
Sur la caractérisation des systèmes exoplanétaires: Optimisation des études de stabilité

Auteur : Stalport, Manu

Promoteur(s) : 2528; Gillon, Michaël

Faculté : Faculté des Sciences

Diplôme : Master en sciences spatiales, à finalité approfondie

Année académique : 2016-2017

URI/URL : <http://hdl.handle.net/2268.2/2569>

Avertissement à l'attention des usagers :

Tous les documents placés en accès ouvert sur le site le site MatheO sont protégés par le droit d'auteur. Conformément aux principes énoncés par la "Budapest Open Access Initiative"(BOAI, 2002), l'utilisateur du site peut lire, télécharger, copier, transmettre, imprimer, chercher ou faire un lien vers le texte intégral de ces documents, les disséquer pour les indexer, s'en servir de données pour un logiciel, ou s'en servir à toute autre fin légale (ou prévue par la réglementation relative au droit d'auteur). Toute utilisation du document à des fins commerciales est strictement interdite.

Par ailleurs, l'utilisateur s'engage à respecter les droits moraux de l'auteur, principalement le droit à l'intégrité de l'oeuvre et le droit de paternité et ce dans toute utilisation que l'utilisateur entreprend. Ainsi, à titre d'exemple, lorsqu'il reproduira un document par extrait ou dans son intégralité, l'utilisateur citera de manière complète les sources telles que mentionnées ci-dessus. Toute utilisation non explicitement autorisée ci-avant (telle que par exemple, la modification du document ou son résumé) nécessite l'autorisation préalable et expresse des auteurs ou de leurs ayants droit.



**UNIVERSITÉ
DE GENÈVE**

Département d'astrophysique, géophysique et océanographie,
Université de Liège, Belgique

&

Observatoire de Genève, Université de Genève, Suisse

Sur la caractérisation des systèmes exoplanétaires

Optimisation des études de stabilité

Mémoire pour l'obtention du diplôme de
Master de l'Université de Liège

rédigé par

Manu STALPORT

sous la direction de

Prof. **Stéphane UDRY** (UNIGE)

Prof. **Michaël GILLON** (ULg)

Prof. **Damien SEGRANSAN** (UNIGE)

Dr. **Jean-Baptiste DELISLE** (UNIGE)

Juin, 2017

Sur la caractérisation des systèmes exoplanétaires

Optimisation des études de stabilité

Résumé

Avec plus de 600 systèmes multi-planétaires détectés à ce jour, la diversité des configurations observées ne manque pas. Les études dynamiques de ces systèmes sont d'un grand intérêt. Elles permettent en effet de nuancer les analyses des observations, et de contraindre davantage les paramètres orbitaux des planètes. Un point essentiel dans cette optique est la mesure de la stabilité que l'on peut déduire de l'approche mécaniste. Tout jeu de conditions initiales donnant lieu à des orbites instables n'est probablement pas celui effectivement observé, et peut dès lors être exclu. Ce travail de fin d'études de Master cherche à améliorer ces inférences de stabilité. Faisant usage d'une part de l'analyse en fréquences pour affirmer le caractère instable ou non d'orbites, d'autre part de l'algorithme de Monte-Carlo par chaînes de Markov afin d'explorer l'espace des éléments elliptiques initiaux, nous avons pu obtenir des résultats concluants. De fait, ce couplage permet une vue d'ensemble des conditions initiales ajustant correctement les observations, et met en évidence les contraintes qui apparaissent en rejetant les paramètres initiaux à l'origine des trajectoires instables.

Remerciements

Ce travail de mémoire, loin d'être un effort personnel, est le résultat d'un entourage d'exception. J'aimerais tout d'abord remercier mes parents, Jacques et Marie-France, sans qui je n'aurais pu même espérer entreprendre des études de physique (bachelier), puis d'astrophysique (master). Ils m'ont toujours encouragé à réaliser mes rêves, et m'ont épaulé dans tous les moments difficiles. Leur soutien me fut essentiel.

Par ailleurs, je tiens à remercier tout particulièrement Jean-Baptiste Delisle, chercheur à l'observatoire de Genève. Son aide précieuse, ses remarques aiguisées et sa disponibilité en ont fait l'encadrant idéal. Mes remerciements vont également aux Professeurs Damien Segransan et Stéphane Udry pour leur accueil chaleureux à l'observatoire de Genève et leur enthousiasme vis à vis de mon travail. Je remercie enfin le Professeur Michaël Gillon pour son soutien dans mon entreprise d'un mémoire en partenariat avec l'Université de Genève.

J'aimerais encore citer mes sœurs Céline et Pierrette, Nicole et mes amis Loïc, Hervé, Lucas, Martin, Laure, Thomas, ... : merci à tous pour leurs nombreux encouragements !

Avant-propos

De tout temps, l'astronomie fait partie intégrante de la vie de l'Homme. Considérée comme une voie d'échanges avec le divin, elle permit tout d'abord d'orienter l'être humain dans ses décisions les plus importantes. Elle lui apporta également une référence temporelle de par les notions de jour et de mois et servit de guide aux aventuriers et commerçants qui voyageaient vers des contrées lointaines. Aujourd'hui encore, elle reste indispensable, notamment pour assurer le bon fonctionnement des systèmes de navigation globaux par satellites. Le caractère pragmatique de la doyenne des sciences est donc évident. Par ailleurs, l'astronomie est également un domaine suscitant fantasmes et imagination, comme en témoignent les innombrables récits de science-fiction qui y font référence. C'est en grandissant que j'ai distingué ces deux aspects, formant un tout complet. Le choix d'étudier cette discipline m'apparut alors évident. Au cours de mon cursus universitaire, j'acquis un intérêt croissant pour la mécanique. Je saisis en effet rapidement l'importance historique qu'elle occupa, et fus séduit par l'élégante simplicité avec laquelle elle permettait de prédire les mouvements¹. Mes affinités avec l'exoplanétologie apparurent plus tardivement, lors de ma première année de Master. Je découvris alors un domaine d'études en pleine expansion, et de ce fait incroyablement actif. L'immense quantité de choses à découvrir en font une discipline des plus intéressantes. Par ailleurs, cette dernière couvre un très vaste ensemble de sujets, favorisant les échanges entre scientifiques aux spécialités variées. Enfin, la mécanique céleste y joue un rôle de premier plan. Je me suis donc fixé l'objectif de me spécialiser sur les aspects mécaniques d'exoplanétologie.

Fort de ces convictions, j'y ai consacré mon travail de fin d'études de Master. Ce dernier poursuit un but spécifique : optimiser, dans un sens qui sera précisé, les études de stabilité des systèmes planétaires. Ce mémoire fut réalisé à l'observatoire de Genève durant le semestre de printemps, par le biais d'un programme d'échanges Erasmus. J'ai ainsi pu approfondir mes apprentissages acquis à l'Université de Liège au sein d'une institution qui a fait de l'exoplanétologie son fer de lance. L'enrichissement personnel en fut majeur.

Le travail comprend globalement deux parties principales. La première s'intéresse à la compréhension des outils qu'il m'est nécessaire d'utiliser. Il s'agit en quelque sorte d'une mise à niveau permettant de comprendre et d'aborder mes objectifs de manière adéquate. J'y décris trois points essentiels : le problème à N corps, l'analyse en fréquences et les statistiques bayésiennes. Pour chacune de ces sections, j'aurai écrit un code numérique permettant d'illustrer les différents concepts. Je mentionne d'emblée que le langage de programmation Python fut systématiquement utilisé pour cette première partie (langage que j'ai d'ailleurs spécifiquement appris pour les besoins du mémoire). La deuxième partie intègre quant à elle les différents concepts en vue d'optimiser les études de stabilité. Pour ce faire, un dernier élément fut ajouté, à savoir le calcul numérique en parallèle. J'ai donc utilisé les processeurs sur carte graphique (GPU) de l'observatoire de Genève, permettant un tel schéma de calcul.

Préalablement à ces deux parties, une introduction permet de comprendre et situer le contexte dans lequel s'inscrit ce travail.

1. Pour les cas d'école, bien entendu !

Table des matières

Introduction	1
I Étude des outils nécessaires	5
1 Éléments de mécanique céleste	5
1.1 Deux visions de la mécanique	5
1.1.1 Mécanique vectorielle	6
1.1.2 Mécanique analytique	6
1.2 Les éléments elliptiques	7
1.3 Le problème à N corps	9
1.4 Les intégrateurs symplectiques	10
1.4.1 Les transformations canoniques et leur approche symplectique	11
1.4.2 Les méthodes d'Euler et de leapfrog	13
1.4.3 Résultats de la méthode leapfrog	16
2 Études de stabilité : l'analyse en fréquences	18
2.1 Historique des études de stabilité	18
2.2 L'analyse en fréquences	20
2.3 Indicateur de stabilité	24
3 Statistiques bayésiennes	27
3.1 Notions de base	27
3.2 Monte-Carlo par chaînes de Markov	28
II Utilisation des outils	33
4 Instruments de travail	33
4.1 GENGA	33
4.2 DACE	35
5 Optimiser les études de stabilité	37
5.1 Agrandir l'espace des paramètres	37
5.2 Affiner les contraintes	38
5.3 Applications sur des systèmes observés	40
5.3.1 HD 202206	40
5.3.2 HD 82943	43
Conclusions	47
Annexe	48
Bibliographie	51

Introduction

La Nature est aussi fascinante qu'incomprise. Ses mystères nourrissent la Science, qui à son tour nourrit l'esprit humain. Ce lien entre la Nature et l'Homme, entretenu par les scientifiques, est capital dans la lutte contre l'ignorance. De fait, la Science questionne. Il n'y a aucune honte à ne pas trouver de réponse à chaque interrogation, mais il serait par contre inepte d'affirmer la vérité d'une solution sans qu'elle n'ait été au préalable vérifiée. En ce sens, l'objectivité est le meilleur allié de la Science.

Avant la découverte des exoplanètes, les fantasmes sur l'existence d'autres mondes furent nombreux. Ce manque de rationalité mêlait l'exoplanétologie à la science-fiction, et de ce fait la rendait peu crédible en tant que domaine scientifique². En 1992 eut lieu la première détection d'exoplanètes, par Wolszczan et Frail. Il s'agit de PSR 1257+12 b, c et d, des corps célestes orbitant autour du pulsar milliseconde PSR 1257+12. Ce cas, paraissant à priori peu banal, fut détecté par hasard en constatant des périodes particulières dans les signaux radios reçus. Les conséquences en furent décisives, plaçant l'exoplanétologie au rang de discipline scientifique. Cette dernière ne prit toutefois réellement son essor que trois ans plus tard lorsqu'en 1995, Michel Mayor et Didier Queloz détectèrent 51 Pegasi b. Cette exoplanète, qualifiée de Jupiter chaud, déclencha un véritable engouement du public pour l'étoile autour de laquelle elle orbite. On venait en effet de détecter pour la première fois une exoplanète en orbite autour d'une étoile en phase de séquence principale semblable à notre soleil. Motivés par cette découverte, seules quelques années suffirent avant de voir apparaître de nombreux programmes d'observations, tant au sol que dans l'espace, afin de détecter ces fameux corps célestes.

La définition même de ce qu'est une exoplanète est encore débattue à l'heure actuelle, au même titre que la notion de planète. Pour ce travail, nous nous contenterons d'une définition sommaire, à savoir qu'une exoplanète est une planète qui orbite autour d'une (ou plusieurs) étoile(s) autre(s) que le Soleil. Actuellement, plus de 3500 exoplanètes ont été mises au jour, se répartissant dans pas moins de 2700 systèmes planétaires. Les méthodes de détection se sont diversifiées, certaines étant plus prolifiques que d'autres. Elles sont au nombre de six, à savoir les méthodes des vitesses radiales, des transits, des microlentilles gravitationnelles, des timings, d'astrométrie, et d'observations directes par imagerie à haute résolution. Les techniques ayant donné lieu aux détections les plus nombreuses sont les deux premières, et de ce fait elles jouent un rôle important dans les études statistiques. La deuxième partie de ce mémoire fera usage d'observations en vitesses radiales, qui furent le moyen utilisé pour détecter 51 Peg b.

D'un point de vue conceptuel, la méthode des vitesses radiales est proche des techniques astrométriques et des timings. Il s'agit de détecter le mouvement d'une étoile engendré par la présence d'une planète dans son voisinage. En effet dans un système planétaire, tous les corps orbitent autour d'un centre de masse commun. Ce déplacement de l'étoile se détecte par voie astrométrique en suivant son parcours sur la sphère céleste. Cette méthode est néanmoins souvent infructueuse. De fait, l'étoile étant bien plus massive que les planètes environnantes, le centre de masse du système est enfui au sein de l'astre. Dès lors, l'amplitude du mouvement de ce dernier est très faible³. La technique des vitesses radiales permet de détecter ce déplacement par voie indirecte, en utilisant l'effet Doppler : toute onde (qu'elle soit matérielle ou non) émise par une source est perçue par l'observateur avec une fréquence différente si la distance les

2. Mentionnons toutefois les travaux précurseurs d'astrométrie de Friedrich Bessel et les recherches sur les vitesses radiales stellaires d'Otto Struve.

3. Notons toutefois qu'avec la mission spatiale Gaia, la méthode astrométrique permettrait potentiellement la découverte de nombreuses exoplanètes.

reliant varie au cours du temps. Ainsi la fréquence de l'onde reçue sera plus élevée qu'à la source si les deux objets se rapprochent ; elle sera plus faible si les deux objets s'éloignent. C'est le mouvement radial qui importe. La méthode des vitesses radiales consiste dès lors à étudier le mouvement radial des étoiles, en analysant les variations de fréquence des ondes reçues au cours du temps. Ces variations se détectent à partir de spectres électromagnétiques de l'étoile relevés à différents instants. De tels spectres présentent en effet des raies d'absorption décelant la présence d'éléments chimiques particuliers. Une fois ces éléments chimiques identifiés, la différence entre la fréquence à laquelle ils apparaissent pour une source au repos et celle correspondant à la source en mouvement (l'étoile) renseigne sur la vitesse radiale de l'astre. Cela se fait via la relation suivante : $\lambda = \lambda' \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$. Cette dernière relie la longueur d'onde de la raie émise par la source au repos λ' à la longueur d'onde de la raie observée λ par le biais de la vitesse radiale v_r (qui apparaît via le facteur $\beta = \frac{v_r}{c}$ où c est la vitesse de la lumière dans le vide). Ainsi à chaque instant, une vitesse radiale est mesurée. Cette information est alors répertoriée dans un graphique de la vitesse radiale de l'étoile en fonction du temps. Cette série temporelle est le principal outil de la technique des vitesses radiales pour rechercher des exoplanètes. De fait, une planète dans le voisinage d'une étoile générerait une évolution périodique de sa vitesse radiale, les caractéristiques de cette dernière étant fonction des paramètres orbitaux et physiques de l'exoplanète. Par exemple, l'amplitude du signal de vitesses radiales croît si le demi-grand axe du corps céleste recherché diminue, ou si sa masse augmente. Tout l'enjeu est alors de trouver les paramètres orbitaux kepleriens de l'hypothétique exoplanète qui ajusteraient le plus fidèlement la série temporelle. Des outils statistiques permettent de simplifier cette recherche des paramètres optimaux, notamment les périodogrammes. Ces derniers assurent l'existence d'un signal périodique de période P avec un certain niveau de confiance. Il est à noter cependant que la méthode des vitesses radiales présente une dégénérescence. En effet, si le plan orbital de l'exoplanète est perpendiculaire à la ligne de visée, alors aucun mouvement radial de l'étoile ne sera généré. Par contre, si ce plan est parallèle à la ligne de visée, alors l'amplitude du signal observé sera maximale. Or, il n'est pas possible de connaître l'inclinaison du plan orbital vis à vis du plan du ciel par les seules observations de vitesses radiales (un suivi photométrique d'éventuels transits permettrait de contraindre l'inclinaison). En conséquence, la seule information disponible sur la masse de l'exoplanète, qui influe sur l'amplitude des vitesses radiales, est sa masse réelle multipliée par un facteur géométrique inférieur à 1, soit $M \sin i$.

La détection d'une exoplanète en mesurant la vitesse radiale de son étoile hôte représente un défi technologique, tant l'amplitude du signal est faible. À titre d'exemple, on estime que la Terre applique sur le Soleil un mouvement autour du centre de masse d'une amplitude radiale de 10 *cm/s* environ (si on s'affranchit de l'effet géométrique qu'est l'inclinaison). De tels signaux sont encore hors de portée. En ce qui concerne Jupiter (la planète la plus massive du système solaire), l'amplitude estimée s'élève à 12.5 *m/s*, soit 45 *km/h*. Cette dernière est bien plus élevée, rendant de tels signaux détectables. Diverses sources de bruit affectent en réalité la qualité des mesures. La plus évidente d'entre elles est la précision instrumentale. Des spectromètres sont utilisés pour générer les spectres électromagnétiques. De tels engins présentent un pouvoir de résolution fini, ce qui implique une précision limitée sur la position des raies. Par ailleurs, un problème important est lié au choix de la calibration. Le spectre de référence (d'une source au repos) est bien souvent généré en même temps que le spectre observationnel sur base d'une source de calibration, ces deux spectres étant ensuite comparés afin d'estimer la vitesse radiale à l'instant donné. Les spectres de calibration qui s'étendent sur une large gamme de longueurs d'ondes et présentent une grande densité de raies sont privilégiés. Cependant, toutes les sources de calibration introduisent une incertitude dans la position exacte de leurs raies, ce qui fausse les mesures de vitesses radiales. Une autre contrainte est liée aux signaux parasites émis par l'étoile. Pour les comprendre, mentionnons que la vitesse radiale d'un astre est définie par

rapport à son centre de masse. Or les raies d’absorption, à partir desquelles ces vitesses sont mesurées, prennent naissance dans l’atmosphère de l’étoile. Dès lors, le mouvement mesuré ne correspond pas nécessairement à celui du centre de masse. Les observations sont faussées par divers phénomènes prenant place dans l’atmosphère stellaire, tels les oscillations de type p (ondes de compression), la présence de taches solaires, la granulation (qui est une conséquence directe de la convection dans les couches périphériques) ou encore, sur un plus long terme, les cycles d’activité stellaire. Ces différents mécanismes génèrent de faux signaux de manière plus ou moins prononcée. Des techniques existent pour distinguer de tels effets d’un véritable signal planétaire. Entre autres, Dumusque et al. (2011) se sont intéressés aux stratégies d’observation optimales permettant de limiter le bruit stellaire.

En conclusion, les mesures de vitesses radiales stellaires constituant la série temporelle ne sont pas exactes. Il s’ensuit que les paramètres orbitaux de l’exoplanète, obtenus en ajustant une courbe aux données, ne sont qu’estimés avec une certaine précision.

Une approche mécaniste permet de réduire cette incertitude, en établissant des *cartes de stabilité*.

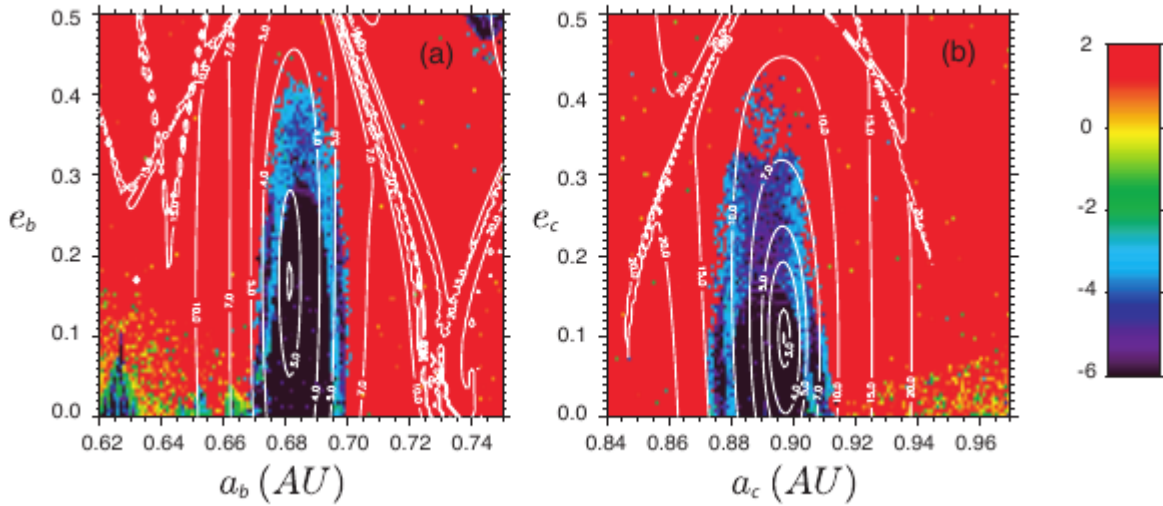


FIGURE 1 – Cartes de stabilité du système planétaire HD 45364. Pour chaque case de la grille définie par deux paramètres orbitaux initiaux, une simulation utilisant le problème à N corps est menée (les autres paramètres initiaux sont maintenus fixes). Un indicateur de stabilité (basé ici sur l’analyse en fréquences) permet ensuite d’apposer un code couleur à la grille, ce qui lui confère une troisième dimension. La couleur rouge signifie que les orbites correspondantes sont beaucoup plus instables que celles associées à la couleur noire. Remarque : il est fréquent de superposer à ces cartes de stabilité les courbes de niveau du χ^2 issu du meilleur ajustement aux données de vitesses radiales, de sorte à comparer ce dernier aux prédictions de la carte de stabilité. Ces graphiques sont tirés de l’article de Correia et al. (2009).

Il s’agit d’une grille à deux dimensions, dont chaque axe représente un certain paramètre orbital initial d’une planète (dans l’exemple ci-dessus, les axes choisis sont l’excentricité et le demi-grand axe de la planète b pour la carte (a), de la planète c pour la carte (b)). À chaque point dans la grille est donc associé un couple de paramètres orbitaux. La taille de la grille est en général un peu plus grande que la taille des fenêtres d’incertitude des paramètres correspondants. Tout point dans la grille représente donc un jeu unique de conditions initiales (le temps initial ainsi que quatre paramètres kepleriens sont toujours fixes ; les deux derniers paramètres orbitaux

différent en fonction de la zone explorée de la grille). L'idée est alors d'étudier l'évolution future du système pour chacune des différentes conditions initiales. Ainsi dans chaque case, on génère une simulation à N corps. À la fin de chacune de ces simulations, un *critère de stabilité* quantifie le niveau de stabilité du système. Il existe divers critères de stabilité, tels l'exposant de Lyapunov caractéristique maximal (mLCE, Benettin et al. 1980), le facteur de croissance exponentielle moyenne des orbites proches (MEGNO, Cincotta & Simó 2000), ou encore une technique basée sur des tirages aléatoires parmi des distributions de conditions initiales issues d'algorithmes de Monte-Carlo par chaînes de Markov (Carter et al. 2012). Le critère utilisé à l'observatoire de Genève (que nous décrirons en première partie de notre travail) se base sur la technique de l'analyse en fréquences. Finalement, à chaque case de la grille est assigné un niveau de stabilité. Partant alors de la constatation que des conditions initiales proches de celles générant le meilleur ajustement aux données confèrent au système planétaire une plus grande stabilité, il n'est pas déraisonnable de penser que ce meilleur ajustement n'est pas exact. En effet, plus un système planétaire est instable, moins il est probable de l'observer (il aurait déjà été démantelé avant de l'observer). Ces cartes de stabilité permettent ainsi d'affiner les résultats donnés par le meilleur ajustement aux observations de vitesses radiales. Par ailleurs, elles aident dans certains cas à réduire les zones d'incertitude associées aux paramètres de la grille. De fait, si les bords de la grille sont instables, les conditions initiales correspondantes peuvent être retirées des fenêtres d'ignorance des paramètres en question.

Il va sans dire que l'établissement de cartes de stabilité est très fastidieux. Générer plusieurs dizaines, voire plusieurs centaines, de simulations d'évolutions de systèmes sur plusieurs dizaines de milliers d'années afin d'en saisir une information correcte sur la stabilité demande un grand temps de calcul. Il n'est donc pas envisageable de générer des grilles à plus de deux dimensions. L'ambition de ce travail est de passer outre ces restrictions, et d'acquérir des informations de stabilité pour tous les paramètres orbitaux initiaux (et pas pour deux d'entre eux uniquement). À terme, on espère ajouter des contraintes intéressantes sur les distributions de ces paramètres, et ainsi optimiser les études de stabilité des systèmes planétaires.

Première partie

Étude des outils nécessaires

En guise de préliminaires et pour les besoins de ce travail, j'aborderai les outils utiles à la réalisation des objectifs fixés. Ces outils se répartissent en trois catégories : des éléments de mécanique céleste, l'analyse en fréquences et les statistiques bayésiennes. Chaque chapitre sera illustré par les résultats de simulations que j'aurai effectuées (en Python), sauf mention explicite contraire.

Chapitre 1

Éléments de mécanique céleste

1.1 Deux visions de la mécanique

La mécanique est la science du mouvement, depuis sa description jusqu'à ses causes. Il s'agit d'un des plus anciens domaines scientifiques. Les premières tentatives de description apparurent très tôt. Les références remontent en effet à Archimède et ses travaux sur la statique. Il faudra cependant attendre la renaissance pour qu'apparaissent les bases rigoureuses et générales de cette discipline. Deux manières de décrire les trajectoires se développent alors : la mécanique vectorielle, qui comme son nom l'indique, fait usage de nombreuses quantités vectorielles, et la mécanique analytique, dont le principal type de quantité est le scalaire.

Notons que ces deux visions de la mécanique appartiennent à une même entité que constitue la mécanique classique. Elle sera supplantée par la théorie de la relativité générale proposée par Albert Einstein, au cadre formel drastiquement différent. Cependant, la mécanique classique reste pour le moins tout à fait valable dans le domaine des systèmes planétaires, là où les masses intervenantes sont suffisamment faibles (à la rigueur, l'effet relativiste s'introduit sous forme de correction, mais il n'est pas nécessaire de modifier le formalisme).

1.1.1 Mécanique vectorielle

La description des mouvements sur base de quantités vectorielles est devenue naturelle. Le premier contact qu'ont les étudiants avec la mécanique poursuit en effet la vision vectorielle. Cette dernière caractérise le mouvement d'entités appelées points matériels, les corps macroscopiques étant vus comme des assemblages de points matériels. Cette façon de concevoir un mouvement a pour chef de file Isaac Newton qui publia, sous les conseils d'Edmond Halley, son ouvrage devenu célèbre "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" (1687). Dans ce dernier, il expose les trois postulats de base de la mécanique vectorielle, et il précise qu'une théorie des forces adéquate est nécessaire pour décrire un certain mouvement. Il propose également une relation pour la force de gravitation :

$$\mathbf{F} = -GM M' \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

où M et M' sont les masses des deux points matériels qui interagissent, $\mathbf{r}$ (de module r) est le vecteur reliant ces deux points et G est la constante de gravitation universelle. Cette dernière, dont la valeur est déterminée par voie expérimentale, constitue la constante fondamentale la moins connue à ce jour. Sa valeur actuelle est d'environ $6.674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$.

La démarche à effectuer pour caractériser un mouvement est systématique (ce qui fait un des attraits de la mécanique vectorielle, tout comme la mécanique analytique (voir ci-après)). Tout d'abord, une étude des forces est nécessaire, afin d'en extraire celles qui interviennent dans la situation étudiée. Ensuite, ces relations sont insérées dans le deuxième postulat de base, encore appelé la loi fondamentale de la mécanique (ou loi de Newton) : $\mathbf{F} = M \mathbf{a}$, où $\mathbf{a}$ est l'accélération de l'entité étudiée¹. Finalement, en décomposant cette équation selon les axes du repère, il reste à résoudre un système d'équations différentielles pour les diverses inconnues (qui sont les composantes de la position et d'éventuelles forces de liaison).

1.1.2 Mécanique analytique

Il est une autre forme de mécanique, basée sur des arguments analytiques plutôt que vectoriels et géométriques, qui s'avère plus utile dans certaines situations. Les pionniers de cette vision de la mécanique sont entre autres Leonhard Euler, Joseph-Louis Lagrange et William Rowan Hamilton.

Le cheminement systématique permettant d'aboutir aux équations du mouvement est le suivant. Tout d'abord, le système mécanique est caractérisé par un choix approprié de coordonnées généralisées. Pour un système à f degrés de liberté, il s'agit de f quantités q_i (comme des angles ou des longueurs) sensées le décrire complètement. Autrement dit, l'ensemble des coordonnées généralisées doit caractériser les positions de toutes les entités du système, prenant en compte les liaisons éventuelles. Une fois ce choix réalisé, le lagrangien peut être construit. Cette fonction du temps et des coordonnées ainsi que des vitesses (dérivées temporelles des coordonnées) généralisées est définie par la relation $L = T - V$, où T est l'énergie cinétique du système et

1. Dans cette loi, la masse M n'a pas à proprement parler la même signification que la masse apparaissant dans l'expression pour la force de gravitation, bien que toutes deux soient des propriétés intrinsèques de l'entité étudiée. Dans la loi de Newton, la masse est définie par la mesure de la résistance qu'un corps exerce vis à vis d'une certaine accélération, et porte de ce fait le nom de masse inerte. Dans l'expression pour la force de gravitation, la masse dite gravifique permet de déterminer la valeur de la force gravifique. L'expérience montre cependant que ces masses ont un rapport indépendant du corps considéré, et le principe d'équivalence prône alors l'égalité entre ces deux masses.

V , son énergie potentielle. Le lagrangien est ensuite inséré dans les équations de Lagrange, qui constituent un système de f équations différentielles d'ordre 2 pour les $q_i(t)$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

L'avantage de cette formulation est double. D'une part, les forces de liaisons n'apparaissent pas dans ces équations (alors qu'elles constituaient des inconnues supplémentaires en mécanique vectorielle). D'autre part, les équations de Lagrange sont invariantes vis à vis de tout changement de coordonnées généralisées. Autrement dit, ce choix des coordonnées peut être optimisé en fonction du système mécanique étudié.

Il est possible de déduire les équations de Newton de ce formalisme, en particulierisant le choix des coordonnées généralisées et du potentiel V . Elles sont donc un cas particulier des équations de Lagrange.

En mécanique analytique, il existe une autre formulation des lois du mouvement. Cette dernière constitue un ensemble de $2f$ équations différentielles du premier ordre. En définissant les impulsions conjuguées aux coordonnées généralisées q_i ($i = 1, \dots, f$) comme $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, l'hamiltonien est défini par la transformée de Legendre du lagrangien : $H(q, p, t) = p_i \dot{q}_i - L$. Cette fonction du temps, des coordonnées et des impulsions généralisées vérifie alors les équations d'Hamilton du système mécanique :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Ces $2f$ équations différentielles sont équivalentes aux f équations de Lagrange pour autant que la matrice d'éléments $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}$ soit non singulière (autrement dit, il faut que le déterminant $\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right) \neq 0$).

En mécanique céleste, l'hamiltonien H ne dépend pas explicitement du temps. Il est une constante des mouvements. Par ailleurs, le potentiel V (qui intervient dans la définition du lagrangien) est indépendant des vitesses généralisées. Dans ces conditions, l'hamiltonien devient $H = T + V$. Il représente *l'énergie totale du système*.

1.2 Les éléments elliptiques

Dans un espace à trois dimensions, l'état général d'une particule à chaque instant est entièrement déterminé par la donnée de six paramètres. En mécanique céleste, les codes numériques utilisent généralement les trois composantes de la position et de la vitesse de chaque planète afin de déterminer leurs mouvements. De fait, ces composantes étant déterminées à partir de la loi de Newton, il est très simple d'implémenter le calcul de telles coordonnées. Cependant, à partir de ces six paramètres, il n'est pas aisé de se représenter la position de la planète vis à vis de l'étoile. Étant donné que le mouvement d'une planète autour d'une étoile suit le tracé d'une ellipse, des coordonnées elliptiques peuvent être établies. Ces dernières facilitent grandement la représentation géométrique du mouvement des planètes. Elles sont :

- Le demi-grand axe a
- L'excentricité e
- L'inclinaison orbitale i
- La longitude du nœud ascendant Ω
- L'argument du périastre ω
- L'anomalie moyenne M

Les deux premières coordonnées caractérisent la forme de l'ellipse. L'inclinaison est l'angle entre

l'orbite de la planète et un plan de référence. Ce dernier peut prendre plusieurs définitions. Dans le système solaire, il s'agit du plan de l'écliptique (qui est le plan moyen de l'orbite de la Terre). En exoplanétologie, la référence est le plus souvent le plan du ciel. Pour une inclinaison non nulle, l'orbite intersecte le plan de référence en deux points : les nœuds. Le nœud ascendant est le point d'intersection tel que la planète traverse le plan de référence de bas en haut. La longitude du nœud ascendant Ω est alors définie comme l'angle entre une direction de référence et le nœud ascendant. Cet angle est donc inscrit dans le plan de référence. L'argument du périastre ω est l'angle, compté dans le plan de l'orbite, entre le nœud ascendant et le périastre². Il est également souvent fait mention de la longitude du périastre. Celle-ci, notée ϖ , est définie par la relation $\varpi = \omega + \Omega$. Enfin, l'anomalie moyenne M est le paramètre orbital qui ajoute la notion de temps. Il s'agit d'un angle exprimant la fraction de période orbitale effectuée par la planète depuis son passage au périastre. Cette mesure se définit par le biais du moyen mouvement n , qui est la fréquence associée à la période orbitale. Dès lors, $M = n t$, ce qui montre que M évolue linéairement avec le temps si la période de la planète est constante. Notons que la quantité n peut être estimée par la troisième loi de Kepler : $n^2 a^3 = G (M + m)$ en coordonnées héliocentriques, où M est la masse de l'étoile et m la masse de la planète.

Ces coordonnées elliptiques sont illustrées à la figure 1.1. Le symbole ν représente l'anomalie vraie. Il s'agit de l'angle reliant la direction du périastre à la position réelle d'un corps sur son orbite. L'anomalie moyenne est liée à une grandeur appelée longitude moyenne, et notée λ , par la relation $\lambda = M + \varpi = M + \omega + \Omega$. De même, l'anomalie vraie vérifie la relation suivante avec la longitude vraie l : $l = \nu + \varpi$. Dès lors, $l - \lambda = \nu - M$.

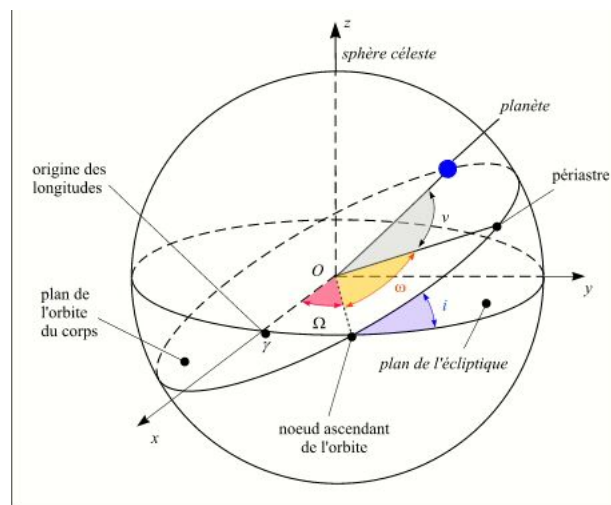


FIGURE 1.1 – Illustration de quelques éléments elliptiques. Source : https://media4.obspm.fr/public/AMC/pages_mouvement-terre-lune/stlp-definition-elements-elliptiques-3.html

L'intérêt majeur de ces éléments est que, pour le problème à deux corps, tous sont constants sauf un : l'anomalie moyenne. Ainsi, cinq des six paramètres décrivent l'ellipse qu'emprunte la trajectoire de la planète, le dernier (M) ajoutant une information quant à la progression du corps sur l'ellipse.

Si le système planétaire contient plus d'une planète, d'autres éléments elliptiques vont alors varier. L'évolution temporelle de ces paramètres renseigne donc directement sur les interactions planète-planète. Des équations pour chacune des coordonnées elliptiques expriment leur variation

2. Le périastre est le point d'approche minimale entre le corps étudié et le centre de masse du système.

temporelle. On les appelle les équations de Lagrange (à ne pas confondre avec les équations du même nom décrivant le mouvement général d'un système mécanique). Pour les introduire, rappelons tout d'abord les éléments canoniques de Delaunay (les équations de Lagrange étant généralement écrites avec ceux-ci). Ces derniers sont définis sur base des éléments elliptiques de la manière suivante ($\mu = G(M + m)$ en coordonnées héliocentriques) :

$$(l, g, \theta, L, G, \Theta) = (M, \omega, \Omega, \sqrt{\mu a}, \sqrt{\mu a(1 - e^2)}, \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \cos i)$$

où L , G et Θ sont les impulsions associées aux coordonnées généralisées l , g et θ (cf. Fitzpatrick (1970)).

On peut montrer que dans ces éléments, l'hamiltonien du problème à deux corps vaut $H = -\frac{\mu^2}{2L^2}$. Si l'on considère plus d'une planète, des forces perturbatives agissent sur la planète i étudiée. Pour autant que ces forces soient conservatives (ce qui est le cas si les planètes sont considérées comme des masses ponctuelles - voir section 1.3), il est possible d'exprimer le terme perturbatif H' en recourant aux éléments de Delaunay. L'hamiltonien devient $H = -\frac{\mu^2}{2L^2} + H'(l, g, \theta, L, G, \Theta)$. Ces considérations émises, les équations de Lagrange sont obtenues à partir des équations canoniques d'Hamilton et s'écrivent :

$$\frac{da}{dt} = -\frac{2}{n a} \frac{\partial H'}{\partial M} \quad (1.1)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{e} \left[\frac{e^2 - 1}{n a^2} \frac{\partial H'}{\partial M} + \frac{\sqrt{1 - e^2}}{n a^2} \frac{\partial H'}{\partial \omega} \right] \quad (1.2)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{n a^2 \sqrt{1 - e^2} \sin i} \left[\frac{\partial H'}{\partial \Omega} - \cos i \frac{\partial H'}{\partial \omega} \right] \quad (1.3)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{-1}{n a^2 \sqrt{1 - e^2} \sin i} \frac{\partial H'}{\partial i} \quad (1.4)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\cos i}{n a^2 \sqrt{1 - e^2} \sin i} \frac{\partial H'}{\partial i} - \frac{\sqrt{1 - e^2}}{n a^2 e} \frac{\partial H'}{\partial e} \quad (1.5)$$

$$\frac{dM}{dt} = n(t) + \frac{2}{n a} \frac{\partial H'}{\partial a} + \frac{1 - e^2}{n a^2 e} \frac{\partial H'}{\partial e} \quad (1.6)$$

Ces équations dictent l'influence des perturbations sur les variations des paramètres orbitaux. Elles confirment par ailleurs que pour le problème à deux corps, où H' est nul, seule l'anomalie moyenne change au cours du temps.

1.3 Le problème à N corps

Un problème général à N corps se présente comme suit : un ensemble de N corps interagissent par le biais de certaines forces. Le but est de prévoir leurs mouvements en résolvant les N équations de Newton (une équation par objet).

Un système planétaire peut très bien être décrit comme un ensemble *isolé* de *particules* qui n'interagissent que par le biais de la force de *gravitation*. Trois mots ont été mis en évidence dans cette phrase, car ils impliquent diverses hypothèses. En partant du dernier, "gravitation" suppose qu'on néglige toute autre forme d'interaction (comme le frottement visqueux avec un disque de poussières, la pression de radiation par unité de surface planétaire ou encore les forces de frottement fluide au sein des planètes). L'emploi du mot "particules" implique la symétrie sphérique des planètes. De fait, la force de gravitation qu'applique une étoile sur une planète

s'exerce en fait sur chaque point de cette dernière. Si la planète est à symétrie sphérique, l'effet global est parfaitement équivalent à celui d'une force identique s'appliquant sur le centre de masse de la planète. Cette hypothèse consiste donc à négliger les interactions spin-orbite³. Enfin, le mot "isolé" signifie qu'aucune force d'origine externe au système n'est appliquée. Les conséquences sont importantes, car cette hypothèse fournit les intégrales premières du problème. De ce fait, elle assure la conservation de l'énergie totale (1 constante) et du moment cinétique total (3 constantes) du système.

Le problème à N corps étudié dans ce travail vérifie ces hypothèses. Il constitue un ensemble de N équations de Newton. Pour chaque particule k , l'équation s'écrit (en notant O l'origine du système de référence inertiel à partir duquel les positions des particules P_i sont établies) :

$$m_k \frac{d^2 \mathbf{OP}_k}{dt^2} = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{Gm_k m_i}{|\mathbf{P}_k \mathbf{P}_i|^3} \mathbf{P}_k \mathbf{P}_i + \sum_{i=k+1}^N \frac{Gm_k m_i}{|\mathbf{P}_k \mathbf{P}_i|^3} \mathbf{P}_k \mathbf{P}_i$$

Il s'agit d'un système d'équations différentielles couplées, d'une redoutable difficulté en général. En effet, comme il a été expliqué ci-dessus, le problème comprend un total de 4 constantes d'intégration. Or, les inconnues sont au nombre de $6 \times N$ (les trois composantes des N positions et vitesses). Cependant, la position de l'étoile n'est pas à proprement parler une inconnue, puisqu'elle peut être estimée par après sur base des positions des planètes, en utilisant la relation du centre de masse : $\sum_{i=0}^N m_i \mathbf{OP}_i = 0$ (l'indice $i = 0$ fait référence à l'étoile). L'adaptation de cette relation aux vitesses exprime la conservation de la quantité de mouvement du système. On estime la vitesse de l'étoile à partir de celle-ci. Dès lors, pour un problème à N corps, $6 \times (N - 1)$ inconnues doivent être déterminées, pour seulement 4 intégrales premières. Pour le problème à deux corps cependant, on peut montrer qu'une quantité supplémentaire est conservée, à savoir l'intégrale de Laplace⁴. Cette dernière ajoute deux constantes d'intégration indépendantes, pour un total de six intégrales premières. En conséquence, seul le cas $N = 2$ possède une solution analytique. Il ne fallut cependant pas attendre l'apparition de l'informatique pour que des développements intéressants aient lieu quant au problème à trois corps, menés dans un premier temps par Euler suivi de Lagrange et Laplace (au dix-huitième siècle). Ces travaux aboutirent notamment à la naissance de la théorie des perturbations, ou encore à la découverte des points de Lagrange du problème à trois corps restreint.

1.4 Les intégrateurs symplectiques

Qu'on utilise le formalisme newtonien ou hamiltonien, la dernière étape dans le traitement d'un problème de mécanique est la résolution d'un système d'équations différentielles pour les fonctions inconnues (positions et vitesses dans la suite). Cette recherche de solutions peut s'avérer très complexe dans certains cas (dans le cadre du problème à N corps où $N \geq 3$, le système d'équations n'admet pas de solution analytique). La mécanique céleste connut dès lors un réel renouveau avec les développements de l'informatique. Divers algorithmes permettent à

3. L'interaction spin-orbite est un résultat de la non-rigidité des corps. La planète, sous l'attraction exercée par l'étoile, va déformer sa surface pour adopter une forme ellipsoïdale dont la longueur est orientée vers l'astre. Suite à la rotation de la planète, ce bulbe va quitter cet axe, subissant alors un couple de forces.

4. Contrairement à ce que son nom laisse penser, l'intégrale de Laplace est un vecteur situé dans le plan de l'orbite et qui pointe vers le péricentre de cette dernière. Ce vecteur est défini par la relation $\mathbf{l} = \frac{\mathbf{v} \wedge \mathbf{h}}{\mu} - \mathbf{e}_r$, où $\mathbf{v}$ est la vitesse de la planète étudiée, $\mathbf{h} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{v}$ est son impulsion par unité de masse, μ est sa masse réduite et $\mathbf{e}_r$ est un vecteur unitaire des coordonnées polaires qui est dans la direction centre de masse - planète et qui pointe vers l'extérieur. Ce vecteur fournit 3 constantes d'intégration supplémentaires. Néanmoins, étant donné la contrainte $\mathbf{l} \cdot \mathbf{h} = 0$, seules deux sont indépendantes.

présent de résoudre ces équations de manière approchée. Ils sont appelés intégrateurs d'ordre n si, sur un pas de temps Δt , ils calculent les solutions avec une précision évoluant comme Δt^n (autrement dit, si leurs solutions sont en accord avec le développement de Taylor du vrai résultat jusqu'à l'ordre n). Ainsi par exemple, un intégrateur couramment utilisé en Sciences est l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4.

Cependant, un tel intégrateur s'avère infructueux dans le cadre d'études dynamiques à long terme de systèmes planétaires. La raison en est qu'il n'est pas *symplectique*.

Avant d'envisager cette dernière caractéristique, il est utile de faire une remarque quant à l'intégration des équations du mouvement. La solution de telles équations n'est pas continue, mais discrète, étant donné la nature numérique de la résolution. Une nouvelle solution (positions et vitesses) est calculée à tous les intervalles de temps Δt . De ce fait, la résolution d'un tel problème de mécanique peut être interprétée comme la recherche, tous les Δt , de nouvelles coordonnées et impulsions généralisées par l'application d'une transformation de variables. Rappelons toutefois que, généralement, ce calcul des nouvelles variables ne saurait être exact : seule une approximation peut être estimée.

1.4.1 Les transformations canoniques et leur approche symplectique

Les équations d'Hamilton présentées à la section 1.1.2 sont écrites sous forme canonique. Il existe un ensemble de transformations permettant d'obtenir des nouvelles variables indépendantes (Q, P) qui préservent la structure de ces équations. On parle de transformations canoniques. Dans la suite, nous exprimerons ce changement de coordonnées dans le formalisme de Lie. Ce dernier fera alors directement apparaître l'origine de la limitation des intégrateurs "classiques". C'est sur cette base que nous introduirons les intégrateurs symplectiques.

Nous pouvons obtenir les nouvelles coordonnées sur base des anciennes dans le cadre du formalisme de Lie (qui fait usage des crochets de Poisson⁵). Tout d'abord en utilisant les équations d'Hamilton, on estime la dérivée temporelle de $x = (p, q)$ comme suit (en supposant que les impulsions et coordonnées généralisées ne dépendent pas explicitement du temps) :

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial x}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) = \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial x}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right)$$

Par définition des crochets de Poisson, cette expression devient $\frac{dx}{dt} = \{H, x\} \equiv L_H x$ où L_H est l'opérateur $\{H, \cdot\}$. Étant donné les conditions initiales x_0 , la solution de cette dernière équation s'écrit :

$$x(\Delta t) = \sum_{n \geq 0} \frac{\Delta t^n}{n!} L_H^n x_0 = e^{\Delta t L_H} x_0$$

Les nouvelles variables s'expriment donc au travers d'une somme contenant un nombre infini de termes (qui constitue la matrice du changement de coordonnées, qu'on note $e^{\Delta t L_H}$), empêchant sa connaissance exacte. Cette solution telle quelle n'est pas intégrable ; toute méthode d'intégration numérique approxime la somme par un nombre fini de termes. Dès lors, les nouvelles variables ne sont pas exactement solution des équations d'Hamilton pour l'hamiltonien H . Au pas de temps suivant, cette erreur s'accumule. En effet, les nouvelles positions et impulsions ne sont

5. Le crochet de Poisson de deux fonctions u, v par rapport aux variables canoniques (q, p) est défini comme suit : $\{u, v\} = \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i}$ ($i = 1, \dots, f$)

pas calculées de manière canonique, et ce sur base de coordonnées antérieures qui elles-mêmes ne sont pas exactement canoniques. Un effet boule de neige s'installe, et se manifeste par une augmentation à chaque pas de temps de l'erreur sur l'énergie totale du système.

En mécanique céleste, l'intérêt s'est donc porté vers des *intégrateurs symplectiques*. L'idée générale consiste à scinder l'hamiltonien en plusieurs parties, de telle sorte que chacune d'elles soit intégrable. Ces parties sont alors intégrées séparément avec une matrice de transformation qui est déterminée de manière exacte, de façon à fournir des nouvelles coordonnées canoniques. Ces dernières servent de conditions initiales pour l'intégration de la partie suivante. Cette séparation de l'hamiltonien modifie la matrice de transformation de départ, et donc introduit une erreur. Cependant, comme chaque partie est intégrable, l'intégration qui s'ensuit est plus stable (l'erreur introduite sur le premier pas de temps ne s'amplifie pas). Sur le long terme, on s'attend dès lors à un comportement plus fiable.

Par exemple, on peut appliquer à l'hamiltonien la séparation $H = A + B$. L'hamiltonien de départ H n'est pas intégrable. Néanmoins, les parties A et B le sont. Si la première était appliquée aux conditions initiales (qui sont des coordonnées canoniques), elle générerait de nouvelles coordonnées canoniques $x_A = e^{\Delta t L_A} x_0$. De même, si la partie B de l'hamiltonien de départ était appliquée aux conditions initiales, elle générerait aussi d'autres coordonnées canoniques $x_B = e^{\Delta t L_B} x_0$. La matrice de transformation de H s'écrit quant à elle $e^{\Delta t L_H} = e^{\Delta t (L_A + L_B)}$. Cependant, les matrices L_A et L_B ne commutent pas. Dès lors, $e^{\Delta t (L_A + L_B)} \neq e^{\Delta t L_A} e^{\Delta t L_B}$. En effet, en développant en série l'exponentielle, on s'aperçoit que ces deux termes ne sont égaux qu'à Δt près. Le point fondamental dans la construction d'un intégrateur symplectique est qu'on modifie la matrice de transformation telle qu'elle devienne $e^{\Delta t L_H} = e^{\Delta t L_A} e^{\Delta t L_B}$. Celle-ci ne décrit pas exactement le problème réel ; par contre, elle résulte d'un hamiltonien modifié. À présent, les nouvelles positions et impulsions un pas de temps plus tard sont données par la relation ci-dessous :

$$x(t + \Delta t) = e^{\Delta t L_A} e^{\Delta t L_B} x(t)$$

Le schéma de calcul à chaque pas de temps a donc lieu en deux étapes. La première consiste à étudier l'évolution du système si ce dernier n'est soumis qu'au seul hamiltonien H_B , et donne lieu à des coordonnées canoniques intermédiaires. La deuxième répète cette opération avec l'hamiltonien H_A appliqué à ces coordonnées intermédiaires.

L'intégrateur construit ci-dessus est dit "symplectique d'ordre 1". L'erreur qu'il introduit au début de l'intégration ($e^{\Delta t L_A} e^{\Delta t L_B} \neq e^{\Delta t (L_A + L_B)}$) dépend linéairement du pas de temps Δt . Il est possible de construire des intégrateurs symplectiques d'ordre plus élevé en scindant d'avantage l'opérateur de départ. Par exemple, l'approximation $e^{\Delta t (L_A + L_B)} = e^{\Delta t L_B/2} e^{\Delta t L_A} e^{\Delta t L_B/2} + O(\Delta t^2)$ définit un intégrateur d'ordre 2. Ce dernier présente alors la même stabilité que l'intégrateur symplectique d'ordre 1 sur le long terme, mais introduit une erreur plus faible au départ.

La séparation du hamiltonien en plusieurs parties est arbitraire. Une manière régulièrement utilisée est de le scinder en une partie ne dépendant que des impulsions généralisées p , une autre n'impliquant que les positions généralisées q : $H(p, q) = V(p) + U(q)$. Cela revient à séparer l'hamiltonien en l'énergie cinétique d'une part, l'énergie potentielle de l'autre. Le schéma symplectique, qui intègre chacune de ces parties séparément, simplifie alors grandement le problème. Pour la partie énergie cinétique, les équations d'Hamilton impliquent que $p \equiv (p_1, \dots, p_f) = \text{constante}$ et les positions sont des fonctions linéaires du temps. Concernant la partie énergie potentielle, c'est l'inverse : $q \equiv (q_1, \dots, q_f) = \text{constante}$ et les impulsions sont des fonctions linéaires du temps. Il est clair que chacune de ces parties n'est pas censée décrire une situation physique bien réelle. Néanmoins, leur application sur des coordonnées initiales

rend une solution proche de celle du problème de départ. Une autre division de l'hamiltonien couramment employée consiste à créer une partie keplerienne, c'est à dire sans tenir compte des interactions planète-planète, et une partie perturbative. Cette séparation se rencontre souvent dans le cadre des études dynamiques de systèmes planétaires, car elle est particulièrement bien adaptée à cette situation. De fait, la masse du système est principalement contenue dans un seul objet, l'étoile. Les mouvements planétaires sont donc essentiellement kepleriens, avec une partie perturbative faible : $H = A + \epsilon B$, où $\epsilon \sim (m_i/m_0)$ (m_0 est la masse de l'astre, m_i est la masse de la planète i).

1.4.2 Les méthodes d'Euler et de leapfrog

D'un point de vue éthymologique, symplectique vient du grec et signifie "entrelacé". Les méthodes de type Euler et leapfrog, qui sont des intégrateurs symplectiques d'ordre respectif 1 et 2, l'illustrent parfaitement. Elles sont construites en divisant l'hamiltonien en une énergie cinétique et une énergie potentielle.

— Méthode d'Euler

À partir des conditions initiales $(\mathbf{r}_{0,i}, \mathbf{v}_{0,i})$ pour chacun des corps ($i = 1, \dots, N$), les positions et vitesses des corps sont calculées un pas de temps Δt plus tard selon le schéma suivant (le premier numéro en indice des vecteurs renseigne sur le nombre de pas de temps séparant les conditions initiales du temps t) :

- 1) $\mathbf{r}_{1,i} = \mathbf{r}_{0,i} + \mathbf{v}_{0,i}\Delta t$
- 2) $\mathbf{v}_{1,i} = \mathbf{v}_{0,i} + \mathbf{a}_{1,i}\Delta t$
- 3) $\mathbf{r}_{2,i} = \mathbf{r}_{1,i} + \mathbf{v}_{1,i}\Delta t$
- 4) $\mathbf{v}_{2,i} = \mathbf{v}_{1,i} + \mathbf{a}_{2,i}\Delta t$
- ...

Dans ces expressions, $\mathbf{a}$ est obtenu à partir des équations de Newton en utilisant l'expression de la force de gravitation (qui ne fait intervenir que les positions comme inconnues, ces dernières ayant été calculées à l'étape précédente de la résolution numérique).

Ainsi on introduit un décalage à chaque itération : les nouvelles positions sont calculées à partir des anciennes vitesses, tandis que les nouvelles vitesses sont calculées à partir des nouvelles positions.

— Méthode leapfrog

La méthode leapfrog va plus loin dans l'entremêlement de ces calculs de positions et vitesses. Avec les mêmes notations que précédemment, elle se construit comme suit :

- 1) $\mathbf{r}_{1/2,i} = \mathbf{r}_{0,i} + \mathbf{v}_{0,i}\frac{\Delta t}{2}$
- 2) $\mathbf{v}_{1,i} = \mathbf{v}_{0,i} + \mathbf{a}_{1/2,i}\Delta t$
- 3) $\mathbf{r}_{3/2,i} = \mathbf{r}_{1/2,i} + \mathbf{v}_{1,i}\Delta t$
- 4) $\mathbf{v}_{2,i} = \mathbf{v}_{1,i} + \mathbf{a}_{3/2,i}\Delta t$
- ...
- 2n) $\mathbf{v}_{n,i} = \mathbf{v}_{n-1,i} + \mathbf{a}_{(2n-1)/2,i}\Delta t$
- 2n+1) $\mathbf{r}_{n,i} = \mathbf{r}_{(2n-1)/2,i} + \mathbf{v}_{n,i}\frac{\Delta t}{2}$

Dans cette méthodologie, le décalage introduit est non plus de Δt , mais de $\Delta t/2$. Il en résulte que le comportement de cet intégrateur est d'ordre 2, avec une précision $\sim \Delta t^2$. Cependant, elle ne requiert qu'un calcul de plus (2n+1 étapes au lieu de 2n) que la méthode d'Euler. Elle est donc à privilégier car pour des temps de calcul similaires, elle

fournit une meilleure précision sur les résultats⁶.

Il est tout de même intéressant de se pencher sur le gain en précision qu'apporte la méthode leapfrog vis à vis de celle d'Euler. Servant de test pour le code numérique (la différence de comportement lors du passage d'un intégrateur à l'autre est-elle celle attendue?), cette comparaison permet également d'ajuster le compromis entre précision et temps de calcul.

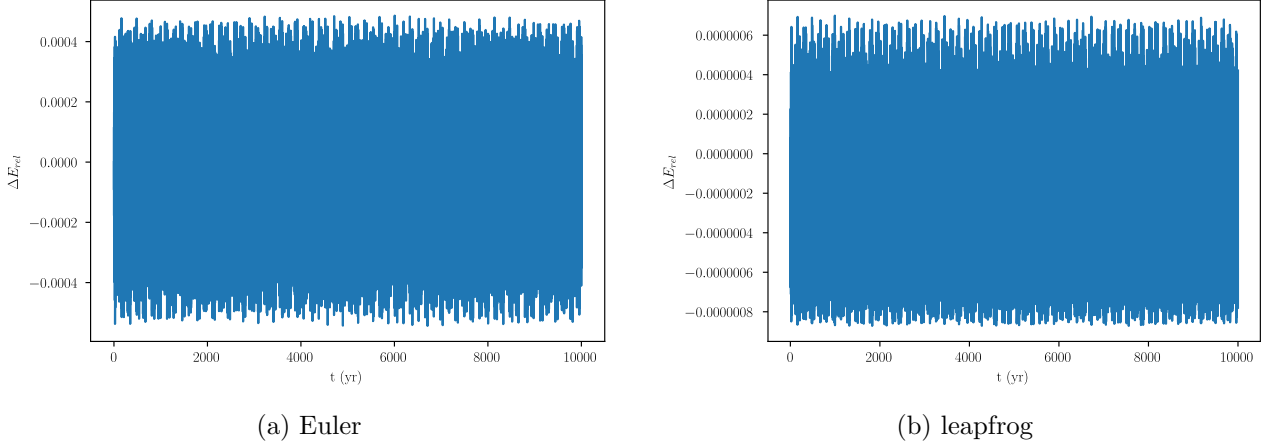


FIGURE 1.2 – Variations relatives de l'énergie totale du problème à 3 corps, calculées via les intégrateurs a) d'Euler et b) de leapfrog. La variation relative est définie à l'instant t discret par $\Delta E_{rel} = \frac{E_t - E_0}{E_0}$. Le pas de temps d'intégration vaut $10^{-3}P_1$, où P_1 est la période de la planète interne (d'une valeur d'un an dans ce cas).

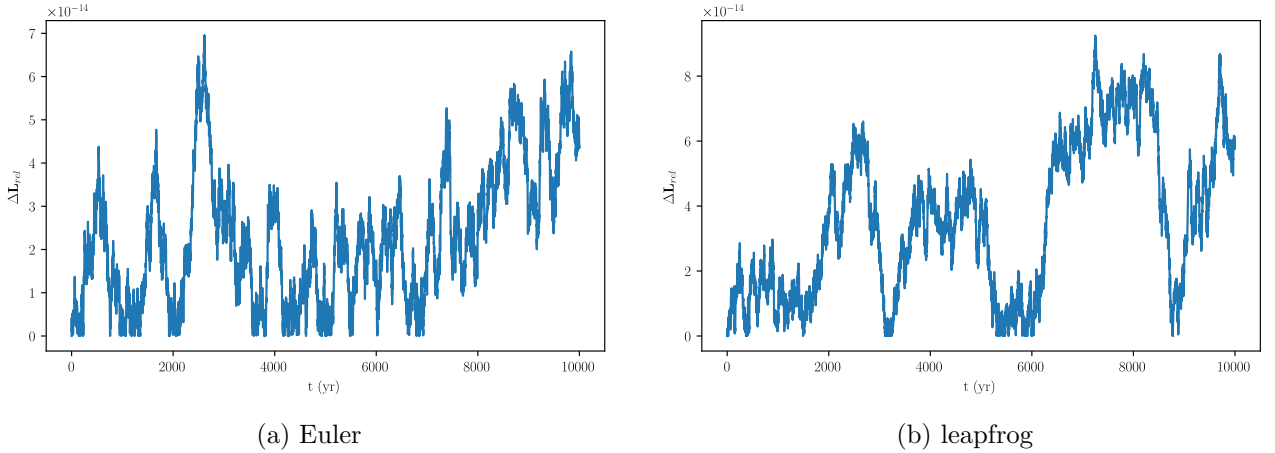


FIGURE 1.3 – Variations relatives du moment cinétique total du problème à 3 corps, calculées via les intégrateurs a) d'Euler et b) de leapfrog. La variation relative est définie à l'instant t discret par $\Delta \mathbf{L}_{rel} = \frac{\mathbf{L}_t - \mathbf{L}_0}{\mathbf{L}_0}$. De nouveau, le pas de temps de calcul vaut $10^{-3}P_1$.

La figure 1.2 présente la variation relative de l'énergie totale d'un problème à 3 corps, tantôt pour l'intégrateur d'Euler (à gauche), tantôt pour l'intégrateur de leapfrog (à droite). Cette figure nous montre les résultats attendus quant à l'évolution de la précision. De fait,

6. Le grand dilemme de l'informatique aujourd'hui est justement ce compromis inévitable entre temps de calcul et précision obtenue.

pour un système planétaire, l'énergie totale du système doit être constante. On constate que l'imprécision (estimée par la séparation crête-crête) du schéma de calcul d'ordre 1 est $\sim 10^{-3}$, tandis qu'elle est $\sim 10^{-6}$ pour leapfrog, soit élevée au carré.

La figure 1.3 montre quant à elle la variation relative du moment cinétique total. Ce dernier est aussi, en principe, constant lors de l'évolution du système. L'imprécision quant à cette grandeur est bien moindre, avec une variation relative $\sim 10^{-13}$. Ce qui est observé est en fait la précision machine. Les comportements des intégrateurs d'Euler et de leapfrog sont donc similaires. L'explication réside dans la définition même du moment cinétique : $\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p}$ où $\wedge$ désigne un produit vectoriel. Quelle que soit la méthode d'intégration, on ajoute à la nouvelle position une grandeur proportionnelle à la vitesse, et on ajoute à la nouvelle vitesse une grandeur proportionnelle à la position. Par propriété du produit vectoriel, ces ajouts s'annihilent dans l'expression de $\mathbf{L}$, ce qui donne un comportement similaire pour les deux schémas de calcul.

Les deux figures qui précèdent ont été obtenues avec un pas de temps d'intégration de $10^{-3} P_1$, où P_1 est la période de la planète interne (et vaut un an dans le cas présent). Le temps nécessaire pour calculer les trajectoires et générer ces graphiques est d'environ onze minutes (quel que soit l'intégrateur utilisé) sur un processeur Intel CORE i7 d'un ordinateur portable. Quel serait le gain en précision si le pas de temps était diminué d'un facteur 10, et avec quel surplus en temps de calcul ? La figure 1.4 ci-dessous répond à la première partie de cette question.

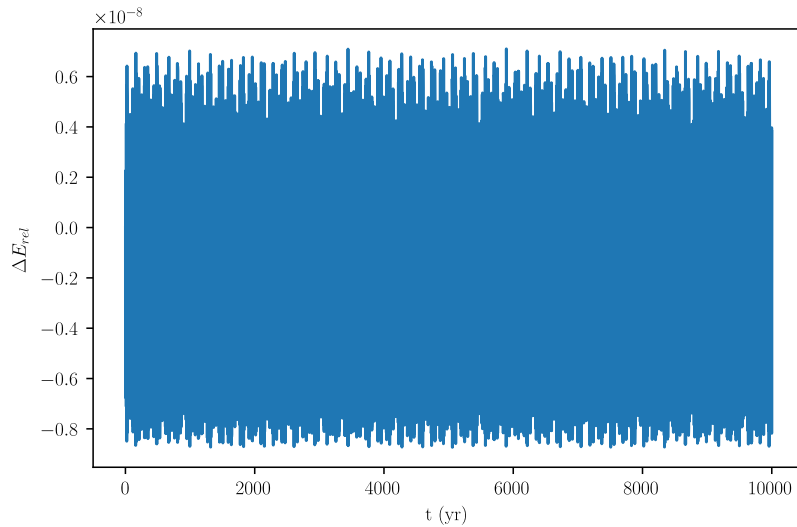


FIGURE 1.4 – Variation relative de l'énergie totale du problème à 3 corps, en utilisant un pas de temps $\Delta t = 10^{-4} P_1$.

Le graphique correspond à l'intégrateur leapfrog. Il a été généré sur base des mêmes paramètres et conditions initiales que les figures 1.2 et 1.3, si ce n'est que le pas de temps utilisé est à présent de $10^{-4} P_1$ (et que dix fois plus de pas de temps ont été effectués de sorte à intégrer les trajectoires sur une durée identique de 10 000 ans). Le gain en précision est certain, avec des variations relatives de l'ordre de 10^{-8} . En effet, le calcul des trajectoires se fait de manière discrète. Le mouvement est dès lors interprété par un ensemble de segments de droites. Pour chacun de ces segments, une extrémité représente les conditions initiales, l'autre est la situation après intégration sur un pas de temps Δt . Plus Δt est grand, plus la nouvelle situation sera donc distante de la réelle position des corps sur leurs ellipses. Quant au temps nécessaire

pour générer ces graphiques, il approche 1h50min, soit à peu près un facteur 10 de plus que précédemment (ce qui est logique, étant donné que le nombre d'itérations est dix fois plus élevé). Le but du programme à N corps établi sous Python étant d'aider à comprendre les concepts qui seront utilisés par la suite, nous nous limiterons à un pas de temps de $10^{-3} P_1$. Cet intervalle d'intégration est suffisamment petit pour distinguer des motifs caractéristiques sur les graphiques, et nécessite un moindre temps de calcul.

1.4.3 Résultats de la méthode leapfrog

En utilisant des méthodes numériques, le système d'équations de Newton peut être résolu. Ce dernier a été intégré en suivant la méthode leapfrog, dont la description vient d'être présentée. La figure 1.5 ci-dessous présente quelques résultats du programme numérique. Leur précision a déjà été discutée à la section précédente.

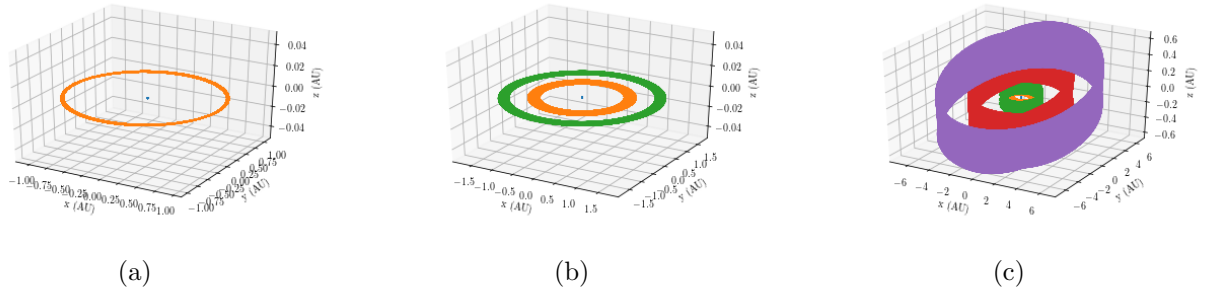


FIGURE 1.5 – Résultats du problème à N corps sur 10 000 ans, pour différents N et différentes conditions initiales. a) 2 corps (1 planète) et mouvements coplanaires ; b) 3 corps (2 planètes) et mouvements coplanaires ; c) 5 corps (4 planètes) en mouvements non coplanaires, avec les deux planètes externes de masse dix fois plus élevée que les deux planètes internes.

Afin de mieux cerner l'évolution des différents corps, étudier leurs excentricités est un bon diagnostic. La figure 1.6 montre un tel graphique pour un problème à 3 corps (l'indice 1 fait référence à la planète interne, l'indice 2 à la planète externe). Il montre bien l'influence mutuelle qu'exerce chaque planète sur l'autre, au vu de la synchronisation des courbes. On distingue essentiellement deux périodes de variation. Tout d'abord la période "courte", de 45 ans environ pour les deux planètes, montre une variation en phase. Ensuite la période "longue", estimée aux alentours de 180 ans pour chaque planète, illustre une opposition de phase. À partir de 3 corps, le comportement devient en fait très complexe. De nombreux termes d'interaction apparaissent dans l'hamiltonien du système, ce qui donne lieu à ces différentes périodes observées.

Les conditions initiales ayant permis de générer le graphique ci-dessus ainsi que les figures 1.2 et 1.3 sont indiquées à la table de données 1.1. Elles sont présentées en éléments elliptiques, mais ont été converties en coordonnées cartésiennes au cours du programme (un code écrit par Jean-Baptiste Delisle fut utilisé pour effectuer cette conversion).

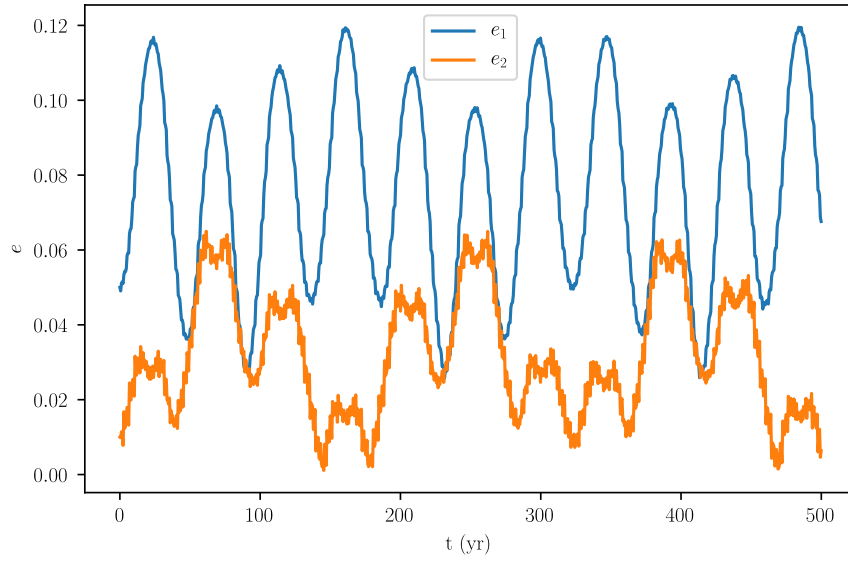


FIGURE 1.6 – Graphique illustrant l'évolution des excentricités e des deux planètes sur une durée de 500 ans.

TABLE 1.1 – Tableau indiquant les conditions initiales et les masses des planètes utilisées pour générer la figure 1.6 (la masse de l'étoile est de une masse solaire).

	Planète 1	Planète 2
a (UA)	1.0	1.5874
λ (rad)	0	$\pi/2$
e	0.05	0.01
ω (rad)	0.0	0.0
i (deg)	0.0	0.0
Ω (rad)	0.0	0.0
M ($M_{\odot}$)	0.001	0.001

Chapitre 2

Études de stabilité : l'analyse en fréquences

2.1 Historique des études de stabilité

Depuis que l'Homme a scruté le ciel, il n'a cessé de s'interroger sur la stabilité du système solaire. Dans l'antiquité déjà, la découverte des "astres errants" laissa rapidement place à la question de la régularité de leurs mouvements. Au cours des deux millénaires qui suivirent, le système solaire était considéré comme stable et éternel. La théorie de Newton ébranla cependant cette idée. En effet, l'expression de la force gravitationnelle nouvellement décrite prenait en compte non seulement l'attraction qu'exerce l'étoile sur les planètes environnantes (conforme aux lois de Kepler), mais également les interactions entre les différentes planètes. Chose surprenante : Newton lui-même refusait d'envisager l'instabilité du système solaire, invoquant une intervention divine afin de replacer régulièrement les planètes dérivantes sur leurs orbites kepleriennes. Il pensait en effet que les interactions entre planètes étaient si fortes qu'elles auraient démantelé le système solaire. Près d'un siècle plus tard, Lagrange considéra le mouvement des planètes comme keplerien à court terme (à chaque instant t est associée à chacune des planètes une orbite osculatrice, qui est une orbite keplerienne tangente à l'orbite actuelle). Il établit ensuite les équations d'évolution des éléments orbitaux en tenant compte de l'interaction avec les autres planètes (les équations de Lagrange (1.1) - (1.6)), ce qui est à l'origine de la théorie des perturbations. Grâce à cette théorie nouvelle, Lagrange et Laplace aboutirent à la conclusion que les variations séculaires (sur le long terme) du demi-grand axe n'existent pas, tout du moins jusqu'au premier ordre en les masses des planètes. Laplace montra que seules des oscillations de ce dernier peuvent exister. Des observations qui jusque là semblaient prouver l'existence de variations séculaires se sont en fait avérées être le reflet de perturbations périodiques à long terme, comme en témoigne notamment la résonance entre les mouvements moyens de Jupiter et Saturne, d'une période de 900 ans. En 1892, Henri Poincaré montra que la série décrivant les perturbations et résultant du développement du problème à 3 corps ne converge pas, et qu'il n'existe donc pas de solution analytique. En 1954, Kolmogorov précisa la structure de l'espace des phases d'un tel problème¹. Il démontra que parmi les solutions instables d'un système hamiltonien perturbé et non dégénéré, il existe dans cet espace des phases des tores isolés correspondant à des trajectoires quasi-périodiques.

Par définition, un mouvement quasi-périodique est une trajectoire qui peut se décomposer selon un nombre fini de fréquences fondamentales. En termes mathématiques, la quasi-périodicité s'exprime donc comme suit :

$$e^{i\lambda} = \sum_{k=1}^N A_k e^{i(\nu_k t + \varphi_k)}$$

Dans cette expression pour la fréquence de la longitude moyenne, une somme de termes est explicitée. Chacun de ces termes correspond à une amplitude A_k associée à un terme de fréquence, où ν_k est la fréquence en question et φ_k la phase. Chaque ν_k est une combinaison

1. L'espace des phases est l'espace à $2f$ dimensions dont les axes sont représentés par les coordonnées et impulsions généralisées du système mécanique, où f est le nombre de degrés de liberté.

particulière des fréquences fondamentales, et le nombre de combinaisons différentes apparaissant dans la fréquence recherchée $e^{i\lambda}$ donne N , le nombre de termes de la somme. Ce nombre peut devenir très grand, voire même infini, tant la quantité de combinaisons possibles peut être illimitée. Cependant, comme à chaque terme est associée une amplitude, seuls les premiers éléments de la somme sont non négligeables. Notons qu'une trajectoire périodique ne se compose que d'une seule fréquence fondamentale. Dès lors, en utilisant le formalisme ci-dessus, $e^{i\lambda}$ s'exprime comme une somme de termes étant la fréquence fondamentale d'une part, les harmoniques d'autre part.

Ainsi, comme mentionné ci-dessus, une trajectoire quasi-périodique dans l'espace des phases présente un comportement particulier ; elle s'inscrit dans un tore. Il n'est cependant pas aisé de représenter la quasi-périodicité, car l'espace des phases est généralement à plus de trois dimensions. Imaginons toutefois une situation dans laquelle l'espace des phases associé au système considéré est à trois dimensions. Dès lors, la section de Poincaré possède une définition intuitive. En effet, celle-ci correspond à une coupe de l'espace des phases (il s'agit donc d'une surface à $2f - 1$ dimensions). Dans ce cas, la section de Poincaré est un plan. Toute trajectoire intersecte cette section à plusieurs reprises. Un mouvement périodique le fait toujours en un nombre fini de points, repassant régulièrement par chacun de ceux-ci. Quant à la trajectoire quasi-périodique, les intersections s'inscrivent sur une courbe fermée. Néanmoins, chaque nouveau point (représentant le système en un temps donné) de la section de Poincaré sera en un endroit de la courbe différent de tous les autres points. Dès lors, la trajectoire ne retrouve jamais une configuration identique à un temps antérieur, mais reste confinée dans l'espace des phases en suivant une courbe fermée ; d'où le terme de quasi-périodicité. Si l'espace des phases dépasse trois dimensions, la section de Poincaré n'est plus un plan, et la représentation géométrique du mouvement devient caduque. Ci-dessous est présentée une illustration figurant la section de Poincaré. L'objectif en est de conférer à la quasi-périodicité une représentation intuitive, basée sur des arguments géométriques. Il convient cependant de ne pas oublier que la figure 2.1 est un cas particulier, et que cette vision des choses n'est en général pas si simple.

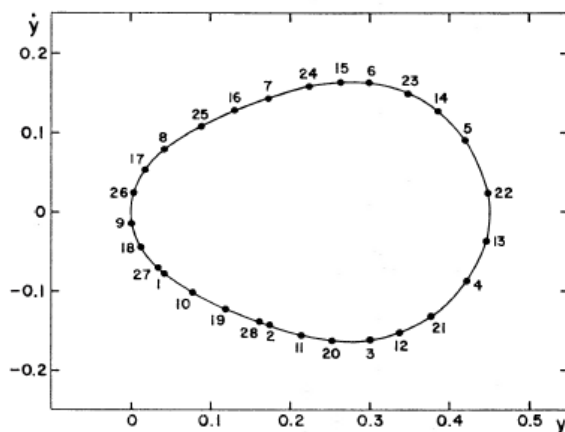


FIGURE 2.1 – Illustration des trajectoires quasi-périodiques dans la section de Poincaré. Aucun point ne recouvre un autre, tous sont distincts. L'image est tirée de l'article de Hénon (1964), qui réalisa des études numériques de trajectoires, accompagnées d'une analyse empirique de l'espace des phases, pour une particule plongée dans un potentiel axisymétrique. Il montra notamment que la quasi-périodicité n'apparaît que pour certaines gammes de valeurs de l'énergie du système.

Le résultat qu'obtint Kolmogorov est à la base de la théorie KAM (pour Kolmogorov, Arnold et Moser, les trois pionniers de cette théorie), qui étudie de telles structures. Elle est

importante, car elle permet d'améliorer les études de chaos dans les évolutions à long terme des trajectoires planétaires. De fait, entre les différents tores se trouve une région chaotique. La trajectoire d'une planète dans cette zone n'est pas restreinte à se déplacer dans un certain volume, et peut donc explorer des régions fort différentes de l'espace des phases. Dès lors, la notion de chaos est inévitablement liée à celle de stabilité. De fait, dans quelles mesures un système planétaire sera-t-il qualifié d'instable ? Il semble judicieux de conférer à la stabilité une dimension temporelle. Ainsi, une orbite chaotique peut être qualifiée de stable si sa position dans l'espace des phases diffuse suffisamment lentement, ce qui est le cas proche des tores associés aux trajectoires quasi-périodiques.

Un formalisme faisant usage de l'exposant de Lyapunov permet de quantifier le chaos. Il vise à caractériser l'évolution de la distance entre deux points de l'espace des phases, en mesurant le temps nécessaire pour que leur éloignement ait augmenté d'un facteur $e \sim 2.7$. Cette méthode fournit donc une indication quant à la stabilité du système (plus le temps nécessaire pour que la distance entre les deux points soit multipliée par e est faible, plus le système est instable vis à vis des conditions initiales en question). Soit deux points de cet espace, proches au temps initial t_0 et reliés par un vecteur δZ_0 . Le module de ce dernier est donc la distance entre les deux points. Une expression permet d'estimer le module du vecteur au temps t sur base de la distance initiale : $|\delta Z(t)| \approx e^{\Lambda t} |\delta Z_0|$, où Λ est le fameux exposant de Lyapunov. Dès lors, la diffusion dans l'espace des phases est mesurée. Cependant, Λ présente une valeur différente selon chaque dimension de l'espace des phases. Ce qui importe est la dimension pour laquelle la distance entre les points évolue le plus rapidement ; on parle d'exposant de Lyapunov maximal. En effet, c'est lui qui dicte l'instabilité du système. Sur base de celui-ci, le *temps de Lyapunov* est défini comme le temps nécessaire pour que l'écart entre les deux points ait augmenté d'un facteur e selon la dimension en question. Il vaut $1/\Lambda$. Dès lors, en calculant les trajectoires de deux systèmes identiques aux conditions initiales proches et en étudiant leurs évolutions dans l'espace des phases, il est possible d'estimer le temps au-delà duquel le chaos rend imprévisible la position des planètes. En utilisant cette technique, Laskar (1989) montrera qu'au système solaire est associé un exposant de Lyapunov de $1/5 \text{ myr}^{-1}$. Toute prédiction des positions des planètes au-delà d'un futur avoisinant cinq millions d'années est donc caduque.

Cette technique est donc très intéressante puisqu'elle renseigne sur l'importance que joue le chaos dans un système planétaire avec des conditions initiales données. Cependant, elle demande des temps de calcul considérables. En effet, elle ne fournit pas d'information quant à la taille des zones chaotiques. Pour ce faire, il faudrait comparer systématiquement des doublets de conditions initiales proches couvrant au total une certaine région de l'espace des phases au départ. Le temps de calcul serait conséquent, obligeant de calculer de nombreuses trajectoires sur un temps au moins égal au temps de Lyapunov (qui peut être très grand dans certains cas). Une autre méthode, appelée analyse en fréquences, permet de diminuer grandement le temps de calcul. Elle a été élaborée par Laskar (1990), et est décrite à la section suivante.

2.2 L'analyse en fréquences

L'analyse en fréquences est une méthode générale visant à étudier les fréquences d'un système, ou plutôt leur évolution. En fonction de cette dernière, il est possible de déterminer la nature régulière (autrement dit soit périodique, soit quasi-périodique) ou chaotique d'une trajectoire. Cette technique trouve plusieurs applications en mécanique céleste. Elle permet notamment une compréhension profonde des mouvements d'un système mécanique, en décortiquant ceux-ci en une suite de fréquences. Par ailleurs, elle peut aussi renseigner sur la taille d'une

région chaotique d'un système planétaire, et informer sur sa stabilité.

La fréquence étudiée est souvent le moyen mouvement $n = \frac{2\pi}{P}$ d'une des planètes. Pour une orbite régulière, ce dernier est constant (la période étant elle-même constante). Si par contre la trajectoire de la planète est chaotique, sa période varie, et donc son moyen mouvement également². L'anomalie moyenne M peut présenter plusieurs fréquences. Celle associée à la période orbitale, à savoir le mouvement moyen n , est toujours présente. Elle est le reflet du mouvement de révolution de la planète autour du centre de masse du système. Cependant, si le système compte au moins deux planètes, des interactions planète-planète vont inévitablement prendre place. L'évolution de l'anomalie moyenne sera donc perturbée selon l'équation de Lagrange (1.6). Des fréquences supplémentaires apparaissent, avec des amplitudes qui dépendent du terme perturbatif H' ainsi que des paramètres orbitaux de la planète d'intérêt. Afin de réaliser correctement l'analyse en fréquences, il est dès lors capital de prendre en compte ces fréquences supplémentaires, afin de percevoir adéquatement la dynamique du système. Dans ce but, la période d'intégration T (sur laquelle on recherche les fréquences) doit être plus grande que la durée de la période maximale associée à l'anomalie moyenne.

Ainsi, une fois l'intégration des trajectoires réalisée sur un temps T (ce qui fournit les positions et vitesses de tous les corps à chaque pas de temps), l'analyse en fréquences est effectuée pour un corps particulier i . Pour ce faire, les solutions pour tous les pas de temps compris entre t_0 et $t_1 = t_0 + T$ sont analysées de telle sorte à obtenir les fréquences principales (aux amplitudes les plus élevées) de l'anomalie moyenne ou de la longitude moyenne λ . Ces fréquences sont alors comparées d'une période d'intégration T à une autre afin d'estimer leurs évolutions temporelles. Si elles varient fortement (trajectoire fortement chaotique), l'orbite de la planète est considérée instable. Pour des conditions initiales différentes, la planète subira des termes de perturbation générés par les autres corps qui seront différents. De ce fait, les fréquences de la longitude moyenne prendront d'autres valeurs. Réaliser cette procédure pour différentes conditions initiales, par exemple en faisant varier le demi-grand axe, permet donc d'estimer la taille d'une région chaotique. Notons que le pas de temps d'intégration T dépasse rarement les 100 000 ans, ce qui réduit le temps de calcul par rapport à la technique utilisant l'exposant de Lyapunov.

Laskar (1990) a mis au point une méthode permettant de déterminer les fréquences principales à partir des solutions de l'intégration numérique. Elle est la suivante.

En guise de préliminaires, les solutions sont converties en éléments elliptiques afin d'obtenir la longitude moyenne à chaque pas de temps. Ensuite, afin de prendre en considération la similitude des valeurs $\lambda = 0$ et $\lambda = 2\pi$, on recherche plutôt les fréquences de $\exp(i\lambda(t))$. Ces deux remarques étant prises en compte, l'estimation proprement dite des fréquences peut être entamée. Pour chacune d'entre elles, deux étapes sont nécessaires. Premièrement, une analyse par transformée de Fourier rapide a lieu. Le but de celle-ci est d'approcher grossièrement la valeur de la fréquence recherchée³. Cette étape aura permis d'estimer la fréquence par la recherche de l'amplitude maximale dans le spectre de Fourier résultant de la transformée rapide.

2. De manière intuitive, une planète à l'orbite chaotique balaye une certaine région de l'espace réel avec un comportement semblant aléatoire. Le demi-grand axe a suivant cette évolution, la troisième loi de Kepler (qui relie demi-grand axe et mouvement moyen) permet de comprendre l'impact sur n .

3. Une telle analyse ne saurait en effet prétendre déterminer de façon exacte la fréquence, si ce n'est dans le cas d'une orbite périodique de période multiple de T (où T est la durée sur laquelle l'analyse en fréquences est réalisée). Dans ce cas, une seule fréquence fondamentale, n , régit l'évolution de la longitude moyenne du corps étudié. Par ailleurs, l'échantillonnage dans le spectre de Fourier ayant lieu tous les $2\pi/T$, la fréquence exacte pourra être détectée. Dans les autres cas (autrement dit pour la grande majorité des situations), la fréquence ne sera pas déterminée exactement, mais avec une précision de π/T .

Par la suite, une recherche plus précise de la fréquence est réalisée dans le voisinage de celle estimée à l'étape précédente. Pour ce faire, on cherche la fréquence qui maximise l'amplitude du spectre de puissance. Ce dernier est discret par la nature numérique de la résolution, et s'écrit donc

$$\phi(\nu) = \sum_{t_i=t_0}^T e^{i \lambda t_i} e^{-i \nu t_i}$$

Ainsi, la fréquence qui maximise $\phi(\nu)$ représente une estimation raffinée de la fréquence recherchée. De la même manière, on peut obtenir les autres fréquences de la décomposition quasi-périodique, d'amplitudes plus faibles. Pour cela, le terme précédemment estimé est soustrait à la solution, la procédure étant ensuite réitérée.

Un code numérique écrit par Jean-Baptiste Delisle et basé sur l'article de Laskar (2003) effectue cette procédure. Incorporant ce code au problème à N corps précédemment établi, un résultat typique d'une telle analyse en fréquences est présenté à la figure 2.2. Il est à noter que les fréquences recherchées dans ce problème à trois corps sont celles associées à l'angle résonant $3\lambda_2 - \lambda_1 - \varpi_1$ (les conditions initiales sont proches de la résonance 3 : 1), où les indices 1 et 2 font référence aux planètes respectivement interne et externe. De la sorte, la compréhension des différentes structures dans le graphique résultant est plus aisée. La section 2.3 traitera quant à elle de l'utilisation pratique de l'analyse en fréquences concernant les études de stabilité. Indiquons enfin que la table de données 2.1 répertorie les conditions initiales à la base de la figure 2.2. Le demi-grand axe initial de la planète interne a_1 est écrit à titre indicatif, car ce dernier prend plusieurs valeurs afin de générer la figure. Il est arbitrairement fixé à la valeur exacte de la résonance.

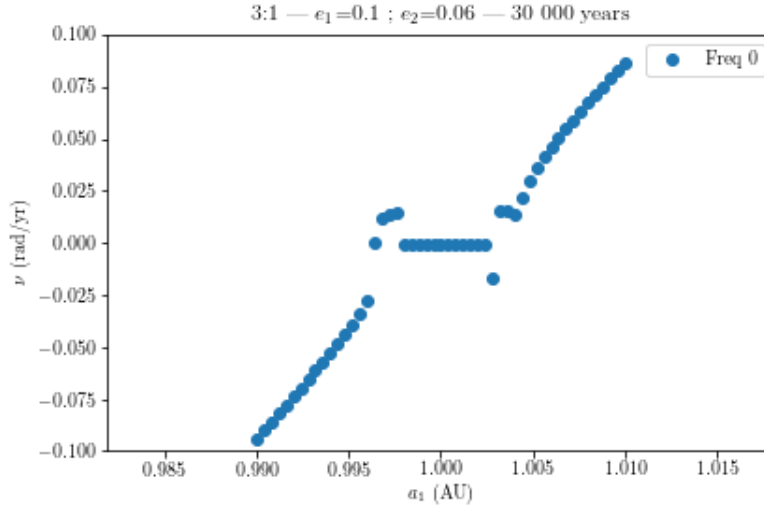


FIGURE 2.2 – Graphique illustrant un résultat de l'analyse en fréquences pour un problème à 3 corps. En ordonnée, ν est la fréquence principale de l'angle résonant (c'est à dire la fréquence qui présente l'amplitude la plus élevée). Elle est estimée pour différentes valeurs du demi-grand axe de la planète interne a_1 . La durée totale de l'intégration est de 30 000 ans.

Pour générer la figure 2.2, plusieurs simulations pour différents demi-grands axes initiaux de la planète interne a_1 sont effectuées. Les valeurs prises par a_1 sont telles qu'elles couvrent la résonance 3 : 1, représentée par un plateau. Un phénomène de résonance (du moyen mouvement) apparaît lorsque les périodes de deux objets célestes en orbite autour d'un troisième sont dans un rapport d'entiers. Le comportement keplerien est fortement perturbé dans ce genre de situations. De fait, il est possible de montrer que les équations pour l'évolution des variables

TABLE 2.1 – Tableau indiquant les conditions initiales et les masses des planètes utilisées pour générer la figure 2.2 (la masse de l'étoile est de une masse solaire).

	Planète 1	Planète 2
a (UA)	1.0	2.08
λ (rad)	0	π
e	0.1	0.06
ω (rad)	0.0	π
i (deg)	0.0	0.0
Ω (rad)	0.0	0.0
M ($M_{\odot}$)	0.0001	0.0001

généralisées moyennes (qui sont des variables moyennant les longitudes moyennes, et de ce fait ne rendant pas compte des mouvements à court terme) contiennent des termes dont le dénominateur est proche de zéro⁴. Ils génèrent dès lors de grandes perturbations. La figure 2.2 est intéressante, car elle met en évidence les structures caractéristiques aux alentours d'une résonance. Afin de les comprendre, le modèle du pendule plan fournit un aperçu adéquat. Cette équivalence apparaît lorsqu'on explicite davantage le développement de l'hamiltonien du problème à N corps. Comme justifié au chapitre 1, cet hamiltonien peut se scinder en une somme de l'hamiltonien du problème keplerien et d'un hamiltonien perturbé. Ce dernier contient les termes perturbatifs d'interaction entre les différentes planètes. En développant ces termes par recours aux éléments elliptiques, il est possible de montrer que l'hamiltonien H du système peut s'écrire *en première approximation* comme l'hamiltonien du pendule plan (cf. Murray & Dermott 1999). Pour ce dernier, le comportement du mouvement dans l'espace des phases est bien connu. La transposition de ces résultats au système planétaire renseigne donc sur le comportement de ce système de manière qualitative. La figure 2.3 ci-dessous illustre un portait de phase typique du pendule plan.

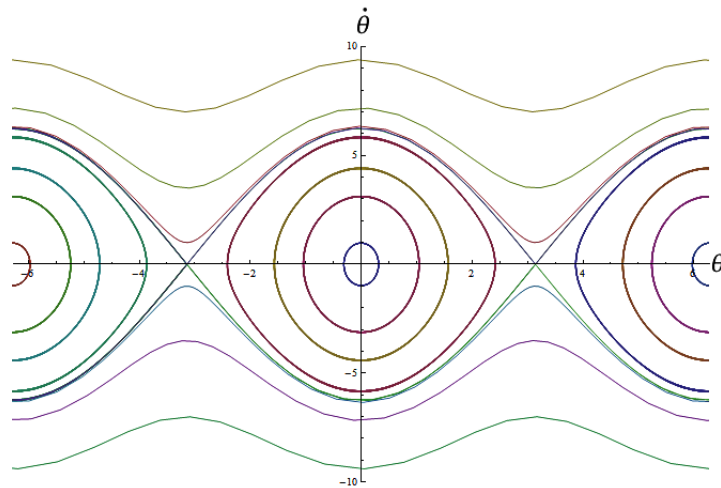


FIGURE 2.3 – Représentation du portait de phase du pendule plan. Source : http://physique.unice.fr/sem6/2011-2012/PagesWeb/PT/Pendule/study1_simple.html

Décrivons brièvement sa structure. Un équilibre stable existe lorsque la masse est à la verticale vers le bas, à un angle θ multiple de 2π . Dans la suite, on se limite à la position

4. En théorie, il vaudrait exactement zéro à la résonance parfaite.

d'équilibre $\theta = 0$. Si l'énergie de la masse est minimale, celle-ci reste fixe en la position d'équilibre. Pour des énergies légèrement plus élevées (et donc pour des conditions initiales légèrement différentes), le poids oscille de manière harmonique autour de 0. Sa trajectoire dans l'espace des phases à deux dimensions est donc une ellipse ayant comme centre le point d'équilibre fixe (l'espace des phases est ici à deux dimensions car le pendule plan est un système à un degré de liberté). Plus l'énergie augmente, plus les oscillations augmentent en amplitude et diffèrent de l'approximation harmonique. Au-delà d'une certaine valeur de l'énergie, les oscillations laissent place à une circulation de la masse ; cette dernière réalise des tours complets autour de son axe de rotation. Son mouvement dans l'espace des phases est représenté par une courbe qui parcourt ce dernier sans jamais annuler $\dot{\theta}$. Une courbe particulière marque la transition entre ces deux régimes. On l'appelle la *séparatrice*, et elle correspond à la situation où le pendule atteint l'équilibre instable situé à la verticale vers le haut, à un angle $\theta = \pi$. Remarquons qu'un temps infini est nécessaire pour que la masse atteigne cet équilibre. Dans la zone proche de la séparatrice règne une hyper-sensibilité vis à vis des conditions initiales. De fait, une seule condition initiale présentera l'énergie adéquate pour atteindre l'équilibre instable. Une variation infime des conditions initiales donnera lieu à un comportement drastiquement différent de la trajectoire du pendule. Si le pendule est perturbé et que son état initial est proche de la séparatrice dans l'espace des phases, alors il traversera fréquemment la séparatrice dans cet espace, et changera conséquemment de régime. Il s'agit d'un phénomène de chaos, où le système est amené à emprunter un chemin évolutif semblant aléatoire, étant donné l'hyper-sensibilité à la perturbation appliquée. Plus la perturbation est d'amplitude faible, plus la zone chaotique entourant la séparatrice est restreinte.

On retrouve le même type de comportement à la figure 2.2. Dans le contexte de l'analogie (en première approximation) introduite ci-dessus, l'espace des phases du système planétaire s'assimile à un espace à deux dimensions. La coordonnée généralisée est l'angle résonant $3\lambda_2 - \lambda_1 - \varpi_1$, l'impulsion associée étant le demi-grand axe d'une des planètes (par exemple relatif à la planète interne a_1)⁵. Bien entendu, il ne s'agit pas de la réelle représentation de l'espace des phases d'un système planétaire, mais cette correspondance permet d'apporter une compréhension qualitative de la figure 2.2. L'origine de la figure 2.3, adaptée à notre problème, correspond alors à $a_1 = 1$ UA et s'assimile à la résonance exacte. Si ce demi-grand axe initial est légèrement modifié, le système suit une ellipse autour du centre. Pour autant que le temps d'intégration soit suffisamment grand, la moyenne de ces oscillations est à angle résonant nul et à $a_1 = 1$ UA (sur de nombreux tours effectués autour de l'origine, la valeur moyenne des positions dans l'espace des phases est à l'origine des axes). Ceci explique la largeur non nulle du plateau de résonance. Ce plateau perdure jusqu'à ce que la zone chaotique entourant la séparatrice soit atteinte. Là, le système adopte un comportement imprévisible, ce qui donne lieu à des variations irrégulières de la fréquence. Enfin, pour des valeurs du demi-grand axe initial suffisamment éloignées de 1 UA, le système quitte la région chaotique et entre dans le régime non-résonant. La valeur prise par l'angle résonant n'est pas confinée, mais plutôt circule.

En annexe, nous tentons de comprendre la figure 2.2 en raisonnant dans l'espace réel.

2.3 Indicateur de stabilité

L'étude menée dans la section 2.2, et en particulier la cohérence relevée entre les résultats de l'analyse en fréquences et le modèle du pendule plan, a confirmé le fonctionnement de cette

5. En effet, a_1 est lié au moyen mouvement n_1 par le biais de la troisième loi de Kepler : $n^2 a^3 = G(M + m)$. Donc, si a_1 varie, cela signifie que le moyen mouvement de λ_1 change également, et dès lors que l'évolution de λ_1 est différente. Or si cette évolution est modifiée, l'évolution de l'angle résonant l'est également. Ainsi, la fréquence associée à l'angle résonant peut tout à fait être remplacée par a_1 dans l'espace des phases.

méthode ainsi que du programme la mettant en œuvre. Dans cette section, il sera discuté de la manière dont l'analyse en fréquences est utilisée afin de mener des études de stabilité de systèmes planétaires.

La fréquence d'intérêt est celle associée à la longitude moyenne d'une des planètes. Assignons à cette planète l'indice i . Pour des conditions initiales données, la variation de la fréquence sur les deux moitiés de l'intégration renseignera sur la stabilité de la planète i vis à vis de ces conditions initiales⁶. En réalisant des simulations pour plusieurs conditions initiales, où un même paramètre orbital varie dans chacune d'entre elles, il est donc possible de voir pour quelles valeurs du paramètre le système est le plus stable sur le temps de l'intégration. La figure 2.4 illustre une telle analyse, où le paramètre variant d'une simulation à une autre est le demi-grand axe de la planète interne (les conditions initiales explorées sont identiques à celles de la figure 2.2). Ce graphique confirme les résultats obtenus à la section 2.2. De fait dans la région chaotique, là où la fréquence évolue de manière irrégulière, l'amplitude de la différence des fréquences entre les deux moitiés de l'intégration est plus élevée. Sachant que l'échelle verticale est logarithmique, cette différence est bien plus importante que dans les régions distantes des séparatrices.

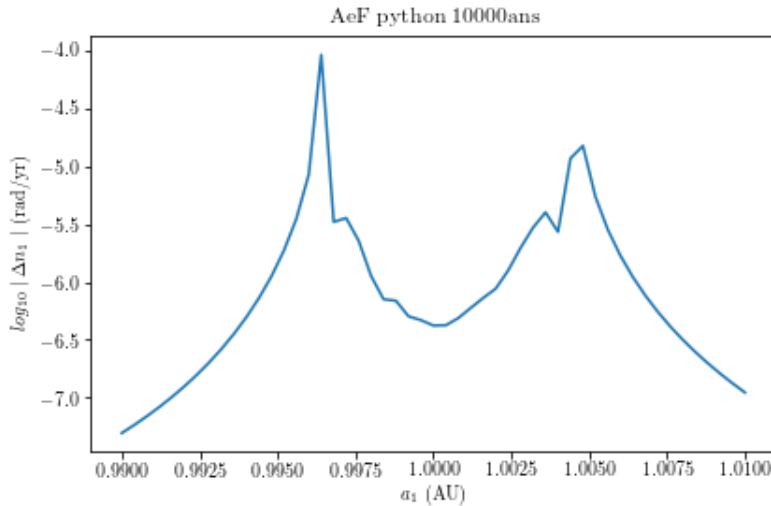


FIGURE 2.4 – Résultat de l'analyse en fréquences d'un problème à trois corps, avec un temps d'intégration total de 10 000 ans. La fréquence n_1 explorée est celle de la longitude moyenne de la planète interne. Plus la différence de n_1 entre les deux moitiés d'intégration est faible (et en-dessous de 1), plus la valeur absolue du logarithme de cette différence est élevée.

Sur base de la figure 2.4, on peut établir un indicateur relatif de stabilité. En effet, ce graphique permet d'affirmer que les conditions initiales correspondant aux demi-grands axes a_1 de 0.996 et 1.005 AU donnent lieu à des orbites moins stables que les conditions initiales associées à $a_1 = 1$ UA. Par ailleurs, la méthode donne une indication qualitative quant à la taille des régions chaotiques.

Le même raisonnement peut s'appliquer en faisant varier non pas un, mais deux paramètres orbitaux initiaux. On génère alors une grille de conditions initiales, et une couleur est assignée à chaque case de la grille afin de renseigner sur la valeur prise par la différence de fréquence. Il s'agit des cartes de stabilité, déjà évoquées dans l'introduction et dont nous présentons à la

6. Notons que si l'orbite de la planète i s'avère relativement instable (il sera discuté ultérieurement de l'aspect relatif des inférences de stabilité), les perturbations que cette dernière engendre sur les autres planètes pourraient les déstabiliser également.

figure 2.5 un exemple construit avec le même système fictif qu'utilisé pour la figure 2.4.

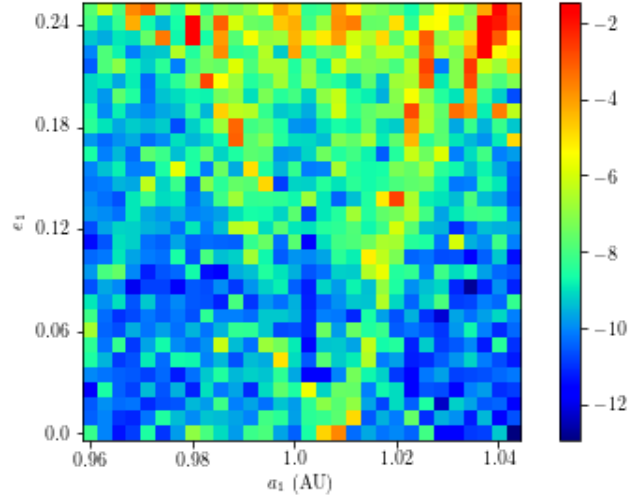


FIGURE 2.5 – Carte de stabilité constituée de 900 cases (30×30), chacune se voyant apposer une couleur définie par la valeur de $\log_{10}(|\Delta n|)$, où Δn est la différence entre les fréquences principales calculées sur les deux moitiés de l'intégration. Les paramètres initiaux variant dans cette grille sont le demi-grand axe et l'excentricité de la planète interne.

Les avantages de l'analyse en fréquences sont donc évidents. D'une part, cette technique renseigne sur les régions chaotiques d'un système planétaire. D'autre part, elle sert de critère relatif de stabilité. Constatant que certaines conditions initiales sont moins stables que d'autres proches, il est dès lors raisonnable d'exclure les premières. Ainsi, une fois les paramètres orbitaux d'un système planétaire obtenus (par exemple, en ajustant une courbe caractérisée par certaines valeurs des paramètres à des données de vitesses radiales), l'élaboration de cartes de stabilité permet de préciser les conditions initiales les plus probables. Cependant, une lacune majeure de l'analyse en fréquences est l'aspect relatif du critère de stabilité. En effet, l'optique de la méthode se résume à "plus stable que" ou "moins stable que". Il manque une échelle *absolue* par rapport à laquelle la stabilité du système est estimée.

Chapitre 3

Statistiques bayésiennes

L'utilisation de l'algorithme de Monte-Carlo par chaînes de Markov (MCMC) est un outil essentiel dans l'optimisation des études de stabilité envisagée. Son intérêt majeur est qu'il permet d'explorer l'espace des paramètres (orbitaux dans notre cas) de manière optimale. Il prend source des statistiques bayésiennes. Ce chapitre sera donc dédié d'une part, à identifier les fondements de cette autre forme de statistiques, et d'autre part, à comprendre le schéma de construction du MCMC et ses avantages.

3.1 Notions de base

La connaissance de la Nature est toujours incomplète. En effet, le résultat d'une quelconque expérience ne pourra jamais être déterminé de manière exacte ; différents phénomènes, tels la précision instrumentale ou le nombre fini de réalisations, ne donnent qu'une vision partielle de la réalité. Les statistiques constituent alors un outil fondamental dans la gestion de cet aspect. Il existe deux approches drastiquement différentes des statistiques, basées sur la définition même de probabilité. La première, dite fréquentiste, définit la probabilité d'une hypothèse comme sa fréquence d'occurrence obtenue après un nombre infini d'expériences identiques¹. On caractérise aussi cette vision d'"objective". La deuxième approche, appelée bayésienne, est parfois nommée "subjective". Elle définit la probabilité comme un niveau de confiance qu'a l'expérimentateur vis à vis d'une hypothèse particulière. Notons que cette subjectivité, qui peut sembler n'être que le reflet d'une défaillance dans la définition, se contourne en notant que deux personnes disposant des mêmes connaissances devraient arriver à la même valeur de la probabilité étudiée. Nous nous centrerons sur cette deuxième approche.

Afin de définir la probabilité dans le contexte bayésien, une connaissance *à priori* quant à la distribution des réalisations doit être prise en compte. Cette information préalable est appelée "prior" (notée I). La probabilité qui en découle sera différente en fonction du niveau de connaissances de l'expérimentateur (d'où la discussion précédente sur la subjectivité). Remarquons que si aucune information *a priori* n'est disponible, le prior consistera alors en une loi uniforme sur l'espace des réalisations possibles. Sinon, il sera assujéti à la connaissance d'un certain modèle théorique, voire même à une simple intuition. Néanmoins, le niveau de savoir qu'a l'expérimentateur vis à vis de la distribution des réalisations dépend également des résultats d'expériences passées (notées D). À la suite de chaque nouvelle expérience, les résultats apportés modifieront la valeur de la probabilité recherchée. Ce fait constitue l'atout majeur de la méthode bayésienne. En effet, elle tient compte de l'évolution des connaissances avec les résultats d'expériences passées. Ainsi, la probabilité que l'hypothèse H_i soit vérifiée est notée $p(H_i | D, I)$, où "|" signifie littéralement "sachant" tandis que "," est la notation pour "et". On appelle cette probabilité le *postérieur*.

1. L'hypothèse peut concerner un nombre (par exemple, l'hypothèse d'obtenir le nombre 4 lors d'un lancer de dés), auquel cas on s'intéresse à la probabilité qu'une réalisation soit égale à l'hypothèse, mais elle peut également concerner un ensemble de nombres (hypothèse que la réalisation soit plus grande que 4).

Une loi fondamentale en statistiques bayésiennes permet de calculer cette probabilité. Il s'agit du théorème de Bayes, qui s'énonce comme suit (cf. Gregory (2005)) :

$$p(H_i | D, I) = \frac{p(H_i | I) p(D | H_i, I)}{p(D | I)} \quad (3.1)$$

Le prior, ici représenté par $p(H_i | I)$, est la probabilité de vérifier l'hypothèse en l'absence de (nouvelles) données. Quant au terme $p(D | H_i, I)$, il correspond à la vraisemblance de H_i (la "likelihood" en anglais). La probabilité $p(D | I)$, ne faisant appel à aucune hypothèse H_i , représente la connaissance qu'on a à priori de l'expérience (indépendamment de l'hypothèse envisagée). Elle agit en fait comme un facteur de normalisation, puisqu'en remarquant qu'additionner les postérieurs sur l'espace des hypothèses donne

$$\sum_i p(H_i | D, I) = \frac{\sum_i p(H_i | I) p(D | H_i, I)}{p(D | I)} = 1,$$

on obtient directement $p(D | I) = \sum_i p(H_i | I) p(D | H_i, I)$. Cette probabilité étant constante pour un problème donné, le théorème de Bayes se réécrit donc comme suit :

$$p(H_i | D, I) \propto p(H_i | I) p(D | H_i, I) \quad (3.2)$$

La vraisemblance de H_i , qui est la probabilité d'obtenir les résultats D de l'expérience si l'hypothèse H_i est vérifiée, est souvent estimée en considérant que les points expérimentaux approchent la réalité en suivant une loi gaussienne, et en supposant l'indépendance de ces points expérimentaux. Dans ce cas, on montre en effet rapidement que (pour d_i et $d_{i,ex}$ les données issues respectivement du modèle et de l'expérience) :

$$p(D | H_i, I) = \prod_{i=1}^N \frac{e^{-(d_i - d_{i,ex})^2 / 2\sigma_i^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \propto \prod_{i=1}^N e^{-(d_i - d_{i,ex})^2 / 2\sigma_i^2} \propto \exp \left[- \sum_{i=1}^N \frac{(d_i - d_{i,ex})^2}{2\sigma_i^2} \right]$$

En définissant $\chi^2(X) = \sum_{i=1}^N \frac{(d_i - d_{i,ex})^2}{\sigma_i^2}$, on obtient finalement

$$p(D | H_i, I) \propto \exp \left(- \frac{\chi^2(X)}{2} \right) \quad (3.3)$$

Les paramètres X du modèle ajustent d'autant mieux les données que le χ^2 associé est faible (χ^2 est une fonction à valeurs positives). De la sorte, la probabilité $p(D | H_i, I)$ sera plus grande, et $p(H_i | D, I)$ aussi.

3.2 Monte-Carlo par chaînes de Markov

L'algorithme de Monte-Carlo par chaînes de Markov (MCMC) trouve ses fondements dans les statistiques bayésiennes. Cet outil permet d'obtenir les distributions postérieures des paramètres d'un certain modèle, et ce de manière efficace. Les premiers développements apparurent dans les années 1950 ; depuis, la méthode connut diverses innovations et optimisations. Dans le cadre de ce travail néanmoins, nous nous limiterons à envisager l'algorithme MCMC le plus simple. Il s'agit de celui de Metropolis-Hastings, dont nous développerons le fonctionnement. Préalablement, les notions d'algorithme de Monte-Carlo et de chaînes de Markov seront explicitées brièvement.

L'algorithme de Monte-Carlo est une méthode permettant de déterminer une distribution postérieure sans passer par des calculs analytiques pouvant être très complexes. Afin d'éviter ces

développements théoriques, la technique fait appel aux probabilités, qui supplantent dès lors le déterminisme. L'idée est qu'en générant des nombres aléatoires, on puisse retrouver (de manière empirique) la distribution théorique. On approche en fait cette dernière par un estimateur qui converge vers la distribution recherchée si le nombre de tirages aléatoires augmente. C'est donc le scientifique qui contrôle le niveau de précision souhaité.

Par cette technique, chacun des nombres aléatoires est indépendant des autres. Une chaîne de Markov, quant à elle, génère une suite de nombres aléatoires dont chaque nouveau tirage est dépendant de celui qui le précède et uniquement de ce dernier. Dès lors, à partir d'une valeur d'un paramètre X_t , une nouvelle valeur X_{t+1} est générée aléatoirement dans le voisinage de la première, en suivant une certaine distribution de probabilité². Une telle distribution, appelée probabilité de transition, ne dépend que du tirage précédent. Dans notre étude, cette probabilité sera supposée constante tout au long de la chaîne.

L'algorithme de Monte-Carlo par chaînes de Markov couple ces deux notions, de manière à créer un outil performant. Présentons l'algorithme dit de Metropolis-Hastings, qui constitue le MCMC le plus simple.

Soit un modèle à un paramètre X dont on souhaite connaître la distribution, et soit une valeur initiale X_0 pour ce paramètre à laquelle est associée une probabilité postérieure $P(X_0 | D, I)$ supposée connue (il est possible de l'estimer en utilisant la relation 3.2). Remarquons que si le modèle contenait plus d'un paramètre, la démarche à effectuer pour les autres paramètres serait exactement identique. Pour obtenir une nouvelle valeur du paramètre X , plusieurs étapes sont nécessaires. En premier lieu, on génère une nouvelle valeur Y en suivant la probabilité de transition prédéfinie. On note cette dernière $q(Y | X_0)$. Metropolis, le pionnier du MCMC, se limita à des probabilités de transition symétriques ($q(Y | X_0) = q(X_0 | Y)$). Hastings généralisera l'algorithme en autorisant la non-symétrie de ces probabilités. Une fois la nouvelle valeur Y générée, il faut décider si elle est choisie pour X_1 . Afin d'orienter cette décision, on calcule le rapport de Metropolis r (cf. Gregory (2005)) :

$$r = \frac{p(Y | D, I) q(X_0 | Y)}{p(X_0 | D, I) q(Y | X_0)}$$

Ce rapport compare les distributions à posteriori pour les valeurs Y et X_0 , chacune multipliée par la probabilité de transition. En utilisant le théorème de Bayes (3.2), on obtient

$$r = \frac{p(Y | I) p(D | Y, I) q(X_0 | Y)}{p(X_0 | I) p(D | X_0, I) q(Y | X_0)}$$

Le numérateur correspond à une certaine valeur pour la densité de la distribution de X au point X_0 , de même que le dénominateur pour le point Y . Il est donc clair que si r est plus grand que un, Y sera considéré comme X_1 , la nouvelle valeur du paramètre jouant le rôle de X_0 à l'itération suivante. En effet, le but est d'explorer l'espace du paramètre en échantillonnant davantage les zones où la densité postérieure est plus élevée. Cependant, si le rapport de Metropolis est plus petit que un, le paramètre à l'itération suivante ne restera pas forcément X_0 . En quelque sorte, on laisse encore une chance à Y pour qu'il constitue la nouvelle valeur X_1 . Pour ce faire, on génère un nombre aléatoire U selon une loi uniforme entre zéro et un. Ensuite, on le compare au rapport de Metropolis. Si r est plus grand que U , Y devient X_1 , la nouvelle valeur du paramètre. Néanmoins, si r est plus petit que U , X_0 reste la valeur actuelle du paramètre. Cette procédure est ensuite répétée, avec soit X_0 , soit X_1 selon le résultat précédent.

Ainsi, à chaque itération, deux étapes ont lieu :

2. Le choix de cette distribution est assez ouvert, car la décision prise à ce niveau n'impacte que faiblement le résultat attendu. Souvent, on opte pour une loi gaussienne centrée sur X_t .

1. Générer un nombre Y en suivant la probabilité de transition.
2. Calculer $r = \frac{p(Y | D, I) q(X_t | Y)}{p(X_t | D, I) q(Y | X_t)}$ et le comparer à U , un nombre aléatoire uniforme entre zéro et un. Si $r > U$, alors $X_{t+1} = Y$. Si $r < U$, alors $X_{t+1} = X_t$.

Au fur et à mesure des itérations, les valeurs prises par X_t explorent tout l'espace du paramètre X , en s'attardant davantage sur les régions où la densité de la distribution X est plus élevée (on retrouvera dans ces zones plus de points X_t). En récoltant les valeurs X_t , on peut donc reconstruire la distribution du paramètre X du modèle. Une caractéristique importante du MCMC est qu'il évite de piéger les représentations X_t dans des maxima secondaires de la distribution, ce qui fausserait la représentation de cette dernière (l'algorithme est dit efficace). Cet atout est assuré par la probabilité non nulle qu'à X_{t+1} de prendre la valeur de Y si r est plus petit que 1. C'est à dire qu'il n'est pas impossible que le nouveau point X_{t+1} corresponde à une densité plus faible de la distribution recherchée.

Lorsque le nombre total d'itérations est suffisamment grand, on retrouve donc la distribution statistique de X . Cependant, les premiers points du processus ne fournissent pas une bonne information quant à celle-ci. En effet, lors de la première itération, il faut se donner une valeur X_0 de X parmi l'espace du paramètre en question. Cette assignation de valeur est arbitraire ; elle peut soit donner un X_0 dans une région de grande densité pour la distribution, soit l'inverse. En conséquence, un certain nombre d'itérations est nécessaire pour qu'on se soit suffisamment éloigné de cette position de départ, et que l'exploration en soit indépendante. En pratique, on s'affranchit de l'état initial en négligeant les premières étapes (typiquement, 25% des itérations sont ainsi exclues).

Notons enfin qu'il y a une dépendance de chaque itération vis à vis de celles qui ne lui sont pas directement voisines. Cette dépendance, supposée inexistante jusqu'à présent, est faible. On peut la comprendre en remarquant qu'une itération dépend de l'itération précédente, qui elle-même dépend de la précédente, et ainsi de suite. Afin de prendre en compte ce phénomène, une fois le premier quart des itérations négligé, on ne retient qu'un pas tous les dix par exemple.

Afin d'illustrer l'algorithme de Metropolis-Hastings, considérons la situation suivante. Soit à observer un signal sinusoïdal bruité (par exemple, des données de vitesses radiales engendrées par une seule planète sur une étoile inactive, superposées à l'imprécision instrumentale et/ou aux perturbations atmosphériques). Un modèle défini, le but est de trouver les valeurs des paramètres qui ajustent au mieux la courbe. Certes, s'il s'agit de l'unique ambition, des méthodes plus efficaces que le MCMC sont à privilégier (plutôt que de circuler dans l'espace des paramètres, elles aboutissent en effet plus directement aux valeurs optimales). Néanmoins, il peut également y avoir un intérêt à obtenir les distributions à posteriori des paramètres du modèle, ce en vue d'une meilleure compréhension de la situation étudiée.

La figure 3.1 représente les données qu'on souhaite analyser. Un modèle est en premier lieu sélectionné. Dans ce cas, le choix est assez direct :

$$a \sin(bx + c)$$

Trois paramètres interviennent : l'amplitude a de la sinusoïde, l'étirement vertical b et la phase c . On définit ensuite les priors associés. Arbitrairement, il a été décidé pour a , une loi uniforme entre 0.5 et 1.5 ; pour b , une loi gaussienne de moyenne 1 et variance 0.01 ; enfin pour c , aucun prior n'a été sélectionné (ce qui équivaut à une loi uniforme sur l'espace des réels). Pour chaque paramètre, l'algorithme de Metropolis-Hastings est appliqué de sorte à trouver la valeur qui ajuste au mieux la courbe, en prenant en compte les valeurs des autres paramètres. Notons

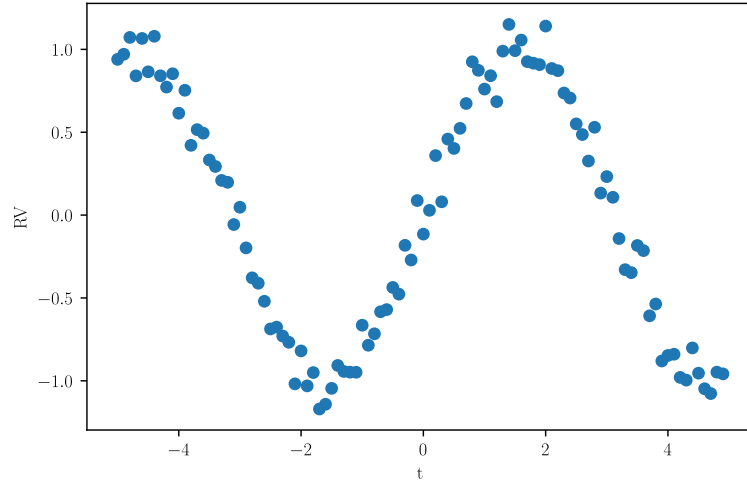


FIGURE 3.1 – Graphique des données. Elles sont générées artificiellement sur base d’une sinusoïde à laquelle est ajouté un bruit gaussien, de variance 0.1. Les données sont équidistantes selon l’abscisse.

que le bruit de ces données artificielles est gaussien et indépendant. Dès lors, on peut estimer $p(X | D, I)$ en se servant des relations (3.2) et (3.3)³. La figure 3.2 présente le graphique de la courbe du meilleur ajustement du modèle aux observations, superposée au vrai signal (sans le bruit) et aux observations.

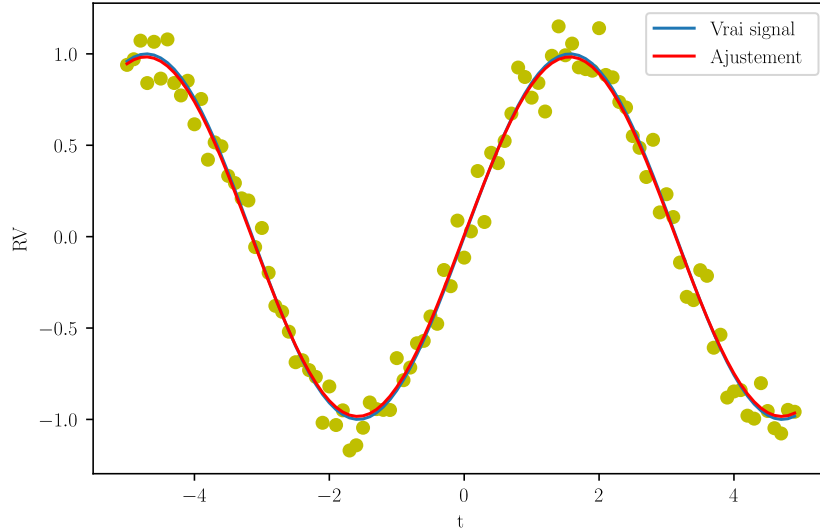


FIGURE 3.2 – Graphique illustrant le résultat du meilleur ajustement (courbe rouge) superposé à la courbe du signal réel (courbe bleue). Ces deux sinusoïdes sont superposées aux données. Ces résultats furent obtenus à la suite de 10 000 itérations.

En conservant l’historique de l’exploration des paramètres, on a finalement accès à leurs distributions. Pour les obtenir correctement, le premier quart des itérations a été négligé, ce qui

3. Remarquons que dans notre cas, le bruit est connu, ce qui permet d’appliquer la relation 3.3 telle quelle. Cependant en pratique, les facteurs $\frac{1}{2\sigma_i}$ multipliant les exponentielles sont le plus souvent inconnus. Il est alors d’usage de scinder le bruit en une partie au comportement fixé $\sigma_{i,fix}$, et une partie qui perturbe ce comportement $\sigma_{i,p} : \sigma_i = \sigma_{i,fix} + \sigma_{i,p}$.

a permis de s'affranchir du choix initial pour les paramètres (dans ce cas, les valeurs de départ étaient $a = 1.1$, $b = 0.95$ et $c = 0.01$). Les résultats sont illustrés sous forme d'histogrammes et présentés à la figure 3.3. Pour plus de clarté, on indique sur chacun le mode, la médiane et la moyenne de la distribution.

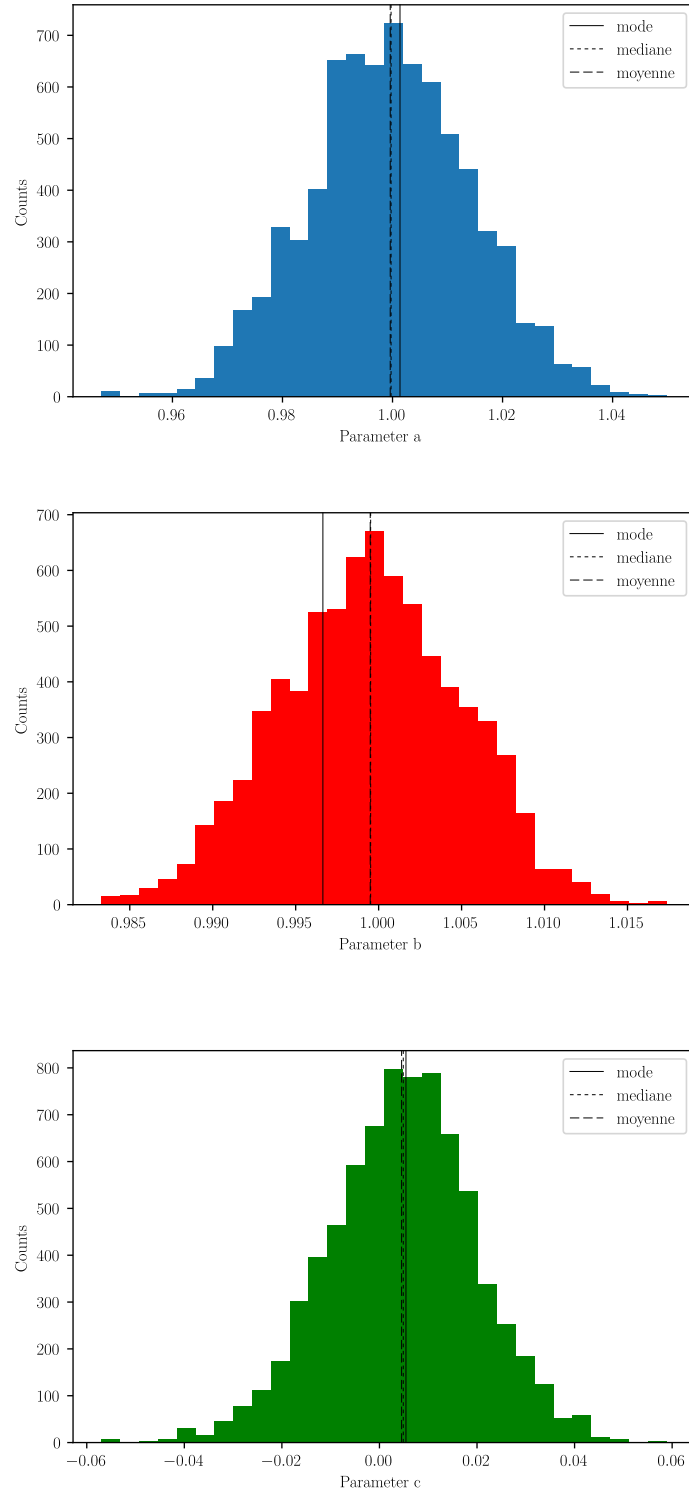


FIGURE 3.3 – Histogrammes des valeurs des paramètres a , b et c . On constate que les distributions à posteriori de chacun de ces paramètres sont gaussiennes. De haut en bas : paramètre a , paramètre b , paramètre c .

Deuxième partie

Utilisation des outils

Dans la première partie, nous avons abordé les outils nécessaires pour tenter d’optimiser les études de stabilité. La deuxième partie s’attache à cet objectif, et se divise en deux chapitres. Le premier reprend une brève description des instruments de travail et le deuxième s’interroge sur les possibilités d’optimisation. De manière identique à la partie précédente, toutes les figures ont été établies personnellement (en Python), hormis mention explicite contraire.

Chapitre 4

Instruments de travail

4.1 GENGA

Le problème à N corps est implémenté dans le programme GENGA. Ce dernier permet de calculer les trajectoires des planètes d’un système, et peut considérer différentes caractéristiques (comme la relativité générale ou encore certaines contraintes sur la structure interne des planètes). Récemment, un module lui a été ajouté permettant l’analyse en fréquences.

GENGA est un intégrateur symplectique hybride. Il utilise la séparation de l’hamiltonien suivante : $H = H_A + H_{\epsilon A}$. Autrement dit, il sépare le problème en une partie dominante et une partie perturbative. Cette dichotomie s’adapte bien aux systèmes planétaires, pour lesquels la partie dominante représente les orbites keplériennes (non perturbées) des planètes autour de l’étoile, et la partie perturbative rend compte des perturbations des autres planètes. L’erreur introduite au départ du calcul des trajectoires dépend de ϵ , qui est de l’ordre de (m_i/m_0) (où m_0 est la masse de l’étoile et m_i la masse de la planète i) et de l’inverse des distances entre les planètes. Néanmoins, lors d’une rencontre proche entre deux planètes, ϵ devient grand et l’intégrateur symplectique n’est plus cohérent. Dès lors, dans de telles situations, GENGA passe en mode ”intégration classique”, ce qui lui permet de limiter les erreurs introduites par de telles configurations. C’est la raison pour laquelle GENGA est un intégrateur *hybride*. Le code numérique est décrit dans l’article de Grimm et Stadel (2014). Il est construit de telle sorte à être lancé sur cartes graphiques (GPU, pour Graphics Processing Unit). Ces dernières utilisent

un schéma de calcul en parallèle. Leur avantage en gain de temps vis à vis des processeurs classiques (CPU, pour Central Processing Unit) est certain.

Soit t le temps nécessaire pour qu'une tâche soit réalisée de manière séquentielle par un processeur. Dans le cas idéal, le temps mis pour que cette même tâche soit effectuée par p processeurs simultanément vaut $\frac{t}{p}$. Autrement dit, le temps de calcul diminue linéairement avec le nombre de processeurs utilisés en parallèle. Afin de bénéficier de ce gain de temps, il est nécessaire que l'exécution de la tâche soit en parallèle du début à la fin. Cependant en pratique, ceci est impossible. En effet, il y a toujours une partie de l'exécution qui impose une architecture séquentielle. Par ailleurs, des parties supplémentaires apparaissent dans le codage en parallèle, comme le recalcul de constantes. En outre, lors de la réalisation de la tâche en parallèle, les différents processeurs doivent communiquer entre eux, ce qui demande un temps supplémentaire. Bref, le gain de temps n'est pas optimal. Il reste cependant très intéressant de pouvoir en bénéficier. Les cartes graphique disponibles à l'observatoire de Genève sont des Tesla C2070.

Question importante à se poser avant de travailler avec GENGA : dans quelle mesure les résultats de ce programme sont-ils similaires avec l'intégrateur symplectique utilisé précédemment ? En effet, l'utilisation de GENGA constitue une opportunité quant à la réalisation de tests supplémentaires sur le bon fonctionnement du programme précédemment établi en python (et sur CPU). Des graphiques comparatifs ont donc été réalisés. Tout d'abord, la figure 4.1 compare les évolutions de l'excentricité de la planète interne pour un système à deux planètes. Le graphique du haut correspond à un pas de temps de calcul de $10^{-3}P_1$ dans Python (où P_1 est la période de la planète interne), tandis que le graphique du bas est généré sur base d'un pas de temps de $10^{-4}P_1$ dans Python. Le pas de temps utilisé pour GENGA reste quant à lui fixé à $10^{-2}P_1$.

Ce premier test est concluant. Bien que le graphique du haut présente une divergence importante entre les deux intégrateurs, utiliser un pas de temps cent fois plus petit semble régler le problème. Il avait déjà été discuté au chapitre 1 (dans la section sur les intégrateurs symplectiques) des questions de précision quant à l'intégrateur implémenté en Python. Une comparaison entre des pas de temps de $10^{-3}P_1$ et de $10^{-4}P_1$ avait été menée, avec la constatation du gain en précision certain dans le deuxième cas. Le temps de calcul était, lui, augmenté d'un facteur dix. À présent, on montre qu'un pas de temps cent fois plus petit que dans GENGA est nécessaire pour égaler la précision fournie par ce dernier.

Étant donné la grande similitude des résultats si les pas de temps adéquats sont choisis, il est utile d'effectuer une comparaison plus fine. Ainsi, la figure 4.2 présente la différence, au cours du temps, de l'excentricité e_1 vis à vis des deux intégrateurs. Au début, cette différence augmente légèrement et de manière linéaire. Sa croissance est ensuite atténuée. Les deux solutions diffèrent globalement d'un facteur 10^{-4} . Les résultats de la comparaison sont similaires pour les autres paramètres orbitaux.

Un deuxième test comparatif peut être mené avec l'analyse en fréquences, en choisissant des pas de temps identiques à ceux utilisés pour la figure 4.2. Une telle étude est présentée à la figure 4.3.

Ainsi, l'intégrateur hybride GENGA fournit des résultats similaires à ceux de l'intégrateur implémenté en Python. Ce fait est rassurant, car il confirme que l'intégrateur utilisé en première partie est tout à fait valable. Par ailleurs, on constate que l'intégrateur GENGA est plus efficace, puisqu'il permet d'obtenir un même niveau de précision que l'intégrateur précédant (qui pour rappel fait usage de la méthode leapfrog d'ordre 2) avec un pas de temps plus élevé.

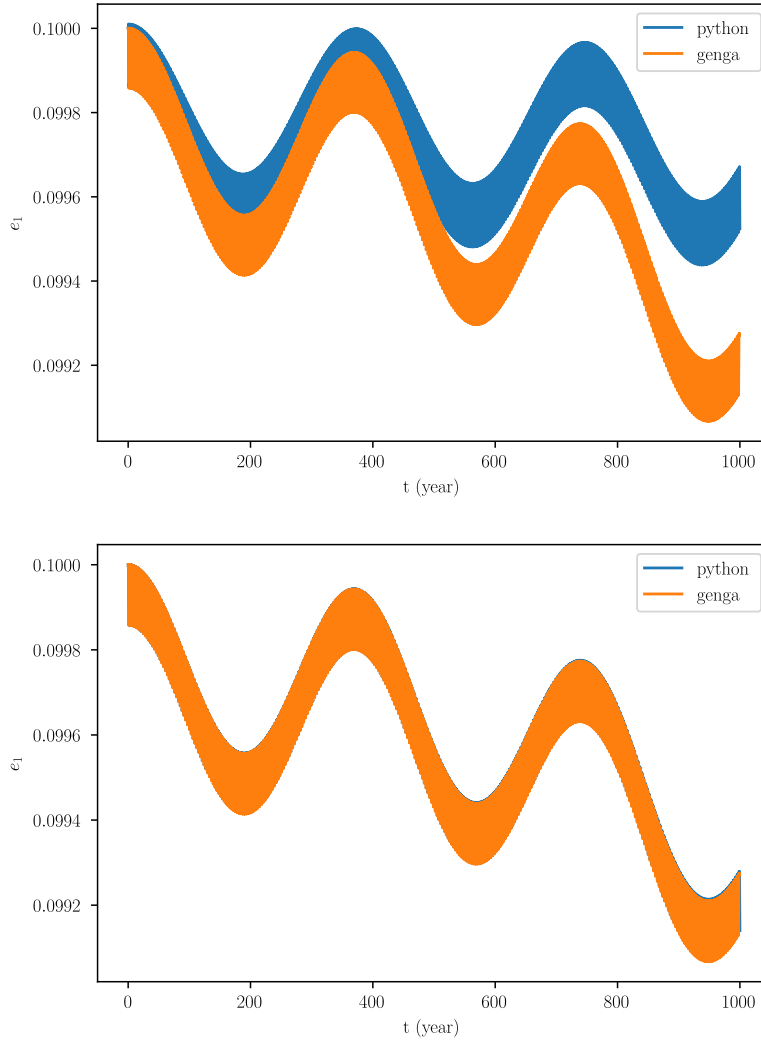


FIGURE 4.1 – Graphique illustrant les évolutions de l’excentricité de la planète interne e_1 prédites par l’intégrateur implémenté en Python (en bleu) et par GENGA (en orange).

4.2 DACE

L’algorithme de Monte-Carlo par chaînes de Markov utilisé dans cette deuxième partie est implémenté sur la plateforme de stockage et d’analyse de données DACE (Data and Analysis Center for Exoplanets). Cette dernière résulte d’une collaboration suisse, dont le centre de développement est situé à l’observatoire de Genève. Elle répertorie de nombreuses étoiles, auxquelles sont associées des données de diverses natures en fonction des observations précédemment réalisées (notamment des transits, des vitesses radiales, de l’imagerie, de la spectroscopie et des données stellaires). Une série d’analyses sont possibles, dont le MCMC. L’algorithme implanté dans DACE se base sur les articles de Díaz et al. (2014), et Díaz et al. (2016). Remarquons qu’il propose systématiquement d’éliminer le premier quart des itérations, permettant de s’affranchir du biais introduit par le choix du point initial dans l’espace des paramètres. Notons que GENGA peut lui aussi être lancé depuis DACE. Il ne fut cependant pas utilisé de cette manière, mais plutôt lancé depuis la console. Cela permet de générer des simulations pour un grand nombre de conditions initiales différentes, et de personnaliser les types de résultats obtenus.

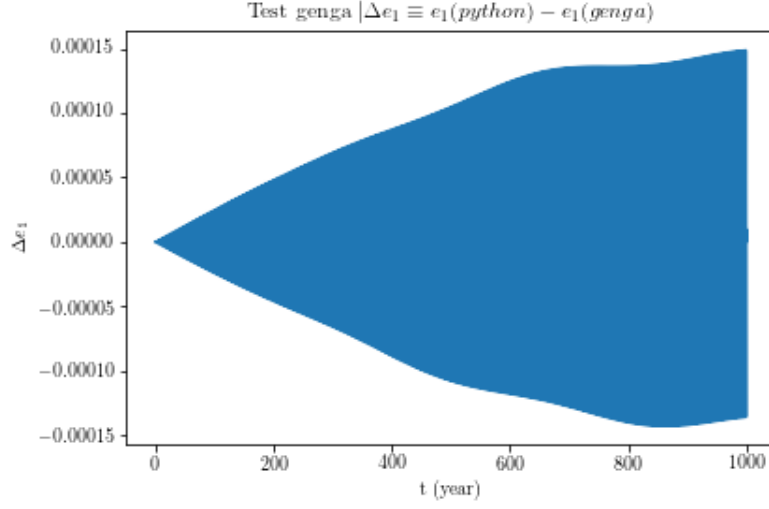


FIGURE 4.2 – Graphique illustrant l'évolution temporelle de la différence de e_1 : $\Delta e_1 = e_1(\text{python}) - e_1(\text{genga})$. Les pas de temps choisis pour les intégrateurs sont identiques à ceux utilisés pour générer le graphique du bas de la figure 4.1.

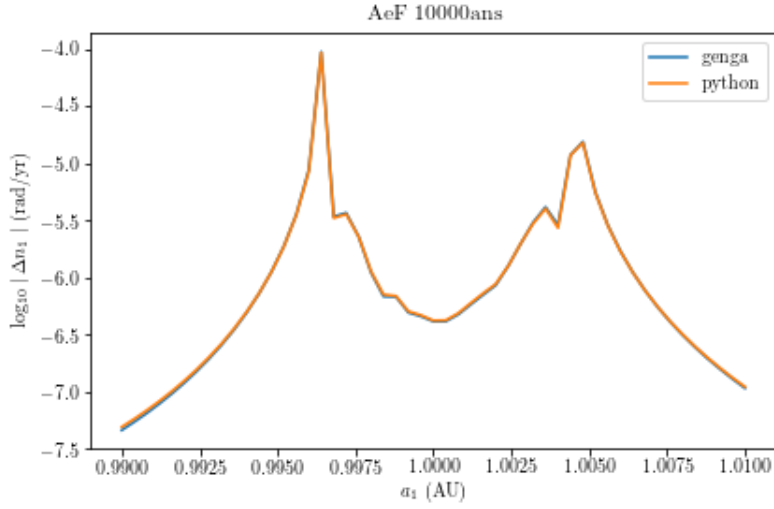


FIGURE 4.3 – Graphique présentant les résultats d'une analyse en fréquences pour l'intégrateur codé sur Python (en orange) et GENGA (en bleu). Afin de réaliser cette figure, différentes valeurs initiales du demi-grand axe de la planète interne a_1 furent choisies. Le système planétaire utilisé est le même que celui invoqué au chapitre 2 pour générer les illustrations (résonance 3 : 1 et alentours).

Chapitre 5

Optimiser les études de stabilité

5.1 Agrandir l'espace des paramètres

L'analyse en fréquences présente un avantage par rapport au formalisme faisant usage de l'exposant de Lyapunov. Elle permet en effet un gain de temps considérable. Afin de sonder la stabilité d'un système vis à vis d'un paramètre orbital, plusieurs simulations sont lancées pour différentes valeurs initiales de ce paramètre, et sur une même durée d'intégration (qui devrait être supérieure au double de la période maximale du système mécanique¹). D'un point de vue conceptuel, cette technique s'étend très simplement à l'étude de deux paramètres orbitaux. On obtient alors des cartes de stabilité. Ce sont des grilles à deux dimensions dont chaque axe représente un certain élément elliptique initial, et dont on appose un code couleur aux cases de manière à illustrer les valeurs prises par la différence de fréquence principale entre les deux moitiés de l'intégration (la figure 1, présentée en introduction, ou encore la figure 2.5 sont des exemples). En conséquence, on repère directement les domaines de valeurs pour les deux paramètres initiaux qui donnent lieu à des orbites stables, et qui sont donc probables. De la sorte, il est possible de contraindre davantage les fenêtres d'incertitude associées à ces éléments elliptiques. Bien que simples d'un point de vue conceptuel (une fois saisi le fonctionnement des études à un paramètre), ces cartes de stabilité demandent toutefois un temps de calcul considérable. En effet, imaginons qu'on ait étudié la stabilité d'un système mécanique par rapport à cinquante valeurs initiales du demi-grand axe de la planète interne a_1 . On a dès lors généré cinquante simulations numériques sur une durée d'intégration suffisante. Si ensuite, on souhaite analyser la stabilité vis à vis de l'excentricité e_1 pour chaque valeur de a_1 , on génère une carte de stabilité. Afin d'obtenir celle-ci, il faudrait lancer 50×50 , c'est à dire 2500 simulations numériques. Le temps de calcul est donc approximativement élevé au carré. Certes, on réalise de telles cartes, mais elles nécessitent un temps de calcul considérable, même sur des super-ordinateurs. La construction de "cartes" contenant tous les six paramètres orbitaux ne semble dès lors pas envisageable. Le temps de calcul serait à peu près élevé à la puissance six.

L'idée de coupler l'exploration de l'espace des paramètres à un algorithme MCMC a alors germé. De fait, dans les cartes de stabilité, de nombreuses cases ne sont pas intéressantes : elles donnent lieu à des orbites improbables, ajustant mal les données (le meilleur ajustement occupe en effet le centre des cartes, non les extrémités). Or, un temps non négligeable est utilisé pour étudier ces conditions initiales. Si ce temps pouvait être récupéré, il serait possible de le réinvestir dans l'analyse d'autres paramètres orbitaux initiaux. Le MCMC constitue alors l'outil idéal. De fait, il explore l'espace des six paramètres de manière simultanée. Par ailleurs, il le fait de façon optimale. Ainsi, son exploration s'attarderait davantage dans les zones les plus intéressantes a priori (car ajustant au mieux les observations), ce qui économiserait le nombre de simulations à effectuer. Explicitons ce fonctionnement.

Lors d'observations d'un système planétaire par la méthode des vitesses radiales, on obtient

1. En fait, l'analyse en fréquences doit être réalisée sur une durée plus grande que la période maximale du système mécanique. Pour les études de stabilité, deux analyses en fréquences sont réalisées, respectivement sur chaque moitié de l'intégration. Dès lors, la durée totale d'intégration devrait être supérieure au double de la période maximale du système.

un nuage de points dans un graphique de la vitesse radiale en fonction du temps. Ces données recèlent les périodes des planètes. On les recherche en tentant d'ajuster au mieux une courbe à ces données. Sur la plateforme DACE, l'ajustement est réalisé en utilisant des modèles kepleriens. Ainsi, on introduit la présence d'une planète avec des paramètres orbitaux spécifiques de sorte à ajuster le nuage de points. On introduit éventuellement d'autres planètes si l'ajustement résultant est considérablement meilleur, et ce sans tenir compte des interactions entre les planètes. Finalement, on obtient une courbe qui ajuste au mieux les données de vitesses radiales. Cette courbe correspond par exemple à l'existence de deux planètes aux éléments elliptiques spécifiques. L'exploration du MCMC se base sur cette meilleure interprétation des données, en particulier du χ^2 de la courbe (défini au chapitre 3 de sorte à écrire la relation 3.3). Le MCMC sonde donc l'espace des paramètres et rend finalement un ensemble de points dont la distribution est similaire à celle du meilleur ajustement. Chacun de ces points constitue en fait un ensemble de six nombres qui représentent un certain paramètre orbital. De la sorte, tous les paramètres initiaux sont explorés simultanément et en accordant plus d'importance aux zones réservées aux orbites probables.

5.2 Affiner les contraintes

Un des objectifs des études de stabilité est de restreindre au maximum les zones d'incertitude des paramètres orbitaux. Cet affinement est réalisé en excluant de ces fenêtres les conditions initiales donnant lieu à des orbites instables, et donc improbables.

À la sortie de l'algorithme de Monte-Carlo par chaînes de Markov, un ensemble de valeurs initiales pour chacun des paramètres orbitaux est récupéré (ces valeurs initiales correspondent au temps présent). Pour chacune de ces conditions initiales, un calcul des trajectoires est effectué à la suite duquel l'analyse en fréquences est réalisée. Il n'est pas envisageable de construire des "cartes" de stabilité à six dimensions, sept si on compte l'indicateur de stabilité lui-même, car elles seraient visuellement inexploitable. Deux alternatives complémentaires l'une de l'autre pour exploiter les données ont donc été entreprises. La première se porte sur des études individuelles des éléments elliptiques, ce par le biais d'histogrammes. Cet outil est en effet particulièrement bien adapté à notre problématique. À la suite du MCMC, tracer l'histogramme d'un paramètre orbital d'une des planètes renseigne directement sur la distribution de ce dernier. Si un grand nombre de points est issu du MCMC, le sommet de la distribution de l'histogramme en question doit correspondre à la valeur apparaissant dans le meilleur ajustement des données de vitesses radiales. Ensuite, en excluant les solutions instables, on peut éventuellement constater des modifications dans la distribution précédente, ou également réduire la fenêtre d'incertitude. La seconde alternative consiste à construire des sortes de cartes de stabilité à deux dimensions, en ne représentant que deux paramètres orbitaux. Une différence fondamentale vis à vis des cartes de stabilité "classiques" telle la figure 1 est qu'ici, les autres éléments elliptiques initiaux ne sont pas fixés : ils varient selon leurs distributions postérieures spécifiques. Un tel outil sera utilisé afin de distinguer des corrélations quelconques entre les paramètres initiaux représentés.

Un point central dans cet objectif de renforcement des contraintes est le choix du critère de stabilité. Pour rappel, il n'existe pas actuellement de critère absolu permettant d'affirmer de manière objective la stabilité d'un système planétaire par rapport à certaines conditions initiales. De fait, sur base de la différence des fréquences principales entre les deux moitiés d'intégration, le système sera dit plus stable ou moins stable que celui généré par des conditions initiales voisines (et pour lequel la différence des fréquences a aussi été réalisée afin d'effectuer

la comparaison). Cette affirmation de stabilité est dès lors relative. Pour affiner les fenêtres d'incertitude cependant, nous avons besoin d'un critère absolu, qui permette de rejeter (et non pas comparer) certaines conditions initiales. Proposons une démarche afin d'obtenir un tel critère.

Si nous pouvions estimer la probabilité qu'un jeu de conditions initiales donné corresponde effectivement aux observations menées, nous pourrions alors décider de rejeter ou d'accepter ces conditions initiales avec un certain niveau de confiance. En suivant le théorème de Bayes, une telle probabilité s'exprime comme suit :

$$p(X | D, I) = \frac{p(D | X, I)p(X | I)}{p(D | I)}$$

Dans cette expression, X représente le jeu de conditions initiales, D correspond aux données de vitesses radiales issues d'observations et I est le prior. La probabilité d'obtenir les observations connaissant le prior ($p(D | I)$) est un facteur de normalisation, comme déjà mentionné au chapitre 3. Quant à la probabilité d'obtenir certaines conditions initiales étant donné le prior, $p(X | I)$, il s'agit en fait de la distribution postérieure du MCMC (le prior étant l'ensemble de points rendus par l'algorithme). Il reste à estimer la probabilité d'obtenir les données pour un certain jeu de conditions initiales (et sachant le prior) : $p(D | X, I)$. Son expression est en fait assez simple : il s'agit du rapport entre le temps d'instabilité du système (c'est à dire le temps au-delà duquel le système planétaire devient instable) et l'âge de ce dernier (en bonne approximation, l'âge du système planétaire est identique à l'âge de l'étoile hôte). Estimer l'âge de l'étoile ne relève pas de ce travail, mais fait plutôt appel à des modèles de physique stellaire qui se basent sur des mesures de luminosité, rayon, etc. Souvent, cette donnée est disponible. Le cœur du problème se situe donc dans l'estimation du temps d'instabilité, que nous noterons τ par la suite. Voyons comment nous pourrions l'obtenir en limitant le temps de calcul.

Lorsqu'un système chaotique évolue, sa fréquence principale varie également. Notons Δn la variation de cette dernière. Si nous divisons la durée totale d'intégration en de nombreuses parties, nous pourrions alors comparer les résultats de l'analyse en fréquences de chacune d'entre elles à la fréquence principale calculée sur le premier intervalle. Cela permettrait d'estimer la loi d'évolution temporelle de Δn (en supposant qu'il y en ait une). Cette relation donnerait la possibilité d'extrapoler cette variation jusqu'au temps τ où la différence des fréquences $\Delta n(\tau) = n(\tau) - n_0$ est telle que le système devienne instable. Cette extrapolation conférerait un gain de temps important, car elle ne nécessiterait pas le calcul des trajectoires jusqu'à ce que Δn atteigne sa valeur critique. Notons toutefois que la valeur critique $\Delta n(\tau)$ n'est pas clairement définie. En conséquence, le temps τ écoulé avant que le système devienne instable est approximatif. Nous proposons d'utiliser la valeur critique suivante pour Δn : $\frac{\Delta n}{n_0} = 1$. Dès

lors, imaginons qu'on connaisse la loi $\Delta n(t)$. Elle relie $\Delta n(t_0)$ à $\Delta n(t)$, où t est dans ce cas τ . Imaginons aussi qu'on réalise une analyse en fréquences sur les deux moitiés de l'intégration de telle sorte à obtenir $\Delta n(T_{integ}/2)$. En insérant cette valeur dans la relation pour $\Delta n(t)$, et sachant que $\frac{\Delta n(\tau)}{n_0} = 1$, on trouve rapidement τ (mais de manière approximative). L'avantage étant qu'il n'aura pas été nécessaire d'intégrer les équations de la trajectoire sur une longue durée pour estimer ce temps d'instabilité. Une valeur approchée de τ étant disponible, nous pourrions estimer $p(D | X, I) = \frac{\tau}{T_\star}$ ($T_\star$ est l'âge de l'étoile) et dès lors avoir accès à la probabilité que le jeu de paramètres initiaux étudié rende compte des observations : $p(X | D, I)$. Cette probabilité est une mesure directe de la vraisemblance que les paramètres orbitaux en question soient effectivement ceux observés. Comparant cette probabilité à un seuil, nous pourrions alors décider de rejeter ou non les conditions initiales. Par exemple, nous pourrions rejeter les valeurs des éléments elliptiques initiaux ayant 5 % de chance ou moins d'être ceux réellement observés.

En conclusion, la démarche proposée en vue d’obtenir un critère absolu et objectif, c’est à dire sans décision purement arbitraire, est la suivante (on suppose que le MCMC a déjà été effectué). Tout d’abord, on estime la loi d’évolution temporelle $\Delta n(t)$ du système planétaire. Ensuite, pour chaque jeu de conditions initiales étudié, on réalise les étapes ci-dessous :

1. Calculer τ sur base de la loi pour $\Delta n(t)$.
2. Estimer $p(D | X, I) = \frac{\tau}{T_\star}$.
3. Déterminer $p(X | D, I)$ et le comparer à un seuil de confiance.

Par manque de temps, nous avons décidé de nous centrer, non sur la recherche d’un critère absolu et objectif de stabilité, mais plutôt sur l’étude des contraintes apportées par une analyse MCMC des conditions initiales associée à l’imposition d’un critère de stabilité. Ce dernier est sélectionné de manière subjective. Ainsi dans la suite, le seuil de stabilité sera $\log_{10}(|\Delta n|) = -5$. Autrement dit, si un certain jeu de conditions initiales, étudié via une analyse en fréquences, donne lieu à une valeur de $\log_{10}(|\Delta n|)$ plus grande que -5 (plus petite que 5 en valeur absolue), le système sera considéré comme étant instable. La valeur du seuil, à savoir -5 , ne repose pas sur des arguments rigoureux et est donc arbitraire, ce qui rend le critère subjectif. Il fut en fait constaté que les valeurs prises par $|\Delta n|$ étaient toutes inférieures à un, le logarithme étant dès lors toujours négatif. Plus la différence des fréquences est faible, plus la valeur du logarithme correspondant est grande dans les négatifs et plus le système planétaire est stable (d’où plus les conditions initiales associées sont probables). En testant divers nombres pour le seuil, il s’avère que -5 est un bon compromis. D’une part, il permet de supprimer suffisamment de conditions initiales et dès lors d’apporter des résultats intéressants. D’autre part, il évite de négliger trop de conditions initiales, ce qui rendrait les contraintes peu crédibles (vu le risque non négligeable d’avoir supprimé des jeux d’éléments elliptiques initiaux probables).

Choisir une valeur du seuil directement en lien avec la distribution de points issue du MCMC aurait pu paraître plus judicieux (comme la médiane de la distribution par exemple). Néanmoins dans certains systèmes, près de la moitié des intégrations (correspondant chacune à un jeu de conditions initiales) est interrompue, soit pour cause de collision entre les deux planètes, soit car l’une d’entre elles est éjectée du système. Dans ce cas, la médiane prendrait une valeur anormalement élevée (c’est à dire qu’elle serait très petite en valeur absolue), puisqu’elle tiendrait compte de toutes ces simulations qui ne finissent pas et pour lesquelles $\log_{10}(|\Delta n|)$ est fixé à zéro. Ainsi, de nombreuses conditions initiales peu probables seraient tout de même considérées, car leur $\log_{10}(|\Delta n|)$ serait plus petit (plus grand dans les négatifs) que le seuil.

Par la suite, nous présenterons quelques résultats issus du couplage entre le MCMC pour le choix des conditions initiales, et l’analyse en fréquences pour un tri parmi celles-ci. Pour chaque système, le MCMC explore l’espace des paramètres en deux millions d’itérations, et seuls les trois derniers quarts sont conservés. Parmi ceux-ci, nous ne retiendrons qu’environ un point sur cent. Par ailleurs, le système pour chaque condition initiale sera intégré sur 100 000 ans, et l’analyse en fréquences sera réalisée sur les deux moitiés, soit tous les 50 000 ans. Mentionnons enfin que le seuil de stabilité sera systématiquement fixé à -5 .

5.3 Applications sur des systèmes observés

5.3.1 HD 202206

Le système planétaire HD 202206 se compose de deux planètes aux alentours de la résonance 5 : 1 du mouvement moyen. Elles orbitent une étoile de type spectral G6V de 1.13 masses

solaires et âgée de deux milliards d’années environ. La table 5.2 synthétise les caractéristiques des planètes correspondantes. Les données sont tirées du site web exoplanet.eu, qui reprend celles issues de la littérature. Remarquons qu’au vu des masses de HD 202206 b et c, ces corps pourraient être plutôt considérés comme des naines brunes (en principe, la limite de masse entre une planète et une naine brune se situe autour de $13 M_J$).

TABLE 5.1 – Tableau répertoriant quelques paramètres orbitaux et les masses des planètes du système HD 202206. JD est le diminutif anglais de jour julien et M_J signifie une masse de Jupiter.

	HD 202206 b	HD 202206 c
a (UA)	0.83	2.41
P (JD)	256.33	1260
e	0.432	0.22
i (deg)	10.9	7.7
M (M_J)	93.6	17.9

Les données présentées ci-dessus doivent être considérées à titre indicatif uniquement. Leur comparaison avec les résultats que nous exposerons n’est pas valable. En effet, notre distribution MCMC ne correspond pas au meilleur ajustement présenté dans la littérature, en particulier dans l’article de Correia et al. (2005) qui réalisa des études dynamiques de HD 202206. La raison en est que les données disponibles ne sont pas identiques. En conséquence, notre meilleur ajustement n’est pas le même, et le MCMC rend une distribution différente. Or, si cette distribution est différente, affiner cette dernière n’est d’aucun intérêt pour la comparaison avec la littérature. Nous présenterons néanmoins les résultats obtenus avec ce système, car ils sont en eux-mêmes représentatifs des possibilités qu’offre le couplage MCMC - analyse en fréquences. Nous nous abstiendrons toutefois de toute comparaison avec la littérature.

Tout d’abord, intéressons-nous aux études des paramètres orbitaux initiaux individuels, par le biais d’histogrammes. N’oublions pas cependant qu’à chaque valeur du paramètre x correspond une modification de tous les autres éléments simultanément. Deux histogrammes sont particulièrement intéressants. Le premier, présenté à la figure 5.1, concerne la distribution du rapport des périodes P_2/P_1 (où de nouveau, l’indice 1 fait référence à la planète interne, et l’indice 2 à l’externe). L’histogramme bleu est celui obtenu directement après le MCMC, sans traitement supplémentaire. Il est construit sur base de 7212 points (chaque point étant un certain jeu de conditions initiales). L’histogramme orange représente le résultat du critère de stabilité appliqué aux conditions initiales issues du MCMC. Il se compose de 2159 points. Ce dernier histogramme met considérablement plus de temps à obtenir, puisqu’il nécessite le calcul des trajectoires sur un temps suffisamment long pour y appliquer l’analyse en fréquences sur laquelle est défini le seuil, et ce pour chaque jeu de conditions initiales. Afin de ne pas être biaisé par les différents nombres de points servant à générer les histogrammes, tous deux sont normalisés de telle sorte que l’aire de l’ensemble des barres soit égale à un pour chacun de ces histogrammes.

Cette figure démontre l’un des atouts que peut apporter cette méthode. En effet, elle montre que la distribution des rapports de périodes se décale d’une certaine quantité. Autrement dit, la médiane de la distribution est quelque peu modifiée. Cela signifie que les paramètres correspondant au meilleur ajustement des données de vitesses radiales ne correspondent pas

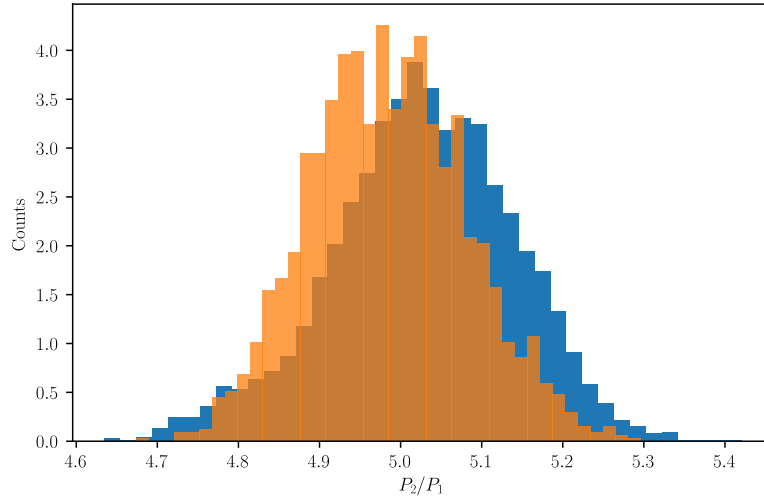


FIGURE 5.1 – Histogrammes normalisés du rapport des périodes des deux planètes. L’histogramme en bleu est construit avec 7212 points issus du MCMC. En orange, on a appliqué à ces points le critère de stabilité, et il n’en reste que 2159.

tout à fait aux orbites les plus stables, et donc les plus probables.

Un deuxième résultat tout aussi intéressant est illustré à la figure 5.2. Il s’agit des histogrammes pour l’excentricité de la planète externe, avant (en bleu) et après (en orange) avoir appliqué le critère de stabilité. Tous deux sont de nouveau normalisés.

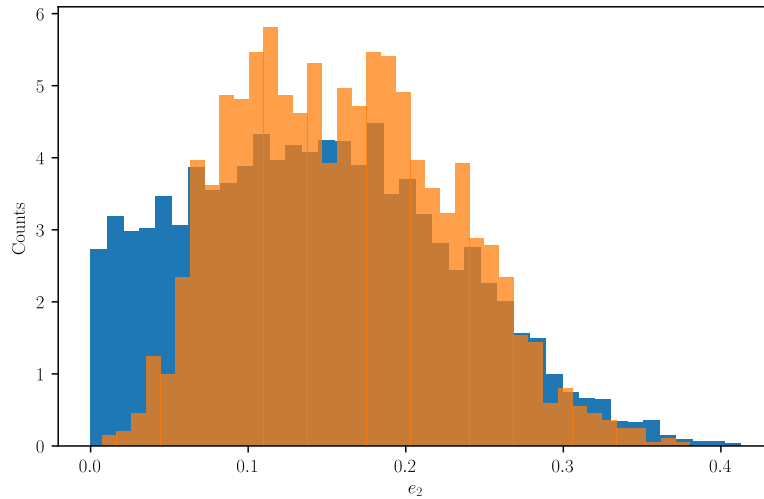


FIGURE 5.2 – Histogrammes normalisés de l’excentricité de la planète externe e_2 . L’histogramme en bleu est construit avec 7212 points issus du MCMC. En orange, on a appliqué à ces points le critère de stabilité, et il n’en reste que 2159.

Dans cette figure, c’est la forme de la distribution qui est modifiée. De fait, on constate que les orbites à l’excentricité initiale faible de la planète externe e_2 semblent instables, et sont de ce fait peu probables. L’application du seuil enlève dès lors ces paramètres initiaux, ce qui modifie la distribution de e_2 issue du MCMC. La distribution liée au meilleur ajustement étant peu contraignante dans ce cas (l’histogramme bleu présente un comptage élevé sur une fenêtre

étendue), le nouvel histogramme permet de réduire la zone d'incertitude pour e_2 .

Présentons à présent un résultat que fournissent les cartes de distribution à deux dimensions. Ces dernières peuvent en effet ajouter des informations intéressantes. La figure 5.3 montre une telle carte, où l'ordonnée est l'excentricité de la planète externe e_2 , et où l'abscisse est a_2 . Remarquons cette évidence, à savoir que la carte ne se présente plus sous la forme d'une grille. En effet, chaque point est généré par l'algorithme de MCMC, et de ce fait ne suit pas un schéma prédéfini. Rappelons également qu'à chaque point, non seulement les valeurs des deux paramètres initiaux représentés varient, mais également tous les autres paramètres. Les points sortant du MCMC sont initialement blancs. Ils sont ensuite teintés de noir si ces éléments elliptiques initiaux sont considérés comme stables vis à vis du critère de stabilité.

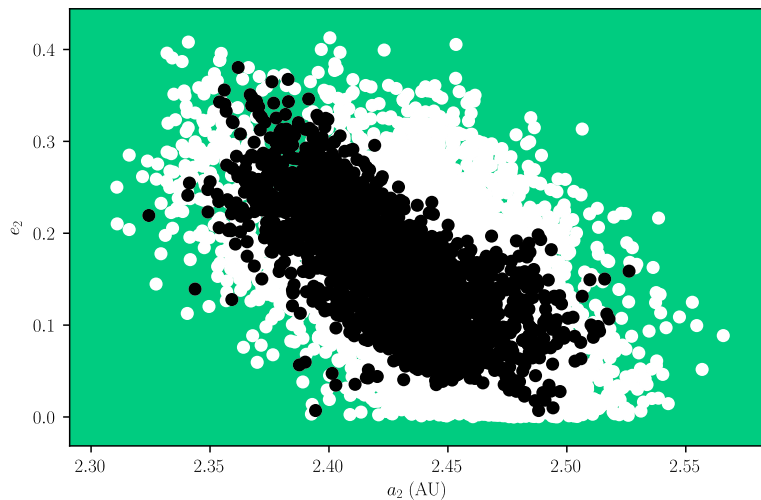


FIGURE 5.3 – Carte des distributions simultanées de l'excentricité et du demi-grand axe de la planète externe : e_2 et a_2 . 7212 points sont représentés au total, dont 2159 teintés de noir (les conditions initiales associées étant donc considérées comme probables).

Ce résultat montre qu'une corrélation existe entre les deux paramètres initiaux e_2 et a_2 . Faiblement perceptible à la sortie du MCMC, elle apparaît distinctement après application du critère de stabilité. Autrement dit, pour un jeu de conditions initiales probables au sein desquelles on modifie le demi-grand axe de la planète externe a_2 , on obtiendra de nouvelles conditions initiales probables pour autant que e_2 varie en suivant la corrélation représentée à la figure 5.3. Par ailleurs, le résultat obtenu à la figure 5.2 est confirmé : les faibles excentricités de la planète externe sont globalement rejetées des conditions initiales probables.

5.3.2 HD 82943

L'étoile HD 82943 est un astre de type spectral G0 et de 1.18 masses solaires. Elle est âgée de 3.08 milliards d'années. Trois planètes ont été détectées autour de cette étoile, et les deux planètes internes sont (ou du moins semblent être) en résonance 2 : 1 de mouvement moyen. Ci-dessous est présentée une table de données reprenant quelques éléments orbitaux actuels (tirés du site web exoplanet.eu). De nouveau, cette table doit être considérée à titre indicatif. De fait, en fonction des observations disponibles, ces valeurs changent plus ou moins fortement. Par ailleurs, la façon d'ajuster les données (en négligeant ou non les interactions entre les planètes

sur le temps des observations) donne lieu à des paramètres orbitaux distincts.

TABLE 5.2 – Tableau répertoriant quelques paramètres orbitaux et les masses minimales des planètes du système HD 82943.

	HD 82943 b	HD 82943 c	HD 82943 d
a (UA)	1.19	0.746	2.145
P (JD)	442.4	219.3	1078
e	0.203	0.425	0.0
i (deg)	19.4	19.4	/
$M \sin(i)$ (M_J)	4.8	4.78	0.29

Dans l'article de Mayor et al. (2004), les données en vitesses radiales sont similaires à celles que nous avons utilisé. Cependant, notre meilleur ajustement indique une valeur de $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ proche de zéro degré, alors que celle obtenue par Mayor et al. prône des périastres anti-alignés pour les deux planètes internes : $\Delta\omega \sim 180$ degrés.

L'article de Lee et al. (2006), dans lequel une étude dynamique du système HD 82943 est effectuée, apporte un complément intéressant. Notons d'abord que les auteurs disposaient d'avantage d'observations. Ils ont effectué un premier ajustement keplerien sur leurs données, mais en partant des valeurs issues du meilleur ajustement de Mayor et al. (2004). Il n'est donc pas étonnant qu'ils trouvent une valeur $\Delta\omega \sim 180$ degrés. Une étude dynamique de leur ajustement montre cependant que les conditions initiales associées génèrent des orbites instables. Ils ont ensuite réitéré un ajustement des données en fixant toutefois la longitude du périastre de la planète externe telle que $\Delta\omega \sim 0$ degré (et fixant également la valeur de e_2). En forçant ainsi les périastres à s'aligner, ils obtiennent un ensemble de conditions initiales qui génèrent des orbites stables. Ce fait est en faveur de l'ajustement que nous avons réalisé.

En appliquant à présent le couplage MCMC - critère de stabilité, la distribution dans l'espace des paramètres s'éclaircit grandement. La figure 5.4 présente les histogrammes normalisés de $\Delta\omega$, avec un code couleur identique à celui précédemment utilisé (bleu avant et orange après critère de stabilité).

En analysant l'histogramme bleu, on constate d'abord un maximum global de la distribution autour de $\Delta\omega = 0$ degré, comme notre meilleur ajustement le laissait penser. Par ailleurs, on détecte un maximum local proche de 180 degrés². Cette structure dans la distribution du paramètre $\Delta\omega$ pourrait constituer la raison pour laquelle Mayor et al. (2004) ont obtenu une valeur de 180 degrés après leur ajustement : ils pourraient avoir été "piégés" dans ce maximum secondaire. Quant à l'histogramme orange, il confirme les résultats obtenus par Lee et al. (2006) : les périastres initiaux anti-alignés génèrent des orbites instables. En effet, la distribution après application du critère de stabilité ne fait plus apparaître le maximum secondaire. Cependant ici, ce résultat survient naturellement après l'exploration de l'espace des paramètres par l'algorithme de MCMC et application d'un seuil de stabilité. Nous n'avons pas dû imposer de valeurs à certains paramètres initiaux.

Nous obtenons un résultat similaire en utilisant des cartes de distribution. Il est intéressant de montrer cette alternative, car elle présente la diversité des possibilités que nous possédons pour aboutir aux mêmes conclusions. Ainsi, la figure 5.5 illustre une carte de distribution pour

2. Remarquons que les deux maxima sont plutôt centrés aux valeurs de 330 et 150 degrés pour $\Delta\omega$. La différence entre ces deux centres reste néanmoins de 180 degrés.

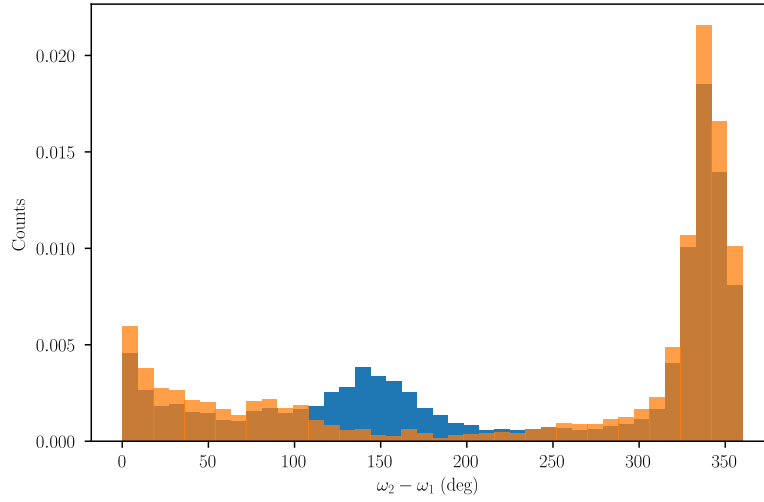


FIGURE 5.4 – Histogrammes normalisés de la différence de longitude des périastres des planètes b et c : $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$. L’histogramme bleu est généré sur base de 4935 points sortant du MCMC. L’orange fait suite au critère de stabilité, et se compose de 3120 points.

les paramètres initiaux e_2 et $\Delta\omega$. Néanmoins, chaque axe est une combinaison de ces deux éléments : l’abscisse est $e_2 \cos(\Delta\omega)$ et l’ordonnée $e_2 \sin(\Delta\omega)$. L’intérêt de cette combinaison est qu’elle sépare les valeurs de $\Delta\omega$ comme suit : à abscisse positive, ces valeurs sont autour de zéro degré, tandis qu’à abscisse négative elles entourent 180 degrés. De plus, il est clair qu’à faibles excentricités e_2 , la valeur de $\Delta\omega$ importe peu (car ω_2 est faiblement défini, et donc $\Delta\omega$ aussi). Ce choix des axes rend compte de ces situations où e_2 est petit, en plaçant les points correspondants proches de l’origine. De nombreuses informations sont donc contenues dans une telle carte. Le code couleur est identique à celui utilisé pour générer la figure 5.3.

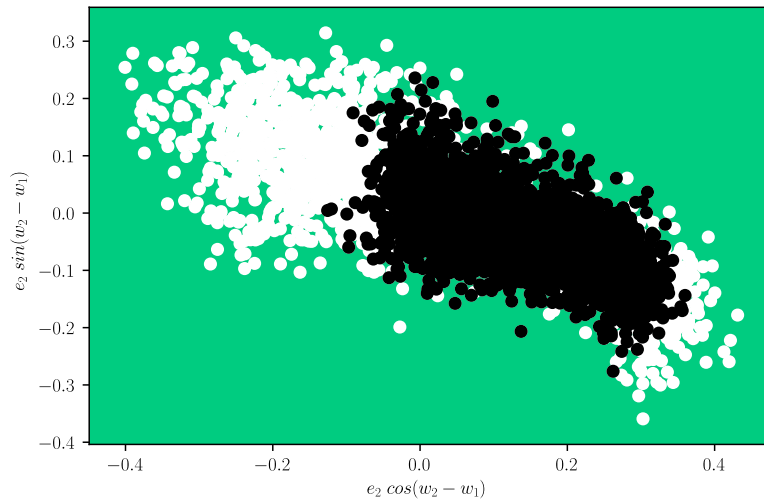


FIGURE 5.5 – Carte de distribution pour les paramètres initiaux $e_2 \sin(\Delta\omega)$ et $e_2 \cos(\Delta\omega)$. 4935 points constituent la carte, mais seuls 3120 sont teintés en noir (car probables).

Nous obtenons une asymétrie très nette : il y a bien plus de conditions initiales stables à droite qu’à gauche. Nous en concluons dès lors que les orbites stables encerclent un $\Delta\omega$ de zéro degré. Une information indisponible ici est la densité des différentes régions de la carte.

L'étude précédente sur base de la figure 5.4, qui fait apparaître un maximum secondaire de la distribution proche de $\Delta\omega = 180$ degrés (avant application d'un seuil), nous permet néanmoins d'affirmer que la densité de points est plus faible à gauche qu'à droite sur la carte.

Remarquons aussi que l'ensemble des points ne suit pas une droite horizontale, mais une droite oblique. Ce fait est lié à la position des maxima de la distribution de $\Delta\omega$. Plutôt que d'être situés en zéro et 180 degrés, ils se placent en fait respectivement en -30 et 150 degrés. Ainsi, si le maximum global avait pour valeur $\Delta\omega = 0$ degré, son ordonnée dans la figure 5.5 serait nulle. Au lieu de cela, elle vaut $e_2 \sin(-30)$, et est donc négative. À l'opposé, $e_2 \sin(150)$ est positif. Le nuage de points relie ces deux extrêmes, ce qui lui confère une certaine inclinaison.

De l'ensemble de ces études menées, nous n'avons pas mentionné de temps de calcul. Ce dernier est assez court, ce qui confère un autre avantage à la méthode établie.

Afin d'obtenir le meilleur ajustement aux données de vitesses radiales en utilisant la plateforme DACE, seules quelques secondes suffisent. Ensuite, la génération des conditions initiales par l'algorithme de MCMC ne demande qu'une dizaine de minutes. Enfin, l'application du critère de stabilité à ces paramètres orbitaux initiaux nécessite un temps variable en fonction de divers paramètres tels le nombre de simulations à générer, la durée totale d'intégration de chacune d'entre elles ou encore le pas de temps utilisé. À titre indicatif, si le pas de temps est de quatre jours et si on génère environ 5 000 simulations dont chacune d'entre elles est intégrée sur 100 000 ans, le temps de calcul nécessaire s'élève aux alentours de six heures (en utilisant le schéma de calcul en parallèle), ce qui reste tout à fait raisonnable.

Conclusions

Dans ce travail, une tentative d'optimisation des études de stabilité a été menée. La méthode proposée consiste à allier une exploration efficace de l'espace des paramètres à l'application d'un critère de stabilité. En introduction, nous avons présenté le contexte dans lequel s'inscrit cette étude, soulignant tout l'intérêt d'apporter une optimisation dans ce domaine. Dans cette optique, un temps considérable fut d'abord consacré à la compréhension des outils nécessaires. En premier lieu, une analyse du problème à N corps a été effectuée. À cette occasion, nous avons abordé la notion d'intégrateurs symplectiques, assurant une fiabilité accrue via un contrôle de l'erreur introduite lors de l'intégration. Nous avons ensuite étudié la technique appelée analyse en fréquences. Cette dernière permet non seulement de comprendre le comportement d'un système mécanique en profondeur par le biais de ses différentes fréquences, mais elle est aussi à la base du critère de stabilité que nous avons utilisé. Nous avons notamment pu constater que l'analyse en fréquences nécessite des temps de calcul raisonnables. Enfin, nous avons consacré une partie de ce travail aux statistiques bayésiennes, qui constituent le formalisme à partir duquel l'algorithme de Monte-Carlo par chaînes de Markov est construit. Ce dernier fut illustré par un exemple, afin de saisir correctement ses avantages. Au terme de cette première partie, toutes les bases furent donc intégrées. Elles furent utilisées pour la deuxième partie, qui se consacre pleinement à l'objectif initialement fixé. Pour ce faire, de nouveaux instruments de travail furent apportés. Ces derniers ont donc été brièvement décrits, et à cette occasion nous avons pu confirmer le bon fonctionnement d'algorithmes précédemment établis. Le dernier chapitre présenta les résultats du couplage entre le MCMC pour l'exploration des paramètres initiaux et le critère de stabilité pour rejeter ceux qui sont improbables. Nous avons ainsi obtenu des résultats prometteurs. En effet, nous avons montré qu'il est possible d'une part, de réduire les fenêtres d'incertitude des différents éléments elliptiques, d'autre part, de recentrer ces fenêtres, et enfin, d'apporter une meilleure compréhension de la structure de l'espace des paramètres.

Les perspectives pour améliorer le travail réalisé se concentrent principalement sur le choix du critère de stabilité. L'analyse en fréquences est un outil adéquat, car comme déjà évoqué, son temps de calcul est raisonnable. Cependant, elle ne possède pas de critère idéal : ce dernier devrait être absolu et objectif. Pour ce travail, nous avons utilisé un seuil absolu (où la stabilité est inférée depuis une valeur de référence), mais subjectif (car fixé de manière arbitraire). Nous avons toutefois proposé une méthode permettant de disposer d'un critère objectif. Elle consisterait à rejeter ou accepter un certain jeu de conditions initiales avec un niveau de confiance. Les développements nécessaires à l'élaboration de cette technique concernent principalement l'établissement d'une loi temporelle pour la différence des fréquences $\Delta n(t)$. Par manque de temps, cette recherche n'a pu être pleinement exploitée. Néanmoins, des premières études furent réalisées et tendent vers une loi de puissance : $\Delta n(t) \propto t^x$. La valeur de l'exposant x reste encore floue (seuls deux tests d'un seul système planétaire, HD 60532, furent menés), mais semble comprise entre 0.5 et 2. Il serait important d'affiner cette estimation. Par ailleurs, la relation établie pour $\Delta n(t)$ demeure assez mystérieuse. Vraisemblablement, elle ne serait valable que pour des orbites chaotiques uniquement (les orbites régulières ne présentant pas d'évolution séculaire de la fréquence principale). Il serait intéressant de voir si cette loi est identique pour les différents systèmes planétaires.

Annexe

Raisonnement dans l'espace réel pour la figure 2.2

Tentons une explication de la figure 2.2 dans l'espace réel. Le comportement général est d'une grande complexité, et il faut élaborer des hypothèses simplificatrices afin d'entrevoir la dynamique de façon qualitative. Tout d'abord, dans ce système à trois corps (une étoile et deux planètes) dans la résonance 3 : 1, les deux planètes sont en conjonction dans la situation suivante : planète interne au périhélie, planète externe à l'aphélie et orbites à faibles excentricités e . L'imposition de ces contraintes est motivée par le souhait d'étudier une résonance stable. Les hypothèses sont alors déduites de l'article de Michtchenko et al. (2006), qui réalisa entre autres des analyses de la résonance 3 : 1. Définissons l'angle résonant du système comme $\sigma = 3\lambda_2 - \lambda_1 - \varpi_1$, et supposons par ailleurs que les précessions des périastres des planètes interne et externe sont nulles : $\dot{\varpi}_1 = 0 = \dot{\varpi}_2$. Dès lors, $\dot{\sigma} = 2n_2 - n_1$ (en effet, pour rappel $\lambda = M + \varpi$ et la fréquence principale de l'anomalie moyenne M est le moyen mouvement n). Afin d'illustrer le raisonnement ci-dessous, plusieurs schémas sont présentés (figure 6). Notons que les excentricités y sont accrues pour faciliter la représentation. La croix indique la position de l'étoile (supposée fixe) et les planètes orbitent cette dernière dans le sens trigonométrique.

Imaginons la situation initiale où les deux planètes sont en conjonction selon la ligne verte (figure 6a). Elle correspond à un angle résonant $\sigma = 0$, et illustre donc la résonance exacte. Sur un petit intervalle de temps Δt précédant cette situation, la planète interne a parcouru une plus grande portion de son orbite que l'externe. La configuration était alors telle que la planète externe engendrait une augmentation du moment cinétique de la planète interne. Cependant, après le même intervalle Δt suivant la condition initiale, la situation inverse apparaît : la position de la planète interne par rapport à l'externe est telle qu'elle subit une diminution de moment cinétique. Au vu de la direction de la ligne de conjonction vis à vis des orbites, la configuration est symétrique et le moment cinétique augmente autant qu'il diminue. Cette situation se réitère toutes les révolutions de la planète externe (ou toutes les trois révolutions de la planète interne). Les paramètres orbitaux ne tendent pas à être modifiés (de par la symétrie évoquée) et le système est stable dans cette configuration.

Considérons à présent le cas légèrement hors-résonance où la ligne de conjonction est la ligne rouge (figure 6b). Elle correspond à un angle résonant non nul. Avant d'arriver à cette situation, la planète interne a vu son moment cinétique augmenter, selon le même argument de géométrie qu'expliqué ci-dessus. Dans ce cas néanmoins, la configuration n'est ici plus symétrique. De fait, après la conjonction, la planète interne va rapidement s'éloigner de la planète externe à tel point que son influence disparaisse. La tendance globale est donc à l'augmentation du moment cinétique de la planète interne, impliquant une augmentation de sa période (car elle s'éloigne de l'étoile). Par action-réaction, l'effet opposé s'applique sur la planète externe. Ainsi, n_1 diminue et n_2 augmente par rapport à la situation de départ (où $\dot{\sigma}$ était nul), ayant pour conséquence $\dot{\sigma} > 0$. Un *mouvement de la ligne de conjonction* apparaît donc, et en direction de la ligne verte. Tant que la ligne de conjonction est sous la ligne verte, qu'on appellera ligne d'équilibre, $\dot{\sigma}$ est de plus en plus grand. De manière équivalente, $\ddot{\sigma} > 0$. De fait, d'alignement en alignement, l'augmentation du moment cinétique de la planète interne s'accumule. Ce mouvement de la ligne de conjonction perdure jusqu'à ce que $\sigma = 0$, à la ligne d'équilibre. Dans cette situation, un équilibre entre les deux orbites existe, s'exprimant par un manque de perturbation nette du moment cinétique. Cependant, étant donné que $\dot{\sigma}$ est non nul (et positif), la ligne de conjonction

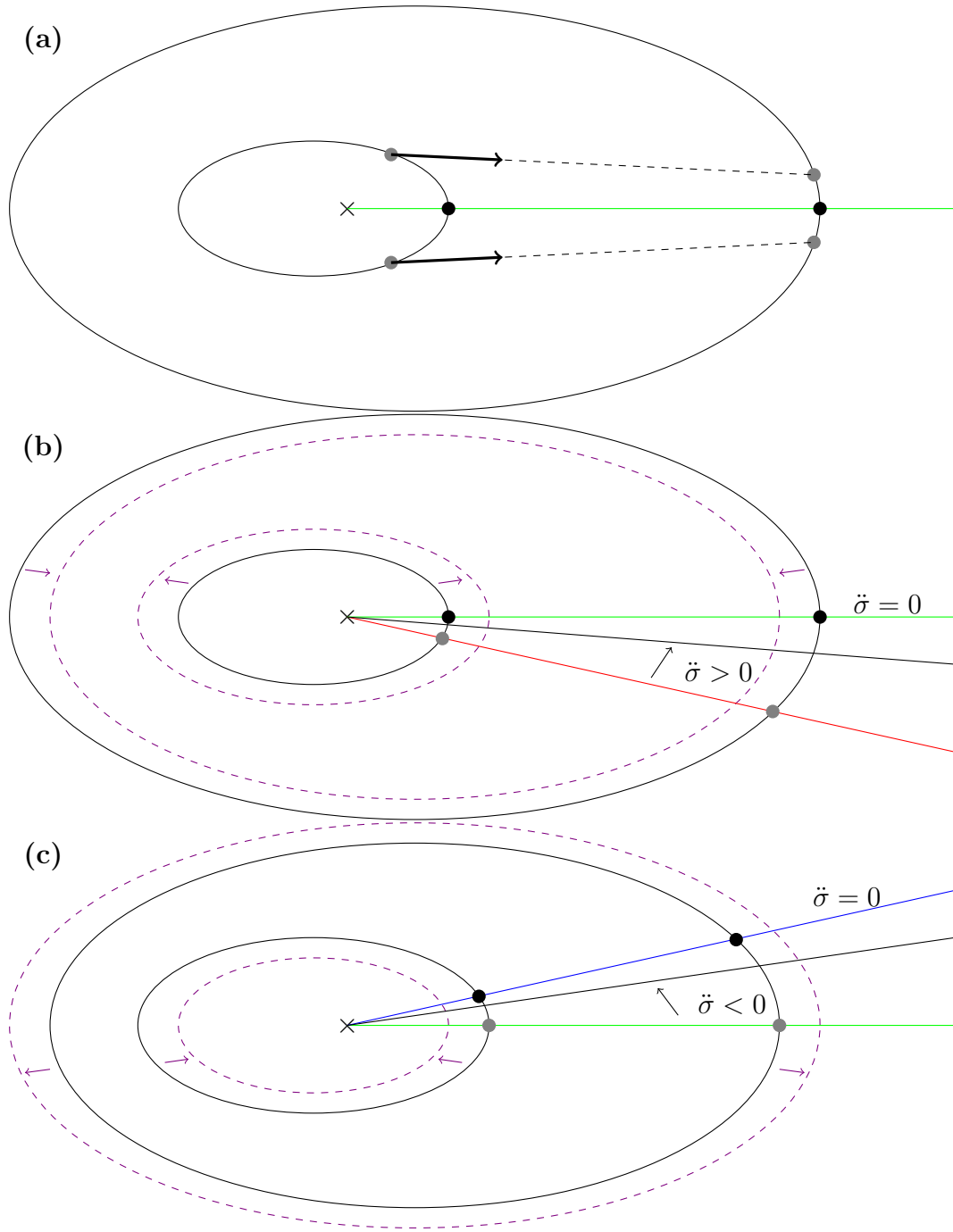


FIGURE 6 – Schémas illustrant de manière qualitative le mouvement de la ligne de conjonction, expliquant ainsi les structures retrouvées à la figure 2.2. Chaque dessin représente un moment clé dans l'évolution de cette ligne.

continue son mouvement. Il s'agit en quelque sorte d'une inertie ($\ddot{\sigma} = 0$).

Lorsque cette ligne passe au-dessus de la ligne d'équilibre, l'effet inverse prime (figure 6c). Par asymétrie entre deux intervalles de temps Δt , le moment cinétique de la planète interne tend à diminuer, ce qui rapproche ce corps de l'étoile. L'opposé est de mise concernant la planète externe. Dès lors, n_1 augmente tandis que n_2 diminue. En conséquence, $\dot{\sigma}$ diminue. Tant que la ligne de conjonction est au-dessus de la ligne d'équilibre, cet effet s'accumule et donc $\ddot{\sigma} < 0$. Ainsi, la ligne de conjonction est freinée. Son déplacement s'arrête pour une certaine valeur de σ . La ligne de conjonction associée est représentée en bleu. À ce moment, elle repart dans le sens opposé, puisque l'interaction entre les deux planètes donne toujours lieu à $\ddot{\sigma} < 0$. De la

sorte, la ligne de conjonction oscille entre les lignes rouge et bleue. L'angle séparant les lignes rouge et verte est de même amplitude que celui séparant les lignes verte et bleue. Dès lors, sur un nombre suffisamment grand de telles oscillations, l'angle résonant est de moyenne nulle. La fréquence associée, moyennée également, est donc nulle.

En conclusion, un mouvement de balancier s'installe pour la ligne de conjonction. En effet, pour une condition initiale dans l'espace des phases proche de l'origine des axes, nous obtenons dans l'espace réel une oscillation de l'angle résonant autour de zéro. Même dans l'espace réel, le comportement qualitatif est identique à celui du pendule plan (la masse du pendule, représentée par la ligne de conjonction, oscille entre deux valeurs opposées de l'angle résonant).

Si le rapport initial des périodes est trop éloigné d'un rapport d'entiers, les interactions globales entre les deux planètes sont faibles et elles ne s'influencent donc que très peu (il n'y a pas de conjonction régulière dans la même zone des orbites). Ainsi, si le demi-grand axe initial de la planète interne a_1 augmente, mais pas a_2 , alors P_1 va également augmenter : $P_1^2 \propto a_1^3$. Autrement dit, le mouvement moyen diminue également en suivant la troisième loi de Kepler : $n_1 \propto a_1^{-3/2}$. Dès lors, $\dot{\sigma}$ est non nul (et positif), mais comme il n'y a pas de perturbation globale entre les planètes, $\dot{\sigma}$ reste constant (pas d'accumulation, et donc $\ddot{\sigma} = 0$). On assiste ainsi à une *précession de la ligne de conjonction* (dans le sens trigonométrique). L'angle résonant circule avec une fréquence qui dépend de $\dot{\sigma}$. Si la valeur de a_1 augmente davantage initialement, P_1 augmente également et n_1 est plus petit. La dérivée de l'angle résonant, $\dot{\sigma}$, est donc plus grande dans les positifs. La précession de l'angle résonant est plus rapide. Notons que comme n_2 est fixé, $\dot{\sigma} = 2n_2 - n_1$ varie selon n_1 uniquement, c'est à dire en suivant la loi de Kepler reliant a_1 à n_1 . Ainsi, la fréquence principale de l'angle résonant, en-dehors de la résonance, est proportionnelle à $a_1^{-3/2}$. Remarquons finalement que si le demi-grand axe initial de la planète interne a_1 diminue (vis à vis de une unité astronomique), la situation inverse apparaît : $\dot{\sigma}$ augmente davantage dans les négatifs que a_1 diminue, ce qui implique une précession de l'angle résonant dans le sens horloger avec une fréquence qui évolue comme $a_1^{-3/2}$.

Bibliographie

- [1] Beaugé, C. & Michtchenko, T. A. 2003, Modelling the high-eccentricity planetary three-body problem. Application to the GJ876 planetary system, *MNRAS*, 341, 760
- [2] Beaugé, C., Michtchenko, T. A., & Ferraz-Mello, S. 2006, Planetary migration and extrasolar planets in the 2/1 mean-motion resonance, *MNRAS*, 365, 1160
- [3] Benettin, G., Galgani, L., Giorgilli, A., & Strelcyn, J.-M. 1980, Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1 : Theory, *Meccanica*, 9
- [4] Carter, J. A., Agol, E., Chaplin, W. J., et al. 2012, Kepler-36 : A Pair of Planets with Neighboring Orbits and Dissimilar Densities, *Science*, 337, 556
- [5] Chambers, J. E. 1999, A hybrid symplectic integrator that permits close encounters between massive bodies, *MNRAS*, 304, 793
- [6] Cincotta, P. M. & Simó, C. 2000, Simple tools to study global dynamics in non-axisymmetric galactic potentials - I, *A&AS*, 147, 205
- [7] Correia, A. C. M., Udry, S., Mayor, M., et al. 2009, The HARPS search for southern extra-solar planets. XVI. HD 45364, a pair of planets in a 3 :2 mean motion resonance, *A&A*, 496, 521
- [8] Correia, A. C. M., Udry, S., Mayor, M., et al. 2005, The CORALIE survey for southern extra-solar planets. XIII. A pair of planets around HD202206 or a circumbinary planet ?, *A&A*, 440, 751
- [9] Díaz, R. F., Almenara, J. M., Santerne, A., et al. 2014, PASTIS : Bayesian extrasolar planet validation - I. General framework, models, and performance, *MNRAS*, 441, 983
- [10] Díaz, R. F., Ségransan, D., Udry, S., et al. 2016, The HARPS search for southern extra-solar planets. XXXVIII. Bayesian re-analysis of three systems. New super-Earths, unconfirmed signals, and magnetic cycles, *A&A*, 585, A134
- [11] Dumusque, X., Udry, S., Lovis, C., Santos, N. C., & Monteiro, M. J. P. F. G. 2011, Planetary detection limits taking into account stellar noise. I. Observational strategies to reduce stellar oscillation and granulation effects, *A&A*, 525, A140
- [12] Fitzpatrick, P. M. 1970, *Principles of celestial mechanics* (New York (USA) : Academic Press)
- [13] Gill, J. 2002, *Bayesian Methods : A Social and Behavioral Sciences Approach* (Boca Raton, Florida (USA) : Chapman & Hall/CRC)
- [14] Gillon, M. année académique 2015-2016, université de Liège
- [15] Gregory, P. 2005, *Bayesian Logical Data Analysis for the Physical Sciences* (Cambridge (UK) : Cambridge University Press)
- [16] Grimm, S. L. & Stadel, J. G. 2014, The GENGA Code : Gravitational Encounters in N-body Simulations with GPU Acceleration, *ApJ*, 796, 23

- [17] Henon, M. & Heiles, C. 1964, The applicability of the third integral of motion : Some numerical experiments, *AJ*, 69, 73
- [18] Henrard, J. & Lemaître, A. 1983, A second fundamental model for resonance, *Celestial Mechanics*, 30, 197
- [19] Laskar, J. 1989, A numerical experiment on the chaotic behaviour of the solar system, *Nature*, 338, 237
- [20] Laskar, J. 1990, The chaotic motion of the solar system - A numerical estimate of the size of the chaotic zones, *Icarus*, 88, 266
- [21] Laskar, J. 1992, in *IAU Symposium*, Vol. 152, Chaos, Resonance, and Collective Dynamical Phenomena in the Solar System, ed. S. Ferraz-Mello, 1
- [22] Laskar, J. 1993, Frequency analysis for multi-dimensional systems. Global dynamics and diffusion, *Physica D*, 67, 257
- [23] Laskar, J. 1996, Large Scale Chaos and Marginal Stability in the Solar System, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 64, 115
- [24] Laskar, J. 2003, Frequency map analysis and quasiperiodic decompositions, *ArXiv Mathematics e-prints*
- [25] Lee, M. H., Butler, R. P., Fischer, D. A., Marcy, G. W., & Vogt, S. S. 2006, On the 2 :1 Orbital Resonance in the HD 82943 Planetary System, *ApJ*, 641, 1178
- [26] Mayor, M. & Queloz, D. 1995, A Jupiter-mass companion to a solar-type star, *Nature*, 378, 355
- [27] Mayor, M., Udry, S., Naef, D., et al. 2004, The CORALIE survey for southern extra-solar planets. XII. Orbital solutions for 16 extra-solar planets discovered with CORALIE, *A&A*, 415, 391
- [28] McLachlan, R. & Atela, P. 1992, The accuracy of symplectic integrators, *Nonlinearity*, 541
- [29] Michtchenko, T. A., Beaugé, C., & Ferraz-Mello, S. 2006, Stationary Orbits in Resonant Extrasolar Planetary Systems, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 94, 411
- [30] Michtchenko, T. A. & Ferraz-Mello, S. 2001, Resonant Structure of the Outer Solar System in the Neighborhood of the Planets, *AJ*, 122, 474
- [31] Morbidelli, A. 2011, *Modern Celestial Mechanics : Aspects of Solar System Dynamics*
- [32] Murray, C. D. & Dermott, S. F. 1999, *Solar System Dynamics* (Cambridge (UK) : Cambridge University Press)
- [33] Perryman, M. 2011, *The Exoplanet Handbook* (Cambridge (UK) : Cambridge University Press)
- [34] Raw, G. année académique 2015-2016, université de Liège
- [35] Ruth, R. 1983, A canonical integration technique, *IEEE*, NS-30, 2669
- [36] Seager, S. 2010, *Exoplanets* (Tucson, Arizona (USA) : The University of Arizona Press)
- [37] Surdej, J. année académique 2014-2015, université de Liège

- [38] Wilkinson, B. & Allen, M. 2005, *Parallel programming : Techniques and applications using networked workstations and parallel computers*, 2nd edn. (New Jersey (USA) : Pearson Prentice Hall)
- [39] Wisdom, J. 1980, The resonance overlap criterion and the onset of stochastic behavior in the restricted three-body problem, *AJ*, 85, 1122
- [40] Wolszczan, A. & Frail, D. A. 1992, A planetary system around the millisecond pulsar PSR1257 + 12, *Nature*, 355, 145
- [41] Yoshida, H. 1993, Recent Progress in the Theory and Application of Symplectic Integrators, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 56, 27