

Espaces d'approximation non linéaire par bases d'ondelettes et trigonométriques: caractérisation par les espaces d'interpolation

Auteur : Huart, Marie

Promoteur(s) : Esser, Céline

Faculté : Faculté des Sciences

Diplôme : Master en sciences mathématiques, à finalité didactique

Année académique : 2025-2026

URI/URL : <http://hdl.handle.net/2268.2/25526>

Avertissement à l'attention des usagers :

Tous les documents placés en accès ouvert sur le site le site MatheO sont protégés par le droit d'auteur. Conformément aux principes énoncés par la "Budapest Open Access Initiative"(BOAI, 2002), l'utilisateur du site peut lire, télécharger, copier, transmettre, imprimer, chercher ou faire un lien vers le texte intégral de ces documents, les disséquer pour les indexer, s'en servir de données pour un logiciel, ou s'en servir à toute autre fin légale (ou prévue par la réglementation relative au droit d'auteur). Toute utilisation du document à des fins commerciales est strictement interdite.

Par ailleurs, l'utilisateur s'engage à respecter les droits moraux de l'auteur, principalement le droit à l'intégrité de l'oeuvre et le droit de paternité et ce dans toute utilisation que l'utilisateur entreprend. Ainsi, à titre d'exemple, lorsqu'il reproduira un document par extrait ou dans son intégralité, l'utilisateur citera de manière complète les sources telles que mentionnées ci-dessus. Toute utilisation non explicitement autorisée ci-avant (telle que par exemple, la modification du document ou son résumé) nécessite l'autorisation préalable et expresse des auteurs ou de leurs ayants droit.



FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Espaces d'approximation non linéaire par bases d'ondelettes et systèmes trigonométriques : caractérisation par les espaces d'interpolation

Master en Sciences Mathématiques à finalité didactique

Année académique 2025 - 2026

Auteur

HUART Marie

Promoteur

ESSER Céline

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Céline Esser, ma promotrice, pour m'avoir proposé ce sujet de mémoire et pour m'avoir accompagnée lors de l'écriture de celui-ci.

Je remercie également l'ensemble des professeurs et assistants que j'ai eu la chance de côtoyer pour la richesse de leur enseignement qui m'a permis de m'épanouir tout au long de ces cinq années d'études. J'adresse un remerciement particulier à Françoise Bastin pour m'avoir fait confiance cette année pour donner les travaux pratiques de mathématiques générales.

Merci également à mes amis du B37 et en particulier aux membres de l'"Aile droite" et à ceux qui s'y sont rajoutés au fur et à mesure. Ces études n'auraient certainement pas été les mêmes sans votre amitié, votre soutien et tous ces éclats de rire que nous avons partagés. Je remercie particulièrement Lucy d'avoir été là quand j'en avais besoin, et ce depuis aussi loin que je m'en souviens. Merci également à Heidi pour nos nombreuses escapades à travers la Belgique (et la France) qui m'ont permis de me changer les idées lorsque c'était nécessaire.

Enfin, j'aimerais remercier ma famille et Aurélien d'avoir su me soutenir dans les bons moments comme dans les moments plus difficiles. Un merci particulier à ma maman pour notre complicité tellement importante pour moi et à mon papa pour m'avoir transmis son intérêt pour les mathématiques. J'ai également une pensée pour ma mamy qui s'intéressait toujours à ce qui me passionnait et qui aurait été tellement fière de tenir ce mémoire entre ses mains.

Introduction

L'approximation de fonctions est un pilier de l'analyse numérique et fonctionnelle. Depuis les travaux classiques sur les polynômes ou les séries de Fourier, de nombreuses méthodes ont été développées dans le but de représenter efficacement des fonctions complexes à l'aide d'un nombre fini de paramètres. Ces méthodes jouent un rôle fondamental dans plusieurs domaines tels que la compression d'images ou la résolution numérique d'équations aux dérivées partielles.

C'est dans ce contexte que s'inscrit l'approximation non linéaire. Contrairement au cadre linéaire où on cherchait à approximer une fonction par des éléments appartenant à une suite d'espaces vectoriels fixés à l'avance, l'idée de l'approximation non linéaire est d'adapter la représentation à la fonction. Lorsque l'on travaille avec des bases d'ondelettes, cette idée conduit, par exemple, aux approximations à n termes où l'on conserve uniquement les coefficients les plus significatifs. Cette flexibilité permet une convergence bien plus rapide, notamment pour les fonctions appartenant à certains espaces de Besov.

Un résultat fondamental ([5]) montre par exemple que pour des fonctions dans les espaces de Besov $B_p^s(L_q([0, 1]))$, $s > 0$, $1 \leq p, q \leq \infty$, là où l'approximation linéaire sur un sous-espace de dimension D engendré par des ondelettes est limitée à un taux d'erreur de l'ordre

$$D^{-\min(s, s + \frac{1}{2} - \frac{1}{p})},$$

l'approximation non linéaire permet de sélectionner D termes en fonction de la fonction étudiée et d'obtenir un taux de l'ordre

$$D^{-s}.$$

Lorsque $p < 2$, cela met en évidence l'avantage des méthodes adaptatives de l'approximation non linéaire.

Les méthodes d'approximation non linéaire jouent également un rôle primordial dans la théorie de la compression d'images. Un travail de Cohen et Daubechies ([10]) souligne que les performances d'un schéma de compression dépendent non seulement du taux d'approximation obtenu, mais aussi de la manière dont les coefficients approximant peuvent être codés. Or, les représentations à n termes les plus efficaces ont souvent l'avantage, notamment dans les espaces de Besov, de posséder des coefficients qui concentrent l'essentiel de l'information tandis que les autres deviennent négligeables. Cette propriété permet de construire des stratégies de codage très efficaces et explique pourquoi les méthodes non

linéaires basées sur les ondelettes surpassent souvent les approches linéaires classiques en compression d'images.

L'objectif de ce mémoire est de décrire précisément les classes de fonctions pouvant être approximées à une vitesse donnée par des méthodes non linéaires. Cette problématique conduit à l'introduction des espaces d'approximation qui permettent de relier les propriétés analytiques d'une fonction aux taux de décroissance des erreurs d'approximation associées. Cette étude des espaces d'approximation reposera elle-même sur la théorie des espaces d'interpolation et sur deux types fondamentaux d'inégalités : les inégalités de Jackson et de Bernstein. Les inégalités de Jackson fournissent des estimations directes reliant la régularité d'une fonction au taux de décroissance de l'erreur d'approximation. Elles expriment ainsi qu'une certaine régularité implique une bonne vitesse d'approximation. Réciproquement, les inégalités de Bernstein permettent d'obtenir des résultats inverses en contrôlant la régularité des approximants à partir de leur complexité.

Dans le chapitre 1, nous présentons les divers éléments de la théorie des espaces d'interpolation sur lesquels se base la caractérisation des espaces d'approximation. Nous commençons par présenter la définition des espaces d'interpolation ainsi que la construction d'espaces d'interpolation utilisant le K -fonctionnel de Peetre qui sont proposés dans *Interpolation Spaces* ([4]). Ensuite, nous démontrons le théorème de réitération qui permet de réinterpoler des espaces d'interpolation. La démonstration utilisée est celle de Holmstedt ([21]) qui s'applique dans le cas où les espaces de départ sont quasi-semi-normés.

Dans le chapitre 2, nous commençons par un exemple introductif permettant de comparer les approximations linéaires et non linéaires dans le cadre d'un espace de Hilbert muni d'une base orthonormée. Ensuite, nous construisons la théorie générale permettant de caractériser les espaces d'approximation en développant les inégalités de Jackson et de Bernstein. Cette théorie nous permet finalement d'affiner les résultats pour l'exemple dans les espaces de Hilbert.

Les chapitres 3 et 4 sont consacrés à l'application de cette théorie générale à la caractérisation des espaces d'approximation dans les cadres linéaire et non linéaire lorsque l'on travaille avec des bases d'ondelettes. Dans le chapitre 3, nous présentons deux types de constructions d'ondelettes : les bases isotropes, dont les supports possèdent les mêmes dimensions dans toutes les directions, et les bases hyperboliques, qui autorisent des supports de tailles différentes selon les directions. Nous étudions ensuite, dans le chapitre 4, les espaces d'approximation associés à ces deux types de bases.

Enfin, dans le chapitre 5, nous étudions comment nous pouvons appliquer les résultats du chapitre 2 à l'approximation par des polynômes trigonométriques et des bases de Fourier non linéaires.

Table des matières

1	Éléments de la théorie des espaces d'interpolation	6
1.1	Espaces d'interpolation : définition	6
1.2	Construction utilisant le K-fonctionnel de Peetre	7
1.3	Le théorème de réitération	12
2	Approximation à n termes	23
2.1	Exemple introductif : Approximation à n termes dans un espace de Hilbert	23
2.2	Caractérisation des espaces d'approximation : Méthode générale	26
2.2.1	Inégalités de Jackson et de Bernstein	28
2.3	Retour aux espaces de Hilbert	35
2.3.1	Espaces de suites de Lorentz	35
2.3.2	Interpolation des espaces de suites de Lorentz	37
2.3.3	Caractérisation de $\mathcal{A}_q^\alpha$	41
3	Théorie de Littlewood-Paley et bases d'ondelettes	42
3.1	Éléments de la théorie de Littlewood-Paley	42
3.2	Construction des bases d'ondelettes utilisées	47
3.2.1	Construction des ondelettes biorthogonales en dimension 1	47
3.2.2	Construction des bases isotropes d'ondelettes multivariées	49
3.2.3	Construction des bases hyperboliques d'ondelettes multivariées	50
4	Approximations linéaire et non linéaire par des ondelettes	55
4.1	Approximation linéaire	55
4.1.1	Bases isotropes	55
4.1.2	Bases hyperboliques	60
4.2	Approximation non-linéaire	65
4.2.1	Bases isotropes	65
4.2.2	Bases hyperboliques	70
5	Approximation trigonométrique	74
5.1	Approximation linéaire	74
5.1.1	Noyau de Jackson	75
5.1.2	Inégalité de Jackson	78

5.1.3	Inégalité de Bernstein	82
5.1.4	Caractérisation de l'espace d'approximation	87
5.2	Approximation non linéaire	88
5.2.1	Bases de Fourier non linéaires	88
5.2.2	Inégalités de Jackson	90
5.2.3	Inégalités de type Bernstein	97
A	Quasi-semi-normes	100
B	Espaces fonctionnels	102
B.1	Espaces de Sobolev	102
B.2	Espaces de Besov	102
B.2.1	Espaces de Besov à régularité hybride	104
B.3	Espaces de Lipschitz	104

Chapitre 1

Éléments de la théorie des espaces d'interpolation

Dans ce chapitre, nous allons étudier les différents éléments de la théorie des espaces d'interpolation qui nous seront utiles dans les chapitres suivants. Hormis la dernière section, les résultats proviennent de [4].

1.1 Espaces d'interpolation : définition

Commençons par définir les espaces d'interpolation.

Définition 1.1.1. Soient X et Y , deux espaces vectoriels topologiques. Les espaces X et Y sont dits compatibles s'il existe un espace séparé $\mathcal{U}$ dont X et Y sont des sous-espaces. Dans ce cas, on peut définir leur somme $X + Y := \{u \in \mathcal{U} \mid \exists x \in X, y \in Y \text{ tels que } u = x + y\}$ et leur intersection.

Dans le cas où X et Y sont normés, on peut munir ces espaces d'une norme :

$$\begin{aligned}\|u\|_{X \cap Y} &= \max(\|u\|_X, \|u\|_Y), \\ \|u\|_{X+Y} &= \inf_{u=x+y} (\|x\|_X + \|y\|_Y).\end{aligned}$$

Définition 1.1.2. Soient X et Y , deux espaces normés et compatibles. On dit qu'un espace topologique Z est un espace d'interpolation pour la paire (X, Y) si

1. $X \cap Y \subset Z \subset X + Y$ (Z est un espace intermédiaire à X et Y),
2. toute application linéaire $T : X + Y \rightarrow X + Y$ telle que les restrictions $T|_X : X \rightarrow X$ et $T|_Y : Y \rightarrow Y$ sont continues est également continue de Z dans Z .

1.2 Construction utilisant le K -fonctionnel de Peetre

Il existe plusieurs méthodes pour construire des espaces d'interpolation. Nous allons étudier ici celle utilisant le K -fonctionnel de Peetre.

On considère ici un espace normé X et un espace quasi-semi-normé Y compatible avec X . Pour tout $t > 0$, on peut définir une quasi-semi-norme équivalente à celle de Y donnée par $t|\cdot|_Y$. On définit le K -fonctionnel de $z \in X + Y$ par

$$K(z, t) := K(z, t; X, Y) = \inf_{\substack{z=x+y \\ x \in X \\ y \in Y}} \|x\|_X + t|y|_Y.$$

Les propriétés suivantes s'obtiennent alors à partir de cette définition.

Lemme 1.2.1. 1. La famille des K -fonctionnels $K(\cdot, t; X, Y)$, $t > 0$ est une famille de quasi-semi-normes sur $X + Y$.

2. Pour tout $z \in X + Y$, $K(z, \cdot; X, Y)$ est une fonction positive, croissante et concave.

3. Pour tous $s, t > 0$, $z \in X + Y$, $\min(1, \frac{t}{s})K(z, s; X, Y) \leq K(z, t; X, Y)$.

Démonstration. 1. Le fait que pour tout $t > 0$, $K(\cdot, t)$ est positif et vérifie $K(0, t) = 0$ découle directement des propriétés des normes et des quasi-semi-normes.

Montrons que pour tous $t > 0$, $z \in X + Y$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$K(\lambda z, t) = |\lambda|K(z, t).$$

Si $\lambda = 0$, c'est évident. Sinon, on vérifie facilement que l'application

$$\Phi : (x, y) \mapsto \lambda(x, y)$$

est une bijection de

$$A = \{(x, y) \in X \times Y : x + y = z\}$$

dans

$$B = \{(u, v) \in X \times Y : u + v = \lambda z\}.$$

Ainsi,

$$K(\lambda z, t) = \inf_{(u, v) \in B} \|u\|_X + t|v|_Y = \inf_{(x, y) \in A} \|\lambda x\|_X + t|\lambda y|_Y = |\lambda| \inf_{(x, y) \in A} \|x\|_X + t|y|_Y = |\lambda|K(z, t).$$

Pour conclure ce premier point, montrons que $K(\cdot, t)$ vérifie une inégalité quasi-triangulaire. Par définition, il existe $C \geq 1$ tel que pour tous $y_1, y_2 \in Y$,

$$|y_1 + y_2|_Y \leq C(|y_1|_Y + |y_2|_Y).$$

Ainsi, pour tous $t > 0$, $z_1, z_2 \in X + Y$,

$$K(z_1 + z_2, t) = \inf_{z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + y_1 + y_2} \|x_1 + x_2\|_X + t|y_1 + y_2|_Y$$

$$\begin{aligned}
&\leq \inf_{z_1+z_2=x_1+x_2+y_1+y_2} (\|x_1\|_X + \|x_2\|_X + Ct(|y_1|_Y + |y_2|_Y)) \\
&\leq C(\inf_{z_1=x_1+y_1} \|x_1\|_X + t|y_1|_Y + \inf_{z_2=x_2+y_2} \|x_2\|_X + t|y_2|_Y) \\
&= C(K(z_1, t) + K(z_2, t)).
\end{aligned}$$

2. Le fait que $K(x, \cdot)$ est positif découle des propriétés des normes et des quasi-semi-normes. Pour la croissance, on a que pour toute décomposition $z = x + y$ de $z \in X + Y$ et pour tous $t_0 \leq t_1$, on a

$$\|x\|_X + t_0|y|_Y \leq \|x\|_X + t_1|y|_Y$$

et cette inégalité reste vraie en passant à l'infimum sur les décompositions. Quant à la concavité, on a que pour toute décomposition $z = x + y$ de $z \in X + Y$, tous $t, s > 0$ et tout $\lambda \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned}
\|x\|_X + (\lambda t + (1 - \lambda)s)|y|_Y &= (\lambda + (1 - \lambda)) \|x\|_X + (\lambda t + (1 - \lambda)s)|y|_Y \\
&= \lambda(\|x\|_X + t|y|_Y) + (1 - \lambda)(\|x\|_X + s|y|_Y) \\
&\geq \lambda K(z, t; X, Y) + (1 - \lambda)K(z, s; X, Y)
\end{aligned}$$

et on conclut en prenant l'infimum sur toutes les décompositions.

3. Pour montrer le dernier point, supposons d'abord que $\min(1, \frac{t}{s}) = 1$. On a donc $t \geq s$ et la croissance de K nous donne l'inégalité annoncée. Dans le cas où $t < s$, l'inégalité devient

$$\frac{t}{s}K(z, s) \leq K(z, t).$$

Or, on a

$$\frac{t}{s}K(z, s) = \inf_{z=x+y} \frac{t}{s}(\|x\|_X + s|y|_Y) \leq \inf_{z=x+y} (\|x\|_X + t|y|_Y) = K(z, t)$$

car $\frac{t}{s} < 1$, donc $\frac{t}{s}\|x\|_X \leq \|x\|_X$.

□

Ainsi, si T est un opérateur linéaire qui plonge X dans lui-même et Y dans lui-même et qui est tel qu'il existe $M > 0$ tel que $\|T\|_X \leq M$ et $|T|_Y \leq M$, on a que pour tout $z = x + y \in X + Y$, $T(z) = T(x) + T(y)$ avec $T(x) \in X$ et $T(y) \in Y$. Donc,

$$K(T(z), t) \leq \|T(x)\|_X + t|T(y)|_Y \leq M(\|x\|_X + t|y|_Y),$$

ce qui nous permet de dire que pour tout $t > 0$, $K(T(z), t) \leq M K(z, t)$.

Au final, chaque fois qu'on aura une norme (ou une quasi-semi-norme) $\|\cdot\|$ définie pour les fonctions à valeurs réelles sur $\mathbb{R}^+$ et compatible avec l'ordre, on aura

$$\|K(T(z), \cdot)\| \leq M\|K(z, \cdot)\|.$$

Une telle norme nous permettra donc de définir un espace qui sera un espace d'interpolation pour la paire (X, Y) .

Par exemple, on peut s'intéresser aux espaces θ, q définis comme suit.

Définition 1.2.2. Si $0 < \theta < 1$ et $0 < q \leq \infty$, $(X, Y)_{\theta, q}$ est l'ensemble des $z \in X + Y$ tels que

$$|z|_{(X, Y)_{\theta, q}} := \begin{cases} \left(\int_0^\infty [t^{-\theta} K(z, t)]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} & \text{si } 0 < q < \infty \\ \sup_{t>0} t^{-\theta} K(z, t) & \text{si } q = \infty \end{cases}$$

est fini.

Notons que $|\cdot|_{\theta, q; K}$ définit bien une quasi-semi-norme. En effet,

1. Les propriétés de l'intégrale et de K assurent que $|\cdot|_{(X, Y)_{\theta, q}} \geq 0$ et $|0|_{(X, Y)_{\theta, q}} = 0$.
2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ pour tout $z \in (X, Y)_{\theta, q}$, $|\lambda z|_{(X, Y)_{\theta, q}} = |\lambda| |z|_{(X, Y)_{\theta, q}}$ grâce à la linéarité de l'intégrale et à la propriété correspondante pour K .
3. On sait qu'il existe $C \geq 1$ tel que pour tous $z_1, z_2 \in (X, Y)_{\theta, q}$, $K(z_1 + z_2, t) \leq C(K(z_1, t) + K(z_2, t))$. Ainsi, si $q < \infty$ ¹,

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|_{(X, Y)_{\theta, q}} &= \left(\int_0^\infty (t^{-\theta} K(z_1 + z_2, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\int_0^\infty (t^{-\theta} C [K(z_1, t) + K(z_2, t)])^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq C \left(\int_0^\infty (t^{-\theta} [K(z_1, t) + K(z_2, t)])^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Si $q \geq 1$, on utilise alors l'inégalité de Minkowski pour avoir

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|_{(X, Y)_{\theta, q}} &\leq C \left[\left(\int_0^\infty (t^{-\theta} K(z_1, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_0^\infty (t^{-\theta} K(z_2, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ &= C(|z_1|_{(X, Y)_{\theta, q}} + |z_2|_{(X, Y)_{\theta, q}}). \end{aligned}$$

Si $0 < q < 1$, on obtient la même conclusion en utilisant l'inégalité quasi-triangulaire (A.3). La constante C sera alors multipliée par une constante dépendant de q .

De plus, on vérifie facilement que cette quasi-semi-norme est compatible avec l'ordre sur les fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$. Au vu des raisonnements effectués précédemment, elle permet donc de définir un espace d'interpolation conformément à la définition 1.1.2.

1. Il suffit d'adapter le raisonnement lorsque $q = \infty$.

Dans la suite, on préférera travailler avec une équivalence discrète pour cette quasi-norme. Commençons par introduire la notation suivante.

Notation 1.2.3. Soient A et B deux fonctions. Nous allons écrire

$$A \asymp B$$

pour dire qu'il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que

$$C_1 B \leq A \leq C_2 B.$$

Notons que dans les raisonnements qui suivront, les valeurs des constantes pourront changer d'une ligne à l'autre, mais nous prendrons la peine de préciser les paramètres dont dépendront ces constantes.

On peut maintenant utiliser cette notation dans la démonstration suivante².

Proposition 1.2.4. Soient $0 < \theta < 1$ et $0 < q \leq \infty$. On a

$$|z|_{(X,Y)_{\theta,q;K}} \asymp \begin{cases} (\sum_{k=-\infty}^{+\infty} [2^{-k\theta} K(z, 2^k)]^q)^{\frac{1}{q}} & \text{si } 0 < q < \infty \\ \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{-k\theta} K(z, 2^k) & \text{si } q = \infty. \end{cases}$$

avec des constantes d'équivalence ne dépendant que de θ et de q .

Démonstration. Effectuons la démonstration dans le cas où $q < \infty$, il suffira de l'adapter pour $q = \infty$. On a

$$|z|_{(X,Y)_{\theta,q;K}} = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{2^k}^{2^{k+1}} (t^{-\theta} K(z, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (1.1)$$

Or, en utilisant le point 3 du lemme 1.2.1, on obtient que

$$K(z, 2^k) \leq K(z, t) \leq 2K(z, 2^k) \text{ si } 2^k \leq t \leq 2^{k+1}. \quad (1.2)$$

En effet, dans ce cas,

$$\min(1, \frac{t}{2^k}) K(z, 2^k) = K(z, 2^k) \leq K(z, t)$$

et

$$\min(1, \frac{2^k}{t}) K(z, t) = \frac{2^k}{t} K(z, t) \leq K(z, 2^k),$$

ce qui nous permet d'obtenir les inégalités 1.2 en notant que $\frac{2^k}{t} \geq \frac{1}{2}$. Ainsi, on a

$$2^{-\theta} 2^{-k\theta} K(z, 2^k) \leq t^{-\theta} K(z, t) \leq 2 \cdot 2^{-k\theta} K(z, 2^k) \text{ si } 2^k \leq t \leq 2^{k+1}$$

2. Démonstration tirée de [4].

et donc, en injectant ces inégalités dans 1.1, on obtient

$$2^{-\theta}(\ln(2))^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (2^{-k\theta} K(z, 2^k)^q) \right)^{\frac{1}{q}} \leq |z|_{(X,Y)_{\theta,q;K}} \leq 2(\ln(2))^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (2^{-k\theta} K(z, 2^k)^q) \right)^{\frac{1}{q}}$$

□

Remarque 1.2.5. Dans le chapitre 2, conformément à ce qui est proposé dans [12], nous serons amenés à définir le K -fonctionnel dans le cas particulier où Y est continument plongé dans X , c'est-à-dire où il existe $C > 0$ tel que $\|\cdot\|_X \leq C\|\cdot\|_Y$. Dans ce cas, tout $x \in X$ est dans $X + Y$ puisqu'on peut l'écrire $x - y + y$ avec $y \in Y \subset X$ et une définition équivalente pour le K -fonctionnel est

$$K(x, t; X, Y) = \inf_{y \in Y} \|x - y\|_X + t\|y\|_Y.$$

De plus, dans ce cas, l'équivalence de la proposition précédente se réécrit

$$|x|_{(X,Y)_{\theta,q;K}} \asymp \begin{cases} (\sum_{k=-\infty}^0 (2^{-k\theta} K(x, 2^k))^q)^{\frac{1}{q}} & \text{si } 0 < q < \infty \\ \sup_{k \leq 0} 2^{-k\theta} K(x, 2^k) & \text{si } q = \infty. \end{cases}$$

où cette fois, les constantes d'équivalence dépendent de θ , q et de C . En effet, puisque Y est continument plongé dans X , on a, pour tous $y \in Y$, $t \geq 1$,

$$K(x, t) \leq \|x\|_X \leq \|x - y\|_X + \|y\|_X \leq \|x - y\|_X + C\|y\|_Y.$$

Ainsi, en prenant $C' = \max(1, C)$, on obtient

$$K(x, t) \leq C'(\|x - y\|_X + \|y\|_Y)$$

et donc

$$K(x, t) \leq C'K(x, 1)$$

pour tout $t \geq 1$ ³.

Il vient alors

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} (t^{-\theta} K(x, t))^q \frac{dt}{t} &\leq \int_1^{+\infty} (t^{-\theta} C' K(x, 1))^q \frac{dt}{t} \\ &= (C' K(x, 1))^q \left[\frac{t^{-\theta q}}{-\theta q} \right]_1^{+\infty} \\ &= \frac{C'^q}{\theta q} K(x, 1)^q. \end{aligned}$$

3. L'inégalité est vraie aussi si $0 < t < 1$ mais ne nous sera pas utile.

De plus, puisque $K(x, \cdot)$ est une fonction positive et croissante, on a

$$\int_0^1 (t^{-\theta} K(x, t))^q \frac{dt}{t} \geq \int_{\frac{1}{2}}^1 (t^{-\theta} K(x, t))^q \frac{dt}{t} \geq \frac{2^{\theta q-1}}{\theta q} K(x, \frac{1}{2})^q.$$

En utilisant que $K(x, 1) \leq 2K(x, \frac{1}{2})$ par le point 3 du lemme 1.2.1, on a finalement

$$\frac{2^{\theta q-1}}{\theta q 2^q} K(x, 1)^q \leq \int_0^1 (t^{-\theta} K(x, t))^q \frac{dt}{t},$$

ce qui nous permet d'obtenir

$$|x|_{(X,Y)_{\theta,q;K}} \asymp \begin{cases} \left(\int_0^1 (t^{-\theta} K(x, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} & \text{si } 0 < q < \infty \\ \sup_{0 < t < 1} t^{-\theta} K(x, t) & \text{si } q = \infty. \end{cases}$$

avec des constantes d'équivalence ne dépendant que de θ, q et C . L'équivalence annoncée s'obtient alors de la même manière que dans la proposition précédente.

1.3 Le théorème de réitération

Dans les chapitres suivants, il sera nécessaire de pouvoir ré-interpoler des espaces d'interpolation. Cela est rendu possible grâce au théorème de réitération. Nous en donnerons ici une démonstration tirée de [21] tenant compte du fait que Y est quasi-semi-normé. Cette démonstration repose sur le théorème suivant.

Théorème 1.3.1. *Considérons un couple (X, Y) d'espaces vectoriels compatibles où X est normé et Y est quasi-semi-normé. Posons*

$$E_i = (X, Y)_{\theta_i, q_i}, i = 0, 1.$$

Alors,

$$K(a, t; E_0, E_1) \asymp \left(\int_0^{t^{\frac{1}{\eta}}} (s^{-\theta_0} K(a, s; X, Y))^{q_0} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q_0}} + t \left(\int_{t^{\frac{1}{\eta}}}^{\infty} (s^{-\theta_1} K(a, s; X, Y))^{q_1} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q_1}}$$

avec $\eta = \theta_1 - \theta_0$, $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$ et $0 < q_0, q_1 \leq \infty$. De plus, les constantes d'équivalence ne dépendent que des θ_i, q_i et d'une constante d'inégalité quasi-triangulaire de Y .

Démonstration. Commençons par montrer le théorème lorsque $q_0, q_1 \geq 1$. Posons

$$H(a, t) = \left(\int_0^{t^{\frac{1}{\eta}}} (s^{-\theta_0} K(a, s; X, Y))^{q_0} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q_0}} + t \left(\int_{t^{\frac{1}{\eta}}}^{\infty} (s^{-\theta_1} K(a, s; X, Y))^{q_1} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q_1}} = L_0 + L_1. \quad (1.3)$$

Par définition du K -fonctionnel et des espaces d'interpolation θ, q , on a

$$\begin{aligned}
& K(a, t; E_0, E_1) \\
&= \inf_{a=a_0+a_1} (|a_0|_{E_0} + t|a_1|_{E_1}) \\
&= \inf_{a=a_0+a_1} \left[\left(\int_0^\infty (s^{-\theta_0} K(a_0, s; X, Y))^{q_0} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q_0}} + t \left(\int_0^\infty (s^{-\theta_1} K(a_1, s; X, Y))^{q_1} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q_1}} \right].
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Puisque $|\cdot|_Y$ est une quasi-semi-norme, il existe $k \geq 1$ tel que

$$|a + b|_Y \leq k(|a|_Y + |b|_Y).$$

Il est donc clair que

$$K(a + b, t; X, Y) \leq k (K(a, t; X, Y) + K(b, t; X, Y)). \tag{1.5}$$

Commençons par montrer que

$$H(a, t) \leq CK(a, t; E_0, E_1).$$

Si $a = a_0 + a_1$ est une décomposition de $a \in E_0 + E_1$ avec $a_i \in E_i, i = 0, 1$, alors en utilisant l'inégalité (1.5) et l'inégalité de Minkowski,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k} H(a, t) &\leq \left(\int_0^{t^{\frac{1}{\eta}}} (s^{-\theta_0} K(s, a_0; X, Y))^{q_0} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q_0}} + \left(\int_0^{t^{\frac{1}{\eta}}} (s^{-\theta_0} K(s, a_1; X, Y))^{q_0} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q_0}} \\
&\quad + t \left(\int_{t^{\frac{1}{\eta}}}^\infty (s^{-\theta_1} K(s, a_0; X, Y))^{q_1} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q_1}} + t \left(\int_{t^{\frac{1}{\eta}}}^\infty (s^{-\theta_1} K(s, a_1; X, Y))^{q_1} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q_1}} \\
&= I_1 + I_2 + I_3 + I_4.
\end{aligned}$$

Remarquons que par le point 3 du lemme 1.2.1, pour tout $u \leq s$,

$$\frac{u}{s} K(a_i, s; X, Y) \leq K(a_i, u; X, Y)$$

Il vient alors, pour $i = 0, 1$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty (u^{-\theta_i} K(a_i, u; X, Y))^{q_i} \frac{du}{u} &\geq \int_0^s u^{(1-\theta_i)q_i-1} (u^{-1} K(a_i, u; X, Y))^{q_i} du \\
&\geq (s^{-1} K(a_i, s; X, Y))^{q_i} \int_0^s u^{(1-\theta_i)q_i-1} du \\
&= K(a_i, s; X, Y)^{q_i} s^{-\theta_i q_i} \frac{1}{(1-\theta_i)q_i}
\end{aligned} \tag{1.6}$$

et, puisque le $K(a, u; X, Y)$ est une fonction croissante en u ,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty (u^{-\theta_i} K(a_i, u; X, Y))^{q_i} \frac{du}{u} &\geq \int_s^\infty u^{-\theta_i q_i - 1} K(a_i, u; X, Y)^{q_i} du \\
&\geq K(a_i, s; X, Y)^{q_i} \int_s^\infty u^{-\theta_i q_i - 1} du \\
&= K(a_i, s; X, Y)^{q_i} s^{-\theta_i q_i} \frac{1}{\theta_i q_i}.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

En regroupant les deux, on trouve

$$\begin{aligned}
K(a_i, s; X, Y) &\leq \left(\int_0^\infty (u^{-\theta_i} K(a_i, u; X, Y))^{q_i} \frac{du}{u} \right)^{\frac{1}{q_i}} s^{\theta_i} q_i^{\frac{1}{q_i}} [\min(\theta_i, (1 - \theta_i))]^{\frac{1}{q_i}} \\
&= C_i \left(\int_0^\infty (u^{-\theta_i} K(a_i, u; X, Y))^{q_i} \frac{du}{u} \right)^{\frac{1}{q_i}} s^{\theta_i}, \quad i = 0, 1.
\end{aligned}$$

Cette majoration nous permet d'obtenir

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq C_1 \left(\int_0^\infty (u^{-\theta_1} K(a_1, u; X, Y))^{q_1} \frac{du}{u} \right)^{\frac{1}{q_1}} \left(\int_0^{t^{\frac{1}{\eta}}} s^{(\theta_1 - \theta_0)q_0 - 1} ds \right)^{\frac{1}{q_0}} \\
&= t C_1 \left(\frac{1}{(\theta_1 - \theta_0)q_0} \right)^{\frac{1}{q_0}} \left(\int_0^\infty (u^{-\theta_1} K(a_1, u; X, Y))^{q_1} \frac{du}{u} \right)^{\frac{1}{q_1}} \\
&= t C_1 \left(\frac{1}{\eta q_0} \right)^{\frac{1}{q_0}} \left(\int_0^\infty (u^{-\theta_1} K(a_1, u; X, Y))^{q_1} \frac{du}{u} \right)^{\frac{1}{q_1}}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
I_3 &\leq t C_0 \left(\int_0^\infty (u^{-\theta_0} K(a_0, u; X, Y))^{q_0} \frac{du}{u} \right)^{\frac{1}{q_0}} \left(\int_{t^{\frac{1}{\eta}}}^\infty s^{(\theta_0 - \theta_1)q_1 - 1} ds \right)^{\frac{1}{q_1}} \\
&= C_0 \left(\frac{-1}{(\theta_0 - \theta_1)q_1} \right)^{\frac{1}{q_1}} \left(\int_0^\infty (u^{-\theta_0} K(a_0, u; X, Y))^{q_0} \frac{du}{u} \right)^{\frac{1}{q_0}} \\
&= C_0 \left(\frac{1}{\eta q_1} \right)^{\frac{1}{q_1}} \left(\int_0^\infty (u^{-\theta_0} K(a_0, u; X, Y))^{q_0} \frac{du}{u} \right)^{\frac{1}{q_0}}
\end{aligned}$$

De plus, on a trivialement que

$$I_1 \leq \left(\int_0^\infty (u^{-\theta_0} K(a_0, u; X, Y))^{q_0} \frac{du}{u} \right)^{\frac{1}{q_0}}$$

et que

$$I_4 \leq t \left(\int_0^\infty (u^{-\theta_1} K(a_1, u; X, Y))^{q_1} \frac{du}{u} \right)^{\frac{1}{q_1}}.$$

Au final, on obtient que

$$\begin{aligned} H(a, t) &\leq I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \\ &\leq C \left[\left(\int_0^\infty (s^{-\theta_0} K(a_0, s; X, Y))^{q_0} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q_0}} + t \left(\int_0^\infty (s^{-\theta_1} K(a_1, s; X, Y))^{q_1} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q_1}} \right] \end{aligned}$$

où $C = \mathcal{O}(\eta^{-\max(\frac{1}{q_0}, \frac{1}{q_1})})$ lorsque $\eta \rightarrow 0$. En prenant l'infimum sur toutes les décompositions $a = a_0 + a_1$, on obtient

$$H(a, t) \leq CK(a, t; E_0, E_1)$$

vu (1.4). Montrons maintenant l'autre inégalité. Soit $a \in E_0 + E_1$. Puisque, par définition des espaces d'interpolation, $E_0 \subset X + Y$ et $E_1 \subset X + Y$, $a \in X + Y$. De plus, par définition du K -fonctionnel, on peut choisir des éléments $x(t) \in X$ et $y(t) \in Y$ tels que

$$a = x(t) + y(t) \quad \text{et} \quad \|x(t)\|_X + t\|y(t)\|_Y \leq 2K(a, t; X, Y)$$

pour $t > 0$. On définit alors x' et y' par

$$x'(t) = x(t^{\frac{1}{\eta}}) \quad \text{et} \quad y'(t) = y(t^{\frac{1}{\eta}}).$$

Alors, $x' + y' = a$ et

$$K(x'(t), s; X, Y) \leq \|x'(t)\|_X = \|x(t^{\frac{1}{\eta}})\|_X \leq 2K(a, t^{\frac{1}{\eta}}; X, Y), \quad (1.8)$$

$$K(y'(t), s; X, Y) \leq s\|y'(t)\|_Y = s\|y(t^{\frac{1}{\eta}})\|_Y \leq 2st^{\frac{-1}{\eta}} K(a, t^{\frac{1}{\eta}}; X, Y). \quad (1.9)$$

De plus, en utilisant l'inégalité (1.5), il vient que

$$K(x'(t), s; X, Y) = K(a - y'(t), s; X, Y) \leq k (K(a, s; X, Y) + K(y'(t), s; X, Y)) \quad (1.10)$$

et

$$K(y'(t), s; X, Y) = K(a - x'(t), s; X, Y) \leq k (K(a, s; X, Y) + K(x'(t), s; X, Y)). \quad (1.11)$$

Or, puisqu'on considère une décomposition particulière de a , on a, en utilisant (1.4) et l'inégalité de Minkowski,

$$\begin{aligned} &K(a, t; E_0, E_1) \\ &\leq \left(\int_0^\infty (s^{-\theta_0} K(x'(t), s; X, Y))^{q_0} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q_0}} + t \left(\int_0^\infty (s^{-\theta_1} K(y'(t), s; X, Y))^{q_1} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q_1}} \\ &\leq \left(\int_0^{t^{\frac{1}{\eta}}} (s^{-\theta_0} K(x'(t), s; X, Y))^{q_0} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q_0}} + \left(\int_{t^{\frac{1}{\eta}}}^\infty (s^{-\theta_0} K(x'(t), s; X, Y))^{q_0} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q_0}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + t \left(\int_0^{t^{\frac{1}{\eta}}} (s^{-\theta_1} K(y'(t), s; X, Y))^{q_1} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q_1}} + t \left(\int_{t^{\frac{1}{\eta}}}^{\infty} (s^{-\theta_1} K(y'(t), s; X, Y))^{q_1} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q_1}} \\
& = J_1 + J_2 + J_3 + J_4.
\end{aligned}$$

En reprenant les notations L_0 et L_1 de (1.3), on obtient, par le même raisonnement que celui suivi pour avoir (1.6) et (1.7),

$$K(a, s; X, Y) \leq L_0 s^{\theta_0} (q_0(1 - \theta_0))^{\frac{1}{q_0}} \quad \text{si } s \leq t^{\frac{1}{\eta}}, \quad (1.12)$$

$$K(a, s; X, Y) \leq t^{-1} L_1 s^{\theta_1} (q_1 \theta_1)^{\frac{1}{q_1}} \quad \text{si } s \geq t^{\frac{1}{\eta}}. \quad (1.13)$$

De plus, en utilisant (1.10) et l'inégalité de Minkowski,

$$\begin{aligned}
J_1 &= \left(\int_0^{t^{\frac{1}{\eta}}} (s^{-\theta_0} K(x'(t), s; X, Y))^{q_0} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q_0}} \\
&\leq \left(\int_0^{t^{\frac{1}{\eta}}} (s^{-\theta_0} k [K(a, s; X, Y) + K(y'(t), s; X, Y)])^{q_0} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q_0}} \\
&\leq k \left[\left(\int_0^{t^{\frac{1}{\eta}}} (s^{-\theta_0} K(a, s; X, Y))^{q_0} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q_0}} + \left(\int_0^{t^{\frac{1}{\eta}}} (s^{-\theta_0} K(y'(t), s; X, Y))^{q_0} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q_0}} \right].
\end{aligned}$$

Donc

$$k^{-1} J_1 \leq L_0 + \left(\int_0^{t^{\frac{1}{\eta}}} (s^{-\theta_0} K(y'(t), s; X, Y))^{q_0} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q_0}}.$$

Or, (1.9) nous donne que

$$\begin{aligned}
& \int_0^{t^{\frac{1}{\eta}}} (s^{-\theta_0} K(y'(t), s; X, Y))^{q_0} \frac{ds}{s} \\
& \leq \int_0^{t^{\frac{1}{\eta}}} s^{-\theta_0 q_0 - 1} (2st^{\frac{-1}{\eta}} K(a, t^{\frac{1}{\eta}}; X, Y))^{q_0} ds \\
& = (2t^{\frac{-1}{\eta}} K(a, t^{\frac{1}{\eta}}; X, Y))^{q_0} \int_0^{t^{\frac{1}{\eta}}} s^{(1-\theta_0)q_0 - 1} ds \\
& = (2t^{\frac{-1}{\eta}} K(a, t^{\frac{1}{\eta}}; X, Y))^{q_0} (t^{\frac{1}{\eta}})^{(1-\theta_0)q_0} ((1 - \theta_0)q_0)^{-1} \\
& = (2K(a, t^{\frac{1}{\eta}}; X, Y))^{q_0} t^{\frac{-\theta_0 q_0}{\eta}} ((1 - \theta_0)q_0)^{-1}.
\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant (1.12) avec $s = t^{\frac{1}{\eta}}$, on obtient

$$\begin{aligned} k^{-1}J_1 &\leq L_0 + 2K(a, t^{\frac{1}{\eta}}; X, Y)t^{\frac{-\theta_0}{\eta}}((1 - \theta_0)q_0)^{\frac{-1}{q_0}} \\ &\leq 3L_0. \end{aligned}$$

En appliquant le même raisonnement avec (1.11), (1.8) et (1.13), on obtient également

$$k^{-1}J_4 \leq 3L_1.$$

De plus, en utilisant (1.8) puis (1.12),

$$\begin{aligned} k^{-1}J_2 &\leq J_2 \\ &= \left(\int_{t^{\frac{1}{\eta}}}^{\infty} (s^{-\theta_0} K(x'(t), s; X, Y))^{q_0} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q_0}} \\ &\leq 2K(a, t^{\frac{1}{\eta}}; X, Y) \left(\int_{t^{\frac{1}{\eta}}}^{\infty} s^{-\theta_0 q_0 - 1} ds \right)^{\frac{1}{q_0}} \\ &\leq 2K(a, t^{\frac{1}{\eta}}; X, Y) t^{\frac{-\theta_0}{\eta}} (\theta_0 q_0)^{\frac{-1}{q_0}} \\ &\leq 2(\theta_0 q_0)^{\frac{-1}{q_0}} (q_0(1 - \theta_0))^{\frac{1}{q_0}} L_0 \\ &= CL_0. \end{aligned}$$

De même, grâce à (1.9) et (1.13),

$$k^{-1}J_3 \leq CL_1.$$

Au final, on obtient

$$K(a, t; E_0, E_1) \leq J_1 + J_2 + J_3 + J_4 \leq C(L_0 + L_1) = CH(a, t)$$

avec une constante C ne dépendant que des θ_i , des q_i et de k , ce qui suffit pour conclure.

Lorsque $q_0 < 1$ ou $q_1 < 1$, on remplace les utilisations de l'inégalité de Minkowski par l'inégalité quasi-triangulaire (A.3) de L_q . Le reste de la preuve fonctionne de la même manière et la dépendance des constantes d'équivalence ne change pas. En outre, la preuve s'adapte facilement lorsque $q_0 = \infty$ ou $q_1 = \infty$. $\square$

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème de réitération.

Théorème 1.3.2. *Considérons un couple (X, Y) d'espaces vectoriels compatibles où X est normé et Y est quasi-semi-normé. Posons*

$$E_i = (X, Y)_{\theta_i, q_i}$$

avec $0 < \theta_i < 1$, $\theta_0 \neq \theta_1$, $0 < q_i \leq \infty$, $i = 0, 1$. Alors

$$(E_0, E_1)_{\lambda, q} = (X, Y)_{\theta, q}$$

et

$$\begin{aligned}
& C\lambda^{-\min(\frac{1}{q}, \frac{1}{q_0})}(1-\lambda)^{-\min(\frac{1}{q}, \frac{1}{q_1})}|a|_{(X,Y)_{\theta,q}} \\
& \leq |a|_{(E_0,E_1)_{\lambda,q}} \\
& \leq C'\lambda^{-\max(\frac{1}{q}, \frac{1}{q_0})}(1-\lambda)^{-\max(\frac{1}{q}, \frac{1}{q_1})}|a|_{(X,Y)_{\theta,q}}
\end{aligned}$$

avec $\theta = (1-\lambda)\theta_0 + \lambda\theta_1$, $0 < \lambda < 1$, $0 < q \leq \infty$ et des constantes indépendantes de λ .

Démonstration. Commençons par montrer le résultat pour $q \geq 1$ et $\theta_0 < \theta_1$. Par définition,

$$|a|_{(E_0,E_1)_{\lambda,q}} = \left(\int_0^\infty (t^{-\lambda} K(a, t; E_0, E_1))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Or, grâce au théorème précédent, on sait que

$$K(a, t; E_0, E_1) \asymp \left(\int_0^{t^{\frac{1}{\eta}}} (s^{-\theta_0} K(a, s; X, Y))^{q_0} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q_0}} + t \left(\int_{t^{\frac{1}{\eta}}}^\infty (s^{-\theta_1} K(a, s; X, Y))^{q_1} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q_1}} = H_0 + H_1$$

avec $\eta = \theta_1 - \theta_0$ et des constantes d'équivalence indépendantes de λ . Or, pour $t > 0$, $t^{-\lambda-\frac{1}{q}} H_0$ et $t^{-\lambda-\frac{1}{q}} H_1$ étant positifs, on a $t^{-\lambda-\frac{1}{q}} H_0 \leq t^{-\lambda-\frac{1}{q}} (H_0 + H_1)$ et $t^{-\lambda-\frac{1}{q}} H_1 \leq t^{-\lambda-\frac{1}{q}} (H_0 + H_1)$, donc

$$\frac{1}{2} \left(\left\| t^{-\lambda-\frac{1}{q}} H_0 \right\|_{L_q} + \left\| t^{-\lambda-\frac{1}{q}} H_1 \right\|_{L_q} \right) \leq \left\| t^{-\lambda-\frac{1}{q}} (H_0 + H_1) \right\|_{L_q}.$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}
& |a|_{(E_0,E_1)_{\lambda,q}} \\
& \asymp \left(\int_0^\infty \left[t^{-\lambda} \left(\int_0^{t^{\frac{1}{\eta}}} (s^{-\theta_0} K(a, s; X, Y))^{q_0} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q_0}} \right]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(\int_0^\infty \left[t^{1-\lambda} \left(\int_{t^{\frac{1}{\eta}}}^\infty (s^{-\theta_1} K(a, s; X, Y))^{q_1} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q_1}} \right]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& = I_0 + I_1
\end{aligned} \tag{1.14}$$

où la minoration est obtenue grâce au raisonnement précédent et la majoration grâce à l'inégalité de Minkowski pour $q > 1$. Notons que les constantes d'équivalence sont bien indépendantes de λ . Effectuons le changement de variable $s = t^{\frac{1}{\eta}} \sigma$ dans I_0 . On a

$$\int_0^{t^{\frac{1}{\eta}}} (s^{-\theta_0} K(a, s; X, Y))^{q_0} \frac{ds}{s} = \int_0^1 ((t^{\frac{1}{\eta}} \sigma)^{-\theta_0} K(a, t^{\frac{1}{\eta}}; X, Y))^{q_0} \frac{d\sigma}{\sigma},$$

donc

$$I_0 = \left(\int_0^\infty \left[t^{-(\lambda + \frac{\theta_0}{\eta})} \left(\int_0^1 (\sigma^{-\theta_0} K(a, t^{\frac{1}{\eta}}; X, Y))^{q_0} \frac{d\sigma}{\sigma} \right)^{\frac{1}{q_0}} \right]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Effectuons maintenant le changement de variable $t = \tau^\eta$. Remarquons qu'avec ce changement de variable, $t^{-(\lambda + \frac{\theta_0}{\eta})}$ devient $\tau^{-\lambda\eta - \theta_0}$. Or,

$$\lambda\eta + \theta_0 = \lambda(\theta_1 - \theta_0) + \theta_0 = (1 - \lambda)\theta_0 + \lambda\theta_1 = \theta.$$

Ainsi,

$$I_0 = \eta^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^\infty \left[\tau^{-\theta} \left(\int_0^1 (\sigma^{-\theta_0} K(a, \sigma\tau; X, Y))^{q_0} \frac{d\sigma}{\sigma} \right)^{\frac{1}{q_0}} \right]^q \frac{d\tau}{\tau} \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (1.15)$$

En effectuant les mêmes changements de variable dans I_1 , on obtient également

$$I_1 = \eta^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^\infty \left[\tau^{-\theta} \left(\int_1^\infty (\sigma^{-\theta_1} K(a, \sigma\tau; X, Y))^{q_1} \frac{d\sigma}{\sigma} \right)^{\frac{1}{q_1}} \right]^q \frac{d\tau}{\tau} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Pour obtenir des majorations de ces intégrales, on va procéder en plusieurs cas.

1. Si $q_0 \leq q$, on applique l'inégalité de Jensen avec $\frac{q}{q_0}$:

$$\begin{aligned} I_0 &= \eta^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^\infty \left(\int_0^1 (\tau^{-\theta} \sigma^{-\theta_0} K(a, \sigma\tau; X, Y))^{q_0} \frac{d\sigma}{\sigma} \right)^{\frac{q}{q_0}} \frac{d\tau}{\tau} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \eta^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \left(\int_0^\infty (\tau^{-\theta} \sigma^{-\theta_0} K(a, \sigma\tau; X, Y))^q \frac{d\tau}{\tau} \right)^{\frac{q_0}{q}} \frac{d\sigma}{\sigma} \right)^{\frac{1}{q_0}} \end{aligned}$$

On effectue ensuite le changement de variable $t = \sigma\tau$ dans l'intégrale par rapport à τ , ce qui nous donne

$$\begin{aligned} I_0 &\leq \eta^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \left(\int_0^\infty (t^{-\theta} \sigma^\theta \sigma^{-\theta_0} K(a, t; X, Y))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{q_0}{q}} \frac{d\sigma}{\sigma} \right)^{\frac{1}{q_0}} \\ &= \eta^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \sigma^{-q_0(\theta_0 - \theta)} \left(\int_0^\infty (t^{-\theta} K(a, t; X, Y))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{q_0}{q}} \frac{d\sigma}{\sigma} \right)^{\frac{1}{q_0}} \\ &= \eta^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \sigma^{-q_0(\theta_0 - \theta) - 1} d\sigma \right)^{\frac{1}{q_0}} \|a\|_{(X, Y)_{\theta, q}}. \end{aligned}$$

On calcule

$$\int_0^1 \sigma^{-q_0(\theta_0 - \theta) - 1} d\sigma = \frac{1}{q_0(\theta - \theta_0)}$$

et puisque

$$\theta - \theta_0 = (1 - \lambda)\theta_0 + \lambda\theta_1 - \theta_0 = \lambda(\theta_1 - \theta_0) = \lambda\eta,$$

on obtient finalement

$$I_0 \leq C\lambda^{\frac{-1}{q_0}} \|a\|_{(X,Y)_{\theta,q}} \quad (1.16)$$

avec C indépendant de λ .

2. Si $q_1 \leq q$, on obtient de la même manière

$$I_1 \leq C(1 - \lambda)^{\frac{-1}{q_1}} \|a\|_{(X,Y)_{\theta,q}} \quad (1.17)$$

avec C indépendant de λ .

3. Si $q_0 > q$, posons

$$A = \left(\int_0^1 (\sigma^{-\theta_0} K(a, \sigma\tau; X, Y))^{q_0} \frac{d\sigma}{\sigma} \right)^{\frac{q}{q_0}}$$

et

$$B = \int_0^1 (\sigma^{-\theta_0} K(a, \sigma\tau; X, Y))^q \frac{d\sigma}{\sigma}.$$

Considérons $s \in [0, 1]$. Si $\sigma \leq s$, par le point 3 du lemme 1.2.1, on a

$$K(a, \sigma\tau; X, Y) \geq \frac{\sigma}{s} K(a, s\tau; X, Y).$$

On en tire que

$$\begin{aligned} B &\geq \int_0^s (\sigma^{-\theta_0} K(a, \sigma\tau; X, Y))^q \frac{d\sigma}{\sigma} \\ &\geq \int_0^s (\sigma^{-\theta_0} \frac{\sigma}{s} K(a, s\tau; X, Y))^q \frac{d\sigma}{\sigma} \\ &= \left(\frac{K(a, s\tau; X, Y)}{s} \right)^q \int_0^s \sigma^{q(1-\theta_0)-1} d\sigma. \end{aligned}$$

Après le calcul de l'intégrale, on obtient la majoration

$$K(a, s\tau; X, Y) \leq B^{\frac{1}{q}} s^{\theta_0} (q(1 - \theta_0))^{\frac{1}{q}}.$$

En utilisant le fait que $q_0 > q$, on en conclut que

$$\begin{aligned} A &= \left(\int_0^1 \sigma^{-\theta_0 q - 1} K(a, \sigma\tau; X, Y)^q \sigma^{\theta_0(q - q_0)} K(a, \sigma\tau; X, Y)^{q_0 - q} d\sigma \right)^{\frac{q}{q_0}} \\ &\leq \left(\int_0^1 \sigma^{-\theta_0 q - 1} K(a, \sigma\tau; X, Y)^q d\sigma \right)^{\frac{q}{q_0}} (B^{\frac{q_0 - q}{q}} (q(1 - \theta_0))^{\frac{q_0 - q}{q}})^{\frac{q}{q_0}} \\ &= B^{\frac{q}{q_0}} (B^{\frac{q_0 - q}{q}} (q(1 - \theta_0))^{\frac{q_0 - q}{q}})^{\frac{q}{q_0}} \\ &= B(q(1 - \theta_0))^{\frac{q_0 - q}{q_0}} = CB \end{aligned} \quad (1.18)$$

En injectant cette inégalité dans (1.15) et en utilisant Fubini, il vient

$$\begin{aligned}
I_0 &\leq C \left(\int_0^\infty \int_0^1 (\sigma^{-\theta_0} \tau^{-\theta} K(a, \sigma\tau; X, Y))^q \frac{d\sigma}{\sigma} \frac{d\tau}{\tau} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= C \int_0^1 \sigma^{(\theta-\theta_0)q-1} d\sigma \|a\|_{(X,Y)_{\theta,q}} \\
&= C \lambda^{\frac{-1}{q}} \|a\|_{(X,Y)_{\theta,q}}
\end{aligned} \tag{1.19}$$

où la dernière égalité est obtenue par un raisonnement similaire à celui utilisé dans le cas 1.

4. Si $q_1 > q$, on utilise un raisonnement similaire pour obtenir que

$$I_1 \leq C(1-\lambda)^{\frac{-1}{q}} \|a\|_{(X,Y)_{\theta,q}}. \tag{1.20}$$

En rassemblant (1.16), (1.19), (1.17) et (1.20), on conclut que

$$|a|_{(E_0, E_1)_{\lambda,q}} \leq C \lambda^{-\max(\frac{1}{q}, \frac{1}{q_0})} (1-\lambda)^{-\max(\frac{1}{q}, \frac{1}{q_1})} |a|_{(X,Y)_{\theta,q}}$$

avec C indépendant de λ . En adaptant le raisonnement que l'on vient d'effectuer, on trouve également

$$C \lambda^{-\min(\frac{1}{q}, \frac{1}{q_0})} (1-\lambda)^{-\min(\frac{1}{q}, \frac{1}{q_1})} |a|_{(X,Y)_{\theta,q}} \leq |a|_{(E_0, E_1)_{\lambda,q}}.$$

Dans le cas où $q < 1$, on ne peut pas utiliser l'inégalité de Minkowski pour obtenir la majoration dans (1.14). Par contre, on peut utiliser le fait que

$$\|H_0 + H_1\|_{L_q} \leq 2^{\frac{1}{q}-1} (\|H_0\|_{L_q} + \|H_1\|_{L_q}).$$

Ainsi, la constante d'équivalence finale ne dépendra toujours pas de λ .

De plus, on a le droit de se débarrasser de l'hypothèse $\theta_0 < \theta_1$ en remarquant que pour tout $t > 0$,

$$tK(a, \frac{1}{t}; Y, X) = t \left(\inf_{a=y+x} |y|_Y + \frac{1}{t} \|x\|_X \right) = \inf_{a=x+y} t|y|_Y + \|x\|_X = K(a, t; X, Y),$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned}
|a|_{(X,Y)_{\theta,q}}^q &= \int_0^\infty t^{-\theta} K(a, t; X, Y)^q \frac{dt}{t} \\
&= \int_0^\infty t^{1-\theta} K(a, \frac{1}{t}; Y, X)^q \frac{dt}{t} \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{u^{1-\theta}} K(a, u; Y, X)^q \frac{du}{u} \quad (\text{changement de variable } u = \frac{1}{t}) \\
&= |a|_{(Y,X)_{1-\theta,q}}^q.
\end{aligned}$$

Ainsi, si $\theta_0 > \theta_1$, vu ce qu'on a montré plus haut, on a

$$|a|_{((X,Y)_{\theta_0,q_0},(X,Y)_{\theta_1,q_1})_{\lambda,q}} = |a|_{((X,Y)_{\theta_1,q_1},(X,Y)_{\theta_0,q_0})_{1-\lambda,q}} = |a|_{(X,Y)_{\theta',q}}$$

avec

$$\theta' = (1 - (1 - \lambda))\theta_1 + (1 - \lambda)\theta_0 = \theta.$$

□

Chapitre 2

Approximation à n termes

2.1 Exemple introductif : Approximation à n termes dans un espace de Hilbert

Nous allons nous intéresser à une méthode d'approximation non linéaire qu'est l'approximation à n termes. Lorsqu'on a une base d'un espace fonctionnel, on sait que l'on peut décomposer n'importe quelle fonction de l'espace dans cette base. L'approximation linéaire de cette fonction revient alors à considérer les n premiers termes de cette décomposition. Dans le cadre de l'approximation à n termes, on ne va plus forcément sélectionner les n premiers termes. Ainsi, on garde un contrôle sur le nombre de termes que l'on sélectionne mais pas sur ceux qui le sont, ce qui ne nous garantit plus un espace linéaire.

Nous allons appliquer l'approximation à n termes dans un espace de Hilbert afin de mieux comprendre le problème.¹ Soit $\mathcal{H}$, un espace de Hilbert de produit scalaire $\langle ., . \rangle$ et de norme $\|.\|_{\mathcal{H}}$ et soit $\eta_k, k \in \mathbb{N}$, une base orthonormée de cet espace. Pour $n \geq 0$, on considère l'espace

$$\Sigma_n = \{g \in \mathcal{H} : g = \sum_{k \in \Lambda} c_k \eta_k \text{ où } \Lambda \subset \mathbb{N}, \#\Lambda \leq n\}.$$

On constate que Σ_n n'est pas un espace linéaire puisqu'il ne contient pas forcément la somme de deux de ses éléments. On note

$$E_n(f)_{\mathcal{H}} := \inf_{g \in \Sigma_n} \|f - g\|_{\mathcal{H}}$$

l'erreur d'approximation.

Soit $\alpha > 0$. On note

$$\mathcal{A}^{\alpha}((\Sigma_n)_n) = \{f \in \mathcal{H} : \sup_{n \geq 1} n^{\alpha} E_n(f) < +\infty\},$$

1. Raisonnement tiré de [12].

l'espace d'approximation à l'ordre α que l'on munit de la semi-norme

$$|f|_{\mathcal{A}^\alpha((\Sigma_n)_n)} := \sup_{n \geq 1} n^\alpha E_n(f).$$

On peut aussi le munir de la norme

$$\|f\|_{\mathcal{A}^\alpha((\Sigma_n)_n)} := \|f\|_{\mathcal{H}} + |f|_{\mathcal{A}^\alpha((\Sigma_n)_n)}.$$

Dans la suite, lorsque il n'y aura pas d'ambiguïté possible sur la suite $(\Sigma_n)_n$ avec laquelle on travaillera, on s'autorisera à noter $\mathcal{A}^\alpha := \mathcal{A}^\alpha((\Sigma_n)_n)$. On cherche à caractériser l'espace $\mathcal{A}^\alpha$ en fonction des coefficients de f dans la décomposition $f = \sum_{k=1}^\infty \langle f, \eta_k \rangle \eta_k$ dans la base de $\mathcal{H}$. On va utiliser la notation $f_k := \langle f, \eta_k \rangle$. On a la proposition suivante.

Proposition 2.1.1. *Notons, pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\gamma_k(f)$, le k -ème plus grand nombre parmi les $|f_j|$, $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On a que $f \in \mathcal{A}^\alpha$ si et seulement si*

$$\sup_{n \geq 1} n^{\alpha + \frac{1}{2}} \gamma_n(f) < +\infty.$$

De plus, on a l'équivalence

$$\|f\|_{\mathcal{A}^\alpha} \asymp \sup_{n \geq 1} n^{\alpha + \frac{1}{2}} \gamma_n(f)$$

avec des constantes d'équivalence ne dépendant que de α .

Démonstration. On commence par remarquer que $E_n(f)_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{k > n} \gamma_k(f)^2$. En effet, les théorèmes de Pythagore généralisé et de la projection orthogonale généralisée dans un espace de Hilbert (cfr. 7.1.1 et 7.1.2 dans [2]) nous donnent que

$$E_n(f)_{\mathcal{H}}^2 = \inf_{\Lambda \subset \mathbb{N}, \#\Lambda \leq n} \left\| f - \sum_{k \in \Lambda} f_k \eta_k \right\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{k \geq 1} |f_k|^2 - \sup_{\Lambda \subset \mathbb{N}, \#\Lambda \leq n} \sum_{k \in \Lambda} |f_k|^2.$$

De plus, par définition de $\gamma_k(f)$, on a que $\sup_{\Lambda \subset \mathbb{N}, \#\Lambda \leq n} \sum_{k \in \Lambda} |f_k|^2 = \sum_{1 \leq k \leq n} \gamma_k^2$, ce qui nous donne l'égalité annoncée.

Nous pouvons maintenant passer à la démonstration du résultat.

Notons $S(f) = \sup_{n \geq 1} n^{\alpha + \frac{1}{2}} \gamma_n(f)$. Commençons par supposer que $S(f) < \infty$. Alors, par définition, pour tout $k \geq 1$, on a

$$\gamma_k(f) \leq S(f) k^{-(\alpha + \frac{1}{2})},$$

donc pour tout $n \geq 1$,

$$E_n(f)_{\mathcal{H}}^2 \leq S(f)^2 \sum_{k > n} k^{-(2\alpha + 1)}.$$

Or, en réalisant une comparaison série-intégrale, on obtient

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-(2\alpha + 1)} \leq \int_n^{+\infty} x^{-(2\alpha + 1)} dx = \frac{1}{2\alpha} n^{-2\alpha}$$

Ainsi,

$$E_n(f)_{\mathcal{H}}^2 \leq \frac{1}{2\alpha} S(f)^2 n^{-2\alpha}$$

et en divisant par $n^{-2\alpha}$ et en prenant le supremum pour $n \geq 1$,

$$|f|_{\mathcal{A}^\alpha} \leq \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} S(f),$$

d'où $f \in \mathcal{A}^\alpha$. De plus,

$$\|f\|_{\mathcal{H}}^2 = E_0(f)_{\mathcal{H}}^2 = \gamma_1(f)^2 + \sum_{n=2}^{+\infty} \gamma_n(f)^2$$

et vu le raisonnement suivi plus haut et le fait que

$$\gamma_1(f)^2 \leq S(f)^2 1^{-(2\alpha)+1} = S(f)^2,$$

on obtient que

$$\|f\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{\sqrt{2\alpha+1}}{\sqrt{2\alpha}} S(f).$$

Donc

$$\|f\|_{\mathcal{A}^\alpha} \leq \frac{\sqrt{2\alpha+1}+1}{\sqrt{2\alpha}} S(f).$$

Réciproquement, supposons que $|f|_{\mathcal{A}^\alpha} < \infty$. Par définition, on a alors que pour tout $m \geq 1$,

$$E_m(f)_{\mathcal{H}}^2 \leq |f|_{\mathcal{A}^\alpha}^2 m^{-2\alpha}.$$

De plus, pour tout $m \geq 1$, on a

$$E_m(f)_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{k=m+1}^{\infty} \gamma_k(f)^2 \geq \sum_{k=m+1}^{2m} \gamma_k(f)^2 \geq m \gamma_{2m}(f)^2.$$

On en déduit que

$$\gamma_{2m}(f)^2 \leq \frac{1}{m} E_m(f)_{\mathcal{H}}^2 \leq m^{-(2\alpha+1)} |f|_{\mathcal{A}^\alpha}^2.$$

Ainsi, si $n = 2m$, on a

$$\gamma_n(f)^2 \leq \left(\frac{n}{2}\right)^{-(2\alpha+1)} |f|_{\mathcal{A}^\alpha}^2 = 2^{2\alpha+1} n^{-(2\alpha+1)} |f|_{\mathcal{A}^\alpha}^2.$$

Dans le cas où $n = 2m + 1$, il vient

$$\gamma_{2m+1}(f) \leq \gamma_{2m}(f) \leq m^{-(\alpha+\frac{1}{2})} |f|_{\mathcal{A}^\alpha}.$$

Or, si $n \geq 3$, $m = \frac{n-1}{2} \geq \frac{n}{3}$ et donc

$$\gamma_n(f) \leq 3^{\alpha+\frac{1}{2}} n^{-(\alpha+\frac{1}{2})} |f|_{\mathcal{A}^\alpha}.$$

Au final, on a obtenu que pour tout $n \geq 2$,

$$n^{\alpha+\frac{1}{2}}\gamma_n(f) \leq C|f|_{\mathcal{A}^\alpha} \leq C\|f\|_{\mathcal{A}^\alpha}$$

où la constante C ne dépend que de α . De plus,

$$\gamma_1(f)^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(f)^2 = E_0(f)_{\mathcal{H}}^2 = \|f\|_{\mathcal{H}}^2,$$

donc

$$1^{\alpha+\frac{1}{2}}\gamma_1(f) \leq \|f\|_{\mathcal{H}} \leq \|f\|_{\mathcal{A}^\alpha}.$$

On a donc bien que

$$\sup_{n \geq 1} n^{\alpha+\frac{1}{2}}\gamma_n(f) \leq C\|f\|_{\mathcal{A}^\alpha}$$

avec une constante C ne dépendant que de α . □

Nous affinerons plus tard la caractérisation de notre espace $\mathcal{A}^\alpha$.

2.2 Caractérisation des espaces d'approximation : Méthode générale

Nous allons maintenant nous placer dans un cadre plus général que dans l'exemple précédent et chercher à caractériser les espaces d'approximation dans le cas de l'approximation non linéaire dans des espaces normés.²

Soit $(X, \|\cdot\|_X)$, un espace normé et soit $(X_n)_n$, une suite de sous-ensembles de X . On note

$$E_n(f)_X := \inf_{g \in X_n} \|f - g\|_X.$$

Puisque nous sommes dans le cas de l'approximation non linéaire, X_n n'est évidemment pas obligé d'être un espace linéaire. Là où, dans le cas de l'approximation linéaire, n représente la dimension de X_n , ici, n peut être interprété comme le nombre de "paramètres libres". Par exemple, dans l'exemple étudié précédemment, il s'agissait du nombre de termes utilisés. Cependant, nous devons quand-même imposer³ les hypothèses suivantes aux ensembles X_n :

2. Sauf mention contraire, le raisonnement et les résultats exploités dans ce chapitre proviennent de [12].

3. Seules les hypothèses 3,4 et 6 sont essentielles car elles nous assurent la convergence et stabilité de la structure d'approximation par combinaison linéaire. Les autres pourraient être supprimées ou modifiées si nous suivions une autre approche. Par exemple, dans le cas où nous n'aurions pas l'hypothèse 5, nous pourrions travailler à ε près, mais cela compliquerait les calculs.

1. $X_0 := \{0\}$,
2. La suite $(X_n)_n$ est croissante pour l'inclusion,
3. $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, aX_n = X_n$,
4. $X_n + X_n \subset X_{cn}$ pour un $c \geq 1$ indépendant de n ,
5. Tout élément de X admet une "meilleure approximation" dans X_n , c'est-à-dire qu'il existe un élément $g \in X_n$ qui réalise $E_n(f)_X$,
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(f)_X = 0, \forall f \in X$.

TABLE 2.1 – Hypothèses sur les espaces X_n

Au vu de l'hypothèse 2, on peut préciser l'hypothèse 6 en mentionnant que $E_n(f)$ décroît vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Tout comme on l'a fait dans l'exemple sur les espaces de Hilbert, on va définir les espaces

$$\mathcal{A}^\alpha(X) = \{f \in X : \sup_{n \geq 1} n^\alpha E_n(f)_X < +\infty\}$$

pour tout $\alpha > 0$. Notre objectif va être de caractériser $\mathcal{A}^\alpha(X)$. On pourra même être plus précis sur la décroissance de l'erreur et plutôt caractériser les espaces suivants.

Définition 2.2.1. Soit $\mathcal{A}_q^\alpha(X)$ l'espace des fonctions $f \in X$ telles que

$$|f|_{\mathcal{A}_q^\alpha} := \begin{cases} (\sum_{n=1}^{\infty} (n^\alpha E_n(f)_X)^q \frac{1}{n})^{\frac{1}{q}} & \text{si } 0 < q < \infty \\ \sup_{n \geq 1} n^\alpha E_n(f)_X & \text{si } q = \infty \end{cases}$$

est fini.

Le résultat suivant nous donne les premières propriétés de ces espaces.

Proposition 2.2.2. 1. On a l'équivalence suivante.

$$|f|_{\mathcal{A}_q^\alpha} \asymp \begin{cases} (\sum_{k=0}^{\infty} [2^{k\alpha} E_{2^k}(f)_X]^q)^{\frac{1}{q}} & \text{si } 0 < q < \infty \\ \sup_{k \geq 0} 2^{k\alpha} E_{2^k}(f)_X & \text{si } q = \infty \end{cases}$$

avec des constantes d'équivalence ne dépendant que de α et de q .

2. $|\cdot|_{\mathcal{A}_q^\alpha}$ est une semi-norme lorsque $q \geq 1$ et une quasi-semi-norme lorsque $0 < q < 1$.

3. On a que $\mathcal{A}_q^\alpha \subset \mathcal{A}_p^\alpha$ pour tous $0 < q < p \leq \infty$.

Démonstration. Montrons le premier point en considérant $0 < q < \infty$. Un raisonnement similaire peut s'appliquer lorsque $q = \infty$. Vu la décroissance de l'erreur et la croissance de la fonction $x \rightarrow x^\alpha$, on a que, pour tout $n \in \{2^k, \dots, 2^{k+1} - 1\}$,

$$2^{k\alpha q} E_{2^{k+1}}(f)_X^q \leq n^{\alpha q} E_n(f)_X^q \leq 2^{(k+1)\alpha q} E_{2^k}(f)_X^q.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{k\alpha q} E_{2^{k+1}}(f)_X^q \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{n} \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha q} E_n(f)_X^q \frac{1}{n} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{(k+1)\alpha q} E_{2^k}(f)_X^q \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{n} \right).$$

Il suffit alors de remarquer que

$$\frac{1}{2} = 2^k \frac{1}{2^{k+1}} \leq \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{n} \leq 2^k \frac{1}{2^k} = 1$$

pour obtenir l'équivalence annoncée.

Pour le deuxième point, commençons par remarquer que si $f \in X_1 \setminus \{0\}$, alors, $f \in X_n$ pour tout $n \geq 1$ et donc $E_n(f)_X = 0$ pour tout $n \geq 1$. Ainsi, $|\cdot|_{\mathcal{A}_q^\alpha}$ sera au mieux une semi-norme.

De plus, vu l'équivalence du premier point, calculer $|f|_{\mathcal{A}_q^\alpha}$ revient à calculer $|2^{k\alpha} E_{2^k}(f)_X|_{\ell_q}$, ce qui nous donne le fait qu'on a une quasi-semi-norme lorsque $0 < q < 1$, au vu de l'exemple A.0.2. La même constatation et les inclusions des espaces $\ell_q \subset \ell_p$ lorsque $q < p$ nous permettent d'obtenir le dernier point. $\square$

2.2.1 Inégalités de Jackson et de Bernstein

L'équivalence obtenue dans le résultat précédent fait penser à celle que nous avons obtenue pour les espaces d'interpolation construits à partir du K-fonctionnel dans le chapitre 1. Dès lors, il n'est pas étonnant que l'on puisse utiliser ces espaces d'interpolation pour caractériser nos espaces d'approximation. Cela va être rendu possible grâce aux inégalités de Jackson et de Bernstein.

Soient $r > 0$, X , un espace normé et $Y \subset X$, un espace quasi-semi-normé. Supposons que les espaces X_n vérifient les conditions de la Table 2.1. On peut définir les inégalités suivantes :

Jackson : Il existe $C > 0$ tel que $E_n(f)_X \leq Cn^{-r}|f|_Y$ pour tout $f \in Y$ et tout $n > 0$.

Bernstein : Il existe $C > 0$ tel que $|S|_Y \leq Cn^r \|S\|_X$, pour tout $S \in X_n$ et tout $n > 0$.

Remarquons que l'inégalité de Jackson implique que le noyau $\mathcal{N}$ de la quasi-semi-norme $|\cdot|_Y$ est inclus dans X_n pour tout $n \geq 1$. En effet, si $g \in \mathcal{N}$, par l'inégalité de Jackson, $E_n(g)_X = 0$ pour tout $n \geq 1$, donc $g \in \overline{X_n}$. Or, la condition 5 sur les espaces X_n implique que X_n est fermé. Sinon, on pourrait trouver un élément $f \in \overline{X_n}$ qui ne serait pas dans X_n . Par la condition 5, on pourrait alors trouver $f' \in X_n$ tel que $\|f - f'\|_X = 0$. Par définition de la norme $\|\cdot\|_X$, cela imposerait $f = f' \in X_n$, ce qui est une contradiction. Au final, $g \in \overline{X_n} = X_n$.

Ainsi, quitte à ajouter ce noyau dans notre suite $(X_n)_n$, on peut supposer que

$$X_1 = \mathcal{N}$$

et donc que

$$|f|_Y = 0 \text{ pour tout } f \in X_1.$$

En outre, l'inégalité de Bernstein impose que pour tout $n > 0$,

$$X_n \subset Y$$

car si $S \in X_n \subset X$, le membre de droite de l'inégalité de Bernstein est fini, donc celui de gauche doit l'être également.

Le lemme suivant nous donne une comparaison entre le K -fonctionnel et l'erreur d'approximation.⁴

Lemme 2.2.3. *Soient $r > 0$, X et Y définis comme précédemment.*

1. *Si l'inégalité de Jackson est vérifiée, alors il existe $C > 0$ tel que*

$$E_n(f)_X \leq CK(f, n^{-r})$$

pour tout $n > 0$ et pour tout $f \in X$.

2. *Si l'inégalité de Bernstein est vérifiée, alors il existe $C > 0$ tel que*

$$K(f, n^{-r}) \leq Cn^{-r} \left(\sum_{k=1}^n [k^r E_k(f)]^\mu \frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{\mu}}$$

pour tout $n > 0$ et pour tout $f \in X$, où $\mu := \mu(Y)$ est l'exposant donné pour $|\cdot|_Y$ par le Théorème A.0.3.

Démonstration. 1. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $g \in Y$ tels que

$$\|f - g\|_X + n^{-r}|g|_Y \leq K(f, n^{-r}) + \varepsilon.$$

Considérons également un élément S dans X_n tel que

$$\|g - S\|_X \leq E_n(g)_X + \varepsilon.$$

Alors

$$\begin{aligned} E_n(f)_X &\leq \|f - S\|_X \leq \|f - g\|_X + \|g - S\|_X \\ &\leq \|f - g\|_X + E_n(g)_X + \varepsilon \\ &\leq \|f - g\|_X + Cn^{-r}|g|_Y + \varepsilon \end{aligned}$$

où la dernière inégalité est obtenue grâce à l'inégalité de Jackson. En posant $C' = \max(1, C)$, il vient

$$E_n(f)_X \leq C'K(f, n^{-r}) + (1 + C')\varepsilon.$$

Comme ε est arbitraire, on obtient finalement

$$E_n(f)_X \leq CK(f, n^{-r}).$$

4. Démonstration tirée de [15] (p. 217).

2. Vu la croissance de $K(f, \cdot)$, il suffit de montrer le résultat pour $n = 2^m, m \in \mathbb{N}$. En effet, dans ce cas, pour tout $n > 0$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $2^m \leq n \leq 2^{m+1}$. Alors, puisque $K(f, t)$ est croissant, on a

$$\begin{aligned}
K(f, n^{-r}) &\leq K(f, 2^{-mr}) \\
&\leq C 2^{-mr} \left(\sum_{k=1}^{2^m} [k^r E_k(f)_X]^\mu \frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{\mu}} \\
&\leq C 2^r 2^{-(m+1)r} \left(\sum_{k=1}^{2^m} [k^r E_k(f)_X]^\mu \frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{\mu}} \\
&\leq C 2^r n^{-r} \left(\sum_{k=1}^n [k^r E_k(f)_X]^\mu \frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{\mu}}
\end{aligned}$$

puisque $2^m \leq n$ et $2^{-r(m+1)} \leq n^{-r}$.

Prenons donc $m \in \mathbb{N}$. Soit, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_k \in X_{2^k}$ tel que $E_{2^k}(f)_X = \|f - \varphi_k\|_X$ (un tel φ_k existe vu la condition 5 sur les espaces X_n)⁵. Posons $\psi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$ pour tout $k \geq 1$ et $\psi_0 = \varphi_0$. Au vu des conditions 2, 3 et 4 sur les espaces X_n , on a qu'il existe $c \geq 1$ tel que $\psi_k \in X_{c2^k}$. En effet,

$$\begin{aligned}
\psi_k &= \varphi_k - \varphi_{k-1} \\
&\in X_{2^k} - X_{2^{k-1}} \\
&\subset X_{2^k} - X_{2^k} \text{ (condition 2)} \\
&\subset X_{2^k} + X^{2^k} \text{ (condition 3)} \\
&\subset X_{c2^k} \text{ (condition 4)}.
\end{aligned}$$

La décroissance de $(E_n(f))_n$ nous donne alors, pour $\mu := \mu(Y)$ (cfr. théorème A.0.3),

$$\|\psi_k\|_X^\mu \leq \|f - \varphi_k\|_X^\mu + \|f - \varphi_{k-1}\|_X^\mu \leq 2E_{2^{k-1}}(f)_X^\mu, \text{ pour tout } k \geq 1.$$

Comme $\varphi_m = \sum_{k=0}^m \psi_k$ et $|\psi_0|_Y = 0$ (car $\psi_0 \in X_1 = \mathcal{N}$), l'inégalité de Bernstein et la décroissance de $(E_n)_n$ ajoutées à ce que l'on vient de montrer nous donnent

$$\begin{aligned}
K(f, 2^{-mr}) &\leq \|f - \varphi_m\|_X + 2^{-mr} |\varphi_m|_Y \\
&\leq E_{2^m}(f)_X + 2^{-mr} \left(\sum_{k=1}^m |\psi_k|_Y^\mu \right)^{\frac{1}{\mu}} \\
&\leq E_{2^m}(f)_X + C 2^{-mr} \left(\sum_{k=1}^m [2^{kr} \|\psi_k\|_X]^\mu \right)^{\frac{1}{\mu}}
\end{aligned}$$

5. On pourrait aussi ne pas utiliser la condition 5 et prendre des inégalités à $\frac{1}{2^k}$ près, mais cela alourdirait la démonstration.

$$\leq C 2^{-mr} \left(\sum_{k=1}^m [2^{kr} E_{2^{k-1}}(f)_X]^\mu \right)^{\frac{1}{\mu}}.$$

Or, pour tout $k \geq 2$, la décroissance de $(E_n)_n$ nous donne que ⁶

$$[2^{kr} E_{2^{k-1}}(f)_X]^\mu \leq C \sum_{n=2^{k-2}}^{2^{k-1}-1} [n^r E_n(f)_X]^\mu \frac{1}{n}.$$

Ainsi, $(\sum_{k=2}^m [2^{kr} E_{2^{k-1}}(f)_X]^\mu)^{\frac{1}{\mu}} \leq C (\sum_{n=1}^{2^m-1} [n^r E_n(f)_X]^\mu \frac{1}{n})^{\frac{1}{\mu}}$. Quitte à modifier la constante, le terme en $k = 1$ qui doit être ajouté au membre de gauche peut être absorbé par le terme en $n = 1$ dans le membre de droite, ce qui nous permet d'obtenir la conclusion. □

Le lemme suivant nous donne une version discrète des inégalités de Hardy. ⁷

Lemme 2.2.4. Soient $(a_k)_k$ et $(b_k)_k$, deux suites de réels positifs, $r > 0$, et soient $C > 0$ et $\mu > 0$ tels que $b_k \leq C 2^{-kr} (\sum_{j=0}^k [2^{jr} a_j]^\mu)^{\frac{1}{\mu}}$. Alors, pour $0 < \alpha < r$ et pour $q > 0$,

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} [2^{k\alpha} b_k]^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C' \left(\sum_{k=0}^{\infty} [2^{k\alpha} a_k]^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Démonstration. Soit $\alpha < \beta < r$. On peut supposer que $\mu < q$ car si l'inégalité de l'hypothèse fonctionne pour un certain $\mu > 0$, elle va fonctionner pour toutes les valeurs plus petites puisque $\ell_{\mu'} \subset \ell_\mu$ si $\mu' < \mu$. On a $2^{jr} = 2^{j(r-\beta)} 2^{j\beta}$. Alors, en prenant $p > 0$ tel que $\frac{\mu}{p} + \frac{\mu}{q} = 1$, l'inégalité de Hölder nous donne que

$$\left(\sum_{j=0}^k [2^{jr} a_j]^\mu \right)^{\frac{1}{\mu}} \leq \left(\sum_{j=0}^k 2^{j\beta q} a_j^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{j=0}^k 2^{jp(r-\beta)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Or, on a que

$$\sum_{j=0}^k (2^{p(r-\beta)})^j = \frac{2^{(k+1)p(r-\beta)} - 1}{2^{p(r-\beta)} - 1} \leq \frac{2^{(k+1)p(r-\beta)}}{2^{p(r-\beta)} - 1} = C 2^{kp(r-\beta)}$$

avec une constante C dépendant de p, β et r . Ainsi,

$$\left(\sum_{j=0}^k [2^{jr} a_j]^\mu \right)^{\frac{1}{\mu}} \leq C'' 2^{k(r-\beta)} \left(\sum_{j=0}^k 2^{j\beta q} a_j^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

6. Il suffit d'utiliser un raisonnement similaire à celui utilisé dans la proposition 2.2.2.

7. Démonstration adaptée de [16] (p. 197-198).

Alors, en utilisant notre hypothèse et cette majoration,

$$\begin{aligned}
(2^{k\alpha}b_k)^q &\leq 2^{k\alpha q}C^q 2^{-kqr} \left(\sum_{j=0}^k (2^{jr}a_j)^\mu \right)^{\frac{q}{\mu}} \\
&\leq 2^{k\alpha q}C^q 2^{-kqr} C'' 2^{k(r-\beta)q} \left(\sum_{j=0}^k 2^{j\beta q} a_j^q \right) \\
&= C' 2^{kq(\alpha-\beta)} \left(\sum_{j=0}^k 2^{j\beta q} a_j^q \right)
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=0}^{\infty} [2^{k\alpha}b_k]^q \right)^{\frac{1}{q}} &\leq C \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k 2^{(\alpha-\beta)kq} 2^{j\beta q} a_j^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= C \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{j\beta q} a_j^q \sum_{k=j}^{\infty} 2^{(\alpha-\beta)kq} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

De plus,

$$\sum_{k=j}^{\infty} 2^{(\alpha-\beta)kq} = 2^{(\alpha-\beta)jq} \sum_{m=0}^{\infty} 2^{(\alpha-\beta)mq},$$

ce qui nous donne la conclusion car la série du membre de droite converge puisque $\alpha < \beta$. Dans le cas où $q = \infty$, une version simplifiée de cette preuve permet de conclure. $\square$

Le résultat suivant nous donne la caractérisation des espaces d'approximation voulue.⁸

Théorème 2.2.5. *Si les inégalités de Jackson et Bernstein sont vérifiées, alors pour tout $0 < \alpha < r$ et tout $0 < q \leq \infty$, on a*

$$\mathcal{A}_q^\alpha(X) = (X, Y)_{\frac{\alpha}{r}, q}$$

avec des normes équivalentes.

Démonstration. Notons $Z = (X, Y)_{\frac{\alpha}{r}, q}$. Soit $f \in Z$. On sait donc que $|f|_Z$ est fini. Or, on sait que si $0 < q < \infty$ ⁹, en utilisant le point 1 du lemme 2.2.3,

$$E_{2^k}(f)_X \leq CK(f, 2^{-kr})$$

et en prenant l'entier j tel que $j \leq kr < j+1$, par croissance de K et vu que $k\alpha \sim \frac{j}{r}\alpha$,

$$|f|_{\mathcal{A}_q^\alpha(X)}^q \leq C \sum_{k=0}^{\infty} [2^{k\alpha} E_{2^k}(f)_X]^q \leq C \sum_{j=0}^{\infty} [2^{j\frac{\alpha}{r}} K(f, 2^{-j})]^q.$$

8. Démonstration tirée de [15] (p. 235)

9. La démonstration s'adapte facilement si $q = \infty$

Or, le dernier membre de ces inégalités est fini par hypothèse (au vu de l'équivalence 1.2.5). Ainsi, $f \in \mathcal{A}_q^\alpha(X)$.

Considérons maintenant $f \in \mathcal{A}_q^\alpha(X)$. On veut montrer que

$$\sum_{k=0}^{\infty} [2^{k\alpha} K(f, 2^{-kr})]^q]^{\frac{1}{q}} < +\infty.$$

Cela suffira à obtenir que $f \in Z$ car pour k fixé et pour tout entier j tel que $kr \leq j < (k+1)r$,

$$K(f, 2^{-j}) \leq K(f, 2^{-kr}) \quad \text{et} \quad j \frac{\alpha}{r} < (k+1)\alpha.$$

Ainsi, on aura

$$\sum_{j=0}^{\infty} 2^{j \frac{\alpha}{r} q} K(f, 2^{-j})^q \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j \in [kr, (k+1)r[\cap \mathbb{N}} 2^{(k+1)\alpha q} K(f, 2^{-kr})^q \right)$$

et puisque qu'il y a un nombre fini d'entiers j dans $[kr, (k+1)r[$, on obtiendra

$$\sum_{j=0}^{\infty} 2^{j \frac{\alpha}{r} q} K(f, 2^{-j})^q \leq C \sum_{k=0}^{\infty} [2^{k\alpha} K(f, 2^{-kr})]^q < \infty.$$

Or, le lemme 2.2.3 nous donne que pour tout k ,

$$K(f, 2^{-kr}) \leq C 2^{-kr} \left(\sum_{j=1}^{2^k} [j^r E_j(f)_X]^\mu \frac{1}{j} \right)^{\frac{1}{\mu}}.$$

De plus,

$$\sum_{j=1}^{2^k} j^{r\mu-1} E_j(f)_X^\mu = \sum_{i=0}^{k-1} \left(\sum_{j=2^i}^{2^{i+1}-1} j^{r\mu-1} E_j(f)_X^\mu \right) + 2^{kr\mu-1} E_{2^k}(f)_X^\mu$$

et lorsque $j \in [2^i, 2^{i+1} - 1]$,

$$E_j(f)_X \leq E_{2^i}(f)_X.$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} \sum_{j=2^i}^{2^{i+1}-1} j^{r\mu-1} E_j(f)_X^\mu &\leq E_{2^i}(f)_X^\mu \sum_{j=2^i}^{2^{i+1}-1} j^{r\mu-1} \\ &\leq C E_{2^i}(f)_X^\mu \int_{2^i}^{2^{i+1}} x^{r\mu-1} dx \\ &= C E_{2^i}(f)_X^\mu \frac{2^{r\mu} - 1}{r\mu} 2^{ir\mu}. \end{aligned}$$

Au final,

$$\sum_{j=1}^{2^k} j^{r\mu-1} E_j(f)_X^\mu \leq C_r \sum_{i=0}^k 2^{ir\mu} E_{2^i}(f)_X^\mu.$$

On applique alors le lemme précédent avec $b_k = K(f, 2^{-kr})$ et $a_k = E_{2^k}(f)_X$ pour obtenir que $\sum_{k=0}^{\infty} [2^{k\alpha} K(f, 2^{-kr})]^q]^{\frac{1}{q}} \leq C|f|_{\mathcal{A}_q^\alpha(X)} < \infty$ et donc que $f \in Z$. $\square$

Ainsi, au vu du théorème précédent, lorsque l'on se fixe un espace normé X , pour caractériser l'espace d'approximation $\mathcal{A}_q^\alpha(X)$, il faut

1. Trouver un espace Y continûment plongé dans X tel que les inégalités de Jackson et de Bernstein sont vérifiées,
2. Trouver une caractérisation de l'espace $(X, Y)_{\frac{\alpha}{r}, q}$ obtenu grâce au K -fonctionnel.

Même si la première étape semble difficile, le théorème suivant nous permet de montrer que nos espaces d'approximation vont fonctionner.¹⁰

Théorème 2.2.6. *Soient X un espace normé et une suite $(X_n)_n$ de sous-ensembles qui satisfont aux conditions mentionnées dans la table 2.1. Pour tout $r > 0$ et tout $0 < s \leq \infty$, les espaces $(X_n)_n$ satisfont les inégalités de Jackson et de Bernstein pour $Y = \mathcal{A}_s^r(X)$. Ainsi, pour tout $0 < \alpha < r$ et tout $0 < q \leq \infty$, on a*

$$\mathcal{A}_q^\alpha(X) = (X, \mathcal{A}_s^r(X))_{\frac{\alpha}{r}, q}.$$

Démonstration. Si $f \in \mathcal{A}_s^r(X)$, fixons $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pour tout $n \in \{m+1, \dots, 2m\}$, vu la décroissance de $(E_n(f))_n$, on a

$$n^r E_n(f)_X \geq n^r E_{2m}(f)_X \geq m^r E_{2m}(f)_X.$$

Donc,

$$|f|_{\mathcal{A}_s^r}^s \geq \sum_{n=m+1}^{2m} [n^r E_n(f)_X]^s \frac{1}{n} \geq [m^r E_{2m}(f)_X]^s \sum_{n=m+1}^{2m} \frac{1}{n}.$$

Or on a

$$\sum_{n=m+1}^{2m} \frac{1}{n} \geq \sum_{n=m+1}^{2m} \frac{1}{2m} \geq 1/2.$$

Au final, $2m^r E_{2m}(f)_X \leq C|f|_{\mathcal{A}_s^r}$ et puisqu'un raisonnement similaire permet d'obtenir que $(2m+1)^r E_{2m+1}(f)_X \leq C|f|_{\mathcal{A}_s^r}$, l'inégalité de Jackson est démontrée.

De plus, si $g \in X_n$, on sait que $E_m(g)_X = 0 \ \forall m \geq n$ et $\forall 1 \leq m < n$, $E_m(g) \leq \|g\|_X$. Ainsi,

$$|g|_{\mathcal{A}_s^r}^s = \sum_{m=1}^{n-1} [m^r E_m(g)_X]^s \frac{1}{m} \leq C n^{rs} \|g\|_X^s,$$

ce qui nous donne l'inégalité de Bernstein. Le reste découle directement du théorème précédent. $\square$

10. Démonstration tirée de [16] (p. 198).

2.3 Retour aux espaces de Hilbert

Revenons à l'exemple de la section 1. Les résultats obtenus précédemment vont nous permettre d'affiner la caractérisation que nous avons obtenue. Commençons par remarquer que l'espace $\mathcal{A}^r((\Sigma_n)_n)$ que nous avons étudié correspond à $\mathcal{A}_\infty^r((\Sigma_n)_n)$ et que les espaces Σ_n vérifient les conditions de la Table 2.1. Pour arriver à caractériser $\mathcal{A}_\infty^r$, on va avoir besoin des espaces de suites de Lorentz, que nous allons étudier dans la section suivante.

2.3.1 Espaces de suites de Lorentz

Soit $a := (a_n)_n$, une suite de nombres complexes. On définit la *fonction de distribution* de a sur $\mathbb{R}_+$ par

$$D_a(\lambda) = \#\{n \in \mathbb{N} : |a_n| > \lambda\}.$$

Cette fonction est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Le *réarrangement décroissant* a^* de a sur $\mathbb{R}_+$ est donné par

$$a^*(t) = \inf\{\lambda > 0 : D_a(\lambda) \leq t\}.$$

Puisque D_a est décroissant, cela a bien du sens de prendre l'infimum et on obtiendra que a^* est décroissant. De plus, puisque pour tout $\lambda \geq 0$, $D_a(\lambda)$ est un entier, on a que $a^*(t)$ est constant sur l'intervalle $[n-1, n[$ pour tout $n \geq 1$.

Lorsque, pour tout $\lambda > 0$, $D_a(\lambda) < \infty$, le fait que le réarrangement est constant sur $[n-1, n[$ induit une nouvelle suite $a^* := (a_n^*)_n$: pour $n-1 \leq t < n$, on pose

$$a_n^* = a^*(t) = \inf\{\lambda > 0 : D_a(\lambda) \leq n-1\}.$$

Définition 2.3.1. L'espace des suites de Lorentz $\ell_{(p,q)}$, $1 < p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, est l'ensemble des suites complexes $a = (a_n)_n$ telles que

$$\|a\|_{\ell_{(p,q)}} = \begin{cases} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left[n^{\frac{1}{p}} a_n^* \right]^q \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{q}}, & 1 < p \leq \infty, 1 \leq q < \infty, \\ \sup_{n \geq 1} n^{\frac{1}{p}} a_n^*, & 1 < p \leq \infty, q = \infty \end{cases}$$

est fini.¹¹

Remarque 2.3.2. Dans le cas particulier où $q = \infty$, l'espace de Lorentz $\ell_{(p,q)}$ est également appelé l'espace ℓ_p faible. On a alors que pour tout $a \in \ell_p$, $1 < p \leq \infty$, $\|a\|_{\ell_{(p,\infty)}} \leq \|a\|_{\ell_p}$ et donc que $\ell_{(p,\infty)} \supset \ell_p$.

En effet, pour tout n , on a $a_n^* \leq a_k^*$ pour tout $k \leq n$ au vu de la décroissance de la suite et donc

$$n(a_n^*)^p \leq \sum_{k=1}^n (a_k^*)^p \leq \|a\|_{\ell_p}^p.$$

Ainsi,

$$\|a\|_{\ell_{(p,\infty)}} = \sup_{n \geq 1} n^{\frac{1}{p}} a_n^* \leq \|a\|_{\ell_p}.$$

11. Définition de [25].

La caractérisation suivante nous sera particulièrement utile dans la section 2 du chapitre 4.

Théorème 2.3.3. *Soit $1 < p < \infty$. Une suite $(a_n)_n$ de nombres complexes est dans l'espace de Lorentz $\ell_{(p,\infty)}$ si et seulement si*

$$\sup_{\varepsilon > 0} \varepsilon^p D_a(\varepsilon) < +\infty$$

De plus, on a $\|(a_n)_n\|_{\ell_{(p,\infty)}} = (\sup_{\varepsilon > 0} \varepsilon^p D_a(\varepsilon))^{\frac{1}{p}}$.

Démonstration. Montrons tout d'abord que la condition est nécessaire. Fixons $\varepsilon > 0$. Posons $k = D_a(\varepsilon)$. Par définition de $D_a(\varepsilon)$, cela signifie qu'il y a exactement k termes dans la suite de module strictement supérieur à ε . Ainsi, on a

$$a_k^* > \varepsilon.$$

Or, par définition de $\|\cdot\|_{\ell_{(p,\infty)}}$, on a

$$a_k^* \leq \frac{\|a\|_{\ell_{(p,\infty)}}}{k^{\frac{1}{p}}}.$$

On obtient donc

$$\varepsilon \leq \frac{\|a\|_{\ell_{(p,\infty)}}}{D_a(\varepsilon)^{\frac{1}{p}}},$$

ce qui nous donne

$$\sup_{\varepsilon > 0} \varepsilon^p D_a(\varepsilon) \leq \|a\|_{\ell_{(p,\infty)}}^p.$$

Montrons maintenant que la condition est suffisante. Posons

$$S = \sup_{\varepsilon > 0} \varepsilon^p D_a(\varepsilon).$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$D_a(\varepsilon) \leq S\varepsilon^{-p}.$$

Fixons $n \geq 1$. Pour tout $\eta > 0$, considérons $\delta_{\eta,n} = a_n^* - \eta$.

On a $\delta_{\eta,n} < a_n^*$ et $a_n^* = \inf\{\lambda > 0 : D_a(\lambda) \leq n - 1\}$, donc

$$n - 1 < D_a(\delta_{\eta,n})$$

et puisque $D_a(\delta_{\eta,n})$ est un entier,

$$n \leq D_a(\delta_{\eta,n}) \leq S\delta_{\eta,n}^{-p} = S(a_n^* - \eta)^{-p}.$$

Ainsi, en faisant tendre η vers 0,

$$n \leq S(a_n^*)^{-p}.$$

Au final,

$$\sup_{n \geq 1} n^{\frac{1}{p}} a_n^* \leq S^{\frac{1}{p}}$$

et le résultat est démontré. □

2.3.2 Interpolation des espaces de suites de Lorentz

Dans la suite, nous aurons également besoin de pouvoir interpoler les espaces de suites de Lorentz. Nous utiliserons donc le théorème suivant ¹².

Théorème 2.3.4. *Supposons que $(a_n)_n \in \ell_p + \ell_\infty, 0 < p < \infty$.*

1. *$K((a_n)_n, t, \ell_p, \ell_\infty) \asymp (\sum_{n=1}^{\lfloor t^p \rfloor} (a_n^*)^p)^{\frac{1}{p}}$ avec des constantes d'équivalence indépendantes de t .*
2. *Si $p_0 < q \leq \infty, 0 < \theta < 1$ et $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0}$, alors*

$$(\ell_{p_0}, \ell_\infty)_{\theta, q} = \ell_{(p, q)}.$$

Démonstration. 1. Soit $t > 0$. Posons $N_t = \lfloor t^p \rfloor$. Si $(a_n^*)_n$ est le réarrangement décroissant de $(a_n)_n$, posons, pour tout n ,

$$b_n = \begin{cases} a_n & \text{si } |a_n| > a_{N_t}^* \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et $c_n = a_n - b_n$.

Commençons par remarquer que dans ce cas, $b \in \ell_p$. En effet, par définition du réarrangement décroissant,

$$a_1^* \geq a_2^* \geq \dots,$$

donc $a_{N_t}^*$ est le N_t -ème plus grand coefficient en module. Ainsi, b a au plus N_t coefficients non-nuls et donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^p < \infty.$$

De plus, on a également $c \in \ell_\infty$. De fait, par définition, on a

$$c_n = \begin{cases} 0 & \text{si } |a_n| > a_{N_t}^* \\ a_n & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc pour tout $n \geq 1$, $c_n \leq a_{N_t}^*$.

Ainsi, par définition de K , on a que

$$K((a_n)_n, t; \ell_p, \ell_\infty) \leq \|(b_n)\|_{\ell_p} + t \|(c_n)\|_{\ell_\infty}.$$

Or, vu la définition du réarrangement décroissant,

$$\|(b_n)\|_{\ell_p} = \left(\sum_{n=1}^{N_t} (a_n^*)^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ et } \|(c_n)\|_{\ell_\infty} = a_{N_t}^*.$$

12. Adapté du théorème 5.2.1 p. 109 de [4]

Donc

$$K((a_n), t; \ell_p, \ell_\infty) \leq \left(\sum_{n=1}^{N_t} (a_n^*)^p \right)^{\frac{1}{p}} + t a_{N_t}^*.$$

En remarquant que

$$\begin{aligned} t a_{N_t}^* &= \left(t^p (a_{N_t}^*)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C \left(N_t (a_{N_t}^*)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= C \left(\sum_{n=1}^{N_t} (a_{N_t}^*)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C \left(\sum_{n=1}^{N_t} (a_n^*)^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

où la constante C ne dépend pas de t , on obtient bien que

$$K((a_n)_n, t; \ell_p, \ell_\infty) \leq C \left(\sum_{n=1}^{N_t} (a_n^*)^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Réciproquement, soient $(b_n) \in \ell_p$ et $(c_n) \in \ell_\infty$ tels que pour tout n , $a_n = b_n + c_n$. Pour $p \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^{N_t} (a_n^*)^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left[\left(\sum_{n=1}^{N_t} (b_n^*)^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{N_t} (c_n^*)^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] \\ &\leq \| (b_n) \|_{\ell_p} + N_t \| (c_n) \|_{\ell_\infty} \\ &\leq \left[(\| (b_n) \|_{\ell_p} + t \| (c_n) \|_{\ell_\infty}) \right] \end{aligned}$$

car $N_t \leq t$. Dans le cas où $p < 1$, la première majoration devient

$$\left(\sum_{n=1}^{N_t} (a_n^*)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left[\left(\sum_{n=1}^{N_t} (b_n^*)^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{N_t} (c_n^*)^p \right)^{\frac{1}{p}} \right]$$

avec une constante C ne dépendant que de p . Au final, en prenant $C' = \max(1, C)$, on obtient

$$\left(\sum_{n=1}^{N_t} (a_n^*)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C' \left[(\| (b_n) \|_{\ell_p} + t \| (c_n) \|_{\ell_\infty}) \right]$$

Puisque cette inégalité est indépendante des suites (b_n) et (c_n) choisies, on a bien montré l'autre inégalité.

2. Pour montrer l'égalité entre les espaces $(\ell_{p_0}, \ell_\infty)_{\theta, q}$ et $\ell_{(p, q)}$, montrons l'équivalence entre leur norme. Par définition, rappelons que

$$\|(a_n)_n\|_{(\ell_{p_0}, \ell_\infty)_{\theta, q}} = \left(\int_0^\infty t^{-\theta q} K((a_n), t; \ell_{p_0}, \ell_\infty)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Vu l'équivalence du point 1, on a alors

$$\|(a_n)_n\|_{(\ell_{p_0}, \ell_\infty)_{\theta, q}} \asymp \left(\int_0^\infty t^{-\theta q} \left(\sum_{k \leq \lfloor t^{p_0} \rfloor} (a_k^*)^{p_0} \right)^{\frac{q}{p_0}} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

En effectuant le changement de variable $s = t^{p_0}$, on a

$$\|(a_n)_n\|_{(\ell_{p_0}, \ell_\infty)_{\theta, q}} \asymp \left(\int_0^\infty s^{\frac{-\theta q}{p_0}} \left(\sum_{k \leq \lfloor s \rfloor} (a_k^*)^{p_0} \right)^{\frac{q}{p_0}} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (2.1)$$

Or,

$$\int_0^{+\infty} s^{\frac{-\theta q}{p_0}} \left(\sum_{k \leq \lfloor s \rfloor} (a_k^*)^{p_0} \right)^{\frac{q}{p_0}} \frac{ds}{s} = \sum_{l=0}^{+\infty} \int_l^{l+1} s^{\frac{-\theta q}{p_0}} \left(\sum_{k \leq l} (a_k^*)^{p_0} \right)^{\frac{q}{p_0}} \frac{ds}{s}.$$

De plus, puisque $p_0 < q$, $\ell_{p_0} \subset \ell_q$ et

$$\|(a_k^*)_{k \leq l}\|_{\ell_{p_0}}^q \leq \|(a_k^*)_{k \leq l}\|_{\ell_q}^q.$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} s^{\frac{-\theta q}{p_0}} \left(\sum_{k \leq \lfloor s \rfloor} (a_k^*)^{p_0} \right)^{\frac{q}{p_0}} \frac{ds}{s} &= \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{k \leq l} (a_k^*)^q \int_l^{l+1} s^{\frac{-\theta q}{p_0}} \frac{ds}{s} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k^*)^q \sum_{l=k}^{+\infty} \int_l^{l+1} s^{\frac{-\theta q}{p_0}} \frac{ds}{s} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k^*)^q \int_k^{+\infty} s^{\frac{-\theta q}{p_0}} \frac{ds}{s}. \end{aligned}$$

En remarquant que

$$\int_k^{+\infty} s^{\frac{-\theta q}{p_0}} \frac{ds}{s} = \frac{p_0}{\theta q} k^{\frac{-\theta q}{p_0}}$$

et que $\frac{\theta q}{p_0} = \frac{q}{p_0} - \frac{q}{p}$, on obtient finalement que

$$\int_0^{+\infty} s^{\frac{-\theta q}{p_0}} \left(\sum_{k \leq \lfloor s \rfloor} (a_k^*)^{p_0} \right)^{\frac{q}{p_0}} \frac{ds}{s} = \frac{p_0}{\theta q} \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k^*)^q k^{\frac{q}{p}} k^{\frac{-q}{p_0}} \leq \frac{p_0}{\theta q} \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k^*)^q k^{\frac{q}{p}} k^{-1} \text{ (vu que } q > p_0 \text{)}$$

et donc que

$$\|(a_n)_n\|_{(\ell_{p_0}, \ell_\infty)_{\theta, q}} \leq C \|(a_n)_n\|_{\ell_{(p, q)}}$$

avec une constante C ne dépendant que de p_0, θ et q .

Montrons l'autre inégalité. On repart de l'équivalence (2.1). On a que pour $s \in [k, k+1[$,

$$\sum_{j \leq s} (a_j^*)^{p_0} \geq k(a_k^*)^{p_0}.$$

On obtient donc

$$\|(a_n)_n\|_{(\ell_{p_0}, \ell_\infty)_{\theta, q}}^q \geq \sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{q}{p_0}} (a_k^*)^q \int_k^{k+1} s^{\frac{-\theta q}{p_0}} \frac{ds}{s}.$$

De plus, posons $\alpha = \frac{\theta q}{p_0}$. Pour $s \in [k, k+1[$, $s^{-\alpha-1} \geq (k+1)^{-\alpha-1}$, donc

$$\int_k^{k+1} s^{-\alpha-1} ds \geq (k+1)^{-\alpha-1} \geq C k^{-\alpha-1}$$

car $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)^{-\alpha-1}}{k^{-\alpha-1}} = 1$.

On obtient donc que

$$\|(a_n)_n\|_{(\ell_{p_0}, \ell_\infty)_{\theta, q}}^q \geq C \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^*)^q k^{\frac{(1-\theta)q}{p_0}} \frac{1}{k}.$$

En utilisant le fait que $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0}$, on conclut pour l'autre inégalité. □

Théorème 2.3.5. Soient p_0, p_1, q_0, q_1 et q , des nombres strictement positifs et soit $0 < \eta < 1$. Posons $\frac{1}{p} = \frac{1-\eta}{p_0} + \frac{\eta}{p_1}$. Alors, si $p_0 \neq p_1$,

$$(\ell_{(p_0, q_0)}, \ell_{(p_1, q_1)})_{\eta, q} = \ell_{(p, q)}.$$

Démonstration. Soient $0 < r < \min(p_0, p_1)$, $\frac{1}{p_i} = \frac{1-\theta_i}{r}$ et $\theta = (1-\eta)\theta_0 + \eta\theta_1$. Remarquons que dans ce cas, on a $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{r}$. Alors, en appliquant le théorème précédent et le théorème de réitération 1.3.2, on a

$$(\ell_{(p_0, q_0)}, \ell_{(p_1, q_1)})_{\eta, q} = ((\ell_r, \ell_\infty)_{\theta_0, q_0}, (\ell_r, \ell_\infty)_{\theta_1, q_1})_{\eta, q} = (\ell_r, \ell_\infty)_{\theta, q} = \ell_{(p, q)}.$$

□

2.3.3 Caractérisation de $\mathcal{A}_q^\alpha$

Dans la section 1, on avait trouvé que $f \in \mathcal{A}_\infty^r$ si et seulement si $\sup_{n \geq 1} n^{r+\frac{1}{2}} \gamma_n(f)$ est fini, où $\gamma_n(f)$ est le n -ème plus grand nombre parmi les $|f_k|$. Cette inégalité et la définition de $(f_k)_k^*$ nous permettent d'obtenir que la suite $(f_k)_k := (\langle f, \eta_k \rangle)_k$ est dans l'espace $\ell_{(\tau(r), \infty)}$ avec $\frac{1}{\tau(r)} = r + \frac{1}{2}$ et $\sup_{n \geq 1} n^{r+\frac{1}{2}} \gamma_n(f)$ est équivalent à $|\cdot|_{\ell_{(\tau(r), \infty)}}$.

L'application $f \mapsto f_k$ est inversible et définit un isomorphisme entre $\mathcal{H}$ et $\ell^2(\mathbb{N})$ ¹³ et entre $\mathcal{A}_\infty^r$ et $\ell_{(\tau(r), \infty)}$, vu les équivalences entre les normes.

Or grâce au théorème 2.2.6, on sait que $\forall \alpha < r, \forall q > 0$,

$$\mathcal{A}_q^\alpha(\mathcal{H}) = (\mathcal{H}, \mathcal{A}_\infty^r(\mathcal{H}))_{\frac{\alpha}{r}, q}.$$

De plus, le théorème 2.3.5 nous donne que

$$\ell_{\tau(\alpha), q} = (\ell^2, \ell_{(\tau(r), \infty)})_{\frac{\alpha}{r}, q}.$$

Ainsi, en interpolant, on a également un isomorphisme entre $\mathcal{A}_q^\alpha$ et $\ell_{\tau(\alpha), q}(\mathbb{N})$. Au final, on obtient donc le théorème suivant qui nous donne la caractérisation que l'on recherche depuis le début.

Théorème 2.3.6. *Une fonction $f \in \mathcal{H}$ est dans l'espace $\mathcal{A}_q^\alpha$, avec $\alpha > 0$ et $0 < q \leq \infty$, si et seulement si ses coefficients $(f_k)_k$ sont dans l'espace $\ell_{\tau(\alpha), q}$, avec $\tau(\alpha) = \frac{1}{\alpha + \frac{1}{2}}$. De plus, $|f|_{\mathcal{A}_q^\alpha} \asymp |(f_k)_k|_{\ell_{\tau(\alpha), q}}$.*

13. Grâce au théorème 7.1.3 de [2].

Chapitre 3

Théorie de Littlewood-Paley et bases d'ondelettes

Dans ce troisième chapitre, nous étudions l'approximation non linéaire par ondelettes en contexte multivarié. Pour ce faire, deux types de constructions de bases peuvent être envisagées.

La première approche consiste à bâtir des bases d'ondelettes isotropes, dont le support présente les mêmes dimensions dans toutes les directions. Ces bases sont classiquement privilégiées pour leur capacité à capturer la régularité globale d'un signal, une propriété notamment exploitée dans la compression d'images au format JPEG 2000.

Toutefois, cette construction s'avère peu efficace pour traiter les discontinuités le long de courbes. Pour répondre à des besoins spécifiques, comme ceux de l'imagerie médicale, une alternative consiste à utiliser des bases hyperboliques (ou anisotropes). Celles-ci autorisent des supports aux dimensions variables selon les directions, offrant ainsi une plus grande flexibilité géométrique.

Ce chapitre intermédiaire réunit les outils théoriques nécessaires à l'élaboration de ces deux types de bases. Nous développerons d'abord certains éléments de la théorie de Littlewood-Paley qui seront utiles pour cette construction. Ensuite, nous préciserons les hypothèses requises sur les ondelettes avant de détailler la structure des bases dans la seconde partie du chapitre.

3.1 Éléments de la théorie de Littlewood-Paley

Dans cette section, nous reprenons les éléments cités dans la section 2 de [14].

Dans la suite, nous utiliserons la notation suivante.

Notation 3.1.1. Notons $D(\mathbb{R}^d)$, l'ensemble des intervalles dyadiques de $\mathbb{R}^d$. Si $J \in D(\mathbb{R}^d)$, on note $\eta(J, \cdot)$ toute famille de fonctions indicée par J .¹

1. Contrairement à la notation ψ_J qui sera définie dans la deuxième partie de ce chapitre, cette famille n'est pas forcément obtenue par des translatés dilatés d'une seule fonction.

Commençons par définir l'inégalité forte de Littlewood-Paley.

Définition 3.1.2. Soit $1 < p < \infty$. Une famille de fonctions à valeurs réelles $\eta(J, \cdot)$, $J \in D(\mathbb{R}^d)$ satisfait l'inégalité forte de Littlewood-Paley si pour toute suite finie de réels (c_J) , on a

$$\left\| \sum_{J \in D(\mathbb{R}^d)} c_J \eta(J, \cdot) \right\|_p \asymp \left\| \left(\sum_{J \in D(\mathbb{R}^d)} c_J^2 \eta(J, \cdot)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \quad (3.1)$$

avec des constantes d'équivalence dépendant uniquement de p et de d .

Remarque 3.1.3. Si l'équation (3.1) est vérifiée pour des suites finies, alors on obtient qu'elle est également vérifiée pour des suites infinies par un argument limite.

Une autre équivalence qui nous intéresse est la suivante.

$$\left\| \sum_{J \in D(\mathbb{R}^d)} c_J \eta(J, \cdot) \right\|_p \asymp \left\| \left(\sum_{J \in D(\mathbb{R}^d)} c_J^2 \chi_J \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p. \quad (3.2)$$

On peut montrer que (3.1) et (3.2) sont équivalentes sous certaines conditions. Pour ce faire, nous avons besoin de l'opérateur maximal de Hardy-Littlewood.

Définition 3.1.4. On définit l'opérateur maximal de Hardy-Littlewood pour une fonction localement intégrable g par

$$Mg(x) := \sup_{J \in D(\mathbb{R}^d), x \in J} \frac{1}{|J|} \int_J |g(y)| dy.$$

Dans [17], Fefferman et Stein ont montré le théorème suivant ².

Théorème 3.1.5. Pour toutes fonction $\eta(J, \cdot)$ et constantes c_J , $J \in D(\mathbb{R}^d)$, on a, pour $1 < p \leq \infty$,

$$\left\| \left(\sum_{J \in D(\mathbb{R}^d)} (c_J M\eta(J, \cdot))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq A \left\| \left(\sum_{J \in D(\mathbb{R}^d)} (c_J \eta(J, \cdot))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p$$

avec une constante A dépendant seulement de d et p .

On a alors le résultat suivant pour l'équivalence entre (3.1) et (3.2) dans le cas univarié.

Corollaire 3.1.6. Si la famille de fonctions univariées $\eta(J, \cdot)$ satisfait

$$|\eta(J, x)| \leq C M\chi_J(x), \quad \chi_J(x) \leq C M\eta(J, x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (3.3)$$

alors (3.1) est satisfait si et seulement si (3.2) est satisfait.

2. Voir théorème 1

Démonstration. Il suffit de montrer que sous ces hypothèses,

$$\left\| \left(\sum_{J \in D(\mathbb{R}^d)} c_J^2 \eta(J, \cdot)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \asymp \left\| \left(\sum_{J \in D(\mathbb{R}^d)} c_J^2 \chi_J \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p.$$

Cela est immédiat en majorant chaque membre grâce à l'hypothèse appropriée et au théorème précédent. $\square$

Remarque 3.1.7. Les conditions imposées dans le corollaire précédent sont faciles à satisfaire. Par exemple, si $\eta(J, \cdot)$ est la famille formée des translatés-dilatés d'une même fonction ψ , l'inégalité de gauche est vérifiée à chaque fois que

$$|\psi(x)| \leq C \max(1, |x|)^{-\lambda} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

avec $\lambda \geq 1$. En effet, fixons $J := [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)[\in D(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$ et pour toute fonction f , notons f_J la fonction normalisée définie par $f_J(x) = 2^{\frac{j}{2}} f(2^j x - k)$. On pose $t = 2^j x - k$ et $\rho := \text{dist}(t, [0, 1]) = \text{dist}(2^j x, [k, k+1])$. On a $\rho \leq |t|$.

Soit I , le plus petit intervalle contenant x et J . On a

$$|I| \leq |J| + \text{dist}(x, J) = 2^{-j}(1 + \rho).$$

De plus, on a

$$\int_J \chi_J(y) dy = 2^{\frac{j}{2}} \int_J \chi(2^j y - k) dy = 2^{\frac{j}{2}} 2^{-j} = 2^{-\frac{j}{2}}.$$

Ainsi, on a

$$M\chi_J(x) \geq \frac{1}{|I|} \int_J \chi_J(y) dy = \frac{2^{-\frac{j}{2}}}{|I|} \geq \frac{2^{\frac{j}{2}}}{1 + \rho}.$$

Au final, puisque $|\psi_J(x)| = 2^{\frac{j}{2}} |\psi(t)|$, vu l'hypothèse, on a

$$\begin{aligned} \frac{|\psi_J(x)|}{M\chi_J(x)} &\leq (1 + \rho) |\psi(t)| \\ &\leq (1 + |t|) C \max(1, |t|)^{-\lambda} \\ &\leq C \max(1, |t|)^{1-\lambda}. \end{aligned}$$

Puisque $\lambda \geq 1$, on a bien obtenu l'inégalité de gauche.

On a également que l'inégalité de droite est toujours vérifiée lorsque la famille $\eta(J, \cdot)$ est générée par les translatés dilatés d'une fonction ψ non nulle.

En effet, pour $J \in D(\mathbb{R})$, on a

$$M\psi_J(x) \geq \frac{1}{|J|} \int_J |\psi_J(y)| dy = 2^{\frac{j}{2}} \int_0^1 |\psi(u)| du = C 2^{\frac{j}{2}}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Or, si $x \in J$, on a $\chi_J(x) = 2^{\frac{j}{2}}$ et $\chi_J(x) \leq \frac{1}{C} M\psi_J(x)$. Si $x \notin J$, alors $\chi_J(x) = 0$ et l'inégalité est également vérifiée.

Nous aurons également besoin de lier ces inégalités à des bases inconditionnelles. Rappelons-en ici la définition.

Définition 3.1.8. Une base $\eta(J, \cdot)$, $J \in D(\mathbb{R}^d)$ est inconditionnelle si pour toute suite ε_J à valeurs dans $\{\pm 1\}$ et pour toute suite finie c_J , on a

$$\left\| \sum_{J \in D(\mathbb{R}^d)} \varepsilon_J c_J \eta(J, \cdot) \right\|_p \asymp \left\| \sum_{J \in D(\mathbb{R}^d)} c_J \eta(J, \cdot) \right\|_p$$

avec des constantes d'équivalence ne dépendant pas des suites ε_J et c_J .

En prenant des suites (ε_J) à valeurs dans $\{0, 1\}$, on remarque que le fait d'être une base inconditionnelle revient à demander que les décompositions des fonctions dans la base convergent peu importe les sommes partielles considérées.

Nous allons aussi avoir besoin de la définition suivante.

Définition 3.1.9. On définit les fonctions univariées de Rademacher par

$$r_j(t) := \text{sign}(\sin(2^{j+1}\pi t)), \quad t \in [0, 1], \quad j \in \mathbb{N}.$$

En faisant correspondre chaque naturel j avec les rectangles de $D(\mathbb{R})$, on obtient la famille $r(J, \cdot)$, $J \in D(\mathbb{R})$.

Dans $\mathbb{R}^d$, on obtient

$$r(I, (x_1, \dots, x_d)) := r(I_1, x_1) \dots r(I_d, x_d), \quad I = I_1 \times \dots \times I_d$$

comme le produit tensoriel des fonctions de Rademacher.

Avec les fonctions de Rademacher, nous avons également l'inégalité de Khintchine³.

Lemme 3.1.10. Pour $1 \leq p \leq \infty$ et pour toute suite finie c_J , $J \in D(\mathbb{R})$, on a

$$\left\| \sum_J c_J r(J, \cdot) \right\|_{L_p([0,1])} \asymp \left(\sum_J |c_J|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On a le lemme suivant.

Lemme 3.1.11. Soit $1 < p < \infty$ et soit $\eta(J, \cdot)$, $J \in D(\mathbb{R}^d)$, une collection de fonctions multivariées. Si on considère les assertions suivantes

1. $(\eta(J, \cdot))_{J \in D(\mathbb{R}^d)}$ satisfait (3.1);
2. $(\eta(J, \cdot))_{J \in D(\mathbb{R}^d)}$ satisfait (3.2);
3. $(\eta(J, \cdot))_{J \in D(\mathbb{R}^d)}$ est une base inconditionnelle pour $L_p(\mathbb{R}^d)$,

3. Pour une preuve de l'inégalité utilisée, voir le théorème 6 p. 30 et le lemme 1 p. 41 du chapitre 2 de [23]

on a que (1) et (3) sont équivalents et que (2) implique (3). De plus, si (3.3) est vérifié, alors toutes les conditions sont équivalentes.

Démonstration. Commençons par montrer l'équivalence entre (1) et (3). (1) $\Rightarrow$ (3) : On doit montrer que pour toute suite (ε_J) à valeurs dans $\{\pm 1\}$ et pour toute suite finie (c_J) ,

$$\left\| \sum_{J \in D(\mathbb{R}^d)} \varepsilon_J c_J \eta(J, \cdot) \right\|_p \asymp \left\| \sum_{J \in D(\mathbb{R}^d)} c_J \eta(J, \cdot) \right\|_p.$$

Or, pour de telles suites, on a, pour tout J , $(\varepsilon_J c_J)^2 = c_J^2$ et, puisque $(\eta(J, \cdot))$ satisfait 3.1, on obtient

$$\begin{aligned} \left\| \sum_J \varepsilon_J c_J \eta(J, \cdot) \right\|_p &\asymp \left\| \left(\sum_J (\varepsilon_J c_J)^2 \eta(J, \cdot)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \\ &= \left\| \left(\sum_J c_J^2 \eta(J, \cdot)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \\ &\asymp \left\| \sum_J c_J \eta(J, \cdot) \right\|_p. \end{aligned}$$

(3) $\Rightarrow$ (1) : Soit $(c_J)_{J \in D(\mathbb{R}^d)}$, une suite finie. Fixons $x \in \mathbb{R}^d$. Par l'inégalité de Khinchine, on a

$$\left\| \sum_J c_J \eta(J, x) r(J, \cdot) \right\|_{L_p([0,1])} \asymp \left(\sum_J |c_J \eta(J, x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Donc, en prenant la norme dans $L_p(\mathbb{R}^d)$ des deux côtés, on a, par Fubini,

$$\left\| \sum_J r(J, \cdot) c_J \eta(J, \cdot) \right\|_{L_p([0,1] \times \mathbb{R}^d)} \asymp \left\| \left(\sum_J c_J^2 \eta(J, \cdot)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p.$$

De plus, on sait que $(\eta(J, \cdot))$ est une base inconditionnelle et que les fonctions de Rademacher sont à valeurs dans $\{\pm 1\}$. Ainsi, le membre de gauche de la dernière équivalence est équivalent à $\left\| \sum_J c_J \eta(J, \cdot) \right\|_p$, ce qui suffit.

De plus, le fait que (2) implique (3) se démontre en suivant le même raisonnement que pour montrer que (1) implique (3).

Enfin, l'équivalence entre les assertions lorsque (3.3) est vérifié découle directement de l'équivalence entre (3.1) et (3.2) lorsque cette condition est satisfaite. $\square$

3.2 Construction des bases d'ondelettes utilisées

Passons maintenant à la construction des bases d'ondelettes. Conformément à [12] et à [19], nous allons travailler avec des ondelettes biorthogonales à support compact car ce sont les ondelettes les plus souvent utilisées dans les applications numériques. Notons que les démonstrations relatives aux constructions et aux propriétés des ondelettes ne seront pas développées dans ce document mais peuvent, par exemple, être trouvées dans [9] ou adaptées de [2].

3.2.1 Construction des ondelettes biorthogonales en dimension 1

Considérons une analyse multirésolution $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ de $L_2(\mathbb{R})$ et une fonction φ à support compact et de classe C^m , $m > 0$, telle que pour tout $j \in \mathbb{Z}$,

$$\Phi_j = \{\varphi_{j,k} := 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j x - k) : k \in \mathbb{Z}\}$$

est une base de Riesz de V_j . On suppose, de plus, que les espaces V_j contiennent tous les polynômes de degré strictement inférieur à N . Cela est notamment le cas si φ satisfait la condition de Strang-Fix d'ordre N , c'est-à-dire que $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$ et que $D^n \widehat{\varphi}(2k\pi) = 0, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, |n| < N$.

Puisque les espaces V_j sont emboîtés, on peut écrire que

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j$$

où W_j est un complément de V_j dans V_{j+1} qui n'est pas forcément le complément orthogonal. On peut alors montrer qu'il existe une fonction $\psi = \sum_k g_k \varphi(2 \cdot -k)$ telle que pour tout $j \in \mathbb{Z}$,

$$\Psi_j := \{\psi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$$

est une base de W_j . Puisque $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L_2(\mathbb{R})$ et $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$, on a que $L_2(\mathbb{R}) = \overline{\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j}$ et donc que l'ensemble

$$\Psi := \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \Psi_j$$

engendre un sous-espace dense de $L_2(\mathbb{R})$.

On a également que l'ensemble Ψ forme une base de Riesz de $L_2(\mathbb{R})$ et que la fonction ψ est de classe C^m .

De plus, il existe une analyse multirésolution biorthogonale $(\tilde{V}_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ et une base biorthogonale d'ondelettes $\tilde{\Psi} = \{\tilde{\psi}_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ qui satisfait $\langle \psi_\lambda, \tilde{\psi}_{\lambda'} \rangle = \delta_{\lambda, \lambda'}$. On suppose donc que ψ est de classe C^m et que les espaces $\tilde{V}_j$ contiennent tous les polynômes de degré strictement inférieur à $\tilde{N}$. Cela nous permet d'affirmer que ψ admet $\tilde{N}$ moments nuls⁴.

4. Pour l'instant, nous ne donnons pas plus de précisions sur le nombre exact de moments nuls ou sur l'ordre exact d'approximation des espaces V_j dont nous aurons besoin. Nous demandons juste qu'il y en ait au moins 1. Cette précision viendra au moment opportun dans les théorèmes.

Remarques 3.2.1. En adaptant les démonstrations du cas d'ondelettes orthogonales disponibles dans [29] (p.181-190), on peut montrer qu'une telle base d'ondelettes est aussi une base de L_p , $1 < p < \infty$. On a même qu'il s'agit d'une base inconditionnelle d'ondelettes au sens de la définition 3.1.8. En effet, selon le théorème 7.9 de [3], il suffit de montrer qu'étant donnée une suite $\varepsilon := (\varepsilon_{j,k})_{(j,k) \in \mathbb{Z}^2}$ telle que $\varepsilon_{j,k} \in \{\pm 1\}$ pour tout $(j,k) \in \mathbb{Z}^2$, l'opérateur $T_\varepsilon f = \sum_{j,k} \varepsilon_{j,k} \langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle \psi_{j,k}$ est tel que $\|T_\varepsilon f\|_p \leq C \|f\|_p$. Or, pour ce faire, on va montrer que cet opérateur est un opérateur de Calderón-Zygmund au sens de la définition 4.9 de [11], ce qui suffira au vu du théorème 4.13 du même document. On a, en effet, qu'il existe un noyau $K(x, y)$ tel que

$$T_\varepsilon f = \int_{\mathbb{R}} K(x, y) f(y) dy$$

pour $x \notin \text{supp}(f)$. Ce noyau est donné par $K(x, y) = \sum_{j,k} \varepsilon_{j,k} \psi_{j,k}(x) \tilde{\psi}_{j,k}(y)$ et on a les propriétés suivantes qui nous permettent d'affirmer que T_ε est un opérateur de Calderón-Zygmund.

1. $\|T_\varepsilon f\|_2 \asymp \|f\|_2$ pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $T1 = T^*1 = 0$: cela est dû aux propriétés de base de Riesz et d'annulation d'au moins 1 moment de ψ et $\tilde{\psi}$.
2. $|K(x, y)| \leq \frac{C}{|x-y|}$: on sait que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|\psi_{j,k}(x) \tilde{\psi}_{j,k}(y)| \leq C2^j$ puisque les fonctions ψ et $\tilde{\psi}$ sont continues à support compact. De plus, si on suppose que $\text{supp}(\psi) \subset [-A, A]$, on a que $|2^j x - k| \leq A$ à chaque fois que $\psi_{j,k}(x) \neq 0$, donc x est dans un intervalle de longueur $\frac{2A}{2^j}$. Puisqu'on a une inégalité similaire pour $\tilde{\psi}$, on obtient que si $\psi_{j,k}(x)$ et $\tilde{\psi}_{j,k}(y)$ sont non nuls, alors $|x - y| \leq C2^{-j}$. Au final, on obtient bien

$$|K(x, y)| \leq C \sum_{j: C'2^{-j} > |x-y|} 2^j \leq C2^{j_0} \leq C \frac{1}{|x-y|}$$

où j_0 est tel que $|x - y| \sim 2^{-j_0}$.

3. il existe $\delta > 0$ tel que $|K(x, y) - K(x', y)| \leq C \frac{|x - x'|^\delta}{|x - y|^{1+\delta}}$ si $|x - x'| \leq \frac{|x-y|}{2}$: raisonnement similaire au précédent.
4. il existe $\delta > 0$ tel que $|K(x, y) - K(x, y')| \leq C \frac{|y - y'|^\delta}{|x - y|^{1+\delta}}$ si $|y - y'| \leq \frac{|x-y|}{2}$.

Notons également que grâce au support compact des fonctions d'échelles, nos bases vérifient la condition 3.3 et donc que les conditions du lemme 3.1.11 sont donc toutes équivalentes. L'inconditionnalité de notre base nous permet donc d'affirmer que les autres conditions sont vérifiées.

3.2.2 Construction des bases isotropes d'ondelettes multivariées

Passons maintenant à la construction des bases isotropes d'ondelettes multivariées. Pour ce faire, considérons φ , une fonction d'échelle de $L_2(\mathbb{R}^d)$, et ψ , son ondelette correspondante. On pose $\psi^0 := \varphi$ et $\psi^1 := \psi$. Si

$$E' = \{(e_1, \dots, e_d) : e_j \in \{0, 1\}\},$$

notons $E := E' \setminus \{(0, \dots, 0)\}$. Pour tout $(e_1, \dots, e_d) \in E$, on définit

$$\psi^e(x_1, \dots, x_d) := \psi^{e_1}(x_1) \dots \psi^{e_d}(x_d).$$

Notons $D := D(\mathbb{R}^d)$, l'ensemble des cubes dyadiques de $\mathbb{R}^d$. Alors, l'ensemble

$$\{\psi_I^e, I \in D, e \in E\}$$

forme une base de Riesz de $L_2(\mathbb{R}^d)$ ⁵, où pour toute fonction η définie sur $\mathbb{R}^d$, la notation η_I est définie par

$$\eta_I(x) := |I|^{-\frac{1}{2}} \eta(2^j \cdot - k)$$

si $I = 2^{-j}(k + [0, 1]^d) \in D$, $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}^d$.

En suivant la même construction, on peut en construire la base duale $\{\tilde{\psi}_I^e, I \in D, e \in E\}$ à partir des fonctions duales $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{\psi}$. On obtient alors, pour tout $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$, la décomposition

$$f = \sum_{I \in D} \sum_{e \in E} c_I^e(f) \psi_I^e$$

avec $c_I^e(f) := \langle f; \tilde{\psi}_I^e \rangle$.

Remarque 3.2.2. Dans la décomposition ci-dessus, nous avons normalisé les ondelettes et les fonctions duales dans $L_2(\mathbb{R}^d)$. En effet, la multiplication par $|I|^{-\frac{1}{2}}$ dans l'expression η_I nous permet, par exemple, d'obtenir que pour tout $I \in D$, $\|\psi\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \|\psi_I^e\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$. Cette normalisation peut aussi s'opérer dans $L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$. Ainsi, dans la suite, nous noterons

$$\psi_{I,p}^e := |I|^{-\frac{1}{p} + \frac{1}{2}} \psi_I^e, I \in D, e \in E$$

et nous écrirons alors

$$f = \sum_{I \in D} \sum_{e \in E} c_{I,p}^e(f) \psi_{I,p}^e, \quad c_{I,p}^e(f) := \langle f; \tilde{\psi}_{I,p'}^e \rangle,$$

avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Nous utiliserons également la notation

$$c_{I,p}(f) := \left(\sum_{e \in E} |c_{I,p}^e(f)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

5. Dans le cas où ψ est une ondelette orthogonale, on obtient même une base orthogonale.

Notons que les différentes normalisations sont équivalentes : pour tous $1 < p, q < \infty$, on vérifie facilement que

$$\psi_{I,p}^e = |I|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \psi_{I,q}^e \text{ et } c_{I,p}^e(f) = |I|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} c_{I,q}^e(f).$$

Ainsi, on a

$$c_{I,p}(f) = |I|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left(\sum_{e \in E} |c_{I,q}^e(f)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Or, étant donné que l'ensemble E est fini, $|\cdot|_{\ell_p} \asymp |\cdot|_{\ell_q}$ sur E avec des constantes d'équivalence dépendant de d . Ainsi,

$$c_{I,p}(f) \leq C |I|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} c_{I,q}(f)$$

où C dépend de d et

$$c_{I,q}(f) \leq C' |I|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} c_{I,p}(f)$$

où C' dépend de d .

3.2.3 Construction des bases hyperboliques d'ondelettes multivariées

Une autre manière de construire une base multivariée d'ondelettes est de faire le produit tensoriel des ondelettes univariées.

Si on considère un rectangle dyadique J , on a que $J = J_1 \times \cdots \times J_d$ avec $J_1, \dots, J_d \in D(\mathbb{R})$. On définit alors l'ondelette

$$\psi_J(x_1, \dots, x_d) := \psi_{J_1}(x_1) \dots \psi_{J_d}(x_d) = 2^{\frac{|j|_1}{2}} \prod_{m=1}^d \psi(2^{j_m} x_m - k_m)$$

avec $J_m = 2^{-j_m}(k_m + [0, 1])$ et $j = (j_1, \dots, j_d)$. Dans la suite, pour un vecteur $\vec{j} = (j_1, \dots, j_d)$, nous noterons $\nabla_{\vec{j}}$ l'ensemble des rectangles dyadiques $J_1 \times \cdots \times J_d$ de $\mathbb{R}^d$ tels que $J_i = 2^{-j_i}(k_i + [0, 1])$, $k_i \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq d$ et $\nabla = \cup_{\vec{j} \in \mathbb{Z}^d} \nabla_{\vec{j}}$. De plus, pour $J \in \nabla_{\vec{j}}$, nous adopterons la notation $|J|_1 := |j|_1$ et $|J|_\infty := |j|_\infty$.

On a alors le théorème suivant qui nous assure que ces ondelettes forment une base inconditionnelle dans L_p ⁶.

Théorème 3.2.3. *Soit $((\psi_J), (\tilde{\psi}_J))_{J \in \nabla}$, une famille biorthogonale d'ondelettes à support compact. On suppose que les ondelettes possèdent au moins un moment nul et sont de classe C^1 .*

6. Théorème et démonstration adaptés du théorème 4.6 de [26].

Pour tout $1 < p < \infty$, la famille $(\psi_J)_{J \in \nabla}$ constitue une base inconditionnelle de $L_p(\mathbb{R}^d)$ et toute fonction admet la décomposition

$$f = \sum_{J \in \nabla} c_J \psi_J$$

où c_J est unique et donné par

$$c_J = \langle f, \tilde{\psi}_J \rangle.$$

De plus, on a l'équivalence de normes suivante :

$$\|f\|_{L_p} \asymp \left\| \left(\sum_{J \in \nabla} |c_J|^2 |J|^{-1} \chi_J(\cdot) \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_p}.$$

Démonstration. Notons w_p l'espace des suites $c = (c_J)_{J \in \nabla}$ telles que

$$\|c\|_{w_p} := \left\| \left(\sum_{J \in \nabla} |c_J|^2 |J|^{-1} \chi_J(\cdot) \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_p} < \infty.$$

On souhaite montrer que pour $f \in L_p$, la série $\sum_{J \in \nabla} \langle f, \tilde{\psi}_J \rangle \psi_J = \sum_{J \in \nabla} c_J \psi_J$ converge vers f inconditionnellement dans L_p .

On sait, tout d'abord que pour tout J ,

$$\begin{aligned} c_J &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) 2^{\frac{|J|_1}{2}} \tilde{\psi}(2^j y - k) dy \\ &= 2^{\frac{|J|_1}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \tilde{\psi}(2^j y - k) dy. \end{aligned}$$

Effectuons le changement de variable $u = 2^j y - k$. On obtient alors

$$c_J = 2^{\frac{|J|_1}{2}} 2^{-|J|_1} \int_{\mathbb{R}^d} f(2^{-j}(u + k)) \tilde{\psi}(u) du.$$

Puisque $\tilde{\psi}$ est à support compact, il existe $R > 0$ tel que $\text{supp}(\tilde{\psi}) \subset [-R, R]^d$. Ainsi,

$$|c_J| \leq C 2^{-\frac{|J|_1}{2}} \int_{[-R, R]^d} |f(2^{-j}(u + k))| du.$$

En effectuant le changement de variable inverse de celui effectué précédemment, on obtient donc

$$|c_J| \leq C 2^{-\frac{|J|_1}{2}} 2^{|J|_1} \int_{J_R} |f(y)| dy = C 2^{\frac{|J|_1}{2}} \int_{J_R} f(y) dy$$

où $J_R = \prod_{i=1}^d [(k_i - R)2^{-j_i}, (k_i + R)2^{-j_i}]$ et $|J_R| = (2R)^d 2^{-|J|_1}$.

Au final,

$$|c_J| \leq C (2R)^d 2^{-|J|_1} \frac{1}{|J_R|} \int_{J_R} |f(y)| dy.$$

Ainsi, puisque pour tout $x \in J$, $x \in J_R$, alors pour tout J ,

$$|c_J|^2 |J|^{-1} \chi_J(x) \leq C (Mf(x))^2 \chi_J(x).$$

En utilisant alors le théorème 3.1.5, on obtient donc

$$\left\| \left(\sum_{J \in \nabla} |c_J|^2 |J|^{-1} \chi_J(\cdot) \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_p} \leq C' \|f\|_{L_p}. \quad (3.4)$$

Montrons maintenant la convergence de la série. Pour ce faire, on considère $\mathcal{S}_{fin}$, l'espace des suites dont seul un nombre fini de termes est non-nul. Pour toute suite $c \in \mathcal{S}_{fin}$, on définit l'opérateur

$$S(c) = \sum_{J \in \nabla} c_J \psi_J.$$

La somme étant finie, on a $S(c) \in L_p$. On sait également que

$$\|S(c)\|_{L_p} = \sup_{\|g\|_{L_{p'}}=1} |\langle S(c), g \rangle|$$

où $L_{p'}$ est l'espace dual de L_p . Par linéarité du produit scalaire sur la somme finie, nous avons

$$\langle S(c), g \rangle = \langle \sum_J c_J \psi_J, g \rangle = \sum_J c_J \langle \psi_J, g \rangle.$$

En appliquant l'inégalité de Hölder sur les suites, il vient

$$|\langle S(c), g \rangle| \leq \|c\|_{w_p} \|(\langle \psi_J, g \rangle)_J\|_{w_{p'}} = \|c\|_{w_p} \|Tg\|_{w_{p'}}$$

La majoration 3.4 appliquée à l'espace dual $L_{p'}$ ($1 < p' < \infty$) nous donne alors que

$$\|S(c)\|_{L_p} \leq C \sup_{\|g\|_{L_{p'}}=1} \|g\|_{L_{p'}} \|c\|_{w_p} = C \|c\|_{w_p}.$$

L'opérateur S est donc borné sur le sous-ensemble dense $\mathcal{S}_{fin}$. Par le théorème de Hahn-Banach, S s'étend de manière unique en un opérateur continu de w_p vers L_p .

Si on considère maintenant une énumération $\mathcal{H} = \{J_1, \dots\}$ des intervalles dyadiques, $f \in L_p$ et $c = (c_J)_J$, la suite de ses coefficients, la suite des sommes partielles

$S_N f = \sum_{n=1}^N c_{J_n} \psi_{J_n}$ est l'image par S de la suite tronquée $c^{(N)}$. Puisque $c \in w_p$ grâce à la majoration 3.4 et vu que $c^{(N)} \rightarrow c$ dans w_p , la continuité de S implique que $S_N f$ converge vers une limite f^* dans L_p . Or, pour tout $J_0 \in \mathcal{H}$,

$$\langle f^*, \tilde{\psi}_{J_0} \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle S_N f, \tilde{\psi}_{J_0} \rangle = c_{J_0} = \langle f, \tilde{\psi}_{J_0} \rangle.$$

Ainsi, $\langle f - f^*, \tilde{\psi}_J \rangle = 0$ pour tout J . Par densité du système dual $(\tilde{\psi}_J)_J$ dans $L_{p'}$, on conclut que $f = f^*$. La série converge donc vers f dans L_p .

Avant de montrer que cette convergence est inconditionnelle, montrons la deuxième inégalité de l'équivalence de l'énoncé. On sait que si $f = \sum_J c_J \psi_J \in L_p$,

$$\|f\|_{L_p} = \sup_{\|g\|_{L_{p'}}=1} |\langle f, g \rangle| = \sup_{\|g\|_{L_{p'}}=1} \left| \sum_J c_J \langle \psi_J, g \rangle \right|.$$

De plus, on a que

$$\frac{1}{J} \int_{\mathbb{R}^d} \chi_J(x) dx = 1.$$

Or, en utilisant l'inégalité de Hölder et l'inégalité 3.4,

$$\begin{aligned} \left| \sum_J c_J \langle \psi_J, g \rangle \right| &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_J c_J \langle \psi_J, g \rangle \frac{1}{|J|} \chi_J(x) \right) dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_J \frac{|c_J|^2}{|J|} \chi_J(x) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_J \frac{|\langle \psi_J, g \rangle|^2}{|J|} \chi_J(x) \right)^{\frac{1}{2}} dx \\ &\leq \left\| \left(\sum_J \frac{|c_J|^2}{|J|} \chi_J \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_p} \left\| \left(\sum_J \frac{|\langle \psi_J, g \rangle|^2}{|J|} \chi_J \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_{p'}} \\ &\leq C \left\| \left(\sum_J \frac{|c_J|^2}{|J|} \chi_J \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_p} \|g\|_{L_{p'}}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\|f\|_{L_p} \leq C \sup_{\|g\|_{L_{p'}}=1} \|g\|_{L_{p'}} \left\| \left(\sum_J \frac{|c_J|^2}{|J|} \chi_J \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_p} = C \left\| \left(\sum_J \frac{|c_J|^2}{|J|} \chi_J \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_p}.$$

Montrons que cette convergence est inconditionnelle. Considérons une suite $\varepsilon := (\varepsilon_J)_J$ telle que $\varepsilon_J \in \{\pm 1\}$ pour tout J . Montrons que l'opérateur

$$T_\varepsilon f = \sum_J \varepsilon_J c_J \psi_J$$

est tel que

$$\|T_\varepsilon f\|_{L_p} \leq C \|f\|_{L_p}.$$

On a, grâce à l'équivalence que l'on a démontrée,

$$\begin{aligned} \|T_\varepsilon f\|_{L_p} &\leq C \left\| \left(\sum_J |\varepsilon_J c_J|^2 |J|^{-1} \chi_J \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_p} \\ &= C \left\| \left(\sum_J |c_J|^2 |J|^{-1} \chi_J \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_p} \\ &\leq C' \|f\|_{L_p}, \end{aligned}$$

ce qui suffit. □

Les ondelettes définies plus haut sont normalisées dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Nous utiliserons la notation

$$\psi_J^{(p)} := 2^{|j|_1(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})} \psi_J$$

lorsque nous travaillerons avec des ondelettes normalisées dans L^p . Nous écrirons alors

$$f = \sum_{J \in D} c_J^{(p)} \psi_J^{(p)}.$$

Chapitre 4

Approximations linéaire et non linéaire par des ondelettes

Ce chapitre est consacré à l'étude des espaces d'approximation associés aux bases d'ondelettes introduites précédemment. Nous débuterons par la caractérisation des espaces d'approximation linéaire pour les bases isotropes, puis pour les bases hyperboliques. Cette analyse sera ensuite étendue au cadre non linéaire.

4.1 Approximation linéaire

4.1.1 Bases isotropes

Lorsque l'on travaille avec des bases isotropes d'ondelettes, la manière la plus naturelle d'approximer des fonctions est de considérer les espaces V_j et donc d'approximer les fonctions à l'aide des projecteurs

$$P_j : L^p(\mathbb{R}^d) \rightarrow V_j, f \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \langle f, \tilde{\varphi}_{j,k} \rangle \varphi_{j,k}.$$

Après avoir montré que ces projections réalisent l'erreur d'approximation, nous allons donc tenter de trouver un espace Y qui vérifie les inégalités de Jackson et de Bernstein pour ces projecteurs. Pour ce faire, nous utiliserons l'approche de [8]. Nous aurons tout d'abord besoin du résultat suivant qui a été démontré dans [7] (Thm 3.1.1 p. 115).

Théorème 4.1.1. *Pour $1 < p < \infty$, $m \in \mathbb{N}$ et un ensemble connexe borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, on a*

$$\inf_{g \in \Pi_m} \|f - g\|_{L^p(\Omega)} \leq C |f|_{W^{m+1,p}(\Omega)}, \quad f \in W^{m+1,p}$$

où Π_m est l'ensemble des polynômes de degré inférieur à m et où C est une constante dépendant uniquement de d, m, p et Ω .

Nous aurons également besoin du théorème suivant.

Théorème 4.1.2. Soit $1 < p < \infty$. Les projecteurs P_j sont uniformément bornés dans L_p , c'est-à-dire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $j \in \mathbb{Z}$, pour toute fonction $f \in L_p$,

$$\|P_j f\|_{L_p} \leq C \|f\|_{L_p}.$$

De plus, la base $\varphi_{j,k}$ est L_p -stable, c'est-à-dire qu'on a l'équivalence

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k \varphi_{j,k} \right\|_{L_p} \asymp 2^{jd(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})} \|(c_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}\|_{\ell_p}$$

pour toute suite $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ de $\mathbb{R}$.

Démonstration. Commençons par montrer que

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k \varphi_{j,k} \right\|_{L_p} \leq C 2^{jd(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})} \|(c_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}\|_{\ell_p}. \quad (4.1)$$

Considérons un cube dyadique $I_{j,l}$. On a

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k \varphi_{j,k} \right\|_{L_p(I_{j,l})} = \left(\int_{I_{j,l}} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k \varphi_{j,k} \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Or, si $x \in I_{j,l}$, on sait que $2^j x \in l + [0, 1]^d$. Comme φ est à support compact, il existe un ensemble fini $S \in \mathbb{Z}^d$ tel que si $\varphi_{j,k}(x) \neq 0$, alors $l - k \in S$. Ainsi,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k \varphi_{j,k}(x) = \sum_{l-k \in S} c_k \varphi_{j,k}(x).$$

Il vient alors, par l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k \varphi_{j,k}(x) \right|^p &\leq \left(\sum_{l-k \in S} |c_k|^{p'} \right)^{\frac{p}{p'}} \sum_{l-k \in S} |\varphi_{j,k}(x)|^p \\ &\leq C \|(c_k)_{l-k \in S}\|_{\ell_p}^p \sum_{l-k \in S} |\varphi_{j,k}(x)|^p \end{aligned}$$

car S est fini, donc les normes ℓ_p et $\ell_{p'}$ sont équivalentes sur S avec une constante d'équivalence dépendant de $\#S$. Ainsi,

$$\left(\int_{I_{j,l}} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k \varphi_{j,k}(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C^{\frac{1}{p}} \|(c_k)_{l-k \in S}\|_{\ell_p} \left(\int_{I_{j,l}} |\varphi_{j,k}(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C^{\frac{1}{p}} \|(c_k)_{l-k \in S}\|_{\ell_p} \#S^{\frac{1}{p}} \|\varphi_{j,0}\|_{L_p} \\
&\leq C^{\frac{1}{p}} \|(c_k)_{l-k \in S}\|_{\ell_p} \#S^{\frac{1}{p}} 2^{jd(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \|\varphi\|_{L_p} \\
&\leq C' 2^{jd(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \|(c_k)_{l-k \in S}\|_{\ell_p}
\end{aligned}$$

avec une constante C' indépendante de j .

Au final, puisque S est fini,

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k \varphi_{j,k} \right\|_{L_p}^p &\leq \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k \varphi_{j,k} \right\|_{L_p(I_{j,l})}^p \\
&\leq C'^p 2^{pjd(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} \sum_{l-k \in S} |c_k|^p \\
&= C'^p 2^{pjd(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_k|^p \sum_{l-k \in S} 1 \right) \\
&= C'' 2^{pjd(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_k|^p,
\end{aligned}$$

ce qui suffit pour montrer l'inégalité annoncée.

On peut alors montrer que les projecteurs sont uniformément bornés dans L^p . Pour ce faire, vu les hypothèses que l'on a imposées à φ dans la section 3.2.1, on peut considérer $\varphi \in L^p$ et $\tilde{\varphi} \in L^{p'}$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. On peut donc appliquer l'inégalité de Hölder pour obtenir que pour $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned}
|\langle f, \tilde{\varphi}_{j,k} \rangle| &\leq \|f\|_{L^p(\text{supp}(\tilde{\varphi}_{j,k}))} \|\tilde{\varphi}_{j,0}\|_{L^{p'}} \\
&\leq C 2^{dj(\frac{1}{2}-\frac{1}{p'})} \|f\|_{L^p(\text{supp}(\tilde{\varphi}_{j,k}))}.
\end{aligned}$$

Par sommation (ou passage au supremum), en utilisant à nouveau l'argument du recouvrement fini des supports, on obtient donc

$$\|(\langle f, \tilde{\varphi}_{j,k} \rangle)_{k \in \mathbb{Z}^d}\|_{\ell_p} \leq C 2^{dj(\frac{1}{2}-\frac{1}{p'})} \|f\|_{L^p}. \quad (4.2)$$

En utilisant cette inégalité pour majorer les coefficients c_k dans (4.1), on obtient

$$\|P_j f\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^p}$$

avec une constante C indépendante de j . Notons qu'en montrant (4.2), on a également montré l'inégalité qu'il nous manquait pour obtenir l'équivalence de l'énoncé. $\square$

Remarque 4.1.3. Le théorème précédent nous permet d'affirmer que les projecteurs réalisent l'erreur d'approximation à une constante multiplicative près. En effet, on a que pour n'importe quel projecteur borné P d'un espace de Banach X dans un sous-espace Y ,

$$\inf_{g \in Y} \|f - g\|_X \leq \|f - Pf\|_X \leq (1 + \|P\|) \inf_{g \in Y} \|f - g\|_X$$

où $\|P\| = \sup_{\|f\|_X=1} \|Pf\|_X$. En effet, on a

$$\|f - Pf\|_X \leq \|f - g\|_X + \|Pf - Pg\|_X \leq (1 + \|P\|) \|f - g\|_X.$$

Nous pouvons donc appliquer notre méthode de caractérisation à nos projections.

Théorème 4.1.4. *Pour $1 < p < \infty$, on a l'inégalité de Jackson*

$$\|f - P_j f\|_{L^p} \leq C 2^{-jn} |f|_{W^{n,p}} \text{ si } f \in W^{n,p}$$

lorsque V_j contient les polynômes de degré strictement inférieurs à n .

Démonstration. Pour $j \in \mathbb{Z}$, notons $\tilde{I}_{j,l} = \cup_{k \in F_l} \text{supp}(\tilde{\varphi}_{j,k})$ avec $F_l = \{k \in \mathbb{Z}^d : \text{supp}(\varphi_{j,k}) \cap I_{j,k} \neq \emptyset, I_{j,k} \in D\}$. Sur chaque $\tilde{I}_{j,k}$, par définition de l'infimum, pour tout $f \in W^{n,p}$ on peut considérer un polynôme $p_{j,k} \in \Pi_{n-1}$ tel que

$$\|f - p_{j,k}\|_{L^p(\tilde{I}_{j,k})} \leq 2 \inf_{g \in \Pi_{n-1}} \|f - g\|_{L^p(\tilde{I}_{j,k})}.$$

De plus, par construction des ondelettes, les supports des fonctions duales $\tilde{\varphi}_{j,k}$ sont des translatés dilatés d'un support compact fixe. On peut donc écrire $\tilde{I}_{j,l}$ comme l'image d'un domaine fixe $\tilde{\Omega}$ par la transformation affine

$$\phi_{j,l} : u \in \tilde{\Omega} \mapsto x = 2^{-j}(u + l) \in \tilde{I}_{j,l}.$$

L'ensemble F_l étant constitué d'indices k dont les supports $\text{supp}(\varphi_{j,k})$ intersectent le cube $I_{j,l}$, le domaine $\tilde{I}_{j,l}$ est formé d'un nombre fini de supports voisins se recouvrant mutuellement. Ainsi, $\tilde{I}_{j,l}$ est borné et connexe, donc $\tilde{\Omega}$ l'est également. Le théorème 4.1.1 nous donne alors qu'il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de n, p et d telle que pour tout $\hat{f} \in W^{n,p}$,

$$\inf_{\hat{g} \in \Pi_{n-1}} \left(\int_{\tilde{\Omega}} |\hat{f}(u) - \hat{g}(u)|^p du \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\sum_{|\alpha|=n} \int_{\tilde{\Omega}} \left| \frac{\partial^\alpha \hat{f}(u)}{\partial u^\alpha} \right|^p du \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On définit la fonction f sur $\tilde{I}_{j,l}$ par

$$f(x) = \hat{f}(\phi_{j,l}^{-1}(x)) = \hat{f}(2^j x - l).$$

Ainsi, en effectuant le changement de variable $x = 2^{-j}(u + l)$, on obtient

$$\int_{\tilde{\Omega}} |\hat{f}(u) - \hat{g}(u)|^p du = 2^{jd} \int_{\tilde{I}_{j,l}} |f(x) - g(x)|^p dx$$

et

$$\sum_{|\alpha|=n} \int_{\tilde{\Omega}} \left| \frac{\partial^\alpha \widehat{f}(u)}{\partial u^\alpha} \right|^p du = 2^{jd} \sum_{|\alpha|=n} \int_{\tilde{I}_{j,l}} \left| 2^{-jn} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\partial x^n} \right|^p dx.$$

Ainsi, on obtient

$$\inf_{g \in \Pi_{n-1}} \|f - g\|_{L_p(\tilde{I}_{j,k})} \leq C 2^{-nj} |f|_{W^{n,p}(\tilde{I}_{j,k})}$$

et donc

$$\|f - p_{j,k}\|_{L_p(\tilde{I}_{j,k})} \leq C 2^{-nj} |f|_{W^{n,p}(\tilde{I}_{j,k})} \quad (4.3)$$

où la constante ne dépend que de n, p et d . En outre, puisque V_j contient tous les polynômes de degré strictement inférieur à n , $P_j(p_{j,k}) = p_{j,k}$. Donc

$$\|f - P_j f\|_{L_p(I_{j,k})} \leq \|f - p_{j,k}\|_{L_p(I_{j,k})} + \|P_j(p_{j,k} - f)\|_{L_p(I_{j,k})}. \quad (4.4)$$

On peut également utiliser le fait que la bornitude de l'opérateur L_p montrée dans le théorème précédent est locale. En effet, rappelons que le projecteur P_j est défini par

$$P_j f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \langle f, \tilde{\varphi}_{j,k} \rangle \varphi_{j,k}(x).$$

Or, si $x \in I_{j,l}$, alors $\varphi_{j,k}(x) \neq 0$ implique que $k \in F_l$. On peut donc restreindre la somme :

$$P_j f(x) = \sum_{k \in F_l} \langle f, \tilde{\varphi}_{j,k} \rangle \varphi_{j,k}(x).$$

De plus, par définition de $\tilde{I}_{j,l}$, pour tout $k \in F_l$, la fonction $\tilde{\varphi}_{j,k}$ a son support inclus dans $\tilde{I}_{j,l}$. On en déduit que pour tout $x \in I_{j,l}$,

$$(P_j f)(x) = (P_j(f \chi_{\tilde{I}_{j,l}}))(x).$$

Ainsi,

$$\|P_j(f)\|_{L_p(I_{j,l})} = \|P_j(f \chi_{\tilde{I}_{j,l}})\|_{L_p(I_{j,l})} \leq C \|f \chi_{\tilde{I}_{j,l}}\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} = C \|f\|_{L_p(\tilde{I}_{j,l})}$$

où la constante C est celle du théorème précédent et est donc indépendante de j et l . En injectant cette inégalité et l'inégalité (4.3) dans (4.4), on obtient

$$\begin{aligned} \|f - P_j f\|_{L_p(I_{j,k})} &\leq C \|f - p_{j,k}\|_{L_p(\tilde{I}_{j,k})} \\ &\leq C 2^{-nj} |f|_{W^{n,p}(\tilde{I}_{j,k})} \end{aligned}$$

avec une constante C indépendante de j et k . Il suffit alors de sommer sur k les puissances p -èmes des deux membres en utilisant, comme dans le théorème précédent, que l'on travaille avec des recouvrements finis puisque nos ondelettes sont à support compact (ou de prendre le supremum sur k si $p = \infty$) pour conclure. $\square$

Théorème 4.1.5. Soit $1 < p < \infty$, si $\varphi \in W^{n,p}$, alors on a l'inégalité de type Bernstein suivante :

$$\|f\|_{W^{n,p}} \leq C 2^{nj} \|f\|_{L^p} \text{ si } f \in V_j.$$

Démonstration. On sait que la fonction $f \in V_j$ admet la décomposition $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k \varphi_{j,k}$. Considérons un vecteur $m = (m_1, \dots, m_d)$ tel que $|m| = n$. Remarquons que le raisonnement effectué pour obtenir l'inéquation (4.1) fonctionne dès qu'on a une fonction φ à support compact et dans L_p . On peut donc l'appliquer à $\partial^m \varphi$ pour obtenir

$$\begin{aligned} \|\partial^m f\|_{L^p} &= \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k \partial^m \varphi_{j,k} \right\|_{L^p} \\ &= 2^{nj} \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k 2^{\frac{dj}{2}} (\partial^m \varphi)(2^j \cdot -k) \right\|_{L^p} \\ &\leq C 2^{nj} 2^{jd(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})} \|(c_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}\|_{\ell^p} \\ &\leq C 2^{nj} \|f\|_{L^p} \end{aligned}$$

où la dernière inégalité est obtenue grâce à (4.2). $\square$

Corollaire 4.1.6. Pour $1 < p < \infty$, si V_j contient les polynômes de degré strictement inférieur à n et si $\varphi \in W^{n,p}$, alors pour tout $0 < \gamma < n$ et tout $0 < q \leq \infty$, on a

$$\mathcal{A}_q^\gamma(L^p, V_j) = (L^p, W^{n,p})_{\frac{\gamma}{n}, q}.$$

Démonstration. Cela découle directement du théorème 2.2.5 et des inégalités de Jackson et de Bernstein montrées dans les deux théorèmes précédents. $\square$

4.1.2 Bases hyperboliques

Passons maintenant à notre étude de l'espace d'approximation obtenu par approximation linéaire par des ondelettes hyperboliques. Nous suivrons le raisonnement de l'article [14]. L'idée est que lorsque nous travaillons avec des bases isotropes, nous approximons les fonctions à l'aide des espaces V_j qui imposent pour chaque j , que les ondelettes considérées ne dépassent pas un certain niveau de résolution. Lorsque l'on travaille avec des bases hyperboliques, les espaces analogues à ces espaces V_j sont les espaces suivants. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $1 < p \leq \infty$, on définit

$$\mathcal{H}_n := \mathcal{H}_n(L_p) := \overline{\text{span}}\{\psi_J : |J| > 2^{-n}\}.$$

Nous nous intéresserons donc à l'erreur d'approximation

$$E_n(f)_p := \inf_{g \in \mathcal{H}_n} \|f - g\|_p$$

et à l'espace d'approximation $\mathcal{A}_q^\alpha(L_p, \mathcal{H}_n)$ défini à partir de cette erreur.

Pour caractériser cet espace, nous allons, comme d'habitude, trouver l'espace Y satisfaisant aux inégalités de Jackson et de Bernstein. Notons que dans la suite de ce chapitre, nous aurons besoin de la théorie de Littlewood-Paley développée dans la section 3.1.

Nous allons montrer que l'espace $\mathcal{W}^r$ de la définition B.1.2 est celui qui satisfait aux inégalités de Jackson et Bernstein. Pour ce faire, nous allons avoir besoin de poser quelques conditions.

Pour montrer les inégalités de Jackson et de Bernstein, imposons les conditions suivantes à ψ_J et à sa base duale. Pour $r > \alpha$, on demande que

- (A1) $\psi_J, J \in \nabla$ engendre $L_p, 1 < p < \infty$ et satisfait (3.2);
- (A2) $(\mathcal{D}^r \psi_J)_J$ engendre $L_p, 1 < p < \infty$ et satisfait (3.2);
- (A3) pour tout $j \in \{0, \dots, r\}$, $\int_{\mathbb{R}} x^j \tilde{\psi}(x) dx = 0$;
- (A4) $|\tilde{\psi}(x)| \leq C \max(1, |x|^{-r-1-\varepsilon})$ pour un $\varepsilon > 0$.

Remarque 4.1.7. Les conditions précédentes s'obtiennent en fait à partir des hypothèses que l'on a imposées à notre base d'ondelettes. En effet, le théorème 3.2.3 nous a déjà donné que ψ_J était une base inconditionnelle de L^p qui vérifiait (3.2). De plus, pour que l'hypothèse (A2) soit vérifiée, il suffit de demander que ψ et $\tilde{\psi}$ soient de classe C^m avec $m > r$ et aient au moins $r + 1$ moments nuls (càd prendre N et $\tilde{N} > r$ dans la section 3.2.1). En effet, on pourra alors refaire la démonstration du théorème 3.2.3 pour $(\mathcal{D}^r \psi)_J$. Cette même condition sur les moments nuls nous assure alors (A3) et la condition (A4) vient de la continuité de ψ et de son support compact.

Notons que l'on remarque facilement que pour tout $J \in \nabla$, $(\mathcal{D}^r \psi)_J = |J|^r \mathcal{D}^r \psi_J$. De plus, au vu de (A3) et (A4), $\tilde{\psi}$ peut être intégré r fois pour trouver une fonction $\mu \in L_{p'}$ qui satisfait $(-1)^r \mu^{(r)} = \tilde{\psi}$. En effet, on peut poser

$$\mu(x) = (-1)^r \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{t_1} \dots \int_{-\infty}^{t_{r-1}} \tilde{\psi}(t_r) dt_r \dots dt_1.$$

La condition (A3) garantit alors que les primitives restent localisées : le fait que $\int_{\mathbb{R}} t^j \tilde{\psi}(t) dt = 0$ pour $j \leq r$ assure que la primitive $\mu(x)$ s'annule à l'infini au lieu de diverger comme x^{r-1} . En ajoutant la décroissance imposée par (A4), cela permet d'affirmer que μ appartient à $L_{p'}$.

Ainsi,

$$\mathcal{D}^r \mu_J = (-1)^{rd} |J|^{-r} \tilde{\psi}_J.$$

De plus, en utilisant une intégration par partie, on a que

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\mathcal{D}^r \psi)_J(x) \mu_{J'}(x) dx = |J|^r |J'|^{-r} \int_{\mathbb{R}^d} \psi_J(x) \tilde{\psi}_{J'}(x) dx = \delta(J, J').$$

Ainsi, μ_J est la base duale de $(\mathcal{D}^r \psi)_J$.

Le théorème suivant permet de caractériser l'appartenance à $\mathcal{W}^r$ en fonction des coefficients de la décomposition de f dans la base ψ_J .

Théorème 4.1.8. *Soient r un entier positif, $1 < p < \infty$ et ψ une fonction univariée qui satisfait les conditions (A1) à (A4). Alors, une fonction $f \in L_p$ est dans l'espace $\mathcal{W}^r(L_p)$ si et seulement si*

$$f = \sum_{J \in \nabla} c_J(f) \psi_J$$

avec

$$\left\| \left(\sum_{J \in \nabla} [|J|^{-r} |c_J(f)| \chi_J]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p < \infty \quad (4.5)$$

où $|J|$ représente la mesure du rectangle dyadique J . De plus, le membre de gauche de la dernière inégalité est équivalent à $\|f\|_{\mathcal{W}^r}$.

Démonstration. Commençons par montrer la condition nécessaire. Supposons donc que $f \in \mathcal{W}^r(L_p)$. La condition (A1) nous dit que $(\psi_J)_J$ satisfait (3.2), et en utilisant le lemme 3.1.11, on obtient que ces fonctions forment une base inconditionnelles de L_p . Ainsi, on a

$$f = \sum_{J \in \nabla} c_J(f) \psi_J$$

et par définition de la base duale, $c_J(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f \tilde{\psi}_J dx$. De la même manière, grâce à (A2), les fonctions $(\mathcal{D}^r \psi)_J$ forment aussi une base inconditionnelle de L_p et on a

$$\mathcal{D}^r f = \sum_{J \in \nabla} d_J(f) (\mathcal{D}^r \psi)_J$$

avec

$$d_J(f) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{D}^r f \mu_J dx = (-1)^{rd} \int_{\mathbb{R}^d} f \mathcal{D}^r \mu_J dx = |J|^{-r} \int_{\mathbb{R}^d} f \tilde{\psi}_J dx = |J|^{-r} c_J(f).$$

De plus, (A2) nous donne que $\|f\|_{\mathcal{W}^r} = \|\mathcal{D}^r f\|_p$ satisfait (3.2). Or, en remplaçant $d_J(f)$ dans le membre de droite de cette inégalité, on obtient que $\|f\|_{\mathcal{W}^r}$ est équivalent au membre de gauche de (4.5) et donc que cette expression est bien finie par hypothèse.

Montrons maintenant la condition suffisante. On suppose avoir $f \in L_p$ tel que le membre de gauche de (4.5) est fini. Par le même raisonnement que celui suivi pour montrer la condition nécessaire, on a toujours que

$$f = \sum_{J \in \nabla} c_J(f) \psi_J.$$

De plus, puisque $(\mathcal{D}^r \psi)_J$ satisfait (3.2) pour toute suite de coefficients et vu que le membre de gauche de (4.5) est fini, on a qu'il existe une fonction g dans L_p telle que

$$g = \sum_{J \in \nabla} |J|^{-r} c_J(f) (\mathcal{D}^r \psi)_J.$$

Or, puisque $(\mu_J)_J$ est la base duale de $((\mathcal{D}^r \psi)_J)_J$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} g \mu_J dx = |J|^{-r} c_J(f) = |J|^{-r} \int_{\mathbb{R}^d} f \tilde{\psi}_J dx = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{D}^r f \mu_J dx$$

vu le calcul fait plus haut. Or, par (A2), on sait que $(\mathcal{D}^r \psi)_J$ est une base inconditionnelle de L_p . Par dualité, on a donc que μ_J est une base inconditionnelle de $L_{p'}$. L'égalité montrée plus haut suffit donc à affirmer que g est la dérivée distributionnelle de f et donc que $f \in \mathcal{W}^r(L_p)$. $\square$

Grâce à ce théorème, on peut donc passer à la démonstration des inégalités de Jackson et de Bernstein.

Théorème 4.1.9. *Soient r , un entier positif, $1 < p < \infty$ et ψ , une fonction univariée qui satisfait les conditions (A1) à (A4). Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $f \in \mathcal{W}^r(L_p)$ et tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$E_n(f)_p \leq C 2^{-nr} \|f\|_{\mathcal{W}^r}. \quad (4.6)$$

Il existe également une constante $C' > 0$ telle que pour tout $g \in \mathcal{H}_n(L_p)$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|g\|_{\mathcal{W}^r} \leq C 2^{nr} \|g\|_p. \quad (4.7)$$

Démonstration. Commençons par montrer l'inégalité de Jackson. Soit $f \in \mathcal{W}^r(L_p)$. Le théorème précédent nous donne que

$$f = \sum_{J \in \nabla} c_J(f) \psi_J$$

avec (4.5) qui est satisfait. Soit $g = \sum_{|J| > 2^{-n}} c_J(f) \psi_J \in \mathcal{H}_n(L_p)$. On a alors

$$E_n(f)_p \leq \|f - g\|_p = \left\| \sum_{|J| \leq 2^{-n}} c_J(f) \psi_J \right\|_p$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \left\| \left(\sum_{|J| \leq 2^{-n}} [|c_J(f)|\chi_J]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \quad (\text{vu 3.2}) \\
&\leq C 2^{-nr} \left\| \left(\sum_{|J| \leq 2^{-n}} [|J|^{-r} c_J(f)|\chi_J]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \\
&\leq C 2^{-nr} \left\| \left(\sum_{J \in \nabla} [|J|^{-r} c_J(f)|\chi_J]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \\
&\leq C 2^{-nr} \|f\|_{\mathcal{W}^r}
\end{aligned}$$

où la dernière inégalité est obtenue par l'équivalence entre le membre de gauche de (4.5) et $\|f\|_{\mathcal{W}^r}$. L'inégalité de Jackson est donc démontrée.

Passons à l'inégalité de Bernstein. Supposons avoir $g = \sum_{|J| > 2^{-n}} c_J(g) \psi_J \in \mathcal{H}_n(L_p)$. Alors, en utilisant l'équivalence du théorème précédent et le fait que $\psi_J, J \in D(\mathbb{R}^d)$ satisfait (3.2), on a que

$$\begin{aligned}
\|g\|_{\mathcal{W}^r} &\leq C \left\| \left(\sum_{|J| > 2^{-n}} [|J|^{-r} c_J(g)|\chi_J]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \\
&\leq C 2^{nr} \left\| \left(\sum_{|J| > 2^{-n}} [|c_J(g)|\chi_J]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \\
&\leq C 2^{nr} \|g\|_p
\end{aligned}$$

et l'inégalité de Bernstein est démontrée. $\square$

Nous avons donc tout ce qu'il faut pour caractériser l'espace d'approximation cherché.

Corollaire 4.1.10. *Soient r , un entier positif, $1 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$ et $0 < \alpha < r$. Si ψ est une fonction univariée satisfaisant les conditions (A1) à (A4), alors*

$$\mathcal{A}_q^\alpha(L_p, \mathcal{H}_n) = (L_p, \mathcal{W}^r(L_p))_{\frac{\alpha}{r}, q}.$$

Démonstration. Cela découle directement du théorème 2.2.5 et du théorème précédent. $\square$

Remarque 4.1.11. Dans [4], Bergh et Löfström montrent que l'espace obtenu dans le corollaire précédent est en fait $B_q^\alpha(L_p)$.

Il n'est donc pas étonnant de ne pas voir apparaître le réel r dans le membre de gauche de l'égalité. Cela s'explique par le fait que ce réel est construit pour démontrer les inégalités de Jackson et de Bernstein, mais qu'il n'intervient pas directement dans la caractérisation de l'espace d'approximation, comme cela se voyait également dans le théorème 2.2.5.

4.2 Approximation non-linéaire

4.2.1 Bases isotropes

Nous pouvons maintenant passer à la caractérisation des espaces d'approximation dans le cas de l'approximation à n termes pour des bases isotropes d'ondelettes. Nous suivrons le raisonnement de [12] et, afin de simplifier les notations, nous travaillerons dans $L_p(\mathbb{R})$. Des adaptations des démonstrations permettent de passer au cas de $L_p(\mathbb{R}^d)$.

En reprenant les notations de la section 3.2.2, notons Σ_n l'ensemble des fonctions

$$F = \sum_{I \in \Lambda} a_I \psi_I$$

où $\Lambda \subset D$, $\#\Lambda \leq n$. Nous pouvons alors définir

$$\sigma_n(f)_p := \inf_{S \in \Sigma_n} \|f - S\|_{L_p(\mathbb{R})}.$$

Dans la suite, nous utiliserons la notation suivante.

Notation 4.2.1. Soit Λ , un ensemble fini d'intervalles dyadiques de la forme $[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)[$, $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, si x est contenu dans des intervalles de Λ , alors ces intervalles sont emboîtés. On note donc $I(x)$ le plus petit intervalle (au sens de l'inclusion) de Λ contenant x .

Dans le cas où x n'appartient à aucun intervalle de Λ , on pose $I(x) := \mathbb{R}$ et on adopte la convention $|I|^{-1} = 0$.

Nous allons donc démontrer l'inégalité de Jackson pour l'approximation à n termes par des ondelettes et constater qu'un certain espace de Besov vérifie cette inégalité. Pour ce faire, nous aurons besoin de la définition suivante.

Définition 4.2.2. On définit la fonction $S(f, \cdot)$ pour $f \in L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$ par

$$S(f, x) := \left(\sum_{I \in D} c_{I,2}(f)^2 |I|^{-1} \chi_I(x) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On a alors les équivalences suivantes pour cette fonction.

Proposition 4.2.3. Pour $1 < p < \infty$, pour $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, on a

1. $S(f, x) \asymp \left(\sum_{I \in D} c_{I,p}(f)^2 |I|^{\frac{-2}{p}} \chi_I(x) \right)^{\frac{1}{2}};$
2. $\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \asymp \|S(f, \cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}$ avec des constantes d'équivalence qui dépendent uniquement de p .

Démonstration. 1. Cela découle directement de l'équivalence entre les différentes normalisations donnée dans la remarque 3.2.2. Notons que dans le cas où on travaillerait avec un espace de dimension $d > 1$, alors les constantes d'équivalence dépendent de d , comme cela avait été précisé dans cette remarque.

2. On sait déjà que notre base d'ondelettes est une base inconditionnelle. De plus, le support compact de ces ondelettes nous permet d'affirmer que la condition (3.3) est satisfaite grâce à la remarque 3.1.7. Ainsi, le lemme 3.1.11 nous donne que l'équivalence (3.2) est elle aussi satisfaite par notre base d'ondelettes. L'équivalence cherchée est alors une simple réécriture de (3.2). $\square$

Pour caractériser l'espace d'approximation, nous aurons aussi besoin du lemme suivant tiré de [13] (p.94-95).

Lemme 4.2.4. *Soient $1 < p < \infty$ et Λ , un ensemble fini. Supposons que $f \in L_p(\mathbb{R})$ admet la décomposition en ondelettes*

$$f = \sum_{I \in \Lambda} c_{I,p}(f) \psi_{I,p}.$$

Si, pour tout $I \in \Lambda$, $|c_{I,p}(f)| \leq M$, alors il existe une constante C ne dépendant que de p telle que

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R})} \leq CM \# \Lambda^{\frac{1}{p}}.$$

De même, si pour tout $I \in \Lambda$, $|c_{I,p}(f)| \geq M$, alors il existe une constante C' ne dépendant que de la base d'ondelettes telle que

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R})} \geq C' M \# \Lambda^{\frac{1}{p}}.$$

Démonstration. Montrons la première partie du résultat. En utilisant l'équivalence de la proposition 4.2.3 et l'hypothèse, on a

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_p} &\leq C \left\| \left(\sum_{I \in \Lambda} c_{I,p}(f)^2 |I|^{-\frac{2}{p}} \chi_I \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_p} \\ &= C \left(\int \left(\sum_{I \in \Lambda} c_{I,p}(f)^2 |I|^{-\frac{2}{p}} \chi_I(x) \right)^{\frac{p}{2}} dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq CM \left\| \left(\sum_{I \in \Lambda} |I|^{-\frac{2}{p}} \chi_I \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_p} \\ &= CM \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{I \in \Lambda} |I|^{-\frac{2}{p}} \chi_I(x) \right)^{\frac{p}{2}} dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= CM \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{I \in \Lambda, x \in I} |I|^{-\frac{2}{p}} \right)^{\frac{p}{2}} dx \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Or, par définition des intervalles dyadiques et de la notation $I(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $I \in \Lambda$ qui contient x , il existe $j \geq 0$ tel que $|I| = 2^j |I(x)|$, donc $|I|^{\frac{-2}{p}} = 2^{\frac{-2j}{p}} |I(x)|^{\frac{-2}{p}}$. Alors,

$$\begin{aligned} \sum_{I \in \Lambda, x \in I} |I|^{\frac{-2}{p}} &= \sum_{j: 2^j |I(x)| \in \Lambda, x \in 2^j |I(x)| \in \Lambda} 2^{\frac{-2j}{p}} |I(x)|^{\frac{-2}{p}} \\ &\leq |I(x)|^{\frac{-2}{p}} \left(\sum_{j \geq 0} 2^{\frac{-2j}{p}} \right). \end{aligned}$$

Puisque $p > 1$, la série géométrique de la dernière inégalité converge et est donc majorée par une constante C' dépendant de p . On obtient donc

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_p} &\leq CM \left(\int_{\mathbb{R}} (C' |I(x)|^{\frac{-2}{p}})^{\frac{p}{2}} dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= C'' M \left(\int_{\mathbb{R}} |I(x)|^{-1} dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= C'' M \left\| |I(\cdot)|^{\frac{-1}{p}} \right\|_{L_p}. \end{aligned}$$

De plus, si $J \in \Lambda$, on définit le sous-ensemble $\tilde{J} := \{x : I(x) = J\}$. On obtient alors

$$\|f\|_{L_p}^p \leq CM^p \int_{\mathbb{R}^d} |I(\cdot)|^{-1} dx \leq CM^p \sum_{J \in \Lambda} \int_J |J^{-1}| \leq CM^p \# \Lambda.$$

Pour la deuxième partie, on utilise également l'équivalence de la proposition 4.2.3 et l'hypothèse pour obtenir que

$$\|f\|_{L_p} \geq C' M \left\| \left(\sum_{I \in \Lambda} |I|^{-\frac{2}{p}} \chi_I \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_p} \geq \left(\int_{\mathbb{R}} |I(x)|^{-1} dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Or, $M(\sum_{I \in \Lambda} |I|^{-\frac{2}{p}} \chi_I(x))^{\frac{1}{2}} \geq M |I(x)|^{-\frac{1}{p}}$ et $|I(x)|^{-1} \geq \tilde{C} \sum_{I \in \Lambda} |I|^{-1} \chi_I(x)$. Ainsi,

$$\|f\|_{L_p}^p \geq C' M^p \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{I \in \Lambda} |I|^{-1} \chi_I(x) dx = C' M^p \# \Lambda.$$

□

Le théorème suivant nous donne une première démonstration de l'inégalité de Jackson faisant intervenir des espaces de Lorentz.

Théorème 4.2.5. *Soient $1 < p < \infty$ et $s > 0$. Supposons que $f \in L_p$ soit telle que $(c_I)_{I \in D} := (c_{I,p}(f))_{I \in D}$ est une suite de $\ell_{\tau, \infty}$ avec $\frac{1}{\tau} = s + \frac{1}{p}$. Alors, il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de p et de s telle que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$*

$$\sigma_n(f)_p \leq C n^{-s} \|(c_I)\|_{\ell_{(\tau, \infty)}}.$$

Démonstration. Au vu du théorème 2.3.3, on a que

$$\#\{I : |c_I| > \varepsilon\} \leq M^\tau \varepsilon^{-\tau} \quad (4.8)$$

pour tout $\varepsilon > 0$ avec $M = \|(c_I)\|_{\ell_{(\tau, \infty)}}$. Posons $\Lambda_j := \{I : 2^{-j} < |c_I| \leq 2^{-j+1}\}$. Vu l'inégalité rappelée ci-dessus, pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{j=-\infty}^k \#\Lambda_j &\leq \sum_{j=-\infty}^k 2^{j\tau} M^\tau \\ &= M^\tau 2^{k\tau} \sum_{j=-\infty}^k 2^{(j-k)\tau} \\ &= M^\tau 2^{k\tau} \sum_{j'=-\infty}^0 2^{j'\tau} \\ &\leq CM^\tau 2^{k\tau} \end{aligned}$$

où la constante C ne dépend que de τ . Posons maintenant, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $F_j := \sum_{I \in \Lambda_j} c_I \psi_I$ et, pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $G_k := \sum_{j=-\infty}^k F_j$. Notons que ces deux séries sont bien convergentes car, vu les raisonnements effectués ci-dessus sur $\#\Lambda_j$ et $\sum_{j=-\infty}^k \#\Lambda_j$, on travaille avec des sommes finies. Par définition, on a que pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $G_k \in \Sigma_{N_k}$ avec $N_k \leq CM^\tau 2^{k\tau}$. On a

$$\|f - G_k\|_{L_p} \leq \sum_{j=k+1}^{+\infty} \|F_j\|_{L_p}.$$

Or, pour tout $j > k$, puisque pour tout $I \in \Lambda_j$, $|c_I| \leq 2^{-j+1}$, le lemme précédent et l'inégalité (4.8) nous donnent que

$$\|F_j\|_{L_p} \leq C 2^{-j+1} \#\Lambda_j^{\frac{1}{p}} \leq 2C 2^{-j} M^{\frac{\tau}{p}} 2^{\frac{j\tau}{p}} \leq C' M^{\frac{\tau}{p}} 2^{j(\frac{\tau}{p}-1)}$$

avec une constante C' ne dépendant que de p . Ainsi,

$$\begin{aligned} \|f - G_k\|_{L_p} &\leq C' M^{\frac{\tau}{p}} \sum_{j=k+1}^{\infty} 2^{j(\frac{\tau}{p}-1)} \\ &= C' M^{\frac{\tau}{p}} 2^{(\frac{\tau}{p}-1)(k+1)} \sum_{l=0}^{+\infty} 2^{l(\frac{\tau}{p}-1)}. \end{aligned}$$

Or, puisque $\frac{1}{\tau} = s + \frac{1}{p} > \frac{1}{p}$, on a $\frac{\tau}{p} < 1$, donc la série géométrique de la dernière inégalité converge. Ainsi,

$$\|f - G_k\|_{L_p} \leq CM^{\frac{\tau}{p}} 2^{k\frac{\tau}{p}-1}$$

avec une constante C ne dépendant que de p et de τ . On a donc obtenu que lorsque $N_k \asymp M^\tau 2^{k\tau}$,

$$\sigma_{N_k}(f)_p \leq CM(M^\tau 2^{k\tau})^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\tau}} = CMN_k^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\tau}} = CMN_k^{-s}.$$

Considérons maintenant $n \geq 1$. Puisque la suite N_k est strictement croissante et non majorée, on peut trouver $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que

$$N_k \leq n < N_{k+1}.$$

Alors, vu la décroissance de l'erreur d'approximation,

$$\sigma_n(f)_p \leq \sigma_{N_k}(f)_p \leq CMN_k^{-s}.$$

De plus, $n < N_{k+1} \asymp 2^\tau N_k$, donc $N_k > C2^{-\tau}n$ et

$$\sigma_n(f)_p \leq CMN_k^{-s} \leq CM2^{\tau s}n^{-s} = C'Mn^{-s},$$

ce qui conclut la preuve. $\square$

Maintenant que ce théorème est établi, nous pouvons passer à la démonstration de l'inégalité de Jackson pour un espace de Besov. Pour ce faire, nous aurons besoin de la caractérisation B.2.4.

Corollaire 4.2.6. *Soient $1 < p < \infty$, $s > 0$ et $f \in B_\tau^s(L_\tau)$ avec $\frac{1}{\tau} = s + \frac{1}{p}$. Supposons que ψ satisfasse les conditions suivantes :*

1. ψ admet r moments nuls avec $r > s$
2. $\psi \in B_q^\rho(L_\tau)$ pour un certain q et un certain $\rho > s$.

Alors, il existe une constante C ne dépendant que de p et de τ telle que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$\sigma_n(f)_p \leq Cn^{-s}|f|_{B_\tau^s(L_\tau)}.$$

Démonstration. Au vu de la remarque 3.2.2 et de la définition de τ , on a que

$$c_{I,\tau}(f) \asymp c_{I,p}(f)|I|^{\frac{1}{\tau}-\frac{1}{p}} = c_{I,p}(f)|I|^s.$$

Or, la caractérisation B.2.5 nous donne que

$$|f|_{B_\tau^s(L_\tau)} = \|(c_I)\|_{\ell_\tau} \geq \|(c_I)\|_{\ell_{(\tau,\infty)}},$$

où la dernière inégalité a été montrée dans la remarque 2.3.2 et on conclut en utilisant le théorème précédent. $\square$

Maintenant que nous avons trouvé l'espace qui vérifie l'inégalité de Jackson, il suffit de montrer que ce même espace satisfait l'inégalité de Bernstein. Nous pourrions alors trouver l'espace d'approximation recherché.

Théorème 4.2.7. *Soit $1 < p < \infty$. Supposons que les hypothèses du théorème 4.2.1 et que les hypothèses sur ψ du corollaire précédent soient vérifiées. Si $f = \sum_{I \in \Lambda} c_{I,p}(f)\psi_{I,p}$ avec $\#\Lambda \leq n$, on a*

$$|f|_{B_\tau^s(L_\tau)} \leq Cn^s \|f\|_{L_p}.$$

où la constante C ne dépend que de p et de s .

Démonstration. La caractérisation B.2.5 nous donne que

$$|f|_{B_\tau^s(L_\tau)}^\tau \leq C \int_{\mathbb{R}} \sum_{I \in \Lambda} |c_I|^\tau |I|^{-1} \chi_I(x) dx = C \int_{\mathbb{R}} \sum_{I \in \Lambda} |c_I|^\tau |I|^{-\frac{\tau}{p}} \chi_I(x) |I|^{-1+\frac{\tau}{p}} dx.$$

De plus, en reprenant les notations de la définition 4.2.2, on a que

$$|c_I| |I|^{-\frac{1}{p}} \chi_I \leq S(f).$$

Ainsi, en reprenant la notation 4.2.1 pour $I(x)$, on a que

$$\begin{aligned} |f|_{B_\tau^s(L_\tau)}^\tau &\leq C \int_{\mathbb{R}} S(f, x)^\tau \sum_{I \in \Lambda} |I|^{-1+\frac{\tau}{p}} \chi_I(x) dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}} S(f, x)^\tau |I(x)|^{-1+\frac{\tau}{p}} dx \\ &\leq C \left(\int_{\mathbb{R}} S(f, x)^p dx \right)^{\frac{\tau}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}} |I(x)|^{-1} dx \right)^{1-\frac{\tau}{p}} \\ &\leq C n^{1-\frac{\tau}{p}} \|S(f)\|_{L_p}^\tau \\ &\leq C n^s \|f\|_{L_p}^\tau, \end{aligned}$$

où la dernière inégalité est obtenue à partir de la caractérisation 4.2.3. $\square$

En utilisant le théorème 2.2.6, on arrive donc au résultat suivant.

Corollaire 4.2.8. *Soient $1 < p < \infty$, $s > 0$ et $\frac{1}{\tau} := s + \frac{1}{p}$. Si ψ satisfait aux hypothèses du théorème 4.2.1, alors, pour tout $0 < \gamma < s$ et tout $0 < q \leq \infty$,*

$$\mathcal{A}_q^\gamma(L_p) = (L_p, B_\tau^s(L_\tau))_{\frac{\gamma}{s}, q}.$$

4.2.2 Bases hyperboliques

Passons maintenant à l'étude de nos espaces d'approximation non-linéaire dans le cas où nous travaillons avec des bases hyperboliques d'ondelettes. Pour ce faire, on considère

$$\mathcal{H}_n := \{F = \sum_{J \in \Delta} c_J \psi_J : \Delta \subset \nabla, \#\Delta \leq n\}$$

où les ψ_J sont construits comme dans la section 3.2.3. Nous allons cependant changer d'espace de départ et ne plus travailler dans L_p mais dans l'espace de Sobolev $W^{m,2}([0,1])$ où $-\gamma < m < \gamma$, $\gamma := \sup\{s \in \mathbb{R} : V_j \subset W^{s,2}([0,1])\}$ conformément à ce qui est proposé dans [19]. Les raisons de ce changement d'espace seront explicitées dans la remarque 4.2.11. On peut alors définir l'erreur d'approximation

$$\sigma_n(f) := \inf_{F \in \mathcal{H}_n} \|f - F\|_{W^{m,2}([0,1])}$$

et l'espace d'approximation $\mathfrak{A}_q^s(W^{m,2}([0,1]))$ à partir de cette erreur.

Une fois encore, nous allons nous servir des inégalités de Jackson et de Bernstein pour caractériser cet espace d'approximation. Pour ce faire, nous aurons besoin du résultat suivant qui caractérise la norme de notre espace de Sobolev grâce à nos coefficients dans la base tensorielle¹.

Lemme 4.2.9. *En adoptant les hypothèses et les notations de la section 3.2.3, on a que si $f = \sum_{J \in \nabla} c_J \psi_J$,*

$$\|f\|_{W^{m,2}([0,1])}^2 \asymp \sum_{J \in \nabla} 2^{2m|J|_\infty} |c_J|^2, \quad -\tilde{\gamma} < m < \gamma.$$

On a alors le théorème suivant.

Théorème 4.2.10. *Supposons que $r > 0$, $-\tilde{\gamma} < m < \gamma$ et $\frac{1}{\tau} = r + \frac{1}{2}$. Alors, pour $0 < s < r$ et $0 < q \leq \infty$, on a*

$$\mathfrak{A}_q^s(W^{m,2}([0,1])) = (W^{m,2}([0,1]), \mathfrak{B}_\tau^{q,r,\tau}([0,1]))_{\frac{s}{r},q}$$

où l'espace de Besov hybride est celui de la définition B.2.6.

Démonstration. Pour obtenir ce théorème, nous devons montrer

1. qu'il existe $C > 0$ tel que $\sigma_n(f) \leq Cn^{-s} \|f\|_{\mathfrak{B}_\tau^{q,r,\tau}}$ si $f \in \mathfrak{B}_\tau^{q,r,\tau}$ (Jackson).
2. qu'il existe $C > 0$ tel que $\|f_n\|_{\mathfrak{B}_\tau^{q,r,\tau}} \leq Cn^s \|f_n\|_{W^{m,2}}$ si $f_n \in \mathcal{H}_n$ (Bernstein).

Commençons par montrer l'inégalité de Jackson. Notons que grâce à l'équivalence du lemme précédent, on a que

$$\Psi^m := \{2^{-m|J|_\infty} \psi_J : J \in \nabla\}$$

forme une base de Riez de $W^{m,2}$. Ainsi, on a que pour toute fonction $f \in W^{m,2}$, la meilleure approximation à n termes correspond asymptotiquement aux n termes qui ont les plus grands coefficients en valeur absolue. Ainsi, si

$$c^* = (c_J^*)_J$$

est un réarrangement décroissant (en valeur absolue) de la suite $(2^{m|J|_\infty} c_J)_J$, où les c_J sont les coefficients de f dans la décomposition en ondelettes, on a

$$\sigma_n(f)^2 \asymp \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k^*|^2.$$

Or, en utilisant cette équivalence et le fait que l'espace ℓ^τ est continûment plongé dans $\ell_{(\tau,\infty)}$, on a

$$\sigma_n(f)^2 \leq C \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k^*|^2$$

1. La démonstration de ce résultat peut-être trouvée dans [18] (théorème 1 p. 861).

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|c^*\|_{\ell_{(\tau,\infty)}}^2 k^{\frac{-2}{\tau}} \\
&\leq C \|c^*\|_{\ell_{(\tau,\infty)}}^2 \int_n^{\infty} t^{\frac{-2}{\tau}} dt \\
&\leq C \|c^*\|_{\ell_{\tau}}^2 \int_n^{\infty} t^{\frac{-2}{\tau}} dt \\
&= C \|c^*\|_{\ell_{\tau}}^2 \frac{n^{\frac{-2}{\tau}+1}}{\frac{-2}{\tau}+1} \\
&= C n^{-2r} \|c^*\|_{\ell_{\tau}}^2.
\end{aligned}$$

De plus, en utilisant les changements de normalisation, on a également

$$\begin{aligned}
\|c^*\|_{\ell_{\tau}}^{\tau} &= \sum_{J \in \nabla} |2^{m|J|_{\infty}} c_J|^{\tau} \\
&= \sum_{\bar{j} \in \mathbb{Z}^d} 2^{\tau m |\bar{j}|_{\infty}} \sum_{J \in \nabla_{\bar{j}}} |2^{|\bar{j}|_1(\frac{1}{\tau}-\frac{1}{2})} c_J^{(\tau)}|^{\tau} \\
&= \sum_{\bar{j} \in \mathbb{Z}^d} 2^{\tau(m|\bar{j}|_{\infty}+r|\bar{j}|_1)} \sum_{J \in \nabla_{\bar{j}}} |c_J^{(\tau)}|^{\tau} \\
&= \|c\|_{\mathfrak{B}_{\tau}^{m,r,\tau}}^{\tau}
\end{aligned}$$

En combinant les deux, on retrouve bien l'inégalité de Jackson. Montrons maintenant l'inégalité de Bernstein. Considérons un élément $f_n \in \mathcal{H}_n$. On sait qu'on peut l'écrire

$$f_n = \sum_{J \in \Delta} c_J \psi_J$$

avec $\#\Delta \leq n$. En utilisant de nouveau les passages aux différentes normalisations, l'inégalité de Hölder et l'équivalence du lemme précédent, on obtient

$$\begin{aligned}
\|f_n\|_{\mathfrak{B}_{\tau}^{m,r,\tau}}^{\tau} &= \sum_{J \in \Delta} 2^{\tau(m|J|_{\infty}+r|J|_1)} |c_J^{(\tau)}|^{\tau} \\
&= \sum_{J \in \Delta} 2^{\tau(m|J|_{\infty}+r|J|_1)} |2^{|\bar{J}|_1(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} c_J|^{\tau} \\
&= \sum_{J \in \Delta} 2^{\tau m |J|_{\infty}} |c_J|^{\tau} \\
&\leq C \left(\sum_{J \in \Delta} 1 \right)^{1-\frac{\tau}{2}} \left(\sum_{J \in \Delta} 2^{2m|J|_{\infty}} |c_J|^2 \right)^{\frac{\tau}{2}} \\
&\leq C n^{r\tau} \|c\|_{W^{m,2}}^{\tau}.
\end{aligned}$$

□

Remarque 4.2.11. Dans le but d'adapter le théorème précédent au cas de l'espace L_p , l'idée poursuivie était, dans la définition de l'espace de Besov à régularité hybride B.2.6, de laisser tomber le facteur $2^{\tau m|J|_\infty}$ qui dépendait de la régularité de l'espace de Sobolev. Nous aurions alors remplacé l'espace de Besov du théorème précédent par l'espace $\mathfrak{B}_\tau^{s,\tau}$ des fonctions f dont le vecteur de composantes normalisées dans L_τ vérifie

$$\|c\|_{\mathfrak{b}_\tau^{s,\tau}} := \left[\sum_{\bar{j} \in \mathbb{Z}^d} 2^{\tau s|\bar{j}|_1} \sum_{J \in \nabla_{\bar{j}}} |c_J^{(\tau)}|^\tau \right]^{\frac{1}{\tau}} < \infty.$$

Cependant, pour arriver à adapter la démonstration du théorème précédent, nous aurions eu besoin de pouvoir écrire l'équivalence suivante.

$$\|f\|_{L_p} \asymp \left(\sum_{J \in \nabla} 2^{p|J|_1(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})} |c_J|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Pour tenter de démontrer une telle équivalence, on peut remarquer que grâce à l'équivalence (3.2),

$$\|f\|_{L_p} \asymp \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{\bar{j} \in \mathbb{Z}^d} \sum_{J \in \nabla_{\bar{j}}} |c_J|^2 |J|^{-1} \chi_J(x) \right)^{\frac{p}{2}} dx.$$

Pour $\bar{j} = (j_1, \dots, j_d)$ fixé, considérons

$$F_{\bar{j}}(x) := \sum_{J \in \nabla_{\bar{j}}} |c_J|^2 |J|^{-1} \chi_J(x).$$

Au vu du support compact de nos ondelettes, à $\bar{j}$ fixé, le nombre de rectangles $J \in \nabla_{\bar{j}}$ contenant un point x est borné par une constante M indépendante de x et de $\bar{j}$. Donc pour presque tout x , $F_{\bar{j}}(x)$ ne contient qu'un nombre fini de termes non nuls. Par équivalence des normes ℓ_q en dimension finie, on a donc

$$(F_{\bar{j}}(x))^{\frac{p}{2}} \asymp \sum_{J \in \nabla_{\bar{j}}} |c_J|^p 2^{p\frac{|\bar{j}|_1}{2}} \chi_J(x).$$

A ce stade, pour nous en sortir, nous devrions pouvoir écrire

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{\bar{j}} F_{\bar{j}}(x) \right)^{\frac{p}{2}} dx \asymp \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{\bar{j}} (F_{\bar{j}}(x))^{\frac{p}{2}} dx.$$

Cette dernière équivalence s'avère malheureusement fausse en dimension supérieure ou égale à deux, en raison de l'impossibilité d'intervertir la norme $\ell^{p/2}$ et la norme ℓ^1 sur les indices d'échelles $\bar{j}$ lors de l'intégration. N'ayant pas trouvé de démonstration alternative, nous travaillons dans l'espace de Sobolev $W^{m,2}$.

Chapitre 5

Approximation trigonométrique

Dans le cadre de l'analyse harmonique, on peut choisir d'étudier les séries de Fourier dans l'espace $L_2(\mathbb{T})$ où on définit $\mathbb{T} := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. On sait que dans $L_2(\mathbb{T})$, on a la convergence des séries de Fourier (voir par exemple [2]). Etant donnée une fonction $f \in L_1(\mathbb{T})$, on peut définir ses coefficients de Fourier $(a_k)_{k \geq 0}$ et $(b_k)_{k \geq 1}$ grâce aux formules

$$a_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt, \quad b_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt.$$

Bien que ces coefficients permettent de construire formellement une série trigonométrique, celle-ci ne converge pas nécessairement vers f dans le cadre général de $L_1(\mathbb{T})$. Cependant, on peut se demander à quel point une combinaison linéaire finie de ces fonctions trigonométriques peut approcher f . Ainsi, dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à l'approximation par des polynômes trigonométriques.

5.1 Approximation linéaire

Dans cette section, on considère les espaces

$$\mathcal{T}_n = \left\{ T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), a_k, b_k \in \mathbb{R} \forall k \leq n \right\}$$

et l'erreur d'approximation

$$E_n(f)_p := \inf_{T \in \mathcal{T}_n} \|f - T\|_{L_p}$$

pour une fonction $f \in L_p(\mathbb{T})$, $1 \leq p \leq \infty$. Notre objectif est donc de trouver un espace vérifiant les inégalités de Jackson et de Bernstein pour cette erreur afin de pouvoir caractériser l'espace d'approximation. Nous suivons l'approche de [15].

5.1.1 Noyau de Jackson

Pour parvenir à l'inégalité de Jackson, on va utiliser les intégrales de la forme

$$L_n(f, x) := \int_{\mathbb{T}} f(x+t) \Lambda_n(t) dt$$

où $\Lambda_n(t) = \sum_{k=0}^n a_k \cos(kt) \geq 0$ est un polynôme trigonométrique de degré inférieur à n , positif, pair et qui vérifie

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Lambda_n(t) dt = 1.$$

Puisque Λ_n est pair, en effectuant le changement de variable $u = x + t$, on obtient que

$$L_n(f, x) = \int_{\mathbb{T}} f(u) \Lambda_n(x-u) du = \sum_{k=0}^n a_k \int_{\mathbb{T}} f(u) \cos(k(x-u)) du.$$

En appliquant l'identité trigonométrique

$$\cos(k(x-u)) = \cos(kx) \cos(ku) + \sin(kx) \sin(ku)$$

à cette égalité, on obtient

$$L_n(f, x) = \sum_{k=0}^n a_k \cos(kx) \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos(ku) du + \sum_{k=0}^n a_k \sin(kx) \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin(ku) du. \quad (5.1)$$

Ainsi, on remarque que $L_n(f, \cdot)$ est un polynôme trigonométrique de degré inférieur à n . De plus, si f est pair, alors l'intégrale dans la deuxième somme de (5.1) est nulle et $L_n(f, \cdot)$ est pair.

Le lemme suivant nous donne une majoration utilisant les modules de continuité (cfr. définition B.2.1) qui nous sera utile pour montrer l'inégalité de Jackson.

Lemme 5.1.1. *S'il existe une constante C telle que le noyau Λ_n satisfait les inégalités*

$$\int_0^{\pi} t^k \Lambda_n(t) dt \leq C n^{-k} \quad (5.2)$$

pour $k = 0, 1, 2$, alors

$$\|f - L_n(f, \cdot)\|_{L_p} \leq 4C \omega_p^2(f, n^{-1}).$$

Démonstration. Commençons par remarquer que puisque Λ_n est pair et d'intégrale égale à 1,

$$\begin{aligned} L_n(f, x) - f(x) &= L_n(f, x) - \int_{\mathbb{T}} f(x) \Lambda_n(t) dt \\ &= \int_{\mathbb{T}} (f(x+t) - f(x)) \Lambda_n(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\pi}^0 (f(x+t) - f(x))\Lambda_n(t)dt + \int_0^\pi (f(x+t) - f(x))\Lambda_n(t)dt \\
&= \int_0^\pi (f(x-t) - f(x))\Lambda_n(t)dt + \int_0^\pi (f(x+t) - f(x))\Lambda_n(t)dt \\
&= \int_0^\pi (f(x+t) + f(x-t) - 2f(x))\Lambda_n(t)dt.
\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant l'inégalité de Minkowski et le point 2 de la proposition B.2.2 pour $\lambda = nt$ et $t = n^{-1}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\|f - L_n(f, \cdot)\|_{L_p} &\leq \int_0^\pi \|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)\|_{L_p} \Lambda_n(t)dt \\
&\leq \int_0^\pi \omega_p^2(f, t) \Lambda_n(t)dt \\
&\leq \omega_p^2(f, n^{-1}) \int_0^\pi (nt+1)^2 \Lambda_n(t)dt \\
&= \omega_p^2(f, n^{-1}) \left(n^2 \int_0^\pi t^2 \Lambda_n(t)dt + 2n \int_0^\pi t \Lambda_n(t)dt + \int_0^\pi \Lambda_n(t)dt \right) \\
&\leq 4C\omega_p^2(f, n^{-1})
\end{aligned}$$

où la dernière inégalité est obtenue grâce à nos hypothèses. $\square$

Dans la suite, on s'intéressera à des noyaux particuliers définis par

$$K_{n,r}(t) := \begin{cases} \lambda_{n,r} m^{2r} & \text{si } t = 2\pi \mathbb{Z} \\ \lambda_{n,r} \left(\frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)} \right)^{2r} & \text{sinon} \end{cases}$$

où $n, r > 0$, $m := \lfloor \frac{n}{r} \rfloor + 1$ et où les constantes $\lambda_{n,r}$ sont choisies pour que

$$\int_{\mathbb{T}} K_{n,r}(t)dt = 1.$$

Ces noyaux sont appelés les noyaux généralisés de Jackson. On constate directement que pour tous $n, r > 0$, $K_{n,r}$ est une fonction positive et paire. On a également que c'est un polynôme trigonométrique de degré inférieur à n . En effet, considérons

$$D_m(t) = \sum_{k=0}^{m-1} e^{ikt}.$$

Il s'agit de la somme des m premiers termes d'une suite géométrique et on a donc

$$D_m(t) = \frac{1 - e^{imt}}{1 - e^{it}} = \frac{e^{imt/2}(e^{-imt/2} - e^{imt/2})}{e^{it/2}(e^{-it/2} - e^{it/2})} = e^{i(m-1)t/2} \frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)}.$$

Ainsi, on a

$$|D_m(t)|^2 = \left(\frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)} \right)^2.$$

Mais on a également

$$\begin{aligned} |D_m(t)|^2 &= D_m(t) \overline{D_m(t)} \\ &= \left(\sum_{j=0}^{m-1} e^{ijt} \right) \left(\sum_{l=0}^{m-1} e^{-ilt} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{m-1} e^{i(j-l)t}. \end{aligned}$$

Effectuons le changement d'indice $k = j - l$. Les valeurs possibles de k vont de $-(m-1)$ à $m-1$. Pour chaque k , comptons le nombre de couples (j, l) :

- Si $k \geq 0$, alors $j = l + k$. Comme $j \leq m-1$, on a $l + k \leq m-1$, donc $l \leq m-1-k$. Il y a donc $m-k$ valeurs pour l .
- Par symétrie, si $k < 0$, il y a $m - |k|$ couples.

La somme devient donc

$$|D_m(t)|^2 = \sum_{k=-(m-1)}^{m-1} (m - |k|) e^{ikt} = m \sum_{k=1}^{m-1} (m - k) (e^{ikt} + e^{-ikt}) = m + 2 \sum_{k=1}^{m-1} (m - k) \cos(kt).$$

Ainsi,

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)} \right)^2 = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} \left(1 - \frac{k}{m}\right) \cos(kt)$$

Ainsi, $\frac{1}{2m} \left(\frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)} \right)^2$ est un polynôme trigonométrique de degré $m-1$ et en en prenant la puissance r , grâce à l'identité trigonométrique $\cos(A) \cos(B) = \frac{1}{2}(\cos(A+B) + \cos(A-B))$, on obtiendra un polynôme trigonométrique de degré $r(m-1)$. Or, puisque $m := \lfloor \frac{n}{r} \rfloor + 1$, $r(m-1) \leq n$.

De plus, on a également le lemme suivant.

Lemme 5.1.2. *Pour tout $r \in \mathbb{N}_0$, on a l'équivalence $\lambda_{n,r} \asymp n^{-2r+1}$ lorsque $n \rightarrow \infty$. De plus, il existe une constante C_r telle que*

$$\int_0^\pi t^k K_{n,r}(t) dt \leq C_r n^{-k}$$

pour $k = 0, 1, \dots, 2r-2$.

Démonstration. Par construction, on a

$$\lambda_{n,r}^{-1} = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)} \right)^{2r} dt = 2 \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)} \right)^{2r} dt.$$

De plus, pour $0 \leq t \leq \pi$, on a $\frac{t}{\pi} \leq \sin(\frac{t}{2}) \leq \frac{t}{2}$, donc

$$\lambda_{n,r}^{-1} \asymp \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin(mt/2)}{t} \right)^{2r} dt \asymp m^{2r-1} \int_0^{m\pi/2} \left(\frac{\sin(u)}{u} \right)^{2r} du \asymp n^{2r-1},$$

ce qui suffit pour la première partie du résultat. De même, pour $0 < k < 2r - 2$,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} t^k K_{n,r}(t) dt &\leq C \lambda_{n,r} \int_0^{\pi} t^k \left(\frac{\sin(mt/2)}{t} \right)^{2r} dt \\ &\leq C n^{2r-k-1} \lambda_{n,r} \int_0^{m\pi/2} u^k \left(\frac{\sin(u)}{u} \right)^{2r} du \\ &\leq C n^{-k}. \end{aligned}$$

□

5.1.2 Inégalité de Jackson

A l'aide des noyaux généralisés de Jackson, on va pouvoir démontrer l'inégalité de Jackson pour les polynômes trigonométriques. En effet, on définit l'intégrale de Jackson par

$$J_{n,r}(f, x) := \int_{\mathbb{T}} f(x+t) K_{n,r}(t) dt.$$

On a alors le théorème suivant.

Théorème 5.1.3. *Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\|f - J_{n,2}(f)\|_{L_p} \leq C \omega_p^2(f, n^{-1}) \text{ pour tout } n > 0.$$

Démonstration. Le lemme 5.1.2 nous donne que le noyau de Jackson $K_{n,2}$ vérifie la condition (5.2) pour une constante C ne dépendant pas de n . La conclusion découle alors du lemme 5.1.1. □

On peut encore améliorer cette majoration pour obtenir l'inégalité de Jackson recherchée. On va, par exemple, chercher à remplacer ω^2 par ω^r , $r > 2$ dans la majoration précédente. Pour ce faire, on utilise l'opérateur

$$S_{n,r}(f, x) := \int_{\mathbb{T}} [(-1)^{r+1} \Delta_t^r(f, x) + f(x)] K_{n,r}(t) dt$$

où $\Delta_t^r(f, x) = \sum_{k=0}^r (-1)^{r+k} \binom{r}{k} f(x+kt)$ sont les $r^{\text{èmes}}$ différences de f .

Notons que $S_{n,r}(f, x)$ est une combinaison linéaire de termes de la forme

$$\int_{\mathbb{T}} f(x + kt) \cos(lt) dt, \quad k = 1, \dots, r, l = 1, \dots, n.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} (-1)^{r+1} \Delta_t^r(f, x) + f(x) &= (-1)^{r+1} (-1)^r f(x) + (-1)^{r+1} \sum_{k=1}^r (-1)^{r+k} \binom{r}{k} f(x + kt) + f(x) \\ &= -f(x) + (-1)^{r+1} \sum_{k=1}^r (-1)^{r+k} \binom{r}{k} f(x + kt) + f(x) \\ &= (-1)^{r+1} \sum_{k=1}^r (-1)^{r+k} \binom{r}{k} f(x + kt). \end{aligned}$$

De plus, on sait déjà que $K_{n,r}$ est un polynôme trigonométrique pair de degré inférieur à n , donc on peut l'écrire

$$\sum_{l=0}^n a_l \cos(lt).$$

Au final,

$$S_{n,r}(f, x) = \int_{\mathbb{T}} \left((-1)^{r+1} \sum_{k=1}^r (-1)^{r+k} \binom{r}{k} f(x + kt) \right) \left(\sum_{l=0}^n a_l \cos(lt) \right) dt,$$

ce qui suffit.

De plus, on a que $f(x + kt)$ est une fonction de t qui est $\frac{2\pi}{k}$ -périodique. Or, on a le lemme suivant.

Lemme 5.1.4. *Si pour un entier positif k , la fonction $g \in L_1(\mathbb{T})$ a une période de $\frac{2\pi}{k}$, alors, pour tout entier l qui n'est pas divisible par k ,*

$$\int_{\mathbb{T}} g(t) \cos(lt) dt = \int_{\mathbb{T}} g(t) \sin(lt) dt = 0.$$

Démonstration. Puisque la fonction g est $\frac{2\pi}{k}$ périodique, on a

$$I = \int_0^{2\pi} g(t) e^{ilt} dt = \int_{\frac{2\pi}{k}}^{2\pi + \frac{2\pi}{k}} g(t) e^{ilt} dt.$$

En appliquant le changement de variable $u = t - \frac{2\pi}{k}$, on obtient

$$I = e^{\frac{2i\pi l}{k}} \int_0^{2\pi} g(u) e^{ilu} du = e^{\frac{2i\pi l}{k}} I.$$

On a donc

$$I(1 - e^{\frac{2i\pi l}{k}}) = 0.$$

Or, par hypothèse, k ne divise pas l , donc $e^{\frac{2i\pi l}{k}} \neq 1$. Ainsi, on a $I = 0$ et donc

$$\operatorname{Re}(I) = \int_{\mathbb{T}} g(t) \cos(lt) dt = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(I) = \int_{\mathbb{T}} g(t) \sin(lt) dt = 0.$$

□

Au vu de ce lemme, on a que $\int_{\mathbb{T}} f(x + kt) \cos(lt) dt$ est nul sauf si k divise l . Ainsi, si on fixe $k \in \{1, \dots, r\}$ et $l \in \{1, \dots, n\}$ divisible par k , on a en effectuant le changement de variable $u = x + kt$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} f(x + kt) \cos(lt) dt &= \frac{1}{k} \int_x^{x+2\pi k} f(u) \cos(l \frac{u-x}{k}) du \\ &= \int_{\mathbb{T}} f(u) \cos(\frac{l}{k}u - \frac{l}{k}x) du \\ &= \cos(\frac{l}{k}x) \int_{\mathbb{T}} f(u) \cos(\frac{l}{k}u) du + \sin(\frac{l}{k}x) \int_{\mathbb{T}} f(u) \sin(\frac{l}{k}u) du. \end{aligned}$$

Comme $S_{n,r}(f, x)$ est une combinaison linéaire de termes de cette forme, on a finalement montré que $S_{n,r}(f, x)$ est un polynôme trigonométrique de degré inférieur à n .

On peut donc utiliser ce polynôme pour prouver l'inégalité de Jackson.

Théorème 5.1.5. *Pour $r = 1, 2, \dots$, il existe une constante C_r telle que*

$$E_n(f)_p \leq C_r \omega_p^r(f, n^{-1})$$

pour tout $n = 1, 2, \dots, 1 \leq p \leq \infty$ lorsque $f \in L_p(\mathbb{T})$, $1 \leq p < \infty$ où la définition de ω_p^r est donnée en B.2.1. En particulier, pour tout $n = 1, 2, \dots$, on a l'inégalité

$$E_n(f)_p \leq C_r n^{-r} |f|_{W^{r,p}}.$$

Démonstration. Puisque les noyaux de Jackson généralisés sont d'intégrale égale à 1, on a

$$f(x) = \int_{\mathbb{T}} f(x) K_{n,r}(t) dt.$$

Ainsi, on a

$$S_{n,r}(f, x) - f(x) = \int_{\mathbb{T}} [(-1)^{r+1} \Delta_t^r(f, x) + f(x) - f(x)] K_{n,r}(t) dt = (-1)^{r+1} \int_{\mathbb{T}} \Delta_t^r(f, x) K_{n,r}(t) dt.$$

Par l'inégalité de Minkowski et la définition du module de continuité B.2.1, il vient

$$\|S_{n,r}(f, \cdot) - f\|_{L_p} \leq \int_{\mathbb{T}} \|\Delta_t^r(f, \cdot)\|_{L_p} K_{n,r}(t) dt \leq \int_{\mathbb{T}} \omega_p^r(f, |t|) K_{n,r}(t) dt.$$

En utilisant, la deuxième propriété de la proposition B.2.2 pour $\lambda = n|t|$ et $t = \frac{1}{n}$, on obtient

$$\|S_{n,r}(f, \cdot) - f\|_{L_p} \leq \omega_p^r(f, n^{-1}) \int_{\mathbb{T}} (n|t| + 1)^r K_{n,r}(t) dt.$$

Or, le terme $(n|t| + 1)^r$ se développe avec la formule du binôme de Newton :

$$(n|t| + 1)^r = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (n|t|)^j.$$

Donc

$$\int_{\mathbb{T}} (n|t| + 1)^r K_{n,r}(t) dt = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} n^j \int_{\mathbb{T}} |t|^j K_{n,r}(t) dt.$$

Le lemme 5.1.2 nous donne alors que pour chaque terme de la somme, il existe une constante C indépendante de n telle que

$$n^j \int_{\mathbb{T}} |t|^j K_{n,r}(t) dt \leq n^j C n^{-j} = C.$$

Ainsi, $\int_{\mathbb{T}} (n|t| + 1)^r K_{n,r}(t) dt$ est donc majoré par une constante C_r qui ne dépend que de r . Au final,

$$\|S_{n,r}(f, \cdot) - f\|_{L_p} \leq C_r \omega_p^r(f, n^{-1}).$$

et donc

$$E_n(f)_p \leq C_r \omega_p^r(f, n^{-1}).$$

La majoration par $|f|_{W^{r,p}}$ découle directement du point 3 de la proposition B.2.2. $\square$

Les deux corollaires suivants nous seront utiles lorsque nous traiterons de l'approximation non linéaire.

Corollaire 5.1.6. *Supposons que $f \in W^{r,p}$. Alors,*

$$E_n(f)_p \leq C_r n^{-r} \omega_p(f^{(r)}, n^{-1}).$$

Démonstration. Cela découle du théorème précédent et de la propriété 4 de B.2.2. $\square$

Corollaire 5.1.7. *Si $f \in (\text{Lip}\alpha)_p$, $0 < \alpha$, alors*

$$E_n(f)_p = \mathcal{O}(n^{-\alpha}).$$

Démonstration. Cela découle directement du théorème 5.1.5 et de la définition de l'espace de Lipschitz d'ordre α rappelée en B.3.1. $\square$

5.1.3 Inégalité de Bernstein

Nous avons donc trouvé un espace satisfaisant à l'inégalité de Jackson pour notre base de polynômes trigonométriques. Nous devons donc maintenant prouver que ce même espace satisfait à l'inégalité de Bernstein.

Commençons par établir cette inégalité pour la norme L_∞ . Pour ce faire, on utilise le théorème de Szegö.

Théorème 5.1.8. *Pour tout polynôme trigonométrique T_n de degré inférieur à n , on a*

$$T'_n(t)^2 + n^2 T_n(t)^2 \leq n^2 \|T_n\|_{L_\infty}^2, t \in \mathbb{T}.$$

Démonstration. Supposons d'abord que $\|T_n\|_{L_\infty} < 1$. On se place en $t = 0$ et on suppose également que $T'_n(0) \geq 0$, ce qui ne changera pas le résultat obtenu puisque tous les termes sont élevés au carré dans ce que l'on cherche à montrer. Soit α le réel tel que $|\alpha| < \frac{\pi}{2n}$ défini par

$$\sin(n\alpha) = T_n(0)$$

et soit S_n le polynôme trigonométrique défini par

$$S_n(x) := \sin(n(x + \alpha)) - T_n(x).$$

On considère les points $t_k := -\alpha + \frac{(2k-1)\pi}{2n}$ pour $k \in \mathbb{Z}$. On a que

$$\sin(n(t_k + \alpha)) = \sin(k\pi - \frac{\pi}{2}) = (-1)^{k+1}, k \in \mathbb{Z}.$$

De plus, puisqu'on a supposé que $\|T_n\|_{L_\infty} < 1$,

$$\text{sign}(S_n(t_k)) = (-1)^{k+1} \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z},$$

donc puisque S_n est de degré n et a donc au plus $2n$ zéros, S_n a un unique zéro c_k dans chaque intervalle $]t_k, t_{k+1}[$. Or, $0 \in]t_0, t_1[$ et $S_n(0) = 0$, donc $c_0 = 0$. De plus, on a $S_n(t_1) > 0$ donc on doit forcément avoir $S'_n(0) > 0$, sinon il devrait y avoir un autre zéro dans $]t_0, t_1[$. Ainsi,

$$0 \leq T'_n(0) = n \cos(n\alpha) - S'_n(0) < n \cos(n\alpha) = n \sqrt{1 - \sin^2(n\alpha)} = n \sqrt{1 - T_n(0)^2}.$$

et

$$T'_n(0)^2 + n^2 T_n(0)^2 \leq n^2.$$

Quitte à refaire le même raisonnement appliqué au polynôme

$$P(x) = T_n(x + t_0),$$

on trouve que

$$T'_n(t_0)^2 + n^2 T_n(t_0)^2 \leq n^2$$

pour tout $t_0 \in \mathbb{T}$. Pour un polynôme T_n quelconque, on considère $\lambda > \|T_n\|_{L_\infty}$ et on applique cette relation à $\frac{T_n}{\lambda}$. On a alors

$$T'_n(t)^2 + n^2 T_n(t)^2 \leq \lambda^2 n^2, t \in \mathbb{T}$$

et la conclusion s'obtient en faisant tendre λ vers $\|T_n\|_{L_\infty}$. $\square$

Corollaire 5.1.9. *Soit T_n un polynôme trigonométrique de degré inférieur à n . On a*

$$\|T'_n\|_{L_\infty} \leq n \|T_n\|_{L_\infty}.$$

En particulier,

$$\|T^{(r)}\|_{L_\infty} \leq n^r \|T_n\|_{L_\infty}, k = 1, 2, \dots$$

Nous allons également avoir besoin de la relation de quasi-ordre¹ de Hardy-Littlewood. A l'origine, cette relation repose sur les réarrangements décroissants de fonctions. Cependant, nous allons en donner ici une version qui s'applique directement au tore. L'équivalence entre cette version et celle faisant intervenir les réarrangements décroissants de fonctions est démontrée dans la section 2 du chapitre 2 de [15].

Définition 5.1.10. Soient f et g , deux fonctions intégrables sur $\mathbb{T}$. On note $f \prec g$ si pour tout ensemble mesurable $A \subset \mathbb{T}$, il existe un autre ensemble $B \subset \mathbb{T}$ tel que

$$|A| = |B| \quad \text{et} \quad \int_A |f| dt = \int_B |g| dt.$$

On a alors le théorème suivant.

Théorème 5.1.11. *Pour tout polynôme trigonométrique T_n de degré inférieur à n et à coefficients complexes, on a*

$$T'_n \prec n T_n.$$

Démonstration. Soit $A \subset \mathbb{T}$. On définit

$$Q(t) = \int_{\mathbb{T}} \chi_A(s) T_n(s+t) \text{sign}(T'_n(s)) ds$$

où on adopte la convention $\text{sign}(0) = 0$. Q est un polynôme trigonométrique de degré inférieur à n . Soit $t_0 \in \mathbb{T}$ tel que $|Q(t_0)| = \|Q\|_{L_\infty}$. En utilisant la première inégalité obtenue dans le corollaire 5.1.9, on obtient

$$\begin{aligned} \int_A |T'_n(s)| ds &= \int_{\mathbb{T}} \chi_A(s) |T'_n(s)| ds = Q'(0) \\ &\leq n \|Q\|_{L_\infty} = n |Q(t_0)| \\ &\leq n \int_{\mathbb{T}} \chi_A(s) |T_n(s+t_0)| ds \\ &= n \int_B |T_n(s)| ds \end{aligned}$$

où $B = A - t_0$. Puisque $|B| = |A|$, le résultat est démontré. $\square$

1. On parle ici de quasi-ordre car la relation n'est pas additive.

En itérant le théorème précédent, on trouve

$$T_n^{(r)} \prec n^r T_n \text{ pour } r = 1, 2, \dots$$

Or, en passant par la définition de la relation $\prec$ utilisant les réarrangements, on peut facilement montrer² que

$$f \prec g \Rightarrow \|f\|_{L_p} \leq \|g\|_{L_p}.$$

En rassemblant tous ces éléments, on obtient donc le théorème suivant.

Théorème 5.1.12. *Pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, pour tout $T_n \in \mathcal{T}_n$, pour $1 < p \leq \infty$, on a*

$$|T_n|_{W^{r,p}} = \|T_n^{(r)}\|_{L_p} \leq n^r \|T_n\|_{L_p}.$$

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous utiliserons également les théorèmes suivants.

Théorème 5.1.13. *Pour $f \in L_p(\mathbb{T})$, $1 \leq p \leq \infty$ et $r = 1, 2, \dots$, on a qu'il existe une constante C_r telle que*

$$\omega_p^r(f, n^{-1}) \leq C_r n^{-r} \sum_{k=1}^n k^{r-1} E_k(f)_p$$

pour tout $n = 1, 2, \dots$

Démonstration. Considérons, pour tout n , T_n , le polynôme trigonométrique qui réalise la meilleure approximation pour f ³. Pour tous $m = 0, 1, \dots$ et $h := \frac{1}{n}$, on a, par l'inégalité triangulaire,

$$\omega_p^r(f, n^{-1}) \leq \omega_p^r(f - T_{2^{m+1}}, h) + \omega_p^r(T_{2^{m+1}}, h)$$

Or, on a pour toute fonction $f \in L_p$, pour tout $t > 0$,

$$\Delta_t^r f(x) = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^{r-k} f(x + kt),$$

donc

$$\|\Delta_t^r f\|_{L_p} \leq \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \|f\|_{L_p}.$$

Ainsi,

$$\omega_p^r(f - T_{2^{m+1}}, h)_p = \sup_{|t| \leq h} \|\Delta_t^r(f - T_{2^{m+1}})\|_{L_p} \leq 2^r \|\Delta_t^r(f - T_{2^{m+1}})\|_{L_p} = 2^r E_{2^{m+1}}(f)_p. \quad (5.3)$$

De plus, grâce au point 3 de la proposition B.2.2 et au théorème 5.1.12, on a

$$\omega_p^r(T_{2^{m+1}}, h) \leq h^r \left\| T_{2^{m+1}}^{(r)} \right\|_{L_p}$$

2. Démonstration effectuée pour des espaces invariants par réarrangement dans [15].

3. Existence prouvée dans le chapitre 3 de [15].

$$\begin{aligned}
&\leq h^r \left[\|T_1^{(r)} - T_0^{(r)}\|_{L_p} + \sum_{\nu=0}^m \|T_{2^{\nu+1}}^{(r)} - T_{2^\nu}^{(r)}\|_{L_p} \right] \\
&\leq h^r \left[2E_0(f)_p + \sum_{\nu=0}^m 2^{(\nu+1)r} \|T_{2^{\nu+1}} - T_{2^\nu}\|_{L_p} \right] \\
&\leq 2h^r \left[E_0(f)_p + \sum_{\nu=0}^m 2^{(\nu+1)r} E_{2^\nu}(f)_p \right].
\end{aligned}$$

Or, on a

$$2^{(\nu+1)r} E_{2^\nu}(f)_p \leq 2^{2r} \sum_{k=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} k^{r-1} E_k(f)_p, \nu \geq 1.$$

En effet, considérons les entiers k tels que $2^{\nu-1} < k \leq 2^\nu$. Par décroissance de l'erreur, pour un tel k , on a $E_{2^\nu}(f)_p \leq E_k(f)_p$ et $k^{r-1} \geq (2^{\nu-1})^{r-1}$. Donc

$$\sum_{k=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} k^{r-1} E_k(f)_p \geq E_{2^\nu}(f)_p \sum_{k=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} k^{r-1} \geq E_{2^\nu}(f)_p 2^{\nu-1} (2^{\nu-1})^{r-1}.$$

On en tire que

$$\omega_p^r(T_{2^{m+1}}, h) \leq 2^{2r+1} h^r \left[E_0(f)_p + E_1(f)_p + \sum_{k=2}^{2^m} k^{r-1} E_k(f)_p \right]. \quad (5.4)$$

Ainsi, pour un n fixé, on choisit m tel que $2^m \leq n < 2^{m+1}$. Les égalités (5.3) et (5.4) nous donne alors le résultat annoncé avec le terme additionnel $E_0(f)_p$. Cependant, ce terme n'est pas embêtant car il suffit d'écrire le résultat obtenu pour $f - c$ où c est la constante réalisant la meilleure approximation pour f . $\square$

Nous pouvons encore préciser le théorème précédent grâce à la notation suivante.

Notation 5.1.14. On note $f = \mathcal{O}(g)$ pour dire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|f(x)| \leq C|g(x)|$$

lorsque $x \rightarrow \infty$.

Corollaire 5.1.15. Si $E_n(f)_p = \mathcal{O}(n^{-\alpha})$ pour $\alpha > 0$, $n = 1, 2, \dots$, alors pour tout $t > 0$,

$$\omega_p^r(f, t) = \begin{cases} \mathcal{O}(t^\alpha) & \text{si } \alpha < r \\ \mathcal{O}(t^\alpha \ln(t^{-1})) & \text{si } \alpha = r \\ \mathcal{O}(t^r) & \text{si } \alpha > r. \end{cases}$$

Démonstration. Considérons d'abord le cas où $t = n^{-1}$ avec $n = 1, 2, \dots$. Grâce au théorème précédent et à notre hypothèse, on sait que

$$\omega_p^r(f, n^{-1}) \leq Cn^{-r} \sum_{k=1}^n k^{r-1} k^{-\alpha} = Cn^{-r} \sum_{k=1}^n k^{r-1-\alpha}. \quad (5.5)$$

On doit donc étudier le comportement de la somme $\sum_{k=1}^n k^{r-1-\alpha}$.

Lorsque $\alpha < r$, on a que $r - 1 - \alpha > -1$. Ainsi, il vient

$$\sum_{k=1}^n k^{r-1-\alpha} \asymp \int_1^n x^{r-1-\alpha} dx = \left[\frac{x^{r-\alpha}}{r-\alpha} \right]_1^n = \frac{n^{r-\alpha}}{r-\alpha} - \frac{1}{r-\alpha} = \mathcal{O}(n^{r-\alpha}).$$

En multipliant par le facteur n^{-r} de (5.5), on obtient donc le résultat annoncé dans ce cas en remplaçant n par $1/t$.

Lorsque $\alpha = r$, $r - 1 - \alpha = -1$ et on a

$$\sum_{k=1}^n k^{-1} \asymp \int_1^n \frac{1}{x} dx = \ln(n).$$

En injectant cela dans (5.5), il vient

$$\omega_p^r(f, 1/t) \leq Ct^\alpha \ln(1/t) = \mathcal{O}(t^\alpha \ln(1/t)).$$

Enfin, lorsque $\alpha > r$, la série $\sum_{k=1}^\infty k^{r-1-\alpha}$ est une série de Riemann convergente. La somme des n premiers termes est donc bornée par une constante M . Ainsi,

$$\omega_p^r(f, 1/t) \leq CMt^r = \mathcal{O}(t^r).$$

On obtient le résultat pour tout $t > 0$ en remarquant qu'il existe un entier $n > 0$ tel que $\frac{1}{n+1} < t \leq \frac{1}{n}$ et en utilisant la croissance du module de continuité. $\square$

Théorème 5.1.16. *Si pour une fonction $f \in L_p$, $1 \leq p \leq \infty$ et pour $r = 1, 2, \dots$,*

$$\sum_{k=1}^\infty k^{r-1} E_k(f)_p < \infty,$$

alors $f \in W^{r,p}(\mathbb{T})$. De plus, dans le cas où $f \in C^0(\mathbb{T})$ et où la série converge, pour $r = 1, 2, \dots$, alors $f \in C^r(\mathbb{T})$.

Démonstration. Comme dans le théorème précédent, si on travaille avec les polynômes trigonométriques réalisant la meilleure approximation, on a

$$\|T_{2^{\nu+1}} - T_{2^\nu}\|_{L_p} \leq 2E_{2^\nu}(f)_p$$

et

$$\left\| T_{2^{\nu+1}}^{(r)} - T_{2^\nu}^{(r)} \right\|_{L_p} \leq 2^{(\nu+1)r+1} E_{2^\nu}(f)_p \leq C \sum_{k=2^{\nu-1}}^{2^\nu} k^{r-1} E_k(f)_p.$$

On en tire que

$$\sum_{\nu} \left\| T_{2^{\nu+1}}^{(r)} - T_{2^{\nu}}^{(r)} \right\|_{L_p} < \infty$$

et donc que $T_{2^{\nu}}$ est une suite de Cauchy dans $W^{r,p}$. Puisque $T_{2^{\nu}}$ converge vers f dans L_p , on a que $f \in W^{r,p}(\mathbb{T})$. De plus, dans le cas où $f \in C^0(\mathbb{T}) \subset L_{\infty}(\mathbb{T})$, on vient de montrer que

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (T_{2^{\nu+1}}^{(r)} - T_{2^{\nu}}^{(r)})$$

converge normalement et donc uniformément sur le compact $\mathbb{T}$. On obtient donc que la suite $(T_{2^{\nu}})_{\nu \geq 0}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{T}$ et que la suite des dérivées d'ordre r

$$T_{2^N}^{(r)} = T_1^{(r)} + \sum_{\nu=0}^{N-1} (T_{2^{\nu+1}}^{(r)} - T_{2^{\nu}}^{(r)})$$

converge uniformément sur $\mathbb{T}$. Par le théorème de Weierstrass, on obtient que f est dérivable jusqu'à l'ordre r et que ses dérivées jusqu'à l'ordre r sont les limites uniformes de la suite de polynômes $(T_{2^N}^{(s)})_N$, $s \leq r$. Comme ces polynômes sont continus, on a que toutes les dérivées de f jusqu'à l'ordre r sont continues. $\square$

Dans [6], ce théorème est complété par le théorème suivant (théorème 2.3.4).

Théorème 5.1.17. *Soient $r \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 0$. Si $f \in L_p(\mathbb{T})$, $1 < p \leq \infty$ (où on demande en plus que $f \in C^0(\mathbb{T})$ lorsque $p = \infty$) est tel que $E_n(f)_p = \mathcal{O}(n^{-(r+\alpha)})$, alors*

$$\omega_p(f^{(r)}, n^{-1}) = \begin{cases} \mathcal{O}(n^{-\alpha}) & \text{si } 0 < \alpha < 1 \\ \mathcal{O}(n^{-1} \ln(n)) & \text{si } \alpha = 1 \\ \mathcal{O}(n^{-1}) & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

5.1.4 Caractérisation de l'espace d'approximation

Puisque nous avons réussi à démontré les inégalités de Jackson et de Bernstein pour notre base trigonométrique, nous pouvons maintenant établir la caractérisation de notre espace d'approximation.

Théorème 5.1.18. *Soit r , un entier positif, $1 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$ et $0 < \alpha < r$. On a*

$$\mathcal{A}_q^{\alpha}((L_p, \mathcal{T}_n)) = (L_p, W^{r,p})_{\frac{\alpha}{r}, q}.$$

5.2 Approximation non linéaire

Si l'on souhaite étudier l'approximation non linéaire par les bases trigonométriques définies plus haut, il faudrait s'autoriser à choisir librement les m meilleures fréquences. Cependant, il est alors impossible de retrouver les inégalités de Jackson et de Bernstein que nous avons étudiées jusqu'à présent, et ce pour deux raisons mises en évidence par Temlyakov dans les chapitres 2 et 5 de son livre [28]. En effet, en approximation non linéaire, l'inégalité de Bernstein repose sur le fait que la fréquence maximale d'un polynôme T_n est finie et connue (n). En approximation non linéaire, les fréquences d'un polynôme S peuvent être arbitrairement grandes (par exemple, $S(x) = \cos(10^{12}x)$), ce qui fait exploser sa dérivée sans que sa norme globale ne change. Il est donc très difficile d'obtenir une inégalité de type Bernstein. De plus, Temlyakov prouve dans son théorème 2.2.10 que l'algorithme qui consiste à trier les coefficients dans l'ordre décroissant et à choisir les plus grands diverge dans $L_p, p \neq 2$, ce qui invalide également l'inégalité de Jackson. Dans le chapitre 5 de [28], une méthode alternative pour caractériser les espaces d'approximation est présentée. Cependant, pour rester dans notre schéma classique consistant à utiliser des inégalités qui se rapprochent de celles de Jackson et de Bernstein (c'est-à-dire qui établissent un lien entre l'erreur d'approximation d'une fonction et sa régularité), nous allons nous intéresser à un autre type de base : la base de Fourier non linéaire (adaptive Fourier basis). Nous allons suivre l'approche de [22].

5.2.1 Bases de Fourier non linéaires

Récemment, une famille de bases de Fourier non linéaires qui vient étendre la base de Fourier classique a été développée dans le cadre du signal-processing. Nous allons en détailler la construction ici.

Définition 5.2.1. Pour tout nombre complexe $a = |a|e^{ita}$, $|a| < 1$, considérons la transformation de Möbius

$$\tau_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

qui envoie le disque unité sur lui-même. On définit la fonction de phase non-linéaire $\theta_a(t)$ par

$$\begin{cases} e^{i\theta_a(t)} := \tau_a(e^{it}) = \frac{e^{it} - a}{1 - \bar{a}e^{it}} \\ \theta_a(t_a) = t_a. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que $\theta_a(t + 2\pi) = \theta_a(t) + 2\pi$. De plus, on peut essayer de calculer sa dérivée. Pour ce faire, posons

$$f(t) = \tau_a(e^{it}) = (\tau_a \circ z)(t)$$

où $z(t) = e^{it}$. Par définition, on sait que $f(t) = e^{i\theta_a(t)}$. Ainsi, en dérivant les deux membres de cette égalité par rapport à t , on obtient

$$i\theta'_a(t)e^{i\theta_a(t)} = f'(t). \quad (5.6)$$

Or, par le théorème de dérivation des fonctions composées, on a que

$$f'(t) = \tau'_a(z(t))z'(t)$$

avec $z'(t) = ie^{it} = iz$. Calculons $\tau'_a(z(t))$:

$$\begin{aligned}\tau'_a(z(t)) &= \frac{(1 - \bar{a}z(t)) - (z(t) - a)(-\bar{a})}{(1 - \bar{a}z(t))^2} \\ &= \frac{1 - \bar{a}z(t) + \bar{a}z(t) - |a|^2}{(1 - \bar{a}z(t))^2} \\ &= \frac{1 - |a|^2}{(1 - \bar{a}z(t))^2}.\end{aligned}$$

En injectant cela dans (5.6) et en se rappelant que $e^{i\theta_a(t)} = \tau_a(z(t)) = \frac{z(t)-a}{1-\bar{a}z(t)}$, on trouve

$$i\theta'_a(t) = \frac{1 - |a|^2}{(1 - \bar{a}z(t))^2} iz(t) \frac{1 - \bar{a}z(t)}{z(t) - a},$$

donc

$$\theta'_a(t) = \frac{z(t)(1 - |a|^2)}{(1 - \bar{a}z(t))(z(t) - a)}.$$

Or,

$$\begin{aligned}(1 - \bar{a}z(t))(z(t) - a) &= z(t)M - a - \bar{a}z^2 + |a|^2z(t) \\ &= z(1 - \frac{a}{z}) - \bar{a}z + |a|^2\end{aligned}$$

et comme $z(t) = e^{it}$, on a que $\frac{1}{z(t)} = \overline{z(t)}$, donc

$$\theta'_a(t) = \frac{1 - |a|^2}{1 - a\overline{z(t)} - \bar{a}z + |a|^2} = \frac{1 - |a|^2}{1 - 2\operatorname{Re}(a\overline{z(t)}) + |a|^2}.$$

Pour finir, remarquons que

$$\overline{az(t)} = (|a|e^{it_a})(e^{-it}) = |a|e^{i(t_a-t)},$$

et on obtient finalement

$$\theta'_a(t) = \frac{1 - |a|^2}{1 - 2|a|\cos(t - t_a) + |a|^2}. \quad (5.7)$$

On peut alors remarquer que puisque $|a| < 1$, cette dérivée satisfait

$$0 < \frac{1 - |a|}{1 + |a|} \leq \theta'_a(t) \leq \frac{1 + |a|}{1 - |a|}. \quad (5.8)$$

On en tire que θ_a est une fonction strictement croissante.

De plus, on voit facilement que pour toute suite $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ ayant un nombre fini de termes non nuls,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx} \right|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ik\theta_a(t)} \right|^2 \theta'_a(t) dt.$$

En effet, la première égalité découle directement de l'identité de Parseval pour la base de Fourier classique sur $L^2(\mathbb{T})$. Puisque θ_a est une bijection strictement croissante de $\mathbb{T}$ dans lui-même, la deuxième égalité s'obtient en effectuant le changement de variable $x = \theta_a(t)$. En combinant cela avec (5.8), on obtient que les bases de Fourier non linéaires $(e^{in\theta_a(t)})_{n \in \mathbb{Z}}$ ainsi construites forment des bases de Riesz dans $L^2(\mathbb{T})$. Remarquons que lorsque $a = 0$, $(e^{in\theta_a(t)})_{n \in \mathbb{Z}}$ est simplement la base de Fourier $(e^{int})_{n \in \mathbb{Z}}$.

On considère l'espace $\mathcal{T}_n^a$ des polynômes trigonométriques non linéaires de degré inférieur à n , c'est-à-dire

$$\mathcal{T}_n^a := \text{span}\{e^{ik\theta_a(t)} : |k| \leq n\}.$$

Lorsque a est fixé, cet espace est évidemment un espace linéaire. Cependant, l'intérêt d'étudier la manière dont cet espace réussit à approcher une fonction f de L_p réside dans le fait que l'on peut choisir la valeur du paramètre a en qui correspond le mieux à notre fonction. Ainsi des articles tels que [24] étudient comment choisir a pour minimiser l'erreur. Comme nous l'avons fait précédemment, nous allons tenter de caractériser l'espace d'approximation lié à l'erreur

$$E_n^a(f)_p := \inf_{T \in \mathcal{T}_n^a} \|f - T\|_{L_p}$$

pour des fonctions $f \in L_p(\mathbb{T})$, $1 \leq p \leq \infty$ en démontrant les inégalités de Jackson et de Bernstein. Cela nous permettra donc de montrer que pour a quelconque, la base que l'on a construite se comporte bien et nous permet d'échapper aux problèmes que l'on avait avec les bases trigonométriques classiques.

5.2.2 Inégalités de Jackson

Commençons par montrer l'inégalité de Jackson pour les fonctions continues sur le Tore (qui sont dans $L_\infty(\mathbb{T})$), nous généraliserons ensuite à $L_p(\mathbb{T})$, $1 \leq p < \infty$. Pour ce faire, nous allons utiliser les deux lemmes suivants qui vont nous permettre de nous ramener au cas linéaire.

Lemme 5.2.2. *Soit $f \in C^0(\mathbb{T})$. Alors*

$$E_n^a(f)_\infty = E_n(f \circ \theta_a^{-1})_\infty$$

où $E_n(g)_\infty$ correspond à l'erreur d'approximation dans le cas linéaire.

Démonstration. Supposons que ⁴

$$E_n(f \circ \theta_a^{-1})_\infty = \left\| f \circ \theta_a^{-1} - \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ik \cdot} \right\|_{L_\infty}.$$

En se rappelant que θ_a est une fonction strictement croissante qui satisfait $\theta_a(t + 2\pi) = \theta_a(t) + 2\pi$ et donc que θ_a est une bijection strictement croissante de $[0, 2\pi[$ dans lui-même, on a

$$\left\| f - \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ik\theta_a(\cdot)} \right\|_{L_\infty} = \|f \circ \theta_a^{-1} - c_k e^{ik \cdot}\|_{L_\infty} = E_n(f \circ \theta_a^{-1})_\infty.$$

Ainsi,

$$E_n^a(f)_\infty \leq E_n(f \circ \theta_a^{-1})_\infty.$$

En procédant de la même manière, on peut montrer que

$$E_n(f \circ \theta_a^{-1})_\infty \leq E_n^a(f)_\infty.$$

□

Lemme 5.2.3. Soit $f \in C^0(\mathbb{T})$. On a

$$\frac{1 - |a|}{2} \omega_\infty(f, t) \leq \omega_\infty(f \circ \theta_a^{-1}, t) \leq \frac{2}{1 - |a|} \omega_\infty(f, t).$$

Démonstration. Par le théorème des accroissements finis et (5.8), on a que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|\theta_a^{-1}(x) - \theta_a^{-1}(y)| = |(\theta_a^{-1})'(\xi)| |x - y| = \frac{1}{\theta'_a(\theta_a^{-1}(\xi))} |x - y| \leq \frac{1 + |a|}{1 - |a|} |x - y|$$

où $\xi \in]x, y[$ ou $\xi \in]y, x[$. Ainsi, si $|x - y| \leq t$, alors $|\theta_a^{-1}(x) - \theta_a^{-1}(y)| \leq \frac{1 + |a|}{1 - |a|} t$ et donc par définition des modules de continuité,

$$\omega_\infty(f \circ \theta_a^{-1}, t) = \sup_{|x - y| \leq t} |f(\theta_a^{-1}(x)) - f(\theta_a^{-1}(y))| \leq \omega_\infty(f, \frac{1 + |a|}{1 - |a|} t).$$

De plus, en utilisant la propriété (2) de la proposition B.2.2, on a

$$\omega_\infty(f, \frac{1 + |a|}{1 - |a|} t) \leq \frac{2}{1 - |a|} \omega_\infty(f, t).$$

En procédant de la même manière avec le théorème des accroissements finis appliqué à θ_a , on obtient également

$$\omega_\infty(f, t) \leq \frac{2}{1 - |a|} \omega_\infty(f \circ \theta_a^{-1}, t),$$

ce qui suffit pour conclure. □

4. On se base ici sur l'existence d'une meilleure approximation pour la base trigonométrique linéaire. Celle-ci est montrée dans le chapitre 3 de [13].

Nous pouvons maintenant passer à la preuve du théorème de Jackson dans L_∞ .

Théorème 5.2.4. *Soit $f \in C^0(\mathbb{T})$. On a qu'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$E_n^a(f)_\infty \leq \frac{2C}{1-|a|} \omega_\infty(f, \frac{1}{n})$$

pour tout n . Par conséquent, si $f \in (\text{Lip}\alpha)_\infty$ pour $0 < \alpha \leq 1$, alors $E_n^a(f)_\infty = \mathcal{O}(n^{-\alpha})$.

Démonstration. Puisque $f \in L_\infty$ et puisque θ_a est une bijection θ_a^{-1} est aussi dans L_∞ . Ainsi, en utilisant l'inégalité de Jackson du théorème 5.1.5, on a

$$E_n(f \circ \theta_a^{-1})_\infty \leq C \omega_\infty(f \circ \theta_a^{-1}, n^{-1}).$$

En utilisant les lemmes précédents, on en tire que

$$E_n^a(f)_\infty = E_n(f \circ \theta_a^{-1})_\infty \leq C \omega_\infty(f \circ \theta_a^{-1}, n^{-1}) \leq \frac{2C}{1-|a|} \omega_\infty(f, n^{-1}).$$

Par conséquent, si $f \in (\text{Lip}\alpha)_\infty$, il existe une constante M telle que

$$\omega_\infty(f, n^{-1}) \leq M n^{-\alpha}.$$

Ainsi,

$$E_n^a(f)_\infty \leq \frac{2CM}{1-|a|} n^{-\alpha},$$

ce qui suffit pour conclure. $\square$

Nous pouvons aller plus loin que le théorème précédent et trouver des conditions pour que $E_n^a(f)_\infty = \mathcal{O}(n^{-(r+\alpha)})$ pour $r \in \mathbb{N}$. Comme le montre le théorème suivant, ces conditions consistent à demander plus de régularités à nos fonctions.

Théorème 5.2.5. *Supposons que $f \in C^r(\mathbb{T})$, $r \in \mathbb{N}$ et que $f^{(r)} \in (\text{Lip}\alpha)_\infty$, $0 < \alpha < 1$. Alors,*

$$E_n^a(f)_\infty = \mathcal{O}(n^{-r-\alpha}).$$

Démonstration. Puisque θ_a est une bijection, le fait que $f \in C^r(\mathbb{T})$ implique que $f \circ \theta_a^{-1} \in C^r(\mathbb{T})$. En utilisant notre premier lemme et le corollaire 5.1.6 obtenu dans le cas linéaire,

$$E_n^a(f)_\infty = E_n(f \circ \theta_a^{-1})_\infty \leq C n^{-r} \omega_\infty((f \circ \theta_a^{-1})^{(r)}, n^{-1}). \quad (5.9)$$

De plus, on peut facilement vérifier que

$$(f \circ \theta_a^{-1})^{(r)} = \frac{f^{(r)} \circ \theta_a^{-1}}{(\theta_a' \circ \theta_a^{-1})^r} + \sum_{j=1}^{r-1} (f^{(j)} \circ \theta_a^{-1}) u_j \quad (5.10)$$

où les u_j , $j = 1, 2, \dots, r-1$, sont des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{T}$. En effet, on a d'abord

$$(f \circ \theta_a^{-1})'(x) = f'(\theta_a^{-1}(x))(\theta_a^{-1})'(x) = \frac{(f' \circ \theta_a^{-1})(x)}{(\theta'_a \circ \theta_a^{-1})(x)}.$$

Si l'on doit dériver à nouveau cette expression, on utilise la formule de dérivation d'un quotient pour avoir

$$\begin{aligned} (f \circ \theta_a^{-1})^{(2)}(x) &= \frac{\left(\frac{f^{(2)}(\theta_a^{-1}(x))}{\theta'_a(\theta_a^{-1}(x))} \right) \theta'_a(\theta_a^{-1}(x)) - f'(\theta_a^{-1}(x)) \cdot [\theta'_a(\theta_a^{-1}(x))]' }{[\theta'_a(\theta_a^{-1}(x))]^2} \\ &= \frac{f^{(2)}(\theta_a^{-1}(x))}{[\theta'_a(\theta_a^{-1}(x))]^2} + f'(\theta_a^{-1}(x))u_1(x). \end{aligned}$$

En remarquant que u_1 est de classe C^∞ car il est obtenu par une fonction composée de dérivées de θ_a et car ces dérivées sont de classe C^∞ vu (5.7), on obtient bien le résultat annoncé pour $r = 2$. Il suffit alors d'itérer ce raisonnement.

En outre, puisque $f^{(r)} \in (\text{Lip}\alpha)_\infty$, on sait qu'il existe une constante M telle que

$$\omega_\infty(f^{(r)}, t) \leq Mt^\alpha \text{ pour tout } t > 0.$$

en combinant cela avec les majorations du deuxième lemme, on obtient que

$$\omega_\infty(f^{(r)} \circ \theta_a^{-1}, t) \leq \frac{2}{1-|a|} \omega_\infty(f^{(r)}, t) \leq \frac{2M}{1-|a|} t^\alpha \text{ pour tout } t > 0$$

et donc que $f^{(r)} \circ \theta_a^{-1} \in (\text{Lip}\alpha)_\infty$. D'autre part, puisque $(\theta'_a \circ \theta_a^{-1})^{-r} \in C^1(\mathbb{T})$, on a que $(\theta'_a \circ \theta_a^{-1})^{-r} \in (\text{Lip}1)_\infty \subset (\text{Lip}\alpha)_\infty$ grâce à la remarque B.3.2. Ainsi, leur produit $(f^{(r)} \circ \theta_a^{-1})(\theta'_a \circ \theta_a^{-1})^{-r} \in (\text{Lip}\alpha)_\infty$.

De la même manière, $\sum_{j=1}^{r-1} (f^{(j)} \circ \theta_a^{-1})u_j \in (\text{Lip}\alpha)_\infty$ puisque ce terme est de classe $C^1(\mathbb{T})$. Au final, $(f \circ \theta_a^{-1})^{(r)} \in (\text{Lip}\alpha)_\infty$, donc $\omega_\infty(f \circ \theta_a^{-1})^{(r)}, n^{-1}) = \mathcal{O}(n^{-\alpha})$. En reprenant les inégalités (5.9), on trouve

$$E_n^a(f)_\infty \leq Cn^{-r} \mathcal{O}(n^{-\alpha}) = \mathcal{O}(n^{-(r+\alpha)}),$$

ce qui conclut la preuve. □

Maintenant que nous avons démontré les théorèmes de type Jackson dont nous avons besoin pour les fonctions continues, montrons ceux pour les fonctions de L_p , $1 \leq p < \infty$. Pour ce faire, nous allons devoir adapter un peu le raisonnement suivi pour les fonctions continues. Le premier lemme reste assez semblable.

Lemme 5.2.6. *Soit $f \in L_p(\mathbb{T})$, $1 \leq p < \infty$. Alors*

$$E_n^a(f)_p \asymp E_n(f \circ \theta_a^{-1})_p$$

avec des constantes d'équivalence ne dépendant que de a et de p .

Démonstration. Supposons que

$$E_n(f \circ \theta_a^{-1})_p = \left\| f \circ \theta_a^{-1} - \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ik \cdot} \right\|_{L_p}.$$

En utilisant le changement de variable $u = \theta_a(t)$ et (5.8), on a

$$\begin{aligned} E_n(f \circ \theta_a^{-1})_p &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(\theta_a^{-1}(u)) - \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ik \cdot}|^p du \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t) - \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ik\theta_a(t)}|^p \theta'_a(t) dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\geq \left(\frac{1 - |a|}{1 + |a|} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t) - \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ik\theta_a(t)}|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\frac{1 - |a|}{1 + |a|} \right)^{\frac{1}{p}} E_n^a(f)_p. \end{aligned}$$

En suivant un raisonnement similaire, on trouve également

$$E_n(f \circ \theta_a^{-1})_p \leq \left(\frac{1 + |a|}{1 - |a|} \right)^{\frac{1}{p}} E_n^a(f)_p,$$

ce qui suffit pour conclure. $\square$

Dans le cas où l'on travaillait avec des fonctions continues, on avait obtenu une équivalence entre $\omega_\infty(f \circ \theta_a^{-1}, t)$ et $\omega_\infty(f, t)$. Malheureusement, il n'est pas possible de trouver une équivalence entre $\omega_p(f \circ \theta_a^{-1}, t)$ et $\omega_p(f, t)$ pour $f \in 1 \leq p < \infty$. Cependant, nous pouvons montrer que $f \in (\text{Lip}\alpha)_p$ si et seulement si $f \circ \theta_a^{-1} \in (\text{Lip}\alpha)_p$.

Notations 5.2.7. Considérons une partition finie D de $\mathbb{T}$ en intervalles disjoints $I_k := [t_{k-1}, t_k[$ avec $1 \leq k \leq N$ et $t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_0 + 2\pi$. Notons

$$\delta_D := \max_{1 \leq k \leq N} |t_k - t_{k-1}|$$

et

$$\mathcal{S}(D) := \text{span}\{\chi_{I_k} : 1 \leq k \leq N\}.$$

On note également

$$s(f, D)_p := \inf_{S \in \mathcal{S}(D)} \|f - S\|_{L_p}$$

pour tout $f \in L_p$, $1 \leq p < \infty$.

Lemme 5.2.8. Soient $f \in L_p$, $1 \leq p < \infty$ et $0 < \alpha \leq 1$. On a $f \in (\text{Lip}\alpha)_p$ si et seulement si $s(f, D)_p = \mathcal{O}(\delta_D^\alpha)$ pour toute partition D de $\mathbb{T}$ définie comme dans les notations précédentes.

Cette partition nous permet d'obtenir le lemme suivant dont la démonstration peut être adaptée de [12] (p. 60-64).

Lemme 5.2.9. Soit $f \in L_p(\mathbb{T})$, $1 \leq p < \infty$. Pour tout $0 < \alpha \leq 1$, $f \in (\text{Lip}\alpha)_p$ si et seulement si $f \circ \theta_a^{-1} \in (\text{Lip}\alpha)_p$.

Démonstration. Considérons D , une partition de $\mathbb{T}$ définie comme précédemment et $S \in \mathcal{S}(D)$. Pour tout $f \in L_p$, en effectuant le changement de variable $x = \theta_a(t)$, on a

$$\int_{\mathbb{T}} |(f \circ \theta_a^{-1})(x)|^p dx = \int_{\mathbb{T}} |f(t) - (S \circ \theta_a)(t)|^p \theta'_a(t) dt.$$

On définit une nouvelle fonction $\tilde{S} := S \circ \theta_a$. Puisque S est constante sur les intervalles de la partition $D = \{t_0, \dots, t_n\}$, alors $\tilde{S}$ est constante sur les intervalles d'une nouvelle partition $\tilde{D}$ définie par les points $\tilde{t}_k = \theta_a^{-1}(t_k)$. Notons que $\tilde{D}$ respecte bien les conditions imposées dans les notations précédentes grâce au fait que θ_a est une bijection de $[0, 2\pi[$ dans lui-même telle que $\theta_a(t + 2\pi) = \theta_a(t) + 2\pi$. Grâce aux bornes sur θ'_a trouvées dans 5.8 et à l'égalité des intégrales trouvée ci-dessus, on obtient

$$\|f \circ \theta_a^{-1} - S\|_{L_p} \asymp \|f - \tilde{S}\|_{L_p}$$

et donc que

$$s(f \circ \theta_a^{-1}, D) \asymp s(f, \tilde{D})$$

avec des constantes d'équivalence ne dépendant que de a et de p . Comme θ et θ^{-1} sont des fonctions de classe C^∞ et de dérivées bornées, on vérifie facilement que D génère $\tilde{D}$ et inversement et que $\delta_D \asymp \delta_{\tilde{D}}$. Ainsi, $s(f \circ \theta_a^{-1}, D) = \mathcal{O}(\delta_D^\alpha)$ si et seulement si $s(f, \tilde{D}) = \mathcal{O}(\delta_{\tilde{D}}^\alpha)$. On conclut donc par le lemme précédent. $\square$

Nous pouvons maintenant passer à la démonstration des théorèmes de type Jackson pour les bases de Fourier non-linéaire dans L_p .

Théorème 5.2.10. Soit $f \in (\text{Lip}\alpha)_p$. Alors,

$$E_n^a(f)_p = \mathcal{O}(n^{-\alpha}).$$

Démonstration. Grâce au lemme précédent, on sait que $f \circ \theta_a^{-1} \in (\text{Lip}\alpha)_p$. Le lemme 5.2.6 combiné au corollaire 5.1.7 nous donnent alors que

$$E_n^a(f)_p \asymp E_n(f \circ \theta_a^{-1})_p = \mathcal{O}(n^{-\alpha}),$$

où les constantes d'équivalence ne dépendent que de a et de p , ce qui permet de conclure. $\square$

Comme nous l'avons fait pour les fonctions continues, on peut améliorer ce résultat. Avant de le montrer, notons que pour toute fonction $f \in W^{r,p}(\mathbb{T})$, il existe une unique fonction $\phi \in C^{r-1}(\mathbb{T})$ telle que

- $\phi^{(r-1)}$ est absolument continue sur $\mathbb{T}$,
- $\phi(x) = f(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{T}$.

En effet, si $f \in W^{r,p}(\mathbb{T})$, sa première dérivée faible appartient à $W^{r-1,p} \subset W^{1,p}$. Par définition des dérivées faibles, il existe une fonction $g \in L_p(\mathbb{T})$ telle que pour toute fonction test ψ de classe C^∞ et à support compact,

$$\int_{\mathbb{T}} f(t)\psi'(t)dt = - \int_{\mathbb{T}} g(t)\psi(t)dt.$$

Puisque $g \in L_p(\mathbb{T})$ et vu que le tore est de mesure finie, on a $g \in L_1(\mathbb{T})$. On peut donc définir

$$\phi_1(x) = \int_0^x g(t)dt.$$

Par le théorème fondamental de l'analyse, ϕ_1 est absolument continu sur $\mathbb{T}$, est dérivable presque partout et vérifie $\phi_1'(x) = g(x)$ pp. Comme ϕ_1 est absolument continu, pour toute fonction test ψ ,

$$\int_{\mathbb{T}} \phi_1(t)\psi'(t)dt = [\phi_1\psi]_0^{2\pi} - \int_{\mathbb{T}} \phi_1'(t)\psi(t)dt = - \int_{\mathbb{T}} g(t)\psi(t)dt.$$

Ainsi, la dérivée au sens des distributions de la fonction $f - \phi_1$ est nulle, donc il existe une constante C telle que

$$f(x) = \phi_1(x) + C \text{ presque partout.}$$

On pose alors $\phi(x) = \phi_1(x) + C$. Notre représentant ϕ est donc absolument continu et égal à f presque partout. Pour $f \in W^{r,p}(\mathbb{T})$, on applique ce raisonnement de proche en proche. L'unicité découle du fait que ϕ est continu et égal à f presque partout.

L'égalité presque partout impliquant une égalité en norme L_p , on suppose sans perte de généralité, que f lui-même est de classe C^{r-1} , que $f^{(r-1)}$ est absolument continu sur $\mathbb{T}$ et que $f^{(r)} \in L_p(\mathbb{T})$.

Théorème 5.2.11. *Supposons que $f \in W^{r,p}(\mathbb{T})$, $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$ satisfait $f^{(r)} \in (\text{Lip}\alpha)_p$, $0 < \alpha < 1$. Alors,*

$$E_n^a(f)_p = \mathcal{O}(n^{-(r+\alpha)}).$$

Démonstration. Supposons que $f^{(r-1)}$ est absolument continu sur $\mathbb{T}$ et que $f^{(r)} \in L_p(\mathbb{T})$. De plus, puisque θ_a est de classe C^∞ et que sa dérivée est bornée, on vérifie facilement que $(f \circ \theta_a^{-1})^{(r-1)}$ est absolument continu sur $\mathbb{T}$ et que $(f \circ \theta_a^{-1})^{(r)} \in L_p(\mathbb{T})$. De plus, puisque $f^{(r)} \in (\text{Lip}\alpha)_p$, en utilisant la décomposition (5.10) et le lemme 5.2.9, on obtient que $(f \circ \theta_a^{-1})^{(r)} \in (\text{Lip}\alpha)_p$ par un raisonnement similaire à celui suivi dans le théorème 5.2.5. Ainsi, en combinant cette information au corollaire 5.1.6, on a

$$E_n(f \circ \theta_a^{-1})_p = \mathcal{O}(n^{-r})\omega_p((f \circ \theta_a^{-1})^{(r)}, n^{-1}) = \mathcal{O}(n^{-r-\alpha}).$$

On peut alors conclure grâce au lemme 5.2.6 que

$$E_n^a(f)_p = \mathcal{O}(n^{-r-\alpha}).$$

□

5.2.3 Inégalités de type Bernstein

On a les deux théorèmes suivants.

Théorème 5.2.12. *Soit $f \in C^0(\mathbb{T})$ satisfaisant $E_n^a(f)_\infty = \mathcal{O}(n^{-(r+\alpha)})$ pour $r \in \mathbb{N}$ et $0 < \alpha \leq 1$. Alors, $f \in C^r(\mathbb{T})$. De plus, $f^{(r)} \in (\text{Lip}\alpha)_\infty$ lorsque $0 < \alpha < 1$ et $\omega_\infty(f^{(r)}, t) = \mathcal{O}(t|\ln t|)$ lorsque $\alpha = 1$.*

Démonstration. Considérons le cas où $r \geq 1$, le cas où $r = 0$ s'obtenant par un raisonnement similaire. Par le lemme 5.2.2, on sait que

$$E_n(f \circ \theta_a^{-1})_\infty = E_n^a(f)_\infty = \mathcal{O}(n^{-(r+\alpha)}).$$

Grâce au théorème 5.1.16, on a que $f \circ \theta_a^{-1} \in C^r(\mathbb{T})$. De plus, le théorème 5.1.17 nous donne également que $(f \circ \theta_a^{-1})^{(r)} \in (\text{Lip}\alpha)_\infty$ lorsque $0 < \alpha < 1$ et $\omega_\infty((f \circ \theta_a^{-1})^{(r)}, t) = \mathcal{O}(t|\ln(t)|)$ lorsque $\alpha = 1$. On a alors que, puisque θ_a est une bijection de classe C^∞ ,

$$f = (f \circ \theta_a^{-1}) \circ \theta_a \in C^r(\mathbb{T}).$$

De plus, posons $g = f \circ \theta_a^{-1}$. On a $f = g \circ \theta_a$ et

$$f^{(r)}(x) = (g^{(r)} \circ \theta_a(x))(\theta'_a(x))^r + \sum_{j=1}^{r-1} (g^{(j)} \circ \theta_a(x)) P_j(\theta'_a(x), \dots, \theta_a^{(r)}(x))$$

où les P_j sont des polynômes des dérivées de θ_a . Par l'inégalité triangulaire, on sait que le module de continuité $\omega_\infty(f^{(r)}, t)$ est majoré par le module de continuité de chaque terme. Or, pour le premier terme, lorsque $0 < \alpha < 1$, puisque $g^{(r)} \in (\text{Lip}\alpha)_\infty$, et vu que θ_a est de classe C^∞ , donc dans $(\text{Lip}\alpha)_\infty$ au vu des remarques B.3.2 et B.3.3, la composée $g^{(r)} \circ \theta_a$ est aussi dans $(\text{Lip}\alpha)_\infty$. Il en est de même pour le produit par $(\theta')^r$. Pour les autres termes, puisque $g^{(r)} \in (\text{Lip}\alpha)_\infty$, $g^{(j)}$ est au moins de classe C^1 et $g^{(j)} \in (\text{Lip}1)_\infty$. Au final, lorsque $0 < \alpha < 1$, on a

$$\omega_\infty(f^{(r)}, t) \leq \omega_\infty(g^{(r)} \circ \theta_a)(\theta'_a)^r, t) + \omega_\infty\left(\sum_{j=1}^{r-1} (g^{(j)} \circ \theta_a) P_j(\theta'_a, \dots, \theta_a^{(r)}), t\right) = \mathcal{O}(t^\alpha) + \mathcal{O}(t) = \mathcal{O}(t^\alpha).$$

Un raisonnement similaire nous permet de conclure dans le cas où $\alpha = 1$. □

Théorème 5.2.13. *Soient $f \in L_p(\mathbb{T})$ et $1 \leq p < \infty$. Si $E_n^a(f)_p = \mathcal{O}(n^{-(r+\alpha)})$ où $r \in \mathbb{N}$ et $0 < \alpha < 1$, alors*

$$f \in W^{r,p}(\mathbb{T}) \text{ et } f^{(r)} \in (\text{Lip}\alpha)_p.$$

Démonstration. Grâce au lemme 5.2.6, on sait que

$$E_n(f \circ \theta_a^{-1}) \asymp E_n^a(f)_p = \mathcal{O}(n^{-(r+\alpha)}).$$

Il suffit alors d'utiliser les théorèmes 5.1.16 et 5.1.17 et de raisonner comme dans le théorème précédent. $\square$

Au vu de ces théorèmes et des inégalités de type Jackson que nous avons montrées, on obtient finalement que pour tout nombre complexe a de module strictement inférieur à 1, pour $1 \leq p < \infty$ et $0 < \alpha < 1$,

$$\mathcal{A}_\infty^\alpha(L_p, \mathcal{T}_n^a) = W^{r,p} \cap \{f : f^{(r)} \in (\text{Lip}\alpha)_p\}.$$

On a également que pour $0 < \alpha < 1$,

$$\mathcal{A}_\infty^\alpha(C^0(\mathbb{T}), \mathcal{T}_n^a) = \{f \in C^r(\mathbb{T}) : f^{(r)} \in (\text{Lip}\alpha)_\infty\}$$

et

$$\mathcal{A}_\infty^1(C^0(\mathbb{T}), \mathcal{T}_n^a) = \{f \in C^r(\mathbb{T}) : \omega_\infty(f^{(r)}, t) = \mathcal{O}(t \ln(|t|))\}.$$

Annexes

Annexe A

Quasi-semi-normes

On considère X , un espace vectoriel défini sur $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition A.0.1. Une application $p : X \rightarrow [0, +\infty[$ est une quasi-semi-norme sur X si

1. il existe $C \geq 1$ tel que pour tous $x, y \in X$, $p(x + y) \leq C(p(x) + p(y))$,
2. pour tous $\lambda \in \mathbb{K}, x \in X$, $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$. C'est une quasi-norme sur X si l'on a, de plus, $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ pour tout $x \in X$.

Exemple A.0.2. Si $0 < q < 1$, alors l'espace ℓ_q muni de $|x|_q = (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^q)^{\frac{1}{q}}$ est un espace quasi-normé, mais pas un espace normé.

En effet, si on considère $q = \frac{1}{2}$ et les suites $x = (\frac{1}{2}, 0, \dots)$ et $y = (0, \frac{1}{3}, 0, \dots)$, on a $|x + y|_q > |x|_q + |y|_q$, et on n'a donc pas une norme.

De plus, si $0 < q < 1$, on peut montrer par récurrence que pour toute suite de complexes, $|\sum_{k=1}^{\infty} x_k|^q \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^q$. Ainsi, pour toutes suites $x, y \in \ell_q$,

$$|x + y|_q^q \leq \sum_{k \geq 1} (|x_k|^q + |y_k|^q) = |x|_q^q + |y|_q^q. \quad (\text{A.1})$$

Puisque $q < 1$, donc $x \mapsto x^{\frac{1}{q}}$ est convexe, on a également que pour tous nombres positifs a et b ,

$$(a + b)^{\frac{1}{q}} \leq 2^{\frac{1}{q}-1} (a^{\frac{1}{q}} + b^{\frac{1}{q}}).$$

Donc en prenant $a = |x|_q^q$ et $b = |y|_q^q$, on en tire que

$$(|x|_q^q + |y|_q^q)^{\frac{1}{q}} \leq 2^{\frac{1}{q}-1} (|x|_q + |y|_q) \quad (\text{A.2})$$

En regroupant (A.1) et (A.2), on a

$$|x + y|_q \leq 2^{\frac{1}{q}-1} (|x|_q + |y|_q).$$

Les autres propriétés d'une quasi-norme étant trivialement vérifiées, on a la conclusion.

On peut montrer de manière similaire que pour $0 < q < 1$, L_q muni de $|f|_{L_q} := (\int |f(x)|^q dx)^{\frac{1}{q}}$ est quasi-normé vérifiant l'inégalité quasi-triangulaire

$$|f + g|_{L_q} \leq 2^{\frac{1}{q}-1} (|f|_{L_q} + |g|_{L_q}). \quad (\text{A.3})$$

Même si, lorsque l'on travaille avec une quasi-semi-norme ou une quasi-norme, on n'a pas une inégalité triangulaire, le résultat suivant, dont la démonstration est donnée dans [15] (P. 20), nous permettra de nous en sortir.

Théorème A.0.3. *Pour toute quasi-norme (resp. quasi-semi-norme) $|\cdot|$ sur X , il existe une quasi-norme (resp. quasi-semi-norme) $|\cdot|_0$ équivalente et un nombre $\mu > 0$ tels que $|\cdot|_0^\mu$ est sous-additif.*

Annexe B

Espaces fonctionnels

Nous allons étudier ici les différents éléments de la théorie de Littlewood-Paley qui sont utiles dans cet article ainsi que la caractérisation des espaces L_p et de Besov en fonction des coefficients dans la décomposition en ondelettes des fonctions de ces espaces.

B.1 Espaces de Sobolev

Définition B.1.1. On définit l'espace de Sobolev $W^{m,p}$ comme l'espace des fonctions $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ dont toutes les dérivées (faibles) partielles jusqu'à l'ordre m sont dans $L^p(\mathbb{R}^d)$. On munit cet espace de la norme

$$\|f\|_{W^{m,p}} := \|f\|_{L^p} + |f|_{W^{m,p}}, \quad |f|_{W^{m,p}} := \sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha f\|_{L^p}.$$

Définition B.1.2. Si r est un entier positif, on définit l'opérateur de dérivation

$$\mathcal{D}^r := \frac{\partial^r}{\partial x_1^r} \cdots \frac{\partial^r}{\partial x_d^r}.$$

Pour $1 \leq p \leq \infty$, on définit l'espace de Sobolev $\mathcal{W}^{r,p}$ comme l'ensemble des fonctions de L_p dont la dérivée distributionnelle $\mathcal{D}^r f$ est dans L_p . On munit cet espace de la semi-norme

$$|f|_{\mathcal{W}^{r,p}} := |\mathcal{D}^r f|_p.$$

Cet espace est ce que l'on appelle l'espace de Sobolev à dérivées dominantes mixtes.

B.2 Espaces de Besov

Dans le chapitre 3, nous avons besoin de la caractérisation des espaces de Besov en fonction des coefficients d'ondelettes. Nous utiliserons la caractérisation de [20].

Commençons par rappeler la définition des espaces de Besov utilisée. Pour cette définition, nous allons utiliser les modules de continuité que nous définissons ici.

Définition B.2.1. Soit $f \in L_p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, posons $\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$ et $\Delta_h^m f(x) = \Delta_h \Delta_h^{m-1} f(x)$ pour $m > 1$. Le module de continuité d'ordre m de f est défini par

$$\omega_p^m(f, t) = \sup_{|h| \leq t} \|\Delta_h^m f(x)\|_p$$

pour $t \geq 0$.

On a les propriétés suivantes pour les modules de continuité dont les démonstrations peuvent être trouvées dans [13] (p.44-46).

- Proposition B.2.2.**
1. $\omega_p^m(f, t)$ est une fonction croissante de t ;
 2. Pour tout entier n , $\omega_p^m(f, nt) \leq n^m \omega_p^m(f, t)$, donc pour tout $\lambda > 0$, $\omega_p^m(f, \lambda t) \leq (\lambda + 1)^m \omega_p^m(f, t)$;
 3. $\omega_p^m(f, t) \leq t^m \|f\|_{W^{m,p}}$.
 4. Si $f \in W^{m,p}$, alors $\omega_p^m(f, t) \leq C_m t^m \omega_p(f^{(m)}, t)$

Nous avons alors la définition suivante pour les espaces de Besov.

Définition B.2.3. Soient $1 \leq p, q \leq \infty$ et $s \in]0, +\infty[$. L'espace de Besov $B_q^\alpha(L_p)$ est l'espace des fonctions $f \in \mathcal{W}^{[\alpha]}(L_p)$ telles que

$$\|f\|_{B_q^\alpha(L_p)} = \|f\|_{\mathcal{W}^{[\alpha]}(L_p)} + \left(\int_0^{+\infty} (t^{-s} \omega_p^2(D^{[\alpha]} f, t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < +\infty$$

où $[\alpha]$ est la partie entière de α et s est sa partie non entière. Cette précédente expression doit bien sûr être adaptée de manière naturelle si $q = \infty$.

On a la caractérisation suivante¹.

Proposition B.2.4. Soient $0 < q \leq \infty$, $1 \leq p \leq \infty$, $\alpha > 0$ et $f \in B_q^\alpha(L_p(\mathbb{R}^d))$. Si

1. $\psi \in B_q^\beta(L_p(\mathbb{R}^d))$ pour un $\beta > \alpha$ et
2. ψ admet r moments nuls avec $r > \alpha$, alors

$$|f|_{B_q^\alpha(L_p(\mathbb{R}^d))} \asymp \begin{cases} (\sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k\alpha q} (\sum_{I \in D_k} c_{I,p}(f)^p)^{\frac{q}{p}})^{\frac{1}{q}}, & \text{si } 0 < q < \infty \\ \sup_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k\alpha} (\sum_{I \in D_k} c_{I,p}(f)^p)^{\frac{1}{p}}, & \text{si } q = \infty. \end{cases}$$

Remarque B.2.5. Dans le cas où, pour $1 \leq p < \infty$, on travaille avec les ondelettes normalisées (cfr. 3.2.2), pour les espaces $B_\tau^\alpha(L_\tau(\mathbb{R}^d))$ avec $\frac{1}{\tau} = \frac{\alpha}{d} + \frac{1}{p}$, la caractérisation précédente devient

$$|f|_{B_\tau^\alpha(L_\tau(\mathbb{R}^d))} \asymp \left(\sum_{I \in D} c_{I,p}(f)^\tau \right)^{\frac{1}{\tau}}.$$

1. Voir, par exemple, [20].

B.2.1 Espaces de Besov à régularité hybride

Définition B.2.6. Si f est une fonction admettant la décomposition $f = \sum_{\bar{j} \in \mathbb{Z}^d} \sum_{J \in \nabla_{\bar{j}}} c_J \psi_J$, notons c , le vecteur contenant les coefficients de cette décomposition. Pour $m \geq 0$, $s > 0$, $0 < p, \tau < \infty$, on définit l'espace de Besov à régularité hybride $\mathfrak{B}_{\tau}^{m,s,p}$ comme l'ensemble des fonctions f dont le vecteur de composantes normalisées dans L^p vérifie

$$\|c^{(p)}\|_{\mathfrak{b}_{\tau}^{m,s,p}} := \left[\sum_{\bar{j} \in \mathbb{Z}^d} 2^{\tau(m|\bar{j}|_{\infty} + s|\bar{j}|_1)} \left[\sum_{J \in \nabla_{\bar{j}}} |c_J^{(p)}|^p \right]^{\frac{\tau}{p}} \right]^{\frac{1}{\tau}} < \infty.$$

B.3 Espaces de Lipschitz

Définition B.3.1. ² Pour $0 < \alpha \leq 1$ et $1 \leq p \leq \infty$, on définit l'espace de Lipschitz d'ordre α de L_p $(\text{Lip}\alpha)_p$ comme l'ensemble des fonctions de L_p telles que

$$|f|_{(\text{Lip}\alpha)_p} := \sup_{t>0} (t^{-\alpha} \omega_p(f, t)) < \infty.$$

Remarques B.3.2. Lorsque l'on travail sur un espace métrique compact $(\mathbb{T}, \text{par exemple})$, grâce à l'inclusion des espaces L_p , on a que pour tout $0 < \alpha \leq 1$,

$$(\text{Lip}\alpha)_p \subset (\text{Lip}\alpha)_q \text{ si } q > p.$$

On peut également montrer que pour tout $1 \leq p \leq \infty$,

$$(\text{Lip}1)_p \subset (\text{Lip}\alpha)_p.$$

En effet, supposons avoir une fonction $f \in (\text{Lip}1)_p$. On sait donc qu'il existe une constante $M > 0$

$$\omega_p(f, t) \leq Mt.$$

Ainsi, si $0 < t < 1$,

$$t^{-\alpha} \omega_p(f, t) \leq Mt^{1-\alpha} \leq M$$

car $0 < \alpha < 1$. De plus, si $t > 1$, par définition,

$$\omega_p(f, t) \leq 2 \|f\|_{L_p}$$

et $\|f\|_{L_p} < \infty$ puisque $f \in (\text{Lip}1)_p$, donc

$$t^{-\alpha} \omega_p(f, t) \leq \frac{2 \|f\|_{L_p}}{t^{\alpha}} \leq 2 \|f\|_{L_p}.$$

Au final, on a bien

$$\sup_{t>0} (t^{-\alpha} \omega_p(f, t)) < \infty.$$

² Pour plus de précision sur les espaces de Lipschitz, consulter [13] (chapitre 2, section 9).

Dans le chapitre 5, nous avons besoin de la remarque suivante.

Remarque B.3.3. Lorsque l'on travail sur un espace métrique compact X ($\mathbb{T}$, par exemple), on a que

$$C^1(X) \subset (\text{Lip}\alpha)_1(X).$$

En effet, si $0 < t < 1$, par la propriété 3 de B.2.2,

$$\omega_1(f, t) \leq t \|f'\|_{L_1}.$$

Or, puisque f' est continue sur le compact X , $\|f'\|_{L_1}$ est une constante finie M . Donc,

$$\omega_1(f, t) \leq tM.$$

Donc

$$\frac{\omega_1(f, t)}{t^\alpha} \leq t^{1-\alpha} M \leq M$$

car $t < 1$ et $\alpha \leq 1$.

Dans le cas où $t \geq 1$, on a, par définition du module de continuité,

$$\frac{\omega_1(f, t)}{t^\alpha} \leq \frac{2 \|f\|_{L_1}}{t^\alpha} \leq \frac{2M}{t^\alpha} \leq 2M.$$

Donc, dans les deux cas, ce rapport est borné uniformément par rapport à t .

Bibliographie

- [1] R.A. Adams et J.J. F. Fournier, *Sobolev spaces*, 2nd ed., Pure and applied mathematics; 140, Academic Press, Amsterdam, 2003.
- [2] F. Bastin, *Introduction à l'analyse harmonique*, janvier 2024.
- [3] B. Behera et Q. Jahan, "Wavelets as Unconditional Bases", in : *Wavelet Analysis on Local Fields of Positive Characteristic*, Springer Singapore, Singapore, 2021, p. 269-300, disponible via l'URL <https://doi.org/10.1007/978-981-16-7881-3_7>.
- [4] J. Bergh et J. Löfström, *Interpolation spaces : an introduction*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, n° 223, Springer-Verlag, 1976.
- [5] E. Burnaev, *Application of wavelet bases in linear and nonlinear approximation to functions from besov spaces*, Computational Mathematics and Mathematical Physics **46** (2006), p. 2051-2060.
- [6] P. L. Butzer et R. J. Nessel, *Fourier analysis and approximation*. Vol. 1, Mathematische Reihe, n° 40, Academic Press, New York, 1971.
- [7] P. Ciarlet, *The finite element method for elliptic problems*, Classics in Applied Mathematics, n° 40, SIAM, 2002.
- [8] A. Cohen, *Numerical analysis of wavelet methods*, Studies in mathematics and its applications, n° 32, Elsevier, 2003.
- [9] A. Cohen, I. Daubechies et J.C. Feauveau, *Biorthogonal bases of compactly supported wavelets*, Pure and applied mathematics **45** (1992), p. 485-560.
- [10] A. Cohen et al., *On the importance of combining wavelet-based nonlinear approximation with coding strategies*, IEEE Transactions on Information Theory **48** (2002), n° 7, p. 1895-1921.
- [11] D. Dabrowski, *Singular Integral Operators*, 7 décembre 2023, disponible via l'URL <<https://www.damiandabrowski.eu/sios/Dabrowski2023-SIOs-lecture-notes.pdf>>.
- [12] R. A. DeVore, *Nonlinear approximation*, Acta numerica. **7** (1998), p. 51-150, disponible via l'URL <https://www.cambridge.org/core/journals/acta-numerica/article/abs/nonlinear-approximation/C8E028C39B8A849690D0EC418516A934?utm_campaign=shareaholic&utm_medium=copy_link&utm_source=bookmark>.
- [13] R. A. DeVore, A. Cohen et R. Hochmuth, *Restricted nonlinear approximation*, Constructive Approximation **16** (2000), p. 85-113.
- [14] R. A. DeVore, S. V. Konyagin et V. N. Temlyakov, *Hyperbolic wavelet approximation*, Constructive approximation **14** (1998), n° 1, p. 1-26.

- [15] R. A. Devore et G. G. Lorentz, *Constructive approximation*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, n° 303, Springer-Verlag, 1993.
- [16] R.A. Devore et V. Popov, *Interpolation spaces and nonlinear approximation*, Function Spaces and Applications **1302** (1988), p. 191-205.
- [17] C. Fefferman et E. M. Stein, *Some maximal inequalities*, American Journal of Mathematics **93** (1971), n° 1, p. 107-115, disponible via l'URL <<https://doi.org/10.2307/2373450>>, consulté le 3 septembre 2025.
- [18] H. Harbrecht et R. von Rickenbach, *Compression of boundary integral operators discretized by anisotropic wavelet bases*, Numerische Mathematik **156** (2024), n° 3, p. 853-899.
- [19] H. Harbrecht et R. von Rickenbach, *On Sobolev and Besov spaces of hybrid regularity* (2025).
- [20] W. Härdle *et al.*, *Wavelets, approximation, and statistical applications*. Vol. 129, Lecture Notes in Statistics, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [21] T. Holmstedt, *Interpolation of quasi-normed spaces*, Mathematica Scandinavica **26** (1970), n° 1, p. 177-199.
- [22] L. Huang C.and Yang, *Approximation by the nonlinear fourier basis*, Science China. Mathematics **54** (2011), n° 6, p. 1207-1214.
- [23] B.B. Kashin et A. A. Saakyan, *Orthogonal series*, Translations of Mathematical Monographs, n° 75, American Mathematical Society, 1989, sous la dir. de Ben Silver, trad. du russe par Ralph P. Boas.
- [24] T. Qian, L. Zhang et Z. Li, *Algorithm of adaptive fourier decomposition*, IEEE transactions on signal processing **59** (2011), n° 12, p. 5899-5906.
- [25] H. Rafeiro et R. E. Castillo, *An introductory course in Lebesgue spaces*, CMS Books in Mathematics, n° 1613-5237, Springer, Suisse, 2016.
- [26] M. Schäfer, T. Ulrich et B. Vedel, *Hyperbolic wavelet analysis of classical isotropic and anisotropic besov-sobolev spaces*. Journal of Fourier Analysis and Applications **27** (2021), n° 51.
- [27] G. Strang et G. Fix, "A Fourier Analysis of the Finite Element Variational Method", anglais, in : *Constructive Aspects of Functional Analysis* (G. Geymonat, éds), vol. 57, Springer, Berlin, 2011, p. 793-840.
- [28] V. Temlyakov et S. Tikhonov, *Sparse approximation with bases*, 1st ed. 2015., Advanced Courses in Mathematics - CRM Barcelona, Springer Basel, Basel, 2015.
- [29] P. Wojtaszczyk, *A mathematical introduction to wavelets*, London Mathematical Society Student Texts, n° 37, Cambridge University Press, 1997.