

Analyse & optimisation convexe sur des espaces de Banach.

Auteur : Molla, Arman

Promoteur(s) : Nicolay, Samuel

Faculté : Faculté des Sciences

Diplôme : Master en sciences mathématiques, à finalité approfondie

Année académique : 2016-2017

URI/URL : <http://hdl.handle.net/2268.2/2639>

Avertissement à l'attention des usagers :

Tous les documents placés en accès ouvert sur le site le site MatheO sont protégés par le droit d'auteur. Conformément aux principes énoncés par la "Budapest Open Access Initiative"(BOAI, 2002), l'utilisateur du site peut lire, télécharger, copier, transmettre, imprimer, chercher ou faire un lien vers le texte intégral de ces documents, les disséquer pour les indexer, s'en servir de données pour un logiciel, ou s'en servir à toute autre fin légale (ou prévue par la réglementation relative au droit d'auteur). Toute utilisation du document à des fins commerciales est strictement interdite.

Par ailleurs, l'utilisateur s'engage à respecter les droits moraux de l'auteur, principalement le droit à l'intégrité de l'oeuvre et le droit de paternité et ce dans toute utilisation que l'utilisateur entreprend. Ainsi, à titre d'exemple, lorsqu'il reproduira un document par extrait ou dans son intégralité, l'utilisateur citera de manière complète les sources telles que mentionnées ci-dessus. Toute utilisation non explicitement autorisée ci-avant (telle que par exemple, la modification du document ou son résumé) nécessite l'autorisation préalable et expresse des auteurs ou de leurs ayants droit.

UNIVERSITÉ DE LIÈGE



FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE

Analyse et optimisation convexe sur des espaces de Banach

Auteur :
Arman MOLLA

Promoteur :
Samuel NICOLAY

Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade de master en sciences
mathématiques

Année académique 2016-2017

Remerciements

Je tenais à remercier Samuel Nicolay pour avoir accepté d'encadrer ce travail et Thomas Kleyntssens pour avoir consacré du temps à la relecture de ce texte. Un grand merci à tous ceux qui m'ont soutenu (directement ou indirectement) durant l'élaboration de ce mémoire.

Bien sûr, j'adresse un merci tout particulier à ma famille qui a toujours été là pour moi, dans les bons comme dans les mauvais moments, et qui me donne toute cette énergie. Enfin, je remercie tous ceux qui ont contribué à rendre merveilleuses mes années à l'Université.

Introduction

L'analyse convexe est une discipline qui n'a connu son essor que très tardivement. La notion d'ensemble convexe était connue depuis longtemps et a été fortement étudiée par Minkowski. Son intérêt pour cette notion a germé au cours de son étude de la théorie géométrique des nombres [28] entre la fin des années 1800 et le début des années 1900. Avec le développement de l'analyse fonctionnelle, cette notion a gagné en importance. Mais la communauté mathématique n'attachait que trop peu d'importance aux fonctions convexes vu qu'elles étaient elles-mêmes incorporées dans diverses théories. Plus tard, en 1934, W. Fenchel publia un livre consacré sur les ensembles convexes, puis vers 1950, il écrivit un livre sur les ensembles et les fonctions convexes dans lequel il posa les bases de l'analyse convexe dans $\mathbb{R}^n$. Les fondateurs de l'analyse convexe moderne en tant que discipline à part entière sont R.T. Rockafellar, W. Fenchel et J.J. Moreau qui ont étudié les fonctions convexes de façon approfondie (on peut consulter ces deux ouvrages fondateurs [35] et [29]). En particulier, R.T. Rockafellar a permis une avancée énorme dans le domaine durant les années 1970 en étendant l'analyse convexe à des espaces vectoriels plus généraux que $\mathbb{R}^n$ dans ses divers papiers. C'est plus ou moins à cette période que l'analyse convexe a reçu plus de considérations des mathématiciens car les champs d'applications étaient divers (théorie des jeux, ingénierie, optimisation, ...).

Nous nous proposons d'étudier la convexité dans le cadre des espaces de Banach. La première partie de ce travail comportera une étude des ensembles convexes. Après avoir introduit quelques notions classiques, nous établissons des théorèmes importants de la géométrie convexe : le théorème de Carathéodory, les théorèmes de séparation de convexes et le théorème de Krein-Milman.

La seconde partie est consacrée à l'étude des topologies associées à un espace de Banach : les topologies faibles, faibles-* et duales. Après avoir examiné les propriétés de séparation et de métrisabilité de ces espaces, la compacité nous permettra de caractériser les espaces de Banach réflexifs. Ces derniers constituent une classe importante d'espaces de Banach qui confèrent des propriétés intéressantes en optimisation. C'est pourquoi nous établissons un théorème de caractérisation des espaces réflexifs.

Dans le troisième chapitre, nous abordons la notion de fonctions convexes. Nous étudions ses propriétés en plusieurs niveaux. Nous examinons les propriétés de semi-continuité, de continuité puis de dérivabilité. Pour aborder des fonctions non-lisses, nous introduisons le concept de sous-différentiel. Ce dernier sera mis en lien avec la notion de dérivabilité. Enfin, nous étudions la transformée de Legendre d'une fonction afin d'étudier plus tard la dualité en optimisation.

Pour finir, nous abordons l'optimisation convexe. Nous attacherons une importance particu-

lière à l'étude des minima. On commencera par établir des résultats d'existence et d'unicité de minima pour des fonctions convexes. Ensuite, nous aborderons la dualité en optimisation. Nous proposons une première étude, très générale, à l'aide de la notion de fonction de perturbation. Ensuite, nous examinons deux perturbations particulières qui permettront de mettre en lien deux problèmes d'optimisation duaux. Nous continuons l'étude en introduisant la régularisation de Moreau-Yosida. Il s'agit d'un procédé utilisant la notion d'inf-convolution pour rendre une fonction irrégulière différentiable. Ce procédé permet notamment de construire des suites de points convergeant vers un minimum au sens de la topologie faible si l'on se restreint aux espaces de Hilbert. Les applications de l'analyse convexe sont fort nombreuses (économie, ingénierie, contrôle optimal, ...). Ici, nous nous proposons d'établir un résultat d'existence et d'unicité de solutions de certaines équations aux dérivées partielles non-linéaires à titre d'application de la théorie développée tout le long de ce texte. Nous présupposons une certaine familiarité avec des notions basiques sur les espaces de Sobolev. Nous rappelons (et démontrons) les notions qui nous intéressent en annexe.

Table des matières

Introduction	v
1 Ensembles convexes	1
1.1 Premières définitions et propriétés	2
1.2 Espaces affins et théorème de Carathéodory	6
1.3 Théorème de Hahn-Banach et séparation de convexes	14
1.4 Points extrémaux et théorème de Krein-Milman	21
2 Topologies faibles et espaces de Banach réflexifs	27
2.1 Topologie duale, faible et faible-*	27
2.2 Compacité faible et espaces réflexifs	38
3 Fonctions convexes et transformées de Legendre	51
3.1 Définition et propriétés de base des fonctions convexes	51
3.2 Convexité et semi-continuité	59
3.3 Convexité et continuité	65
3.4 Convexité et différentiabilité	70
3.5 Sous-différentiel d'une fonction	81
3.6 Transformée de Legendre et ses propriétés	90
4 Optimisation convexe	105
4.1 Maximum d'une fonction convexe	106
4.2 Minimum de fonctions convexes : existence et unicité	109
4.3 Dualité par perturbation	112
4.3.1 Théorie générale	112
4.3.2 Perturbation par translation : dualité de Fenchel-Rockafellar	118
4.3.3 Perturbation lagrangienne : dualité de Lagrange	120
4.3.4 Multiplicateurs de Lagrange	122
4.4 Approximation de Moreau-Yosida et méthode numérique	126
4.4.1 La régularisation de Moreau-Yosida	126
4.4.2 Méthode proximale	132
4.5 Application à l'étude d'équations aux dérivées partielles	136
4.5.1 Equation d'Euler-Lagrange	137
4.5.2 Un exemple : l'équation de Laplace généralisée	139
A Espaces de Sobolev et théorème de traces	153
B Erratum	165

Table des matières	viii
Index	170
Bibliographie	172

Chapitre 1

Ensembles convexes

Dans ce chapitre, nous présenterons dans un premier temps les propriétés algébriques des ensembles convexes. Ensuite, nous aborderons deux classes particulières d'ensembles convexes : les espaces affins et les cônes convexes. Les espaces affins ont un rôle particulier dans la description des ensembles convexes. Ils donnent en fait une description “duale” en terme d'intersection de demi-espaces. Pour ce faire, nous aurons besoin d'introduire les théorèmes de séparation de convexes. Pour finir, nous établirons un théorème important : le théorème de Krein-Milman. Ce dernier permet, sous certaines hypothèses, de décrire un convexe donné en terme d'enveloppe convexe d'un ensemble “minimal”.

Dans ce travail, nous nous placerons dans des espaces de Banach sur le corps des réels. Ces espaces seront notés E et la norme associée sera notée $\|\cdot\|$. L'espace E est alors équipé de la topologie d'espace métrique associé à la distance induite par la norme. Son dual topologique (l'espace des formes linéaires continues de E) sera simplement noté E^* . Les bornes supérieures et inférieures seront toujours prises sur la droite réelle complétée $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ où l'on prolonge naturellement l'ordre de $\mathbb{R}$ en posant $-\infty < x < +\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Les opérations $+$ et $\cdot$ sont partiellement étendues de façon habituelle : $-(-\infty) = +\infty$, $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$, $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$, $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$, $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$, $(\pm r) + (+\infty) = +\infty$, $(\pm r) + (-\infty) = -\infty$, $(\pm r_0) \cdot (+\infty) = \text{sign}(\pm r_0)\infty$, $(\pm r_0) \cdot (-\infty) = -\text{sign}(\pm r_0)\infty$, lorsque $r \in \mathbb{R}^+$ et $r_0 \in \mathbb{R}_0^+$. Dans tous les cas énoncés, on supposera les deux opérations commutatives. Les cas non-traités sont laissés indéfinis. On a alors directement $\sup \emptyset = -\infty$ et $\inf \emptyset = +\infty$. De cette façon, les bornes supérieures et inférieures prises sur des parties de $\overline{\mathbb{R}}$ existent toujours. Cette extension de l'ordre se révélera utile lorsque nous aborderons en détail les fonctions convexes. Enfin, lorsque l'on fera usage de l'axiome du choix, nous indiquerons **AC** à côté du numéro de la proposition ou de l'exemple.

Concernant les références, nous utilisons [35] pour la structure de nos idées et quelques preuves élémentaires que nous présentons doivent également s'y trouver. Nous utilisons également [17] aussitôt que l'on se restreint à la dimension finie. Le livre [31] a été exploité pour traiter du problème de séparation de convexes par un hyperplan. Le reste du temps, nous nous basons principalement sur [13] qui traite la théorie des espaces de Banach de façon très exhaustive et [2] qui propose des preuves parfois plus accessibles que l'ouvrage cité précédemment.

1.1 Premières définitions et propriétés

Nous abordons dans un premier temps les propriétés basiques des ensembles convexes. Dans cette section, nous suivons la même voie que [35], mais dans un cadre plus général que $\mathbb{R}^n$. Dans cette section, tout ce qui est défini et démontré dans E peut être démontré dans un espace vectoriel quelconque car nous n'utilisons à aucun moment la topologie de E .

Définition 1.1.1. Une partie C de E est *convexe* si et seulement si, pour tout $x \in C$ et tout $y \in C$, le segment

$$[x, y] = \{\lambda x + (1 - \lambda)y : \lambda \in [0, 1]\}$$

est inclus dans C .

Exemple 1.1.1. Voici quelques exemples fondamentaux

1. L'ensemble vide $\emptyset$, les singletons $\{x\}$ et l'espace E tout entier sont convexes.
2. Pour tout $x_0 \in E$ et $r > 0$, la boule ouverte $B(x_0, r) = \{x \in E : \|x_0 - x\| < r\}$ est convexe par une application immédiate de l'inégalité triangulaire. On vérifie de la même façon que la boule fermée $\overline{B}(x_0, r)$ est aussi convexe.
3. Si $x_0 \in E$ et $u \in E \setminus \{0\}$, alors la demi-droite $x_0 + \mathbb{R}^+ u$ est clairement convexe.

Donnons également un exemple non-trivial d'ensemble convexe.

Exemple 1.1.2. Le cylindre circulaire droit $C = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} \in \mathbb{R}, x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$ est un convexe de $\mathbb{R}^{n+1}$. En effet, soient x et y des éléments de C et soit $\lambda \in [0, 1]$. On obtient

$$\begin{aligned} (\lambda x_1 + (1 - \lambda)y_1)^2 + \dots + (\lambda x_n + (1 - \lambda)y_n)^2 &= \lambda^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + (1 - \lambda)^2 \sum_{i=1}^n y_i^2 + 2\lambda(1 - \lambda) \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ &\leq \lambda^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + (1 - \lambda)^2 \sum_{i=1}^n y_i^2 + 2\lambda(1 - \lambda) \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \\ &\leq \lambda^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + (1 - \lambda)^2 \sum_{i=1}^n y_i^2 \\ &\quad + 2\lambda(1 - \lambda) \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} \\ &\leq \lambda^2 + (1 - \lambda)^2 + 2\lambda(1 - \lambda) = 1. \end{aligned}$$

La seconde inégalité est obtenue via l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Les exemples d'ensembles convexes ne manquent pas. Avant d'aller plus en avant, donnons une façon équivalente de définir les ensembles convexes.

Définition 1.1.2. Soient $x_1, \dots, x_m$ des éléments de E . Une *combinaison convexe* de $x_1, \dots, x_m$ est une combinaison linéaire $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m$ avec $\lambda_i \geq 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ et $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$.

Proposition 1.1.1. Une partie C de E est convexe si et seulement si toute combinaison convexe d'éléments de C appartient à C .

Démonstration. La suffisance de la condition est évidente. Montrons que la condition est nécessaire. Soit $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m$ une combinaison convexe d'éléments de C . On procède par récurrence sur m . Le cas de base $m = 1$ est trivial et le cas $m = 2$ est vérifié par définition de la convexité. Passons à l'induction. Si $\lambda_1 = 0$, une utilisation de l'hypothèse de récurrence permet de conclure. Si $\lambda_1 = 1$, alors les autres coefficients sont nuls et on est revenu au cas $m = 1$. Si $0 < \lambda_1 < 1$, alors on obtient

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m = \lambda_1 x_1 + \left(\sum_{i=2}^m \lambda_i \right) \underbrace{\left(\frac{\lambda_2}{\sum_{i=2}^m \lambda_i} x_2 + \dots + \frac{\lambda_m}{\sum_{i=2}^m \lambda_i} x_m \right)}_{(*)}.$$

Il suffit alors d'appliquer l'hypothèse de récurrence à $(*)$. Le cas $m = 2$ permet alors de conclure. $\square$

Assez naturellement, nous pouvons nous demander si la convexité est stable pour les deux opérations ensemblistes de base.

Proposition 1.1.2. *Soit I un ensemble et pour tout $i \in I$, soit C_i un convexe de E . Alors $\cap_{i \in I} C_i$ est convexe.*

Démonstration. Si $I = \emptyset$, alors $\cap_{i \in I} C_i = E$, ce qui montre que c'est convexe au vu de l'exemple 1.1.1. Par le même exemple, le cas où l'intersection est vide est facilement réglé. Supposons donc que $I \neq \emptyset$ et que $\cap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$. Soient x et y des éléments de $\cap_{i \in I} C_i$ et soit $\lambda \in [0, 1]$. On a alors $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C_i$, quel que soit $i \in I$, par convexité des C_i . Donc, $\lambda x + (1 - \lambda)y \in \cap_{i \in I} C_i$. $\square$

Cependant, une union de convexe n'est pas nécessairement convexe. Il suffit de considérer une union de deux singletons disjoints $\{x_1\}$ et $\{x_2\}$. On voit clairement que $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$ ne peut appartenir à l'union. L'exemple 1.1.1 montre toutefois qu'un ensemble est toujours inclus dans un convexe (par exemple, E). On peut s'intéresser au plus petit convexe (au sens de l'inclusion) contenant un ensemble arbitraire. On vérifie sans peine que le plus petit convexe contenant un ensemble A est l'intersection de tous les convexes contenant A (il suffit d'appliquer la proposition 1.1.2 pour voir que c'est convexe). Cette remarque nous conduit à la définition suivante.

Définition 1.1.3. Soit A une partie de E . L'*enveloppe convexe* de A est l'intersection de tous les convexes contenant A et elle est notée $\text{conv}(A)$.

La proposition suivante est triviale.

Proposition 1.1.3. *Soit A une partie de E . Alors $\text{conv}(A)$ est le plus petit convexe pour l'inclusion contenant A .*

Nous pouvons expliciter les éléments d'une enveloppe convexe, comme en témoigne la proposition ci-dessous.

Proposition 1.1.4. *Si A est une partie de E , alors*

$$\text{conv}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i : m \in \mathbb{N}_0, \lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_m \geq 0, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, x_1, \dots, x_m \in A \right\}.$$

Démonstration. Notons C le second membre de l'égalité pour plus de commodité. Bien sûr, C contient A . Vérifions ensuite que C est convexe. Soient x et y des éléments de C . Il existe $\lambda_i \geq 0$ ($1 \leq i \leq m$), $\mu_i \geq 0$ ($1 \leq i \leq n$), $x_i \in A$ ($1 \leq i \leq m$) et $y_i \in A$ ($1 \leq i \leq n$) tels que $\sum_{i=1}^n \mu_i = \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$, $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$ et $y = \sum_{i=1}^n \mu_i y_i$. Soit aussi $\nu \in [0, 1]$. On a

$$\nu x + (1 - \nu)y = \nu \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i + (1 - \nu) \sum_{i=1}^n \mu_i y_i = \sum_{i=1}^m \nu \lambda_i x_i + \sum_{i=1}^n (1 - \nu) \mu_i y_i.$$

Comme la somme des coefficients de $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$ vaut 1, cet élément appartient à C . Ainsi, C est un convexe contenant A et on obtient alors l'inclusion $\text{conv}(A) \subset C$ car $\text{conv}(A)$ est le plus petit convexe contenant A . Comme $A \subset \text{conv}(A)$, il suffit d'appliquer la proposition 1.1.1 pour montrer que $\text{conv}(A) \supset C$. $\square$

De façon évidente, un produit fini de convexes est aussi convexe.

Proposition 1.1.5. *Soient $E_1, \dots, E_m$ des espaces de Banach et $C_1, \dots, C_m$ des convexes de $E_1, \dots, E_m$ respectivement. Alors $C_1 \times \dots \times C_m$ est un convexe de $E_1 \times \dots \times E_m$.*

Concernant les opérations d'espace vectoriel, on a le résultat suivant.

Proposition 1.1.6. *Une combinaison linéaire de convexes est un convexe.*

Démonstration. Soient C_1 et C_2 des convexes, $x_1, x_2 \in C_1$, $y_1, y_2 \in C_2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in [0, 1]$. On a

$$\mu(x_1 + y_1) + (1 - \mu)(x_2 + y_2) = \underbrace{\mu x_1 + (1 - \mu)x_2}_{\in C_1} + \underbrace{\mu y_1 + (1 - \mu)y_2}_{\in C_2} \in C_1 + C_2$$

et

$$\mu \lambda x_1 + (1 - \mu) \lambda x_2 = \lambda \underbrace{(\mu x_1 + (1 - \mu)x_2)}_{\in C_1} \in \lambda C_1,$$

ce qui montre que $C_1 + C_2$ et λC_1 sont convexes. $\square$

De plus, sous certaines conditions, nous pouvons appliquer la distributivité.

Proposition 1.1.7. *Si C_1 et C_2 sont des convexes et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda(C_1 + C_2) = \lambda C_1 + \lambda C_2$. Si C est convexe, alors $(\lambda + \mu)C = \lambda C + \mu C$ pour tout $\lambda \geq 0$ et $\mu \geq 0$.*

Démonstration. L'égalité $\lambda(C_1 + C_2) = \lambda C_1 + \lambda C_2$ et l'inclusion $(\lambda + \mu)C \subset \lambda C + \mu C$ de l'énoncé sont évidents. Montrons uniquement que $(\lambda + \mu)C \supset \lambda C + \mu C$ lorsque C est convexe et $\lambda, \mu \geq 0$. Comme le cas où $\lambda = \mu = 0$ est trivial, on peut supposer que l'un des coefficients n'est pas nul. Soient $x_1, x_2 \in C$. Alors

$$\lambda x_1 + \mu x_2 = (\lambda + \mu) \underbrace{\left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} x_1 + \frac{\mu}{\lambda + \mu} x_2 \right)}_{(*)}$$

où $(*)$ appartient à C par convexité. Ceci permet de conclure. $\square$

Proposition 1.1.8. *Soient E et E' des espaces de Banach, C et C' des convexes de E et E' respectivement. Soit aussi $T : E \rightarrow E'$ une application linéaire. Alors $T(C)$ est convexe dans E' et $T^{-1}(C')$ est convexe dans E .*

Démonstration. La convexité de $T(C)$ résulte directement de la linéarité de T et de la convexité de C . Si $x, y \in T^{-1}(C)$ (E1) et $\lambda \in [0, 1]$, alors $T(\lambda x + (1 - \lambda)y) \in C'$ par linéarité de T et convexité de C' , ce qui montre que $T^{-1}(C')$ est convexe. $\square$

Introduisons brièvement la notion de cône.

Définition 1.1.4. Une partie C de E est un *cône* si et seulement si pour tout $x \in C$ et tout $\lambda \geq 0$, on a $\lambda x \in C$. Autrement dit, un cône C doit vérifier $\lambda C \subset C$ pour tout $\lambda \geq 0$.

Parmi tous les types de cônes possibles, nous nous restreignons aux cônes convexes, qui présentent un plus grand intérêt pour notre propos.

Définition 1.1.5. Soient $x_1, \dots, x_m$ des points de E . Une *combinaison conique* de $x_1, \dots, x_m$ est une combinaison linéaire $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m$ telle que $\lambda_i \geq 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$.

Proposition 1.1.9. Un ensemble C est un cône convexe si et seulement si il contient les combinaisons coniques de ses éléments.

Démonstration. La condition est trivialement suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire. Soient $x_1, \dots, x_m \in C$ et $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_m \geq 0$. On peut supposer que l'un des coefficient λ_i est strictement positif car on sait que C contient 0. Nous obtenons donc

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m = (\lambda_1 + \dots + \lambda_m) \underbrace{\left(\frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^m \lambda_i} x_1 + \dots + \frac{\lambda_m}{\sum_{i=1}^m \lambda_i} x_m \right)}_{(*)}.$$

La proposition 1.1.1 nous permet d'affirmer que $(*)$ appartient à C . On conclut grâce au fait que C est un cône. $\square$

Les propriétés des cônes convexes sont immédiates. Nous ne les détaillerons donc pas.

Proposition 1.1.10. Soit I un ensemble et pour tout $i \in I$, soit C_i un cône convexe de E . Alors $\cap_{i \in I} C_i$ est un cône convexe.

Définition 1.1.6. Soit A une partie de E . L'*enveloppe conique* de A est l'intersection de tous les cônes convexes de E contenant A . C'est donc le plus petit cône convexe contenant A . On le notera $\text{cone}(A)$.

Proposition 1.1.11. Si A est une partie de E , alors

$$\text{cone}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i : m \in \mathbb{N}_0, \lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_m \geq 0, x_1, \dots, x_m \in A \right\}.$$

On peut démontrer qu'un produit cartésien de cônes convexes est un cône convexe. La convexité conique est aussi stable par combinaison linéaire. L'image et l'image réciproque d'un cône convexe par une application linéaire est aussi un cône convexe. Les démonstrations sont proches de celles concernant les propriétés des ensembles convexes et nous ne les développons pas ici.

1.2 Espaces affins et théorème de Carathéodory

Dans certains cas, il est possible de raffiner la proposition 1.1.4. Pour y arriver, il nous faut introduire les espaces affins et la notion de dimension d'un convexe. Une partie des propriétés et les démonstrations afférentes à celles-ci sont semblables à ce qui a été fait dans la section 1.1. Pour cette raison, nous ne détaillerons pas les preuves les moins originales.

Définition 1.2.1. Une partie A de E est un *espace afffin* si et seulement si, pour tout $x, y \in A$, la droite

$$\mathcal{D}_{x,y} = \{\lambda x + (1 - \lambda)y : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

est incluse dans A .

Remarquons au passage qu'un espace afffin est un ensemble convexe. Comme la définition ci-dessus est fort liée à la définition des convexes, on est en droit de nous attendre à ce que les espaces affins partagent des propriétés similaires à celles des convexes.

Définition 1.2.2. Une *combinaison afffine* d'éléments $x_1, \dots, x_m$ de E est une combinaison linéaire $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m$ telle que $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ et $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$.

Proposition 1.2.1. *Une partie A de E est un espace afffin si et seulement si A contient toutes les combinaisons afffines de ses éléments.*

Démonstration. Il suffit d'adapter la preuve de la proposition 1.1.1 en prenant les coefficients λ_i dans $\mathbb{R}$. La discussion sur λ_1 est identique : on distingue les cas où $\lambda_1 = 0$, $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_1 \notin \{0, 1\}$. Notons juste que si $\lambda_1 = 1$, alors on a deux sous-cas à traiter. Le premier est celui où les coefficients $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont tous nuls et on peut appliquer le cas $m = 1$. Sinon, $\lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ ou λ_n est non nul. Comme $\lambda_2 + \dots + \lambda_n = 0$, l'un des coefficients $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ doit être strictement négatif. On peut renuméroter les coefficients λ_i et les x_i pour que ce coefficient strictement négatif soit λ_1 afin de nous ramener au cas $\lambda_1 \notin \{0, 1\}$. $\square$

Exemple 1.2.1. Parmi les exemples les plus élémentaires, citons

1. Les sous-espaces vectoriels
2. Les singletons
3. Les droites $x + \mathbb{R}u$ (où $x \in E$ et $u \in E \setminus \{0\}$)

Proposition 1.2.2. *Une combinaison linéaire d'espaces afffins est un espace afffin.*

Démonstration. Il suffit de reproduire la preuve de la proposition 1.1.6 où C_1 et C_2 représentent des espaces afffins et μ est pris dans $\mathbb{R}$. $\square$

Proposition 1.2.3. *Un espace afffin A est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si il contient 0. En particulier, $A - A$ est un espace vectoriel.*

Démonstration. Bien sûr, il suffit uniquement de montrer la suffisance de la condition. Supposons que A contienne 0. Soient $x, y \in A$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. D'abord, $\lambda x = \lambda x + (1 - \lambda)0$ et donc A est stable par multiplication scalaire. Pour la somme, observons que $x + y = 2(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y)$. Comme A est afffin et stable par multiplication scalaire, on en tire que $x + y \in A$. Compte tenu de ce qui vient d'être démontré et de la proposition 1.2.2, on voit que $A - A$ est bien un espace vectoriel. $\square$

Définition 1.2.3. L'espace vectoriel $A - A$ de la proposition précédente sera noté $\vec{A}$. On dira que $\vec{A}$ est le *sous-espace directeur* de A .

Proposition 1.2.4. Si A est un espace affín, alors $\vec{A} = A - a$ pour tout $a \in A$.

Démonstration. Par définition de $\vec{A}$, on a $A - a \subset \vec{A}$. Soient $x, y \in A$. On a $x - y = x - y + a - a = (x + a - y) - a$. Vu la proposition 1.2.1, on a $x + a - y \in A$. D'où, $A - a \supset \vec{A}$. $\square$

La proposition précédente, combinée à la proposition 1.2.3, montre que le sous-espace vectoriel parallèle à un espace affín¹ est unique. La preuve de la propriété qui suit est semblable à celle de la proposition 1.1.2.

Proposition 1.2.5. Soit I un ensemble et pour tout $i \in I$, soit A_i un espace affín de E . Alors $\bigcap_{i \in I} A_i$ est un espace affín.

De la même façon que pour les ensembles convexes, on peut trouver un plus petit espace affín contenant un ensemble donné.

Définition 1.2.4. Soit A une partie de E . L'*enveloppe affín* de A est l'intersection de tous les espaces affíns contenant A (ou aussi le plus petit espace affín contenant A). Cet ensemble sera noté $\text{aff}(A)$.

Voici l'analogie de la proposition 1.1.4 en terme de combinaisons affíns. La preuve suit la même démarche, nous ne la détaillerons donc pas.

Proposition 1.2.6. Si A est une partie de E , alors

$$\text{aff}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i : m \in \mathbb{N}_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, x_1, \dots, x_m \in A \right\}.$$

Nous disposons de toutes les propriétés de base pour aborder la notion de dimension d'un convexe.

Définition 1.2.5. Si A est un espace affín, alors sa *dimension* $\dim A$ est la dimension de son sous-espace vectoriel directeur $\vec{A}$. Si C est une partie de E , alors sa dimension $\dim C$ est la dimension de son sous-espace affín engendré $\text{aff}(C)$.

Lemme 1.2.1. Soient $a_0, a_1, \dots, a_m$ des éléments de E . Fixons i_0 et j_0 dans $\{0, \dots, m\}$. Alors $a_0 - a_{i_0}, a_1 - a_{i_0}, \dots, \widehat{a_{i_0} - a_{i_0}}, \dots, a_m - a_{i_0}$ sont linéairement indépendants si et seulement si $a_0 - a_{j_0}, a_1 - a_{j_0}, \dots, a_{j_0} - a_{j_0}, \dots, a_m - a_{j_0}$ sont linéairement indépendants (les éléments surmontés de $\hat{}$ étant omis).

Démonstration. Le cas où $i_0 = j_0$ est trivial. Supposons donc avoir $i_0 \neq j_0$. Par symétrie, nous pouvons nous contenter de démontrer que la condition est nécessaire. Pour tout $j \in \{0, \dots, m\} \setminus \{j_0\}$, soit $\lambda_j \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{j=0, j \neq j_0}^m \lambda_j (a_j - a_{j_0}) = 0.$$

1. Rappelons que deux ensembles A et B sont parallèles s'il existe $x \in E$ tel que $A + x = B$ (E2).

Cette dernière égalité nous procure

$$\begin{aligned} \sum_{j=0, j \neq j_0}^m \lambda_j ((a_j - a_{i_0}) + (a_{i_0} - a_{j_0})) &= 0 \Leftrightarrow \sum_{j=0, j \neq j_0}^m \lambda_j (a_j - a_{i_0}) - \underbrace{\left(\sum_{j=0, j \neq j_0}^m \lambda_j \right)}_{:= \lambda_{j_0}} (a_{j_0} - a_{i_0}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{j=0, j \neq i_0}^m \lambda_j (a_j - a_{i_0}) = 0. \end{aligned}$$

Comme $a_0 - a_{i_0}, a_1 - a_{i_0}, \dots, \widehat{a_{i_0} - a_{i_0}}, \dots, a_m - a_{i_0}$ sont linéairement indépendants, on a $\lambda_j = 0$ pour tout $j \in \{0, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$. On en tire que $0 = \lambda_{j_0} = -\sum_{j=0, j \neq j_0}^m \lambda_j = -\lambda_{i_0}$ et donc $\lambda_j = 0$ pour tout $j \in \{0, \dots, m\} \setminus \{j_0\}$. Ceci achève la preuve. $\square$

Définition 1.2.6. Soient $a_0, a_1, \dots, a_m$ des éléments de E . On dit qu'ils sont *affinement indépendants* si $a_1 - a_0, \dots, a_m - a_0$ sont linéairement indépendants. Dans ces conditions, le convexe $\text{conv}(\{a_0, \dots, a_m\})$ est un m -simplexe de E . Les points $a_0, \dots, a_m$ sont alors les sommets du simplexe. Nous définissons les polytopes comme étant les ensembles convexes finiment engendrés, i.e. les convexes du type $\text{conv}(\{a_0, a_1, \dots, a_m\})$ (les points $a_0, \dots, a_m$ ne sont pas nécessairement affinement indépendants).

Le lemme 1.2.1 nous montre que la définition de l'indépendance affine est indépendante de l'ordre des points $a_0, a_1, \dots, a_m$.

Voici un résultat que l'on doit à Carathéodory. Il s'agit d'une amélioration de la proposition 1.1.4.

Théorème 1.2.1 (Carathéodory, [17]). *Soit A une partie de E de dimension finie n . Alors $\text{conv}(A)$ est l'ensemble des combinaisons convexes de points affinement indépendants de A . En particulier, $\text{conv}(A)$ est une union de simplexes et c'est aussi l'ensemble des combinaisons convexes d'au plus $n + 1$ points de A .*

Démonstration. Vu la proposition 1.1.4, nous savons déjà qu'une combinaison convexes de points de A affinement indépendants appartient à $\text{conv}(A)$. Montrons que tout élément de $\text{conv}(A)$ peut s'exprimer de cette manière. Si $x \in \text{conv}(A)$, alors il existe $x_1, \dots, x_m \in A$ et $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_m \geq 0$ tels que $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ et $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$ en vertu de la proposition 1.1.4. Parmi toutes les représentations de x de cette forme, considérons celle pour laquelle le nombre m de termes est minimal. Par l'absurde, supposons que les points $x_1, \dots, x_m$ ne sont pas affinement indépendants. Donc, $x_2 - x_1, \dots, x_m - x_1$ sont linéairement dépendants. Il existe alors des réels $\mu_2, \dots, \mu_m$ non tous nuls tels que $\mu_2(x_2 - x_1) + \dots + \mu_m(x_m - x_1) = 0$. Posons $\mu_1 = -\mu_2 - \dots - \mu_m$. On a donc

$$\mu_1 x_1 + \dots + \mu_m x_m = 0 \quad (*)$$

où $\mu_1, \dots, \mu_m$ sont des réels non tous nuls vérifiant $\mu_1 + \dots + \mu_m = 0$. Ceci implique qu'il existe au moins un nombre μ_i strictement positif. Soit i_0 un indice pour lequel $\mu_{i_0} > 0$ et λ_{i_0}/μ_{i_0} est minimal. Vu (*), nous obtenons

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m - \frac{\lambda_{i_0}}{\mu_{i_0}} (\mu_1 x_1 + \dots + \mu_m x_m) \\ &= (\lambda_1 - \frac{\lambda_{i_0}}{\mu_{i_0}} \mu_1) x_1 + \dots + (\lambda_{i_0} - \frac{\lambda_{i_0}}{\mu_{i_0}} \mu_{i_0}) x_{i_0} + \dots + (\lambda_m - \frac{\lambda_{i_0}}{\mu_{i_0}} \mu_m) x_m \end{aligned}$$

où le terme surmonté de “ $\hat{\cdot}$ ” vaut 0. La somme des coefficients vaut clairement 1. On montre que les coefficients sont tous positifs. Si $\mu_i \leq 0$, alors $\lambda_i - (\lambda_{i_0}/\mu_{i_0})\mu_i \geq 0$. Si $\mu_i > 0$, alors le choix de λ_{i_0}/μ_{i_0} nous montre que

$$\frac{\lambda_{i_0}}{\mu_{i_0}} \leq \frac{\lambda_i}{\mu_i} \Rightarrow \lambda_i - \frac{\lambda_{i_0}}{\mu_{i_0}}\mu_i \geq 0.$$

Donc, x peut s'exprimer comme une combinaison convexe de $m - 1$ éléments de A , ce qui contredit la minimalité de m .

Il est alors clair que $m \leq n + 1$. Si ce n'est pas le cas, alors on peut trouver plus de $n + 1$ points affinement indépendants dans $\text{aff}(A)$. Il s'ensuit que $\overrightarrow{\text{aff}(A)}$ contient plus de n vecteurs linéairement indépendants, ce qui contredit l'hypothèse $\dim A = n$. $\square$

Nous pouvons démontrer une propriété utile de la dimension.

Proposition 1.2.7 ([35]). *Supposons que E est de dimension finie. Si C est un ensemble convexe de E , alors*

$$\dim C = \max\{\dim S : S \text{ est un simplexe inclus dans } C\}.$$

Démonstration. Par le théorème de Carathéodory, C est une union de simplexes. Soient $a_0, \dots, a_m$ des points affinement indépendants de C tels que le simplexe S défini par $\text{conv}(\{a_0, \dots, a_m\})$ soit de dimension maximale m parmi les simplexes inclus dans C . Il suffit de montrer que $\text{aff}(C) = \text{aff}(S)$. Il est clair que $\text{aff}(C) \supset \text{aff}(S)$, montrons l'autre inclusion. Remarquons que $C \subset \text{aff}(S)$. Pour le voir, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $a_{m+1} \in C \setminus \text{aff}(S)$. Alors a_{m+1} ne peut s'exprimer comme combinaison affine de $a_0, \dots, a_m$. Donc, les points $a_0, \dots, a_{m+1}$ sont affinement indépendants et C contient un simplexe de dimension $m + 1$, ce qui contredit la maximalité de m . Comme $C \subset \text{aff}(S)$, nous obtenons $\text{aff}(C) \subset \text{aff}(S)$ car $\text{aff}(C)$ est le plus petit espace affine contenant C , ce qui permet de conclure. $\square$

Il peut arriver que la dimension soit infinie. C'est pourquoi il est parfois préférable d'utiliser la notion de codimension d'un espace vectoriel. Ce nombre mesure en quelque sorte la différence entre les dimensions de l'espace E et le sous-espace F considéré.

Définition 1.2.7. Soit F un sous-espace vectoriel de E . Alors la *codimension* de F est définie comme étant la dimension de l'espace vectoriel quotient E/F . On la note $\text{codim } F$. La codimension d'un espace affine A , notée $\text{codim } A$, est la codimension de son sous-vectoriel directeur $\vec{A}$. Enfin, la codimension d'une partie quelconque A de E est la codimension de son enveloppe affine.

Définition 1.2.8. Un *hyperplan* H de E est un espace affine de codimension 1. Nous dirons qu'un hyperplan est vectoriel s'il contient l'origine.

Les hyperplans sont d'une importance capitale dans la théorie des ensembles convexes. Il serait utile d'obtenir une description plus détaillée des éléments d'un hyperplan. Nous savons que dans $\mathbb{R}^n$, un hyperplan est défini en coordonnées par une équation cartésienne du type

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b.$$

2. On rappelle que la relation d'équivalence $\sim$ définissant l'espace quotient E/F est $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in F$. Un élément du quotient sera désigné sous la forme $[x]_F$.

Ceci peut s'exprimer sous la forme d'un produit scalaire $\langle a, x \rangle = b$. Nous sommes en droit de nous attendre à un résultat similaire dans le cas plus général des espaces de Banach. Cependant, il nous faut prendre des précautions. Tous les hyperplans ne sont pas fermés comme dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Sauf mention explicite du contraire, tous les hyperplans considérés seront fermés.

Proposition 1.2.8. ³ Une partie H de E est un hyperplan vectoriel fermé si et seulement si il existe $\xi \in E^* \setminus \{0\}$ tel que

$$H = \{x \in E : \langle \xi, x \rangle = 0\}.$$

Démonstration. 1) Condition suffisante : On suppose que $H = \{x \in E : \langle \xi, x \rangle = 0\}$ avec $\xi \in E^* \setminus \{0\}$. Il est alors clair que H est un sous-espace vectoriel de E . Si une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de H converge vers x , la continuité de ξ implique que $0 = \langle \xi, x_n \rangle \rightarrow \langle \xi, x \rangle = 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. On en tire que H est fermé. Montrons que $\text{codim } H = 1$. Comme $\xi \neq 0$, il existe $e \in E$ tel que $\langle \xi, e \rangle \neq 0$. On peut même supposer que $\langle \xi, e \rangle = 1$. On obtient alors

$$E = H \oplus \mathbb{R}e.$$

En effet, le choix de e montre que $H \cap \mathbb{R}e = \{0\}$. Et si $x \in E$, posons $r = \frac{\langle \xi, x \rangle}{\langle \xi, e \rangle}$. On a alors $\langle \xi, x - re \rangle = 0$ et donc

$$x = \underbrace{x - re}_{\in H} + \underbrace{re}_{\in \mathbb{R}e}.$$

Les espaces vectoriels E/H et $\mathbb{R}e$ sont isomorphes, ce qui permet de conclure que $\text{codim } H = \dim E/H = \dim \mathbb{R}e = 1$

2) Condition nécessaire : Si H est un hyperplan vectoriel fermé, alors E/H est de dimension 1. Il existe donc $e \in E \setminus H$ tel que $E/H = \mathbb{R}[e]_H$. On en tire que

$$E = H \oplus \mathbb{R}e.$$

En effet, si $x \in E$, alors il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $[x]_H = r[e]_H$. Il existe donc $h \in H$ tel que $x = h + re$, ce qui montre que $x \in H + \mathbb{R}e$. De plus, si $x \in H \cap \mathbb{R}e$, alors il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $x = re$. Comme $e \notin H$, on a $r = 0$ (sinon $re \in H$ et comme H est un espace vectoriel et $r \neq 0$, on a aussi $e \in H$), ce qui montre que $H \cap \mathbb{R}e = \{0\}$. Construisons $\xi \in E^* \setminus \{0\}$ pour lequel $x \in H \Leftrightarrow \langle \xi, x \rangle = 0$. Dans un premier temps, on pose $\xi(x) = 0$ pour tout $x \in H$. Posons également $\xi(e) = d$ où $d = \text{dist}(e, H)$. Comme la distance entre un compact et un fermé est réalisée dans un espace métrique, on a $d > 0$. Si $h \in H$ et $r \in \mathbb{R}$, on étend ξ à E en posant $\xi(h + re) = rd$. Par construction, il est clair que ξ est linéaire et que $x \in H \Leftrightarrow \langle \xi, x \rangle = 0$. Il suffit de montrer que ξ est continu pour conclure. Soient $h \in H$ et $r \in \mathbb{R}_0$ (le cas $r = 0$ est évident). On a

$$|\xi(h + re)| = \frac{|r||d|}{\|h + re\|} \|h + re\| = \frac{|d|}{\|e - (-h/r)\|} \|h + re\| \leq \frac{|d|}{\text{dist}(e, H)} \|h + re\| = \|h + re\|,$$

d'où la conclusion puisque $|\xi(x)| \leq \|x\|$ pour tout $x \in E$. $\square$

Corollaire 1.2.1. Une partie H de E est un hyperplan fermé si et seulement si il existe $\xi \in E^* \setminus \{0\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que

$$H = \{x \in E : \langle \xi, x \rangle = b\}.$$

3. Nous adoptons la notation usuelle $\langle \xi, x \rangle$ pour désigner $\xi(x)$.

Démonstration. La condition est suffisante. En effet, on voit aisément que $\vec{H} = \{x \in E : \langle \xi, x \rangle = 0\}$ et il suffit d'utiliser la proposition précédente. La condition est nécessaire. Soit $h \in H$. La proposition 1.2.4 nous permet d'écrire $H = h + \vec{H}$. La proposition précédente montre qu'il existe $\xi \in E^* \setminus \{0\}$ tel que $\vec{H} = \{u \in E : \langle \xi, u \rangle = 0\}$. On a successivement

$$H = h + \{u \in E : \langle \xi, u \rangle = 0\} = \{h + u \in E : \langle \xi, u \rangle = 0\} = \{x \in E : \langle \xi, x - h \rangle = 0\}.$$

La conclusion en découle en posant $b = \langle \xi, h \rangle$. $\square$

Remarque 1.2.1. On peut montrer que H est un hyperplan si et seulement si il existe une forme linéaire ξ réelle qui n'est pas identiquement nulle et $b \in \mathbb{R}$ tels que $H = \{x \in E : \langle \xi, x \rangle = b\}$. Il suffit de reproduire les deux démonstrations précédentes en enlevant les arguments qui montrent la continuité de ξ et ceux qui prouvent que l'hyperplan est fermé.

L'hypothèse de fermeture ne sert plus à rien en dimension finie car tout hyperplan est fermé, comme nous allons le montrer. De plus, le réel b du corollaire peut être choisi égal à 1 si l'hyperplan n'est pas vectoriel (on peut alors diviser ξ par b).

Lemme 1.2.2 ([13]). *Si E est non-trivial et de dimension finie n , alors toutes les normes de E sont équivalentes.*⁴

Démonstration. Fixons une base $e_1, \dots, e_n$ de E et introduisons la norme $\|\cdot\|_1$ en posant

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ sont tels que $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$. Il est évident que $\|\cdot\|_1$ est une norme. Soit $\|\cdot\|$ une norme arbitraire sur E . Il suffit de montrer que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|$ sont équivalents.

Tout d'abord, montrons que $\|\cdot\|$ est continu dans $(E, \|\cdot\|_1)$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ et $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$. Posons $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ et $y = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n$. Nous obtenons alors

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i - \mu_i| \|e_i\| \leq \underbrace{\max_{1 \leq i \leq n} \|e_i\|}_{:=D} \sum_{i=1}^n |\lambda_i - \mu_i| = D \|x - y\|_1$$

et donc la norme est une application D -lipschitzienne, donc continue.

La sphère unité $S = \{z \in E : \|z\|_1 = 1\}$ de $(E, \|\cdot\|_1)$ est compacte. En effet, si $(z_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite de S , alors les éléments z_m s'expriment sous la forme $z_m = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{(m)} e_i$ avec $\lambda_i^{(m)} \in \mathbb{R}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ avec $m \in \mathbb{N}$. Vu l'appartenance de la suite à S , on obtient

$$|\lambda_1^{(m)}| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i^{(m)}| = 1$$

et donc, la suite $(\lambda_1^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$. On peut extraire une sous-suite $(\lambda_1^{(k_1(m))})_{m \in \mathbb{N}}$ de $(\lambda_1^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ qui converge vers une limite λ_1 . On procède de la même façon pour la suite

4. On rappelle que deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes si et seulement si il existe des constantes C et D strictement positives telles que $C\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq D\|x\|_2$ pour tout $x \in E$. On voit aisément que l'équivalence de normes est une relation d'équivalence.

$(\lambda_2^{(k_1(m))})_{m \in \mathbb{N}}$ et on obtient une sous-suite $(\lambda_2^{(k_2(k_1(m))))}_{m \in \mathbb{N}}$ convergente vers une limite finie λ_2 . On procède ainsi de proche en proche jusqu'à la suite $(\lambda_n^{(k_{n-1} \circ \dots \circ k_1(m))})_{m \in \mathbb{N}}$. On obtient une sous-suite $(\lambda_n^{(k_n \circ \dots \circ k_1(m))})_{m \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un réel λ_n . En posant $z = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$, on voit que

$$\|z_{k_n \circ \dots \circ k_1(m)} - z\|_1 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i^{(k_n \circ \dots \circ k_1(m))} - \lambda_i| \rightarrow 0 \quad \text{si } m \rightarrow +\infty$$

et que $\|z\| = \sum_{i=1}^n |\lambda_i| = 1$ par passage à la limite sur m de $1 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i^{(k_n \circ \dots \circ k_1(m))}|$. Ceci nous permet de conclure que S est compact⁵.

Par la continuité de $\|\cdot\|$ et la compacité de S , l'ensemble $\|S\| = \{\|z\| : z \in S\}$ est compact. Il existe $C > 0$ et $D > 0$ tels que

$$C \leq \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\| \leq D$$

pour tout $x \in E \setminus \{0\}$. Autrement dit, on a $C\|x\|_1 \leq \|x\| \leq D\|x\|_1$ pour tout $x \in E$, ce qui permet de conclure. $\square$

L'équivalence des normes nous permet de munir E de n'importe quelle norme sans changer la topologie qu'elle engendre. Voici une conséquence de ce lemme.

Corollaire 1.2.2. *Si E est non-trivial et de dimension finie, alors tout sous-espace vectoriel F de E est fermé.*

Démonstration. Soit $b_1, \dots, b_m$ une base de F . Nous savons qu'on peut la compléter par des vecteurs $b_{m+1}, \dots, b_n$ ($n \geq m$) pour que $b_1, \dots, b_n$ forme une base de E . Soit $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de F convergeant vers x . Dans la base choisie, nous savons qu'il existe des réels $\lambda_i^{(k)}$ et λ_j pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ et tout $j \in \{1, \dots, n\}$ tels que

$$x_k = \sum_{i=1}^m \lambda_i^{(k)} b_i \quad \text{et} \quad x = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i.$$

Vu le lemme 1.2.2, nous pouvons supposer que E est muni de la norme $\|\cdot\|_1$ du lemme précédent. On sait que $\|x_k - x\|_1 \rightarrow 0$ si $k \rightarrow +\infty$, c'est-à-dire

$$|\lambda_1^{(k)} - \lambda_1| + \dots + |\lambda_m^{(k)} - \lambda_m| + |\lambda_{m+1}| + \dots + |\lambda_n| \rightarrow 0$$

si $k \rightarrow +\infty$. S'il existe $i \in \{m+1, \dots, n\}$ tel que $\lambda_i \neq 0$, alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |\lambda_1^{(k)} - \lambda_1| + \dots + |\lambda_m^{(k)} - \lambda_m| + |\lambda_{m+1}| + \dots + |\lambda_n| \geq |\lambda_i| > 0$$

ce qui n'est pas possible. Donc, $\lambda_i = 0$ si $i \in \{m+1, \dots, n\}$ et donc $x \in F$, d'où la conclusion. $\square$

Proposition 1.2.9 ([13]). *Si E est non-trivial et de dimension finie n , alors toute application linéaire à valeur dans $\mathbb{R}$ est continue. En particulier, tout hyperplan de E est fermé.*

5. Si X est un espace métrisable, alors X est compact si et seulement si de toute suite de X , on peut extraire une sous-suite qui converge vers un point de X [39]

Démonstration. Soit ξ une forme linéaire sur E . Fixons une base $e_1, \dots, e_n$ de E . Prenons la norme $\|\cdot\|_1$ du lemme précédent. Comme toutes les normes sont équivalentes en dimension finie, nous pouvons nous contenter de démontrer la proposition pour $\|\cdot\|_1$. Toute application linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie se représente par une matrice dépendant de la base choisie. Ici, la matrice représentant ξ est un vecteur ligne que nous notons $(\xi_1 \cdots \xi_n)$. Pour tout $x \in E$, nous notons $(x_1 \cdots x_n)^\sim$ le vecteur des composantes selon la base $e_1, \dots, e_n$. Ainsi, nous obtenons

$$|\xi(x)| = \left| \sum_{i=1}^n \xi_i x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |\xi_i| |x_i| \leq C \|x\|_1$$

où $C = \max_{1 \leq i \leq n} |\xi_i|$, d'où la conclusion. On sait que tout hyperplan est de la forme $\{x \in E : \langle \xi, x \rangle = b\}$ où ξ est une forme linéaire qui n'est pas identiquement nulle et $b \in \mathbb{R}$ (remarque 1.2.1). Vu ce qui a été montré, le critère de fermeture par les suites montre bien que tout hyperplan est fermé lorsque E est de dimension finie. $\square$

Par soucis de rigueur, exposons un hyperplan dans un espace de Banach qui n'est pas fermé. Notons que la construction exposée ci-dessous requiert l'axiome du choix.

Exemple 1.2.2 (AC, [20]). Soit $E = C^0([0, 1])$ et $\|f\| = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ pour tout $f \in C^0([0, 1])$. Nous savons que cet espace est de Banach [39]. Les fonctions p_m ($m \in \mathbb{N}$) définies par $p_m(x) = x^m$ appartiennent à $C^0([0, 1])$ et sont linéairement indépendantes⁶. Donc $\{p_m : m \in \mathbb{N}\}$ est inclus dans une partie libre maximale $B = \{b_i : i \in I\}$ de $C^0([0, 1])$ (ce résultat nécessite l'axiome du choix). On sait que B forme alors une base. Soit $f \in C^0([0, 1])$, il existe des éléments distincts $b_1, \dots, b_n \in B$ et des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que

$$f = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\varphi_n(f) = \begin{cases} \lambda_i & \text{s'il existe } i \in \{1, \dots, n\} \text{ tel que } b_i = p_n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Vu l'unicité de la décomposition d'un élément selon une base, l'application φ_n est bien définie sur $C^0([0, 1])$. Nous pouvons alors définir l'application

$$\varphi : C^0([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} n \varphi_n(f).$$

Par construction, il est clair que la série intervenant dans la définition de φ est en fait une somme finie. On vérifie sans peine que cette application est linéaire. Toutefois, elle n'est pas

6. Un ensemble $\{b_i : i \in I\}$ qui n'est pas fini est une partie libre de E si et seulement si pour toute partie finie J incluse dans I , les vecteurs de $\{b_j : j \in J\}$ vérifient

$$\sum_{j \in J} \lambda_j b_j = 0 \Rightarrow \lambda_j = 0 \quad \forall j \in J.$$

Un ensemble $\{b_i : i \in I\}$ est une partie génératrice de E si pour tout $x \in E$, il existe une partie finie $J \subset I$ et $\lambda_j \in \mathbb{R}$ pour tout $j \in J$ tels que $x = \sum_{j \in J} \lambda_j b_j$. Les définitions et théorèmes relatifs à ces concepts peuvent être retrouvés dans [18].

continue. Si φ est continu, alors il existe $C > 0$ tel que $|\varphi(f)| \leq C\|f\|$ pour tout $f \in C^0([0, 1])$. Il s'ensuit que $|\varphi| \leq C$ sur la sphère unité de $C^0([0, 1])$. Cependant, on a $\|p_m\| = 1$ et $\varphi(p_m) = m$, quel que soit le naturel m . Ceci montre que l'image de la sphère n'est pas bornée alors qu'elle est bien bornée, ce qui nous donne une contradiction. Ainsi, φ est une forme linéaire non-nulle qui n'est pas continue et les hyperplans

$$H = \{f \in C^0([0, 1]) : \langle \varphi, f \rangle = b\}$$

ne sont pas fermés en vertu du corollaire 1.2.1.

1.3 Théorème de Hahn-Banach et séparation de convexes

Si H est un hyperplan fermé de E , alors le corollaire 1.2.1 montre qu'il existe $\xi \in E^* \setminus \{0\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $H = \{x \in E : \langle \xi, x \rangle = b\}$. On voit alors que $E \setminus H$ possède deux composantes connexes, à savoir

$$H_1 = \{x \in E : \langle \xi, x \rangle < b\} \quad \text{et} \quad H_2 = \{x \in E : \langle \xi, x \rangle > b\}.$$

En effet, ces deux ensembles sont convexes, donc connexes⁷. Comme $H_1 \cap H_2 = \emptyset$, ce sont bien les composantes connexes de $E \setminus H$.

L'objet de cette section est de montrer que deux convexes dans E peuvent être séparés par un hyperplan fermé sous certaines hypothèses. Le terme séparation est à prendre au sens de la définition suivante.

Définition 1.3.1. Soient C_1 et C_2 deux convexes de E , un hyperplan fermé H de E et H_1 et H_2 les deux composantes connexes de $E \setminus H$. On dit que H *sépare* (resp. *sépare fortement*) C_1 et C_2 si et seulement si $C_1 \subset \overline{H_1}$ (resp. il existe $\varepsilon > 0$ tel que $C_1 + B(0, \varepsilon) \subset H_1$) et $C_2 \subset \overline{H_2}$ (resp. $C_2 + B(0, \varepsilon) \subset H_2$). Ces deux composantes connexes seront appelées les *demi-espaces* définis par H . L'adhérence de ces demi-espaces sont appelés *demi-espaces fermés*.

La proposition suivante résulte directement des considérations sur les hyperplans faites ci-dessus.

Proposition 1.3.1. Soient C_1 et C_2 deux convexes de E .

- (i) Les ensembles C_1 et C_2 sont séparables par un hyperplan si et seulement si il existe $\xi \in E^* \setminus \{0\}$ tel que

$$\sup_{x \in C_1} \langle \xi, x \rangle \leq \inf_{x \in C_2} \langle \xi, x \rangle.$$

- (ii) Les ensembles C_1 et C_2 sont fortement séparables par un hyperplan si et seulement si il existe $\xi \in E^* \setminus \{0\}$ tel que

$$\sup_{x \in C_1} \langle \xi, x \rangle < \inf_{x \in C_2} \langle \xi, x \rangle.$$

7. Tout convexe est connexe par arcs car deux points sont reliés par un segment qui est un chemin continu. Il est connu qu'un espace connexe par arcs est connexe [27].

Démonstration. La condition (i) est triviale au vu de ce qui a été dit en début de section. Démontrons uniquement la partie (ii). Si C_1 et C_2 sont fortement séparables par un hyperplan H , alors il existe $\xi \in E^* \setminus \{0\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $H = \{x \in E : \langle \xi, x \rangle = b\}$ et il existe aussi $\varepsilon > 0$ tel que $C_1 + B(0, \varepsilon) \subset H_1$ et $C_2 + B(0, \varepsilon) \subset H_2$ avec $H_1 = \{x \in E : \langle \xi, x \rangle < b\}$ et $H_2 = \{x \in E : \langle \xi, x \rangle > b\}$. Par linéarité, on voit aisément que

$$\sup_{x \in C_1} \langle \xi, x \rangle \leq b - \sup_{\|e\| < \varepsilon} \langle \xi, e \rangle \quad \text{et} \quad \inf_{x \in C_2} \langle \xi, x \rangle \geq b - \inf_{\|e\| < \varepsilon} \langle \xi, e \rangle.$$

En posant $\varepsilon' = \min(\sup_{\|e\| < \varepsilon} \langle \xi, e \rangle, -\inf_{\|e\| < \varepsilon} \langle \xi, e \rangle)$, on obtient finalement

$$\sup_{x \in C_1} \langle \xi, x \rangle \leq b - \varepsilon' < b < b + \varepsilon' \leq \inf_{x \in C_2} \langle \xi, x \rangle.$$

Supposons à présent qu'il existe $\xi \in E^* \setminus \{0\}$ tel que

$$\sup_{x \in C_1} \langle \xi, x \rangle < \inf_{x \in C_2} \langle \xi, x \rangle.$$

Il existe $b \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\sup_{x \in C_1} \langle \xi, x \rangle < b - \varepsilon < b < b + \varepsilon < \inf_{x \in C_2} \langle \xi, x \rangle.$$

Par continuité de ξ , il existe $\varepsilon' > 0$ tel que $|\langle \xi, x \rangle| < \varepsilon$ si $\|x\| < \varepsilon'$. Posons $H = \{x \in E : \langle \xi, x \rangle = b\}$, $H_1 = \{x \in E : \langle \xi, x \rangle < b\}$ et $H_2 = \{x \in E : \langle \xi, x \rangle > b\}$. On en conclut directement que

$$C_1 + B(0, \varepsilon') \subset H_1 \quad \text{et} \quad C_2 + B(0, \varepsilon') \subset H_2.$$

□

Avant de montrer les théorèmes de séparations, nous aurons besoin de résultats intermédiaires. Le premier est le théorème de Hahn-Banach.

Théorème 1.3.1 (Hahn-Banach, **AC**, [31]). *Soient F un sous-espace vectoriel de E et $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Supposons que $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ soit une fonction sous-linéaire⁸ et que $f(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in F$. Alors f admet une extension linéaire continue g à E telle que $g(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in E$.*

Démonstration. Posons $\mathcal{F}$ l'ensemble des couples (H, h) où H est un sous-espace vectoriel de E contenant F et $h : H \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire continue vérifiant $h(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in H$ et $h|_F = f$. Définissons une relation d'ordre $\preceq$ sur $\mathcal{F}$ en posant

$$(H, h) \preceq (H', h') \Leftrightarrow H \subset H' \text{ et } h'|_H = h.$$

On vérifie facilement que c'est bien une relation d'ordre⁹. De plus, comme $(F, f) \in \mathcal{F}$, on voit que $\mathcal{F}$ est non-vidé. Si $\mathcal{C}$ est une partie totalement ordonnée de $\mathcal{F}$, on construit aisément un majorant de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{F}$ en considérant (U, u) où

$$U = \bigcup_{(H, h) \in \mathcal{C}} H \quad \text{et} \quad u(x) = h(x) \text{ si } x \in H, (H, h) \in \mathcal{C}.$$

8. On rappelle que p est sous-linéaire si $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ et $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ pour tout $x, y \in E$ et tout $\lambda \geq 0$.

9. On rappelle qu'une relation d'ordre est réflexive, antisymétrique et transitive.

De façon évidente, (U, u) est un majorant de $\mathcal{C}$ et ce majorant appartient bien à $\mathcal{F}$. Le lemme de Zorn nous permet d'obtenir un élément (G, g) de $\mathcal{F}$ qui est maximal. Il reste à montrer que $G = E$. Si $G \neq E$, prenons $e \in E \setminus G$. On a donc $G \cap \mathbb{R}e = \{0\}$ et ces espaces sont en somme directe. On définit

$$G' = G \oplus \mathbb{R}e \quad \text{et} \quad g'(x + re) = g(x) + rc_0$$

si $x \in G$ et $r \in \mathbb{R}$. Pour aboutir à une contradiction, trouvons $c_0 \in \mathbb{R}$ de sorte que

$$g'(x + re) \leq p(x + re) \quad (*)$$

pour tout $x \in G$ et tout $r \in \mathbb{R}$. Pour un tel c_0 , l'application $g' : G' \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire continue qui étend g à G' où $G \subsetneq G'$, ce qui contredit la maximalité de (G, g) dans $\mathcal{F}$.

Si $r > 0$, alors la condition $(*)$ implique que $g(x) + c_0 \leq p(x + e)$ pour tout $x \in G$ en divisant les deux membres par r . Lorsque $r < 0$, divisons les deux membres de $(*)$ par $-r$ pour avoir $g(x) - c_0 \leq p(x - e)$ pour tout $x \in G$. Le réel c_0 recherché doit vérifier

$$g(x) - p(x - e) \leq c_0 \leq -g(y) + p(y + e) \quad (**)$$

pour tout $x, y \in G$. Remarquons que

$$g(x) + g(y) = g(x + y) \leq p(x + y) \leq p(x - e) + p(y + e)$$

pour tout $x, y \in G$. On en tire que

$$\sup_{x \in G} (g(x) - p(x - e)) \leq \inf_{y \in G} (-g(y) + p(y + e)).$$

Cette dernière inégalité montre qu'on peut trouver un $c_0 \in \mathbb{R}$ qui vérifie $(**)$. Le théorème est ainsi démontré. $\square$

Lemme 1.3.1 (AC,[31]). Soient C un convexe ouvert non-vide et A un espace affiné fermé tel que $A \cap C = \emptyset$. Alors il existe un hyperplan fermé H contenant A tel que $H \cap C = \emptyset$.

Démonstration. Nous pouvons supposer sans restriction que C contient 0. En effet, si l'on considère le convexe ouvert $C - x_0$ pour un point x_0 de C arbitraire et en prenant l'espace affiné $A - x_0$, on peut appliquer le lemme pour le cas particulier où 0 est dans le convexe. Soit F l'enveloppe linéaire de A (que l'on note habituellement $\rangle A \langle$). Montrons que A est un hyperplan de F , c'est-à-dire $\dim F/\vec{A} = 1$. Pour le voir, il suffit de remarquer que

$$\rangle A \langle = \vec{A} \oplus \mathbb{R}a \quad (*)$$

quel que soit l'élément $a \in A$ choisi. De fait, si $x \in \vec{A} \cap \mathbb{R}a$, alors il existe $a' \in A$ et $r \in \mathbb{R}$ tels que $x = a' - a = ra$ vu la proposition 1.2.4. On en tire que $a' = (r + 1)a \in A$. Comme $0 \notin A$, on a $r = 0$ ¹⁰. Donc, $x = 0$ et $\vec{A} \cap \mathbb{R}a = \{0\}$. Ensuite, on voit que $\vec{A} \oplus \mathbb{R}a \subset \rangle A \langle$ car tout élément de cette somme directe s'écrit comme une combinaison linéaire d'éléments de A . Comme $\vec{A} \oplus \mathbb{R}a$ est un espace vectoriel contenant A , on a bien l'égalité $(*)$.

10. Sinon, A contiendrait $0 = (1 + \frac{1}{r})a + \frac{-1}{r}(r + 1)a$

Cela étant, le corollaire 1.2.1 montre qu'il existe $\xi_0 \in F^* \setminus \{0\}$ tel que $A = \{x \in F : \langle \xi_0, x \rangle = 1\}$. Posons

$$p_C(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda C\}$$

pour tout $x \in E$. On remarque que p_C est fini, quel que soit $x \in E$. En effet, comme 0 est intérieur à C , il existe $R > 0$ tel que $B(0, R) \subset C$ et on voit que $x \in B(0, \lambda R) \subset \lambda C$ où $\lambda \geq \|x\|/R$. À présent, l'idée est d'appliquer le théorème de Hahn-Banach aux applications p_C et ξ_0 . Vérifions les hypothèses du théorème.

1) Si $\mu \geq 0$ et $x \in E$, alors $p_C(\mu x) = \mu p_C(x)$: L'égalité est trivialement vérifiée lorsque $\mu = 0$, on peut donc supposer que le coefficient est non-nul. Si $\lambda > 0$ est tel que $\mu x \in \lambda C$, alors λ/μ appartient à $\{\nu > 0 : x \in \nu C\}$, ce qui donne $p_C(x) \leq \frac{\lambda}{\mu}$ et donc $\mu p_C(x) \leq p_C(\mu x)$ car λ est arbitraire dans $\{\nu > 0 : \mu x \in \nu C\}$. Si $\lambda > 0$ appartient maintenant à $\{\nu > 0 : x \in \nu C\}$, alors $\mu \lambda \in \{\nu > 0 : x \in \frac{\nu}{\mu} C\}$, d'où $p_C(\mu x) \leq \mu \lambda$ et $p_C(\mu x) \leq \mu p_C(x)$.

2) $p_C(x + y) \leq p_C(x) + p_C(y)$ pour tout $x, y \in E$: Si $\lambda > 0$ et $\lambda' > 0$ sont tels que $x \in \lambda C$ et $y \in \lambda' C$, alors on a $\lambda + \lambda' \in \{\nu > 0 : x + y \in \nu C\}$ par la proposition 1.1.7. On en tire que $\lambda + \lambda' \geq p_C(x + y)$ et donc $p_C(x + y) \leq p_C(x) + p_C(y)$.

3) $\xi_0(x) \leq p_C(x)$ pour tout $x \in F$: Tout d'abord, montrons que l'on a la majoration pour tout $x \in A$. Pour le voir, il suffit de montrer que $\{x \in E : p_C(x) < 1\} = C$. Comme $C \cap A = \emptyset$, on aura $p_C(x) \geq 1 = \xi_0(x)$ pour tout $x \in A$. Si $x \in C$, alors il existe $\varepsilon \in]0, 1[$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset C$ car C est ouvert. Par continuité de la multiplication scalaire, il existe $\eta > 0$ tel que $\lambda x \in B(x, \varepsilon) \subset C$ si $\lambda \in [1 - \eta, 1 + \eta]$. On en tire que $(1 + \eta)x \in C$, c'est-à-dire $x \in \frac{1}{1 + \eta}C$. Comme $1/(1 + \eta) < 1$, on a bien $p_C(x) < 1$. Supposons à présent que $x \in E$ vérifie $p_C(x) < 1$. Donc, il existe $\lambda \in]0, 1[$ tel que $x \in \lambda C$. On en déduit que $\frac{1}{\lambda}x \in C$. Par convexité, le segment $[0, \frac{1}{\lambda}x]$ est inclus dans C et ce segment contient en particulier x , d'où la conclusion. Nous pouvons étendre la majoration à tous les éléments de F . Pour ce faire, soit $x \in F$. Donc, il existe $a' \in A$ et $r \in \mathbb{R}$ tels que $x = a' - a + ra = a' + (r - 1)a$ vu (*). Plusieurs cas sont à envisager. Si $r \neq 0$, alors

$$x = r \underbrace{\left(\frac{1}{r}a' + \frac{r-1}{r}a\right)}_{:=a'' \in A}.$$

Si $r > 0$, alors $\xi_0(x) = \xi_0(ra'') = r\xi_0(a'') \leq rp_C(a'') = p_C(x)$. Si $r < 0$, alors $\xi_0(x) = r\xi_0(a'') = r < 0 \leq -rp_C(-a'') = p_C(ra'')$. Enfin, le second cas est celui où $r = 0$. On a $x = a' - a$ et donc $\xi_0(x) = \xi_0(a') - \xi_0(a) = 0 \leq p_C(a' - a)$ puisque $\xi_0(a') = \xi_0(a) = 1$. Nous avons donc montré que $\xi_0(x) \leq p_C(x)$ pour tout $x \in F$.

Par le théorème de Hahn-Banach, il existe une application linéaire continue $\xi : E \rightarrow \mathbb{R}$ qui étend ξ_0 et qui vérifie $\xi(x) \leq p_C(x)$ pour tout $x \in E$. On définit l'hyperplan fermé $H = \{x \in E : \langle \xi, x \rangle = 1\}$. Vu ce qui a été montré au point 3), on sait que $x \in C \Leftrightarrow p_C(x) < 1$. Dès lors, $\langle \xi, x \rangle \leq p_C(x) < 1$ pour tout $x \in C$. Donc, puisque C est inclus dans le demi-espace $\{x \in E : \langle \xi, x \rangle < 1\}$, la conclusion en découle. $\square$

Nous sommes en mesure de démontrer les théorèmes de séparation.

Théorème 1.3.2 (Séparation faible, **AC**, [31]). *Soient C_1 et C_2 des convexes non-vides disjoints de E . Si l'un d'eux est ouvert, alors C_1 et C_2 sont séparables par un hyperplan fermé.*

Démonstration. Evidemment, on peut supposer que C_1 est ouvert. Dans ce cas, l'ensemble

$$C = C_1 - C_2 = \bigcup_{y \in C_2} C_1 - y$$

est ouvert et convexe (proposition 1.1.6). De plus, $0 \notin C$ car C_1 et C_2 sont disjoints. Le singleton $\{0\}$ forme un espace affine fermé qui ne rencontre pas C . Par le lemme 1.3.1, il existe un hyperplan fermé H' contenant 0 et tel que $C \cap H' = \emptyset$. Il existe $\xi \in E^* \setminus \{0\}$ tel que $H' = \{x \in E : \langle \xi, x \rangle = 0\}$. On peut supposer que C est dans le demi-espace $\{x \in E : \langle \xi, x \rangle \leq 0\}$, quitte à considérer $-\xi$ au lieu de ξ . Dans ce cas, on obtient

$$\langle \xi, x_1 \rangle \leq \langle \xi, x_2 \rangle \quad \forall x_1 \in C_1, \forall x_2 \in C_2,$$

c'est-à-dire

$$\sup_{x \in C_1} \langle \xi, x \rangle \leq \inf_{x \in C_2} \langle \xi, x \rangle$$

et on conclut par la proposition 1.3.1. $\square$

Théorème 1.3.3 (Séparation forte, **AC**, [31]). *Soient C_1 et C_2 des convexes non-vides disjoints de E . Si C_1 est compact et C_2 fermé, alors ils sont fortement séparables par un hyperplan fermé.*

Démonstration. Soit $d = \text{dist}(C_1, C_2)$. Comme l'un est compact et l'autre fermé, la distance entre les deux ensemble est réalisée et est non-nulle. Soit $\varepsilon \in]0, d/2[$. Dans ce cas, les ensembles

$$(C_i)_\varepsilon = \{x \in E : \text{dist}(x, C_i) < \varepsilon\} = C_i + B(0, \varepsilon), \quad i \in \{1, 2\}$$

sont des convexes ouverts disjoints. En utilisant la formulation faible du théorème de séparation, on voit qu'il existe un hyperplan $H = \{x \in E : \langle \xi, x \rangle = b\}$ séparant $(C_1)_\varepsilon$ et $(C_2)_\varepsilon$. Autrement dit,

$$\sup_{x \in C_1, \|y\| \leq \varepsilon} \langle \xi, x + y \rangle \leq \inf_{x \in C_2, \|y\| \leq \varepsilon} \langle \xi, x + y \rangle.$$

On remarque tout d'abord que

$$\sup_{x \in C_1, \|y\| \leq \varepsilon} \langle \xi, x + y \rangle = \sup_{x \in C_1} \langle \xi, x \rangle + \sup_{\|y\| \leq \varepsilon} \langle \xi, y \rangle \quad \text{et} \quad \inf_{x \in C_2, \|y\| \leq \varepsilon} \langle \xi, x + y \rangle = \inf_{x \in C_2} \langle \xi, x \rangle + \inf_{\|y\| \leq \varepsilon} \langle \xi, y \rangle.$$

Ensuite, il est clair que $\xi \neq 0$ sur $B(0, \varepsilon)$ ¹¹. Il s'ensuit que

$$\inf_{\|y\| \leq \varepsilon} \langle \xi, y \rangle < 0 < \sup_{\|y\| \leq \varepsilon} \langle \xi, y \rangle,$$

et par conséquent,

$$\sup_{x \in C_1} \langle \xi, x \rangle < \inf_{x \in C_2} \langle \xi, x \rangle.$$

On termine en utilisant la proposition 1.3.1. $\square$

¹¹. Sinon, $\langle \xi, x \rangle = \frac{1}{\lambda} \langle \xi, \lambda x \rangle = 0$ lorsque $\lambda > 0$ est choisi suffisamment petit pour que $\|\lambda x\| \leq \varepsilon$. Comme x est arbitraire, ξ serait identiquement nul sur E , ce qui est absurde.

Ces théorèmes permettent de déduire quelques résultats intéressants. L'un d'eux assure l'existence d'hyperplans d'appui. Les hyperplans d'appui sont des généralisations assez naturelles des espaces tangents rencontrés habituellement en géométrie.

Définition 1.3.2. Soit C un convexe de E . Un hyperplan H est un *hyperplan d'appui* de C lorsque $H \cap C \neq \emptyset$ et C est contenu dans l'un des demi-espaces fermés définis par H . Ce demi-espace est appelé *demi-espace d'appui* de C . L'ensemble $H \cap C$ est l'*ensemble d'appui* de H sur C . Si cet ensemble n'est réduit qu'à un point, on dit que cet ensemble est un *point d'appui* de C .

Comme l'intuition le laisse présager, un ensemble d'appui est toujours sur la frontière du convexe.

Proposition 1.3.2. Soit P un ensemble d'appui d'un convexe C de E . Alors $P \subset C^\bullet$.

Démonstration. Si C est d'intérieur vide, la proposition est triviale. Supposons que $C^\circ \neq \emptyset$. Soit H l'hyperplan d'appui de C en P et procédons par l'absurde. On a $H \cap C^\circ \neq \emptyset$. Soit $x_0 \in H \cap C^\circ$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x_0, \varepsilon) \subset C$. Il existe $\xi \in E^* \setminus \{0\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $H = \{x \in E : \langle \xi, x \rangle = b\}$. On peut supposer que le demi-espace fermé contenant C s'écrit $\{x \in E : \langle \xi, x \rangle \leq b\}$. Dans ce cas, on a $\langle \xi, x_0 \rangle = b$. Prenons $u \in E \setminus \vec{H}$ tel que $\langle \xi, u \rangle \neq 0$ (sinon, ξ est nul sur $E \setminus \vec{H}$, donc nul sur $E = \overline{E \setminus \vec{H}}$ par continuité, ce qui est absurde). Nous pouvons supposer que $\langle \xi, u \rangle > 0$, quitte à changer le signe de u . Il existe $\eta > 0$ tel que $x_0 + \lambda u \in B(x_0, \varepsilon)$ lorsque $\lambda \in [-\eta, \eta]$ (par continuité de l'application $\lambda \mapsto x_0 + \lambda u$ en 0). Ceci nous montre que $x_0 + \eta u$ et $x_0 - \eta u$ appartiennent à C , mais sont aussi dans des demi-espaces différents puisque, pour l'un, on a $\langle \xi, x_0 + \eta u \rangle > b$ et pour l'autre, $\langle \xi, x_0 - \eta u \rangle < b$ car $\langle \xi, u \rangle$ est non nul. Ceci nous donne une contradiction. $\square$

Nous pouvons donner deux propriétés topologiques des convexes. Celles-ci se révéleront pratiques pour ce qui va venir mais elles ont également leur utilité propre.

Proposition 1.3.3. Si C est convexe dans E , alors $\overline{C}$ et C° sont aussi convexes.

Démonstration. Si $x, y \in C^\circ$ et $\lambda \in]0, 1[$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset C$ et $B(y, \varepsilon) \subset C$. Comme C est convexe, on a $\lambda B(x, \varepsilon) + (1 - \lambda)B(y, \varepsilon) \subset C$. Il suffit juste de voir que $\lambda B(x, \varepsilon) + (1 - \lambda)B(y, \varepsilon)$ est un voisinage de $\lambda x + (1 - \lambda)y$. En effet, on a $\lambda B(x, \varepsilon) + (1 - \lambda)B(y, \varepsilon) = \lambda(x + B(0, \varepsilon)) + (1 - \lambda)(y + B(0, \varepsilon)) = \lambda x + (1 - \lambda)y + B(0, \varepsilon)$. Ceci permet de conclure.

Si $x, y \in \overline{C}$ et $\lambda \in [0, 1]$, alors il existe des suites $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ et $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de C qui convergent vers x et y respectivement. Par convexité, on en tire que $(\lambda x_m + (1 - \lambda)y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite de C . Par continuité de la somme et de la multiplication scalaire, cette suite converge vers $\lambda x + (1 - \lambda)y$. Donc, $\lambda x + (1 - \lambda)y$ est limite d'une suite de C et il appartient donc à $\overline{C}$. $\square$

Proposition 1.3.4 ([2]). Soit C une partie convexe de E . On a

$$\lambda C^\circ + (1 - \lambda)\overline{C} \subset C^\circ \quad \forall \lambda \in]0, 1[.$$

En conséquence, si C est un convexe d'intérieur non-vide, alors $C^{\circ-} = \overline{C}$ et $C^{-\circ} = C^\circ$.

Démonstration. 1) Montrons que

$$\lambda C^\circ + (1 - \lambda)\overline{C} \subset C^\circ \quad \forall \lambda \in]0, 1[.$$

Le cas $\lambda = 1$ est trivial. Supposons que $\lambda \in]0, 1[$ et soient $x \in C^\circ$ et $y \in \overline{C}$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset C$. Comme y est adhérent à C , il existe $z \in C \cap B(y, \frac{\lambda\varepsilon}{1-\lambda})$. On voit alors clairement que $(1 - \lambda)(y - z) \in \lambda B(0, \varepsilon)$. Vu que C est convexe, $\lambda B(x, \varepsilon) + (1 - \lambda)z$ est un ouvert inclus dans C . Ceci permet de conclure que l'on a

$$\lambda x + (1 - \lambda)y = \lambda x + (1 - \lambda)(y - z) + (1 - \lambda)z \in \lambda x + \lambda B(0, \varepsilon) + (1 - \lambda)z.$$

Ce dernier ensemble étant égal à l'ouvert $\lambda B(x, \varepsilon) + (1 - \lambda)z$, on a $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C^\circ$.

2) $C^{\circ-} = \overline{C}$: On a trivialement $C^{\circ-} \subset \overline{C}$ car $C^\circ \subset \overline{C}$. Soit $x \in \overline{C}$. Comme C est d'intérieur non-vidé, on peut prendre un élément y dans C° . La suite $x_m = \frac{1}{m}y + (1 - \frac{1}{m})x$ ($m \in \mathbb{N}_0$) appartient à C° , vu le point 1). De plus, elle converge vers x , ce qui montre que $x \in C^{\circ-}$.

3) $C^{-\circ} = C^\circ$: En utilisant le fait que $C \subset \overline{C}$, on obtient $C^\circ \subset C^{-\circ}$. A présent, soit $x \in C^{-\circ}$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset \overline{C}$. Fixons $y \in C^\circ$ et $\eta \in]0, 1[$ tels que $\eta\|y - x\| < \varepsilon$. Donc, $x + \eta(x - y) \in B(x, \varepsilon) \subset \overline{C}$. En utilisant la relation démontrée en 1), on a $x - \eta(x - y) = (1 - \eta)x + \eta y \in C^\circ$. Une nouvelle application de la relation 1) montre que

$$x = \frac{1}{2}(x + \eta(x - y)) + \frac{1}{2}(x - \eta(x - y)) \in \frac{1}{2}\overline{C} + \frac{1}{2}C^\circ \subset C^\circ,$$

d'où la conclusion. $\square$

Corollaire 1.3.1 (AC). *Si C est un convexe fermé d'intérieur non-vidé de E , alors tout point de $C^\bullet$ appartient à un ensemble d'appui.*

Démonstration. Si $x \in C^\bullet$, alors $\{x\} \cap C^\circ = \emptyset$ et il existe un hyperplan séparant x de C° . Dans ce cas, le demi-espace fermé contenant C° est un convexe fermé, donc il doit contenir $C^{\circ-} = \overline{C}$ (proposition 1.3.4). En outre, il est clair que x est dans l'hyperplan, sinon, x serait dans le demi-espace ne contenant pas C . Notons U ce demi-espace et fixons $y \in C^\circ$. Ce demi-espace U étant ouvert, il existe $\lambda \in]0, 1[$ tel que $\lambda x + (1 - \lambda)y$ est dans U ¹². Par la proposition 1.3.4, ce point appartient donc à C° et au demi-espace U . D'où contradiction, car $U \cap C^\circ = \emptyset$. $\square$

Une autre conséquence des théorèmes de séparation est un résultat qui donne une "représentation duale" d'un ensemble convexe, c'est-à-dire une représentation en terme d'intersection de demi-espaces.

Corollaire 1.3.2 (AC). *Si C est un convexe fermé, alors C est l'intersection de tous les demi-espaces fermés le contenant.*

Démonstration. Soit x un élément de l'intersection des demi-espaces fermés contenant C . Si $x \notin C$, alors $\{x\}$ et C peuvent être fortement séparés par un hyperplan. Donc, x n'est pas dans un demi-espace fermé contenant C , ce qui donne une contradiction. $\square$

¹². De fait, on a $\lim_{\lambda \rightarrow 1^-} \lambda x + (1 - \lambda)y = x$

1.4 Points extrémaux et théorème de Krein-Milman

Nous nous intéressons au problème suivant : étant donné un convexe C , peut-on trouver un sous-ensemble S de C minimal pour l'inclusion tel que $C = \text{conv}(S)$? C'est l'objet du théorème de Krein-Milman. Imaginons le cas simple d'un simplexe ou d'un polytope de $\mathbb{R}^3$ (tétraèdre, cube, ...). Un tel convexe est engendré par un nombre fini de points : ses sommets. Intuitivement, l'ensemble des sommets est minimal parmi tous les sous-ensembles dont l'enveloppe convexe donne C . L'idée serait de formaliser l'idée de "sommets" pour des convexes quelconques, c'est ce qu'on appellera "point extrémal". Ensuite, nous allons généraliser ce que l'on a formulé pour les polytopes. On verra que ce qui a été observé pour des polytopes est presque partagé par tous les convexes compacts. Cependant, si la dimension est infinie, il nous faut prendre l'adhérence de l'enveloppe convexe. En dimension finie, comme on peut le pressentir, l'enveloppe convexe des points extrémaux suffit pour obtenir C .

Définition 1.4.1. Si U est une partie de E , alors l'intérieur relatif de U , noté $U^{\circ R}$, est l'intérieur de U dans le sous-espace topologique $\text{aff}(U)$. Autrement dit,

$$U^{\circ R} = \{x \in E : \exists \varepsilon > 0 \ B(x, \varepsilon) \cap \text{aff}(U) \subset U\}.$$

On voit trivialement que l'intérieur et l'intérieur relatif d'une partie U de E coïncident lorsque $\text{aff}(U) = E$. La notion d'intérieur relatif est surtout utilisée en dimension finie car certaines propriétés de l'intérieur relatif en dimension finie ne sont plus nécessairement vraies lorsque la dimension de E est infinie. Pour obtenir davantage de propriétés de l'intérieur relatif, on peut consulter [35], ouvrage classique concernant l'analyse convexe dans $\mathbb{R}^n$.

Proposition 1.4.1. Supposons que E est de dimension finie. Soient $a_0, \dots, a_n$ des points de E affinement indépendants avec $n \in \mathbb{N}_0$. Alors

$$\text{conv}(\{a_0, \dots, a_n\})^{\circ R} = \left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i : \lambda_i > 0 \ \forall i \in \{0, \dots, n\} \text{ et } \lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1 \right\}.$$

Démonstration. Nous pouvons supposer que $n = \dim E$ et que $a_0 = 0$, quitte à translater dans la direction a_0 et nous restreindre à l'enveloppe affine $\text{aff}(\{a_0, \dots, a_n\})$ (on rappelle qu'en dimension finie, tout sous-espace vectoriel est fermé, donc complet). Définissons une application

$$T : \{a_0, \dots, a_n\} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

en posant $T(a_0) = 0$ et $T(a_i) = e_i$ avec $e_i = (\delta_{ij})_{1 \leq j \leq n}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ (δ_{ij} dénote le symbole de Kronecker). Cette application s'étend alors de manière unique en une bijection affine

$$T : E \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i \mapsto (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^\sim.$$

La combinaison linéaire dans la définition de T est supposée être une combinaison affine. On vérifie sans peine que $T(\text{conv}(\{a_0, \dots, a_n\}))$ est le simplexe standard $\text{conv}(\{0, e_1, \dots, e_n\})$ de $\mathbb{R}^n$. Notons C le second membre de la formule de l'énoncé. On voit aisément que

$$T(C) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i > 0 \ \forall i \in \{1, \dots, n\} \text{ et } x_1 + \dots + x_n < 1\}.$$

On voit que cet ensemble est égal à

$$]0, +\infty[^n \cap s^{-1}(] - \infty, 1[)$$

avec $s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ qui est défini par $s(x) = x_1 + \cdots + x_n$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Donc, $T(C)$ est ouvert car tout produit fini d'ouverts est un ouvert et l'application s est continue. On en tire que C est un ouvert de E par continuité de T^{-1} . Montrons que $\text{conv}(\{a_0, \dots, a_n\})^\circ \subset C$, ou de manière équivalente $E \setminus C \subset E \setminus \text{conv}(\{a_0, \dots, a_n\})^\circ$.

Supposons que $x \notin C$. Donc, x peut s'écrire sous la forme $\sum_{i=0}^n \lambda_i a_i$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$ car $\text{aff}(\{a_0, \dots, a_n\}) = E$. Comme $x \notin C$, il existe $i \in \{0, \dots, n\}$ tel que $\lambda_i \leq 0$. On doit traiter deux cas. Soit on a $\lambda_i < 0$, et alors il est clair que $x \notin \text{conv}(\{a_0, \dots, a_n\})$ et donc $x \notin \text{conv}(\{a_0, \dots, a_n\})^\circ$. Le second cas est donné par $\lambda_j \geq 0$ pour tout $j \in \{0, \dots, n\}$ et avec au moins un $i_0 \in \{0, \dots, n\}$ pour lequel $\lambda_{i_0} = 0$. Quitte à permuter les rôles des λ_j , nous pouvons supposer avoir $i_0 = n$ et $\lambda_0 > 0$. On définit alors la suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ en posant

$$x_m = (\lambda_0 + \frac{1}{m})a_0 + \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_{n-1} a_{n-1} - \frac{1}{m} a_n.$$

Cette suite appartient alors à $E \setminus \text{conv}(\{a_0, \dots, a_n\})$ et elle converge vers x . Donc, $x \in \overline{E \setminus \text{conv}(\{a_0, \dots, a_n\})}$. Mais on a aussi $x \in \text{conv}(\{a_0, \dots, a_n\}) \subset \overline{\text{conv}(\{a_0, \dots, a_n\})}$. Ceci montre que $x \in \text{conv}(\{a_0, \dots, a_n\})^\bullet$. Ainsi, il ne peut pas être un point intérieur à $\text{conv}(\{a_0, \dots, a_n\})$. Donc C est un ouvert inclus dans $\text{conv}(\{a_0, \dots, a_n\})$ et contenant $\text{conv}(\{a_0, \dots, a_n\})^\circ$, on a donc l'égalité $C = \text{conv}(\{a_0, \dots, a_n\})^\circ$. $\square$

Définition 1.4.2. Soit C un convexe. Une *partie* P de C est *extrême* si P est non-vide et si chacun de ses points n'est pas dans l'intérieur relatif d'un segment non-trivial $[u, v]$ ¹³ dont au moins une des extrémités u et v est prise dans $C \setminus P$. On dit qu'un point $x \in C$ est *extrémal* si $\{x\}$ est une partie extrême de C . L'ensemble des points extrémaux de C sera noté $\text{ext}(C)$.

La proposition précédente montre que l'intérieur relatif d'un segment $[u, v]$ est l'ensemble $]u, v[= [u, v] \setminus \{u, v\}$. La définition qui vient d'être donnée peut être reformulée en la niant. Il est clair qu'un ensemble P de C est extrémal si et seulement si

$$\forall u, v \in C \quad \forall x \in P \quad x \in]u, v[\Rightarrow u, v \in P.$$

Intuitivement, le concept d'ensemble extrémal est une généralisation de la notion de faces, d'arêtes et de sommets d'un polytope. Les points extrémaux forment une généralisation des sommets. Remarquons toutefois que tous les ensembles extrémaux ne sont pas forcément des faces, des arêtes ou des sommets! Par exemple, l'ensemble des sommets d'un cube à trois dimension forme un ensemble extrémal, si l'on se donne la peine de le vérifier en détail. Le résultat qui suit est immédiat.

Proposition 1.4.2. Une intersection non-vide d'ensembles extrémaux d'un convexe C est un ensemble extrémal de C .

La propriété suivante mérite cependant une petite preuve.

Proposition 1.4.3. Si C est un ensemble convexe, F une partie extrême de C et F' une partie extrême de F , alors F' est une partie extrême de C .

Démonstration. Soit $x \in F'$ et $u, v \in C$ tels que $x \in]u, v[$. Puisque $F' \subset F$ et F est extrémal dans C , on en tire que $u, v \in F$. Mais comme F' est extrémal dans F , on a donc $u, v \in F'$, d'où la conclusion. $\square$

13. Nous entendons par trivial le cas où $u = v$.

Intéressons-nous au problème de Krein-Milman. Pour répondre à la question posée en début de section, nous aurons recours à un lemme.

Lemme 1.4.1 (AC, [2]). *Soit C un convexe de E . Si P est une partie extrême de C compacte dans E , alors P contient un point extrême.*

Démonstration. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des parties extrêmes de C qui sont compactes dans E et incluses dans P . Il est clair que $\mathcal{C} \neq \emptyset$ car il contient P . On vérifie sans peine que l'inclusion induit une relation d'ordre sur $\mathcal{C}$. Cette relation d'ordre est définie par

$$P_1 \preceq P_2 \Leftrightarrow P_1 \supset P_2.$$

On a vite fait de vérifier qu'il s'agit bien d'une relation d'ordre. De plus, toute chaîne¹⁴ de $\mathcal{C}$ admet un majorant donné par l'intersection des éléments de la chaîne. En effet, cette intersection étant fermée et incluse dans des compacts, elle est elle-même compacte puisque l'espace E est séparé. En outre, cette intersection est non-vide car la chaîne est une famille de fermés de P qui possède la propriété d'intersection finie¹⁵ et P est compact. L'intersection est donc aussi extrême par la proposition 1.4.2 et ce majorant appartient donc bien à $\mathcal{C}$. Par le lemme de Zorn, il existe un élément F de $\mathcal{C}$ qui est maximal pour $\preceq$.

Il reste à montrer que F est un singleton. Supposons, par l'absurde, que F n'est pas un singleton. Il existe au moins deux éléments distincts x et y dans F . On est dans les conditions pour appliquer le théorème de séparation forte aux deux singletons. Il existe donc $\xi \in E^* \setminus \{0\}$ tel que $\langle \xi, x \rangle < \langle \xi, y \rangle$. Par continuité, $\xi(F)$ est un compact de $\mathbb{R}$ et admet une borne supérieure M . L'ensemble $F' = \{z \in F : \langle \xi, z \rangle = M\}$ est non-vide car la borne supérieure d'une fonction réelle continue sur un compact est atteinte en un point du compact (théorème des bornes atteintes). De plus, l'ensemble F' est compact car c'est un fermé inclus dans le compact F . Si l'on parvient à montrer que F' est une partie extrême de F , alors ce sera aussi une partie extrême de C (proposition 1.4.3). La maximalité de F dans $\mathcal{C}$ pour $\preceq$ implique que $F' = F$. Ainsi, $\langle \xi, x \rangle = M = \langle \xi, y \rangle$, ce qui est une contradiction. Supposons donc que F' n'est pas extrême dans F . Il existe alors $p \in F'$, $u \in F$ et $v \in F \setminus F'$ tels que $p \in]u, v[$. Il existe $\lambda \in]0, 1[$ tel que $p = \lambda u + (1 - \lambda)v$. On obtient

$$M = \langle \xi, p \rangle = \lambda \langle \xi, u \rangle + (1 - \lambda) \langle \xi, v \rangle < \lambda M + (1 - \lambda)M = M,$$

d'où contradiction. □

Définition 1.4.3. Si P est une partie de E , alors l'*enveloppe convexe fermée* de P est l'intersection de tous les convexes fermés contenant P . On le note $\overline{\text{conv}}(P)$. C'est le plus petit convexe fermé contenant P .

Une application directe de la proposition 1.3.3 montre que $\overline{\text{conv}}(P) = \overline{\text{conv}(P)}$. Passons au théorème proprement dit.

Théorème 1.4.1 (Krein-Milman, AC, [2]). *Si C est un convexe compact non-vide de E , alors $\text{ext}(C) \neq \emptyset$ et $C = \overline{\text{conv}}(\text{ext}(C))$.*

14. Pour rappel, une chaîne de $\mathcal{C}$ est une partie de $\mathcal{C}$ totalement ordonnée.

15. Une famille $\mathcal{P}$ de sous-ensembles de E possède la propriété d'intersection finie si toute partie finie $\mathcal{P}'$ de $\mathcal{P}$ vérifie $\cap \mathcal{P}' \neq \emptyset$. De plus, un espace E est compact si et seulement si toute famille de fermés possédant la propriété d'intersection finie est d'intersection non-vide.

Démonstration. 1) $\text{ext}(C) \neq \emptyset$: Montrons que C est une partie extrême de C . En effet, la définition montre bien que tout point de C n'est intérieur à aucun segment dont l'une des extrémités prise dans $C \setminus C = \emptyset$. On conclut par le lemme 1.4.1.

2) $C = \overline{\text{conv}}(\text{ext}(C))$: Comme C est un convexe fermé, on a $C \supset \overline{\text{conv}}(\text{ext}(C))$. Pour l'autre inclusion, procédons par l'absurde. Supposons qu'il existe $x \in C$ tel que $x \notin \overline{\text{conv}}(\text{ext}(C))$. On peut alors fortement séparer x de $\overline{\text{conv}}(\text{ext}(C))$. Il existe $\xi \in E^* \setminus \{0\}$ tel que

$$\langle \xi, x \rangle > \sup_{y \in \overline{\text{conv}}(\text{ext}(C))} \langle \xi, y \rangle. \quad (*)$$

Comme C est compact, $\sup_{y \in C} \langle \xi, y \rangle$ est réalisé en un point de C . On note M cette borne supérieure et $P = \{y \in C : \langle \xi, y \rangle = M\}$. En utilisant le même raisonnement que la fin de la preuve du lemme 1.4.1, on voit que P est une partie extrême de C . On voit aussi que P est compact dans E . Vu (*), il est clair que $P \subset C \setminus \overline{\text{conv}}(\text{ext}(C))$ (sinon, $\langle \xi, x \rangle > M$). Le lemme 1.4.1 affirme que P contient un point extrême de C . Mais comme $P \cap \overline{\text{conv}}(\text{ext}(C)) = \emptyset$, on a une absurdité. $\square$

Lorsque la dimension de E est finie, le théorème de Krein-Milman ne fait plus intervenir l'adhérence de l'enveloppe convexe. Comme nous allons le voir, ce résultat ne nécessite pas l'utilisation de l'axiome du choix.

Théorème 1.4.2 (Krein-Milman en dimension finie, [17]). *Supposons que E est de dimension finie. Si C est un convexe compact non-vidé de E , alors $\text{ext}(C) \neq \emptyset$ et $C = \text{conv}(\text{ext}(C))$.*

Démonstration. Procédons par récurrence sur la dimension n de E . Si $n = 1$, alors $E = \mathbb{R}x_0$ pour un $x_0 \neq 0$ et C ne peut être qu'un segment ou un singleton. Le cas du singleton est trivial. Si C est un segment, alors il s'écrit $[x, y]$ et on voit facilement que $\text{ext}(C) = \{x, y\}$, ce qui donne bien $C = \text{conv}(\text{ext}(C))$. Supposons que la proposition est valable lorsque $\dim E \leq n$ et montrons-la lorsque $\dim E = n + 1$. Nous pouvons aussi supposer que $\dim C = \dim E = n + 1$. Si $\dim C < \dim E$, nous pouvons nous restreindre au sous-espace de Banach $E' = \overline{\text{aff}(C)}$ ¹⁶ et considérer le convexe translaté $C' = C - a$ pour un $a \in \text{aff}(C)$. Comme $\text{ext}(C - a) = \text{ext}(C) - a$ et $\text{conv}(\text{ext}(C) - a) = \text{conv}(\text{ext}(C)) - a$, nous savons appliquer l'hypothèse de récurrence à C' et E' puis obtenir la propriété sur C et E par translation. Donc, faisons l'hypothèse supplémentaire que $\dim C = \dim E = n + 1$. De cette façon, comme C est non-vidé, il doit être d'intérieur non-vidé. En effet, C possède $n + 2$ points $a_0, \dots, a_{n+1}$ qui sont affinement indépendants par la proposition 1.2.7. Le simplexe $\text{conv}(\{a_0, \dots, a_{n+1}\})$ est d'intérieur non-vidé car

$$\text{conv}(\{a_0, \dots, a_{n+1}\})^\circ = \left\{ \sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i a_i : \lambda_i > 0 \forall i \in \{0, \dots, n+1\} \text{ et } \lambda_0 + \dots + \lambda_{n+1} = 1 \right\}$$

par la proposition 1.4.1. Montrons que $C \subset \text{conv}(\text{ext}(C))$, l'autre inclusion étant évidente. Soit $x \in C$. Nous distinguons deux cas.

Tout d'abord, supposons que $x \in C^\bullet$. Par le corollaire 1.3.1., x appartient à un ensemble d'appui de C . Il existe donc un hyperplan d'appui de C que nous notons H et qui est tel

¹⁶. On rappelle que tout sous-espace vectoriel fermé d'un espace complet est complet. Vu le corollaire 1.2.2., le sous-espace E' est fermé, donc de Banach.

que $x \in H \cap C$. Nous constatons que $H \cap C$ est un ensemble convexe de dimension inférieure ou égale à n puisque $H \cap C \subset H$ et $\dim H = n$. L'hypothèse de récurrence montre que $x \in \text{conv}(\text{ext}(H \cap C))$. La proposition 1.4.3 nous donne l'inclusion $\text{ext}(H \cap C) \subset \text{ext}(C)$ et donc $\text{conv}(\text{ext}(H \cap C)) \subset \text{conv}(\text{ext}(C))$, ce qui permet de conclure que $x \in \text{conv}(\text{ext}(C))$.

Pour le second cas, nous avons $x \in C^\circ$. Il existe $y, z \in C^\bullet$ tels que $x \in [y, z]$. De fait, soient $y \in C^\bullet$ ¹⁷ et $\mathcal{D}_{x,y} = x + \mathbb{R}(x - y)$ la droite passant par x et y . Dans ce cas, la demi-droite $x + \mathbb{R}^+(x - y)$ doit passer par un point z de $C^\bullet$. Sinon, cette demi-droite est incluse dans $E \setminus C^\bullet$, ce qui montre qu'elle est dans l'union de deux ouverts disjoints non-vides. Mais ceci contredit la connexité de $x + \mathbb{R}^+(x - y)$. Vu le cas précédent, nous avons $y, z \in \text{conv}(\text{ext}(C))$. Par convexité, on conclut que $x \in \text{conv}(\text{ext}(C))$. $\square$

On a la proposition suivante qui est intuitive.

Proposition 1.4.4. *Si E est de dimension finie et C est un convexe compact non-vide, alors $\text{ext}(C)$ est un ensemble minimal pour l'inclusion parmi tous les ensembles $S \subset C$ tels que $\text{conv}(S) = C$.*

Démonstration. Soit S une partie de C telle que $C = \text{conv}(S)$. Montrons que $\text{ext}(C) \subset S$. Si $x \notin S$, alors on a deux cas. Soit $x \notin C$ et donc $x \notin \text{ext}(C)$ de façon évidente. Soit $x \in C$ et donc il existe $x_1, \dots, x_n \in S$ avec $n \geq 2$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ tels que $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ et $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$. On a alors

$$x = \lambda_1 x_1 + (\lambda_2 + \dots + \lambda_n) \underbrace{\sum_{i=2}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_2 + \dots + \lambda_n} x_i}_{:= x_0}.$$

Par convexité, nous avons $x_0 \in C$. Ainsi, $x \in]x_0, x_1[$ avec $x_0 \in C$, $x_1 \in S \subset C$ et $x_0 \neq x_1$ (sinon $x = x_1 \in S$). Donc $x \notin \text{ext}(C)$. $\square$

Si la dimension de l'espace est infinie, le résultat est quelque peu différent.

Proposition 1.4.5 ([13]). *Si E est de dimension infinie et C est un convexe compact non-vide, alors $\text{ext}(C) \subset \overline{S}$ pour tout $S \subset C$ tel que $C = \overline{\text{conv}}(S)$.*

Démonstration. Soit $x \in \text{ext}(C)$ et fixons $\varepsilon > 0$. Montrons que $x \in S_\varepsilon$ où $S_\varepsilon = S + \overline{B}(0, \varepsilon)$. L'ensemble $\{B(y, \varepsilon) : y \in \overline{S}\}$ est un recouvrement ouvert de $\overline{S}$ qui est compact. On peut donc extraire un recouvrement fini $\{B(y_i, \varepsilon) : i \in \{1, \dots, n\}\}$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, posons $S_i = \overline{\text{conv}}(S \cap B(y_i, \varepsilon))$. Le convexe S_i étant fermé et inclus dans le compact C , on en tire que S_i est compact.

L'ensemble $\text{conv}(\cup_{i=1}^n S_i)$ est clairement convexe. Montrons qu'il est aussi compact. Si $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de $\text{conv}(\cup_{i=1}^n S_i)$, alors il existe $x_1^{(k)}, \dots, x_m^{(k)} \in \cup_{i=1}^n S_i$ et $\lambda_1^{(k)}, \dots, \lambda_m^{(k)} \geq 0$ tels que $\sum_{i=1}^m \lambda_i^{(k)} = 1$ et $y_k = \sum_{i=1}^m \lambda_i^{(k)} x_i^{(k)}$. Comme $\cup_{i=1}^n S_i$ est une union finie de compacts, cet ensemble est compact. Donc, on peut extraire une sous-suite $(x_1^{(l_1(k))})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(x_1^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un point $x_1 \in \cup_{i=1}^n S_i$. Comme la suite $(\lambda_1^{(l_1(k))})_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée par 1, elle admet une sous-suite $(\lambda_1^{(r_1(l_1(k)))})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un réel λ_1 . On procède de la même façon pour les suites

17. La frontière de C ne peut être vide. Sinon C est ouvert. Mais il est aussi fermé car il est compact dans E qui est séparé. De plus, comme E est connexe, on sait que les seuls ouverts fermés sont le vide et l'espace tout entier et par conséquent, $C = E$. Donc E est compact, ce qui est une contradiction.

$(x_2^{(r_1(l_1(k)))})_{k \in \mathbb{N}}$ et $(\lambda_2^{(r_1(l_1(k)))})_{k \in \mathbb{N}}$. On continue ainsi de proche en proche. Au final, la suite $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite $(y_{l(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \in \text{conv}(\cup_{i=1}^n S_i)$, ce qui montre que $\text{conv}(\cup_{i=1}^n S_i)$ est compact.

Ensuite, on montre que $C = \text{conv}(\cup_{i=1}^n S_i)$. En effet, si $y \in C$, alors y est une combinaison convexe d'éléments de S et on voit directement que $S \subset \cup_{i=1}^n S_i$, ce qui montre que $C \subset \text{conv}(\cup_{i=1}^n S_i)$. L'autre inclusion est triviale.

Si $x \in \text{ext}(C)$, alors il existe des points distincts $b_1, \dots, b_m \in \cup_{i=1}^n S_i$ et des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_m > 0$ tels que $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ et $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i b_i$. Parmi ces représentations, on choisit celle pour laquelle le nombre de termes m est minimal. Si $m \geq 2$, alors

$$x = \lambda_1 b_1 + (\lambda_2 + \dots + \lambda_m) \underbrace{\left(\frac{\lambda_2}{\sum_{i=2}^m \lambda_i} b_2 + \dots + \frac{\lambda_m}{\sum_{i=2}^m \lambda_i} b_m \right)}_{:= b_0}.$$

Vu la minimalité de m , on a $b_0 \neq b_1$. Par conséquent, $x \in]b_0, b_1[$, ce qui contredit l'extrémalité de x . Donc $m = 1$ et $x = b_1$. Il existe alors $i \in \{1, \dots, m\}$ tel que $x \in S_i = \overline{\text{conv}}(S \cap B(y_i, \varepsilon)) \subset \overline{B}(y_i, \varepsilon) \subset S_\varepsilon$. La première inclusion provient du fait que $\overline{B}(y_i, \varepsilon)$ est un ensemble convexe fermé contenant $S \cap B(y_i, \varepsilon)$. Ceci nous montre que $x \in S_\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. On en tire finalement que $x \in \overline{S}$. D'où $\text{ext}(C) \subset \overline{S}$. $\square$

Nous verrons plus tard que la notion de point extrême joue un rôle important dans l'étude des maxima d'une fonction convexe.

Chapitre 2

Topologies faibles et espaces de Banach réflexifs

Comme il a été dit dans le chapitre précédent, l'espace de Banach E est supposé muni d'une structure de $\mathbb{R}$ -vectoriel et de la topologie d'espace métrique obtenu à partir de sa norme $\|\cdot\|$. Pour cette topologie, les éléments du dual topologique E^* sont continus par définition. Il est possible de construire une autre topologie sur E moins fine que celle associée à la norme $\|\cdot\|$ et qui rend les éléments de E^* continus. Cette nouvelle topologie, dite "faible", sera étudiée dans cette section. Assez naturellement, on peut munir E^* d'une topologie semblable. Comme certains résultats des chapitres qui vont suivre ne seront valables que pour des espaces de Banach réflexifs, il est assez important de pouvoir décrire ces espaces. Nous verrons que les topologies faibles donnent lieu à d'importants théorèmes qui nous permettront de caractériser les espaces de Banach réflexifs. Les références sont forts variées. La structure du chapitre est basée sur [32] qui omet certaines preuves. Certaines preuves sont basées sur le point de vue de [2]. Le théorème d'Eberlein-Smulian étant très technique, nous avons préféré présenter une preuve longue, mais n'exigeant pas de prérequis trop importants [42]. De temps à autre, nous utilisons ponctuellement des preuves inspirées de [6] et [10]. De nouveau, E désignera un espace de Banach, sauf mention du contraire.

2.1 Topologie duale, faible et faible-*

Avant d'introduire ces nouvelles topologies, rappelons quelques faits essentiels d'analyse fonctionnelle. Les notions rappelées plus bas peuvent être retrouvées dans [2] et [40].

On rappelle que E est un *espace vectoriel topologique* si E est muni d'une topologie pour laquelle les opérations d'espace vectoriel $+: E \times E \rightarrow E$ et $\cdot: \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ sont continues. De plus, il est *localement convexe* si 0 possède une base de voisinages absorbant et absolument convexe. Une partie A de E est *absorbante* si pour tout $e \in E$, il existe $M > 0$ tel que $e \in \mu A$ si $|\mu| > M$. Une partie A de E est dite *absolument convexe* si pour tout $p \in \mathbb{N}_0$, tout $e_1, \dots, e_p \in A$ et tout $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que $|\lambda_1| + \dots + |\lambda_p| \leq 1$, on a $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p \in A$. Une application

$$p: E \rightarrow [0, +\infty[$$

est une *semi-norme* sur E si et seulement si $p(\lambda e) = |\lambda|p(e)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $e \in E$ et $p(e + f) \leq p(e) + p(f)$ pour tout $e, f \in E$. Une famille P de semi-normes peut être mu-

nie d'une relation de préordre (une relation réflexive et transitive) notée $\preceq$ et donnée par $p \preceq q \Leftrightarrow \exists C > 0 \ p \leq Cq$. Une famille P de semi-normes est *faiblement filtrante* si, pour tout $p_1, p_2 \in P$, il existe $p_3 \in P$ tel que $p_1 \preceq p_3$ et $p_2 \preceq p_3$. Une famille P faiblement filtrante de semi-normes sur E induisent une topologie sur E dont les bases de voisinages sont données par les semi-boules $B_p(x, \varepsilon) = \{e \in E : p(e - x) < \varepsilon\}$. On sait montrer que E est un espace vectoriel topologique localement convexe si et seulement si sa topologie est induite par une famille faiblement filtrante de semi-normes. Une telle famille de semi-normes est appelée *système fondamental de semi-normes de E* . Si E et F sont des espaces vectoriels topologiques localement convexes induits par les familles de semi-normes P et Q respectivement, alors une application $T : E \rightarrow F$ est continue si et seulement si, pour tout $q \in Q$, il existe $C > 0$ et $p \in P$ tels que $q \circ T \leq Cp$.

Pour commencer, voyons comment nous pouvons associer une norme à l'espace dual d'un espace de Banach. Comme les éléments de E^* sont continus, pour tout $\xi \in E^*$, il existe $C > 0$ tel que $|\langle \xi, x \rangle| \leq C\|x\|$ pour tout $x \in E$. Donc, $|\langle \xi, x \rangle| \leq C$ pour tout $x \in \overline{B}(0, 1)$. Ceci nous montre que

$$\sup_{\|x\| \leq 1} |\langle \xi, x \rangle| < +\infty$$

pour tout $\xi \in E^*$.

Définition 2.1.1. Si E est un espace de Banach associé à la norme $\|\cdot\|$, alors la *norme duale* de E est l'application

$$\|\cdot\|_* : \xi \in E^* \mapsto \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle \xi, x \rangle| \in [0, +\infty[.$$

Naturellement, il nous faut procéder à des vérifications.

Proposition 2.1.1. La norme duale de E est une norme sur E^* .

Démonstration. Si $\xi \in E^*$ et $r \in \mathbb{R}$, alors

$$\|r\xi\|_* = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle r\xi, x \rangle| = \sup_{\|x\| \leq 1} |r| |\langle \xi, x \rangle| = |r| \|\xi\|_*.$$

Pour l'inégalité triangulaire, soient $\xi_1, \xi_2 \in E^*$, on a

$$\|\xi_1 + \xi_2\|_* = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle \xi_1 + \xi_2, x \rangle| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle \xi_1, x \rangle + \langle \xi_2, x \rangle| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} (|\langle \xi_1, x \rangle| + |\langle \xi_2, x \rangle|) \leq \|\xi_1\|_* + \|\xi_2\|_*.$$

Enfin, supposons que $\xi \in E^*$ et $\|\xi\|_* = 0$. Montrons que $\xi = 0$. Par définition, on a $|\langle \xi, x \rangle| = 0$ pour tout $x \in \overline{B}(0, 1)$. Donc $\xi = 0$ sur $\overline{B}(0, 1)$. Par linéarité, $\xi = 0$ sur E , d'où la conclusion. $\square$

Proposition 2.1.2. Si $(E, \|\cdot\|)$ est de Banach, alors $(E^*, \|\cdot\|_*)$ est de Banach.

Démonstration. Il suffit de montrer que E^* est complet pour la norme duale. Soit $(\xi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans E^* . Soit $x \in E$. On voit que

$$|\langle \xi_r, x \rangle - \langle \xi_s, x \rangle| = |\langle \xi_r - \xi_s, x \rangle| = \|x\| \left| \left\langle \xi_r - \xi_s, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \right| \leq \|x\| \sup_{\|z\| \leq 1} |\langle \xi_r - \xi_s, z \rangle| \rightarrow 0$$

si $r, s \rightarrow +\infty$. Donc, la suite numérique $(\langle \xi_m, x \rangle)_{m \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy et converge dans $\mathbb{R}$ vers une limite finie que l'on va noter $\langle \xi, x \rangle$. On définit

$$\xi : x \in E \mapsto \lim_{m \rightarrow +\infty} \langle \xi_m, x \rangle \in \mathbb{R}.$$

Comme la somme et la multiplication scalaire sont continues, l'application ξ est linéaire. Elle est aussi continue. En effet, soit $\varepsilon > 0$ et $x_0 \in E$. Alors

$$|\langle \xi, x \rangle - \langle \xi, x_0 \rangle| \leq |\langle \xi, x \rangle - \langle \xi_n, x \rangle| + |\langle \xi_n, x \rangle - \langle \xi_n, x_0 \rangle| + |\langle \xi_n, x_0 \rangle - \langle \xi, x_0 \rangle|.$$

Il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que $|\langle \xi_n, x \rangle - \langle \xi, x \rangle| < \varepsilon/3$ si $n \geq N_1$ et $|\langle \xi_n, x_0 \rangle - \langle \xi, x_0 \rangle| < \varepsilon/3$ si $n \geq N_2$ (E3). Posons $N = \max(N_1, N_2)$. On a donc

$$|\langle \xi, x \rangle - \langle \xi, x_0 \rangle| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + |\langle \xi_N, x - x_0 \rangle|.$$

Comme ξ_N est linéaire et continu, il existe $C_N > 0$ tel que $|\langle \xi_N, y \rangle| \leq C_N \|y\|$ pour tout $y \in E$. On a alors $|\langle \xi, x \rangle - \langle \xi, x_0 \rangle| \leq \varepsilon$ si $\|x - x_0\| < \varepsilon/(3C_N)$, ce qui montre la continuité de ξ . Il reste à montrer que ξ_n converge vers ξ dans $(E^*, \|\cdot\|_*)$. Fixons $\varepsilon > 0$. Comme $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|\xi_n - \xi_m\|_* < \varepsilon$ si $m, n \geq N$. Nous avons d'abord

$$|\langle \xi_n, x \rangle - \langle \xi_m, x \rangle| = |\langle \xi_n - \xi_m, x \rangle| \leq \|x\| \|\xi_n - \xi_m\|_* < \varepsilon \|x\| \quad \forall x \in E$$

si $m, n \geq N$. Si $n \rightarrow +\infty$, on obtient $|\langle \xi_m, x \rangle - \langle \xi, x \rangle| \leq \varepsilon \|x\|$ lorsque $m \geq N$. Si, de plus, $\|x\| \leq 1$, alors $|\langle \xi_m, x \rangle - \langle \xi, x \rangle| < \varepsilon$ si $m \geq N$. On en tire que $\|\xi_m - \xi\|_* \leq \varepsilon$ si $m \geq N$, d'où la conclusion. $\square$

Etant donné un espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$, nous savons que les éléments de E^* sont continus par définition. Outre la topologie d'espace de Banach, il existe d'autres topologies pour lesquelles les éléments de E^* sont continus. Considérons la topologie la moins fine possible qui rend les éléments de E^* continus. Elle est donnée par

$$\sigma(E, E^*) = \{\cup_{i \in I} \cap_{j \in J} \xi_{ij}^{-1}(U_{ij}) : I \text{ ensemble, } J \text{ ensemble fini, } \xi_{ij} \in E^*, U_{ij} \text{ ouvert de } \mathbb{R}\}$$

Nous adoptons la définition suivante.

Définition 2.1.2. Si E est un espace de Banach, alors $\sigma(E, E^*)$ est la *topologie faible* de E . Toute partie U de E qui est ouverte (resp. fermée) pour cette topologie est dite *faiblement ouverte* (resp. *faiblement fermée*). Toute suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ qui converge vers x pour la topologie faible sera dite *faiblement convergente* vers x et nous noterons cela $x_n \rightharpoonup x$. Par opposition, on dira que la topologie d'espace vectoriel normé qui fait de E un espace de Banach est la *topologie forte*.

Pour commencer, voyons comment on peut formuler simplement la convergence faible de suites. Rappelons la définition de la convergence dans un espace topologique quelconque. Les propriétés de base de la topologie générale peuvent être retrouvées dans [27] et [43].

Définition 2.1.3. Soit X un espace topologique. Une suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de X converge vers x si, pour tout voisinage V de x , il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $x_m \in V$ pour tout $m \geq M$.

Proposition 2.1.3. Une suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de E converge faiblement vers x si et seulement si

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \langle \xi, x_m \rangle = \langle \xi, x \rangle \quad \forall \xi \in E^*.$$

Démonstration. La condition est nécessaire. En effet, supposons que $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers x et fixons $\xi \in E^*$. Soit U un voisinage de $\langle \xi, x \rangle$ dans $\mathbb{R}$ pour la topologie euclidienne. Par continuité, $\xi^{-1}(U)$ est un voisinage faible de x . Par hypothèse, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $x_m \in \xi^{-1}(U)$ pour tout $m \geq M$, et finalement, $\langle \xi, x_m \rangle \in U$ pour tout $m \geq M$. Montrons la suffisance de la condition. Supposons que $\langle \xi, x_m \rangle \rightarrow \langle \xi, x \rangle$ si $m \rightarrow +\infty$ pour tout $\xi \in E^*$. Soit V un voisinage ouvert faible de x et trouvons $M \in \mathbb{N}$ tel que $x_m \in V$ pour tout $m \geq M$ pour conclure. On sait qu'il existe un ouvert U de $\mathbb{R}$ et $\xi \in E^*$ tels que $V \supset \xi^{-1}(U) \ni x$. Donc, $\langle \xi, x \rangle \in U$. Par hypothèse, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $\langle \xi, x_m \rangle \in U$ pour tout $m \geq M$. Autrement dit, on a $x_m \in \xi^{-1}(U) \subset V$ pour tout $m \geq M$, d'où la conclusion. $\square$

Examinons les principales propriétés de ces espaces.

Proposition 2.1.4 (AC). *L'espace $(E, \sigma(E, E^*))$ est séparé.*

Démonstration. Soient x et y deux points distincts de E . Par le théorème de séparation forte, il existe $\xi \in E^* \setminus \{0\}$ tel que $\langle \xi, x \rangle < \langle \xi, y \rangle$. Il existe U_1 et U_2 des voisinages ouverts disjoints de $\langle \xi, x \rangle$ et de $\langle \xi, y \rangle$ respectivement car $\mathbb{R}$, muni de la topologie euclidienne, est séparé. On voit alors que $\xi^{-1}(U_1)$ est un ouvert contenant x , $\xi^{-1}(U_2)$ est un ouvert contenant y et $\xi^{-1}(U_1) \cap \xi^{-1}(U_2) = \emptyset$, ce qui permet de conclure. $\square$

Proposition 2.1.5. *Tout ensemble U faiblement ouvert (resp. faiblement fermé) dans E est fortement ouvert (resp. fermé) dans E .*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des définitions de E^* et $\sigma(E, E^*)$. $\square$

Proposition 2.1.6. *Si E est de dimension finie n , la topologie faible et la topologie forte de E sont équivalentes.*

Démonstration. La proposition précédente montre que tout ouvert de $(E, \sigma(E, E^*))$ est un ouvert de $(E, \|\cdot\|)$. Soient $x \in E$ et $\varepsilon > 0$. Il suffit de trouver un voisinage de x faiblement ouvert et inclus dans $B(x, \varepsilon)$ pour conclure. Fixons une base $e_1, \dots, e_n$ de E . On peut supposer que la base est normée. Comme on est en dimension finie, le lemme 1.2.2 montre que nous pouvons supposer que la norme est donnée par

$$\|y\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |y_i|$$

si $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$. Le choix de cette norme nous apportera beaucoup de facilité dans la preuve. Intuitivement, une boule pour cette norme est décrite par un "carré" et comme les ouverts de base de la topologie faible sont des intersections finies de demi-espaces, on pourra facilement décrire les ouverts de la topologie normée comme intersection finie d'ouverts de la topologie faible.

Notons $e_1^*, \dots, e_n^*$ la base duale de $e_1, \dots, e_n$ ¹. Comme la dimension est finie, toute forme linéaire sur $\mathbb{R}$ est continue. Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on pose

$$H_j^+ = \{y \in E : \langle e_j^*, y \rangle < x_j + \varepsilon\} \quad \text{et} \quad H_j^- = \{y \in E : \langle e_j^*, y \rangle > x_j - \varepsilon\}.$$

Il est aisé de vérifier que

$$B(x, \varepsilon) = \bigcap_{j=1}^n (H_j^+ \cap H_j^-),$$

la conclusion en découle. $\square$

1. Rappelons que si $e_1, \dots, e_n$ est une base, alors sa base duale $e_1^*, \dots, e_n^*$ dans E^* est définie par $\langle e_i^*, e_j \rangle = \delta_{ij}$ pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$ et on étend e_j^* par linéarité à tout E .

Comme les deux topologies coïncident, la topologie faible est métrisable. Assez naturellement, nous pouvons nous demander si cette topologie est métrisable en dimension infinie. La proposition 2.1.7 montre qu'il n'en est rien. Avant cela, démontrons deux résultats intermédiaires. Le premier est le théorème de Banach-Steinhaus.

Théorème 2.1.1 (Banach-Steinhaus, **AC**, [2]). *Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace vectoriel normé. Soit $\mathcal{L}$ une famille non-vide d'applications linéaires continues de E à valeur dans F . Alors*

$$\sup_{T \in \mathcal{L}} \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\|_F < +\infty$$

si et seulement si $\mathcal{L}$ est ponctuellement borné, i.e.

$$\sup_{T \in \mathcal{L}} \|T(x)\|_F < +\infty \quad \forall x \in E.$$

Démonstration. La condition est nécessaire. Supposons qu'il existe $M > 0$ tel que

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\|_F \leq M \quad \forall T \in \mathcal{L}.$$

Fixons $x \in E$. Le cas où $x = 0$ étant évident, supposons que $x \neq 0$. On obtient

$$\|T(x)\|_F = \|x\| \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\|_F \leq M \|x\| \quad \forall T \in \mathcal{L},$$

ce qui montre que $\mathcal{L}$ est ponctuellement borné. La condition est aussi suffisante. Supposons que $\mathcal{L}$ est ponctuellement borné et posons

$$F_m = \{x \in E : \|T(x)\|_F \leq m \quad \forall T \in \mathcal{L}\}$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$. Comme $\mathcal{L}$ est ponctuellement borné, on a $E = \bigcup_{m=0}^{+\infty} F_m$. De plus, les ensembles F_m sont fermés. L'espace E étant métrique et complet, il est de Baire². Par conséquent, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que F_m est un fermé d'intérieur non-vide (sinon, E est d'intérieur vide, ce qui est impossible). Il existe $x \in F_m$ et $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{B}(x, \varepsilon) \subset F_m$. Soient $T \in \mathcal{L}$ et $y \in E$ tels que $\|y\| \leq 1$. On a $\|(x + \varepsilon y) - x\| \leq \varepsilon$. On en tire que $\|T(x + \varepsilon y)\|_F \leq m$ et

$$\|T(y)\|_F = \frac{1}{\varepsilon} \|T(x + \varepsilon y) - T(x)\|_F \leq \frac{1}{\varepsilon} (\|T(x + \varepsilon y)\|_F + \|T(x)\|_F) \leq \frac{2m}{\varepsilon}.$$

Comme ce dernier majorant est indépendant de y et de T , on a la conclusion. $\square$

Lemme 2.1.1 ([2]). *Soient $\xi_1, \dots, \xi_n$ des formes linéaires réelles sur un espace vectoriel E . Une forme linéaire ξ réelle sur E est combinaison linéaire de $\xi_1, \dots, \xi_n$ si et seulement si*

$$\bigcap_{i=1}^n \ker \xi_i \subset \ker \xi.$$

2. On rappelle qu'un espace topologique X est de Baire si toute union dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide. De plus, le théorème de Baire (**AC**) dit que tout espace métrique complet est de Baire [27].

Démonstration. Supposons d'abord que $\xi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \cap_{i=1}^n \ker \xi_i$. On a $\langle \xi, x \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle \xi_i, x \rangle = 0$, ce qui montre la nécessité de la condition. La condition est suffisante. Supposons que $\cap_{i=1}^n \ker \xi_i \subset \ker \xi$ et définissons les applications linéaires

$$T : x \in E \mapsto (\langle \xi_1, x \rangle, \dots, \langle \xi_n, x \rangle) \in \mathbb{R}^n$$

et

$$S : y \in T(E) \mapsto \langle \xi, x \rangle \in \mathbb{R} \quad \text{si } y = T(x).$$

Il faut vérifier que la définition de $S(y)$ est indépendante du point $x \in T^{-1}(y)$ considéré. Si $T(x) = T(x')$, alors par construction, on a $\langle \xi_i, x \rangle = \langle \xi_i, x' \rangle$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Donc, $\langle \xi_i, x - x' \rangle = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Par hypothèse, on a donc $\langle \xi, x - x' \rangle = 0$, c'est-à-dire $\langle \xi, x \rangle = \langle \xi, x' \rangle$ et l'application S est bien définie et $S(\langle \xi_1, x \rangle, \dots, \langle \xi_n, x \rangle) = \langle \xi, x \rangle$ pour tout $x \in E$. L'espace vectoriel $T(E)$ est de dimension finie car c'est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$. Notons $u_1, \dots, u_k$ une base de $T(E)$ et complétons-la par $u_{k+1}, \dots, u_n$ pour avoir une base de $\mathbb{R}^n$. Notons $\lambda_i = S(u_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$ et posons $S(u_i) = 0 = \lambda_i$ si $i \in \{k+1, \dots, n\}$. De cette façon, S est étendu linéairement en une application $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. En prenant la base canonique de $\mathbb{R}^n$, la matrice représentant S prend la forme $(\mu_1 \cdots \mu_n)$ en multipliant $(\lambda_1 \cdots \lambda_n)$ par une matrice de changement de base. Il vient $\langle \xi, x \rangle = S(\langle \xi_1, x \rangle, \dots, \langle \xi_n, x \rangle) = \sum_{i=1}^n \mu_i \langle \xi_i, x \rangle = \langle \sum_{i=1}^n \mu_i \xi_i, x \rangle$ pour tout $x \in E$. On conclut que ξ est combinaison linéaire de $\xi_1, \dots, \xi_n$. $\square$

Proposition 2.1.7 (AC, [2]). *Soit E un espace de Banach. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *L'espace vectoriel E est de dimension finie.*
- (ii) *La topologie faible et la topologie forte coïncident.*
- (iii) *L'espace E muni de la topologie faible est métrisable.*
- (iv) *L'espace E muni de la topologie faible est à base dénombrable de voisinages.*

Démonstration. L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) résulte de la proposition 2.1.3. Les implications (ii) $\Rightarrow$ (iii) et (iii) $\Rightarrow$ (iv) sont évidentes. Montrons que (iv) $\Rightarrow$ (i). Supposons que $(E, \sigma(E, E^*))$ possède en chaque point des bases dénombrables de voisinages. L'ensemble

$$\mathcal{B} = \{\cap_{j \in J} \xi_j^{-1}(]-1, 1]) : J \text{ fini}, \xi_j \in E^* \text{ pour tout } j \in J\}$$

est une base de voisinages faibles de 0. Les éléments de $\mathcal{B}$ sont clairement des voisinages faibles de 0. De plus, si V est voisinage faible de 0, alors il contient un ouvert faible contenant 0. Cet ouvert prend la forme $\cap_{j \in J} \xi_j^{-1}(U_j)$ avec J un ensemble fini, $\xi_j \in E^*$ et U_j un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0 pour tout $j \in J$. Nous pouvons supposer que U_j est un intervalle de la forme $] - a_j, a_j[$ avec $a_j > 0$ car U_j est un voisinage de 0. Quitte à diviser ξ_j par a_j , on peut supposer avoir $a_j = 1$. Ceci montre que $\mathcal{B}$ est bien une base de voisinages faibles de 0. Comme E est à base de voisinages faibles dénombrable en chacun de ses points, $\mathcal{B}$ contient une base de voisinages faibles de 0 dénombrable³. Notons $\mathcal{B}'$ cette base de voisinages dénombrable. On peut supposer que $\mathcal{B}' = \{V_i : i \in \mathbb{N}\}$. Quitte à considérer $V_1 \cap \dots \cap V_i$ au lieu de V_i , nous pouvons supposer que :

- V_0 s'écrit $\cap_{j \in J_0} \xi_j^{-1}(]-1, 1])$ avec J_0 un ensemble fini et $\xi_j \in E^*$ pour tout $j \in J_0$.
- pour tout $i \in \mathbb{N}_0$, V_i s'écrit $\cap_{j \in J_i} \xi_j^{-1}(]-1, 1])$ avec J_i un ensemble fini contenant J_{i-1} .

3. Si X est un espace topologique à bases dénombrables de voisinages, alors toute base de voisinage de $x \in X$ possède un sous-ensemble dénombrable formant une base de voisinages de x [27].

De plus, l'ensemble $\cup_{i \in \mathbb{N}} J_i$ est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$. En effet, les ensembles J_i sont finis, et il existe une bijection f_i entre J_i et une partie A_i de $\mathbb{N}$, mais comme $J_i \subset J_{i+1}$, on peut étendre f_i en une bijection f_{i+1} entre J_{i+1} et une partie finie A_{i+1} de $\mathbb{N}$ contenant A_i . On définit donc l'application $f : \cup_{i \in \mathbb{N}} J_i \rightarrow \mathbb{N}$ en posant $f(x) = f_i(x)$ si $x \in J_i$. Cette application est injective. Si $f(x) = f(y)$, alors on a $x \in J_i$ et $y \in J_j$ pour certains naturels i, j . Donc, $f(x) = f_i(x)$ et $f(y) = f_j(y)$. Supposons que $i < j$. Comme $J_i \subset J_j$, on a $f_i(x) = f_j(x)$. Donc, $f_j(x) = f_j(y)$. Vu que f_j est une bijection entre des ensembles finis, on a $x = y$. Puisque f est injectif, c'est une bijection avec une partie de $\mathbb{N}$. Ceci montre la dénombrabilité de $\cup_{i \in \mathbb{N}} J_i$. On peut donc supposer que $\{\xi_j : j \in \cup_{i \in \mathbb{N}} J_i\}$ s'écrit $\{\zeta_i : i \in \mathbb{N}\}$. On montre alors que les ensembles

$$U_n = \cap_{j=0}^n \zeta_j^{-1}(]-1, 1[)$$

forment une base dénombrable de voisinages faibles de 0. En effet, si W est voisinage de 0, il contient un élément $V_i = \cap_{j \in J_i} \zeta_j^{-1}(]-1, 1[)$ de $\mathcal{B}'$. Comme J_i est un ensemble fini, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\{\zeta_k^{-1}(]-1, 1[) : 0 \leq k \leq n\} \supset \{\zeta_j^{-1}(]-1, 1[) : j \in J_i\}$ et donc $U_n \subset V_i \subset W$.

Par l'absurde, supposons que E n'est pas de dimension finie. Alors $\cap_{i=0}^n \ker \zeta_i \neq \{0\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Sinon, $\cap_{i=0}^n \ker \zeta_i = \{0\} \subset \ker \xi$ pour tout $\xi \in E^*$. Le lemme 2.1.1 montre alors que tout élément de E^* est combinaison linéaire de $\zeta_0, \dots, \zeta_n$. Donc, E^* admet une partie génératrice finie et celle-ci doit contenir une base, ce qui montre que $\dim E^*$ est fini. Dans ce cas, E^{**} est aussi de dimension finie (il suffit de passer à la base duale de celle de E^*). On en tire que E est aussi de dimension finie car l'application

$$\mathcal{J} : x \in E \mapsto \mathcal{J}_x \in E^{**} \quad \text{avec } \mathcal{J}_x(\xi) = \langle \xi, x \rangle \text{ pour tout } \xi \in E^*$$

est linéaire et injective (E est alors isomorphe à un sous-espace de E^{**}). Pour voir l'injectivité, soit $x \in E$ tel que $\mathcal{J}_x = 0$, i.e. $\langle \xi, x \rangle = 0$ pour tout $\xi \in E^*$. Comme E admet une base (infinie) $(e_i)_{i \in I}$, pour tout $i \in I$, il existe $x_i \in \mathbb{R}$ avec un nombre fini de $x_i \neq 0$ tels que $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$. On obtient $\sum_{i \in I} x_i \langle \xi, e_i \rangle = 0$ pour tout $\xi \in E^*$. En particulier, si $\xi = e_j^*$, on a $0 = x_j$ pour tout $j \in I$. Donc, $x = 0$ et $\mathcal{J}$ est injectif. Donc, E est de dimension finie, ce qui contredit le fait que E est de dimension infinie. On a ainsi montré que $\cap_{i=0}^n \ker \zeta_i \neq \{0\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $x_n \in \cap_{i=0}^n \ker \zeta_i \setminus \{0\}$. On peut donc supposer que $\|x_n\| = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a $x_n \rightarrow 0$. De fait, si $N \in \mathbb{N}$, alors $x_n \in U_N$ pour tout $n \geq N$. La proposition 2.1.3 montre que l'on a $\langle \xi, x_n \rangle \rightarrow 0$ pour tout $\xi \in E^*$. Les suites $(\langle \xi, x_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ sont bornées pour tout $\xi \in E^*$. De plus, les applications $\mathcal{J}_{x_n} : E^* \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues lorsque E^* est muni de la topologie induite par la norme duale. En effet, on a

$$|\mathcal{J}_{x_n}(\xi)| = |\langle \xi, x_n \rangle| = n |\langle \xi, \frac{x_n}{n} \rangle| \leq n \|\xi\|_* \quad \forall \xi \in E^*.$$

Cela montre que $\mathcal{L} = \{\mathcal{J}_{x_n} : n \in \mathbb{N}\}$ est une famille d'applications linéaires continues et elle est ponctuellement bornée sur E^* car $(\langle \xi, x_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Nous savons évidemment que E^* est un espace de Banach. Par le théorème de Banach-Steinhaus, on en tire que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{\|\xi\|_* \leq 1} |\mathcal{J}_{x_n}(\xi)| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{\|\xi\|_* \leq 1} |\langle \xi, x_n \rangle| < +\infty \quad (*)$$

Remarquons que $\mathcal{J} : x \in E \mapsto \mathcal{J}_x \in E^{**}$ est une isométrie lorsque le bidual E^{**} est muni de la norme duale de E^* , à savoir

$$\|\zeta\|_{**} = \sup_{\|\xi\|_* \leq 1} |\langle \zeta, \xi \rangle| \quad \forall \zeta \in E^{**}.$$

De fait, on a d'une part

$$\|\mathcal{J}_x\|_{**} = \sup_{\|\xi\|_* \leq 1} |\langle \xi, x \rangle| = \|x\| \sup_{\|\xi\|_* \leq 1} |\langle \xi, \frac{x}{\|x\|} \rangle| \leq \|x\|.$$

D'autre part, si on définit $\xi'(rx) = r\|x\|$ pour tout $r \in \mathbb{R}$, alors on a une application linéaire continue $\xi' : \mathbb{R}x \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\xi'(rx) = r\|x\| \leq \|rx\|$ et le théorème de Hahn-Banach assure l'existence d'une extension ξ'' de ξ' à l'espace E entier de telle sorte que $\xi''(y) \leq \|y\|$ pour tout $y \in E$. Vu que $\xi''(x) = \|x\|$ et que $\|\xi''\|_* \leq 1$, on en tire que

$$\|\mathcal{J}_x\|_{**} = \sup_{\|\xi\|_* \leq 1} |\langle \xi, x \rangle| \geq |\langle \xi'', x \rangle| = \|x\|.$$

Ainsi, par isométrie, on en tire que $\|\mathcal{J}_{x_n}\|_{**} = \|x_n\| = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc, on a $\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{\|\xi\|_* \leq 1} |\mathcal{J}_{x_n}(\xi)| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\mathcal{J}_{x_n}\|_{**} = +\infty$, une contradiction avec (*). Donc, E doit être de dimension finie. Ceci achève la preuve. $\square$

La proposition que l'on vient de montrer nous indique que la topologie faible ne peut donner un espace de Banach en dimension infinie. Chemin faisant, nous avons également fait l'observation suivante qui nous sera utile plus tard.

Proposition 2.1.8 (AC). *Soit E un espace de Banach, alors l'application*

$$\mathcal{J} : x \in E \mapsto \mathcal{J}_x \in E^{**} \quad \text{où } \mathcal{J}_x(\xi) = \langle \xi, x \rangle \quad \forall \xi \in E^*$$

est une isométrie linéaire injective.

Sauf mention explicite du contraire, l'application $\mathcal{J}$ désignera toujours l'injection de la proposition 2.1.8 au cours de ce texte.

Nous avons vu que tout fermé faible est un fermé fort. La réciproque n'est pas nécessairement vraie. Toutefois, lorsque l'ensemble considéré est convexe, nous avons le résultat suivant.

Proposition 2.1.9 (AC,[32]). *Soit C une partie non-vide de E et soient les assertions suivantes :*

- (i) *C est faiblement fermé.*
- (ii) *C contient les limites de ses suites faiblement convergentes.*
- (iii) *C contient les limites de ses suites convergentes.*
- (iv) *C est fermé.*

On a les implications suivantes : (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv). Les assertions sont équivalentes si C est convexe.

Démonstration. Il est déjà connu que (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) et que (i) $\Rightarrow$ (iv). Montrons (ii) $\Rightarrow$ (iii). Soit $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de C qui converge vers x . Comme la topologie faible est moins fine que la topologie forte, la suite est aussi faiblement convergente vers x . Vu (ii), x appartient à C . Montrons (i) $\Rightarrow$ (ii). Soit $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de C faiblement convergente vers x et supposons par l'absurde que $x \notin C$. Comme $x_m \rightharpoonup x$, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $x_m \in E \setminus C$ si $m \geq M$ car $E \setminus C$ est un voisinage faiblement ouvert de x . On a une contradiction car les éléments x_m appartiennent à C . Donc, $x \in C$. Supposons que C est convexe et fortement fermé. Pour conclure, montrons que $E \setminus C$ est faiblement ouvert. Si $C = E$, la proposition est évidemment vraie. Supposons que $C \subsetneq E$ et soit $x_0 \in E \setminus C$. Par le théorème de séparation forte, il existe $\xi \in E^* \setminus \{0\}$ tel que $\sup_{x \in C} \langle \xi, x \rangle < \langle \xi, x_0 \rangle$. On a alors $x_0 \in \xi^{-1}(\sup_{x \in C} \langle \xi, x \rangle, +\infty) \subset E \setminus C$, d'où la conclusion. On a finalement l'équivalence entre les quatre assertions. $\square$

Pour finir avec les propriétés de la topologie faible, démontrons la proposition suivante qui donne quelques conséquences de la convergence au sens faible.

Proposition 2.1.10 (AC, [32]). *Soit $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite qui converge faiblement vers x . Alors*

(i) *La suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est bornée.*

(ii) $\|x\| \leq \liminf_{m \rightarrow +\infty} \|x_m\|$.

(iii) *Si $(\xi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite de E^* qui converge fortement vers ξ , alors $\lim_{m \rightarrow +\infty} \langle \xi_m, x_m \rangle = \langle \xi, x \rangle$.*

Démonstration. Notons $\mathcal{J}$ l'injection canonique de E dans son bidual. Par la proposition 2.1.3, on a $\lim_{m \rightarrow +\infty} \langle \xi, x_m \rangle = \langle \xi, x \rangle$ pour tout $\xi \in E^*$. Autrement dit, $\lim_{m \rightarrow +\infty} \mathcal{J}_{x_m}(\xi) = \mathcal{J}_x(\xi)$ pour tout $\xi \in E^*$. La suite $(\mathcal{J}_{x_m}(\xi))_{m \in \mathbb{N}}$ est donc bornée dans $\mathbb{R}$. On a

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} |\mathcal{J}_{x_m}(\xi)| < +\infty \quad \forall \xi \in E^*.$$

Le théorème de Banach-Steinhaus montre alors que

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \sup_{\|\xi\|_* \leq 1} |\mathcal{J}_{x_m}(\xi)| = \sup_{m \in \mathbb{N}} \|\mathcal{J}_{x_m}\|_{**} = \sup_{m \in \mathbb{N}} \|x_m\| < +\infty$$

ce qui établit la première assertion. Montrons (ii). Posons $\xi(rx) = r\|x\|$ pour tout $r \in \mathbb{R}$. On a une application linéaire $\xi : \mathbb{R}x \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\langle \xi, y \rangle \leq \|y\|$ pour tout $y \in \mathbb{R}x$. Par le théorème de Hahn-Banach, cette application s'étend en une application linéaire $\xi' : E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\langle \xi', y \rangle \leq \|y\|$ pour tout $y \in E$. On a alors $\langle \xi', x \rangle = \|x\|$ et $\|\xi'\|_* = 1$ (car $\|\xi'\|_* \leq 1$ et $|\langle \xi', \frac{x}{\|x\|} \rangle| = 1$). Nous obtenons

$$\|x\| = \langle \xi', x - x_m \rangle + \langle \xi', x_m \rangle \leq \langle \xi', x - x_m \rangle + \|x_m\| \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Vu que $\lim_{m \rightarrow +\infty} \langle \xi', x - x_m \rangle = 0$, on conclut que $\|x\| \leq \liminf_{m \rightarrow +\infty} \|x_m\|$. Il reste à établir la partie (iii). Vu (i), il existe $C > 0$ tel que $\|x_m\| < C$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. On a

$$|\langle \xi_m, x_m \rangle - \langle \xi, x \rangle| = |\langle \xi_m - \xi, x_m \rangle - \langle \xi, x - x_m \rangle| \leq |\langle \xi_m - \xi, x_m \rangle| + |\langle \xi, x - x_m \rangle|$$

On constate que $|\langle \xi_m - \xi, x_m \rangle| \leq \|x_m\| \|\xi_m - \xi\|_* < C \|\xi_m - \xi\|$. Au final, il vient

$$|\langle \xi_m, x_m \rangle - \langle \xi, x \rangle| \leq C \|\xi_m - \xi\|_* + |\langle \xi, x - x_m \rangle|$$

et ce dernier majorant converge vers 0 si $m \rightarrow +\infty$ vu les hypothèses, ce qui permet de conclure. $\square$

Nous avons vu que le dual d'un espace de Banach peut être muni d'une structure qui en fait aussi un espace de Banach. Ainsi, l'espace dual est aussi muni d'une topologie faible, donnée naturellement par $\sigma(E^*, E^{**})$, ce qui met en relation le dual et le bidual. Mais ce point de vue ne nous intéressera pas trop. On voudrait plutôt construire une topologie faible sur E^* en relation avec l'espace de départ E . Nous pouvons en obtenir une en procédant de façon semblable à la topologie faible. Il est aisé de vérifier que

$$\mathcal{B} = \{\cap_{j \in J} \xi_j^{-1}([r_j - \varepsilon_j, r_j + \varepsilon_j]) : J \text{ ensemble fini}, \xi_j \in E^*, r_j \in \mathbb{R}, \varepsilon_j > 0\}$$

4. Rappelons que si $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite numérique réelle, alors $\liminf_{m \rightarrow +\infty} x_m = \sup_{k \in \mathbb{N}} \inf_{m \geq k} x_m$ et $\limsup_{m \rightarrow +\infty} x_m = \inf_{k \in \mathbb{N}} \sup_{m \geq k} x_m$. On a $\liminf_{m \rightarrow +\infty} x_m \leq \limsup_{m \rightarrow +\infty} x_m$. La limite inférieure et supérieure sont égales et valent l si et seulement si $\lim_{m \rightarrow +\infty} x_m$ existe et vaut l .

forme une base de topologie de $\sigma(E, E^*)$. Un ouvert de base s'écrit donc

$$\cap_{j \in J} \xi_j^{-1}([r_j - \varepsilon_j, r_j + \varepsilon_j]) = \{x \in E : |\langle \xi_j, x \rangle - r_j| < \varepsilon_j \quad \forall j \in J\}.$$

Une forme linéaire sur $\mathbb{R}$ qui est non-nulle est évidemment surjective. Il existe $x_j \in E$ tel que $r_j = \langle \xi_j, x_j \rangle$. Un ouvert de base prend alors la forme

$$\{x \in E : |\langle \xi_j, x - x_j \rangle| < \varepsilon_j \quad \forall j \in J\}$$

si $\xi_j \neq 0$ pour tout $j \in J$. Si $j \in J$ vérifie $\xi_j = 0$, alors $\xi_j^{-1}([r_j - \varepsilon_j, r_j + \varepsilon_j])$ est vide si $0 \notin]r_j - \varepsilon_j, r_j + \varepsilon_j[$ et l'espace E si $0 \in]r_j - \varepsilon_j, r_j + \varepsilon_j[$. On peut s'inspirer de ce résultat et permuter les rôles de ξ et x et ceux de ξ_j et x_j . Définissons les ensembles

$$B(n; \xi_1, \dots, \xi_n; x_1, \dots, x_n; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \{\xi \in E^* : |\langle \xi - \xi_j, x_j \rangle| < \varepsilon_j \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}\}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, $\xi_1, \dots, \xi_n \in E^*$, $x_1, \dots, x_n \in E$ et $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n > 0$. On pose $\sigma^*(E, E^*)$ l'ensemble des unions d'ensembles du type $B(n; \xi_1, \dots, \xi_n; x_1, \dots, x_n; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$.

Proposition 2.1.11. *L'ensemble $\sigma^*(E, E^*)$ est une topologie sur E^* qui est moins fine que la topologie duale et la topologie faible sur E^* .*

Démonstration. Il est clair que $\sigma^*(E, E^*)$ est stable par union et intersection finie. Ensuite, on a $E^* \in \sigma^*(E, E^*)$ car $B(1; 0; 0; 1) = E^*$ et $\emptyset \in \sigma^*(E, E^*)$ car l'union sur une famille vide est vide. Donc, $\sigma^*(E, E^*)$ est bien une topologie sur E^* . A présent, montrons que la topologie $\sigma^*(E, E^*)$ est moins fine que la topologie faible de E^* . Pour ce faire, il suffit de montrer que tout ouvert de base de $\sigma^*(E, E^*)$ est un ouvert de la topologie forte de E^* . Nous le remarquons facilement puisque

$$\begin{aligned} B(n; \xi_1, \dots, \xi_n; x_1, \dots, x_n; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) &= \{\xi \in E^* : |\langle \xi - \xi_j, x_j \rangle| < \varepsilon_j \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}\} \\ &= \{\xi \in E^* : \langle \xi, x_j \rangle \in]\langle \xi_j, x_j \rangle - \varepsilon_j, \langle \xi_j, x_j \rangle + \varepsilon_j[\text{ si } 1 \leq j \leq n\} \\ &= \cap_{j=1}^n \mathcal{J}_{x_j}^{-1}([\langle \xi_j, x_j \rangle - \varepsilon_j, \langle \xi_j, x_j \rangle + \varepsilon_j]) \end{aligned}$$

est ouvert par continuité des $\mathcal{J}_{x_j}$. Cette même égalité montre aussi que $\sigma^*(E, E^*)$ est moins fin que la topologie faible de E^* par définition de $\sigma(E^*, E^{**})$. $\square$

Définition 2.1.4. La topologie $\sigma^*(E, E^*)$ sur E^* est appelée *topologie faible-** de E^* . Tout ouvert (resp. fermé) de cette topologie sera appelé ouvert (resp. fermé) faible-*. Toute suite convergente $(\xi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ vers ξ pour la topologie faible-* sera dite faiblement-* convergente vers ξ .

Cette topologie peut être aussi obtenue de façon différente.

Proposition 2.1.12. *Si E est un espace de Banach, alors $\sigma^*(E, E^*)$ est la topologie induite par l'espace produit $\mathbb{R}^E$ sur E^* . Par conséquent, la topologie faible-* fait de E^* un espace séparé.*

Démonstration. Notons $\mathcal{T}$ la topologie induite sur E^* par la topologie produit de $\mathbb{R}^E$. Fixons $n \in \mathbb{N}_0$, $\xi_1, \dots, \xi_n \in E^*$, $x_1, \dots, x_n \in E$ et $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n > 0$ et montrons que $B(n; \xi_1, \dots, \xi_n; x_1, \dots, x_n; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est un élément de $\mathcal{T}$. On sait que toute fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ peut être identifiée au E -uplé $(r_x)_{x \in E}$ où $r_x = f(x)$. Soit $\pi_{x_0} : \mathbb{R}^E \rightarrow \mathbb{R}$ la projection sur le facteur x_0 du produit, i.e. $\pi_{x_0}(f) = f(x_0)$ pour tout $f \in \mathbb{R}^E$. Il devient alors aisé de vérifier que

$$B(n; \xi_1, \dots, \xi_n; x_1, \dots, x_n; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = E^* \cap \bigcap_{j=1}^n \pi_{x_j}^{-1}([\langle \xi_j, x_j \rangle - \varepsilon_j, \langle \xi_j, x_j \rangle + \varepsilon_j])$$

De même, si $U_1, \dots, U_n$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$, alors

$$E^* \cap \bigcap_{j=1}^n \pi_{x_j}^{-1}(U_j) = \{\xi \in E^* : \langle \xi, x_j \rangle \in U_j \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}\}$$

appartient évidemment à $\sigma^*(E, E^*)$. L'espace est séparé car $\mathbb{R}^E$ est un produit d'espaces séparés et tout sous-espace topologique d'un espace séparé est séparé. $\square$

Achevons cette section en montrant que les topologies faibles et faibles-* confèrent à E et E^* une structure d'espace vectoriel topologique localement convexe. Pour le montrer, nous allons utiliser les éléments d'analyse fonctionnelle rappelés en début de section.

Proposition 2.1.13. *Si E est un espace de Banach, les applications*

$$p_{\mathcal{A}} : x \in E \mapsto \sup_{\xi \in \mathcal{A}} |\langle \xi, x \rangle| \in [0, +\infty[$$

sont des semi-normes pour toute partie finie $\mathcal{A}$ de E^ . L'ensemble $P = \{p_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \subset E^*, \mathcal{A} \text{ fini}\}$ est une famille faiblement filtrante de semi-normes et elle induit une topologie $\mathcal{T}_P$ qui fait de E un espace vectoriel topologique localement convexe. Cet espace est topologiquement équivalent à la topologie faible.*

Démonstration. Il est évident que les applications $p_{\mathcal{A}}$ sont des semi-normes. Montrons que la famille P est faiblement filtrante, l'espace E muni de la topologie de semi-norme sera localement convexe vu les rappels en début de section. Soient $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subset E^*$ des ensembles finis. Alors $p_{\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2}$ est une semi-norme telle que $p_{\mathcal{A}_1} \leq p_{\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2}$ et $p_{\mathcal{A}_2} \leq p_{\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2}$, d'où la conclusion.

Montrons que cette topologie est équivalente à $\sigma(E, E^*)$. Fixons $\mathcal{A}$ une partie finie de E^* , $\varepsilon > 0$ et $x \in E$. La semi-boule associée à la semi-norme $p_{\mathcal{A}}$ est un voisinage faible de x car

$$B_{p_{\mathcal{A}}}(x, \varepsilon) = \{z \in E : |\langle \xi, x - z \rangle| < \varepsilon \quad \forall \xi \in \mathcal{A}\} = \bigcap_{\xi \in \mathcal{A}} \xi^{-1}(|\langle \xi, x \rangle - \varepsilon, \langle \xi, x \rangle + \varepsilon|)$$

et cette même égalité montre aussi que tout voisinage faible de x contient une semi-boule associée à une semi-norme $p_{\mathcal{A}}$ et on conclut que les topologies sont équivalentes. $\square$

Proposition 2.1.14. *Si E est un espace de Banach, les applications*

$$p_A : \xi \in E^* \mapsto \sup_{x \in A} |\langle \xi, x \rangle| \in [0, +\infty[$$

sont des semi-normes pour toute partie finie A de E . L'ensemble $P = \{p_A : A \subset E, A \text{ fini}\}$ est une famille faiblement filtrante de semi-normes et elle induit une topologie $\mathcal{T}_P$ qui fait de E^ un espace vectoriel topologique localement convexe. Cet espace est topologiquement équivalent à la topologie faible-*.*

Démonstration. Il suffit d'adapter la preuve précédente à la nouvelle semi-norme. $\square$

2.2 Compacité faible et espaces réflexifs

Pour achever ce chapitre, nous étudions brièvement la compacité au sens de la topologie faible introduite précédemment et établissons un lien avec la réflexivité de l'espace de Banach considéré. En résumé, deux théorèmes clés seront établis : le théorème de Banach-Alaoglu et le théorème de caractérisation des espaces réflexifs. Rappelons la notion de suites généralisées.

Définition 2.2.1. Une *suite généralisée* de E est la donnée de points x_i de E indicés par des éléments d'un ensemble I muni d'un préordre filtrant. Une suite généralisée est notée $(x_i)_{i \in I}$. Un préordre de I est une relation binaire $\preceq$ sur I qui est réflexive et transitive. Le préordre est filtrant si pour tout $i, j \in I$, il existe $k \in I$ tel que $i \preceq k$ et $j \preceq k$. Une suite généralisée $(x_i)_{i \in I}$ converge vers x dans E si, pour tout voisinage V de x , il existe $i_0 \in I$ tel que $i_0 \preceq i \Rightarrow x_i \in V$. Plus brièvement, on écrira $x \in \lim_{i \in I} x_i$ pour indiquer que x est une limite de la suite généralisée. Lorsque la limite d'une suite généralisée existe et est unique, on notera $x = \lim_{i \in I} x_i$ au lieu de la notation précédente. Une sous-suite généralisée de $(x_i)_{i \in I}$ est une suite généralisée $(y_j)_{j \in J}$ telle que, pour tout $i_0 \in I$, il existe $j_0 \in J$ tel que

$$\{x_i : i \in I, i_0 \preceq_I i\} \supset \{y_j : j \in J, j_0 \preceq_J j\}.$$

Voici quelques propriétés importantes des suites généralisées données à titre de rappel.

Proposition 2.2.1 ([40], [43]). *Dans un espace séparé, la limite d'une suite généralisée, si elle existe, est unique.*

Proposition 2.2.2 ([40], [43]). *Un espace topologique X est compact si et seulement si toute suite généralisée de X possède une sous-suite généralisée qui converge vers un point de X .*

Proposition 2.2.3 ([40], [43]). *Une partie F d'un espace topologique X est fermée si et seulement si elle contient les limites de ses suites généralisées convergentes.*

Proposition 2.2.4 ([43]). *Une application $f : X \rightarrow Y$ entre deux espaces topologiques est continue en x_0 si et seulement si, pour toute suite généralisée $(x_i)_{i \in I}$ de E qui converge vers x_0 , la suite généralisée $(f(x_i))_{i \in I}$ converge vers $f(x_0)$.*

La proposition 2.1.3 peut être formulée pour les suites généralisées. La preuve est identique.

Proposition 2.2.5. *Une suite généralisée $(x_i)_{i \in I}$ converge faiblement vers x si et seulement si*

$$\lim_{i \in I} \langle \xi, x_i \rangle \ni \langle \xi, x \rangle \quad \forall \xi \in E^*.$$

Les suites généralisées devront être utilisées à la place des suites lorsque la topologie n'est pas à base dénombrable de voisinages comme c'est le cas des topologies faibles ou faibles-* en dimension infinie. Intéressons-nous à la compacité de la boule unité duale. Bien qu'elle ne soit pas nécessairement compacte au sens fort, le théorème de Banach-Alaoglu nous dit qu'elle est toujours faiblement-* compacte.

Théorème 2.2.1 (Banach-Alaoglu, AC, [2]). *Si E est un espace vectoriel normé, E^* est muni de la norme duale et si $r > 0$, alors la boule fermée $B = \{\xi \in E^* : \|\xi\|_* \leq r\}$ de E^* est faiblement-* compacte. En conséquence, toute suite généralisée de B possède une sous-suite généralisée qui converge faiblement-* vers un point de B .*

Démonstration. Comme $\xi \mapsto r\xi$ est un homéomorphisme (la multiplication scalaire est continue vu que la topologie faible-* est une topologie induite par un système filtrant de semi-normes) de E^* dans E^* munis de la topologie faible-*, on peut se contenter du cas $r = 1$. Vu la proposition 2.1.12, la topologie faible-* est la topologie produit induite par $\mathbb{R}^E$ sur E^* . Si on note π_x les projections de $\mathbb{R}^E$ sur $\mathbb{R}$, alors il est clair que $B \subset \prod_{x \in E} \pi_x(B)$. Montrons que $\pi_x(B)$ est compact dans $\mathbb{R}$ pour tout $x \in E$. Pour ce faire, il suffit de montrer que $\pi_x(B)$ est un borné de $\mathbb{R}$ pour tout $x \in E$. On voit que $\pi_x(B) = \{ \langle \xi, x \rangle : \xi \in B \}$. Il est clair que $\pi_x(B)$ est borné pour tout $x \in E$ si et seulement si B est ponctuellement borné. Bien sûr, on a

$$\sup_{\xi \in B} \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle \xi, x \rangle| = \sup_{\xi \in B} \|\xi\|_* \leq 1 < +\infty$$

et le théorème de Banach-Steinhaus montre que B est ponctuellement borné. Par le théorème de Tikhonov⁵(AC), l'ensemble $\prod_{x \in E} \overline{\pi_x(B)}$ est compact. Ensuite, B est faiblement-* fermé. Soit $(\xi_i)_{i \in I}$ une suite généralisée de B qui converge faiblement-* vers une limite ξ . Il est clair que $B(1; \xi; x; 2^{-j})$ est un voisinage faible-* de ξ pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $x \in E$ tel que $\|x\| \leq 1$. Il existe donc $i_0 \in I$ tel que $i_0 \preceq i \Rightarrow \xi_i \in B(1; \xi; x; 2^{-j})$. Donc, $|\langle \xi_i - \xi, x \rangle| < 2^{-j}$ si $i_0 \preceq i$. Comme $|\langle \xi_i - \xi, x \rangle| > |\langle \xi, x \rangle| - |\langle \xi_i, x \rangle|$, on obtient

$$|\langle \xi, x \rangle| < 2^{-j} + |\langle \xi_i, x \rangle| \leq 1 + 2^{-j}$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $x \in E$ tel que $\|x\| \leq 1$. Si $j \rightarrow +\infty$, on obtient finalement $|\langle \xi, x \rangle| \leq 1$ pour tout $x \in E$ tel que $\|x\| \leq 1$, ce qui montre que $\xi \in B$ et que B est fermé. De là, on déduit que B est faiblement-* fermé et inclus dans le compact faible-* $\prod_{x \in E} \overline{\pi_x(B)}$. Donc, B est faiblement-* compact. La conséquence résulte de la proposition 2.2.2. $\square$

Intéressons-nous au problème suivant : étant donné un espace de Banach E , à quelle condition l'espace est-il canoniquement isométriquement isomorphe à son bidual ? Rappelons qu'à tout espace de Banach, on peut associer une isométrie linéaire injective

$$\mathcal{J} : x \in E \mapsto \mathcal{J}_x \in E^{**} \quad \text{où } \mathcal{J}_x(\xi) = \langle \xi, x \rangle \quad \forall \xi \in E^*.$$

Nous adoptons la définition suivante.

Définition 2.2.2. Un espace de Banach E est *réflexif* si $\mathcal{J}$ est surjectif.

Il est tout à fait légitime de se poser cette question car il existe bel et bien des espaces qui ne sont pas réflexifs, comme nous allons le voir. Remarquons qu'il existe des espaces qui ne sont pas réflexifs mais pourtant isométrique et isomorphe à leur bidual (e.g l'espace de James [21]). C'est pour cette raison qu'on ne s'attache qu'à l'injection canonique $\mathcal{J}$.

Cette question n'est évidemment pas intéressante en dimension finie puisque E est toujours isomorphe avec son bidual. Il s'agit d'une question qui n'a d'intérêt qu'en dimension infinie. Pour arriver au théorème qui nous intéresse, nous allons devoir établir quelques propriétés intermédiaires.

Proposition 2.2.6. Si E est muni de la topologie faible et E^{**} de la topologie faible-*, alors l'injection $\mathcal{J}$ est un homéomorphisme entre $(E, \sigma(E, E^*))$ et $(\mathcal{J}(E), \sigma^*(E^*, E^{**})|_{\mathcal{J}(E)})$.

5. Ce théorème affirme que tout produit de compacts est compact [27].

Démonstration. On sait que c'est une bijection linéaire. Il suffit de montrer que l'application $\mathcal{J} : E \rightarrow \mathcal{J}(E)$ est continue et que son inverse est continu. Soit $\mathcal{A}$ une partie finie de E^* . On a

$$p_{\mathcal{A}} \circ \mathcal{J}(x) = \sup_{\xi \in \mathcal{A}} |\langle \mathcal{J}_x, \xi \rangle| = \sup_{\xi \in \mathcal{A}} |\langle \xi, x \rangle| = p'_{\mathcal{A}}(x)$$

où $p_{\mathcal{A}}$ est une semi-norme de la topologie faible-* de E^{**} et $p'_{\mathcal{A}}$ une semi-norme de la topologie faible de E . On a alors la conclusion. $\square$

Lemme 2.2.1 ([42]). *Si E est un espace de Banach tel que E^* contient une partie $\mathcal{D}$ dénombrable avec $\cap_{\xi \in \mathcal{D}} \ker \xi = \{0\}$, alors toute partie de E faiblement compacte et munie de la topologie induite par $\sigma(E, E^*)$ est métrisable.*

Démonstration. Comme $\mathcal{D}$ est dénombrable, nous pouvons supposer que $\mathcal{D} = \{\xi_m : m \in \mathbb{N}\}$. Nous pouvons en outre supposer sans restriction que $\xi_m \neq 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. De plus, quitte à diviser ξ_m par sa norme, on peut faire l'hypothèse que $\|\xi_m\|_* = 1$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Considérons l'application

$$d : (x, y) \in E \times E \mapsto \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{|\langle \xi_m, x - y \rangle|}{2^m} \in [0, +\infty[.$$

La série intervenant dans la définition de d converge pour tout $x, y \in E$ car

$$\frac{|\langle \xi_m, x - y \rangle|}{2^m} \leq \|x - y\| \frac{\|\xi_m\|_*}{2^m} = \frac{\|x - y\|}{2^m}$$

et la série géométrique $\sum_{m=0}^{+\infty} 2^{-m}$ est convergente. De plus, d définit une distance sur E . Il est évident que $d(x, y) = d(y, x)$ pour tout $x, y \in E$. Comme

$$|\langle \xi_m, x - y \rangle| = |\langle \xi_m, x - z \rangle + \langle \xi_m, z - y \rangle| \leq |\langle \xi_m, x - z \rangle| + |\langle \xi_m, z - y \rangle|,$$

on a $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ pour tout $x, y, z \in E$. De plus, on a $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ car $\cap_{m=0}^{+\infty} \ker \xi_m = \{0\}$. Notons $\mathcal{T}_d$ la topologie induite par la distance d . Soit K une partie faiblement compacte de E . Considérons l'application identité id_K entre $(K, \sigma(E, E^*)|_K)$ et $(K, \mathcal{T}_d|_K)$ ⁶. Cette application est continue. Fixons $\varepsilon > 0$ et $(x_i)_{i \in I}$ une suite généralisée de K qui converge faiblement vers x . Alors $\lim_{i \in I} \langle \xi, x_i \rangle \ni \langle \xi, x \rangle$ pour tout $\xi \in E^*$. Nous savons que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{m=N}^{+\infty} \frac{|\langle \xi_m, x_i - x \rangle|}{2^m} = 0.$$

Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{m=N+1}^{+\infty} \frac{|\langle \xi_m, x_i - x \rangle|}{2^m} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme $x_i \rightharpoonup x$, on a $\langle \xi_m, x \rangle \in \lim_{i \in I} \langle \xi_m, x_i \rangle$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Pour tout $m \in \{0, \dots, N\}$, il existe $i_m \in I$ tel que

$$i_m \preceq i \Rightarrow |\langle \xi_m, x_i - x \rangle| < \frac{2^m \varepsilon}{(N+1)(N+2)}.$$

6. Si $\mathcal{T}$ est une topologie sur X et si $Y \subset X$, alors $\mathcal{T}|_Y$ désigne la topologie induite par $\mathcal{T}$ sur Y , à savoir les ensembles du type $U \cap Y$ avec $U \in \mathcal{T}$.

Comme le préordre est filtrant, il existe $j_0 \in I$ tel que $i_0 \preceq j_0, \dots, i_N \preceq j_0$ et on a

$$j_0 \preceq i \Rightarrow \sum_{m=0}^N \frac{|\langle \xi_m, x_i - x \rangle|}{2^m} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On en tire que $d(x_i, x) < \varepsilon$ si $j_0 \preceq i$. Donc id_K est une application continue bijective entre l'espace compact $(K, \sigma(E, E^*)|_K)$ et l'espace séparé $(K, \mathcal{T}_d|_K)$, c'est donc un homéomorphisme⁷ et la topologie faible est métrisable. $\square$

Théorème 2.2.2 (Eberlein-Smulian, **AC**, [42]). *Soient E un espace de Banach et $K \subset E$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) K est d'adhérence faible faiblement compacte.
- (ii) Toute suite de K possède une sous-suite faiblement convergente dans E .
- (iii) Toute suite de K possède un point d'accumulation⁸ faible dans E .

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) : Soit $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de K et posons X l'adhérence de l'enveloppe linéaire de $\{x_m : m \in \mathbb{N}\}$. Il est évident que X est un sous-espace de Banach de E . De plus, comme X est fermé et convexe, il est aussi faiblement fermé vu la proposition 2.1.9. L'espace X est séparable car si $(y_m)_{m \in A}$ (où $A \subset \mathbb{N}$) désigne une partie libre maximale de $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ (donc une base de $\langle x_m : m \in \mathbb{N} \rangle$), l'ensemble

$$\left\{ \sum_{m \in A} \lambda_m y_m : \lambda_m \in \mathbb{Q} \ \forall m \in A, \{m \in A : \lambda_m \neq 0\} \text{ est fini} \right\}$$

est dense et dénombrable dans X . Il est dénombrable car il est égal à $D = \cup_{n \in \mathbb{N}} D_n$ où

$$D_n = \left\{ \sum_{j=0}^n \lambda_j y_j : \lambda_j \in \mathbb{Q} \ \forall j \in \{0, \dots, n\} \right\}$$

et D_n est en bijection avec $\mathbb{Q}^n$. L'ensemble D est évidemment dense dans X car $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. On voit en effet que, pour tout élément x de l'enveloppe linéaire réelle de $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément d de D tel que $\|x - d\| < \varepsilon$ par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et $\langle x_m : m \in \mathbb{N} \rangle$ étant dense dans X , on voit que D est dense dans X . Vu que X est séparable, on peut trouver une partie dénombrable $\{y_m : m \in \mathbb{N}\}$ qui est dense dans X . Quitte à normer les éléments y_m , on peut supposer que $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ constitue une partie dense de la sphère unité de X . Il s'ensuit que X^* possède un sous-ensemble dénombrable $\mathcal{D}$ tel que $\cap_{\xi \in \mathcal{D}} \ker \xi = \{0\}$. Ce sous-ensemble est donné par $\mathcal{D} = \{y'_m : m \in A\}$ où $(y'_m)_{m \in A}$ désigne une famille d'applications linéaires continues telles que $\langle y'_m, x \rangle \leq \|x\|$ pour tout $x \in X$. En effet, il suffit de définir $y'_m : \mathbb{R} y_m \rightarrow \mathbb{R}$ par $\langle y'_m, r y_m \rangle = r \|y_m\| = r$ puis de l'étendre à X par le théorème de Hahn-Banach. De cette façon, on a $\|y'_m\|_* = 1$. Si $x \in X$ est non-nul et vérifie $\langle y'_m, x \rangle = 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\|y_m - \frac{x}{\|x\|}\| < 1$ par densité sur la sphère unité. Donc, $1 = |\langle y'_m, y_m - \frac{x}{\|x\|} \rangle| \leq \|y'_m\|_* \|y_m - \frac{x}{\|x\|}\| < \|y'_m\|_* = 1$, d'où absurdité. Donc $\cap_{\xi \in \mathcal{D}} \ker \xi = \{0\}$. Nous sommes dans les conditions pour appliquer le lemme. L'ensemble $K \cap X$ est d'adhérence faible dans X faiblement compacte dans X car $\overline{K \cap X}^X = \overline{K} \cap \overline{X} \cap X$ est faiblement fermé et inclus dans le compact faible $\overline{K}$ (l'adhérence ici est celle de la topologie faible). Le lemme

7. Toute bijection continue d'un espace compact dans un espace séparé est un homéomorphisme [27].

8. Si $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite, alors x est un point d'accumulation de $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ si, pour tout voisinage V de x et tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $M \geq m$ tel que $x_M \in V$.

nous montre que $\overline{K \cap X}^X$, muni de la topologie faible de X^9 , est métrisable. Dans un espace métrique, nous savons qu'un ensemble est compact si et seulement si de toute suite de cet ensemble, on peut extraire une sous-suite convergente vers un point de cet ensemble. Comme $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est aussi une suite de $\overline{K \cap X}$, on peut en extraire une sous-suite $(x_{k(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ faiblement convergente dans X vers une limite $x \in X$. Il s'ensuit que cette sous-suite converge aussi faiblement dans E vers x . Si $\xi \in E^*$, alors $\xi|_X \in X^*$ et donc

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \langle \xi, x_{k(m)} \rangle = \lim_{m \rightarrow +\infty} \langle \xi|_X, x_{k(m)} \rangle = \langle \xi|_X, x \rangle = \langle \xi, x \rangle,$$

et la proposition 2.1.3 permet de conclure.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : C'est évident car toute limite d'une suite est un point d'accumulation de cette suite.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : Supposons que toute suite de K possède un point d'accumulation. Par continuité, pour tout $\xi \in E^*$, toute suite de $\xi(K)$ possède un point d'accumulation. Or, dans $\mathbb{R}$, si $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ possède un point d'accumulation x , on construit une suite $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de la façon suivante : pour tout $m \in \mathbb{N}$, soit y_m un élément x_{k_m} avec $k_m > k_{m-1}$ tel que $|y_m - x| < (m+1)^{-1}$. La suite $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ qui converge vers x . Donc, de toute suite de $\xi(K)$, on peut extraire une sous-suite convergente. Ceci nous montre que $\xi(K)$ est d'adhérence compacte et $\xi(K)$ est donc borné. On a alors $\sup_{x \in K} |\mathcal{J}_x(\xi)| < +\infty$ pour tout $\xi \in E^*$. Par le théorème de Banach-Steinhaus, on obtient $\sup_{x \in K} \sup_{\|\xi\|_* \leq 1} |\mathcal{J}_x(\xi)| = \sup_{x \in K} \|\mathcal{J}_x\|_{**} < +\infty$, ce qui montre que $\mathcal{J}(K)$ est borné dans E^{**} et donc $\overline{\mathcal{J}(K)}^{\sigma^*(E^*, E^{**})}$ est compact pour la topologie $\sigma^*(E^*, E^{**})$ par le théorème de Banach-Alaoglu¹⁰. Comme $\mathcal{J} : E \rightarrow \mathcal{J}(E)$ est un homéomorphisme entre les espaces $(E, \sigma(E, E^*))$ et $(\mathcal{J}(E), \sigma^*(E^*, E^{**})|_{\mathcal{J}(E)})$ (proposition 2.2.6), il suffit de montrer que

$$\overline{\mathcal{J}(K)}^{\sigma^*(E^*, E^{**})} \subset \mathcal{J}(E)$$

pour conclure que K est d'adhérence faiblement compacte car $\overline{\mathcal{J}(K)}^{\sigma^*(E^*, E^{**})} \supset \mathcal{J}(\overline{K}^{\sigma(E, E^*)})$ par continuité de $\mathcal{J}$ et $\overline{K}^{\sigma(E, E^*)} \subset \mathcal{J}^{-1}(\overline{\mathcal{J}(K)}^{\sigma^*(E^*, E^{**})})$ qui est faiblement compact par continuité de $\mathcal{J}^{-1}$.

Soit $\zeta \in \overline{\mathcal{J}(K)}^{\sigma^*(E^*, E^{**})}$. Soit $\xi_0 \in E^*$ tel que $\|\xi_0\|_* = 1$. On sait que $p_{\xi_0}(\zeta') = |\langle \zeta', \xi_0 \rangle|$ définit une semi-norme de la topologie $\sigma^*(E^*, E^{**})$. Il existe $x_1 \in K$ tel que $|\langle \zeta - \mathcal{J}_{x_1}, \xi_0 \rangle| < 1$ ¹¹. On sait que $\langle \zeta, \zeta - \mathcal{J}_{x_1} \rangle$ est de dimension finie.

Sortons du cadre de la preuve et faisons une remarque d'ordre générale. Supposons que F est un sous-espace vectoriel de dimension finie dans E^{**} . Dans ce cas, la sphère $S = \{\varphi \in F : \|\varphi\|_{**} = 1\}$ est compacte dans F car F est homéomorphe à l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ pour un

9. Si F est un sous-espace fermé de E , alors $\sigma(F, F^*)$ est la topologie induite par $\sigma(E, E^*)$ sur F car $\xi \in F^*$ si et seulement si il existe $\zeta \in E^*$ tel que $\zeta|_F = \xi$.

10. En effet, $\overline{\mathcal{J}(K)}^{\sigma^*(E^*, E^{**})}$ est un fermé faible-* inclus dans une boule fermée centrée en 0 (car il est borné). Cette boule est faiblement-* compacte par le théorème de Banach-Alaoglu et donc $\overline{\mathcal{J}(K)}^{\sigma^*(E^*, E^{**})}$ aussi.

11. Rappelons que si E est muni d'une topologie induite par une famille de semi-normes P , alors $x \in \overline{F}$ si et seulement si, pour tout $p \in P$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $f \in F$ tel que $p(x - f) < \varepsilon$.

certain naturel n (vu que les normes sont équivalentes). Dans $\mathbb{R}^n$, les sphères sont compactes, donc la sphère unité de F l'est aussi. Ainsi, $\{B(\varphi, 1/4) : \varphi \in S\}$ forme un recouvrement ouvert de S et on sait en extraire un recouvrement fini $\{B(\varphi_i, 1/4) : 1 \leq i \leq k\}$. On en tire que pour tout $\varphi \in S$, il existe $i \in \{1, \dots, k\}$ tel que $\|\varphi - \varphi_i\|_{**} < 1/4$. Comme φ_i est de norme 1, il existe $\xi_i \in E^*$ avec $\|\xi_i\|_* \leq 1$ et $\langle \varphi_i, \xi_i \rangle > 3/4$ ¹². Quitte à diviser par $\|\xi_i\|_*$, on peut même supposer que $\|\xi_i\|_* = 1$. Si $\varphi \in F$, alors il existe $i \in \{1, \dots, k\}$ tel que $\|\frac{\varphi}{\|\varphi\|_{**}} - \varphi_i\|_{**} < 1/4$. On a donc

$$|\langle \varphi, \xi_i \rangle| \geq \|\varphi\|_{**} \left(|\langle \varphi_i, \xi_i \rangle| - \left| \left\langle \frac{\varphi}{\|\varphi\|_{**}} - \varphi_i, \xi_i \right\rangle \right| \right) \geq \frac{1}{2} \|\varphi\|_{**}$$

et par conséquent,

$$\max\{|\langle \varphi, \xi_i \rangle| : 1 \leq i \leq k\} \geq \frac{1}{2} \|\varphi\|_{**} \quad \forall \varphi \in F.$$

Revenons à la preuve et considérons la construction faite ci-dessus en supposant que $F = \langle \zeta, \zeta - \mathcal{J}_{x_1} \rangle$. Il existe $\xi_1, \dots, \xi_{n_1} \in E^*$ tels que $\|\xi_i\|_* = 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, n_1\}$ et

$$\max\{|\langle \varphi, \xi_i \rangle| : 1 \leq i \leq n_1\} \geq \frac{1}{2} \|\varphi\|_{**} \quad \forall \varphi \in \langle \zeta, \zeta - \mathcal{J}_{x_1} \rangle.$$

Nous savons que la famille $\mathcal{A}_1 = \{\xi_0, \dots, \xi_{n_1}\}$ définit une semi-norme de la topologie faible-* de E^{**} , à savoir $p_{\mathcal{A}_1}(\varphi) = \sup_{\xi \in \mathcal{A}_1} |\langle \varphi, \xi \rangle|$. Il existe donc $x_2 \in K$ tel que $p_{\mathcal{A}_1}(\zeta - \mathcal{J}_{x_2}) < 1/2$ vu que ζ est adhérent à $\mathcal{J}(K)$ pour la topologie $\sigma^*(E^*, E^{**})$. Autrement dit, on a

$$\max\{|\langle \zeta - \mathcal{J}_{x_2}, \xi_i \rangle| : 0 \leq i \leq n_1\} < \frac{1}{2}.$$

On réitère la petite construction extérieure à la démonstration exposée plus haut pour $F = \langle \zeta, \zeta - \mathcal{J}_{x_1}, \zeta - \mathcal{J}_{x_2} \rangle$. Il existe donc $\xi_{n_1+1}, \dots, \xi_{n_2} \in E^*$ de norme unitaire vérifiant

$$\max\{|\langle \varphi, \xi_i \rangle| : n_1 + 1 \leq i \leq n_2\} \geq \frac{1}{2} \|\varphi\|_{**} \quad \forall \varphi \in \langle \zeta, \zeta - \mathcal{J}_{x_1}, \zeta - \mathcal{J}_{x_2} \rangle.$$

Puis on recommence la procédure. Au final, on obtient une suite $(n_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de $\mathbb{N}$ strictement croissante, une suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ de K et une suite $(\xi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de E^* de norme unitaire vérifiant

$$\max\{|\langle \zeta - \mathcal{J}_{x_{m+1}}, \xi_i \rangle| : 0 \leq i \leq n_m\} < \frac{1}{m+1} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad (*)$$

et pour tout $m \in \mathbb{N}_0$,

$$\max\{|\langle \varphi, \xi_i \rangle| : n_m + 1 \leq i \leq n_{m+1}\} \geq \frac{1}{2} \|\varphi\|_{**} \quad \forall \varphi \in \langle \zeta, \zeta - \mathcal{J}_{x_1}, \dots, \zeta - \mathcal{J}_{x_{m+1}} \rangle. \quad (**)$$

Vu l'hypothèse (iii), la suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de K admet un point d'accumulation faible x .

Pour conclure cette preuve, montrons que $\zeta = \mathcal{J}_x$. Le sous-espace de Banach $\overline{\langle x_m : m \in \mathbb{N} \rangle}$ est fermé et convexe, donc faiblement fermé par la proposition 2.1.9. Comme x est un point d'accumulation faible de la suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$, il s'ensuit aisément que $x \in \overline{\langle x_m : m \in \mathbb{N} \rangle}$. De là, on

12. En effet, $\sup_{\|\xi\|_* \leq 1} |\langle \varphi_i, \xi \rangle| = 1$ et la borne supérieure peut être approchée aussi près que l'on veut. Donc, il existe $\xi \in E^*$ tel que $\|\xi\|_* \leq 1$ et $|\langle \varphi_i, \xi \rangle| > 3/4$. Quitte à changer le signe de ξ , on peut supposer que $\langle \varphi_i, \xi \rangle > 3/4$.

déduit que $\zeta - \mathcal{J}_x$ est adhérent à $\langle \zeta, \zeta - \mathcal{J}_{x_1}, \zeta - \mathcal{J}_{x_2}, \dots \rangle$. Si $\varphi \in \langle \zeta, \zeta - \mathcal{J}_{x_1}, \zeta - \mathcal{J}_{x_2}, \dots \rangle$, alors $|\langle \varphi, \xi_m \rangle| \geq (1/2)\|\varphi\|_{**}$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$ vu (**). Donc, $\sup_{m \in \mathbb{N}} |\langle \varphi, \xi_m \rangle| \geq (1/2)\|\varphi\|_{**}$ pour tout φ dans l'adhérence de $\langle \zeta, \zeta - \mathcal{J}_{x_1}, \zeta - \mathcal{J}_{x_2}, \dots \rangle$. En particulier,

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} |\langle \zeta - \mathcal{J}_x, \xi_m \rangle| \geq \frac{1}{2}\|\zeta - \mathcal{J}_x\|_{**}.$$

En outre, vu (*), on voit facilement que

$$|\langle \zeta - \mathcal{J}_{x_{m+1}}, \xi_i \rangle| < \frac{1}{m+1} \quad \text{si } i \leq n_m.$$

On en déduit que

$$|\langle \zeta - \mathcal{J}_x, \xi_i \rangle| \leq |\langle \zeta - \mathcal{J}_{x_{m+1}}, \xi_i \rangle| + |\langle \mathcal{J}_{x_{m+1}} - \mathcal{J}_x, \xi_i \rangle| < \frac{1}{m+1} + |\langle \xi_i, x_{m+1} - x \rangle|$$

si $i \leq n_m$. Si $i \in \mathbb{N}$ et $N > i$, il existe $n > N$ tel que $|\langle \xi_i, x_n - x \rangle| < 1/(N+1)$ car x est un point d'accumulation faible de la suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$. Donc, pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a

$$|\langle \zeta - \mathcal{J}_x, \xi_i \rangle| < \frac{2}{N+1}$$

si N est suffisamment grand. En faisant $N \rightarrow +\infty$, on obtient $\langle \zeta - \mathcal{J}_x, \xi_i \rangle = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Mais comme $\sup_{i \in \mathbb{N}} |\langle \zeta - \mathcal{J}_x, \xi_i \rangle| \geq (1/2)\|\zeta - \mathcal{J}_x\|_{**}$, on a finalement $\zeta = \mathcal{J}_x$ et la preuve est achevée. $\square$

Ce théorème nous montre que, malgré la structure d'espace métrique manquante dans la topologie faible, nous pouvons nous permettre d'utiliser des critères de compacité en terme de suites. Ainsi, la topologie garde une certaine richesse, même si elle contient "moins d'ouverts" que la topologie d'espace métrique.

Lemme 2.2.2 (AC, [6]). Soient E un espace de Banach, $\xi_1, \dots, \xi_m \in E^*$ et $r_1, \dots, r_m \in \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in E$ tel que $\|x\| \leq 1$ et $|\langle \xi_i, x \rangle - r_i| < \varepsilon$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$.
- (ii) On a

$$\left| \sum_{i=1}^m r_i x_i \right| \leq \left\| \sum_{i=1}^m x_i \xi_i \right\|_*$$

pour tout $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$.

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) : Soient $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Posons $c = |x_1| + \dots + |x_m|$. Vu (i), il existe $x \in E$ tel que $\|x\| \leq 1$ et $|\langle \xi_i, x \rangle - r_i| < \varepsilon$. On en tire que

$$\left| \sum_{i=1}^m x_i \langle \xi_i, x \rangle - \sum_{i=1}^m x_i r_i \right| = \left| \sum_{i=1}^m x_i (\langle \xi_i, x \rangle - r_i) \right| < c\varepsilon.$$

Il vient alors

$$\left| \sum_{i=1}^m r_i x_i \right| \leq \left| \sum_{i=1}^m r_i x_i - \sum_{i=1}^m x_i \langle \xi_i, x \rangle \right| + \left| \sum_{i=1}^m x_i \langle \xi_i, x \rangle \right| < c\varepsilon + \left\| \sum_{i=1}^m x_i \xi_i \right\|_*$$

Donc, $|\sum_{i=1}^m r_i x_i| \leq c\varepsilon + \|\sum_{i=1}^m x_i \xi_i\|_*$ pour tout $\varepsilon > 0$, d'où la conclusion en faisant tendre ε vers 0.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Soit $\varepsilon > 0$ et définissons l'application linéaire

$$T : z \in E \mapsto (\langle \xi_1, z \rangle, \dots, \langle \xi_m, z \rangle) \in \mathbb{R}^m.$$

On voit facilement que (i) est équivalent à avoir $r = (r_1, \dots, r_m) \in \overline{T(B(0, 1))}$. Procédons par l'absurde et supposons que $r \notin \overline{T(B(0, 1))}$. Vu les propositions 1.1.8 et 1.3.3, l'ensemble $\overline{T(B(0, 1))}$ est convexe. On sait appliquer le théorème de séparation forte à $\{r\}$ et $\overline{T(B(0, 1))}$. Il existe $x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ tel que $\langle x, r \rangle > \sup_{v \in \overline{T(B(0, 1))}} \langle x, v \rangle$. En particulier, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{i=1}^m r_i x_i > c > \sum_{i=1}^m \langle \xi_i, z \rangle x_i$ pour tout $z \in B(0, 1)$. On a alors $\sum_{i=1}^m r_i x_i > c \geq |\sum_{i=1}^m x_i \langle \xi_i, z \rangle|$ pour tout $z \in \overline{B(0, 1)}$. Finalement, $|\sum_{i=1}^m r_i x_i| > \|\sum_{i=1}^m x_i \xi_i\|_*$, d'où une contradiction avec (ii). $\square$

Lemme 2.2.3 (Théorème de Goldstine, AC, [6]). *Soit E est un espace de Banach et notons $B = \overline{B_{\|\cdot\|}}(0, 1)$ et $B_{**} = \overline{B_{\|\cdot\|_{**}}}(0, 1)$ les boules unité fermées de E et E^{**} respectivement. Alors $\mathcal{J}(B)$ est dense dans B_{**} pour la topologie $\sigma^*(E^*, E^{**})$.*

Démonstration. Tout d'abord, il est clair que $\mathcal{J}(B) \subset B_{**}$ par isométrie. Comme B_{**} est faiblement- $*$ compact (théorème de Banach-Alaoglu) et comme la topologie faible- $*$ est séparée, l'ensemble B_{**} est faiblement- $*$ fermé. Donc, on a l'inclusion $\overline{\mathcal{J}(B)}^{\sigma^*(E^*, E^{**})} \subset B_{**}$. Soit $\zeta \in B_{**}$ et soit U un ouvert de base de $\sigma^*(E^*, E^{**})$ contenant ζ . Un tel ouvert prend la forme

$$U = \{\zeta' \in E^{**} : |\langle \zeta' - \mu_i, \xi_i \rangle| < \varepsilon_i \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}\}$$

où $\mu_1, \dots, \mu_m \in E^{**}$, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m > 0$ et $\xi_1, \dots, \xi_m \in E^*$. Pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, posons $\eta_i = \varepsilon_i - |\langle \zeta - \mu_i, \xi_i \rangle|$ et définissons l'ouvert

$$V = \{\zeta' \in E^{**} : |\langle \zeta' - \zeta, \xi_i \rangle| < \eta_i \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}\}.$$

On vérifie sans peine que $V \subset U$. Posons $\varepsilon = \min(\eta_1, \dots, \eta_m)$ et montrons que $V \cap \mathcal{J}(B) \neq \emptyset$. De cette façon, $U \cap \mathcal{J}(B) \neq \emptyset$ et $\zeta \in \overline{\mathcal{J}(B)}^{\sigma^*(E^*, E^{**})}$. Pour y parvenir, il suffit de trouver $x \in B$ tel que $|\langle \mathcal{J}_x - \zeta, \xi_i \rangle| < \varepsilon$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$. Autrement dit, si on pose $r_i = \langle \zeta, \xi_i \rangle$, il suffit de trouver $x \in B$ tel que $|\langle \xi_i, x \rangle - r_i| < \varepsilon$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$. Le lemme précédent montre que c'est équivalent à montrer que $|\sum_{i=1}^m r_i x_i| \leq \|\sum_{i=1}^m x_i \xi_i\|_*$ pour tout $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$. Soit $\mathcal{J}^* : E^* \rightarrow E^{***}$ l'injection canonique de E^* dans E^{***} . Puisque $\|\zeta\|_{**} \leq 1$, on voit que

$$\left| \sum_{i=1}^m r_i x_i \right| = \left| \sum_{i=1}^m x_i \langle \zeta, \xi_i \rangle \right| = \left| \sum_{i=1}^m x_i \langle \mathcal{J}_{\xi_i}^*, \zeta \rangle \right| \leq \left\| \sum_{i=1}^m x_i \mathcal{J}_{\xi_i}^* \right\|_{***}.$$

Et ce majorant équivaut à $\|\sum_{i=1}^m x_i \xi_i\|_*$ car $\mathcal{J}^*$ est une isométrie. Le théorème est démontré. $\square$

Proposition 2.2.7 (AC, [10]). *Un espace de Banach E est réflexif si et seulement si la boule unité fermée $\overline{B}(0, 1)$ est faiblement compacte.*

Démonstration. Supposons que l'espace E est réflexif. Dans ce cas, $\mathcal{J} : E \rightarrow E^{**}$ est une isométrie linéaire bijective. On en tire que $\|x\| = \|\mathcal{J}_x\|_{**}$ pour tout $x \in E$ et que l'image par $\mathcal{J}$ de la boule unité fermée de E est la boule unité fermée de E^{**} . Vu le théorème de Banach-Alaoglu,

la boule unité fermée de E^{**} est compacte pour la topologie faible-*. Par la proposition 2.2.6, $\mathcal{J}$ est un homéomorphisme entre E muni de la topologie faible et E^{**} muni de la topologie faible-*. Donc, par homéomorphie, la boule unité fermée de E est faiblement compacte.

Supposons à présent que $\overline{B}(0, 1)$ est faiblement compact. Par homéomorphie, $\mathcal{J}(\overline{B}(0, 1))$ est compact pour la topologie $\sigma^*(E^*, E^{**})|_{\mathcal{J}(E)}$, et par conséquent, faiblement-* compact. Comme l'espace E^{**} muni de la topologie faible-* est séparé, l'ensemble $\mathcal{J}(\overline{B}(0, 1))$ est faiblement-* fermé. Par isométrie, cet ensemble est inclus dans la boule unité fermée de E^{**} . Par le lemme 2.2.3, $\mathcal{J}(\overline{B}(0, 1))$ est dense dans la boule unité fermée de E^{**} pour la topologie faible-*. Donc, les boules unité fermées de E et E^{**} sont en bijection. Si $\zeta \in E^{**} \setminus \{0\}$, alors il existe $x \in E$ avec $\|x\| \leq 1$ et $\frac{\zeta}{\|\zeta\|^{**}} = \mathcal{J}_x$. Donc, $\zeta = \mathcal{J}_{\|\zeta\|^{**}x}$. Le cas où $\zeta = 0$ est évidemment trivial. Donc, $\mathcal{J} : E \rightarrow E^{**}$ est surjectif. $\square$

Mettons bout à bout tous les résultats acquis.

Théorème 2.2.3 (Caractérisation des espaces réflexifs, **AC**). *Si E est un espace de Banach, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) E est réflexif.
- (ii) La boule unité fermée $\overline{B}(0, 1)$ est faiblement compacte.
- (iii) Toute suite bornée de E possède une sous-suite faiblement convergente.

Démonstration. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) : Cela résulte de la proposition 2.2.7.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : Si $\overline{B}(0, 1)$ est faiblement compact, alors $\overline{B}(0, r)$ l'est aussi pour tout $r > 0$ car l'application $x \mapsto rx$ est un homéomorphisme entre $\overline{B}(0, 1)$ et $\overline{B}(0, r)$. Donc, si $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée, alors elle est incluse dans une boule fermée qui est faiblement compacte. On conclut par le théorème d'Eberlein-Smulian.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) : C'est une application directe du théorème d'Eberlein-Smulian. $\square$

Corollaire 2.2.1 ([13], **AC**). *L'espace de Banach E est réflexif si et seulement si E^* est réflexif.*

Démonstration. Supposons que E est réflexif. Alors E et E^{**} sont isométriquement isomorphes. On en tire que la topologie faible et faible-* de E^* coïncident. Il est déjà connu que la topologie faible-* est plus fine que la topologie faible. Considérons un ouvert de base U de $\sigma(E^*, E^{**})$. Il prend la forme

$$U = \cap_{j=1}^n \mu_j^{-1}([r_j - \varepsilon_j, r_j + \varepsilon_j]) = \{\xi \in E^* : |\langle \mu_j, \xi \rangle - r_j| < \varepsilon_j \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}\}$$

où $\mu_1, \dots, \mu_n \in E^{**}$, $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n > 0$. Vu que E est réflexif, il existe $x_1, \dots, x_n \in E$ tels que $\mu_1 = \mathcal{J}_{x_1}$, ..., $\mu_n = \mathcal{J}_{x_n}$. Donc

$$\begin{aligned} U &= \{\xi \in E^* : |\langle \mathcal{J}_{x_j}, \xi \rangle - r_j| < \varepsilon_j \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}\} \\ &= \{\xi \in E^* : |\langle \xi, x_j \rangle - r_j| < \varepsilon_j \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}\}. \end{aligned}$$

Donc, $U \in \sigma^*(E, E^*)$. Par le théorème de Banach-Alaoglu, la boule unité fermée B_* de E^* est faiblement-* compacte, donc faiblement compacte. Le théorème précédent montre alors que E^* est réflexif.

Supposons que E^* est réflexif. La première partie de la preuve montre que E^{**} est réflexif et que $\sigma(E^{**}, E^{***}) = \sigma^*(E^*, E^{**})$. Donc, la boule unité fermée B_{**} de E^{**} est faiblement compacte. Notons B la boule unité fermée de E . L'ensemble $\mathcal{J}(B)$ est un fermé faible (car il est convexe et fermé par isométrie de $\mathcal{J}$) inclus dans le compact faible B_{**} de E^{**} . Donc, $\mathcal{J}(B)$ est faiblement compact dans E^{**} , donc dans $\mathcal{J}(E)$ aussi. Par la proposition 2.2.6, les espaces $(E, \sigma(E, E^*))$ et $(E^{**}, \sigma^*(E^*, E^{**})|_{\mathcal{J}(E)}) = (E^{**}, \sigma(E^{**}, E^{***})|_{\mathcal{J}(E)})$ sont homéomorphes via l'application $\mathcal{J} : E \rightarrow E^{**}$. Il s'ensuit donc que B est faiblement compact et que E est réflexif. $\square$

Corollaire 2.2.2. *Si E est un espace réflexif, alors la topologie faible et faible-* de E^* coïncident.*

Montrons qu'il existe des espaces de Banach non-réflexifs, comme application de la théorie développée ci-dessus.

Exemple 2.2.1 ([6]). Considérons $E = L^1(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions intégrables définies à égalité presque partout près. Lorsqu'il est muni de la norme $\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx$, il est connu que $L^1(\mathbb{R}^n)$ forme un espace de Banach [39]. Son espace dual est isomorphe et isométrique à $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ (espace des fonctions mesurables bornées sur $\mathbb{R}^n$ presque partout et définies à égalité presque partout près) muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup \text{pp}_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|$ [30]. Nous pouvons donc identifier $L^1(\mathbb{R}^n)^*$ à $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Par l'absurde, supposons que $L^1(\mathbb{R}^n)$ est réflexif. Définissons

$$\omega_m = \prod_{i=1}^n \left] -\frac{1}{2^{m+1}}, \frac{1}{2^{m+1}} \right[$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$. Notons $\mathcal{L}$ la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$. Par construction, il est clair que $(\omega_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante (pour l'inclusion) d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $\mathcal{L}(\omega_m) = 2^{-nm}$ et $\mathcal{L}(\omega_m) \rightarrow 0$ si $m \rightarrow +\infty$. Définissons $f_m = \chi_{\omega_m} / \|\chi_{\omega_m}\|_1$. La suite $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est clairement bornée dans $L^1(\mathbb{R}^n)$. En vertu du théorème 2.2.3, il existe une sous-suite $(f_{k(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ de $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ qui converge faiblement vers une fonction f de $L^1(\mathbb{R}^n)$. Autrement dit, pour tout $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a $\langle g, f_{k(m)} \rangle \rightarrow \langle g, f \rangle$ si $m \rightarrow +\infty$. On rappelle que l'isomorphisme isométrique entre $L^1(\mathbb{R}^n)^*$ et $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ est donné par

$$T : h \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \mapsto T_h \in L^1(\mathbb{R}^n)^*$$

avec $T_h(u) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)h(x)dx$ pour tout $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Il s'ensuit que la convergence faible de $(f_{k(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ vers f s'exprime

$$\langle g, f_{k(m)} \rangle = \langle T_g, f_{k(m)} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)f_{k(m)}(x) dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(x) dx \quad \text{si } m \rightarrow +\infty$$

pour tout $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Il est clair que $f_m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Fixons $j \in \mathbb{N}$. On a,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_{k(m)}(x)\chi_{\omega_j}(x) dx = \int_{\omega_j \cap \omega_{k(m)}} \frac{dx}{\|\chi_{\omega_{k(m)}}\|_1} = 2^{nk(m)} \mathcal{L}(\omega_{k(j)} \cap \omega_{k(m)}).$$

Il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $M > j$ et donc $\mathcal{L}(\omega_j \cap \omega_{k(M)}) = \mathcal{L}(\omega_{k(M)})$. Donc, si $m \geq M$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_{k(m)}(x)\chi_{\omega_j}(x) dx = 2^{nk(m)} \mathcal{L}(\omega_{k(m)}) = 1 \rightarrow 1 \quad \text{si } m \rightarrow +\infty.$$

Donc, $\langle \chi_{\omega_j}, f_{k(m)} \rangle$ converge vers 1 et vers $\langle \chi_{\omega_j}, f \rangle$ lorsque $m \rightarrow +\infty$. Donc $\langle f, \chi_{\omega_j} \rangle = 1$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Mais nous savons que $f\chi_{\omega_j}$ converge simplement presque partout vers 0 lorsque

$j \rightarrow +\infty$, que $|f\chi_{\omega_j}| \leq |f|$ et $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Le théorème de la convergence dominée nous indique donc que $\langle f, \chi_{\omega_j} \rangle$ converge vers 0 lorsque $j \rightarrow +\infty$, une absurdité. Donc, $L^1(\mathbb{R}^n)$ ne peut être réflexif.

Remarque 2.2.1. En fait, il est possible de montrer que $L^1(\mathbb{R}^n)^{**}$ est homéomorphe à l'espace des mesures signées finies finiment additives absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue [10].

Une classe importante d'espaces réflexifs est donnée par les espaces de Hilbert. Pour le montrer, nous avons besoin du fameux théorème de Fréchet-Riesz.

Théorème 2.2.4 (Théorème de Fréchet-Riesz, [13]). *Si E est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, alors E est isométriquement isomorphe à son dual via l'application*

$$\Phi : x \in E \mapsto \langle x, \cdot \rangle \in E^*.$$

Démonstration. Tout d'abord, il résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que $\langle x, \cdot \rangle$ est continu pour tout $x \in E$. Bien sûr, l'application Φ est linéaire. Elle est injective car $\langle x, y \rangle = 0$ pour tout $y \in E$ implique que $\|x\| = 0$ et que $x = 0$. On montre aussi qu'il s'agit d'une isométrie. Soit $x \in E$. On a

$$\|\Phi(x)\|_* = \sup_{\|y\| \leq 1} |\langle x, y \rangle| \geq \frac{|\langle x, x \rangle|}{\|x\|} = \|x\|.$$

Si $\|y\| \leq 1$, alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\|y\| \leq \|x\|$. Donc, $\|\Phi(x)\|_* = \|x\|$ pour tout $x \in E$. Il reste à montrer que Φ est surjectif. Soit $\xi \in E^*$. Le cas $\xi = 0$ étant évident, supposons que $\xi \neq 0$. Soit $x_0 \in (\ker \xi)^\perp \setminus \{0\}$ ¹³. On a $\langle \xi, x_0 \rangle \neq 0$. Nous pouvons même supposer que $\langle \xi, x_0 \rangle = 1$, quitte à diviser x_0 par $\langle \xi, x_0 \rangle$. Dans ce cas, on a $E = \ker \xi \oplus \mathbb{R}x_0$. En effet, si $x \in E$, alors $\langle \xi, x - rx_0 \rangle = 0$ si et seulement si $r = \frac{\langle \xi, x \rangle}{\langle \xi, x_0 \rangle}$. Pour un tel r , il s'ensuit que $x = (x - rx_0) + rx_0 \in \ker \xi \oplus \mathbb{R}x_0$. Bien sûr, on a aussi $\ker \xi \cap \mathbb{R}x_0 = \{0\}$. D'où $E = \ker \xi \oplus \mathbb{R}x_0$. Finalement, si $x = y + rx_0$ avec $y \in \ker \xi$ et $r \in \mathbb{R}$, alors

$$\langle \xi, x \rangle = r\langle \xi, x_0 \rangle = r = \frac{r\langle x_0, x_0 \rangle}{\langle x_0, x_0 \rangle} = \left\langle \frac{x_0}{\|x_0\|^2}, y + rx_0 \right\rangle$$

ce qui montre que $\xi = \Phi(x_0/\|x_0\|^2)$. □

Corollaire 2.2.3. *Si E est un espace de Hilbert, alors il est réflexif.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du théorème de Fréchet-Riesz. En effet, si $\zeta \in E^{**}$ et $\xi \in E^*$, alors

$$\zeta(\xi) = \langle \Phi_2^{-1}(\zeta), \xi \rangle = \langle \Phi_1^{-1}\Phi_2^{-1}(\zeta), \Phi_1^{-1}(\xi) \rangle = \xi(\Phi_1^{-1}\Phi_2^{-1}(\zeta)) = \mathcal{J}_{\Phi_1^{-1}\Phi_2^{-1}(\zeta)}(\xi)$$

où $\Phi_1 : E \rightarrow E^*$ et $\Phi_2 : E^* \rightarrow E^{**}$ sont les isométries du théorème de Fréchet-Riesz. Donc, $\zeta = \mathcal{J}_{\Phi_1^{-1}\Phi_2^{-1}(\zeta)}$. □

13. $(\ker \xi)^\perp$ étant fermé, on a $E = \ker \xi \oplus (\ker \xi)^\perp$ (voir par exemple [40]) et donc, $(\ker \xi)^\perp$ ne peut être réduit à 0 puisque $\ker \xi \neq E$.

Corollaire 2.2.4. *Si E est réflexif et si $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée de E telle que toute sous-suite faiblement convergente converge vers $x_0 \in E$, alors $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers x_0 .*

Démonstration. Par l'absurde, supposons que $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ ne converge pas faiblement vers x_0 . Il existe donc un voisinage ouvert faible V de x_0 et une sous-suite $(x_{k(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ tels que $x_{k(m)} \notin V$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ ¹⁴. Vu nos hypothèses, la sous-suite $(x_{k(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ est bornée et par réflexivité, on peut extraire une sous-suite $(x_{l(k(m))})_{m \in \mathbb{N}}$ faiblement convergente. Vu nos hypothèses, cette sous-suite converge faiblement vers x_0 . Donc, il existe $N \geq M$ tel que $x_{l(k(m))} \in V$ pour tout $m \geq N$, ce qui est absurde. $\square$

Voici un dernier fait important sur les ensembles faiblement compacts.

Proposition 2.2.8. *Tout ensemble faiblement compact de E est borné pour la norme de E .*

Démonstration. Procédons par l'absurde et supposons que K est un ensemble faiblement compact de E non-borné pour la norme. Donc, pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $x_m \in E$ tel que $\|x_m\| > m$. Donc $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite non-bornée de K . Par le théorème d'Eberlein-Smulian, on peut extraire une sous-suite $(x_{k(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ faiblement convergente vers un point x_0 de K . Autrement dit,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} |\langle \xi, x_{k(m)} - x_0 \rangle| = 0 \quad \forall \xi \in E^*.$$

On en tire que $(\langle \xi, x_{k(m)} \rangle)_{m \in \mathbb{N}}$ est borné pour tout $\xi \in E^*$. Donc,

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} |\langle \xi, x_{k(m)} \rangle| < +\infty \quad \forall \xi \in E^*.$$

Cette égalité est équivalente à ce que

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \sup_{\|\xi\|_* \leq 1} |\langle \xi, x_{k(m)} \rangle| = \sup_{m \in \mathbb{N}} \|\mathcal{J}_{x_{k(m)}}\|_{**} = \sup_{m \in \mathbb{N}} \|x_{k(m)}\| < +\infty$$

par le théorème de Banach-Steinhaus, ce qui est absurde vu que $\sup_{m \in \mathbb{N}} \|x_{k(m)}\| \geq \sup_{m \in \mathbb{N}} k(m) = +\infty$. $\square$

14. On sait qu'il existe $M_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{M_0} \notin V$. Ensuite, il existe $M_1 > M_0$ tel que $x_{M_1} \notin V$. Par récurrence, on sait alors construire la sous-suite $(x_{k(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ telle que $x_{k(m)} = x_{M_m} \notin V$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Chapitre 3

Fonctions convexes et transformées de Legendre

Dans ce chapitre, nous introduisons la notion de fonctions convexes définies sur des parties d'un espace de Banach E . Ensuite, nous établirons les propriétés concernant la stabilité de la convexité par rapport à diverses opérations effectuées sur des fonctions convexes. Ces fonctions jouissent aussi de belles propriétés de régularité qu'il conviendra d'établir. Nous verrons que ces fonctions, lorsqu'elles sont différentiables, peuvent être caractérisées à l'aide de leurs dérivées, comme c'est le cas en analyse classique dans $\mathbb{R}^n$. Une classe importante de fonctions convexes est donnée par les fonctions convexes semi-continues inférieurement. Celles-ci bénéficient d'un résultat qui les caractérise par leur épigraphe, comme nous le verrons. Nous introduirons le calcul sous-différentiel pour traiter des cas où une fonction convexe est non différentiable. Enfin, nous définirons la transformée de Legendre de fonctions et démontrerons ses principales propriétés. Tout au long de ce texte, nous considérerons des fonctions f à valeurs dans la droite réelle étendue $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Durant ce chapitre, nous désignerons par X un espace localement convexe muni d'un système fondamental de semi-normes P et les espaces de Banach seront, comme d'habitude, notés E .

Notre référence principale est [32]. Pour approfondir quelques-uns des résultats, nous utilisons [4]. L'auteur de cette dernière référence travaillant dans des espaces de Hilbert, nous avons dû adapter certaines des preuves qui y sont présentées. Néanmoins, nous nous détachons de ces ouvrages une fois que l'on aborde la transformée de Legendre. Nous utilisons alors des idées de [44] et [37]. Comme d'habitude, on pourra aussi consulter l'intemporel [35].

3.1 Définition et propriétés de base des fonctions convexes

Commençons par définir la notion de fonction convexe.

Définition 3.1.1. Soit $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction. Son *domaine effectif*¹ est défini par

$$\text{dom}(f) = \{x \in X : f(x) < +\infty\}$$

et son *épigraphe* par

$$\text{epi}(f) = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : y \geq f(x)\}.$$

1. Par abus de langage, on dira simplement que c'est le domaine de f .

Son *épigraphe strict* est l'ensemble

$$\text{epi}_s(f) = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : y > f(x)\}.$$

La fonction f sera dite *propre* lorsque $f(x) > -\infty$ pour tout $x \in X$ et $\text{dom}(f) \neq \emptyset$. Si l'une des conditions n'est pas respectée, la fonction est *impropre*.

Avant de poursuivre, insistons sur le fait que nous gardons un certain degré de généralité, même si f est supposé défini sur X . Si g est une fonction définie sur une partie V de X , il suffit d'étendre g à X en posant $g(x) = +\infty$ pour tout $x \notin V$. Ceci nous procure une fonction qui coïncide avec g sur V et qui a un domaine effectif égal au domaine de g . Nous pouvons introduire la notion de fonctions convexes.

Définition 3.1.2. Une fonction $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est *convexe* si et seulement si $\text{epi}(f)$ est convexe dans $X \times \mathbb{R}$.

En fait, on peut se contenter de vérifier que l'épigraphe strict est convexe pour montrer la convexité d'une fonction.

Proposition 3.1.1. Une fonction $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est convexe si et seulement si $\text{epi}_s(f)$ est convexe dans $X \times \mathbb{R}$.

Démonstration. Si f est convexe, alors $\text{epi}(f)$ est convexe. Soient $(x, y) \in \text{epi}_s(f)$, $(x', y') \in \text{epi}_s(f)$ et $\lambda \in [0, 1]$. Comme $\text{epi}(f)$ est convexe, on a $\lambda(x, f(x)) + (1 - \lambda)(x', f(x')) \in \text{epi}(f)$, c'est-à-dire $f(\lambda x + (1 - \lambda)x') \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x') < \lambda y + (1 - \lambda)y'$, ce qui montre que $\lambda(x, y) + (1 - \lambda)(x', y') \in \text{epi}_s(f)$.

Supposons que $\text{epi}_s(f)$ est convexe et soient $(x, y), (x', y') \in \text{epi}(f)$ et $\lambda \in [0, 1]$. Il est clair que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $(x, y + \varepsilon), (x', y' + \varepsilon) \in \text{epi}_s(f)$. Donc, $\lambda(x, y + \varepsilon) + (1 - \lambda)(x', y' + \varepsilon) \in \text{epi}_s(f)$. On obtient $f(\lambda x + (1 - \lambda)x') < \lambda y + (1 - \lambda)y' + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. En faisant tendre ε vers 0, on obtient $\lambda(x, y) + (1 - \lambda)(x', y') \in \text{epi}(f)$. Ceci conclut la preuve. $\square$

Voici un critère permettant de vérifier aisément la convexité d'une fonction.

Proposition 3.1.2. Une fonction propre $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est convexe si et seulement si

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

pour tout $x, y \in X$ et tout $\lambda \in [0, 1]$.

Démonstration. La condition est nécessaire : Supposons que f est convexe. Soient $x, y \in X$ et $\lambda \in [0, 1]$. Si $x, y \in \text{dom}(f)$, alors $f(x), f(y) \in \mathbb{R}$. Donc, $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$ appartiennent à $\text{epi}(f)$. Par convexité, on a $\lambda(x, f(x)) + (1 - \lambda)(y, f(y)) = (\lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)) \in \text{epi}(f)$. Par définition de l'épigraphe, on a l'inégalité recherchée. Si x ou y n'appartient pas à $\text{dom}(f)$, alors le second membre de l'inégalité dans l'énoncé est infini et on peut directement conclure.

La condition est suffisante : Soient (x, y) et (x', y') des éléments de $\text{epi}(f)$ et $\lambda \in [0, 1]$. On a $y \geq f(x)$ et $y' \geq f(x')$. Donc, $\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x') \leq \lambda y + (1 - \lambda)y'$. Par hypothèse, on a $f(\lambda x + (1 - \lambda)x') \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x')$. Donc, $f(\lambda x + (1 - \lambda)x') \leq \lambda y + (1 - \lambda)y'$ et par conséquent $\lambda(x, y) + (1 - \lambda)(x', y') \in \text{epi}(f)$. $\square$

Une autre façon de voir la convexité est l'inégalité de Jensen.

Proposition 3.1.3 (Inégalité de Jensen). *Une fonction propre f est convexe si et seulement si*

$$f\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i f(x_i)$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$, tout $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$ avec $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$ et tout $x_1, \dots, x_m \in X$.

Démonstration. La condition est nécessaire. Par la proposition 1.1.1, $\text{epi}(f)$ est convexe si et seulement si il est stable par combinaison convexe. Donc, $\sum_{i=1}^m \lambda_i (x_i, f(x_i)) \in \text{epi}(f)$. On en déduit immédiatement l'inégalité par définition de l'épigraphe. La suffisance de la condition est évidente en appliquant la proposition 3.1.2 car les inégalités de la proposition 3.1.2 sont des cas particuliers des inégalités de l'énoncé. $\square$

Donnons quelques exemples élémentaires de fonctions convexes. Les vérifications sont immédiates grâce à la proposition 3.1.2.

Exemple 3.1.1. Les fonctions suivantes sont convexes :

(i) Si C est un convexe de E , alors sa *fonction indicatrice* δ_C définie par

$$\delta_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in C \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

est convexe. On voit facilement que $\text{dom}(\delta_C) = C$.

(ii) Toute forme linéaire ξ est convexe et $\text{dom } \xi = E$.

(iii) Toute semi-norme $p : E \rightarrow [0, +\infty[$ est convexe. En particulier, toute norme est convexe. Leur domaine est évidemment E .

(iv) Toute application de la forme $x \in E \mapsto \langle \xi, x \rangle + b$ avec $\xi \in E^*$ et $b \in \mathbb{R}$ est convexe. Ce sont les fonctions affines à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Nous voyons que le domaine calculé dans ces exemples est toujours convexe. En fait, ce phénomène se généralise à toutes les fonctions convexes.

Proposition 3.1.4. *Si $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est une fonction convexe, alors $\text{dom}(f)$ est convexe.*

Démonstration. Le cas où $\text{dom}(f) = \emptyset$ est trivial, supposons donc que le domaine n'est pas vide. Soient $x, x' \in \text{dom}(f)$ et $\lambda \in [0, 1]$ et montrons que $f(\lambda x + (1 - \lambda)x') < +\infty$. Par définition du domaine, il existe $y \in]f(x), +\infty[$ et $y' \in]f(x'), +\infty[$. On a $(x, y), (x', y') \in \text{epi}(f)$ et comme f est convexe, on obtient $(\lambda x + (1 - \lambda)x', \lambda y + (1 - \lambda)y') \in \text{epi}(f)$. Donc,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)x') \leq \lambda y + (1 - \lambda)y' < +\infty,$$

ce qui montre que $\lambda x + (1 - \lambda)x' \in \text{dom}(f)$. $\square$

Débarassons-nous d'abord de la notion de fonction impropre en montrant le peu d'intérêt que ces fonctions présentent dans le cadre des fonctions convexes. La proposition suivante montre que les fonctions convexes impropres valent $-\infty$ en tous points de l'intérieur relatif du domaine.

Proposition 3.1.5. *Si la fonction $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est convexe et impropre, alors $f(x) = -\infty$ pour tout $x \in \text{dom}(f)^{\circ R}$.*

Démonstration. Supposons que f est convexe et impropre. Le cas où $\text{dom}(f) = \emptyset$ étant trivial, on ne traite que le cas non-vidé. Il existe $x_0 \in \text{dom}(f)$ tel que $f(x_0) = -\infty$. La proposition précédente montre que $\text{dom}(f)$ est convexe. Soit $x \in \text{dom}(f)^{\circ R} \setminus \{x_0\}$. Procédons par l'absurde et supposons que $f(x) \in \mathbb{R}$. Nous savons que $[x_0, x]$ est inclus dans $\text{dom}(f)$. Mais vu que $x \in \text{dom}(f)^{\circ R}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[x_0, x + \varepsilon(x - x_0)] \subset \text{dom}(f)$. Par convexité, nous savons que $[(x_0, -m), (x + \varepsilon(x - x_0), f(x + \varepsilon(x - x_0)))] \subset \text{epi}(f)$ pour tout $m > 0$. De là, on obtient

$$f(\lambda x_0 + (1 - \lambda)(x + \varepsilon(x - x_0))) \leq -\lambda m + (1 - \lambda)f(x + \varepsilon(x - x_0))$$

pour tout $\lambda \in [0, 1]$ et tout $m > 0$. Si $m \rightarrow +\infty$, on voit que $f(\lambda x_0 + (1 - \lambda)(x + \varepsilon(x - x_0))) = -\infty$ pour tout $\lambda \in]0, 1]$. En particulier, pour $\lambda = \varepsilon/(1 + \varepsilon)$, on a $f(x) = -\infty$, d'où une absurdité. $\square$

On voit que les fonctions impropres sont des cas très pathologiques et d'un intérêt très limité. C'est pourquoi nous allons nous contenter de n'étudier que les fonctions convexes propres. Comme on peut s'en douter, une fonction est entièrement définie par son épigraphe.

Proposition 3.1.6. *Deux fonctions f et g sont égales si et seulement si $\text{epi}(f) = \text{epi}(g)$.*

Démonstration. Il est clair que $(f = g) \Rightarrow (\text{epi}(f) = \text{epi}(g))$. Montrons la réciproque. Soit $x \in X$. Si $f(x) = -\infty$, alors $(x, y) \in \text{epi}(f) = \text{epi}(g)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Donc, $g(x) \leq y$ pour tout $y \in \mathbb{R}$ et $g(x) = -\infty$. Si $f(x) = +\infty$, alors $(x, y) \notin \text{epi}(f) = \text{epi}(g)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Donc, $g(x) = +\infty$. Enfin, si $f(x) \in \mathbb{R}$, alors $(x, f(x)) \in \text{epi}(f) = \text{epi}(g)$. Donc, $f(x) \geq g(x)$. Si on n'a pas l'égalité, alors il existe $y \in]g(x), f(x)[$ et $(x, y) \in \text{epi}(g) \setminus \text{epi}(f)$, ce qui est absurde. On en conclut que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in X$. $\square$

Nous pouvons munir l'ensemble des fonctions définies sur E à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ d'une relation d'ordre $\preceq$ définie par

$$f \preceq g \Leftrightarrow \text{epi}(f) \supset \text{epi}(g).$$

Il est évident qu'il s'agit bien d'une relation d'ordre sur $\overline{\mathbb{R}}^X$. Nous allons montrer que tout ensemble ayant les caractéristiques d'un épigraphe de fonction donne lieu à une nouvelle fonction.

Définition 3.1.3. Une partie U de $X \times \mathbb{R}$ est un *épigraphe* si et seulement si elle vérifie la propriété suivante : $x \in X, y \in \mathbb{R}, (x, y) \in U \Rightarrow (x, y') \in U \quad \forall y' > y$.

La proposition qui suit est évidente.

Proposition 3.1.7. *Toute union d'épigraphes est un épigraphe et toute intersection d'épigraphes est un épigraphe.*

Assez naturellement, on peut regarder ce qu'il en est des opérations d'espace vectoriel.

Proposition 3.1.8. *Si U_1 et U_2 sont des épigraphes et $\lambda > 0$, alors $U_1 + U_2$ et λU_1 sont des épigraphes. En particulier, toute combinaison linéaire à coefficients strictement positifs d'épigraphes est un épigraphe.*

Démonstration. Soient $(x_1, y_1) \in U_1$, $(x_2, y_2) \in U_2$ et $y > y_1 + y_2$. Il faut montrer que $(x_1 + x_2, y) \in U_1 + U_2$. Comme $y - y_1 > y_2$ et U_2 est un épigraphe, on a $(x_2, y - y_1) \in U_2$. Au final, on a $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y_1) + (x_2, y - y_1) \in U_1 + U_2$ et $U_1 + U_2$ est un épigraphe. Supposons que $(x, y) \in U_1$ et soit $y' > \lambda y$. On a $y'/\lambda > y$ et comme U_1 est un épigraphe, on obtient $(x, y'/\lambda) \in U_1$, d'où $(\lambda x, y') \in \lambda U_1$. $\square$

Proposition 3.1.9. *Si U est un épigraphe, alors $\overline{U}$ et U° sont des épigraphes.*

Démonstration. (i) $\overline{U}$ est un épigraphe : Soient $(x, y) \in \overline{U}$ et $y' > y$. On sait que (x, y) est limite dans $X \times \mathbb{R}$ d'une suite généralisée $((x_i, y_i))_{i \in I}$ de U . Nous savons que $y_i + y' - y > y_i$ pour tout $i \in I$. Vu que U est un épigraphe, $((x_i, y_i + y' - y))_{i \in I}$ est une suite de U qui converge vers (x, y') . D'où $(x, y') \in \overline{U}$.

(ii) U° est un épigraphe : Soient $(x, y) \in U^\circ$ et $y' > y$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \times]y - \varepsilon, y + \varepsilon[\subset U$. Comme U est un épigraphe, on a même $B(x, \varepsilon) \times]y - \varepsilon, +\infty[\subset U$ et par conséquent, $y' \in]y - \varepsilon, +\infty[$. D'où $(x, y') \in U^\circ$. $\square$

Voici une proposition qui montre comment nous pouvons construire une fonction qui se rapproche au mieux d'un épigraphe donné.

Proposition 3.1.10. *Si U est un épigraphe dans $X \times \mathbb{R}$, alors il existe un élément $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ maximum pour $\preceq$ tel que $U \subset \text{epi}(f)$. Si, de plus, U est fermé dans $X \times \mathbb{R}$, alors $U = \text{epi}(f)$.*

Démonstration. On définit $f(x) = \inf\{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in U\}$ pour tout $x \in X$. Si $(x, y) \in U$ alors, par construction, $y \geq f(x)$ et donc $(x, y) \in \text{epi}(f)$. Ceci montre que $U \subset \text{epi}(f)$. Supposons que $g \in \overline{\mathbb{R}}^X$ vérifie $U \subset \text{epi}(g)$. Donc, pour tout $(x, y) \in U$, on a $y \geq g(x)$. Vu la définition de f , on a clairement $f(x) \geq g(x)$. Si $(x, y) \notin U$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, alors $f(x) = \inf \emptyset = +\infty$ et $f(x) \geq g(x)$. Comme $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in X$, on a bien $g \preceq f$. Supposons U fermé et soit l'élément maximum f tel que $U \subset \text{epi}(f)$. Soit $(x, y) \in \text{epi}(f)$. Par construction, $f(x) = \inf\{y' \in \mathbb{R} : (x, y') \in U\}$. Si $f(x) \in \mathbb{R}$, il existe une suite $((x, y_m))_{m \in \mathbb{N}}$ de U telle que $y_m \rightarrow f(x)$ si $m \rightarrow +\infty$. Donc, $((x, y_m))_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite de U qui converge vers $(x, f(x)) \in E \times \mathbb{R}$. Vu que U est fermé, on a $(x, f(x)) \in U$. Puisque $y \geq f(x)$ et U est un épigraphe, on obtient $(x, y) \in U$. Si $f(x) = -\infty$, alors $(x, y') \in U$ pour tout $y' \in \mathbb{R}$ par définition de f . Donc, $(x, y) \in U$. On peut conclure que $U = \text{epi}(f)$. $\square$

La fonction maximale associée à un épigraphe U sera simplement notée $\text{fonc}(U)$. Par construction, on a toujours $U \subset \text{epi}(\text{fonc}(U))$. Si un épigraphe est convexe, alors son unique fonction associée est convexe aussi.

Proposition 3.1.11. *Si U est un épigraphe convexe, alors $\text{fonc}(U)$ est une fonction convexe.*

Démonstration. Soient $(x, y), (x', y') \in \text{epi}(\text{fonc}(U))$ et $\lambda \in [0, 1]$. Il faut montrer que $\text{fonc}(U)(\lambda x + (1 - \lambda)x') \leq \lambda y + (1 - \lambda)y'$. Mais par définition, on a

$$\begin{aligned} \text{fonc}(U)(\lambda x + (1 - \lambda)x') &= \inf\{z \in \mathbb{R} : (\lambda x + (1 - \lambda)x', z) \in U\} \\ &\leq \inf(\lambda\{z \in \mathbb{R} : (x, z) \in U\} + (1 - \lambda)\{z \in \mathbb{R} : (x', z) \in U\}) \\ &\leq \lambda \inf\{z \in \mathbb{R} : (x, z) \in U\} + (1 - \lambda) \inf\{z \in \mathbb{R} : (x', z) \in U\} \\ &\leq \lambda y + (1 - \lambda)y' \end{aligned}$$

d'où la conclusion. $\square$

Etablissons des résultats qui montrent comment nous pouvons construire de nouvelles fonctions convexes à partir de fonctions convexes déjà connues.

Proposition 3.1.12. *Si $f_i \in \overline{\mathbb{R}}^X$ sont des fonctions convexes propres pour tout $i \in I$, alors $\sup_{i \in I}(f_i)$ est une fonction convexe.*

Démonstration. Pour la convexité, il suffit de remarquer que $\text{epi}(\sup_{i \in I}(f_i)) = \cap_{i \in I} \text{epi}(f_i)$ et d'utiliser la proposition 1.1.2. $\square$

Remarquons au passage que si f_i est propre et convexe pour tout $i \in I$, alors $\sup_{i \in I}(f_i)$ n'est pas forcément propre comme en atteste l'exemple $f_i = i$ sur E avec $i \in \mathbb{N}$. On pourrait aussi se demander si, dans les conditions de la proposition précédente, la fonction $\inf_{i \in I}(f_i)$ est convexe. Il n'en est rien car il est facile de construire des contre-exemples. Dans le même esprit que pour montrer qu'une union de convexes n'est pas convexe, considérons les fonctions indicatrices δ_{x_1} et δ_{x_2} avec $x_1 \neq x_2$. On a $\inf(\delta_{x_1}, \delta_{x_2}) = \delta_{\{x_1, x_2\}}$ et $\delta_{\{x_1, x_2\}}(\frac{x_1+x_2}{2}) = +\infty > 0 = \frac{1}{2}\delta_{\{x_1, x_2\}}(x_1) + \frac{1}{2}\delta_{\{x_1, x_2\}}(x_2)$ et la proposition 3.1.2 montre que la fonction $\inf(\delta_{x_1}, \delta_{x_2})$ n'est pas convexe. Néanmoins, toute fonction est minorée par la fonction convexe valant $-\infty$ en tout point. On peut donc s'intéresser à la plus grande fonction convexe qui minore une fonction donnée au sens de la relation d'ordre $\preceq$ introduite plus haut.

Définition 3.1.4. Si $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$, alors son *enveloppe convexe* est la fonction convexe g telle que $g \preceq f$ qui est maximale pour $\preceq$. L'enveloppe convexe de f sera notée $\text{conv}(f)$.

Il faut cependant vérifier que la fonction convexe $\text{conv}(f)$ est unique.

Proposition 3.1.13. *Si $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ est propre, alors $\text{conv}(\text{epi}(f))$ est un épigraphe et*

$$\text{conv}(f) = \text{fonc}(\text{conv}(\text{epi}(f))).$$

De plus, $\text{dom}(f) \subset \text{dom}(\text{conv}(f))$.

Démonstration. Soient $(x, y) \in \text{conv}(\text{epi}(f))$ et $y' > y$. On sait par la proposition 1.1.4 que (x, y) peut s'écrire

$$(x, y) = \sum_{i=1}^m \lambda_i (x_i, y_i)$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$ et $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m) \in \text{epi}(f)$. Quitte à enlever les λ_i nuls, on peut supposer que chaque λ_i est strictement positif. Donc, $(x, y) \in \sum_{i=1}^m \lambda_i \text{epi}(f)$ et cet ensemble est un épigraphe car c'est une combinaison linéaire à coefficients strictement positifs d'épigraphes. Il s'ensuit que $(x, y') \in \sum_{i=1}^m \lambda_i \text{epi}(f) \subset \text{conv}(\text{epi}(f))$. Donc, $\text{conv}(\text{epi}(f))$ est bien un épigraphe.

Nous savons que

$$\text{conv}(f) = \text{fonc}(\text{conv}(\text{epi}(f))) \Leftrightarrow \text{epi}(\text{conv}(f)) = \text{epi}(\text{fonc}(\text{conv}(\text{epi}(f))))$$

par la proposition 3.1.6. Par définition, on a $\text{conv}(f) \preceq f$, c'est-à-dire $\text{epi}(\text{conv}(f)) \supset \text{epi}(f)$. Comme $\text{epi}(\text{conv}(f))$ est convexe et contient $\text{epi}(f)$, on a $\text{conv}(\text{epi}(f)) \subset \text{epi}(\text{conv}(f))$. Nous savons que $\text{conv}(\text{epi}(f)) \subset \text{epi}(\text{fonc}(\text{conv}(\text{epi}(f))))$. Donc, $\text{conv}(f)$ est une fonction dont l'épigraphe contient $\text{conv}(\text{epi}(f))$ et $\text{fonc}(\text{conv}(\text{epi}(f)))$ est une fonction d'épigraphe contenant

$\text{conv}(\text{epi}(f))$ et qui est maximale. Donc, $\text{sup}(\text{conv}(f), \text{fonc}(\text{conv}(\text{epi}(f))))$ est une fonction d'épigraphe $\text{epi}(\text{conv}(f)) \cap \text{epi}(\text{fonc}(\text{conv}(\text{epi}(f))))$ contenant $\text{conv}(\text{epi}(f))$ et telle que $\text{fonc}(\text{conv}(\text{epi}(f))) \preceq \text{sup}(\text{conv}(f), \text{fonc}(\text{conv}(\text{epi}(f))))$. Par maximalité, on a

$$\text{sup}(\text{conv}(f), \text{fonc}(\text{conv}(\text{epi}(f)))) = \text{fonc}(\text{conv}(\text{epi}(f))).$$

Donc, $\text{epi}(\text{fonc}(\text{conv}(\text{epi}(f)))) = \text{epi}(\text{conv}(f)) \cap \text{epi}(\text{fonc}(\text{conv}(\text{epi}(f))))$ et par conséquent $\text{epi}(\text{conv}(f)) \supset \text{epi}(\text{fonc}(\text{conv}(\text{epi}(f))))$, i.e. $\text{conv}(f) \preceq \text{fonc}(\text{conv}(\text{epi}(f)))$. On a aussi $\text{fonc}(\text{conv}(\text{epi}(f))) \preceq f$ car

$$\text{epi}(f) \subset \text{conv}(\text{epi}(f)) \subset \text{epi}(\text{fonc}(\text{conv}(\text{epi}(f))))$$

et vu la proposition 3.1.11, la fonction $\text{fonc}(\text{conv}(\text{epi}(f)))$ est convexe. Par maximalité de $\text{conv}(f)$, on a alors $\text{conv}(f) = \text{fonc}(\text{conv}(\text{epi}(f)))$.

L'inclusion $\text{dom}(f) \subset \text{dom}(\text{conv}(f))$ résulte de ce que $\text{conv}(f) \preceq f$. □

Nous poursuivons l'étude en examinant ce qu'il en est du produit cartésien d'un nombre fini de fonctions convexes. La proposition qui suit est évidente.

Proposition 3.1.14. *Soient $f_1 \in \overline{\mathbb{R}}^{X_1}, \dots, f_m \in \overline{\mathbb{R}}^{X_m}$ des fonctions convexes propres définies sur des espaces vectoriels $X_1, \dots, X_m$. Alors la fonction produit $\times_{i=1}^m f_i : X_1 \times \dots \times X_m \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ définie par $(\times_{i=1}^m f_i)(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^m f_i(x_i)$ pour tout $x_1 \in X_1, \dots, x_m \in X_m$ est convexe propre.*

En ce qui concerne les combinaisons linéaires de fonctions convexes, nous avons facilement les propriétés suivantes en appliquant la proposition 3.1.2.

Proposition 3.1.15. *Soient f et g des fonctions convexes propres sur X et $\lambda \geq 0$. Alors $f + g$ et λf sont convexes. En conséquence, toute combinaison linéaire à coefficients positifs de fonctions convexes propres est une fonction convexe.*

Proposition 3.1.16. *Soient X et Y des espaces vectoriels. Si $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ est propre et convexe et si $T : Y \rightarrow X$ est une application linéaire, alors $f \circ T$ est une fonction convexe sur Y .*

Proposition 3.1.17. *Si $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ est propre et convexe et si $g : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est une fonction propre convexe croissante, alors $g \circ f$ est une fonction convexe.*

Remarque 3.1.1. Insistons sur le fait que $f + g$, $f \circ T$ et $g \circ f$ ne sont pas nécessairement propres dans les trois propositions précédentes ! Donnons-en quelques contre-exemples. Si $f = \delta_0$ et $g = \delta_x$ avec $x \neq 0$, alors $f + g = +\infty$. Dans $\mathbb{R}^2$, si $f = \delta_{(0,1)}$ et $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ est défini par $T(y) = (y, 0)$, alors $f(T(y)) = f(y, 0) = +\infty$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Si $g(x) = e^x$ pour tout $x \in]-\infty, 0]$, $g(x) = +\infty$ si $x \in]0, +\infty[$ et $f = 1$, alors g est propre convexe croissant, f est propre convexe et $g \circ f = +\infty$.

Comme il a été dit, nous pouvons construire de nouvelles fonctions à l'aide des épigraphes. Nous pouvons définir une nouvelle opération sur des fonctions.

Définition 3.1.5. Soient $f, g \in \overline{\mathbb{R}}^X$ deux fonctions propres. L'*inf-convolution* de f et g est la fonction dont l'épigraphe contient la somme des épigraphes de f et de g et qui est maximale pour $\preceq$. Autrement dit, c'est la fonction

$$f \oplus g = \text{fonc}(\text{epi}(f) + \text{epi}(g)).$$

Proposition 3.1.18. *Si $f, g \in \overline{\mathbb{R}}^X$ sont propres et convexes, alors $f \oplus g = g \oplus f$, $f \oplus g$ est convexe et*

$$(f \oplus g)(x) = \inf_{z \in X} f(z) + g(x - z) = \inf_{z \in X} f(x - z) + g(z) \quad \forall x \in X.$$

De plus, on a

$$\text{epi}_s(f \oplus g) = \text{epi}_s(f) + \text{epi}_s(g) \quad \text{et} \quad \text{dom}(f \oplus g) = \text{dom}(f) + \text{dom}(g).$$

Démonstration. La commutativité de $\oplus$ est évidente vu la définition 3.1.5. La convexité de $f \oplus g$ résulte directement des propositions 1.1.6 et 3.1.11. Montrons la formule. Par définition, on a

$$\begin{aligned} (f \oplus g)(x) &= \inf\{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in \text{epi}(f) + \text{epi}(g)\} \\ &= \inf\{y \in \mathbb{R} : \exists(x_1, y_1) \in \text{epi}(f) \exists(x_2, y_2) \in \text{epi}(g), \quad y = y_1 + y_2, x = x_1 + x_2\} \\ &= \inf\{y_1 + y_2 \in \mathbb{R} : \exists x_1 \in X \exists x_2 \in X, \quad x = x_1 + x_2, (x_1, y_1) \in \text{epi}(f), (x_2, y_2) \in \text{epi}(g)\} \\ &= \inf\{y_1 + y_2 \in \mathbb{R} : \exists x_1 \in X \exists x_2 \in X, \quad x = x_1 + x_2, f(x_1) \leq y_1, g(x_2) \leq y_2\} \\ &= \inf\{y_1 + y_2 \in \mathbb{R} : \exists x_1 \in X, \quad f(x_1) \leq y_1, g(x - x_1) \leq y_2\} \\ &= \inf_{x_1 \in X} f(x_1) + g(x - x_1). \end{aligned}$$

Soient $(x, y) \in \text{epi}_s(f)$ et $(x', y') \in \text{epi}_s(g)$. On a $f(x) + g(x') < y + y'$ et donc $\inf_{z \in X} f(z) + g(x + x' - z) < y + y'$, c'est-à-dire $(f \oplus g)(x + x') < y + y'$. D'où $(x + x', y + y') \in \text{epi}_s(f \oplus g)$. Enfin, si $(x, y) \in \text{epi}_s(f \oplus g)$, alors $\inf_{z \in X} f(z) + g(x - z) < y$. Donc, il existe $z \in X$ tel que $f(z) + g(x - z) < y$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $f(z) + g(x - z) + 2\varepsilon < y$. On pose $X_\varepsilon = f(z) + g(x - z) + \varepsilon$. Nous savons que $(z, X_\varepsilon - g(x - z)) \in \text{epi}_s(f)$ et que $(x - z, X_\varepsilon - f(z)) \in \text{epi}_s(g)$ vu l'inégalité $f(z) + g(x - z) < X_\varepsilon$. On en tire que $(x, 2X_\varepsilon - f(z) - g(x - z)) = (x, X_\varepsilon + \varepsilon) \in \text{epi}_s(f) + \text{epi}_s(g)$. Comme $X_\varepsilon + \varepsilon < y$, on a finalement $(x, y) \in \text{epi}_s(f) + \text{epi}_s(g)$ par la proposition 3.1.8. Enfin, on voit que $x \in \text{dom}(f \oplus g)$ si et seulement si il existe $z \in E$ tel que $z \in \text{dom}(f)$ et $x - z \in \text{dom}(g)$. Ceci est équivalent à dire qu'il existe $z \in \text{dom}(f)$ et $y \in \text{dom}(g)$ tels que $x = y + z$. Donc, $\text{dom}(f \oplus g) = \text{dom}(f) + \text{dom}(g)$. $\square$

Nous verrons que cette opération peut être utilisée afin de régulariser des fonctions. De la proposition précédente, nous savons déduire facilement de nouvelles fonctions convexes. Voici un exemple classique.

Exemple 3.1.2. Si C est un ensemble convexe de E , $f = \|\cdot\|$ et $g = \delta_C$, alors

$$(f \oplus g)(x) = \inf_{z \in \mathbb{R}} \|x - z\| + \delta_C(z) = \inf_{z \in C} \|x - z\| = d(x, C).$$

Par conséquent la fonction $x \in E \mapsto d(x, C) \in [0, +\infty]$ est convexe.

Voici une autre propriété qui nous sera utile.

Proposition 3.1.19. *Soient X et Y deux espaces vectoriels topologiques localement convexes et $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre convexe. Alors la fonction $g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ définie par*

$$g(x) = \inf_{y \in Y} f(x, y)$$

est convexe.

Démonstration. Soient $(x_1, z_1), (x_2, z_2) \in \text{epi}(g)$ et $\lambda \in [0, 1]$. Pour tout $y_1, y_2 \in Y$, on a par convexité

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) \leq \lambda f(x_1, y_1) + (1 - \lambda)f(x_2, y_2).$$

Il en découle que

$$\inf_{y \in Y} f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, y) \leq \lambda f(x_1, y_1) + (1 - \lambda)f(x_2, y_2) \quad \forall y_1, y_2 \in Y$$

et donc $g(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda g(x_1) + (1 - \lambda)g(x_2) \leq \lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2$ en passant à la borne inférieure sur y_1 et y_2 dans Y . $\square$

En plus du domaine et de l'épigraphe, nous pouvons associer d'autres ensembles à une fonction. Nous adoptons la définition suivante.

Définition 3.1.6. Soient $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction et $r \in \overline{\mathbb{R}}$, alors la *section* de f en r est l'ensemble

$$\Gamma_r(f) = \{x \in X : f(x) \leq r\}.$$

Proposition 3.1.20. Si $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ est une fonction convexe propre, alors $\Gamma_r(f)$ est convexe pour tout $r \in \overline{\mathbb{R}}$.

Démonstration. Soient $x, y \in \Gamma_r(f)$ et $\lambda \in [0, 1]$. Nous avons alors

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \leq \lambda r + (1 - \lambda)r = r$$

et donc $\lambda x + (1 - \lambda)y \in \Gamma_r(f)$. $\square$

Il est évident que la réciproque est fautive (par exemple, $f(x) = \sqrt{|x|}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). Une fonction f dont les sections $\Gamma_r(f)$ sont convexes pour tout $r \in \overline{\mathbb{R}}$ est qualifiée de fonction quasi-convexe. Si les inégalités de la proposition 3.1.2 sont strictes lorsque $x, y \in \text{dom}(f)$ et $x \neq y$ et $\lambda \in]0, 1[$, on dira que la fonction est *strictement convexe*.

3.2 Convexité et semi-continuité

Dans cette section, nous étudions quelques propriétés des fonctions convexes vis-à-vis de la semi-continuité. Rappelons que E désigne un espace de Banach arbitraire, X un espace vectoriel topologique localement convexe et P un système fondamental de semi-normes de X .

Définition 3.2.1. Si $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est une fonction et $x_0 \in X$, alors les *limites inférieure et supérieure* de f en x_0 sont définies par

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sup_{\substack{\varepsilon > 0 \\ p \in P}} \inf \{f(x) : p(x - x_0) < \varepsilon\}$$

et

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = \inf_{\substack{\varepsilon > 0 \\ p \in P}} \sup \{f(x) : p(x - x_0) < \varepsilon\}$$

Définition 3.2.2. Une fonction $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est *semi-continue inférieurement* (abrégé sci) en $x_0 \in X$ si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ et $p \in P$ tels que

$$p(x - x_0) < \eta \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon.$$

De façon analogue, on dira que f est *semi-continue supérieurement* (abrégé scs) en x_0 si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ et $p \in P$ tels que

$$p(x - x_0) < \eta \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon.$$

Une fonction f est semi-continue inférieurement (resp. supérieurement) si elle est semi-continue inférieurement (resp. supérieurement) en chaque point de X .

Voici une autre façon de formuler la semi-continuité en terme de limites.

Proposition 3.2.1. Une fonction $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est semi-continue inférieurement en x_0 si et seulement si $f(x_0) = \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Démonstration. La condition est nécessaire. Supposons que f est sci en x_0 . Il est trivial que $\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0)$. Par hypothèse, si $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ et $p \in P$ tels que

$$p(x - x_0) < \eta \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon$$

et donc $f(x_0) \leq \varepsilon + \inf_{p(x-x_0) < \eta} f(x) \leq \varepsilon + \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a $f(x_0) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

La condition est suffisante. Supposons que

$$f(x_0) = \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sup_{\substack{\eta > 0 \\ p \in P}} \inf \{f(x) : p(x - x_0) < \eta\}.$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Par les propriétés de la borne supérieure, il existe $\eta > 0$ et $p \in P$ tels que

$$f(x_0) - \inf \{f(x) : p(x - x_0) < \eta\} < \varepsilon.$$

Si $p(x - x_0) < \eta$, alors $f(x_0) - \varepsilon < f(x)$, d'où la conclusion. $\square$

En procédant de façon analogue, on peut aussi démontrer la propriété suivante.

Proposition 3.2.2. Une fonction $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est semi-continue supérieurement en x_0 si et seulement si $f(x_0) = \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

A partir de ces résultats, il est facile de démontrer la proposition suivante.

Proposition 3.2.3. Toute combinaison linéaire à coefficients positifs de fonctions semi-continues inférieurement propres est une fonction semi-continue inférieurement.

Voici une caractérisation de la semi-continuité inférieure en terme d'épigraphe.

Proposition 3.2.4 ([32]). Soit $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) La fonction f est semi-continue inférieurement.
- (ii) L'épigraphe $\text{epi}(f)$ est un ensemble fermé de $X \times \mathbb{R}$.
- (iii) Pour tout $r \in \mathbb{R}$, la section $\Gamma_r(f)$ est fermée dans X .

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) : Montrons que le complémentaire de $\text{epi}(f)$ est ouvert. Soit $(x_0, y_0) \notin \text{epi}(f)$. Donc, $y_0 < f(x_0)$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < f(x_0) - y_0$. Par semi-continuité, il existe $\eta > 0$ et $p \in P$ tels que $p(x - x_0) < \eta \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon > y_0$. Autrement dit, on a $B_p(x_0, \eta) \times]-\infty, f(x_0) - \varepsilon[$ est un voisinage de (x_0, y_0) inclus dans $\mathbb{C}\text{epi}(f)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : L'application

$$\iota : x \in X \mapsto (x, r) \in X \times \{r\}$$

est un homéomorphisme [27]. Comme $\text{epi}(f)$ et $X \times \{r\}$ sont fermés et $\Gamma_r(f) = \iota^{-1}(\text{epi}(f) \cap (X \times \{r\}))$, la section $\Gamma_r(f)$ est fermée.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : Soient $x_0 \in X$ et $\varepsilon > 0$. Si $f(x_0) = -\infty$, alors la fonction est sci vu la proposition 3.2.1 en utilisant l'inégalité $\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0)$. Si $f(x_0) \in]-\infty, +\infty]$, soit $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\gamma < f(x_0)$. On a $x_0 \notin \Gamma_\gamma(f)$. Puisque $\Gamma_\gamma(f)$ est fermé, il existe $\eta > 0$ et $p \in P$ tels que $B_p(x_0, \eta) \subset X \setminus \Gamma_\gamma(f)$. Donc, $p(x - x_0) < \eta \Rightarrow f(x) > \gamma$. Par conséquent, pour tout $\gamma \in]-\infty, f(x_0)[$, il existe $\eta > 0$ et $p \in P$ tels que $\inf\{f(x) : p(x - x_0) < \eta\} \geq \gamma$. On en tire que pour tout $\gamma \in]-\infty, f(x_0)[$, on a $\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq \gamma$, donc $\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, d'où la conclusion. $\square$

Ceci nous permet d'obtenir le résultat suivant.

Proposition 3.2.5. *Si $\{f_i : i \in I\}$ est une famille de fonctions propres semi-continues inférieurement sur X , alors $\sup_{i \in I} f_i$ est une fonction semi-continue inférieurement.*

Démonstration. Cela résulte de l'égalité $\text{epi}(\sup_{i \in I} f_i) = \bigcap_{i \in I} \text{epi}(f_i)$ et de la proposition précédente. $\square$

Bien entendu, toutes les fonctions ne sont pas semi-continues inférieurement. Le résultat qui suit nous permet de construire aisément de telles fonctions à partir d'une fonction donnée de façon assez naturelle.

Définition 3.2.3. Soit $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre. La *régularisation semi-continue inférieure* de f (abrégée régularisation sci de f), notée $\overline{f}$, est définie par la fonction

$$\overline{f} = \text{fonc}(\overline{\text{epi}(f)}).$$

Ces fonctions jouissent des propriétés suivantes.

Proposition 3.2.6 ([4]). *Soit $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre. Alors*

- (i) $\text{epi}(\overline{f}) = \overline{\text{epi}(f)}$.
- (ii) La fonction $\overline{f}$ est la plus grande fonction semi-continue inférieure minorant f pour la relation d'ordre $\preceq$ sur $\overline{\mathbb{R}}^X$.
- (iii) On a $\overline{f}(x) = \liminf_{z \rightarrow x} f(z)$ pour tout $x \in X$.
- (iv) On a $\text{dom}(f) \subset \text{dom}(\overline{f}) \subset \overline{\text{dom}(f)}$.
- (v) La fonction f est semi-continue inférieurement si et seulement si $f = \overline{f}$.

Démonstration. De la proposition 3.1.10, il découle (i). Vu (i) et la proposition 3.2.4, la fonction $\bar{f}$ est semi-continue inférieurement. Cette fonction minore f puisque $\text{epi}(\bar{f}) \supset \text{epi}(f)$. Par la proposition 3.1.10, la fonction $\bar{f}$ est le maximum pour la relation $\preceq$ de l'ensemble des fonctions g qui vérifient $\overline{\text{epi}(f)} \subset \text{epi}(g)$. Si g est une fonction semi-continue inférieurement telle que $g \preceq f$, alors $\text{epi}(g) \supset \overline{\text{epi}(f)}$. Mais $\text{epi}(g)$ est fermé car g est semi-continu inférieurement. Il s'ensuit que $\text{epi}(g) \supset \text{epi}(f)$. Par la proposition 3.1.10, on a $g \preceq f$, d'où le point (ii).

Posons $g : x \in X \mapsto \liminf_{z \rightarrow x} f(z) \in \overline{\mathbb{R}}$. Il suffit d'utiliser (ii) pour montrer que $g = \bar{f}$. On voit facilement que $g \preceq f$. De plus, g est une fonction semi-continue inférieurement. Soit $((x_i, y_i))_{i \in I}$ une suite généralisée de $\text{epi}(g)$ qui converge vers (x, y) dans $X \times \mathbb{R}$ et montrons que $(x, y) \in \text{epi}(g)$, i.e. $y \geq \liminf_{z \rightarrow x} f(z)$. Pour tout $i \in I$, nous avons $y_i \geq \liminf_{z \rightarrow x_i} f(z)$. Pour tout $i \in I$, $p \in P$ et $\varepsilon > 0$, nous avons

$$y_i \geq \inf\{f(z) : p(z - x_i) < \varepsilon\}.$$

Puisque $x_i \rightarrow x$ (par continuité des projections), il existe $J \in I$ tel que $i \geq J \Rightarrow p(x_i - x) < \varepsilon$. On en déduit que $B_p(x_i, \varepsilon) \subset B_p(x, 2\varepsilon)$ pour tout $i \geq J$. Par conséquent

$$y_i \geq \inf\{f(z) : p(z - x_i) < \varepsilon\} \geq \inf\{f(z) : p(z - x) < 2\varepsilon\} \quad \forall i \geq J.$$

Par passage à la limite sur i , on obtient

$$y \geq \inf\{f(z) : p(z - x) < 2\varepsilon\}.$$

Comme $p \in P$ et $\varepsilon > 0$ sont arbitraires, on a finalement $y \geq \liminf_{z \rightarrow x} f(z)$, i.e. $(x, y) \in \text{epi}(g)$. Donc, g est semi-continu inférieurement en vertu de la proposition 3.2.4. Il reste à montrer que $\bar{f} \preceq g$ pour démontrer (iii). Si $x \notin \overline{\text{dom}(f)}$, alors f vaut $+\infty$ au voisinage de x et donc $\liminf_{z \rightarrow x} f(z) = +\infty \geq \bar{f}(x)$. Si $x \in \overline{\text{dom}(f)}$, alors on doit envisager deux cas. Si $\bar{f}(x) = -\infty$, alors $\bar{f}(x) \leq f(z)$ pour tout $z \in X$. Donc, $\bar{f}(x) \leq \inf\{f(z) : p(z - x) < \varepsilon\}$ pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $p \in P$. D'où $\bar{f}(x) \leq \liminf_{z \rightarrow x} f(z)$. Enfin, supposons que $\bar{f}(x) > -\infty$ et soit $\varepsilon > 0$. Par semi-continuité, il existe $\eta > 0$ et $p \in P$ tels que

$$p(z - x) < \eta \Rightarrow \bar{f}(z) \geq \bar{f}(x) - \varepsilon.$$

On en tire que

$$\bar{f}(x) - \varepsilon \leq \inf\{\bar{f}(z) : p(z - x) < \eta\} \leq \inf\{f(z) : p(z - x) < \eta\} \leq \liminf_{z \rightarrow x} f(z).$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a l'inégalité $\bar{f}(x) \leq \liminf_{z \rightarrow x} f(z)$. Ceci prouve (iii).

Si $\text{dom}(f) = \emptyset$, alors il est clair que $\text{dom}(f) = \text{dom}(\bar{f}) = \overline{\text{dom}(f)}$. Supposons que $\text{dom}(f) \neq \emptyset$ et soit $x \in \text{dom}(f)$. Alors $f(x) < +\infty$ et il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) < y$. Dans ce cas, $(x, y) \in \text{epi}(f) \subset \overline{\text{epi}(f)} = \text{epi}(\bar{f})$. On a $\bar{f}(x) \leq y < +\infty$ et donc, $x \in \text{dom}(\bar{f})$. Soit $x \in X \setminus \text{dom}(f)$. Donc, il existe $\varepsilon > 0$ et $p \in P$ tels que $f(y) = +\infty$ si $p(x - y) < \varepsilon$. Il s'ensuit que $\liminf_{y \rightarrow x} f(y) = +\infty$. Par le point (iii), on a $x \notin \text{dom}(\bar{f})$. On a démontré (iv). Le point (v) découle du point (iii) et de la proposition 3.2.1. $\square$

Nous porterons une attention particulière sur l'ensemble des fonctions propres convexes semi-continues inférieurement sur E . Cet ensemble sera noté $\Gamma(E)$. Bien entendu, nous pouvons introduire une notion de semi-continuité à partir des suites.

Définition 3.2.4. Une fonction $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est *séquentiellement semi-continue inférieurement* en $x_0 \in X$ (abrégé sq-sci) si et seulement si, pour toute suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ qui converge vers x_0 , on a

$$f(x_0) \leq \liminf_{m \rightarrow +\infty} f(x_m).$$

A priori, les notions de semi-continuité inférieure et de semi-continuité inférieure séquentielle ne sont pas équivalentes. Nous pouvons montrer l'analogie de la proposition 3.2.4 pour la semi-continuité séquentielle.

Proposition 3.2.7. Soit $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) La fonction f est séquentiellement semi-continue inférieurement.
- (ii) L'épigraphe $\text{epi}(f)$ contient les limites de ses suites convergentes.
- (iii) Pour tout $r \in \mathbb{R}$, la section $\Gamma_r(f)$ contient les limites de ses suites convergentes.

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) : Soit $((x_m, y_m))_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de $\text{epi}(f)$ qui converge vers (x, y) . Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $y_m \geq f(x_m)$. On en tire que $\liminf_{m \rightarrow +\infty} y_m \geq \liminf_{m \rightarrow +\infty} f(x_m)$. Comme la suite $(y_m)_{m \rightarrow +\infty}$ converge vers y , la limite et la limite inférieure coïncident et on obtient $y \geq \liminf_{m \rightarrow +\infty} f(x_m)$. Comme f est sq-sci, on a $f(x) \leq \liminf_{m \rightarrow +\infty} f(x_m)$, ce qui permet de conclure que $y \geq f(x)$ et $(x, y) \in \text{epi}(f)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : Soit $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de la section $\Gamma_r(f)$ avec $r \in \mathbb{R}$ et supposons que $x_m \rightarrow x$. Les éléments de la suite $((x_m, r))_{m \in \mathbb{N}}$ appartiennent à $\text{epi}(f)$ et la suite converge vers (x, r) . Vu l'hypothèse (ii), on a $(x, r) \in \text{epi}(f)$ et il vient $x \in \Gamma_r(f)$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : Soit $x \in X$ et $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de X qui converge vers x . Nous devons prouver que $f(x) \leq \liminf_{m \rightarrow +\infty} f(x_m)$. C'est trivial lorsque $\liminf_{m \rightarrow +\infty} f(x_m) = +\infty$. Si $\liminf_{m \rightarrow +\infty} f(x_m) < +\infty$, soit γ un nombre réel tel que $\gamma > \liminf_{m \rightarrow +\infty} f(x_m)$ et prouvons que $f(x) \leq \gamma$, c'est-à-dire $x \in \Gamma_\gamma(f)$. Vu le choix de γ , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\inf_{m \geq n} f(x_m) < \gamma$ pour tout $n \geq N$. Nous savons alors qu'il existe $m_0 \geq N$ tel que $f(x_{m_0}) < \gamma$. Ensuite, il existe $m_1 \geq m_0 + 1$ tel que $f(x_{m_1}) < \gamma$. On continue ainsi pour obtenir une suite $(m_i)_{i \in \mathbb{N}}$ strictement croissante de naturels tels que $f(x_{m_i}) < \gamma$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Comme $x_m \rightarrow x$, la sous-suite $(x_{m_i})_{i \in \mathbb{N}}$ de $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers la même limite x et cette sous-suite appartient à $\Gamma_\gamma(f)$ par construction. Par (iii), on a alors $x \in \Gamma_\gamma(f)$, ce qui permet de conclure. $\square$

Donnons une condition pour laquelle les deux notions de semi-continuité coïncident.

Proposition 3.2.8 ([32]). Soit $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction définie sur un espace de Banach. Considérons les assertions suivantes :

- (i) La fonction f est faiblement semi-continue inférieurement.
- (ii) La fonction f est faiblement séquentiellement semi-continue inférieurement.
- (iii) La fonction f est séquentiellement semi-continue inférieurement.
- (iv) La fonction f est semi-continue inférieurement.

On a alors les implications suivantes : (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv). Les assertions sont toutes équivalentes si f est convexe.

Démonstration. Pour les implications, il suffit de traduire les quatre assertions en terme d'épigraphe à l'aide des propositions 3.2.4 et 3.2.7 puis d'utiliser la proposition 2.1.9. Le cas où f est une fonction convexe résulte directement de la proposition 2.1.9. $\square$

Voici à présent une caractérisation de la semi-continuité de fonctions convexes qui n'est pas sans rappeler la propriété des convexes fermés qui peuvent s'obtenir comme intersection de demi-espaces. Tout d'abord, établissons un lemme dont on se servira systématiquement par la suite.

Lemme 3.2.1. *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des espaces de Banach. Alors les espaces de Banach² $(E \times F)^*$ et $E^* \times F^*$ sont homéomorphes via l'application linéaire*

$$\mathcal{I} : (\xi, \eta) \in E^* \times F^* \mapsto \xi \times \eta \in (E \times F)^*$$

où $(\xi \times \eta)(x, y) = \langle \xi, x \rangle + \langle \eta, y \rangle$.

Démonstration. Tout d'abord, il est trivial que $\mathcal{I}$ est linéaire et injectif. Soit $\mu \in (E \times F)^*$. Nous obtenons par linéarité $\mu(x, y) = \mu(x, 0) + \mu(0, y)$ pour tout $(x, y) \in E \times F$. Soient ξ l'application $x \in E \mapsto \mu(x, 0) \in \mathbb{R}$ et η l'application $y \in F \mapsto \mu(0, y) \in \mathbb{R}$. On voit clairement que $\xi \in E^*$, $\eta \in F^*$ et $\mathcal{I}(\xi, \eta) = \mu$, d'où la surjectivité de $\mathcal{I}$. L'isomorphisme $\mathcal{I}$ est aussi continu. En effet, si $(\xi, \eta) \in E^* \times F^*$, alors

$$\|\mathcal{I}(\xi, \eta)\|_{(E \times F)^*} = \sup_{\|x\|_E + \|y\|_F \leq 1} |\langle \xi, x \rangle + \langle \eta, y \rangle| \leq \sup_{\|x\|_E \leq 1} |\langle \xi, x \rangle| + \sup_{\|y\|_F \leq 1} |\langle \eta, y \rangle| = \|(\xi, \eta)\|_{E^* \times F^*}.$$

Enfin, $\mathcal{I}^{-1}$ est aussi continu puisque

$$\begin{aligned} \|\mathcal{I}^{-1}(\xi \times \eta)\|_{E^* \times F^*} &= \|\xi\|_{E^*} + \|\eta\|_{F^*} \\ &\leq 2\|\xi\|_{E^*} = 2 \sup_{\|x\|_E \leq 1} |\langle \xi, x \rangle| \\ &\leq 2 \sup_{\|x\|_E + \|y\|_F \leq 1} |\langle \xi, x \rangle + \langle \eta, y \rangle| = 2\|\xi \times \eta\|_{(E \times F)^*} \end{aligned}$$

si $\|\xi\|_{E^*} \geq \|\eta\|_{F^*}$ (le cas où $\|\xi\|_{E^*} \leq \|\eta\|_{F^*}$ se traite de façon semblable); d'où la conclusion. $\square$

Proposition 3.2.9 ([32]). *Soit $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre. La fonction f est convexe et semi-continue inférieurement si et seulement si il existe une famille non-vide $(f_i)_{i \in I}$ de fonctions affines continues sur E telle que $f = \sup_{i \in I} (f_i)$.*

Démonstration. La condition est suffisante. En effet, toute fonction affine continue est convexe et semi-continue inférieurement. Donc, $f = \sup_{i \in I} (f_i)$ est convexe et sci car $\text{epi}(f) = \bigcap_{i \in I} \text{epi}(f_i)$ est convexe et fermé. La condition est aussi nécessaire. Supposons que f est convexe et sci. Dans ce cas, $\text{epi}(f)$ est un convexe fermé de $E \times \mathbb{R}$. Il est donc l'intersection des demi-espaces le contenant. Observons tout d'abord que $(E \times \mathbb{R})^* \simeq E^* \times \mathbb{R}$ vu le lemme précédent³. Tout hyperplan de $E \times \mathbb{R}$ est décrit par une équation de la forme

$$\langle \xi, x \rangle + ry = b \quad \forall (x, y) \in E \times \mathbb{R}$$

avec $(\xi, r) \in (E^* \times \mathbb{R}) \setminus \{(0, 0)\}$ et $b \in \mathbb{R}$. Bien entendu, si $r \neq 0$, nous pouvons supposer sans restriction que $r = -1$, quitte à diviser ξ et b par $-r$. Notons $\mathcal{H}$ l'ensemble des éléments $(\xi, r, b) \in ((E^* \times \{0, -1\}) \setminus \{(0, 0)\}) \times \mathbb{R}$ tels que le demi-espace $H_{(\xi, r, b)}$ d'équation $\langle \xi, x \rangle + ry \leq b$

2. Si $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ sont des espaces de Banach, alors $E \times F$ muni de la norme $\|\cdot\|$ définie par $\|(x, y)\| = \|x\|_E + \|y\|_F$ est un espace de Banach.

3. Rappelons que $\mathbb{R}^* \simeq \mathbb{R}$ via $x \in \mathbb{R} \mapsto x \cdot \in \mathbb{R}^*$ où $x \cdot : y \in \mathbb{R} \mapsto xy \in \mathbb{R}$.

contient $\text{epi}(f)$. Il s'ensuit que $\text{epi}(f) = \bigcap_{(\xi, r, b) \in \mathcal{H}} H_{(\xi, r, b)}$. Le demi-espace $H_{(\xi, -1, b)}$ est l'épigraphe de la fonction affine $x \in E \mapsto \langle \xi, x \rangle - b \in \mathbb{R}$. La conclusion résulte de l'égalité

$$\text{epi}(f) = \bigcap_{(\xi, -1, b) \in \mathcal{H}} \text{epi}(\langle \xi, \cdot \rangle - b) = \text{epi}\left(\sup_{(\xi, -1, b) \in \mathcal{H}} (\langle \xi, \cdot \rangle - b)\right).$$

L'inclusion $\text{epi}(f) \subset \bigcap_{(\xi, -1, b) \in \mathcal{H}} \text{epi}(\langle \xi, \cdot \rangle - b)$ est évidente. Montrons l'autre inclusion. Supposons que $(x, y) \in \text{epi}(\langle \xi, \cdot \rangle - b)$ pour tout $(\xi, -1, b) \in \mathcal{H}$. Par l'absurde, si $(x, y) \notin \text{epi}(f)$, alors il existe $(\xi, 0, b) \in \mathcal{H}$ tel que $(x, y) \notin H_{(\xi, 0, b)}$. On a donc $\langle \xi, x \rangle < b < \langle \xi, x' \rangle$ pour tout $x' \in \text{dom}(f)$.

Posons $\eta(x') = b - \langle \xi, x' \rangle$ pour tout $x' \in E$. On a $\eta < 0$ sur $\text{dom}(f)$ et $\eta(x) > 0$. Comme f est propre, son domaine n'est pas vide. Soit $x_0 \in \text{dom}(f)$. On a $f(x_0) \in \mathbb{R}$. Soit $y_0 < f(x_0)$ avec $y_0 < 0$. On a donc $(x_0, y_0) \notin \text{epi}(f)$. Par le théorème de séparation forte, il existe $(\zeta, r) \in (E^* \times \mathbb{R}) \setminus \{(0, 0)\}$ et $b' \in \mathbb{R}$ tels que $\langle \zeta, x_0 \rangle + ry_0 < b' < \langle \zeta, x' \rangle + ry'$ pour tout $(x', y') \in \text{epi}(f)$. Nécessairement, on a $r \neq 0$ (sinon, $\langle \zeta, x_0 \rangle < \langle \zeta, x_0 \rangle$). De plus, $r > 0$. Sinon, pour y' suffisamment grand, l'inégalité $\langle \zeta, x_0 \rangle + ry_0 < b' < \langle \zeta, x' \rangle + ry'$ n'est pas respectée. Nous pouvons même supposer que $r = 1$, quitte à renommer ζ et b' . Posons $\mu(x') = b' + y_0 - \langle \zeta, x' \rangle$ pour tout $x' \in E$. Nous voyons que $\mu(x') = b' + y_0 - \langle \zeta, x' \rangle < y_0 + f(x') < f(x')$ pour tout $x' \in \text{dom}(f)$. Posons $T_m = \mu + m\eta$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Il s'agit clairement d'une suite de fonctions affines continues. Par construction, nous avons $T_m(x') < f(x')$ pour tout $x' \in \text{dom}(f)$ et $T_m(x) \rightarrow +\infty$. Ainsi, lorsque m est suffisamment grand, on a $y < T_m(x)$ et $T_m(x') < f(x')$ pour tout $x' \in \text{dom}(f)$. Dans ce cas, on a $\text{epi}(T_m) \supset \text{epi}(f)$ et $(x, y) \notin \text{epi}(T_m)$; donc $\text{epi}(T_m)$ correspond à un certain $H_{(\xi', -1, b')}$ qui contient (x, y) , ce qui est absurde. $\square$

3.3 Convexité et continuité

Après avoir étudié la semi-continuité des fonctions convexes, établissons des résultats concernant la continuité des fonctions de ce type. Voici un critère de continuité spécifique aux fonctions convexes.

Proposition 3.3.1 ([32]). *Soit $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre convexe et soit $x_0 \in \text{dom}(f)^\circ$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Il existe $\varepsilon > 0$ et $C > 0$ tels que $f(x) < C$ pour tout $x \in B(x_0, \varepsilon)$.*
- (ii) *La fonction f est lipschitzienne sur un voisinage de x_0 .*
- (iii) *La fonction f est continue en x_0 .*
- (iv) *On a $(x_0, y) \in \text{epi}(f)^\circ$ pour tout $y \in]f(x_0), +\infty[$.*

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) : Soient $\varepsilon > 0$ et $C > 0$ tels que $f(x) < C$ pour tout $x \in \overline{B}(x_0, \varepsilon)$. On en tire que $B(x_0, \varepsilon) \subset \text{dom}(f)$ et que $f(x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in B(x_0, \varepsilon)$. Trouvons $\eta \in]0, \varepsilon[$ et $L > 0$ tels que

$$f(x_1) - f(x_2) \leq L\|x_1 - x_2\|$$

si $x_1, x_2 \in B(x_0, \eta)$. Fixons $\eta = \varepsilon/2$. Si $x, y \in B(x_0, \eta)$ et $x \neq y$, posons

$$z = y + \eta \frac{y - x}{\|y - x\|}. \quad (*)$$

Par construction,

$$\|z - x_0\| = \left\| y - x_0 + \eta \frac{y - x}{\|y - x\|} \right\| \leq \|y - x_0\| + \eta \leq 2\eta = \varepsilon.$$

Par hypothèse, on a alors $f(z) < C$. De (*), on déduit que

$$y = \frac{1}{\left(1 + \frac{\eta}{\|x-y\|}\right)} z + \frac{\frac{\eta}{\|x-y\|}}{\left(1 + \frac{\eta}{\|x-y\|}\right)} x.$$

Comme f est convexe, on a

$$f(y) \leq \frac{1}{\left(1 + \frac{\eta}{\|x-y\|}\right)} f(z) + \frac{\frac{\eta}{\|x-y\|}}{\left(1 + \frac{\eta}{\|x-y\|}\right)} f(x).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &\leq \frac{1}{\left(1 + \frac{\eta}{\|x-y\|}\right)} f(z) + \frac{\frac{\eta}{\|x-y\|}}{\left(1 + \frac{\eta}{\|x-y\|}\right)} f(x) - f(x) \\ &= \frac{1}{\left(1 + \frac{\eta}{\|x-y\|}\right)} (f(z) - f(x)) \\ &< \frac{1}{\left(1 + \frac{\eta}{\|x-y\|}\right)} (C - f(x)). \end{aligned} \quad (**)$$

Remarquons que $x_0 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(2x_0 - x)$. Par la convexité de f et vu que $2x_0 - x \in B(x_0, \varepsilon)$, on obtient $f(x_0) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(2x_0 - x) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{C}{2}$, c'est-à-dire $f(x) \geq 2f(x_0) - C$. Cette minoration combinée à (**) nous procure

$$f(y) - f(x) \leq \frac{1}{\left(1 + \frac{\eta}{\|x-y\|}\right)} (2C - 2f(x_0)) = \frac{2(C - f(x_0))}{(\|x - y\| + \eta)} \|x - y\| \leq \frac{2(C - f(x_0))}{\eta} \|x - y\|.$$

Si on intervertit les rôles de x et y , on trouve

$$f(x) - f(y) \leq \frac{2(C - f(x_0))}{\eta} \|x - y\|.$$

Donc, f est bien lipschitzien sur $B(x_0, \eta)$ avec une constante de Lipschitz donnée par $L = (2(C - f(x_0)))/\eta$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : C'est trivial.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) : Supposons que $y \in]f(x_0), +\infty[$. Fixons $\varepsilon \in]0, y - f(x_0)[$. On a $y - \varepsilon \in]f(x_0), y[$. Comme $]f(x_0) - \varepsilon, y - \varepsilon[$ est voisinage de $f(x_0)$ et f est continu en x_0 , il existe $\eta > 0$ tel que $x \in B(x_0, \eta) \Rightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x) < y - \varepsilon \Rightarrow (x, y) \in \text{epi}(f)$. On conclut que $B(x_0, \eta) \times]y - \varepsilon, +\infty[$ est un voisinage de (x_0, y) dans $E \times \mathbb{R}$ inclus dans $\text{epi}(f)$.

(iv) $\Rightarrow$ (i) : Comme $x_0 \in \text{dom}(f)$, on a $f(x_0) < +\infty$. Soit $y \in]f(x_0), +\infty[$. Vu (iv), il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x_0, \varepsilon) \times]y - \varepsilon, y + \varepsilon[\subset \text{epi}(f)$. Donc, on a $f(x) < y$ pour tout $x \in B(x_0, \varepsilon)$. $\square$

Voici un résultat qui montre à quel point une fonction convexe est régulière.

Proposition 3.3.2 ([32]). *Soit $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe propre. Si f est continu en un point $x_0 \in \text{dom}(f)$, alors $x_0 \in \text{dom}(f)^\circ$ et f est continu sur $\text{dom}(f)^\circ$.*

Démonstration. Comme $x_0 \in \text{dom}(f)$, on a $f(x_0) \in \mathbb{R}$. Si $\varepsilon > 0$, alors il existe $\eta > 0$ tel que $x \in B(x_0, \eta) \Rightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon < +\infty$. Donc, $B(x_0, \eta) \subset \text{dom}(f)$ et $x_0 \in \text{dom}(f)^\circ$.

A présent, soit $y_0 \in \text{dom}(f)^\circ$ et montrons que f est continu en y_0 . Puisque f est convexe, l'ensemble $\text{dom}(f)^\circ$ est convexe aussi par les propositions 3.1.4 et 1.3.3. Il existe donc $z_0 \in \text{dom}(f)$ tel que $y_0 \in [x_0, z_0[\subset \text{dom}(f)$. En effet, il existe $\eta' > 0$ tel que $B(y_0, \eta') \subset \text{dom}(f)$. Il existe $r > 0$ tel que $y_0 + r(y_0 - x_0) \in B(y_0, \eta') \subset \text{dom}(f)$ car $\lim_{r' \rightarrow 0^+} y_0 + r'(y_0 - x_0) = y_0$. Il suffit alors de définir $z_0 = y_0 + r(y_0 - x_0)$. On a alors

$$y_0 = \frac{r}{1+r}x_0 + \frac{1}{1+r}z_0 = z_0 + \frac{r}{1+r}(x_0 - z_0).$$

Par la proposition précédente, il suffit de trouver $\varepsilon > 0$ et $C > 0$ tels que $f(x) < C$ pour tout $x \in B(y_0, \varepsilon)$.

Au vu du résultat qui précède, il existe $\varepsilon' > 0$ et $C' > 0$ tels que $f(x) < C'$ pour tout $x \in B(x_0, \varepsilon')$. On peut supposer que $\varepsilon' < \eta'$, quitte à diminuer ε' . On considère l'application affine suivante

$$T : x \mapsto z_0 + \frac{r}{1+r}(x - z_0).$$

Il s'agit bien sûr d'une homothétie de centre z_0 et de rapport $r/(1+r)$ car $\|T(x_1) - T(x_2)\| = (r/(1+r))\|x_1 - x_2\|$. On vérifie aisément que c'est un homéomorphisme entre $B(x_0, \varepsilon')$ et $B(y_0, \frac{r\varepsilon'}{1+r})$. Posons $\varepsilon = \frac{r\varepsilon'}{1+r}$. De manière évidente, $B(y_0, \varepsilon) \subset B(y_0, \eta') \subset \text{dom}(f)$. Pour tout $y \in B(y_0, \varepsilon)$, il existe $x \in B(x_0, \varepsilon')$ tel que $y = T(x)$. Par convexité, on en tire que

$$f(y) \leq \frac{r}{1+r}f(x) + \frac{1}{1+r}f(z_0) < \frac{r}{1+r}C' + \frac{1}{1+r}f(z_0) \leq \max(C', f(z_0)).$$

Donc, f est borné supérieurement par $\max(C', f(z_0))$ au voisinage de y_0 , ce qui permet de conclure. $\square$

Corollaire 3.3.1. *Si $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est une fonction propre convexe et s'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $\Gamma_r(f)^\circ \neq \emptyset$, alors f est continu sur $\text{dom}(f)^\circ$.*

Démonstration. Soit $x_0 \in \Gamma_r(f)^\circ$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x_0, \varepsilon) \subset \Gamma_r(f)$. Donc, $f(x) \leq r$ pour tout $x \in B(x_0, \varepsilon)$. Donc, f est continu en x_0 par la proposition 3.3.1. Par la proposition précédente, f est continu sur $\text{dom}(f)^\circ$. $\square$

En dimension finie, nous avons un résultat encore plus intéressant.

Lemme 3.3.1. *Si E est de dimension finie n et si C est un convexe non-vide, alors $C^{\circ R}$ est un convexe non-vide.*

Démonstration. Quitte à nous restreindre à $\overrightarrow{\text{aff}(C)}^4$ et considérer $C - x_0$ pour un $x_0 \in C$, on peut supposer que $\dim C = n$ et $0 \in C$. On est ramené à montrer que $C^\circ \neq \emptyset$ est convexe et

4. C'est un sous-espace vectoriel d'un espace de Banach de dimension finie, il est donc fermé et c'est donc aussi un espace de Banach.

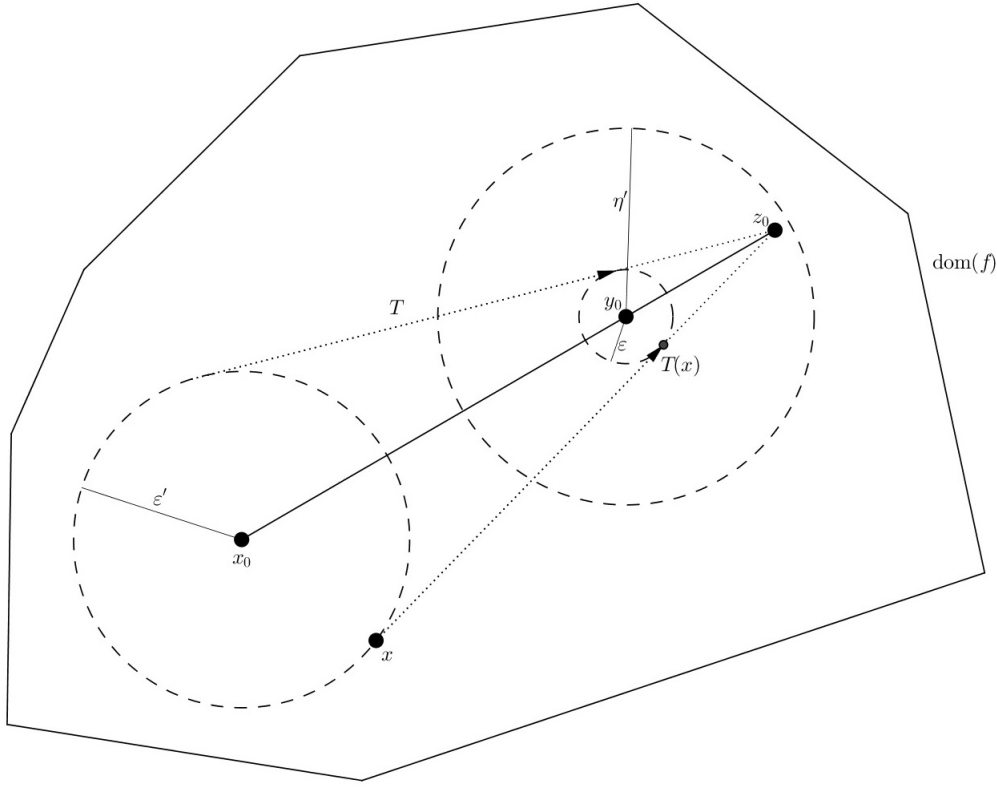


FIGURE 3.1 – Le voisinage $B(y_0, \varepsilon)$ recherché de y_0 est obtenu en effectuant une homothétie T de centre z_0 et de rapport $r/(1+r)$ à l'ensemble $B(x_0, \varepsilon')$.

non-vidé. La convexité résulte de la proposition 1.3.3. Montrons que $C^\circ \neq \emptyset$. Par la proposition 1.2.7, on a

$$n = \max\{\dim S : S \text{ est un simplexe inclus dans } C\}.$$

Il existe donc $a_0, \dots, a_n$ des points affinement indépendants de C tels que $\text{conv}(\{a_0, \dots, a_n\}) \subset C$. La proposition 1.4.1 montre que $\text{conv}(\{a_0, \dots, a_n\})^\circ$ est ouvert et non-vidé inclus dans C , d'où $C^\circ \neq \emptyset$. $\square$

Proposition 3.3.3. *Supposons que E est de dimension finie n et soit $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre convexe. Alors la restriction de f à $\text{dom}(f)^{\circ R}$ est continue. En particulier f est continu sur $\text{dom}(f)^\circ$.*

Démonstration. Vu le lemme précédent, $\text{dom}(f)^{\circ R} \neq \emptyset$. Fixons $x_0 \in \text{dom}(f)^{\circ R}$. Posons $F = \overrightarrow{\text{aff}(\text{dom}(f))}$. C'est un sous-espace de Banach de E . On pose $f' : x \in F \mapsto f(x + x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$. Cette fonction est propre et convexe car $\text{epi}(f') = \text{epi}(f) - (x_0, 0)$. On voit sans peine que $\text{dom}(f') = \text{dom}(f) - x_0$ et que $\overrightarrow{\text{aff}(\text{dom}(f'))} = \overrightarrow{\text{aff}(\text{dom}(f))}$. Montrons que f' est continu. La fonction f' étant propre et convexe, l'ensemble $\text{dom}(f')$ est convexe et non-vidé. Vu le lemme précédent, $\text{dom}(f')^{\circ R}$ est un convexe non-vidé. Soit $z_0 \in \text{dom}(f')^{\circ R}$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(z_0, \varepsilon) \cap \overrightarrow{\text{aff}(\text{dom}(f'))} \subset \text{dom}(f')$. Comme $0 \in \text{dom}(f')$, on a $\overrightarrow{\text{aff}(\text{dom}(f'))} = \overrightarrow{\text{aff}(\text{dom}(f))}$. Soit $e_1, \dots, e_m$ ($m \leq n$) une base de $\overrightarrow{\text{aff}(\text{dom}(f'))}$. Pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$, il existe $\mu_j > 0$ tel que $z_0 \pm \mu_j e_j \in B(z_0, \varepsilon)$ car $\lim_{\nu \rightarrow 0^+} z_0 \pm \nu e_j = z_0$. De plus, comme $e_j \in \overrightarrow{\text{aff}(\text{dom}(f'))}$, on a $z_0 \pm \nu e_j \in \overrightarrow{\text{aff}(\text{dom}(f'))}$ pour tout $\nu > 0$. Posons $\mu = \min_{1 \leq j \leq m} \mu_j$. Il s'ensuit que

$z_0 \pm \mu e_j \in B(z_0, \varepsilon) \cap \text{aff}(\text{dom}(f')) \subset \text{dom}(f')$ pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$. Par convexité, $\text{conv}(\{z_0 + \mu e_1, z_0 - \mu e_1, \dots, z_0 + \mu e_m, z_0 - \mu e_m\}) \subset \text{dom}(f')$. Par le théorème de Krein-Milman, il existe $P \subset \{z_0 + \mu e_1, z_0 - \mu e_1, \dots, z_0 + \mu e_m, z_0 - \mu e_m\}$ tel que

$$P = \text{ext}(\text{conv}(\{z_0 + \mu e_1, z_0 - \mu e_1, \dots, z_0 + \mu e_m, z_0 - \mu e_m\})).$$

Les éléments de P sont donc affinement indépendants et $\text{conv}(P) = \text{conv}(\{z_0 + \mu e_1, z_0 - \mu e_1, \dots, z_0 + \mu e_m, z_0 - \mu e_m\})$. Il est clair que $z_0 \in \text{conv}(P)$ et que $\dim \text{conv}(P) = m = \dim F$. On en tire que z_0 est un point intérieur à $\text{conv}(P)$ dans F vu l'égalité

$$z_0 = \sum_{j=1}^m \frac{1}{2m} (z_0 + \mu e_j) + \sum_{j=1}^m \frac{1}{2m} (z_0 - \mu e_j) \quad (*)$$

et en utilisant la proposition 1.4.1 (E4). En effet, les points de P sont tous parmi les points $z_0 \pm \mu e_j$. Les points $z_0 \pm \mu e_j$ qui ne sont pas extrémaux sont combinaisons convexes de points de P . Au total, il existe $\lambda_y > 0$ pour tout $y \in P$ tels que $\sum_{y \in P} \lambda_y = 1$ et $z_0 = \sum_{y \in P} \lambda_y y$ en utilisant (*). Donc, $\text{conv}(P)$ est un voisinage de z_0 dans F sur lequel f' est borné supérieurement par $\max_{y \in P} f'(y)$ par convexité de f' . Donc, f' est continu en z_0 . Par la proposition 3.3.2, il est continu sur l'intérieur de $\text{dom}(f')$ dans F , c'est-à-dire sur $\text{dom}(f')^{\circ R} = \text{dom}(f)^{\circ R} - x_0$. Par composition avec une fonction continue, la fonction f est continue sur $\text{dom}(f)^{\circ R}$.

Si $\dim \text{dom}(f) < n$, alors $\text{dom}(f)^{\circ} = \emptyset$ et f est évidemment continu sur $\emptyset$ puisqu'il n'y a rien à vérifier. Si $\dim \text{dom}(f) = n$, alors $\text{dom}(f)^{\circ R} = \text{dom}(f)^{\circ}$. Donc, $f|_{\text{dom}(f)^{\circ}}$ est continu. Soit $x_0 \in \text{dom}(f)^{\circ}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un voisinage U de x_0 dans $\text{dom}(f)^{\circ}$ tel que $x \in U \Rightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$. Donc, $U \cap \text{dom}(f)^{\circ}$ est un voisinage de x_0 dans E tel que $x \in U \cap \text{dom}(f)^{\circ} \Rightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$, ce qui montre bien que f est continu sur $\text{dom}(f)^{\circ}$. $\square$

Dans le cas général, nous devons utiliser des hypothèses plus fortes sur f pour assurer la continuité.

Proposition 3.3.4 (AC, [32]). *Soit $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre convexe et semi-continue inférieurement. Alors f est continu sur $\text{dom}(f)^{\circ}$.*

Démonstration. Supposons $\text{dom}(f)^{\circ} \neq \emptyset$, le cas $\text{dom}(f)^{\circ} = \emptyset$ étant trivial. Fixons $x_0 \in \text{dom}(f)^{\circ}$. Il existe $\eta > 0$ tel que $B(x_0, \eta) \subset \text{dom}(f)$. Pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x > 1$ tel que $z_x = \lambda_x x_0 + (1 - \lambda_x)x \in B(x_0, \eta) \subset \text{dom}(f)$. On définit la fonction

$$f_x : t \in \mathbb{R} \mapsto f(tx_0 + (1 - t)x) \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Cette fonction est propre et convexe. En effet, si $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ et $u \in [0, 1]$, alors

$$\begin{aligned} f_x(ut_1 + (1 - u)t_2) &= f((ut_1 + (1 - u)t_2)x_0 + (1 - ut_1 - (1 - u)t_2)x) \\ &= f(ut_1(x_0 - x) + (1 - u)t_2(x_0 - x) + x) \\ &= f(u(t_1(x_0 - x) + x) + (1 - u)(t_2(x_0 - x) + x)) \\ &\leq uf(t_1x_0 + (1 - t_1)x) + (1 - u)f(t_2x_0 + (1 - t_2)x) \\ &= uf_x(t_1) + (1 - u)f_x(t_2). \end{aligned}$$

La proposition précédente montre que f_x est continu sur $\text{dom}(f_x)^\circ$. Soit $r > f(x_0)$. On a $]z_x, x_0[\subset \text{dom}(f)$ pour tout $x \neq x_0$ et on déduit que $1 \in]0, \lambda_x[\subset \text{dom}(f_x)$ (E5); on a donc $1 \in \text{dom}(f_x)^\circ$ pour tout $x \neq x_0$. Donc, f_x est continu en 1 pour tout $x \neq x_0$. Il existe donc $t_x > 0$ tel que $f(tx_0 + (1-t)x) \in]-\infty, r[$ pour tout $t \in]1-t_x, 1+t_x[\subset]0, \lambda_x[$. Il s'ensuit que $tx_0 + (1-t)x \in \Gamma_r(f)$ pour tout $t \in]1-t_x, 1+t_x[$. On peut alors montrer que

$$E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left((1+n)\Gamma_r(f) - nx_0 \right). \quad (*)$$

L'inclusion $\supset$ est évidemment triviale. Montrons l'autre inclusion. Soit $x \in E$. Etant donné que 1 est intérieur à $]1-t_x, 1+t_x[$, il existe $N_x \in \mathbb{N}_0$ tel que $1 - \frac{1}{1+N_x} \in]1-t_x, 1+t_x[$, et nous obtenons $(1 - \frac{1}{1+N_x})x_0 + \frac{1}{1+N_x}x \in \Gamma_r(f)$. On remarque que

$$\left(1 - \frac{1}{1+N_x}\right)x_0 + \frac{1}{1+N_x}x = \frac{N_x}{1+N_x}x_0 + \frac{1}{1+N_x}x$$

et donc, $x \in (1+N_x)\Gamma_r(f) - N_x x_0$, ce qui montre (*). Vu que f est semi-continu inférieurement, les ensembles $\Gamma_\gamma(f)$ sont fermés pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$. L'égalité (*) montre que E est un espace métrique complet et une union dénombrable de fermés. Par le théorème de Baire, il existe $n \in \mathbb{N}_0$ tel que le fermé

$$(1+n)\Gamma_r(f) - nx_0$$

est d'intérieur non-vide. Donc $\Gamma_r(f)^\circ \neq \emptyset$. On conclut à l'aide du corollaire 3.3.1. $\square$

3.4 Convexité et différentiabilité

Lorsqu'une fonction est définie sur un espace de Banach quelconque, on peut aussi définir la notion de dérivabilité.

Définition 3.4.1. Soit $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f admet une *dérivée directionnelle* en $x \in E$ de direction $h \in E$ si et seulement si

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}$$

existe dans $\overline{\mathbb{R}}$. Dans ce cas, cette limite est la dérivée directionnelle de f en x dans la direction h et elle est notée $f_{*x}(h)$. La fonction f sera dite *G-différentiable* (Gâteaux-différentiable) en x si et seulement si $f_{*x}(h)$ existe dans $\mathbb{R}$ pour tout $h \in E$ et si la fonction $f_{*x} : h \in E \mapsto f_{*x}(h) \in \mathbb{R}$ est linéaire et continue. Dans ce cas, la dérivée de Gâteaux de f (ou le *gradient* de f) en x est définie par $\nabla f(x) = f_{*x}$. La fonction f sera *F-différentiable* (Fréchet-différentiable) en x s'il existe $\xi \in E^*$ tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - \langle \xi, h \rangle|}{\|h\|} = 0.$$

L'application linéaire ξ de la définition est évidemment unique et on la note $df(x)$. C'est la dérivée de Fréchet (ou *différentielle*) de f en x .

La propriété de F-différentiabilité est plus forte que celle de G-différentiabilité, comme en atteste la propriété suivante.

Proposition 3.4.1. Si $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est propre et F -différentiable en $x \in \text{dom}(f)^\circ$, alors f est G -différentiable et continu en x et $df(x) = \nabla f(x)$.

Démonstration. Soit $h \in E$ et fixons $\varepsilon > 0$. Comme f est F -différentiable, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\|h'\| < \eta \Rightarrow \frac{|f(x+h') - f(x) - \langle df(x), h' \rangle|}{\|h'\|} < \frac{\varepsilon}{\|h\|}.$$

Donc, si $|t| < \frac{\eta}{\|h\|}$, alors

$$\left| \frac{f(x+th) - f(x)}{t} - \langle df(x), h \rangle \right| = \|h\| \frac{|f(x+th) - f(x) - \langle df(x), th \rangle|}{\|th\|} < \varepsilon.$$

Ceci montre que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} = \langle df(x), h \rangle$$

pour tout $h \in E$. Comme $df(x)$ est linéaire et continu par définition, on en tire que f est G -différentiable en x et que $\nabla f(x) = df(x)$.

Montrons que f est continu en x . Soit $\varepsilon > 0$. Lorsque y est suffisamment proche de x , on a $y \in \text{dom}(f)^\circ$ et

$$|f(y) - f(x)| \leq \|y - x\| \frac{|f(y) - f(x) - \langle df(x), y - x \rangle|}{\|y - x\|} + |\langle df(x), y - x \rangle|. \quad (*)$$

Comme $df(x)$ est continu, il existe $\eta_1 > 0$ tel que $|\langle df(x), y - x \rangle| < \varepsilon/2$ si $\|y - x\| < \eta_1$. La fonction f étant F -différentiable en x , il existe $\eta_2 > 0$ tel que

$$\|y - x\| < \eta_2 \Rightarrow \frac{|f(y) - f(x) - \langle df(x), y - x \rangle|}{\|y - x\|} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si on pose $\eta = \min(1, \eta_1, \eta_2)$, alors, vu (*), on a

$$\|y - x\| < \eta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

□

La réciproque est fausse. Considérons par exemple la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x^3|y}{x^4+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

La fonction est G -différentiable en $(0, 0)$ et $\nabla f(0, 0) = 0$ comme on le vérifie aisément. Par l'absurde, supposons que f est aussi F -différentiable en $(0, 0)$. On doit avoir $df(0, 0) = 0$ et

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{|f(th_1, th_2) - f(0, 0) - \langle df(0, 0), (h_1, h_2) \rangle|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0,$$

c'est-à-dire (E6)

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^6 y^2}{x^{10} + x^2 y^4 + 2x^6 y^2 + x^8 y^2 + y^6 + 2x^4 y^4} = 0$$

en renommant h_1 et h_2 et en élevant la limite au carré. Cependant, si $y = x^2$, on voit que

$$\lim_{(x,x^2) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{4(x^2+1)} = \frac{1}{4} \neq 0$$

et on obtient une contradiction.

Proposition 3.4.2 ([32]). *Si $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est propre et G -différentiable sur un ouvert convexe U inclus dans $\text{dom}(f)$ et si $\nabla f : E \rightarrow E^*$ est une application lipschitzienne de constante de Lipschitz $L > 0$ sur U , alors*

$$f(y) \leq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{L}{2} \|y - x\|^2 \quad \forall x, y \in U.$$

En particulier, f est continu sur U .

Démonstration. Soient $x, y \in U$ et posons $h = y - x$. On peut supposer que $x \neq y$ car l'inégalité est triviale si $x = y$. On définit $g(t) = f(x + th)$ pour tout $t \in [0, 1]$. Par convexité, on a $x + th \in U$ pour tout $t \in [0, 1]$. Comme f est G -différentiable, la fonction g est dérivable en t . En effet, la limite suivante existe et est finie

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{g(t+u) - g(t)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{f(x + th + uh) - f(x + th)}{u} = \langle \nabla f(x + th), h \rangle.$$

La limite ci-dessus avec $u \rightarrow 0^-$ nous procure le même résultat, comme on le vérifie aisément. Cette quantité équivaut donc à dg/dt . Etant donné que ∇f est lipschitzien sur U , ∇f est aussi continu sur U . De plus, $\mathcal{J}_h$ est continu aussi. Par composition de fonctions continues, dg/dt est continu sur $[0, 1]$, donc intégrable sur $[0, 1]$. On obtient

$$\int_0^1 \langle \nabla f(x + th), h \rangle dt = \int_0^1 \frac{dg}{dt}(t) dt = g(1) - g(0) = f(y) - f(x)$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= \int_0^1 \langle \nabla f(x), h \rangle dt + \int_0^1 \langle \nabla f(x + th) - \nabla f(x), h \rangle dt \\ &\leq \langle \nabla f(x), h \rangle + \int_0^1 \|\nabla f(x + th) - \nabla f(x)\|^* \|h\| dt \\ &\leq \langle \nabla f(x), h \rangle + L \|h\|^2 \int_0^1 |t| dt \\ &= \langle \nabla f(x), h \rangle + \frac{L}{2} \|h\|^2 \end{aligned}$$

d'où l'inégalité recherchée. La continuité de f sur U est une conséquence immédiate de l'inégalité démontrée. $\square$

Montrons que dans le cas d'une fonction convexe, la dérivée directionnelle existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ en tout point du domaine et dans toute direction. C'est la conséquence de la proposition suivante.

Proposition 3.4.3 ([4]). Soit $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est une fonction propre convexe, alors pour tout $x \in \text{dom}(f)$ et tout $h \in E$, la fonction $\Delta f :]0, +\infty[\rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ définie par

$$(\Delta f)(t) = \frac{f(x + th) - f(x)}{t}$$

est croissante. Il s'ensuit que $f_{*x}(h)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ pour tout $x \in \text{dom}(f)$ et tout $h \in E$ et on a

$$f_{*x}(h) = \inf_{t>0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} \quad \forall x \in \text{dom}(f) \quad \forall h \in E.$$

Démonstration. Supposons que $s < t$. Nous devons montrer que

$$\frac{f(x + sh) - f(x)}{s} \leq \frac{f(x + th) - f(x)}{t}$$

c'est-à-dire

$$f(x + sh) \leq \frac{s}{t}f(x + th) + \left(1 - \frac{s}{t}\right)f(x).$$

Posons $\lambda = s/t$. On a $f(x + sh) = f(\lambda(x + th) + (1 - \lambda)x)$ et on conclut par convexité de f . $\square$

Voici d'autres propriétés utiles de la dérivée directionnelle d'une fonction convexe.

Proposition 3.4.4 ([4]). Soit $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre convexe et $x \in \text{dom}(f)$. Alors f admet une dérivée directionnelle en x et les assertions suivantes sont vérifiées :

- (i) Pour tout $y \in E$, on a $f_{*x}(y - x) \leq f(y) - f(x)$.
- (ii) La fonction f_{*x} est sous-linéaire.
- (iii) La fonction f_{*x} est convexe, $\text{epi}(f_{*x})$ est un cône convexe et

$$\text{dom}(f_{*x}) = \text{cone}(\text{dom}(f) - x).$$

La fonction est propre si $x \in \text{dom}(f)^{\circ R}$.

Démonstration. (i) Par convexité, on a

$$f(x + t(y - x)) = f((1 - t)x + ty) \leq (1 - t)f(x) + tf(y) \quad \forall t \in]0, 1[.$$

Donc,

$$\frac{f(x + t(y - x)) - f(x)}{t} \leq f(y) - f(x) \quad \forall t \in]0, 1[.$$

La conclusion s'ensuit par passage à la limite pour $t \rightarrow 0^+$.

(ii) Soient $h \in E$ et $\lambda \geq 0$. On a

$$\begin{aligned} f_{*x}(\lambda h) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x + t\lambda h) - f(x)}{t} = \lambda \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x + t\lambda h) - f(x)}{t\lambda} \\ &= \lambda \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{f(x + uh) - f(x)}{u} = \lambda f_{*x}(h). \end{aligned}$$

Soient $h_1, h_2 \in E$. Nous devons montrer que $f_{*x}(h_1 + h_2) \leq f_{*x}(h_1) + f_{*x}(h_2)$, c'est-à-dire

$$\inf_{t>0} \frac{f(x + th_1 + th_2) - f(x)}{t} \leq \inf_{t>0} \frac{f(x + th_1) - f(x)}{t} + \inf_{t>0} \frac{f(x + th_2) - f(x)}{t}.$$

Soient $t_1, t_2 > 0$. On a successivement

$$\begin{aligned}
& \frac{f(x + t_1 h_1) - f(x)}{t_1} + \frac{f(x + t_2 h_2) - f(x)}{t_2} \\
&= \frac{t_2 f(x + t_1 h_1) + t_1 f(x + t_2 h_2) - (t_1 + t_2) f(x)}{t_1 t_2} \\
&= (t_1 + t_2) \frac{\frac{t_2}{t_1 + t_2} f(x + t_1 h_1) + \frac{t_1}{t_1 + t_2} f(x + t_2 h_2) - f(x)}{t_1 t_2} \\
&\geq \frac{f(x + \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} h_1 + \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} h_2) - f(x)}{\frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2}} \quad \text{car } f \text{ est convexe} \\
&= \frac{f(x + u(h_1 + h_2)) - f(x)}{u} \quad \text{si } u = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} \\
&\geq f_{*x}(h_1 + h_2)
\end{aligned}$$

Comme t_1 et t_2 sont arbitraires dans $]0, +\infty[$, on obtient l'inégalité voulue.

(iii) Montrons que la fonction f_{*x} est convexe. Comme $f_{*x}(0) = 0$, on a $\text{epi}(f_{*x}) \neq \emptyset$. Soient $(h_1, y_1), (h_2, y_2) \in \text{epi}(f_{*x})$ et $\lambda \in [0, 1]$. Il faut montrer que $f_{*x}(\lambda h_1 + (1 - \lambda)h_2) \leq \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2$. Cela résulte directement de (ii). Le fait que $\text{epi}(f_{*x})$ est un cône convexe est une conséquence immédiate de la sous-linéarité de f_{*x} . Vu (i), on sait que $\text{dom}(f) - x \subset \text{dom}(f_{*x})$. Comme f est sous-linéaire, il est clair que $\text{dom}(f_{*x})$ est un cône convexe. Donc, $\text{cone}(\text{dom}(f) - x) \subset \text{dom}(f_{*x})$. Soit $h \in \text{dom}(f_{*x})$. Comme $f_{*x}(h) < +\infty$, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\inf_{t > 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} < C.$$

Donc, il existe $t > 0$ tel que $(f(x + th) - f(x))/t < C$. On en déduit que $f(x + th) < +\infty$ et $x + th \in \text{dom}(f)$. On a alors $h = \frac{1}{t}((x + th) - x) \in \text{cone}(\text{dom}(f) - x)$, d'où $\text{dom}(f_{*x}) \subset \text{cone}(\text{dom}(f) - x)$. La fonction f_{*x} est propre lorsque $x \in \text{dom}(f)^{\circ R}$. Sinon, on a $f_{*x}(h) = -\infty$ pour tout $h \in \text{dom}(f_{*x})^{\circ R}$ par la proposition 3.1.5. Donc $f_{*x}(\lambda h) = \lambda f_{*x}(h) = -\infty$ pour tout $h \in \text{dom}(f_{*x})^{\circ R}$ et tout $\lambda > 0$. Nous remarquons que $0 \in \text{dom}(f_{*x})^{\circ R}$ car

$$0 = x - x \in \text{dom}(f)^{\circ R} - x \subset \text{cone}(\text{dom}(f) - x)^{\circ R}.$$

En effet, si $z \in \text{dom}(f)^{\circ R} - x = (\text{dom}(f) - x)^{\circ R}$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(z, \varepsilon) \cap \text{aff}(\text{dom}(f) - x) \subset \text{dom}(f) - x \subset \text{cone}(\text{dom}(f) - x)$ et

$$\text{aff}(\text{dom}(f) - x) = \overrightarrow{\text{aff}(\text{dom}(f) - x)} = \text{aff}(\text{cone}(\text{dom}(f) - x)).$$

Ainsi, $0 \in \text{dom}(f_{*x})^{\circ R}$ et $f_{*x}(0) = -\infty$, d'où une absurdité. $\square$

Corollaire 3.4.1 ([32]). *Soit $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre convexe et $x_0 \in \text{dom}(f)$. Si f est continu en x_0 alors $f_{*x_0}(h)$ est fini pour tout $h \in E$ et l'application $f_{*x_0} : E \rightarrow \mathbb{R}$ est lipschitzienne sur E . En particulier, elle est continue sur E .*

Démonstration. Pour la première partie, il suffit de prouver que $\text{cone}(\text{dom}(f) - x_0) = E$. L'inclusion $\subset$ est évidemment triviale. Soit $x \in E$. Nous devons trouver $y \in \text{dom}(f)$ et $\lambda \geq 0$

tels que $x = \lambda(y - x_0)$. Si $x = 0$, on prend $\lambda = 0$ et y quelconque dans $\text{dom}(f)$. Supposons que $x \neq 0$. Dans ce cas, il faut que $\lambda > 0$ et que $y = x_0 + \frac{1}{\lambda}x$. Par la proposition 3.3.2, on a $x_0 \in \text{dom}(f)^\circ$. Comme $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} x_0 + \frac{1}{\lambda}x = x_0$, il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $x_0 + \frac{1}{\lambda_0}x \in \text{dom}(f)$. On note y cet élément. Ceci montre que $x = \lambda_0(y - x_0) \in \text{cone}(\text{dom}(f) - x_0)$.

Pour la seconde partie, soit $h \in E$. Par la proposition 3.3.1, il existe $L > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que f est L -lipschitzien sur $B(x_0, \varepsilon) \subset \text{dom}(f)$. Nous savons qu'il existe $\eta > 0$ tel que $x_0 + th \in B(x_0, \varepsilon)$ si $t \in]0, \eta[$. Il en découle que $|f(x_0 + th) - f(x_0)| \leq Lt\|h\|$ si $t \in]0, \eta[$. En passant à la limite lorsque $t \rightarrow 0^+$, nous obtenons $|f_{*x_0}(h)| \leq L\|h\|$. Donc, f_{*x_0} est L -lipschitzien sur E tout entier et par conséquent, cette fonction est continue sur E . $\square$

Pour trouver une condition de G-différentiabilité pour les fonctions convexes, nous aurons besoin d'éléments du calcul sous-différentiel qui seront exposés à la section suivante. Abordons à présent les dérivées secondes.

Définition 3.4.2. Soient $(F_1, \|\cdot\|_1)$ et $(F_2, \|\cdot\|_2)$ des espaces de Banach. Une fonction $f : F_1 \rightarrow F_2$ admet une dérivée directionnelle en $x \in F_1$ dans la direction $h \in F_1$ s'il existe $y \in F_2$ tel que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left\| \frac{f(x + th) - f(x)}{t} - y \right\|_2 = 0.$$

Un tel y étant unique, on le note usuellement $f_{*x}(h)$.

Si $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est une fonction définie sur un espace de Banach E , alors f est G-différentiable à l'ordre 2 en $x \in E$ si f est G-différentiable sur un voisinage de x , si $\nabla f : E \rightarrow E^*$ admet une dérivée directionnelle en x dans toute direction et si $(\nabla f)_{*x} : E \rightarrow E^*$ est linéaire et continu. Dans ce cas, la dérivée de Gâteaux seconde (ou la hessienne) de f en x est définie par $\nabla^2 f(x) = (\nabla f)_{*x}$, c'est-à-dire

$$\nabla^2 f(x)h = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\nabla f(x + th) - \nabla f(x)}{t} \quad \forall h \in E,$$

la limite étant prise dans E^* muni de la topologie forte. On dira que f est F-différentiable à l'ordre 2 en $x \in E$ s'il existe $T : E \rightarrow E^*$ une application linéaire continue telle que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\|df(x + h) - df(x) - T(h)\|_*}{\|h\|} = 0.$$

Dans ce cas, l'application T sera la dérivée de Fréchet seconde (ou différentielle seconde) de f en x . Elle est unique et est notée $d^2 f(x)$.

Remarque 3.4.1. Il n'est pas bien difficile de voir que $\nabla^2 f(x)$ est la matrice hessienne si f est

une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$. En effet, il est connu que $\nabla f(x) = (\partial_{x_1} f(x) \cdots \partial_{x_n} f(x))$. Donc,

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(x)h &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{\partial_{x_1} f(x+th) - \partial_{x_1} f(x)}{t} \cdots \frac{\partial_{x_n} f(x+th) - \partial_{x_n} f(x)}{t} \right) \\ &= \left((\partial_{x_1} f)_{*x}(h) \cdots (\partial_{x_n} f)_{*x}(h) \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \partial_{x_i x_1} f(x) h_i \cdots \sum_{i=1}^n \partial_{x_i x_n} f(x) h_i \right) \\ &= \begin{pmatrix} h_1 & \cdots & h_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{x_1}^2 f(x) & \partial_{x_1 x_2} f(x) & \cdots & \partial_{x_1 x_n} f(x) \\ \partial_{x_2 x_1} f(x) & \partial_{x_2}^2 f(x) & \cdots & \partial_{x_2 x_n} f(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_n x_1} f(x) & \partial_{x_n x_2} f(x) & \cdots & \partial_{x_n}^2 f(x) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Assez naturellement, on retrouve le théorème de Taylor.

Proposition 3.4.5 (Théorème de Taylor, [32]). *Soit $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, un ouvert $U \subset \text{dom}(f)$ convexe de E contenant x et supposons que f est G -différentiable en x à l'ordre deux. Alors, pour tout $h \in E$, on a*

$$f(x+th) = f(x) + t\langle \nabla f(x), h \rangle + \frac{t^2}{2} \langle \nabla^2 f(x)h, h \rangle + o(t^2)$$

si $t \rightarrow 0$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $x+th \in U$ pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. Définissons la fonction $g :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}$ par $g(t) = f(x+th)$. Il est clair que g est dérivable en tout point car, d'une part,

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{f(x+th+uh) - f(x+th)}{u} = \langle \nabla f(x+th), h \rangle$$

et d'autre part, la limite ci-dessus avec $u \rightarrow 0^-$ nous donne le même résultat. Cela étant, on voit que g admet une dérivée seconde car

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\frac{dg}{dt}(t+u) - \frac{dg}{dt}(t)}{u} &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \left\langle \frac{\nabla f(x+th+uh) - \nabla f(x+th)}{u}, h \right\rangle \\ &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \mathcal{J}_h \left(\frac{\nabla f(x+th+uh) - \nabla f(x+th)}{u} \right) \\ &= \mathcal{J}_h(\nabla^2 f(x+th)h) && \text{par continuité de } \mathcal{J}_h \\ &= \langle \nabla^2 f(x+th)h, h \rangle. \end{aligned}$$

Il suffit finalement d'appliquer le théorème de Taylor dans $\mathbb{R}$ à la fonction g au voisinage de 0. On obtient

$$g(t) = g(0) + t \frac{dg}{dt}(0) + \frac{t^2}{2} \frac{d^2g}{dt^2}(0) + o(t^2)$$

si $t \rightarrow 0$ et on s'aperçoit que c'est bien la formule attendue. $\square$

Lorsqu'une fonction est différentiable, nous pouvons déduire des critères de convexité à partir des dérivées calculées, tout comme c'est le cas des fonctions réelles et le critère de la dérivée première.

Proposition 3.4.6 ([32]). *Soit $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre G -différentiable sur un ouvert convexe U de E inclus dans $\text{dom}(f)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *La fonction f est convexe sur U .*
- (ii) *On a $\langle \nabla f(x), y - x \rangle \leq f(y) - f(x)$ pour tout $x, y \in U$.*
- (iii) *On a $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0$ pour tout $x, y \in U$.*

Si, de plus, f est G -différentiable au second ordre, alors ces assertions sont équivalentes à :

- (iv) *L'application $\nabla^2 f(x) : E \rightarrow E^*$ est semi-définie positive pour tout $x \in U$, i.e., $\langle \nabla^2 f(x)h, h \rangle \geq 0$ pour tout $x \in U$ et tout $h \in E$.*

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) : Supposons f convexe. Par la proposition 3.4.4, on a $f_{*x}(y - x) \leq f(y) - f(x)$ pour tout $x, y \in U$. Comme f est G -différentiable, on a $f_{*x} = \nabla f(x)$ et la conclusion s'ensuit.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : Si $x, y \in U$, on a, vu (ii) :

$$\begin{aligned} \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle &= -\langle \nabla f(x), y - x \rangle - \langle \nabla f(y), x - y \rangle \\ &\geq f(x) - f(y) + f(y) - f(x) = 0, \end{aligned}$$

d'où la conclusion.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : Posons $g(\lambda) = f(\lambda x + (1 - \lambda)y) - \lambda f(x) - (1 - \lambda)f(y)$ pour tout $\lambda \in [0, 1]$. Nous devons montrer que $g \leq 0$ sur $[0, 1]$. On voit tout d'abord que la fonction g est dérivable sur l'ouvert $]0, 1[$ et que

$$\begin{aligned} \frac{dg}{d\lambda}(\lambda) &= \frac{d}{d\lambda}(f(y + \lambda(x - y)) - \lambda f(x) - (1 - \lambda)f(y)) \\ &= \langle \nabla f(y + \lambda(x - y)), x - y \rangle - f(x) + f(y). \end{aligned}$$

Supposons que $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$. On a

$$\begin{aligned} \frac{dg}{d\lambda}(\lambda_1) - \frac{dg}{d\lambda}(\lambda_2) &= \langle \nabla f(y + \lambda_1(x - y)) - \nabla f(y + \lambda_2(x - y)), x - y \rangle \\ &= \underbrace{\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}}_{<0} \underbrace{\langle \nabla f(y + \lambda_1(x - y)) - \nabla f(y + \lambda_2(x - y)), (\lambda_1 - \lambda_2)(x - y) \rangle}_{\geq 0 \text{ vu (iii)}} \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Donc, $dg/d\lambda$ est une fonction croissante. De plus, on voit que $g(0) = g(1) = 0$. Par le théorème de Rolle, il existe $\lambda_0 \in]0, 1[$ tel que la dérivée de g s'annule en λ_0 . Étant donné que $dg/d\lambda$ est croissant, on a $dg/d\lambda \leq 0$ sur $[0, \lambda_0]$ et $dg/d\lambda \geq 0$ sur $[\lambda_0, 1]$. Il s'ensuit que g est décroissant sur $[0, \lambda_0]$ et croissant sur $[\lambda_0, 1]$. Au final, $g \leq 0$ sur $[0, 1]$ et la proposition est démontrée.

A présent, supposons que f est G -différentiable au second ordre. Il suffit de montrer que (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (i).

(iii) $\Rightarrow$ (iv) : Rappelons que

$$\nabla^2 f(x)h = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\nabla f(x + th) - \nabla f(x)}{t} \quad \forall x \in U \quad \forall h \in E.$$

Donc, pour tout $h \in E$, on a

$$\langle \nabla^2 f(x)h, h \rangle = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left\langle \frac{\nabla f(x + th) - \nabla f(x)}{t}, h \right\rangle$$

par continuité de $\mathcal{J}_h$. Soient $x \in U$ et $h \in E$. Comme U est ouvert, il existe $\eta > 0$ tel que $x + th \in U$ pour tout $t \in]0, \eta[$. Vu (iii), on obtient

$$t \in]0, \eta[\Rightarrow \langle \nabla f(x + th) - \nabla f(x), th \rangle \geq 0.$$

En divisant cette inégalité par t^2 et en passant à la limite $t \rightarrow 0^+$, on obtient $\langle \nabla^2 f(x)h, h \rangle \geq 0$ par continuité de $\mathcal{J}_h$.

(iv) $\Rightarrow$ (i) : Définissons g de la même façon que pour l'implication (iii) $\Rightarrow$ (i). On voit que g est deux fois dérivable car

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \frac{\frac{dg}{d\lambda}(\lambda + \mu) - \frac{dg}{d\lambda}(\lambda)}{\mu} &= \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \left\langle \frac{\nabla f(y + (\lambda + \mu)(x - y)) - \nabla f(y + \lambda(x - y))}{\mu}, x - y \right\rangle \\ &= \langle \nabla^2 f(y + \lambda(x - y))(x - y), x - y \rangle \geq 0 \end{aligned} \quad \text{vu (iv)}$$

Donc, $\frac{dg}{d\lambda}$ est croissant et on peut reproduire la fin du raisonnement de l'implication (iii) $\Rightarrow$ (i). $\square$

En adaptant la preuve ci-dessus, on sait montrer la version strictement convexe de la propriété précédente.

Proposition 3.4.7 ([32]). *Soit $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre G -différentiable sur un ouvert convexe U de E inclus dans $\text{dom}(f)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *La fonction f est strictement convexe sur U .*
- (ii) *On a $\langle \nabla f(x), y - x \rangle < f(y) - f(x)$ pour tout $x, y \in U$ tels que $x \neq y$.*
- (iii) *On a $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle > 0$ pour tout $x, y \in U$ tels que $x \neq y$.*

Si, de plus, f est G -différentiable au second ordre, alors ces assertions sont équivalentes à :

(iv) *L'application $\nabla^2 f(x) : E \rightarrow E^*$ est définie positive pour tout $x \in U$, i.e., $\langle \nabla^2 f(x)h, h \rangle > 0$ pour tout $x \in U$ et tout $h \in E$.*

Il est possible de démontrer qu'une fonction propre convexe de $\mathbb{R}^n$ de domaine ouvert est F -différentiable presque partout. Avant d'aborder ce résultat, montrons que la convexité facilite davantage la vérification de la différentiabilité. Une condition suffisante de différentiabilité est d'être continûment dérivable en dimension finie [38]. Si la fonction est convexe, il suffit simplement que la fonction soit dérivable comme le montre la proposition suivante.

Proposition 3.4.8. *Soit une fonction propre convexe $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ de domaine ouvert. Si f est dérivable en $x_0 \in \text{dom}(f)$, alors f est F -différentiable en x_0 .*

Démonstration. Notons $e_1, \dots, e_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Comme le domaine est ouvert, il existe $R > 0$ tel que $B(x_0, R) \subset \text{dom}(f)$. Posons

$$g(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)h \quad \forall h \in B(0, R)$$

où $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$ dénote la matrice jacobienne de f en x_0 . Il suffit de montrer que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|g(h)|}{|h|} = 0.$$

On étend cette fonction par $+\infty$ en dehors de $B(0, R)$. Vu que f est convexe, on en tire que g est convexe aussi. Il en découle que

$$0 = g(0) = g\left(\frac{-h + h}{2}\right) \leq \frac{g(-h) + g(h)}{2}.$$

Par conséquent, $g(h) \geq -g(-h)$ pour tout $h \in B(0, R)$. Ensuite, si $|h| < R/n$, alors

$$g(h) = g\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n nh_k e_k\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g(nh_k e_k) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ h_k \neq 0}} h_k \frac{g(nh_k e_k)}{nh_k} \leq |h| \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ h_k \neq 0}} \left| \frac{g(nh_k e_k)}{nh_k} \right|.$$

En procédant de la même manière, on obtient

$$g(-h) \leq |h| \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ h_k \neq 0}} \left| \frac{g(-nh_k e_k)}{nh_k} \right|.$$

Au total, on a

$$-|h| \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ h_k \neq 0}} \left| \frac{g(-nh_k e_k)}{nh_k} \right| \leq -g(-h) \leq g(h) \leq |h| \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ h_k \neq 0}} \left| \frac{g(nh_k e_k)}{nh_k} \right|.$$

On remarque que

$$\left| \frac{g(nh_k e_k)}{nh_k} \right| = \left| \frac{f(x_0 + nh_k e_k) - f(x_0) - nh_k \partial_k f(x_0)}{nh_k} \right| \rightarrow 0$$

si $h_k \rightarrow 0$ car f est dérivable en x_0 . On peut faire la même remarque pour $|g(-nh_k e_k)|/|nh_k|$. Donc $g(h)/|h| \rightarrow 0$ si $h \rightarrow 0$. Puisque $-g(h) \leq g(-h)$, on montre de façon similaire que $-g(h)/|h| \rightarrow 0$ et la preuve est achevée. $\square$

Lemme 3.4.1 (Lemme des trois cordes). *Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre convexe. Si $x < y < z$, alors*

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

Démonstration. C'est une simple reformulation de la proposition 3.4.3. $\square$

Lemme 3.4.2 (AC). *Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre convexe de domaine ouvert. Alors*

$$F = \{x \in \text{dom}(f) : f \text{ n'est pas dérivable en } x\}$$

est dénombrable.

Démonstration. Notons

$$D^+f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \text{ et } D^-f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}.$$

On a donc

$$F = \{x \in \text{dom}(f) : D^-f(x) < D^+f(x)\}.$$

On définit l'application $x \in F \mapsto r_x \in \mathbb{Q}$ où r_x est un nombre rationnel que l'on choisit dans $]D^-f(x), D^+f(x)[$. Cette application est injective car

$$x \leq y \Rightarrow D^-f(x) \leq D^+f(x) \leq D^-f(y) \leq D^+f(y)$$

et $]D^-f(x), D^+f(x)[\cap]D^-f(y), D^+f(y)[= \emptyset$. En effet, il est déjà connu que $D^-f(x) \leq D^+f(x)$. Il suffit de montrer que $D^+f(x) \leq D^-f(y)$ si $x < y$, c'est-à-dire

$$\lim_{u \rightarrow x^+} \frac{f(u) - f(x)}{u - x} \leq \lim_{u \rightarrow y^-} \frac{f(u) - f(y)}{u - y}.$$

Si $x < y$, soit $z \in]x, y[$. Le lemme des trois cordes montre que

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

et on a l'inégalité voulue en passant successivement à la limite pour $z \rightarrow x^+$ puis $z \rightarrow y^-$. Donc F est dénombrable. $\square$

Proposition 3.4.9 ([31]). *Supposons que E est de dimension finie. Si $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est une fonction propre convexe de domaine ouvert, alors f est F -différentiable presque partout sur $\text{dom}(f)$.*

Démonstration. Notons U le domaine de f et fixons une base $e_1, \dots, e_n$ de E . Nous envisageons deux cas. Dans un premier temps, on suppose que U est borné. La fonction f est F -différentiable en $x_0 \in E$ si et seulement si $f_{*x_0} : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ existe et est une application linéaire (E7). La différentielle est alors représentée par la matrice jacobienne car $f_{*x_0}(e_i) = \partial_i f(x_0)$. Evidemment, cette représentation matricielle dépend de la base choisie. Il est clair que f est F -différentiable en x_0 si f est continûment dérivable. Posons

$$E_m = \{x \in U : \partial_m f(x) \text{ n'existe pas}\}$$

pour tout $m \in \{1, \dots, n\}$. Vu la proposition précédente, il suffit de montrer que E_m est négligeable pour tout $m \in \{1, \dots, n\}$. Par convexité, nous savons que $f_{*x}(h)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ pour tout $x \in U$ et tout $h \in E$. Par définition, $\partial_m f(x)$ existe et est fini si et seulement si $f_{*x}(e_m)$ existe, est fini et vaut $-f_{*x}(-e_m)$ ⁵. Par conséquent,

$$E_m = \{x \in U : -f_{*x}(-e_m) < f_{*x}(e_m)\}$$

car

$$0 = f_{*x}(0) = f_{*x}\left(\frac{h - h}{2}\right) \leq \frac{f_{*x}(h) + f_{*x}(-h)}{2}.$$

5. On rappelle que notre définition de la dérivée directionnelle est donnée par une limite à droite. La dérivée ordinaire existe si et seulement si la limite à droite et à gauche existent et sont égales.

Par convexité, la fonction f est continue sur U , donc mesurable et les fonctions $x \in U \mapsto f_{*x}(-e_m)$ et $x \in U \mapsto f_{*x}(-h)$ sont limites ponctuelles de fonctions mesurables. Il s'ensuit que E_m est un ensemble mesurable. Puisque U est supposé borné, l'ensemble E_m est de mesure finie. La mesure de Lebesgue de E_m vaut

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{E_m}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \chi_{E_m}(x) dx_1 \cdots dx_n = 0$$

car $\int_{\mathbb{R}} \chi_{E_m}(x) dx_m = 0$. De fait, $x_m \mapsto f(x_1, \dots, x_m, \dots, x_n)$ est une fonction convexe et est non-dérivable en un nombre dénombrable de points du domaine par le lemme précédent. Donc, $x_m \mapsto \chi_{E_m}(x_1, \dots, x_m, \dots, x_n)$ est nul presque partout. Au total, E_m est négligeable pour tout $m \in \{1, \dots, n\}$. Si on suppose que U n'est pas borné, alors les ensembles $E_m \cap B(0, k)$ sont négligeables par la partie précédente. Donc $E_m = \cup_{k=0}^{+\infty} E_m \cap B(0, k)$ est négligeable. $\square$

En dimension infinie, il faut faire diverses hypothèses supplémentaires pour obtenir un résultat moins puissant. Le lecteur intéressé peut consulter par exemple [33].

3.5 Sous-différentiel d'une fonction

Dans cette section, nous allons introduire les éléments du calcul sous-différentiel, très utile lorsqu'une fonction n'est pas différentiable et outil fondamental de l'analyse convexe. Ceci nous permettra en particulier de montrer un critère de G-différentiabilité pour les fonctions convexes. Intuitivement, lorsqu'on a une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en un point $x \in \mathbb{R}$, la dérivée en ce point décrit la pente de la tangente en $(x, f(x))$. L'idée du sous-différentiel d'une fonction en un point est de remplacer le concept de tangente par celui d'hyperplan d'appui. Ainsi, sachant qu'un point frontière d'un convexe peut posséder plusieurs hyperplans d'appui, on s'attend à ce que le sous-différentiel soit un ensemble qui peut éventuellement posséder plusieurs points.

Définition 3.5.1. Soient M et N des ensembles. Une *multifonction* est une application $\mathcal{F} : M \rightarrow \mathcal{P}(N)$. On notera usuellement une multifonction $\mathcal{F} : M \rightrightarrows N$. Son domaine est défini par

$$\text{dom}(\mathcal{F}) = \{x \in M : \mathcal{F}(x) \neq \emptyset\}$$

et son image par

$$\text{im}(\mathcal{F}) = \{y \in N : \exists x \in M \ y \in \mathcal{F}(x)\} = \bigcup_{x \in M} \mathcal{F}(x).$$

Si $\mathcal{F} : M \rightrightarrows N$ est une multifonction, alors la multifonction inverse $\mathcal{F}^{-1} : N \rightrightarrows M$ est définie par

$$\mathcal{F}^{-1}(y) = \{x \in M : y \in \mathcal{F}(x)\} \quad \forall y \in N.$$

Remarque 3.5.1. L'image d'une multifonction n'est pas à confondre avec l'image d'une application.

On peut donner aisément quelques exemples élémentaires.

Exemple 3.5.1. (i) La multifonction racine carrée $\sqrt{\cdot} : \mathbb{C} \rightrightarrows \mathbb{C}$ définie par

$$\sqrt{z} = \left\{ \sqrt{|z|} e^{\frac{i \arg(z)}{2}}, -\sqrt{|z|} e^{\frac{i \arg(z)}{2}} \right\}.$$

- (ii) Toute fonction f peut être vue comme une multifonction en associant à chaque point le singleton de l'image.
- (iii) La multifonction application inverse : si $f : N \rightarrow M$ est une application quelconque, alors la multifonction réciproque $f^{-1} : M \rightrightarrows N$ est définie par $f^{-1}(y) = \{x \in N : f(x) = y\}$ et elle correspond à la multifonction inverse de la définition 3.5.1.

Rappelons que si f est convexe et G -différentiable, alors son gradient en x , à savoir $\nabla f(x)$, appartient à E^* et vérifie l'inégalité $\langle \nabla f(x), y - x \rangle \leq f(y) - f(x)$ pour tout $y \in E$. L'idée est de généraliser le concept de gradient en remplaçant $\nabla f(x)$ par un élément du dual E^* dans cette inégalité. C'est la notion de sous-gradient.

Définition 3.5.2. Si $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est une fonction, alors un *sous-gradient* de f en $x \in \text{dom}(f)$ est un élément $\xi \in E^*$ tel que

$$\langle \xi, y - x \rangle \leq f(y) - f(x), \quad \forall y \in E$$

lorsque $f(x)$ est fini. Le *sous-différentiel* de f est la multifonction $\partial f : E \rightrightarrows E^*$ telle que $\partial f(x)$ désigne l'ensemble des sous-gradients de f en x . Par convention, on pose $\partial f(x) = \emptyset$ si $f(x)$ est infini. On dira que f est sous-différentiable en $x \in E$ si et seulement si $\partial f(x) \neq \emptyset$.

Voici une interprétation géométrique du sous-gradient.

Proposition 3.5.1. Si $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est une fonction et si $\xi \in E^*$ est un sous-gradient de f en $x \in E$, alors ξ définit un hyperplan d'appui de $\text{epi}(f)$ en $(x, f(x))$.

Démonstration. Supposons que $\xi \in E^*$ vérifie

$$\langle \xi, y - x \rangle \leq f(y) - f(x) \quad \forall y \in E.$$

Il est clair que l'hyperplan H d'équation $\langle \xi, x' - x \rangle = y' - f(x)$ en $(x', y') \in E \times \mathbb{R}$ contient $(x, f(x))$. Si $(x', y') \in \text{epi}(f)$, alors $y' \geq f(x')$. Par hypothèse, on a $\langle \xi, x' - x \rangle \leq f(x') - f(x) \leq y' - f(x)$. Il s'ensuit que $\text{epi}(f)$ est inclus dans le demi-espace d'équation $\langle \xi, x' - x \rangle \leq y' - f(x)$ (d'inconnue (x', y')) défini par H . $\square$

Nous voyons que la sous-différentiabilité implique la semi-continuité inférieure.

Proposition 3.5.2 ([4]). Si $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est une fonction propre, alors $\text{dom}(\partial f) \subset \text{dom}(f)$. De plus, si f est sous-différentiable en x , alors f est semi-continu inférieurement en x .

Démonstration. Soit $\xi \in \partial f(x)$. On a donc $\langle \xi, y - x \rangle + f(x) \leq f(y)$ pour tout $y \in E$. En passant à la limite inférieure, nous avons bien sûr $f(x) \leq \liminf_{y \rightarrow x} f(y)$; d'où la conclusion. $\square$

Montrons que la notion de sous-gradient généralise bien celle de dérivée pour des fonctions non-différentiables.

Proposition 3.5.3 ([32]). Soit $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre convexe G -différentiable en $x \in E$. Alors $x \in \text{dom}(\partial f)$ et $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$.

Démonstration. Il suffit de montrer que $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$. D'abord, il est clair que $\nabla f(x) \in \partial f(x)$ vu la proposition 3.4.6. Donc, $\partial f(x) \neq \emptyset$ et $x \in \text{dom}(\partial f)$. Ensuite, soit $\xi \in \partial f(x)$. Par définition, on a $\langle \xi, y - x \rangle \leq f(y) - f(x)$ pour tout $y \in E$. Donc, $\langle \xi, h \rangle \leq f(x + h) - f(x)$ pour tout $h \in E$ et il s'ensuit que

$$\langle \xi, h \rangle \leq \frac{f(x + th) - f(x)}{t} \quad \forall h \in E \quad t > 0.$$

Si $t \rightarrow 0^+$, alors $\langle \nabla f(x) - \xi, h \rangle \geq 0$. On a cette inégalité pour tout $h \in E$. Donc, $\langle \nabla f(x) - \xi, h \rangle \leq 0$ pour tout $h \in E$ en changeant le signe de h et en utilisant la linéarité de $\nabla f(x) - \xi$. D'où $\xi = \nabla f(x)$. $\square$

Nous avons vu que $\text{dom}(\partial f) \subset \text{dom}(f)$, mais l'autre inclusion n'est pas nécessairement vraie. La proposition qui vient d'être démontrée nous permet de construire aisément des fonctions qui ne vérifient pas $\text{dom}(\partial f) = \text{dom}(f)$. Par exemple, nous pouvons considérer $f(x) = -\sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$ et $f(x) = +\infty$ si $x < 0$. Nous savons que le gradient de f coïncide avec la dérivée ordinaire et que f est bien deux fois différentiable sur $]0, +\infty[$. On a $\nabla f(x) = -1/(2\sqrt{x})$ et $\nabla^2 f(x) = 1/(4\sqrt{x^3})$ si $x \in]0, +\infty[$. Comme $\langle \nabla^2 f(x)h, h \rangle = h^2/(4\sqrt{x^3}) \geq 0$ pour tout $x \in]0, +\infty[$, on conclut que f est une fonction convexe. Ensuite, la proposition précédente montre que $\partial f(x) = \{-1/(2\sqrt{x})\}$ pour tout $x \in]0, +\infty[$. Nous savons que $\text{dom}(f) = [0, +\infty[$. Montrons que f n'est pas sous-différentiable en 0. Sinon, il existe $\xi \in \mathbb{R}^* \simeq \mathbb{R}$ tel que $\langle \xi, y - 0 \rangle \leq f(y) - f(0)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Donc, $\xi y \leq -\sqrt{y}$ pour tout $y \in [0, +\infty[$. On en déduit que $\xi \leq -1/\sqrt{y}$ si $y \in]0, +\infty[$. Donc, si $y \rightarrow 0^+$, on conclut que $\xi = -\infty$, ce qui est absurde.

Nous serons en mesure de démontrer la réciproque de la proposition 3.5.3 lorsque nous aurons introduit la transformée de Legendre d'une fonction. Intéressons-nous aux propriétés des ensembles $\partial f(x)$.

Proposition 3.5.4 (AC, [32]). *Soit $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre convexe. Alors $\partial f(x)$ est convexe et fermé pour tout $x \in E$. Si, de plus, f est continu en un point $x_0 \in \text{dom}(f)^\circ$, alors f est sous-différentiable en x_0 et $\partial f(x_0)$ est borné et faiblement-* compact.*

Démonstration. Si $\partial f(x) = \emptyset$, il est trivialement fermé et convexe. Supposons que le sous-différentiel est non-vide. Soient $\xi_1, \xi_2 \in \partial f(x)$ et $\lambda \in [0, 1]$. On a

$$\langle \xi_j, y - x \rangle \leq f(y) - f(x_0) \quad \forall y \in E, \quad j \in \{1, 2\}.$$

On en déduit aisément que

$$\langle \lambda \xi_1 + (1 - \lambda) \xi_2, y - x \rangle \leq f(y) - f(x_0).$$

Donc, $\partial f(x)$ est convexe pour tout $x \in E$. Soit $(\xi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de $\partial f(x)$ qui converge vers ξ dans E^* . On a donc pour tout $m \in \mathbb{N}$

$$\langle \xi_m, y - x \rangle \leq f(y) - f(x) \quad \forall y \in E.$$

Comme $\mathcal{J}_{y-x}$ est une application continue, il en découle que $\langle \xi, y - x \rangle \leq f(y) - f(x)$ pour tout $y \in E$ par passage à la limite sur m . Donc, $\xi \in \partial f(x)$.

Supposons que f est continu en $x_0 \in E$. Vu que f est continu en x_0 , on a $(x_0, y) \in \text{epi}(f)^\circ$ pour tout $y \in]f(x_0), +\infty[$. On a aussi $(x_0, f(x_0)) \in \text{epi}(f)^\bullet$ car

$$\overline{f}(x_0) = \liminf_{z \rightarrow x_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow x_0} f(z) = f(x_0)$$

par continuité de f en x_0 . Puisque $\overline{\text{epi}(f)}$ est un convexe fermé d'intérieur non-vidé, le corollaire 1.3.1 affirme qu'il existe un hyperplan d'appui de $\text{epi}(f)$ contenant $(x_0, f(x_0)) \in \text{epi}(f)^\bullet$. Il existe donc $(\xi, r) \in (E^* \times \mathbb{R}) \setminus \{(0, 0)\}$ tel que

$$\langle \xi, x_0 \rangle + rf(x_0) \leq \inf_{(x, y) \in \text{epi}(f)} \langle \xi, x \rangle + ry.$$

Il en découle que

$$H = \{(x, y) \in E \times \mathbb{R} : \langle -\xi, x - x_0 \rangle = r(y - f(x_0))\}$$

est un hyperplan d'appui de $\overline{\text{epi}(f)}$ en $(x_0, f(x_0))$. Mais il nous faut une inégalité du même type que celle de la définition 3.5.2. Pour y parvenir, il suffit de montrer que $r > 0$, ce qui nous permettra de diviser $-\xi$ par r et conclure que f est sous-différentiable en x_0 . Si $r = 0$, alors $(x_0, y) \in H$ pour tout $y > f(x_0)$. Soient $y > f(x_0)$ et $h \in E \setminus \{0\}$ tel que $\langle \xi, h \rangle \neq 0$ (Vu que $r = 0$, on doit avoir $\xi \neq 0$). Comme $(x_0, y) \in \text{epi}(f)^\circ$, il existe $t > 0$ tel que $(x_0 + th, y) \in \text{epi}(f)$ et $(x_0 - th, y) \in \text{epi}(f)$. Puisque H est un hyperplan d'appui de $\text{epi}(f)$, $\langle \xi, x - x_0 \rangle$ garde un signe constant pour tout $x \in \text{dom}(f)$. On peut supposer que $\langle \xi, x_0 + th - x_0 \rangle = \langle \xi, th \rangle > 0$, quitte à changer le signe de h . Il s'ensuit que $\langle \xi, -th \rangle < 0$, ce qui est une contradiction car $x_0 + th$ et $x_0 - th$ sont des points de $\text{epi}(f)$ dans des demi-espaces ouverts définis par H qui sont différents. Donc, $r \neq 0$. Supposons maintenant que $r < 0$. Le demi-espace défini par H et contenant $\text{epi}(f)$ est donc défini par l'inéquation $y - f(x_0) \leq \langle -\xi/r, x - x_0 \rangle$ où $(x, y) \in E \times \mathbb{R}$. On sait alors que $y - f(x_0) \leq 0$ si $x = x_0$ et $y > f(x_0)$, d'où une absurdité. Par conséquent, $r > 0$ et f est sous-différentiable en x_0 .

La fonction f étant continue en x_0 , elle est lipschitzienne sur un voisinage de x_0 . Il existe $L > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que $|f(x) - f(y)| \leq L\|x - y\|$ pour tout $x, y \in B(x_0, \varepsilon)$. Si $\xi \in \partial f(x_0)$, alors $\langle \xi, y - x_0 \rangle \leq f(y) - f(x_0) \leq L\|y - x_0\|$ pour tout $y \in B(x_0, \varepsilon)$. Donc, pour tout $h \in B(0, \varepsilon)$, on a $\langle \xi, h \rangle \leq L\varepsilon$. Ainsi, $\langle \xi, h \rangle \leq L$ pour tout $h \in B(0, 1)$. D'où $\|\xi\|_* \leq L$ pour tout $\xi \in \partial f(x_0)$.

Comme $\partial f(x_0)$ est borné, il est inclus dans une boule de E^* . Par le théorème de Banach-Alaoglu, cette boule est faiblement-* compacte. Il reste alors à montrer que $\partial f(x_0)$ est faiblement-* fermé. Soit $(\xi_i)_{i \in I}$ une suite généralisée de $\partial f(x_0)$ qui converge faiblement-* vers ξ . Pour tout $i \in I$, nous avons

$$\langle \xi_i, y - x_0 \rangle \leq f(y) - f(x_0) \quad \forall y \in E.$$

Nous savons que pour toute partie A finie et incluse dans E , on a

$$\limsup_{i \in I} \sup_{x \in A} |\langle \xi_i - \xi, x \rangle| = 0.$$

En particulier, $\langle \xi_i, x \rangle$ converge vers $\langle \xi, x \rangle$ pour tout $x \in E$. Donc, $\langle \xi_i, y - x_0 \rangle$ converge vers $\langle \xi, y - x_0 \rangle$ pour tout $y \in E$. On en tire que $\langle \xi, y - x_0 \rangle \leq f(y) - f(x_0)$ pour tout $y \in E$ par passage à la limite. Donc, $\xi \in \partial f(x_0)$. Au total, $\partial f(x_0)$ est un ensemble faiblement-* fermé inclus dans une boule qui est faiblement-* compacte. Il s'ensuit que $\partial f(x_0)$ est faiblement-* compact. $\square$

Etablissons quelques résultats qui donnent des formules permettant de calculer plus aisément le sous-différentiel. Rappelons ce qu'est un opérateur adjoint.

Définition 3.5.3. Soit $T : E \rightarrow F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels E et F . L'opérateur adjoint de T , noté T^* , est l'application $T^* : F^* \rightarrow E^*$ définie par $T^*(\xi)(x) = \langle \xi, T(x) \rangle$ pour tout $x \in E$.

Proposition 3.5.5 (AC, [32]). Soient $f \in \Gamma(E)$ et $T : F \rightarrow E$ une application linéaire entre espaces de Banach. Alors, pour tout $x \in F$, on a

$$T^*(\partial f(T(x))) \subset \partial(f \circ T)(x).$$

On a l'égalité pour tout $x \in \text{dom}(f) \cap \text{im } T$ si f est continu en un point de $\text{dom}(f) \cap \text{im } T$.

Démonstration. Soit $\xi \in \partial f(T(x))$ et montrons que $T^*(\xi) \in \partial(f \circ T)(x)$. Nous savons que $\langle \xi, y - T(x) \rangle \leq f(y) - (f \circ T)(x)$ pour tout $y \in E$. Si $y \in F$, alors

$$\langle T^*(\xi), y - x \rangle = \langle \xi, T(y) - T(x) \rangle \leq (f \circ T)(y) - (f \circ T)(x).$$

Ceci montre que $T^*(\xi) \in \partial(f \circ T)(x)$. A présent, supposons que f est continu en $y_0 \in \text{im } T \cap \text{dom}(f)$ et montrons l'autre inclusion. Soient $x_0 \in F$ tel que $y_0 = T(x_0)$ et $\xi \in \partial(f \circ T)(x)$. Comme $\text{dom}(\partial(f \circ T)) \subset \text{dom}(f \circ T)$, on a $f(T(x)) \in \mathbb{R}$. On a $\langle \xi, y - x \rangle \leq f(T(y)) - f(T(x))$ pour tout $y \in F$, c'est-à-dire $f(T(y)) \geq \langle \xi, y - x \rangle + f(T(x))$ pour tout $y \in F$. Posons

$$A = \{(T(y), \langle \xi, y - x \rangle + f(T(x))) \in E \times \mathbb{R} : y \in F\}.$$

On vérifie sans peine que A est un ensemble convexe non-vidé tel que $A \cap \text{epi}(f)^\circ = \emptyset$. Vu que f est continu en un point, on a $\text{epi}(f)^\circ \neq \emptyset$ par la proposition 3.3.1. Par le théorème de séparation, A et $\text{epi}(f)^\circ$ sont séparables par un hyperplan. Il existe donc $(\zeta, r) \in (E^* \times \mathbb{R}) \setminus \{(0, 0)\}$ tel que

$$\sup_{(z, y) \in A} \langle \zeta, z \rangle + ry \leq \inf_{(z, y) \in \text{epi}(f)^\circ} \langle \zeta, z \rangle + ry.$$

Autrement dit, on a

$$\sup_{y \in F} \langle \zeta, T(y) \rangle + r(\langle \xi, y - x \rangle + f(T(x))) \leq \inf_{(z, y) \in \text{epi}(f)^\circ} \langle \zeta, z \rangle + ry. \quad (*)$$

Dans ces conditions, $r > 0$. Pour le montrer, on procède par l'absurde ; deux cas se présentent. Si $r < 0$, alors, vu (*), on a $\langle \zeta, T(x_0) \rangle + r(\langle \xi, x_0 - x \rangle + f(T(x))) \leq \langle \zeta, T(x_0) \rangle + ry$ pour tout $y > f(T(x_0))$ (on rappelle que $(T(x_0), y) \in \text{epi}(f)^\circ$ pour tout $y \in]T(x_0), +\infty[$ par continuité de f en $T(x_0)$). Donc,

$$\langle \xi, x_0 - x \rangle + f(T(x)) - y \geq 0 \quad \forall y > f(T(x_0)).$$

On a une absurdité en prenant $y > \max(f(T(x_0)), \langle \xi, x_0 - x \rangle + f(T(x)))$. Si $r = 0$, alors

$$\sup_{y \in F} \langle \zeta, T(y) \rangle \leq \inf_{(z, y) \in \text{epi}(f)^\circ} \langle \zeta, z \rangle.$$

Par continuité de f en $T(x_0)$, on a $T(x_0) \in \text{dom}(f)^\circ$. Comme $r = 0$, on a forcément $\zeta \neq 0$. Il existe $h \in E$ tel que $\langle \zeta, h \rangle \neq 0$. Il existe $t > 0$ tel que $T(x_0) + th$ et $T(x_0) - th$ appartiennent à $\text{dom}(f)^\circ$. Comme f est sci, la fonction est continue sur $\text{dom}(f)^\circ$ et en particulier, elle est

continue en $T(x_0) + th$ et $T(x_0) - th$. Il s'ensuit qu'il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $(T(x_0) \pm th, y) \in \text{epi}(f)^\circ$. Notons $b = \sup_{y \in F} \langle \zeta, T(y) \rangle$. On a alors

$$\langle \zeta, T(x_0) \pm th \rangle \geq b.$$

Evidemment, $\langle \zeta, T(x_0) \rangle \leq b$. Il en découle que $b \pm t\langle \zeta, h \rangle \geq b$, c'est-à-dire $\pm t\langle \zeta, h \rangle > 0$, ce qui est absurde car $t\langle \zeta, h \rangle$ et $-t\langle \zeta, h \rangle$ sont de signes opposés. On a bien $r > 0$.

Posons $\mu = -\zeta/r$. En divisant les deux membres de (*) par $-r$, nous obtenons

$$\langle \mu, z \rangle - y \leq \langle \mu, T(u) \rangle - \langle \xi, u - x \rangle - f(T(x)) \quad \forall (z, y) \in \text{epi}(f)^\circ \quad \forall u \in F. \quad (**)$$

Cette inégalité est valable pour tout $(z, y) \in \overline{\text{epi}(f)} = \text{epi}(f)$ car tout élément de $\overline{\text{epi}(f)}$ est limite d'une suite de $\text{epi}(f)^\circ$ et μ est continu. Comme $(T(x), f(T(x))) \in \text{epi}(f)$, on a

$$\langle \mu, T(x) \rangle - f(T(x)) \leq \langle \mu, T(u) \rangle - \langle \xi, u - x \rangle - f(T(x)) \quad \forall u \in F,$$

c'est-à-dire

$$\langle T^*(\mu) - \xi, x - u \rangle \leq 0 \quad \forall u \in F.$$

Cela signifie que $T^*(\mu) - \xi$ est une forme linéaire qui garde un signe constant sur F . Donc, $T^*(\mu) = \xi$. Il reste à montrer que $\mu \in \partial f(T(x))$. En remplaçant u par x dans (**), on obtient

$$\langle \mu, z \rangle - y \leq \langle \mu, T(x) \rangle - f(T(x)) \quad \forall (z, y) \in \text{epi}(f).$$

Donc,

$$\langle \mu, z - T(x) \rangle \leq f(z) - f(T(x)) \quad \forall z \in \text{dom}(f).$$

Cette dernière inégalité est même valable pour tout $z \in E$. Donc, $\mu \in \partial f(T(x))$. Ceci achève la preuve. $\square$

Voyons le comportement du sous-différentiel lorsque l'on a une somme de fonctions convexes propres.

Proposition 3.5.6 (AC, [32]). Soient $f_0, \dots, f_n$ ($n \geq 1$) des fonctions propres convexes semi-continues inférieurement sur E . Alors

$$\partial \left(\sum_{i=0}^n f_i \right) (x) \supset \sum_{i=0}^n \partial f_i(x) \quad \forall x \in \bigcap_{i=0}^n \text{dom}(f_i).$$

L'égalité a lieu pour tout $x \in \bigcap_{i=0}^n \text{dom}(f_i)$ si $f_0, \dots, f_n$ sont continus en un même point de $\text{dom}(f_0) \cap \bigcap_{i=1}^n \text{dom}(f_i)^\circ$.

Démonstration. Soient $\xi_0 \in \partial f_0(x)$, ..., $\xi_n \in \partial f_n(x)$. On a donc

$$\langle \xi_i, y - x \rangle \leq f_i(y) - f_i(x) \quad \forall y \in E \quad \forall i \in \{0, \dots, n\}.$$

Par suite,

$$\left\langle \sum_{i=0}^n \xi_i, y - x \right\rangle \leq \sum_{i=0}^n f_i(y) - \sum_{i=0}^n f_i(x) \quad \forall y \in E,$$

ce qui montre l'inclusion.

Supposons que $f_0, \dots, f_n$ sont continus en $x_0 \in \text{dom}(f_0) \cap \bigcap_{i=1}^n \text{dom}(f_i)^\circ$. Montrons l'autre inclusion dans le cas où $n = 1$. Soit $\xi \in \partial(f_0 + f_1)(x)$. Nous avons donc

$$\langle \xi, y - x \rangle \leq f_0(y) + f_1(y) - f_0(x) - f_1(x) \quad \forall y \in E.$$

On définit la fonction $g : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ par $g(y) = f_0(y) - f_0(x) - \langle \xi, y - x \rangle$ pour tout $y \in E$. Bien sûr, on a $\text{dom}(g) = \text{dom}(f_0)$ et g est une fonction propre convexe comme on peut facilement le vérifier. De plus, cette fonction est continue en x_0 , donc $\text{epi}(g)^\circ \neq \emptyset$. L'inégalité ci-dessus se réécrit

$$-(f_1(y) - f_1(x)) \leq g(y) \quad \forall y \in E.$$

Considérons l'ensemble

$$C = \{(y, z) \in E \times \mathbb{R} : f_1(y) - f_1(x) < -z\}.$$

Par construction, l'ensemble C est un convexe non-vidé et on a $C \cap \text{epi}(g)^\circ = \emptyset$, comme on peut facilement le vérifier. Par le théorème de séparation, il existe $(\zeta, r) \in (E^* \times \mathbb{R}) \setminus \{(0, 0)\}$ tel que

$$\sup_{(y, z) \in C} \langle \zeta, y \rangle + rz \leq \inf_{(y, z) \in \text{epi}(g)^\circ} \langle \zeta, y \rangle + rz. \quad (*)$$

Comme dans la preuve précédente, nous avons $r > 0$. Pour le montrer, on procède par l'absurde. Pour le cas $r = 0$, on procède exactement de la même façon que dans la proposition précédente. Si $r < 0$, alors

$$\langle \zeta, x_0 \rangle + rz \leq \langle \zeta, x_0 \rangle + rz' \quad \forall z < f_1(x) - f_1(x_0) \quad \forall z' > g(x_0).$$

On a alors $r(z - z') \leq 0$ si $z < f_1(x) - f_1(x_0)$ et $z' > g(x_0)$. Mais on a aussi $z < f_1(x) - f_1(x_0) \leq g(x_0) < z'$ et $r(z - z') > 0$, ce qui est absurde. Donc, $r > 0$.

Cela étant, comme précédemment, on divise les deux membres de (*) par $-r$ et on pose $\mu = -\zeta/r$. Il vient alors

$$\langle \mu, y \rangle - z \leq \langle \mu, y' \rangle - z' \quad \forall (y, z) \in \text{epi}(g)^\circ \quad \forall (y', z') \in C. \quad (**)$$

Nous pouvons passer à la limite pour $z' \rightarrow -(f_1(y') - f_1(x))$ car l'inégalité trouvée est valable pour tout $z' < -(f_1(y') - f_1(x))$ par définition de C . Par passage à la limite, nous avons même l'inégalité pour tout $(y, z) \in \text{epi}(g)$. Nous obtenons donc

$$\langle \mu, y \rangle - z \leq \langle \mu, y' \rangle + f_1(y') - f_1(x) \quad \forall (y, z) \in \text{epi}(g) \quad \forall y' \in \text{dom}(f_1).$$

Si $y' = x$, alors

$$\langle \mu, y - x \rangle \leq z \quad \forall (y, z) \in \text{epi}(g).$$

Donc, $\langle \mu, y - x \rangle \leq g(y) = f_0(y) - f_0(x) - \langle \xi, y - x \rangle$ pour tout $y \in \text{dom}(g) = \text{dom}(f_0)$. De façon évidente, cette dernière inégalité reste valable pour tout $y \in E$. Donc, $\mu + \xi \in \partial f_0(x)$. Il s'ensuit finalement que $\xi = (\mu + \xi) - \mu$. Pour conclure, il reste à montrer que $-\mu \in \partial f_1(x)$. Il suffit de considérer $y = x$ et $z = 0$ dans l'inégalité (**). On a alors

$$\langle \mu, x - y' \rangle \leq -z' \quad \forall (y', z') \in C.$$

Par passage à la limite sur z' , on a $\langle \mu, x - y' \rangle \leq f_1(y') - f_1(x)$ pour tout $y' \in \text{dom}(f_1)$. Autrement dit, on a $\langle -\mu, y' - x \rangle \leq f_1(y') - f_1(x)$ pour tout $y' \in E$. D'où, $-\mu \in \partial f_1(x)$.

Le cas général n se traite par récurrence. □

La proposition qui suit découle directement de la définition.

Proposition 3.5.7. *Soient f et g deux fonctions propres convexes sur E . Alors $\partial(f \times g)(x, y) = \partial f(x) \times \partial g(y)$ pour tout $(x, y) \in E \times E$.*

Concernant l'inf-convolution, on a aussi une règle de calcul lorsque la borne inférieure de la convolution est réalisée.

Proposition 3.5.8. *Soient f et g deux fonctions propres convexes sur E et supposons que, pour tout $x \in E$, il existe $z_x \in E$ tel que*

$$(f \oplus g)(x) = \inf_{z \in E} f(z) + g(x - z) = f(z_x) + g(x - z_x).$$

Alors

$$\partial(f \oplus g)(x) = \partial f(z_x) \cap \partial g(x - z_x) \quad \forall x \in E.$$

Démonstration. Supposons que $\xi \in \partial f(z_x) \cap \partial g(x - z_x)$. On a donc

$$\langle \xi, y_1 - z_x \rangle \leq f(y_1) - f(z_x) \text{ et } \langle \xi, y_2 - x + z_x \rangle \leq g(y_2) - g(x - z_x)$$

pour tout $y_1, y_2 \in E$. En prenant $y_1 = z_y$ et $y_2 = y - z_y$ puis en sommant les deux inégalités, on a

$$\langle \xi, y - x \rangle \leq (f \oplus g)(y) - (f \oplus g)(x),$$

ce qui démontre la première inclusion. Supposons que $\xi \in \partial(f \oplus g)(x)$. Donc ξ vérifie l'inégalité précédente pour tout $y \in E$, ce qui se traduit par

$$\langle \xi, y' - x \rangle \leq f(z_1) + g(z_2) - f(z_x) - g(x - z_x)$$

pour tout $y' \in E$ et tout $z_1, z_2 \in E$ tels que $z_1 + z_2 = y'$. Prenons $y' = y - z_x + x$, $z_1 = y$ et $z_2 = x - z_x$. On trouve

$$\langle \xi, y - z_x \rangle \leq f(y) - f(z_x),$$

ce qui prouve que $\xi \in \partial f(z_x)$. En s'y prenant de façon similaire, on sait montrer que $\xi \in \partial g(x - z_x)$. Ceci achève la preuve. $\square$

Pour finir, examinons quelques exemples pour nous familiariser avec cette nouvelle notion.

Exemple 3.5.2 (Fonction indicatrice d'un convexe). Soit C un ensemble convexe fermé non-vide de E et δ_C sa fonction indicatrice. Par définition, on a $\partial \delta_C(x) = \emptyset$ si $x \notin C$. Si $x \in C$, alors

$$\partial \delta_C(x) = \{\xi \in E^* : \langle \xi, y - x \rangle \leq 0 \quad \forall y \in C\}.$$

De façon évidente, on voit que $\partial \delta_C(x) = \{0\}$ si $x \in C^\circ$. Si $x \in C^\bullet$, alors $\partial \delta_C(x)$ est un cône convexe, comme on peut facilement le vérifier. C'est un ensemble particulier associé à C que l'on appelle cône normal de C en x , usuellement noté $N_C(x)$. Par exemple, si C est la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ et $|x| = 1$, alors

$$N_C(x) = \{z \in \mathbb{R}^n : \langle z, y - x \rangle \leq 0 \quad \forall y \in \overline{B}(0, 1)\} = \mathbb{R}^+ x.$$

En effet, on vérifie que

$$\langle x, y - x \rangle = \langle x, y \rangle - 1 \leq |x||y| - 1 \leq 0.$$

Il s'ensuit que $rx \in N_C(x)$ pour tout $r \geq 0$. De plus, si $z \in N_C(x)$ avec $|z| = 1$ et $z \neq x$, alors $\langle z, y - x \rangle \leq 0$ pour tout $y \in \overline{B}(0, 1)$. En particulier, si $y = z$, on trouve $|z|^2 = 1 \leq \langle z, x \rangle \leq |\langle z, x \rangle| < |z||x| = |z| = 1$, ce qui est absurde⁶. Autrement dit, il s'agit de la droite normale à la sphère unité. Ceci justifie l'appellation de "cône normal".

Exemple 3.5.3 (Valeur absolue). Considérons $f(x) = |x|$. Si $x > 0$, alors $\partial f(x) = \{1\}$ et si $x < 0$, on a $\partial f(x) = \{-1\}$ grâce à la proposition 3.5.3. Calculons $\partial f(0)$. La fonction n'est évidemment pas dérivable en 0. Il va falloir procéder différemment. Si $z \in \partial f(0)$, alors

$$\langle z, y - 0 \rangle = zy \leq |y| \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Si $y = z$, alors on en tire que $|z| \leq 1$. Donc, $\partial f(0) \subset [-1, 1]$. Intuitivement, cet intervalle est l'ensemble des pentes dont les hyperplans passant par 0 sont les hyperplans d'appui de l'épigraphe de f en $(0, 0)$. On s'attend donc à ce que l'inclusion ci-dessus soit en fait une égalité. En effet, si $|z| \leq 1$, alors $\langle z, y \rangle = zy \leq |zy| = |z||y| \leq |y|$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Il en découle que $\partial f(0) = [-1, 1]$.

Exemple 3.5.4 (Racine carrée). On prend l'opposé de la racine carrée, c'est-à-dire $f(x) = -\sqrt{x}$ pour tout $x \geq 0$, que l'on étend par $+\infty$ en dehors du domaine. Cette fonction est convexe. Nous savons que $\partial f(x) = \{-\frac{1}{2\sqrt{x}}\}$ si $x > 0$ car la fonction est dérivable sur $]0, +\infty[$. Cependant, f n'est pas dérivable en 0. On a $z \in \partial f(0)$ si et seulement si $zy \leq \sqrt{y}$ pour tout $y \geq 0$. On a $z \leq \sqrt{y}/y$ si $y > 0$, i.e. $z \leq 1/\sqrt{y}$ pour tout $y > 0$. On en tire que $z \leq 0$ si $y \rightarrow +\infty$. Donc, $\partial f(0) \subset]-\infty, 0]$. Bien sûr, si $z \leq 0$, alors $zy \leq 0 \leq \sqrt{y}$ pour tout $y \geq 0$ et on trouve $\partial f(0) =]-\infty, 0]$. En particulier, ceci montre que $\partial f(0)$ n'est pas borné et compact, d'où l'importance de l'hypothèse $x_0 \in \text{dom}(f)^\circ$ dans la proposition 3.5.4.

Voici un exemple qui nous sera utile plus tard.

Exemple 3.5.5 ([3]). On va caractériser le sous-différentiel de la norme d'un espace de Banach. On va montrer que

$$\partial\left(\frac{\|\cdot\|^2}{2}\right)(x) = \{\xi \in E^* : \langle \xi, x \rangle = \|x\|^2 = \|\xi\|_*^2\}.$$

Supposons d'abord que $\xi \in E^*$ vérifie $\langle \xi, x \rangle = \|x\|^2 = \|\xi\|_*^2$. On a alors

$$\begin{aligned} \langle \xi, y - x \rangle &= \langle \xi, y \rangle - \|x\|^2 = \|y\| \left\langle \xi, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle - \|x\|^2 \\ &\leq \|y\| \|\xi\|_* - \|x\|^2 = \|x\| \|y\| - \|x\|^2 \leq \frac{1}{2}(\|y\|^2 - \|x\|^2) \end{aligned}$$

pour tout $y \in E$. La dernière inégalité provient du fait que

$$\begin{aligned} \|x\| \|y\| - \|x\|^2 \leq \frac{1}{2}(\|y\|^2 - \|x\|^2) &\Leftrightarrow \frac{\|y\|^2 + \|x\|^2}{2} - \|x\| \|y\| \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\|x\| \|y\| \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (\|x\| - \|y\|)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

6. L'inégalité est stricte car l'inégalité de Cauchy-Schwarz est une égalité si et seulement si z et x sont linéairement dépendants.

Donc $\xi \in \partial\left(\frac{\|\cdot\|^2}{2}\right)(x)$. Réciproquement, supposons que $\xi \in \partial\left(\frac{\|\cdot\|^2}{2}\right)(x)$. On a par définition

$$\langle \xi, y - x \rangle \leq \frac{1}{2}(\|y\|^2 - \|x\|^2) \quad \forall y \in E. \quad (*)$$

Soient $z \in E$ et $r > 0$. L'inégalité (*) en $y = x + rz$ montre que

$$\langle \xi, rz \rangle \leq \frac{1}{2}(\|x + rz\|^2 - \|x\|^2) \leq \frac{1}{2}((\|x\| + r\|z\|)^2 - \|x\|^2) = \frac{1}{2}(r^2\|z\|^2 + 2r\|x\|\|z\|).$$

En divisant cette inégalité par r et en faisant tendre ce dernier vers 0, on a $\langle \xi, z \rangle \leq \|x\|\|z\|$ pour tout $z \in E$. On en tire que $\langle \xi, x \rangle \leq \|x\|^2$ et $\|\xi\|_* \leq \|x\|$. Ensuite, en réutilisant (*) en $y = (1 - r)x$, on trouve

$$-\langle \xi, rx \rangle \leq \frac{1}{2}((1 - r)^2\|x\|^2 - \|x\|^2) = \frac{1}{2}(r^2 - 2r)\|x\|^2.$$

Divisons cette dernière inégalité par r et faisons tendre r vers 0. On a finalement $\langle \xi, x \rangle \geq \|x\|^2$ et $\|x\| \leq \|\xi\|_*$. En particulier, si E est de Hilbert, il est facile de voir que

$$\partial\left(\frac{\|\cdot\|^2}{2}\right)(x) = \{x\}.$$

On dit que la multifonction $\mathcal{D} : E \rightrightarrows E^*$ définie par

$$\mathcal{D}(x) = \{\xi \in E^* : \langle \xi, x \rangle = \|x\|^2 = \|\xi\|_*^2\} \quad \forall x \in E$$

est l'opérateur de dualité de E . Avec cette définition, on a

$$\partial\left(\frac{\|\cdot\|^2}{2}\right)(x) = \mathcal{D}(x).$$

3.6 Transformée de Legendre et ses propriétés

Lorsque l'on dispose d'une fonction, il est parfois utile de la transformer en une autre fonction afin d'aborder un problème dans une autre perspective.

Définition 3.6.1. Soit $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction. Alors la *transformée de Legendre* de f est la fonction $f^* : E^* \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ définie par

$$f^*(\xi) = \sup_{x \in E} \langle \xi, x \rangle - f(x).$$

La *double transformée de Legendre* de f est la fonction $f^{**} : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ définie par

$$f^{**}(x) = \sup_{\xi \in E^*} \langle \xi, x \rangle - f^*(\xi).$$

Avant toute chose, remarquons immédiatement que f^{**} n'est pas la fonction $(f^*)^*$. En effet, f^{**} est une fonction définie sur E et $(f^*)^*$ sur E^{**} . Cependant, nous pouvons voir $(f^*)^*$ comme une extension de la fonction f^{**} par l'identification suivante

$$(f^*)^*(x) := (f^*)^*(\mathcal{J}_x) = \sup_{\xi \in E^*} \langle \mathcal{J}_x, \xi \rangle - f^*(\xi) = f^{**}(x) \quad \forall x \in E.$$

On a alors immédiatement la propriété suivante.

Proposition 3.6.1. *Si E est un espace réflexif, alors $(f^*)^* = f^{**}$.*

La transformée de Legendre est assez connue pour ses applications en optimisation. Elle permet d'obtenir des résultats intéressants liant un problème d'optimisation à son problème "dual". Ces propriétés seront étudiées en temps voulu. Remarquons que la transformée de Legendre d'une fonction propre n'est pas nécessairement propre. Par exemple, on peut considérer la fonction $f = -\exp$. Dans ce cas, on a $f^*(\xi) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \xi x + e^x = +\infty$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. Il nous faut des conditions additionnelles sur f pour que f^* soit une fonction propre.

Proposition 3.6.2. *Soit $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre. Si f est borné inférieurement, alors f^* est une fonction propre.*

Démonstration. Si f est borné inférieurement, alors il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) > C$ pour tout $x \in E$. Donc, $f^*(0) = -\inf_{x \in E} f(x) \leq -C < +\infty$ et $\text{dom}(f^*) \neq \emptyset$. Comme f est propre, il existe $x \in E$ tel que $f(x) \in \mathbb{R}$. On a alors $f^*(\xi) \geq \langle \xi, x \rangle - f(x) > -\infty$ pour tout $\xi \in E^*$. Ceci montre que f^* est propre. $\square$

Bien entendu, la transformée de Legendre confère des propriétés intéressantes à la nouvelle fonction obtenue, même si elle n'est pas nécessairement propre.

Proposition 3.6.3. *Si $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est une fonction, alors f^* est convexe et semi-continu inférieurement. De plus, si f est propre, alors $f^*(\xi) > -\infty$ pour tout $\xi \in E^*$.*

Démonstration. Nous devons envisager deux cas. Supposons d'abord que f^* est impropre.

(i) Si $f^* = +\infty$ sur E^* , alors $\text{epi}(f^*) = \emptyset$ et f^* est convexe et sci.

(ii) S'il existe $\xi \in E^*$ tel que $f^*(\xi) = -\infty$, alors $\sup_{x \in E} \langle \xi, x \rangle - f(x) = -\infty$, c'est-à-dire $\langle \xi, x \rangle - f(x) = -\infty$ pour tout $x \in E$. Il s'ensuit que $f = +\infty$ sur E et donc $f^* = -\infty$. D'où $\text{epi}(f^*) = E^* \times \mathbb{R}$ et f^* est bien convexe et sci.

Dans tous les cas, f^* est une fonction convexe et sci. Dans le cas où f^* est une fonction propre, nous savons que f^* est convexe et sci par la proposition 3.2.9. Supposons que f est propre. Il existe donc $x \in E$ tel que $f(x) \in \mathbb{R}$. Donc, pour tout $\xi \in E^*$, on a $f^*(\xi) \geq \langle \xi, x \rangle - f(x) > -\infty$, d'où la conclusion. $\square$

Nous voyons que la transformée de Legendre inverse l'ordre de deux fonctions lorsque celles-ci sont comparables pour la relation $\preceq$.

Proposition 3.6.4. *Si $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ et $g : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ sont deux fonctions telles que $f \preceq g$, alors $g^* \preceq f^*$.*

Démonstration. Soit $\xi \in E^*$. Pour tout $x \in E$, nous avons $f(x) \leq g(x)$ et donc $-g(x) \leq -f(x)$. On a alors $\langle \xi, x \rangle - g(x) \leq \langle \xi, x \rangle - f(x) \leq \sup_{z \in E} \langle \xi, z \rangle - f(z)$ pour tout $x \in E$. Il s'ensuit que

$$g^*(\xi) = \sup_{x \in E} \langle \xi, x \rangle - g(x) \leq \sup_{x \in E} \langle \xi, x \rangle - f(x) = f^*(\xi)$$

d'où la conclusion. $\square$

De plus, nous constatons que la transformée de Legendre d'une fonction ne change pas lorsque l'on prend l'enveloppe convexe fermée de celle-ci.

Proposition 3.6.5 ([44]). *Si $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est une fonction propre, alors $f^* = (\overline{f})^* = \text{conv}(f)^* = (\overline{\text{conv}(f)})^*$.*

Démonstration. Il est évident qu'il suffit de montrer que $f^* = (\overline{f})^* = (\overline{\text{conv}(f)})^*$. Étant donné que $\text{epi}(f) \subset \overline{\text{epi}(f)} \subset \overline{\text{conv}(\text{epi}(f))}$, nous avons $\overline{\text{conv}(f)} \preceq \overline{f} \preceq f$. La proposition précédente montre que $f^* \preceq (\overline{f})^* \preceq (\overline{\text{conv}(f)})^*$. Il reste à montrer que $(\overline{\text{conv}(f)})^* \preceq f^*$, c'est-à-dire $\text{epi}(f^*) \subset \text{epi}(\overline{\text{conv}(f)}^*)$. Soit $(\xi, r) \in \text{epi}(f^*)$ et montrons que $\overline{\text{conv}(f)}^*(\xi) \leq r$, c'est-à-dire

$$\sup_{x \in E} \langle \xi, x \rangle - \overline{\text{conv}(f)}(x) \leq r$$

ou encore

$$\overline{\text{conv}(f)}(x) \geq \langle \xi, x \rangle - r \quad \forall x \in E.$$

Vu que $(\xi, r) \in \text{epi}(f^*)$, on a $\sup_{x \in E} \langle \xi, x \rangle - f(x) \leq r$, i.e. $f(x) \geq \langle \xi, x \rangle - r$ pour tout $x \in E$. Donc, $\text{epi}(f) \subset \text{epi}(\langle \xi, \cdot \rangle - r)$. Puisque $\langle \xi, \cdot \rangle - r$ est une application affine continue, $\text{epi}(\langle \xi, \cdot \rangle - r)$ est un convexe fermé. Par conséquent, $\overline{\text{conv}(\text{epi}(f))} \subset \text{epi}(\langle \xi, \cdot \rangle - r)$. Donc, $\langle \xi, x \rangle - r \leq \overline{\text{conv}(f)}(x)$ pour tout $x \in E$, d'où la conclusion. $\square$

Dans certains cas, nous voyons que la transformée de Legendre est une sorte d'involution.

Théorème 3.6.1 (Théorème de Fenchel-Moreau, **AC**, [44]). *Soit $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre. Alors (E10)*

- (i) *On a $f^{**} = f$ si et seulement si f est une fonction convexe semi-continue inférieurement.*
- (ii) *On a*

$$f^{**} = \begin{cases} \overline{\text{conv}(f)} & \text{si } \overline{\text{conv}(f)} \text{ est une fonction propre} \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. (i) La nécessité de la condition résulte de la proposition 3.2.4. De fait, $f^{**} = (f^*)^*|_E$ et on voit que $\text{epi}(f^{**}) = \text{epi}((f^*)^*) \cap (E \times \mathbb{R})$. Nous savons que $\text{epi}((f^*)^*)$ est un convexe fermé et $E \times \mathbb{R}$ aussi, donc $\text{epi}(f^{**})$ est un convexe fermé de $E \times \mathbb{R}$. La condition est suffisante. Supposons que f est convexe sci. Nous avons évidemment

$$f^{**}(x) = \sup_{\xi \in E^*} \inf_{z \in E} \langle \xi, x - z \rangle + f(z) \leq f(x) \quad \forall x \in E.$$

Donc, $\text{epi}(f) \subset \text{epi}(f^{**})$. Il reste à montrer que $\mathbb{L} \text{epi}(f) \subset \mathbb{L} \text{epi}(f^{**})$. Soit $(x, y) \in \mathbb{L} \text{epi}(f)$. On a $f(x) > y$ et montrons que $f^{**}(x) > y$, i.e.

$$\sup_{\zeta \in E^*} \inf_{z \in E} \langle \zeta, x - z \rangle + f(z) > y.$$

Autrement dit, montrons que

$$\exists \varepsilon > 0 \exists \zeta \in E^* \forall z \in E \quad \langle \zeta, x \rangle + f(z) > \langle \zeta, z \rangle + y + \varepsilon.$$

Nous savons que $\text{epi}(f)$ est un convexe non-vidé fermé ne contenant pas (x, y) . Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(x, y + \varepsilon) \notin \text{epi}(f)$ car $\text{epi}(f)$ est fermé. Par le théorème de séparation forte, il existe $(\xi, r) \in (E^* \times \mathbb{R}) \setminus \{(0, 0)\}$ tel que

$$\langle \xi, x \rangle + r(y + \varepsilon) < \inf_{(z, t) \in \text{epi}(f)} \langle \xi, z \rangle + rt.$$

On a

$$\langle \xi, x \rangle + r(y + \varepsilon) < \langle \xi, z \rangle + rf(z) \quad \forall z \in E.$$

Des arguments semblables à celle des propositions 3.5.5 et 3.5.6 montrent que $r > 0$. Nous pouvons bien sûr supposer que $r = 1$. Posons $\zeta = -\xi$. En multipliant la dernière inégalité obtenue par -1 , on a alors

$$\langle \zeta, x \rangle + f(z) > \langle \zeta, z \rangle + y + \varepsilon.$$

La propriété est ainsi démontrée.

(ii) Si $\overline{\text{conv}}(f)$ est une fonction propre, alors le point (i) montre que $\overline{\text{conv}}(f)^{**} = \overline{\text{conv}}(f)$. Par la proposition 3.6.5, nous avons $f^{**} = (f^*)^*|_E = (\overline{\text{conv}}(f)^*)^*|_E = \overline{\text{conv}}(f)^{**}$. On a alors la conclusion. Si $\overline{\text{conv}}(f)$ est impropre, alors il existe $x_0 \in E$ tel que $\overline{\text{conv}}(f)(x_0) = -\infty$ car $\text{dom}(f) \neq \emptyset$ et $\text{dom}(f) \subset \text{dom}(\overline{\text{conv}}(f))$. Donc, $\overline{\text{conv}}(f)^* = +\infty$ et $(\overline{\text{conv}}(f)^*)^* = -\infty$. D'où $f^{**} = (f^*)^*|_E = (\overline{\text{conv}}(f)^*)^*|_E = -\infty$. $\square$

Proposition 3.6.6 (AC). *La transformée de Legendre est une injection de $\Gamma(E)$ dans $\Gamma(E^*)$. Si, de plus, E est réflexif, alors $f \in \Gamma(E) \mapsto f^* \in \Gamma(E^*)$ est une bijection d'inverse $g \in \Gamma(E^*) \mapsto g^* \in \Gamma(E)$.*

Démonstration. Nous savons que si $f \in \Gamma(E)$, alors f^* est convexe et semi-continue inférieurement. Montrons qu'elle est propre. Tout d'abord, comme f est propre, on a $f^* > -\infty$. Comme f appartient à $\Gamma(E)$, la proposition 3.2.9 montre qu'il existe $\xi \in E^*$ et $r \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) \geq \langle \xi, x \rangle + r$ pour tout $x \in E$. Donc, $f^*(\xi) \leq -r < +\infty$. Donc, f^* est une fonction propre. L'application $f \in \Gamma(E) \mapsto f^* \in \Gamma(E^*)$ a bien du sens. De plus, la proposition précédente montre que $f^{**} = f$ pour tout $f \in \Gamma(E)$. Il s'ensuit que $(f^*)^*|_E = f$ pour tout $f \in \Gamma(E)$. Donc, l'application $f \in \Gamma(E) \mapsto f^* \in \Gamma(E^*)$ est injective. Supposons que E est réflexif. Dans ce cas, E^* est aussi réflexif par le corollaire 2.2.1. Il s'ensuit que $(g^*)^* = g$ pour tout $g \in \Gamma(E^*)$. On en tire que la transformée de Legendre est aussi surjective et la conclusion en découle. $\square$

Un résultat connu est évidemment l'inégalité de Young. Ce résultat très profond nous donne une méthode de calcul dans le cas d'une fonction différentiable.

Proposition 3.6.7 (Inégalité de Fenchel-Young). *Si $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est une fonction propre, alors*

$$f^*(\xi) + f(x) \geq \langle \xi, x \rangle \quad \forall \xi \in E^* \quad \forall x \in E.$$

On a l'égalité si et seulement si $\xi \in \partial f(x)$. En particulier, si f est convexe et G -différentiable en $x \in E$, alors

$$f^*(\nabla f(x)) + f(x) = \langle \nabla f(x), x \rangle.$$

Démonstration. L'inégalité est évidente si $x \notin \text{dom}(f)$ ou $\xi \notin \text{dom}(f^*)$. Ensuite, nous avons

$$f^*(\xi) + f(x) = \sup_{z \in E} \langle \xi, z \rangle - f(z) + f(x) \geq \langle \xi, x \rangle \quad \forall \xi \in \text{dom}(f^*) \quad \forall x \in \text{dom}(f).$$

Supposons que $\xi \in \partial f(x)$. Dans ce cas, on a $x \in \text{dom}(f)$ car $\text{dom}(\partial f) \subset \text{dom}(f)$ et $\langle \xi, z - x \rangle \leq f(z) - f(x)$ pour tout $z \in E$. Autrement dit, $\langle \xi, z \rangle - f(z) \leq \langle \xi, x \rangle - f(x)$ pour tout $z \in E$. Par conséquent, $f^*(\xi) + f(x) \leq \langle \xi, x \rangle$ et on a l'égalité. Si $f^*(\xi) + f(x) = \langle \xi, x \rangle$, il suffit de remonter la preuve pour obtenir $\xi \in \partial f(x)$. Le cas particulier est une conséquence de la proposition 3.5.3. $\square$

Lorsque la fonction considérée f est G -différentiable et convexe, la formule de Young nous donne une formule utile pour calculer la transformée de Legendre. En effet, on a

$$f^*(\nabla f(x)) = \langle \nabla f(x), x \rangle - f(x) \quad \forall x \in E.$$

Cependant, cette méthode permet de calculer f^* seulement sur $\text{im } \nabla f$. Pour pouvoir calculer facilement f^* sur E^* tout entier, il faudrait avoir $\text{im } \nabla f = E^*$, autrement dit, il faudrait que $\nabla f : E \rightarrow E^*$ soit surjectif.

Corollaire 3.6.1. *Si $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est une fonction G -différentiable convexe et si $\nabla f : E \rightarrow E^*$ est surjectif, alors pour tout $\xi \in E^*$, on a*

$$f^*(\xi) = \langle \xi, x \rangle - f(x) \quad \forall x \in (\nabla f)^{-1}(\xi).$$

Avant d'aller plus loin, nous sommes en mesure de calculer les transformées de Legendre de quelques fonctions élémentaires.

Exemple 3.6.1 (Fonction indicatrice d'un ensemble). Soit C est un ensemble non-vidé et sa fonction indicatrice δ_C . Nous savons que $\text{epi}(\delta_C) = C \times [0, +\infty[$. Donc, δ_C est une fonction propre convexe semi-continue inférieurement si et seulement si C est un ensemble convexe fermé non-vidé. Sa transformée de Legendre est

$$\delta_C^*(\xi) = \sup_{x \in E} \langle \xi, x \rangle - \delta_C(x) = \sup_{x \in C} \langle \xi, x \rangle.$$

Cette fonction est couramment appelée fonction d'appui de C .

Exemple 3.6.2 (Formes linéaires). Soit $T : E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. On a

$$T^*(\xi) = \sup_{x \in E} \langle \xi - T, x \rangle = +\infty \quad \forall \xi \in E^* \setminus \{T\}$$

et

$$T^*(T) = 0.$$

Donc, $T^* = \delta_T$. Si T n'est pas continu, alors $T^* = +\infty$.

Exemple 3.6.3 (La norme). Considérons la norme $\|\cdot\|$ de E . On a

$$\|\cdot\|^* = \delta_{\overline{B_{\|\cdot\|}(0,1)}}.$$

En effet, si $\|\xi\|_* > 1$, alors $\sup_{\|x\| \leq 1} \langle \xi, x \rangle > 1$. Il existe $x \in E$ tel que $\|x\| \leq 1$ et $\langle \xi, x \rangle > 1$. Donc, $\langle \xi, x \rangle - \|x\| \geq \langle \xi, x \rangle - 1 > 0$. Donc, comme $\lim_{m \rightarrow +\infty} \langle \xi, mx \rangle - \|mx\| = +\infty$, on en tire que $\|\xi\|^* = +\infty$. Supposons que $\|\xi\|_* \leq 1$. On voit aisément que $\|\xi\|^* \geq 0$. Enfin, on a aussi $\|\xi\|^* \leq 0$ car

$$\|\xi\|_* \leq 1 \Leftrightarrow \langle \xi, x \rangle \leq 1 \quad \forall x \in \overline{B}(0,1).$$

et

$$\langle \xi, x \rangle \leq \|x\| \left\langle \xi, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \leq \|x\| \quad \forall x \in E \setminus \{0\}.$$

Exemple 3.6.4 (L'exponentielle). Considérons $f(x) = e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a $\nabla f(x) = e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et c'est une bijection entre $\mathbb{R}$ et $]0, +\infty[$. Donc, $(\nabla f)^{-1}(\xi) = \ln(\xi)$ pour tout $\xi \in]0, +\infty[$. Il s'ensuit que

$$f^*(\xi) = \xi \ln(\xi) - \xi \quad \forall \xi \in]0, +\infty[.$$

Si $\xi < 0$, alors $f^*(\xi) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \xi x - e^x = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} \xi x - e^x = +\infty$. Enfin, $f^*(0) = -\inf_{x \in \mathbb{R}} e^x = 0$.

Exemple 3.6.5 (Le logarithme). Soit la fonction f telle que $f(x) = \ln(x)$ si $x > 0$ et $f(x) = +\infty$ sinon. Alors $f^*(\xi) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \xi x - f(x) = +\infty$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \xi x - \ln(x) = +\infty$.

Le résultat est moins évident si l'on considère $f(x) = -\ln(x)$ si $x > 0$. En effet, cette fonction est convexe. On a $\nabla f(x) = -1/x$ si $x > 0$. On en tire que $\nabla f :]0, +\infty[\rightarrow]-\infty, 0[$ est une bijection et que $(\nabla f)^{-1}(\xi) = -1/\xi$ pour tout $\xi \in]-\infty, 0[$. Donc,

$$f^*(\xi) = -1 + \ln\left(\frac{-1}{\xi}\right) \quad \forall \xi < 0.$$

Exemple 3.6.6 (Fonctions sinus et cosinus). On considère $f(x) = \sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Cette fonction n'est pas convexe. Nous devons donc faire usage de la définition. Vu la complexité de l'épigraphe, calculons plutôt son enveloppe convexe fermée. On voit facilement que $\overline{\text{conv}}(f) = -1$ et par conséquent

$$f^*(\xi) = \overline{\text{conv}}(f)^*(\xi) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \xi x + 1 = +\infty$$

si $\xi \neq 0$ et $f^*(0) = 1$. Donc, $\sin^* = \delta_0 + 1$. Par la même méthode, on a $\cos^* = \delta_0 + 1$.

Exemple 3.6.7 (Fonction tangente). Soit la fonction f définie par $f(x) = \tan(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{(\pi/2) + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. On vérifie aisément que cette fonction n'est pas convexe. Prenons son enveloppe convexe. Nous voyons qu'elle vaut $\overline{\text{conv}}(f) = -\infty$. On en tire que

$$f^*(\xi) = \overline{\text{conv}}(f)^*(\xi) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \xi x - \overline{\text{conv}}(f)(x) = +\infty \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Donc, $\tan^* = +\infty$.

Exemple 3.6.8 (Puissance). On considère $f(x) = x^p$ avec $p \in \mathbb{N}_0$. La fonction est différentiable. Si p est pair, alors cette fonction est évidemment convexe. On a $\nabla f(x) = px^{p-1}$ et $(\nabla f)^{-1}(\xi) = (\xi/p)^{1/(p-1)}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. Donc,

$$f^*(\xi) = \xi \left(\frac{\xi}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}} - \left(\frac{\xi}{p}\right)^{\frac{p}{p-1}} = \left(\frac{\xi^p}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}} - \left(\frac{\xi}{p}\right)^{\frac{p}{p-1}} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Si $p = 1$, alors f est une forme linéaire et $f^* = \delta_1$ vu l'exemple 3.6.2 (on rappelle que 1 s'identifie à l'identité dans l'isomorphisme entre $\mathbb{R}$ et son dual). Ensuite, si p est impair et $p > 1$, alors la fonction n'est pas convexe. La fonction n'est pas bornée et donc

$$f^*(\xi) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \xi x - x^p = \sup_{x \in \mathbb{R}} x(\xi - x^{p-1}) = +\infty \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Il existe des exemples moins évidents en dimension infinie, mais on en abordera dans le chapitre suivant. Continuons d'examiner les propriétés de la transformée de Legendre lorsque l'on effectue diverses opérations sur les fonctions. Montrons tout d'abord deux lemmes.

Lemme 3.6.1 (Théorème d'extension de M. Riesz, **AC**, [9], [1]). *Soit G un sous-espace vectoriel de E et K un cône convexe non-vidé de E tel que $K \subset G - K$. Soit $\mu : G \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire telle que $\mu \geq 0$ sur $G \cap K$. Alors μ admet une extension linéaire ξ à E telle que $\xi \geq 0$ sur K .*

Démonstration. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des couples (H, h) tels que H est un sous-espace vectoriel de E contenant G et $h : H \rightarrow \mathbb{R}$ une extension linéaire de μ telle que $h \geq 0$ sur $H \cap K$. On munit $\mathcal{F}$ de la relation d'ordre

$$(H, h) \preceq (H', h') \Leftrightarrow H \subset H' \text{ et } h'|_H = h.$$

Bien sûr, $\mathcal{F}$ est non-vidé. Si $\mathcal{C}$ est une partie totalement ordonnée de $\mathcal{F}$, alors, on vérifie facilement que (U, u) défini par

$$U = \bigcup_{(H, h) \in \mathcal{C}} H \quad \text{et } u(x) = h(x) \text{ si } (H, h) \in \mathcal{C}, x \in H$$

est un majorant de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{F}$. Le lemme de Zorn nous procure un élément (E', ξ) de $\mathcal{F}$ qui est maximal. Vérifions que $E' = E$ pour conclure. Par l'absurde, supposons que $E' \subsetneq E$. Deux cas se présentent. Si $K \subset E'$, soit $x_0 \in E \setminus E'$. On pose $F = E' \oplus \mathbb{R}x_0$ et $\langle \zeta, x + rx_0 \rangle = \langle \xi, x \rangle$. On voit facilement que ζ est une extension linéaire de ξ telle que $\zeta \geq 0$ sur $F \cap K = E' \cap K = K$. Ceci contredit la maximalité de (E', ξ) . Le deuxième cas est celui où $K \not\subset E'$. Soit $x_0 \in K \setminus E'$ et posons $F = E' \oplus \mathbb{R}x_0$. On définit les ensembles $A = E' \cap (x_0 - K)$ et $B = E' \cap (x_0 + K)$. Etant donné que $x_0 \in K \setminus E'$, on a $A \neq \emptyset$ car il contient 0 et $B \neq \emptyset$ car $x_0 \in K \subset G - K$ implique qu'il existe $g \in G$ et $k \in K$ tels que $x_0 + k = g \in G \subset E'$. Soient $a \in A$ et $b \in B$. Il existe $k, k' \in K$ tels que $a = x_0 - k$ et $b = x_0 + k'$. Donc, $x_0 - a \in K$ et $b - x_0 \in K$. Comme K est un cône convexe, on a $(x_0 - a) + (b - x_0) = b - a \in K$. Bien sûr, on a aussi $b - a \in E'$ car $a, b \in E'$. On en tire que $\langle \xi, b - a \rangle \geq 0$, c'est-à-dire $\langle \xi, b \rangle \geq \langle \xi, a \rangle$ pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$. Donc,

$$-\infty < \sup_{a \in A} \langle \xi, a \rangle \leq \inf_{b \in B} \langle \xi, b \rangle < +\infty.$$

Soit $r_0 \in [\sup_{a \in A} \langle \xi, a \rangle, \inf_{b \in B} \langle \xi, b \rangle]$ et posons $\langle \zeta, x + rx_0 \rangle = \langle \xi, x \rangle + rr_0$ pour tout $x \in E'$ et tout $r \in \mathbb{R}$. Bien entendu, $\zeta : F \rightarrow \mathbb{R}$ est une extension linéaire de μ . Vérifions que $\zeta \geq 0$ sur $F \cap K$. Soient $x \in E'$ et $r \in \mathbb{R}$ tels que $x + rx_0 \in K$. Si $r = 0$, il est clair que $\langle \zeta, x + rx_0 \rangle \geq 0$. Supposons que $r \neq 0$. Si $r > 0$, on a $\langle \zeta, x + rx_0 \rangle \geq 0$ si et seulement si $\langle \xi, -x/r \rangle \leq r_0$. Cette inégalité est vraie si $-x/r \in A$, ce qui est vérifié puisque $x + rx_0 \in K \Rightarrow -x/r \in x_0 - K/r = x_0 - K$. On procède de façon semblable pour le cas où $r < 0$. Donc, $\zeta : F \rightarrow \mathbb{R}$ est une extension linéaire continue de ξ à $F \supsetneq E'$, ce qui contredit la maximalité de (E', ξ) . La proposition est démontrée. $\square$

Ce lemme, qui n'est pas sans rappeler le théorème de Hahn-Banach, nous permet de démontrer un théorème de séparation d'épigraphe d'une fonction convexe et d'une fonction concave.

Lemme 3.6.2 (**AC**, [37]). *Soient $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ et $g : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ des fonctions propres convexes telles que $-g \preceq f$. Supposons qu'il existe $x_0 \in \text{dom}(f)^\circ$ tel que f est continu en x_0 et supposons aussi que $\text{dom}(f)^\circ \cap \text{dom}(g) \neq \emptyset$. Alors il existe $\xi \in E^*$ et $r \in \mathbb{R}$ tels que*

$$-g(x) \leq \langle \xi, x \rangle + r \leq f(x) \quad \forall x \in E.$$

Démonstration. On pose $F = E \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Il est clair que $\text{epi}(f)$ et $\text{epi}(g)$ s'identifient à une partie de F via $(x, y) \mapsto (x, 1, y)$. On définit les ensembles

$$K_1 = \{\lambda(x, 1, y) : \lambda \geq 0, x \in \text{dom}(f), y \geq f(x)\}$$

et

$$K_2 = \{\lambda(x, 1, y) : \lambda \geq 0, x \in \text{dom}(g), y \leq -g(x)\}.$$

On vérifie sans peine que ces ensembles sont des cônes convexes tels que $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$. Donc, $K = K_1 - K_2$ est aussi un cône convexe. Définissons la fonctionnelle linéaire μ sur $\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}$ par $\langle \mu, (0, 0, r) \rangle = r$ pour tout $r \in \mathbb{R}$. Nous vérifions que si $(0, 0, u) \in K$, alors $u \geq 0$. En effet, il existe $\lambda \geq 0, \lambda' \geq 0, x \in \text{dom}(f), x' \in \text{dom}(g), y \geq f(x)$ et $y' \leq -g(x')$ tels que

$$0 = \lambda x - \lambda' x', \quad 0 = \lambda - \lambda', \quad u = \lambda y - \lambda' y'.$$

On en tire que $\lambda = \lambda'$. Si $\lambda = 0$, alors $\langle \mu, (0, 0, u) \rangle = 0$. Si $\lambda > 0$, alors

$$u = \lambda y - \lambda' y' \geq \lambda(f(x) + g(x)) \geq 0.$$

On en tire que μ est positif sur le cône convexe non-vidé $K \cap G$ où $G = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}$. Montrons que $K \subset G - K$ pour appliquer le théorème d'extension de Riesz. Soit $z \in K$. Il existe $\lambda, \lambda' \geq 0, x \in \text{dom}(f), x' \in \text{dom}(g), y \geq f(x), y' \leq -g(x')$ tels que $z = \lambda(x, 1, y) - \lambda'(x', 1, y')$. Par hypothèse, il existe $z_0 \in \text{dom}(f)^\circ \cap \text{dom}(g)$. Pour tout $r > 0$, on définit

$$z_r = z_0 + r(\lambda' x' - \lambda x + (\lambda - \lambda') z_0).$$

Comme $z_r \rightarrow z_0 \in \text{dom}(f)^\circ$ lorsque $r \rightarrow 0^+$, il existe $r > 0$ tel que $z_r \in \text{dom}(f)$. On a alors $\lambda x - \lambda' x' = -\frac{1}{r} z_r + (\lambda - \lambda' + \frac{1}{r}) z_0$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} z &= \lambda(x, 1, y) - \lambda'(x', 1, y') \\ &= (\lambda x - \lambda' x', \lambda - \lambda', \lambda y - \lambda' y') \\ &= \left(-\frac{1}{r} z_r + \left(\lambda - \lambda' + \frac{1}{r} \right) z_0, \lambda - \lambda', \lambda y - \lambda' y' \right) \\ &= -\frac{1}{r} (z_r, 1, f(z_r)) + \left(\lambda - \lambda' + \frac{1}{r} \right) (z_0, 1, -g(z_0)) + (0, 0, R) \end{aligned}$$

où $R = \lambda y - \lambda' y' + \frac{1}{r} f(z_r) + (\lambda - \lambda' + \frac{1}{r}) g(z_0) \in \mathbb{R}$. Prenons r suffisamment proche de 0 pour que $\lambda - \lambda' + 1/r \geq 0$. Dans ce cas, on a clairement $z \in G - K$. Donc, $\mu : G \rightarrow \mathbb{R}$ admet une extension linéaire $\zeta : F \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\zeta \geq 0$ sur K . On pose

$$\langle \xi, x \rangle = \langle \zeta, (x, 0, 0) \rangle \quad \forall x \in E$$

et $r = \langle \zeta, (0, 1, 0) \rangle$. Bien entendu, l'application $\xi : E \rightarrow \mathbb{R}$ est linéaire et on a la décomposition

$$\langle \zeta, (x, t, y) \rangle = \langle \xi, x \rangle + tr + y \quad \forall (x, t, y) \in F.$$

Si $x \in \text{dom}(f)$, alors $(x, 1, f(x)) \in K$ et

$$0 \leq \langle \zeta, (x, 1, f(x)) \rangle = \langle \xi, x \rangle + r + f(x) \Rightarrow \langle -\xi, x \rangle - r \leq f(x).$$

Si $x \in \text{dom}(g)$, alors $-(x, 1, -g(x)) \in K$ et

$$0 \leq \langle \zeta, -(x, 1, -g(x)) \rangle = -\langle \xi, x \rangle - r + g(x) \Rightarrow -g(x) \leq \langle -\xi, x \rangle - r.$$

Au total, on a

$$-g(x) \leq \langle -\xi, x \rangle - r \leq f(x) \quad \forall x \in E.$$

Pour conclure, il reste à prouver que $-\xi$ est continu. Etant donné que f est propre convexe et qu'elle est continue en $x_0 \in \text{dom}(f)$, la fonction f est bornée supérieurement par une constante sur un voisinage de x_0 par la proposition 3.3.1. Puisque $\langle -\xi, x \rangle - r \leq f(x)$ pour tout $x \in E$, la fonction $-\xi$ est bornée supérieurement au voisinage de x_0 , donc continue en x_0 . Par la proposition 3.3.2, $-\xi$ est continu sur $\text{dom}(-\xi)^\circ = E$ et $-\xi \in E^*$. D'où la conclusion. $\square$

Proposition 3.6.8 ([44], [37]). Soient $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $g : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ et $h : F \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ des fonctions propres sur les espaces de Banach E et F .

- (i) Si $r > 0$, alors $(rf)^* = rf^*(\cdot/r)$.
- (ii) Si $r \neq 0$, alors $f(r\cdot)^* = f^*(\cdot/r)$.
- (iii) Si $\xi \in E^*$, alors $(f + \xi)^* = f^*(\cdot - \xi)$.
- (iv) On a $(f \times h)^* = f^* \times h^*$.
- (v) On a $(f \oplus g)^* = f^* + g^*$.
- (vi) **(AC)** Supposons que $f, g \in \Gamma(E)$. Alors

$$(f^* + g^*)^*|_E = \begin{cases} \overline{f \oplus g} & \text{si } \overline{f \oplus g} \text{ est propre} \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si E est réflexif, alors

$$(f + g)^* = \begin{cases} \overline{f^* \oplus g^*} & \text{si } \overline{f^* \oplus g^*} \text{ est propre} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

et $(f + g)^* = f^* \oplus g^*$ s'il existe $x_0 \in \text{dom}(f)^\circ \cap \text{dom}(g)$ tel que f est continu en x_0 .

Démonstration. Les formules (i), (ii), (iii) et (iv) sont triviales.

(v) Pour tout $\xi \in E^*$, nous avons

$$\begin{aligned} (f \oplus g)^*(\xi) &= \sup_{x \in E} \langle \xi, x \rangle - (f \oplus g)(x) \\ &= \sup_{x \in E} \left(\langle \xi, x \rangle - \inf_{z \in E} f(z) + g(x - z) \right) \\ &= \sup_{x \in E} \sup_{z \in E} \langle \xi, x \rangle - (f(z) + g(x - z)) \\ &= \sup_{(x, z) \in E^2} \langle \xi, x + z \rangle - (f(x) + g(z)) \\ &= \sup_{x \in E} \langle \xi, x \rangle - f(x) + \sup_{z \in E} \langle \xi, z \rangle - g(z) \\ &= f^*(\xi) + g^*(\xi). \end{aligned}$$

(vi) La formule s'obtient par une application du théorème de Fenchel-Moreau. Le point (v) nous dit que $(f \oplus g)^* = f^* + g^*$ pour tout $f, g \in \Gamma(E)$. Donc, en utilisant une transformée de

Legendre, nous pouvons dire que, pour tout $f, g \in \Gamma(E)$, nous avons $(f^* + g^*)|_E = \overline{f \oplus g}$ si $\overline{f \oplus g}$ est propre et $(f^* + g^*)|_E = -\infty$ sinon.

Supposons que E est réflexif. Par le point (v), nous savons que $(f^* \oplus g^*)^* = f^{**} + g^{**} = f + g$ pour tout $f, g \in \Gamma(E)$. En appliquant une transformée de Legendre, on obtient $(f + g)^* = \overline{f^* \oplus g^*}$ si $\overline{f^* \oplus g^*}$ est propre et $-\infty$ sinon.

Supposons de plus que f est continu en un point $x_0 \in \text{dom}(f)^\circ \cap \text{dom}(g)$. Soit $\xi \in E^*$. Si $(f + g)^*(\xi) = +\infty$, alors $(f^* \oplus g^*)(\xi) = +\infty$ car $(f + g)^* \preceq f^* \oplus g^*$. Supposons que $(f + g)^*(\xi) < +\infty$. Etant donné qu'il est déjà connu que $(f + g)^*(\xi) \leq (f^* \oplus g^*)(\xi)$, il reste à montrer que $(f^* \oplus g^*)(\xi) \leq (f + g)^*(\xi)$. Nous savons que $f + g \in \Gamma(E)$. Comme $x_0 \in \text{dom}(f + g)$, on a $(f + g)^*(\xi) > -\infty$. Notons $r = (f + g)^*(\xi)$. Nous voyons que

$$r = \sup_{x \in E} \langle \xi, x \rangle - (f + g)(x) \geq \langle \xi, z \rangle - (f + g)(z) \quad \forall z \in E.$$

Donc, pour tout $z \in E$, on a $f(z) \geq -g(z) + \langle \xi, z \rangle - r$. Posons $g' = g - \xi + r$. Cette fonction est propre convexe et vérifie $-g' \preceq f$. De plus, f est continu en $x_0 \in \text{dom}(f)^\circ \cap \text{dom}(g)$. Par le lemme précédent, il existe $\zeta \in E^*$ et $c \in \mathbb{R}$ tels que

$$-g(x) + \langle \xi, x \rangle - r \leq \langle \zeta, x \rangle + c \leq f(x) \quad \forall x \in E.$$

La seconde inégalité montre que $f^*(\zeta) \leq -c$. Donc, $\zeta \in \text{dom}(f^*)$. Il découle de la première inégalité que $g^*(\xi - \zeta) - r \leq c$. Il vient donc $f^*(\zeta) + g^*(\xi - \zeta) \leq r$. Par conséquent, $(f^* \oplus g^*)(\xi) \leq r$. D'où la conclusion. $\square$

Grâce à cette proposition, nous pouvons aisément calculer de nouvelles transformées de Legendre à partir de transformées déjà connues. Cela étant, une transformée de Legendre peut toujours être vue comme une fonction d'appui d'un ensemble (exemple 3.6.1).

Proposition 3.6.9. *Soit $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre. Alors $f^* = \delta_{\text{epi}(f)}^*(\cdot, -1)$.*

Démonstration. Il suffit de voir que, pour tout $\xi \in E^*$, on a

$$f^*(\xi) = \sup_{x \in E} \langle \xi, x \rangle - f(x) = \sup_{(x,y) \in \text{epi}(f)} \langle \xi, x \rangle - y = \sup_{(x,y) \in \text{epi}(f)} \langle (\xi, -1), (x, y) \rangle = \delta_{\text{epi}(f)}^*(\xi, -1).$$

$\square$

Voyons ce qu'il advient de la borne inférieure et supérieure d'une famille de fonctions.

Proposition 3.6.10 ([4]). *Soit I un ensemble non-vide. Soient $f_i : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ des fonctions pour tout $i \in I$. Alors $(\inf_{i \in I} f_i)^* = \sup_{i \in I} (f_i^*)$ et $(\sup_{i \in I} f_i)^* \preceq \inf_{i \in I} (f_i^*)$.*

Démonstration. On a pour tout $\xi \in E^*$

$$\begin{aligned} (\inf_{i \in I} f_i)^*(\xi) &= \sup_{x \in E} \langle \xi, x \rangle - \inf_{i \in I} f_i(x) \\ &= \sup_{x \in E} \sup_{i \in I} \langle \xi, x \rangle - f_i(x) \\ &= \sup_{i \in I} \sup_{x \in E} \langle \xi, x \rangle - f_i(x) = \sup_{i \in I} (f_i^*(\xi)). \end{aligned}$$

Ensuite, nous savons que $f_j \preceq \sup_{i \in I} f_i$ pour tout $j \in I$. La transformée de Legendre inverse les inégalités, ce qui donne $(\sup_{i \in I} f_i)^* \preceq f_j^*$ pour tout $j \in I$. On en tire l'inégalité $(\sup_{i \in I} f_i)^* \preceq \inf_{i \in I} (f_i^*)$. $\square$

Il n'est pas aisé de décrire explicitement le domaine et l'épigraphe de f^* lorsque l'on dispose d'une fonction f . Nous devons nous contenter de résultats partiels.

Proposition 3.6.11 ([4]). *Soit $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre.*

(i) *On a*

$$\text{epi}(f^*) = \{(\xi, r) \in E^* \times \mathbb{R} : \langle \xi, \cdot \rangle - r \preceq f\}.$$

(ii) *Si $\text{dom}(f^*) \neq \emptyset$, alors f est minoré sur tout ensemble borné de E .*

Démonstration. (i) Nous avons $(\xi, r) \in \text{epi}(f^*)$ si et seulement si $f^*(\xi) \leq r$, c'est-à-dire $\sup_{x \in E} \langle \xi, x \rangle - f(x) \leq r$. Ceci est équivalent à avoir $\langle \xi, \cdot \rangle - r \preceq f$.

(ii) Supposons que $\text{dom}(f^*) \neq \emptyset$. Il existe $\xi \in E^*$ tel que $\sup_{x \in E} \langle \xi, x \rangle - f(x) < +\infty$. Autrement dit, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\langle \xi, x \rangle - f(x) < C$ pour tout $x \in E$. Soient $x_0 \in E$ et $\varepsilon > 0$. Montrons que f est borné inférieurement sur $B(x_0, \varepsilon)$. On sait que $B(x_0, \varepsilon) = x_0 + \varepsilon B(0, 1)$. Comme ξ est continu, il existe $C' > 0$ tel que $|\langle \xi, x \rangle| \leq C' \|x\|$ pour tout $x \in E$. Donc, $|\xi| < C'$ sur $B(0, 1)$. On en tire que

$$\xi(B(x_0, \varepsilon)) - C = \langle \xi, x_0 \rangle + \varepsilon \xi(B(0, 1)) - C \subset \langle \xi, x_0 \rangle - C + \varepsilon] - C', C'.$$

On en tire que f est borné inférieurement par $\langle \xi, x_0 \rangle - C - \varepsilon C'$, ce qui permet de conclure. $\square$

Examinons les propriétés de sous-différentiabilité. Le théorème suivant peut être interprété de cette manière : la pente ξ est celle d'un hyperplan d'appui de f en x si et seulement si x est une pente d'un hyperplan d'appui de f^* en ξ . Il y a donc une relation de dualité entre les points du graphe et les hyperplans d'appui de $\text{epi}(f)$.

Proposition 3.6.12. *Si $f \in \Gamma(E)$, alors $\xi \in \partial f(x)$ si et seulement si $\mathcal{J}_x \in \partial f^*(\xi)$. Dans le cas où E est réflexif, on peut remplacer $\mathcal{J}_x$ par x .*

Démonstration. Supposons que $\xi \in \partial f(x)$. On a $\langle \xi, y - x \rangle \leq f(y) - f(x)$ pour tout $y \in E$. Donc, $\langle \xi, y \rangle - f(y) \leq \langle \mathcal{J}_x, \xi \rangle - f(x)$ pour tout $y \in E$. Il s'ensuit que

$$f^*(\xi) \leq \langle \mathcal{J}_x, \xi - \eta + \eta \rangle - f(x) - f^*(\eta) + f^*(\eta)$$

pour tout $\eta \in \text{dom}(f^*)$. Il vient alors

$$\langle \mathcal{J}_x, \eta - \xi \rangle \leq \underbrace{\langle \eta, x \rangle - f^*(\eta) - f(x) + f^*(\eta)}_{\leq f^{**}(x) = f(x)} - f^*(\xi) \leq f^*(\eta) - f^*(\xi) \quad \forall \eta \in \text{dom}(f^*).$$

Cette inégalité ayant aussi lieu sur E^* , nous pouvons conclure que $\mathcal{J}_x \in \partial f^*(\xi)$. Montrons la réciproque et supposons que $\mathcal{J}_x \in \partial f^*(\xi)$. La première partie de la preuve montre que $\mathcal{J}_\xi \in \partial (f^*)^*(\mathcal{J}_x)$. Donc, pour tout $\zeta \in E^{**}$, on a $\langle \mathcal{J}_\xi, \zeta - \mathcal{J}_x \rangle \leq (f^*)^*(\zeta) - (f^*)^*(\mathcal{J}_x)$. En particulier, si on restreint cette inégalité aux éléments y de E (on rappelle que E s'identifie à un sous-espace de Banach de E^{**}), nous obtenons

$$\langle \xi, y - x \rangle \leq f^{**}(y) - f^{**}(x) = f(y) - f(x) \quad \forall y \in E.$$

$\square$

Il est connu que toute fonction convexe admet une dérivée directionnelle à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. Il serait intéressant de regarder ce que devient la transformée de Legendre de la dérivée directionnelle d'une fonction.

Lemme 3.6.3 ([37]). *Si $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est une fonction propre convexe, alors, pour tout $x_0 \in \text{dom}(f)$, on a*

$$\partial f(x_0) = \{\xi \in E^* : \langle \xi, h \rangle \leq f_{*x_0}(h) \quad \forall h \in E\}.$$

Démonstration. Soit $\xi \in \partial f(x_0)$. Donc, $\langle \xi, y - x_0 \rangle \leq f(y) - f(x_0)$ pour tout $y \in E$. On a alors

$$\langle \xi, th \rangle = \langle \xi, x_0 + th \rangle - \langle \xi, x_0 \rangle \leq f(x_0 + th) - f(x_0)$$

pour tout $t > 0$. En divisant cette inégalité par t et en passant à la limite pour $t \rightarrow 0^+$, on obtient $\langle \xi, h \rangle \leq f_{*x_0}(h)$ pour tout $h \in E$.

Supposons à présent que $\xi \in E^*$ vérifie $\langle \xi, h \rangle \leq f_{*x_0}(h)$ pour tout $h \in E$. Fixons $y \in E$. Alors

$$\langle \xi, y - x_0 \rangle \leq f_{*x_0}(y - x_0) \leq \frac{f(x_0 + t(y - x_0)) - f(x_0)}{t} \quad \forall t > 0.$$

En particulier, si $t = 1$, alors

$$\langle \xi, y - x_0 \rangle \leq f(y) - f(x_0).$$

D'où $\xi \in \partial f(x_0)$. □

Lemme 3.6.4 (AC, [37]). (i) *Si C est un convexe non-vidé fermé de E^* , alors δ_C^* est une fonction propre sous-linéaire semi-continue inférieurement et*

$$C = \{\xi \in E^* : \mathcal{J}_\xi \preceq \delta_C^*\}.$$

(ii) *Si $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est une fonction propre sous-linéaire semi-continue inférieurement, alors*

$$C_f = \{\xi \in E^* : \xi \preceq f\}$$

est un ensemble convexe non-vidé fermé et $f = \delta_{C_f}^|_E$.*

Démonstration. (i) Comme C est un convexe non-vidé fermé, la fonction δ_C appartient à $\Gamma(E^*)$. Par conséquent, δ_C^* appartient à $\Gamma(E^{**})$. La sous-linéarité de δ_C^* est évidente. Soit $\xi \in C$. On a pour tout $\mu \in E^{**}$

$$\delta_C^*(\mu) = \sup_{\zeta \in C} \langle \mu, \zeta \rangle \geq \langle \mu, \xi \rangle.$$

Donc, $\mathcal{J}_\xi \preceq \delta_C^*$. Supposons à présent que $\mathcal{J}_\xi \preceq \delta_C^*$. En appliquant une transformée de Legendre, l'inégalité est inversée et on a $\delta_C \preceq \mathcal{J}_\xi^*|_{E^*}$. Vu les exemples abordés précédemment, on a $\mathcal{J}_\xi^* = \delta_{\mathcal{J}_\xi}$. Sa restriction à E^* nous donne évidemment δ_ξ (on rappelle que ξ s'identifie à $\mathcal{J}_\xi$ dans E^{***}). Donc, $\delta_C(\xi) \leq \delta_\xi(\xi) = 0$ et $\xi \in C$.

(ii) Il est évident que C_f est convexe. On montre que $C_f \neq \emptyset$. Etant donné que f est convexe propre sci, il existe une fonction affine g telle que $g \preceq f$ vu la proposition 3.2.9. La fonction g est continue et $\text{dom}(g)^\circ \cap \text{dom}(f) \neq \emptyset$. Par le lemme 3.6.2, il existe $\xi \in E^*$ et $r \in \mathbb{R}$ tels que

$$-g(x) \leq \langle \xi, x \rangle + r \leq f(x) \quad \forall x \in E.$$

Bien entendu, si on divise la seconde inégalité obtenue par $R > 0$, nous avons

$$\langle \xi, x \rangle + \frac{r}{R} \leq f(x) \quad \forall x \in E$$

par la sous-linéarité de f . En faisant tendre R vers $+\infty$, on conclut que $\xi \preceq f$ et $C_f \neq \emptyset$. Ensuite, pour tout $x \in E$, nous avons $\langle \mathcal{J}_x, \xi \rangle \leq f(x)$ pour tout $\xi \in C_f$. Donc, $\xi \in (\mathcal{J}_x)^{-1}(]-\infty, f(x)])$ pour tout $\xi \in C_f$. Les ensembles $(\mathcal{J}_x)^{-1}(]-\infty, f(x)])$ sont fermés pour tout $x \in E$ et on a

$$C_f = \bigcap_{x \in \text{dom}(f)} (\mathcal{J}_x)^{-1}(]-\infty, f(x)])$$

ce qui montre que C_f est fermé. Pour finir, nous savons que $f = \delta_{C_f}^*|_E$ si $f^* = \delta_{C_f}$ par le théorème de Fenchel-Moreau. Il suffit donc de montrer cette dernière égalité. Si $\xi \in C_f$, alors $\xi - f \preceq 0$ et

$$f^*(\xi) = \sup_{x \in E} \langle \xi, x \rangle - f(x) \leq 0 \quad \text{et} \quad \langle \xi, 0 \rangle - f(0) = 0.$$

Donc, $f^*(\xi) = 0$. Si $\xi \notin C_f$, alors il existe $x \in E$ tel que $\langle \xi, x \rangle - f(x) > 0$. Donc,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \langle \xi, tx \rangle - f(tx) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t(\langle \xi, x \rangle - f(x)) = +\infty,$$

d'où $f^*(\xi) = +\infty$. Donc, $f^* = \delta_{C_f}$. □

Proposition 3.6.13 (AC, [37]). *Si $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est une fonction propre convexe et si f est continu en $x \in \text{dom}(f)$, alors $f_{*x} = \delta_{\partial f(x)}^*|_E$. Si, de plus, E est réflexif, on a aussi $(f_{*x})^* = \delta_{\partial f(x)}$.*

Démonstration. Vu le corollaire 3.4.1, la fonction f_{*x} est finie en tout point et lipschitzienne sur E . Elle est aussi sous-linéaire. Par le lemme 3.6.3 et en adoptant les notations du lemme 3.6.4, on a

$$\partial f(x) = \{\xi \in E^* : \langle \xi, h \rangle \leq f_{*x}(h) \quad \forall h \in E\} = C_{f_{*x}}.$$

Donc, le lemme précédent montre que $\delta_{\partial f(x)}^*|_E = \delta_{C_{f_{*x}}}^*|_E = f_{*x}$. Ensuite, si E est réflexif, la transformée de Legendre est une bijection entre $\Gamma(E)$ et $\Gamma(E^*)$. La première partie de la preuve montre que $f_{*x} = \delta_{\partial f(x)}^*$ et on conclut en appliquant une nouvelle transformée de Legendre. □

Nous sommes en mesure de démontrer la réciproque de la proposition 3.5.2.

Proposition 3.6.14 ([37]). *Soit $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre convexe. Supposons que f est continu en $x_0 \in \text{dom}(f)$ et que $\partial f(x_0) = \{\xi\}$. Alors f est G -différentiable en x_0 et $\nabla f(x_0) = \xi$.*

Démonstration. La proposition précédente montre que

$$f_{*x_0}(h) = \delta_{\partial f(x_0)}^*(h) = \sup_{\zeta \in \partial f(x_0)} \langle \zeta, h \rangle = \langle \xi, h \rangle \quad \forall h \in E.$$

Donc, f_{*x_0} est linéaire et continu. La proposition 3.5.2 montre que $\xi = \nabla f(x_0)$. □

On en déduit une conséquence très utile.

Corollaire 3.6.2. *Toute fonction affine continue est G -différentiable sur E . De plus, si $h = \xi + b$ avec $\xi \in E^*$ et $b \in \mathbb{R}$, alors $\nabla h(x) = \xi$ pour tout $x \in E$.*

Démonstration. Soit $h : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction affine continue sur E . Alors $\partial h(x_0)$ est un singleton. On voit qu'il existe $\xi \in E^*$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $h = \xi + b$. En effet, on pose $b = h(0)$ et l'application $h - b$ est clairement continue. Elle est aussi linéaire. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$, alors $(h - b)(\lambda x) = h(\lambda x) - h(0) = h(\lambda x + (1 - \lambda)0) - h(0) = \lambda h(x) + (1 - \lambda)h(0) - h(0) = \lambda(h(x) - h(0)) = \lambda(h - b)(x)$. De même, on voit que $(h - b)(x + y) = (h - b)(x) + (h - b)(y)$ pour tout $x, y \in E$. Cela étant, on trouve

$$\langle \xi, y - x \rangle = h(y) - h(x)$$

pour tout $x, y \in E$. Donc, $\xi \in \partial h(x)$ pour tout $x \in E$. Soit $\zeta \in \partial f(x)$. On a $\langle \zeta, y - x \rangle \leq h(y) - h(x) = \langle \xi, y - x \rangle$ pour tout $y \in E$. Donc, $\zeta \preceq \xi$. Comme ζ et ξ sont des applications linéaires, l'inégalité trouvée montre en fait que $\xi = \zeta$ et $\partial h(x) = \{\xi\}$ pour tout $x \in E$. On conclut par la proposition précédente. $\square$

Terminons le chapitre par la propriété suivante qui nous sera utile par la suite.

Proposition 3.6.15. *Si $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est une fonction propre convexe sous-différentiable en x , alors $\partial f(x) = \partial f^{**}(x)$.*

Démonstration. Soit $\xi \in \partial f(x)$. Nous avons $f(x) + \langle \xi, y - x \rangle \leq f(y)$ pour tout $y \in E$. Donc, f est minoré par une fonction affine continue. Il s'ensuit que $\overline{\text{conv}}(f)(y) \geq f(x) + \langle \xi, y - x \rangle$ pour tout $y \in E$. Donc, $\overline{\text{conv}}(f)$ est une fonction propre. Nous savons que f^{**} vaut $\overline{\text{conv}}(f)$ si celui-ci est propre ou identiquement $-\infty$ dans le cas contraire en vertu du théorème de Fenchel-Moreau. Vu ce qui vient d'être dit, on a $f^{**} = \overline{\text{conv}}(f)$. Mais la sous-différentiabilité impliquant la semi-continuité inférieure, on déduit que f est sci en x . Donc, $\overline{f}(x) = \overline{\text{conv}}(f)(x) = f(x)$ et $f^{**}(x) + \langle \xi, y - x \rangle \leq f^{**}(y)$ pour tout $y \in E$, d'où la première inclusion. Réciproquement, si $\xi \in \partial f^{**}(x)$, alors $f^{**}(x) + \langle \xi, y - x \rangle \leq f^{**}(y)$ pour tout $y \in E$. Vu que $x \in \text{dom}(\partial f^{**}) \subset \text{dom}(f^{**})$, on a $f^{**}(x) < +\infty$. Puisque $\partial f^{**}(x) \neq \emptyset$, on en tire que $f^{**}(x) > -\infty$ par définition du sous-différentiel. De là, $f^{**} = \overline{\text{conv}}(f)$ par le théorème de Fenchel-Moreau. Puisque f est propre convexe, on a $\overline{\text{conv}}(f) = \overline{f}$. Par semi-continuité inférieure en x , nous obtenons $f^{**}(x) = \overline{f}(x) = f(x)$. Il s'ensuit que $\langle \xi, y - x \rangle \leq \overline{f}(y) - \overline{f}(x) \leq f(y) - f(x)$ pour tout $y \in E$ et $\xi \in \partial f(x)$ car $\overline{f}(y) \leq f(y)$. $\square$

Chapitre 4

Optimisation convexe

L'optimisation convexe est une théorie qui a pour but d'étudier les problèmes de recherche de minima et de maxima de fonctions convexes sous certaines contraintes (les points doivent vérifier certaines équations et inéquations ou ils doivent appartenir à un ensemble donné par exemple). Sauf mention explicite du contraire, E désignera un espace de Banach. Formellement, les deux problèmes se traduisent de la façon suivante : si $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est une fonction propre convexe et si C est un ensemble convexe, le but est de

(1) **Problème de minimisation** : trouver $x_0 \in E$ tel que

$$f(x_0) = \inf_{x \in C} f(x)$$

(2) **Problème de maximisation** : trouver $x_0 \in E$ tel que

$$f(x_0) = \sup_{x \in C} f(x)$$

Notons que le problème (1) peut se réduire au cas où $C = E$. En effet, il suffit de considérer la fonction $f_0 = f + \delta_C$, auquel cas on a $\inf_{x \in E} f'(x) = \inf_{x \in E} f(x) + \delta_C(x) = \inf_{x \in C} f(x)$.

L'étude du problème se fera en plusieurs temps. Nous commencerons par faire une brève étude des maxima de fonctions convexes et verrons que les maxima sont intimement liés à la notion de point extrême d'un convexe. Ensuite, nous étudierons plus en profondeur la recherche de minima car la convexité implique beaucoup de belles propriétés pratiques concernant le problème de minimisation. Nous tirerons des conditions d'existence et d'unicité des minima dans un premier temps. Ensuite, nous montrerons comment la transformée de Legendre peut être utilisée pour transformer un problème de minimisation en un problème dual qui, sous certaines conditions, possède des liens profonds avec le problème de départ. Ensuite, nous étudierons les lagrangiens associés à un problème d'optimisation. Nous d'obtiendrons des critères pour construire des suites qui approchent un minimum. Ceci permet notamment la mise au point d'un algorithme de recherche de minima : l'algorithme proximal. Pour finir, nous appliquerons quelques-uns des résultats dans l'étude des équations aux dérivées partielles pour illustrer explicitement une application en dimension infinie.

Concernant les références, nous nous basons sur [2] et [37] pour l'étude des maxima. Les mêmes résultats peuvent être retrouvés par exemple dans [31]. L'étude de l'existence et l'unicité des minima est inspirée de [44] qui travaille dans un cadre plus général que le nôtre (plus exactement, l'auteur travaille dans des espaces localement convexe, voire parfois dans des espaces

vectoriels normés). La théorie de la dualité a été réalisée en adaptant celle présentée dans [4] aux espaces de Banach. Concernant la méthode des multiplicateurs de Lagrange, nous utilisons [3] qui va à l'essentiel pour démontrer la méthode. La régularisation de Moreau-Yosida dans le cadre des espaces de Banach a été tiré d'un exercice de [44]. Puis nous utilisons [32] pour étudier brièvement les propriétés des suites proximales. L'application à l'étude d'équations aux dérivées partielles est principalement inspirée de [37] que l'on adapte à une équation non-traitée dans l'ouvrage à l'aide de l'article [5]. Le lecteur avide d'équations aux dérivées partielles pourra consulter [12] qui traite le sujet de façon beaucoup plus complète qu'ici.

4.1 Maximum d'une fonction convexe

Pour commencer, nous allons voir que les maxima sont fortement liés à la notion de point extrême d'un convexe. Pour clarifier les choses, nous adoptons les définitions suivantes.

Définition 4.1.1. Soit $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction. On dira que x_0 est un *maximum* (resp. *minimum*) *local* de f si $x_0 \in \text{dom}(f)$ et s'il existe un voisinage V de x_0 tel que $f(x_0) \geq f(x)$ (resp. $f(x_0) \leq f(x)$) pour tout $x \in V \cap \text{dom}(f)$. C'est un *maximum* (resp. *minimum*) *global* si $x_0 \in \text{dom}(f)$ et si $f(x_0) \geq f(x)$ (resp. $f(x_0) \leq f(x)$) pour tout $x \in \text{dom}(f)$ et tout voisinage V de x_0 .

Voici un résultat qui ressemble assez fortement au principe du maximum de la théorie des fonctions holomorphes.

Proposition 4.1.1 (Principe du maximum). *Soit $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre convexe. Supposons que f admet un maximum global (resp. local) $x_0 \in \text{dom}(f)^\circ$. Alors f est constant sur son domaine (resp. sur un voisinage de x_0).*

Démonstration. Par l'absurde, supposons f non-constant sur son domaine. Il existe $x \in \text{dom}(f)$ tel que $f(x) < f(x_0)$. Bien sûr, il existe $\lambda > 1$ suffisamment proche de 1 tel que $\lambda x_0 + (1 - \lambda)x \in \text{dom}(f)^\circ$ car $x_0 \in \text{dom}(f)^\circ$ et $\lim_{\mu \rightarrow 1+} \mu x_0 + (1 - \mu)x = x_0$. Notons $y = \lambda x_0 + (1 - \lambda)x$. On a donc $x_0 = \frac{\lambda - 1}{\lambda}x + \frac{1}{\lambda}y$. Par convexité, il vient

$$f(x_0) \leq \frac{\lambda - 1}{\lambda}f(x) + \frac{1}{\lambda}f(y) < f(x_0)$$

d'où l'absurdité. Le cas où x_0 est un maximum local se traite de façon similaire en se restreignant à un voisinage $B(x_0, \varepsilon)$ du maximum local x_0 . On suppose que f n'est pas constant sur ce voisinage et qu'il existe $x \in B(x_0, \varepsilon)$ tel que $f(x) < f(x_0)$. Le segment $[x, 2x_0 - x]$ est inclus dans $B(x_0, \varepsilon)$ puis on utilise la convexité de f pour obtenir

$$f(x_0) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{2x_0 - x}{2}\right) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(2x_0 - x) < f(x_0)$$

et on a une absurdité. □

Le principe du maximum montre qu'une fonction convexe non-constante ne peut atteindre un maximum que sur la frontière de son domaine. En fait, moyennant quelques hypothèses supplémentaires sur f , il résulte de la théorie des ensembles extrémaux de la section 1.4. que le maximum global est atteint en un point extrême du domaine. Tout d'abord, remarquons que sous certaines hypothèses, l'existence de maxima globaux est assurée.

Lemme 4.1.1 ([2]). *Soit $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre convexe semi-continue supérieurement telle que $\text{dom}(f)$ est compact dans E . Alors l'ensemble des maxima globaux de f est un ensemble compact non-vide.*

Démonstration. Pour tout $r \in f(\text{dom}(f))$, on définit $F_r = \{x \in \text{dom}(f) : f(x) \geq r\} = \Gamma_{-r}(-f) \cap \text{dom}(f)$. La fonction $-f$ est sci car f est scs. Pour le voir, il suffit d'appliquer la définition des différents types de semi-continuité puis de multiplier les membres des inégalités de ces définitions par -1 . Par la proposition 3.2.4, l'ensemble $\Gamma_{-r}(-f)$ est fermé. Puisque F_r est fermé et inclus dans le compact $\text{dom}(f)$, l'ensemble F_r est compact. Donc, $\bigcap_{r \in f(\text{dom}(f))} F_r$ est un fermé inclus dans le compact $\text{dom}(f)$. Ainsi $\bigcap_{r \in f(\text{dom}(f))} F_r$ est lui-même compact. Il est clair que cet ensemble est en fait l'ensemble des maxima globaux de f . Remarquons que $\{F_r : r \in f(\text{dom}(f))\}$ est une famille de fermés telle que toute partie finie $\mathcal{A}$ de cette famille vérifie $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$ ¹. Par compacité, on en tire que $\bigcap_{r \in f(\text{dom}(f))} F_r \neq \emptyset$, d'où la conclusion. $\square$

Proposition 4.1.2 (Principe du maximum de Bauer, AC, [37]). *Soit $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre convexe semi-continue supérieurement telle que $\text{dom}(f)$ est compact dans E . Alors f atteint un maximum global en un point de $\text{ext}(\text{dom}(f))$.*

Démonstration. Posons

$$M = \{x \in \text{dom}(f) : f(x) = \max_{z \in \text{dom}(f)} f(z)\}.$$

Par le lemme précédent, M est un compact non-vide de E . On vérifie que M est un ensemble extrême de $\text{dom}(f)$. Si $u, v \in \text{dom}(f)$, $x \in M \cap]u, v[$, alors $f(x) \leq \lambda f(u) + (1 - \lambda)f(v)$. Si $f(u) < f(x)$, alors la dernière inégalité montre que $f(x) < f(x)$, ce qui est absurde. Donc $u \in M$. De même, $v \in M$ et M est une partie extrême de $\text{dom}(f)$. Puisque M est une partie extrême compacte de $\text{dom}(f)$, le lemme 1.4.1 montre que M contient un point extrême de $\text{dom}(f)$. D'où la conclusion. $\square$

Dans certains cas, la recherche de maxima se révèle très facile en combinant le théorème de Krein-Milman et le principe du maximum de Bauer. Par exemple, lorsque l'on a un domaine polygonal, il suffit de regarder les valeurs de la fonctions en les sommets du domaine. Comme le nombre de sommets est fini, le maximum global est obtenu assez rapidement. Imaginons que le domaine n'est pas polygonal. Dans ce cas, il est parfois possible de paramétrer le domaine, voire sa frontière (par exemple, un disque, une ellipse, un cube ou une intersection de tels ensembles). Tout revient alors à maximiser une fonction sur un ensemble plus petit (une courbe par exemple), ce qui facilite parfois énormément les choses. Malheureusement, il n'y a pas de réelle solution efficace dans les cas où les points extrêmes sont difficilement calculables. Voyons en détail un exemple afin de voir comment les résultats précédents peuvent être appliqués.

Exemple 4.1.1 (Polynôme de degré deux à plusieurs indéterminées). Soient $a_{ij}, b \in \mathbb{R}$ avec $i, j \in \{1, \dots, n\}$ et considérons la fonction convexe $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j + b \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (*)$$

1. Plus brièvement, on dit que la famille $\{F_r : r \in f(\text{dom}(f))\}$ de fermés vérifie la propriété d'intersections finies.

Nous devons maximiser f sur $\mathbb{R}^n$ sous les contraintes affines suivantes

$$B^{(1)}x \leq b^{(1)}, \dots, B^{(m)}x \leq b^{(m)} \quad (\text{S})$$

avec $B^{(i)} \in \mathbb{R}_n$ et $b^{(i)} \in \mathbb{R}$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$. Pour que ce problème soit résoluble, il faut évidemment que l'ensemble des solutions P du système d'inéquations (S) soit non-vidé. Nous allons donc supposer que $P \neq \emptyset$.

Trouvons d'abord des conditions sur les constantes a_{ij} et b pour que f soit convexe et pouvoir appliquer les propriétés. Il est clair que cette fonction est deux fois différentiable. (E8) On a

$$\begin{aligned} \partial_{x_k} f(x) &= 2a_{kk}x_k + \sum_{i=1}^n a_{ik} + \sum_{j=1}^n a_{kj} \\ \partial_{x_k}^2 f(x) &= 2a_{kk} \quad \text{et} \quad \partial_{x_l x_k} f(x) = 0 \quad \text{si } k \neq l. \end{aligned}$$

La hessienne vaut donc

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 2a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2a_{nn} \end{pmatrix} = 2 \operatorname{diag}(a_{11} \cdots a_{nn}).$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Donc, f est convexe si et seulement si $2(a_{11}h_1^2 + \cdots + a_{nn}h_n^2) \geq 0$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$. Autrement dit, il faut que $a_{ii} \geq 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. La région P forme un ensemble convexe fermé de $\mathbb{R}^n$, comme on peut aisément s'en rendre compte. Bien entendu, vu la forme des inégalités, on voit clairement que P est une intersection de demi-espaces décrits par les m inégalités (S). Intuitivement, on peut s'attendre à ce que P soit polygonal, mais ce n'est bien sûr pas toujours le cas ! Par exemple, en prenant m hyperplans translatés les uns par rapport aux autres, on retrouve un demi-espace. Pour appliquer la proposition précédente, il faudrait que P soit compact, ce que nous allons supposer par la suite. Nous savons que f n'atteint un maximum que sur la frontière de P puisque la fonction n'est pas constante. Bien entendu, la frontière de P est incluse dans l'union des hyperplans d'équations $B^{(i)}x = b^{(i)}$. Plus précisément,

$$P^\bullet = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists i \in \{1, \dots, m\} \ B^{(i)}x = b^{(i)} \quad \text{et} \quad \forall j \in \{1, \dots, m\} \ B^{(j)}x \leq b^{(j)}\}.$$

Traitions un exemple concret pour fixer les idées. Supposons que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est défini par $f(x, y) = 5x^2 + 3y^2 - 2x + y - 4$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et que les contraintes sont données par

$$2x + 3y \leq -5, \quad -x + 2y \leq 1, \quad -x - 2y \leq 3.$$

Nous pouvons représenter ces contraintes comme dans la figure 4.1. Nous avons un triangle dont les sommets sont notés z_1 , z_2 et z_3 . Bien sûr, ces sommets sont les points extrémaux du triangle. Nous ne détaillons pas les calculs des sommets qui relèvent de calculs élémentaires de systèmes d'équations. On obtient $z_1 = (-3/7, -13/7)$, $z_2 = (-2, -1/2)$ et $z_3 = (-1, -1)$. Il suffit alors d'évaluer f en ces points. On a $f(-3/7, -13/7) = 307/49$, $f(-2, -1/2) = 81/4$ et $f(-1, -1) = 5$. Le maximum global est donc $(-2, -1/2)$ en lequel la fonction vaut $81/4$.

Hélas, la diversité des cas qui peuvent se présenter nous empêche d'établir une méthode permettant de calculer les maxima de façon systématique... En réalité, la convexité se prête surtout bien aux problèmes de minimisation de fonctions convexes, comme nous allons le voir.

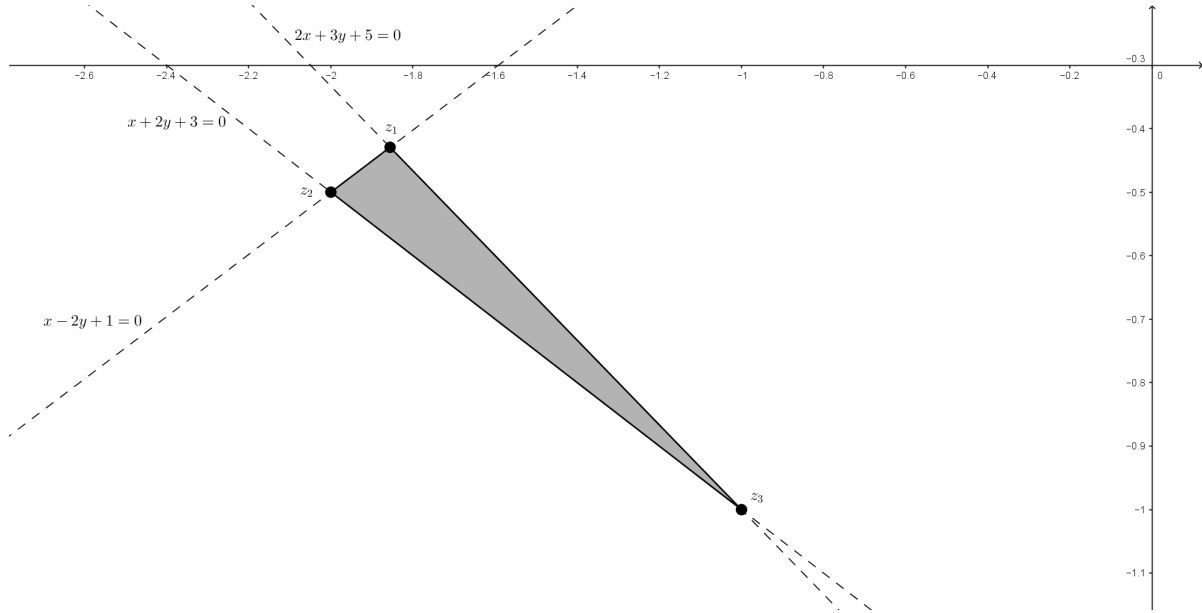


FIGURE 4.1 – Représentation des trois contraintes $2x + 3y + 5 \leq 0$, $-x + 2y - 1 \leq 0$ et $-x - 2y - 3 \leq 0$.

4.2 Minimum de fonctions convexes : existence et unicité

Traisons à présent le problème des minima de fonctions convexes. Pour commencer, nous pouvons montrer que la convexité de la fonction simplifie en quelque sorte le problème car tout minimum local est en fait un minimum global.

Proposition 4.2.1. *Soit $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre convexe. Tout minimum local de f est un minimum global.*

Démonstration. Supposons que x_0 est un minimum local de f et soit $x \in \text{dom}(f)$. Il existe un voisinage ouvert convexe V de x_0 tel que $f(z) \geq f(x_0)$ pour tout $z \in V \cap \text{dom}(f)$. Par convexité, le segment $[x_0, x]$ est inclus dans $\text{dom}(f)$. Il existe $\lambda \in]0, 1[$ tel que $z = \lambda x_0 + (1 - \lambda)x \in V$. Donc, par convexité de f , on a

$$f(z) \leq \lambda f(x_0) + (1 - \lambda)f(x)$$

et il s'ensuit que

$$f(x) \geq \frac{1}{1 - \lambda}f(z) - \frac{\lambda}{1 - \lambda}f(x_0) \geq \frac{1}{1 - \lambda}f(x_0) - \frac{\lambda}{1 - \lambda}f(x_0) = f(x_0)$$

d'où la conclusion. $\square$

Nous pouvons donc nous contenter d'étudier seulement les minima globaux. Avant toute chose, donnons une condition de minimalité de la fonction considérée. Il est connu que si $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur l'ouvert $]a, b[$ de $\mathbb{R}$, alors la dérivée de f s'annule en les extrêma locaux. Mais un point d'annulation de la dérivée n'est pas nécessairement un extrêmu, comme le montre l'exemple classique $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$. Nous allons voir que nous pouvons déduire une propriété similaire en terme de sous-différentiel.

Définition 4.2.1. Si $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est une fonction propre G-différentiable en $x_0 \in \text{dom}(f)$, alors on dit que x_0 est un *point critique* de f si et seulement si $\nabla f(x_0) = 0$.

Proposition 4.2.2. Si $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est une fonction propre, alors x_0 est un minimum global de f si et seulement si $0 \in \partial f(x_0)$. De plus, si f est G-différentiable en x_0 , alors x_0 est un minimum global si et seulement si x_0 est un point critique de f (E9).

Démonstration. Il est clair que $0 \in \partial f(x_0)$ si et seulement si $\langle 0, y - x_0 \rangle = 0 \leq f(y) - f(x_0)$ pour tout $y \in E$, c'est-à-dire $f(x_0) \leq f(y)$ pour tout $y \in E$. Supposons que f est G-différentiable en x_0 . Alors $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$ par la proposition 3.5.3. La conclusion résulte de la première partie de la propriété. $\square$

A présent, étudions l'existence et l'unicité des minima. Par la suite, l'ensemble des minima de f sera noté $\text{argmin}(f)$. Remarquons que l'ensemble des minima forme un ensemble convexe.

Proposition 4.2.3. Si $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est une fonction propre convexe, alors $\text{argmin}(f)$ est convexe. Si, de plus, $f \in \Gamma(E)$, alors $\text{argmin}(f)$ est un convexe fermé.

Démonstration. Supposons $\text{argmin}(f)$ non-vidé, le cas vidé étant évident. Soit $x_0 \in \text{argmin}(f)$ et posons $r_0 = f(x_0)$. Alors, $\text{argmin}(f) = \Gamma_{r_0}(f)$ et la conclusion s'ensuit. $\square$

Bien entendu, on s'attend à ce que l'on doive imposer quelques hypothèses sur f pour assurer l'existence d'un minimum. En effet, à partir d'exemples simples de fonctions convexes suffisamment régulières, on peut avoir $\text{argmin}(f) = \emptyset$. Par exemple, la fonction exponentielle est de classe C^∞ , bornée inférieurement, convexe, et pourtant, elle n'admet pas de minimum. La fonction $x \mapsto x^2$ est convexe, de classe C^∞ , bornée inférieurement, et elle admet un unique minimum en 0. Les propriétés à imposer à la fonction sont d'une autre nature que le simple fait d'être lisse ou borné. Remarquons qu'avec la fonction carrée, les sections $\Gamma_r(f)$ sont toutes compactes, alors que pour l'exponentielle, l'ensemble $\Gamma_1(f)$ n'est même pas borné car il est égal à $] -\infty, 0]$. La propriété suivante montre qu'avec suffisamment de régularité sur f , la propriété constatée sur les ensembles $\Gamma_r(f)$ assure l'existence d'un minimum. En réalité, nous pouvons même nous contenter de la compacité faible, comme le montre la proposition ci-dessous.

Proposition 4.2.4 ([44]). Si $f \in \Gamma(E)$ et s'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $\Gamma_r(f)$ est non-vidé et faiblement compact, alors f est borné inférieurement et $\text{argmin}(f) \neq \emptyset$.

Démonstration. Soit $r \in \mathbb{R}$ tel que $\Gamma_r(f)$ est non-vidé et faiblement compact. Construisons une suite $(r_m)_{m \in \mathbb{N}}$ décroissante et convergeant vers $\inf_{x \in E} f(x)$. Nous pouvons même nous arranger pour que $r_0 = r$ et que $r_m > \inf_{x \in E} f(x)$. De cette façon, les ensembles $\Gamma_{r_m}(f)$ sont des fermés faibles inclus dans le compact faible $\Gamma_r(f)$. Ils sont donc faiblement compacts. De plus, on a $\Gamma_{r_m}(f) \supset \Gamma_{r_{m+1}}(f)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Ces ensembles sont non-vides. Sinon, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\Gamma_{r_m}(f) = \emptyset$. Donc, pour tout $x \in E$, on a $f(x) > r_m$ et donc $\inf_{x \in E} f(x) \geq r_m$ ce qui est absurde, vu la construction de la suite $(r_m)_{m \in \mathbb{N}}$. Par le théorème de Cantor, on a $\bigcap_{m=0}^{+\infty} \Gamma_{r_m}(f) \neq \emptyset$. Soit x_0 un élément de cette intersection. On a $f(x_0) \leq r_m$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ et par passage à la limite, on obtient $f(x_0) = \inf_{x \in E} f(x)$, d'où la conclusion. $\square$

Vu la caractérisation des espaces réflexifs, la propriété qui suit est immédiate.

Corollaire 4.2.1. Si E est réflexif, $f \in \Gamma(E)$ et s'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $\Gamma_r(f)$ est borné et non-vidé, alors $\text{argmin}(f)$ est non-vidé et faiblement compact.

Si l'espace de Banach E est réflexif, nous pouvons déduire un critère d'existence de minimum bien plus pratique. Introduisons une nouvelle classe de fonctions.

Définition 4.2.2. Une fonction $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est *coercive* si et seulement si

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Autrement dit, f est coercif si et seulement si, pour tout $R > 0$, il existe $M > 0$ tel que $f(x) > R$ si $\|x\| > M$.

Dans l'exemple de la fonction carrée et de la fonction exponentielle, il est aisé de voir que l'exponentielle n'est pas coercive et que le carré l'est. Plus généralement, dans un espace réflexif, les fonctions coercives admettent toujours un minimum.

Proposition 4.2.5. *Si E est réflexif et si $f \in \Gamma(E)$ est coercif, alors $\operatorname{argmin}(f)$ est non-vide et est faiblement compact.*

Démonstration. Il suffit de trouver $r \in \mathbb{R}$ tel que $\Gamma_r(f)$ est non-vide et borné et appliquer le corollaire précédent. Fixons $r \in \mathbb{R}$ de sorte que $\Gamma_r(f) \neq \emptyset$. Ceci est possible car la fonction est propre et admet une valeur finie en au moins un point. Etant donné que f est coercif, il existe $R > 0$ tel que $f(x) > r$ si $\|x\| > R$. Il s'ensuit que $\Gamma_r(f) \subset \overline{B}(0, R)$ et $\Gamma_r(f)$ est borné. $\square$

En utilisant la preuve précédente, on a le corollaire suivant qui nous sera utile.

Corollaire 4.2.2. *Si E est réflexif et si $f \in \Gamma(E)$ est coercif, alors $\Gamma_r(f)$ est faiblement compact pour tout $r \in \mathbb{R}$.*

Toutefois, il existe des fonctions propres convexes semi-continues inférieurement non-coercives qui peuvent atteindre un minimum. Par exemple, la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2$ n'est pas coercive car $f(0, y) = 0 < 1$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Pourtant, elle atteint ses minima sur $\{0\} \times \mathbb{R}$. De plus, on voit que la proposition 4.2.4 n'est pas non plus d'application car les ensembles $\Gamma_r(f)$ non-vides ne sont pas bornés.

Concernant l'unicité du minimum, il est évident qu'il faut imposer des hypothèses supplémentaires à une fonction de $\Gamma(E)$ pour nous assurer de n'avoir qu'un seul minimum. La stricte convexité permet d'avoir un minimum unique.

Proposition 4.2.6. *Soit $f \in \Gamma(E)$ et supposons que f est strictement convexe sur son domaine. Alors f a au plus un minimum. De plus, si E est réflexif et f est coercif, alors f possède un et un seul minimum.*

Démonstration. Soient x_0 et y_0 deux minima de f et notons $r = f(x_0) = f(y_0)$. Si $x_0 \neq y_0$ et $\lambda \in]0, 1[$, alors

$$f(\lambda x_0 + (1 - \lambda)y_0) < \lambda f(x_0) + (1 - \lambda)f(y_0) = r$$

ce qui est absurde car r est la plus petite valeur prise par f . La seconde partie de la preuve est une application directe de la proposition précédente. $\square$

De nouveau, la réciproque n'est pas vraie en général. Un exemple simple est la fonction valeur absolue. Elle n'est pas strictement convexe puisque $|\lambda x + (1 - \lambda)y| = \lambda|x| + (1 - \lambda)|y|$ lorsque $0 < x < y$ et le minimum en 0 est unique. Au final, nous n'avons que des résultats partiels concernant l'existence et l'unicité. Mais il est malaisé de déterminer une condition à la fois nécessaire et suffisante d'existence et d'unicité de la solution au problème. Ces critères se révèlent malgré tout utiles dans beaucoup de cas.

Nous pouvons essayer de déterminer l'existence d'un minimum d'un point de vue plus pratique en obtenant des approximations successives à l'aide de suites. Nous aborderons ce sujet plus tard.

4.3 Dualité par perturbation

Nous avons vu comment résoudre explicitement un problème de minimisation donné. Mais parfois, le problème posé peut paraître très difficile à résoudre tel qu'il est donné. C'est pourquoi il est intéressant de traiter le problème sous un autre angle. Nous allons voir qu'il est possible d'associer à un problème de minimisation, appelé problème primal, un autre problème d'optimisation nommé problème dual au travers de la transformée de Legendre. Ce passage au dual est très intéressant par les liens forts qu'entretiennent les points de vue primal et dual vis-à-vis des minima. Notre référence principale concernant la dualité en optimisation est [4] qui traite de l'analyse convexe sur des espaces de Hilbert. Bien que cet ouvrage travaille dans un cadre très particulier, la plupart des résultats cités dedans s'adaptent facilement au cas des espaces de Banach, moyennant de temps en temps des hypothèses supplémentaires.

4.3.1 Théorie générale

Soit $f \in \Gamma(E)$. Le but recherché est de minimiser f sur C . La contrainte d'appartenance $x \in C$ peut être supprimée en considérant $f + \delta_C$. Nous supposons aussi que le problème posé est consistant, i.e. $C \cap \text{dom}(f) \neq \emptyset$. Ce problème de minimisation sera noté $(\mathcal{P})$. Soit V un espace de Banach. Sauf mention explicite du contraire, nous conservons ces notations durant le reste de la section 4.3.1.

Définition 4.3.1. Une *fonction de perturbation* de f est une application $\mathcal{F} : E \times V \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ qui vérifie $\mathcal{F}(x, 0) = f(x)$ pour tout $x \in E$. Pour tout $v \in V$, on définit le problème de minimisation $(\mathcal{P}_v)$ suivant : minimiser $\mathcal{F}(x, v)$ lorsque $x \in E$ et v est fixé dans V . La *fonction de valuation* associée à la perturbation $\mathcal{F}$ est l'application $\rho : V \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ définie par $\rho(v) = \inf_{x \in E} \mathcal{F}(x, v)$ pour tout $v \in V$.

Il existe plusieurs types de fonctions de perturbations. Certaines perturbations sont privilégiées en fonction de la situation qui se présente et des propriétés recherchées. Il est facile de voir que les problèmes $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}_0)$ sont équivalents. On dira que $(\mathcal{P})$ est le *problème primal*.

Définition 4.3.2. On associe à $(\mathcal{P})$ un nouveau problème $(\mathcal{P}^*)$ défini par

$$\text{Maximiser } -\mathcal{F}^*(0, \mu) \text{ lorsque } \mu \in V^*.$$

Ce sera le *problème dual* de $(\mathcal{P})$. Pour tout $\xi \in E^*$, on lui associe des problèmes $(\mathcal{P}_\xi^*)$ qui consistent à maximiser $-\mathcal{F}^*(\xi, \mu)$ en fonction de $\mu \in V^*$ lorsque ξ est fixé dans E^* . Assez

naturellement, le problème bidual associé à $(\mathcal{P})$ sera le problème $(\mathcal{P}^{**})$ défini par

$$\text{Minimiser } \mathcal{F}^{**}(x, 0) \text{ lorsque } x \in E.$$

Pour la suite, nous notons $m_f = \inf_{x \in E} \mathcal{F}(x, 0)$ et $m_f^* = -\inf_{\mu \in V^*} \mathcal{F}^*(0, \mu)$. Nous avons le résultat suivant qui est immédiat.

Proposition 4.3.1. *Si $\mathcal{F}$ est une fonction propre, alors $\rho^{**}(0) = m_f^*$ et $m_f^* \leq m_f$.*

Démonstration. Il suffit de voir que

$$\begin{aligned} \rho^{**}(0) &= \sup_{\xi \in V^*} \langle \xi, 0 \rangle - \rho^*(\xi) \\ &= - \inf_{\xi \in V^*} \sup_{x \in V} \langle \xi, x \rangle - \rho(x) \\ &= - \inf_{\xi \in V^*} \sup_{x \in V} \langle \xi, x \rangle - \inf_{y \in E} \mathcal{F}(y, x) \\ &= - \inf_{\xi \in V^*} \sup_{(y, x) \in E \times V} \langle \xi, x \rangle - \mathcal{F}(y, x) \\ &= - \inf_{\xi \in V^*} \sup_{(y, x) \in E \times V} \langle (0, \xi), (y, x) \rangle - \mathcal{F}(y, x) \\ &= - \inf_{\xi \in V^*} \mathcal{F}^*(0, \xi) = m_f^*. \end{aligned}$$

et que $m_f = \rho(0)$. La conclusion découle du fait que ρ^{**} vaut soit identiquement $-\infty$, soit $\overline{\text{conv}}(f)$. $\square$

Le nombre $m_f - m_f^*$ est appelé *écart de dualité*. Il est toujours positif ou nul. Lorsqu'il est nul, on dit que $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}^*)$ sont en *dualité forte*. Dans le cas contraire, ils sont *faiblement en dualité*. Voilà pourquoi il est très important de choisir une fonction de perturbation appropriée. Nous allons tirer des conditions nécessaires et suffisantes pour avoir une dualité forte. Mais examinons d'abord l'importance que cette fonction de valuation a sur les deux problèmes.

Proposition 4.3.2. *Si la perturbation $\mathcal{F}$ est une fonction propre convexe, alors la fonction de valuation ρ associée est convexe.*

Démonstration. Nous devons nous contenter de la définition de la convexité car la fonction ρ n'est pas nécessairement propre. D'abord, on a

$$\begin{aligned} \text{epi}(\rho) &= \{(x, y) \in V \times \mathbb{R} : \rho(x) \leq y\} \\ &= \{(x, y) \in V \times \mathbb{R} : \inf_{z \in E} \mathcal{F}(z, x) \leq y\}. \end{aligned}$$

Soient $(x, y), (x', y') \in \text{epi}(\rho)$ et $\lambda \in [0, 1]$. Il est clair que

$$\mathcal{F}(\lambda z + (1 - \lambda)z', \lambda x + (1 - \lambda)x') = \mathcal{F}(\lambda(z, x) + (1 - \lambda)(z', x')) \leq \lambda \mathcal{F}(z, x) + (1 - \lambda) \mathcal{F}(z', x')$$

pour tout $z, z' \in E$. Il vient facilement

$$\inf_{z \in E} \mathcal{F}(z, \lambda x + (1 - \lambda)x') \leq \lambda \inf_{z \in E} \mathcal{F}(z, x) + (1 - \lambda) \inf_{z \in E} \mathcal{F}(z, x') \leq \lambda y + (1 - \lambda)y'.$$

Donc, $\lambda(x, y) + (1 - \lambda)(x', y') \in \text{epi}(\rho)$. $\square$

Proposition 4.3.3 ([4]). *Supposons que la perturbation est propre convexe et semi-continue inférieurement. Alors f est borné inférieurement par un réel et l'écart de dualité est nul si et seulement si $\rho(0) \in \mathbb{R}$ et ρ est semi-continu inférieurement en 0.*

Démonstration. La condition est suffisante. Le fait que $\rho(0) = \inf_{x \in E} f(x) \in \mathbb{R}$ implique que f est borné inférieurement par un réel. De plus, la proposition précédente montre que ρ est convexe. Par le théorème de Fenchel-Moreau, on a alors $\rho^{**} = \bar{\rho}$ et par semi-continuité inférieure en 0, on obtient

$$m_f^* = \rho^{**}(0) = \liminf_{x \rightarrow 0} \rho(x) = \rho(0) = m_f.$$

La condition est aussi nécessaire. Si f est borné inférieurement par un réel C , alors $\rho(0) = \inf_{x \in E} f(x) \geq C$. Vu que f est propre, $\rho(0) < +\infty$. Donc, $\rho(0)$ est réel. L'écart de dualité étant nul, on a facilement $m_f^* = \liminf_{x \rightarrow 0} \rho(x) = \rho^{**}(0) = \rho(0) = m_f$. $\square$

A présent, nous pouvons décrire l'ensemble des solutions du problème dual.

Proposition 4.3.4 ([4]). *Supposons que $\mathcal{F}$ est propre convexe semi-continu inférieurement et que ρ^* est une fonction propre. Alors l'ensemble des solutions de $(\mathcal{P}^*)$ est $\partial(\rho^*)^*(0)$ (E11). Si V est réflexif, alors cet ensemble vaut $\partial\rho^{**}(0)$.*

Démonstration. On voit que μ est solution de $(\mathcal{P}^*)$ si et seulement si $\mathcal{F}^*(0, \mu) \leq \mathcal{F}^*(0, \nu)$ pour tout $\nu \in V^*$. C'est équivalent à avoir $\rho^*(\mu) \leq \rho^*(\nu)$ pour tout $\nu \in V^*$. Or, nous savons que μ est un minimum global de ρ^* si et seulement si $0 \in \partial\rho^*(\mu)$. Etant donné que $\rho^* \in \Gamma(V^*)$, nous avons $0 \in \partial\rho^*(\mu) \Leftrightarrow \mathcal{J}_\mu \in \partial(\rho^*)^*(0)$. Par l'identification naturelle de E^* dans E^{***} , cela revient à dire que $\mu \in \partial(\rho^*)^*(0)$. Le cas réflexif résulte du fait que $\rho^{**} = (\rho^*)^*$. $\square$

Ceci permet en particulier d'établir un théorème d'existence de solutions du problème dual.

Proposition 4.3.5 ([4]). *Supposons que V est réflexif, que $\mathcal{F}$ est propre convexe semi-continu inférieurement et que ρ^* est une fonction propre. La fonction ρ est sous-différentiable en 0 si et seulement si $\rho(0)$ est fini, ρ est semi-continu inférieurement en 0 et $(\mathcal{P}^*)$ admet une solution.*

Démonstration. Supposons que ρ est sous-différentiable en 0. Comme ρ^* est propre, on a $\rho(x) > -\infty$ pour tout $x \in E$. Puisque $0 \in \text{dom}(\partial\rho) \subset \text{dom}(\rho)$, on a $\rho(0) < +\infty$. Il s'ensuit que $\rho(0)$ est fini. Nous savons que la sous-différentiabilité implique la semi-continuité inférieure. Donc, ρ est sci en 0. De plus, la proposition 3.6.15 montre que $\partial\rho(0) = \partial\rho^{**}(0) \neq \emptyset$ et $(\mathcal{P}^*)$ admet donc une solution par le résultat précédent. Réciproquement, supposons que ρ est sci en 0, $\rho(0) \in \mathbb{R}$ et que $(\mathcal{P}^*)$ admet une solution. La proposition précédente montre que $\partial\rho^{**}(0) \neq \emptyset$. Par la proposition 3.6.15, on a $\partial\rho^{**}(0) = \partial\rho(0) \neq \emptyset$. La conclusion en découle. $\square$

Voyons à présent les liens qui subsistent entre les solutions primales et duales.

Proposition 4.3.6 ([4]). *Supposons que la perturbation est propre convexe et semi-continue inférieurement et que V est réflexif. Soient $x_0 \in E$ et $\mu_0 \in V^*$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (i) *Le point x_0 est solution de $(\mathcal{P})$, μ_0 est solution de $(\mathcal{P}^*)$ et l'écart de dualité est nul.*
- (ii) *On a $\mathcal{F}(x_0, 0) + \mathcal{F}^*(0, \mu_0) = 0$.*
- (iii) *On a $(0, \mu_0) \in \partial\mathcal{F}(x_0, 0)$.*
- (iv) *On a $(x_0, 0) \in \partial\mathcal{F}^*(0, \mu_0)$.*

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) : On a $m_f = m_f^*$, ce qui se traduit par $\mathcal{F}(x_0, 0) = -\mathcal{F}^*(0, \mu_0)$, c'est-à-dire $\mathcal{F}(x_0, 0) + \mathcal{F}^*(0, \mu_0) = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Il suffit de voir que

$$-\mathcal{F}^*(0, \mu_0) \leq -\inf_{\mu \in V^*} \mathcal{F}^*(0, \mu) = m_f^* \leq m_f = \inf_{x \in E} \mathcal{F}(x, 0) = -\mathcal{F}^*(0, \mu_0).$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : Il suffit de constater que (ii) implique $0 \geq \mathcal{F}(x_0, 0) + \langle \mu_0, y \rangle - \mathcal{F}(x, y)$ pour tout $(x, y) \in E \times V$ car

$$\mathcal{F}(x_0, 0) + \mathcal{F}^*(0, \mu_0) = 0 = \langle (0, \mu_0), (x_0, 0) \rangle \geq \mathcal{F}(x_0, 0) + \langle \mu_0, y \rangle - \mathcal{F}(x, y)$$

pour tout $(x, y) \in E \times V$ par définition de la transformée de Legendre. Autrement dit, nous avons

$$\langle (0, \mu_0), (x, y) - (x_0, 0) \rangle \leq \mathcal{F}(x, y) - \mathcal{F}(x_0, 0) \quad \forall (x, y) \in E \times V$$

c'est-à-dire $(0, \mu_0) \in \partial \mathcal{F}(x_0, 0)$.

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv) : C'est une conséquence de la proposition 3.6.12.

(iv) $\Rightarrow$ (i) : Si $(x_0, 0) \in \partial \mathcal{F}^*(0, \mu_0)$, alors

$$\langle (\xi, \mu) - (0, \mu_0), (x_0, 0) \rangle = \langle \xi, x_0 \rangle \leq \mathcal{F}^*(\xi, \mu) - \mathcal{F}^*(0, \mu_0) \quad \forall (\xi, \mu) \in E^* \times V^*.$$

Donc,

$$\langle (\xi, \mu), (x_0, 0) \rangle - \mathcal{F}^*(\xi, \mu) \leq -\mathcal{F}^*(0, \mu_0) \quad \forall (\xi, \mu) \in E^* \times V^*.$$

Par conséquent, $\mathcal{F}^{**}(x_0, 0) = \mathcal{F}(x_0, 0) \leq -\mathcal{F}^*(0, \mu_0)$. On en tire que $m_f \leq m_f^*$ et l'écart de dualité est nul. De cette inégalité précédente, il découle aussi que x_0 est solution de $(\mathcal{P})$ et que μ_0 est solution de $(\mathcal{P}^*)$. $\square$

Une notion fondamentale de la théorie de la dualité est le lagrangien d'une perturbation donnée.

Définition 4.3.3. Le *lagrangien* d'une perturbation $\mathcal{F} : E \times V \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est l'application $\mathcal{L} : E \times V^* \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ définie par

$$\mathcal{L}(x, \xi) = \inf_{y \in V} \mathcal{F}(x, y) + \langle \xi, y \rangle \quad \forall (x, \xi) \in E \times V^*.$$

Définition 4.3.4. Soient X et Y des espaces topologiques et une fonction $F : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. On dit que $(x_0, y_0) \in X \times Y$ est un *point selle* de F si x_0 est le minimum de la fonction $F(\cdot, y_0) : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ et y_0 est le maximum de la fonction $F(x_0, \cdot) : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, auquel cas on a

$$F(x_0, y_0) = \inf_{x \in X} F(x, y_0) = \sup_{y \in Y} F(x_0, y).$$

Exemple 4.3.1. La fonction $F : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 - y^2 \in \mathbb{R}$ est l'exemple type d'une fonction possédant un point selle. Ce point est donné par $(0, 0)$ comme on le vérifie facilement (figure 4.2).

Le lagrangien bénéficie de propriétés particulières.

Proposition 4.3.7. Pour tout $x \in E$, la fonction $\mathcal{L}(x, \cdot) : V^* \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est concave et semi-continue supérieurement.

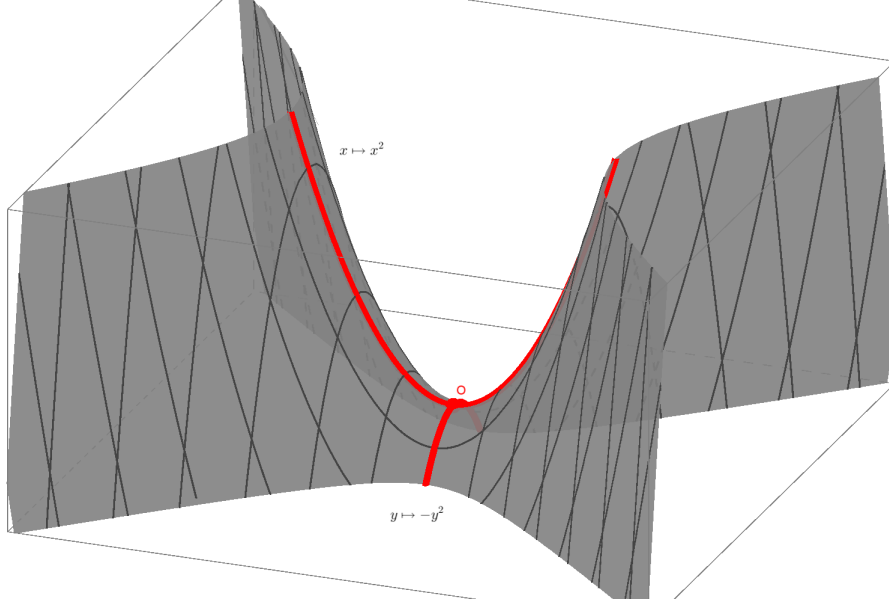


FIGURE 4.2 – Représentation de la fonction $F : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 - y^2 \in \mathbb{R}$. On voit facilement que le point $(0,0)$ est un point selle car 0 est minimum de $x \mapsto f(x, 0) = x^2$ et 0 est maximum de $y \mapsto f(0, y) = -y^2$.

Démonstration. On voit aisément que $\mathcal{L}(x, \xi) = -(\mathcal{F}(x, \cdot))^*(-\xi)$ pour tout $\xi \in V^*$. La fonction $\mathcal{L}(x, \cdot)$ est concave si et seulement si $-\mathcal{L}(x, \cdot)$ est convexe. Comme $(\mathcal{F}(x, \cdot))^*(-\cdot)$ est convexe, on déduit que $-\mathcal{L}(x, \cdot)$ est convexe. Soit $\xi_0 \in V^*$ et montrons que $\mathcal{L}(x, \cdot)$ est semi-continu supérieurement en ξ_0 . Nous savons que la transformée de Legendre d'une fonction est toujours sci. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que

$$\|\xi + \xi_0\| < \eta \Rightarrow (\mathcal{F}(x, \cdot))^*(-\xi_0) - \varepsilon \leq (\mathcal{F}(x, \cdot))^*(\xi).$$

Ceci peut être reformulé par

$$\|\xi - \xi_0\| < \eta \Rightarrow -(\mathcal{F}(x, \cdot))^*(-\xi_0) + \varepsilon \geq -(\mathcal{F}(x, \cdot))^*(-\xi)$$

et la conclusion en découle. $\square$

Lorsque c'est la seconde composante qui est fixée dans le lagrangien, alors la fonction peut devenir convexe.

Proposition 4.3.8. *Si la perturbation est convexe, alors $\mathcal{L}(\cdot, \xi) : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est convexe.*

Démonstration. Posons $F(x, y) = \mathcal{F}(x, y) + \langle \xi, y \rangle$ pour tout $(x, y) \in E \times V$. On voit facilement que la fonction $F : E \times V \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est propre et convexe. De plus, on a

$$\mathcal{L}(\cdot, \xi) = \inf_{y \in V} (\mathcal{F}(\cdot, y) + \langle \xi, y \rangle) = \inf_{y \in V} F(\cdot, y).$$

La proposition 3.1.19 permet de conclure. $\square$

Proposition 4.3.9. *Si $\mathcal{F} \in \Gamma(E \times V)$, alors pour tout $x \in E$, on a $\sup_{\xi \in V^*} \mathcal{L}(x, \xi) = \mathcal{F}(x, 0)$.*

Démonstration. Deux cas sont à envisager. Le premier est celui où la fonction $\mathcal{F}(x, \cdot)$ est propre convexe et semi-continue inférieurement. Donc, $(\mathcal{F}(x, \cdot))^{**} = \mathcal{F}(x, \cdot)$ et par conséquent

$$\begin{aligned} \sup_{\xi \in V^*} \mathcal{L}(x, \xi) &= \sup_{\xi \in V^*} -(\mathcal{F}(x, \cdot))^*(-\xi) \\ &= - \inf_{\xi \in V^*} (\mathcal{F}(x, \cdot))^*(\xi) \\ &= (\mathcal{F}(x, \cdot))^{**}(0) = \mathcal{F}(x, 0). \end{aligned}$$

Le second cas est celui où $\mathcal{F}(x, \cdot)$ n'est pas propre. Dans ce cas, par convexité, $\mathcal{F}(x, \cdot)$ est infini sur son domaine. Mais comme $\mathcal{F}$ est propre, on en tire que $\mathcal{F}(x, \cdot)$ ne peut valoir $-\infty$, donc la fonction vaut $+\infty$ partout. Il s'ensuit que

$$\sup_{\xi \in V^*} \mathcal{L}(x, \xi) = \sup_{\xi \in V^*} \inf_{y \in V} \mathcal{F}(x, y) + \langle \xi, y \rangle = +\infty = \mathcal{F}(x, 0).$$

□

On a un résultat similaire lorsque l'on prend la borne inférieure sur la première composante.

Proposition 4.3.10. *Pour tout $\xi \in V^*$, on a $\inf_{x \in E} \mathcal{L}(x, \xi) = -\mathcal{F}^*(0, -\xi)$.*

Démonstration. On a

$$\inf_{x \in E} \mathcal{L}(x, \xi) = \inf_{(x, y) \in E \times V} \mathcal{F}(x, y) + \langle \xi, y \rangle = - \sup_{(x, y) \in E \times V} \langle (0, -\xi), (x, y) \rangle - \mathcal{F}(x, y) = -\mathcal{F}^*(0, -\xi).$$

□

Cela étant, nous savons démontrer que les points selles du lagrangien nous procurent des paires de solutions des problèmes primal et dual.

Proposition 4.3.11. *Supposons que V est réflexif et que $\mathcal{F} \in \Gamma(E \times V)$. Alors $x_0 \in E$ est une solution de $(\mathcal{P})$, $\xi_0 \in V^*$ une solution de $(\mathcal{P}^*)$ et l'écart de dualité est nul si et seulement si $(x_0, -\xi_0)$ est un point selle du lagrangien.*

Démonstration. Supposons que $(x_0, -\xi_0)$ est un point selle de $\mathcal{L}$. Donc,

$$\mathcal{L}(x_0, -\xi_0) = \inf_{x \in E} \mathcal{L}(x, -\xi_0) = \sup_{\xi \in V^*} \mathcal{L}(x_0, \xi).$$

Les deux dernières propositions montrent qu'on a en fait

$$\mathcal{L}(x_0, -\xi_0) = -\mathcal{F}^*(0, \xi_0) = \mathcal{F}(x_0, 0).$$

De plus, ce nombre n'est pas infini car $\mathcal{F}(x_0, 0) = f(x_0) > -\infty$ et $\mathcal{F}^*(0, \xi_0) > -\infty$. Il en découle l'égalité $\mathcal{F}(x_0, 0) + \mathcal{F}^*(0, \xi_0) = 0$ et on peut conclure à l'aide de la proposition 4.3.6. Réciproquement, si $x_0 \in E$ est une solution de $(\mathcal{P})$, $\xi_0 \in V^*$ une solution de $(\mathcal{P}^*)$ et l'écart de dualité est nul, alors $\mathcal{F}(x_0, 0) + \mathcal{F}^*(0, \xi_0) = 0$. Les deux propositions précédentes et nos hypothèses montrent que

$$\inf_{x \in E} \mathcal{L}(x, -\xi_0) = \sup_{\xi \in V^*} \mathcal{L}(x_0, \xi) \in \mathbb{R}.$$

Puis, on a

$$\inf_{x \in E} \mathcal{L}(x, -\xi_0) \leq \mathcal{L}(x_0, -\xi_0) \leq \sup_{\xi \in V^*} \mathcal{L}(x_0, \xi) = \inf_{x \in E} \mathcal{L}(x, -\xi_0)$$

ce qui montre bien que $(x_0, -\xi_0)$ est un point selle de $\mathcal{L}$.

□

Pour finir cette section, appliquons nos résultats pour deux différentes perturbations et examinons les résultats qu'on peut en tirer. Par le résultat précédent, on voit que pour trouver les solutions primales et duales, il suffit de trouver les points selles du lagrangien associé à la perturbation.

4.3.2 Perturbation par translation : dualité de Fenchel-Rockafellar

Soient E et V des espaces de Banach, $f \in \Gamma(E)$, $g \in \Gamma(V)$ et $T : E \rightarrow V$ une application linéaire continue. Supposons que $\text{dom}(g) \cap T(\text{dom}(f)) \neq \emptyset$. Nous notons indifféremment $\|\cdot\|$ pour dénoter la norme de E et de V . L'ensemble des contraintes est donné par $C = \text{dom}(g) \cap T(\text{dom}(f))$ (E12) et on s'intéresse au problème suivant

$$\text{Minimiser } f(x) + g(T(x)) \text{ lorsque } x \in C. \quad (\mathcal{P})$$

Les hypothèses faites ci-dessus montrent que le problème est consistant. Insistons sur le caractère très général du problème. En effet, le problème classique qui consiste à uniquement minimiser f sur E est un cas particulier de $(\mathcal{P})$ lorsque l'on prend $g = 0$ et $T = id_E$.

Pour traiter ce problème, nous introduisons la *perturbation par translation*

$$\mathcal{F} : (x, y) \in E \times V \mapsto f(x) + g(T(x) - y) \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Proposition 4.3.12. *La perturbation $\mathcal{F}$ appartient à $\Gamma(E \times V)$.*

Démonstration. Il est aisé de vérifier que $\mathcal{F}$ est propre et convexe. Montrons qu'elle est sci. Soient $(x_0, y_0) \in E \times V$ et $\varepsilon > 0$. Par semi-continuité inférieure en x_0 , il existe $\eta_1 > 0$ tel que $f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} \leq f(x)$ si $\|x - x_0\| < \eta_1$. De même, comme g est sci en $T(x_0) - y_0$, il existe $\eta_2 > 0$ tel que $g(T(x_0) - y_0) - \frac{\varepsilon}{2} \leq g(z)$ si $\|z - T(x_0) + y_0\| < \eta_2$. La fonction $(x, y) \in E \times V \mapsto T(x) - y \in V$ étant continue, il existe $\eta_3 > 0$ tel que $\|T(x) - y - (T(x_0) - y_0)\| < \eta_2$ si $\|x - x_0\| + \|y - y_0\| < \eta_3$. Soit $\eta = \min(\eta_1, \eta_3)$. Au total, on a

$$\|x - x_0\| + \|y - y_0\| < \eta \Rightarrow f(x_0) + g(T(x_0) - y_0) - \varepsilon \leq f(x) + g(T(x) - y)$$

d'où la conclusion. $\square$

A présent, déterminons le problème dual $(\mathcal{P}^*)$ de $(\mathcal{P})$. Rappelons qu'il est donné par

$$\text{Maximiser } -\mathcal{F}^*(0, \mu) \text{ lorsque } \mu \in V^*. \quad (\mathcal{P}^*)$$

On calcule la transformée de Legendre de la perturbation en $(0, \mu)$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^*(0, \mu) &= \sup_{(x, y) \in E \times V} \langle (0, \mu), (x, y) \rangle - f(x) - g(T(x) - y) \\ &= \sup_{x \in E} -f(x) + \sup_{y \in V} \langle \mu, y \rangle - g(T(x) - y) \\ &= \sup_{x \in E} -f(x) + \sup_{z \in V} \langle \mu, T(x) - z \rangle - g(z) && \text{Changement de variable } z = T(x) - y \\ &= \sup_{x \in E} \langle \mu, T(x) \rangle - f(x) + \sup_{z \in V} \langle -\mu, z \rangle - g(z) \\ &= \sup_{x \in E} \langle \mu, T(x) \rangle - f(x) + g^*(-\mu) \\ &= \sup_{x \in E} \langle T^*(\mu), x \rangle - f(x) + g^*(-\mu) \\ &= f^*(T^*(\mu)) + g^*(-\mu). \end{aligned}$$

Le résultat final est donné ci-dessous.

Proposition 4.3.13. *Le problème $(\mathcal{P}^*)$ est le suivant :*

$$\text{Maximiser } -f^*(T^*(\mu)) - g^*(-\mu) \text{ lorsque } \mu \in V^*.$$

A présent, calculons le lagrangien. Si $x \notin \text{dom}(f)$, on voit directement que $\mathcal{F}(x, \xi) = +\infty$ et $\mathcal{L}(x, \xi) = +\infty$. Si $x \in \text{dom}(f)$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, \xi) &= \inf_{y \in V} \mathcal{F}(x, y) + \langle \xi, y \rangle \\ &= f(x) + \inf_{y \in V} \langle \xi, y \rangle + g(T(x) - y) \\ &= f(x) + \inf_{z \in V} \langle \xi, T(x) - z \rangle + g(z) && \text{Changement de variable } z = T(x) - y \\ &= f(x) + \langle \xi, T(x) \rangle + \inf_{z \in V} \langle \xi, -z \rangle + g(z) \\ &= f(x) + \langle \xi, T(x) \rangle - \sup_{z \in V} \langle \xi, z \rangle - g(z) \\ &= f(x) + \langle T^*(\xi), x \rangle - g^*(\xi). \end{aligned}$$

Nous résumons le calcul par ce qui suit.

Proposition 4.3.14. *Le lagrangien $\mathcal{L} : E \times V^* \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est donné par*

$$\mathcal{L}(x, \xi) = \begin{cases} f(x) + \langle T^*(\xi), x \rangle - g^*(\xi) & \text{si } x \in \text{dom}(f) \text{ et } \xi \in \text{dom}(g^*) \\ +\infty & \text{si } x \notin \text{dom}(f) \\ -\infty & \text{si } x \in \text{dom}(f) \text{ et } \xi \notin \text{dom}(g^*). \end{cases}$$

En utilisant la proposition 4.3.11, nous pouvons démontrer le théorème de dualité de Fenchel-Rockafellar.

Théorème 4.3.1 (Dualité de Fenchel-Rockafellar). *Le point $x_0 \in E$ est solution de $(\mathcal{P})$, $\xi_0 \in V^*$ est solution de $(\mathcal{P}^*)$ et*

$$\inf_{x \in E} f(x) + g(T(x)) = \sup_{\mu \in V^*} -f^*(T^*(\mu)) - g^*(-\mu) \in \mathbb{R}$$

si et seulement si

$$\xi_0 \in -\partial g(T(x_0)) \cap (T^*)^{-1}(\partial f(x_0)).$$

Si, de plus, f et g sont G -différentiables et g est continu en un point de $\text{dom}(g) \cap \text{im } T$, alors x_0 est solution de $(\mathcal{P})$, $\nabla g(T(x_0))$ est solution de $(\mathcal{P}^)$ et l'écart de dualité est nul si et seulement si x_0 est solution de l'équation*

$$\nabla(f + g \circ T)(x) = 0.$$

Démonstration. Nous savons que $(x_0, -\xi_0)$ est un point selle du lagrangien si et seulement si x_0 est un minimum de $\mathcal{L}(\cdot, \xi_0)$ et $-\xi_0$ un maximum de $\mathcal{L}(x_0, \cdot)$. Remarquons immédiatement que $\mathcal{L}(x_0, -\xi_0) \in \mathbb{R}$ en appliquant les propositions 4.3.9 et 4.3.10. La proposition 4.3.8 montre que $\mathcal{L}(\cdot, -\xi_0)$ est une fonction convexe. Donc, x_0 est un minimum de $\mathcal{L}(\cdot, -\xi_0)$ si et seulement si

$$f(x_0) + \langle T^*(-\xi_0), x_0 \rangle \leq f(x) + \langle T^*(-\xi_0), x \rangle \quad \forall x \in E.$$

Autrement dit, si et seulement si

$$\langle T^*(\xi_0), x - x_0 \rangle \leq f(x) - f(x_0) \quad \forall x \in E.$$

C'est équivalent à dire que $T^*(\xi_0) \in \partial f(x_0)$, ou encore que $\xi_0 \in (T^*)^{-1}(\partial f(x_0))$. Par la proposition 4.3.7, la fonction $\mathcal{L}(x_0, \cdot)$ est concave et scs. Donc, $-\mathcal{L}(x_0, \cdot)$ est convexe et $-\xi_0$ est un maximum de $\mathcal{L}(x_0, \cdot)$ si et seulement si $-\xi_0$ est un minimum de $-\mathcal{L}(x_0, \cdot)$, ce qui revient à dire que

$$-\langle T^*(-\xi_0), x_0 \rangle + g^*(-\xi_0) \leq -\langle T^*(\xi), x_0 \rangle + g^*(\xi) \quad \forall \xi \in V^*.$$

En d'autres termes,

$$\langle \xi + \xi_0, T(x_0) \rangle \leq g^*(\xi) - g^*(-\xi_0) \quad \forall \xi \in V^*.$$

Ces inégalités signifient que $\mathcal{J}_{T(x_0)} \in \partial g^*(-\xi_0)$. Par la proposition 3.6.12, on a $-\xi_0 \in \partial g(T(x_0))$. La conclusion découle de la proposition 4.3.11. Le cas particulier résulte immédiatement des propositions 3.5.3, 3.5.5 et 3.6.14. On doit avoir $\xi_0 = -\nabla g(T(x_0))$ et $T^*(\xi_0) = -T^*(\nabla g(T(x_0))) = \nabla f(x_0)$, c'est-à-dire

$$\nabla(f + g \circ T)(x_0) = 0$$

car $T^*(\nabla g(T(x_0))) = \nabla(g \circ T)(x_0)$. □

4.3.3 Perturbation lagrangienne : dualité de Lagrange

En général, l'ensemble des contraintes sur la variable x est régie par un système d'équations et d'inéquations qui déterminent la région de E qui nous intéresse. Nous allons nous pencher sur ce type de problème. Nous considérons une fonction $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ propre convexe semi-continue inférieurement. Soit $g_1, \dots, g_n$ une famille de fonctions propres convexes semi-continues inférieurement sur E et $h_1, \dots, h_m$ des fonctions affines continues sur E . Nous nous intéressons au problème de minimisation suivant

Minimiser $f(x)$ lorsque x vérifie les contraintes $g_1(x) \leq 0, \dots, g_n(x) \leq 0, h_1(x) = 0, \dots, h_m(x) = 0$.

Notons $(\mathcal{P})$ ce problème. Pour plus de commodités, nous définissons C comme étant l'ensemble des points x vérifiant les contraintes $g_1(x) \leq 0, \dots, g_n(x) \leq 0, h_1(x) = 0, \dots, h_m(x) = 0$. Afin que le problème soit consistant, nous supposons que $C \cap \text{dom}(f) \neq \emptyset$. Nous abordons le problème en définissant la perturbation suivante

$$\mathcal{F} : (x, \lambda, \mu) \in E \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } g_i(x) \leq \lambda_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ & \text{et } h_j(x) = \mu_j \quad \forall j \in \{1, \dots, m\} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Clairement, il s'agit d'une fonction de perturbation. Nous pouvons même montrer que cette fonction est propre convexe semi-continue inférieurement sur $E \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Comme le problème $(\mathcal{P})$ est consistant et que f est propre, la fonction $\mathcal{F}$ est propre. Nous voyons facilement que $\mathcal{F}$ est convexe en utilisant la proposition 3.1.2. Pour la semi-continuité inférieure, il suffit de calculer l'épigraphe. Celui-ci vaut

$$\text{epi}(\mathcal{F}) = \{(x, \lambda, \mu, t) \in E \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} : \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \forall j \in \{1, \dots, m\} \quad (x, \lambda_i) \in \text{epi}(g_i) \\ \text{et } h_j(x) = \mu_j \text{ et } (x, t) \in \text{epi}(f)\}$$

et il est fermé car les ensembles $\text{epi}(f)$ et $\text{epi}(g_i)$ sont fermés pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et h_j est continu pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$. Nous résumons cela dans la proposition ci-dessous.

Proposition 4.3.15. On a $\mathcal{F} \in \Gamma(E \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$.

Déterminons le problème dual. Nous avons

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}^*(0, \lambda, \mu) &= \sup_{(x, y, z) \in E \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} \langle (0, \lambda, \mu), (x, y, z) \rangle - \mathcal{F}(x, y, z) \\
 &= \sup_{(x, y, z) \in E \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} \langle \lambda, y \rangle + \langle \mu, z \rangle - \mathcal{F}(x, y, z) \\
 &= \sup_{x \in E} \sup_{\substack{\forall i \ y_i \geq g_i(x) \\ \forall j \ h_j(x) = z_j}} \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i + \sum_{j=1}^m \mu_j z_j - f(x) \\
 &= \sup_{x \in \text{dom}(f)} \sup_{\substack{\forall i \ y_i \geq g_i(x) \\ \forall j \ h_j(x) = z_j}} \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i + \sum_{j=1}^m \mu_j z_j - f(x) \\
 &= \begin{cases} \sup_{x \in E} \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^m \mu_j h_j(x) - f(x) & \text{si } \lambda_1, \dots, \lambda_n \leq 0 \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Proposition 4.3.16. Le problème dual $(\mathcal{P}^*)$ est

$$\text{Maximiser } \inf_{x \in E} f(x) - \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x) - \sum_{j=1}^m \mu_j h_j(x) \text{ lorsque } (\lambda, \mu) \in (\mathbb{R}^-)^n \times \mathbb{R}^m.$$

Le lagrangien se calcule aisément. Si $x \notin \text{dom}(f) \cap \bigcap_{i=1}^n \text{dom}(g_i)$, alors $\mathcal{F}(x, \lambda, \mu) = +\infty$ quel que soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ et donc $\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = +\infty$ pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Si $x \in \text{dom}(f) \cap \bigcap_{i=1}^n \text{dom}(g_i)$ on a

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) &= \inf_{(y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} \langle (\lambda, \mu), (y, z) \rangle + \mathcal{F}(x, y, z) \\
 &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i + \sum_{j=1}^m \mu_j z_j + \mathcal{F}(x, y, z) : g_1(x) \leq y_1, \dots, g_n(x) \leq y_n, \right. \\
 &\quad \left. h_1(x) = z_1, \dots, h_m(x) = z_m \right\} \\
 &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i + \sum_{j=1}^m \mu_j z_j + f(x) : g_1(x) \leq y_1, \dots, g_n(x) \leq y_n, h_1(x) = z_1, \dots, h_m(x) = z_m \right\} \\
 &= \begin{cases} f(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^m \mu_j h_j(x) & \text{si } \lambda \in (\mathbb{R}^+)^n \\ -\infty & \text{si } \lambda \notin (\mathbb{R}^+)^n. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Nous donnons le résultat final ci-dessous.

Proposition 4.3.17. Le lagrangien $\mathcal{L} : E \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est donné par

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = \begin{cases} f(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^m \mu_j h_j(x) & \text{si } \lambda \in (\mathbb{R}^+)^n \\ -\infty & \text{si } \lambda \notin (\mathbb{R}^+)^n \text{ et } x \in \text{dom}(f) \cap \bigcap_{i=1}^n \text{dom}(g_i) \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous pouvons déduire une technique utile permettant de calculer un minimum en pratique. La proposition 4.3.11 nous dit que x_0 est solution de $(\mathcal{P})$ et $(\lambda_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ solution de $(\mathcal{P}^*)$ avec un écart de dualité nul si et seulement si $(x_0, -\lambda_0, -\mu_0)$ est un point selle de $\mathcal{L}$. Par définition, $(x_0, -\lambda_0, -\mu_0) \in E \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ est un point selle du lagrangien si et seulement si

$$\mathcal{L}(x_0, \lambda, \mu) \leq \mathcal{L}(x_0, -\lambda_0, -\mu_0) \leq \mathcal{L}(x, -\lambda_0, -\mu_0) \quad \forall x \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^n \quad \forall \mu \in \mathbb{R}^m.$$

Bien entendu, la valeur du lagrangien en un point selle est finie vu les propositions 4.3.9 et 4.3.10. Donc, il faut que $-\lambda_0 \in (\mathbb{R}^+)^n$ et $x_0 \in \text{dom}(f) \cap \bigcap_{i=1}^n \text{dom}(g_i)$. D'une part, en prenant la première inégalité, nous avons

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x_0) \leq -\sum_{i=1}^n \lambda_{0,i} g_i(x_0) \quad \forall \lambda \in (\mathbb{R}^+)^n.$$

En particulier, si $\lambda = 0$, on trouve $0 \leq -\sum_{i=1}^n \lambda_{0,i} g_i(x_0)$. De plus, comme $x_0 \in C$, on a $g_i(x_0) \leq 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Il s'ensuit alors que $-\sum_{i=1}^n \lambda_{0,i} g_i(x_0) = 0$, c'est-à-dire $\lambda_{0,i} g_i(x_0) = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. D'autre part, on a par la seconde inégalité

$$f(x_0) - \sum_{i=1}^n \lambda_{0,i} g_i(x_0) \leq f(x) - \sum_{i=1}^n \lambda_{0,i} g_i(x) - \sum_{j=1}^m \mu_{0,j} h_j(x) \quad \forall x \in \text{dom}(f) \cap \bigcap_{i=1}^n \text{dom}(g_i).$$

Vu ce qui précède, ceci est équivalent à dire que $f(x_0) \leq \mathcal{L}(x, -\lambda_0, -\mu_0)$ pour tout $x \in \text{dom}(f) \cap \bigcap_{i=1}^n \text{dom}(g_i)$. On obtient le théorème suivant.

Proposition 4.3.18. *Soient $x_0 \in C$ et $(\lambda_0, \mu_0) \in (\mathbb{R}^+)^n \times \mathbb{R}^m$. Alors x_0 est solution de $(\mathcal{P})$, (λ_0, μ_0) solution de $(\mathcal{P}^*)$ et l'écart de dualité est nul si et seulement si $\lambda_{0,i} g_i(x_0) = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et $f(x_0) \leq \mathcal{L}(x, -\lambda_0, -\mu_0)$ pour tout $x \in \text{dom}(f) \cap \bigcap_{i=1}^n \text{dom}(g_i)$.*

Définition 4.3.5. Si x_0 est une solution de $(\mathcal{P})$, alors tout $(\lambda_0, \mu_0) \in (\mathbb{R}^+)^n \times \mathbb{R}^m$ tel que $(x_0, -\lambda_0, -\mu_0)$ est un point selle de $\mathcal{L}$ est appelé *multiplicateur de Lagrange* associé à la solution x_0 de $(\mathcal{P})$.

Si l'on veut résoudre entièrement un problème $(\mathcal{P})$, il serait intéressant de déterminer si toute solution du problème admet un multiplicateur de Lagrange.

4.3.4 Multiplicateurs de Lagrange

Nous allons étudier plus en profondeur la fonction $\mathcal{L}$ du problème introduit à la section 4.3.3. Comme précédemment, considérons une fonction $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ propre convexe semi-continue inférieurement. Soient $g_1, \dots, g_n$ une famille de fonctions propres convexes semi-continues inférieurement et des fonctions affines continues $h_1, \dots, h_m$ sur E . Le problème est le suivant

$$\text{Minimiser } f(x) \text{ sous les contraintes } g_1(x) \leq 0, \dots, g_n(x) \leq 0, h_1(x) = 0, \dots, h_m(x) = 0. \quad (\mathcal{P})$$

Comme d'habitude, nous noterons C l'ensemble des points satisfaisant aux contraintes et la valeur $\inf_{x \in C} f(x)$ sera simplement notée m_f . Remarquons immédiatement que l'ensemble C est convexe. Bien entendu, nous supposons toujours que $\text{dom}(f) \cap C \neq \emptyset$ afin que le problème posé soit consistant. Ici, nous allons directement étudier la fonction

$$\mathcal{L} : (x, \lambda, \mu) \in E \times (\mathbb{R}^+)^n \times \mathbb{R}^m \mapsto f(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^m \mu_j h_j(x) \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Vu l'hypothèse $C \neq \emptyset$, $\mathcal{L}$ est une fonction propre. Nous avons vu que si on arrive à associer à un point $x_0 \in C$ un multiplicateur de Lagrange, alors x_0 est solution du problème $(\mathcal{P})$ et en même temps, ce multiplicateur de Lagrange est solution du problème dual. Le but principal est de donner des conditions d'existence des multiplicateurs de Lagrange. Assez naturellement,

il faudrait retomber sur les équations de la forme $\lambda_{0,i}g_i(x_0) = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ qui apparaissent dans la dernière proposition. Trouver des multiplicateurs de Lagrange consisterait donc à trouver $(\lambda_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ et $x_0 \in C$ tels que $\mathcal{L}(x_0, \lambda_0, \mu_0) = f(x_0) \leq \mathcal{L}(x, \lambda_0, \mu_0)$ pour tout $x \in \text{dom}(f) \cap \bigcap_{i=1}^n \text{dom}(g_i)$ et $\lambda_{0,i}g_i(x_0) = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Nous aurons besoin des lemmes suivants.

Lemme 4.3.1 (AC). *Soient C_1 et C_2 des convexes non-vides disjoints dans $\mathbb{R}^n$, il existe $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $\langle u, x \rangle \leq \langle u, y \rangle$ pour tout $x \in C_1$ et $y \in C_2$.*

Démonstration. Posons $C = C_1 - C_2$. Il s'agit d'un convexe ne contenant pas 0. Supposons d'abord que $\dim C = n$. Dans ces conditions, on a $C^\circ \neq \emptyset$ vu le lemme 3.3.1. Le théorème de séparation faible permet alors de conclure. Si $\dim(C) = m < n$ et si $0 \in \text{aff}(C)$, alors on refait le raisonnement précédent en nous restreignant au sous-espace vectoriel $\text{aff}(C)$. Si, de plus, $0 \notin \text{aff}(C)$, nous savons qu'un espace affine de dimension finie m est décrit par $n - m$ équations linéaires [22]. Il existe donc $u_1, \dots, u_{n-m} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $b_1, \dots, b_{n-m} \in \mathbb{R}$ tels que

$$\text{aff}(C) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle u_i, x \rangle = b_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n - m\}\}.$$

Il suffit alors de considérer u_1 . On a $\langle u_1, x \rangle = b_1 \leq 0$ pour tout $x \in \text{aff}(C)$ (quitte à changer le signe de u_1 et b_1). La conclusion en découle. $\square$

Lemme 4.3.2 (AC, [3]). *Si x_0 est solution du problème $(\mathcal{P})$, alors il existe $n + m + 1$ réels non tous nuls $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m$ tels que $\lambda_0 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0$, $\lambda_i g_i(x_0) = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et*

$$\lambda_0 f(x_0) \leq \lambda_0 f(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^m \mu_j h_j(x) \quad \forall x \in X$$

où $X = \text{dom}(f) \cap \bigcap_{i=1}^n \text{dom}(g_i)$.

Démonstration. Posons

$$C' = \{(f(x) - f(x_0) + r_0, g_1(x) + r_1, \dots, g_n(x) + r_n, h_1(x), \dots, h_m(x)) : x \in X, r_0, \dots, r_n > 0\}.$$

Cet ensemble est un convexe de $\mathbb{R}^{n+m+1}$. En effet, soient $p_1, p_2 \in C'$ et $\lambda \in [0, 1]$. On peut écrire

$$p_1 = (f(x) - f(x_0) + r_0, g_1(x) + r_1, \dots, g_n(x) + r_n, h_1(x), \dots, h_m(x))$$

et

$$p_2 = (f(x') - f(x_0) + r'_0, g_1(x') + r'_1, \dots, g_n(x') + r'_n, h_1(x'), \dots, h_m(x'))$$

avec $x, x' \in X$, $r_0, \dots, r_n, r'_0, \dots, r'_n > 0$. On a évidemment $\lambda h_i(x) + (1 - \lambda)h_i(x') = h_i(\lambda x + (1 - \lambda)x')$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ car les h_i sont des fonctions affines. Par convexité, on a

$$\lambda(g_i(x) + r_i) + (1 - \lambda)(g_i(x') + r'_i) \geq g_i(\lambda x + (1 - \lambda)x') + (\lambda r_i + (1 - \lambda)r'_i) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

et

$$\lambda(f(x) - f(x_0) + r_0) + (1 - \lambda)(f(x') - f(x_0) + r'_0) \geq f(\lambda x + (1 - \lambda)x') - f(x_0) + (\lambda r_0 + (1 - \lambda)r'_0).$$

Il s'ensuit que $\lambda p_1 + (1 - \lambda)p_2 \in C'$. De plus, C' ne contient pas 0 car $f(x) - f(x_0) + r_0 \geq r_0 > 0$ pour tout $x \in X$ et tout $r_0 > 0$ (E13). Par le lemme précédent, il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m) \in \mathbb{R}^{n+m+1} \setminus \{0\}$ tel que

$$\langle (\lambda_0, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m), p \rangle \geq 0 \quad \forall p \in C'.$$

Autrement dit, on a

$$\lambda_0 f(x_0) \leq \lambda_0(f(x) + r_0) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(g_i(x) + r_i) + \sum_{j=1}^m \mu_j h_j(x) \quad (*)$$

pour tout $x \in X$ et tout $r_0, \dots, r_n > 0$. En passant à la limite $r_i \rightarrow 0^+$ pour tout i , on a

$$\lambda_0 f(x_0) \leq \lambda_0 f(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^m \mu_j h_j(x) \quad \forall x \in X.$$

Montrons que $\lambda_i \geq 0$ pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$ et que $\lambda_i g_i(x_0) = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Dans (*), on prend $x = x_0$ et $r_i = -g_i(x_0) \geq 0$ lorsque $1 \leq i \leq n$ et on obtient $\lambda_0 \geq 0$. Ensuite, si $k \in \{1, \dots, n\}$, on prend $x = x_0$, $r_0 \rightarrow 0^+$ et $r_i \rightarrow -g_i(x_0)$ pour tout $i \neq k$ et $r_k > -g_k(x_0)$ dans (*). On en tire que $0 \leq \lambda_k(g_k(x_0) + r_k)$ et par conséquent, $\lambda_k \geq 0$. De plus, si $r_k \rightarrow 0^+$, $r_0 \rightarrow 0^+$ et $r_i \rightarrow -g_i(x_0)$ si $i \neq k$ dans (*), on obtient $\lambda_k g_k(x_0) = 0$. Ceci achève la preuve. $\square$

Dans le lemme, nous pouvons même supposer que $\lambda_0 = 0$ ou 1, quitte à diviser les deux membres de l'inégalité du lemme par λ_0 lorsque $\lambda_0 \neq 0$. Si $\lambda_0 = 0$, alors nous ne savons pas tirer d'informations sur $(\mathcal{P})$ puisque l'on a alors qu'une information que sur les contraintes. Pour pouvoir lier le lemme au problème $(\mathcal{P})$, il est évidemment important d'avoir $\lambda_0 \neq 0$. Pour ce faire, il suffit d'ajouter une hypothèse technique sur les contraintes.

Proposition 4.3.19 (AC,[3]). *Posons $X = \text{dom}(f) \cap \bigcap_{i=1}^n \text{dom}(g_i)$. Supposons qu'il existe $z_0 \in C$ tel que $g_i(z_0) < 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si $z \in \mathbb{R}^m$ avec $|z| < \varepsilon$, le système*

$$h_1(x) = z_1, \dots, h_m(x) = z_m$$

admet une solution x dans X . Alors $x_0 \in C$ est solution de $(\mathcal{P})$ si et seulement si il existe $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{R}^+)^n \times \mathbb{R}^m$ tels que $\lambda_i g_i(x_0) = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et $f(x_0) \leq \mathcal{L}(x, \lambda, \mu)$ pour tout $x \in X$.

Démonstration. La condition est nécessaire. Soit $x_0 \in C$ une solution au problème. Vu le lemme, il existe $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m) \in (\mathbb{R}^+)^{n+1} \times \mathbb{R}^m$ de composantes non toutes nulles telles que $\lambda_i g_i(x_0) = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et

$$\lambda_0 f(x_0) \leq \lambda_0 f(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^m \mu_j h_j(x) \quad \forall x \in X. \quad (*)$$

Nous pouvons même supposer que $\lambda_0 \in \{0, 1\}$. Par l'absurde, supposons que $\lambda_0 = 0$. Prenons $x = z_0$ dans (*). On en déduit que $0 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(z_0)$. Comme $g_i(z_0) < 0$, nous avons nécessairement $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Il vient $\sum_{j=1}^m \mu_j h_j(x) \geq 0$ pour tout $x \in X$, les éléments $\mu_1, \dots, \mu_m$ étant non tous nuls. Nous pouvons supposer que les $\mu_j \neq 0$ sont $\mu_1, \dots, \mu_k$ avec $k \leq m$ et que $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_k$. On définit $z \in \mathbb{R}^m$ de la façon suivante :

- (1) Si $\mu_j = 0$, on pose $z_j = 0$.
- (2) Si $\mu_j < 0$, on pose $z_j = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{m}}$.
- (3) Si $\mu_j > 0$, on pose $z_j = \frac{-\varepsilon}{2\sqrt{m}}$.

De cette manière, on a $|z| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$ et il existe $x' \in X$ tel que $h_i(x') = z_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$. Donc $\sum_{j=1}^m \mu_j h_j(x') < 0$, ce qui est absurde. On conclut que $\lambda_0 = 1$.

La condition est suffisante. Soit $x \in C$. On a $h_j(x) = 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$ et $g_i(x) \leq 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Par hypothèse, on conclut que

$$f(x_0) \leq \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x) \leq f(x).$$

□

Remarque 4.3.1. On peut se passer de l'axiome du choix dans les lemmes 4.3.1 et 4.3.2 et la proposition 4.3.19 au prix d'une preuve plus longue. Le lecteur intéressé peut consulter le théorème 11.2 de [35] pour une version de la preuve du lemme 4.3.1 sans axiome du choix.

Les hypothèses introduites dans cette proposition peuvent sembler très restrictives. De plus, la condition d'optimalité $f(x_0) \leq \mathcal{L}(x, \lambda, \mu)$ peut sembler difficile à mettre en oeuvre. Voici une condition d'optimalité qui lui est équivalente.

Proposition 4.3.20 (Conditions de Kuhn-Tucker, [3]). *Supposons que les fonctions $g_1, \dots, g_n$ sont continues. Posons $X = \text{dom}(f) \cap \bigcap_{i=1}^n \text{dom}(g_i)$ et soient $\lambda \in (\mathbb{R}^+)^n$, $\mu \in \mathbb{R}^m$ et $x_0 \in C$ tels que $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ et $\lambda_i g_i(x_0) = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Supposons aussi qu'il existe $z_0 \in C$ tel que $g_i(z_0) < 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si $z \in \mathbb{R}^m$ avec $|z| < \varepsilon$, le système*

$$h_1(x) = z_1, \dots, h_m(x) = z_m$$

admet une solution x dans X . On a $f(x_0) \leq \mathcal{L}(x, \lambda, \mu)$ pour tout $x \in X$ si et seulement si

$$0 \in \partial f(x_0) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \partial g_i(x_0) + \sum_{j=1}^m \mu_j \nabla h_j(x_0).$$

Démonstration. Vu les hypothèses sur λ et μ , on vérifie aussitôt que $f(x_0) \leq \mathcal{L}(x, \lambda, \mu)$ pour tout $x \in X$ si et seulement si x_0 est un minimum de $\mathcal{L}(\cdot, \lambda, \mu)$ sur X . La fonction $\mathcal{L}(\cdot, \lambda, \mu)$ est évidemment convexe semi-continue inférieurement et propre. Par la proposition 4.2.2, x_0 est un minimum de $\mathcal{L}(\cdot, \lambda, \mu)$ si et seulement si $0 \in \partial(\mathcal{L}(\cdot, \lambda, \mu))(x_0)$. En vue d'appliquer la proposition 3.5.6, montrons que $\text{dom}(f) \cap \bigcap_{i=1}^n \text{dom}(g_i)^\circ \neq \emptyset$. Par hypothèse, il existe $z_0 \in C$ tel que $g_i(z_0) < 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Par continuité, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ il existe un voisinage U_i de z_0 dans E tel que $g_i(z) < 0$ pour tout $z \in U_i$. Donc, $U = \bigcap_{i=1}^n U_i$ est un voisinage de z_0 tel que $g_i(z) < 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. On en tire que $z_0 \in \text{dom}(f) \cap \bigcap_{i=1}^n \text{dom}(g_i)^\circ$ et donc que

$$0 \in \partial(\mathcal{L}(\cdot, \lambda, \mu))(x_0) = \partial f(x_0) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \partial g_i(x_0) + \sum_{j=1}^m \mu_j \partial h_j(x_0).$$

Une fonction affine continue est toujours G-différentiable par le corollaire 3.6.2 et $\partial h_j(x_0) = \{\nabla h_j(x_0)\}$. La conclusion en découle. □

Nous pouvons résumer la méthode des multiplicateurs de Lagrange par le théorème suivant qui découle de tout ce qui précède (E14).

Théorème 4.3.2 (Multiplicateurs de Lagrange). *Posons $X = \text{dom}(f) \cap \bigcap_{i=1}^n \text{dom}(g_i)$. Supposons qu'il existe $z_0 \in C$ tel que $g_i(z_0) < 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si $z \in \mathbb{R}^m$ avec $|z| < \varepsilon$, alors le système*

$$h_1(x) = z_1, \dots, h_m(x) = z_m$$

admet une solution x dans X . Alors $x_0 \in C$ est solution de $(\mathcal{P})$ si et seulement si il existe $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{R}^+)^n \times \mathbb{R}^m$ tels que $\lambda_i g_i(x_0) = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et

$$0 \in \partial f(x_0) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \partial g_i(x_0) + \sum_{j=1}^m \mu_j \nabla h_j(x_0).$$

4.4 Approximation de Moreau-Yosida et méthode numérique

A présent, nous allons obtenir quelques résultats permettant de construire des suites approchant le minimum d'une fonction, s'il existe. La méthode consiste à transformer la fonction à minimiser en une fonction plus régulière à l'aide de l'opération d'inf-convolution introduite dans le chapitre précédent. En général, cette approximation est étudiée sur des espaces de Hilbert car ils possèdent des propriétés géométriques très riches et facilitent grandement les preuves. Ici, nous nous proposons d'élargir un peu le cadre quand c'est possible, sans toutefois aborder le sujet sur des espaces de Banach généraux car il n'existe pas à ce jour de techniques d'approximation qui fonctionnent dans un cadre aussi large que celui-ci.

4.4.1 La régularisation de Moreau-Yosida

Définition 4.4.1. Un espace de Banach E est *uniformément convexe* si, pour tout $\varepsilon \in]0, 2]$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1 \text{ et } \|x - y\| \geq \varepsilon \Rightarrow \left\| \frac{x + y}{2} \right\| \leq 1 - \eta. \quad (*)$$

Si $\varepsilon \in]0, 2]$, on note $\eta(\varepsilon)$ le plus grand $\eta > 0$ tel que $(*)$; c'est le *module de convexité* de E en ε .

Cette condition peut paraître très restrictive, mais en réalité, il existe bon nombre d'espaces de Banach bénéficiant de cette propriété (par exemple, les espaces L^p lorsque $1 < p < +\infty$ [13]). Cette propriété d'uniforme convexité est purement géométrique et dépend de la norme de l'espace et non de la topologie.

Exemple 4.4.1. Soit H un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire que l'on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$, comme de coutume. Cet espace muni de la norme induite par le produit scalaire est uniformément convexe. En effet, soient $\varepsilon \in]0, 2]$ et $x, y \in E$ tels que $\|x - y\| \geq \varepsilon$, $\|x\| \leq 1$ et $\|y\| \leq 1$. On rappelle la règle du parallélogramme obtenue simplement en développant le premier membre

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \forall x, y \in H.$$

On a donc

$$\left\| \frac{x + y}{2} \right\|^2 = \frac{1}{4}(2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x - y\|^2) \leq \frac{1}{4}(4 - \varepsilon^2)$$

et par conséquent

$$\left\| \frac{x + y}{2} \right\| \leq \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}} < 1.$$

Il suffit alors de prendre $\eta = 1 - \sqrt{1 - (\varepsilon^2/4)}$.

En particulier, ceci montre que $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne est uniformément convexe. Néanmoins, si $\mathbb{R}^n$ est muni de la norme 1, i.e. $|x|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$, alors l'espace n'est plus uniformément convexe. De fait, supposons que $\varepsilon = 1$ et qu'il existe $\eta > 0$ tel que

$$|x|_1 \leq 1, |y|_1 \leq 1, |x - y|_1 \geq 1 \Rightarrow \left| \frac{x + y}{2} \right|_1 \leq 1 - \eta.$$

Or, en prenant deux vecteurs distincts e_i et e_j de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a $|e_i|_1 = 1, |e_j|_1 = 1, |e_i - e_j|_1 = 2 > 1$ et

$$\left| \frac{e_i + e_j}{2} \right|_1 = 1 > 1 - \eta,$$

ce qui est absurde. Ainsi, l'uniforme convexité ne dépend que de la norme choisie.

Cette propriété est évidemment conservée par isométrie. Voici également un autre type d'espace de Banach.

Définition 4.4.2. Un espace de Banach est *strictement convexe* si et seulement si

$$\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, x \neq y \Rightarrow \left\| \frac{x + y}{2} \right\| < 1.$$

Remarque 4.4.1. De façon équivalente, on dit que E est strictement convexe si et seulement si

$$\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, x \neq y, \lambda \in]0, 1[\Rightarrow \|\lambda x + (1 - \lambda)y\| < 1.$$

Cela découle du fait que tout élément de la forme $\lambda x + (1 - \lambda)y$ avec $\lambda \in]0, 1[, x \neq y, \|x\| \leq 1$ et $\|y\| \leq 1$ est le milieu d'un segment inclus dans $[x, y]$.

Ce type d'espace bénéficie aussi de la propriété suivante.

Proposition 4.4.1 ([34]). *Tout espace de Banach uniformément convexe est réflexif et strictement convexe.*

Démonstration. Vu la définition de l'uniforme convexité, il est évident que E est strictement convexe. Montrons que cet espace est réflexif. On procède par l'absurde et on suppose que E est uniformément convexe et non-réflexif. Par le théorème de Goldstine (lemme 2.2.3), $\mathcal{J}(\overline{B}(0, 1))$ est faiblement- $*$ dense dans la boule unité fermée de $(E^{**}, \|\cdot\|_{**})$ que l'on va noter B_{**} . Autrement dit, $\overline{\mathcal{J}(\overline{B}(0, 1))}^{\sigma^*(E^*, E^{**})} = B_{**}$. Puisque E n'est pas réflexif, il existe $\zeta \in E^{**} \setminus \mathcal{J}(E)$. On peut supposer que $\|\zeta\|_{**} = 1$, quitte à diviser ζ par sa norme. On a alors $\zeta \notin \mathcal{J}(\overline{B}(0, 1))$. Notons d la distance entre ζ et $\mathcal{J}(\overline{B}(0, 1))$ pour la norme $\|\cdot\|_{**}$. Comme $\{\zeta\}$ est compact et $\mathcal{J}(\overline{B}(0, 1))$ est fermé (car $\mathcal{J}$ est une isométrie²), on a $d > 0$. Prenons $\varepsilon \in]0, \min(2, d)]$ et considérons le module de convexité η de E en ε . Vu que

$$\|\zeta\|_{**} = \sup_{\|\xi\|_{**} \leq 1} |\langle \zeta, \xi \rangle| = 1,$$

2. En effet, soit $(\mathcal{J}_{x_m})_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{J}(\overline{B}(0, 1))$ qui converge vers ξ . Cette suite est de Cauchy. Par isométrie, $\|\mathcal{J}_{x_m} - \mathcal{J}_{x_n}\|_{**} = \|x_m - x_n\|$ et $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E . Puisque E est complet, $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite de $\overline{B}(0, 1)$ qui converge vers une limite x qui appartient $\overline{B}(0, 1)$ car ce dernier est fermé. Par continuité, $\mathcal{J}_{x_m} \rightarrow \mathcal{J}_x$ et par unicité de la limite, $\xi = \mathcal{J}_x$.

il existe une suite $(\xi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ telle que $\|\xi_m\|_* \leq 1$ et telle que $|\langle \zeta, \xi_m \rangle| \rightarrow 1$ si $m \rightarrow +\infty$. Il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $|\langle \zeta, \xi_M \rangle - 1| < \eta(\varepsilon)/2$. Posons

$$V = \left\{ \mu \in E^{**} : |\langle \mu, \xi_M \rangle - 1| < \frac{\eta(\varepsilon)}{2} \right\}.$$

Il s'agit d'un voisinage faible-* de ζ et comme ζ est faiblement-* adhérent à $\mathcal{J}(\overline{B}(0, 1))$, on a $V \cap \mathcal{J}(\overline{B}(0, 1)) \neq \emptyset$. Soient $\mu_1, \mu_2 \in V \cap \mathcal{J}(\overline{B}(0, 1))$. On a

$$2 - |\langle \mu_1 + \mu_2, \xi_M \rangle| \leq |1 - \langle \mu_1, \xi_M \rangle| + |1 - \langle \mu_2, \xi_M \rangle| < \eta(\varepsilon)$$

et $|\langle \mu_1 + \mu_2, \xi_M \rangle| > 2 - \eta(\varepsilon)$. On en déduit que $\|\mu_1 + \mu_2\|_{**} > 2 - \eta(\varepsilon)$. Donc,

$$\left\| \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} \right\|_{**} > 1 - \frac{\eta(\varepsilon)}{2} > 1 - \eta(\varepsilon).$$

Il en découle que $\|\mu_1\|_{**} > 1$, $\|\mu_2\|_{**} > 1$ ou $\|\mu_1 - \mu_2\|_{**} < \varepsilon$. Comme $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{J}(\overline{B}(0, 1)) \subset B_{**}$, on a $\|\mu_1 - \mu_2\|_{**} < \varepsilon$. Donc, $V \cap \mathcal{J}(\overline{B}(0, 1)) \subset \mu_1 + \varepsilon B_{**}$. En particulier, on a $\|\zeta - \mu_1\|_{**} < \varepsilon \leq d$ avec $\mu_1 \in \mathcal{J}(\overline{B}(0, 1))$, ce qui contredit le fait que d est la distance entre ζ et $\mathcal{J}(\overline{B}(0, 1))$. $\square$

Voici le procédé de régularisation qui nous intéresse.

Définition 4.4.3. Soient E un espace de Banach uniformément convexe, $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre convexe semi-continue inférieurement et $\varepsilon > 0$. L'approximation de Moreau-Yosida de f à l'ordre $\varepsilon > 0$ est la fonction $f_\varepsilon : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ définie par

$$f_\varepsilon = f \oplus \frac{1}{2\varepsilon} \|\cdot\|^2.$$

Explicitement, on a

$$f_\varepsilon(z) = \inf_{x \in E} f(x) + \frac{1}{2\varepsilon} \|z - x\|^2 \quad \forall z \in E.$$

Il est légitime de nous demander s'il existe des points en lesquels la borne inférieure intervenant dans f_ε est atteinte.

Lemme 4.4.1. Supposons que E est uniformément convexe et soit $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue croissante telle que $\psi(0) = 0$. Alors la fonction $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ définie par

$$f(x) = \int_0^{\|x\|} \psi(t) dt$$

est convexe. Si, de plus, ψ est strictement croissant, alors f est strictement convexe.

Démonstration. Définissons la fonction

$$I : r \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \int_0^r \psi(t) dt & \text{si } r \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $dI/dt = \psi$. Comme ψ est croissant, la fonction I est forcément convexe. Elle est aussi croissante. Si ψ est strictement croissant, la fonction I est strictement convexe et strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Puisque $f = I \circ \|\cdot\|$, cette fonction est

convexe en appliquant la proposition 3.1.17. Supposons ψ strictement croissant. Soient $x, y \in E$ deux points distincts et $\lambda \in]0, 1[$. On envisage deux cas. Le premier est $\|x\| \neq \|y\|$. Dans ce cas, comme I est strictement convexe et croissant, on a

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq I(\lambda\|x\| + (1 - \lambda)\|y\|) < \lambda I(\|x\|) + (1 - \lambda)I(\|y\|) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Supposons désormais que $\|x\| = \|y\|$. Puisque l'espace est strictement convexe, on obtient

$$\left\| \lambda \frac{x}{\|x\|} + (1 - \lambda) \frac{y}{\|y\|} \right\| < 1$$

et $\|\lambda x + (1 - \lambda)y\| < \|x\|$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= I(\|\lambda x + (1 - \lambda)y\|) \\ &< I(\|x\|) = \lambda I(\|x\|) + (1 - \lambda)I(\|y\|), \end{aligned}$$

d'où la conclusion. $\square$

Corollaire 4.4.1. *Si E est uniformément convexe, alors $\|\cdot\|^2$ est une fonction strictement convexe.*

Démonstration. On définit $\psi(t) = 2t$ pour tout $t \geq 0$ et $\psi(t) = t$ si $t < 0$. De cette façon, la fonction ψ est strictement croissante, continue et $\psi(0) = 0$. Il en découle que la fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_0^{\|x\|} \psi(t) dt = \|x\|^2$$

est strictement convexe par le lemme 4.4.1. $\square$

Proposition 4.4.2 ([32]). *Soient E un espace de Banach uniformément convexe, $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre convexe semi-continue inférieurement telle que $\text{dom}(f)^\circ \neq \emptyset$ et $\varepsilon > 0$. Pour tout $z \in E$, on définit la fonction $f_{z,\varepsilon} : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ par*

$$f_{z,\varepsilon}(x) = f(x) + \frac{1}{2\varepsilon} \|z - x\|^2 \quad \forall x \in E.$$

Alors $f_{z,\varepsilon}$ admet un unique minimum x_0 . Le point x_0 est un minimum de $f_{z,\varepsilon}$ si et seulement si $0 \in \partial f(x_0) - \varepsilon^{-1} \mathcal{D}(z - x_0)$. De plus, si E est de Hilbert, alors x_0 est un minimum de $f_{z,\varepsilon}$ si et seulement si

$$\frac{z - x_0}{\varepsilon} \in \partial f(x_0)$$

auquel cas, on a en fait

$$x_0 = (I + \varepsilon \partial f)^{-1}(z).$$

Démonstration. Vu que f et $\|\cdot\|^2$ sont propres, convexes et sci, on tire que $f_{z,\varepsilon}$ est aussi propre convexe et sci. De plus, la proposition 3.2.9 montre qu'il existe $\xi \in E^*$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $f \geq \xi + b$. Puisque E est uniformément convexe, E est réflexif et strictement convexe. De plus, la fonction $f_{z,\varepsilon}$ est coercive puisque

$$\begin{aligned} f_{z,\varepsilon}(x) &\geq f(x) + \frac{1}{2\varepsilon} (\|x\| - \|z\|)^2 \\ &\geq \langle \xi, x \rangle + \frac{1}{2\varepsilon} (\|x\| - \|z\|)^2 + b \\ &\geq \|x\| \inf_{\|u\|=1} \langle \xi, u \rangle + \frac{1}{2\varepsilon} (\|x\|^2 + \|z\|^2 - 2\|x\|\|z\|) + b \end{aligned}$$

et ce dernier minorant converge vers $+\infty$ lorsque $\|x\| \rightarrow +\infty$. Remarquons que $\inf_{\|u\|=1} \xi \in \mathbb{R}$ car $\|\xi\|_*$ est fini. La stricte convexité de $\|\cdot\|^2$ découle du corollaire 4.4.1. Il s'ensuit que $f_{z,\varepsilon}$ est une fonction strictement convexe. La proposition 4.2.6 montre alors que $f_{z,\varepsilon}$ possède un unique minimum x_0 . Par la proposition 4.2.2, x_0 est un minimum si et seulement si $0 \in \partial f_{z,\varepsilon}(x_0)$. Par la proposition 3.5.6 et l'exemple 3.5.5, on a finalement

$$0 \in \partial f(x_0) + \frac{1}{\varepsilon} \partial \left(\frac{1}{2} \|z - \cdot\|^2 \right)(x_0) = \partial f(x_0) - \frac{1}{\varepsilon} \partial \left(\frac{1}{2} \|\cdot\|^2 \right)(z - x_0) = \partial f(x_0) - \frac{z - x_0}{\varepsilon}.$$

La conclusion en découle. $\square$

Définition 4.4.4. Si E est un espace de Banach uniformément convexe et $f \in \Gamma(E)$, alors la fonction $\mathcal{R}_\varepsilon : E \rightarrow E$ définie par

$$\mathcal{R}_\varepsilon(x) = \operatorname{argmin} f_{x,\varepsilon}$$

est la *résolvante* de f . Si E est de Hilbert, la résolvante est donnée explicitement par $\mathcal{R}_\varepsilon(x) = (I + \varepsilon \partial f)^{-1}(x)$.

Nous allons voir que ces fonctions jouissent de très belles propriétés de régularité lorsque l'espace possède la propriété additionnelle ci-dessous.

Définition 4.4.5. Un espace de Banach est *lisse* si la norme est G-différentiable sur $E \setminus \{0\}$.

Exemple 4.4.2. Si E est de Hilbert et si l'on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire associé, on peut vérifier que cet espace est lisse. Pour le voir, posons $f = \|\cdot\|$ et calculons sa dérivée directionnelle en $x \neq 0$ (par convexité, la dérivée directionnelle existe toujours). On a

$$f_{*x}(h) = \frac{d}{dt} \|x + th\|_{t=0} = \frac{d}{dt} \sqrt{\|x\|^2 + t^2 \|h\|^2 + 2t \langle x, h \rangle}_{t=0} = \frac{\langle x, h \rangle}{\|x\|}$$

pour tout $h \in E$. On voit directement que f_{*x} est linéaire et continu. Donc la norme est G-différentiable sur $E \setminus \{0\}$.

Ces espaces ne sont pas anodins (par exemple, les espaces L^p lorsque $1 < p < +\infty$ [13]). Voici un résultat qui lie l'opérateur de dualité et le caractère lisse de l'espace.

Proposition 4.4.3. *Un espace de Banach est lisse si et seulement si l'opérateur de dualité est une fonction.*

Démonstration. Supposons que E est lisse. La norme est G-différentiable sur $E \setminus \{0\}$. Il s'ensuit que $\frac{1}{2} \|\cdot\|^2$ est G-différentiable sur $E \setminus \{0\}$. Par conséquent,

$$\mathcal{D}(x) = \partial \left(\frac{1}{2} \|\cdot\|^2 \right)(x)$$

est un singleton pour tout $x \in E \setminus \{0\}$ et

$$\mathcal{D}(0) = \{\xi \in E^* : \langle \xi, 0 \rangle = \|\xi\|_*^2 = 0\} = \{0\}.$$

Donc l'opérateur de dualité est une fonction. Supposons que $\mathcal{D} : E \rightrightarrows E^*$ est une fonction. Donc $\partial \left(\frac{1}{2} \|\cdot\|^2 \right)(x)$ est un singleton pour tout $x \in E \setminus \{0\}$. Par la proposition 3.6.14, $\frac{1}{2} \|\cdot\|^2$ est G-différentiable sur $E \setminus \{0\}$. Par composition avec la racine carrée et en multipliant par 2, $\|\cdot\|$ est G-différentiable sur $E \setminus \{0\}$ et la proposition est démontrée. $\square$

Proposition 4.4.4 ([4], [44]). Soient E un espace de Banach uniformément convexe et lisse, $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre convexe semi-continue inférieurement telle que $\text{dom}(f)^\circ \neq \emptyset$ et $\varepsilon > 0$. Alors les assertions suivantes sont vérifiées :

(i) On a $f_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\varepsilon} \|\mathcal{R}_\varepsilon(x) - x\|^2 + f(\mathcal{R}_\varepsilon(x))$ pour tout $x \in E$.

(ii) On a

$$f(\mathcal{R}_\varepsilon(x)) \leq f_\varepsilon(x) \leq f(x) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in E.$$

(iii) On a $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f_\varepsilon(x) = f(x)$ pour tout $x \in E$.

(iv) La fonction f_ε est G -différentiable et $\nabla f_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1} \mathcal{D}(x - \mathcal{R}_\varepsilon(x))$. Dans un espace de Hilbert, on a

$$\nabla f_\varepsilon(x) = \frac{x - (I + \varepsilon \partial f)^{-1}(x)}{\varepsilon}.$$

Démonstration. Le point (i) est trivial, de même que le point (ii). Montrons le point (iii). Il est clair que $f_\varepsilon(x)$ augmente lorsque $\varepsilon > 0$ diminue. Notons $M = \sup_{\varepsilon > 0} f_\varepsilon(x)$. Vu (ii), on a clairement $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f_\varepsilon(x) = M \leq f(x)$. Il reste à montrer que $f(x) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f_\varepsilon(x)$. Nous savons que

$$M \geq f_\varepsilon(x) = f(\mathcal{R}_\varepsilon(x)) + \frac{1}{2\varepsilon} \|\mathcal{R}_\varepsilon(x) - x\|^2.$$

Posons $h = f + \frac{1}{2} \|x - \cdot\|^2$. On vérifie que h est coercif. En effet, puisque $f \in \Gamma(E)$, il existe $\xi \in E^*$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $\xi + b \preceq f$. Donc,

$$h(z) \geq \langle \xi, z \rangle + b + \frac{1}{2} (\|z\| - \|x\|)^2 \geq \|z\|^2 \left(\frac{\inf_{\|y\| \leq 1} \langle \xi, y \rangle}{\|z\|} + \frac{b}{\|z\|^2} + \frac{1}{2} \left(1 - 2 \frac{\|x\|}{\|z\|} + \frac{\|x\|^2}{\|z\|^2} \right) \right)$$

et ce minorant tend vers $+\infty$ lorsque $\|z\| \rightarrow +\infty$, ce qui montre la coercivité de h . De plus, si $\varepsilon \in]0, 1[$, alors

$$h(\mathcal{R}_\varepsilon(x)) = f(\mathcal{R}_\varepsilon(x)) + \frac{1}{2} \|\mathcal{R}_\varepsilon(x) - x\|^2 \leq f_\varepsilon(x) \leq M.$$

Donc, $\mathcal{R}_\varepsilon(x) \in \Gamma_M(h)$. Le corollaire 4.2.2 nous indique que $\Gamma_M(h)$ est faiblement compact. Donc il est borné. Il en découle que $\sup_{\varepsilon \in]0, 1[} \|\mathcal{R}_\varepsilon(x)\| < +\infty$. Au total, on a

$$M \geq f_\varepsilon(x) \geq \langle \xi, \mathcal{R}_\varepsilon(x) \rangle + b + \frac{1}{2\varepsilon} \|\mathcal{R}_\varepsilon(x) - x\|^2 \geq \|\mathcal{R}_\varepsilon(x)\| \inf_{\|y\| \leq 1} \langle \xi, y \rangle + b + \frac{1}{2\varepsilon} \|\mathcal{R}_\varepsilon(x) - x\|^2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}_\varepsilon(x) - x\|^2 &\leq 2\varepsilon(M - b - \|\mathcal{R}_\varepsilon(x)\| \inf_{\|y\| \leq 1} \langle \xi, y \rangle) \\ &= 2\varepsilon(M - b + \|\mathcal{R}_\varepsilon(x)\| \sup_{\|y\| \leq 1} \langle -\xi, y \rangle) \\ &\leq 2\varepsilon(M - b + \|\mathcal{R}_\varepsilon(x)\| \|\xi\|_*) \\ &\leq 2\varepsilon(M - b + \sup_{\eta \in]0, 1[} \|\mathcal{R}_\eta(x)\| \|\xi\|_*) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

si $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Donc $\mathcal{R}_\varepsilon(x) \rightarrow x$ si $\varepsilon \rightarrow 0^+$. En utilisant le fait que f est sci, on conclut que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f_\varepsilon(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(\mathcal{R}_\varepsilon(x)) + \frac{1}{2\varepsilon} \|\mathcal{R}_\varepsilon(x) - x\|^2 \geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(\mathcal{R}_\varepsilon(x)) = f(x),$$

ce qui prouve (iii). Pour finir, montrons que f_ε est G-différentiable. Dans ce cas, vu que l'espace est lisse, l'opérateur de dualité est une fonction et on sait que

$$\partial f_\varepsilon(x) = \partial \left(f \oplus \frac{1}{2\varepsilon} \|\cdot\|^2 \right)(x) = \partial f(\mathcal{R}_\varepsilon(x)) \cap \varepsilon^{-1} \mathcal{D}(x - \mathcal{R}_\varepsilon(x))$$

au vu de la proposition 3.5.8. On a également

$$0 \in \partial f(\mathcal{R}_\varepsilon(x)) - \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{D}(x - \mathcal{R}_\varepsilon(x))$$

et donc, $\varepsilon^{-1} \mathcal{D}(x - \mathcal{R}_\varepsilon(x)) \subset \partial f(\mathcal{R}_\varepsilon(x))$. Il en découle que $\partial f_\varepsilon(x)$ est un singleton. De plus, la fonction f_ε est continue car $\text{dom}(f_\varepsilon) = E$ et f_ε est sci. Pour voir que f_ε est sci, il suffit de partir de la définition

$$f_\varepsilon = f \oplus \frac{1}{2\varepsilon} \|\cdot\|^2.$$

Comme les deux termes de la convolution appartiennent à $\Gamma(E)$ et comme E est réflexif, il existe $h_1, h_2 \in \Gamma(E^*)$ tels que $f = h_1^*$ et $\frac{1}{2\varepsilon} \|\cdot\|^2 = h_2^*$ par la proposition 3.6.6. Donc, $f_\varepsilon = h_1^* \oplus h_2^* = (h_1 + h_2)^*$ par le point (vi) de la proposition 3.6.8. La proposition 3.6.3 nous montre que f_ε est sci. Donc f_ε est G-différentiable par la proposition 3.6.14 et la propriété est démontrée. $\square$

Pour exploiter complètement cette notion, on aimerait pouvoir approximer un minimum de f par les minima de f_ε qui sont a priori plus aisés à calculer grâce à la G-différentiabilité. On voit tout d'abord que f et chacune de ses régularisées ont la même borne inférieure.

Proposition 4.4.5. *Si E est un espace de Banach uniformément convexe et lisse et $f \in \Gamma(E)$, alors $\inf_{x \in E} f(x) = \inf_{x \in E} f_\varepsilon(x)$ pour tout $\varepsilon > 0$.*

Démonstration. De fait, le point (ii) de la proposition précédente nous montre que

$$\inf_{z \in E} f(z) \leq f(\mathcal{R}_\varepsilon(x)) \leq f_\varepsilon(x) \leq f(x) \quad \forall x \in E.$$

Donc,

$$\inf_{z \in E} f(z) \leq \inf_{x \in E} f_\varepsilon(x) \leq \inf_{x \in E} f(x).$$

$\square$

Bien entendu, ce résultat ne nous assure nullement l'existence d'un minimum pour f_ε . En fait, si f n'est pas borné inférieurement par un réel, la proposition ci-dessus nous indique que f_ε n'admet pas de minimum.

4.4.2 Méthode proximale

Nous allons présenter une méthode permettant de construire une suite de E qui converge vers le minimum d'une fonction f donnée. Dans cette section, nous nous restreignons aux espaces de Hilbert³.

3. Il existe une méthode semblable pour des espaces de Banach réflexifs. Cette variante utilise une application qui partage certaines propriétés de la distance au lieu du carré de la norme dans les approximations $f_{z,\varepsilon}$. Cette application est appelée divergence de Bregman. Les preuves qui suivent se retrouvent alors considérablement allongées. On peut retrouver les détails techniques dans [7].

Description de la méthode : On suppose que $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est une fonction propre convexe semi-continue inférieurement. Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres strictement positifs. Fixons $x_0 \in E$ et calculons

$$\{x_1\} = \mathcal{R}_{\varepsilon_0}(x_0) = \operatorname{argmin}_{x \in E} f(x) + \frac{1}{2\varepsilon_0} \|x_0 - x\|^2 = (I + \varepsilon_0 \partial f)^{-1}(x_0).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on construit x_{n+1} à partir de x_n en résolvant

$$\{x_{n+1}\} = \mathcal{R}_{\varepsilon_n}(x_n) = \operatorname{argmin}_{x \in E} f(x) + \frac{1}{2\varepsilon_n} \|x_n - x\|^2 = (I + \varepsilon_n \partial f)^{-1}(x_n).$$

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi construite sera appelée *une suite proximale de f* .

Par construction, on a directement l'inégalité suivante

$$f(x_{n+1}) \leq f(x_n) + \frac{1}{2\varepsilon_n} \|x_{n+1} - x_n\|^2 \leq f(x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

et la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Pour avoir la convergence vers le minimum, il faut imposer une hypothèse particulière à la suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Proposition 4.4.6 ([32]). *Soient E un espace de Hilbert et $f \in \Gamma(E)$. Supposons que $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs vérifiant $\sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n = +\infty$ ⁴ et que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite proximale de f associée à $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Alors $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante telle que $f(x_{n+1}) < f(x_n)$ si $x_{n+1} \neq x_n$ et qui vérifie*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \inf_{x \in E} f(x).$$

De plus, si f admet au moins un minimum, alors on a une majoration de l'erreur donnée par

$$|f(x_{n+1}) - \inf_{x \in E} f(x)| \leq \frac{\operatorname{dist}(x_0, \operatorname{argmin}(f))^2}{2 \sum_{i=1}^n \varepsilon_i} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Démonstration. Le résultat sur la décroissance découle de ce qui a été dit plus haut. En appliquant la proposition 4.4.2, nous avons

$$\frac{x_n - x_{n+1}}{\varepsilon_n} \in \partial f(x_{n+1}),$$

ce qui se traduit par

$$\left\langle \frac{x_n - x_{n+1}}{\varepsilon_n}, y - x_{n+1} \right\rangle \leq f(y) - f(x_{n+1}) \quad \forall y \in E.$$

Dans un espace de Hilbert, on dispose de la formule du parallélogramme

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

et de la formule de polarisation

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

4. Par exemple, on peut prendre $\varepsilon_n = 1/n$. Il est connu que la série harmonique $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n$ ne converge pas dans $\mathbb{R}$, mais converge vers $+\infty$.

On a donc

$$\begin{aligned}
& 2\varepsilon_n(f(x_{n+1}) - f(y)) \\
& \leq 2\langle x_{n+1} - x_n, y - x_{n+1} \rangle \\
& = \frac{1}{2}(\|y - x_n\|^2 - \|2x_{n+1} - x_n - y\|^2) \quad \text{par la formule de polarisation} \\
& = \frac{1}{2}(\|y - x_n\|^2 - \|(x_{n+1} - x_n) + (x_{n+1} - y)\|^2) \\
& = \frac{1}{2}(2\|y - x_n\|^2 - 2\|x_n - x_{n+1}\|^2 - 2\|x_{n+1} - y\|^2) \quad \text{par la formule du parallélogramme} \\
& = \|y - x_n\|^2 - \|x_n - x_{n+1}\|^2 - \|y - x_{n+1}\|^2 \\
& \leq \|y - x_n\|^2 - \|y - x_{n+1}\|^2.
\end{aligned}$$

En sommant les inégalités ci-dessus pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on trouve

$$2 \sum_{i=0}^n \varepsilon_i(f(x_{i+1}) - f(y)) \leq \sum_{i=0}^n \|y - x_i\|^2 - \|y - x_{i+1}\|^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Autrement dit,

$$2 \sum_{i=0}^n \varepsilon_i(f(x_{i+1}) - f(y)) \leq \|y - x_0\|^2 - \|y - x_{n+1}\|^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Etant donné que la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, on a $f(x_{i+1}) \geq f(x_{n+1})$ pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$. Donc,

$$f(x_{n+1}) - f(y) \leq \frac{\|y - x_0\|^2}{2 \sum_{i=1}^n \varepsilon_i}.$$

En particulier, si $l = \inf_{x \in E} f(x)$, alors il existe une suite $(z_j)_{j \in \mathbb{N}}$ telle que $f(z_j) \rightarrow l$ si $j \rightarrow +\infty$ et ce qui précède montre que

$$f(x_{n+1}) - f(z_j) \leq \frac{\|z_j - x_0\|^2}{2 \sum_{i=1}^n \varepsilon_i} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

En passant successivement à la limite pour $n \rightarrow +\infty$, puis pour $j \rightarrow +\infty$, on trouve

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) - l \leq 0.$$

L'autre inégalité étant triviale, on a finalement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \inf_{x \in E} f(x).$$

La majoration de l'erreur découle directement de ce qui vient d'être montré. $\square$

On peut montrer qu'une suite proximale converge faiblement vers un minimum, s'il existe. Démontrons d'abord un lemme.

Lemme 4.4.2 ([32]). *Soient S est une partie non-vide d'un espace de Hilbert E et $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de E . Supposons que toute limite d'une sous-suite de $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ appartient à S (E15) et que pour tout $x \in S$, $\|x_m - x\|$ converge vers une limite finie lorsque $m \rightarrow +\infty$. Alors $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers un élément de S .*

Démonstration. Comme E est de Hilbert, il est réflexif. On voit que $\|x_m\| \leq \|x_m - x\| + \|x\|$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $x \in S$. Vu que $\|x_m - x\|$ converge dans $\mathbb{R}$ lorsque $m \rightarrow +\infty$, on en tire que la suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est bornée. Par le corollaire 2.2.4, il suffit de montrer que toute sous-suite faiblement convergente de $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers une même limite. Supposons que les sous-suites $(x_{k(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ et $(x_{k'(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ convergent faiblement vers x et x' respectivement. Par hypothèse, on a nécessairement $x \in S$ et $x' \in S$. On a donc

$$\|x_{k(m)} - x'\|^2 = \|x_{k(m)} - x + x - x'\|^2 = \|x_{k(m)} - x\|^2 + \|x - x'\|^2 + 2\langle x_{k(m)} - x, x - x' \rangle. \quad (*)$$

Puisque $x_{k(m)} \rightharpoonup x$, on a $\langle x_{k(m)} - x, x - x' \rangle \rightarrow 0$ si $m \rightarrow +\infty$. Il vient

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \|x_{k(m)} - x'\|^2 = \|x - x'\|^2 + \lim_{m \rightarrow +\infty} \|x_{k(m)} - x\|^2 \geq \lim_{m \rightarrow +\infty} \|x_{k(m)} - x\|^2.$$

De façon similaire, on voit que

$$\|x_{k'(m)} - x\|^2 = \|x_{k'(m)} - x'\|^2 + \|x - x'\|^2 + 2\langle x_{k'(m)} - x', x' - x \rangle$$

et un passage à la limite sur m montre que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \|x_{k'(m)} - x\|^2 = \|x - x'\|^2 + \lim_{m \rightarrow +\infty} \|x_{k'(m)} - x'\|^2 \geq \lim_{m \rightarrow +\infty} \|x_{k'(m)} - x'\|^2.$$

Comme $(\|x_m - x\|)_{m \in \mathbb{N}}$ et $(\|x_m - x'\|)_{m \in \mathbb{N}}$ sont des suites convergentes, leurs sous-suites convergent vers les mêmes limites et on a

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \|x_{k(m)} - x\|^2 = \lim_{m \rightarrow +\infty} \|x_{k'(m)} - x\|^2 \text{ et } \lim_{m \rightarrow +\infty} \|x_{k(m)} - x'\|^2 = \lim_{m \rightarrow +\infty} \|x_{k'(m)} - x'\|^2.$$

Donc,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \|x_{k(m)} - x\|^2 \geq \lim_{m \rightarrow +\infty} \|x_{k(m)} - x'\|^2,$$

ce qui montre que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \|x_{k(m)} - x\|^2 = \lim_{m \rightarrow +\infty} \|x_{k(m)} - x'\|^2$$

et $x = x'$ en vertu de (*). □

Proposition 4.4.7. Soient E un espace de Hilbert et $f \in \Gamma(E)$. Supposons que $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs vérifiant $\sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n = +\infty$ et que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite proximale de f associée à $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- (i) Si $\operatorname{argmin}(f) \neq \emptyset$, alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers un minimum.
- (ii) Si $\operatorname{argmin}(f) = \emptyset$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\| = +\infty$.

Démonstration. (i) Supposons que $\operatorname{argmin}(f) \neq \emptyset$ et posons $S = \operatorname{argmin}(f)$. Il suffit de montrer qu'on est dans de bonnes conditions pour appliquer le lemme 4.4.2. Tout d'abord, soit $(x_{k(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ une sous-suite de $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ qui converge faiblement vers $x \in E$. La proposition 4.4.6 nous indique que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} f(x_{k(m)}) = \inf_{z \in E} f(z).$$

De plus, f est convexe et sci, donc sq-sci. Vu la proposition 3.2.8, f est faiblement sq-sci. Il vient $\liminf_{m \rightarrow +\infty} f(x_{k(m)}) = f(x)$. Il en découle que

$$f(x) = \liminf_{m \rightarrow +\infty} f(x_{k(m)}) \leq \lim_{m \rightarrow +\infty} f(x_{k(m)}) = \inf_{z \in E} f(z).$$

D'où $x \in S$. Ensuite, fixons $x \in S$ et montrons que $\|x_m - x\|$ converge vers une limite finie lorsque $m \rightarrow +\infty$. Nous savons que $f(x_m) \geq f(x)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Par construction,

$$\frac{x_m - x_{m+1}}{\varepsilon_m} \in \partial f(x_{m+1})$$

et

$$\left\langle \frac{x_m - x_{m+1}}{\varepsilon_m}, x - x_{m+1} \right\rangle \leq f(x) - f(x_{m+1}) \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} & 2\varepsilon_m(f(x_{m+1}) - f(x)) \\ & \leq 2\langle x_m - x_{m+1}, x_{m+1} - x \rangle \\ & = \frac{1}{2}(\|x_m - x\|^2 - \|x + x_m - 2x_{m+1}\|^2) \quad \text{par la formule de polarisation} \\ & = \frac{1}{2}(-2\|x - x_{m+1}\|^2 - 2\|x_m - x_{m+1}\|^2 + 2\|x_m - x\|^2) \quad \text{par la formule du parallélogramme} \\ & = \|x_m - x\|^2 - \|x_m - x_{m+1}\|^2 - \|x - x_{m+1}\|^2 \\ & \leq \|x_m - x\|^2 - \|x - x_{m+1}\|^2. \end{aligned}$$

Puisque $f(x_{m+1}) \geq f(x)$, nous avons $\|x_{m+1} - x\|^2 \leq \|x_m - x\|^2$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Vu que la suite $(\|x_m - x\|^2)_{m \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, on déduit que $\lim_{m \rightarrow +\infty} \|x_m - x\|^2 = \inf_{m \in \mathbb{N}} \|x_m - x\|^2 \in \mathbb{R}$.

(ii) Supposons que $\operatorname{argmin}(f) = \emptyset$ et que $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est borné. Il existe $R > 0$ tel que $\|x_m\| \leq R$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Par réflexivité, la boule $\overline{B}(0, R)$ est faiblement compacte. On peut extraire une sous-suite $(x_{k(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ faiblement convergente vers un point x de la boule. Puisque f est convexe et sci, ce dernier est faiblement sq-sci. Donc

$$f(x) = \liminf_{m \rightarrow +\infty} f(x_{k(m)}) \leq \lim_{m \rightarrow +\infty} f(x_m) = \inf_{z \in E} f(z) = -\infty.$$

Il en découle que $x \in \operatorname{argmin}(f)$ (E16), ce qui est absurde car f est propre. $\square$

4.5 Application à l'étude d'équations aux dérivées partielles

Pour clore le travail, nous allons appliquer quelques-uns des concepts importants étudiés dans ce texte dans l'étude d'équations aux dérivées partielles non-linéaires. Un cas de figure assez connu est l'équation d'Euler-Lagrange qui est à la base de la formulation lagrangienne de la mécanique classique. Dans un premier temps, nous allons examiner très brièvement cette équation et nous verrons qu'elle est fortement liée à un problème d'optimisation. Ensuite, nous étudierons une équation très particulière qui est souvent à la base de phénomènes non-linéaires en mécanique des fluides : l'équation de p -Laplace. Nous établirons un théorème d'existence et d'unicité de solutions faibles. Par dualité, nous pourrions également déduire rapidement un autre résultat d'existence et d'unicité de solutions d'une équation aux dérivées partielles qui est, elle, soumise à une contrainte. Certains résultats sur les espaces de Sobolev sont requis pour aborder cette section. Le lecteur est invité à lire l'annexe en fin d'ouvrage pour avoir en vue les propriétés dont nous avons besoin.

4.5.1 Equation d'Euler-Lagrange

Cette équation est à la base de la formulation lagrangienne de la physique classique. Comme nous le savons, cette équation est équivalente au principe variationnel de Hamilton qui stipule que le mouvement réel d'un système mécanique est l'extrémum de l'intégrale d'action. Nous allons voir une version plus générale du lien existant entre l'équation d'Euler-Lagrange et ce principe variationnel.

En dehors de son utilité en physique, cette équation permet souvent d'obtenir un second point de vue sur une équation différentielle. Plus précisément, nous pouvons transformer une telle équation différentielle en un problème d'optimisation parfois plus simple à résoudre en pratique. Cette technique est surtout très utile pour étudier les équations aux dérivées partielles qui ne sont pas linéaires car cette classe d'équation ne possède pas une théorie générale permettant de résoudre tous les cas de figure. Malheureusement, cette méthode n'est pas générale.

Dans cette section, fixons Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et supposons que sa frontière Σ est C^1 -régulière (voir annexe A). Soient une fonction $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et une fonction $g : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$. Il est raisonnable de supposer que f est une fonction convexe pour pouvoir appliquer nos résultats établis précédemment. Définissons la fonctionnelle $I : C^2(\overline{\Omega})^5 \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$I(u) = \int_{\Omega} f(x, u(x), \nabla u(x)) dx \quad \forall u \in C^2(\overline{\Omega}).$$

Cette fonctionnelle a été définie sur $C^2(\overline{\Omega})$ et elle est convexe, vu la convexité de f et la linéarité de l'intégrale. On traite le problème d'optimisation suivant

$$\text{Minimiser } I(u) \text{ sous la contrainte } u|_{\Sigma} = g. \quad (\mathcal{P})$$

Nous allons voir que ce problème de minimisation de l'intégrale permet d'obtenir l'existence de solutions (au sens faible) de certaines équations aux dérivées partielles particulières.

Avant d'aller plus loin, fixons quelques notations. On notera $\partial_{x_i} f$ pour désigner la dérivée partielle de f par rapport à sa i -ème variable dans $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $\partial_y f$ la dérivée par rapport à la $n+1$ -ème variable et $\partial_{z_i} f$ la dérivée par rapport à sa $n+1+i$ -ème variable. La notation $\nabla_x f(x, y, z)$ (resp. $\nabla_z f$) est réservée pour le gradient de f par rapport à ses n premières (resp. n dernières) variables, les autres variables étant fixées.

Supposons d'abord que $u_0 \in C^2(\overline{\Omega})$ est solution de $(\mathcal{P})$. Dans ce cas,

$$\int_{\Omega} f(x, u_0(x), \nabla u_0(x)) dx = \inf_{u \in C^2(\overline{\Omega})} I(u) \quad \text{et} \quad u_0|_{\Sigma} = g.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et définissons $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $h(t) = I(u_0 + t\varphi)$. Il est clair que φ est nul sur Σ et que h est convexe. Il s'ensuit que $u + t\varphi = u = g$ sur Σ pour tout $t \in \mathbb{R}$. La fonction h possède un minimum en $t = 0$. Assez naturellement, comme $f \in C^2(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, on peut montrer que h est dérivable. Pour ce faire, il faut montrer que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{h(t+r) - h(t)}{r}$$

5. Il s'agit de l'espace des fonctions $u \in C^2(\Omega)$ telles que ses dérivées $\partial^\alpha u$ admettent une extension continue à $\overline{\Omega}$ lorsque $|\alpha| \leq 2$.

existe et est fini. Cette limite équivaut à

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_K \frac{1}{r} (f(x, u_0(x) + (t+r)\varphi(x), \nabla u_0(x) + (t+r)\nabla \varphi(x)) - f(x, u_0(x) + t\varphi(x), \nabla u_0(x) + t\nabla \varphi(x))) dx$$

où K désigne un compact contenant le support de φ (en dehors de ce compact, l'intégrand est nul). La fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto f(x, u_0(x) + t\varphi(x), \nabla u_0(x) + t\nabla \varphi(x)) \in \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ vu nos hypothèses. Cette dérivée vaut, en tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\partial_y f(x, u_0(x) + t\varphi(x), \nabla u_0(x) + t\nabla \varphi(x))\varphi(x) + \sum_{i=1}^n \partial_{z_i} f(x, u_0(x) + t\varphi(x), \nabla u_0(x) + t\nabla \varphi(x))\partial_i \varphi(x).$$

Elle est intégrable sur K par continuité sur le compact. De plus, elle est bornée par une constante qui est évidemment intégrable sur K . Le théorème de dérivation des intégrales paramétriques montre alors que h est dérivable et qu'on peut permuter la dérivée par rapport à t et l'intégrale. Vu que h atteint un minimum en 0, on a $\frac{dh}{dt}(0) = 0$. Autrement dit,

$$0 = \int_{\Omega} \left(\partial_y f(x, u_0(x), \nabla u_0(x))\varphi(x) + \sum_{i=1}^n \partial_{z_i} f(x, u_0(x), \nabla u_0(x))\partial_i \varphi(x) \right) dx.$$

Puisque le second terme est une dérivée au sens distribution, on a

$$0 = \int_{\Omega} \left(\partial_y f(x, u_0(x), \nabla u_0(x))\varphi(x) - \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} (\partial_{z_i} f(x, u_0(x), \nabla u_0(x)))\varphi(x) \right) dx.$$

L'égalité ci-dessus étant valable pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on obtient

$$\partial_y f(x, u_0(x), \nabla u_0(x)) - \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} (\partial_{z_i} f(x, u_0(x), \nabla u_0(x))) = 0$$

pour presque tout $x \in \Omega$. Par continuité, l'égalité a lieu partout sur Ω . Ceci montre que u_0 satisfait à l'équation d'Euler-Lagrange

$$\partial_y f(x, u(x), \nabla u(x)) - \operatorname{div} \nabla_z f(x, u(x), \nabla u(x)) = 0$$

où l'opérateur divergentiel porte sur la fonction $x \mapsto \nabla_z f(x, u(x), \nabla u(x))$. Néanmoins, rien ne prouve qu'une solution de l'équation d'Euler-Lagrange est un minimum de I .

Théorème 4.5.1 (Equation d'Euler-Lagrange dans $C^2(\overline{\Omega})$, [12]). *Si la fonction $u_0 \in C^2(\overline{\Omega})$ est un minimum de*

$$I(u) = \int_{\Omega} f(x, u(x), \nabla u(x)) dx$$

avec la condition de bord $u_0|_{\Sigma} = g$, alors u_0 est solution de l'équation d'Euler-Lagrange

$$\partial_y f(x, u(x), \nabla u(x)) - \operatorname{div} \nabla_z f(x, u(x), \nabla u(x)) = 0 \quad \forall x \in \Omega$$

avec la condition de bord $u|_{\Sigma} = g$. Réciproquement, si u_0 est solution de l'équation d'Euler-Lagrange, alors $\nabla I(u_0)|_{\mathcal{D}(\Omega)} = 0$.

Cependant, ce résultat n'est pas entièrement satisfaisant car il n'existe pas toujours de solutions dans $C^2(\overline{\Omega})$. Qui plus est, l'espace $C^2(\overline{\Omega})$ n'est pas de Banach car la convergence au sens de $C^2(\overline{\Omega})$ ne garantit pas que la limite est de classe C^2 . C'est pourquoi nous allons étendre le problème à un espace plus grand qui sera de Banach. Considérons l'espace de Sobolev

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \partial_i u \text{ distribution associée à une fonction de } L^p(\Omega) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}\}$$

muni de la norme $\|\cdot\|_{W^{1,p}} : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow [0, +\infty[$ définie par

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^n \|\partial_i u\|_{L^p} \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Pour donner du sens à l'expression $u|_{\Sigma} = g$ dans $W^{1,p}(\Omega)$, il faut pouvoir étendre l'opérateur de restriction à l'espace de Sobolev entier. Afin de donner une signification à ceci, nous introduisons l'opérateur de trace

$$T : u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)|_{\overline{\Omega}} \mapsto u|_{\Sigma} \in L^p(\Sigma).$$

Par le théorème de traces (théorème A.0.2), nous pouvons étendre linéairement et continûment T à $W^{1,p}(\Omega)$ et définir $u|_{\Sigma}$ par $T(u)$ pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Il est possible de montrer que $\ker T$ contient l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$. L'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ sera noté $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Dès lors, on peut définir l'ensemble $W_g^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega) : T(u) = g\}$ et le problème de minimisation

$$\text{Minimiser } I(u) \text{ lorsque } u \in W_g^{1,p}(\Omega). \quad (\mathcal{P})$$

Mais une nouvelle difficulté vient s'ajouter : $W_g^{1,p}(\Omega)$ n'est pas un espace vectoriel, c'est un espace affiné. Cependant, il est souvent possible de transformer $(\mathcal{P})$ en un problème équivalent en prenant $I(\cdot + g)$ au lieu de I et comme condition de bord $T(u) = 0$. De cette façon, l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est bien vectoriel. Ainsi, nous pouvons parfois nous contenter de traiter le cas $g = 0$.

On dira que la solution u_0 du problème de minimisation dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ est une *solution faible* du problème d'Euler-Lagrange. Toute la question est alors de savoir si cette solution faible est une solution classique de l'équation d'Euler-Lagrange. Il faut alors vérifier si la solution faible appartient à $C^2(\overline{\Omega})$, auquel cas le théorème précédent peut être appliqué. Néanmoins, vu que la fonction f n'est pas explicite et assez arbitraire, il est très difficile d'étudier l'équation d'Euler-Lagrange dans toute sa généralité. Il faut étudier certaines classes d'équations particulières qui sont en réalité des équations d'Euler-Lagrange "déguisées". Nous allons traiter ici l'exemple du p -laplacien afin de montrer que notre théorie développée tout au long de ce texte peut se révéler utile dans des cas non-linéaires.

4.5.2 Un exemple : l'équation de Laplace généralisée

Pour commencer, introduisons une généralisation de l'opérateur de Laplace. Nous supposons que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ (avec $n \geq 2$) dont la frontière est C^1 -régulière et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Définition 4.5.1. Soit $p \in [2, +\infty[$. Le p -laplacien est l'opérateur différentiel Δ_p défini par

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = \sum_{i=1}^n \partial_i (|\nabla u|^{p-2} \partial_i u)$$

si $u \in C^2(\Omega)$. Naturellement, cet opérateur s'étend aux distributions de façon habituelle.

Bien sûr, on a vite fait de remarquer que le 2-laplacien est le laplacien classique. Cet opérateur apparaît typiquement dans des problèmes physiques non-linéaires comme dans l'écoulement d'un fluide non-newtonien [7]. On le retrouve aussi dans des problèmes purement mathématiques comme l'étude des applications quasi-régulières [19]. Les fonctions p -harmoniques, c'est-à-dire les solutions u de $\Delta_p u = 0$, sont liées à la théorie des applications quasi-conformes en dimension $n \geq 3$ ([15], [16]).

Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Notre but est d'étudier l'équation de Laplace généralisée

$$\Delta_p u = -f \quad \text{sur } \Omega \quad (P_{fort})$$

avec la condition $u = 0$ sur Σ . Insistons sur le fait que l'équation est non-linéaire lorsque $p \neq 2$. De ce fait, nous ne pouvons pas utiliser la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires. Il existe plusieurs techniques pour aborder une équation non-linéaire, mais nous insisterons ici sur une méthode par minimisation d'une intégrale car, comme nous allons le voir, il s'agit en fait d'une équation d'Euler-Lagrange. Supposons que $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ est solution de l'équation dans $C^2(\bar{\Omega})$. Dans ce cas, multiplions cette dernière par un élément $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Etant donné que f est supposé localement intégrable, nous pouvons intégrer $f\varphi$ sur Ω . On obtient alors

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \partial_i(|\nabla u(x)|^{p-2} \partial_i u(x)) \varphi(x) dx = - \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx.$$

Etant donné que l'on peut voir l'intégrale comme la distribution associée à la fonction $\partial_i(|\nabla u(x)|^{p-2} \partial_i u(x))$ évaluée en φ , on voit qu'il s'agit en fait de la dérivée de distributions et on obtient ⁶

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^{p-2} \partial_i u(x) \partial_i \varphi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx & \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma. \end{cases} \quad (\mathcal{P}')$$

Réciproquement, si $u \in C^2(\bar{\Omega})$ satisfait au problème $(\mathcal{P}')$, alors c'est une solution de l'équation différentielle en presque tout point de Ω . Cela résulte de la propriété bien connue suivante.

Proposition 4.5.1. *Si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ et que*

$$\int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

alors $f = 0$ presque partout sur Ω .

Une fonction $u \in C^2(\bar{\Omega})$ solution de (P_{fort}) est appelée solution forte et une solution de $(\mathcal{P}')$ une solution faible. Dorénavant, nous nous intéresserons à la formulation faible de l'équation. On considère donc le problème $(\mathcal{P}')$ lorsque $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$.

Montrons que cette équation différentielle est en fait une équation d'Euler-Lagrange associée à un problème de minimisation d'intégrale. Définissons la fonctionnelle $I : W^{1,p}_0(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$I(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{p} |\nabla u(x)|^p - f(x) u(x) \right) dx \quad \forall u \in W^{1,p}_0(\Omega).$$

6. On rappelle que si u est une distribution sur Ω , alors sa dérivée Du est définie par $Du(\varphi) = -u(D\varphi)$.

Soit $(\mathcal{P})$ le problème suivant

$$\text{Minimiser } I(u) \text{ sous la contrainte } u \in W_0^{1,p}(\Omega). \quad (\mathcal{P})$$

On peut définir la fonction $L : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ par $L(x, y, z) = \frac{1}{p}|z|^p - f(x)y$ pour tout $(x, y, z) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Il s'ensuit que $I(u) = \int_{\Omega} L(x, u(x), \nabla u(x)) dx$. Nous savons que toute solution du problème de minimisation dans $C^2(\bar{\Omega})$ est solution de l'équation d'Euler-Lagrange

$$\partial_y L(x, u(x), \nabla u(x)) - \operatorname{div} \nabla_z L(x, u(x), \nabla u(x)) = 0 \quad \forall x \in \Omega.$$

Il est facile de voir que $\partial_y L(x, u(x), \nabla u(x)) = -f(x)$. Un calcul simple montre que

$$\partial_{z_i} L(x, y, z) = |z|^{p-2} z_i$$

et par conséquent

$$\partial_{x_i} (\partial_{z_i} L(x, u(x), \nabla u(x))) = \partial_{x_i} (\partial_{x_i} u(x) |\nabla u(x)|^{p-2}).$$

L'équation d'Euler-Lagrange devient alors

$$\Delta_p u(x) = -f(x) \quad \forall x \in \Omega,$$

ce qui est bien l'équation que nous sommes en train d'examiner. Ceci montre que l'équation de Laplace généralisée est d'Euler-Lagrange.

A présent, on suppose que $f \in L^q(\Omega)$ où q est le nombre conjugué de p . Et on s'intéresse au problème $(\mathcal{P}')$ sur $W_0^{1,p}(\Omega)$. Nous allons montrer que ce problème est équivalent à $(\mathcal{P})$. Il va falloir établir quelques lemmes.

Lemme 4.5.1 ([37]). *Supposons que $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ est une fonction G -différentiable propre convexe. Soient $\xi \in E^*$ et $x_0 \in E$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *On a $f(x_0) - \langle \xi, x_0 \rangle = \inf_{x \in E} f(x) - \langle \xi, x \rangle$.*
- (ii) *On a $\langle \nabla f(x_0) - \xi, x \rangle = 0$ pour tout $x \in E$.*
- (iii) *On a $\nabla f(x_0) = \xi$.*

Démonstration. L'équivalence (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) est évidente. Par la proposition 4.2.2, x_0 est un minimum global de $f - \xi$ si et seulement si $\nabla(f - \xi)(x_0) = 0$. Par le corollaire 3.6.2, $\nabla(f - \xi)(x_0) = \nabla f(x_0) - \xi$. L'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii) en découle aisément. $\square$

Lemme 4.5.2 ([37]). *Supposons que E est un espace de Banach réflexif, $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ est une fonction G -différentiable propre convexe semi-continue inférieurement telle que ∇f est uniformément monotone, i.e. il existe $C > 0$ et $\alpha > 1$ tels que*

$$\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle \geq C \|y - x\|^\alpha \quad \forall x, y \in E.$$

Pour tout $\xi \in E^$, il existe un et un seul $x_0 \in E$ tel que*

- (i) *On a $f(x_0) - \langle \xi, x_0 \rangle = \inf_{x \in E} f(x) - \langle \xi, x \rangle$.*
- (ii) *On a $\langle \nabla f(x_0) - \xi, x \rangle = 0$ pour tout $x \in E$.*
- (iii) *On a $\nabla f(x_0) = \xi$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition 4.2.6 à la fonction $f - \xi$. En appliquant la monotonie uniforme du gradient et la proposition 3.4.7, on montre directement que $f - \xi$ est strictement convexe. Soient $x, y \in E$. La fonction $t \in [0, 1] \mapsto f(x + t(y - x)) \in \mathbb{R}$ est continue et dérivable sur $]0, 1[$ par la proposition 3.3.4. Il s'ensuit que

$$\frac{d}{dt}f(x + t(y - x)) = \langle \nabla f(x + t(y - x)), y - x \rangle.$$

Afin d'intégrer cette fonction, montrons que $t \in [0, 1] \mapsto \frac{d}{dt}f(x + t(y - x)) \in \mathbb{R}$ est continu. Soit $t_0 \in]0, 1[$. Nous savons que la fonction $\psi : t \in \mathbb{R} \mapsto f(x + t(y - x)) \in \mathbb{R}$ est convexe. On en tire que

$$\psi_{*t_0}(h) = \inf_{s>0} \frac{\psi(t_0 + sh) - \psi(t_0)}{s} \leq \frac{\psi(t_0 + rh) - \psi(t_0)}{r} \quad \forall r > 0.$$

Elle est aussi dérivable. Comme $d\psi(t_0)/dt = \psi_{*t_0}(1)$, nous avons

$$\frac{d\psi}{dt}(t_0 + \varepsilon) \leq \frac{\psi(t_0 + r + \varepsilon) - \psi(t_0 + \varepsilon)}{r} \quad \forall r > 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$ suffisamment proche de 0 pour que $t_0 + \varepsilon \in]0, 1[$. Nous avons

$$\frac{d\psi}{dt}(t_0 + \varepsilon) \leq \frac{\psi(t_0 + R) - \psi(t_0 + \varepsilon)}{R - \varepsilon} \quad \forall R > \varepsilon.$$

Vu la proposition 3.3.4, la fonction ψ est continue sur $]0, 1[$. En faisant tendre ε vers 0^+ , nous avons donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{d\psi}{dt}(t_0 + \varepsilon) \leq \frac{\psi(t_0 + R) - \psi(t_0)}{R} \quad \forall R > 0.$$

Si $R \rightarrow 0^+$, on a donc $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{d\psi}{dt}(t_0 + \varepsilon) \leq \frac{d\psi}{dt}(t_0)$. Par la proposition 3.4.6, on a

$$\langle \psi_{*u} - \psi_{*v}, u - v \rangle \geq 0 \quad \forall u, v \in]0, 1[.$$

Ceci se traduit par

$$(u - v) \left(\frac{d\psi}{dt}(u) - \frac{d\psi}{dt}(v) \right) \geq 0 \quad \forall u, v \in]0, 1[.$$

Autrement dit, $\frac{d\psi}{dt}$ est croissant sur $]0, 1[$. Il en découle que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{d\psi}{dt}(t_0 + \varepsilon) = \frac{d\psi}{dt}(t_0)$. De façon analogue, on montre que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \frac{d\psi}{dt}(t_0 + \varepsilon) = \frac{d\psi}{dt}(t_0)$ et ψ est continu en $t_0 \in]0, 1[$. Soit $\eta > 0$ et définissons la fonction $\psi' : t \in [0, 1] \mapsto f(x' + t(y' - x')) \in \mathbb{R}$ où $x' = x - \eta(y - x)$ et $y' = x + (1 + \eta)(y - x)$ puis on applique le raisonnement ci-dessus avec ψ' au lieu de ψ . La fonction $d\psi'/dt$ est donc continue sur $]0, 1[$. Par restriction, $d\psi'/dt$ est continu sur $[\eta/(1 + 2\eta), (1 + \eta)/(1 + 2\eta)]$. Etant donné que

$$\psi(t) = \psi' \left(\frac{\eta}{1 + 2\eta} + \frac{t}{1 + 2\eta} \right) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

on a la continuité de $d\psi/dt$ sur $[0, 1]$. En intégrant $d\psi/dt$ sur $[0, 1]$ et en appliquant l'hypothèse

de monotonie uniforme, on a

$$\begin{aligned}
 f(y) - \langle \xi, y \rangle - (f(x) - \langle \xi, x \rangle) &= \int_0^1 \langle \nabla(f - \xi)(x + t(y - x)), y - x \rangle dt \\
 &= \int_0^1 \langle \nabla f(x + t(y - x)) - \xi, t(y - x) \rangle \frac{dt}{t} \\
 &= \langle \nabla f(x) - \xi, y - x \rangle + \int_0^1 \langle \nabla f(x + t(y - x)) - \nabla f(x), t(y - x) \rangle \frac{dt}{t} \\
 &\geq \langle \nabla f(x) - \xi, y - x \rangle + C \int_0^1 \|y - x\|^\alpha t^{\alpha-1} dt \\
 &= \langle \nabla f(x) - \xi, y - x \rangle + \frac{C\|y - x\|^\alpha}{\alpha}.
 \end{aligned}$$

Au total, on a l'inégalité

$$f(y) - \langle \xi, y \rangle - (f(x) - \langle \xi, x \rangle) \geq \langle \nabla f(x) - \xi, y - x \rangle + \frac{C}{\alpha} \|y - x\|^\alpha \quad \forall x, y \in E.$$

En particulier, si $x = 0$, on trouve

$$f(y) - \langle \xi, y \rangle - f(0) \geq \langle \nabla f(0) - \xi, y \rangle + \frac{C}{\alpha} \|y\|^\alpha = \|y\| \left(\left\langle \nabla f(0) - \xi, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle + \frac{C}{\alpha} \|y\|^{\alpha-1} \right) \quad \forall y \in E.$$

Par définition de la norme duale, nous obtenons $\langle \nabla f(0) - \xi, -y/\|y\| \rangle \leq \|\nabla f(0) - \xi\|_*$ et par conséquent

$$(f - \xi)(y) \geq f(0) + \|y\| \left(-\|\nabla f(0) - \xi\|_* + \frac{C}{\alpha} \|y\|^{\alpha-1} \right) \quad \forall y \in E.$$

Cette inégalité montre que $f - \xi$ est coercif. La conclusion découle de la proposition 4.2.6 et du lemme précédent. $\square$

Lemme 4.5.3 ([37], [5]). Soient $p \geq 2$ et $r \geq 1$. Alors

(i) Il existe $C > 0$ tel que

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i| \right)^r \leq C \sum_{i=1}^n |x_i|^r \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

(ii) Si $s \geq 0$, alors il existe $C > 0$ tel que

$$\int_0^1 |a + tb|^s dt \geq C |b|^s \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. (i) Si $r \geq 1$, alors il est connu que l'application $|\cdot|_r : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty[$ définie par

$$|x|_r = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^r \right)^{1/r} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

est une norme. Les normes de $\mathbb{R}^n$ étant toutes équivalentes entre elles, il existe $C > 0$ tel que $|x|_1 \leq C|x|_r$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, ce qui permet de conclure en élevant les deux membres à la puissance r .

(ii) Si $s = 0$, alors il suffit de prendre $C = 1$ et on a même une égalité. Supposons que $s > 0$. On procède au cas par cas. Le premier cas est $b = 0$ et $a \in \mathbb{R}$. La constante $C^{(1)} = 1$ convient. Le second cas est $b > 0$ et $a \geq 0$. Nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_0^1 |a + tb|^s dt &= |b|^s \int_0^1 \left| \frac{a}{b} + t \right|^s dt \\ &= |b|^s \int_0^1 \left(\frac{a}{b} + t \right)^s dt \\ &\geq |b|^s \int_0^1 t^s dt = |b|^s \end{aligned}$$

La constante $C^{(2)} = 1$ convient. Pour le troisième cas, on suppose que $b > 0$ et $a < 0$. Si $a/b \leq -1$, alors

$$\begin{aligned} \int_0^1 |a + tb|^s dt &= |b|^s \int_0^1 \left| \frac{a}{b} + t \right|^s dt \\ &= |b|^s \int_0^1 \left(-\frac{a}{b} - t \right)^s dt \\ &\geq |b|^s \int_0^1 (1 - t)^s dt \quad \text{car } -a/b \geq 1 \\ &= \frac{|b|^s}{s+1} \end{aligned}$$

Enfin, si $a/b > -1$, alors

$$\begin{aligned} \int_0^1 |a + tb|^s dt &= |b|^s \int_0^1 \left| \frac{a}{b} + t \right|^s dt \\ &= |b|^s \left(\int_0^{-a/b} \left(-t - \frac{a}{b} \right)^s dt + \int_{-a/b}^1 \left(t + \frac{a}{b} \right)^s dt \right) \\ &= \frac{|b|^s}{s+1} \underbrace{\left(\left(1 + \frac{a}{b} \right)^{s+1} + \left(-\frac{a}{b} \right)^{s+1} \right)}_{\geq C \text{ pour un certain } C > 0 \text{ vu (i)}} \\ &\geq \frac{C|b|^s}{s+1}. \end{aligned}$$

Pour le troisième cas, la constante $C^{(3)} = \min(\frac{1}{s+1}, \frac{C}{s+1})$ convient. Le cas $b < 0$ et $a \geq 0$ est semblable au troisième cas et on retrouve la même constante. Pour finir, le cas $b < 0$ et $a < 0$ se traite comme le second cas. Au total, il suffit de prendre $C = \min(C^{(1)}, C^{(2)}, C^{(3)})$ pour conclure. $\square$

Lemme 4.5.4 ([5]). Soient $p \geq 2$, V un sous-espace vectoriel de $W^{1,p}(\Omega)$ et $T : V \rightarrow V^*$ un opérateur défini par

$$\langle T(u), v \rangle = \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n a_i(x, u(x), \nabla u(x)) \partial_i v(x) + a_0(x, u(x), \nabla u(x)) v(x) \right) dx$$

où, pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, $a_i : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction telle que $a_i(x, \cdot, \cdot)$ est de classe C^1 sur $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \setminus \{(0, 0)\}$. Supposons aussi qu'il existe $\rho > 0$ tel que

$$\sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n \partial_{j+n+1} a_i(x, y, z) \xi_i \xi_j \geq \rho \left(|y|^{p-2} \xi_1^2 + \sum_{i=2}^{n+1} |z_{i-1}|^{p-2} \xi_i^2 \right)$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$, $(y, z) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \setminus \{(0, 0)\}$ et presque tout $x \in \Omega$. Alors l'application $T : V \rightarrow V^*$ est uniformément monotone.

Démonstration. Si $x \in \Omega$, $y, y' \in \mathbb{R}$ et $z, z' \in \mathbb{R}^n$ sont tels que $(0, 0) \notin [(y, z), (y', z')]$, on définit les fonctions $f_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_i(t) = a_i(x, ty + (1-t)y', tz + (1-t)z')$ pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$. Vu nos hypothèses, on a, pour presque tout $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned}
 & (a_0(x, y, z) - a_0(x, y', z'))(y - y') + \sum_{i=1}^n (a_i(x, y, z) - a_i(x, y', z'))(z_i - z'_i) \\
 &= (f_0(1) - f_0(0))(y - y') + \sum_{i=1}^n (f_i(1) - f_i(0))(z_i - z'_i) \\
 &= \int_0^1 \frac{df_0}{dt}(t)(y - y')dt + \sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{df_i}{dt}(t)(z_i - z'_i)dt \\
 &= \int_0^1 \partial_{n+1} a_0(x, ty + (1-t)y', tz + (1-t)z')(y - y')^2 dt \\
 &\quad + \sum_{j=1}^n \int_0^1 \partial_{j+n+1} a_0(x, ty + (1-t)y', tz + (1-t)z')(y - y')(z_j - z'_j) dt \\
 &\quad + \sum_{i=1}^n \int_0^1 \partial_{n+1} a_i(x, ty + (1-t)y', tz + (1-t)z')(z_i - z'_i)(y - y') dt \\
 &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_0^1 \partial_{j+n+1} a_i(x, ty + (1-t)y', tz + (1-t)z')(z_i - z'_i)(z_j - z'_j) dt \\
 &\geq \rho \int_0^1 \left(|ty + (1-t)y'|^{p-2} (y - y')^2 dt + \sum_{i=2}^{n+1} |tz_{i-1} + (1-t)z'_{i-1}|^{p-2} (z_{i-1} - z'_{i-1})^2 \right) dt.
 \end{aligned}$$

Par le point (ii) du lemme 4.5.3, il existe $C_0, \dots, C_n > 0$ tels que

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \left(|ty + (1-t)y'|^{p-2} (y - y')^2 dt + \sum_{i=2}^{n+1} |tz_{i-1} + (1-t)z'_{i-1}|^{p-2} (z_{i-1} - z'_{i-1})^2 \right) dt \\
 & \geq C_0 |y - y'|^{p-2} (y - y')^2 + \sum_{i=2}^{n+1} C_{i-1} |z_{i-1} - z'_{i-1}|^{p-2} (z_{i-1} - z'_{i-1})^2
 \end{aligned}$$

En posant $C = \min(C_0, \dots, C_n)$, on a finalement

$$\begin{aligned}
 & (a_0(x, y, z) - a_0(x, y', z'))(y - y') + \sum_{i=1}^n (a_i(x, y, z) - a_i(x, y', z'))(z_i - z'_i) \\
 & \geq C \rho \left(|y - y'|^p + \sum_{i=1}^n |z_i - z'_i|^p \right) \tag{*}
 \end{aligned}$$

pour presque tout $x \in \Omega$ et pour tout $(y, z), (y', z') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ qui vérifient $0 \notin [(y, z), (y', z')]$. Dans le cas où $0 \in [(y, z), (y', z')]$, les vecteurs (y, z) et (y', z') sont non-nuls et linéairement dépendants. Comme $\dim \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = n + 1 \geq 2$, il existe $(u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ tel que (u, v) et (y', z') sont linéairement indépendants. Il s'ensuit que, pour tout $\varepsilon > 0$, les vecteurs $\varepsilon(u, v)$ et (y', z') sont linéairement indépendants. On définit alors $y_\varepsilon = y' + \varepsilon u$ et $z_\varepsilon = z' + \varepsilon v$. On vérifie aisément que $0 \notin [(y, z), (y_\varepsilon, z_\varepsilon)]$. On peut appliquer le raisonnement précédent puis passer à la limite pour $\varepsilon \rightarrow 0^+$ afin d'obtenir (*). Si $(y', z') = (0, 0)$ et $(y, z) \neq (0, 0)$, alors on définit

$(y_\varepsilon, z_\varepsilon) = \varepsilon(y, z)$, de sorte que $(y_\varepsilon, z_\varepsilon)$ et (y, z) soient non-nuls et linéairement dépendants. Il suffit alors d'appliquer le résultat du cas précédent à $(y_\varepsilon, z_\varepsilon)$ et (y, z) , puis de faire tendre ε vers 0^+ . Si $(0, 0) = (y, z) = (y', z')$, alors l'inégalité (*) est évidente. Cela étant, si $u, v \in V$, alors l'inégalité (*) nous permet d'obtenir

$$\langle T(u) - T(v), u - v \rangle \geq C\rho \|u - v\|_{W^{1,p}}^p,$$

la conclusion en découle. $\square$

Remarque 4.5.1. Nous pouvons aussi énoncer le lemme ci-dessus lorsque a_i est défini sur $\Omega \times \mathbb{R}^n$ et

$$\langle T(u), v \rangle = \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla u(x)) \partial_i v(x) + a_0(x, \nabla u(x)) v(x) \right) dx.$$

La preuve est identique, mais insistons sur l'importance de l'hypothèse $n \geq 2$ dans ce cas-ci. En effet, la discussion sur (y, z) et (y', z') devient une simple discussion sur z et z' et elle se traite de la même façon que dans le lemme en tirant parti qu'on est en dimension supérieure à 1.

Lemme 4.5.5. *L'espace vectoriel normé $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,p}})$ est un espace de Banach si $p \in [1, +\infty[$. Si, de plus, $p > 1$, l'espace est réflexif.*

Démonstration. C'est un cas particulier de la proposition A.0.5. $\square$

Corollaire 4.5.1. *Si $p \in [1, +\infty[$, alors $W_0^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach. Si, de plus, $p > 1$, alors $W_0^{1,p}(\Omega)$ est réflexif.*

Démonstration. Cela résulte du fait que $W_0^{1,p}(\Omega)$ est un sous-espace fermé de $W^{1,p}(\Omega)$ (on rappelle que $W_0^{1,p}(\Omega)$ est l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$). Pour la réflexivité, il suffit de considérer une suite $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ bornée de $W_0^{1,p}(\Omega)$. Puisque $W^{1,p}(\Omega)$ est réflexif, on peut extraire une sous-suite $(u_{k(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ faiblement convergente dans $W^{1,p}(\Omega)$. Or, $W_0^{1,p}(\Omega)$ est convexe et fermé. Donc, il est faiblement fermé et il s'ensuit que la limite de la sous-suite $(u_{k(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ appartient à $W_0^{1,p}(\Omega)$. $\square$

Nous sommes en mesure de démontrer l'équivalence entre $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$.

Proposition 4.5.2. *Si $f \in L^q(\Omega)$ où q est le nombre conjugué de p , alors les problèmes $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ sont équivalents et possèdent une unique solution.*

Démonstration. Montrons que nous sommes dans de bonnes conditions pour appliquer le lemme 4.5.2 lorsque $E = W_0^{1,p}(\Omega)$. Ceci montrera l'équivalence des deux problèmes et l'existence d'une solution. Pour démontrer l'unicité, on montre que G est strictement convexe. Posons $G : u \in W_0^{1,p}(\Omega) \mapsto \int_{\Omega} \frac{1}{p} |\nabla u(x)|^p dx$ et $\xi : u \in W_0^{1,p}(\Omega) \mapsto \int_{\Omega} f(x) u(x) dx$. Avec ces notations, $I = G - \xi$.

(I) : L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est de Banach et réflexif. C'est une conséquence du corollaire 4.5.1.

(II) : La fonction $G : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ est G-différentiable. Soient $u, h \in W_0^{1,p}(\Omega)$. On rappelle que

$$G_{*u}(h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{G(u + th) - G(u)}{t} = \frac{d}{dt} G(u + th)|_{t=0}.$$

On a

$$G(u + th) = \int_{\Omega} \frac{1}{p} |\nabla u(x) + t\nabla h(x)|^p dx.$$

La fonction $g : t \in]-1, 1[\mapsto \frac{1}{p} |\nabla u(x) + t\nabla h(x)|^p$ est évidemment dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dt}(t) &= \frac{d}{dt} \frac{1}{p} \left(\sum_{i=1}^n (\partial_i u(x) + t\partial_i h(x))^2 \right)^{p/2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n (\partial_i u(x) + t\partial_i h(x))^2 \right)^{\frac{p}{2}-1} \sum_{i=1}^n 2(\partial_i u(x) + t\partial_i h(x)) \partial_i h(x) \\ &= |\nabla u(x) + t\nabla h(x)|^{p-2} \sum_{i=1}^n \partial_i h(x) (\partial_i u(x) + t\partial_i h(x)) \\ &= |\nabla u(x) + t\nabla h(x)|^{p-2} \langle \nabla u(x) + t\nabla h(x), \nabla h(x) \rangle. \end{aligned}$$

On voit que

$$\begin{aligned} \left| \frac{dg}{dt}(t) \right| &= |\nabla u(x) + t\nabla h(x)|^{p-2} \left| \langle \nabla u(x) + t\nabla h(x), \nabla h(x) \rangle \right| \\ &\leq |\nabla u(x) + t\nabla h(x)|^{p-2} |\nabla u(x) + t\nabla h(x)| |\nabla h(x)| \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} &= |\nabla u(x) + t\nabla h(x)|^{p-1} |\nabla h(x)| \\ &\leq C |\nabla h(x)| (|\nabla h(x)|^{p-1} + |\nabla u(x)|^{p-1}) \end{aligned} \quad (2)$$

où l'on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz en (1) et le lemme 4.5.3 en (2), la constante $C > 0$ étant indépendante du x choisi. Rappelons que $q = p/(p-1)$. Par conséquent, $|\nabla h(x)|^{p-1} + |\nabla u(x)|^{p-1}$ est une fonction de $L^q(\Omega)$. Comme $|\nabla h(x)|$ définit une fonction de $L^p(\Omega)$, l'inégalité de Hölder montre que (2) est intégrable. Il s'ensuit que dg/dt est intégrable sur Ω aussi. Par le théorème de dérivation des intégrales paramétriques, nous obtenons donc

$$G_{*u}(h) = \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^{p-2} \langle \nabla u(x), \nabla h(x) \rangle dx.$$

Il est alors clair que G_{*u} est linéaire. De plus, la continuité de G_{*u} résulte de ce que

$$\begin{aligned} |G_{*u}(h)| &= \left| \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^{p-2} \langle \nabla u(x), \nabla h(x) \rangle dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^{p-2} |\langle \nabla u(x), \nabla h(x) \rangle| dx \\ &\leq \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^{p-1} |\nabla h(x)| dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^p dx \right)^{1/q} \left(\int_{\Omega} |\nabla h(x)|^p dx \right)^{1/p} && \text{par l'inégalité de Hölder} \\ &\leq \| |\nabla u| \|_{L^p}^{p/q} \left(\int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n |\partial_i h(x)| \right)^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq C' \| |\nabla u| \|_{L^p}^{p-1} \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |\partial_i h(x)|^p dx \right)^{1/p} && \text{par le lemme 4.5.3 (i)} \\ &= C' \| |\nabla u| \|_{L^p}^{p-1} \left(\sum_{i=1}^n \|\partial_i h\|_p^p \right)^{1/p} \\ &\leq C' C'' \| |\nabla u| \|_{L^p}^{p-1} \|h\|_{W^{1,p}} \end{aligned}$$

où la dernière inégalité est obtenue grâce à l'équivalences des normes $|\cdot|_p$ et $|\cdot|_1$ de $\mathbb{R}^n$. Donc, comme G_{*u} est linéaire et continu, la fonction G est G-différentiable et

$$\langle \nabla G(u), h \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^{p-2} \langle \nabla u(x), \nabla h(x) \rangle dx \quad \forall u, h \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

(III) : La fonction $\nabla G : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W_0^{1,p}(\Omega)^*$ est uniformément monotone.

Le but est de pouvoir appliquer le lemme 4.5.4 à l'opérateur $\nabla G : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W_0^{1,p}(\Omega)^*$. Nous savons que

$$\langle \nabla G(u), h \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |\nabla u(x)|^{p-2} \partial_i u(x) \partial_i h(x) dx \quad \forall u, h \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

On peut réécrire cela de la façon suivante :

$$\langle \nabla G(u), h \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n a_i(x, \nabla u(x)) \partial_i h(x) dx$$

avec $a_i : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $a_i(x, z) = |z|^{p-2} z_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Il est clair que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et tout $x \in \Omega$, $a_i(x, \cdot)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Si $z \neq 0$, on vérifie que

$$\begin{cases} \partial_{n+i} a_i(x, z) &= |z|^{p-2} + (p-2)|z|^{p-4} z_i^2 \\ \partial_{n+j} a_i(x, z) &= (p-2)|z|^{p-4} z_i z_j \end{cases} \quad \text{si } j \neq i.$$

Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_{n+j} a_i(x, z) \xi_i \xi_j &= 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (p-2) |z|^{p-4} z_i z_j \xi_i \xi_j + \sum_{i=1}^n (|z|^{p-2} + (p-2)|z|^{p-4} z_i^2) \xi_i^2 \\ &\geq \sum_{i=1}^n |z|^{p-2} \xi_i^2 \geq \sum_{i=1}^n |z_i|^{p-2} \xi_i^2. \end{aligned}$$

Il découle du lemme 4.5.4 que ∇G est uniformément monotone.

(IV) : La fonction $G : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ est strictement convexe.

Par le point (III), il existe $C > 0$ et $\alpha > 1$ tels que

$$\langle \nabla G(u) - \nabla G(v), u - v \rangle \geq C \|u - v\|_{W^{1,p}}^\alpha > 0 \quad \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad u \neq v.$$

Donc la fonction est strictement convexe par la proposition 3.4.7.

(V) : La fonction $G : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

Fixons $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et trouvons un voisinage de u_0 sur lequel G est borné supérieurement pour appliquer la proposition 3.3.1. Soit $R > 0$ et considérons $B(u_0, R)$. Si $u \in B(u_0, R)$, alors $\|u - u_0\|_{W^{1,p}} < R$, c'est-à-dire

$$\|u - u_0\|_{L^p} + \sum_{i=1}^n \|\partial_i u - \partial_i u_0\|_{L^p} < R.$$

On rappelle que $\|x - y\| \geq \|x\| - \|y\|$ si $\|\cdot\|$ est une norme. Donc,

$$\|u\|_{L^p} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \|\partial_i u\|_{L^p}}_{:=S} < R + \|u_0\|_{L^p} + \sum_{i=1}^n \|\partial_i u_0\|_{L^p}.$$

et par le point (i) du lemme 4.5.3, il existe $C > 0$ (qui ne dépend que de p) tel que

$$G(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^p dx = \frac{1}{p} \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n (\partial_i u(x))^2 \right)^{p/2} dx \leq \frac{C}{p} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |\partial_i u(x)|^p dx.$$

Autrement dit,

$$G(u) \leq \frac{C}{p} \sum_{i=1}^n \|\partial_i u\|_{L^p}^p \leq \frac{nCS^p}{p}$$

pour tout $u \in B(u_0, R)$.

On conclut cette preuve en appliquant le lemme 4.5.2. $\square$

Nous avons montré que l'équation différentielle admet une unique solution dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ lorsque $f \in L^q(\Omega)$. Une autre question qu'on est en droit de nous poser est de savoir si l'on peut lui associer un problème dual. Remarquons immédiatement que I peut s'écrire

$$I(u) = H(T(u)) - \langle f, u \rangle$$

où $H : (L^p(\Omega))^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $T : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow (L^p(\Omega))^n$ sont définis par

$$H(v) = \int_{\Omega} \frac{1}{p} |v(x)|^p dx \quad \text{et} \quad T(u) = \nabla u$$

pour tout $v \in (L^p(\Omega))^n$ et $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le crochet de dualité entre $L^p(\Omega)$ et $L^q(\Omega)$. De façon naturelle, on voudrait pouvoir appliquer la dualité de Fenchel-Rockafellar pour déduire un problème dual. Il faut vérifier les hypothèses du théorème avant de poursuivre.

Tout d'abord, il est déjà connu que I est G-différentiable et strictement convexe (cf. la preuve de la propriété précédente). De plus, I admet un unique minimum u_0 sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ et ce minimum vérifie $\nabla(\langle f, \cdot \rangle + H \circ T)(u_0) = 0$. On vérifie que l'application linéaire $T : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow (L^p(\Omega))^n$ est continue. En effet, on a

$$\|T(u)\|_{(L^p(\Omega))^n} = \sum_{i=1}^n \|\partial_i u\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^n \|\partial_i u\|_{L^p} = \|u\|_{W^{1,p}}$$

pour tout $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. La fonction $\langle f, \cdot \rangle$ est aussi continue puisqu'elle est linéaire et

$$|\langle f, u \rangle| = \left| \int_{\Omega} f(x)u(x)dx \right| \leq \|f\|_{L^q} \|u\|_{L^p}$$

pour tout $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ en vertu de l'inégalité de Hölder. Enfin, la fonction H est continue. Pour le voir, on vérifie d'abord que cette fonction est convexe. Cela découle directement de la convexité de la fonction $\frac{1}{p} |\cdot|^p$ sur $\mathbb{R}^n$ (il suffit de calculer la dérivée seconde de cette fonction et vérifier qu'elle est bien définie positive). Si on fixe $u' \in (L^p(\Omega))^n$, on voit que $|u|^p \leq n^p \sum_{i=1}^n |u_i|^p$ et donc, on a

$$H(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{p} |u(x)|^p dx \leq \frac{n^p}{p} \sum_{i=1}^n \|u_i\|_{L^p}^p \leq \frac{n^p}{p} \sum_{i=1}^n (\|u_i - u'_i\|_{L^p} + \|u'_i\|_{L^p})^p \leq \frac{n^p}{p} \sum_{i=1}^n (R + \|u'_i\|_{L^p})^p$$

si $\|u_i - u'_i\|_{L^p} < R$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Donc H est convexe, défini sur $(L^p(\Omega))^n$ et borné supérieurement au voisinage de chaque point de $(L^p(\Omega))^n$, ce qui montre la continuité de H par la proposition 3.3.1. Le théorème de Fenchel-Rockafellar montre $\nabla H(T(u_0))$ est l'unique solution du problème dual qui est de maximiser

$$-(\langle -f, \cdot \rangle)^*(T^*(\xi)) - H^*(-\xi) \quad \text{lorsque } \xi \in (L^q(\Omega))^n.$$

Nous pouvons déterminer plus explicitement ce problème dual. Tout d'abord, nous savons que $\langle -f, \cdot \rangle$ est une forme linéaire continue et sa transformée de Legendre vaut donc $(\langle -f, \cdot \rangle)^* = \delta_{-f}$. Calculons l'opérateur adjoint $T^* : (L^q(\Omega))^n \rightarrow W_0^{1,p}(\Omega)^*$. Par définition, celui-ci doit vérifier

$$\langle T^*(\xi_1, \dots, \xi_n), \varphi \rangle = \langle (\xi_1, \dots, \xi_n), \nabla \varphi \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \xi_i, \partial_i \varphi \rangle = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \xi_i(x) \partial_i \varphi(x) dx = - \sum_{i=1}^n \partial_i u_{\xi_i}(\varphi)$$

où u_{ξ_i} est la distribution associée à la fonction ξ_i . Autrement dit, $T^* = -\text{div}$ au sens distribution. Pour le calcul de H^* , nous aurons besoin de la propriété suivante. Par définition de la transformée de Legendre, on a

$$H^*(\mu) = \sup_{u \in (L^p(\Omega))^n} \langle \mu, u \rangle - H(u) = \sup_{u \in (L^p(\Omega))^n} \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^n \mu_j(x) u_j(x) - \frac{1}{p} |u(x)|^p \right) dx$$

pour tout $\mu \in (L^q(\Omega))^n$ où q est le nombre conjugué de p . Fixons $\mu \in (L^q(\Omega))^n$ et calculons le maximum global de la fonction $\mu - H$ sur $(L^p(\Omega))^n$. Vu que H est convexe, la fonction $-H$ est concave. Les propriétés sur les minima d'une fonction convexe s'adaptent aisément en des résultats similaires concernant les maxima d'une fonction concave. En effet, il est connu que si f est convexe, alors u_0 est un minimum global de f si et seulement si u_0 est un maximum global de $-f$. Il en découle que tout maximum local d'une fonction concave est un maximum global. De plus, u_0 est un maximum global d'une fonction concave G-différentiable f si et seulement si $\nabla f(u_0) = 0$. Ainsi, on est réduit à trouver un point critique de $\mu - H$. Il est évident que cette fonction est G-différentiable. De fait, μ est vu comme une application linéaire qui est continue par l'inégalité de Hölder. La G-différentiabilité de H découle du théorème de dérivation des intégrales paramétriques (il suffit d'adapter la partie (II) de la preuve de la proposition 4.5.2). Ainsi, on voit que

$$\begin{aligned} \langle \nabla H(u), h \rangle &= \frac{d}{dt} H(u + th)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{1}{p} \left(\sum_{i=1}^n (u_i(x) + th_i(x))^2 \right)^{p/2} dx \Big|_{t=0} \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |u(x)|^{p-2} u_i(x) h_i(x) dx \end{aligned}$$

pour tout $u \in (L^p(\Omega))^n$ et $h \in (L^p(\Omega))^n$. Supposons que u est un point critique de $\mu - H$. On a donc $\nabla(\mu - H)(u) = \nabla \mu(u) - \nabla H(u) = \langle \mu, \cdot \rangle - \nabla H(u) = 0$. Ceci se traduit par

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n (\mu_i(x) - |u(x)|^{p-2} u_i(x)) h_i(x) dx = 0$$

pour tout $h \in (L^p(\Omega))^n$. En particulier, si on définit $h_j = \varphi$ avec $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $h_i = 0$ si $i \neq j$, alors on voit que

$$\int_{\Omega} (\mu_j(x) - |u(x)|^{p-2} u_j(x)) \varphi(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

De la proposition 4.5.1, on déduit que $\mu_j = |u|^{p-2}u_j$ presque partout sur Ω pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$. Donc, $\sum_{j=1}^n \mu_j^2 = |u|^{2(p-2)} \sum_{j=1}^n u_j^2$, c'est-à-dire $|u|^{2(p-1)} = |\mu|^2$ presque partout. Finalement, on déduit que

$$|u| = |\mu|^{\frac{1}{p-1}} \quad \text{et} \quad u_j = |u|^{2-p} \mu_j = \mu_j |\mu|^{\frac{2-p}{p-1}} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

presque partout sur Ω . Ainsi, un point critique de $\mu - H$ est donné par $u \in (L^p(\Omega))^n$ défini par $u_j = \mu_j |\mu|^{\frac{2-p}{p-1}}$ et on obtient

$$\begin{aligned} H^*(\mu) &= \langle \mu, u \rangle - H(u) \\ &= \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^n \mu_j(x) u_j(x) - \frac{1}{p} |u(x)|^p \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \left(|\mu(x)|^{\frac{2-p}{p-1}+2} - \frac{1}{p} |\mu(x)|^{\frac{p}{p-1}} \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \left(1 - \frac{1}{p} \right) |\mu(x)|^{\frac{p}{p-1}} dx \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{q} |\mu(x)|^q dx \end{aligned}$$

pour tout $\mu \in (L^q(\Omega))^n$. Le problème dual consiste donc à trouver le maximum de

$$-\delta_f(-\operatorname{div}(v)) - \int_{\Omega} \frac{1}{q} |v(x)|^q dx, \quad v \in (L^q(\Omega))^n.$$

On vérifie facilement que le problème dual est équivalent au problème suivant

$$\text{Maximiser} \quad - \int_{\Omega} \frac{1}{q} |v(x)|^q dx \quad \text{lorsque } v \in (L^q(\Omega))^n \text{ et } \operatorname{div}(v) = f.$$

Bien sûr, ce problème est équivalent à

$$\text{Minimiser} \quad \int_{\Omega} \frac{1}{q} |v(x)|^q dx \quad \text{lorsque } v \in (L^q(\Omega))^n \text{ et } \operatorname{div}(v) = f.$$

Ce problème d'optimisation peut être reformulé de la façon suivante. Il s'agit de trouver une solution de l'équation $\operatorname{div}(v) = f$ dans $(L^q(\Omega))^n$ et de norme dans $L^q(\Omega, \mathbb{R}^n)$ minimum⁷. Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles sous contrainte. Par dualité, il existe une unique solution au problème que l'on sait exprimer à partir de la solution de l'équation de p -Laplace. Cette solution est donnée par $\nabla H(T(u_0))$ où u_0 est l'unique solution faible de l'équation de p -Laplace. Plus précisément, on a

$$\langle \nabla H(T(u_0)), h \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |\nabla u_0(x)|^{p-2} \partial_i u_0(x) h_i(x) dx \quad \forall h \in (L^p(\Omega))^n.$$

Puisque $\nabla H(T(u_0)) \in (L^p(\Omega)^*)^n$, on peut l'identifier à une fonction de $(L^q(\Omega))^n$ puisque

$$\langle \nabla H(T(u_0)), h \rangle = \sum_{i=1}^n \langle |\nabla u_0|^{p-2} \partial_i u_0, h_i \rangle = \langle |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0, h \rangle.$$

Il en découle que l'unique solution du problème dual est $|\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0$. Notre propos est résumé par le résultat suivant.

7. Lorsqu'une fonction est à valeur dans un espace de Banach E , on introduit une généralisation des espaces L^p que l'on appelle couramment espace de Bochner, que l'on note naturellement $L^p(X, E)$. Ceci permet de définir la notion d'intégrabilité pour des fonctions à valeurs vectorielles [12].

Proposition 4.5.3. *Supposons que $p \geq 2$ et q est le nombre conjugué de p . Supposons en outre que $f \in L^q(\Omega)$. Alors il existe une et une seule fonction $v_0 \in (L^q(\Omega))^n$ vérifiant $\operatorname{div}(v_0) = f$ et minimisant*

$$v \in (L^q(\Omega))^n \mapsto \int_{\Omega} |v(x)|^q dx \in [0, +\infty[.$$

Cette solution est donnée par

$$v_0 = |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0$$

où u_0 est l'unique solution de l'équation

$$\Delta_p u = f, \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad u|_{\Omega^\bullet} = 0.$$

Comme nous pouvons le remarquer, la dualité peut se révéler être un outil très puissant puisqu'elle permet d'assurer l'existence de solutions de problèmes qu'on aurait du mal à aborder de façon directe comme c'est le cas du problème de la proposition précédente.

Annexe A

Espaces de Sobolev et théorème de traces

Les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels d'une importance non-négligeable dans la théorie des équations aux dérivées partielles. Cette annexe a pour but d'introduire ces espaces de façon claire et concise pour comprendre la formulation faible des équations différentielles. Dans un premier temps, nous introduisons les espaces de Sobolev et montrons qu'ils peuvent être munis d'une structure d'espace de Banach. Ensuite, nous établissons le théorème des traces afin de pouvoir donner du sens à l'opérateur de restriction appliqué à des éléments d'un espace de Sobolev. Nous nous limitons strictement à ce dont nous avons besoin. Le lecteur désireux d'en apprendre d'avantage de cette théorie pourra consulter entre autres [12] et [6]. On fixe un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Nous utilisons la notation par les multi-indices pour les opérateurs de dérivation. On notera $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ et $C_\alpha^\beta = C_{\alpha_1}^{\beta_1} \cdots C_{\alpha_n}^{\beta_n}$ si $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$. Par convention, on note $\partial^0 u = u$.

Lorsque l'on aborde une équation aux dérivées partielles, il peut être laborieux de chercher directement une solution. C'est pourquoi on élargit le cadre à des fonctions qui n'admettent pas des dérivées au sens usuel du terme.

Définition A.0.2. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors une fonction $f \in L_{loc}^1(\Omega)$ est *faiblement dérivable* selon la composante i s'il existe $f_i \in L_{loc}^1(\Omega)$ tel que

$$\int_{\Omega} f(x) \partial_i \varphi(x) dx = - \int_{\Omega} f_i(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Cette fonction f_i sera usuellement notée $\partial_i f$, comme la dérivée habituelle.

En d'autre terme, cela signifie que la dérivée de f au sens distribution est une distribution sur Ω associée à une fonction de $L_{loc}^1(\Omega)$. Il est aisé de vérifier que la règle de Leibniz et la linéarité de ∂_i sont vraies au sens faible. L'introduction de la dérivée faible motive la construction des espaces de Sobolev.

Définition A.0.3. Soient $p \in [1, +\infty[$ et $m \in \mathbb{N}$. L'espace de Sobolev d'indice (m, p) est l'espace vectoriel

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \partial^\alpha u \in L^p(\Omega) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \quad |\alpha| \leq m\}$$

où l'opérateur de dérivation ∂^α est à prendre au sens des distributions. On définit les applications $\|\cdot\|_{W^{m,p}} : W^{m,p}(\Omega) \rightarrow [0, +\infty[$ par

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^p} \quad \forall u \in W^{m,p}(\Omega).$$

Proposition A.0.4. *L'application $\|\cdot\|_{W^{m,p}} : W^{m,p}(\Omega) \rightarrow [0, +\infty[$ est une norme.*

Démonstration. C'est trivial car $\|\cdot\|_{L^p}$ est lui-même une norme sur $L^p(\Omega)$. $\square$

En fait, on peut voir que ces espaces munis de leur norme respective sont de Banach.

Proposition A.0.5. *L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{W^{m,p}}$ est un espace de Banach. Si, de plus, $p > 1$, alors $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace réflexif.*

Démonstration. Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $W^{m,p}(\Omega)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u_p - \partial^\alpha u_q\|_{L^p} < \varepsilon$$

si $p, q \geq M$. On en déduit que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq m$, la suite $(\partial^\alpha u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^p(\Omega)$. Comme $L^p(\Omega)$ est complet, alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq m$, la suite $(\partial^\alpha u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge dans $L^p(\Omega)$ vers un élément $u^{(\alpha)} \in L^p(\Omega)$. On montre que $u^{(\alpha)}$ est la fonction associée à la distribution dérivée $\partial^\alpha u^{(0)}$ pour tout multi-indice α tel que $|\alpha| \leq m$. Cela revient à montrer que

$$\int_{\Omega} u^{(\alpha)}(x) \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u^{(0)}(x) \partial^\alpha \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Tout d'abord, on voit que

$$\int_{\Omega} \partial^\alpha u_k(x) \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u_k(x) \partial^\alpha \varphi(x) dx \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} u^{(\alpha)}(x) \varphi(x) dx - (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u^{(0)}(x) \partial^\alpha \varphi(x) dx \right| \\ & \leq \left| \int_{\Omega} (u^{(\alpha)}(x) - \partial^\alpha u_k(x)) \varphi(x) dx \right| + \left| (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} (u_k(x) - u^{(0)}(x)) \partial^\alpha \varphi(x) dx \right| \\ & \leq \|u^{(\alpha)} - \partial^\alpha u_k\|_{L^p} \|\varphi\|_{L^q} + \|u_k - u^{(0)}\|_{L^p} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^q} \end{aligned}$$

où q est le nombre conjugué de p . La seconde inégalité résulte de l'inégalité de Hölder. Ce dernier majorant tend vers 0 lorsque $k \rightarrow +\infty$ car $(\partial^\alpha u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $u^{(\alpha)}$ dans $L^p(\Omega)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq m$. Ceci montre que $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach.

Supposons que $p > 1$ et montrons que l'espace est réflexif. Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de $W^{m,p}(\Omega)$ et montrons qu'elle admet une sous-suite faiblement convergente. Nous savons que $((\partial^\alpha u_k)_{0 \leq |\alpha| \leq m})_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée de $\prod_{0 \leq |\alpha| \leq m} L^p(\Omega)$ vu la définition de la norme de $W^{m,p}(\Omega)$. L'espace $L^p(\Omega)$ étant réflexif¹, il existe une sous-suite $(\partial^\alpha u_{l_{\alpha}(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(\partial^\alpha u_{l_{\beta}(k)})_{k \in \mathbb{N}}$

1. De fait, pour tout $p \in]1, +\infty[$, l'espace $L^p(\Omega)$ est isométrique et isomorphe à $L^q(\Omega)$ où q vérifie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ [30].

(où $(\partial^\alpha u_{l_\beta(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(\partial^\alpha u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ qui est telle que $(\partial^\beta u_{l_\beta(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers $u^{(\beta)}$) qui converge faiblement vers $u^{(\alpha)}$ dans $L^p(\Omega)$. En procédant de cette façon composante par composante, on construit une sous-suite $((\partial^\alpha u_{l(k)})_{0 \leq |\alpha| \leq m})_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $(\partial^\alpha u_{l(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers un élément $u^{(\alpha)}$ de $L^p(\Omega)$. Il s'ensuit que $(u^{(\alpha)})_{0 \leq |\alpha| \leq m}$ est une limite faible dans $\prod_{0 \leq |\alpha| \leq m} L^p(\Omega)$ de la sous-suite $((\partial^\alpha u_{l(k)})_{0 \leq |\alpha| \leq m})_{k \in \mathbb{N}}$. En effet, on a pour tout $(v_\alpha)_{0 \leq |\alpha| \leq m} \in \prod_{0 \leq |\alpha| \leq m} L^p(\Omega)^* \simeq \prod_{0 \leq |\alpha| \leq m} L^q(\Omega)$ l'inégalité

$$|\langle (v_\alpha)_{0 \leq |\alpha| \leq m}, (\partial^\alpha u_{l(k)} - u^{(\alpha)})_{0 \leq |\alpha| \leq m} \rangle| \leq \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} |\langle v_\alpha, \partial^\alpha u_{l(k)} - u^{(\alpha)} \rangle|$$

et le majorant converge vers 0 en vertu de la proposition 2.1.3. On conclut à l'aide du théorème 2.2.3. $\square$

Lorsqu'on aborde des équations aux dérivées partielles, on a affaire à des conditions de bords qui permettent d'assurer l'unicité de la solution, si elle existe. Ces conditions de bords prennent la forme d'une égalité de fonctions sur la frontière d'un ensemble ouvert par exemple. En général, cette condition sur $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ s'écrit $u|_{\Omega^\bullet} = g$ où $g : \Omega^\bullet \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée. Si u est une fonction, il n'y a pas de problème qui se pose. Mais si $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, nous ne pouvons pas donner de sens à cette égalité car u représente une classe d'équivalence de fonctions égales presque partout. Comme la frontière peut être de mesure nulle (comme la frontière d'un cube par exemple), on peut avoir deux fonctions égales presque partout et qui ne sont pas égales sur la frontière. Nous ne pouvons pas donner du sens à $u|_{\Omega^\bullet}$ en considérant la restriction d'un représentant sur la frontière puisqu'elle dépend du représentant choisi. Nous allons plutôt étendre l'opérateur de restriction du point de vue de l'analyse fonctionnelle. C'est l'objet du théorème de trace.

Définition A.0.4. L'espace $C^k(\bar{\Omega})$ est l'ensemble des fonctions $f \in C^k(\Omega)$ telles que $\partial^\alpha f$ admet une extension continue sur $\bar{\Omega}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que $|\alpha| \leq k$.

Définition A.0.5. Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on dit que la frontière est C^p -régulière si, pour tout $x \in U^\bullet$, il existe $R > 0$, $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ et une fonction $f : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^p telles que

$$U \cap B(x, R) = \{z \in B(x, R) : z_{i_0} > f(z_1, \dots, \hat{z}_{i_0}, \dots, z_n)\}$$

et $z \in U^\bullet \cap B(x, R)$ si et seulement si $z_{i_0} = f(z_1, \dots, \hat{z}_{i_0}, \dots, z_n)$. La notation $\hat{z}_{i_0}$ signifie que l'on omet la variable z_{i_0} .

Remarque A.0.2. Il est même possible de définir d'autres classes de régularité de frontière (par exemple, une frontière Lipschitz-régulière).

Rappelons également un procédé classique de régularisation à l'aide du produit de convolution [39].

Définition A.0.6. Une *unité approchée de convolution* de $L^p(\Omega)$ est un ensemble de fonctions φ_ε ($\varepsilon > 0$) de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ qui sont positives, de support inclus dans $B(0, \varepsilon)$, telles que $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x) dx = 1$ et radiales, i.e $\varphi(x) = \varphi(y)$ si $|x| = |y|$. Pour de telles fonctions, on a $\varphi_\varepsilon \star f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi_\varepsilon \star f \rightarrow f$ dans $L^p(\Omega)$ si $\varepsilon \rightarrow 0^+$ et $f \in L^p(\Omega)$.

Proposition A.0.6. Si $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ est une unité approchée de convolution de $L^p(\Omega)$, alors pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, on a $f \star \varphi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\partial^\alpha(f \star \varphi_\varepsilon) = f \star \partial^\alpha \varphi_\varepsilon$, $[f \star \varphi_\varepsilon] \subset [f]_{pp} + B(0, \varepsilon)$ et $f \star \varphi_\varepsilon \rightarrow f$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Nous aurons besoin de partition de l'unité. Nous rappelons la définition et la propriété d'existence que l'on peut retrouver dans différents ouvrages classiques d'analyse. Nous nous référons à la définition de [39] et nous limitons au cas dénombrable.

Définition A.0.7. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\{\Omega_i : i \in \mathbb{N}\}$ un recouvrement dénombrable de Ω . Une *partition de l'unité* subordonnée à $\{\Omega_i : i \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de fonctions de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que $[f_i] \subset \Omega_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et $\sum_{i=0}^{+\infty} f_i$ existe et vaut 1 en tout point. La partition de l'unité est *localement finie* si, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un voisinage V de x sur lequel on n'a qu'un nombre fini de fonctions f_i qui ne sont pas identiquement nulles sur V .

Proposition A.0.7. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\{\Omega_i : i \in \mathbb{N}\}$ un recouvrement dénombrable de Ω , alors il existe une partition de l'unité subordonnée à $\{\Omega_i : i \in \mathbb{N}\}$ localement finie sur Ω .

Proposition A.0.8 ([12]). Supposons que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ dont la frontière est C^1 -régulière. Si $u \in W^{m,p}(\Omega)$, alors il existe une suite $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et à support compact telle que $(u_m|_\Omega)_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers u dans $W^{m,p}(\Omega)$. En particulier, $C^1(\overline{\Omega})$ est dense dans $W^{1,p}(\Omega)$.

Démonstration. (i) Soit $x \in \Omega^\bullet$. Par définition, la frontière de l'ouvert est localement le graphe d'une fonction de classe C^1 . Il existe $R > 0$, $i_x \in \{1, \dots, n\}$ et $f : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que

$$\Omega \cap B(x, R) = \{z \in B(x, R) : z_{i_x} > f(z_1, \dots, \hat{z}_{i_x}, \dots, z_n)\}.$$

Soient $z \in \Omega \cap B(x, R/2)$ et $d = \min(R/2, d(z, \mathbb{R}^n \setminus \Omega))$. Bien sûr, $d > 0$ vu que la distance entre un compact et un fermé disjoint du compact n'est pas nulle et $R > 0$. On a aussi $B(z, d) \subset \Omega \cap B(x, R)$. De fait, si $v \in B(z, d)$, alors $|v - x| \leq |v - z| + |z - x| < d + R/2 \leq R$. Si $v \notin \Omega$, alors $|v - z| \geq d(z, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) \geq d$, ce qui est absurde. Donc, $v \in \Omega \cap B(x, R)$. Fixons $\varepsilon \in]0, d[$. On définit $z_{\lambda, \varepsilon} = z + \lambda \varepsilon e_{i_x}$ où $\lambda > 0$. Trouvons $\lambda > 0$ pour que $B(z_{\lambda, \varepsilon}, \varepsilon) \subset B(z, d)$. Supposons qu'un tel λ existe. Si $v \in B(z_{\lambda, \varepsilon}, \varepsilon)$, alors

$$|v - z| \leq |v - z_{\lambda, \varepsilon}| + |z_{\lambda, \varepsilon} - z| < \varepsilon + \lambda \varepsilon = (1 + \lambda)\varepsilon \leq d$$

si $\lambda \leq (d/\varepsilon) - 1$. Soit $\lambda = (d/\varepsilon) - 1$ et on pose $z_\varepsilon = z_{\lambda, \varepsilon}$. Si $\varepsilon \geq d$, on pose $z_\varepsilon = z$. Par construction, pour tout $\varepsilon \in]0, d[$, on a $B(z_\varepsilon, \varepsilon) \subset \Omega \cap B(x, R)$. On définit $u_\varepsilon(z) = u(z_\varepsilon)$ pour tout $z \in \Omega \cap B(x, R/2)$ et $\varepsilon > 0$. En dehors de $\Omega \cap B(x, R/2)$, on étend cette fonction par 0. Soit $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ une unité approchée de convolution dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ et posons $v_\varepsilon = u_\varepsilon \star \varphi_\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. On a donc $v_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Montrons que $v_\varepsilon \rightarrow u$ dans $W^{m,p}(\Omega \cap B(x, R/2))$. Soit α un multi-indice tel que $|\alpha| \leq m$. On a

$$\|\partial^\alpha v_\varepsilon - \partial^\alpha u\|_{L^p} \leq \|\partial^\alpha v_\varepsilon - \partial^\alpha u_\varepsilon\|_{L^p} + \|\partial^\alpha u_\varepsilon - \partial^\alpha u\|_{L^p}. \quad (*)$$

Remarquons immédiatement que $\|\partial^\alpha u_\varepsilon - \partial^\alpha u\|_{L^p} \rightarrow 0$ si $\varepsilon \rightarrow 0^+$ car l'opérateur de translation $\tau f : h \in \mathbb{R}^n \mapsto f(\cdot + h) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ est continu lorsque $f \in L^p(\mathbb{R}^n)^2$ et la norme de $L^p(\Omega \cap$

2. Il suffit de considérer une approximation f_ε de f à l'aide d'une fonction de classe C^∞ en utilisant une unité approchée de convolution. On a alors

$$\|\tau_h f - \tau_{h_0} f\|_{L^p} \leq \|\tau_h f - \tau_h f_\varepsilon\|_{L^p} + \|\tau_h f_\varepsilon - \tau_{h_0} f_\varepsilon\|_{L^p} + \|\tau_{h_0} f_\varepsilon - \tau_{h_0} f\|_{L^p}.$$

Si on fixe $\eta > 0$, on considère ε suffisamment proche de 0 puis h suffisamment proche de h_0 pour que chaque terme soit majoré par $\eta/3$.

$B(x, R/2)$) est majorée par celle de $L^p(\mathbb{R}^n)$. Montrons ensuite que $\partial^\alpha v_\varepsilon = \varphi_\varepsilon \star \partial^\alpha u_\varepsilon$. On a

$$\begin{aligned}
\partial_i v_\varepsilon(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} u_\varepsilon(z) \partial_i \varphi_\varepsilon(y - z) dz \\
&= \int_{\Omega \cap B(x, R/2)} u_\varepsilon(z) \partial_i \varphi_\varepsilon(y - z) dz \\
&= \int_{\Omega \cap B(x, R/2)} u(z + \lambda \varepsilon e_{i_x}) \partial_i \varphi_\varepsilon(y - z) dz \\
&= \int_{\Omega \cap B(x, R/2) + \lambda \varepsilon e_{i_x}} u(z') \partial_i \varphi_\varepsilon(y - z' + \lambda \varepsilon e_{i_x}) dz' \\
&= - \int_{\Omega \cap B(x, R/2) + \lambda \varepsilon e_{i_x}} u(z') \partial_i (\varphi_\varepsilon(y - \cdot + \lambda \varepsilon e_{i_x}))(z') dz' \\
&= \int_{\Omega \cap B(x, R/2) + \lambda \varepsilon e_{i_x}} \partial_i u(z') \varphi_\varepsilon(y - z' + \lambda \varepsilon e_{i_x}) dz' = \varphi_\varepsilon \star \partial_i u_\varepsilon(y)
\end{aligned}$$

Puisque $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est une unité approchée de convolution, on en tire que $\varphi_\varepsilon \star \partial^\alpha u \rightarrow \partial^\alpha u$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, donc dans $L^p(\Omega \cap B(x, R/2))$. On remarque que

$$\begin{aligned}
\|\partial^\alpha u_\varepsilon - \partial^\alpha v_\varepsilon\|_{L^p}^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha u_\varepsilon(z) - \partial^\alpha v_\varepsilon(z)|^p dz \\
&= \int_{(\Omega \cap B(x, R/2)) + B(0, \varepsilon)} \left| \partial^\alpha u(z + \lambda \varepsilon e_{i_x}) - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(z - y) \partial^\alpha u(y + \lambda \varepsilon e_{i_x}) dy \right|^p dz \\
&= \int_{(\Omega \cap B(x, R/2)) + B(0, \varepsilon)} \left| \partial^\alpha u(z + \lambda \varepsilon e_{i_x}) - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(z - y' + \lambda \varepsilon e_{i_x}) \partial^\alpha u(y') dy' \right|^p dz \\
&= \int_{(\Omega \cap B(x, R/2)) + B(0, \varepsilon) + \lambda \varepsilon e_{i_x}} \left| \partial^\alpha u(z') - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(z' - y') \partial^\alpha u(y') dy' \right|^p dz' \\
&= \|\partial^\alpha u - \varphi_\varepsilon \star \partial^\alpha u\|_{L^p}^p \rightarrow 0
\end{aligned}$$

dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ si $\varepsilon \rightarrow 0^+$, donc dans $L^p(\Omega \cap B(x, R/2))$. Au total, le majorant de (*) converge vers 0 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Ceci montre que $v_\varepsilon \rightarrow u$ dans $W^{m,p}(\Omega \cap B(x, R/2))$ si $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

(ii) Pour démontrer la proposition, montrons que, pour tout $\eta > 0$, il existe $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tel que $\|u - v\|_{W^{m,p}(\Omega)} \leq \eta$. Soit $\eta' > 0$. Par compacité, $\Omega^\bullet$ peut être recouvert par un nombre fini de boules sur lesquelles la frontière de Ω peut être décrite par le graphe d'une fonction de classe C^1 . Il existe $R_1, \dots, R_N > 0$ et $x_1, \dots, x_N \in \Omega^\bullet$ tels que $\Omega^\bullet \subset \cup_{i=1}^N V_i$ où $V_i = B(x_i, R_i)$. Posons $V_0 = \Omega \setminus \cup_{i=1}^N \overline{B(x_i, R_i/2)} = \cap_{i=1}^N \Omega \setminus \overline{B(x_i, R_i/2)}$. Clairement, V_0 est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Puisque $V_i \cap \Omega \neq \emptyset$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, on a $V_0 \subsetneq \Omega$. Par le point (i), pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, il existe $v_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tel que $\|u - v_i\|_{W^{m,p}(V_i)} \leq \eta'/(N+1)$ et dont le support est compact. On construit une fonction $v_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ de support inclus dans Ω tel que $\|u - v_0\|_{W^{m,p}(V_0)} \leq \eta'/(N+1)$ à l'aide d'une unité approchée de convolution. On sait faire en sorte que le support de v_0 soit inclus dans Ω car V_0 est strictement inclus dans Ω^3 . On remarque que $\{V_0, \dots, V_N\}$ est un recouvrement ouvert de Ω localement fini. Il existe une partition de l'unité $\{\psi_0, \dots, \psi_N\}$ de classe C^∞ subordonnée à ce recouvrement. Posons $v = \sum_{i=0}^N \psi_i v_i$. Soit un multi-indice α tel que

3. En effet, si $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est une unité approchée de convolution, alors $u \chi_{V_0} \star \rho_\varepsilon$ a son support inclus dans $V_0 + B(0, \varepsilon)$ et ce dernier est inclus dans Ω lorsque ε est suffisamment proche de 0.

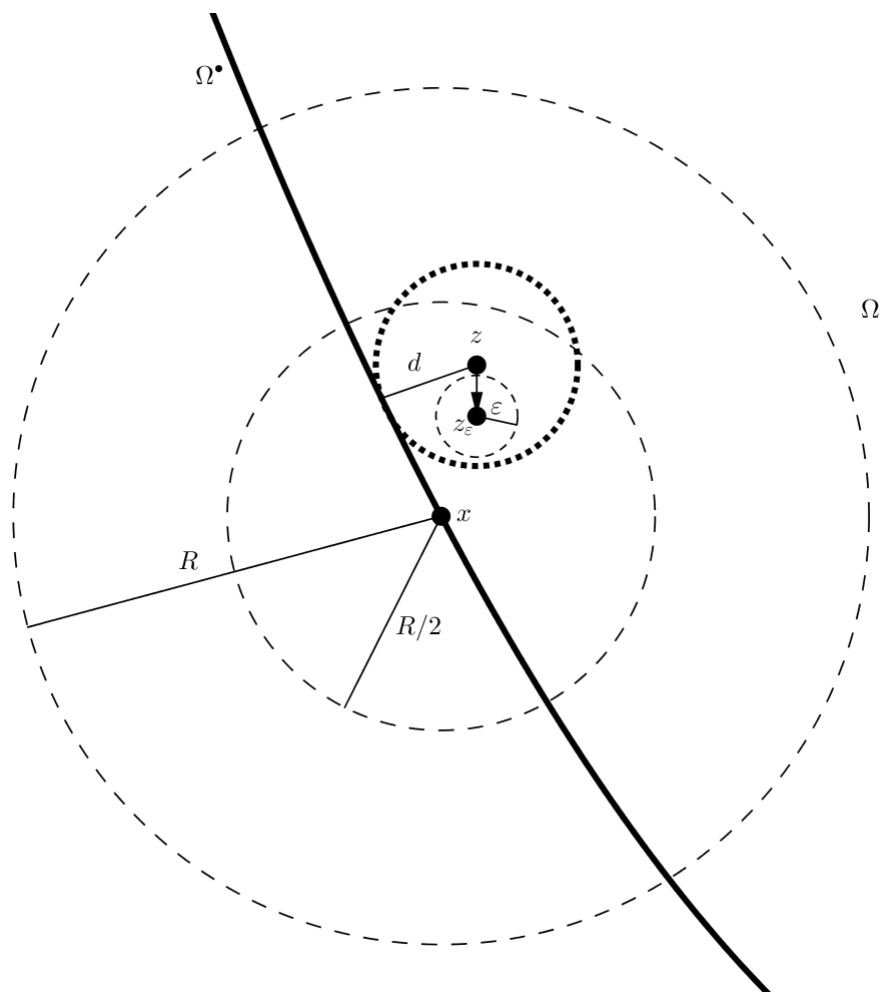


FIGURE A.1 – Construction du point z_ε .

$|\alpha| \leq m$. Bien entendu, $u = \sum_{i=0}^N \psi_i u$. On a

$$\begin{aligned}
& \|\partial^\alpha u - \partial^\alpha v\|_{L^p(\Omega)} \\
&= \left\| \sum_{i=0}^N \partial^\alpha(\psi_i u) - \partial^\alpha(\psi_i v_i) \right\|_{L^p(\Omega)} \\
&\leq \sum_{i=0}^N \|\partial^\alpha(\psi_i u) - \partial^\alpha(\psi_i v_i)\|_{L^p(\Omega)} \\
&= \sum_{i=0}^N \|\partial^\alpha(\psi_i u) - \partial^\alpha(\psi_i v_i)\|_{L^p(V_i)} \quad \text{car } [\partial^\alpha(\psi_i u)] \subset V_i \text{ et } [\partial^\alpha(\psi_i v_i)] \subset V_i \\
&= \sum_{i=0}^N \left\| \sum_{0 \leq |\beta| \leq |\alpha|} C_\alpha^\beta \partial^{\alpha-\beta} \psi_i (\partial^\beta u - \partial^\beta v_i) \right\|_{L^p(V_i)} \quad \text{par la formule de Leibniz} \\
&\leq \sum_{i=0}^N \sum_{0 \leq |\beta| \leq |\alpha|} C_\alpha^\beta \|\partial^{\alpha-\beta} \psi_i (\partial^\beta u - \partial^\beta v_i)\|_{L^p(V_i)} \\
&\leq \sum_{i=0}^N \sum_{0 \leq |\beta| \leq |\alpha|} C_\alpha^\beta \|\partial^{\alpha-\beta} \psi_i\|_{L^\infty(V_i)} \|\partial^\beta u - \partial^\beta v_i\|_{L^p(V_i)} \\
&\leq \underbrace{\sup_{\substack{0 \leq |\beta| \leq |\alpha| \\ 0 \leq i \leq N}} \|\partial^\beta \psi_i\|_{L^\infty(V_i)}}_{:=C'} \sum_{i=0}^N \sum_{0 \leq |\beta| \leq |\alpha|} C_\alpha^\beta \|\partial^\beta (u - v_i)\|_{L^p(V_i)} \\
&\leq C' \sum_{i=0}^N \sup_{0 \leq |\beta| \leq |\alpha|} \|\partial^\beta u - \partial^\beta v_i\|_{L^p(V_i)} \underbrace{\sum_{0 \leq |\beta| \leq |\alpha|} C_\alpha^\beta}_{C''} \\
&\leq C' C'' \sum_{i=0}^N \|u - v_i\|_{W^{m,p}(V_i)} \leq C' C'' \eta'.
\end{aligned}$$

On peut conclure car η' est arbitraire. □

Si Ω est un ouvert, sa frontière peut être négligeable. Mais on peut définir une notion d'intégrale sur un tel ensemble. On rappelle d'abord la généralisation en dimension $n \geq 3$ du produit vectoriel.

Lemme A.0.6. *Soient E un espace vectoriel de dimension n muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $v_1, \dots, v_{n-1} \in E$ ($E1\gamma$). Il existe un unique $v \in E$ tel que*

$$\det(v_1 \cdots v_{n-1} u) = \langle v, u \rangle$$

pour tout $u \in E$.

Démonstration. Fixons $e_1, \dots, e_n$ une base orthonormée de E . Déterminons un vecteur v tel que

$$\det(v_1 \cdots v_{n-1} u) = \langle v, u \rangle \quad \forall u \in E.$$

Si $u = e_i$, on a donc

$$v_i = \det(v_1 \cdots v_{n-1} \ e_i) = (-1)^{i+n} \det \begin{pmatrix} v_{1,1} & \cdots & v_{n-1,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{1,i} & \cdots & v_{n-1,i} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{1,n} & \cdots & v_{n-1,n} \end{pmatrix}. \quad (*)$$

Par conséquent, le vecteur v dont les composantes v_i dans la base choisie valent $(*)$ convient grâce à la multilinéarité du déterminant. Concernant l'unicité, le raisonnement ci-dessus nous force à avoir les composantes v_i définies par $(*)$. $\square$

Définition A.0.8. Le produit vectoriel de $n - 1$ vecteurs $v_1, \dots, v_{n-1}$ d'un espace vectoriel E de dimension n muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est défini comme étant l'unique vecteur $v_1 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}$ de E vérifiant

$$\langle v_1 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}, u \rangle = \det(v_1 \cdots v_{n-1} \ u) \quad \forall u \in E.$$

Dans une base orthonormée $e_1, \dots, e_n$, le produit vectoriel est défini en composantes par

$$(v_1 \wedge \cdots \wedge v_{n-1})_i = (-1)^{i+n} \det \begin{pmatrix} v_{1,1} & \cdots & v_{n-1,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{1,i} & \cdots & v_{n-1,i} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{1,n} & \cdots & v_{n-1,n} \end{pmatrix}.$$

Définition A.0.9. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit V une hypersurface de $\mathbb{R}^n$ incluse dans Ω et $\varphi : U \rightarrow V$ un paramétrage de V , i.e une bijection de classe C^1 dont la différentielle $d\varphi(y)$ est injective pour tout $y \in U$ et telle que U est une partie ouverte de $\mathbb{R}^{n-1}$. Alors l'intégrale de $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sur V , si elle existe, est définie par

$$\int_V f \, d\sigma = \int_U f(\varphi(x)) |\partial_1 \varphi(x) \wedge \cdots \wedge \partial_{n-1} \varphi(x)| dx.$$

Bien entendu, on vérifie qu'une frontière C^1 -régulière d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est une hypersurface de $\mathbb{R}^n$ qui admet en tout point un voisinage qui peut être paramétré. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de frontière C^1 -régulière et si $x \in \Omega^\bullet$, alors il existe $R > 0$ et $f : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $z \in \Omega^\bullet \cap B(x, R)$ si et seulement si $z_n = f(z_1, \dots, z_{n-1})$. Pour éviter des lourdeurs inutiles dans les notations, on suppose que c'est la composante n qui est une partie du graphe de f . Dans ces conditions, on construit aisément un paramétrage de $U := \Omega^\bullet \cap B(x, R)$ en posant

$$\varphi(y) = (y_1, \dots, y_{n-1}, f(y_1, \dots, y_{n-1})) \quad \forall (y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

On vérifie facilement que $\varphi : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une bijection de classe C^1 entre un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$ et une partie U de la frontière. On a

$$\partial_i \varphi(y_1, \dots, y_{n-1}) = (0, \dots, 1, \dots, 0, \partial_i f(y_1, \dots, y_{n-1}))$$

où 1 se retrouve en composante i . Un calcul direct montre alors que $|\partial_1 \varphi \wedge \cdots \wedge \partial_{n-1} \varphi| = |\nabla f|$. Il en découle que

$$\int_U g \, d\sigma = \int_{\varphi^{-1}(U)} g(y, f(y)) |\nabla f(y)| dy$$

si $g : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable sur U . On dit que g est intégrable sur U si $\int_U |g| \, d\sigma < +\infty$. Si g est intégrable sur chaque partie de $\Omega^\bullet$ paramétrable, on dit que g est intégrable sur $\Omega^\bullet$. L'ensemble des fonctions intégrables sur $\Omega^\bullet$ sera noté $\mathcal{L}^p(\Omega^\bullet)$. Si $\Omega^\bullet$ est une union finie d'hypersurfaces paramétrées $U_1, \dots, U_N$ d'intérieurs (pour la topologie induite sur $\Omega^\bullet$) deux à deux disjoints⁴, on pose

$$\int_{\Omega^\bullet} f \, d\sigma = \sum_{i=1}^N \int_{U_i} f \, d\sigma.$$

De façon naturelle, on définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des fonctions intégrables sur $\Omega^\bullet$. On peut supposer que $\Omega^\bullet$ est une union finie d'hypersurfaces paramétrées $U_1, \dots, U_N$. On pose (E18)

$$\|\cdot\|_{\Omega^\bullet} : f \in \mathcal{L}^p(\Omega^\bullet) \mapsto \int_{\Omega^\bullet} |f|^p \, d\sigma$$

et on définit la relation d'équivalence $\sim$ sur $\mathcal{L}^p(\Omega^\bullet)$ par $f \sim g \Leftrightarrow \|f - g\|_{\Omega^\bullet} = 0$. On définit $L^p(\Omega^\bullet)$ comme étant l'ensemble des classes d'équivalence de fonctions $f : \Omega^\bullet \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\sum_{i=1}^N \int_{U_i} |f|^p \, d\sigma < +\infty.$$

Muni de $\|\cdot\|_{\Omega^\bullet}$, cet espace forme un espace de Banach. De fait, une intégrale sur U_i se ramène à une intégrale sur un ouvert V_i de $\mathbb{R}^{n-1}$ et il suffit d'utiliser le fait que $L^p(V_i)$ est de Banach pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et tout $p \geq 1$. Les formules suivantes se vérifient aisément :

$$\int_{\Omega^\bullet} (\lambda f + \mu g) \, d\sigma = \lambda \int_{\Omega^\bullet} f \, d\sigma + \mu \int_{\Omega^\bullet} g \, d\sigma \text{ et } \left| \int_{\Omega^\bullet} f \, d\sigma \right| \leq \int_{\Omega^\bullet} |f| \, d\sigma$$

pour tout $f, g \in L^1(\Omega^\bullet)$ et tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Durant le reste de cette section, on conservera la notation $U_1, \dots, U_N$ pour désigner des hypersurfaces paramétrées dont l'union est $\Omega^\bullet$ et $f_i : V_i \rightarrow \mathbb{R}$ les fonctions qui induisent les paramétrages φ_i construits plus haut avec V_i l'ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$ pour lequel

$$U_i = \{(z, f_i(z)) : z \in V_i\}.$$

Il existe des ouverts Ω_i de $\mathbb{R}^n$ tels que $U_i = \Omega_i \cap \Omega^\bullet$ et $\Omega_i \cap \Omega = \{z \in \Omega_i : z_n > f(z_1, \dots, z_{n-1})\}$ par définition d'une frontière C^1 -régulière. De tels ouverts seront notés de cette façon par la suite. On supposera toujours que c'est la dernière composante qui décrit le graphe de f_i pour alléger les notations.

Rappelons un résultat d'analyse fonctionnelle qui est à la base de la preuve du théorème qui suit.

4. En effet, il suffit de considérer $U'_1 = U_1$, $U'_2 = U_2 \setminus U_1$, ..., $U'_N = U_N \setminus \cup_{i=1}^{N-1} U_i$.

Proposition A.0.9 (Théorème d'extension par densité, [40]). *Soient E et F deux espaces vectoriels topologiques localement convexes et D un sous-espace vectoriel dense dans E . Supposons que F soit complet et séparé. Soit $T : D \rightarrow F$ une application linéaire continue. Alors T admet une unique extension à E qui soit linéaire et continue.*

Théorème A.0.2 (Théorème de traces, [6]). *Supposons que Ω est un ouvert borné dont la frontière est C^1 -régulière. L'opérateur de trace*

$$T : u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)|_{\overline{\Omega}} \mapsto u|_{\Omega^\bullet} \in L^p(\Omega^\bullet)$$

admet une unique extension linéaire et continue

$$T' : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega^\bullet).$$

Démonstration. Le but est de montrer que nous sommes dans les conditions pour appliquer le théorème d'extension par densité. Pour commencer, on sait que l'espace $L^p(\Omega^\bullet)$ est complet et séparé car c'est un espace de Banach. La proposition A.0.8 nous montre que $C_c^1(\mathbb{R}^n)|_{\overline{\Omega}}$ est dense dans $W^{1,p}(\Omega)$. Il reste à montrer que T est continu. Soit $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)|_{\overline{\Omega}}$. On a

$$\begin{aligned} \|T(u)\|_{L^p(\Omega^\bullet)}^p &= \sum_{i=1}^N \int_{U_i} |u|^p d\sigma \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{V_i} |u(x, f_i(x))|^p |\nabla f_i(x)| dx \\ &\leq C \sum_{i=1}^N \int_{V_i} |u(x, f_i(x))|^p dx \end{aligned}$$

où $C = \sup_{i \in \{1, \dots, N\}} \sup_{x \in V_i} |\nabla f_i(x)|$. Fixons $i \in \{1, \dots, N\}$. Posons $h(t) = |t|^{p-1}t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On remarque que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ (rappelons que $p \geq 1$) et $\frac{dh}{dt}(t) = p|t|^{p-1}$ pour tout $t \neq 0$, comme on le calcule aisément. En 0, on a

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{h(r) - h(0)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{sign}(r)|r|^p}{\text{sign}(r)|r|} = \lim_{r \rightarrow 0} |r|^{p-1} = \begin{cases} 1 & \text{si } p = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Au final, $\frac{dh}{dt}(t) = p|t|^{p-1}$. On peut supposer que $\Omega_i = \cup_{m=1}^{+\infty} K_m$ où K_m est un compact dans $\mathbb{R}^n$ inclus dans Ω_i pour tout $m \in \mathbb{N}$ ⁶. Soit ψ_m une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi = 1$

5. $C_c^1(\mathbb{R}^n)|_{\overline{\Omega}}$ est l'espace des restrictions à $\overline{\Omega}$ des fonctions continûment dérivables sur $\mathbb{R}^n$ dont le support est compact.

6. Par exemple,

$$K_m = \{z \in \mathbb{R}^n : |z| \leq m, d(z, \mathbb{R}^n \setminus \Omega_i) \geq \frac{1}{m}\}.$$

sur K_m , dont le support est inclus dans Ω_i et $\psi = 0$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \Omega_i$. Si $x \in \varphi_i^{-1}(K_m \cap \Omega^\bullet)$, alors

$$\begin{aligned}
h(u(x, f_i(x))) &= h(\psi_m(x, f_i(x))u(x, f_i(x))) \\
&= - \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} (h(\psi_m(x, t + f_i(x))u(x, t + f_i(x)))) dt \\
&= - \int_0^{+\infty} \frac{dh}{dt} (\psi_m(x, t + f_i(x))u(x, t + f_i(x))) \partial_n (\psi_m(x, t + f_i(x))u(x, t + f_i(x))) dt \\
&= - \int_0^{+\infty} p |\psi_m(x, t + f_i(x))u(x, t + f_i(x))|^{p-1} \partial_n (\psi_m(x, t + f_i(x))u(x, t + f_i(x))) dt \\
&= - \int_{f_i(x)}^{+\infty} p |\psi_m(x, t)u(x, t)|^{p-1} \partial_n (\psi_m(x, t)u(x, t)) dt
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
&\int_{\varphi_i^{-1}(K_m \cap \Omega^\bullet)} |u(x, f_i(x))|^p dx \\
&= \int_{\varphi_i^{-1}(K_m \cap \Omega^\bullet)} |h(u(x, f_i(x)))| dx \\
&\leq \int_{\varphi_i^{-1}(K_m \cap \Omega^\bullet)} \int_{f_i(x)}^{+\infty} p |\psi_m(x, t)u(x, t)|^{p-1} |\partial_n (\psi_m(x, t)u(x, t))| dt dx \\
&\leq C' \left(\int_{\varphi_i^{-1}(K_m \cap \Omega^\bullet)} \int_{f_i(x)}^{+\infty} |\psi_m(x, t)u(x, t)|^p dt dx + \int_{\varphi_i^{-1}(K_m \cap \Omega^\bullet)} \int_{f_i(x)}^{+\infty} |\partial_n (\psi_m(x, t)u(x, t))|^p dt dx \right) \\
&\leq C' \left(\int_{\Omega} |u(z)|^p dz + \int_{\Omega} |\partial_n u(z)|^p dz \right) \\
&\leq C' C'' \|u\|_{W^{1,p}}^p
\end{aligned}$$

où la dernière égalité résulte de l'équivalence de la norme p est la norme 1 de $\mathbb{R}^n$. La seconde inégalité est une conséquence de l'inégalité de Young. En effet, on a

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

où p, q sont conjugués et $a, b \geq 0$. Cela vient du fait que la transformée de Legendre de $p^{-1}|\cdot|^p$ est $q^{-1}|\cdot|^q$. De plus, les constantes C' et C'' sont indépendantes de m (plus exactement, C' vaut au moins $\max(p, 1/p, 1/q)$). Au final, il existe $D > 0$ tel que

$$\begin{aligned}
\int_{V_i} |u(x, f_i(x))|^p dx &= \int_{\cup_{m=1}^{+\infty} \varphi_i^{-1}(K_m \cap \Omega^\bullet)} |u(x, f_i(x))|^p dx \\
&= \sup_{m \in \mathbb{N}_0} \int_{\varphi_i^{-1}(K_m \cap \Omega^\bullet)} |u(x, f_i(x))|^p dx \leq D \|u\|_{W^{1,p}}^p.
\end{aligned}$$

Au total, il existe $D' > 0$ tel que

$$\|T(u)\|_{L^p(\Omega^\bullet)} \leq D' \|u\|_{W^{1,p}}$$

pour tout $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)|_{\overline{\Omega}}$. Cette constante est indépendante de u choisi. $\square$

Cela nous conduit à définir l'opérateur de restriction sur $W^{1,p}(\Omega)$ de la façon abstraite suivante.

Définition A.0.10. Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, on définit $u|_{\Omega^\bullet} = T'(u)$ où T' est l'extension de l'opérateur de trace de la proposition précédente.

Pour finir, nous allons définir un sous-espace de $W^{1,p}(\Omega)$ qui a beaucoup d'importance dans la formulation faible des équations différentielles.

Définition A.0.11. L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.

Par continuité de l'extension de la trace, on voit que $u|_{\Omega^\bullet} = 0$ pour tout $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. On voit donc que le noyau de la trace contient $W_0^{1,p}(\Omega)$. Cet espace de Sobolev sera privilégié pour l'étude d'équations aux dérivées partielles avec la condition de bord $u|_{\Omega^\bullet} = 0$. A titre d'information, l'inclusion $\ker T \supset W_0^{1,p}(\Omega)$ est même une égalité. La démonstration peut être retrouvée dans [12].

Proposition A.0.10. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ dont la frontière est C^1 -régulière. Soit $T : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega^\bullet)$ l'opérateur de trace étendu. Alors $\ker T$ est l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.

Annexe B

Erratum

Les endroits exacts dans le texte comportant des erreurs sont indiqués par la lettre E suivi d'un numéro. Voici une correction de ces erreurs en question. Cet erratum n'a pas la prétention d'être exhaustif et je m'excuse d'avance pour les autres fautes éventuelles qui pourraient se présenter dans le texte.

E1 Page 5 : Dans la preuve de la proposition 1.1.8, x et y appartiennent à $T^{-1}(C'')$ au lieu de $T^{-1}(C)$.

E2 Page 7 : Pour éviter toute ambiguïté, nous aurions dû préciser que la définition du parallélisme rappelée en bas de page est plus restrictive que la définition habituelle qui consiste à dire que deux espaces affins A et B sont parallèles si $\vec{A} \subset \vec{B}$ ou $\vec{B} \subset \vec{A}$ puisque celle que nous utilisons ne concerne que les espaces de même dimension. Néanmoins, cette petite digression n'a aucune incidence pour la suite.

E3 Page 29 : Lorsque nous trouvons N_1 tel que $|\langle \xi_n, x \rangle - \langle \xi, x \rangle| < \varepsilon/3$, nous devons préciser que cette majoration a lieu lorsque x appartient à $B(x_0, 1)$ car

$$|\langle \xi_n - \xi, x \rangle| \leq \|\xi_n - \xi\|_* \|x\| \leq \|\xi_n - \xi\|_* (\|x - x_0\| + \|x_0\|) \leq \|\xi_n - \xi\|_* (1 + \|x_0\|) < \frac{\varepsilon}{3}$$

si N est suffisamment grand pour que

$$\|\xi_n - \xi\|_* < \frac{\varepsilon}{3(1 + \|x_0\|)} \quad \forall n \geq N$$

puisque la convergence de ξ_n vers ξ est uniforme sur $\overline{B}(0, 1)$, comme on le vérifie facilement. Au total, la majoration $|\langle \xi_n, x \rangle - \langle \xi, x \rangle| \leq \varepsilon$ est vérifiée lorsque $\|x - x_0\| < 1$ et $\|x - x_0\| < \varepsilon/(3C_N)$.

E4 Page 69 : Dans la proposition 3.3.3, les éléments de P ne sont pas nécessairement affinement indépendants. Donc, le fait que z_0 est intérieur à $\text{conv}(P)$ n'est pas une conséquence de cela. En fait, on montre que $z_0 \in \text{conv}(P)^\circ$ à l'aide d'une propriété analogue à la proposition 1.4.1 qui est assez intuitive et facile à établir.

Proposition B.0.11. *Si E est de dimension finie n et si C est un polytope convexe de dimension n engendré par l'ensemble de ses points extrémaux $P = \{s_1, \dots, s_m\}$, alors*

$$\text{conv}(P)^\circ \supset \left\{ \sum_{s \in P} \lambda_s s : \forall s \in P \lambda_s > 0, \sum_{s \in P} \lambda_s = 1 \right\}.$$

Démonstration. Supposons que x appartient à $\text{conv}(P)^\bullet$ et au second membre de l'énoncé. Pour abréger, notons $C = \text{conv}(P)$. Donc x appartient à un hyperplan d'appui H et $H \cap C$ définit une partie convexe de C qui est de dimension au plus $n - 1$. Forcément, l'un des sommets ne peut appartenir à cet hyperplan ; sinon l'hyperplan serait de dimension n . Notons s_t un tel sommet. On peut supposer que H a pour équation $\langle \xi, z \rangle = b$ et que le demi-espace contenant C a pour équation $\langle \xi, z \rangle \leq b$. Bien sûr, on a $x = \sum_{i=1}^m \mu_i s_i$ avec $\mu_i > 0$ et $\sum_{i=1}^m \mu_i = 1$. Puisque $\langle \xi, s_i \rangle \leq b$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ et $\langle \xi, s_t \rangle < b$, on tire que

$$b = \langle \xi, x \rangle = \sum_{i=1}^m \mu_i \langle \xi, s_i \rangle < b.$$

On a donc une absurdité. Donc $x \in \text{conv}(P)^\circ$. $\square$

E5 Page 70 : Nous n'avons pas nécessairement $]0, \lambda_x[\subset \text{dom}(f_x)$. Toutefois, comme $B(x_0, \eta) \subset \text{dom}(f)$, il existe $\lambda'_x < 1$ tel que $\lambda'_x x_0 + (1 - \lambda'_x)x \in B(x_0, \eta) \subset \text{dom}(f)$. De cette manière, $1 \in]\lambda'_x, \lambda_x[\subset \text{dom}(f_x)$ et on choisit t_x de sorte que $]1 - t_x, 1 + t_x[\subset]\lambda'_x, \lambda_x[$ dans la preuve.

E6 Page 71 : Il ne doit pas avoir de t dans la limite en fin de page.

E7 Page 80 : La phrase “La fonction f est F-différentiable en $x_0 \in E$ si et seulement si $f_{*x_0} : E \rightarrow \mathbb{R}$ existe et est une application linéaire” est fausse et ne sert à rien dans la preuve puisque, en appliquant la proposition 3.4.8, l'ensemble des points où f n'est pas F-différentiable est inclus dans $\cup_{m=1}^n E_m$.

E8 Page 108 : Le calcul de la dérivée première est fausse et cette erreur se répercute sur la hessienne aussi. On a en fait

$$\partial_{x_k} f(x) = \sum_{i=1}^n a_{ik} x_i + \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j.$$

Par conséquent,

$$\partial_{x_k}^2 f(x) = 2a_{kk} \quad \text{et} \quad \partial_{x_l x_k} f(x) = a_{lk} + a_{kl}.$$

Si on note A la matrice $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, alors on voit que la hessienne vaut $\nabla^2 f(x) = A + \tilde{A}$. Puisque cette matrice est réelle symétrique, nous pouvons diagonaliser la hessienne via une matrice orthogonale O . Le problème de maximisation peut donc se ramener au cas où $\nabla^2 f(x)$ est diagonale et vaut $2\text{diag}(a_{11} \cdots a_{nn})$, quitte à passer par la fonction $\tilde{f}$ définie par $f(Ox)$ par un changement de repère. Le maximum z_M obtenu pour $\tilde{f}$ donne alors un maximum Oz_M pour f .

Remarquons au passage que le polynôme f n'a pas de termes de degré 1 car ces termes n'ont aucune incidence sur la convexité de la fonction.

- E9 Page 110 : Dans la proposition 4.2.2, il faut évidemment supposer f convexe dans le cas G -différentiable (sinon, on n'a qu'une seule implication).
- E10 Page 92 : Ce n'est pas une erreur à proprement parler, mais la formule (ii) du théorème de Fenchel-Moreau est aussi valable avec l'unique hypothèse que $\text{dom}(f) \neq \emptyset$ au lieu de supposer f propre.
- E11 Page 114 : Dans la proposition 4.3.4, l'ensemble des solutions de $(\mathcal{P}^*)$ dans le cas non-réflexif est $V^* \cap \partial(\rho^*)^*(0)$. Le cas réflexif est correct.
- E12 Page 118 : Dans l'introduction du problème de la section 4.3.2, l'ensemble des contraintes C est $\text{dom}(f) \cap \text{dom}(g \circ T)$ évidemment. Celui-ci est non-vide vu l'hypothèse $\text{dom}(g) \cap T(\text{dom}(f)) \neq \emptyset$.
- E13 Page 123 : En fin de page, dans la preuve du lemme 4.3.2, C' ne contient pas 0 car $f(x) - f(x_0) + r_0 \geq r_0 > 0$ pour tout $x \in C$ (à la place de $x \in X$).
- E14 Page 125 : Dans le théorème 4.3.2, il faut aussi supposer $g_1, \dots, g_n$ continus.
- E15 Page 134 : Dans le lemme 4.4.2, l'hypothèse est que toute limite **faible** de sous-suites de $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ appartient à S .
- E16 Page 136 : A la fin de la preuve de la proposition 4.4.7, au point (ii), nous n'avons pas nécessairement $\inf_{z \in E} f(z) = -\infty$. Cette erreur n'a aucun impact sur la conclusion de la démonstration.
- E17 Page 159 : Il faut préciser qu'on fixe au préalable une orientation dans le lemme A.0.6 pour que le déterminant ne change pas lorsque l'on passe d'une base orthonormée à une autre de la même classe d'orientation. La définition du produit vectoriel, comme on peut s'en douter, dépend aussi de l'orientation choisie.
- E18 Page 161 : Il manque l'exposant $1/p$ portant sur $\int_{\Omega} |f|^p d\sigma$ dans la définition de $\|\cdot\|_{\Omega}$.

Index

- $C^2(\overline{\Omega})$, 137
- $C^\bullet$, la frontière de C , 20
- C° , l'intérieur de C , 19
- $C^k(\overline{\Omega})$, 155
- U°_R} , l'intérieur relatif de U , 21
- $W_0^{1,p}(\Omega)$, adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$, 164
- $W^{m,p}(\Omega)$, espace de Sobolev d'indice (m, p) sur un ouvert Ω , 153
- $[x, y]$, segment d'extrémités x et y , 2
- Δ_p , opérateur p -laplacien, 140
- $\Gamma(E)$, ensemble des fonctions propres convexes semi-continues inférieurement, 62
- $\Gamma_r(f)$, section d'une fonction f en $r \in \overline{\mathbb{R}}$, 59
- $\text{aff}(A)$, l'enveloppe affine de A , 7
- $\text{argmin}(f)$, ensemble des minima globaux de f , 110
- $\text{codim } A$, codimension d'un ensemble A , 9
- $\text{cone}(A)$, enveloppe conique de A , 5
- $\text{conv}(A)$, enveloppe convexe de A , 3
- $\text{conv}(f)$, l'enveloppe convexe d'une fonction f , 56
- $\text{dom}(f)$, domaine effectif d'une fonction f , 51
- $\text{epi}(f)$, épigraphe d'une fonction f , 52
- $\text{epi}_s(f)$, épigraphe strict d'une fonction f , 52
- $\text{ext}(C)$, ensemble des points extrémaux de C , 22
- $\text{fonc}(U)$, l'unique fonction maximale pour $\preceq$ associée à un épigraphe U , 55
- $\mathcal{D}$, opérateur de dualité d'un espace de Banach, 90
- $\mathcal{D}(\Omega)$, espace des fonctions de $C^\infty(\Omega)$ à support compact inclus dans Ω , 154
- $\mathcal{D}_{x,y}$, droite passant par x et y , 6
- $\mathcal{J}$, injection canonique de E dans E^{**} , 34
- $\mathcal{R}_\varepsilon$, résolvante d'une fonction, 130
- div , opérateur divergentiel, 138
- $\nabla f(x)$, gradient de f en x , 70
- $\overline{C}$, l'adhérence de C , 19
- $\overline{\text{conv}}(P)$, enveloppe convexe fermée de P , 23
- $\overline{f}$, régularisation sci d'une fonction f , 61
- $\partial f(x)$, sous-différentiel d'une fonction f en x , 82
- $\sigma(E, E^*)$, topologie faible de E , 29
- $\sigma^*(E, E^*)$, topologie faible-* de E^* , 36
- $\vec{A}$, sous-vectoriel directeur de A , 7
- $df(x)$, différentielle de f en x , 70
- $f \oplus g$, inf-convolution de f et g , 57
- $f \times g$, produit cartésien de deux fonctions propres, 57
- f_ε , approximation de Moreau-Yosida d'une fonction f à l'ordre $\varepsilon > 0$, 128
- $f_{*x}(h)$, dérivée directionnelle de f en x dans la direction h , 70
- Cône, 5
- Combinaison affine, 6
- Combinaison conique, 5
- Combinaison convexe, 2
- Conditions de Kuhn-Tucker, 125
- Dérivée faible d'une fonction, 153
- Dimension d'un convexe, 7
- Dualité de Fenchel-Rockafellar, 119
- Ecart de dualité, 113
- Ensemble convexe, 2
- Epigraphe, 54
- Equation d'Euler-Lagrange, 138
- Espace affin, 6
- Espace de Banach lisse, 130
- Espace de Banach réflexif, 39
- Espace de Banach strictement convexe, 127
- Espace de Banach uniformément convexe, 126
- Espace vectoriel topologique localement convexe, 28
- Extrémum global, 106
- Extrémum local, 106
- Fonction coercive, 111

- Fonction convexe, 52
Fonction de perturbation, 112
Fonction de valuation associée à une perturbation, 112
Fonction indicatrice d'un ensemble, 53
Fonction propre, 52
Fonction strictement convexe, 59
Frontière C^p -régulière, 155
- Hyperplan, 9
Hyperplan d'appui d'un convexe, 19
Hyperplan séparant deux convexes, 14
- Inégalité de Jensen, 53
Inégalité de Young, 93
Intégration sur une hypersurface, 160
- Lagrangien d'une perturbation, 115
Lemme des trois cordes, 79
Limites inférieures et supérieures, 59
- Méthode des multiplicateurs de Lagrange, 126
Module de convexité d'un espace de Banach, 126
Multifonction, 81
Multiplicateur de Lagrange, 122
- Norme duale, 28
- Opérateur adjoint, 85
Opérateur uniformément monotone, 141
- Partie extrême d'un ensemble, 22
Partition de l'unité, 156
Partition de l'unité localement finie, 156
Perturbation par translation, 118
Point critique d'une fonction, 110
Point selle, 115
Ponctuellement borné, 31
Principe du maximum, 106
Principe du maximum de Bauer, 107
Problème dual, 112
Problème primal, 112
Problèmes faiblement en dualité, 113
Problèmes fortement en dualité, 113
- Semi-continuité inférieure, 60
Semi-continuité inférieure séquentielle, 63
Semi-continuité supérieure, 60
- Simplexe, 8
Solution faible d'une EDP, 139
Sous-gradient d'une fonction, 82
Suite généralisée, 38
Suite proximale d'une fonction, 133
Système fondamental de semi-normes, 28
- Théorème d'Eberlein-Smulian, 41
Théorème d'extension de Riesz, 96
Théorème d'extension par densité, 162
Théorème de Banach-Alaoglu, 38
Théorème de Banach-Steinhaus, 31
Théorème de caractérisation des espaces de Banach réflexifs, 46
Théorème de Carathéodory, 8
Théorème de Fenchel-Moreau, 92
Théorème de Fréchet-Riesz, 48
Théorème de Goldstine, 45
Théorème de Hahn-Banach, 15
Théorème de Krein-Milman, 23
Théorème de séparation faible, 18
Théorème de séparation forte, 18
Théorème de Taylor, 76
Théorème de traces, 162
Transformée de Legendre, 90
- Unité approchée de convolution, 155

Bibliographie

- [1] Naum Il'ich Akhiezer, *The classical moment problem and some related questions in analysis* (D. E. Rutherford, ed.), Oliver and Boyd, 1965.
- [2] Charalambos D. Aliprantis and Kim. C. Border, *Infinite Dimensional Analysis : A Hitchhiker's Guide*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.
- [3] Viorel Barbu and Teodor Precupanu, *Convexity and Optimization in Banach Spaces*, Springer Monographs in Mathematics, Springer Netherlands, 2012.
- [4] Heinz H. Bauschke and Patrick L. Combettes, *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*, CMS Books in Mathematics, Springer New York, 2011.
- [5] Ádám Besenyei, *Examples for uniformly monotone operators arising in nonlinear elliptic and parabolic problems*, 2011. article tiré de arXiv.
- [6] Haim Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York, 2011.
- [7] Dan Butnariu and Alfredo M. Iusem, *On a proximal point method for convex optimization in Banach spaces*, Numerical Functional Analysis and Optimization **18** (1997), no. 7-8, 723–744.
- [8] N.L. Carothers, *A short course on Banach space theory*, Cambridge University Press, 2004.
- [9] René Erlín Castillo, *A note on Krein's theorem*, Lecturas Matemáticas **26** (2005), no. 1, 5–9.
- [10] Nelson Dunford and Jacob T. Schwartz, *Linear Operators, part I : General Theory* (R. Courant, L. Bers, and J.J. Stoker, eds.), Wiley, New York, 1988.
- [11] Ivar Ekeland and Roger Témam, *Convex Analysis and Variational Problems*, Classics in Applied Mathematics, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 1999.
- [12] Lawrence Evans, *Partial Differential Equations*, Vol. 19, American Mathematical Society, 1994.
- [13] Marián Fabian, Petr Habala, Petr Hájek, Vincente Montesinos, and Václav Zizler, *Banach Space Theory : The Basis for Linear and Nonlinear Analysis*, CMS Books in Mathematics, Springer New York, 2011.
- [14] Werner Fenchel, *Theorie der konvexen Körper*, Springer Berlin Heidelberg, 1934.
- [15] J. Martin Gaven, *The Theory of Quasiconformal Mappings in Higher Dimensions, I*, 2013. Tiré de ArXiv.
- [16] Frederick W. Gehring and J. Martin Gaven, *An Introduction to the Theory of Higher-Dimensional Quasiconformal Mappings*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 216, American Mathematical Society, 2016.
- [17] Peter M. Gruber, *Convex and Discrete Geometry*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, 2007.
- [18] Georges Hansoul, *Algèbre II*, 2007. Notes de cours de second bachelier.
- [19] Ilkka Holopainen, *Quasiregular mappings and the p -Laplace operator*, Contemporary Mathematics **338** (2003), 219–239.
- [20] John K. Hunter and Bruno Nachtergaele, *Applied Analysis*, World Scientific, 2001.
- [21] Robert C. James, *A non-reflexive Banach space isometric to its second conjugate space*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America **37** (1951), no. 3, 174–177.
- [22] Pierre Lecomte, *Géométrie élémentaire*. notes de cours de première année de bachelier.
- [23] ———, *Variétés plongées dans $\mathbb{R}^m$* . Notes de cours de second bachelier.

- [24] Joram Lindenstrauss, *On reflexive spaces having the metric approximation property*, Israel Journal of Mathematics **3** (1965), no. 4, 199–204.
- [25] ———, *On nonseparable reflexive banach spaces*, Bulletin of the American Mathematical Society **72** (1966), no. 6, 967–970.
- [26] Nikos E. Mastorakis and Hassan Fathabadi, *On the Solution of p -Laplacian for non-Newtonian flow*.
- [27] Pierre Mathonet, *Topologie Générale*, 2013. Notes de cours de troisième bachelier.
- [28] Hermann Minkowski, *Geometrie der Zahlen*, Leipzig B.G. Teubner, 1910.
- [29] J.J. Moreau, *Fonctionnelles convexes*, Séminaire Jean Leray. Sur les équations aux dérivées partielles. **2** (1966), 1–108.
- [30] Samuel Nicolay, *Théorie de la mesure*, 2011. Notes de cours.
- [31] Constantin Niculescu and Lars-Erik Persson, *Convex functions and their applications : a contemporary approach*, CMS books in mathematics, Springer science and business media, 2006.
- [32] Juan Peypouquet, *Convex Optimization in Normed Spaces : Theory, Methods and Examples*, Springer Briefs in Optimization, Springer International Publishing, 2015.
- [33] Patrick J. Rabier, *Differentiability of quasiconvex functions on separable Banach spaces*, Israel Journal of Mathematics (2013).
- [34] J.R. Ringrose, *A note on uniformly convex spaces*, Journal of the London Mathematical Society **s1-34** (1959), 92.
- [35] Ralph Tyrell Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1997.
- [36] Walter Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, 1991.
- [37] Winfried Scharf, *Nonsmooth Analysis*, Universitext, Springer-Verlag, 2007.
- [38] Jean Schmets, *Analyse mathématique*, 2004. Notes de cours de premier bachelier en sciences mathématiques.
- [39] ———, *Analyse Mathématique : introduction aux espaces fonctionnels*, 2004. Notes de cours de second bachelier.
- [40] Jean-Pierre Schneiders, *Analyse fonctionnelle I*, 2015. Notes de cours personnelles de master en sciences mathématiques.
- [41] Hugo Touchette, *Legendre-Fenchel transforms in a nutshell*, School of Mathematical Sciences, Queen Mary, University of London, 2007.
- [42] Robert Whitley, *An Elementary Proof of the Eberlein-Smulian Theorem*, Mathematische Annalen **172** (1967), 116–118.
- [43] Stephen Willard, *General Topology*, Dover Publications, Inc., 2004.
- [44] Constantin Zălinescu, *Convex Analysis in General Vector Spaces*, World Scientific Publishing, New Jersey, 2002.