Algèbres de contact et logique modale : une promesse de mariage.

Auteur : Stétenfeld, Valentine
Promoteur(s) : Hansoul, Georges
Faculté : Faculté des Sciences
Diplôme : Master en sciences mathématiques, à finalité didactique
Année académique : 2016-2017
URI/URL : http://hdl.handle.net/2268.2/2624

Université de Liège
Faculté des Sciences
Département de Mathématique

Juin 2017

Algèbres de contact et logique modale : une promesse de mariage

Sous la direction de Georges Hansoul

rédigé par

Valentine Stetenfeld

Mémoire de fin d'études en vue de l'obtention du diplôme de Master en Sciences Mathématiques, à finalité didactique

Année Académique 2016–2017

Remerciements

J'adresse mes sincères remerciements à mon promoteur Georges Hansoul. Je le remercie de m'avoir aidée, encadrée et guidée pour la rédaction de ce mémoire. Je le remercie également pour sa disponibilité et ses conseils avisés toujours dispensés avec enthousiasme.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Pascal Gribomont, Pierre Mathonet, Samuel Nicolay ainsi qu'à Bruno Teheux pour avoir accepté de lire mon mémoire.

Je remercie mon cousin, Nicolas Stetenfeld pour sa relecture attentive et ses précieux conseils orthographiques.

Je tiens également à exprimer toute ma reconnaissance à mon père, Pascal Stetenfeld, à ma sœur, Émilie Stetenfeld et à mon frère, William Stetenfeld pour l'intérêt, probablement feint, qu'ils ont porté à mon mémoire, et le soutien, réel cette fois-ci, durant sa rédaction.

Enfin, je remercie Vincent Gambini pour son oreille forcée, mais je le sais attentive, durant mes nombreuses phases de somniloquie.

Table des matières

Introduction

L'étude de la logique modale et des théorèmes de complétude qui en résultent intéresse les mathématiciens mais aussi les philosophes depuis de nombreuses années. Ce domaine est vaste et les publications y sont nombreuses. La logique modale est en quelque sorte l'étude de la possibilité et de la nécessité sous toutes ses formes : elle étudie les auxiliaires modaux permettant de modifier la vérité d'une proposition selon les circonstances dans lesquelles celle-ci est évaluée. Les algèbres de contact (telles que définies dans ce mémoire) sont quant à elles une modélisation de la conception de l'espace et du temps due à Whitehead au début du vingtième siècle. Elle sert de base au raisonnement informatique sur les régions [15]. A priori, l'étude de la logique modale et l'étude de l'espace et des régions ne semblent pas liées. Pourtant, il s'avère que lorsque nous appliquons la dualité de Stone [16] aux algèbres modales et aux algèbres de contact, nous obtenons des espaces analogues, à savoir des espaces de Boole munis d'une relation fermée. Dès lors, nous tentons de répondre aux questions suivantes. Existe-il d'autres similitudes entre les algèbres modales et les algèbres de contact ? Est-il possible de traduire certains théorèmes de la logique modale en terme d'algèbres de pré-contact ?

Dans ce travail, nous commençons par établir une base solide concernant le dualité (topologique ou non) entre les algèbres modales et les espaces modaux ainsi que la dualité entre les algèbres de pré-contact et les espaces de pré-contact. Nous étudions ensuite les différents théorèmes de complétude s'appliquant aux algèbres modales et nous transposons ceux-ci aux algèbres de pré-contact. Enfin, nous établissons le théorème de Fine-Van Benthem. Notre but premier était de nous confronter à des démonstrations inédites en tentant de transposer des théorèmes bien connus des algèbres modales aux algèbres de pré-contact.

Ce mémoire se compose de quatre chapitres et de deux annexes. Dans le premier chapitre, nous rappelons les notions concernant la théorie des algèbres modales ainsi que la théorie des algèbres de pré-contact qui sont essentielles à la compréhension de ce travail. Nous établissons la dualité entre les algèbres modales et les espaces de Boole munis d'une relation binaire fermée telle que l'image d'un ouvert fermé est un ouvert fermé, appelés espaces modaux. Nous travaillons ensuite sur la dualité entre les algèbres de pré-contact et les espaces de Boole munis d'une relation binaire fermée, appelés espaces de pré-contact.

Dans le deuxième chapitre, nous travaillons sur les dualités non topologiques. Nous commençons par considérer des algèbres de Boole complètes et atomiques et nous établissons la dualité entre celles-ci et les ensembles. Nous passons ensuite aux algèbres modales complètes et atomiques. Nous effectuons le même travail que dans le premier chapitre mais nous restreignons l'ensemble de départ aux algèbres modales complètes et atomiques. Nous établissons la dualité entre celles-ci et les ensembles munis d'une relation binaire, appelés frames de Kripke. Enfin, nous étudions les algèbres de pré-contact complètes et atomiques. Plutôt que d'effectuer le même travail que dans le premier chapitre, nous montrons qu'il existe un isomorphisme de catégories entre les algèbres modales complètes et atomiques et les algèbres de pré-contact complètes et atomiques. Cet isomorphisme permet de conclure sur la dualité entre les algèbres de pré-contact complètes et atomiques et les frames de Kripke.

Le troisième chapitre est consacré aux théorèmes de complétude. Nous commençons par nous intéresser à la logique modale et au théorème de complétude algébrique des logiques modales. Nous transposons ensuite ce résultat au dual topologique des algèbres modales et nous obtenons le théorème de complétude dans les espaces modaux. Nous le transposons également au dual non topologique des algèbres modales et nous obtenons le théorème de complétude dans les frames de Kripke. Ce dernier nécessite une hypothèse supplémentaire essentielle qui est que le système modal considéré doit être complet. Nous étudions cette notion plus en détails dans le chapitre quatre. Nous nous demandons subséquemment ce qu'il adviendrait de ces théorèmes dans les algèbres et les espaces de pré-contact. Nous établissons alors un théorème de complétude pour les algèbres de pré-contact ainsi qu'un théorème de complétude dans les espaces de pré-contact. Ces nouveaux théorèmes nous offre plus de latitude puisqu'il existe plus d'algèbres de pré-contact que d'algèbres modales.

Dans le dernier chapitre, nous penchons sur un autre théorème, établi par Kit Fine en 1975, stipulant que si un système modal est complet vis à vis d'une classe élémentaire de frames alors ce système modal est canonique [5]. La preuve de ce théorème fut développée par Johan van Benthem la même année [17]. Afin d'établir ce théorème, nous rappelons d'abord quelques notions de la logique du premier ordre. Ensuite, nous établissons une série de critères essentiels pour le démonstration du théorème de Fine-Van Benthem et nous introduisons le compactifié de Stone-Čech d'un frame de Kripke. Nous présentons un critère pour qu'un système modal soit complet, un autre pour qu'un système modal soit canonique et enfin un critère de canonicité pour les systèmes complets. Pour terminer, nous présentons la démonstration du théorème de Fine-Van Benthem qui est basée sur l'élaboration d'un lemme attestant, pour toute structure d'un langage, l'existence d'un morphisme entre une structure élémentairement équivalente à la première et son compactifié de Stone-Čech.

Nous proposons ensuite une série de questions qui permettraient de prolonger ce mémoire.

Nous terminons ce travail par deux annexes. La première concerne la théorie des catégories et rappelle les rudiments de cette théorie, essentiels à la compréhension de ce travail. La seconde concerne les algèbres de Boole et la dualité de Stone, dualité dont nous nous servons pour établir la dualité entre les algèbres modales et les espaces modaux.

Chapitre 1

Les protagonistes

1.1 Les algèbres modales

Les algèbres modales sont des algèbres de Boole munies d'une relation unaire. Ces algèbres nous fournissent dans la suite des modèles de la logique modale que nous étudions dans le chapitre 3. Nous donnons également dans le chapitre 3 un exemple bien connu d'algèbre modale, l'algèbre de Lindenbaum–Tarski. La dualité que nous établissons nous permet de passer aisément du théorème de complétude algébrique des logiques modales au théorème de complétude dans les espaces modaux.

1.1.1 Introduction aux algèbres modales et aux espaces modaux

Dans cette partie, nous définissons les notions d'algèbre modale et d'espace modal mais également les catégories associées à celles-ci dont nous aurons besoin dans la suite.

Définition 1.1.1. Une *algèbre modale* est une algèbre $(B, \Diamond) = (B, \vee, \wedge, 0, 1,^c, \Diamond)$ où B est une algèbre de Boole et $\Diamond$ une opération unaire satisfaisant aux axiomes suivants :

1. $\Diamond(a \vee b) = \Diamond a \vee \Diamond b$;
2. $\Diamond 0 = 0$

pour tous $a, b \in B$.

Remarque 1.1.1. Dans la suite, nous adopterons la notation B pour une algèbre modale afin de ne pas alourdir les notations. De plus, nous allons travailler avec les ultrafiltres des algèbres modales. En conséquence, nous supposerons que nos algèbres de Boole contiennent au minimum deux éléments puisque l'algèbre de Boole triviale ne contient aucun ultrafiltre.

Remarque 1.1.2. Remarquons que $\Diamond$ est isotone. En effet, si $a \leq b$, on obtient

$$\begin{aligned} & a \vee b = b \\ \Rightarrow\ & \Diamond(a \vee b) = \Diamond b \\ \Rightarrow\ & \Diamond a \vee \Diamond b = \Diamond b \\ \Rightarrow\ & \Diamond a \leq \Diamond b. \end{aligned}$$

Définition 1.1.2. Un *homomorphisme d'algèbres modales* est un homomorphisme d'algèbre de Boole qui respecte $\Diamond$.

Introduisons maintenant la première catégorie dont nous avons besoin.

Définition 1.1.3. La *catégorie des algèbres modales*, notée MA, est la catégorie dont les objets sont les algèbres modales et les morphismes sont les homomorphismes d'algèbres modales.

Passons à présent aux espaces modaux.

Définition 1.1.4. Un *espace modal* est un espace (X, R) où $X = (X, \tau)$ est un espace de Boole et R est une relation binaire ($R \subseteq X^2$) telle que

1. R est fermée dans X^2 ;
2. $R(O, -)$ est un ouvert fermé si O est un ouvert fermé.

Remarque 1.1.3. Dans la suite, nous noterons X les espaces modaux afin de ne pas alourdir les notations. De plus, historiquement, la notation choisie pour la relation binaire R est $R(-, O)$. Nous avons ici choisi la notation $R(O, -)$ car celle-ci sera plus cohérente avec la suite, lorsque nous étudierons les algèbres de contact.

Définition 1.1.5. La *catégorie des espaces modaux*, notée MS, est la catégorie dont les objets sont les espaces modaux et les morphismes sont les applications continues φ définies d'un espace modal X dans un autre X' et tels que

$$\varphi(R(-, x)) = R(-, \varphi(x)) \quad \forall x \in X$$

Dans cette dernière définition, nous notons R la relation sur l'espace modal X et nous notons la relation sur l'espace X' de la même manière. Nous sommes bien conscient que ces deux relations ne sont pas identiques mais il est difficile de les confondre étant donné les objets sur lesquels elles s'appliquent. Nous ferons souvent cette confusion dans la suite.

Avant de commencer à étudier les propriétés des objets que nous venons d'introduire, effectuons une dernière remarque.

Remarque 1.1.4. Grâce à cette égalité, on peut faire deux remarques.

— Premièrement, puisque $\varphi(R(-, x)) \subseteq R(-, \varphi(x))$, on peut remarquer que si yRx, alors $\varphi(y)R\varphi(x)$. On peut en conclure que φ respecte le R.

— Deuxièmement, grâce à l'inclusion, $\varphi(R(-, x)) \supseteq R(-, \varphi(x))$, on observe que si $y'R\varphi(x)$, cela implique qu'il existe y tel que yRx et $\varphi(y) = y'$. On voit en fait apparaître une espèce de surjectivité.

1.1.2 Propriétés

Dans cette section nous étudions les propriétés qui nous permettent d'obtenir la dualité entre les algèbres modales et les espaces modaux.

Proposition 1.1.1. *Si I est un idéal, alors $\Diamond^{-1}(I)$ est un idéal.*

Démonstration. On a

1. $0 \in \Diamond^{-1}(I)$. En effet, par définition, $\Diamond 0 = 0$. Comme I est un idéal, $0 \in I$, donc $\Diamond 0 \in I$, d'où la conclusion.
2. Si $i, j \in \Diamond^{-1}(I)$, alors $i \vee j \in \Diamond^{-1}(I)$. En effet, si $i, j \in \Diamond^{-1}(I)$, alors $\Diamond i, \Diamond j \in I$. Comme I est un idéal, on a $\Diamond i \vee \Diamond j \in I$. Par définition de $\Diamond$, on obtient $\Diamond(i \vee j) \in I$ et donc $i \vee j \in \Diamond^{-1}(I)$.
3. Pour tout $b \in B$, $i \in \Diamond^{-1}(I)$ tels que $b \leq i$, on a $b \in \Diamond^{-1}(I)$. En effet, prenons b et i ayant ces propriétés, on a alors, $i \in \Diamond^{-1}(I)$ et donc $\Diamond i \in I$. Comme I est un idéal et comme $b \leq i \Rightarrow \Diamond b \leq \Diamond i$, on a $\Diamond b \in I$, d'où le résultat.

□

Proposition 1.1.2. *Soit B une algèbre modale et soient $x, y \in Ult(B)$, on a l'implication suivante*

$$\Diamond x \subseteq y \quad \Leftrightarrow \quad \Diamond^{-1}(-y) \subseteq -x.$$

En particulier,

$$\Diamond^{-1}(-y) \cap x = \emptyset$$

Démonstration. Si $\Diamond x \subseteq y$, alors pour tout $b \in B$, on a successivement

$$\begin{aligned} & b \in x \Rightarrow \Diamond b \in y \\ \Leftrightarrow \quad & (\Diamond b \notin y \Rightarrow b \notin x) \\ \Leftrightarrow \quad & (\Diamond b \in -y \Rightarrow b \in -x) \\ \Leftrightarrow \quad & (b \in \Diamond^{-1}(-y) \Rightarrow b \in -x) \\ \Leftrightarrow \quad & \Diamond^{-1}(-y) \subseteq -x \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Grâce aux définitions et propriétés que nous venons d'établir, nous pouvons étudier plus en détails le dual d'un opérateur.

Définition 1.1.6. Soit B une algèbre modale, on définit la relation binaire $R_\Diamond$ sur $Ult(B)$ comme suit

$$xR_\Diamond y \quad si \quad et \quad seulement \quad si \quad \Diamond x \subseteq y.$$

Proposition 1.1.3. *Soit B une algèbre modale, l'espace $Ult(B)$ muni de la relation $R_\Diamond$ est un espace modal. De plus, on a l'égalité*

$$R_\Diamond(r(b), -) = r(\Diamond b),$$

pour tout $b \in B$.

Démonstration. Montrons d'abord que $(Ult(B), R_\Diamond)$ est un espace modal. Nous savons déjà que $Ult(B)$ est un espace de Boole [1], il reste donc à montrer que

1. $R_\Diamond$ est fermée dans $Ult(B)^2$;
2. $R_\Diamond(O, -)$ est un ouvert fermé si O est un ouvert fermé.

Commençons d'abord par démontrer le premier point. Pour cela, nous allons montrer que le complémentaire de $R_\Diamond$ est un ouvert. Soient $x, y \in Ult(B)$ tels que

$$(x, y) \notin R_\Diamond.$$

On obtient alors par définition de la relation $R_\Diamond$, $\Diamond x \nsubseteq y$. Ainsi, il existe $a \in x$ tel que $\Diamond a \notin y$. Or on sait que

$$r(a) = \{x \in Ult(B) : x \ni a\}.$$

Ainsi, on a $x \in r(a)$ et $y \in (-r(\Diamond a))$. Alors,

$$r(a) \ \times \ (-r(\Diamond a))$$

est un voisinage de (x, y) disjoint de $R_\Diamond$. En effet, si $(z, t) \in r(a) \times (-r(\Diamond a))$, alors $a \in z$ et $\Diamond a \notin t$, donc $\Diamond z \nsubseteq t$. On en conclut que $(z, t) \notin R_\Diamond$, et que $[r(a) \times (-r(\Diamond a))] \cap R_\Diamond = \emptyset$, d'où la conclusion.

Montrons maintenant que

$$R_\Diamond(r(b), -) = r(\Diamond b) \ \ \forall b \in B.$$

Soit $b \in B$, nous devons prouver que

$$\{\ y \mid \exists x \in r(b) : x R_\Diamond y\} = \{y \in Ult(B) | y \ni \Diamond b\}$$

Procédons par double inclusion. Commençons par montrer que $R_\Diamond(r(b), -) \subseteq r(\Diamond b)$. Prenons $y \in R_\Diamond(r(b), -)$. Par définition de l'ensemble, il existe $x \in r(b)$ tel que $x R_\Diamond y$. Autrement dit, il existe $x \ni b$ tel que $\Diamond x \subseteq y$. On trouve alors

$$\begin{aligned} & \Diamond b \in \Diamond x \subseteq y \\ \Rightarrow \ & \Diamond b \in y \\ \Rightarrow \ & y \in r(\Diamond b). \end{aligned}$$

Passons maintenant à l'autre inclusion, montrons que $R_\Diamond(r(b), -) \supseteq r(\Diamond b)$. Prenons $y \in r(\Diamond b)$. Par définition, on obtient

$$\Diamond b \in y \ \Rightarrow \ \Diamond b \notin (-y) \ \Rightarrow \ b \notin \Diamond^{-1}(-y).$$

Comme y est un ultrafiltre, $-y$ est un idéal maximal et vu la proposition (1.1.1), $\Diamond^{-1}(-y)$ est un idéal. Grâce au lemme de Zorn, on sait qu'il existe un idéal maximal contenant $\Diamond^{-1}(-y)$, mais qui ne contient pas b. Par passage au complémentaire, on obtient un

1. Vous pouvez trouver cette démonstration dans [13], p.53.

ultrafiltre x contenant b qui est tel que $x \cap \Diamond^{-1}(-y) = \emptyset$. On trouve alors que l'ultrafiltre x vérifie

$$x \in r(b) \text{ et } \Diamond x \subseteq y.$$

Ainsi, nous avons trouvé un ultrafiltre x tel que $x \in r(b)$ et $xR_\Diamond y$, d'où la conclusion.

Démontrons maintenant le second point. Prenons O un ouvert fermé de $Ult(B)$. Vu la remarque (B.2.2),

$$\{r_B(b)|b \in B\}.$$

est une base d'ouverts fermés de $Ult(B)$. Ainsi, puisque O un ouvert fermé de $Ult(B)$, il existe un sous ensemble B_1 de B tel que

$$O = \bigcup_{b \in B_1} r_B(b).$$

De plus, puisque O est un fermé de $Ult(B)$ qui est compact, O est compact. Il existe alors $b_1, \ldots, b_n \in B_1$ tel que

$$O = \bigcup_{i \in \{1 \ldots, n\}} r_B(b_i).$$

Enfin, puisque l'application r_B est un homomorphisme, on obtient

$$O = r_B \left(\bigcup_{i \in \{1 \ldots, n\}} b_i \right).$$

En posant $b = \bigcup_{i \in \{1 \ldots, n\}} b_i$, on a $O = r(b)$. De plus, on sait maintenant que

$$R_\Diamond(r(b), -) = r(\Diamond b) \quad \forall b \in B,$$

donc,

$$R_\Diamond(O, -) = R_\Diamond(r(b), -) = r(\Diamond b)$$

et on en conclut que $R_\Diamond(O, -)$ est un ouvert fermé donc nous avons le résultat. □

Définition 1.1.7. Soit X un espace modal. On note $of(X)$ l'ensemble des ouverts fermés de X, $of(X)$ est ordonné par inclusion. On définit l'opération unaire $\Diamond_R$ comme suit

$$\Diamond_R O = R(O, -)$$

sur $of(X)$.

Proposition 1.1.4. *Soit X un espace modal. L'ensemble $of(X)$ muni de l'opération $\Diamond_R$ est une algèbre modale.*

Démonstration. Prenons (X, R) un espace modal et montrons que $(of(X), \Diamond_R)$ est une algèbre modale. La proposition (B.2.10) montre que l'ensemble $of(X)$ est une algèbre de Boole. De plus, $\Diamond_R$ est bien défini puisque par définition d'un espace modal, si O est un ouvert fermé, $R(O, -)$ est aussi un ouvert fermé. Il reste donc à montrer que l'opération $\Diamond_R$ vérifie

1. $\Diamond_R(O \cup U) = \Diamond_R O \cup \Diamond_R U$;
2. $\Diamond_R \emptyset = \emptyset$.

Commençons par démontrer le premier point. Nous devons montrer que

$$R(O \cup U, -) = R(O, -) \cup R(U, -).$$

Procédons par double inclusion. Montrons d'abord que $R(O \cup U, -) \subseteq R(O, -) \cup R(U, -)$. Si $x \in R(O \cup U, -)$, alors il existe $y \in (O \cup U)$ tel que xRy. Puisque $y \in (O \cup U)$, $y \in O$ ou $y \in U$. Ainsi, comme xRy, $x \in R(O, -)$ ou bien $x \in R(U, -)$. Au final, $x \in R(O, -) \cup R(U, -)$, d'où la conclusion. Montrons maintenant que $R(O \cup U, -) \supseteq R(O, -) \cup R(U, -)$. Si $x \in R(O, -) \cup R(U, -)$ alors, $x \in R(O, -)$ ou bien $x \in R(U, -)$. Ainsi, soit il existe $y \in O$ tel que xRy, soit il existe $y \in U$ tel que xRy. Au final, il existe $y \in O \cup U$ tel que xRy et donc $x \in R(O \cup U, -)$.

Le second point est évident puisque $R(\emptyset, -)$ est l'ensemble des éléments en relation avec les éléments appartenant à l'ensemble vide. Ce qui conclut la preuve. □

1.1.3 Espace dual d'une algèbre modale

Dans cette section, nous établissons la dualité entre une algèbre modale et un espace modal. Cette dualité est une dualité de catégories et en conséquence, nous utilisons les concepts de la théorie des catégories [2]. Notons que nous avons fait le choix d'établir la dualité à l'aide des ultrafiltres mais nous aurions également pu l'établir à l'aide des idéaux maximaux.

Définition 1.1.8. L'application Ult est définie comme l'application qui à une algèbre modale B associe l'espace modal $Ult(B)$ et qui à un homomorphisme

$$f \ : \ B' \to B$$

d'algèbres modales associe $Ult(f) = f^{-1}$.

Remarque 1.1.5. Dans la suite, on notera $Ult(f) = f^*$.

Proposition 1.1.5. *L'application Ult est un foncteur contravariant de la catégorie MA dans la catégorie MS.*

Démonstration. Soit B une algèbre modale. Vu la proposition (1.1.3), $(Ult(B), R_\Diamond)$ est un espace modal. Soit B', une autre algèbre modale et $f : B' \to B$ un homomorphisme d'algèbre modale. Commençons par montrer que f^* est bien défini. On a $f^* : Ult(B) \to Ult(B')$. Prenons $x \in Ult(B)$ et montrons que $f^*(x) = f^{-1}(x) \in Ult(B')$. Cela découle

2. Vous pouvez trouver la définition de ces notions dans l'annexe A.

directement de la proposition (B.2.6).

Démontrons maintenant que f^* est un morphisme de MS. Vu la définition (1.1.5), nous devons montrer que f^* est une application continue vérifiant

$$f^*(R_\Diamond(-,y)) = R_\Diamond(-,f^*(y)) \ \ \forall y \in Ult(B).$$

Commençons par démontrer que f^* est une application continue. Prenons $b' \in B'$, et montrons que

$$(f^*)^{-1}(r_{B'}(b')) = r_B(f(b'))$$

On a,

$$\begin{aligned}(f^*)^{-1}(r_{B'}(b')) &= \{x \in Ult(B) | f^*(x) \in r_{B'}(b')\}\\ &= \{x \in Ult(B) | f^*(x) \ni b'\}\\ &= \{x \in Ult(B) | x \ni f(b')\}\\ &= r_B(f(b')).\end{aligned}$$

Nous devons maintenant prouver que f^* vérifie

$$f^*(R_\Diamond(-,y)) = R_\Diamond(-,f^*(y)) \ \ \forall y \in Ult(B)$$

Prenons $y \in Ult(B)$ et montrons d'abord que $f^*(R_\Diamond(-,y)) \subseteq R_\Diamond(-,f^*(y))$. Si $x \in R_\Diamond(-,y)$, alors $xR_\Diamond y$. Montrons que dans ce cas, $f^*(x)R_\Diamond f^*(y)$. Traduisons tout d'abord l'implication à démontrer. Nous devons montrer que

$$\Diamond x \subseteq y \Rightarrow \Diamond f^{-1}(x) \subseteq f^{-1}(y).$$

Soit $b \in f^{-1}(x)$, montrons que $\Diamond b \in f^{-1}(y)$. On a $f(b) \in x$, donc $\Diamond f(b) \in y$ car $\Diamond x \subseteq y$ par hypothèse. Comme f est un homomorphisme d'algèbres modales, on a $\Diamond f(b) = f(\Diamond b) \in y$, et on en conclu que $\Diamond b \in f^{-1}(y)$.
Montrons maintenant que $f^*(R_\Diamond(-,y)) \supseteq R_\Diamond(-,f^*(y))$. Soit $x' \in Ult(B')$, tel que $x'R_\Diamond f^*(y)$. Nous voulons trouver $x \in Ult(B)$ tel que $xR_\Diamond y$ et $f^*(x) = x'$. Supposons qu'un tel x existe. Vu que $xR_\Diamond y$, on a $\Diamond x \subseteq y$ et vu la proposition (1.1.2), on a $\Diamond^{-1}(-y) \subseteq -x$. On en conclut que

$$x \cap \Diamond^{-1}(-y) = \emptyset.$$

De plus, comme y est un ultrafiltre, $-y$ est un idéal et ainsi, vu la proposition (1.1.1), $\Diamond^{-1}(-y)$ est aussi un idéal. Nous avons également $f^*(x) = x'$. Or, vu la remarque (B.1.2), on a

$$f^{-1}(x) = x' \Leftrightarrow x \supseteq f(x').$$

Considérons $f(x') \uparrow$. Remarquons que $f(x') \uparrow$ est un filtre, puisque f est un homomorphisme et x' est fermé pour $\wedge$. De plus, la propriété précédente est conservée : $x \supseteq f(x') \uparrow$. Il reste à montrer que $\Diamond^{-1}(-y) \cap f(x') \uparrow = \emptyset$. Ainsi, nous pourrons utiliser de théorème de séparation de Stone (B.2.8), et donc prouver l'existence d'un tel x. Procédons par l'absurde, supposons qu'il existe $b \in (\Diamond^{-1}(-y) \cap f(x') \uparrow)$. Dans ce cas, $\Diamond b \notin y$ et $b \geq f(a')$ pour un $a' \in x'$. En remarquant que $-y$ est un idéal, on obtient

$$\Diamond f(a') \leq \Diamond b \text{ et } \Diamond b \notin y \Rightarrow \Diamond f(a') \notin y.$$

En utilisant le fait que f est un homomorphisme d'algèbres modales, on trouve

$$\Diamond f(a') \notin y \;\Rightarrow\; f(\Diamond a') \notin y \;\Rightarrow\; \Diamond a' \notin f^{-1}(y).$$

De plus, nous avons supposé que $x' R_\Diamond f^*(y)$, ce qui est équivalent à $\Diamond x' \subseteq f^{-1}(y)$. Comme $a' \in x'$, on trouve,

$$\Diamond a' \in \Diamond x' \subseteq f^{-1}(y)$$

On obtient alors une absurdité et donc le résultat.

Prenons maintenant A, B et C des algèbres modales et prenons $f : B \to C$ et $g : A \to B$ des homomorphismes d'algèbres modales. On a

$$Ult(f \circ g) = (f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1} = Ult(g) \circ Ult(f).$$

De plus, pour toute algèbre modale B, l'application $Ult(id_B)$ est donnée par

$$(id_B)^{-1} : Ult(B) \to Ult(B).$$

On peut en conclure que $Ult(id_B) = id_{Ult(B)}$. On en conclut que Ult est un foncteur contravariant.

□

Définition 1.1.9. L'application of est définie comme l'application qui à un espace modal X associe l'algèbre modale $of(X)$ et qui à un homomorphisme continu

$$\varphi \; : \; X' \to X$$

entre deux espaces modaux associe $of(\varphi) = \varphi^{-1}$.

Remarque 1.1.6. Dans la suite, on notera $of(\varphi) = \varphi^*$.

Proposition 1.1.6. *L'application of est un foncteur contravariant de la catégorie MS dans la catégorie MA.*

Démonstration. Soit X un espace modal, grâce à la proposition (1.1.4), on sait déjà que $(of(X), \Diamond_R)$ est une algèbre modale. Soit X' un deuxième espace modal et $\varphi \; : \; X' \to X$ un morphisme de la catégorie MS. Montrons que $of(\varphi) = \varphi^*$ est un morphisme de MA (c'est à dire un homomorphisme d'algèbres modales).

Montrons d'abord que l'application $\varphi^* : of(X) \to of(X')$ est bien définie. Si $O \in of(X)$, alors $\varphi^*(O) = \varphi^{-1}(O) \in of(X)$ puisque φ est une application continue.

Montrons maintenant que φ^* est un homomorphisme d'algèbres modales. Commençons par montrer que φ^* est un homomorphisme d'algèbres de Boole. Soient $O, U \in of(X)$, on a

— $\varphi^*(O \vee U) = \varphi^{-1}(O \cup U) = \varphi^{-1}(O) \cup \varphi^{-1}(U) = \varphi^*(O) \vee \varphi^*(U)$;
— $\varphi^*(O^c) = \varphi^{-1}(X \setminus O) = X' \setminus (\varphi^{-1}(O)) = (\varphi^*(O))^c$.

Donc φ^* est un homomorphisme d'algèbres de Boole vu la proposition (B.2.3). Nous devons maintenant montrer que si $O \in of(X)$, alors

$$\varphi^*(\Diamond_R O) = \Diamond_R(\varphi^*(O)),$$

ceci est équivalent à montrer que

$$\varphi^*(R(O,-)) = R(\varphi^*(O),-).$$

Procédons par double inclusion. Commençons par montrer que $\varphi^*(R(O,-)) \subseteq R(\varphi^*(O),-)$. Soit $x' \in \varphi^*(R(O,-))$, alors il existe $y \in O$ tel que $yR\varphi(x')$. Étant donné que φ est un homomorphisme continu entre deux espaces modaux, nous pouvons utiliser le second point de la remarque (1.1.4). Ainsi, il existe $y' \in X'$ tel que $y'Rx'$ et $\varphi(y') = y \in O$. Au final, il existe $y' \in \varphi^*(O)$ tel que $y'Rx'$, donc $x' \in R(\varphi^*(O),-)$. Montrons maintenant que $R(\varphi^*(O),-) \subseteq \varphi^*(R(O,-))$. Soit $y' \in R(\varphi^*(O),-)$, alors il existe $x' \in \varphi^*(O)$ (*ie.* $\varphi(x') \in O$) tel que $x'Ry'$. De nouveau, en utilisant la remarque (1.1.4), on obtient que $\varphi(x')R\varphi(y')$. Ainsi, il existe $x = \varphi(x') \in O$ tel que $xR\varphi(y')$ et donc $y' \in \varphi^*(R(O,-))$.

Prenons maintenant X, Y et Z des espaces modaux et prenons $\varphi : Y \to Z$ et $\psi : X \to Y$ des homomorphismes d'espaces modaux. On a

$$of(\varphi \circ \psi) = (\varphi \circ \psi)^{-1} = \psi^{-1} \circ \varphi^{-1} = of(\psi) \circ of(\varphi).$$

De plus, pour tout espace modal X, l'application $of(id_X)$ est donnée par

$$(id_X)^{-1} : of(X) \to of(X).$$

On peut en conclure que $of(id_X) = id_{of(X)}$. On en conclut que of est un foncteur contravariant.

□

Nous savons maintenant que les applications Ult et Of sont des foncteurs contravariants. Afin d'obtenir une équivalence duale, nous devons prouver les isomorphismes avec les biduaux.

Proposition 1.1.7. *Soit B une algèbre modale. Alors l'application*

$$\begin{aligned} r_B \ : \ & B \to of(Ult(B)) \\ & b \mapsto r_B(b) = \{x \in Ult(B) | x \ni b\} \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'algèbres modales.

Démonstration. Vu la proposition (B.2.13), l'application r_B est un isomorphisme d'algèbres de Boole. Il nous reste à prouver que

$$r_B(\Diamond b) = \Diamond_{R_\Diamond}(r_B(b)).$$

Or, en utilisant la proposition (1.1.3) on a

$$\begin{aligned}\Diamond_{R_\Diamond}(r_B(b)) &= R_\Diamond(r_B(b), -)\\ &= r_B(\Diamond b).\end{aligned}$$

D'où la conclusion. $\square$

Proposition 1.1.8. *Soit X un espace modale. Alors l'application*

$$\begin{aligned}\varepsilon_X \ : \ & X \to Ult(of(X))\\ & x \mapsto \varepsilon_X(x) = \{O \in of(X) | O \ni x\}\end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces modaux.

Démonstration. Vu la proposition (B.2.15), l'application ε_X est un isomorphisme d'espaces de Boole. Il nous reste donc à prouver que

$$xRy \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon_X(x) R_{\Diamond_R} \varepsilon_X(y).$$

Or,

$$\varepsilon_X(x) R_{\Diamond_R} \varepsilon_X(y) \ \Leftrightarrow \ \Diamond_R \varepsilon_X(x) \subseteq \varepsilon_X(y) \ \Leftrightarrow \forall O \in of(X) : (O \ni x \Rightarrow R(O, -) \ni y).$$

Ainsi, nous devons montrer que

$$xRy \ \Leftrightarrow \ \forall O \in of(X) : (O \ni x \Rightarrow R(O, -) \ni y).$$

Montrons que la condition est nécessaire. Supposons que xRy et prenons $O \in of(X)$ tel que $O \ni x$. Il est alors clair que $R(O, -) \ni y$. Montrons maintenant que la condition est suffisante. Procédons par l'absurde, supposons que $\forall O \in of(X) : (O \ni x \Rightarrow R(O, -) \ni y)$ et que $(x, y) \notin R$. Dans ce cas, il existe $O, U \in of(X)$ tel que

$$(x, y) \in O \times U \text{ et } (O \times U) \cap R = \emptyset.$$

La seconde condition nous permet d'affirmer que $R(O, -) \subseteq -U$. Comme $x \in O$, on obtient par hypothèse $y \in R(O, -) \subseteq -U$. Or $y \in U$, donc on obtient une absurdité, d'où la conclusion. $\square$

Il nous reste à montrer que les diagrammes correspondants sont commutatifs. Les démonstrations des deux propositions suivantes sont identiques à celles effectuées dans le cas des algèbres de Boole. [3]

Proposition 1.1.9. *Soient B et B' deux algèbres modales et $f : B \to B'$ un homomorphisme d'algèbres modales. Le diagramme suivant est commutatif.*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "r_B"] \arrow[d, "f"'] & of(Ult(B)) \arrow[d, "of(Ult(f))"] \\ B' \arrow[r, "r_{B'}"] & of(Ult(B')) \end{tikzcd}$$

3. Vous pouvez trouver ces démonstrations dans [13], p.57. et p.58.

Proposition 1.1.10. *Soient X et X' deux espaces modaux et $\varphi : X \to X'$ un morphisme de la catégorie MS. Le diagramme suivant est commutatif.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varepsilon_X"] \arrow[d, "\varphi"'] & Ult(of(X)) \arrow[d, "Ult(of(\varphi))"] \\ X' \arrow[r, "\varepsilon_{X'}"] & Ult(of(X')) \end{tikzcd}$$

Toutes ces propositions nous permettent d'obtenir l'équivalence duale.

Théorème 1.1.11. *Les foncteurs contravariants Ult et of établissent une équivalence duale entre la catégorie MA et la catégorie MS.*

1.2 Les algèbres de Boole de pré-contact

Les algèbres de pré-contact sont des algèbres de Boole munies d'une relation de disjonction binaire. Dans cette section, nous étudions un exemple d'algèbre de pré-contact et nous établissons la dualité entre les algèbres de pré-contact et les espaces de pré-contact. Pour cela, nous effectuons le même raisonnement que dans la section précédente. Dans la suite, nous obtenons un théorème de complétude pour les algèbres de pré-contact.

1.2.1 Introduction aux algèbres de pré-contact et aux espaces de pré-contact

Dans cette partie, nous définissons les algèbres de pré-contact et en donnons les définitions équivalentes. Dans la suite, nous passons d'une définition à l'autre en fonction des besoins. Nous définissons ensuite les espaces de pré-contact.

Définition 1.2.1. Une *algèbre de pré-contact* $(B, \perp)$ est une algèbre de Boole B munie d'une relation de disjonction binaire $\perp$ telle que pour tous $a, b, c, d \in B$,
$\perp$ 1 : si $a \leq b$, $c \geq d$ et $b \perp c$, alors $a \perp d$;
$\perp$ 2 : si $a \perp c$, $a \perp d$, $b \perp c$ et $b \perp d$ alors $a \vee b \perp c \vee d$;
$\perp$ 3 : $0 \perp 1$;
$\perp$ 4 : $1 \perp 0$.

Remarque 1.2.1. Lorsque la relation $\perp$ vérifie également les axiomes
$\perp$ 5 : si $a \perp a$, alors $a = 0$;
$\perp$ 6 : si $a \perp b$, alors $b \perp a$;
$\perp$ 7 : si $a \not\leq b$ alors il existe $e \in B$ tel que $e \not\perp a$ et $e \perp b$,
l'algèbre de pré-contact $(B, \perp)$ est appelée *algèbre de contact.*

Remarque 1.2.2. Dans la suite, pour éviter d'alourdir les notations, nous noterons B une algèbre de pré-contact. Nous veillerons évidemment à ce qu'aucune confusion ne soit possible entre une algèbre de pré-contact et une algèbre modale.

En général, pour montrer qu'une algèbre de Boole B munie d'une relation de disjonction binaire $\perp$ est une algèbre de pré-contact, on privilégiera le contact $\mathscr{C}$ plutôt que la disjonction $\perp$. On pose $\mathscr{C} :=\not\perp$ et $\mathscr{C}$ est appelé *relation de contact*. On peut ainsi obtenir une nouvelle liste d'axiomes $\mathscr{C}1, 2, 3, 4$ équivalents aux axiomes $\perp\ 1, 2, 3, 4$. En effet, on obtient la liste suivante
$\mathscr{C}$ 1 : si $a \leq b$, $c \geq d$ et $a\mathscr{C}d$, alors $b\mathscr{C}c$;
$\mathscr{C}$ 2 : si $a \vee b\mathscr{C}c \vee d$, alors $a\mathscr{C}c$ ou $a\mathscr{C}d$ ou $b\mathscr{C}c$ ou $b\mathscr{C}d$;
$\mathscr{C}$ 3 : $0 \not\mathscr{C}\ 1$;
$\mathscr{C}$ 4 : $1 \not\mathscr{C}\ 0$;
Les axiomes $\mathscr{C}1$ et 2 sont obtenus en contraposant les axiomes $\perp$ 1 et 2 et les axiomes $\mathscr{C}3$ et 4 sont obtenus en remplaçant $\perp$ par $\not\mathscr{C}$ et $\not\perp$ par $\mathscr{C}$. Puisque connaître $\perp$ est équivalent à connaître $\mathscr{C}$, nous appellerons également $(B, \mathscr{C})$ une algèbre de pré-contact.

De la même manière, pour montrer qu'une algèbre de Boole B munie d'une relation de disjonction $\perp$ binaire est une algèbre de contact, il suffira de montrer que la relation $\mathscr{C}$ vérifie les axiomes $\mathscr{C}1, 2, 3, 4$ ainsi que les axiomes
$\mathscr{C}$ 5 : si $a \neq 0$, alors $a\mathscr{C}a$;
$\mathscr{C}$ 6 : si $a\mathscr{C}b$, alors $b\mathscr{C}a$;
$\mathscr{C}$ 7 : si $a \not\leq b$ alors il existe $e \in B$ tel que $e\mathscr{C}a$ et $e\not\mathscr{C}b$.
Les axiomes $\mathscr{C}5$ et 6 sont obtenus en contraposant les axiomes $\perp$ 5 et 6. L'axiome $\mathscr{C}$ 7 est quant à lui obtenu à partir de l'axiome $\perp$ 7 en remplaçant $\perp$ par $\not\mathscr{C}$ et $\not\perp$ par $\mathscr{C}$.

Proposition 1.2.1. *Soient B une algèbre de Boole et $\mathscr{C}$ une relation binaire sur B vérifiant les axiomes $\mathscr{C}1$ à $\mathscr{C}5$. Alors $\mathscr{C}$ vérifie l'axiome $\mathscr{C}7$ si et seulement si, pour tout $b \in B$*

$$b \neq 1 \Rightarrow \exists a \neq 0 : a\not\mathscr{C}b.$$

Démonstration. Supposons que l'axiome $\mathscr{C}7$ est vérifié et prenons $b \in B$ tel que $b \neq 1$. Alors $1 \not\leq b$ et vu l'axiome $\mathscr{C}7$, il existe $a \in B$ tel que $a\mathscr{C}1$ et $a\not\mathscr{C}b$. Vu l'axiome $\mathscr{C}3$, $a \neq 0$.

Supposons maintenant que

$$b \neq 1 \Rightarrow \exists a \neq 0 : a\not\mathscr{C}b.$$

pour tout $b \in B$. Soient $a, b \in B$ tels que $a \not\leq b$. Alors, vu la proposition (B.2.1), on a $a^c \vee b \neq 1$. Par hypothèse, il existe $c \in B$ tel que $c \neq 0$ et $c\not\mathscr{C}(a^c \vee b)$. Comme $c \leq c, (a^c \vee b) \geq a^c$ et $c\not\mathscr{C}(a^c \vee b)$ alors, vu $\perp$ 1, $c\not\mathscr{C}a^c$. De la même manière, puisque $(a^c \vee b) \geq b$, on a $c\not\mathscr{C}b$. Supposons maintenant que $c\not\mathscr{C}a$. Dans ce cas, $c \perp a^c$ et $c \perp a$. Vu l'axiome $\perp$ 2, on a $c = c \vee c \perp a^c \vee a = 1$. Comme $c \leq c, 1 \geq c$ et $c \perp 1$, en appliquant $\perp$ 1, on voit que $c \perp c$ et donc $c = 0$ vu $\perp$ 5, d'où une contradiction et donc la conclusion. $\square$

Nous introduisons maintenant une dernière relation qui nous permet d'écrire autrement les axiomes découverts précédemment.

Définition 1.2.2. Soit $(B, \perp)$ une algèbre de pré-contact. La *relation de proximité* sur B est la relation $\prec$ définie par

$$a \prec b \quad \Leftrightarrow \quad a \perp b^c$$

pour tous $a, b \in B$;

Grâce à cette nouvelle définition, nous pouvons obtenir de nouveaux axiomes $\prec 1, 2, 3$ et 4 équivalents aux axiomes $\perp 1, 2, 3$ et 4.

Proposition 1.2.2. *Si $(B, \perp)$ est une algèbre de pré-contact et $\prec$ une relation de proximité sur B, alors $\prec$ vérifie les propriétés suivantes :*
$\prec 1$ *: si $a \leq b$, $c \leq d$ et $b \prec c$, alors $a \prec d$;*
$\prec 2$ *: si $a \prec c$, $a \prec d$, $b \prec c$ et $b \prec d$ alors $a \vee b \prec c \wedge d$;*
$\prec 3$ *: $0 \prec 0$;*
$\prec 4$ *: $1 \prec 1$;*
pour tous $a, b, c, d \in B$.

Nous pouvons également obtenir des axiomes $\prec 5, 6$ et 7 équivalents aux axiomes $\perp 5, 6$ et 7.

Proposition 1.2.3. *Si $(B, \perp)$ est une algèbre de contact et $\prec$ une relation de proximité sur B, alors $\prec$ vérifie $\prec 1, 2, 3$ et 4 mais également les propriétés suivantes :*
$\prec 5$ *: si $a \prec b$ alors $a \leq b$;*
$\prec 6$ *: si $a \prec b$ alors $b^c \prec a^c$;*
$\prec 7$ *: si $a \neq 0$ alors il existe $b \in B$ tel que $b \neq 0$ et $b \prec a$.*
pour tous $a, b \in B$.

Démonstration. Montrons premièrement que l'axiome $\prec 5$ est équivalent à l'axiome $\perp 5$. Supposons que $\perp$ vérifie l'axiome $\perp 5$, et montrons que $\prec$ vérifie $\prec 5$. Supposons que $a \prec b$, alors par définition $a \perp b^c$. En utilisant l'axiome $\perp 1$, puisque $a \wedge b^c \leq a, b^c \geq a \wedge b^c$ et $a \perp b^c$, on obtient $a \wedge b^c \perp a \wedge b^c$. Vu l'axiome $\perp 5$, $a \wedge b^c = 0$. Ainsi, vu la proposition (B.2.1), $a \leq b$. Supposons maintenant que $\prec$ vérifie $\prec 5$ et montrons que $\perp$ vérifie $\perp 5$. Supposons que $a \perp a$, alors $a \prec a^c$. Vu l'axiome $\prec 5$, $a \leq a^c$ et vu la remarque (B.2.1), $a = 0$, d'où la conclusion.

Montrons que l'axiome $\prec 6$ est équivalent à l'axiome $\perp 6$. Supposons d'abord que $\perp$ vérifie l'axiome $\perp 6$ et que $a \prec b$. Par définition, $a \perp b^c$ et vu l'axiome $\perp 6$, $b^c \perp a$. Autrement dit, $b^c \perp (a^c)^c$ et donc $b^c \prec a^c$ et $\prec$ vérifie ainsi l'axiome $\prec 6$. Supposons que $\prec$ vérifie l'axiome $\prec 6$ et que $a \perp b$. On a alors $a \prec b^c$ et vu l'axiome $\prec 6$, $b \prec a^c$. On en conclut que $b \perp a$ et donc $\perp$ vérifie l'axiome $\perp 6$.

Montrons enfin que l'axiome $\prec 7$ est équivalent à l'axiome $\perp 7$. Supposons premièrement que $\perp$ vérifie $\perp 7$ et que $a \neq 0$. Alors, $a^c \neq 1$ et vu la proposition (1.2.1), il existe $b \neq 0$ tel que $b \perp a^c$. Autrement dit, $b \prec a$ et $\prec$ vérifie l'axiome $\prec 7$. Supposons maintenant que $\prec$ vérifie $\prec 7$ et que $a \neq 1$. Dans ce cas, $a^c \neq 0$ et vu l'axiome $\prec 7$, il existe $b \neq 0$ tel que $b \prec a^c$. Ainsi, $b \perp a$ et donc $\perp$ vérifie l'axiome $\perp 7$, d'où le résultat. $\square$

Définition 1.2.3. Un *homomorphisme d'algèbres de pré-contact* $f : B \to B'$ est un homomorphisme d'algèbres de Boole tel que

$$\prec (f(b), -) = f(\prec (b, -)) \uparrow .$$

pour tout $b \in B$.

Remarquons que nous faisons une confusion entre la relation de proximité sur B et celle sur B'. De nouveau, nous sommes conscient que ces relations ne sont pas identiques mais aucun doute n'est possible quant à l'algèbre sur laquelle nous travaillons étant donné les éléments mis en relation. Nous continuerons dans la suite à faire cette confusion (et il en sera de même pour relation de disjonction binaire $\perp$ ainsi que pour la relation de contact $\mathscr{C}$).

Remarque 1.2.3. Traduisons cette égalité. On peut déduire de l'inclusion $\prec (f(b), -) \subseteq f(\prec (b, -)) \uparrow$ que s'il existe $b \in B$ et $b' \in B'$ tels que $f(b) \prec b'$ alors il existe $c \in B$ tel que $f(c) \leq b'$ et $b \prec c$. De l'inclusion $\prec (f(b), -) \supseteq f(\prec (b, -)) \uparrow$, on peut déduire que si il existe $b, c \in B$ tel que $b \prec c$ alors $f(b) \prec f(c)$.

Définition 1.2.4. La *catégorie des algèbres de pré-contact*, notée PCA , est la catégorie dont les objets sont les algèbres de pré-contact et les morphismes sont les homomorphismes d'algèbres de pré-contact.

Définition 1.2.5. Un *espace de pré-contact* est un espace (X, R) où $X = (X, \tau)$ est un espace de Boole et R est une relation binaire ($R \subseteq X^2$) fermée.

Définition 1.2.6. La *catégorie des espaces de pré-contact*, notée PCS, est la catégorie dont les objets sont les espaces de pré-contact et les morphismes sont les homomorphismes continus φ définis d'un espace de pré-contact (X, R) dans un autre (X', R) et tels que

$$\varphi(R(-, x)) = R(-, \varphi(x)) \quad \forall x \in X.$$

Nous confondons encore une fois les relations sur X et sur X' mais aucun doute n'est possible.

Remarque 1.2.4. La définition que nous avons choisi ici est similaire à la définition (1.1.5) de la catégorie des espaces modaux. En particulier, nous pouvons constater que la remarque (1.1.4) s'applique également aux homomorphismes que nous venons de définir.

1.2.2 Un exemple d'algèbre de pré-contact

Afin d'illustrer cette nouvelle définition, nous donnons un exemple d'algèbre de pré-contact. Pour cela, nous établissons au préalable une série de propositions qui nous permet de prouver que notre algèbre est bien une algèbre de pré-contact.

Proposition 1.2.4. *Soit X un espace topologique. Si A est une partie fermée de X et si D est une partie quelconque de X, alors*

$$(A \cup D)^\circ = (A \cup D^\circ)^\circ$$

Démonstration. Puisque $D^\circ \subseteq D$, il est clair que $(A \cup D)^\circ \supseteq (A \cup D^\circ)^\circ$. Prenons maintenant $x \in (A \cup D)^\circ$. Puisque $(A \cup D)^\circ$ est un ouvert, il existe O un ouvert de base tel que $x \in O \subseteq (A \cup D)^\circ \subseteq A \cup D$. De plus, comme A est un fermé, $O \setminus A$ est un ouvert de X. On obtient alors

$$O \subseteq A \cup D \Rightarrow O \setminus A \subseteq D \Rightarrow O \setminus A \subseteq D^\circ \Rightarrow O \subseteq A \cup D^\circ.$$

Puisque O est un ouvert, on obtient

$$x \in O \subseteq (A \cup D^\circ)^\circ,$$

d'où le résultat. $\square$

On obtient la proposition suivante grâce à la commutativité de l'union.

Proposition 1.2.5. *Soit X un espace topologique. Si A est une partie fermée de X et si D est une partie quelconque de X, alors*

$$(D \cup A)^\circ = (D^\circ \cup A)^\circ$$

Proposition 1.2.6. *Soit X un espace topologique. Si A et B sont des parties fermées de X, alors*

$$\overline{(A \cup B)^\circ} = \overline{A^\circ} \cup \overline{B^\circ}$$

Démonstration. Procédons par double inclusion, commençons par montrer que $\overline{(A \cup B)^\circ} \supseteq \overline{A^\circ} \cup \overline{B^\circ}$. Par définition de l'intérieur, $A^\circ \subseteq A$ et $B^\circ \subseteq B$, ce qui implique que $A^\circ \cup B^\circ \subseteq A \cup B$. Ainsi, puisque $A^\circ \cup B^\circ$ est un ouvert, on obtient $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$. On trouve alors que

$$\overline{A^\circ} \cup \overline{B^\circ} = \overline{A^\circ \cup B^\circ} \subseteq \overline{(A \cup B)^\circ},$$

d'où le résultat. Montrons à présent que $\overline{(A \cup B)^\circ} \subseteq \overline{A^\circ} \cup \overline{B^\circ}$. En utilisant les deux propositions précédentes et la définition de l'adhérence, on obtient

$$(A \cup B)^\circ = (A \cup B^\circ)^\circ \subseteq (A \cup \overline{B^\circ})^\circ = (A^\circ \cup \overline{B^\circ})^\circ \subseteq (\overline{A^\circ} \cup \overline{B^\circ})^\circ \subseteq \overline{(\overline{A^\circ} \cup \overline{B^\circ})^\circ}.$$

De plus, pour tout fermé F de X, $\overline{F^\circ} \subseteq F$. En effet, nous savons que $F^\circ \subseteq F$ par définition de l'intérieur. Donc, $\overline{F^\circ} \subseteq \overline{F} = F$, d'où la conclusion. Ainsi, puisque $\overline{A^\circ} \cup \overline{B^\circ}$ est un fermé de X, on obtient

$$(A \cup B)^\circ \subseteq \overline{(\overline{A^\circ} \cup \overline{B^\circ})^\circ} \subseteq \overline{A^\circ} \cup \overline{B^\circ}.$$

On conclut en utilisant encore une fois le fait que $\overline{A^\circ} \cup \overline{B^\circ}$ est un fermé et il est donc égal à son adhérence. Ainsi,

$$\overline{(A \cup B)^\circ} \subseteq \overline{A^\circ} \cup \overline{B^\circ},$$

d'où le résultat. $\square$

Définition 1.2.7. Soit X un espace topologique. Un *fermé régulier* est un fermé A égal l'adhérence de son intérieur. Autrement dit, $\overline{A^\circ} = A$. On note $RC(X)$ l'ensemble des fermés réguliers de X.

Théorème 1.2.7. *Si X est un espace topologique, alors $RC(X)$ (ordonné par inclusion) est une algèbre de Boole complète dans laquelle*

$$A \vee B = A \cup B \qquad A \wedge B = \overline{(A \cap B)^\circ} \qquad \neg A = \overline{(X \backslash A)}$$

pour tous $A, B \in RC(X)$.

Démonstration. Procédons par étapes. Soit F un fermé de X, rappelons d'abord que

$$\overline{F^\circ} \subseteq F. \tag{1.1}$$

De la même manière, si O est un ouvert de X, on a

$$O \subseteq \overline{O}^\circ. \tag{1.2}$$

En effet, on a $O = O^\circ \subseteq \overline{O}^\circ$.

Montrons maintenant que l'application

$$^{\circ -} : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$$

est isotone. Soit Y, $Z \in \mathcal{P}(X)$ tels que $Y \subseteq Z$. Par définition de l'intérieur, $Y^\circ \subseteq Y \subseteq Z$. Or, Z° est le plus grand ouvert inclus dans Z, donc $Y^\circ \subseteq Z^\circ$. On en tire que $Y^\circ \subseteq \overline{Z^\circ}$ et puisque $\overline{Y^\circ}$ est le plus petit fermé contenant Y°, on trouve $\overline{Y^\circ} \subseteq \overline{Z^\circ}$.

Montrons ensuite que si $A, B \in RC(X)$, alors $A \cup B \in RC(X)$. Nous devons prouver que $A \cup B$ est fermé et que $\overline{(A \cup B)^\circ} = A \cup B$. Premièrement, puisque $A \cup B$ est une union finie de fermés, elle est également fermée. Ensuite, vu (1.1), $\overline{(A \cup B)^\circ} \subseteq A \cup B$. De plus, on a

$$A \cup B = \overline{A^\circ} \cup \overline{B^\circ} = \overline{(A^\circ \cup B^\circ)} \subseteq \overline{(A \cup B)^\circ},$$

d'où l'égalité.

Montrons que $A \vee B = A \cup B$. Comme $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$ et $A \cup B \in RC(X)$, $A \cup B$ est un majorant de $\{A, B\}$ dans $RC(X)$. Si C est un majorant de $\{A, B\}$ dans $RC(X)$, alors $A \subseteq C$ et $B \subseteq C$ donc $A \cup B \subseteq C$. Ainsi $A \vee B = A \cup B$.

Pour toute partie Y de X, on a

$$\overline{Y^\circ} \in RC(X). \tag{1.3}$$

En effet, $\overline{Y^\circ}$ est un fermé et vu l'inclusion (1.1), on a $\overline{(\overline{Y^\circ})^\circ} \subseteq \overline{Y^\circ}$. De plus, Y° est un ouvert et vu l'inclusion (1.2), on a $Y^\circ \subseteq (\overline{Y^\circ})^\circ$ et donc $\overline{(\overline{Y^\circ})^\circ} \supseteq \overline{Y^\circ}$.

Prenons maintenant un fermé F et montrons que $\overline{F^\circ}$ est le plus grand fermé régulier inclus dans F. Grâce au point précédent, nous savons que $\overline{F^\circ}$ est bien un fermé régulier et vu (1.1), il est inclus dans F. Prouvons alors que c'est le plus grand des fermés réguliers inclus dans F. Soit $G \in RC(X)$ tel que $G \subseteq F$. Alors, puisque $\overline{G^\circ} = G$ et puisque l'application ${}^{\circ -}$ est isotone, on obtient

$$G = \overline{G^\circ} \subseteq \overline{F^\circ},$$

d'où le résultat.

Montrons à présent que si $A, B \in RC(X)$ alors $A \wedge B = \overline{(A \cap B)^\circ}$. Puisque A et B sont fermés, $A \cap B$ est également fermé. Ainsi, en utilisant le point précédent, $\overline{(A \cap B)^\circ}$ est le plus grand fermé régulier inclus dans $A \cap B$. Donc, $\overline{(A \cap B)^\circ}$ est le plus grand des minorants, c'est donc la borne inférieure.

Il est clair que $\emptyset$ et X sont des fermés réguliers et que $\emptyset \subseteq A \subseteq X$ pour tout $A \in RC(X)$.

Montrons maintenant que si $A \in RC(X)$ alors $B := \overline{(X \setminus A)} \in RC(X)$ et

$$A \wedge B = \emptyset \qquad A \vee B = X.$$

Premièrement, $\overline{(X \setminus A)} = \overline{(X \setminus A)^\circ}$ et vu (1.3), $B \in RC(X)$. De plus, remarquons que $B = \overline{(X \setminus A)} = X \setminus A^\circ$. Ainsi, on obtient

$$A \vee B = A \cup B = A \cup (X \setminus A^\circ) = X.$$

On a également

$$A \wedge B = \overline{(A \cap B)^\circ} = \overline{(A \cap (X \setminus A^\circ))^\circ} = \overline{(A^\circ \cap (X \setminus A^\circ)^\circ)} = \overline{\emptyset} = \emptyset.$$

Afin de montrer que $RC(X)$ est une algèbre de Boole, il nous reste à montrer que

$$(A \vee B) \wedge (A \vee C) = A \vee (B \wedge C)$$

pour tous $A, B, C \in RC(X)$. Autrement dit, nous devons montrer que

$$\overline{((A \cup B) \cap (A \cup C))^\circ} = A \cup \overline{(B \cap C)^\circ}$$

pour tous $A, B, C \in RC(X)$. Puisque l'intersection de deux fermés est encore fermée et qu'il en est de même pour l'union, on peut utiliser la proposition (1.2.6) et on trouve

$$\begin{aligned}
\overline{((A \cup B) \cap (A \cup C))^\circ} &= \overline{(((A \cup B) \cap A) \cup ((A \cup B) \cap C))^\circ} \\
&= \overline{(A \cup ((A \cap C) \cup (B \cap C))^\circ} \\
&= \overline{(A \cup (A \cap C))^\circ} \cup \overline{(B \cap C)^\circ} \\
&= \overline{A^\circ} \cup \overline{(B \cap C)^\circ} \\
&= A \cup \overline{(B \cap C)^\circ}
\end{aligned}$$

d'où la distributivité de l'algèbre de Boole $RC(X)$.

Nous venons de montrer que $RC(X)$ est une algèbre de Boole. Il reste donc à montrer que cette algèbre de Boole est complète. Soient I un ensemble d'indices et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de $RC(X)$. Montrons que $\underset{i\in I}{\wedge} A_i$ et $\underset{i\in I}{\vee} A_i$ existent.

Premièrement, on a

$$\underset{i\in I}{\wedge} A_i = \overline{(\underset{i\in I}{\cap} A_i)^\circ}.$$

En effet, puisque A_i est un fermé pour tout $i \in I$, $\underset{i\in I}{\cap} A_i$ est également fermé. Ainsi, vu ce qui précède, $\overline{(\underset{i\in I}{\cap} A_i)^\circ}$ est le plus grand des minorants de $\underset{i\in I}{\wedge} A_i$. Il s'agit donc de la borne inférieure.

Ensuite, on a

$$\underset{i\in I}{\vee} A_i = \overline{(\underset{i\in I}{\cup} A_i)}.$$

En effet, $\overline{(\underset{i\in I}{\cup} A_i)}$ est un fermé donc vu (1.1), on obtient

$$\overline{(\underset{i\in I}{\cup} A_i)} \supseteq \overline{(\overline{(\underset{i\in I}{\cup} A_i)})^\circ}.$$

De plus, puisque $A_i \subseteq \underset{i\in I}{\cup} A_i \subseteq \overline{(\underset{i\in I}{\cup} A_i)}$ pour tout $i \in I$, $\overline{(\underset{i\in I}{\cup} A_i)}$ est un majorant et on a

$$A_i = \overline{A_i^\circ} \subseteq \overline{(\overline{(\underset{i\in I}{\cup} A_i)})^\circ}.$$

Ainsi,

$$\underset{i\in I}{\cup} A_i \subseteq \overline{(\overline{(\underset{i\in I}{\cup} A_i)})^\circ},$$

et puisque $\overline{(\underset{i\in I}{\cup} A_i)}$ est le plus petit fermé contenant $(\underset{i\in I}{\cup} A_i)$, on obtient

$$\overline{(\underset{i\in I}{\cup} A_i)} \subseteq \overline{(\overline{(\underset{i\in I}{\cup} A_i)})^\circ},$$

d'où l'égalité et donc $\overline{(\underset{i\in I}{\cup} A_i)}$ est un fermé régulier. Il reste à prouver que celui-ci est le plus petit des majorants. Soit $D \in RC(X)$ tel que $D \supseteq A_i$ pour tout $i \in I$. Alors, D est un fermé et $D \supseteq \underset{i\in I}{\cup} A_i$. Ainsi, par définition de l'adhérence, on obtient

$$D \supseteq \overline{(\underset{i\in I}{\cup} A_i)},$$

d'où le résultat. $\square$

Exemple 1.2.1. (L'algèbre de pré-contact des fermés réguliers)
Si X est un espace topologique, l'algèbre de Boole $RC(X)$ des fermés réguliers de X munie de la relation $\perp_{RC}$ définie par

$$A \perp_{RC} B \quad \text{si et seulement si} \quad A \cap B = \emptyset$$

pour tous $A, B \in RC(X)$, est une algèbre de Boole de pré-contact. Par souci de facilité, nous allons ici travailler avec la relation $\mathscr{C}_{RC}$ définie par

$$A \mathscr{C}_{RC} B \quad \text{si et seulement si} \quad A \cap B \neq \emptyset$$

pour tous $A, B \in RC(X)$. Remarquons tout d'abord que la relation $\mathscr{C}_{RC}$ est symétrique. Ainsi il suffit de démontrer que $\mathscr{C}_{RC}$ vérifier les axiomes $\mathscr{C}1, 2$ et 3 car l'axiome $\mathscr{C}4$ découle de l'axiome 3. Soient $A, B, C, D \in RC(X)$, alors
$\mathscr{C}$ 1 : si $A \subseteq B$, $C \supseteq D$ et $A \mathscr{C}_{RC} D$, alors on a

$$\emptyset \neq A \cap D \subseteq B \cap C,$$

donc $B \mathscr{C}_{RC} C$;
$\mathscr{C}$ 2 : si $A \cup B \mathscr{C}_{RC} C \cup D$, alors on a

$$\emptyset \neq (A \cup B) \cap (C \cup D) = (A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap D)$$

et ainsi $(A \cap C) \neq \emptyset$ ou $(B \cap C) \neq \emptyset$ ou $(A \cap D) \neq \emptyset$ ou $(B \cap D) \neq \emptyset$;
$\mathscr{C}$ 3 : $\emptyset \cap X = \emptyset$ donc $\emptyset \not\mathscr{C}_{RC} X$.
On en conclut donc que l'algèbre de Boole $RC(X)$ munie de la relation $\perp_{RC}$ est une algèbre de pré-contact.

Dans l'exemple précédent, la relation $\perp_{RC}$ ne vérifiait pas l'axiome $\mathscr{C}7$. En ajoutant une propriété à l'espace topologique X, il est possible d'obtenir une algèbre de contact.

Définition 1.2.8. Un espace topologique X faiblement régulier est un espace topologique vérifiant les deux conditions suivantes

1. L'espace topologique X possède une base d'ouverts réguliers.
2. Pour tout ouvert $O \subseteq X$ non vide, $\exists U$ un ouvert régulier non vide tel que $\overline{U} \subseteq O$.

Exemple 1.2.2. (L'algèbre de contact des fermés réguliers)
Si X est un espace topologique faiblement régulier, l'algèbre de Boole $RC(X)$ muni de la relation $\perp_{RC}$ est une algèbre de Boole de contact. Nous allons de nouveau travailler avec la relation $\mathscr{C}_{RC}$. Puisque nous avons déjà démontré que la relation $\mathscr{C}_{RC}$ vérifiait les axiomes $\mathscr{C}1, 2, 3$ et 4, il reste à montrer que cette relation vérifie les axiomes $\mathscr{C}5, 6$ et 7. Nous avons déjà remarqué que la relation $\mathscr{C}_{RC}$ est symétrique, donc celle-ci vérifie $\mathscr{C}6$. Soient $A, B, C, D \in RC(X)$, alors
$\mathscr{C}$ 5 : si $A \neq \emptyset$, $A \cap A = A \neq \emptyset$ et donc $A \mathscr{C}_{RC} A$;
$\mathscr{C}$ 7 : si $A \neq X$, alors $X \backslash A \neq \emptyset$. Or, A est fermé donc $X \backslash A$ est un ouvert. Comme X est faiblement régulier, il existe un ouvert régulier O non vide de X tel que

$$\overline{O} \subseteq X \backslash A.$$

On a donc $A \cap \overline{O} = \emptyset$. De plus, comme O est un ouvert régulier, $\overline{O}$ est un fermé régulier et il est non vide puisque O est non vide. On peut conclure grâce à la proposition (1.2.1).

1.2.3 Propriétés

Nous établissons maintenant une série de propriétés qui nous aide à prouver la dualité entre une algèbre de pré-contact et un espace de pré-contact.

Proposition 1.2.8. *Soient B une algèbre de Boole de pré-contact et $a \in B$. Les ensembles*

$$\perp(a,-) = \{b \in B | a \perp b\} \text{ et } \perp(-,a) = \{b \in B | b \perp a\}$$

sont des idéaux de B.

Démonstration. Montrons que $\perp(a,-)$ est un idéal de B. On a

1. $0 \in \perp(a,-)$. En effet, $a \leq 1$, $0 \geq 0$ et vu l'axiome $\perp 4$, $1 \perp 0$. Ainsi, vu l'axiome $\perp 2$, $a \perp 0$ et donc $0 \in \perp(a,-)$.
2. Soient $b, c \in \perp(a,-)$, montrons que $b \vee c \in \perp(a,-)$. Puisque $b, c \in \perp(a,-)$, on a $a \perp b$ et $a \perp c$. Ainsi, vu l'axiome $\perp 2$, on obtient

$$a = a \vee a \perp b \vee c.$$

   Donc $b \vee c \in \perp(a,-)$.
3. Soient $b \in B$ et $c \in \perp(a,-)$ tel que $b \leq c$, montrons que $b \in \perp(a,-)$. Puisque $c \in \perp(a,-)$, on a $a \perp c$. De plus, on a $a \leq a$ et $c \geq b$ donc vu l'axiome $\perp 1$, on a $a \perp b$ et donc $b \in \perp(a,-)$.

On procède de façon analogue pour montrer que $\perp(-,a)$ est un idéal de B. □

Proposition 1.2.9. *Soit B une algèbre de Boole munie d'une relation de disjonction $\perp$. L'algèbre B est une algèbre de pré-contact si et seulement si $\perp(a,-)$ et $\perp(-,a)$ sont des idéaux de B pour tout $a \in B$.*

Démonstration. Vu la proposition précédente, la condition est nécessaire. Montrons que la condition est suffisante. Nous devons prouver que la relation $\perp$ vérifie les axiomes $\perp 1, 2, 3, 4$. Soient $a, b, c, d \in B$.
$\perp 1$ Si $a \leq b$, $c \geq d$ et $b \perp c$, alors puisque $\perp(-,c)$ est un idéal de B contenant b et puisque $a \leq b$, on a $a \perp c$. Ensuite, puisque $\perp(a,-)$ est un idéal contenant c et puisque $d \leq c$, on obtient $a \perp d$.
$\perp 2$ Si $a \perp c$, $a \perp d$, $b \perp c$ et $b \perp d$ alors $c, d \in \perp(a,-)$ et $c, d \in \perp(b,-)$. Puisque $\perp(a,-)$ et $\perp(b,-)$ sont des idéaux, $c \vee d \in \perp(a,-)$ et $c \vee d \in \perp(b,-)$. On obtient donc

$$a \perp c \vee d \quad \text{et} \quad b \perp c \vee d.$$

Ainsi, $a, b \in \perp(-, c \vee d)$ et puisque celui-ci est un idéal, $a \vee b \in \perp(-, c \vee d)$ et donc $a \vee b \perp c \vee d$.
$\perp 3$ Puisque $\perp(-,1)$ est un idéal, celui-ci contient 0, donc $0 \perp 1$.
$\perp 4$ De la même manière, puisque $\perp(1,-)$ est un idéal, il contient 0, donc $1 \perp 0$. □

Définissons maintenant une relation sur un espace $Ult(B)$ (où B est une algèbre de pré-contact). Nous prouvons dans la suite que cette relation fait de $Ult(B)$ un espace de pré-contact.

Définition 1.2.9. Soient $(B, \perp)$ une algèbre de pré-contact et $a, b \in B$. On définit la relation binaire $R_\perp$ sur $Ult(B)$ comme suit

$$xR_\perp y \quad si \quad et \quad seulement \quad si \quad x \ni a \text{ et } a \perp b \Rightarrow y \not\ni b.$$

Remarque 1.2.5. Cette relation peut être définie de manière équivalente grâce à la relation de proximité $\prec$. En effet, la définition précédente est équivalente à

$$xR_\perp y \quad si \quad et \quad seulement \quad si \quad x \ni a \text{ et } a \perp (b^c)^c \Rightarrow y \not\ni b.$$

En traduisant cette équivalence grâce à la relation de proximité, on obtient

$$xR_\perp y \quad si \quad et \quad seulement \quad si \quad x \ni a \text{ et } a \prec b^c \Rightarrow y \not\ni b.$$

Ainsi, en remplaçant b^c par $c \in B$, on trouve

$$xR_\perp y \quad si \quad et \quad seulement \quad si \quad x \ni a \text{ et } a \prec c \Rightarrow y \ni c.$$

Nous utiliserons souvent cette équivalence dans la suite mais nous conserverons néanmoins la notation $R_\perp$. La proposition suivante nous donne une interprétation supplémentaire de la relation $R_\perp$.

Proposition 1.2.10. *Soient $(B, \perp)$ une algèbre de pré-contact et $\prec$ une relation de proximité sur B. Soient $x, y \in Ult(B)$, on a*

$$xR_\perp y \quad \Leftrightarrow \quad \prec(-, -y) \subseteq -x,$$

où $\prec(-, -y) = \{a \in B | \exists b \in (-y) : a \prec b\}$.

Démonstration. Soient B une algèbre de pré-contact et $x, y \in Ult(B)$. Procédons par l'absurde pour montrer que la condition est nécessaire. Supposons que $xR_\perp y$ et $\prec(-, -y) \not\subseteq -x$. Alors, il existe $a \in x$ tel que $a \in \prec(-, -y)$. Comme $a \in \prec(-, -y)$, il existe $b \in -y$ tel que $a \prec b$. Puisque $xR_\perp y$, $a \in x$ et $a \prec b$, on a $y \ni b$, d'où l'absurdité et donc la condition est nécessaire.

Montrons maintenant que la condition est suffisante. Procédons par l'absurde et supposons qu'il existe $a \in x$ et $b \in B$ tels que $a \prec b$ et $b \notin y$. Alors, $b \in -y$ et $a \prec b$ donc $a \in \prec(-, -y) \subseteq -x$, d'où l'absurdité et donc le résultat. $\square$

Proposition 1.2.11. *Soit $(B, \perp)$ une algèbre de pré-contact et $\prec$ une relation de proximité sur B. Si y est un idéal de B alors $\prec(-, y)$ est un idéal de B.*

Démonstration. Soient B une algèbre de pré-contact et y un idéal de B. Dans ce cas, $\prec(-, y)$ vérifie les trois propriétés suivantes.

1. $0 \in \prec(-, y)$. En effet, y est un idéal, donc $0 \in y$ et vu $\prec 3$, $0 \prec 0$.
2. Si $a_1, a_2 \in \prec(-, y)$, il existe $b_1, b_2 \in y$ tels que $a_1 \prec b_1$ et $a_2 \prec b_2$. Puisque y est un idéal, $b_1 \vee b_2 \in y$. Comme $a_1 \leq a_1$,$b_1 \leq b_1 \vee b_2$ et $a_1 \prec b_1$, on peut utiliser l'axiome $\prec 1$ on trouve $a_1 \prec b_1 \vee b_2$. De même, $a_2 \prec b_1 \vee b_2$. Ensuite, en utilisant l'axiome $\prec 2$, $a_1 \prec b_1 \vee b_2$ et $a_2 \prec b_1 \vee b_2$, on obtient $a_1 \vee a_2 \prec b_1 \vee b_2$ et donc $a_1 \vee a_2 \in \prec(-, y)$.

3. Si $a \in B$ et $b \in \prec (-, y)$ sont tels que $a \leq b$, alors puisque $b \in \prec (-, y)$, il existe $c \in y$ tel que $b \prec c$. Alors, $a \leq b$, $c \leq c$ et $b \prec c$ donc vu l'axiome $\prec 1$, $a \prec c$ et on en conclut que $a \in \prec (-, y)$ d'où le résultat.

□

La proposition suivante nous permet d'affirmer que le foncteur Ult que nous définissons dans la section suivante associe un espace de pré-contact à une algèbre de pré-contact.

Proposition 1.2.12. *Si $(B, \perp)$ une algèbre de pré-contact alors $(Ult(B), R_\perp)$ est un espace de pré-contact.*

Démonstration. Soit $(B, \perp)$ une algèbre de pré-contact. Nous savons déjà que $Ult(B)$ est un espace de Boole, il reste donc à montrer que $R_\perp$ est une relation fermée dans $Ult(B)^2$. Pour cela, nous allons montrer que le complémentaire de $R_\perp$ est un ouvert. Soient $x, y \in Ult(B)$ tels que

$$(x, y) \notin R_\perp.$$

Par définition de $R_\perp$, il existe $a, b \in B$ tels que

$$a \in x, a \perp b \text{ et } b \in y.$$

Ainsi, on a $x \in r(a)$ et $y \in r(b)$. Alors,

$$r(a) \ \times \ r(b)$$

est un voisinage de (x, y) disjoint de $R_\perp$. En effet, si $(z, t) \in r(a) \ \times \ r(b)$, alors $a \in z$ et $b \in t$. En particulier, si $a \perp b$ et $a \in z$, $b \in t$ donc $(z, t) \notin R_\perp$. On en conclut que $[r(a) \ \times \ r(b)] \cap R_\perp = \emptyset$, d'où le résultat. □

Nous effectuons maintenant la même démarche sur l'algèbre $of(X)$ où X est un espace de pré-contact.

Définition 1.2.10. Soit (X, R) un espace de pré-contact. On définit l'opération binaire $\perp_R$ sur $of(X)$, comme suit

$$O \perp_R U \ \ \textit{si et seulement si} \ \ (O \times U) \cap R = \emptyset.$$

Remarque 1.2.6. On peut également définir la relation $\prec_R$ comme suit

$$O \prec_R U \ \ \textit{si et seulement si} \ \ (O \times (-U)) \cap R = \emptyset.$$

De plus, $(O \times (-U)) \cap R = \emptyset$ est équivalent à $R(O, -) \subseteq U$.

Proposition 1.2.13. *Si (X, R) un espace de pré-contact alors $(of(X), \perp_R)$ est une algèbre de pré-contact.*

Démonstration. Prenons (X, R) un espace de pré-contact et montrons que $(of(X), \perp_R)$ est une algèbre de pré-contact. Grâce à la proposition (B.2.10), nous savons que l'ensemble $of(X)$ est une algèbre de Boole. Il reste donc à montrer que l'opération $\perp_R$ vérifie les axiomes $\perp 1, 2, 3, 4$. Soient $O, U, V, W \in of(X)$.
$\perp 1$ Si $O \subseteq U$, $V \supseteq W$ et $U \perp_R V$. Par définition de $\perp_R$, on a $(U \times V) \cap R = \emptyset$. Ainsi, on obtient

$$(O \times W) \cap R \subseteq (U \times V) \cap R = \emptyset.$$

Donc $O \perp_R W$.
$\perp 2$ Si $O \perp_R V$, $O \perp_R W$, $U \perp_R V$ et $U \perp_R W$ alors

$$(O \times V) \cap R = \emptyset,\ (O \times W) \cap R = \emptyset,\ (U \times V) \cap R = \emptyset \text{ et } (U \times W) \cap R = \emptyset.$$

Vu nos hypothèses, on obtient

$$\begin{aligned}[(O \cup U) \times (V \cup W)] \cap R &= [(O \times V) \cup (O \times W) \cup (U \times V) \cup (U \times W)] \cap R \\ &= [(O \times V) \cap R] \cup [(O \times W) \cap R] \cup [(U \times V) \cap R] \cup [(U \times W) \cap R] \\ &= \emptyset.\end{aligned}$$

Donc, $(O \cup U) \perp_R (V \cup W)$.
$\perp 3$ Il est clair que $\emptyset \perp_R X$ puisque $\emptyset \times X = \emptyset$.
$\perp 4$ De même, $X \perp_R \emptyset$.
On en conclut que $(of(X), \perp_R)$ est une algèbre de pré-contact. □

Avant d'établir la dualité entre une algèbre de pré-contact et un espace de pré-contact, démontrons encore deux propriétés qui trouvent leur utilité dans la section suivante.

Proposition 1.2.14. *Soient X un espace de Boole et R un relation fermée sur X^2. Si F est un fermé de X, alors $R(F, -)$ est aussi un fermé de X.*

Démonstration. Soient X un espace de Boole et R un relation fermée sur X^2. Considérons un fermé F de X. Pour montrer que $R(F, -)$ est un fermé de X, montrons que son complémentaire est un ouvert. Soit $y \notin R(F, -)$. Alors, pour tout $x \in F$, $(x, y) \notin R$. Puisque R est une relation fermée, pour tout $x \in F$ il existe un voisinage ouvert O_x de x et U_x un voisinage ouvert de y tel que

$$(O_x \times U_x) \cap R = \emptyset.$$

En particulier, on a $F \subseteq \bigcup_{x_i \in F} O_{x_i}$. De plus, puisque X est un espace de Boole, F est un compact et donc il existe une famille d'indice $\{1, ..., n\}$ telle que

$$\begin{aligned}F &\subseteq O_{x_1} \cup ... \cup O_{x_n}; \\ y &\in U_{x_1} \cap ... \cap U_{x_n} = U.\end{aligned}$$

Ainsi, U est un voisinage ouvert de y tel que $U \cap R(F, -) = \emptyset$. En effet, procédons par l'absurde, supposons que $U \cap R(F, -) \neq \emptyset$. Alors, il existe $u \in U$ et $f \in F$ tels que fRu. Puisque $f \in F$, il existe $j \in \{1, ..., n\}$ tel que $f \in O_{x_j}$. De plus, $u \in U = U_{x_1} \cap ... \cap U_{x_n}$, donc $u \in U_{x_i}$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, donc en particulier $u \in U_{x_j}$. Or, vu le raisonnement précédent, $(O_{x_j} \times U_{x_j}) \cap R = \emptyset$, d'où l'absurdité et donc le résultat. □

Proposition 1.2.15. *Soit X un espace de Boole. Si F et G sont des fermés de X tels que $F \cap G = \emptyset$, alors il existe une ouvert fermé O de X tel que*

$$F \nsubseteq O \text{ et } G \subseteq O.$$

Autrement dit, O sépare les fermés F et G.

Démonstration. Considérons un espace de Boole X et des fermés F et G de X tels que $F \cap G = \emptyset$. Remarquons tout d'abord que, puisque X est un espace de Boole, il est compact. Ainsi, F et G sont compacts car tout sous-ensemble fermé inclus dans un compact est un compact.

Soit $x \in F$. Pour tout $y \in G$, $y \neq x$ puisque $F \cap G = \emptyset$. De plus, X est un espace de Boole donc en particulier, il est séparé et il admet une base d'ouverts fermés. Donc, pour tout $y \in G$, il existe un ouvert fermé O_y tel que $y \in O_y$ et $x \notin O_y$. En particulier, $G \subseteq \bigcup_{y_i \in G} O_{y_i}$, donc il existe une famille d'indice $\{1, ..., n\}$ telle que

$$\begin{aligned} G &\subseteq O_{y_1} \cup ... \cup O_{y_n} = O_x; \\ x &\in (-O_{y_1}) \cap ... \cap (-O_{y_n}) = -O_x. \end{aligned}$$

En particulier, $F \subseteq \bigcup_{x_i \in F} (-O_{x_i})$, donc il existe une famille d'indice $\{1, ..., m\}$ telle que

$$F \subseteq (-O_{x_1}) \cup ... \cup (-O_{x_m}) = -O;$$

avec $O = x \in O_{x_1} \cap ... \cap O_{x_m}$. Or, vu ce qui précède, $G \subseteq O_{x_i}$ pour tout $i \in \{1, ..., m\}$, donc $G \subseteq O$ et O est l'ouvert fermé cherché. □

1.2.4 Espace dual d'une algèbre de pré-contact

Établissons à présent la dualité entre une algèbre de pré-contact et un espace de pré-contact. Commençons par définir le premier foncteur permettant d'obtenir cette dualité.

Définition 1.2.11. L'application Ult est définie comme l'application qui à une algèbre de pré-contact $(B, \perp)$ associe l'espace topologique $Ult(B)$ et qui à un homomorphisme

$$h \ : \ B' \to B$$

d'algèbres de pré-contact associe $Ult(h) = h^{-1}$.

Remarque 1.2.7. Dans la suite, on notera $Ult(h) = h^*$.

Proposition 1.2.16. *L'application Ult est un foncteur contravariant de la catégorie PCA dans la catégorie PCS.*

Démonstration. Soit $(B, \perp)$ une algèbre de pré-contact. Vu la proposition (1.2.12), $(Ult(B), R_\perp)$ est un espace de pré-contact. Soit $(B', \perp)$, une autre algèbre de pré-contact et $h : B' \to B$ un homomorphisme d'algèbres de pré-contact.

Démontrons que h^* est un morphisme de PCS. L'application $h^* : Ult(B) \to Ult(B')$ est bien définie et continue (la démonstration est identique à celle effectuée dans le théorème (1.1.5)). Montrons maintenant que h^* est un morphisme de PCS. Par définition d'un morphisme d'espaces de pré-contact, il faut montrer que

$$h^*(R_\perp(-,y)) = R_\perp(-,h^*(y))$$

pour tout $y \in Ult(B)$.

Montrons d'abord que $h^*(R_\perp(-,y)) \subseteq R_\perp(-,h^*(y))$. Si $x \in R_\perp(-,y)$, alors $xR_\perp y$. Montrons que dans ce cas, $h^*(x)R_\perp h^*(y)$. Vu la remarque (1.2.5), nous devons montrer que

$$\forall a', b' \in B' : h^*(x) \ni a' \text{ et } a' \prec b' \Rightarrow h^*(y) \ni b'.$$

Soient $a', b' \in B'$ tels que $h^*(x) \ni a'$ et $a' \prec b'$. Puisque h est un homomorphisme d'algèbres de pré-contact, vu la remarque (1.2.3), on obtient

$$a' \prec b' \quad \Rightarrow \quad h(a') \prec h(b').$$

Par hypothèse $xR_\perp y$ et puisque $x \ni h(a')$, on trouve $h(b') \in y$ et donc $b' \in h^*(y)$.

Montrons maintenant que $h^*(R_\perp(-,y)) \supseteq R_\perp(-,h^*(y))$. Soit $x' \in R_\perp(-,h^*(y))$, autrement dit, soit $x' \in Ult(B')$ tel que $x'R_\perp h^*(y)$. Nous devons trouver $x \in Ult(B)$ tel que $h^*(x) = x'$ et $xR_\perp y$. Comme le montre la remarque (B.1.2) et la proposition (1.2.10), ceci est équivalent à trouver $x \in Ult(B)$ tel que $h(x') \subseteq x$ et $\prec(-,-y) \subseteq -x$. Puisque $x' \in Ult(B')$ et que h est un homomorphisme, il est clair que $h(x')\uparrow$ est un filtre de B. De plus, puisque $y \in Ult(B)$, $-y \in Id(B)$ et vu la proposition (1.2.11), $\prec(-,-y)$ est un idéal de B. Montrons maintenant que

$$\prec(-,-y) \cap h(x')\uparrow = \emptyset,$$

ainsi, le théorème de séparation de Stone (B.2.8) prouvera l'existence d'un tel x. Procédons par l'absurde. Supposons qu'il existe $a' \in x'$ tel que $h(a') \in \prec(-,-y)$ [4], ce qui signifie qu'il existe $b \notin y$ tel que $h(a') \prec b$. Vu que h est un homomorphisme de pré-contact, on peut utiliser la remarque (1.2.3). Ainsi, il existe $c' \in B'$ tel que $h(c') \leq b$ et $a' \prec c'$. De plus, par hypothèse, $x'R_\perp h^*(y)$ et comme $a' \in x'$ et $a' \prec c'$, on trouve $c' \in h^*(y)$. On obtient alors $h(c') \in y$. De plus, $y \in Ult(B)$ et $h(c') \leq b$, on en déduit que $b \in y$ d'où l'absurdité, et donc le résultat.

La fin de cette démonstration est similaire à celle effectuée dans le théorème (1.1.5). On en conclut que Ult est un foncteur contravariant de la catégorie PCA dans la catégorie PCS.

□

Présentons maintenant le second foncteur permettant d'obtenir la dualité.

4. Il suffit de considérer un élément de $h(x')$ car si on considère un élément c de $h(x')\uparrow$, alors il existe $a' \in x'$ tel que $h(a') \leq c$ et grâce à l'axiome $\prec 2$, si $c \prec b$, alors $h(a') \prec b$.

Définition 1.2.12. L'application of est définie comme l'application qui à un espace de pré-contact (X, R) associe l'algèbre de pré-contact $of(X)$ et qui à un homomorphisme continu

$$\varphi \ : \ X' \to X$$

entre deux espaces de pré-contact associe $of(\varphi) = \varphi^{-1}$.

Remarque 1.2.8. Dans la suite, on notera $of(\varphi) = \varphi^*$.

Proposition 1.2.17. *L'application of est un foncteur contravariant de la catégorie PCS dans la catégorie PCA.*

Démonstration. Soit (X, R) un espace de pré-contact, grâce à la proposition (1.2.13), on sait déjà que $(of(X), \perp_R)$ est une algèbre de pré-contact. Soit (X', R) un deuxième espace de pré-contact et $\varphi \ : \ X' \to X$ un homomorphisme continu tel que

$$\varphi(R(-, y')) = R(-, \varphi(y')),$$

pour tout $y' \in B'$. Montrons que $of(\varphi) = \varphi^*$ est un morphisme de PCA (c'est à dire un homomorphisme d'algèbres de pré-contact).

Montrons d'abord que l'application $\varphi^* : of(X) \to of(X')$ est bien définie. Si $O \in of(X)$, alors $\varphi^*(O) = \varphi^{-1}(O) \in of(X')$ puisque φ est une application continue.

Montrons maintenant que φ^* est un homomorphisme d'algèbres de pré-contact. L'application φ^* est un homomorphisme d'algèbres de Boole (la démonstration est identique à celle effectuée dans le théorème (1.1.6)). Il reste à montrer que si $O \in of(X)$, alors

$$\prec_R (\varphi^*(O), -) = \varphi^*(\prec_R (O, -)) \uparrow .$$

Procédons par double inclusion et commençons par montrer que $\prec_R (\varphi^*(O), -) \supseteq \varphi^*(\prec_R (O, -)) \uparrow$. Prenons $U \in of(X)$ tel que $O \prec_R U$ et montrons que $\varphi^*(O) \prec_R \varphi^*(U)$[5]. Autrement dit, prenons $U \in of(X)$ tel que $R(O, -) \subseteq U$ et montrons que $R(\varphi^{-1}(O), -) \subseteq \varphi^{-1}(U)$. Soient $x \in \varphi^{-1}(O)$ (*ie.* $\varphi(x) \in O$) et $y \in X'$ tels que xRy. Nous devons prouver que $y \in \varphi^{-1}(U)$, ce qui est équivalent à montrer que $\varphi(y) \in U$. Puisque φ est un morphisme continu entre espaces de pré-contact, on obtient

$$xRy \quad \Rightarrow \quad \varphi(x)R\varphi(y) \quad \Rightarrow \quad \varphi(y) \in R(O, -).$$

Par hypothèse, on a $R(O, -) \subseteq U$ et donc $\varphi(y) \in U$. Ainsi, $y \in \varphi^{-1}(U)$.
Montrons que $\prec_R (\varphi^*(O), -) \subseteq \varphi^*(\prec_R (O, -)) \uparrow$. Nous devons prouver que si $O \in of(X)$ et $O' \in of(X')$ sont tels que $\varphi^*(O) \prec_R O'$ alors, il existe $U \in of(X)$ tel que $O \prec_R U$ et $\varphi^*(U) \subseteq O'$. Supposons disposer de $O \in of(X)$ et $O' \in of(X')$ tels que $\varphi^*(O) \prec_R O'$, autrement dit, tels que $R(\varphi^*(O), -) \subseteq O'$. Commençons par montrer que

$$R(\varphi^*(O), -) \subseteq O' \quad \Rightarrow \quad R(O, -) \cap \varphi(-O') = \emptyset.$$

5. De nouveau ceci est suffisant grâce à l'axiome $\prec 2$ car si $U' \in \varphi^*(\prec_R (O, -)) \uparrow$, alors il existe U tel que $O \prec_R U$ et $\varphi^*(U) \subseteq U'$. Ainsi, puisque $\varphi^*(O) \prec_R \varphi^*(U)$, on trouve $\varphi^*(O) \prec_R U'$.

Procédons par l'absurde, supposons qu'il existe $y \in R(O,-)$ tel que $y = \varphi(y')$ avec $y' \notin O'$. Autrement dit, $y \in B$ et il existe $x \in O$ tel que xRy. Ainsi, $xR\varphi(y')$ et puisque φ est tel que $\varphi(R(-,y')) = R(-,\varphi(y'))$ pour tout $y' \in B'$, il existe $x' \in B'$ tel que $x'Ry'$ et $\varphi(x') = x \in O$. On trouve alors que $x' \in \varphi^*(O)$ et $x'Ry'$, donc $y' \in R(\varphi^*(O),-) \subseteq O'$ d'où l'absurdité.

Vu la proposition (1.2.14), puisque O est un fermé, $R(O,-)$ est aussi un fermé. De plus, O' est un ouvert fermé, donc $-O'$ est aussi un ouvert fermé. En particulier, $-O'$ est un fermé de $of(X')$ qui est un compact, donc il est compact et puisque φ est un application continue, $\varphi(-O')$ est aussi un compact, donc il est fermé. Ainsi, $R(O,-)$ et $\varphi(-O')$ sont deux fermés disjoints, ils sont donc séparés par un ouvert fermé vu la proposition (1.2.15). Alors, il existe $U \in of(X)$ tel que $R(O,-) \subseteq U$ et $U \cap \varphi(-O') = \emptyset$. Autrement dit, il existe $U \in of(X)$ tel que $O \prec_R U$ et $\varphi^{-1}(U) \subseteq O'$, d'où le résultat.

La fin de la démonstration est similaire à celle effectuée dans le théorème (1.1.6). On en conclut que of est un foncteur contravariant de la catégorie PCS dans la catégorie PCA. $\square$

Pour obtenir une équivalence duale, nous devons prouver les isomorphismes avec les biduaux.

Proposition 1.2.18. *Soit B une algèbre de pré-contact. Alors l'application*

$$\begin{aligned} r_B \ : \ & b \to of(Ult(B)) \\ & b \mapsto r_B(b) = \{x \in Ult(B) | x \ni b\} \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'algèbres de pré-contact.

Démonstration. Vu la proposition (B.2.13), l'application r_B est un isomorphisme d'algèbres de Boole. Il nous reste à prouver que

$$\prec (r_B(b),-) = r_B(\prec (b,-)) \uparrow,$$

pour tout $b \in B$. Remarquons dans un premier temps que puisque r_B est un isomorphisme montrer que $\prec (r_B(b),-) = r_B(\prec (b,-)) \uparrow$ est équivalent à montrer que $\prec (r_B(b),-) = r_B(\prec (b,-))$. Cette dernière égalité peut se traduire grâce à l'équivalence

$$b \prec a \quad \Leftrightarrow \quad R_\perp(r_B(b),-) \subseteq r_B(a) \qquad \forall a \in B.$$

Commençons par montrer que la condition est nécessaire. Soient $a \in B$ tel que $b \prec a$, $y \in of(Ult(B))$ et $x \in r_B(b)$ tels que $xR_\perp y$. Montrons que $y \in r_B(a)$. Comme $xR_\perp y$, vu la remarque (1.2.5), on sait que pour tous $d \in B$ et $c \in x$ tels que $c \prec d$, $y \ni d$. Or, $a \in B$ et $b \in x$ sont tels que $b \prec a$, donc $a \in y$ et ainsi $y \in r_B(a)$.

Pour montrer que la condition est suffisante, utilisons le fait que

$$R_\perp(r_B(b),-) = \bigcap_{b \prec c} r_B(c),$$

pour tout $b \in B$ [6]. Nous devons montrer que

$$R_\perp(r_B(b), -) \subseteq r_B(a) \quad \Rightarrow \quad b \prec a \qquad \forall a \in B.$$

Supposons que $R_\perp(r_B(b), -) \subseteq r_B(a)$. Vu ce qui précède, on a $\bigcap\limits_{b \prec c} r_B(c) \subseteq r_B(a)$. De plus, puisque $(-r_B(a))$ est un ouvert fermé de $Ult(B)$, $(-r_B(a))$ est un compact. Ainsi, par passage au complèmentaire, il existe $c_1, ..., c_n$ tels que

$$r_B(c_1) \cap \ldots \cap r_B(c_n) \subseteq r_B(a).$$

Si on pose $c = c_1 \wedge \ldots \wedge c_n$, alors $r_B(c) \subseteq r_B(a)$ et $c \leq a$. De plus, en appliquant n fois l'axiome $\prec 2$, on trouve $b \prec c$ et $c \leq a$. On en conclut que $b \prec a$, d'où le résultat. $\square$

Proposition 1.2.19. *Soit X un espace de pré-contact. Alors l'application*

$$\begin{aligned} \varepsilon_X \ : \ & X \to Ult(of(X)) \\ & x \mapsto \varepsilon_X(x) = \{O \in of(X) | O \ni x\} \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces de pré-contact.

Démonstration. Vu la proposition (B.2.15), l'application ε_X est un isomorphisme d'espaces de Boole. Il nous reste donc à prouver que pour tous $x, y \in X$,

$$\varepsilon_X(R(-, y)) = R_{\perp_R}(-, \varepsilon_X(y)).$$

Puisque l'application ε_X est un isomorphisme, nous devons montrer que

$$xRy \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon_X(x) R_{\perp_R} \varepsilon_X(y)$$

pour tous $x, y \in X$. Soient $x, y \in X$ tels que xRy. Nous devons prouver que pour tous $O, U \in of(X)$, si $O \in \varepsilon_X(x)$ est tel que $O \prec_R U$ alors $\varepsilon_X(y) \ni U$. Autrement dit, il faut montrer que pour tous $O, U \in of(X)$,

$$O \in \varepsilon_X(x) \text{ et } R(O, -) \subseteq U \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_X(y) \ni U.$$

Supposons disposer d'un ouvert fermé $O \in \varepsilon_X(x)$ et d'un ouvert fermé U tels que $R(O, -) \subseteq U$. Dans ce cas, $O \ni x$ et xRy, donc $y \in U$ et $\varepsilon_X(y) \ni U$.

Supposons maintenant que $\varepsilon_X(x) R_{\perp_R} \varepsilon_X(y)$ et montrons que xRy. Procédons par l'absurde, supposons que $x \not R y$. Puisque R est une relation fermée, il existe $O, U \in of(X)$ tels que $(x, y) \in O \times U$ et $(O \times U) \cap R = \emptyset$. Cette dernière égalité peut se réécrire $R(O, -) \subseteq -U$. Or, $x \in O$ et $\varepsilon_X(x) R_{\perp_R} \varepsilon_X(y)$, donc on en conclut que $\varepsilon_X(y) \ni -U$. Autrement dit, $y \in -U$ d'où une contradiction et donc le résultat.

$\square$

Il nous reste à prouver que les diagrammes correspondants sont commutatifs. Les démonstrations des propositions suivantes sont identiques à celles effectuées dans le cas des algèbres de Boole.

6. La démonstration de cette proposition se trouve dans [13]

Proposition 1.2.20. *Soient B et B' deux algèbres de pré-contact et $f : B \to B'$ un homomorphisme d'algèbres de pré-contact. Le diagramme suivant est commutatif.*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "r_B"] \arrow[d, "f"'] & of(Ult(B)) \arrow[d, "of(Ult(f))"] \\ B' \arrow[r, "r_{B'}"] & of(Ult(B')) \end{tikzcd}$$

Proposition 1.2.21. *Soient X et X' deux espaces de pré-contact et $\varphi : X \to X'$ un homomorphisme d'espaces de pré-contact. Le diagramme suivant est commutatif.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varepsilon_X"] \arrow[d, "\varphi"'] & Ult(of(X)) \arrow[d, "Ult(of(\varphi))"] \\ X' \arrow[r, "\varepsilon_{X'}"] & Ult(of(X')) \end{tikzcd}$$

Toutes ces propositions nous permettent d'obtenir l'équivalence duale.

Théorème 1.2.22. *Les foncteurs contravariants Ult et of établissent une équivalence duale entre la catégorie PCA et la catégorie PCS.*

Chapitre 2

Les dualités discrètes

Dans ce chapitre, nous effectuons le même raisonnement que dans le chapitre précédent mais en ajoutant certaines propriétés aux algèbres de départ. Nous découvrons qu'en ajoutant des propriétés spécifiques aux algèbres que nous avons étudiées dans le chapitre précédent, nous modifions l'espace dual correspondant. Nous commençons par établir la dualité existant entre les algèbres de Boole complètes et atomiques et les ensembles. Ensuite, nous procédons de façon similaire pour établir la dualité existant entre les algèbres modales complètes et atomiques et les frames de Kripke. Enfin, nous établissons la dualité existant entre les algèbres de pré-contact complètes et atomiques et les frames de Kripke en procédant différemment. En effet, nous montrons que la catégorie des algèbres modales complètes et atomiques est isomorphe à la catégorie des algèbres de pré-contact complètes et atomiques.

2.1 Les algèbres de Boole complètes et atomiques

Comme annoncé, nous commençons par étudier l'espace dual d'une algèbre de Boole complète et atomique. Pour cela, nous avons besoin de définir certaines notions et d'introduire de nouvelles catégories. Nous avons également besoin d'établir une série de propriétés que nous utilisons pour démontrer l'équivalence duale.

2.1.1 Définitions et propriétés

Commençons par définir une algèbre de Boole atomique ainsi que la catégorie associée.

Définition 2.1.1. Soient B une algèbre de Boole et $a \in B$. L'élément a est un *atome* de B si $a > 0$ et si a est minimal dans $B \setminus \{0\}$ (*ie.* si $b \in B$ est tel que $0 \leq b \leq a$ alors $b = 0$ ou $b = a$). On notera $At(B)$ l'ensemble des atomes de B.

Remarque 2.1.1. Soient B une algèbre de Boole et $a \in At(B)$. Soient I une famille d'indices et x_i des éléments de B. Si $a \leq \bigvee\limits_{i \in I} x_i$, alors il existe $i \in I$ tel que $a \leq x_i$. En effet, si ce n'était pas le cas, nous aurions $a \nleq x_i$ pour tout $i \in I$. Alors, on trouverait

$$a = a \wedge 1 = a \wedge (x_i \vee x_i^c) = (a \wedge x_i) \vee (a \wedge x_i^c) = a \wedge x_i^c$$

pour tout $i \in I$. Donc, on obtient

$$a \leq x_i^c \ \ \forall i \in I \ \Rightarrow \ a^c \geq x_i \ \forall i \in I \ \Rightarrow \ a^c \geq \bigvee_{i \in I} x_i.$$

Au final, $a \leq \bigvee_{i \in I} x_i \leq a^c$ et on en conclut que $a = 0$ ce qui est absurde puisque a est un atome.

Définition 2.1.2. Une algèbre de Boole B est *atomique* si et seulement si

$$\forall b \neq 0, \ \exists a \in At(B) \text{ tel que } a \leq b.$$

Définition 2.1.3. Un *homomorphisme d'algèbres de Boole complètes* est un homomorphisme f d'algèbre de Boole tel que

$$f(\bigvee_{b \in B} b) = \bigvee_{b \in B} f(b) \quad \text{et} \quad f(\bigwedge_{b \in B} b) = \bigwedge_{b \in B} f(b).$$

Définition 2.1.4. La *catégorie des algèbres de Boole complètes et atomiques*, notée BCA, est la catégorie dont les objets sont les algèbres de Boole complètes et atomiques et les morphismes sont les homomorphismes d'algèbres de Boole complètes.

Passons à la seconde catégorie dont nous avons besoin.

Définition 2.1.5. La *catégorie des ensembles*, notée *Set*, est la catégorie dont les objets sont les ensembles et les morphismes sont les applications entre ensembles.

Démontrons maintenant une série de propositions qui seront nécessaires dans la section suivante.

Théorème 2.1.1. *Si B est une algèbre de Boole complète et atomique, alors pour tout élément b de B, on a*

$$b = \vee\{a \in At(B) | a \leq b\}.$$

Démonstration. Soient B est une algèbre de Boole complète et atomique et b un élément de B. Notons $u := \vee\{a \in At(B) | a \leq b\}$ et montrons que $b = u$. Premièrement, puisque l'algèbre de Boole B est complète u existe. Il est clair que $b \geq u$ puisque dans l'ensemble $\{a \in At(B) | a \leq b\}$, tous les éléments sont inférieurs ou égaux à b.

Montrons maintenant que $b \leq u$. Procédons par l'absurde, supposons que $b > u$. Dans ce cas, vu la proposition (B.2.1), $b \wedge u^c \neq 0$. Puisque B est atomique, il existe $a \in At(B)$ tel que $a \leq b \wedge u^c$. On obtient alors un atome a tel que $a \leq b$ et $a \leq u^c$, on en conclut que $a \in \{a \in At(B) | a \leq b\}$ et $a \leq u^c$. Ainsi, $a \leq u$ et $a \leq u^c$ et donc $a \leq u \wedge u^c = 0$. On en conclut que $a = 0$. Or a est un atome, d'où l'absurdité. □

Proposition 2.1.2. *Soient B une algèbre de Boole et $a \in B$ un atome. Alors, $a\uparrow$ est un ultrafiltre de B.*

Démonstration. Soient B une algèbre de Boole et $a \in At(B)$. Il est clair que

$$a \uparrow = \{b \in B | a \leq b\}$$

est un filtre. Il nous reste donc à montrer que celui-ci est maximal pour l'inclusion. Procédons par l'absurde, supposons qu'il existe F un filtre propre de B tel que $(a \uparrow) \subsetneq F$. Dans ce cas, il existe $b \in F \backslash (a \uparrow)$. Ainsi, $b \in F$ est tel que $a \nleq b$, autrement dit $b \leq a^c$. On trouve alors que

$$b \wedge a^c = b \quad \Rightarrow \quad b^c \vee a = b^c \quad \Rightarrow \quad b^c \geq a.$$

On en déduit que $b^c \in (a \uparrow) \subsetneq F$. Ainsi, F est un filtre contenant 0 et donc $F = B$, d'où l'absurdité et donc le résultat. $\square$

Définition 2.1.6. Soient B une algèbre de Boole et $a \in B$ un atome. Les ultrafiltres $a \uparrow$ de B sont appelés *les ultrafiltres principaux* de B.

La proposition suivante permet de caractériser les atomes de $\mathcal{P}(X)$ où X est un ensemble. Ce résultat nous permet notamment de prouver que $\mathcal{P}(X)$ est une algèbre de Boole complète et atomique.

Proposition 2.1.3. *Soit X un ensemble. Les seuls atomes de $\mathcal{P}(X)$ sont les singletons $\{x\}$ avec $x \in X$.*

Démonstration. Soit X un ensemble. Si A est un atome de $(\mathcal{P}(X))$ alors $A \neq \emptyset$ et donc A contient au moins un élément x. Alors, $\emptyset \subseteq \{x\} \subseteq A$ et puisque A est un atome de $\mathcal{P}(X)$, $A = \{x\}$. $\square$

Proposition 2.1.4. *Si X est un ensemble, alors $\mathcal{P}(X)$ est une algèbre de Boole complète et atomique.*

Démonstration. Vu l'exemple (B.1.2), il est clair que $\mathcal{P}(X)$ est une algèbre de Boole complète. De plus, celle-ci est atomique puisque vu la proposition précédente, il faut que toute partie non vide de X contienne un singleton. Or pour tout $E \in \mathcal{P}(X)$ non vide, il existe $x \in E$ et donc $\{x\} \subseteq E$. Ainsi, $\mathcal{P}(X)$ est atomique. $\square$

2.1.2 Espace dual d'une algèbre de Boole complète et atomique

Dans cette section, nous établissons la dualité entre une algèbre de Boole complète et atomique et un ensemble. Pour cela, nous avons besoin de définir deux nouveaux foncteurs contravariants. Commençons par définir le premier.

Définition 2.1.7. L'application At est définie comme l'application qui à une algèbre de Boole complète et atomique B associe l'ensemble des atomes de B, noté $At(B)$, et qui à un homomorphisme

$$f \; : \; B' \to B$$

d'algèbres de Boole complètes associe $At(f) = f^*$. L'application f^* est définie comme suit,

$$\begin{aligned} f^* \quad : \quad At(B) &\longrightarrow At(B') \\ a \quad &\longmapsto \wedge\{b' \in B' | a \leq f(b')\}. \end{aligned}$$

Nous pouvons remarquer que l'application f^* que nous venons de définir est particulière. En effet, jusqu'à présent, les foncteurs contravariants que nous avons défini associaient à un morphisme de catégorie f une application f^* qui n'était rien d'autre que l'inverse du morphisme considéré. Afin de pouvoir mieux manipuler l'application f^* que nous venons de définir, établissons quelques propriétés. Pour commencer, montrons que l'application f^* est bien définie.

Proposition 2.1.5. *Soient B et B' des algèbres de Boole complètes atomiques, $f : B' \to B$ un homomorphisme d'algèbres de Boole complètes. Si $a \in At(B)$ alors*

$$f^*(a) = \wedge\{b' \in B' | a \leq f(b')\}$$

est un atome de B'. De plus, $a \leq f(f^*(a))$.

Démonstration. Considérons B et B' des algèbres de Boole complètes atomiques et f un homomorphisme d'algèbres de Boole complètes. Prenons $a \in At(B)$ et posons $a' = \wedge\{b' \in B' | a \leq f(b')\}$. Montrons que $a' \in At(B')$. Premièrement, il faut montrer que $a' > 0$. On a

$$f(a') = f(\wedge\{b' \in B' | a \leq f(b')\}) = \wedge\{f(b') \in B | a \leq f(b')\} \geq a > 0.$$

En particulier, $a' \neq 0$ sinon $f(a') = 0$. Ainsi, $a' > 0$ et nous avons également montré que $a \leq f(a')$. Deuxièmement, nous devons prouver que si $c' \in B'$ est tel que $0 \leq c' \leq a'$ alors $c' = 0$ ou $c' = a'$. Puisque B' est une algèbre de Boole complète et atomique, vu le théorème (2.1.1), on obtient

$$a' = \vee\{c' \in At(B') | c' \leq a'\}.$$

De plus, puisque f est un homomorphisme d'algèbres de Boole complètes, on trouve

$$a \leq f(a') = \vee\{f(c') | c' \in At(B') \text{ et } c' \leq a'\}.$$

Vu la remarque (2.1.1), il existe $c' \in At(B')$ tel que $a \leq f(c')$ et $c' \leq a'$. De plus, en utilisant la définition de a' et le fait que $a \leq f(c')$, on a $a' \leq c'$ et on obtient alors $c' = a'$, d'où le résultat. □

Proposition 2.1.6. *Soient B et B' des algèbres de Boole complètes atomiques, $f : B' \to B$ un homomorphisme d'algèbres de Boole complètes et $a \in At(B)$ tel que $f^*(a) = a'$. Alors, a' est l'unique atome de B' tel que $a \leq f(a')$.*

Démonstration. Considérons B et B' des algèbres de Boole complètes atomiques et f un homomorphisme d'algèbres de Boole complètes. Prenons $a \in At(B)$ et $a' \in B'$ tels que $f^*(a) = a'$. Vu la proposition précédent, $a' \in At(B')$ et $a \leq f(a')$.

Il nous reste donc à prouver que a' est unique. Procédons par l'absurde, supposons qu'il existe $b' \in At(B')$ tel que $b' \neq a'$ et $a \leq f(b')$. Dans ce cas, on obtient

$$a' \wedge b' = 0.$$

En effet, $a' \wedge b' \leq a'$ et puisque a' est un atome, $a' \wedge b' = 0$ ou $a' \wedge b' = a'$. De la même manière,on trouve $a' \wedge b' = 0$ ou $a' \wedge b' = b'$. Ainsi, si $a' \wedge b' \neq 0$, $a' \wedge b' = a'$ et $a' \wedge b' = b'$. Or, $b' \neq a'$ donc $a' \wedge b' = 0$. Comme f est un homomorphisme d'algèbres de Boole, on a

$$f(a') \wedge f(b') = f(a' \wedge b') = f(0) = 0.$$

Par hypothèse, $a \leq f(a')$ et $a \leq f(b')$, ainsi, $a \leq f(a') \wedge f(b')$. On en conclut que $a = 0$ et a est un atome, d'où l'absurdité et donc le résultat. □

Corollaire 2.1.7. *Soient B et B' des algèbres de Boole complètes et atomiques et $f : B' \to B$ un homomorphisme d'algèbres de Boole complètes. Pour tout $a \in At(B)$ et $a' \in At(B')$, on a*

$$a \leq f(a') \iff f^*(a) = a'.$$

Cette proposition peut être généralisée comme suit.

Proposition 2.1.8. *Soient B et B' des algèbres de Boole complètes et atomiques et $f : B' \to B$ un homomorphisme d'algèbres de Boole complètes. Pour tout $a \in At(B)$ et $b' \in B'$, on a*

$$a \leq f(b') \iff f^*(a) \leq b'.$$

Démonstration. Soient B et B' des algèbres de Boole complètes et atomiques et f un homomorphisme d'algèbres de Boole complètes. Soient $a \in At(B)$ et $b' \in B'$. Utilisons dans un premier temps le théorème (2.1.1). Puisque $b' \in B'$, on a

$$b' = \vee\{a' \in At(B')|a' \leq b'\} \Rightarrow f(b') = \vee\{f(a')|a' \in At(B') \text{ et } a' \leq b'\}.$$

Supposons maintenant que $a \leq f(b')$. Dans ce cas, $a \leq \vee\{f(a')|a' \in At(B') \text{ et } a' \leq b'\}$ et puisque a est un atome de B, il existe $a' \in At(B')$ tel que $a' \leq b'$ et $a \leq f(a')$. En utilisant la proposition précédente, on obtient $f^*(a) = a'$ et donc $f^*(a) \leq b'$.

Supposons que $f^*(a) \leq b'$. Utilisons la proposition (2.1.6), $f^*(a)$ est l'unique atome de B' tel que $a \leq f(f^*(a))$. Puisque f est un homomorphisme d'algèbres de Boole, on obtient $a \leq f(f^*(a)) \leq f(b')$, d'où le résultat. $\square$

Grâce à cette série de propriétés, nous pouvons maintenant établir que At est un foncteur contravariant entre nos catégories.

Proposition 2.1.9. *L'application At est un foncteur contravariant de la catégorie BCA dans la catégorie Set.*

Démonstration. Soit B une algèbre de Boole complète et atomique. Il est clair que $At(B)$ est un ensemble. Soit B', une autre algèbre de Boole complète et atomique et $f : B' \to B$ un homomorphisme d'algèbre de Boole complète. Commençons par montrer que f^* est bien défini. On a $f^* : At(B) \to At(B')$ et vu la proposition (2.1.2), il est clair que $f^*(a) \in At(B')$ pour tout $a \in At(B)$.

Il est clair que f^* est un morphisme de Set puisque f^* est une application entre les ensembles $At(B)$ et $At(B')$.

Prenons maintenant A, B et C des algèbres de Boole complètes et atomiques et prenons $f : B \to C$ et $g : A \to B$ des homomorphismes d'algèbres de Boole complètes. Montrons que $At(f \circ g) = At(g) \circ At(f)$, autrement dit, prouvons que $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$. Soient $a \in At(A)$ et $c \in At(C)$ tels que $(f \circ g)^*(c) = a$. En utilisant le corollaire (2.1.7), on trouve

$$(f \circ g)^*(c) = a \Leftrightarrow c \leq (f \circ g)(a) = f(g(a)).$$

De plus, $g(a) \in B$ et $c \in At(C)$, donc en utilisant la proposition (2.1.8), on obtient

$$c \leq f(g(a)) \;\Leftrightarrow\; f^*(c) \leq g(a).$$

Enfin, $f^*(c) \in At(B)$ et $a \in At(A)$, donc en appliquant une seconde fois le corollaire (2.1.7), on a

$$f^*(c) \leq g(a) \;\Leftrightarrow\; g^*(f^*(c)) = a.$$

On peut en déduire que $(f \circ g)^*(c) = a = g^*(f^*(c))$ pour tout $a \in At(A)$, $c \in At(C)$ d'où le résultat.

De plus, pour toute algèbre de Boole complète et atomique B, l'application $At(id_B)$ est donnée par

$$\begin{aligned} (id_B)^* : At(B) &\longrightarrow At(B) \\ a \quad &\longmapsto \wedge\{b \in B | a \leq id_B(b)\}. \end{aligned}$$

Or, $\wedge\{b \in B | a \leq id_B(b)\} = \wedge\{b \in B | a \leq b\} = a$ puisque $a \in B$. On peut en conclure que $At(id_B) = id_{At(B)}$. On en conclut que At est un foncteur contravariant de la catégorie BCA dans la catégorie Set.

□

Pour établir l'équivalence duale, nous avons besoin de définir un second foncteur.

Définition 2.1.8. L'application $\mathcal{P}$ est définie comme l'application qui à un ensemble X associe l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties de X et qui à une application

$$\varphi \;:\; X' \to X$$

entre entre ensembles associe $\varphi^* = \varphi^{-1}$.

Proposition 2.1.10. *L'application $\mathcal{P}$ est un foncteur contravariant de la catégorie Set dans la catégorie BCA.*

Démonstration. Soient X un ensemble. Vu la proposition (2.1.4), $\mathcal{P}(X)$ est une algèbre de Boole complète et atomique. Soit X' un deuxième ensemble et $\varphi \;:\; X' \to X$ une application entre ensembles. Montrons que φ^* est un morphisme de BCA.

Montrons d'abord que l'application $\varphi^* : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X')$ est bien définie. Si $E \in \mathcal{P}(X)$, alors il est clair que $\varphi^*(E) = \varphi^{-1}(E) \in \mathcal{P}(X')$.

Montrons maintenant que φ^* est un homomorphisme d'algèbres de Boole complètes. Pour montrer que φ^* est un homomorphisme d'algèbres de Boole, on procède de la même manière que lors de la démonstration (1.1.6). Nous devons maintenant montrer que

$$\varphi^*(\bigvee_{E \in \mathcal{P}(X)} E) = \bigvee_{E \in \mathcal{P}(X)} \varphi^*(E) \quad \text{et} \quad \varphi^*(\bigwedge_{E \in \mathcal{P}(X)} E) = \bigwedge_{E \in \mathcal{P}(X)} \varphi^*(E).$$

Or, on a

$$\begin{aligned}\varphi^*(\bigvee_{E\in\mathcal{P}(X)} E) &= \varphi^{-1}(\bigcup_{E\in\mathcal{P}(X)} E)\\ &= \{x'\in X'|\varphi(x')\in \bigcup_{E\in\mathcal{P}(X)} E\}\\ &= \bigcup_{E\in\mathcal{P}(X)}\{x'\in X'|\varphi(x')\in E\}\\ &= \bigcup_{E\in\mathcal{P}(X)}\varphi^{-1}(E)\\ &= \bigvee_{E\in\mathcal{P}(X)}\varphi^*(E)\end{aligned}$$

On obtient la seconde égalité de la même manière.

Prenons maintenant X, Y et Z des ensembles et prenons $\varphi : Y \to Z$ et $\psi : X \to Y$ des applications entre ensembles. On a

$$\mathcal{P}(\varphi\circ\psi) = (\varphi\circ\psi)^{-1} = \psi^{-1}\circ\varphi^{-1} = \mathcal{P}(\psi)\circ\mathcal{P}(\varphi).$$

De plus, pour tout ensemble X, l'application $\mathcal{P}(id_X)$ est donnée par

$$(id_X)^{-1} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X).$$

On en conclut que $\mathcal{P}(id_X) = id_{\mathcal{P}(X)}$, d'où le résultat. □

Nous devons maintenant prouver les isomorphismes avec les biduaux.

Proposition 2.1.11. *Si B est une algèbre de Boole complète et atomique, l'application*

$$\begin{aligned} r_B \quad : \quad & B \longrightarrow \mathcal{P}(At(B))\\ & b \longmapsto \{a\in At(B)|a\leq b\}\end{aligned}$$

est un isomorphisme d'algèbres de Boole complètes et atomiques.

Démonstration. Vu la proposition (B.2.4), nous devons montrer que r_B est bijectif et que celui-ci respecte l'ordre. Commençons par montrer que

$$b\leq c \text{ si et seulement si } r_B(b)\subseteq r_B(c)$$

pour tout $b, c\in B$. Vu la définition de r_B, il est clair que si $b\leq c$ alors $r_B(b)\subseteq r_B(c)$. Supposons maintenant que $r_B(b)\subseteq r_B(c)$. Procédons par l'absurde et supposons que $b > c$. Vu la proposition (B.2.1), on sait que $b\wedge c^c\neq 0$. Puisque B est atomique, il existe $a\in At(B)$ tel que $a\leq b\wedge c^c$. Alors, cet atome est tel que $a\leq b$ et $a\leq c^c$. On en conclut que $a\in r_B(b)$ et $a\leq c^c$. Ainsi, $a\leq c$ et $a\leq c^c$ et dés lors $a\leq c\wedge c^c = 0$. Donc a doit être nul, ce qui est absurde puisque a est un atome.

Montrons à présent que r_B est bijectif. L'injectivité vient du fait que r_B respecte l'ordre. Il nous reste donc à montrer que r_B est surjectif. Soit $X\subseteq At(B)$. Nous devons trouver $b\in B$ tel que $r_B(b) = X$. Prenons

$$b = \bigvee_{x\in X} x$$

et montrons que $r_B(b) = X$. Autrement dit, nous devons montrer que si $a \in At(B)$,

$$a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad a \in X.$$

Si $a \in X$, il est clair que $a \leq b$. Supposons maintenant que $a \leq b$ et montrons que $a \in X$. Procédons par l'absurde, supposons que $a \notin X$. Dans ce cas, puisque a est un atome et que X est un ensemble d'atomes, on a

$$a \wedge x = 0 \qquad \forall x \in X.$$

Ainsi, on obtient

$$a = a \wedge 1 = a \wedge (x \vee x^c) = (a \wedge x) \vee (a \wedge x^c) = a \wedge x^c \qquad \forall x \in X.$$

On obtient alors les implications suivantes

$$\begin{aligned} & a \leq x^c \qquad \forall x \in X \\ \Rightarrow & a^c \geq x \qquad \forall x \in X \\ \Rightarrow & a^c \geq \bigvee_{x \in X} x \end{aligned}$$

Dés lors, vu nos hypothèses, on obtient

$$a \leq \bigvee_{x \in X} x = b \leq a^c.$$

Ainsi, vu la remarque (B.2.1), $a = 0$ d'où l'absurdité puisque a est un atome. Donc $a \in X$ et on obtient le résultat. □

Proposition 2.1.12. *Soit X un ensemble, l'application*

$$\begin{aligned} \varepsilon_X \quad : \quad & X \longrightarrow At(\mathcal{P}(X)) \\ & x \longmapsto \{x\} \end{aligned}$$

est une bijection entre ensembles.

Démonstration. Il est clair que ε_X est une application entre ensembles. Il faut donc prouver que ε_X est une bijection. Il est clair que ε_X est une application injective. En effet, si il existe $x, y \in X$ tels que $\varepsilon_X(x) = \varepsilon_X(y)$, alors $\{x\} = \{y\}$ et donc $x = y$. De plus, cette application est surjective car les seuls atomes de $\mathcal{P}(X)$ sont les singletons $\{x\}$ avec $x \in X$ vu la proposition (2.1.3). □

Montrons maintenant que les diagrammes correspondants sont commutatifs.

Proposition 2.1.13. *Soient B et B' deux algèbres de Boole complètes et atomiques et $f : B \to B'$ un homomorphisme d'algèbres de Boole complètes. Le diagramme suivant est commutatif.*

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "r_B"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{P}(At(B)) \arrow[d, "\mathcal{P}(At(f))"] \\
B' \arrow[r, "r_{B'}"] & \mathcal{P}(At(B'))
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Nous devons montrer que

$$r_{B'}(f(b)) = \mathcal{P}(At(f)(r_B(b)))$$

pour tout $b \in B$. Soit $b \in B$, on a

$$r_{B'}(f(b)) = \{b' \in At(B')|b' \leq f(b)\}.$$

De plus, en utilisant les notations introduites précédemment, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(At(f)(r_B(b))) &= (f^*)^{-1}(r_B(b)) \\
&= \{b' \in At(B')|f^*(b') \in r_B(b)\} \\
&= \{b' \in At(B')|f^*(b') \in \{a \in At(B)|a \leq b\}\} \\
&= \{b' \in At(B')|f^*(b') \leq b\}.
\end{aligned}$$

En utilisant la proposition (2.1.8), on trouve

$$\mathcal{P}(At(f)(r_B(b))) = \{b' \in At(B')|b' \leq f(b)\},$$

d'où le résultat. □

Proposition 2.1.14. *Soient X et X' deux ensembles et $\varphi : X \to X'$ une application entre ces deux ensembles. Le diagramme suivant est commutatif.*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varepsilon_X"] \arrow[d, "\varphi"'] & At(\mathcal{P}(X)) \arrow[d, "At(\mathcal{P}(\varphi))"] \\
X' \arrow[r, "\varepsilon_{X'}"] & At(\mathcal{P}(X'))
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Nous devons prouver que

$$\varepsilon_{X'}(\varphi(x)) = At(\mathcal{P}(\varphi))(\varepsilon_X(x))$$

pour tout $x \in X$. Soit $x \in X$, on a

$$\varepsilon_{X'}(\varphi(x)) = \{\varphi(x)\}.$$

De plus, si on utilise les notations précédentes, on trouve

$$\begin{aligned}
At(\mathcal{P}(\varphi))(\varepsilon_X(x)) &= (\varphi^{-1})^*(\varepsilon_X(x)) \\
&= \wedge\{A' \in At(\mathcal{P}(X'))|\varphi^{-1}(A') \supseteq (\varepsilon_X(x))\} \\
&= \wedge\{\{a'\} \in \mathcal{P}(X')|\varphi^{-1}(\{a'\}) \supseteq \{x\}\} \\
&= \wedge\{\{a'\} \in \mathcal{P}(X')|\varphi^{-1}(\{a'\}) \ni x\} \\
&= \wedge\{\{a'\} \in \mathcal{P}(X')|\{a'\} \ni \varphi(x)\} \\
&= \wedge\{\{a'\} \in \mathcal{P}(X')|a' = \varphi(x)\} \\
&= \{\varphi(x)\}.
\end{aligned}$$

D'où l'égalité, et donc la conclusion. □

Toutes ces propositions nous permettent d'obtenir l'équivalence duale.

Théorème 2.1.15. *Les foncteurs contravariants At et $\mathcal{P}$ établissent une équivalence duale entre la catégorie BCA et la catégorie Set.*

2.2 Les algèbres modales complètes et atomiques

Dans cette section, nous établissons la dualité entre une algèbre modale complète et atomique et un frame de Kripke. Pour construire les algèbres modales complètes et atomiques, nous ajoutons aux algèbres de Boole complètes et atomiques une opération unaire $\Diamond$. Ensuite, nous ajoutons aux ensembles une relation binaire afin d'obtenir des frames de Kripke. En conséquence, nous utilisons à de nombreuses reprises les propositions établies dans la section précédente.

2.2.1 Définitions

Commençons par définir les objets et les catégories dont nous avons besoin.

Définition 2.2.1. Une *algèbre modale* $B = (B, \Diamond)$ est dite *complète et atomique* si B est une algèbre de Boole complète et atomique munie d'une opération unaire $\Diamond$ respectant

$$\Diamond \bigvee_{i\in I} b_i = \bigvee_{i\in I} \Diamond b_i,$$

pour toute famille d'éléments $\{b_i|i \in I\} \subseteq B$.

Définition 2.2.2. La *catégorie des algèbres modales complètes et atomiques* est la catégorie dont les objets sont les algèbres modales complètes et atomiques B et les morphismes sont les homomorphismes f d'algèbres de Boole complètes tels que $f(\Diamond b) = \Diamond f(b)$ pour tout $b \in B$. Nous noterons cette catégorie CMA.

Définition 2.2.3. Un *frame de Kripke* est un couple $\mathcal{F} = (W, R)$ où W est un ensemble, dont les éléments sont appelés des mondes, et R une relation binaire $R \subseteq W \times W$, appelée *relation d'accessibilité.*

Dans la suite, nous noterons W un frame de Kripke et nous supposerons qu'il est muni d'une relation R. Nous noterons explicitement cette relation lorsque cela sera nécessaire.

Remarque 2.2.1. Soient $a, b \in W$, si aRb, on dit que le monde a est accessible à partir du monde b. On peut également définir R^{-1} (la relation inverse de R) de la façon suivante, on dit que $aR^{-1}b$ si le monde b est accessible à partir du monde a. On aura donc

$$R^{-1}(a) = R(a, -) = \{b : aRb\}.$$

Dans la suite, nous n'utiliserons que la notation $R(a, -)$. Cette définition n'est pas celle adoptée habituellement par les logiciens. En effet, en général, si aRb, on dit que le monde b est accessible à partir du monde a. Vous constaterez dans la suite que nous avons adopté cette définition afin de mettre en évidence le lien existant entre les algèbres modales et les algèbres de pré-contact.

Définition 2.2.4. La *catégorie des frames de Kripke*, notée KF, est la catégorie dont les objets sont les frames de Kripke W et les morphismes sont les applications $\varphi : W \to W'$ entre les frames de Kripke vérifiant

$$\varphi(R(-, x)) = R(-, \varphi(x)) \quad \forall x \in W.$$

Comme d'habitude, nous noterons de la même manière la relation sur un frame W et sur un frame W', en étant bien consciente que ces relations ne sont pas identiques. Il en sera de même pour les relations unaires sur des algèbres modales complètes et atomiques B et B'.

2.2.2 Espace dual d'une algèbre modale complète et atomique

Avant d'établir la dualité entre une algèbre modale complète et atomique et un frame de Kripke, nous établissons la relation binaire duale de la relation unaire $\Diamond$.

Définition 2.2.5. Soit B une algèbre modale complète et atomique munie d'une relation unaire $\Diamond$. On définit la relation binaire $R_\Diamond$ sur $At(B)$ comme suit,

$$aR_\Diamond b \text{ si et seulement si } b \leq \Diamond a,$$

pour tout $a, b \in At(B)$.

Définissons maintenant le foncteur qui nous permet de passer de la catégorie CMA à la catégorie KF.

Définition 2.2.6. L'application At est définie comme l'application qui à une algèbre modale complète et atomique B associe le frame de Kripke $At(B)$ muni de la relation $R_\Diamond$. L'application At associe à un morphisme $f : B' \to B$ de CMA l'application $At(f) = f^*$ définie comme suit,

$$\begin{aligned} f^* \quad : \quad At(B) &\longrightarrow At(B') \\ a \quad &\longmapsto \wedge\{b' \in B' | a \leq f(b')\}. \end{aligned}$$

Proposition 2.2.1. *L'application* At *est un foncteur contravariant de la catégorie* CMA *dans la catégorie* KF.

Démonstration. Soit B une algèbre modale complète et atomique. Il est clair que $At(B)$ muni de la relation $R_\Diamond$ est bien un frame de Kripke. En effet, $At(B)$ est un ensemble et $R_\Diamond$ est une relation binaire par définition. Soit B', une autre algèbre modale complète et atomique et $f : B' \to B$ un homomorphisme d'algèbres de Boole complètes tel que $f(\Diamond b') = \Diamond f(b')$ pour tout $b' \in B'$. L'application f^* est bien définie puisque vu la proposition (2.1.6), il est clair que $f^*(a) \in At(B')$ pour tout $a \in At(B)$.

Montrons maintenant que f^* est un morphisme de KF. Nous devons montrer que

$$f^*(R_\Diamond(-, a)) = R_\Diamond(-, f^*(a)) \quad \forall a \in At(B).$$

Soit a un élément de $At(B)$. Procédons par double inclusion, commençons par montrer que $f^*(R_\Diamond(-, a)) \subseteq R_\Diamond(-, f^*(a))$. Soit $b' \in f^*(R_\Diamond(-, a))$. Il existe $b \in At(B)$ tel que $b' = f^*(b)$ et $bR_\Diamond a$. Montrons que $f^*(b)R_\Diamond f^*(a)$. Remarquons que $b' = f^*(b) \in At(B')$ et vu la proposition (2.1.7), $b \leq f(b')$. De la même manière, il existe $a' \in At(B')$ tel que $a' = f^*(a)$ et $a \leq f(a')$. De plus, puisque $bR_\Diamond a$, on sait que $a \leq \Diamond b$. Par définition de f, on trouve

$$a \leq \Diamond b \leq \Diamond f(b') = f(\Diamond b').$$

Or, $\Diamond b' \in B'$ et vu le théorème (2.1.1), on sait que

$$\Diamond b' = \vee\{a' \in At(B') | a' \leq \Diamond b'\}.$$

Ainsi,

$$a \leq f(\vee\{c' \in At(B') | c' \leq \Diamond b'\}) = \vee\{f(c') | c' \in At(B') \text{ et } c' \leq \Diamond b'\}.$$

Puisque $a \in At(B)$, vu la remarque (2.1.1), il existe $c' \in At(B')$ tel que $c' \leq \Diamond b'$ et $a \leq f(c')$. Vu la proposition (2.1.6), $c' = a'$. Au final, on a

$$a' \leq \Diamond b' \;\Rightarrow\; b'R_\Diamond a' \;\Rightarrow\; f^*(b)R_\Diamond f^*(a),$$

d'où l'inclusion.

Prouvons maintenant que $f^*(R_\Diamond(-, a)) \supseteq R_\Diamond(-, f^*(a))$. Soit $b' \in R_\Diamond(-, f^*(a))$. Autrement dit, $b'R_\Diamond f^*(a)$ et nous devons trouver $b \in At(B)$ tel que $bR_\Diamond a$ et $b' = f^*(b)$, ce qui est équivalent à trouver $b \in At(B)$ tel que $bR_\Diamond a$ et $b \leq f(b')$. Puisque, $b'R_\Diamond f^*(a)$, on a $f^*(a) \leq \Diamond b'$ et vu la proposition (2.1.8), $a \leq f(\Diamond b') = \Diamond f(b')$. Comme $f(b') \in B$, on peut utiliser la proposition (2.1.1). On trouve alors

$$\begin{aligned} a &\leq \Diamond(\vee\{b \in At(B) | b \leq f(b')\}) \\ &= \vee(\Diamond\{b \in At(B) | b \leq f(b')\}) \\ &= \vee\{\Diamond b | b \in At(B) \text{ et } b \leq f(b')\}. \end{aligned}$$

De plus, puisque a est un atome, en utilisant la remarque (2.1.1), on trouve $b \in At(B)$ tel que $a \leq \Diamond b$ et $b \leq f(b')$. Autrement dit, b convient puisque $b \in At(B)$ tel que $bR_\Diamond a$ et $b \leq f(b')$. Nous obtenons donc l'égalité.

La conclusion de cette preuve est identique à celle effectuée dans le théorème (2.1.9) puisque les applications f^* sont définies de la même manière. On en tire que l'application At est un foncteur contravariant de la catégorie CMA dans la catégorie KF. □

Définissons maintenant l'opération unaire duale de la relation binaire R.

Définition 2.2.7. Soit (W, R) un frame de Kripke. On définit la relation $\Diamond_R$ sur l'algèbre modale complète et atomique $\mathcal{P}(W)$ comme suit,

$$\Diamond_R E = R(E, -),$$

pour tout $E \in \mathcal{P}(W)$.

La proposition suivante stipule que l'opération $\Diamond_R$ est bien définie.

Proposition 2.2.2. *Soit (W, R) un frame de Kripke. L'ensemble $\mathcal{P}(W)$ muni de la relation $\Diamond_R$ est une algèbre modale complète et atomique.*

Démonstration. Soit (W, R) un frame de Kripke. Montrons d'abord que $\mathcal{P}(W)$ est une algèbre de Boole. Puisque W est un ensemble, il est clair que $\mathcal{P}(W)$ muni des deux opérations binaires $\cup$ et $\cap$ et de l'opération unaire de passage au complémentaire est une algèbre de Boole.

Il est clair que l'opération $\Diamond_R$ est bien définie puisque $\Diamond_R(E) = R(E, -) \in \mathcal{P}(W)$ pour tout $E \in \mathcal{P}(W)$. Il faut maintenant montrer que l'opération $\Diamond_R$ vérifie

1. $\Diamond_R(O \cup U) = \Diamond_R O \cup \Diamond_R U$;
2. $\Diamond_R \emptyset = \emptyset$.

Nous avons déjà montré ceci dans la démonstration de la proposition (1.1.4). On en conclut que $\mathcal{P}(W)$ est une algèbre modale. Il est clair que celle-ci est complète.

Il nous reste à montrer que $\mathcal{P}(W)$ est atomique. La proposition (2.1.3) stipule que les seuls atomes de $\mathcal{P}(W)$ sont les singletons $\{x\}$ tel que $x \in W$. Ainsi, si $E \in \mathcal{P}(W)$ est non vide, il existe $x \in E$. Dans ce cas, $\{x\} \subseteq E$ et $\mathcal{P}(W)$ est donc une une algèbre modale complète et atomique. □

Définissons le foncteur qui nous permettra de passer de la catégorie KF à la catégorie CMA.

Définition 2.2.8. L'application $\mathcal{P}$ est définie comme l'application qui à un frame de Kripke (W, R) associe l'algèbre modale complète et atomique $\mathcal{P}(W)$ munie de la relation $\Diamond_R$. L'application $\mathcal{P}$ associe à un morphisme $\varphi : X' \to X$ de KF l'application $\varphi^* = \varphi^{-1}$.

Proposition 2.2.3. *L'application $\mathcal{P}$ est un foncteur contravariant de la catégorie KF dans la catégorie CMA.*

Démonstration. Soit (W, R) un frame de Kripke. Vu la proposition (2.2.2), $\mathcal{P}(W)$ munie de la relation $\Diamond_R$ est une algèbre modale complète et atomique.

Soient (W', R) un autre frame de Kripke et $\varphi : W' \to W$ un morphisme de KF. Montrons que $\varphi^* : \mathcal{P}(W) \to \mathcal{P}(W')$ est un morphisme de CMA. Il est clair que φ^* est un homomorphisme d'algèbres de Boole complètes (nous l'avons montré dans la démonstration du théorème (2.1.10)). Puisque φ est un morphisme de KF, nous savons que

$$\varphi(R(-, x')) = R(-, \varphi(x')) \quad \forall x' \in W',$$

et il nous reste à montrer que si $E \in \mathcal{P}(W)$, alors

$$\varphi^*(\Diamond_R E') = \Diamond_R(\varphi^*(E)),$$

ce qui est équivalent à

$$\varphi^{-1}(R(E, -)) = R(\varphi^{-1}(E), -).$$

Considérons $E \in \mathcal{P}(W)$ et procédons par double inclusion. Commençons par montrer que $\varphi^{-1}(R(E, -)) \subseteq R(\varphi^{-1}(E), -)$. Soit $x' \in \varphi^{-1}(R(E, -))$, alors il existe $y \in E$ tel que $yR\varphi(x')$. Étant donné notre hypothèse, il existe $y' \in W'$ tel que $y'Rx'$ et $\varphi(y') = y \in E$. Au final, il existe $y' \in \varphi^{-1}(E)$ tel que $y'Rx'$, donc $x' \in R(\varphi^*(E), -)$.

Montrons maintenant que $R(\varphi^{-1}(E), -) \subseteq \varphi^{-1}(R(E, -))$. Soit $x' \in R(\varphi^{-1}(E), -)$, alors il existe $y' \in W'$ tel que $\varphi(y') \in E$ et $y'Rx'$. En utilisant l'hypothèse, on obtient que $\varphi(y')R\varphi(x')$. Nous avons donc trouver $y = \varphi(y') \in E$ tel que $yR\varphi(x')$ et donc $x' \in \varphi^{-1}(R(E, -))$.

Pour conclure, il suffit de procéder de la même manière que dans la démonstration du théorème (1.1.6). $\square$

Passons maintenant aux isomorphismes avec les biduaux.

Proposition 2.2.4. *Si B est une algèbre modale complète et atomique, l'application*

$$\begin{aligned} r_B \quad : \quad & B \longrightarrow \mathcal{P}(At(B)) \\ & b \longmapsto \{a \in At(B) | a \leq b\} \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'algèbres modales complètes et atomiques.

Démonstration. La proposition (2.1.11) stipule que r_B est un isomorphisme d'algèbres de Boole complètes et atomiques. Il nous reste donc à montrer que

$$r_B(\Diamond b) = \Diamond_{R_\Diamond} r_B(b) \quad \forall b \in B.$$

Soit $b \in B$, on a $r_B(\Diamond b) = \{a \in At(B) | a \leq \Diamond b\}$. De plus,

$$\begin{aligned} \Diamond_{R_\Diamond} r_B(b) &= R_\Diamond(r_B(b), -) \\ &= \{a \in At(B) | \exists c \in r_B(b) \text{ tel que } a \leq \Diamond c\} \\ &= \{a \in At(B) | \exists c \in At(B) \text{ tel que } c \leq b \text{ et } a \leq \Diamond c\} \\ &= \{a \in At(B) | a \leq \Diamond b\}. \end{aligned}$$

Cette dernière égalité découle du théorème (2.1.1) et de la remarque (2.1.1). On obtient alors l'égalité et donc le résultat. $\square$

Proposition 2.2.5. *Soit (W,R) un frame de Kripke, l'application*

$$\begin{array}{rcl} \varepsilon_W & : & W \longrightarrow At(\mathcal{P}(W)) \\ & & x \longmapsto \{x\} \end{array}$$

est un morphisme de KF.

Démonstration. La proposition (1.2.19) stipule que ε_W est un isomorphisme entre ensembles. Il reste donc à montrer que

$$\varepsilon_W(R(-,x)) = R_{\Diamond_R}(-,\varepsilon_W(x)) \quad \forall x \in W.$$

On a

$$\varepsilon_W(R(-,x)) = \varepsilon_W(\{y \in W | yRx\}) = \{\{y\}|yRx\}.$$

Ensuite, puisque les seuls atomes de $\mathcal{P}(W)$ sont les singletons $\{y\}$ avec $y \in W$, on trouve

$$\begin{aligned} R_{\Diamond_R}(-,\varepsilon_W(x)) &= R_{\Diamond_R}(-,\{x\}) \\ &= \{z \in At(\mathcal{P}(W))|zR_{\Diamond_R}\{x\}\} \\ &= \{\{y\} \in \mathcal{P}(W)|\{x\} \subseteq \Diamond_R\{y\}\} \\ &= \{\{y\} \in \mathcal{P}(W)|\{x\} \subseteq R(\{y\},-)\} \\ &= \{\{y\} \in \mathcal{P}(W)|\{x\} \subseteq \{z \in W|yRz\}\} \\ &= \{\{y\}|yRx\}, \end{aligned}$$

d'où l'égalité et donc le résultat. □

Les démonstrations des deux propositions suivantes sont identiques à celles effectuées dans le cas des algèbres de Boole complètes et atomiques.

Proposition 2.2.6. *Soient B et B' deux algèbres modales complètes et atomiques et $f : B \to B'$ un morphisme de CMA. Le diagramme suivant est commutatif.*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "r_B"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{P}(At(B)) \arrow[d, "\mathcal{P}(At(f))"] \\ B' \arrow[r, "r_{B'}"] & \mathcal{P}(At(B')) \end{tikzcd}$$

Proposition 2.2.7. *Soient (W,R) et (W',R) deux frame de Kripke et $\varphi : W \to W'$ un morphisme de KF. Le diagramme suivant est commutatif.*

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\varepsilon_W"] \arrow[d, "\varphi"'] & At(\mathcal{P}(W)) \arrow[d, "At(\mathcal{P}(\varphi))"] \\ W' \arrow[r, "\varepsilon_{W'}"] & At(\mathcal{P}(W')) \end{tikzcd}$$

Toutes ces propositions nous permettent d'obtenir l'équivalence duale.

Théorème 2.2.8. *Les foncteurs contravariants At et $\mathcal{P}$ établissent une équivalence duale entre la catégorie CMA et la catégorie KF.*

2.3 Les algèbres de pré-contact complètes et atomiques

Dans cette section, nous procédons différemment. Nous établissons en effet un isomorphisme entre la catégorie des algèbres modales complètes et atomiques et la catégorie des algèbres de pré-contact complètes et atomiques que nous définissons. Grâce à cette isomorphisme et à l'équivalence duale entre la catégorie CMA et la catégorie KF établie dans la section précédente, nous obtenons l'équivalence duale entre la catégorie des algèbres de pré-contact complètes et atomiques et la catégorie KF.

2.3.1 Définitions

Commençons par définir les algèbres de pré-contact complètes et atomiques ainsi que leur catégorie.

Définition 2.3.1. Une algèbre de pré-contact B complète et atomique est une algèbre de Boole B complète et atomique munie d'une relation $\prec$ vérifiant les axiomes $\prec 1, 2, 3$ et 4 ainsi que les axiomes
$\prec 8$ si $a \prec b_i$ pour tout $i \in I$, alors $a \prec \bigwedge\limits_{i \in I} b_i$;
$\prec 9$ si $b_i \prec a$ pour tout $i \in I$, alors $\bigvee\limits_{i \in I} b_i \prec a$;
pour tout $a \in B$ et pour toute famille $\{b_i | i \in I\}$ de B (avec I un ensemble d'indices).

Définition 2.3.2. La *catégorie des algèbres de pré-contact complètes et atomiques* est la catégorie dont les objets sont les algèbres de pré-contact complètes et atomiques B et les morphismes sont les homomorphismes f d'algèbres de Boole complètes tels que

$$\prec (f(b), -) = f(\prec (b, -)) \uparrow .$$

pour tout $b \in B$. Nous noterons cette catégorie CCA.

2.3.2 Isomorphisme entre CMA et CCA

Établissons maintenant l'isomorphisme entre la catégorie CMA et la catégorie CCA. Définissons d'abord une relation de proximité sur une algèbre modale complète et atomique qui transforme cette algèbre une algèbre de pré-contact complète et atomique.

Définition 2.3.3. Soit B une algèbre modale complète et atomique. On définit la relation de proximité $\prec_\Diamond$ sur B comme suit

$$a \prec_\Diamond b \quad \text{si et seulement si} \quad \Diamond a \leq b,$$

pour tous $a, b \in B$.

Proposition 2.3.1. *Soit B une algèbre modale complète et atomique. L'algèbre B munie de la relation $\prec_\Diamond$ est une algèbre de pré-contact complète et atomique.*

Démonstration. Puisque B est une algèbre modale complète et atomique, il suffit de montrer que $\prec_\Diamond$ vérifie les axiomes $\prec 1, 2, 3, 4, 8$ et 9. Soient $a, b, c, d \in B$ et une famille

$\{b_i | i \in I\}$ de B (avec I un ensemble d'indice).

$\prec 1$: Si $a \leq b$, $c \leq d$ et $b \prec_\Diamond c$, alors $\Diamond b \leq c$ et puisque $\Diamond$ est isotone, on trouve

$$\Diamond a \leq \Diamond b \leq c \leq d,$$

ainsi $a \prec_\Diamond d$ et $\prec_\Diamond$ vérifie l'axiome $\prec 1$.

$\prec 2$: Si $a \prec_\Diamond c$, $a \prec_\Diamond d$, $b \prec_\Diamond c$ et $b \prec_\Diamond d$, alors $\Diamond a \leq c$ et $\Diamond a \leq d$ donc $\Diamond a \leq c \wedge d$. De la même manière, on trouve $\Diamond b \leq c \wedge d$. Ainsi, $\Diamond(a \vee b) = \Diamond a \vee \Diamond b \leq c \wedge d$. On en déduit que $a \vee b \prec_\Diamond c \wedge d$ et $\prec_\Diamond$ vérifie l'axiome $\prec 2$.

$\prec 3$: Il est clair que $\Diamond 0 = 0 \leq 0$ et donc $0 \prec_\Diamond 0$.

$\prec 4$: Il est évident que $1 \prec_\Diamond 1$.

$\prec 8$: Si $a \prec_\Diamond b_i$ pour tout $i \in I$, alors $\Diamond a \leq b_i$ pour tout $i \in I$. Ainsi, $\Diamond a \leq \bigwedge\limits_{i \in I} b_i$ et donc $a \prec_\Diamond \bigwedge\limits_{i \in I} b_i$.

$\prec 9$: Si $b_i \prec_\Diamond a$ pour tout $i \in I$, alors $\Diamond b_i \leq a$ pour tout $i \in I$. De plus, puisque B est une algèbre modale complète, on obtient

$$\Diamond \bigvee_{i \in I} b_i = \bigvee_{i \in I} (\Diamond b_i) \leq a,$$

et on en déduit que $\bigvee\limits_{i \in I} b_i \prec_\Diamond a$, d'où le résultat.

□

Définissons maintenant une opération unaire sur une algèbre de pré-contact complète et atomique. Celle-ci fait de l'algèbre de pré-contact complète et atomique une algèbre modale complète et atomique.

Définition 2.3.4. Soit B une algèbre de pré-contact complète et atomique. On définit l'opération unaire $\Diamond_\prec$ sur B comme suit

$$\Diamond_\prec a = \bigwedge_{a \prec b} b,$$

pour tout $a \in B$.

Proposition 2.3.2. *Soit B une algèbre de pré-contact complète et atomique. L'algèbre B munie de la relation $\Diamond_\prec$ est une algèbre modale complète et atomique.*

Démonstration. Puisque B est une algèbre de pré-contact complète et atomique, B est une algèbre de Boole complète et atomique et il nous reste donc à montrer que $\Diamond_\prec$ vérifie

$$\Diamond_\prec 0 = 0 \quad \text{et} \quad \Diamond_\prec \bigvee_{i \in I} b_i = \bigvee_{i \in I} \Diamond_\prec b_i,$$

pour toute famille d'éléments $\{b_i | i \in I\} \subseteq B$. Premièrement, on a $\Diamond_{\prec} 0 = \bigwedge\limits_{0 \prec b} b$ et vu l'axiome $\prec 3$, $0 \prec 0$, donc $\Diamond_{\prec} 0 = 0$. Ensuite, si $\{b_i | i \in I\}$ est une famille d'éléments de B, on a

$$b_j \leq \bigvee_{i \in I} b_i \ \ \forall j \in I \ \Rightarrow \ \Diamond_{\prec} b_j \leq \Diamond_{\prec} \bigvee_{i \in I} b_i \ \ \forall j \in I \ \Rightarrow \ \bigvee_{i \in I} \Diamond_{\prec} b_i \leq \Diamond_{\prec} \bigvee_{i \in I} b_i.$$

Il nous reste donc à montrer que $\bigvee\limits_{i \in I} \Diamond_{\prec} b_i \geq \Diamond_{\prec} \bigvee\limits_{i \in I} b_i$. Commençons par remarquer que

$$\bigvee_{i \in I} \Diamond_{\prec} b_i = \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J_i} \{a_{ij} | b_i \prec a_{ij}\},$$

où J_i est un ensemble d'indice associé à b_i. Puisque B est une algèbre de Boole complète et atomique, celle-ci est isomorphe à $\mathcal{P}(At(B))$. Ainsi, si on pose $\sigma : I \to \dot{\bigcup} J_i$ une fonction de choix qui à tout $i \in I$ associe $\sigma(i) \in J_i$, on trouve

$$\bigvee_{i \in I} \Diamond_{\prec} b_i = \bigwedge_{\sigma} \bigvee_{i \in I} a_{i\sigma(i)},$$

où $\bigwedge\limits_{\sigma}$ signifie que nous prenons l'inf sur toutes les fonctions de choix. Nous devons maintenant montrer que

$$\bigwedge_{\sigma} \bigvee_{i \in I} a_{i\sigma(i)} \geq \bigwedge \{b | \bigvee_{i \in I} b_i \prec b\}.$$

Or, pour toute fonction σ, on a

$$b_i \prec a_{i\sigma(i)} \quad \text{et} \quad a_{i\sigma(i)} \leq \bigvee_{i \in I} a_{i\sigma(i)},$$

et puisque B une algèbre de pré-contact complète et atomique, on trouve que

$$\bigvee_{i \in I} b_i \prec \bigvee_{i \in I} a_{i\sigma(i)}.$$

Autrement dit, $\bigvee\limits_{i \in I} a_{i\sigma(i)} \in \{b | \bigvee\limits_{i \in I} b_i \prec b\}$ pour toute fonction σ et on trouve

$$\bigvee_{i \in I} a_{i\sigma(i)} \geq \bigwedge \{b | \bigvee_{i \in I} b_i \prec b\},$$

pour tout fonction σ, d'où le résultat. □

Définissons maintenant le foncteur qui nous permet de passer de la catégorie CMA dans la catégorie CCA

Définition 2.3.5. L'application Mc est définie comme l'application qui à une algèbre modale complète et atomique B associe l'algèbre de pré-contact complète et atomique $Mc(B) = B$ munie de la relation $\prec_{\Diamond}$ et qui à un morphisme $f : B' \to B$ de CMA associe l'application $Mc(f) = f$.

Théorème 2.3.3. *L'application Mc est un foncteur covariant de la catégorie CMA dans la catégorie CCA.*

Démonstration. Soit B une algèbre modale complète et atomique munie de l'opération unaire $\lozenge$. La proposition (2.3.1) stipule que $Mc(B)$ muni de la relation $\prec_{\lozenge}$ est une algèbre de pré-contact complète et atomique. Soit B', une autre algèbre modale complète et atomique et $f : B \to B'$ un homomorphisme d'algèbres de Boole complètes tel que $f(\lozenge b) = \lozenge f(b)$ pour tout $b \in B$. L'application $Mc(f)$ est bien définie puisqu'il s'agit de f lui même.

Montrons maintenant quand $f : B \to B'$ est un homomorphisme d'algèbres de Boole complètes tels que

$$\prec_{\lozenge} (f(b), -) = f(\prec_{\lozenge} (b, -)) \uparrow,$$

pour tout $b \in B$. On a

$$\prec_{\lozenge} (f(b), -) = \{b' \in B' | f(b) \prec_{\lozenge} b'\} = \{b' \in B' | \lozenge f(b) \leq b'\}.$$

De plus,

$$\begin{aligned} f(\prec_{\lozenge} (b, -)) \uparrow &= f(\{a \in B | b \prec_{\lozenge} a\}) \uparrow \\ &= (\{f(a) \in B' | a \in B \text{ et } b \prec_{\lozenge} a\}) \uparrow \\ &= \{b' \in B' | \exists f(a) \in B' \text{ et } a \in B \text{ tels que } b \prec_{\lozenge} a \text{ et } b' \geq f(a)\} \\ &= \{b' \in B' | f(\lozenge b) \leq b'\}. \end{aligned}$$

Cette dernière égalité est obtenue grâce au fait que f est un homomorphisme d'algèbres de Boole. Puisque f est un morphisme de CMA, on obtient l'égalité désirée et donc le résultat. Ainsi, f est un morphisme de CCA.

Si on prend A, B et C des algèbres modales complètes et atomiques et $f : B \to C$ et $g : A \to B$ des morphismes de CMA, il est clair que

$$Mc(f \circ g) = f \circ g = Mc(f) \circ Mc(g).$$

De plus, pour tout algèbre modale complète et atomique B, on a bien l'égalité $Mc(id_B) = id_B = id_{Mc(B)}$. On en conclut que Mc est un foncteur covariant de la catégorie CMA dans la catégorie CCA.

$\square$

Présentons maintenant le foncteur permettant de passer de la catégorie CCA dans la catégorie CMA

Définition 2.3.6. L'application Cm est définie comme l'application qui à une algèbre modale de pré-contact complète et atomique B associe l'algèbre modale complète et atomique $Cm(B) = B$ muni de la relation $\lozenge_{\prec}$ et qui à un morphisme $f : B \to B'$ de CCA associe l'application $Cm(f) = f$.

Proposition 2.3.4. *L'application Cm est un foncteur covariant de la catégorie CCA dans la catégorie CMA.*

Démonstration. Soit B une algèbre de pré-contact complète et atomique munie de la relation de proximité $\prec$. La proposition (2.3.2) stipule que $Cm(B)$ muni de l'opération unaire $\Diamond_{\prec}$ est une algèbre modale complète et atomique. Soit B' une autre algèbre de pré-contact complète et atomique et $f \ : \ B \to B'$ un homomorphisme d'algèbres de Boole complètes tel que

$$\prec (f(b), -) = f(\prec (b, -)) \uparrow,$$

pour tout $b \in B$. Il est clair que $Cm(f)$ est bien défini.

Montrons maintenant que f est un morphisme de CMA. Puisque f est un homomorphisme d'algèbres de Boole complètes, il reste à montrer que $f(\Diamond_{\prec} b) = \Diamond_{\prec} f(b)$ pour tout $b \in B$. En utilisant l'hypothèse et le fait que f est un homomorphisme d'algèbres de Boole complètes, on trouve

$$\begin{aligned}
\Diamond_{\prec} f(b) &= \wedge\{b' \in B' | f(b) \prec b'\} \\
&= \wedge(\prec (f(b), -)) \\
&= \wedge(f(\prec (b, -)) \uparrow) \\
&= \wedge(f(\prec (b, -))) \\
&= f(\wedge(\prec (b, -))) \\
&= f(\Diamond_{\prec} b).
\end{aligned}$$

Ainsi, f est un morphisme de CMA.

Il est clair que si f et g sont des morphismes composables de CCA, alors $Cm(f \circ g) = Cm(f) \circ Cm(g)$. Il est également évident que $Cm(id_B) = id_B = id_{Cm(B)}$. On obtient donc le résultat, Cm est un foncteur covariant de la catégorie CCA dans la catégorie CMA. □

Nous essayons d'établir un isomorphisme entre la catégorie CCA et la catégorie CMA. Les isomorphismes que nous devons établir sont donc des identités.

Proposition 2.3.5. *Soit B une algèbre modale complète et atomique. Alors l'application*

$$\begin{aligned}
id_B \ : \ B &\to Cm(Mc(B)) \\
b &\mapsto b
\end{aligned}$$

est un isomorphisme de CMA.

Démonstration. Soit B une algèbre modale complète et atomique et $\Diamond$ une opération unaire sur B. Il est clair que l'application id_B est un homomorphisme d'algèbres de Boole complètes. Il reste donc à montrer que $id_B(\Diamond b) = \Diamond_{\prec_\Diamond} id_B(b)$ pour tout $b \in B$. Autrement dit, nous devons montrer que $\Diamond b = \Diamond_{\prec_\Diamond} b$ pour tout $b \in B$. Soit $b \in B$, on a

$$\begin{aligned}
\Diamond_{\prec_\Diamond} b &= \bigwedge_{b \prec_\Diamond a} a \\
&= \wedge\{a \in B | b \prec_\Diamond a\} \\
&= \wedge\{a \in B | \Diamond b \leq a\} \\
&= \Diamond b,
\end{aligned}$$

puisque $\Diamond b \in B$. □

Proposition 2.3.6. *Soit B une algèbre de pré-contact complète et atomique. L'application*

$$\begin{aligned} id_B \ : \ & B \to Mc(Cm(B)) \\ & b \ \mapsto b \end{aligned}$$

est un isomorphisme de CCA.

Démonstration. Soit B une algèbre de pré-contact complète et atomique et $\prec$ une relation de proximité sur B. Il est clair que l'application id_B est un homomorphisme d'algèbres de Boole complètes. Il nous reste donc à montrer que

$$\prec (id_B(b), -) = id_B(\prec (b, -)) \uparrow,$$

pour tout $b \in B$. Montrons que

$$a \prec_{\Diamond_\prec} b \quad \Leftrightarrow \quad a \prec b,$$

pour tout $a, b \in B$ et on obtiendra le résultat. Soient $a, b \in B$, on a

$$a \prec_{\Diamond_\prec} b \quad \Leftrightarrow \quad \Diamond_\prec a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad \underset{a \prec c}{\wedge} c \leq b.$$

Ainsi, si on suppose que $\underset{a \prec c}{\wedge} c \leq b$ alors on a $a \leq a$, $\underset{a \prec c}{\wedge} c \leq b$ et $a \prec \underset{a \prec c}{\wedge} c$ puisque B une algèbre de pré-contact complète et atomique. Grâce à l'axiome $\prec 2$, on trouve $a \prec b$. Supposons que $a \prec b$, alors il est clair que $\underset{a \prec c}{\wedge} c \leq b$ et donc $a \prec_{\Diamond_\prec} b$. $\square$

Les deux propositions suivantes sont évidentes vu ce qui précède.

Proposition 2.3.7. *Soient B et B' deux algèbres modales complètes et atomiques et $f : B \to B'$ un morphisme de CMA. Le diagramme suivant est commutatif.*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "id_B"] \arrow[d, "f"'] & Cm(Mc(B)) \arrow[d, "Cm(Mc(f))"] \\ B' \arrow[r, "id_{B'}"] & Cm(Mc(B')) \end{tikzcd}$$

Proposition 2.3.8. *Soient B et B' deux algèbres de pré-contact complètes et atomiques et $f : B \to B'$ un morphisme de CCA. Le diagramme suivant est commutatif.*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "id_B"] \arrow[d, "f"'] & Mc(Cm(B)) \arrow[d, "Mc(Cm(f))"] \\ B' \arrow[r, "id'_B"] & Mc(Cm(B')) \end{tikzcd}$$

Toutes ces propositions nous permettent d'obtenir un isomorphisme entre les catégories CMA et CCA.

Théorème 2.3.9. *Les catégories CMA et CCA sont isomorphes.*

2.3.3 Espace dual d'une algèbre de pré-contact complète et atomique

Grâce à l'isomorphisme que nous venons d'établir, nous pouvons maintenant déduire l'espace dual d'une algèbre de pré-contact complète et atomique. En effet, nous obtenons trivialement les deux proposition suivantes.

Proposition 2.3.10. *L'application At est un foncteur contravariant de la catégorie CCA dans la catégorie KF.*

Proposition 2.3.11. *L'application $\mathcal{P}$ est un foncteur contravariant de la catégorie KF dans la catégorie CCA.*

Proposition 2.3.12. *Si B est une algèbre de pré-contact complète et atomique, l'application*

$$\begin{aligned} r_B \quad : \quad B &\longrightarrow \mathcal{P}(At(B)) \\ b &\longmapsto \{a \in At(B) | a \leq b\} \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'algèbres de pré-contact complètes et atomiques.

Démonstration. Le théorème (2.2.4) stipule que l'application r_B est un isomorphisme d'algèbre modales complètes et atomiques. Ainsi, vu l'isomorphisme entre la catégorie CMA et CCA, on peut conclure. □

On obtient alors directement le théorème précédent puisque le raisonnement est identique à celui effectué dans le cas des algèbres modales complètes et atomiques.

Théorème 2.3.13. *Les foncteurs contravariants At et $\mathcal{P}$ établissent une équivalence duale entre la catégorie CCA et la catégorie KF.*

2.4 Les extensions canoniques

Avant de clôturer ce chapitre, introduisons l'extension canonique d'une algèbre de Boole, d'une algèbre modale et d'une algèbre de pré-contact. Pour obtenir l'extension canonique, nous composons les foncteurs définis précédemment. Lorsque nous établissons le théorème de Fine-Van-Benthem dans le chapitre 4, nous utilisons ces extensions canoniques.

Commençons par définir un foncteur essentiel dans la construction des extensions canoniques.

Définition 2.4.1. On définit le *foncteur d'oubli* F (ou foncteur *Forgetfull*) comme l'application qui à un ensemble X muni de la topologie τ associe l'ensemble X et qui a une fonction continue $f : X \to Y$ entre ensembles associe l'application f entre ces mêmes ensembles.

Proposition 2.4.1. *À toute algèbre de Boole B on peut associer une algèbre de Boole complète et atomique B^δ dans laquelle B se plonge grâce au plongement*

$$\begin{array}{rcl} p \ : \ B & \to & B^\delta \\ b & \mapsto & r_B(b). \end{array}$$

Démonstration. Soit B une algèbre de Boole. Vu la proposition (B.2.11), le foncteur Ult est un foncteur contravariant de la catégorie AB dans la catégorie EB. Pour toute algèbre de Boole B, une base de la topologie de $Ult(B)$ est donnée par $\{r_B(b)|b \in B\}$. En appliquant le foncteur F à l'espace topologique $Ult(B)$, on obtient l'espace $Ult(B)$ qui est un espace de la catégorie Set. Vu la proposition (2.1.10), on peut appliquer à cet espace le foncteur $\mathcal{P}$ et on obtient alors l'algèbre de Boole complète et atomique $\mathcal{P}(Ult(B))$. Ainsi, en posant $p = \mathcal{P} \circ F \circ Ult$, on obtient le plongement

$$\begin{array}{rcl} p \ : \ B & \to & \mathcal{P}(Ult(B)) \\ b & \mapsto & r_B(b) \end{array}$$

qui convient. □

Définition 2.4.2. L'algèbre de Boole complète et atomique $\mathcal{P}(Ult(B))$ est appelée *l'extension canonique de l'algèbre de Boole B* et est notée B^δ.

Passons maintenant aux algèbres modales.

Proposition 2.4.2. *À toute algèbre modale B munie de l'opération unaire $\Diamond$, on peut associer une algèbre modale complète et atomique $(B, \Diamond)^\delta$ dans laquelle B se plonge grâce au plongement*

$$\begin{array}{rcl} p \ : \ (B, \Diamond) & \to & (B, \Diamond)^\delta \\ b & \mapsto & r_B(b). \end{array}$$

Démonstration. Vu la proposition (1.1.5), le foncteur Ult est un foncteur contravariant de la catégorie MA dans la catégorie MS. Pour toute algèbre modale B, $Ult(B)$ est un espace topologique muni d'une relation binaire fermée $R_\Diamond$ telle que $R(O, -)$ est un ouvert fermé si O est un ouvert fermé. En appliquant le foncteur F à cet espace, on obtient un objet de la catégorie KF. Vu la proposition (2.2.3), on peut appliquer le foncteur $\mathcal{P}$ à l'espace $Ult(B)$ et on obtient alors l'algèbre modale complète et atomique $\mathcal{P}(Ult(B))$ munie de l'opération unaire $\Diamond_{R_\Diamond}$. Ainsi, en posant $p = \mathcal{P} \circ F \circ Ult$, on obtient le plongement

$$\begin{array}{rcl} p \ : (B, \Diamond) & \to & (\mathcal{P}(Ult(B)), \Diamond_{R_\Diamond})^\delta \\ b & \mapsto & r_B(b). \end{array}$$

□

Définition 2.4.3. L'algèbre modale complète et atomique $\mathcal{P}(Ult(B))$ munie de l'opération unaire $\Diamond_{R_\Diamond}$ est appelée *l'extension canonique de l'algèbre modale* $(B, \Diamond)$ et est notée $(B, \Diamond)^\delta$.

Lorsque aucune ambiguïté ne sera possible, nous noterons B^δ l'extension canonique de l'algèbre modale B.

Nous définissons à présent l'extension canonique d'une algèbre de pré-contact complète et atomique. Nous définissons ici un plongement entre une algèbre de pré-contact et une algèbre modale complète et atomique car ce plongement nous est utile dans la suite. Néanmoins, nous pourrions tout à fait trouver un plongement entre une algèbre de pré-contact et une algèbre de pré-contact complète et atomique.

Proposition 2.4.3. *À toute algèbre de pré-contact B munie de la relation $\perp$, on peut associer une algèbre modale complète et atomique $(B, \Diamond)^\delta$ dans laquelle B se plonge grâce au plongement*

$$\begin{array}{rcl} p\ :(B,\perp) & \to & (B,\Diamond)^\delta \\ b & \mapsto & r_B(b). \end{array}$$

Démonstration. Vu la proposition (1.2.16), le foncteur Ult est un foncteur contravariant de la catégorie PCA dans la catégorie PCS. Pour toute algèbre de pré-contact B, $Ult(B)$ est un espace topologique muni d'une relation binaire fermée $R_\perp$. La suite de la démonstration est identique à celle effectuée dans le cas des algèbres modales complètes et atomiques. Ainsi, en posant $p = \mathcal{P} \circ F \circ Ult$, on obtient le plongement

$$\begin{array}{rcl} p\ :(B,\perp) & \to & (\mathcal{P}(Ult(B)), \Diamond_{R_\perp})^\delta \\ b & \mapsto & r_B(b). \end{array}$$

$\square$

Définition 2.4.4. L'algèbre modale complète et atomique $\mathcal{P}(Ult(B))$ munie de l'opération unaire $\Diamond_{R_\perp}$ est appelée *l'extension canonique de l'algèbre de pré-contact* $(B, \perp)$ et est notée $(B, \Diamond)^\delta$.

De la même manière que pour les algèbres modales, lorsque aucune ambiguïté ne sera possible, nous noterons B^δ l'extension canonique de l'algèbre de pré-contact B.

Chapitre 3

Les théorèmes de complétude

Dans ce chapitre nous établissons différents théorèmes de complétude en nous servant des dualités établies précédemment. Nous commençons par considérer des algèbres modales et par établir le théorème de complétude algébrique des logiques modales. Nous passons ensuite à la complétude relationnelle en considérant des espaces modaux et des frames de Kripke. Nous établissons un théorème de complétude dans les espaces modaux ainsi qu'un théorème de complétude dans les frames de Kripke. Nous nous intéressons ensuite aux algèbres de pré-contact et aux espaces de pré-contact pour lesquels nous établissons deux nouveaux théorèmes de complétude : le théorème de complétude pour les algèbres de pré-contact et le théorème de complétude pour les espaces de pré-contact. Nous discutons ensuite de l'utilité de ces théorèmes.

3.1 Théorème de complétude algébrique des logiques modales

Dans cette section nous établissons le théorème de complétude algébrique des logiques modales. De plus, comme annoncé dans le chapitre 1, nous étudions ici un exemple d'algèbre modale. Cet exemple nous permet de démontrer le théorème de complétude algébrique des logiques modales. Commençons d'abord par rappeler quelques notions.

3.1.1 Quelques notions de logique modale

Définition 3.1.1. Un *langage modal* est un langage propositionnel auquel est ajouté le connecteur $\Box$. Le connecteur unaire $\Box$ est le "nécessaire" et est le connecteur dual du "possible" $\Diamond$. Nous écrirons $\Box\varphi$ qui se lira "nécessaire φ" et qui est équivalent à $\neg\Diamond\neg\varphi$ pour toute variable propositionnelle φ .

Définition 3.1.2. Un mot φ sur un langage modal est une *proposition modale (ou une formule modale)* si ce mot est une variable propositionnelle ou s'il existe des formules modales ψ et χ telles que le mot $\psi \to \chi$ soit égal au mot φ ou enfin, s'il existe une formule modale ψ telle que le mot φ soit identique au mot $\neg\psi$ ou au mot $\Box\psi$. Nous noterons l'ensemble des propositions modales *Prop*.

Nous définissons maintenant un système modal. Dans la littérature, le système modal que nous définissons ici est appelé un système modal normal. Cependant, nous ne nous intéresserons ici qu'à ce type de système et donc dans la suite, nous nous permettrons d'omettre le terme normal lorsque nous utiliserons ces systèmes.

Définition 3.1.3. Un *système modal* Σ est un système formel consistant en la donnée d'un langage modal ; d'un ensemble de propositions nommées *axiomes* contenant

1. la liste des schémas tautologiques :
   — $L_1 : \varphi \to (\psi \to \varphi)$
   — $L_2 : (\varphi \to (\psi \to \theta) \to (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \theta))$
   — $L_3 : (\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$

   $\forall \varphi, \psi \in \mathit{Prop}$,
2. le schéma $K : \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$ $\forall \varphi, \psi \in \mathit{Prop}$,
3. et une liste Σ de schémas d'axiomes spécifiques ;

et de deux règles d'inférence qui sont les suivantes :

— la règle classique du modus ponens : $\dfrac{\varphi, \varphi \to \psi}{\psi}$;

— la règle de nécessitation : $\dfrac{\varphi}{\Box\varphi}$,
$\forall \varphi, \psi \in \mathit{Prop}$.

Dans la suite, chaque fois que nous considèrerons un système modal Σ, nous lui associerons de manière implicite l'ensemble de variables que nous appelons *Var*.

Remarque 3.1.1. Nous avons ici décidé que l'ensemble des axiomes contenait une liste Σ de schémas d'axiomes spécifiques. Il existe des définitions plus générales qui demandent simplement des axiomes et non des schémas d'axiomes. Nous verrons dans la suite que la définition adoptée ici est essentielle.

Définition 3.1.4. Une *preuve formelle* est une suite de formules $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ telle que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la formule φ_i est soit un axiome, soit une conséquence directe de certaines formules la précédant dans la preuve et des deux règles d'inférence.

Définition 3.1.5. Une formule φ est *prouvable* s'il existe une preuve $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ telle que la formule φ_n soit égale à φ. En général, on dira que φ est un théorème et si φ est un théorème de Σ, on écrira

$$\Sigma \vdash \varphi.$$

Une des différences fondamentales qui existent entre la logique propositionnelle classique et la logique modale est que lorsque nous entrons dans la logique modale, nous perdons le théorème de la déduction que nous avions dans la logique propositionnelle classique. Cette perte n'est pas sans conséquence et nous devons donc introduire des notions dont nous aurons besoin lorsque nous introduirons le modèle canonique d'un système modal Σ.

Définition 3.1.6. Soient Σ un système modal, φ un proposition modale et Γ un ensemble de formules modales. Nous dirons que φ est Σ-*prouvable* s'il existe $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$ tel que

$$\Sigma \vdash (\gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_n) \to \varphi.$$

Nous écrirons alors $\Sigma \vdash_\Sigma \varphi$.

Définition 3.1.7. Soient Σ un système modal et Γ un ensemble de formules modales. L'ensemble Γ est Σ-consistant si $\Sigma \nvdash_\Sigma \bot$.

Grâce à ces nouvelles notions, nous obtenons un nouveau théorème, le théorème de la Σ-prouvabilité.

Théorème 3.1.1. *(Σ-prouvabilité)*
Soient Σ un système modal, Γ un ensemble de formules modales et φ, ψ des propositions modales. On a

$$\Gamma + \varphi \vdash_\Sigma \psi \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \vdash_\Sigma \varphi \to \psi.$$

Nous définissons maintenant la notion de valuation sur une algèbre modale et la notion de validité d'une proposition modale.

Définition 3.1.8. Soit B une algèbre modale. Une B-*valuation* est une application

$$\overline{v} \quad : \quad Var \longrightarrow B$$

où Var est l'ensemble des variables propositionnelles.

Proposition 3.1.2. *Pour tout algèbre modale B, on peut étendre une B-valuation à l'ensemble des propositions modales Prop munie des opérations booléennes et, ou, $\neg$ et $\Diamond$ grâce aux règles suivantes :*

- $v(\varphi \text{ et } \psi) = \overline{v}(\varphi) \wedge \overline{v}(\psi)$
- $v(\varphi \text{ ou } \psi) = \overline{v}(\varphi) \vee \overline{v}(\psi)$
- $v(\neg\varphi) = (\overline{v}(\varphi))^c$
- $v(\Diamond\varphi) = \Diamond\overline{v}(\varphi)$

pour tout $\varphi, \psi \in Var$. En particulier, cette extension est unique.

Démonstration. En effet, il suffit de procéder par induction sur la longueur de φ. On obtient alors l'homomorphisme

$$v \quad : \quad Prop \longrightarrow B$$

où $Prop$ et celui-ci est unique vu sa définition. □

Définition 3.1.9. Soit B une algèbre modale, v une B-valuation et φ une proposition modale on dit que φ est valide sous la valuation v si $v(\varphi) = 1$. On écrira alors

$$B \overset{v}{\models} \varphi.$$

De plus, φ sera valide dans B si $B \overset{v}{\models} \varphi$ pour toute B-valuation v. On écrira alors

$$B \models \varphi.$$

Nous démontrons à présent une proposition qui nous est utile dans la démonstration du théorème de complétude algébrique des logiques modales.

Proposition 3.1.3. *Soit B une algèbre modale, v une B-valuation et φ, ψ deux propositions modales, on a l'équivalence suivante*

$$v(\varphi \to \psi) = 1 \Leftrightarrow v(\varphi) \leq v(\psi)$$

Démonstration. Tout d'abord, nous obtenons successivement

$$\begin{aligned} v(\varphi \to \psi) &= v(\neg\varphi \text{ } ou \text{ } \psi) \\ &= v(\neg\varphi) \vee v(\psi) \\ &= v(\varphi)^c \vee v(\psi) \end{aligned}$$

Ainsi, nous devons démontrer que

$$v(\varphi)^c \vee v(\psi) = 1 \Leftrightarrow v(\varphi) \leq v(\psi)$$

Commençons par démontrer que la condition est nécessaire. Supposons que $v(\varphi)^c \vee v(\psi) = 1$ alors, vu la proposition (B.2.1), on a directement $v(\varphi) \leq v(\psi)$.

Passons maintenant à la condition suffisante. Supposons que $v(\varphi) \leq v(\psi)$, alors on obtient

$$v(\varphi)^c \vee v(\varphi) \leq v(\varphi)^c \vee v(\psi)$$

et étant donné le fait que $v(\varphi)^c \vee v(\varphi) = 1$, on obtient $1 \leq v(\varphi)^c \vee v(\psi)$. On peut donc en conclure que $v(\varphi)^c \vee v(\psi) = 1$, ce qui termine la preuve. $\square$

Nous pouvons alors déduire de cette proposition le corollaire suivant.

Corollaire 3.1.4. *Soit B une algèbre modale, v une B-valuation et φ, ψ deux propositions modales, on a l'équivalence suivante*

$$v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 \Leftrightarrow v(\varphi) = v(\psi)$$

Définition 3.1.10. Si Σ est un système modal, on dit que (B, v) est un *modèle algébrique de* Σ si

$$B \overset{v}{\models} \varphi \quad \forall \varphi \in \Sigma.$$

Nous écrirons alors $(B, v) \models \Sigma$.

Pour terminer cette section, rappelons les théorèmes qui sont liés aux règles d'inférence. Nous ne donnerons pas les démonstrations dans ce travail car celles-ci sont relativement simples. Cependant certains théorèmes sont utiles dans la suite.

Théorème 3.1.5. *Soit Σ un système modal, pour tous $\varphi, \psi \in Prop$, on a*

1. $\dfrac{\varphi \to \psi}{\Box\varphi \to \Box\psi}$

2. $\dfrac{\varphi \to \psi}{\Diamond\varphi \to \Diamond\psi}$

3. $\Box(\varphi \textit{ et } \psi) \leftrightarrow \Box\varphi \textit{ et } \Box\psi$

4. $\Diamond(\varphi \textit{ ou } \psi) \leftrightarrow \Diamond\varphi \textit{ ou } \Diamond\psi$

Rappelons également le théorème de complétude de la logique propositionnelle classique qui nous sert de base pour les théorèmes de complétude que nous développons plus tard.

Théorème 3.1.6. *On a l'équivalence suivante,*

$$LPC \models \varphi \;\; \textit{si et seulement si} \;\; B \overset{v}{\models} \varphi$$

pour toute algèbre de Boole B et pour toute B-valuation v.

3.1.2 L'algèbre modale de Lindenbaum–Tarski

Si Σ est un système modal, on peut lui associer une algèbre modale construite comme suit. On commence par définir l'équivalence $\sim_\Sigma$ associée au système modal Σ, sur l'ensemble des propositions modales, telle que

$$\varphi \;\sim_\Sigma\; \psi \quad \text{si et seulement si} \quad \Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi.$$

Notons φ^Σ la classe d'équivalence de φ.

Le quotient $B_\Sigma = Prop/\sim_\Sigma$ devient alors une algèbre modale, appelée l'*algèbre modale de Lindenbaum–Tarski* avec

$$\varphi^\Sigma \leq \psi^\Sigma \quad \text{si et seulement si} \quad \Sigma \vdash \varphi \to \psi$$
$$\Diamond(\varphi^\Sigma) \;=\; (\Diamond\varphi)^\Sigma$$

Proposition 3.1.7. *B_Σ est une algèbre modale.*

Démonstration. Commençons par vérifier que $B_\Sigma = (B_\Sigma, \wedge, \vee, 0, 1, ^c)$ est une algèbre de Boole. Il est clair que B_Σ muni de l'ordre $\leq$, défini précédemment, est un ensemble ordonné. Définissons maintenant les différentes opérations :

- $\varphi^\Sigma \vee \psi^\Sigma = (\varphi \textit{ ou } \psi)^\Sigma$
  1. On a $(\varphi \textit{ ou } \psi)^\Sigma \geq \varphi^\Sigma, \psi^\Sigma$ puisque $\Sigma \vdash \varphi \to (\varphi \textit{ ou } \psi)$ et, de la même manière $\Sigma \vdash \psi \to (\varphi \textit{ ou } \psi)$.
  2. De plus, si $\xi^\Sigma \geq \varphi^\Sigma, \psi^\Sigma$ alors $\xi^\Sigma \geq (\varphi \textit{ ou } \psi)^\Sigma$. Puisque, si $\xi^\Sigma \geq \varphi^\Sigma$ et $\xi^\Sigma \geq \psi^\Sigma$ alors, par définition de l'inégalité, on a $\Sigma \vdash \varphi \to \xi$ et $\Sigma \vdash \psi \to \xi$ ainsi, $\Sigma \vdash (\varphi \textit{ ou } \psi) \to \xi$ et donc $\xi^\Sigma \geq (\varphi \textit{ ou } \psi)^\Sigma$.

  Nous avons montrer que $(\varphi \textit{ ou } \psi)^\Sigma$ est le plus petit des majorants et on obtient donc la conclusion.
- $\varphi^\Sigma \wedge \psi^\Sigma = (\varphi \textit{ et } \psi)^\Sigma$

1. On a $(\varphi \textit{ et } \psi)^\Sigma \leqslant \varphi^\Sigma, \psi^\Sigma$ puisque $\Sigma \vdash (\varphi \textit{ et } \psi) \to \varphi$ et, de la même manière $\Sigma \vdash (\varphi \textit{ et } \psi) \to \psi$.
2. On a également, si $\xi^\Sigma \leq \varphi^\Sigma, \psi^\Sigma$ alors $\xi^\Sigma \leq (\varphi \textit{ et } \psi)^\Sigma$. Puisque, si $\xi^\Sigma \leq \varphi^\Sigma$ et $\xi^\Sigma \leq \psi^\Sigma$ alors, par définition, on a $\Sigma \vdash \xi \to \varphi$ et $\Sigma \vdash \xi \to \psi$ alors, $\Sigma \vdash \xi \to (\varphi \textit{ et } \psi)$ et donc $\xi^\Sigma \leq (\varphi \textit{ et } \psi)^\Sigma$.

Nous avons donc montrer que $(\varphi \textit{ et } \psi)^\Sigma$ est le plus grand des minorants, d'où la conclusion.

- $(\varphi^\Sigma)^c = (\neg\varphi)^\Sigma$
  1. $\varphi^\Sigma \wedge (\neg\varphi)^\Sigma = (\varphi \textit{ et } \neg\varphi)^\Sigma = 0^\Sigma$
  2. $\varphi^\Sigma \vee (\neg\varphi)^\Sigma = (\varphi \textit{ ou } \neg\varphi)^\Sigma = 1^\Sigma$

  d'où, on obtient la conclusion.

Vérifions maintenant qu'avec les définitions données, B_Σ vérifie bien les différents axiomes.

1. Il est clair que le $\vee$ et le $\wedge$ existent pour tout $\varphi,\psi \in \mathit{Prop}$ puisque le *ou* et le *et* sont bien définis.
2. On a

$$\begin{aligned} & \varphi^\Sigma \vee (\psi^\Sigma \wedge \xi^\Sigma) = (\varphi^\Sigma \vee \psi^\Sigma) \wedge (\varphi^\Sigma \vee \xi^\Sigma) \\ \Leftrightarrow\ & \varphi^\Sigma \vee (\psi \textit{ et } \xi)^\Sigma = (\varphi \textit{ ou } \psi)^\Sigma \wedge (\varphi \textit{ ou } \xi)^\Sigma \\ \Leftrightarrow\ & (\varphi \textit{ ou } (\psi \textit{ et } \xi))^\Sigma = ((\varphi \textit{ ou } \psi) \textit{ et } (\varphi \textit{ ou } \xi))^\Sigma \end{aligned}$$

   Et on a bien l'égalité puisque le *ou* et le *et* sont distributifs.
3. B_Σ est borné puisque
   — $0^\Sigma \leq \psi^\Sigma \quad \forall\psi \in \mathit{Prop}$ car $\Sigma \vdash 0 \to \psi \quad \forall\psi \in \mathit{Prop}$
   — $1^\Sigma \geq \psi^\Sigma \quad \forall\psi \in \mathit{Prop}$ car $\Sigma \vdash \psi \to 1 \quad \forall\psi \in \mathit{Prop}$
4. B_Σ est bien complémenté puisque $\neg\varphi$ existe pour tout φ appartenant à *Prop*.

Pour vérifier que $B_\Sigma = (B_\Sigma, \Diamond)$ est une algèbre modale, nous devons vérifier les axiomes pour $\Diamond$.

1. On obtient les égalités suivantes,

$$\begin{aligned} \Diamond(\varphi^\Sigma \vee \psi^\Sigma) &= \Diamond((\varphi \textit{ ou } \psi)^\Sigma) \\ &= (\Diamond(\varphi \textit{ ou } \psi))^\Sigma \qquad (3.1) \\ &= (\Diamond\varphi \textit{ ou } \Diamond\psi)^\Sigma \\ &= (\Diamond\varphi)^\Sigma \vee (\Diamond\psi)^\Sigma \\ &= \Diamond(\varphi^\Sigma) \vee \Diamond(\psi^\Sigma). \end{aligned}$$

   où (3.1) est obtenu grâce à la définition de $\Diamond$ dans B_Σ.
2. On a également,

$$\Diamond(0^\Sigma) = (\Diamond 0)^\Sigma = 0^\Sigma$$

   où nous obtenons de nouveau la première égalité grâce à la définition de $\Diamond$ dans B_Σ.

Ce qui termine la preuve. $\square$

Pour obtenir un modèle algébrique, nous avons besoin de définir une valuation sur l'algèbre modale B_Σ.

Définition 3.1.11. On définit la valuation canonique $\overline{v_\Sigma}$ sur B_Σ comme

$$\begin{aligned} \overline{v_\Sigma} \ : \ & Var \to B_\Sigma \\ & p \ \to p^\Sigma \end{aligned}$$

pour $p \in Var$.

Proposition 3.1.8. *On peut étendre la valuation canonique $\overline{v_\Sigma}$ à l'ensemble Prop en posant*

$$v_\Sigma(\varphi) = \varphi^\Sigma$$

pour tout $\varphi \in Prop$.

Démonstration. En effet, vu la proposition (3.1.2), il suffit de vérifier que la valuation ainsi définie vérifie les règles énoncées dans cette proposition. Soit $\varphi, \psi \in Var$, on a

- $v_\Sigma(\varphi \textit{ ou } \psi) = (\varphi \textit{ ou } \psi)^\Sigma = \varphi^\Sigma \textit{ ou } \psi^\Sigma = \overline{v_\Sigma}(\varphi) \ \vee \ \overline{v_\Sigma} \ (\psi)$;
- $v_\Sigma(\varphi \textit{ et } \psi) = (\varphi \textit{ et } \psi)^\Sigma = \varphi^\Sigma \textit{ et } \psi^\Sigma = \overline{v_\Sigma}(\varphi) \ \wedge \ \overline{v_\Sigma}(\psi)$;
- $v_\Sigma(\neg\varphi) = (\neg\varphi)^\Sigma = (\varphi^\Sigma)^c = (\overline{v_\Sigma}(\varphi))^c$;
- $v_\Sigma(\Diamond\varphi) = (\Diamond\varphi)^\Sigma = \Diamond(\varphi^\Sigma) = \Diamond\overline{v_\Sigma}(\varphi)$.

Ainsi, on en conclut que l'application

$$\begin{aligned} v_\Sigma \ : \ & Prop \to B_\Sigma \\ & \varphi \ \to \varphi^\Sigma \end{aligned}$$

est une extension de la valuation canonique $\overline{v_\Sigma}$ définie précédemment. $\square$

Théorème 3.1.9. *Si Σ est un système modal, alors (B_Σ, v_Σ) est un modèle de Σ.*

Démonstration. Nous devons montrer que

$$B_\Sigma \overset{v_\Sigma}{\models} \varphi \qquad \forall \varphi \in \Sigma.$$

Autrement dit, nous devons prouver que $v_\Sigma(\varphi) = 1^\Sigma$. Nous savons que $v_\Sigma(\varphi) = \varphi^\Sigma$. Or, comme $\varphi \in \Sigma$, φ est un axiome de Σ et donc

$$\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \top.$$

On peut donc en conclure que $\varphi^\Sigma = 1^\Sigma$ et on a donc le résultat. $\square$

Le théorème suivant consiste en un préambule pour la démonstration du théorème de complétude algébrique des logiques modales.

Théorème 3.1.10. *Si Σ est un système modal et φ une proposition modale, alors*

$$B_\Sigma \overset{v_\Sigma}{\models} \varphi \quad \Rightarrow \quad \Sigma \vdash \varphi.$$

Démonstration. Supposons que φ est valide dans (B_Σ, v_Σ). Donc, $\varphi^\Sigma = v_\Sigma(\varphi) = 1^\Sigma$ dans B_Σ. On obtient alors, par définition,

$$\varphi \sim_\Sigma 1 \Rightarrow \Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \top$$

ce qui signifie que $\Sigma \vdash \varphi$, et ceci termine la preuve. □

3.1.3 Le théorème de complétude pour les modèles algébriques

Le théorème que nous développons dans cette section est valable même lorsque l'ensemble des axiomes d'un système modal contient une liste d'axiomes spécifiques et non une liste de schémas d'axiomes spécifiques. Ce théorème est donc applicable dans un plus grand nombre de cas. Cependant, nous développons dans la section suivante un version forte de ce théorème qui est applicable uniquement dans le cas où le système modal contient une liste de schémas d'axiomes spécifiques.

Théorème 3.1.11. *(Complétude pour les modèles algébriques)*
Si Σ est un système modal et φ une proposition modale, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\Sigma \vdash \varphi$
2. $B \overset{v}{\models} \varphi$ *pour tout modèle algèbrique (B, v) de Σ.*

Démonstration. Commençons par démontrer l'adéquation, autrement dit, montrons que (1) $\rightarrow$ (2). Nous procédons de façon habituelle par récurrence sur la longueur d'une preuve de φ dans Σ. Nous devons donc prouver la validité dans toute algèbre modale des différentes règles et schémas qui permettent d'obtenir des propositions.

Commençons par la validité des schémas L_1, L_2, L_3. Ces trois schémas sont valides dans LPC donc, vu le théorème (3.1.6), ils sont valides dans toute algèbre de Boole et restent donc valides dans les algèbres modales.

Passons au schéma K. Celui-ci n'étant pas valide dans LPC, nous ne pouvons pas utiliser le même résultat que précédemment. Nous devons montrer que

$$\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$$

est valide dans toute algèbre modale. Pour cela, nous allons commencer par montrer que $\Box(a \wedge b) = \Box a \wedge \Box b$ pour tous $a, b \in B$. Par définition, on a

$$\Diamond(a \vee b) = \Diamond a \vee \Diamond b.$$

De plus, il est aisé de montrer que

$$(a \vee b)^c = a^c \wedge b^c.$$

Grâce à ces deux égalités, on obtient successivement,

$$\begin{aligned}
& (\Box(a^c \vee b^c)^c)^c = (\Box(a^c)^c)^c \vee (\Box(b^c)^c)^c \\
\Leftrightarrow\quad & (\Box(a \wedge b))^c = (\Box a \wedge \Box b)^c \\
\Leftrightarrow\quad & \Box(a \wedge b) = \Box a \wedge \Box b \\
\Leftrightarrow\quad & \Box(a \wedge b) = \Box a \wedge \Box b \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

De plus, puisque la formule

$$(\varphi \to \psi) \wedge \varphi \to \psi$$

est valide dans LPC. Vu le théorème (3.1.6), celle-ci est valide dans toute algèbre de Boole et donc dans toute algèbre modale et en utilisant le point 1 du théorème (3.1.5), on trouve

$$\Box((\varphi \to \psi) \wedge \varphi) \to \Box\psi.$$

Ensuite, grâce à (3.2), on obtient

$$\Box(\varphi \to \psi) \wedge \Box\varphi \to \Box\psi.$$

Ainsi, en utilisant le théorème de déduction de la logique propositionnelle, on a finalement

$$\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi),$$

dans toute algèbre modale, ce qui prouve la validité de K dans toute algèbre modale.

Passons maintenant aux règles d'inférences. Nous savons que la règle classique du modus ponens est vraie dans LPC, celle-ci reste donc valide dans toute algèbre modale. En ce qui concerne la règle de nécessitation, nous devons monter que si $v(\varphi) = 1$ alors $v(\Box\varphi) = 1$. Or, si $v(\varphi) = 1$ alors $v(\neg\varphi) = (v(\varphi))^c = 0$ et $v(\Diamond\neg\varphi) = \Diamond v(\neg\varphi) = \Diamond 0 = 0$. Ainsi, $v(\Box\varphi) = v(\neg\Diamond\neg\varphi) = (v(\Diamond\neg\varphi))^c = 1$. On obtient donc le résultat et ceci termine la démonstration de la partie adéquation.

Passons maintenant à la complétude proprement dite, nous devons démontrer que (2) $\to$ (1). Étant donné que (B_Σ, v_Σ) est un modèle de Σ, φ est valide dans (B_Σ, v_Σ). Vu le théorème (3.1.10), on obtient le résultat. $\Box$

Avant de passer à une version plus forte de ce théorème, résumons la situation. Grâce aux théorèmes que nous venons de démontrer, nous obtenons le schéma suivant.

$$\begin{tikzcd}
 & \forall (B,v) \models \Sigma, B \overset{v}{\models} \varphi \arrow[dd, "(B_\Sigma, v_\Sigma) \models \Sigma"] \\
\Sigma \vdash \varphi \arrow[ur, "(3.1.11)"] & \\
 & B_\Sigma \overset{v_\Sigma}{\models} \varphi \arrow[ul, "(3.1.10)"]
\end{tikzcd}$$

3.1.4 Le théorème de complétude algébrique des logiques modales

Afin d'obtenir une version forte du théorème de complétude algébrique, nous devons commencer par définir la notion de Σ-algèbre modale dont nous avons besoin dans la suite. Considérons un système modal Σ.

Définition 3.1.12. Une algèbre modale B est une Σ-*algèbre modale* si (B, v) est un modèle de Σ pour toute B-valuation v. Nous écrirons alors $B \models \Sigma$.

Nous établissons maintenant une série de propositions qui nous sont utiles dans la démonstration du théorème final.

Théorème 3.1.12. *Soit φ une proposition modale. On a*

$$(\forall (B, v) \models \Sigma, B \overset{v}{\models} \varphi) \;\Rightarrow\; (\forall B \models \Sigma, B \models \varphi).$$

Démonstration. Soit φ une proposition modale. Supposons que pour tout modèle algébrique (B, v) de Σ, on a $B \overset{v}{\models} \varphi$. Prenons B une algèbre modale telle que $B \models \Sigma$ et montrons que $B \models \varphi$. Par définition, on a

$$(B, v) \models \Sigma \;\; \forall v.$$

Ainsi, si v est une B-valuation, $B \overset{v}{\models} \varphi$, d'où le résultat. □

La proposition suivante est applicable uniquement dans le cas où le système modal Σ contient une liste de schémas d'axiomes spécifiques.

Proposition 3.1.13. *L'algèbre de Lindenbaum–Tarski B_Σ est une Σ-algèbre modale.*

Démonstration. Soit v une B_Σ-valuation, montrons que $(B_\Sigma, v) \models \Sigma$. Soit σ un schéma de Σ. Alors, celui-ci dépend d'un ensemble $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ de propositions modales quelconques. Montrons que

$$B_\Sigma \overset{v}{\models} \sigma(\varphi_1, \dots, \varphi_n).$$

Vu la proposition (3.1.2), nous savons que v s'étend à l'ensemble *Prop* de manière unique. De plus, il existe $\psi_1, \dots, \psi_n \in Prop$ tels que

$$v(\varphi_1) = \psi_1^\Sigma, \dots, v(\varphi_n) = \psi_n^\Sigma.$$

Vu la théorème (3.1.9), il est clair que

$$B_\Sigma \overset{v_\Sigma}{\models} \sigma(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \;\; \forall \varphi_1, \dots, \varphi_n \in Prop.$$

En particulier, $B_\Sigma \overset{v_\Sigma}{\models} \sigma(\psi_1, \dots, \psi_n)$ et donc $v_\Sigma(\sigma(\psi_1, \dots, \psi_n)) = 1$. On trouve ensuite, grâce à la proposition (3.1.2) et à la définition de v_Σ,

$$\begin{aligned} v_\Sigma(\sigma(\psi_1, \dots, \psi_n)) &= \sigma(v_\Sigma(\psi_1), \dots, v_\Sigma(\psi_n)) \\ &= \sigma(\psi_1^\Sigma, \dots, \psi_n^\Sigma) \\ &= \sigma(v(\varphi_1), \dots, v(\varphi_n)) \\ &= v(\sigma(\varphi_1, \dots, \varphi_n)). \end{aligned}$$

On peut donc en conclure que $v(\sigma(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)) = 1$ et donc $B_\Sigma \overset{v}{\models} \sigma(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$. Ainsi, B_Σ est une Σ-algèbre modale. □

Résumons maintenant la situation. Les flèches représentées en pointillé sont obtenues par transitivité de l'implication.

$$\begin{tikzcd}
\forall B \models \Sigma, B \models \varphi \arrow[dd, "B_\Sigma \models \Sigma"'] & & \forall (B, v) \models \Sigma, B \overset{v}{\models} \varphi \arrow[ll, "(3.1.12)"'] \arrow[dd, "(B_\Sigma, v_\Sigma) \models \Sigma"] \\
& \Sigma \vdash \varphi \arrow[ur, "(3.1.11)"] \arrow[ul, dashed] & \\
B_\Sigma \models \varphi \arrow[rr, "v_\Sigma \text{ est une } B_\Sigma - \text{valuation}"'] \arrow[ur, dashed] & & B_\Sigma \overset{v_\Sigma}{\models} \varphi \arrow[ul, "(3.1.10)"]
\end{tikzcd}$$

Nous pouvons maintenant énoncer la version forte du théorème de complétude. Ce théorème découle lui aussi de la transitivité de l'implication.

Théorème 3.1.14. *(Complétude algébrique des logiques modales)*
Si Σ est un système modal et φ une proposition modale, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\Sigma \vdash \varphi$
2. $\forall B \models \Sigma, B \models \varphi$.

3.2 La complétude relationnelle

Dans cette section, nous donnons les différentes définitions nécessaires et présentons le théorème de complétude relationnel. Ce théorème est beaucoup plus appliqué que celui énoncé dans la section précédente, car pour montrer qu'un théorème n'est pas prouvable, il suffit de trouver un modèle ou un frame dans lequel ce théorème n'est pas prouvable. Cependant nous avons besoin de quelques définitions et théorèmes avant la démonstration proprement dite. Après ce rappel, nous procédons en deux étapes. Nous commençons par dualiser topologiquement le schéma que nous avons obtenu dans la section précédente. Nous enlevons ensuite la topologie.

3.2.1 Théorème de complétude pour les modèles modaux

Soit B une algèbre modale munie de la relation unaire $\Diamond$. En vertu de la section (1.1.3), le dual de cette algèbre est donné par l'espace modal $Ult(B)$ muni de la relation $R_\Diamond$ dont une base d'ouverts fermés de la topologie est donnée par $\{r_B(b) | b \in B\}$. Dans cette section, nous allons définir une valuation sur cet espace modal et établir le théorème de complétude dans les espaces modaux grâce à la dualité établie précédemment.

Définition 3.2.1. Soit $X = (X, \tau, R)$ un espace modal. Une *valuation sur* X est une application

$$\overline{v} \ : \ Var \to of(X).$$

Nous pouvons évidemment étendre cette valuation à l'ensemble des propositions modales. Il est évident que l'extension définie comme suit est unique.

Proposition 3.2.1. *Pour tout ensemble X muni d'une relation binaire R, on peut étendre une valuation sur X à l'ensemble Prop grâce aux règles suivantes :*

- $v(\neg\varphi) = \overline{v}(\varphi)^c$
- $v(\varphi \vee \psi) = \overline{v}(\varphi) \cup \overline{v}(\psi)$
- $v(\varphi \wedge \psi) = \overline{v}(\varphi) \cap \overline{v}(\psi)$
- $v(\Diamond\varphi) = R(\overline{v}(\varphi), -)$,

pour tout $\varphi, \psi \in Var$. En particulier, cette extension est unique.

Remarque 3.2.1. Les éléments de l'ensemble X seront appelés des mondes. De plus, il est important de remarquer que (X, R) est une frame de Kripke. Dans cette section, l'ensemble X est muni d'une topologie quelconque τ, c'est donc un frame de Kripke topologique. Dans la section suivante, nous travaillerons avec des frames de Kripke non topologiques. Dans la proposition précédente, nous avons étendu une valuation v sur un ensemble X, ce qui est plus général que d'étendre une valuation sur un espace modal. Nous utiliserons à nouveau cette propriété pour étendre une valuation sur un frame de Kripke.

Définition 3.2.2. Un *modèle modal* est un triplet (X, R, v) où $X = (X, R, \tau)$ est un espace modal et v une *valuation* sur X.

Afin de définir la validité d'une proposition modale dans un espace modal, nous procédons par étape.

Définition 3.2.3. On définit la validité d'une proposition modale φ dans un modèle modal (X, R, v) par induction sur la complexité de φ.

1. Pour commencer on définit la validité en un monde $x \in X$. La validité d'une proposition dans un monde x est définie comme suit
   (a) $x \models \varphi$ si $x \in v(\varphi)$
   (b) $x \models \neg\varphi$ si $x \not\models \varphi$
   (c) $x \models \varphi \to \psi$ si $x \models \psi$ ou $x \not\models \varphi$ (c'est à dire, si $x \models \varphi$ implique $x \models \psi$)
   (d) $x \models \Box\varphi$ si $y \models \varphi$ pour tout y tel que y est accessible à partir de x (c'est à dire, $\forall y : yRx$).

   Les définitions concernant *et*, *ou* et $\Diamond$ se déduisent directement de celles-ci.

2. Lorsque X est muni d'une topologie τ, on définit la validité dans le modèle (X, R, v) comme étant la validité dans tous les mondes, autrement dit :

$$(X,\tau) \overset{v}{\models} \varphi \text{ si et seulement si } x \models \varphi \text{ pour tout } x \in X.$$

De plus, vu le point précédent, ceci est équivalent à

$$(X,\tau) \overset{v}{\models} \varphi \text{ si et seulement si } v(\varphi) = X.$$

3. Enfin, la validité dans un espace modal (X, R) est la validité pour toute valuation :

$$(X,\tau) \models \varphi \text{ si et seulement si } (X,\tau) \overset{v}{\models} \varphi \text{ pour tout } v : \mathit{Var} \to of(X).$$

Remarque 3.2.2. Précisons la définition de $x \models \Diamond\varphi$ car nous en aurons besoin dans la suite. Il nous suffit d'utiliser la définition de $\Diamond$. En effet, $\Diamond$ et $\Box$ sont des connecteurs duaux, donc $\Diamond = \neg\Box\neg$. Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} x \models \Diamond\varphi \quad &\Leftrightarrow \quad x \models \neg\Box\neg\varphi \\ &\Leftrightarrow \quad x \not\models \Box\neg\varphi \\ &\Leftrightarrow \quad \exists y \text{ tel que } yRx, y \not\models \neg\varphi \\ &\Leftrightarrow \quad \exists y \text{ tel que } yRx, y \models \varphi. \end{aligned}$$

Dans cette section, nous établissons un lien entre une valuation sur une algèbre modale B et une valuation sur un espace modal X. En conséquence, lorsque nous considérons une valuation sur une algèbre modale B, nous la notons v et lorsque nous considérons une valuation sur un espace modal X, nous notons celle-ci v'.

Définition 3.2.4. Si Σ est un système modal et X un espace modal muni de la topologie τ, on dit que (X, τ, v') est un modèle modal de Σ si

$$(X,\tau) \overset{v'}{\models} \varphi \quad \forall\varphi \in \Sigma.$$

Nous écrirons alors $(X, \tau, v') \models \Sigma$.

Dans la suite, lorsqu'il n'y aura aucune ambiguïté, nous dirons simplement que (X, τ, v') est un modèle de Σ. Maintenant que nous avons défini tous les termes dont nous avons besoin, nous passons à l'élaboration du théorème de complétude dans les espaces modaux. Pour dualiser le théorème de complétude établit dans la section précédente, nous considérons une algèbre modale B et une B-valuation v. Nous commençons par établir le dual de cette B-valuation.

Définition 3.2.5. Soit B une algèbre modale. Si v est une B-valuation, on définit la valuation v' sur l'espace modal $Ult(B)$ par

$$\begin{aligned} v' \;:\; &\mathit{Var} \to of(Ult(B)) \\ &p \;\to r_B(v(p)). \end{aligned}$$

Théorème 3.2.2. *Si B est une algèbre modale et v une B-valuation, en définissant v' comme précédemment, on a*

1. $v'(\varphi) = r_B(v(\varphi)) \quad \forall \varphi \in \mathit{Prop}$,
2. *pour toute proposition modale φ, $(Ult(B), \tau) \overset{v'}{\models} \varphi$ si et seulement si $B \overset{v}{\models} \varphi$.*

Démonstration. Remarquons d'abord que vu la proposition (3.2.1), v' peut être étendu à l'ensemble des propositions modales. Donc, cette extension vérifie

$$v'(\neg\varphi) = v'(\varphi)^c, v'(\varphi \vee \psi) = v'(\varphi) \cup v'(\psi), v'(\varphi \wedge \psi) = v'(\varphi) \cap v'(\psi) \text{ et } v'(\Diamond\varphi) = R_\Diamond(v'(\varphi), -),$$

pour tous $\varphi, \psi \in \mathit{Prop}$.

Prouvons maintenant que $v'(\varphi) = r_B(v(\varphi))$ pour toute proposition modale φ. Procédons par récurrence sur la longueur de φ. Par définition, si $\varphi \in \mathit{Var}$, l'égalité est vérifiée. Prenons maintenant $\varphi, \psi \in \mathit{Var}$ et $\theta \in \mathit{Prop}$. Considérons les cas suivants.

- Si $\theta = \neg\varphi$, alors en utilisant la définition de v' et les propriétés de l'application r_B, on a

$$v'(\theta) = v'(\neg\varphi) = v'(\varphi)^c = r_B(v(\varphi))^c = r_B(v(\varphi)^c) = r_B(v(\neg\varphi)) = r_B(v(\theta)).$$

- Si $\theta = \varphi \vee \psi$, alors, de la même manière, on obtient

$$\begin{aligned} v'(\theta) &= v'(\varphi \vee \psi) \\ &= v'(\varphi) \cup v'(\psi) \\ &= r_B(v(\varphi)) \cup r_B(v(\psi)) \\ &= r_B(v(\varphi) \cup v(\psi)) \\ &= r_B(v(\varphi \vee \psi)) \\ &= r_B(v(\theta)). \end{aligned}$$

- Si $\theta = \varphi \wedge \psi$, il suffit de procéder de façon similaire pour obtenir l'égalité.
- Si $\theta = \Diamond\varphi$, alors en utilisant la proposition (1.1.3) et le fait que v est une B-valuation, on trouve

$$\begin{aligned} v'(\theta) &= v'(\Diamond\varphi) \\ &= R_\Diamond(v'(\varphi), -) \\ &= R_\Diamond(r_B(v(\varphi)), -) \\ &= r_B(\Diamond(v(\varphi)) \\ &= r_B(v(\Diamond\varphi)) \\ &= r_B(v(\theta)), \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Le point (2) découle de l'égalité que nous venons de démontrer. En effet, si $(Ult(B), \tau) \overset{v'}{\models} \varphi$, alors par définition, $v'(\varphi) = Ult(B)$. Ainsi $r_B(v(\varphi)) = Ult(B)$ et puisque r_B est un isomorphisme, $v(\varphi) = 1$ ce qui montre que $B \overset{v}{\models} \varphi$. Ensuite, si $B \overset{v}{\models} \varphi$, alors $v(\varphi) = 1$. On obtient donc

$$v'(\varphi) = r_B(v(\varphi)) = r_B(1) = Ult(B),$$

ce qui conclut la preuve. $\square$

Proposition 3.2.3. *Si B est une algèbre modale et v une B-valuation, alors*

$$(B, v) \models \Sigma \;\Leftrightarrow\; (Ult(B), \tau, v') \models \Sigma,$$

où $v'(\varphi) = r_B(v(\varphi)) \;\; \forall \varphi \in Prop.$

Démonstration. En effet, il suffit d'utiliser le point (2) théorème précédent $\square$

Nous effectuons maintenant le raisonnement inverse. Nous considérons un espace modal et une valuation sur celui-ci et nous définissons le dual de cette valuation.

Définition 3.2.6. Soit (X, τ) un espace modal. Si v' est une valuation sur (X, τ), on définit la valuation v sur l'algèbre modale $of(X)$ par

$$\begin{aligned} v \;:\; & Var \to of(X) \\ & p \;\to r_B^{-1}(v'(p)). \end{aligned}$$

Théorème 3.2.4. *Si (X, τ) est un espace modal et v' une valuation sur X, en définissant v comme précédemment, on a*

1. *$v(\varphi) = r_B^{-1}(v'(\varphi)) \;\; \forall \varphi \in Prop,$*
2. *pour toute proposition modale φ, $(X, \tau) \overset{v'}{\models} \varphi$ si et seulement si $of(X) \overset{v}{\models} \varphi$.*

Démonstration. Étant donné que r_B^{-1} est l'isomorphisme inverse de r_B, la démonstration se fait de manière analogue à la démonstration du théorème (3.2.2). $\square$

Proposition 3.2.5. *Si (X, τ) est un espace modal et v' une valuation sur X, alors*

$$(X, \tau, v') \models \Sigma \quad \Leftrightarrow \quad (of(X), v) \models \Sigma,$$

où $v(\varphi) = r_B^{-1}(v'(\varphi))$ pour tout $\varphi \in Prop.$

Démonstration. En effet, il suffit d'utiliser le point (2) du théorème précédent. $\square$

Grâce aux théorèmes que nous venons d'établir, nous obtenons le théorème suivant, qui est une version faible du théorème de complétude dans les espaces modaux. Ce théorème établit également l'équivalence entre la complétude algébrique et la complétude pour les modèles modaux.

Théorème 3.2.6. *(Complétude pour les modèles modaux)*
Si Σ est un système modal, B une algèbre modale, X un espace modal et φ une proposition modale, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\Sigma \vdash \varphi$
2. $B \overset{v}{\models} \varphi$ *pour tout modèle* (B, v) *de* Σ
3. $(X, \tau) \overset{v'}{\models} \varphi$ *pour tout modèle modal* (X, τ, v') *de* Σ.

Démonstration. L'équivalence (1) $\Leftrightarrow$ (2) est donnée par le théorème de complétude (3.1.11). Montrons maintenant (2) $\Leftrightarrow$ (3).

Commençons par montrer que (2) $\Rightarrow$ (3). Supposons que (2) est vérifié et considérons (X, τ, v') un modèle modal de Σ. L'algèbre $of(X)$ munie de la relation $\Diamond_R$ est l'algèbre modale duale de l'espace modal (X, R). Alors, si on pose

$$v(\varphi) = r_B^{-1}(v'(\varphi)) \quad \forall \varphi \in Prop,$$

$(of(X), \Diamond_R, v)$ est un modèle algébrique vu ce qui précède. De plus, en utilisant la proposition (3.2.5) et le fait que (X, τ, v') un modèle de Σ, on trouve que $(of(X), \Diamond_R, v)$ est également un modèle de Σ. Par hypothèse, φ y est valide et grâce au théorème (3.2.4), φ est valide dans (X, τ, v').

Démontrons maintenant que (3) $\Rightarrow$ (2). Supposons que (3) est vérifié et considérons (B, v) un modèle algébrique de Σ. En vertu de la section (1.1.3), $(Ult(B), R_\Diamond)$ est l'espace modal dual de $(B, \Diamond)$. De plus, étant donné que v est une valuation sur l'algèbre modale B, l'application

$$v'(\varphi) = r_B(v(\varphi)) \forall \varphi \in Prop$$

est une valuation sur $Ult(B)$. De plus, en utilisant la proposition (3.2.3) et le fait que (B, v) un modèle algébrique de Σ, on obtient que $(Ult(B), \tau, v')$ est un modèle de Σ. Ainsi, par hypothèse, φ est valide dans $(Ult(B), \tau, v')$ et grâce au théorème (3.2.2), on peut en conclure que φ est valide dans (B, v), et le théorème est démontré. □

Nous avons ainsi obtenu un théorème "dual" du théorème de complétude algébrique.

3.2.2 Le modèle canonique de Σ

Comme nous l'avons expliqué dans la section précédente, nous voulons dualiser le schéma présenté dans la section (3.1). Pour cela, nous avons besoin d'étudier de plus près le dual de l'algèbre modale de Lindenbaum–Tarski. Puisque B_Σ est une algèbre modale, son espace dual est l'espace $Ult(B_\Sigma)$ et celui-ci est muni d'une relation R_Σ que nous définissons. Commençons par étudier l'espace $Ult(B_\Sigma)$. Vu la définition d'un ultrafiltre, la proposition suivante est évidente.

Proposition 3.2.7. *L'ensemble x est un élément de $Ult(B_\Sigma)$ s'il existe α un ensemble de formules Σ-consistant et maximal tel que*

$$x = \{\varphi^\Sigma | \varphi \in \alpha\}.$$

Définition 3.2.7. On définit la relation R_Σ sur $Ult(B_\Sigma)$ comme suit,

$$xR_\Sigma y \text{ si et seulement si } x \ni \varphi^\Sigma \Rightarrow y \ni \Diamond\varphi^\Sigma \quad \forall \varphi \in Prop.$$

Définition 3.2.8. On définit l'espace $(X_\Sigma, R_\Sigma, \tau_\Sigma)$ comme suit

1. $X_\Sigma = Ult(B_\Sigma)$;
2. R_Σ est la relation définie en (3.2.7) ;
3. τ_Σ est la topologie engendrée par

$$\{r_{B_\Sigma}(\varphi) | \varphi \in Var\}.$$

Remarque 3.2.3. La définition que nous venons de donner fait de $(X_\Sigma, R_\Sigma, \tau_\Sigma)$ un espace modal. En effet, la base de topologie que nous venons d'adopter transforme X_Σ en un espace de Boole. De plus, la définition (3.2.7) est similaire à la définition (1.1.6) et la relation R_Σ vérifie donc les mêmes propriétés que la relation $R_\Diamond$. Donc vu la proposition (1.1.3), $(X_\Sigma, R_\Sigma, \tau_\Sigma)$ est un espace modal et cet espace est le dual de l'algèbre modale de Lindenbaum–Tarski.

Afin d'obtenir le modèle canonique de Σ, nous définissons la valuation canonique v_Σ qui est une valuation sur l'espace modal X_Σ.

Définition 3.2.9. La valuation sur X_Σ

$$\begin{aligned} \overline{v_\Sigma}' \ : \ & Var \to of(X_\Sigma)) \\ & p \ \to \{x \in Ult(B_\Sigma) | x \ni p^\Sigma\} \end{aligned}$$

est appelée la *valuation canonique.*

Il est clair que cette application est bien définie puisque $\overline{v_\Sigma}'(p) = r_{B_\Sigma}(p^\Sigma)$ est un ouvert fermé de X_Σ.

Théorème 3.2.8. *La valuation canonique $\overline{v_\Sigma}'$ s'étend à l'ensemble des propositions Prop.*

Démonstration. En effet, vu la proposition (3.2.1), il suffit de vérifier que v'_Σ vérifie les quatre règles de cette proposition. On a

- $v'_\Sigma(\neg\varphi) = r_{B_\Sigma}((\neg\varphi)^\Sigma) = r_{B_\Sigma}((\varphi^\Sigma)^c) = (r_{B_\Sigma}(\varphi^\Sigma))^c = \overline{v_\Sigma}(\varphi)^c$
- $v'_\Sigma(\varphi \vee \psi) = r_{B_\Sigma}((\varphi \vee \psi)^\Sigma) = r_{B_\Sigma}(\varphi^\Sigma \vee \psi^\Sigma) = r_{B_\Sigma}(\varphi^\Sigma) \cup r_{B_\Sigma}(\psi^\Sigma) = \overline{v_\Sigma}'(\varphi) \cup \overline{v_\Sigma}'(\psi)$
- $v'_\Sigma(\varphi \wedge \psi) = r_{B_\Sigma}((\varphi \wedge \psi)^\Sigma) = r_{B_\Sigma}(\varphi^\Sigma \wedge \psi^\Sigma) = r_{B_\Sigma}(\varphi^\Sigma) \cap r_{B_\Sigma}(\psi^\Sigma) = \overline{v_\Sigma}'(\varphi) \cap \overline{v_\Sigma}'(\psi)$
- $v'_\Sigma(\Diamond\varphi) = r_{B_\Sigma}((\Diamond\varphi)^\Sigma) = r_{B_\Sigma}(\Diamond\varphi^\Sigma) = R_\Sigma(r_{B_\Sigma}(\varphi^\Sigma), -) = R_\Sigma(\overline{v_\Sigma}'(\varphi), -)$,

d'où le résultat. □

De plus, vu la définition de la B_Σ-valuation v_Σ, il est clair que $v'_\Sigma(p) = r_{B_\Sigma}(v_\Sigma(p))$. Ainsi, en utilisant les théorèmes (3.2.3) et (3.1.9), on obtient le résultat suivant.

Théorème 3.2.9. *Si Σ est un système modal, alors $(X_\Sigma, \tau_\Sigma, v'_\Sigma)$ est un modèle modal de Σ*

Définition 3.2.10. Si Σ est un système modal, le modèle $(X_\Sigma, \tau_\Sigma, v'_\Sigma)$ de Σ est appelé *modèle canonique de Σ.*

Théorème 3.2.10. *Si Σ est un système modal et φ une proposition modale, alors*

$$(X_\Sigma, \tau_\Sigma) \overset{v'_\Sigma}{\models} \varphi \quad \Rightarrow \quad \Sigma \vdash \varphi.$$

Démonstration. En effet, vu le théorème (3.2.2), on trouve

$$(X_\Sigma, \tau_\Sigma) \overset{v'_\Sigma}{\models} \varphi \quad \Rightarrow \quad B_\Sigma \overset{v_\Sigma}{\models} \varphi.$$

Ainsi, en utilisant le théorème (3.1.10) et la transitivité de l'implication, on trouve le résultat. □

Ainsi, en combinant tous les résultats obtenus dans ces deux sections, on construit le schéma suivant.

$$\begin{tikzcd}
 & \forall(X,\tau,v') \models \Sigma, (X,\tau) \overset{v'}{\models} \varphi \arrow[dd, "(3.2.9)"] \\
\Sigma \vdash \varphi \arrow[ur, "(3.2.6)"] & \\
 & (X_\Sigma, \tau_\Sigma) \overset{v'_\Sigma}{\models} \varphi \arrow[ul, "(3.2.10)"]
\end{tikzcd}$$

3.2.3 Théorème de complétude dans les espaces modaux

Afin de terminer la dualisation du schéma présenté dans la section (3.1), nous démontrons dans cette section une version forte du théorème de complétude dans les espaces modaux. Nous procédons de la même manière que lorsque nous travaillions avec des modèles algébriques. Commençons par définir la notion de Σ-espace modal dont nous avons besoin dans la suite.

Définition 3.2.11. Soit Σ est un système modal. Un espace modal X est un Σ-*espace modal* si (X, τ, v') est un modèle de Σ pour toute valuation v' sur X. Nous écrirons alors $(X, \tau) \models \Sigma$.

Grâce à cette nouvelle notion et aux propositions (3.2.3) et (3.2.5), les deux résultats suivants sont évidents.

Proposition 3.2.11. *Soit B est une algèbre modale. On a*

$$B \models \Sigma \;\Leftrightarrow\; (Ult(B), \tau) \models \Sigma.$$

Proposition 3.2.12. *Soit (X, τ) un espace modal. On a*

$$(X, \tau) \models \Sigma \quad \Leftrightarrow \quad of(X) \models \Sigma.$$

Ces deux résultats sont souvent utilisés dans la suite, mais nous faisons appel à eux de manière implicite.

Théorème 3.2.13. *Soient Σ est un système modal et φ une proposition modale. On a*

$$(\forall (X,\tau,v') \models \Sigma, (X,\tau) \overset{v'}{\models} \varphi) \;\Rightarrow\; (\forall (X,\tau) \models \Sigma, (X,\tau) \models \varphi).$$

Démonstration. Soit φ une proposition modale. Supposons que

$$\forall (X,\tau,v') \models \Sigma, (X,\tau) \overset{v'}{\models} \varphi,$$

et prenons X un espace modal tel que $(X,\tau) \models \Sigma$. Alors, par définition, $(X,\tau,v') \models \Sigma$ pour toute valuation v' sur X. Ainsi, $(X,\tau) \overset{v'}{\models} \varphi$ pour toute valuation v' sur X, d'où le résultat. $\square$

Proposition 3.2.14. *Soit Σ est un système modal. L'espace modal X_Σ est un Σ-espace modal.*

Démonstration. Soit v' une valuation sur X_Σ. Montrons que $(X_\Sigma, \tau_\Sigma, v') \models \Sigma$. Si on pose

$$v(\varphi) = r^{-1}_{B_\Sigma}(v'(\varphi)) \;\; \forall \varphi \in Prop,$$

alors, v est une B_Σ-valuation. Ainsi, vu la proposition (3.1.13), $(B_\Sigma, v) \models \Sigma$. De plus, grâce au théorème (3.2.3), $(X_\Sigma, \tau_\Sigma, v') \models \Sigma$, d'où le résultat. $\square$

Nous avons terminé de dualiser le schéma. Résumons donc la situation. Les flèches représentées en pointillé sont de nouveau obtenues par transitivité de l'implication.

$$\begin{tikzcd}
\forall (X,\tau) \models \Sigma, (X,\tau) \models \varphi \arrow[dd, "(3.2.14)"'] & & \forall (X,\tau,v') \models \Sigma, (X,\tau) \overset{v'}{\models} \varphi \arrow[ll, "(3.2.13)"'] \arrow[dd, "(3.2.9)"] \\
 & \Sigma \vdash \varphi \arrow[ul, dashed] \arrow[ur, "(3.2.6)"] & \\
(X_\Sigma,\tau_\Sigma) \models \varphi \arrow[rr, "v_\Sigma \text{ est une valuation sur } X_\Sigma"'] \arrow[ur, dashed] & & (X_\Sigma,\tau_\Sigma) \overset{v'_\Sigma}{\models} \varphi \arrow[ul, "(3.2.10)"]
\end{tikzcd}$$

Nous énonçons maintenant la version forte du théorème de complétude dans les espaces modaux. Ce théorème découle lui aussi de la transitivité de l'implication.

Théorème 3.2.15. *(Complétude dans les espaces modaux version forte)*
Si Σ est un système modal et φ une proposition modale, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\Sigma \vdash \varphi$
2. $\forall (X,\tau) \models \Sigma, (X,\tau) \models \varphi.$

3.2.4 Théorème de complétude pour les modèles de Kripke

Dans la section précédente, nous avons considéré une algèbre modale et son dual topologique. Nous considérons ici uniquement les frames de Kripke, autrement dit, nous oublions la topologie. De nouveau, nous voulons un schéma similaire à celui trouvé dans la section précédente. Pour cela, nous nous aidons du schéma que nous venons de construire.

Définition 3.2.12. Soit $W = (W, R)$ un frame de Kripke. Une valuation sur W est une application

$$\overline{v} \;:\; Var \to \mathcal{P}(W).$$

Remarque 3.2.4. Remarquons qu'une valuation sur un espace modal (X, τ) est en particulier une valuation sur un frame de Kripke. En effet, par définition, v est une valuation sur un espace modal X si v est un application définie de l'ensemble des propositions modales dans l'ensemble des ouverts fermés de X. Or $of(X) \subseteq \mathcal{P}(X)$. Ainsi, v est une valuation sur le frame X.

Nous pouvons étendre cette valuation à l'ensemble des propositions modales grâce à la propriété (3.2.1).

Définition 3.2.13. Un *modèle de Kripke* est un triplet (W, R, v) où (W, R) est un frame de Kripke et v une *valuation* sur W.

Comme dans la section précédente, pour définir la validité d'une proposition modale modèle de Kripke, nous procédons par étape. Fondamentalement, la seule différence entre les deux types de validité résulte du dernier point.

Définition 3.2.14. On définit la validité d'une proposition modale φ dans un modèle de Kripke (W, R, v) par induction sur la complexité de φ.

1. Pour commencer on définit la validité en un monde $x \in W$. La validité d'une proposition dans un monde x est définie de la même manière que dans (3.2.3).
2. On définit la validité dans le modèle (W, R, v) comme étant la validité dans tous les mondes, autrement dit :

   $$W \overset{v}{\models} \varphi \text{ si et seulement si } x \models \varphi \text{ pour tout } x \in W.$$

   De plus, vu le point précédent, ceci est équivalent à

   $$W \overset{v}{\models} \varphi \text{ si et seulement si } v(\varphi) = W.$$

3. Enfin, la validité dans un frame de Kripke (W, R) est la validité pour toute valuation :

   $$W \models \varphi \text{ si et seulement si } W \overset{v}{\models} \varphi \text{ pour tout } v : Var \to \mathcal{P}(W).$$

Définition 3.2.15. Soit un ensemble Σ un système modal, on dira que (W, v) est *un modèle de Kripke de* Σ si

$$W \overset{v}{\models} \varphi \;\; \forall \varphi \in \Sigma.$$

On écrira $(W, v) \models \Sigma$.

Comme dans la section précédente, lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté possible, nous dirons simplement que (W, v) est un modèle de Σ. Nous démontrons à présent un résultat important qui est utilisé dans la démonstration du théorème de complétude relationnelle (c'est à dire par rapport au modèle de Kripke).

Théorème 3.2.16. *Si* (W, R) *est un frame et* v *une valuation sur* W *alors*

1. $(\mathcal{P}(W), \Diamond_R)$ *est une algèbre modale complète et atomique,*
2. v *est aussi une valuation sur* $\mathcal{P}(W)$*,*
3. *pour toute proposition modale* φ*, on a*

$$W \overset{v}{\models} \varphi \quad \textit{si et seulement si} \quad \mathcal{P}(W) \overset{v}{\models} \varphi.$$

En particulier, $(\mathcal{P}(W), v)$ *est un modèle algébrique.*

Démonstration.

1. Premièrement, en vertu de la proposition (2.2.2), il est clair que $(\mathcal{P}(W), \Diamond_R)$ est une algèbre modale complète et atomique.
2. L'affirmation sur v est triviale puisque dans les deux cas, v est une application $Var \to \mathcal{P}(W)$.
3. Pour la dernière affirmation, il suffit de montrer que pour tout $x \in W$, on a

$$x \models \varphi \quad \textit{si et seulement si} \quad x \in v(\varphi).$$

Ainsi, on aura $W \overset{v}{\models} \varphi$ si et seulement si $v(\varphi) = W$ et donc, par définition de la validité dans les algèbres modales, on aura $\mathcal{P}(W) \overset{v}{\models} \varphi$. La preuve se fait par induction sur la longueur de φ. Soit $x \in W$.

(a) Si φ est une variable propositionnelle, $x \models \varphi$ signifie, par définition, $x \in v(\varphi)$.

(b) Si φ est de la forme $\neg\psi$, on a $x \models \neg\psi$ si et seulement si $x \not\models \psi$ si et seulement si $x \notin v(\psi)$, ce qui est équivalent à $x \in v(\neg\psi)$.

(c) Si φ est de la forme $\psi \to \theta$, on a $x \models (\psi \to \theta)$ si et seulement si $x \models \theta$ ou $x \not\models \psi$. Cette condition est vérifiée si et seulement si $x \in v(\theta)$ ou $x \notin v(\psi)$, ce qui est équivalent à $x \in v(\psi \to \theta)$ puisque $v(\psi \to \theta) = \neg v(\psi) \vee v(\theta)$.

(d) Si φ est de la forme $\Diamond\psi$, on a $x \models \Diamond\psi$ si et seulement il existe y tel que yRx et $y \models \psi$ (c'est à dire $y \in v(\psi)$). Autrement dit, vu la proposition (3.2.1), on a

$$x \in \{z : \exists y \in v(\psi), yRz\} = R(v(\psi), -) = v(\Diamond\psi).$$

Ceci termine la preuve puisque les affirmations concernant $ou, et, \Box$ découlent de ce que nous venons de démontrer.

$\square$

Définition 3.2.16. L'algèbre $(\mathcal{P}(W), \Diamond_R)$ est appelée *l'algèbre modale complexe* du frame (W, R).

Nous pouvons évidemment effectuer un raisonnement similaire en démarrant d'une algèbre modale complète et atomique. La proposition suivante est évidente puisque pour tout algèbre modale B, r_B est un isomorphisme.

Théorème 3.2.17. *Si B est une algèbre modale complète et atomique et v une valuation sur B alors*

1. *$(At(B), R_\Diamond)$ est un frame de Kripke,*
2. *$r_B \circ v$ est une valuation sur $At(B)$,*
3. *pour toute proposition modale φ, on a*

$$B \overset{v}{\models} \varphi \quad \textit{si et seulement si} \quad At(B) \overset{r_B \circ v}{\models} \varphi.$$

En particulier, $(At(B), r_B \circ v)$ est un modèle de Kripke.

Grâce à ces propositions, on obtient le résultat suivant.

Théorème 3.2.18. *Soit Σ un système modal et φ une proposition modale. Pour tout modèle de Kripke (W, v) de Σ, $W \overset{v}{\models} \varphi$ si et seulement si pour tout modèle algébrique (B, v) de Σ où B est une algèbre modale complète et atomique, $B \overset{v}{\models} \varphi$.*

Il est important de remarquer que nous ne détenons pas de théorème de complétude pour les algèbres modales complètes et atomiques et nous ne pouvons donc pas effectuer un raisonnement similaire à celui effectué pour les espaces modaux.

L'adéquation du théorème de complétude relationnelle est ici démontré grâce au théorème de complétude algébrique. Cette démonstration est bien plus rapide que la démonstration "classique" du théorème de complétude relationnelle. Nous démontrons dans la suite la complétude proprement dite.

Théorème 3.2.19. *(Adéquation du théorème de complétude pour les modèles de Kripke) Si Σ est un système modal et φ une proposition modale, alors*

$$\Sigma \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \forall (W, v) \models \Sigma, W \overset{v}{\models} \varphi.$$

Démonstration. Supposons que $\Sigma \vdash \varphi$ et prenons (W, v) un modèle de Σ. Dans ce cas, vu le théorème (3.1.11), φ est valide dans tout modèle algébrique de Σ. Vu le théorème (3.2.16), $(\mathcal{P}(W), v)$ est un modèle algébrique de Σ et donc φ y est valide. Ainsi, en utilisant une seconde fois le théorème (3.2.16), on obtient que φ est valide dans (W, v), ce qui termine la preuve. $\square$

Nous établissons maintenant une série de propositions qui vont nous permettre d'obtenir une partie du schéma escompté. Nous allons nous servir des résultats obtenus pour les espaces modaux.

Proposition 3.2.20. *Soient Σ un système modal et φ une proposition modale. On a*

$$\forall (W, v) \models \Sigma, W \overset{v}{\models} \varphi \quad \Rightarrow \quad \forall (X, \tau, v') \models \Sigma, (X, \tau) \overset{v'}{\models} \varphi.$$

Démonstration. Supposons que $W \overset{v}{\models} \varphi$ pour tout modèle de Kripke (W, v) de Σ et prenons (X, τ, v') un modèle modal de Σ. Vu la remarque (3.2.4), v' est aussi une valuation sur le frame X. Ainsi, (X, v') est un modèle de Kripke de Σ et donc φ y est valide. On obtient alors

$$v'(\varphi) = X \in of(X),$$

et donc, φ est valide dans (X, τ, v'), ce qui conclu la preuve. □

Compte tenu des notations que nous avons adoptées pour les espaces modaux et pour les frames de Kripke, nous notons W_Σ le frame de Kripke $Ult(B_\Sigma)$ muni de la relation R_Σ définie en (3.2.7). Autrement dit, il s'agit du modèle de Kripke de Σ pour lequel on oublie la topologie.

Proposition 3.2.21. *Soient Σ un système modal et φ une proposition modale. Alors,*

$$(X_\Sigma, \tau_\Sigma) \overset{v'_\Sigma}{\models} \varphi \quad \Leftrightarrow \quad W_\Sigma \overset{v'_\Sigma}{\models} \varphi.$$

Démonstration. Il suffit de constater que par définition $(X_\Sigma, \tau_\Sigma) \overset{v'_\Sigma}{\models} \varphi$ si $v'_\Sigma(\varphi) = Ult(B_\Sigma)$ et qu'il en est de même pour que $W_\Sigma \overset{v'_\Sigma}{\models} \varphi$. □

Nous obtenons alors une partie du résultat escompté grâce à la transitivité de l'implication et aux propositions précédemment établies. En effet, le premier résultat que nous obtenons est le suivant.

Théorème 3.2.22. *Soient Σ un système modal et φ une proposition modale. Alors,*

$$\forall (W, v) \models \Sigma, W \overset{v}{\models} \varphi \quad \Rightarrow \quad W_\Sigma \overset{v'_\Sigma}{\models} \varphi.$$

Démonstration. En effet, grâce au théorème (3.2.20), on obtient

$$\forall (W, v) \models \Sigma, W \overset{v}{\models} \varphi \quad \Rightarrow \quad \forall (X, \tau, v') \models \Sigma, (X, \tau) \overset{v'}{\models} \varphi.$$

Ensuite, en appliquant le théorème (3.2.9), on trouve

$$\forall (X, \tau, v') \models \Sigma, (X, \tau) \overset{v'}{\models} \varphi \quad \Rightarrow \quad (X_\Sigma, \tau_\Sigma) \overset{v'_\Sigma}{\models} \varphi.$$

Enfin, en appliquant le résultat (3.2.21), on peut conclure. □

Théorème 3.2.23. *Soient Σ un système modal et φ une proposition modale. Alors,*

$$W_\Sigma \overset{v'_\Sigma}{\models} \varphi \quad \Rightarrow \quad \Sigma \vdash \varphi$$

Démonstration. En effet, en utilisant le théorème (3.2.21) on trouve

$$W_\Sigma \overset{v'_\Sigma}{\models} \varphi \quad \Rightarrow \quad (X_\Sigma, \tau_\Sigma) \overset{v'_\Sigma}{\models} \varphi.$$

Ensuite, il suffit d'appliquer le résultat (3.2.10) pour conclure. □

Nous obtenons le schéma suivant grâce à tous ces résultats.

$$\begin{tikzcd}
 & \forall (W,v) \models \Sigma, W \overset{v}{\models} \varphi \arrow[dd, "(3.2.22)"] \\
\Sigma \vdash \varphi \arrow[ur, "(3.2.19)"] & \\
 & W_\Sigma \overset{v'_\Sigma}{\models} \varphi \arrow[ul, "(3.2.23)"]
\end{tikzcd}$$

De plus, en utilisant de nouveau la transitivité de l'implication, nous pouvons déduire le théorème de complétude pour les modèles de Kripke.

Théorème 3.2.24. *(Théorème de complétude pour les modèles de Kripke) Si Σ est un système modal et φ une proposition modale, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\Sigma \vdash \varphi$;
2. $\forall (W,v) \models \Sigma, W \overset{v}{\models} \varphi$.

3.2.5 Théorème de complétude dans les frames de Kripke

Dans cette section, nous cherchons à obtenir un théorème de complétude pour les frames de Kripke, autrement dit, une version forte du théorème obtenu dans la section précédente. Nous procédons de la même manière que dans la section concernant les théorèmes de complétude dans les espaces modaux. Cependant, il y a ici une différence fondamentale car nous avons besoin d'une hypothèse supplémentaire pour établir le théorème de complétude dans les frames de Kripke. Commençons par définir un concept essentiel pour la suite.

Définition 3.2.17. Soit Σ est un système modal. Un frame de Kripke W est un Σ-*frame de Kripke* si (W, v) est un modèle de Σ pour toute valuation v sur W. Nous écrirons alors $W \models \Sigma$.

Grâce à cette nouvelle notion et aux propositions (3.2.16) et (3.2.17) , on obtient de manière triviale les résultats suivants.

Proposition 3.2.25. *Soit B est une algèbre modale complète et atomique. On a*

$$B \models \Sigma \;\Leftrightarrow\; At(B) \models \Sigma.$$

Proposition 3.2.26. *Soit W un frame de Kripke. On a*

$$W \models \Sigma \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{P}(W) \models \Sigma.$$

De plus, grâce au théorème (3.2.18), on obtient le résultat suivant.

Théorème 3.2.27. *Soit Σ un système modal et φ une proposition modale. Pour tout Σ-frame de Kripke W, $W \models \varphi$ si et seulement si pour toute Σ-algèbre modale complète et atomique B, $B \models \varphi$.*

Nous allons maintenant énoncer un théorème qui nous permettra de compléter une partie du schéma précédent. La démonstration de ce théorème est similaire à celle effectué en (3.2.13).

Théorème 3.2.28. *Soient Σ est un système modal et φ une proposition modale. On a*

$$(\forall (W, v) \models \Sigma, W \overset{v}{\models} \varphi) \ \Rightarrow \ (\forall W \models \Sigma, W \models \varphi).$$

Grâce à ce résultat, nous pouvons maintenant construire le schéma suivant. Les flèches tracées en pointillé sont obtenues par transitivité de l'implication.

$$\begin{tikzcd}
\forall W \models \Sigma, W \models \varphi & & \forall (W, v) \models \Sigma, W \overset{v}{\models} \varphi \arrow[ll, "(3.2.28)"'] \arrow[dd, "(3.2.22)"] \\
& \Sigma \vdash \varphi \arrow[ul, dashed] \arrow[ur, "(3.2.19)"] & \\
W_\Sigma \models \varphi \arrow[ur, dashed] \arrow[rr, "v'_\Sigma \text{ est une valuation sur } W_\Sigma"'] & & W_\Sigma \overset{v'_\Sigma}{\models} \varphi \arrow[ul, "(3.2.23)"]
\end{tikzcd}$$

Afin de compléter ce schéma, nous avons besoin de montrer que W_Σ est un Σ-frame de Kripke. Malheureusement, nous ne pouvons pas montrer cela pour tout système modal Σ. C'est pourquoi nous définissons les systèmes modaux canoniques.

Définition 3.2.18. Soit Σ un système modal. Si W_Σ est un Σ-frame de Kripke, alors Σ est un *système modal canonique.*

Exemple 3.2.1. La logique $K4.1$ qui est égale à la logique

$$K \oplus (\Box p \to \Box\Box p) \oplus (\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p)$$

est canonique. [1]

1. La preuve de ce résultat se trouve dans [6]

Ainsi, si Σ est un système modal canonique, le schéma précédent est complet. On obtient alors de manière triviale le théorème suivant.

Théorème 3.2.29. *Soient Σ un système modal canonique et φ une proposition modale. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\Sigma \vdash \varphi$;
2. $\forall W \models \Sigma, W \models \varphi$.

Il existe cependant des systèmes modaux qui vérifient (3.2.29) mais qui ne sont pas canoniques.

Définition 3.2.19. Un système modal Σ tel que

$$\forall W \models \Sigma, W \models \varphi \quad \Rightarrow \quad \Sigma \vdash \varphi$$

est appelé *un système modal complet vis à vis des frames de Kripke* ou plus simplement *un système modal complet.*

On obtient alors trivialement le résultat suivant.

Théorème 3.2.30. *Tout système modal canonique Σ est un système modal complet.*

On peut donc en conclure que la logique $K4.1$ est complète. Pour terminer, donnons un exemple de logique complète mais non canonique ainsi qu'un exemple de logique incomplète vis à vis des frames de Kripke.

Exemple 3.2.2. La logique GL qui est égale à la logique

$$K \oplus \Box(\Box p \to p) \to \Box p$$

est complète vis à vis des frames de Kripke et non canonique. La logique L qui est égale à la logique

$$K \oplus \Box(p \leftrightarrow \Box p) \to \Box p$$

n'est pas complète vis à vis des frames de Kripke. [2]

3.3 Théorème de complétude pour les algèbres de pré-contact

Dans cette section, nous établissons un nouveau théorème de complétude pour les algèbres de pré-contact. Pour cela, nous nous basons sur les résultats obtenus pour les algèbres modales.

2. Les preuves de ces résultats se trouvent également dans [6]

3.3.1 Théorème de complétude pour les modèles algébrique de pré-contact

Établissons dans un premier temps une version faible du théorème recherché. Nous commençons par définir la validité des formules modales dans les algèbres de pré-contact.

Définition 3.3.1. Soit B une algèbre de pré-contact. Une valuation sur B est une application

$$\overline{v} \ : \ Var \to B.$$

Contrairement aux sections précédentes, nous sommes contraints d'utiliser l'extension canonique de l'algèbre de pré-contact B pour étendre cette valuation à l'ensemble des propositions modales. Nous étendons une valuation v de manière classique en ce qui concerne les opérations *et, ou* et $\neg$, mais nous ne pouvons pas faire de même concernant l'opération unaire $\Diamond$. En effet, cette opération n'est pas définie dans les algèbres de pré-contact mais bien dans les extensions canoniques de celles-ci. Pour rappel, l'extension canonique d'une algèbre de pré-contact est donnée par l'algèbre modale complète et atomique $B^\delta = \mathcal{P}(Ult(B))$ munie de l'opération unaire $\Diamond_{R_\perp}$. Nous procédons comme suit.

Proposition 3.3.1. *Pour toute algèbre de pré-contact B munie d'une relation binaire $\perp$, on peut étendre une valuation sur B à l'ensemble $Prop$ comme suit,*

$$v \ : \ Prop \to B^\delta$$

grâce aux règles suivantes :

- $v(\neg\varphi) = r_B(\overline{v}(\varphi)^c)$
- $v(\varphi \vee \psi) = r_B(\overline{v}(\varphi) \cup \overline{v}(\psi))$
- $v(\varphi \wedge \psi) = r_B(\overline{v}(\varphi) \cap \overline{v}(\psi))$
- $v(\Diamond\varphi) = \Diamond_{R_\perp}(r_B(\overline{v}(\varphi)), -)$,

pour tout $\varphi, \psi \in Var$. En particulier, cette extension est unique.

Si B est une algèbre de pré-contact et v une valuation sur B, nous définissons la validité d'une proposition modale φ sous la valuation v de la même façon que dans les algèbres modales. Il en est de même pour la validité de φ dans B. Cependant, nous adoptons une notation différente afin de différencier la validité dans une algèbre modale et dans une algèbre de pré-contact. Lorsqu'une proposition modale φ est valide dans une algèbre de pré-contact B sous une valuation v nous écrivons

$$B \overset{v}{\models}_\perp \varphi.$$

De la même manière, si φ est valide dans B, nous écrivons $B \models_\perp \varphi$.

Définition 3.3.2. Si Σ est un système modal et B une algèbre de pré-contact, on dit que (B, v) est un *modèle algébrique de pré-contact de* Σ si

$$B \ \overset{v}{\models}_\perp \varphi \quad \forall \varphi \in \Sigma.$$

Nous écrirons alors $(B, v) \models_\perp \Sigma$.

Nous adoptons cette notation afin de pouvoir distinguer un modèle algébrique de pré-contact et un modèle algébrique de Σ. De nouveau, lorsque aucune ambiguïté ne sera possible, nous dirons simplement que (B, v) est un modèle de Σ. Nous établissons maintenant une série de propositions qui nous permettent de démontrer le théorème de complétude pour les algèbres de pré-contact.

Proposition 3.3.2. *Soient Σ un système modal et φ une proposition modale.*

$$\forall(B, v) \models_{\perp} \Sigma, B \overset{v}{\models}_{\perp} \varphi \quad \Rightarrow \quad \forall(B, v) \models \Sigma, B \overset{v}{\models} \varphi.$$

Démonstration. Prenons Σ un système modal et φ une proposition modale. Supposons que φ est valide dans tout modèle algébrique de pré-contact de Σ et prenons B une algèbre modale munie de l'opération unaire $\Diamond$ et v un B-valuation. Supposons que (B, v) est un modèle algèbrique de Σ. L'algèbre B munie de la relation de proximité $\prec_{\Diamond}$ définie en (2.3.3) est une algèbre de pré-contact. De plus, la B-valuation v peut être étendue à l'ensemble des propositions modales *Prop* grâce à la proposition (3.1.2). Alors, l'application

$$r_B \circ v \ : \ Prop \to of(Ult(B)) \subseteq \mathcal{P}(Ult(B))$$

est une valuation sur l'algèbre de pré-contact $(B, \prec_{\Diamond})$ et donc $(B, r_B \circ v)$ est un modèle algébrique de pré-contact de Σ. Ainsi, par hypothèse, φ est valide dans $(B, r_B \circ v)$. Donc, $r_B(v(\varphi)) = Ult(B)$ et donc $v(\varphi) = 1$. Ainsi, φ est valide dans (B, v), d'où le résultat. $\square$

Théorème 3.3.3. *(Adéquation pour les modèles de pré-contact)*
Si Σ est un système modal et φ une proposition modale, alors

$$\Sigma \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad B \ \overset{v}{\models}_{\perp} \varphi \ \ \forall(B, v) \models_{\perp} \Sigma.$$

Démonstration. Soient Σ est un système modal et φ une proposition modale. Supposons que $\Sigma \vdash \varphi$ et prenons (B, v) un modèle algébrique de pré-contact de Σ. Dans ce cas, v est une valuation sur B^{δ} et donc (B^{δ}, v) est un modèle algébrique de Σ. Ainsi, φ est valide dans (B^{δ}, v) vu le théorème (3.1.11). Autrement dit, $v(\varphi) = Ult(B)$ et donc, φ est valide dans (B, v), d'où le résultat. $\square$

Nous pouvons alors construire le schéma suivant qui fait le lien entre les modèles algébriques et les modèles algébriques de pré-contact.

$$\begin{tikzcd}
 & \forall(B, v) \models_{\perp} \Sigma, B \overset{v}{\models}_{\perp} \varphi \arrow[dd, "(3.3.2)"] \\
\Sigma \vdash \varphi \arrow[ur, "(3.3.3)"] & \\
 & \forall(B, v) \models \Sigma, B \overset{v}{\models} \varphi \arrow[ul, "(3.1.11)"]
\end{tikzcd}$$

Nous pouvons déduire de la transitivité de l'implication le théorème suivant.

Théorème 3.3.4. *(Complétude pour les modèles algébrique de pré-contact)*
Si Σ est un système modal et φ une proposition modale, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\Sigma \vdash \varphi$
2. $B \overset{v}{\models}_{\perp} \varphi$ *pour tout modèle algébrique de pré-contact* (B, v) *de* Σ.

3.3.2 Théorème de complétude pour les algèbres de pré-contact

Afin d'obtenir le théorème de complétude pour les algèbres de pré-contact, nous devons définir la notion de Σ-algèbre de pré-contact dont nous avons besoin dans la suite.

Définition 3.3.3. Une algèbre de pré-contact B est une *Σ-algèbre de pré-contact* si (B, v) est un modèle algébrique de pré-contact de Σ pour toute valuation v sur B. Nous écrirons alors $B \models_{\perp} \Sigma$.

De nouveau, la notation adoptée permet de distinguer les Σ-algèbres de pré-contact et les Σ-algèbres modales. Le résultat suivant se démontre de la même manière que la proposition (3.1.12).

Théorème 3.3.5. *Soient Σ un système modal et φ une proposition modale. Si φ est valide dans tout modèle algébrique de pré-contact de Σ, alors φ est valide dans toute Σ-algèbre de pré-contact.*

Le résultat suivant nous permet d'obtenir le théorème de complétude pour les algèbres de pré-contact.

Théorème 3.3.6. *Soient Σ un système modal et φ une proposition modale. Si φ est valide dans toute Σ-algèbre de pré-contact alors φ est valide dans toute Σ-algèbre modale.*

Démonstration. Soient Σ un système modal et φ une proposition modale. Supposons φ est valide dans toute Σ-algèbre de pré-contact et prenons B une Σ-algèbre modale et v une B-valuation. Alors, l'application

$$r_B \circ v \ : \ Prop \to of(Ult(B)) \subseteq \mathcal{P}(Ult(B))$$

est une valuation sur l'algèbre de pré-contact $(B, \prec_{\Diamond})$. De plus, puisque B une Σ-algèbre modale, il est clair que l'algèbre B munie de $\prec_{\Diamond}$ est une Σ-algèbre de pré-contact et φ y est donc valide. En particulier, φ est valide sous la valuation $r_B \circ v$. On a alors $r_B(v(\varphi)) = Ult(B)$ et donc φ est valide sous la valuation v, d'où le résultat. $\square$

Grâce à tous ces résultats, on peut déduire le théorème de complétude pour les algèbres de pré-contact. Le schéma suivant permet de résumer l'ensemble des résultats que nous venons de prouver. La flèche tracée en pointillé est obtenue par transitivité de l'implication.

$$\begin{tikzcd}
\forall B \models_{\perp} \Sigma, B \models_{\perp} \varphi \arrow[dd, "(3.3.6)"'] & & \forall (B,v) \models_{\perp} \Sigma, B \overset{v}{\models}_{\perp} \varphi \arrow[ll, "(3.3.5)"'] \arrow[dd, "(3.3.2)"] \\
& \Sigma \vdash \varphi \arrow[ul, dashed] \arrow[ur, "(3.3.3)"] & \\
\forall B \models \Sigma, B \models \varphi \arrow[ur, "(3.1.14)"'] & & \forall (B,v) \models \Sigma, B \overset{v}{\models} \varphi \arrow[ul, "(3.1.11)"]
\end{tikzcd}$$

Nous énonçons le théorème de complétude pour les algèbres de pré-contact qui est obtenu par transitivité de l'implication.

Théorème 3.3.7. *(Complétude pour les algèbres de pré-contact)*
Si Σ est un système modal et φ une proposition modale, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\Sigma \vdash \varphi$

2. $\forall B \models_{\perp} \Sigma, B \models_{\perp} \varphi$.

3.4 Théorème de complétude dans les espaces de pré-contact

Il est relativement simple d'obtenir le théorème de complétude dans les espaces de pré-contact. En effet, les espaces modaux sont des espaces de pré-contact particuliers. Nous pouvons donc utiliser les résultats obtenus dans les espaces modaux pour trouver le théorème de complétude dans les espaces de pré-contact. Néanmoins, rappelons-nous que, dans un espace de pré-contact (X, R, τ), l'image d'un ouvert fermé par la relation R n'est pas nécessairement un ouvert fermé. Nous devons donc en tenir compte.

3.4.1 Théorème de complétude pour les modèles de pré-contact

Définition 3.4.1. Soit $X = (X, \tau, R)$ un espace de pré-contact. Une valuation sur X est une application

$$\overline{v} \ : \ Var \to of(X).$$

Nous pouvons évidemment étendre cette valuation à l'ensemble des propositions modales en utilisant la proposition (3.2.1). Nous obtiendrons alors la valuation

$$v' \ : \ Var \to \mathcal{P}(X).$$

De plus, vu la proposition (1.2.19), X est isomorphe à l'espace de pré-contact $Ult(B)$ où B est l'algèbre de pré-contact duale de X. Ainsi, $\mathcal{P}(X)$ est isomorphe à $\mathcal{P}(Ult(B))$ qui n'est rien d'autre que l'extension canonique de l'algèbre de pré-contact B. Ainsi, on peut donc obtenir la valuation

$$v \ : \ Var \to B^{\delta}.$$

Définition 3.4.2. Un *modèle de pré-contact* est un triplet (X, R, v) où $X = (X, R, \tau)$ est un espace de pré-contact et v une *valuation* sur X.

Comme pour les espaces modaux et les frames de Kripke, afin de définir la validité d'une proposition modale dans un espace de pré-contact, nous procédons par étape. La définition est la même que celle donnée dans les espaces modaux en (3.2.3). Nous adopterons les mêmes notations que pour la validité dans les algèbres de pré-contact.

Définition 3.4.3. Si Σ est un système modal et X un espace de pré-contact muni de la topologie τ, on dit que (X, τ, v) est un modèle de pré-contact de Σ si

$$(X, \tau) \overset{v}{\models}_{\perp} \varphi \ \ \forall \varphi \in \Sigma.$$

Nous écrirons alors $(X, \tau, v) \models_{\perp} \Sigma$.

Nous démontrons à présent les propositions permettant d'obtenir le théorème de complétude dans les espaces de pré-contact.

Proposition 3.4.1. *Soit Σ est un système modal. Si (X, τ, v) est un modèle modal de Σ, alors (X, τ, v) est un modèle de pré-contact de Σ.*

Démonstration. Soient Σ est un système modal et (X, τ, v) est un modèle modal. Par définition $X = (X, R, \tau)$ est un espace modal, donc en particulier un espace de pré-contact et v une *valuation* sur X, c'est à dire un application

$$v \ : \ Var \to of(X),$$

autrement dit, une valuation sur l'espace de pré-contact X. On en conclut que (X, τ, v) est un modèle de pré-contact de Σ. □

Proposition 3.4.2. *Soient Σ un système modal et φ une proposition modale.*

$$\forall (X, \tau, v) \models_{\perp} \Sigma, (X, \tau) \overset{v}{\models}_{\perp} \varphi \quad \Rightarrow \quad \forall (X, \tau, v) \models \Sigma, (X, \tau) \overset{v}{\models} \varphi.$$

Démonstration. Prenons Σ un système modal et φ une proposition modale. Supposons que φ est valide dans tout modèle de pré-contact de Σ et prenons (X, τ, v) un modèle modal de Σ. Vu la proposition (3.4.1), (X, τ, v) est un modèle de pré-contact de Σ et donc φ y est valide. Ainsi, φ est valide dans le modèle modal (X, τ, v), d'où le résultat. □

Théorème 3.4.3. *(Adéquation pour les modèles de pré-contact)*
Si Σ est un système modal et φ une proposition modale, alors

$$\Sigma \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \forall (X, \tau, v) \models_{\perp} \Sigma, (X, \tau) \overset{v}{\models}_{\perp} \varphi.$$

Démonstration. Soit Σ un système modal et φ une proposition modale. Supposons que $\Sigma \vdash \varphi$ et prenons (X, τ, v) un modèle de pré-contact de Σ. En particulier, $(of(X), v)$ est un modèle algébrique de pré-contact de Σ et vu le théorème (3.3.3), φ y est valide. En particulier, φ est valide dans le modèle de pré-contact (X, τ, v), d'où le résultat. □

Le schéma suivant peut nous aider à résumer la situation.

$$\begin{tikzcd}
& \forall (X,\tau,v) \models_\perp \Sigma, (X,\tau) \overset{v}{\models}_\perp \varphi \arrow[dd, "(3.4.2)"] \\
\Sigma \vdash \varphi \arrow[ur, "(3.4.3)"] & \\
& \forall (X,\tau,v) \models \Sigma, (X,\tau) \overset{v}{\models} \varphi \arrow[ul, "(3.2.6)"]
\end{tikzcd}$$

Nous obtenons alors le théorème suivant par transitivité de l'implication.

Théorème 3.4.4. *(Complétude pour les modèles de pré-contact)*
Si Σ est un système modal et φ une proposition modale, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\Sigma \vdash \varphi$
2. $(X, \tau) \overset{v}{\models}_\perp \varphi$ *pour tout modèle de pré-contact* (X, τ, v) *de* Σ.

3.4.2 Théorème de complétude dans les espaces de pré-contact

Nous pouvons maintenant aller plus loin et chercher le théorème de complétude dans les espaces de pré-contact. Définissons d'abord une notion essentielle.

Définition 3.4.4. Soit Σ est un système modal. Un espace modal X est un Σ-*espace de pré-contact* si (X, τ, v) est un modèle de pré-contact de Σ pour toute valuation v sur X. Nous écrirons alors $(X, \tau) \models_\perp \Sigma$.

Remarque 3.4.1. Si (X, τ) est un Σ-espace modal, alors (X, τ) est un Σ-espace de pré-contact. En effet, si (X, τ, v) est un modèle modal de Σ pour tout valuation v sur X, alors vu la proposition (3.4.1), (X, τ, v) est un modèle de pré-contact de Σ pour tout valuation v sur X, d'où le résultat.

Le théorème suivant se démontre de la même manière que (3.2.13)

Théorème 3.4.5. *Soient Σ est un système modal et φ une proposition modale. On a*

$$(\forall (X,\tau,v) \models_\perp \Sigma, (X,\tau) \overset{v}{\models}_\perp \varphi) \;\Rightarrow\; (\forall (X,\tau) \models_\perp \Sigma, (X,\tau) \models_\perp \varphi).$$

Le théorème suivant est une conséquence directe de la remarque (3.4.1).

Théorème 3.4.6. *Soient Σ un système modal et φ une proposition modale. Alors*

$$\forall (X,\tau) \models_\perp \Sigma, (X,\tau) \models_\perp \varphi \quad \Rightarrow \quad \forall (X,\tau) \models \Sigma, (X,\tau) \models \varphi.$$

Grâce à tous les résultats obtenus, nous pouvons maintenant énoncer le théorème de complétude dans les espaces de pré-contact. Avant d'énoncer celui-ci, considérons le schéma suivant permettant de visualiser la situation. L'implication représentée en pointillé est obtenue pas transitivité de l'implication.

$$\begin{tikzcd}
\forall (X,\tau) \models_\perp \Sigma, (X,\tau) \models_\perp \varphi \arrow[dd, "(3.4.6)"'] & & \forall (X,\tau,v) \models_\perp \Sigma, (X,\tau) \overset{v}{\models}_\perp \varphi \arrow[ll, "(3.4.5)"'] \arrow[dd, "(3.4.2)"] \\
& \Sigma \vdash \varphi \arrow[ul, dashed] \arrow[ur, "(3.4.3)"] & \\
\forall (X,\tau) \models \Sigma, (X,\tau) \models \varphi \arrow[ur, "(3.2.15)"'] & & \forall (X,\tau,v) \models \Sigma, (X,\tau) \overset{v}{\models} \varphi \arrow[ul, "(3.2.6)"]
\end{tikzcd}$$

Théorème 3.4.7. *(Complétude dans les espaces de pré-contact)*
Si Σ est un système modal et φ une proposition modale, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\Sigma \vdash \varphi$
2. $\forall (X,\tau) \models_\perp \Sigma, (X,\tau) \models_\perp \varphi.$

Remarquons ici qu'il est inutile de considérer le cas où on "oublie" la topologie étant donné que ce cas nous amène au théorème de complétude dans les frames de Kripke et ne nous apporte donc rien de nouveau. Cependant, les théorèmes que nous venons de découvrir permettent un choix plus large. En effet, nous savons maintenant que si Σ est un système modal et φ une proposition modale, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\Sigma \vdash \varphi$
2. $\forall B \models \Sigma, B \models \varphi$
3. $\forall B \models_\perp \Sigma, B \models_\perp \varphi.$

Ainsi, lorsque nous voulions prouver que $\Sigma \nvdash \varphi$, il fallait trouver une Σ-algèbre modale dans laquelle φ n'était pas valide. Maintenant, grâce au théorème obtenu, il suffit de trouver une Σ-algèbre de pré-contact dans laquelle φ n'est pas valide et nous avons ici beaucoup plus de latitude puisqu'il existe plus d'algèbres de pré-contact que d'algèbres modales. De plus, si on peut trouver une telle algèbre de pré-contact alors il existe une Σ-algèbre modale dans laquelle φ n'est pas valide.

Chapitre 4

Le théorème de Fine-van Benthem

Dans ce chapitre, nous démontrons le théorème de *Fine-van Benthem*. Ce théorème stipule que si un système modal est complet vis à vis d'une classe élémentaire de frames, alors ce système modal est canonique. Ce théorème est très intéressant car il fait le lien entre deux propriétés des systèmes supposées équivalentes par les scientifiques. Cependant, Robert Goldblatt, Ian Hodskinson et Yde Venema ont fourni un exemple de système permettant de prouver que ce n'est pas le cas [7]. Néanmoins, ce théorème possède quelques inconvénients. En effet, l'intérêt de prouver qu'un système est canonique est de pouvoir en conclure qu'il est complet. Or, pour appliquer ce théorème à un système, il faut que celui-ci soit complet vis à vis d'une classe élémentaire de frames. La condition nécessaire pour appliquer ce théorème est donc très contraignante, c'est pourquoi il n'est pas souvent appliqué. L'intérêt de ce théorème est donc purement théorique.

4.1 La logique du premier ordre

Avant de démontrer une série de résultats, nous avons besoin de rappeler quelques définitions essentielles concernant la logique du premier ordre. En effet, dans les chapitres précédents, nous avons travaillé avec des langages algébriques. Les langage algébriques sont ceux sur lesquels nous avons défini nos algèbres de Boole, algèbres modales et algèbres de pré-contact. Nous allons généraliser ces langages grâce à la définition suivante.

Définition 4.1.1. Un *langage* avec égalité est la donnée

1. d'un ensemble de symboles fonctionnels $f_1, f_2, \ldots$ d'arités respectives $n_1, n_2, \ldots$;
2. d'un ensemble de symboles relationnels $r_1, r_2, \ldots$ d'arités respectives $n'_1, n'_2, \ldots$;
3. d'un ensemble de symboles constants $c_1, c_2, \ldots$.

Nous noterons un tel langage $\mathcal{L}$.

Remarquons que cette définition précise que nous considérons toujours des langages qui contiennent l'égalité comme symbole relationnel.

Exemple 4.1.1. Le langage des frames, noté $\mathcal{L}(R)$ est le langage ayant un seul symbole relationnel binaire R.

La différence majeure est que ce langage dispose d'un ensemble de symboles relationnels. En effet, dans les chapitres précédents, nous avons étudié des langages qui ne contenaient que des symboles fonctionnels et constants. Définissons maintenant un système du premier ordre.

Définition 4.1.2. Un *système du premier ordre K avec égalité* est défini par les donnés suivantes :

1. Les signes primitifs de K sont donnés par
   (a) les variables, que nous noterons $x_1, x_2, \ldots$;
   (b) les connecteurs $\neg$ et $\Rightarrow$ et le quantificateur universel $\forall$;
   (c) les signes primitifs formant le langage avec égalité $\mathcal{L}$ de K.
2. Les termes sont
   (a) les variables $x_1, x_2, \ldots$;
   (b) les constantes $c_1, c_2, \ldots$;
   (c) $f(t_1, \ldots, t_n)$ où $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes et f un symbole fonctionnel d'arité n.
3. Les formules sont
   (a) $t_1 = t_2$ si t_1 et t_2 sont des termes ;
   (b) les *formules atomiques* $r(t_1, \ldots, t_n)$ si $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes et r un symbole relationnel d'arité n ;
   (c) $\neg\varphi$ et $\varphi \Rightarrow \psi$ si φ et ψ sont des formules ;
   (d) $\forall x \varphi$ si φ est une formule.
4. Les axiomes sont
   (a) la liste des schémas tautologiques L_1, L_2 et L_3 à laquelle on ajoute
   L_4 : si t est un terme et si aucune occurrence d'une variable de t ne devient liée dans $\varphi(x := t)$, $\forall x \varphi \Rightarrow \varphi(x := t)$;
   L_5 : si x n'est pas libre dans φ, $\forall x(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \forall x \psi)$;
   (b) les axiomes de l'égalité : si $t_1, \ldots, t_n$, $t'_1, \ldots, t'_n$ sont des termes, alors
      i. $t = t$ pour tout terme t ;
      ii. $t_1 = t_2 \Rightarrow t_2 = t_1$;
      iii. $t_1 = t_2$ et $t_2 = t_3 \Rightarrow t_1 = t_3$;
      iv. pour tout symbole fonctionnel f d'arité n, si $t_1 = t'_1, \ldots, t_n = t'_n$ alors
      $$f(t_1, \ldots, t_n) = f(t'_1, \ldots, t'_n);$$
      v. pour tout symbole relationnel r d'arité n, si $t_1 = t'_1, \ldots, t_n = t'_n$ alors
      $$r(t_1, \ldots, t_n) = r(t'_1, \ldots, t'_n).$$
   (c) et une liste d'axiomes spécifiques à K ;
5. Les deux règles d'inférence qui sont les suivantes :

(a) la règle classique du modus ponens ;

(b) la règle de généralisation : $\dfrac{\varphi}{\forall x \varphi}$.

Remarque 4.1.1. Évidemment, comme nous en avons déjà fait usage, nous disposons des signes dérivés *et*, *ou* et $\exists$ définis de façon usuelle. Lorsque nous nous donnons une théorie, nous stipulons simplement le langage $\mathcal{L}$ ainsi que la liste d'axiomes spécifiques.

Exemple 4.1.2. La *théorie des groupes* a pour langage $\mathcal{L} = \{., 1, ^{-1}\}$ où . est un symbole fonctionnel binaire, 1 est une constante et $^{-1}$ un symbole fonctionnel unaire. Nous explicitons la liste d'axiomes dans la suite.

Définition 4.1.3. Soit K une théorie du premier ordre. Nous appellerons *équation* toute formule sur K de la forme $t_1 = t_2$ où t_1 et t_2 sont des termes.

Définissons maintenant une structure sur un langage. Nous aurons besoin de ces structures dans la démonstration du théorème de Fine-van Benthem.

Définition 4.1.4. Soit $\mathcal{L}$ un langage. Une *structure* W sur $\mathcal{L}$ est déterminée par les données suivantes :

1. un ensemble W appelé *domaine de la structure* ;
2. pour chaque symbole fonctionnel f d'arité n, une fonction

$$\begin{array}{rccc} f^W : & W^n & \to & W \\ & (w_1, \ldots, w_n) & \mapsto & f^W(w_1, \ldots, w_n); \end{array}$$

3. pour chaque symbole relationnel r d'arité n, une fonction

$$\begin{array}{rccc} r^W : & W^n & \to & W \\ & (w_1, \ldots, w_n) & \mapsto & r^W(w_1, \ldots, w_n); \end{array}$$

4. pour chaque symbole constant c un élément c^W de W.

Chaque f^W, r^W et c^W est *l'interprétation du symbole correspondant* dans W.

Définition 4.1.5. Soient $\mathcal{L}$ un langage, W une structure sur $\mathcal{L}$ et $x_1, \ldots, x_n$ une liste de variables. Une *interprétation* v de cette liste dans W est une liste d'éléments de W $w_1, \ldots, w_n$ tels que

$$v(x_1) = w_1, \ldots, v(x_n) = w_n.$$

Remarque 4.1.2. En réalité, cette définition est similaire à la notion de valuation. En effet, cette interprétation est une application définie de l'ensemble *Var* dans la structure W. Néanmoins, il est important de remarquer que seules les images des variables $x_1, \ldots, x_n$ déterminent l'interprétation v.

On peut étendre cette interprétation à l'ensemble des termes et des formules comme suit.

Proposition 4.1.1. *Soient $\mathcal{L}$ un langage, W une structure sur $\mathcal{L}$, $x_1, \ldots, x_n$ une liste de variables et v une interprétation de cette liste dans W.*

1. *Si t est un terme formé à partir de ces variables $x_1, \ldots, x_n$, l'interprétation t_v^W d'un terme t est définie comme suit :*
   (a) *si t est une variable x_i, $t_v^W = v(x_i)$;*
   (b) *si t est une constante c, $t_v^W = c^W$*
   (c) *si t est $f(t_1, \ldots, t_n)$,*
   $$t_v^W = f^W((t_1^W)_{v_1}, \ldots, (t_n^W)_{v_n}),$$
   où v_i est la restriction de v aux variables de t_i pour $i = 1, \ldots, n$.

   Dans la suite, nous noterons t^W l'interprétation d'un terme t car il n'y aura pas d'ambiguïté quant à l'interprétation considérée.
2. *Si φ est une formule et si $x_1, \ldots, x_n$ est la liste des variables ayant une occurrence libre dans φ, on définit l'expression φ est satisfait dans W sous l'interprétation v (ie. $W \overset{v}{\models} \varphi$) de la façon suivante :*
   (a) *si φ est une formule atomique $r(t_1, \ldots, t_n)$, $W \overset{v}{\models} \varphi$ si $(t_1^W, \ldots, t_n^W) \in r^W$;*
   (b) *si ψ est une formule et si φ est de la forme $\neg\psi$, alors $W \overset{v}{\models} \varphi$ si $W \overset{v}{\not\models} \psi$;*
   (c) *si ψ et θ sont des formules et si φ est de la forme $\psi \Rightarrow \theta$, alors $W \overset{v}{\models} \varphi$ si $W \overset{v}{\not\models} \psi$ ou $W \overset{v}{\models} \theta$;*
   (d) *si ψ est une formule et si φ est de la forme $\forall x \psi$ (x ne figure pas parmi les variables $x_1, \ldots, x_n$), alors $W \overset{v}{\models} \varphi$ si $W \overset{v'}{\models} \psi$ pour toute interprétation v' de $x_1, \ldots, x_n, x$ étendant v.*

Définition 4.1.6. Soient $\mathcal{L}$ un langage, W une structure sur $\mathcal{L}$ et φ une formule sur le langage $\mathcal{L}$. La formule φ est valide dans W si $W \overset{v}{\models} \varphi$ pour toute interprétation v des variables libres de φ

Nous pouvons à présent définir le modèle d'un système du premier ordre.

Définition 4.1.7. Soit K une théorie du premier ordre de langage $\mathcal{L}$. Une structure W est appelée *modèle de K* si tout axiome de K est valide dans W.

Dans ce chapitre, nous allons jongler entre des structures et des $\mathcal{L}$-algèbres. Nous allons donc rappeler ce qu'est une $\mathcal{L}$-algèbre.

Définition 4.1.8. Un *langage algébrique* est la donné d'un langage avec égalité ne contenant aucun symbole relationnel. Nous noterons également $\mathcal{L}$ un tel langage.

Définition 4.1.9. Soit K une théorie du premier ordre de langage algébrique $\mathcal{L}$. Une *$\mathcal{L}$-algèbre* est un modèle de K.

Dans la suite, nous n'allons considérer que des $\mathcal{L}$-algèbres sur un langage algébrique $\mathcal{L}$. Cependant, pour éviter d'alourdir les notations, nous dirons simplement que nous prenons des algèbres et nous préciserons le langage uniquement quand cela sera nécessaire. Ainsi, lorsque nous considérerons une classe d'algèbres $\mathscr{T}$, nous supposerons disposer d'un langage algébrique $\mathcal{L}$ tel que toute algèbre de $\mathscr{T}$ est une $\mathcal{L}$-algèbre.

De la même manière, nous ne considérerons que des langages avec égalité et en conséquence, nous appellerons ceux-ci des langages. Ainsi, dans la suite, dès que nous considérerons un langage, nous supposerons qu'il contient au minimum le symbole relationnel $=$.

Présentons maintenant une série de définitions et théorèmes dont nous aurons besoin dans la suite. Nous ne démontrerons pas de résultats ici, cependant vous pouvez trouver ceux-ci dans [1].

Définition 4.1.10. Une classe d'algèbres $\mathscr{T}$ est une *variété* si elle vérifie les conditions suivantes.

— Si I est un ensemble d'indices et si $A_i \in \mathscr{T}$ pour tout $i \in I$, alors $\prod_{i \in I} A_i \in \mathscr{T}$.

— Si $A \in \mathscr{T}$ et si B est une sous-algèbre de A, alors $B \in \mathscr{T}$.

— Si $A \in \mathscr{T}$ et B est une image homomorphe de A, alors $B \in \mathscr{T}$.

Nous dirons dans la suite que $\mathscr{T}$ est fermé pour H, S, et P.

Nous pouvons prouver que pour montrer qu'une classe d'algèbres $\mathscr{T}$ est une variété, il suffit de démontrer que $\mathscr{T}$ est fermé pour H, S, et P (dans cet ordre). De plus, si $\mathscr{T}$ est une variété, alors

$$\mathscr{T} = HSP(\mathscr{T})$$

Autrement dit, si $B \in \mathscr{T}$, alors B est l'image homomorphe d'une sous algèbre d'un produit d'algèbres A_i appartenant à $\mathscr{T}$. La situation se représente comme suit,

$$B \twoheadleftarrow A \subseteq \prod_{i \in I} A_i.$$

On peut également montrer qu'une intersection de variétés est encore une variété. Nous pouvons alors introduire la plus petite variété contenant une classe d'algèbres.

Définition 4.1.11. Soit $\mathscr{T}$ une classe d'algèbres. La *variété engendrée par* $\mathscr{T}$ est la plus petite variété contenant les algèbres de la classe $\mathscr{T}$. Nous noterons cette variété $Var\ \mathscr{T}$.

Théorème 4.1.2. *(Théorème de Tarski)*
Si $\mathscr{T}$ une classe d'algèbres, alors

$$Var\ \mathscr{T} = HSP(\mathscr{T}).$$

Définition 4.1.12. Une classe d'algèbres $\mathscr{T}$ est une *classe équationelle* s'il existe un ensemble Σ d'équations tel que

$$\mathscr{T} = \{B | B \models \Sigma\}.$$

Voici un exemple bien connu de classe équationnelle.

Exemple 4.1.3. L'ensemble des groupes $\mathcal{G}$ forme une classe équationelle sur le langage habituel. En effet, si

$$\Sigma = \{x.(y.z) = (x.y).z, x.1 = x, 1.x = x, x.x^{-1} = 1, x^{-1}.x = 1\},$$

alors

$$\mathcal{G} = \{G | G \text{ est une } \mathcal{L} - \text{algèbre et } G \models \Sigma\},$$

où $\mathcal{L} = \{., 1, ^{-1}\}$.

Nous utiliserons énormément la remarque suivante dans la suite.

Remarque 4.1.3. Remarquons que si φ est une équation sur un ensemble de variables Var, alors

1. si I est un ensemble d'indices et si $\{A_i | i \in I\}$ est un ensemble d'algèbres modales tel que $A_i \models \varphi$ pour tout $i \in I$, alors $\prod\limits_{i \in I} A_i \models \varphi$. En effet, considérons v une valuation sur $\prod\limits_{i \in I} A_i$, alors

$$v \ : \ Var \to \prod_{i \in I} A_i.$$

   De plus, si pour tout $j \in I$, on définit l'application canonique

$$\begin{aligned} p_j \ : \prod_{i \in I} A_i &\to A_j \\ (x_i)_{i \in I} &\to x_j, \end{aligned}$$

   alors l'application

$$v_j = p_j \circ v \ : \ Var \to A_j$$

   est une valuation sur A_j. Ainsi, en utilisant l'hypothèse, on trouve,

$$v(\varphi) = (v_i(\varphi))_{i \in I} = (1_{A_i})_{i \in I} = 1_{\prod\limits_{i \in I} A_i},$$

   et donc le résultat.

2. si B est une sous algèbre de l'algèbre modale A qui est telle que $A \models \varphi$, alors $B \models \varphi$. En effet, si v est une B valuation, alors

$$v \ : \ Var \to B \subseteq A,$$

   et v est donc une valuation sur A. Ainsi, $v(\varphi) = 1_A$ par hypothèse et puisque $1_A = 1_B$, on peut conclure.

3. si A est une algèbre modale telle que $A \models \varphi$ et B est l'image de A par un homomorphisme d'algèbres modales h, alors $B \models \varphi$. En effet, si v est une B-valuation, alors, on construit

$$v' \;:\; Var \to A$$

tel que $h \circ v' = v$. Cette construction nécessite l'axiome du choix. Puisque $v'(\varphi) = 1_A$, on trouve

$$v(\varphi) = h(v'(\varphi)) = h(1_A) = 1_B,$$

d'où le résultat.

Le théorème suivant permet de faire le lien entre les deux objets que nous venons de définir et nous sera très utile dans la suite. Nous ne démontrerons pas ce théorème ici, cependant, vous pouvez trouver la démonstration dans [1].

Théorème 4.1.3. *(Théorème de Birkhoff)*
Soit une classe d'algèbres $\mathscr{T}$. Alors, $\mathscr{T}$ est une variété si et seulement si $\mathscr{T}$ est une classe équationelle.

Ainsi, chaque variété est une classe équationnelle et en particulier, si on considère une classe d'algèbres $\mathscr{T}$, $Var\ \mathscr{T}$ est une classe équationnelle. Remarquons que si on pose

$$\text{é}q\mathscr{T} = \{\varphi | \varphi \text{ est une equation et } \forall B \in \mathscr{T}, B \models \varphi\},$$

alors on trouve

$$Var\ \mathscr{T} = \{B | B \models \text{é}q\mathscr{T}\}.$$

Nous pouvons donner un second exemple que nous étudierons plus en profondeur dans la suite.

Exemple 4.1.4. Si Σ est un système modal et si on note

$$\Sigma - MA = \{B | B \text{ est une algèbre modale et } B \models \Sigma\},$$

la classe des Σ-algèbres alors,

$$\text{é}q(\Sigma - MA) = \{\varphi | \varphi \text{ est une equation et } B \models \varphi \ \forall B \in \Sigma - MA\}.$$

En particulier, on a

$$Var\ (\Sigma - MA) = HSP(\Sigma - MA) = \{B | B \models \text{é}q(\Sigma - MA)\}.$$

Dans la suite, nous noterons $Var\ \Sigma$ la variété des Σ-algèbres.

4.2 Préambules

Dans cette section, nous démontrons une série de théorèmes qui nous aident à prouver le théorème de Fine-van Benthem. Il est important de remarquer que si Σ est un système modal écrit à partir d'un ensemble dénombrable de variables *Var*, alors, changer l'ensemble *Var* ne change rien. Le théorème suivant le prouve.

Théorème 4.2.1. *Si B est une algèbre et Var un ensemble infini dénombrable de variables et Var' un ensemble de variables. Soit φ une formule sur Var', alors il existe ψ une formule sur Var tel que*

$$B \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad B \models \psi.$$

Démonstration. Soit φ une formule sur Var'. Alors, il existe $p'_1, \ldots, p'_n \in Var'$ tels que

$$\varphi = \varphi(p'_1, \ldots, p'_n).$$

Soient $p_1, \ldots, p_n \in Var$, posons

$$\psi = \varphi(p_1, \ldots, p_n).$$

Supposons que $B \models \varphi$, autrement dit, φ est valide dans B pour toute B-valuation v' définie sur Var'. Prenons v une B-valuation définie sur Var. Montrons que $v(\psi) = 1$. Définissons une B-valuation

$$v \;:\; Var \to B$$

telle que $v(p_1) = v'(p'_1), \ldots, v(p_n) = v'(p'_n)$. Dans ce cas, par hypothèse, on a

$$v(\psi) = v(\varphi(p_1, \ldots, p_n)) = \varphi(v(p_1), \ldots, v(p_n)) = \varphi(v'(p'_1), \ldots, v'(p'_n)) = v'(\varphi) = 1,$$

et donc $B \models \psi$. On procède de la même manière pour prouver que la condition est suffisante. □

La propriété suivante est la propriété fondamentale de l'algèbre de Lindenbaum–Tarski. Rappelons que chaque fois que l'on considère un système modal Σ, nous lui associons de manière implicite l'ensemble de variables que nous appelons *Var*. En conséquence, l'algèbre modale de Lindenbaum–Tarski B_Σ sera construite sur cet ensemble de variables *Var*. Lorsque cette algèbre sera construite sur un ensemble *Var'*, nous noterons $B_\Sigma(Var')$.

Proposition 4.2.2. *Soient Σ un système modal et B une algèbre. Si $B \models \Sigma$, il existe Var' un ensemble de variables tel que pour toute B-valuation $\overline{v} : Var' \to B$, il existe un homomorphisme surjectif $\tilde{v} : B_\Sigma(Var') \to B$ qui étend v.*

Démonstration. Soient Σ un système modal, B une Σ-algèbre et $\overline{v}$ une B-valuation définie sur l'ensemble de variables *Var*. Grâce aux règles habituelles, $\overline{v}$ s'étend à l'ensemble des propositions *Prop* en un homomorphisme v. De plus, par définition, l'application $\overline{v_\Sigma}$ est une valuation sur B_Σ et s'étend elle aussi à l'ensemble *Prop* en un homomorphisme v_Σ. On peut alors factoriser v à travers v_Σ, qui n'est rien d'autre que la projection canonique.

$$\begin{tikzcd}
Prop \arrow[rr, "v"] \arrow[dr, "v_\Sigma"'] & & B \\
& B_\Sigma \arrow[ur, dashed] & \\
& Var \arrow[u, "\overline{v_\Sigma}"] \arrow[uur, "\overline{v}"'] &
\end{tikzcd}$$

En effet, on peut définir

$$\tilde{v} \ : \ B_\Sigma \to B$$

par $\tilde{v}(\varphi^\Sigma) = v(\varphi)$. Puisque v est un homomorphisme, $\tilde{v}$ en est un aussi. De plus, cette définition est indépendante du représentant choisi. En effet, si $\varphi, \psi \in Prop$ sont tels que $\varphi \sim \psi$, alors par définition,

$$\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi.$$

Puisque B une Σ-algèbre, en utilisant le théorème de complétude algébrique des logiques modales établi dans le chapitre précédant ainsi que le corollaire (3.1.4), on obtient

$$\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \ \Rightarrow \ B \models \varphi \leftrightarrow \psi \ \Rightarrow \ v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 \ \Rightarrow \ v(\varphi) = v(\psi).$$

Ainsi, si $\varphi \sim \psi$, alors $\tilde{v}(\varphi^\Sigma) = \tilde{v}(\psi^\Sigma)$.

Grâce au théorème (4.2.1), nous pouvons remplacer l'ensemble *Var* par B. De plus, si on prend $v = id$, alors puisque v se factorise en $v_\Sigma \circ \tilde{v}$ et puisque l'application identité est surjective, $\tilde{v}$ est également surjective, d'où le résultat. □

Le corollaire suivant s'obtient grâce à l'homomorphisme construit dans la proposition précédente et au premier théorème d'isomorphie.

Corollaire 4.2.3. *Toute Σ-algèbre peut s'écrire comme le quotient d'une algèbre de Lindenbaum–Tarski.*

Présentons maintenant un critère intéressant pour qu'un système modal soit complet.

Théorème 4.2.4. *Soit Σ un système modal. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Σ est un système modal complet ;*
2. *$Var\ \Sigma$ est engendré par la classe des Σ-algèbres complètes et atomiques.*

Démonstration. Posons

$$\Sigma - CMA = \{B | B \text{ est une algèbre modale complète et atomique et } B \models \Sigma\}.$$

Commençons par montrer que (1) $\Rightarrow$ (2). Montrons que

$$Var\ \Sigma = Var\ (\Sigma - CMA) = HSP(\Sigma - CMA).$$

Procédons par double inclusion. Commençons par prouver que $Var\ \Sigma \supseteq HSP(\Sigma - CMA)$. Si $B \in HSP(\Sigma - CMA)$, alors B est une image homomorphe d'une sous algèbre d'un produit de Σ-algèbres A_i ($i \in I$) complètes et atomiques (I est un ensemble d'indices). On peut représenter la situation comme suit,

$$B \twoheadleftarrow A \subseteq \prod_{i \in I} A_i.$$

Il suffit alors d'utiliser la remarque (4.1.3) pour montrer que B est une Σ-algèbre.

Montrons maintenant que $Var\ \Sigma \subseteq HSP(\Sigma - CMA)$. Procédons par l'absurde. Supposons qu'il existe $B \in Var\ \Sigma$ tel que $B \notin HSP(\Sigma - CMA)$. Alors, il existe B une Σ-algèbre et $\varphi \in$é$q(\Sigma - CMA)$ tel que $B \not\models \varphi$. Puisque $B \models \Sigma$ et $B \not\models \varphi$, par le théorème de complétude algébrique des logiques modales, $\Sigma \nvdash \varphi$. Or, par hypothèse, Σ est un système modal complet, donc

$$\Sigma \nvdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \exists W \models \Sigma, W \not\models \varphi.$$

Prenons alors un tel frame de Kripke W. Puisque $W \models \Sigma$, on peut appliquer le théorème (3.2.16) et on obtient $\mathcal{P}(W) \models \Sigma$. En particulier, $\mathcal{P}(W) \in \Sigma - CMA$ et donc $\mathcal{P}(W) \models \varphi$. Ainsi, $W \models \varphi$. On obtient donc une absurdité et donc l'égalité désirée.

Montrons maintenant que (2) $\Rightarrow$ (1). Pour montrer que Σ est complet, il nous suffit de prouver que

$$\forall W \models \Sigma, W \models \varphi \quad \Rightarrow \quad \Sigma \vdash \varphi.$$

Procédons par l'absurde. Supposons qu'il existe φ tel que $\forall W \models \Sigma, W \models \varphi$ et $\Sigma \nvdash \varphi$. Dans ce cas, en utilisant le théorème (3.2.27), pour toute Σ-algèbre modale complète et atomique B, $B \models \varphi$. Ainsi, $\varphi \in$é$q(\Sigma - CMA)$ par définition et grâce à notre hypothèse, on trouve

$$\varphi \in \text{é}q(\Sigma - CMA) = \text{é}q(Var(\Sigma - CMA)) = \text{é}q(Var\ \Sigma).$$

Ainsi, φ est valide dans toute Σ-algèbre. Or, par le théorème de complétude algébrique des logiques modales, on a

$$\Sigma \nvdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \exists B \models \Sigma, B \not\models \varphi$$

On obtient donc une absurdité et donc le résultat. □

Les catégories CMA et CCA étant isomorphes, on obtient exactement le même résultat pour les algèbres de pré-contact.

Avant de présenter un critère pour que Σ soit canonique, nous avons besoin d'un petit lemme. Précisons que dans la suite lorsque nous considérerons des algèbres modales B et C et un homomorphisme d'algèbres modales surjectif entre celles-ci, nous dirons simplement que B est l'image homomorphe de C.

Lemme 4.2.5. *Soient B, C deux algèbres modales. Si B est l'image homomorphe de C alors B^δ est l'image homomorphe de C^δ.*

Démonstration. Soient B, C deux algèbres modales. Puisque B est l'image homomorphe de C, il existe f un homomorphisme d'algèbres modales surjectif de C dans B. En appliquant le foncteur Ult définit dans la section (1.1.3), on obtient l'application

$$f^* \ : \ Ult(B) \to Ult(C),$$

qui n'est rien d'autre que l'application f^{-1}. De plus, puisque f est une application surjective, f^* est une application injective. En appliquant ensuite le foncteur d'oubli F, on obtient l'application f^* définie entre deux frames de Kripke. Enfin, en appliquant le foncteur $\mathcal{P}$, on trouve l'application

$$f^\delta \ : \ \mathcal{P}(Ult(C)) \to \mathcal{P}(Ult(B)),$$

qui n'est rien d'autre que l'application $(f^*)^{-1}$. Cette application est surjective puisque f^* est une application injective. Par définition de l'extension canonique d'une algèbre modale, on obtient

$$f^\delta \ : \ C^\delta \to B^\delta,$$

et on en conclut que B^δ est l'image homomorphe de C^δ. □

On peut prouver le lemme suivant de manière similaire.

Lemme 4.2.6. *Soient B, C deux algèbres modales. Si B est une sous algèbre de C alors B^δ est une sous algèbre de C^δ.*

Démonstration. Si B est une sous algèbre de C alors l'application

$$\begin{aligned} i \ : B &\to C \\ b &\mapsto b, \end{aligned}$$

est une application injective entre les deux algèbres modales. La suite de la preuve est similaire à celle présentée en (4.2.5). □

Présentons à présent un critère pour que Σ soit canonique.

Théorème 4.2.7. *Soit Σ un système modal. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Σ est un système modal canonique ;*
2. *B_Σ^δ est une Σ-algèbre ;*
3. *$Var\ \Sigma$ est canonique c'est à dire que si $B \in Var\ \Sigma$ alors $B^\delta \in Var\ \Sigma$;*
4. *si $(X, \tau) \models \Sigma$ alors $X \models \Sigma$.*

Démonstration. Commençons par montrer que (1) $\Rightarrow$ (2). Par définition, puisque Σ est canonique, W_Σ est un Σ-frame de Kripke. De plus, le dual de W_Σ est donné par

$$\mathcal{P}(W_\Sigma) = \mathcal{P}(Ult(B_\Sigma)) = B_\Sigma^\delta.$$

Puisque $W_\Sigma \models \Sigma$, il est clair que $B_\Sigma^\delta \models \Sigma$.

Montrons maintenant que (2) $\Rightarrow$ (3). Supposons que $B_\Sigma^\delta \models \Sigma$ et prenons B une Σ-algèbre. Remarquons que B_Σ est défini sur l'ensemble *Var*, tout comme le système modal Σ. Mais grâce au théorème (4.2.1), il est clair que si on prend un autre ensemble de variables pour définir Σ et B_Σ, nous aurons toujours $B_\Sigma^\delta \models \Sigma$. Vu la proposition (4.2.2), il existe Var' un ensemble de variables tel que pour une B-valuation $\overline{v} : Var' \to B$, il existe un homomorphisme surjectif

$$f \ : \ B_\Sigma(Var') \to B$$

qui étend v. Ainsi, B est l'image homomorphe de $B_\Sigma(Var')$ par l'application f. En appliquant le lemme (4.2.5), on trouve que B^δ est l'image homomorphe de $B_\Sigma(Var')^\delta$. Par hypothèse, $B_\Sigma(Var')^\delta \models \Sigma$ et en utilisant la remarque (4.1.3), on en conclut que $B^\delta \models \Sigma$.

Pour prouver que (3) $\Rightarrow$ (4), il suffit d'utiliser les dualités établies précédemment. En effet, supposons que

$$B \models \Sigma \ \ \Rightarrow \ \ B^\delta \models \Sigma,$$

et prenons (X, τ) un Σ-espace modal. On trouve alors

$$(X, \tau) \models \Sigma \ \Rightarrow \ of(X) \models \Sigma \ \Rightarrow \ of(X)^\delta \models \Sigma.$$

Or, $of(X)^\delta = \mathcal{P}(Ult(of(X)))$ est isomorphe à $\mathcal{P}(X)$. Ainsi, on obtient,

$$of(X)^\delta \models \Sigma \ \Rightarrow \ \mathcal{P}(X) \models \Sigma \ \Rightarrow \ X \models \Sigma,$$

d'où la conclusion.

On peut montrer de manière similaire que (4) $\Rightarrow$ (3). En effet, en supposant que

$$(X, \tau) \models \Sigma \ \Rightarrow \ X \models \Sigma,$$

et en prenant $B \models \Sigma$, on trouve

$$B \models \Sigma \ \Rightarrow \ (Ult(B), \tau) \models \Sigma \ \Rightarrow \ Ult(B) \models \Sigma \ \Rightarrow \ \mathcal{P}(Ult(B)) \models \Sigma.$$

Puisque $\mathcal{P}(Ult(B)) = B^\delta$, on obtient le résultat.

Afin de conclure la preuve, montrons que (3) $\Rightarrow$ (1). L'algèbre de Lindenbaum–Tarski est un Σ-algèbre, donc en utilisant l'hypothèse et les dualités établies précédemment, on obtient

$$B_\Sigma \models \Sigma \ \Rightarrow \ B_\Sigma^\delta \models \Sigma \ \Rightarrow \ At(B_\Sigma^\delta) \models \Sigma.$$

Or, $At(B_\Sigma^\delta) = At(\mathcal{P}(Ult(B_\Sigma)))$ est isomorphe à $Ult(B_\Sigma) = W_\Sigma$. Ainsi,

$$At(B_\Sigma^\delta) \models \Sigma \;\Rightarrow\; W_\Sigma \models \Sigma,$$

et donc Σ est un modèle canonique et ceci clôture la preuve. $\square$

Nous allons maintenant présenter un critère de canonicité pour les systèmes complets. Nous avons pour cela besoin de définir une nouvelle notion. Considérons W un frame de Kripke muni d'une relation R sur lequel on considère la topologie discrete. En lui appliquant le foncteur $\mathcal{P}$, on obtient l'algèbre modale complète et atomique $\mathcal{P}(W)$ munie de la relation $\Diamond_R$. En particulier, $\mathcal{P}(W)$ est une algèbre modale, et en lui appliquant le foncteur Ult, on obtient l'espace modale $Ult(\mathcal{P}(W))$ muni de la topologie dont une base est donnée par

$$\{r_{\mathcal{P}(W)}(E) | E \in \mathcal{P}(W)\}.$$

où

$$\begin{aligned} r_{\mathcal{P}(W)} \;&: \mathcal{P}(W) \to of(Ult(\mathcal{P}(W))) \\ E \;&\mapsto \{U \in Ult(\mathcal{P}(W)) | U \supseteq E\}. \end{aligned}$$

L'espace modal $Ult(\mathcal{P}(W))$ est muni de la relation $R_{\Diamond_R}$ définie comme suit

$$xR_{\Diamond_R}y \;\Leftrightarrow\; \Diamond_R x \subseteq y \;\Leftrightarrow\; R(x,-) \subseteq y$$

pour tout $x, y \in Ult(\mathcal{P}(W))$.

Proposition 4.2.8. *L'application*

$$\begin{aligned} u \;&: W \to Ult(\mathcal{P}(W)) \\ w \;&\mapsto U_w = \{E \in \mathcal{P}(W) | E \ni w\}. \end{aligned}$$

est injective. De plus, u est un homéomorphisme de W dans $u(W)$.

Démonstration. Premièrement, il est clair que cette application est bien définie. En effet, il est aisé de vérifier que U_w est un filtre pour tout $w \in W$. De plus, si $E, F \notin U_w$, il est clair que $E \cup F \notin U_w$. Ainsi, vu la proposition (B.2.5), U_w est un ultrafiltre.

Deuxièmement, cette application est injective car si $U_w = U_v$, en particulier $\{w\} \in U_v$. Ainsi, $\{w\} \ni v$, et donc $w = v$.

Troisièmement, u est une application continue car W est un espace topologique discret et une application d'un espace topologique discret dans un espace topologique quelconque est toujours continue. $\square$

Nous pouvons maintenant définir le nouvel objet dont nous avons besoin.

Définition 4.2.1. Soit W un frame de Kripke. On définit $\beta W = Ult(\mathcal{P}(W))$ et la topologie τ dont une base est donnée par

$$\{r_{\mathcal{P}(W)}(E) | E \in \mathcal{P}(W)\}.$$

Le couple $((\beta W, \tau), u)$ est le *compactifié de Stone-Čech* de W.

Évidemment, nous ne détaillerons pas ici la théorie des compactifications car celle-ci n'est pas utilisée dans ce travail. Nous nous contentons de montrer que la définition donnée ci dessus fournit bien un compactifié de W.

Proposition 4.2.9. *Si W est un frame de Kripke, alors*

1. *$(\beta W, \tau)$ est un espace topologique compact ;*
2. *l'application u est injective et est un homéomorphisme de W dans $u(W)$;*
3. *$u(W)$ est dense dans βW.*

Démonstration. L'espace topologique $(\beta W, \tau)$ est un espace modal. En particulier, c'est un espace de Boole. Ainsi, celui-ci est compact.

Vu la proposition (4.2.8), le second point est évident.

Montrons maintenant que $u(W)$ est dense dans βW. Pour cela, montrons que pour tout $U \in \beta W$, tout voisinage de U rencontre $u(W)$. Soit $U \in \beta W$ et $\mathcal{V}$ un voisinage de U. Alors, par définition, il existe un ouvert de base $r_{\mathcal{P}(W)}(E)$ tel que $E \in \mathcal{P}(W)$ et

$$U \in r_{\mathcal{P}(W)}(E) \subseteq \mathcal{V}.$$

Montrons que $r_{\mathcal{P}(W)}(E)$ rencontre $u(W)$. Puisque $U \in r_{\mathcal{P}(W)}(E)$, $r_{\mathcal{P}(W)}(E) \neq \emptyset$. De plus, puisque $r_{\mathcal{P}(W)}$ est un isomorphisme, $E \neq \emptyset$. Dans ce cas, il existe $w \in E$ et on en tire que $E \in U_w$. Ainsi, $U_w \in r_{\mathcal{P}(W)}(E)$ et on en conclut que $u(W) \cap r_{\mathcal{P}(W)}(E) \ni U_w$, d'où le résultat. □

Passons maintenant au critère de canonicité pour les systèmes complets. Remarquons que dans ce théorème, nous considérons le compactifié de Stone-Čech comme un frame de Kripke.

Théorème 4.2.10. *Soit Σ un système modal complet. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Σ est un système modal canonique ;*
2. *si B est une algèbre modale complète et atomique telle que $B \models \Sigma$ alors $B^\delta \models \Sigma$;*
3. *si $W \models \Sigma$ alors $\beta W \models \Sigma$.*

Démonstration. Vu le théorème (4.2.7), il est clair que (1) $\Rightarrow$ (2).

Montrons maintenant que (2) $\Rightarrow$ (3). Supposons que (2) est vrai et prenons $W \models \Sigma$. Dans ce cas, grâce aux dualités établies précédemment et à l'hypothèse, on trouve

$$W \models \Sigma \;\Rightarrow\; \mathcal{P}(W) \models \Sigma \;\Rightarrow\; \mathcal{P}(W)^\delta \models \Sigma.$$

Par définition, on a $\mathcal{P}(W)^\delta = \mathcal{P}(Ult(\mathcal{P}(W))) = \mathcal{P}(\beta W)$. Ainsi, $\mathcal{P}(\beta W)$ est une Σ-algèbre complète et atomique et par dualité on trouve donc $\beta W \models \Sigma$.

De la même manière, on peut montrer que (3) $\Rightarrow$ (2). En effet, si on suppose que (3) est vérifié et qu'on prend une algèbre modale complète et atomique B telle que $B \models \Sigma$, on trouve

$$B \models \Sigma \;\Rightarrow\; At(B) \models \Sigma \;\Rightarrow\; \beta At(B) \models \Sigma.$$

Or, $\beta At(B) = Ult(\mathcal{P}(At(B)))$ est isomorphe au frame de Kripke $Ult(B)$. Ainsi, $Ult(B) \models \Sigma$ et on peut donc en conclure que $\mathcal{P}(Ult(B)) \models \Sigma$, d'où le résultat.

Pour clôturer la démonstration, il nous reste à montrer que (2) $\Rightarrow$ (1). Supposons que (2) est vérifié. Pour montrer que Σ est canonique, nous allons utiliser le théorème (4.2.7). En effet, il suffit de montrer que

$$B \models \Sigma \ \Rightarrow \ B^\delta \models \Sigma$$

pour toute algèbre modale. Soit B une Σ-algèbre. Celle-ci est dans $Var\ \Sigma$ par définition. De plus, par le théorème (4.2.4), puisque Σ est un système modal complet, $Var\ \Sigma$ est engendrée par la classe des Σ-algèbres complètes et atomiques. Autrement dit,

$$Var\ \Sigma = HSP(\Sigma - CMA).$$

Ainsi, $B \in HSP(\Sigma{-}CMA)$ donc il existe un ensemble d'indices I et une famille $\{A_i | i \in I\}$ de Σ-algèbres complètes et atomiques telles que B est une image homomorphe d'une sous algèbre A du produit des Σ-algèbres A_i. On peut représenter la situation comme suit,

$$B \twoheadleftarrow A \subseteq \prod_{i \in I} A_i.$$

En utilisant les lemmes (4.2.5) et (4.2.6), on obtient

$$B^\delta \twoheadleftarrow A^\delta \subseteq (\prod_{i \in I} A_i)^\delta.$$

De plus, en utilisant la remarque (4.1.3), on a

$$A_i \models \Sigma \ \ \forall i \in I \ \Rightarrow \ \prod_{i \in I} A_i \models \Sigma,$$

et donc par hypothèse, on obtient

$$(\prod_{i \in I} A_i)^\delta \models \Sigma.$$

En utilisant de nouveau la remarque (4.1.3), puisque A^δ est une sous-algèbre de $(\prod_{i \in I} A_i)^\delta$, $A^\delta \models \Sigma$. Enfin, en utilisant une dernière fois la remarque (4.1.3) et le fait que B^δ est l'image homomorphe de A^δ, on trouve

$$B^\delta \models \Sigma,$$

ce qui clôture la preuve. $\square$

4.3 Le théorème de Fine-van Benthem

Avant d'établir le théorème de Fine-van Benthem, nous avons besoin d'introduire quelques nouvelles notions.

Définition 4.3.1. Soient $\mathcal{L}$ un langage et W et W' deux structures sur ce langage. On dit que W et W' sont *élémentairement équivalents* si et seulement si pour toute formule fermée φ

$$W \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad W' \models \varphi.$$

On écrira alors $W \equiv W'$.

Pour rappel, φ est une formule fermée si φ ne contient pas de variable libre.

Définition 4.3.2. Soit $\mathscr{T}$ une classe de structures sur un langage $\mathcal{L}$. On dit que $\mathscr{T}$ est une *classe élémentaire* s'il existe un ensemble Σ de formules tel que

$$\mathscr{T} = \{W | W \models \Sigma\}.$$

Remarque 4.3.1. Si $\mathscr{T}$ est une classe élémentaire sur un langage $\mathcal{L}$ et si W et W' sont deux structures sur ce même langage telles que $W \in \mathscr{T}$ et $W \equiv W'$, il est clair que $W' \in \mathscr{T}$.

Définition 4.3.3. Soit Σ un système modal. On dit que Σ est *complet vis à vis d'une classe élémentaire de frames* si

$$\{W | W \models \Sigma\}$$

est élémentaire sur le langage des frames. Autrement dit, s'il existe un ensemble ϕ de formules du premier ordre sur le langage $\mathcal{L}(R)$ tel que

$$\{W | W \models \Sigma\} = \{W | W \models \phi\}.$$

Exemple 4.3.1. La logique $K4$ qui, pour rappel, est égale à la logique

$$K \oplus (\Box p \to \Box\Box p)$$

est complète par rapport à la classe des frames transitifs. En effet, la relation R définie sur un frame W est transitive si

$$xRy \text{ et } yRz \quad \Rightarrow \quad xRz \qquad \forall x, y \in W.$$

Cette condition peut se traduire, grâce à la correspondance de Sahlqvist [1] par l'implication $(\Box p \to \Box\Box p)$. Ainsi, la classe des frames transitifs n'est rien d'autre que la classe des frames qui sont modèles de $K4$.

Énonçons maintenant le théorème de Fine-van Benthem.

1. Pour plus d'informations, vous pouvez vous référer à [2]

Théorème 4.3.1. *(théorème de Fine-van Benthem)*
Si Σ est un système modal complet vis à vis d'une classe élémentaire de frames alors Σ est un système modal canonique.

Grâce à ce théorème, nous pouvons rapidement conclure que la logique $K4$ est canonique.

Pour établir ce théorème, nous allons nous aider du lemme suivant.

Lemme 4.3.2. *Pour toute structure W sur le langage $\mathcal{L}(R)$, il existe une structure W^∞ élémentairement équivalente à W sur $\mathcal{L}(R)$ pour laquelle il existe un morphisme*

$$f \ : \ W^\infty \to \beta W$$

de la catégorie KF.

Démonstration. Considérons le langage $\mathcal{L}(R)$ et W une structure sur celui-ci. Afin de bien distinguer les éléments de W de ceux des structures $W^{(n)}$ que nous allons construire, nous noterons $a, b, \ldots$ les éléments de W et $w_1, w_2, \ldots$ les éléments des structures $W^{(n)}$. Soit ϕ un ensemble de formules fermées du premier ordre sur le langage $\mathcal{L}(R)$ tel que

$$\phi = \{\psi | \psi \text{ est une formule fermée sur } \mathcal{L}(R) \text{ et } W \models \psi\}.$$

Commençons par enrichir le langage $\mathcal{L}(R)$. Ajoutons à ce langage P_X un symbole relationnel unaire pour toute partie X de W. L'interprétation du symbole P_X est $P_X^W = X$. Si t est un terme, nous dirons que

$$W \models P_X(t) \quad \Leftrightarrow \quad v(t) \in X$$

pour toute interprétation v de t dans W. Notons $\mathcal{L}(R)^{(0)}$ le langage enrichi. Nous allons maintenant enrichir l'ensemble ϕ. Posons

$$\phi^{(0)} = \{\psi | \psi \text{ est une formule fermée sur } \mathcal{L}(R)^{(0)} \text{ et } W \models \psi\}.$$

Il est clair que $\phi \subseteq \phi^{(0)}$.

Enrichissons à nouveau le langage $\mathcal{L}(R)^{(0)}$. Ajoutons à ce langage un symbole constant c_a pour chaque élément a de W. L'interprétation du symbole constant c_a est $c_a^W = a$. Nous obtenons alors un nouveau langage $\mathcal{L}(R)^{(0)+}$ ainsi qu'un nouvel ensemble de formules

$$\phi^{(0)+} = \{\psi | \psi \text{ est une formule fermée sur } \mathcal{L}(R)^{(0)+} \text{ et } W \models \psi\}.$$

Nous allons également ajouter d'autres constantes que nous construisons comme suit. Soit π un ensemble de formules sur le langage $\mathcal{L}(R)^{(0)+}$ contenant une variable libre x et tel que pour tout sous-ensemble fini $\pi' \subseteq \pi$, il existe un élément a de W tel que

$$\forall \varphi(x) \in \pi', W \models \varphi(c_a).$$

On associe à chaque ensemble π une constante c_π que l'on ajoute au langage $\mathcal{L}(R)^{(0)+}$ et on obtient donc un nouveau langage $\mathcal{L}(R)^{(1)}$. On enrichit également l'ensemble $\phi^{(0)+}$ en ajoutant, pour chaque ensemble π et pour chaque formule $\varphi(x)$ de π, la formule $\varphi(c_\pi)$. On obtient donc un nouvel ensemble de formules $\phi^{(1)}$ sur le langage $\mathcal{L}(R)^{(1)}$. Il est clair que $\phi^{(1)} \supseteq \phi^{(0)+} \supseteq \phi^{(0)}$.

Montrons maintenant que $\phi^{(1)}$ est consistant. Pour cela, utilisons le théorème de de compacité[2]. Considérons ϕ_f un sous ensemble fini de $\phi^{(1)}$ et montrons que celui-ci est consistant. Pour cela, il suffit de prouver que ϕ_f admet un modèle vu le theorème de complétude de Gödel. Puisque $\phi_f \subseteq \phi^{(1)}$, il existe un entier n (éventuellement nul) tel que les formules

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n$$

sont les seules formules de $\phi^{(0)+}$ appartennant à ϕ_f. Ensuite, il existe un nombre entier p (éventuellement nul) pour lequel il existe des entiers $m_1, \dots, m_p$ tels que ϕ_f contient uniquement les formules

$$\begin{gathered}\psi_1, \dots, \psi_{m_1} \in \{\varphi(c_{\pi_1}) | \varphi(x) \in \pi_1\}\\ \vdots \\ \theta_1, \dots, \theta_{m_p} \in \{\varphi(c_{\pi_p}) | \varphi(x) \in \pi_p\}.\end{gathered}$$

Montrons que W est un modèle de ϕ_f. Nous devons donc montrer que toute formule de ϕ_f est valide dans W. Premièrement, par définition de $\phi^{(0)+}$, il est clair que

$$W \models \varphi_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Passons maintenant aux autres formules. Posons $\pi_1' = \{\psi_1(x), \dots, \psi_{m_1}(x)\}$. Dans ce cas, π_1' est un sous ensemble fini de π_1. Ainsi, par construction, il existe un élément a de W tel que

$$\forall \psi_i(x) \in \pi_1', W \models \psi_i(c_a).$$

Il suffit alors de prendre $c_{\pi_1} = c_a$. On effectue le même raisonnement pour les ensembles $\pi_2, \dots, \pi_p$. Pour les ensembles π ne figurant pas dans $\pi_1, \dots, \pi_p$, c_π est une constante arbitraire. On obtient donc que W est un modèle de ϕ_f. On en conclut que $\phi^{(1)}$ est consistant puisque tout sous ensemble fini de $\phi^{(1)}$ est consistant. Ainsi, $\phi^{(1)}$ admet un modèle.

Considérons $W^{(1)}$ un frame de Kripke qui est un modèle de $\phi^{(1)}$. Nous noterons $R^{(1)}$ la relation sur $W^{(1)}$.

Premièrement, $W \equiv W^{(1)}$ sur $\mathcal{L}(R)$. Prenons φ une formule fermée sur le langage $\mathcal{L}(R)$. Premièrement, si la formule φ est valide dans W alors celle-ci est valide dans $W^{(1)}$. En effet, si φ est valide dans W, alors par définition de ϕ, il est clair que $\varphi \in \phi$. Donc puisque $W^{(1)}$ est un modèle de $\phi^{(1)} \supseteq \phi$, on trouve que φ est valide dans $W^{(1)}$. Deuxièmement, si la formule φ est valide dans $W^{(1)}$ alors celle-ci est valide dans W. Procédons par l'absurde, supposons que

$$W^{(1)} \models \varphi \text{ et } W \not\models \varphi.$$

2. Vous pouvez retrouver la démonstration de ce théorème dans [9]

Dans ce cas, puisque φ est une formule fermée, $W \models \neg\varphi$. Ainsi, par définition, $\neg\varphi \in \phi$ et donc $W^{(1)} \models \neg\varphi$. Or, $W^{(1)} \models \varphi$. On obtient alors une absurdité et donc le résultat. En réalité, ce raisonnement est aussi valide si on considère une formule fermée sur le langage $\mathcal{L}(R)^{(0)+}$, et donc $W \equiv W^{(1)}$ sur $\mathcal{L}(R)^{(0)+}$.

Deuxièmement, W se plonge dans $W^{(1)}$. En effet, montrons que l'application

$$\begin{aligned} c \ : \ W &\to W^{(1)} \\ a \ &\mapsto c_a^{W^{(1)}} \end{aligned}$$

est un homomorphisme injectif. Montrons que cette application est injective. Si $a \neq b$ alors

$$W \models c_a \neq c_b$$

puisque $c_a^W = a$ et $c_b^W = b$. Ainsi, $c_a \neq c_b \in \phi^{(0)+}$ et on trouve $W^{(1)} \models c_a \neq c_b$. Ensuite, cette application est un homomorphisme. Supposons que aRb, dans ce cas,

$$W \models c_a R c_b$$

car $c_a^W = a, c_b^W = b$ et $(a,b) \in R$. Dans ce cas, $c_a R c_b \in \phi^{(0)+}$, et donc $W^{(1)} \models c_a R c_b$. Enfin, si on suppose que $a \not R b$, alors

$$W \models c_a \not R c_b$$

car $c_a^W = a, c_b^W = b$ et $(a,b) \notin R$. De la même manière que précédemment, on trouve donc que $W^{(1)} \models c_a \not R c_b$. On peut donc en conclure que W se plonge dans $W^{(1)}$ grâce à l'application c. Nous venons de prouver que $W^{(1)}$ est une extension de W. Dans la suite, nous assimilerons donc les éléments de W à des éléments de $W^{(1)}$ (autrement dit nous considérerons que $W \subseteq W^{(1)}$) et nous considérerons la relation $R^{(1)}$ comme une extension de la relation R. Ainsi, nous aurons $c_a^W = c_a^{W^{(1)}}$ pour tout élément a de W.

Troisièmement, montrons que l'application

$$\begin{aligned} f \ &: W^{(1)} \to \beta W \\ w \ &\mapsto \widehat{w} = \{X \in \mathcal{P}(W) | W^{(1)} \models P_X(x)[w]\} \end{aligned}$$

est un épimorphisme partiel sur W de la catégorie KF. Précisons que $W^{(1)} \models P_X(x)[w]$ signifie que pour toute intérprétation v telle que $v(x) = w$, on a

$$W^{(1)} \overset{v}{\models} P_X(x).$$

De plus, par épimorphisme partiel sur W nous voulons dire que f vérifie

1. $\mathcal{D}om f = W^{(1)}$;
2. $\mathcal{I}m f = \beta W$;
3. si $w_1, w_2 \in W^{(1)}$ sont tels que $w_1 R^{(1)} w_2$, alors $f(w_1) R_{\Diamond_R} f(w_2)$;

4. pour tout $a \in W$, si $u \in \beta W$ est tel que $uR_{\Diamond_R} f(a)$ alors il existe $w_1 \in W^{(1)}$ tel que $w_1 R^{(1)} a$ et $f(w_1) = u$.

Procédons par étapes.

1. Montrons d'abord que cette application est bien définie. Pour cela, nous devons montrer que $\widehat{w_1}$ est un ultrafiltre pour tout $w_1 \in W^{(1)}$. Commençons par montrer que celui-ci est un filtre.
   - Premièrement, $W \in \widehat{w}$. En effet, il est clair que
   $$(\forall x)(P_W(x))$$
   est une formule fermée sur $\mathcal{L}(R)^{(0)}$ qui est valide dans W. Ainsi, cette formule est une formule de $\phi^{(0)}$ et donc
   $$W^{(1)} \models (\forall x)(P_W(x)).$$
   En particulier, on trouve $W^{(1)} \models P_W(x)[w]$.
   - Deuxièmement, si X et Y sont des éléments de $\widehat{w}$ alors $X \cap Y$ est aussi un élément de $\widehat{w}$. Il est évident que
   $$(\forall x)(P_X(x) \text{ et } P_Y(x) \Rightarrow P_{X\cap Y}(x))$$
   est une formule fermé sur $\mathcal{L}(R)^{(0)}$ qui est valide dans W. Cette formule est donc valide dans $W^{(1)}$. En particulier, on a
   $$W^{(1)} \models (P_X(x)[w] \text{ et } P_Y(x)[w] \Rightarrow P_{X\cap Y}(x)[w]),$$
   et puisque $X, Y \in \widehat{w}$, on trouve $W^{(1)} \models P_{X\cap Y}(x)[w]$ donc $X \cap Y \in \widehat{w}$.
   - Troisièmement, si X est une partie de W et si Y est un élément de $\widehat{w}$ tel que $Y \subseteq X$, alors X est un élément de $\widehat{w}$. Il est clair que si $Y \subseteq X$ alors la formule
   $$(\forall x)(P_Y(x) \Rightarrow P_X(x))$$
   est une formule de $\phi^{(0)}$ et est donc valide dans $W^{(1)}$. En particulier,
   $$W^{(1)} \models (P_Y(x)[w] \Rightarrow P_X(x)[w]).$$
   Ainsi puisque $Y \in \widehat{w}$, on en conclut que $W^{(1)} \models P_X(x)[w]$.

   Montrons maintenant que $\widehat{w}$ est un ultrafiltre. Pour cela, il suffit de montrer que pour toute partie X de W, $X \in \widehat{w}$ ou bien $X^c \in \widehat{w}$. Supposons que $X \notin \widehat{w}$. Alors,
   $$W^{(1)} \not\models P_X(x)[w] \quad \Rightarrow \quad W^{(1)} \models \neg P_X(x)[w]$$
   puisque $\phi^{(1)}$ est consistant. De plus, la formule
   $$(\forall x)(\neg P_X(x) \Rightarrow P_{X^c}(x))$$
   est une formule de $\phi^{(0)}$, et celle-ci est donc valide dans $W^{(1)}$. Ainsi, vu notre hypothèse, on obtient
   $$W^{(1)} \models P_{X^c}(x)[w].$$
   On peut donc en conclure que l'application f est bien définie.

2. Nous allons maintenant prouver que f est une application surjective. Soit $u \in \beta W$. Si u est un ultrafiltre principal, alors il existe $a \in W$ tel que $a \in X$ pour tout $X \in u$. Dans ce cas, on trouve évidemment

$$W^{(1)} \models P_X(x)[a] \ \ \forall X \in u.$$

On peut en conclure que $u = f(a)$. Si u n'est pas un ultrafiltre principal, alors, l'ensemble

$$\pi = \{P_X(x) : X \in u\}$$

est un ensemble de formules sur le langage $\mathcal{L}(R)^{(0)}$ contenant une variable libre x. Considérons un sous ensemble fini $\{P_{X_1}(x), \ldots, P_{X_n}(x)\}$ de $\{P_X(x) : X \in u\}$. Puisque u est un filtre, $X_1 \cap \ldots \cap X_n \in u$ et comme u est une ultrafiltre, il est clair que $X_1 \cap \ldots \cap X_n \neq \emptyset$. Ainsi, il existe $a \in X_1 \cap \ldots \cap X_n$ et celui-ci est tel que

$$W \models P_{X_1 \cap \ldots \cap X_n}(c_a).$$

Autrement dit,

$$W \models P_{X_i}(c_a) \ \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Ainsi, par construction, il existe une constante c_π dans le langage $\mathcal{L}(R)^{(1)}$ tel que $P_X(c_\pi)$ est une formule de $\phi^{(1)}$ pour tout élément X de u. On en conclut que

$$W^{(1)} \models P_X(x)[c_\pi^{W^{(1)}}] \ \ \forall X \in u$$

et donc $u = f(c_\pi^{W^{(1)}})$.

3. Nous devons maintenant montrer que

$$f(R^{(1)}(-, w)) \subseteq R_{\Diamond_R}(-, f(w)) \ \ \forall w \in W^{(1)}.$$

Soit $w_2 \in W^{(1)}$. Prenons $w_1 \in W^{(1)}$ tel que $w_1 R^{(1)} w_2$ et montrons que $f(w_1) R_{\Diamond_R} f(w_2)$. Nous devons donc montrer que $\Diamond_R f(w_1) \subseteq f(w_2)$. Si $X \in f(w_1)$, alors

$$W^{(1)} \models P_X(x)[w_1].$$

De plus, puisque $\Diamond_R X = R(X, -)$, la formule

$$(\forall x)(\forall y)(P_X(x) \text{ et } xRy \Rightarrow P_{\Diamond X}(y))$$

est valide dans W et est donc est aussi valide dans $W^{(1)}$. Ainsi, vu nos hypothèses, on trouve

$$W^{(1)} \models P_{\Diamond X}(x)[w_2],$$

et on en conclut que $\Diamond X \in f(w_2)$, d'où le résultat.

4. Pour finir, prouvons que pour tout $a \in W$, si $u \in \beta W$ est tel que $uR_{\Diamond_R} f(a)$ alors il existe $w_1 \in W^{(1)}$ tel que $w_1 R^{(1)} a$ et $f(w_1) = u$. Supposons disposer d'un élément $u \in \beta W$ tel que $uR_{\Diamond_R} f(a)$. Puisque l'application f est surjective, il existe $w \in W^{(1)}$ tel que $f(w) = u$. De plus, on a

$$f(w) R_{\Diamond_R} f(a) \Leftrightarrow \Diamond_R f(w) \subseteq f(a) \Leftrightarrow R(f(w), -) \subseteq f(a).$$

Considérons l'ensemble

$$\pi = \{P_X(x) | X \in f(w)\} \cup \{xRc_a\}.$$

de formules sur le langage $\mathcal{L}(R)^{(0)}$ contenant une variable libre x. Prenons un sous ensemble fini de π de la forme

$$\{P_{X_1}(x), \ldots, P_{X_n}(x), xRc_a\} = \{P_X(x), xRc_a\}$$

où $X = X_1 \cap \ldots \cap X_n$. Alors, il existe $b \in W$ tel que

$$W \models P_{X_i}(c_b) \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\} \text{ et } W \models c_b R c_a.$$

En effet, si un tel élément n'existait pas, alors on aurait

$$W \not\models (\exists x)(P_X(x) \wedge xRc_a),$$

et puisque $W \equiv W^{(1)}$ sur $\mathcal{L}(R)^{(0)+}$, on trouve,

$$W^{(1)} \not\models (\exists x)(P_X(x) \wedge xRc_a),$$

Or, la formule

$$(\forall y)(\exists x : P_X(x) \wedge xRy \Rightarrow P_{\Diamond X}(y))$$

est une formule fermée sur $\mathcal{L}(R)^{(0)}$ et est valide dans W puisque $\Diamond X = R(X, -)$. Cette formule est donc une formule de $\phi^{(0)}$ et celle-ci est donc valide dans $W^{(1)}$. En particulier, on a

$$W^{(1)} \models \exists x : P_X(x) \wedge xRc_a \Rightarrow P_{\Diamond X}(c_a).$$

Vu ce qui précède, on obtient

$$W^{(1)} \not\models P_{\Diamond X}(c_a)$$

ce qui est absurde puisque $\Diamond_R f(w) \subseteq f(a)$ et $X \in f(w)$. Il existe donc une constante c_π dans le langage $\mathcal{L}(R)^{(1)}$ telle que

$$W^{(1)} \models P_X(c_\pi) \quad \forall X \in f(w) \text{ et } W^{(1)} \models c_\pi R c_a.$$

Posons $w_1 = c_\pi^{W^{(1)}} \in W^{(1)}$ et montrons que celui-ci convient. Premièrement, puisque

$$W^{(1)} \models c_\pi R c_a,$$

alors $(c_\pi^{W^{(1)}}, c_a^{W^{(1)}}) \in R^{(1)}$ et comme $c_a^W = c_a^{W^{(1)}}$, on a $w_1 R^{(1)} a$. Deuxièmement, nous devons montrer que $f(w) = f(w_1)$. On a $f(w) \subseteq f(w_1)$, puisque, si $X \in f(w)$, alors

$$W^{(1)} \models P_X(c_\pi) \Rightarrow W^{(1)} \models P_X(x)[c_\pi^{W^{(1)}}],$$

ce qui est équivalent à $W^{(1)} \models P_X(x)[w_1]$, donc $X \in f(w_1)$. Ensuite, $f(w_1) \subseteq f(w)$. En effet, si $X \in f(w_1)$, alors

$$W^{(1)} \models P_X(x)[w_1].$$

Supposons que $X \notin f(w)$, alors $X^c \in f(w) \subseteq f(w_1)$ puisque c'est un ultrafiltre et donc

$$W^{(1)} \models P_{X^c}(x)[w_1].$$

Ainsi, $X \in f(w_1)$ et $X^c \in f(w_1)$, ce qui est absurde puisque $f(w_1)$ est un filtre propre. On en conclut que $f(w_1) \subseteq f(w)$ et ceci permet de conclure.

Nous avons donc construit une structure $W^{(1)}$ qui est une extension de W et qui est élémentairement équivalente à W sur $\mathcal{L}(R)$. De plus, nous avons trouvé un épimorphisme partiel sur W

$$f \ : \ W^{(1)} \to \beta W.$$

Nous venons en réalité d'expliciter le cas de base de notre récurrence. En effet, nous voulions construire un morphisme de KF et pour cela, nous allons répéter le raisonnement que nous venons d'effectuer en construisant (par réccurence) une suite emboîtée d'extensions $(W^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de W. Nous allons remplacer W par $W^{(n)}$. Ainsi, nous allons obtenir une structure $W^{(n+1)}$ qui est une extension de $W^{(n)}$ et qui est élémentairement équivalente à $W^{(n)}$ sur $\mathcal{L}(R)$. Puisqu'elle est élémentairement équivalente à $W^{(n)}$ sur $\mathcal{L}(R)$, celle-ci est aussi élémentairement équivalente à W sur $\mathcal{L}(R)$ car $W^{(n)}$ est élémentairement équivalent à W par hypothèse de récurrence. De plus, nous obtiendrons une application

$$f^{(n)} \ : \ W^{(n)} \to \beta W$$

telle que

1. $\mathcal{D}om f^{(n)} = W^{(n)}$;
2. $\mathcal{I}m f^{(n)} = \beta W$;
3. si $w_1, w_2 \in W^{(n)}$ sont tels que $w_1 R^{(n)} w_2$, alors $f^{(n)}(w_1) R_{\Diamond R} f^{(n)}(w_2)$;
4. pour tout $w \in W^{(n-1)}$, si $u \in \beta W$ est tel que $u R_{\Diamond R} f^{(n)}(w)$ alors il existe $w_1 \in W^{(n)}$ tel que $w_1 R^{(n)} w$ et $f^{(n)}(w_1) = u$.

De plus, l'application $f^{(n)}$ est une extension de l'application $f^{(n-1)}$.

Expliquons brièvement le passage de la structure $W^{(n)}$ à la structure $W^{(n+1)}$. Notre hypothèse de récurrence est que pour tout $m \leq n$, $W^{(m)}$ est une extension de W et qui est élémentairement équivalente à W sur $\mathcal{L}(R)$. De plus, $W^{(m)}$ est un modèle de $\phi^{(m)}$ et nous disposons également d'un épimorphisme partiel

$$f^{(m)} \; : \; W^{(m)} \to \beta W,$$

sur $W^{(m-1)}$. Nous allons considérer le langage $\mathcal{L}(R)^{(n)}$ et lui ajouter un symbole constant c_w pour chaque élément w de $W^{(n)}$. L'interprétation du symbole constant c_w est $c_w^{W^{(n)}} = w$. Nous obtenons alors le langage $\mathcal{L}(R)^{(n)+}$ ainsi que l'ensemble de formules

$$\phi^{(n)+} = \{\psi | \psi \text{ est une formule fermée sur } \mathcal{L}(R)^{(n)+} \text{ et } W^{(n)} \models \psi\}.$$

Nous allons également ajouter les constantes c_π associées à chaque un ensemble π de formules sur le langage $\mathcal{L}(R)^{(n)}$ contenant une variable libre x et tel que pour tout sous-ensemble fini $\pi' \subseteq \pi$, il existe un élément w de $W^{(n)}$ tel que

$$\forall \varphi(x) \in \pi', W^{(n)} \models \varphi(c_w).$$

On enrichit également l'ensemble $\phi^{(n)}$ en ajoutant la formule $\varphi(c_\pi)$ pour chaque ensemble π et pour chaque formule $\varphi(x)$ de π. On obtient donc un nouvel ensemble de formules $\phi^{(n+1)}$ sur le nouveau langage $\mathcal{L}(R)^{(n+1)}$. Il est clair que $\phi^{(n+1)} \supseteq \phi^{(n)}$.

Pour montrer que $\phi^{(n+1)}$ est consistant, nous procédons de la même manière que pour le cas de base. Nous considérons un ensemble fini de formules inclus dans $\phi^{(n+1)}$ et nous montrons que $W^{(n)}$ en est un modèle. Cet ensemble fini contient un nombre fini de formules de $\phi^{(n)}$ et celles-ci sont valides dans $W^{(n)}$ car celui-ci est un modèle de $\phi^{(n)}$ par hypothèse de récurrence. Ensuite, il suffit d'effectuer le même raisonnement que dans le cas de base puisque la construction de l'ensemble $\phi^{(n+1)}$ est identique à celle de l'ensemble $\phi^{(1)}$.

Nous pouvons alors considérer $W^{(n+1)}$ un frame de Kripke qui est un modèle de $\phi^{(n+1)}$. Nous noterons $R^{(n+1)}$ la relation sur $W^{(n+1)}$.

Pour montrer que $W^{(n)} \equiv W^{(n+1)}$ sur $\mathcal{L}(R)$, on procède de la même manière puisque $\phi \subseteq \phi^{(n+1)}$.

La structure $W^{(n)}$ se plonge dans $W^{(n+1)}$ grâce à l'application

$$\begin{aligned} c^{(n)} \; : \; W^{(n)} &\to W^{(n+1)} \\ w &\mapsto c_w^{W^{(n+1)}}, \end{aligned}$$

qui est un homomorphisme injectif. La démonstration est similaire à celle effectuée dans le cas de base. Il suffit de remplacer W par $W^{(n)}$, $W^{(1)}$ par $W^{(n+1)}$ et $\phi^{(0)+}$ par $\phi^{(n)+}$ pour obtenir le résultat.

Remarquons que si nous montrons qu'une formule fermée φ est une formule sur $\mathcal{L}(R)^{(0)}$ valide dans W, alors, celle-ci sera également valide dans $W^{(n+1)}$. En effet, si φ est une formule fermée sur $\mathcal{L}(R)^{(0)}$ valide dans W alors, par définition, φ est une formule de $\phi^{(0)}$.

Et donc, puisque $\phi^{(0)} \subseteq \phi^{(n+1)}$ et que $W^{(n+1)}$ est un modèle de $\phi^{(n+1)}$, φ y est valide. Grâce à cette remarque l'affirmation suivante est évidente.

L'application

$$\begin{aligned} f^{(n+1)} &: W^{(n+1)} \to \beta W \\ w &\mapsto \widehat{w} = \{X \in \mathcal{P}(W) | W^{(n+1)} \models P_X(x)[w]\} \end{aligned}$$

est un épimorphisme partiel sur $W^{(n)}$ de la catégorie KF.

Maintenant que nous avons effectué cette construction, posons

$$W^{\infty} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W^{(n)}.$$

Cette structure est une extension des structures $W^{(n)}$ définies précédemment. Montrons que l'application

$$\begin{aligned} f^{\infty} &: W^{\infty} \to \beta W \\ w &\mapsto \widehat{w} = \{X \in \mathcal{P}(W) | W^{\infty} \models P_X(x)[w]\} \end{aligned}$$

est un morphisme de KF. Cette application est une extension des applications $f^{(n)}$ définies précédemment.

1. Cette application est bien définie car si $w \in W^{\infty}$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $w \in W^{(n)}$. Ainsi, $f^{\infty}(w) = f^{(n)}(w)$. On en conclut que f^{∞} est bien défini.
2. Cette application est surjective puisqu'elle n'est rien d'autre que l'extension d'applications surjectives, vu ce qui précède.
3. Si $w_1, w_2 \in W^{\infty}$ sont tels que $w_1 R^{\infty} w_2$, alors il existe $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $w_1 \in W^{(m)}$ et $w_2 \in W^{(n)}$. Ainsi, si $m \leq n$, alors $w_1, w_2 \in W^{(n)}$ et donc vu ce qui précède $f^{(n)}(w_1) R_{\Diamond_R} f^{(n)}(w_2)$. De plus, puisque $f^{\infty}(w_1) = f^{(n)}(w_1)$ et $f^{\infty}(w_2) = f^{(n)}(w_2)$, on obtient $f^{\infty}(w_1) R_{\Diamond_R} f^{\infty}(w_2)$. On procède de la même manière si $n \leq m$.
4. Pour terminer, remarquons que si $w \in W^{\infty}$ alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $w \in W^{(n)}$ et $f^{\infty}(w) = f^{(n)}(w)$. Dans ce cas, si $u \in \beta W$ est tel que $u R_{\Diamond_R} f^{\infty}(w)$ alors, vu ce qui précède, il existe $w_1 \in W^{(n+1)}$ tel que $w_1 R^{(n+1)} w$ et $f^{(n+1)}(w_1) = u$. Puisque
$$W^{(n+1)} \subseteq W^{\infty},$$
et que R^{∞} est une extension de $R^{(n+1)}$, nous avons trouvé un $w_1 \in W^{\infty}$ tel que $w_1 R^{\infty} w$ et $f^{\infty}(w_1) = u$.

Nous avons donc trouvé le morphisme de KF qui convenait et ceci conclut la preuve. $\square$

Démontrons maintenant le théorème de Fine-van Benthem.

Démonstration. Soit Σ un système modal complet vis à vis d'une classe élémentaire de frames. Par définition, il existe un ensemble ϕ de formules du premier ordre sur le langage $\mathcal{L}(R)$ tel que

$$\{W|W \models \Sigma\} = \{W|W \models \phi\}.$$

Vu le théorème (4.2.10), pour montrer que Σ est un système modal canonique, il suffit de montrer que

$$W \models \Sigma \Rightarrow \beta W \models \Sigma$$

pour tout frame de Kripke W. Prenons $W \models \Sigma$, par hypothèse, $W \models \phi$ et donc vu le lemme (4.3.2), il existe un frame de Kripke W' tel que $W \equiv W'$ et il existe un morphisme surjectif

$$f \ : \ W' \to \beta W$$

de la catégorie KF. Ainsi, puisque $W \equiv W'$ et $W \models \phi$ et donc $W' \models \phi$. De plus, vu la remarque (4.1.3), $\beta W \models \phi$ puisque $W' \models \phi$ et βW est l'image homomorphe de W'. Par hypothèse, $\beta W \models \Sigma$ et on obtient donc le résultat. $\square$

Conclusion

Nous posions, à l'entame de ce mémoire, la question suivante : Existe-il des similitudes entre les algèbres modales et les algèbres de contact ? Nous pouvons à présent y apporter un fragment de réponse. En effet, nous avons établi que le dual topologique d'une algèbre modale est un espace modal et celui d'une algèbre de pré-contact est un espace de pré-contact. N'oublions pas que ces classes d'espaces ne sont pas identiques puisque les espaces modaux sont des espaces de pré-contact alors que la réciproque est fausse.

En revanche, nous avons pu constaté que les duaux non topologiques sont, quant à eux, identiques. En effet, le dual d'une algèbre modale complète et atomique est un frame de Kripke, tout comme celui d'une algèbre de pré-contact complète et atomique. Grâce à ce résultat, nous avons pu définir l'extension canonique d'une algèbre de pré-contact qui est une algèbre modale complète et atomique.

Cette nouvelle notion nous a permis de définir une valuation sur une algèbre de pré-contact et, de ce fait, de considérer des modèles algébriques de pré-contact. Grâce à ceux-ci, nous avons pu établir un nouveau théorème de complétude pour les algèbres de pré-contact nous apportant un plus large choix de modèles à considérer : les modèles algébriques de pré-contact. Nous avons également établi le théorème de complétude dans les espaces de pré-contact. Nous pouvons donc en conclure que les théorèmes de complétude peuvent être traduits en termes d'algèbres de pré-contact.

Nous avons ensuite démontré le théorème de Fine-Van Benthem, mais nous n'avons malheureusement pas établi de version pour les algèbres de pré-contact. Nous n'avons pas non plus réussi à traduire chaque résultat en termes d'algèbres de pré-contact. Cependant, plusieurs pistes peuvent être envisagées. Donnons ici quelques exemples.

Premièrement, dans ce mémoire, nous avons énormément abordé la notion de système modal canonique. Nous avons notamment prouvé qu'un système modal Σ était canonique si et seulement si, pour toute Σ-algèbre modale B, l'extension canonique de B était une Σ-algèbre. Nous pourrions alors imaginer une canonicité pour les algèbres de pré-contact consistant à considérer qu'un système modal Σ est canonique pour les algèbres de pré-contact si et seulement si pour toute Σ-algèbre de pré-contact B, B^δ est une Σ-algèbre.

Deuxièmement, grâce à cette nouvelle extension de la canonicité, nous pourrions essayer de traduire en termes d'algèbres de pré-contact les différents résultats obtenus dans les algèbres modales. Nous pourrions notamment traduire le théorème de Fine-Van Benthem en termes d'algèbres de pré-contact. Celui-ci s'énoncerait comme suit : Si Σ est un système modal complet vis à vis d'une classe élémentaire de frames alors Σ est un système modal canonique pour les algèbres de pré-contact. Nous pourrions alors nous demander si ce résultat est vrai et établir une méthode pour le démontrer.

Troisièmement, les formules de Sahlqvist permettent de traduire des formules modales en termes de propriétés de la relation d'accessibilité. Nous pourrions alors nous demander s'il est possible de traduire des formules dans les algèbres de pré-contact, autrement dit, des formules construites à l'aide des relations $\perp$, $\mathscr{C}$ et $\prec$. Est-il possible d'obtenir un théorème de Sahlqvist pour les algèbres de pré-contact ? Nous pourrions même chercher une théorie de la correspondance pour les algèbres de pré-contact.

Annexe A

Théorie des catégories

Nous donnons ici les définitions concernant la théorie des catégories nécessaires à la compréhension de ce mémoire [1].

A.1 Introduction

Définition A.1.1. Une *catégorie* est une classe $\mathcal{A}$ d'objets munie d'une classe $\mathcal{M}$ de morphismes qui est une union disjointe de la forme

$$\mathcal{M} = \bigcup_{A,B\in\mathcal{A}} \mathcal{M}or(A,B)$$

où $\mathcal{M}or(A,B)$ est l'ensemble des morphismes de A vers B pour tous $A, B \in \mathcal{A}$. De plus, les morphismes doivent vérifier la loi de composition : pour tous $A, B, C \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned} \circ : \mathcal{M}or(B,C) \times \mathcal{M}or(A,B) &\to \mathcal{M}or(A,C) \\ (g,f) \qquad\qquad &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

tel que

1. Cette opération est associative : $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ lorsque ces compositions ont un sens
2. Cette opération admet un neutre : $\forall A \in \mathcal{A}$, $\exists id_A \in \mathcal{M}or(A,A)$: $id_A \circ f = f$ et $g \circ id_A = g$ lorsque les compositions ont un sens.

L'ensemble des catégories peut également être vu comme une catégorie dont les objets sont les catégories et dont les morphismes sont les foncteurs contravariants. Définissons cette notion.

Définition A.1.2. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégories. Une application

$$F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$$

est un *foncteur contravariant* si

1. Le lecteur interressé peut se référer à [12] et [10].

1. $F(A) \in \mathcal{B} \ \ \forall A \in \mathcal{A}$,
2. pour tous $A, A' \in \mathcal{A}$ et pour tout morphisme $f : A \to A', F(f)$ est un morphisme de $\mathcal{B}$ de $F(A')$ dans $F(A)$,
3. $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$ pour tous morphismes f, g composables,
4. $F(id_A) = id_{F(A)}$.

A.2 Catégories dualement équivalentes

Définition A.2.1. Deux catégories $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont dualement équivalentes s'il existe des foncteurs contravariants $F \ : \ \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ et $G \ : \ \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ tels que, pour tout $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$, il existe des isomorphismes η_A et ε_B rendant les diagrammes suivants commutatifs pour tous morphismes $f \ : \ A \to A'$ et $\varphi \ : \ B \to B'$:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & GF(A) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle GF(f)} \\ A' & \xrightarrow{\eta'_A} & GF(A') \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\varepsilon_B} & FG(B) \\ {\scriptstyle \varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle FG(\varphi)} \\ B' & \xrightarrow{\varepsilon'_B} & FG(B') \end{array}$$

Annexe B

Les algèbres de Boole

Établissons la dualité entre les algèbres de Boole et les espaces de Boole.

B.1 Définitions

Avant de définir la dualité pour les algèbres de Boole, nous avons besoin de rappeler quelques définitions.

Définition B.1.1. Une *algèbre de Boole* est un ensemble ordonné non vide B muni de deux opérations binaires ($\vee$ et $\wedge$) et d'une opération unaire (^{c}) vérifiant

1. $\vee\{a,b\}$ et $\wedge\{a,b\}$ existent $\forall a,b \in B$;
2. $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
   $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$;
3. $\vee B = 1$ et $\wedge B = 0$ (ie. B est borné) ;
4. $\forall a \in B, \exists b \in B$ tel que $a \vee b = 1$ et $a \wedge b = 0$ (ie. B est complémenté).

Exemple B.1.1. Soit X un ensemble, alors $\mathcal{P}(X)$ est une algèbre de Boole. Nous écrirons $\mathcal{P}(X) = (\mathcal{P}(X), \cup, \cap, \varnothing, X, ^c)$. On peut aussi donner l'exemple de l'algèbre de Boole 2 qui est l'algèbre de Boole $\mathcal{P}(X)$ où $X = \{x\}$ (dans ce cas, $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, x\}$ et celle-ci est appelée l'algèbre de Boole à deux éléments).

Remarque B.1.1. Dans la suite, pour tout élément $a \in B$, on notera a^c son complémentaire dans B.

Définition B.1.2. Une algèbre de Boole B est complète si pour toute partie $E \subseteq B$, $\vee E$ et $\wedge E$ existent.

Exemple B.1.2. Soit X un ensemble, alors, il est clair que $\mathcal{P}(X)$ est une algèbre de Boole complète.

Définition B.1.3. Un *homomorphisme d'algèbres de Boole* d'une algèbre de Boole B_1 dans une algèbre de Boole B_2 est une application

$$f \ : \ B_1 \to B_2$$

qui respecte $\vee, \wedge, ^c, 0$ et 1. Autrement dit, f est telle que pour tout $a, b \in B_1$, on a

— $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$;
— $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$;
— $f(a^c) = (f(a))^c$;
— $f(0) = 0$;
— $f(1) = 1$.

Si f est bijectif, alors f est un *isomorphisme d'algèbres de Boole*.

Définition B.1.4. Soient $(P, \leq_P)$ et $(Q, \leq_Q)$ deux ensembles ordonnés. Un *isomorphisme d'ordres* est une application $f : P \longrightarrow Q$ qui est bijective et telle que pour tous $x, y \in P$, $x \leq_P y$ si et seulement si $f(x) \leq_Q f(y)$.

Soient $(P, \leq)$ un ensemble ordonné, E une partie de P et x un élément de P. Dans la suite, nous noterons

$$E\uparrow := \{f \in P \mid \exists e \in E \text{ tel que } f \geq e\} \quad \text{et} \quad x\uparrow := \{y \in P \mid y \geq x\}.$$

Définition B.1.5. La *catégorie des algèbres de Boole*, notée AB, est la catégorie dont les objets sont les algèbres de Boole et les morphismes sont les homomorphismes d'algèbres de Boole.

Définition B.1.6. Soit B une algèbre de Boole. Un *idéal* de B est une partie I de B telle que

— $0 \in I$;
— $i \vee j \in I$ pour tous $i, j \in i$;
— pour tout $a \in B$, $i \in I$ tels que $a \leq i$, on a $a \in I$.

Un *filtre* de B est une partie F de B telle que

— $1 \in F$;
— $f \wedge g \in F$ pour tous $f, g \in F$;
— pour tout $a \in B$, $f \in F$ tels que $a \geq f$, on a $a \in F$.

Un filtre propre de B est un filtre différent de B, de façon équivalente, il s'agit d'un filtre qui ne contient pas 0. Un filtre maximal, aussi appelé ultrafiltre, est un filtre propre maximal pour l'inclusion. On note $\mathrm{Ult}(B)$ l'ensemble des ultrafiltres de B.

Remarque B.1.2. Si $f : B' \to B$ est un homomorphisme d'algèbre de Boole, si x est un ultrafiltre de B et si x' est un ultrafiltre de B', on a

$$f^{-1}(x) = x' \Leftrightarrow x \supseteq f(x').$$

En effet, si $f^{-1}(x) = x'$, alors $f(x') = f(f^{-1}(x)) \subseteq x$. D'autre part, si $x \supseteq f(x')$, alors $f^{-1}(x) \supseteq f^{-1}(f(x')) \supseteq x'$ et donc $f^{-1}(x) = x'$ car x' est un ultrafiltre.

Définition B.1.7. Un espace topologique est un *espace de Boole* s'il est séparé, compact et s'il admet une base d'ouverts fermés.

Définition B.1.8. La *catégorie des espaces de Boole*, notée EB, est la catégorie dont les objets sont les espaces de Boole et les morphismes sont les applications continues ϕ entre espaces de Boole.

Définition B.1.9. Soit B une algèbre de Boole. On définit l'application r_B comme suit,

$$\begin{array}{rcll} r_B & : & B & \to \mathcal{P}(Ult(B)) \\ & & b & \mapsto \{P \in Ult(B) | P \ni b\} \end{array}$$

Définition B.1.10. Soit B une algèbre de Boole. On définit l'espace topologique associé à B, $Ult(B)$, comme l'ensemble des ultrafiltres de B et dont une base de la topologie est

$$\{r_B(b) | b \in B\}.$$

On appelle $Ult(B)$ l'espace dual de B.

B.2 Propriétés

Nous présentons dans cette section quelques propriétés qui nous sont utiles pour certaines démonstrations de ce travail.

Proposition B.2.1. *Soient B une algèbre de Boole et $b, c \in B$. On a l'équivalence suivante*

$$b \leq c \quad \Leftrightarrow \quad b \wedge c^c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b^c \vee c = 1.$$

Démonstration. Nous allons montrer que

$$b \leq c \quad \Leftrightarrow \quad b \wedge c^c = 0,$$

la seconde biimplication n'est qu'un passage au complémentaire. Commençons par montrer la première implication. Soient $b, c \in B$ tels que $b \leq c$. Dans ce cas, on a

$$b \wedge c^c \leq c \wedge c^c = 0.$$

Supposons maintenant que $b \wedge c^c = 0$. On obtient

$$b = b \wedge 1 = b \wedge (c \vee c^c) = (b \wedge c) \vee (b \wedge c^c) = b \wedge c \leq c.$$

□

Remarque B.2.1. Soient B une algèbre de Boole et $b \in B$. Si $b \leq b^c$ alors $b = 0$. En effet, si $b \leq b^c$, alors $0 = b \wedge b^c = b$, d'où le résultat.

Proposition B.2.2. *(Lois de Morgan). Soient B une algèbre de Boole et $a, b \in B$, on a*

$$(a \wedge b)^c = a^c \vee b^c \qquad et \qquad (a \vee b)^c = a^c \wedge b^c$$

Démonstration. On a

$$(a \vee b) \vee (a^c \wedge b^c) = (a \vee b \vee a^c) \wedge (a \vee b \vee b^c) = (1 \vee b) \wedge (a^c \vee 1) = 1 \wedge 1 = 1$$

et

$$(a \vee b) \wedge (a^c \wedge b^c) = (a \wedge a^c \wedge b^c) \vee (b \wedge a^c \wedge b^c) = (0 \wedge b^c) \vee (a^c \wedge 0) = 0 \vee 0 = 0.$$

On obtient donc que $(a \vee b)^c = a^c \wedge b^c$. On en tire que $(a^c \vee b^c)^c = a \wedge b$ et donc $(a \wedge b)^c = a^c \vee b^c$. □

Proposition B.2.3. *Soient B_1 et B_2 deux algèbres de Boole et $f : B_1 \to B_2$ une application. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est un homomorphisme d'algèbres de Boole ;*
2. *f respecte $\wedge$ et ^{c} ;*
3. *f respecte $\vee$ et ^{c}.*

Démonstration. Il est évident que $1 \Rightarrow 2$ par définition d'un homomorphisme d'algèbres de Boole. Vu les lois de Morgan (B.2.2), il est également clair que $2 \Rightarrow 3$.

Montrons maintenant que $3 \Rightarrow 1$. Puisque f respecte $\vee$ et ^{c}, f respecte également $\wedge$ vu les lois de Morgan (B.2.2). De plus, on a

$$f(0) = f(0 \wedge 1) = f(0) \wedge f(1) = f(0) \wedge f(0^c) = f(0) \wedge (f(0))^c = 0.$$

On a également

$$f(1) = f(1 \vee 0) = f(1) \vee f(0) = f(1) \wedge f(1^c) = f(1) \wedge (f(1))^c = 1$$

ce qui permet de conclure. □

Proposition B.2.4. *Soient B_1, B_2 des algèbres de Boole et $f : B_1 \to B_2$. L'application f est un isomorphisme d'algèbres de Boole si et seulement si f est un isomorphisme d'ordres entre algèbres de Boole.*

Démonstration. Montrons que la condition est nécessaire. Supposons que f est un isomorphisme d'algèbres de Boole. Dans ce cas, par définition, f est une bijection. Il reste à montrer que $a, b \in B_1$, $a \leq b$ si et seulement si $f(a) \leq f(b)$. Soient $a, b \in B_1$ tels que $a \leq b$. Alors $a \wedge b = a$ et par hypothèse $f(a) \wedge f(b) = f(a)$ et donc $f(a) \leq f(b)$. Supposons maintenant que $f(a) \leq f(b)$. Dans ce cas, $f(a) \wedge f(b) = f(a)$ et donc par hypothèse $f(a \wedge b) = f(a)$. Dés lors $a \wedge b = a$ puisque f est injective, et $a \leq b$ d'où le résultat.

Montrons maintenant que la condition est suffisante. Supposons que f est un isomorphisme d'ordres entre algèbres de Boole. Par définition, f est bijectif et il est clair que $f(1) = 1$ et $f(0) = 0$. Il nous reste à montrer que f respecte $\vee, \wedge$ et ^{c}. Commençons par montrer que f respecte $\vee$. Soient $a, b \in B$, on a $a \leq a \vee b$ et $b \leq a \vee b$. On obtient, grâce à l'hypothèse,

$$f(a) \leq f(a \vee b) \text{ et } f(b) \leq f(a \vee b) \Rightarrow f(a) \vee f(b) \leq f(a \vee b).$$

Ainsi, $f(a \vee b)$ est un majorant de $\{f(a), f(b)\}$. Montrons que c'est le plus petit des majorant de $\{f(a), f(b)\}$. Soit z, un majorant de $\{f(a), f(b)\}$. Puisque f est surjectif, il existe $c \in B_1$ tel que $f(c) = z$. On obtient alors

$$f(a) \leq f(c) \text{ et } f(b) \leq f(c) \Rightarrow a \leq c \text{ et } b \leq c.$$

Ainsi $a \vee b \leq c$ et donc $f(a \vee b) \leq f(c)$. On en conclut que $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$. On procède de façon similaire pour montrer que f respecte $\wedge$. Montrons maintenant que f respecte ^{c}. Soit $a \in B$, montrons que

$$f(a) \vee f(a^c) = 1 \text{ et } f(a) \wedge f(a^c) = 0,$$

et on aura alors $(f(a))^c = f(a^c)$. Nous avons déjà montré que f respecte $\vee$ et $\wedge$ et est tel que $f(1) = 1$ et $f(0) = 0$. Alors

$$f(a) \vee f(a^c) = f(a \vee a^c) = f(1) = 1 \text{ et } f(a) \wedge f(a^c) = f(a \wedge a^c) = f(0) = 0.$$

D'où le résultat. □

Proposition B.2.5. *Soient B une algèbre de Boole et F un filtre propre de B. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *F est un ultrafiltre ;*
2. *$a, b \notin F \Rightarrow a \vee b \notin F$ pour tous $a, b \in B$ ($B \setminus F$ est donc un fermé pour les sup finie) ;*
3. *pour tout $a \in B$, on a $a \in F$ ou $a^c \in F$.*

Proposition B.2.6. *Soient A et B deux algèbres de Boole et soit F un filtre de B. Soit*

$$f : A \to B$$

un homomorphisme d'algèbres de Boole. Alors $f^{-1}(F)$ est un filtre de A. De plus, si F est un ultrafiltre de B, alors $f^{-1}(F)$ est un ultrafiltre de A.

Démonstration. Montrons que $f^{-1}(F)$ est un filtre de A :

1. $f(1) = 1 \in F$ puisque F est un filtre. Ainsi, $1 \in f^{-1}(F)$.
2. Si $f, g \in f^{-1}(F)$, alors, $f(f), f(g) \in F$. Puisque F est un filtre, $f(f) \wedge f(g) \in F$, donc $f(f \wedge g) \in F$. Ainsi, $f \wedge g \in f^{-1}(F)$.
3. Si $a \in A$, $f \in f^{-1}(F)$ tels que $a \geq f$ alors $f(a) \geq f(f)$. On a $f(f) \in F$ et comme F est un filtre, $f(a) \in F$. Donc $a \in f^{-1}(F)$.

Remarquons d'abord que si F est un filtre propre, alors $f^{-1}(F)$ l'est également. Sinon, $0 \in f^{-1}(F)$ et donc, $0 = f(0) \in F$, ce qui est absurde car F est propre. Montrons maintenant que si F est un ultrafiltre, $f^{-1}(F)$ l'est également. Montrons que $f^{-1}(F)$ est maximal. Prenons $a \in A$ et supposons que $a \notin f^{-1}(F)$. Alors $f(a) \notin F$ et vu la proposition (B.2.5), $(f(a))^c \in F$. Donc $(f(a))^c = f(a^c) \in F$, et enfin, $a^c \in F$ donc F est un ultrafiltre vu la proposition (B.2.5). □

La preuve de la proposition suivante se fait de façon analogue.

Proposition B.2.7. *Soient A et B deux algèbres de Boole et soit I un idéal de B. Soit*

$$f : A \to B$$

un homomorphisme d'algèbres de Boole. Alors $f^{-1}(I)$ est un idéal de A. De plus, si I est un idéal maximal de B, alors $f^{-1}(I)$ est un idéal maximal de A.

Théorème B.2.8. *(Théorème de séparation de Stone) Si I est un idéal et si F est un filtre alors, il existe $x \in Ult(B)$, $x \supseteq F$, $x \cap I = \emptyset$ si et seulement si $I \cap F = \emptyset$.*

Proposition B.2.9. *Soient B une algèbre de Boole et $a, b \in B$. On a*

1. $r_B(a) \cup r_B(b) = r_B(a \vee b)$;
2. $r_B(a) \cap r_B(b) = r_B(a \wedge b)$;
3. $r_B(a') = X_B \setminus r_B(a)$;
4. $r_B(0) = \emptyset$;
5. $r_B(1) = X_B$.

L'application r_B est donc un homomorphisme d'algèbres de Boole.

Remarque B.2.2. On remarque alors que si B est une algèbre de Boole,

$$\{r_B(b) | b \in B\}.$$

est une base d'ouverts fermés de $Ult(B)$ puisque, si $b \in B$, alors comme $r_B(b) = Ult(B) \setminus r_B(b')$, $r_B(b)$ est un fermé. De plus, l'espace topologique $Ult(B)$ est compact et séparé. On en conclut que $Ult(B)$ est un espace de Boole.

Proposition B.2.10. *Prenons X un espace de Boole et notons $of(X)$ l'ensemble des ouverts fermés de X. L'ensemble $of(X)$ est une algèbre de Boole.*

Démonstration. Il est clair que pour tout $O, U \in of(X)$, on a

$$O \wedge U = O \cap U, \quad O \vee U = O \cup U \text{ et } O' = X \setminus O.$$

Puisque $\cap$ et $\cup$ sont distributifs, on a bien la distributivité. De plus, $of(X)$ est borné par $\emptyset$ et X, donc $of(X)$ est bien une algèbre de Boole. □

B.2.1 Espace dual d'une algèbre de Boole

Définition B.2.1. L'application Ult est définie comme l'application qui à une algèbre de Boole B associe l'espace topologique $Ult(B)$ et qui à un homomorphisme

$$f : B' \to B$$

d'algèbres de Boole associe $Ult(f) = f^{-1}$.

Proposition B.2.11. *L'application Ult est un foncteur contravariant de la catégorie AB dans la catégorie EB.*

Définition B.2.2. L'application $of(X)$ est définie comme l'application qui à un espace de Boole X associe l'algèbre de Boole $of(X)$ et qui à une application continue

$$\phi \ : \ X \to X'$$

entre deux espaces de Boole associe $of(\phi) = \phi^{-1}$.

Proposition B.2.12. *L'application of est un foncteur contravariant de la catégorie EB dans la catégorie AB.*

Proposition B.2.13. *(AC). Soit B une algèbre de Boole. Alors l'application*

$$\begin{aligned} r_B \ &: B \to of(X_B) \\ &b \mapsto r_B(b) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'algèbres de Boole.

Proposition B.2.14. *Soient B une algèbre de Boole et $a, b \in B$. On a*

$$r_B(a) \subseteq r_B(b) \quad \Leftrightarrow \quad a \leq b.$$

Démonstration. Supposons que $r_B(a) \subseteq r_B(b)$. Puisque r_B est un homomorphisme, $r_B(a) \cup r_B(b) = r_B(a \vee b)$. De plus, vu notre hypothèse, $r_B(a) \cup r_B(b) = r_B(b)$. Ainsi, $r_B(b) = r_B(a \vee b)$ et comme r_B est un isomorphisme, $b = a \vee b$ et donc $a \leq b$.

Supposons maintenant que $a \leq b$. Dans ce cas, si $P \in Ult(B)$ est tel que $P \ni a$, alors, par définition d'un filtre, $P \ni B$, d'où la conclusion. □

Proposition B.2.15. *Soit X un espace de Boole. Alors l'application*

$$\begin{aligned} \varepsilon_X \ &: X \to Ult(of(X)) \\ &x \mapsto \varepsilon_X(x) = \{O \in of(X) | O \ni x\} \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces de Boole, autrement dit, une bijection continue.

Proposition B.2.16. *Soient B et B' deux algèbres de Boole et $f : B \to B'$ un homomorphisme d'algèbres de Boole. Le diagramme suivant est commutatif.*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "r_B"] \arrow[d, "f"'] & of(UltB) \arrow[d, "of(Ult(f))"] \\ B' \arrow[r, "r_{B'}"] & of(UltB') \end{tikzcd}$$

Proposition B.2.17. *Soient X et X' deux espaces de Boole et $\phi : X \to X'$ un homomorphisme d'espaces de Boole. Le diagramme suivant est commutatif.*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varepsilon_X"] \arrow[d, "\phi"'] & Ult(of(X)) \arrow[d, "Ult(of(\phi))"] \\
X' \arrow[r, "\varepsilon_{X'}"] & Ult(of(X'))
\end{tikzcd}$$

Toutes ces propositions nous permettent d'obtenir l'équivalence duale.

Théorème B.2.18. *Les foncteurs contravariants Ult et of établissent une équivalence duale entre la catégorie AB et la catégorie EB.*

Bibliographie

[1] BURRIS S. et SANKAPPANAVAR H.P.(1981). Graduate Texts in Mathematics : *A Course in Universal Algebra*. New-York : Springer-Verlag New-York Inc.

[2] CHAGROV A. et ZAKHARYASCHEV M. (1997). Oxford Logic Guides : *Modal Logic*. Oxford : Clarendon Press.

[3] GIVANT S. et HALMOS P. (2009). Undergraduate Texts in Mathematics : *Introduction to Boolean Algebras*. New York : Spinger.

[4] HALMOS P. (1963). Van Nostrand mathematical studies : *Lectures on boolean algebras*. Princeton, New Jersey : D. Van Nostrand Compagny.

[5] FINE K. (1975). Studies in Logic and the Foundations of Mathematics : *Some connections between elementary and modal logic*. 82. Amsterdam : Elsevier, 15-31.

[6] FONTAINE G. (2004). *Introduction à la logique modale* (Mémoire de maîtrise en sciences mathématiques, Université de Liège).

[7] GOLDBLATT R., HODKINSON I. et VENEMA Y. (2003). *On canonical modal logics that are not elementary determined*. Logique et Analyse, 181, 77–101.

[8] HANSOUL G. (2004–2005). $MATH0234-2$: *Topologie et algèbre booléenne*, Université de Liège.

[9] HANSOUL G. (2015–2016). $MATH0234-2$: *Logique mathématique et théorie des ensembles*, Université de Liège.

[10] KASHIWARA M. et SCHAPIRA P.(2000). Grundlehren der mathematischen Wissenschaften : *Categories and sheaves*. 332. New York : Springer.

[11] LANG S. (2002). Graduate Texts in Mathematics : *Algebra*. 211. New York : Springer.

[12] MAC LANE S. (1971). Graduate Texts in Mathematics : *Categories for the Working Mathematician*. 5. Springer, New York.

[13] MASSUIR A. (2016). *Algèbre de Boole avec relation de contact non symétrique* (Mémoire de maîtrise en sciences mathématiques, Université de Liège).

[14] MATHONET P. (2013–2014). MATH0212-2 : *Topologie générale*, Université de Liège. Disponible via l'URL <`http://www.geodiff.ulg.ac.be/topologie/NotesTopologie.pdf`> (téléchargé en septembre 2014).

[15] SANJIANG L. et MINGSHENG Y. (2003). Artificial Intelligence : *Region Connection Calculus : Its models and composition table*. 145. Amsterdam : Elsevier, 121-146.

[16] STONE M. H. (1936). *The theory of representations for boolean algebras*, Transactions of the American Mathematical Society 40, p. 37–111. Disponible via l'URL <`http://www.ams.org/journals/tran/1936-040-01/S0002-9947-1936-1501865-8/S0002-9947-1936-1501865-8.pdf`> (consulté en avril 2017).

[17] VAN BENTHEM J. (1976). *Modal Correspondence Theory* (Thèse de doctorat, University of Amsterdam).