

## Détermination de charges statiques équivalentes en prenant en compte le comportement aéroélastique pour ponts de grande portée

**Auteur :** Krauth, Baptiste

**Promoteur(s) :** Denoël, Vincent

**Faculté :** Faculté des Sciences appliquées

**Diplôme :** Master en ingénieur civil des constructions, à finalité spécialisée en "civil engineering"

**Année académique :** 2025-2026

**URI/URL :** <http://hdl.handle.net/2268.2/26119>

---

### Avertissement à l'attention des usagers :

*Tous les documents placés en accès ouvert sur le site le site MatheO sont protégés par le droit d'auteur. Conformément aux principes énoncés par la "Budapest Open Access Initiative"(BOAI, 2002), l'utilisateur du site peut lire, télécharger, copier, transmettre, imprimer, chercher ou faire un lien vers le texte intégral de ces documents, les disséquer pour les indexer, s'en servir de données pour un logiciel, ou s'en servir à toute autre fin légale (ou prévue par la réglementation relative au droit d'auteur). Toute utilisation du document à des fins commerciales est strictement interdite.*

*Par ailleurs, l'utilisateur s'engage à respecter les droits moraux de l'auteur, principalement le droit à l'intégrité de l'oeuvre et le droit de paternité et ce dans toute utilisation que l'utilisateur entreprend. Ainsi, à titre d'exemple, lorsqu'il reproduira un document par extrait ou dans son intégralité, l'utilisateur citera de manière complète les sources telles que mentionnées ci-dessus. Toute utilisation non explicitement autorisée ci-avant (telle que par exemple, la modification du document ou son résumé) nécessite l'autorisation préalable et expresse des auteurs ou de leurs ayants droit.*

---

MASTER EN INGÉNIEUR CIVIL DES CONSTRUCTIONS  
FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES

---

# Détermination de charges statiques équivalentes en prenant en compte le comportement aéroélastique pour ponts de grande portée

*Du calcul dynamique au livrable de bureau d'études : application au Humber Bridge*

---

TRAVAIL DE FIN D'ÉTUDES

présenté en vue de l'obtention du grade de  
Master en Ingénieur Civil des Constructions

*Auteur :*

**Baptiste KRAUTH**

*Promoteur :*

**Vincent DENOËL**

*Membres du jury :*

L. SALLES — V. DE VILLE DE GOYET

# Remerciements

Quel plaisir de pouvoir, le temps de quelques lignes, retrouver un langage plus familier, avec des mots autres que quasi-stationnaire, instationnaire, PSWL, coefficients de reconstruction et autres termes qui ont rythmé ces derniers mois. Ces lignes sont les dernières que j'écris dans ce travail. Elles marquent la fin de quatre mois passés à chercher, comprendre, calculer, corriger, parfois recommencer, mais toujours avec l'envie d'aller jusqu'au bout. Elles marquent aussi la fin d'un chapitre bien plus long, celui de mes études supérieures. Avant de laisser le lecteur entrer dans le cœur technique de ce mémoire, je souhaite prendre un instant pour regarder en arrière et remercier celles et ceux qui, chacun à leur manière, ont rendu ce parcours possible.

Je tiens tout d'abord à remercier l'ensemble des enseignants que j'ai rencontrés au cours de mon parcours académique. De l'école communale de La Calamine, en passant par le Collège Notre-Dame de Gemmenich, jusqu'à l'Université de Liège, chacun a laissé une trace à sa manière.

J'adresse ensuite mes plus sincères remerciements à mon promoteur académique, Monsieur le Professeur Vincent Denoël. Je le remercie pour la confiance qu'il m'a accordée tout au long de ce travail. Sa disponibilité, ses explications et ses nombreux conseils m'ont été d'une aide précieuse, en particulier dans les moments où certaines notions semblaient encore difficiles à saisir. Son expertise, sa rigueur scientifique et sa manière de guider la réflexion ont largement contribué à l'aboutissement de ce mémoire. La réalisation de ce travail, dans sa forme actuelle, n'aurait évidemment pas été possible sans son accompagnement.

Mes remerciements vont également au bureau Greisch, pour m'avoir permis d'utiliser le logiciel de calcul FINELG dans le cadre de ce mémoire. Je souhaite en particulier remercier Thibaud Bastin pour le temps qu'il m'a accordé, pour sa disponibilité, ses explications et ses conseils judicieux, notamment concernant l'utilisation du logiciel. Son aide m'a permis d'avancer plus sereinement dans une partie importante de ce travail.

Je tiens également à remercier les membres de mon jury, Monsieur le Professeur Vincent de Ville de Goyet et Monsieur le Professeur Loïc Salles, pour le temps consacré à la lecture et à l'évaluation de ce mémoire.

Je souhaite aussi remercier Jan et Damien, avec qui j'ai partagé un bureau pendant la réalisation de ce TFE. Les pauses, les discussions, les moments de doute et les moments de rigolade ont rendu cette période beaucoup plus agréable. Merci en particulier à toi, Jan. Après les années secondaires passées ensemble, l'examen d'entrée, puis ces cinq années d'études supérieures, il est difficile de ne pas mesurer le chemin parcouru. Entre les trajets en covoiturage, les projets réalisés ensemble et toutes ces heures passées à travailler côte à côte, autant dire que je t'ai presque plus côtoyé que ma propre famille. Je te souhaite sincèrement le meilleur pour la suite.

Je tiens maintenant à remercier mes proches, pour qui tout le charabia technique qui suit n'aura certainement pas toujours beaucoup de sens, et qui se limiteront peut-être à la lecture de ces remerciements. Leur soutien n'en a pourtant pas moins compté. Un mémoire ne se construit pas uniquement avec des équations, des graphiques et des lignes de code. Il se construit aussi grâce à ce qui permet de respirer un peu en dehors du travail. Les discussions, les encouragements, les moments de détente, les rires, les verres partagés et les instants simples ont contribué à maintenir un équilibre précieux. Merci à mes amis et à mes proches pour tout cela, pour leur présence et pour leur manière, parfois très simple, de rendre les périodes chargées beaucoup plus légères.

Mes pensées se tournent naturellement vers ma famille, et en particulier vers mes parents. Leur soutien sans faille, depuis toujours, a été indispensable. Ils m'ont offert la liberté de faire mes propres choix, tout en restant présents avec des conseils bienveillants lorsque j'en avais besoin. Cette confiance,

cette présence discrète mais constante, et cette manière de m'accompagner sans jamais m'imposer un chemin, font partie des plus beaux cadeaux que l'on puisse recevoir. Merci aussi à mon petit frère, Ludovic, pour sa présence à sa manière dans ce parcours qui dépasse largement les murs de l'université.

Enfin, je tiens à remercier ma petite amie, Anaïs. En écrivant ces lignes, je repense à nous, il y a sept ans, encore en secondaire, sans vraiment savoir ce que la suite nous réservait. Aujourd'hui, te voilà lancée comme indépendante, et moi à l'aube de devenir ce pour quoi j'ai beaucoup travaillé ces cinq dernières années : ingénieur. Merci pour ton soutien, pour ta patience, pour les voyages déjà vécus et pour ceux qui viendront. Je suis fier de toi, de ce que tu construis, et j'ai hâte d'entamer ce nouveau chapitre à tes côtés.

Cher lecteur, ces remerciements referment pour moi plusieurs mois de travail, mais ils ouvrent pour vous les pages qui suivent. Je vous remercie de prendre le temps de lire ce mémoire. Je m'efface maintenant et vous laisse avec le Baptiste de ces derniers mois, celui qui a beaucoup cherché, beaucoup appris, parfois douté, souvent recommencé, et qui a encore quelques petites choses à vous raconter.

# Résumé

Le dimensionnement des ponts suspendus de grande portée repose sur des analyses dynamiques aéroélastiques dont les résultats — densités spectrales, écarts-types, matrices de covariance — ne s'intègrent pas directement dans les outils usuels de dimensionnement. Ce travail comble cet écart en condensant les résultats de l'analyse couplée sous la forme d'un livrable statique directement exploitable par un bureau d'études.

La réponse stochastique aéroélastique du tablier est calculée sur une gamme de vitesses de vent allant jusqu'au voisinage de la vitesse critique de flottement, pour deux modèles aérodynamiques : quasi-stationnaire et instationnaire avec mémoire aérodynamique. Pour chaque vitesse et chaque réponse cible — déplacements  $y$ ,  $z$ ,  $\theta$  et efforts internes de dimensionnement —, une charge statique équivalente (ESWL) est construite par la méthode LRC-MIL, combinant contribution de background et contribution résonante.

Les ESWL sont ensuite agrégées puis comprimées par décomposition en valeurs singulières en une base réduite de charges statiques principales (PSWL), commune aux différentes vitesses et réponses. Leurs combinaisons sont calibrées sous contrainte d'un dépassement nul ou légèrement contrôlé des enveloppes cibles, afin de reconstruire les réponses extrêmes avec un taux minimal de 95 %. La méthode est appliquée au Humber Bridge, modélisé dans FINELG et validé sur les mesures modales de Brownjohn ; la vitesse critique  $U_{cr} \simeq 68$  m/s est confirmée par une analyse de continuation indépendante.

Le livrable associe un noyau fixe — vitesse critique et base ordonnée de PSWL — à une couche paramétrable : un abaque et des tables de coefficients explicitant le compromis entre compacité, conservatisme et nombre de combinaisons. L'ingénieur structure peut ainsi appliquer ces distributions comme des cas de charge usuels, sans conduire d'analyse aéroélastique complète. Le modèle instationnaire est finalement retenu, car il identifie correctement la vitesse critique et capture l'amplification des réponses près du flottement, sans alourdir le livrable final.

# Abstract

The design of long-span suspension bridges relies on aeroelastic dynamic analyses whose results — power spectral densities, standard deviations and covariance matrices — cannot be directly integrated into usual design tools. This work bridges that gap by condensing the results of the coupled analysis into a static deliverable directly usable by a design office.

The stochastic aeroelastic response of the deck is computed over a range of wind speeds extending to the vicinity of the critical flutter speed, using two aerodynamic models : a quasi-steady model and an unsteady model accounting for aerodynamic memory. For each wind speed and each target response — displacements  $y$ ,  $z$ ,  $\theta$  and design internal forces —, an equivalent static wind load (ESWL) is built using the LRC-MIL method, combining background and resonant contributions.

The ESWL are then aggregated and compressed by singular value decomposition into a reduced basis of principal static wind loads (PSWL), shared across the different wind speeds and responses. Their combinations are calibrated under a zero or slightly controlled overshoot constraint on the target envelopes, in order to reconstruct the extreme responses with a minimum rate of 95 %. The method is applied to the Humber Bridge, modelled in FINELG and validated against Brownjohn's modal measurements ; the critical flutter speed  $U_{cr} \simeq 68$  m/s is confirmed by an independent continuation analysis.

The deliverable combines a fixed core — critical speed and ordered PSWL basis — with a parametric layer : a design chart and coefficient tables making explicit the trade-off between compactness, conservatism and number of combinations. The structural engineer can then apply these distributions as ordinary load cases, without performing a full aeroelastic analysis. The unsteady model is ultimately retained, since it correctly identifies the critical speed and captures the response amplification near flutter, without increasing the size of the final deliverable.

# Notations

## Glossaire

|                              |  |                                                                                                                                                                                                            |
|------------------------------|--|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Réponse cible</b>         |  | Grandeur dont on cherche à reconstruire l'enveloppe. Dans ce travail, il peut s'agir d'un déplacement du tablier, d'une rotation, d'un effort interne ou d'un effort dans le système de suspension.        |
| <b>Enveloppe</b>             |  | Ensemble des valeurs extrêmes d'une réponse le long de la structure. On distingue l'enveloppe issue de l'analyse dynamique et l'enveloppe reconstruite par charges statiques équivalentes.                 |
| <b>Buffeting</b>             |  | Excitation aérodynamique fluctuante induite par la turbulence incidente. Elle est considérée comme une excitation externe aléatoire appliquée au tablier.                                                  |
| <b>Forces self-excited</b>   |  | Forces aérodynamiques induites par le mouvement du tablier. Elles traduisent le couplage fluide-structure et modifient la raideur et l'amortissement effectifs du système.                                 |
| <b>Mémoire aérodynamique</b> |  | Dépendance fréquentielle des efforts aérodynamiques. Elle traduit le fait que les forces ne dépendent pas uniquement de l'état instantané du tablier et du vent, mais aussi de l'histoire de l'écoulement. |
| <b>Flottement</b>            |  | Instabilité aéroélastique auto-entretenu apparaissant au-delà d'une vitesse critique, lorsque le couplage entre aérodynamique, inertie et élasticité conduit à une perte de stabilité.                     |
| <b>ESWL</b>                  |  | <i>Equivalent Static Wind Load</i> . Charge statique équivalente construite pour reproduire une réponse extrême issue de l'analyse dynamique.                                                              |
| <b>PSWL</b>                  |  | <i>Principal Static Wind Load</i> . Charge statique principale obtenue par compression d'un paquet d'ESWL. Les PSWL forment une base réduite de distributions spatiales.                                   |
| <b>Reconstruction</b>        |  | Procédure consistant à combiner des charges statiques équivalentes afin de reproduire, avec une précision fixée, une enveloppe issue de l'analyse dynamique.                                               |
| <b>Overshoot</b>             |  | Dépassement local de l'enveloppe cible par l'enveloppe reconstruite. Une tolérance d'overshoot peut être admise lors de la calibration des coefficients.                                                   |

**Vent, turbulence et aérodynamique****Grandeurs générales**

|          |                                   |
|----------|-----------------------------------|
| $t$      | temps                             |
| $f$      | fréquence en Hz                   |
| $\omega$ | pulsation, avec $\omega = 2\pi f$ |
| $U$      | vitesse moyenne du vent           |
| $U_{cr}$ | vitesse critique de flottement    |
| $\rho$   | masse volumique de l'air          |
| $B$      | largeur de référence du tablier   |
| $Re$     | nombre de Reynolds                |
| $i$      | angle d'incidence du vent         |

**Turbulence**

|                                |                                                  |
|--------------------------------|--------------------------------------------------|
| $u$                            | fluctuation longitudinale du vent                |
| $v$                            | fluctuation transversale du vent                 |
| $w$                            | fluctuation verticale du vent                    |
| $\sigma_u, \sigma_v, \sigma_w$ | écarts-types des fluctuations turbulentes        |
| $I_u$                          | intensité de turbulence longitudinale            |
| $L_u, L_v, L_w$                | échelles intégrales de turbulence                |
| $S_u, S_v, S_w$                | densités spectrales des fluctuations turbulentes |
| $\Lambda_{ii}$                 | fonction de cohérence spatiale de la turbulence  |
| $\Delta x, \Delta z$           | distances spatiales entre deux points du tablier |
| $C_{ix}, C_{iz}$               | coefficients de décroissance de cohérence        |

**Aérodynamique**

|                       |                                                                    |
|-----------------------|--------------------------------------------------------------------|
| $F_D$                 | effort de traînée par unité de longueur                            |
| $F_L$                 | effort de portance par unité de longueur                           |
| $F_M$                 | moment aérodynamique de tangage par unité de longueur              |
| $C_D$                 | coefficient de traînée                                             |
| $C_L$                 | coefficient de portance                                            |
| $C_M$                 | coefficient de moment                                              |
| $C'_D, C'_L, C'_M$    | dérivées des coefficients aérodynamiques par rapport à l'incidence |
| $\bar{\mathbf{f}}$    | composante moyenne des forces aérodynamiques                       |
| $\mathbf{f}_{bu}$     | composante de buffeting                                            |
| $\mathbf{f}_{se}$     | composante <i>self-excited</i>                                     |
| $H_i^*, P_i^*, A_i^*$ | dérivées de flottement de Scanlan                                  |
| $\chi$                | admittance aérodynamique associée aux forces de buffeting          |

**Structure, réponses et analyse fréquentielle****Structure et base modale**

|                        |                                        |
|------------------------|----------------------------------------|
| $\mathbf{M}$           | matrice de masse                       |
| $\mathbf{C}$           | matrice d'amortissement                |
| $\mathbf{K}$           | matrice de raideur                     |
| $\mathbf{A}$           | matrice de flexibilité statique        |
| $\mathbf{x}(t)$        | vecteur des déplacements nodaux        |
| $\dot{\mathbf{x}}(t)$  | vecteur des vitesses nodales           |
| $\ddot{\mathbf{x}}(t)$ | vecteur des accélérations nodales      |
| $\mathbf{f}(t)$        | vecteur des forces appliquées          |
| $\Phi$                 | matrice des formes modales             |
| $\phi_j$               | forme modale du mode $j$               |
| $\omega_j$             | pulsation propre du mode $j$           |
| $\xi_j$                | taux d'amortissement modal du mode $j$ |
| $q_j$                  | coordonnée modale du mode $j$          |

**Réponses considérées**

|                     |                                           |
|---------------------|-------------------------------------------|
| $y$                 | déplacement latéral du tablier            |
| $z$                 | déplacement vertical du tablier           |
| $\theta$            | rotation de torsion du tablier            |
| $M_y$               | moment de flexion selon l'axe $y$         |
| $M_t$               | moment de torsion de Saint-Venant         |
| $N$                 | effort normal dans le tablier             |
| $N_{\text{cable}}$  | effort normal dans le câble principal     |
| $N_{\text{susp}}$   | effort normal dans les suspentes          |
| $\eta$              | réponse cible générique                   |
| $\eta_{\text{dyn}}$ | enveloppe cible issue du calcul dynamique |
| $\eta_{\text{rec}}$ | enveloppe reconstruite statiquement       |

**Analyse fréquentielle stochastique**

|                                    |                                                                   |
|------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| $\mathbf{S}_{uu}$                  | matrice spectrale du champ turbulent discrétisé                   |
| $\mathbf{S}_{FF}$                  | matrice spectrale des forces aérodynamiques appliquées au tablier |
| $\mathbf{S}_{Q^*Q^*}$              | matrice spectrale des coordonnées modales                         |
| $\mathbf{S}_{\eta\eta}$            | matrice spectrale des réponses physiques du tablier               |
| $S_{yy}, S_{zz}, S_{\theta\theta}$ | auto-spectres des réponses $y$ , $z$ et $\theta$                  |
| $\mathbf{H}^*(\omega)$             | matrice de réponse fréquentielle aéroélastique                    |
| $\mathbf{G}_{\text{se}}$           | matrice aéroélastique généralisée                                 |
| $\Sigma_{FF}$                      | covariance des forces aérodynamiques                              |
| $\Sigma_{Q^*Q^*}$                  | covariance des réponses modales                                   |
| $\sigma_{q_j}$                     | écart-type de la coordonnée modale $q_j$                          |
| $\sigma_{\eta}$                    | écart-type de la réponse cible $\eta$                             |
| $g$                                | facteur de pointe utilisé pour estimer les valeurs extrêmes       |

**ESWL, PSWL et calibration****Charges statiques équivalentes**

|                    |                                                                                                 |
|--------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\mathbf{f}_E$     | charge statique équivalente                                                                     |
| $\mathbf{f}_{E,B}$ | contribution de fond de l'ESWL, issue de la méthode LRC                                         |
| $\mathbf{f}_{E,R}$ | contribution résonante de l'ESWL, issue des charges inertielles modales                         |
| $\mathbf{F}_E$     | paquet d'ESWL rassemblant les charges construites pour plusieurs réponses et plusieurs vitesses |
| $\mathbf{F}_P$     | matrice des PSWL retenues après compression du paquet d'ESWL                                    |
| $n_P$              | nombre de PSWL conservées dans le livrable final                                                |

**Décomposition en valeurs singulières**

|                   |                                                             |
|-------------------|-------------------------------------------------------------|
| $\mathbf{U}$      | matrice des vecteurs singuliers gauches                     |
| $\mathbf{\Sigma}$ | matrice diagonale des valeurs singulières                   |
| $\mathbf{V}$      | matrice des vecteurs singuliers droits                      |
| $\sigma_i$        | $i$ -ème valeur singulière                                  |
| $E_{\text{cum}}$  | énergie cumulée associée aux valeurs singulières conservées |

**Reconstruction et calibration**

|                             |                                                                                           |
|-----------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\mathbf{v}$                | vecteur des coefficients de combinaison des PSWL                                          |
| $\tau_\eta$                 | taux de reconstruction de l'enveloppe pour une réponse $\eta$                             |
| $\tau_{\text{min}}$         | taux de reconstruction minimal sur une réponse, une vitesse ou un ensemble de cas étudiés |
| $\tau_{\text{mean}}$        | taux de reconstruction moyen                                                              |
| $U_{\text{worst}}$          | vitesse pour laquelle le taux de reconstruction est le plus défavorable                   |
| $\varepsilon_{\text{over}}$ | tolérance d'overshoot autorisée lors de la calibration                                    |
| $n_{\text{charges}}$        | nombre de combinaisons statiques utilisées pour reconstruire une enveloppe                |
| $n_P^{\text{max}}$          | nombre maximal de PSWL autorisé pour conserver un livrable exploitable en bureau d'études |

# Table des matières

Remerciements

Notations

Introduction 1

I État de l'art : du vent turbulent à la charge statique équivalente 3

Introduction de l'état de l'art 4

1 Vent turbulent et action sur un tablier élancé 5

1.1 Cadre général : équation du mouvement et nature du problème . . . . . 5

1.2 Caractéristiques du vent et formulation spectrale . . . . . 5

1.2.1 Composante moyenne . . . . . 6

1.2.2 Caractérisation de la turbulence . . . . . 6

1.3 Coefficients aérodynamiques statiques . . . . . 7

1.4 Modèle quasi-stationnaire . . . . . 7

1.4.1 Hypothèse quasi-stationnaire et domaine de validité . . . . . 7

1.4.2 Expression des forces aérodynamiques . . . . . 8

1.4.3 Linéarisation des forces aérodynamiques . . . . . 9

1.5 Modèle avec mémoire aérodynamique . . . . . 10

1.5.1 Limites du modèle quasi-stationnaire . . . . . 10

1.5.2 La convolution comme modèle général . . . . . 10

1.5.3 Passage au domaine fréquentiel . . . . . 11

1.5.4 Expression des forces self-excited dans le formalisme de Scanlan . . . . . 11

1.5.5 Cas analytique de référence : théorie des profils minces . . . . . 12

1.5.6 Composante de buffeting : admittances aérodynamiques . . . . . 12

2 Formulation aéroélastique et réponse stochastique 14

2.1 Équation du mouvement dans le domaine fréquentiel . . . . . 14

2.2 Projection en base modale . . . . . 14

2.3 Matrice de réponse fréquentielle aéroélastique . . . . . 15

2.4 Stabilité aéroélastique et flottement . . . . . 15

2.4.1 Mécanisme physique . . . . . 15

2.4.2 Formulation du problème de stabilité . . . . . 15

2.4.3 Difficulté : la dépendance fréquentielle implicite . . . . . 16

2.4.4 Importance pour le présent travail . . . . . 16

2.5 Réponse stochastique sous vent turbulent . . . . . 16

2.5.1 Spectres turbulents et cohérence spatiale . . . . . 17

2.5.2 Spectre des forces de buffeting . . . . . 17

2.5.3 Spectre des sollicitations modales . . . . . 18

2.5.4 Spectre de réponse modale et nodale . . . . . 18

2.5.5 Séparation background-résonant . . . . . 18

2.5.6 Intégration fréquentielle et grandeurs statistiques . . . . . 19

3 Charges statiques équivalentes ESWL 20

3.1 Principe : du chargement dynamique à la charge statique équivalente . . . . . 20

3.2 Méthodes historiques . . . . . 21

3.2.1 Facteur de réponse aux rafales (GRF) . . . . . 21

3.2.2 Corrélation de Réponse aux Charges (LRC) . . . . . 22

3.2.3 Charges Inertielles Modales (MIL) . . . . . 23

|            |                                                                           |           |
|------------|---------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 3.3        | Combinaison des méthodes MIL–LRC . . . . .                                | 25        |
| 3.4        | Limites des ESWL individuelles . . . . .                                  | 26        |
| <b>4</b>   | <b>Charges statiques principales (PSWL)</b>                               | <b>27</b> |
| 4.1        | Motivation : du singulier au pluriel . . . . .                            | 27        |
| 4.2        | Définition géométrique : forme et amplitude . . . . .                     | 27        |
| 4.2.1      | Troncature et complexité aérodynamique-structurale . . . . .              | 28        |
| 4.2.2      | Reconstruction de l’enveloppe à partir des PSWL . . . . .                 | 28        |
| <b>II</b>  | <b>Cas d’étude et modèle : le Humber Bridge</b>                           | <b>30</b> |
| <b>5</b>   | <b>Présentation du Humber Bridge</b>                                      | <b>31</b> |
| 5.1        | Description générale et ordres de grandeur . . . . .                      | 31        |
| 5.2        | Pertinence du cas d’étude . . . . .                                       | 31        |
| <b>6</b>   | <b>Modèle éléments finis du Humber</b>                                    | <b>33</b> |
| 6.1        | Source des paramètres physiques . . . . .                                 | 33        |
| 6.2        | Stratégie de modélisation . . . . .                                       | 33        |
| 6.2.1      | Outil de modélisation . . . . .                                           | 33        |
| 6.2.2      | Hypothèses générales . . . . .                                            | 34        |
| 6.2.3      | Dimensionnement des suspentes . . . . .                                   | 36        |
| 6.2.4      | Vérification de la déformée sous poids propre . . . . .                   | 36        |
| 6.3        | Analyse modale . . . . .                                                  | 37        |
| 6.3.1      | Comparaison des formes modales . . . . .                                  | 38        |
| 6.3.2      | Discussion . . . . .                                                      | 39        |
| <b>7</b>   | <b>Modèle Python d’analyse aéroélastique stochastique</b>                 | <b>41</b> |
| 7.1        | Objectifs du modèle Python . . . . .                                      | 41        |
| 7.1.1      | Données issues de FINELG . . . . .                                        | 41        |
| 7.1.2      | Caractéristiques de vent . . . . .                                        | 42        |
| 7.1.3      | Coefficients aérodynamiques statiques et dérivées de flottement . . . . . | 42        |
| 7.1.4      | Incidence du vent . . . . .                                               | 42        |
| 7.1.5      | Paramètres numériques . . . . .                                           | 42        |
| 7.1.6      | Matrices modales structurales . . . . .                                   | 43        |
| 7.1.7      | Discrétisation du tablier et application des forces de vent . . . . .     | 43        |
| 7.2        | Validation par comparaison d’une analyse spectrale avec FINELG . . . . .  | 43        |
| <b>8</b>   | <b>Vitesse critique de flottement</b>                                     | <b>47</b> |
| 8.1        | Détection du flottement par divergence des écarts-types . . . . .         | 47        |
| 8.2        | Analyse de stabilité avec FINELG . . . . .                                | 48        |
| 8.3        | Vérification indépendante par continuation arc-length . . . . .           | 52        |
| 8.3.1      | Principe et rôle dans ce travail . . . . .                                | 52        |
| 8.3.2      | Adaptation au modèle Humber . . . . .                                     | 52        |
| 8.3.3      | Résultats . . . . .                                                       | 52        |
| 8.4        | Conclusion concernant la vitesse critique . . . . .                       | 55        |
| <b>III</b> | <b>Construction des ESWL aéroélastiques</b>                               | <b>56</b> |
| <b>9</b>   | <b>Adaptation de la méthode LRC–MIL au cadre aéroélastique</b>            | <b>57</b> |
| 9.1        | Pourquoi retenir la méthode LRC–MIL . . . . .                             | 57        |
| 9.2        | Matrices de masse et de flexibilité . . . . .                             | 57        |
| 9.2.1      | Matrice de masse . . . . .                                                | 58        |
| 9.2.2      | Matrice de flexibilité statique . . . . .                                 | 58        |

|                                                                                                         |               |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| <b>10 Reconstruction de l'enveloppe par charges statiques équivalentes</b>                              | <b>59</b>     |
| 10.1 Mesure de la qualité de reconstruction . . . . .                                                   | 59            |
| 10.2 Validation de la reconstruction à faible vitesse . . . . .                                         | 59            |
| 10.3 Validation de la reconstruction au voisinage de la vitesse critique . . . . .                      | 62            |
| 10.4 Reconstruction sur un intervalle de vitesses : stratégie de rescaling . . . . .                    | 63            |
| 10.4.1 Application au déplacement vertical . . . . .                                                    | 64            |
| 10.4.2 Application à la rotation . . . . .                                                              | 65            |
| 10.5 Conclusion et limites de l'approche ESWL . . . . .                                                 | 68            |
| <br><b>IV Du paquet d'ESWL au livrable PSWL</b>                                                         | <br><b>70</b> |
| <b>11 Construction de la base PSWL</b>                                                                  | <b>71</b>     |
| 11.1 Intérêt des PSWL . . . . .                                                                         | 71            |
| 11.1.1 Limite pratique des ESWL individuelles . . . . .                                                 | 71            |
| 11.1.2 Redondance des ESWL . . . . .                                                                    | 71            |
| 11.1.3 Objectif du livrable : formes fixes et coefficients variables . . . . .                          | 72            |
| 11.2 Construction du paquet d'ESWL . . . . .                                                            | 73            |
| 11.2.1 Réponses cibles considérées . . . . .                                                            | 73            |
| 11.2.2 Boucle sur les réponses et les vitesses . . . . .                                                | 73            |
| 11.3 Décomposition en valeurs singulières . . . . .                                                     | 74            |
| 11.3.1 Définition de la SVD . . . . .                                                                   | 74            |
| 11.3.2 Interprétation des PSWL . . . . .                                                                | 74            |
| 11.3.3 Troncature et énergie cumulée . . . . .                                                          | 75            |
| <b>12 Calibration de la table des coefficients</b>                                                      | <b>78</b>     |
| 12.1 Objectifs de la calibration des coefficients . . . . .                                             | 78            |
| 12.2 Problème d'optimisation . . . . .                                                                  | 78            |
| 12.2.1 Formulation du problème d'optimisation et contrainte de non-dépassement de l'enveloppe . . . . . | 78            |
| 12.2.2 Résolution numérique . . . . .                                                                   | 79            |
| 12.3 Choix du nombre final de PSWL . . . . .                                                            | 79            |
| 12.3.1 Reconstruction de l'enveloppe avec les valeurs issues de la troncature énergétique . . . . .     | 79            |
| 12.3.2 Choix du nombre de PSWL retenu . . . . .                                                         | 83            |
| 12.3.3 Augmentation de la tolérance sur l'overshoot pour le modèle avec mémoire . . . . .               | 85            |
| <b>13 Synthèse de la calibration sur les déplacements</b>                                               | <b>87</b>     |
| <br><b>V Le livrable final et son extension aux réponses de dimensionnement</b>                         | <br><b>89</b> |
| <b>14 Extension aux efforts internes du tablier et aux efforts dans les câbles</b>                      | <b>90</b>     |
| 14.1 Motivation : des déplacements aux grandeurs de dimensionnement . . . . .                           | 90            |
| 14.2 Matrice de flexibilité et efforts modaux . . . . .                                                 | 90            |
| 14.3 Reconstruction de l'enveloppe pour toutes les réponses considérées . . . . .                       | 91            |
| 14.3.1 Reconstruction de l'enveloppe pour les efforts internes . . . . .                                | 91            |
| 14.4 Application de la méthode PSWL au paquet enrichi . . . . .                                         | 94            |
| 14.4.1 Troncature et énergie cumulée . . . . .                                                          | 94            |
| 14.4.2 Stratégie d'analyse . . . . .                                                                    | 95            |
| 14.4.3 Combinaison unique : diagnostic d'échec . . . . .                                                | 96            |
| 14.4.4 Reconstruction par plusieurs combinaisons sans overshoot . . . . .                               | 101           |
| 14.4.5 Influence de la tolérance d'overshoot sur le taux de reconstruction . . . . .                    | 106           |
| 14.4.6 Influence de la tolérance d'overshoot sur le nombre de combinaisons nécessaires . . . . .        | 110           |

|                                                                                     |            |
|-------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>15 Livrable transmis au bureau d'études</b>                                      | <b>112</b> |
| 15.1 Choix du modèle aérodynamique sous-jacent . . . . .                            | 112        |
| 15.2 Anatomie du livrable . . . . .                                                 | 113        |
| <b>Conclusion</b>                                                                   | <b>116</b> |
| <b>A Etat de l'art</b>                                                              | <b>119</b> |
| A.1 Caractérisation de la turbulence . . . . .                                      | 119        |
| A.2 Linéarisation des forces aérodynamiques . . . . .                               | 119        |
| <b>B Formes modales obtenues avec Finelg</b>                                        | <b>122</b> |
| <b>C Détails de la méthode de continuation arc-length</b>                           | <b>124</b> |
| C.1 Formulation du problème augmenté . . . . .                                      | 124        |
| C.2 Contrainte de longueur d'arc . . . . .                                          | 124        |
| C.3 Adaptation au modèle Humber . . . . .                                           | 125        |
| C.4 Attribution et modifications du code . . . . .                                  | 125        |
| <b>D Extension aux efforts internes du tablier et aux efforts dans les câbles</b>   | <b>126</b> |
| D.1 Formes des trente premières PSWL pour les deux modèles aérodynamiques . . . . . | 126        |
| D.1.1 Modèle quasi-stationnaire . . . . .                                           | 126        |
| D.1.2 Modèle instationnaire . . . . .                                               | 128        |
| D.2 Exemple concret de table des coefficients . . . . .                             | 130        |
| <b>E Utilisation d'outils d'intelligence artificielle</b>                           | <b>132</b> |
| E.1 ChatGPT (OpenAI) . . . . .                                                      | 132        |
| E.2 Claude (Anthropic) . . . . .                                                    | 132        |

# Introduction

Lorsqu'un bureau d'études dimensionne un pont suspendu de grande portée, l'action du vent ne peut pas être réduite à une simple charge extérieure appliquée à la structure. Elle résulte d'un problème intrinsèquement couplé : un champ de pression aléatoire, variable dans le temps et dans l'espace, sollicite une structure dont les premiers modes propres se situent précisément dans la gamme de fréquences où l'énergie turbulente est significative. À mesure que la vitesse moyenne du vent augmente, les forces aérodynamiques induites par le mouvement du tablier, dites *self-excited*, modifient l'amortissement et la raideur effectifs de la structure. Le problème cesse alors d'être purement structural pour devenir aéroélastique.

Au-delà d'une certaine vitesse critique, ce couplage peut conduire à une instabilité auto-entretenu : le flottement (*flutter*). L'effondrement du pont de Tacoma Narrows en 1940 en constitue l'exemple le plus emblématique. Contrairement à une idée encore largement répandue, il ne s'agissait pas d'une simple résonance, mais bien d'une instabilité aéroélastique résultant de l'interaction entre l'écoulement et le mouvement de la structure.

Face à cette complexité, deux logiques d'ingénierie se rencontrent sans toujours se superposer. D'un côté, l'ingénieur spécialisé en vent et en aéroélasticité manipule des notions telles que turbulence atmosphérique, dérivées de flottement, formulations fréquentielles stochastiques, couplages modaux et stabilité fluide-structure. De l'autre, l'ingénieur structure doit dimensionner un ouvrage réel à l'aide d'un modèle éléments finis, de cas de charge et de vérifications compatibles avec les procédures usuelles de projet.

L'interface entre ces deux mondes reste délicate. Une analyse aéroélastique complète fournit des informations scientifiquement riches : spectres de réponse, écarts-types, fonctions de transfert, covariances modales, vitesses critiques. Ces résultats sont indispensables pour comprendre le comportement dynamique de l'ouvrage, mais ils ne constituent pas directement un objet de dimensionnement statique. Dans la pratique, l'ingénieur structure a pourtant besoin d'une information beaucoup plus opérationnelle :

*quelles charges appliquer sur mon modèle éléments finis ?*

C'est précisément cette question qui motive le présent travail. L'objectif n'est pas de remplacer l'analyse aéroélastique complète, mais d'en condenser les résultats sous une forme directement exploitable dans une chaîne de dimensionnement structurel classique. Il s'agit de transformer la richesse physique du calcul dynamique — turbulence, mémoire aérodynamique, couplages modaux et proximité éventuelle du flottement — en un nombre réduit de charges statiques équivalentes, manipulables comme des cas de charge usuels tout en conservant une signification physique claire.

Concrètement, le livrable visé se compose de trois éléments :

- un petit nombre  $n_p$  de distributions spatiales adimensionnées, appelées *Principal Static Wind Loads* (PSWL), indépendantes de la vitesse du vent et communes à l'ensemble des réponses considérées ;
- une table de coefficients de combinaison, dépendant de la vitesse moyenne du vent et de la réponse cible étudiée, permettant de reconstruire les enveloppes issues de l'analyse dynamique aéroélastique avec un taux de reconstruction imposé ;
- la vitesse critique de flottement, qui fixe la limite de validité physique du livrable.

L'idée de représenter les effets dynamiques du vent par des charges statiques équivalentes n'est pas nouvelle. Depuis les travaux fondateurs de Davenport [1], puis les formulations plus avancées de Chen et Kareem [2], la communauté du génie du vent dispose de méthodes permettant de construire des *Equivalent Static Wind Loads* (ESWL). En particulier, Chen et Kareem ont déjà montré comment établir des charges statiques équivalentes pour la réponse de buffeting multimodale des ponts en tenant compte des couplages modaux et des effets aéroélastiques *self-excited*. Le calcul d'une ESWL aéroélastique, à une vitesse de vent donnée et pour une réponse cible donnée, ne constitue donc pas en soi la nouveauté principale du présent travail.

La difficulté abordée ici se situe à un niveau supérieur. Dès que les effets aéroélastiques sont pris en compte, les charges équivalentes, les corrélations modales et les niveaux de réponse évoluent

avec la vitesse moyenne du vent, en particulier à l'approche de la vitesse critique de flottement. Répéter la construction d'ESWL pour plusieurs vitesses, plusieurs réponses et plusieurs grandeurs de dimensionnement conduit alors à une collection volumineuse de charges, difficilement exploitable telle quelle par un bureau d'études.

C'est précisément ce verrou pratique que ce travail cherche à lever. Plus récemment, Blaise et Denoël [3] ont proposé de condenser un ensemble d'ESWL en une base réduite de *Principal Static Wind Loads* (PSWL), obtenue par décomposition en valeurs singulières. Le présent travail vise à étendre cette logique à un cadre aéroélastique dépendant de la vitesse : il s'agit de déterminer dans quelle mesure une base réduite de PSWL peut rester commune aux différentes vitesses de vent, aux différentes réponses considérées et aux effets liés à la mémoire aérodynamique.

L'enjeu n'est donc pas seulement de construire des charges statiques équivalentes aéroélastiques, mais de condenser l'ensemble de ces charges en un livrable statique compact, physiquement cohérent et directement utilisable dans une chaîne de dimensionnement structurel classique.

## Première partie

# État de l'art : du vent turbulent à la charge statique équivalente

# Introduction de l'état de l'art

Le livrable visé dans ce travail repose sur deux familles d'outils issues du *wind engineering* : les *Equivalent Static Wind Loads* (ESWL), qui permettent de remplacer une action dynamique par une charge statique équivalente, et les *Principal Static Wind Loads* (PSWL), qui permettent de condenser un ensemble de telles charges en une base réduite de distributions dominantes. Le rôle du présent état de l'art est de poser les bases théoriques nécessaires à cette construction, depuis la modélisation du vent turbulent jusqu'à la définition d'un cas de charge statique exploitable dans un modèle éléments finis.

Les premiers chapitres introduisent d'abord les ingrédients physiques du problème. Le chapitre 1 décrit l'action du vent turbulent sur un tablier élancé, ainsi que les deux niveaux de modélisation aérodynamique considérés dans ce travail : le modèle quasi-stationnaire et le modèle instationnaire tenant compte de la mémoire aérodynamique. Le chapitre 2 formule ensuite la réponse stochastique aéroélastique dans le domaine fréquentiel, en mettant en évidence le rôle des forces de buffeting, des forces *self-excited*, des couplages modaux et de la stabilité au flottement.

Le chapitre 3 est consacré aux charges statiques équivalentes. Il rappelle les principales familles de méthodes développées pour transformer une réponse dynamique extrême en chargement statique : facteur de réponse aux rafales (GRF) [4], corrélation charge-réponse (LRC) [5], charges inertielles modales (MIL) [6], puis combinaison des contributions de fond et résonante [2]. Dans un contexte non gaussien, Blaise et Denoël généralisent ensuite ces notions à travers le concept de *conditional expected load* [7]. Ces méthodes constituent la base sur laquelle s'appuie la construction des ESWL aéroélastiques utilisée dans la suite du travail.

Enfin, le chapitre 4 introduit le concept de *Principal Static Wind Loads* (PSWL) proposé par Blaise et Denoël [3]. L'objectif n'est alors plus de construire une charge équivalente isolée, mais de comprendre comment un ensemble potentiellement volumineux d'ESWL peut être représenté par quelques directions de chargement dominantes. Cette compression par décomposition en valeurs singulières conduit naturellement à la notion de complexité aérodynamique-structurale, qui joue un rôle central dans la reconstruction d'enveloppes par un nombre limité de cas de charge.

Cet état de l'art s'appuie principalement sur les travaux de Chen et Kareem [2], ainsi que sur plusieurs contributions de Denoël : ses notes de cours en aéroélasticité [8], sa thèse de doctorat [9] et ses travaux sur les charges statiques équivalentes [3]. Les concepts issus de ces références sont reformulés et organisés de manière à préparer directement l'extension aéroélastique et paramétrique développée dans ce mémoire.

# 1 Vent turbulent et action sur un tablier élané

## 1.1 Cadre général : équation du mouvement et nature du problème

L'analyse dynamique d'un tablier soumis au vent turbulent repose sur la résolution de l'équation classique

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t), \quad (1.1)$$

où  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{K}$  sont les matrices de masse, d'amortissement et de raideur issues d'un modèle éléments finis, et où  $\mathbf{x}(t)$  désigne le vecteur des déplacements nodaux. Le second membre  $\mathbf{f}(t)$  correspond à la discrétisation spatiale, sur le maillage de la structure, du champ de pression aérodynamique  $p(\mathbf{x}, t)$  qui agit sur le tablier.

Deux particularités distinguent ce problème de l'analyse dynamique structurelle usuelle.

D'une part, le champ de pression atmosphérique est une grandeur aléatoire spatio-temporelle : le vecteur  $\mathbf{f}(t)$  hérite de ce caractère stochastique, et la réponse  $\mathbf{x}(t)$  doit être caractérisée par ses propriétés statistiques (densités spectrales, variances, valeurs extrêmes attendues) plutôt que par un historique temporel particulier.

D'autre part, le chargement n'est pas une simple action extérieure imposée à la structure : une partie des efforts aérodynamiques — les forces dites *self-excited* — dépend du mouvement même du tablier. L'interaction fluide-structure rend le problème intrinsèquement couplé, et les caractéristiques dynamiques effectives du système (modes, amortissement, raideur) deviennent fonction de la vitesse moyenne du vent.

Cette double particularité justifie une décomposition du vecteur de forces en trois contributions distinctes :

$$\mathbf{f}(t) = \bar{\mathbf{f}} + \mathbf{f}_{bu}(t) + \mathbf{f}_{se}(t), \quad (1.2)$$

où

- $\bar{\mathbf{f}}$  est la **composante moyenne**, associée au vent stationnaire de vitesse  $\bar{U}$  ; elle représente la sollicitation statique de référence du dimensionnement.
- $\mathbf{f}_{bu}(t)$  est la **composante de buffeting**, induite par les fluctuations turbulentes  $(u, v, w)$  du vent incident ; elle constitue une excitation stochastique externe, indépendante du mouvement structural.
- $\mathbf{f}_{se}(t)$  est la **composante self-excited**, induite par le mouvement de la structure dans l'écoulement ; elle traduit le couplage aéroélastique et, reportée au membre de gauche de (1.1), modifie l'amortissement et la raideur effectifs du système.

Cette décomposition structure toute la suite du chapitre. La caractérisation statistique du champ turbulent qui alimente  $\mathbf{f}_{bu}$  fait l'objet de la section 1.4.2 ; l'expression analytique des trois composantes sous l'hypothèse quasi-stationnaire est développée à la section 1.4 ; et l'extension au régime avec mémoire aérodynamique, dans lequel  $\mathbf{f}_{bu}$  et  $\mathbf{f}_{se}$  acquièrent une dépendance fréquentielle non triviale, occupe la section 1.5.

## 1.2 Caractéristiques du vent et formulation spectrale

Le vent est un écoulement turbulent dans la couche limite atmosphérique. En un point fixe  $\mathbf{x}$  de l'espace, on décompose sa vitesse instantanée en une composante moyenne  $\bar{U}(\mathbf{x})$  et trois fluctuations

turbulentes :

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = \begin{Bmatrix} \overline{U}(\mathbf{x}) + u(\mathbf{x}, t) \\ v(\mathbf{x}, t) \\ w(\mathbf{x}, t) \end{Bmatrix}, \quad (1.3)$$

où  $u$ ,  $v$  et  $w$  désignent respectivement les fluctuations longitudinale (parallèle au vent moyen), transversale et verticale, exprimées dans un repère local lié à la direction du vent moyen<sup>1</sup>.

### 1.2.1 Composante moyenne

La vitesse moyenne  $\overline{U}$  est estimée sur des fenêtres de 10 minutes, durée justifiée par le creux spectral marqué qui sépare les fluctuations mésoéchelle (périodes  $\gtrsim 1$  h) des fluctuations turbulentes (périodes  $\lesssim 10$  min). Pour le dimensionnement, c'est la valeur extrême de  $\overline{U}$  sur une période de retour donnée qui est recherchée ; les Eurocodes la définissent pour une probabilité annuelle de dépassement de 2 %, soit une période de retour de 50 ans.

Dans la couche limite terrestre,  $\overline{U}$  varie avec l'altitude  $z$  selon un profil typiquement logarithmique

$$\overline{U}(z) = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \ln\left(\frac{z}{z_0}\right), \quad (1.4)$$

où  $\kappa$  est la constante de von Kármán,  $\tau_0$  la contrainte de cisaillement au sol,  $\rho$  la masse volumique de l'air et  $z_0$  la longueur de rugosité du terrain. Des corrections additionnelles (effets topographiques, inclinaison de site) sont disponibles dans les Eurocodes mais ne sont pas nécessaires ici. Pour le présent travail, le pont est modélisé comme un tablier suspendu à altitude approximativement constante au-dessus de l'eau ; la variation de  $\overline{U}$  le long du tablier est négligée et la vitesse moyenne est supposée uniforme et notée simplement  $\overline{U}$  ou  $U$  dans la suite.

### 1.2.2 Caractérisation de la turbulence

Les fluctuations  $(u, v, w)$  sont modélisées comme des processus aléatoires gaussiens stationnaires de moyenne nulle, dont les écarts-types vérifient les relations empiriques usuelles [10].

$$\sigma_v \approx 0,75 \sigma_u, \quad \sigma_w \approx 0,50 \sigma_u. \quad (1.5)$$

L'intensité de turbulence longitudinale est définie par  $I_u = \sigma_u / \overline{U}$ .

L'analyse fréquentielle développée au Chapitre 2 nécessite la densité spectrale de puissance des fluctuations. Pour la composante longitudinale, on retient ici la forme analytique de Von Karman [11]

$$\frac{f S_u(f)}{\sigma_u^2} = \frac{4 f L_u / \overline{U}}{[1 + 70,8 (f L_u / \overline{U})^2]^{5/6}}, \quad (1.6)$$

où  $L_u$  est l'échelle intégrale longitudinale de la turbulence. Une expression analogue, paramétrée par  $L_w$  et  $\sigma_w$ , fournissant  $S_w(f)$  est reprise en Annexe A.1.

La caractérisation spectrale doit également décrire la **cohérence spatiale** de la turbulence entre deux points de la structure : deux nœuds éloignés du tablier P et Q ne voient pas la même rafale au même instant. On adopte la forme exponentielle proposée par Davenport [4]

$$\Lambda_{ii}(P, Q, f) = \exp\left(-\frac{2f \sqrt{(C_{ix}\Delta x)^2 + (C_{iz}\Delta z)^2}}{\overline{U}_P + \overline{U}_Q}\right), \quad (1.7)$$

où  $i = u$  ou  $w$ ,  $\Delta x = x_P - x_Q$ ,  $\Delta z = z_P - z_Q$ , et où  $C_{ix}$  et  $C_{iz}$  sont les coefficients de cohérence. Cette cohérence intervient directement dans la construction des matrices spectrales turbulentes. Elle permet de passer d'un auto-spectre local à une matrice de spectres croisés entre les différentes sections du tablier.

1. À ne pas confondre avec le repère pont  $(x, y, z)$  utilisé pour décrire les degrés de liberté structuraux, voir 1.4.

### 1.3 Coefficients aérodynamiques statiques

Les deux modèles aérodynamiques mobilisés dans la suite — quasi-stationnaire (section 1.4) et avec mémoire (section 1.5) — partagent un même socle : les **coefficients aérodynamiques statiques** mesurés sur la section du tablier en écoulement uniforme stationnaire. La présente section fixe leur définition et précise leur domaine de validité.

**Définition.** Pour un tablier filaire de largeur de référence  $B$  immergé dans un écoulement uniforme de vitesse  $U$ , sous une incidence  $i$ , les efforts aérodynamiques par unité de longueur s'écrivent

$$C_D(i) = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U^2 B}, \quad C_L(i) = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho U^2 B}, \quad C_M(i) = \frac{F_M}{\frac{1}{2}\rho U^2 B^2}, \quad (1.8)$$

où  $\rho$  désigne la masse volumique de l'air,  $F_D$  la traînée (parallèle à l'écoulement),  $F_L$  la portance (perpendiculaire à l'écoulement) et  $F_M$  le moment de tangage autour de l'axe longitudinal du tablier. Les coefficients  $C_D, C_L, C_M$  sont des fonctions de l'angle d'incidence  $i$ , et caractérisent la *signature statique* du profil.

**Indépendance vis-à-vis du Reynolds.** Ces coefficients dépendent également du nombre de Reynolds  $Re = UB/\nu$ , mais cette dépendance s'atténue fortement aux grandes valeurs de  $Re$ . Pour les tabliers de pont de grande portée soumis à des vitesses extrémales, on est typiquement dans la gamme  $Re \sim 10^6 - 10^7$  : l'écoulement y est pleinement turbulent et les coefficients  $C_D, C_L, C_M$  peuvent être considérés comme indépendants de  $U$ . C'est cette propriété qui autorise le transfert des coefficients identifiés en soufflerie sur maquette — typiquement à des nombres de Reynolds plus faibles — vers le dimensionnement à l'échelle 1.

**Disponibilité.** Pour les sections courantes (profilés simples, cylindres, rectangles), des valeurs tabulées existent [10]. Pour les tabliers de ponts de grande portée, les coefficients statiques dépendent cependant fortement de la géométrie exacte de la section, de l'incidence du vent et des détails aérodynamiques du tablier. Il n'existe donc pas de valeur universelle directement applicable à un ouvrage donné. En revanche, des tendances et des plages de valeurs peuvent être établies par typologie de tablier. Flamand et Denoël [12] ont par exemple comparé plusieurs sections réalistes testées en soufflerie et distingué différentes familles de tabliers, notamment les tabliers profilés, les caissons et les tabliers à deux poutres. Ce type de classification permet d'obtenir des ordres de grandeur pour les coefficients statiques et d'estimer leur évolution avec l'incidence par analogie avec des sections similaires.

Pour un projet donné, les coefficients statiques de référence restent néanmoins généralement identifiés par essais en soufflerie sur maquette sectionnelle, en particulier lorsque la géométrie du tablier est optimisée spécifiquement. Il en va de même pour les dérivées de flottement introduites à la Section 1.5.4, qui caractérisent les forces aérodynamiques dépendantes du mouvement. En l'absence de données expérimentales propres au Humber Bridge dans le présent travail, les coefficients statiques sont donc estimés à partir de considérations analytiques et d'analogies avec des tabliers profilés similaires, tandis que les dérivées de flottement sont approchées dans le cadre de la théorie des profils minces (Section 1.5.5).

## 1.4 Modèle quasi-stationnaire

### 1.4.1 Hypothèse quasi-stationnaire et domaine de validité

Les coefficients (1.8) sont définis pour un obstacle fixe immergé dans un écoulement stationnaire. Le tablier d'un pont soumis au vent turbulent s'écarte simultanément de ces deux conditions : d'une part, l'écoulement incident est instationnaire en raison des fluctuations turbulentes  $(u, v, w)$  caractérisées à la Section 1.2 ; d'autre part, la structure elle-même se déplace sous l'effet des efforts aérodynamiques et modifie en retour la géométrie du domaine fluide.

La modélisation rigoureuse de cette double instationnarité relèverait d'une simulation couplée fluide-structure (CFD instationnaire avec maillage déformable), dont le coût computationnel reste prohibitif pour les applications courantes de dimensionnement. Une simplification est donc généralement introduite : l'*hypothèse d'écoulement quasi-permanent*, qui postule que l'écoulement autour du tablier s'adapte instantanément à toute modification des conditions cinématiques — qu'elle provienne de la turbulence amont ou du mouvement de la structure.

Formellement, cette hypothèse est justifiée lorsque le temps caractéristique de transit d'une particule fluide le long de la section,  $\tau_t \sim B/U$ , est court devant les périodes caractéristiques de variation des conditions cinématiques. En notant  $f$  la fréquence dominante du phénomène considéré, cette condition s'exprime à travers la fréquence réduite

$$k = \frac{\omega B}{\bar{U}} = \frac{2\pi f B}{\bar{U}}, \quad (1.9)$$

construite en convention corde entière, qui sera retenue dans tout le présent travail<sup>2</sup>. L'hypothèse quasi-stationnaire revient alors à supposer  $k \ll 1$ . Dans ce régime, les efforts aérodynamiques instantanés s'obtiennent en substituant, dans Équation (1.8), la vitesse  $U$  par la vitesse apparente  $V_{\text{app}}(\mathbf{x}, t)$  et l'angle  $i$  par l'incidence apparente  $i_{\text{app}}(\mathbf{x}, t)$ , qui intègrent à la fois les fluctuations turbulentes du vent incident et le mouvement de la structure.

### 1.4.2 Expression des forces aérodynamiques

On considère un tablier filaire dont l'axe longitudinal est perpendiculaire à la direction moyenne du vent et dont l'incidence moyenne est nulle. Dans ces conditions, la vitesse incidente en un point du tablier s'écrit

$$V(x, t) = \begin{Bmatrix} \bar{U} + u(x, t) \\ w(x, t) \end{Bmatrix}, \quad (1.10)$$

les deux composantes étant respectivement parallèle et perpendiculaire à la direction moyenne du vent.

Le vent engendre des efforts aérodynamiques qui induisent à leur tour des déplacements de la structure. Suivant les conventions de la Figure 1.1, le mouvement de la section est caractérisé par trois degrés de liberté : le déplacement transversal  $y(x, t)$  (selon la direction du vent moyen), le déplacement vertical  $z(x, t)$ , et la rotation  $\theta(x, t)$  autour de l'axe longitudinal.

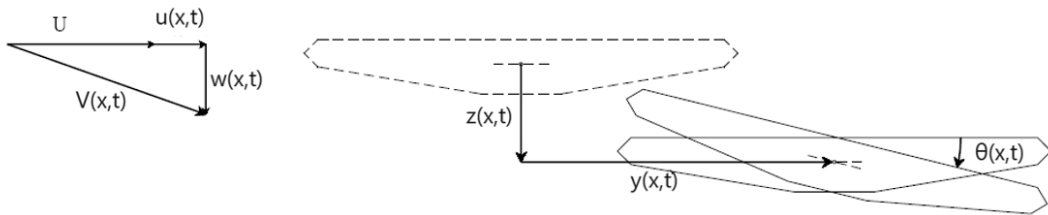


FIGURE 1.1 – Déplacements structurels : conventions de signes (adapté de [9]).

Sous l'hypothèse d'écoulement quasi-permanent, les efforts s'expriment à partir des coefficients aérodynamiques statiques (1.8), dans lesquels la vitesse  $U$  et l'angle d'incidence  $i$  sont remplacés par

<sup>2</sup>. La convention demi-corde  $k_T = \omega b / \bar{U}$ , avec  $b = B/2$ , est historiquement utilisée dans la théorie des profils minces de Theodorsen et apparaîtra ponctuellement à la section 1.5.5. Le passage entre les deux conventions est immédiat :  $k_T = k/2$ .

leurs équivalents apparents  $V_{\text{app}}(x, t)$  et  $i_{\text{app}}(x, t)$  :

$$F_D(x, t) = \frac{1}{2} \rho C_D(i_{\text{app}}(x, t)) B |V_{\text{app}}(x, t)|^2, \quad (1.11)$$

$$F_L(x, t) = \frac{1}{2} \rho C_L(i_{\text{app}}(x, t)) B |V_{\text{app}}(x, t)|^2, \quad (1.12)$$

$$F_M(x, t) = \frac{1}{2} \rho C_M(i_{\text{app}}(x, t)) B^2 |V_{\text{app}}(x, t)|^2. \quad (1.13)$$

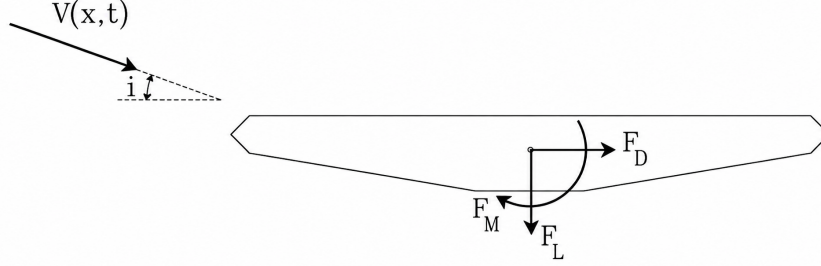


FIGURE 1.2 – Efforts aérodynamiques : conventions de signes (adapté de [9]).

### 1.4.3 Linéarisation des forces aérodynamiques

Les expressions (1.11)–(1.13) sont non linéaires en les degrés de liberté structuraux  $(y, z, \theta)$  et leurs dérivées, comme en les fluctuations turbulentes  $(u, w)$ . Une linéarisation est nécessaire pour les rendre compatibles avec le formalisme aéroélastique linéaire développé dans la suite. Elle s'effectue séparément sur les deux facteurs en présence : la norme de la vitesse apparente et les coefficients aérodynamiques.

Les développements mathématiques détaillés sont fournis en Annexe A.2. Après linéarisation et réarrangement, les forces de portance, de traînée et de moment peuvent s'écrire comme suit :

$$F_L(t) = \underbrace{\frac{1}{2} \rho B c_\ell \bar{U}^2}_{\bar{F}_L} + \underbrace{\frac{1}{2} \rho B \bar{U}^2 \left[ -2c_\ell \frac{\dot{y}}{\bar{U}} - c'_\ell \left( \frac{\dot{z}}{\bar{U}} + \frac{rB\dot{\theta}}{\bar{U}} + \theta \right) \right]}_{F_{L,se}(t)} + \underbrace{\frac{1}{2} \rho B \bar{U}^2 \left[ 2c_\ell \frac{u}{\bar{U}} + c'_\ell \frac{w}{\bar{U}} \right]}_{F_{L,bu}(t)}. \quad (1.14)$$

$$F_D(t) = \underbrace{\frac{1}{2} \rho B c_d \bar{U}^2}_{\bar{F}_D} + \underbrace{\frac{1}{2} \rho B \bar{U}^2 \left[ -2c_d \frac{\dot{y}}{\bar{U}} - c'_d \left( \frac{\dot{z}}{\bar{U}} + \frac{rB\dot{\theta}}{\bar{U}} + \theta \right) \right]}_{F_{D,se}(t)} + \underbrace{\frac{1}{2} \rho B \bar{U}^2 \left[ 2c_d \frac{u}{\bar{U}} + c'_d \frac{w}{\bar{U}} \right]}_{F_{D,bu}(t)}, \quad (1.15)$$

$$F_M(t) = \underbrace{\frac{1}{2} \rho B^2 c_m \bar{U}^2}_{\bar{F}_M} + \underbrace{\frac{1}{2} \rho B^2 \bar{U}^2 \left[ -2c_m \frac{\dot{y}}{\bar{U}} - c'_m \left( \frac{\dot{z}}{\bar{U}} + \frac{rB\dot{\theta}}{\bar{U}} + \theta \right) \right]}_{F_{M,se}(t)} + \underbrace{\frac{1}{2} \rho B^2 \bar{U}^2 \left[ 2c_m \frac{u}{\bar{U}} + c'_m \frac{w}{\bar{U}} \right]}_{F_{M,bu}(t)}. \quad (1.16)$$

Ces expressions confirment la décomposition annoncée à l'Équation (1.2) : chacun des trois efforts aérodynamiques se sépare en une composante moyenne, une composante self-excited et une composante de buffeting, dont l'interprétation physique est la suivante.

- La *composante moyenne*  $\bar{F}_i$  est l'effort aérodynamique exercé par le vent stationnaire de vitesse  $\bar{U}$  sur le tablier au repos. Elle ne dépend ni du temps ni du mouvement de la structure et constitue la sollicitation statique de référence du dimensionnement.
- La *composante self-excited*  $F_{i,se}(t)$  rassemble tous les termes proportionnels aux degrés de liberté structuraux  $(y, z, \theta)$  et à leurs dérivées temporelles. Elle traduit l'interaction fluide-structure : le mouvement du tablier modifie l'écoulement, qui en retour exerce sur la structure

des efforts proportionnels à sa propre cinématique. Une fois cette composante reportée au membre de gauche de l'équation du mouvement, elle se traduit par des matrices aéroélastiques d'amortissement et de raideur ajoutées, qui modifient les fréquences et l'amortissement effectifs du système couplé. C'est cette contribution qui gouverne la stabilité aéroélastique et la vitesse critique de flottement (Section 2.4).

- La *composante de buffeting*  $F_{i, \text{bu}}(t)$  rassemble les termes proportionnels aux fluctuations turbulentes  $(u, w)$  du vent incident. Elle constitue une excitation stochastique externe, indépendante du mouvement structural, dont le caractère aléatoire est entièrement hérité de celui du champ turbulent caractérisé à la Section 1.2. C'est cette composante qui engendre la réponse dynamique stochastique du tablier sous vent turbulent.

Sous une forme compacte, on retrouve donc la décomposition

$$\mathbf{f}(t) = \bar{\mathbf{f}} + \mathbf{f}_{\text{bu}}(t) + \mathbf{f}_{\text{se}}(t), \quad (1.17)$$

annoncée à l'Équation (1.2), dans laquelle chacun des trois termes admet désormais une expression analytique explicite en fonction des coefficients aérodynamiques  $(c_i, c'_i)$ , de la géométrie de la section  $(B, r)$ , de la vitesse moyenne du vent  $\bar{U}$ , des fluctuations turbulentes  $(u, w)$  et des degrés de liberté structuraux  $(y, z, \theta)$ .

Il convient toutefois de préciser que cette linéarisation ne fait pas encore apparaître explicitement la contribution liée à la rotation du repère aérodynamique induite par la rafale verticale. Cette contribution, faisant intervenir les termes croisés en  $\pm C_D$  et  $\pm C_L$ , est réintroduite dans la formulation compacte de l'admittance quasi-stationnaire donnée à l'Équation 1.31.

## 1.5 Modèle avec mémoire aérodynamique

### 1.5.1 Limites du modèle quasi-stationnaire

Dans les expressions (1.14)–(1.16) établies à la section précédente, les forces  $F_L$ ,  $F_D$  et  $F_M$  ne dépendent que de la configuration cinématique évaluée au même instant  $t$  : la vitesse apparente et l'incidence du vent à l'instant  $t$  déterminent entièrement les forces à ce même instant. Ce caractère *sans mémoire* est la conséquence directe de l'hypothèse quasi-stationnaire, qui suppose une adaptation instantanée de l'écoulement à toute modification des conditions cinématiques.

Cette hypothèse n'est valable que pour des variations suffisamment lentes, plus précisément lorsque le temps caractéristique de transit d'une particule fluide autour de la section,  $\tau_t \sim B/\bar{U}$ , est court devant les périodes de vibration de la structure. Lorsque cette condition n'est pas satisfaite, les particules d'air interagissent avec une structure en mouvement durant tout leur transit autour du profil : l'état aérodynamique à l'instant  $t$  dépend alors des configurations structurales antérieures, ce qui signifie que les forces aérodynamiques possèdent une *mémoire*.

### 1.5.2 La convolution comme modèle général

Une relation linéaire entre une entrée  $x(t)$  et une sortie  $y(t)$  prenant en compte cette mémoire s'écrit naturellement sous forme d'un produit de convolution :

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) x(t - \tau) d\tau, \quad (1.18)$$

où  $h(\tau)$  est la *fonction de réponse impulsionnelle* du système : elle décrit l'influence persistante d'une impulsion passée en  $x$  sur la sortie  $y$  à l'instant présent. Le modèle quasi-stationnaire correspond au cas particulier  $h(\tau) = \delta(\tau)$ , qui restitue bien la dépendance instantanée.

Pour les forces aérodynamiques sur un tablier, on écrit alors, de manière formelle :

- la composante self-excited dépend de l'historique du mouvement structural  $(y, z, \theta)$  via une convolution avec un noyau aérodynamique propre ;
- la composante de buffeting dépend de l'historique des fluctuations turbulentes  $(u, w)$  via une autre convolution.

### 1.5.3 Passage au domaine fréquentiel

L'outil naturel pour traiter les convolutions (1.18) est la transformée de Fourier, qui les transforme en simples produits :

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega), \quad (1.19)$$

où  $H(\omega) = \mathcal{F}\{h(\tau)\}$  est la *fonction de transfert* du système, fonction complexe de la fréquence dont le module  $|H(\omega)|$  traduit l'amplification de l'excitation et l'argument  $\arg(H(\omega))$  le déphasage introduit. Dans le domaine fréquentiel, la relation avec mémoire devient ainsi une multiplication, à la fois élégante et numériquement efficace. Toute la suite de l'analyse est conduite dans ce domaine.

Appliquée aux forces aérodynamiques, cette idée conduit à remplacer les coefficients constants du modèle quasi-stationnaire par des fonctions complexes de la *fréquence réduite*

$$k = \frac{\omega B}{\bar{U}} = 2\pi f^*, \quad f^* = \frac{fB}{\bar{U}}, \quad V^* = \frac{1}{f^*} = \frac{\bar{U}}{fB}. \quad (1.20)$$

La fréquence réduite  $k$  (sans dimension) est le paramètre naturel du problème : à un facteur  $2\pi$  près, elle compare le temps de transit  $B/\bar{U}$  d'une particule fluide à la période d'oscillation  $2\pi/\omega$  de la structure. La fréquence réduite  $f^*$  et la vitesse réduite  $V^*$  sont des reparamétrisations équivalentes, plus naturelles pour exprimer les dérivées de Theodorsen (Section 1.5.5).

Pour les ponts suspendus de grande portée, les premiers modes propres se situent typiquement dans la bande  $[0,05; 0,5]$  Hz et la largeur des caissons est de l'ordre de  $B \sim 20\text{--}40$  m. À  $\bar{U} = 30$  m/s, ces ordres de grandeur conduisent à  $k \in [0,2; 4]$ , soit un domaine où l'hypothèse quasi-stationnaire perd progressivement sa validité et où la prise en compte de la mémoire aérodynamique devient essentielle.

### 1.5.4 Expression des forces self-excited dans le formalisme de Scanlan

Dans le formalisme instationnaire de Scanlan [13], les composantes self-excited des forces aérodynamiques s'écrivent, dans le domaine fréquentiel,

$$\begin{aligned} F_{D,se}(\omega) &= \frac{1}{2} \rho B \bar{U}^2 k^2 \left[ (P_4^* + i P_1^*) \frac{y(\omega)}{B} + (P_6^* + i P_5^*) \frac{z(\omega)}{B} + (P_3^* + i P_2^*) \theta(\omega) \right], \\ F_{L,se}(\omega) &= \frac{1}{2} \rho B \bar{U}^2 k^2 \left[ (H_6^* + i H_5^*) \frac{y(\omega)}{B} + (H_4^* + i H_1^*) \frac{z(\omega)}{B} + (H_3^* + i H_2^*) \theta(\omega) \right], \\ F_{M,se}(\omega) &= \frac{1}{2} \rho B^2 \bar{U}^2 k^2 \left[ (A_6^* + i A_5^*) \frac{y(\omega)}{B} + (A_4^* + i A_1^*) \frac{z(\omega)}{B} + (A_3^* + i A_2^*) \theta(\omega) \right]. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Les coefficients  $H_i^*$ ,  $P_i^*$ ,  $A_i^*$  ( $i = 1, \dots, 6$ ), appelés *dérivées de flottement*, sont des grandeurs adimensionnées qui dépendent uniquement de la fréquence réduite  $k$  (ou de façon équivalente de  $V^*$ ) et de la géométrie de la section. Identifiés expérimentalement par essais en soufflerie sur maquette sectionnelle, ils constituent la signature aérodynamique du tablier vis-à-vis du flottement.

**Interprétation physique de la décomposition réelle/imaginaire.** Le regroupement par paires  $(X_{\text{réel}}^*, X_{\text{imag}}^*)$  dans (1.21) n'est pas arbitraire : il sépare les contributions de raideur et d'amortissement aéroélastiques.

Considérons par exemple le terme  $(H_4^* + i H_1^*) z/B$  de la portance. Reporté au membre de gauche de l'équation du mouvement et exprimé dans le domaine temporel, il fournit :

- une contribution proportionnelle au *déplacement*  $z$ , via  $H_4^*$ , qui constitue une *raideur aérodynamique* ajoutée à la raideur structurale et qui modifie les fréquences propres effectives du système couplé ;
- une contribution proportionnelle à la *vitesse*  $\dot{z}$ , via  $H_1^*$ , qui constitue un *amortissement aérodynamique* ajouté à l'amortissement structural.

Ce mécanisme se généralise aux autres paires : les coefficients  $H_3^*, H_4^*, H_6^*$  (et leurs homologues en  $A$  et  $P$ ) contribuent à la raideur aéroélastique, tandis que  $H_1^*, H_2^*, H_5^*$  contribuent à l'amortissement aéroélastique.

### 1.5.5 Cas analytique de référence : théorie des profils minces

Les dérivées de flottement étant identifiées en soufflerie, leur détermination est coûteuse et propre à chaque section. Une estimation analytique préliminaire est néanmoins possible dans le cas idéalisé d'un profil mince oscillant dans un écoulement incompressible non visqueux, traité par Theodorsen [14]. Cette *théorie des profils minces* fournit une référence utile pour vérifier l'ordre de grandeur des dérivées mesurées et pour évaluer a priori la stabilité d'un caisson, avant essais.

Dans cette approche, la traînée est négligée et les couplages latéraux ( $y$ ) ne sont pas considérés : seules les contributions de portance  $F_L$  et de moment  $F_M$  liées au déplacement vertical  $z$  et à la rotation  $\theta$  subsistent. Les dérivées non nulles s'écrivent :

$$H_1^* = -V^*F, \quad H_2^* = \frac{V^*}{4} \left( 1 + F + \frac{2}{\pi} V^*G \right), \quad (1.22)$$

$$H_3^* = \frac{V^{*2}}{2\pi} \left( F - \frac{\pi}{2V^*} G \right), \quad H_4^* = \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{2}{\pi} V^*G \right), \quad (1.23)$$

$$A_1^* = -\frac{V^*}{4}F, \quad A_2^* = -\frac{V^*}{16} \left( 1 - F - \frac{2}{\pi} V^*G \right), \quad (1.24)$$

$$A_3^* = \frac{V^{*2}}{8\pi} \left( F - \frac{\pi}{2V^*} G \right), \quad A_4^* = \frac{V^*}{4}G, \quad (1.25)$$

les autres dérivées ( $H_5^*, H_6^*, A_5^*, A_6^*$  et toutes les  $P_i^*$ ) étant identiquement nulles dans cette approximation. La fonction  $C$  apparaissant ci-dessus est la *fonction circulatoire de Theodorsen*, fonction complexe définie en convention demi-corde  $k_T = \omega b / \bar{U}$  (avec  $b = B/2$ ) :

$$C(k_T) = F(k_T) + i G(k_T), \quad (1.26)$$

dont les parties réelle et imaginaire s'expriment à l'aide des fonctions de Bessel de première et seconde espèce :

$$F(k_T) = \frac{J_1(J_1 + Y_0) + Y_1(Y_1 - J_0)}{(J_1 + Y_0)^2 + (Y_1 - J_0)^2}, \quad (1.27)$$

$$G(k_T) = -\frac{J_1 J_0 + Y_1 Y_0}{(J_1 + Y_0)^2 + (Y_1 - J_0)^2}, \quad (1.28)$$

toutes les fonctions de Bessel  $J_n, Y_n$  étant évaluées en  $k_T$ . Numériquement, le passage entre conventions corde entière et demi-corde s'effectue via la relation  $k_T = \pi f^* = k/2$ .

### 1.5.6 Composante de buffeting : admittances aérodynamiques

Le raisonnement appliqué à la composante self-excited se transpose à la composante de buffeting, à ceci près que l'entrée est cette fois le champ turbulent incident ( $u, w$ ) plutôt que le mouvement structural.

Dans le modèle quasi-stationnaire, une fluctuation turbulente génère une force proportionnelle à son amplitude, indépendamment de sa fréquence. Or, pour des fluctuations rapides dont la longueur d'onde  $\lambda = \bar{U}/f$  devient comparable à la largeur  $B$  du tablier, le profil ne peut plus « ressentir » pleinement l'excitation : les variations de pression s'annulent partiellement sur les deux faces du tablier avant que l'écoulement ait eu le temps de s'adapter.

Ce filtrage fréquentiel est encodé par les *fonctions d'admittance aérodynamique*  $\chi_{ij}^*(f^*)$ , fonctions réelles de la fréquence réduite qui pondèrent les coefficients quasi-stationnaires. Elles jouent, pour le buffeting, le même rôle que les dérivées de flottement pour la composante self-excited : elles encodent dans le domaine fréquentiel la mémoire de l'interaction entre le champ turbulent et le profil. Leurs cas limites s'interprètent directement :

—  $f^* \rightarrow 0 : \chi^* \rightarrow \chi_{QS}^*$  ; on retrouve le modèle quasi-stationnaire ;

—  $f^* \rightarrow \infty : |\chi^*| \rightarrow 0$ ; les fluctuations rapides sont intégralement filtrées par le profil.

Une formulation usuelle, due à Davenport [4], factorise l'admittance comme le produit d'un coefficient quasi-stationnaire  $\chi_{ij}^{\text{QS}}$  et d'une fonction de pondération réelle  $A(f^*)$  :

$$\chi_{ij}^*(f^*) = \chi_{ij}^{\text{QS}} \cdot A(f^*), \quad (1.29)$$

avec la fonction de Davenport

$$A(f^*) = \frac{2}{(7f^*)^2} \left( 7f^* - 1 + e^{-7f^*} \right), \quad (1.30)$$

qui vérifie  $A(0) = 1$  et  $A(f^*) \rightarrow 0$  lorsque  $f^* \rightarrow \infty$ . Les six coefficients quasi-stationnaires se déduisent des coefficients statiques et de leurs dérivées en incidence :

$$\begin{aligned} \chi_{Du}^{\text{QS}} &= 2C_D, & \chi_{Dw}^{\text{QS}} &= \frac{dC_D}{di} - C_L, \\ \chi_{Lu}^{\text{QS}} &= 2C_L, & \chi_{Lw}^{\text{QS}} &= \frac{dC_L}{di} - C_D, \\ \chi_{Mu}^{\text{QS}} &= 2C_M, & \chi_{Mw}^{\text{QS}} &= \frac{dC_M}{di}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

On notera que les termes  $\chi_{Dw}^{\text{QS}}$  et  $\chi_{Lw}^{\text{QS}}$  contiennent une contribution croisée (respectivement  $-C_L$  et  $-C_D$ ) qui résulte de la projection de la rafale verticale  $w$  sur les directions de portance et de traînée. Cette contribution croisée est souvent omise dans les formulations simplifiées, mais elle est intégrée ici par cohérence avec l'implémentation numérique.

Les forces de buffeting prennent alors, dans le domaine fréquentiel, la forme

$$\begin{aligned} F_{D,\text{bu}}(f^*) &= \frac{1}{2} \rho B \bar{U}^2 \left[ \chi_{Du}^*(f^*) \frac{u(\omega)}{\bar{U}} + \chi_{Dw}^*(f^*) \frac{w(\omega)}{\bar{U}} \right], \\ F_{L,\text{bu}}(f^*) &= \frac{1}{2} \rho B \bar{U}^2 \left[ \chi_{Lu}^*(f^*) \frac{u(\omega)}{\bar{U}} + \chi_{Lw}^*(f^*) \frac{w(\omega)}{\bar{U}} \right], \\ F_{M,\text{bu}}(f^*) &= \frac{1}{2} \rho B^2 \bar{U}^2 \left[ \chi_{Mu}^*(f^*) \frac{u(\omega)}{\bar{U}} + \chi_{Mw}^*(f^*) \frac{w(\omega)}{\bar{U}} \right]. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Dans la limite  $A(f^*) \rightarrow 1$ , les admittances se réduisent aux valeurs quasi-stationnaires (1.31).

# 2 Formulation aéroélastique et réponse stochastique

## 2.1 Équation du mouvement dans le domaine fréquentiel

L'équation du mouvement (1.1) établie dans le domaine temporel sous la forme

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}_s \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}_s \mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{F}} + \mathbf{F}_{bu}(t) + \mathbf{F}_{se}(t)$$

fait apparaître au second membre la composante self-excited  $\mathbf{F}_{se}(t)$ , qui dépend du mouvement de la structure. Après transformée de Fourier et rapatriement de  $\mathbf{F}_{se}(t)$  au membre de gauche, l'équation se met sous la forme

$$[-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega(\mathbf{C}_s + \mathbf{C}^{ae}(\omega, U)) + (\mathbf{K}_s + \mathbf{K}^{ae}(\omega, U))] \mathbf{X}(\omega) = \mathbf{F}_{bu}(\omega), \quad (2.1)$$

où  $\mathbf{C}_s$  et  $\mathbf{K}_s$  sont les matrices structurales d'amortissement et de raideur, tandis que  $\mathbf{C}^{ae}(\omega, U)$  et  $\mathbf{K}^{ae}(\omega, U)$  sont les contributions *aéroélastiques* issues de la linéarisation de  $\mathbf{F}_{se}$ . Avec la convention de signe adoptée ici, une matrice  $\mathbf{C}^{ae}$  définie positive traduit un apport d'amortissement par l'écoulement (régime stable), et l'inversion de ce signe au-delà d'une vitesse critique signe l'apparition du flottement (Section 2.4).

Pour alléger les notations, on introduit les matrices aéroélastiques totales

$$\mathbf{C}(\omega, U) = \mathbf{C}_s + \mathbf{C}^{ae}(\omega, U), \quad \mathbf{K}(\omega, U) = \mathbf{K}_s + \mathbf{K}^{ae}(\omega, U), \quad (2.2)$$

qui regroupent les contributions structurales et aéroélastiques. La dépendance en  $\omega$  et  $U$  est explicitée dès qu'elle est nécessaire à la discussion, et omise dans le cas contraire.

## 2.2 Projection en base modale

La dimension du vecteur des degrés de liberté physiques  $\mathbf{X}(\omega)$  est typiquement de l'ordre de  $10^2$  à  $10^4$  pour un modèle éléments finis de tablier complet. Une résolution directe du système (2.1) à chaque fréquence et chaque vitesse serait coûteuse et difficile à interpréter. On adopte donc une projection en base modale, en introduisant la décomposition

$$\mathbf{X}(\omega) = \Phi \mathbf{q}(\omega), \quad (2.3)$$

où  $\Phi$  rassemble en colonnes les modes propres  $\Phi_j$  du système *structurel non chargé*, c'est-à-dire calculés sur  $(\mathbf{M}, \mathbf{C}_s, \mathbf{K}_s)$  en l'absence de vent, et  $\mathbf{q}(\omega)$  est le vecteur des amplitudes modales associées.

Ce choix mérite d'être justifié. Les modes structuraux  $\Phi$  présentent deux propriétés essentielles pour la suite. D'une part, ils sont *indépendants de la vitesse du vent*  $U$ , ce qui permet de les calculer une seule fois et de les réutiliser sur l'ensemble du panel de vitesses étudié. D'autre part, ils diagonalisent les matrices structurales  $\mathbf{M}^* = \Phi^T \mathbf{M} \Phi$  et  $\mathbf{K}_s^* = \Phi^T \mathbf{K}_s \Phi$ , ce qui permet de *lire* explicitement, dans la matrice modale finale, la contribution aéroélastique qui couple les modes entre eux.

En substituant la décomposition modale dans (2.1) et en multipliant à gauche par  $\Phi^T$ , on obtient

$$[-\omega^2 \mathbf{M}^* + i\omega \mathbf{C}^*(\omega, U) + \mathbf{K}^*(\omega, U)] \mathbf{q}(\omega) = \mathbf{F}_{bu}^*(\omega), \quad (2.4)$$

avec les matrices et le second membre généralisés

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^* &= \Phi^T \mathbf{M} \Phi, & \mathbf{C}^*(\omega, U) &= \Phi^T \mathbf{C}(\omega, U) \Phi, \\ \mathbf{K}^*(\omega, U) &= \Phi^T \mathbf{K}(\omega, U) \Phi, & \mathbf{F}_{bu}^*(\omega) &= \Phi^T \mathbf{F}_{bu}(\omega). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Si  $\mathbf{M}^*$  et  $\mathbf{K}_s^*$  sont diagonales par construction,  $\mathbf{C}^*$  et  $\mathbf{K}^*$  ne le sont pas en général : la contribution aéroélastique  $\Phi^T \mathbf{C}^{ae} \Phi$  introduit des termes hors diagonale qui couplent les modes entre eux. C'est précisément ce couplage qui rend possible le mécanisme de flottement à deux degrés de liberté (Section 2.4). L'approximation modale découplée, parfois adoptée dans la littérature pour simplifier la résolution, n'est *pas* utilisée dans le présent travail : la matrice modale est conservée pleine et inversée numériquement.

## 2.3 Matrice de réponse fréquentielle aéroélastique

On regroupe les contributions inertielles, dissipatives et élastiques de (2.4) dans une unique matrice dynamique aéroélastique

$$\mathbf{D}_{ae}(\omega, U) = -\omega^2 \mathbf{M}^* + i\omega \mathbf{C}^*(\omega, U) + \mathbf{K}^*(\omega, U). \quad (2.6)$$

Cette matrice est pleine dès lors que le couplage aéroélastique est pris en compte. La réponse modale s'obtient alors par inversion directe :

$$\mathbf{q}(\omega) = \mathbf{D}_{ae}^{-1}(\omega, U) \mathbf{F}_{bu}^*(\omega) = \mathbf{H}_{ae}(\omega, U) \mathbf{F}_{bu}^*(\omega), \quad (2.7)$$

où  $\mathbf{H}_{ae}(\omega, U)$  est la *fonction de réponse fréquentielle (FRF) aéroélastique modale*. Le terme  $[\mathbf{H}_{ae}]_{jk}$  donne l'amplitude complexe de la réponse du mode  $j$  sous une excitation unitaire du mode  $k$  ; les termes hors diagonale traduisent le couplage aéroélastique intermodal.

Le second membre  $\mathbf{F}_{bu}^*(\omega)$  étant un processus stochastique — hérité du caractère aléatoire du vent turbulent incident —, la caractérisation de la réponse  $\mathbf{q}(\omega)$  passe nécessairement par celle de ses propriétés du second ordre. C'est l'objet de la Section 2.5.

## 2.4 Stabilité aéroélastique et flottement

### 2.4.1 Mécanisme physique

L'équation du mouvement (2.1) fait apparaître les matrices aéroélastiques  $\mathbf{C}^{ae}(\omega, U)$  et  $\mathbf{K}^{ae}(\omega, U)$  qui s'ajoutent aux matrices structurales. Contrairement à  $\mathbf{C}_s$  et  $\mathbf{K}_s$ , toujours définies positives, les contributions aéroélastiques peuvent être de signe quelconque selon la fréquence et la vitesse du vent considérées.

L'interprétation physique de l'instabilité est directe. À faible vitesse, les forces self-excited dissipent de l'énergie mécanique : l'amortissement aéroélastique  $\mathbf{C}^{ae}$  contribue positivement à l'amortissement total et l'écoulement « freine » les oscillations de la structure. À mesure que  $U$  augmente, cette contribution peut diminuer, s'annuler, puis devenir négative. Lorsque l'amortissement effectif total  $\mathbf{C}_s + \mathbf{C}^{ae}$  "s'annule" <sup>1</sup>, toute perturbation infinitésimale est amplifiée exponentiellement dans le temps : la structure entre en flottement. La vitesse critique correspondante, notée  $U_{cr}$ , et la fréquence critique associée  $\omega_{cr}$ , caractérisent ce seuil d'instabilité.

Pour les sections de tablier, deux mécanismes distincts peuvent conduire au flottement. Pour les sections peu profilées (sections en H, tabliers en treillis), le mécanisme dominant est le *flottement à un degré de liberté en torsion* : la dérivée  $A_2^*$  devient positive sur une plage de fréquences réduites suffisante pour inverser l'amortissement effectif en torsion, sans qu'aucun couplage modal ne soit nécessaire. Pour les caissons aérodynamiques modernes (sections trapézoïdales fermées, typiques des ponts suspendus contemporains), plus stables en torsion pure, le mécanisme dominant est le *flottement par coalescence flexion-torsion* : un mode vertical et un mode torsionnel voient leurs fréquences propres effectives se rapprocher progressivement sous l'effet du couplage aéroélastique, jusqu'à coalescer à  $U_{cr}$ .

### 2.4.2 Formulation du problème de stabilité

Sur le plan mathématique, l'analyse de stabilité s'effectue sur le système homogène associé à (2.1), c'est-à-dire en l'absence de toute excitation extérieure ( $\mathbf{F}_{bu} = \mathbf{0}$ ). L'existence de solutions non triviales  $\mathbf{X}(\omega) \neq \mathbf{0}$  requiert que l'opérateur dynamique soit singulier, soit

$$\det \left[ -\omega^2 \mathbf{M} + i\omega (\mathbf{C}_s + \mathbf{C}^{ae}(\omega, U)) + (\mathbf{K}_s + \mathbf{K}^{ae}(\omega, U)) \right] = 0. \quad (2.8)$$

Cette condition fournit deux équations scalaires (parties réelle et imaginaire) pour les deux inconnues ( $U_{cr}, \omega_{cr}$ ). De manière équivalente, on peut chercher les vitesses pour lesquelles une valeur propre du système couplé devient purement imaginaire.

1. Dans un système à plusieurs degrés de liberté, cette annulation doit être comprise au sens d'une perte de stabilité du problème dynamique : la matrice dynamique effective devient singulière pour une fréquence et une vitesse données, ce qui correspond à l'apparition d'un mode instable.

### 2.4.3 Difficulté : la dépendance fréquentielle implicite

La résolution de (2.8) n'est pas immédiate. Les matrices aéroélastiques  $\mathbf{C}^{\text{ae}}$  et  $\mathbf{K}^{\text{ae}}$  dépendent elles-mêmes de  $\omega$  par l'intermédiaire de la fréquence réduite  $k = \omega B / \bar{U}$  et des dérivées de flottement  $H_i^*, A_i^*, P_i^*$  identifiées en soufflerie. Le problème n'est donc pas un problème aux valeurs propres standard.

Plusieurs méthodes itératives ont été développées pour contourner cette difficulté implicite. Parmi celles-ci, la *méthode  $p-k$* , initialement développée dans le domaine de l'aéroélasticité aéronautique [15], est aujourd'hui largement utilisée pour l'analyse du flottement des ponts de grande portée. Elle reformule le problème comme une suite de problèmes aux valeurs propres à fréquence fixée : pour chaque vitesse  $U$ , les dérivées de flottement sont évaluées à une fréquence réduite d'essai, les valeurs propres complexes du système couplé sont calculées, puis la fréquence d'essai est mise à jour à partir de la partie imaginaire des valeurs propres obtenues. Cette procédure est répétée jusqu'à convergence. La vitesse critique  $U_{\text{cr}}$  est alors identifiée comme la vitesse pour laquelle la partie réelle de l'une des valeurs propres s'annule, ce qui traduit l'annulation de l'amortissement effectif du mode concerné.

### 2.4.4 Importance pour le présent travail

Pour les ponts à tablier élancé, la vitesse critique de flottement constitue une borne absolue du dimensionnement : l'ouvrage doit être conçu de manière que  $U_{\text{cr}}$  demeure significativement supérieure à la vitesse de vent de projet, avec un coefficient de sécurité réglementaire. Dans la pratique d'un bureau d'études, le domaine d'analyse aéroélastique est borné par cette vitesse de projet, augmentée d'une marge de sécurité, et n'approche jamais  $U_{\text{cr}}$  : la stabilité de l'ouvrage doit être acquise par construction.

Le présent travail adopte une perspective différente, à vocation méthodologique. La construction des charges statiques équivalentes et leur compression en charges principales sont testées non seulement aux vitesses opérationnelles, mais aussi jusqu'au voisinage immédiat de  $U_{\text{cr}}$ . Ce choix répond à deux objectifs.

- D'une part, le voisinage de  $U_{\text{cr}}$  constitue le régime où les contributions aéroélastiques sont les plus marquées : les propriétés dynamiques effectives de la structure sont fortement modifiées, l'amortissement effectif tend vers zéro et le couplage modal devient prépondérant. C'est donc précisément le régime qui distingue le modèle quasi-stationnaire du modèle avec mémoire aérodynamique — aux vitesses modérées, les deux modèles fournissent des résultats voisins et la discussion perd son intérêt méthodologique.
- D'autre part, c'est dans ce régime que la signature spatiale des enveloppes diverge le plus fortement de celle obtenue à basse vitesse, sous l'effet de la redistribution modale induite par le couplage aéroélastique. Tester la procédure jusqu'à  $U_{\text{cr}}$  permet donc d'évaluer sa robustesse dans le cas le plus défavorable du point de vue de la reconstruction d'enveloppe.

La vitesse critique de flottement borne donc, pour le présent travail, non pas le domaine de validité d'un dimensionnement réel, mais le *domaine d'exploration* de la méthode. Le livrable final reste, lui, défini sur l'intervalle physique  $[0, U_{\text{cr}}]$ , étant entendu que son usage opérationnel se limiterait aux vitesses inférieures à la vitesse de projet augmentée de sa marge de sécurité.

Les moyens concrets mis en œuvre pour identifier  $U_{\text{cr}}$  sur le modèle du Humber Bridge sont précisés au Chapitre 8.

## 2.5 Réponse stochastique sous vent turbulent

Dans la suite, le calcul stochastique est réalisé sur une gamme de vitesses et une gamme de fréquences. Cette section présente la chaîne de calcul stochastique complète, à une vitesse  $U$ .

Ce développement est volontairement détaillé : il décrit exactement la chaîne stochastique implémentée dans le code, à laquelle le cas d'étude se réfèrera sans la redériver.

### 2.5.1 Spectres turbulents et cohérence spatiale

Les seules composantes retenues pour les efforts sur le tablier sont  $u$  et  $w$ . Les auto-spectres turbulents  $S_u(f)$  et  $S_w(f)$  ont été définis à la Section 1.2.2. Ils décrivent la répartition fréquentielle de l'énergie des fluctuations longitudinales  $u$  et verticales  $w$ . Pour une structure discrétisée en plusieurs sections, ces auto-spectres doivent être complétés par une description de la cohérence spatiale entre les sections.

Les matrices de spectres croisés turbulents sont construites sous la forme :

$$\mathbf{S}_{uu}(f) = S_u(f) \mathbf{\Lambda}_{uu}(f), \quad (2.9)$$

$$\mathbf{S}_{ww}(f) = S_w(f) \mathbf{\Lambda}_{ww}(f), \quad (2.10)$$

où  $\mathbf{\Lambda}_{uu}(f)$  et  $\mathbf{\Lambda}_{ww}(f)$  sont les matrices de cohérence évaluées entre toutes les paires de sections du tablier.

En négligeant les spectres croisés entre les composantes  $u$  et  $w$ , la matrice spectrale du champ turbulent incident s'écrit :

$$\mathbf{S}_{vv}(f) = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{uu}(f) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_{ww}(f) \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

avec

$$\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix}.$$

### 2.5.2 Spectre des forces de buffeting

Les forces de buffeting par unité de longueur ont été introduites à la Section 1.5.6. Elles relient les fluctuations turbulentes  $u$  et  $w$  aux fluctuations de traînée, de portance et de moment. Pour une section, elles s'écrivent

$$\begin{Bmatrix} F_{D,bu} \\ F_{L,bu} \\ F_{M,bu} \end{Bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{2}\rho U B \begin{bmatrix} \chi_{Du}^* & \chi_{Dw}^* \\ \chi_{Lu}^* & \chi_{Lw}^* \\ B\chi_{Mu}^* & B\chi_{Mw}^* \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}(U,f)} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix}. \quad (2.12)$$

où les coefficients d'admittance ont été définis à la Section 1.5.6.

Pour un tablier discrétisé en  $N$  sections, on note  $\mathbf{T}(U, f)$  l'assemblage bloc-diagonal des matrices sectionnelles (2.12) et  $\mathbf{S}_{vv}(f)$  la matrice spectrale  $2N \times 2N$  du champ turbulent (2.11), qui contient la cohérence inter-sections. La matrice spectrale des forces de buffeting linéiques s'en déduit par

$$\mathbf{S}_{FF}(f) = \mathbf{T}(U, f) \mathbf{S}_{vv}(f) \mathbf{T}^H(U, f), \quad (2.13)$$

l'exposant  $H$  désignant la transposée conjuguée.

Le passage aux efforts nodaux conserve l'écriture matricielle. En introduisant la matrice diagonale des longueurs d'influence  $\mathbf{L} = \text{diag}(\Delta x_1 \mathbf{I}_3, \dots, \Delta x_N \mathbf{I}_3)$ , qui intègre chaque effort linéique sur la longueur de son élément, la matrice spectrale des efforts élémentaires s'écrit

$$\mathbf{S}_{FF}^{\text{disc}}(f) = \mathbf{L} \mathbf{S}_{FF}(f) \mathbf{L}. \quad (2.14)$$

Ces efforts sont ensuite reportés aux noeuds du tablier par l'opérateur d'assemblage  $\mathbf{B}$ , fournissant la matrice spectrale nodale  $\mathbf{B} \mathbf{S}_{FF}^{\text{disc}}(f) \mathbf{B}^T$ , notée simplement  $\mathbf{S}_{FF}(f)$  dans la suite.

Ce passage du spectre linéique au spectre nodal est détaillé car il reflète directement l'assemblage réalisé dans le code : intégration de l'effort linéique sur la longueur d'influence, puis report aux noeuds par l'opérateur d'assemblage.

### 2.5.3 Spectre des sollicitations modales

Une fois la matrice spectrale des forces aérodynamiques exprimée dans la base physique des degrés de liberté du tablier, elle est projetée dans la base modale. Cette opération fournit la matrice spectrale des forces généralisées modales :

$$\mathbf{S}_{P^*P^*}(f) = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{S}_{FF}(f) \mathbf{\Phi}. \quad (2.15)$$

où le symbole  $*$  est utilisé pour "grandeur modale". Les termes diagonaux de  $\mathbf{S}_{P^*P^*}$  correspondent aux auto-spectres des sollicitations généralisées appliquées à chaque mode. Les termes hors diagonale représentent les spectres croisés entre sollicitations modales. Ces termes sont importants, car la turbulence et les forces aérodynamiques peuvent exciter simultanément plusieurs modes de manière corrélée.

Cette projection constitue un passage central de la chaîne de calcul. Elle permet de traiter la dynamique dans une base modale réduite, tout en conservant l'information spatiale contenue dans le champ de forces aérodynamiques.

### 2.5.4 Spectre de réponse modale et nodale

À partir du spectre des sollicitations modales et de la fonction de réponse fréquentielle, la matrice spectrale des coordonnées modales est obtenue par :

$$\mathbf{S}_{Q^*Q^*}(U, f) = \mathbf{H}(U, f) \mathbf{S}_{P^*P^*}(U, f) \mathbf{H}^H(U, f). \quad (2.16)$$

Cette matrice contient les auto-spectres des coordonnées modales sur sa diagonale et les spectres croisés entre coordonnées modales hors diagonale. Elle constitue la description fréquentielle complète de la réponse dynamique dans la base modale.

Les spectres des réponses physiques du tablier sont ensuite obtenus par retour dans la base nodale :

$$\mathbf{S}_{\eta\eta}(U, f) = \mathbf{\Phi} \mathbf{S}_{Q^*Q^*}(U, f) \mathbf{\Phi}^H. \quad (2.17)$$

La matrice  $\mathbf{S}_{\eta\eta}$  contient les spectres et spectres croisés des déplacements du tablier selon les trois directions considérées :

$$y, \quad z, \quad \theta.$$

On peut alors extraire, pour chaque nœud du tablier, les densités spectrales de puissance associées au déplacement latéral, au déplacement vertical et à la rotation :

$$S_{yy}(x_i, f), \quad S_{zz}(x_i, f), \quad S_{\theta\theta}(x_i, f). \quad (2.18)$$

Ces spectres permettent d'identifier les contributions modales dominantes, de vérifier l'influence des effets self-excited et de calculer les grandeurs statistiques par intégration fréquentielle.

### 2.5.5 Séparation background-résonant

Pour la suite du travail, il est nécessaire de distinguer la part de la réponse modale associée au background de celle associée aux amplifications résonantes. Cette séparation permet de traiter chaque contribution dans la base qui lui convient le mieux.

La contribution de background s'obtient en remplaçant, dans la fonction de réponse fréquentielle (Section 2.3), la réponse dynamique par sa limite quasi-statique  $\mathbf{H}_0(U) = \mathbf{H}_{ae}(U, f \rightarrow 0)$  :

$$\mathbf{S}_{Q^*Q^*}^{back}(U, f) = \mathbf{H}_0(U) \mathbf{S}_{P^*P^*}(U, f) \mathbf{H}_0^H(U). \quad (2.19)$$

La contribution résonante est alors obtenue par soustraction au spectre total  $\mathbf{S}_{Q^*Q^*}$  :

$$\mathbf{S}_{Q^*Q^*}^{res}(U, f) = \mathbf{S}_{Q^*Q^*}(U, f) - \mathbf{S}_{Q^*Q^*}^{back}(U, f). \quad (2.20)$$

### 2.5.6 Intégration fréquentielle et grandeurs statistiques

Les spectres obtenus précédemment ne constituent pas directement les grandeurs utilisées pour la construction des charges statiques équivalentes. Ils décrivent la répartition fréquentielle de l'énergie, mais les quantités nécessaires à la suite de l'analyse sont les moments statistiques associés, obtenus par intégration sur le domaine fréquentiel.

L'intégration des expressions introduites aux Sections 2.5.4 et 2.5.5 conduit ainsi, en base nodale pour les forces et en base modale pour les réponses, aux matrices de covariance suivantes [16] :

$$\mathbf{\Sigma}_{FF}(U) = \int_0^{+\infty} \mathbf{S}_{FF}(U, f) df, \quad \mathbf{\Sigma}_{Q^*Q^*}^{(\cdot)}(U) = \int_0^{+\infty} \mathbf{S}_{Q^*Q^*}^{(\cdot)}(U, f) df, \quad (2.21)$$

où  $(\cdot)$  désigne indifféremment la contribution totale, la contribution de background ou la contribution résonante.

Les écarts-types des réponses sont ensuite évalués en exploitant cette décomposition background-résonant. Chaque contribution est calculée dans la base où son expression est la plus naturelle. La contribution de background, essentiellement quasi-statique, est évaluée directement en base nodale à partir de la covariance des forces turbulentes. La contribution résonante, en revanche, est évaluée en base modale, car elle est directement liée à l'amplification dynamique des modes propres.

Pour une réponse  $\eta$  donnée, avec  $\eta \in \{y, z, \theta\}$ , considérée au nœud  $x_i$ , on introduit le vecteur d'influence statique  $\mathbf{a}_\eta(x_i)$ . Ce vecteur relie le champ de forces nodales à la réponse étudiée. Il correspond donc à la ligne appropriée de la matrice de flexibilité  $\mathbf{K}_s^{-1}$ , sa construction étant détaillée à la Section 9.2.

**Contribution de background.** La contribution de background correspond à la partie quasi-statique de la réponse au champ de forces turbulentes. Elle s'exprime donc naturellement à partir de la covariance nodale des forces, sans nécessiter de projection modale ni de troncature sur un nombre limité de modes. Pour la réponse  $\eta$  au nœud  $x_i$ , on obtient

$$\sigma_{\eta, \text{back}}^2(x_i, U) = \mathbf{a}_\eta(x_i)^T \mathbf{\Sigma}_{FF}(U) \mathbf{a}_\eta(x_i). \quad (2.22)$$

**Contribution résonante.** La contribution résonante est, quant à elle, associée à l'amplification dynamique des modes propres. Elle est donc calculée en base modale, puis projetée dans l'espace physique afin d'obtenir le spectre de la réponse considérée. En notant

$$\mathbf{S}_{\eta\eta}^{\text{res}} = \mathbf{\Phi} \mathbf{S}_{Q^*Q^*}^{\text{res}} \mathbf{\Phi}^H, \quad (2.23)$$

la variance résonante de la réponse  $\eta$  au nœud  $x_i$  s'écrit

$$\sigma_{\eta, \text{res}}^2(x_i, U) = \int_0^{+\infty} S_{\eta\eta}^{\text{res}}(x_i, U, f) df. \quad (2.24)$$

**Réponse totale.** La variance totale est finalement obtenue en sommant les contributions de background et résonante. Cette écriture suppose que la corrélation entre ces deux contributions est négligée, hypothèse couramment adoptée dans les formulations de type background-résonant :

$$\sigma_{\eta, \text{tot}}^2(x_i, U) = \sigma_{\eta, \text{back}}^2(x_i, U) + \sigma_{\eta, \text{res}}^2(x_i, U). \quad (2.25)$$

Cette décomposition fournit les écarts-types utilisés par la suite pour définir les enveloppes statistiques des réponses, puis pour construire les charges statiques équivalentes associées.

# 3 Charges statiques équivalentes ESWL

## 3.1 Principe : du chargement dynamique à la charge statique équivalente

La caractérisation stochastique fréquentielle développée au Chapitre 2 fournit l'ensemble des grandeurs nécessaires au dimensionnement aéroélastique d'un tablier : densités spectrales de la réponse, variances modales, décomposition fond-résonant, valeurs extrêmes attendues. Cette caractérisation est complète, mais elle requiert pour être exploitée un outil d'analyse spectrale aéroélastique spécifique — typiquement développé par un ingénieur vent —, absent du flux de travail standard d'un bureau d'études. Côté structure, l'analyse repose sur des cas de charge statiques combinables dans un modèle éléments finis avec les autres actions de dimensionnement.

Comblar cet écart entre l'analyse aéroélastique amont et le dimensionnement structurel aval est l'objet des *charges statiques équivalentes* (Equivalent Static Wind Loads, ESWL). Une ESWL est une distribution de force statique conçue pour reproduire, par une analyse linéaire élastique standard, la valeur extrême attendue d'une réponse cible donnée. Plusieurs familles de méthodes ont été développées depuis la fin des années 1960 pour construire ces distributions ; certaines d'entre elles sont reprises à la Figure 3.1.

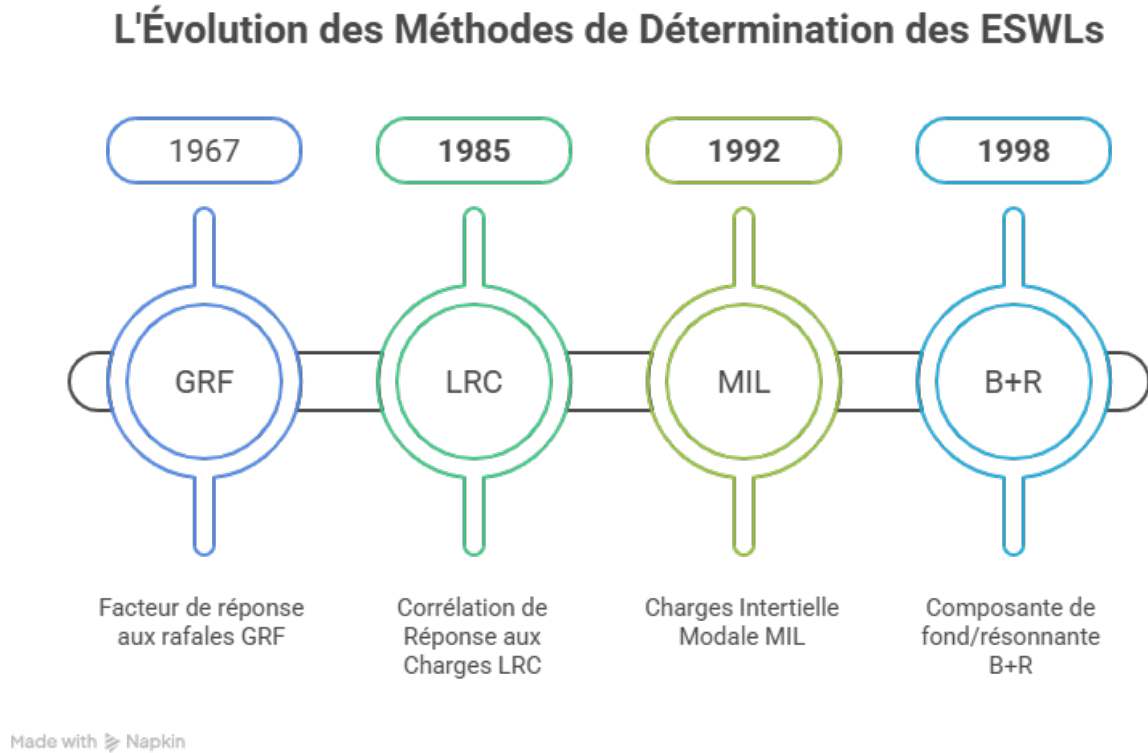


FIGURE 3.1 – Évolution des méthodes de détermination des ESWLs, adapté de [17]

Pour déterminer les *Equivalent Static Wind Loads* (ESWL), le problème se formule comme suit. On dispose d'un champ de pression de vent — issu de mesures en soufflerie ou d'une caractérisation statistique du champ turbulent — permettant de mener une analyse dynamique complète de la structure :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t), \quad (3.1)$$

où  $\mathbf{C} = \mathbf{C}_s + \mathbf{C}_{ae}$  et  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_s + \mathbf{K}_{ae}$  regroupent les contributions structurales et aéroélastiques (cf. Section 2.1).

Dans la suite, on se limite aux réponses d'intérêt pouvant être exprimées comme des combinaisons linéaires des déplacements nodaux  $\mathbf{x}(t)$ <sup>1</sup>. Pour une réponse scalaire donnée, telle qu'un déplacement, un effort interne ou une réaction d'appui, on introduit alors un vecteur d'influence  $\mathbf{a}$  tel que

$$z(t) = \mathbf{a}^T \mathbf{x}(t). \quad (3.2)$$

$$z(t) = \mathbf{a}^T \mathbf{x}(t), \quad z_{\max} = \max_t z(t). \quad (3.3)$$

Construire une ESWL revient à déterminer une distribution de force statique  $\mathbf{f}_E$  qui, appliquée à la structure **sur sa seule raideur structurale**  $\mathbf{K}_s$ , reproduise cette valeur extrême :

$$\mathbf{K}_s \mathbf{x}_E = \mathbf{f}_E \quad \text{et} \quad \mathbf{a}^T \mathbf{x}_E = z_{\max}. \quad (3.4)$$

L'utilisation de  $\mathbf{K}_s$  (et non  $\mathbf{K}_s + \mathbf{K}_{ae}$ ) traduit le principe même de la démarche : l'ingénieur structure applique  $\mathbf{f}_E$  comme un cas de charge classique dans son modèle éléments-finis, sans intégrer le couplage aéroélastique dans la résolution statique. Toute la complexité aéroélastique est donc transférée *en amont*, dans la construction de  $\mathbf{f}_E$ .

Les méthodes de détermination des ESWL peuvent être formulées à partir de grandeurs issues soit du domaine temporel, soit du domaine fréquentiel, selon les informations disponibles et l'approche retenue. Dans la suite de ce chapitre, on revient donc à l'équation du mouvement (1.1) afin d'introduire les grandeurs nécessaires à la construction des charges statiques équivalentes. Le lien avec la caractérisation fréquentielle développée au Section 2.1 sera établi au moyen des matrices de covariance des forces et des réponses, ainsi que par la décomposition background-résonante utilisée dans les formulations plus récentes.

## 3.2 Méthodes historiques

### 3.2.1 Facteur de réponse aux rafales (GRF)

L'une des premières approches développées pour déterminer les ESWL repose sur l'utilisation du facteur de réponse aux rafales (*Gust Response Factor*, GRF), introduit par Davenport en 1967 [18]. Dans cette méthode, la réponse maximale est exprimée sous la forme :

$$\mathbf{x}_{\max} = \bar{\mathbf{x}} + \Delta \mathbf{x}_{\max} = \bar{\mathbf{x}} + g \boldsymbol{\sigma}_x \quad (3.5)$$

$$= \bar{\mathbf{x}} \left( 1 + g \frac{\boldsymbol{\sigma}_x}{\bar{\mathbf{x}}} \right) = \text{GRF} \cdot \bar{\mathbf{x}}. \quad (3.6)$$

La charge statique équivalente associée s'écrit dès lors :

$$\mathbf{f}_E = \mathbf{K} \mathbf{x}_{\max} = \text{GRF} \cdot \mathbf{K} \bar{\mathbf{x}} = \text{GRF} \cdot \bar{\mathbf{f}}. \quad (3.7)$$

Cette méthode est encore largement utilisée dans les codes de calcul actuels. Le GRF est défini comme le rapport entre la réponse maximale  $z_{\max}$  et sa valeur moyenne  $z_{\text{mean}}$  sur une durée de référence donnée (par exemple 10 minutes).

Le GRF repose sur l'hypothèse implicite que les réponses extrêmes peuvent être obtenues par une simple amplification de la réponse moyenne. Cela revient à supposer que l'écart-type de la réponse est proportionnel à sa valeur moyenne en chaque point de la structure, de sorte qu'un facteur unique puisse être appliqué à l'ensemble des réponses. Cette hypothèse est restrictive : la part fluctuante dépend de la corrélation spatiale du chargement, des fonctions d'influence et, le cas échéant, des contributions modales. Elle ne suit donc pas nécessairement la même distribution spatiale que la réponse moyenne. Par conséquent, un facteur calibré pour reproduire correctement une réponse donnée peut conduire à une mauvaise reconstruction de l'enveloppe pour d'autres réponses. Cette

1. Ce n'est pas le cas de toutes les grandeurs de dimensionnement. Par exemple, la contrainte équivalente de von Mises dépend de manière non linéaire des composantes de contrainte.

limite a motivé le développement de méthodes tenant compte explicitement de la corrélation entre le chargement et la réponse, comme la méthode LRC (Section 3.2.2).

Enfin, puisque cette méthode consiste à amplifier la valeur moyenne par un facteur d'échelle ad hoc, elle n'est pas adaptée aux réponses dont la moyenne est nulle. Des méthodes alternatives ont donc été développées pour traiter ces situations particulières.

### 3.2.2 Corrélation de Réponse aux Charges (LRC)

Cette seconde méthode, développée au début des années 1990, notamment par Kasperski et Niemann [5], repose sur la corrélation statistique entre les charges de vent et les réponses structurelles. Elle s'appuie sur une hypothèse fondamentale : la structure est supposée se comporter de manière quasi-statique. Les effets d'inertie et d'amortissement sont donc négligés, de sorte qu'à chaque instant la configuration déformée dépend uniquement des forces appliquées au même instant.

Autrement dit, connaissant l'instant auquel la réponse atteint sa valeur maximale, on considère que la distribution de charges appliquée à cet instant est directement responsable de ce maximum, comme l'illustre la Figure 3.2.

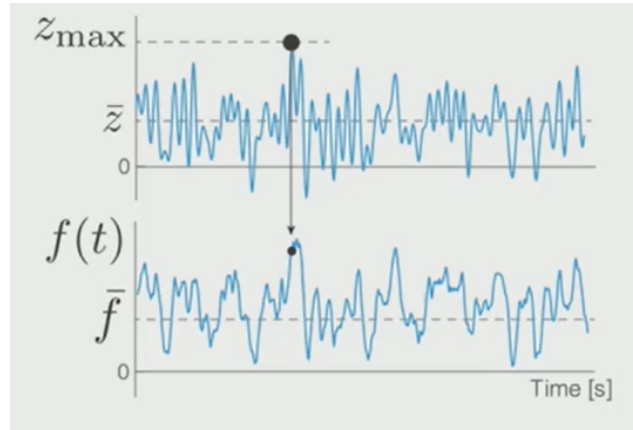


FIGURE 3.2 – Principe de la méthode LRC [17]

Dans toute la suite du travail, la composante moyenne de la réponse est traitée séparément. Elle est obtenue par une analyse statique sous l'action de la charge moyenne  $\bar{\mathbf{f}}$ . Les charges statiques équivalentes construites par les méthodes LRC, MIL puis LRC–MIL concernent donc uniquement la partie fluctuante de la réponse. La réponse maximale complète s'écrit alors sous la forme

$$z_{\max}^{\text{tot}} = \bar{z} + z_{\max}, \quad (3.8)$$

où  $z_{\max}$  désigne la contribution fluctuante maximale. Par souci de lisibilité, on notera simplement  $z(t)$  la partie fluctuante de la réponse dans la suite.

L'hypothèse quasi-statique élimine les termes d'inertie et d'amortissement, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_s \mathbf{x}(t) &= \mathbf{f}(t), \\ z(t) &= \mathbf{a}^T \mathbf{f}(t), \quad z_{\max} = \max_t z(t). \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\text{Trouver } \mathbf{f}_E \text{ tel que : } \quad \mathbf{K}_s \mathbf{x}_E = \mathbf{f}_E \quad \text{et} \quad \mathbf{a}^T \mathbf{f}_E = z_{\max}.$$

La réponse d'intérêt s'écrit alors :

$$z(t) = \mathbf{a}^T \mathbf{f}(t). \quad (3.10)$$

Et la valeur maximale de la partie fluctuante de la réponse est estimée par :

$$z_{\max} = g\sigma_z, \quad (3.11)$$

où  $g$  est le facteur de pointe et  $\sigma_z$  l'écart-type de la réponse fluctuante. Étant donné que  $z = \mathbf{a}^T \mathbf{f}$ , la variance de la réponse s'écrit :

$$\text{Var}(\mathbf{a}^T \mathbf{f}) = \mathbf{a}^T \boldsymbol{\Sigma}_{FF} \mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad \sigma_z^2 = \mathbf{a}^T \boldsymbol{\Sigma}_{FF} \mathbf{a}, \quad (3.12)$$

où  $\boldsymbol{\Sigma}_{FF}$  désigne la matrice de covariance des forces fluctuantes. On peut alors réécrire l'expression du maximum sous la forme :

$$z_{\max} = g\sigma_z = \mathbf{a}^T \left( g \frac{\boldsymbol{\Sigma}_{FF} \mathbf{a}}{\sigma_z} \right). \quad (3.13)$$

En introduisant le vecteur

$$\mathbf{P}_e^{LRC} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}_{FF} \mathbf{a}}{\sigma_z}, \quad (3.14)$$

on obtient finalement :

$$z_{\max} = \mathbf{a}^T (g \mathbf{P}_e^{LRC}), \quad (3.15)$$

ce qui conduit à la charge statique équivalente fluctuante :

$$\mathbf{f}_E = g \mathbf{P}_e^{LRC}. \quad (3.16)$$

Dans le cadre de la méthode LRC, la charge statique équivalente s'interprète comme une combinaison pondérée des forces fluctuantes, les pondérations étant proportionnelles aux coefficients de corrélation entre la réponse étudiée et chacune des composantes de charge. La distribution obtenue reflète ainsi l'intensité du lien statistique entre les sollicitations locales et l'effet structural considéré.

En pratique, les essais en soufflerie fournissent les séries temporelles des forces aérodynamiques appliquées sur la structure. La réponse est ensuite reconstruite à l'aide de la relation statique adoptée. L'instant correspondant au maximum de la réponse est identifié, et la distribution de charges observée à cet instant constitue directement la charge statique équivalente recherchée.

L'intérêt principal de cette approche réside dans sa clarté d'interprétation : la charge équivalente correspond à un état effectivement observé au cours de l'histoire temporelle, ce qui lui confère une signification physique immédiate. De plus, la méthode ne conduit pas à un dépassement artificiel de l'enveloppe des réponses exactes : l'application de cette charge ne génère aucune réponse supérieure à celles obtenues par l'analyse complète.

Cependant, l'hypothèse quasi-statique sous-jacente limite naturellement le domaine de validité de la méthode. Elle est particulièrement adaptée aux structures dont la réponse est dominée par la composante de background, c'est-à-dire lorsque les effets quasi-statiques prévalent sur les contributions résonantes. Dans ces situations, la réponse instantanée est fortement corrélée au champ de pression appliqué à l'instant considéré, ce qui rend l'approche cohérente et pertinente. Pour des structures élancées ou faiblement amorties, la déformée au pic de réponse correspond à la forme du mode excité, qui n'est pas la déformée statique sous la distribution de charge instantanée. La LRC sous-estime alors la contribution résonante, qui peut représenter une fraction significative de la réponse totale dans les modes peu amortis. Historiquement, la méthode LRC a donc été principalement appliquée à des structures connues pour présenter une réponse dominée par la composante de background. Cette limite a motivé le développement de formulations capables d'intégrer explicitement les contributions modales et les effets dynamiques.

### 3.2.3 Charges Inertielles Modales (MIL)

Comme expliqué à la section précédente, la méthode LRC n'est pas adaptée aux situations où la réponse est largement gouvernée par des effets dynamiques modaux. Pour illustrer cette limitation, on reprend l'exemple proposé par Denoël [19] : considérons une poutre simplement appuyée soumise à une action de vent localisée à mi-travée, par exemple via un panneau de signalisation fixé en son centre (voir Figure 3.3).

Dans le cadre de la méthode LRC, les ESWL sont appliquées uniquement aux endroits où les charges de vent se développent effectivement. En négligeant la traînée sur la poutre supportant le panneau, la charge équivalente serait donc concentrée à mi-travée. La charge statique équivalente obtenue correspondrait alors à une charge ponctuelle centrale, générant un diagramme des moments bi-triangulaire.

Toutefois, si la sollicitation réelle induit une réponse dominée par un phénomène résonant, la configuration déformée associée au pic de réponse adopte la forme modale du mode propre excité. Pour une poutre simplement appuyée, cette déformée est sinusoidale, et diffère donc fondamentalement de la forme triangulaire du diagramme des moments obtenu par l'application d'une charge ponctuelle centrale.

Cet exemple met en évidence que la méthode LRC reproduit sensiblement la distribution spatiale des charges réellement appliquées, mais ne restitue pas nécessairement la configuration dynamique associée à une réponse modale dominante (en cas de réponse résonante). Cela explique pourquoi la méthode LRC est particulièrement adaptée aux réponses structurales dominées par la composante de background, pour lesquelles l'hypothèse quasi-statique reste pertinente.

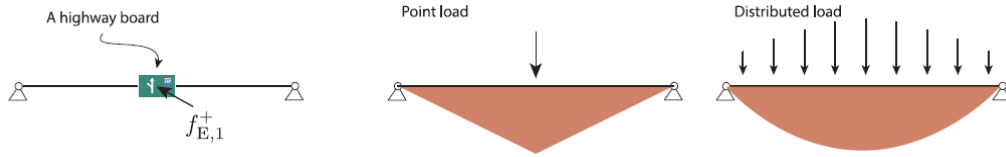


FIGURE 3.3 – Exemple d'une poutre simplement appuyée avec un chargement de vent uniquement à mi-portée [19].

La méthode des charges inertielles modales (MIL), introduite par Davenport [1](1985) puis Holmes [6](1999), constitue une réponse naturelle à cette limitation. Elle repose sur l'hypothèse que le champ de déplacement peut être exprimé comme une combinaison linéaire des modes propres  $\Phi_j$  de la structure. On introduit ainsi le développement modal :

$$\mathbf{X} = \sum_j \Phi_j q_j. \quad (3.17)$$

En utilisant la relation d'orthogonalité modale  $\mathbf{K}\Phi_j = \mathbf{M}\Phi_j\omega_j^2$ , il vient :

$$\mathbf{K}\mathbf{X} = \sum_j \mathbf{K}\Phi_j q_j = \sum_j \mathbf{M}\Phi_j\omega_j^2 q_j = \sum_j \mathbf{P}_{ej0} q_j, \quad (3.18)$$

où  $\omega_j = 2\pi f_j$ ,  $\Phi_j$  désigne le mode propre,  $q_j$  l'amplitude modale associée au  $j^{\text{ème}}$  mode, et

$$\mathbf{P}_{ej0} = \mathbf{M}\Phi_j\omega_j^2 \quad (3.19)$$

représente la charge inertielle modale unitaire. Cette dernière correspond à la force d'inertie associée au mode  $j$  pour une amplitude modale unitaire.

Cette écriture montre que la réponse dynamique peut être interprétée comme une réponse quasi-statique soumise à une excitation constituée des charges inertielles modales.

Une fois les amplitudes modales déterminées, toute réponse dynamique d'intérêt  $z(x_0, t)$  (moment fléchissant, effort tranchant, effort normal, etc.) peut être obtenue par une analyse statique via le vecteur d'influence  $\mathbf{a}$  :

$$z(x_0, t) = \mathbf{a}^T \sum_j \mathbf{P}_{ej0} q_j = \sum_j \rho_j q_j = \sum_j z_j, \quad (3.20)$$

où  $\rho_j = \mathbf{a}\mathbf{P}_{ej0}$  et  $z_j$  désigne la contribution du mode  $j$  à la réponse totale.

L'objectif n'est pas de reconstruire l'historique complet de  $z(x_0, t)$ , mais d'en déterminer la valeur maximale. Les amplitudes modales  $q_j(t)$  étant des processus stochastiques, leur combinaison ne peut être directe : il faut prendre en compte les corrélations modales via la règle CQC (Complete Quadratic Combination) :

$$z_{\max} = g\sigma_z = g \left( \sum_j \sum_k \sigma_{z_j} \sigma_{z_k} r_{jk} \right)^{1/2}, \quad (3.21)$$

où  $\sigma_{q_j}$  et  $\sigma_{z_j}$  sont respectivement les écarts-types de  $q_j$  et  $z_j$ , et  $r_{jk}$  le coefficient de corrélation entre les modes  $j$  et  $k$ .

On a

$$\sigma_{z_j} = \rho_j \sigma_{q_j} = \mathbf{a}^T \mathbf{P}_{ej}, \quad \text{avec} \quad \mathbf{P}_{ej} = \mathbf{P}_{ej0} \sigma_{q_j}. \quad (3.22)$$

La réponse maximale peut ainsi être interprétée comme résultant d'une combinaison statique des charges inertielles modales, pondérées par leurs contributions statistiques et leurs corrélations.

De manière alternative, l'équation (3.21) peut être reformulée selon une écriture de type LRC :

$$z_{\max} = g \sum_j \sigma_{z_j} \frac{\sum_k r_{jk} \sigma_{z_k}}{\sigma_z} = g \mathbf{a}^T \sum_j \mathbf{P}_{ej} W_j, \quad (3.23)$$

où

$$W_j = \sum_k \frac{r_{jk} \sigma_{z_k}}{\sigma_z} = \sum_k \frac{r_{jk} \rho_k \sigma_{q_k}}{\sigma_z} \quad (3.24)$$

désigne le facteur de pondération modal tenant compte des corrélations intermodales. La charge statique équivalente correspondant au pic de  $z(x_0, t)$  s'écrit finalement :

$$\mathbf{f}_E = g \sum_j \mathbf{P}_{ej} W_j. \quad (3.25)$$

### 3.3 Combinaison des méthodes MIL–LRC

Aucune des deux méthodes précédentes n'est complète : la LRC rate le résonant, la MIL rate le background. Une analyse rigoureuse des réponses extrêmes d'un tablier élané requiert donc une construction de l'ESWL qui combine les deux contributions, chacune traitée par la méthode qui lui est adaptée. Cette combinaison repose directement sur la décomposition background–résonant établie à la Section 2.5.6, qui sépare au niveau de la variance les deux régimes spectraux de la réponse :

$$\sigma_z^2 = \sigma_{z,b}^2 + \sigma_{z,r}^2. \quad (3.26)$$

La méthode LRC–MIL exploite cette décomposition au niveau du chargement : la composante de background est traitée par LRC à partir de la covariance des forces de background  $\Sigma_{FF}$ , la composante résonante par MIL sur les modes effectivement excités. Les deux contributions sont ensuite recombinées par une somme pondérée par leurs poids statistiques respectifs.

En supposant que les forces auto-excitées induites par la réponse de background soient négligeables<sup>2</sup>, la réponse de background, sa valeur de pic et la charge statique équivalente associée

---

2. Les forces *self-excited* contiennent à la fois des termes assimilables à un amortissement aérodynamique, proportionnels aux vitesses structurales, et des termes assimilables à une raideur aérodynamique, proportionnels aux déplacements. L'hypothèse consiste ici à négliger l'effet des forces auto-excitées associées à la composante de background, supposée principalement quasi-statique et dominée par les basses fréquences, par rapport aux contributions résonantes où l'interaction mouvement–vent est prépondérante.

s'écrivent :

$$z_b(x_0, t) = \mathbf{A}\mathbf{F}_b, \quad (3.27)$$

$$z_{b,\max} = g\sigma_{z_b} = g \frac{\mathbf{A}\Sigma_{FF}\mathbf{A}^\top}{\sigma_{z_b}}, \quad (3.28)$$

$$\mathbf{P}_{eb} = \frac{\Sigma_{FF}\mathbf{A}^\top}{\sigma_{z_b}}, \quad (3.29)$$

où  $\mathbf{F}_b$  désigne la composante de background du vecteur des forces  $\mathbf{F}$ .

La réponse résonante ainsi que les charges inertielles modales sont quant à elles obtenues par une analyse modale, conformément à la méthode MIL présentée précédemment. La valeur totale du pic de réponse peut alors s'exprimer sous la forme :

$$z_{\max} = g\sigma_z = g\sqrt{\sigma_{z_b}^2 + \sigma_{z_r}^2} = g \left( \sigma_{z_b}W_b + \sum_j \sigma_{z_{jr}}W_{jr} \right) = g\mathbf{A} \left( \mathbf{P}_{eb}W_b + \sum_j \mathbf{P}_{ejr}W_{jr} \right), \quad (3.30)$$

où  $W_b$  et  $W_{jr}$  sont des facteurs de pondération tenant compte des corrélations respectives et s'écrivant :

$$W_b = \frac{\sigma_{z_b}}{\sigma_z} \quad \text{et} \quad W_{jr} = \frac{\sum_k r_{jk}\sigma_{z_{kr}}}{\sigma_z} \quad (3.31)$$

On en déduit que la distribution de charge statique équivalente totale peut être écrite comme :

$$\mathbf{F}_e = g \left( \mathbf{P}_{eb}W_b + \sum_j \mathbf{P}_{ejr}W_{jr} \right). \quad (3.32)$$

### 3.4 Limites des ESWL individuelles

Les méthodes présentées dans ce chapitre permettent de construire *une* distribution de charge statique équivalente, calibrée pour reproduire la valeur extrême d'*une* réponse cible à *une* vitesse de vent donnée. Toute autre réponse, en tout autre point, et à toute autre vitesse, échappe à la garantie de reproduction.

Or, le dimensionnement d'un tablier de pont mobilise simultanément de nombreuses réponses — déplacements et efforts internes en plusieurs sections, efforts dans les câbles, réactions d'appui — sur un panel de vitesses couvrant l'ensemble du domaine de fonctionnement jusqu'au voisinage de  $U_{cr}$ . La reconstruction complète des enveloppes correspondantes requiert donc *une ESWL distincte par couple (réponse cible, vitesse, modèle aérodynamique)*, soit rapidement plusieurs centaines de distributions. Chacune doit être archivée, transmise à l'ingénieur structure, et intégrée comme un cas de charge dans le modèle EF : un livrable d'une telle volumétrie est incompatible avec un flux de travail standard de bureau d'études.

C'est cette explosion combinatoire qui motive le passage des charges statiques équivalentes *individuelles* (ESWL) aux *charges statiques principales* (PSWL), introduites au chapitre suivant : une base réduite de quelques distributions adimensionnées, combinables linéairement pour reconstruire l'ensemble des enveloppes du panel.

Les outils théoriques sont maintenant posés ; il reste à les appliquer à un ouvrage réel suffisamment sensible aux effets aéroélastiques.

# 4 Charges statiques principales (PSWL)

## 4.1 Motivation : du singulier au pluriel

Pour une structure complexe telle qu'un pont de grande portée, les réponses d'intérêt sont nombreuses : déplacements nodaux à chaque position du tablier, moments fléchissants, efforts tranchants, réactions d'appui etc. Chacune de ces réponses génère sa propre ESWL. En notant  $n_z$  le nombre total de réponses considérées et  $n$  le nombre de degrés de liberté chargés, on aboutit naturellement à une matrice d'ESWLs

$$\mathbf{F}_E = \left( \mathbf{f}_E^{(1)}, \mathbf{f}_E^{(2)}, \mathbf{f}_E^{(3)}, \dots, \mathbf{f}_E^{(n_z)} \right) \in \mathbb{R}^{n \times n_z}, \quad (4.1)$$

où chaque colonne est la charge statique équivalente nécessaire pour reproduire la valeur extrême d'une réponse particulière. On suppose dans ce chapitre que chacune des  $n_z$  réponses cibles a donné lieu à la construction d'une ESWL individuelle par la méthode LRC-MIL, à une vitesse de vent fixée. L'extension à plusieurs vitesses sera traitée à la Part IV.

Considérer individuellement chacune de ces ESWLs pour le dimensionnement reviendrait à appliquer  $n_z$  cas de charge indépendants à la structure, ce qui est impraticable et, surtout, redondant. Pour une structure élancée dont la réponse est dominée par un petit nombre de modes propres, les ESWLs associées à des réponses voisines sont fortement corrélées : leurs distributions spatiales se ressemblent. Autrement dit, les  $n_z$  colonnes de  $\mathbf{F}_E$  vivent dans un sous-espace de dimension bien inférieure à  $n_z$ . Les *charges statiques principales du vent* (Principal Static Wind Loads, PSWL), introduites par Blaise et Denoël [3], sont l'outil mathématique qui permet d'identifier et d'exploiter cette redondance.

## 4.2 Définition géométrique : forme et amplitude

Chaque ESWL  $\mathbf{f}_E^{(i)}$  peut être vue comme un vecteur dans l'espace des charges  $\mathbb{R}^n$ , où chaque composante correspond à l'amplitude appliquée à un degré de liberté du modèle éléments finis. Lorsqu'on reporte l'ensemble des  $n_z$  ESWLs dans cet espace, on observe typiquement un nuage de vecteurs alignés préférentiellement selon quelques directions privilégiées (Figure 4.1).

Ce qui distingue physiquement deux ESWLs n'est pas leur norme — qui dépend de l'amplitude de la réponse cible considérée — mais leur orientation dans l'espace des charges, c'est-à-dire la forme de la distribution spatiale des efforts. Cette distinction entre forme et amplitude est analogue à celle qui prévaut en analyse modale : un mode propre  $\Phi_m$  représente une forme adimensionnée et toute son information dimensionnelle est portée par la coordonnée modale  $q_m(t)$ . De la même manière, on souhaite construire une base de formes de chargement adimensionnées, dont l'amplitude sera ensuite reportée sur des coefficients de combinaison.

La décomposition en valeurs singulières (SVD) de la matrice  $\mathbf{F}_E$  fournit, par construction, la base orthonormée optimale pour décrire ce nuage :

$$\mathbf{F}_E = \mathbf{F}_P \mathbf{S} \mathbf{V}^T, \quad (4.2)$$

où :

- $\mathbf{F}_P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  contient en colonnes les directions principales de chargement : ce sont les PSWL. Par propriété de la SVD, ces colonnes sont orthonormées, donc adimensionnées et de norme unitaire.
- $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n \times n_z}$  est la matrice diagonale des valeurs singulières  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq 0$ , classées par ordre décroissant. Chaque  $\sigma_k$  quantifie l'importance de la PSWL correspondante dans la description du nuage.
- $\mathbf{V}^T \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$  contient les coefficients de projection : sa colonne  $i$  donne les coordonnées de la  $i$ -ème ESWL dans la base des PSWL.

La première colonne  $\mathbf{F}_{P,1}$  est la distribution de charge statique qui maximise la projection de l'ensemble des ESWLs : elle représente la « forme de chargement la plus représentative » du nuage.

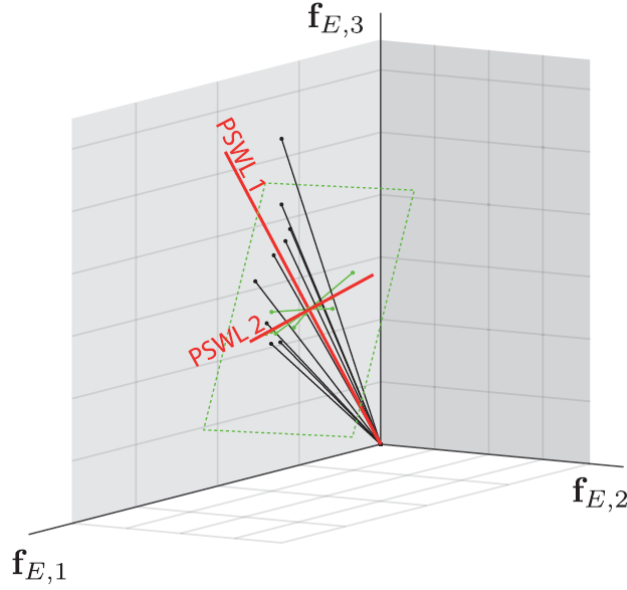


FIGURE 4.1 – Représentation conceptuelle des ESWLs comme vecteurs dans l'espace des charges et des PSWL comme directions principales de ce nuage, adapté de [19].

Toute ESWL initiale peut alors être reconstruite comme combinaison linéaire des PSWL :

$$\mathbf{f}_E^{(i)} = \sum_{k=1}^n V_{ik} \sigma_k \mathbf{F}_{P,k}. \quad (4.3)$$

#### 4.2.1 Troncature et complexité aérodynamique-structurale

L'intérêt pratique de la SVD vient du fait que, pour une structure dont la réponse est dominée par quelques modes, les valeurs singulières décroissent rapidement. Au-delà d'un certain rang  $n_P$ , les termes  $\sigma_k$  deviennent négligeables devant  $\sigma_1$  et les PSWL correspondantes n'apportent plus d'information significative.

On définit alors la *complexité aérodynamique-structurale* [19] comme le nombre  $n_P$  minimal de PSWL nécessaire pour reconstruire l'ensemble des ESWLs avec une précision satisfaisante, typiquement fixée par le critère énergétique

$$\frac{\sum_{i=1}^{n_P} \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^{\min(n, n_z)} \sigma_i^2} \geq 0.90 \text{ à } 0.95. \quad (4.4)$$

Cette grandeur  $n_P$  est une propriété intrinsèque du couple (structure, chargement aérodynamique). Une faible valeur traduit soit une dominance modale forte, soit un champ de pression spatialement cohérent, soit une combinaison des deux. Une valeur élevée signale au contraire une interaction riche entre de multiples modes structuraux et un chargement peu cohérent.

La complexité aéro-structurale est qualifiée d'« aérodynamique-structurale » car sa détermination requiert simultanément la matrice de raideur (pour le problème statique), la base modale (pour la part résonnante via MIL) et la covariance du chargement turbulent (pour la part de background via LRC). Elle synthétise en un seul nombre la richesse combinée de la dynamique structurale et du champ aérodynamique.

#### 4.2.2 Reconstruction de l'enveloppe à partir des PSWL

Étant donnée une enveloppe cible ( $\mathbf{z}_{\min}, \mathbf{z}_{\max}$ ) issue de l'analyse dynamique, on cherche un petit nombre de cas de charge statiques qui, appliqués à la structure, reproduisent cette enveloppe avec une précision acceptable. Contrairement aux ESWLs individuelles produites par LRC-MIL, les PSWL ne

sont pas associées à une valeur extrême d'une réponse particulière : elles résultent d'une décomposition algébrique et leur amplitude est arbitraire (norme unitaire). Elles doivent donc être mises à l'échelle dans le cadre de la reconstruction.

La stratégie retenue dans ce travail consiste à chercher directement la combinaison linéaire  $\mathbf{f}_E = \sum_{k=1}^{n_P} v_k \mathbf{F}_{P,k}$  dont les coefficients  $v_k$  minimisent l'écart à l'enveloppe cible, sous contrainte de non-dépassement local. Les PSWL restent des distributions adimensionnées de norme unitaire ; ce sont les coefficients  $v_k$  qui portent l'information dimensionnelle et qui dépendent de la réponse cible et de la vitesse moyenne du vent. Cette formulation est présentée par Denoël [19] comme la plus performante dans le cas général, et elle constitue le cadre opérationnel développé en Part IV.

## Deuxième partie

### Cas d'étude et modèle : le Humber Bridge

# 5 Présentation du Humber Bridge

## 5.1 Description générale et ordres de grandeur

Le Humber Bridge est un pont suspendu de grande portée situé dans le nord-est de l'Angleterre. Il franchit l'estuaire du Humber et relie Hessle, au Nord, à Barton, au Sud. Mis en service en 1981, il a détenu le record mondial de portée pour un pont suspendu jusqu'à l'ouverture de l'Akashi-Kaikyo en 1998 ; il figure aujourd'hui parmi les ponts suspendus de plus grande portée au monde.

Le tablier est un caisson aérodynamique fermé en acier (*streamlined box girder*). Les pylônes sont des caissons creux en béton fortement armés. Les dimensions principales de l'ouvrage sont rassemblées dans le Tableau 5.1.

|                                          |                      |
|------------------------------------------|----------------------|
| Travée principale                        | 1 410 m              |
| Travée latérale Hessle                   | 280 m                |
| Travée latérale Barton                   | 530 m                |
| Longueur totale                          | 2 220 m              |
| Hauteur totale des pylônes               | 155,5 m              |
| Hauteur des pylônes au-dessus du tablier | 133 m                |
| Flèche du câble en travée principale     | 115,5 m              |
| Largeur du tablier (corniches incluses)  | 28,5 m               |
| Hauteur du tablier                       | 4,5 m                |
| Distance entre câbles porteurs           | 21,96 m              |
| Section totale des deux câbles porteurs  | 0,362 m <sup>2</sup> |

TABLE 5.1 – Caractéristiques géométriques principales du Humber Bridge, d'après [20].

Le rapport entre la portée principale et la hauteur du tablier vaut environ 313, ce qui traduit l'extrême élancement de l'ouvrage et explique la sensibilité de ses premiers modes aux effets dynamiques du vent.

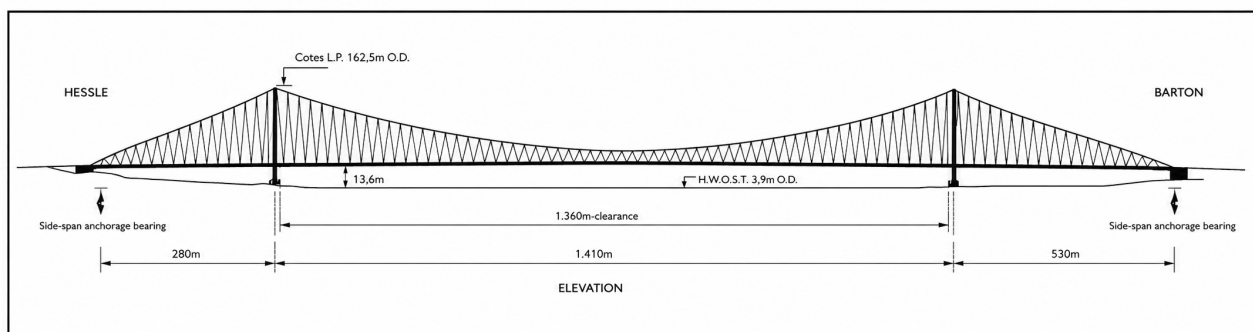


FIGURE 5.1 – Elévation Humber Bridge (adapté de [21])

## 5.2 Pertinence du cas d'étude

La grande portée et l'élancement marqué du tablier confèrent au Humber Bridge une flexibilité importante et des fréquences propres basses. Ces caractéristiques rendent l'ouvrage particulièrement sensible aux effets dynamiques du vent et en font un cas d'étude pertinent pour tester une méthodologie ESWL-PSWL intégrant les effets aéroélastiques.

Les mesures modales effectuées in situ par Brownjohn *et al.* [22] donnent un premier mode vertical *antisymétrique* à 0,117 Hz, un premier vertical *symétrique* à 0,154 Hz et une torsion symétrique

fondamentale à 0,311 Hz. C'est ce dernier couple, de même symétrie, qui gouverne le mécanisme de coalescence : le rapport  $f_T/f_V \approx 0,311/0,154 \approx 2,0$  est suffisamment faible pour qu'un couplage flexion-torsion s'installe avant l'instabilité. L'analyse menée par Bakis *et al.* [20] sur base de la théorie de la plaque plane (coefficients de Theodorsen) confirme cette sensibilité : la vitesse critique de flutter y est estimée à environ 65 m/s.

Le cas du Humber Bridge présente ainsi un intérêt méthodologique particulier : il permet de comparer, sur un même ouvrage, un régime de basses vitesses où le comportement reste proche d'une réponse quasi-stationnaire, un régime intermédiaire où les effets aéroélastiques deviennent progressivement visibles, et un régime proche de la vitesse critique où la mémoire aérodynamique et les couplages modaux jouent un rôle déterminant.

Le choix du Humber Bridge tient également à la disponibilité des données. Bakis *et al.* [20] fournissent un jeu cohérent et complet de paramètres structurels, et les campagnes de mesures de Brownjohn *et al.* [22] offrent une référence modale expérimentale indépendante, qui servira de validation au modèle FINELG construit dans la suite.

Une limitation doit cependant être signalée : les résultats d'essais en soufflerie spécifiques au Humber n'ont pu être obtenus, et ni les coefficients aérodynamiques statiques ni les dérivées de Scanlan ne sont donc disponibles pour cet ouvrage. Cette absence est contournée par le recours à la théorie de la plaque plane de Theodorsen. Le code développé dans le cadre de ce travail reste pleinement compatible avec un jeu de coefficients mesurés et de dérivées de flutter expérimentales : leur substitution ne demande qu'un changement de fichier de données, sans modification de la chaîne de traitement.

# 6 Modèle éléments finis du Humber

Le modèle éléments finis développé dans cette section n'a pas pour objectif de reproduire exhaustivement tous les détails constructifs du Humber Bridge. Il vise plutôt à fournir un support structural cohérent, suffisamment représentatif des propriétés modales globales de l'ouvrage, afin de tester la chaîne de calcul aéroélastique et la construction des charges statiques équivalentes.

## 6.1 Source des paramètres physiques

Les paramètres géométriques et mécaniques utilisés pour construire le modèle s'appuient principalement sur les données rapportées par Bakis *et al.* [20]. Ces données sont reprises ci dessous.

| Élément | Propriété                                 | Valeur                                         |
|---------|-------------------------------------------|------------------------------------------------|
| Tablier | Module d'élasticité de Young              | $E = 210 \times 10^9 \text{ N/m}^2$            |
|         | Module de cisaillement                    | $G = 80,8 \times 10^9 \text{ N/m}^2$           |
|         | Longueur d'élément                        | $L = 100 \text{ m}$                            |
|         | Demi-largeur du tablier                   | $b = 14,25 \text{ m}$                          |
|         | Masse du tablier                          | $m_g = 13215 \text{ kg/m}$                     |
|         | Masse en rotation (incluant les câbles)   | $J = 1,05 \times 10^6 \text{ kg m}^2/\text{m}$ |
|         | Moment d'inertie selon l'axe horizontal   | $I_y = 2,09 \text{ m}^4$                       |
|         | Moment d'inertie selon l'axe vertical     | $I_z = 41,24 \text{ m}^4$                      |
|         | Moment d'inertie en torsion               | $I_t = 4,49 \text{ m}^4$                       |
| Câbles  | Module d'élasticité de Young              | $E_c = 155,5 \times 10^9 \text{ N/m}^2$        |
|         | Aire de section transversale              | $A_c = 0,362 \text{ m}^2$                      |
|         | Demi-distance entre les câbles principaux | $b_c = 10,98 \text{ m}$                        |
|         | Diamètre                                  | $d_c = 0,68 \text{ m}$                         |
|         | Masse des câbles principaux (deux câbles) | $m_c = 3000 \text{ kg/m}$                      |
|         | Flèche du câble principal                 | $f = 115,5 \text{ m}$                          |
|         | Longueur de la suspente la plus courte    | $h_{e,\min} = 17,5 \text{ m}$                  |

TABLE 6.1 – Propriétés mécaniques et géométriques du modèle de pont

## 6.2 Stratégie de modélisation

### 6.2.1 Outil de modélisation

La méthodologie ESWL–PSWL développée dans ce travail repose sur une analyse fréquentielle de la réponse aéroélastique du pont, qui requiert au préalable la construction d'un modèle éléments finis fournissant les caractéristiques modales et la matrice de raideur. Le logiciel FINELG est retenu à cette fin. Développé conjointement par le bureau d'études Greisch et l'Université de Liège, ce code éléments finis non linéaire est adapté au calcul des structures de génie civil de grande portée et permet aussi bien des analyses linéaires et non linéaires statiques que des analyses dynamiques sous vent turbulent, avec ou sans prise en compte du couplage aéroélastique.

La chaîne de calcul est complétée par un code Python développé spécifiquement pour ce travail. Reprenant en entrée les modes propres et les matrices structurales fournis par FINELG, ce code met en œuvre l'ensemble des opérations conduisant à la détermination des charges statiques équivalentes puis des charges principales. Sa description fait l'objet d'une section ultérieure ; la présente section se concentre sur le modèle éléments finis.

Bien que ce travail s'inspire fortement de Bakis *et al.* [20] pour la modélisation du pont, l'ensemble des hypothèses sont reprises et discutées explicitement ci-dessous afin que le modèle reste entièrement traçable.

### 6.2.2 Hypothèses générales

Voici les hypothèses générales du modèle énumérées par catégorie.

**Géométrie longitudinale.** Comme dans l'article de référence, les longueurs de travées sont arrondies par rapport aux dimensions réelles de l'ouvrage. La travée principale est prise à 1 400 m et les travées latérales à 300 m côté Hessle et 500 m côté Barton. En ce qui concerne le tablier, il est supposé plat (ce n'est pas le cas en réalité). La vue d'ensemble est représentée à la Figure 6.1.

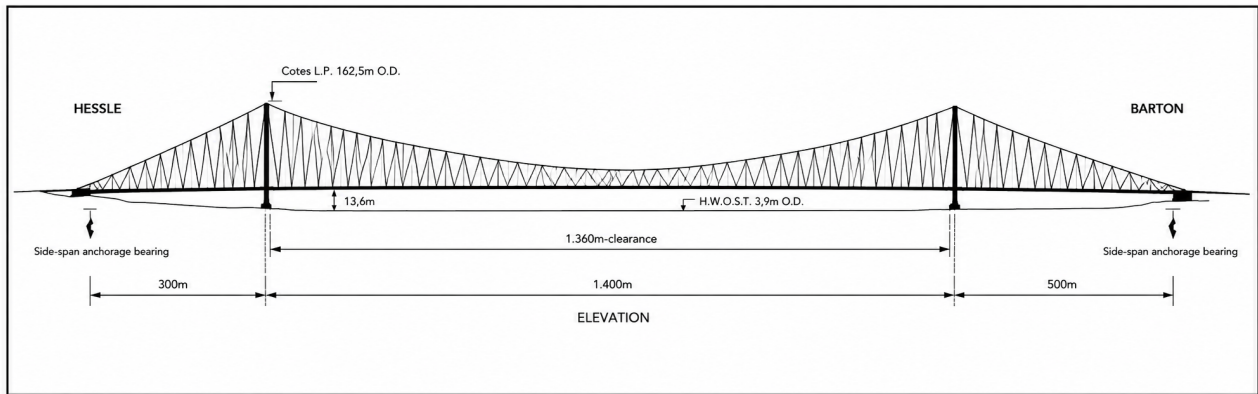


FIGURE 6.1 – Élévation du modèle FINELG du Humber Bridge : travées, hauteur des pylônes. (adapté de [21])

**Concentration de la masse sur le tablier.** La masse linéique du tablier seul vaut  $m_g = 13\,215 \text{ kg/m}$ , à laquelle s'ajoute la masse des deux câbles porteurs, soit  $m_c = 3\,000 \text{ kg/m}$  au total. L'inertie massique rotationnelle est prise égale à  $J = 1,05 \times 10^6 \text{ kg m}^2/\text{m}$ , valeur qui inclut déjà la contribution des câbles situés à une distance transversale  $b_c = 10,98 \text{ m}$  de l'axe du tablier.

En suivant l'hypothèse de modélisation adoptée par Bakis, selon laquelle la masse des câbles principaux peut être associée au mouvement global de la travée suspendue pour les modes verticaux et torsionnels, et au vu des mesures modales de Brownjohn *et al.* [22], la masse suspendue totale est concentrée sur la poutre représentant le tablier :

$$m_{\text{tablier}} = m_g + m_c = 13\,215 + 3\,000 = 16\,215 \text{ kg/m.} \quad (6.1)$$

Les éléments de câble sont dès lors modélisés avec une masse linéique nulle. Cette simplification évite l'apparition de modes locaux de câble qui ne sont pas recherchés dans le cadre du présent modèle, centré sur les modes du tablier.

**Prétension dans les câbles porteurs.** La tension horizontale dans les câbles porteurs est déduite de l'équilibre statique du câble parabolique en travée principale. La charge pendante par unité de longueur vaut

$$q = m_{\text{tablier}} g = 159,07 \text{ kN/m,} \quad (6.2)$$

et la flèche  $f = 115,5 \text{ m}$  étant fixée par construction, la tension horizontale totale supportée par les deux câbles s'écrit

$$H_{\text{tot}} = \frac{q L^2}{8 f} \approx 3,37 \times 10^8 \text{ N,} \quad (6.3)$$

soit environ  $1,69 \times 10^8$  N par câble. Cette valeur est imposée comme prétension initiale dans les éléments de câble, de manière à ce que la déformée du tablier sous poids propre soit pratiquement nulle. La vérification de cette condition est présentée à la Section 6.2.4. Noter que  $g$  à l'Équation (6.2) correspond bien à l'accélération de la pesanteur, soit  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ , à ne pas confondre avec le facteur de pointe  $g$ .

**Suspentes inclinées.** Le modèle de Bakis suppose des suspentes verticales. Le présent modèle adopte la disposition réelle de l'ouvrage, dans laquelle les suspentes forment un V inversé reliant chaque nœud du tablier aux deux câbles porteurs, comme illustré à la Figure 6.2. Les suspentes sont espacées longitudinalement de 20 m, valeur retenue comme compromis entre représentativité géométrique et simplification.

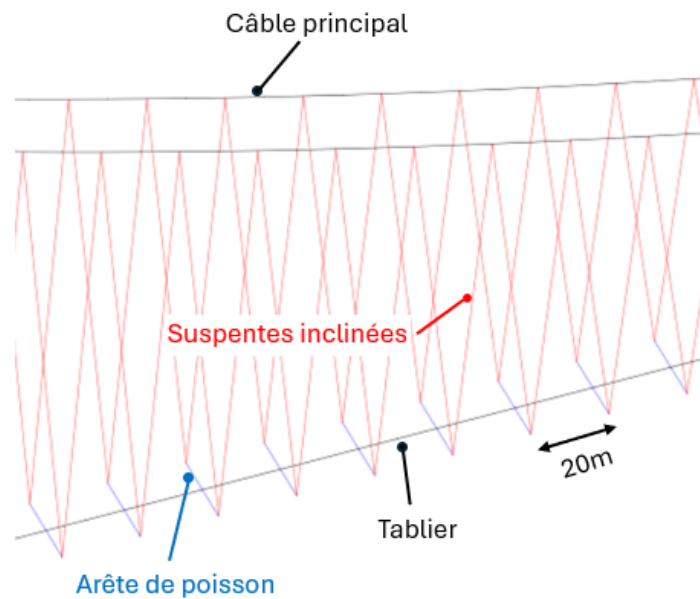


FIGURE 6.2 – Section transversale du modèle au droit d'un nœud suspendu : tablier, câbles porteurs à  $\pm 10,98$  m, suspentes en V inversé et arête de poisson assurant le couplage cinématique.

**Tablier.** Les inerties de flexion  $I_y$ ,  $I_z$ , l'inertie de torsion  $I_t$  et la masse linéique du tablier sont connues (Tableau 6.1). FINELG permet de définir une section structurale en ne lui conférant que les propriétés effectivement requises par l'analyse, sans imposer de géométrie de section explicite. C'est l'approche retenue ici : une aire fictive  $A = 1 \text{ m}^2$  est associée à une masse volumique  $\rho = 16\,215 \text{ kg/m}^3$ , de manière à restituer la masse linéique cible. Les inerties sont prises identiques à celles de Bakis.

**Câbles porteurs.** La géométrie des câbles porteurs (câbles principaux) est celle de Bakis ( $A_c = 0,362 \text{ m}^2$  pour chacun des deux câbles,  $E_c = 155,5 \text{ GPa}$ ). Chaque câble est modélisé par des éléments de câble précontraints à raideur géométrique, espacés transversalement de  $2 \times 10,98 = 21,96 \text{ m}$  de part et d'autre de l'axe du tablier.

**Suspentes.** L'article de Bakis ne fournit pas d'information sur la section des suspentes. Le module de Young est pris égal à celui des câbles porteurs ( $E_c$ ), faute de donnée plus précise. La section, en revanche, fait l'objet d'un calcul de pré-dimensionnement présenté à la Section 6.2.3.

**Arête de poisson.** Le couplage cinématique entre le tablier et les câbles porteurs est assuré, à chaque nœud suspendu, par un élément transversal fictif, désigné dans la suite sous le terme d'*arête de poisson* (voir Figure 6.2). Cet élément ne correspond pas à une pièce structurale réelle : il s'agit d'une liaison numérique destinée à imposer la compatibilité des déplacements entre le tablier et les points d'accrochage des suspentes.

Afin de remplir ce rôle sans modifier artificiellement les propriétés dynamiques du modèle, l'arête de poisson est modélisée comme un élément sans masse, doté d'une rigidité plusieurs ordres de grandeur supérieure à celle des éléments adjacents. Cette rigidité élevée permet d'assurer un mouvement solidaire des nœuds reliés, tout en restant suffisamment limitée pour préserver un conditionnement numérique satisfaisant du système global.

### 6.2.3 Dimensionnement des suspentes

L'article de Bakis ne précisant pas la section des suspentes, celle-ci est déterminée sur base d'un dimensionnement simplifié par la charge maximale de trafic susceptible d'agir sur le pont, conformément à l'Eurocode 1 partie 2 [23].

Le dimensionnement qui suit n'a pas pour objectif de vérifier les suspentes réelles du Humber Bridge, mais uniquement de fixer une section mécaniquement plausible pour les éléments de suspension du modèle FINELG.

**Charge de trafic linéique.** Le pont est circulaire sur deux sens, chaque sens comportant deux voies (on considère une largeur de 3m par voie), soit une largeur circulaire totale de 12 m répartie en quatre voies. Conformément au modèle de charge LM1 de l'Eurocode, chaque sens reçoit :

- sur la première voie, une charge uniformément répartie de 9 kN/m<sup>2</sup> sur 3 m de largeur ;
- sur les voies suivantes, une charge réduite de 2,5 kN/m<sup>2</sup> sur 3 m de largeur.

Pour les deux sens combinés, la charge linéique totale appliquée au tablier vaut :

$$q_{\text{trafic}} = 2 \times (9 \times 3 + 2,5 \times 3) = 2 \times 34,5 = 69 \text{ kN/m.} \quad (6.4)$$

**Détermination de la section.** Cette charge de trafic est appliquée au modèle FINELG, et l'effort axial maximal  $N_{\text{max}}$  dans l'ensemble des suspentes est extrait. La section des suspentes est dimensionnée pour reprendre cet effort sous une contrainte admissible  $\sigma_{\text{adm}}$  représentative d'un acier à haute résistance ( $\sigma_{\text{adm}} = 0,66 \cdot f_{ptk} = 1227,6 \text{ MPa}$ ), conduisant à

$$A_{\text{suspente}} = \frac{N_{\text{max}}}{\sigma_{\text{adm}}}. \quad (6.5)$$

Cette section est imposée identique pour toutes les suspentes du pont, par souci de simplicité du modèle. La valeur numérique obtenue est rapportée au Tableau 6.2.

|                                             |                                   |
|---------------------------------------------|-----------------------------------|
| Effort axial maximal $N_{\text{max}}$       | 4691 kN                           |
| Contrainte admissible $\sigma_{\text{adm}}$ | 1227,6 MPa                        |
| Section retenue $A_{\text{suspente}}$       | $3,82 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ |

TABLE 6.2 – Dimensionnement des suspentes par effort axial maximal sous charge de trafic Eurocode.

La valeur obtenue doit donc être interprétée comme une section de modélisation, choisie pour assurer un niveau de raideur et de résistance cohérent avec l'échelle de l'ouvrage, et non comme une proposition de dimensionnement détaillé.

### 6.2.4 Vérification de la déformée sous poids propre

La cohérence de la prétension imposée dans les câbles porteurs avec le poids suspendu du tablier est vérifiée *a posteriori* par calcul de la déformée statique du modèle complet sous son poids propre. Sous l'hypothèse que la prétension équilibre exactement la charge pendante, la déformée verticale du tablier doit être négligeable devant la flèche du câble et devant les déplacements typiques observés sous charge de service.

La déformée obtenue par calcul FINELG est représentée à la Figure 6.3. La flèche maximale en travée principale vaut 502 mm (positive, c'est-à-dire une contreflèche), soit 0,035 % de la portée.

Cette valeur est inférieure à 1 ‰ de la portée, ce qui est cohérent avec une mise à l'équilibre correcte du système câble-tablier.

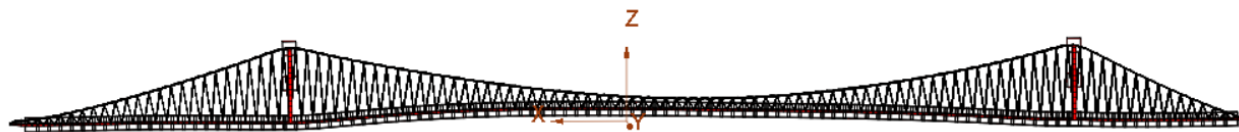


FIGURE 6.3 – Déformée verticale du tablier du modèle FINELG sous son poids propre, après application de la prétension dans les câbles porteurs (amplifiée x50).

### 6.3 Analyse modale

L'analyse modale est conduite avec FINELG. L'objectif de cette section est de confronter les formes modales et fréquences propres obtenues à celles mesurées in situ [22], afin de s'assurer que le modèle reproduit correctement les caractéristiques dynamiques globales de l'ouvrage. Il ne s'agit pas d'obtenir une correspondance exacte : plusieurs hypothèses simplificatrices ont été posées (Section 6.2), et la calibration fine du modèle ne constitue pas l'objet du présent travail. Il importe cependant que les modes pertinents pour la réponse aéroélastique du tablier — verticaux et torsionnels — soient reproduits avec une précision suffisante pour que l'analyse menée dans les parties suivantes en hérite directement.

Parmi les quinze premières fréquences propres calculées, dix modes peuvent être clairement associés aux modes identifiés expérimentalement [22]. Les cinq modes restants présentent des formes modales cohérentes dans le modèle, mais ne peuvent pas être rattachés de manière univoque aux modes mesurés, soit en raison de leur forme, soit en raison d'un écart fréquentiel trop important ; ils sont rapportés en Annexe B pour complétude. Les dix modes retenus se répartissent en six modes verticaux, trois modes latéraux et le premier mode de torsion, ce qui couvre l'ensemble des modes susceptibles de participer significativement à la réponse aéroélastique dans le domaine de vitesses d'intérêt. La synthèse quantitative est rassemblée au Tableau 6.3. Dans les calculs qui suivent, l'ensemble des quinze premiers modes calculés sont néanmoins conservés, afin de ne pas écarter a priori des contributions modales propres au modèle FINELG.

| Mode | Type                         | $f_{\text{mes}}$ [Hz] | $f_{\text{FINELG}}$ [Hz] | Écart [%] |
|------|------------------------------|-----------------------|--------------------------|-----------|
| V1   | 1 <sup>er</sup> vertical     | 0,117                 | 0,125                    | +6,8      |
| V2   | 2 <sup>e</sup> vertical      | 0,154                 | 0,150                    | -2,6      |
| V3   | 3 <sup>e</sup> vertical      | 0,177                 | 0,195                    | +10,2     |
| V4   | 4 <sup>e</sup> vertical      | 0,218                 | 0,226                    | +3,7      |
| V5   | 5 <sup>e</sup> vertical      | 0,240                 | 0,272                    | +13,3     |
| V6   | 6 <sup>e</sup> vertical      | 0,310                 | 0,342                    | +10,3     |
| L1   | 1 <sup>er</sup> latéral      | 0,056                 | 0,063                    | +12,5     |
| L2   | 2 <sup>e</sup> latéral       | 0,141                 | 0,135                    | -4,3      |
| L3   | 3 <sup>e</sup> latéral       | 0,246                 | 0,240                    | -2,4      |
| T1   | 1 <sup>er</sup> torsion sym. | 0,311                 | 0,303                    | -2,6      |

TABLE 6.3 – Comparaison des fréquences modales mesurées in situ [22] et calculées par le présent modèle FINELG. L'écart est défini par  $(f_{\text{FINELG}} - f_{\text{mes}})/f_{\text{mes}}$ .

### 6.3.1 Comparaison des formes modales

Les formes modales correspondantes sont représentées aux Figures 6.4, 6.5 et 6.6. Dans chaque planche, la colonne de gauche reprend la forme mesurée, adaptée de [22], et la colonne de droite la forme calculée par le présent modèle FINELG.

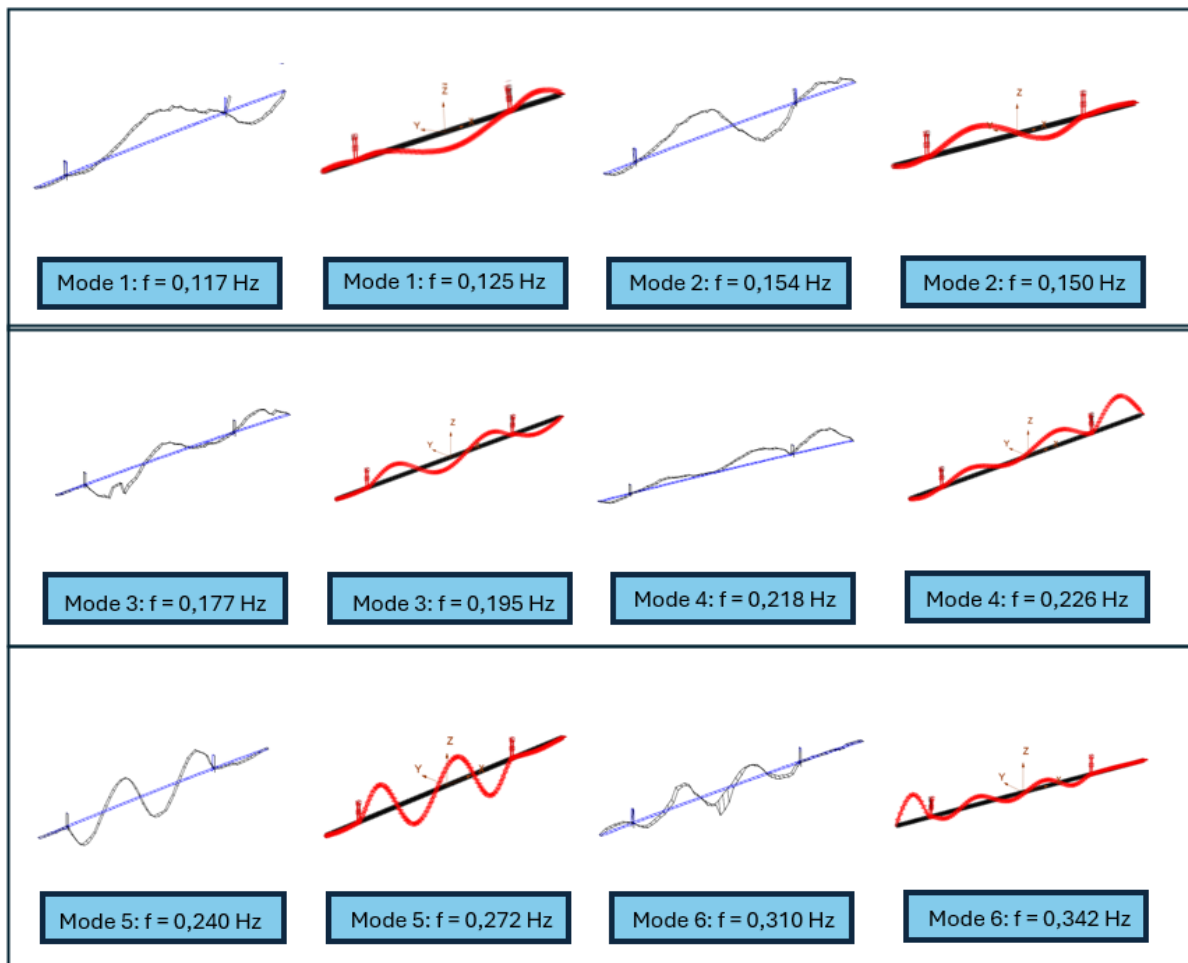


FIGURE 6.4 – Comparaison des six premiers modes verticaux. À gauche, formes mesurées par Brown-john *et al.* [22]; à droite, formes calculées par le présent modèle FINELG.

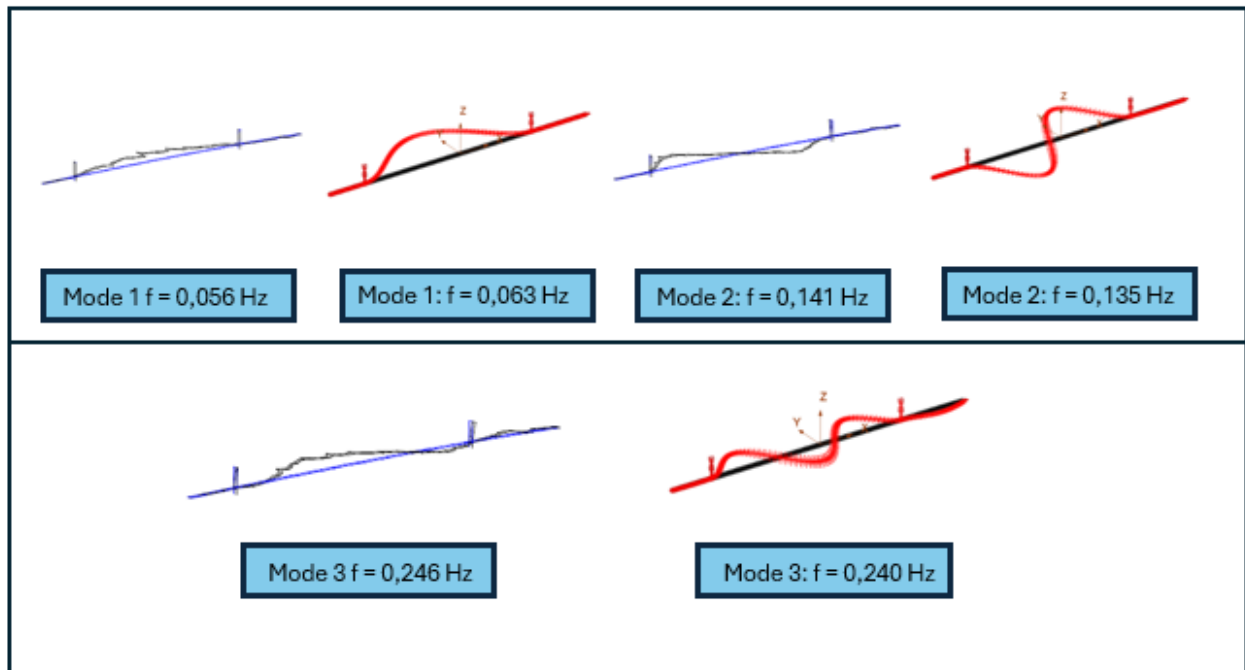


FIGURE 6.5 – Comparaison des trois premiers modes latéraux. Conventions identiques à la Figure 6.4.

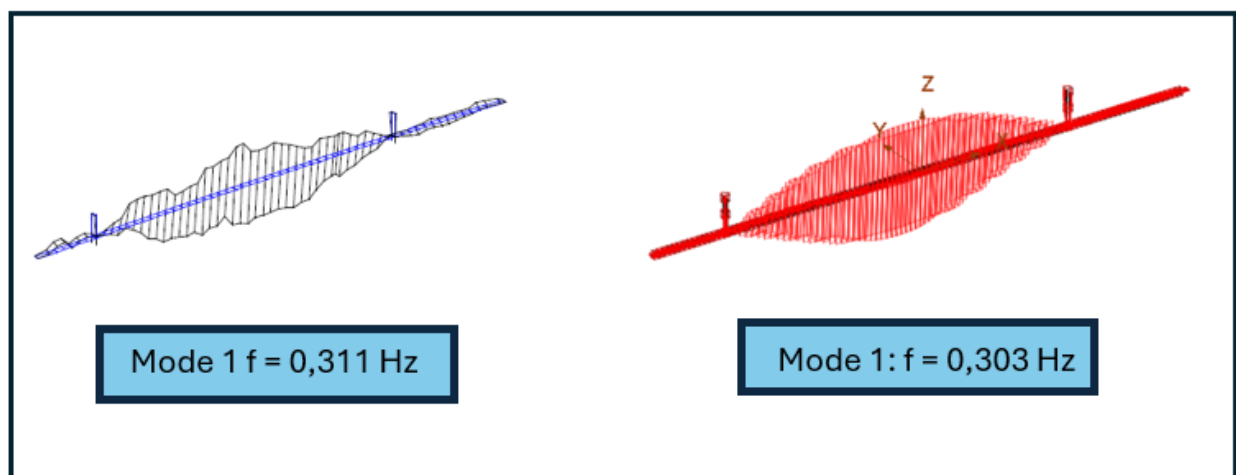


FIGURE 6.6 – Comparaison du premier mode de torsion symétrique. Conventions identiques à la Figure 6.4.

### 6.3.2 Discussion

**Modes verticaux.** Les six premiers modes verticaux sont reproduits avec des écarts en fréquence compris entre 2,6% et 13,3%, pour un écart moyen de l'ordre de 8%. Les formes modales calculées correspondent visuellement aux mesures : alternance d'antisymétriques et de symétriques, amplitudes maximales correctement localisées en travée principale, et nombre de ventres conforme. Certains modes, dont le mode V1, méritent une remarque : la forme calculée apparaît inversée par rapport à la mesure, mais cette inversion est sans signification physique puisqu'un mode propre n'est défini qu'à une constante multiplicative près. Une fois cette ambiguïté levée, les deux formes sont en accord direct.

**Modes latéraux.** Les trois modes latéraux sont reproduits avec des écarts contenus entre  $-4,3\%$  et  $+12,5\%$ . Le premier mode L1, qui présente l'écart le plus important, se situe dans une bande de très basse fréquence où l'identification expérimentale est généralement plus sensible au bruit de mesure et aux conditions d'essai. Les modes L2 et L3 sont reproduits avec moins de  $5\%$  d'écart, ce qui reste pleinement satisfaisant.

**Mode de torsion.** Le premier mode de torsion, qui joue un rôle central dans le mécanisme de flottement étudié dans la suite, est reproduit avec un écart de  $-2,6\%$ . Cette précision est essentielle : la fréquence fondamentale de torsion conditionne directement la vitesse critique de flutter  $U_{cr}$ , via sa proximité aux fréquences verticales et le rapport  $f_T/f_V$  qui en résulte.

**Synthèse.** Les modes les plus critiques pour la réponse aéroélastique du tablier — modes verticaux et premier mode de torsion — sont reproduits avec des écarts inférieurs ou égaux à  $13,3\%$ . Les écarts plus importants observés sur certains modes verticaux et sur le premier mode latéral ne remettent pas en cause l'utilisation du modèle pour la méthodologie ESWL-PSWL, ces modes intervenant plus faiblement dans le domaine de fréquences pertinent pour le couplage aéroélastique étudié. Le modèle FINELG est donc considéré comme suffisamment représentatif pour la suite du travail.

En résumé, le modèle FINELG développé dans ce chapitre constitue un compromis entre représentativité physique et maîtrise numérique. Il reproduit les principaux ordres de grandeur géométriques, massiques et modaux du Humber Bridge, tout en conservant une structure suffisamment contrôlée pour permettre l'analyse aéroélastique fréquentielle et la construction des charges statiques équivalentes. Les simplifications introduites — concentration de la masse suspendue sur le tablier, câbles porteurs sans masse, suspentes idéalisées et liaisons cinématiques rigides — doivent être interprétées dans ce cadre : elles visent à isoler les phénomènes globaux de flexion, torsion et couplage aéroélastique qui gouvernent la suite du travail.

# 7 Modèle Python d'analyse aéroélastique stochastique

## 7.1 Objectifs du modèle Python

L'analyse aéroélastique stochastique du tablier sous vent turbulent repose, dans ce travail, sur une chaîne de calcul Python développée spécifiquement pour exploiter les grandeurs issues du modèle éléments finis FINELG. L'objectif n'est pas de reconstruire le modèle tridimensionnel complet du pont, ni de se substituer au calcul éléments finis. Le rôle de la chaîne est plus ciblé : associer aux données structurales extraites de FINELG un modèle aérodynamique du tablier, et calculer dans le domaine fréquentiel les grandeurs statistiques nécessaires à la construction des charges statiques équivalentes.

Le code s'articule en trois modules :

- un module stochastique, qui implémente la chaîne fréquentielle de la Section 2.5 et fournit en sortie les densités spectrales, les matrices de covariance et les écarts-types de la réponse ;
- un module ESWL, qui construit les charges statiques équivalentes par la méthode LRC-MIL à partir des covariances et écarts-types issus du module précédent ;
- un module PSWL, qui comprime le paquet d'ESWL — calculées sur tout la gamme de vitesses et en chaque point du tablier — en une base réduite de charges principales, assortie d'une table de coefficients de combinaison.

Une hypothèse importante structure cette chaîne : l'analyse aérodynamique n'est formulée que sur le tablier. Le modèle FINELG complet comprend les pylônes, les câbles principaux, les suspentes et les appuis, mais Python ne manipule explicitement que les degrés de liberté aérodynamiques du tablier. Le reste de la structure n'est pas pour autant ignoré : fréquences propres, masses généralisées, formes modales et flexibilité statique sont extraites du modèle complet et portent déjà son comportement global. Python travaille donc sur une représentation réduite, mais héritée du pont entier.

L'architecture générale de la chaîne de calcul est présentée à la Figure 7.1. Ce schéma est volontairement très simplifié. Son objectif n'est pas de détailler l'ensemble des opérations numériques, mais plutôt de distinguer clairement les grandeurs extraites de FINELG, les calculs réalisés dans Python et les résultats produits à chaque étape de la chaîne.

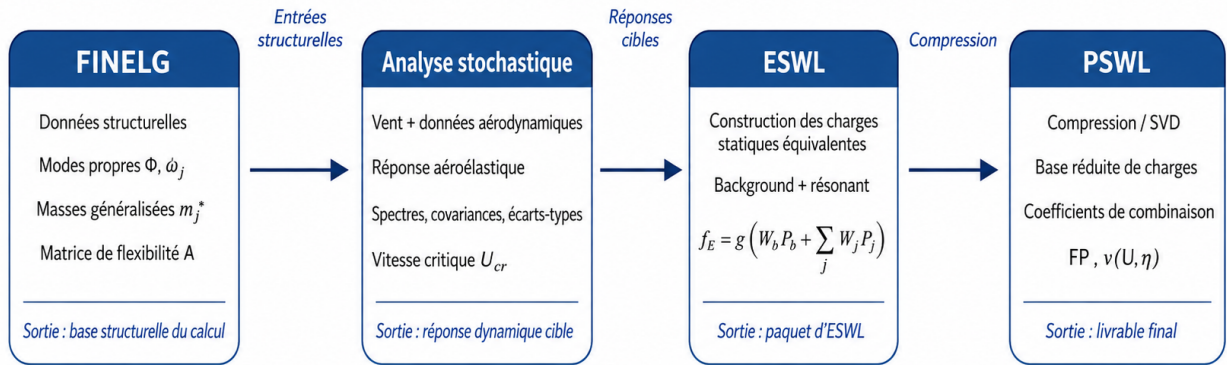


FIGURE 7.1 – Architecture générale de la chaîne de calcul.

### 7.1.1 Données issues de FINELG

Les grandeurs structurales extraites de FINELG constituent la description mécanique du pont. Il s'agit des fréquences propres  $f_j$ , des masses généralisées  $m_j^*$ , des formes modales du tablier  $\phi_j$  et de la matrice de flexibilité statique  $A$ , qui relie les charges appliquées sur le tablier aux réponses statiques d'intérêt  $(y, z, \theta)$ . La construction de cette matrice de flexibilité est détaillée à la Section 9.2.2.

Les formes modales sont regroupées dans la matrice modale  $\Phi$ , restreinte aux degrés de liberté du tablier intervenant dans l'action du vent. À chaque section sont donc associés trois degrés de liberté

$$y, \quad z, \quad \theta,$$

où  $y$  désigne le déplacement latéral,  $z$  le déplacement vertical et  $\theta$  la rotation du tablier autour de l'axe longitudinal.

### 7.1.2 Caractéristiques de vent

La masse volumique de l'air est prise égale à  $\rho = 1,22 \text{ kg/m}^3$ . Comme établi dans l'état de l'art, le vent turbulent n'est décrit que par deux composantes fluctuantes,  $u$  et  $w$ . Les densités spectrales et la cohérence spatiale ont été définies à la Section 1.2.2. Pour les deux composantes, l'intensité et l'échelle de turbulence sont prises égales à :

$$I_u = \frac{\sigma_u}{\bar{U}} = 0,10, \quad {}^xL_u = 200 \text{ m}, \quad (7.1)$$

$$I_w = \frac{\sigma_w}{\bar{U}} = 0,05, \quad {}^xL_w = 20 \text{ m}. \quad (7.2)$$

Les coefficients de cohérence valent :

$$C_{ux} = 10, \quad C_{uz} = 10, \quad C_{wx} = 6,5, \quad C_{wz} = 3. \quad (7.3)$$

### 7.1.3 Coefficients aérodynamiques statiques et dérivées de flottement

Le modèle aérodynamique requiert les coefficients statiques du tablier et leurs dérivées en incidence. Les valeurs mesurées en soufflerie n'étant pas disponibles pour le Humber, les coefficients d'une plaque plane sont retenus comme approximation :

$$C_D = 0,1, \quad C_L = 0, \quad C_M = 0, \quad C'_D = 0, \quad C'_L = 2\pi, \quad C'_M = \frac{\pi}{2}.$$

Ce choix est volontairement simplifié. Il ne vise pas à reproduire l'aérodynamique réelle de la section, mais à disposer d'un modèle analytique cohérent permettant de comparer, toutes choses égales par ailleurs, les formulations quasi-stationnaire et avec mémoire aérodynamique. Ces coefficients interviennent dans la linéarisation des efforts de buffeting, reliant les fluctuations  $u$  et  $w$  aux fluctuations de traînée, de portance et de moment.

Dans le modèle avec mémoire, les forces self-excited sont décrites par les dérivées de flottement de Theodorsen (Section 1.5.5), qui rendent compte de la dépendance fréquentielle des efforts induits par le mouvement du tablier et dépassent ainsi le cadre quasi-stationnaire.

### 7.1.4 Incidence du vent

L'angle d'incidence moyen du vent est supposé nul, en cohérence avec une approche unidirectionnelle du vent horizontal sur un tablier horizontal. Sous cette hypothèse et avec les coefficients ci-dessus, la composante moyenne des efforts se réduit à une traînée linéique constante  $\bar{F}_D = \frac{1}{2}\rho \bar{U}^2 B C_D$ , la portance et le moment moyens étant identiquement nuls. La chaîne fréquentielle ne traite que la composante fluctuante des efforts ; la composante moyenne est ajoutée séparément lors de la construction du livrable final.

### 7.1.5 Paramètres numériques

Le calcul est mené sur une gamme de vitesses moyennes de  $\bar{U} = 15 \text{ m/s}$  à  $\bar{U} = 68 \text{ m/s}$ . La borne supérieure est choisie au voisinage de la vitesse critique de flottement (Chapitre 8), afin de couvrir le domaine où les effets aéroélastiques deviennent prépondérants. Ce panel englobe les faibles vitesses, où les effets self-excited restent limités, et les vitesses proches de  $U_{cr}$ , où le couplage aéroélastique domine.

Le domaine fréquentiel est discrétisé en 1000 points entre  $f_{\min} = 0,001 \text{ Hz}$  et  $f_{\max} = 0,5 \text{ Hz}$ , intervalle qui couvre les premières fréquences propres du tablier gouvernant la réponse sous vent turbulent. L'intégration fréquentielle des spectres est réalisée sur cette grille.

### 7.1.6 Matrices modales structurales

Les masses généralisées étant directement extraites de FINELG, les matrices modales structurales sont diagonales dans la base modale :

$$\mathbf{M}^* = \text{diag}(m_j^*), \quad (7.4)$$

$$\mathbf{C}^* = \text{diag}(2\xi m_j^* \omega_j), \quad (7.5)$$

$$\mathbf{K}^* = \text{diag}(m_j^* \omega_j^2). \quad (7.6)$$

Un amortissement structural modal  $\xi = 0,3 \%$  est attribué à chaque mode. Cette écriture suppose les modes découplés structuralement ; les couplages apparaissent ensuite via les forces aérodynamiques, en particulier les termes self-excited, non diagonaux dans la base modale.

### 7.1.7 Discrétisation du tablier et application des forces de vent

Le tablier est discrétisé en  $N = 220$  sections, correspondant aux 220 éléments compris entre les 221 nœuds du modèle. Les sections de vent coïncident avec les sections du tablier : il n'y a pas de maillage aérodynamique indépendant. Chaque élément constitue une section de vent sur laquelle les efforts linéiques sont évalués.

À chaque élément  $e$  sont associés une position longitudinale  $x_e$ , une longueur d'influence  $\Delta x_e$  égale à la longueur de l'élément, les trois efforts aérodynamiques (traînée, portance, moment) et les trois degrés de liberté du tablier ( $y_e, z_e, \theta_e$ ). Le vecteur des forces aérodynamiques discrétisées s'écrit :

$$\mathbf{f} = [D_1 \quad L_1 \quad M_1 \quad \cdots \quad D_N \quad L_N \quad M_N]^T, \quad (7.7)$$

où  $D_i$ ,  $L_i$  et  $M_i$  sont la traînée, la portance et le moment appliqués à la section  $i$ .

Les efforts sont d'abord évalués sous forme linéique. Pour un effort linéique  $\mathbf{f}(x_e)$ , l'effort résultant de l'élément  $e$  est approché par

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{f}(x_e) \Delta x_e. \quad (7.8)$$

Ces efforts sont ensuite reportés aux nœuds extrêmes de l'élément pour former un vecteur de forces nodales compatible avec la matrice de flexibilité et la base modale issues de FINELG. Aucune interpolation entre maillages distincts n'est donc nécessaire : les sections de vent étant celles du tablier, les efforts sont simplement assemblés des éléments vers les nœuds. Ce passage est requis parce que les spectres de forces sont construits par section, tandis que les projections modales et les calculs statiques opèrent sur les degrés de liberté nodaux.

## 7.2 Validation par comparaison d'une analyse spectrale avec FINELG

La chaîne Python enchaîne, pour chaque couple  $(U, f)$ , une succession d'opérations entièrement implémentées en dehors de FINELG : construction des spectres turbulents cohérents, assemblage des forces de buffeting, projection modale, inversion de la matrice de réponse fréquentielle aéroélastique et retour en base physique (Section 2.5). Compte tenu du nombre d'étapes et des choix numériques qu'elles supposent, il convient, avant d'exploiter cette chaîne pour la construction des charges statiques équivalentes, de vérifier que son résultat final — la densité spectrale de la réponse en un point du tablier — coïncide avec celui d'une analyse aéroélastique stochastique conduite directement dans FINELG sur le même modèle structural.

**Configuration de validation.** La comparaison est menée pour quatre vitesses de vent représentatives du domaine étudié :  $\bar{U} = 15, 45, 60$  et  $67$  m/s. La première vitesse correspond à un régime de basse vitesse, où la réponse est principalement gouvernée par le buffeting et où les effets self-excited restent faibles. Les vitesses intermédiaires permettent ensuite de tester la réponse lorsque le couplage aéroélastique devient progressivement plus marqué. Enfin, la vitesse  $\bar{U} = 67$  m/s se situe au voisinage

immédiat de la vitesse critique de flottement  $U_{cr} \simeq 68$  m/s identifiée au Chapitre 8. Elle constitue donc le cas le plus exigeant pour la validation numérique, puisque les matrices aéroélastiques y modifient fortement la réponse dynamique du tablier.

Les comparaisons portent sur le point  $x_0 = 0$  m, situé pratiquement au centre de la travée principale, et sur les trois composantes physiques de la réponse du tablier : le déplacement latéral  $y$ , le déplacement vertical  $z$  et la rotation  $\theta$ . Seul le modèle instationnaire avec mémoire aéroélastique est testé ici, car il s'agit du modèle finalement retenu pour la suite du travail.

**Déplacement latéral.** La Figure 7.2 compare les densités spectrales du déplacement latéral  $S_y(f)$  obtenues avec la chaîne Python et avec FINELG. L'accord est excellent pour l'ensemble des vitesses considérées. Les courbes issues des deux codes sont pratiquement confondues sur tout le domaine fréquentiel représenté, aussi bien dans les zones de faible énergie que dans les zones de résonance.

Les pics modaux sont reproduits aux mêmes fréquences et avec les mêmes amplitudes. À basse vitesse, la réponse latérale reste modérée et les pics demeurent relativement isolés. Lorsque la vitesse augmente, l'amplification progressive de certains pics est correctement captée par les deux approches. Même à  $\bar{U} = 67$  m/s, c'est-à-dire très près de la vitesse critique de flottement, les courbes Python et FINELG restent superposées. Cette concordance confirme que la chaîne Python reproduit correctement la contribution latérale de la réponse aéroélastique, y compris lorsque les effets dépendants de la vitesse deviennent importants.

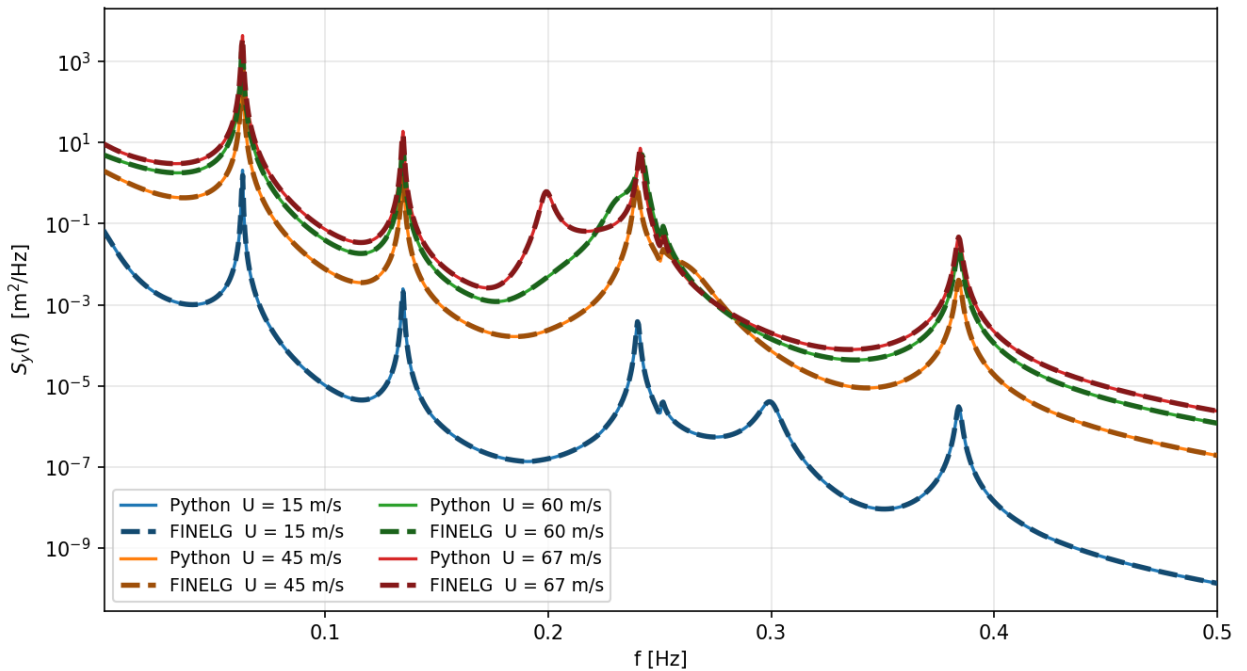


FIGURE 7.2 – Densité spectrale du déplacement latéral  $S_y(f)$  au point  $x_0 = 0$  m, comparaison Python (modèle instationnaire) vs FINELG pour plusieurs vitesses de vent.

**Déplacement vertical.** La Figure 7.3 présente la même comparaison pour le déplacement vertical  $S_z(f)$ . Là encore, l'accord entre les deux codes est très satisfaisant. Les courbes se superposent pratiquement sur toute la gamme fréquentielle, pour les quatre vitesses étudiées. Les pics principaux, associés aux modes verticaux du tablier, sont localisés aux mêmes fréquences et présentent les mêmes niveaux d'amplification.

Cette comparaison est particulièrement importante, car la réponse verticale est fortement influencée par le couplage entre les modes de flexion verticale et les effets aéroélastiques. L'évolution des pics avec la vitesse est correctement reproduite : leur amplitude augmente lorsque la vitesse de vent croît, et la forme globale du spectre reste identique entre Python et FINELG. La concordance observée

valide donc à la fois la projection modale des forces de buffeting, le calcul des fonctions de réponse fréquentielle et la prise en compte des termes self-excited dans la direction verticale.

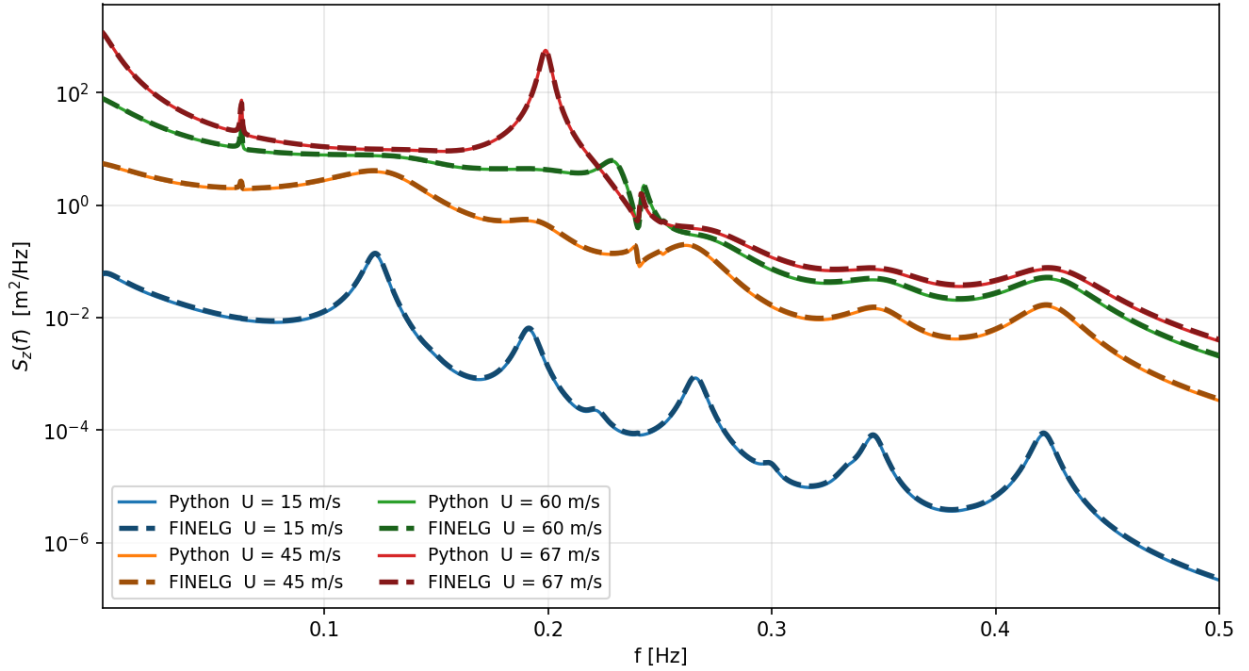


FIGURE 7.3 – Densité spectrale du déplacement vertical  $S_z(f)$  au point  $x_0 = 0$  m, comparaison Python (modèle instationnaire) vs FINELG pour plusieurs vitesses de vent.

**Rotation.** La Figure 7.4 compare enfin les densités spectrales de la rotation  $\theta$ . Cette composante constitue le test le plus sensible, car elle est directement liée au comportement de torsion du tablier et à l'approche du flottement. Les résultats montrent cependant une superposition très nette entre les courbes Python et FINELG, y compris pour les vitesses les plus élevées.

À faible vitesse, les pics de torsion sont correctement placés et leur amplitude est reproduite avec précision. Lorsque la vitesse augmente, les effets aéroélastiques modifient fortement le spectre : certains pics se déplacent, d'autres s'amplifient fortement, en particulier à l'approche de la vitesse critique. Ces phénomènes sont captés de manière concordante par les deux codes. La vitesse  $\bar{U} = 67$  m/s est particulièrement significative : malgré la forte amplification de la réponse au voisinage du flottement, la chaîne Python reproduit correctement le niveau spectral obtenu par FINELG.

Cette concordance valide donc la partie la plus délicate de l'implémentation, à savoir l'assemblage des matrices aéroélastiques instationnaires, leur dépendance fréquentielle et leur effet sur la réponse torsionnelle du tablier. Elle confirme également que le couplage flexion-torsion est correctement représenté dans la chaîne Python.

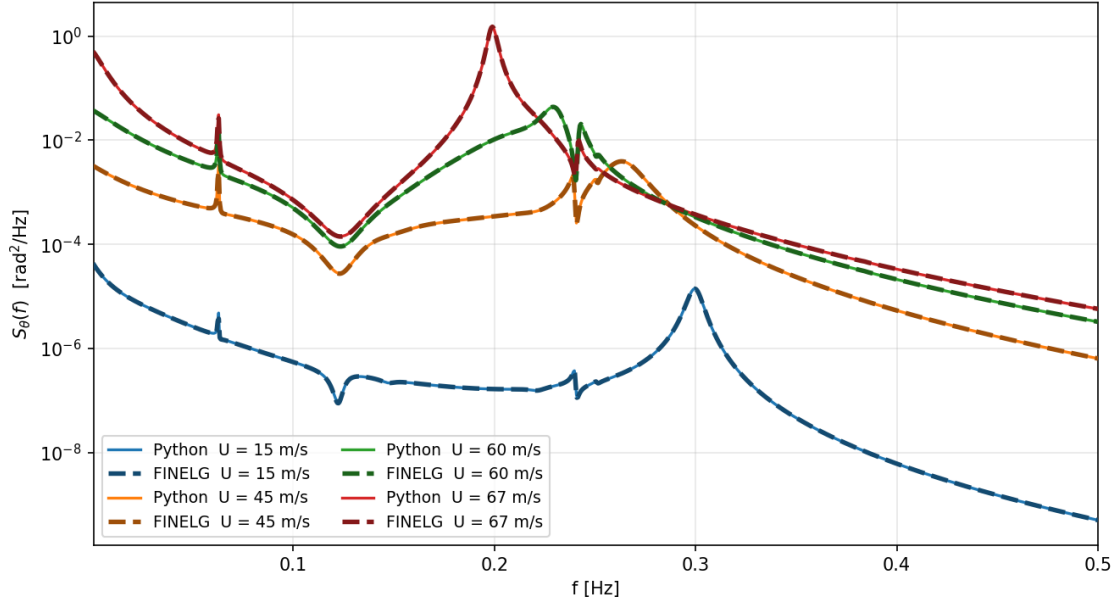


FIGURE 7.4 – Densité spectrale de la rotation  $S_\theta(f)$  au point  $x_0 = 0$  m, comparaison Python (modèle instationnaire) vs FINELG pour plusieurs vitesses de vent.

**Synthèse.** Les trois comparaisons montrent une concordance très nette entre la chaîne Python et FINELG. Les densités spectrales des réponses  $y$ ,  $z$  et  $\theta$  sont reproduites avec les mêmes fréquences propres apparentes, les mêmes niveaux d'amplification et la même évolution avec la vitesse du vent. L'accord reste valable depuis le régime de basse vitesse jusqu'au voisinage immédiat de la vitesse critique de flottement.

Cette validation confirme que les principales étapes de la chaîne Python sont correctement implémentées : génération des spectres turbulents cohérents, assemblage des forces de buffeting, projection dans la base modale, prise en compte des forces self-excited instationnaires, inversion de la matrice de réponse fréquentielle aéroélastique et retour en base physique. Elle montre également que les grandeurs spectrales utilisées ensuite pour calculer les écarts-types, les covariances et les charges statiques équivalentes reposent sur une chaîne numérique cohérente avec FINELG.

La chaîne Python est donc considérée comme validée pour la suite du travail. Elle peut être utilisée pour générer les réponses statistiques nécessaires à la construction des ESWL, puis à leur compression en PSWL.

## 8 Vitesse critique de flottement

La vitesse critique de flottement  $U_{cr}$  borne le domaine de validité de toute construction de charges statiques équivalentes prenant en compte le couplage aéroélastique : au-delà de  $U_{cr}$ , la réponse stochastique cesse d'être bornée et le formalisme fréquentiel perd son sens. Son identification précise constitue donc un prérequis méthodologique au reste du travail. Trois approches complémentaires sont mises en œuvre dans ce chapitre : l'analyse de la divergence des écarts-types issue du code Python développé au chapitre précédent, l'analyse de stabilité de FINELG, et la méthode de continuation arc-length de Heremans [24]. Leur convergence vers une valeur commune constitue la principale garantie de cohérence du modèle.

### 8.1 Détection du flottement par divergence des écarts-types

La chaîne stochastique mise en place au chapitre précédent permet de calculer, pour toute vitesse moyenne  $U$ , les écarts-types  $\sigma_y(x_0)$ ,  $\sigma_z(x_0)$ ,  $\sigma_\theta(x_0)$  de la réponse en mi-travée par intégration des densités spectrales. Or, à l'approche du flottement, l'amortissement total du système tend vers zéro sur un mode critique, et l'intégrale spectrale diverge. Le suivi de  $\sigma(U)$  constitue donc un *indicateur direct* de la stabilité aéroélastique, sans recourir à une analyse modale du système couplé.

Les Figures 8.1 à 8.3 comparent les évolutions obtenues avec les deux modèles aérodynamiques considérés dans ce travail : quasi-stationnaire et instationnaire.

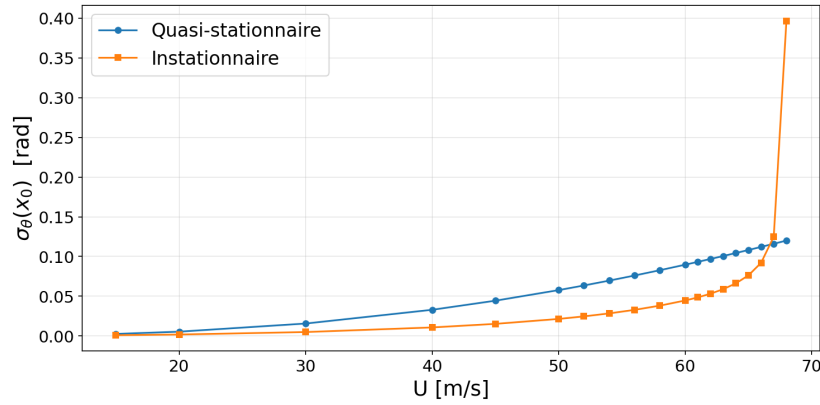


FIGURE 8.1 – Écart-type de la rotation  $\sigma_\theta(x_0)$  à mi-travée en fonction de  $U$  — modèles quasi-stationnaire et instationnaire.

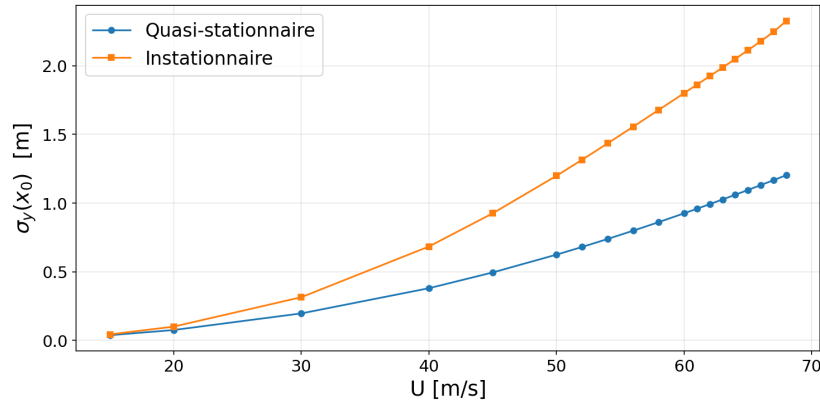


FIGURE 8.2 – Écart-type du déplacement latéral  $\sigma_y(x_0)$  à mi-travée en fonction de  $U$  — modèles quasi-stationnaire et instationnaire.

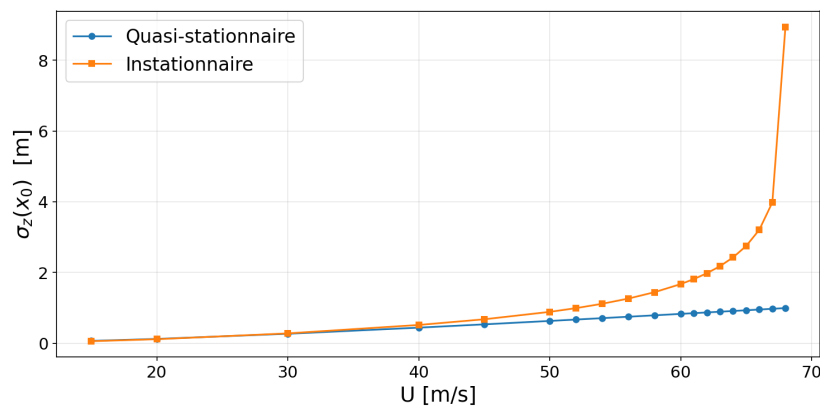


FIGURE 8.3 – Écart-type du déplacement vertical  $\sigma_z(x_0)$  à mi-travée en fonction de  $U$  — modèles quasi-stationnaire et instationnaire.

Deux observations méritent d'être soulignées. Premièrement, le modèle de instationnaire présente une divergence franche des écarts-types verticaux et de rotation aux abords de  $U \approx 68$  m/s, signature directe de l'annulation de l'amortissement total sur un mode critique. Deuxièmement, le modèle quasi-stationnaire ne reproduit pas cette divergence dans la fenêtre étudiée : sa croissance reste régulière et sans rupture de pente marquée. Ce contraste illustre la limite intrinsèque de ce modèle, qui ignore la dépendance fréquentielle des forces auto-excitées et sous-estime de ce fait le couplage flexion-torsion responsable du flottement classique. Cette observation justifie a posteriori l'effort consenti pour implémenter la formulation avec mémoire aérodynamique.

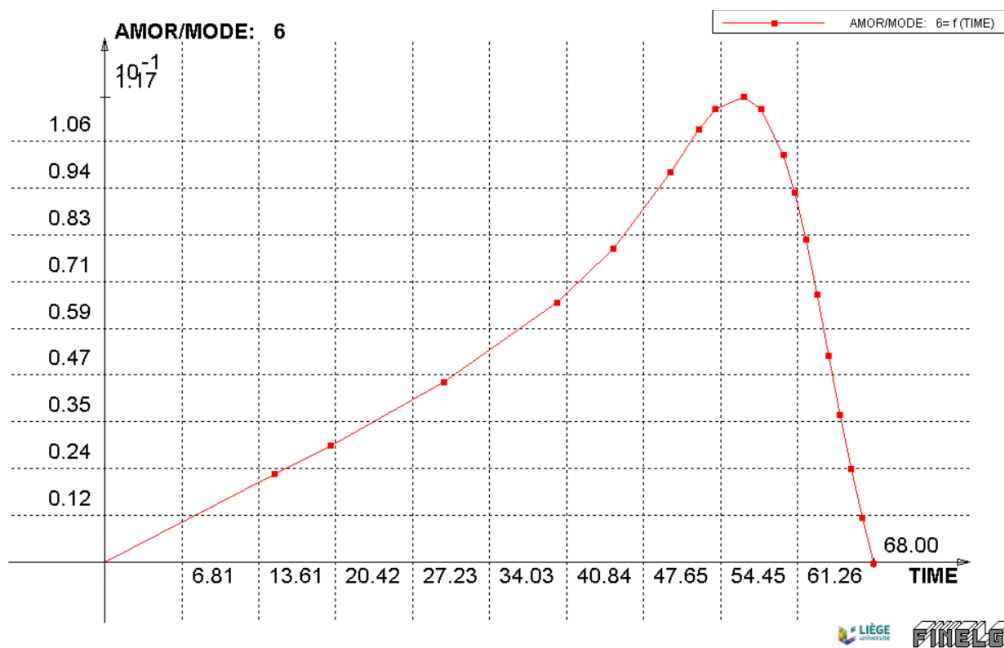
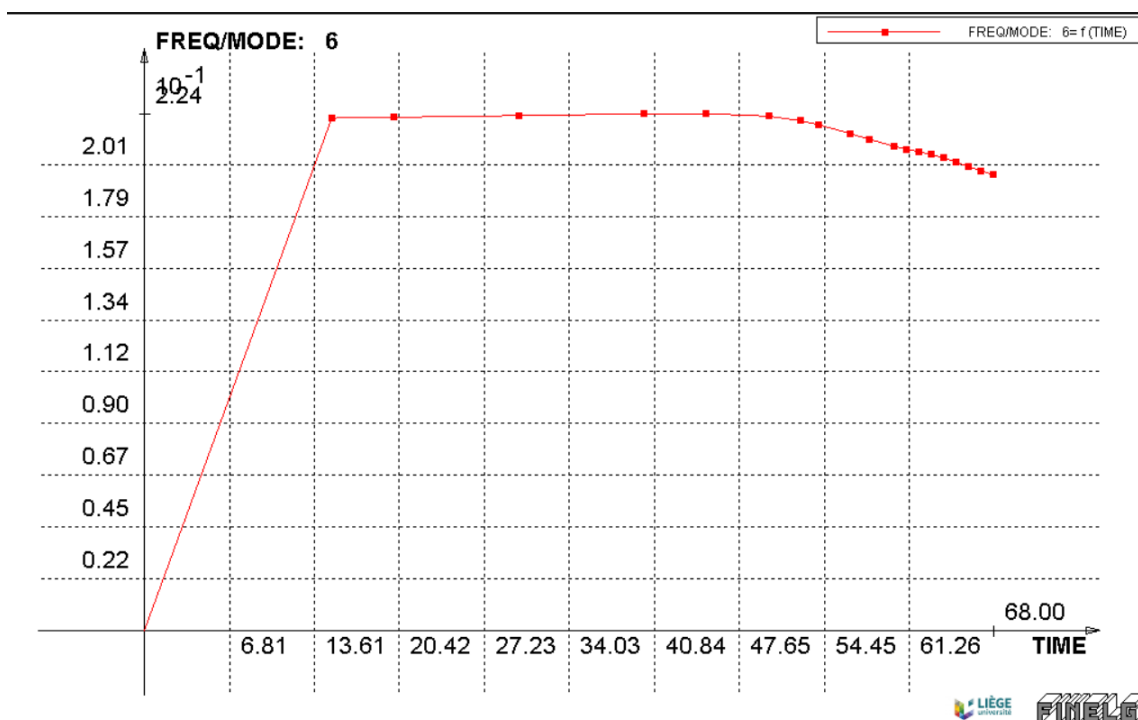
L'estimation  $U_{cr} \approx 68$  m/s issue de cette première approche doit toutefois être confortée par une méthode opérant directement sur l'équation aux valeurs propres aéroélastique, ce qui fait l'objet des deux sections suivantes.

Cette valeur est très proche de la valeur de 65 m/s rapportée dans la littérature pour le Humber Bridge [20], avec un écart relatif limité à 4,6 %.

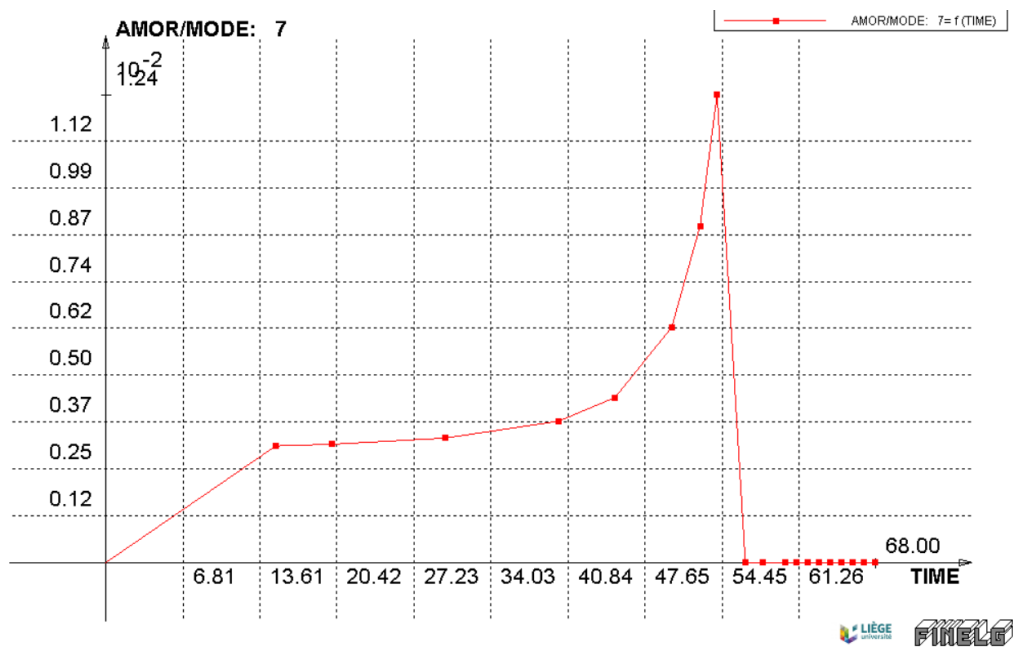
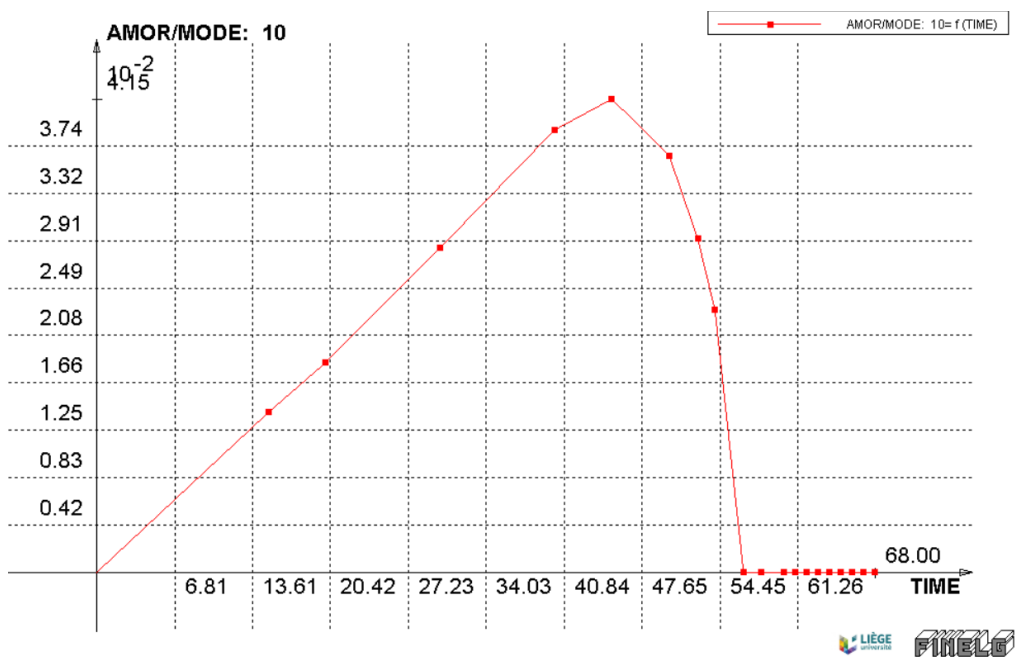
## 8.2 Analyse de stabilité avec FINELG

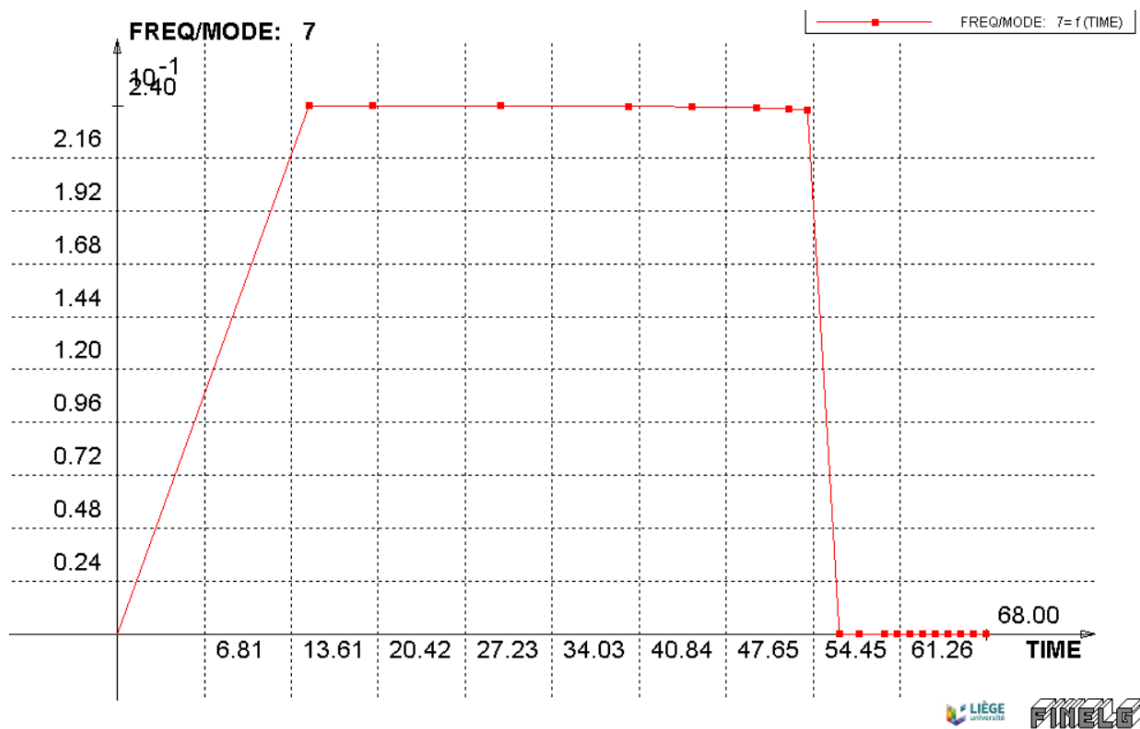
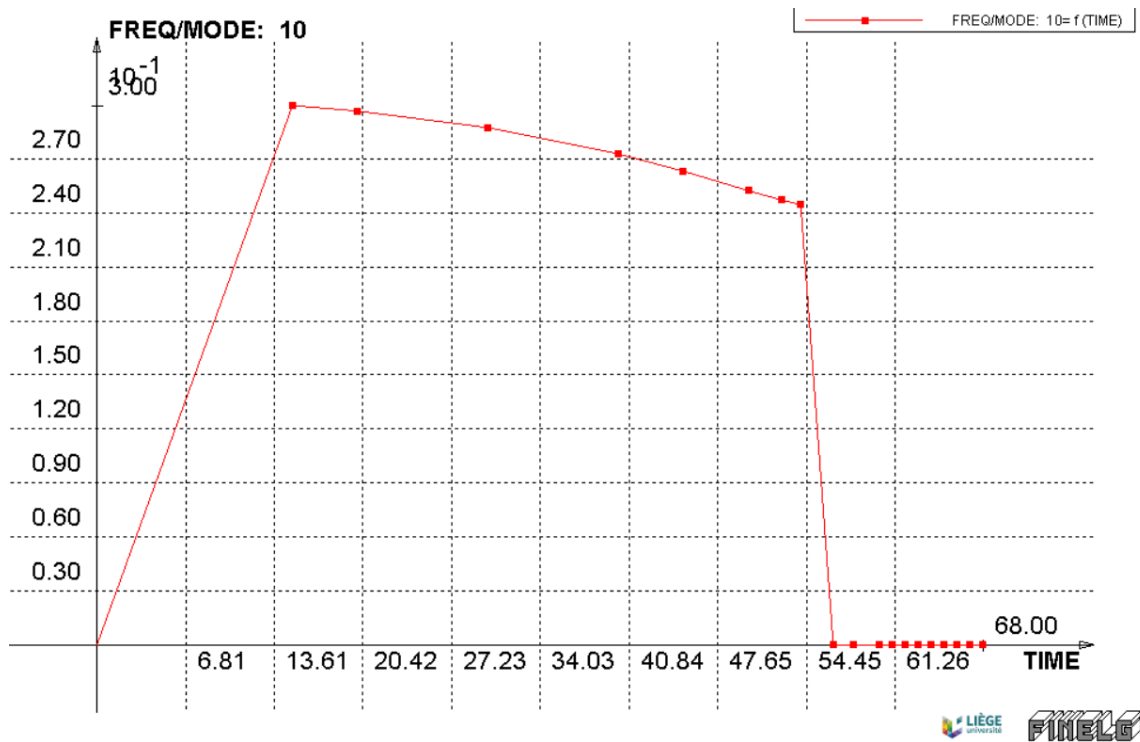
Comme rappelé dans l'état de l'art, le flottement correspond à l'annulation de la partie réelle d'une valeur propre du système aéroélastique. FINELG dispose d'une procédure d'analyse de stabilité au vent turbulent qui résout itérativement ce problème aux valeurs propres en fonction de  $U$ , et trace l'évolution de l'amortissement et de la fréquence modale pour chaque mode structurel retenu.

L'examen du mode 6 (qui est vertical) est le plus instructif. La Figure 8.4 montre que son amortissement augmente d'abord avec  $U$  — comportement attendu pour un mode dont l'aérodynamique injecte de la dissipation tant que le couplage flexion-torsion reste faible — puis chute brutalement pour atteindre zéro à  $U \approx 68$  m/s. Cette vitesse coïncide avec la divergence des écarts-types de la section précédente. La fréquence associée (Figure 8.5) décroît légèrement à proximité du seuil pour arriver à  $f_{cr} \approx 0,197$  Hz.

FIGURE 8.4 – Évolution de l’amortissement du mode 6 (vertical) en fonction de  $U$  — FINELG.FIGURE 8.5 – Évolution de la fréquence du mode 6 en fonction de  $U$  — FINELG.

L’analyse des modes 7 et 10 révèle en revanche un comportement pathologique. Pour ces deux modes, l’amortissement comme la fréquence chutent brutalement à zéro autour de  $U \approx 54$  m/s, puis restent identiquement nuls pour toutes les vitesses supérieures (Figures 8.6 à 8.9). La signature — saut discontinu suivi d’un plateau à zéro — exclut une transition physique : aucun phénomène aéroélastique ne produit ce type de discontinuité. Il s’agit d’un échec du suivi modal (*mode tracking*) dans la zone de forte coalescence flexion-torsion, où plusieurs valeurs propres se rapprochent suffisamment pour que l’algorithme d’appariement de FINELG perde la correspondance d’un pas  $U$  au suivant [24].

FIGURE 8.6 – Amortissement du mode 7 en fonction de  $U$  — FINELG.FIGURE 8.7 – Amortissement du mode 10 en fonction de  $U$  — FINELG.

FIGURE 8.8 – Fréquence du mode 7 en fonction de  $U$  — FINELG.FIGURE 8.9 – Fréquence du mode 10 en fonction de  $U$  — FINELG.

Cette perte de suivi n'invalide pas l'identification de  $U_{cr}$  sur le mode 6. Elle empêche toutefois toute interprétation quantitative de l'évolution des modes secondaires aux abords du flottement, et motive le recours à une méthode insensible par construction au mode swapping.

### 8.3 Vérification indépendante par continuation arc-length

Les résultats FINELG de la section précédente identifient une annulation de l'amortissement du mode critique autour de  $U \approx 68$  m/s, en accord avec la divergence des écarts-types obtenue par la chaîne Python. Ils révèlent toutefois également des discontinuités non physiques sur certains modes secondaires, en particulier les modes 7 et 10. Ces sauts, caractérisés par une chute simultanée de la fréquence et de l'amortissement vers zéro, sont interprétés comme des pertes de suivi modal plutôt que comme des instabilités physiques.

Afin de vérifier cette interprétation, une méthode de continuation par longueur d'arc est utilisée comme outil indépendant de suivi des branches propres. La méthode retenue est celle proposée par Heremans [24]. Contrairement à un suivi modal classique fondé sur un critère d'appariement entre deux vitesses successives, la continuation arc-length suit directement chaque branche dans l'espace augmenté formé par la valeur propre, le vecteur propre et la vitesse du vent. Elle est donc particulièrement adaptée aux zones de forte courbure ou de proximité modale, où les méthodes de *mode tracking* peuvent échouer.

#### 8.3.1 Principe et rôle dans ce travail

Après projection modale, le problème de stabilité aéroélastique peut s'écrire sous la forme générale

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, U) = \mathbf{0}, \quad (8.1)$$

où  $\mathbf{x}$  regroupe la valeur propre complexe et le vecteur propre associé. La continuation ne prescrit pas directement la vitesse  $U$ , mais impose que deux points successifs de la branche soient séparés par une longueur d'arc donnée dans l'espace  $(\mathbf{x}, U)$ . Cette contrainte permet de suivre continûment la branche même lorsque la relation entre  $U$  et la valeur propre devient fortement non linéaire.

Dans le présent travail, cette méthode n'est pas utilisée comme outil principal de calcul des réponses stochastiques. Son rôle est strictement celui d'une vérification indépendante de la vitesse critique et du suivi des branches modales. Les détails algorithmiques de la méthode, ainsi que l'attribution du code utilisé, sont reportés en Annexe C.

#### 8.3.2 Adaptation au modèle Humber

L'implémentation de référence de Heremans concerne un système à deux degrés de liberté de type *pitch-plunge*. Le modèle Humber utilisé ici est formulé dans une base modale de  $n_m = 15$  coordonnées généralisées. L'adaptation consiste donc essentiellement à remplacer l'aérodynamique analytique du système à deux degrés de liberté par la matrice aéroélastique modale issue du modèle du tablier.

À chaque couple  $(U, f)$ , la matrice aéroélastique sectionnelle complexe est d'abord projetée dans la base modale :

$$\mathbf{G}_{\text{aero}}(f, U) = \sum_{a,b} A_{\text{se},ab}(f, U) \mathbf{M}_{ab}^{(w)} \in \mathbb{C}^{n_m \times n_m}. \quad (8.2)$$

Cette matrice est ensuite décomposée, à fréquence courante figée, en contributions équivalentes d'amortissement et de raideur aérodynamiques :

$$\mathbf{M}_a = \mathbf{0}, \quad \mathbf{C}_a(f, U) = -\frac{1}{\omega} \Im[\mathbf{G}_{\text{aero}}(f, U)], \quad \mathbf{K}_a(f, U) = -\Re[\mathbf{G}_{\text{aero}}(f, U)]. \quad (8.3)$$

Cette décomposition de type  $p$ - $k$  constitue l'adaptation principale nécessaire pour appliquer l'algorithme de continuation au modèle du Humber Bridge. Le reste de l'algorithme est conservé dans sa formulation originale.

#### 8.3.3 Résultats

La méthode est appliquée au modèle Humber avec l'aérodynamique de Theodorsen sur l'intervalle  $U \in [0, 80]$  m/s. La continuation identifie une vitesse critique

$$U_{\text{cr}} \approx 67,96 \text{ m/s}, \quad f_{\text{cr}} \approx 0,197 \text{ Hz}. \quad (8.4)$$

Cette valeur est en accord quasi exact avec l'annulation de l'amortissement du mode 6 obtenue par FINELG, ainsi qu'avec la divergence des écarts-types issue de la chaîne Python. De plus, à cette vitesse critique, la fréquence du mode 6 coïncide également avec celle obtenue dans FINELG.

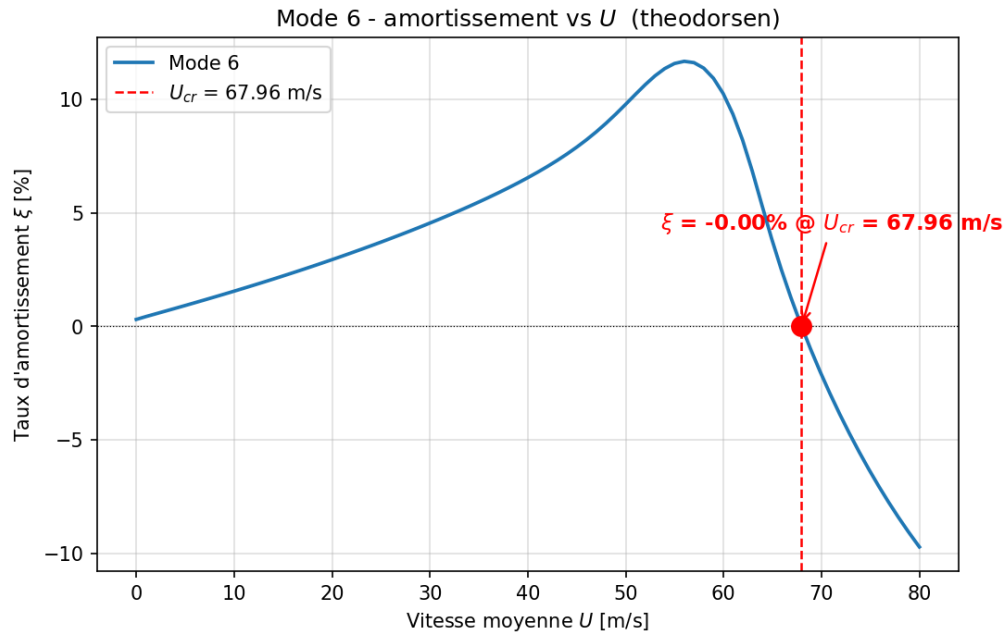


FIGURE 8.10 – Évolution de l'amortissement du mode 6 en fonction de  $U$  — continuation arc-length (selon la méthode présentée en [24])

Les modes 7 et 10, qui présentaient des discontinuités dans les sorties FINELG, évoluent de manière continue avec la méthode arc-length comme le montre les Figures 8.11 à 8.14.

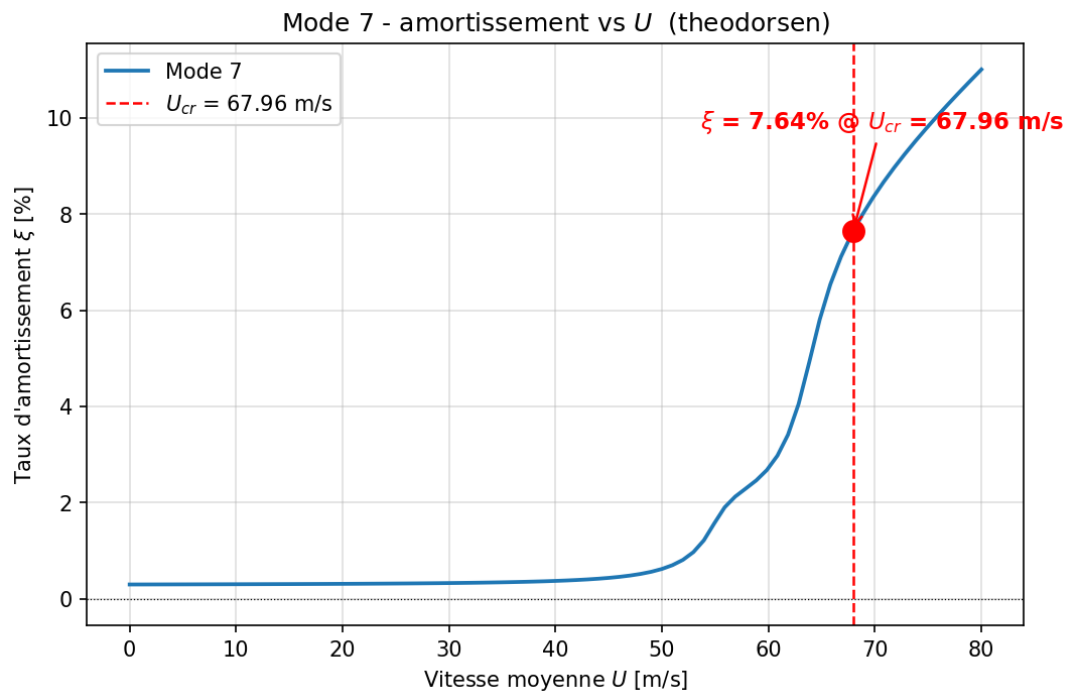


FIGURE 8.11 – Évolution de l'amortissement du mode 7 en fonction de  $U$  — continuation arc-length

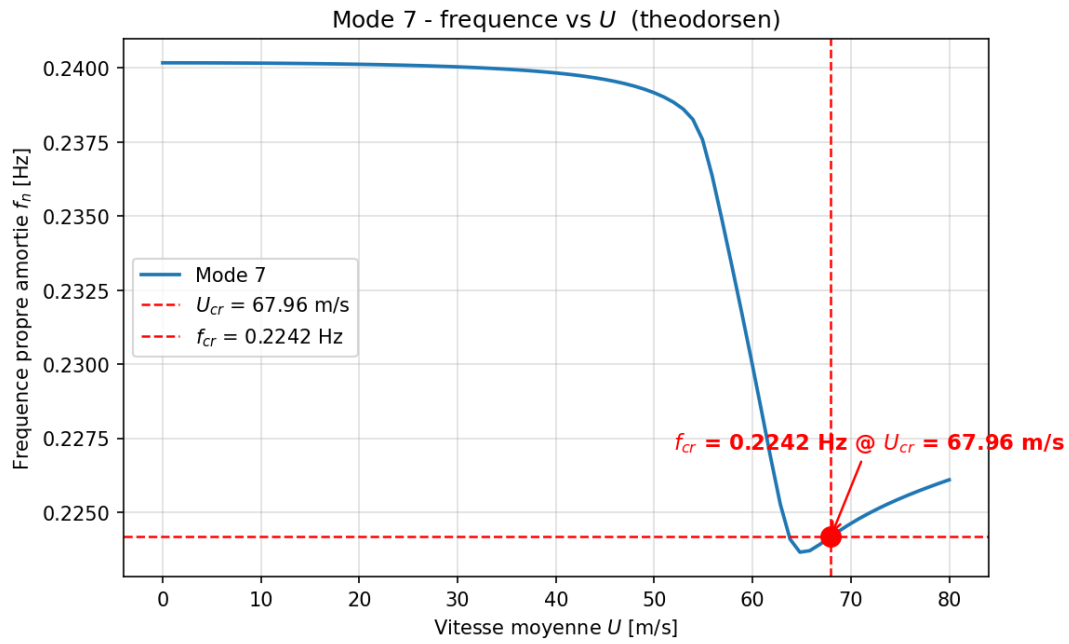


FIGURE 8.12 – Évolution de la fréquence du mode 7 en fonction de  $U$  — continuation arc-length (selon la méthode présentée en [24])

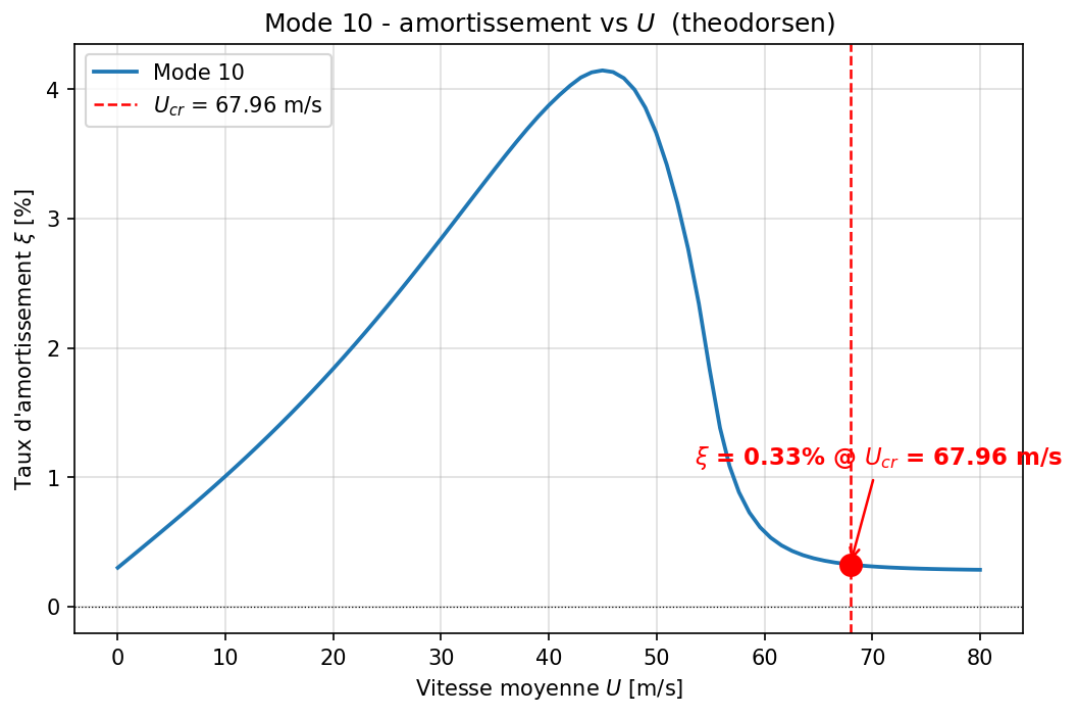


FIGURE 8.13 – Évolution de l'amortissement du mode 10 en fonction de  $U$  — continuation arc-length (selon la méthode présentée en [24])

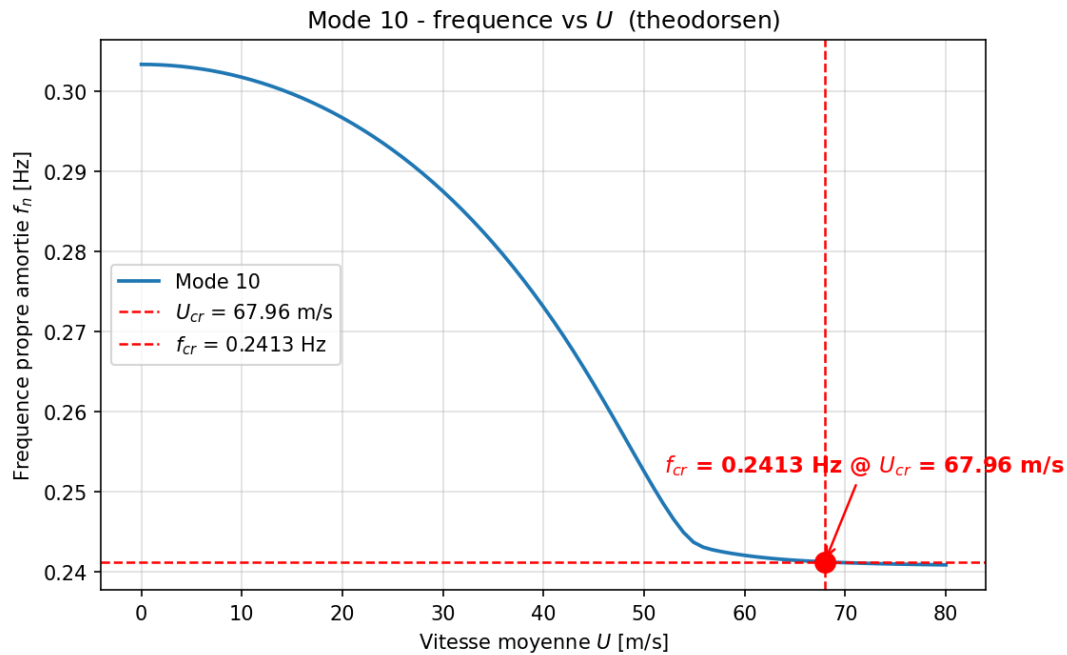


FIGURE 8.14 – Évolution de la fréquence du mode 10 en fonction de  $U$  — continuation arc-length (selon la méthode présentée en [24])

Cette continuité confirme que les sauts observés dans FINELG ne correspondent pas à des instabilités physiques, mais à un échec local du suivi modal.

## 8.4 Conclusion concernant la vitesse critique

La convergence des trois approches internes — divergence des écarts-types, analyse de stabilité FINELG et continuation arc-length — conduit donc à retenir

$$U_{cr} = 68 \text{ m/s} \quad (8.5)$$

comme vitesse critique de référence pour la suite du travail. Cette valeur est également cohérente avec l'ordre de grandeur rapporté par Bakis pour un modèle apparenté du Humber Bridge,  $U_{cr} \approx 65 \text{ m/s}$  [20]. L'écart de 4,6% reste compatible avec les différences de modélisation, de paramètres aérodynamiques et de propriétés structurales entre les deux études.

Troisième partie

## Construction des ESWL aéroélastiques

# 9 Adaptation de la méthode LRC–MIL au cadre aéroélastique

## 9.1 Pourquoi retenir la méthode LRC–MIL

La méthode LRC–MIL est retenue dans ce travail pour construire les charges statiques équivalentes associées à la réponse aéroélastique du tablier. Son intérêt principal est de traiter séparément les deux mécanismes qui composent la réponse dynamique sous vent turbulent : la contribution de background et la contribution résonante.

Cette distinction n’est pas seulement théorique. Elle permet d’utiliser, pour chaque contribution, la représentation la plus naturelle. La composante de background est essentiellement une réponse quasi-statique au champ de forces turbulentes. Elle est donc avantageusement traitée dans la base physique, à partir de la covariance des forces aérodynamiques nodales. À l’inverse, la composante résonante est gouvernée par les modes propres de la structure. Elle est donc plus naturellement décrite dans la base modale, à partir des charges inertielles modales.

La méthode LRC–MIL exploite précisément cette complémentarité. Elle évite de vouloir représenter toute la réponse dans une seule base, ce qui serait moins efficace. Une charge localisée ou fortement spatialisée est difficile à reconstruire correctement à l’aide d’un nombre limité de formes modales. À l’inverse, une réponse résonante purement modale serait mal décrite si elle était traitée uniquement comme une charge nodale quelconque. La méthode mixte permet donc d’associer :

- une composante LRC, calculée à partir des corrélations entre les forces de buffeting et la réponse cible ;
- une composante MIL, construite à partir des charges inertielles modales associées aux pics résonants.

Dans le cadre de ce travail, cette formulation est adaptée au cas aéroélastique. Les covariances et écarts-types utilisés ne proviennent pas d’une analyse dynamique classique, mais de la chaîne fréquentielle représentée à la Section 2.5. Les effets self-excited, la mémoire aérodynamique et les couplages modaux sont donc déjà inclus dans les grandeurs statistiques utilisées pour construire les ESWL.

Cette extension au cadre aéroélastique ne constitue toutefois pas une rupture méthodologique nouvelle : Chen et Kareem ont déjà formulé les charges statiques équivalentes du buffeting des ponts en tenant compte des couplages structurels et aérodynamiques, notamment à travers une décomposition en contributions de background et résonantes [2].

## 9.2 Matrices de masse et de flexibilité

La méthode LRC–MIL a déjà été introduite dans l’état de l’art à la Section 3.3. Dans ce travail, elle est implémentée dans l’environnement Python développé pour le post-traitement des résultats aéroélastiques.

Avant de continuer, il convient toutefois d’introduire deux objets structuraux qui interviennent directement dans la méthode et qui n’ont pas encore été définis explicitement : la matrice de masse et la matrice de flexibilité statique. La construction des ESWL nécessite en effet deux objets structuraux exprimés dans la base physique du tablier : une matrice de masse, utilisée pour construire les charges inertielles modales, et une matrice de flexibilité statique, utilisée pour calculer les réponses statiques produites par les charges équivalentes.

Ces matrices ne sont pas directement extraites sous forme complète depuis FINELG. Elles sont donc obtenues par deux stratégies différentes, décrites ci-après.

### 9.2.1 Matrice de masse

La matrice de masse est construite directement dans Python à partir d'un modèle de masse concentrée. Le tablier est discrétisé par ses nœuds structuraux, avec trois degrés de liberté par nœud :

$$y, \quad z, \quad \theta.$$

La matrice de masse est donc de dimension  $3N \times 3N$ , où  $N$  est le nombre de nœuds du tablier.

Le principe du modèle concentré est le suivant : la masse de chaque élément du tablier est répartie équitablement entre les deux nœuds qu'il relie. Pour un élément  $e$  de longueur  $L_e$ , la masse linéique  $\mu$  et la masse en rotation  $J$  contribuent à la matrice de masse concentrée selon :

$$m_e = \mu L_e \quad \text{et} \quad J_e = J L_e, \quad (9.1)$$

partagés également entre les deux nœuds extrêmes sur les degré de liberté correspondant ( $m_e$  pour les degrés de liberté en translation,  $J_e$  pour le degré de liberté en rotation).

Les valeurs utilisées sont :

$$\mu = 16215 \text{ kg/m}, \quad J = 1,05 \times 10^6 \text{ kg m}^2/\text{m}.$$

Compte tenu de la longueur totale du tablier et de la finesse du maillage, avec des éléments de 10 m, cette approximation de masse concentrée est jugée suffisante pour la construction des charges inertielles modales.

### 9.2.2 Matrice de flexibilité statique

La matrice de raideur complète du modèle n'est pas construite explicitement dans Python. Elle n'est d'ailleurs pas l'objet directement nécessaire pour la suite. Pour calculer la réponse statique associée à une charge équivalente, la grandeur réellement utilisée est la matrice de flexibilité statique :

$$\mathbf{A} = \mathbf{K}^{-1}. \quad (9.2)$$

Cette matrice relie directement un vecteur de forces nodales appliquées sur le tablier aux déplacements nodaux correspondants :

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{f}. \quad (9.3)$$

Dans ce travail,  $\mathbf{A}$  est construite à partir du modèle FINELG complet. Pour cela, une charge statique unitaire est appliquée successivement sur chacun des degrés de liberté du tablier. Pour chaque cas de charge, les déplacements  $y$ ,  $z$  et  $\theta$  de tous les nœuds du tablier sont extraits. En répétant cette opération pour l'ensemble des degrés de liberté, on obtient une matrice :

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3N \times 3N}. \quad (9.4)$$

Chaque colonne de  $\mathbf{A}$  correspond donc à la réponse statique du tablier à une force unitaire appliquée sur un degré de liberté donné.

Une attention particulière est nécessaire, car le modèle complet du pont suspendu contient des câbles principaux précontraints. La flexibilité du tablier doit donc être évaluée autour de l'état d'équilibre précontraint du pont, et non autour d'une configuration non chargée. La procédure utilisée dans FINELG est la suivante :

- une première analyse non linéaire est réalisée afin d'appliquer la prétension dans les câbles principaux et d'obtenir l'état d'équilibre convergé du pont ;
- au terme de cette analyse non linéaire, FINELG calcule la matrice de raideur tangente associée à cet état d'équilibre précontraint ;
- une seconde analyse, cette fois linéaire, est ensuite réalisée à partir de cet état convergé. Dans cette analyse linéaire, les charges unitaires sont appliquées successivement sur chacun des degrés de liberté du tablier afin d'extraire les déplacements correspondants et de construire la matrice de flexibilité.

La matrice obtenue doit donc être interprétée comme la flexibilité linéarisée du système complet autour de l'état précontraint. Elle intègre l'effet global des câbles, des suspentes, des pylônes et de la prétension, même si les charges équivalentes sont ensuite appliquées uniquement sur les degrés de liberté du tablier.

# 10 Reconstruction de l'enveloppe par charges statiques équivalentes

L'objectif de ce chapitre est de vérifier que les charges statiques équivalentes construites à partir de la méthode LRC–MIL permettent bien de reproduire les enveloppes de réponse issues de l'analyse dynamique aéroélastique. À ce stade du travail, il ne s'agit donc pas encore de réduire le nombre de cas de charge, mais bien de valider la chaîne complète de calcul : à partir d'une réponse dynamique cible, une ou plusieurs ESWL sont générées, appliquées statiquement au modèle, puis comparées à l'enveloppe de référence.

Cette étape joue un rôle essentiel dans la logique du mémoire. Avant de chercher à compresser l'information sous forme de Principal Static Wind Loads (PSWL), il faut d'abord montrer que les ESWL elles-mêmes portent correctement l'information physique issue du calcul dynamique. Autrement dit, les PSWL ne peuvent avoir de sens que si la famille de charges équivalentes à compresser est déjà pertinente.

L'analyse est menée sur les trois composantes principales du mouvement du tablier : le déplacement vertical  $z$ , le déplacement transversal  $y$  et la rotation  $\theta$ . Comme dans les chapitres précédents, deux modèles aérodynamiques sont comparés :

- le modèle quasi-stationnaire, sans mémoire aérodynamique ;
- le modèle instationnaire, tenant compte des forces auto-excitées.

## 10.1 Mesure de la qualité de reconstruction

Afin de quantifier la qualité d'une reconstruction d'enveloppe, on introduit un taux de reconstruction basé sur les aires. Pour une réponse  $\eta$  donnée, l'analyse dynamique complète fournit une enveloppe cible, notée  $\eta_{\text{cible}}(x)$ , tandis que l'application d'une ou de plusieurs charges statiques équivalentes fournit une enveloppe reconstruite, notée  $\eta_{\text{rec}}(x)$ .

Le taux de reconstruction est défini comme le rapport entre l'aire utile reconstruite et l'aire de l'enveloppe cible :

$$\tau_{\eta} = \frac{\int_L \min(|\eta_{\text{rec}}(x)|, |\eta_{\text{cible}}(x)|) \, dx}{\int_L |\eta_{\text{cible}}(x)| \, dx}. \quad (10.1)$$

La fonction  $\min(\cdot)$  permet de ne comptabiliser que la partie utile de la reconstruction : si l'enveloppe reconstruite dépasse localement l'enveloppe cible, la contribution excédentaire n'est pas prise en compte dans le taux de reconstruction. Ainsi, une reconstruction qui dépasse fortement l'enveloppe cible ne peut pas artificiellement améliorer le taux obtenu.

Un taux  $\tau_{\eta} = 100\%$  signifie que l'aire de l'enveloppe cible est entièrement reconstruite, sans tenir compte d'éventuels dépassements locaux. À l'inverse, un taux inférieur à  $100\%$  traduit une sous-reconstruction globale de l'enveloppe. Dans la suite, les pourcentages indiqués sur les figures correspondent à ce taux de reconstruction surfacique.

Ce taux mesure donc la part de l'enveloppe cible effectivement couverte par la reconstruction ; il ne constitue pas, à lui seul, une mesure du dépassement local. Les éventuels dépassements doivent être analysés séparément lorsque la reconstruction est utilisée comme outil de dimensionnement.

## 10.2 Validation de la reconstruction à faible vitesse

On considère d'abord une vitesse moyenne fixée à

$$U = 30 \text{ m/s.}$$

Cette vitesse est volontairement éloignée de la vitesse critique de flottement, de sorte que les effets aéroélastiques auto-excités restent encore modérés. Elle constitue donc un premier cas de validation naturel : si la méthode échoue déjà à faible vitesse, elle ne pourra évidemment pas être exploitée dans des régimes plus critiques.

La reconstruction repose sur un algorithme itératif de type *steepest descent*. Une première ESWL est construite de manière à reproduire exactement l'enveloppe cible en un point de contrôle donné du tablier. La réponse statique associée est ensuite comparée à l'enveloppe dynamique sur toute la portée. Le point où l'écart est maximal est alors identifié, puis une nouvelle ESWL est générée en ce point. Le processus est répété jusqu'à atteindre un taux de reconstruction satisfaisant.

Les deux premières itérations de la reconstruction de l'enveloppe verticale sont présentées aux Figures 10.1 et 10.2.

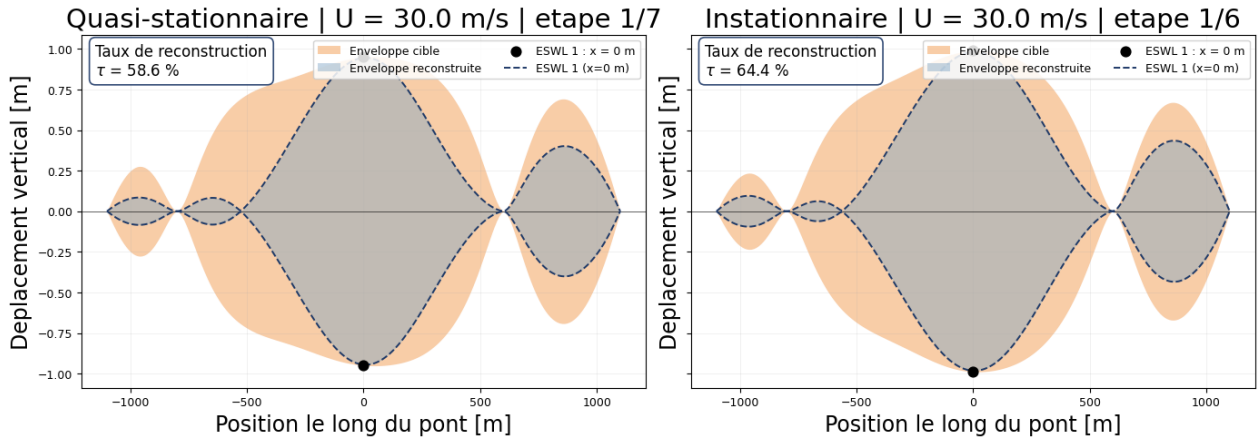


FIGURE 10.1 – Première itération de reconstruction de l'enveloppe verticale à  $U = 30$  m/s.

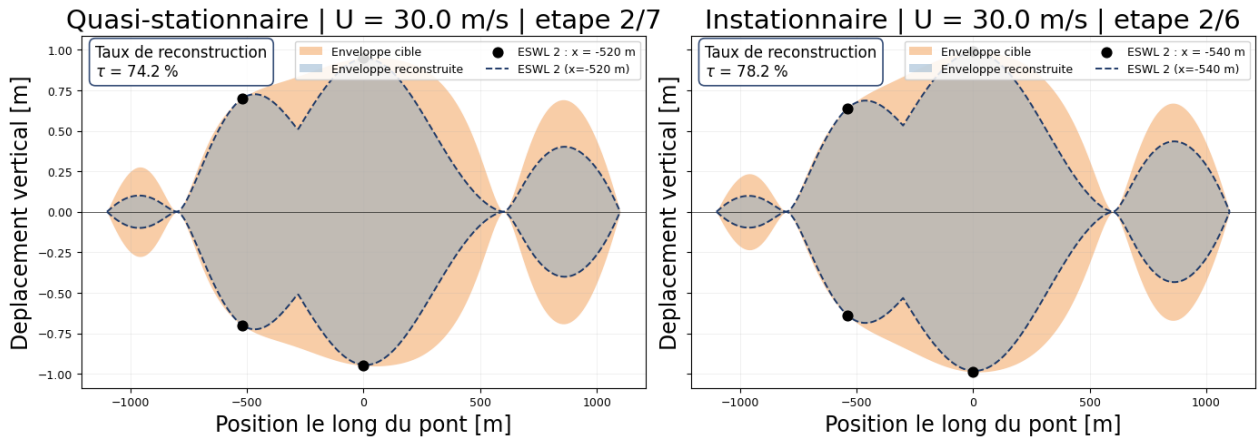
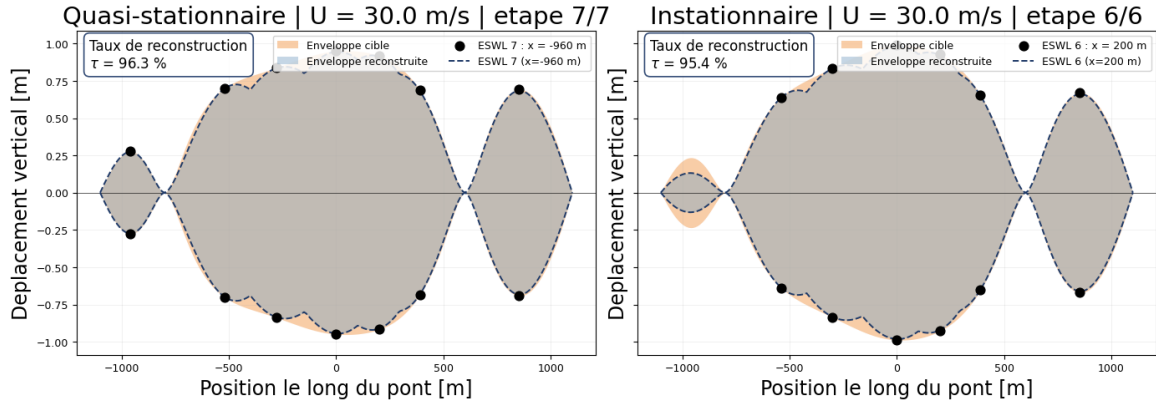


FIGURE 10.2 – Deuxième itération de reconstruction de l'enveloppe verticale à  $U = 30$  m/s.

Ces figures illustrent bien le rôle progressif des ESWL. Une seule charge permet de satisfaire localement la condition d'équivalence, mais reste insuffisante pour reconstruire correctement l'enveloppe globale. L'ajout d'une seconde charge améliore déjà fortement la couverture spatiale de l'enveloppe.

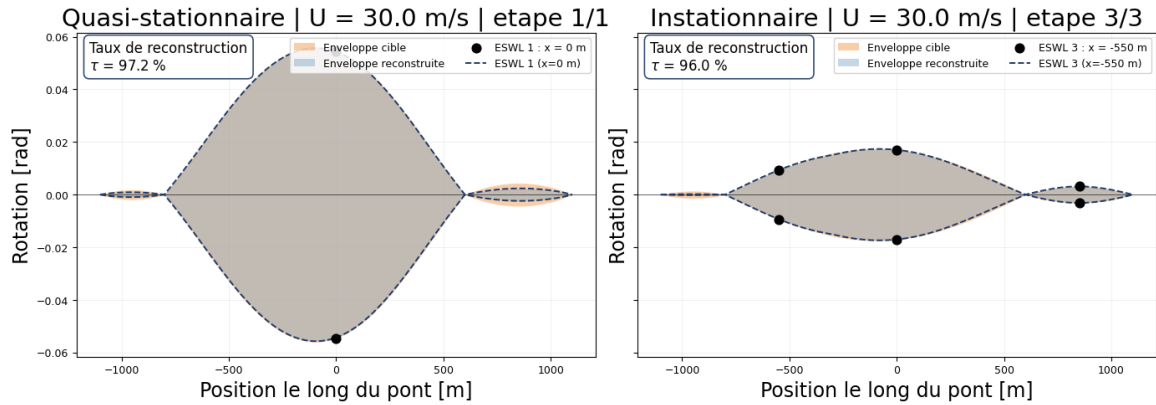
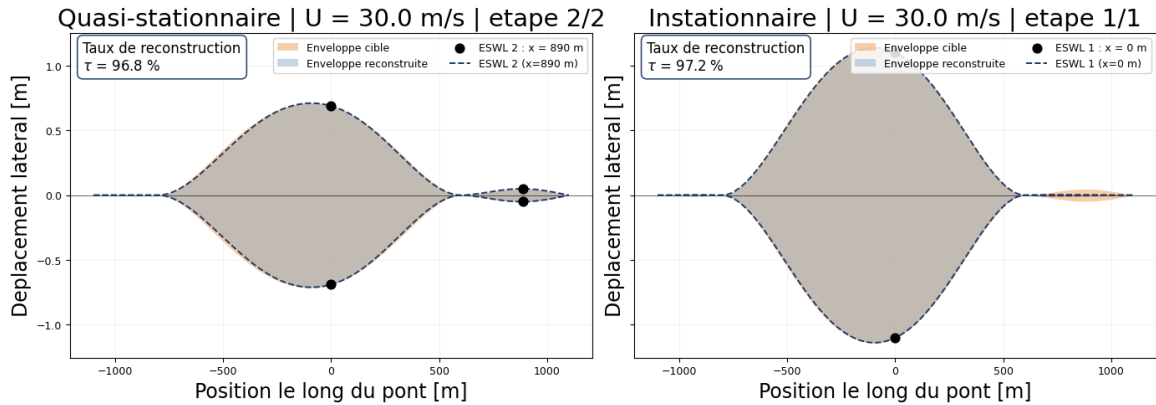
En poursuivant l'algorithme, l'enveloppe verticale est finalement reconstruite avec un niveau de précision satisfaisant pour les deux modèles. Le résultat final est présenté à la Figure 10.3.

FIGURE 10.3 – Reconstruction finale de l'enveloppe verticale à  $U = 30$  m/s.

Le taux de reconstruction atteint 96,3 % pour le modèle quasi-stationnaire et 95,4 % pour le modèle instationnaire. Sept ESWL sont nécessaires dans le premier cas, contre six dans le second.

À cette vitesse, les deux enveloppes présentent des formes très proches. Ce résultat est cohérent avec l'analyse des écarts-types menée précédemment : loin de la vitesse critique de flottement, les effets de mémoire aérodynamique restent relativement faibles et le modèle quasi-stationnaire fournit encore une approximation satisfaisante du comportement global. Les légères différences observées proviennent principalement de l'amortissement aérodynamique additionnel introduit par le modèle instationnaire.

La même procédure est ensuite appliquée à la rotation  $\theta$  et au déplacement transversal  $y$ . Les résultats finaux sont présentés aux Figures 10.4 et 10.5.

FIGURE 10.4 – Reconstruction de l'enveloppe de la rotation du tablier à  $U = 30$  m/s.FIGURE 10.5 – Reconstruction de l'enveloppe du déplacement transversal à  $U = 30$  m/s.

Ces résultats confirment que la chaîne de calcul ESWL fonctionne correctement pour les trois composantes de réponse étudiées.

### 10.3 Validation de la reconstruction au voisinage de la vitesse critique

La section précédente a montré que les ESWL permettent de reconstruire correctement les enveloppes lorsque les effets aéroélastiques restent modérés. Il est maintenant nécessaire de vérifier que cette propriété reste valable lorsque le système atteint le régime critique de flottement.

La reconstruction est donc étudiée pour une vitesse de vent de

$$U = 68 \text{ m/s},$$

correspondant à la vitesse critique de flottement du modèle instationnaire.

À cette vitesse, les forces auto-excitées deviennent dominantes et modifient profondément la dynamique du tablier. Il ne s'agit plus simplement d'une amplification des réponses observées à faible vitesse : la structure spatiale même des enveloppes évolue fortement sous l'effet du couplage aéroélastique.

Les Figures 10.6, 10.7 et 10.8 présentent les reconstructions obtenues respectivement pour la rotation, le déplacement transversal et le déplacement vertical.

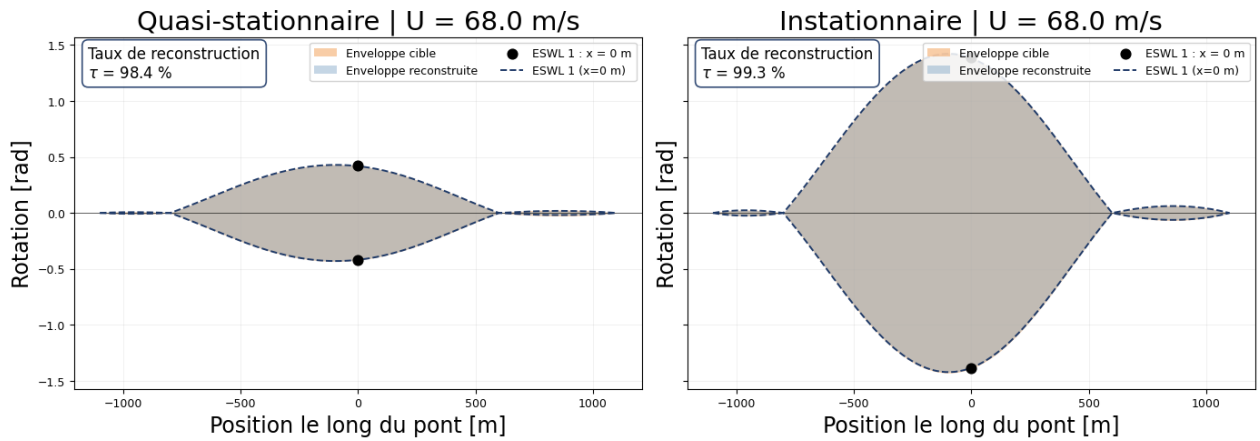


FIGURE 10.6 – Reconstruction de l'enveloppe de la rotation du tablier à la vitesse critique  $U = 68 \text{ m/s}$ .

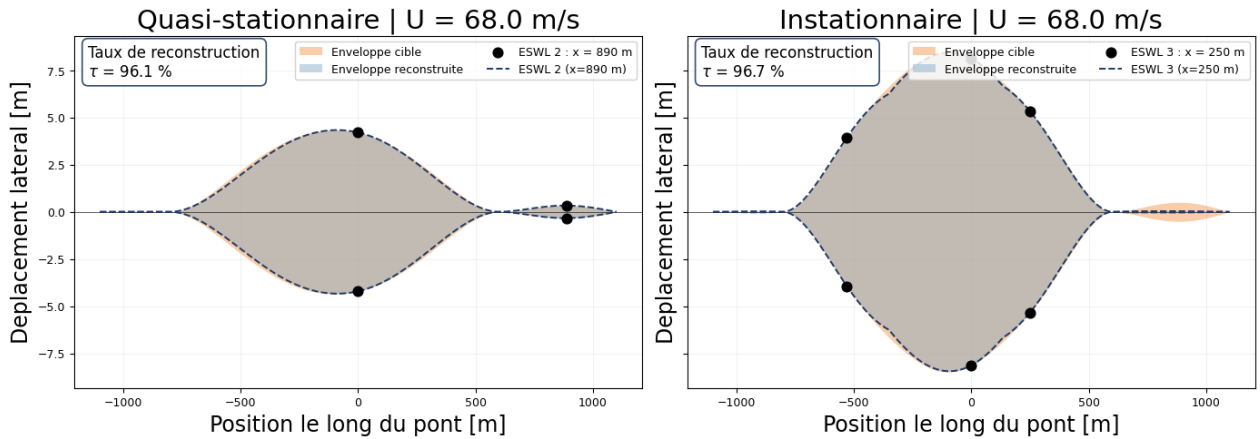


FIGURE 10.7 – Reconstruction de l'enveloppe du déplacement transversal à la vitesse critique  $U = 68 \text{ m/s}$ .

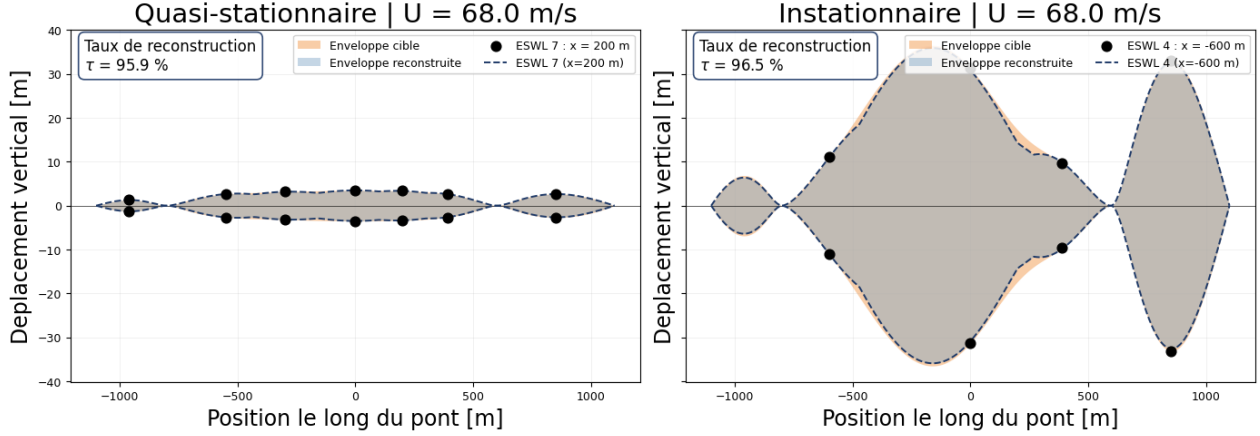


FIGURE 10.8 – Reconstruction de l'enveloppe verticale à la vitesse critique  $U = 68$  m/s.

Les résultats montrent que la méthode ESWL reste capable de reconstruire correctement les enveloppes, y compris au voisinage immédiat du flottement. Les taux de reconstruction restent supérieurs à 95 % pour les différents cas étudiés.

Le point le plus remarquable n'est toutefois pas le taux de reconstruction lui-même, mais bien l'évolution de la forme des enveloppes. Comparées aux réponses obtenues à faible vitesse, les enveloppes calculées à la vitesse critique présentent des distributions spatiales profondément modifiées pour le modèle instationnaire.

Le cas du déplacement vertical est particulièrement révélateur. À faible vitesse, la réponse était principalement dominée par une forme globale relativement simple, associée aux premiers modes verticaux du tablier. À la vitesse critique, l'enveloppe devient beaucoup plus riche spatialement, avec l'apparition de zones localisées et de variations rapides le long du tablier. Cette évolution traduit directement la modification des contributions modales et l'influence croissante des forces auto-excitées lorsque le système approche l'instabilité aéroélastique.

Il est également intéressant de constater que cette évolution des enveloppes ne conduit pas nécessairement à une augmentation du nombre d'ESWL nécessaires à leur reconstruction. Dans plusieurs cas, un nombre relativement faible de charges reste suffisant pour atteindre un excellent taux de reconstruction. Cela suggère qu'à proximité du flottement, la réponse dynamique tend à être dominée par quelques directions de chargement particulières.

Cette observation est importante pour la suite du travail. En effet, même si les ESWL restent capables de reproduire correctement les enveloppes, la dépendance de ces charges à la vitesse du vent et à la réponse considérée rend leur utilisation directe peu pratique dans une perspective de dimensionnement.

## 10.4 Reconstruction sur un intervalle de vitesses : stratégie de rescaling

Les sections précédentes ont montré qu'il est possible de reconstruire correctement les enveloppes pour une vitesse donnée, aussi bien loin du flottement qu'à la vitesse critique. Toutefois, cette approche ne suffit pas dans une perspective de dimensionnement réel. En pratique, la vitesse moyenne du vent constitue une variable de calcul, et il est nécessaire de pouvoir estimer les enveloppes sur une plage étendue de vitesses.

Une première stratégie consiste alors à construire les ESWL à une vitesse de référence

$$U_{\text{ref}} = 30 \text{ m/s},$$

puis à les mettre à l'échelle afin de reconstruire les enveloppes obtenues à d'autres vitesses. Cette approche est appelée stratégie de *rescaling* dans la suite du travail.

Le facteur de mise à l'échelle est choisi de manière conservative, de sorte que la réponse reconstruite ne dépasse jamais l'enveloppe cible. Pour une réponse verticale, cela revient à imposer

$$\alpha |\eta_E(x)| \leq |\eta_{\text{cible}}(x)| \quad \forall x, \quad (10.2)$$

où  $\eta_E(x)$  désigne la réponse obtenue à partir des ESWL construites à la vitesse de référence. Le facteur admissible maximal est alors donné par

$$\alpha = \min_{x: |\eta_E(x)| > 0} \left( \frac{|\eta_{\text{cible}}(x)|}{|\eta_E(x)|} \right). \quad (10.3)$$

Cette définition impose une "condition de tangence" [3] entre l'enveloppe reconstruite et l'enveloppe cible, tout en empêchant tout dépassement local.

#### 10.4.1 Application au déplacement vertical

Les Figures 10.9 à 10.12 présentent les reconstructions obtenues pour le déplacement vertical à différentes vitesses.

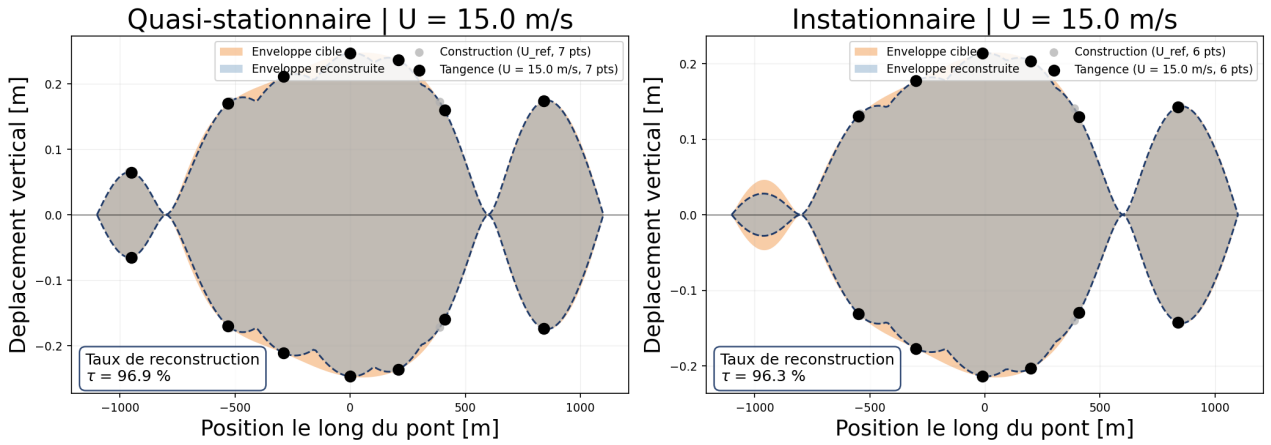


FIGURE 10.9 – Reconstruction de l'enveloppe verticale à 15 m/s à partir des ESWL construites à  $U_{\text{ref}} = 30$  m/s.

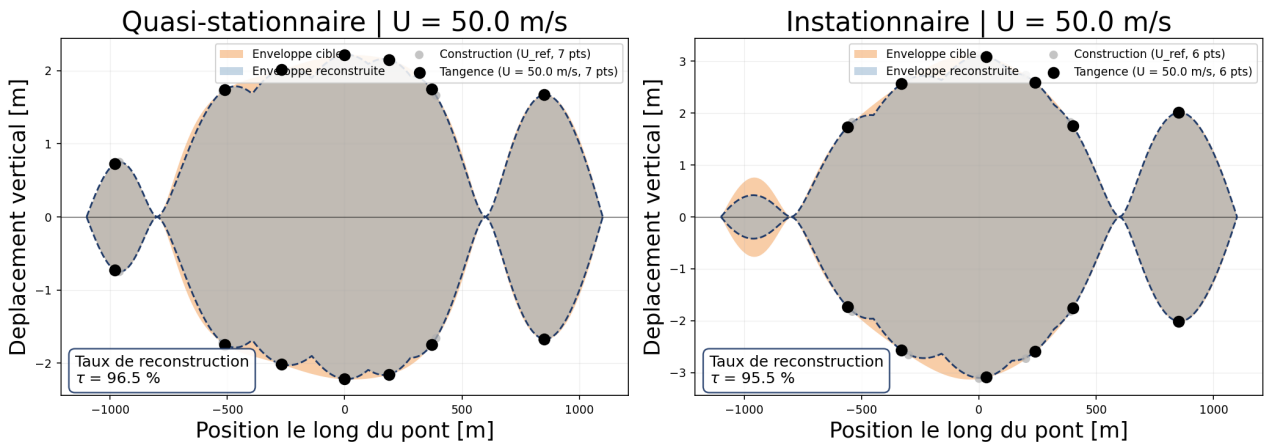


FIGURE 10.10 – Reconstruction de l'enveloppe verticale à 50 m/s à partir des ESWL construites à  $U_{\text{ref}} = 30$  m/s.

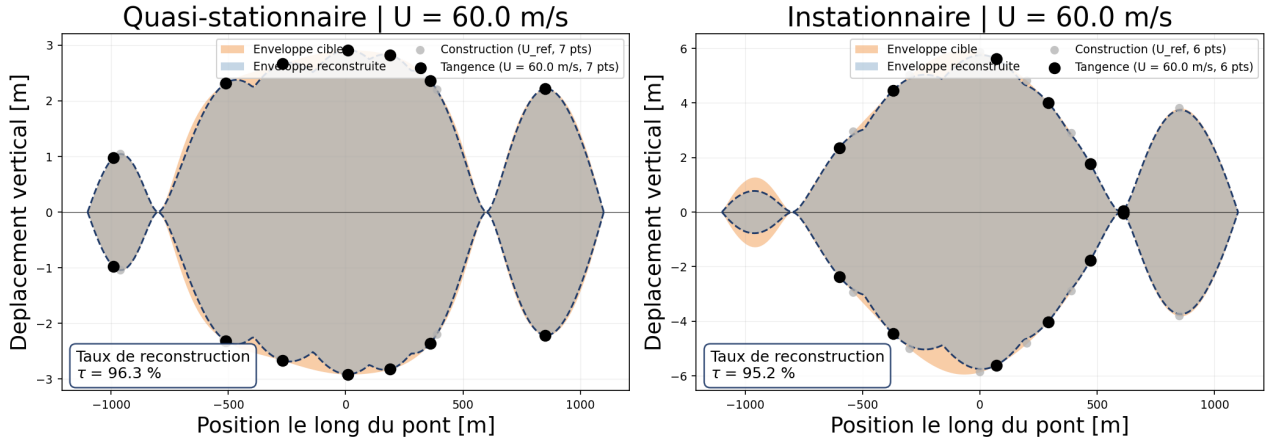


FIGURE 10.11 – Reconstruction de l'enveloppe verticale à 60 m/s à partir des ESWL construites à  $U_{\text{ref}} = 30$  m/s.

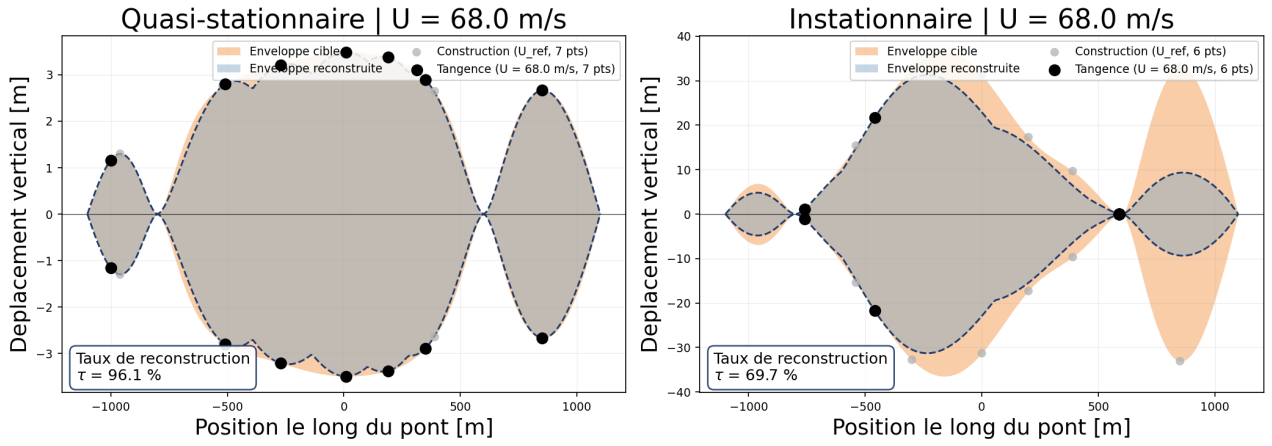


FIGURE 10.12 – Reconstruction de l'enveloppe verticale à 68 m/s à partir des ESWL construites à  $U_{\text{ref}} = 30$  m/s.

À faible vitesse, les deux modèles conduisent à des enveloppes relativement proches de celles obtenues à la vitesse de référence. La stratégie de rescaling fonctionne donc correctement : les charges construites à 30 m/s restent représentatives du comportement observé à 15 m/s.

En revanche, lorsque la vitesse augmente, les limites de cette approche apparaissent progressivement. Le modèle instationnaire voit notamment son enveloppe verticale évoluer fortement à mesure que la vitesse approche la vitesse critique de flottement. Cette évolution ne correspond pas à une simple amplification uniforme des réponses : la structure spatiale même des enveloppes change avec la vitesse du vent.

Ainsi, même si les enveloppes restent globalement reconstituables, une simple mise à l'échelle d'ESWL construites à basse vitesse devient progressivement insuffisante pour reproduire fidèlement toute la richesse du comportement dynamique pour le modèle instationnaire.

#### 10.4.2 Application à la rotation

La même analyse est menée pour la rotation  $\theta$ . Les résultats sont présentés aux Figures 10.13 à 10.16.

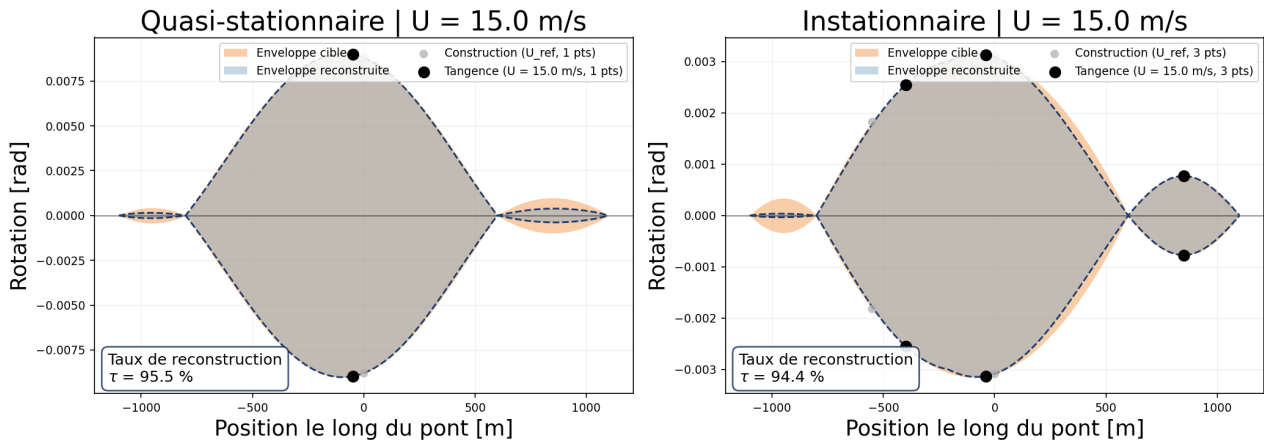


FIGURE 10.13 – Reconstruction de l'enveloppe de la rotation du tablier à 15 m/s à partir des ESWL construites à  $U_{ref} = 30$  m/s.

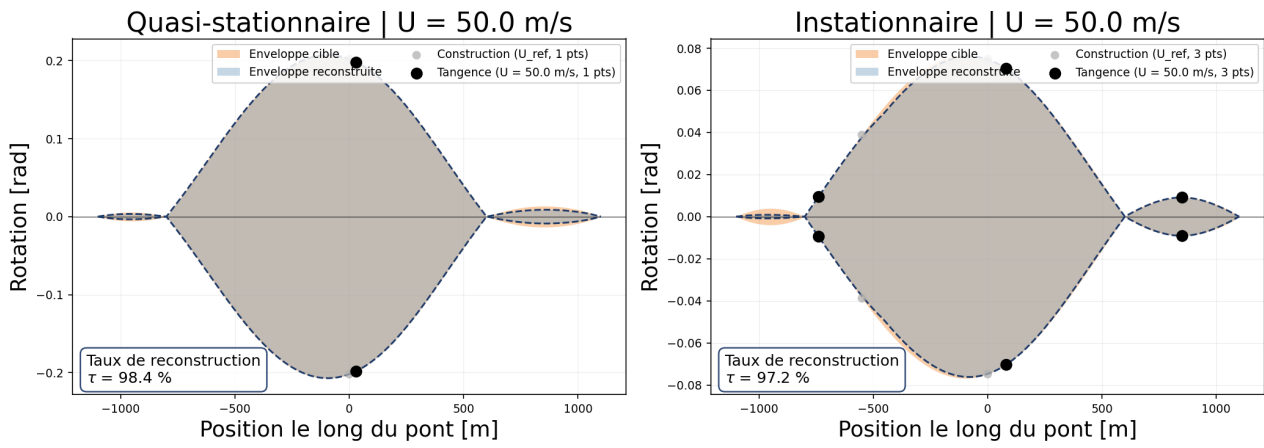


FIGURE 10.14 – Reconstruction de l'enveloppe de la rotation du tablier à 50 m/s à partir des ESWL construites à  $U_{ref} = 30$  m/s.

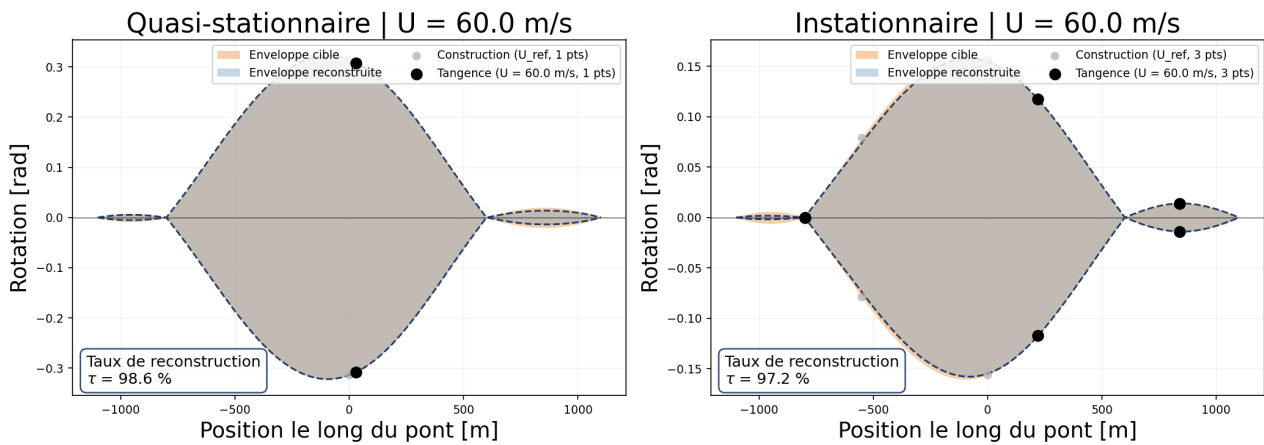


FIGURE 10.15 – Reconstruction de l'enveloppe de la rotation du tablier à 60 m/s à partir des ESWL construites à  $U_{ref} = 30$  m/s.

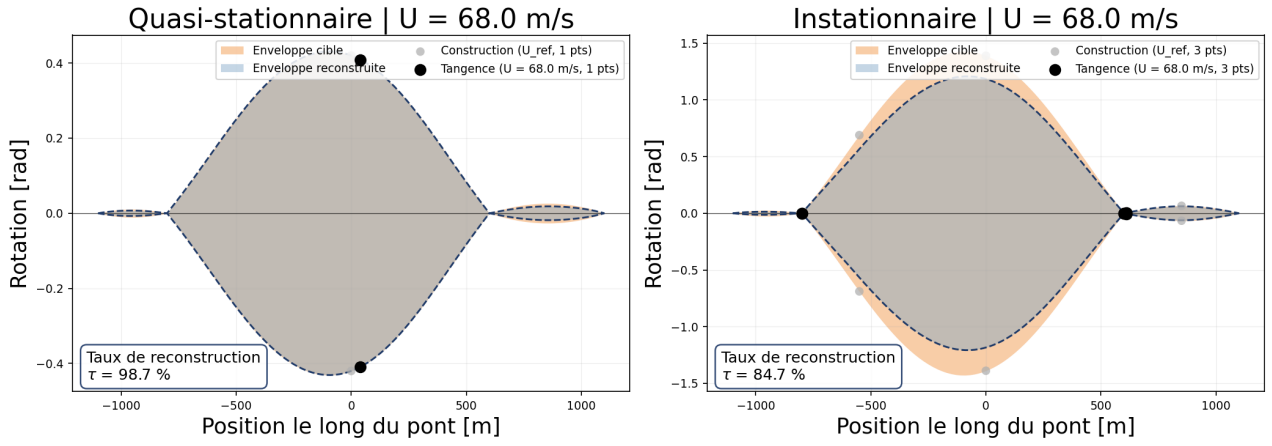


FIGURE 10.16 – Reconstruction de l'enveloppe de la rotation du tablier à 68 m/s à partir des ESWL construites à  $U_{\text{ref}} = 30$  m/s.

Pour la rotation, les différences entre les deux modèles restent moins spectaculaires visuellement que pour le déplacement vertical. Cela ne signifie toutefois pas que les effets aéroélastiques deviennent négligeables. Les taux de reconstruction montrent au contraire une dégradation progressive lorsque la vitesse augmente.

Cette observation est importante pour la suite du travail : une comparaison purement visuelle des enveloppes peut être trompeuse. Deux enveloppes peuvent sembler relativement proches tout en nécessitant des combinaisons de charges différentes pour être correctement reproduites (comme le montre la Figure 10.16).

Les évolutions du taux de reconstruction en fonction de la vitesse sont présentées aux Figures 10.17 et 10.18.

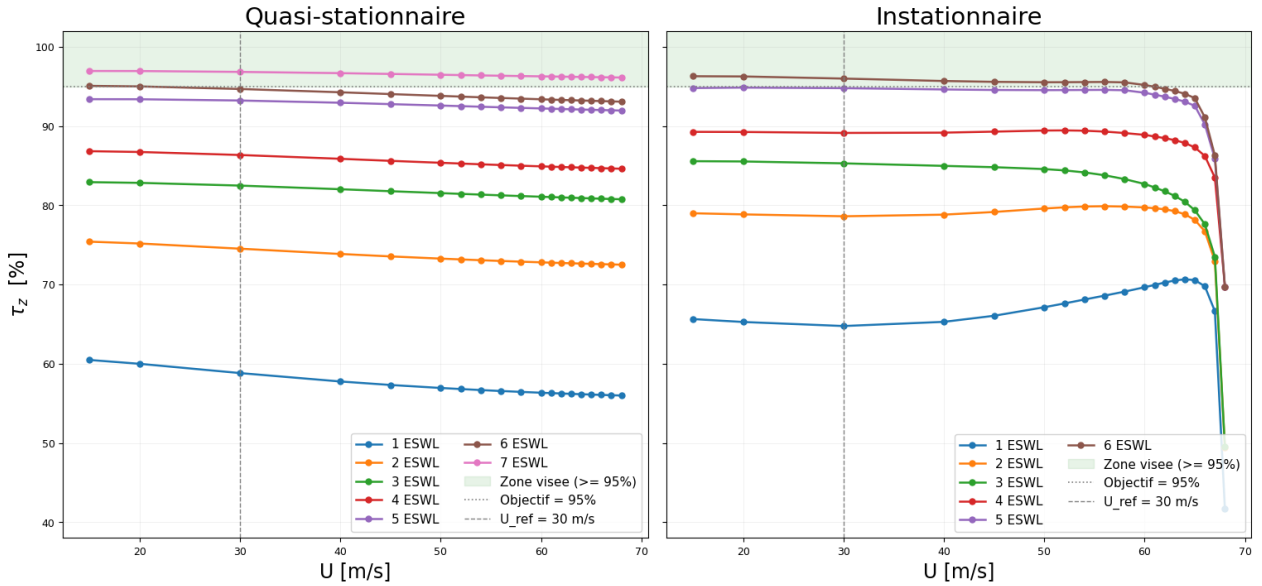


FIGURE 10.17 – Évolution du taux de reconstruction de l'enveloppe verticale en fonction de la vitesse moyenne du vent.

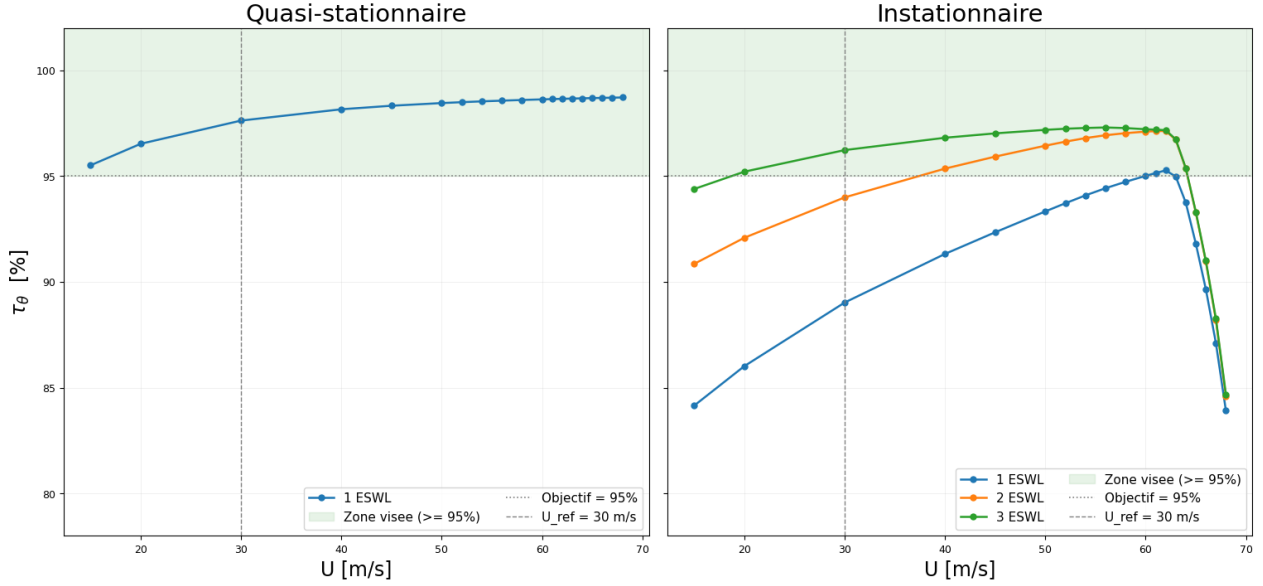


FIGURE 10.18 – Évolution du taux de reconstruction de l'enveloppe de la rotation du tablier en fonction de la vitesse moyenne du vent.

Les Figures 10.17 et 10.18 confirment les tendances observées précédemment. Dans cette analyse, les distributions d'ESWL sont déterminées une seule fois à la vitesse de référence  $U_{\text{ref}} = 30$  m/s, puis simplement redimensionnées afin d'être utilisées sur l'ensemble de la gamme de vitesses considérée.

Cette approche reste pertinente tant que l'on demeure suffisamment éloigné de la vitesse critique. Dans cette zone, les formes spatiales des ESWL restent représentatives du comportement de la structure, et le taux de reconstruction atteint globalement l'objectif de 95 %, à condition de retenir un nombre suffisant de distributions.

En revanche, à l'approche de la vitesse critique, cette hypothèse devient moins adaptée. Le comportement dynamique évolue fortement avec la vitesse, de sorte que les distributions calculées à 30 m/s ne représentent plus correctement les mécanismes dominants. Le simple redimensionnement des ESWL ne suffit alors plus, ce qui explique la chute brutale du taux de reconstruction.

## 10.5 Conclusion et limites de l'approche ESWL

Les résultats obtenus dans ce chapitre établissent deux constats, qu'il importe de séparer car ils relèvent de niveaux différents.

**La méthode ESWL fonctionne, à vitesse fixée.** Pour une vitesse de vent donnée, la procédure LRC-MIL combinée à un algorithme *steepest descent* reconstruit progressivement les enveloppes dynamiques avec une précision satisfaisante, aussi bien à basse vitesse (10.2) qu'au voisinage immédiat du flottement (10.3). Les taux de reconstruction restent supérieurs à 95 % dans les cas étudiés, et ce pour les trois composantes du mouvement. La chaîne ESWL telle qu'implémentée porte donc correctement l'information physique issue du calcul dynamique aéroélastique.

**Le rescaling à vitesse de référence ne suffit pas.** La stratégie testée au 10.4, consistant à construire les ESWL à  $U_{\text{ref}} = 30$  m/s puis à les mettre à l'échelle, met en évidence une différence marquée entre les deux modèles aérodynamiques près du flottement. Pour le modèle quasi-stationnaire, l'approche reste viable sur toute la gamme de vitesses : la structure spatiale des enveloppes évolue peu et un facteur scalaire suffit à les reproduire. Pour le modèle instationnaire, en revanche, les enveloppes voient leur forme spatiale modifiée à mesure que  $U \rightarrow U_{\text{cr}}$ , et le taux de reconstruction tombe sous 75 % à la vitesse critique pour le déplacement vertical.

Cette différence n'est pas un défaut de la méthode ESWL : elle reflète une différence physique réelle entre les deux modèles aérodynamiques. Le modèle quasi-stationnaire, en omettant la mémoire aérodynamique, prédit une évolution des enveloppes pilotée principalement par l'amplification stochastique — d'où la quasi-invariance de leur forme spatiale. Le modèle instationnaire capture en plus la redistribution modale induite par le couplage flexion-torsion à l'approche de  $U_{cr}$ , redistribution qui modifie la signature spatiale de la réponse.

**La limite structurelle de l'approche ESWL.** Au-delà de la question du rescaling, c'est la philosophie même d'une ESWL — une distribution par couple (réponse cible, vitesse) — qui devient inopérante dans une perspective de livrable de bureau d'études. Le décompte est immédiat : pour le seul tablier, en se limitant aux trois composantes ( $y, z, \theta$ ) et en retenant les ordres de grandeur observés au 10.2 (de l'ordre de six ESWL pour le vertical, trois pour la rotation, plus celles du transversal), une dizaine d'ESWL sont nécessaires par vitesse. Sur un panel de dix vitesses, on dépasse déjà la centaine de cas de charge. L'extension aux efforts internes du tablier et aux efforts axiaux dans les câbles — traitée au Chapitre 14 — multiplie ce nombre par un facteur supplémentaire.

Un tel volume est incompatible avec l'usage visé. L'ingénieur structure ne peut raisonnablement intégrer plusieurs centaines de cas de charge distincts dans son modèle éléments finis, ni *a fortiori* les combiner avec les autres actions de dimensionnement. La difficulté n'est pas calculatoire — chaque ESWL individuelle reste un cas de charge linéaire trivial — mais combinatoire : la volumétrie du livrable est elle-même un obstacle.

**Vers les PSWL.** Ce constat est indépendant du modèle aérodynamique retenu et de la qualité de la stratégie de reconstruction par *steepest descent*. Améliorer le choix du point initial, ou raffiner la méthode de *rescaling*, ne change rien à l'ordre de grandeur du décompte ci-dessus. La sortie n'est donc pas dans davantage d'ESWL, ni dans des ESWL mieux choisies, mais dans un *changement de représentation* du paquet d'ESWL produit.

La SVD du paquet, introduite au Chapitre 4 et reprise opérationnellement à la Partie IV, fournit ce changement de représentation. Elle identifie une base réduite de quelques distributions spatiales adimensionnées — les PSWL — combinables linéairement pour reconstruire l'ensemble des ESWL du panel, et donc l'ensemble des enveloppes visées. Le livrable final ne consiste plus en une liste de cas de charge indexés par (réponse, vitesse), mais en un petit nombre de PSWL accompagnées d'une table de coefficients de combinaison fonction de la vitesse et de la réponse cible. C'est l'objet des deux parties suivantes.

## Quatrième partie

# Du paquet d'ESWL au livrable PSWL

# 11 Construction de la base PSWL

## 11.1 Intérêt des PSWL

### 11.1.1 Limite pratique des ESWL individuelles

La partie précédente a montré que la méthode LRC–MIL permet de construire des charges statiques équivalentes capables de reconstruire efficacement l’enveloppe d’une réponse donnée, pour une vitesse de vent fixée. Dans les cas étudiés, un nombre raisonnable d’ESWL suffit pour atteindre un taux de reconstruction satisfaisant, aussi bien à faible vitesse qu’à proximité de la vitesse critique.

Cette efficacité locale ne suffit toutefois pas à produire un livrable pratique. En effet, lorsque la mémoire aérodynamique est prise en compte, la forme des enveloppes de réponse évolue avec la vitesse du vent. Une reconstruction calibrée à une vitesse donnée ne peut donc pas être simplement remise à l’échelle pour une autre vitesse sans dégrader fortement le taux de reconstruction.

Le problème devient encore plus marqué lorsque l’on considère simultanément plusieurs vitesses, plusieurs composantes de réponse et plusieurs points du tablier. Chaque couple formé par une vitesse de vent et une réponse cible conduit potentiellement à une charge statique équivalente différente. Le nombre de cas de charge augmente alors très rapidement.

Le constat est donc clair : les ESWL sont physiquement pertinentes, mais elles ne constituent pas encore un livrable compact. Elles permettent de remplacer une analyse dynamique par des charges statiques, mais au prix d’un nombre de charges trop élevé pour une utilisation directe et systématique dans un contexte de bureau d’études.

### 11.1.2 Redondance des ESWL

La multiplication des ESWL ne signifie pas pour autant que chacune d’elles apporte une information entièrement nouvelle. Au contraire, une forte redondance peut être attendue entre charges statiques équivalentes associées à des réponses proches.

Cette redondance s’explique directement par la nature de la méthode. Une ESWL est construite pour rendre la réponse reconstruite tangente à l’enveloppe cible en un point donné. En dehors de ce point cible, la méthode impose principalement que la réponse statique ne dépasse pas l’enveloppe dynamique. Ainsi, deux réponses cibles situées en deux points voisins du tablier conduisent généralement à des distributions de charge très proches.

Cette idée est particulièrement naturelle dans le cas du modèle étudié ici. Le tablier comporte 221 nœuds espacés d’environ 10 m. À cette échelle, deux réponses évaluées en deux nœuds voisins ne sont pas indépendantes : elles appartiennent à une enveloppe spatiale continue, gouvernée par les mêmes formes modales et par le même champ turbulent. Il est donc attendu que les ESWL associées présentent des formes spatiales similaires.

Pour illustrer cette redondance, les Figures 11.1 et 11.2 présentent deux exemples obtenus avec le modèle instationnaire. La première figure concerne la reconstruction de l’enveloppe du déplacement vertical, tandis que la seconde concerne la rotation du tablier. Dans chaque cas, deux points voisins sont considérés. Sous les enveloppes reconstruites, les distributions d’ESWL correspondantes sont représentées, séparées selon leurs trois composantes  $y$ ,  $z$  et  $\theta$ .

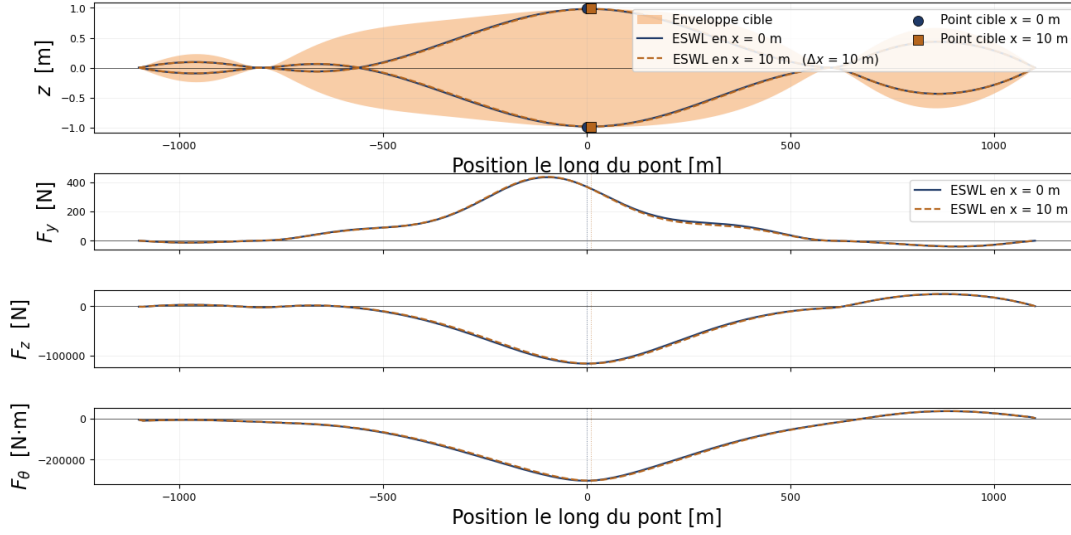


FIGURE 11.1 – Reconstruction d’enveloppe du déplacement vertical en deux points voisins et distributions de charges statiques équivalentes correspondantes pour le modèle instationnaire ( $U=30$  m/s).

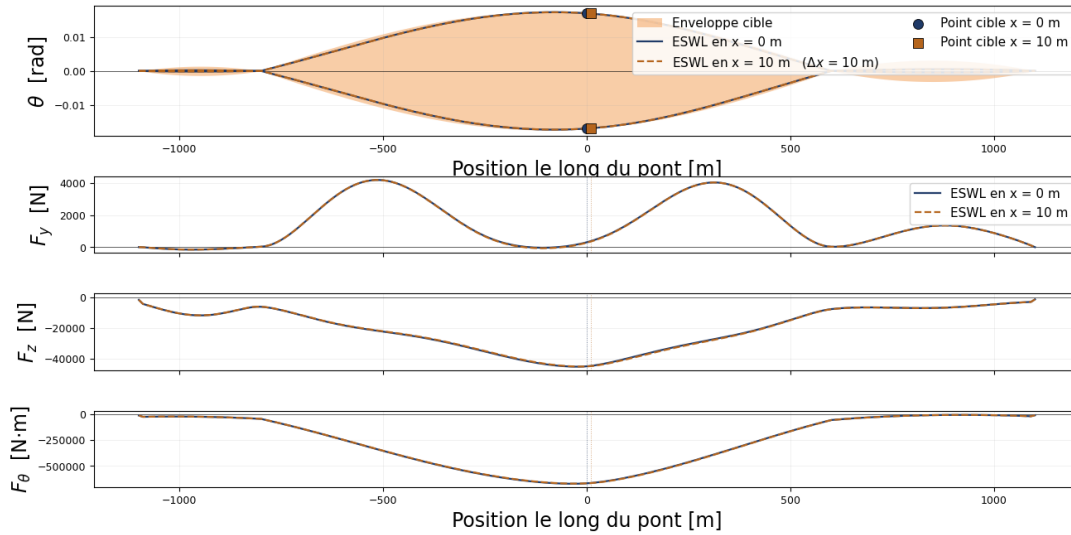


FIGURE 11.2 – Reconstruction d’enveloppe de la rotation du tablier en deux points voisins et distributions de charges statiques équivalentes correspondantes pour le modèle instationnaire ( $U=30$  m/s).

Comme attendu, les distributions obtenues sont pratiquement identiques pour deux points voisins. Les ESWL ne sont donc clairement pas indépendantes les unes des autres. Elles forment au contraire un ensemble fortement corrélé, dont l’information utile peut être décrite par un nombre plus réduit de directions de chargement. C’est précisément l’objectif des PSWL.

### 11.1.3 Objectif du livrable : formes fixes et coefficients variables

Comme annoncé dans l’état de l’art, les Principal Static Wind Loads sont obtenues à partir d’une décomposition en valeurs singulières appliquée à un ensemble d’ESWL. L’idée est de remplacer une collection volumineuse de charges statiques équivalentes par un petit nombre de distributions spatiales principales.

Ces distributions ne sont pas de nouvelles ESWL associées à une réponse cible particulière. Elles doivent plutôt être vues comme une base de formes de chargement. Chaque PSWL représente une

direction dominante dans l'espace des charges, c'est-à-dire une forme spatiale récurrente dans le paquet d'ESWL initial.

Le rôle de la SVD est donc d'extraire les formes de chargement qui portent la plus grande partie de l'information contenue dans les ESWL individuelles. En théorie, une combinaison linéaire de toutes les PSWL permettrait de reconstruire exactement le paquet initial. En pratique, l'intérêt est de n'en conserver qu'un nombre limité, tout en maintenant une qualité de reconstruction suffisante.

Dans le cadre de ce travail, l'objectif n'est cependant pas de reconstruire les ESWL une par une. Le but final est plus opérationnel : identifier un petit nombre de formes fixes, indépendantes de la vitesse et communes aux réponses étudiées, puis déterminer les coefficients de combinaison permettant de reconstruire au mieux les enveloppes dynamiques.

Le livrable recherché prend donc la forme suivante :

- un nombre réduit de distributions spatiales adimensionnées, les PSWL ;
- une table de coefficients de combinaison dépendant de la vitesse du vent et de la réponse cible.

La complexité dynamique et aéroélastique du problème est ainsi transférée dans la construction de la base PSWL et dans la calibration des coefficients. Une fois ces deux objets déterminés, l'ingénieur structure ne manipule plus qu'un nombre limité de cas de charge fixes, combinés linéairement selon la vitesse et la réponse considérées.

## 11.2 Construction du paquet d'ESWL

### 11.2.1 Réponses cibles considérées

Dans un premier temps, les réponses cibles retenues pour la construction de la base PSWL sont les réponses physiques du tablier déjà utilisées dans la reconstruction des enveloppes : le déplacement latéral, le déplacement vertical et la rotation. Pour chaque nœud  $x_i$  du tablier, on considère donc les réponses

$$\eta_i \in \{y(x_i), z(x_i), \theta(x_i)\}.$$

La notation générique  $\eta_i$  permet de traiter de manière identique les différentes composantes de réponse, indépendamment de leur nature physique.

### 11.2.2 Boucle sur les réponses et les vitesses

La construction du paquet d'ESWL consiste à parcourir l'ensemble des vitesses de vent étudiées et l'ensemble des réponses cibles retenues. Pour chaque couple  $(U_\ell, \eta_i)$ , une charge statique équivalente est construite par la méthode LRC-MIL :

$$\mathbf{f}_E(U_\ell, \eta_i). \quad (11.1)$$

Ces charges sont ensuite rassemblées dans une matrice unique. Avant assemblage, chaque ESWL est adimensionnée afin de ne conserver que sa forme spatiale :

$$\hat{\mathbf{f}}_E(U_\ell, \eta_i) = \frac{\mathbf{f}_E(U_\ell, \eta_i)}{\|\mathbf{f}_E(U_\ell, \eta_i)\|_\infty}. \quad (11.2)$$

Cette normalisation implique que les valeurs singulières caractérisent la redondance des formes de chargement normalisées, et non l'importance énergétique ou mécanique absolue des charges dans le problème dynamique.

Les charges normalisées sont alors empilées en colonnes pour former la matrice agrégée :

$$\hat{\mathbf{F}}_E = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_E(U_1, \eta_1) & \hat{\mathbf{f}}_E(U_1, \eta_2) & \cdots & \hat{\mathbf{f}}_E(U_{n_U}, \eta_{n_\eta}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_f \times n_c}. \quad (11.3)$$

Dans cette expression,  $n_f$  désigne le nombre de degrés de liberté chargés du tablier. Si  $N$  nœuds sont considérés avec trois composantes de charge par nœud, on a typiquement  $n_f = 3N$ . Le nombre total d'ESWL collectées vaut quant à lui :

$$n_c = n_U n_\eta, \quad (11.4)$$

où  $n_U$  est le nombre de vitesses étudiées et  $n_\eta$  le nombre de réponses cibles.

La matrice  $\widehat{\mathbf{F}}_E$  peut donc être vue comme un paquet d'ESWL adimensionnées. Chaque colonne représente une forme de chargement associée à une réponse cible et à une vitesse donnée. La redondance observée entre les ESWL se traduit alors par une dépendance entre les colonnes de cette matrice. La décomposition en valeurs singulières permettra d'en extraire les directions principales.

## 11.3 Décomposition en valeurs singulières

### 11.3.1 Définition de la SVD

Une fois la matrice agrégée construite, l'extraction des PSWL repose sur une décomposition en valeurs singulières :

$$\widehat{\mathbf{F}}_E = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T. \quad (11.5)$$

La matrice  $\mathbf{U}$  contient les directions principales dans l'espace des charges. Ses colonnes forment une base orthonormée :

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \dots]. \quad (11.6)$$

La matrice diagonale  $\mathbf{\Sigma}$  contient les valeurs singulières :

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq 0. \quad (11.7)$$

Ces valeurs quantifient l'importance relative des directions principales. Enfin, la matrice  $\mathbf{V}^T$  contient les coordonnées normalisées des ESWL dans cette base.

Pour une ESWL individuelle normalisée  $\widehat{\mathbf{f}}_E^{(i)}$ , la reconstruction complète peut s'écrire :

$$\widehat{\mathbf{f}}_E^{(i)} = \sum_{k=1}^r \sigma_k V_{ik} \mathbf{u}_k, \quad (11.8)$$

où  $r = \text{rang}(\widehat{\mathbf{F}}_E)$ . Les coefficients de reconstruction issus de la SVD sont donc portés par le produit  $\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$ , et non par la matrice  $\mathbf{V}^T$  seule.

### 11.3.2 Interprétation des PSWL

Les PSWL sont définies comme les premières colonnes de la matrice  $\mathbf{U}$  :

$$\mathbf{p}_k = \mathbf{u}_k. \quad (11.9)$$

Elles constituent donc des directions principales dans l'espace des charges. Comme les ESWL ont été préalablement adimensionnées, ces directions doivent être interprétées comme des formes de chargement, et non comme des charges dimensionnées directement applicables.

La première PSWL représente la forme de charge la plus représentative du paquet d'ESWL. Les suivantes apportent des corrections successives, orthogonales aux précédentes, et décrivent des formes de moins en moins dominantes. Cette hiérarchie est directement imposée par les valeurs singulières.

Les Figures 11.3 et 11.4 montrent les quatre premières PSWL obtenues pour les deux modèles considérés. Chaque PSWL est représentée selon ses trois composantes de charge  $y$ ,  $z$  et  $\theta$ .

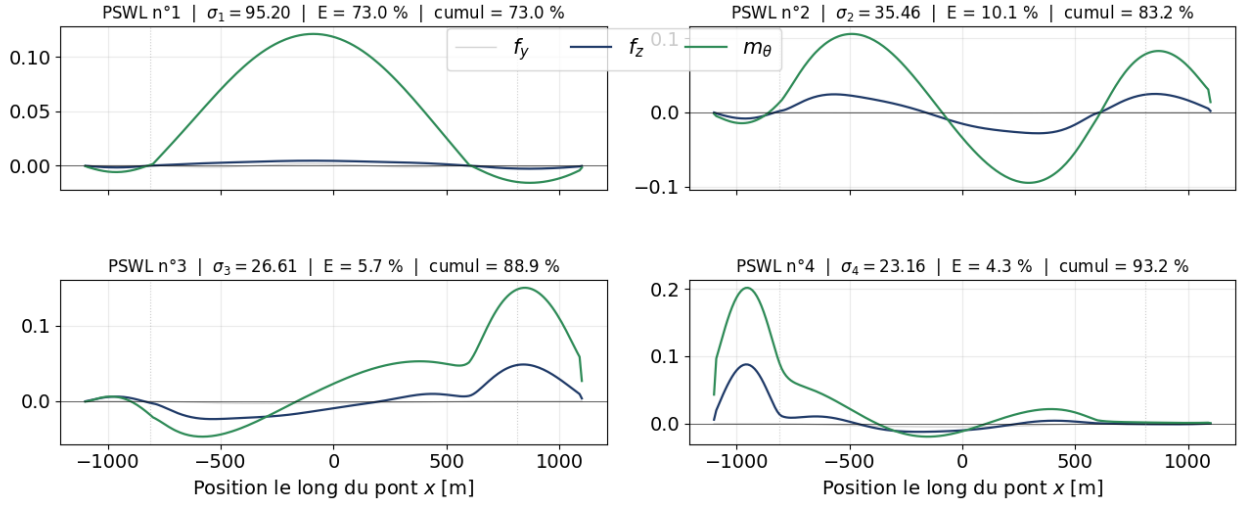


FIGURE 11.3 – Quatre premières PSWL obtenues pour le modèle quasi-stationnaire.

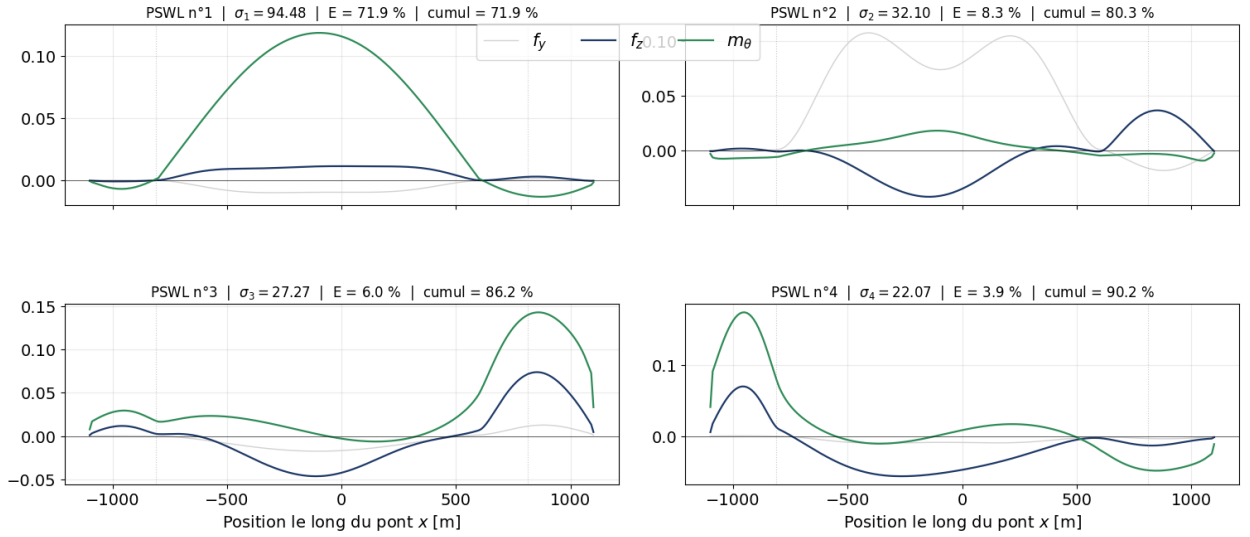


FIGURE 11.4 – Quatre premières PSWL obtenues pour le modèle instationnaire.

### 11.3.3 Troncature et énergie cumulée

La SVD complète fournit autant de directions que nécessaire pour décrire exactement le paquet d'ESWL normalisées. L'intérêt des PSWL est toutefois de ne conserver qu'un petit nombre de directions dominantes :

$$n_P \ll n_c. \quad (11.10)$$

Les valeurs singulières permettent de quantifier l'importance de chaque direction. Une grande valeur  $\sigma_k$  signifie que la PSWL associée  $\mathbf{p}_k$  porte une part importante de la variabilité du paquet d'ESWL. À l'inverse, une faible valeur singulière indique que la direction correspondante n'apporte qu'une correction marginale.

La contribution d'une direction principale est proportionnelle à  $\sigma_k^2$ . On définit donc l'énergie cumulée conservée par les  $n_P$  premières PSWL :

$$E(n_P) = \frac{\sum_{k=1}^{n_P} \sigma_k^2}{\sum_{k=1}^r \sigma_k^2}, \quad r = \text{rang}(\hat{\mathbf{F}}_E). \quad (11.11)$$

Cette énergie n'est pas une énergie mécanique au sens strict. Elle constitue une mesure algébrique de la part d'information du paquet d'ESWL portée par les premières directions principales.

Si  $E(n_P)$  augmente rapidement, cela signifie que les ESWL sont fortement redondantes et que quelques PSWL suffisent à capturer les formes dominantes de chargement. À l'inverse, une croissance lente indiquerait que le paquet contient de nombreuses directions indépendantes et qu'une base plus riche serait nécessaire.

Les Figures 11.5 et 11.6 présentent, pour les deux modèles considérés, la décroissance des valeurs singulières ainsi que l'évolution de l'énergie cumulée. Trois seuils sont indiqués : 90 %, 95 % et 99 % de l'énergie cumulée.

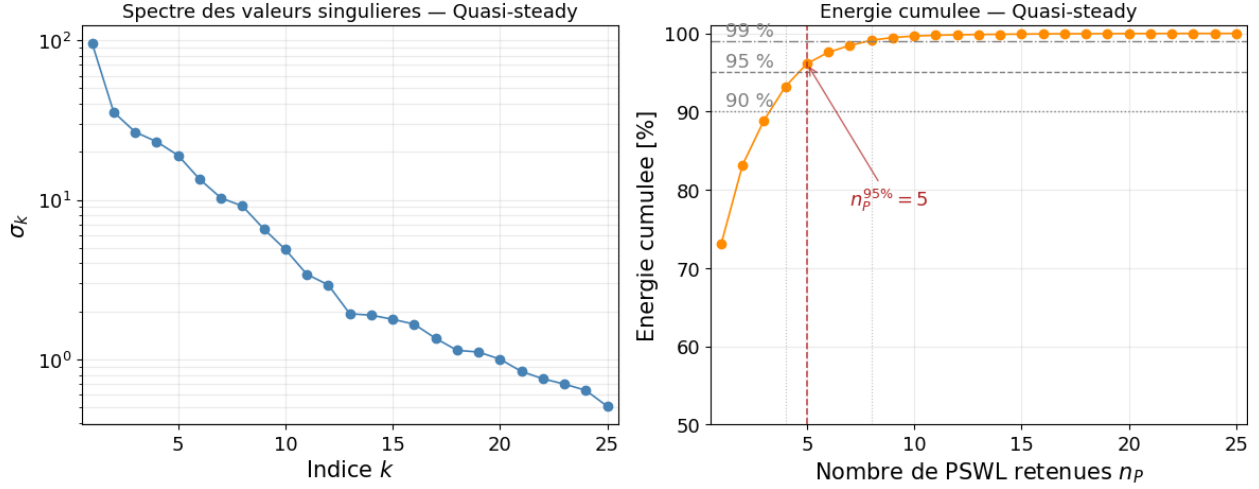


FIGURE 11.5 – Valeurs singulières et énergie cumulée pour le modèle quasi-stationnaire.

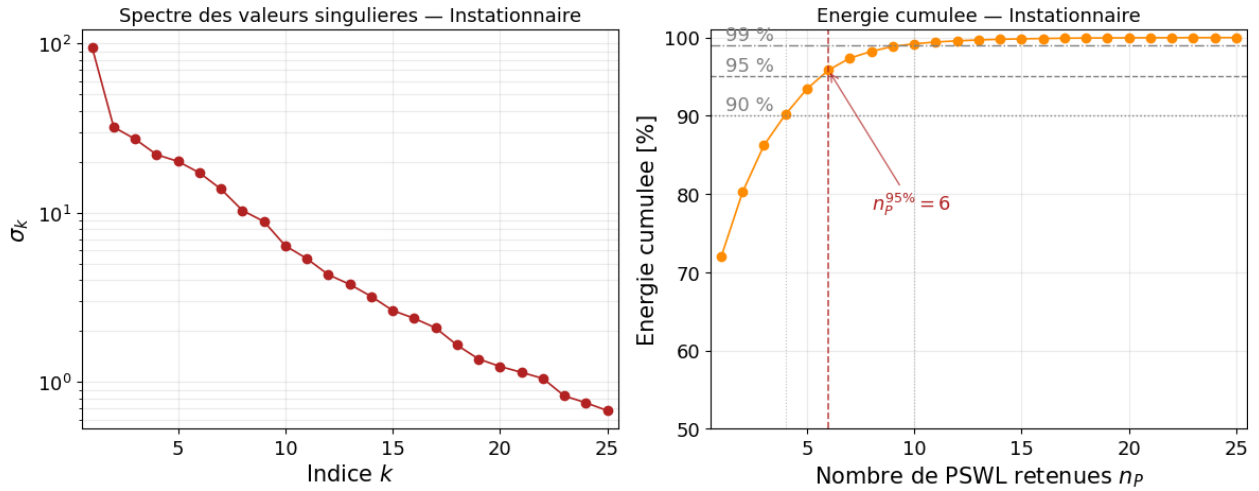


FIGURE 11.6 – Valeurs singulières et énergie cumulée pour le modèle instationnaire.

Le résultat met en évidence une forte concentration de l'information sur les premières directions principales. Dans les deux modèles, plus de 70 % de l'énergie est portée par la première PSWL seule. Les contributions suivantes deviennent rapidement plus marginales, ce qui confirme la forte redondance du paquet d'ESWL.

Le nombre de PSWL nécessaire pour atteindre un seuil énergétique donné est également proche pour les deux modèles. En retenant un seuil indicatif de 95 %, cinq PSWL sont nécessaires pour le modèle quasi-stationnaire, contre six pour le modèle instationnaire.

Ce critère énergétique fournit un premier choix de  $n_P$ , mais il ne constitue pas encore une validation finale du livrable. Il indique uniquement que le paquet d'ESWL peut être représenté par un nombre réduit de directions dominantes. La question décisive reste de savoir si ces directions permettent de reconstruire les enveloppes de réponse avec un taux suffisant, sous contrainte de non-dépassement de

l'enveloppe cible. Cette vérification sera réalisée lors de la calibration des coefficients de combinaison.

La SVD fournit donc la base de formes, mais pas encore les coefficients utilisables dans le livrable final. Ceux-ci ne peuvent pas être repris directement des coefficients de projection SVD, car le critère opérationnel n'est pas la reconstruction du paquet normalisé d'ESWL, mais la reconstruction des enveloppes de réponse sous contraintes. C'est l'objet du chapitre suivant.

# 12 Calibration de la table des coefficients

## 12.1 Objectifs de la calibration des coefficients

La SVD fournit une base réduite de formes de chargement, mais elle ne fournit pas directement la table de coefficients recherchée pour le livrable final. Les coefficients issus de la SVD permettent de reconstruire le paquet d'ESWL normalisées au sens algébrique, mais l'objectif du présent travail est différent : il s'agit de reconstruire les enveloppes de réponse issues de l'analyse dynamique aéroélastique.

Autrement dit, cela revient à considérer la base de PSWL :

$$\mathbf{P}_{n_P} = [\mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_{n_P}] \quad (12.1)$$

et, à partir de cette base, pour une vitesse  $U_l$  et une réponse cible  $\eta_i$ , à construire la meilleure charge statique équivalente possible sur base d'une combinaison linéaire de ces PSWL :

$$\mathbf{f}_E^{PSWL}(U_l, \eta_i) = \mathbf{P}_{n_P} \boldsymbol{\alpha}(U_l, \eta_i) \quad (12.2)$$

La table de coefficients dont il est question depuis le début de ce rapport est alors l'ensemble des  $\boldsymbol{\alpha}$  pour toutes les vitesses et toutes les réponses.

## 12.2 Problème d'optimisation

### 12.2.1 Formulation du problème d'optimisation et contrainte de non-dépassement de l'enveloppe

La détermination de ces coefficients peut s'exprimer sous la forme d'un problème d'optimisation à résoudre. On cherche à déterminer les coefficients permettant de reconstruire la charge présentée à l'Équation (12.2). Les réponses statiques associées, pour toutes les réponses contrôlées, valent :

$$\boldsymbol{\eta}^{PSWL} = \mathbf{B} \mathbf{P}_{n_P} \boldsymbol{\alpha} \quad (12.3)$$

où  $\mathbf{B}$  est l'opérateur statique qui transforme une charge nodale en réponses contrôlées (déplacements dans le cas présent). Cet opérateur correspond en fait au vecteur  $\mathbf{a}$  introduit à la Section 2.5.6.

Pour une cible donnée, par exemple le déplacement vertical, le taux de reconstruction est alors donné par :

$$\tau_\eta(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{\int_L \min(|\eta^{PSWL}(x; \boldsymbol{\alpha})|, |\eta^{cible}(x)|) dx}{\int_L |\eta^{cible}(x)| dx} \quad \text{avec} \quad \eta^{PSWL}(x; \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{B}_\eta \mathbf{P}_{n_P} \boldsymbol{\alpha} \quad (12.4)$$

L'optimisation vise donc à maximiser ce taux de reconstruction sous contrainte de non-dépassement pour cette réponse, mais également pour toutes les autres réponses :

$$\max_{\boldsymbol{\alpha}} \tau_i(\boldsymbol{\alpha}) \quad (12.5)$$

sous contrainte :

$$|\eta_m^{PSWL}(\boldsymbol{\alpha})| \leq |\eta_m^{cible}|, \quad m = 1, \dots, n_\eta \quad (12.6)$$

La contrainte de non-dépassement empêche l'optimisation de reconstruire très efficacement une réponse cible au prix d'un dépassement artificiel de l'enveloppe ailleurs sur le tablier. Cette contrainte transforme la calibration en un problème global : même si l'objectif porte sur une réponse cible particulière, l'ensemble des réponses contrôlées intervient dans la faisabilité de la solution.

### 12.2.2 Résolution numérique

La résolution est effectuée numériquement par optimisation non linéaire sur les coefficients de combinaison. Le nombre de variables est égal au nombre de PSWL conservées, ce qui rend le problème de dimension réduite. En pratique, le problème est résolu par programmation quadratique séquentielle (SLSQP), telle qu'implémentée dans la bibliothèque SciPy dans Python, le gradient de la fonction objectif étant fourni analytiquement. Une stratégie multi-départ est employée afin de réduire la sensibilité aux minima locaux. Pour chaque couple  $(U_\ell, \eta_i)$ , l'optimisation fournit un vecteur de coefficients  $\alpha(U_\ell, \eta_i)$ . L'ensemble de ces vecteurs forme la table de coefficients du livrable final. Les détails propres au solveur numérique ne sont pas développés, car ils ne modifient pas la formulation du problème ; l'élément déterminant est la définition de la fonction objectif et des contraintes.

## 12.3 Choix du nombre final de PSWL

À la Section 11.3.3, le critère d'énergie cumulée a conduit à retenir, à titre préliminaire, 5 PSWL pour le modèle quasi-stationnaire et 6 PSWL pour le modèle instationnaire. Ce choix constitue cependant uniquement une première estimation. En effet, l'énergie cumulée issue de la SVD mesure la capacité de la base à représenter le paquet d'ESWL au sens global, mais ne garantit pas nécessairement une reconstruction satisfaisante de l'enveloppe des réponses après calibration des coefficients.

L'objectif de cette section est donc de déterminer le nombre minimal de charges principales  $n_P$  permettant d'atteindre un taux de reconstruction de l'enveloppe de 95 % pour l'ensemble des réponses considérées. Le nombre de PSWL issu de la troncature énergétique est ainsi utilisé comme point de départ, puis ajusté sur la base du critère réellement pertinent pour le livrable final : la qualité de reconstruction des enveloppes de réponse.

### 12.3.1 Reconstruction de l'enveloppe avec les valeurs issues de la troncature énergétique

La Figure 12.1 présente l'évolution du taux de reconstruction en fonction de la vitesse moyenne du vent  $U$ , pour les trois réponses considérées. Les reconstructions sont effectuées avec 5 PSWL pour le modèle quasi-stationnaire et 6 PSWL pour le modèle instationnaire.

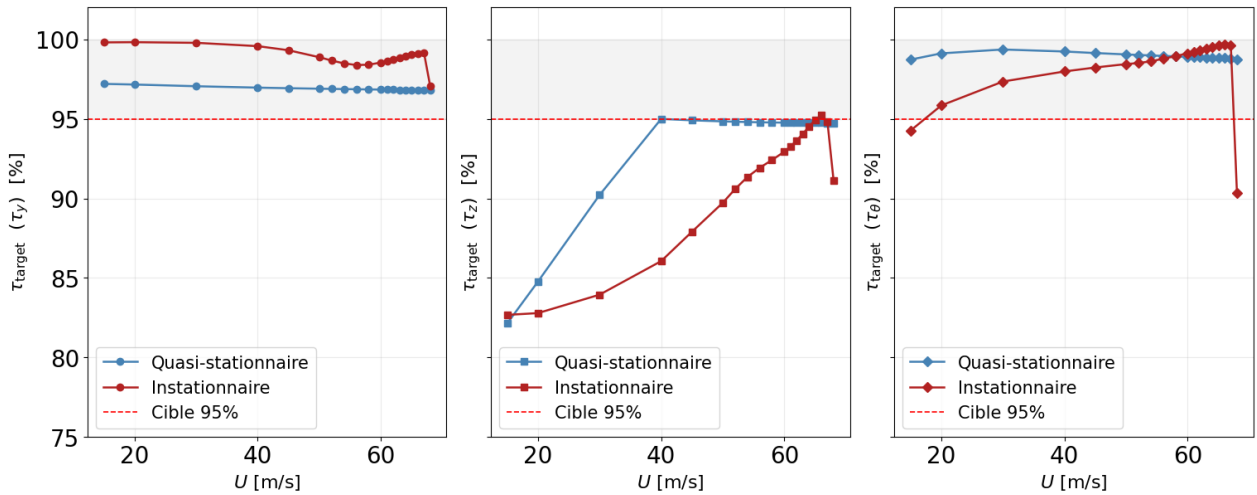


FIGURE 12.1 – Taux de reconstruction obtenus pour les trois réponses avec 5 PSWL pour le modèle quasi-stationnaire et 6 PSWL pour le modèle instationnaire.

Les résultats obtenus sont globalement très encourageants.

Pour le déplacement transversal et la rotation, le taux de reconstruction reste proche de la cible de 95 % sur la majeure partie du domaine de vitesses, ce qui confirme l'efficacité de la base PSWL. La

seule dégradation notable apparaît pour la rotation, dans le modèle instationnaire à proximité de la vitesse critique, où le taux minimal atteint 90,4 %. Cette difficulté n'apparaît pas dans le modèle quasi-stationnaire, puisque celui-ci ne reproduit pas le mécanisme de flottement.

Le déplacement vertical présente en revanche un comportement plus compliqué à reproduire. Pour le modèle instationnaire, les taux de reconstruction sont plus faibles, en particulier à basse vitesse et à proximité de la vitesse critique. Les deux reconstructions les plus défavorables sont illustrées aux Figures 12.2 et 12.3. Les charges statiques équivalentes reconstruites par combinaison des PSWL  $y$  sont également représentées.

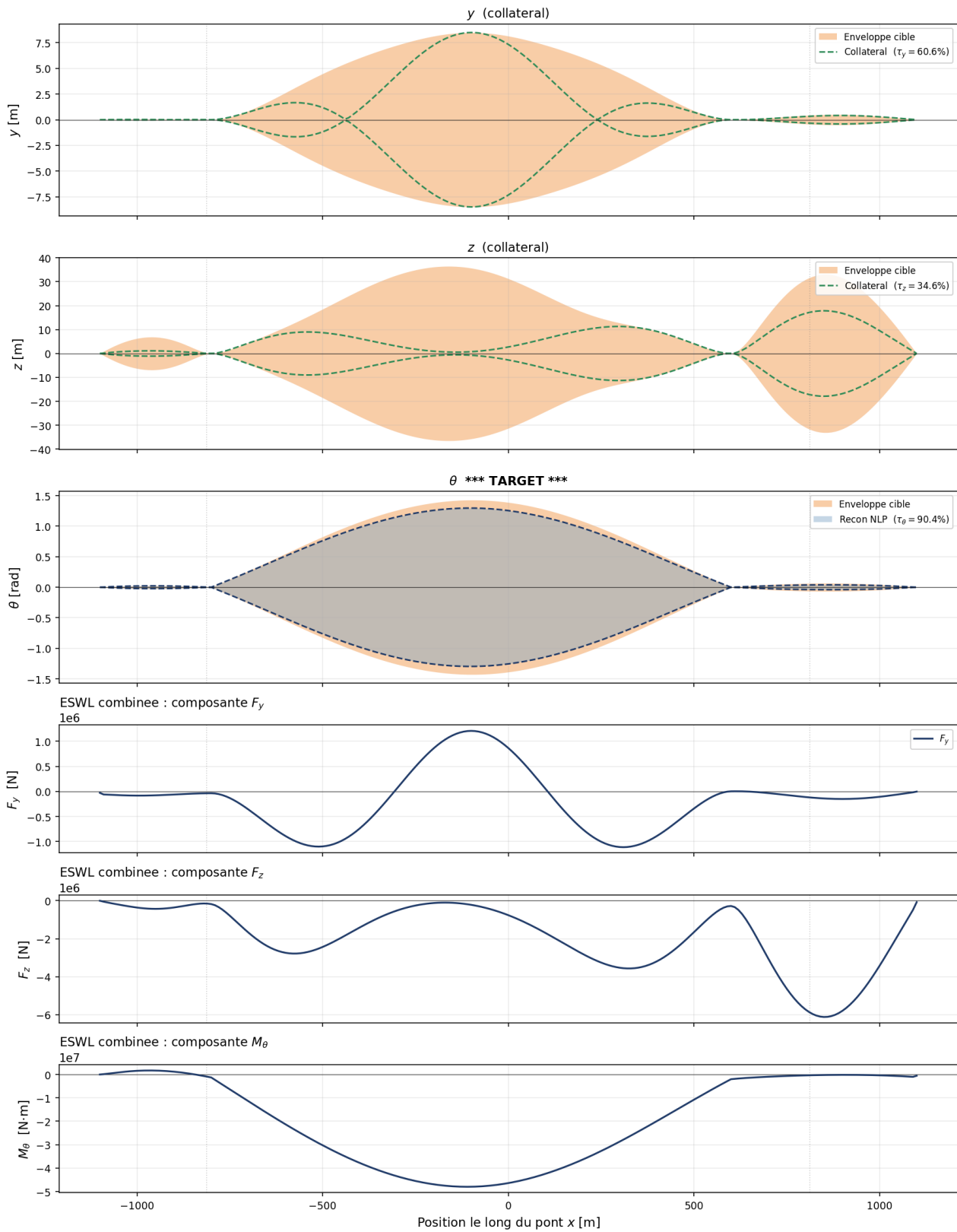


FIGURE 12.2 – Reconstruction d’enveloppe de la rotation du tablier à l’aide d’une combinaison de 6 PSLW pour le modèle instationnaire ( $U = 68$  m/s).

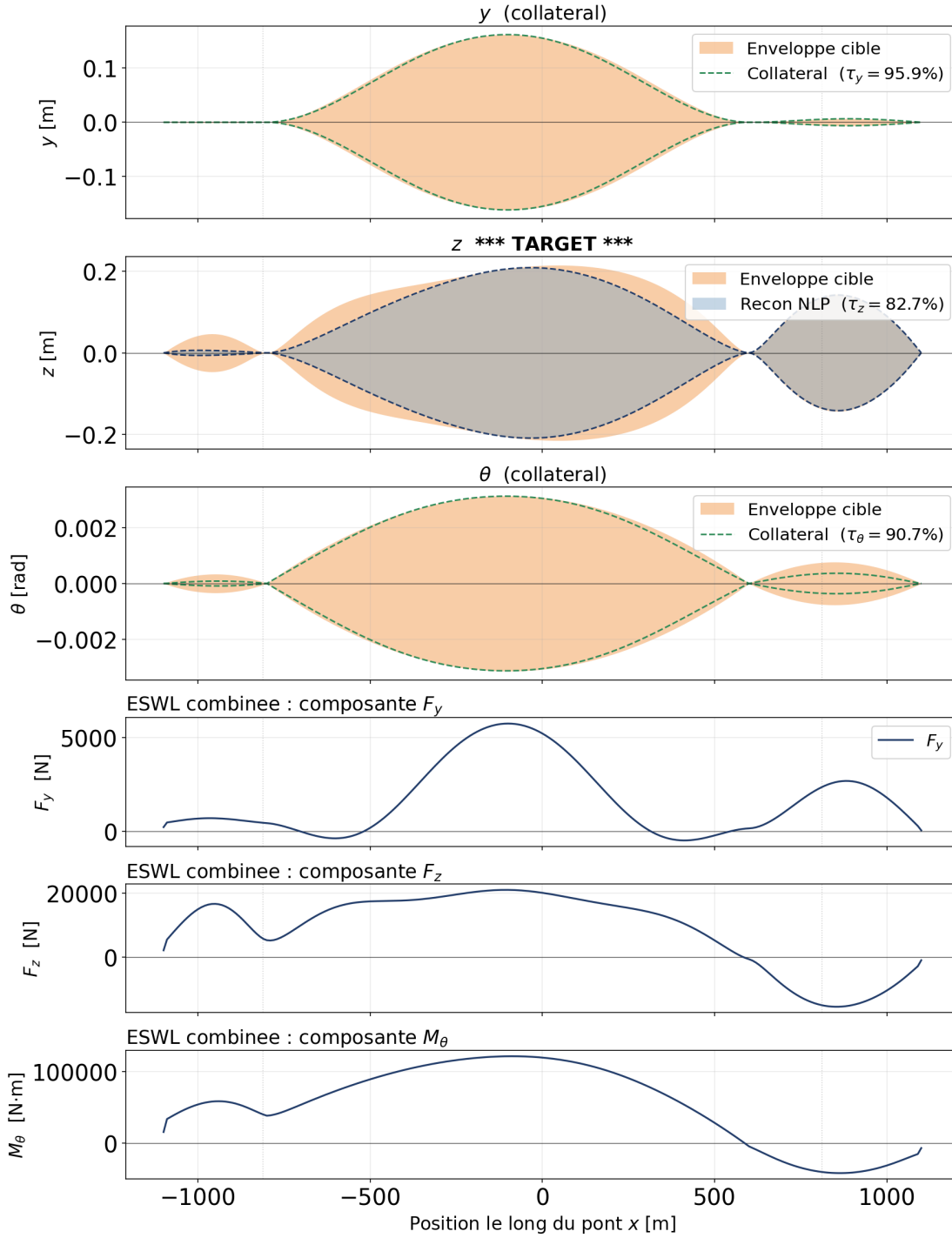


FIGURE 12.3 – Reconstruction d’enveloppe à l’aide d’une combinaison de 6 PSWL pour le modèle instationnaire ( $U = 15$  m/s).

Les deux figures précédentes illustrent plus précisément le fonctionnement de la reconstruction lorsqu’une réponse donnée est ciblée. Dans chaque cas, l’enveloppe de la réponse visée est reconstruite au moyen d’une combinaison des PSWL retenues. La qualité de cette reconstruction est directement mesurée par le taux  $\tau$  associé à la réponse cible.

Ces figures permettent également d’observer les réponses collatérales, c’est-à-dire les réponses obtenues pour les autres grandeurs lorsque la charge reconstruite est appliquée. L’objectif n’est donc pas uniquement de vérifier que la réponse ciblée est correctement reconstruite, mais aussi de s’assurer que les autres réponses restent dans leur enveloppe admissible. Dans les cas présentés, aucun dépassement significatif de l’enveloppe n’est observé pour les réponses non ciblées, ce qui confirme le caractère acceptable de la combinaison retenue du point de vue de l’overshoot.

Enfin, la partie inférieure des figures représente la distribution spatiale de la charge statique équivalente reconstruite. Elle permet de faire le lien entre la forme de la charge appliquée et les déplacements obtenus. Par exemple, lorsqu'une reconstruction est ciblée sur la réponse verticale  $z$ , la composante verticale de la charge présente une distribution cohérente avec la forme de déplacement vertical recherchée. Ces représentations offrent donc une lecture physique complémentaire de la méthode, en montrant simultanément la réponse reconstruite, les effets collatéraux et la charge équivalente associée.

Ces premiers résultats montrent que la méthode fonctionne : la reconstruction obtenue à partir d'un nombre réduit de PSWL est plus compacte que l'utilisation directe des ESWL individuelles, tout en conservant une qualité de reconstruction globalement satisfaisante. Il reste cependant à déterminer le nombre de PSWL à retenir dans le livrable final.

### 12.3.2 Choix du nombre de PSWL retenu

Afin de fixer le nombre final de PSWL à conserver, l'évolution du taux de reconstruction est étudiée en fonction du nombre de charges principales retenues. L'analyse est menée séparément pour les trois réponses considérées et pour les deux modèles aérodynamiques.

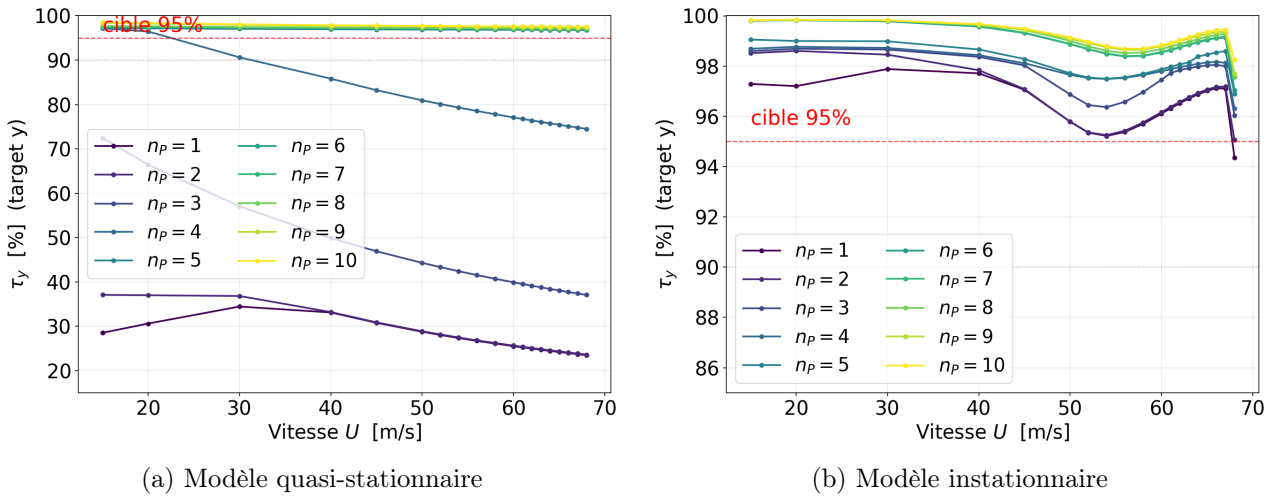


FIGURE 12.4 – Taux de reconstruction de la réponse transversale pour les modèles quasi-stationnaire et instationnaire.

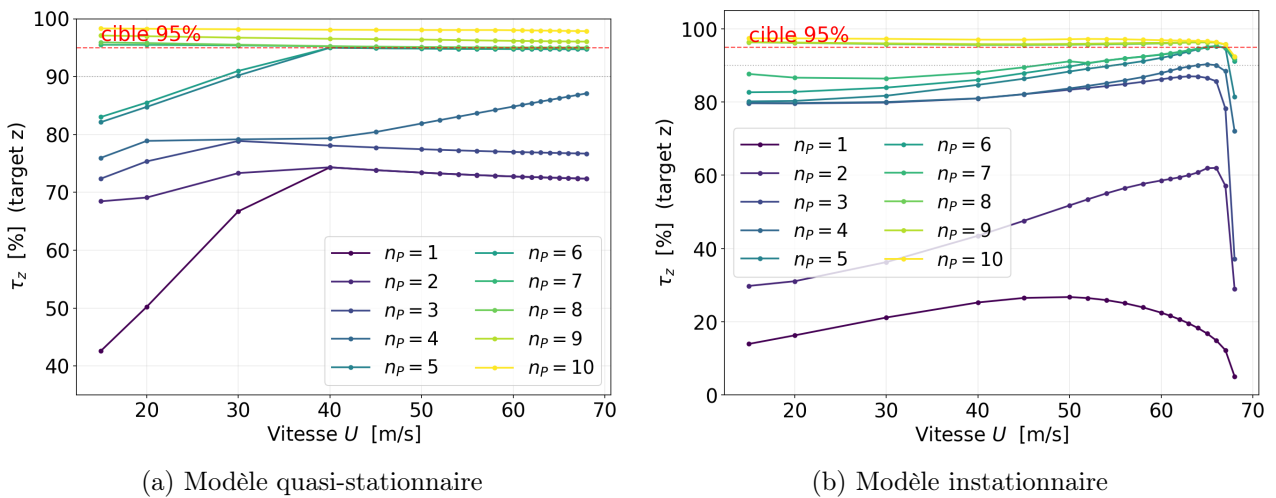


FIGURE 12.5 – Taux de reconstruction de la réponse verticale pour les modèles quasi-stationnaire et instationnaire.

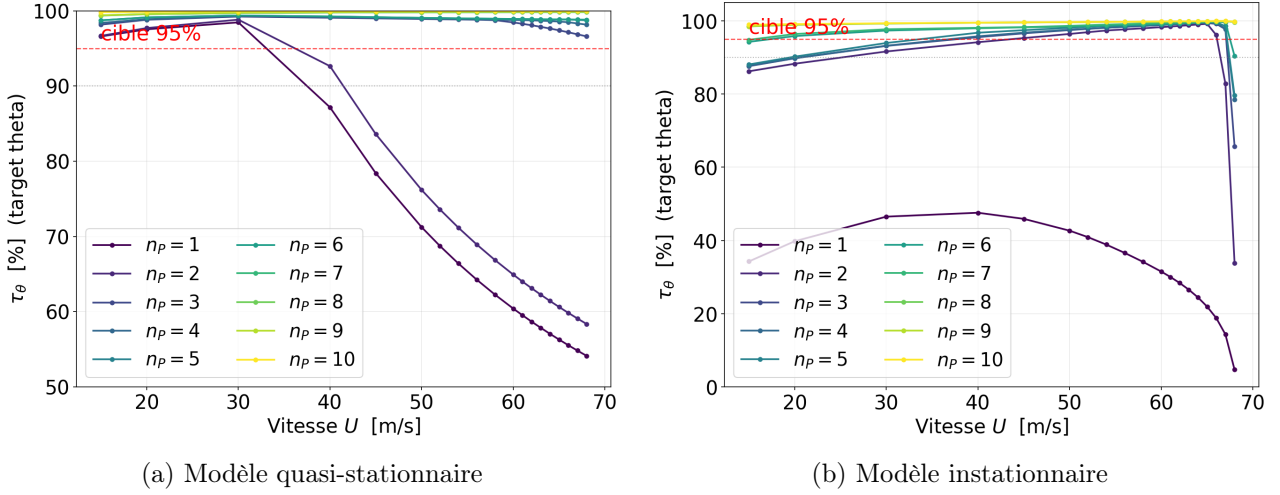


FIGURE 12.6 – Taux de reconstruction de la rotation du tablier pour les modèles quasi-stationnaire et instationnaire.

**Modèle quasi-stationnaire.** Les résultats obtenus avec le modèle quasi-stationnaire sont présentés aux Figures 12.4a, 12.5a et 12.6a. Le nombre de PSWL considéré varie de 1 à 10.

Pour le déplacement transversal  $y$ , la Figure 12.4a montre que 5 PSWL suffisent pour atteindre le seuil de 95 % sur toute la gamme de vitesses. Pour le déplacement vertical  $z$ , la reconstruction est légèrement plus exigeante : 7 PSWL sont nécessaires pour satisfaire ce même critère. Enfin, la rotation  $\theta$  est moins contraignante, puisque 3 PSWL permettent déjà d’obtenir une reconstruction satisfaisante de l’enveloppe.

Le déplacement vertical  $z$  constitue donc la réponse dimensionnante pour le choix du nombre de PSWL dans le cas du modèle quasi-stationnaire. Sur cette base, il est nécessaire de conserver au minimum 7 PSWL afin de garantir un taux de reconstruction supérieur à 95 % pour l’ensemble des réponses étudiées.

**Modèle instationnaire.** Les résultats associés au modèle instationnaire sont présentés aux Figures 12.4b, 12.5b et 12.6b. Comme précédemment, le nombre de PSWL varie de 1 à 10.

Pour le déplacement transversal  $y$  et la rotation  $\theta$ , respectivement 2 et 7 PSWL permettent d’atteindre le critère de 95 % sur l’ensemble de la gamme de vitesses. En revanche, le déplacement vertical  $z$  est nettement plus difficile à reconstruire. Même en conservant 10 PSWL, le seuil de 95 % n’est pas atteint pour toutes les vitesses.

Ce résultat ne doit toutefois pas être interprété comme un échec global de la méthode. La difficulté est essentiellement localisée au voisinage de la vitesse critique, c’est-à-dire dans la zone où le comportement aéroélastique devient fortement singulier. À cette vitesse, l’enveloppe verticale n’est plus seulement amplifiée : sa forme spatiale est également modifiée par le couplage aéroélastique. La complexité de reconstruction augmente donc fortement.

En revanche, dès que l’on s’éloigne légèrement de cette vitesse critique, la reconstruction redevient satisfaisante. Par exemple, à  $U = 67$  m/s, soit environ 98,5 % de  $U_{cr}$ , le critère de 95 % est atteint pour les trois réponses.

La Figure 12.5b montre également qu’à la vitesse critique, le taux de reconstruction de la réponse verticale augmente d’abord nettement lorsque le nombre de PSWL augmente. Cependant, à partir de  $n_P = 6$ , cette amélioration devient beaucoup plus limitée. La différence entre  $n_P = 7$  et  $n_P = 10$  est d’ailleurs presque imperceptible sur le graphique.

Il n’est donc pas nécessairement pertinent d’augmenter fortement le nombre de PSWL uniquement pour améliorer la reconstruction d’un point isolé situé au voisinage immédiat de la vitesse critique. Un tel choix alourdirait le livrable final, sans apporter de gain significatif pour les vitesses réellement exploitables en pratique. Le dimensionnement doit en effet rester suffisamment éloigné de la vitesse critique.

### 12.3.3 Augmentation de la tolérance sur l'overshoot pour le modèle avec mémoire

Si l'on souhaite malgré tout imposer le critère de 95 % jusqu'à  $U_{cr}$ , une première solution serait d'augmenter encore le nombre de PSWL conservées. Cette option alourdit cependant le livrable final pour traiter un point limite très particulier. Une alternative consiste à conserver un nombre raisonnable de PSWL, mais à relâcher légèrement la contrainte de non-dépassement de l'enveloppe.

On introduit pour cela une tolérance d'*overshoot*, c'est-à-dire un dépassement contrôlé de l'enveloppe de référence. Au lieu d'imposer strictement que la réponse reconstruite reste partout inférieure ou égale à l'enveloppe cible, on autorise un dépassement local, pour autant qu'il reste inférieur à une tolérance fixée. La contrainte stricte de non-dépassement est donc remplacée par une contrainte plus souple, dans laquelle l'enveloppe reconstruite peut dépasser localement l'enveloppe de référence de quelques pourcents.

L'objectif est alors de déterminer, pour chaque réponse cible, le nombre minimal de PSWL nécessaire pour atteindre un taux de reconstruction de 95 %, en fonction du taux d'overshoot maximal autorisé. Dans cette étude, cette tolérance est progressivement augmentée de 0 à 20 %, par pas de 2 %. Les résultats obtenus pour les trois réponses sont présentés à la Figure 12.7.

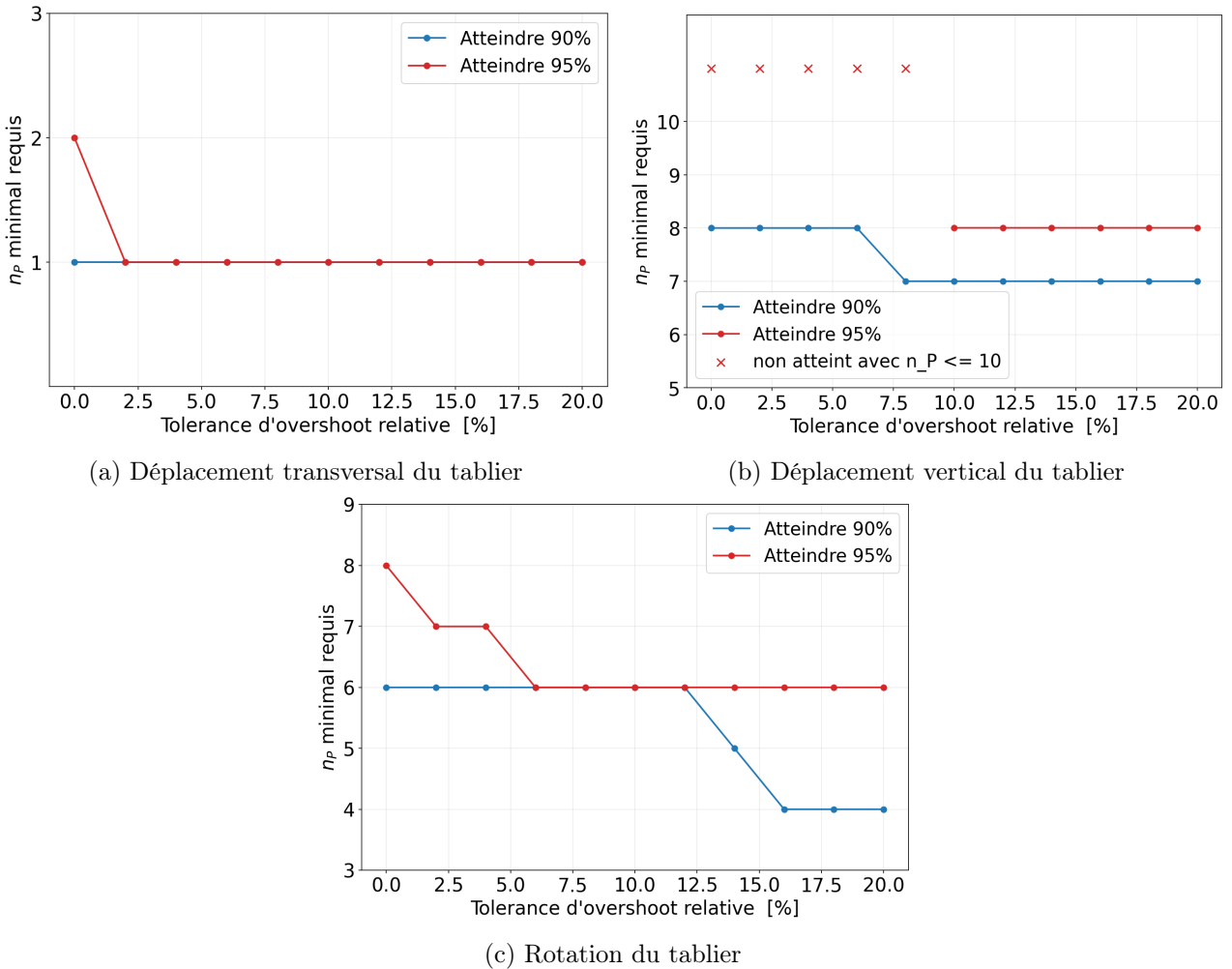


FIGURE 12.7 – Nombre de PSWL nécessaire en fonction du taux d'overshoot maximal autorisé pour les trois réponses considérées pour le modèle instationnaire.

Pour les réponses transversale et en rotation, l'augmentation de la tolérance d'overshoot permet de réduire sensiblement le nombre de PSWL nécessaires. Ces deux réponses ne gouvernent cependant pas le choix final, puisque le déplacement vertical reste la réponse la plus contraignante.

Pour la réponse verticale, aucun jeu de 10 PSWL ou moins ne permet d'atteindre un taux de reconstruction minimal de 95 % lorsque l'overshoot autorisé reste inférieur à 10 %. En revanche, dès

que la tolérance atteint 10 %, le nombre minimal de PSWL chute à 8. Comme le pas utilisé pour balayer la tolérance d'overshoot est de 2 %, la transition se produit en réalité entre 8 % et 10 %.

Ce résultat est important pour l'interprétation du livrable. Il montre que la difficulté rencontrée pour la réponse verticale à proximité de  $U_{cr}$  n'est pas uniquement liée à un manque de richesse de la base PSWL, mais également à la sévérité de la contrainte de non-dépassement. Si, dans une étude donnée, une tolérance locale de l'ordre de 10 % est jugée acceptable sur les réponses contrôlées, alors 8 PSWL suffisent pour reconstruire l'enveloppe avec un taux minimal de 95 % sur le panel de vitesses étudié.

Cette tolérance ne doit pas être interprétée comme une règle générale de dimensionnement, mais comme un paramètre de compromis propre au niveau de conservatisme recherché.

# 13 Synthèse de la calibration sur les déplacements

Les sections précédentes montrent que la méthode proposée fonctionne, mais pas de manière parfaitement uniforme sur l'ensemble du domaine étudié. Les PSWL permettent bien de condenser le paquet d'ESWL en un livrable beaucoup plus compact, commun à l'ensemble des réponses considérées, tout en conservant une bonne capacité de reconstruction des enveloppes. La difficulté augmente toutefois lorsque la mémoire aérodynamique est prise en compte, en particulier au voisinage de la vitesse critique de flottement  $U_{cr}$ . Ce résultat était attendu : c'est précisément dans cette zone que les effets self-excited, le couplage flexion-torsion et la modification des formes de réponse deviennent les plus marqués.

Pour les trois réponses de déplacement considérées jusqu'ici, le déplacement vertical est la réponse la plus contraignante. Dans le modèle quasi-stationnaire, 7 PSWL sont nécessaires pour garantir un taux de reconstruction minimal de 95 % sur l'ensemble du panel de vitesses. Dans le modèle instationnaire, la situation est plus sévère : même 10 PSWL ne permettent pas d'atteindre ce critère à la vitesse critique pour la réponse verticale. Les réponses transversale et en rotation sont moins contraignantes et ne gouvernent donc pas le choix du nombre de PSWL dans cette première analyse.

Il convient toutefois de rappeler que la vitesse critique ne doit pas être interprétée comme une vitesse de dimensionnement ordinaire. Comme son nom l'indique, il s'agit d'une vitesse critique, au même titre que la charge critique d'Euler en compression : elle définit une limite théorique de stabilité, et non une situation d'exploitation admissible. En aucun cas elle ne doit être atteinte en condition normale d'utilisation de l'ouvrage. Dans le cas étudié, des vitesses de l'ordre de  $0,75U_{cr}$  à  $0,80U_{cr}$ , soit environ 51 à 54,4 m/s, constituent déjà un domaine d'analyse élevé au regard de la stabilité aéroélastique. Or, dans cette plage de vitesses, la méthode fournit des reconstructions satisfaisantes pour les trois réponses considérées, comme le montrent les Figures 12.4b, 12.5b et 12.6b.

Le choix du nombre de PSWL doit donc être interprété comme un compromis d'ingénierie entre compacité du livrable, précision de reconstruction et domaine de validité recherché. Une option consiste à imposer un critère strict de 95 % jusqu'à une vitesse de dimensionnement  $U_{dim}$ , inférieure à  $U_{cr}$  et fixée en accord avec le bureau d'études. Dans ce cas, le nombre de PSWL peut être choisi en fonction de cette vitesse cible, plutôt qu'en fonction du comportement singulier observé exactement à  $U_{cr}$ .

Ce point est important en pratique. La vitesse de dimensionnement retenue par le bureau d'études conditionne directement la taille du livrable à fournir. Par exemple, si le bureau d'études souhaite connaître la vitesse critique  $U_{cr}$  mais fixe une vitesse de dimensionnement de l'ordre de  $U_{dim} = 55$  m/s, la situation est très différente de celle où l'on exige une reconstruction jusqu'à  $U_{cr}$ . À 55 m/s, la vitesse reste nettement inférieure à la vitesse critique  $U_{cr} \simeq 68$  m/s, et les Figures 12.4b, 12.5b et 12.6b montrent que 7 PSWL suffisent pour représenter correctement les enveloppes des trois composantes de déplacement avec un taux de reconstruction minimal de 95 %. Autrement dit, dans un domaine de dimensionnement réaliste, le livrable peut rester très compact tout en conservant une précision satisfaisante.

À l'inverse, si l'on souhaite imposer le critère de 95 % jusqu'au voisinage immédiat de la vitesse critique, le nombre de PSWL doit être augmenté. Par exemple, la Figure 12.5b montre que 9 PSWL suffisent pour garantir un taux de reconstruction minimal de 95 % jusqu'à  $U = 67$  m/s pour la réponse verticale, soit déjà environ 98,5 % de la vitesse critique. Ce résultat confirme que la méthode reste robuste très près de  $U_{cr}$ , mais au prix d'un livrable moins compact.

Une seconde option consiste à conserver un livrable plus compact en acceptant un dépassement contrôlé de l'enveloppe. Les résultats de la section précédente montrent qu'en autorisant un overshoot maximal de l'ordre de 10 %, 8 PSWL suffisent pour reconstruire l'enveloppe verticale avec un taux minimal de 95 %. Cette solution traduit un autre compromis : elle réduit la taille du livrable au prix d'une légère perte de conservatisme local sur l'une des réponses contrôlées. Ce choix ne peut pas être tranché de manière universelle ; il dépend du niveau de sécurité souhaité, de la sensibilité des éléments dimensionnés et de la manière dont les charges seront ensuite combinées avec les autres actions dans

le modèle de calcul.

Cette première analyse, limitée aux trois composantes de déplacement du tablier, valide donc le principe de la méthode. Elle montre que les PSWL permettent de reconstruire efficacement les enveloppes de déplacement, et qu'elles fournissent un cadre clair pour discuter le compromis entre précision, conservatisme, compacité et domaine de validité. Elle ne constitue toutefois qu'une première étape.

En effet, un livrable destiné à un bureau d'études ne peut pas se limiter aux déplacements  $y$ ,  $z$  et  $\theta$ . Ces grandeurs sont utiles pour valider la méthode, car elles correspondent directement aux degrés de liberté aérodynamiques du tablier, mais elles ne suffisent pas à couvrir les besoins réels du dimensionnement. En pratique, l'ingénieur structure s'intéresse également aux efforts internes du tablier et aux efforts transmis au système de suspension.

La suite du travail étend donc la démarche à un ensemble plus large de réponses cibles : le moment fléchissant  $M_y$ , le moment de torsion de Saint-Venant, l'effort normal  $N$  dans le tablier et l'effort normal dans les câbles principaux. Pour cette extension, une nouvelle base de PSWL est construite à partir d'un paquet d'ESWL enrichi, contenant à la fois les ESWL associées aux déplacements et celles associées à ces nouvelles réponses de dimensionnement. L'objectif n'est plus seulement de vérifier que la méthode fonctionne sur les déplacements, mais de produire une base de chargement réellement représentative de l'ensemble des grandeurs utiles au dimensionnement de l'ouvrage.

## Cinquième partie

# Le livrable final et son extension aux réponses de dimensionnement

# 14 Extension aux efforts internes du tablier et aux efforts dans les câbles

## 14.1 Motivation : des déplacements aux grandeurs de dimensionnement

Les sections précédentes ont montré qu'il était possible de reconstruire avec précision les enveloppes des déplacements transversal et vertical, ainsi que de la rotation du tablier. Ces résultats sont encourageants, mais ils ne suffisent pas à constituer un livrable complet pour un bureau d'études. En pratique, les grandeurs réellement utilisées pour le dimensionnement sont principalement les efforts internes dans le tablier et les efforts transmis au système de suspension.

Dans un premier temps, l'extension est volontairement envisagée sur un ensemble large de grandeurs de dimensionnement : le moment de flexion verticale  $M_y$ , le moment de torsion de Saint-Venant  $M_t$ , l'effort tranchant vertical  $T_z$ , l'effort axial dans le tablier  $N$ , l'effort axial dans les câbles principaux  $N_{\text{cables}}$  et l'effort axial dans les suspentes  $N_{\text{suspentes}}$ . L'objectif n'est toutefois pas de figer dès cette étape le contenu du livrable final, mais d'identifier quelles réponses peuvent effectivement être intégrées dans une méthode compacte. La suite montrera que certaines grandeurs, en particulier  $T_z$  et  $N_{\text{suspentes}}$ , rendent la reconstruction nettement plus coûteuse, avec un nombre d'ESWL trop élevé dès l'analyse à vitesse fixée. Elles servent donc surtout à poser le diagnostic, tandis que le livrable final est recentré sur les réponses les plus exploitables pour le dimensionnement global de l'ouvrage.

## 14.2 Matrice de flexibilité et efforts modaux

Comme pour les déplacements, il est nécessaire de construire une matrice de flexibilité  $\mathbf{A}_{\text{effort}}$ <sup>1</sup> afin d'obtenir les vecteurs d'influence  $\mathbf{a}_{\text{effort}}$ . Celle-ci est construite selon le même principe que précédemment, à la différence que les réponses considérées sont ici des efforts internes associés aux éléments, et non des déplacements nodaux. En pratique, des charges unitaires sont appliquées successivement à chaque degré de liberté du tablier dans FINELG, puis les efforts internes correspondants sont extraits au niveau de chaque élément. Cette procédure permet d'obtenir, pour chaque réponse interne considérée, le vecteur d'influence associé, comme décrit à la Section 9.2.2.

De plus, on ne traite plus ici uniquement des déplacements, mais également des efforts internes. Pour la partie MIL, il est donc nécessaire de déterminer des grandeurs équivalentes aux formes modales, mais exprimées en efforts. On introduit pour cela les *efforts modaux*. L'effort modal du mode  $j$  correspond à l'effort interne obtenu dans un élément lorsque la structure est déformée selon la forme modale du mode  $j$ .

Ces efforts modaux pourraient être extraits directement de FINELG, de la même manière que les modes propres. Une autre approche est toutefois retenue ici. À la Section 3.2.3, la charge modale unitaire  $\mathbf{P}_{ej0}$  a été introduite. Cette charge correspond à la charge à appliquer sur le tablier pour obtenir la déformée modale du mode  $j$ .

Ainsi, connaissant la charge modale unitaire associée à chaque mode et la matrice de flexibilité en efforts, il est possible de déterminer les efforts modaux par :

$$\mathbf{R}_j = \mathbf{A}_{\text{effort}} \mathbf{P}_{ej0}. \quad (14.1)$$

Le vecteur  $\mathbf{R}_j$  représente donc la distribution de l'effort considéré ( $N$ ,  $M_y$ ,  $M_t$ , etc.) lorsque la structure est déformée selon le mode  $j$ .

---

1. Pour rappel, la matrice de flexibilité utilisée pour les déplacements était notée  $\mathbf{A}$ .

### 14.3 Reconstruction de l'enveloppe pour toutes les réponses considérées

Comme précédemment, l'objectif est de reconstruire les enveloppes de réponse à partir de charges statiques équivalentes. La méthode utilisée reste identique dans son principe. On commence par appliquer la méthode LRC–MIL afin de vérifier qu'elle permet également de reconstruire les enveloppes des efforts internes. La démarche sera ensuite étendue aux PSWL.

#### 14.3.1 Reconstruction de l'enveloppe pour les efforts internes

La reconstruction de l'enveloppe à vitesse fixée par la méthode LRC–MIL, à l'aide de l'algorithme de *steepest descent*, a déjà été appliquée aux déplacements dans la partie précédente. On l'applique maintenant aux efforts internes, afin d'évaluer dans quelle mesure cette stratégie reste efficace pour des réponses de dimensionnement plus localisées, et afin de déterminer le nombre de charges nécessaires pour reconstruire chaque réponse à une vitesse donnée. Les grandeurs considérées sont :

$$M_y, \quad M_t, \quad T_z, \quad N_{\text{tablier}}, \quad N_{\text{cable}}, \quad N_{\text{suspentes}}.$$

Pour toutes les réponses, à l'exception des suspentes, l'enveloppe reconstruite est comparée à l'enveloppe cible sur toute la longueur du pont, comme cela a été fait précédemment pour les déplacements. Dans le cas des suspentes, la réponse n'est pas définie comme une grandeur continue le long du tablier, mais élément par élément. Des diagrammes en barres sont donc utilisés afin de vérifier que le taux de reconstruction minimal de 95 % est atteint pour l'ensemble des suspentes considérées.

Les enveloppes reconstruites pour ces différentes réponses sont présentées aux Figures 14.1, 14.2 et 14.4 à 14.6.

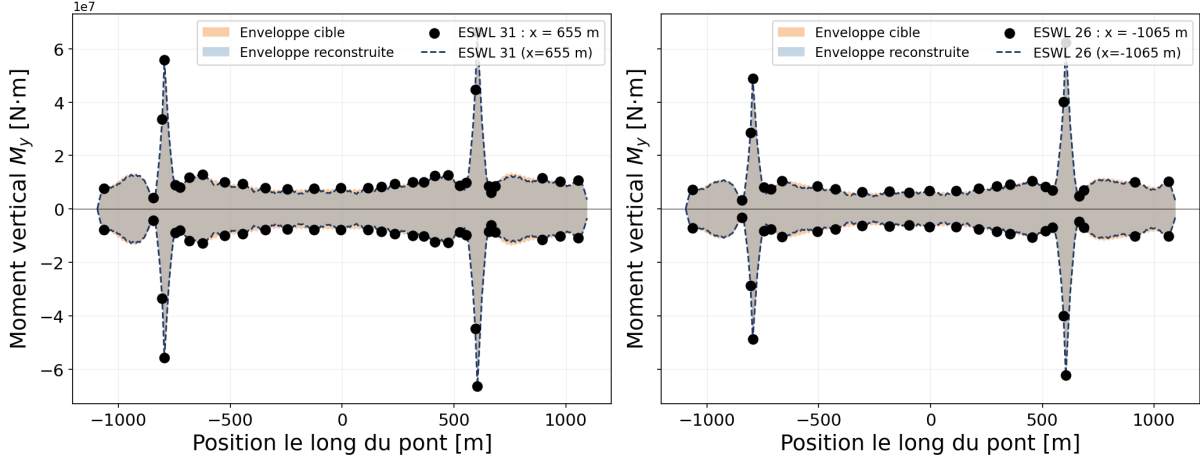
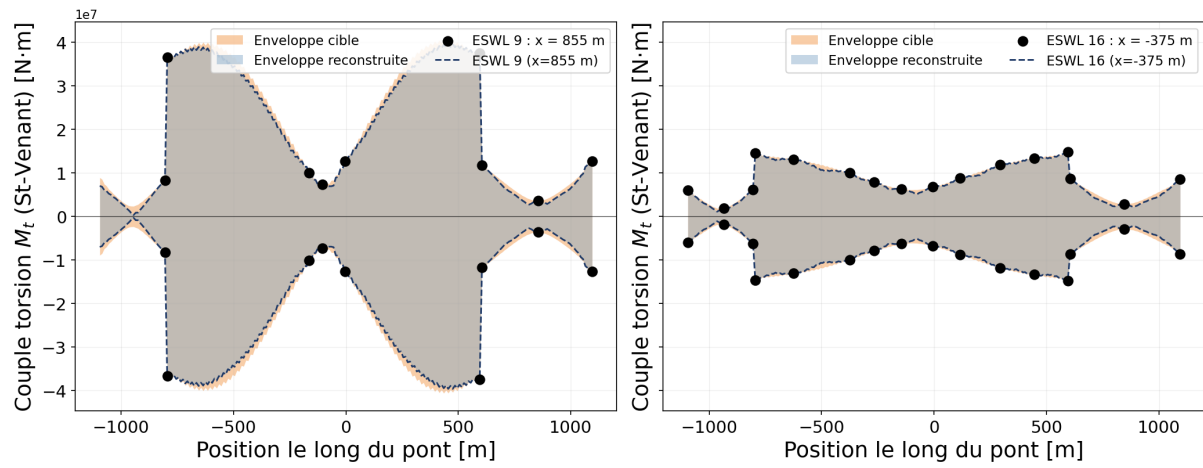
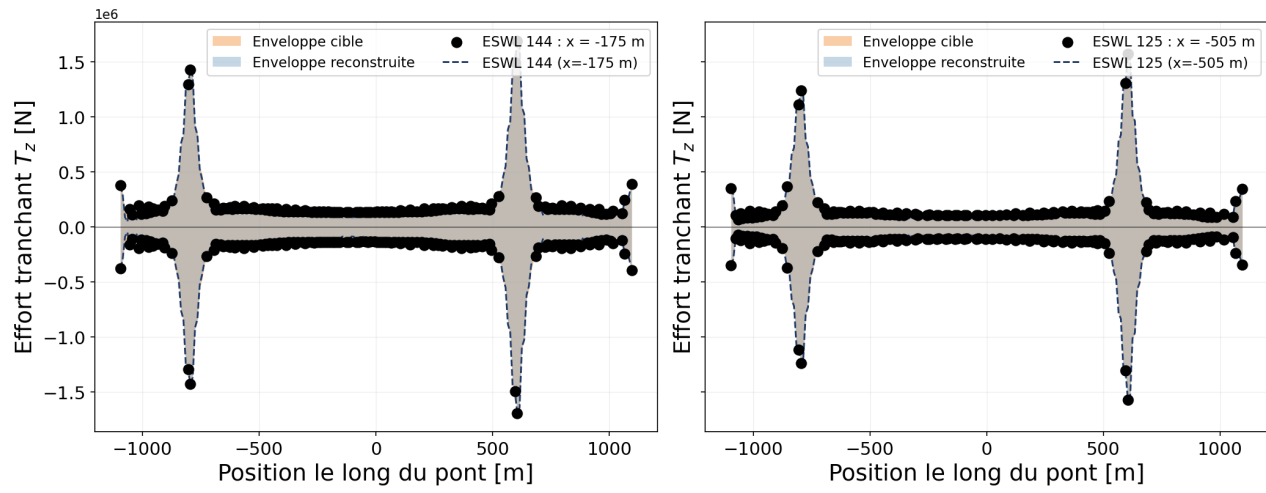
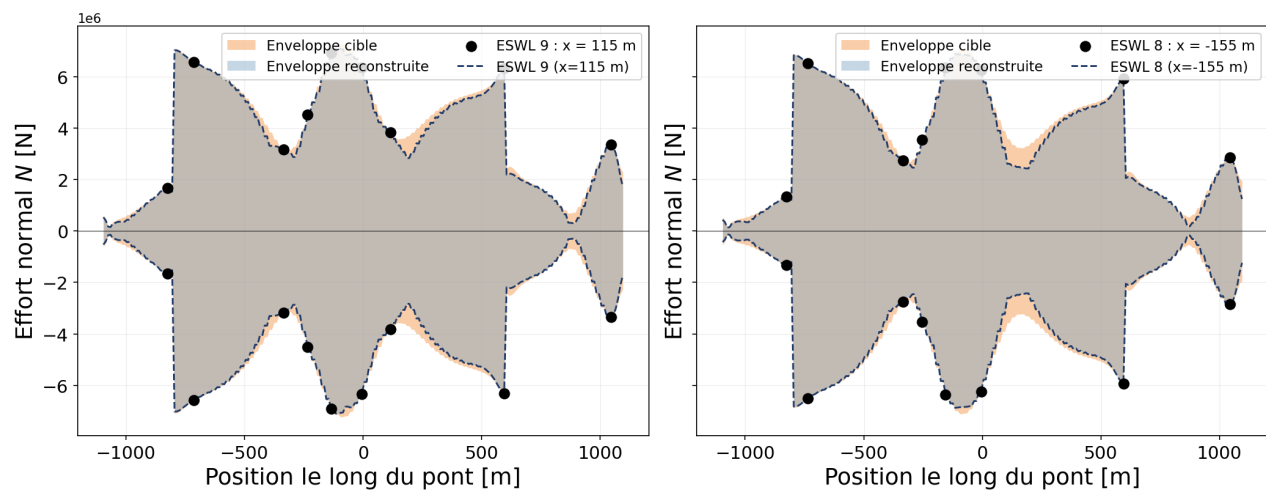
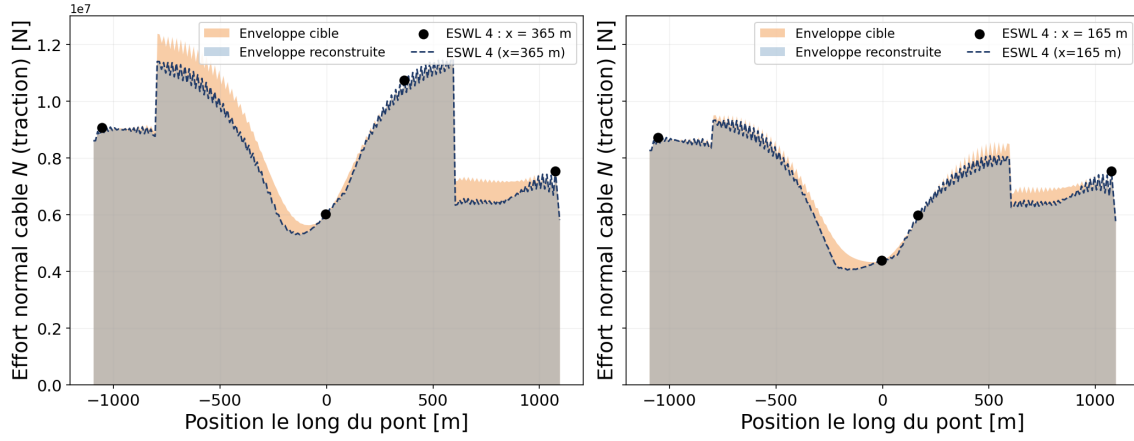
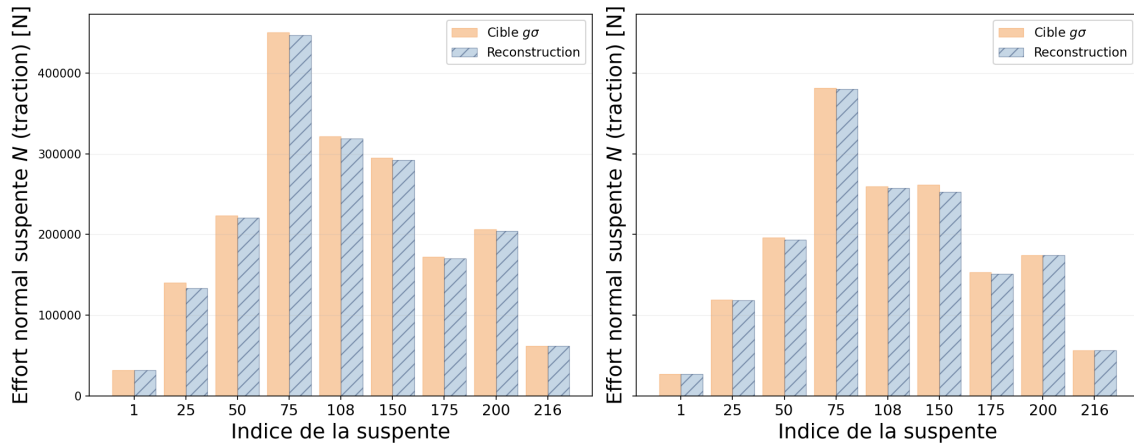


FIGURE 14.1 – Moment de flexion verticale  $M_y$ .

FIGURE 14.2 – Moment de torsion de Saint-Venant  $M_t$ .FIGURE 14.3 – Effort tranchant vertical  $T_z$ .FIGURE 14.4 – Effort axial dans le tablier  $N_{\text{tablier}}$ .

FIGURE 14.5 – Effort axial dans le câble principal  $N_{cable}$ .FIGURE 14.6 – Effort axial dans certaines suspentes  $N_{suspentes}$ .

Ces figures confirment que la méthode LRC–MIL ne se limite pas aux déplacements du tablier : elle peut également être appliquée aux efforts internes et aux efforts dans le système de suspension. La difficulté de reconstruction augmente toutefois nettement dès que l'on quitte les réponses globales pour s'intéresser à des grandeurs plus locales.

Pour les réponses les plus globales, le nombre d'ESWL nécessaires reste modéré. Ainsi, 8 ESWL suffisent pour reconstruire l'enveloppe de l'effort normal dans le tablier, et 4 ESWL pour celle de l'effort normal dans le câble principal. La situation devient plus contraignante pour les efforts internes présentant des variations spatiales plus marquées : 16 ESWL sont nécessaires pour le moment de torsion de Saint-Venant, et 26 pour le moment de flexion verticale du tablier. Les efforts dans les suspentes constituent un cas encore plus exigeant, avec 46 ESWL nécessaires pour atteindre le critère de reconstruction fixé.

L'effort tranchant vertical  $T_z$  apparaît comme la réponse la plus compliquée à reproduire. Sa reconstruction requiert jusqu'à 144 ESWL dans le modèle quasi-stationnaire.

Pour les suspentes, seules certaines reconstructions sont représentées à la Figure 14.6, par souci de lisibilité. Les 46 ESWL permettent néanmoins d'assurer un taux de reconstruction d'au moins 95 % sur l'ensemble des 216 suspentes considérées. On précise également que, pour les câbles principaux et les suspentes, une seule rangée de suspentes et un seul câble principal sont représentés. En raison de la symétrie de l'ouvrage par rapport à l'axe longitudinal du pont, les efforts obtenus de l'autre côté sont identiques.

Au vu du nombre très élevé d'ESWL nécessaires, à une seule vitesse donnée, pour reconstruire les enveloppes des suspentes et de l'effort tranchant vertical  $T_z$ , ces deux réponses ne sont pas retenues dans la suite pour la reconstruction par la méthode des PSWL. Leur prise en compte surchargerait

fortement le livrable et augmenterait considérablement le nombre de combinaisons nécessaires. Les enveloppes correspondantes peuvent toutefois être fournies séparément, afin de conserver l'information de dimensionnement. Pour les suspentes, cela revient par exemple à fournir, pour chaque suspente, l'effort normal maximal induit par le vent. Ce choix se justifie également par le caractère discret de ces éléments, dont les efforts peuvent être directement listés sans devoir être reconstruits par une base réduite de charges.

La prochaine étape consiste à appliquer une décomposition en valeurs singulières au paquet d'ESWL enrichi, en ne conservant que les réponses compatibles avec un livrable compact, afin de construire une base réduite de charges principales commune aux déplacements, aux efforts internes du tablier et aux efforts dans le câble principal.

## 14.4 Application de la méthode PSWL au paquet enrichi

La méthode PSWL introduite dans la partie précédente est à présent appliquée au paquet d'ESWL enrichi. Celui-ci est construit à partir de l'ensemble des réponses de dimensionnement retenues, à savoir les déplacements du tablier, les efforts internes du tablier et l'effort normal dans le câble principal.

Le principe général reste identique à celui présenté précédemment. Les ESWL sont d'abord rassemblées dans une matrice agrégée, puis normalisées afin de ne conserver que leur forme spatiale. Cette matrice est ensuite comprimée par décomposition en valeurs singulières, de manière à extraire une base réduite de charges statiques principales, appelées PSWL.

L'extension du paquet aux efforts internes rend toutefois le problème plus contraignant. Contrairement aux déplacements du tablier, les efforts internes présentent des enveloppes plus localisées spatialement. Cette difficulté a déjà été mise en évidence à la Section 14.3.1 : même à vitesse de vent fixée, la reconstruction des efforts internes nécessitait un nombre d'ESWL nettement plus élevé que celle des déplacements.

La calibration des coefficients devient également plus restrictive. Dans l'analyse limitée aux déplacements, la contrainte de non-dépassement ne portait que sur les composantes  $y$ ,  $z$  et  $\theta$ . Dans la présente extension, cette contrainte doit être vérifiée simultanément pour toutes les réponses de dimensionnement considérées. Une combinaison de PSWL destinée à reconstruire une réponse donnée ne peut donc pas entraîner de dépassement excessif des enveloppes associées aux autres réponses.

### 14.4.1 Troncature et énergie cumulée

Les Figures 14.7 et 14.8 présentent, pour les deux modèles considérés, la décroissance des valeurs singulières ainsi que l'évolution de l'énergie cumulée. Comme précédemment, trois seuils de référence sont indiqués : 90 %, 95 % et 99 % de l'énergie cumulée.

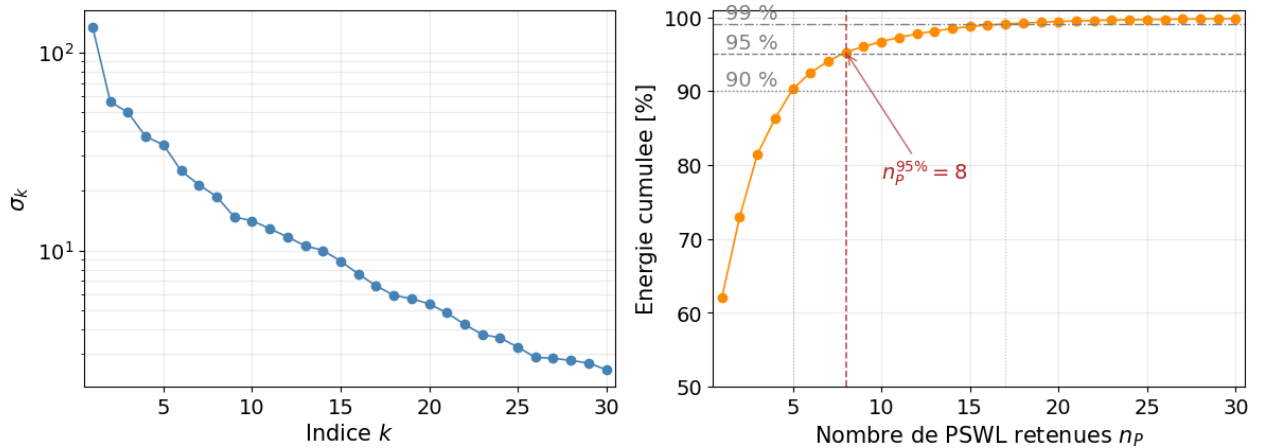


FIGURE 14.7 – Valeurs singulières (à gauche) et énergie cumulée (à droite) pour le modèle quasi-stationnaire

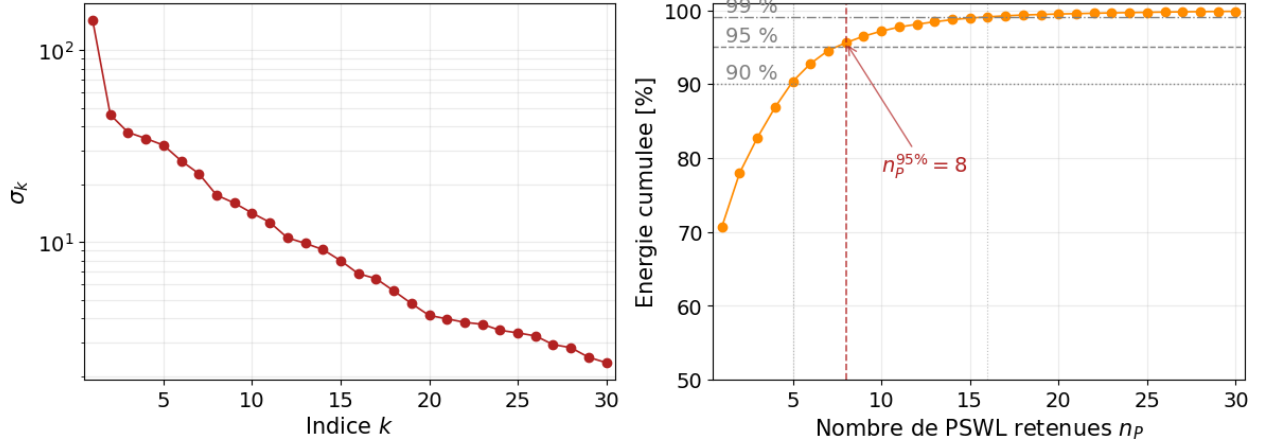


FIGURE 14.8 – Valeurs singulières (à gauche) et énergie cumulée (à droite) pour le modèle instationnaire

Les résultats montrent que l'information reste fortement concentrée dans les premières directions principales. Pour le modèle quasi-stationnaire, la première PSWL porte à elle seule environ 62 % de l'énergie totale. Pour le modèle instationnaire, cette proportion atteint environ 71 %. Les seuils de 90 % et 95 % sont atteints avec le même nombre de PSWL pour les deux modèles, respectivement avec 5 et 8 PSWL. Enfin, le seuil de 99 % est atteint avec 17 PSWL pour le modèle quasi-stationnaire et avec 16 PSWL pour le modèle instationnaire.

Afin de conserver un livrable exploitable en bureau d'études, le nombre maximal de PSWL retenues est fixé à  $n_P = 30$ . Six tailles de base sont alors testées :

$$n_P \in \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}. \quad (14.2)$$

Il convient toutefois de nuancer l'interprétation de cette énergie cumulée. D'après les résultats précédents, les 16 ou 17 premières PSWL concentrent déjà environ 99 % de l'énergie totale, selon le modèle considéré. Utiliser une base plus large, par exemple  $n_P = 30$ , revient donc à ajouter des directions principales qui ne représentent collectivement qu'environ 1 % de l'énergie restante. Ces directions peuvent néanmoins rester utiles pour améliorer localement certaines réponses, en particulier les efforts internes, dont les enveloppes sont plus sensibles à des formes spatiales secondaires.

### 14.4.2 Stratégie d'analyse

L'analyse est menée en trois étapes. Avant de les présenter, il est utile de préciser ce que l'on entend par *combinaison de PSWL*. Dans la suite, une combinaison de PSWL désigne une combinaison linéaire des  $n_P$  charges principales retenues :

$$\mathbf{f}_E^{\text{comb}} = \boldsymbol{\alpha} \mathbf{P}_{n_P}, \quad (14.3)$$

où  $\boldsymbol{\alpha}$  est le vecteur des coefficients de combinaison et où  $\mathbf{P}_{n_P}$  regroupe les  $n_P$  PSWL conservées.

Dans la Part IV, une seule combinaison de PSWL était considérée pour chaque réponse reconstruite. Autrement dit, pour chaque couple vitesse-réponse, une unique distribution de charge  $\mathbf{f}_E^{\text{comb}}$  était recherchée afin d'atteindre le critère de reconstruction fixé à 95 %, tout en respectant la contrainte de non-dépassement des autres enveloppes.

Dans la présente extension, l'ajout des efforts internes rend cette hypothèse beaucoup plus restrictive. Une seule distribution de charge peut ne pas suffire à reconstruire correctement l'ensemble d'une enveloppe, en particulier lorsque celle-ci présente des pics localisés. Il devient alors nécessaire d'autoriser plusieurs combinaisons de PSWL pour un même couple  $(U, \eta)$ <sup>2</sup>. Dans ce cas, plusieurs

2. Le couple  $(U, \eta)$  désigne une situation précise de reconstruction, définie par une vitesse de vent  $U$  et une réponse cible  $\eta$ . Par exemple,  $(54 \text{ m/s}, z)$  correspond à la reconstruction de l'enveloppe du déplacement vertical  $z$  pour une vitesse de vent de 54 m/s.

distributions de charges sont construites :

$$\mathbf{f}_{E,j}^{\text{comb}} = \alpha_j \mathbf{P}_{n_P}, \quad j = 1, \dots, n_{\text{comb}}, \quad (14.4)$$

où  $n_{\text{comb}}$  désigne le nombre de combinaisons nécessaires pour atteindre le taux minimal de reconstruction imposé.

Les trois stratégies considérées sont alors les suivantes :

1. Dans un premier temps, la stratégie la plus directe est testée. Pour chaque couple  $(U, \eta)$ , une seule combinaison de PSWL est utilisée pour reconstruire l'enveloppe. Aucun dépassement de l'enveloppe de référence n'est autorisé.
2. Dans un second temps, l'hypothèse d'une combinaison unique est abandonnée. Plusieurs combinaisons de PSWL peuvent alors être utilisées pour une même réponse et une même vitesse de vent. L'objectif est de reconstruire progressivement les zones de l'enveloppe qui restent insuffisamment couvertes par une seule combinaison.

Cette extension ne modifie toutefois pas fondamentalement la nature du livrable. Les distributions spatiales des PSWL restent inchangées : seule la manière de les combiner évolue. En pratique, cela signifie que la table des coefficients devient plus volumineuse, puisqu'elle peut contenir plusieurs lignes pour un même couple  $(U, \eta)$ , chacune correspondant à une combinaison différente des mêmes PSWL.

3. Enfin, l'influence d'une tolérance d'*overshoot* est étudiée. Comme dans la partie précédente, il s'agit d'évaluer si un dépassement local modéré de l'enveloppe de référence permet d'améliorer la reconstruction globale et de réduire le nombre de combinaisons nécessaires.

### 14.4.3 Combinaison unique : diagnostic d'échec

La reconstruction est d'abord évaluée en conservant la même philosophie que dans l'analyse limitée aux déplacements. Pour chaque réponse cible et pour chaque vitesse de vent, une seule combinaison linéaire de PSWL,  $\mathbf{f}_E^{\text{comb}}$ , est déterminée. La contrainte de non-dépassement de l'enveloppe de référence est imposée strictement. Aucun *overshoot* n'est donc autorisé dans cette première analyse.

La reconstruction est vérifiée sur le panel de vitesses suivant :

$$U_{\text{verif}} = [15, 30, 45, 50, 54, 60, 67, 68] \text{ m/s}. \quad (14.5)$$

Ce choix permet de couvrir les faibles vitesses, les vitesses intermédiaires, ainsi que les vitesses proches de la vitesse critique de flottement.

Par souci de lisibilité, les Tableaux 14.1 à 14.6 ne reprennent, pour chaque réponse, que le taux de reconstruction le plus défavorable observé sur l'ensemble des vitesses vérifiées. La vitesse associée à ce taux minimal est également indiquée. Comme précédemment, les résultats sont présentés pour les deux modèles aérodynamiques considérés : le modèle quasi-stationnaire et le modèle instationnaire.

| Réponse            | Modèle QS    |             |       |              |  | Modèle instationnaire |             |       |              |
|--------------------|--------------|-------------|-------|--------------|--|-----------------------|-------------|-------|--------------|
|                    | $\tau_w$ [%] | $U_w$ [m/s] | $n_c$ | $\tau_m$ [%] |  | $\tau_w$ [%]          | $U_w$ [m/s] | $n_c$ | $\tau_m$ [%] |
| $y$                | <b>22.13</b> | 68.0        | 1     | 26.76        |  | 96.10                 | 68.0        | 1     | 97.59        |
| $z$                | <b>71.55</b> | 15.0        | 1     | 75.97        |  | <b>77.07</b>          | 30.0        | 1     | 81.72        |
| $\theta$           | <b>66.56</b> | 68.0        | 1     | 75.59        |  | <b>71.69</b>          | 68.0        | 1     | 93.48        |
| $N$                | <b>48.65</b> | 45.0        | 1     | 67.18        |  | <b>54.96</b>          | 45.0        | 1     | 71.12        |
| $M_y$              | <b>33.17</b> | 54.0        | 1     | 60.28        |  | <b>62.59</b>          | 54.0        | 1     | 68.55        |
| $M_t$              | <b>23.80</b> | 68.0        | 1     | 63.85        |  | <b>69.83</b>          | 15.0        | 1     | 82.31        |
| $N_{\text{cable}}$ | <b>90.58</b> | 15.0        | 1     | 95.36        |  | <b>82.13</b>          | 54.0        | 1     | 91.77        |

TABLE 14.1 – Reconstruction PSWL avec combinaison unique pour  $n_P = 5$ , *overshoot* = 0%.

| Réponse            | Modèle QS    |             |       |              | Modèle instationnaire |             |       |              |
|--------------------|--------------|-------------|-------|--------------|-----------------------|-------------|-------|--------------|
|                    | $\tau_w$ [%] | $U_w$ [m/s] | $n_c$ | $\tau_m$ [%] | $\tau_w$ [%]          | $U_w$ [m/s] | $n_c$ | $\tau_m$ [%] |
| $y$                | 97.03        | 68.0        | 1     | 97.19        | 96.72                 | 68.0        | 1     | 98.18        |
| $z$                | 79.18        | 15.0        | 1     | 84.64        | 86.76                 | 68.0        | 1     | 90.71        |
| $\theta$           | 89.30        | 68.0        | 1     | 93.81        | 94.14                 | 15.0        | 1     | 97.92        |
| $N$                | 57.05        | 54.0        | 1     | 72.40        | 58.30                 | 45.0        | 1     | 75.05        |
| $M_y$              | 62.57        | 67.0        | 1     | 67.98        | 68.26                 | 30.0        | 1     | 72.97        |
| $M_t$              | 38.28        | 68.0        | 1     | 78.25        | 69.83                 | 15.0        | 1     | 87.54        |
| $N_{\text{cable}}$ | 93.53        | 67.0        | 1     | 97.14        | 92.12                 | 68.0        | 1     | 97.18        |

TABLE 14.2 – Reconstruction PSWL avec combinaison unique pour  $n_P = 10$ , overshoot = 0%.

| Réponse            | Modèle QS    |             |       |              | Modèle instationnaire |             |       |              |
|--------------------|--------------|-------------|-------|--------------|-----------------------|-------------|-------|--------------|
|                    | $\tau_w$ [%] | $U_w$ [m/s] | $n_c$ | $\tau_m$ [%] | $\tau_w$ [%]          | $U_w$ [m/s] | $n_c$ | $\tau_m$ [%] |
| $y$                | 97.03        | 68.0        | 1     | 97.19        | 97.35                 | 68.0        | 1     | 98.32        |
| $z$                | 90.07        | 30.0        | 1     | 90.40        | 87.42                 | 68.0        | 1     | 91.53        |
| $\theta$           | 96.68        | 15.0        | 1     | 99.35        | 98.19                 | 15.0        | 1     | 99.12        |
| $N$                | 57.18        | 45.0        | 1     | 73.65        | 60.00                 | 45.0        | 1     | 75.98        |
| $M_y$              | 65.98        | 45.0        | 1     | 71.32        | 68.39                 | 45.0        | 1     | 74.76        |
| $M_t$              | 80.76        | 15.0        | 1     | 91.93        | 69.83                 | 15.0        | 1     | 88.83        |
| $N_{\text{cable}}$ | 93.53        | 67.0        | 1     | 98.04        | 92.72                 | 68.0        | 1     | 97.43        |

TABLE 14.3 – Reconstruction PSWL avec combinaison unique pour  $n_P = 15$ , overshoot = 0%.

| Réponse            | Modèle QS    |             |       |              | Modèle instationnaire |             |       |              |
|--------------------|--------------|-------------|-------|--------------|-----------------------|-------------|-------|--------------|
|                    | $\tau_w$ [%] | $U_w$ [m/s] | $n_c$ | $\tau_m$ [%] | $\tau_w$ [%]          | $U_w$ [m/s] | $n_c$ | $\tau_m$ [%] |
| $y$                | 97.03        | 68.0        | 1     | 97.30        | 97.72                 | 68.0        | 1     | 98.41        |
| $z$                | 90.68        | 30.0        | 1     | 90.95        | 87.50                 | 68.0        | 1     | 91.71        |
| $\theta$           | 96.99        | 15.0        | 1     | 99.46        | 98.42                 | 15.0        | 1     | 99.31        |
| $N$                | 66.64        | 45.0        | 1     | 75.54        | 61.94                 | 50.0        | 1     | 79.90        |
| $M_y$              | 65.98        | 45.0        | 1     | 71.32        | 73.42                 | 15.0        | 1     | 78.22        |
| $M_t$              | 84.28        | 15.0        | 1     | 94.47        | 69.83                 | 15.0        | 1     | 88.83        |
| $N_{\text{cable}}$ | 94.05        | 15.0        | 1     | 98.85        | 92.72                 | 68.0        | 1     | 97.60        |

TABLE 14.4 – Reconstruction PSWL avec combinaison unique pour  $n_P = 20$ , overshoot = 0%.

| Réponse            | Modèle QS    |             |       |              | Modèle instationnaire |             |       |              |
|--------------------|--------------|-------------|-------|--------------|-----------------------|-------------|-------|--------------|
|                    | $\tau_w$ [%] | $U_w$ [m/s] | $n_c$ | $\tau_m$ [%] | $\tau_w$ [%]          | $U_w$ [m/s] | $n_c$ | $\tau_m$ [%] |
| $y$                | 97.12        | 68.0        | 1     | 97.44        | 97.96                 | 54.0        | 1     | 98.52        |
| $z$                | 90.68        | 30.0        | 1     | 90.95        | 87.79                 | 68.0        | 1     | 92.04        |
| $\theta$           | 96.99        | 15.0        | 1     | 99.48        | 98.77                 | 15.0        | 1     | 99.37        |
| $N$                | 66.64        | 45.0        | 1     | 75.54        | 73.50                 | 54.0        | 1     | 82.50        |
| $M_y$              | 66.81        | 45.0        | 1     | 74.70        | 73.42                 | 15.0        | 1     | 78.22        |
| $M_t$              | 84.28        | 15.0        | 1     | 94.63        | 69.83                 | 15.0        | 1     | 89.49        |
| $N_{\text{cable}}$ | 94.05        | 15.0        | 1     | 98.85        | 92.72                 | 68.0        | 1     | 97.78        |

TABLE 14.5 – Reconstruction PSWL avec combinaison unique pour  $n_P = 25$ , overshoot = 0%.

| Réponse            | Modèle QS    |             |       |              | Modèle instationnaire |             |       |              |
|--------------------|--------------|-------------|-------|--------------|-----------------------|-------------|-------|--------------|
|                    | $\tau_w$ [%] | $U_w$ [m/s] | $n_c$ | $\tau_m$ [%] | $\tau_w$ [%]          | $U_w$ [m/s] | $n_c$ | $\tau_m$ [%] |
| $y$                | 97.69        | 68.0        | 1     | 97.99        | 98.00                 | 54.0        | 1     | 98.55        |
| $z$                | 91.15        | 45.0        | 1     | 91.60        | 87.79                 | 68.0        | 1     | 92.25        |
| $\theta$           | 97.27        | 15.0        | 1     | 99.53        | 98.94                 | 15.0        | 1     | 99.39        |
| $N$                | 66.64        | 45.0        | 1     | 75.54        | 74.48                 | 30.0        | 1     | 83.68        |
| $M_y$              | 72.00        | 67.0        | 1     | 77.81        | 76.04                 | 30.0        | 1     | 78.87        |
| $M_t$              | 84.28        | 15.0        | 1     | 94.84        | 69.83                 | 15.0        | 1     | 89.73        |
| $N_{\text{cable}}$ | 94.05        | 15.0        | 1     | 98.89        | 92.72                 | 68.0        | 1     | 98.44        |

TABLE 14.6 – Reconstruction PSWL avec combinaison unique pour  $n_P = 30$ , overshoot = 0%.

Aucune des valeurs de  $n_P$  considérées dans les tableaux précédents ne permet d'atteindre un taux de reconstruction de 95 % avec une combinaison unique de PSWL. Les taux de reconstruction tendent toutefois globalement à augmenter lorsque  $n_P$  augmente. Ce comportement est attendu : augmenter  $n_P$  revient à enrichir la base de chargements disponibles et donc à ajouter de nouvelles directions possibles pour la reconstruction. Comme la même base de PSWL est conservée lorsque la base est agrandie, une base de petite taille est incluse dans une base plus grande. En théorie, l'augmentation de  $n_P$  ne peut donc pas dégrader la meilleure reconstruction accessible ; au pire, elle ne l'améliore pas. C'est ce qui explique, par exemple, certaines stagnations observées pour le moment de torsion dans le modèle instationnaire : l'ajout de nouvelles directions de chargement ne permet plus au solveur de trouver une combinaison plus favorable sous les contraintes imposées.

Les Tableaux 14.1 à 14.6 font surtout apparaître une partition nette des réponses selon la régularité spatiale de leur enveloppe. Les réponses dont l'enveloppe varie lentement le long du tablier, comme les déplacements ou l'effort normal dans le câble principal, sont relativement bien reconstruites par une combinaison unique lorsque le nombre de PSWL devient suffisant. Pour ces grandeurs, l'ajout de directions de chargement permet progressivement d'adapter la forme reconstruite à l'enveloppe cible. Le seuil de 95 % n'est pas strictement atteint dans cette stratégie, mais les taux obtenus deviennent proches de l'objectif pour les plus grandes valeurs de  $n_P$ . Comme au chapitre précédent, le déplacement vertical reste cependant plus délicat, en particulier pour le modèle instationnaire au voisinage de la vitesse critique.

Les enveloppes des déplacements ayant déjà été discutées précédemment, il est intéressant d'illustrer ce comportement sur l'effort normal dans le câble principal. Les Figures 14.9 et 14.10 présentent la reconstruction de cette réponse pour les deux modèles aérodynamiques, avec une base très réduite de 5 PSWL puis avec une base plus riche de 25 PSWL. Les distributions de charges associées sont également représentées afin de visualiser la combinaison statique effectivement appliquée.

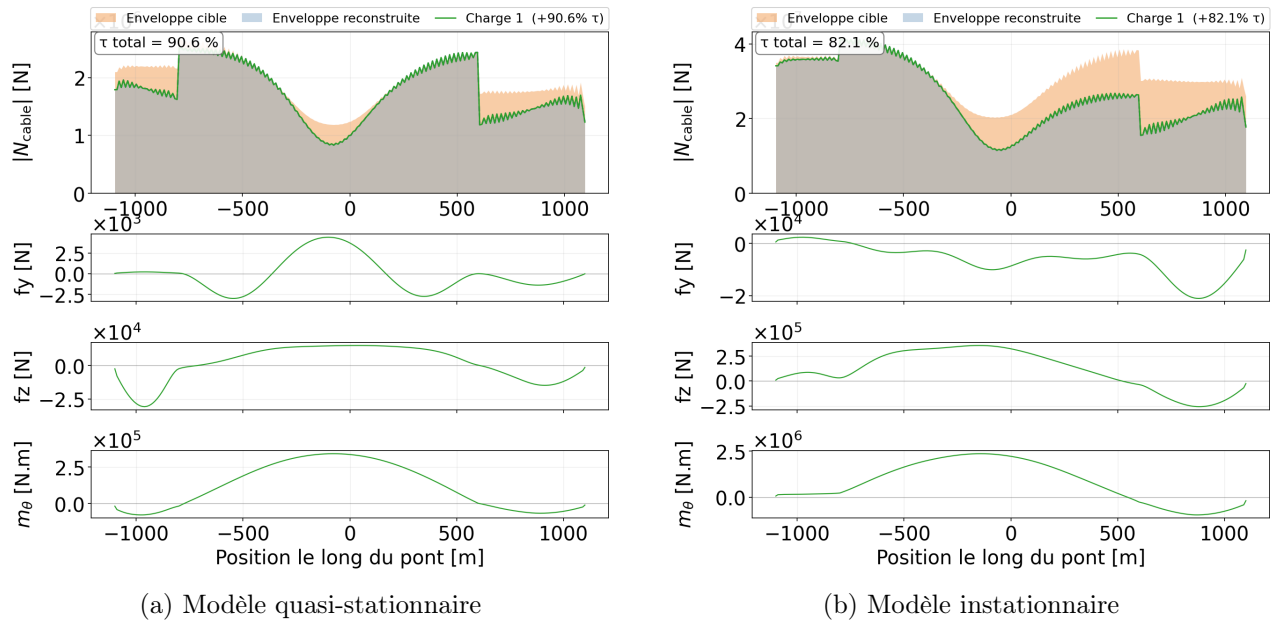


FIGURE 14.9 – Reconstruction de l’enveloppe de l’effort normal dans le câble principal avec 5 PSWL.

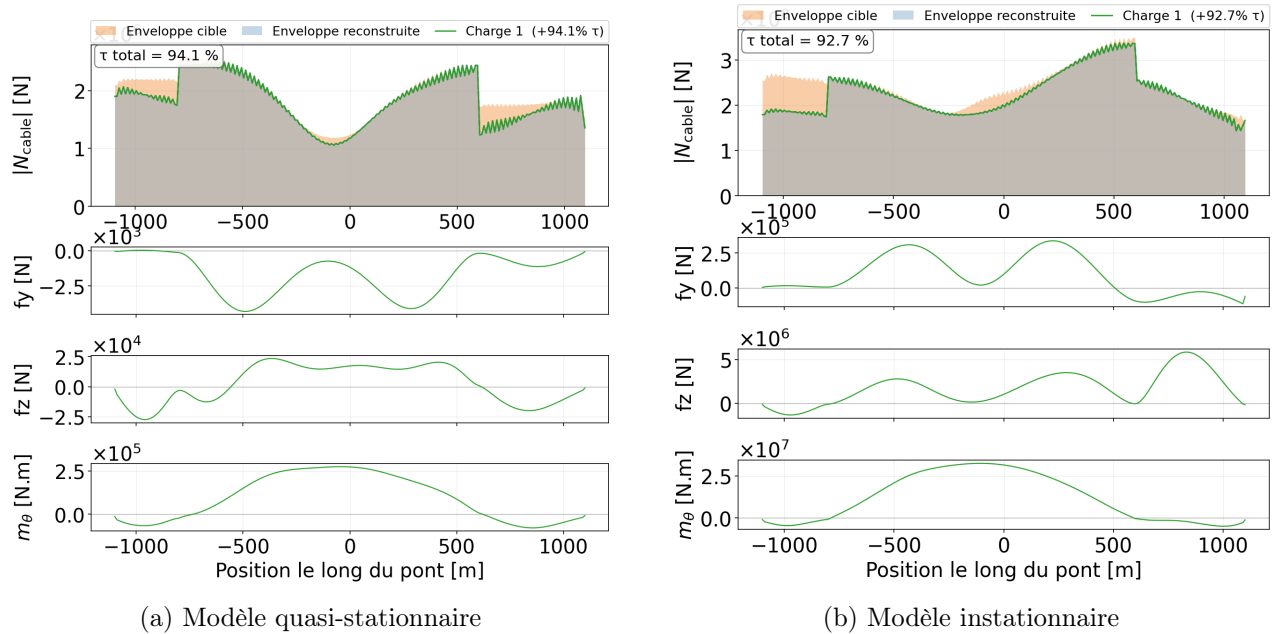


FIGURE 14.10 – Reconstruction de l’enveloppe de l’effort normal dans le câble principal avec 25 PSWL.

Ces figures confirment que, pour une réponse spatialement régulière, l’enrichissement de la base améliore nettement la reconstruction. Avec seulement 5 PSWL, la combinaison unique ne dispose pas encore d’assez de liberté pour suivre correctement l’enveloppe cible. Avec 25 PSWL, la forme reconstruite devient beaucoup plus proche de l’enveloppe dynamique, ce qui montre que la difficulté ne provient pas ici d’une incompatibilité fondamentale avec une combinaison unique, mais plutôt d’un manque de directions de chargement lorsque la base est trop réduite.

Les efforts internes du tablier présentent en revanche un comportement radicalement différent. Leur taux de reconstruction reste nettement inférieur à 95 %, et l’écart ne se résorbe que faiblement lorsque le nombre de charges principales augmente. Pour le moment  $M_y$ , par exemple, le passage de 5 à 30 PSWL n’améliore le taux de reconstruction que d’environ 63 % à 76 %. Cette amélioration existe, mais elle reste insuffisante pour atteindre l’objectif fixé. Les Figures 14.11 et 14.12 illustrent

cette difficulté pour 5 et 25 PSWL.

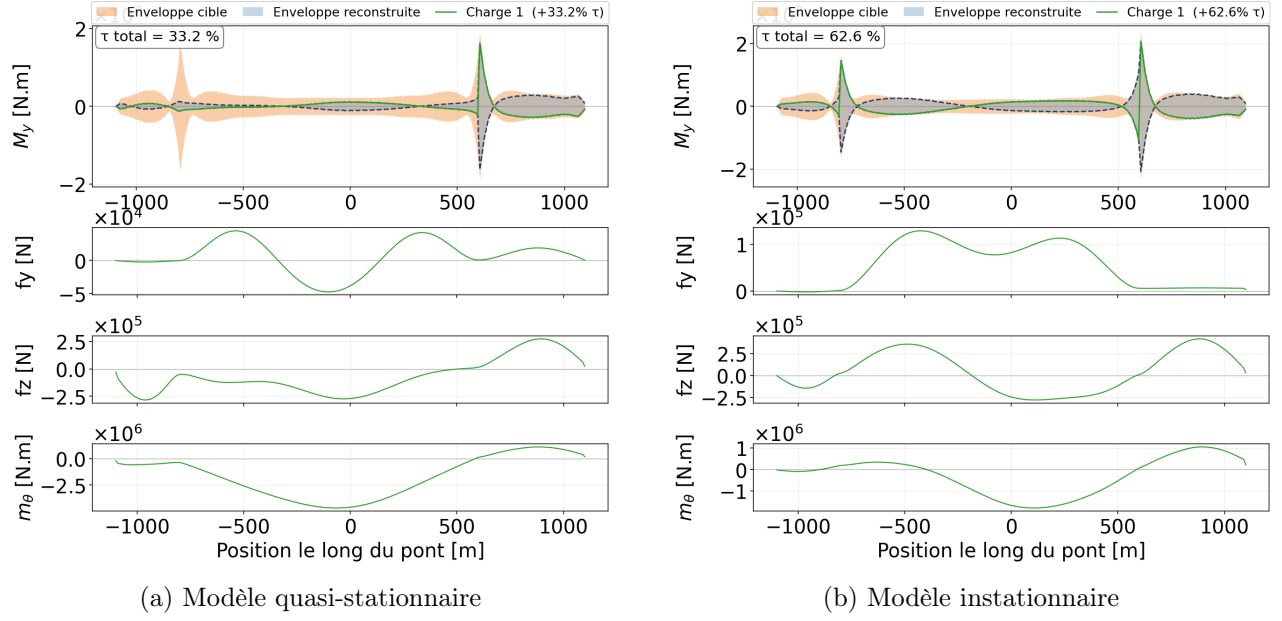


FIGURE 14.11 – Reconstruction de l'enveloppe du moment  $M_y$  avec 5 PSWL.

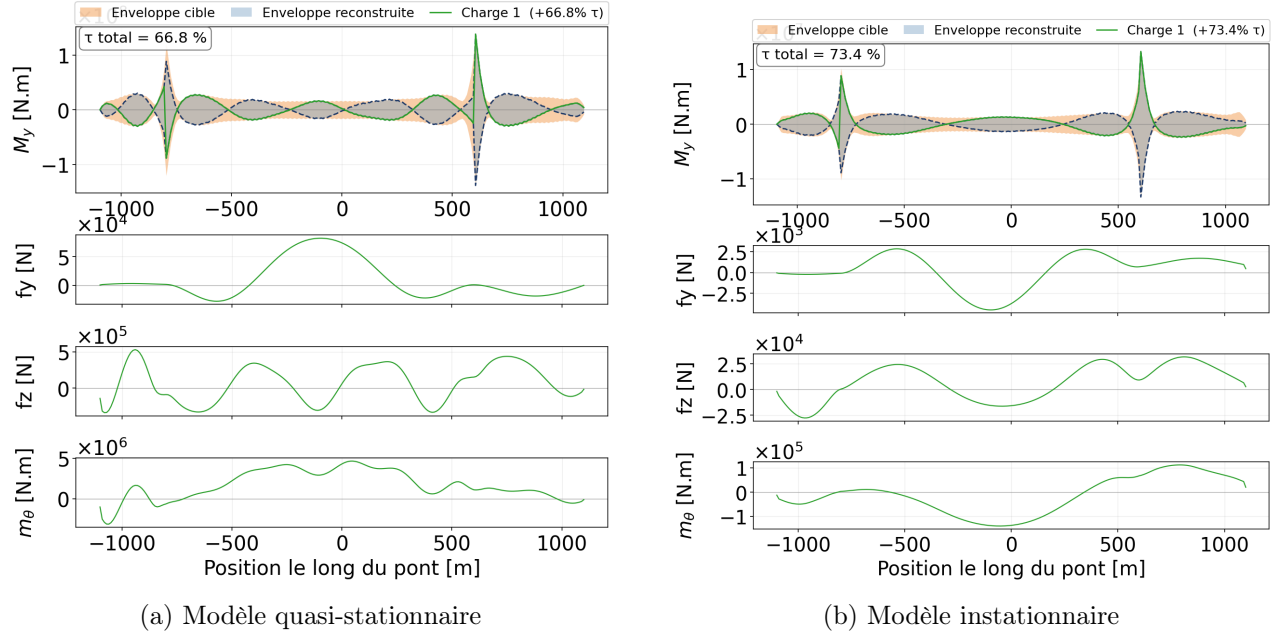


FIGURE 14.12 – Reconstruction de l'enveloppe du moment  $M_y$  avec 25 PSWL.

La raison est essentiellement géométrique. L'enveloppe de  $M_y$  est plus irrégulière que celle de l'effort normal dans le câble principal et surtout présente deux pics localisés. Une combinaison unique doit alors remplir deux exigences contradictoires : elle doit être suffisamment élevée pour approcher les pics de l'enveloppe cible, tout en restant partout sous cette enveloppe en raison de la contrainte de non-dépassement. Cette contrainte, appliquée simultanément à toutes les réponses contrôlées, rend la reconstruction très difficile, voire incompatible avec une seule forme statique globale.

L'enveloppe reconstruite est alors gouvernée par quelques points particulièrement contraignants. Ces points empêchent la combinaison unique de se rapprocher davantage de certaines zones de l'enveloppe sans provoquer un dépassement ailleurs. L'augmentation de  $n_P$  enrichit bien la base et améliore légèrement la reconstruction, mais elle ne change pas la nature du problème : une seule combinaison reste insuffisante pour représenter correctement une enveloppe fortement localisée.

Le constat est donc clair. Pour les réponses lisses, une combinaison unique peut fournir une reconstruction presque satisfaisante lorsque le nombre de PSWL est suffisamment grand. Pour les efforts internes du tablier, en revanche, cette stratégie ne permet pas structurellement d'atteindre le seuil de 95 %. La suite consiste donc à autoriser plusieurs combinaisons de PSWL pour un même couple  $(U, \eta)$ , chacune pouvant couvrir une portion différente de l'enveloppe. Cette stratégie est appliquée uniformément à l'ensemble des réponses, y compris celles déjà proches du seuil, afin de garantir un taux de reconstruction minimal de 95 % partout. Elle fait l'objet de la section suivante.

#### 14.4.4 Reconstruction par plusieurs combinaisons sans overshoot

L'analyse précédente a montré qu'une combinaison unique de PSWL ne permet pas de reconstruire l'ensemble des réponses avec un taux minimal de 95 %. La stratégie est donc généralisée en autorisant plusieurs combinaisons de PSWL pour un même couple  $(U, \eta)$ .

Dans un premier temps, la contrainte de non-dépassement est conservée strictement. L'overshoot autorisé est donc fixé à 0 %. L'algorithme procède alors de manière itérative. Une première combinaison de PSWL est déterminée afin de reconstruire au mieux l'enveloppe cible. Si le taux de reconstruction demandé est atteint, le processus s'arrête. Dans le cas contraire, une nouvelle combinaison est recherchée afin de couvrir les zones de l'enveloppe encore insuffisamment reconstruites. La reconstruction finale est ensuite définie comme l'enveloppe des réponses statiques produites par l'ensemble des combinaisons retenues. Chaque ligne correspond alors à une combinaison différente des mêmes PSWL.

Comme à la section précédente, les Tableaux 14.7 à 14.12 reprennent, pour chaque réponse, le taux de reconstruction le plus défavorable observé sur l'ensemble des vitesses vérifiées. La vitesse associée à ce minimum est notée  $U_w$ . Le nombre de combinaisons nécessaires pour atteindre la reconstruction finale est noté  $n_c$ .

Le nombre maximal de combinaisons autorisées est fixé à 50, afin d'éviter une augmentation excessive de la taille de la table de coefficients. Un second critère d'arrêt est également introduit afin d'éviter d'ajouter des combinaisons sans gain effectif. La recherche est interrompue lorsque l'ajout d'une nouvelle combinaison n'améliore plus significativement le taux de reconstruction :

$$\tau_{\text{new}} \leq \tau_{\text{actuel}} + 10^{-6}. \quad (14.6)$$

Ainsi, lorsque la reconstruction atteint un plateau, l'algorithme s'arrête même si le taux cible de 95 % n'est pas strictement atteint. Ce critère permet d'identifier les cas où la limitation ne provient plus du nombre de combinaisons, mais de la richesse insuffisante de la base de PSWL elle-même.

| Réponse            | Modèle QS    |             |       |              | Modèle instationnaire |             |       |              |
|--------------------|--------------|-------------|-------|--------------|-----------------------|-------------|-------|--------------|
|                    | $\tau_w$ [%] | $U_w$ [m/s] | $n_c$ | $\tau_m$ [%] | $\tau_w$ [%]          | $U_w$ [m/s] | $n_c$ | $\tau_m$ [%] |
| $y$                | <b>23.11</b> | 68.0        | 2     | 27.58        | 96.10                 | 68.0        | 1     | 97.59        |
| $z$                | 95.12        | 45.0        | 4     | 96.33        | <b>92.24</b>          | 68.0        | 6     | 95.81        |
| $\theta$           | <b>66.77</b> | 68.0        | 3     | 75.69        | <b>71.69</b>          | 68.0        | 1     | 93.91        |
| $N$                | 95.05        | 30.0        | 4     | 95.84        | <b>93.07</b>          | 68.0        | 6     | 95.07        |
| $M_y$              | <b>77.65</b> | 68.0        | 4     | 78.99        | <b>81.16</b>          | 30.0        | 6     | 85.58        |
| $M_t$              | <b>63.38</b> | 68.0        | 2     | 72.23        | <b>70.66</b>          | 68.0        | 2     | 89.35        |
| $N_{\text{cable}}$ | <b>93.40</b> | 68.0        | 2     | 96.02        | 95.42                 | 60.0        | 2     | 96.22        |

TABLE 14.7 – Reconstruction PSWL avec combinaisons multiples pour  $n_P = 5$ , overshoot = 0%.

| Réponse            | Modèle QS    |             |       |              | Modèle instationnaire |             |       |              |
|--------------------|--------------|-------------|-------|--------------|-----------------------|-------------|-------|--------------|
|                    | $\tau_w$ [%] | $U_w$ [m/s] | $n_c$ | $\tau_m$ [%] | $\tau_w$ [%]          | $U_w$ [m/s] | $n_c$ | $\tau_m$ [%] |
| $y$                | 97.03        | 68.0        | 1     | 97.19        | 96.72                 | 68.0        | 1     | 98.29        |
| $z$                | 95.47        | 45.0        | 4     | 96.58        | 96.20                 | 67.0        | 3     | 96.60        |
| $\theta$           | 89.52        | 68.0        | 2     | 94.07        | 95.50                 | 30.0        | 1     | 98.44        |
| $N$                | 95.37        | 54.0        | 6     | 96.17        | 95.17                 | 68.0        | 3     | 95.55        |
| $M_y$              | 93.53        | 15.0        | 8     | 94.91        | 95.04                 | 67.0        | 6     | 95.35        |
| $M_t$              | 87.38        | 67.0        | 6     | 92.56        | 94.69                 | 15.0        | 11    | 96.05        |
| $N_{\text{cable}}$ | 96.66        | 15.0        | 3     | 98.42        | 96.12                 | 68.0        | 2     | 98.34        |

TABLE 14.8 – Reconstruction PSWL avec combinaisons multiples pour  $n_P = 10$ , overshoot = 0%.

| Réponse            | Modèle QS    |             |       |              | Modèle instationnaire |             |       |              |
|--------------------|--------------|-------------|-------|--------------|-----------------------|-------------|-------|--------------|
|                    | $\tau_w$ [%] | $U_w$ [m/s] | $n_c$ | $\tau_m$ [%] | $\tau_w$ [%]          | $U_w$ [m/s] | $n_c$ | $\tau_m$ [%] |
| $y$                | 97.03        | 68.0        | 1     | 97.19        | 97.35                 | 68.0        | 1     | 98.42        |
| $z$                | 97.78        | 60.0        | 2     | 98.04        | 96.20                 | 67.0        | 3     | 97.72        |
| $\theta$           | 96.68        | 15.0        | 1     | 99.35        | 98.35                 | 15.0        | 2     | 99.14        |
| $N$                | 95.42        | 45.0        | 6     | 96.24        | 95.49                 | 50.0        | 8     | 96.12        |
| $M_y$              | 95.12        | 50.0        | 7     | 95.50        | 95.27                 | 50.0        | 7     | 95.52        |
| $M_t$              | 95.30        | 68.0        | 2     | 96.27        | 95.16                 | 15.0        | 7     | 96.58        |
| $N_{\text{cable}}$ | 99.47        | 15.0        | 2     | 99.61        | 96.92                 | 68.0        | 2     | 98.82        |

TABLE 14.9 – Reconstruction PSWL avec combinaisons multiples pour  $n_P = 15$ , overshoot = 0%.

| Réponse            | Modèle QS    |             |       |              | Modèle instationnaire |             |       |              |
|--------------------|--------------|-------------|-------|--------------|-----------------------|-------------|-------|--------------|
|                    | $\tau_w$ [%] | $U_w$ [m/s] | $n_c$ | $\tau_m$ [%] | $\tau_w$ [%]          | $U_w$ [m/s] | $n_c$ | $\tau_m$ [%] |
| $y$                | 97.03        | 68.0        | 1     | 97.30        | 97.72                 | 68.0        | 1     | 98.52        |
| $z$                | 98.04        | 50.0        | 2     | 98.44        | 96.63                 | 67.0        | 2     | 97.79        |
| $\theta$           | 96.99        | 15.0        | 1     | 99.46        | 98.42                 | 15.0        | 1     | 99.31        |
| $N$                | 95.52        | 45.0        | 5     | 96.25        | 95.57                 | 30.0        | 2     | 96.75        |
| $M_y$              | 95.28        | 67.0        | 8     | 95.69        | 95.35                 | 54.0        | 9     | 95.77        |
| $M_t$              | 95.64        | 60.0        | 3     | 97.01        | 95.72                 | 30.0        | 6     | 96.76        |
| $N_{\text{cable}}$ | 99.60        | 15.0        | 2     | 99.69        | 98.50                 | 67.0        | 1     | 99.36        |

TABLE 14.10 – Reconstruction PSWL avec combinaisons multiples pour  $n_P = 20$ , overshoot = 0%.

| Réponse            | Modèle QS    |             |       |              | Modèle instationnaire |             |       |              |
|--------------------|--------------|-------------|-------|--------------|-----------------------|-------------|-------|--------------|
|                    | $\tau_w$ [%] | $U_w$ [m/s] | $n_c$ | $\tau_m$ [%] | $\tau_w$ [%]          | $U_w$ [m/s] | $n_c$ | $\tau_m$ [%] |
| $y$                | 97.12        | 68.0        | 1     | 97.44        | 97.96                 | 54.0        | 1     | 98.60        |
| $z$                | 98.16        | 60.0        | 2     | 98.50        | 96.81                 | 67.0        | 2     | 97.87        |
| $\theta$           | 96.99        | 15.0        | 1     | 99.48        | 98.77                 | 15.0        | 1     | 99.37        |
| $N$                | 95.68        | 15.0        | 3     | 96.40        | 96.18                 | 30.0        | 2     | 96.95        |
| $M_y$              | 95.54        | 67.0        | 5     | 95.81        | 95.35                 | 54.0        | 9     | 95.84        |
| $M_t$              | 95.64        | 60.0        | 3     | 97.02        | 95.98                 | 45.0        | 3     | 96.82        |
| $N_{\text{cable}}$ | 99.60        | 15.0        | 2     | 99.73        | 98.50                 | 67.0        | 1     | 99.44        |

TABLE 14.11 – Reconstruction PSWL avec combinaisons multiples pour  $n_P = 25$ , overshoot = 0%.

| Réponse            | Modèle QS    |             |       |              | Modèle instationnaire |             |       |              |
|--------------------|--------------|-------------|-------|--------------|-----------------------|-------------|-------|--------------|
|                    | $\tau_w$ [%] | $U_w$ [m/s] | $n_c$ | $\tau_m$ [%] | $\tau_w$ [%]          | $U_w$ [m/s] | $n_c$ | $\tau_m$ [%] |
| $y$                | 97.69        | 68.0        | 1     | 97.99        | 98.00                 | 54.0        | 1     | 98.63        |
| $z$                | 98.16        | 60.0        | 2     | 98.50        | 96.81                 | 67.0        | 2     | 98.16        |
| $\theta$           | 97.27        | 15.0        | 1     | 99.53        | 98.94                 | 15.0        | 1     | 99.39        |
| $N$                | 95.68        | 15.0        | 3     | 96.47        | 96.56                 | 15.0        | 3     | 97.24        |
| $M_y$              | 95.61        | 68.0        | 9     | 96.15        | 95.55                 | 45.0        | 8     | 95.93        |
| $M_t$              | 95.64        | 60.0        | 3     | 97.02        | 95.98                 | 45.0        | 3     | 96.99        |
| $N_{\text{cable}}$ | 99.65        | 45.0        | 2     | 99.76        | 98.50                 | 67.0        | 1     | 99.45        |

TABLE 14.12 – Reconstruction PSWL avec combinaisons multiples pour  $n_P = 30$ , overshoot = 0%.

Les résultats obtenus sont nettement meilleurs que ceux issus de la combinaison unique. L'autorisation de plusieurs combinaisons améliore fortement la reconstruction des enveloppes, en particulier pour les efforts internes du tablier, qui étaient les réponses les plus difficiles à représenter avec une seule forme statique globale.

Un point important doit toutefois être précisé pour interpréter correctement les tableaux. Par souci de lisibilité, chaque tableau reporte, pour un nombre de PSWL fixé, le plus faible taux de reconstruction obtenu sur l'ensemble des vitesses, ainsi que la vitesse à laquelle ce minimum est atteint. Cet indicateur est pertinent tant que le seuil de 95 % n'est pas atteint partout. En revanche, dès que ce seuil est satisfait sur toute la plage de vitesses, le taux minimal perd une partie de sa signification. L'objectif n'est en effet pas de maximiser le taux de reconstruction au-delà de 95 %, mais simplement d'atteindre ce seuil sous contrainte de non-dépassement.

Par conséquent, une fois la cible atteinte, la vitesse affichée dans la colonne  $U_w$  ne correspond plus nécessairement au cas le plus difficile à reconstruire. Il est par exemple possible qu'une vitesse proche de la vitesse critique nécessite un grand nombre de combinaisons pour atteindre un taux supérieur à 95 %, 96 % par exemple, tandis qu'une autre vitesse n'en nécessite qu'une seule pour atteindre 95.1 %. Dans le tableau, c'est pourtant cette seconde vitesse qui apparaîtra comme le minimum, alors qu'elle ne constitue pas le cas le plus contraignant du point de vue de l'effort de reconstruction. Au-delà du seuil de 95 %, l'indicateur le plus informatif n'est donc plus uniquement le taux résiduel, mais aussi le nombre de combinaisons nécessaires pour l'atteindre.

Cette remarque explique certaines différences apparentes avec la section précédente. Par exemple, pour l'effort normal dans le câble principal, les tableaux peuvent indiquer qu'une seule combinaison suffit pour certaines valeurs de  $n_P$ , alors que la stratégie à combinaison unique ne permettait pas systématiquement d'atteindre le seuil. Cela ne signifie pas que la reconstruction est devenue plus simple pour toutes les vitesses ; cela signifie seulement que la vitesse reportée dans le tableau est celle du taux minimal final, et non nécessairement celle qui a exigé le plus grand nombre de combinaisons.

Cela étant dit, pour  $n_P = 5$ , la base reste trop réduite pour reconstruire correctement l'ensemble des réponses. Plusieurs grandeurs demeurent sous le seuil de 95 %, malgré l'autorisation de combinaisons multiples. Le nombre maximal de 50 combinaisons n'est pas nécessairement atteint, car l'algorithme peut s'arrêter plus tôt lorsque le critère de stagnation est rencontré. Cela signifie que l'ajout de combinaisons supplémentaires ne permet plus d'améliorer la reconstruction.

Ce comportement est illustré à la Figure 14.13, qui présente l'évolution du taux de reconstruction du déplacement vertical pour le modèle instationnaire avec  $n_P = 5$ . La courbe noire correspond au pire taux de reconstruction observé sur l'ensemble des vitesses. Après six combinaisons, un plateau est atteint : l'ajout de nouvelles combinaisons n'améliore plus la reconstruction. Cette observation montre que, dans ce cas, la limitation provient principalement de la richesse insuffisante de la base PSWL. Autrement dit, multiplier les combinaisons ne suffit pas si les formes spatiales disponibles ne permettent pas de couvrir les zones manquantes de l'enveloppe.

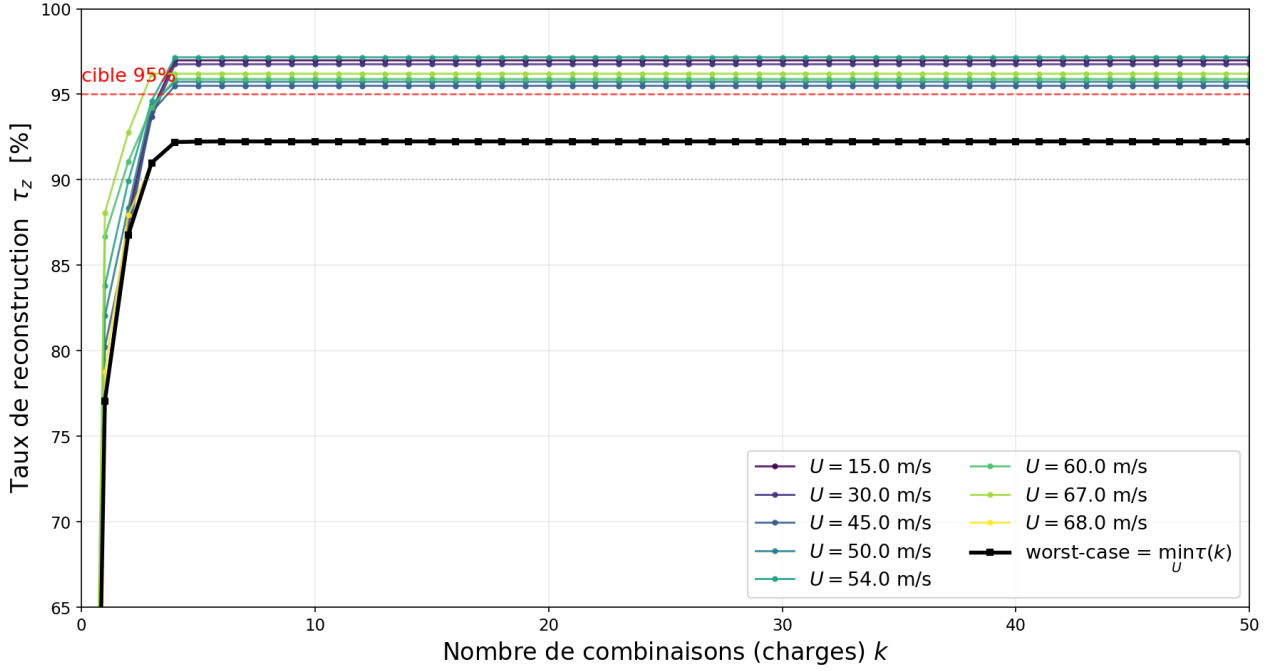


FIGURE 14.13 – Taux de reconstruction de l’enveloppe du déplacement vertical pour le modèle instationnaire avec  $n_P = 5$  PSWL, en fonction du nombre de combinaisons considérées, pour un overshoot autorisé de 0 %.

Pour  $n_P = 10$ , les résultats s’améliorent nettement, mais l’objectif n’est pas encore strictement atteint pour toutes les réponses. Les difficultés restantes concernent principalement le modèle quasi-stationnaire pour  $\theta$ ,  $M_y$  et  $M_t$ . Pour le modèle instationnaire, seul le moment de torsion  $M_t$  reste légèrement inférieur au seuil fixé, avec un taux de reconstruction de 94.69 %. L’écart par rapport à l’objectif de 95 % n’est donc que de 0.31 %, ce qui rend la reconstruction pratiquement satisfaisante. Ces résultats confirment néanmoins que les efforts internes, et plus particulièrement les grandeurs présentant des enveloppes localisées, restent les plus difficiles à reconstruire.

À partir de  $n_P = 15$ , le taux minimal de reconstruction de 95 % est atteint pour l’ensemble des réponses et pour les deux modèles aérodynamiques. Cette valeur constitue donc un seuil important dans l’analyse : elle correspond à la plus petite base testée permettant de satisfaire le critère de reconstruction sans autoriser d’overshoot.

La distinction observée dans la section précédente entre réponses lisses et réponses localisées reste valable. Les déplacements et l’effort normal dans le câble principal sont globalement les plus faciles à reconstruire. Leur enveloppe varie de manière plus progressive le long de la structure ; elle peut donc être couverte avec un nombre limité de combinaisons. Les efforts internes du tablier, en revanche, nécessitent généralement davantage de combinaisons, car leurs enveloppes présentent des pics plus localisés et des variations spatiales plus rapides.

La Figure 14.14 illustre ce comportement pour l’effort normal dans le câble principal, en considérant par exemple une base de  $n_P = 15$  PSWL. Les cas représentés correspondent aux vitesses reportées dans le Tableau 14.9, à savoir  $U = 15$  m/s pour le modèle quasi-stationnaire et  $U = 68$  m/s pour le modèle instationnaire. Dans les deux cas, l’ajout de combinaisons supplémentaires permet de combler efficacement les zones de l’enveloppe qui n’étaient pas encore suffisamment reconstruites par la première combinaison. Pour cet exemple, deux combinaisons suffisent à obtenir une enveloppe reconstruite très proche de l’enveloppe cible, tout en respectant la contrainte de non-dépassement. Cela confirme que, pour une réponse spatialement régulière comme l’effort normal dans le câble principal, une base modérée de PSWL permet déjà une reconstruction satisfaisante sans nécessiter un grand nombre de combinaisons.

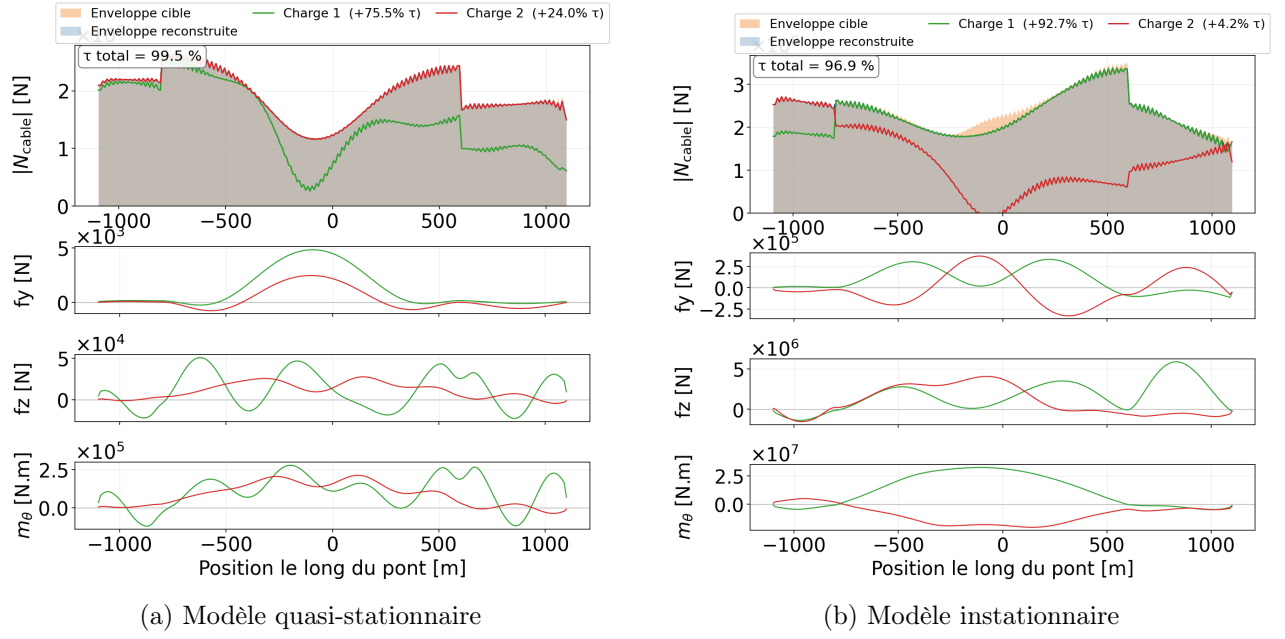


FIGURE 14.14 – Reconstruction de l’enveloppe de l’effort normal dans le câble principal avec  $n_P = 15$  PSWL et combinaisons multiples.

À l’inverse, les efforts internes du tablier mobilisent généralement un plus grand nombre de combinaisons. L’ajout successif de combinaisons permet de couvrir progressivement différentes zones de l’enveloppe, plutôt que de chercher à représenter toute la réponse avec une seule forme globale. La logique est proche du principe de *steepest descent* introduit à la Part III : chaque nouvelle combinaison vient corriger la zone encore la moins bien reconstruite, tout en respectant la contrainte stricte de non-dépassement.

Ce comportement est illustré à la Figure 14.15 pour le moment fléchissant  $M_y$ , avec  $n_P = 15$ . Les deux cas représentés correspondent à la vitesse  $U = 50$  m/s, pour le modèle quasi-stationnaire et pour le modèle instationnaire.

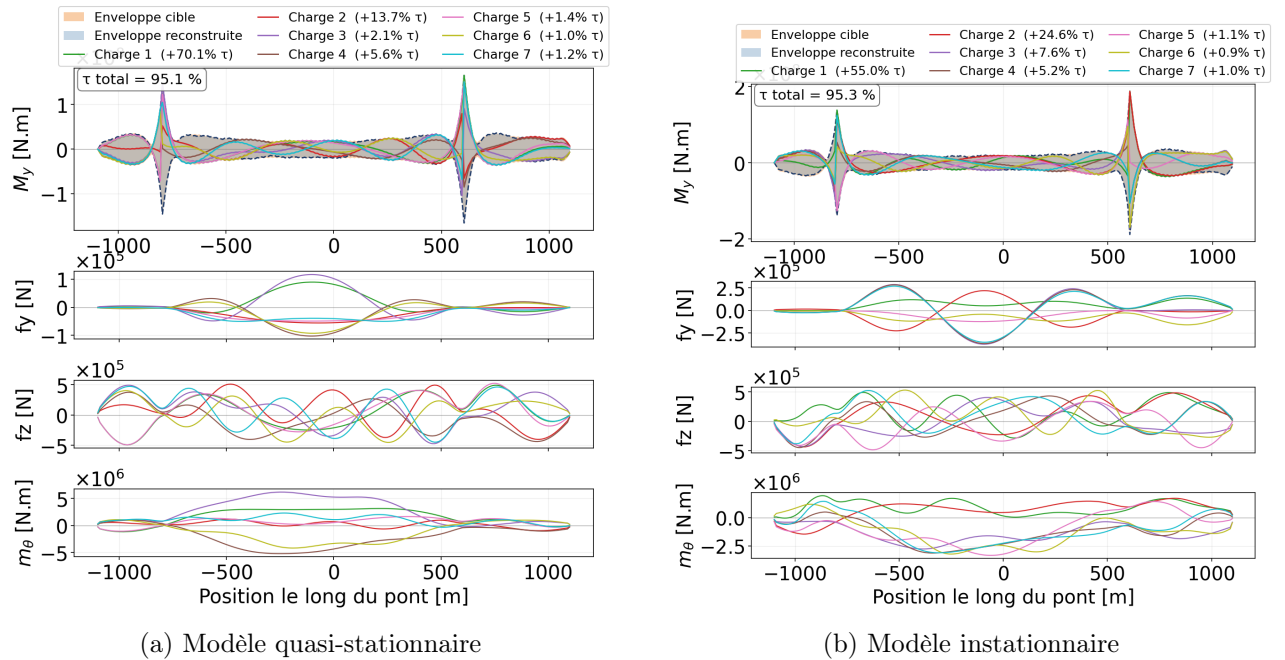


FIGURE 14.15 – Reconstruction de l’enveloppe du moment  $M_y$  avec  $n_P = 15$  PSWL et combinaisons multiples.

On observe que les combinaisons successives viennent combler progressivement les parties manquantes de l'enveloppe. Contrairement à la stratégie à combinaison unique, une seule forme statique ne doit plus assurer toute la reconstruction : plusieurs formes complémentaires peuvent se répartir les différentes zones à couvrir. Cette flexibilité supplémentaire permet d'atteindre le taux de reconstruction fixé, même pour une enveloppe plus localisée et plus irrégulière que celle des déplacements ou de l'effort normal dans le câble principal.

En conclusion, l'utilisation de plusieurs combinaisons constitue une amélioration majeure par rapport à la stratégie à combinaison unique. Elle permet d'atteindre le critère de reconstruction pour toutes les réponses dès que  $n_P = 15$ , sans autoriser d'overshoot. Cette valeur apparaît donc comme un compromis intéressant entre la compacité de la base de PSWL, la qualité de reconstruction des enveloppes et le volume de coefficients à fournir dans le livrable.

La section suivante étudie l'effet d'un relâchement contrôlé de la contrainte de non-dépassement. L'objectif est d'évaluer si un overshoot limité permet d'atteindre plus systématiquement le seuil de 95 % avec des bases plus réduites, en particulier pour  $n_P = 5$  et  $n_P = 10$ .

#### 14.4.5 Influence de la tolérance d'overshoot sur le taux de reconstruction

Cette section étudie l'effet d'un relâchement contrôlé de la contrainte de non-dépassement sur la qualité de reconstruction.

L'objectif est principalement d'évaluer si une tolérance d'overshoot permet d'améliorer les reconstructions obtenues avec des bases plus réduites, en particulier pour  $n_P = 5$  et  $n_P = 10$ . Les autres valeurs de  $n_P$  sont également représentées à titre de comparaison.

Les Figures 14.16 à 14.22 présentent, pour chaque réponse, l'évolution du pire taux de reconstruction obtenu sur l'ensemble des vitesses vérifiées, en fonction de la tolérance d'overshoot relatif autorisée. Pour chaque figure, le graphique de gauche correspond au modèle quasi-stationnaire, tandis que le graphique de droite correspond au modèle instationnaire.

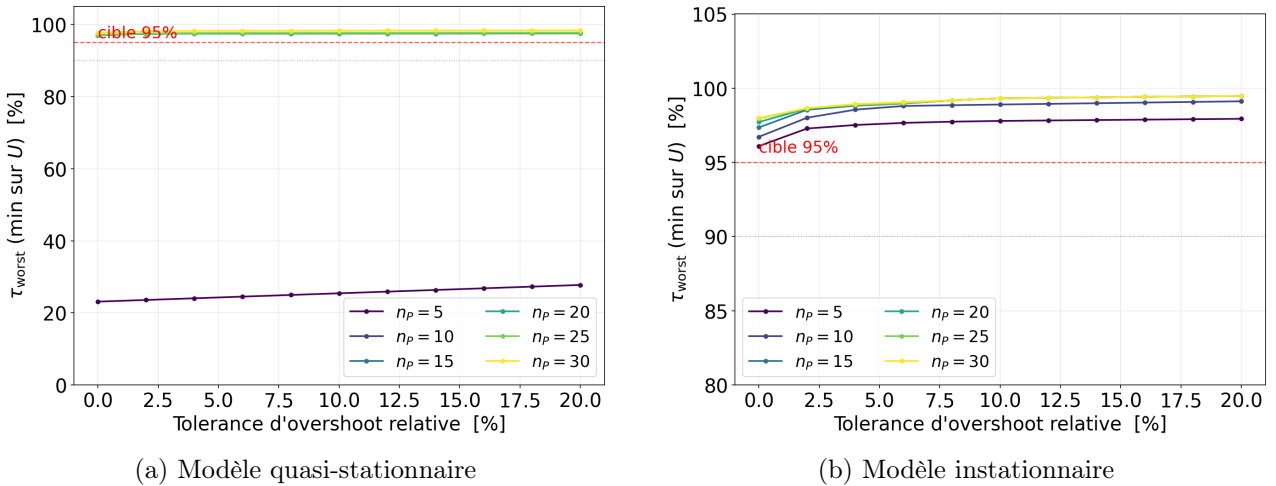


FIGURE 14.16 – Évolution du pire taux de reconstruction de la réponse  $y$ , sur l'ensemble des vitesses vérifiées, en fonction de la tolérance d'overshoot relatif autorisée.

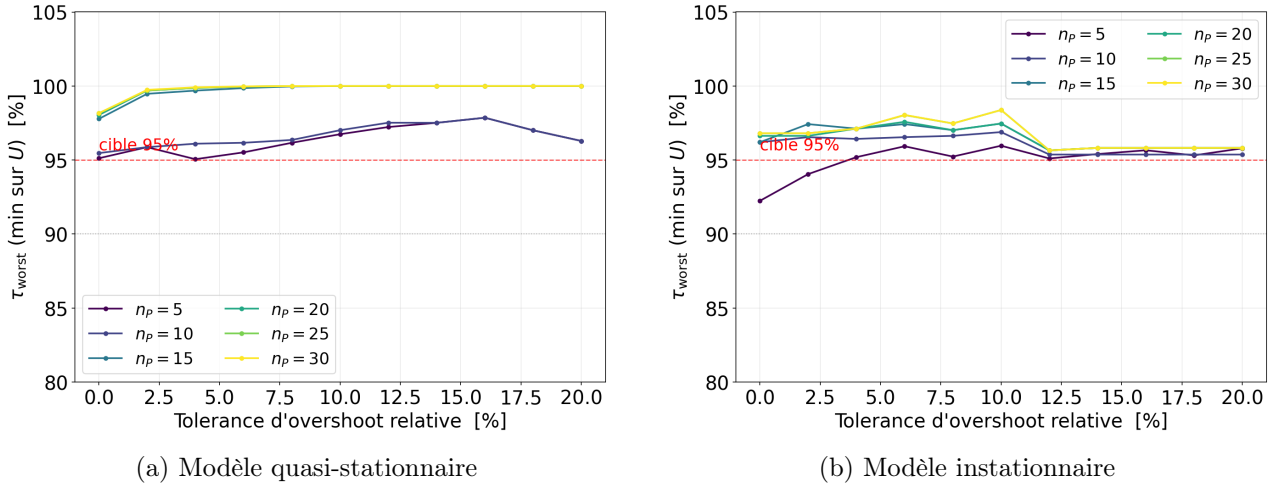


FIGURE 14.17 – Évolution du pire taux de reconstruction de la réponse  $z$ , sur l'ensemble des vitesses vérifiées, en fonction de la tolérance d'overshoot relatif autorisée.

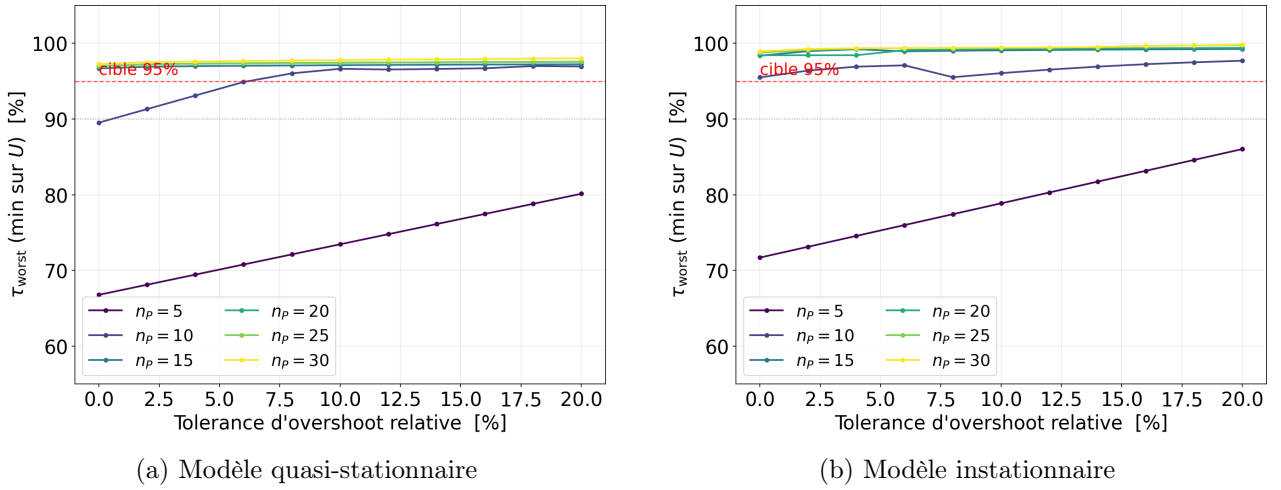


FIGURE 14.18 – Évolution du pire taux de reconstruction de la réponse  $\theta$  au travers de la gamme de vitesses considérée, en fonction de la tolérance d'overshoot relatif autorisée.

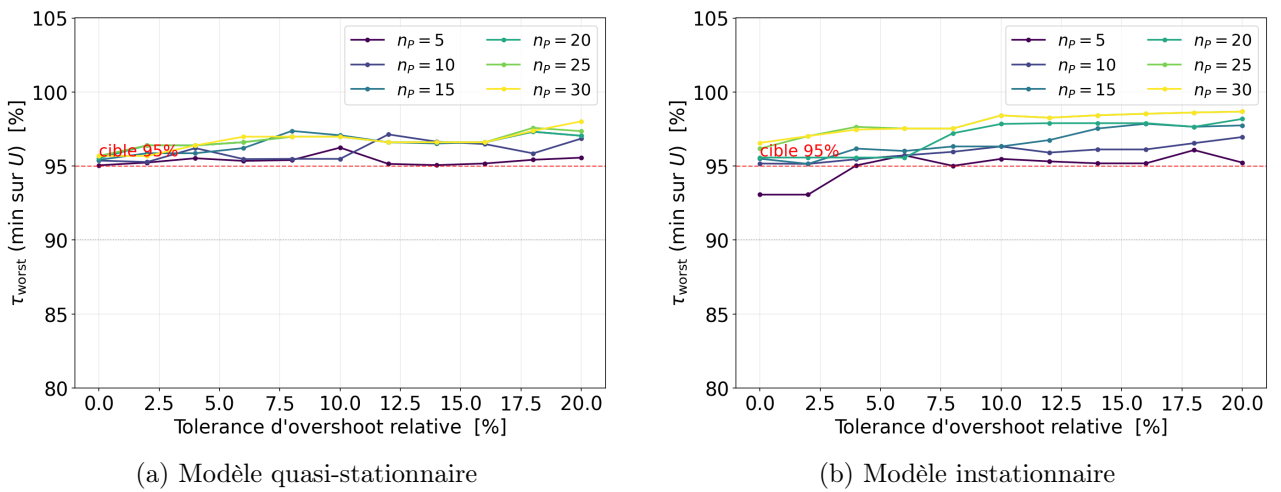
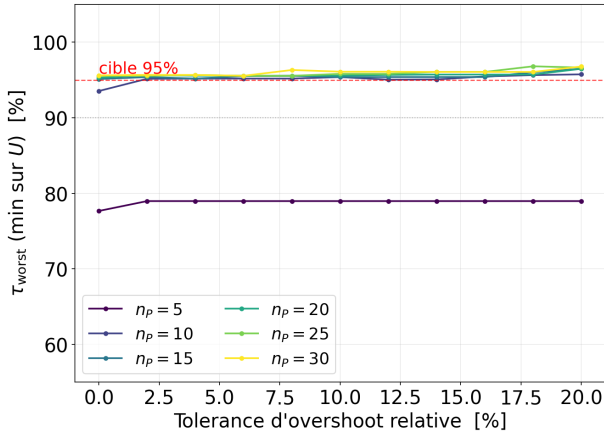
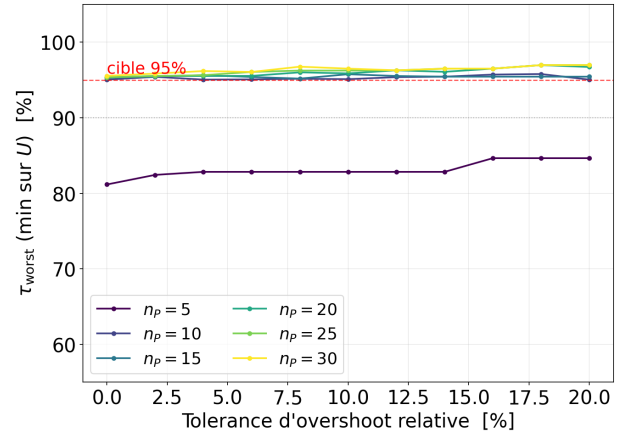


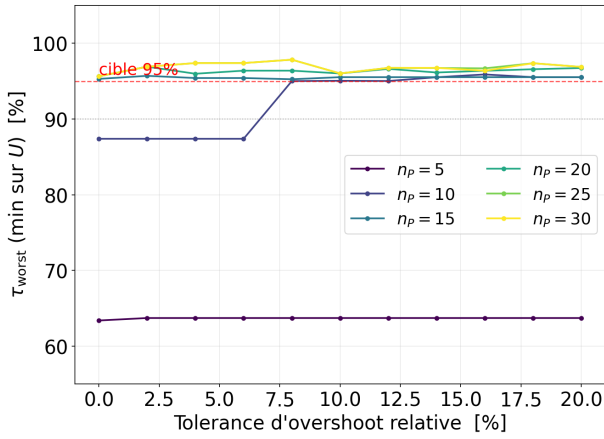
FIGURE 14.19 – Évolution du pire taux de reconstruction de la réponse  $N$  au travers de la gamme de vitesses considérée, en fonction de la tolérance d'overshoot relatif autorisée.



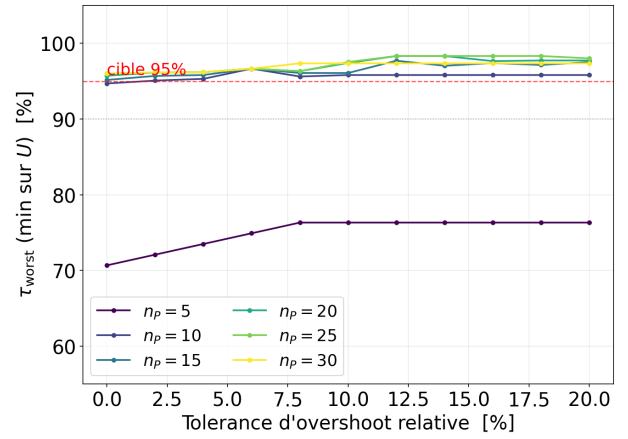
(a) Modèle quasi-stationnaire



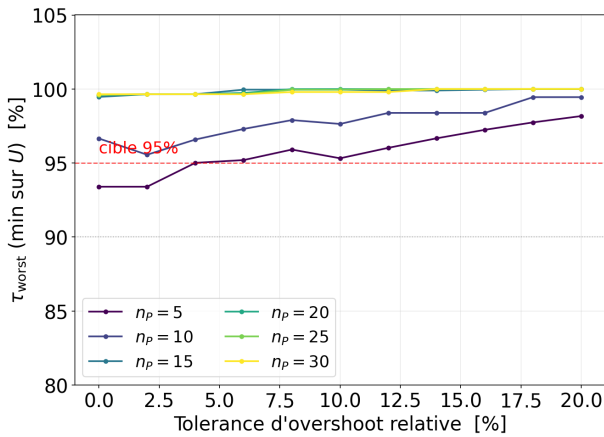
(b) Modèle instationnaire

FIGURE 14.20 – Évolution du pire taux de reconstruction de la réponse  $M_y$  au travers de la gamme de vitesses considérée, en fonction de la tolérance d'overshoot relatif autorisée.

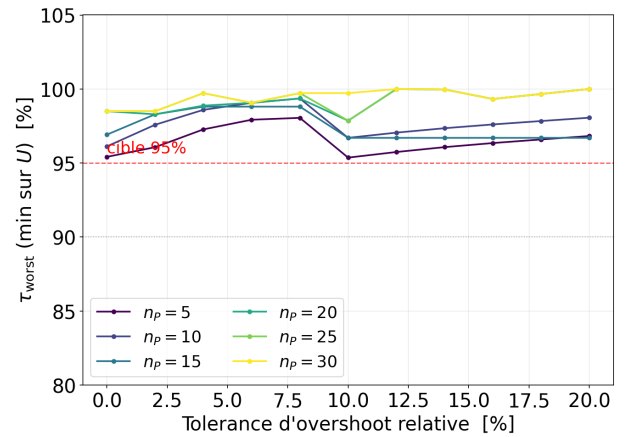
(a) Modèle quasi-stationnaire



(b) Modèle instationnaire

FIGURE 14.21 – Évolution du pire taux de reconstruction de la réponse  $M_t$  au travers de la gamme de vitesses considérée, en fonction de la tolérance d'overshoot relatif autorisée.

(a) Modèle quasi-stationnaire



(b) Modèle instationnaire

FIGURE 14.22 – Évolution du pire taux de reconstruction de la réponse  $N_{\text{cable}}$  au travers de la gamme de vitesses considérée, en fonction de la tolérance d'overshoot relatif autorisée.

Ces figures sont particulièrement instructives. Il convient toutefois de rappeler que les valeurs représentées correspondent, pour chaque tolérance d'overshoot, au pire taux de reconstruction obtenu sur l'ensemble des vitesses vérifiées. Il ne s'agit donc pas d'un taux moyen, mais bien du cas le plus défavorable.

On observe, pour certaines réponses, de légères variations non monotones du taux de reconstruction lorsque la tolérance d'overshoot augmente. Ces variations ne doivent pas être interprétées comme une dégradation physique de la reconstruction. Elles proviennent principalement du critère d'arrêt de l'algorithme. En effet, les combinaisons sont ajoutées jusqu'à ce que le seuil cible de 95 % soit atteint, puis la procédure s'arrête. Le taux affiché correspond donc à la première valeur permettant de franchir ce seuil, et non au taux maximal atteignable pour la tolérance considérée. Comme chaque combinaison augmente le taux de reconstruction par incréments finis, le dépassement du seuil peut varier légèrement d'une tolérance d'overshoot à l'autre.

Ainsi, deux valeurs telles que 96.2 % pour une tolérance donnée et 95.5 % pour une tolérance plus élevée traduisent toutes deux l'atteinte du critère de reconstruction. L'écart entre ces valeurs reflète davantage la nature discrète de la procédure de reconstruction qu'une différence réelle de difficulté.

Pour le modèle instationnaire, les résultats montrent qu'une base de  $n_P = 10$  PSWL permet déjà d'obtenir une reconstruction satisfaisante pour l'ensemble des réponses. Le seul cas légèrement défavorable correspond au moment de torsion  $M_t$  pour un overshoot nul, dont le taux de reconstruction vaut 94.69 %. Comme indiqué précédemment, l'écart par rapport au seuil de 95 % reste très faible et peut être considéré comme négligeable dans cette analyse.

En revanche, pour  $n_P = 5$ , l'augmentation de la tolérance d'overshoot améliore généralement le taux de reconstruction, mais ne permet pas d'atteindre le seuil de 95 % pour plusieurs réponses. Les taux restent parfois largement inférieurs à la cible. Cela confirme que cinq PSWL ne suffisent pas à représenter correctement la complexité du problème, même lorsque l'on accepte un dépassement local limité de l'enveloppe de référence.

Pour le modèle quasi-stationnaire, la réponse la plus contraignante est le moment de torsion  $M_t$ . Avec  $n_P = 10$ , une tolérance d'overshoot d'environ 8 % est nécessaire pour atteindre le seuil de 95 % pour l'ensemble des réponses. Comme pour le modèle instationnaire, une base limitée à  $n_P = 5$  ne permet pas d'atteindre l'objectif de reconstruction fixé.

Enfin, pour les bases plus riches, c'est-à-dire pour

$$n_P \in \{15, 20, 25, 30\},$$

le taux de reconstruction atteint 95 % pour l'ensemble des réponses et pour les deux modèles considérés. L'autorisation d'un overshoot n'est donc pas indispensable pour atteindre l'objectif de reconstruction dans ces cas. Elle peut toutefois encore présenter un intérêt pratique si elle permet de réduire le nombre de combinaisons nécessaires.

Cette analyse permet donc de tirer deux conclusions principales :

- une base de  $n_P = 5$  PSWL est insuffisante pour atteindre l'objectif de reconstruction fixé, même en autorisant un overshoot limité ;
- une base de  $n_P = 10$  PSWL peut être considérée comme suffisante, à condition d'autoriser un overshoot d'environ 8 % pour le modèle quasi-stationnaire et d'accepter que le taux de 94.69 % obtenu pour  $M_t$  dans le modèle instationnaire soit pratiquement équivalent au seuil de 95 %.

La suite de l'analyse se concentre donc sur les bases de PSWL permettant d'atteindre l'objectif de reconstruction, à savoir :

$$n_P \in \{10, 15, 20, 25, 30\}. \quad (14.7)$$

L'objectif n'est alors plus seulement d'étudier l'effet de l'overshoot sur le taux de reconstruction, mais d'évaluer son influence sur le nombre total de combinaisons nécessaires. Autrement dit, il s'agit maintenant de déterminer si un dépassement contrôlé de l'enveloppe de référence permet de réduire la taille finale de la table de coefficients.

#### 14.4.6 Influence de la tolérance d'overshoot sur le nombre de combinaisons nécessaires

L'autorisation de plusieurs combinaisons par couple vitesse-réponse améliore fortement la reconstruction des enveloppes. Elle augmente cependant la taille de la table de coefficients transmise au bureau d'études. Il est donc utile d'étudier dans quelle mesure une tolérance d'overshoot permet de réduire le nombre total de combinaisons nécessaires, toutes réponses et toutes vitesses confondues.

Les Figures 14.23 présentent l'évolution du nombre total de combinaisons en fonction de la tolérance d'overshoot relative autorisée, pour plusieurs valeurs de  $n_P$ . Le graphique de gauche correspond au modèle quasi-stationnaire, tandis que celui de droite correspond au modèle instationnaire.

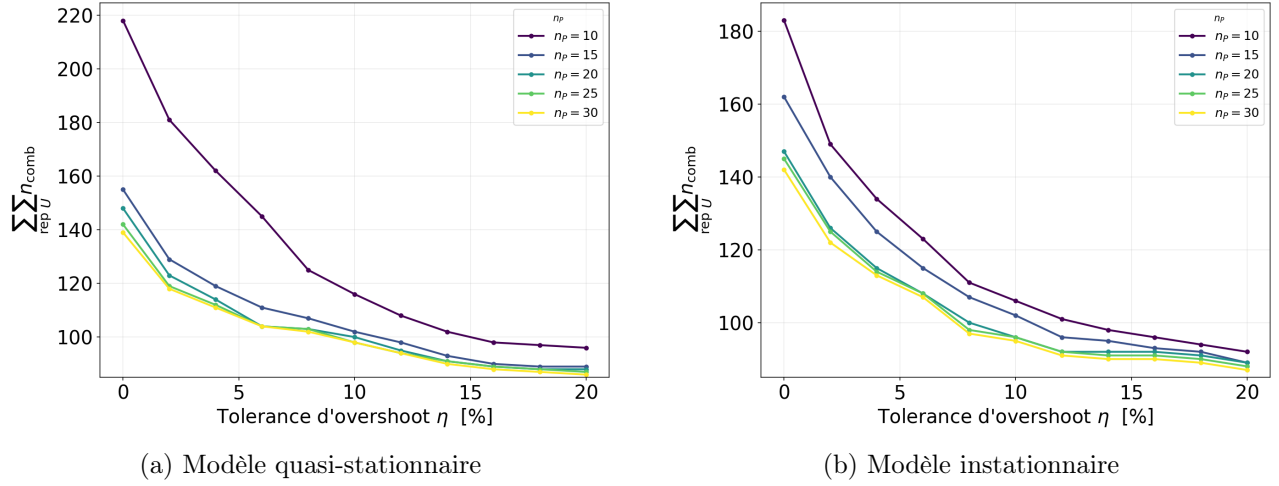


FIGURE 14.23 – Évolution du nombre total de combinaisons nécessaires en fonction de la tolérance d'overshoot relative autorisée, pour différentes valeurs de  $n_P$ .

On observe d'abord une diminution nette du nombre de combinaisons lorsque la tolérance d'overshoot augmente. Ce comportement est attendu : plus le dépassement local autorisé est important, moins la contrainte de non-dépassement est restrictive. L'algorithme dispose alors de plus de liberté pour couvrir l'enveloppe cible, ce qui permet généralement d'atteindre le critère de reconstruction avec moins de combinaisons.

Cette diminution est particulièrement marquée pour les faibles tolérances d'overshoot, notamment entre 0 % et 10 %. Au-delà, les courbes tendent à se rapprocher et à s'aplatir progressivement. Cela indique qu'une grande partie du gain est obtenue dès les premiers pourcents d'overshoot autorisé. Augmenter davantage la tolérance permet encore de réduire le nombre de combinaisons, mais avec un bénéfice de plus en plus limité.

L'influence du nombre de PSWL est surtout visible lorsque la tolérance d'overshoot est faible. Pour le modèle quasi-stationnaire, le cas  $n_P = 10$  nécessite nettement plus de combinaisons que les bases plus riches. De plus, comme montré précédemment, l'objectif de reconstruction n'est pas atteint pour les faibles tolérances d'overshoot. Cette base est donc trop réduite pour représenter correctement l'ensemble des réponses tout en respectant une contrainte stricte de non-dépassement. Cela explique également le nombre élevé de combinaisons observé pour les faibles valeurs d'overshoot : l'algorithme continue à rechercher de nouvelles combinaisons pour améliorer la reconstruction, mais la base disponible ne contient pas suffisamment de directions pertinentes pour atteindre efficacement la cible.

L'augmentation de  $n_P$  améliore la richesse de la base PSWL et permet de réduire le nombre de combinaisons nécessaires. Le gain est important lorsque l'on passe de  $n_P = 10$  à  $n_P = 15$  ou  $n_P = 20$ . En revanche, les courbes associées à  $n_P = 20$ , 25 et 30 deviennent très proches. L'ajout de PSWL supplémentaires n'apporte alors qu'une amélioration limitée, alors qu'il augmente le nombre de distributions spatiales à fournir.

La comparaison entre les deux modèles montre que le modèle instationnaire nécessite globalement moins de combinaisons que le modèle quasi-stationnaire, surtout pour les faibles tolérances d'over-

shoot. Les courbes  $y$  sont également plus regroupées, ce qui traduit une sensibilité plus faible au choix de  $n_P$ . Le modèle quasi-stationnaire apparaît donc plus contraignant, en particulier lorsque l'overshoot autorisé est faible.

Ces résultats montrent que le choix du livrable ne dépend pas uniquement du nombre de PSWL retenues, mais aussi de la tolérance d'overshoot acceptée. Une base plus riche réduit le nombre de combinaisons, mais augmente le nombre de distributions spatiales à fournir. À l'inverse, une tolérance d'overshoot modérée permet de conserver une base plus compacte tout en diminuant fortement le nombre de combinaisons nécessaires.

Au vu de ces résultats, les bases  $n_P = 15$  et  $n_P = 20$  apparaissent comme les plus intéressantes. La base  $n_P = 15$  est la plus compacte parmi celles qui permettent d'atteindre l'objectif de reconstruction sans overshoot, tandis que  $n_P = 20$  offre une marge supplémentaire et réduit le nombre de combinaisons. Les bases  $n_P = 25$  et  $n_P = 30$  donnent des résultats un peu meilleurs, mais le gain reste faible par rapport à l'augmentation du nombre de PSWL à manipuler.

Ces figures ouvrent finalement la discussion pratique entre le bureau d'études et le *wind engineer*. Elles permettent de visualiser directement le compromis à trouver entre trois objectifs : limiter le nombre de PSWL à fournir, réduire le nombre total de combinaisons dans la table de coefficients, et maintenir une tolérance d'overshoot jugée acceptable. Le choix final ne dépend donc pas uniquement d'un critère numérique, mais aussi du niveau de dépassement que le bureau d'études accepte pour conserver un livrable suffisamment compact et exploitable.

# 15 Livrable transmis au bureau d'études

Les chapitres précédents ont permis de construire, tester et valider la méthode proposée. Une base réduite de charges statiques principales, appelées PSWL, a d'abord été extraite par décomposition en valeurs singulières à partir d'un paquet d'ESWL. Une table de coefficients a ensuite été calibrée afin de recombinaison ces PSWL et de reconstruire les enveloppes des différentes réponses de dimensionnement considérées.

Le présent chapitre rassemble ces résultats sous la forme du livrable effectivement transmis au bureau d'études. L'objectif n'est donc plus de comparer les différentes stratégies numériques, mais de préciser le contenu final mis à disposition de l'ingénieur structure : le modèle aérodynamique retenu, la base de PSWL fournie, la table de coefficients associée et la manière dont ces éléments doivent être utilisés dans un calcul statique classique.

## 15.1 Choix du modèle aérodynamique sous-jacent

Tout au long de ce travail, les résultats ont été comparés pour deux modèles aérodynamiques : le modèle quasi-stationnaire et le modèle instationnaire. Le premier repose sur une hypothèse quasi-stationnaire : les forces aérodynamiques sont supposées dépendre uniquement de l'état instantané de la structure. Le second tient compte du caractère instationnaire de l'aérodynamique : la force exercée à un instant donné dépend également de l'histoire récente du mouvement du tablier. C'est ce que l'on désigne ici par mémoire aérodynamique.

Cette comparaison avait pour objectif d'évaluer l'influence de la mémoire aérodynamique sur les réponses de la structure, sur les enveloppes reconstruites et sur la taille du livrable nécessaire. Toutefois, pour le livrable final transmis au bureau d'études, un seul modèle doit être retenu. Le choix se porte sur le modèle instationnaire, pour les raisons suivantes.

**Le modèle quasi-stationnaire ne détecte pas la vitesse critique.** Le flottement observé sur le pont du Humber est un phénomène intrinsèquement lié à la mémoire aérodynamique. Il résulte de l'interaction entre le mouvement du tablier et les forces aérodynamiques auto-excitées, dont l'effet dépend de l'histoire du mouvement. Un modèle quasi-stationnaire, qui suppose que les forces aérodynamiques s'adaptent instantanément au mouvement de la structure, ne permet donc pas de représenter correctement ce mécanisme.

Cette limitation a été mise en évidence au Chapitre 8. Les écarts types du déplacement vertical et de la rotation du tablier divergent lorsque la vitesse critique est approchée avec le modèle instationnaire, alors qu'une telle divergence n'apparaît pas avec le modèle quasi-stationnaire. Le modèle quasi-stationnaire ne permet donc pas d'identifier correctement la vitesse critique de flottement.

La conséquence pour le livrable est directe. Un paquet d'ESWL construit sur la base du modèle quasi-stationnaire ne contient pas l'information liée à l'amplification des réponses au voisinage du flottement. Les charges statiques équivalentes qui en découlent peuvent donc être cohérentes pour une réponse de buffeting classique, mais elles ne sont pas adaptées pour représenter correctement le comportement aéroélastique critique de l'ouvrage. Pour un pont sensible au flottement, il est donc nécessaire de fonder le livrable sur le modèle instationnaire.

**Le coût opérationnel du modèle avec mémoire n'est pas supérieur.** On pourrait s'attendre à ce que le modèle instationnaire conduise à un livrable plus lourd, puisqu'il décrit une physique plus complète et produit des enveloppes de réponses plus marquées, notamment à proximité de la vitesse critique. Les résultats obtenus montrent cependant que ce n'est pas le cas.

Comme observé à la Figure 14.23, à nombre de PSWL fixé, le modèle instationnaire nécessite globalement moins de combinaisons que le modèle quasi-stationnaire pour atteindre le taux de reconstruction imposé de 95 %. Ce résultat ne signifie évidemment pas que les deux modèles sont équivalents. Il indique simplement que, du point de vue du livrable, la prise en compte de la mémoire aérodynamique n'entraîne pas de pénalité opérationnelle.

En pratique, l'ingénieur structure ne manipule pas directement la formulation aérodynamique instationnaire. Il reçoit uniquement des cas de charge statiques, sous la forme de PSWL, ainsi qu'une table de coefficients permettant de les combiner. Le caractère instationnaire du modèle est donc déjà intégré dans la construction du livrable, sans modifier la manière dont celui-ci est utilisé dans un logiciel de calcul structurel.

**Conclusion.** Le choix du modèle instationnaire s'impose donc pour des raisons physiques. C'est le seul des deux modèles considérés qui permet de représenter correctement l'effet de la mémoire aérodynamique et d'identifier la vitesse critique de flottement. Ce choix ne pénalise pas l'utilisation pratique du livrable, puisque celui-ci reste constitué de charges statiques équivalentes et d'une table de coefficients.

Le livrable transmis au bureau d'études est donc construit exclusivement à partir du modèle instationnaire. Il conserve ainsi la physique nécessaire à la représentation du comportement aéroélastique de l'ouvrage, tout en restant exploitable dans le cadre d'une analyse statique classique.

## 15.2 Anatomie du livrable

Le livrable transmis au bureau d'études n'est pas un objet figé. Il est construit comme l'association d'un noyau fixe et d'une couche paramétrable. Cette organisation traduit le fait que le compromis entre la compacité de la base de charges, le conservatisme de la reconstruction et le nombre de combinaisons à appliquer ne peut pas être fixé de manière absolue. Il dépend de l'usage prévu du livrable et doit donc pouvoir être discuté avec le bureau d'études.

L'objectif du livrable est ainsi de rendre ce compromis explicite, plutôt que de le masquer dans un choix unique. En amont, le bureau d'études et l'ingénieur vent définissent les vitesses pour lesquelles une reconstruction de l'enveloppe est souhaitée. Dans le cadre de ce travail, ces vitesses de vérification sont supposées égales à

$$U_{\text{verif}} = [15, 30, 45, 50, 54, 60, 67, 68] \text{ m/s.} \quad (15.1)$$

Le livrable prend alors la forme d'un rapport accompagné de fichiers de coefficients. Sa structure est détaillée ci-dessous.

**Noyau fixe.** Le noyau fixe comprend deux éléments principaux. Le premier est la vitesse critique de flottement,

$$U_{\text{cr}} \simeq 68 \text{ m/s.}$$

Cette vitesse constitue une limite de stabilité du modèle aéroélastique. Elle ne doit donc pas être interprétée comme une vitesse d'exploitation, mais comme une borne au-delà de laquelle la réponse aéroélastique n'est plus bornée. En pratique, l'utilisation du livrable doit rester associée à des vitesses suffisamment éloignées de cette limite critique. Cette limite peut être documentée par des figures montrant l'évolution des écarts-types à l'approche de  $U_{\text{cr}}$ , comme celles présentées aux Figures 8.1 et 8.3.

Le second élément du noyau fixe est une base ordonnée de charges statiques principales,

$$F_{P,1}, F_{P,2}, \dots, F_{P,n_{\text{max}}}, \quad (15.2)$$

classées par valeurs singulières décroissantes. Ces distributions spatiales sont normalisées : elles décrivent uniquement la forme du chargement le long du tablier. L'amplitude physique des charges est, quant à elle, portée par les coefficients de combinaison.

Le caractère ordonné de cette base est essentiel. Une troncature au rang  $n_P \leq n_{\text{max}}$  fournit directement une version plus compacte du livrable. Ainsi, une base limitée à 15 PSWL est incluse dans la base à 20 PSWL, elle-même incluse dans la base à 25 PSWL, et ainsi de suite. Les 30 premières PSWL sont représentées en Annexe D.1.

**Couche paramétrable.** La couche paramétrable du livrable est constituée d'une famille de tables de coefficients. Plutôt que de fournir une seule table, plusieurs configurations validées sont proposées. Chaque configuration correspond à un point de fonctionnement défini par deux choix : le nombre de charges principales retenues  $n_P$  et la tolérance d'overshoot autorisée.

Pour chaque couple  $(n_P, \text{overshoot})$ , une table complète de coefficients est fournie. Pour un point de fonctionnement donné, la charge statique équivalente associée au  $j$ -ième cas de charge et à la vitesse  $U$  s'écrit alors

$$f_E^{(j)}(U) = \sum_{k=1}^{n_P} \alpha_k^{(j)}(U) F_{P,k}, \quad (15.3)$$

où les coefficients  $\alpha_k^{(j)}(U)$  sont lus dans la table associée au point de fonctionnement retenu. Le Tableau 15.1 illustre la structure d'une telle table.

TABLE 15.1 – Extrait schématique d'une table de coefficients pour un point de fonctionnement  $n_P = 15$ . Chaque ligne définit un cas de charge par la combinaison (15.3). Les valeurs calibrées complètes sont fournies dans le fichier de coefficients associé au livrable.

| Cas $j$ | $U$ [m/s] | Réponse cible      | $\alpha_1$       | $\cdots$ | $\alpha_{15}$       |
|---------|-----------|--------------------|------------------|----------|---------------------|
| 1       | 30        | $z$                | $\alpha_1^{(1)}$ | $\cdots$ | $\alpha_{15}^{(1)}$ |
| 2       | 30        | $M_y$              | $\alpha_1^{(2)}$ | $\cdots$ | $\alpha_{15}^{(2)}$ |
| 3       | 54        | $N_{\text{cable}}$ | $\alpha_1^{(3)}$ | $\cdots$ | $\alpha_{15}^{(3)}$ |

**Abaques de choix.** Comme expliqué ci-dessus, plusieurs points de fonctionnement sont possibles. Le choix est guidé par des abaques établis pour différentes valeurs de  $n_P$ , à savoir  $n_P = 10, 15, 20, 25$  et 30 dans le cas présent. Pour chaque valeur de  $n_P$ , l'abaque donne le nombre total de combinaisons nécessaires en fonction de la tolérance d'overshoot autorisée.

Ces abaques permettent donc de visualiser directement le compromis entre trois grandeurs : la taille de la base de PSWL, le niveau d'overshoot accepté et le nombre de combinaisons à appliquer dans le modèle de calcul. Un code couleur distingue également les configurations admissibles, pour lesquelles le critère de reconstruction de 95 % est atteint, des configurations non admissibles. Les abaques obtenus pour le modèle instationnaire sont présentés aux Figures 15.1 à 15.3.

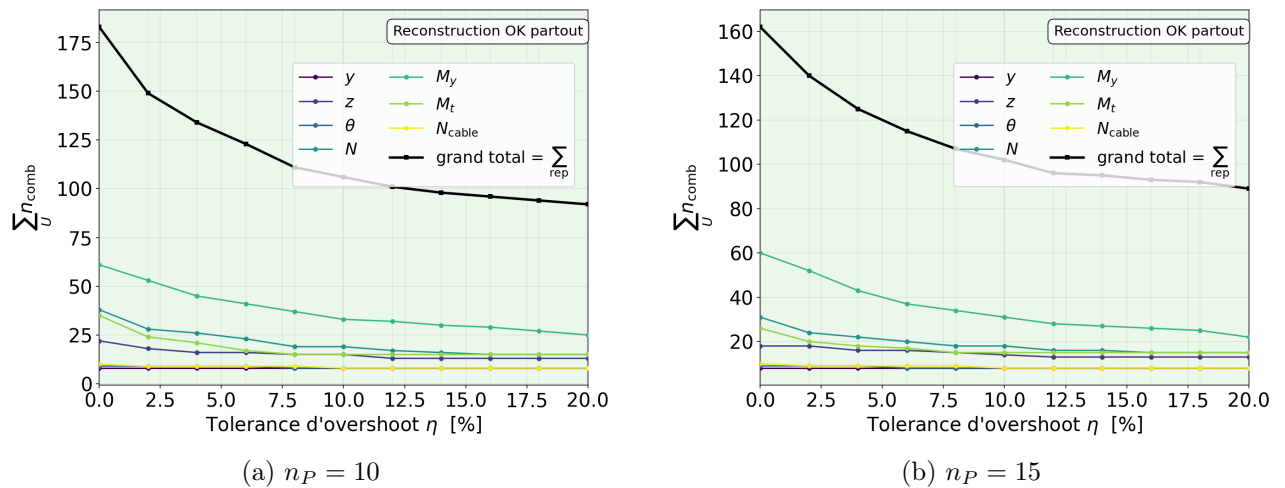


FIGURE 15.1 – Abaques de choix du nombre de combinaisons nécessaires en fonction de la tolérance d'overshoot autorisée pour  $n_P = 10$  et  $n_P = 15$ , dans le cas du modèle instationnaire.

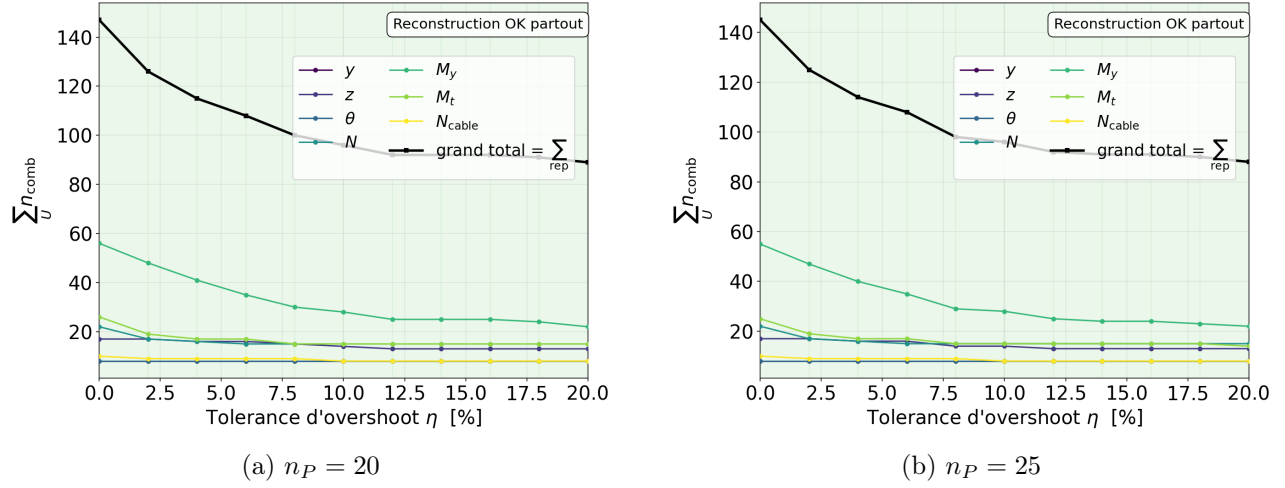


FIGURE 15.2 – Abaques de choix du nombre de combinaisons nécessaires en fonction de la tolérance d'overshoot autorisée pour  $n_P = 20$  et  $n_P = 25$ , dans le cas du modèle instationnaire.

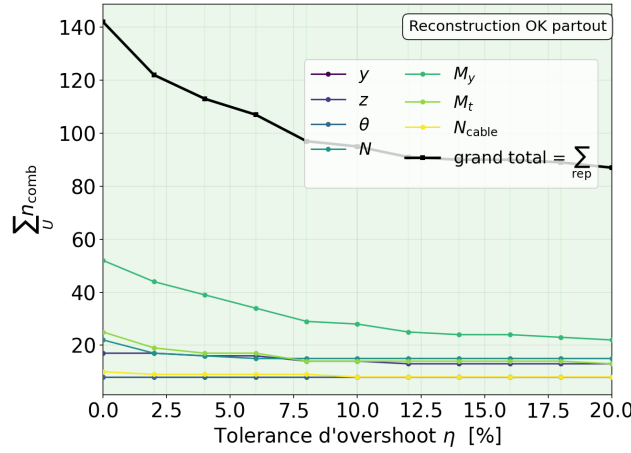


FIGURE 15.3 – Abaque de choix du nombre de combinaisons nécessaires en fonction de la tolérance d'overshoot autorisée pour  $n_P = 30$ , dans le cas du modèle instationnaire.

Dans le cas présent, le critère de reconstruction est satisfait pour toutes les valeurs de  $n_P$  considérées et pour l'ensemble des tolérances d'overshoot représentées. Les abaques apparaissent donc entièrement en vert. Si certaines configurations n'avaient pas permis d'atteindre le taux de reconstruction minimal de 95 %, les zones correspondantes auraient été indiquées en rouge afin de signaler leur caractère non admissible.

Ces abaques transforment ainsi le compromis d'ingénierie en une lecture directe. Le bureau d'études n'a pas à reconstruire l'analyse aéroélastique pour arbitrer entre compacité, conservatisme et nombre de cas de charge. Il choisit simplement un point de fonctionnement parmi les configurations validées, c'est-à-dire un point situé sur l'une des courbes noires des Figures 15.1 à 15.3. La table de coefficients associée à ce point fournit ensuite directement les combinaisons à appliquer.

Cette organisation rend également le livrable flexible. La base de PSWL restant fixe, un changement de point de fonctionnement ne nécessite pas de recalculer les distributions spatiales de charges. Il suffit de changer de table de coefficients. On peut par exemple imaginer un fichier de type tableur par valeur de  $n_P$ , dans lequel chaque feuille correspond à une tolérance d'overshoot donnée. Le choix pratique se fait alors en deux étapes : sélection du point de fonctionnement sur l'abaque, puis utilisation de la feuille de coefficients correspondante. Un **exemple concret** est donné à l'Annexe D.2.

# Conclusion

Le point de départ de ce travail était une question d'ingénierie simple, posée du point de vue du bureau d'études : quelles charges appliquer sur le modèle éléments finis ? La réponse apportée est un livrable compact et directement exploitable. Il ne se réduit pas à un jeu de charges figé, mais associe un noyau fixe — la vitesse critique de flottement  $U_{cr} \simeq 68$  m/s, qui borne le domaine de validité, et une base ordonnée de charges statiques principales (PSWL) — à une couche paramétrable : un abaque et une famille de tables de coefficients. Le bureau d'études choisit ainsi un point de fonctionnement, défini par le nombre de PSWL conservées et la tolérance d'overshoot admise, selon le compromis recherché entre compacité et conservatisme. L'ingénieur structure n'a plus à conduire d'analyse aéroélastique : il lit un point de fonctionnement sur l'abaque, applique les cas de charge correspondants comme n'importe quelle autre action et laisse son logiciel construire les combinaisons réglementaires. Le Chapitre 15 en présente l'anatomie.

La construction de ce livrable a suivi quatre étapes. La réponse stochastique aéroélastique du tablier a d'abord été calculée sur une gamme de vitesses s'étendant jusqu'au voisinage immédiat de  $U_{cr}$ , dans deux modélisations aérodynamiques : une formulation quasi-stationnaire et une formulation avec mémoire aérodynamique. Pour chaque vitesse et chaque réponse, des charges statiques équivalentes ont ensuite été construites par la méthode LRC-MIL, combinant contribution de fond et contribution résonante. L'ensemble de ces ESWL a été agrégé puis comprimé, par décomposition en valeurs singulières, en une base réduite de PSWL. Une table de coefficients a enfin été calibrée par optimisation non linéaire, sous contrainte de non-dépassement de l'enveloppe cible, afin de reconstruire les réponses extrêmes avec un taux minimal fixé à 95 %.

Les résultats se lisent en deux régimes, selon que l'on se restreint aux déplacements ou que l'on étend la méthode aux efforts internes de dimensionnement.

Sur les déplacements seuls, la méthode fonctionne remarquablement bien, et ce avec une seule combinaison de PSWL par réponse. Le déplacement transversal et la rotation se reconstruisent au-delà du seuil de 95 % sur la totalité de la gamme de vitesses, à partir d'un nombre réduit de charges principales. La seule difficulté réelle est fortement localisée : elle concerne le déplacement vertical au voisinage immédiat de la vitesse critique, où le taux de reconstruction chute. À cette vitesse, l'enveloppe verticale n'est plus seulement amplifiée ; sa forme spatiale elle-même est remaniée par le couplage aéroélastique, et une base réduite peine à la capturer — même en conservant dix PSWL, le critère de 95 % n'est pas atteint exactement à  $U_{cr}$ . Dès que l'on s'en écarte légèrement, la reconstruction redevient satisfaisante : à 67 m/s, soit environ 98,5 % de  $U_{cr}$ , le seuil est retrouvé pour l'ensemble des réponses. Le point essentiel est que cette difficulté n'apparaît que pour le modèle instationnaire. Le modèle quasi-stationnaire, qui ne reproduit pas le mécanisme de flottement, ne présente aucune dégradation équivalente. À ce stade, le choix du modèle aérodynamique est donc déterminant : c'est lui qui décide si l'amplification critique est vue ou ignorée.

L'extension de la méthode aux efforts internes modifie ce constat. Ces réponses sont nettement plus difficiles à reconstruire que les déplacements — et, cette fois, les deux modèles se comportent de la même manière : aucun ne se distingue réellement de l'autre. Une combinaison unique de PSWL échoue alors pour l'ensemble de ces réponses, quel que soit le nombre de charges principales conservées. La seule issue consiste à autoriser plusieurs combinaisons par réponse. Or, dès que l'on procède ainsi, l'influence du modèle aérodynamique sur le livrable s'efface largement : le modèle instationnaire requiert même, dans plusieurs cas, moins de combinaisons que le modèle quasi-stationnaire.

Le message d'ensemble est donc le suivant. La distinction entre modèle quasi-stationnaire et modèle instationnaire est bien réelle lorsqu'on impose une combinaison unique par réponse : elle est alors gouvernée par le seul mécanisme qui sépare physiquement les deux modèles, l'amplification aéroélastique au voisinage du flottement, que seul le modèle instationnaire capture. Dès que l'on autorise plusieurs combinaisons, cette distinction s'estompe et les deux modèles conduisent à des livrables de taille comparable.

C'est précisément ce qui justifie de retenir le modèle instationnaire sans hésitation. Sur le plan physique, il est le seul à identifier la vitesse critique et la dégradation locale de l'enveloppe verticale à son voisinage. Sur le plan opérationnel, dans le schéma à combinaisons multiples effectivement utilisé

pour le paquet enrichi, il n'entraîne aucune pénalité — et parfois un léger avantage. Le retenir revient donc à intégrer l'information aéroélastique essentielle sans coût pour l'utilisateur final : le bureau d'études reçoit toujours des cas de charge statiques, mais ceux-ci condensent une analyse dynamique plus réaliste.

Deux limites circonscrivent néanmoins ces résultats. La calibration des coefficients devient d'abord plus complexe lorsque le nombre de PSWL augmente, mais aussi lorsque le nombre de réponses contrôlées simultanément s'élargit. Certaines stagnations observées dans les résultats ne doivent donc pas nécessairement être interprétées comme une limite purement physique de la méthode : elles peuvent également traduire les difficultés numériques du problème d'optimisation. L'utilisation d'un solveur plus adapté ou plus performant pourrait dès lors être envisagée afin de vérifier si certaines reconstructions peuvent encore être améliorées. La principale limite reste toutefois que la méthode n'a été appliquée qu'à un seul ouvrage : le Humber Bridge. Ce cas d'étude est pertinent, car il s'agit d'un pont suspendu de grande portée sensible aux effets aéroélastiques, mais il ne suffit pas à démontrer à lui seul la généralité de la démarche. Les conclusions obtenues doivent donc être interprétées comme une validation méthodologique sur un ouvrage représentatif, et non comme une preuve d'universalité. Il serait nécessaire d'appliquer la procédure à d'autres ponts, présentant d'autres géométries, d'autres rapports de fréquences et d'autres distributions de raideur, afin d'évaluer la robustesse du nombre de PSWL requis et la stabilité du compromis entre compacité, précision et overshoot.

Ces limites dessinent les prolongements naturels du travail. Une première perspective serait d'améliorer la calibration des coefficients, par exemple en recourant à des stratégies d'optimisation plus robustes que celles employées ici, ou en construisant directement des abaques continus permettant d'interpoler les coefficients entre vitesses. Une seconde, plus ambitieuse, serait d'appliquer la méthode à plusieurs ouvrages, afin de déterminer si la structure du livrable proposée dans ce travail — vitesse critique, base PSWL, abaque et tables de coefficients — peut constituer un format générique d'échange entre ingénieur vent et bureau d'études.

Au terme de ce travail, l'objectif annoncé est atteint : un comportement aéroélastique complet, incluant la mémoire du fluide et la proximité du flottement, peut être condensé en quelques distributions statiques fixes dont les combinaisons reconstruisent les enveloppes de réponse de l'ouvrage, aussi bien en déplacements qu'en efforts internes de dimensionnement. L'interface entre l'ingénieur vent et l'ingénieur structure s'en trouve clarifiée : la richesse du calcul dynamique devient un ensemble de cas de charge statiques, sans que la signification physique de l'enveloppe reconstruite soit perdue.

# Annexes

# A Etat de l'art

## A.1 Caractérisation de la turbulence

L'expression du spectre de Von Kármán pour la composante verticale s'écrit :

$$\frac{f S_w(f)}{\sigma_w^2} = \frac{4 \left( \frac{f x L_w}{U} \right) \left[ 1 + 755,2 \left( \frac{f x L_w}{U} \right)^2 \right]}{\left[ 1 + 283,2 \left( \frac{f x L_w}{U} \right)^2 \right]^{11/6}}. \quad (\text{A.1})$$

## A.2 Linéarisation des forces aérodynamiques

### Vitesse apparente

La vitesse apparente est la vitesse du vent incident relative à la section en mouvement,

$$\{V_{\text{app}}(x, t)\} = \left\{ \begin{array}{c} \bar{U} + u(x, t) \\ w(x, t) \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \dot{y}(x, t) \\ \dot{z}(x, t) + rB\dot{\theta}(x, t) \end{array} \right\}, \quad (\text{A.2})$$

où  $rB$  représente la distance entre l'axe de rotation du tablier et le point aérodynamique de référence ; le coefficient  $r$  est ainsi une caractéristique géométrique adimensionnée de la section, typiquement de l'ordre de  $r \in [0; 0,5]$ .

La norme au carré de la vitesse apparente s'écrit alors

$$|V_{\text{app}}(x, t)|^2 = \bar{U}^2 + 2\bar{U}u - 2\bar{U}\dot{y} + \underbrace{u^2 + \dot{y}^2 - 2u\dot{y} + w^2 + \dot{z}^2 + (rB\dot{\theta})^2 - 2w\dot{z} - 2wrB\dot{\theta} + 2\dot{z}rB\dot{\theta}}_{\text{ordre 2}}. \quad (\text{A.3})$$

Les composantes turbulentes du vent et les vitesses structurales étant supposées petites devant la vitesse moyenne, les termes d'ordre 2 (seconde ligne de (A.3)) sont négligés.

### Incidence apparente

D'après la Figure 1.1, l'inclinaison du vent apparent par rapport à l'horizontale est

$$\tan(i_{\text{vent}}(x, t)) = \frac{w(x, t) - \dot{z}(x, t) - rB\dot{\theta}(x, t)}{\bar{U} + u(x, t) - \dot{y}(x, t)}, \quad (\text{A.4})$$

et l'incidence du vent par rapport au tablier en configuration déformée s'obtient en retranchant la rotation  $\theta(x, t)$  :

$$i_{\text{app}}(x, t) = \arctan \left[ \frac{w(x, t) - \dot{z}(x, t) - rB\dot{\theta}(x, t)}{\bar{U} + u(x, t) - \dot{y}(x, t)} \right] - \theta(x, t). \quad (\text{A.5})$$

Sous la même hypothèse de petites perturbations,  $\bar{U} + u - \dot{y} \approx \bar{U}$ . Le rapport apparaissant dans l'arctangente devient alors petit, et la linéarisation  $\arctan(x) \approx x$  donne

$$i_{\text{app}}(x, t) = \frac{w(x, t) - \dot{z}(x, t) - rB\dot{\theta}(x, t)}{\bar{U}} - \theta(x, t). \quad (\text{A.6})$$

### Coefficients aérodynamiques

La linéarisation des coefficients  $C_D$ ,  $C_L$ ,  $C_M$  s'effectue autour de l'angle d'incidence moyen, supposé nul :

$$C_i = c_i + c'_i i_{\text{app}}, \quad c_i = C_i(0), \quad c'_i = \left. \frac{dC_i}{di} \right|_{i=0}, \quad i \in \{L, D, M\}. \quad (\text{A.7})$$

En substituant cette expression et (A.6) dans les forces (1.11)–(1.13), on obtient :

$$\begin{aligned} F_L &= \frac{1}{2}\rho \left[ c_l + c'_l \left( \frac{w - \dot{z} - rB\dot{\theta}}{\bar{U}} - \theta \right) \right] B \left[ \bar{U}^2 + 2\bar{U}u - 2\bar{U}\dot{y} \right], \\ F_D &= \frac{1}{2}\rho \left[ c_d + c'_d \left( \frac{w - \dot{z} - rB\dot{\theta}}{\bar{U}} - \theta \right) \right] B \left[ \bar{U}^2 + 2\bar{U}u - 2\bar{U}\dot{y} \right], \\ F_M &= \frac{1}{2}\rho \left[ c_m + c'_m \left( \frac{w - \dot{z} - rB\dot{\theta}}{\bar{U}} - \theta \right) \right] B^2 \left[ \bar{U}^2 + 2\bar{U}u - 2\bar{U}\dot{y} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

À ce stade, les expressions contiennent encore des termes quadratiques issus des produits croisés entre les coefficients linéarisés et la norme carrée de la vitesse apparente. La linéarisation finale repose toujours sur l'hypothèse de petites perturbations

$$u, w, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\theta} \ll \bar{U}, \quad (\text{A.9})$$

qui permet de négliger systématiquement les termes d'ordre 2. On obtient ainsi des expressions strictement linéaires en les fluctuations turbulentes et les degrés de liberté structuraux, compatibles avec le formalisme aéroélastique développé dans la suite.

**Linéarisation par séparation des facteurs.** La portance (A.8) se présente sous la forme d'un produit

$$F_L(t) = \frac{1}{2} \rho B \underbrace{\left[ c_\ell + c'_\ell \left( \frac{w - \dot{z} - rB\dot{\theta}}{\bar{U}} \right) - c'_\ell \theta \right]}_{A(t)} \underbrace{[\bar{U}^2 + 2\bar{U}u - 2\bar{U}\dot{y}]}_{V(t)} \quad (\text{A.10})$$

$$= \frac{1}{2} \rho B A(t) V(t). \quad (\text{A.11})$$

En isolant la contribution moyenne dans chacun des deux facteurs,

$$A(t) = c_\ell + \Delta A(t), \quad \Delta A(t) = c'_\ell \left( \frac{w - \dot{z} - rB\dot{\theta}}{\bar{U}} \right) - c'_\ell \theta, \quad (\text{A.12})$$

$$V(t) = \bar{U}^2 + \Delta V(t), \quad \Delta V(t) = 2\bar{U}u - 2\bar{U}\dot{y}, \quad (\text{A.13})$$

le produit  $A(t) V(t)$  se développe comme

$$A(t) V(t) = c_\ell \bar{U}^2 + c_\ell \Delta V(t) + \Delta A(t) \bar{U}^2 + \underbrace{\Delta A(t) \Delta V(t)}_{\text{ordre 2}} \quad (\text{A.14})$$

$$\approx c_\ell \bar{U}^2 + c_\ell \Delta V(t) + \Delta A(t) \bar{U}^2. \quad (\text{A.15})$$

Sous (A.9), le produit  $\Delta A \Delta V$ , croisé entre une perturbation aérodynamique et une perturbation de vitesse, est d'ordre 2 et négligé.

**Décomposition en composantes moyenne, self-excited et buffeting.** En réinjectant les expressions de  $\Delta A$  et  $\Delta V$  et en regroupant selon la nature des termes, la portance se met naturellement sous la forme

$$F_L(t) = \underbrace{\frac{1}{2} \rho B c_\ell \bar{U}^2}_{\bar{F}_L} + \underbrace{\frac{1}{2} \rho B \bar{U}^2 \left[ -2c_\ell \frac{\dot{y}}{\bar{U}} - c'_\ell \left( \frac{\dot{z}}{\bar{U}} + \frac{rB\dot{\theta}}{\bar{U}} + \theta \right) \right]}_{F_{L,se}(t)} + \underbrace{\frac{1}{2} \rho B \bar{U}^2 \left[ 2c_\ell \frac{u}{\bar{U}} + c'_\ell \frac{w}{\bar{U}} \right]}_{F_{L,bu}(t)}.$$

(A.16)

## B Formes modales obtenues avec Finelg

Les cinq modes supplémentaires, qui ne ressemblent à aucun mode mesuré sur site, sont repris aux figures suivantes.

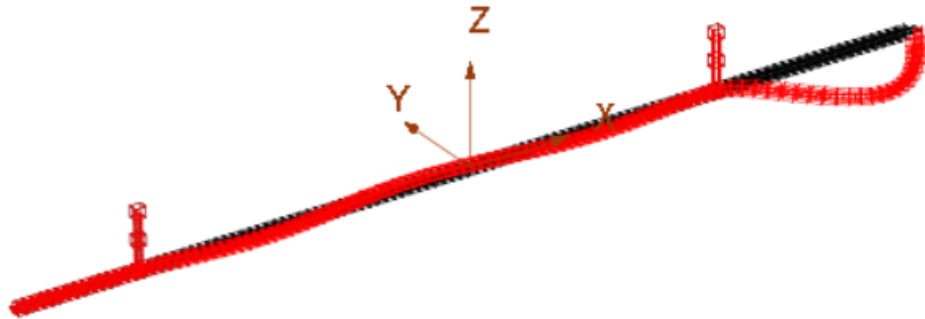


FIGURE B.1 – Forme modale du mode 8

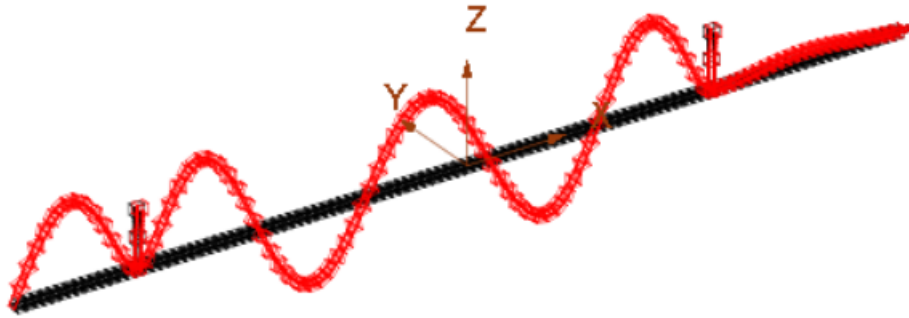


FIGURE B.2 – Forme modale du mode 12

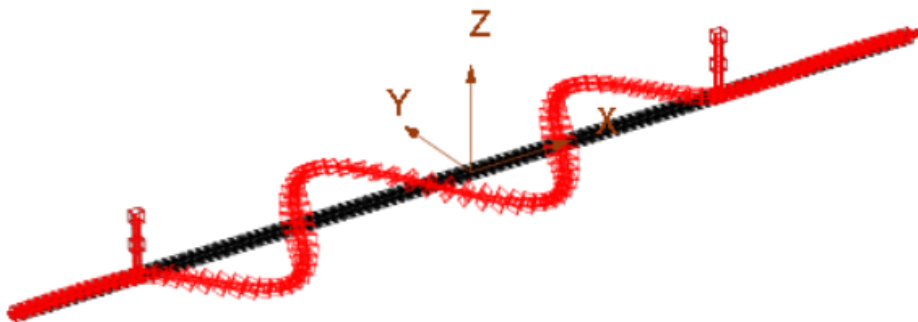


FIGURE B.3 – Forme modale du mode 13

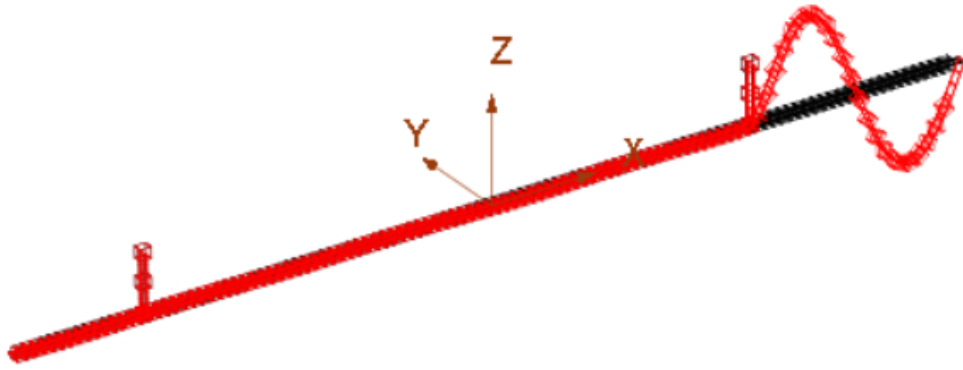


FIGURE B.4 – Forme modale du mode 14

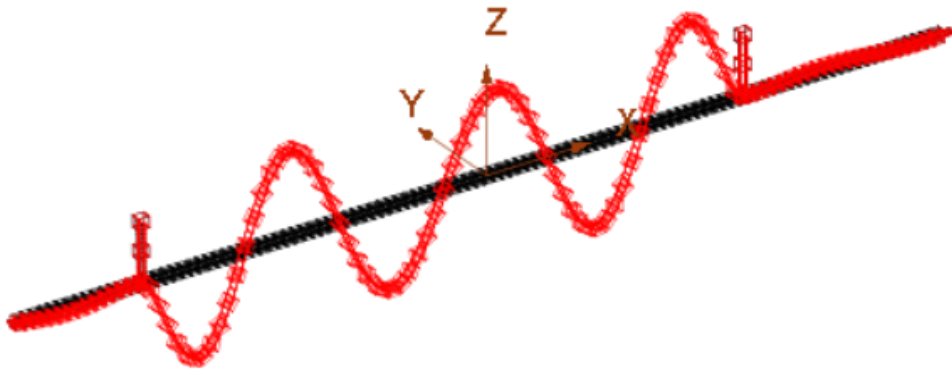


FIGURE B.5 – Forme modale du mode 15

# C Détails de la méthode de continuation arc-length

Cette annexe rassemble les éléments techniques relatifs à l'utilisation de la méthode de continuation arc-length de Heremans [24]. Ces détails sont reportés hors du corps principal afin de ne pas alourdir la lecture du chapitre consacré à la vitesse critique de flottement, où la méthode est utilisée uniquement comme outil de vérification indépendante.

## C.1 Formulation du problème augmenté

Après projection modale du système aéroélastique sur les  $n_m$  modes structurels retenus et substitution d'une solution harmonique de la forme

$$\mathbf{y}(t) = \boldsymbol{\phi} e^{\lambda t},$$

le problème aux valeurs propres peut être écrit sous la forme non linéaire

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_i, U) = \mathbf{0}, \quad (\text{C.1})$$

où le vecteur d'état associé à la branche modale  $i$  est défini par

$$\mathbf{x}_i = [\Re(\lambda_i), \Im(\lambda_i), \Re(\boldsymbol{\phi}_i)^\top, \Im(\boldsymbol{\phi}_i)^\top]^\top. \quad (\text{C.2})$$

La dimension de ce vecteur est donc  $2n_m + 2$ , les deux premières composantes correspondant à la valeur propre complexe et les  $2n_m$  composantes suivantes au vecteur propre complexe associé.

Le système est complété par des conditions de normalisation sur les parties réelle et imaginaire du vecteur propre :

$$\Re\{\boldsymbol{\phi}_i\} \cdot \Re\{\boldsymbol{\phi}_i\} = 1, \quad \Im\{\boldsymbol{\phi}_i\} \cdot \Im\{\boldsymbol{\phi}_i\} = 1. \quad (\text{C.3})$$

Ces conditions permettent de lever l'indétermination liée à l'amplitude arbitraire du vecteur propre.

## C.2 Contrainte de longueur d'arc

La méthode de continuation arc-length ne progresse pas en imposant directement une nouvelle valeur de la vitesse du vent  $U$ . Elle impose plutôt que le point suivant de la branche soit situé à une distance donnée du point précédent dans l'espace augmenté  $(\mathbf{x}, U)$ . Cette contrainte prend la forme d'une hypersphère :

$$\left(\frac{U - U_0}{U_{\text{ref}}}\right)^2 + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\top \mathbf{S}^\top \mathbf{S} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = r^2, \quad (\text{C.4})$$

où  $(\mathbf{x}_0, U_0)$  désigne le point déjà connu sur la branche,  $r$  le rayon de continuation,  $U_{\text{ref}}$  une vitesse de référence utilisée pour adimensionner la composante en vitesse, et  $\mathbf{S}$  une matrice d'échelle appliquée aux composantes du vecteur d'état.

En linéarisant le résidu  $\mathbf{f}$  autour du point courant, on introduit les jacobiens

$$\mathbf{J}_x = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}, \quad \mathbf{J}_U = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial U}. \quad (\text{C.5})$$

La correction de Newton est alors déterminée en satisfaisant simultanément le résidu du problème aux valeurs propres et la contrainte de longueur d'arc. Dans l'algorithme de Crisfield [25], cette formulation conduit à une équation quadratique pour l'incrément de vitesse. La racine assurant la progression dans le sens des vitesses croissantes est retenue.

Le rayon  $r$  est adapté au cours de la continuation en fonction du nombre d'itérations nécessaires à la convergence locale. Lorsque la branche est régulière, le pas peut être augmenté ; lorsqu'elle présente une forte courbure ou une transition rapide, le pas est réduit. Cette adaptation automatique explique la robustesse de la méthode dans les zones de proximité modale, où les approches classiques de suivi par appariement peuvent échouer.

### C.3 Adaptation au modèle Humber

L'implémentation de référence fournie par Heremans est initialement destinée à un modèle aéroélastique à deux degrés de liberté de type *pitch-plunge*. Dans ce cadre, les matrices aérodynamiques  $\mathbf{M}_a$ ,  $\mathbf{C}_a$  et  $\mathbf{K}_a$  sont définies directement à partir des dérivées de flottement.

Dans le présent travail, le modèle du Humber Bridge est formulé dans une base modale de dimension  $n_m = 15$ , et l'aérodynamique est d'abord construite au niveau sectionnel sous la forme d'une matrice complexe  $3 \times 3$ , notée  $\mathbf{A}_{se}(f, U)$ . Cette matrice est ensuite projetée dans la base modale à l'aide du tenseur de recouvrement  $\mathbf{M}_{ab}^{(w)}$ , ce qui conduit à la matrice aéroélastique modale :

$$\mathbf{G}_{aero}(f, U) = \sum_{a,b} A_{se,ab}(f, U) \mathbf{M}_{ab}^{(w)} \in \mathbb{C}^{n_m \times n_m}. \quad (\text{C.6})$$

Cette matrice complexe est ensuite décomposée, à fréquence courante figée, en contributions équivalentes d'amortissement et de raideur :

$$\mathbf{M}_a = \mathbf{0}, \quad \mathbf{C}_a(f, U) = -\frac{1}{\omega} \Im[\mathbf{G}_{aero}(f, U)], \quad \mathbf{K}_a(f, U) = -\Re[\mathbf{G}_{aero}(f, U)]. \quad (\text{C.7})$$

Cette décomposition est celle utilisée dans le corps du texte. Elle permet de conserver la structure de l'algorithme de continuation tout en remplaçant l'aérodynamique analytique du modèle *pitch-plunge* par l'aérodynamique modale du tablier du Humber Bridge.

### C.4 Attribution et modifications du code

L'implémentation utilisée dans ce travail est adaptée du code associé à la publication de Heremans [24]. Le tableau C.1 synthétise les principales routines reprises ou adaptées.

| Routine                                           | Origine                                          | Modification                           |
|---------------------------------------------------|--------------------------------------------------|----------------------------------------|
| Résolution polynomiale <code>polyeig</code>       | <code>main.py</code> , l. 484–541                | Aucune                                 |
| Normalisation des modes complexes                 | <code>main.py</code> , l. 455–481                | Aucune                                 |
| Jacobiens numériques $J_x, J_U$                   | <code>continuation.py</code> , l. 29–38, 427–431 | Aucune                                 |
| Pas de Crisfield                                  | <code>continuation.py</code> , l. 213–247        | Aucune                                 |
| Résidu <code>get_target_funvec</code>             | <code>main.py</code> , l. 319–359                | Adaptation à la dimension $n_m = 15$   |
| Boucle externe mode par mode                      | <code>continuation.py</code> , l. 163–272        | Initialisation adaptée au modèle modal |
| Interface aérodynamique <code>_humber_aero</code> | —                                                | Nouvelle routine, Eq. (C.7)            |

TABLE C.1 – Attribution des principales routines utilisées dans le module de continuation arc-length. Les numéros de lignes renvoient au dépôt `continuation-algo` transmis par l'auteur.

# D Extension aux efforts internes du tablier et aux efforts dans les câbles

## D.1 Formes des trente premières PSWL pour les deux modèles aérodynamiques

### D.1.1 Modèle quasi-stationnaire

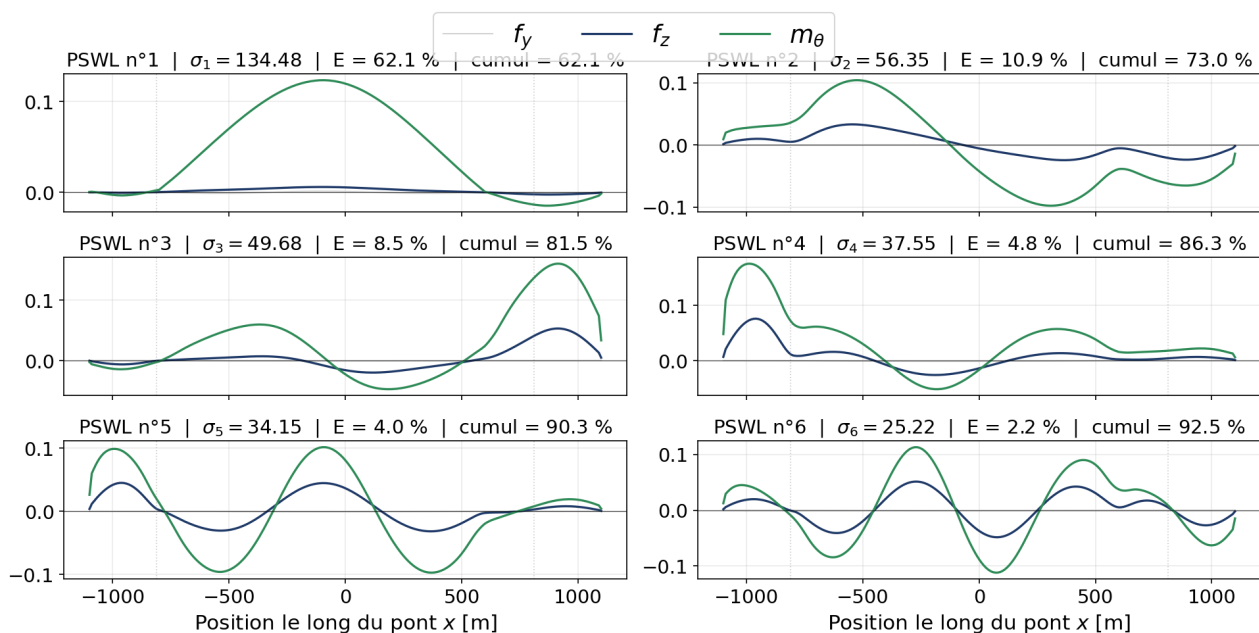


FIGURE D.1 – Formes spatiales des PSWL 1 à 6 pour le modèle quasi-stationnaire.

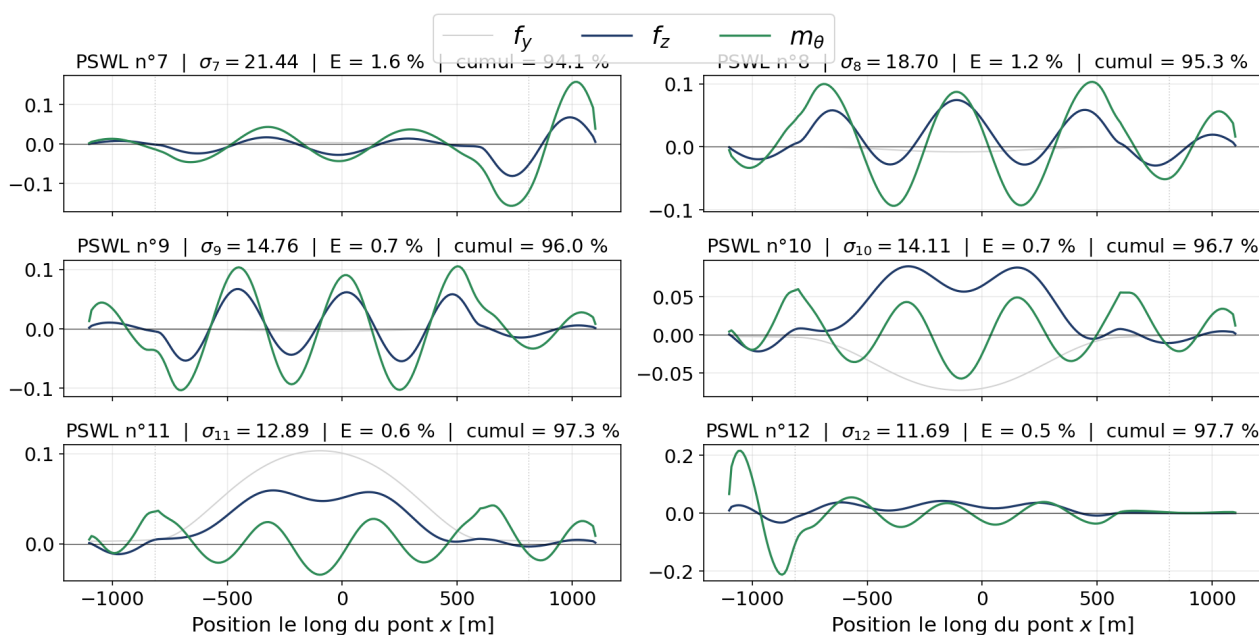


FIGURE D.2 – Formes spatiales des PSWL 7 à 12 pour le modèle quasi-stationnaire.

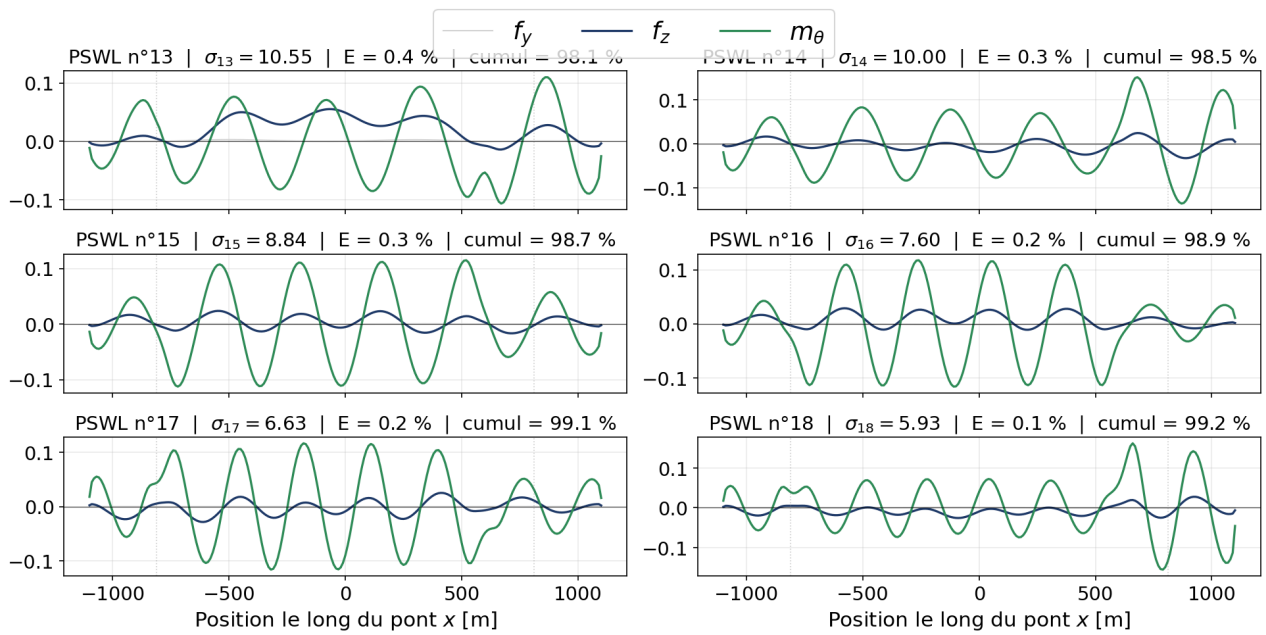


FIGURE D.3 – Formes spatiales des PSWL 13 à 18 pour le modèle quasi-stationnaire.

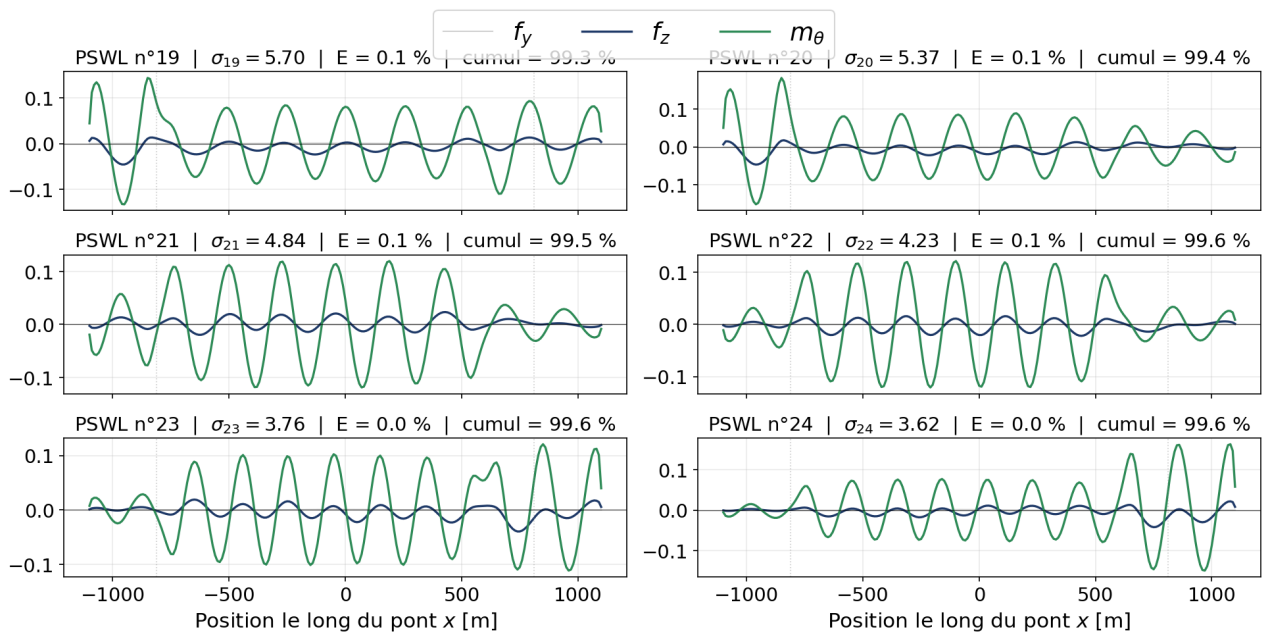


FIGURE D.4 – Formes spatiales des PSWL 19 à 24 pour le modèle quasi-stationnaire.

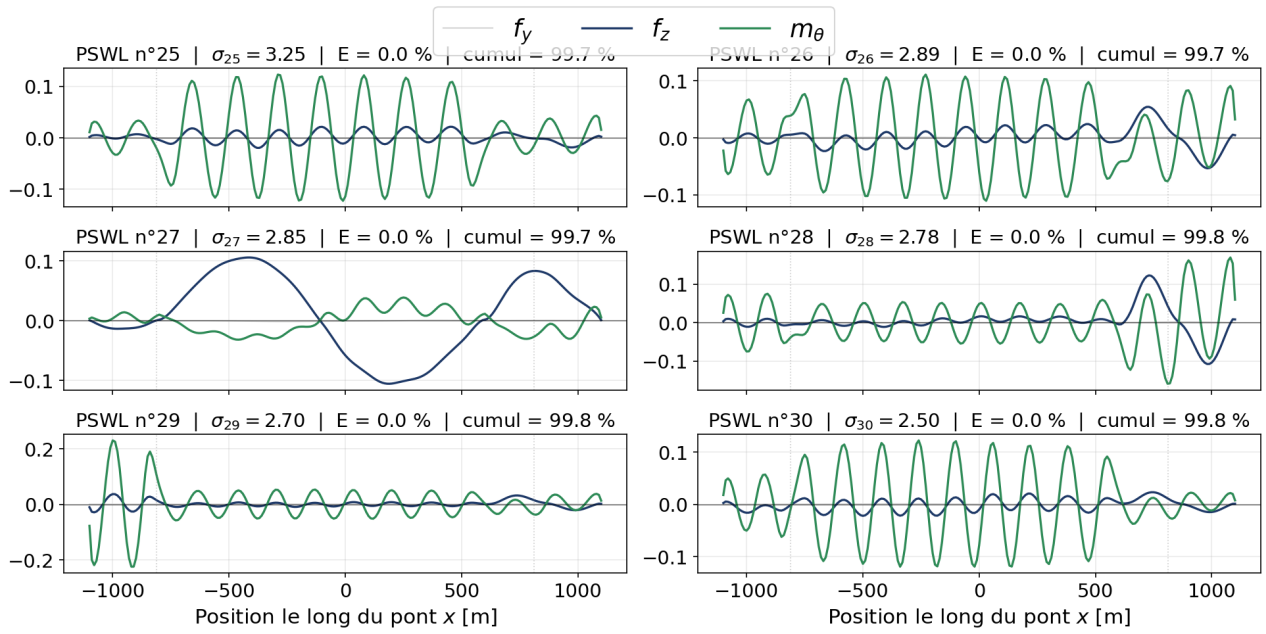


FIGURE D.5 – Formes spatiales des PSWL 25 à 30 pour le modèle quasi-stationnaire.

### D.1.2 Modèle instationnaire

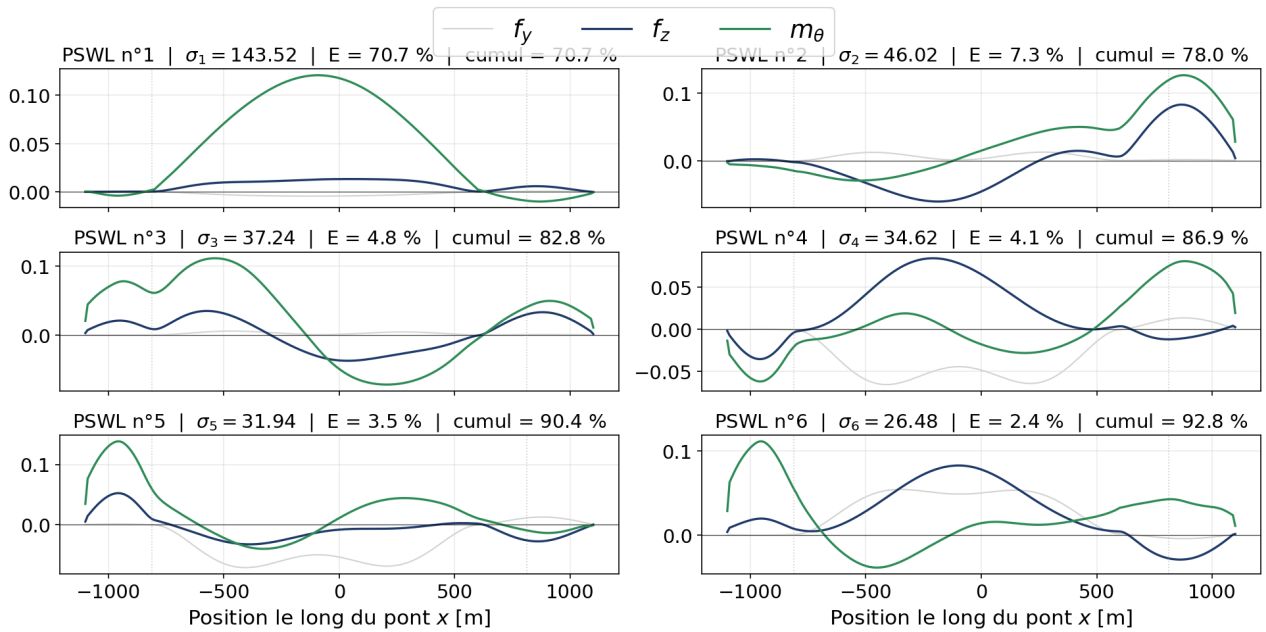


FIGURE D.6 – Formes spatiales des PSWL 1 à 6 pour le modèle instationnaire.

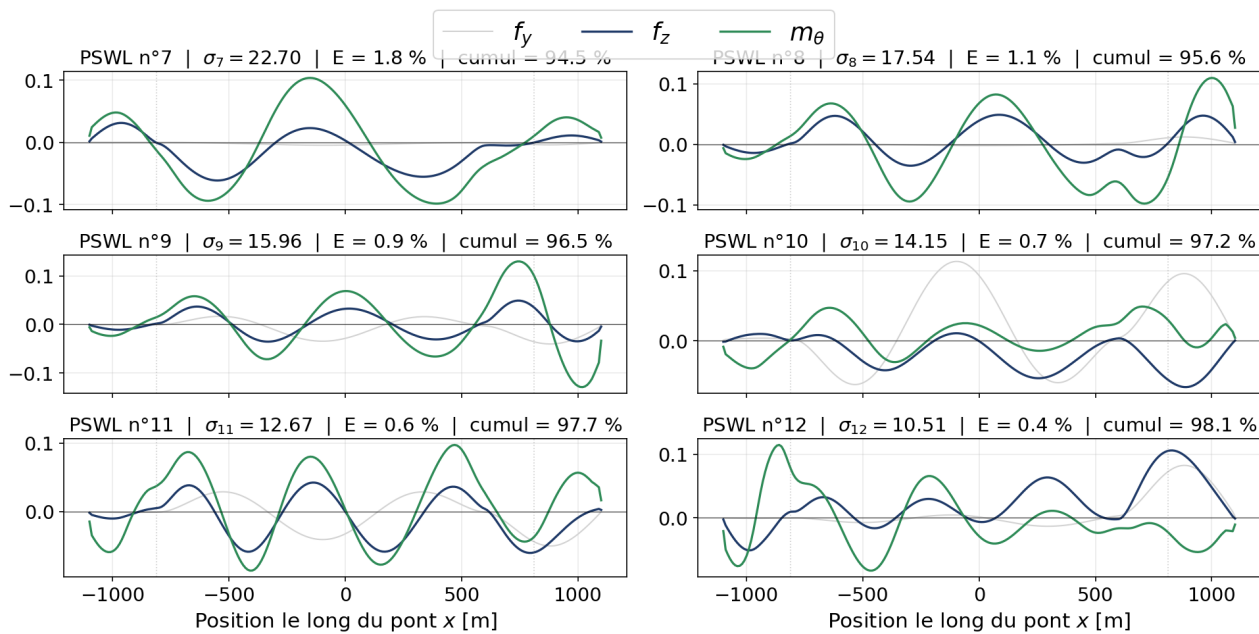


FIGURE D.7 – Formes spatiales des PSWL 7 à 12 pour le modèle instationnaire.

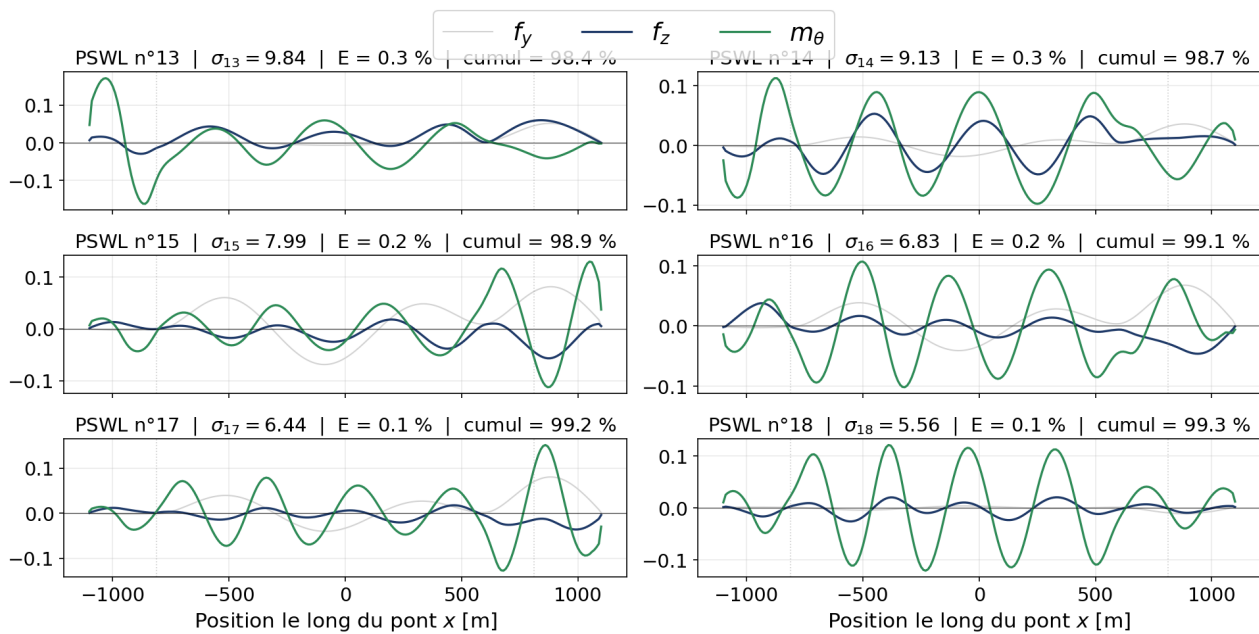


FIGURE D.8 – Formes spatiales des PSWL 13 à 18 pour le modèle instationnaire.

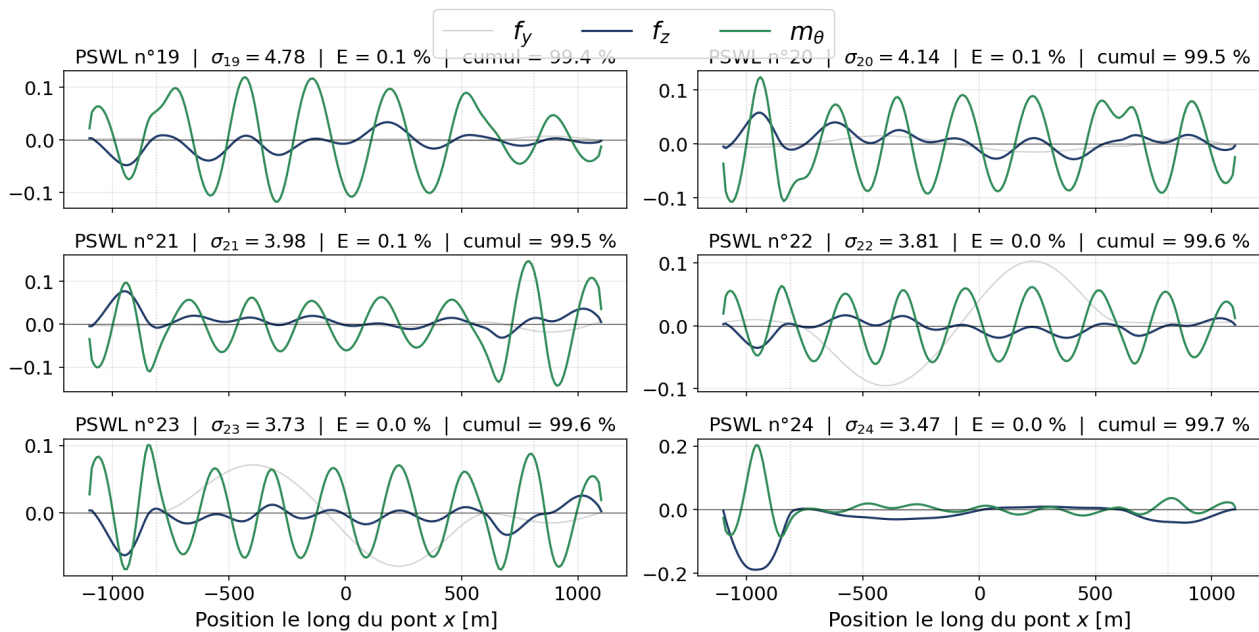


FIGURE D.9 – Formes spatiales des PSWL 19 à 24 pour le modèle instationnaire.

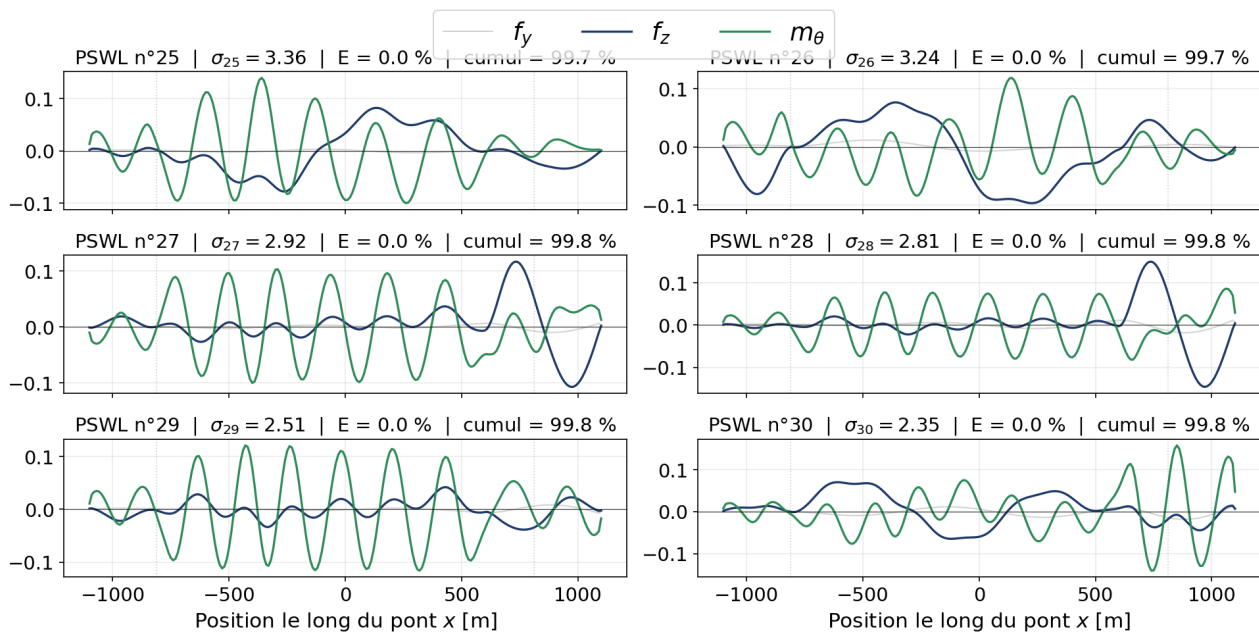


FIGURE D.10 – Formes spatiales des PSWL 25 à 30 pour le modèle instationnaire.

## D.2 Exemple concret de table des coefficients

Comme expliqué dans le corps du texte, les coefficients de combinaison des PSWL peuvent être exportés sous la forme de fichiers tableurs, par exemple au format Excel. Une organisation simple du livrable consiste alors à créer un fichier distinct pour chaque nombre de PSWL conservées  $n_P$ .



FIGURE D.11 – Organisation du livrable sous la forme de différents fichiers Excel, chacun associé à un nombre de PSWL conservées  $n_P$ .

Chaque fichier est ensuite structuré en plusieurs feuilles, chacune correspondant à une valeur de tolérance d'overshoot autorisée. Cette organisation permet de séparer clairement les différents compromis possibles entre précision de reconstruction, conservatisme et nombre de combinaisons nécessaires.



FIGURE D.12 – Organisation des feuilles Excel en fonction de la tolérance d'overshoot autorisée, pour une valeur donnée de  $n_P$ .

Ainsi, une feuille donnée correspond à un point de fonctionnement précis, défini par le couple formé par le nombre de PSWL conservées  $n_P$  et la tolérance d'overshoot autorisée. Elle contient alors les coefficients de combinaison à appliquer aux PSWL pour les différentes vitesses de vent et les différentes réponses considérées.

| U_ms     | reponse | charge | alpha_1  | alpha_2  | alpha_3  | alpha_4  | alpha_5  | alpha_6 | alpha_7  | alpha_8  | alpha_9  | alpha_10 |
|----------|---------|--------|----------|----------|----------|----------|----------|---------|----------|----------|----------|----------|
| 15 y     |         | 1      | -87326.1 | -474062  | 541914   | 120770   | -328397  | -484896 | 171231   | 5003.11  | -272287  | -82050.1 |
| 15 z     |         | 1      | -967965  | -51852   | -153873  | 229307   | -58811.2 | -204521 | 269897   | -63226.3 | 93310.6  | 97478.6  |
| 15 z     |         | 2      | -868933  | 102898   | 302793   | 225792   | 205096   | 67880.2 | -62201.7 | 368378   | 44354.4  | 94899.8  |
| 15 theta |         | 1      | 1079269  | -453553  | 405659   | -128.714 | -276002  | -369195 | 155652   | -161326  | -178740  | -76553.8 |
| 15 theta |         | 2      | -264196  | -458153  | 297183   | 224789   | -199328  | -482889 | -349108  | 100709   | -132350  | -21599.5 |
| 15 N     |         | 1      | -945289  | 301783   | 57420.8  | 161049   | 167247   | 118371  | 134471   | -94311.7 | -76031.2 | -16665   |
| 15 N     |         | 2      | 823853   | 466463   | 368408   | -391344  | -40642.5 | 227050  | -102341  | 109532   | 265638   | 100147   |
| 15 N     |         | 3      | 822449   | 378165   | -240293  | -280789  | 220883   | 406204  | -250342  | -233426  | 334423   | 52608.2  |
| 15 My    |         | 1      | -223430  | 120242   | -682072  | 17530.5  | 166366   | 170262  | -111455  | 226074   | 58657.7  | 55351.1  |
| 15 My    |         | 2      | 875168   | -22895.7 | -433978  | -162195  | 2210.62  | 119565  | 30226.3  | -298335  | 88576.4  | 12056.9  |
| 15 My    |         | 3      | -202024  | 47930.9  | -158386  | 105781   | 88382.5  | -47340  | 165053   | -56755.7 | 343595   | 165225   |
| 15 My    |         | 4      | -784323  | -293822  | -247121  | 35043.1  | -421781  | -436501 | 66200.7  | -154841  | -145388  | -62651.1 |
| 15 My    |         | 5      | 598069   | 488613   | -70153.2 | -277587  | -96403   | 99407   | -459376  | 19578.1  | 126247   | -7745.65 |
| 15 My    |         | 6      | -778213  | -282036  | 183074   | 91447.8  | -229730  | -218403 | 121722   | -493634  | -60173   | -74052.7 |
| 15 My    |         | 7      | -704450  | -182811  | 615034   | 199917   | -179618  | -343059 | -45964.9 | -311531  | -234967  | -128607  |
| 15 My    |         | 8      | 781389   | 453167   | 494584   | -377893  | -117177  | 112030  | -99402.1 | 305603   | 293876   | 143863   |

FIGURE D.13 – Exemple concret de table de coefficients de combinaison.

Dans l'exemple présenté à la Figure D.13, la feuille correspond au cas où  $n_P = 10$  PSWL sont conservées. La table contient donc dix coefficients de combinaison, notés  $\alpha_i$  avec  $i = 1, \dots, 10$ . Pour une vitesse de vent et une réponse cible données, ces coefficients permettent de reconstruire le chargement statique équivalent comme une combinaison linéaire des dix PSWL retenues.

# E Utilisation d'outils d'intelligence artificielle

L'Université de Liège encourage un usage transparent des outils d'intelligence artificielle, notamment des modèles génératifs. Conformément à ces recommandations, cette annexe précise la manière dont de tels outils ont été mobilisés dans le cadre de ce travail. Leur rôle s'est limité à une assistance technique et rédactionnelle : l'ensemble du contenu scientifique, des développements théoriques, des choix de modélisation et de l'implémentation relève de l'auteur.

## E.1 ChatGPT (OpenAI)

- Le modèle ChatGPT a été employé comme outil d'appoint pour plusieurs tâches, en particulier :
- l'approfondissement de la compréhension de certains concepts théoriques abordés dans ce travail, par le biais d'explications et de reformulations ;
  - la clarification de concepts de programmation et de questions relatives à l'environnement de développement (Python, bibliothèques scientifiques) ;
  - l'aide au débogage et à l'optimisation de portions de code dont les performances étaient insuffisantes, sans génération autonome de blocs complets ;
  - l'amélioration de la qualité du français et la reformulation de phrases en vue d'une expression plus claire.

## E.2 Claude (Anthropic)

Le modèle Claude a principalement été utilisé pour la relecture et la mise au point du manuscrit, ainsi que pour l'assistance au développement, à savoir :

- la détection de coquilles, de fautes d'orthographe et d'incohérences de notation ;
- la reformulation et la restructuration de passages rédigés au préalable par l'auteur ;
- l'aide au débogage et à l'optimisation de portions de code dont les performances étaient insuffisantes, sans génération autonome de blocs complets.

Dans tous les cas, les suggestions produites par ces outils ont été relues, vérifiées et validées par l'auteur avant intégration.

# Références

- [1] A. G. DAVENPORT. “The representation of the dynamic effects of turbulent wind by equivalent static wind loads.” In : *Proceedings of the AISC/CISC International Symposium on Structural Steel*. Chicago, IL, 1985.
- [2] Xinzhong CHEN et Ahsan KAREEM. “Equivalent Static Wind Loads for Buffeting Response of Bridges”. en. In : *Journal of Structural Engineering* 127.12 (déc. 2001), p. 1467-1475. DOI : 10.1061/(ASCE)0733-9445(2001)127:12(1467). (Visité le 23/02/2026).
- [3] Nicolas BLAISE et Vincent DENOËL. “Principal static wind loads”. In : *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 113 (2013), p. 29-39. DOI : 10.1016/j.jweia.2012.12.009.
- [4] A. G. DAVENPORT. “The response of slender, line-like structures to a gusty wind”. In : *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* 23.3 (nov. 1962), p. 389-408. ISSN : 1753-7789. DOI : 10.1680/iicep.1962.10876. (Visité le 18/05/2026).
- [5] M. KASPERSKI et H.-J. NIEMANN. “The L.R.C. (load-response-correlation) - method a general method of estimating unfavourable wind load distributions for linear and non-linear structural behaviour”. en. In : *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 43.1-3 (jan. 1992), p. 1753-1763. ISSN : 01676105. DOI : 10.1016/0167-6105(92)90588-2. URL : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0167610592905882> (visité le 15/05/2026).
- [6] J. D. HOLMES. “Equivalent static load distributions for resonant dynamic response of bridges”. In : *Proceedings of the 10th International Conference on Wind Engineering*. 1999, p. 907-911.
- [7] Nicolas BLAISE, Thomas ANDRIANNE et Vincent DENOËL. “Conditional expected static wind loads for structural responses driven by non-Gaussian local pressures”. In : *In Vento* 2016. (2016). DOI : 10.1016/j.jweia.2017.05.005.
- [8] Vincent DENOËL. *Aeroelastic Phenomena*. Note de cours. Université de Liège, 2024.
- [9] Vincent DENOËL. “Application des méthodes d’analyse stochastique à l’étude des effets du vent sur les structures du génie civil”. French. Thèse de doct. ULiège - Université de Liège, 2005. URL : <https://orbi.uliege.be/handle/2268/13962> (visité le 23/02/2026).
- [10] Robert H. SCANLAN et Emil SIMIU. *Wind Effects on Structures : Fundamentals and Applications to Design*. Wiley, 1978. (Visité le 23/02/2026).
- [11] Theodore VON KÁRMÁN. “Progress in the Statistical Theory of Turbulence”. In : *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 34.11 (1948), p. 530-539. ISSN : 0027-8424. (Visité le 18/05/2026).
- [12] Vincent DENOËL et Olivier FLAMAND. “Influence of bridge deck shape on extreme buffeting forces”. In : *Proceedings of 13th International Conference on Wind Engineering* (jan. 2011), 8 p.
- [13] Robert H. SCANLAN et John J. TOMKO. “Airfoil and Bridge Deck Flutter Derivatives”. en. In : *Journal of the Engineering Mechanics Division* 97.6 (déc. 1971), p. 1717-1737. DOI : 10.1061/JMCEA3.0001526. (Visité le 18/05/2026).
- [14] Theodore THEODORSEN. “General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter”. en. In : *NACA* 496 (juin 1935). ISSN : 00160032. DOI : 10.1016/S0016-0032(35)92022-1. (Visité le 18/05/2026).
- [15] Hermann J. HASSIG. “An approximate true damping solution of the flutter equation by determinant iteration.” en. In : *Journal of Aircraft* 8.11 (nov. 1971), p. 885-889. ISSN : 0021-8669, 1533-3868. DOI : 10.2514/3.44311. (Visité le 18/05/2026).
- [16] Vincent DENOËL. “Estimation of modal correlation coefficients from background and resonant responses”. In : *Structural Engineering and Mechanics* 32.6 (2009), p. 725-740. DOI : 10.12989/sem.2009.32.6.725. (Visité le 02/06/2026).

- [17] Vincent DENOËL. *Evolution of Equivalent Static Wind Loads and Envelope Reconstruction in Wind Engineering*. fr. Communication. Florence, Italie, 2023. URL : <https://www.youtube.com/watch?v=aMl8IwOnCeM&t=1700s> (visité le 05/06/2026).
- [18] A. G. DAVENPORT. “Gust Loading Factors”. en. In : *Journal of the Structural Division (ASCE)* 93 (1967), p. 11-34. DOI : 10.1061/JSDEAG.0001692. (Visité le 15/05/2026).
- [19] Vincent DENOËL. “Quantifying complexity in the envelope reconstruction problem : Review, comparison and a detailed illustration”. In : *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 254 (2024), p. 105879. DOI : 10.1016/j.jweia.2024.105879. (Visité le 23/02/2026).
- [20] K. N. BAKIS et al. “Passive aeroelastic control of a suspension bridge during erection”. English. In : *Journal of Fluids and Structures* 66 (oct. 2016), p. 543-570. ISSN : 0889-9746. DOI : 10.1016/j.jfluidstructs.2016.08.008. (Visité le 15/05/2026).
- [21] NSC. *The Humber Bridge*. en-US. Sept. 2023. (Visité le 15/05/2026).
- [22] J. M. W. BROWNJOHN et al. “Ambient vibration re-testing and operational modal analysis of the Humber Bridge”. en. In : *Engineering Structures* 32.8 (août 2010), p. 2003-2018. ISSN : 0141-0296. DOI : 10.1016/j.engstruct.2010.02.034. (Visité le 15/05/2026).
- [23] *NBN EN 1991-2 ANB :2011*. en. URL : [https://edu.nbn.be/data/r/platform/eduportal/detail?p40\\_id=349558&session=15672657335024](https://edu.nbn.be/data/r/platform/eduportal/detail?p40_id=349558&session=15672657335024) (visité le 19/05/2026).
- [24] Julien HEREMANS, Grigorios DIMITRIADIS et Vincent DENOËL. “A continuation method for determining the speed dependent modal properties of large MDOF aeroelastic systems”. In : *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 252 (sept. 2024), p. 105804. DOI : 10.1016/j.jweia.2024.105804.
- [25] M. A. CRISFIELD. “A fast incremental/iterative solution procedure that handles “snap-through””. In : *Computers & Structures* 13.1 (juin 1981), p. 55-62. ISSN : 0045-7949. DOI : 10.1016/0045-7949(81)90108-5. (Visité le 18/05/2026).