limites des fonctions polynômes

On considère la fonction d'expression $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x + 1$, dont on donne le graphique (fig. 12). On s'intéresse au comportement de cette fonction lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

- a. Vérifier en utilisant un tableau de suites de réels et de leurs images que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Pratiquement, pour calculer ces limites, on met en évidence la plus haute puissance de x et on utilise les limites obtenues dans l'exploration 4 pour écrire le résultat.

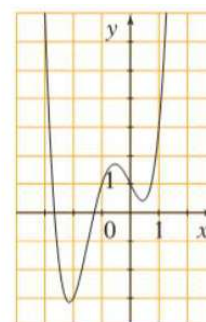


fig. 12

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 + 3x^3 - 2x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \left(1 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty$$

tendent vers 0

b. Appliquer la même démarche pour calculer

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 + 3x^3 - 2x + 1), \lim_{x \rightarrow +\infty} (7x^3 - 5x + 2) \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} (7x^3 - 5x + 2).$$

c. Que peut-on conclure à propos de la limite d'une fonction polynôme lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$?

Synthèse 6
Exercice 4A

6 Limites d'une fonction rationnelle en un réel

Une **fonction rationnelle** est un quotient de deux fonctions polynômes.

On souhaite calculer les limites de ces fonctions en des réels où elles ne sont pas définies.

a. On considère la fonction d'expression $f(x) = \frac{x^2 - 5}{x - 2}$.

Son domaine est $\mathbb{R} \setminus \{2\} =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$.

La fonction est définie pour des réels très proches de 2.

Que deviennent les images lorsque $x \rightarrow 2$? Pour répondre à cette question, on procède comme suit.

1) Construire une table de valeurs de la fonction pour observer les images de deux suites de réels tendant vers 2. Compléter le tableau (☞ tab. 3).

2) Écrire les résultats en termes de limites. Pratiquement, on utilise la démarche suivante.

x ($x < 2$)	$\frac{x^2 - 5}{x - 2}$	x ($x > 2$)	$\frac{x^2 - 5}{x - 2}$
1,9		2,1	
1,99		2,01	
1,999		2,001	
1,9999		2,0001	
...		...	
$\downarrow$ 2^-	$\downarrow$	$\downarrow$ 2^+	$\downarrow$

tab. 3

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5}{x - 2} = \frac{2^2 - 5}{2 - 2} = \frac{-1}{0}$$

x		2	
$x - 2$	-	0	+

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 5}{x - 2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 5}{x - 2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

On observe que le graphique de la fonction (fig. 13) se rapproche de plus en plus de la droite d'équation $x = 2$, sans la toucher. Cette droite est **asymptote verticale** au graphique de la fonction.

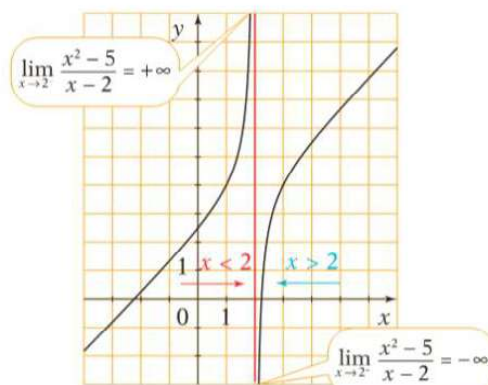


fig. 13

3) Appliquer la même démarche pour calculer $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{5x-1}{(x-3)^2}$ et préciser l'équation de l'asymptote verticale.

b. Le graphique de la fig. 14 est celui de la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2}$. Quel est le domaine de cette fonction ?

1) Observer le graphique pour estimer $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2}$.

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2}$. Peut-on utiliser la démarche donnée en a. ?

En calculant la limite demandée, on obtient une forme $\frac{0}{0}$. C'est une **forme indéterminée**.

On peut simplifier l'expression $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2}$ après l'avoir factorisée, car tendre vers 2 ne signifie pas être égal à 2.

3) Calculer la limite de l'expression simplifiée lorsque x tend vers 2.

Le graphique de la fonction $f : x \rightarrow f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2}$ a un **trou** ou **point vide** en $(2, -1)$.

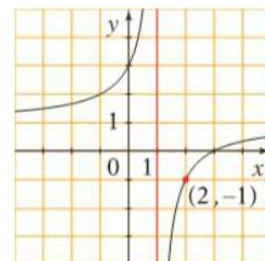


fig. 14

Synthèse 7
Exercices 4B, 10 Série 1

7 Limite d'une fonction rationnelle en l'infini

a. Soit $f : x \rightarrow f(x) = \frac{3x^2 - 7x + 2}{x^2 - x - 6}$.

Si on applique à cette fonction le calcul des limites lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ des fonctions polynômes, on obtient une **forme indéterminée** $\frac{\infty}{\infty}$.

L'observation du graphique de la fonction (fig. 15) laisse supposer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ et que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$.

Comment peut-on obtenir ces résultats à partir de l'expression donnée ?

La droite d'équation $y = 3$ est **asymptote horizontale** au graphique de la fonction.

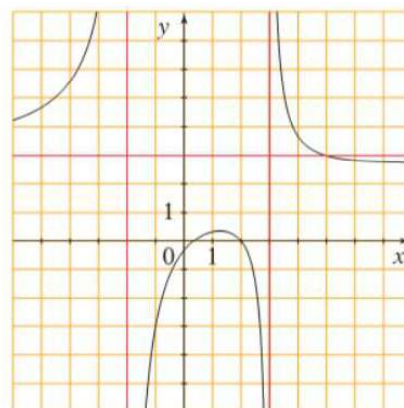


fig. 15

- b. On considère la fonction $f: x \rightarrow f(x) = \frac{8x}{3x^2 + 1}$.

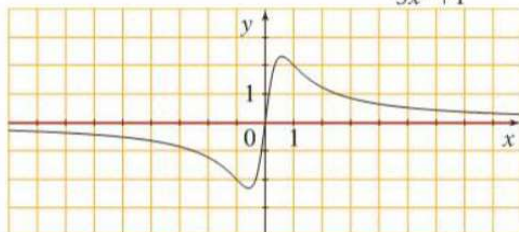


fig. 16

Observer son graphique (fig. 16) pour estimer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x}{3x^2 + 1}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x}{3x^2 + 1}$.

Comment peut-on obtenir ces résultats en utilisant l'expression de la fonction ?

Quelle est l'équation de l'asymptote horizontale de cette fonction ?

- c. Observer le graphique (fig. 17) de la fonction d'expression $f(x) = \frac{x^2 - 5}{x - 2}$.

Quelles sont les limites de cette fonction lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$? Peut-on obtenir ces résultats par calcul ?

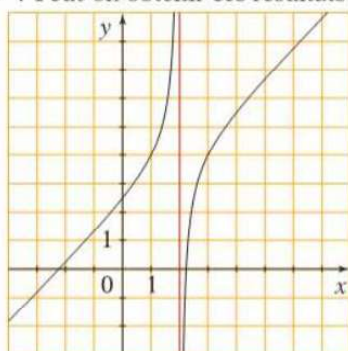


fig. 17

Synthèse 8
Exercices 4C, 10 Série 2

8 Asymptote oblique

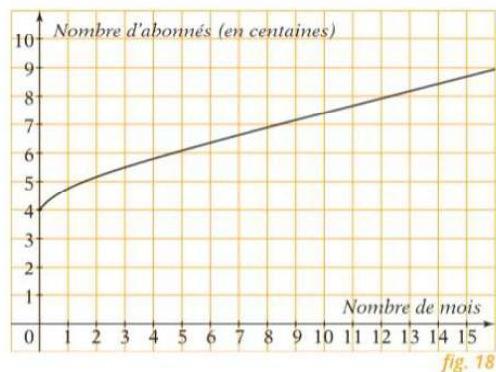
Une nouvelle revue a été mise sur le marché en janvier 2014. L'évolution du nombre d'abonnés en fonction du nombre de mois écoulés depuis le lancement peut être modélisée par la fonction

$$f: x \rightarrow f(x) = 0,25x + 5 - \frac{1}{x+1},$$

dans laquelle x est le nombre de mois écoulés et $f(x)$ le nombre de centaines d'abonnés.



Le graphique (fig. 18) montre l'évolution du nombre d'abonnés sur les quinze premiers mois.



x	$f(x)$	Nombre d'abonnés	Augmentation du nombre d'abonnés
1	4,75	475	
2	5,17	517	42
3			
4			
...			
...			

tab. 4

- Combien y a-t-il d'abonnés après un mois, deux mois, trois mois, un an, deux ans ?
- Après combien de temps le nombre d'abonnés dépasse-t-il 1200 unités ? Procéder par approximations successives avec une calculatrice.
- Compléter le  tab. 4.
- Après un certain nombre de mois, l'augmentation mensuelle du nombre d'abonnés semble se stabiliser. Quelle est cette augmentation ?
- Sur la  fig. 18 tracer la droite d'équation $y = 0,25x + 5$. Cette droite est appelée asymptote **oblique** du graphique de la fonction f .
- On traduit le fait qu'une droite d'équation $y = mx + p$ est asymptote au graphique d'une fonction f par les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (mx + p)) = 0 \text{ ou}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (mx + p)) = 0.$$

Vérifier ces limites pour la fonction $f : x \rightarrow 0,25x + 5 - \frac{1}{x+1}$ et la droite d'équation $y = 0,25x + 5$.

Synthèses 9 et 10.
Exercices 5 à 7, 11 à 22

Synthèse

1 Qu'appelle-t-on bornes du domaine (de définition) d'une fonction ?

6.1 Bornes du domaine

On appelle **bornes du domaine** les extrémités des intervalles sur lesquels la fonction est définie.

Exemple

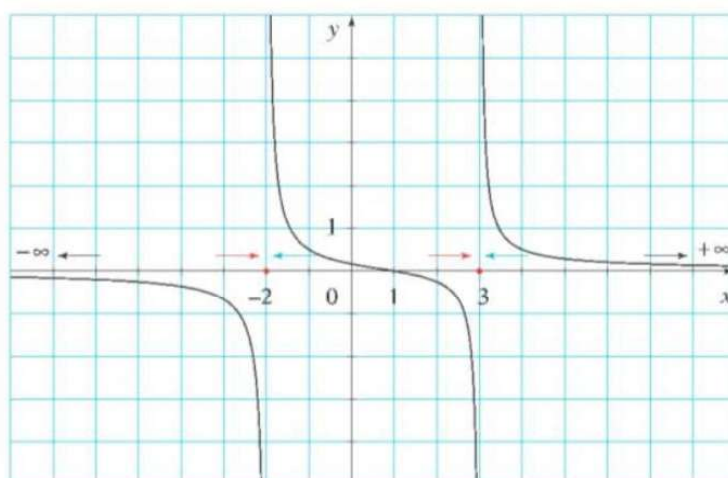


fig. 19

Le domaine de la fonction définie par $f(x) = \frac{x-1}{x^2-x-6}$ est $\mathbb{R} \setminus \{-2; 3\}$.

Les bornes du domaine sont -2 , 3 , $-\infty$ et $+\infty$.

Pour calculer la limite d'une fonction en un réel ou en l'infini, il faut que la fonction soit définie pour des valeurs très proches de ce réel ou de l'infini.

2 Comment découvrir la limite d'une fonction en un réel a ?

Pour pouvoir calculer $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, ce qu'on lit « limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a », il faut que a appartienne au domaine ou en soit une borne, c'est-à-dire que a « colle » ou « adhère » au domaine.

Pour découvrir $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, lorsque a adhère au domaine sans lui appartenir, on peut déterminer une suite de valeurs de x appartenant à $\text{dom} f$ qui converge vers le réel a et examiner la suite de leurs images.

On peut construire

– une suite de réels appartenant à $\text{dom} f$ inférieurs à a ($x \rightarrow a^-$) dont le terme d'indice n est $a - \frac{1}{10^n}$,

– une suite de réels appartenant à $\text{dom} f$ supérieurs à a ($x \rightarrow a^+$) dont le terme d'indice n est $a + \frac{1}{10^n}$,

et, pour chacune de ces suites, on observe la suite des images par f correspondantes.

6.2 Limite en un réel

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ signifie que $f(x)$ peut s'approcher aussi près que l'on veut de b , pour autant que x soit suffisamment proche de a .

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ signifie que $f(x)$ peut atteindre une valeur aussi grande que l'on veut, pour autant que x soit suffisamment proche de a .

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ signifie que $f(x)$ peut atteindre une valeur négative aussi grande que l'on veut en valeur absolue, pour autant que x soit suffisamment proche de a .

Exemple

Soit $f: x \rightarrow f(x) = \frac{2x-5}{(x-1)^2}$; $\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

x ($x < 1$)	$\frac{2x-5}{(x-1)^2}$	x ($x > 1$)	$\frac{2x-5}{(x-1)^2}$
0,9	-320	1,1	-280
0,99	-30 200	1,01	-29 800
0,999	-3 002 000	1,001	-2 998 000
0,9999	-300 020 000	1,0001	-299 980 000
...	...	...	...
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
1^-	$-\infty$	1^+	$-\infty$

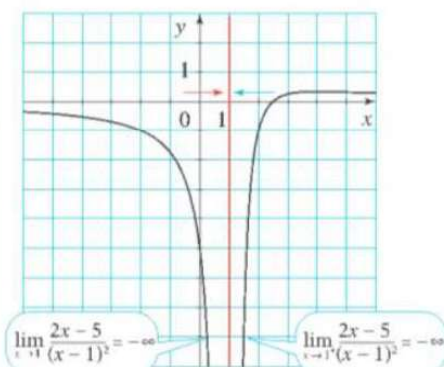


fig. 20

On écrit : $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-5}{(x-1)^2} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-5}{(x-1)^2} = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-5}{(x-1)^2} = -\infty$.

La droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale (AV) au graphique de $f: \rightarrow f(x) = \frac{2x-5}{(x-1)^2}$.

3 Que signifient « limite à droite », « limite à gauche » d'un réel ?

6.3 Limite à gauche, limite à droite

La **limite à gauche** d'une fonction f en un réel a est la limite obtenue en ne considérant que des valeurs de x proches de a et strictement inférieures à a .

On écrit $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ ou $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x)$.

La **limite à droite** d'une fonction f en un réel a est la limite obtenue en ne considérant que des valeurs de x proches de a et strictement supérieures à a .

On écrit $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ou $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$.

Certaines fonctions ont des limites différentes à gauche et à droite du réel a ; on en conclut alors que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ n'existe pas, mais on peut spécifier $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

Exemples

a. Soit $f(x) = \frac{2x-5}{x+3}$; $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

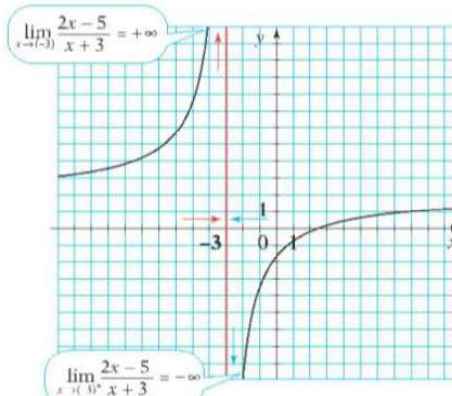
À partir de son graphique (fig. 21), on peut écrire

$$\lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{2x-5}{x+3} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{2x-5}{x+3} = -\infty$$

$$AV \equiv x = -3.$$

Ces limites sont différentes, donc

$$\lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{2x-5}{x+3} \text{ n'existe pas.}$$



b. Soit $f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x \leq 2 \\ x-3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$; $\text{dom } f = \mathbb{R}$.

$$f(2) = 2+3 = 5 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2-3 = -1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2) \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ n'existe pas.}$$

Cette fonction est discontinue en 2.

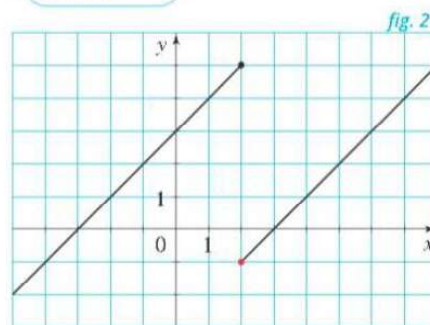


fig. 22

4 Comment découvrir la limite d'une fonction en l'infini ?

Pour calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, « limite de $f(x)$ lorsque x tend vers plus infini », ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, « limite de $f(x)$ lorsque x tend vers moins l'infini », il faut que $+\infty$ ou $-\infty$ soient des bornes du domaine. Pour découvrir

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, on peut construire une suite de puissances de 10 et observer la suite de leurs images ;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, on peut construire une suite d'opposés de puissances de 10 et observer la suite de leurs images.

6.4 Limite en l'infini

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ signifie que $f(x)$ peut être aussi proche que l'on veut de b , pour autant que x soit suffisamment grand.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ signifie que $f(x)$ peut être aussi proche que l'on veut de b , pour autant que les valeurs de x négatives soient suffisamment grandes en valeur absolue.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ signifie que $f(x)$ peut prendre des valeurs supérieures à n'importe quel réel positif, pour autant que x soit suffisamment grand.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ signifie que $f(x)$ peut prendre des valeurs inférieures à n'importe quel réel négatif, pour autant que x soit suffisamment grand.

On exprime de manière analogue les significations de $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et de $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Exemple

Soit $f(x) = \frac{2x-5}{x+3}$; $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

x	$\frac{2x-5}{x+3}$	x	$\frac{2x-5}{x+3}$
-10	3,57	10	1,15
-100	2,11	100	1,89
-1000	2,011	1000	1,989
-10000	2,0011	10000	1,9989
-100000	2,00011	100000	1,99989
-1000000	2,000011	1000000	1,999989
...	...	...	...
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$-\infty$	2	$+\infty$	2

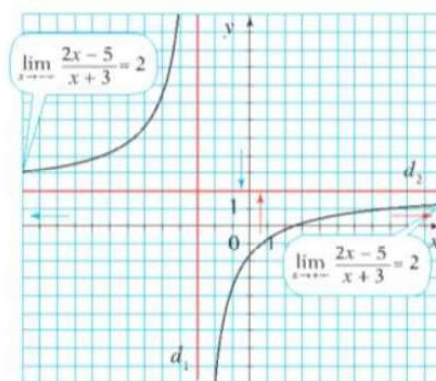


fig. 23

On écrit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-5}{x+3} = 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-5}{x+3} = 2$.

La droite $d_2 \equiv y = 2$ est asymptote horizontale au graphique de $f : x \rightarrow f(x) = \frac{2x-5}{x+3}$.

5 Quels sont les résultats des opérations sur les limites ?

Avec un peu d'habitude, on peut calculer une limite sans construire un tableau de valeurs. On utilise alors les résultats rassemblés ci-dessous.

Dans les tableaux qui suivent, le symbole α désigne $+\infty$, $-\infty$ ou un réel a ; les lettres m et p désignent des réels.

Somme de deux fonctions

Si $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) =$	m	m	m	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) =$	p	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $\lim_{x \rightarrow \alpha} (f(x) + g(x)) =$	$m + p$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Indétermination $+\infty - \infty$

Produit de deux fonctions

Si $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) =$	m	$m > 0$	$m < 0$	$m > 0$	$m < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
et $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) =$	p	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm \infty$
Alors $\lim_{x \rightarrow \alpha} (f(x) \times g(x)) =$	$m \times p$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Indétermination $0 \times (+\infty)$ $0 \times (-\infty)$

Quotient de deux fonctions

Si $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) =$	m	m	m	$m \neq 0$	0	$\pm \infty$
et $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) =$	$p \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	0	0	$\pm \infty$
Alors $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} =$	$\frac{m}{p}$	0	0	$+\infty$ ou $-\infty$ [*] ou n'existe pas	Indétermination $\frac{0}{0}$	Indétermination $\frac{\pm \infty}{\pm \infty}$

^{*}Une étude du signe du dénominateur permet de déterminer le signe de l'infini.

6 Comment calculer les limites d'une fonction polynôme ?

Limite en un réel

Une fonction polynôme est définie en tout réel a . Pour ces fonctions, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Il n'y a donc aucun intérêt à calculer la limite d'un polynôme en un réel.

Limite en l'infini

Pour calculer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ d'un polynôme, on utilise les propriétés des limites en $+\infty$ et en $-\infty$ d'une puissance :

Si n est pair,	Si n est impair,	Quel que soit n ,
alors $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$	alors $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

6.5 Limite en l'infini d'une fonction polynôme

La limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'une fonction polynôme est la limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ de son terme de plus haut degré.

Exemple

Soit $f(x) = 7x^3 - 5x + 2$; $\text{dom } f = \mathbb{R}$.

- Limite en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (7x^3 - 5x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 7x^3 = 7 \cdot (+\infty) = +\infty$$

- Limite en $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (7x^3 - 5x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 7x^3 = 7 \cdot (-\infty) = -\infty$$

7 Comment calculer les limites d'une fonction rationnelle en un réel a ?

Une fonction rationnelle est un quotient de deux fonctions polynômes.

Pour calculer les limites en un réel d'une fonction rationnelle, on a découvert les propriétés suivantes (n est un naturel non nul) (explorations 2 et 6) :

Si n est pair	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{0^+} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^n} = \frac{1}{0^+} = +\infty$
Si n est impair	$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{0^-} = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^n} = \frac{1}{0^-} = -\infty$
	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{0^+} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{(x-a)^n} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

Soit une fonction rationnelle $\frac{f}{g}$ et un réel a , zéro (racine) de la fonction g . Ce réel est donc une borne du domaine de $\frac{f}{g}$.

Pour calculer $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ on remplace x par a et on examine la fraction obtenue.

Premier cas : $g(a) = 0$ et $f(a) \neq 0$

On sait que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$, mais il faut déterminer le signe de l'infini. Voici comment procéder.

- Remplacer x par a dans $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$.
- Étudier le signe du dénominateur pour des valeurs proches de a .
- Calculer les limites de la fonction à gauche et à droite de a , en tenant compte du tableau de signe et du signe du numérateur.

Exemple

Calculer $\lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{2x-5}{x+3}$.

$$\lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{2x-5}{x+3} = \frac{2 \cdot (-3) - 5}{-3 + 3} = \frac{-11}{0} = \pm\infty$$

x	-3
$x+3$	0

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{2x-5}{x+3} = \frac{-11}{0^-} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{2x-5}{x+3} = \frac{-11}{0^+} = -\infty \end{array} \right\} AV \equiv x = -3 \text{ (voir fig. 23).}$$

Second cas : $g(a) = 0$ et $f(a) = 0$

- Remplacer x par a dans $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$; on obtient $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{0}{0}$ (forme indéterminée).
- Factoriser le numérateur et le dénominateur pour faire apparaître le facteur $(x - a)$ car le réel a est racine de f et de g .
- Simplifier la fraction par $(x - a)$ sachant que x est proche de a , sans être égal à a .
- Calculer la limite en a de la fraction simplifiée.

Exemple

$$\begin{aligned} \text{Calculer } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} \\ \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} &= \frac{9 - 9}{-3 + 3} = \frac{0}{0} \\ \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{(x + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} (x - 3) = -6 \end{aligned}$$

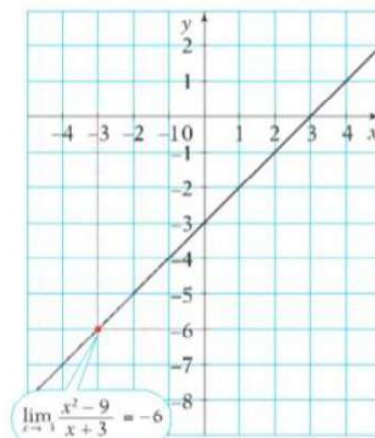


fig. 24

Le point $(-3 ; -6)$ est un point « vide », un « trou » dans le graphique de la fonction f .

6.6 Asymptote verticale et point vide

Le graphique d'une fonction rationnelle admet une **asymptote verticale** (AV) d'équation $x = a$ si le réel a est racine (zéro) du dénominateur sans être racine du numérateur.

Pour déterminer les asymptotes verticales et les points vides (« trous ») du graphique d'une fonction rationnelle, on calcule la limite de cette fonction en chacun des réels qui annulent le dénominateur.

8 Comment calculer les limites d'une fonction rationnelle en $+\infty$ ou en $-\infty$?

Pour calculer la limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'une fonction rationnelle, on applique, au numérateur et au dénominateur, le calcul de la limite en l'infini d'une fonction polynôme ; on détermine alors la limite du quotient simplifié.

6.7 Limite en l'infini d'une fonction rationnelle

La limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'une fonction rationnelle est la limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ du rapport des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

1^{er} cas : le degré du numérateur est strictement supérieur au degré du dénominateur.

Les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ sont égales à $+\infty$ ou $-\infty$ (non respectivement).

Exemple

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 + 5x - 7}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 + 5x - 7}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty.\end{aligned}$$

2^e cas : le degré du numérateur est égal au degré du dénominateur.

Les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ sont toutes deux égales au rapport des coefficients des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Exemple

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 7x + 2}{2x^2 - x - 6} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2}, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 7x + 2}{2x^2 - x - 6} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

3^e cas : le degré du numérateur est strictement inférieur au degré du dénominateur.

Les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ sont toutes deux égales à 0.

Exemple

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x}{x^2 + 1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{x^2 + 1} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3}{x} = 0\end{aligned}$$

9 Comment définir une asymptote au graphique d'une fonction ?

Une droite est asymptote au graphique d'une fonction lorsque le graphique de cette fonction s'approche de plus en plus de cette droite quand x tend vers plus ou moins l'infini, ou quand y tend vers plus ou moins l'infini.

Soit une fonction f et les réels a , b , m et p .

6.8 Asymptotes

Le graphique d'une fonction f admet

- une asymptote verticale (AV) d'équation $x = a$ si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm \infty \text{ ou } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm \infty ;$$

- une asymptote horizontale (AH) d'équation $y = b$ si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \text{ ou } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b ;$$

- une asymptote oblique (AO) d'équation $y = mx + p$ si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (mx + p)) = 0 \text{ ou } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (mx + p)) = 0 .$$

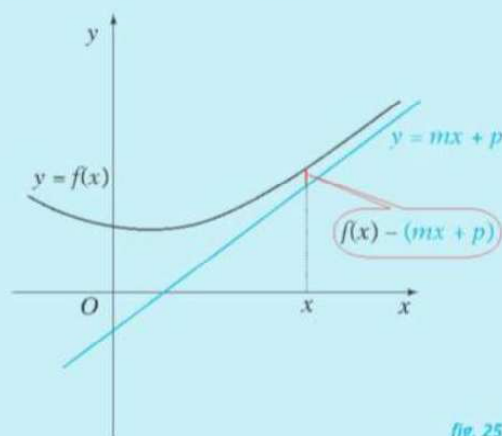


fig. 25

Remarque

Le graphique d'une fonction polynôme n'a jamais d'asymptote.

10 Comment déterminer les asymptotes d'une fonction rationnelle ?

Les fonctions rationnelles peuvent avoir trois types d'asymptotes.

6.9 Asymptote verticale

Le graphique d'une fonction rationnelle admet une **asymptote verticale (AV)** d'équation $x = a$ si et seulement si le réel a est racine (zéro) du dénominateur sans être racine du numérateur.

Pour déterminer les asymptotes verticales – ainsi que les points vides (« trous ») – du graphique d'une fonction rationnelle, on calcule la limite de cette fonction en chacun des réels qui annulent le dénominateur.

6.10 Asymptote horizontale

Le graphique d'une fonction rationnelle possède une **asymptote horizontale (AH)** si et seulement si le degré du numérateur est inférieur ou égal au degré du dénominateur.

La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale au graphique d'une fonction si et seulement si le degré du numérateur est strictement inférieur au degré du dénominateur.

6.11 Asymptote oblique

Le graphique d'une fonction rationnelle a une **asymptote oblique (AO)** si et seulement si le degré du numérateur est supérieur d'une unité au degré du dénominateur.

L'équation de l'asymptote oblique peut être déduite du quotient de la division euclidienne.

Exemples

1) Soit $f(x) = \frac{3x^2 - 7x + 2}{x^2 - x - 6}$; $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-2 ; 3\}$ (fig. 26).

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 - 7x + 2}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$, donc AH = $y = 3$
- $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$; donc $AV_1 \equiv x = -2$
- $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$; donc $AV_2 \equiv x = 3$

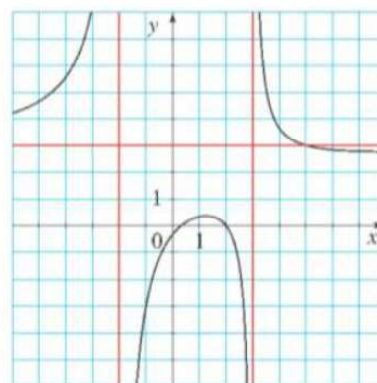


fig. 26

2) Soit $f(x) = \frac{-3x}{x^2 + 1}$; $\text{dom } f = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3x}{x^2 + 1} &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3\cancel{x}}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3}{x} = 0\end{aligned}$$

AH $\equiv y = 0$ (fig. 27)

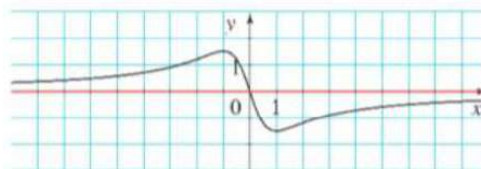


fig. 27

3) Soit $f(x) = \frac{-x^2 + 5x - 7}{x - 3}$; $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 + 5x - 7}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 + 5x - 7}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty.\end{aligned}$$

On a

$$\begin{array}{r|l} -x^2 + 5x - 7 & x - 3 \\ x^2 - 3x & -x + 2 \\ \hline 2x - 7 & \\ -2x + 6 & \\ \hline -1 & \end{array}$$

$$f(x) = -x + 2 - \frac{1}{x - 3} \quad (\text{fig. 28})$$

L'équation de l'asymptote oblique est $y = -x + 2$, car $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x - 3} = 0$.

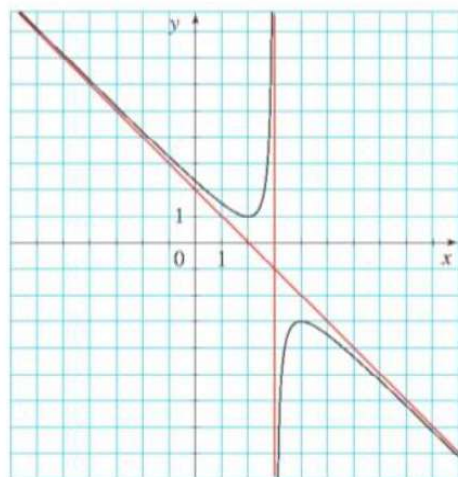


fig. 28

Outils numériques

Utiliser un tableur pour conjecturer une limite

Conjecturer une limite de fonction à l'aide d'un tableur s'apparente à dresser un tableau de valeurs de cette fonction.

Il faut donc introduire dans la feuille du tableur les valeurs de la variable et demander au tableur de calculer les images de ces valeurs.

A. Limite en l'infini

Pour estimer une limite en $+\infty$, on considère une suite de puissances entières de 10.

Pour calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 5x^2)$ (fig. 29),

- 1) on introduit dans la colonne A, les valeurs des exposants (on écrit les deux premiers, on les sélectionne puis on tire vers le bas) ;
- 2) dans la colonne B, apparaissent les puissances de 10 ; dans B4, on écrit $=10^{A4}$, (suivi de l'appui sur la touche enter), on sélectionne la cellule et on tire vers le bas, pour faire apparaître les résultats dans les autres cellules de la colonne ;
- 3) dans C4, on écrit l'expression de la fonction choisie, ici $=B4^3 - 5*B4^2$ (suivi de l'appui sur enter) ; on sélectionne cette cellule C4 et on tire vers le bas. On a ainsi les images des puissances de 10.

On constate que ces images deviennent de plus en plus grandes (pour autant que $x = 10^n$ soit suffisamment grand) ; on écrira $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Pour calculer la limite en $-\infty$, on écrit en B4 $=(10^{A4})$ et on procède comme ci-dessus.

	A	B	C
1	Limite en l'infini		
2	$f(x)=x^3-5x^2$		
3	n	10^n	f(x)
4	1	10	500
5	2	100	950000
6	3	1000	995000000
7	4	10000	9,995E+11
8	5	100000	9,9995E+14
9	6	1000000	1E+18

fig. 29

B. Limite en un réel

Pour calculer la limite d'une fonction en un réel a , on considère la suite $(a - 10^{-n})$ pour la limite à gauche et la suite $(a + 10^{-n})$ pour la limite à droite.

Voici un exemple (fig. 30) : estimer les limites en $a = 3$ de la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{(x - 3)^2}.$$

- 1) Dans la colonne A, on introduit les valeurs des exposants (voir ci-dessus).
- 2) En B4, on écrit $=3-10^{(-A4)}$ et on tire vers le bas pour approcher 3 par des valeurs inférieures.
- 3) En C4, on écrit $=(B4^2-5*B4+6)/(B4-3)^2$ et on tire vers le bas.

On observe les résultats et on en conclut $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$.

En procédant de la même manière, on complète les cellules A12 à C17, et on conclut que $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$.

	A	B	C
1	limite en un réel		
2	$f(x)=(x^2-5x+6)/(x-3)^2$		
3	n	$3-10^{(-n)}$	f(x)
4	1	2,9	-9
5	2	2,99	-99
6	3	2,999	-999
7	4	2,9999	-9999
8	5	2,99999	-99999,00001
9	6	2,999999	-999998,9989
10			
11		$3+10^{(-n)}$	f(x)
12	1	3,1	11
13	2	3,01	101
14	3	3,001	1001
15	4	3,0001	10001
16	5	3,00001	100001
17	6	3,000001	1000000,999
18			

fig. 30

Exercices

Connaître

1 Limites en un réel et tableaux de valeurs

Vérifier les limites suivantes à l'aide d'un tableau de valeurs.

a. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{5x-6}{x-2} = -\infty$

c. $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{3x}{(x+1)^2} = -\infty$

b. $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x-10}{x-3} = -\infty$

d. $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{3x}{(x+1)^3} = -\infty$

2 Partie entière, partie décimale

A. La fonction « partie entière d'un réel x », notée $E(x)$, désigne le plus grand entier inférieur ou égal à x .

a. Tracer le graphique de cette fonction.

b. Traduire les « sauts » du graphique en langage de limites.

B. On donne le graphique (fig. 31) de la fonction « partie décimale d'un réel », définie par $D(x) = x - E(x)$.

Soit k un entier relatif ($k \in \mathbb{Z}$).

Utiliser le graphique pour préciser $\lim_{x \rightarrow k^-} D(x)$ et $\lim_{x \rightarrow k^+} D(x)$.

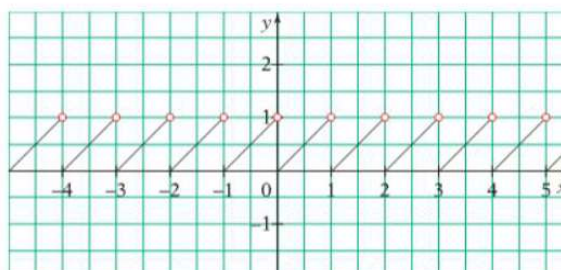


fig. 31

3 Limites en l'infini et tableaux de valeurs

Vérifier les limites suivantes à l'aide d'un tableau de valeurs.

a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{(x+1)^2} = 0$

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3}{(x+1)^3} = 3$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{(x+1)^3} = 0$

d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{1-x} = -3$

4 Des résultats à justifier

Justifier les résultats suivants en détaillant la démarche de calcul ou en énonçant la règle appliquée.

a. Limites de fonctions polynômes

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{3} - 5x^2 + 1 \right) = +\infty$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^2 - 4x^3 + 2) = +\infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^4 + 8x - 2) = -\infty$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 + 7x) = -\infty$$

b. Limites de fonctions rationnelles en un réel

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x^2 - 5x + 6} = -7$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x^2 + 7x + 5}{x^2 - 2x - 3} = +\infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2} = 32$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - 4x + 1}{x - 1} = -\infty$$

c. Limites de fonctions rationnelles en l'infini

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 - 2x + 1}{3x - 4} = +\infty$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x - 5}{x^2 + 4} = 0$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 - 2x + 1}{3x^3 - 4} = \frac{4}{3}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 + 4} = 2$$

5 Asymptotes... oui ou non ?

Observer l'expression analytique de la fonction et préciser quel(s) type(s) d'asymptote admet son graphique.

$$a. f(x) = \frac{-4x}{x^2 + 1}$$

$$b. f(x) = \frac{1-x}{x-5}$$

$$c. f(x) = 2x - \frac{1}{3x} + 1$$

$$d. f(x) = \frac{x}{2+x^2}$$

$$e. f(x) = x - \frac{1}{x}$$

$$f. f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$$

6 Vrai ou faux ?

Pour chacune des affirmations, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier.

- a. Le graphique de la fonction définie par $f(x) = \frac{-4}{x^2}$ admet les deux axes du repère comme asymptotes.
- b. Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$, alors la droite d'équation $x = 3$ est asymptote au graphique de la fonction f .
- c. La droite d'équation $y = -2$ est asymptote au graphique de la fonction définie par $f(x) = \frac{6x+1}{2-3x}$.
- d. Soit les fonctions f et g définies par $f(x) = x^2$ et $g(x) = \frac{1}{x-2}$, alors
 - $\lim_{x \rightarrow 2} (f \cdot g)(x)$ illustre un cas d'indétermination
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f + g)(x) = -\infty$
- e. On considère une fonction f définie pour tout réel. Si, quel que soit le réel x , $f(x) \geq x^2$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

7 Est-ce possible ?

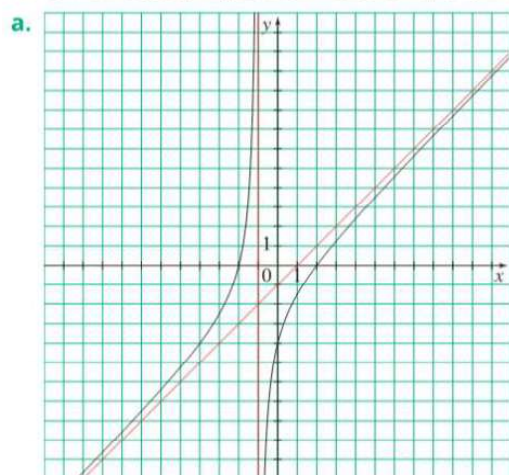
Le graphique d'une fonction f peut-il couper une asymptote verticale ?

Peut-il couper une asymptote horizontale ou une asymptote oblique ?

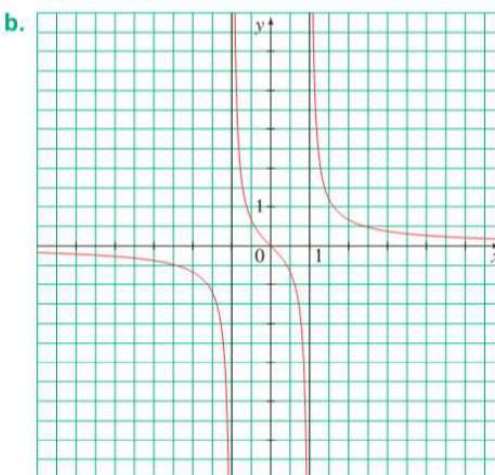
Appliquer

8 Observer des graphiques

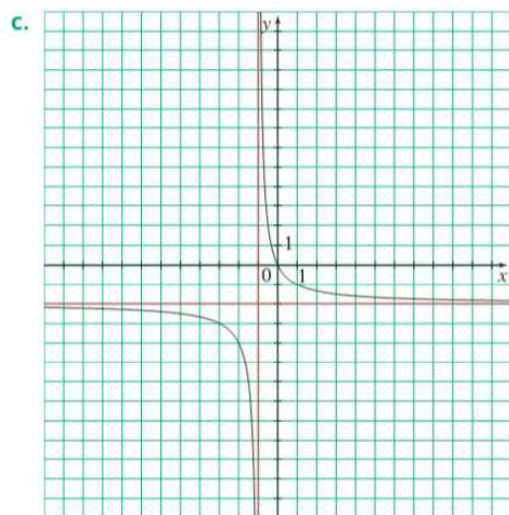
Observer les graphiques donnés et compléter les limites de fonctions.



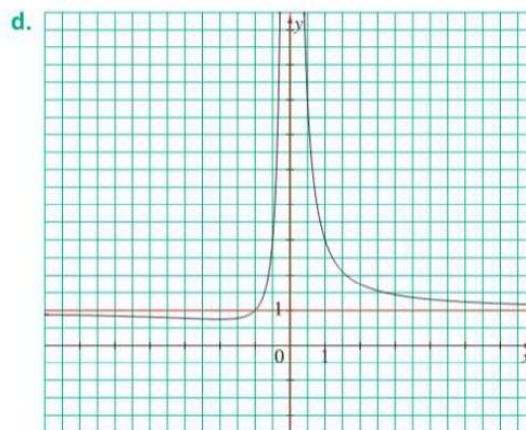
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= & \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= & \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= & \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \end{aligned}$$



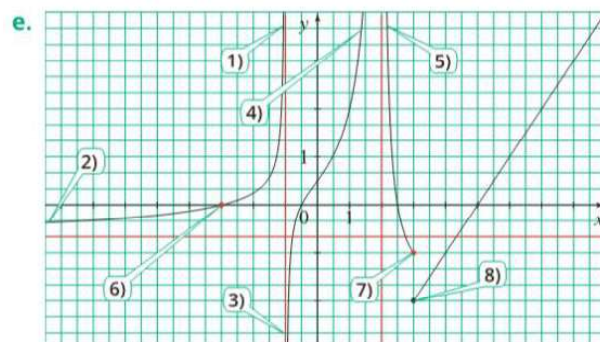
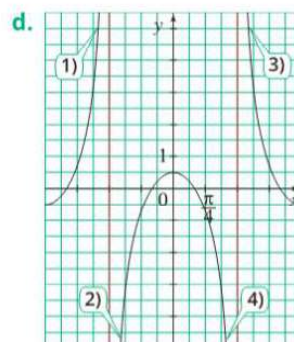
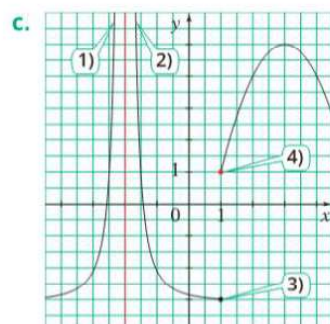
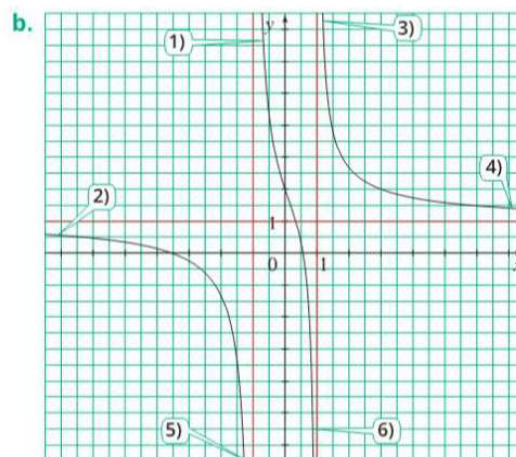
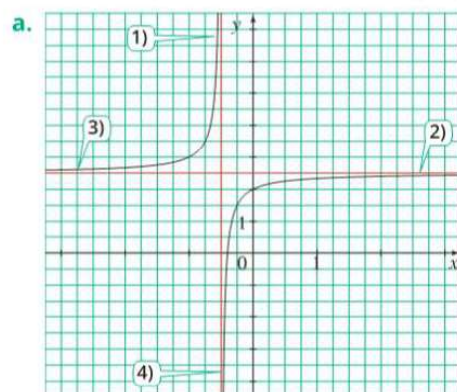
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= & \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} (-f(x)) &= & \lim_{x \rightarrow -1^+} (-f(x)) &= \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= & \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 1) &= & \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2) &= \end{aligned}$$

9 Compléter les bulles

Traduire les situations suivantes en termes de limites.
Écrire l'équation des asymptotes.



10 Quelques calculs ...

Calculer les limites suivantes.

Série 1

a. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2}$

c. $\lim_{x \rightarrow -5} \left(5x + 3 - \frac{2x+1}{x+5} \right)$

e. $\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} \frac{x-4}{2x^2 - x - 6}$

b. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 6x + 5}$

d. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2}$

f. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^2 + x - 6}$

Série 2

a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 5x + 3)$

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 7x + 1}{4x - 5x^2}$

e. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-2}{3x+7} - 9 \right)$

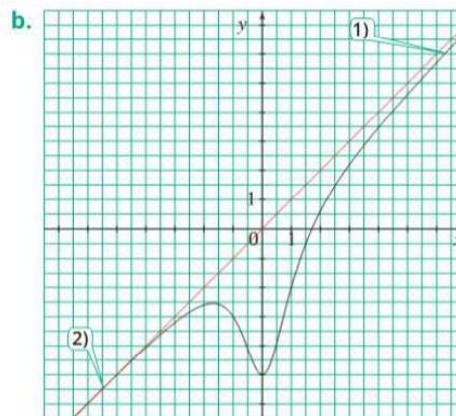
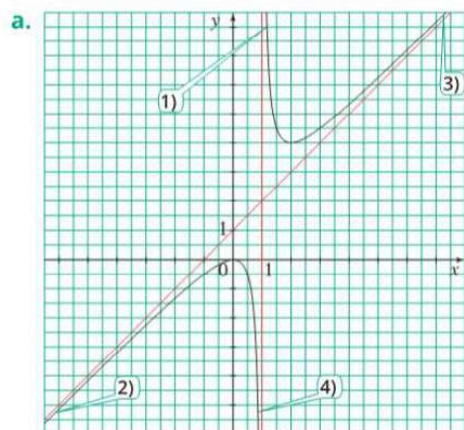
b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 4x^2}{x^2 + 7}$

d. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x + 1}{x^2 - 4x + 3}$

f. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 - 5x^2 + 3}{2x^2 + 7x}$

11 D'autres bulles à compléter

Traduire les situations suivantes en termes de limites.
Écrire l'équation des asymptotes.



12 Asymptote oblique

On donne la fonction f définie par $f(x) = \frac{4x^2 - 5x + 3}{x - 2}$.

- a. Montrer qu'il existe 3 réels a, b, c tels que $\forall x \neq 2$,

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 2}.$$

- b. Justifier que la droite $d \equiv y = 4x + 3$ est asymptote oblique au graphique de f .

13 À la limite ?

On donne l'expression de différentes fonctions. Pour chacune d'elles, déterminer le domaine, calculer les limites aux bornes de celui-ci, traduire les résultats par esquisse du graphique à proximité des bornes. Écrire l'équation de toutes les asymptotes.

$f_1(x) = \frac{2x+1}{x-5}$	$f_6(x) = \frac{3x^2+1}{x^2+x-6}$	$f_{11}(x) = \frac{x^3+3x^2-4x-12}{x^2-9}$
$f_2(x) = \frac{3x}{16-x^2}$	$f_7(x) = \frac{2x^2+3x-1}{-x-2}$	$f_{12}(x) = \frac{2x^2-5x+3}{2-x}$
$f_3(x) = \frac{x^2-x-2}{x^2-2x-3}$	$f_8(x) = \frac{x-4}{x^2-6x+9}$	$f_{13}(x) = 5 - \frac{1}{2x}$
$f_4(x) = \frac{x^2-3}{x+2}$	$f_9(x) = \frac{3-x}{2x}$	$f_{14}(x) = 4x + 3 + \frac{9}{x-2}$
$f_5(x) = x^3 - 2x^2 + x - 5$	$f_{10}(x) = \frac{4+x}{x^2+2x+8}$	$f_{15}(x) = \frac{x}{x^2-1}$

14 À chaque fonction, son graphique

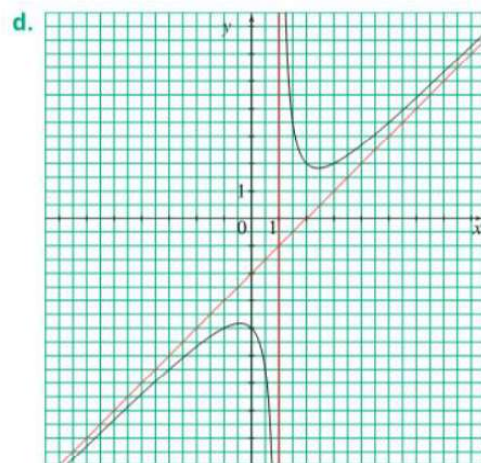
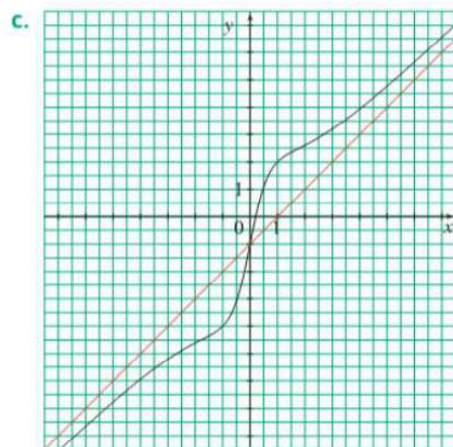
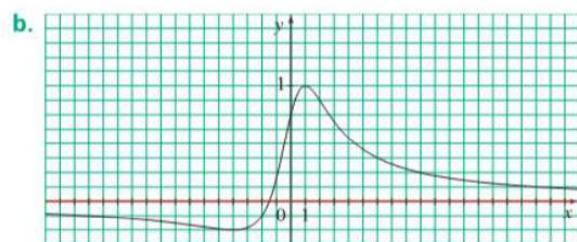
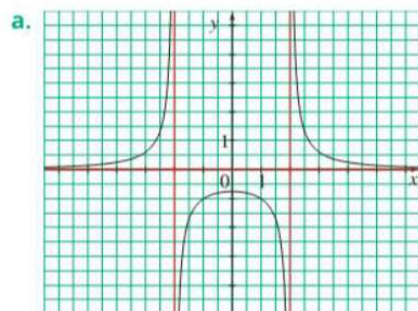
Déterminer les asymptotes des fonctions f_1 à f_4 , puis associer chaque expression au graphique correspondant.

$$f_1(x) = \frac{2x+3}{x^2+4}$$

$$f_2(x) = \frac{3}{x^2-4}$$

$$f_3(x) = \frac{x^2-3x+4}{x-1}$$

$$f_4(x) = \frac{x^3-x^2+5x-1}{x^2+1}$$



Transférer

15 Un peu d'imagination

Inventer l'expression d'une fonction dont le graphique admet les asymptotes données.

a. $AV \equiv x = 2$ et $AH \equiv y = -1$

b. $AV \equiv x = -1$ et $AO \equiv y = 3x + 1$

c. $AV_1 \equiv x = -1$, $AV_2 \equiv x = 2$, $AH \equiv y = 2$

16 Esquisser un graphique

Quelles conclusions peut-on tirer des informations données ?
Traduire ces informations graphiquement.

$$\begin{array}{ll} \text{a.} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \end{cases} & \text{b.} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (x - 3)) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 3)) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \end{cases} \end{array}$$

17 Prix de revient

Le service de photocopies a proposé le tarif suivant pour l'impression et la reliure de syllabus destinés aux élèves : 0,03 € par photocopie et 1,35 € pour la reliure à spirale et les couvertures plastifiées.

- Exprimer, en fonction du nombre de pages, le coût d'un syllabus et le prix de revient d'une page.
- Tracer le graphique de cette dernière fonction et interpréter, dans ce contexte, la signification des asymptotes.



18 Eau salée

Une citerne de grande capacité contient 150 l d'eau pure. On y verse de l'eau salée concentrée à 10 g/l, à la vitesse de 20 l par minute.

- Déterminer le volume V du mélange et la quantité de sel après t minutes.
- Quelle est la concentration C de sel, en g/l, après t minutes ?
- Que devient $C(t)$ quand $t \rightarrow \infty$?
- Pouvait-on prévoir ce résultat ?



19 Club de loisirs

Un nouveau club de loisirs a été créé en janvier 2014. L'évolution du nombre de membres en fonction du nombre de mois écoulés depuis la fondation du club peut être modélisée par la fonction

$$f(x) = \frac{1}{4}x + 3 - \frac{1}{x+2},$$

dans laquelle x est le nombre de mois et $f(x)$ le nombre de centaines de membres.

- Combien y avait-il de membres à la création du club ? après un mois ? après un an ?
- Combien de mois faut-il pour que le nombre de membres soit supérieur à 1000 ?

- c. Donner l'équation de l'asymptote oblique de la fonction f .
- d. Le président du club a déclaré qu'après un certain nombre de mois, le nombre d'adhérents croît régulièrement d'environ 25 personnes par mois. Expliquer cette affirmation à partir de l'expression analytique de la fonction et du graphique.

20 Évolution d'une population

L'évolution de la population d'un pays, en millions d'habitants, peut être modélisée par la fonction $f: x \rightarrow f(x) = \frac{6x+200}{x+20}$ où x est le nombre d'années écoulées depuis la fin de l'année 1990.

- a. Déterminer les réels a et b tels que $f(x) = \frac{a}{x+20} + b$ pour $x \in [0; +\infty[$.
- b. Préciser, d'après l'expression obtenue, si la population est en régression ou en expansion.
- c. Calculer la limite de f en $+\infty$; interpréter concrètement le résultat en terme de population de ce pays.
- d. Préciser si, après 2015, la population de ce pays sera supérieure ou inférieure à 8 millions d'habitants.

21 Même fonction ?

On a demandé à un logiciel graphique de représenter la fonction

$$f: x \rightarrow f(x) = \frac{(40 + x^{16})^2 - 1600}{x^{16}}.$$

En modifiant la fenêtre graphique, on a obtenu les fig. 32 et 33. Surprenant ! D'autant plus que le graphique de la fonction est celui de la fig. 34.

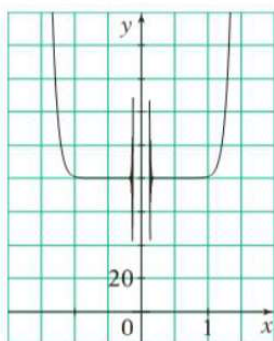


fig. 32



fig. 33

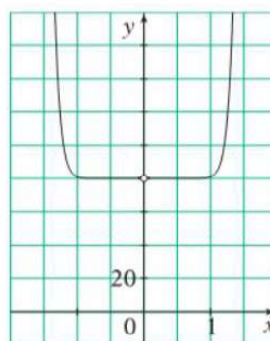


fig. 34

- a. Utiliser la calculatrice pour remplir le tableau suivant.

x	Valeur approchée de $f(x)$
0,6	
0,5	
0,4	
0,3	
0,2	
0,1	
0,01	

- b. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Quel est le résultat correct : celui qui vient d'être calculé, ou celui obtenu dans le tableau ?

- c. Les résultats des calculs effectués avec la calculatrice sont affichés avec p chiffres, mais la calculatrice utilise n ($n > p$) chiffres pour effectuer les calculs. Le nombre n est le plus grand entier qui donne un résultat égal à 1 en effectuant le calcul suivant : $10^n + 1 - 10^n$.

On demande

- 1) de déterminer ce nombre n pour la calculatrice utilisée,
- 2) de calculer x^{16} (pour les valeurs données dans le tableau),
- 3) d'effectuer $x^{16} + 40$,
- 4) d'utiliser ces résultats pour expliquer le « phénomène » rencontré.

Remarque

Le même « phénomène » se produit lorsqu'on utilise un logiciel graphique.

Pour aller plus loin

22 Limites et fonctions trigonométriques

Les fonctions **sinus** et **cosinus** sont des fonctions de période 2π dont les valeurs oscillent toujours entre -1 et 1 ; elles n'ont pas de limite en l'infini.

La fonction **tangente** est une fonction de période π ; elle n'a pas de limite en l'infini. Les réels de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ sont des bornes de son domaine ; on a $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$. Le graphique de

la fonction tangente admet des asymptotes verticales dont les équations sont $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Mais voici une limite particulière !

Pour des valeurs de x en radians, proches de 0 , les techniciens remplacent $\sin x$ par x . Ils considèrent que $\sin x = x$. Peut-on justifier cette pratique ?

Pour répondre à cette question, on vérifie que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, avec x en radians.

On calcule donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin 0}{0} = \frac{0}{0}$.

C'est un cas d'indétermination.

On construit ensuite un tableau de valeurs.

x ($x < 0$)	$\frac{\sin x}{x}$	x ($x > 0$)	$\frac{\sin x}{x}$
-0,5	0,95885108	0,5	0,95885108
-0,2	0,99334665	0,2	0,99334665
-0,1	0,99833417	0,1	0,99833417
-0,01	0,99998333	0,01	0,99998333
-0,001	0,99999983	0,001	0,99999983
...	...	...	...
↓	↓	↓	↓
0^-	1	0^+	1

Les fig. 35 et 36 illustrent graphiquement ce résultat.

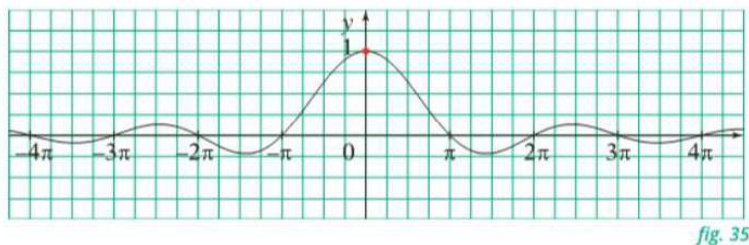


fig. 35

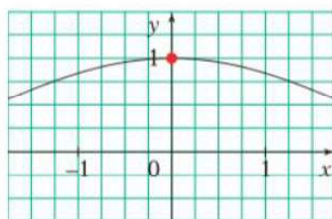


fig. 36

Le résultat $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ signifie que $\frac{\sin x}{x}$ est proche de 1 ou que $\sin x$ est proche de x pour des valeurs de x (en radians) suffisamment proches de 0.

Utiliser le résultat $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ pour calculer les limites suivantes.

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x}$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$

c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

d. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x}$

e. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x}{4x}$

f. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$